MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

NEGYVENHETEDIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES és ORTVAY RUDOLF

BUDAPEST, 1940

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

Franklin-Társulat nyomdája.

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

NEGYVENHETEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES és POGÁNY BÉLA

NEGYVENHETEDIK ÉVFOLYAM

1940

JANUÁR—JÚNIUSI FÜZET

BUDAPEST, 1940

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Kőnig Dénes* (**XI., Horthy Miklós-út 28., Lénárt-pensio**), a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* (**XI., Budafoki-út 8.**) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra, valamint minden korrekturára pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

Évi tagsági díj Budapesten 8, vidéken 6 pengő. Minden befizetést Társulatunk 5997. számú postatakarékpénztári csekkszámlájára kérünk. A folyóirat és a meghívók küldésére vonatkozó felszólamlások, címváltozások *Jelitai József* pénztáros címére (II., Bimbó-út 5.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány*, Budapest, XI., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *B. Pogány*, Budapest, XI., Budafoki-út 8.

TANGL KÁROLY

1869—1940.

TANGL KÁROLY
1869—1940.

1940. január 10-én este 7 órakor elköltözött az élők sorából Tangl Károly, a Pázmány Péter tudományegyetemen a kísérleti fizika tanára, az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat alelnöke.

Távozása gyászba borította Társulatunkat és egész tudományos életünket, melynek egyik legtiszteltebb és legnépszerűbb tagja volt. És főképp gyászba borított bennünket, kiknek megvolt adva az a szerencse, hogy évek során át vele szoros kapcsolatban lehettünk, számos ügyet vele intézhettünk, meríthettünk mély tudásából, résztvehettünk sokoldalú érdeklődésében, élvezhettük világos gondolkodását, felemelkedhettünk mindig magas szempontjaival és kiengesztelő humorával.

Életpályájának külső menete a legegyszerűbb és legtermészetesebb; minden nagyobb zökkenés nélkül folyt le.

Született 1869-ben Budapesten, jómódú polgári családból. Gondos nevelésben részesül, tanul nyelveket és zenét, melynek mívelése élete egyik főszórakozását képezi. Iskoláit gondtalanul elvégzi. Az egyetemen a magyar fizika nagy vezető egyénisége, báró Eötvös Loránd környezetébe kerül, ki a már fiatalon feltűnő fiatal fizikust tanársegédévé teszi. Doktorátust tesz 1895-ben. Majd külföldi tanulmányútra megy Berlinbe és Párisba. 1900-ban a mértékhitelesítő bizottság elnöke. 1901-ben magántanári képesítést szerez, 1903-ban a kolozsvári Ferenc József tudományegyetem nyilvános rendes tanára, hol 14 évig marad, míg 1917-ben a József műegyetem fizikai tanszékére meghívja. 1921-ben a Pázmány

Péter tudományegyetem báró Eötvös Loránd tanszékére hívja meg. Tagja lesz a Magyar Tudományos Akadémiának és a Szent István Akadémiának és 1934 óta a Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának elnöke. Alelnöke az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulatnak. Tagja azonkívül számos bizottságnak és tanácsnak. Megnősül 1900-ban, elveszi Gedliczka Emmát, ki 1931-ben özvegyen hagyja. Házasságából két élő gyermeke: férjezett leánya és mérnök fia maradt utána. Hetvenedik életévét elérve, ágynak esett és néhány hónapi szenvedés után csendesen elaludt.

Mikor Tangl Károly a nyolcvanas évek végén az egyetemre került, tudományos életünk és főképp a természettudományok élénk fejlődében voltak hazánkban. A tudományegyetem, a műegyetem, a Magyar Tudományos Akadémia, a Természettudományi Társulat, a nemrég alakult Matematikai és Fizikai Társulat, a Ganz-féle elektromos gyár mind központjai voltak egy élénk szellemi életnek, melyekben a kor természettudományi és műszaki törekvései mind visszhangra és részben önálló továbbfejlődésre találtak. Csak Eötvös Loránd, Thán Károly, Fröhlich Izidor, Kőnig Gyula, Bláthy Ottó Titusz, id. Szily Kálmán neveire kell gondolnunk.

Természetesen Tangl sem vonhatta ki magát e szellemi hatások alól és korán főképp Eötvös hatásába került, ami döntő befolyást gyakorolt egész fejlődésére. Épp ezért célszerű lesz ezeket a hatásokat kissé tágabb keretben szemügyre venni és egy pillantást vetni azokra a törekvésekre és irányokra, melyek a hetvenes és nyolcvanas években az egykorú fizikát mozgatták és annak sajátos jellegét megszabták. Egyik kiemelkedő mozzanat kétségkívül a thermodynamika kialakulása volt: példát mutatott egy rendkívül nagy jelenségkomplexus általános elvekre való visszavezetésére, mely a mechanikával szemben önállóságát megőrizte és a kor fizikusainak egész gondolkodásmódját igen erősen befolyásolta. A thermodynamika viszonya a mechanikához, főtételei visszavezetése a mechanikára szintén egyike volt ama problémáknak, melyek a fizikusokat igen erősen foglalkoztatták.

Ugyancsak nemrég alakult ki az elektromosság és a fénytan átfogó elmélete FARADAY nyomán MAXWELL elméletében, de még soká tartott, míg a fizikusok közkincsévé vált. Az első részletesen kiépített korpuszkuláris elmélet, a gázok kinetikus elmélete is ebben az időben alakult ki. Másrészt ezen időben jelentékeny fizikusok egy csoportja a korpuszkuláris elméletek némely önkényes konstrukciója és főképp a MAXWELL-féle egyenletek és a thermodynamika második főtétele mechanikai magyarázatának eredménytelensége hatása alatt oly álláspontra helyezkedett, mely beéri a jelenségek törvényeinek matematikai alakba való öntésével és nem tartja indokoltnak minden jelenségcsoport mechanikai értelmezésének követelményét. Ez az ú. n. fenomenologikus irány, melynek igen pregnáns kifejezést adott KIRCHHOFF híres mechanikájában, és amely igen határozott szembefordulást jelentett a széltében dívó modellszerű elképzelésekkel szemben. Egy purisztikus irány, mely fogalmi tisztaságra és biztonságra törekszik és mindig fellépett, ha a fizika fejlődése folyamán bizonyos irányba túlmesszemenő és kellően meg nem alapozott következtetésekbe bocsátkozott. Rendesen új, mélyebb alapozáshoz vezetett, egy theoriatípus kiküszöböléséhez és mással való helyettesítéséhez, melyből ismét egy lépéssel tovább lehetett menni. A tudomány történetében többször fellépett; csak alakja változott a kor követelményei szerint. Már NEWTONnál is található; híres mondása «hypotheses non fingo» azt jelenti, hogy a korában divatos éterörvényekről nem akar tudni és a gravitáció törvényét csak a lényegre szorítkozva akarja kimondani. KIRCHHOFF idejében a korabeli atomisztikus spekulációk és az elektromágneses étermodellek meddőségére utal. De napjaink fizikájában is él ezen irányzat. Igy a relativitás elve azt hangsúlyozza, hogy a különböző helyeken lefolyó jelenségek egyidejűségéről csak annyiban beszélhetünk, amennyiben azok mérésére elvi lehetőség van. Az atomisztika létjogosultsága ma már nem probléma, csak az elemi korpuszkulák helyes jellemzése. A mai kvantummechanika egyik alapelvében, hogy csak arról beszélhetünk, aminek mérése elvileg lehetséges és ezen gondolat következetes keresztülvitelében lehetetlen fel nem ismerni a fenomenologikus gondolkodás jellegét.

Báró Eötvös Loránd, ki az említett korszakban hazánk fizikájának irányadó tényezője volt, mint Franz Neumann és főképp mint Kirchhoff közvetlen tanítványa kifejezett fenomenologikus irányzat hatása alá került. Ez felelt meg szellemi egyéniségének, melyet mindig világosságra való törekvés és bizonyos tartózkodás messzemenő következtetésekkel szemben jellemeztek, valamint az a törekvés, hogy a maga elé tűzött feladatot a megszabott keretek közt oly tökéletesen végezze el, amennyire csak lehetett. Így mintaszerű mérései, melyek nem célozták a gravitáció természetére új fényt vetni, hanem tudatosan a Newton-féle törvény alapján állottak, több igen jelentékeny geofizikai eredmény mellett biztos alapot szolgáltattak a gravitáció ama újfajta felfogására is, melyet Einstein az általános relativitás elméletében fejtett ki. Talán nem lesz érdektelen, ha felemlítjük, hogy mennyire hasonlít ehhez az a szerep, amit Kirchhoffnak az ú. n. fekete test sugárzására vonatkozó klasszikus vizsgálatai a későbbi fejlődés előkészítésében játszottak. Kirchhoff megállapította, hogy a fekete test sugárzása csak a hőmérséklettől függ és független az anyagi minőségtől. Ez a legtöbb, amire a klasszikus thermodynamika alapján el lehet jutni és Kirchhoff nem bocsátkozott ezen túlmenő következtetésekbe. Hogy a fekete test spektrumának mi az energiaeloszlása, ezt a lépést Planck tette meg egy lényegesen új feltevés bevezetésével, ami a fizika új korszakát nyitotta meg.

Eötvös a fenomenologikus iránynak nem csak hajlama szerint, hanem tudatosan is híve volt, aminek számtalanszor kifejezést is adott. Kiemelte, hogy a Kirchhoff és a többi fenomenologus, mint W. Voigt, által követett irány az, amit helyesnek tart.

Ugyanekkor hazánkban a korszerű fizika többi irányai is hatást gyakoroltak és főképp a thermodynamika második főtételének mechanikai levezetésére irányuló törekvések keltettek visszhangot. Ezek a törekvések meddők maradtak és ma látjuk, hogy a fizika fejlődésének akkori szakasza még nem is érett meg ezen probléma eredményes tárgyalására.

Egy másik kíváló fizikus és erős egyéniség, LÉNÁRD FÜLÖP, szintén Budapesten kezdett dolgozni, de érdeklődésének iránya és egész beállítása egészen más volt; vizsgálatai a korpuszkuláris felfogás irányában jelentettek nagy előretörést, de hazánk tudományos életében nem gyakorolt nagyobb hatást.

TANGL, mint EÖTVÖS asszistense, ama felfogások és problémák vonzókörébe jutott, melyek nagy mesterét foglalkoztatták.

Első dolgozata (1) [1] a matematikai fizika, nevezetesen a potenciálelmélet körébe tartozik és néhány egyszerű homogén test, mint körgyűrű, körlap, körkúp potenciáljának kiszámításával foglalkozik. Ezen egyetemi pályadíjjal koszorúzott munkájában már jelentékeny számolási készségnek és az elliptikus integrálok kezelésében való jártasságának adta tanújelét.

Egy másik dolgozatában (2) a horizontális csavarási ingának lengéseit vizsgálja a földnehézség erőterében nagy kilengés esetében és szintén bizonyságot tesz a matematikai módszerek kezelésében való biztonságáról, valamint kísérleti készségéről is.

Harmadik dolgozata (3) fordítása GAUSS mintaszerű dolgozatának, melyben a földmágnesség terének abszolút intenzitása mérésére szolgáló híres módszerét közölte és melyhez TANGL értékes megjegyzéseket fűzött hozzá. Hogy GAUSS alapvető dolgozata úgy EÖTVÖSre, mint TANGLra nagy hatást tett, egész beállításukból közelfekvő.

Következő dolgozatai (4, 4a, 5, 5a, 5b) a mágnesség hatását egy drót mechanikai sajátságaira vizsgálják: egyrészt a drót rugalmassági modulusának, másrészt hosszának változását. Gondos eljárása a már EÖTVÖS és mások által alkalmazott bifiláris felfüggesztés igen szellemes módosításán alapul és a tekintetbe jövő kis hatások mérését lehetővé teszi.

Következő vizsgálatai, melyeket Budapesten kezdett és Kolozsvárra való kineveztetése után folytatott, egészen más problémakörrel foglalkoznak. Érdeklődése a dielektromos állandó felé for-

[1] A zárójelbe tett számok hivatkozások TANGL KÁROLY a függelékben közölt dolgozatainak jegyzékére.

dult, melynek összefüggése a törésmutatóval az elektromágneses fényelmélet egyik következménye volt.

A Clausius—Mossotti-féle formula pedig nevezetes összefüggést állapít meg a testek sűrűsége és a dielektromos állandó közt, amennyiben az $\frac{1}{\sigma}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$ kifejezés, melyben ε a dielektromos állandó és σ a sűrűség, állandó volna. Már többen találtak kisebb-nagyobb eltéréseket az állandóságtól, de a mérések pontossága 1900-ben, mikor Tangl vizsgálatait megkezdte, nem volt kielégítő a viszonyok tisztázására. Ezért Tangl elhatározta, hogy a kérdést teljes alapossággal megvizsgálja. Mérési módszernek a Nernst-féle módszert használta, ki egy Wheatstone-féle hídba kapcsolta a mérendő anyaggal töltött kondenzátort. Csakhogy a nagyobb pontosság követelményének megfelelően a módszert átalakította, nagyobb kapacitású kondenzátorokat használt és a módszert egy differenciális módszerré alakította át. Evvel a berendezéssel néhány folyadék, mint benzol, toluol, xylol, szénkéneg, chloroform és aethylaether dielektromos állandója változását 20° C-tól 200° C-ig megvizsgálta (6, 6a, 6b). Megvizsgálta a Clausius—Mossotti-féle kifejezés viselkedését is és megállapította változását a hőmérséklettel és azt a toluolnál és xylolnál majdnem állandónak találta, a többinél kifejezett változást állapított meg, mely legnagyobb volt az aethylaethernél (17%). A dielektromos állandó változása a vizsgált folyadékoknál lineáris és nem nagy volt, csak a chloroform és aethylaether mutatott jelentékeny változást a hőmérséklettel. Tangl ezt összefüggésbe hozza avval, hogy az aether kritikus hőmérsékletét méréseinél elérte. Érdekes megállapítása értelmezést a fizika fejlődésének egy sokkal későbbi stádiumában talált, midőn Debye reámutatott arra, hogy a testek dielektromos állandójának a hőmérséklettől való függésére mérvadó, hogy van-e a molekuláknak állandó dipolusmomentumuk vagy sem. Az aether és chloroform dielektromos állandójának nagymérvű változása éppen nagy dipolusmomentumukkal függ össze. Itt is találkozunk avval a jelenséggel, amire Kirchhoffnál és Eötvösnél is céloztam, hogy sikerült oly tényeket megállapítaniok, melyek igazi jelentőségét csak a tudomány fejlődésének későbbi fokán lehet értelmezni.

Más dolgozataiban (7, 7a, 8, 8a) TANGL gázok dielektromos állandóságának nyomással való változását vizsgálja 1—100 atmoszféra nyomásközben és a CLAUSIUS—MOSSOTTI-féle kifejezést igen állandónak találja. Később tanítványai közül többen kiterjesztették ezeket a vizsgálatokat más esetekre is.

Mindenesetre TANGLnak a dielektromos állandóra vonatkozó mintaszerű vizsgálatai tudományos működésének kiemelkedő részét képezik, melyek neki általános elismerést szereztek.

Dielektromos vizsgálatai után TANGL érdeklődése egy új és nehéz probléma felé fordult: a kapilláris feszültség meghatározáshoz a szilárd test és folyadék határfelületén. Érdeklődését a kapillaritás jelensége iránt már EÖTVÖS felkeltette, ki egy módszert adott meg a kapilláris feszültségnek folyadék-gáz határfelületen való meghatározására, ami az előbbi módszerek hibáitól mentes volt és ami a molekuláris felületi feszültségre vonatkozó nevezetes törvényéhez vezette el. A felületi feszültség meghatározása a szilárd-cseppfolyós határfelületen ettől teljesen különböző és igen nehéz feladat, amivel EÖTVÖS nem foglalkozott és TANGL teljesen önálló módszerrel próbálkozott (9, 10, 11.) Ösztönzést RÖNTGEN egy vizsgálatából merített, ki egy gumi-membrán félgömbbé való kinyomásánál fellépő erőből mérte a felületi feszültséget. Így pontos mérést nem lehetett eszközölni. Ezért TANGL gumicsövet használt és megmérte az alakváltozást, melyet ilyen cső szenvedett, ha levegőből folyadékba helyezte. Természetesen a hidrosztatikus hatásokat gondosan eliminálta. A gumicsövet különböző fém és sellak stb. rétegekkel bevonva az illető réteg és víz határán fellépő felületi feszültséget óhajtotta mérni. E rendkívül szellemes és alapgondolatában helyes módszer kidolgozására rengeteg időt és munkát fordított, de mégsem tudta azt elérni, amit óhajtott. Ugyanis nem sikerült olyan homogén és teljesen záró bevonó rétegeket előállítani, hogy folyadék ne hatoljon a gumicső felületére és azt meg ne duzassza. Az ebből eredő hatás pedig többszörösen felülmulja a felületi feszültség hatását. Miután rendkívül gondos és nagy kritikáról tanúskodó vizsgálatai folyamán ezt megállapította, a módszert elhagyta és egy egyszerű (14, 14a) fémszalag vízbemerülésénél fellépő alakváltozását használta fel, ami az előbbi módszer hibáitól mentes; de módszerét nem dolgozta ki egy preciziós módszerré.

Végre utolsó kísérleti dolgozatában (18) ismét a horizontális ingához tér vissza. Egy olyan ingát ír le, melynek lengőjét doboznak képezte ki és folyadékba mártotta. Ezáltal elérhette azt, hogy aránylag nagy tömeget igen vékony fonálra függeszthetett fel, és így az érzékenységet növelhette. Ingája nem a földnehézség erőterének vizsgálatát célozza, hanem éppen érzékenysége miatt, mely igen állandó viszonyokat tételez fel, csak laboratóriumba való. A háború és az azt követő zavaros viszonyok igen nehezítették a laboratóriumi munkát. Közben TANGL egészségi állapota is erősen hanyatlott és főképp látása rosszabbodott, úgyhogy maga már nem tudott észlelni. Ellenben tanítványai számos vizsgálatot végeztek intézetében, melyeket ellenőrzött és irányított, pedig ezeknél a legújabb módszerek találtak alkalmazást.

Főképp ki kell emelnem azokat a vizsgálatokat, melyekre intézetét az utolsó tíz évben elsősorban berendezte. Két tanítványa, FORRÓ MAGDOLNA és BARNÓTHY JENŐ az oly rejtélyes kozmikus sugarak tanulmányozásával kezdtek foglalkozni és vizsgálataikat és az arra szolgáló berendezést mindinkább kiterjesztették. Számos értékes adattal járultak hozzá a sugarak ismeretéhez, úgy, hogy az intézet ily irányú működését mindenütt, hol kozmikus sugarakkal foglalkoznak, figyelemmel kísérik és reá hivatkoznak. Bár e vizsgálatokat az említett kutatók teljesen önállóan kezdeményezték és végzik, mégis TANGL bölcs tanácsaival és tekintélyével, mely a szükséges anyagi felszerelést lehetővé tette, igen nagy érdemet szerzett abban, hogy eme ma annyira aktuális kutatások számára hazánkban is egy központ létesült.

TANGL kutatói munkásságán kívül igen eredményes volt tanítói működése is. Nemcsak mintaszerű egyetemi előadásaira és az intézet vezetésére, hanem arra is kell utalnom, hogy volt tanársegédei közül ma hárman töltenek be egyetemi tanszéket.

Nem szabad ismertetései mellett sem szó nélkül elhaladni. Ezekben híven tükrözik vissza, hogy hogyan reagált a fizika egy olyan korszakára, melyben az szinte új tudományokkal gyarapodott és alapfelfogásai mélyen átalakultak. Pályája kezdetén szinte kompromittáló volt atómról beszélni, a kémián kívül, az atómok számáról, méreteiről, tömegéről semmi határozott fogalmunk nem volt. Ma óriási, terjedelemben és átfogó belátásukban gazdag tudomány a korpuszkularis elmélet! Egymásután jöttek az ionelmélet, elektronelmélet, relativítás elmélete ; a kvantumelmélet, a spektrumok elmélete, a kvantummechanika mélyreható elvi szempontjaival, az újfajta elemi részek! Sokan és kíváló tudósok is, nem tudták követni a szédítő fejlődést és öreg korukra elkeseredett és terméketlen ellenkezésbe mentek át. Tangl ellenben meglepő fogékonyságot tanúsított az egész fejlődéssel szemben. Erről tanúskodik a relativitásról (17) szóló igen szép és beható ismertetése. Méltatásai Eötvösről (15, 16, 20) és Faradayról (21) valóban aesthetikai élvezetet nyujtanak az olvasónak.

Szellemének ugyanez a fínomsága nyilvánult meg azokban az üdvözlő beszédekben is, melyeket mint a Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának elnöke a tagok székfoglalói alkalmából mondott, és melyek néhány rövid szóban az illető tag tudományos egyéniségének igen találó rajzát adták.

Tangl tárgyalásoknál, a karban, bizottságokban, kongresszusoknál mindig a lényeget jól látó és magas szempontok által vezetett egyénnek mutatkozott. Nem volt harcos természet, de körültekintéssel és tapintattal sokat el tudott érni. Katedrája és intézete, tanítványainak sorsa mindig érdekelte, a M. T. Akadémia betegágyán is állandóan foglalkoztatta és az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat ügyei állandó érdeklődése, szeretete és gondja tárgyai voltak.

Fínom és előkelő egyénisége nagy ürt hagy maga után, amiben csak az vígasztal, hogy működésének és egyéniségének hatásai sem fognak egyhamar elmúlni.

Ortvay Rudolf.

Tangl Károly tudományos dolgozatainak jegyzéke.

Rövidítések :

MTÉ : Mathematikai és Természettudományi Értesítő.
MNWB : Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn.
A. d. Ph. : Annalen der Physik.

1. Néhány egyszerű homogén forgási test potentiálja. MTÉ. XI. köt. 240—261. oldal, 1893.

1a. Darstellung des Potentiales einiger Umdrehungskörper. MNWB. Bd. XI. p. 233—256. 1893. 1. dolgozat fordítása.

2. Nagy kitérésű vízszintes lengések a földnehézség erőterében. MTÉ. XIII. kötet. 3—29. oldal, 1895.

3. Gauss Károly Frigyes : A földi mágneses erő intenzitása abszolút egységekben. Fordítás jegyzetekkel. Mathematikai és Physikai Lapok. VI. évfolyam. 379—431. lap. 1897.

4. A mágnesezés hatása a rugalmassági modulusra. MTÉ. XVIII. kötet. 1900. 49—77. oldal.

4a. Wirkung der Magnetisierung auf den Dehnungsmodul. MNWB. Bd. XVIII. p. 7—34. 1900. 4. német fordítása.

5. Vizsgálatok a mágnesezés mechanikai hatásairól. MTÉ. XVIII. kötet, 181—199. oldal, 1900.

5a. Untersuchungen ueber die mechanischen Wirkungen der Magnetisierung. MNWB. Bd. XVIII. p. 35—51. 5. német fordítása.

5b. Wirkung der Magnetisierung auf den Dehnungsmodul. A. d. Ph. IV. Folge. Bd. 6. 1901. p. 34—64. 4. és 5. kivonata.

6. Folyadékok dielektromos állandójának változása a hőmérséklettel. MTÉ. XX. kötet. 1902. 293—320. oldal.

6a. Über die Änderung der Dielektrizitätskonstante einiger Flüssigkeiten mit der Temperatur. A. d. Ph. IV. Folge. Bd. 10. 1903. p. 748—767. 6. kivonata.

6b. Über die Änderung der Dielektrizitätskonstante einiger Flüssigkeiten mit der Temperatur. MNWB. Bd. XX. p. 292—294. 6. rövid kivonata.

7. Gázok dielektromos állandójáról magas nyomásoknál. MTÉ. XXV. kötet. 173—190. oldal. 1907.

7a. Über die Dielektrizitätskonstante der Luft bei hohem Druck. A. d. Ph. IV. Folge. Bd. 23. 1907. p. 559—574. 7. német fordítása.

8. A gázok dielektromos állandójáról magasabb nyomásoknál. (II. közlemény.) MTÉ. XXVI. kötet. 1908. 138—160. oldal.

8a. Über die Dielektrizitätskonstante einiger Gase bei hohem Druck. A. d. Ph. IV. Folge. Bd. 26. 1908. p. 59—78. 8. német fordítása.

9. A szilárd és cseppfolyós test közös határán fellépő felületi feszültségről. MTÉ. XXVIII. kötet. 101—142. oldal.

10. Experimentaluntersuchungen über die Oberflächenspannung an der Trennungsfläche fest-flüssig. A. d. Ph. IV. Folge. Bd. 34. 1911. p. 311—342. (9-et csak részben fedi).

11. A platina-víz felületi feszültségéről. MTÉ. XXXI. 1913. p. 755—787.

12. Über die Grenzflächenspannung Platin-Wasser. A. d. Ph. IV. Folge. Bd. 42. 1913. p. 1221—1240.

13. Baron Roland v. Eötvös zum 70. Geburtstag. Seine Untersuchungen über die Gravitation. Die Naturwissenschaften. VI. Jahrgang. 1918. p. 445—447.

14. Új módszer a szilárd anyag határán fellépő felületi feszültség vizsgálatára. MTÉ. XXXVII. kötet 1920. 43—61. oldal.

14a. Neue Methode zur Untersuchung der Grenzflächenspannung fest-flüssig. MNWB. XXXII. kötet 1922. p. 57—62. 14. németnyelvű kivonata.

15. Br. Eötvös Loránd vizsgálatai a gravitációról. . . . 43—49. o.

16. Báró Eötvös Loránd emlékezete. (Emlékbeszéd a Szent István Akadémiában) A Szent István Akadémia Értesítője. V. évf. 1920. 49—64. oldal.

17. A relativitásról. «Technikus» 1920—21. évfolyam. 89—99. és 174—194. oldal, valamint következő évf. 37—48. oldal.

18. Vizsgálatok a gravitációról folyadékba merülő csavarási ingával. MTÉ. XLIII. 1926. 342—352. oldal.

19. Az elektron. Természettudományi Közlöny. 1927. 1—10. oldal.

20. Báró Eötvös Loránd élete és tudományos működése. I. Vizsgálatok a kapillaritásról. II. Vizsgálatok a gravitációról. A Mathematikai és Physikai Lapok Eötvös Loránd füzete, XXVII. köt. 1918. 115—146. oldal.

20a. Báró Eötvös Loránd tudományos működése. I. Vizsgálatok a kapillaritásról. II. Vizsgálatok a gravitációról. A Magyar Tudományos Akadémia által kiadott Báró Eötvös Loránd Emlékkönyvből, 1930. 97—128. oldal.

21. Faraday mint fizikus. Elektrotechnika. 1931. 173—179. oldal.

22. A fizikai világkép kialakulása. Természettudományi Közlöny. 1931. 1—22. oldal.

23. Fizikai kutatások. Cobden. 1935. 139—140. oldal.

24. A természettudományok haladásának főbb tényezői hazánkban.

A természet-, orvos-, műszaki- és mezőgazdaságtudományi országos kongresszus munkálatai. Budapest. 1926. 22—24. oldal.

25. Üdvözlő beszédek, melyeket mint a Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának elnöke Verebélÿ Tibor, Gróh Gyula, Riesz Frigyes, Rohringer Sándor, Ilyés Géza, Jávorka Sándor, Wellman Oszkár, Hoór-Tempis Móric, Bay Zoltán, Neuber Ede, Gelei József, Marek József székfoglalója alkalmából tartott. Akadémiai Értesítő.

26. Bevezetés a fizikába. 1921. 351 oldal. Pantheon kiadása. Budapest

27. Kísérleti fizika. I. kiadás 1924, II. kiadás 1928. 397 oldal. Studium kiadása.

28. A kozmikus sugárzás természete. Megjelenőben, dr. Forró Magdolna rendezte sajtó alá. «Mai világ képe» c. sorozatban, «Technikai világkép» c. kötetben.

KARL TANGL
1869—1940.

Am 10-ten Januar 1940 verschied der Professor des Experimentalphysik an der Universität Budapest Karl Tangl nach längerem Leiden. Mit ihm hat die Ungarische Physik einen seiner vornehmsten Vertreter, gleich erfolgreich als Forscher, wie als akademischer Lehrer, verloren. Karl Tangl studierte in Budapest, war Schüler des durch seine Forschungen über das Schwerefeld der Erde und über Kapillarität berühmten Baron Roland Eötvös. Seine Forschungen beziehen sich auf Potentialtheorie, Magnetostriktion, Kapillarität, Horizontalpendel. Besonders eingehend hatte er sich mit Änderung der Dielektrizitätskonstante von Flüssigkeiten und Gasen mit der Temperatur und mit dem Drucke beschäftigt. Seit zehn Jahren richtete er eine Beobachtungsstelle für kosmische Strahlung in seinem Institut ein, wo das Ehepaar Barnóthy—Forró eine erfolgreiche Tätigkeit entfalten.

Karl Tangl war Professor an der Universität Kolozsvár (Klausenburg), nachher an der technischen Hochschule in Budapest und seit 1921 Nachfolger von Baron Eötvös an der Universität Budapest. Er war Vorsitzender der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Sektion der Akademie der Wissenschaften und Vicepresident der Mathematisch-Physikalischen Gesellschaft.

Er war als akademischer Lehrer auch sehr beliebt und erfolgreich, viele von seinen Schülern bekleiden Lehrstühle an den Universitäten in Ungarn.

R. Ortvay.

JELENTÉS
AZ 1940. ÉVI KŐNIG GYULA-JUTALOMRÓL.

A Matematikai és Fizikai Társulat Választmánya a 10-ik Kőnig Gyula-jutalom odaítélése ügyében a következő Bizottságot küldötte ki: elnök: Riesz Frigyes, tagok: Szőkefalvi Nagy Gyula, Kalmár László és Lipka István. A Bizottság alapos megfontolás után egyhangúlag úgy határozott, hogy az 1940. évi Kőnig Gyula-jutalommal való kitüntetésre dr. Rédei László-t, a debreceni Tisza István-Tudományegyetemen a számelmélet magántanárát ajánlja a Választmánynak. Alulírottnak jutott (mégpedig most már másodízben) az a szép, de nem könnyű feladat, hogy a Kőnig Gyula-jutalomra ajánlottnak tudományos munkásságáról jelentést készítsen. Alulírott e ránézve megtisztelő megbízást készséggel vállalta, mert a kitüntetésre javasolt Rédei László a budapesti tudományegyetemen az 1920-as évek elején évfolyamtársa volt, és így őt és kitűnő képességeit már régóta ismeri és becsüli. Rédei a számelmélet kiváló ismerője és buzgó művelője. Nagyterjedelmű sorozatos vizsgálataiban a szám- és ideálelmélet fontos problémáival igazi rátermettséggel és alapos elmélyüléssel foglalkozik. Főként olyan kérdések érdeklik, amelyek a másodfokú számtestekkel valamilyen módon kapcsolatosak. Így a 2-odfokú számtest osztálycsoportjának szerkezete, diophantikus egyenletek megoldása, s azok megoldhatóságán alapuló kérdések és a négyzetes maradékok eloszlása. Különösen figyelemreméltók azok a sorozatos vizsgálatai, amelyek a 2-odfokú számtest osztálycsoportjának a szerkezetével foglalkoznak, mivel ezekre vonatkozó főeredményeinek másirányú vizsgálataiban is jelentős alkalmazása van.

RÉDEI LÁSZLÓ matematikai tehetsége korán megnyilvánult. Már egyetemi hallgató korában megjelent egy dolgozata. Ezt a dolgozatát a Szent István-Akadémián mutatta be GROSSCHMID LAJOS. RÉDEI a budapesti tudományegyetemen GROSSCHMID LAJOSnak tanítványa volt, s tőle számelméleti tanulmányaiban több értékes ösztönzést és útmutatást nyert. Ebben a dolgozatában RÉDEI az $x^{\varphi(p^\alpha)}-1\equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ kongruenciaegyenlet primitív gyökének a létezésére ad egy új bizonyítást. Doktori dolgozatát nyomtatásban nem közölte, de annak eredményei néhány később megjelent dolgozatában az eredetinél általánosabb formában megtalálhatók. Így például a második dolgozatában, amelyben a négyzetes reciprocitási tételre ad egy elvileg új bizonyítást. RÉDEI munkásságának zömét azok a vizsgálatai alkotják, amelyek a 2-odfokú számtestnek szűkebb értelemben vett ideálosztálycsoportjára vonatkoznak. Azonban mielőtt ezekre a vizsgálataira rátérnék, talán nem lesz fölösleges az idetartozó alapfogalmaknak rövid ismertetése. A legelső alapfogalom az algebrai számok fogalma. Egy α szám algebrai szám, ha gyöke egy egész együtthatós algebrai egyenletnek. Ha ebben az egyenletben a legmagasabb fokú tag együtthatója: 1, akkor α algebrai egész szám, vagy röviden: egészszám. Az elemi számelmélet alaptétele szerint minden racionális egészszám egyértelműen felbontható törzsszámok szorzatára. Az algebrai egészszámokra ez a tétel nem vihető át, mert vannak algebrai egészszámok, amelyek többféleképpen felbonthatók olyan algebrai egészszámok szorzatára, amelyek már tovább nem bonthatók fel. Éppen ennek a ténynek köszönheti keletkezését az ideálelmélet. A K számtest (algebrai) egészszámainak egy S rendszerét a K test *ideál*jának nevezzük akkor, ha az S bármely két α és β számának $(\lambda\alpha+\mu\beta)$ alakú kombinációja is az S-be tartozik, ahol λ és μ két tetszőleges egészszáma a K testnek. Két: $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ ideál szorzatán azt az ideált értjük, amely az összes $\sum\limits_{(i)}\lambda_i\alpha_i\beta_i$ alakú számokból áll, ahol α_i az $\mathfrak{a}$ ideál számait, β_i a $\mathfrak{b}$ ideál számait és λ_i a K test egészszámait jelenti. Az ideálokra most már szószerint átvihető a számelmélet alaptétele, és e szerint minden ideál egy és csak egyféleképpen bontható fel törzsideálok szorzatára. Ha az előbb definiált S rendszer (ideál) nem egész számokat is tartalmaz, azonban létezik a K testben olyan fix egészszám, amellyel az S-nek bármely számát megszorozva egészszámot nyerünk, akkor az S rendszert *törtideál*nak nevezzük. A K test egy α számának összes egészszámú többszöröseit (a K-ból vett faktorokkal) *főideál*nak nevezzük; jele (α). Az (α) főideál egész vagy tört, a szerint, amint α egész- vagy nem egészszám. Egy algebrai számtest összes (egész- és tört-) ideáljait osztályokba sorozhatjuk a következő eljárással. A számtest $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ ideálját ugyanabba az osztályba sorozzuk, ha létezik a testben egy (α) (egész vagy tört) főideál, amelyre $\mathfrak{a}=(\alpha)\mathfrak{b}$. A *szűkebb értelemben vett* osztályokat akkor alkotjuk, ha ebben az osztálydefinícióban még azt is megköveteljük, hogy az α szám normája pozitív legyen. (Ha $f(x)=0$ olyan legalacsonyabb fokú racionális együtthatós egyenlet, amelyet α kielégít, akkor az α normája az $f(x)=0$ egyenlet gyökeinek a szorzata, vagy e szorzat egy határozott pozitív egész kitevőjű hatványa.) Az ideálelmélet egyik alaptétele szerint az így definiált osztályok száma véges (osztályszám). Az osztályok összessége egy csoportnak tekinthető, ha két A és B osztály kompozíciójának azt az osztályt vesszük, amelybe az A és B-ből vett egy-egy ideál szorzata tartozik. Mivel az így értelmezett *osztálycsoport* véges rendű Abel-féle (kommutativ) csoport, azért van legalább egy bázisa, és e bázis bármelyik elemének rendje törzsszámhatvány (az a csoportelem rendje az a legkisebb n kitevő, amelyre a^n a csoport egységeleme). A báziselemek rendjét az Abel-féle csoport *invariánsai*nak nevezzük, mivel ezeknek értéke független a bázis speciális választásától. A 2-odfokú számtest (szűkebb értelemben vett) osztálycsoportjára vonatkozik Gauss-nak következő tétele: A 2-odfokú számtest[1] (szűkebb értelemben vett) osztálycsoportjának eggyel kevesebb páros invariánsa van, mint amennyi a számtest diszkriminánsában fel-

[1] A 2-odfokú számtest úgy keletkezik, hogy a racionális számok R testéhez egy négyzetmentes racionális s egészszám négyzetgyökét adjungáljuk. Az így kapott testet $R(\sqrt{s})$-sel jelölik.

lépő törzstényezőknek a száma. Természetesen GAUSS ezt a tételt a négyzetes alakok aritmetikájának nyelvén megfogalmazva formaosztályokra mondotta ki. GAUSS-nak ez a tétele megtalálható például HECKE: Theorie der algebraischen Zahlen című kitűnő könyvében. HECKE közvetlenül e tétel kimondása előtt a következőket bocsájtja előre: «Die Hauptaufgabe wäre nun, die Struktur dieser Klassengruppe zu untersuchen. Davon ist aber gegenwärtig nur der sehr kleine Teil erledigt, der sich in folgendem Satz ausspricht:...»

RÉDEI-é az érdem, hogy ezt a fontos feladatot megoldotta, s GAUSS-nak tételét jelentős lépéssel kibővítette. RÉDEI-nek idevágó főeredménye arra a kérdésre ad pontos feleletet, hogy mennyi az osztálycsoport 4-gyel osztható invariánsainak a száma. RÉDEI ezzel a kérdéssel több dolgozatában foglalkozott, s eleinte csak egy 4-gyel osztható invariáns létezésének kritériumát sikerült megadnia. Azonban ezeknek a megelőző vizsgálatoknak a kezdeményezésére jöhetett csak létre az a nevezetes tétele, amely világosságot derített az osztálycsoport pontosabb szerkezetére. Hogy ezt a tételt kimondhassuk, szükséges előbb a RÉDEI által bevezetett *diszkrimináns felbontás*, vagy röviden «D-felbontás» fogalmát megismernünk. Legyen D a 2-odfokú számtest diszkriminánsa. Ha a $D=D_1.D_2$ felbontásban a D_1 és D_2 racionális egészszámok ismét diszkriminánsai 2-odfokú számtesteknek, vagy a két tényező közül az egyik 1-gyel egyenlő, akkor a $D_1.D_2$ egy D-felbontás ($D_1.D_2$ és $D_2.D_1$ nem különböző D-felbontás; $1.D$ lényegtelen D-felbontás). A D racionális egészszám csak akkor lehet egy 2-odfokú számtest diszkriminánsa, ha nem tartalmaz tényezőként páratlan négyzetszámot és ha eleget tesz a következő három kongruencia egyikének: $D\equiv 1$ (mod 4), $D\equiv 12$ (mod 16), $D\equiv 8$ (mod 16). A D-felbontásokat alkalmasan komponálva Abel-féle csoportot nyerünk. Ez a komponálás a következő: Legyen $D_1.D_2$ és $D'_1.D'_2$ két tetszésszerinti D-felbontás (feltehető, hogy D'_1 páratlan). A $D_1.D'_1$ és $D_2.D'_1$ szorzatból töröljük a páratlan négyzetes tényezőket, ilymódon visszamarad megint egy D-felbontás, amit a $D_1.D_2$ és $D'_1.D'_2$-felbontások kompozíciójának tekintünk. Ez az összetevés egyértelmű és felcserélhető művelet, s e szerint a D-felbontások Abel-féle csoportot alkotnak, amelyben az invariánsok mind 2-vel egyenlők. Egy $D_1 . D_2$ D-felbontást RÉDEI másodfajúnak nevez, ha a D_1 minden racionális p törzstényezőjére $\left(\frac{D_2}{p}\right) = 1$ és minden olyan p-re, amelyre $p \mid D_2$, viszont a $\left(\frac{D_1}{p}\right) = 1$ reláció áll fenn, ahol $\left(\frac{d}{p}\right)$ a KRONECKER-féle szimbólum (tehát $\left(\frac{d}{p}\right) = 0$, ha $p \mid d$, $\left(\frac{d}{2}\right) = 1$, ha $d \equiv 1 \pmod 8$, $\left(\frac{d}{2}\right) = -1$, ha $d \equiv 5 \pmod 8$, és $\left(\frac{d}{p}\right)$ a LEGENDRE-féle szimbólum, ha $p > 2$, $p \nmid d$). A 2-odfajú D-felbontások egy alcsoportját képezik a D-felbontások csoportjának. Ezek után kimondhatjuk RÉDEI-nek említett tételét, amely a következőkép hangzik:

A tetszésszerinti másodfokú számtest (szűkebb értelemben vett) osztálycsoportjának annyi 4-gyel osztható invariánsa van, mint amennyi a diszkrimináns független másodfajú D-felbontásainak a száma.

Ebben a tételben a független 2-odfajú D-felbontások száma a 2-odfajú D-felbontások csoportjában fellépő bázis elemeinek számát jelenti. RÉDEI ezt a tételt először nagy apparátussal bizonyította be. (Megmutatta, hogy a 2-odfokú számtest elágazásnélküli[2] relatív 4-edfokú ciklikus bővítései és a test diszkriminánsának 2-odfajú D-felbontásai között kölcsönösen egyértelmű vonatkozás áll fenn, az $1 . D$ D-felbontást kizárva. Mivel másrészt a 4-edfokú (relatív ciklikus elágazásnélküli) bővítések száma $2^{e_4} - 1$, ahol e_4 az osztálycsoport 4-gyel osztható invariánsainak a száma, azért a független 2-odfajú D-felbontások száma e_4, mert a D-felbontások csoportjában az invariánsok mind 2-vel egyenlők.) Bizonyítását, amely az osztálytestek elméletén alapszik, H. REICHARDT német matematikussal közösen írt cikke lényegesen egyszerűsítette. Utóbb RÉDEI ennek a tételnek egy egyszerű olyan aritmetikai bizonyítását találta, amely a legegy-

[2] A 2-odfokú test bővítése elágazásnélküli, ha a bővített testnek a 2-odfokú testre vonatkozó relatív diszkriminánsa 1.

szerűbb eszközökkel, minden ú. n. műfogás nélkül szolgáltatja a tételt. Rédei-nek ebbe a témakörbe vágó további vizsgálatai az osztálycsoport 8-cal osztható invariánsai számának a meghatározására vonatkoznak. Ezekben a vizsgálatokban a 2-odfajú D-felbontások helyébe harmadfajú D-felbontások lépnek. A 2-odfokú számtest D diszkriminánsának egy $D_1 . D_2$ D-felbontása akkor 3-adfajú, ha a $R(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ testnek van olyan bővítése, amely elágazásnélküli relatív 4-edfokú az adott 2-odfokú testre vonatkozólag, és amelyben D-nek a 2-odfokú testből vett törzsideál osztói mind szétesnek különböző elsőfokú törzsideálok szorzatára. Rédei-t az ő idetartozó további vizsgálatai, valamint Reichardt-nak egy az abszolút ideálosztálycsoport szerkezetére vonatkozó munkája,[3] egy új szimbólum értelmezésére vezették, amellyel a 8-cal osztható invariánsok száma igen egyszerű módon kifejezhető. Ez a szimbólum azután még más kérdések tárgyalásában is jól alkalmazhatónak bizonyult. Legyen a_1, a_2, a_3 az 1-től különböző $4l+1$ alakú, közös osztónélküli négyzetmentes racionális egészszámhármas. Legyen továbbá a_1 négyzetes maradék az $a_2 a_3$ minden olyan törzstényezőjére, mely a_1-nek nem osztója. Ekkor létezik a $k_1 = R(\sqrt{a_1})$ testben olyan $\mathfrak{a}_2$ és $\mathfrak{a}_3$ relatív prim egész ideál, amelyeknek normája a_2, illetve a_3. Ha ezeken kívül létezik a k_1-ben olyan (α_2) főideál, amely az $\mathfrak{a}_2$-től csak egy négyzetes faktorban különbözik és amely mod 4 négyzetes maradék, és ha az $\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{a}_3}\right)$ 2-odfokú hatványmaradékjel értéke független az $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \alpha_2$ elemek megválasztásától, akkor ezt a csupán a_1, a_2, a_3 számhármastól függő $\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{a}_3}\right) = \pm 1$ értéket $\{a_1, a_2, a_3\}$-mal jelöli Rédei. Ennek a szimbólumnak bevezetésével most már könnyen meghatározható a 8-cal osztható invariánsok száma. Ugyanis, ha e_8 jelenti ezt a számot, akkor 2^{e_8} egyenlő a 3-adfajú D-felbontások számával. Az utóbbi szá-

[3] H. Reichardt, Zur Struktur der absoluten Idealklassengruppe im quadratischen Zahlkörper, Journal f. d. reine u. angew. Mathematik 170 (1933), 75—82. old.

mosságra vonatkozik RÉDEI-nek a következő tétele. Egy tetszésszerinti $D_1.D_2$ 2-odfajú D-felbontás akkor és csak akkor 3-adfajú, ha D-nek minden olyan négyzetmentes m osztójára, amelyre a $\{D_1, D_2, m\}$ létezik, ennek a jelnek értéke 1-gyel egyenlő. Az e_8 értékét, továbbá azokat az m számokat, amelyekre létezik a $\{D_1, D_2, m\}$ szimbólum, RÉDEI a KRONECKER- és RÉDEI-féle szimbólumokból alkotott matrixok segítségével igen egyszerűen határozza meg.

Az osztálycsoport szerkezetével kapcsolatban RÉDEI még részletesen foglalkozott azzal a kérdéssel is, hogy mely diszkriminánsok felelnek meg egy tetszés szerint megadott e_4-nek (e_4 a 4-gyel osztható invariánsok száma), továbbá, hogy milyen gyakran várható egy tetszés szerint megadott e_4 (vagy e_8) érték, ha a diszkrimináns törzstényezőinek száma fix. Ezeket a vizsgálatokat helyszűke miatt nem részletezhetjük, hanem utalunk a jelentés végén álló jegyzékben a 22., 23., 28. és 31. sz. alatti dolgozatokra. Ezzel a kérdéssel kapcsolatban itt csak még annyit jegyzünk meg, hogy ha $e_2 \geqq e_4 \geqq e_8 \geqq 0$ három tetszés szerint megadott egészszám, akkor, amint RÉDEI kimutatta, végtelen sok olyan 2-odfokú számtest létezik, melyre a 2-vel, 4-gyel és 8-cal osztható invariánsok száma a megadott e_2, e_4, illetve e_8 érték.

Rátérve most RÉDEI-nek a diophantikus egyenletek megoldhatóságával kapcsolatos vizsgálataira, először megemlítjük a PELL-féle egyenletre vonatkozó eredményeit. A PELL-féle egyenlet általános alakja a következő: $t^2 - du^2 = \pm 1$ (ahol d adott racionális egész szám). Abban az esetben, amikor az egyenlet jobboldalán csak a $+1$ áll, az egyenletnek mindig van racionális (t, u) egész megoldása; sőt, ha d pozitív nem négyzetszám, akkor a megoldások száma végtelen nagy. Abban az esetben, amikor a PELL-féle egyenlet $t^2 - du^2 = -1$ alakú, a megoldhatóság kérdése eddig nem tekinthető elintézettnek. Van ugyan egy kritérium, amely azt mondja, hogy a PELL-féle egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha a $\sqrt{d}$ lánctörtkifejtésében a periodus tagjainak a száma páratlan, azonban az itt alkalmazandó lánctört kifejtése oly nagy számolási nehézséggel jár, hogy e miatt a kritérium ténylegesen alig alkalmazható. RÉDEI a $t^2-du^2=-1$ alakú PELL-féle egyenlet megoldhatóságára olyan részben szükséges, részben meg elégséges feltételeket állított fel, amelyek kizárólag számelméleti jelek alkalmazásával döntik el a megoldhatóság kérdését. RÉDEI többek között megmutatta, hogy elég azokra az esetekre szorítkozni, amikor d négyzetmentes, vagy csak egy törzstényezőt tartalmaz a 2-dik hatványon. Jelentse e, illetve f a d ama különböző törzstényezőinek szorzatát, amelyek a d-ben páratlan, illetve páros hatványon lépnek fel. RÉDEI értelmezi a kiegészített d-felbontás fogalmát még pedig a következőképpen: az a, b, c pozitív egészszámokból álló számhármas kiegészített d-felbontás, ha $ab=e$ és $c\,|\,f$; (az 1, e, 1 felbontás «nem valódi»). Egy a, b, c d-felbontás 2-odfajú, ha a, b, illetőleg c bármely p, q, illetőleg r törzstényezőjére $\left(\frac{ac}{q}\right)=\left(\frac{bc}{p}\right)=\left(\frac{ab}{r}\right)=1$. RÉDEI ezután bebizonyítja a következő tételeket: Ha $\left(\frac{e}{p}\right)=-1$ az f minden p törzstényezőjére és ha minden valódi 2-odfajú a, b $(=a, b, 1)$ d-felbontásra $\left(\frac{a}{b}\right)_4=\left(\frac{b}{a}\right)_4=-1$, ahol $(\cdots)_4$ a 4-ik hatványmaradékjel, akkor a PELL-féle egyenlet megoldható. Ha van olyan a, b, c kiegészített 2-odfajú d-felbontás, amelyre az $\left(\frac{ac}{b}\right)_4\left(\frac{bc}{a}\right)_4\left(\frac{ab}{c}\right)_4=-\left(\frac{2a}{c}\right)$ egyenlőség teljesül, akkor a PELL-féle egyenlet megoldhatatlan. Ha nincs valódi 2-odfajú d felbontás, akkor a PELL-féle egyenlet megoldható. Ez utóbbi tétel (RÉDEI-nek az előzőekben ismertetett alapvető tétele szerint) azt jelenti, hogy az $R(\sqrt{d})$ testben a (szűkebb értelemben vett) osztálycsoportnak nincsen 4-gyel osztható invariánsa. Megemlítem még, hogy P. EPSTEIN-nek ugyanebbe a témakörbe vágó tételeit[4] RÉDEI jelentékenyen egyszerűbben és élesebb fogalmazásban bizonyította be.

A PELL-féle egyenlet megoldhatóságával kapcsolatos az a kérdés is, hogy a D diszkriminánsú $R(\sqrt{D})$ 2-odfokú számtest-

[4] P. EPSTEIN, Zur Auflösbarkeit der Gleichung $x^2-Dy^2=-1$, Journal f. d. reine u. angew. Mathematik 171 (1934), 243—252. old.

ben létezik-e olyan egység,[5] amelynek normája -1. Ez a kérdés azért érdekes, mert ha a 2-odfokú testben létezik -1 normával bíró egység, akkor az osztályszám értéke megegyezik a szűkebb értelemben vett osztályszám értékével. A szóbanforgó kérdés egyértelmű azzal, hogy a $t^2-du^2=-1$ alakú PELL-féle egyenlet megoldható-e akkor, ha páratlan D esetében $d=D$ és páros D-re $d=\frac{D}{4}\cdot$ RÉDEI a 4-gyel osztható invariánsok számának meghatározásával kapcsolatos régebbi vizsgálataiban bebizonyította a következő tételt: A 2-odfokú számtestben mindig van -1 normájú egység, ha a szűkebb értelemben vett osztályszám és a D-felbontások számának hányadosa páratlan szám. (DIRICHLET—TANO tételének kiegészítése.) Az előzőekben ismertetett $\{a_1, a_2, a_3\}$ szimbólum bevezetésével RÉDEI olyan tételt talált a -1 normával bíró egység létezésére, amely a PELL-féle egyenlet megoldhatóságára vonatkozó (az előzőekben ismertetett) kongruencia feltételeit magában foglalja abban az esetben, amikor a d nem tartalmaz többszörös törzstényezőket. Ismeretes az, hogy d-nek egy és csak egy olyan $m(>1)$ osztója van, melyre az $mx^2-\frac{dy^2}{m}=1$ egyenlet egészszámokkal megoldható. E szerint nyilvánvaló, hogy a fenti $t^2-du^2=-1$ egyenlet akkor és csakis akkor oldható meg, ha $m=d$. Most már RÉDEI bebizonyította, hogy minden $D_1.D_2$ 2-odfajú D-felbontásra $\{D_1, D_2, m\}=1$, amiből következik, hogy a szóbanforgó PELL-féle egyenlet nem oldható meg akkor, ha $\{D_1, D_2, d\}\neq 1$. Megoldható ellenben akkor, ha az előbbi szimbólum 1-gyel egyenlő, de a d-nek minden μ valódi osztójára $\{D_1. D_2, \mu\}\neq 1$.

Említésre méltó még, hogy ugyancsak a háromelemű $\{\cdots\}$ szimbólum alkalmazhatóságát bizonyítja az $mx^2+ny^2=z^4$ diophantikus egyenlet megoldhatóságára vonatkozó kritérium is. Ez tulajdonképpen egy $ax^2+by^2+cz^2=0$ alakú egyenlet megoldhatóságát vizsgálja akkor, ha $abc\mid mn$.

---

[5] Egység minden olyan algebrai egészszám, amelynek reciproka is algebrai egész.

Rédei Grosschmid Lajos vizsgálatainak indítására már doktori értekezésében kezdett foglalkozni a négyzetes maradékok eloszlásának kérdésével, összetett modulus esetében. Legyen n négyzetmentes páratlan egészszám. Rédei meghatározta n-nek mindazokat az értékeit, amelyekre a $(0, n/2)$ és $(n/2, n)$ számközbe egyenlőszámú, n-hez prim, modulo n négyzetes maradék esik. Erre vonatkozó eredményét egy igen terjedelmes tételbe foglalta, amelynek különleges, de jellemző esete a következő: Ha $n = q_1 q_2 \cdots q_\nu p_1 p_2 \cdots p_{\nu/2}$ (ν páros szám vagy 0), ahol a q-k és p-k pozitiv $4k+3$, illetve $4k+1$ alakú törzsszámok, ha továbbá ezek közül a felírt sorrendben akármelyik előbb álló az utóbb állónak négyzetes maradéka, kivéve a q_{2i}, p_i $(i=1, 2, \ldots, \nu/2)$ párokat, és ha végül az ilyen kivételes pároknak elemei egymásnak négyzetes nem-maradékai, akkor a $(0, n/2)$ és $(n/2, n)$ számközökbe egyenlőszámú n-hez prim, mod n négyzetes maradék esik.

A diophantikus egyenletek megoldhatóságával függ össze Rédei-nek Behrbohm társszerzővel közölt dolgozata. Ebben érdekes adalékok találhatók az euklidesi algoritmusnak négyzetes számtestben való elméletéhez. Azzal a kérdéssel, hogy egy 2-odfokú számtestben mikor létezik euklidesi algoritmus, többben foglalkoztak (Dickson,[6] Perron, Oppenheim, Remak, Berg, Hofreiter). Először csak egyes különös esetekben döntötték el az euklidesi algoritmus létezését vagy nem létezését. Egy 2-odfokú számtestben akkor létezik az euklidesi algoritmus, ha a test bármely két α és β egészszámához megadható a testnek egy olyan γ egészszáma, melyre $|N(\alpha-\beta\gamma)| < |N\beta|$, ($N$ a norma jele). Egy ilyen testben az α és β egészszámhoz a szokásos módon meghatározható a két szám legnagyobb közös osztója: tehát e test minden ideálja főideál és így az osztályszám értéke: 1. Ennek figyelembe vételével (Rédei-nek a 4-gyel osztható invariánsok számára adott tétele alapján) már eleve kizárható nagyszámú olyan eset, amely-

---

[6] Dickson megmutatta, hogy $m<0$ esetében, csakis az $m = -1, -2, -3, -7, -11$ számoknak megfelelő $R(\sqrt{m})$ testekben létezik euklidesi algoritmus.

ben az euklidesi algoritmus, röviden ea. nem létezik. E szerint ugyanis, ha p és q pozitív törzsszám, akkor csak a következő 2-odfokú $R(\sqrt{m})$ számtestekben létezhetik ea.: I. $m = p \equiv 1$ (mod 4). II. $m = pq \equiv 1$ (mod 4), $p = q \equiv 3$ (mod 4). III. $m = 2$ vagy $m = 2p$, $p \equiv 3$ (mod 4). IV. $m = p \equiv 3$ (mod 4). Mivel $m \not\equiv 1$ (mod 4) esetében BERG meghatározta[7] azt a végesszámú testet ($m = 2$, 3, 6, 7, 11, 19), amelyben létezik az ea., RÉDEI és BEHRBOHM egyszerűsítve BERG meggondolásait, az $m \equiv 1$ (mod 4) esettel foglalkoztak és bebizonyították többek között a következő tételeket: Legyen $m = pq \equiv 1$ (mod 4), $p \equiv q \equiv 3$ (mod 4), $p < q$. Ha az $R(\sqrt{m})$ testben létezik ea., akkor $p > 2500$ esetében $q < 2p$. Ha $m \equiv 5$ (mod 24), akkor csak $m = 5$, vagy $m = 29$ esetében létezik ea. Az $m \equiv 5$ (mod 8) maradékosztályban nincs olyan összetett szám, amelyre létezik ea., kivéve az $m = 21$ esetet (BEHRBOHM—RÉDEI—HOFREITER tétele). Befejezésül érdemes megemlíteni, hogy ezekhez a vizsgálatokhoz csatlakozva, ERDŐS, Ko, és HEILBRONN kimutatták,[8] hogy csak véges számú olyan 2-odfokú számtest van, amelyben létezik az euklidesi algoritmus.

Ismertetésem, ha kissé hosszúra nyúlt is, nem terjedhetett ki minden egyes részletre, sőt RÉDEI-nek nagyszámú dolgozata közül néhánynak tárgyát meg sem említhettem. Úgy vélem azonban, hogy RÉDEI gazdag munkásságának legnevezetesebb eredményeit mind felsoroltam és elég részletesen ismertettem. Ezek alapján a kitüntetett munkássága felett tartott szemlénk a következőkben összegezhető. RÉDEI a számelmélet és ideálelmélet kitűnő tehetségű és nagyszorgalmú művelője. Kutatásainak tárgyát nehéz és megoldatlan problémák alkotják és azoknak nyitját fáradhatatlan szorgalommal keresi. Termékeny munkásságának eredményei az irodalomban is visszhangra találtak, s vizsgálataiból több külföldi szerző nyert ösztönzést. Mindezek alapján úgy

---

[7] E. BERG, Über die Existenz eines Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern, Kungl. Fysiografiska sällskapets i Lund 5 (1935).

[8] P. ERDŐS and C. KO, Note on the Euclidean algorithm. Journ. London Math. Soc. 13 (1938). — H. HEILBRONN, On Euclid's algorithm in real quadratic fields, Proc. Cambridge Phil. Soc. 34 (1938).

gondoljuk, hogy Rédei László, mint a számelméletnek kétségtelenül egyik legkiválóbb hazai művelője érdemes arra, hogy a Matematikai és Fizikai Társulat a Kőnig Gyula-jutalommal kitüntesse.[9]

Lipka István.

Rédei László munkáinak jegyzéke.

1. Az $x^{\varphi(p^\alpha)}-1\equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ congruentia primitív gyökének existentiatétele, Szent István Akadémia Értesítője, (1921), 199—202. o.

2. Ein neuer Beweis des quadratischen Reciprocitätssatzes, Acta Sc. Math. Szeged, **2** (1925), 134—138. o.

3. A másodfokú képzetes számtest osztályszámáról, Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **44** (1927), 230—246. o.

4. Über die Klassenzahl des imaginären quadratischen Zahlkörpers, Journal f. d. reine u. angew. Math., **159** (1928), 210—219. o.

5. A másodfokú valós számtest osztályszámáról s alapegységéről, Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **48** (1931), 648—682. o.

6. A másodfokú számtest osztályszámáról, Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **48** (1931), 683—707. o.

7. A másodfokú számtest osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsai, Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **49** (1932), 338—363. o.

8. Die durch vier teilbaren Invarianten der Klassengruppe des quadratischen Zahlkörpers, H. Reichardt-tal közösen írt dolgozat, Journal f. d. reine u. angew. Math., **170** (1933), 69—74. o.

9. A másodfokú számtest osztálycsoportjának 8-cal osztható invariánsai, Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **50** (1933), 195—218. o.

10. A másodfokú számtest egyik tételének új bizonyítása, Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **50** (1933), 219—230. o.

11. Megjegyzés H. Rademacher úr megelőző dolgozatához, Mat. és Fiz. Lapok, **40** (1933), 35—39. o.

12. Megjegyzés K. Borsuk egyik geometriai tételéhez, Mat. és Fiz. Lapok, **41** (1934), 36—40. o.

13. Felső korlát a másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsai számára, Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **51** (1934), 219—226. o.

---

[9] A Társulat Választmánya a Bizottság javaslatát 1940. február 8-án tartott ülésén egyhangúan elfogadta és a jutalmat Rédei László-nak ítélte oda. *Szerk.*

14. A másodfokú számtest alapegységéről és az abszolút osztálycsoport 8-cal osztható invariánsairól, Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **51** (1934), 227—259. o.

15. Arithmetischer Beweis des Satzes über die Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, Journal f. d. reine u. angew. Math., **171** (1934), 55—60. o.

16. Über die Grundeinheit und die durch 8 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, Journal f. d. reine u. angew. Math., **171** (1934), 131—148. o.

17. Eine obere Schranke der Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, Journal f. d. reine u. angew. Math., **171** (1934), 61—64. o.

18. Ein kombinatorischer Satz, Acta Sc. Math. Szeged, **7** (1934), 39—43. o.

19. Aufgabe **175**, Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver., **44** (1934), 69. o.

20. A $t^2 - du^2 = -1$ PELL-féle egyenletről, Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **54** (1935), 1—44. o.

21. Über die PELL-sche Gleichung $t^2 - du^2 = -1$, Journal f. d. reine u. angew. Math., **173** (1935), 193—221. o.

22. Néhány középértékkérdésről másodfokú számtestekben, Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **54** (1935), 45—116. o.

23. Über einige Mittelwertfragen im quadratischen Zahlkörper, Journal f. d. reine u. angew. Math., **174** (1935), 15—55. o.

24. Der Euklidische Algorithmus in quadratischen Körpern, H. BEHRBOHM-mal közösen írt dolgozat, Journal f. d. reine u. angew. Math., **174** (1936), 192—205. o.

25. Lösung der Aufgabe **175**. Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver., **46** (1936), 49—50. o.

26. Néhány újabb kongruenciafeltétel a másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjának nyolccal osztható invariánsaira, Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **54** (1936), 736—768. o.

27. A négyzetes maradékok eloszlásáról összetett modulus esetében, Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **56** (1937), 54—88. o.

28. A másodfajú D-felbontásokról, Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **56** (1937), 89—125. o.

29. Egy új számelméleti jel, alkalmazással a másodfokú számtestek elméletére. I. Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **56** (1937), 807—847. o.

30. Másodfokú számtestek abszolút osztálycsoportjának 2-, 4- és 8-cal osztható invariánsai, Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **56** (1937), 848—853. o.

31. Másodfokú számtestek abszolút osztálycsoportja 4-gyel osztható invariánsainak számosságára vonatkozó néhány középértékkérdés, Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **57** (1938), 88—103. o.

32. Egy új számelméleti jel, alkalmazással a másodfokú számtestek elméletére. II., Mat. és Term.-Tud. Értesítő, **57** (1938), 488—500. o.

33. Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper I., Journal f. d. reine u. angew. Math., **180** (1938), 1—43. o.

34. Die Diophantische Gleichung $mx^2+ny^2=z^4$, Monatshefte f. Math. u. Phys., **48** (1939), 43—60. o.

35. Algebrai számtestek ideálosztálycsoportjainak páros részéről, Math. és Term.-Tud. Értesítő (sajtó alatt).

BERICHT ZUR VERTEILUNG DES JULIUS KŐNIG-PREISES VOM JAHRE 1940.

Die Budapester Loránd Eötvös Mathematische und Physikalische Gesellschaft hat ihren Julius Kőnig-Preis für 1940 Herrn Dr. Ladislaus Rédei zuerkannt. Kommission: F. Riesz Präsident; Mitglieder: Gy. (J.) von Szőkefalvi Nagy, L. Kalmár; Referent: St. Lipka. Hier gibt der Referent eine Analyse und Würdigung der Rédei-schen mathematischen Arbeiten, die sich grösstenteils auf Zahlentheorie und Idealtheorie beziehen und deren Liste sich am Ende des Referates befindet.

St. Lipka.

A KÚPSZELETEK SÍMULÓKÖREI.

A kúpszeletek símulókörei középpontjának szerkesztésére többféle eljárást ismerünk; ezek különböző elvekre vannak alapítva. E sorok célja az összefüggést e különböző szerkesztések között kimutatni vagy más szóval: *egy* ilyen szerkesztésből a többit leszármaztatni.

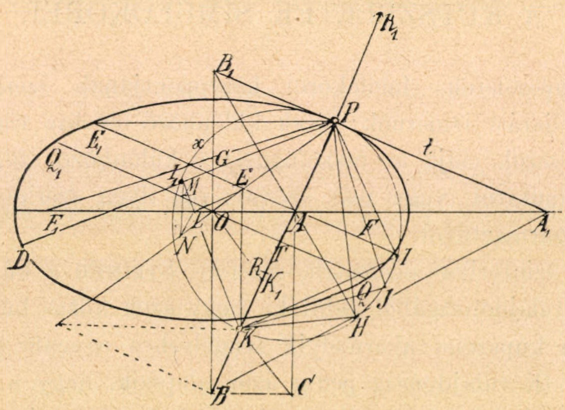
1. A színtetikai geometria mestere, Steiner a kúpszelet és kör ama tulajdonságából indul ki, hogy azok közös húrpárjának egyedei a kúpszelet akármelyik tengelyéhez egyenlő szög alatt hajlanak. (E tulajdonság pedig azon alapszik, hogy a kúpszelet tengelyeinek végtelen távoli pontjai a körre nézve is konjugált pólusok, tehát azok lesznek minden kúpszeletre, amely a kúpszelettel és a körrel ugyanegy sorban van, és így a sorban levő húrpárokra is; ezért a húrpárok szögfelezői parallelek a kúpszelet tengelyeivel). Tehát: a k kúpszelet P pontjának símulóköre (1. ábra) a kúpszeletet még egy oly D pontban metszi, hogy a PD húr a kúpszelet főtengelyéhez ugyanolyan szög alatt hajlik, mint a P pont érintője, és így a PD húr M felezőpontjában arra emelt merőleges a kúpszelet P pontjának normálisát a símulókör K középpontjában metszi. Az M pont meghatározásához nincs szükségünk a D pontra, mert a kúpszelet OP átmérőjéhez annak bármelyik tengelyére nézve szimmetrikus irányú OM átmérő és ugyancsak a tengelyre nézve a P érintőjével szimmetrikus irányú PD húr már az M pontban találkozik. Így tehát:

A kúpszelet P pontja símulókörének K középpontját megkapjuk, ha a P ponthoz tartozó átmérőhöz az egyik tengelyre nézve szimmetrikus átmérőt azzal a P ponton átmenő húrral metsszük az M pontban, amely az illető tengelyhez ugyanoly szög alatt hajlik, mint a P pont érintője;

az M pontban erre a húrra állított merőleges a P pont normálisát, a símulókör K középpontjában metszi.

E szerkesztést alapul véve következtethetünk a símulókör középpontjának többi ismert szerkesztésére.

2. Messe az előbbi MK egyenes a kúpszelet egyik tengelyét (pl. a főtengelyt) az L pontban, továbbá az L pontban az MK



1. ábra.

egyenesre állított merőleges és az M pontból az előbbi tengelyre bocsátott merőleges messe az OP átmérőt az E, illetőleg az N pontban. Minthogy az $ELNMPK$ hatszögnek E, N, P és L, M, K csúcsai egy-egy egyenesen vannak, azért az Pascal-hatszög, és mert annak két szembenfekvő oldalpárja parallel ($EL \parallel MP$, $LN \parallel PK$), azért annak harmadik oldalpárja is parallel lesz ($NM \parallel EK$), tehát az EK is merőleges a kúpszelet illető tengelyére, amiből látható, hogy ha a P pont normálisa azt a tengelyt az A pontban metszi, akkor minthogy az ELK, EAK háromszögek szimmetrikusak, $EA \perp PK$. Ebből következik a P pont símulókörének az előbbinél egyszerűbb szerkesztése, amely így szól:

Ha a kúpszelet P pontja normálisának metszése annak egyik tengelyével az A, és e pontban a normálisra emelt merőleges a P-hez tartozó kúpszeletátmérőt az E pontban metszi, akkor az E pontból az illető tengelyre bocsátott merőleges és a normális a P pont símulókörének K középpontjában találkozik.

3. Messe a centrális kúpszelet P pontjának érintője és normálisa a két tengelyt megfelelőleg, az A_1, B_1 és A, B pontban, és ez utóbbi két pontban az illető tengelyre emelt merőlegesek közös pontja legyen C, végre az előbbi AE egyenesnek és az OB tengelynek metszését jelöljük G-vel.

Minthogy az ABC, A_1B_1O, AGO háromszögek hasonlók és az elsőnek homolog oldalai az utóbbiaknak homolog oldalaira merőlegesek, és e háromszögek oldalain levő P és E pontjainak homolog pontja az első háromszög illető oldalán a K pont, azért $CK \perp OEP$. Ha továbbá figyelembe vesszük, hogy a kúpszelet O középpontjában az OP átmérőre állított merőleges a normálist oly K_1 pontban metszi, amely az A, B pontoktól ugyanoly távolságra van, mint a K pont a B, A pontoktól: *két új meghatározását nyerjük a símulókör K középpontjának.*

4. Jelöljük az AB_1, A_1B egymásra merőleges egyenesek metszését H-val. Minthogy az APO, HPB háromszögek hasonlók és az E, K pontok a homolog PO, PB oldalokon homológok, azért $HK \perp HP$, amikép $AE \perp AP$. Ezért:

A centrális kúpszelet tengelyei egy P pontjának érintőjét és normálisát négy pontban metszik, amelyek még egy harmadik derékszög szárain vannak; ha ez utóbbi derékszögnek a csúcsát a P ponttal összekötő egyenesre a csúcsban merőlegest állítunk, akkor az a P pont símulókörének K középpontján megy keresztül.

5. A kúpszelet P pontja símulókörének K középpontját a gyujtópontok felhasználásával is megszerkeszthetjük. Messe a PK normálisra annak a főtengelyen levő A pontjában merőlegesen álló egyenes a P-n átmenő és a főtengellyel parallel egyenest az E_1 pontban, és azt a $\varkappa$ kört, amely a PK vonaldarab, mint átmérő fölé leírható, az I, I_1 pontokban. Minthogy az I, I_1 pontpár harmonikusan választja el az E_1 pontot az OP átmérőn levő előbbről ismert E ponttól, és az A felezőpontja az $I\,I_1$ vonaldarabnak: a PI, PI_1 egyenesek a kúpszelet főtengelyét annak F, F_1 gyujtópontjaiban metszik. Ebből látható, hogy a KI, KI_1 merőlegesek a kúpszelet PF, ill. PF_1 vonósugaraira. Ezért:

Ha a kúpszelet P pontja normálisára a főtengellyel való A metsző-

pontjában merőlegest állítunk és ez a kúpszeletnek bármelyik vonósugarát az I pontban metszi, akkor e vonósugárra az I pontban merőlegesen álló egyenes átmegy a P pont símulókörének K közeppontján.

E tétel, mint látható, a parabolára is alkalmazható.

6. Az eddigi szerkesztéseknél mindig felhasználtuk a kúpszeletnek egyik vagy mindkét tengelyét. Lehet azonban a kúpszelet P pontja símulókörének középpontját a kúpszelet tengelyének ismerete nélkül is megszerkeszteni, ha a P pont normálisán kívül a P ponthoz futó OP átmérőhöz konjugált átmérő és annak egyik végpontja Q, vagy csak a konjugált átmérő (a végpont nélkül) és egy másik konjugált átmérőpár (szintén a végpontok nélkül) van adva.

Vigyük fel a végből a P pont normálisára a P-től mérve az OQ konjugált átmérő hosszát mindkét értelemben; legyen az így adódó két végpont R, R_1 ($RP=PR_1=OQ$). A kúpszelet konjugált átmérői a P pont t érintőjét egy oly pontinvolucióban metszik amely az R pontból egy ortogonális sugárinvolucióval projiciálható, (mert a projiciáló társsugarak között, mint könnyen látható, két derékszögű társsugárpár van) és ezért az R, R_1, O, A_1, B_1 pontok, amely utóbbiakban a t érintő a tengelyeket metszi, egy körön vannak, és így $OQ^2=PR^2=PA_1 . PB_1$, és $PA_1 . PB_1=PA . PB$.

Ha az OQ átmérő metszőpontját a PAB normálissal T-vel jelöljük, akkor figyelembe véve a PAE, PTO és PKE, PBO hasonló háromszögpárokat:

$$\frac{PA}{PT}=\frac{PE}{PO}=\frac{PK}{PB},$$

amiből tekintettel az előbbi vonatkozásra, következik, hogy $PK . PT=PA . PB=OQ^2$.

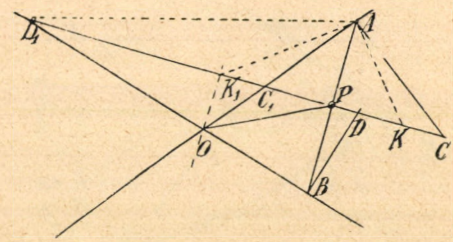
Minthogy PT egyenlő a kúpszelet O középpontának távolságával a P pont érintőjétől, megkapjuk Dupin tételét, amely így szól:

A centrális kúpszelet P pontja símulókörének sugara egyenlő a P-n átmenő átmérőhöz konjugált átmérő felének négyzetével, osztva a kúpszelet középpontjának a P pont érintőjétől mért távolságával.

Ha tehát a P pontból, mint középpontból az OP-hez konjugált átmérő felével leírt körnek metszése e konjugált átmérővel a J pont, akkor a PJ egyenesre a J pontban emelt merőleges egyenes a P pont símulókörének K középpontján megy át.

Dupin tétele szerint az ellipszis fő- és melléktengelyeinek végpontjaiban a simulókör sugara, ha a, b az ellipszis fél fő- és melléktengelye: $b^2 : a$, ill. $a^2 : b$. Ha másrészt a hiperbola csúcsérintőjének és az egyik aszimptótájának metszőpontjában ez utóbbira merőlegest állítunk, úgy ez az illető csúcs símulókörének középpontján megy át.

Ha azonban a P pont a hiperbolának egy általános pontja, amelynek érintője az aszimptótákat az A, B pontokban metszi (2. ábra), akkor e pontokban az illető aszimptótára merőlegesen álló két egyenes a P pont normálisáról oly CD vonaldarabot metsz ki, amelynek felezőpontja K: a P pont símulókörének középpontja lesz. Ugyanis a P pont normálisa az OA, OB aszimptótákat oly C_1, D_1 pontokban metszi, amelyek harmonikusan választják el az OP-hez konjugált, tehát az APB érintővel parallel átmérőnek a normálissal való K_1 metszőpontját P-től. Minthogy $AC \perp AC_1$ $BD \perp BD_1$ és a normálisra vonatkozó szimmetria miatt AD is merőleges AD_1-re; végre, mert az AP merőleges a normálisra, azért az AK_1 egyenesre az A pontban merőleges egyenes felezi a K pontban a CD vonaldarabot. E szerint: $KP \,.\, PK_1 = PA^2$, tehát Dupin tétele alapján *a K középpontja a P pont símulókörének.*



2. ábra.

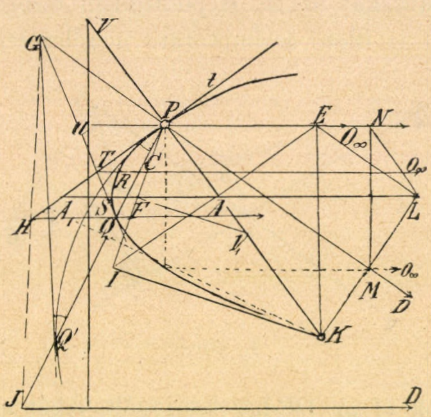
7. A parabola egy P pontja símulókörének K középpontját az előbbiek szerint többféleképp szerkeszthetjük.

Így ha a P pont normálisának és a tengelynek közös A pontjában (3. ábra) a normálisra merőlegest állítunk és az a P ponthoz tartozó PF vonósugarat az I pontban metszi, akkor az I pontban a PFI vonósugárra merőleges egyenes a P pont símulókörének K középpontján megy át. A PK símulókörsugár azonban kétszer akkora, mint a normálisnak a parabola és vezérvonala között levő része: PV. Mert ha a P pontból a vezérlővonalra bocsájtott merőlegesnek talpa az U, akkor a PUV, PIK háromszögek hasonlósága folytán, minthogy $PI=2PF=2PU$, $PK=2 \, . \, PV$. Ezért:

A parabola bármely P pontjának normálisán a parabola és a vezérvonalától határolt vonaldarab félakkora, mint a P pont símulókörének sugara.

A parabola P pontja símulókörének középpontját megkaphatjuk tengelyének ismerete nélkül is. Ha a P, Q, R a parabolának olyan három pontja (3. ábra), hogy a PQ húr konjugált az R ponton és a húr C felező pontján átmenő átmérőhöz, akkor a P, Q pontok érintői az RCO átmérőnek olyan T pontjában találkoznak, hogy

$$TR=RC.$$



3. ábra.

Most fel kell keresnünk annak a PD parabolahúrnak második végpontját, D-t, amely a TRC átmérőhöz ugyanoly szög alatt hajlik, mint a PT érintő, s amely a $PPQQOD$ Pascal-hatszög segélyével meghatározható. Ha a TQ érintő a PD húrt a G pontban, a TP érintő pedig a QO átmérőt a H pontban metszi, akkor GH a Pascal-egyenese ama hatszögnek, és így a DO átmérő a GH, PQ egyeneseknek J metszőpontján megy át. A *PD húrra annak M felezőpontjában merőlegesen álló egyenes a P normálisát P pont símulókörének K középpontjában metszi.*

Egy más szerkesztés a következő meggondoláson alapszik. A parabola és P pontjának símulóköre centrikusan kollineár a P pontra és a PD közös húrra, mint kollineáció-középpontra és tengelyre vonatkozólag. Ezért: a parabola Q pontjának érintője és a símulókör PQ egyenesen levő Q' pontjának érintője, mint homolog egyenesek, egymást a PD kollineáció-tengelynek előbbi G pontjában metszik; és mert a PQ' körhúr végpontjainak érintői a húrhoz egyenlő szög alatt hajlanak; a Q' pont meghatározható, és így a *PQ' húr felezőpontjában, arra merőleges egyenes a P pont normálisát a keresett K pontban metszi.*

Klug Lipót.

DIE SCHMIEGUNGSKREISE DER KEGELSCHNITTE.

Es werden die verschiedenen Konstruktionen des Mittelpunktes der Schmiegungskreise der Kegelschnitte aus einer von STEINER gegebenen Konstruktion abgeleitet.

L. Klug.

SIKRA NEM RAJZOLHATÓ GRÁFOKRÓL.*

Bevezetés.

Legyen adva egy véges halmaz és e halmaz elemeinek valamely kéttagú kapcsolata (binér relációja); legyen továbbá ismeretes, hogy e kéttagú kapcsolat az elemek mely párjai között áll fenn. Az így adott komplexust *gráf*nak nevezzük.[1] Az elnevezés a *gráf* egy legegyszerűbb realizálási módjából ered, hogy t. i. az elemeket mint pontokat tüntetjük föl, s azoknak az elemeknek a pont-képét, melyek között az említett kapcsolat fönnáll, vonallal kötjük össze. A pont-képek helyzetének megválasztása, valamint az idom minden alaki tulajdonsága mellékes, csak az a lényeges, hogy mely pontok vannak egymással összekötve. Ennek megfelelőleg két gráfot azonosnak tekintünk, ha szögpontjaik úgy hozhatók egy-egyértelmű vonatkozásba, hogy az egyik gráfon azok és csak azok a szögpontok vannak éllel összekötve, amelyeknek képe a másik gráfon is össze van kötve egymással.

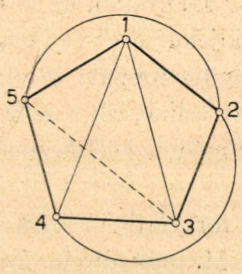
Legegyszerűbb, ha a pontokat egy síkban vesszük föl és az összekötő vonalakat ugyanebben a síkban haladó egyenesdarabokból, vagy JORDAN-ívekből tesszük össze. Az így megrajzolt gráf azonban az adott elemekről és a köztük fennálló kapcsolatokról csak akkor ad megfelelő képet, ha a rajzon az éleknek nincs más

* Előadta a szerző a Társulat 1938. november 17-én tartott ülésén.

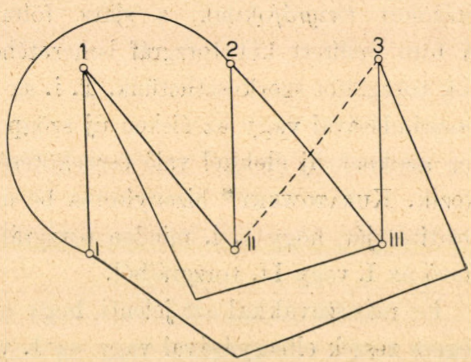
[1] Az alapfogalmat és a gráf-elméletet illetőleg lásd: DÉNES KŐNIG: Die Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936. A gráf definícióját itt szűkebbre szabtuk, mert csak véges gráfokkal akarunk foglalkozni. Az itt tárgyalandó kérdést és annak általánosításait illetőleg lásd még VÁZSONYI ENDRE: Gráfok felületeken. Mat. Fiz. Lapok 44. kötet (1937), 133—164. lap.

közös pontja, mint a gráf szögpontjai, szóval ha az élek egymást nem metszik, hanem csak a szögpontokban találkoznak.

Kérdés mármost, hogy lehetséges-e egy adott gráfot ilyen módon, az élek metszése vagy ahogy röviden mondani fogjuk, *keresztezés nélkül*, a síkban fölrajzolni. Míg magának a gráfnak a fogalma minden geometriai ábrázolástól független, elvont fogalom és a gráf-elmélet is ennek megfelelőleg a kombinatorikába, illetőleg a halmazelméletbe sorolható, addig ez a síkban való realizálhatóság kérdése[2] már geometriai probléma, mely a modern görbeelméletben is fölmerül.



1. ábra.



2. ábra.

A görbe fogalmának MENGER—URYSOHN-féle meghatározása[3] megengedi ugyanis, hogy többszörös elágazási pontokkal bíró vonalrendszert is görbének nevezzünk. Ennek az általános görbeelméletnek fontos problémája az, hogy mely görbék képezhetők le topologikusan[4] a sík egy részére. Egy ilyen általános görbe (egy lényegtelen megszorítástól eltekintve, amely az itt tárgyalandó kérdésben amúgy sem játszik szerepet) topologikusan aequivalens egy gráffal és így a sík-görbék elméletének ez a kérdése lényegében megegyezik a relatív gráf-elmélet itt tárgyalandó problémájával.[5]

[2] «Relativ gráf-elmélet»; lásd: KŐNIG l. c. 196. lap.

[3] Lásd pl. ALEXITS: Az új görbe-elmélet. Mat. Fiz. Lapok 44. kötet (1937), 1—37. lap.

[4] Azaz megfordíthatólag egyértelműen és folytonosan.

[5] Lásd ALEXITS l. c. 30—31. lap.

Mielőtt a kérdés általános tárgyalásába kezdenénk, lássuk, van-e egyáltalában síkra nem rajzolható gráf. Két példa volt erre már régebben ismeretes.[6] Az egyik az ötszögű «teljes» gráf, azaz oly öt szögpontot tartalmazó gráf, melyben mindegyik szögpont minden másikkal össze van kötve egy él által. A másik példa a «három ház és három kút» néven ismeretes feladatnak megfelelő gráf: adva van kétszer három pont (2. ábránkon I, II és III; illetőleg 1, 2 és 3 pont), az első csoport mindhárom pontja össze van kötve a második csoport mindhárom pontjával egy-egy él által.[7] Nevezzük egyszerűség kedvéért az ilyen síkra nem rajzolható gráfokat *torzgráf*oknak, a síkra fölrajzolhatókat *síkgráf*oknak. A fönt említett két torzgráf ismeretében természetesen végtelen sok torzgráfot szerkeszthetünk. T. i. az I. vagy II. gráfból új élek hozzáadásával vagy az éleken új szögpontok kijelölésével és esetleg azoknak új élekkel való összekötésével mindig torzgráf keletkezik. KURATOWSKI[8] bizonyította be ennek az állításnak a megfordítottját, hogy t. i. minden torzgráf ilyen módon keletkeztethető az I. vagy II. torzgráfból.

Ez más szavakkal azt jelenti, hogy minden torzgráfból a «fölösleges» részek elhagyásával vagy az I. vagy a II. gráf áll elő. Itt fölösleges alkatrészen az olyan értendő, amelynek elhagyása nem változtatja meg a gráfnak azt a tulajdonságát, hogy síkra nem rajzolható.

Könnyen látható, hogy sem az I., sem pedig a II. gráf nem tartalmaz fölösleges élt. Akármelyikükből egy él, mégpedig bármelyik él elhagyásával már síkgráf lesz.

Ami mármost a szögpontokat illeti, gondoljuk meg előbb, hogy valamely gráfból egy szögpont általában nem hagyható el az e

---

[6] KŐNIG: Vonalrendszerek kétoldalú felületeken. Mathematikai és Természettudományi Értesítő, 29. kötet (1911), 112—117. lap. Hogy e két gráf valóban nem rajzolható síkra, az majdnem magától értetődő, de később ezt is bizonyítani fogjuk, inkább a továbbiak könnyebb megérthetése végett.

[7] A következőkben: I. és II. gráf, lásd az 1. és 2. ábrát.

[8] Sur le problème des courbes gauches en Topologie. Fundamenta Math., 15. kötet (1930), 271—283. lap.

szögpontból kiinduló élek megbolygatása nélkül. Ha azonban egy szögpontból csak két él indul ki, ezek a közös szögpont kihagyásával egy éllé forraszthatók össze, s ez a változtatás a gráf többi szögpontjainak egymással való összefüggését, valamint a gráfnak azt a tulajdonságát, hogy sík- vagy torzgráf, nem befolyásolja. A síkra rajzolhatóság kérdésénél tehát az ilyen «megszüntethető» szögpontoktól eltekinthetünk.

Az olyan torzgráfot, amelynek nincs megszüntethető szögpontja, s amelyből egy tetszésszerinti él elhagyásával síkgráf lesz — KURATOWSKI *szerint* — *irreducibilis torzgráfnak nevezzük.* Ezzel a fogalommal KURATOWSKI tételét így mondhatjuk ki: *csak két irreducibilis torzgráf van, úgymint az I. és a II. gráf.*

Ennek a tételnek egy egyszerű gondolatmenettel való, szemléletes bebizonyítása a tárgya e dolgozatnak.[9] Mielőtt azonban a bizonyításra térhetnénk, néhány alapfogalmat kell ismertetnünk.

1. §.

A gráf *összefüggő,* ha bármely pontjából bármely más pontjába a gráf élein eljuthatunk. Ha a G' gráfnak csak olyan szögpontjai és élei vannak, amelyek a G gráfnak is szögpontjai, illetőleg élei, akkor G' a G egy *részgráfja* vagy egyszerűen *része.* Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valamely gráf különböző szögpontjait jelölik, az $a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_{n-1}a_n$ élekből álló részgráfot *út*nak (röviden az $a_1a_2 \ldots a_n$ útnak) nevezzük, mely a_1-et a_n-nel *összeköti.* Az $a_1a_2 \ldots a_na_1$ részgráfot, mely tehát az előbbi éleken kívül még az a_na_1 élt is tartalmazza, *kör*nek nevezzük.

Minden körön legalább három szögpont van, mert különben ugyanazt a szögpontpárt két különböző él kötné össze.[10]

---

[9] Más bizonyításokat illetőleg lásd VÁZSONYI l. c. 139. lap idézeteit.

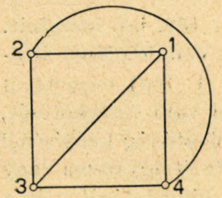
[10] A gráfnak egy, a dolgozat bevezetésében adott definiciójánál általánosabb meghatározása (lásd pl. KŐNIGnél l. c.[1] 1. lap) megengedi ugyanannak a szögpontpárnak több különböző éllel való összekötését, szóval *többszörös* élek előfordulását is. A síkra rajzolhatóság kérdésénél azonban nyilván nincs szerepe annak, hogy valamely él egyszeres vagy többszörös s így e dolgozatban a többszörös élek előfordulását már a gráf definiciójával eleve kizártuk.

A síkra rajzolt kör a JORDAN-tétel szerint a síkot két tartományra — a kör belsejére és külsejére — osztja úgy, hogy a kör belsejének pontjai a külsejének pontjaival nem köthetők össze a kör metszése nélkül semmilyen út által.

Legyen G síkra rajzolt gráf és K a G-nek valamely köre. A G gráfot mindig meg tudjuk úgy is rajzolni, hogy a K külsejében lévő részgráf az új rajzon a kör belsejében legyen és viszont. Ezt pl. úgy láthatjuk be, hogy a G-t olyan módon rajzoljuk föl, hogy K metrikus értelemben is kör legyen s az ábrát e körön tükrözzük. Hasonló értelemben fogunk beszélni egy élen (egy kör valamely ívén) való tükrözésről is, amin azt értjük, hogy az él másik oldalán rajzoljuk meg a képpel topologikusan azonos tükörképet.

A későbbiek kedvéért itt külön megemlítjük a következő, egyébként magától értetődő tényt. Ha a kör valamely a_1, a_2 pontpárja a b_1, b_2 pontpártól «elválasztott», azaz a pontok a kör egy körüljárásánál ilyen sorrendben következnek egymásután: a_1, b_1, a_2, b_2, akkor nem lehet a_1-et és a_2-t valamely a kör belsejében fölvett a ponttal, b_1-t és b_2-t valamely ugyancsak a kör belsejében fölvett b ponttal az aa_i és bb_k élek keresztezése nélkül összekötni. Ha ellenben — több pont esetén is — a pontok sorrendje ilyen: $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ (ahol még esetleg a_n a b_1-gyel és b_m az a_1-gyel össze is eshetik), akkor az a_i pontokat a kör belsejében fölvett a ponttal és a b_k pontokat az ugyancsak a kör belsejében fölvett b ponttal és még a-t b-vel is össze lehet kötni.

Most már könnyen megmutathatjuk, hogy az I. és II. gráf torzgráf. Az I. gráfot illetőleg világos, hogy négy pontnak minden párja összeköthető egy éllel. A szögpontok alkalmas megszámozásánál e gráf mindig a következő módon bontja a síkot négy tartományra (l. a 3. ábrát): az 1 2 3 1, 1 2 4 1 és 1 3 4 1 körök belseje és a 2 3 4 2 kör külseje. E négy tartomány közül bármelyikbe helyezzük is el az ötödik pontot, az illető tartományt határoló kör mindig elválasztja őt a körön elő nem forduló negyedik ponttól, e két pont összekötése tehát a kör metszése nélkül lehe-



3. ábra.

tetlen. (Például az 1 2 3 1 kör a belsejében felvett 5. pontot elválasztja a 4. ponttól, a 2 3 4 2 kör a külsejében felvett 5. pontot elválasztja az 1. ponttól.)

A II. gráf esetében pl. az I 1 II 2 I élsorozat ad egy kört (lásd a 2. ábrát). Ha a 3, III pontok közül az egyiket e kör belsejében, a másikat a külsejében helyezzük el, elválasztja őket a kör. Ha pedig mind a kettőt a kör belsejében (vagy külsejében) helyezzük el, a 3 az I-gyel és II-vel, III pedig 1-gyel és 2-vel, tehát egy, az előbbi pontpártól elválasztott pontpárral kötendő össze, ami ismét nem lehetséges keresztezés nélkül. Megjegyezzük még, hogy a II. torzgráf éppen úgy állítható elő, hogy egy körön hat szögpontot fölvéve, a szögpontokat úgy osztjuk párokba, hogy bármely két pár egymástól el legyen választva és azután az ugyanahhoz a pontpárhoz tartozó szögpontokat egy-egy éllel összekötjük.

2. §.

Egy további új fogalmat először szemléletesen vezetünk be. Ha az összefüggő G gráfnak van olyan a szögpontja, amely körül egy tetszésszerinti kis környezetben az éleket szétvágva a gráf részekre hull szét, azt mondjuk, hogy az a pont a gráfnak *artikulációja*. Minden különálló darab G egy részgráfja lesz, ha benne az a felé tartó éleket ismét összefogjuk egy végpontban (melyet mindegyik részgráfban továbbra is a-val jelölünk). Az artikulációs gráf tehát több különálló darabnak egy pontban, az artikulációban való összefűzése által keletkeztethető. SAINTE-LAGUË szabatosabb definíciója szerint:[11] valamely összefüggő gráfnak egy a szögpontja akkor artikuláció, ha a gráf többi szögpontjai úgy oszthatók két nem üres csoportba, hogy az egyik csoport bármely elemét a másik csoport bármely elemével összekötő, a gráf éleiből álló út mindig keresztülmegy az a ponton.

Hasonló tulajdonsága lehet a gráf egy *pontpárjának:* ha az összefüggő és artikuláció nélküli gráfnak a és b két olyan szögpontja hogy a gráf többi szögpontja két nem üres csoportba osztható úgy,

[11] L. pl. KŐNIG l. c. [1] 224—225. lap.

hogy az egyik csoport bármely pontjából a másik csoport bármely pontjába vezető minden, a gráf éleiből álló út vagy az a, vagy a b ponton vezet keresztül, akkor az (a, b) pontpár a gráfnak *másodrendű artikulációja.*[12] Az (a, b) pontpár a gráfot a fenti értelemben ismét több különálló darabra (az előbb írt módosítással részgráfra) bontja, s az egész gráf e daraboknak két pontban való összefűzésével keletkeztethető. Ha G az ab élt tartalmazza, akkor ez az él önmagában egy darab. De mindig van legalább két olyan darab, mely egynél több élt tartalmaz.

Ezekkel a fogalmakkal kapcsolatos az irreducibilis torzgráf fontos tulajdonsága. Először még megemlítjük, hogy *az irreducibilis torzgráf összefüggő.* Ugyanis az össze nem függő gráf akkor és csak akkor rajzolható a síkra, ha minden összefüggő darabja különkülön fölrajzolható.[13]

Továbbmenőleg: *az irreducibilis torzgráfnak nincs artikulációja.* Ha ugyanis volna, akkor mindegyik darab külön-külön fölrajzolható volna a síkra, mert hiszen mindenik darab legalább egy él elhagyásával áll elő az egész gráfból. Mégpedig úgy rajzolhatók föl, hogy az artikuláció mindegyikben a kontúrra (a külső határvonalra) kerüljön, ezt t. i. körön való tükrözéssel érhetjük el. Akkor pedig semmi akadálya sincs annak, hogy e darabokat a síkban maradva egy pontban, az artikulációban összeillesszük.

Az irreducibilis torzgráfnak nincs másodrendű artikulációja sem. Tegyük fel ugyanis, hogy a G irreducibilis torzgráf a, b pontpárja másodrendű artikuláció és legyen A a G-nek egy az artikuláció által osztott összefüggő, de nem csak egy élből álló darabja. G-nek megmaradt részét, mely több darabból is állhat, de előbbi megjegyzésünk szerint mindenesetre egynél több élt tartalmaz,

---

[12] E fogalmat illetőleg lásd SAUNDERS MAC LANE: A structural characterisation of planar combinatorial graphs, Duke Math. Journal 3. kötet (1937), 460. lap.

[13] Síktól különböző felületre ez nem mindig igaz. Például a gyűrűfelületre (tóruszra) az I., valamint a II. torzgráf fölrajzolható, de nem rajzolható föl egy oly össze nem függő gráf sem, melynek mindegyik össze függő darabja az I. vagy II. gráfok valamelyike.

jelöljük B-vel. A' legyen az a gráf, mely A-ból keletkezik, ha benne még az ab élt meghúzzuk, B' pedig legyen az a gráf, mely B-ből ugyanígy keletkezik, ha B nem tartalmazza az ab élt; különben pedig B' legyen B-vel azonos. Világos, hogy A' és B' is síkgráf, mert hiszen pl. A' úgy áll elő G-ből, hogy G-ből az egész B gráfot elhagyjuk az ab él vagy egy, az a és b pontot összekötő út kivételével, s az utóbbi esetben még ezt az utat is redukáljuk egy élre. Azonfelül megrajzolható A' úgy is, hogy az a és b pont az A' konturjára kerüljön. (Ha ugyanis A' nem így volna máris fölrajzolva, tükrözzük a rajzot egy, az ab élt érintő és a gráfnak semmilyen más élét nem metsző metrikus körön.) A'-nek ilyen rajzából nyerjük az ab él elhagyásával A-nak olyan rajzát, melyen a és b a határvonalon van. Most már B'-ben az ab él helyett, vagy mellé beilleszthető az A gráf s ezzel G-t rajzoltuk meg, tehát G nem lehet torzgráf.

3. §.

Ha egy irreducibilis torzgráfot síkra akarunk fölrajzolni, az az élek megfelelő vezetésével az utolsó élig mindig lehetséges olyan módon, hogy a fölrajzolt élek ne messék egymást. Az utolsó élt azonban már nem tudjuk fölrajzolni anélkül, hogy valamelyik már fölrajzolt élt ne messe. Ennek pedig csak az lehet az oka, hogy az a két szögpont, melyet az utolsó éllel kell összekötnünk, egymástól legalább egy, a már megrajzolt élekből álló körrel el van választva olyan értelemben, hogy az egyik szögpont a körön belül, a másik a körön kívül van. A G irreducibilis torzgráfból tehát egy él elhagyásával mindig olyan G' síkgráf keletkezik, melyet bárhogyan rajzolunk is a síkra, benne két elválasztott pont (az elhagyott él végpontjai) és egy őket elválasztó kör van. Be fogjuk bizonyítani, hogy *csak egy elválasztó kör van és a G gráfnak nem is lehetnek más szögpontjai, mint az elválasztott pontpár és az elválasztó körön levő szögpontok.* Ebből a segédtételből a KURATOWSKI-tétel már könnyen fog következni.

A segédtétel bebizonyításához rajzoljuk föl a G' gráfot a síkra, tetszésszerinti módon, de természetesen keresztezés nélkül. Jelöljük G' elválasztott pontjait a-val, illetőleg b-vel; b legyen valamelyik elválasztó kör belsejében. Mindig van e körön belül olyan, a b-t belsejében tartalmazó «legbelső» elválasztó kör, K, amelynek a belsejében nincs már egy a K-tól (legalább egy élben) különböző elválasztó kör sem. G'-nek a K belsejében levő részét a K-n fekvő szögpontokkal együtt jelöljük B-vel.[14] B-nek a b-n kívül nincs is más szögpontja, mint ezek a K-n fekvő szögpontok.

Tegyük föl ugyanis, hogy volna B-nek egy ezektől és a b-től különböző szögpontja is, c. A c nem lehet a K két különböző pontjával egy-egy a b-t elkerülő út által összekötve, mert különben K nem volna legbelső elválasztó kör. Tehát c-ből minden út vagy b-be, vagy K-nak ugyanazon pontjába vezet, de akkor K e pontja és b G-nek másodrendű, vagy valamelyikük közönséges artikulációja. Ez pedig ellentmondás az irreducibilis torzgráf tulajdonságával, tehát ilyen c szögpont nem létezhetik.

De ha B-nek a szögpontjai csak b és K-nak bizonyos pontjai, akkor B-nek nincs más éle, mint a b-ből K ezen szögpontjaiba futó élek. Megjegyezzük, hogy legalább két ilyen él van, mert hiszen b-ből G-ben legalább három, tehát G'-ben legalább két él indul ki.

G-nek a K külsejében levő részét, melyhez szintén hozzászámítjuk éleinek K-n fekvő végpontjait, jelöljük A-val. Bebizonyítjuk, hogy A ugyanolyan szerkezetű, mint B. Ehhez először megmutatjuk, hogy A, mely természetesen összefüggő, összefüggő marad akkor is, hogyha a K kör minden szögpontjának egy kis környezetében szétvágjuk az éleket. Más szóval a-ból A-nak minden szögpontjába az A éleiből álló olyan út vezet, mely a K kört nem érinti (illetőleg legfeljebb a végpontjában éri el, ha t. i. az illető

---

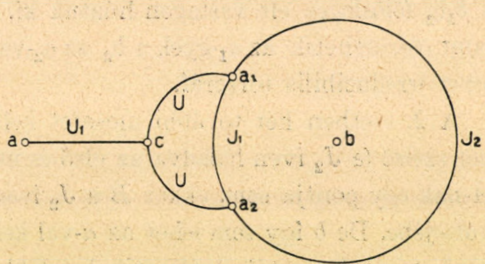
[14] A K, valamint a B és a később definiálandó A gráf fogalma apriorj relativ, olyan értelemben, hogy elvben a G' gráf fölrajzolásának módjától függ. A bizonyítás folyamán tehát mindig egy bizonyos rajzhoz tartozó legbelső körre, továbbá A és B gráfra kell gondolnunk. Csak a bizonyítás befejezésével derül ki, hogy K, A és B valójában a G' gráfnak a fölrajzolástól függetlenül meghatározott, a G irreducibilis torzgráfnak tehát az a és b pontok megválasztásával abszolute adott részgráfjai.

szögpont K-n van) és nincs A-ban olyan él, mely K két pontját kötné össze.

Tegyük föl ugyanis, hogy volna A-nak ilyen az a-val csak a K-n keresztül összefüggő része. Ezt a részt G-ből elhagyva, valamely G'' síkgráf keletkezik. G'' is tartalmazza a K kört és az ab élt, tehát csak úgy rajzolható a síkra, hogy a és b is a K körön belül van (vagy mind a kettő a körön kívül van, de ez az eset tükrözéssel az előbbire visszavezethető). De akkor kell, hogy A-nak minden az a-val (a K érintése nélkül) összefüggő része és ugyanúgy B-nek minden a b-vel összefüggő része, ami azonban az egész B gráf, a K belsejében legyen. Így pedig nincs semmilyen akadálya, hogy az előbb elhagyott részt a K külsejében, ugyanúgy mint a G' rajzán volt, keresztezés nélkül fölrajzoljuk, tehát G nem lehetne torzgráf.

Most megmutatjuk, hogy az A gráfnak minden olyan útja, mely A-nak két, a K körrel közös pontját köti össze egymással, keresztülmegy az a ponton.

Legyen tehát (lásd a 4. ábrát) U egy az A gráf éleiből álló olyan út, mely K-nak a_1 és a_2 pontját köti össze egymással, s melynek K-val csak e két végpontja közös. Ha az a pont nincs U-n rajta, akkor U-nak van az előbbi megállapítások szerint olyan belső (az a_1 és a_2 végponttól különböző) szögpontja, c, melyet a-val valamely U_1 út a kör érintése nélkül összeköt. Az U végpontjai a K kört két ívre, a J_1 és J_2 ívre bontják. Az ívek egyike az U-val együtt olyan kört alkot, melynek b a belsejében van, legyen ez az ív J_2. Föltehetjük, hogy a a J_1+U kör külsejében van (különben a J_1+U körre alkalmaznók az 1. §-ban ismertetett körön való tükrözést, amikor is a J_1 és J_2 ív a továbbiakban szerepet cserél). Föltehető továbbá az is, hogy a J_1+U kör belseje



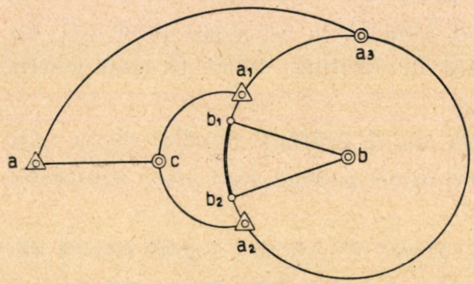
4. ábra.

üres, mert ha egyáltalában van a föltevésnek eleget tevő U út, akkor van olyan is, amely ennek a föltételnek is eleget tesz.

B-nek a körön legalább két szögpontja van. E szögpontokat illetőleg mármost háromféle eloszlás lehetséges:

1. B-nek és K-nak minden közös pontja a J_1 zárt íven van.
2. E pontok mind a J_2 zárt íven vannak.
3. B-nek van pontja mind a J_1, mind a J_2 nyílt íven.

Az 1. esetben az egész B gráf berajzolható (átfordítható a J_1 íven) a J_1+U kör üres belsejébe. Akkor pedig ez a kör oly legbelső kör, mely a B gráfot tartalmazza, tehát az előbb bebizonyítottak szerint kell, hogy a J_2 nyílt ív valamely a_3 pontja össze legyen kötve a-val valamely a J_1+U kör külsejében haladó út által. De így már az a, a_1, a_2 és b, a_3, c szögpontok a hozzájuk tartozó élekkel kiadják a II. gráfot legalább egy fölösleges éllel. (L. az 5. ábrát, melyen a b_1b_2 fölösleges élt vastagon húztuk ki. Megjegyezzük, hogy a b_1 pont összeeshetik az a_1-gyel, a b_2 az a_2-vel.[15]) A G gráf tehát nem lehet irreducibilis torzgráf.

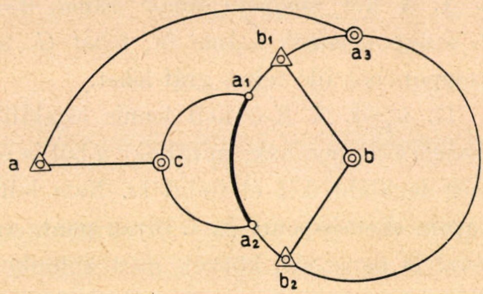


5. ábra.

A 2. esetben két további alesetet kell vizsgálnunk. Ha B-nek két szélső (a J_2 íven haladva az első és utolsó) pontja között nincs A-nak egy pontja sem, akkor B a J_2 íven át kifordítható a K kör külsejébe. De b így sem lehet az a-val keresztezés nélkül összeköthető, tehát b-t a-tól elválasztja legalább egy kör és így egy legbelső kör is. A B gráf most erre a legbelső körre és a J_2 ívre vonatkozólag ugyanúgy fekszik, mint az 1. esetben a K körre és a J_1 ívre vonatkozólag feküdt, tehát előbbi okoskodásunk szerint megint nem lehet G irreducibilis torzgráf.

[15] Ezen, valamint a 6. és 7. ábrán is a G' gráfot rajzoltuk meg, tehát a G gráf ab éle nincs föltüntetve.

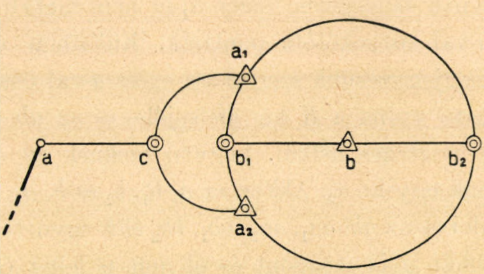
Ha pedig van A-nak e két szélső pont között is pontja, a_3, akkor G a 6. ábra szerint tartalmazza a II. gráfot és még egy felesleges élt is. (Az ábrán a felesleges él, a_1a_2 vastagon van kihúzva és a b_1 pont ismét összeeshetik a_1-gyel, b_2 az a_2-vel.)



6. ábra.

Végül a 3. esetben a 7. ábra mutatja, hogy G a II. gráfon fölül felesleges élt is tartalmaz. A két ponthármas itt b, a_1, a_2 és b_1, b_2, c. A b pont a c-vel az a-n keresztül van összekötve, a felesleges él G-nek az a-ból kiinduló harmadik éle.

Tehát azzal a föltevéssel, hogy A-nak van olyan a K valamely két pontját összekötő útja, mely a-n nem megy keresztül, minden esetben ellentmondásra jutunk. Abból pedig, hogy A-nak minden a K valamely két pontját összekötő útja keresztülmegy az a ponton és hogy G-nek sem egyszerű, sem másodrendű artikulációja nincsen, következik ugyanolyan módon, mint a B gráfra láttuk, hogy az A gráfnak sincs más éle, mint az a pontot K bizonyos pontjaival összekötő élek. G-nek tehát nincs más szögpontja, mint a, b és a K-n levő szögpontok. A segédtételt ezzel bebizonyítottuk.[16]



7. ábra.

---

[16] Talán föltűnik, hogy a bizonyítás folyamán az I. gráf egyszer sem szerepelt, hanem mindig a II. gráf. Ennek oka abban rejlik, hogy a reductio ad absurdum elvének megfelelő föltevéssel olyan torzgráffal

A körön legalább három szögpontnak kell lenni, e szögpontok száma szerint két esetet különböztetünk meg:

I. A kör szögpontjainak száma, $n=3$. Ebben az esetben a G szögpontjainak száma öt, tehát G, mint torzgráf, csak az öt szögpontból álló teljes gráf lehet.

II. $n \geqq 4$. A K-n kell lennie legalább két a-val és két b-vel összekötött pontnak, minthogy a-ból is és b-ből is az ab élen kívül még legalább két él indul ki. Nem lehet a K szögpontjai közt három «kettős-pont» (t. i. olyan pont, amely egyidejűleg a-val és b-vel is össze van kötve), mert különben az előbbi esettel volna dolgunk, s a kör negyedik pontjából kifutó él az irreducibilis torzgráfhoz felesleges volna.

Van tehát a körön olyan pont, mely az a és b pontoknak csak egyikével van összekötve, mondjuk a-val. Ettől az a_1 ponttól balra és jobbra is keressük meg a legelső b-vel összekötött pontot (b_1 és b_2). Itt b_1 és b_2 egymástól különböző pontok, mert hiszen legalább két b-vel összekötött pontnak kell a körön lenni. Annak a b_1b_2 ívnek belsejében, mely a_1-et nem tartalmazza, kell lenni még egy a-val összekötött pontnak. Különben ugyanis az 1. §-ban tett megjegyzésünk szerint az egész a-val összefüggő részgráf berajzolható volna a K kör belsejébe és az ab él is megrajzolható volna keresztezés nélkül. Legyen ezeknek az a-val összekötött pontoknak egyike a_2. Akkor az a, b_1, b_2 és b, a_1, a_2 pontok, továbbá a kör élei és az ab, aa_1, aa_2, bb_1, bb_2 élek együttesen a II. torzgráfot adják, tehát más szögpont és él nem is lehet G-n.

Az $n \geqq 4$ eset tehát az $n=4$ esetre redukálódik és ebben az esetben az irreducibilis torzgráf a II. gráf.

Ezzel a Kuratowski-tétel bizonyítását befejeztük.

Veress Pál.

---

foglalkoztunk, mely fölösleges részt is tartalmaz. Már pedig, ha valamely gráf, melynek nincs sem megszüntethető szögpontja, sem artikulációja, sem másodrendű artikulációja, tartalmazza az I. gráfot fölösleges éllel, akkor tartalmazza a II. gráfot is több fölösleges éllel.

ÜBER NICHT-EBENE GRAPHEN.

Es wird in graphentheoretischer[1] Fassung folgender Satz des H. KURATOWSKI bewiesen: es gibt nur zwei irreduzibile nicht-ebene Graphen, und zwar I. der vollständige Graph mit fünf Knotenpunkten, II. der Graph, der sechs Knotenpunkte A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 besitzt und in dem jeder A-Punkt mit jedem B-Punkt durch eine Kante verbunden ist.

Der Gedankengang des Beweises ist folgender: Erstens wird gezeigt, dass ein irreduzibiler Graph keine Artikulation, aber auch keine — aus zwei Punkten bestehende — trennende Knotenpunktmenge besitzt. Wird nun eine Kante aus dem irreduzibilen Graph weggelassen, so bleibt ein ebener Graph übrig, in dem die Endpunkte der weggelassenen Kante durch einen aus Kanten des Graphen bestehenden Kreis getrennt sind. Es wird nun gezeigt, dass G nur einen einzigen trennenden Kreis besitzt. Nimmt man nämlich den «innersten» Kreis K, der b noch im Inneren enthält, so sieht man leicht, dass der Teilgraph B, der im Inneren von K liegt, nur aus Kanten besteht, die b mit gewissen Punkten von K verbinden. Nun wird aber gezeigt, dass der Teilgraph A im Äusseren des Kreises genau so aufgebaut ist, wie B; also G keinen anderen Knotenpunkt besitzt, als a, b und die Knotenpunkte von K.

Auf einem Kreis liegen aber mindestens drei Knotenpunkte, da zweifache Kanten ausgeschlossen werden können. Ist die Zahl n der Knotenpunkte des Kreises genau 3, so hat G im ganzen 5 Knotenpunkte, muss also als nichtebener Graph, mit I identisch sein. Ist aber $n \geqq 4$, so bilden schon, wie man leicht zeigt, 4 Punkte des Kreises mit den Punkten a und b und den dazugehörigen Kanten den Graphen II, also kann es keinen weiteren Fall $n > 4$ geben.

P. Veress.

---

[1] Über die vorkommenden Begriffe aus der Graphentheorie s. D. KŐNIG: Die Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936. Über sonstige Literatur vergl. die Fussnoten des ungarischen Textes.

A KÖRGEOMETRIA MEGALAPOZÁSA.[1]

Jelen dolgozatomban a körgeometria tárgykörét és önálló megalapozásának módjait fogom ismertetni.

A különböző geometriák az euklidesi geometriából általánosítással fejlődtek ki. Például a BOLYAI—LOBACSEFSZKIJ-féle és a RIEMANN-féle geometria az euklidesitől abban különbözik, hogy az euklidesi párhuzamossági postulátumot más, azt kizáró postulátum helyettesíti. Azok a tételek, melyek a nevezett három geometriában egyaránt érvényesek, vagyis az euklidesi geometriának a párhuzamossági axiomától független tételei, alkotják az *abszolút geometriát*.

Az euklidesi geometria csoportja az euklidesi sík mozgásaiból, nevezetesen a sík eltolásaiból és forgásaiból áll. Bármely két pontnak a csoportnál invariánsa a két pont euklidesi távolsága.

Az euklidesi geometriában a *hasonlóság* elmélete egy tágabb csoport fogalmához kapcsolódik: ez a sík hasonlósági leképezéseiből álló csoport.

Az euklidesi geometriának az egyenesek metszésére vonatkozó tételei az *affin* és a *projektív geometriá*hoz vezetnek. Például az a tétel, mely szerint egy háromszög három középvonala egy ponton megy át, affin jellegű tétel; ugyanis bármely háromszöget átvihetünk bármely más háromszögbe affin leképezéssel (melynél minden egyenes egyenesbe s a végtelen távoli egyenes önmagába megy át); ennél a leképezésnél a két háromszög középvonalai egymásnak felelnek meg. A tétel projektív általánosítása a következő:

[1] Az EÖTVÖS LORÁND Matematikai és Fizikai Társulat 1939. november 30-i ülésén tartott előadás.

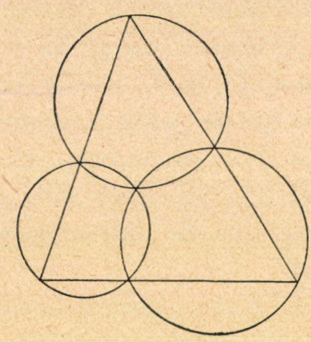
az ABC háromszög AB, BC, CA oldalainak valamely e egyenessel való C', A', B' metszéspontjaihoz határozzuk meg az illető csúcsokra vonatkozó harmonikus konjugáltakat, vagyis azokat a C'', A'', B'' pontokat, melyekre az $(ABC'C'')$, $(BCA'A'')$, $(CAB'B'')$ kettősviszonyok értéke — 1; az AA'', BB'', CC'' egyenesek egy E ponton haladnak át. Az E pontot az e egyenesnek a háromszögre vonatkozó polusának nevezzük. Ha e a végtelen távoli egyenes, akkor polusa E a háromszög súlypontja.

A *projektív geometria* csoportja a sík kollineációiból áll, vagyis azokból a leképezésekből, melyeknél minden egyenes egyenesbe megy át. A projektív csoportnál bármely négy kollineáris (azaz egy egyenesen fekvő) pontnak invariánsa a négy pont kettősviszonya. A projektív geometria felépíthető összetartozási axiomák és a PAPPUS-féle tétel alapján. A PAPPUS-féle tétel szerint: ha az e egyenesnek A, B, C és az e' egyenesnek A', B', C' tetszőleges pontjai, akkor az AB' és $A'B$ egyenesek metszéspontja, továbbá BC' és $B'C$ metszéspontja, végül CA' és $C'A$ metszéspontja egy egyenesen fekszik. Ennek az affin geometriára specializált esete a következő: ha AB' párhuzamos $A'B$-vel, s ha BC' párhuzamos $B'C$-vel, akkor CA' párhuzamos $C'A$-val.

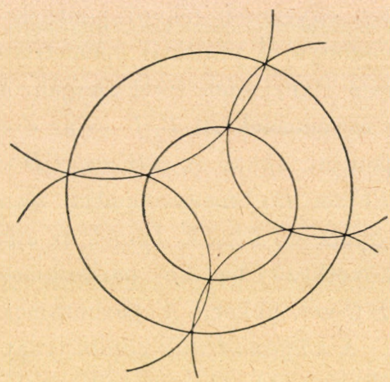
A *körgeometria* a gömbi (vagy szferikus) geometriából olyanféle általánosítással származik, mint a projektív geometria az euklidesi geometriából. A gömbi geometriának elemei a gömb főkörei; mozgáscsoportja a gömb forgásaiból álló háromtagú (azaz három valós paramétertől függő) folytonos csoport; bármely két pont invariánsa a csoportnál a két pont gömbi távolsága. A főkörök összességéhez hozzávesszük ezeknek aequidistans vonalait, s így a gömb köreinek összességét kapjuk; a gömb forgásainak csoportját ugyancsak kibővítjük a gömb összes szögtartó és kölcsönösen egyértelmű leképezéseivel a *homográfikus csoporttá*. Ha a gömbön egy síkra való stereografikus vetítés által egy z komplex koordinátát vezetünk be, akkor a homográfikus csoportot a z változóban lineáris $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ leképezések összessége alkotja, hol a, b, c, d tetszőleges olyan komplex számok, melyekre $ad - bc \neq 0$. Ez a körgeometria csoportja, s a körgeometria elemei a gömb köreinek összessége.

A körgeometria a végtelen távoli ponttal kibővített z komplex síkon mint a sík köreinek és egyeneseinek metszéseire vonatkozó geometria értelmezhető. Jellemző tételeként a következő MIQUEL-féle tételt említjük meg, két, az euklidesi geometria szempontjából különböző, de a körgeometria számára aequivalens megfogalmazásban:

1. *A PQR háromszög PQ, QR, RP oldalának egy-egy pontja legyen R', P', Q'. A $PQ'R'$, $QR'P'$, $RP'Q'$ köröknek van egy közös S pontja* (1. ábra).



1. ábra.



2. ábra.

2. *Legyen k_1, k_2, k_3, k_4 négy kör; k_1 és k_2 metszéspontjait jelöljük A, A'-vel, k_2 és k_3, k_3 és k_4, k_4 és k_1 metszéspontjait rendre B, B'; C, C'; D, D'-vel. Ha az A, B, C, D pontok egy k_0 körön feküsznek, akkor az A', B', C', D' pontok is egy k_0' körön feküsznek* (2. ábra).

Az első tételt az euklidesi geometriának a kerületi szögekre vonatkozó tétele alapján könnyen igazolhatjuk. A második tételt az első tétel alapján így bizonyítjuk be. Alkalmazzunk a z síkban egy inverziót, mely a k_0, k_1, k_2 körök közös A pontját a végtelen távoli pontba viszi át; ha A komplex koordinátája a, akkor ezt az inverziót a $z' = \dfrac{1}{z - a}$ kifejezés állítja elő. Ennél a leképezésnél a k_0, k_1, k_2 körök egyenesekbe, a k_3 és k_4 körök körökbe mennek át.

Jelöljük a B, C, D pontok képét Q, R', P-vel, az A', B', C', D' pontok képét R, P', S, Q'-vel. Az R' pont a PQ egyenesen fekszik, mivel az A, B, C, D pontok egy körön feküsznek, t. i. a k_0 körön, s ez a kör az inverziónál egyenesbe megy át. Hasonlóan Q' a PR egyenesnek, és P' a QR egyenesnek pontja. Továbbá a P, Q', R', S pontok egy körön (k_4 képén), s ugyancsak a Q, P', R', S pontok egy körön (k_3 képén) feküsznek; másszóval S a $PQ'R'$ és a $QR'P'$ körök közös pontja. Az 1. tétel szerint az S pont az $RQ'P'$ körnek is pontja, vagyis az R, P', S, Q' pontok egy körön, s így az ezeknek az inverziónál megfelelő A', B', C', D' pontok is egy körön feküsznek.

Az 1. tétel a 2. tételnek a hasonlósági csoportra specializált esete, hasonló értelemben, mint ahogyan a PAPPUS-féle tételt az affin csoportra specializáltuk.

A körgeometria jellegzetes tételeként megemlítjük még a következő, STEINERtől származó, záródási tételt.[2]

Legyen k_0 és k'_0 két egymást nem metsző kör; a középpontjaikat összekötő egyenesnek k_0-val közös pontjait P, Q-val, k'_0-vel közös pontjait P', Q'-vel jelöljük. A PQ' és $P'Q$ átmérőjű köröknek egymással bezárt szögét jelöljük $2\pi\alpha$-val. Ha α racionális szám: $\alpha = m/n$ (m, n relatív törzsszámok), és csak akkor, megadható a k_0 és k'_0 köröket érintő köröknek olyan ($k_1, k_2, \cdots, k_n$) sorozata, hogy minden ν-re k_ν érinti $k_{\nu-1}$-et és $k_{\nu+1}$-et (ha $\nu=n$, akkor $\nu+1$ jelenti az 1-et, s ha $\nu=1$, akkor $\nu-1$ jelenti n-et). A záródó sorozathoz tartozó körök száma az $\alpha=m/n$ tört nevezője; a számláló megadja, hányszor kerüli meg a sorozat a k_0 (k'_0) kört. A sorozat szomszédos köreinek érintési pontjai egy körön vannak.

*

Mielőtt rátérnék a körgeometria megalapozásának kérdésére, röviden ismertetem az euklidesi geometriának HILBERTtől származó két különböző felépítését, melyet a *Grundlagen der Geometrie* c. művében, illetve ennek IV. függelékében adott.

---

[2] L. például: COOLIDGE, J. L.: A treatise on the circle and the sphere. Oxford, 1916. 31. o.

Az első, melyet *elemi felépítés*nek nevezek, lényegében az euklidesi tárgyalási módnak felel meg. Az adott elemek a pontok, egyenesek és síkok; az alapvető kapcsolatok az összetartozás, rendezés és egyenlőség; az axiomák az elemek között fennálló alapvető kapcsolatokat írják le. Az ezen az alapon felépített geometriában értelmezhetjük a sík és a tér mozgásait, mint olyan leképezéseket, melyeknél bármely szakasz vele egyenlő szakaszba megy át; az egyenlőség tranzitiv jellegéből (amit egyik axioma posztulál) következik, hogy a mozgások csoportot alkotnak. Ebben a tárgyalásban a folytonosság fogalma a rendszer záróköve; ez biztosítja, hogy az axiomákkal jellemzett geometria a DESCARTES-féle analitikus geometriával megegyező.

HILBERT másik, *topológiai-csoportelméleti* tárgyalása lényegében az előbbinek megfordítottja. A síkgeometria tárgyalásában az alapot egy pontjaiból felépített *folytonos sík* és *a sík mozgásainak csoportja* alkotja; ezekre vonatkoznak az axiomák. A sík topologikus vagy *amorf* sík, melyben nincsenek megadva távolságok, sem egyenes vonalak. A csoport nyujt módot arra, hogy általa az egyeneseket értelmezzük. A HILBERT-féle axiomarendszer a következő:

1. Síkon értjük az (x, y) számsík valamely tartományának topologikus (azaz kölcsönösen egyértelmű és folytonos) képét.

2. A sík mozgásán értjük a síknak önmagára való topologikus leképezését megmaradó irányítással.

3. A mozgásokról feltesszük, *a)* hogy csoportot alkotnak, *b)* hogy azok a mozgások, melyek egy pontot önmagába visznek át, minden más pontot végtelen sok különböző pontba visznek át, *c)* hogy a mozgások zárt rendszert alkotnak, vagyis ha A, B, C és A', B', C' olyan ponthármasok, hogy azokat tetszőlegesen megközelítő A_n, B_n, C_n és A'_n, B'_n, C'_n ponthármasok átvihetők egymásba mozgással, akkor van egy olyan mozgás, mely az A, B, C ponthármast az A', B', C' ponthármasba viszi át.

A HILBERT-féle tárgyalás gondolatmenete röviden összefoglalva a következő. Az O pontot változatlanul hagyó mozgások, melyeket az O pont körül való *forgások*nak nevezünk, csoportot alkotnak.

Bármely az O-tól különböző A pontnak a forgáscsoportnál származó képei egyszerű zárt görbét alkotnak; ez az O középpontú, az A ponton áthaladó *kör*. Az O körül való forgások csoportja egy ilyen körön, továbbá az egész síkon a közönséges forgáscsoporttal (vagyis a DESCARTES-féle síkon analitikus formulákkal értelmezett forgáscsoporttal) aequivalens. A forgáscsoportban foglalt *félforgások* (melyeknek négyzete az azonosság), módot adnak az *egyenesek* értelmezésére. Két A_0 és A_1 pontból levezetjük a következőket: A_2 az A_0 pontnak az A_1 körül való félforgásnál származó képe, s hasonlóan minden n-re A_n az A_{n-2} pontnak az A_{n-1} körül való félforgásnál származó képe. $A_{\frac{1}{2}}$ jelentse azt a pontot, mely körül való félforgásnál A_0 és A_1 egymásba megy át; ezt a pontot az A_0, A_1 *pontpár középpontjának* nevezzük. Az összes eddig értelmezett A_n pontok közül kettő-kettőnek középpontját képezzük, és így tovább, majd a szerkesztés végnélküli folytatásával nyert halmazt kiegészítjük összes sűrűsödési pontjaival. Az ilyen módon nyert ponthalmaz a valós számok összességére topologikusan leképezhető; ez a ponthalmaz az A_0, A_1 pontok által meghatározott *egyenes*. Az egyenesekre teljesülnek az elemi felépítés axiomái, kivéve a párhuzamossági axiomát. E szerint a csoport által értelmezett geometria vagy az euklidesi vagy a hiperbolikus síkgeometriával megegyező. Ha a sík értelmezését általánosabban fogalmazzuk meg, akkor a fenti tárgyalás kiterjeszthető az elliptikus síkgeometriára is.

A tér euklidesi és hiperbolikus geometriájának hasonló elven alapuló felépítésével KERÉKJÁRTÓ[3] és SÜSS[4] foglalkozott, de az elért eredmények még nem tekinthetők a kérdés végleges megoldásának.

*

[3] KERÉKJÁRTÓ BÉLA: Folytonos csoportok geometriai elméletéről. II. A háromdimenziós tér euklidesi és hiperbolikus csoportjairól. Mat. Termtud. Ért. 45. k. 290—305. l. (1928). — U. a. angol nyelven: Annals of Math. 29. k. 169—179. o. (1928).

[4] SÜSS, W.: Beiträge zur gruppentheoretischen Begründung der Geometrie, II. Tohoku Math. Journ. 27. k. (1926).

A körgeometria önálló (vagyis az euklidesi geometriától független) megalapozására két természetes mód kínálkozik; az egyik az euklidesi geometria elemi felépítésének megfelelően a körgeometria elemi felépítése, melynél az adott elemek a pontok és körök, s az axiomák arra szolgálnak, hogy a gömbön fekvő körök összességét teljesen jellemezzék. A körgeometriának ilyen elemi felépítését VAN DER WAERDEN és SMID[5] adta. A felvett axiomák összetartozási axiomák és a MIQUEL-féle tétel, mégpedig a következők:

1. Van legalább négy olyan pont, mely nem fekszik egy körön.
2. Három különböző pont egy, és csak egy körhöz tartozik.
3. A k kör A pontján és a k-hoz nem tartozó B ponton áthalad egy, és csak egy olyan k' kör, mely k-t A-ban érinti.
4. A MIQUEL-féle tétel érvényes.

Ezeknek az axiomáknak az alapján VAN DER WAERDEN és SMID megmutatták, hogy a körgeometria síkjából kihagyva egy pontot, a megmaradó síkon az euklidesi geometriának a körökre és egyenesekre vonatkozó tételei érvényesek. Ebből következik, hogy a fenti axiomákkal értelmezett geometria a körgeometria, melyet egy nem folytonos euklidesi geometria alapján értelmezünk. A geometria folytonossá tételére még egy a geometria számtestére vonatkozó axioma szolgál.

A körgeometria másik megalapozását a gömb lineáris csoportjának a jellemzése szolgáltatja; ez az euklidesi geometria HILBERT-től származó második megalapozásának felel meg. Ezzel a kérdéssel, a gömb lineáris csoportjának topologiai jellemzésével, eddig SÜSS foglalkozott;[6] eredménye azonban nem tekinthető a kérdés tényleges megoldásának, mivel axiomái között feltesz a körökre vonatkozó axiomákat is. A SÜSS-féle feltételek a következők:

A gömbön legyen T az irányítást megtartó leképezéseknek

[5] VAN DER WAERDEN, B. L. und SMID, L. J.: Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie. Math. Annalen 110. k. 753—776. o. (1935).

[6] SÜSS, W.: Beiträge zur gruppentheoretischen Begründung der Geometrie, III. Topologische Kennzeichnung der linearen Abbildungen auf der Kugel. Tohoku Math. Journ. 28. k. (1927).

valamely csoportja és (k) egyszerű zárt görbéknek egy megadott rendszere, mely T minden leképezésénél önmagába megy át; a (k) görbéket *köröknek* nevezzük. Tegyük fel, hogy bármely két A, B, C és A', B', C' ponthármashoz van T-ben egy, és csak egy olyan leképezés, mely az előbbi ponthármast az utóbbiba viszi át. Tegyük fel továbbá, hogy bármely három A, B, C ponton egy, és csak egy k kör megy át. Ha a k és k' köröknek egy S pontja közös, s ha A a k'-nek valamely más pontja, akkor T-nek olyan leképezésénél, mely k-t, S-et és A-t önmagába viszi át, k' is önmagába megy át. Süss bebizonyítja, hogy ezek mellett a feltételek mellett a T csoport a gömb lineáris leképezéseinek csoportjával homöomorf. Ez a Süss-féle eredmény olyan, mintha Hilbert topologiai-csoportelméleti tárgyalásában a felvett axiomákon kívül feltennők azt, hogy a körök egyszerű zárt görbék, s például még azt, hogy két körnek legfeljebb két közös pontja van.

A felvetett kérdésnek elvi szempontból teljes megoldását következő tételünk adja, melyet egy másik dolgozatomban fogok részletesen bebizonyítani:

Legyen G a gömb önmagára való, az irányítást megtartó topologikus leképezéseinek olyan csoportja, melyre a következő feltételek teljesülnek:

Bármely két A, B, C és A', B', C' ponthármashoz van G-nek egy, és csak egy olyan leképezése, mely A, B, C-t A', B', C'-be viszi át; ez a leképezés az A', B', C' ponthármas folytonos változásánál folytonosan változik.

A fenti feltételek mellett G a gömb lineáris leképezéseinek csoportjával homöomorf.

Meg akarom még mutatni, hogyan lehet a G csoport alapján a *köröket* értelmezni. Legyen A, B és P a gömb három tetszőlegesen választott pontja, és P' egy változó pontja. Van G-ben az 1. feltétel szerint egy, és csak egy olyan leképezés, melynél A és B önmagába, és P P'-be megy át; P' változásánál ez a leképezés folytonosan változik. A P' pont különböző helyzeteinek megfelelő leképezések egy folytonos csoportot alkotnak, mely az A és B pontokban pontozott gömbön egyszeresen tranzitiv. A kéttagú folytonos csoportokra vonatkozó tételem szerint[7] ez a csoport a hengerfelület önmagában való forgásaiból, eltolásaiból és csavarmozgásaiból álló csoporttal homöomorf, s így van a csoportnak egy egytagú folytonos zárt alcsoportja; ennél bármely P pont egy egyszerű zárt görbét ír le, ezt a görbét nevezzük az A, B középpontokkal bíró, a P ponton áthaladó *kör*nek. Ha T a G csoport tetszőleges leképezése, s ennél az A, B pontok az A', B' pontokba mennek át, akkor az A, B fixpontokhoz tartozó egytagú zárt csoportnak T-vel való transzformáltja az A', B' fixpontokhoz tartozó egytagú zárt csoport; az előbbinek pályavonalai T-nél az utóbbinak pályavonalaiba tehát az A B középpontokkal bíró körök az A', B' középpontokkal bíró körökbe mennek át. E szerint a fent értelmezett körök rendszere a G csoport leképezéseinél önmagába megy át. Ezzel éppen hogy értelmeztük a köröket; további feladatunk annak igazolása, hogy a gömb bármely három pontján egy, és csak egy kör megy át, s hogy a körök összessége egy metrikus gömb metrikus köreinek összességével homöomorf. Ezekre a fent már említett dolgozatomban fogok rátérni, melyben az előbb megfogalmazott tétel bebizonyításával a körgeometriának topologiai-csoportelméleti megalapozását adom.

Kerékjártó Béla.

SUR LES FONDEMENTS DE LA GÉOMETRIE DES CERCLES.

Dans le mémoire précédent, j'expose les deux méthodes différentes qui servent à édifier la géométrie des cercles. La première, donnée par MM. VAN DER WAERDEN et SMID, consiste à caractériser le système des cercles situés sur la sphère. — L'autre concerne à déterminer le caractère topologique du groupe homographique de la sphère ; cette

[7] KERÉKJÁRTÓ, B. v.: Geometrische Theorie der zweigliedrigen kontinuierlichen Gruppen. Abh. Math. Seminar Hamburg. 8. k. 107—114. o. (1930).

détermination est fournie par le theorème suivant dont la démonstration sera publiée dans un prochain mémoire de l'auteur :

Soit G un groupe de transformations topologiques de la surface d'une sphère en elle-même conservant le sens, et satisfaisant aux conditions suivantes: Pour deux triples de points A, B, C et A', B', C', il existe une transformation de G et une seule qui transforme A, B, C en A', B', C' ; celle-ci varie continuement avec le triple A', B', C'. Sous ces conditions, le groupe G est homéomorphe au groupe homographique de la sphère.

B. de Kerékjártó.

AZ x^2-1 SZÁMOKRÓL.

Vajjon lehet-e két egymásra következő szám (a 0, -1; 0, 1 és 8, 9 kivételével) teljes hatvány? Ámbár a kérdéssel immár évszázadok óta foglalkoznak,[1] a probléma még sincs eldöntve, csupán részleteredményeket értek el, melyeket röviden felsorolunk.

EULER[2] 1738-ban bebizonyította az

$$x^3+1=y^2 \tag{1}$$

egyenlet lehetetlenségét egész számokban (ha $x>2$). TRYGGVE NAGELL[3] úr 1922-ben a tételt visszavezette arra a jól ismert

---

[1] DICKSON: History of the Theory of Numbers. Vol. II. The Diophantine Analysis, Washington 1920. (Publication no. 256 of the Carnegie Institution) kézikönyvében p. 731. olvassuk, hogy már LEVI ben GERSON, másképp LEO HEBRÄUS (1288—1344) középkori zsidó matematikus bebizonyította, hogy

$$3^{m+1} \pm 1$$

nem lehet a 2 szám hatványa, ha $m>1$.

Ugyanitt pp. 731., 752., 766., 772. megtaláljuk a kérdés irodalmát NAGELL-ig. Az összeállításból azonban hiányzik két közlésem: Ztschrift f. math. natw. Unt. 43. 1913. 433. és 45. 1914. 294. Aufg. 453., 454. és Középisk. Math. Lapok 20. 1912/13. p. 133., 21. tétel.

[2] L. EULER: Theorematum quorumdam arithmeticorum demonstrationes, 1738. Comm. Arithm. Coll. I., 1849., pp. 24—34., speciálisan pp. 33—34. Theorema 10.

Szép tétele nyilván örömet okozott neki, mert többször visszatért rá, pl. Algebra, 1770. II. rész, 121. cikk, sőt még késő öregségében is, 1780-ban. Comm. Arithm. Coll. II., p. 478.

P. BACHMANN (Encykl. d. math. Wiss. I. 1. kiadás, 1898. 512) a tételt közelebbi idézet nélkül GÉRONO-nak tulajdonítja, EULERT-t nem említi.

[3] T. NAGELL: Résultats nouveaux de l'analyse indéterminée I. Norsk Matematisk Forenings Skrifter, Serie I. Nr. 8. 1922, § 10. p. 11—13. Lásd még a [10] alatt idézett dolgozatait.

tételre, mely szerint az $x^3+1=2z^3$ határozatlan egyenlet egész számokban lehetetlen[4] ($x>1$), mely azonban szintén csak descente infinie-vel bizonyítható.[5]

LEBESGUE[6] 1850-ben kimutatta az

$$x^2+1=y^n \tag{2}$$

diophantikus egyenlet lehetetlenségét, ha $x>0$, $n>1$.

GÉRONO[7] megmutatta, hogy ha x vagy y bármelyike prímszám, az

$$x^m+1=y^n \tag{3}$$

($m>1$, $n>1$) határozatlan egyenlet az említett kivételektől eltekintve lehetetlen. Így

$$x^4-1=y^n$$

is lehetetlen el nem tűnő egész számokban. Ezt a tételt T. NAGELL 1919-ben feladat gyanánt tűzte ki, melyet S. SELBERG úr 1932-ben megoldott.[8]

---

[4] L. EULER: Algebra II. rész, 247. cikk. Opera Omnia 1907, (1) I., p. 491. A. M. LEGENDRE: Essai sur la théorie des nombres, Paris An VI. (1797), p. 409. Article 343. Théorème VI.

[5] P. BACHMANN: Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung, 1919. p. 9—11. megkísérelte descente infinie nélkül bebizonyítani (1) lehetetlenségét, de sikertelenül, amint ezt már T. NAGELL: Ü. d. rationalen Punkte auf einigen kubischen Kurven, Tôh. Math. Journ. 24., 1925. pp. 48—53. is megjegyezte.

[6] V. A. LEBESGUE: Sur l'impossibilité en nombres entiers, de l'équation $x^m=y^2+1$. Nouv. Ann. de Math. 9. 1850, pp. 178—181. T. NAGELL kitűnő monográfiája: Analyse indéterminée de degré supérieur, Mémorial d. Sciences Mathématiques, Fasc. XXXIX. p. 58. is közli a tételt. $n=3$ és 5 esetén más bizonyítást adott NAGELL i. h. [3] pp. 11—19., 10., 11. §§.

[7] GÉRONO: Nouv. Ann. de math. 2. s. 9., 1870. 469. és 10. 1871. 204. Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m=y^n+1$.

[8] T. NAGELL: Norsk Matem. Tidsskr. 1. 1919.; S. SELBERG u. o. 14., 1932. p. 79—80. Ezen irodalomhoz nem férhettem hozzá és csak NAGELL úr 1936. szeptember 21-i leveléből tudok róla. A tételre önnállóan jöttem rá és közöltem NAGELL úrral, aki erre most idézett levelében a fenti adatokat szíves volt nekem megírni.

NAGELL[9] 1921-ben kimutatta az

$$x^3 \pm 1 = y^n \quad {}_{|x|>1}$$

határozatlan egyenletek lehetetlenségét, ha $n > 2$.

*

Vizsgálatainkat a következő NAGELL-féle tételhez fűzzük.[10] Az

$$x^2 - 1 = y^n \tag{I}$$

határozatlan egyenletnek az említett kivételektől eltekintve nincs egész számú megoldása, ha

1. n nem $8a+1$ alakú primszám,
2. ha n ugyan $8a+1$ alakú primszám, de $u \not\equiv -1$ mod 8, ahol $\varepsilon = u + \frac{v}{2}(1+\sqrt{n})$ a $K(\sqrt{n})$ quadratikus számtest pozitív alapegysége.

A (I) egyenletről néhány tételt bizonyítunk be, amelyek némely, a fenti tétellel eldöntetlenül hagyott esetben is biztosítják egyenletünk lehetetlenségét.

Elegendő, ha tételeinket primszám-kitevőkre mutatjuk ki. p-vel mindig primszámot jelölünk, reguláris primszámok részére az l betűt tartjuk fenn.[11]

1. tétel. *a) Ha a* 2^{p-2} *és* 2^{p-3} *számok mindketten hatványnemmaradékok* mod p^2 *($p>3$ primszám) akkor az*

$$x^2 - 1 = y^p \tag{Ia}$$

diophantikus egyenlet el nem tűnő egész számokban lehetetlen.

---

[9] T. NAGELL: Des équations indéterminées $x^2+x+1=y^n$ et $x^2+x+1=3y^n$. Norsk Mat. Foren. Skrifter. Serie I. Nr. 2. pp. 12—14., § 3.

[10] T. NAGELL: Sur une équation diophantienne à deux indéterminées, Det kongelige Norsk Videnskabers Selskab Forhandlinger VII. Nr. 38., pp. 136—139. 1934, valamivel kevésbbé élesen már előbb T. NAGELL: Sur l'impossibilité de l'équation indéterminée $z^p + 1 = y^2$. Norsk Mat. Foren. Skrifter Ser. I. Nr. 4. pp. 1—10. 1921.

[11] Az l primszámot az elfogadott KUMMER-féle terminológia szerint regulárisnak nevezzük, ha az l-ik egységgyökök számtestének osztályszáma nem osztható magával l-lel.

β) (I*a*) *akkor is lehetetlen, ha* 2^{p-2} *hatványmaradék* mod p^2, *de*

$$2^{p-1} \not\equiv 1 \bmod p^2. \tag{4}$$

Bizonyítására LUBELSKI[12] úr következő igen érdekes tételét használjuk fel.

Ha p valamely páratlan primszám, c valamely tetszőleges racionális egész szám, melynek nincsen $ap+1$ alakú primtényezője és amely $\frac{c}{2}$-lel együtt hatványnemmaradék mod p^2, akkor az

$$x^p + y^p = cz^p \qquad (c, p) = 1 \tag{5}$$

egyenlet x, y, z racionális egész számokban lehetetlen, ha z nem osztható p-vel.

Páros x-re igen könnyű (I), illetve (I*a*) lehetetlenségét kimutatni, tehát csak páratlan x-szel foglalkozunk. (I*a*) ekkor így írható

$$x \mp 1 = 2\xi^p \tag{6a}$$

$$x \pm 1 = 2^{p-1}\eta^p \tag{6b}$$

amiből

$$2^{p-2}\eta^p \pm 1 = \xi^p \tag{6}$$

következik. Egy NAGELL-féle segédtétel[13] szerint, ha (I*a*) fennáll x-nek p-vel oszthatónak kell lennie. (6*a*) és (6*b*) egyenletek mutatják, hogy sem ξ sem η nem lehet p-vel osztható. A 2 primszám nem $ap+1$ alakú. A LUBELSKI-tétel praemissái tehát ki vannak elégítve, s ezzel az (1) tételt bebizonyítottuk, mert tüstént látni, hogy a (I*a*) és (6) egyenletek egyszerre lehetségesek, vagy lehetetlenek.

Az 1 *β)* tétel bizonyítása LUBELSKI[14] azon tételével történik, mely szerint, ha a c számnak egyetlen $ap+1$ alakú primtényezője sincs és c p-ik hatványmaradék mod p^2, akkor (5) csak úgy oldható meg, ha

$$2^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2.$$

---

[12] S. LUBELSKI: Studien über den grossen Fermatschen Satz. Prace Matematyczne-Fizyczne 42. 1935., 11—44., különösen p. 29. Satz. 6.

[13] NAGELL i. h.[10] p. 137., ill. p. 2.

[14] LUBELSKI i. h.[12] p. 21., Satz 3.

2. tétel. Az (Ia) *diophantikus egyenlet akkor is lehetetlen, ha*

$$3^{p-1} \not\equiv 1 \mod p^2. \tag{7}$$

Bizonyítása LUBELSKI[15] következő, igen figyelemreméltó tételén alapszik. Ha az (5) egyenlet (c jelentése az eddigi) p-vel nem osztható racionális egész számokban megoldható és $x \not\equiv y \mod p$, akkor $3^{p-1} \equiv 1 \mod p^2$. Elég kimutatnunk, hogy a (6) egyenlet kielégíti ezen egyenlet praemissáit. Ott $c = 2^{p-2}$; $y = \pm 1$, azaz $p \nmid 2^{p-1}$ és $\xi \not\equiv \mp 1 \mod p$, mert különben a (6$a$) formulából $x = 2\xi^p \pm 1 \equiv \pm 1 \mod p$, holott az idézett NAGELL-féle segédtétel[13] értelmében x osztható p-vel.

3. tétel. *Ha az l reguláris primszám a*

$$2^{(l-1)(l-2)} \not\equiv 1 \mod l^2$$

és

$$2^{(l-1)(l-3)} \not\equiv 1 \mod l^2$$

feltételeket kielégíti és a 2 primszám páros kitevőhöz tartozik mod l, *akkor az*

$$x^2 - 1 = y^l \tag{Ib}$$

egyenlet el nem tűnő egész számokban lehetetlen.

Tételünk VANDIVER[16] következő tételével bizonyítható:

Ha a c szám minden törzstényezője páros kitevőhöz tartozik mod l és

$$c^{l-1} \not\equiv 1 \mod l^2,$$

$$c^{l-1} \not\equiv 2^{l-1} \mod l^2,$$

akkor az

$$x^l + y^l = cz^l \tag{5a}$$

határozatlan egyenlet el nem tűnő egész számokban lehetetlen.

Az 1000-nél kisebb $8a+1$ alakú 37 primszám közül 16-ra (például $n = 73$, 89, 113 stb.) az 1000 és 2000 között lévő 32 ilyen primszám közül 26-ra nem érvényes NAGELL tétele. Tételeinkből *ezekre is következik* (I) *lehetetlensége.* Ismeretes ugyanis,

---

[15] LUBELSKI i. h.[12] p. 32., Satz. 8.

[16] H. S. VANDIVER: On Trinomial Diophantine Equations Annected with the Fermat Relation, Monatshefte f. Math. u. Phys 43., 1936. Wirtinger-Festband, pp. 317—320.

hogy a 3000-nél kisebb primszámok közül az egyetlen $p=11$ nem teljesíti a (7) alatti MIRIMANOFF-féle inkongruenciát ($p=11$-re azonban érvényes NAGELL analizise, vagy (1) és (3) tételünk). Ezek összefoglalásakép kimondható a

4. tétel. *x^2-1 az ismert kivételektől eltekintve nem lehet 3000-nél kisebb kitevőjű hatvány*, vagyis a (I) *egyenlet lehetetlen, ha $p<3000$*, (sőt <3529).

Mindezek a tételek a kitevőt specializálják. Bebizonyítandó további tételeink a négyzet alapját szorítják meg. Előbb azonban nyert tételeink alkalmazásakép bemutatjuk az

5. tételt. *Négy egymás után következő szám szorzata nem lehet teljes n-ik hatvány*, azaz

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=y^n$$

egyenlet egész számokban lehetetlen, ha

α) n nem $40a+1$ vagy $40a+9$ alakú primszám.

β) ha n ugyan $40a+1$, vagy $40a+9$ alakú primszám, de

β_1) $u \not\equiv -1$ mod 8, ahol $\varepsilon = u + \frac{v}{2}(1+\sqrt{n})$ a $K(\sqrt{n})$ számtest pozitív alapegysége,

β_2) $n=l$ oly reguláris primszám, melyre 2 és 3 páros kitevőkhöz tartoznak mod l és l *egyszersmind a*

$$c^{l-1} \not\equiv 1 \bmod l^2; \qquad c^{l-1} \not\equiv 2^{l-1} \bmod l^2$$

feltételeket is teljesíti, ahol c a $2^{l-1}3^{l-1}$, 2^{l-1}, $2^{l-3}3$ számok valamelyikét jelentheti.

β_3) vagy ha úgy 2^{n-2}, mint 2^{n-3} hatványnemmaradékok mod n^2, *vagy ha 2^{n-2} ugyan n-ik hatványmaradék* mod n^2, de

$$2^{n-1} \not\equiv 1 \bmod n^2$$

β_4) vagy ha

$$3^{n-1} \not\equiv 1 \bmod n^2$$

β_5) végül, ha $n<3000$.[17]

---

[17] Ezt a tételt több más hasonlóval együtt «Über Produkte aufeinander folgender Zahlen» c. dolgozatom tartalmazza, melynek a varsói «Acta Arithmetica» legközelebbi számában kellett volna megjelennie. A háború

Az ismert

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+3x+1)^2-1$$

azonosság ugyanis problémánkat az (I) egyenletre vezeti vissza, tehát csak a tétel a) részével kizárt többi kitevőre kell bizonyítanunk. De az x^2+3x+1 quadratikus alaknak nem lehet $10a\pm3$ alakú primtényezője, már pedig NAGELL ismételten felhasznált segédtétele[13] szerint (I) fennállása esetén a négyzet alapjának oszthatónak kell lennie a kitevővel. A tételünkkel kizárt kitevők pedig összeférhetetlenek a quadratikus formával.

6. tétel. (I) *egyenletben a négyzet alapja sem 3-nál nagyobb primszám, $p>3$, sem primszámhatvány nem lehet.*

Mert különben a

$$p^{2k}-1 = y^n \quad (k \geqq 1)$$

egyenletnek kellene teljesülni, ahol n primszám, tehát

$$p^{2k} = y^n + 1 = (y+1)\frac{y^n+1}{y+1}$$

lenne, amiből

$$y+1 = p^\alpha$$

és

$$p^{2k} = p^\alpha(p^{\alpha(n-1)} - + \cdots - \binom{n}{2}p^\alpha + n) \qquad (8)$$

---

megszüntette az Acta Arithmetica-t, azért a tételt a jelen dolgozatban foglalt eredmények alkalmazásakép itt is reprodukálom.

Fenn idézett dolgozatom beküldése után néhány hónappal SZEKERES GYÖRGY úr kimutatta, hogy négy egymásután következő szám szorzata sohasem teljes hatvány, tehát tételünknél többet ért el. Igen ötletes módszerével azt is bebizonyította, hogy 9 vagy kevesebb egymásra következő szám szorzata nem lehet teljes hatvány. SZEKERES bizonyítása — melyet levélbeli szíves közléséből ismerek — lényegesen különbözik az enyémtől.

Felemlítek továbbá két legújabban megjelent dolgozatot, melyekben be van bizonyítva az a régen keresett tétel, hogy egymásra következő számok szorzata sohasem teljes négyzet. ERDŐS PÁL: Note on products of consecutive integers, The Journ. of the London Math. Soc. 14. 1939. 194—198. OLOV RIGGE: Über ein diophantisches Problem. IX. Congrès d. math. Scandinaves à Helsingfors 1938. és On a Diophantine Problem, Arkiv för Mat. Svenska Akad. Bd. 27 A. No. 3. 1939. 1—10.

következik. Ha $n \neq p$, a zárójelben álló kifejezés relatív prim p-hez, egyetlen lehetséges értéke azért $=1$, e szerint $a=2k$. De a

$$p^{2k}-1=(p^{2k}-1)^n$$

egyenlet $n>1$-re szembeszökően lehetetlen, tehát $n=p$. (Ez a többször idézett NAGELL-féle[13] segédtételből is azonnal következik, a fenti bizonyítás azonban teljesen elemi). A (8) egyenlet ezért a

$$p^{2k}=p^{a+1}A$$

alakot ölti, vagyis $A=1$ és így $a=2k-1$ és

$$p^{2k}-1=(p^{2k-1}-1)^p$$

és ezzel tételünket bebizonyítottuk, mert, ha $p>3$, $k>1$ a jobboldal jelentékenyen nagyobb. ($p=1$, $k=$tetszőleges, $p=3$, $k=1$ megoldások pedig feltevésünkkel ellenkeznek.)

7. tétel. *Az* (I) *diophantikus egyenlet egész számokban lehetetlen ha x a következö értékek valamelyike*

$$a)\quad x=pq, \qquad (p<q)$$

$$b)\quad x=pq^k, \qquad (p<q^k,\ k\geqq 1 \text{ egész szám})$$

ahol p és q primszámok,

$$c)\quad x=p_1^{\pi_1}p_2^{\pi_2}\ldots p_r^{\pi_r},$$

ahol $p_1, p_2, \ldots, p_r$ olyan primszámok, melyekre egyetlen olyan $i, j\leqq r$ kombinációt sem találhatunk, melyre $p_i\equiv 1 \bmod p_j$ lenne. (Ilyenek például a 3, 5, 17, 23, 29, 53, 83, 89 stb. primszámok.) A $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ kitevők tetszőleges egész számok.

Tételünk a *c)* esetben tüstént nyilvánvaló (mert az n kitevő az általánosság megszorítása nélkül most is primszám).

(I) az

$$x^2=(y+1)\frac{y^n+1}{y+1} \tag{9}$$

alakban írható. A NAGELL-féle segédtétel értelmében n a p_i primszámok valamelyike, például p_1. De (I) ismert és említett megoldásaira vezető $y=0$, és $=1$, meg $y=2$, $n=3$ praemissáinkkal kizárt esetektől eltekintve $\frac{y^n+1}{y+1}$-nek EULER[18] egy ismeretes tétele szerint van $2an+1=2ap_1+1$ alakú primtényezője, ami az x-ről tett feltevésünkkel ellenkezik. Q. e. d. EULER ezen tételét a továbbiakban is mélyen ki fogjuk használni; e szerint ha $y+1$-nek és $\frac{y^n+1}{y+1}$-nek van közös osztója, ez csak n az első hatványon lehet, a hányados *minden* primtényezője a felsorolt kivételeken kívül $2an+1$ alakú.

Tételünk másik bizonyítása, — melyet BAUER MIHÁLY úr volt szíves velem közölni — összetett n-re is érvényes.

Ismeretes ugyanis a következő tétel:[19] ha $F_n(y)$ (n tetszőleges!) az n-ik primitív körosztási polinom és $d>1$ racionális egész, akkor $F_n(d)$ a $d=2$, $n=6$ kivételével mindig osztható oly p «primitív» törzsosztóval, mely $\equiv 1 \bmod n$. Ámde

$$\frac{y^p+1}{y+1} = F_{2p}(y),$$

tehát $p=3$, $d=3$, illetőleg $d=2$ a kivételek. Az első esetben volna $x^2=3^2$ ami nem lehet, mert x-nek több törzstényezője van. A második esetben volna $x^2=2$ ami szintén ki van zárva. Q. e. d.

---

[18] L. EULER, 1747. Comm. Arithm. Coll. 1849. I. 60., II. 533. Tankönyvekben is: pl. WERTHEIM: Anfangsgr. d. Zahlenlehre, Braunschweig 1902. 298., E. CAHEN: Élém. de la théorie d. nombres. Paris, 1900. 328., E. LUCAS: Th. d. nombres, Paris, 1891. 341., BACHMANN: Nied. Zahlenth. I. Leipzig, 1902. p. 45., DICKSON: Hist. of the Th. of Numbers I. 89. Washington, 1919.

Lásd még S. PILLAI: On some Diophantine equations. The Journ. of. the Indian Math. Soc. 18., 1930. 291—295. és R. OBLÁTH: Ü. eine diophantische Gleichung. Wiad. Mat. 42. 1936. 127. Ezen dolgozat írásánál PILLAI úr dolgozatát még nem ismertem és csak a Jahrb. ü. d. Fortschr. d. Math. referatumából tudtam róla. Azóta megkaptam különlenyomatát, amelyből látom, hogy bizonyítása nem támaszkodik bebizonyítatlan sejtésekre, hanem teljesen korrekt.

[19] ZSIGMONDY: Monatshefte f. Math. u. Phys. 3. 265. 1892. BIRKHOFF and VANDIVER: Annals of Math. ser. 2. vol. 5. 173—180. On the Integral divisors of $a^n—b^n$. 1903/4. ZÁNYI L.: Kiegészítés a számtani haladványban fellépő törzsszámok tételéhez. Szegedi városi Dugonics András gimnázium 1935/36. évi Értesítője 2. §, p. 7.

Az a) és b) esetekben $y+1$ következő felbontásai képzelhetők :

a) $y+1=p$; $y+1=p^2$; $y+1=q$; $y+1=q^2$; $y+1=pq$

b) $y+1=p$; $y+1=p^2$; $y+1=q$; $y+1=q^\alpha$; $y+1=pq^\alpha$.

A harmadik, negyedik és ötödik esetben a bizonyítás az épp most kifejtetthez hasonló. Az ötödik eset elesik, mert akkor $\frac{y^n+1}{y+1}$-nek p-n és q-n kívül további primtényezői is lennének, a harmadik és negyedik $2aq+1>q>p$ miatt. Tehát csak a két első eshetőséggel kell foglalkoznunk:

$$p^2q^{2k}-1=(p-1)^p, \tag{10}$$

$$p^2q^{2k}=(p^2-1)^n+1. \tag{11}$$

(11)-ben $n=q$ (mert különben a jobboldal p^3-nel lenne osztható, míg a bal csak p^2-tel) és a bizonyítás az eddigiekhez hasonló.

Legyen most

$$\begin{aligned} p-1 &= 2^\varkappa k_1k_2, \\ pq^k\pm 1 &= 2k_1^p, \\ pq^k\mp 1 &= 2^{\varkappa p-1}k_2^p, \end{aligned} \tag{12}$$

ahol természetesen $(k_1, k_2)=1$. EULER [18] alatt idézett, épp most alkalmazott tétele szerint q és így q^k is

$$q^k=2ap+1$$

alakú. A (12) egyenletek tehát így írhatók

$$\begin{aligned} 2ap^2+p\pm 1 &= 2k_1^p, \\ 2ap^2+p\mp 1 &= 2^{\varkappa p-1}k_2^p. \end{aligned} \tag{12a}$$

Az ezen egyenletekben rejlő két esetet külön tárgyaljuk.

$$\begin{aligned} 2ap^2+p-1 &= 2k_1^p, \\ 2ap^2+p+1 &= 2^{\varkappa p-1}k_2^p, \end{aligned}$$

például az első egyenletből

$$a=\frac{2k_1^p-(p-1)}{2p^2}=k_1\frac{k_1^{p-1}-2^{k-1}k_2}{p^2}$$

következik. Hogy a egész szám lehessen, arra szükséges, hogy

$$k_1^{p-1}-2^{\varkappa-1}k_2\equiv 0 \mod p$$

legyen, ami FERMAT tétele folytán az

$$1 \equiv 2^{\varkappa-1}k_2 \mod p$$

kongruenciával egyértelmű. $2^{\varkappa-1}k_2$ azonban osztója $p-1$-nek (lásd a (12) egyenletet), tehát kisebb p-nél, ezért vagy

$$2^{\varkappa-1}k_2 = 1 \quad \text{vagy} \quad 2^{\varkappa-1}k_2 = -p+1;$$

az első egyenletből $\varkappa=1$, $k_2=1$ és $k_1=1$ amivel az ismert

$$p=3;\ q^k=1$$

kivételhez jutunk — amely persze ellenmond $q>p$ feltevésünknek. A második reláció

$$p-1=2^{\varkappa}k_1k_2=-2k_2(p-1); \qquad -2k_2=1$$

k_2 tehát nem egész szám

A számolás a felső előjelekkel hasonló és $k_2|(p-1)$ miatt

$$k_2=\frac{p+1}{2}$$

-re vezet, $p+1=2(p-1)$, ami ismét ugyanazon jól ismert $p=3$, $q=1$ kivételt adja.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

8. tétel. *Az* (I) *diophantikus egyenlet lehetetlen, ha benne x nagyobb* 3*-nál és a* 2 *valamely hatványával szomszédos szám,* azaz ha

$$x = 2^{\alpha} \pm 1. \tag{13}$$

T. i. x^2-1 felbontása ekkor ezt adja:

$$x \mp 1 = 2^{\alpha}, \quad x \pm 1 = 2\xi^n,$$

amiből

$$2^{\alpha-1} \pm 1 = \xi^n. \tag{14}$$

Ismeretes azonban,[20] hogy a (14) diophantikus egyenlet a sok-

[20] Ez GÉRONO (3) alatti tételéből következik, de expliciten is már többször kimondták, pl. de POLIGNAC: Math. Quest. Ed. Times 46,. 1887. pp. 109—110. $2^{\alpha}-1$-re ROHRBERG: Ztschrft. math. natw. Unt. 42. 1911. 34., Aufg. 293., $2^{\alpha}+1$-re OBLÁTH u. o. 45. 1914. 294., Aufg. 453.

szor említett triviális $a=1, 2, 4$ megoldásoktól eltekintve lehetetlen.

9. tétel. (I) *akkor sem lehetséges, ha benne x bármely teljes hatvánnyal szomszédos szám,* mert a

$$(k^a \pm 1)^2 - 1 = y^n$$

feltevés $\left(\text{ha } y=2^{\varkappa}\xi\eta,\ (\xi, \eta)=1,\ 2 \nmid \xi,\ \eta\text{-t írunk}\right)$ vagy a

$$k^a = 2\xi^n \quad \text{vagy a} \quad k^a = 2^{\varkappa n-1}\eta^n$$

felbontásra vezet. Az első lehetetlensége szembeszökő, hisz a jobboldal 2-t csak az első hatványon tartalmazza, a második pedig azért lehetetlen mert $(n, \varkappa n-1)=1$.

10. tétel. (I)-*ben x az ismert kivételtől eltekintve nem lehet $8a \pm 3$ alakú* mert ekkor $x^2-1=64a^2 \pm 48a+8=y^n$, azaz $8 \mid y^n$, de $16 \nmid y^n$, ennélfogva $n=3$ lenne, amely kitevőre (I) lehetetlen.

De $x=16a \pm 7$ *alakú sem lehet,* mert hasonlóan $16^2a^2 \pm 224a+ +48=y^n$ lenne, vagyis $2^4 \mid y^n$ de $2^5 \nmid y^n$, az n azért páros lenne, ami ki van zárva.

Általában, *ha* (I) *fennáll, x okvetlenül*

$$x = 2^{3000}A \pm 1$$

alakú, a (6*b*) formula és a (4) tétel közvetlen következményeképp. (6*a*) és (6*b*)-ből továbbá tüstént látni, hogy, *ha x nem osztható 3-mal.*

$$x = 3^{3000}A \pm 1.$$

Utóbbi tételeink a négyzet alapját restringálták, most bemutatandó két tételünk a magasabb hatvány alapját y-t szorítja meg.

11. tétel. (I)-*ben nem lehet*

$$y = 3a+1,$$

mert ekkor $x^2=y^n+1$ miatt $x^2 \equiv 2 \bmod 3$ lenne, ami lehetetlen, tehát *vagy x vagy, y osztható 3-mal.* Úgyszintén

$$y = 5a+1 \quad \text{vagy} \quad y = 5a+2$$

sem lehet, mert ± 2 az 5-nek quadratikus nem-maradéka. Sőt ugyanezen okból

$$y = ap+1$$

sem lehet, ahol $p=8b\pm 3$ *alakú primszám.* Ugyancsak a reciprocitási tételből következik

$$y=7a+2$$

lehetetlensége. Ugyanis $y^n+1=(7a+2)^n+1\equiv 2^n+1\equiv 3$ vagy 5 mod 7, s ezek a 7 nem-maradékai.

12. tétel. *Az* (I) *egyenletben*

α) nem lehet $y=2^\alpha p$, *ahol* p *törzsám;*

β) nem lehet $y=2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$;

γ) y *nem lehet* 6000*-nél kisebb primszámok aggregatuma,* azaz y *nem lehet* $y=2^\alpha p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1}\ldots q_s^{\beta_s}$ ahol $p_1, p_2, \ldots, q_s$ valamennyien 6000-nél kisebb törzsszámok.

δ) x *legalább* 14000 *jegyből áll.*

Bizonyítás. Az *α)* esetben ugyanis (n primszám) a (6) egyenlet alakja

$$p^n+1=2^{\alpha n-2},$$

ami a feltételeinknek meg nem felelő $p=3$ triviális megoldástól eltekintve Gérono[7] alatt idézett tétele és (14) formulánk szerint lehetetlen.

β) Itt két eset lehetséges. Vagy

$$x\mp 1=2.3^{n\beta};\ x\pm 1=2^{\alpha n-1}5^{n\gamma}, \qquad (A)$$
$$3^{n\beta}\pm 1=2^{\alpha n-2}5^{n\gamma},$$

de ez esetben (mert $n\beta>2$) $3^{n\beta}\pm 1$-nek Euler[18] tétele értelmében van $2n\beta a+1$ alakú primosztója, de mivel a jobboldalnak 5 az egyetlen páratlan primtényezője $n=2$-nek kellene lennie, ami lehetetlen. Vagy

$$x\mp 1=2.5^{n\gamma};\ x\pm 1=2^{\alpha n-1}3^{n\beta} \qquad (B)$$

ami ugyanúgy tárgyalható. 3 és 5 itt *bármely* 2^q+1 *alakú primszámmal pótolhatók.*

γ) is ugyanígy bizonyítható, de fel kell használni (4) tételünket, mely szerint $n>3000$. Ugyanis (6) az általánosság megszorítása nélkül így irható, ha $P=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$; $Q=q_1^{\beta_1}\ldots q_s^{\beta_s}$,

$$P^n\pm 1=2^{\alpha n-2}Q^n.$$

δ) bebizonyításánál szükségünk van egy segédtételre.

Segédtétel. *A* (I) *egyenletből következő* (6) *felbontásban nem lehet*

$$|\xi-2\eta|<c,$$

ahol $c<29$.

Vagyis

$$y=2\xi\eta=2\eta(2\eta\pm c), \tag{15}$$

ekkor a (6) egyenletek mintájára a

$$(2\eta+c)^n=2^{n-2}\eta^n\pm 1 \tag{A}$$
$$(2\eta-c)^n=2^{n-2}\eta^n\pm 1 \tag{B}$$

egyenletek valamelyikéhez jutunk. Az (*A*) elvetendő, mert

$$2^{n-2}\eta^n-1<2^{n-2}\eta^n+1<2^n\eta^n+1<(2\eta+c)^n,$$

tehát csak a (*B*) esettel kell foglalkoznunk.

Legyen először $c=1$. Ekkor (*B*) két egyenlete:

$$(2\eta-1)^n-1=2^{n-2}\eta^n;\quad (2\eta-1)^n+1=2^{n-2}\eta^n;$$

az első lehetetlen mod 2^{n-2}. A másodikból lesz

$$(2\eta)^n-n(2\eta)^{n-1}+\cdots+2n\eta=0;$$

$\eta=0$ megoldás elkülönítése után egyenletünk többi egész számú megoldása $2n$ osztója, ahol n primszám. A gyök tehát 2, n, vagy $2n$, de a (15) szerint mindenesetre az y osztója, 2 ismert tételek szerint ((14) formulánk) lehetetlen, n vagy $2n$ pedig azért, mert Nagell segédtétele[13] szerint $n\,|\,x$, tehát nem lehet $n\,|\,y$, hiszen $(x,\,y)=1$.

Legyen most $c>1$. Mivelhogy $(2\eta,\,2\eta-c)=1$, azért c páratlan. A tárgyalás konkretizálása végett csak a

$$(2\eta-c)^n-1=2^{n-2}\eta^n \tag{B_1}$$

egyenletet vizsgáljuk, mert a

$$(2\eta-c)^n+1=2^{n-2}\eta^n \tag{B_2}$$

egyenlet ugyanúgy kezelhető.

Kimutatjuk, hogy ezen egyenletek lehetetlenek, ha

$$c\pm 1=2^{\varrho+1}p^{\pi}, \tag{16}$$

ahol p tetszőleges primszám. Itt π, ϱ tetszés szerinti egészszámok.

(B_1) baloldala osztható $2\eta-(c+1)$-gyel, tehát a jobboldal is osztható vele, azaz $(2\eta-2^{\varrho+1}p^{\pi})\,|\,2^{n-2}\eta^n$; ha $\eta-2^{\varrho}p^{\pi}$-nek van páratlan primtényezője, ez η-ban is bennefoglaltatik és így $=p$. Azaz vagy

$$\eta-2^{\varrho}p^{\pi}=2^{\alpha}, \tag{17a}$$

vagy

$$\eta-2^{\varrho}p^{\pi}=2^{\alpha}p^{\beta}. \tag{17b}$$

(17a)-t és (16)-t (B_1)-be helyettesítve

$$(2^{\alpha+1}+1)^n-1=2^{n-2}(2^{\alpha}+2^{\varrho}p^{\pi})^n, \tag{18}$$

itt $\alpha>\varrho$, ha ugyanis $\alpha\leqq\varrho$ lenne, (18)-ból

$$(2^{\alpha+1}+1)^n-1=2^{(\alpha+1)n-2}(1+2^{\varrho-\alpha}p^{\pi})^n$$

következnék. Itt a baloldal osztható $2^{\alpha+1}$-gyel, de 2 magasabb hatványával nem, e szerint $\alpha+1=(\alpha+1)n-2$ lenne, aminek lehetetlensége nyilvánvaló. Tehát $\alpha>\varrho$; a most követett úton kapjuk, hogy

$$\alpha+1=(\varrho+1)n-2\,;\ \alpha-\varrho=(n-1)\varrho+n-3, \tag{19}$$

amit (18)-ba beírva

$$(2^{(\varrho+1)n-2}+1)^n-1=2^{(\varrho+1)n-2}(2^{\varrho(n-1)+n-3}+p^{\pi})^n\,; \tag{20}$$

(20) azonban lehetetlen p bármely értékénél. NAGELL[10] alatt idézett tételéből tudjuk, hogy az n kitevő mindenesetre $8a+1$ alakú, tehát a baloldal $\equiv$ a jobboldalt kiemelt tényezővel mod 3 vagy 5, és a jobboldali zárójelben álló kifejezésnek $\equiv 1$ mod 3 vagy 5 kell lennie. De, ha $p\neq 3$, e kifejezés $\equiv 0$, vagy -1 mod 3, míg, ha $p=3$, (20) lehetetlensége mod 5 azonnal világos, ha $\pi\not\equiv 3$ mod 4, de ha $\pi=4a+3$, akkor egyenletünk a 17 modulusra lehetetlen.

A (17b) esetben az előbbi mintájára kapjuk, hogy $\pi<\beta$, $\varrho<\alpha$ és hogy

$$(2^{(\varrho+1)n-2}p^{n\pi}+1)^n-1=2^{(\varrho+1)n-2}p^{n\pi}\{2^{\varrho(n-1)+n-3}p^{(n-1)\pi}+1\}^n \tag{20*}$$

ami lehetetlen mod 3, ha $p\neq 3$, és ha $p=3$, akkor mod 5.

Minthogy minden $c+1<30$ (és sok nagyobb) szám a (16) alatti alakban írható, segédtételünket teljesen bebizonyítottuk.

δ) bizonyítása. (I) aequivalens (6)-tal, mely így írható

$$2^n\eta^n \pm 4 = 4(2\eta - c)^n.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy $n>3000$, akkor, mivel 2η *β)* tételünk értelmében legalább 42 (sőt *γ)* tétel szerint $2\eta>12000$) azért $(2\eta)^n$ 4800-nál (sőt 12200-nál) több jegyből áll, de csak egyeseiben különbözik a jobboldali teljes hatvány 4-szeresétől. Fix c-vel $\left(\frac{2\eta-c}{2\eta}\right)^n$ a növekvő η-val monoton csökken és c-vel együtt nő. Segédtételünk szerint $c \geqq 29$. Ha tehát $\left(\frac{2\eta_0-29}{2\eta_0}\right)^{3000}>4$, akkor $\eta>\eta_0$, de ha $\eta_0=31000$, a tört 10 alapú logarithmusa $=$ $=0\text{·}6093\cdots>\log 4$. Mivel $y>(2\eta-29)^2>31000^{6000}$, azért $x>10^{14377\cdots}>10^{14000}$.

Q. e. d.

Segédtételünk lényegesen kiterjeszthető (a bizonyítást hosszúsága miatt elhagyom) s így kimutatható, hogy *x legalább* 29000 *jegyből áll.*

Most két oly tételt mutatunk be, melyek a dolgozatunk elején felvetett általánosabb kérdésre adnak bizonyos speciális esetekben feleletet.

13. tétel. *A*

$$2^{cn}p^{bn} \pm 1 = x^r \tag{II}$$

határozatlan egyenlet el nem tűnő egész számokban lehetetlen, ha p primszám alakja a következők valamelyike

$$p = 2^\alpha + 1, \tag{a}$$

$$p = 2^\alpha 3^\beta + 1, \tag{b}$$

$$p = 2^\alpha 5^\beta + 1, \tag{c}$$

$$p = 2^\alpha 7^\beta + 1, \tag{d}$$

$$p = 2^\alpha 11^\beta + 1, \tag{e}$$

A bizonyítás a (14) tételéhez hasonló, de mellőzöm, mert egy másutt megjelenő dolgozatom tartalmazza. Gondolatmenete, hogy tételünket EULER már felhasznált tétele [18] visszavezeti arra, hogy

$$\frac{(2^{nc}\pm 1)^k \mp 1}{2^{nc}}$$

nem teljes n-ik hatvány. Ezt teljesen elemi megbecslésekkel úgy bizonyítom, hogy a kifejezést két oly szám teljes n-ik hatványa közé szorítom, melyek különbsége $\frac{1}{n}$. NAGELL [9] alatt idézett tételével is bizonyítható az (a)—(d) esetekben, de nem elemien.

14. tétel. *Ha p valamely $p=2^\alpha 3^\beta+1$ prímszámot jelöl, a*

$$3^{cn}p^{bn}\pm 1 = x^r \tag{III}$$

határozatlan egyenlet egész számokban lehetetlen.

A bizonyítás NAGELL most idézett,[9] s az $x^3\pm 1=y^n$ lehetetlenségét megállapító tételének felhasználásával is sikerül, de néhány megbecslés segítségével teljesen elemi úton is elvégezhető.

EULER idézett [18] tételéből következik, hogy r csak 2 vagy 3 lehet.

Ha $r=2$, akkor

$$x^2\pm 1 = 3^{cn}p^{bn}$$

s ez lehetetlen, mert x^2+1 nem osztható 3-mal, a minusz jellel pedig azért nem állhat fenn, mert x páros.

Hátra van $r=3$

$$3^{cn}p^{bn}\pm 1 = x^3, \tag{21}$$

$$x\mp 1 = 3^u p^v,$$

a már használt gondolatmenettel nyerjük, hogy

$$x = 3^{cn-1}\pm 1,$$

aminek (21)-be való helyettesítése ezt adja:

$$p^{bn}-1 = 3^{cn-1}(3^{cn-2}\pm 1). \tag{22}$$

A p definíciójából könnyen levezethető, hogy $p^{bn}-1$, akkor és csak akkor osztható $3^{\beta+\gamma}$-val, s magasabb hatványával nem, ha $3^\gamma \mid b$ de $3^{\gamma+1}\nmid b$. Tehát

$$\beta+\gamma=cn-1\,;\quad \gamma=cn-\beta-1\,;\quad b=m.3^{cn-\beta-1}$$

és problémánk a

$$p^{mn3^{cn-\beta-1}}-1=3^{cn-1}(3^{cn-2}\pm1) \qquad (23)$$

lehetetlenségének kimutatására van visszavezetve. De (23) baloldala csakugyan lényegesen nagyobb a jobboldalánál.

Tényleg

$$p^{mn3^{cn-\beta-1}}-1=(2^\alpha 3^\beta+1)^{mn3^{cn-\beta-1}}-1>(2^\alpha 3^\beta)^{n3^{cn-\beta-1}}>3^{n\beta 3^{cn-\beta-1}}, \qquad (24)$$

de a kitevő a növekvő β-val monoton csökken,[21] ha $\beta>\frac{1}{\log 3}$, de β lehető legnagyobb értéke $cn-1$ (amint ezt akár a (22) egyenlet megtekintése, akár a kitevőben szereplő $3^{cn-\beta-1}$ szám mutatja), azaz

$$n\beta 3^{cn-\beta-1}>n(cn-1).$$

A (24) egyenlőtlenség tehát így folytatható:

$$3^{n\beta 3^{cn-\beta-1}}>3^{n(cn-1)}>3^{2(cn-1)}>3^{cn-1}(3^{cn-2}\pm1)$$

q. e. d.

Használt módszereink további esetekben is célhoz vezetnek, de a megbecslés a növekvő p-vel általában mindinkább bonyolultabbá válik. Nem tartjuk tehát valószínűnek, hogy általános p-nél is íly módon lehetne a tételt bebizonyítani.

Az eddigi lehetetlenségi tételek kiegészítésekép megadunk egy tételt, mely (I) határozatlan egyenlet esetleges megoldásainak számát korlátozza. Thue híres tételéből már Nagell következtette, hogy (I)-nek csak véges számú megoldása lehet. Ezt a megállapítást élesíti a

15. tétel. *A* (I) *határozatlan egyenletnek* (adott n mellett) *legföljebb egyetlenegy megoldása lehet el nem tűnő egész számokban.*

---

[21] Ha ugyanis β szerint differenciálunk, a differenciálhányados

$$n3^{cn-\beta-1}-n\beta 3^{cn-\beta-1}\log 3=n3^{cn-\beta-1}(1-\beta\log 3).$$

A bizonyítás SIEGEL azon igen nevezetes tételén[22] alapszik, mely szerint az

$$|ax^n - by^n| \leq k$$

egyenlőtlenségnek legfeljebb egy nem triviális egészszámú megoldása van, ha $n \geq 3$, és

$$|ab|^{\frac{1}{2}} > 188nk^4.$$

Már meggyőződtünk róla, hogy (I) a

$$2^{p-2}\eta^p \pm 1 = \xi^p$$

határozatlan egyenlettel együtt lehetséges, vagy lehetetlen. Minthogy a (4) tétel szerint (I)-ben az esetleg lehetséges legkisebb kitevő $n > 3000$, azért SIEGEL tételének praemissái bőségesen teljesülnek és ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Obláth Richárd.

SUR LES NOMBRES x^2—1.

L'article précédent s'occupe de la question de savoir s'il y a deux nombres consécutifs (sauf —1, 0; 0, 1; 8, 9) qui sont des puissances parfaites, l'un et l'autre. Après avoir rappelé les progrès réalisés par EULER, V. A. LEBESGUE, GÉRONO et M. NAGELL nous développons quelques propositions, spécialement sur l'impossibilité de l'équation diophantienne

$$x^2 - 1 = y^p, \tag{Ia}$$

où $p > 3$ désigne un nombre premier.

Parmi nos résultats, nous relevons les suivants:

Théorème 1 du texte hongrois. *Quand les nombres* 2^{p-2} *et* 2^{p-3} *sont des nonrésidus de puissance* mod p^2, *l'équation* (I*a*) *est impossible en nombres entiers non nuls.*

---

[22] C. SIEGEL: Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Abhandl. d. preuss. Akad. d. Wiss. Phys.—math. Kl. Jahrgang 1929. Berlin, 1930. pp. 1—70., speciálisan p. 70., bizonyítás nélkül. A célszerűen megválasztott hypergeometrikus függvény sajátságait felhasználó igen szép bizonyítást lásd: Die Gleichung $ax^n - by^n = c$ c. dolgozatában. Math. Ann. 114., 1937. pp. 57—68.

L'impossibilité subsiste même si 2^{p-2} est un résidu pourvu qu'on ait

$$2^{p-1} \not\equiv 1 \mod p^2.$$

Théorème 2 du texte. (Ia) *est impossible si l'on a*

$$3^{p-1} \not\equiv 1 \mod p^2.$$

Ces théorèmes montrent l'impossibilité de (Ia) pour tout exposant $p<3000$.

D'autres théorèmes *restreignent* x et y.

Nous appliquons les théorèmes obtenus au *produit de quatre nombres consécutifs* et nous donnons un théorème (théorème 5 du texte) *sur l'impossibilité de l'équation diophantienne*

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = y^n.$$

Les démonstrations reposent sur quelques résultats récents et intéressants de MM. Lubelski, Vandiver et Nagell. Nous nous servons en outre de quelques évaluations élémentaires. Théorème 11 est une application de la loi de réciprocité de Legendre.

Nous démontrons enfin, en nous appuyant sur le théorème célèbre de M. Siegel, que l'équation (Ia) n'admet qu'une seule solution au plus.

Quelques-uns de ces résultats (les théorèmes 1, 2, 6, 7, 13 et 15) paraîtront en langue allemande dans le périodique hollandais *Mathematica.*

Richard Obláth.

EUKLIDES ALGORITMUSÁRÓL VALÓS MÁSODFOKÚ SZÁMTESTEKBEN.

Legyen $R(\sqrt{m})$ tetszésszerinti másodfokú számtest a racionális számok R teste fölött, $m(\neq 1)$ négyzetmentes racionális egész szám. Akkor mondjuk, hogy $R(\sqrt{m})$-ben létezik Euklides algoritmusa, ha a test bármely két α, $\beta(\neq 0)$ egész számához van a testben egy harmadik γ egész szám úgy, hogy $|N(\alpha-\beta\gamma)| < |N\beta|$, ahol N a norma jele.

Negatív m-re a kérdés elintézett, mégpedig pontosan öt ilyen m mellett létezik Euklides algoritmusa, ezek: $m = -1, -2, -3, -7, -11$. Ezután legyen m pozitív. Heilbronn[1] kimutatta, hogy Euklides algoritmusa csak véges számú m mellett létezik. Ezt megelőzőleg Erdős és Ko[2] hasonló eredményt nyertek törzsszám m mellett. Azonban egyik dolgozatban sem sikerült felső korlátot megadni az olyan m-ekre, amelyekre Euklides algoritmusa létezik, s így a régebbi megállapítások nem váltak túlhaladottakká. Ezek: Euklides algoritmusa létezik a következő tizenöt m mellett: $m = 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19. 21, 29, 33, 37, 41, 57$. Egyéb m mellett csak akkor létezhetik Euklides algoritmusa, ha $m \equiv 1 \pmod 4$ és m vagy törzsszám, vagy két $4l+3$ alakú törzsszám szorzata. Bebizonyítom, hogy ebben az utóbbi esetben még az is kell, hogy az m egyik törzstényezője 3 legyen.

Az összes régebbi irodalmi adatok megtalálhatók Behrbohm

---

[1] H. Heilbronn, On Euclid's algorithm in real quadratic fields, Proc. Cambridge Philos. Soc. 34 (1938), 521—526.

[2] P. Erdős and Ch. Ko, Note on the Euklidean algorithm, Journ. London Math. Soc. 13 (1938), 3—8.

és szerző[3] dolgozatának első és utolsó oldalán. Ugyanebben a dolgozatban található a fenti eredményeknek kevés kiegészítése. Ezeket is figyelembe véve, további vizsgálatra várnak még csak az olyan m ($\geqq 61$, $\equiv 1 \pmod 4$), $=p$ vagy $3p$; p törzsszám) számok, amelyekben $m=p$ mellett $p \not\equiv 5 \pmod{24}$ és $m=3p$ mellett $p \equiv 3 \pmod 8$. (V. ö. [3] dolgozat 204., 205. o.) Könnyű volt (a [3] dolgozat 198. o. alapján) kideríteni, hogy ezekből 3001-ig csupán $m=61$, 73, 89, 97, 109, 113, 137, 193, 241, 281, 313, 337, 457, 601, 3.43, 3.59, 3.67, 3.83, 3.107, 3.163, 3.227 mellett létezhetik Euklides algoritmusa.

*

Tegyük fel, hogy, ellentétben az állítással, van egy olyan $m=pq$ ($7 \leqq p < q$, $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$), p, q tözsszámok), amelyre Euklides algoritmusa létezik. Legyen $\varepsilon = \frac{q}{p} (>1)$. Latin kisbetűk jelentsenek racionális egész számokat. Ha $a>0$ és

$$\left(\frac{x}{p}\right) = \left(\frac{x+1}{p}\right) = \cdots = \left(\frac{x+a}{p}\right), \tag{1}$$

ahol ( ) a Legendre—Jacobi-féle jel, akkor az $x, x+1, \ldots, x+a$ sorozatot (p-re nézve $a+1$ tagú) következésnek nevezem. Ezt pozitívnak vagy negatívnak nevezem a szerint, amint az (1)-beli számok közös értéke 1 vagy -1. Kimutatom elébb a következő A.—N. alattiakat, s azután ellenmondást fogok nyerni.

A. Ha $x, x+1, \ldots, x+a$ p-re nézve következés, akkor az $x\varepsilon$, $(x+a)\varepsilon$ számközből minden y-ra fennáll

$$\left(\frac{y}{q}\right) = \left(\frac{x}{p}\right).$$

B. Ha $y < x\varepsilon < y+1$, akkor nem lehet

$$\left(\frac{y}{q}\right) = \left(\frac{y+1}{q}\right) = -\left(\frac{x}{p}\right). \tag{2}$$

---

[3] H. Behrbohm u. L. Rédei, Der Euklidsche Algorithmus in quadratischen Körpern, Journ. f. Math. 174 (1936), 192—205.

C. Ha $\left(\frac{x}{p}\right)=\left(\frac{x+a}{p}\right)$ $(0<x<x+a<p)$, akkor az $x\varepsilon<y<$ $<(x+a)\varepsilon$, $py\equiv qx$ (mod a) feltételeket kielégítő minden y-ra ($\varepsilon>1$ miatt ilyen mindig van)

$$\left(\frac{y}{q}\right)=\left(\frac{a}{pq}\right)\left(\frac{x}{p}\right). \tag{3}$$

D. Ha $0<x_1, x_2,\ldots, x_k<p-a$ $(a\geqq 2)$, $x_1, x_2,\ldots, x_k$ páronként inkongruensek mod a és

$$\left(\frac{x_1}{p}\right)=\left(\frac{x_2}{p}\right)=\cdots=\left(\frac{x_k}{p}\right)=\left(\frac{x_1+a}{p}\right)=$$
$$=\left(\frac{x_2+a}{p}\right)=\cdots=\left(\frac{x_k+a}{p}\right),$$

akkor az $x_i\varepsilon$, $(x_i+a)\varepsilon$ $(i=1, 2,\ldots, k)$ számközökben van egy-egy y_i úgy, hogy $y_1, y_2,\ldots, y_k$ is páronként inkongruensek mod a és

$$\left(\frac{y_1}{q}\right)=\left(\frac{y_2}{q}\right)=\cdots=\left(\frac{y_k}{q}\right)=\left(\frac{a}{pq}\right)\left(\frac{x_1}{p}\right).$$

E. Ha p-re nézve van $a+1$ $(\geqq 3)$ tagú következés, akkor

$$1=\left(\frac{2}{pq}\right)=\left(\frac{3}{pq}\right)=\cdots=\left(\frac{a}{pq}\right).$$

F. Fennáll $p\geqq 19$ és

$$1=\left(\frac{2}{pq}\right)=\left(\frac{3}{pq}\right).$$

G. Ha $\left(\frac{x}{p}\right)=\left(\frac{x+a}{p}\right)$ $(0<x<x+a<p,\ a\,|\,24)$, akkor az $x\varepsilon<y<(x+a)\varepsilon$, $y\equiv x$ (mod a) feltételeket kielégítő minden y-ra fennáll

$$\left(\frac{y}{q}\right)=\left(\frac{x}{p}\right).$$

H. Ha teljesül

$$\left(\frac{x}{p}\right)=-1, \left(\frac{x+1}{p}\right)=\left(\frac{x+2}{p}\right)=\cdots=\left(\frac{x+a-1}{p}\right)=1, \qquad (5)$$
$$\left(\frac{x+a}{p}\right)=-1, \ (a=3,\ 4),$$

akkor $\varepsilon<\frac{a}{a-2}\cdot$

K. Fennáll $p\geqq 31$ és $\varepsilon<2$.

L. Nem lehet $1=\left(\frac{2}{pq}\right)=\left(\frac{3}{pq}\right)=\cdots=\left(\frac{p-1}{pq}\right)\cdot$

M. Ha

$$1=\left(\frac{2}{pq}\right)=\left(\frac{3}{pq}\right)=\cdots=\left(\frac{t-1}{pq}\right)=-\left(\frac{t}{pq}\right),$$
$$-\left(\frac{s}{p}\right)=\left(\frac{s+1}{p}\right)=\left(\frac{s+2}{p}\right)=\cdots=\left(\frac{t-1}{p}\right)=-\left(\frac{t}{p}\right)(t-s\geqq 2),$$

akkor $\varepsilon>\frac{s+1}{s}\cdot$

N. Ha $2\leqq r\leqq p-2$,

$$1=\left(\frac{2}{pq}\right)=\left(\frac{3}{pq}\right)=\cdots=\left(\frac{r}{pq}\right),$$

de nem

$$1=\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\frac{3}{p}\right)=\cdots=\left(\frac{r}{p}\right),$$

akkor $\varepsilon<\frac{r+1}{r}\cdot$

Az A. igaz a [3] dolgozat 199. oldala szerint ama megszorítások mellett, hogy a tekintett következés pozitív és $0<x<p$.[4] Az első megszorítás elhagyható azért, mert $\left(\frac{-1}{p}\right)=\left(\frac{-1}{q}\right)=-1$, s így $p-a-x, p-a-x+1,\ldots, p-x$ az eredetivel ellenkező jellegű (azaz az egyik pozitív, a másik negatív) következés, s hozzá az y számok helyett a $q-y$ számok tartoznak. A második megszorítás is elejthető, mert $p\varepsilon=q$ miatt bármely u mellett az

[4] Az idézett helyen alulról a 6-ik sorban «$=$» helyébe «$\neq 1$,» teendő.

$x+up, x+up+1, \ldots, x+up+a$ következéshez az $y+uq$ számok tartoznak.

A [3] dolgozat most felhasznált helyén $p<q$ nincs kikötve, s így A. fennáll p, q helyett a q, p párra is, amikor természetesen ε helyébe $\frac{1}{\varepsilon}$ lép. Ha tehát $y<x\varepsilon<y+1$, akkor $y\frac{1}{\varepsilon}<x<(y+1)\frac{1}{\varepsilon}$ miatt (2) nem állhat fenn, s így helyes a B.

A C.-t bebizonyítandó, van egyetlen olyan $n\,(0 \leqq n < a)$, amelyre $a \mid x+np$. Akkor

$$(y+nq)p = py + npq \equiv qx + npq = (x+np)q \pmod a$$

miatt $a \mid y+nq$. Legyen $u = \frac{1}{a}(x+np)$, $v = \frac{1}{a}(y+nq)$. Akkor u, v egészek, $u+1 = \frac{1}{a}(x+a+np)$, továbbá

$$\left(\frac{u}{p}\right) = \left(\frac{ax}{p}\right) = \left(\frac{a(x+a)}{p}\right) = \left(\frac{u+1}{p}\right), \quad \left(\frac{v}{q}\right) = \left(\frac{ay}{q}\right),$$

végül

$$u\varepsilon = \frac{x\varepsilon+nq}{a} < v < \frac{(x+a)\varepsilon+nq}{a} = (u+1)\varepsilon.$$

Ezek szerint az $x=u$, $a=1$ értékekre alkalmazott A.-ból $\left(\frac{v}{q}\right) = \left(\frac{u}{p}\right)$, s így helyes a C.

Ennek az $x = x_1, x_2, \ldots, x_k$ értékekre való alkalmazásával előáll D.

Az E. bizonyításához legyen $x, x+1, \ldots, x+a$ egy $a+1$-tagú következés p-re nézve. Akkor a C.-beli (minden) y megvan az A.-beliek között, s így $\left(\frac{a}{pq}\right) = 1$. Ebből az $x, x+1, \ldots, x+b$ $(2 \leqq b \leqq a)$ következésre való alkalmazással nyerjük E.-t.

Jacobsthal[5] szerint $p \geqq 11$ mellett van háromtagú következés és Hasse[6] szerint $p \geqq 19$ mellett van négytagú következés, s így

---

[5] E. Jacobsthal, Anwendungen einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste, Dissertation Berlin 1906, 290.

[6] H. Hasse, Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern, Abh. Math. Sem. Hamburg 10 (1934), 325—348. Tekintetbe jön a 347. o.

E. szerint $p \geqq 11$ mellett $\left(\frac{2}{pq}\right)=1$, $p \geqq 19$ mellett $\left(\frac{3}{pq}\right)=1$. Elegendő tehát F.-hez annyit kimutatni, hogy sem $p=7$, sem $p=11$, $q \equiv 3 \pmod 8$ nem lehetséges.

Ha $p=7$, akkor $\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{6}{p}\right)=-1$, s így elegendő minden q-hoz megadni az $\frac{5q}{7}, \frac{6q}{7}$ számközben egy olyan y számot, amely négyzetes maradék mod q, mert akkor ellenmondást nyerünk A.-val. Ha $q<154$, akkor a

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc} q= & 11 & 19 & 23 & 31 & 43 & 47 & 59 & 67 & 71 & 79 & 83 & 103 & 127 & 131 & 139 & 151 \\ y= & 9 & 16 & 18 & 25 & 36 & 36 & 49 & 49 & 54 & 64 & 64 & 81 & 100 & 100 & 100 & 121 \end{array}$$

táblázat feltűntet egy-egy ilyen y-t, ha pedig $q>154$, akkor a $\sqrt{\frac{5q}{7}}, \sqrt{\frac{6q}{7}}$ számköz hosszabb 1-nél, tehát tartalmaz egész számot, s egy ilyennek a négyzete vehető y számára.

Ha $p=11$, akkor $\left(\frac{6}{p}\right)=\left(\frac{7}{p}\right)=\left(\frac{8}{p}\right)=-1$ miatt az elébbihez hasonlóan a $\frac{6q}{11}, \frac{8q}{11}$ számközt használhatjuk. Most elegendő a $q<77$ $(q \equiv 3 \pmod 8)$ eseteket felölelő következő táblázat:

$$\begin{array}{lcccc} q= & 19 & 43 & 59 & 67 \\ y= & 11 & 25 & 36 & 49 \end{array}$$

Ezzel F.-et bebizonyítottuk.

E szerint $p \equiv q \pmod{24}$, tehát C.-ben $a \mid 24$ mellett $y \equiv x \pmod a$, s így helyes a G.

A H.-t illetően $x+1, x+2, \ldots, x+a-1$ következés p-re nézve, s így A. szerint az $(x+1)\varepsilon$, $(x+a-1)\varepsilon$ számköznek minden y egész számára fennáll $\left(\frac{y}{q}\right)=\left(\frac{x+1}{p}\right)=1$. A G. szerint ugyanennek (mert még az $x\varepsilon$, $(x+a)\varepsilon$ számköznek is) minden $y \equiv x \pmod a$ számára fennáll $\left(\frac{y}{q}\right)=\left(\frac{x}{p}\right)=-1$. Ebből ellenmondás csak akkor nem áll elő, ha $(x+a-1)\varepsilon-(x+1)\varepsilon = (a-2)\varepsilon<a$, amivel H.-t bebizonyítottuk.

A továbbiakhoz elébb megjegyzem, hogy HASSE[6] szerint

$a=3$, $p \geqq 19$ mellett (5) megoldható, s hasonló $a=4$, $p \geqq 31$ mellett is igaz.

Az utóbbi HASSE képletéből közvetlenül nem olvasható ki, s ezért röviden vázolom az erre vonatkozó számítást. Az (5)-öt $a=4$ mellett kielégítő $x(>0, <p)$ értékek számossága

$$\nu = \frac{1}{32}\sum\left(1-\left(\frac{x}{p}\right)\right)\left(1+\left(\frac{x+1}{p}\right)\right)\left(1+\left(\frac{x+2}{p}\right)\right)\left(1+\left(\frac{x+3}{p}\right)\right)$$
$$\left(1-\left(\frac{x+4}{p}\right)\right)-\frac{\delta}{2},$$

ahol az összeg kiterjesztendő az $x=0, 1,\ldots, p-1$ értékekre, s $\delta=1$, ha $p\equiv 7 \pmod{24}$, különben $\delta=0$. Minthogy $p\equiv 3 \pmod 4$, azért az összegezendőt kiszorozva, törölhetők a $(\div)$ jelekben páratlan (1, 3 és 5) méretű tagok. Minthogy

$$\sum\left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x+b}{p}\right)=-1 \quad (p \dagger b),$$

azért a négyméretű tagokra HASSE képletét alkalmazva:

$$32\nu = p+3-16\delta+10\eta\sqrt{p},$$

ahol $|\eta|<1$. Ebből $p>125$ $(p\equiv 7 \pmod{24})$ és $p>95$ $(p \not\equiv 7 \pmod{24})$ mellett $\nu>0$. A még megmaradt $p \geqq 31$ értékekre $\nu>0$ közvetlenül igazolható.

Ezek után kimutatom K.-t. F. szerint $p \geqq 19$, s így a fentiek szerint H. miatt $\varepsilon<3$ és $p\geqq 31$ mellett $\varepsilon<2$. Elég még csak azt kimutatni, hogy $p=19$ és $p=23$ nem lehetséges. Ekkor ugyanis $\varepsilon<3$ és az F.-ből folyó $p\equiv q \pmod{24}$ miatt csupán $q=43$, illetve $q=47$ jönnek tekintetbe. Mindkét esetben ellenmondást nyerünk A.-ból, mert $p=19$, $q=43$ mellett $\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\frac{3}{p}\right)=-1$, $2\varepsilon<6<3\varepsilon$, $\left(\frac{6}{q}\right)=1$ és $p=23$, $q=47$ mellett $\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\frac{3}{p}\right)=1$, $2\varepsilon<5<3\varepsilon$, $\left(\frac{5}{q}\right)=-1$. Ezzel K.-t bebizonyítottuk.

Ha L. hamis lenne, akkor $x=1, 2,\ldots, p-1$ mellett

$$\left(\frac{x}{q}\right)=\left(\frac{x}{p}\right)=-\left(\frac{p-x}{p}\right)=-\left(\frac{p-x}{q}\right)=\left(\frac{x-p}{q}\right).$$

Ha tehát p' a $pp' \equiv -1 \pmod{q}$ kongruencia egyik megoldása, akkor $p'x$, $p'x+1$ kéttagú következés q-ra nézve, mégpedig mindezek a párok mod q különbözők. E szerint LAGRANGE ismert tétele alapján $p-1 \leqq \frac{q-3}{2}\cdot$ Ebből $q \geqq 2p+1$, ami ellenmond K.-nak, s így L. helyes.

Az M. bizonyításához tegyük fel, hogy vele ellentétben $\varepsilon < \frac{s+1}{s}\cdot$ Akkor $s\varepsilon < s+1$, s így az $s\varepsilon$, $t\varepsilon$ számközben megvannak az $s+1, s+2, \ldots, t$ számok. Ezek egy teljes maradékrendszert képeznek $\mathrm{mod}\,(t-s)$. Ezért C.-nek az $x=s$, $a=t-s$ elemekre való alkalmazásából azt nyerjük, hogy van egy olyan y, amelyre

$$\left(\frac{y}{q}\right) = \left(\frac{t-s}{pq}\right)\left(\frac{s}{p}\right) \quad (s+1 \leqq y \leqq t).$$

Azonban a feltevések miatt $\left(\frac{y}{q}\right) = -\left(\frac{s}{p}\right)$, $\left(\frac{t-s}{pq}\right) = 1$, amely ellenmondással M.-et bebizonyítottuk.

Az N. bizonyításához feltételezem, hogy — amennyiben $r \geqq 3$ — helyes a hasonló állítás r helyett $r-1$-re. Mindenekelőtt kimutatom, hogy $\varepsilon < \frac{r}{r-1}\cdot$ Ez K. szerint igaz $r=2$ mellett. Ugyancsak igaz ez az egyenlőtlenség a feltevés miatt $r \geqq 3$ mellett is, kivéve az $1 = \left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{3}{p}\right) = \cdots = \left(\frac{r-1}{p}\right)$ esetet. Végül ebben az utóbbi esetben a feltevések miatt $\left(\frac{r}{p}\right) = \left(\frac{r}{q}\right) = -1$. Minthogy most $1, 2, \ldots, r-1$ (legalább 2 tagú) következés p-re nézve és K. szerint $1.\varepsilon < 2 < r$, azért A. miatt $(r-1)\varepsilon < r$, s így tényleg mindig $\varepsilon < \frac{r}{r-1}\cdot$

Tegyük fel ezután, hogy ellentétben az állítással $\varepsilon > \frac{r+1}{r}\cdot$ Az alábbi 1)—222) eseteket különböztetem meg [általában $ab\ldots ef)$ alesete $ab\ldots e)$-nek]:

1) $\begin{array}{c|cc} & r-1 & r+1 \\ p & \mu & \mu \end{array}$ [7] $(\mu = \pm 1)$. Akkor $\left(\frac{r^2-1}{p}\right) = \left(\frac{r^2}{p}\right) = 1$, továbbá

[7] A fenti táblázat $\left(\frac{r-1}{p}\right) = \mu$, $\left(\frac{r+1}{p}\right) = \mu$ helyett áll. A μ (később ν és ϱ is) 1 vagy -1. A későbbi táblázatok hasonlóan értendők.

$(r^2-1)\varepsilon = (r-1)\varepsilon.(r+1) < r(r+1)$, $r^2\varepsilon = r.r\varepsilon > r(r+1)$, s így A. szerint $\left(\frac{r(r+1)}{q}\right) = 1$, $\left(\frac{r}{q}\right) = \left(\frac{r+1}{q}\right)\cdot$ Most tehát

$$\begin{array}{cccc} & r-1 & r & r+1 \\ p & \mu & \nu & \mu \\ q & \mu & \nu & \nu \end{array}$$

11) $\mu = \nu$. Legyen akkor s az $1, 2, \ldots, r-2$ sorozat legnagyobb olyan eleme, amelyre $\left(\frac{s}{p}\right) = -\mu$. Hasonlóan legyen t az $r+2, r+3 \ldots, p-1$ sorozat legkisebb olyan eleme, amelyre $\left(\frac{t}{p}\right) = -\mu$. Ezek közül s létezik az N.-ben adott feltevések miatt. A t létezése abból következik, hogy ha $r-1, r, \ldots, p-1$ p-re nézve következés lenne, akkor $(r-1)\varepsilon < r$ miatt A.-ból azt nyernők, hogy $r, r+1, \ldots, p-1$ (hasonló jellegű) következés q-ra nézve, ami ellenmondásra vezet L.-lel.

Minthogy

$$(r-1)\varepsilon < r,\ (t-1)\varepsilon = r\varepsilon + (t-r-1)\varepsilon > (r+1) + (t-r-1) = t,$$

azért A. szerint

$$\left(\frac{r}{q}\right) = \left(\frac{r+1}{q}\right) = \cdots = \left(\frac{t}{q}\right) = \mu.$$

Mindezek szerint most teljesülnek az M.-beli feltevések, s így $\varepsilon > \frac{s+1}{s}\cdot$ Ez azonban $s \leq r-2$ miatt ellenmondás az $\varepsilon < \frac{r}{r-1}$ egyenlőtlenséggel.

12) $\mu = -\nu$. Minthogy $(r-1)\varepsilon < r+1 < (r+1)\varepsilon$ és $r+1 \equiv r-1$ (mod 2), azért ellenmondásunk van az $x = r-1$, $a = 2$ értékekre alkalmazott G.-vel.

$$2)\quad \begin{array}{ccc} & r-1 & r+1 \\ p & \mu & -\mu \end{array}$$

21) $\begin{array}{cccc} & r-1 & r & r+1 \\ p & \mu & \mu & -\mu \end{array}$ Most $(r-1)\varepsilon < r+1 < r\varepsilon$ miatt A. szerint $\left(\frac{r+1}{q}\right) = \mu$. Az 11)-hez hasonlóan értelmezett s és $t = r+1$ ismét kielégítik az M.-beli feltevéseket, s így újra az 11)-beli ellenmondást nyerjük.

22) $\begin{array}{cccc} & r-1 & r & r+1 \\ p & \mu & -\mu & -\mu \end{array}$ Most $r\varepsilon = (r-1)\varepsilon + \varepsilon < r+2 < r\varepsilon+1 <$ $< (r+1)\varepsilon$ miatt A. szerint $\left(\frac{r+2}{q}\right) = -\mu$. Fennáll tehát

$$\begin{array}{ccccc} & r-1 & r & r+1 & r+2 \\ p & \mu & -\mu & -\mu & \\ q & \mu & -\mu & & -\mu \end{array}$$

221) $\left(\frac{r+1}{q}\right) = -\mu$. Gondoljunk μ helyett $-\mu$-t írva, legyen $s = r-1$, s értelmezzük t-t úgy, mint 11)-ben. Az M.-beli feltételek ismét ki vannak elégítve, s így $\varepsilon > \frac{s+1}{s} = \frac{r}{r-1}$, ami ellenmondás.

222) $\left(\frac{r+1}{q}\right) = \mu$. Az F. szerint $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right)$, s így

$$\begin{array}{cccc} & 2r-2 & 2r & 2r+2 \\ p & \varrho & -\varrho & \\ q & & -\varrho & \varrho \end{array}$$

Minthogy $(2r-2)\varepsilon < 2r = (r+1)+(r-1) < r\varepsilon + (r-1) < (2r-1)\varepsilon$ és $(2r-1)\varepsilon < 2r+\varepsilon < 2r+2 < 2r\varepsilon$, azért A.-t a $\left(\frac{2r-1}{p}\right) = \varrho$ esetben a $2r-2$, $2r-1$ következésre, a $\left(\frac{2r-1}{p}\right) = -\varrho$ esetben a $2r-1$, $2r$ következésre alkalmazva, ellenmondás áll elő. E szerint $p \mid 2r-1$, $r = \frac{p+1}{2}$, $q = p\varepsilon < \frac{pr}{r-1} < p+3$, ami lehetetlen. Ezzel N.-et bebizonyítottuk.

Az F. és L. alapján jelentse ezentúl u azt a számot, amelyre

$$1 = \left(\frac{2}{pq}\right) = \left(\frac{3}{pq}\right) = \cdots = \left(\frac{u-1}{pq}\right), \left(\frac{u}{pq}\right) = -1 \tag{6}$$

$$(5 \leq u \leq p-2).$$

Közvetlenül csupán a $4 \leq u \leq p-1$ egyenlőtlenségek adódnának, azonban u szükségképpen (páratlan) törzsszám. Megkülönböztetem az *a)*, *b)* eseteket a szerint, amint $1 = \left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{3}{p}\right) = \cdots = \left(\frac{u-1}{p}\right)$ nem áll fenn vagy fennáll.

a) Most N. miatt $\varepsilon < \frac{u}{u-1}\cdot$ Minthogy $(u-1)\varepsilon < u < u\varepsilon$, azért A. és (6) miatt $u-1$, u nem lehet következés p-re nézve, s így

	$u-1$	u
p	μ	$-\mu$
q	μ	μ

Legyen s az $1, 2, \ldots, u-2$ sorozat legnagyobb olyan eleme, amelyre $\left(\frac{s}{p}\right) = -\mu$. Ez az s a jelen *a)* esetben létezik. Legyen még $t = u$. Akkor teljesülnek M. feltételei, s így $\varepsilon > \frac{s+1}{s} > \frac{u}{u-1}$, ami ellenmondás.

b) Most a helyzet a következő:

	1	2	...	$u-1$	u	$u+1$	$u+2$	$u+3$	$u+4$
p	1	1	...	1	-1	1		1	

	1	2	...	$v-1$	v	$v+1$	$v+2$	$v+3$	$v+4$	$v+5$
q	1	1	...	1	-1	1		1		1

ahol v páratlan törzsszám, $v \geqq u+2$. Ugyanis (6) és a *b)* feltevés szerint mindkét táblázat helyes $u-1$-ig. Továbbá nem lehet $\left(\frac{u}{p}\right) = 1$, mert akkor $1, 2, \ldots, u$ következés p-re nézve, s így $1 < \varepsilon < 2$ és A. miatt $2, 3, \ldots, u$ következés q-ra nézve, tehát $\left(\frac{u}{q}\right) = 1$, ami ellenmond (6) utolsó egyenletének. E szerint $\left(\frac{u}{p}\right) = -1$, $\left(\frac{u}{q}\right) = 1$. Legyen ezután v a legkisebb pozitív négyzetes nemmaradék mod q. Akkor v tényleg páratlan törzsszám, $v \geqq u+2$. Minthogy u, v páratlan törzsszámok és $u \geqq 5$, $v \geqq 7$, azért nyilván helyesek a táblázatok összes adatai. Minthogy u, $u+2$, $u+4$ közül az egyik, mégpedig $u+2$ vagy $u+4$ osztható 3-mal, azért a felső táblázat két üresen hagyott helye közül legalább az egyiken «1» a helyes adat. Hasonló érvényes az alsó táblázatra. Minthogy $\varepsilon < 2$, azért az $1, 2, \ldots, u-1$ következésre alkalmazott A.-ból előáll $(u-1)\varepsilon < v$. Az $x = u$ értékre alkalmazott B.-ből előáll $u\varepsilon > v-1$. Megkülönböztetem az alábbi 1), 2) eseteket.

1) $\left(\frac{u+2}{p}\right)=1$. Alkalmazzuk D.-t a $k=3$, $a=u$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ értékekkel. A (6) utolsó egyenlete miatt azt nyerjük, hogy az ε, $(u+1)\varepsilon$; 2ε, $(u+2)\varepsilon$; 3ε, $(u+3)\varepsilon$ számközökben van egy-egy y_1, y_2, y_3, úgy hogy ezek páronként különbözők (még mod u is) és $\left(\frac{y_i}{q}\right)=-1$ $(i=1, 2, 3)$. Akkor a fentiek szerint közülük a legnagyobb — legyen ez y — legalább $v+6$, s így $(u+2)\varepsilon=$ $=(u-1)\varepsilon+3\varepsilon<v+6\leqq y<(u+3)\varepsilon$. Ebből az $u+2$, $u+3$ következésre alkalmazott A. szerint $\left(\frac{y}{q}\right)=1$, ami ellenmondás.

2) $\left(\frac{u+2}{p}\right)=-1$. Ha $\left(\frac{v+2}{q}\right)=1$ lenne, akkor $(u+2)\,\varepsilon=u\varepsilon+$ $+2\varepsilon>(v-1)+2=v+1$ miatt, tekintettel arra, hogy $v+1$, $v+2$ pozitív következés q-ra nézve, B. szerint fennáll $(u+2)\varepsilon>v+2$; továbbá $u\varepsilon=(u-1)\varepsilon+\varepsilon<v+2$ és $v+2\equiv u \pmod 2$, s így G. szerint mégis $\left(\frac{v+2}{q}\right)=\left(\frac{u}{p}\right)=-1$. Ebből mindenekelőtt kimutatjuk, hogy $u\geqq 7$. Ellenkező esetben ugyanis $u=5$, $v-1<u\varepsilon<10$, $v<11$, s így v törzsszám volta miatt $v=7$. Ez azonban $\left(\frac{v+2}{q}\right)=-1$ miatt lehetetlen. Minthogy tehát $u\geqq 7$, azért $\left(\frac{u+5}{p}\right)=1$. Alkalmazzuk D.-t a $k=4$, $a=u$, $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$ értékekkel. Ezzel előáll az ε, $(u+1)\varepsilon$; 3ε, $(u+3)\varepsilon$; 4ε, $(u+4)\varepsilon$; 5ε, $(u+5)\varepsilon$ számközökben egy-egy $y_i\,(i=1, 2, 3, 4)$ úgy, hogy ezek páronként különbözők és $\left(\frac{y_i}{q}\right)=-1$. Köztük a legnagyobbat y-nal jelölve, most $y\geqq v+8$, s így $(u+3)\varepsilon=$ $=(u-1)\varepsilon+4\varepsilon<v+8\leqq y<(u+5)\varepsilon$. Akkor az $u+3$, $u+4$, $u+5$ következésre alkalmazott A.-ból az $\left(\frac{y}{q}\right)=1$ ellenmondást nyerjük. Ezzel a bizonyítás megtörtént.

Megjegyzem, hogy Hasse képletének alkalmazása mellőzhető, ami által a bizonyítás elemivé válik, de egyben hosszadalmassá.

Rédei László.

ÜBER DEN EUKLIDSCHEN ALGORITHMUS IN REELL QUADRATISCHEN ZAHLKÖRPERN.

Nach HEILBRONN[1] gibt es nur endlich viele quadratische Zahlkörper mit Euklidschem Algorithmus. Es wird bewiesen, dass in einem quadratischen Zahlkörper kein Euklidscher Algorithmus existiert, wenn die Diskriminante ein Produkt von zwei verschieden Primzahlen (>3) ist. Kritisch bleiben also nur die ungeraden Körperdiskriminanten, die von der Form p oder $3p$ sind, wobei p eine positive Primzahl ist.

Ladislaus Rédei.

AZ «r» EGYSÉG MEGHATÁROZÁSA.

I.

A röntgensugárzás felfedezése után csakhamar észrevették azt is, hogy röntgenbesugárzásokkal különféle biológiai hatások érhetők el. Ezek a biológiai hatások azonban csak hosszabb, rövidebb idővel a besugárzás után jelentkeznek s így keresni kellett a röntgensugárzásnak valamely olyan fizikailag mérhető hatását, amely párhuzamosan halad a biológiai hatásokkal s amelynek így a besugárzáskor való méréséből a várható biológiai hatás előre meghatározható legyen.

A biológiai hatásokkal párhuzamosan menő fizikai hatásnak a levegőben történő ionizáció bizonyult s először a magyar Szilárd (1) javasolta 1910-ben, hogy az 1 köbcentiméter levegőben keletkező ionok számát kellene a röntgensugárzás erősségének mértékéül tekinteni.

A röntgensugárzásnak levegőn való áthaladásakor a röntgensugarak abszorpciója fejében fotoelektronok válnak szabaddá, amelyek mindegyike aztán olyan nagyszámú iónt termel, hogy emellett a primer ionizáció el is hanyagolható. Az 1 sec alatt bizonyos térfogatban abszorbeált energia, ha ν a sugárzás rezgésszáma és N a kiváltott fotoelektronok száma,

$$E_{abs} = Nh\nu.$$

Ha az N elektron mindegyike S iónpárt létesít és egy iónpár létesítéséhez szükséges energia ε, akkor

$$E_{abs} = NS\varepsilon.$$

Az ionizációs kamrában mért telítettségi iónáram viszont arányos NS-el, tehát a választott mértékrendszertől függő állandótól eltekintve $i = NS$, azaz

$$E_{abs} = i\varepsilon.$$

Itt ε mint KULENKAMPFF, valamint KIRCHER és SCHMITZ mérései is igazolták, a hullámhossztól független állandó, azaz a mért ionizációs áram arányos a levegőben abszorbeált energiával. Másrészt, mint később látni fogjuk, a levegőben abszorbeált energia bizonyos körülmények között arányos a testben abszorbeált energiával, márpedig a röntgensugárzás biológiai hatása nyilván ettől a testben abszorbeált energiától függ, így tehát végeredményben a levegőben mért ionizációs áram arányos lesz a biológiai hatással.

Az első ilyen ionizációs áramok mérésére szolgáló eszközt HOLTHUSEN (2) készítette. Később FRIEDRICH és KRŐNIG (3) pontosan definiálták a röntgensugárzás egységét és készítettek is egy olyan ionizációs kamrát, mely a definiciónak megfelelően mérte a röntgensugárzást. Definiciójuk szerint egységnyi az a röntgensugár mennyiség, mely 1 cm^3 levegőben telítési ionizációs áram alakjában a töltés elektrosztatikai egységét szolgáltatja. Hozzátették azonban, hogy a mérést a fali hatások kiküszöbölésével kell végezni, azaz az ionizációs kamra falából kilépő szekunder elektronoknak nem szabad a tulajdonképpeni mérő térfogatba belejutniok.

Később HOLTHUSEN megállapította, hogy a definició így még nem teljesen egyértelmű, amennyiben a különböző keménységű röntgensugarak a levegőben különböző hatótávolságú elektronokat hoznak létre és így egyértelműen az ionizációs áramot csak úgy definiálhatjuk, ha minden esetben a szekunder elektronok ionizációját teljesen kihasználjuk, azaz megakadályozzuk, hogy azok az ionizációs kamra falába ütközzenek, mielőtt leadták volna teljes energiájukat.

Ezek figyelembevételével mondotta ki aztán az 1928. évi stockholmi nemzetközi radiológiai kongresszus a röntgensugárzás egységének definicióját, mely így szól: «A röntgensugárzás nemzetközi egysége az a röntgensugár mennyiség, mely a szekunder elektronok teljes kihasználása és a kamrafal hatásainak kiküszöbölése mellett az ionizációs kamrában 1 cm^3 0 Celsius fokú, 760 *Hg* mm nyomású levegőben olyan vezetőképességet hoz létre, hogy telítési áram esetén a mért elektromos tömeg a töltés elektrosztatikai egysége lesz. Jele: «*r*».

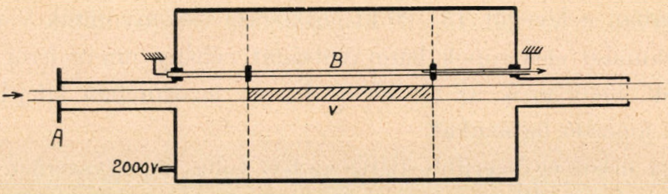
Az «r» egység definició szerinti pontos mérését főleg Behnken és Jaeger dolgozták ki a berlini Physikalisch-Technische Reichsanstaltban. Alapul a Friedrich-féle ionizációs kamrát vették, melyben a falihatások kiküszöbölése már meg volt oldva s így csak a szekunder elektronok ionizációjának teljes kihasználásáról kellett még gondoskodni. E célból eleinte úgy jártak el, hogy az ionizációs kamrában a levegőt 15—20 atmoszférára összenyomták s ezáltal a szekunder elektronok hatótávolságát néhány cm-re lerövidítve elérték, hogy azok az ionizációs kamra levegőjében kifejthették teljes ionizáló hatásukat.

Egy másik egyszerűbb eljárás az lett volna, ha egyszerűen olyan nagyra méretezik az ionizációs kamrát, hogy a legnagyobb hatótávolságú elektronok se érhessék el az ionizációs kamra falát. Holthusen méréseiből azonban keményebb röntgensugárzás esetére olyan nagy méretek adódtak volna ki, hogy mégis célszerűbbnek mutatkozott kis méretek mellett a levegő összesűrítése. A Compton-jelenség felfedezése után azonban kiderült, hogy éppen kemény röntgensugárzásnál az ionizációt egyre inkább a Compton-elektronok idézik elő, melyeknek hatótávolsága a fotoelektronokénál jóval kisebb, míg a nagy hatótávolságú fotoelektronok szerepe háttérbe szorul.

Behnken és Jaeger különböző átmérőjű kamrákkal végzett mérésekkel közvetlenül kimutatták, hogy az ionizációs áram az átmérő növelésével növekszik, de kb. 25 cm átmérőnél már eléri a maximumot, azaz bekövetkezett a szekunder elektronok ionizációjának teljes kihasználása. Ilyen módon feleslegessé vált a sok nehézséggel járó kompressziós eljárás és kialakult az «r» egység meghatározására szolgáló legcélszerűbb kísérleti berendezés.

A következőkben a Székesfővárosi Eötvös Loránd Rádium és Röntgen Intézetben készített berendezésünket fogom ismertetni.

Az ionizációs kamra egy 5 mm vastag ólomból készült 50 cm hosszú és 26 cm átmérőjű hordó, mely 2000 volt feszültségre van feltöltve. Az áthaladó röntgensugárzás keresztmetszetét definiáló diafragma (A) egy cső közbeiktatásával az ionizációs kamra előtt van elhelyezve, úgyhogy a nyilás falából kilépő szekunder elektronok az ionizációs kamra belsejéig már nem juthatnak el. Hátul a beállításra szolgáló nyilás ugyancsak egy csövön az ionizációs kamra mögé nyulik ki. A mérő elektród (*B*) egy 28 cm hosszú vékony aluminium cső, melytől jobbra, balra egy-egy földelt segéd elektród van elhelyezve. A mérő elektród kivezetése borostyán szigeteléssel



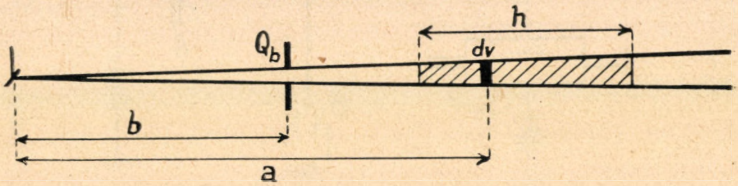
1. ábra. A hordókamra keresztmetszete.

az egyik segéd elektródon keresztül történik, ezáltal a kamra belsejében az elektromos tér szimmetrikus marad, azaz az erővonalak az elektródokra merőlegesen haladnak. Így a mérő elektródra csak a vele egyenlő hosszúságú levegő oszlop *v* térfogatából jutnak iónok, míg az előtte és utánna keletkező iónok a földelt segéd elektródokra jutnak. A *v* térfogatban keletkező szekunder elektronok a környező levegőben szabadon kifejthetik teljes ionizáló hatásukat és ezek az iónok is mind rájutnak a mérő elektródra. Abban az esetben, ha a szekunder elektron a segéd elektródok elektromos terébe megy át, az itt keletkezett iónok már a segéd elektródokra jutnak ugyan, de ennek fejében lesznek viszont olyan szekunder elektronok is, melyek a *v* térfogaton kívül keletkeztek és a mérő elektród elektromos terébe jönnek át. A három térfogatrész között egyensúlyi helyzet áll fenn, a határvonalakon ide-oda átlépő elektronok egymást éppen kompenzálják. Az ionizációs kamra tehát a definició mindkét kikötésének megfelelő módon működik.

Ismernünk kell mostmár a *v* térfogat nagyságát, hogy átszámíthassuk majd a mért ionizációs áramot 1 köbcentiméterre, továbbá tudnunk kell azt is, hogy ezzel tulajdonképpen hol is határoztuk meg a röntgensugárzás mennyiségét, hiszen tudjuk, hogy a sugárzás intenzitása az antikatódtól számított távolság négyzetével fordított arányban csökken.

Legyen a diafragma fókusztól való távolsága b, keresztmetszete Q_b, a sugárzás intenzitása 1 cm távolságban J_1, akkor a fókusztól a távolságban levő dv térfogatelemben abszorbeált energia

$$dE = dv.J_a = Q_a.dh.\frac{J_1}{a^2}$$



2. ábra.

de $\frac{Q_a}{a^2} = \frac{Q_b}{b^2}$, tehát

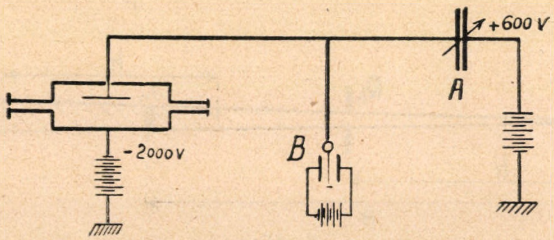
$$dE = \frac{Q_b}{b^2} J_1 dh,$$

azaz az összes abszorbeált energia, ha a mérő elektród hossza h

$$E = \frac{J_1}{b^2} Q_b h.$$

A csonka kúp alakú mérő térfogatban tehát ugyanannyi energia abszorbeálódik, mint egy Q_b alapu h magasságú hengerben, mely egyenletesen van besugározva a diafragma helyén uralkodó intenzitással. Meg kell tehát határoznunk a diafragma keresztmetszetét és a mérő elektród hosszát, a kettő szorzata adja a henger köbtartalmát, melynek ismeretével az ionizációs áramot át tudjuk számítani 1 köbcentiméterre és ez fogja jellemezni a röntgensugárzás mennyiségét a diafragma helyén.

A 10^{-10}, 10^{-11} amper nagyságrendű ionizációs áram mérése a következő kompenzációs kapcsolás segítségével történik. Az ionizációs kamra mérő elektródja össze van kötve egy változtatható intenzitású urán áramnormállal (A), mely az ionizációs kamra áramával ellenkező irányú áramot szolgáltat, továbbá hozzá van kötve egy igen érzékeny elektrométer száljához (B). A mérés mármost úgy történik, hogy az uránáramot olyan erősre állítjuk be, hogy az ionizációs kamra áramát éppen kompenzálja. Ez akkor következik be, ha az elektrométer szálja se jobbra, se balra nem mozdul, azaz a két ellenkező előjelű feltöltődés egymást éppen megsemmisíti. Ha tehát az urán áramnormál különböző beállításaihoz

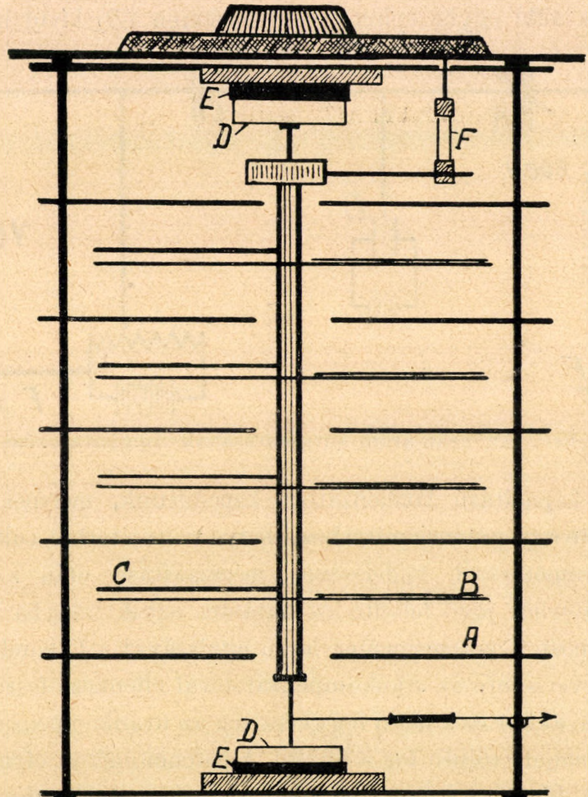


3. ábra. A hordókamra kapcsolási vázlata.

tartozó áramokat egyszer s mindenkorra meghatározzuk, az ionizációs kamra áramát egyszerű leolvasással határozhatjuk meg.

Az urán áramnormálnak olyannak kell lennie, hogy ha az áram intenzitását változtatjuk is, a kapacitása állandó maradjon, mert különben a kapacitásváltozás töltést influálna, ami az elektrométer szálját elmozdítaná s a mérést nagyon körülményessé tenné. Állandó kapacitású áramnormált a következőképpen készítettünk. Az egyik fegyverzetet 5 drb 25 cm átmérőjű, a közepén kilyukasztott aluminium korong alkotja (*A*), míg a másik fegyverzet egyrészt 4 kisebb aluminium korongból áll (*B*). Ezek felső lapjának felét vontuk be uránoxiddal (U_3O_8). A belső fegyverzethez tartozik még azonkívül négy elforgatható félkör lemez is (*C*), amelyeket részben, vagy egészben az uránoxidos részek fölé lehet forgatni. Ha mármost a külső fegyverzetre feszültséget kapcsolunk, minthogy az uránoxid 2·7 cm hatótávolságú α részei ionizálják a kondenzátor fegyverzetei közti levegőt, ionizációs áram jön létre, melynek erősségét a félkör alakú lemezeknek az uránoxidos lemezrészek fölé való forgatásával folytonosan tudjuk változtatni anélkül, hogy ezáltal a kapacitást is megváltoztatnánk.

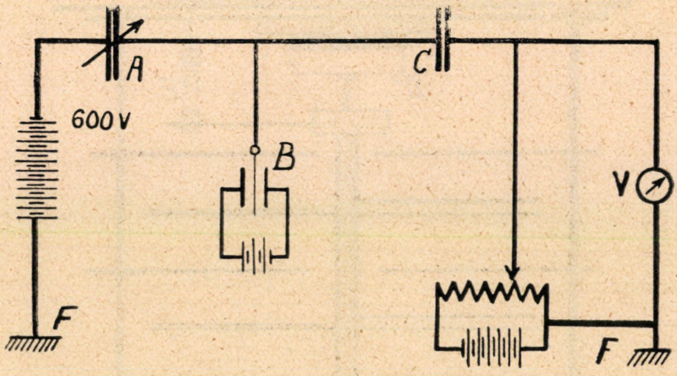
Igen lényeges volt, tekintettel a kis áramintenzitásokra, a belső fegyverzet rendszernek tökéletes szigetelése. Alul és felül 3 cm átmérőjű borostyánokba van a tengely beágyazva (*D*), a borostyánok egy-egy leföldelt réztartóba vannak beleerősítve (E), amelyek aztán keménygumival vannak a külső fegyverzettől elszigetelve. Így az amúgy is elsőrangúan szigetelő borostyán legfeljebb csak pár század voltig van igénybevéve és tökéletes szigetelést biztosít.



4. ábra. Az uránkompenzátor keresztmetszete.

A lemezek forgatása ugyancsak egy borostyán rúd (F) közbeiktatásával történik; az elforgatás szöge a felül elhelyezett, nóniusszal ellátott forgatótárcsán 1/10 foknyi pontossággal olvasható le.

A különböző fokokhoz tartozó áramintenzitás meghatározása a következő módon történt. Mindenekelőtt megállapítottuk, hogy ha a külső fegyverzetre adott feszültséget 400 voltról 800 voltra emeljük, az áram intenzítása már csak 1%-al növekszik s így habár teljes telítés nem is volt elérhető, az áram intenzitása — ha a külső fegyverzetre adott feszültség néhány voltnál többet nem ingadozik — állandónak volt vehető. A méréseket 600 volt feszültségnél végeztük oly módon, hogy az uránkompenzátor belső fegyverzetéhez (A) a vele egybe épített elektrométeren (B) kívül még egy



5. ábra. Az urán-áram intenzitásának meghatározása.

ismert C kapacitású kondenzátort kapcsoltunk, melynek másik fegyverzete egy potenciométerhez, illetve voltméterhez volt kötve. Az elektrométerszál, földelésének megszakítása után az uránkompenzátorból jövő feltöltődés hatására egyik irányba elindul. Ha már most a potenciométer lassú eltolásával a C kondenzátor külső fegyverzetére az uránkompenzátoréval ellenkező feszültséget viszünk rá, akkor ez a belső fegyverzeten az uránkompenzátoréval ellenkező előjelű töltést fog influálni. A potenciométert olyan gyorsan toljuk, hogy az influált töltés az uránáramot állandóan kompenzálja, azaz az elektrométerszál állandóan a nyugalmi helyzetben maradjon. Egy bizonyos t idő után leolvassuk a voltméter állását: V. Az összes influált töltés $C \,.\, V$ lesz, ami ha az uránkompenzátor megfelelő áramát i-ve jelöljük, $C \,.\, V = i \,.\, t$, azaz $i = C \,.\, V/t$. Ilyen módon egy pontos voltméter és egy hitelesített kondenzátor segítségével az egyes i-ket pontosan meghatározhattuk.

Az egyes fokokhoz tartozó i értékek a skála elejétől és végétől eltekintve, egy egyenesen fekszenek, ami közbülső értékekre nézve lineáris interpolációt tett lehetővé. Ha C-t Faradban, V-t voltokban mérjük, az i-t amperekben kapjuk meg. Az i-t ezután át kell számítanunk 0 Celsius fokra és 760 mm Hg nyomásra, ami tekintettel arra, hogy az ionizációs áram arányos a légnyomással és fordítva arányos a levegő abszolut hőmérsékletével, a következő faktorral való szorzás útján történik

$$f = (1 + 0{\cdot}00367 . t) \frac{760}{b}$$

ahol t, illetve b, a mért hőmérséklet, illetve légnyomások.

Az így adódó áramintenzitást azután át kell még számítanunk elektrosztatikai egységekre. Az $i . f$ ampernek $i . f . 3 . 10^9$ elektrosztatikai egység felel meg. Ha ezt osztjuk a mérő térfogattal, megkapjuk az 1 cm^3-re eső elektrosztatikai egységek számát

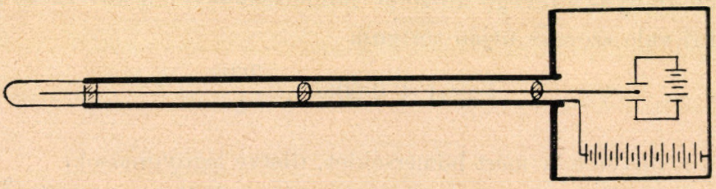
$$n = \frac{i . f . 3 . 10^9}{v}$$

n elektrosztatikai egységnek n r/sec felel meg, tehát a dózis

$$D = \frac{i . f . 3 . 10^9}{v} \text{ r/sec.}$$

Ezzel a berendezéssel meghatározhatjuk tehát a röntgensugárzás mennyiségét a definició szerinti «r» egységekben egy levegőben levő, egyébként tetszés szerinti pontban. Nem tudjuk azonban meghatározni, ha a kérdéses pont a test felületén, vagy éppen a test belsejében van. Márpedig röntgenterápiai szempontból elsősorban éppen ezekre az értékekre van szükség, mert hiszen a test szekunder sugárzása folytán a felületi dózis a besugárzott felület nagyságától és a sugárzás keménységétől függően 30, 40, sőt 60 %-al is nagyobb a levegőben mért dózisnál, míg a test belsejében levő ú. n. mélydózisok viszont természetszerűleg kisebbek. Egy ugyanazon sugárzás és felület nagyság esetén is más a dózis pl. a koponyán és más a mellkason.

Ezek mérésére úgynevezett gyűszűkamrákat készítettek, amelyekben az ionizáció legnagyobb részét éppen a kamra falából kilépő szekunder elektronok idézik elő. A belső elektród egy ólommal bélelt cső belsejében, borostyán szigeteléseken keresztül jut el az elektromos mérőberendezéshez, mely legtöbbször egy elektrométer. Az eszköz hitelesítése az előbb ismertetett abszolut «r» meghatározó berendezéssel való összehasonlítás útján történik. Mint-



6. ábra. Gyüszükamrás dózismérő.

hogy itt az ionizációt legnagyobbrészt a kamrafalból kiváltott szekunder elektronok idézik elő, ez az elektronemisszió viszont a sugárzás hullámhosszától függően változik, ebből következik, hogy az ilyen gyűszűkamrák és a hordókamra ionizációs áramának viszonya a különböző keménységű sugaraknál általában véve nem lesz állandó s így a kamra egyértelműen nem is kalibrálható.

Ahhoz, hogy az ilyen ionizációs kamra egyértelműen kalibrálható legyen, szükséges, hogy az ionizációs kamra fala ú. n. levegőekvivalens anyagból készüljön. Ez alatt a következőket értjük. Gondoljunk el egy kis falnélküli ionizációs kamrát. Az ebben keletkező ionizációs áramhoz hozzájárulnak mindama levegőrészek, amelyek egy olyan gömbhéjon belül fekszenek, melynek vastagsága a szóbajöhető legnagyobb energiájú szekunder elektronok hatótávolságával egyenlő. Nyomjuk most össze ezt a gömbhéjat egy vékony réteggé, ezáltal az ionizációs kamra áramában nem fog változás bekövetkezni. Ha mármost egy ionizációs kamrát olyan szilárd anyagból készítünk, mely minden hullámhosszúságú sugárzással szemben ugyanúgy viselkedik, mint ez az összpréselt levegőréteg, akkor ez az ionizációs kamra teljesen olyan ionizációs áramot fog szolgáltatni, mintha a mérő térfogatot szabad levegő venné körül. Az ilyen anyagot nevezzük levegőekvivalens anyagnak.

Főleg Glasser majd Miehlnickel foglalkoztak ilyen levegőekvivalens anyagok előállításával és vizsgálatával és arra az eredményre jutottak, hogy ahhoz, hogy valamely anyag levegőekvivalens legyen szükséges, hogy effektív rendszáma a levegő effektív rendszámával, 7·69-el legyen egyenlő, ahol az effektív rendszámot a következő formula definiálja

$$N_{eff} = \sqrt[3]{\frac{a_1 N_1^4 + a_2 N_2^4 + \cdots}{a_1 N_1 + a_2 N_2 + \cdots}}$$

ahol a_1, a_2,... az N_1, N_2,... rendszámú atomok száma. Ha az abszorpción kívül a szóródást is figyelembe vesszük, ami kemény sugárzás esetében már indokolt, akkor egy igen komplikált formula adódik, mely szerint az effektív rendszám a hullámhossz függvénye lesz s így ahhoz, hogy valamely anyag a hullámhossztól függetlenül levegőekvivalens legyen szükséges, hogy az effektív rendszáma a levegő effektív rendszámával arányosan változzék (4), (5).

Ilyen levegőekvivalens anyagnak bizonyult 97 % grafit és 3 % silicium keveréke, melyeket acetonban oldott celluloid és zappon lakk segítségével rugalmas szilárd anyaggá lehet formálni. A kamra falának olyan vastagnak kell lennie, mint amennyi a legnagyobb energiájú elektron hatótávolsága ebben az anyagban.

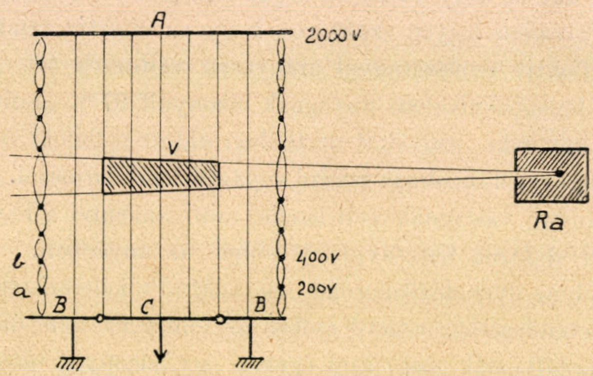
Később az ilyen dózismérőket még azáltal tökéletesítették, hogy a mérőberendezéshez vezető csőben az ionizációt nem ólom béléléssel akadályozták meg, ami egyben egy bizonyos térszögből a sugaraknak a kamrába való jutását is megakadályozta, hanem a csövet cerezinnel töltötték ki, s így az ú. n. irányeffektust nagy mértékben sikerült kiküszöbölni.

Friedrich és munkatársai (6) megállapították, hogy ezekben a kis ionizációs kamrákban is az ionizációs áram arányos a kamra térfogatával, úgyhogy ezek a levegőekvivalens kamrák bizonyos határok között az «r» egység abszolut meghatározására is alkalmasak.

II.

A röntgensugárzáshoz hasonló biológiai hatása van a rádium γ sugárzásának is és célszerűnek bizonyult a γ sugárzást is «r» egységekben mérni. A definició szerinti «r» meghatározás azonban γ sugárzásnál meglehetős nehézségekbe ütközik, amennyiben a szóbajövő rádium mennyiségeknél az ionizáció jóval gyengébb, mint a röntgensugaraknál, másrészt a szekunder elektronok hatótávolsága a levegőben kb. 3 méter s így igen nagy ionizációs kamrára van szükség. Viszont annyiban meg egyszerűbbek a viszonyok, hogy sok kérdés megoldásához elegendő, ha egyszer s mindenkorra megállapítjuk, hogy 1 mg rádiumnak 1 cm távolságban 1 óra alatt hány «r» felel meg, azaz meghatározzuk az ú. n. r/mgh konstans értékét.

Kaye és Binks (7) ezt a következő kísérlettel igyekeztek megállapítani. Egy 3 méteres nagy ionizációs kamrát csináltak, melynek elülső és hátulsó oldalát 10—10 függőlegesen kifeszített drót

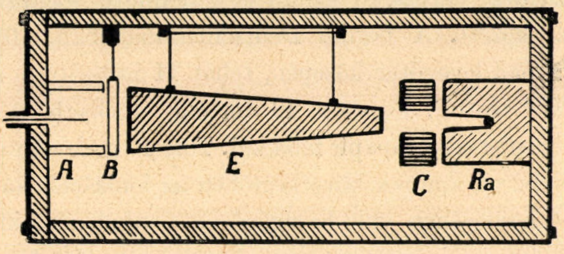


7. ábra. Kaye és Binks ionizációs kamrájának felülnézete.

(*a*, *b*,...) alkotta, melyek 200, 400, ...2000 volt feszültségre voltak kapcsolva. Az egyik oldala egy vékony lap ugyancsak 2000 volt feszültségen (*A*), míg a másik oldalát a két földelt lap (*B*) közötti elszigetelt mérőlap (*C*) alkotta. Az elektromos erővonalak így az oldalakra merőlegesen haladnak s a mérőtérfogatban (*V*), valamint ennek környezetében keletkező iónokat az elektromos tér a mérő elektródra hajtja. Pontos értéket nem sikerült megállapítaniok.

A kérdés preciz megoldását Friedrich és munkatársai hajtották végre a következő módon. Mivel γ sugárzásnál az ionizációt csaknem teljes mértékben a Compton-elektronok hozzák létre, kis atomsúlyú anyagoknál az ionizáció az elektronkoncentrációtól függ, ami viszont kis atomsúlyú anyagoknál közelítőleg ugyanaz. Így várható volt, hogy γ sugárzással szemben bizonyos szilárd anyagok elektronemissziója akkor is megegyező lesz a levegő elektronemissziójával, ha effektív rendszáma nem egyezik meg teljesen a levegő effektív rendszámával, azaz pl. a tiszta grafit, kéregpapír, stb. γ sugárzással szemben tökéletesen levegőekvivalens módon fognak viselkedni. A következő kísérletek, melyekben nekem is alkalmam volt résztvenni, az előző feltevést teljesen igazolták.

Egy erős falu vashenger egyik végében volt elhelyezve egy henger alakú, 4 mm vastag grafitból készült ionizációs kamra (A),



8. ábra.

melynek elülső lapját (B) oldalra lehetett fordítani, míg a vashenger másik végében volt a rádium. Köztük, az ólomtartóból kiváltott elektronok eltérítésére szolgáló elektromágnes (C) és az alap áram meghatározására szolgáló ólom kúp (E). A COMPTON-szóródás irányeloszlása miatt az ionizációs áram főleg azoktól az elektronoktól származik, melyek a rádium és ionizációs kamra közötti térből indulnak ki. A különböző nyomású levegővel töltött vashengerben végzett ionizációs árammérések azt mutatták, hogy 200-tól le egészen 60 atmoszféra nyomásig az ionizációs áram ugyanaz, akár közbe volt iktatva a grafit lap, akár nem, azaz a grafit levegőekvivalens anyagnak mutatkozott. 60 atmoszféra alatt aztán, ha a grafit lap nem volt közbeiktatva, az ionizációs áramok fokozatosan gyengültek a grafitlappal mért ionizációs áramokhoz képest, mert hiszen kis nyomásoknál a rádium és ionizációs kamra között már nem állt elegendő levegő rendelkezésre a szekunder elektronok kiváltására (8).

Ha mármost atmoszféra nyomáson növekvő falvastagságú grafit kamrában mérjük az ionizációs áramot, azt találjuk, hogy

4 mm falvastagságig az ionizációs áram nő, ettől kezdve aztán állandó marad, mert nyilván a fal külső részén kiváltott szekunder elektronok már nem tudnak behatolni az ionizációs kamra belsejébe. A szekunder elektronok hatótávolsága grafitban tehát 4 mm, szemben a levegőbeni 3 méterrel. Egy ilyen 4 mm falvastagságú grafit ionizációs kamrával akár közel, akár távol a rádiumtól levegőekvivalens áramot mérhetünk (6).

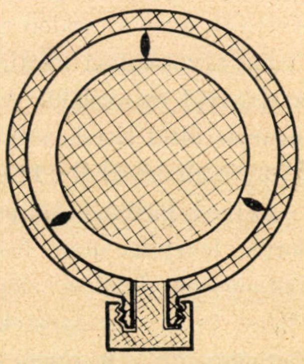
Egy másik kísérlet közvetlen összehasonlítást tett lehetővé a levegőekvivalens ionizációs kamra és a definició szerinti «r» meghatározása között. A berlini Deutschlandhalleban, 100×50×22 méteres szabad levegőtér közepén, tehát 11 méternyire a legközelebbi szilárd testtől, lógott a 40 cm élű, kockaalakú ionizációs kamra 7μ vastag selyempapír falakkal. Tőle 40 m-re volt elhelyezve a rádium (2·2 g), aminek következtében az ionizációs kamra nagy mértékben homogénen volt besugározva s minden tekintetben az «r» egység definiciója szerint mérte a sugárzást. Egy 6 mm falvastagságú kéregpapír doboz ráhuzásával viszont levegőekvivalens falu ionizációs kamrává változott. Az ionizációs áram mindkét esetben ugyanakkorának adódott, ami által beigazolódott, hogy levegőekvivalens falu kamrával lehet abszolut «r» meghatározást végezni.

20 méternél közelebb hozva a rádiumot, a selyempapír kamra árama egyre nagyobbnak, majd 3 m után rohamosan kisebbnek bizonyult, mint a levegőekvivalens falu kamra árama, ami azt mutatja, hogy 20 m-től kezdve az ionizációs kamra előtti levegő részek már számottevően erősebben vannak besugározva, mint maga az ionizációs kamara s így az innen kiinduló szekunder elektronok túlkompenzálják a kamrában kiváltott és onnan távozó elektronokat, míg 3 m-nél kisebb távolság esetén viszont már nem lévén elegendő hely a szekunder elektronok kiváltására, az ionizációs áram lecsökken. A levegőekvivalens falu kamrában viszont az ionizációs áram mindkét esetben ugyanaz marad (8).

E kísérlet szerint a definició szerinti «r» meghatározásnál tehát legalább 20 méterre kell lennie a rádiumnak az ionizációs kamrától. Ez esetben viszont az ionizációs áram olyan gyenge, hogy intenzitásának pontos, abszolut meghatározása igen nagy nehézségekbe ütközik. Ezért célszerűbbnek mutatkozott az r/mgh állandó értékét levegőekvivalens falu kamrával meghatározni.

Friedrich (6) e célra egész kicsi ionizációs kamrákat használt. A kamra és a rádium közé ólom rudat helyezve egy erősítő berendezés segítségével mérte azt az ionizációs áramot, melyet a környezet szekundersugárzása hoz létre, majd mérte az ionizációs áramot az ólom rúd elvétele után. A kettő különbsége adta a közvetlenül a rádium által létrehozott ionizációs áramot, melyből ismerve a kamra térfogatát, a távolságot és a rádium mennyiségét, az r/mgh értéke kiszámítható. $^1/_2$ mm Pt szűrő esetén 7·8, míg 1 mm Pt szűrőnél 7·3 adódott.

A γ sugárzás mérésének gyakorlati kivitelénél célszerűnek bizonyult az ionizációs kamrát és a mérőberendezést összekötő részt kiküszöbölni, azaz az ionizációs kamrát és mérőberendezést kettéválasztani. Sievert készített először ilyen ú. n. kondenzátorkamrákat, melyeknél a külső gömb belsejében borostyán csúcsokon egy másik kis gömb van elhelyezve. Ezt a belső gömböt néhány 100 volt feszültségre feltöltjük, majd a mérendő helyen megfelelő ideig besugározzuk, aztán ismét lemérjük a belső gömb feszültségét. A feszültségesés arányos lesz a kapott sugármennyiséggel.


9. ábra.
Kondenzátorkamra.

Ilyen kondenzátorkamrákkal röntgensugárzást is mérhetünk, ha röntgensugárzásra nézve levegőekvivalens anyagból készítjük a megfelelő vékonyabb falvastagsággal. Tapasztalataink szerint éppen ezek a kis kondenzátorkamrák bizonyultak a legpontosabb és legsokoldalubban használható mérőeszközöknek. Szigetelésük olyan kiválló, hogy pl. egyik ilyen kis kamránk 400 nap alatt töltésének mindössze felét veszítette el egy olyan helyiségben, mely nem is teljesen sugárvédett. Átmérőjük mindössze 8—10 mm s így módunkban áll velök közvetlenül megmérni a dózist a test belsejében is pl. gyomorban, nyelőcsőben stb.

Célszerűnek mutatkozott ármost ugyanazt a kondenzátorkamrát γ sugárzás mérésére is alkalmassá tenni. E célból egy megfelelő gömbhéjat készítettünk, melybe a kondenzátorkamrát belehelyezve, összes falvastagsága a szükséges 4 mm-re növekedett. Ezekután módunkban állt megnézni, hogy a röntgensugárzással bekalibrált kondenzátorkamra felvastagítás után helyesen méri-e a γ sugárzást és fordítva, hogy a γ sugárzással bekalibrált kondenzátorkamra a vastagító burok levétele után helyesen méri-e a röntgensugárzást?

A γ sugárzással való kalibráláshoz a 30·77 mg rádiumot tartalmazó gömbetalonunkat használtuk, melynek külső átmérője 6 mm, fala 1 mm vastag platina. Relatív mérésekkel először is megállapítottuk, hogy 6 cm távolságtól kezdve az r^2 törvény már szigorúan érvényes, azaz az etalon teljesen pontszerűnek tekinthető. Ezután 11 cm távolságban mértük a feszültségesést egy ólomkúp közbeiktatásával és anélkül. A kettő különbsége adta a közvetlen γ sugárzás által létrehozott feszültségesést,melyhez hozzá rendeltük a 7·3 *r*/mgh értékből a 11 cm-re és 30·77 mg-ra átszámított értéket.

Az ilyen módon bekalibrált kondenzátorkamrát aztán a vastagító burok levétele után összehasonlítottuk különböző feszültségű röntgensugaraknál a nagy hordókamránkkal. A mért értékek 1%-on belül megegyeztek egymással, ami azt mutatja, hogy a röntgensugárzás mérésére szolgáló kondenzátorkamrákat az eredeti «*r*» egység definició alapján működő, de kényes és költséges hordókamrás berendezés helyett egyszerűen rádiummal is bekalibrálhatjuk.

III.

Láttuk azt, hogy az ionizációs áram arányos az abszorbeált energiával. Az ionizációs áram méréséből az abszorbeált energia ki is számítható. 1 *r*/sec ugyanis 1 elektrosztatikai egységet jelent másodpercenként és ez — mivel egy elektron $4 \cdot 77 . 10^{-10}$ elektrosztatikai egység — $1/4 \cdot 77 . 10^{-10} = 2 \cdot 09 . 10^{10}$ elektron töltéssel egyenlő. 1 cm^3 levegőben tehát 1 *r*/sec esetén $2 \cdot 09 . 10^{10}$ iónpár keletkezik másodpercenként. Számos különböző hullámhosszúságú röntgensugárzással végzett mérésből tudjuk, hogy egy iónpár létesítéséhez $32{\cdot}2\,eV = 5{\cdot}12.10^{-10}$ erg energia szükséges, tehát összesen $2{\cdot}09.10^{10}.5{\cdot}12.10^{-10} = 0{\cdot}107$ erg energia használódott fel az ionizáció létrehozásához. Ennyi tehát az abszorbeált energia.

Másrészről

$$E_{abs} = E - Ee^{-\mu x} = E(1 - e^{-\mu x}) = E\mu x$$

ha, minthogy μx kicsi, a magasabbrendű tagokat elhanyagoljuk. Legyen $x=1$, akkor E_{abs} az 1 cm^3-ben abszorbeált energiát adja

$$E_{abs} = E\mu.$$

Ha tehát u ismeretes és az abszorbeált energiát az ionizációból kiszámítjuk, akkor az E-t, azaz a beeső sugárzás teljes energiáját is meghatározhatjuk.

Mindez csak monokromatikus sugárzásokra érvényes. Komplex sugárzás esetén ugyanis a μ nem állandó, a lágy sugarak aránylag erősebb abszorpciója következtében a sugárzás eleinte keményedik, majd a többszörös COMPTON-szoródás következtében ismét lágyul. A sugárzás energiáját tehát a különböző mélységekben csak akkor tudjuk kiszámítani, ha ismerjük, hogy a kérdéses komplex sugárzásra nézve az egyes helyeken a μ mekkora.

Kérdés mármost, hogy mennyi energia abszorbeálódik az emberi testben egy bizonyos r/sec esetén? Közvetlen méréssel ezt nem sikerült megállapítani. MURDOCH és STAHEL (9) próbálták petrolaetherben mérni az abszorbeált energiát és ezt aztán átszámítani az emberi testre, de a fellépő kémiai reakciók reakcióhője az energiamérést meghamisította. A következő meggondolással azonban célhoz juthatunk (10). Vegyünk két egyenlő térfogatelemet levegőből és vízből. Essen mindkettőre R sugármennyiség. Az abszorbeált energia arányos lesz R-el, a térfogattal v-vel és az abszorpciókoefficienssel, azaz $a=\mu-\sigma_s$-val. Az abszorbeált energiák tehát Rva_l és Rva_v, a térfogat egységre vonatkoztatott dózisok pedig a evegőnél $D_l=Ra_l$, a víznél $D_v=Ra_v$ lesznek, amiből $D_v=D_l.a_v/a_l$. Az a_v/a_l faktor értéke 800 körül van, függ a hőmérséklettől, nyomástól és a sugárzás összetételétől.

Ha azonban a dózist a térfogat helyett a tömegegységre vonatkoztatjuk, akkor $D'_l = Ra_l/\varrho_l$ és $D'_v = Ra_v/\varrho_v$, vagyis

$$D'_v = D'_l \frac{\left(\frac{a}{\varrho}\right)_v}{\left(\frac{a}{\varrho}\right)_l},$$

ahol a faktor, mint a mérések és számítások mutatják független a nyomástól és hőmérséklettől, értéke a különböző hullámhosszaknál nem sokat tér el az egységtől. A tömegegységre vonatkoztatott dózisok tehát a levegőben és vízben s így az emberi testben is közelítőleg egyenlők.

Láttuk, hogy 1 cm^3 normál levegőben, azaz 0·00129 g-ban 1 *r*/sec esetén 0·107 ergnyi energia abszorbeálódik, 1 g levegőben tehát 0·107/0·00129=83 erg=2 mikrokalória. Ugyanennyi abszorbeálódik a besugárzott test egy-egy grammjában is.

Mivel tehát célszerűnek mutatkozik a dózist a térfogat helyett a tömegre vonatkoztatni, az 1937. évi chicagói nemzetközi radiológiai kongresszus az «*r*» egység definiciójába is az 1 cm^3 0 Celsius fokú 760 *Hg* mm nyomású levegő helyébe a 0·00129 g levegőt vette bele.

Irodalom.

1. Szilárd: Strahlentherapie 5, 742 (1915). — 2. Holthusen: Fortschritte a. d. Geb. d. Röntgenstrahlen 26, 211 (1919—20). — 3. Krőnig, Friedrich: Physikalische und biologische Grundlagen der Strahlentherapie. Berlin, 1918. — 4. Fricke, Glasser: Fortsch. a. d. Geb. d. Röntg. 33, 239 (1925). — 5. Miehlnickel: Ann. d. Phys. 5, 20, 737 (1934). — 6. Friedrich, Schulze: Strahlent. 54, 553 (1935). — 7. Kaye, Binks: Strahlent. 56, 608 (1936). — 8. Friedrich, Schulze, Henschke: Strahlent. 60, 38, (1937). — 9. Murdoch, Stahel: Strahlent. 53, 102 (1935). — 10. Behnken: Strahlent. 50, 476 (1934).

Jelen dolgozat Budapest Székesfőváros Eötvös Loránd Rádium és Röntgen Intézetében készült, mely dr. Czunft Vilmos egyetemi magántanár, közkórházi főorvos vezetése alatt áll, akinek értékes tanácsaiért és támogatásáért ezúton is leghálásabb köszönetemet fejezem ki. *Bozóky László.*

ÜBER DIE BESTIMMUNG DER «*r*» EINHEIT.

Nach einer historischen Zusammenfassung der Entwicklung der absoluten «r»-Bestimmung bei Röntgen und γ-Strahlen, wird ein Aggregat beschrieben, das aus einem grossen, im Radium- und Röntgen-Institut der Hauptstadt Budapest hergestellten variablen Urankompensator und einem grossen Fasskammer besteht, mit welchem das Institut die absoluten «r»-Bestimmungen vollführt. Es wurden die Eichungen derselben Kondensatorkammer mit γ-Strahlen und mit verschiedenen Röntgenstrahlen unter passenden Verhältnissen verglichen und eine Übereinstimmung innerhalb 1% festgestellt. Die energetische Verhältnisse werden dargestellt.

L. v. Bozóky.

Kimutatás

az 1939. évi november hó 1-től 1940. évi március hó 31-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíj.

1931-re: Riesz Marcel (6).

1932-re: Riesz Marcel (6), Szegő Gábor (5).

1933-ra: Riesz Marcel (6), Szegő Gábor (6), Szücs A. Ervin (8).

1934-re: Fejes Zsigmond (2), Riesz Marcel (6), Szegő Gábor (6), Walek Károly (6).

1935-re: Fejes Zsigmond (6), Riesz Marcel (6), Szegő Gábor (6).

1936-ra: Barnóthyné Forró Magdolna (8), Borhidy Ferenc (5), Fejes Zsigmond (6), Lajta Ernő (4), Radó Simon (6), Reuss Endre (8), Riesz Marcel (6), Szegő Gábor (6).

1937-re: Barnóthyné Forró Magdolna (8), Fejes Zsígmond (6), Hancsók Kálmán (6), Magi Ferenc (6), Nagy Gyula (2), Reuss Endre (8), Rédei László (6), Riesz Marcel (6), Runtágné Perényi Gizella (6), Szegő Gábor (6), Tobisch János (6), Tolnai Jenő (8), Volenszky Gyula (2).

1938-ra: Boros János (6), Breszlauerné Blau Ilona (4), Egyed László (4), Fejes Zsigmond (2), Magi Ferenc (6), Nagy Gyula (6), Neográdyné Haich Sarolta (8), Orbán György (6), Papp Margit (8), Patai László (2), Reuss Endre (8), Rédei László (6), Riesz Marcel (6), Róna Erzsébet (8), Sós Ernő (8), Szegő Gábor (6), Theiszné Vajk Magda (2), Tobisch János (8), Tolnai Jenő (8), Volenszky Gyula (5), Zigány Ferenc (4).

1939-re: Bacsó Vilmos (6), Bertrám Brunó (6), Goldziher Károly (8), Heuer Ede (8), Hoór Tempis Mór (6), Magi Ferenc (6), Nagy Ferenc (8), Nagy Gyula (6), Neográdyné Haich Sarolta (8), Orbán György (6), Reuss Endre (8), Riesz Marcel (6), Róna Erzsébet (8), Szabó Gusztáv (8), Szántó Sándor (8), Szegő Gábor (6), Szekeres Kálmán (8), Tobisch János (8), Zigány Ferenc (1).

1940-re: Bakos Tibor (6), Csehné Tillinger Stefánia (8), Erdős Pál (6), Farkas Dénes (6), Fenyő István (8), Gausz József (6), Hoffmann Ernő (8), Jelitai József (8), Klug Lipót (8), Kövessi Ferenc (8), Kuzaila Péter (6), Nagy Gyula (6), Ortvay Rudolf (8), Pogány Béla (8), Rados Gusztáv (8), Rados Ignác (8), Rucsinszki Lajos (8), Schaller Mátyás (6), Szabó Gábor (8), Szegő Gábor (6), Szép Jenő (8).

2. Előfizetés.

1940-re: Kisújszállási Ref. Horthy-gimn. (6), Miskolci Ref. Lévay-gimn. (6), Pannonhalmi Központi Könyvtár (6), Soproni Egyetemi Könyvtár (6).

3. Segély.

M. T. Akadémia (1940. I.) 500, Államsegély 500.

Budapest, 1940. ápr. 6.

Jelitai József,
pénztáros.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA. — ÁBRAI V.

MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES ÉS ORTVAY RUDOLF

NEGYVENHETEDIK ÉVFOLYAM

1940

JÚLIUS—DECEMBERI FÜZET

BUDAPEST, 1940

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Kőnig Dénes* (**XI., Horthy Miklós-út 28., Lénárt-pensio**), a fizikai tárgyúak pedig *Ortvay Rudolf* (**VIII., Múzeum-körút 4/c**, Egyetemi elméleti fizikai intézet) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra, valamint minden korrekturára pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Ortvay Rudolf* titkár címére küldendők.

Évi tagsági díj Budapesten 8, vidéken 6 pengő. Minden befizetést Társulatunk 5997. számú postatakarékpénztári csekkszámlájára kérünk. A folyóirat és a meghívók küldésére vonatkozó felszólamlások, címváltozások *Jelitai József* pénztáros címére (II., Bimbó-út 5.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *R. Ortvay*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/*c*.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *R. Ortvay*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/*c*.

A MATEMATIKA NÉHÁNY ÚJABB SZEMPONTJÁNAK FIZIKAI VONATKOZÁSAI.

Áttekintés.

1. *Komplex számok a fizikában.* Komplex függvények tana, áramlás a síkban, konform leképezés. Rezgési problémák, az exponenciális függvény alkalmazása. Alkalmazás a relativitás elméletében, a MINKOWSKI-féle tér. A hullámmechanika, kvantummechanika, HILBERT-tér. A kvaterniók. A magasabb komplex mennyiségek alkalmazása. Matrixelmélet. DIRAC-féle egyenlet. A mezon egyenlete. Második kvantálás.

2. *A vektorfogalom.* Gyökerei: a kvaterniók és GRASSMANN Ausdehnungslehre-je. A vektormező. A vektorfogalom általánosításai, a lineáris vektortér. A HILBERT-tér. Az operátor fogalma mint a kvantummechanika alapfogalma.

3. *A térfogalom általánosításai.* A MINKOWSKI-féle tér. Indefinit metrika. Az invarianselmélet behatolása a fizikába. A RIEMANN-féle tér és a gravitációelmélet. A RICCI-kalkulus. Geodetikus görbék.

4. *Általános koordináták és többdimenziós terek.* A LAGRANGE-féle általános koordináták. A koordináta-impulzustér. A koordináta tér. A HAMILTON—JACOBI féle egyenlet és a SCHRÖDINGER-féle egyenlet. A statisztikai mechanika és ergodelmélet. A kvantummechanika és HILBERT-tér. Ortogonális függvényrendszerek.

5. *Axiomatika.* A NEWTON-féle mechanika. A termodinamika. Az elektrodinamika. A kvantummechanika. A DIRAC-féle axiomatika. Aktuális elvi problémák: kvantumelektrodinamika, magerők, elemi részek, alapállandók összefüggése.

6. *A csoportelmélet.* Kristályrácsok. Relativitáselmélet. A Schrödinger-féle egyenlet csoportja és az atom, ill. molekula-állapotok szisztematikája.

7. *A transzformáció-elmélet.* A kanonikus transzformáció. A matrix transzformáció. A kvantummechanika transzformáció-elmélete.

8. *Halmazelméleti szempontok.*

A tudományok óriási mérvű és szerteágazó fejlődése folytán sokszor az a helyzet áll elő, hogy még egy tudományon belül is az egyes fejezetek művelői egymás nyelvét nem értik, úgyhogy valóságos bábeli nyelvzavar fenyegeti a tudomány haladását. Eme túlmesszemenő specializálás veszélyeire sokan reámutattak és általános kívánság a belőle eredő hátrányok megszüntetése és a tudomány egységének megóvása.

Szerencsére olyan korszakokban, melyekben a tudomány egészségesen fejlődik, mindig fellépnek jelentékeny egyéniségek, kik meg tudják találni ama mélyebb egységesítő szempontokat, melyek nagy területek áttekintését lehetővé teszik és a tudomány egységét kellő evidenciába helyezik. Ilyen szempont sokszor egy egész speciális probléma megoldása körül merül fel és csak később derül ki, hogy egy nagy épület keresett záróköve. Ilyen volt Newton gravitációs törvénye, mely közös szempont alá hozta a hajítást, szabad esést és bolygómozgást, földi és égi mechanikát; ilyenek a Maxwell-féle egyenletek, melyek az oly szétágazó elektromos és mágneses jelenségek és az optika nagy részét foglalták magasabb egységbe; a relativitás elmélete és napjainkban a kvantumelmélet. A matematika területén a differenciál- és integrálszámítást, a Riemann-féle felületeket és a csoportelméletet említem fel sok közül. Ez, a megfelelő mélyebb szempont felismerése, az egységesítésnek lényeges módja.

Ezenkívül van az egységesítésnek egy kevésbbé mély, külsőleges, inkább csak előkészítő, de szintén hasznos módja. Ez abban áll, hogy igyekszik a tudomány távoli eredményeit áttekinthetően összeállítani és így a kutatók figyelmét a tudomány kiemelkedő mozzanataira felhívni előadások, összefoglaló ismertetések, enciklopédiák segélyével. Ezáltal az egységesítés fontosságának tudatát ébrentartja és az esetleg felmerülő új nagy szempontok megértését előmozdítja.

Azt hiszem, Társulatunk egyik feladata az önálló munkásság támogatásán kívül éppen a tudomány egysége tudatának ápolása. A jelen előadásban e célhoz szeretnék szerény mértékben hozzájárulni, midőn a matematika újabb szempontjainak napjaink fizikájában való érvényesülésével foglalkozom.

Ki fogok választani néhány szempontot és ezeket végigkövetem a fizikán úgy, hogy néhány keresztmetszetet kapunk, melyek egymást is metszik, azaz ugyanazon dolgok több vonatkozásban is előfordulnak. Részletesebb ismertetésbe nem bocsátkozhatom, hanem a legtöbb dolgot ismertnek tételezve fel, a lényegesnek látszó szempontok kiemelésére szorítkozom. Egyes nagy és fontos fejezeteket, mint a differenciálegyenleteket és főkép a kerületi értékproblémát nem fogom tárgyalni, csak alkalmilag teszek említést róluk, mert ezekkel a matematikai irodalom összefoglalásokban is bőven foglalkozott.

Nagy segítségemre van FELIX KLEIN*: Entwickelung der Mathematik im XIX. Jahrhundert című, nem kész alakjában is rendkívül tanulságos műve, mely fizikai vonatkozásokkal is bőven foglalkozik (pl. a második kötet teljesen a relativitáselmélet matematikai vonatkozásait tárgyalja) és lehetővé teszi, hogy egyes helyek bővebb tárgyalását elkerüljem és az említett műre hivatkozhassam. Különösen vonatkozik ez az ú. n. klasszikus fizikára, beleértve a relativitás elméletét is, míg a kvantummechanikával kapcsolatos fejlődés lényegesen új matematikai szempontokat használ, melyekkel KLEIN idézett műve nem foglalkozik. Természetesen több esetben egynémely alapvető gondolatot régebbi időbe kell visszakövetni.

Egy más szempontból is korlátozom a tárgyat. Alig van a matematikának olyan fejezete, mely speciális fizikai problémáknál alkalmazást ne talált volna és viszont sok fejezete a matematikának ilyen problémákból fejlődött ki. Én azonban csak olyan matematikai szempontokkal foglalkozom, melyek általános fizikai törvényszerűségek felfogására és kifejezésére lényegesek. A régebbi, ú. n. matematikai fizika sokat foglalkozott olyan problémákkal, melyek érdekessége elsősorban a matematika oldalán van, mint speciális alakú testek potenciálja szinguláris esetekben is. Az a könyv, melyből közülünk a legtöbben a matematikai fizikát megismertük, a RIEMANN—WEBER [1] jó fogalmat ad a klasszikus fizika matematikai vonatkozásairól. Ha evvel összehasonlítjuk a mű új átdolgozását FRANK és MISES [2] által, vagy COURANT—HILBERT [3] művét, azonnal láthatjuk nemcsak az anyag bővülését, hanem az általános szempontok előrenyomulását is. Bő fejezeteket szentelnek a lineáris algebrának, operátorelméletnek, ortogonális függvények tanának. És még így sem ölelik fel a mai fizika általános szempontból is lényeges matematikai apparátusát.

Ezek után térjünk át minden teljességre való törekvés nélkül a fejlődés egyes kiemelkedő szempontjai áttekintésére. Mivel egyes fogalmak több összefüggésben is előfordulnak, egyes ismétlések nem lesznek elkerülhetők.

1. Komplex számok a fizikában.

Amint a komplex számok az algebrában és függvénytanban sokszor általános törvényszerűségek kimondását tették lehetővé, úgy a fizikában is hasznosaknak bizonyultak eleinte speciális problémáknál, majd általános törvényszerűségek kimondásánál is. Közismert, hogy mily hasznos rezgési problémáknál a trigonometrikus függvények exponenciális függvényekkel való helyettesítése, úgyhogy a fizikus, de még a technikus is általánosan alkalmazza. Éppígy ismeretes, hogy az inkompresszibilis folyadékok kétdimenziós áramlásánál a sebességi potenciál és az áramvonalakat előállító függvények egy komplex változó analitikus függvényének

[1] H. WEBER: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik I—II. Vieweg.

[2] PH. FRANK u. R. v. MISES: Die Differential- u. Integralgleichungen der Mechanik u. Physik I—II. Vieweg.

[3] R. COURANT u. D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik. I—II. Springer.

reális és imagináris részei. Ez sok áramlási probléma tárgyalását lehetővé teszi, így a repülőgépek felhajtó erejének tárgyalását különböző szárnyprofilok esetében, midőn a szárnyprofilnak körre való konform leképezése jut szerephez. Az is ismeretes, hogy RIEMANN a LAPLACE-féle egyenlet exisztencia-problémájánál a RIEMANN-féle felületen egy fizikai képből indult ki és így egy nevezetes matematikai tételhez fizikai analógia segélyével jutott el.

Egy igen jellegzetes példáját komplex számok általános fizikai elméletre való alkalmazásának a relativitás elmélete adja. Az idő a fizika alapvető vonatkozásaiban mindig kissé másképp szerepel, mint egy térkoordináta, így a MAXWELL-féle egyenletekben vagy a hullámegyenletben. Ennek jellegzetes és általános kifejezést adhatunk, ha azt mondjuk, hogy egy általános arányossági faktorral és az imagináris egységgel megszorzott idő: $x_0 = ict$, az a mennyiség, mely pontosan úgy viselkedik, mint egy térkoordináta. Ezért alapvető a négydimenziós MINKOWSKI-tér bevezetése, melynek koordinátái: x_0, x_1, x_2, x_3, hol x_1, x_2, x_3 a térkoordináták; és melynek metrikáját az $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$ négyzetes alak jellemzi, mely azonban, mivel x_0 imaginárius, negatív értéket is felvehet. Ebben a térben derül ki a fizikai törvényszerűségek igazi szimmetriája, úgyhogy a MINKOWSKI-tér fizikai gondolkodásunk lényeges eleme és további fizikai hipotézisképzés kiindulópontja.

De a kvantummechanikában is egészen általánosan komplex mennyiségeket használnak, így a SCHRÖDINGER-féle egyenlet megoldásainál, a rendszert a HILBERT-térben reprezentáló vektor esetében, sőt az impulzushoz rendelt alapvető operátornál is:

$$p_k \to \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_k},$$

hol q_k a megfelelő koordináta és $\hbar$ a Planck-féle állandó osztva 2π-vel.

Az alapvető HEISENBERG-féle felcserélési relációkban:

$$p_k q_k - q_k p_k = \frac{\hbar}{i} 1, \text{ stb.}$$

is explicit szerepel az imaginárius egység. Általában a szereplő matrixok komplex hermitikus és unitär matrixok, ill. operátorok. A kvantummechanika egész formalizmusa lényegesen komplex mennyiségeket használ, a reális írásmódra való áttérés rendkívül nehézkessé tenné az egész apparátust.

Magasabb komplex, ú. n. hiperkomplex számokat először a kvaterniók bevezetésével alkalmaztak és eleinte, főkép angol szerzők túlzott jelentőséget tulajdonítottak nekik, de újabban csak elvétve használják, pl. F. KLEIN a merev test forgásai előállításánál. Persze nem szabad elfelejteni, hogy a fizikában ma széltében használt és nélkülözhetetlen vektoralgebra a kvaterniók tanából és GRASSMANN «Ausdehnungslehre»-jéből nőtt ki. Ami lényeges volt, megmaradt és a fizikai gondolkodás nélkülözhetetlen segédeszközét képezi. A fizika legújabb fejlődésében a magasabb hiperkomplex számok ismét igen nagy jelentőségre tettek szert. Így a kvantummechanika HEISENBERG, BORN és JORDANtól eredő megfogalmazásában úgy fejezhető ki, hogy a klasszikus mechanika formális törvényei, mint a kanonikus egyenletek, érvényben maradnak, de a koordináták és impulzusok helyébe matrixok, általában hermitikus matrixok teendők. Általában fizikai mennyiségekhez matrixokat rendelünk. A matrixok sajátértékei a fizikai mennyiség lehetséges értékei. De a matrixok felfoghatók mint hiperkomplex mennyiségek, melyeket műveleti szabályaik definiálnak függetlenül a matrixalakban való előállításuktól. Így a koordináták és impulzusokra jellemző, hogy a HEISENBERG-féle felcserélési relációknak tesznek eleget:

$$p_j q_k - q_k p_j = \frac{\hbar}{i} \delta_{jk}, \; p_j p_k - p_k p_j = 0, \; q_j q_k - q_k q_j = 0,$$

hol

$$\delta_{jk} = 0, \quad \text{ha} \quad j \neq k, \quad \delta_{jj} = 1,$$

azaz egy nem-kommutatív algebrát alkotnak.

Egy más igen fontos eset a relativisztikus SCHRÖDINGER-féle egyenlet. A kvantumelméleti formalizmus segélyével az energia egyenletéből úgy képezzük a SCHRÖDINGER-féle egyenletet, hogy az energia és impulzus helyébe a megfelelő operátorokat tesszük és egy koordinátafüggvényre alkalmazzuk. Így nyerjük a:

$$\left\{\frac{W^2}{c^2} - m^2c^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2\right\}\psi = 0$$

egyenletet, melyben W az energia, p_x, p_y, p_z az impulzus operátorai, m az elektron tömege, c a fénysebesség. Ez kielégíti a relativisztikus invariancia követelményeit, de az idő második deriváltját tartalmazza: $W^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, ami nehézséget okoz, mert ψ-t a kezdeti állapot nem határozza egyértelműen meg.

Ezért DIRAC megpróbálta a másodrendű egyenletet lineáris faktorokra bontani ilyenféleképpen:

$$\left\{\frac{W}{c} + a_xp_x + a_yp_y + a_zp_z + \beta\right\}\left\{\frac{W}{c} - a_xp_x - a_yp_y - a_zp_z - \beta\right\}\psi = 0.$$

Ez a felbontás a közönséges komplex számok tartományában nem lehetséges, hanem az $a_x, \ldots, \beta$ mennyiségeket hiperkomplex mennyiségeknek kell felvenni, melyek a következő relációkat elégítik ki:

$$a_x^2 = a_y^2 = a_z^2 = 1, \quad \beta^2 = m^2c^2,$$
$$a_xa_y + a_ya_x = 0, \ldots, \quad a_x\beta + \beta a_x = 0, \ldots$$

tehát az $a_x, \ldots, \beta$-k antikommutatív mennyiségek, melyek matrixokkal előállítva negyedrendű, de nem alacsonyabbrendű matrixokkal állíthatók elő. Olyan hiperkomplex számok ezek, melyekben 16 alapegység van.

A DIRAC-féle egyenlet alapvető a fizikában, amennyiben az elektron viselkedését definiálja. Így külön feltevés nélkül értelmezte az elektron mechanikai és mágneses momentumát, az ú. n. spint, számot ad a pozitív elektron létéről, az ú. n. párképződésről. A hiperkomplex mennyiségeket mellőzve, a DIRAC-féle egyenlet négy közönséges egyenlettel ekvivalens és ψ négy komponensből áll, melyek ú. n. spinort képeznek.

Az újonnan felfedezett elemi részek, mint a mezon értelmezése, a DIRAC-egyenlet általánosítását tette szükségessé, midőn ismét más felcserélési relációk, ill. megfelelő matrixok által jellemzett hiperkomplex számok merülnek fel.

Még egy más vonatkozásban is szerepelnek hiperkomplex számok a kvantummechanikában. A SCHRÖDINGER-féle tárgyalásnál a rendszert jellemzi egy függvény a $3n$-dimenziós koordinátatérben. A nagyon fontos ú. n. «második kvantálás» módszere a rendszert hullámokkal jellemzi a közönséges háromdimenziós térben, de a hullámok amplitudói, ill. a kifejtések együtthatói ismét hiperkomplex számok, jellegzetes kommutálási szabályokkal. Általában a komplex és hiperkomplex számok igen alkalmasnak bizonyultak arra, hogy jellegzetes sajátságú dolgokat és azok relációit velük pregnánsan jellemezzük és azért szerepük, azt hiszem, korántsincs kimerítve. Azt sem tartom kizártnak, hogy az ú. n. «modern» algebra többi elvont fogalomalkotásai is megfelelő alkalmazáshoz jutnak a fizikában.

2. A vektor fogalma.

Ma, midőn a fizikus a vektortan néhány fogalmát annyira elsajátította és megszokta, nem igen gondolnak e fogalom kialakulására és összefüggésére a komplex számokkal. Csak néhány megjegyzésre szorítkozom. A közönséges síkban egy komplex számot egy vektor ábrázol, egy komplex számmal való szorzás pedig elforgatást és az abszolút érték megváltoztatását jelenti. E gondolat átvitele a térre vezette HAMILTONT a kvaterniók felfedezésére, ki egyúttal a vektor fogalmát bevezette és a vektorterek műveleti szabályait megállapította.

Egészen más oldalról H. GRASSMANN jutott el a vektorokhoz, amennyiben a geometria bizonyos alapképleteit, mint vonaldarab, felületdarab, térfogat és magasabb dimenziójú terek megfelelő képleteit vette tekintetbe. Ezeknek a vektor, iránnyal ellátott felületdarab (vektori szorzat), négy dimenzióban hatosvektor, felel meg.

Úgy HAMILTON, mint GRASSMANN és főkép követőik valóságos kultuszt űztek a kvaterniókkal és vektorokkal, ami sokszor egész groteszk formákat vett fel és amiről érdekesen tájékoztat F. KLEIN említett műve.

Újabban úgy a matematikában, mint a fizikában nagy szerepet játszik a vektor fogalmának messzemenő általánosítása és formalizálása.

Vektor alatt egy n meghatározott sorrendben megadott számból álló értékrendszert értünk és definiáljuk az összeadás és szorzás műveletét.

Legyen két vektor:

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \; \mathfrak{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

A két vektor összegét:

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

belső szorzatát pedig

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

ill. komplex esetben az hermitikus szorzat

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = x_1^\star y_1 + x_2^\star y_2 + \cdots + x_n^\star y_n,$$

hol a csillag a konjugált komplex értéket jelöli, definiálja.

Az n dimenziós vektortér minden vektora n független alapvektor segélyével állítható elő.

E vektorfogalom végtelen sok dimenzióra is kiterjeszthető, ami például lehetővé teszi, hogy egy függvényt vektornak fogjunk fel az ú. n. függvénytérben. Egy függvény komponensei alatt érthetjük azok FOURIER-együtthatóit valamely ortogonális rendszerben való kifejtése szerint, vagy amint szokásos, de nem egészen korrekt,[1] a függvény értékeit a független változók értékrendszereinél, úgy-

[1] A második felfogás szerint a függvénytér dimenzióinak száma kontinuum számosságú volna, míg az első szerint csak megszámlálhatóan végtelen. Amint KALMÁR LÁSZLÓ tisztelt barátom figyelmeztetett reá, kinek értékes megjegyzéseiért ezúton is köszönetemet fejezem ki, a látszólagos ellentmondás onnan ered, hogy az összes helyen felvett függvényértékek nem független meghatározó adatai egy folytonos függvénynek. E kérdések behatóbb tárgyalása azonban nem lehet tárgya ezen áttekintésnek és azért az érdeklődőt a megfelelő szakirodalomra, mint COURANT—HILBERT, WEYL és J. v. NEUMANN megfelelő műveire utalom.

hogy minden ilyen értékrendszerhez egy dimenzió, ill. egy koordinátatengely tartozik, míg a megfelelő függvényérték a függvény illető vektorkomponense. Ez a felfogás közelfekvővé teszi, hogy két függvény belső szorzatát integrállal értelmezzük:

$$(f, g) = \int f^* g d\tau.$$

Két függvényt ortogonálisnak nevezünk, ha belső szorzatuk eltűnik. Ortogonális függvények egy rendszere egy «ortogonális» koordinátarendszert definiál a függvénytérben. Az egyes ortogonális függvények az egységvektoroknak, egy függvény ortogonális függvények szerinti kifejtésének együtthatói, mint már említettük, a komponenseknek felelnek meg. Egy más ortogonális függvényrendszerre való áttérés pedig egy ortogonális koordinátatranszformációnak felel meg.

Nagy fontossággal bírnak a vektortér, ill. függvénytér lineáris leképezései önmagára, az ú. n. lineáris vektoroperációk. Minden hozzárendelést, mely vektorok lineáris kifejezését a hozzárendelt vektorok ugyanazon kifejezésébe viszi át, lineáris operátornak nevezzük. Így H operátor f és g függvény lineáris kifejezését

$$H(af + bg) = aHf + bHg$$

kifejezésbe viszi át.

Véges dimenziójú vektortérben egy lineáris transzformáció, melyet egy matrix jellemez, a legáltalánosabb lineáris operátor, a függvénytérben ennek egy integráloperátor felel meg. A függvénytérben a legáltalánosabb lineáris operátor nem mindig integráloperátor, így pl. az az elementáris operátor, mely egy függvényt egy koordinátával megszorzott függvénybe vagy a deriváltba visz át, nem integráloperátor. Dirac ugyan az erősen szinguláris Dirac-féle δ bevezetésével kierőszakolta emez operátorok integráloperátorokként való előállítását és evvel formális előnyöket ért el, de eljárása, legalább mai alakjában, nem felel meg a szigorúság követelményeinek.[1]

---

[1] Lásd a Dirac-féle eljárás kritikáját illetően J. v. Neumann «Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik» c. könyvét, különösen a 13—15. oldalt.

Az operátorok a kvantummechanika rendszerében alapvető fontossággal bírnak, amennyiben az elmélet általános megfogalmazása éppen az operátorok segélyével történik.

Minden fizikai mennyiséghez, mint koordináta, impulzus, impulzusnyomaték, energia stb. egy operátor tartozik. Valamely fizikai rendszer meghatározott állapota pedig egy vektor által van jellemezve. Az operátor alkalmazva valamely vektorra, azt általában egy más vektorba viszi át, de lehetségesek olyan vektorok, melyeket az eredeti vektorral arányos vektorba visz át. Ezek az operátor ú. n. sajátvektorai, az arányossági faktor pedig a megfelelő sajátérték. A kvantummechanika szerint egy operátor sajátértékei, az operátor «spektruma», a hozzárendelt mennyiség lehetséges értékei. A megfelelő sajátvektorok pedig a rendszer hozzátartozó állapotait jellemzik.

Ha az operátort matrixszal jellemezzük, úgy a sajátértékek meghatározására egy oly transzformációs matrixot keresünk, mellyel azt diagonális alakra transzformálhatjuk. Így, ha H az energiamatrix és S a transzformációs matrix, S^{-1} a reciprok matrix, az

$$S^{-1}HS = E,$$

azaz

$$HS = SE$$

matrixegyenletet kell megoldani, hol E diagonális matrix.

Az utóbbi egyenletnek felel meg a Schrödinger-féle egyenlet, ha H az energiaoperátor és $\psi(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ a Schrödinger-féle egyenlet ú. n. sajátfüggvénye:

$$H\psi = E\psi$$

az előbbi transzformációs matrix egy oszlopának felel meg. Hogy az analógia keresztülvihető legyen, ú. n. «nem-kvadrátos és «folytonos» matrixokat is tekintetbe kell venni.

Az operátorok közül a felcserélhető operátoroknak olyan fizikai mennyiségek felelnek meg, melyek mérése kompatibilis, azaz egymást nem zavarja, míg a fel nem cserélhető operátoroknak inkompatibilis mérések felelnek meg. Ezek olyan mérések, hogy az egyik mennyiség meghatározása után a másik mérése a rendszer állapotát úgy változtatja meg, hogy az előbbi mérés eredménye megszűnik az új állapotban érvényes lenni.

3. A térfogalom általánosítása.

A hiperkomplex számok és a vektorfogalom általánosításai, amint ezek az újabb fizikában konkrét szükségletből mindinkább érvényre jutnak, a térfogalom általánosításának tekinthetők. Ezenkívül a szűkebb értelemben vett tér fogalma is igen mélyreható és nagyjelentőségű általánosítást nyert a relativitás elmélete kapcsán, miközben a matematika oldaláról már régebben megindult fejlődést konkrétizálta és kiterjesztette.

A matematikában a párhuzamosok axiómájának a többi axiómára való visszavezetésének lehetetlensége vezetett arra a meggyőződésre, hogy más, ellentmondásmentes geometriai koncepciók is lehetségesek. Hogy a természetben melyik geometria van megvalósítva, arról már Gauss szerint mérések hivatottak dönteni és már Bolyai Appendix-e címében is kifejezésre jut, hogy a priori nem dönthető el. További kutatások (Cayley, Klein, Poincaré) kimutatták, hogyha az euklidesi tér bizonyos képződményeit nevezzük egyenesnek, távolságnak stb., ezek közti összefüggések egy nem-euklidesi geometriának felelnek meg és így egy nem-euklidesi geometria euklidesi modelljét valósíthatjuk meg. Éppúgy kimutatta Poincaré, hogy ha az euklidesi teret nem változatlan, hanem változó mértékrudakkal mérjük ki, szintén egy nem-euklidesi geometria összefüggéseit nyerjük. Ellenben azt senki sem vonta kétségbe, hogy ha a fizikai teret «értelmes» mérési mód szerint, azaz a szokásos hossz- és szögmérési módszereket használva, mérjük ki, nagy pontossággal az euklidesi geometria van megvalósítva és a nem-euklidesi geometriák többé-kevésbbé érdekes gondolati lehetőségek.

A relativitás elméletének és a hozzáfűződő fejlődésnek épp az a nagy jelentősége, hogy egy «értelmes» geodézia mellett jutunk el egy nem-euklidesi térhez, mely ugyan kis távolságoknál alig különbözik az euklidesi tértől, de például az egész világtérre alkalmazva már attól igen eltérhet, mert megenged zárt, véges, de határnélküli teret.

Még egy más előkészítő gondolatot kell felemlítenem: ez az idő felfogása mint negyedik koordináta. Ez először ama grafikus ábrázolásoknál szerepelt, melyeknél egy egydimenziós mozgást az x, t síkon ábrázolunk, azaz az x, t halmazt a tér egy x, y síkjára képezzük le.

Pár szóval vázolni szeretném a relativitás elmélete fejlődését, nem annyira ismertetés, mint a lényeges gondolatok kiemelése céljából.

H. A. LORENTZ észrevette, hogy az állócsillagok rendszeréhez képest egyenletesen mozgó rendszerekben az elektromágneses és optikai jelenségek éppúgy folynak le, mint a kiindulási rendszerben, ha az idő helyett az eredeti idő és hely függvényét, a «lokális időt» vezetjük be. Míg ez LORENTZnél egy matematikai segédfogalom volt, EINSTEIN kimutatta, hogy a lokális idők közt nincs jogosultsága egynek, mint «valódi» időnek kiemelésére. Végre MINKOWSKI látta át teljesen a viszonyok logikai strukturáját a négydimenziós tér-időhalmaz, a MINKOWSKI-tér bevezetésével. Kimutatta, hogyha e térben oly geometriát vezetünk be, melyben a távolság négyzetét $x_1^2+x_2^2+x_3^2-l^2$, hol $l=ct$, indefinit kvadrátos forma méri, e térben a fizikai jelenségeket igen áttekinthetően írhatjuk le. Mivel a metrikus alapforma indefinit, lesznek pozitív (térszerű), negatív (időszerű) és zérus abszolút érték négyzettel bíró vektorok. A különböző inerciarendszerek közti összefüggést megadó LORENTZ-féle transzformáció egyszerű geometriai jelentéssel bír. Formálisan még egyszerűbben írhatjuk le a viszonyokat, ha az $x_0=il=ict$ imaginárius mennyiséget vezetjük be és a távolság négyzetét $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$ formával jellemezzük. Ekkor a LORENTZ-féle transzformációnak egy elforgatás felel meg e térben, x_0 éppúgy szerepel, mint egy térkoordináta. A fizikai törvények, így a MAXWELL-féle egyenletek e tér vektorai és tenzorai, azaz bizonyos kovariansok közti összefüggések alakjában jelentkeznek rendkívül egyszerű alakban. Aki az elektrodinamika alapegyenleteit, az elektromágneses potenciálokat, LORENTZ-féle erőtörvényt stb. a háromdimenziós előállításban ismerte csak, úgy fogja érezni, hogy az összefüggések igazi egyszerű értelmét csak a MINKOWSKI-tér segélyével értette meg. Míg általános összefüggések feltüntetésére x_0 használata célszerű, a fizikailag fontos előjel feltüntetésére l változó használata alkalmasabb, melyre természetesen azonnal áttérhetünk. A fizika szempontjából fontos mennyiségek a LORENTZ-féle transzformáció kovariansai és invariansai, úgyhogy MINKOWSKIval az invarianselmélet a fizikai gondolkodásnak alapvető része lett.

Az EINSTEIN-féle gravitációelmélet alapgondolata, hogy a teret ill. tér-időhalmazt a hellyel változó görbülettel bíró RIEMANN-féle térnek tekintjük. A tér görbületi viszonyait két szomszédos pont «távolát», ds-t, ill. négyzetét egy kvadrátos, a reális l változó alkalmazásával indefinit alapforma

$$ds^2 = \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik} x_i x_k$$

határozza meg, melynek együtthatóit, a g_{ik}-at, az anyageloszlás határozza meg. Egy tömegpont e tér geodetikus görbéin mozog HAMILTON elve szerint. Nem lett volna lehetséges, hogy ez az elmélet néhány év alatt kiépüljön, ha az egész matematikai apparátust CHRISTOFFEL és RICCI nem dolgozták volna már előbb ki. Azt is mutatta a fejlődés, hogy milyen lényeges volt a variációelvek és a geodetikus görbék ismerete, melyeket pedig sok fizikus hajlandó volt matematikai luxusnak tekinteni.

Azt hiszem, felesleges a relativitás elméletének érdemeit felsorolni vagy a meg nem értésből eredő kifogásokat cáfolni. De talán nem felesleges, ha néhány szóval megemlékezem szerepéről a fizika aktuális problémáiban és az itt felmerülő nehézségekről.

A «speciális» relativitáselmélet legnagyobb eredményeit a mozgó testek elektrodinamikájában érte el, míg az «általános» relativitáselmélet új lehetőséget mutatott a gravitáció értelmezésére és a kozmológia számára. De igen termékenynek bizonyult az atomfizikában a kvantumelmélet lényegesen új szempontjaival kapcsolatban is. Így már a régi, BOHR-féle, kvantumelméletben elvezetett a híres SOMMERFELD-féle finomstruktura formulájához. Az energia és tömeg ekvivalenciája pedig ma egyike a legfontosabb fizikai törvényeknek. A kvantummechanikában pedig szellemes, bár igen provizórikus, relativisztikus meggondolások vezették DE BROGLIE-t arra, hogy minden mozgó korpuszkulához hullámot rendeljen, amiből később a SCHRÖDINGER-féle hullámmechanika nőtt ki. De a legnagyobb szolgálatot a DIRAC-féle egyenlet felállításával tette, amint arról már szó volt. Általában, ha a részek sebessége megközelíti a fénysebességet, úgy nélkülözhetetlen. Így a radioaktív anyagok β-bomlásánál is az alapfeltevésekben vezető elv volt a relativisztikus invariancia követelménye.

Egy nehézségről kell itt megemlékeznem, mely a több elektront tartalmazó atomok relativisztikus kielégítő tárgyalását eddig megakadályozta. Ez az, hogy a relativisztikusan helyes mozgásegyenletek felírása több korpuszkula esetében nem sikerült. A nehézség az, hogy egymáshoz képest mozgó részek egyszerre nyugalomra nem transzformálhatók. Úgy látszik, itt minden résznek külön időt kell tulajdonítani és egy n pontból álló rendszert egy $4n$ dimenziós koordinátatérben kell leírnunk. Mint közelítő egyenlet a BREIT-féle használható, de az elvi problémát nem oldja meg.

Amint e felsorolásból is láthatjuk, a relativitáselmélet a kvantumelmélettel kapcsolatban is jelentékeny eredményeket tudott felmutatni. De míg a relativitáselmélet az alapfogalmak némi módosításával teljesen összeolvadt a mechanika és elektrodinamikával, a kvantummechanika sokkal mélyebb különbséget jelent a klasszikus fizikával szemben, úgyhogy a relativitáselmélet és kvantummechanika alapjainak harmonizálása még korántsincs keresztülvive.

Közös fenomenologikus alapfelfogás úgy a relativitáselméletben, mint a kvantummechanikában, hogy csak annak tulajdonítunk jelentőséget, amit, legalább elvileg, mérni tudunk. Ezen elv következetes keresztülvitele vezetett a különböző helyeken lefolyó események egyidejűsége fogalmának relativálására, másrészt a kvantummechanikában az ú.n. felcserélési és határozatlansági relációkra. Ez utóbbiak azonban igen jelentékeny kihatással vannak a fizikai «tér» («Feld») felfogására, akár az elektromágneses, akár a gravitációs teret tekintjük. A klasszikus elgondolás szerint az elektromágneses tér komponenseit vagy a gravitációs potenciált vagy az általános relativitáselmélet szerint a g_{ik}-kat, mint a hely és idő függvényeit adva gondoljuk. A kvantummechanikában ez a felfogás így nem tartható fenn. Ugyanis itt a fizikai mennyiségekhez operátorok vannak rendelve. Egyszerre csak oly operátorok sajátértékei határozhatók meg, melyek felcserélhetők. Fel nem cserélhető operátorok esetében az egyik mennyiség mérése a másik ellenőrizhetetlen megváltozását hozza magával. Ezért elvileg egy időpontban nem határozhatók meg az összes adatok, melyek egy rendszer teljes mechanikai állapotát meghatározzák és így a jövő sem határozható meg. Az elektromágneses tér adatai különböző helyeken szintén nem cserélhetők mindig fel. Tehát a «tér» («Feld») klasszikus fogalma nem tartható fenn, mert nem adhatók meg mindazon adatok, melyekkel a teret jellemezni kellene. Az elektromágneses térnek relativisztikus helyes kvantummechanikája formálisan felépíthető, fontos eredményekhez is vezet, másrészt azonban bizonyos divergens kifejezések lépnek fel benne, mutatva, hogy teljesen rendben nincs az elmélet.[1] A gravitációelmélet a kvantumelmélet szempontjából alig talált feldolgozást, elvileg hasonló a helyzet.

Miután a térfogalommal szemben a fizikában sokkal szabadabb álláspont alakult ki és a tér geometriai szerkezetére vonatkozó feltevéseket ma jogosult fizikai feltevéseknek tekintjük, itt még sok lehetőséggel kell számolni. Így mindgyakrabban hangoztatják, hogy a tér végtelen oszthatóságát is fel kell adni és van legkisebb távolság, melynél kisebb elvileg nem mérhető, de határozott felfogás e tekintetben nem alakult ki. Másrészt azok a próbálkozások sem vezettek eredményhez, melyek a korpuszkulákat mint a tér geometriailag eltérően viselkedő részeit (gödrök, ráncok) igyekeztek értelmezni. Újabban SCHRÖDINGER hangoztatja, hogy provizorikus álláspont az, melyben külön teszünk feltevést a tér geometriájára és külön a fizikai tartalomra, ezeknek egységes szempontból

[1] Lásd az 5. fejezetben még bővebben.

kellene adódni. Mindezek azonban még kialakulóban levő felfogások, de épp ezért igen érdekesek.

4. Az általános koordináták és többdimenziós terek.

A térfogalomnak még egy más irányú általánosítása mind nagyobb szerepet játszik a fizikában.

Már LAGRANGE kiemelte, hogy egy n pontból álló rendszer helyzetét meghatározó $3n$ koordináta egy $3n$ dimenziós teret határoz meg, a konfigurációs vagy koordinátateret, melyben a pontrendszert egy pont reprezentálja. Igen fontos lépés volt az egyes pontokra külön vonatkozó koordináták helyett olyan koordináták bevezetése, melyek az egész rendszerre vonatkoznak és annyian vannak, hogy a rendszer konfigurációját az esetleges kényszerfeltételek tekintetbevételével egyértelműen meghatározzák és a pontok koordinátáinak függvényei:

$$q_i = q_i(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}),\ i=1, 2, \ldots, f.$$

Így egy pontrendszer kis mozgásait egy stabilis egyensúlyi helyzet környezetében úgy jellemezhetem, hogy minden pontja derékszögű koordinátáit, mint az idő függvényét megadom, midőn minden koordináta szinuszrezgések összege lesz. De bevezethetem a derékszögű koordináták bizonyos lineáris kifejezéseit, az ú. n. Rayleigh-féle normális koordinátákat, melyek már csak egyszerű szinuszrezgéseket végeznek. De egy ilyen normális koordináta már nem a rendszer egyes pontjaira vonatkozik külön, hanem az egész rendszerre. Átvihetem ezt az eljárást egy kontinuumra, pl. a húrra, hol a koordináták száma természetesen végtelen sok lesz. Így egy húr mozgását megadhatom, ha megadom minden pontja koordinátáit. De jellemezhetem úgy is, hogy megadom, hogy az egyes harmónikus rezgéseknek, alap- és felhangoknak mi az amplitudója és fázisa. Minden rezgési problémánál fontosak a RAYLEIGH-féle normálkoordináták bevezetése. Míg a klasszikus mechanikában az általános koordináták bevezetése csak egy matematikai módszert jelent, addig a kvantummechanikában jelentőségük még fokozott, mert a kvantumtörvényeket éppen a megfelelő általános koordinátákra mondjuk ki. Így a kvantumelektrodinamikában harmónikus rezgésekre bontjuk az elektromágneses teret és ezeket úgy kvantáljuk, mint egy harmónikus oscillatort, azaz a klasszikus mechanika szerint lehetséges amplitudók közt csak bizonyosakat engedünk meg.

Mivel a mechanikában a rendszer állapotát a helyzeten kívül még a sebességek, ill. impulzusok határozzák meg, célszerű nem a $3n$ dimenziós koordinátateret, hanem a $6n$ dimenziós koordináta-impulzusteret, az ú. n. fázisteret vezetni be. Általános mechanikai meggondolásoknál és főkép a statisztikai mechanikában, hol igen sok, 10^{24} nagyságrendű részből álló rendszerekkel foglalkozunk, teljesen a fázistérben gondolkodunk így a Liouville-tételnél, ergodelméletben stb.

A kvantummechanikában a fázistér koncepciója nem vihető át, mert koordináta és konjugált impulzus nem kompatibilis mennyiségek, tehát az egyik mérése a másikat megváltoztatja. Tehát csak koordináta vagy impulzusteret használunk. Ezek itt önálló hipotézisképzés kiindulási pontjául is szolgálhatnak, pl. Born az impulzustér geometriájára tett érdekes feltevéseket.

A klasszikus mechanikában nagy szerepet játszó Hamilton—Jacobi-féle parciális differenciálegyenlet is itt említendő.

Hamilton optikai meggondolások alapján a hullámfelület egyenletét állapította meg, melyek seregének ortogonális trajektóriái a sugarak, ezekben mozognak az emisszióelmélet szerint a fényrészek. Ezt a képet átvitte a mechanikára és kimutatta, hogy a pontmechanika általános problémája úgy tárgyalható, hogy a konfigurációs térben megadunk egy hullámfelületet, melynek ortogonális trajektóriáiban mozog a rendszert reprezentáló pont. E felületet határozza meg az előbb említett parciális differenciálegyenlet. Jacobi tovább kidolgozta az elméletet és mechanikai problémákra alkalmazta. A fejlődés mindinkább formális irányt vett, igen szép összefüggéseket állapított meg parciális és közönséges differenciálegyenletek, meg variációs problémák közt, de a fizikában, eltekintve az égi mechanikától, alig talált alkalmazást és mondhatni, a fizikusok részéről nem örvendett nagy népszerűségnek, amit F. KLEIN idézett műve 207. oldalán megértéssel és helyesléssel vesz tudomásul.

Ma azonban egészen másként értékeljük. Már a régi kvantumelméletben igen hasznosnak bizonyult a HAMILTON—JACOBI-féle egyenlet. A kvantummechanikában alapvető SCHRÖDINGER-féle egyenlet pedig a HAMILTON—JACOBI-féle egyenlet általánosítása, mely az előbbibe megy át, ha a benne szereplő PLANCK-féle állandó zérus határra megy át. A HAMILTON—JACOBI-egyenlet hullámfelülete ismét fontos szereppel bír, valóságos hullámok egyenlő fázisainak felülete. A kvantummechanika abban különbözik a klasszikus mechanikától, mint a hullámoptika a fény emisszióelméletétől, melyben elsődleges fogalom a fényrészek pályái, azaz a sugár, a hullám pedig ezekre merőleges felület és csak matematikai segédfogalom. Bizonyos feltételek mellett úgy a klasszikus mechanika, mint a sugároptika jó közelítést ad. Ha a klasszikus és kvantummechanika viszonyát érthetővé akarjuk tenni, az út éppen a HAMILTON—JACOBI-egyenleten át vezet és ezért egyetemi előadásaimban is rendszeresen tárgyalom.

A kvantummechanika általános megfogalmazásában egy más sokdimenziós koncepció, a HILBERT-tér talál széleskörű alkalmazást, amint ezt már a vektorfogalom általánosításánál vázoltuk.

Láthatjuk, hogy a sokdimenziós terek a mai fizikai gondolkodásnak szintén lényeges elemét képezik.

5. Axiomatika.

Az axiomatika feladata, mint az először az euklidesi geometriában kialakult, a tudás valamely körének összes lehetőleg független, másra vissza nem vezethető tételeinek felállítása és a többi tételeknek ezekre való visszavezetése.

A fizika axiomatikájáról oly szoros értelemben, mint pl. a geometriában, alig beszélhetünk. Vannak ma is nagy területei, hol csak kevéssé összefüggő empirikus törvényeket ismerünk és azok a részek, melyeknek már átfogó törvényszerűségeit ismerjük, szintén nem foglalhatók egyetlen rendszerbe, úgyhogy csak e rendszerek axiomatikájáról beszélhetünk.

Az első axióma-rendszer a Newton-féle mechanikai axiómák rendszere volt. Meg kell azonban jegyeznem, hogy ez sem volt egy «teljes» axiómarendszernek tekinthető, mert például teljesen nyitva hagyta azt a kérdést, hogy melyek azok az erőtörvények, melyek a természetben valóban előfordulnak. Soká az a felfogás uralkodott, hogy ezek az egész fizika alapaxiómáit képezik és ha valamely jelenségcsoportot nem sikerült eddig ezekre visszavezetni, az csak idő kérdése. Hogy a relativitáselmélet hogyan módosította a mechanikát, azt már említettem.

Az első terület, melyet sok sikertelen próbálkozás után sikerült a mechanikától független axiómákra visszavezetni, az elektrodinamika volt, beleértve az optikát is. Az üres térre vonatkozó Maxwell-féle egyenletek és az elektronok feltevése képezik a független alaptételeket. Az egész terület, a mechanikával együtt, formális befejezettséget ért el a relativitás elméletével. Az elmélet határait épp azok a jelenségek szabják meg, melyek a kvantumelmélet bevezetését tették szükségessé.

Egy másik terület a termodinamika. A klasszikus tárgyalás abból indul ki, hogy bizonyos folyamatok, mint például, hogy hő menjen át hidegebb testről melegebbre, a nélkül, hogy még más változás történjen, nem lehetségesek. A matematikai kifejtésben azután az ú. n. Carnot-féle körfolyamatokat használják, melyeket már régen idegen elemnek éreztek és szükségét érezték egy olyan megfogalmazásnak, mely minden idegen elemet kiküszöböl. Hazánkfia, Farkas Gyula, egy 1895-ben magyarul [1] és németül [2] is megjelent értekezésében, a következő alaptételt állítja fel:

«Adiabatikusan, azaz pusztán mechanikai műveletekkel egy test sem juttatható oly állapotba, mint puszta hőközléssel.»

Kimutatja, hogy ez az elv a fentemlített Clausius-féle posztulátummal ekvivalens és érvénye esetében a felvett elemi hőt kifejező differenciálkifejezésnek

[1] Farkas Gy.: Math. és Phys. Lapok. 1895, p. 7—11.

[2] Farkas, Gy.: Math. und Naturw. Berichte. XII. köt. p. 282—286. 1895.

$$dQ = \theta d\vartheta + A da + B db + \cdots$$

hol a, b,... állapothatározók és θ, A, B ezek függvényei, mindig van integrációs nevezője.

FARKAS GYULA e dolgozatában anticipálta CARATHÉODORYnak [1] termodinamikai axiómatikáját, mely csak kevéssé általánosabb. A CARATHÉODORY-féle elv azt mondja:

«A testek minden állapotának tetszésszerinti közelében vannak oly állapotok, melyeket az elsőből adiabatikusan nem érhetünk el.» Sajnos, FARKAS GYULA ezirányú érdeméről a tudományos világ alig vett tudomást.

A termodinamika eme fenomenologikus elméletét már nem tekintjük a ma elérhető legmélyebb alapokra való visszavezetésnek, sem a klasszikus mechanika, sem a kvantummechanika álláspontján.

Mai felfogásunk szerint a termodinamika második főtételének csak ott van értelme, hol számos részből álló rendszer átlagos állapotát tekintjük. Alapja a valószínűségszámítás és a rendszerek bizonyos általános sajátságai. A klasszikus mechanika ily tétele az ergodtétel, mely szerint a fázistérben a rendszert reprezentáló pont állandó energia esetében egy felületen marad és azt mindenütt sűrűn beborítja, kivéve, ha a kezdeti helyzet egy nulla méretű halmaz pontjaiban van. A kvantummechanika rendszerében az elmélet alapjaiban levő statisztikai elem elegendő a termodinamika alapvetésére.

A kvantummechanika szintén egy igen általános axiomatikus rendszer, melynek alapvonásait már előbb jellemeztem. Itt csak fel szeretném említeni az alapfeltevések rendszerének amaz igen érdekes alakját, melyet DIRAC adott meg Principles of Quantummechanics c. könyvében.

A DIRAC-féle axiomatikának érdekessége abban áll, hogy az alapfogalmakat nem az operátorelmélet segélyével, hanem közvetlenül a fizikai mérések általános sajátságai alapján vezeti be. Így

---

[1] CARATHÉODORY: Math. Ann. Bd. 67. p. 355. 1909. Lásd még Handbuch der Physik. LANDÉ cikke.

definiálja az állapotok szuperpozicióját, az ortogonális állapotokat, két állapot megegyezési valószínűségét, kompatibilis és nemkompatibilis mérések fogalmát és ezek segélyével építi fel az egész elméletet és az operátorelmélet matematikai formalizmusát is. Így egy állapotot ezáltal jellemez, hogy választ ortogonális alapállapotok rendszerét és megadja az állapotot, mint ezek szuperpozícióját. Az alapállapotok egységvektoroknak, a kifejtési együtthatók négyzetei a «megegyezési valószínűségeknek» felelnek meg.

A kvantummechanika fő részeiben 1925-től 1928-ig épült ki. Célszerű lesz, úgy mint a relativitás elméleténél egy futó pillantást vetni az elmélet ma aktuális elvi problémáira. Ezeknek a következőket tekinthetjük:

1. A kvantumelektrodinamika.
2. A magerők problémája.
3. Az elemi részek problémája.
4. A fizikai alapállandók összefüggése.

A kvantumelektrodinamika a kvantummechanika szempontjait az elektromágneses térre alkalmazza. Amíg üres, azaz töltést nem tartalmazó térről van szó, ez nehézséget nem okoz. Előállítja a teret, mint álló hullámok rendszerét, azaz Fourier-féle sorba fejti. A harmónikus komponenseket pedig úgy kvantáljuk, mint egy harmónikus oscillátort, amivel az elektromágneses tér kvantálását elvégeztük. Az eredmény megfelel az elemi foton feltevésnek, teljesen ekvivalens módon felfoghatjuk az elektromágneses teret, mint álló hullámok rendszerét vagy mint fotonokból álló gázt. Ez szép példája a hullám-korpuszkula dualitásának.

Nagyobb nehézségek merülnek fel, ha töltések is vannak jelen. Formálisan itt is elvégezhető a felbontás, de longitudinális hullámok is lépnek fel azonkívül bizonyos divergáló kifejezések. A perturbációszámításban ezért első közelítésen nem lehet túlmenni. Így is az elmélet használható, fontos eredményekhez is vezet, mint a Klein—Nishina-féle formulához, megadja az elektronpozitron párok képződési valószínűségét, de nyilván elvi hiányai vannak.

A kvantumelektrodinamika módszerei a magerők újabb felfogására adtak lehetőséget. Először Fermi elméletét a radioaktív anyagok oly bomlásáról kell említenem, mely β-sugarak emissziójával jár. Ebből is kiadódtak a magot alkotó részek közti erők, de egy arányossági faktor nagyságrendje nem felel meg.

Ezután YUKAWA japán fizikus e gondolatkörben azt a feltevést tette, hogy a magerőkre lényeges részek nem az elektronok, hanem ezeknél 100—200-szoros tömeggel bíró részek. Ilyen részeket azután a kozmikus sugarakra vonatkozó vizsgálatok folyamán kísérletileg is kimutattak, ezek a mezonok. Ezek pontosabb matematikai jellemzése a DIRAC-féle egyenlet olyan általánosításához vezetett, melyben magasabb hiperkomplex mennyiségek szerepelnek.

Az atomokat ma nem tekintjük elemi részeknek. Elemi részeknek tekintjük: a protont, a neutront, az elektront, a pozitront, a mezont és a neutrinót esetleg a neutrettót. Azt is megengedjük, hogy elemi részek keletkezzenek és eltűnjenek, hacsak az energia, impulzus és töltés megmaradására vonatkozó tételek ki vannak elégítve. Az elemi részek fajainak nagy száma, változatlanságuk elvetése, azt mutatja, hogy nem tekintjük ezeket már végső fundamentális egységeknek és egy magasabb elvet keresünk, melyekből az elemi részek léte és sajátságai következnek. Ez igen mély probléma, melynek megoldása irányát ma még nem látjuk.

Végre egy problémát említek fel, mely az utóbbi években szintén sokat foglalkoztatta a fizikusokat, a nélkül, hogy sejtéseken túl tudtak volna menni.

A természetben előforduló testek mérhető fizikai jellemző adatait nagyrészt sikerült bizonyos elemi állandókra visszavezetni, vagy legalább valószínű, hogy a visszavezetésnek csupán matematikai nehézségei vannak. Ezek az alapállandók: az elemi töltés e, a fénysebesség vakuumban c, a gravitáció állandója f, az elektron tömege m, a proton tömege M, az elektron ú. n. sugara r_0, a világtér hipotetikus sugara R, a PLANCK-féle állandó $\hbar$. Újabban épp ezen alapállandók közti összefüggésekre irányul az érdeklődés. Az első meglepő összefüggés volt, hogy a SOMMERFELD-féle fínom struktura konstans:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}.$$

reciprokja közel egész szám, mégpedig 137. A proton és elektron tömegének viszonya 1850. Két elektron közt ható elektromos és gravitációs erő viszonya igen nagy szám, $2 \cdot 10^{39}$, éppígy igen nagy szám a világtér és az elektron sugarának viszonya, 10^{41}. Mindezek a tények néhány igen kiváló kutatót (EDDINGTON, DIRAC, JORDAN) rendkívül érdekes, messzemenő, de kevéssé megalapozott hipotézisekre indítottak, de nincs kizárva, hogy épp itt a fizikai megismerés igen jelentékeny elmélyítésével számolhatunk.

6. Csoportelmélet.

A csoport fogalmára a fizikában alkalmilag már régebben többször történt hivatkozás. Így a merev test mozgásai csoportot képeznek, éppígy a LORENTZ-transzformációk. A mechanika ú. n. kanonikus transzformációi is, és egy rendszer mozgását fel lehet fogni, mint folytonos kanonikus transzformációkat, melyekben az idő a parameter. A vektortanban a poláris és axiális vektorok megkülönböztetése is a tükrözési transzformációval szemben való viselkedésen történik, tehát szintén csoportelméleti alapon.

Mindezekben azonban csak a csoport fogalma szerepel és nem a csoportelmélet részletes módszerei. Az első alkalom, melynél a részletes csoportelmélet jutott alkalmazáshoz, a kristályrácsok szimmetriaviszonyainak tanulmányozása volt, hol a csoportelmélet lehetővé tette az összes lehetséges pontrácsok áttekintését és osztályozását. Mégpedig ez akkor történt, midőn a röntgensugarak segélyével még nem indult meg a kristályok szerkezetének módszeres felderítése. Hogy ez aránylag rövid idő alatt oly nagy előhaladást tett, ahhoz hozzájárult, hogy a szimmetriaviszonyok előre tisztázva voltak.

Egy más fejezet, melyben a csoportelmélet igen lényeges szerephez jutott, a spektrumok kvantummechanikai elmélete. Egy atom spektrumára mérvadóak az atom energiájának lehetséges értékei, melyek a megfelelő SCHRÖDINGER-féle egyenlet sajátértékei. Itt a legtöbb állapot degenerált, azaz ugyanazon energiaértékhez több, független sajátfüggvény tartozik, legyenek ezek: $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$. A SCHRÖDINGER-féle egyenlet bizonyos transzformációkkal szemben invariáns, így a koordináta-rendszer bizonyos elforgatásaival, az atom egyenlő elektronjai felcserélésével stb. Egy ily transzformációval a megoldások más megoldásokba mennek át, de ezek az alapul vett független megoldásokkal lineárisan kifejezhetők, úgy, hogy minden transzformációhoz egy lineáris szubsztitució, azaz egy matrix tartozik. Az összes megengedett transzformációk egy csoportot képeznek, melyeknek egy «előállítását» adják a hozzátartozó lineáris szubsztituciók. A csoport és előállítása jellemző az atom megfelelő állapotára, azok osztályozását, jellemzését kvantumszámokkal lehetővé teszi. Ha most egy külső erő hatásának tesszük ki az atomot, úgy ennek hatására mérvadó ezen erőhatás szimmetria sajátságai, melyek meghatározzák, hogy hogyan bomlik fel egy degenerált állapot több különböző energiájú állapotba.

A csoportelmélet spektroszkópiai alkalmazását hazánkfia, Wigner Jenő kezdeményezte és azután Neumann Jánossal közösen részletesen kidolgozta. Továbbá a kémiai kötés kvantummechanikai elméleténél, valamint a molekulák állapotai osztályozásánál is bő alkalmazást talál a csoportelmélet. A fizikusok nagyrésze meglehetős idegenkedéssel fogadta a csoportelmélet benyomulását és szeretik lehetőleg elkerülni vagy legalább nem explicit alkalmazni, ami sokszor arra vezet, hogy épp a lényeget elfedik. A fenti kérdések általános tárgyalása éppen nem megy csoportelmélet nélkül és azért fizikai tendenciájú cikkekben is most is sokszor kénytelenek alkalmazni, úgyhogy talán nem csalódunk, ha ezen matematikailag oly szép elméletet nem tekintjük csupán kuriozitásnak a fizikában.

7. A transzformáció-elmélet.

E pontban a klasszikus mechanika ú. n. kanonikus transzformációival és a kvantummechanika megfelelő transzformációival szeretnék röviden foglalkozni.

A kanonikus transzformáció olyan transzformáció, mely a mechanika Hamilton-féle kanonikus egyenleteinek alakját nem változtatja meg. Ez egy általánosabb transzformáció, mint a pont-transzformáció, mely az új koordinátákat, mint a régiek függvényét adja meg:

$$Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

A kanonikus transzformáció általában az új koordinátákat és impulzusokat, mint a régi koordináták és impulzusok függvényét adja meg:

$$Q_i = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n)$$
$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

A transzformációnál bizonyos differenciál-forma invarians marad. A kanonikus transzformáció segélyével elérhető a rendszer integrációja, ha az új változókban az egyenletek elég egyszerűek. A kanonikus transzformációk szoros rokonságban vannak az ú. n. érintkezési transzformációkkal.

A kvantummechanikában a kanonikus transzformációnak megfelel a matrixok, ill. operátorok olyan transzformációja, mely azok sajátértékeit változatlanul hagyja. Azok a transzformációk, melyek egy matrixot diagonális alakra transzformálnak, szolgáltatják éppen a sajátértékeket.

Az állapottérben minden matrix sajátvektorai egy koordinátarendszert állapítanak meg. Ha a rendszer egy valamely operátorok sajátértékei által meghatározott állapotban van és egy más operátorhoz tartozó mennyiséget mérem, akkor annak a valószínűsége, hogy arra egy meghatározott értéket kapok, úgy nyerhető, hogy a rendszert reprezentáló vektor vetületét képezem az illető tengelyre. Ennek abszolút értéknégyzete a keresett valószínűség. A transzformáció-elmélet, amint azt Dirac és Jordan kifejtették, az általános kvantummechanika centrális része. A kvantummechanika problémája nem az, mint a klasszikus mechanikában vagy elektrodinamikában: adva van egy kezdeti állapot, meghatározandó a jövőben az állapot. Hanem ez: adva van egy rendszer azáltal, hogy bizonyos mennyiségek mérése meghatározott értéket szolgáltatott. Kérdés, más mennyiségek mérése milyen értékeket szolgáltathat és milyen valószínűséggel szolgáltat egy meghatározott értéket.

Megemlítem még, hogy azokra az esetekre, midőn a részek száma megváltozik (pár képződik), a transzformáció-elmélet formája nem alakult ki.

Ha a transzformáció-elméletet a relativitás-elmélettel összehasonlítjuk, úgy egy bizonyos analógia feltűnik. Amint a relativitáselmélet szerint például egyidejűség, hossz, a koordináta-rendszertől függ, úgy a kvantummechanikai transzformációelmélet egyes fizikai mennyiségek értékéről csak bizonyos állapotokban beszélhetünk: egy állapotban beszélhetünk koordináta-értékről, de nem impulzusról, egy másikban az impulzus van definiálva, de nem a koordináta. Ez egy faja a relativitásnak és a kvantummechanikai transzformáció-elmélet felfogható, mint a relativitás alapgondolatának továbbfejlődése.

8. Halmazelméleti szempontok.

Az eddigi szemle azt mutatja, hogy a fizika általános elveinél, mint vörös fonál vonul át a térfogalom többirányú általánosítása, azonkívül a matematika több fogalomalkotása, mint invariánselmélet, nem kommutatív algebra, csoportelmélet fokozatos érvényesülése. Alkalmilag más dolgok is előfordulnak, mint pl. topológiai kérdések is, és felemlítem, hogy D. Wrinch fehérjemolekula modellje lehetséges felépítésénél Kőnig Dénes gráfelméleti könyvére hivatkozik.

A matematika említett szempontjai többé-kevésbbé összefüggnek a halmazelmélettel, így a részletes operátor-elméletben nagy szerepe van halmazelméleti meggondolásoknak. A különféle térfogalmak is a halmazelmélettel függnek össze és nincs kizárva, hogy a most kialakuló halmazelméleti geometria, dimenzió-elmélet stb. talán útmutatást adnak a térfogalom további, fizikai szempontokból megkívánt általánosításainak. Látjuk, hogy a régi keretek mennyire meglazultak, úgyhogy a hipotézisképzésnek szabad útja van, amennyiben csak az új elmélet a bevált régi eredményeket magában foglalja. Az explicit ponthalmaz-elmélet eddig nem sok közvetlen szerephez jutott. De oly nagyjelentőségű problémánál, mint az ergod-elmélet, már lényeges szerephez jut, amennyiben a mérték fogalma itt lényeges. Azon kezdeti helyek halmazának mértéke, melyekből kiindulva a pálya nem borítja be sűrűn az energiafelületet, zérus mértékű halmazt képeznek. Hasonlóan a háromtest problémájánál szó van az egyes mozgástípusok számosságáról. A turbulencia problémája is úgy látszik, ilyen segédeszközöket igényel. Ezért újabb, a fizika matematikai módszereit tárgyaló művek, mint Frank—Mises kénytelenek a mérték fogalmával és a Lebesgue-féle integrállal foglalkozni. Azért talán nincs kizárva, hogy amint a halmazelmélet behatolt a reális függvények tanába, átalakította a geometriát, egy idő múlva a differenciálegyenletek tanát és a fizikai alapfelfogásokat érezhetően fogja befolyásolni.

Azt hiszem, eme rövid és vázlatos szemle meggyőzhet arról, hogy a matematika nagy szempontjai a fizikának nemcsak részletkérdéseiben, hanem alapvető felfogásaiban is érvényesülnek. A gyakran emlegetett ellenkező vélemény onnan eredhet, hogy míg egy új szempont hatását érvényesíti, az néha néhány évtizedet is kitesz, ami sok egy ember élete szempontjából, de avval a jó tulajdonsággal is bír, hogy feltűnést keltő, de nem lényeges felfogások addig kissé elhalványulnak és inkább csak a lényegesek jutnak érvényre.

Ortvay Rudolf.

DIE PHYSIKALISCHE BEZIEHUNGEN EINIGER NEUEREN GESICHTSPUNKTE DER MATHEMATIK.

Es werden einige mathematische Begriffsbildungen und Gesichtspunkte, insofern sie für allgemeine physikalische Theorien eine Rolle spielen, aufgezählt. So die komplexe und hyperkomplexe Grössensysteme, der Vektorbegriff mit seinen Verallgemeinerungen, der Operatorbegriff, die Verallgemeinerungen des Raumbegriffes sowohl in der Relativitätstheorie, als auch die mehrdimensionale Räume, Phasen- und Koordinatenraum, als auch die wichtige Rolle des Hilbert Raumes in der Quantenmechanik. Dann die Axiomatik der Physik, die Rolle der Gruppentheorie in der Kristallphysik und besonders in der Quantenmechanik, schliesslich die Transformationstheorie in der klassischen und Quantenmechanik, als auch Anwendungen der Theorie der Mengen.

R. Ortvay.

GEIGER—MÜLLER-FÉLE SZÁMLÁLÓCSÖVEK MEGSZÓLALÁSI VALÓSZÍNŰSÉGE.

A fizika egyik legérzékenyebb mérőeszköze a Geiger—Müller-féle számlálócső, melyet számos kutatási területen, különösképpen korpuszkuláris sugárzások vizsgálatában alkalmaznak. Míg a radioaktív sugárzások vizsgálatában általában kis, néhány cm^3 térfogatú csöveket használnak, a kozmikus sugárzás mérésére nagy, több liter űrtartalmú csöveket is alkalmaznak. Különösképpen célszerű nagyméretű csöveket használni iránymérésekben, hol az intenzitás a keskeny látótér miatt és mélységmérésekben, hol az intenzitás a készülék felett fekvő vastag abszorbensréteg elnyelő hatása folytán kicsi. Kis intenzitások mérése azonban csak igen jó felbontóképességű [1] koincidencia-készülékkel eszközölhető, mert csak ez esetben hanyagolható el a véletlen koincidenciák száma a mérendő kis intenzitás mellett. Így pl. Barnóthy és Forró (1) a dorogi bányában, hol az intenzitás csupán 1/7000-ed része a felszíni intenzitásnak, 1 m hosszú, 4 cm átmérőjű csöveket és $\vartheta = 1{\cdot}4.10^{-6}$ sec felbontóképességű koincidenciakészüléket; a csillagidőperiodicitás kimutatására szolgáló $10^\circ \times 5^\circ$ látótérnyílású berendezésükben 28 cm hosszú, 14 cm átmérőjű csöveket és $\vartheta = 2{\cdot}5.10^{-6}$ sec felbontóképességű hármas koincidenciakészüléket alkalmaztak. Míg azonban a hosszú, de kis átmérőjű csövek a rajtuk áthaladó

[1] Felbontóképesség alatt értjük egy koincidencia-készülék két számlálócsövében megindított kisülések közti azon legkisebb időkülönbséget, ϑ-t, melynél kisebb időkülönbséggel meginduló kisüléseket a készülék egyidejűeknek, koincidenciáknak jelez, nagyobb felbontóképesség alatt azonban — nem egészen következetesen — rövidebb ϑ időkülönbséget értünk.

ionizáló sugarak 96%-át jelzik, a csillagidő periodicitás mérésére használt, rövid, de nagy átmérőjű csövek megszólalási valószínűsége csupán 67% volt, s így a készülék — hármas koincidenciában — a tényleges intenzitás csupán $(67\%)^3=30\%$-át mérte. A nagyméretű csövek alkalmazásából származó előny (nagyobb intenzitás, s így nagyobb pontosság) ezáltal jórészt kárba veszett.

A következőkben ismertetendő vizsgálataim célja a Geiger—Müller-számlálócsövek megszólalási valószínűségét befolyásoló tényezők megállapítása és evvel kapcsolatban a kisülés eddig kevéssé ismert mechanizmusának további tisztázása volt.

Az előzetes, tájékoztató mérések és számítások alapján megállapítottam, hogy a megszólalási valószínűség e nagymérvű csökkenését nem okozhatják olyan okok mint:

a) a csövön belül nem keletkezik elég ion a kisülés megindításához,

b) a cső a következő sugár áthaladásáig nem jön ismét üzemképes állapotba, mert a szál a levezethető ellenálláson keresztül túl lassan nyeri vissza eredeti feszültségét,

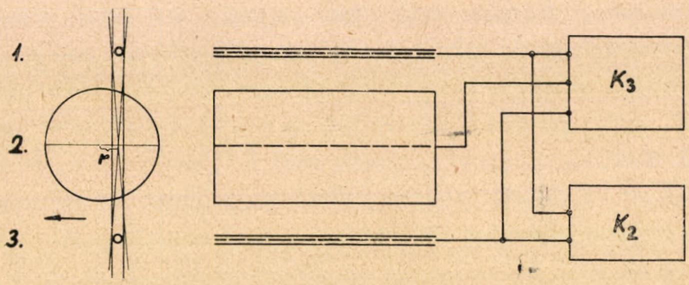
c) avagy, mert a szál körül keletkezett pozitív ionok túl lassan távoznak el a cső teréből.

Viszont kitűnt, hogy a felbontóképesség csökkentésekor (ϑ növelésével) a készülék által mért intenzitás, vagyis a csövek megszólalási valószínűsége nő. E körülményből arra következtettem, hogy a megszólalási valószínűség csökkenését az okozza, hogy a sugár áthaladása és a cső megszólalása közt az esetek bizonyos százalékában több idő telik el, mint amennyi a készülék felbontóképessége.

A kisülés lefolyását a számlálócsőben a következőképpen magyarázhatjuk: (2) Ha a számlálócsövön a kozmikus sugárzás ionizáló korpuszkulái haladnak át, azok az útjukba eső gázrészeket ionizálják. A keletkező elektronok és pozitív ionok a szál és a henger közti elektrosztatikai térnek megfelelő sebességgel az elektródok felé repülnek. Az elektrodok közti feszültség növelésével elérhetjük, hogy az elektronok sebessége, azaz energiája, a szál közelében lévő erős térben akkora lesz, hogy maguk is ionizálni tudnak. Az így keletkezett elektronok az elektromos térben felgyorsulva ismét ionizálhatnak, a keletkezett elektronok száma egyre nő, végül a szálra egy elektronlavina zúdul, mikoris a szál feszültsége 10—100 Volttal csökken: a cső megszólal. A csövön áthaladó korpuszkula csupán mint kiváltó ok szerepel és csak megindítja a kisülést. A lavina sebessége és nagysága nő az elektródok közti feszültségkülönbséggel, mert nagyobb feszültség mellett már távolabb a száltól elérik az elektronok az ionizáláshoz szükséges energiát és így a hosszabb úton több iont tudnak termelni. A lavinának bizonyos időre van szüksége, míg eléri a szálat. Az elektronlavina lefutása ideje alatt értjük a cső terén áthaladó ionizáló korpuszkula áthaladási időpontja és a lavina szálhoz való érkezésének pillanata közti időkülönbséget. A lefutási idő annál nagyobb, minél messzebb keletkeztek az ionok a száltól, mert kisebb gyorsulással indulnak és hosszabb utat kell megtenniök. Tehát a cső szélén kiváltott elektron által megindított lavina lefutási ideje nagyságrendekkel különbözhet a cső közepéről induló lavina lefutási idejétől. Ezért ha egy ionizáló részecske pl. az egyik csőnek a közepén, a másiknak pedig a szélén halad át, úgy mind a két csövet megszólaltatja ugyan, de nem egyidőben. Ha a felbontóképesség által meghatározott minimalis ϑ időkülönbség rövidebb, mint a lefutási idők különbsége a két csőben, a készülék nem fog koincidenciát jelezni, bár a sugár mind a kettőt megszólaltatja.

A számlálócsőben létrejövő kisülésekkel már sokan foglalkoztak. A kisülés időtartamára vonatkozó számítások és becslések azonban nagyon eltérőek. Medicus (3) katodsugároscillográffal forgótükörben vizsgálva a számlálócsőben létrejövő kisüléseket, azt találta, hogy a kisülések néhány cm átmérőjű csövekben sem gyorsabb lefolyásúak $2{\cdot}10^{-5}$ sec-nél. Béll (4) vizsgálatai szerint a kisülés lefolyásának időtartama 10^{-4} sec nagyságrendű. Hippel (5) nagy térerősség esetében mérte az elektronlavinák átütési idejét és 8 mm elektród-távolság mellett 10^{-8} sec-et talált. Trost (6) nem túlnagy átmérőjű csövek esetében a lavinák lefutási idejét 10^{-5} sec-nél kisebbre becsüli, mert 10^{-5} sec felbontóképességgel még 100%-os megszólalási valószínűséget talált. Raether (7) ködkamrában vizsgálva az elektronlavinát úgy találta, hogy 525 Tor[1] nyomáson és 11,000 V/cm térerősség mellett 10^{-7} sec alatt 1 cm hosszú utat fut be. Woodward és Street (8) 3·6 cm átmérőjű csöveket hoztak 3-as koincidenciába 10^{-7} sec felbontóképesség mellett és úgy találták, hogy a megszólalási valószínűség ilyen felbontóképesség mellett sem csökken lényegesen a csövek széle felé.

Mérőmódszer. A 14 cm átmérőjű számlálócsövet két 1 cm átmérőjű cső közt helyeztem el párhuzamos tengelyekkel. (Lásd 1. ábra.) Mértem egyrészt a 2-es koincidenciák számát a kis csövek közt, másrészt egyidejűleg a 3-as koincidenciákat a két kis cső és



1. ábra.

a nagy cső közt. Minden sugár, mely a két kis csövön áthaladva 2-es koincidenciát létesít, áthalad a köztük fekvő nagy csövön, jobban mondva annak 1 cm széles sávján is; így a 3-as koincidenciák viszonya a 2-esekhez megadja, hogy a nagy cső ezen 1 cm széles sávján belül a kis csövek által jelzett sugarak hányad részére szólalt meg, azaz mekkora a nagy cső tekintetbe jövő 1 cm széles sávjában a látszólagos megszólalási valószínűség az alkalmazott felbontóképesség mellett. A nagy csövet a kis csövek közt az 1. ábrán látható nyíl irányában eltolva, meg tudtam vizsgálni a nagy cső különböző térrészeinek látszólagos megszólalási valószínűségét. A kis csövekben az elektronlavina lefutási ideje a kis csőméretek és nagy térerősség folytán — mint azt a későbbi mérések is igazolták — sokkal rövidebb és elhanyagolható a nagy cső-

[1] 1 Tor = 1 Hgmm nyomás.

ben kifejlődő lavina lefutási idejéhez képest. Ezért, ha a megszólalási valószínűség csökkenését tényleg a nagy csövek lavinalefutási idejének hosszúsága okozza, a két kis cső koincidenciájával egybeeső 3-as koincidenciát a készülék az esetben nem jelzi, ha a nagy cső lavinalefutási ideje hosszabb az alkalmazott felbontóképességnél. A felbontóképesség változtatásával ily módon meghatározhattam a lavinalefutási időket, a nagy csőnek a száltól különböző távolságban fekvő térrészeiből.

Méréseimet a kozmikus sugárzás intenzitására beható tényezők (napi menet, mágneses-, barometer-, hőmérséklet-effektusok) változása nem befolyásolják, mert ezek egyszerre változtatják meg mind a 2-es, mind a 3-as koincidenciák számát, de ezek viszonya állandó marad.

Mérőberendezés. A kis csövek katódja 0·1 cm falvastagságú, 1 cm belső átmérőjű sárgaréz henger, anódja 0·01 cm vastag acéldrót. A cső effektív hossza 30 cm. Az elektródokat borostyángyűrűk szigetelik el egymástól. Az acélszál központos elhelyezésére nagy gondot fordítottam, mert az elektromos tér, a kis méretek miatt, aszimmetria esetében nagyon eltorzulhat; (9) ezért a borostyángyűrűbe 0·2 cm-es rézrudat illesztettem, melynek 0·02 cm-es fúratába forrasztottam az acélszálat. Az egész csövet üvegcsőbe zártam, üvegbe olvasztott kivezetésekkel és 90 Tor argon és 10 Tor aethylalkoholkeverékkel töltöttem meg. A csövek 1050 V-nál kezdenek számolni és ezen ú. n. alsó számolási határfeszültségtől számított 20—80 V feszültségközben (számolási közben) beütésszámuk, mely átlagban 50, ill. 55 percenként, csupán 2%-kal növekszik. A mérésekben a csöveket az alsó számolási határ fölött 40 V-tal működtettem. Az alsó határfeszültség nagyságát Braun-féle statikus elektrométerrel, az ettől számított ú. n. effektív számolási feszültségeket a cső szálára adott ellenfeszültséggel mértem, melyet addig növeltem, míg a cső megszűnt számolni, azaz az elektródok közti feszültség az alsó határfeszültségre csökkent. A beütésszámot Dukász S. által készített számolószerkezettel mértem, mely egy hangszórómágnes által vezérelt óraszerkezetből áll, felbontóképessége 10^{-2} sec.

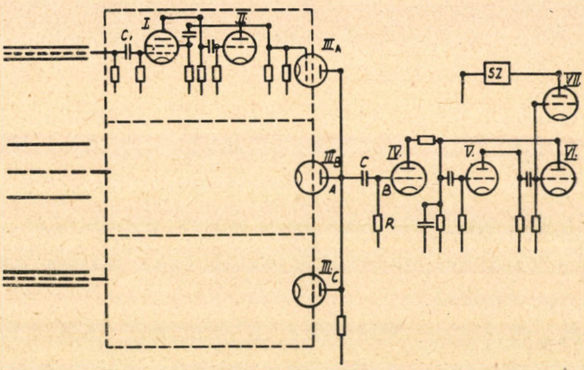
A vizsgált nagycsövek katódja 2 mm falvastagságú, 14 cm belső átmérőjű és 28 cm hosszú rézhenger, mely kadmiummal és ezenkívül belül $^1/_{2000}$-ed mm-nél vékonyabb zapponlakk-hártyával volt bevonva. (10) A cső effektív hosszának pontos határolására a szál a henger terén kívül 0·2 cm-re van megvastagítva, (11) miáltal a szál körüli térerősség a henger terén kívül erősen lecsökken. A szál centrális kifeszítésére két üveglemez szolgált. A hengervégeket rézkupakkal zártam le, hogy megakadályozzam a külső térben keletkezett ionoknak a hengerbe való bediffundálását. (11) E fogással a cső percenkénti beütésszámát 1350-ről 1050-re sikerült leszorítanom. Anódként 0·01, valamint 0·04 cm vastag acélszálat alkalmaztam. A csövet üvegbúra borította, mely kívülről piceinnel tömített csiszolattal zárult a hengert tartó vasalapzathoz. Az alsó számolási határfeszültség nagysága, valamint a beütésszám változása a számolási közben — mely általában 150 volt — a cső gáztöltése, valamint a szál vastagsága szerint különbözött; a méréseket azonban mindenkor 60 V-tal az alsó határfeszültség felett végeztem. A csövek fontosabb adatait az I. táblázatban foglaltam össze.

I. táblázat.

Csőátmérő: 14 cm. Beütésszám: 1050 min^{-1}

Szálvastagság cm	Töltés Tor	Alsó számolási feszültség	Beütésszám-emelkedés % pro 100 V
0·01	90 Ar + 10 Alk.	1150 V	2·5
	90 H_2 + 10 «	1360 V	3·0
	30 H_2 + 10 «	1100 V	6·4
	90 N_2 + 10 «	1760 V	3·5
	30 Ar + 3 «	1120 V	4·2
0·04	90 Ar + 10 «	1720 V	2·0
	90 H_2 + 10 «	1800 V	2·5
	10 Alkohol	1450 V	5·0

Méréseimhez Barnóthy-féle (12) koincidencia-jelzőkészüléket használtam, melynek elvi kapcsolását a 2. ábrán láthatjuk. A számlálócső szála felől érkező feszültséglökések a C_1 kondenzátoron keresztül az I. elektroncső rácsára érkeznek, e cső a II. elektroncsővel egy visszacsatolt ellenállás-erősítő rendszert, multivibrátort képez, mely ú. n. billenő rezgések keltésére képes, begerjedését azonban a II. cső megfelelő negatív rácselőfeszültségével megakadályozzuk. Mindannyiszor azonban, mikor a számlálócső felől feszültséglökés érkezik, ez egyetlen billenésre indítja a multivibrátort. A továbbiakban e billenés helyettesíti a számlálócső



2. ábra.

kisülését jelző feszültséglökést. A billenés már bekövetkezik, mikor a számlálócső szálának feszültsége még csak 0·2 V-tal csökkent és kb. 10^{-7} sec alatt lezárja a III_A árnyékolt rácsú cső anódáramát. Valamennyi számlálócsőhöz egy-egy ilyen multivibrátorból és árnyékolt rácsú csőből álló egység tartozik. A III_A és III_B és III_C elektroncsövek anódellenállása közös és így az egyes csövek lezárásakor keltett feszültséglökések szuperponálódhatnak. A IV. keverőcső rácselőfeszültségét úgy állítjuk be, hogy anódárama csak az összes árnyékolt rácsú csövek egyidejű lezárásakor fellépő feszültséglökés hatására, vagyis hármas koincidencia esetében induljon meg. Az árnyékolt rácsú csövek szolgáltatta feszültséglökések időtartamát azonban, mielőtt a IV. keverőcső rácsára érkeznének, a C kondenzátor és R ellenállásból képezett csatolóelemek segítségével meghatározott időtartamra rövidítjük. Ezáltal egy 3-as koincidenciának megfelelő nagyságú feszültséglökés a IV. keverőcső rácsán csak az esetben léphet fel, ha az egyes számlálócsövek felől érkező lökések kezdete a csatolóelemek megszabta időn belül követi egymást. E kapcsolással elérhető felbontóképesség 10^{-7} sec.

A IV. keverőcső anódján fellépő 3-as koincidenciát jelző feszültséglökés időtartama azonban túl rövid, hogy mechanikus számlálószerkezetet hozhasson működésbe, ezért időtartamát egy további, az V. és VI. csövek által képezett multivibrátor segítségével meghosszabbítjuk. Az így meghosszabbított koincidencialökések a VII. végerősítőcső segítségével számlálójelfogót működtetnek.

Méréseimben az 1. ábrán vázolt elrendezésben egyidejűleg egy 2-es és egy 3-as koincidenciakészüléket alkalmaztam. Miután csupán a 2-es és 3-as koincidenciák viszonyát kerestem, egyidejű mérésük nagymértékben növelte a mérés pontosságát, mert kiküszöböli a kozmikus sugárzás intenzitásának bárminemű ingadozásából folyó hibákat.

A felbontóképesség. Minthogy az elektronlavinák lefutási idejét a felbontóképesség segítségével akarom mérni, utóbbi nagyságának pontos ismerete igen lényeges. A felbontóképességet a keverőcső rácsára érkező feszültséglökés időtartama és alakja szabja meg. Mikor a kis számlálócsövek felől koincidáló lökések érkeznek a III_A és III_C cső anódáramának lezárása folytán az A, valamint a B pont feszültsége kb. 10^{-7} sec alatt $V_m = 40$ volttal emelkedik, majd a B pont feszültsége a C kondenzátornak az R ellenálláson keresztül történő kisülése folytán

$$V = V_m e^{-t/T} \tag{1}$$

függvénynek megfelelően csökken, hol $T = C.R$, a csatolóelemek időállandója. A IV. keverőcső előfeszültségét úgy állítjuk be, hogy csak 43 V-nál nagyobb feszültséglökésre induljon meg. Méréseim szerint ez bekövetkezhet, ha a nagy cső felől érkező lökés a III_B cső anódáramát is lezárja, mielőtt a B pont feszültsége 25 volt alá csökkent. Az (1) egyenlet szerint ez $\vartheta = T ln \frac{V_m}{V} = (0{\cdot}5 \pm 0{\cdot}05) T$ idő mulva következik be a III_A és III_C csövek lezárása után, azaz $\vartheta = \frac{1}{2} T$ az a legnagyobb időkülönbség, mely a kis számlálócsövek megszólalása után a nagy cső megszólalásáig eltelhet, úgy, hogy azokat a készülék még mint koincidenciát jelezze.

A $\vartheta = \frac{1}{2} T$ összefüggés helyességét kísérletileg is ellenőriztem. E célból meghatároztam a véletlen hármas koincidenciák számát. (Hármas koincidenciákat okozhatnak a mindhárom csövön áthaladó sugarakon kívül egyrészt kozmikus záporok, azáltal, hogy egyszerre keltett részecskéik egyenként szólaltatják meg az egyes csöveket, másrészt oly sugarak is, melyek egymástól függetlenül csupán véletlen folytán ϑ időn belül szólaltatják meg a számlálócsöveket. Ezen utóbbiakat nevezzük véletlen koincidenciáknak; számuk a valószínűségszámítás segítségével adható meg a felbontó képesség függvényeként.) A csöveket ugyanazon vízszintes síkban háromszögalakban helyeztem el, hogy egyetlen kozmikus sugár ne tudjon mindhármon áthaladni; továbbá a két kis csövet felül és oldalt 14 cm vastag ólomréteggel vettem körül, hogy kozmikus záporok se tudjanak koincidenciát létesíteni. A két kis cső beütésszámát egy közéjük helyezett *Ra*-készítmény segítségével percenkénti 780, ill. 810-re növeltem, ugyanakkor a nagy cső beütésszáma 1526±24-re növekedett. 15 óra alatt 47 koincidenciát észleltem, így 3-as koincidenciák esetében a véletlen koincidenciák száma másodpercenként [1]

$$K_V = 3 N_1 N_2 N_3 \vartheta^2,$$

hol N_1, N_2 és N_3 az egyes csövek másodpercenkénti beütésszáma és ϑ a felbontóképesség. Ebből

$$\vartheta = (2{\cdot}55 \pm 0{\cdot}18) . 10^{-4} \text{ sec.}$$

adódik. Ugyanekkor a készülék csatolóelemeinek értéke $C = 11100 pF$ és $R = 49{,}700\ \Omega$ volt. (A kapacitást Hartmann és Braun «Kapavi»-híddal 1% pontossággal határoztam meg.) Amiből számítás szerint

$$\vartheta = \tfrac{1}{2} T = \tfrac{1}{2} R . C = 2{\cdot}76 . 10^{-4} \text{ sec.}$$

[1] Barnóthy szerint.

Hasonlóképpen $C=3050$ pF és $R=49700$ Ω értékre, azaz a számítás szerint $\vartheta={}^1/_2RC=7{\cdot}57\,.\,10^{-5}$ sec felbontóképesség mellett a mérés szerint $\vartheta=(7{\cdot}76+0{\cdot}3)\,.\,10^{-5}$ sec felbontóképességet találtam. Mint láthatjuk, a kísérletek igazolják a számítás alapján levezetett

$$\vartheta=\tfrac{1}{2}T$$

összefüggést.

Nagyobb felbontóképességnél, hogy még elegendő véletlen koincidenciát kapjak, a kis csövek kettes koincidenciáinak a számát a csőszálak összekötésével mesterségesen növeltem. Valamennyi használt felbontóképesség számított és mért értékét a II. táblázatban foglaltam össze.

II. táblázat.

½ R C	mért érték
$1{\cdot}25\,.\,10^{-6}$ sec.	$(1{\cdot}20\pm0{\cdot}08)\,.\,10^{-6}$ sec.
$2{\cdot}45\,.\,10^{-6}$ «	$(2{\cdot}46\pm0{\cdot}08)\,.\,10^{-6}$ «
$4{\cdot}95\,.\,10^{-6}$ «	$(5{\cdot}23\pm0{\cdot}10)\,.\,10^{-6}$ «
$1{\cdot}32\,.\,10^{-5}$ «	$(1{\cdot}32\pm0{\cdot}04)\,.\,10^{-5}$ «
$2{\cdot}61\,.\,10^{-5}$ «	$(2{\cdot}55\pm0{\cdot}05)\,.\,10^{-5}$ «
$7{\cdot}57\,.\,10^{-5}$ «	$(7{\cdot}76\pm0{\cdot}30)\,.\,10^{-5}$ «
$2{\cdot}76\,.\,10^{-4}$ «	$(2{\cdot}55\pm0{\cdot}18)\,.\,10^{-4}$ «

A Barnóthy-féle koincidencia-készülék használata méréseim számára a jó felbontóképességen kívül egy más szempontból is előnyös. A számlálócső szálának feszültségcsökkenését ugyanis legnagyobbrészt nem az első elektronlavina, hanem az egész csőre átterjedő kisülés okozza. Miután méréseim szempontjából a lavina szálhoz érkezési idejének ismerete a lényeges, fontos, hogy ezen időpont és a IV. cső rácsára érkező feszültséglökés kezdete közt minél rövidebb és minden esetben ugyanannyi idő teljék el. Az általában használt koincidenciakészülékekben, melyek a számlálócső eredeti lökését juttatják a keverőcső rácsára, ez idő lényegesen hosszabb és erősebben függ a kisülés kifejlődésétől, mint a Barnóthy-féle koincidenciakészülékben, hol ez a lökés megkezdődik, amint a szál feszültsége 0·2 V-tal csökkent és független a szál további feszültségváltozásának sebességétől.

Mérési eredmények. A 14 cm átmérőjű csövet először az eddig használt 90 Tor *Ar*+10 Tor *Alk.* töltéssel és 0·01 cm szálvastagság esetén vizsgáltam.[1] A kis csövek tengelysíkja és a nagy cső szála közti távolságot (lásd 1. ábra) 1 cm-ként változtattam 0·5 cm-től 6·5 cm-ig. A beállítás a csövek hengerén alkalmazott jelek segítségével történt ±0·1 cm pontossággal. A kis csövek effektív hossza 2 cm-rel nagyobb volt, mint a nagy csöveké, a táblázatban az adatokat már ennek megfelelően korrigáltam. A különböző felbontóképességgel mért megszólalási valószínűségeket a III. táblázat tartalmazza.

III. táblázat.

Száltól mért távolság cm-ben

ϑ sec.	0·5	1·5	2·5	3·5	4·5	5·5	6·5
$1{\cdot}2.10^{-6}$	87·2	84·3	35·5	18·8	15·6	15·7	14·6
$2{\cdot}5.10^{-6}$	91·2	92·3	87·2	37·5	22·1	15·6	15·3
$5{\cdot}2.10^{-6}$	91·8	93·3	89·5	86·3	63·5	26·2	22·8
$1{\cdot}3.10^{-5}$	94·2	93·6	95·2	93·4	90·5	72·9	41·5
$7{\cdot}5.10^{-5}$	93·7	94·3	94·9	95·1	91·5	84·5	76·5
$2{\cdot}5.10^{-4}$	95·0	94·8	94·2	94·8	92·8	86·5	76·2

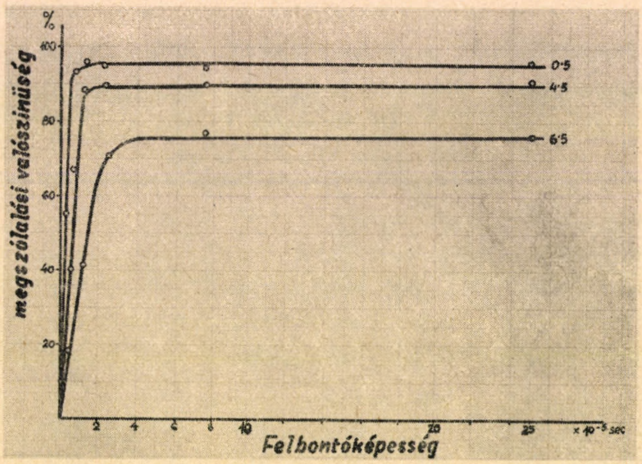
A mérést minden esetben addig folytattam, míg legalább 100—200 hármas koincidenciát kaptam, a megszólalási valószínűség hibája ennek folytán 2 és 5% között mozog. Összesen 5100 órát mértem és ez alatt 25,000 kettes koincidenciát, ill. 83,000 hármaskoincidenciát kaptam.

A megszólalási valószínűséget a felbontóképesség függvényeként a 3. ábrán grafikusan is ábrázoltam 0·5, 4·5, valamint 6·5 cm száltávolságra. Az esetben, ha a megszólalási valószínűség csökkenését csupán az okozná, hogy a nagy cső lavina lefutási ideje hosz-

[1] A 14 cm átmérőjű és 0·01 cm szálvastagságú csövet röviden (14,0·01-)el fogom jelölni. Hasonlóan történik a többi csövek jelölése is.

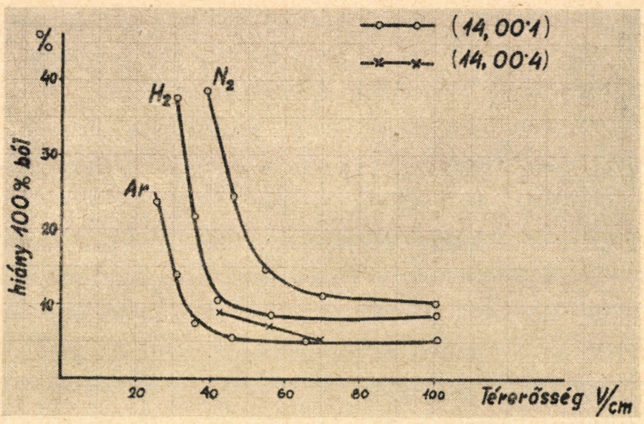
szabb, mint ϑ, elvárhatnók, hogy ϑ kellő növelésével a megszólalási valószínűség 100%-ra növekedjék. Ez azonban, mint látjuk, sehol sem következik be. A megszólalási valószínűség egy bizonyos — a száltávolságtól függő — ϑ értéken túl nem növelhető tovább a felbontóképesség csökkentésével.

E körülményből arra következtettem, hogy mindaddig, míg a megszólalási valószínűség görbéje (3. ábra) emelkedik, a megszólalási valószínűségnek 100%-tól való eltérését, hiányát, a lavina



3. ábra.

hosszú lefutási ideje okozza, s ez a görbék töréspontjából következtetve 5.10^{-5} és $7{\cdot}5.10^{-6}$ sec közt fekszik. Ezzel szemben a görbék törése után, a vízszintes darabokon még fennmaradó megszólalási valószínűséghiányt más, a felbontóképességtől független tényező hozza létre. Első pillanatban arra gondolhatnánk, hogy e tényező csupán a száltávolságtól függ, mert a megszólalási valószínűség hiánya $r{=}0{\cdot}5$ cm-re 5%, míg $r{=}6{\cdot}5$ cm-re 24%. Azonban éppúgy lehetséges, hogy a térerősségtől függ, hisz utóbbi is erősen változik a száltávolsággal. Hogy eldöntsem, vajjon a térerősség, vagy a száltávolság a döntő tényező e hiány létrejöttében, a méréseket ugyanazon körülmények közt 0·04 cm vastag szállal is megismételtem. Ekkor a térerősség ugyanazon távolságokban a száltól közel kétszeresére emelkedett. A 4. ábrán a megszólalási valószínűség hiányát a térerősség függvényeként ábrázoltam. Mint láthatjuk, a hiány nagyobb térerősségekre kisebb, azonban 40 V/cm-en túl nem csökken tovább a térerősség növelésével. Továbbá az is kitűnik, hogy 0·04 cm-es szállal nyert pontok nagy térerősségre ugyan egybeesnek a vékonyabb szállal nyert értékekkel, kis térerősségre azonban magasabban fekszenek. Az ugyanazon térerősségnél, de a száltól nagyobb távolságban induló



4. ábra.

lavinák kiesése tehát nagyobb. Mindkét körülmény arra utal, hogy a hiány létrejöttében két különböző tényező játszik szerepet: az egyik csak kis térerősségek mellett lép fel és hatása növekszik a térerősség csökkenésével és a száltávolsággal; a másik tényező független úgy a térerősségtől, mint a száltávolságtól és bárhonnan induló lavinákra körülbelül 5%-os hiányt okoz.

Mint a későbbi számításokból (154. oldalon) kitűnik, a sugár által termelt elektronok az ionizációhoz s így a megsokszorozódáshoz szükséges sebességet csupán a szál közvetlen közelében, attól néhány tizedmm-re érik el. Eltekintve tehát a szál ezen közvetlen környezetétől, a sugár áthaladási helye és a szál közti úton csupán a sugár által közvetlenül kiváltott elektronok vándorlásával kell számolnunk, melyek száma 30—100-ra becsülhető. A megszólalási valószínűség hiánya nyilván azáltal jön létre, hogy ezen elektronok egyike sem képes a szál közvetlen környezetébe jutni. Magyarázatként arra gondolhatnánk elsősorban, hogy az ionok rekombinálódnak, mert feltehető, hogy az előző kisülésben keletkezett nehezebb pozitív ionok még nem érték el a henger falát és így találkoznak a szál felé vándorló újabb elektronokkal. Sajnos, a rekombináció körülményeire sem felhasználható kísérleti adatokat, sem elméleti meggondolásokat nem sikerült találni. Megkíséreltem ugyan a rekombináció következtében várható megszólalási valószínűség hiányának nagyságát azon feltevés alapján megbecsülni, hogy rekombináció következik be mindannyiszor, valahányszor egy elektron annyira megközelít egy pozitív iont, hogy kinetikai energiája kisebb, vagy egyenlő lesz a köztük fennálló Coulomb-potenciálnál. Bár így nagyságrendileg helyes értékhez jutunk, a feltevés alapján argon-gázban nagyobb hiányt kellene várnunk, mint könnyebb gázokban; márpedig nitrogénnel, valamint hidrogénnel végzett méréseim eredményéből, mint az az 5. ábrán látható, éppen az ellenkező tapasztalható.

Gondolhatnánk továbbá az elektronabszorpcióra semleges gázmolekulákon; azonban Hey és Leipunkski (13) mérései szerint az elektronabszorpció az itt szereplő sebességekre oly kicsiny, hogy nem okozhat ekkora megszólalási valószínűséghiányt.

Összehasonlítva a különböző gázokra talált hiányokat, megállapítható, hogy a gáztöltés a hiányt okozó mindkét tényezőre behat; viszont a hiány nagysága és a használt gázok állandói közt nem sikerült semmiféle összefüggést találnom.

A megszólalási valószínűség felbontóképességtől függő része. Annak megvizsgálására, hogy a megszólalási valószínűség csökkenését nagyobb felbontóképességekre tényleg a lavinák lefutási idejének hossza okozza-e, nézzük meg, mekkora lefutási időket várhatunk elméleti meggondolások alapján.

Wahlin szerint (14) gázban elektromos tér hatására mozgó elektronok vándorlási sebessége a tér irányában

$$V = \frac{b_0}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2\pi}{\varkappa}\,\frac{b_0^2 E^2}{w_T^2}}}}\,E \tag{2}$$

képlet alapján számítható, hol w_T az elektronok rendszertelen, ú. n. hőmozgásának a sebessége. E a térerősség, λ az elektron szabad úthossza, b_0 az elektron mozgékonysága — egységnyi térerősség hatására a szabad úthosszon elért sebesség — és $\varkappa$ tényező megadja, hogy az elektron molekulával ütközve energiájának hányadrészét veszti el.

A mi esetünkben 100 Tor. argon töltésre a henger közelében $w_T = 4{\cdot}6.10^7$ cm/sec, $E = 25$ V/cm, $\lambda = 2{\cdot}7.10^{-4}$ cm, $b_0 = \frac{e.\lambda}{m w_T} = 3.10^6$ cm/V.sec és $\varkappa = 2{\cdot}8.10^{-5}$; s így a (2) képlet nevezőjében szereplő $\frac{2\pi}{\varkappa}\cdot\frac{b_0^2E^2}{w_T^2} \sim 80$ mennyiség 1-hez képest igen nagy lévén, az (2) egyenlet a

$$V = \sqrt[4]{\frac{2\varkappa}{\pi}}\sqrt{\frac{eE\lambda}{m}} \tag{3}$$

alakra egyszerűsődik. Az elektronok átlagos vándorlási sebessége tehát arányos a térerősség négyzetgyökével.

A számlálócsőben a térerősség a száltól mért távolsággal fordítva arányos. Legyen a henger sugara R a vele közös geometriai tengelyű szál sugara r_0, akkor a száltól r távolságban a potenciál

$$V = \frac{V_0}{ln\frac{R}{r_0}}\,ln\frac{R}{r} = E_0 ln\frac{R}{r}, \tag{4}$$

ha V_0 a szál és henger között lévő egész potenciálkülönbség. A térerősség értéke:

$$E = -\frac{E_0}{r}, \tag{5}$$

ahol $E_0 = \frac{V_0}{ln\frac{R}{r_0}}$ a térerősség értéke a száltól egységnyi távolságban. E ezen értékét (3) képletbe beírva

$$V = \sqrt[4]{\frac{2\varkappa}{\pi}}\sqrt{\frac{e}{m}\cdot\frac{\lambda}{r}\cdot E_0}. \tag{6}$$

A száltól r távolságból induló elektron lefutási ideje a szálig a (6) egyenlet szétválasztása és integrációja után

$$t = \frac{2}{3} \sqrt[4]{\frac{\pi}{2\varkappa}} \sqrt{\frac{m}{e\lambda E}} (r^{3/2} - r_0^{3/2}),$$

miután $r_0 = 0{\cdot}05$ cm, így r mellett elhanyagolható

$$t = 10^{-9} \frac{r^{3/2}}{\sqrt[4]{\varkappa}\sqrt{\lambda E_0}}, \qquad (7)$$

Láthatjuk, hogy a lavina lefutási ideje arányos a száltól való távolság $^3/_2$-ed hatványával és fordítva arányos a szabad úthossz, valamint a térerősség négyzetgyökével. Tekintetbe kell azonban venni, hogy λ és $\varkappa$ értéke általában függ az elektronok sebességétől is, hol az elektron sebessége alatt az ütközési, azaz a rendszertelen hőmozgásból származó sebesség értendő, mely WAHLIN (14) nyomán

$$w_T = \sqrt[8]{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{e}{m} E\lambda} \frac{1}{\sqrt[4]{\varkappa}},$$

vagy

$$V_T = \frac{\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}} \frac{e}{m} E\lambda}{1.08.10^{18}\sqrt{\varkappa}} = 0{\cdot}46 \frac{E\lambda}{\sqrt{\varkappa}}[1] \qquad (8)$$

alakban adható meg. (V_T és E voltokban mért feszültséget és térerősséget jelentenek.)

Argonra — mint általában az egyatomos gázokra — a kísérleti megállapítások szerint $\varkappa$ értéke nem változik a sebességgel és jól egyezik a kinetikai gázelméletből számítható $2{,}78.10^{-5}$ értékkel. Ezzel szemben λ értéke RAMSAUER és KOLLATH (15) mérései szerint igen lényegesen függ az elektronsebességtől. A mi esetünkben számításba jövő 3·5 Volt sebesség körüli tartományban közelítőleg

$$\lambda = \frac{1{\cdot}7.10^{-3}}{V_T}$$

függvénnyel fejezhető ki, s így az (5) és (8) képletek felhasználásával

[1] A (8) képlet alapján kiszámítható, hogy az elektronok az ionizációhoz szükséges sebességet, ill. energiát csak a szál közvetlen közelében, attól kb. 1 mm-nyire érik el.

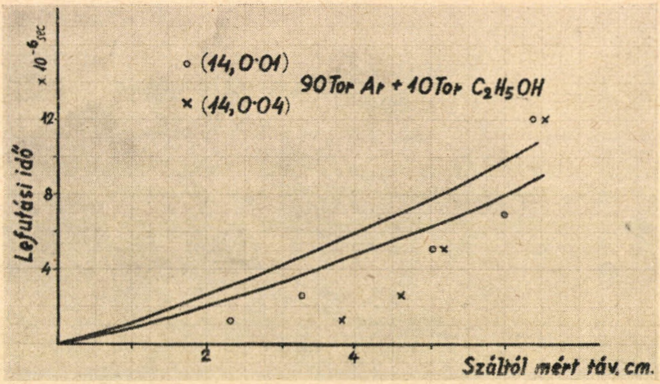
$$\lambda = 6{\cdot}1.10^{-2}\sqrt[4]{x}\sqrt{\frac{r}{E_0}},$$

mint a száltávolság üfggvénye adható meg. λ ezen értékét (6)-ba helyettesítve és integrálva a lefutási időre

$$t = 1{\cdot}23.10^{-6}r^{5/4}$$

kifejezést nyerjük. Az 5. ábrán a kihúzott vonal ábrázolja az így nyert eredményeket.

Az elméletileg számított lefutási időket a kísérleti eredményekkel olyképpen hasonlíthatjuk össze, hogy a mért megszólalási



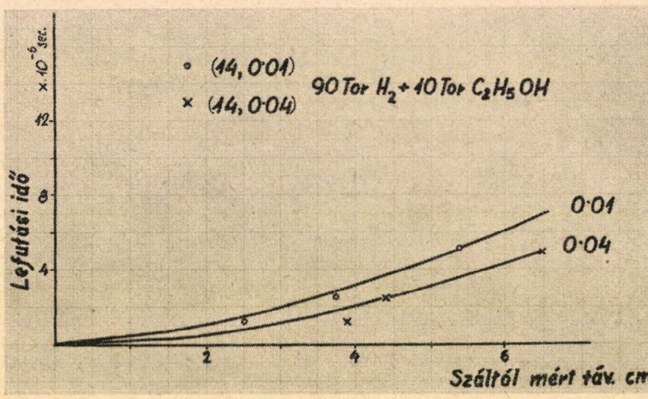
5. ábra.

valószínűségekből interpoláció útján minden egyes felbontóképességre meghatározzuk azt a kritikus, a száltól mért távolságot, hol a megszólalási valószínűség 50%, vagyis ahonnan kiinduló lavinák csupán fele éri el a szálat. Ekkor a lavinák közepes lefutási ideje megegyezik a felbontóképességgel. E számítás természetesen feltételezi, hogy a megszólalási valószínűség csökkenése tisztán a lavinák lefutási idejének folyománya; a már előbb kifejtett, a felbontóképességtől független és ezért más tényezők hatása alatt előálló csökkenést ezért ki kell küszöbölnünk, ami olyképpen történhet, hogy a megszólalási valószínűség mért értékeihez kis felbontóképességek mellett is még fennmaradó hiányt százalékosan hozzáadjuk. Az 5. ábrán a körök a mért lefutási időket tüntetik fel.

Az elméleti és kísérleti eredmények közt a megegyezés — ha meggondoljuk, hogy az elmélet a jelenség tényleges lefolyásáról csak nagyjában képes számot adni — igen jónak mondható.

Az elmélet helyességét ellenőriztem az előforduló mennyiségek más értékeire is. Így a szabad úthosszat a gáz nyomásának, a térerősséget a szál vastagságának változtatásával, míg a $\varkappa$ tényezőt, vagyis az ütközéskor leadott energiahányad értékét a gáz minőségének cserélésével változtattam.

Hidrogénre RAMSAUER és KOLLATH (16) mérései szerint λ értéke a számbajövő sebességtartományban — 0·7 eV körül —



6. ábra.

állandónak tekinthető $\lambda = 2{\cdot}5 . 10^{-4}$ cm értékkel. Evvel szemben $\varkappa$ értéke — mint általában többatomos gázoknál — nem egyezik meg a gázkinetikailag számított értékkel és BAILEY (17) mérései nyomán a számításba jövő sebességtartományban jól megközelíthető a

$$\varkappa = 7{\cdot}7 . 10^{-11} w_T$$

kifejezéssel. Hasonlóan, mint argon esetében az (5) és (8) képlet felhasználásával a lefutási időre

$$t = 3{\cdot}3 . 10^{-7} r^{1{\cdot}6}$$

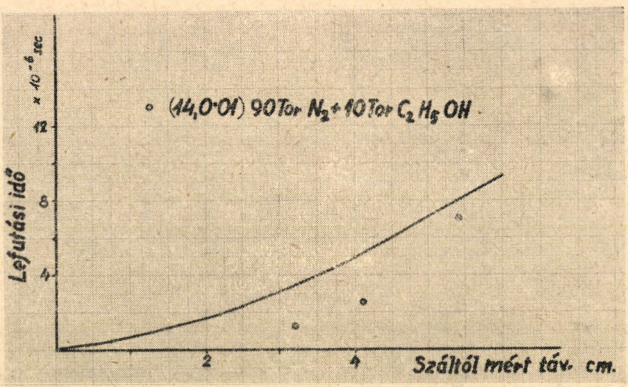
kifejezést nyerjük. A 6. ábrán láthatjuk, hogy az így számított értékek (kihúzott vonal) igen jól megegyeznek a mérési eredményekkel.

Nitrogén esetében a számításba jövő sebesség tartományban úgy λ, mint $\varkappa$ értéke állandónak tekinthető $\lambda = 2{\cdot}8 . 10^{-4}$ cm és $\varkappa = 6 . 10^{-4}$ (7) képletből a lefutási idő:

$$t = 6{\cdot}4 . 10^{-7} r^{3/2}.$$

Ez esetben a számított értékek, mint a 7. ábrán látható, kb. még-egyszer akkora lefutási időket adnak, mint a kísérletileg nyert értékek.

Alkohollal is végeztem méréseket. Ez esetben a szabad úthosszat a gázkinetikus elmélet alapján számítottam $\lambda = 9{\cdot}35 . 10^{-4}$ cm,



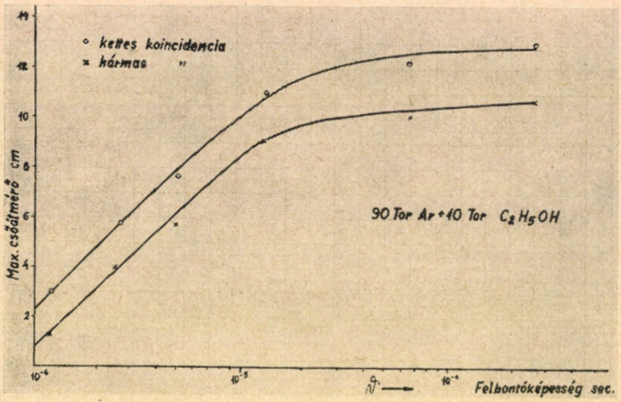
7. ábra.

míg $\varkappa$ értékét magából a kísérleti eredményekből állapítottam meg, miután erre vonatkozó adatok az irodalomban nem találhatók. $\varkappa$ értéke $1{\cdot}8 . 10^{-3}$-nek adódott. Ilyformán a megszólalási valószínűség mérése módot nyujt $\varkappa$ értékének közelítő megállapítására.

A szál vastagságának változtatása és az ezzel járó térerősség-változás az elméletnek megfelelő módon mutatkozik a kísérleti eredményekben, mint azt az 5. és 6. ábrákon láthatjuk. Hasonlóképpen az elméletnek megfelelő változás észlelhető a lefutási idők hosszában a gáz nyomásának változtatásával is, mint az a 30 Tor argon+3 Tor alkohol és 30 Tor H_2+10 Tor alkohol gáztöltéssel végzett méréseimből kitűnik.

Megvizsgáltam ezenkívül, átvihetők-e a nagy átmérőjű csöveken tett tapasztalatok kisebb átmérőjű csövekre is. Kisebb hengerátmérőjű csövekben a térerősség ugyanis alig tér el a nagy átmérőjű csövekben ugyanolyan száltávolságban uralkodó térerősségtől és így egyező eredmények várhatók. Kísérleteket végeztem ezért a szokásos argon + alkohol töltéssel 7, 6 és 4 cm hengerátmérőjű csöveken is. A megszólalási valószínűség ugyanolyan száltávolságban tényleg alig függ a henger átmérőjétől.

Végül a gyakorlati használat céljára a 8. ábrán egy 2-es és egy 3-as koincidencia-készülék számára grafikusan ábrázoltam a maxi-



8. ábra.

mális csőátmérőt mint a felbontóképesség függvényét; ennél nagyobb átmérőjű csöveket használva a koincidenciakészülék megszólalási valószínűsége 80% alá esik és így nem gazdaságos többé. Hasonló okokból egyetlen számlálócsővel végzett mérésekben 0·01 cm szálvastagság mellett 15 cm-nél és 0·04 cm szálvastagság mellett 18 cm-nél nagyobb átmérőjű csöveket nem érdemes használni.

Összefoglalás. Koincidenciakészülékhez kapcsolt számlálócsövek megszólalási valószínűsége nagy mértékben csökkenhet azáltal, hogy az ionizáló sugár kiváltotta elektronlavina lefutási ideje hosszabb, mint az alkalmazott felbontóképesség. A lavina lefutási idejére elméletileg számított és kísérletileg mért értékek igen jól megegyeznek.

Nagy átmérőjű csövekben, hol a térerősség a hengerfal közelében 45 V/cm alá esik, a megszólalási valószínűség a felbontóképességtől függetlenül, eddig még nem tisztázott tényezők folytán is erősen csökken.

A lefutási idők meghatározása egy új módszert szolgáltat elektronok gázmolekulába való ütközésekor leadott energiahányadának közelítő meghatározására. Így $\varkappa$ értéke aethilalkoholgőzre $1{\cdot}8.10^{-3}$-nek adódott.

Méréseimet a Pázmány Péter Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetének Kozmikus Sugárzás Kutató Laboratóriumában végeztem. Ezúton is hálás köszönetet mondok néhai dr. TANGL KÁROLY professzor úrnak, az intézet volt igazgatójának, ki méréseim elvégzését számomra lehetővé tette. Különös hálával tartozom dr. BARNÓTHY JENŐ egyetemi magántanár és dr. FORRÓ MAGDOLNA egyetemi adjunktusnak, kik tanácsaikkal és a kapott eredmények megvitatásával támogatták munkámat. A kísérlet költségeit a Magyar Tudományos Akadémia és a Széchenyi Tudományos Társaság a kozmikus sugárzás vizsgálatára adományozott kutatási segélyei fedezték.

Budapest, 1940. május 31.

Kísérleti Fizikai Intézet. *Nagy Dezső.*

Irodalom jegyzéke.

1. BARNÓTHY J. és FORRÓ M.: Mat. és Term. Tud. Ért. 56, 184, 1937.
2. HIPPEL és FRANCK: Z. f. Phys. 97, 455, 1935.
3. MEDICUS: Z. f. Phys. 74, 350, 1932.
4. BÉLL: Mat. és Fiz. Lapok, 44, 62, 1937.
5. HIPPEL: Z. f. Phys. 80, 19, 1933.
6. TROST és EHMERT: Z. f. techn. Phys. 16, 407, 1935.
7. RAETHER: Z. f. Phys. 107, 91, 1937.
8. STREET és WOODWARD: Phys. Rev. 46, 1029, 1934.
9. CRISTOPH: Ann. d. Phys. 26, 145, 1936.
10. TROST: Z. f. Phys. 105, 399, 1937.
11. COSYNS: Bull. Acad. Roy. Soc. Belg. 341, 1934.
12. BARNÓTHY: Naturwiss. 21, 835, 1933.
13. HEY és LEIPUNSKI: Z. f. Phys. 66, 669, 1930.
14. WAHLIN: Phys. Rev. 23, 169, 1924.
15. RAMSAUER és KOLLATH: Ann. d. Phys. 3, 536, 1929.
16. RAMSAUER és KOLLATH: Ann. d. Phys. 4, 91, 1930.
17. BAILEY: Phil. Mag. 13, 993, 1932.

DIE ANSPRECHWAHRSCHEINLICHKEIT DER GEIGER—MÜLLERSCHEN ZÄHLRÖHREN.

Die Ansprechwahrscheinlichkeit der Zählröhren von Koinzidenzapparaturen kann beträchtlich abnehmen, wenn die Laufzeit der durch den ionisierenden Strahl ausgelösten Elektronenlavinen länger wird, als das Auflösungsvermögen der verwendeten Koinzidenzanordnung. Die Laufzeit der Elektronenlavinen wurde bei verschiedenen Gasfüllungen bzw. Gasdrucken und Zählrohrdrahtdicken bestimmt und die gemessene Werte sind in guter Übereinstimmung mit den theoretisch berechneten Werten.

Bei Röhren mit grossem Zylinderdurchmesser, wo die Feldstärke in der Nähe der Zylinderwand unter 45 V/cm sinkt, nimmt die Ansprechwahrscheinlichkeit auch wegen einer — von dem Auflösungsvermögen unabhängigen — vorläufig noch nicht geklärten Ursache ab.

Die Bestimmung der Laufzeit der Elektronenlavinen ermöglicht eine näherungsweise Bestimmung des vom Elektron bei dem Zusammenstoss an das Gasion abgegebenen Energiebruchteiles. Für Äthylalkoholdampf ergibt sich $\varkappa = 1{\cdot}8 . 10^{-3}$.

D. Nagy.

A FÖLDMÁGNESES TÉR INTENZITÁSÁNAK MÉRÉSE KATÓDSUGÁRCSŐVEL.

Bevezetés.

Ismeretes, hogy ha elektronok olyan mágneses térben haladnak, melynek az elektronok sebességére merőleges irányban van komponense, akkor az elektronok görbe pályát írnak le. Ha egy katódcsövet nem a Föld mágneses terének az irányában helyezünk el, akkor a sugarak a tér hatására elhajolnak. Ismerve a cső katódjának az ernyőtől való távolságát, az elektronok sebességét és fajlagos töltését, továbbá a sugarak elhajlásának a mértékét, az eltérítő mágneses tér intenzitása meghatározható.

Ha ugyanis a cső katódjának az ernyőtől való távolsága s, a fluoreszcenciafoltnak a cső ernyőjén való elmozdulása d, akkor — mint egyszerű számítás mutatja — a cső tengelyének és a folt elmozdulásának az iránya által meghatározott síkra merőleges mágneses térintenzitáskomponens:

$$H = \frac{2dv}{(s^2+d^2)\frac{e}{m}},$$

ahol e/m az elektron elektromágneses egységekben kifejezett fajlagos töltése, v az elektronok sebessége.

Az elektronok sebessége a cső anódjára kapcsolt feszültséggel fejezhető ki:

$$v = 10^4\sqrt{2\frac{e}{m}V},$$

ahol V az anódfeszültség voltokban.

Ha $d^2 \leqslant s^2$, akkor alkalmazható a következő közelítő formula:

$$H = \frac{2.10^4 d}{s^2}\sqrt{\frac{2V}{e/m}}. \tag{1}$$

Ha d-t és s-et cm-ekben, V-t voltokban és e/m-et elektromágneses egységekben mérjük, akkor H-t gaussokban kapjuk.

A katód—ernyő távolság a cső készítésekor előre megadható. Az elektron fajlagos töltését sokan és sokféle módszerrel nagy pontossággal meghatározták. A számításokban

$$\frac{e}{m} = 1{\cdot}760.10^7 \text{ el. m. egység}$$

értéket használtam.

A térintenzitás meghatározása végett tehát az (1) képletben szereplő d távolságot és V feszültséget kell mérni.

A mérések befejezése után tudtam meg, hogy földmágneses térintenzitás mérésére az AEG berlini kutatólaboratóriuma már 1931-ben készített egy katódsugárcsöves berendezést.[1] E készülék készítésénél a cél csak kényelmes és gyors mérési módszer kidolgzása volt. A következőkben leírt megoldás a Brüche-félétől gyökeresen különbözik. Brüche ugyanis a földmágneses tér kompenzálásával először megállapítja a cső ernyőjének a nullpontját (azt a helyet, ahol a fluoreszcenciafolt mágneses tér hatása nélkül megjelenik), majd ismert intenzitású homogén mágneses terek (nagyméretű szolenoidok belsejében fellépő tér) segítségével a cső ernyőjén empirikus skálát készít. A cső alkalmazásakor a fluoreszcenciafolt helyének az ernyőn elkészített skálán való leolvasása közvetlenül megadja a térintenzitásnak a cső tengelyére merőleges komponensét.

E módszerrel — az idézett cikk szerint — 0·01 gauss pontosság érhető el. E pontosság számításánál azonban csupán a folt helyének a leolvasásában elkövetett hiba szerepel. A feszültségmérés pontatlanságából származó hibát nem is veszik tekintetbe. Nem emlékeznek meg továbbá a tapasztalati skála alig ellenőrizhető pontatlanságáról sem, ami a készülék szisztematikus hibája.

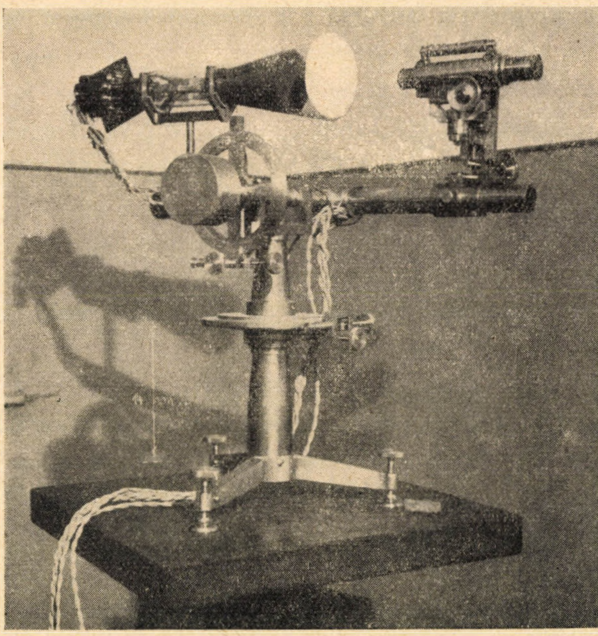
---

[1] Brüche, E.: Jahrb. d. Forschungsinst. d. AEG. 2, 133 (1931).

A mérés módszere.

A térintenzitást három egymásra merőleges komponensének a meghatározásával mértem. E végből a katódsugárcsövet egy teodolitszerű talpazatra szereltem, hogy a cső bármilyen térbeli állást felvehessen. (1. ábra.)

Mivel a földmágneses teret megszüntetni nem tudjuk, az ernyő nullpontját nem ismerjük. Nyilvánvaló azonban, hogy ha a cső



1. ábra.

egy bizonyos állásában a fluoreszcenciafolt az ernyő nullpontjától d távolságra van, akkor ezen állással 180°-kal szemben fekvő állásban a folt a nullponttól $-d$ távolságban jelenik meg. Valamely komponens meghatározásához szükséges d érték helyett tehát a cső átfordításával a $2d$ érték mérhető.

A fluoreszcenciafolt elmozdulásának a meghatározására kétféle módszert próbáltam alkalmazni.

Az egyik esetben a cső ernyőjével szemben egy vízszintes és függőleges irányban mozgatható leolvasó mikroszkópot helyeztem el. A folt közepére állítottam a mikroszkóp okulárjának a fonálkeresztjét. A mikroszkóp elmozdulása 0·01 mm pontossággal leolvasható és egy skálarész tört része még becsülhető. Ezzel a módszerrel mégsem sikerült kellő pontosságot elérni, mert a folt átmérője közel 1 mm és a helyét — mint látni fogjuk — 0·01 mm pontossággal kell meghatározni. A folt közepének ilyen nagy pontossággal való megbecsülését az is nehezíti, hogy a sötét látótérben megjelenő fluoreszkáló folt megfigyelésekor a szem igen elfárad.

E szubjektív hiba kiküszöbölhető, ha közvetlen megfigyelés helyett fotografálunk. A leolvasó mikroszkóp helyére ezért fényképező gépet szereltem és a foltról az eredeti nagyságával egyező nagyságú felvételt készítettem.

A cső hat különböző helyzetében (minden komponens meghatározásához két szemben fekvő helyzetben kell felvételt készíteni) ugyanarra a lemezre vettem fel a folt képét és a képek távolságát mikrofotométerrel mértem ki.

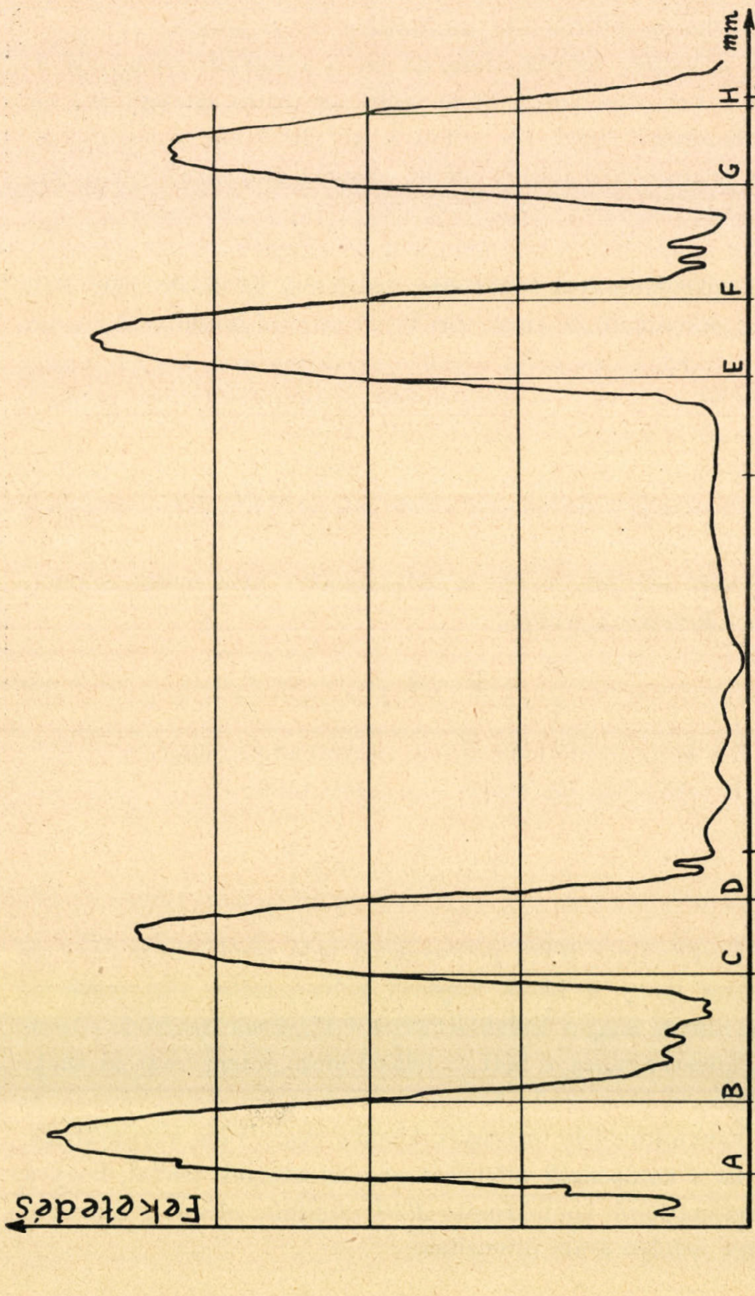
A mikrofotométeres méréssel a kívánt pontosság már elérhető. A foltról készült felvételen ugyan a feketedés nem mutat éles maximumot, de a folt szélein a feketedés igen gyorsan változik, úgy hogy egy alapul vett feketedésű hellyel egyenlő feketedésűt a olt szélein jól meg lehet találni. A folt közepének két egyenlő feketedésű hely közötti távolság felezőpontját vettem. E közepelés a gyakorlatban különböző feketedésű helyek alapul vételével történt (l. 2. ábra).

A feszültséget a Poggendorf-féle kompenzációs módszerrel mértem.

A mérés várható pontossága.

A mérés pontossága a folt elmozdulásának és a feszültségmérésnek a pontosságától függ: a térintenzitás mérésében elkövetett százalékos hiba (a relatív hiba százszorosa) (1) alapján:

$$p\% = 100\,\frac{\delta H}{H} = 100\left(\frac{\delta d}{d} + \frac{1}{2}\,\frac{dV}{V}\right), \tag{2}$$



2. ábra.

ahol a felül húzott vonás az illető mennyiség középértékét, a δ jel pedig a középértéktől való maximális eltérést jelenti.

Ha a katód—ernyőtávolság 24 cm és a feszültség kb. 500 V, akkor a 0·2 gauss körüli horizontális intenzitás mintegy 0·7 cm foltelmozdulást okoz. Ha a folt helyét 10^{-3} cm, a feszültséget 0·1 V pontossággal tudjuk mérni, akkor a horizontális intenzitás mérésében elkövetett hiba 0·1% (20 γ; 1 $\gamma = 10^{-5}$ gauss).

Mint említettem, a folt elmozdulását mikrofotométerrel mértem ki. A mikrofotométer lemeztartó asztalának az elmozdulása 0·01 mm-ig leolvasható és ennek tört részei még jól becsülhetők. A folt szélein a feketedés pedig olyan gyorsan változik, hogy a lemeznek 0·001 mm-rel való elmozdulását a mikrofotométerbe épített elektrométer lényeges kiütésváltozással jelzi.

A feszültségmérés kompenzációval történt. Ilyen mérés pontossága a használt galvanométer érzékenységétől függ. Ha a mérésnél használt Kohlrausch-híd hossza L és a híd l hosszúságú darabjánál vett leágazás esetén a galvanométer nem mutat áramot, akkor a keresett feszültség

$$V = E \frac{l}{L}, \tag{3}$$

ahol E a kompenzáló normálelem elektromotoros ereje.

A V mérésében elkövetett százalékos hiba:

$$p^{\%} = 100 \frac{\delta V}{\overline{V}} = 100 \frac{\delta l}{\overline{l}} \cdot$$

A feszültségnek 0·1% pontossággal való meghatározásához az szükséges, hogy a hídba kapcsolt galvanométer elég érzékeny legyen ahhoz, hogy a leolvasott érték 0·1%-ának megfelelő elmozdulás következtében a hídban fellépő áram intenzitását ki tudja mutatni.

A Kirchhoff-féle törvények alapján egyszerűen kiszámítható, hogy ha a kompenzált állapotot megváltoztatjuk azáltal, hogy a híd csúsztatható kontaktusát Δl-lel eltoljuk, akkor a galvanométeren átfolyó áram intenzitása :

$$\Delta i = \frac{E\frac{\Delta l}{L}}{r_g - r\frac{l}{L}\left(1 - \frac{l}{L}\right)}, \tag{4}$$

ahol r_g a galvanométer belső ellenállása és r a Kohlrausch-híd ellenállása. Ha $r_g \gg r$, mint pl. a mi esetünkben, akkor helyes a következő közelítés:

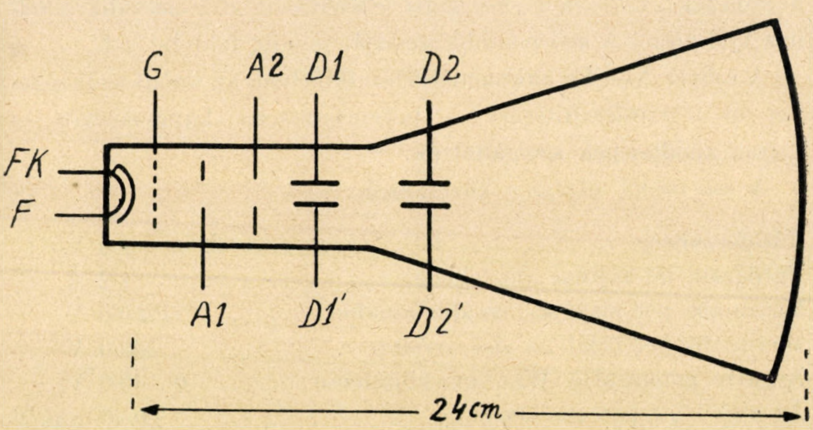
$$\Delta i = \frac{1}{r_g}\,\frac{E}{L}\,\Delta l. \tag{5}$$

Legyen $L=1000$ skálarész és legyen még 0·1 skálarész becsülhető. Ha most $r_g=1000\ \Omega$ és $E=1{\cdot}32$ V, akkor a csúszó kontaktus 0·1 skálarész elmozdulásának megfelelő áramintenzitásváltozás: $1{\cdot}3.10^{-7}$ A. Tehát egy 10^{-7} ampère per skálarész érzékenységű galvanométerrel már 0·01% pontosságú feszültségmérés végezhető.

A kísérleti berendezés.

A berendezés lényeges része a már említett teodolitszerű talapzatra szerelt nagy vákuumú katódsugárcső. A mérésnél egy Philips DG 9-3 típusú közvetett fűtésű csövet használtam, szkematikus rajzát a 3. ábra mutatja.

A katód távolsága az ernyőtől 24 cm. A katód előtt egy Wehnelt-cilinder van, mely a katódhoz képest 0—40 V negatív



3. ábra.

feszültséget kap. A WEHNELT-cilinder rács szerepét játssza (ezért a rajzon a G ráccsal szkematizáltam): feszültsége változtatásával a katódból az ernyőre jutó elektronok számát s így a fluoreszcencia folt fényességét lehet szabályozni.

A WEHNELT-cilinder után az elektronoptikai berendezés következik: két külön kivezetéssel bíró henger, melyek belsejében kördiafragmák vannak. Mindkét diafragmarendszer a katódhoz képest pozitív feszültséget kap. A katódhoz közelebbinek ($A1$) kisebb a feszültsége, mint a katódtól távolabbié ($A2$). A katód és a második anód közötti feszültségkülönbség állítja elő az elektronokat gyorsító teret. A két anód közötti térnek pedig az a szerepe, hogy a katódról kiinduló széttartó elektronsugárnyalábot az ernyőn összpontosítsa. Az általam használt cső ernyőjén akkor áll elő a katód éles (majdnem pontszerű) képe, ha az első és a második anód feszültségének az aránya kb. 2 : 5.

Az elektronoptikai rendszer után az eltérítő lemezpárok következnek ($D1$, $D2$; $D1'$, $D2'$), melyek a valóságban (a rajztól eltérően) egymásra merőleges elektromos teret létesítenek. Mind a négy lemeznek van külön kivezetése, bár a cső voltaképpen «nemszimmetrikus» kapcsolásra készült: az eltérítő töltést a lemezpárok egy-egy tagjára szokás adni, s a másik két lemezt a második anódhoz kötik. Ha az eltérítő lemezek valamelyikét egyáltalán nem használják, akkor (lehetőleg kicsi) ellenálláson át a második anódhoz kell kötni. A cső második anódját mindig földelni kell.

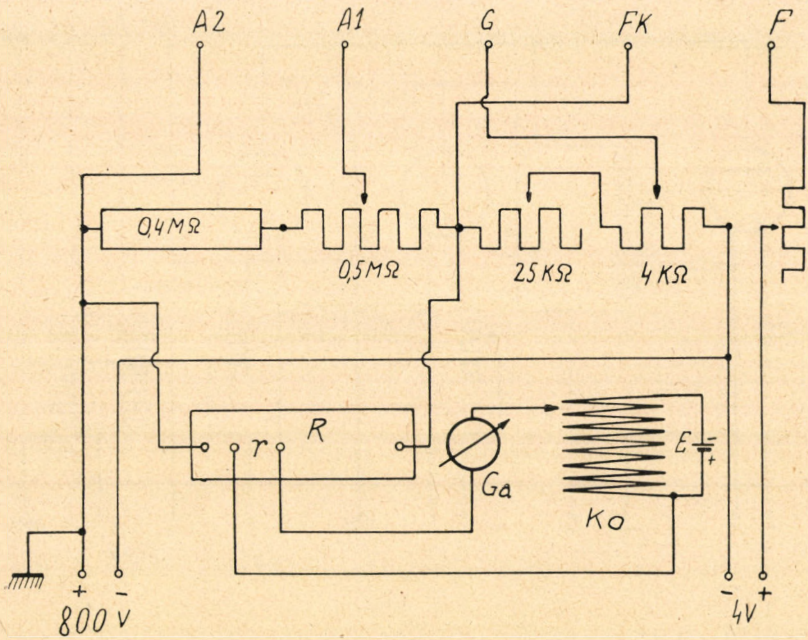
A csövet *Ni—Fe* akkumulátorból fűtöttem, az anódfeszültségeket és a rácsfeszültséget — potenciométeres kapcsolásban — száraz anódtelepek szolgáltatták.

A cső üzemi adatai a következők:

Fűtőfeszültség	4·0	V
Fűtőáram intenzitása (legfeljebb)	1·2	A
Maximális potenciál a második anódon	1200·0	V
Maximális potenciál az első anódon	500·0	V
Negatív potenciál a WEHNELT-cilinderen	0—40·0	V
Az első lemezpár érzékenysége	0·40	mm/V
A második lemezpár érzékenysége	0·31	mm/V

A cső fűtéséhez, az elektronoptikai berendezéshez és a feszültségméréshez tartozó kapcsolást a 4. ábra mutatja.

A katód és a második anód közötti feszültségkülönbséget egy R ellenállású ellenállásszekrényre vittem, melynek r ellenállású részéből leágazást vettem. A leágazás sarkai között, ha a katód és a második anód közti feszültségkülönbség V, $\frac{Vr}{R}$ feszültség-



4. ábra.

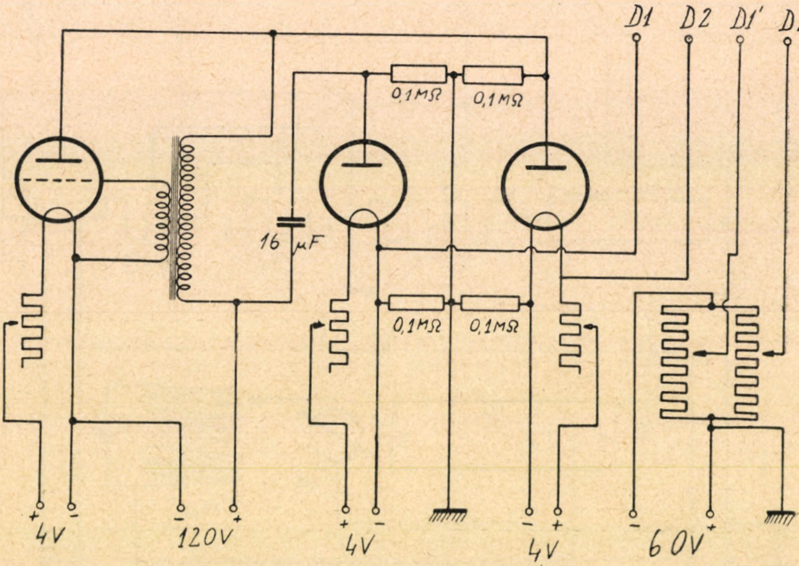
különbség van. Ezt a feszültségkülönbséget a KOHLRAUSCH-híd (Ko) két végéhez kapcsolt E elektromotoros erejű normálelem kompenzálta. Normálelemül Ni—Fe akkumulátort használtam, melynek elektromotoros erejét külön méréssel több ízben ellenőriztem.

A méréseknél:

R	100,000 Ω
r	100 Ω
E	1·32 V
r_g	1,000 Ω

A használt galvanométer (*Ga*) érzékenysége 2.10^{-7} A/skálarész. A KOHLRAUSCH-híd hossza 1000 skálarész, egy skálarész tört részei még jól becsülhetők.

A mérésnél a foltnak az ernyőn való helyét, illetve a mágneses tér hatására való elmozdulását kell meghatározni. Ha azonban a sugarak huzamosabb ideig esnek az ernyő egyetlen helyére, akkor megtörténhetik, hogy az ernyő ezen helye elveszti érzékenységét,



5. ábra.

«kiég». Ezért célszerű a foltot az ernyőn állandó mozgásban tartani. Evégből az eltérítő lemezek segítségével az ernyőn egy ┌ alakú álló képet állítottam elő.

E fluoreszcenciakép előállítására szolgáló berendezés kapcsolása az 5. ábrán látható. Egy lassú rezgéseket keltő oszcillátor rezgőkörébe nagy ellenállást iktattam, melynek két végéhez egy-egy dióda anódját kötöttem. A diódák külön-külön fültek és a fűtőszál egyenlő előjelű pólusait nagy ellenállással hidaltam át. A fűtőszálak közé és a rezgőkörbe kapcsolt ellenállás közepét együtt földeltem. A fűtőszálak szabadon maradó oldalán — mivel a dióda csak egyirányú áramot enged át — az oszcillátor keltette rezgéseknek egy-egy félperiódusát lehet felváltva levenni. E pólusokhoz kötöttem a két lemezpár egy-egy lemezét, a szabadon maradó lemezeket pedig a második anódhoz kötve, vele együtt földeltem. Ily módon az egyik félperiódus alatt az egyik lemezpár feltöltődik és újra kisül, a másik lemezpár pedig közben állandóan földelve van. Tehát a fluoreszcenciafolt egy egyenest ír le. A másik félperiódus alatt a két lemezpár szerepet cserél, a folt az előbbire merőleges irányban terül el. A két merőleges metszéspontjában abban a pillanatban van a folt, amikor mindkét lemezpár éppen földelve van.

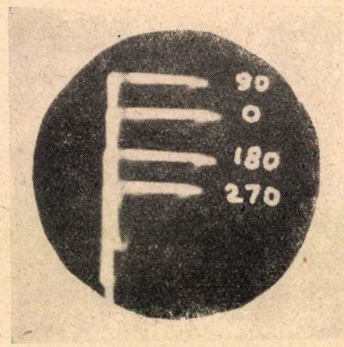
Az eltérítő lemezpárokkal a folt alapállása is szabályozható. E célból (l. 5. ábra) két párhuzamosan kapcsolt potenciométer leágazásához kötöttem a lemezpárok egy-egy lemezét (azt, amelyik előbb közvetlenül a második anódhoz volt kötve). A potenciométerpár végeit pedig egy áramforrás sarkaihoz kötöttem és az áramforrás pozitív oldalát földeltem. A potenciométerek szabályozásával a folt az ernyő kívánt helyére vihető. (Mérés közben természetesen a potenciométereket nem szabad változtatni.)

A felvételeket egy 1 : 4·5 fényerejű, 5 cm gyujtótávolságú Zeiss-objektívvel 4·5×6 cm méretű (Perutz Persenso) lemezekre készítettem. Az expozíció-idő 2 min. körüli volt.

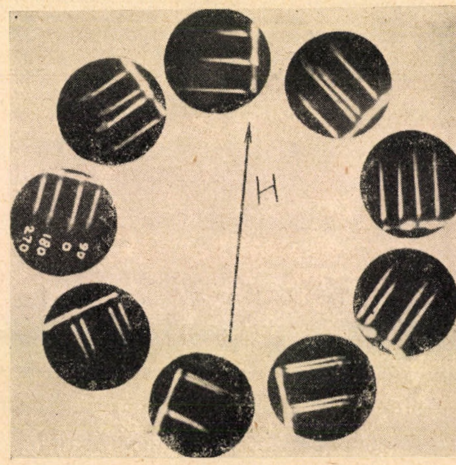
A mérés eredményei.

A térintenzitás mérendő három komponenséül két egymásra merőleges — de különben tetszőleges — vízszintes síkbeli és a függőleges komponenst választottam. Mivel a mérés egyedüli célja az volt, hogy a készülékkel gyakorlatilag elérhető pontosságot megállapítsam, elegendő volt csupán a horizontális intenzitásra végezni méréseket.

A 6. ábra mutat egy, a horizontális intenzitás meghatározására szolgáló felvételt. A 0, 90, 180, 270 jelzésű képrész a csőnek egy-egy 90°-os elfordítása után készített felvétel eredménye. A 0 jelzésű a cső alapállásában készített felvétel. A méréseknél különböző, vízszintes síkbeli alapirányokból kiindulva készítettem a felvételeket. Ezek abban különböznek egymástól, hogy a vonalak közötti távolságok mások. (Ezt szemlélteti a 7. ábra: a *H*-val jelzett nyíl a horizontális intenzitás irányát mutatja, az ábra középpontjából az egyes felvételekhez húzható sugarak a cső alapállása irá-



6. ábra.



7. ábra.

nyát mutatják.) E vonalak egymástól való távolságát mértem ki mikrofotométerrel. Az egyik felvételen végzett mérés részletes eredményeit mutatja az alábbi táblázat. Az *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* jelzések jelentését a 2. ábra érthetővé teszi.

I. Táblázat.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Leolvasás a mikrofotométeren	350,8	433,8	816,9	881,5	1345,0	1429,7	1744,0	1853,5
	0,5	3,5	6,9	1,2	4,8	9,2	4,3	3,8
	0,1	3,5	7,0	1,8	4,6	9,8	4,8	3,4
	364,5	419,5	824,3	873,9	1362,0	1411,8	1762,0	1837,4
	4,7	9,8	4,5	4,3	2,1	2,4	2,2	5,2
	4,2	9,7	4,2	4,4	2,0	2,2	1,9	6,3
	378,9	405,3	839,1	858,9	1378,2	1396,3	1779,2	1818,7
	8,5	6,0	9,1	9,7	8,0	6,4	9,0	9,1
	9,0	5,1	9,2	9,2	8,5	6,1	9,5	8,1

A fenti táblázat alapján kiszámítható a megfelelő vonalak távolsága, vagyis a cső 180°-kal való átfordításának megfelelő foltelmozdulás:

$$2d_1 = \frac{G+H}{2} - \frac{A+B}{2}; \quad 2d_2 = \frac{E+F}{2} - \frac{C+D}{2}.$$

A következő táblázat e távolságokat, ezek középértékét, a mérési eredményeknek a középértéktől való maximális eltérését és a százalékos hibát tünteti fel. A távolságok cm-ekben vannak megadva. A felvételek készítése közben a feszültséget is mértem; az alábbi táblázat l-jelzésű oszlopa a KOHLRAUSCH-hídon történt leolvasások eredményét, illetve az ezekből számított értékeket mutatja. Az l százalékos hibája helyett e táblázatban ennek felét tüntettem fel, mert a térintenzitás mérésének a hibájában ez jön számításba (l. (2) képlet).

II. Táblázat.

	$2d_1$	$2d_2$	l
	1,4064	0,5381	450,8
	70	80	—
	75	78	6
	77	78	—
	65	78	7
	70	78	—
	67	82	5
	69	78	—
	72	81	4
közép ...	1,4069	0,5379	450,6
δ_{max} ...	0,0008	0,0002	0,2
$p^{0/0}$	0,06	0,04	0,02

d és l értékéből az eltérítő térintenzitást az (1) és (3) formulából kapjuk meg:

$$H = \frac{10^4}{s^2} \sqrt{\frac{El}{L} \frac{R}{r} \frac{1}{e/m}} \cdot 2d = k2d\sqrt{l}, \qquad (6)$$

ahol k, a kísérleti berendezés összeállításától függő állandó.

A térintenzitás meghatározásában elkövetett százalékos hiba:

$$p\% = 100\left(\frac{\delta d}{\bar{d}} + \frac{1}{2}\frac{dl}{\bar{l}}\right). \tag{7}$$

A H_1 és H_2 egymásra merőleges komponensekből a horizontális intenzitás abszolút értéke:

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2}. \tag{8}$$

A horizontális intenzitás mérésében elkövetett százalékos hiba (8) és (6) alapján:

$$p\% = 100\left(\frac{\bar{d}_1 . \delta d_1 + \bar{d}_2 . \delta d_2}{\bar{d}_1^2 + \bar{d}_2^2} + \frac{1}{2}\frac{\delta l}{\bar{l}}\right). \tag{9}$$

Különösen figyelemre méltó az, hogy a horizontális intenzitás hibájában a távolságok kimérésének pontatlanságából eredő hibák nem adódnak egyszerűen össze, hanem az eredő hiba az egyes távolságok mérésében elkövetett hibák közé esik. A közölt adatok és formulák alapján végzett számítások szerint a horizontális térintenzitás

$$H = 0{\cdot}21564 \pm 0{\cdot}00015 \text{ gauss.}$$

További hat felvétel kimérése alapján végzett számítások a következő eredményeket adták:

H=0,21618	±0·00010	gauss
561	22	
616	15	
599	22	
610	17	
639	09	

Lehet, hogy a horizontális intenzitásra talált értékek nem felelnek meg a valóságban. Ez annak tudható be, hogy a mérés színhelyén voltak zavaró körülmények (pl. a rendelkezésre álló helységben vasból készült tűzhely volt), melyek a mérés végeredményét befolyásolták. Azonban a zavaró hatás állandó volt, úgyhogy a módszer pontosságának a megállapítása szempontjából nem kellett figyelembe venni.

Az egyes komponensek mérésében elkövetett hibának az a része, mely a foltelmozdulás meghatározásának a pontatlanságából származik, kisebbíthető azáltal, hogy az egész elmozdulást növeljük, ekkor ugyanis a $\frac{\delta d}{d}$ tört értéke kisebb lesz. Ez történhetik azáltal, hogy a katódsugárcső hosszát növeljük. A cső érzékenysége (adott térintenzitásváltozásnak megfelelő foltelmozdulása) ugyanis a cső hosszának a négyzetével arányos. Vagy csökkenthetjük a szóban forgó hibát azzal is, hogy az ernyőn megjelenő foltról nagyított képet készítünk. Ebben az utóbbi esetben ugyan a folt nagysága és a kép élessége is romlik, azonban a mikrofotométeres kimérésnél ez nem okoz lényeges hibát.

A második elgondolást úgy próbáltam ki, hogy az egyik felvételről (amelynek kimérésekor kapott adatokat részletesen közöltem) fotografikus úton egy kb. ötszörös nagyítású képet készítettem és ezt is kimikrofotometráltam. Ebben az esetben úgy a $2d_1$, valamint a $2d_2$ távolságot 0·02% pontossággal sikerült meghatározni, szemben az eredeti felvétel kiméréséinél kapott 0·06%, illetve 0·04% hibával. Ehhez véve a feszültségmérés 0·02% hibáját, a horizontális intenzitás mérésének összes hibája 0·04%-ra csökkent, ami kb. 8 γ-nak felel meg.

Összefoglalás.

Egy katódsugárcső ernyőjén megjelenő fluoreszcenciafolt elmozdulását mérve, meghatároztam a Föld mágneses terének horizontális intenzitását, s a mérésben elkövetett legnagyobb hiba 22 γ volt. Ez alig nagyobb, mint amekkora hibát egyéb szállítható földmágnességi mérőeszközzel elkövetnek.

A már mondott ok miatt remélhető, hogy hosszabb katódsugárcsővel el lehet érni az állandó felépítésű obszervatóriumok pontosságát (1 γ) is, a nélkül, hogy a készülék szállítható és könnyen kezelhető voltát elveszítené. A szállíthatóságot az biztosítja, hogy nincsenek a készülékben érzékeny mechanizmusok (lengő szerkezetek, finom fonalak, csiszolt élek). Ez az oka annak is, hogy külső körülmények (legfőképpen a hőmérséklet) megváltozásával szemben ez a készülék érzéketlen, ami pedig a szokásos berendezések alig ellenőrizhető hibáinak lehet az oka.

Kifogásolható talán, — magam is idegenkedtem ettől a megoldástól — hogy a fotografikus észlelés a mérést bonyolítja, mert a felvételek kidolgozása és kimérése külön munkatöbbletet jelent. Azonban határozott előnye ennek a megoldásnak az, hogy az észlelőtől származó szubjektív hiba minimális.

Bár a módszer pontosságának a kipróbálása szempontjából elegendő volt a horizontális intenzitással foglalkozni, a felvételeket mégis úgy készítettem, hogy a vertikális intenzitáskomponens-okozta foltelmozdulás is kimérhető legyen.

A térintenzitás három egymásra merőleges komponensének az ismeretével, azután a totális intenzitás és az inklináció is meghatározható. Ha pedig a vízszintes síkban választott alapirányok a földrajzi észak—dél, illetve kelet—nyugat irányba esnek, akkor a mérési eredményekből a deklináció is egyszerűen adódik. Ha az intenzitáskomponensek 1 γ pontossággal ismeretesek, akkor az inklinációra és a deklinációra 0·1′ pontosságú eredményt kapunk.

*

Dolgozatomat a Kir. Magyar Pázmány Péter Tudományegyetem Gyakorlati Fizikai Intézetében készítettem. Hálás köszönettel tartozom az Intézet igazgatójának, dr. RYBÁR ISTVÁN professzor úrnak szíves érdeklődéséért és hasznos tanácsaiért, melyekkel munkámat támogatta.

Hálásan köszönöm dr. BAY ZOLTÁN műegyetemi tanár úrnak, hogy alapvető problémák megvilágításával szíves segítségemre volt.

Köszönetemet kell kifejeznem dr. BUDÓ ÁGOSTON egyet. magántanár úrnak is szíves útbaigazításaiért.

A végleges méréseket a svábhegyi Csillagvizsgáló Intézetben végeztem. Hálásan köszönöm dr. LASSOVSZKY KÁROLY igazgató úrnak, hogy számomra az Intézetben helyet adott és az intézet mikrofotométerének a használatát megengedte.

Végül mély hálámat kell kifejeznem a Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának azért a bőkezű anyagi támogatásért, mellyel a műszer elkészítését és a vizsgálatok kivitelét lehetővé tette.

Faragó Péter.

MEASUREMENT OF TERRESTRIAL MAGNETIC FIELD INTENSITY BY MEANS OF A CATHODE RAY TUBE.

The method described is based upon the deflection of cathode rays in a magnetic field : the magnetic field component perpendicular to the axis of the tube can be calculated, if the cathode-screen distance, the specific charge of the electrones, their velocity (i. e. the accelerating potential), and the displacement of the image on the screen are known.

The intensity was determined by measuring its three mutually perpendicular components. To enable the tube to have any position desired, it was mounted on a theodolite-like device. As the terrestrial magnetic field cannot be eliminated the «zero-position» of the image is unknown. For this reason, instead of the displacement *d* of the image — by turning over the tube — the displacement 2*d* was determined.

In six different positions of the tube (two diametrically op osite positions for each component) the screen was photographed on one and the same plate. The displacement of the image was measured by a microphotometer. The accelerating voltage was measured by compensation.

The cathode-screen distance of the tube used was 24 cm, the accelerating voltage about 500 V. The greatest inaccuracy in the result for horizontal intensity was 22 γ (about 0 1%).

It is hoped that, by using a longer tube, a result with an accuracy of wit in 1 γ can be achieved.

P. Faragó.

KAPCSOLÁSTANI FÜZETEK SORSZÁMA.

A kapcsolástanban adott elemek permutációját, variációját és kombinációját a lexikografikus sorrendben szokás felírni. Ha már most adva van bizonyos elemeknek egy kapcsolástani füzete, felmerül a kérdés, hogy az illető füzet a lexikografikus sorrendben hányadik. A sorszám megállapítására vonatkozó formulák tudomásom szerint az irodalomban csak a permutációkat illetőleg fordulnak elő. Ezért talán nem lesz érdektelen, ha hasonló formulákat a kombinációkra és a variációkra vonatkozólag közlök, annál is inkább, mert ezek a formulák igen egyszerűek és egyszerű meggondolással nyerhetők.

A permutációkat illetőleg, mint ismeretes az n elemből képezhető egy adott permutáció sorszáma:

$$S_{p(n)} = p_1 P_{n-1} + p_2 P_{n-2} + \cdots + p_{n-1} P_1 + 1,$$

ahol p_i a füzet i-edik elemétől jobbralevő kisebb sorszámú elemek számát, P_k pedig a k elemből képezhető permutációk számát jelenti.

A variációkra vonatkozólag a képlet ugyanúgy alakul:

$$S_{v(n,k)} = p_1 V_{n-1}^{k-1} + p_2 V_{n-2}^{k-2} + \cdots + p_k V_{n-k}^{0} + 1,$$

ahol azonban p_i jelentését az előzőhöz képes akként kell módosítanunk, hogy a jobbra levő kisebb elemeken kívül a füzetben elő nem forduló kisebb elemek számát is tekintetbe vesszük; V_m^k az m elemből képezhető k-ad osztályú variációk száma. A képlet helyessége ugyanúgy, mint a permutációkra vonatkozólag, közvetlenül belátható abból, hogy a füzetek lexikografikus sorrendjében az i-edik elemmel kezdődő füzeteket megelőzik az i-nél kisebb sorszámú elemmel kezdődők; az i-edik elemmel kezdődők között pedig azokat, amelyekben a második elem j.

megelőzik azok, amelyekben a második elem sorszáma j-nél kisebb, de nem i stb.

Az ismetléses variációk sorszámára ugyanezzel a meggondolással a közetkező formulára jutunk:

$$S^i_{v(n,k)} = p_1 W_n^{k-1} + p_2 W_n^{k-2} + \cdots + p_k W_n^0 + 1,$$

amelyben azonban most W_m^k az ismétléses variációk számát, p_i pedig az összes a füzet i-edik eleménél (és nemcsak a jobbra levő és kimaradó) kisebb sorszámú elemek számát jelenti.

A kombinációk sorszámának megállapításához a fenti meggondolást egy kissé módosítanunk kell. Itt legcélszerűbb a füzeteket visszafelé számolni le. Az utolsó kombinációs füzet sorszáma: $\binom{n}{k}$. Hogy az adott füzet sorszámát megkapjuk, ebből a számból le kell vonnunk mindazoknak a füzeteknek a számát, amelyek az adott füzetet a lexikografikus sorrendben követik. Ezeknek a száma most már ugyanolyan meggondolással állapítható meg, mint előbb. Igy nyerjük az alábbi formulát:

$$S_{c(n,k)} = C_n^k - C_{n-i_1}^k - C_{n-i_2}^{k-1} - \cdots - C_{n-i_k}^1,$$

melyben C_m^j az m elemből képezhető j-ed osztályú kombinációk száma, $i_1, i_2, \ldots, i_k$ pedig az adott füzet elemeinek rangszáma a lexikografikus sorrendben. Ez a formula az ismétléses kombinációkra ugyanígy érvényes, ha a formulában C_m^j az ismétléses kombinációk számát jelenti.

Megyesi István.

LEXIKOGRAPHISCHE ORDNUNG VON KOMBINATORISCHEN KOMPLEXIONEN.

Es werden Formeln angegeben für die Bestimmung der Ordnungsnummer einer gegebenen Permutation, Kombination und Variation in der lexikographischen Ordnung der betreffenden Komplexionen. Solche Formeln waren, wie es scheint, in der Literatur bis jetzt nur für Permutationen angegeben.

István Megyesi.

HELYREIGAZÍTÁS

Obláth Richárd «Az x^2—1 számokról» c. dolgozatához
(2. kötet 58—77. l.)

A dolgozat kinyomatása után vettem csak észre, hogy a prímszámhatvány modulusú kongruenciákról szóló ismeretes tételek figyelembevételével az 1. tétel a következő tömörebb alakban fogalmazható:

Legyen $p < 3$ prímszám; az

$$x^2 - 1 = y^p \tag{I}$$

diophantikus egyenlet el nem tűnő egész számokban lehetetlen, ha

$$2^{p-1} \not\equiv 1 \bmod p^2.$$

A tétel ezen alakjából következik, hogy az 1, β tétel tartalmatlan, a reguláris prímszámokra specializált 3. tétel pedig fölösleges.

A (12) formulából látni, hogy k_1 és k_2 csak pozitívok lehetnek. Ez a megjegyzés nemcsak a bizonyítást egyszerűsíti, hanem új eredményekre is vezet, amelyekre másutt még visszatérek.

Beeger [1] egy eredményének segítségével a 4. tétel a következőkép terjeszthető ki:

(I) az ismert kivételektől eltekintve minden 16,000-nél kisebb kitevővel lehetetlen.

Az előadottak következtében az 5. tétel is egyszerűsbödik, valamint *az 5., 10. és 12. tételek is élesíthetők.*

Felhasználom az alkalmat még egy pár helyesbítésre.

A 66. oldalon az $\dfrac{y^p+1}{y+1} = F_{2p}(y)$ formula után bepótlandó: tetszőleges páratlan n-nél $\dfrac{y^n+1}{y+1} = F_{2n}(y)G_{2n}(y)$, ahol G_{2n} egész együtthatójú polinom.

A 68. oldalon a 13. sorban k_2 helyett k_1 olvasandó.

A 71. oldalon a 17. sorban az egyenlet legmagasabb tagja nem $(2\eta)^n$, hanem $(2^n - 2^{n-2})\eta^n$.

A 73. oldalon a 9. sorban $\left(\dfrac{2\eta - c}{2\eta}\right)^n$ és a 10. sorban $\left(\dfrac{2\eta_0 - 29}{2\eta_0}\right)^{3000}$ helyett a reciprok értéke veendő.

Ahol röviden hatványmaradékokról van szó, «p-ik hatványmaradék mod p^2» értendő.

Obláth Richárd.

---

[1] N. G. W. H. Beeger: On the congruence $2^{p-1} - 1$ (mod p^2) and Fermat's last theorem. Nieuw. Arch. Wiskde 20., 1939. 51—54., Zentralblatt f. Math. 20. 1939., 105.

IRODALOM.

Fizikai Kémia. I. kötet. Gróh Gyula közreműködésével írta **Erdey-Grúz Tibor és Schay Géza.** 605 oldal. **II. kötet.** Írta **Náray-Szabó István és Schay Géza.** 475 oldal. Budapest, 1940. Királyi Magyar Egyetemi Nyomda.

Valóban örömünkre szolgál, hogy alkalmunk van a magyar tudományos irodalom e jelentékeny gyarapodásáról referálni. Gróh Gyula és munkatársai: Erdey-Grúz Tibor, Náray-Szabó István és Schay Géza hasznos és elismerésre méltó munkát végeztek, midőn egy 1080 oldal terjedelmű, tan- és kézikönyv jellegű fizikai kémia megírását vállalták. A könyv Gróh Gyula egyetemi előadásaiból nőtt ki a részletekben önállóan és jelentékenyen kibővítve munkatársai által, kik mind a fizikai kémia különböző fejezeteinek kiváló művelői.

Az első kötet a fizikai kémiának ma már klasszikusnak nevezhető fejezeteit foglalja magában, kiegészítve az újabb kutatásokkal és szempontokkal.

Az első bevezető fejezet a termodinamika első és második főtételét tárgyalja főkép a kémikusok igényeire és előképzettségére való tekintettel. Ha összehasonlítjuk tárgyalását Thán Károly: A kísérleti chémia elemei c., 1897-ben megjelent, hazai kémiai irodalmunkban fontos lépést jelentő művének megfelelő fejezeteivel, úgy örvendetesen állapíthatjuk meg, hogy ma mennyivel jobb a kémikusok fizikai és matematikai előképzettsége, mert míg Thán kénytelen az elemi fizikai fogalmakat is részletesen definiálni és az integrál fogalmát éppen csak említi, de alig használja, a jelen műben természetes alkalmazást talál. Mindazonáltal nézetünk szerint nem lett volna egészen felesleges a 3. oldalon az első főtétel felállításánál az energiát definiálni. E fejezet szükségképpen vázlatos (38 oldal) tárgyalására csak azt jegyezzük meg, hogy jobban szerettük volna a szabad energia helyett az entrópiának kiemeltebb előtérbe való állítását. Először azért, mert az entrópia bír alapvetőbb értelemmel, másrészt mert az irreverzibilitás kritériumát vele sokkal általánosabban lehet megfogalmazni. Ezeket a szerzők a 38. oldalon el is ismerik. Hogy mégis más előállítást választottak, arra más magyarázatot mint azt, hogy ez a kémiai irodalomban igen megszokott, nem látunk. Mellékes megjegyzés, hogy a 2. oldal első kikezdése felsorolásában a spektrumok említése is kívánatos lett volna és a 31. oldal (22) egyenlete semmikép sem tekinthető a második főtétel legáltalánosabb alakjának.

A következő három fejezetben a gáznemű, cseppfolyós és szilárd halmazállapotot tárgyalják. A fenomenologikus termodinamika tárgyalását itt a korpuszkuláris elmélet alapjaival egészítik ki és a MAXWELL-BOLTZMANN tételt valamint az entrópia statisztikai értelmezését is hozzák. E fejezetek kissé túlrövidek, amit a szerzők is éreztek és a második kötet függelékében a MAXWELL-BOLTZMANN tétel levezetését pótolták. A szilárd testek fajhőjét a kvantumelmélet alapján tárgyalják. A 162. oldalon DEBYE elméletének vázolása és a 42. rajz nem egészen megfelelő, erre vonatkozó pótlás szintén van a második kötet függelékében. E fejezetben tárgyalják a halmazállapotváltozásokat, a fizikust is érdekelheti a víz állapotainak részletes elemzése nagy nyomáson is. (180. oldal.)

A következő fejezet az oldatok, az azután következő a heterogén rendszerek egyensúlyi viszonyaival foglalkozik elemi tárgyalásban sok érdekes példa grafikus feltüntetésével. A VI. fejezet a kémiai mechanikát : reakciósebességeket és egyensúlyi viszonyokat tárgyalja, míg a VII. fejezet az egyensúlyokra a termodinamika főtételeit alkalmazza. Az ú. n. harmadik főtétel is itt nyer tárgyalást.

A VIII—XII. fejezetek az elektrokémia, elektrolitok, galvánelemek, az elektrolizis és polarizáció jelenségeit tárgyalják. Az elektrolitok DEBYE-HÜCKEL-féle elmélete, a savak és bázisok BRÖNSTED-féle elmélete talál itt tárgyalásra, valamint a redoxpotenciálok és pufferoldatok, oly dolgok, melyek a tudományosan dolgozó orvost és biológust is érdeklik. E kötet utolsó, XIII. fejezete a határfelületek és kolloid oldatok ma oly aktuális jelenségeivel foglalkozik. Kiemeljük a felületi rétegekre vonatkozó LANGMUIR-féle vizsgálatok és a BROWN-féle mozgás és az ülepedési jelenségek tárgyalását.

A II. kötet az anyag szerkezetére vonatkozó ama alapvető kutatások és elméletek ismertetését nyujtja, melyek az utóbbi évtizedekben fizikai és kémiai alapfelfogásainkat oly mélyrehatóan átalakították. A fejezetek tárgyai : Az atomok építőkövei, az atommagok felépítése és az elemátalakulások, a periodikus rendszer és az elemek spektrumainak értelmezése. Külön fejezet tárgyalja a kémiai kötés többféle fajának újabb elméleteit, valamint a molekulák spektrumait és sajátságait. Sávos spektrumok, RAMAN-effektus, orto- és parahidrogén, FRANCK—CONDON elv, optikai forgatóképesség kerülnek itt szóba. E részhez csak azt jegyezzük meg, hogy az elektron tömege nem vezethető teljesen vissza az elektromágneses tömegre (10. oldal.) és hogy a radióaktív bomlások sorában az oly fontos és új típusú uránbomlás említése kívánatos lett volna.

A VI. fejezet a kristályos anyag szerkezetére vonatkozó vizsgálatokat tárgyalja. Természetesen bő helyet foglalnak el a szerkezet megállapítására vonatkozó, röntgen- és elektronsugarakat használó módszerek. A mind nagyobb fontosságra szert tevő FOURIER-soros módszer is behatóan van ismertetve. Fel lehetett volna azonban még említeni, hogy a nívógörbék nemcsak az atomok helyzetéről, hanem az elektronsűrűség eloszlásáról és így a kötéstípusról is felvilágosítást adnak. Éppígy nem ártott volna több tipikus rács átnézetes képét közölni, pl. rétegrácsok, szilikátok. A teljes gömböknek rajzolt atomokkal való ábrázolás nem nagyon áttekinthető.

A VII. fejezet a kémiai reakciók mechanizmusával, a homogén gázreakciókkal, köztük az oly fontos láncreakciókkal, a fotokémiai reakciókkal, a heterogén katalizissel és az oldatokban végbemenő reakciókkal foglalkozik. Kiemelem az atomreakciók és az aktiválás mélyebb megértésére szolgáló újabb elméletek ismertetését.

A második kötet is rendkívül gazdag anyagot nyujt, mely egy kötetben természetesen csak úgy volt tárgyalható, hogy a kellő kiválogatáson kívül az elméletek egyszerűsített alakját adták. Ebben minden igényt nehéz kielégíteni, de azt hisszük, hogy a szerzők eljárása szerencsés volt.

A könyvet részletes név- és tárgymutató, valamint az irodalom felsorolása egészíti ki. Az utóbbi nem tart teljességre igényt, de így is kívánatos lett volna A. SOMMERFELD Atombau und Spektrallinien c. didaktikailag is fontos művét említeni, valamint COURANT—HILBERT a kémikus számára nehezen érthető műve helyett a differenciál és integrálszámítás valamely jó tankönyvét és végül az egyetlen részletesebb kvantumkémia, a HELLMANN-é is említendő lett volna, az «általános munkák» c. alatt felsorolt munkák pedig az elméleti fizika rovatába tartoznak.

Mindent összefoglalva ama nézetünknek adhatunk kifejezést, hogy a magyar fizikai-kémiai irodalom egy értékes művel gyarapodott, mely úgy az oktatásnak is jelentékeny szolgálatot tehet, mint a kémikusok, fizikusok és biológusok számára is használható és jól olvasható segédeszközt nyujt.

Ortvay Rudolf.

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1940. évi XLIV. matematikai tanulóversenyről.

Társulatunk e versenyt 1940. október 19-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 46, Szegeden 1 versenyző jelentkezett. Beadtak Budapesten 28, Szegeden 1 dolgozatot. A visszatért Kolozsvárott a tanév késői megnyitása miatt a versenyt az idén még nem lehetett megtartani.

A verseny tételei a következők voltak:

I. Tegyük fel, hogy bizonyos tárgyak közt van két különböző színű, továbbá van két különböző alakú. Bebizonyítandó, hogy akkor van e tárgyak közt két olyan, melyek színben is, alakban is különböznek.

II. Legyen m és n két különböző pozitív egész szám. Bebizonyítandó, hogy a

$$2^{2^m}+1 \text{ és } 2^{2^n}+1$$

számoknak nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk.

III. Bebizonyítandó, hogy minden háromszög súlyvonalaiból, mint oldalakból, háromszög alkotható. Bebizonyítandó továbbá, hogy, ha egy H_1 háromszög súlyvonalaiból a H_2 háromszög alakítható és ennek súlyvonalaiból a H_3 háromszög, akkor H_1 és H_3 hasonló háromszögek. (Egy háromszög súlyvonalain egy-egy szögpontot a szembenfekvő oldal felezőpontjával összekötő egyenesdarabokat értjük.)

A versenydolgozatokat megbíráló bizottság tagjai voltak: Veress Pál elnöklete alatt Egerváry Jenő, Faragó Andor, Hajós György, Szűcs Adolf és König Dénes előadó. E bizottság 1940. okt. 27-én tartott ülésén az előadó előterjesztése alapján a következő egyhangú javaslatban állapodott meg:

«A legnehezebbnek bizonyult II. feladatot csak két versenyző oldotta meg: Hoffmann Tibor András és Bizám György. Mind a II., mind a III. feladatra adott megoldásaik szépek és szabatosak és határozott matematikai képességekről tesznek tanúbizonyságot, úgyhogy a Bizottság mindkét jutalom kiadását hozza javaslatba, mindamellett, hogy az említett versenyzőknek az I. feladatra adott megoldásaik hiányosak és homályosak. Kettőjük között HOFFMANN-t illeti az elsőség a III. feladat megoldásában mutatkozó ötletesség folytán, valamint azért is, mert az I. feladatot egészen helyesen fogta fel. Ilymódon a bizottság azt javasolja, hogy az első b. Eötvös-jutalom HOFFMANN TIBOR ANDRÁSnak adassék, aki a budapesti XIV. ker. áll. Szt. István gimnáziumban Hegedűs Sándor, Erdős Lajos és Hámori Miksa tanárok tanítványa volt, a második b. Eötvös-jutalom pedig BIZÁM GYÖRGYnek, aki a budapesti V. ker. áll. Bolyai-gimnáziumban Hoffmann Ernő tanár tanítványa volt. Dicséretet érdemel GRÓF PONGRÁCZ RÁFAEL, aki jól megoldotta a III. feladatot és lényegileg megoldotta az I. feladatot is».

A Bizottság e javaslatát a Választmány 1940. nov. 7-én tartott ülésén egyhangúlag elfogadta. Az ugyanezen a napon tartott előadóülésen RADOS GUSZTÁV elnök adta át a díjakat a verseny győzteseinek.

Hoffmann Tibor jutalmazott dolgozata.[1]

II. tétel. A számok egyike sem osztható 2-vel. Nem jelent megszorítást az, hogy $m > n$-et veszünk. Tegyük akkor fel, hogy mindkét szám osztható egy $x > 2$ számmal. Legyen

$$2^{2^m} + 1 = Kx \text{ és } 2^{2^n} + 1 = Lx.$$

Itt nyílván K, L és x egész számok és $K > L$; továbbá legyen $r = m - n$. Ebből a két egyenletből:

$$2^{2^m} = Kx - 1 \text{ és } 2^{2^n} = Lx - 1.$$

Ha a második egyenletet 2^r-edik hatványra emeljük, a baloldalak azonosak lesznek, tehát a jobboldalaknak is azonosaknak kell lenniök. Ugyanis:

$$(2^{2^n})^{2^r} = 2^{2^n \cdot 2^r} = 2^{2^{n+r}} = 2^{2^m}$$

és a jobboldalon így:

$$(Lx - 1)^{2^r} = Kx - 1.$$

Ez utóbbi egyenletben azonban a baloldal:

$$(Lx - 1)^{2^r} \equiv 1 \pmod{x},$$

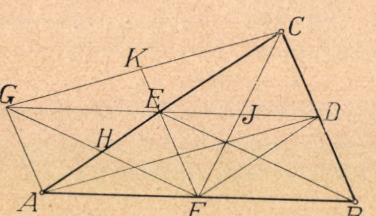
[1] Az I. tételre adott megoldását nem közöljük. *Szerk.*

a jobboldal pedig

$$Kx - 1 \equiv -1 \pmod{x}.$$

Tekintve, hogy $x > 2$, ez ellentmondás. Abból a feltevésből tehát, hogy a két számnak van 1-nél nagyobb közös osztója, helyes következtetésekkel ellentmondásra jutottunk, tehát a két számnak *nincs* közös osztója 1-en kívül. Qu. e. d.

III. tétel. 1°. Legyenek az $ABC \triangle$-ben a súlyvonalak AD, BE és CF. Ismeretes, hogy ekkor $ED \parallel AB$ és $AB = 2ED$. Szerkesszük meg az $ABDG$ parallelogrammát. Ebben E és F a GD, illetve AB oldalak felezőpontja. Így az $AFEG$ és $FBDE$ egybevágó és hasonló helyzetű parallelogrammában a két átló egyenlő: $GF = BE$. Továbbá, mivel $AG \# BD$, $GA \# CD$ is. Így az $ADCG$ *parallelogrammában* $AD \# GC$. Tehát megalkottuk a súlyvonalakkal az $FCG \triangle$-et.



2°. Legyenek most az $FCG \triangle$ súlyvonalai FK, CH és GJ. Ezek közül H a GF és AC metszéspontja, mivel $AFEG$ parallelogramma. Továbbá J az FC és GD metszéspontja, mivel az $FCB \triangle$-ben D felezi a BC oldalt és $DJ \equiv ED \parallel FB$. Így az $FCG \triangle$ súlypontja E, a GD és AC metszéspontja, tehát K az FE és GC metszéspontja lesz. Azonban $EF \parallel BD$, tehát $EK \parallel CD$ és így a $GCD \triangle$-ből $KE = \frac{CD}{2} = \frac{BC}{4}$; továbbá már láttuk, hogy $EF = DB = \frac{BC}{2}$, tehát

$$FK = \frac{3\,BC}{4}.$$

Hasonlóképpen:

$$CH = CE + EH = \frac{AC}{2} + \frac{AE}{2} = \frac{AC}{2} + \frac{AC}{4} = \frac{3\,AC}{4}$$

és végül:

$$GJ = GE + EJ = \frac{AB}{2} + \frac{ED}{2} = \frac{AB}{2} + \frac{AB}{4} = \frac{3\,AB}{4}.$$

Tehát a kapott háromszög oldalai arányosak az eredeti háromszög oldalaival, vagyis a két háromszög hasonló. Qu. e. d.

Bizám György jutalmazott dolgozata.[1]

II. tétel. Tegyük fel, hogy $m > n$ és fejtsük sorba a két megadott szám hányadosát az osztás szabályai szerint:

$$
\begin{array}{l}
(2^{2^m}+1):(2^{2^n}+1)=2^{2^m-2^n}-2^{2^m-2\cdot 2^n}+2^{2^m-3\cdot 2^n} \\
\underline{-2^{2^m}\pm 2^{2^m-2^n}} \\
\quad -2^{2^m-2}+1 \\
\underline{\mp 2^{2^m-2^n}\mp 2^{2^m-2\cdot 2^n}} \\
\qquad 2^{2^m-2\cdot 2^n}+1 \\
\underline{-2^{2^m-2\cdot 2^n}\pm 2^{2^m-3\cdot 2^n}} \\
\quad -2^{2^m-3\cdot 2^n}+1
\end{array}
$$

Az eljárás szerint a k-adik maradék:

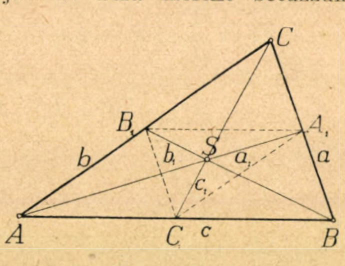
$$r_k = (-1)^k . 2^{2^m-k\cdot 2^n}+1\,;$$

ha pedig $k = 2^{m-n}$, akkor

$$r_{2^{m-n}} = (-1)^{2^{m-n}} . 2^{2^m-2^{m-n}\cdot 2^n}+1 = 1 . 2^\circ + 1 = 2.$$

Tudjuk azonban, hogy az osztandó és az osztó legnagyobb közös osztója ugyanaz, mint az osztóé és a maradéké, e szerint $2^{2^m}+1$ és $2^{2^n}+1$ legnagyobb közös osztója ugyanaz, mint $2^{2^n}+1$ és 2 legnagyobb közös osztója. Azonban $2^{2^n}+1$ páratlan szám, így $2^{2^n}+1$-nek és 2-nek 1-en kívül nincs más közös osztója s ennélfogva nincs az eredeti két számnak sem.

III. tétel. 1°. Ha a háromszög pontjait az ábra szerint betűzzük, az oldalakat a, b, c-vel, a súlyvonalakat megfelelően a_1, b_1, c_1-gyel jelöljük, akkor a háromszögek ismeretes törvénye szerint az AC_1S és BC_1S háromszögekből



$SC_1 > AS - AC_1$ és $SC_1 > C_1B - BS$,

ahonnan összeadással

$$2\,SC_1 > AS - BS - AC_1 + C_1B = AS - BS.$$

Ismeretes azonban, hogy $2\,SC_1 = \frac{2}{3}c_1$, $AS = \frac{2}{3}a_1$ és $BS = \frac{2}{3}b_1$, e szerint

$$\frac{2}{3}c_1 > \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{3}b_1, \text{ vagyis } b_1 + c_1 > a_1.$$

[1] Az I. tételre adott megoldását nem közöljük.

Szerk.

Ugyanígy lehozható a másik két megfelelő összefüggés is:

$$a_1 + c_1 > b_1 \text{ és } a_1 + b_1 > c_1;$$

tehát a súlyvonalak bármelyike kisebb a másik kettő összegénél. Ez azt jelenti, hogy a súlyvonalakból, mint oldalakból háromszög alkotható.

2°. Az előbbi ábrán az AC_1C és BC_1C háromszögekből

$$b^2 = \frac{c^2}{4} + c_1^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} c_1 \cos AC_1C\sphericalangle,$$

$$a^2 = \frac{c^2}{4} + c_1^2 + 2 \cdot \frac{c}{2} c_1 \cos AC_1C\sphericalangle,$$

(t. i. $AC_1C\sphericalangle + BC_1C\sphericalangle = \pi$) ahonnan összeadással

$$a^2 + b^2 = \frac{2c^2}{4} + 2c_1^2$$

és

$$c_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Hasonlóképpen:

$$a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \text{ és } b_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

Ezek a H_1 háromszög súlyvonalai és a H_2 háromszög oldalai. Határozzuk meg most a H_2 háromszög súlyvonalait, azaz a H_3 háromszög oldalait, a_2, b_2 és c_2-t. Az előbbi képletek alkalmazásával:

$$c_2^2 = \frac{1}{4}(2a_1^2 + 2b_1^2 - c_1^2) = \frac{1}{4}\left[2 \cdot \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) + \right.$$

$$\left. + 2 \cdot \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) - \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)\right] = \frac{9}{16}c^2,$$

tehát

$$c_2 = \frac{3}{4}c.$$

Ugyanígy kiszámítható a_2 és b_2 is, úgyhogy végeredményben:

$$a_2 = \frac{3}{4}a, \quad b_2 = \frac{3}{4}b \text{ és } c_2 = \frac{3}{4}c.$$

Minthogy tehát a $H_3\triangle$ mindegyik oldala úgy aránylik a $H_1\triangle$ megfelelő oldalához, mint 3 : 4, azért H_1 és H_3 valóban hasonló háromszögek.

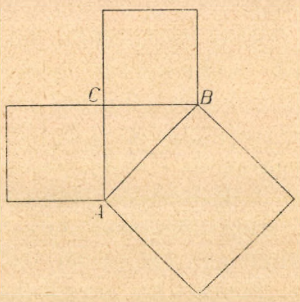
Jelentés az 1940. évi XXII. «Károly Irén» fizikai tanulóversenyről.

Társulatunk idei fizikai tanulóversenyét 1940. október hó 26-án tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 18 versenyző jelentkezett és beadtak 17 dolgozatot. Szegeden az egyetemi beiratkozásoknak a nagy átalakulással kapcsolatos eltolódása miatt versenyző nem jelentkezett.

A verseny tételei a következők voltak:

1. Egyenlőszárú derékszögű háromszög oldalaira négyzeteket rajzolunk. Az így keletkezett idomot egyenlő vastagságú, homogén fémlapból kivágjuk és három függélyes tűvel a háromszög csúcsaiban úgy támasztjuk alá, hogy vízszintes legyen. Mekkora nyomóerő esik egyik-egyik tűre, ha a lap súlya:

$$Q=27 \text{ kg?}$$



2. Egy fal előtt állunk. Köztünk és a fal között fülünk magasságában síp szól, melynek rezgésszáma 600/sec. Milyen sebesen kell mozgatni a sípot a fal felé, hogy másodpercenkint 3 lebegést halljunk? A hang terjedési sebessége 340 m/sec.

A feladatokat kitűző és a dolgozatokat elbíráló bizottság, melynek tagjai Mikola Sándor elnöklete alatt Bay Zoltán, Novobátzky Károly, Ortvay Rudolf, Rybár István, Szabó Gábor és Hoffmann Ernő előadó voltak, a verseny eredményéről a következő jelentést terjesztette a választmány elé:

«Mindenekelőtt meg kell állapítanunk azt az örvendetes tényt, hogy a dolgozatok rendes külalak, áttekinthető forma és világos kifejezésmód tekintetében nagy haladást mutatnak az előző évek dolgozataival szemben, úgyhogy ez a körülmény objektív elbírálásukat lényegesen megkönnyítette.

Tartalmi szempontból meg kell állapítanunk, hogy mindkét feladatot kifogástalanul csak három versenyző oldotta meg: Bizám György, Freud Géza és Hoffmann Tibor; mindhárman kitűnően.

A többi dolgozat sikertelennek minősíthető, mert az első feladattal egyik sem tudott megbirkózni; a második feladatot pedig, melynek lényegét bár legtöbben megértették, mégis rosszul számítják ki. Egyesek a helyes képletet (a mozgó hangforrás képletét) alkalmazva, számítási hiba folytán rossz eredményhez jutnak, mások viszont könnyen kihozzák a jó eredményt, de a mozgó észlelő elvileg helytelenül alkalmazott képletével számolva. Így a Károly Irén-díjak odaítélése, ill. dicséret szempontjából csak az előbb említett három kifogástalan dolgozat szerzője jöhet tekintetbe.

A három érdemes dolgozat között minőségbeli különbséget megállapítani nem lehet. Mindhárom szerző kifogástalanul szabatosan fejezi ki magát. Megoldásaik egyformán rövidek és szellemesek. Munkájuk fizikai tudást, invenciót, matematikai készséget és a numerikus számolásban való gyakorlati jártasságot árul el. Még a külsőségekben keresett esetleges előnyök is egyformán oszlanak meg közöttük. BIZÁM dolgozatának külalakja a legszebb és impuruma is igen figyelemre méltó. FREUD a leggyorsabban készült el hármuk közül (alig két óra alatt). HOFFMANN stílusa viszont a legtömörebb.

Mivel mind a három dolgozat egyaránt az első díjra érdemes, a bizottság tisztelettel azt javasolja a választmánynak, hogy az I. és II. díj egyesítve és a Társulat részéről megfelelően kiegészítve, három egyenlő részre osztassék és a három egyformán érdemes versenyzőnek, mint megosztott első díj, adassék ki.

A díjnyertesek betűrendben:

BIZÁM GYÖRGY, aki a budapesti V. ker. áll. Bolyai gimnáziumban Hoffmann Ernő tanár tanítványa volt,

FREUD GÉZA, aki a budapesti V. ker. áll. Berzsenyi Dániel gimnáziumban Tyma Lajos tanár tanítványa volt,

HOFFMANN TIBOR, aki a budapesti XIV. ker. áll. Szent István gimnáziumban Hegedüs Sándor tanár tanítványa volt».

A választmány a bizottság javaslatához 1940. nov. 7-i ülésében hozzájárult. Az ugyanezen a napon tartott előadóülésen RADOS GUSZTÁV elnök adta át a jutalmakat a verseny győzteseinek.

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1940. évi május 25-én tartott XLV. közgyűlés.

A közgyűlést Rados Gusztáv elnök az alábbi beszéddel nyitotta meg:

Üdvözlöm a megjelent t. tagtársaimat, akik eljöttek, hogy velünk való együttérzésüknek kifejezést adjanak.

Eseményekben gazdag évre tekinthetünk vissza. Örömben és bánatban egyaránt volt részünk.

Lelkes örömmel ünnepelhettük vitéz nagybányai Horthy Miklós, dicsőséges kormányzó urunk Őfőméltósága, országlásának huszadik évfordulóját. Soha el nem múló hálával és hódoló tisztelettel emlékeztünk meg nemzetmentő és hongyarapító tevékenységéről, amellyel tündöklő betűkkel írta be nevét hazánk történetébe. Ő emelte ki a világháborúban elvérzett és gonosz ellenségektől megalázott nemzetünket elesettségéből és visszaadta nekünk azt, ami bennünk a legbecsesebb: nemzeti önérzetünket és a jövőbe vetett reménységünket. Áldja meg Őt mindezekért a magyarok Istene mindkét kezével és engedje meg, hogy Őt még sokáig tisztelhessük országunk élén, hazánk üdvére és javára.

Hódoló sürgönyünket Őfőméltósága a kabinetiroda útján megköszönte.

Őszinte örömmel üdvözöljük e helyen is Kerékjártó Béla kiváló választmányi tagtársunkat, abból az örvendetes alkalomból, hogy a Magyar Tudományos Akadémia a Kornfeld Zsigmond-jutalmat neki ítélte oda. Nagy tehetségének és kutató buzgalmának a topológia alapvető fontosságú új megismeréseket köszön, amelyekkel ő ezt az ezidőszerint az érdeklődés homlokterébe jutott, fontos disciplinát oly számottevő módon gazdagította, hogy vele tengeren innen és tengeren túl is a magyar művelődés hírnevének öregbítéséhez hozzájárult. E sikerei folytán számos egyetem vetekedett abban, hogy őt egy-két félévre vendégelőadónak megnyerje; közülök a párizsi Sorbonne, a princetoni, a göttingai egyetem és mások. Hazai irodalmunk körül nagy érdemet szerzett «A geometria alapjai» című művének megírásával. Ezt a művét magyar nyelven írta meg és benne az euklidesi és nem-euklidesi geometria alapvetésére vonatkozó kérdéseket rendszeresen és kimerítő módon tárgyalja.

Az idén tizedszer ülhette meg a Társulat a KŐNIG GYULA-jutalom átnyujtásának ünnepélyét. Ez alkalommal is kegyeletesen emlékeztünk meg KŐNIG GYULÁról, akiben nemcsak a nagyszámú, maradandó értékű eredményeket megérlelő nagy kutatót, hanem hazánkban az első matematikus-iskolát alapító főiskolai tanárt és Társulatunk egyik megalapítóját tiszteljük. Örömünkre szolgált, hogy az idei Kőnig Gyula-jutalom laureatusa RÉDEI LÁSZLÓ volt, aki nagy tehetséggel, önzetlen tudományszeretettel értékes eredményekkel gazdagította az elvontságánál fogva oly nehezen művelhető számelméletet. A másodfokú algebrai számtestek osztálycsoportjához tartozó invariánsokra vonatkozó vizsgálódásai alapvető jelentőségűek.

Hogy már tízedszer alkalmunk volt a Kőnig Gyula-jutalom odaítélésére, oly tény, mely fényesen tanúskodik a magyar ifjúságnak a matematika művelésére való kiváló rátermettsége mellett.

Hálával emlékezünk meg az idén is arról a számottevő anyagi támogatásról, melyben bennünket a Magyar Tudományos Akadémia és a Vallás- és Közoktatásügyi Minisztérium részesített és ezzel folyóiratunknak megjelenését lehetővé tették.

Volt azonban bánatban is részünk. Mély gyászba borította Társulatunkat TANGL KÁROLY, feledhetetlen elnöktársamnak idő-előtti halála. Mélységesen fájlaljuk e kiváló tudós elhúnytát, akinek nevéhez számos maradandó becsű kutatási eredmény fűződik, fájlaljuk a kitűnő tanárnak az élők sorából való távozását, aki élvezetes előadásaival és eszméltető buzdításával a kiváló kutató fizikusoknak egész sorát nevelte, fájlaljuk e kiváló férfiúnak elhúnytát, aki minden jónak és szépnek támogatója volt; siratjuk az eszményi életfelfogású nemeslelkű barátot. Elbájoló szeretetreméltósága és nemes szívjósága legszebb és legfelemelőbb emlékeink egyike marad.

Választmányunk egyhangú határozata folytán a mai ülésünk keretén belül TANGL KÁROLY emlékét nagy érdemeit méltató és kutatási eredményeit ismertető beszéddel fogjuk ünnepelni.

Beszédem és társulati évünk végéhez értem.

Most pedig egy új társulati év küszöbén újra megfogadjuk, hogy megfeszített erővel azon leszünk, hogy munkánkkal a magyar művelődés színvonalának emeléséhez tevékenyen hozzájáruljunk. Hiszen hadseregünk hősiessége mellett ez a színvonal a legerősebb védelmi vonalunk, mely nemzetünk fennmaradását leginkább biztosítja.

Abban a reményben, hogy e hazafias törekvésünket misem fogja meghiúsítani, nyitom meg Társulatunknak 45-ik közgyűlését.

Az elnöki megnyitó után KŐNIG DÉNES titkár olvasta fel az itt következő titkári jelentést.

«Társulatunk most befejeződő évére az a nagy gyász nyomta rá bélyegét, mely Társulatunkat kiváló alelnökének, TANGL KÁROLYnak halálával érte. Másik alelnökünk, FEJÉR LIPÓT, mint örömmel jelenthetjük, hosszú és súlyos betegségéből felépült és bizonyára hamarosan be fog ismét kapcsolódni Társulatunk munkájába. Alelnökeink távolléte természetesen nagyon bénítólag hatott az idei társulati évre. Hogy ez mégis a szokásos keretek között mozoghatott, azt elsősorban igen tisztelt elnökünknek köszönhetjük, ki korát meghazudtoló frisseséggel és buzgalommal látta el tisztét.

A mait beleszámítva 10 előadóülésünk volt, melyen 11 előadó 7 matematikai és 5 fizikai tárgyú előadást tartott. Örömmel jelenthetjük, hogy még a jelenlegi európai helyzetben sem kellett a külföldi előadókról teljesen lemondanunk: utolsó ülésünkön GEORGES DE RHAM-ot, a lausanne-i és genfi egyetem kiváló matematikus-professzorát üdvözölhettük előadóasztalunknál.

Lapunk 46. évfolyama $11^1/_2$ ívnyi terjedelemben idejében megjelent; az idei évfolyam első száma is már készen van és 7 ívnyi terjedelemben a napokban szétküldésre kerül. Lapunk nyomdai előállítását illetően megemlíthetjük, hogy a kéziszedésről — amennyiben ez technikailag lehetséges — a gépszedésre tértünk át, ami igen súlyos nyomdai költségeink bizonyos csökkentését jelenti és így talán lapunk terjedelmének kis növesztését fogja lehetővé tenni.

Tanulóversenyeinket illetően idén is sikerről számolhatunk be. A matematikai jutalmakat SÁNDOR GYULA és CSÁKI FRIGYES, a fizikaiakat pedig SÁNDOR GYULA és DOLINSZKY TAMÁS kapták.

A X. Kőnig Gyula-jutalmat RÉDEI LÁSZLÓ nyerte el. Köszönetet kell mondanunk LIPKA ISTVÁNnak, aki immár másodszor volt szíves a Kőnig Gyula-jutalomról szóló bizottsági jelentés megírását elvállalni.

Társulatunk egy kiváló érdemű régi tagját, RADOS IGNÁC ny. igazgatót 80. születésnapján a választmány írásban üdvözölte.

Szeretett alelnökünk halála nem az egyedüli gyász, mely Társulatunkat ebben az évben érte. Választmányi tagjaink sorából kidőlt BLÁTHY OTTÓ TITUSZ, a gyakorlati elektrotechnika úttörő munkása, a transzformátorok mestere. Róla és korszakalkotó munkásságáról már lapunk utolsó számában megemlékeztünk. E nekrológért vitéz VEREBÉLY LÁSZLÓ műegyetemi tanárnak adózunk köszönettel. Rendes tagjaink közül elhúnyt SZEKERES KÁLMÁN, aki régebben lapunknak is buzgó munkatársa volt és SCHWARZ ILONA. Halottaink emlékét kegyelettel fogjuk megőrizni».

JELITAI JÓZSEF pénztárosi jelentéséből a zárszámadást és vagyonmérleget alább közöljük. A közgyűlés megadta a felmentvényt a pénztárosnak.

Ezután a megüresedett helyek betöltésére került a sor. Az elhúnyt TANGL KÁROLY helyére fizikus alelnöknek POGÁNY BÉLA, az így megürült ügyvezető titkári helyre pedig ORTVAY RUDOLF választatott meg. A lelépő választmányi tagok: BAUER MIHÁLY, KERÉKJÁRTÓ BÉLA, NAGY L. JÓZSEF, PATAI IMRE és BAY ZOLTÁN újból megválasztattak. Új választmányi tagok lettek: SZABÓ GÁBOR (BLÁTHY helyére) és NOVOBÁTZKY KÁROLY (ORTVAY helyére). A számvizsgáló bizottságba (melynek a választmány részéről FARAGÓ ANDOR és STACHÓ TIBOR lettek tagjai), a közgyűlés maga részéről GOLDZIHER KÁROLYT és RENNER JÁNOST küldte ki.

A közgyűlést követő *Tangl Károly emlékülésen* «Tangl Károly emlékezete» címen ORTVAY RUDOLF tartott előadást.

1939. évi zárszámadás.

Bevétel:

			Pengő
1. Maradvány az 1938. évről:			
	a) kézipénztárban	72·36 P	2212·12
	b) postacsekkszámlán	785·76 «	
	c) a Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban	334·— «	
	d) Károly Irén-alap	1020·— «	
2. Tagdíj			1543·—
3. Előfizetési díj			736·—
4. A Magyar Tudományos Akadémia segélye			1000·—
5. Államsegély			500·—
6. Adomány, kamat			92·16
7. Vegyes			52·90
		Összesen:	6136·18

Kiadás:

	Pengő
1. Nyomda	3804·—
2. Tanulóverseny	140·—
3. Tud. Társ. és Int. Orsz. Szöv. Díjkezelősége	94·87
4. Titkári tiszteletdíj	200·—
5. Külföldi előadó költsége	104·—
6. Vegyes	263·63
Pénztári maradvány	1529·68
Összesen:	6136·18

Vagyon:

	Korona	Pengő
1. Koronaértékpapírok (Magyar Lesz. és Pénzv. Bank letétkimutatása, Pesti Hazai Első Takarékpénztár Egy. takarékkönyve és a M. Kir. Állampénztár fizetési könyve szerint)	29008·—	
2. Pénzkészlet:		
a) kézipénztárban		14·13
b) postatakarékpénztári csekk-számlán		139·55
c) M. Lesz. és Pénzv. Bank-beli folyószámlán		356·—
d) Károly Irén alapítvány		1020·—
3. Tagdíj-hátralék		200·—
4. Nyomtatvány		100·—
Összesen:	29008·—	1829·68

Teher:

	Korona	Pengő
1. Nyomda-tartozás 1940. jan. 31-én		37·42
2. Egyenleg	29008·—	1792·26
Összesen :	29008·—	1829·68

Budapest, 1940. február hó 25-én.

Dr. Jelitai József s. k.
pénztáros.

Megvizsgáltuk és rendben lévőnek találtuk.

Budapest, 1940. május hó 9-én.

Faragó Andor s. k., Dr. Goldziher Károly s. k., Dr. Renner János s. k.
Dr. Stachó Tibor s. k.

Előadások:

1939. nov. 16. A matematikai és fizikai tanulóversenyek eredményeinek kihirdetése. Tarján Imre: Alkali-kolloidok fényelektromos viselkedéséről. Gyulai Zoltán: A Doppler-hatás vízhullámokon. (Előadási kísérlet bemutatással.)

1939. nov. 30. Kerékjártó Béla: A körgeometria megalapozása.

1939. dec. 21. Bozóky László: Az «r»-egység meghatározása.

1940. jan. 25. Jelitai József: A matematika történetére vonatkozó kutatások mai állása.

1940. febr. 8. Singer István: Hyperkomplex számok a spin-elektron elméletében.

1940. márc. 7. Fejes László: Poliéderekre vonatkozó maximumfeladatok.

1940. márc. 28. Kerékjártó Béla: A hiperbolikus síkgeometriáról.

1940. ápr. 11. Lipka István: Jelentés az 1940. évi Kőnig Gyula-jutalomról. Rados Gusztáv elnök átadja a Kőnig Gyula-érmet Rédei Lászlónak. Rédei László: Euklides algoritmusáról.

1940. május 9. Georges de Rham (Genf, Lausanne): Les intégrales harmoniques dans un espace de Riemann et la Topologie.

1940. május 25. Tangl Károly emlékülés. Ortvay Rudolf: Tangl Károly emlékezete.

*

Választmányi ülések voltak: 1939. nov. 16 és dec. 21, 1940. febr. 8 és május 25.

Az 1940. évi XLV. rendes közgyűlés volt: 1940. május 25.

Új tagok:

Bakos Tibor, áll. gimn. tanár, Szeged.
Bite Pál, okl. tanár, Szeged.
Bori István, áll. gimn. tanár, Szenc.
Dózsa Márton, ciszterci áldozópap, egyet. tanársegéd, Budapest.
Falábú Jenő, áll. gimn. tanár, Szeged.
Gausz József, tanárjelölt, Szeged.
Dr. Gombás Pál, egyetemi ny. rk. tanár, Kolozsvár.
Dr. Hárs János, keresk. isk. tanár, Budapest.
Jendrassik György, a Ganz-gyár h. vezérigazgatója, Budapest.
Dr. Megyesi István, áll. gimn. tanár, Budapest.
Pancratz Edith, egyet. hallgató, Szeged.
Dr. Péter Gyula, egyet. tanársegéd, Budapest.
Róth Antal, szerzetes-pap, Szeged.
Stachó Lajos, egyet. hallgató, Szeged.
Szép Jenő, tanárjelölt, Budapest.

Meghaltak:

Bláthy Ottó Titusz, Ganz-gyári igazgató, Budapest (vál. tag).
Schwartz Ilona, tanár, Budapest.
Dr. Szekeres Kálmán, ny. áll. főreálisk. igazgató, Budapest.
Dr. Tangl Károly, egyetemi tanár, Budapest (alelnök).

Kimutatás

az 1940. évi április hó 1-től 1940. évi október hó 31-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíj.

1927-re: **Császár** Elemér (8).

1931-re: **Bischitz** László (4).

1934-re: **Kalmár** László (6), **Szűcs** Adolf (8), **Veress** Pál (8).

1935-re: **Baintner** Géza (4), **Grosschmid** Lajos (4), **Veress** Pál (8), **Walek** Károly (6).

1936-ra: **Czukor** Károly (2), **Görbe** Imre (6), **Grosschmid** Lajos (8), **Kőnig** Teodóra (3), **Radó** Simon (2), **Walek** Károly (6).

1937-re: **Alexits** György (5), **Borhidy** Ferenc (6), **Czukor** Károly (8), **Ferenczy** Zoltán (8), **Girsik** Géza (3), **Grosschmid** Lajos (8), **Lajta** Ernő (4), **Radó** Simon (8), **Suták** József (8), **Szeliánszky** Ferenc (6), **Walek** Károly (6).

1938-ra: **Barnóthy** Jenőné (8), **Borhidy** Ferenc (6), **Bujtás** János (6), **Varvas** Jenő (6), **Egyed** László (4), **Fejes** Zsigmond (4), **Finkey** József (2), **Girsik** Géza (8), **Hancsók** Kálmán (6), **Kronberger** Ede (2), **Patai** László (4), **R**untágné Perényi Gizella (6), **Suták** József (8), **Szeliánszky** Ferenc (6), **Theisz** Edéné (4), **Vince** István (3), **Volenszky** Gyula (1), **Wodetzky** József (8).

1939-re: **Barnóthy** Jenőné (8), **Blau** Ármin (6), **Blau** Györgyné (8), **Borhidy** Ferenc (6), **Boros** János (6), **Bugarszky** István (8), **Cholnoky** Jenő (8), **Csaplár** Konrád (4), **Darkó** Jenő (6), **Dér** Zoltán (6), **Faragó** Andor (8), **Fejes** Zsigmond (1), **Finkey** József (6), **Frank** János (6), **Fraunhoffer** Lajos (8), **Girsik** Géza (5), **Gróh** Gyula (8), **Hancsók** Kálmán (6), **Horvay** Béla (8), **Jáky** József (8), **Kerékjártó** Béla (8), **Kilczer** Gyula (8), **Novobátzky** Károly (8), **Papp** Margit (8), **Riesz** Frigyes (6), **Runtágné** Perényi Gizella (6), **Sebők** Emánuel (6·1), **Sós** Ernő (8), **Steiner** Lajos (4), **Suták** József (8), **Szabó** Miklósné (6), **Szász** Pál (8), **Székely** Károly (6), **Sziklai** Jenő (6), **Tarnóczy** Tamás (6), **Volenszky** Gyula (6), **Zigány** Ferenc (2).

1940-re: **Balyi** Ferenc (6), **Bán** Lajos (6), **Blau** Ármin (6), **Blau** Györgyné (8), **Borhidy** Ferenc (6), **Bugarszky** István (8), **Cholnoky** Jenő (2), **Csaplár** Konrád (6), **Darkó** Jenő (6), **Endrédy** Vendel (6), **Erőd** János (6), **Faragó** Andor (8), **Finkey** József (6), **Frank** János (6), **Goldziher** Károly (8), **Gróh** Gyula (8), **Hajós** György (8), **Halász** Ernő (8), **Hárs** János (8), **Hausbrunner** Vilmos (8), **Holenda** Barnabás (6), **Horvay** Béla (8), **Ispánovits** Alajos (6), **Jáky** József (8), **Kedves** Miklós (6), **Kovács** János (8), **Lassovszky** Károly (8), **Lóky** Béla (6), **Megyesi** István (8), **Neogrády** Sándorné (8), **Novobátzky** Károly (8), **Nyáry** Béla (8), **Renner** János (8), **Riesz** Frigyes (6), **Romsauer** Lajos (8), **Sarkadi** Károly (8), **Sós** Ernő (8), **Surányi** János (6), **Suták** József (8), **Szabó** Miklósné (8), **Sziklai** Jenő (6), **Szőke** Béla (8), **Tarnóczy** Tamás (6), **Tihanyi** Miklós (6), **Varga** Zoltán (6), **Volenszky** Gyula (2), **Vörös** Cyrill (6).

1941-re: **Bauer** Mihály (8), **Endrédy** Vendel (4), **Klug** Lipót (8).

2. Előfizetés.

1933—1940-re: Ganz R. T. (64).

1939-re: Polgári Tanárképző, Szeged (6), Ref. koll. fiz. szertára, Debrecen (6), K. M. Term. tud. Társ. (8).

1940-re: VKM 79 gimnázium részére (632), **Barthalis** József, Újkécske (6), Csillagvizsgáló, Svábhegy (8), Bernardinum (8), Kalazantinum (8), Norbertinum (8), Polgári Tanárképző Szeged (6), K. M. Term. tud. Társ. (8), Zsidó gimn. barátainak egyesülete (8).

3. Segély, adomány.

M. T. Akadémia (1940. II.) 500, Ganz R. T. 1000.

Budapest, 1940. nov. 4. *Jelitai József*, pénztáros.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA. — ÁBRAI V.