50255

XII

110.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LÓRÁND
MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT ÉS POGÁNY BÉLA

HARMINCKETTEDIK ÉVFOLYAM

JANUÁR—MÁJUSI FÜZET

1925

BUDAPEST 1925

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LÓRÁND MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FOLYÓIRAT
1927/8 | 20
EGYETEMI KÖNYVTÁR

TARTALOMJEGYZÉK.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

HARMINCKETTEDIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és POGÁNY BÉLA

BUDAPEST 1925

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

AZ EÖTVÖS LORÁND MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

A M. kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem * KÖNYVTÁRA SZEGED
A M. KIR. FERENC JÓZSEF TUDOMÁNY-EGYETEM * Könyvtára Szeged
50255

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HARMINCKETTEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

★

JELENTÉS AZ 1924. ÉVI KŐNIG GYULA JUTALOMRÓL.

(Az Eötvös Lóránd Math. és Phys. Társulat 1924. ápr. 10-én tartott üléséből.)

Tisztelt választmány!

A második Kőnig Gyula jutalom odaitélése ügyében javaslattételre kiküldött bizottság f. évi január hó 26-án a műegyetemen Kürschák József úr elnöklésével ülést tartott, melyen még jelen voltak Farkas Gyula, Kőnig Dénes urak és alulirott.

A bizottság örömmel állapitotta meg, hogy azon magyar mathematikusok közt, akik az alapitvány szabályzata szerint tekintetbe jönnek, több olyan van, ki a jutalomra kiválóan érdemes. A bizottság a jelen alkalommal a legfiatalabb generáció egyik tagját óhajtotta a jutalomban részesiteni és úgy határozott, hogy a tisztelt választmánynak a jutalomra Szegő Gábor berlini egyetemi magántanárt ajánlja.

Az előadói jelentés megszerkesztésével, illetőleg a jutalmazandó működésének ismertetésével és méltatásával a bizottság alulirott tagját bizta meg. Van szerencsém jelentésemet tisztelettel előterjeszteni.

Szegő Gábor körülbelül nyolc esztendős irodalmi munkássága nagyon bőségesen produkált; méltóztassék megengedni, hogy dolgozatai közül azokra szoritkozzam, amelyek eredményeik vagy módszereik újsága, szépsége és fontossága által figyelmemet leginkább megragadták. Ezek közül is, előre is bocsánatot kérve a talán túltengő szubjektivitásért, azon a fölfedezésén kezdem, mely saját vizsgálataimmal közvetlenül összefügg. Tudvalevő és nagyon könnyen bizonyitható be, hogy valamely görbén, pl. körön belül holomorf és a kör egy ívén folytonos függvény értéke nem lehet az egész ív mentén állandó, kivéve azt az evidens esetet, midőn a függvény maga állandó. FATOU francia mathematikus 1906-ban, híres doktori értekezésében, miután megmutatta, hogy minden, valamely kör belsejében korlátos és holomorf függvénynek majdnem mindenütt, azaz legfeljebb egy 0-mértékű halmaz kivételével mindenütt van kerületi értéke, fölveti azt a kérdést, hogy ez a kerületi függvény, mely az imént mondottak szerint teljes ív mentén nem lehet állandó, milyen, mekkora halmazon lehet állandó vagy ami lényegben ugyanazt mondja, mekkora halmazon tűnhetik el és miután megmutatja, hogy az illető halmaz nem tölthet be «majdnem» teljesen egyetlen körívet sem, közli azt a nézete szerint nehezen bizonyítható sejtését, hogy a kérdéses halmaz 0-mértékű. Ezen sejtés helyes voltát és pedig nem csupán a korlátos esetben, hanem a holomorf függvények bizonyos általánosabb osztályaira is egy, MARCZEL öcsémmel együtt írt és az 1916-iki stockholmi kongresszuson előadott dolgozatban bebizonyítottuk. Ezen jelenség mélyebb, úgy mondhatom, igazi okára sikerült rámutatnia Sz. G.-nak egy 1920 márciusában hozzám intézett levelében, mely hozzászólásommal együtt «Analytikus függvény kerületi értékeiről» címmel a Math. és Term. Értesítő 1920-iki 38. kötetében jelent meg; idevágó vizsgálatait Sz. G. később «Über die Randwerte einer analytischen Funktion» címmel még a Math. Annalen 84. kötetében is közreadta. Ezekben a dolgozatokban megmutatta ugyanis azt, hogy a kerületi függvény abszolút értékének logarithmusa a LEBESGUE-féle értelemben integrálható függvény; ezen logarithmus tehát negatív végtelenné vagyis maga a kerületi függvény zéróvá csakis egy 0-mértékű halmazon lehet. Ezen eredmény érdekes voltát talán még jobban mutatja annak következő, könnyen származtatható átfogalmazása: ahhoz, hogy egy, valamely kör mentén megadott, nem negatív függvényhez létezzék olyan a kör belsejében holomorf, nem azonosan eltűnő és ú. n. korlátos középértékű függvény, melynek abszolute vett kerületi értéke majdnem mindenütt egyenlő a megadott függvénnyel, szükséges és elegendő, hogy 1. a függvény maga, 2. a függvény logarithmusa integrálhatók legyenek.

Megjegyzem még, hogy Szegő tétele, melyre kerülő úton, a Toeplitz-féle formákra és pozitív függvények Fourier-soraira vonatkozó vizsgálatain át jutott el, miután már megvan, nagyon egyszerűen, szinte Kolumbus-tojásként származtatható Jensen egy híres formulájából is, mint azt nemcsak én jegyeztem meg az idézett levélváltásban, de maga Fatou is hasonló gondolatmenetben jutott el egy 1921-ben a «Bulletin des sciences mathématiques»-ban megjelent cikkében nem ugyan a Szegő-féle tételre, de saját sejtésének pár soros bizonyítására.

Szegő függvénytani vizsgálatainak egy másik, terjedelmesebb csoportja abba a gondolatkörbe tartozik, mely a hatványsor együtthatóinak, illetve esetleg csupán ezen együtthatók túlnyomó részének arithmetikai tulajdonságaiból következtet az illető analytikus függvény tulajdonságaira. Ebbe a gondolatkörbe tartoznak: 1. az Hadamard és a Fabry-féle tételek hézagos hatványsorokról, 2. a Pólya által sejtett és Carlson által bizonyított tétel egész együtthatókkal bíró és az egységkör belsejében konvergens hatványsorról, mely szerint az ilyen hatványsorral előállított függvény vagy racionális vagy ha nem az, akkor nem folytatható az egységkörön túl; 3. a Szegő által bebizonyított analog tétel olyan hatványsorról, amelynek csak véges számú különböző együtthatója van (Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten, Sitzungsber. d. preuss. Akademie 1922). A Math. Annalen 87. kötetében, 1922-ben megjelent «Tschebyscheff'sche Polynome und nicht fortsetzbare Potenzreihen» c. dolgozatában Szegő megmutatja, hogy mindezek a tételek természetesen folynak abból a Faber által fölfedezett kapcsolatból, mely egy görbéhez tartozó Tschebyscheff-féle polynomok és a konform ábrázolás között fennáll és amelyet Carlson a Pólya-féle sejtés bizonyítására használt. Ugyanebben a dolgozatban ugyanabból az elvből Szegő még Ostrowskinak egy tételét is származtatja, mely ebből a gondolatkörből átvezet Jentzsch a háborúban elesett ifjú német mathematikusnak látszólag ettől a körtől távoleső, a hatványsor szeletei zéróhelyeinek eloszlására vonatkozó tételéhez. Ugyanebbe a gondolatkörbe tartozik még a Ferenc József-tudományegyetem mathematikai «Acta»-inak első kötetében megjelent «Über die Tschebyscheff'schen Polynome» c. dolgozata is, míg egy másik, nem régen a berlini mathematikai társaság «Sitzungsbericht»-jében megjelent «Über die Nullstellen von Polynomen, die in einem Kreise gleichmässig konvergieren» c. kis dolgozatában teljesen elemi eszközökkel meglepő módon világít rá a Jentzsch-tétel és a vele kapcsolatos jelenségek mélyebb okaira.

Végül rátérek arra az úgy a komplex függvénytanba, mint a valós változós analysisbe mélyen benyúló problemakörre, melynek Szegő munkásságának legnagyobb részét szentelte: az orthogonális függvényrendszerek és a megfelelő sorbafejtések elméletére. Hogy egy kisebb, nagyon érdekes, a formális számolásban is nagy ügyességre mutató dolgozatán kezdjem, a Math. Zeitschrift 9. kötetében «Über die Lebesgue'schen Konstanten bei den Fourier'schen Reihen» c. cikkében az ú. n. Lebesgue-féle állandóknak, melyeknek tulajdonságait azelőtt különösen Fejér és Gronwall vizsgálták, bizonyos numerikus végtelen sorok által való nagyon egyszerű kifejezését adja meg, mely közvetlenül mutatja ezen konstansoknak az idézett szerzők által részben sokkal nagyobb apparátussal bebizonyított, részben sejtésként kimondott tulajdonságait. Egy másik, terjedelmesebb dolgozatában, mely ugyanott jelent meg «Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören» címmel, a zárt görbe mentén orthogonalizált polinomok szerint való sorbafejtéseket vizsgálja, melyek speciális eset gyanánt úgy a Legendre-féle sort, mint a hatványsort felölelik. Ezek a sorfejtések az általános esetben is a hatványsorokéhoz nagyon analog viselkedést mutatnak és új és pedig a legtermészetesebben jelentkező megoldását szolgáltatják Faber következő problemájának: valamely tartományhoz olyan polinomokat megadni, melyek szerint minden a tartományban holomorf függvény sorba fejthető. A Szegő által vizsgált sorfejtések egyébként érdekes, nagyon egyszerű kapcsolatban vannak a görbe által határolt véges és végtelenbe nyúló tartományoknak az egységkörön való konform ábrázolásával; így például a görbe, illetve az egységkör külsejének egymáson való azon konform ábrázolását, melynél a végtelen önmagának felel meg, az egymásra következő polinomokból képezett $\frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)}$ hányados határfüggvénye szolgáltatja.

Szegőnek a most tárgyalt problemakörbe tartozó dolgozatai közül különösen az a két dolgozata tarthat igényt a legnagyobb elismerésre, melyekben az orthogonális függvényrendszereknek és a megfelelő sorbafejtéseknek úgy nevezhető *belső* asymptotikáját, vagyis azokat a kérdéseket tárgyalja, melyek magán azon a görbén vagy intervallumon való asymptotikus viselkedésre vonatkoznak, melynek mentén az illető polinomok valamely $p(x)$ eloszlási függvényre nézve orthogonalizáltattak. Ezekben a kérdésekben, melyekben az első klasszikus eredmények Laplace és Darboux neveihez fűződnek, Szegő nemcsak hogy nagyon általános, az eddigieket messze túlhaladó eredményekre jut, de ezt éppen azáltal éri el, hogy ezen nagyon nehéznek tartott kérdéseket egyszerű, eleminek mondható módszerrel vizsgálja. A módszer lényege abban áll, hogy a $p(x)$ eloszlási függvényt két egyszerű strukturájú függvény közé szorítja be, melyeknek tipusa $\frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)}$, ahol $P(x)$ polinom; megmutatja, hogy ezek a függvények a kérdéses problemák szempontjából is bizonyos értelemben majoránsnak, illetve minoránsnak tekinthetők; miután így a kérdéseket ezen speciális alakú eloszlási függvények esetére sikerült visszavezetnie, ezekre a tekintetbe jövő kifejezéseket, Fejér-nek egy a pozitív trigonometrikus polinomokra vonatkozó tételének fölhasználásával, explicite könnyen kiszámítja. Ezzel a természetesen itt csak nagyjában vázolt módszerrel a Math. Annalen 86. kötetében megjelent «Über den asymptotischen Ausdruck von Polynomen, die durch eine Orthogonalitätseigenschaft definiert sind» c.

dolgozatában megadja az orthogonális polinomok asymptotikus kifejezését minden olyan x helyre, hol $p''(x)$ létezik. Ismeretes, különösen Haar disszertációja óta, hogy ezen asymptotikus kifejezések fölhasználásával az illető sorfejtések konvergenciájának, illetve summabilitásának kérdése bizonyos speciális esetekre, pl. a Fourier-féle sorra visszavezethető. Szegő azonban másik, a Math. Zeitschrift 12. kötetében megjelent «Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems» c. dolgozatában azt is megmutatja, hogy ugyanazon elemi módszer, maguknak a polinomok asymptotikus kifejezéseinek fölhasználása nélkül, közvetlenül a részletösszegek asymptotikáját is megadja és ezzel az illető konvergenciakérdéseket a Fourier-sorra vonatkozó megfelelő kérdésekre redukálja.

Még csak Szegőnek egy más természetű érdemét óhajtom megemlíteni, t. i. azt a számos gondos, pontos, a lényeget jól ismertető, szükség esetén kritizáló referátumot, melyeket a Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik az 1914-től 1918-ig terjedő irodalmat földolgozó két utolsó kötetébe írt és amelyekkel, más munkatársakkal vállvetve, nézetem szerint lényegesen hozzájárult az évkönyv színvonalának emeléséhez; ez is jelentős érdem, különösen amióta és ameddig a különböző nemzetek tudósainak érintkezését anyagi és egyéb okok megnehezítik.

Mindezek alapján a bizottság javaslatát a tisztelt választmánynak elfogadásra ajánlom.

Szeged, 1924 március 7-én. *Riesz Frigyes.*

EXTRAIT DU RAPPORT PRÉCÉDENT.

La Commission chargée de faire une proposition au sujet du Prix Jules Kőnig pour l'année 1924 (MM. Kürschák, président; J. Farkas, D. Kőnig, F. Riesz) propose de décerner le prix à M. Gabriel Szegő, privatdozent à l'Université de Berlin, pour l'ensemble de ses travaux mathématiques. Le prix lui a été décerné.

Les travaux de M. Szegő sont analysés par M. Frédéric Riesz.

A KOMBINÁCIÓKRÓL.

Hogy n elemnek *ismétléses* k-adosztályú kombinációinak száma egyenlő $n+k-1$ elem *egyszerű* k-adosztályú kombinációinak számával, azt már többen (egymástól eltérő módokon) *számítás nélkül* is megmutatták.[1] A következőkben Scherk erre vonatkozó elvontabb megfontolásait szemléletes megérzékítésükkel pótolom.

Induljunk ki a következő k soros és $n+k-1$ oszlopos táblázatból:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & . & n & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & . & n & & & \\ & & . & . & . & . & . & . & . & . & & \\ & & & 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & . & n & . \end{array} \qquad (T)$$

Az 1, 2, . . . , n számoknak bármely

$$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_k \qquad (1)$$

ismétléses k-adosztályú kombinációja teljesen meg van határozva, ha ismerem azokat az

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i, \ldots, \gamma_k \qquad (2)$$

számokat, melyek megmondják, hogy az $a_1, \ldots, a_k$ számokat rendre *(T)* hányadik oszlopában találom, ha a_1-et az első sorban, a_2-t a második sorban stb. keresem meg. Például a $k=4$ esetben az

$$1,\ 2,\ 2,\ 5$$

ismétléses kombinációra nézve a megfelelő γ-k;

$$1,\ 3,\ 4,\ 8.$$

---

[1] Scherk H. F., Lehrsätze über den Zusammenhang von Kombinationen und Variationen und jener unter einander. Crelle Journal, 3. köt., (1828), 96—97. lap.

Beke M. A kapcsolástanhoz, Math. és Phys. Lapok, 15. köt., (1906), 277—279. lap.

Ha (1) alatt az elemeket természetes sorrendben írjuk, mint azt tenni akarjuk, akkor (2) alatt a γ számok is természetes sorrendben lépnek fel és $1, 2, \ldots, n+k-1$ egyszerű k-adosztályú kombinációját alkotják. Így az $1, \ldots, n$ számok minden ismétléses k-adosztályú kombinációjának az $1, \ldots, n+k-1$ számoknak egy meghatározott egyszerű k-adosztályú kombinációja felel meg és viszont. Tehát a szóbanforgó kétféle kombinációk száma csakugyan ugyanaz.

Kürschák József.

ÜBER DIE KOMBINATIONEN.

Die Anzahl der Kombinationen k-ter Klasse *mit Wiederholungen* von n Elementen ist gleich der Anzahl der Kombinationen k-ter Klasse *ohne Wiederholungen* von $n+k-1$ Elementen. Für diesen bekannten Satz wird hier ein anschaulicher Beweis gegeben, der im wesentlichen eine Versinnlichung des abstrakteren Beweises von Scherk ist [Crelle Journal, Bd. 3, (1828), S. 96—97.] — Es wird von den folgenden, aus k Reihen und $n+k-1$ Spalten bestehendem Schema ausgegangen:

$$\begin{array}{llllllllll} 1 & 2 & 3 & . & . & . & n & & & \\ & 1 & 2 & 3 & . & . & . & n & & \\ & & . & . & . & . & . & . & n & \\ & & & 1 & 2 & 3 & . & . & . & n. \end{array} \qquad (T)$$

In jeder Kombination $a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots, a_k$ m. W. von $1, 2, \ldots, n$ seien die Elemente in ihrer Größenfolge angeordnet; γ_i besage dann, in der wievielsten Spalte von *(T)* die i-te Zahl a_i einer Kombination aufzufinden ist, wenn wir sie *in der i-ten Zeile* suchen. Der Satz folgt nun daraus, daß auf diese Weise jeder Kombination $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_k$ m. W. von $1, 2, \ldots, n$ eine (nach der Grösse der Elemente geordnete) Kombination $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i, \ldots, \gamma_k$ o. W. von $1, 2, \ldots n+k-1$ entspricht und umgekehrt.

Josef Kürschák.

SPECIÁLIS MATRIXOKRÓL.

1. §. Ha az

$$\left\| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{matrix} \right\| \tag{1}$$

matrix rangja egyenlő 2-vel, vagyis az

$$\left| \begin{matrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{22} & u_{23} \end{matrix} \right|, \quad \left| \begin{matrix} u_{13} & u_{11} \\ u_{23} & u_{21} \end{matrix} \right|, \quad \left| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{matrix} \right| \tag{2}$$

másodfokú determinánsok közül legalább egy a zérustól különböző s az u-kat mint két egyenes egyenleteinek együtthatóit fogjuk fel: akkor e két egyenes metszéspontjának homogén koordinatái egymáshoz úgy aránylanak, mint a (2) alatti determinánsok.

Ha pedig

$$\left\| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{matrix} \right\| \tag{3}$$

rangja egyenlő 2-vel s az u-kat mint két sik egyenleteinek együtthatóit fogjuk fel, továbbá

$$\begin{matrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \end{matrix} \tag{4}$$

e sikok metszésvonalán felvett két különböző pontnak homogén koordinatái: akkor

$$\begin{aligned} & p_{23} : p_{31} : p_{12} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = \\ & q_{14} : q_{24} : q_{34} : q_{23} : q_{31} : q_{12}, \end{aligned} \tag{5}$$

hol

$$p_{ik} = \left| \begin{matrix} u_{1i} & u_{1k} \\ u_{2i} & u_{2k} \end{matrix} \right|, \qquad q_{ik} = \left| \begin{matrix} v_{1i} & v_{1k} \\ v_{2i} & v_{2k} \end{matrix} \right|.$$

M. Kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem Könyvtára Szeged

Ezek az ismeretes tények csak különösen egyszerű esetei FROBENIUS[1] következő általános tételeinek:

Ha $\mu<\nu$ és az

$$u_{i1}x_1+u_{i2}x_2+\cdots+u_{i\nu}x_\nu=0 \quad (i=1,2,\ldots,\mu) \tag{6}$$

egyenletrendszer együtthatóiból alkotott matrixnak rangja egyenlő μ-vel, továbbá

$$v_{j1},\, v_{j2},\ldots,\, v_{j\nu} \quad (j=1,2,\ldots,\nu-\mu) \tag{7}$$

olyan $\nu-\mu$ gyökrendszer, hogy a belőlük alkotott matrix rangja egyenlő $(\nu-\mu)$-vel: akkor ez u-k matrixának μ-edfokú determinánsai úgy aránylanak egymáskoz, mint a v-k matrixának komplementárius $(\nu-\mu)$-edfokú determinánsai.

(Az *u-k* matrixának $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_\mu$-dik oszlopaiból és a *v-k* matrixának $\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_{\nu-\mu}$-dik oszlopaiból alkotott determinánsokat egymás *komplementárius* determinánsainak mondjuk, ha

$$\alpha_1,\, \alpha_2,\ldots,\, \alpha_\mu,\, \beta_1,\, \beta_2,\ldots,\, \beta_{\nu-\mu}$$

az $1, 2,\ldots, \nu$ számoknak páros permutációja.)

A következőkben FROBENIUS tételét olyan matrixokra alkalmazom, melyek a rezultáns SYLVESTERről nevezett determinánsalakjának természetes általánosításai.

2. §. Induljunk ki egyszerűség kedveért

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3, \quad g(x)=l_0x^2+l_1x+l_2 \tag{8}$$

resultánsának

$$R=\begin{vmatrix} a_0 & 0 & l_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & l_1 & l_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & l_2 & l_1 & l_0 \\ a_3 & a_2 & 0 & l_2 & l_1 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & l_2 \end{vmatrix} \tag{9}$$

[1] FROBENIUS J., Über das PFAFF'sche Problem (§ 3. Über adjungierte Systeme homogener linearer Gleichungen), Journal für Mathematik, 82. köt. (1871) 236—239. lap.

alakjából. A felírt determináns csak az $r=0$ választásnak megfelelő legegyszerűbb esete az olyan $5+r$ sorból és $5+2r$ oszlopból álló matrixnak, melyet úgy kapunk, hogy $f(x)$ együtthatóit $2+r$ oszlopban, $g(x)$ együtthatóit pedig $3+r$ oszlopban írjuk fel, mindig egy-egy hellyel lefelé eltolva, az üresen maradt helyeket pedig zérusokkal töltjük ki. Pl. az $r=2$ esetben ekként keletkező

$$M=\left\|\begin{matrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & l_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & l_1 & l_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & l_2 & l_1 & l_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & l_2 & l_1 & l_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & l_2 & l_1 & l_0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & 0 & 0 & 0 & l_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_2 \end{matrix}\right\| \tag{10}$$

matrixot röviden így jelöljük:

$$\| (a_0, a_1, a_2, a_3)_4, \quad (l_0\ l_1\ l_2)_5 \|; \tag{11}$$

a benne szereplő a-kat és l-eket *határozatlanoknak*, azaz egymástól független változóknak tekintjük.

A (10) alatti M matrix rangja egyenlő a sorok számával, mert az első 7 oszlopból alkotott determináns egyenlő a

$$(-1)^{2.3} a_3^2 R$$

szorzattal, tehát a zérustól különböző. Ha e matrix elemeit egy homogén lineáris egyenletrendszer együtthatóinak tekintjük, az egyenletrendszer egyszerű szerkezete miatt rögtön felírhatunk $9-7=2$ gyökrendszert. Ha ugyanis az egyenletszerben az ismeretlenek helyébe az

$$N=\left\|\begin{matrix} l_0 & l_1 & l_2 & 0 & -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 \\ 0 & l_0 & l_1 & l_2 & 0 & -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{matrix}\right\| \tag{12}$$

matrixnak akár első, akár második sorát helyettesitjük, azt tapasztaljuk, hogy gyökrendszerrel van dolgunk. Egyszersmind nyilvánvaló, hogy e két gyökrendszerből alkotott matrixnak, melyet röviden így jelölhetünk:

$$\| [l_0, l_1, l_2]_2, \ - [a_0, a_1, a_2, a_3]_2 \|, \tag{13}$$

rangja egyenlő a sorok számával, mert az utolsó két oszlopból alkotott determinánsa

$$\begin{vmatrix} -a_3 & 0 \\ -a_2 & -a_3 \end{vmatrix} = (-1)^2 a_3^2 \neq 0.$$

Frobenius tétele szerint M-nek 7-edfokú determinánsai az N matrixnak komplementárius 2-odfokú determinánsaitól csak egy arányossági tényezőben különböznek (mely természetesen az a-k és az l-ek függvénye). Az M első hét oszlopából, illetve az N utolsó két oszlopából alkotott determinánsok összehasonlítása azt mutatja, hogy ez az arányossági tényező:

$$(-1)^{3\cdot 2} a_3^2 R : (-1)^2 a_3^2 = (-1)^{3\cdot 2} R = R. \tag{14}$$

Meggondolásaink bármilyen fokú $f(x)$-re és $g(x)$-re és bármely r-re ismételhetők. Eredményük könnyen érthető jelölésekkel így fejezhető ki:

A $m+n+r$ sorból és $m+n+2r$ oszlopból álló

$$M = \| (a_0, a_1, \ldots, a_m)_{n+r}, (l_0, l_1, \ldots, l_n)_{m+r} \| \tag{15}$$

matrixnak $(m+n+r)$-edfokú determinánsait úgy kaphatjuk, hogy az r sorból és szintén $m+n+2r$ oszlopból álló

$$N = \| [l_0, l_1, \ldots, l_n]_r, -[a_0, a_1, \ldots, a_m]_r \| \tag{16}$$

matrix komplementárius determinánsait megszorozzuk

$(-1)^{(m+1)r} R$-rel, hol $R = Res\,(f(x), g(x))$.

Ez a tétel $r=1$ esetében Muirtól[1] való. Ebben az esetben N csak egy sorból áll, tehát determinánsai maguk e sornak elemei.

Tetszőleges r esetében Muir szintén felismerte, hogy M-nek legmagasabb fokú determinánsai oszthatók R-rel, de nem találta meg azoknak a tényezőknek szerkezetét, melyekkel R szorzandó,

---

[1] Muir T.: Note on a property of bigradiant arrays connected with Sylvester's dialytic eliminant, Transactions of the Royal Society of South Africa, Vol. 11, 101—104. lap.

hogy megkapjuk M determinánsait. E tényezőket utóbb én határoztam meg,[1] még pedig meglehetősen fárasztó úton. Mostani levezetésem jóval egyszerűbb.

Kürschák József.

ÜBER SPEZIELLE MATRICES.

Es seien zwei Polynome

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3, \quad g(x) = l_0x^2 + l_1x + l_2$$

vorgelegt, deren Koeffizienten von einander unabhängige Veränderliche sind. Die Matrix

$$M = \| (a_0, a_1, a_2, a_3)_4, (l_0, l_1, l_2)_5 \|$$

von der Gestalt (10) unterscheidet sich von der Resultante (9) nur dadurch, daß sie die Größen a, resp. l in weiteren 2—2 Spalten enthält. Betrachten wir die Elemente von M, als die Koeffizienten eines homogenen linearen Gleichungssystems, so läßt sich unmittelbar erkennen, daß die Zeilen der Matrix

$$N = \| [l_0, l_1, l_2]_2, \quad -[a_0, a_1, a_2, a_3]_2 \|$$

von der Gestalt (12) ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen jenes Gleichungssystems liefern. Daraus folgt aber nach einem zitierten Satz von Frobenius, daß sich die Determinanten höchster Ordnung von M nur durch einen gemeinsamen Faktor von den komplementären Determinanten der Matrix N unterscheiden. Eine Vergleichung der aus den ersten sieben Spalten von M und den letzten zwei Spalten von N gebildeten Determinanten zeigt uns, daß jener Faktor die Resultante (9) ist. Satz und Beweis lassen sich leicht verallgemeinern.

Bereits Herr Th. Muir erkannte, daß die Determinanten höchster Ordnung von M durch die Resultante von f und g teilbar sind. Die Kofaktoren hat dann der Verfasser in seiner zitierten Arbeit bestimmt. Seine dortigen mühsamen Rechnungen sind hier durch einfachere Überlegungen ersetzt.

Josef Kürschák.

---

[1] Kürschák J.: On matrices connected with Sylvester's dialytic eliminant, ugyanott 257—260. lap.

KÉT TRIGONOMETRIKUS DETERMINÁNS.

Az a körülmény, hogy a cyklikus determináns értéke a megfelelő egységgyök útján szorzatos alakban nyer kifejezést, módot nyujt arra, hogy két ily cyklikus determináns értékét egyszerű alakban állítsuk elő.

Az első determináns:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos 2\alpha & \dots & \cos(n-1)\alpha \\ \cos\alpha & \cos 2\alpha & \cos 3\alpha & \dots & 1 \\ \cos 2\alpha & \cos 3\alpha & \cos 4\alpha & \dots & \cos\alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cos(n-1)\alpha & 1 & \cos\alpha & \dots & \cos(n-2)\alpha \end{vmatrix}$$

értéke a jól ismert

$$D_1 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \varphi(\varrho_1)\cdot\varphi(\varrho_2)\cdots\varphi(\varrho_n) \qquad \text{(I)}$$

szorzatos alakban jelentkezik, ahol

$$\varphi(x) = 1 + x\cos\alpha + x^2\cos 2\alpha + \cdots + x^{n-1}\cos(n-1)\alpha$$

kifejezésből a fenti értékeket úgy kapjuk, ha x helyett

$$\varrho^n - 1 = 0$$

egyenlet összes gyökeit helyettesítjük.

Hogy célunkhoz közelebb jussunk, $\varphi(x)$ kifejezést hozzáférhetőbb alakra kell hoznunk; ezt úgy valósítjuk meg, hogy egyrészt

$$w = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

jelelést használunk, másrészt bevezetjük

$$f(x) = x\sin\alpha + x^2\sin 2\alpha + \cdots + x^{n-1}\sin(n-1)\alpha$$

összeget; ez előzmények alapján

$$\varphi(x) + i f(x) = 1 + xw + x^2 w^2 + \cdots x^{n-1} w^{n-1}$$

mértani haladványt nyerjük, melynek összege, minthogy $xw \neq 1$,

$$\frac{(xw)^n - 1}{xw - 1}$$

elemi alakban áll rendelkezésünkre. Ha a nevezőben a képzetes jelleget megszüntetjük, ami $(xw^{-1} - 1)$ útján történik, azután a számlálóban a valós és képzetes tagokat szétválasztjuk,

$$\frac{(xw)^n - 1}{xw - 1} = \frac{1 - x\cos\alpha - x^n \cos n\alpha + x^{n+1}\cos(n-1)\alpha}{(xw-1)(xw^{-1}-1)} +$$

$$+ i\,\frac{x\sin\alpha - x^n \sin n\alpha + x^{n+1}\sin(n-1)\alpha}{(xw-1)(xw^{-1}-1)}$$

eredményhez jutunk; de ez az eredmény $\varphi(x)$ és $f(x)$ értékét már lényegesen egyszerübb alakban adja:

$$\varphi(x) = \frac{1 - x\cos\alpha - x^n\cos n\alpha + x^{n+1}\cos(n-1)\alpha}{(xw-1)(xw^{-1}-1)},$$

$$f(x) = \frac{x\sin\alpha - x^n \sin n\alpha + x^{n+1}\sin(n-1)\alpha}{(xw-1)(xw^{-1}-1)}.$$

Sőt, ha még figyelembe vesszük, hogy a mi esetünkben

$$x^n = \varrho^n = 1,$$

akkor a

$$\varphi(x) = \frac{(1 - \cos n\alpha) + x[\cos(n-1)\alpha - \cos\alpha]}{(xw-1)(xw^{-1}-1)}$$

$$f(x) = \frac{-\sin n\alpha + x[\sin(n-1)\alpha + \sin\alpha]}{(xw-1)(xw^{-1}-1)}$$

kifejezésekhez jutunk, amelyek alkalmasak trigonometriai egyszerűsítésre. Ezen jelzett egyszerűsítés után a végleges alakokhoz jutunk:

$$\varphi(x) = \frac{2\sin\frac{n\alpha}{2}\left[\sin\frac{n\alpha}{2} - x\sin\frac{(n-2)\alpha}{2}\right]}{(xw-1)(xw^{-1}-1)}, \qquad \text{(II)}$$

$$f(x) = \frac{-2\sin\frac{n\alpha}{2}\left[\cos\frac{n\alpha}{2} - x\cos\frac{(n-2)\alpha}{2}\right]}{(xw-1)(xw^{-1}-1)}. \qquad \text{(III)}$$

Hogy tovább mehessünk, tudnunk kell, hogy

$$(a-b\varrho_1)(a-b\varrho_2)\cdots(a-b\varrho_n)=a^n-b^n; \qquad \text{(IV)}$$

ezt alkalmazva az (I) formulára a (II) irányítása mellett, nyerjük, hogy

$$D_1=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\frac{2^n\sin^n\frac{na}{2}\left[\sin^n\frac{na}{2}-\sin^n\frac{(n-2)a}{2}\right]}{(1-w^n)(1-w^{-n})}.$$

Ámde

$$(1-w^n)\cdot(1-w^{-n})=2-2\cos na=2^2\sin^2\frac{na}{2};$$

irhatjuk tehát, hogy

$$D_1=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}.2^{n-2}.\sin^{n-2}\frac{na}{2}\left[\sin^n\frac{na}{2}-\sin^n\frac{(n-2)a}{2}\right].$$

A második determinánssal, amelyet a következő alakban veszünk föl

$$D_2=\begin{vmatrix} 0 & \sin a & \sin 2a & \cdots & \sin(n-1)a \\ \sin a & \sin 2a & \sin 3a & \cdots & 0 \\ \sin 2a & \sin 3a & \sin 4a & \cdots & \sin a \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ \sin(n-1)a & 0 & \sin a & \cdots & \sin(n-2)a \end{vmatrix},$$

most már könnyen végezhetünk. A már ismert formula szerint

$$D_2=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}f(\varrho_1)f(\varrho_2)\cdots f(\varrho_n).$$

Ez utóbbi alapján, ha még tekintetbe vesszük a (III) és (IV) képlet irányítását, rögtön a végső eredményt írhatjuk:

$$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+1}\cdot 2^{n-2}\cdot\sin^{n-2}\frac{na}{2}\left[\cos^n\frac{na}{2}-\cos^n\frac{(n-2)a}{2}\right].$$

Befejezésül megemlítjük, hogyha D_1 és D_2 determinánsok elemeiben a szöggel bővítünk, vagyis a

$$\cos a \quad \cos 2a \quad \cdots \quad \cos na,$$

illetőleg

$$\sin a \quad \sin 2a \quad \cdots \quad \sin na,$$

elemekből építjük föl a megfelelő cyklikus determinánsokat ezekre a használt módszerrel igazolható, hogy

$$D'_1 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 2^{n-2} \sin^{n-2}\frac{na}{2}\left[\sin^n \frac{(n+2)a}{2} - \sin^n \frac{na}{2}\right],$$

$$D'_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+1} 2^{n-2} \sin^{n-2}\frac{na}{2}\left[\cos^n \frac{(n+2)a}{2} - \cos^n \frac{na}{2}\right].$$

Tihanyi Miklós.

ZWEI TRIGONOMETRISCHE DETERMINANTEN.

Es wird der Wert der zyklischen Determinanten

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \ldots & \cos(n-1)a \\ \cos a & \cos 2a & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cos(n-1)a & 1 & \ldots & \cos(n-2)a \end{vmatrix}$$

$$\text{und } D_2 = \begin{vmatrix} 0 & \sin a & \ldots & \sin(n-1)a \\ \sin a & \sin 2a & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \sin(n-1)a & 0 & \ldots & \sin(n-2)a \end{vmatrix}$$

bestimmt. Es ergibt sich

$$D_1 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 2^{n-2} \sin^{n-2}\frac{na}{2}\left[\sin^n \frac{na}{2} - \sin^n \frac{(n-2)a}{2}\right],$$

$$D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+1} 2^{n-2} \sin^{n-2}\frac{na}{2}\left[\cos^n \frac{na}{2} - \cos^n \frac{(n-2)a}{2}\right].$$

N. Tihanyi.

A FOURIER-FÉLE SOROK SZÁMTANI KÖZEPEIRŐL.

1. Legyen $f(x)$ egy 2π szerint periodikus, Lebesgue-féle értelemben integrálható függvény; legyen a Fourier-féle sora:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

úgy, hogy tehát

$$a_\nu + ib_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{i\nu t} dt, \qquad \nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Legyen rövidség kedvéért

$$\frac{a_0}{2} = s_0, \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) = s_n, \quad n = 1, 2. 3, \ldots,$$

$$\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n} = \sigma_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ha az $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ határérték létezik valamely x helyen, akkor Fejér általánosan ismert tétele szerint[1] ugyanott $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n(x)$ is létezik és a két érték megegyezik.

Lebesgue általánosabban kimutatta, hogy ha egy s érték mellett teljesül a

$$\lim_{h \to +0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+2t) + f(x-2t) - 2s|\, dt = 0 \qquad (1)$$

feltétel, már akkor is létezik $\lim \sigma_n(x)$ és egyenlő s-sel.[2] Ebből tudvalevőleg következik, hogy a $\sigma_n(x)$ számtani közepek majdnem mindenütt $f(x)$ felé konvergálnak.

---

[1] Fejér: Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Math. Ann. 58, (1904).

[2] Lebesgue: Sur la convergence des séries de Fourier, Math. Ann. 61, (1905).

S. BERNSTEIN[1] kimutatta, hogy ha az

$$\left|\frac{f(t)-f(u)}{t-u}\right| \leqq \lambda$$

LIPSCHITZ-féle feltétel t és u minden értékére teljesül, akkor

$$|\sigma_n - f| \leqq 2\frac{\lambda \log n}{n}, \quad (n=2, 3, \ldots; \; 0 \leqq x \leqq 2\pi).$$

Ezek után felmerül az a kérdés, hogy minő feltétel mellett létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} (\sigma_n - s)\dfrac{n}{\log n}$ határérték és miképpen függ ez össze az $f(x)$ függvénnyel? Erre vonatkozólag a következő tételt fogom bebizonyítani:

Ha valamely x helyhez található egy $s(x)$ és egy g_x érték, úgy, hogy

$$\lim_{h\to+0} \frac{1}{h}\int_0^h \left| \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2s(x)}{\sin t} - g_x \right| dt = 0, \tag{2}$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n}[\sigma_n(x) - s(x)] = \frac{g_x}{2\pi}. \tag{3}$$

Ha például $f'(x)$ létezik, akkor nyilván $g_x = 0$, tehát

$$[\sigma_n(x) - f(x)]\frac{n}{\log n} \to 0;$$

ha általánosabban

$$\lim_{t\to+0} \frac{f(x+2t)-f(x+0)}{2t} = j_x, \quad \lim_{t\to+0} \frac{f(x-2t)-f(x-0)}{-2t} = b_x,$$

akkor nyilván $g_x = 2(j_x - b_x)$, mert

$$\lim_{t\to+0} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-\big(f(x+0)+f(x-0)\big)}{\sin t} = 2(j_x - b_x).$$

A (3) határérték tehát lényegében a differenciálhányados ugrását, illetőleg ennek integrálközépértékét adja meg valamely

---

[1] S. BERNSTEIN: Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues etc. Mémoires couronné t. IV., Bruxelles (1912).

helyen. Fejtegetéseim kapcsolatban vannak LUKÁCS[1] egy dolgozatával, amelyben a *függvény* ugrásának meghatározására ad általános módszert. (L. a 3. pontot.)

Ha a (2) feltétel teljesül, akkor ugyanazon s érték mellett (1) is fennáll, mert, ha rövidség kedvéért

$$f(x+2t)+f(x-2t)-2s=\varphi(t),$$

akkor

$$\varphi(t)=\left[\frac{\varphi(t)}{\sin t}-g_x\right]\sin t+g_x\sin t,$$

tehát

$$|\varphi(t)|\leqq\left|\frac{\varphi(t)}{\sin t}-g_x\right|+|g_x|\,t;$$

innen pedig

$$\frac{1}{h}\int_0^h|\varphi(t)|\,dt\leqq\frac{1}{h}\int_0^h\left|\frac{\varphi(t)}{\sin t}-g_x\right|dt+\frac{1}{2}|g_x|h\to 0.$$

2. Tételünk bebizonyitására a következő ismert képletekből indulok ki

$$n[\sigma_n(x)-s(x)]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\cdot\frac{\varphi(t)}{\sin t}\,dt,$$

és

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,dt=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1},^{2}$$

amely utóbbi értéket ω_n-nel jelöljük; nyilván

$$\omega_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

tehát

$$\frac{\omega_n}{\log n}\to\frac{1}{2},\quad n\to\infty. \tag{4}$$

---

[1] LUKÁCS: Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe, Crelle Journal 150, (1920).

[2] Ugyanis $\frac{\sin^2 nt}{\sin t}=\sin t+\sin 3t+\cdots+\sin(2n-1)t.$

Ezek után

$$n\,[\sigma_n(x) - s(x)] - \omega_n \frac{g_x}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin t}\left[\frac{\varphi(t)}{\sin t} - g_x\right] dt, \qquad (5)$$

és

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin t}\left[\frac{\varphi(t)}{\sin t} - g_x\right] dt\right| \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin^2 nt}{t}\left|\frac{\varphi(t)}{\sin t} - g_x\right| dt. \qquad (6)$$

A további lebecslés az ismert módon történhetik; én itt azt a meglepően egyszerű módot követem, amelyen Fejér nemrégen a számtani közepekre vonatkozó tételének Lebesgue-féle általánosítását röviden levezette és amelyet szíves volt velem közölni.

Nyilván a $0 < t \leqq \frac{\pi}{2}$ intervallumban

$$nt \sin^2 nt \leqq nt, \quad \text{és} \quad \sin^2 nt \leqq |\sin nt| \leqq nt;$$

tehát

$$(1 + nt)\sin^2 nt \leqq 2nt,$$

és innen

$$\frac{\sin^2 nt}{t} \leqq \frac{2n}{1+nt}.$$

Ennélfogva

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{t}\left|\frac{\varphi(t)}{\sin t} - g_x\right| dt \leqq 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+nt}\left|\frac{\varphi(t)}{\sin t} - g_x\right| dt; \qquad (7)$$

legyen továbbá rövidség kedvéért

$$\int_0^{h} \left|\frac{\varphi(t)}{\sin t} - g_x\right| dt = \Phi(h), \quad 0 \leqq h \leqq \frac{\pi}{2},$$

akkor

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+nt}\left|\frac{\varphi(t)}{\sin t} - g_x\right| dt = \frac{1}{1+n\frac{\pi}{2}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n}{(1+nt)^2}\,\Phi(t)\,dt. \qquad (8)$$

Az (5)—(8) képleteket összefoglalva:

$$\left| n(\sigma_n - s) - \omega_n \frac{g_x}{\pi} \right| \leqq \frac{2n}{2+\pi n} \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{nt}{(1+nt)^2} \cdot \frac{\Phi(t)}{t}\, dt,$$

és ez még

$$\leqq \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n}{1+nt} \frac{\Phi(t)}{t}\, dt.$$

Már most a (2) feltétel szerint bármely pozitív ε számhoz létezik egy pozitív $\delta < \frac{\pi}{2}$ szám úgy, hogy

$$\Phi(t) < \varepsilon t, \quad 0 < t < \delta, \quad \delta = \delta(\varepsilon);$$

de akkor

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n}{1+nt} \frac{\Phi(t)}{t}\, dt < \varepsilon \int_0^{\delta} \frac{n}{1+nt}\, dt + \frac{n}{1+n\delta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(t)}{t}\, dt <$$

$$< \varepsilon \lg(1+n\pi) + \frac{1}{\delta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(t)}{t}\, dt.$$

E szerint (4) figyelembe vételével

$$\left| \frac{n}{\omega_n}(\sigma_n - s) - \frac{g_x}{\pi} \right| < \frac{1}{\omega_n} \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \varepsilon \frac{\lg(1+n\pi)}{\omega_n} +$$

$$+ \frac{1}{\delta \omega_n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(t)}{t}\, dt < 3\varepsilon,$$

ha $n > N(\varepsilon)$; és

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\omega_n}(\sigma_n - s) = \frac{g_x}{\pi};$$

ezzel a bevezetésben kimondott tétel be van bizonyítva.

3. Legyen most $\varphi(x)$ egy 2π szerint periodikus, Lebesgue-féle értelemben integrálható függvény, melynek Fourier-féle sora:

$$\varphi(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu \cos \nu x + \beta_\nu \sin \nu x).$$

A 2. pontban bebizonyitott tételt alkalmazom az

$$f(x)=\int_0^x \varphi(t)\,dt \quad \text{függvényre.}$$

Nyilván

$$f(x)=c+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(-\frac{\beta_\nu}{\nu}\cos\nu x+\frac{\alpha_\nu}{\nu}\sin\nu x\right),\quad c=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\beta_\nu}{\nu},$$

$$f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)=\int_0^{2t}[\varphi(x+\tau)-\varphi(x-\tau)]\,d\tau;$$

tehát érvényes e tétel:

Ha valamely x helyen

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_0^h\left|\frac{1}{\sin t}\int_0^{2t}[\varphi(x+\tau)-\varphi(x-\tau)]\,d\tau-g_x\right|dt=0, \qquad (2')$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\log n}\left[\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}(\beta_\nu\cos\nu x-\alpha_\nu\sin\nu x)+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=n}^{\infty}\left(\frac{\beta_\nu}{\nu}\cos\nu x-\frac{\alpha_\nu}{\nu}\sin\nu x\right)\right]=\frac{g_x}{2\pi}. \qquad (3')$$

A (2′) feltétel biztosan teljesítve van, ha

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\int_0^{2t}[\varphi(x+\tau)-\varphi(x-\tau)]\,d\tau=g_x;$$

ha ezenfelül

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\int_0^{2t}\left|\varphi(x+\tau)-\varphi(x-\tau)-\frac{1}{2}g_x\right|d\tau=0,$$

akkor — és ez LUKÁCS tétele[1] —

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{\nu=1}^{n-1}(\beta_\nu\cos\nu x-\alpha_\nu\sin\nu x)=\frac{g_x}{2\pi}; \qquad (9)$$

tehát ebben az esetben (3′) felhasználásával

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\log n}\sum_{\nu=n}^{\infty}\left(\frac{\beta_\nu}{\nu}\cos\nu x-\frac{\alpha_\nu}{\nu}\sin\nu x\right)=0.$$

---

[1] L. a fentidézett dolgozatot.

Nyilván $\frac{1}{2} g_x$ a $\varphi(x)$ függvény általánosított ugrása az x helyen, amelynek meghatározására speciális feltételek mellett először Fejér adott módszert.

Legyen

$$\bar{s}_{n,\varphi} = \sum_{\nu=1}^{n-1} (\beta_\nu \cos \nu x - \alpha_\nu \sin \nu x), \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{3''}$$

akkor az Abel-féle parciális összegezés alkalmazásával a (3') reláció még így írható:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\log n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\bar{s}_{\nu,\varphi}}{(\nu-1)\nu} = \frac{g_x}{2\pi}.$$

Könnyen belátható, hogy (9) mindenkor maga után vonja (3'')-t, de fordítva nem.

Szász Ottó.

ÜBER DIE ARITHMETISCHEN MITTEL FOURIERSCHER REIHEN.

Es sei $f(x)$ eine mod. 2π periodische, integrierbare Funktion; ihre Fouriersche Reihe sei

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x);$$

$$s_0 = \frac{a_0}{2}, \; s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

sind die Partialsummen,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}(s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

die arithmetischen Mittel der Reihe.

Wenn die Funktion $f(x)$ der Lipschitzschen Bedingung

$$|f(x) - f(u)| < \lambda |x - u|$$

für alle x und u (λ eine Konstante) genügt, so ist nach S. Bernstein

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < c\lambda \frac{\log n}{n}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

wo c eine absolute Konstante ist (von n, x und λ unabhängig). Es erhebt sich nun die Frage nach der Existenz und dem Wert des

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n} [\sigma_n(x) - f(x)].$$

Ich beweise in dieser Hinsicht den weitgehenden Satz:

Gibt es zu einer Stelle x Werte s und g derart, daß

$$\lim_{h\to+0} \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2s}{\sin t} - g \right| dt = 0 \tag{A}$$

ist, so ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n} [\sigma_n(x) - s] = \frac{g}{2\pi}.$$

Hieraus folgt eine neue Bestimmung des Sprunges einer Funktion unter sehr allgemeinen Bedingungen.

Ich füge hier nachträglich hinzu, daß die Bedingung (A) durch die allgemeinere ersetzt werden kann:

$$\lim_{h\to+0} \frac{1}{h^2} \int_0^h | f(x+2t) + f(x-2t) - 2s - g \sin t \,| \, dt = 0.$$

O. Szász.

A BAIRE-FÉLE FÜGGVÉNYKLASSZISOKRÓL.[1]

Tekintsük egy véges, zárt, lineáris intervallumban értelmezhető függvények halmazát. (A további meggondolások érvényesek egy általános, metrikus tér perfekt halmazán értelmezett függvényekre is, a beszédmód egyszerűsége kedvéért veszünk csak lineáris intervallumot.) Ezen függvényeket viselkedésük egyszerűsége szempontjából R. Baire[2] osztályozta. Legegyszerűbbek a folytonos függvények, ezek képezik a nulladik osztályt. Az első osztályba kerülnek azok a nem folytonos függvények, melyek folytonos függvények egy konvergens sorozatának határértékei; általában az α-dik klasszist képezik azok a függvények, melyek alacsonyabb osztályú függvények konvergens sorozatának határértékei, de maguk nem tartoznak bele egyetlen az α-nál alacsonyabb klasszisba sem. Az osztályozás így folytatható a véges (első osztályú) és másodosztályú transfinit számokon át. Lebesgue[3] kimutatta, hogy ezen osztályok mindegyikében van függvény. Viszont van olyan Lebesgue-féle értelemben mérhető függvény, mely egyetlen egy klasszisba sem tartozik bele. Az α-osztályú függvények összege, különbsége, szorzata és hányadosa (ha a nevező abszolut értéke alulról korlátos) ugyancsak α-osztályú függvény. Továbbá α-osztályú függvények egyenletesen konvergens sorozatának limese is α-osztályú.

---

[1] A Társulat 1925 márc. 5.-i ülésén tartott előadás.

[2] R. Baire: Thèse, Paris, 1899; valamint Leçons sur les fonctions discontinues, Paris, 1905. L. még: C. de la Vallée Poussin: Intégrales de Lebesgue, fonctions d' ensembles, classes de Baire, Paris, 1917.

[3] Sur les fonctions représentables analytiquement. Journal de Math., 1905.

Monoton sorozatok tekintetbe vételével képezhetünk W. H. Young[1] után egy más osztályozást. Folytonos függvények monoton növekvő (ill. csökkenő) sorozatának limesét nevezzük G_1- (ill. g_1-) rendűnek; G_α (ill. g_α) rendű függvény lesz az α-nál alacsonyabb rendű függvények monoton növekvő (ill. csökkenő) sorozatának határértéke. Az első rendbe tartoznak a semicontinuus[2] függvények és pedig G_1-rendűek az alulról folytonos, g_1-rendűek a felülről folytonos függvények.

A Baire-féle klasszisok összefüggését a Young-féle rendekkel megadja a következő tétel:[3] Egy α-osztályú függvény vagy G_α-, vagy g_α-rendű, vagy pedig egyidejűleg $G_{\alpha+1}$- és $g_{\alpha+1}$-rendű. (Ez általánosítása annak a tételnek, hogy az a függvény, mely egyidejűleg alulról és felülről is folytonos, tehát G_1- és g_1-rendű is, folytonos, azaz nulladosztályú.)

A halmazok osztályozása monoton sorozatok alapján analóg módon történik. Az első rendbe sorozzuk a zárt halmazokat (D_1-rend) és a nyilt halmazokat (V_1-rend). Az α-dik rendet alkotják a D_α és V_α halmazok, ahol D_α α-nál alacsonyabb rendű halmazok csökkenő sorozatának sorozata; V_α pedig α-nál alacsonyabb rendű halmazok növekvő sorozatának összege. (A csökkenés itt úgy értelmezendő, hogy a sorozat minden halmaza részhalmaza bármely előtte álló halmaznak; a növekvő sorozatban pedig minden halmaz tartalmazza, mint részhalmazt, az összes előtte állókat. Halmazok szorzata alatt értjük a halmazok közös pontjainak halmazát, összege alatt pedig azon pontok halmazát, melyek az összeadandók valamelyikében előfordulnak.) — Definició alapján tekintsük α-osztályúnak a D_α és a V_α-rendű halmazokat valamint azokat, amelyek egyidejűleg $D_{\alpha+1}$- és $V_{\alpha+1}$-rendűek. Az α-osztályú halmaz charakterisztikus függvénye, vagyis az a pont-

---

[1] Proceedings of the London Math. Soc. 12. kötet (1913), 260—285. o. 15. (1916.) 354—359.

[2] L. pld.: C. Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig—Berlin, 1918. 136. o. A Young-féle osztályozásra l. H. Hahn: Reelle Functionen, Berlin, 1921.

[3] H. Hahn: Loc. cit. 342. o.

függvény, melynek értéke a halmaz minden pontján 1, minden más pontban 0, α-osztályú függvény. Ez a tulajdonság is szolgálhat az α-osztályú halmaz definiciójául.

Az α-dik rend függvényeinek ugyanazon rend halmazaival való összefüggését a következő tételek adják meg:[1] Ha az $f(x)$ függvény G_α-rendű, akkor bármely valós szám legyen p, azon x pontok halmaza, melyekben $f(x) > p$, V_α-rendű halmaz. Ezt a halmazt jelöljük röviden $A\,[f > p]$-vel; hasonló jelöléssel a g_α-rendű függvényekre vonatkozó tételt így mondhatjuk ki: Ha $f(x)$ g_α-rendű függvény, akkor az $A\,[f \geqq p]$ halmaz mindig D_α-rendű halmaz. — Mindkét tétel megfordítható, úgy hogy ezek a tulajdonságok az α-rendű függvényekre charakterisztikusak.

Ezzel főbb vonásokban ismertettem az elmélet alapvonalait, a továbbiakban még csak F. Hausdorffnak[2] a következő tételére lesz szükségünk: Legyen $G(x)$ egy G_α-, $g(x)$ egy g_α-rendű függvény és az értelmezési tartomány minden x pontjában:

$$G(x) \geqq g(x);$$

akkor mindig létezik oly $f(x)$ függvény, mely egyidejűleg G_α- és g_α-rendű és amely a

$$G(x) \geqq f(x) \geqq g(x)$$

egyenlőtlenségnek eleget tesz.

E tétel speciális esete ($\alpha = 1$) a Hahn-féle «közbeiktatási tétel» (Einschiebungssatz), mely szerint: ha egy alulról folytonos függvény minden pontban nagyobb egy felülről folytonosnál, akkor a kettő közé beiktatható egy folytonos függvény.

Az azonosrendű függvények és halmazok föntemlített összefüggése alapján ez a tétel azonnal átvihető halmazokra: ha egy V_α halmaznak részhalmaza egy D_α halmaz, akkor létezik oly A halmaz, mely V_α-nak részhalmaza, D_α-t pedig mint részhalmazt magában tartalmazza és amely egyidejűleg V_α és D_α rendű, tehát $(\alpha - 1)$-ed osztályú halmaz.

---

[1] H. Hahn: 344—45. o.

[2] F. Hausdorff: Über halbstetige Funktionen u. deren Verallgemeinerung. Math. Zeitschrift 5. 292—309. o.

Jelen előadásomnak célja egy új kritériumot adni arra vonatkozólag, hogy egy megadott függvény α-osztályú vagy sem. Ilyen kritériumot az $\alpha=1$ esetre először R. BAIRE[1] adott: A szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $f(x)$ függvény első osztályú legyen az, hogy $f(x)$ pontszerűen diszkontinuus legyen (vagyis: hogy mindenütt sűrűn legyenek folytonossági helyei). Ez a kritérium teljes mértékben nem általánositható; egy másik LEBESGUEtől származó kritérium lényegében azonos az ugyanazon rendű függvények és halmazok összefüggésére vonatkozó fentebb emlitett tétellel. Új kritériumunk az $\alpha > 0$ osztályok korlátos függvényeire érvényes és lényegében a folytonos függvények klasszikus (CAUCHY-féle) definiciójának általánositása; éppen úgy az ingadozás fogalmán alapszik, mint amaz.

Az $f(x)$ függvénynek az e halmazon való *ingadozása:* $V(f, e)$ alatt értjük az $|f(x) - f(y)|$ felső határát, ha x és y az e halmaz összes pontjait befutják. A P értelmezési tartomány, (mely, mint mondtuk, linearis, zárt intervallum vagy általában egy metrikus tér egy perfekt halmaza) *α-klasszisú beosztásának* nevezem a tartomány beosztását véges sok $e_1, e_2, \dots e_n$ olyan halmazra, melyek:

1. legfeljebb α-osztályú halmazok, de van köztük legalább egy pontosan α-osztályú,

2. nincs közös pontjuk, azaz $e_i e_k = 0$, ha $i \neq k$,

3. összegük megegyezik P-vel, $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = P$.

Ezen fogalmak segélyével már most igy mondom ki tételünket: A szükséges és elégséges föltétele annak, hogy az $f(x)$ korlátos függvény legfeljebb α-klasszisú legyen ($\alpha > 0$) az, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezzék a P alaphalmaznak egy olyan α-klasszisú beosztása $e_1, e_2, \dots e_n$ halmazokra, hogy az $f(x)$ ingadozása bármely e_i halmazon ε-nál kisebb legyen:

$$V(f, e_i) < \varepsilon, \quad (i = 1, 2, \dots n).$$

Hogy $f(x)$ pontosan α-klasszisú legyen, ahhoz kell még, hogy

---

[1] L. a 2. számú lábjegyzetet a 26. oldalon. L. még az általánositást illetőleg C. de la Vallée Poussin loc. cit. 121—125. és 142—145. o.

bizonyos ε-ra már ne létezzék α-nál alacsonyabb klasszisú oly beosztás, mely a $V(f, e_i) < \varepsilon$ föltételt minden i-re kielégíti.

Először bebizonyítom, hogy a föltétel szükséges. Legyen tehát $f(x)$ α-osztályú, korlátos függvény és legyen $\varepsilon > 0$ adva. Válaszszuk az $y_0 < y_1 < y_2 < \dots y_n$ valós számokat úgy, hogy

$$y_0 < f(x) < y_n \text{ és } y_i - y_{i-1} < \varepsilon \; (i = 1, 2, \dots n).$$

Az $f(x)$ függvény vagy G_α-, vagy g_α-, vagy egyidejűleg $G_{\alpha+1}$- és $g_{\alpha+1}$-rendű.

Ha f G_α-rendű, akkor az $A[f > y_i]$ halmazok $(i = 0, 1, 2, \dots n-1)$ V_α-rendűek, tehát α-osztályúak; hasonlóképpen az

$$e_i = A[f > y_{i-1}] - A[f > y_i]$$

halmazok is $(i = 1, 2, \dots n-1)$, mint α-osztályú halmazok különbségei. A $P = \sum_{i=1}^{n-1} e_i$ beosztás már eleget tesz a föltételnek. Ha f g_α-rendű, akkor a megfelelő beosztást az

$$e_i = A[f \geq \gamma_i] - A[f \geq \gamma_i]$$

halmazok adják. Legyen végül f a harmadik típusú, azaz egyidejűleg $G_{\alpha+1}$- és $g_{\alpha+1}$-rendű. Sűrítsük az y_i láncot annyira, hogy $y_i - y_{i-1} < \frac{\varepsilon}{2}$ legyen. Ekkor az

$A[f \geq y_i]$ halmaz $D_{\alpha+1}$-rendű, mert f $g_{\alpha+1}$-rendű, az
$A[f > y_{i-1}]$ « $V_{\alpha+1}$- » « f $G_{\alpha+1}$-rendű.

Van tehát egy oly $M(y_i)$ α-osztályú halmaz, melyre:

$$A[f > y_{i-1}] > M(y_i) > A[f \geq y_i], \; (i = 1, 2, \dots n).$$

Az $e_i = M(y_i) - M(y_{i+1})$ halmazok által adott $\sum_{i=1}^{n-1} e_i$ beosztás már megfelel a követelményeknek. Ugyanis: 1. az e_i halmazok mind legfeljebb α-osztályúak, mint ilyenek különbségei, 2. nincs közös pontjuk és összegük egyenlő a P halmazzal, 3. $V(f, e_i) < \varepsilon$, mert hiszen az $M(y_i)$, mint az $A[f > y_{i-1}]$ részhalmaza, csak oly pontokat tartalmazhat, melyekben $f > y_{i-1}$, másrészt az $M(y_{i+1})$ mindazokat a pontokat tartalmazza, melyekben $f \geq y_{i+1}$, tehát különbségük, az e_i, csak oly pontokat tartalmazhat, melyekben $y_{i-1} > f > y_{i-1}$, tehát

$$V(f, e_i) \leq y_{i+1} - y_{i-1} < \varepsilon, \; (i = 1, 2, \dots n-1).$$

A föltétel szükséges volta ezzel ki van mutatva, de e meggondolásból azonnal kimutathatjuk az α-osztályú függvények egy más érdekes tulajdonságát is. Jelölje x_i az e_i halmaz egy pontját és $\psi_i(x)$ az e_i charakterisztikus függvényét; ez, tudjuk, legfeljebb α-osztályú függvény és az a $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\psi_i(x)$ is. Ezen utóbbi függvény csak n egymástól különböző értéket vesz föl, az ilyen függvényeket nevezzük röviden α-osztályú lépcsőfüggvényeknek. Miután $V(f, e_i) < \varepsilon$, $(i = 1, 2, \dots n)$, kell:

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\psi_i(x) \right| < \varepsilon.$$

Tehát: *minden α-osztályú függvény egyenletesen megközelíthető α-osztályú lépcsőfüggvényekkel.*[1]

Ebből már kritériumunk elégséges volta is következik. Ha ugyanis egy $f(x)$ függvényre vonatkozólag föltételünknek megfelelő beosztás minden ε-ra létezik, akkor $f(x)$ egyenletesen megközelíthető a $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\psi_i(x)$ α-osztályú lépcsőfüggvényekkel s mint ilyen függvények egyenletesen konvergens sorozatának határértéke maga is legfeljebb α-osztályú. *Veress Pál.*

ÜBER DIE BAIRESCHEN KLASSEN.

Es wird folgender Satz bewiesen: «Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine auf der perfekten Grundmenge P definierte und daselbst beschränkte Funktion $f(x)$ der α-ten Baireschen Klasse $(\alpha > 0)$ angehört ist die, daß zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine solche Einteilung der Grundmenge P in endlich viele elementenfremde Mengen der Klasse α existiere:

$$P = e_1 + e_2 + \dots + e_n,$$

bei welcher die Schwankung von $f(x)$ auf jeder der Mengen e_i kleiner als ε ist.» *P. Veress.*

---

[1] Ez a tétel, mely jelen dolgozatom főtételével æquivalens megtalálható W. Sierpińskinek: «Sur une propriété des ensembles ambigus» című dolgozatában is. (Fund. Math. VI. 1924.) Én még Sierpiński dolgozatának megjelenése előtt, 1924 augusztusában nyujtottam be jelen dolgozatom egy németnyelvű fogalmazását az Acta Universitatis Szeged szerkesztőségének, de azt Sierpiński dolgozatának megjelenése után visszavontam s ahelyett most ezen magyarnyelvű közlésre szorítkozom. L. még szerzőtől: «Über kompakte Funktionenmengen und Bairesche Klassen.» Fund. Math. VIII. 1925.

EGYENLETESEN SŰRŰ SZÁMSOROZATOK.

Bevezetés.

$x_1, x_2, \ldots$ legyenek a (0, 1) intervallumban[1] fekvő valós számok. Az $x_1, x_2, \ldots$ sorozatot akkor nevezzük *egyenletesen sűrűnek*, ha a következő tulajdonsággal bír:

(α, β) legyen a (0, 1) intervallumnak egy részintervalluma (azaz: $(0 \leq \alpha < \beta \leq 1)$. Ha az $x_1, x_2, \ldots$ sorozat n első tagja közül $N_n^{(\alpha, \beta)}$ fekszik az (α, β) intervallumban, akkor

$$\operatorname*{limes}_{n \to \infty} \frac{N_n^{(\alpha, \beta)}}{n} = \beta - \alpha.$$

Ilyen számsorozatokat először Weyl[2] vizsgált, így pl. ő bizonyította be, hogy a $[\xi]$, $[2\xi]$, $[3\xi], \ldots$ sorozat ($[x]$ azon a (0, 1) intervallumba eső szám, melynél $x - [x]$ egész szám) egyenletesen sűrű, ha ξ irracionális.

Nyilvánvaló, hogy egy egyenletesen sűrű $x_1, x_2, \ldots$ sorozat

---

[1] (α, β) intervallumnak nevezzük mindazon x számok halmazát, amelyek az $\alpha \leq x < \beta$ tulajdonsággal bírnak.

[2] A Weyl: Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Annalen, 77 kötet, pag. 313—352, 1916. Az olvasó itt megtalálja az e tárgyra vonatkozó további irodalmat. Az egyenletes sűrűség definiciója ezen dolgozatban a következő:

Az $x_1, x_2, \ldots$ sorozat bírjon a következő tulajdonsággal:

Ha $f(x)$ bármely a (0, 1) intervallumban korlátos és Riemann szerint integrálható függvény, akkor

$$\operatorname*{limes}_{n \to \infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)}{n} = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Ezen definició az általunk használttal æquivalens.

egyben mindenütt sűrű is a (0, 1) intervallumban (azaz: minden szám 0 és 1 között ezen sorozatnak sűrűsödési helye). Azt is könnyen beláthatjuk, hogy ezen tétel meg nem fordítható: ha egy sorozat mindenütt sűrű a (0, 1) intervallumban, még egyáltalában nem kell egyenletesen sűrűnek lennie. Ennélfogva felmerül az a kérdés, hogy nem szükséges-e az $x_1, x_2, \ldots$ sorozat elemei halmazának egy további (a mindenütt sűrűségen túlmenő) tulajdonsága ahhoz, hogy a sorozat egyenletesen sűrű legyen.

E dolgozat első részében ki fogjuk mutatni, hogy semminemű további feltételre nincs szükség, hanem ellenkezőleg:

1. A (0, 1) intervallumnak minden megszámlálható és mindenütt sűrű M részhalmaza elrendezhető egy egyenletesen sűrű $x_1, x_2, \ldots$ sorozattá.

Ha tehát az M halmaz már egy bizonyos $y_1, y_2, \ldots$ elrendezésben adatott meg, úgy ennek magának nem kell ugyan egyenletesen sűrűnek lennie, azonban $y_1, y_2, \ldots$ mindig *átrendezhető* egy egyenletesen sűrű $x_1, x_2, \ldots$ sorozattá.

A dolgozat második részében azt vizsgáljuk, hogy mennyire *mélyreható* átrendezésekre van itt szükségünk. Ha egy $y_1, y_2, \ldots$ sorozatot átrendezünk egy $x_1, x_2 \ldots$ sorozattá, az átrendezéshez a következő $\varphi(n)$ függvényt rendeljük (amely mintegy az átrendezés mélyrehatásának fokát fejezi ki):

Az $y_1, y_2 \ldots$ sorozatnak átrendezésénél annak n első tagja, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, az $x_1, x_2, \ldots$ sorozatnak bizonyos n tagjába megy át. E tagok indexei közül $\varphi(n)$ a legnagyobbat jelölje. (Nyilván $\varphi(n) \geq n$.)

Fejér tanár úr hívta fel a figyelmemet arra a kérdésre, hogy ezen $\varphi(n)$-et milyen határok alá lehet szorítani.[1] A második rész eme kérdésre ad választ:

2. $\bar{\varphi}(n)$ legyen egy tetszésszerinti függvény (a pozitív egész számok halmazában). Ahhoz, hogy minden a (0, 1) intervallum-

[1] Eredetileg az r_n sorozatot $r_n = n$-nek definiáltam, úgyhogy $\varphi(n)$-re felső határul $\frac{n(n+1)}{2}$, azaz durván n^2, adódott.

ban fekvő és mindenütt sűrű $y_1, y_2, \ldots$ sorozat oly módon legyen átrendezhető egyenletesen sűrű $x_1, x_2 \ldots$ sorozattá, hogy ezen átrendezésnek $\varphi(n)$ függvénye a

$$\varphi(n) \leqq \bar{\varphi}(n)$$

feltételnek tegyen eleget, szükséges és elegendő, hogy $\bar{\varphi}(n) \geqq n$ legyen és

$$\operatorname*{limes}_{n \to \infty} \frac{\bar{\varphi}(n)}{n} = \infty.$$

1. Tetszőleges megszámlálható és a (0, 1) intervallumban mindenütt sűrű halmaznak elrendezése egyenletesen sűrű sorozattá.

I. Az adott megszámlálható és a (0, 1) intervallumban mindenütt sűrű halmazt mindjárt $y_1, y_2, \ldots$ sorozat alakjában írjuk fel, úgyhogy feladatunk az alkalmas átrendezés felkeresése.

Legyen e végből $r_1, r_2, \ldots$ egy végtelen sorozata a pozitív egész számoknak, amelyet később választunk meg. A

$$\left(0, \frac{1}{r_1}\right), \left(\frac{1}{r_1}, \frac{2}{r_1}\right), \ldots, \left(\frac{r_1 - 1}{r_1}, 1\right)$$

intervallumokat jelöljük $I_1, I_2, \ldots, I_{r_1}$-gyel; a

$$\left(0, \frac{1}{r_2}\right), \left(\frac{1}{r_2}, \frac{2}{r_2}\right), \ldots, \left(\frac{r_2 - 1}{r_2}, 1\right)$$

intervallumokat $I_{r_1+1}, I_{r_1+2}, \ldots, I_{r_1+r_2}$-vel; stb. Ezen $I_1, I_2, \ldots$ sorozat segítségével már most a következőképpen definiáljuk az új $x_1, x_2, \ldots$ sorozatot:

1. x_1 legyen y_1-gyel egyenlő.

2. Ha $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ $(n > 1)$ már ismeretesek, akkor x_n-et a következő módon állapítsuk meg: Az $y_1, y_2, \ldots$ sorozat mindenütt sűrű lévén, végtelen sok eleme esik az I_n intervallumba. Ezek között tehát biztosan lesznek $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$-től különbözők is; ezek közül a legkisebb indexű legyen x_n.

Ezen definició alapján nyilvánvaló, hogy $x_1, x_2, \ldots$ az $y_1, y_2, \ldots$ sorozatnak egymástól különböző elemeiből álló sorozat. Ennélfogva még csak a következő két állítást kell beigazolnunk:

A) Az $y_1, y_2, \ldots$ sorozatnak minden eleme előfordul az $x_1, x_2, \ldots$ sorozatban.

B) Az $x_1, x_2, \ldots$ sorozat egyenletesen sűrű. (T. i. az $r_1, r_2, \ldots$ számok alkalmas megválasztása mellett.)

II. Először *A)*-t bizonyítjuk be, még pedig teljes indukció segitségével.

y_1 nyilván előfordul az $x_1, x_2, \ldots$ sorozatban, hiszen $x_1 = y_1$. Tegyük fel ezután, hogy $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ $(n>1)$ mind előfordulnak az $x_1, x_2, \ldots$ sorozatban, bebizonyítandó, hogy y_n is előfordul benne.

Minthogy $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ elemei az $x_1, x_2 \ldots$, sorozatnak, megválaszthatjuk a p számot úgy, hogy ezek mind már $x_1, x_2, \ldots, x_p$-ben szerepeljenek. Továbbá minden μ-höz találhatunk olyan ν számot, hogy y_n a $\left(\frac{\nu-1}{r_\mu}, \frac{\nu}{r_\mu}\right)$ intervallumban, azaz az $r_1 + r_2 + \cdots + r_{\mu-1} + \nu$ sorszámmal biró intervallumban fekszik, hol ν az $1, 2, \ldots, r_\mu$ számok valamelyike. Minthogy pedig

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_{\mu-1} + \nu \geqq (\mu - 1) + 1 = \mu,$$

biztosan találhatunk egy olyan I_ϱ intervallumot, mely az y_a számot tartalmazza és amelynél $\varrho \geqq p+1$. (Elég, ha a μ-t $(p+1)$-nek választjuk .)

Már most y_n vagy egyenlő az $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$-ek valamelyikével vagy nem. Az első esetben y_n nyilván előfordul az x_1 $x_2, \ldots$ sorozatban. A másodikban pedig így okoskodunk: y_n az I_ϱ intervallumban fekszik és $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$-től különböző. $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ nem birnak ezen tulajdonsággal, hiszen mind előfordulnak $x_1, x_2, \ldots, x_p$ között, tehát $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ között is. Ezért a definició értelmében $x_\varrho = y_n$. Tehát y_n mindenképpen előfordul az $x_1, x_2 \ldots$ sorozatban.

III. Ezek után bizonyítsuk be *B)*-t. $N_n^{(\alpha, \beta)}$-nel jelöljük ismét azon $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok számát, amelyek az (α, β) intervallumba esnek. Válasszuk meg a μ számot úgy, hogy

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_{\mu-1} < n \leqq r_1 + r_2 + \cdots + r_{\mu-1} + r_\mu.$$

Legyen $\lambda=1,2,\ldots,\mu$. Számoljuk meg, hogy hány

$$y r_1+r_2+\cdots+r_{\lambda-1}+\nu, \quad \nu=1,2,\ldots,r_\lambda$$

esik az (α,β) intervallumba. Minthogy $y r_1+r_2+\cdots+r_{\lambda-1}+\nu$ az $I r_1+r_2+\cdots+r_{\lambda-1}+\nu$ intervallumban, azaz az $\left(\frac{\nu-1}{r_\lambda},\frac{\nu}{r_\lambda}\right)$ intervallumban fekszik, erre a számra egy felső és egy alsó határt adhatunk meg:

Legfeljebb annyi, mint ahány $\left(\frac{\nu-1}{r_\lambda},\frac{\nu}{r_\lambda}\right)$ intervallumnak az (α,β) intervallummal közös pontja van; és legalább annyi, mint $\left(\frac{\nu-1}{r_\lambda},\frac{\nu}{r_\lambda}\right)$ intervallum teljesen az (α,β) intervallumban fekszik. Vagyis legfeljebb annyi van, mint ahány ν számra

$$\frac{\nu}{r_\lambda}\geqq\alpha, \quad \frac{\nu-1}{r_\lambda}\leqq\beta;$$

és legalább annyi, mint ahány ν számra

$$\frac{\nu-1}{r_\lambda}\geqq\alpha, \quad \frac{\nu}{r_\lambda}\leqq\beta.$$

Az első tulajdonsággal azonban nyilván legfeljebb

$$(\beta r_\lambda+1)-\alpha r_\lambda+1=(\beta-\alpha)r_\lambda+2$$

szám bír; a másodikkal pedig legalább

$$\beta r_\lambda-(\alpha r_\lambda+1)-1=(\beta-\alpha)r_\lambda-2$$

szám.

Ezen megbecsülésekből az következik, hogy

$$\begin{aligned}N_n^{(\alpha,\beta)}&\leqq[(\beta-\alpha)r_1+2]+[(\beta-\alpha)r_2+2]+\cdots+[(\beta-\alpha)r_\mu+2]=\\&=(\beta-\alpha)(r_1+r_2+\cdots+r_\mu)+2\mu\leqq(\beta-\alpha)(n+r_\mu)+\\&+2\mu\leqq(\beta-\alpha)n+r_\mu+2\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_n^{(\alpha,\beta)}&\geqq[(\beta-\alpha)r_1-2]+[(\beta-\alpha)r_2-2]+\cdots+[(\beta-\alpha)r_{\mu-1}-2]=\\&=(\beta-\alpha)(r_1+r_2+\cdots+r_{\mu-1})-2(\mu-1)\geqq(\beta-\alpha)(n-r_\mu)-\\&-2(\mu-1)\geqq(\beta-\alpha)n-r_\mu-2\mu.\end{aligned}$$

Tehát

$$\left|\frac{N_n^{(\alpha,\beta)}}{n}-(\beta-\alpha)\right|\leqq 2\frac{\mu}{n}+\frac{r_\mu}{n}.$$

Ezek szerint *B)* mindenesetre fennáll, ha az $r_1, r_2, \ldots$ sorozatot úgy választjuk meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{r_\mu}{n}=0.$$

Minthogy pedig $n\to\infty$-ből $\mu\to\infty$ következik, és minthogy $n\geqq r_1+r_2+\cdots+r_{\mu-1}$, ezen egyenletek bizonyosan teljesülnek, ha

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{\mu}{r_1+r_2+\cdots+r_{\mu-1}}=0,\ \lim_{\mu\to\infty}\frac{r_\mu}{r_1+r_2+\cdots+r_{\mu-1}}=0.$$

Ez a két feltétel azonban könnyen teljesithető; nyilván azt fejezi ki, hogy az $r_1, r_2, \ldots$ sorozat tagjainak közepei korlátlanul nőnek, de nem túl gyorsan. Így pl. vehetjük az $r_\mu=\mu$ sorozatot; ez is teljesíti a feltételeinket.

2. Adott sorozat különböző rendezéseinek összehasonlítása.

I. Az $r_1, r_2, \ldots$ sorozat megválasztásában azonban, amint látjuk, még mindig nagy a szabadságunk. Ezt felhasználhatjuk a bevezetés 2. tételének a bizonyítására. Először is kimutatjuk, hogy a $\bar{\varphi}(n)\geqq n$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\bar{\varphi}(n)}{n}=\infty$ feltételek elegendők.

E célból gondoljuk meg a következőt:

Minthogy $x_1=y_1$, $\varphi(1)=1\leqq r_1$.

Ha pedig

$$\varphi(n-1)\leqq r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}\,(n>1),$$

akkor

$$\varphi(n)\leqq r_1+r_2+\cdots+r_n.$$

Ez az első fejezet II. pontjának meggondolásaiból következik, minthogy ezen esetben p választható $r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}$-nek, tehát μ n-nek, úgyhogy

$$\varrho=r_1+r_2+\cdots+r_{\mu-1}+\nu\leqq r_1+r_2+\cdots+r_n$$

lesz.

Ennélfogva általánosan

$$\varphi(n) \leqq r_1 + r_2 + \cdots + r_n,$$

tehát úgy kell az $r_1, r_2, \cdots$ sorozatot megválasztanunk, hogy

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n, \leqq \bar{\varphi}(n)$$

legyen. Ezenkívül persze a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1}} = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{r_n}{r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1}} = 0,$$

kikötésekhez is ragaszkodunk.

Már most mindezen feltételek biztosan teljesülnek, ha

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \infty, \quad r_{n+1} \leqq r_n + 1,$$

$$r_n \leqq \text{Minimum}\left(\frac{\bar{\varphi}(n)}{n}, \frac{\bar{\varphi}(n+1)}{n+1}, \frac{\bar{\varphi}(n+2)}{n+2}, \cdots\right) = \chi(n).$$

Ez pedig könnyen elérhető az által, hogy r_n-et a következőképpen definiáljuk:

r_n legyen a legnagyobb pozitív egész szám, amely kisebb vagy egyenlő a

$$\chi(n), \; \chi(n-1)+1, \; \chi(n-2)+2, \cdots, \; \chi(1)+(n-1)$$

számoknál.

II. Hátra van még a szükségesség kimutatása.

Minthogy $\bar{\varphi}(n) \geqq n$ szükségessége nyilvánvaló,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\bar{\varphi}(n)}{n} = \infty$$

bizonyítására szorítkozhatunk.

Ezen feltétel szükségességét bebizonyítottuk, ha meg tudunk adni egy olyan $y_1, y_2, \ldots$ sorozatot, melynek *minden* egyenletesen sűrűvé való átrendezésénél

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(n)}{n} = \infty.$$

Ilyen sorozat pl. a következő:

$a_1, a_2 \dots$ legyenek a $(0,1)$ intervallumnak összes nem $\frac{1}{n}$ formájú racionális számai, valamely sorrendben. Legyen:

$y_n = \frac{1}{n}$, ha n nem egész szám négyzete;

$y_n = a_m$, ha $n = m^2$.

Könnyen kimutatható, hogy ezen sorozat bír a kívánt tulajdonsággal.

Neumann János.

GLEICHMÄSSIG DICHTE ZAHLENFOLGEN.

$x_1, x_2, \dots$ sei eine Folge reeller Zahlen im Intervalle $(0, 1)$. («Intervall (α, β)» : Menge der Zahlen x mit $\alpha \leqq x < \beta$). Diese Folge heiße *gleichmässig dicht*, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

(α, β) sei ein Teilintervall des Intervalles $(0, 1)$. Wenn von den n ersten Elementen der Folge $x_1, x_2, \dots$ genau $N_n^{(\alpha, \beta)}$ im Intervalle (α, β) liegen, so ist

$$\operatorname*{limes}_{n \to \infty} \frac{N_n^{(\alpha, \beta)}}{n} = \beta - \alpha.$$

Derartige Zahlfolgen betrachtete Weyl (Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Annalen, Band 77, pag. 313—352).

Es ist klar, dass jede gleichmäßig dichte Folge $x_1, x_2, \dots$ auch überall dicht ist (im Intervalle $(0, 1)$). Ferner sieht man sofort, dass dies nicht umkehrbar ist: eine überall dichte Folge braucht garnicht gleichmäßig dicht zu sein. Es erhebt sich darum die Frage, ob nicht etwa eine weitere, über die Eigenschaft überall dicht zu sein hinausgehende Eigenschaft der Menge der $x_1, x_2 \dots$ erforderlich ist, damit die Folge $x_1, x_2, \dots$ gleichmäßig dicht sei.

Im ersten Teile dieser Arbeit wird gezeigt, dass keine weitere derartige Bedingung notwendig ist, vielmehr gilt der folgende Satz:

1. Jede abzählbare und überall dichte Teilmenge M des Intervalles $(0, 1)$ kann zu einer gleichmäßig dichten Folge $x_1, x_2, \dots$ geordnet werden.

Wenn also die Menge M bereits in einer gewissen Anordnung $y_1 y_2, \dots$ vorliegt, so braucht zwar diese selbst keineswegs selbst gleichmäßig dicht zu sein, sie muß aber durch bloße *Umordnung* in eine gleichmäßig dichte Folge $x_1, x_2, \dots$ überführt werden können.

Im zweiten Teile der Arbeit wird die Frage untersucht, eine wie *tiefgreifende* Umordnung hierzu im allgemeinen erforderlich ist. Wenn die Folge $y_1, y_2, \ldots$ durch Umordnung in die Folge $x_1, x_2, \ldots$ übergeht, so ordnen wir dieser Umordnung eine Funktion $\overline{\varphi}(n)$ auf die folgende Weise zu (die sozusagen charakterisieren soll, wie tiefgreifend die Umordnung ist):

Die n ersten Glieder der Folge $y_1, y_2, \ldots$ gehen bei der Umordnung in bestimmte Glieder der Folge $x_1, x_2, \ldots$ über. Der größte ihrer Indices sei $\overline{\varphi}(n)$.

Herr Fejér stellte an mich die Frage: wie weit läßt sich (durch geeignete Wahl der Umordnung) dieses $\varphi(n)$ herabdrücken. Der zweite Teil beantwortet diese Frage folgenderweise:

2. $\varphi(n)$ sei irgendeine Funktion (im Bereiche der positiven ganzen Zahlen). Damit jede im Intervalle $(0, 1)$ liegende und daselbst überall dichte Folge $y_1, y_2, \ldots$ durch Umordnung) derart in eine gleichmässig dichte Folge $x_1, x_2, \ldots$ überführt werden könne, dass für das $\varphi(n)$ dieser Umordnung

$$\varphi(n) \leqq \overline{\varphi}(n)$$

sei, ist folgendes notwendig und hinreichend:

$$\overline{\varphi}(n) \geqq n, \quad \operatorname*{limes}_{n \to \infty} \frac{\overline{\varphi}(n)}{n} = \infty.$$

Hans v. Neumann.

A BUDAPESTEN ÉS KÖRNYÉKÉN VÉGZETT NEHÉZSÉGGYORSULÁSI MÉRÉSEK.

1. Bevezetés.

Az *1916.* évben báró Eötvös Loránd megbízásából az ő geofizikai mérései keretében *Budapesten* és környékén több helyen végeztem *invariabilis ingákkal* szabatos nehézséggyorsulásméréseket. E mérésekben, melyeknek eredményeit a *4.* pontban fogom ismertetni, eltértem az eddig követett eljárástól s tekintettel az elért kedvező eredményekre, szükségesnek vélem e mérések részletes ismertetését. Mélységes hálával kell e helyen megemlékeznem világhirű nagy fizikusunkról, néhai báró Eötvös Loránd-ról, aki a legnagyobb érdeklődéssel kisérte a relativ gravitációmérés tökéletesitésére és gyorsitására vonatkozó kisérletezéseimet s azokban nemcsak értékes tanácsaival segitett, hanem bőséges anyagi támogatással lehetővé tette, hogy a kisérletek végzéséhez szükséges műszereket beszerezhessem s olyan műszerfelszerelést hozhassak össze, mely lehetővé teszi, hogy a jövőben a *Nemzetközi Földmérési Szövetség* kutatásai számára is a legintenzivebb működést fejthessük ki.

2. A relatív ingamérések végrehajtásának módozatai.

A geofizikai kutatások számára alapvető fontosságú a nehézséggyorsulás tényleges, abszolút értékének minél több pontban való meghatározása, vagyis az ú. n. *gravitációs alapponthálózat* létesitése. Tekintettel a nehézséggyorsulás *abszolút* értékének közvetlen meghatározására szolgáló ingamódszer felette kényes és hosszadalmas voltára, a gravitációs alapponthálózat létesitésére gyakorlatilag a leghelyesebb eljárás az, ha abszolút mérést csak egy helyen végezünk (a referencia-állomáson), a többi helyeken pedig a sokkal egyszerűbb és gyorsabb *relatív* ingamérést alkalmazzuk. A következőkben, lehetőleg rövidre fogott tárgyalással, ismertetni fogom a relatív ingamérés fontosabb szóbajöhető változatait, felemlítve azoknak úgy az előnyeit, mint a hátrányait.

A) *Relatív mérés egy ingával és egy órával.*

A mérés abból áll, hogy először a referencia-állomáson, aztán sorban a többi külső állomáson megmérjük az inga lengésidejét a coincidencia-módszerrel. Az óra járását (t. i. az óra-másodperc eltérését a csillagidő-másodperctől) úgy a referencia-állomáson, mint a többi állomásokon, asztronómiai mérésekkel kell megállapitani. Természetesen a mérés pontosságának fokozására a gyakorlati kivitelben nemcsak egy ingát alkalmazunk, de többet, rendesen négyet, ezek lengésidejeinek számtani középét használjuk az eredmény levezetésére.

E módszer előnyei:

1. A mérés egyszerű s egy észlelő is elvégezheti.
2. A méréshez aránylag kevés műszer kell.

Hátránya az, hogy a munkaprogrammot az időjárás befolyásolja, mert az órajárás levezetésére szükséges időmeghatározásokat csak derült időben lehet végrehajtani. A munka tehát nem gazdaságos, mert kedvezőtlen időjárás esetén sok idő megy veszendőbe.

Megjegyzem, hogy az eddigi gravitáció-méréseimet evvel a módszerrel végeztem.

B) *Szimultán mérés két ingával és egy órával.*

Ez esetben az időmeghatározás teljesen elmarad. Az egyik ingát a referencia-állomáson, a másikat azon a helyen állítjuk fel, ahol a gravitáció erőt mérni kívánjuk s a két coincidencia-készüléket és az órát elektromos vezetékkel kapcsoljuk össze. Erre a célra az állami telefon, vagy a telegráfvezetékek használhatók fel.

A két inga lengésidejét egyszerre (szimultán) mérjük, ugyanazon óra felhasználásával. Legyenek t_1 és t_2 a nyert s az óra momentán járására redukált lengésidők (több inga esetén t_1 és t_2 a középingák lengésidejeit jelentik). Világos, hogy az óra járásától függetlenül a két lengésidő különbsége a helyes különbséget adja, mert a csillagidőben kifejezett T_1 és T_2 lengésidők

$$T_1 = t_1 + c\delta$$
$$T_2 = t_2 + c\delta$$

ahol δ az óra napi járását, c pedig az ú. n. óraállandót jelenti. Tekintettel a δ azonos voltára, a $(T_2 - T_1)$ azonos $(t_2 - t_1)$-el.

A relativ ingamérés ilyen módon való végrehajtásának *előnyei* a következők:

1. Időmeghatározás nem végzendő, tehát a mérés független az időjárás kedvezőtlenségeitől s így előre megállapitott időprogrammal végezhető.

2. Az órajárás periodikus és egyéb ingadozása az eredményből teljesen kiesik s ezért egyébként egyenlő körülmények között a relatív ingamérés különböző végrehajtási módozatai közül ez szolgáltatja a legpontosabb eredményt.

A fenti előnyökkel szemben a következő *hátrányok* állanak:

1. Az együttes észlelés miatt okvetlenül két észlelő kell.

2. A két állomás nem lehet egymástól nagyobb távolságra (legfeljebb *20—30* km-re), mert különben az elektromos vezetékek szigetelési és egyéb üzemi hibái miatt a felvevő készülékek nem működnek kifogástalanul az észlelés aránylag hosszú ideje alatt.

3. A két állomás hosszabb időre, naponta *4—8* órára kapcsolandó elektromos távvezetékkel, tehát az észlelésre csak olyan helyek jöhetnek szóba, ahol ilyen vezeték már van, illetve könnyen létesithető s hosszabb időre igénybe vehető.

4. Az esetleges kontaktuszavarok miatt sok mérési munka veszhet kárba, ami a mérést hosszadalmassá teszi.

C) *Mérés egy ingával és két órával.*

Az egyik óra a kiinduló állomáson van felállíitva, a másik pedig az ingával halad állomásról állomásra. A belső órát gondos asztronómiai időmeghatározásokkal állandóan ellenőrzik úgy, hogy járása bármikor megadható. A külső órát elektromos úton kronográffal hasonlítják össze a belső órával s az összehasonlítás eredményéből, továbbá a belső óra ismeretes járásából állapitják meg járását.

A mérés egyébként az *A)* esetnek megfelelően végzendő.

E mérési eljárás előnyei:

1. A külső állomásokon végzendő időmeghatározások teljesen elmaradnak, ami egyrészt a mérést gyorsitja, másrészt azt gazdaságosabbá teszi, mert az időmeghatározáshoz szükséges műszerek és felszerelési tárgyak (pillér, észlelő-sátor stb.) szállítása és felszerelése elmarad.

2. A méréseknek üzemi hibák (főleg kontaktushibák) miatti esetleges megismétlése úgyszólván teljesen elesik.

3. A külső állomásokon való mérés az időjárástól teljesen független, tehát azt előre megállapitott időprogramm szerint, végezhetjük.

4. A két állomás közötti vezeték csak egész rövid időre veendő igénybe és pedig *tetszőleges* napszakban.

5. Amennyiben a főállomáson drótnélküli leadóállomás, a külső állomásokon pedig felvevőállomás létesíthető, akkor az óraösszehasonlítások vezeték nélkül is elvégezhetők, tehát tetszőleges helyek is kapcsolhatók a főállomással.

6. A két állomás nagyobb távolságra is lehet egymástól, mert az esetleges vonalzavarok hatása legfeljebb az, hogy a rövid időt igénylő óraösszehasonlítást más időpontban újra meg kell ismételni.

A két órával való mérés *hátránya* pedig az, hogy az óra összehasonlításokhoz különleges berendezés kell.

D) *Mérés két ingával és két órával.*

A két ingát először a referencia-állomáson észleljük, a megfelelő lengésidők legyenek t_1 és t_2. Megjegyzem, hogy amennyiben az ingakészüléken több inga van, úgy a t_1 és t_2 is az ú. n. középinga lengésidejét jelenti.

A t_1 és t_2 a főóra másodpercében értendő, vagyis ha annak járása δ_1, akkor a lengésidők csillagidő-másodpercben

$$T_1 = t_1 + c\delta,$$
$$T_2 = t_2 + c\delta.$$

A fenti előkészitő mérés után a további mérés abból áll, hogy a *második* ingát és óráját elvisszük a külső állomásra s mérjük — körülbelül egyidőben — a belső inga lengésidejét t'_1 (vonatkozik a δ' járású főórára) és a külső ingáét t'_2 (vonatkozik a δ'' járású külső órára). Ezután a két órát elektromos úton összehasonlítjuk. Az összehasonlítás közvetlenül megadja a két óra járáskülönbségét $(\delta'' - \delta')$-t, amit jelöljünk Δ-val.

Ha a csillagidőben kifejezett lengésidőket ismét T-ékkel jelöljük, úgy felírható, hogy

$$T'_1 = t'_1 + c\delta',$$
$$T'_2 = t'_2 + c\delta''.$$

A két állomás közötti lengésidő-differencia ΔT a következő lesz:

$$\begin{aligned} \Delta T = T'_2 - T_2 &= t'_2 + c\delta'' - t_2 - c\delta = \\ &= t'_2 - t_2 + c\Delta - c\Delta - c\delta + c\delta'' = \\ &= t''_2 - t_2 + c\Delta - c\delta'' + c\delta' - c\delta + c\delta'' = \\ &= t'_2 - t_2 + c\Delta + T'_1 - t'_1 - (T_1 - t_1). \end{aligned}$$

Invariabilis ingák esetén kell, hogy

$$T'_1 \equiv T_1,$$

vagyis a keresett lengésidő-különbség

$$\Delta T = (t'_2 - t_2) - (t'_1 - t_1) + c\Delta.$$

Előnyök:

1. A mérés független az időjárástól, mert időmeghatározást egyáltalán nem kell végezni.

2. Az órák összehasonlításakor a vezetéket csak rövid időre vesszük igénybe.

3. Az óraösszehasonlítás, ha a megfelelő berendezés rendelkezésre áll, dróttalan telegráfia felhasználásával is végezhető.

4. A két állomás egymástól nagy távolságra is lehet, mert esetleges vonalzavarok csak az óraösszehasonlítások időpontjának eltolódását eredményezik.

Hátrányok:

1. Az óraösszehasonlításra különös berendezés kell, tehát e módszer csak akkor alkalmazható, ha ilyen rendelkezésre áll.

2. A két állomáson együttes észlelés végzendő, tehát két észlelő kell.

E) *Összefoglalás.*

Az eddigiek alapján megállapitható, hogy amennyiben a műszerek megfelelő számban rendelkezésre állanak, úgy a leggyorsabb s legkevesebb mérőmunkát igényli az egy ingával és két órával végrehajtott mérés, mert ezt alkalmazva, a külső állomásokon való mérést az időjárás nem befolyásolja s a távvezeték üzemi zavarai időveszteséget alig okozhatnak. Különösen előnyös ez a módszer akkor, ha drótnélküli telegráfberendezés áll rendelkezésre,[1] mert akkor az állomás helyének megválasztása teljesen tőlünk függ, tehát hegységekben, lakatlan, vagy nehezen hozzáférhető helyen is mérhetünk.

3. Az óraösszehasonlításra szolgáló berendezés.

Az óraösszehasonlítás lényegileg abból áll, hogy ugyanazon időpillanatban megállapítjuk az összehasonlítandó két óra állá-

[1] A cikk megirása óta a műegyetemi Geodéziai Intézet már létesített olyan berendezést, mely az időjeleknek drótnélküli felfogását lehetővé teszi s evvel kapcsolatos olyan módszert dolgozott ki, mely a jövőben végzendő gravitációméréseit még egyszerűbbé és gazdaságosabbá teszi. Az erre vonatkozó kisérleteket s a hozzátartozó műszereket külön szándékozom ismertetni.

sát (az óraidőt). Az óraösszehasonlítás legprimitívebb módja a következőképpen vázolható. A két óra elé egy-egy észlelőt állítunk, akik egy harmadik által megadott jelre leolvassák a két óra állását. Az ilyen összehasonlítás természetesen a legjobb esetben is csak néhány tizedmásodpercre pontos eredményt adhat, tekintve, hogy az órákon közvetlenül csak a másodpercek észlelhetők, ámde a szabatos óraösszehasonlítások is teljesen ez elv szerint mennek végbe.

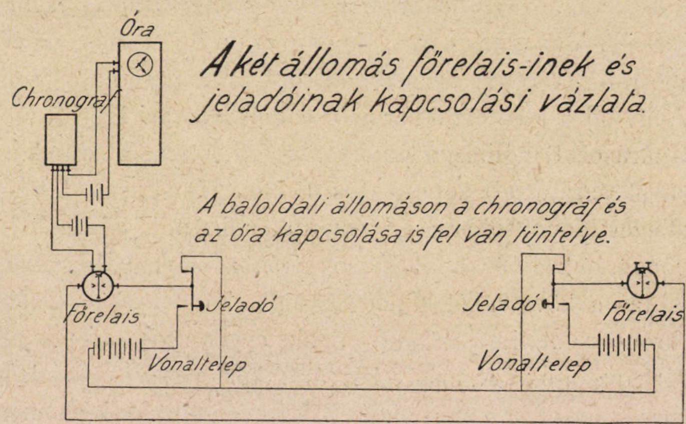
Az ingamérésekben használatos órák mindig kontaktus-szerkezetekkel felszereltek, tehát *kronográfok* használhatók összehasonlításukra. A kronográfok a Morse-telegráfhoz hasonló berendezések, de nem egyes, hanem mindig kettős mágneses áramkörrel. Az egyik áramkör az órával kapcsolható (óramágnes), miáltal a megfelelő kar az óra másodpercei szerint ad jeleket (szúrásokat) a mozgó papírszalagon. A másik áramkör billentyűvel (taszterrel) kapcsolatos (billentyűmágnes), tehát vele tetszőleges időpontokban mi magunk adhatunk jeleket.

Kronográfokkal és kontaktusos órákkal a szabatos óraösszehasonlítás a következőképpen történik. Mindegyik óra elé egy-egy kronográfot helyezünk s azok egyik-egyik áramkörét az órával kapcsoljuk. A másik két áramkört pedig egy jeladóbillentyűre (taszterre) kapcsoljuk. E jeladóbillentyű lenyomásával ugyanazon időpontot jelölhetjük ki a mozgó papírszalagokon. Összehasonlításkor bekapcsoljuk a két órát a két kronográfba, megindítjuk a kronográfokat s most a billentyűt lenyomva, ugyanazon időpontot rögzítjük mind a két szalagon. A szalagokat levéve s a billentyűjeleknek megfelelő időpontokat megállapítva, azok különbsége a két óra állásának különbségét adja.

Ha a két óra egymástól nagyobb távolságra van, azaz, ha távvezetéket kell használnunk, akkor a kronográfot nem célszerű közvetlenül a vonalba kapcsolni, hanem ilyenkor érzékeny *relais*-ket kell közbe kapcsolni. Ezeket a *relais*-ket *vonal-relaisk*-nek vagy *fő-relais*-eknek fogjuk nevezni. *Relais*-ek esetén a kapcsolás sémáját az *1. ábra* mutatja.

Mivel a *relais*-k működését a rajta áthaladó áram intenzitása befolyásolja, alapvető fontosságú az, hogy az összehasonlításkor a *relais*-n mindig ugyanolyan intenzitású áram menjen át bármelyik billentyű lenyomásakor. Ezt lehetővé teendő, a *főrelais*-t egy elágazásba helyezzük, amelyben egy könnyen változtatható ellenállás-sorozat és egy ampère-mérő is helyet talál. Az áramerősséget az ellenállás megfelelő beállításával változtathatjuk kellő mértékűvé.

Az óraösszehasonlítás vázolt alapelvének megfelelően készült összehasonlító berendezéssel történt az állandó órának a főórával való összehasonlítása.

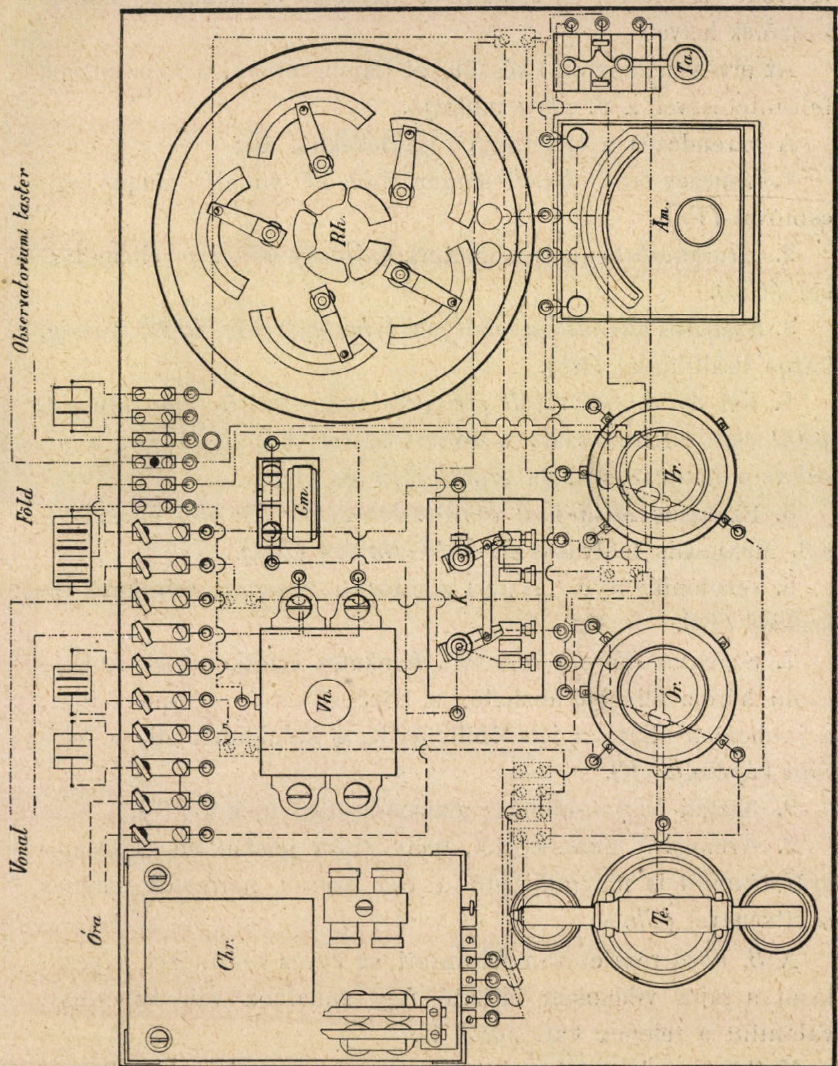


1. ábra.

A két identikus összehasonlító berendezés a potsdami Geodéziai Intézet által a szabatos hosszúságmérésekben használt készülékkel nagyjában egyezik, de a rajta levő egyes műszerek kapcsolása, valamint a vonalhoz és a telepekhez való csatlakozások arra való tekintettel készültek, hogy az egyik állomás gyorsan változó vándorállomás, amelyen a készülék felszerelése gyorsan kell, hogy végbe menjen.

Az összehasonlító készüléket adataim szerint Siemens és Halske-cég állította össze *Berlinben*. A tőle átvett két példányt Budapesten, a műegyetem fővillanyszerelőjével átszereltettük úgy, hogy használata gyors és kényelmes legyen.

A hosszúságmérésekben használatos összehasonlító készülékektől két irányban tértünk el. Nevezetesen az órát nem köz-



2. ábra.

vetlenül kapcsoljuk a kronográfba, hanem itt is egy *relais*-t iktatunk közbe (óra-relais), amivel elérhető, hogy az órán csupán gyenge (*két* voltos) áram halad át, ami a kontaktushelyeket

M. Kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem KÖNYVTÁRA SZEGED

nem teszi tönkre. A másik eltérés pedig az, hogy a két állomás közötti érintkezést kényelmesebbé és gyorsabbá teendő, telefont szereltünk az asztalra a szokásos és nehézkes MORSE-készülék helyett.

Az óraösszehasonlító-készüléket felülnézetben, a kapcsolások feltüntetésével a *2. ábra* mutatja.

A berendezés a következő készülékekből áll;

1. Lemezes *villámhárító* sárgarézből, két vonalra, dugós kapcsolóval *(Vh)*.

2. *Árammutató* (galvanométer), mintegy *40 ohm* ellenállással *(Gm)*.

3. Szabatos *ellenállásszabályozó (rheostat) 0.1—10000 ohm*-ig, karos beállítással *(Rh)*.

4. Két darab *polarizált szelencés relais* kettős kontaktussal, *1000 ohm* ellenállással; a kontaktus-rés megállapítására a *fő-relais*-n noniuszos skála szolgál *(Vr* és *Or)*.

5. Szabatos *Milli-Volt és Ampère-méter 100 ohm* ellenállással. Maximális leolvasás *15 Milli-ampère (Am)*.

6. Jeladóbillentyű (taszter) gondosan készített érintkező részekkel *(Ta)*.

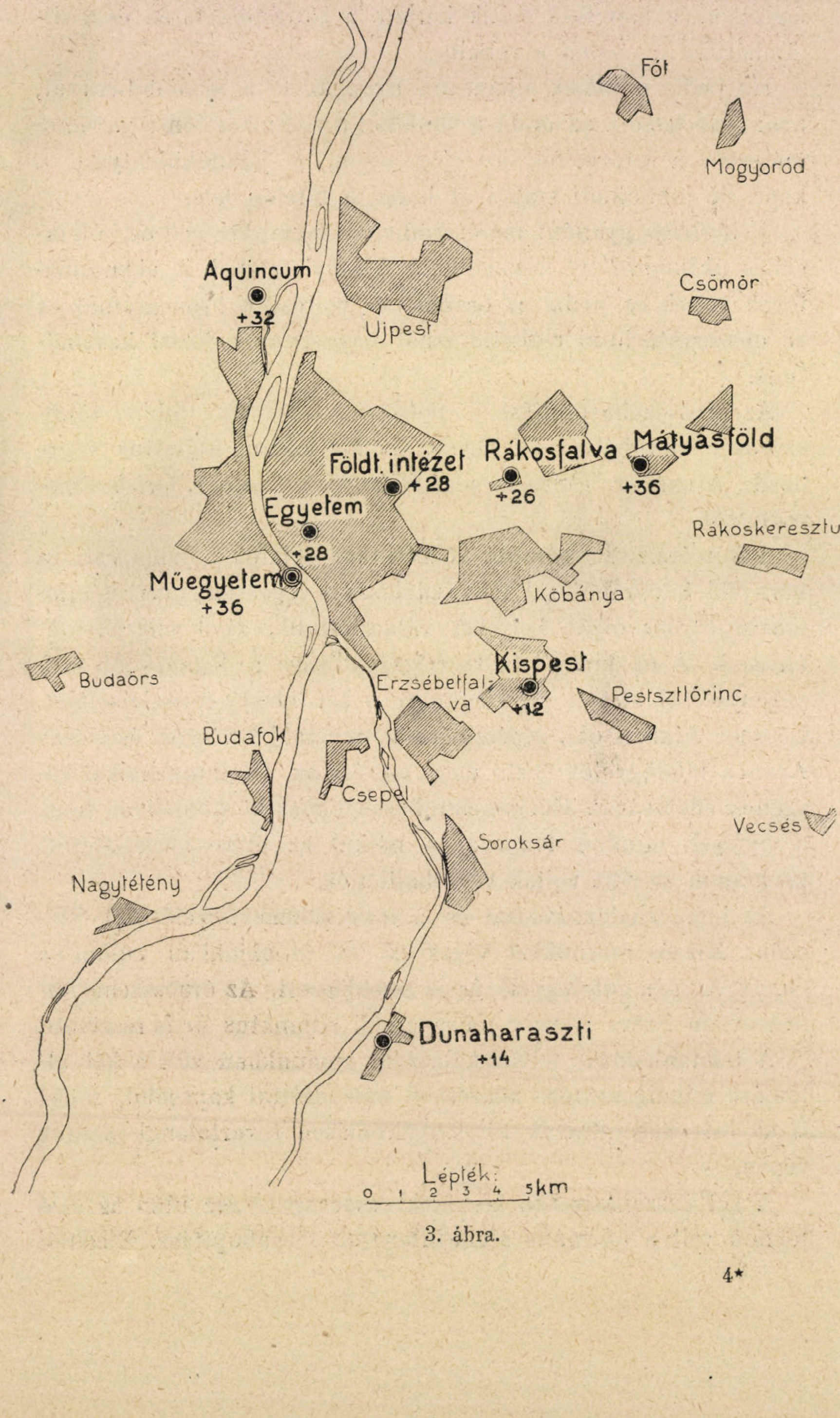
7. Szabatos (karos) *kapcsoló*, fémkefés érintkezéssel. A kapcsoló három állásba hozható, a középső az ú. n. pihenőállás, a jobboldali állása a jeladóbillentyűt, a baloldali pedig a telefont kapcsolja *(K)*.

8. Asztali *telefon*-állomás alarme-csöngő nélkül *(Te)*.

9. *Kronográf* FUESS-cégtől, mely szúrt jeleket ad. A kronográf távolról is megindítható a reá szerelt harmadik mágnes segítségével *(Chr)*.

A *3. ábra* részletesen feltünteti az egyes készülékek kapcsolását s rajta világosan látható úgy vonalhoz való kapcsolás, valamint a telepek kapcsolása is.

Kettős vonalvezetéket feltételezve, az áram útja az állomás billentyűjének lenyomásakor, vagyis *jeladáskor* a következő. Az áram a helyi telepből kiindulva, a kapcsolón, a jeladóbillentyűn, a rheostatot, ampèremétert és a főrelaist tartalmazó el-


Fót
Mogyoród
Csömör
Aquincum
+32
Ujpest
Földt. intézet
+28
Rákosfalva
+26
Mátyásföld
+36
Egyetem
+28
Rákoskeresztur
Műegyetem
+36
Kőbánya
Budaörs
Kispest
+12
Erzsébetfalva
Pestsztlórinc
Budafok
Csepel
Vecsés
Soroksár
Nagytétény
Dunaharaszti
+14
Lépték:
0 1 2 3 4 5 km

3. ábra.

ágazáson, a kapcsoló másik karján, a galvanométeren és a villámhárítón át halad a vonalba.

Ha pedig a másik állomáson nyomják le a jeladóbillentyűt, azaz *jelvételkor*, az áram a vonalból a villámhárítón, a galvanométeren, a kapcsolón, az elágazáson, a jeladóbillentyűn, a kapcsoló jobboldali karján át halad a főtelep felé.

Vonaltelep gyanánt méréseimben egy-egy *20 volt*-os, ólomcellás *akkumulátort* használtam. A helyi telepek is akkumulátorok voltak és pedig az óránál *két* voltos, a kronográfnál és az obszervatóriumi regisztrálásnál *négy-négy* voltosat használtunk.

Az óraösszehasonlítást a *potsdami Geodéziai Intézet* többszörösen kipróbált s jól bevált sémája szerint hajtottuk végre (lásd: Albrecht, *Formeln und Hilfstafeln f. geogr. Ortsbestimmungen).*

A két óraösszehasonlitó közötti kapcsolatok a budapesti és környéki telefonhálózat felhasználásával végeztük, miért is állomásokul csak olyan helyeket választottunk, ahol volt telefonállomás. A m. kir. pósta vezérigazgatósága a legnagyobb előzékenységgel sietett segítségünkre s két kiváló főtisztviselőjét, Lédeczy Sándor okl. gépészmérnök, műszaki tanácsost és Oltay Aladár főfelügyelőt bízta meg méréseink telefontechnikai részének ellátásával. Gondos munkásságuknak köszönhetem, hogy a mérések minden fennakadás nélkül az előre megállapított programm szerint voltak végrehajthatók.

Az időmeghatározásokat és a lengésidőmegfigyeléseket Szecsődy Miklós mérnökkel végeztük, az utóbbiakban különben Oltay Aladár főfelügyelő úr is segédkezett. Az óraösszehasonlításokban Szőts Albert műegyetemi adjunktus úr is résztvett.

A telefonhálózat felhasználásával módunkban volt a két állomást mindig kettős, közvetlen kábeldróttal kapcsolni, miért is az összehasonlítások minden állomáson zavartalanul mentek végbe.

A két összehasonlító készülék összekapcsolása után az első teendő volt a normális áram-intenzitás megállapitása. E célból mind a két állomáson a rheostatba *1100 ohm* ellenállást kapcsolunk be s a billentyűt egymásután mind a két állomáson lenyomva, leolvastuk az ampèreméter mutatta intenzitást. A nyert két érték közül a kisebbet vettük normális intenzitásnak (méréseinkben mintegy *7·5—8·0* milliampère volt az átlagos értéke). Ezután próbálgatással megállapítottuk mind a két állomáson úgy az érkező, mind az állomáson adott jelekre nézve azon ellenállásértékeket, melyekre a rheostatot beállítva a normális intenzitás keletkezett. Az észlelések megkezdése előtt a főrelaist úgy szabályoztuk, hogy érzékenysége maximális legyen.

Az összehasonlítás sémája a következő volt: A rheostatokat a külső állomáson *érkező*, a műegyetemin *helyi* jelzésnek megfelelően beállítva s a kronográfokon a kezdő másodperceket a szokásos módon megjelölve, a műegyetemi billentyűn mintegy *5 másodpercnyi* időközben *12* időjelet adunk.

Ezután a külső állomáson állítjuk be a rheostatot a helyi jelzésre, a műegyetemit pedig érkező jelzésre s az óra másodpercének megjelölése után *24 jelet* adunk a külső állomás billentyűjén ugyancsak mintegy *öt* másodperces időközökben.

Most a rheostatbeállítást újra az első jeladás-csoportnak megfelelően elvégezve, újra a műegyetemi állomásról adunk *12* időjelet.

A végzett számítások szerint egyetlenegy időjellel a két óra álláskülönbségét mintegy

$$\pm\, 0{\cdot}025$$

másodpercre kapjuk meg; tekintve, hogy a végeredményül felhasznált időkülönbség *48* egyszerű meghatározásból vezethető le, azért az órajárás levezetésére felhasznált *mért* álláskülönbség középhibája

$$\pm\, 0{\cdot}003$$

másodpercre tehető.

Érdekes lesz vizsgálat tárgyává tenni, hogy az oda és a vissza adott jelekből levezethető óraállásküönbségek mutatnak-e valami szisztematikus jellegű eltérést.

I. Táblázat.

Folyó-szám	Külső Állomás	A műegyetemi 24 időjelből és a külső állomás 24 időjeléből levezethető óraállás-külömbségek eltérései «Műegyetem—Külső Állomás» értelemben
1	Fizikai Intézet	—0,010 mp. —0,005 +0,005 —0,010
2	Óbuda	—0,010 mp. —0,005
3	Mátyásföld	—0,010 mp. —0,010
4	Rákosfalva	—0,010 mp. +0,003
5	Geologiai Intézet	+0,002 mp. —0,007
6	Dunaharaszti	+0,018 mp. +0,012
7	Kispest	+0,002 mp. —0,000

Amint látható, szisztematikus jellegű eltérés nem észlelhető, ami várható is volt, tekintettel az aránylag kis távolságokra s a jól izolált önálló távvezetékre. Az eltérések világosan mutatják, hogy az óraösszehasonlítás egy század másodpercre teljesen megbízható.

4. A mérés és eredményei.

A lengésidő megmérését a Math. és Fizikai Lapok 1914. évi 2. számában már részletesen ismertetett műszerekkel és módszerrel végeztük. A főóra járását mintegy *öt* naponkint megismételt gondos asztronómiai időmeghatározásokkal állapítottuk meg s a barográf adatai alapján redukáltuk normális (*760 mm*-es) légnyomásra. A coincidencia-óra járását az elektromos óraösszehasonlítás eredményeiből, a légnyomás változó voltát is tekintetbe véve, állapítottuk meg. Az óraösszehasonlításokat az egyes állomásokon *két-két* napi időközben végeztük, úgy hogy két óraösszehasonlítás között legalább *48* óra mult el.

A mérés ismét *négy* ingával történt és pedig a *115, 113, 109, 111* számúakkal. A referencia-állomáson az ingák invariabilitásának megállapitására kétszer mértünk lengésidőt, t. i. a külső állomások észlelése előtt és után. E mérések a következő eredményeket adták:

II. Táblázat.

	Redukált lengésidő *mp*-ben				
	115. inga	**113.** inga	**109.** inga	**111.** inga	középinga
I. mérés ...	0,501 2500	0,551 2709	0,501 3726	0,501 3189	0,501 3081
II. « ...	2486	2710	3929	3183	3077
A két mérés külömbsége II—I. értelemben...	— 14	+ 1	+ 3	— 3	— 4

Amint e számok mutatják, az invariabilitás feltétele elegendő módon ki volt elégitve.

Az észlelőhelyek kiválasztásakor ismét nagy gondot forditottunk arra, hogy úgy az inga, mint az óra, egyenletes hőmérsékletű, rázkódtatásmentes helyiségekben legyen felállitva. Az észlelőhelyek megválasztását megnehezitette az a körülmény, hogy ugyanott telefonnak is kellett lennie.

A mérésbe bevont állomások a következők voltak (*3. ábra).*

1. A *Tudomány Egyetem* első *Fizikai Intézete.* Az ingák itt az alagsori helyiségben lengtek.

2. Az óbudai ú. n. *szentendrei úti elemi iskola.* Észlelőhelyül az alagsori fürdőszoba öltözője szolgált.

3. *Mátyásföld.* Itt Ehmann Aladár főmérnök úr villájának pincehelyiségében találtak az ingák elhelyezést.

4. A *rákosfalvi* elemi iskola pincéje.

5. A m. k. *Földtani Intézet.* Az alagsori kazánház szolgált észlelőhelyül.

6. *Dunaharaszti.* A községházzal szemben levő s ugyancsak a község tulajdonában levő épület pincéjében állitottuk fel a műszereket.

7. Kispesti községház pincéje.

A mérés eredményeit az 57. oldalon levő táblázatban foglaltam össze.

Az egyes állomások magassági adatait, kivéve a *Fizikai Intézetét*, melyet szintezéssel mértünk, barométeres magasságméréssel TRÁJBER ISTVÁN adjunktus úr határozta meg. A méréshez két SHORT-féle szabatos aneroidot és egy hypsometert használt, kiindulópontul mindig a műegyetemi szintezési főalappont szolgált.

Meg kell említenem, hogy a *Fizikai Intézetben 1893-ban* a *Katonai Földrajzi Intézet* is végzett relativ ingaméréseket és pedig ugyancsak az alagsori helyiségek egyikében, de nem az általunk választott műhelyteremben. E mérésekben az ingák fali állványon voltak elhelyezve s amennyire azt megállapíthattam, mintegy *1,10 m*-el voltak magasabban, mint az én méréseimben. Eredményük a következő.

$$g = 980{,}844\ \mathrm{cm/sec^2}$$

a *potsdami rendszerben* és pedig a

$$\varphi = 47^\circ\ 29'\ 43''$$
$$\lambda = 19^\circ\ \ 3'\ 50''$$
$$m = 122\ \mathrm{m}$$

adatokkal definált helyen.

A nehézséggyorsulás értéke nagyon jól egyezik avval az értékkel, amit a szerző kétségkívül jobb műszerrel és módszerrel, vagyis pontosabban megállapitott. Megjegyzem, hogy az $m = 122\ m$ érték kétségtelenül hibás, az mintegy *105* lehetett a STERNECK-féle mérésekben. Ugyanis mi itt az ingák súlypontmagasságát szintezéssel vezettük le a fővárosi magassági hálózat egy közeli pontjából, vagyis a mi adatunk, mint tengerszínfeletti magasság kétségkívül néhány *dm*-re jó.

Oltay Károly.

III. Táblázat.

1916. évi ingamérés.

Folyószám	Állomás	Az állomás adatai: Földr. szélesség	Földr. hosszúság *Gr.*-től	Magasság A. f.	A tengerszínig terjedő réteg sűrűsége	Mért nehézség-gyorsulás	Reduktió a tengerszínre		A tengerszínre redukált nehézség-gyorsulás		A nehézség-gyorsulás teoretikus értéke	Eltérés a tengerszini mért és a teoretikus érték közt	
		φ	λ	m		g	Δg_1	Δg_2	$g_0=g+\Delta g_1$	$g_0'=g+\Delta g_1+\Delta g_2$	γ_0	$g_0-\gamma_0$	$g_0'-\gamma_0$
1	Műegyetem G. P. —	*47° 28,82'*	*19° 3,2'*	*105,6*	*1·9*	**980, 852**	*+32*	*— 8*	*980, 884*	*980, 876*	*980, 841*	*+43*	**+35**
2	Fizikai Intézet — —	*47 29,72*	*19 4,0*	*103,7*	*1·9*	**846**	*+32*	*— 8*	*878*	*870*	*842*	*+36*	**+28**
3	Földtani Intézet —	*47 30,36*	*19 6,4*	*118*	*1·9*	**843**	*+36*	*— 9*	*879*	*870*	*842*	*+37*	**+28**
4	Rákosfalva — — —	*47 30,52*	*19 8,9*	*117*	*1·9*	**841**	*+36*	*— 9*	*877*	*868*	*842*	*+35*	**+26**
5	Mátyásföld — — —	*47 30,68*	*19 12,0*	*146*	*1·9*	**845**	*+45*	*—11*	*890*	*879*	*843*	*+47*	**+36**
6	Kispest — — — —	*47 26,98*	*19 9,2*	*118*	*1·9*	**822**	*+36*	*— 9*	*858*	*849*	*837*	*+21*	**+12**
7	Dunaharaszti — —	*47 21,34*	*19 5,2*	*103*	*1·9*	**819**	*+32*	*— 8*	*851*	*843*	*829*	*+22*	**+14**
8	Óbuda-Aquincum	*47 33,44*	*19 3,0*	*101*	*1·9*	**856**	*+31*	*— 8*	*887*	*879*	*847*	*+40*	**+32**

LES RÉSULTATS DES MESURES DE LA PESANTEUR DANS LES ENVIRONS DE BUDAPEST.

Pour les travaux géophysiques du célèbre physicien baron Roland Eötvös, l'auteur a mesuré en plusieurs points de Budapest et de ses environs l'intensité de la pesanteur. Dans ses mesures il a évité de déterminer directement la marche de la pendule de coïncidence, mais il la comparait par les lignes des réseaux téléphoniques avec la pendule normale de l'École polytechnique supérieure à Budapest. L'article fait connaître la méthode de l'auteur et les résultats de ses mesures.

Ch. Oltay.

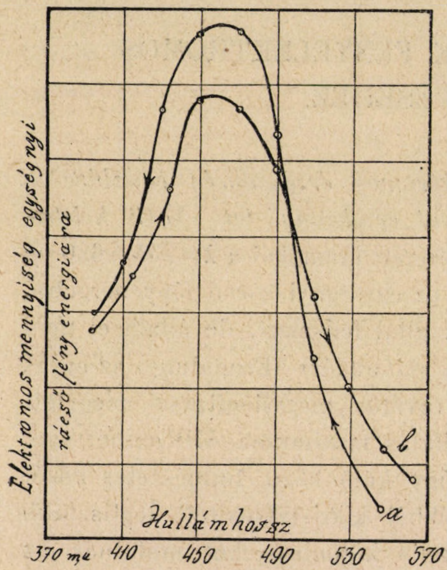
NaCl-KRISTÁLYOK FÉNYELEKTROMOS VEZETÉSÉHEZ.

Összefoglalás. *A fényelektromos érzékenység eloszlása a spektrumban* Röntgen-*sugárral érzékennyé tett NaCl kristályokban.* Mértem a fényelektromos áramokat a $\lambda = 254-680$ $\mu\mu$ intervallumban, vonatkoztatva az egységnyi ráeső fényenergiára. (4. ábra). Emellett a Röntgen által felismert, de általa el nem kerülhető hibaforrás az ú. n. «kifáradás» (Ermüdung) az egyes mérések között beiktatott ultravörös megvilágítással meg lett szüntetve. A fényelektromos hatás maximuma 470 $\mu\mu$-nél van. Ez az eredmény érvényes úgy különböző természetes kősó-kristályokra, mint az olvadékból kikristályositott legtisztább *NaCl*-ra (5. ábra). Individuális különbségeket mutatnak az egyes kristályok a görbék szélességében, viszonyitva a maximum magasságához.

Változások a spektrumbeli eloszlásban rövid hullámokkal való előzeles megvilágítás hatására. Ha a kristályt előzetesen fényelektromosan hatékony fénnyel elektromos térben vagy anélkül megvilágitjuk, az érzékenység tovább tolódik el a hosszabb hullámok felé (6. ábra). A mérések abban haladják túl Röntgen méréseit, hogy a kristályok minden egyes mérés előtt jól definiált kezdeti állapotba voltak hozhatók. Rövid rámutatás ezen jelenség magyarázatára, a Röntgen-besugárzott kősónak eközben felfedezett phosphorescentiája által.

1. §. Röntgen és Joffé felfedezték, hogy bizonyos kristályok Röntgen-fény hatására oly változásokat szenvednek, hogy később látható fénnyel való megvilágítás esetén elektromos mezőben oly jelenségeket mutatnak, melyeket ma kétségtelenül fényelektromos vezetésnek lehet nevezni.

Röntgen ezen jelenséget *NaCl* esetén igen kimerítően vizsgálta és a spektrumbeli eloszlását megállapitotta. Röntgen az ő eredményeit az 1. ábra *a)* és *b)* görbéjében foglalta össze.[1]



1. ábra. Természetes *NaCl* Röntgen szerint.

A nyílak a mérések egymásutánját mutatják a hosszabb hullámoktól kezdődőleg. — Ezen még nem teljesen kielégítő eredmények megértéséhez ismerni kell a nehézségeket, melyekkel Röntgen küzdött: a fényelektromos áram idővel változott, minek magyarázatáúl Röntgen[2] három különböző okot talált és élesen különböztetett meg:

1. A Röntgen-fény által létrehozott állapot, röviden «színezés»[3] az idő folyamán lassanként eltűnik. Azonkívül ezt az «elszíntelenedést»[4] fényelektromosan hatékony fény sietteti.[5]

2. A fényelektromos áram polarisatiót hoz létre. Mihelyt az elektromos térben töltések ellentétesen mozognak, belső, ellentétesen irányitott mezők keletkeznek.

3. Fényelektromosan hatékony fénnyel való megvilágítás a kristályban ideiglenes érzékenységcsökkenést hoz létre, ez a

---

[1] Röntgen napfényt használt és az egyes spektrumrészek energiáit Langley méréseiből vette.

[2] W. C. Röntgen és Joffé. Ann. d. Phys. (4.) 64. 1. 1921.

[3] A szineződés csak intenziv Röntgen-sugárzás után vehető észre, mint barnássárga szín.

[4] Nehány száz foknyi hőmérsékleten az elszíntelenedés egy percnél rövidebb idő alatt lejátszódik és a közben szabaddá váló energia részben mint fényes thermoluminiscentia fény jelentkezik.

[5] Újabban igazolva P. L. Bayley által, Phys. Rev. 24., 495. 1924.

«kifáradás» (Ermüdung). Ezt sötétben órák leforgása alatt «megújhodás» (Erholung) követi.

RÖNTGEN törekedett ezt a három hibaforrást kiküszöbölni, de ez lényegében csak a polarisatióra sikerült. E célból ő minden egyes mérés végén megmérte azt az elektromos mennyiséget, ami rövidre zárt elektrodok, de változatlan megvilágítás mellett ellentétes irányban folyt. Ezt az elektromos mennyiséget RÖNTGEN hozzáadta az azelőtt a külső térben észlelt elektromos mennyiséghez. Ezen eljárásnak egyszersmind az az előnye is megvan, hogy a külső elektromos tér nélküli megvilágítás alatt e polarisatio megszűnt és így a következő mérések alatt nem növekedett tovább és tovább. Ezzel szemben a másik két hibaforrás, az «elszíntelenedés» és «kifáradás» az újabb megvilágítással még csak növekedtek. RÖNTGEN ezt figyelembe is vette és így magyarázza a kevésbé kielégítő voltát ismételt méréseinek és jobb hiányában időbeli középértékeket vett.

Újabban a fényelektromos vezetőképességet illető más vizsgálatoknál a kezdetleges állapot helyreállítására igen jól bevált egy eljárás, ami abban áll, hogy a kristályt minden mérés után vörös vagy ultravörös sugarakkal világítjuk meg.[1] Ez a fogás a kősónál is teljesen bevált. Az elszíntelenedés gyengébb, a kifáradás teljesen kimarad és a polarizáció épúgy megszűnik, mint RÖNTGEN-nél. Az eredmény, amint a 2. §-ban látható lesz, a spektrumbeli eloszlási görbének a legpontosabb ismételhetősége.

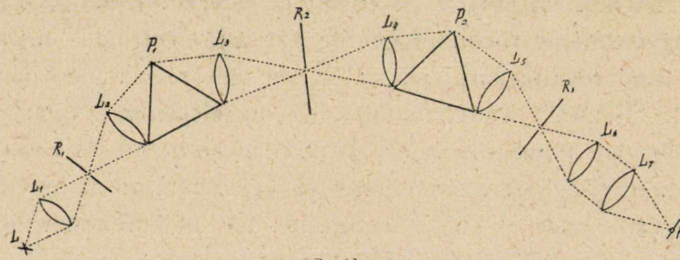
2. §. A kísérleti berendezés[2] 2. és 3. ábra, egy kettős monochromatorból állott eltolható középső réssel.[3] Az R_1 R_3 közötti részek (2. ábra) az R_2 eltolható résre nézve teljesen symmetrikusak, minek következtében R_2-t a P_1 prisma spektrumában eltolva az R_3 résre a színképnek más és más része esik, de a symmetriai

[1] B. GUDDEN und R. POHL Zschr. für Phys. 3. 123. §. 3. 1920.

[2] A készülékek egy részének költségeit POHL professzor közbenjárására a «Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaften» fedezte.

[3] H. LEHMANN, Ann d. Phys. (4.) 5. 633. 1901.

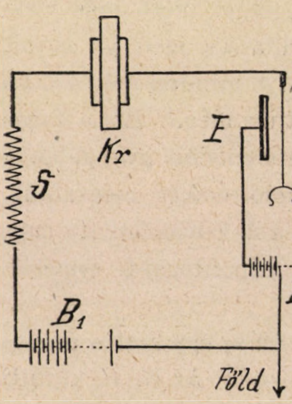
okokból mindig ugyanarra a helyre, minek következtében a kristály az R_2 eltolásával más és más szinnel lesz megvilágitva. Rendelkezésemre állott egy teljes achromatikus üveg és



2. ábra.

egy teljes quarcoptika. Fényforrásul egy 100 gyertya erősségű WOLFRAM spirallámpa és egy 500 wattos *Hg* lámpa szolgált.

A kristályok nagysága kb. $10 \times 5 \times 3$ mm volt. A szineződés 30 percnyi besugárzás által történt egy RÖNTGEN-lámpa WOLFRAM antikathodjától 30 cm távolságban. Az elektródok (10×5) RÖNTGEN eljárása szerint grafitrétegből állottak a mattra csiszolt kristályfelületeken. A kristály, hogy tartósan jól szigeteljen, egy fűthető skatulyában volt elhelyezve, melynek hőmérséklete elektromos úton állandóan 60° körül volt tartva. Minden mérés után egy egyszerű művelettel a thermo-oszlop a kristály helyére volt hozható.



3. ábra.

Egy teljes mérési sorozat az 1. táblázatban van feltüntetve, honnan látható, hogy milyen különböző energiaértékek jöttek alkalmazásba, különösen kicsinyek a WOLFRAM-lámpa viola részében.

---

[1] Az egyfonalas elektrometert SPERBER intézeti mechanikus tervezte és készítette, egyszerűsége mellett megbizható és olcsóbb, mint más hasonló készülékek és előadási vetítésekre is alkalmas.

I. Táblázat.

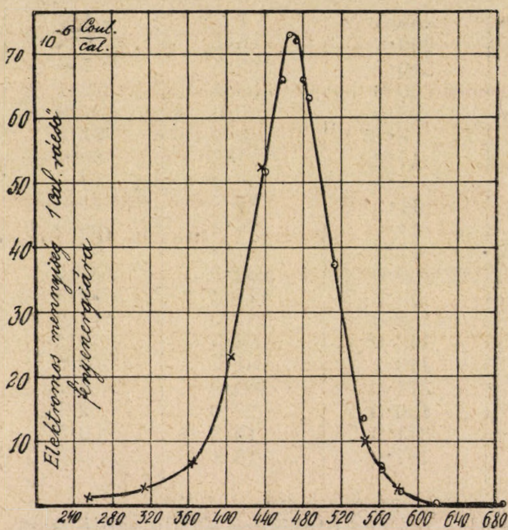
A mérések sorrendje	Hullámhossz $\mu\mu$	Ráeső energia E $Cal.\ 10^{-7}$	Észlelt elektromosság-mennyiség Q $Coul.\ 10^{-12}$	$\frac{Q}{E}$ $10^{-6}\ \frac{Coul.}{Cal.}$
3	254	54·5	7·7	1·4
4	313	230·0	65·1	2·8
5	365	240·7	169·5	7·0
2	405	60·8	138·4	22·7
1	436	38·0	196·0	51·5
17	440	8·25	42·4	51·5
16	458	17·2	111·8	65·0
15	465	9·5	69·2	73·0
14	472	11·9	84·8	71·0
13	479	14·6	96·2	66·0
12	485	17·2	107·9	62·5
11	513	60·0	202·3	37·2
10	543	85·8	119·3	13·9
7	546	162·0	181·0	11·2
20	561	143·0	88·5	6·2
9	563	110·3	61·5	5·6
6	579	374·0	100·0	2·7
8	581	130·0	27·0	2·1
19	618	374·0	19·2	0·5
18	688	787·0	15·4	0·2

A polarisatio és kifáradás megszüntetésére alkalmazott fogás, nevezetesen a mérés után való megvilágítás ultravörössel, csupán arra szolgál, hogy e hibák összegeződését egy hosszabb mérési sorozat alatt megakadályozza, azonban azt, hogy az egyes mérések alatt kifejlődő polarisatio és kifáradás következtében a mért elektromos mennyiségek ne legyenek kisebbek a valódi értékeknél, nem tudják megakadályozni. A polarisatio és kifáradás hatása az egyes mérések tartama alatt mindjárt abban nyilvánul, hogy a mért elektromos mennyiség nem arányosan nő a ráeső fényenergiával,[1] vagy más szavakkal, a fényelektromos áram az idővel csökken. A tapasztalat szerint ez a zavaró hatás csak nagyobb fényerők vagy hosszabb megvilágítások után lesz mérhető és ezért az alkalmazott fényerősségek közbeiktatott szűrőernyők (átlyukgatott pléhlapok) segélyével oly-

[1] Lásd J. BINGEL, Zschr. f. Phys. Bl., 229. 7. ábra, 1924.

annyira le lett kisebbítve, hogy a zavaró hatások még nem fejlődtek ki érezhetően.

A 4. ábra az eredményeket görbében tünteti fel. Ezen görbe hasonlósága a szelektiv photoeffektus görbéjével meglepő;[1] a Röntgen méréseivel való megegyezése — melyek szűkebb spektrum-részre szorítkoztak — (1. ábra) kielégítő.



4. ábra.
Természetes *NaCl.* Nro 3. (3×5·8×12·7 mm.)
× *Hg* } lámpa. 1900 $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ térerősség.
○ *Wo* }

3. §. A 4. ábra görbéjét egy Wielickából való természetes kősókristályon nyertük. Ez valószínűleg lényegében az elnyelési színképét adja[2] a finoman eloszlott natriumnak, mely a Röntgen-sugár hatására a kristályrácsból kiválott és talán egyes neutralis atomok formájában a kősó ionrácsába mint idegen test van beékelve.[3]

Ez a gondolat erős támaszt nyerne, ha egészen tiszta synthetikus *NaCl*-kristályokon is a spektrumbeli eloszlásra ugyanezt a képet nyernők, mint a természetes ásványon, amelynél

[1] Gudden és Pohl nemsokára ezen összefüggést tárgyalni fogják. Nekik sikerült az alkali fémek szelektiv photoeffektusának jelenségét, melyet eddig csak az Elster és Geitel szerint készített légüres cellákban lehetett előállítani, már évekkel ezelőtt szilárd testek belsejében, pontosan mondva két szilárd test határrétegében kimutatni és kimérni.

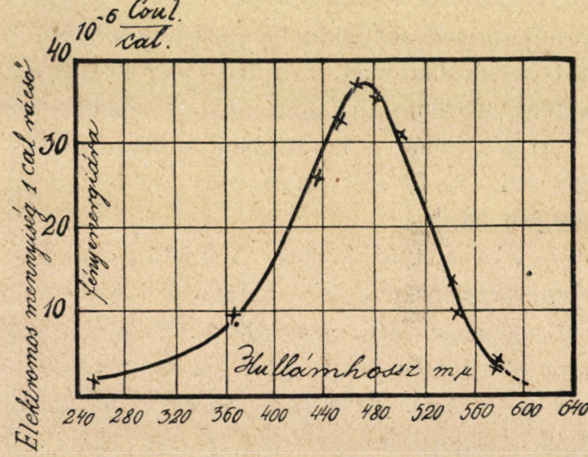
[2] Ha minden fényquantum egy elektront szolgáltat, amint azt Gudden és Pohl gyémánt és zinksulfid fényelektromos vezetése esetére bebizonyították. Zschr. f. Phys. 17., 196. 1923.

[3] K. Przibram, Zschr. f. Phys. 20., 196. 1923., különösen 204. oldal.

mindig közelfekvő a gyanu, hogy ismeretlen szennyeződések lényeges szerepet játsszanak.

VÉSZY úr, TAMMAN professzor intézetében megolvasztott *NaCl* purissimum-ot (MERCKTŐL) platinatégelyben és lassú lehűtés által teljesen tiszta, simán hasadó kristályokat állított elő. Az ő szívességének köszönök nehány szép synthetikus kristályt. Ezeket 5 percig tettük ki 17 cm távolságban a Wo-antikathodtól egy technikai RÖNTGEN-cső hatásának. A sárgásbarna színeződés teljesen megfelelt a természetes kősó színeződésének, de lényegesen kevésbé volt tartós.

A mérési eredményeket az 5. ábra tünteti fel. Amint látjuk, az érzékenység kisebb, mint a 4. ábrában. A maximum ugyan-



5. ábra.

Mesterséges *NaCl* (3×6·7×11·5 mm)

1900 $\frac{\text{Volt}}{\text{ám}}$ térerősség.

azon a helyen van, a görbe menete egészében egy kissé laposabb, a maximum a görbének a rövid és hosszú hullámoknál ellaposodó részeihez képest kevésbé magas.

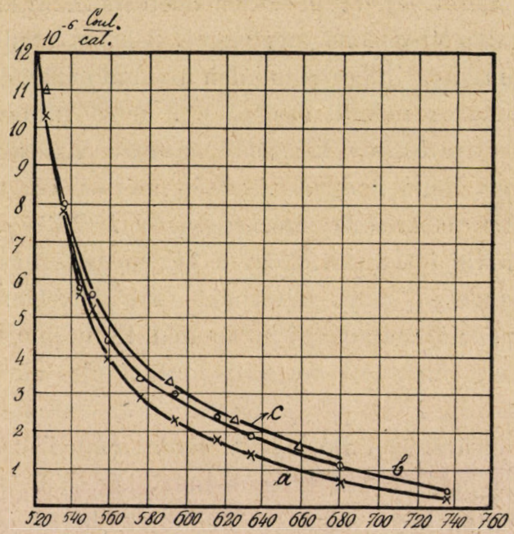
Hasonlót lehet megfigyelni erősen elszíntelenített természetes kristályokon. Erről a kérdésről egy későbbi dolgozatban reméllietőleg többet mondhatunk, mikor is az érzékenység és a színeződés és elszíntelenedés között közelebbi összefüggést próbálunk találni. Egyelőre azonban egészen biztos az a megállapítás, hogy a legtisztább synthetikus eredetű *NaCl* kristályok az érzékenységnek ugyanazt az eloszlását mutatják a spektrumban, mint a természetes, Röntgen által vizsgált kristályok.

4. §. Fennebb említettem, hogy hosszú hullámokkal való megvilágítás a kezdetbeli állapot helyreállítására szolgál, azaz rövid idő alatt sokkal tökéletesebb megújhodást hoz létre, mint a Röntgen által alkalmazott több órán át sötétben való pihentetése a kristálynak. Közelfekvő volt tehát a hosszú hullámok hatását elektromos úton vizsgálni. Ezen célból mértem a hosszú hullámok hatását kétféleképen, nevezetesen először, ha a kristály előzetesen erősen ható fénnyel lett megvilágítva, tehát kifáradt, másodszor pedig ha a kristály teljesen friss vagy megújhodott állapotban volt. Meg kell különböztetnünk két esetet: *a)* a fényelektromosan hatékony megvilágítás elektromos mezőben történik (tehát a kristályban «kifáradás» és «polarisatio» keletkezik) és *b)* elektromos mező nélkül (tehát csupán «kifáradás» jön létre).

Először a *b)* esetet tárgyaljuk. A kristály minden észlelés előtt a fényelektromosan erősen hatékony 436 $\mu\mu$ hullámhosszal 30 másodpercig lett megvilágítva. Ekkor kapcsoltam a kristályra az elektromos feszültséget és egy bizonyos hullámnak mértem a hatását. Erre következett 2 percig ultravörös megvilágítás (ívlámpafény 0·5 mm vastag ebonitszűrőn át), hogy újra a kezdetbeli állapotot állitsuk elő. Erre következett újra a kékmegvilágítás és a mérés egy másik hullámmal. A 6. ábra *a)* görbéje az ismétlése az *A* táblán és 4. ábrán bemutatott méréseknek egy másik kristályon «megújhodott» állapotban. A *b)* görbe mutatja a megfelelő színképi eloszlást az előzetesen megvilágított («kifáradt») kristályon. Amint látjuk, a hatás a hosszabb hullámok felé tovább haladt. A rövidebb hullámok oldalán ellenben semmi különbséget sem lehet megállapitani. Ez utóbbi eredmény $\lambda = 254$ $\mu\mu$-nél külön mérésekkel meg lett állapítva. A lényeges eredmény az, hogy a hosszú hullámok hatékonysága maga ezen növekedés megszüntetésére vezet és pedig 760 $\mu\mu$-nél nagyobb hullámok esetén teljesen. A kristály újra a kiindulási állapotába jön, a kifáradás megszűnik. Valamivel bonyolultabb a dolog az *a)* esetben, ha az előzetes megvilágítás elektromos mezőben történik. A «kifáradáshoz» most jelentékeny «polarisatio» járul. Ennélfogva az észlelt elektromos mennyiségek lényegesen kisebbek, mint az a külső feszültségnek és a fényerőnek megfelelne. A hosszú hullámok hatását tehát nem hasonlíthatjuk minden további nélkül össze az előzetes megvilágítás nélküli esettel, t. i. most számba kell még vennünk a «polarisatio» kisebbítő hatását. Ezt olyan módon érjük el, hogy minden egyes esetben mérjük kék megvilágítás előtt és után a kristály érzékenységét $\lambda = 436$ $\mu\mu$-nél. Ez a mérés oly rövid ideig tart, hogy a kék megvilágítási viszonyok ezalatt lényegesen nem változnak. Erre következett aztán a mérés a megfelelő hosszúságú hullámmal. Ez utóbbi mérés eredménye oly arányban lett megnagyobbítva, mint amilyen arányban a második $\lambda = 436$ $\mu\mu$ mérést meg kell nagyobbítani, hogy az az elsővel egyenlő legyen. Ilyen módon számba véve a «polarisatio» hatását, azt találjuk most is, mint a 6. ábra *a)* görbéje mutatja, hogy a hosszú hullámok hatása a «kifáradt» kristályra most is nagyobb lett.

Az itt észlelt érzékenységi eltolódás természetesen egészen ugyanaz, mint Röntgen talányos «kék utóhatása vörösre». Mi csak azt a lényeges haladást értük el, hogy a színképbeli eloszlást mindig jól meghatározott kezdetbeli állapotokon mérhettük. Az egyik esetben a kristályunk egy bizonyos előzetes megvilágítás által jól meghatározott módon változott meg; a másik esetben pedig ultravörös megvilágítás által minden változás meg lett szüntetve. A hosszú hullámok csupán a rövid hullámok által már megváltoztatott kristályban hatnak és nem a változatlan kristályban (lásd 6. ábra). Röntgen ellenben az ő méréseinél lépésről-lépésre ment a hosszabb hullámoktól rövidebb hullámokhoz és újra vissza és így a kristály folytonosan változó és ismeretlen állapotban volt.

5. §. A 4. §-ban végzett észleléseknek az egyezése GUDDEN és POHL-nak [1] a gyémánton végzett észleléseivel nyilvánvaló. Úgy itt, mint ottan, a hosszú hullámokra érzékenységnövekedés lép fel, mint következménye annak, hogy bizonyos centrumokból fényelektromos úton egy (vagy több) elektron ki lett váltva. Különböző a két esetben az a tény, hogy *NaCl* ese-



6. ábra.

Természetes *NaCl*, N^{ro} 2 (2·3×3·6×12 mm)

a) × ×× előzetes megvilágítás nélkül.

b) ○○○ 30 sec előzetes megvilágítás elektromos tér nélkül.

c) △△△ 30 sec. előzetes megvilágítás elektromos térrel.

tében előzetes megvilágítás elektromos tér nélkül is ugyanazt a hatást hozza létre, mint megvilágítás elektromos térben. Hasonló jelenséget mutatnak azonban a phosphoreszkáló zink- és alkáli földfémsulfidok, amelyek a nagy törésmutatójú ($n>2$) fényelektromosan vezető kristályokhoz tartoznak. Tehát szép igazolása GUDDEN és POHL [2] felfogásának a phosphorescencia

[1] GUDDEN és POHL. Zschr. f. Phys. 30, 14, 1924.

[2] GUDDEN u. POHL. Zschr. f. Phys. 21. 1. 1924.

és fényelektromos vezetésről, hogy a Röntgen-fénnyel besugárzott $NaCl$ is, mint tipikus phosphor viselkedik. Ezen jelenségeket optikai szempontból tárgyalja Frum most lezárt dissertatiójában[1] és itt a «kifáradás»-nak világos magyarázatát adja, amit mi tisztán formailag kezeltünk.

A röntgenbesugározta $NaCl$ és nagy törésmutatójú kristályphosphorok között itt felállított parallelizmusból azonban nem szabad még következtetni, hogy az összes vezetési jelenségek a Gudden és Pohl[2] által megkülönböztetett kristálycsoportokban azonosak. Erre nézve megemlítjük, hogy $NaCl$-nál hiányzik a telítési feszültség és továbbá nem ismerjük még az összefüggést a fény absorptiója és a kiváltott elektromos mennyiség között.

Végül köszönetemet fejezem ki a magyar «Tudománymentő bizottságnak» a számomra 1924 decemberében tanulmányi segélyként kiutalt 2.000,000 K-ért.

Göttingen, I. sz. egyetemi physikai intézet, 1924. dec. hó.

Gyulai Zoltán.

SUR LA CONDUCTIBILITÉ PHOTOÉLECTRIQUE DES CRISTAUX DE $NaCl$.

Les cristaux naturels et synthétiques de $NaCl$ prennent une couleur jaunâtre sous l'influence des rayons X, et les cristaux ainsi colorés deviennent conducteurs sous l'influence de la lumière. Avec une tension d'environ 2000 Volt/cm et observant la charge avec un électromètre, on a déterminé la charge produite par chaque unité d'énergie incidente dans la région du spectre entre les longueurs d'onde 254 et 680 $\mu\mu$. La courbe trouvée ressemble d'une manière frappante á celle de l'effet photoélectrique sélectif du sodium; elle a un maximum à $\lambda = 470\ \mu\mu$. Les phénomènes génants comme la polarisation et la fatigue furent éliminés par l'éclairage avec de la lumière ultrarouge, d'après la méthode de MM. Gudden et Pohl. L'éclairage précédente avec la lumière de la région la plus effective (bleu) augmente beaucoup l'action des ondes longues.

Göttingen, décembre 1924. *Z. Gyulai.*

---

[1] Frum., Zeitschr. f. Phys. (legközelebb meg fog jelenni).

[2] Zschr. f. Phys. 16. 170. §. 1. 1924.

A QUANTUMEGYENLŐSÉG A *NaCl*-KRISTÁLYOK FÉNYELEKTROMOS VEZETÉSÉNÉL.

Összefoglalás.

A közlemény tartalmazza: 1. a Röntgen-fénnyel megfestett kősó fényelektromos vezetésének színképbeli eloszlását, vonatkoztatva az elnyelt fényenergia egységére.

2. A kiváltott fényelektromos elektronok mennyisége az egész elnyelési sávban arányosan nő a hullámhosszal. Ezzel a fényelnyelésnek quantumszerű jellege be van bizonyítva.

3. Abszolút mérések szerint azonban csak minden 10,000 fényquantum szolgáltat egy elektromos elemi töltést. Ebből az következtethető, hogy a fény által kiváltott töltések középértékben csak mintegy $^1/_{3000}$ mmnyi utat tesznek meg. Ezen érték viszont nagyobb lesz, ha nem szolgáltat minden egyes elnyelési folyamat valóban egy elektront.

1. §. Gudden és Pohl megmutatták, hogy azokra az elektronokra vonatkozólag, melyeket a fényelektromos primär áramban (primär és secundär áram Gudden és Pohl definiciója szerint) megfigyelünk, a quantumegyenlőség ki van elégítve; minden egyes Planck-féle $h\nu$ energiaérték valóban egy elektront szolgáltat. Ugyanis az elektronok száma, vonatkoztatva az elnyelt fényenergia egységére, arányosan nő a hullámhosszal és az arányossági tényező valóban $\frac{1}{hc}$-nek adódik.

Gudden és Pohl [1] méréseiket gyémánt és cinkszulfid kristályokon végezték. Mindkét kristály a kristályok azon csoport-

---

[1] B. Gudden és R. Pohl: Zeitschrift f. Phys. 17. 331. 1923.

jába tartozik, melyeknél a fényelektromos vezetőképesség az illető anyag nagy fénytörő-képességével áll összefüggésben. És pedig a vezetőképesség az abszorpció azon tartományába esik, hol a mm-re számított abszorpciós koefficiens mérhetetlen kis értékektől egészen az egységig nő.

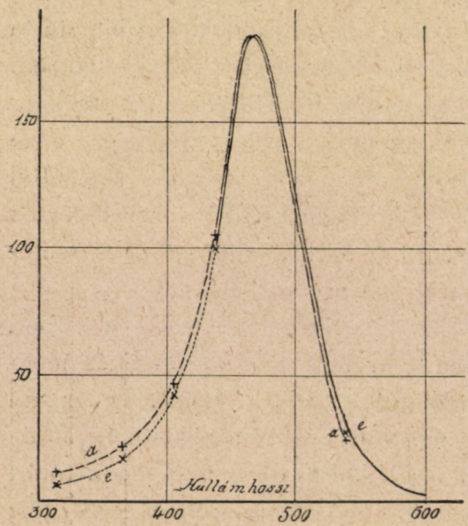
A fényelektromosan vezető kristályoknak ezen csoportja mellett van még egy második csoport: ebben vannak kristályok alacsony, < 2 törésmutatóval és a vezetőképesség csak akkor lép fel, ha a kristályok bizonyos kezelésen estek át. Mint ilyen kezelés mindenekelőtt RÖNTGEN- és korpuszkuláris sugaraknak a hatása jön tekintetbe. Ezek a sugarak többé-kevésbbé észrevehető szineződést hoznak létre, amely nem tartozik az illető kristályrács tulajdonságai közé. A fényelektromos vezetőképesség éppen abban a spektrumtartományban jön létre, amelyben ezen szineződés okozói abszorbeálnak. Ezt kimutatta RÖNTGEN a RÖNTGEN-sugarak által sárgára festett $NaCl$ esetében. A fényelektromos vezetőképességnek eloszlása a színképben egyenlő ráeső fényre vonatkoztatva $NaCl$ esetében erősen szelektív. Ezen eloszlást nemrégiben a GUDDEN és POHL által bevezetett módszer segélyével kimértem és oly eloszlási görbét találtam, amely nagyon hasonlít a szelektív fotoeffektus esetében észlelt görbefajtához (az 1. ábra c görbéje).[1]

Jelen vizsgálatok célja volt a spektrumbeli eloszlás képét, vonatkoztatva az elnyelt fényenergiára megállapitani és megvizsgálni, hogy vajjon a $NaCl$-nál, — mint a fényelektromosan vezető kristályok második csoportjának typikus képviselőjénél — a quantumegyenlőség teljesül-e? Amint GUDDEN és POHL többször megmutatták, $NaCl$-ban az elektronok csak oly kis utat futnak meg, mely a kristály d vastagságának csak kis tört része. Ennek következtében minden elektron csak töltésének $\frac{x}{d}$-ed részével nyilvánul a mérő eszközben. Ennélfogva legfölebb csak azt lehet várni, hogy az egységnyi abszorbeált fény-

[1] GYULAI Z. Zeitschr. f. Phys. 31. 296. 1925.

energiára vonatkoztatott elektronok száma a hullámhosszal arányosan nő. Azonban nem lehet arra számítani, hogy az arányossági tényező $\frac{1}{hc}$ lesz, mint gyémánt és ZnS esetében volt, melyeknél az elektronok veszteség nélkül elérik az elektródokat.

Jelenleg van az irodalomban egy megjegyzés, mely a kérdést negatív színben tünteti fel. Ugyanis P. PRINGSHEIM[1] írja, hogy A. JOFFÉ szóbeli közlése szerint az elektronoknak az abszorbeált fényenergia egységére vonatkoztatott száma egy az abszcissza tengellyel *párhuzamos* egyenessel ábrázolható. Ez azt jelentené, hogy a fényelektromos vezetésnek a görbéje — egyenlő ráeső fényenergiára vonatkoztatva — teljesen összeesne az elnyelési görbével; miszerint az előbbi nem jelent egyebet, mint a fényelnyelési spektrumnak elektromos úton való kimérését.



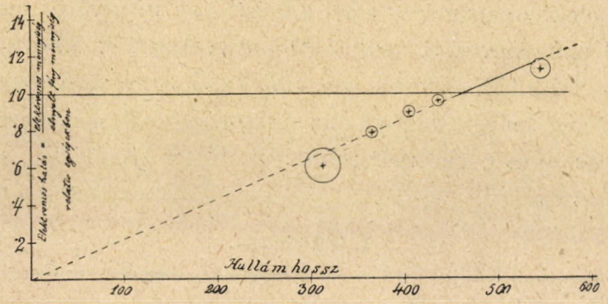
1. ábra.

Valóban a két görbének — nevezetesen az elektromos vezetési és fényelnyelési görbéknek — az egyezése igen messzemenő. A következőkben röviden összefoglaljuk az eredményt: Az 1. ábrában az *a* görbe a fényabszorpció, az *e* a fényelektromos vezetésnek a görbéje. *a* adja az elnyelt fénymennyiség mértékét, *e* pedig az elektronok számát, mindkettőt egyenlő ráeső fényenergiára vonatkoztatva. Látható, hogy

[1] P. PRINGSHEIM: Lichtelekt. Wirkung und Photolumineszenz. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften 1. 334. 1922. Verl. J. Springer, Berlin.

a fényabszorpció görbéje a rövidebb hullámhosszak irányában el van tolva és az ultraviola részben kevésbbé meredeken esik le. Ilyen kis különbségek azonban mindaddig nem voltak észlelhetők, amíg az elektromos görbét GUDDEN és POHL eljárása nélkül állapították meg, mely eljárás lehetővé teszi, hogy a fényelektromos áramok függetlenül a kristály előbbi kezelésétől ismételhető módon előállíthatók.

A két görbe által ábrázolt számoknak a hányadosa adja az elektronok számát az egységnyi abszorbeált fényenergiára vonatkoztatva, mint a hullámhossz függvényét; a 2. ábra adja



2. ábra.

az eredményt, ez egy egyenes, mely a hullámhosszak nulla pontján megy át. Tehát valóban érvényes, hogy $N = \text{const}\ \lambda$. Az állandó $0{\cdot}00014/hc$.

A következőkben a kísérletek keresztülvitelét részletezzük.

2. §. Az abszorpciós görbe (az 1. ábra *a* görbéje) meghatározása ELSTER és GEITEL fényelektromos fotométeres eljárása által történt. Uviol-üvegből készült káliumcellát használtam. A fényelektromos áramot egyfonalas elektrométerrel mértem a feltöltési módszer szerint. Fényforrásul 500 wattos quarc Hg-lámpát használtam. A spektrum előállítása eltolható középső réssel ellátott kettős monochromátorral történt. Rendelkezésemre állottak flintüveg, közönséges üveg és quarcprismák.

A $NaCl$ kristályok víztiszta darabok voltak Staszfurtból, 3 cm quadratikus darabok 12—25 mm vastagsággal. A színezés 8600 R egységgel (a berlini Phys. tech Reichsanstalt egysége) történt 200 kilo-volt csőfeszültség mellett; a kristályok szine egyezett a szép világos borostyánkő színével.[1]

A fénynek a felületeken történt visszaverődéseiből származó csökkenése gyakorlatilag volt kiiktatva, nevezetesen egyenlő vastag, de nem színezett darabok jöttek alkalmazásba és a fénynek a gyengülése mindig egy ilyen darabon átment fényerősségéhez lett viszonyítva. Egy szánszerű tolóka segélyével e kristályok váltakozva lettek a fény útjába állítva. A kristályokat minden abszorpciós észlelés előtt diamantinnal selyem darabon abszolút alkohollal fényesen csillogóra csiszoltam. Minden elektromos mérés előtt a kristályok ultravörös megvilágítás által az úgynevezett kezdeti állapotba hozattak. Az abszorpciónak hosszabb kék és vörös megvilágitás esetén való csökkenéséről, illetőleg növekedéséről [az abszorpció változása gerjesztett (erregt) és nem gerjesztett (unerregt) *NaCl* foszfornál] közelebb fogok beszámolni.

I. Táblázat.

	I.				II.				III.				IV.
	Abszorpciós állandó α po $mm^{-1} \times 10^{-3}$				5 $m/_m$ vastag rétegben abszorbeált százaléka a ráeső fényenergiának $\overline{}1-e^{-\alpha d}$				Ugyanaz egy hullámhossznál egyenlő értékre számitva				Középérték a III-ból
Kristály	10	11	6	12	10	11	6	12	10	11	6	12	
313	3·3	2·7	21	2·2	1·65	1·35	1·05	1·1	12·6	11·8	10·3	10·9	11·3
365	6·1	5·1	4·3	4·45	3·0	2·5	2·15	2·22	23	22	20·6	21·7	21·9
405	12·8	11·4	10·0	9·9	6·0	5·5	4·84	4·78	46·3	48	47	46·9	46·7
436	29·5	25·6	22·6	22·7	13·6	12·0	10·8	10·7	105	105	105	105	105
546	5·5	5	4·3	4·4	2·7	2·5	2·1	2·2	20·9	22	20·4	21·5	21·2

Az 1. táblázatban a Hg-lámpa vonalaival mért számok vannak. Az I. és II. csoport abszolút értékeket tartalmaz. Amint

[1] A kristályok szinezését dr. Frik Károly úr, a «Werner Siemens Institut für Röntgenforschung» című intézet igazgatója végezte.

látjuk, az abszorpciós koefficiens kristályonként változik, de a különbség csak a szineződés fokában van és nem a spektrumbeli eloszlásban.[1] Hogy ez világosabban kitűnjék, a II. oszlop számai a III. oszlopban úgy vannak átszámítva, hogy a $\lambda = 436$ hullámhossz mellett mind egyenlő értéket vesznek fel. A IV. oszlop az ilyen módon nyert számok középértékeit adja a III. oszlop számainak. Az egyes értékek eltérése a középértéktől sehol sem hágja túl az észlelési hibákat. A IV. hasáb adatai az 1. ábrában +-kel *(a)* vannak berajzolva.

3. §. A fényelektromos áramok mérése éppen úgy történt, mint ahogyan nemrégiben ismertettem.[2] A kristályok parallelepipedon alakú darabok voltak, körülbelül 2×5×10 mm mérettel. Ezen kristálydarabokat az abszorpció méréshez használt darabokból hasitottam le és a számok melletti 6, 10, 11, 12 indexek jelzik, hogy mely darabokból erednek.

II. Táblázat.

	I.						II.						III.
	Elektromos mennyiség a ráeső fény egységére vonatkoztatva $10^{-6} \frac{Coul.}{Cal.}$ többszöröseiben						Ugyanaz egy hullámhossznál egyenlő értékre átszámítva						Középérték a **II**-ből
Kristály	$1_{(6)}$	$2_{(11)}$	$3_{(10)}$	$4_{(6)}$	$5_{(10)}$	$6_{(12)}$	$1_{(6)}$	$2_{(11)}$	$3_{(10)}$	$4_{(6)}$	$5_{(10)}$	$6_{(12)}$	
313	2.1	1·5	1·7	1·3	1·4	1·8	6·8	6·5	7·8	6·7	7·3	6·2	6·9
365	5·4	3·9	4·2	3·2	3·3	4·7	17·6	16·8	18·3	16·8	17·4	16·2	17·2
405	12·7	9·4	—	—	8·3	11·4	41·4	44	—	—	43·7	39·4	42·1
436	30·7	23·2	23	19	19	29	100	100	100	100	100	100	100
546	6·7	5·3	5·4	5	4·2	7·9	21·8	22·9	23·5	26·3	22·1	27·2	24

A 2. táblázat I. csoportja újra abszolut értékeket tartalmaz. A számok igazolják a már ismert jelenséget, hogy különben

[1] Csak olyan kristályok jöttek vizsgálat alá, melyek közel egyenlő szineződést mutattak.

[2] Fennebb idézve.

egyenlőnek látszó darabok nem teljesen egyenlő módon érzékenyek. A különbségek azonban itt sem a fényelektromos-vezetőképességnek spektrumbeli eloszlásában vannak. A fentihez hasonlóképen, hogy ezt bebizonyítsuk, az I. csoport számai úgy lettek átszámítva, hogy $\lambda = 436\ \mu\mu$ mellett mind ugyanazt az értéket vegyék fel. A még megmaradó különbségek a vízszintes sorokban már csak az észlelési hibák rovására irandók. A III. oszlop újra a II. oszloptól nyert középértékeket tartalmazza és ezek az értékek vannak az 1. ábra *e* görbéjében $\times\ \times$-kel berajzolva.

A 2. ábra pontjait nyerjük, ha az 1. tábla IV. oszlopának számaival osztjuk a 2. tábla III. oszlopának a számait.

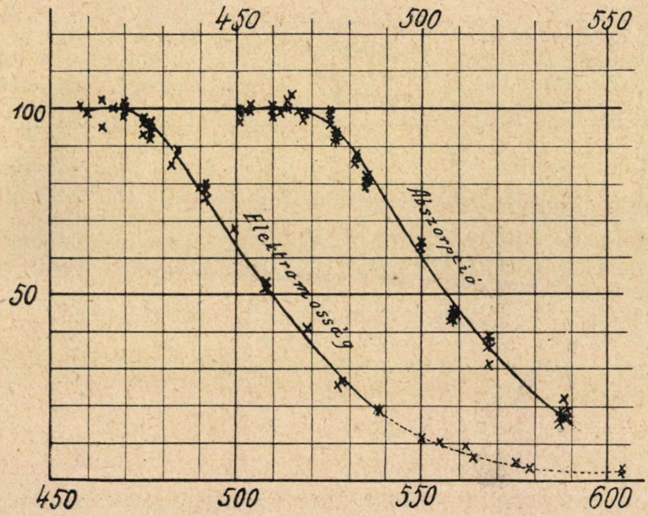
A Hg vonalaival nyert eredményeket lényegesen támogatják a folytonos színkép $450\ \mu\mu$—$550\ \mu\mu$ részében végzett mérések. Kisebb hullámhosszakra itt a mérést nem lehetett kiterjeszteni, mert a 100 gyertyaerős Wolfram spiral-lámpa sugárzása itt már igen gyenge; viszont hosszabb hullámoknál úgy az abszorpció, mint a fényelektromos hatás igen kicsiny lesz.

Különös figyelmet fordítottam arra, hogy a használt spektrumrész elég keskeny legyen ahhoz, hogy a kálium szelektív érzékenysége miatt lényeges hibák ne keletkezzenek.

A 3. ábra *a* görbéjének keresztjei adják az elnyelési mérések eredményét és ugyancsak a 3. ábra *b* görbéjének keresztjei adják a kiváltott elektromos mennyiségeket tetszésszerinti egységekben. A méréseket ugyanazon darabokon végeztem, mint fönntebb és az egyes darabok individuális viselkedéséből eredő különbségek a fenti módon vannak kiküszöbölve. Az elnyelési értékek, viszonyítva az elektromos görbéhez, itt is a rövidebb hullámok irányában vannak eltolva. A 3. ábrában a kihúzott görbék a quantumegyenlőség feltételezésével (2. ábrában kihúzott egyenes rész) számított eredményeket tüntetik fel és amint látjuk, mindkét görbe teljesen megfelel a mérési pontok által jelzett menetnek.

Ezek után mint biztos eredményt állíthatjuk, hogy az egész elnyelési sávban az elektromos hatás arányosan növekedik a hullámhosszal. Ezzel be van bizonyitva, hogy a *NaCl*-nak a Röntgen-fény által létrehozott szelektív elnyelési sávjában a fényelnyelés quantumok szerint történik, amint azt Gudden és Pohl gyémánt és *ZnS*-nál a gyengébb elnyelési részben kimutatták.

Eddig a fényelektromos hatást csak relatív számokban néztük. Abszolút értékeket nyerünk a 2. táblázat I. és az 1. táblázat II. oszlopának együvé tartozó számjaiból. A 3. táblázat



3. ábra.

néhány ilyen értéket tartalmaz $\lambda=365$ $\mu\mu$ hullámhosszra. Látjuk, hogy dacára a fellépő ingadozásoknak, körülbelül minden 10,000 fényquantum egy elektront szolgáltat. Ha e jelenség okát abban látjuk, hogy a fény által kiváltott elektronok eltolódása igen kicsiny a kristály vastagságához képest (a mi esetünkben 2 mm), úgy ezen eltolódás nagyságára mintegy $^1/_{3000}$ mm-t kapunk. Mi most 2000 Volt/cm térerősség mellett dolgoztunk és Frum (nemsokára megjelenő munkájában) egészen 70,000 Volt/cm terekig megmutatta, hogy a kiváltott elektromos menynyiségek arányosak a térerősséggel. Hogyha a mért elektromos mennyiségek kicsinysége az eltolódási utak kicsinysége által van feltételezve, akkor az eltolódási utaknak arányosan kell nőniök a térerősséggel, hogy OHM törvényének az érvényességét megérthessük. Ilyen módon telitési áram csak több millió Volt/cm erősségű tereknél léphetne fel. Ilyen terek a kristályban nem valósithatók meg.

III. Táblázat.

Kristály Nr.	I. A ráeső fényenergia *Cal.*-jára számitott *Coul.* 10^{-6}-ban	II. A ráeső fényből abszorbeált százalék	III. I. és II.-ből az elnyelt fény *Cal.*-jára eső *Coul.*	IV. Ebből az egyenlet *N* const. λ arányossági tényezőjére adódik
$1_{(6)}$	5·4	2·2	$2{\cdot}45 . 10^{-4}\ \frac{Coul.}{Cal.}$	$2{\cdot}01 . 10^{-4}\left(\frac{1}{hc}\right)$
$2_{(11)}$	3·9	2·5	1·56 «	1·28 «
$3_{(10)}$	4·2	3	1·4 «	1·15 «
$4_{(6)}$	3·2	2·2	1·45 «	1·19 «
$5_{(10)}$	3·3	3	1·1 «	0·90 «
$6_{(12)}$	4·7	2·2	2·13 «	1·66 «
			Középérték	$1{\cdot}36 . 10^{-4}\left(\frac{1}{hc}\right)$

Másfelől a kiváltott elektromos mennyiségek kicsinysége azáltal is létrejöhet, hogy nem minden fényelnyelési folyamat szolgáltat egy szabad elektront. A növekedő elektromos tér hatása ebben az esetben úgy volna magyarázható, mint azt GUDDEN és POHL az első csoportba tartozó kristályoknál gondolják; nevezetesen, hogy növekedő térerősség mellett arányosan mind több és több elektron válik szabaddá. Ezen második feltétel esetében a várható telitési térerősségről nem lehet semmit mondani. Másfelől arra is lehetne gondolni, hogy az eltolódások középértékben függetlenek a térerősségtől és csupán csak a kristály belsejében uralkodó inhomogenitások által vannak meghatározva.

Egyelőre csak annyit lehet következtetni, hogy 2000 Volt/cm térerősség mellett a természetes *NaCl* kristályban az eltolódás értéke körülbelül $^1/_{3000}$ mm, míg BINGEL[1] szerint ezen eltolódások igen kicsinyek a kristály vastagságához képest.

*

A magyar tudománymentő bizottság f. é. február havában számomra 2.000,000 K segélyt utalt ki, melyért e helyen is hálás köszönetemet fejezem ki.

Göttingen, I. sz. physikai intézet. 1925 március.

Gyulai Z.

SUR L'ÉQUIVALENT ÉLECTRIQUE DES QUANTA DANS LA CONDUCTION PHOTOÉLECTRIQUE DES CRISTAUX DE *NaCl*.

Comme suite à la communication précédente on a déterminé les coefficients de l'absorption des cristaux de *NaCl* irradiés avec rayons X à l'aide d'une cellule photoélectrique au potassium. Le maximum de l'absorption se trouve à $\lambda = 460\,\mu\mu$. La quantité de charge produite par unité d'énergie absorbée est proportionnelle à la longueur d'onde. Ceci prouve que la lumière est absorbée en quanta dans la bande d'absorption de la couleur jaunâtre. Les mesures absolues indiquent que 10,000 quanta absorbés ne produisent qu'un seul électron. Ce résultat s'nterprète, conformément à plusieurs autres observations de MM. GUDDEN et POHL, de la manière suivante : les électrons produits par la lumière ne traversent que la dix-millième partie du cristal.

Göttingen, mars 1925.

Z. Gyulai.

---

[1] BINGEL : Zs. f. Phys. 21. 229. 1924.
B. GUDDEN és R. POHL : Zeitschr. f. Phys. 31. 637. 1925.

AZ EINSTEIN-FÉLE SZÍNKÉPELTOLÓDÁS ÉS A KVANTUMELMÉLET.[1]

Az Einstein-féle gravitációelméletnek egyik sokat vitatott következménye az ú. n. «Rotverschiebung», vagyis a Nap spektrumának a földi fényforrások spektrumához képest a nagyobb hullámhosszúságok felé való eltolódása.

A következőkben azon kérdéssel fogunk foglalkozni, hogy miként lehet ezen színképeltolódást a kvantumelmélet alapján konstruált fényforrásmodellek működésének az Einstein-féle gravitációs térben való módosulásából levezetni. Az eltolódás kísérleti igazolásának és igazolhatóságának a kérdése természetesen nem tartozik ezen munka tárgyához.

A Földön észlelhető színképeltolódás értékének levezetése két egymástól teljesen független probléma megoldását kívánja. Ugyanis a gravitációnak nemcsak az emisszióra való hatása befolyásolhatja a fény rezgésszámát, hanem a fény terjedése közben is megváltozhatik úgy a rezgésszám, mint a hullámhossz. Laue[2] bebizonyította, hogy sztatikus gravitációs mezőben a kozmikus időben mért rezgésszám[3] útközben nem változik («Erhaltung der Schwingungszahl»). Tehát a Nap spektrumának a Földön észlelhető eltolódását kizárólag a gravitációnak az emisszióra való hatása idézi elő.

---

[1] V. ö. szerzőnek a Physikalische Zeitschrift 26 kötetében megjelent közleményeivel: «Die Quantentheorie und die Rotverschiebung der Spektrallien»; «Atomdynamische Deutung der Uhrenhypothese»; «Allgemeiner Beweis der Atomuhr».

[2] Laue: Phys. Zeitschr. 21, 659. 1920.

[3] Ha a rezgésszám változatlan, a hullámhossz a $c = \lambda\nu$ relációnak megfelelően ugyanolyan arányban változik, mint a fénysebesség. A hullámhossznak ezen útközben való megváltozása természetesen nem tévesztendő össze a színképeltolódással.

A színképeltolódás értékére az ú. n. órahipotézis [1] segélyével jutottak; eszerint az «órák» önidőben mért periodusát a gravitációs mező nem befolyásolja, tehát egy földi és egy ugyanolyan napbeli atom által kibocsátott fény rezgésszámának önidőben mérve azonosnak kell lenni (önidő alatt az atom helyén lévő nyugvó megfigyelő önidejét értve). A nyugvó megfigyelő önideje (s = Eigenzeit) és a kozmikus idő (t) között a

$$ds = c\sqrt{g_{00}}\,dt \tag{1}$$

reláció érvényes, melyben pl. a Nap gravitációs mezejére vonatkozólag:

$$g_{00} = 1 - \frac{2kM}{c^2 r}$$

(k = NEWTON-féle gravitáció állandó, M = a Nap tömege c = fénysebesség, r = távolság a Nap centrumától.)

Az órahipotézis és az (1) reláció következtében a Napon és a Földön működő fényforrások kozmikus időben mért frekvenciái között a következő arány érvényes:

$$\nu_n = \nu_f \sqrt{g_{00}}$$

melyben g_{00} értéke a Nap felületére vonatkozik. (Emellett g_{00} értéke a Föld felületén 1-nek vehető. Az eltolódás értéke:

$$\frac{\nu_n - \nu_f}{\nu_f} = -2{,}07 . 10^{-6}.$$

Nyilvánvaló, hogy az órahipotézistől teljesen független az a kérdés, vajjon levezethető-e a színképeltolódás az EINSTEIN-féle gravitációs térnek a BOHR-féle atommodellek működésére való hatásából? Hogy ezt a hatást megvizsgálhassuk, ahhoz szüksé-

---

[1] Az órahipotézis tüzetesebb diszkusszióját lásd: M. v. LAUE, Zeitschr. für Phys. 3, 389, 1920. Ugyanott a színképeltolódás kvantumelméleti verifikálását is tárgyalja LAUE, anélkül azonban, hogy a kérdéssel kapcsolatos dinamikai próblémát felvetné. V. ö. még K. FÖRSTERLING, Zeitschr. für Phys. 3, 404, 1920. FÖRSTERLING röviden szemlélteti a transzverzális Dopplereffektus és az EINSTEIN-féle színképeltolódás kvantumelméleti jelentőségét.

ges, hogy a BOHR-elméletet az általános relativitástan dinamikájával kapcsoljuk össze.

A probléma természetéből következik, hogy ilyen vizsgálatokat csak olyan spektrumfajokra lehet elvégezni, melyeknek modellszerű, dinamikai magyarázata teljes szigorúsággal követhető. Ilyen spektrumok a hidrogénszerű (wasserstoffähnlich) szériesek, továbbá az ú. n. tiszta rotációs spektrumok (vagyis a legegyszerűbb «Banden»-spektrumok). Ezekre a spektrumokra fogjuk megadni az EINSTEIN-féle színképeltolódás kvantumelméleti levezetését.

Mindenekelőtt szükségünk van a HAMILTON—JACOBI-elméletnek az általános relativitástan mechanikájára való alkalmazására.[1]

I.

Legyenek m az elektron tömege, e az elemi töltés, c a fénysebesség-konstans, g_{ik} és φ_i a gravitációs, ill. elektromágneses mező potenciáljai.

Az elektron mozgásegyenleteit:[2]

$$mc^2\left(\sum_{k=0}^{3} g_{ik}\frac{d^2x_k}{ds^2}+\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ i\end{bmatrix}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}\right)= \\ =-e\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}-\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\right)\frac{dx_k}{ds} \tag{2}$$

$$\left(\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ i\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\right);\quad i=0,1,2,3\right)$$

levezethetjük az

$$L'=-mc^2\sqrt{\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}}-e\sum_{k=0}^{3}\varphi_k\frac{dx_k}{ds} \tag{3}$$

LAGRANGE-függvényből a

$$\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}=1 \tag{4}$$

---

[1] V. ö. J. KUDAR, Zur Behandlung des SCHWARZSCHILDschen Einkörperproblems im Rahmen der HAMILTON—JACOBIschen Theorie. Phys Zeitschr. 26, 276—280, 1925.

[2] V. ö. pl.: WEYL, Raum, Zeit, Materie, 5. Aufl. 285.

feltétel alkalmazásával. Azonban erre a LAGRANGE-függvényre a HAMILTON—JACOBI-elméletet lehetetlen keresztülvinni, mivel a

$$H' = \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial L'}{\partial \frac{dx_i}{ds}} - L'$$

függvény azonos zérus. A HAMILTON—JACOBI-elmélet alkalmazható lesz, ha az

$$L = -\frac{mc^2}{2} \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} - e \sum_{k=0}^{3} \varphi_k \frac{dx_k}{ds} \tag{5}$$

LAGRANGE-függvényt használjuk, melyből a mozgásegyenletek a (4) feltétel igénybevétele nélkül következnek.

Az (5) alatti LAGRANGE-függvényhez tartozó impulzusok:

$$y_i = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx_i}{ds}} = -mc^2 \sum_{k=0}^{3} g_{ik} \frac{dx_k}{ds} - e\varphi_i \quad (i=0, 1, 2, 3), \tag{6}$$

a HAMILTON-függvény:

$$H = \sum_{1=0}^{3} y_i \frac{dx_i}{ds} - L = -\frac{mc^2}{2} \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}. \tag{7}$$

Vezessük be H-ban a $\frac{dx_i}{ds}$-k helyett a (6) alatti relációk segélyével a koordinátákat és az impulzusokat. Ekkor a

$$H = H(\ldots x_i \ldots, \ldots y_i \ldots)$$

függvényre érvényesek lesznek a kanonikus mozgásegyenletek:

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i=0, 1, 2, 3).$$

H = konstans, mivel az önidő explicite nem fordul elő. Ezen konstans értéke (4)-ből és (7)-ből adódik:

$$H = -\frac{mc^2}{2}.$$

A mozgásegyenletek megoldását a HAMILTON—JACOBI-féle parciális differenciálegyenlet

$$H\left(\ldots x_i\ldots, \ldots \frac{\partial S}{\partial x_i}\ldots\right) = -\frac{mc^2}{2} \qquad \left(y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}\right). \tag{8}$$

megoldása szolgáltatja.

Ha a mező stacionárius, vagyis a g_{ik}-k és φ_i-k a kozmikus időtől (x_0-tól) függetlenek, akkor érvényes az energiaintegrál:

$$\frac{\partial S}{\partial x_0} = \text{const} = W.$$

A W energia a klasszikus mechanikában szokásos egységekben van kifejezve.

Ebben az esetben (8)-ból lesz:

$$H\left(x_1, x_2, x_3;\; W, \frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, \frac{\partial S}{\partial x_3}\right) = -\frac{mc^2}{2}. \tag{9}$$

Ha e differenciálegyenletben a változók szeparálhatók, akkor felállíthatjuk a kvantumfeltételeket:

$$\oint y_i dx_i = n_i hc \quad (i=1, 2, 3). \tag{10}$$

Ugyanis kifogjuk mutatni, hogy ezen «relativisztikus» kvantumfeltételek azonosak a közönséges kvantumfeltételekkel.

A Sommerfeld-féle kvantumfeltételek csak akkor alkalmazhatók, ha a mozgásegyenletekben a kozmikus idő a független változó.

A

$$ds = \sqrt{\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik} \frac{dx_i}{dx_0}\frac{dx_k}{dx_0}} \cdot dx_0 \tag{11}$$

relációval eliminálhatjuk az önidőt a (2) alatti mozgásegyenletekből:

$$mc^2 \left\{ \sum_{k=0}^{3} g_{ik} \frac{d}{dx_0} \left(\frac{\frac{dx_k}{dx_0}}{\sqrt{\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{dx_0}\frac{dx_\beta}{dx_0}}} \right) + \frac{\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \begin{bmatrix}\alpha\beta\\ i\end{bmatrix} \frac{dx_\alpha}{dx}\frac{dx_\beta}{dx_0}}{\sqrt{\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{dx_0}\frac{dx_\beta}{dx_0}}} \right\} =$$

$$= -e \sum_{k=0}^{3} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right) \frac{dx_k}{dx_0} \quad (i=0, 1, 2, 3). \tag{12}$$

Ezek közül a három utolsó levezethető az

$$L^{(x_0)} = -mc^2 \sqrt{\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik} \frac{dx_i}{dx_0} \frac{dx_k}{dx_0}} - e \sum_{i=0}^{3} \varphi_i \frac{dx_i}{dx_0} \tag{13}$$

LAGRANGE-függvényből.

A (13)-nak megfelelő HAMILTON-függvény lesz:

$$\begin{aligned} H^{(x_0)} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L^{(x_0)}}{\partial \dfrac{dx_i}{dx_0}} \frac{dx_i}{dx_0} - L^{(x_0)} = \\ & mc^2 \frac{\sum\limits_{k=0}^{3} g_{0k} \dfrac{dx_k}{dx_0}}{\sqrt{\sum\limits_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} \dfrac{dx_\alpha}{dx_0} \dfrac{dx_\beta}{dx_0}}} + e\varphi_0. \end{aligned} \tag{14}$$

$H =$ const, mivel x_0 H-ban nem lép fel explicite. Ha H-t x_0 szerint differenciáljuk, megkapjuk (12) nulladik egyenletét.

Ezen LAGRANGE-függvény impulzusai:

$$y_i^{(x_0)} = \frac{\partial L^{(x_0)}}{\partial \dfrac{dx_i}{dx_0}} = -mc^2 \frac{\sum\limits_{k=0}^{3} g_{ik} \dfrac{dx_k}{dx_0}}{\sqrt{\sum\limits_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} \dfrac{dx_\alpha}{dx_0} \dfrac{dx_\beta}{dx_0}}} - e\varphi_i \quad (i=1,2,3), \tag{15}$$

míg az (5) alatti LAGRANGE-függvény térbeli impulzusai:

$$y_i = -mc^2 \sum_{k=0}^{3} g_{ik} \frac{dx_k}{ds} - e\varphi_i \quad (i=1,2,3). \tag{16}$$

Ezek (11) szerint azonosak:

$$y_i = y_i^{(x_0)}. \tag{17}$$

Ha (13)-ban $dx_0 = cdt$ teszünk, akkor a

$$\begin{aligned} L^{(t)} = -mc^2 \sqrt{g_{00} + \frac{2}{c} \sum_{i=1}^{3} g_{0i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{1}{c^2} \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}} - \\ - e\varphi_0 - \frac{e}{c} \sum_{i=1}^{3} \varphi_i \frac{dx_i}{dt} \end{aligned} \tag{18}$$

LAGRANGE-függvény a klasszikus egységgel mért t időre vonatkozik. (18) impulzusaira felállíthatjuk a SOMMERFELD-féle kvantumfeltételeket:

$$\oint y_i^{(t)} dx_i = n_i h \qquad \left(y_i^{(t)} = \frac{\partial L^{(t)}}{\partial \frac{dx_i}{dt}}; \quad i=1,2,3\right). \tag{10$_a$}$$

Az $y_i^{(t)}$ és y_i közötti összefüggés:

$$y_i^{(t)} = \frac{1}{c} y_i.$$

Eszerint a (10) és (10_a) kvantumfeltételek azonosak.

II.

A Nap gravitációs mezejét kielégítő közelítéssel a következő négydimenziós ívelem állítja elő:[1]

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(1 - \frac{2kM}{c^2} \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right) dx_0^2 - \\ &- \left(1 + \frac{2kM}{c^2} \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right)(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2), \end{aligned} \tag{19}$$

melyben x_1, x_2, x_3, heliocentrikus derékszögű koordináták k = a Newton-féle konstans, M = a Nap tömege.

Helyezzük a koordinátarendszer kezdőpontját a Nap középpontjától a távolságban lévő atommagba a következő transzformációval:

$$x_1 = a + \xi, \quad x_2 = \eta, \quad x_3 = \zeta.$$

Ekkor (19)-ből lesz:

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(1 - \frac{2kM}{c^2 a} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\xi}{a} + \frac{r^2}{a^2}}}\right) dx_0^2 - \\ &- \left(1 + \frac{2kM}{c^2 a} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\xi}{a} + \frac{r^2}{a^2}}}\right)(d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2), \end{aligned}$$

hol $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ az elektronnak az atommagtól való tá-

---

[1] Einstein, Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie, 57—58.

volságát jelenti. Mivel a Nap felületén a gravitációs mező homogén, $\frac{r^2}{a^2}$-t elhanyagolhatjuk; azonkívül bevezetjük az

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\xi}{a}}} \sim 1-\frac{\xi}{a}$$

közelítést. Eszerint a Nap felületén a vonalelem kifejezése:

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left[1-\frac{2kM}{c^2a}\left(1-\frac{\xi}{a}\right)\right]dx_0^2 - \\ &-\left[1+\frac{2kM}{c^2a}\left(1-\frac{\xi}{a}\right)\right](d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2). \end{aligned} \tag{20}$$

A gravitációnak az elektronra gyakorolt dinamikus hatását első közelítésben a

$$\frac{d^2\xi}{dx_0^2} = -\frac{kM}{c^2a^2}, \quad \frac{d^2\eta}{dx_0^2} = \frac{d^2\zeta^2}{dx_0^2} = 0$$

egyenletek mutatják. Az itt kifejezésre jutó dinamikus hatása a gravitációnak csupán egy a STARK-effektussal analog jelenséget idéz elő, melyet a térerősség kicsinysége miatt már eleve elhanyagolhatunk (u. i. a térintenzitás klasszikus egységben mérve: $\frac{kM}{a^2}$). Másszóval elhagyhatjuk a (20) alatti ívelem kifejezésében a

$$\frac{2kM}{c^2a^2}\xi$$

tagot. Tehát a levezetéseink exaktságának korlátozása nélkül a következő konstans együtthatójú ívelemet használhatjuk:

$$ds^2 = g_{00}dx_0^2 - \frac{1}{g_{00}}(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2), \tag{21}$$

melyben x_1, x_2, x_3 az atommagra vonatkozó derékszögű koordinátákat jelentik és $g_{00} = 1 - \frac{2kM}{c^2a}$ (a = atom távolsága a Nap centrumától).

Ezen ívelemnek megfelelően az atommag elektrosztatikai mezejének a potenciálja, más szóval az elektromágneses «Vierervektor» időbeli kovariáns komponense lesz:

$$\varphi_0 = - g_{00} \frac{ez}{r}, \tag{22}$$

hol z az atommag elemi töltéseinek számát jelenti («Kernladungszahl»).

Ez a következő meggondolásból világlik ki:[1]

A (21) alatti ívelemet a

$$dx_0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} dx_0', \quad dx_i = \sqrt{g_{00}} dx_i' \quad (i=1, 2, 3)$$

transzformációval a LORENTZ-féle ívelembe vihetjük át:

$$ds^2 = dx_0'^2 - dx_1'^2 - dx_2'^2 - dx_3''^2.$$

Ekkor az elektrosztatikai potenciál a következőképen transzformálódik:

$$\varphi_0 dx_0 = \varphi_0' dx_0',$$

melyben φ_0' a LORENTZ-rendszerben érvényes potenciált jelenti:

$$\varphi_0' = - \frac{ez}{r'},$$

mivel pedig $r' = \frac{r}{\sqrt{g_{00}}}$ és $dx'_0 = \sqrt{g_{00}}\, dx_0$, rögtön következik a (22) alatti állításunk:

$$\varphi_0 = - g_{00} \frac{ez}{r}.$$

Tehát az (5) alatti LAGRANGE-függvény egy hidrogénszerű atom esetén a következő lesz:

$$L = - \frac{mc^2}{2} \left\{ g_{00} \left(\frac{dx_0}{ds} \right)^2 - \frac{1}{g_{00}} \left[\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right] + g_{00} \frac{e^2 z}{r} \frac{dx_0}{ds}; \tag{23}$$

az impulzusok:

---

[1] Erre a fontos körülményre W. PAULI úr (Hamburgból) hívta fel a figyelmemet.

$$\begin{aligned} \Xi &= \frac{\partial L}{\partial \frac{dx_0}{ds}} = -mc^2 g_{00}\frac{dx_0}{ds} + g_{00}\frac{e^2 z}{r}, \\ P &= \frac{\partial L}{\partial \frac{dr}{ds}} = \frac{mc^2}{g_{00}}\frac{dr}{ds}, \quad \Phi = \frac{mc^2}{g_{00}} r^2 \frac{d\varphi}{ds}; \end{aligned} \tag{24}$$

a HAMILTON-függvény:

$$H = -\frac{g_{00}}{2mc^2}\left[\left(\frac{\Xi}{g_{00}} - \frac{e^2 z}{r}\right)^2 - \left(P^2 + \frac{1}{r^2}\Phi^2\right)\right] = -\frac{mc^2}{2}; \tag{25}$$

a HAMILTON—JACOBI-féle parciális differenciálegyenlet:

$$\left(\frac{W}{g_{00}} - \frac{e^2 z}{r}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{m^2 c^4}{g_{00}}; \tag{26}$$

a kvantumfeltételek:

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{nhc}{2\pi}; \tag{27}$$

$$\oint \frac{\partial S}{\partial r} dr = \oint \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}} \cdot dr = n'hc; \tag{28}$$

$$A = \frac{W^2}{g_{00}^2} - \frac{m^2 c^4}{g_{00}}, \quad B = -\frac{We^2 z}{g_{00}}, \quad C = -\left(\frac{nhc}{2\pi}\right)^2 + e^4 z^2. \tag{29}$$

A (28) alatti fázisintegrál értéke:[1]

$$\oint \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}} \cdot dr = 2\pi\sqrt{-1}\frac{B}{\sqrt{A}} - 2\pi\sqrt{-C}.$$

Ezt (28)-ba helyettesítjük:

$$\frac{n'hc}{2\pi} + \sqrt{-C} = \sqrt{-1}\frac{B}{\sqrt{A}}.$$

Négyzetre emelve és behelyettesítve a (29) alatti értékeket:

$$\frac{h^2 c^2}{4\pi^2}\left(n' + \sqrt{n^2 - \frac{4\pi^2 e^4 z^2}{h^2 c^2}}\right)^2 = -\frac{W^2 e^4 z^2}{g_{00}^2} \frac{1}{\frac{W^2}{g_{00}^2} - \frac{m^2 c^4}{g_{00}}}.$$

---

[1] A fázisintegrálok komplex úton való kiszámitását lásd SOMMERFELD: Atombau und Spektrallinien függelékében.

Innen a kvantált energia:

$$W = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 + \frac{a^2z^2}{\left(n' + \sqrt{n^2 - a^2z^2}\right)^2}}}, \tag{30}$$

melyben

$$a = \frac{2\pi e^2}{hc}$$

a Sommerfeld-féle «Feinstruktur»-konstans.

A Bohr-féle frekvencia-feltétel:

$$h\nu = W(k, k') - W(n, n')$$

alkalmazása után (30)-ból a következő frekvencia-formulát kapjuk:

$$\nu = \nu_0\sqrt{g_{00}},$$

melyben:

$$\nu_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2z^2}{\left(k' + \sqrt{k^2 - a^2z^2}\right)^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2z^2}{\left(n' + \sqrt{n^2 - a^2z^2}\right)^2}}}\right)$$

a hydrogénszerű spektrumok Sommerfeld-féle formuláját jelöli. Ezzel levezettük az Einstein-féle színképeltolódást a hidrogénszerű szériesekre.

III.

A tiszta rotációs spektrumok kvantumelméletét Schwarzschild állította fel, még pedig a rótor segítségével.

Legyen

$$J = \mu r'^2$$

a rótor tehetetlenségi nyomatéka egy olyan koordinátarendszerben, melyben a Lorentz-féle ívelem érvényes. Ekkor abban a rendszerben, melyben a (21) alatti ívelem érvényes, a tehetetlenségi nyomaték:

$$J = \frac{\mu r'^2}{g_{00}}.$$

Lesz tehát a rótor Lagrange-függvénye:

$$L = -\frac{\mu c^2}{2} g_{00}\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 + \frac{c^2 J}{2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \quad (J = \text{const}); \tag{31}$$

ebből az impulzusok:

$$\Xi = -\mu c^2 g_{00} \frac{dx_0}{ds}, \quad \Phi = c^2 J \frac{d\varphi}{ds};$$

a HAMILTON—JACOBI-féle differenciálegyenlet:

$$\frac{1}{g_{00}} \left(\frac{\partial S}{\partial x_0} \right)^2 - \frac{\mu}{J} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 = \mu^2 c^4; \tag{32}$$

az energiaintegrál:

$$\frac{\partial S}{\partial x_0} = \text{const} = W; \tag{33}$$

a kvantumfeltétel:

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{nhc}{2\pi}. \tag{34}$$

Ezekután (32)-ből megkapjuk a kvantált energiát:

$$W = \mu c^2 \sqrt{g_{00}} \sqrt{1 + \frac{1}{\mu c^2} \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 J}} \sim \sqrt{g_{00}} \left(\mu c^2 + \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 J} \right), \tag{35}$$

melyből a frekvenciafeltétel alkalmazása után:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{g_{00}}.$$

Itt ν_0 a DESLANDRES-SCHWARZSCHILD-féle frekvenciaformulát jelenti:

$$\nu_0 = \frac{h}{8\pi^2 J} (k^2 - n^2).$$

Tehát a rotációs spektrumok esetében is az EINSTEIN-féle színképeltolódásra jutottunk. *Kudar János.*

DIE EINSTEIN'SCHE SPEKTRALLINIENVERSCHIEBUNG UND DIE QUANTENTHEORIE.

Die Rotverschiebung der Spektrallinien ist eine wohlbekannte Folgerung der EINSTEIN'schen Gravitationstheorie. Die Ableitung dieser Spektrallinienverschiebung, welche ursprünglich als Analogon der DOPPLER-verschiebung mit Hilfe des Äquivalenzprinzips gefolgert wurde, stützt sich auf die sogenannte «Uhrenhypothese».

Vorliegende Arbeit behandelt die Ableitung der Rotverschiebung im Sinne des BOHR'schen Atommodells. Im ersten Teil wird die HAMILTON-JACOBI'sche Theorie und die Quantenbedingungen für die Mechanik der allgemeinen Relativitätstheorie durchgeführt.

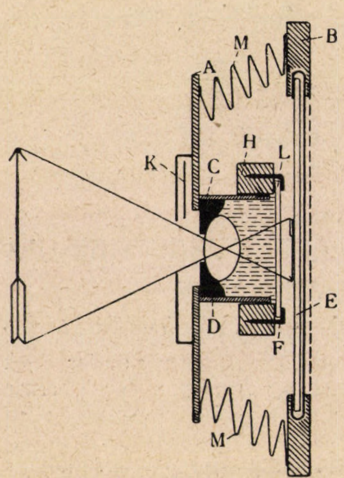
Der zweite und dritte Teil enthält die quantentheoretische Ableitung der Rotverschiebung für wasserstoffähnliche Spektren und Rotationsspektren. Das Resultat bedeutet gleichzeitig die atommechanische Bestätigung der Uhrenhypothese. *J. Kudar.*

IDEGHÁRTYAKÉPEK FÉNYKÉPEZÉSE.

Az ember és a gerinces állatok szeme közismert megállapitás szerint camera obscurához, vagy fényképező géphez hasonlit. Megkiséreltem a szemet, mint fényképező gépet használni s igy az ideghártyán keletkező képet fényérzékeny lemezen állandósitani. Kisérleteim eredménnyel jártak, melyet az alábbiakban ismertetek.

A kisérleteket kétféleképen végeztem; először csak a szemlencsét a cornea nélkül és az üvegtest egy részét, azután a szem teljes törőrendszerét használtam a fényképezéshez.

Fényképezés állati szemlencsével. A szemlencsével való kisérlethez egy régi fényképező gépet alakitottam át, melynek átmetszeti rajzát az 1. ábra mutatja. Az üveglencsét kivettem a *C* hengerből és helyére egy kaucsukból készitett gyűrűt *(D)* helyeztem, melynek hátsó részén a szemlencse első felületének megfelelő mélyedés volt; a gyűrű fényhatároló nyilása közel megegyezett az ökörszem közepes nagyságú pupillanyilásával. A *C* hengerre kivül mozgathatólag *H* parafagyűrűt toltam, melyhez vékony köralakú üveglemez *(L)* volt görbefejű szögekkel *(F)* erősitve.



1. ábra.

A kisérlethez vágóhidról szerzett friss ökörszemet használtam pár órával a kivétel után. A szem hártyáit az optikai tengelyre merőleges sikban középen körülvágtam, feleztem az üvegtestet és a szem hátsó felét teljesen eltávolitottam. Az első részből kivettem a szemlencsét az üvegtest megmaradt felével és a *C* hengerbe helyeztem úgy, hogy a lencse tengelye a *D* gyűrű nyílásának közepén menjen át. Visszahelyeztem az *L* lemezt és a parafagyűrűt addig toltam előre, míg a lemez mindenütt érintkezett az üvegtesttel.

Ezzel a lencsével készült 1—2 kép, exponálási idő 2—3 másodperc. Az első kép koponya képe 22 cm távolságból, a második kép 172 cm magas férfi képe 316 cm távolságból,

1. kép.

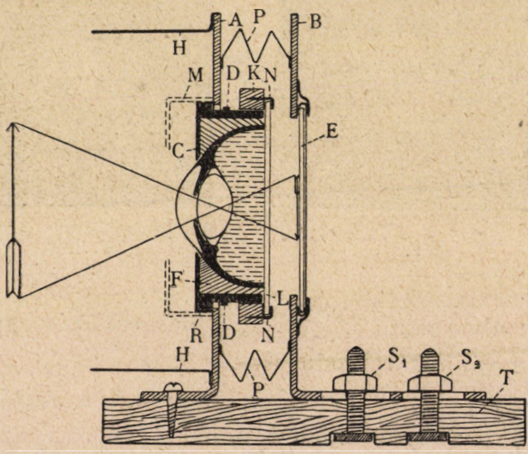
2. kép.

háttérben ajtó, oldalt kályha. A képek eredeti nagyságban javítás nélkül vannak reprodukálva.

Ezek a képek azt mutatják, hogy ha a szivárvány-hártya előtt lévő törőrészek hiányoznának, akkor a szemlencse és üvegtestből álló rendszer milyen képet létesítene az ideghártyán; feltéve, hogy az üvegtestet fedő *L* lemez és levegőréteg módosító hatását elhanyagoljuk, úgyszintén azt is, hogy a görbe felületű ideghártya helyett sík felületre vetítjük a képet. A szem látóterét ez esetben a szivárványhártya nyílása mint belépési pupilla határolja, amely mintegy 35°.

Fényképezés a szem teljes törőrendszerével. A szem teljes törőrendszere által létesitett képek fotografálására használt gép átmetszeti rajzát a 2-ik ábra mutatja. A gép első lapja *(A)* a *T* deszkalaphoz van erősítve, közepén 50 mm átmérőjű környilás van. A nyilásba *C* rézhenger tolható be, melynek a külső végén lévő pereme (5 mm) az *A* laphoz fekszik és fénymentesen elzárja a belső tért. A henger külső felületén két fog *(DD)* van, melyeknek a környílás szélében megfelelő rés van vágva s a henger betolásánál a fogak azon haladnak át; a henger elforgatásával a fogak a hengert az első laphoz erősítik. Az üres henger hátsó része nyitott, az első véglapján ellipszis alakú nyílás van, melynek két tengelye 26 mm és 23 mm. A hengerre *K* parafagyűrű mozgathatólag van rátolva és ehhez vékony köralakú üveglemez *(L)* van erősítve.

A gép hátsó mozgatható lapja *(B)* két csavarral *(SS)* különböző helyen rögzíthető. *PP* a gép hullámos fala, *HH* az első



2. ábra.

laphoz erősített fekete papiroskeret, mely az oldalról jövő fény felfogására szolgál, *M* az exponáló sapka. A gépbe 6×4·5 cm nagyságú lemez használható.

Ehhez a kísérlethez is vágóhidról szerzett ökörszemeket használtam. A friss szemek azonban nem használhatók, mivel a pupilla teljesen kitágult állapotban van. Azonban azt tapasztaltam, hogy 6—8 órai állás alatt némelyik szem pupillája a normális világításnál használt nagyságra szűkül; ezért a reggel szerzett szemekkel délután kisérleteztem. Az alkalmasnak talált szemet megtisztítottam az izmoktól és kötőszövetektől; kivettem a gépből a *C* hengert és belehelyeztem a szemet úgy, hogy a corneát az ellipszis alakú nyiláson áttoltam és az teljesen kiemelkedett a henger véglapjából. A henger véglapját lefelé tartva a szem és a henger fala közé olvasztott paraffint öntöttem. A paraffin megszilárdulása után a henger hátsó széle fölött a szem hártyáit borotvával körülvágtam, feleztem az üvegtestet és a szem hátsó felét eltávolitottam.

A hengert nyitott részével fölfelé tartva, visszahelyeztem s a paraffagyűrűt addig toltam a hengerre, míg az *L* lemez mindenütt érintkezett az üvegtesttel. A hengerbe beágyazott szem első felét a második ábra mutatja, *F* a paraffinréteg. A gépet állványra helyeztem és mint rendes géppel, úgy végeztem a felvételeket.

A harmadik kép koponya képe 30 cm távolságból. A háttérben ajtó látható. A negyedik kép 191 cm magas csontváz képe 170 cm távolságból. A háttér ugyanaz, jobboldalt üveges szekrény. Exponálási idő 2—4 másodperc. A képek eredeti nagyságban, javitás nélkül vannak reprodukálva.

A 3—4 kép azt mutatja, hogy az ökörszem teljes törőrendszere milyen képet vetítene sík felületre azzal a módosítással, melyet az üvegtest és fényérzékeny lemez közé iktatott üveglemez és levegőréteg idéz elő. Ezeket a képeket összehasonlítottam a teljes szemben keletkező képekkel acélból, hogy nincs-e a kétféle kép között észrevehető eltérés.

A szemet 5 cm hosszú, 5 cm széles és 3·5 cm mély dobozba helyeztem, melynek egyik oldalán elliptikus nyílás volt s azon a cornea kiemelkedett. A dobozba olvasztott paraffint öntöttem; a paraffin megszilárdulása után a szem felső részét levágtam és a nyílást üveglemezzel lefedtem. Ha a corneát jól megvilágitott tárgy (ablak) felé tartjuk, akkor a vágott nyíláson át jól megfigyelhetjük az ideghártyán keletkező képeket. Ezek annyira megegyeznek 3—4 képpel, hogy egyszerű összehasonlításnál különbség nem állapitható meg.

Az ideghártyán keletkező képeknél is bizonyos szög alatt látható tárgyak képe éles, mint a koponya képe (3. kép), az annál nagyobb látószög alatt látszó tárgy képének egy része — mely az előbbi látótéren kívül esik — elmosódott és torzult, mint az ajtó képe (4. kép).

Az 1—2 és 3—4 kép összehasonlításából az állapitható meg, hogy ha a szaruhártya és csarnokvízből álló törőrendszer hiányoznék, akkor a szem látóterét a szivárványhártya nyilása, mint belépési pupilla határozná meg (1—2. kép), a teljes törőrendszer előtt ilyen látótér-határoló nincs, ezért a szem látó-

3. kép.

4. kép.

tere — ha akadály nincs — kerek számban 180°. A teljes látótérről síkfelületen felfogható képet mutatja a 3—4. kép.

Az emberi szem csak nagyságban és a köralakú pupillával különbözik a kisérletnél használt szemektől, ezért hasonló tulajdonságú képek keletkeznek az emberi szemben is csak kisebbek. Az ideghártyán keletkező kép fizikai kép, mely a szemben mint természetes optikai készülékben keletkezik s tulajdonsága csak a szem törőrendszerétől függ. Azonban az agyba menő látási inger az ideghártya ismert szerkezetétől is függ.

Kedves Miklós.

DAS PHOTOGRAPHIEREN DER NETZHAUTBILDER.

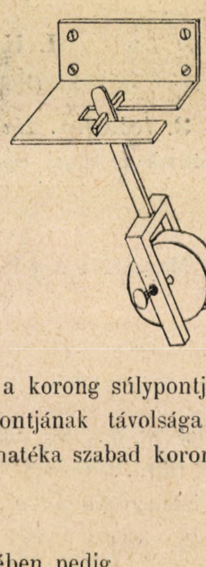
Verfasser beschreibt zwei photographische Apparate, in welchen als Linse das Ochsenauge mit, resp. ohne Cornea benützt wird und veröffentlicht je vier damit gemachte Aufnahmen. (1—4 Bild).

Nikolaus Kedves.

LABORATORIUM.

Készülék a tehetetlenségi nyomaték szerepének demonstrálására.

A tehetetlenségi nyomaték szerepének bemutatására szolgál a mellékelt rajzon levő iskolai készülék, mely egy közönséges inga azzal a különbséggel, hogy a rajzon látható hengeralakú része nem fix, hanem a tengelyének végein levő csúcsokon könnyen foroghat. Az eszköz úgy van elkészítve, hogy e tengely lehetőleg a henger súlypontján menjen keresztül. Ha a tengely végében lévő csavart megszorítjuk, akkor a hengert megakadályozzuk szabad forgásában s szilárd egészet képez az inga rúdjával.



Megfigyeljük az ingalengés idejét, ha a henger szabad és ha meg van fogva s feladatul tűzzük ki a lengési idők különbözőségének a megmagyarázatát.

Ha k a rúd tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkozólag, k' a korong súlyponti tengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, a a korong súlypontjának távolsága a forgástengelytől és s a rúd súlypontjának távolsága a forgástengelytől, akkor az inga tehetetlenségi nyomatéka szabad korong esetében:

$$K_s = k + m'a^2$$

ahol m' a korong tömege; megfogott korong esetében pedig

$$K_f = k + (k' + m'a^2).$$

Kérdés most hogyan méretezzük készülékünket, hogy a lengési idők eltérése minél nagyobb legyen?

Mivel

$$T_f^2 = \frac{\pi^2}{g} \cdot \frac{k + k' + m'a^2}{ms + m'a},$$

és

$$T'_s = \frac{\pi^2}{g} \cdot \frac{k + m'a^2}{ms + m'a},$$

azért a lengési idők különbsége annál nagyobb lesz, minél nagyobb a

$$\frac{k'}{ma + m'a}$$

tört, ahol m a rúd tömegét jelenti. Látható innen, *hogy az adott m' tömeggel minél* kisebb *a* távolságban a lehető *legnagyobb k' tehetetlenségi nyomatékot kell létesíteni.* *Csada Imre.*

Részletek az Eötvös Loránd Mathematikai és Physikai Társulat 1922., 1923. és 1924. évi mathematikai tanulóversenyein első díjat nyert dolgozatokból.

I. Kalmár László dolgozatából.

(1922-ik évi XXVI. math. tanulóverseny.)

3. feladat. *Ha $a, b, \ldots n$ egymástól különböző pozitiv egész számok és egyik sem osztható 3-nál nagyobb törzsszámmal, akkor*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{n} < 3.$$

Megoldás: A feltevés szerint:

$$a = 2^{\alpha} 3^{\alpha_1},$$
$$b = 2^{\beta} 3^{\beta_1},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$n = 2^{\nu} 3^{\nu_1},$$

ahol $\alpha, \beta \ldots \nu$; $\alpha_1, \beta_1, \ldots \nu_1$ nem negativ egész szám, az $\{\alpha, \alpha_1\}$, $\{\beta, \beta_1\}, \ldots \{\nu, \nu_1\}$ párok pedig különbözők. Legyen $\alpha, \beta, \ldots \nu$ közül a legnagyobb μ; $\alpha_1, \beta_1 \ldots \nu_1$ közül a legnagyobb μ_1, akkor világos, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{\mu}} + \\ &+ \frac{1}{3} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2^2.3} + \cdots + \frac{1}{2^{\mu}.3} + \\ &+ \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{2^2.3^2} + \cdots + \frac{1}{2^{\mu}.3^2} + \\ &+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot + \\ &+ \frac{1}{3^{\mu_1}} + \frac{1}{2.3^{\mu_1}} + \frac{1}{2^2.3^{\mu_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{\mu}.3^{\mu_1}},\end{aligned}$$

vagy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\cdots+\frac{1}{n}\leqq$$

$$\leqq\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{\alpha_1}}\right)=$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^{\alpha+1}}}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^{\alpha_1+1}}}{1-\frac{1}{3}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=2\cdot\frac{3}{2}=3.$$

Tehát

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots+\frac{1}{n}<3,$$

amit bizonyítanunk kellett.

A bizonyítás a *végtelen* geometriai sorok elméletével rövidebben keresztül vihető, ugyanis ugyanezen okoskodás adja, hogy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\cdots+\frac{1}{n}<\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)=3.$$

II. Ländler György dolgozatából.

(1923-ik évi XXVII. math. tanulóverseny.)

3. feladat. *Bebizonyítandó, hogy pozitiv egész számokból álló végtelen számtani haladványnak nem lehet minden tagja törzsszám (föltéve, hogy a haladvány nem áll csupa megegyező számból).*

A számtani haladvány általános tagja:

$$a_n=a_1+(n-1)\,d.$$

Minthogy minden tag pozitiv egész szám, kell oly tagnak lenni, hol $n=a_1+1$, vagyis $n-1=a_1$. Ekkor

$$a_n=a_1+a_1d=a_1\,(1+d).$$

Abban az esetben, ha $a_1\neq 1$, a kifejezés nem lehet törzsszám, mert $d\neq 0$ és így $1+d\neq 1$.

Tehát a tételt $a_1\neq 1$ esetében bebizonyítottuk.

$a_1=1$ esetében a következőképen bizonyítunk:

$a_n=a_1+(n-1)\,d$ kifejezést a következőképen is írhatjuk:

$a_n=a_1+d+(n-2)\,d.$

Ekkor lehetséges, hogy $n-2=a_1+d$, mert a_1 és d pozitiv egész számok. Így

$$a_n=a_1+d+(a_1+d)\,d=(a_1+d)\,(1+d).$$

Minthogy sem $a_1 + d$, sem $1 + d$ nem lehet egyenlő 1-gyel, az így kapott tag nem lehet törzsszám.

III. Körner Endre dolgozatából.

(1924-ik évi XXVIII. math. tanulóverseny).

1. feladat. *Adva van három pozitiv egész szám: a, b és c. Bebizonyítandó, hogy ha minden pozitiv egész n szám mellett létezik olyan háromszög, mely oldalainak mérőszáma a^n, b^n, illetve c^n, akkor a háromszögek mind egyenlőszárúak.*

Fölvehetjük, hogy $a \geqq b \geqq c$.

Annak, hogy három szám egy háromszög oldalainak mérőszáma legyen, szükséges föltétele, hogy kettő összege nagyobb legyen, mint a harmadik. Tehát

$$a^n - b^n < c^n.$$

Két eset lehetséges. Vagy $a = b$ vagy $a \neq b$. Utóbbi esetben bizonyítani fogom, hogy a föltétel nem minden pozitiv egész n esetében teljesül. Minthogy $a \neq b$ és a és b egész számok, tehát $a - b \geqq 1$ és így az egyenlőtlenség osztható vele: $a^{n-1} + a^{n-2} b + \ldots + b^{n-1} < \frac{c^n}{a-b}$.

A jobboldalt $a - b \geqq 1$-vel szorozva, az egyenlőtlenség igaz marad. A baloldalt viszont kisebbítenünk szabad, amit azáltal érünk el, hogy a és b helyébe a $c < b < a$-t helyettesítjük. E szerint $nc^{n-1} < c^n$ és így $n < c$. Minthogy az n értékeinek a főltétel szerint felső korlátja nem volt, tehát a, b és c csak akkor teljesítik a föltételt, ha $a = b$.

Jelentés az 1924. évi XXVIII. mathematikai tanulóversenyről.

Az «Eötvös Lóránd Mathematikai és Physikai Társulat» XXVIII. mathematikai tanulóversenyét 1924 október 18-án tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten résztvett 18, Szegeden 2 versenyző. Beadatott 16, illetőleg 2 dolgozat. A verseny tételei a következők voltak:

1. Adva van három pozitív egész szám: a, b és c. Bebizonyítandó, hogy ha minden pozitív egész n szám mellett létezik olyan háromszög, mely oldalainak mérőszáma a^n, b^n, illetve c^n, akkor a háromszögek mind egyenlőszárúak.

2. Mi a geometriai helye a sík azon P pontjainak, melyekre nézve egy adott O ponttól való r távolságának, s egy adott e egyenestől való

ρ távolságnak összege egyenlő egy adott a távolsággal (r és ρ a távolságoknak puszta hosszai, tehát pozitívok).

3. Adva van a síkban három pont: A, B, C. Szerkesztendő három kör oly módon, hogy az első a másodikat A-ban, a második a harmadikat B-ben és a harmadik az elsőt C-ben érintse.

A bírálóbizottság 1924 okt. 26-án tartott ülésén RADOS GUSZTÁV elnöklete alatt jelen voltak: ÉBER JÓZSEF, FEJÉR LIPÓT, KÜRSCHÁK JÓZSEF és KŐNIG DÉNES előadó. Egyhangú javaslata így hangzik:

A bírálóbizottság a beadott 18 dolgozat beható áttekintése után egyhangú elhatározással javasolja, hogy az első Br. EÖTVÖS LÓRÁND-díj KÖRNER ENDRÉnek, a budapesti V. ker. BOLYAI főreáliskolában FRÖHLICH KÁROLY tanítványának ítéltessék oda, aki egyedül oldotta meg az első feladatot, még pedig meglepő egyszerűséggel. A második feladat lényegét szintén csak ő ismerte fel, de a megoldásban szereplő második parabolaív egyenletébe előjelhiba csúszott be. A harmadik feladat megoldása helyes. Sem második díjra, sem dícséretre méltó dolgozatot a bizottság ezúttal nem talált.

A választmány e javaslatot egyhangulag elfogadta.

Az 1924-ik évi VI-ik fizikai tanulóverseny.

A kitűzött feladatok a következők voltak:

1. Adva van három lencse, melyeknek gyújtótávolságai: $f_1 = 12{\cdot}5$ cm, $f_2 = 50$ cm és $f_3 = -100$ cm. A lencsék vastagsága legyen elhanyagolható. Hogyan kell e három lencsét kombinálni, hogy maximális nagyítású távcsövet nyerjünk? Hányszoros lesz e távcső nagyítása?

2. 1 kg vizet túlhűtünk $-10°$ C-ra. A fagyást megindítva mennyi jég fog kifagyni? A jég fajhője 0·463 kalória, olvadási hője 80 kalória.

3. Egy 0·15 cm átmérőjű és terheletlen állapotában 100 cm hosszú sárgarézdrótra 500 gr-os tömeget függesztünk. Ezt az ingát abból a helyzetéből, hol a függélyessel 45°-os szöget zár be, elengedve mekkora lesz az inga hosszúsága az egyensúlyi helyzetén való áthaladás pillanatában? A sárgaréz rugalmassági modulusa: 10,000 $\frac{\text{kg súly}}{\text{mm}^2}$.

A versenyen résztvett 11 növendék, de közülük csak hárman adtak be dolgozatot. Ezek közül a bíráló-bizottság az első KÁROLY IRÉN-díjra egyiket sem találta érdemesnek. A második díjat KÖRNER ENDRÉNEK, a Bólyai főreáliskola volt növendékének, FRŐHLICH KÁROLY tanítványának ítélte oda. Dicséretet kapott ERNST VILMOS PÁL.

TÁRSULATI ÉLET.

Előadások:

1924 nov. 13-án jelentés az 1924. évi mathematikai és fizikai tanuló versenyről, KŐNIG DÉNES: Kubikus mátrixokról és egyoldalú felületekről. 1924 nov. 27-én GRUBER NÁNDOR: A számok oszthatósága. GÁTI BÉLA: Az elektromosság millió kilométeres sebességeiről és ennek a nagy sebességnek néhány gyakorlati alkalmazásáról. 1924 dec. 11-én KALMÁR LÁSZLÓ: A törzsszámtételről. 1925 jan. 22-én SOÓS SÁNDOR: A diszkontinuitásról (I. rész). 1925 febr. 5-én. TIHANYI MIKLÓS: Két trigonometrikus determináns. SOÓS SÁNDOR: A diszkontinuitásról (II. rész). 1925. febr. 19-én KÜRSCHÁK JÓZSEF: Speciális mátrixek. SCHRODT ISTVÁN: Baretter felhasználásával eszközölhető temperatura-mérésekre vonatkozó vizsgálatok. 1925 márc. 5-én VERESS PÁL: A Baire-féle függvényklasszisokról. KEDVES MIKLÓS: Ideghártyaképek fényképezése. 1925 márc. 19-én SZMODICS HILDEGÁRD: A centrális kollineációk bizonyos halmaza, mint projekció-rendszer.

Nyilatkozat.

A Math. és Phys. Lapok 1916. évi 25—32. oldalán «A Sugárzási formula előállítása a BOLTZMANN-féle entropia fogalom nélkül» címén megjelent dolgozat szerzője gyanánt tévedésből TOMITS IVÁN úr van feltüntetve, holott e dolgozat szerzője CSÁSZÁR ELEMÉR úr. Kijelentjük azonban, hogy a háború eleje óta a harctéren szolgálatot teljesítő TOMITS IVÁN úr teljes jóhiszeműséggel gondolhatta magát e dolgozat szerzőjének, mert annak témáját ZEMPLÉN GYŐZŐ akkori szerkesztővel több ízben közölte és gondolatmenetét megbeszélte.

Budapest, 1925. ápr. 24-én.

Fröhlich Izidor,
Mikola Sándor,
Rybár István,
Pogány Béla.

Dr. Tomits Iván
p. főmérnök.
Császár Elemér.

Tagsági, illetve előfizetési díjat fizettek:

Árvayné Ádám Margit (21,000), Aliquander Lajos (100,000), Aranyosi Miksa (40,000), Ábrahám István (40,000), Aujeszky László (5000), Ballenegger Andor (40,000), Balog Mór (1000), Baranyi Balázs (40,000), Bartoniek Géza (10,000), Bauer Mihály (61,000), Benedek Margit (20,200), Bihary Ferenc (21,000), Blau Ármin (40,000), Bodócs István (90,000), Bogyó Samu (1300), Borosay Dávid (100), Bricht Lipót (40,000), Buchböck Gusztáv (40,000), Bugarszky István (40,000), Balyi Ferenc (1000), Bláthy Ottó (100,000), Benkő Ilona (70,000), Cholnoky Jenő (40,000), Csada Imre (40,000), Csaplár Konrád (40,000), Csapody Vera (20,200), Császár Elemér (40,000), Csizhegyi Lajos (42,000), Czekeliusz Aurél (40,000), Czakó Adolf (40,000), Csegény Margit (20,000), Darkó Béla (70,000), Demeter János (5000), Emmanuel László (20,350), Éber József (40,000), Faragó Andor (40,000), Fejes Zsigmond (90,000), Fejér Lipót (50,000), Fenyvesi Andor (40,000), Fodor László (300), Fraunhofer Lajos (20,200), Fröhlich Károly (40,000), Füzy Rezső (15,000), Farkas Gyula (20,800), Filarszky Erzsébet (40,000), Forró Magdolna (20,000), Goldziher Károly (40,000), Gotléb Béla (40,000), Gyulai Zoltán (20,200), Grosschmid Lajos (100,000), Gruber Nándor (140,000), Hajós Géza (40,000), Hang Dániel (40,000), br. Harkányi Béla (100,000), Hatvani Ede (40,000), Hausbrunner Vilmos (2200), Hauser Ignác (40,000), Havas Ede (40,000), Havas Miksa (20,000), Herez Szidónia (100,000), Hittrich József (40,000), Hoffmann Ernő (100,000), Huszár Geyza (40,000), Jakab Imre (70,200), Jakucs István (20,200), Jurányi Henrik (40,000), Kalmár László (90,000), Kármán Ilona (70,000), Kedves Miklós (71,000), Kerber János (90,000) Kerékjártó Jenő (40,000), Kilczer Gyula (150,000), Király László (20,140) Kisfaludy István (100,200), Kiss Dénes (20,000), Klug Lipót (51,200), Kohn Jolán (70,000), Kopp Lajos (70,120), Koren Dénes (70,100), Koronczy Teofil (40,000), Koschnovitz Gyula (70,000), Kovács János (40,000), Kőnig Dénes (40,000), Kövesi Ferenc (20,050), Kronstein Béla (40,000), Kuzaila Péter (40,000), Kürschák József (101,000), Lévay Ede (90,000), Lipka István (90,000), Luckhaub Gyula (40,000), Lukács Tibor (40,000), Magdics Gáspár (20,200), Magi Ferenc (50,000), Magyar Márta (90,000), Maties Árpád (40,000), Meidenky Júlia (40,000), Megeri István (40,000), Mende Jenő (40,000), Mihalovits Lajos (20,100), Milakovszky László (20,300), Molnár Imre (90,000), Moravetz Károly (40,000), Müller József (40,000), Nagy József (20,400), Nagy Sarolta (70,000), Neubauer Konstantin (250,000), Neuhold Özséb (90,000), Novabátzky Károly (40,000), Novotny Margit (40,000), Nyári Béla (70,000), Oszlaczky Szilárd (20,100), Palatin Gergely (100), Pfeifer Péter (20,360), Pintér Mihály (20,200), Pliscka Norbert (40,000), Pogány Béla (50,000), Pogátsa János (53,000), Pécsi Albert (90,000), Politzer Róza (70,000), Radó Simon (90,000), Rados Gusztáv (60,000), Rados Ignác (60,000), Renner János (20,000), Reuss Endre (20,000), Rhórer László (40,000), Riegl Sándor (20,000), Riesz Frigyes (25,000), Rigó Ferenc (40,000), Romsauer Lajos (150,000), Róka Gedeon (50,000), Róna Zsigmond (20,000), Rucsinszky Lajos (90,000), Rybár István

(100,000), Sárközy Pál (70,000), Schwartz Emmy (40,000), Simon Elemér (20,000), Somogyi Antal (40,000), Soós Sándor (40,000), Sós Ernő (40,000), Strausz Hermann (40.000), Suppán Vilmos (100,000), Szabó Gábor (50,000), Szabó Gusztáv (90,000), Szabó Lajos (40,000), Szalay-Újfalussy László (20,300), Szekeres Kálmán (40,000), Szerényi Géza (40,000), Székely Károly (20,100), Széky István (20,100), Szíjártó Miklós (100,000), Szmodics Hildegard (100,000), Szmodics Kázmér (40,000), Szőke Béla (70,000), Szűcs Adolf (40,000), Szűcs Pál (20,000), Tangl Károly (40,000), Tass Antal (5000), Terkán Lajos (40,000), Tihanyi Miklós (20,200), Tillinger Istvánka (40,000), Tolnay Jenő (100,000), Tóth Aladár (90,000), Török Elemér (70,000), Ujj Gyula (70,100), Vajk Magda (200), Vámos Sándor 20,200), Varga Virgil (40,000), Vigassy Lajos (90,000), Volenszky Gyula (40,000), Vörös Cyrill (90,000), Waldapfel János (400), Winter József (50,000), Wittmann Ferenc (40,000), Woyciechowsky József (40,000), Wodetzky József (40,000), Zemplén Géza (40,000).

Ág. h. ev. főgimn. Békéscsaba (71,000), M. Kir. O. Met. és Földt. Intézet (20,000), Bulyovszky-utcai főreál Budapest (40,000), Markó-utcai főreál Budapest (90,000), Tisztviselőtelepi főgimn. Budapest (20,000), Kőbányai állami főgimn. (50,000), Andrássy-úti felsőleányiskola Budapest (50,000), Ref. főgimn. Debrecen (40,000), Kir. kath. főgimn. Dombovár (51,000), Állami főreál Eger (50,000), Állami főreál Győr (100,000), Ref. főgimn. Hajduböszörmény (50,000), Ref. főgimn. Hajdúnánás (50,000), Állami főgimn. Kaposvár (100,000), Ref. főgimn. Kisújszállás (51,000), Állami főgimn. Makó (90,000), Szt-Benedekrendi központi könyvtár Pannonhalma (150,000), Állami főgimn. Szekszárd (50,000), Állami főreál Sopron (50,000), M. kir. bánya- és erdőmérnöki főiskola (140,000), Ciszt.-rendi tanárképző Budapest (50,000), Róm. kath. leánygimn. Kecskemét (50,000), Hunyady Mátyás nevelőintézet Kőszeg (50,000).

Adományok:

Ganz és Társa Villamossági R.-T. 5.000,000.
Államsegély 7.140,000.
Tudománymentő egyesülettől 2.000,000.
Br. Ullmann György 500,000.
N. N. 200,000.

Franklin-Társulat nyomdája: Géczy Kálmán.

A LEBESGUE-FÉLE ÁLLANDÓK ELMÉLETÉHEZ.

1. A Fourier-féle sorok s általánosabban az orthogonális kifejtések elméletében fontos szerep jut az u. n. Lebesgue-féle állandóknak, melyek tulajdonságait számos szerző behatóan vizsgálta.[1] A Fourier-féle sorok esetét tartva szem előtt, ezen állandók a következőképen értelmezhetők. Tekintsük a $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ közben megadott, Riemann-féle értelemben integrálható valós $f(\theta)$ függvények azon alosztályát, melyet az

$$|f(\theta)| \leqq 1$$

egyenlőtlenség jellemez. Tekintsük továbbá az $f(\theta)$ függvényhez tartozó Fourier-féle sor n-edik részletösszegét, $s_n(\theta)$-t egy $\theta = \theta_0$ helyen:

$$s_n(\theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{\sin (2n+1) \frac{\theta - \theta_0}{2}}{\sin \frac{\theta - \theta_0}{2}} d\theta.$$

Az n-edik Lebesgue-féle állandó ϱ_n már most nem egyéb, mint az $|s_n(\theta_0)|$ számok felső határa, mialatt $f(\theta)$ a mondott függvények összességét átfutja; mint rögtön látható, ϱ_n független θ_0-tól (csupán n-től függ) és pedig

$$\varrho_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin (2n+1) \frac{\theta - \theta_0}{2}}{\sin \frac{\theta - \theta_0}{2}} \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin (2n+1) \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right| d\theta.$$

---

[1] Lásd alább.

A kérdéses felső határ továbbá el is éretik, amennyiben az

$$f_0(\theta)=\operatorname{sg}\frac{\sin(2n+1)\frac{\theta-\theta_0}{2}}{\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}}$$

függvényre nyilván $s_n(\theta_0)=\varrho_n$.[2]

Hasonlóképen vezethető be a LEBESGUE-féle «állandók» fogalma tetszőleges orthogonális kifejtések esetében, azon különbséggel, hogy ekkor ϱ_n általában nem lesz többé független ama θ_0 helytől, melyen a részletösszegeket tekintjük.

2. A FOURIER-féle sorok esetében FEJÉR bebizonyította,[3] hogy a

$$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$$

sorozat egy bizonyos tagtól kezdve monoton növekvő. Sejtését, hogy ez kezdettől fogva érvényes, először GRONWALL igazolta.[4] GRONWALL tételére e sorok írója adott egy egyszerűbb bizonyitást.[5]

Közelfekvő gondolat volna, e tétel bizonyitását a következő módon megkisérelni. Az előbb említett $f_0(\theta)$ függvény kifejtésének n-edik részletösszege a θ_0 helyen megegyezik ϱ_n-nel. Ha tehát $f_0(\theta)$ kifejtésének $(n+1)$-edik tagja a θ_0 helyen positiv ($\geqq 0$) volna, úgy ebből ugyanezen függvényre $s_{n+1}(\theta_0)\geqq s_n(\theta_0)=\varrho_n$ következnék, ami tüstént a $\varrho_{n+1}\geqq\varrho_n$ egyenlőtlenséget vonná maga után.

Sajnos a FOURIER-féle sorok esetében ez a meggondolás nem

---

[2] Fordítva, ha egy a fenti feltételeknek megfelelő függvényre nézve $|s_n(\theta_0)|=\varrho_n$, úgy nyilván vagy $f(\theta)=f_0(\theta)$, vagy $f(\theta)=-f_0(\theta)$, kivéve esetleg azon θ helyeket, ahol $f(\theta)$ vagy $f_0(\theta)$ nem folytonos.

[3] LEBESGUEsche Konstanten und divergente FOURIERreihen [Journal für die reine und angewandte Mathematik 138 (1910), p. 22—53].

[4] Über die LEBESGUEschen Konstanten bei den FOURIERschen Reihen [Mathematische Annalen 72 (1912), p. 244—261].

[5] Über die LEBESGUEschen Konstanten bei den FOURIERschen Reihen [Mathematische Zeitschrift 9 (1921), p. 163—166].

vezet célhoz. Ha pl. az általánosság megszorítása nélkül feltételezzük, hogy $\theta_0 = 0$, úgy

$$f_0(\theta) = (-1)^\nu, \quad \text{ha} \quad \nu \frac{2\pi}{2n+1} < \theta < (\nu+1)\frac{2\pi}{2n+1} \quad (\nu=0, 1, \ldots, 2n).$$

Tehát $f_0(\theta)$ FOURIER-féle sorának $(n+1)$-edik tagja

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\theta)\cos(n+1)\theta d\theta = \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu \int_{\nu\frac{2\pi}{2n+1}}^{(\nu+1)\frac{2\pi}{2n+1}} \cos(n+1)\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\left[\sin(\nu+1)\frac{2\pi(n+1)}{2n+1} - \sin\nu\frac{2\pi(n+1)}{2n+1}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^{\nu+1}\sin\nu\frac{2\pi(n+1)}{2n+1} < 0,$$

mert

$$\sin\nu\frac{2\pi(n+1)}{2n+1} = \sin\nu\pi\frac{2n+2}{2n+1} =$$

$$= \sin\left(\nu\pi + \frac{\nu\pi}{2n+1}\right) = (-1)^\nu \sin\frac{\nu\pi}{2n+1}.$$ [6]

3. Annál figyelemreméltóbb, hogy, mint azt a következőkben meg akarjuk mutatni, az előbb vázolt gondolatmenet egy másik nevezetes orthogonális kifejtés (sőt egy egész kifejtésosztály) esetében a megfelelő LEBESGUE-féle állandók növekedésének igazolására *alkalmasnak bizonyul.*

Ezek az u. n. LAGUERRE-féle polynomok szerint való kifejtések. Célszerű lesz néhány szót előrebocsátani e polynomokról, melyek különösen egyszerűen a következő végtelen sor segítségével értelmezhetők:

[6] Hasonló érvényes, mint könnyen igazolható, a LEGENDRE-féle sorokhoz tartozó, az $x = 1$ helyhez rendelt LEBESGUE-féle állandókra vonatkozólag. Ez utóbbiak asymptotikus tulajdonságait GRONWALL vizsgálta [Über die LAPLACEsche Reihe, Mathematische Annalen 74 (1913), p. 213—270, § 2]; monoton növekedésüket eddig még nem sikerült igazolni.

$$\frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}}=L_0^{(\alpha)}(x)+L_1^{(\alpha)}(x)z+L_2^{(\alpha)}(x)z^2+\cdots+L_n^{(\alpha)}(x)z^n+\cdots.^7 \quad (1)$$

$L_n^{(\alpha)}(x)$ egy pontosan n-edfokú polynom. Könnyű beigazolni, hogy a LAGUERRE-féle polynomokra nézve az $\alpha>-1$ esetben a következő egyenletek érvényesek:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_m^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\alpha)}(x)\,dx=0, \quad \text{ha} \quad m \gtrless n \quad (m,n=0,1,2,\ldots). \quad (2)$$

Az $m=n$ esetben ezen integrál értéke $\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}$.

A (2) egyenletek által kifejezett orthogonalitás alapján egy tetszőleges, a $0, +\infty$ közben értelmezett $f(x)$ függvény az $L_n^{(\alpha)}(x)$ polynomok szerint a FOURIER-féle módon sorba fejthető:

$$f(x)\sim c_0L_0^{(\alpha)}(x)+c_1L_1^{(\alpha)}(x)+c_2L_2^{(\alpha)}(x)+\cdots+c_nL_n^{(\alpha)}(x)+\cdots, \quad (3)$$

ahol

$$c_n=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha f(x)\,L_n^{(\alpha)}(x)\,dx \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

A következőkben a (3) kifejtéshez rendelt, az $x=0$ helyre vonatkozó LEBESGUE-féle állandókkal

$$\varrho_0^{(\alpha)},\ \varrho_1^{(\alpha)},\ \varrho_2^{(\alpha)},\ \ldots,\ \varrho_n^{(\alpha)},\ldots$$

akarunk foglalkozni.

Mivel (1) alapján

$$L_n^{(\alpha)}(0)=\binom{n+\alpha}{n},$$

tehát

$$c_nL_n^{(\alpha)}(0)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha f(x)\,L_n^{(\alpha)}(x)\,dx$$

és így

$$\varrho_n^{(\alpha)}=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\max\left|\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha f(x)\left(L_0^{(\alpha)}(x)+L_1^{(\alpha)}(x)+\cdots+L_n^{(\alpha)}(x)\right)dx\right|,$$

[7] V. ö. pl. PÓLYA-SZEGŐ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, 2. kötet (Berlin: J. Springer 1925), 94, 293—294. o.

mialatt $f(x)$ a $0, +\infty$ közben értelmezett, az $|f(x)| \leqq 1$ feltételnek alávetett, minden véges positiv közben RIEMANN szerint integrálható valós függvények összességét átfutja. Tehát

$$\varrho_n^{(\alpha)} = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha \left| L_0^{(\alpha)}(x) + L_1^{(\alpha)}(x) + \cdots + L_n^{(\alpha)}(x) \right| dx. \quad (4)$$

$\varrho_n^{(\alpha)}$ mint maximum éléretik (v. ö. [1]), ha

$$f(x) = f_0(x) = \operatorname{sg}(L_0^{(\alpha)}(x) + L_1^{(\alpha)}(x) + \cdots + L_n^{(\alpha)}(x)). \quad (5)$$

(1)-ből azonban könnyen következik, hogy

$$L_0^{(\alpha)}(x) + L_1^{(\alpha)}(x) + \cdots + L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n+1}^{(\alpha)\prime}(x),$$

mert hiszen egyrészt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (L_0^{(\alpha)}(x) + L_1^{(\alpha)}(x) + \cdots + L_n^{(\alpha)}(x)) z^n = \frac{1}{1-z} \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}},$$

másrészt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-L_{n+1}^{(\alpha)\prime}(x)) z^n = -\frac{1}{z} \frac{d}{dx} \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}};$$

úgyhogy

$$f_0(x) = -\operatorname{sg} L_{n+1}^{(\alpha)\prime}(x). \quad (5')$$

A $\varrho_n^{(\alpha)} \leqq \varrho_{n+1}^{(\alpha)}$ egyenlőtlenség kimutatására nyilván elegendő igazolni, hogy

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha f_0(x) L_{n+1}^{(\alpha)}(x)\, dx \geqq 0. \quad (6)$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ezen integrál $= 0$.

4. Mint ismeretes,[8] $L_{n+1}^{(\alpha)}(x)$ eleget tesz a

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x} x^{\alpha+1} L_{n+1}^{(\alpha)\prime}(x)\right] + (n+1) e^{-x} x^\alpha L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = 0 \quad (7)$$

differenciálegyenletnek. Legyenek már most $x_1, x_2, \ldots, x_l$, növekedő sorrendben irva, a $0, +\infty$ köz azon helyei, amelyeken

[8] Lásd i. h. [7]

$L^{(\alpha)\prime}_{n+1}(x)$ jelet vált.[9] Legyen továbbá $x_0=0$ és $x_{l+1}=+\infty$. Az értelmezés szerint $f_0(x)$ az $(x_\nu, x_{\nu+1})$ közökben állandóan (felváltva) $+1$ és -1 $(\nu=0, 1,\dots, l)$, továbbá $L^{(\alpha)\prime}_{n+1}(x_\nu)=0$, ha $\nu=1, 2,\dots, l$. Világos ebből, hogy

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha f_0(x)\, L^{(\alpha)}_{n+1}(x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{l}\pm\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} e^{-x}x^\alpha L^{(\alpha)}_{n+1}(x)\,dx$$

ahol az egyes tagok előjele nem érdekel bennünket, mert, mint tüstént ki fogjuk mutatni, a jobboldalon szereplő összes integrálok eltűnnek.

Valóban (7) szerint

$$\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} e^{-x}x^\alpha L^{(\alpha)}_{n+1}(x)\,dx=-\frac{1}{n+1}\left[e^{-x}x^{\alpha+1}L^{(\alpha)\prime}_{n+1}(x)\right]_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}=0,$$

és pedig ν minden értékére $\left(e^{-x}x^{\alpha+1}L^{(\alpha)\prime}_{n+1}(x)\right.$ eltűnik, ha $x=0$ vagy $\left.x=+\infty\right)$, amiből $\varrho^{(\alpha)}_n\leqq\varrho^{(\alpha)}_{n+1}$ következik.

Az [1] és [9] alatti megjegyzésekből könnyen folyik az élesebb $\varrho^{(\alpha)}_n<\varrho^{(\alpha)}_{n+1}$ egyenlőtlenség is, amivel tételünk teljesen igazolva van.

Szegő Gábor.

ZUR THEORIE DER LEBESGUESCHEN KONSTANTEN.

Es werden die zur Stelle $x=0$ gehörigen LEBESGUEschen Konstanten $\varrho^{(\alpha)}_n$ bei den Entwicklungen nach den s. g. LAGUERREschen Polynomen $L^{(\alpha)}_n(x)$ $(\alpha>-1)$ betrachtet, die den Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L^{(\alpha)}_m(x)\,L^{(\alpha)}_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{für } m\gtrless n,\\ \Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n} & \text{für } m=n\end{cases}$$

$$(m, n=0, 1, 2,\dots)$$

genügen. Die formale Entwicklung einer für $x\geqq 0$ beschränkten, in jedem endlichen positiven Intervall im RIEMANNschen Sinne integrablen Funktion $f(x)$ nach diesen Polynomen lautet:

---

[9] Mint ismeretes, $L^{(\alpha)}_{n+1}(x)$ és $L^{(\alpha)\prime}_{n+1}(x)$ összes gyökei valósak, különbözők és positivok, ugy hogy $l=n$; e tételt a következő bizonyitás folyamán nem vesszük igénybe.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^{(\alpha)}(x), \quad c_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} f(x) L_n^{(\alpha)}(x)\, dx.$$

Die n-te LEBESGUEsche Konstante ist nun definiert als

$$\varrho_n^{(\alpha)} = \max \left| \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu L_\nu^{(\alpha)}(0) \right|,$$

während $f(x)$ die Gesamtheit aller Funktionen mit der Bedingung $|f(x)| \leqq 1$ durchläuft. Es ist also

$$\varrho_n^{(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{(\alpha)} \left| L_0^{(\alpha)}(x) + L_1^{(\alpha)}(x) + \cdots + L_n^{(\alpha)}(x) \right| dx;$$

erreicht wird dieses Maximum für

$$f(x) = f_0(x) = \operatorname{sg}\left(L_0^{(\alpha)}(x) + L_1^{(\alpha)}(x) + \cdots + L_n^{(\alpha)}(x)\right).$$

Das Ziel der Arbeit ist das monotone Wachsen der Folge

$$\varrho_0^{(\alpha)}, \varrho_1^{(\alpha)}, \varrho_2^{(\alpha)}, \ldots, \varrho_n^{(\alpha)}, \ldots$$

zu beweisen. Dies geschieht, indem nachgewiesen wird, dass das $(n+1)$-te Entwicklungslied der eben erwähnten Funktion $f_0(x)$ verschwindet. Dieselbe Methode führt bei der FOURIERschen Reihe *nicht* zum Ziele, das betreffende $(n+1)$-te Entwicklungslied fällt dort *negativ* aus.

G. Szegö.

ELEMI MÓDSZEREK A FELSŐBB MATHEMATIKÁBAN.

(A m. kir. Ferencz József Tudományegyetemen 1925 okt. 11-én tartott rektori székfoglaló beszédéből).

. . . .

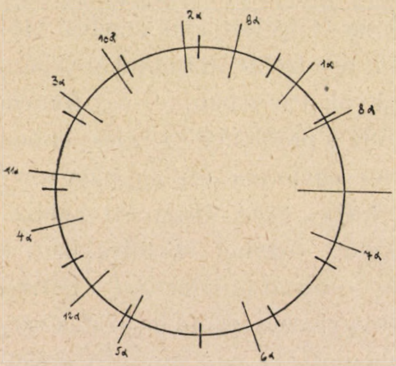
Régi, tiszteletreméltó szokás, hogy a tisztségébe lépő rektor székfoglaló értekezésének tárgyát saját tudományszakából választja. Ha véletlenül mathematikusra hárul ez a feladat, hogy tanártársai, az ifjúság és a művelt közönség előtt tudományáról beszéljen, zavarban van, mert úgy érzi magát, mintha vendégként messze országban járna, melynek lakosai az ő nyelvén nem értenek és beszédét reménytelenül, csupán tisztesség okáért hallgatják. Ne méltóztassék tehát zokon venni és különösen ne vegyék zokon azok, akik a mathematikához közelebb állanak, ha én minden eszközzel a megértésre törekszem, ha itt-ott nem egészen tudományos hasonlatokkal élek is és tolmácsként segítségül hívom a szemléletet, a mathematikusnak ezt a sokszor kitünő, de nem mindig megbízható tanácsadóját. Maga az a tárgy is, amelyről szólni óhajtok, a megértés kérdésével kapcsolatos. Ez a kérdés nemcsak akkor aktuális, ha a mathematikus nem mathematikussal kerül össze, hanem azok között is, akiknek kenyerük a mathematika. Gyakran szembeállítják a mathematika elemeit a felsőbb mathematikával, vagy helyesebben a középiskolai mathematikát a főiskolaival, mint amelyeknek tárgya, fogalmai, nyelve egymástól idegenek. Felületesen és drasztikusan azt szokták mondani, hogy annak, aki a mathematikának középiskolában való tanítására készül, kétszer kell felejtenie; először akkor, amikor az egyetemre megy, másodszor pedig, amikor tanítani kezd; az első alkalommal mindazt, amit a középiskolában tanult, azután pedig mindazt, amit az egyetemen hallott. Fölösleges ezt cáfolnom, legalább is azok előtt, akik tudják, hogy az egyes tudományok és tudománycsoportok nem csupán izolált tételekre és paragrafusokra beosztott valamik, hanem szervesen összefüggő rendszerek. De részletesen is meghazudtolja ezt az a széleskörű irodalom, mely a mathematika középiskolai tanításának és a mathematikus tanárképzésnek kérdéseivel és ezekkel kapcsolatban a középiskolai anyagnak magasabb szempontból való megvilágításával foglalkozik és amelyben Klein Félixé, a nemrég elhunyt világhírű göttingai mathematikusé a vezetőszerep. Itt csak egy ellenargumentumot említek, azt t. i., hogy a középiskolai és a felsőbb mathematika határai egyáltalán nem állandók, hanem idővel nagyon is megváltoztak. Ma már, egy-két évtized óta, csaknem minden ország középiskoláiban tanítják az infinitezimális számítás elemeit, mint amelyek a természettudományos műveltség elengedhetetlen kellékei és amelyeket megérteni és megtanulni különben is könnyebb, mint pl. némely síkmértani tétel bebizonyítását. Az infinitezimális számítás alapvető gondolatai tudvalevőleg már az ókori geométereknél megtalálhatók, Archimedes által már rendszeresen alkalmaztattak geometriai és mechanikai problémákra, majd hosszú szünet után a renaissance korában ébredtek új életre és egy századdal később Newton és Leibniz kezében hatalmas módszerré alakultak. Méltóztassék mindezt egybevetni azzal a ténnyel, amelyre Gutzmer német mathematikus, mint a Halle-Wittenbergi egyetem rektora emlékeztetett székfoglaló beszédében, hogy t. i. ennek az egyetemnek hirdetőtábláján Melanchton még azzal invitálta a hallgatóságot számtani előadására, hogy ennek a tudománynak nemcsak az elemei egészen könnyűek, de némi szorgalommal még az osztást is meg lehet érteni.

Mai előadásomban a fölvetett kérdéshez, hogy t. i. a tudományban, illetőleg a magam tudományszakában melyik probléma a nehéz és melyik a könnyű, mi a felsőbb és mi az elemi, nem a középiskolai oktatásnak és a tanárképzésnek, hanem a tudomány szempontjából akarok hozzászólni. Az egyetemnek és professzorainak az értelmiségi pályákra való tömeges előkészítésen kívül még más feladatuk is van; ez a tudományos munkára való nevelés és maga a kutató és alkotó tudományos munka. A tudós nemcsak kész eredményeket tradál, hanem fejlődő diszciplinákat is ismertet és azok egyikét-másikát előbbre viszi maga is, egyedül vagy tanítványai közreműködésével. Tehát maga is tanul, dolgozik és fejlődik. Méltóztassék már most megtekinteni azt a folyóirattömeget, mely egy tudományszakban évenként megjelenik vagy csak egy bibliografiai munkát is, mely ezt az évi produkciót feldolgozza. Vajjon követheti, kiválogathatja, megszűrheti, magáévá teheti-e mindezt egyetlen agyvelő, még akkor is, ha csak egy kisebb tárgykörre speciálizálódik? Igen. Mert ennek a produkciónak a legértékesebb része, melyet a hivatott szem gyorsan kiválaszt, azt a célt szolgálja, amit Mach, a híres bécsi fizikus, az «Ökonomie des Denkens» névvel jelölt meg. Magyarul ez takarékosságot jelent a gondolkodásban. Ezt a célt szolgálja mindaz, ami a komplikáltat egyszerűvé, a sublimiort elemivé teszi, ezt szolgálják különösen azok az összefogó, átölelő fogalmak, amelyek távoli diszciplinákat közel hoznak egymáshoz, mintahogy régebben a gőzhajó és a vasút, ma a repülőgép és a rádió közel hozták egymáshoz a távoli országokat. A tudós éppoly szenvedéllyel és elszántsággal keresi a bonyolult problémák egyszerű nyitját, mint a feltaláló, és a szerszám, amellyel a zárhoz férkőzik, egyszer generációk finomra kicsiszolt munkája, másszor pedig pillanatnyi ötlet, melyet igaz, hogy rendszerint hosszú, részben tudatalatti munka előzött meg.

Ha én ma itt arra vállalkozom, hogy néhány a felsőbb mathematikából vett problémán és problémakörön mutassak rá arra, mint lehet a komplikáltat egyszerűvé, a nehezet könnyűvé tenni, ha én ilyesmire nem szakemberek előtt merek vállalkozni és ha ez a vállalkozásom csak némileg is sikerül, úgy elgondolhatják, hogy mit jelentenek az ilyen egyszerűsitő gondolatok a tudományosan előkészitett hallgatóság és még inkább a kutató tudós számára.

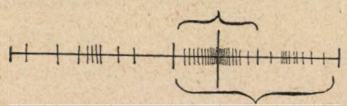
Nem kezdem konkrét mathematikai problémával, hanem egy a mathematikusok közt ma nagyon népszerű ötlet ismertetésével, mely számos probléma nyitjához vezetett és érdemei elismeréseül az elv, a principium rangját és méltóságát nyerte el. Ezt az ötletet először a maga népszerű vonatkozásaiban prezentálom. Ha egy négytagú családnak sikerül egy két- vagy háromszobás lakást kapnia, akkor nem jut minden családtagra külön szoba, hanem legalább is az egyik szobában két vagy több családtag fog meghúzódni. És ugyanígy, ha három skatulyába osztok el 3-nál több gyufaszálat, akkor legalább az egyik skatulyába egynél több gyufaszál jut. Ez az úgynevezett *skatulya-principium* a maga legprimitivebb formájában, melyben konkrét személyeket vagy tárgyakat helyeztünk konkrét rekeszekbe, szobákba, illetőleg skatulyákba. Lássunk már most egy problémát, amelynek megoldását ez a principium szolgáltatja és amelyet először kisgyerek koromban olvastam egy tréfás számtankönyvben. Valamely világvárosban, mondjuk pl. Párizsban, — egy francia iró egyik regényében ide lokalizálja a problémát — van-e ebben a pillanatban két olyan nő, akinek egyforma sok hajszála van? Ez a kérdés; a válasz pedig az, hogy: *igen.* Hogy ezt bebizonyítsuk, alkossuk meg mindenekelőtt fogalmi skatulyáinkat, a kategóriákat, egy-egy kategóriába sorolván mindazokat a párizsi nőket, akiknek ebben a pillanatban egyforma számú hajszáluk van. Egyikmásik kategóriánk üres is maradhat; mindenesetre legfeljebb annyi kategóriánk lesz, amennyi egy nő hajszálainak legnagyobb lehetséges száma. Ez úgy tudom, kevesebb 300,000-nél; lehet, hogy sokkal kevesebb. Viszont Párizsban, a teljesen kopaszokat, ha ugyan vannak, még leszámítva, 1.000,000-nál több nő lakik. Tehát több a nő, mint a kategória, éppúgy, mint ahogy előbb több volt a gyufaszál, mint a skatulya és így legalább az egyik kategóriába egynél több nő jut. Quod erat demonstrandum!

Lássuk most ennek az elvnek egy tudományos mathematikai alkalmazását, az ú. n. Dirichlet-Kronecker-féle tétel legegyszerűbb esetét. Mellékesen megjegyzem, hogy Lejeune Dirichlet, a mult század első felének ez a világhirű, francia nevű német mathematikusa állitólag a sixtusi kápolnában, a húsvéti zene hallgatása közben eszmélt rá hirtelen a skatulya-principiumnak a számelmélet szempontjából való nagy jelentőségére. Jelentsen a egy tetszésszerinti törtszámot. Tekintsük ennek a számnak első n többszörösét, azaz az a, $2a$, $3a$, . . ., na számokat. A tétel azt mondja, hogy ezek között van legalább is egy olyan, melynek a legközelebbi egész számtól való különbsége nem nagyobb mint $1/n$; pl. ha $n = 1000$, van olyan, melynek a legközelebbi egész számtól való különbsége nem nagyobb $1/1000$ résznél. Durván kifejezve, ha nagyon sok többszöröst tekintünk, akkor van ezek között olyan, amely majdnem egész szám; de a tétel finomabb ennél, mert pontosan megmondja, hogy ezt a «majdnemet» hogyan értelmezzük. Az 1. ábrán, mely a tétel bizonyítását szemlélteti, $n = 12$. A 0, a, $2a$, . . . számokat egy pontból kiindulva, mint íveket rakjuk föl egy körre, melynek kerülete a mértékegység; azért körre és nem egyenesre, mert bennünket az egyes számoknak nem a pontos értéke, hanem csak a törtrésze érdekel; pl. a $^2/_3$ és a $4\,^2/_3$ számok problémánk szempontjából æquivalensek. Az ívek végpontjait a hosszabb vonalkák jelzik. Fölosztjuk a kört n egyenlő részre. Akkor az $n+1$ vonalka közül legalább az egyik ilyen részbe 1-nél több kerül; így az ábrán a $3a$ és a $10a$ ugyanabba a részbe esnek. De akkor egymástól való különbségüknek, azaz $7a$-nak megfelelő vonalka a legelső vagy a legutolsó részben van, tehát a legközelebbi egész számtól legfeljebb $^1/_{12}$-del különbözik. Itt csupán a szemléltetés kedvéért beszéltem bizonyos konkrét számszerű többszörösökről és nem n-ről, i, k és $(k\text{-}i)$-ről, amint az szokásos és ami által bizonyításunk általános érvényűvé válik.

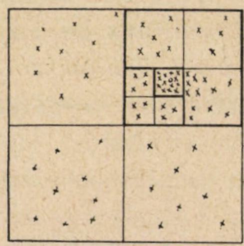

1. ábra.

Csak mutatóba adtam itt ezt a nagyon elemi meggondolást, mert ugyancsak a skatulyaprincipium megadja a nyitját bizonyos sokkal mélyebb és első pillanatra nagyon nehéznek látszó problémáknak is. Időm nem engedi, hogy ezeket ismertessem; csak azt említem meg, hogy ennek a gondolatsornak valahol a vége felé ott van az asztronómusok álmának, a világrendszer stabilitásának a problémája és benne az a kérdés is, hogyha nem is mi magunk, akik ma együtt vagyunk ebben a teremben, de legalább a molekuláink nem találkoznak-e még végtelen sokszor ugyanezen a helyen vagy ennek a helynek tetszésszerint való közelségében?

Rátérek most a skatulyaprincipium egy másik formájára, mely az előbbitől abban különbözik, hogy skatulyáinkba végtelen sok tárgyat szorítunk be. Ez az új principium azt mondja, hogyha végtelen sok különböző elem végesszámú kategória közt oszlik meg, akkor ezen kategóriák közül legalább az egyikbe ugyancsak végtelen sok elem jut. Lássunk mindjárt egy konkrét alkalmazást, mely az infinitezimális számítás sok problémájának adja egyszerű nyitját. Valamely egyenesdarabon vagy a sik vagy a tér egy véges részében valamilyen előírással jelöljünk ki végtelen sok különbözőpontot. Így pl. egy egyenesen, amelyre az összes számokat bizonyos mértékegységben fölrakva képzeljük, tekinthetjük az $\frac{1}{2^n}$ számokat, azaz $^1/_2$ összes hatványait; vagy az összes racionális, vagyis olyan valódi törteket, melyek egész számok hányadosai; vagy pl. az olyan 0-val kezdődő tizedes törteket, melyekben csak a 0 és 7 számjegyek szerepelnek s. i. t. Valamennyi esetben egy véges egyenes darabon jelöltünk ki végtelen sok pontot. Osszuk ezt az egyenes darabot két egyenlő részre; akkor legalább az egyik részre még mindig végtelen sok pont jut és ha ezt ismételten tovább felezzük, minden lépésnél a 2—2 fél darab közül legalább az egyiken pontjaink közül ismét végtelen sok fekszik. Eljárásunkat a 2. ábra szemlélteti. Ha a felezést végnélkül ismételjük, akkor az egymásban foglalt egyenes daraboknak egy végtelen sorozatához jutunk, mely, hogy úgy mondjam, egyetlen egy pontra húzódik össze. Ennek a pontnak az a sajátsága van, hogy annak bármilyen kis környezetében, azaz hozzá bármennyire közel maradunk is, ott a megadott végtelen sok pont közül még mindig végtelen sokat találunk; vagy a mathematikai terminológiát alkalmazva, mely ezt a jelenséget egy nagyon szemléletes kifejezéssel jelöli meg — és sokszor a szerencsés, a lényegre emlékeztető név segít egyszerűsíteni a gondolatmenetet — tehát ezt a terminológiát alkalmazva meggondolásunk eredménye így fogalmazható meg: véges egyenesdarabon kijelölt végtelen sok pontnak van legalább egy *torlódási* helye. Ez az ú. n. BOLZANO—WEIERSTRASS-féle tétel, mely nemcsak egyenesdarabra, de sík- vagy térrészre is érvényes; ez a tétel — vagy nevezhetnénk azt torlódási principiumnak is — már 50 vagy 60 esztendő óta tesz kitűnő szol-



2. ábra.



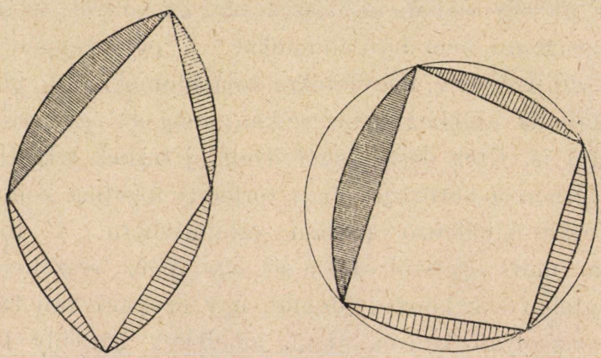
3. ábra.

gálatokat az analizis elemeiben, de a benne elrejtett gondolatnak igazi, nagy horderejét csak az utolsó 1—2 évtizedben ismerték föl, azóta t. i., amióta megszoktuk, hogy a geometriának és a ponthalmazok elméletének módszereit más általánosabb összességekre is alkalmazzuk, hogy térnek tekintsük, a térhez hasonlóan kezeljük formulák, függvények, görbék összességeit is. A geometriában ez a gondolat már a mult század közepe táján érvényesült, a közönséges 3 méretű téren már akkor is bátran túl mentek 1—2—3 dimenzióval és azt is tudják Önök, hogy, hála a még a mathematikus számára is nagyon mély relativitási elmélet népszerűségének és különösen a napi sajtónak, a 4 dimenziós térben ma szinte többen érzik magukat otthon, mint az egyszeregyben. Talán így lesz ez egyszer azokkal a terekkel is, amelyekre a felső mathematika egyes újabb módszerei támaszkodnak és amelyek már nem 4 vagy

5 méretűek, hanem, ha itt egyáltalában beszélhetünk még dimenzióról, végtelen sok dimenziósak. Amikor ezelőtt 17 évvel, az 1908-ban Rómában tartott nemzetközi mathematikai kongresszuson ilyen magasabb terek általános elméletéről fejtettem ki néhány gondolatot, még csak kevesen voltunk úttörők; ma már sok mathematikus — egyelőre szerencsére még csak mathematikusok — otthon érzi magát és mozog és mozgat az ilyen terekben. Ezekben a terekben, legalább a céltudatosan, tervszerűen felépitettekben éppúgy van környezet, éppúgy van torlódás és torlódási principium is, mint a közönséges térben. Tekintsük pl. egy síkban az összes zárt és konvex, azaz domború, horpadással nem biró idomokat — példaképpen tessék a körökre, ellipszisekre, négyzetekre, tojásidomokra stb. gondolni — és számitsuk ezekhez határesetként még az egyenesdarabot és a pontot is. Ezek összességét ilyen új térnek tekinthetjük; ebben a térben a környezet és a torlódás fogalma könnyen és természetesen kinálkozó módon értelmezhető. A torlódási principium most így szól: Ha a sík egy véges részében megadunk végtelen sok konvex idomot, úgy ezeknek van torlódási elemük, azaz olyan konvex idom, amelynek bármely környezetében a megadottak közül végtelen sok fekszik.

Hasonló eredményre jutunk akkor is, ha idomainkról a konvexitás helyett azt tesszük föl, hogy kerületük hossza véges és nem nagyobb egy bizonyos megadott hosszúságnál. És hasonló torlódási principiumra jutunk még számos más esetben is, amelyeket ma nem sorolhatok föl. Ezeknek egyike-másika régi és új nehéz problémákon és problémakörökön való alkalmazásában frappáns hatásúnak bizonyult és sokszor kötetekre rúgó munkát pár oldalra redukált. Hogy hasonlattal éljek, azt lehet mondani, hogy a torlódási principium a felvonókészülék szerepét játssza, mely magas toronyba vagy hegycsúcsra visz föl; a mathematikusnak nincs egyéb teendője, minthogy nyugodtan, óvatosan körültekintve, de erőlködés nélkül lenn a földszinten, a síkságon megkeresse a felvonó-készülék ajtaját: a lift, a principium azután már viszi föl a magasba.

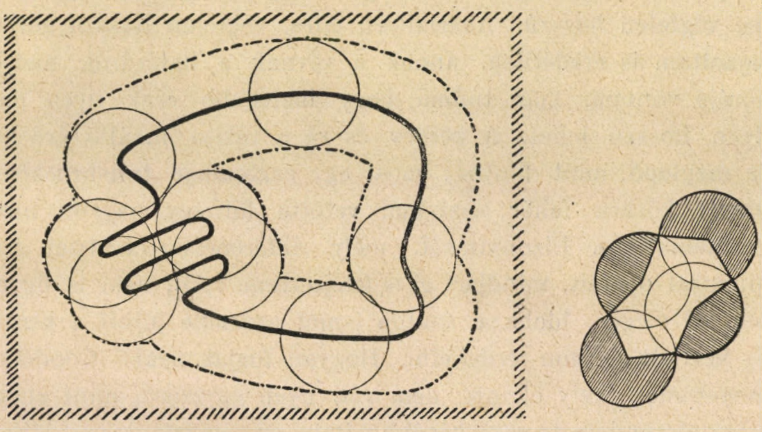
Lássunk egy klasszikus példát, mely történeti vonatkozásaiban az eposzkorba, egészen Dido és Aeneas szerelmi regényéig tekinthet vissza. Méltóztatik emlékezni, hogy a szerelmes királynő a nyughatatlan vándornak annyi földet kinált tulajdonul, amenynyit egy tehén bőréből hasitott szijjal el tud keriteni. Innen datálódik az ú. n. isoperimetrikus probléma, mely így szól: Adott kerületű idomok között melyik legnagyobb területű? Válasz: a kör. Ennek legszemléletesebb bizonyitását STEINER hírneves berlini professzor adta. Szerinte, ha más idom volna a legkisebb, tehát nem a kör, úgy ezen találhatnánk négy olyan



4. ábra.

pontot, melyek nem feküsznek egy körön. Kössük ezeket össze egy az idomba rajzolt négyszöggé. A négyszög, ha szögpontjaiban csuklókkal képzeljük ellátva, még alakitható, még pedig anélkül, hogy oldalainak hosszúsága megváltoznék és közben területe megnagyobbitható azáltal, hogy ú. n. húr-négyszöggé vagyis körbeírható négyszöggé alakitjuk, mert egy elemi geometriai tétel szerint a megadott oldalú négyszögek közt a húrnégyszög a legnagyobb területű. A négyszöggel együtt, mint a 4. ábra mutatja, átalakithatjuk az egész idomot. A kerület nem változott, a terület megnagyobbodott. Azaz idomunk nem lehetett a legnagyobb területű. Tehát idomaink közt csak a kör lehet a legnagyobb területű.

Lehet. De vajjon tényleg az-e? Van-e egyáltalában idomaink közt legnagyobb területű? Ha van, akkor az csak a kör lehet; de azt, hogy van, STEINER a maga ötletes bizonyításában nem mutatta meg. Sokáig úgy látszott, hogy az a kritika, melyet WEIERSTRASS, a berlini egyetem talán még nagyobb hírű professzora mondott az ilyen természetű bizonyításokra, ezeknek az érvényességét megdönti, úgy hogy ezeket a régi, szép bizonyításokat azután szigorú, de összehasonlíthatatlanul nagyobb apparátussal dolgozó bizonyításokkal pótolták. Ma már, pár év óta, tudjuk, hogy STEINER bizonyítását csak a torlódási principium felvonójába kell bevinnünk, éppen abba, amelyről az



5. ábra.

imént beszéltünk és azonnal felérünk a csúcsra, a szigorú, minden kritikát megálló bizonyításhoz.

Befejezésül csupán még egy ugyanebbe a gondolatkörbe tartozó problémán akarom illusztrálni, hogy hogyan okoskodik a tudós a maga kérdésének egyszerű megoldásán, ha már a segítő principiumot akár készen megtalálta, akár pedig saját agymunkájával megkonstruálta. Problémánk a következő: Egy megadott síkidom belsejében tetszésszerinti hosszú, esetleg végtelen hosszúságú — mert ilyen is van — görbét rajzolok. Egy r sugarú körlapot úgy csúsztatok, hogy középpontja a görbét végig leírja. Egyszerűség kedvéért fölteszem, hogy az r sugár elég kicsi ahhoz, hogy a körlap állandóan az idomon belül maradjon; ez a föltevés különben problémánk lényegét nem érinti. A mozgó kör szukcesszive befödi idomunk belsejének egy részét és a befödött résznek is van egy vagy több görbéből álló határa. Mindezt az 5. ábra első részén szemlélhetik. A kérdés az, mit tudunk a kör által befutott területrész határának hosszúságáról? A válasz úgy szól, hogy ez a hosszúság nem lehet nagyobb, mint idomunk kétszeres területe osztva a kör sugarával. Ebben a megbecslésben az az érdekes, hogy teljesen független attól, hogy a rajzolt görbe milyen hosszú vagy esetleg végtelen hosszú. Akármilyen cifra, végtelen hosszú görbét rajzoltam is eredetileg, annak a sávnak a határáról, melyet köréje vontam, már tudom, hogy legfeljebb csak ilyen meg ilyen hosszú lehet. A kérdés és rá a válasz inkább érdekes és meglepő, mint fontos; most egy esztendeje Innsbruckban, baráti körben fehér asztalnál vetette föl egy nagyon híres mathematikus. Bizonyítását, mely differenciálgeometriai számítással operált, mindjárt el is felejtettem, talán nem is figyeltem rá eléggé. Idehaza azután ismét eszembe jutott a kérdés és kezdett nagyon érdekelni. Hogyan fogjak neki? Gondolatmenetemet, mely eleinte nem volt ilyen egyszerű, mint ahogy most elmondom és csak később adtam magamnak számot lényegéről, lesimítván róla minden fölöslegest, röviden így vázolhatom. Első megállapításom az, hogyha az eredményre nézve teljesen közömbös, hogy az eredetileg fölrajzolt görbe milyen hosszú volt, akkor valószínűleg teljesen mellékes magának ennek a görbének a szerepe is, mellékes az, hogy a kör középpontja éppen ezt a görbét írja le és valószínűleg csak az a lényeges, hogy véges vagy végtelen sok egyenlő sugarú körrel födtem be a megadott idom egy részét. És itt már megvillan az egyszerűsités ötlete. Belekapaszkodom abba a lehetőségbe, hogy csak véges számú körről, véges számú kör által befödött területrész határáról van szó. Ez már elemi eset. De ha nagyon sok kört és elég sűrűen választok, akkor az elemi esettel közeledtem az általánoshoz; közeledtem hozzá olyan pontossággal, amilyennek csak akartam. Megvan! — agyvelőm egyik fiókjában már ott vár készen a principium. Ez a principium azt mondja, hogyha egy görbe torlódási görbéje olyan vonalaknak, tehát ha tetszés szerint pontosan megközelíthető olyan vonalakkal, melyeknek egyike sem hosszabb valamely adott hosszúságnál, pl. 500 méternél, akkor maga a görbe sem lehet ennél hosszabb. Amint tehát az elemi esetre bebizonyítottuk állításunkat, csak ezt a principiumot kell működésbe hoznunk és eredményünk érvényessé lesz az általános esetre is.

De az elemi esetre a bizonyítás nagyon egyszerű; ott látjuk azt szemléltetve az 5. ábra 2-ik részén. Csak néhány kört, illetőleg az ezek által befödött területrészt rajzoltam oda kissé megnagyítva, hogy az ábra szemléletesebb legyen. A területrész határa az egyes köröknek azokból az iveiből áll, amelyek kívül maradnak a többi körön. Ezeket vastagon rajzoltam. Minden ilyen ívnek két végét összekötve az illető kör középpontjával, körcikkeket kapunk és tudvalevőleg a körcikk területe egyenlő az illető ív hossza szorozva a sugár felével, tehát az illető ívek hossza egyenlő az egyes körcikkek kétszeres területével, osztva az r sugárral. Az ívek összhossza, vagyis a befödött rész határa egyenlő tehát a körcikkek területeinek kétszeres összegével, osztva még az r sugárral. Mivel pedig ezek a körcikkek nem nyulhatnak egymásba és viszont benne foglaltatnak az eredeti idomban, azért területük összege nem lehet nagyobb, mint az eredeti idom területe. Azaz összefoglalva, a köreink által befödött terület határa nem lehet nagyobb, mint az idom kétszeres területe, osztva r sugárral; és éppen ez az, amit bizonyítani akartunk.

Nem akarom önöket már tovább fárasztani, ámbár még sok problémával illusztrálhatnám azt a tanulságot, amit már előre levontam, hogy a tudományban a felsőbb, a komplikált, a nehéz nem állandó érvényű jelzők és ami ma még ilyen, az holnap már nagyon is elemivé, egyszerűvé, könnyűvé lehet. Áll ez nemcsak a mathematikára, hanem minden olyan vizsgálódásra, mely a jelenségek okait és törvényszerűségeit kutatja, azaz minden tudományra. Aki valamely tudományt művel vagy előad, annak egyik legfontosabb törekvése a megértés, tehát az elementarizálás kell, hogy legyen. És annak is, aki tanul, akár tudósnak, akár gyakorlati pályára készül, nem szabad megelégednie a hallott vagy olvasott kész anyag egyszerű beraktározásával, hanem föl kell tennie a kritikus szemüvegét, elemeznie kell, boncolnia, összehasonlítania, mert másképp az a megemésztetlen tudás, amit magába szedett, csak teher lesz számára.

. . . .

Riesz Frigyes.

ELEMENTARE METHODEN IN DER HÖHEREN MATHEMATIK.

(Aus einer Rede, gehalten am 11. Okt. 1925 bei Übernahme des Rektorats der k. ung. Franz Joseph-Universität.)

Es wird durch einige Beispiele erläutert, wie durch Heranziehung geeigneter Prinzipien (Schachtelprinzip, *Bolzano-Weierstrass*-scher Satz und ähnliche Auswahlsätze usf.) Probleme der höheren Mathematik auf elementare Betrachtungen zurückgeführt werden können.

Freidrich Riesz.

ADALÉK A FÉNYELEKTROMOSAN VEZETŐ $NaCl$ KRISTÁLYOK FÉNYELNYELÉSÉHEZ.

Összefoglalás.

1. Kimértem a fényelektromosan vezető $NaCl$ kristálynak szelektiv optikai absorptióját, miután a kristályt előzetesen fényelektromosan hatékony (gerjesztő = erregend) fénnyel világítottam meg.

2. Az elnyelési görbe a közönséges, azaz előzetesen nem megvilágított (unerregt) kristállyal szemben a maximumnál esést, de viszont jelentékeny emelkedést mutat a hosszabb hullámok irányában (3 ábra).

3. A 2. esetben két absorptiónak az összegét kapjuk, nevezetesen a gerjesztett (erregt) és nem gerjesztett (unerregt) centrumoknak, azaz a Röntgen-fény által létrehozott szinező Amikronok absorptióját.

4. Sikerült a gerjesztett (erregt) és nem gerjesztett (unerregt) centrumoknak az absorptióját számítás útján egymástól szétválasztani, miután a centrumok számbeli viszonyát sikerült meghatározni (8. ábra). Az összes centrumoknak legfeljebb $60^0{}_0$-a lehet úgynevezett gerjesztett (erregt) állapotban (7. ábra).

5. A hosszú hullámú fénynek a hatása, — ami abban áll, hogy a kristályt visszahozza a kezdeti állapotba és az elektromos térben a primär-áramnak a positiv részét hozza létre, — szintén quantumszerű elnyelésen alapszik. E mellett a hosszú hullámú fénynek egy absorbeált $h\nu$-je a primär-áram positiv részében ép olyan rendű elektromos eltolódást hoz létre, mint a rövidebb hullámú fénynek egy absorbeált $h\nu$-je a primär-áram negativ részében.

1. §. A fényelektromosan vezető kristályoknál az érzékenység kiterjed a hosszabb hullámok felé, ha egy előzetes megvilágítás a kristály belsejében elektronok leváltása által hosszabb ideig fennmaradó állapotot hoz létre. Ez az eset lép fel, ha az elővilágítás alatt külső elektromos tér hatására a kiváltott elektronok mint áram, mint a Pohl által negativ primär áramnak

nevezett elektromos eltolódás, lépnek fel vagy pedig külső elektromos tér nélkül is, ha a kristálynak ú. n. foszforszerű tulajdonsága van, nevezetesen ha a leváltott elektronokat az elnyelési hely közelében rögziteni képes. Az elővilágítás után oly hullámok is hatékonyak, melyek előbb a kristályra nem hatottak. Az 1. ábra e jelenséget schematikusan jelzi.

Gudden és Pohl ezen fontos tényt először azon kristályoknál észlelték, melyeknél a fényelektromos vezetés együtt jár a nagy optikai törésmutatóval.[1] Később ez a jelenség annál a II. csoportnál is beigazolódott,[2] melynél a fényelektromos vezetőképesség bizonyos kezelés (szinezés) által nevezetesen Röngten- vagy korpuszkuláris sugárzás által hozható létre.[3] Az 1. ábra jellege érvényes ezekre is, csupán a görbék úgy tekintendők, mint erősen szelektiv spektrális eloszlásnak a hosszabb hullámok felé eső részei.

Az 1. ábra *a* görbéje összeesik mindkét csoportbeli kristályokra egy quantumszerű fényelnyelés szinképbeli eloszlásával. Az ordináták úgy foghatók fel, mint az elnyelt fényquantumok száma.[4] Következésképpen Gudden és Pohl az 1. ábra *b* görbéjére is ugyanezt a magyarázatot hozták javaslatba: nevezetesen, hogy a fényelnyelőképesség a positiv maradéktöltések következtében a hosszabb hullámok irányában tovább nyúlik. Azonban ők nagy törésmutatójú kristályaiknál (Zinnober) nem rendelkeztek elég nagy darabokkal, hogy ezen mindenesetre kicsiny, a hosszabb hullámoknál fellépő elnyelési jelenséget optikai úton kimérhessék. A fényelektromosan vezető kristályok második csoportjánál az anyagkérdés sokkal kedvezőbb. Víztiszta $NaCl$ darabok tetszésszerinti nagyságban kaphatók és ezeken a fényelnyelőképességnek a hosszabb hullámok felé

---

[1] B. Gudden és R. Pohl Zeitschr. f. Phys. 3. 123. 1920. §. 3. 30. 14. 1924. Fig. 1.

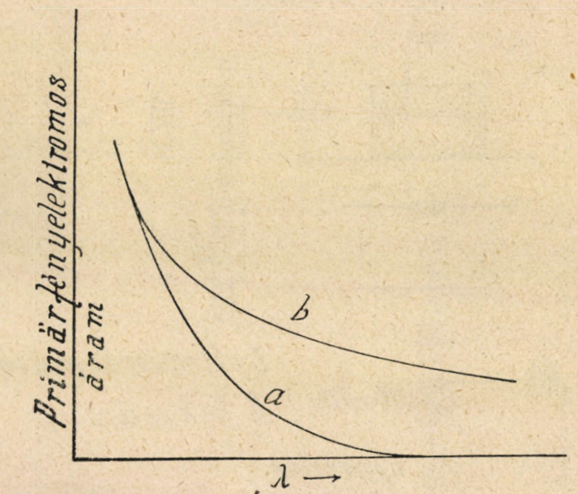
[2] Gyulai Z., Zeitschr. f. Phys. 31 296. 1925.

[3] W. C. Röntgen és A. Joffé Ann. d. Phys. 4. 64. 1. 1921.

[4] B. Gudden és R. Pohl Zeitschr. f. Phys. 17. 331. 1923. Gyulai Z. Zeitschr. f. Phys. 32. 103. 1925.

való kiterjedése mint a következménye egy előzetes megvilágításnak, egész biztossággal kimutathatók. Ez képezi a 2. §. tartalmát.

2. §. Az absorptió méréseket fényelektromos fotometria által végeztem. A feladat lényegében az volt, hogy az elnyelési görbe színképbeli eloszlását két esetben határozzam meg, nevezetesen: Először az ú. n. kezdeti állapotban, mely kezdeti állapot minden egyes mérés után vörös és ultravörös besugárzással



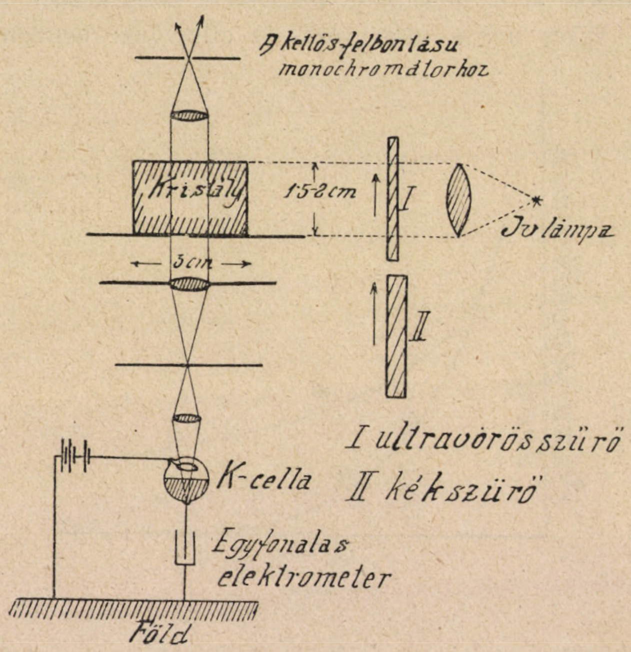
1. ábra.

állitható elő; másodszor pedig a fényelektromosan hatékony fénnyel való (kék) megvilágitás által létrehozott állapotban. A lényeges volt a két állapotban fellépő elnyelési *különbségeket* meghatározni. A mérési berendezés úgy volt tehát keresztülvive, hogy a mérések direkt a *különbségeket* adták. A normális elnyelés absolut értékei egyidejűleg a régi módszerrel[1] lettek meghatározva.

A 2. ábra jelzi a használt berendezést. A monochromatikus, gyenge mérőfény sugarai ki vannak húzva. A rövid vagy hosszú

[1] Gyulai Z. Zeitschr. f. Phys. 32. 103. 1925.

hullámú, intenziv fény sugarai, melyek a kristályban a kívánt állapotokat váltakozva létrehozták, pontozott vonalakkal vannak jelezve. Egy pár ernyő jelzi a berendezést, amely idegen fénytől védi a káliumzellát. A használt kristályok 3×3 cm quadratikus lapok voltak 15—25 mm vastagsággal. A kezdeti állapot létrehozására az ultravörös fénynek átlag 3 percre volt szüksége és



2. ábra.

csak ennyi idő után kezdődött a mérés. A rövid hullámú megvilágításnál a stationarius állapot sokkal hamarább kifejlődött. A mérés a színképnek $\lambda = 313—650$ $\mu\mu$ részére terjed ki. Az 1. táblázat a 3. és 4. oszlopban hozza a méréseket. Az 5. oszlopban az absorptiós együtthatóknak a 3. és 4. oszlopokból kiszámított különbségei vannak viszonyítva a kiindulási állapothoz feltüntetve. A 6. oszlopban a hosszú hullámú besugárzásokkal folyton fenntartott kiindulási állapot μ absorptiós együtthatói vannak feltüntetve. Ezeket éppúgy, mint régebben 365 és 540 $\mu\mu$ között, tisztán optikailag határoztam meg. Mihelyt azonban μ kisebb lesz, mint 0·004, azaz 5 mm vastag rétegben a ráeső fénynek kevesebb, mint 2%-je abszorbeálódik, a meghatározásra az optikai módszer nem elégséges. A felületen létrejövő szétszóródás az absorptiót túlságos nagynak tünteti fel. A 6. oszlopban $\lambda > 540$ $\mu\mu$ esetében található absorptiós együtthatókat fényelektromos úton határoztam meg azon feltétel segítségével, mely feltétel utóbbi dolgozatom 2. ábrája után nyilvánképpen helyes, hogy a fényelnyelés ebben a tartományban is quantumszerűen történik.

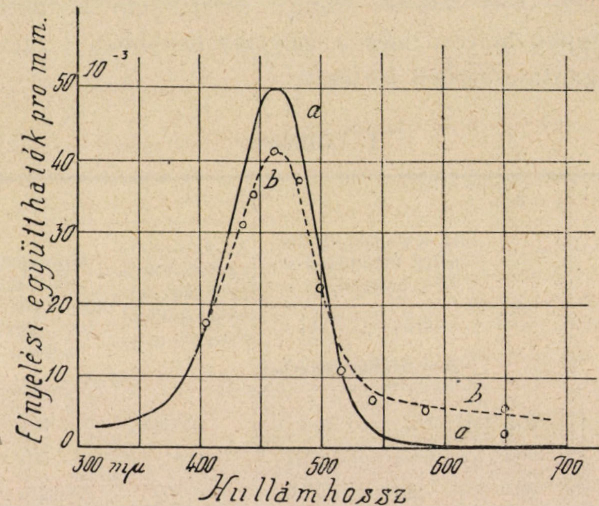
1. táblázat.

1	2	3	4	5	6
	λ	Az egyfonalú elektrométer feltöltődési sebessége		Az absorptiós együtthatók 3 és 4-ből számított különbségei pro *mm*, $\Delta\mu$	Absorptiós együtthatók pro *mm*, μ 10^{-3} egységekben
		vörös	kék		
		megvilágítás mellett			
	313	4·2	4·1	+0·0009	3·4
	365	6·34	6·32	0·0	5·0
	405	7·23	7·30	—0·0005	12·0
	436	7·43	8·65	—0·0071	37·5
	546	5·77	5·34	+0·0036	3·5
	579	7·12	6·65	+0·0032	1·1
	442	5·4	6·3	—0·0072	42·0
	460	4·37	5·33	—0·0093	50·0
	480	5·36	6·2	—0·0069	44·5
	500	4·87	5·2	—0·0032	26·4
	518	4·87	4·9	0·0	10·0
	540	4·75	4·4	+0·0036	4·0
	585	4·06	3·72	+0·0040	1·7
	650	1·22	1·11	+0·0044	0·0
	650*	15·05	14·45	+0·0018	—

* Photocella thermooszlop által helyettesítve.

A fényelektromos vezetés módszere még a legkisebb absorptióknál is megbízható, mert ez direkt az elnyelt fénymennyiséget méri, míg az optikai módszer két fénymennyiség külömségével dolgozik.

Látható (lásd a 3. ábrát) hogy a kék megvilágítás által létrehozott állapot az optikai elnyelést a hosszabb hullámok irányában megnöveli, amint azt az elektromos mérések után várni lehetett.



3. ábra.

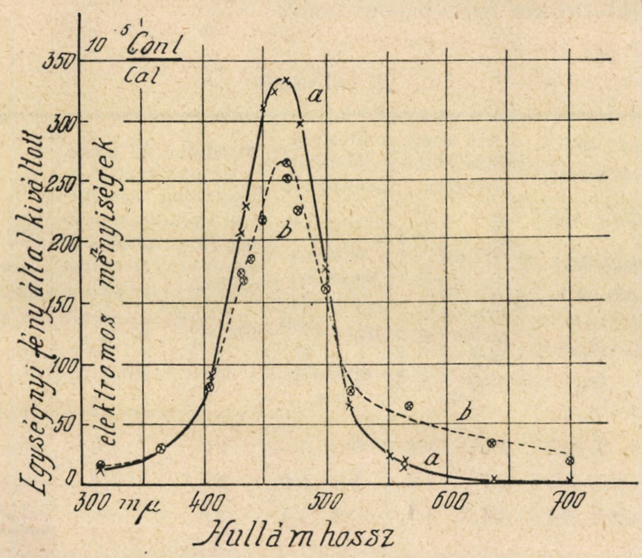
Látható továbbá, hogy az optikai absorptió maximuma egy idejüleg kisebb lesz, míg az elnyelési sávnak rövidebb hullámú részében semmi változás sem volt megállapítható.

Ez utóbbi optikai megállapítások teljesen megfelelnek a fényelektromos észleleteknekl Ennek a szemléltetésére a 4. ábrában mellékelek egy sorozatot az elektromos mérésekből. Ezek csupán csak annyival tartalmaznak többet a már előbb közölt méréseimnél, hogy itt a mérések a rövidebb hullámokra is ki vannak terjesztve.[1] A 3. és 4. ábrák összehasonlítása által a fény-

[1] Az ilyen mérési sorozatoknál nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy a többszöri erős kék megvilágítás a kristályt nagymértékben elszinteleníti. Lásd K. PRZIBRAM, Zeitschr. f. Phys. *20.* 196. 1923.

elektromos hatás és az absorptió parallel volta az előzetes megvilágítás által megváltoztatott kristály esetére is bizonyosnak látszik. Ezen tapasztalat kibővítése képezi a következő paragrafus tartalmát.

3. §. GUDDEN és POHL[1] azt állították, hogy a pótelektronoknak a hosszú hullámú megvilágítás hatására való helyrenyomulása szintén fényelektromos quantumfolyamatból áll.[2]



4. ábra.

Ők különösen kimondották, hogy ha elektromos mezőben hosszú hullámú fény által a primär-áram positiv részét állítjuk elő,

[1] Zeitschr. f. Phys. 30. 14. 4. §. 1924.

[2] A pótelektronokat a következőképen kell gondolni: A fény hatására egy érzékeny centrumból egy elektron lesz kiváltva, a centrum positiv töltéssel marad vissza. Ezt az állapotot neveztük fennebb gerjesztett (erregt) állapotnak. Ha a jelenség elektromos térben történik, az elektron ennek hatására a centrumtól messze sodortatik. A visszamaradó positiv centrum törekszik egy elektront befogni, mely műveletet melegítés, vagy hosszú hullámmal való besugárzás megkönnyít. Ezt az elektront, mely a fény primär hatására positiv töltéssel visszamaradó centrumot neutralizálja, nevezzük pótelektronnak.

már egyetlen $h\nu$ elegendő arra, hogy egy elemi töltés nagyobb távolságra tolódjék el.

Ezen felfogás megvizsgálására direkt méréseket végeztem a hosszabb hullámok tartományában és pedig váltakozva optikai és fényelektromos úton. Úgy az absorptió mint a fényelektromos áramoknak csak a különbségi részei, nevezetesen azok, melyek eredetüket előzetes megvilágitásnak köszönik, jönnek a 2. táblázatban összehasonlításra.

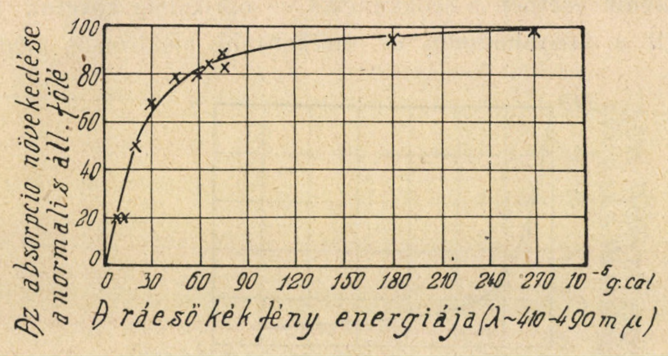
2. táblázat.

Hullámhossz λ $\mu\mu$-ban	Absorptiós együttható: vörös megvilágítás után $10^{-3}\,mm^{-1}$ egységekben	Absorptiós együttható: kék megvilágítás után $10^{-3}\,mm^{-1}$ egységekben	A kék megvilágítás következtében: fellépő növekedése az absorptiós együtthatóknak	A kék megvilágítás következtében: 5 *mm* vastag rétegben absorbeált fénymennyiség %-ban	Kiváltott elektromos mennyiség: vörös előzetes megvilágítás után 10^{-6} Coul/Cal egységekben	Kiváltott elektromos mennyiség: kék előzetes megvilágítás után 10^{-6} Coul/Cal egységekben	Kiváltott elektromos mennyiség, mint a kék megvilágítás következménye 10^{-5} Coul/Cal-ban	Az absorbeált fényenergia egysége által kiváltott elektromos mennyiség 10^{-4} Coul/Cal-ban $= N\varepsilon$	Az $N = \text{const}\ \lambda$ egyenlet állandójának értéke
520	9	10·5	1·5	0·8	6·5	7·8	1·3	1·6	$0{\cdot}92.10^{-4}$
564	1·8	5·5	3·7	1·9	1·5	5·0	3·5	1·8	$0{\cdot}95.10^{-4}$
618	~0·2	3·6	3·4	1·7	~0·2	3·4	3·2	1·9	$0{\cdot}93.10^{-4}$
								Középértékben	$0{\cdot}93.10^{-4}\left(\frac{1}{hc}\right)$

e = elemi elektromos töltés, h = PLANCK-féle állandó, c = fénysebesség.

A 2. táblázat egy mérési sorozatot tüntet fel. Látható, hogy minden $9{\cdot}3.10^3$ absorbeált fényquantumra esik egy elemi töltés. Ez a szám azonban 30 százalékig egyezik azzal a számmal, melyet én az előbbi dolgozatomban olyan kristályokra találtam, melyeket hosszú hullámú megvilágitással állandóan a kiindulási állapotban tartottam.

Tehát a következő eredményhez jutunk: a fényelektromos vezetésnél az elektromos mérőeszközön minden $h\nu$ folyamat egyenlő módon nyilvánúl. Teljesen mindegy, hogy a rövidebb hullámok tartományában egy $h\nu$ egy elektront kivált, vagy pedig a hosszú hullámoknál egy $h\nu$ egy pótelektront a helyére segit.[1] Az elektromos részecskék eltolódásait tehát középértékben a primär-áramnak úgy a negativ, mint a positiv részében egyenlőknek vehetjük. A kiindulási állapot helyreállitására szükséges erős besugárzások nem azért szükségesek, mert egy pótelektronnak a végső elhelyezésére talán több $h\nu$ folyamatra



5. ábra.

van szükség, hanem azért, mert a ráeső sugárzásnak csak igen kis része absorbeálódik.

A $h\nu$ folyamatoknak a hosszú és rövidebb hullámok tartományában való egyenlősége egészen más, elvileg tisztán optikai úton is támogatható. Gudden és Pohl[2] hangsúlyozták, hogy a rövid hullámokkal való megvilágitás által létrehozott állapot, mely éppen abban áll, hogy az igy kezelt kristály nagyobb mértékben képes a hosszabb hullámokat elnyelni, a megvilágitó fény mennyisége által nem növelhető tetszésszerinti mértékben. Én egy mérési sorozatban tájékozódást szereztem arról, hogy egy bizonyos hosszabb hullámnak — $\lambda = 620$ mp — az ab-

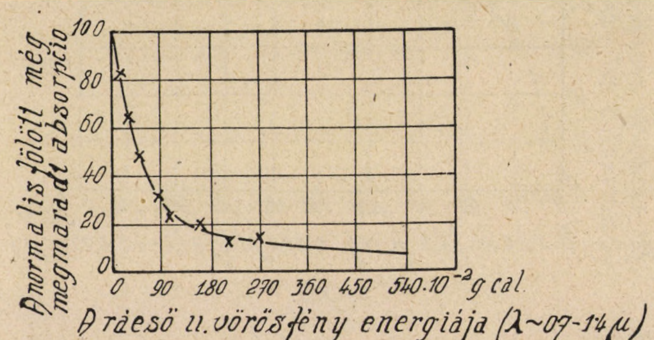
---

[1] Itt nem különböztetjük meg azt, hogy a hosszú hullámú fény nemcsak a primär-áram positiv részét váltja ki, hanem a negativ primär-áramnak fennakadt elektronjait is tovább segiti. Lásd Gudden és Pohl; fentebb idézve. 7. §.

[2] Zeitschr. f. Phys. *30.* 1924. 21 ; *31.* 1925. 665.

sorptiója mint közeledik egy véges értékhez, amint a ráeső kék fény energiáját növeljük (lásd 5. ábrát). Azután pedig pontosan követtem azt, hogy az absorptióváltozás miképpen szűnik meg fokozatosan több és több ultravörös besugárzás által (6. ábra).

A gyakorlati kivitelében elvileg lehetséges lett volna az absorptió változását — tehát az első esetben a növekedését, a második esetben a csökkenését — optikailag követni. Én e helyett a kényelmesebb és érzékenyebb elektromos módszert



6. ábra.

választottam: mértem ugyanis minden esetben azt az elektromos mennyiséget a fényelektromos primär-áramban, melyet a $\lambda = 620$ $\mu\mu$ hullámú fénynek egy jól meghatározott energia mennyisége kiváltott.

Az 5. és 6. ábrákból láthatjuk, hogy kb. 3000-szer több fénymennyiség szükséges az ultravörös részből arra, hogy a létrehozott absorptió változást megszüntesse, mint amennyi fénymennyiség a kék részből ezt a változást létrehozta. De körülbelül ilyen arányban kisebb az absorptió képessége a kristálynak a hosszabb hullámok tartományában viszonyítva a kék részhez. Természetesen ez csak durva megközelítőleges számítás, miután a használt ultravörös fény a 0·7—1·4 μ tartományra terjedett ki.

4. §. A 2. §-beli méréseket arra lehet továbbá használni,

hogy GUDDEN és POHL-nak egy a centrumok fényelnyelésére nyilvánított nézetét megvizsgáljuk. Ezen célból nevezzük a hosszú hullámú fény által a kezdeti állapotban tartott kristályt röviden normalisnak (unerregt = nem gerjesztett). Nevezzük ezzel szemben azt a kristályt, mely fényelektromosan hatásos fénynek volt kitéve gerjesztettnek (erregt).

A normális kristályban kétségtelenül a Röntgen fény által létrehozott amikronok a fényelnyelés centrumai. Ezeknek az absorptiós színképét adja a 3. ábra *a* görbéje. A fényelektromos elektron kiváltás lefolyása után felléphetne egy teljesen új absorptiós színkép, melynek a maximuma az előbbitől teljesen máshol fekhetne. GUDDEN és POHL azonban a gyémántnak megfelelő esetében azt a nézetüket nyilvánították[1], hogy a gerjesztett állapotnak az elnyelési színképe lényegileg egyezik a normális állapot elnyelési színképével, csupán csak a hosszabb hullámok irányában nyer meghosszabodást. A gyémántnál e nézet helyességének a vizsgálata nem volt lehetséges, mert ott az elnyelési színképnek csupán csak a hosszú hullámú részeihez férhetünk hozzá. A színezett $NaCl$ szelektiv absorptiójánál azonban lehetséges a döntés, mert itt a gerjesztett állapot elnyelési színképe a normális állapot elnyelési színképétől különválasztható. A 3. ábra *b* görbéje épp úgy, mint a gyémántnál, a kétféle elnyelési színkép összegéből áll. Hogy a két színképet elválaszthassuk, tudnunk kell, hogy az elnyelési centrumoknak milyen ϑ része van gerjesztve. Ehhez a ϑ értékhez a következő közelitő módon jutunk el:

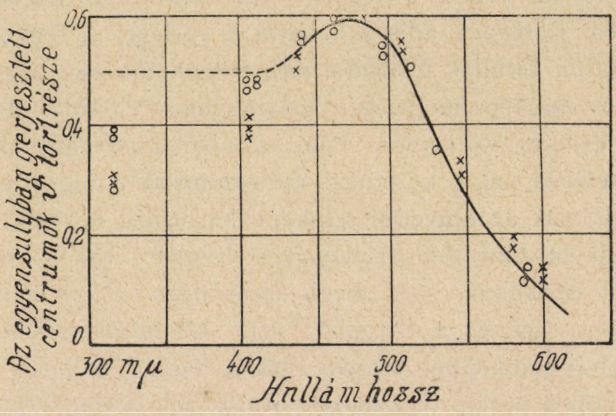
1. ϑ-nak van egy $\overline{\vartheta}$ egyensúlybeli értéke, ami akkor áll elő, ha a normális centrumok ugyanannyi fényt nyelnek el, mint a gerjesztett centrumok. A folyamatot ugyanis úgy képzeljük, hogy egy normális centrum egy $h\nu$-t elnyelve elveszít egy elektront és átmegy az ú. n. gerjesztett állapotba. Viszont egy gerjesztett centrum egy $h\nu$-t elnyelve fölvesz egy elektront és átmegy a normális állapotba. Ha tehát a gerjesztett centrumok absorp-

[1] Fönnebb idézve 4. §. 20 oldal.

tiós együtthatóját μ' és a normálisokét μ-vel jelöljük, úgy egyensúly esetén

$$\bar{\vartheta}\mu' = (1 - \bar{\vartheta})\,\mu \qquad (1.)$$

egyenletnek kell állania. Itt figyelmen kívül hagyjuk azt a körülményt, hogy a molekulák hőmozgása a gerjesztett centrumok egy részét már maga vissza viszi a normális állapotba.

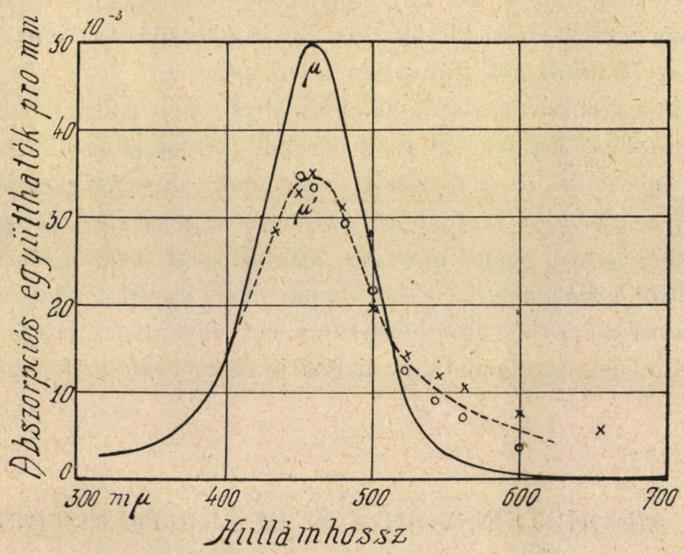


7. ábra.

2. A gerjesztett centrumok számára relativ mértékül $\bar{\vartheta}$ a fényelnyelés nagyságát vesszük oly területen, mely csupán csak a gerjesztett centrumok által történik.

3. Ha egy fényelektromosan hatékony hullámhossznál a fényelnyelés hosszabb besugárzás után sem változik, az csak úgy lehetséges, ha e hullámhosszra $\mu = \mu'$, mikor is egyensúly esetén $\bar{\vartheta} = 0{\cdot}5$. Hogy egy ilyen hullámhossz van, az látható a 3. ábrából, hol a két a és b görbék $\sim$ 520 mμ-nél metszik egymást.

A 2. ponthoz kísérletileg megállapitottam, hogy a $\bar{\vartheta}$ a 7. ábrában feltüntetett színképbeli eloszlással rendelkezik. [Más szóval ezt az ábrát úgy nyertem, hogy a kristályt, mely normális állapotban $\lambda = 630$ mμ-nél nem adott mérhető fényelektromos áramot, különféle hullámhosszakkal gerjesztettem a telitettségig, mikor is mértem a $\lambda = 630$ mμ hullámú, mindig egyenlő mennyiségű fény által kiváltott fényelektromos áramot. Ez áramokat vettem a $\overline{\vartheta}$ értékéül.[1] A 3. pont szerint az ordináta mérő egységét úgy állapítottuk meg, hogy $\overline{\vartheta}$ az 520 $m\mu$. hullámhossznál 0·5 legyen, miután mint már említve volt, a 3. ábrában e hullámhossznál az absorptió nem változott, bár a besugárzás a maximális elnyeléssel rendelkező hullámtartománnyal történt, (kereken 460 $m\mu$). A 460 $m\mu$-nek megfelelő



8. ábra.

ϑ érték a 7. ábra szerint $=0{\cdot}60$. E szerint a 3. ábra a és b görbéjének ordinátái úgy viszonylanak:

$$\frac{O_a}{O_b}=\frac{\mu}{0{\cdot}4\mu+0{\cdot}6\mu'}. \tag{2}$$

[1] A görbének a 420 $m\mu$-nél kisebb hullámú része pontozva van, mig a közölt mérési pontok mélyebben fekszenek. Ennek oka az, hogy a szinkép ezen részében a besugárzó fény erőssége kicsiny volt és így hosszú ideig kellett az egyensúly beálltáig megvilágitani és így a hosszú idő alatt a hőmozgások által a gerjesztett centrumok egy része neutralizálódott. A pontok annál magasabban feküdtek, minél erősebb volt a besugárzó fény.

Ez egyenlet és a 3. ábra segélyével a gerjesztett állapot absorptiójának színképbeli eloszlása kiszámítható. A 8. ábrában a teljesen kihúzott görbe a normális állapotú centrumok absorptióját (μ) adja (megfelel a 3. ábra *a* görbéjének) míg a szaggatott görbe a gerjesztett centrumok absorptiójának színképbeli eloszlását tünteti fel.[1]

A mérések tehát igazolják a GUDDEN és POHL felfogását, nevezetesen, hogy a két elnyelési színkép lényegében egyezik és hogy a gerjesztés illetőleg az elektronkiváltás az elnyelést a hosszabb hullámok irányában kiterjeszti.

Hogy nagyobb spektralis feloldás által még esetleges szelektivitások lépnek-e fel, ezt csak későbbi vizsgálatok dönthetik el. A normális és gerjesztett centrumok elnyelési görbéinek egyezése érthetővé teszi, hogy egy teljesen gerjesztett kristály a szemre nézve semmi lényeges színváltozást nem mutat fel. Említésre méltó még az a körülmény, hogy mindkét állapotban az absorptiós görbék által bezárt területek egyenlőnek látszanak.

Göttingen, egyetemi I. sz. fizikai intézet. 1925 május hó.

Gyulai Zoltán.

ZUM ABSORPTIONSVORGANG IM LICHTELEKTRISCH LEITENDEN *NaCl*-KRISTALLEN.

Zusammenfassung: Schon Röntgen hat den Einfluss einer Vorbelichtung auf den lichtelektrisch leitenden *NaCl*-Kristall konstatiert. Es wurde jetzt der Einfluss einer Vorbelichtung mit Wellen maximaler lichtelektrischer Wirksamkeit ausser bei der lichtelektrischen Leitung, auch bei der optischen Absorption des betreffenden Kristalls festgestellt. Die Erscheinung wurde im ganzen Spectrum ausgemessen. Der Einfluss besteht, wie die Fig. 3. zeigt, darin, dass die Absorption an der Stelle ihres Maximums zurückgeht, im Bereiche langer Wellen dagegen be-

[1] A μ görbét két módon számítottam ki, nevezetesen az (1) egyenlet szerint és a pontokat ○-el jelöltem; és a (2) egyenlet szerint, a megfelelő pontokat ×-el jelölve. Az egyezés foka megfelel az egyszerűsített feltételeknek.

trächtlich erhöht wird. Im Bereiche der kürzeren Wellen bleibt sie im Wesentlichen ungeändert. Wie Fig. 4. zeigt, der genau analoge Fall gilt für die Leitfähigkeit. Der Vergleich der Fig. 3. u. 4. dürfte den völligen Parallelismus vôn lichtelektrischer Wirkung und optischer Absorption auch für den durch Vorbelichtung veränderten Kristall erweisen.

Der Kürze halber nennen wir den Kristall in dem durch kurzwellige Belichtung hervorgebrachten Zustande «erregt» ; im Ausgangszustande, der durch langwellige Belichtung wieder hergestellt werden kann, «unerregt». Es wurde festgestellt, dass die Erregung einen Grenzwert erreicht (Fig. 5). Den Abbau durch langwellige Bestrahlung zeigt Fig. 6. Die zur Erregung und zum Rückgang erforderlichen Mengen auffallender Lichtenergie stehen der Grössenordnung nach in umgekehrtem Verhältnisse zu den Absorptionskoefficienten.

In der Fig 3b überlagern sich die Absorptionen der unerregten und der erregten Zentren. Es wurde nach einem angenäherten Verfahren die Absorption der erregten Zentren von der unerregten getrennt und wie Fig. 8. zeigt, konstatiert, dass die Absorption μ' der erregten Zentren im Gebiet maximaler Absorption tiefer, im Gebiet langer Wellen höher liegt, wie die der unerregten Zentren.

Zoltán Gyulai.

A KÉT- ÉS TÖBBATOMÚ GÁZOK ABSZOLUT ENTRÓPIÁJA.

Tetszésszerinti rendszer entrópiáját a BOLTZMANN—PLANCK-féle $S = k \ln W$ egyenlet határozza meg, ahol S az entrópia, k univerzális állandó, W a tekintetbe vett állapot valószínűsége. A BOLTZMANN—PLANCK-féle egyenlet szerint tehát az entrópiának meghatározott abszolut értéke van.

A következő sorokban PLANCKnak az állapottér fizikai szerkezetére és az egyatomú gázokra vonatkozó vizsgálatai[1] alapján a két- és többatomú gázok abszolut entrópiáját számítom. Számításaimnál két különböző lehetőséget kell szem előtt tartani. Az egyes molekuláknak a helyhatározó koordinátákkal és impulz koordinátákkal meghatározott állapottereiben az állapotpontok vagy folytonosan töltik ki az állapottereket *(első eset)*, vagy pedig az állapotpontok az állapotterek elemi tartományainak, celláinak csak egyes helyein lehetnek *(második eset)*. A quantumelmélet különböző alkalmazásai az utóbbi feltevésre engednek következtetni. Felteszem, hogy a két- és többatomú gáz ideális gáznak vehető, hogy a molekulákban az atomok és elektronok mozgásai az abszolut entrópia számításánál nem tesznek számot s hogy a molekulák véges kiterjedéséből származó térfogat-korrekció elhanyagolható. Végül felteszem, hogy az állapotvalószínűség számításánál a rotációs energiának a tranzlációs energiától való elválasztása, azaz a rotációs koor-

[1] M. PLANCK, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 17. 407. (1915); 17. 438. 1915. Ann. d. Phys. 50. 385. (1916), Berliner Ber. 653 l. 1916, Berliner Ber. 49. l. 1925.

dinátákra vonatkozó állapotvalószínűségnek külön tárgyalása nem szükséges. Feltevéseim alapján a gázmolekula merev testnek tekinthető, változatlan tehetetlenségi nyomatékokkal.

Vegyük tekintetbe az N egyenlő fajú molekulát tartalmazó, V térfogatú, T hőmérsékletű, egy molnyi kétatomú gázt. Az állapot valószínűség számítása végett a gáz 10 N méretű (egy molekulánál fellép 3 tranzlációs, 2 rotációs koordináta s a megfelelő 5 impulz koordináta) állapotterét elemi tartományokra, cellákra osztjuk. Ezek a cellák lehetnek egyenlő vagy különböző térfogatúak. Az általánosság megtartása végett különböző nagyságú P_1h^{5N}, P_2h^{5N}, $P_3h^{5N}\ldots$ térfogatú cellákat veszek tekintetbe, ahol h a Planck-féle hatásmennyiség, $P_1, P_2, P_3\ldots$ az egyes cellák statisztikai súlyait jelentik. A gáz termodinamikai tulajdonságait meghatározza a szabad energia következő kifejezése:

$$F = -kTln\Sigma Pe^{-\frac{U}{kT}}, \tag{1}$$

ahol U az első esetben a gáznak valamely cellához tartozó középenergiáját, a második esetben a gáznak valamely cellához tartozó quantumos energiáját, P a megfelelő statisztikai súlyt jelenti; az összegezés minden cellára kiterjesztendő. Feltevésünk szerint a második esetben csak a quantumos energiájú állapotok lehetségesek. Ha az U energiát az egyes molekulák energiáival fejezzük ki:

$$F = -kTln(\sum_n p_n e^{-\frac{u_n}{kT}}\cdot\sum_n p_n e^{-\frac{u_n}{kT}}\ldots) = -kTln(\sum_n p_n e^{-\frac{u_n}{kT}})^N, \quad (2$$

ahol az u_n az első esetben egy molekula állapotterében az n cella középenergiáját, a második esetben egy molekula állapotterében az n cella quantumos energiáját, p^n az n cella statisztikai súlyát jelenti. Az u_n meghatározása végett vegyük tekintetbe, hogy a (2)-ben egy Σ tagjainak száma megegyezik az illető molekula állapottere celláinak számával. A (2)-ben előforduló cellák összes száma:

$$z = \frac{1}{h^{5N}} \iiint \ldots dx_1 dy_1 dz_1 \ldots d\vartheta_1 d\varphi_1 \ldots dp_{x1} dp_{y1} dp_{z1} \ldots dp_{\vartheta 1} dp_{\varphi 1} \ldots \quad (3)$$

ahol x_1, y_1, z_1 az 1...-es molekula tranzlációs koordinátáit, ϑ_1, φ_1... az 1...-es molekula szimmetria tengelyének pozitív irányát meghatározó poláris koordináta szögeket, p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}, $p_{\vartheta 1}$, $p_{\varphi 1}$... a megfelelő impulz koordinátákat jelöli, az integráció mindenik molekulánál 0 és u energia között kiterjesztendő a koordináták minden lehetséges értékére. A gáz állapotterében két állapotpont, amelyek csak abban különböznek egymástól, hogy két molekula a tranzlációs, rotációs és sebességi koordinátáit felcserélte, a gáznak a koordináták ugyanazon értékrendszere által meghatározott állapotát jelöli. Ennélfogva a koordináták bármely rendszere által meghatározott állapotnak $N!$ különböző állapotpont felel meg. A (3) egyenletben tehát az egyértékűség megtartása végett $N!$-szor kevesebb cella írandó. (3)-ban az integrálást elvégezve s a molekula főtehetetlenségi nyomatékát I-vel jelölve,[1]

$$z = \frac{1}{N!\,h^{5N}} \cdot \frac{V^N (4\pi)^N \pi^{\frac{5N}{2}} I^N (\sqrt{m^3})^N (\sqrt{2u})^{5N}}{\Gamma(\frac{5}{2}+1)}. \quad (3a)$$

A nagy számokra érvényes $N! = \left(\frac{N}{e}\right)^N$ STIRLING-féle egyenlet alkalmazásával s $\Gamma(\frac{5}{2}+1) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$-t írva

$$z = \left(\frac{32\pi^3 e I \sqrt{m^3}\sqrt{(2u)^5}\,V}{15 h^5 N}\right)^N. \quad (3b)$$

[1] Az f méretű, r sugarú gömb térfogatata (l. pl. P. H. Schoute. Mehrdimensionale Geometrie, Sammlung Schubert, 1905, II. k. 289. l.):

$$K_g = \frac{\sqrt{\pi^f}\, r^f}{\Gamma\left(\frac{f}{2}+1\right)},$$

ebből közvetlenül felirható a különböző tengelyekkel biró ellipszoid térfogata is. (3)-ban mindenik molekulánál 0 és

$$u = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2I}(p_\vartheta^2 + \bar{p}_\varphi^2) \ \left(\bar{p}_\varphi = \frac{p_\varphi}{\sin\vartheta} \text{ helyettesítéssel}\right)$$

energia között kell integrálni.

Egy molekula állapotterében a $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ statisztikai súlyok összege egyenlő a h^5 nagyságú cellák számával, azaz

$$(p_1 + p_2 + \cdots + p^n)^N = \left(\frac{32\pi^3 eI\sqrt{m^3}\sqrt{(2u)^5}\,V}{15h^5N}\right)^N. \tag{4}$$

A statisztikai súlyoknak a cellaszámmal való összefüggése megállapításánál csak feltevésekre vagyunk utalva. A következőkben általánosítom PLANCKnak az egyatomú gázoknál tett feltevését,[1] amely szerint egy molekula állapotterében a különböző nagyságú cellákhoz tartozó statisztikai súlyok összege egyenlő a koordináta számmal hatványozott cellaszámmal, azaz

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = n^5.$$

(4) és (5) egyenletből

$$n^5 = \frac{32\pi^3 eI\sqrt{m^3}\sqrt{(2u)^5}\,V}{15h^5N} \tag{6}$$

és

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{15h^5N}{32\pi^3 eI\sqrt{m^3}\,V}\right)^{2/5} n^2. \tag{7}$$

$n = 0$ mellett következtetésünk nem érvényes; $n = 1, 2, 3 \ldots$ mellett kapjuk az energia quantumos értékeit, melyek az egyes cellák szélső energiáit adják.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{15h^5N}{32\pi^3 eI\sqrt{m^3}\,V}\right)^{2/5} = \sigma' \tag{8}$$

helyettesítéssel s $p_n = (n+1)^5 - n^5$ értéket irva, az n cellához tartozó energia középértéke:

$$u_n = \frac{\int_n^{n+1} \sigma' n^2 d\,(n^5 h^5)}{[(n+1)^5 - n^5]h^5} = \frac{5\sigma'}{7}\left[\frac{(n+1)^7 - n^7}{(n+1)^5 - n^5}\right]. \tag{9}$$

A (2) alatti szabad energia tehát

$$\sigma = \frac{\sigma'}{kT} \tag{10}$$

[1] M. PLANCK, Berliner Ber. 55. l. 1925.

helyettesitéssel s $kN = R$ (abszolut gáz állandó)-t irva

$$F = - RTln \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)^5 - n^5] e^{-\frac{5\sigma}{7}\left[\frac{(n+1)^7 - n^7}{(n+1)^5 - n^5}\right]} \tag{11}$$

A gázelméleti vizsgálatok szerint alacsony hőmérsékletnél a rotációs energia elhagyható kicsiny s a szabad energiának csak a tranzlációs koordinátákra vonatkozó részét kell számitanunk. Magas hőmérsékletnél $\sigma \ll 1$ s az összegezés integrálással végezhető, a σ kitevő szorzója az összegezésnél n^2-al vehető egyenlőnek, tehát[1]

$$F = - RTln \left\{ \int_0^\infty e^{-\sigma n^2} dn^5 - \int_0^1 e^{-\sigma n^2} dn^5 \right\}. \tag{12}$$

A második integrál elhagyható kicsiny s

$$F = - RTln \frac{8\pi^2 e I \sqrt{(kT)^5} \sqrt{(2m\pi)^3} V}{h^5 N}. \tag{12a}$$

Az entrópia:

$$S = - \frac{\partial F}{\partial T},$$

ennélfogva

$$S = Rln \frac{8\pi^2 e^{7/2} I \sqrt{(kT)^5} \sqrt{(2m\pi)^3} V}{h^5 N}. \tag{13}$$

A második esetben az egyes cellákhoz tartozó energia quantumos kifejezését a (7) alatti egyenletből kaphatjuk. Ha a (3) integrációjánál szereplő u a molekulák állapottereiben a legkülső cella szélső energiaértéke (amint azt a (9) értelmezésénél feltételeztük), amely két szomszédos cella között van, akkor az n cella quantumos energiája általánosan, a Planck-féle eljárással megegyezően[2]

---

[1] Dolgozatomban a szabad energia magas hőmérséklet melletti értékének számitásához használható egyenletek:

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n+1} dx = \frac{n!}{2t^{n+1}} \quad \text{és} \quad \int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n} dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\sqrt{t^{2n+1}}}.$$

[2] M. Planck: Berliner Ber. 51, 1. 1925.

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{15h^5N}{32\pi^3 eI\sqrt{m^3}\,V}\right)^{2/5}(n-n_0)^2, \tag{14}$$

ahol n_0 egy állandó, pozitív, valódi tört. Ha $n_0=0$, a quantumos energia a cella szélső energiáját adja. A (2) alatti szabad energia:

$$F = -RTln\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)^5-n^5\right]e^{-\sigma(n-n_0)^2}. \tag{15}$$

Magas hőmérséklet mellett ($\sigma \ll 1$)

$$F = -RTln\int_0^{\infty} e^{-\sigma(n-n_0)^2}\,dn^5, \tag{15a}$$

$$F = -RTln\left\{5\int_0^{\infty}(x+n_0)^4 e^{-\sigma x^2}dx - 5\int_0^{1-n_0}(x+n_0)^4 e^{-\sigma x^2}dx\right\}. \tag{15b}$$

A második integrál elhanyagolható kicsiny s

$$F = -RTln\left\{\frac{5.4!\sqrt{\pi}}{\sigma^{5/2}2^6}+\frac{10n_0}{\sigma^2}+\frac{15n_0^2\sqrt{\pi}}{2\sigma^{3/2}}+\frac{10n_0^3}{\sigma}+\frac{5n_0^4\sqrt{\pi}}{2\sigma^{1/2}}\right\} \tag{15c}$$

A logaritmus alatti első tagot kiemelve, a második rész logaritmusa — mivel $\sigma \ll 1$ — elhagyható kicsiny, ennélfogva

$$F = -RTln\frac{8\pi^2 eI\sqrt{(kT)^5}\sqrt{(2m\pi)^3}\,V.}{h^5N}. \tag{15d}$$

Következőleg

$$S = Rln\frac{8\pi^2 e^{7/2}I\sqrt{(kT)^5}\sqrt{(2m\pi)^3}\,V}{h^5N}, \tag{16}$$

megegyezőleg a (13) alatti egyenlettel. A (16) alatti egyenlet megegyezik a kétatomú gáz entrópiájának TETRODE-[1] és a szimmetria számtól eltekintve az EHRENFEST és TRKAL-féle[2] értékével. EHRENFEST és TRKAL a gáz kémiai állandóját számítják s itt a $C = \frac{RlnR - c_p + S_0}{S}$ egyenlet alapján kell az entrópia ér-

---

[1] H. TETRODE: Proceedings Amsterdam, 17. 1175. l. (17) alatti egyenlet, (1915).

[2] P. EHRENFEST és V. TRKAL: Ann. d. Phys. 65. 624. (1921).

tékét venni; C a kémiai állandót, c_p a gáz állandó nyomás melletti fajhőjét, S_0 az entrópia állandót jelenti.

Vegyük most az N egyenlő fajú molekulát tartalmazó, V térfogatú, T hőmérsékletű, egy molnyi többatomú gázt. A (2)-ben előforduló cellák összes száma:

$$z = \frac{1}{h^{6N} N!} \int\int \ldots dx_1 dy_1 dz_1 \ldots d\vartheta_1 d\varphi_1 d\psi_1 \ldots dp_{x1} dp_{y1} dp_{z1} \ldots \ldots dp_{\vartheta 1} dp_{\varphi 1} dp_{\psi 1} \ldots \tag{17}$$

ahol $x_1, y_1, z_1 \ldots$ az 1...-es molekula tranzlációs koordinátáit, ϑ_1, φ_1, illetőleg $\psi_1 \ldots$ az 1...-es molekula harmadik (L), illetőleg első (I) főtehetetlenségi tengelyének pozitív irányát meghatározó szögeket, $p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}, p_{\vartheta 1}, p_{\varphi 1}, p_{\psi 1} \ldots$ a megfelelő impulz koordinátákat jelöli, az integráció minden molekulánál 0 és u energia között kiterjesztendő a koordináták minden lehetséges értékére. Ha egy molekula főtehetetlenségi nyomatékait I-, K-, L-el jelöljük, egy molekula energiája:[1]

$$u = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}\{I(\sin\vartheta\cos\psi\dot\varphi - \sin\psi\dot\vartheta)^2 + K(-\sin\vartheta\sin\psi\dot\varphi - \cos\psi\dot\vartheta)^2 + L(\cos\vartheta\dot\varphi + \dot\psi)^2\}, \tag{18}$$

$$u = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + Ia^2 + Kb^2 + Lc^2), \tag{18a}$$

ahol a, b, c a forgási sebesség komponensei a főtehetetlenségi tengelyekre s

$$a = \sin\vartheta\cos\psi\dot\varphi - \sin\psi\dot\vartheta, \quad b = \sin\vartheta\sin\psi\dot\varphi - \cos\psi\dot\vartheta, \quad c = \cos\vartheta\dot\varphi + \dot\psi. \tag{19}$$

Az impulz koordináták és a, b, c között az összefüggés (18) és (19)-ből

$$\left.\begin{aligned} p_\vartheta &= -Ia\sin\psi - Kb\cos\psi \\ p_\varphi &= Ia\sin\vartheta\cos\psi - Kb\sin\vartheta\sin\psi + Lc\cos\vartheta \\ p_\psi &= Lc. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

[1] A rotációs energia számításánál l. pl. M. PLANCK: Einführung in die Allgemeine Mechanik (1916) 146., 147., 152. §-ait.

A (17) egyenletben $p_{\vartheta 1}, p_{\varphi 1}, p_{\psi 1}\ldots$ helyett a_1. b_1. $c_1\ldots$-et vezetve be integrációs változónak

$$z = \frac{1}{h^{6N} N!} \int\int \ldots dx_1 dy_1 dz_1 \ldots d\vartheta_1 d\varphi_1 d\psi_1 \ldots dp_{x1} dp_{y1} dp_{z1} \ldots \ldots IKL \sin \vartheta_1 da_1 db_1 dc_1 \ldots, \tag{17a}$$

az integrálást elvégezve

$$z = \left(\frac{4\pi^5 e \sqrt{IKLm^3} \sqrt{(2u)^6} V}{3h^6 N} \right)^N. \tag{17b}$$

Egy molekula állapotterében a különböző nagyságú cellákhoz tartozó statisztikai súlyok összege a kétatomú gáznál tett feltevés szerint

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = n^6, \tag{21}$$

ahol n egy molekula állapotterében a különböző nagyságú cellák számát jelöli. (17b)- és (21)-ből

$$n^6 = \frac{4\pi^5 e \sqrt{IKLm^3} \sqrt{(2u)^6} V}{3h^6 N} \tag{22}$$

és

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{3h^6 N}{4\pi^5 e \sqrt{IKLm^3} V} \right)^{1/3} n^2. \tag{23}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3h^6 N}{4\pi^5 e \sqrt{IKLm^3} V} \right)^{1/3} = \sigma'\text{-t írva,} \tag{24}$$

az n cellához tartozó energia középértéke:

$$u_n = \frac{\int_n^{n+1} \sigma' n^2 d(n^6 h^6)}{[(n+1)^6 - n^6] h^6} \qquad u_n = \frac{6\sigma' [(n+1)^8 - n^8]}{8 [(n+1)^6 - n^6]}. \tag{25}$$

A (2) alatti szabad energia tehát

$$\sigma = \frac{\sigma'}{kT} \tag{26}$$

helyettesítéssel

$$F = - RTln \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)^6 - n^6] \, e^{\frac{6\sigma}{8} \frac{[(n+1)^8 - n^8]}{[(n+1)^6 - n^6]}}. \tag{27}$$

Magas hőmérsékletnél ($\sigma \ll 1$) a σ kitevő szorzója az összegezésnél n^2-nak vehető s

$$F = - RTln \left\{ \int_0^\infty e^{-\sigma n^2} dn^6 - \int_0^1 e^{-\sigma n^2} dn^6 \right\}, \tag{28}$$

$$F = - RTln \frac{8\pi^2 e \sqrt{IKLm^3} \sqrt{(2\pi kT)^6} V}{h^6 N} \tag{29}$$

és

$$S = Rln \frac{8\pi^2 e^{8/2} \sqrt{IKLm^3} \sqrt{(2\pi kT)^6} V}{h^6 N}. \tag{30}$$

A második esetben az n cella quantumos energiája (23)-ból:

$$u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3h^6 N}{4\pi^5 e \sqrt{IKLm^3} V} \right)^{1/3} (n - n_0)^2. \tag{31}$$

A szabad energia tehát σ (24) és (26) alatti értelmezésével

$$F = - RTln \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)^6 - n^6] e^{-\sigma (n-n_0)^2}. \tag{32}$$

Magas hőmérsékletnél ($\sigma \ll 1$)

$$\left. \begin{aligned} F &= - RTln \int_0^\infty e^{-\sigma (n-n_0)^2} dn^6, \\ F &= - RTln \left\{ 6 \int_0^\infty (x+n_0)^5 e^{-\sigma x^2} dx - 6 \int_0^{1-n_0} (x+n_0)^5 e^{-\sigma x^2} dx \right\}. \end{aligned} \right\} \tag{33}$$

A (15*b*) alatti egyenletet követő eljárással

$$S = Rln \frac{8\pi^2 e^{8/2} \sqrt{IKLm^3} \sqrt{(2\pi kT)^6} V}{h^6 N}, \tag{34}$$

megegyezőleg a (30) alatti egyenlettel. A többatomú gáz entrópiájának ez az egyenlete megegyezik a TETRODE-[1] és a kétatomú gázok tárgyalásánál tett megjegyzés mellett az EHRENFEST és TRKAL-féle[2] értékkel.

---

[1] H. TETRODE: Proceedings Amsterdam. 17. 1181. l. (34) alatti egyenlet, (1915).

[2] P. EHRENFEST és V. TRKAL: Ann. d. Phys. 65. 624. (1921).

Számitásainkból láthatjuk tehát, hogy az állapotpontok akár folytonosan töltik be a molekulák állapottereit, akár nem folytonosan, úgy a két- mint a többatomú gáznál a magas hőmérséklet melletti entrópiaértékek egymással megegyeznek. Ha a molekulák főtehetlenségi nyomatékait pontosan ismerni fogjuk, az entrópia megállapitott kifejezése a kémiai állandó bevezetésével a gőznyomás egyenlete alapján kisérleti adatokkal is összehasonlitható lesz.

Dr. Széll Kálmán.

ZUSAMMENFASSUNG.

Auf Grund der Planck'schen Untersuchungen wird die absolute Entropie der zwei- und mehratomigen Gase in zwei verschiedenen Fällen bestimmt. Im ersten Falle wird vorausgesetzt, dass die Phasenpunkte in den Phasenräumen der einzelnen Molekeln beliebige Lagen haben können. Im zweiten Falle wird angenommen, dass nur ganz bestimmte Phasenbahnen in den Phasenräumen vorkommen. Die in beiden Fällen bei hoher Temperatur berechneten Entropiewerte sind gleich und stimmen mit den Tetrode-, Ehrenfest- und Trkal'schen Resultaten überein.

Dr. Koloman Széll.

KATHÓDSUGARAK SZÓRÓDÁSA.

Egy kathódsugárnyaláb elektronjai statikai töltésük következtében egymást taszítják, aminek az lesz következménye, hogy egy eredetileg párhuzamos nyaláb mindinkább széttartóvá válik. Teljes mathematikai szigorúsággal csak két elektron mozgásának a leírása lehetséges, valóságos sok elektronból álló sugárnyaláb szóródása csak közelítőleg határozható meg.

1. §. *Két elektron forgása.* Vegyük fel a két elekront $t=0$ időben egy nyugvó K koordinátarendszer Y-tengelyén $+y_0$ és $-y_0$ pontokban és egyelőre ne tulajdonítsunk nekik kezdeti sebességet. Ez esetben a két elektron az Y-tengely mentén gyorsuló mozgással fog egymástól távolodni, mely mozgás differenciálegyelnete:

$$m_0\ddot{y} = \frac{e^2}{4y^2}$$

vagy:

$$\ddot{y}y^2 = \frac{e^2}{4m_0} = a_1 \tag{1}$$

ahol m_0 az elektron nyugalmi tömege. Ezen egyenlet első általános integrálja:

$$\dot{y}^2 = C_1 - \frac{2a_1}{y} \tag{2}$$

A kezdőfeltételből: $c_1 = \frac{2a_1}{y_0}$, úgy hogy:

$$\dot{y}^2 = 2a_1\left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y}\right), \tag{3}$$

ami tulajdonképen nem egyéb az energiaegyenletnél. (3)-ból gyököt vonva, a változók szétválaszthatók és $y = x^2$ helyettesítéssel a jobboldal integrálható alakra hozható. A végleges megoldás, a kezdőfeltétel tekintetbevételével:

$$\left.\begin{aligned} & t = \frac{\varphi(y)}{\sqrt{2a_1}}, \\ \text{ahol:} & \\ & \varphi(y) = y_0^{3/2}\left[\sqrt{\frac{y}{y_0}\left(\frac{y}{y_0}-1\right)} + ln\left(\sqrt{\frac{y}{y_0}} + \sqrt{\frac{y}{y_0}-1}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Ezek után könnyű áttérni arra az esetre, ha az elektronoknak az X-tengely mentén $+v$ kezdeti sebességük van. Nem kell mást tennünk, mint a (4) alatti egyenletet olyan K' koordinátarendszerre transformálni Lorentz szerint, melyhez képest a K rendszer az X'-tengely mentén $+v$ sebességgel mozdul el. Nyilvánvaló, hogy csak az időt kell transformálnunk:

$$t = t'\sqrt{1-\beta^2}, \quad (5)$$

de ezenkívül figyelembe veendő, hogy az m_0 nyugalmi tömeg helyébe relativisztikus tömeget kell írnunk az a_1 állandóban:

$$m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (6)$$

Ezen átalakitásokat alkalmazva és a_1 értékét (1) szerint helyettesítve, az elektronok pályájának egyenlete lesz:

$$t' = \frac{x'}{v} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{2m_r}{1-\beta^2}}\cdot\varphi(y'). \quad (7)$$

2. §. A fenti pályaegyenletet klasszikus alapon is lehet számitani. Ugyanis tekintsük a viszonyokat rögtön a K' rendszerben. Elsősorban ismét fellép a Coulomb-féle taszitó erő, melynek nagysága: $\frac{e^2}{4y'^2}$; ezenkívül azonban a két egyenletesen haladó elektron két párhuzamos árammal egyenértékű, melyek egymást vonzzák és a megfelelő Ampère-féle vonzóerő: $\frac{e^2v^2}{4y'^2c^2}$. A két erő különbsége fog a mozgásnál érvényesülni, úgy hogy a mozgásegyenlet:

$$m_t \ddot{y}' = \frac{e^2}{4y'^2}(1-\beta^2)$$

vagy:

$$\ddot{y}' y'^2 = \frac{e^2(1-\beta^2)}{4m_t} = a_2$$

m_t az ABRAHÁM-féle transversalis tömeget jelenti:

$$m_t = m_0\left[1 + \frac{6}{3.5}\beta^2 + \frac{9}{5.7}\beta^4 + \cdots\right]$$

Az egyenlet megoldása (4)-el azonos, tehát:

$$t' = \frac{x'}{v} = \frac{\varphi(y')}{\sqrt{2a_2}} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{2m_t}{1-\beta^2}}\cdot\varphi(y'). \qquad (7')$$

Amint máskép nem is volt várható, (7) és (7') megegyeznek, csak a klasszikus transversalis és a relativisztikus elektrontömeg tekintetében különböznek.

A szóródás nagyságára nézve megemlítem, hogy például $y_0 = 0{,}4$ *mm*, $v = 0{,}1c$ esetén a két elektron távolsága kb. 1 *m* úton megkétszereződik; $v = 0{,}001c$ esetén ez már 1 cm út után következnék be.

3. §. *Sík kathódról kiinduló sugárnyaláb szóródása.* Ezt a feladatot is meg lehet közelíteni az 1. §-ban követett eljárás alapján. A fogalmak rögzítése céljából vegyük fel a körkeresztmetszetű kathód felületét a K koodinátarendszer kezdőpontjában, az $Y'Z'$-síkban. Ez esetben a kathódsugárnyaláb, eltekintve a szóródástól, egy körhengert fog betölteni, amelynek tengelye az X'-tengely. Valóságos kathódsugárnyaláb mindig véges, hossza legyen l. Keresztmetszetének a sugara a kezdőpontban y_0, máshol y. A nyaláb szóródását megkapjuk, ha egy peripherikus elektron pályáját határozzuk meg: az ezáltal meghatározott forgásfelület lesz a nyaláb burkolófelülete.

A feladat egyszerűsítése céljából képzeljük az egész töltést, melyet a nyaláb képvisel, az X-tengelyen egyenletesen lineárisan eloszolva (az így eredő lineáris töltéssűrűség legyen ϱ) és vizsgáljuk ezen lineáris töltés hatását egy elektronra, mely $t=0$ pillanatban a kathód pereméről (y_0 ordinátával) $+v$ sebességgel kirepül. Először az 1. §. mintájára az elektronnal együtt mozgó K koordinátarendszerben számolhatunk. A többi elektront képviselő lineáris töltés ebben a rendszerben kezdetben 0-tól l-ig terjed, de $-v$ sebességgel elmozdul és a mozgás befejeztekor $-l$-től 0-ig terjed. Ennélfogva az erő, melyet a mozgó elektronra kifejt, a mozgás folyamán változik, még pedig a következőképen:

a) A kezdő- és végpillanatban az y ordinátájú pontban a töltés potenciálja:

$$\varphi_{\mathrm{I}} = \varrho \int_6^l \frac{dx}{\sqrt{y^2+x^2}} = \varrho \, ln \frac{y}{l+\sqrt{l^2+y^2}}.$$

b) A mozgás közepén:

$$\varphi_{\mathrm{II}} = 2\varrho \int_0^{l/2} \frac{dx}{\sqrt{y^2+x^2}} = 2\varrho \, ln \frac{y}{\frac{l}{2}+\sqrt{\frac{l^2}{4}+y^2}}.$$

Tegyük fel, hogy y^2 az l^2-hoz képest elhanyagolható, akkor:

$$\varphi_{\mathrm{I}} = \varrho \, ln \frac{y}{2l} \quad \text{és} \quad \varphi_{\mathrm{II}} = 2\varrho \, ln \frac{y}{l}.$$

A hatóerőt e grad φ adja. Ennek bennünket jelenleg csak az Y-összetevője érdekel (a középső pillanattól eltekintve ugyanis X-összetevője is van, mely azt eredményezi, hogy a vizsgált elektronnak eredeti mozgásirányában a közép előtt negatív, a pálya második felében pedig pozitív gyorsulása van):

$$K_{\mathrm{I}} = \mathrm{grad}_y \, \varphi_{\mathrm{I}} = \frac{e\varrho}{y}$$

$$K_{\mathrm{II}} = \mathrm{grad}_y \, \varphi_{\mathrm{II}} = \frac{2e\varrho}{y}.$$

Elegendő megközelítés lesz, ha a két kifejezés középértékét vesszük az egész pályán érvényesnek, vagyis a hatóerőt

$$K = \frac{3}{2}\frac{e\varrho}{y}\text{-nak vesszük.}$$

Az elektron mozgásegyenlete tehát lesz:

$$m_0 \ddot{y} = \frac{3}{2} \frac{e\varrho}{y}$$

vagy:

$$\ddot{y} y = \frac{3}{2} \frac{e\varrho}{m_0} = a. \tag{8}$$

Ezen differentiálegyenlet első integrálja, mindjárt tekintettel a kezdőfeltételre:

$$\dot{y}^2 = 2a \ln \frac{y}{y_0}. \tag{9}$$

Helyettesítsük $\frac{y}{y_0}$-t $(1+z)$-vel, akkor lesz:

$$\dot{z}^2 = \frac{2a}{y_0^2} \ln (1+z). \tag{9'}$$

A jobboldal, amíg z kisebb 1-nél, konvergens sorba fejthető, melynek itt csak első két tágját veszem figyelembe:

$$\ln (1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$$

Ezt (9')-be helyettesítve, a változók szétválaszthatók és a megoldás lesz:

$$\frac{\sqrt{a}}{y} t + C = \int \frac{dz}{\sqrt{2z - z^2}} = \arcsin (z-1) = \arcsin \left(\frac{y}{y_0} - 2 \right).$$

Minthogy $t = 0$-ra $y = y_0$, a C értéke $-\frac{\pi}{2}$, tehát a értékét is helyettesítve, a megoldás lesz:

$$\frac{1}{y_0} \sqrt{\frac{3e\varrho}{2m_0}} \cdot t = \arcsin \left(\frac{y}{y_0} - 2 \right) + \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Ezt a kifejezést még, úgy mint az 1. §-ban, transformálnunk kell a K' rendszerre, amiáltal az elektron pályaegyenlete:

$$\frac{1}{y_0 v} \sqrt{\frac{3e\varrho (1-\beta^2)}{2m_r}} \cdot x' = \arcsin \left(\frac{y'}{y_0} - 2 \right) + \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

Ha a következő konkrét adatokat helyettesítjük:

$$y = 0{,}5 \text{ cm}$$
$$I = 0{,}05 \text{ Ampère} \left(\varrho = \frac{I}{v}\right)$$
$$v_0 = 3{,}10^3 \text{ cm sec}^{-1}$$
$$l = x' = 8 \text{ cm}$$

akkor arra az eredményre jutunk, hogy a pálya végén:

$$\frac{y}{y_0} \sim 1{,}5$$

vagyis a nyaláb átmérője felével megnövekedett. Ez természetesen inkább csak a szóródás nagyságrendbeli becslésének tekinthető, de mutatja, hogy a szóródás igen jelentékeny.

Összefoglalás.

Az első részben két, eredetileg párhuzamosan haladó elektronnak a köztük fellépő COULOMB-féle taszítás következtében egymásra kifejtett eltérítő hatása által létesített pályáját vizsgáljuk. Ez a pálya meghatározható klasszikus és relativisztikus számítással. A relativisztikus számítás megadja a párhuzamos áramok között ható AMPÈRE-féle vonzóerőt, amelyet a klasszikus számításnál mint adottságot kell előre felvenni. A második részben egy körfelületű sík kathódról kiinduló kathódsugárnyaláb szóródását vizsgáljuk. Erre nézve bizonyos egyszerűsítésekkel közelítő pályaegyenlet vezethető le, mely használható mindaddig, míg a nyaláb keresztmetszetének relatív növekedése nem túl nagy (legfeljebb 50%).

Dr. Schay Géza.

ÜBER STREUUNG VON KATHODENSTRAHLEN.

Es wird darauf hingewiesen, dass die Elektronen eines Kathodenstrahlbündels infolge ihrer gleichnamigen Ladungen einander abstoßen müssen. Die sich hieraus ergebende Streuung wird im einfachsten Idealfall von nur zwei Elektronen exakt, im Fall eines anfänglich parallelen Strahlenbündels näherungsweise berechnet und gezeigt, daß diese Streuung ganz beträchtlich ist.

Géza Schay.

M. Kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem Könyvtára Szeged
EGYETEMI KÖNYVTÁR SZEGED. FOLYÓIRAT 19 90

Franklin-Társulat nyomdája: Géczy Kálmán.

A tagsági díjat a választmány 1925. jan. 1-től 3 aranykoronában (50,000 papirkoronában) állapította meg.

Minthogy a Mathematikai és Physikai Lapok egyes régibb évfolyamai teljesen elfogytak, kérjük tisztelt tagtársainkat, akik azokat nélkülözhetik, bocsássák a Társulat rendelkezésére.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a mathematikai tárgyúak *Fejér Lipót* (**V., Falk Miksa-utcza 15.**), a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* (**I., Budafoki-út 8.**) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikban lehető rövidségre törekedjenek, azokhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek és hogy arra pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghivók expedíciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Nagy József* pénztáros címére (IV., Váci-utca 31—33.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du sécretaire *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkívüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi ránk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhöz képest meg kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzivebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is. Csak így alakul ki bennünk a jövőnk biztosításához annyira szükséges bizalmunk önmagunkhoz.

Kérjük ennélfogva tisztelt tagtársainkat,

1. hogy hátralékos tagdíjaikat (évenkint 3 aranykoronát) szíveskedjenek *Nagy József* pénztárnoknak (IV., Váci-utca 31-33.) lehetőleg a mellékelt csekklap felhasználásával befizetni.

2. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával és hogy a világháború alatt és az utána következő időkben költözködésre kényszerített tagtársaink figyelmét hívják fel hasonló cselekedetre,

3. hogy gyűjtsenek új tagokat.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA: GÉCZY KÁLMÁN.