MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

NEGYVENHATODIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES és POGÁNY BÉLA

BUDAPEST, 1939

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

negyvenhatodik kötetének tartalma.

Oldal

MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖNIG DÉNES ÉS POGÁNY BÉLA

NEGYVENHATODIK ÉVFOLYAM

1939

JANUÁR—JÚNIUSI FÜZET

BUDAPEST, 1939

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Kőnig Dénes* (**XI., Horthy Miklós-út 28., Lénárt-pensio**), a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* (**XI., Budafoki-út 8.**) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra, valamint minden korrekturára pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és meghivók expedíciójára vonatkozó közlések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak

új pénztárosunk:

Jelitai József címére (Budapest, II., Bimbó-út 5, IV., 2.) intézendők. Postatakarékpénztári csekkszámla száma: 5997.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány,* Budapest, XI., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *B. Pogány,* Budapest, XI., Budafoki-út 8.

TOPOLOGIKUS LEKÉPEZÉSEK ÉS FOLYTONOS CSOPORTOK.[1]

1. A sík topologikus leképezései.

A sík önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezésén olyan előírást értünk, mely a sík minden P pontjának megfeleltet egy a síkban fekvő P' képpontot olyan módon, hogy a sík minden pontja egy és csak egy pontnak a képpontja. A leképezést folytonosnak nevezzük, ha bármely P pont P' képpontjának tetszőleges kis U' környezetéhez meghatározható P-nek olyan U környezete, hogy U bármely pontjának képpontja U'-höz tartozik. A síknak önmagára való kölcsönösen egyértelmű és folytonos leképezését a sík *topologikus leképezésének* nevezzük.

A síknak önmagára való topologikus leképezésénél egy tetszőleges egyszerű zárt görbének a képe egyszerű zárt görbe, s az eredeti görbe valamely körüljárásának a leképezés megfelelteti a képgörbének egyik meghatározott körüljárását. A szerint, hogy ezek a körüljárási irányok, összehasonlítva a sík egy meghatározott irányításával, egymással megegyezők vagy ellenkezők, azt mondjuk, hogy a leképezés megtartja vagy megfordítja a sík irányítását. Könnyen belátható, hogy ez az értelmezés magának a leképezésnek egy tulajdonságát fejezi ki s független az értelmezés alapjául szolgáló görbe megválasztásától.

---

[1] Az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat 1939 június 10-i ülésén tartott előadás.

2. Folyadék-áramlás és a TIETZE-féle deformáció-tétel.

Egy a síkot beborító folyadéknak folytonos áramlásánál két különböző időpontnak megfelelő helyzet a síknak önmagára való topologikus leképezését határozza meg, melyet következőképpen értelmezünk: ha valamely molekula a $t = 0$ időpontban a P helyről indul el és a t időpontban a P' helyre érkezik, akkor a P ponthoz a P' képpontot rendeljük hozzá. A síknak ez a topologikus leképezése megtartja az irányítást. Felmerül az a kérdés, vajjon származtatható-e ilyen módon a síknak minden az irányítást megtartó topologikus leképezése. Erre a kérdésre az igenlő választ TIETZE *deformáció-tétele* adja meg, mely szerint *a síknak bármely önmagára való, az irányítást megtartó topologikus leképezéséhez megadható a sík topologikus leképezéseinek egy t paramétertől folytonosan függő összessége úgy, hogy ahhoz hozzátartozik a megadott leképezés és az azonosság* (vagyis az a leképezés, mely a sík minden pontját önmagának felelteti meg).

3. Stacionárius áramlás és egytagú folytonos csoportok.

A folyadék áramlását stacionáriusnak nevezzük, ha minden P helyhez egy a t időtől független sebességvektor tartozik, vagyis ha a P helyről a $t = 0$ időpontban kiinduló molekula mozgását követi az onnan bármely későbbi t' időpontban kiinduló molekula mozgása, t' fáziskülönbséggel. Jelöljük S_t-vel a síknak azt a leképezését, mely a $t = 0$ időponttól a t időpontig végbemenő áramlás eredménye; az áramlás stacionárius jellegét a következő egyenlet fejezi ki:

$$S_{t'}\big(S_t(P)\big) = S_{t+t'}(P),$$

mely a sík bármely P pontjára s bármely két t és t' paraméterértékre érvényes.

Ha az S_t leképezés a t paraméter minden valós értékénél értelmezve van, s ha fennáll a fenti egyenlet, melyet rövidebben

$$S_t S_{t'} = S_{t+t'}$$

alakban írunk, akkor azt mondjuk, hogy az S_t leképezések egy *egytagú folytonos csoportot* alkotnak, és t a csoport *kanonikus paramétere*. A csoportnak a P ponton áthaladó *pályavonalán* értjük a P pontnak az S_t leképezéseknél származó képpontjaiból álló ponthalmazt. Ha a sík valamely pontja a csoport minden leképezésénél önmagának felel meg, akkor ezt a pontot a *csoport fixpontjának* nevezzük. A csoport pályavonalainak a a stacionárius áramlásnál a molekulák pályái, a csoport fixpontjainak pedig az áramlás örvénylési és forráspontjai felelnek meg.

4. Egytagú folytonos csoport pályavonalairól.

Ha valamely P pont a csoportnak bármely a 0-tól különböző t értéknek megfelelő S_t leképezésénél sem megy át önmagába, akkor a P ponton áthaladó pályavonal egy *folytonos nyílt vonal*, azaz a végtelen egyenesnek topologikus képe; a csoport ezen a görbén az egyenes önmagában való eltolásainak csoportjával aequivalens.

Ha P a csoportnak valamely $t > 0$ paraméterértéknek megfelelő S_t leképezésénél önmagába megy át, a nélkül azonban, hogy a csoport minden leképezésénél önmagába menne át, akkor a P ponton áthaladó pályavonal *egyszerű zárt görbe*, s ezen a csoport egy körvonal önmagában való forgásainak a csoportjával aequivalens. Egy zárt pályavonal belsejében van a csoportnak legalább egy fixpontja.

A pályavonalak által alkotott görbeseregnek *szinguláris pontjai* a csoport fixpontjai és csakis ezek; tegyük fel, hogy ezeknek a száma véges. Minden más pont környezetében a görbesereg *reguláris* abban az értelemben, hogy az illető pont egy kis környezetének egy másik siktartományra való alkalmasan meghatározott leképezésével az illető környezetben fekvő pályaiveket párhuzamos egyenesdarabokba vihetjük át.

A szinguláris pontok indexét POINCARÉ szerint a következő módon értelmezzük. Ha a sereg görbéinek van folytonosan változó érintőjük, akkor tekintsük az érintő irányának változását, míg az érintési pont a szinguláris pont körül egy egyszerű zárt görbét pozitív irányban leír; ez a változás egyenlő $2\pi\varrho$-val; ϱ a szinguláris pont indexe. Ez az értelmezés könnyen kiterjeszthető arra az esetre is, ha a görbéknek nincs érintőjük. Egy szinguláris pont indexe általában egész szám, vagy egész számnak a fele; azonban egy *egytagú folytonos csoport pályavonalainak seregében minden szinguláris pont indexe egész szám.*

A fenti tulajdonságok jellemzik a sík egytagú folytonos csoportjainak pályavonalaiból álló görbeseregeket, vagyis egy tetszőleges stacionárius folyadékáramlás pályavonalainak a seregét. *Ha megadunk a síkban egy olyan görbesereget, mely véges sok ponttól eltekintve kicsinyben reguláris, s ha a szinguláris pontok indexei egész számok, akkor megadható a sík önmagára való topologikus leképezéseinek olyan egytagú folytonos csoportja, amelynek pályavonalai a megadott seregnek a görbéi.*

Hamburger bebizonyította a következő tételt: *Ha egy a síkot betöltő görbeseregnek nincs szinguláris pontja, akkor a seregnek minden görbéje egyszerű nyílt vonal,* vagyis az egyenesnek olyan topologikus képe, hogy az egyenesen egyik vagy másik irányban végtelenhez tartó pontnak a képe ugyancsak végtelenhez tart.

5. Egytagú folytonos csoport leképezései.

A sík topologikus leképezéseinek valamely G összességéről akkor mondjuk, hogy *csoportot* alkot, ha G-hez tartozik az azonos leképezés, továbbá minden a G-hez tartozó S leképezésnek az inverze S^{-1} (melyre $S.S^{-1}$ az azonosság), végül bármely két a G-hez tartozó S és S' leképezés SS' szorzata. A csoportot *n-tagú folytonos csoportnak* nevezzük, ha a hozzátartozó leképezéseket n valós paraméterrel kicsinyben kölcsönösen egyértelmű és folytonos módon kifejezhetjük.

Egytagú folytonos csoportban mindig be lehet vezetni egy t kanonikus paramétert, melyre vonatkozóan a t és t' paraméterértékekhez tartozó leképezések szorzata a $t + t'$ paraméterértékhez tartozó leképezés. Ennek az állításnak igazolása céljából megmutatjuk előbb, hogy *egy egytagú folytonos csoportban mindegyik leképezésnek van négyzetgyöke,* vagyis a csoport S leképezéséhez tartozik a csoportnak olyan leképezése, melynek négyzete S-sel megegyezik. Jelöljük ugyanis λ-val a csoportnak egy tetszőleges paraméterét; az azonosság feleljen meg a $\lambda = 0$ értéknek. Legyen $\lambda_1 (> 0)$ a paraméternek egy fix értéke; minden λ-hoz rendeljük hozzá azt a λ' értéket, melyre $S_\lambda S_{\lambda_1} = S_{\lambda'}$; ilyen módon a λ paraméterek halmazának egy önmagára való topologikus leképezését értelmeztük. A különböző λ_1 értékeknek ilyen módon megfelelő leképezések maguk is egy egytagú folytonos csoportot alkotnak; ezért a $\lambda \to \lambda'$ leképezés megtartja a λ egyenesen az irányítást. Ha λ_2-vel jelöljük a λ_1-nek ennél a leképezésnél megfelelő értéket, fennáll tehát a $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ vonatkozás. Jelöljük minden λ értéknél $\varphi(\lambda)$-val azt az értéket, melyre $S_\lambda^2 = S_{\varphi(\lambda)}$. Míg λ folytonosan változik 0-tól λ_1-ig, $\varphi(\lambda)$ folytonosan változik 0-tól λ_2-ig; van tehát egy olyan λ^* érték, melynél $\varphi(\lambda^*) = \lambda_1$; az értelmezés szerint tehát $S_{\lambda^*}^2 = S_{\lambda_1}$, vagyis S_{λ^*} az adott S_{λ_1} leképezésnek a négyzetgyöke. Rendeljük hozzá az azonossághoz a $t = 0$, S_{λ_1}-hez a $t = 1$, S_{λ^*}-hoz a $t = \frac{1}{2}$, az S_{λ^*} négyzetgyökéhez a $t = \frac{1}{4}$ paraméterértéket, és így tovább. Az ismételt négyzetgyökvonással származó leképezések bármely szorzatához rendeljük hozzá az illető tényezőkhöz tartozó t paraméterértékek összegét. Végül egészítsük ki folytonosság alapján ezt a paraméter meghatározást a csoport összes elemeire; ilyen módon meghatároztunk a csoportban egy kanonikus paramétert.

6. A sík egy-fixpontú leképezése négyzetgyök nélkül.

Jelentsenek $(r, \varphi)(-\pi \leq \varphi \leq +\pi)$ polárkoordinátákat a síkban. Az (r, φ) pont képének (r', φ') polárkoordinátáit a következő formulákkal értelmezzük:

$$(S)\quad r' = r^2, \begin{cases} \varphi' = \pi\left[\dfrac{\varphi}{\pi}+1\right]^2, & \text{ha } -\pi \leqq \varphi \leqq 0, \\ \varphi' = \pi\left[\left(\dfrac{\varphi}{\pi}\right)^2-1\right], & \text{ha } 0 \leqq \varphi \leqq \pi. \end{cases}$$

Az S leképezésnek az $A(r=0)$ pont az egyedüli fixpontja; S^2-nek ezenkívül fixpontjai a $B(r=1, \varphi=0)$ és a $C(r=1, \varphi=\pi)$ pontok.

Tegyük fel, hogy T a síknak olyan topologikus leképezése, melynek négyzete megegyezik S-sel: $T^2 = S$. Jelöljük rendre A', B', C'-vel az A, B, C pontnak a T leképezésnél származó képét. Fennállanak akkor a következő vonatkozások:

$$\begin{array}{lll} A' = T(A), & B' = T(B), & C' = T(C) \\ T(A') = S(A) = A, & T(B') = S(B) = C, & T(C') = S(C) = B; \\ S(A') = T(A) = A', & S(B') = T(C) = C', & S(C') = T(B) = B'; \\ & S^2(B') = B', & S^2(C') = C'. \end{array}$$

E szerint A' mint az S leképezés fixpontja, azonos A-val. B' és C' pedig mint az S^2 leképezés további két fixpontja azonos a B és C pontokkal, sorrendtől eltekintve. Ha azonban $T(B) = B$ és $T(C) = C$, vagy ha $T(B) = C$ és $T(C) = B$ akkor mindkét esetben $S(B) = B$ és $S(C) = C$, s ez ellentmondás.

A fenti S leképezésnek tehát nincs négyzetgyöke, s ezért nincs a sík leképezéseinek olyan egytagú folytonos csoportja sem, mely tartalmazza az S leképezést.

7. Fixpont nélküli leképezések. Brouwer translatió-tétele.

Legyen S a síknak önmagára való, az irányítást megtartó topologikus leképezése, melynek nincs fixpontja. Brouwer *translatió-tétele* szerint megadható a sík bármely P pontjához egy a P pontot tartalmazó *translatió-mező*, vagyis egy olyan tartomány, melyet egy egyszerű nyílt vonal a, s ennek a leképezésnél származó képe: a $b = S(a)$ nyílt vonal határol, s amely tartománynak nincs a leképezésnél származó képével közös pontja; a translatió-mező képe tehát egy olyan tartomány, mely a b vonalnak másik oldalán fekszik. A translációmezőnek (melyhez hozzászámítjuk az a vonal pontjait is) az S leképezés $S^n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ hatványainál származó képei együtt egy síktartományt töltenek ki, mely azonban nem szükségképpen azonos az egész síkkal; így a síknak önmagára való, az irányítást megtartó és fixpont nélküli leképezése nem szükségképpen aequivalens a síknak egy eltolásával.

Tekintsük például a síknak a következő formulákkal értelmezett leképezését (x, y derékszögű koordináták):

$$(\tau) \quad \begin{cases} x' = x + 1, & y' = y, \quad \text{ha } y < 0; \\ x' = x + 1 - 2y, & y' = y^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ha } 0 \leqq y \leqq 1; \\ x' = x - 1, & y' = y, \quad \text{ha } y > 1. \end{cases}$$

Ez a leképezés megtartja a sík irányítását s a leképezésnek nincs fixpontja. Mivel bármely olyan vonalnak, mely az $y = 0$ és az $y = 1$ egyenes egy-egy pontját összeköti, van képével közös pontja (hiszen ezeken az egyeneseken a pontok ellenkező irányban mozdulnak el), tehát nincs olyan translációmező, mely ennek a két egyenesnek egy-egy pontját tartalmazza. Ebből könnyen következik, hogy egy tetszőleges translációmező ismételt képeiből alkotott tartomány nem lehet azonos az egész síkkal, s ezért a leképezés nem aequivalens a sík eltolásával.

8. A sík eltolásainak topologikus jellemzése.

A síknak egy gömbfelületre való stereografikus vetítésével bevezetünk a síkon egy korlátos távolságmérést; bármely két ponthoz hozzárendeljük az ezeknek a gömbön megfelelő pontok gömbi távolságát s ezt nevezzük a két megadott pont gömbi távolságának.

Legyen S a síknak önmagára való topologikus leképezése. Az S leképezést a P pontban *regulárisnak* nevezzük, ha S összes (pozitív és negatív) hatványai a P pontban egyenletesen folytonosak a korlátos távolságmérésre vonatkozóan; vagyis, ha tetszőleges pozitív ε számhoz megadható egy olyan (az n-től független) pozitív δ szám, hogy ha valamely Q pontnak P-től való távolsága δ-nál kisebb, akkor az $S^n(Q)$ és az $S^n(P)$ pontok gömbi távolsága ε-nál kisebb, minden n egész kitevőre. Olyan pontokat, melyekre ez a feltétel nem teljesül, a leképezés *szinguláris* pontjainak nevezünk.

Annak, hogy a sík önmagára való megmaradó irányítású és fixpont nélküli topologikus leképezése a síknak egy eltolásával aequivalens legyen, szükséges és elégséges feltétele az, hogy a leképezés a sík minden pontjában reguláris legyen. Ebben az esetben megadható tehát a síknak önmagára való topologikus T leképezése úgy, hogy az adott S leképezésnek T-vel való transzformáltja, vagyis a $T^{-1}ST$ leképezés a síknak egy eltolása legyen. Másszóval: megadható ekkor a síkban egy olyan (x, y) koordinátarendszer, melyben a megadott S leképezést az $x' = x + 1$, $y' = y$ formulák fejezik ki.

Az előző szakaszban értelmezett τ leképezésnek szinguláris pontjai az $y = 0$ és az $y = 1$ egyenes összes pontjai.

9. Fixpont nélküli egytagú csoportok.

Ha a sík valamely egytagú folytonos csoportjában egyik leképezésnek nincs fixpontja, akkor a csoport bármely az azonosságtól különböző leképezésének sincs fixpontja. HAMBURGERnek a 4. szakaszban idézett tételéből következik e szerint, hogy a csoport összes pályavonalai egyszerű nyilt vonalak.

A szinguláris pontok értelmezéséből (8) következik, hogy ha a P pont a csoport valamely S leképezésénél szinguláris, akkor a P pontnak a csoport összes leképezéseinél származó képei is szinguláris pontjai S-nek. Ezért a csoport bármely pályavonalának vagy összes pontjai regulárisak, vagy összes pontjai szingulárisak a csoportnak bármely az azonosságtól különböző leképezésénél. Mivel a csoport bármely két pályavonalának nincs közös pontja, tehát a csoport bármely leképezésének szinguláris pontjai páronkint közös pont nélküli egyszerű nyilt vonalakat alkotnak. Ezt az eredményt a következő tételben mondjuk ki:

Ha a fixpont nélküli S leképezés a sík önmagára való topologikus leképezéseinek egy egytagú folytonos csoportjához tartozik, akkor S szinguláris pontjai egyszerű nyílt vonalakat alkotnak, melyek közül bármely kettőnek nincs közös pontja.

10. Fixpont nélküli leképezés, melynek nincs négyzetgyöke.

Jelöljük τ-val az (x, y) síknak $0 \leqq y \leqq 1$ sávjában a következő formulákkal értelmezett leképezést (*l.* 7):

$$(\tau)\quad x' = x + 1 - 2y,\ y' = y^{\frac{1}{2}}.$$

Ennek segítségével értelmezzük a síknak önmagára való S leképezését a következő formulákkal:

1. az $y = 1$ és az $y = \frac{1}{2}\sin^2\pi x$ vonalak által határolt tartományban legyen $s = \sigma^{-1}\tau\sigma$, hol σ jelenti a $0 \leqq y \leqq 1$ sávnak erre a tartományra való következő leképezését:

$$(\sigma)\quad x' = x,\ y' = 1 + \frac{1}{2}(y - 1)(1 + \cos^2\pi x);$$

2. az $y = 0$ és az $y = \frac{1}{2}\sin^2\pi x$ vonalak által határolt korlátos tartományokban legyen $S : x' = x + 1,\ y' = y$;

3. az $y > 1$ félsíkban legyen $S : x' = x - 1,\ y' = y$;

4. az $y < 0$ félsíkra terjesszük ki a leképezést az $y = 0$ egyenesre szimmetrikusan.

Az S leképezésnek nincs fixpontja; S megtartja a sík irányítását. Az S leképezés szinguláris pontjai az $y = \pm 1$ és az $y = \pm\frac{1}{2}\sin^2\pi x$ vonalak összes pontjai és csakis ezek. Ez négy egyszerű nyílt vonal; de az $y = +\frac{1}{2}\sin^2\pi x$ és az $y = -\frac{1}{2}\sin^2\pi x$ vonalaknak vannak közös pontjai, s ezért nem teljesülnek az előbbi szakasz végén kimondott tétel feltételei. E szerint *az S leképezés nem tartozhatik valamely egytagú folytonos csoporthoz.*

Az S leképezésnek nincs négyzetgyöke. Tegyük fel ugyanis, hogy T a síknak olyan topologikus leképezése volna, melyre

$T^2 = S$. Ennek a leképezésnek szinguláris pontjai megegyeznek S szinguláris pontjaival, mint könnyen beláthatjuk, s így a T leképezésnél az $y = \pm \frac{1}{2} \sin^2 \pi x$ vonalpár önmagába megy át. Ennek a két vonalnak közös pontjai: $y = 0$, $x = 0$, ± 1, $\pm 2, \ldots$ egymásba mennek át; jelöljük az $(x, y) = (n, 0)$ pont képét $(T(n), 0)$-val; $T(n)$ minden egész n-re egész szám. Az $y = \pm \frac{1}{2} \sin^2 \pi x$, $n \leqq x \leqq n + 1$ ivek által határolt tartományt a T leképezés az $y = \pm \frac{1}{2} \sin^2 \pi x$, $k \leqq x \leqq k + 1$ ivek által határolt tartományba viszi át, hol $k = T(n)$ és $k + 1 = T(n + 1)$, vagy $k = T(n + 1)$ és $k + 1 = T(n)$. A $T(n + 1) - T(n) = \pm 1$ különbség előjele n minden értékére ugyanaz.

Ha $T(n + 1) = T(n) + 1$, akkor $T(n) = T(0) + n$, tehát $S(0) = T(T(0)) = 2.T(0)$; de mert $S(0) = 1$ és $T(0)$ egész szám, ez ellentmondás. Ha pedig $T(n + 1) = T(n) - 1$, akkor $T(n) = T(0) - n$, s ebből $S(0) = T(T(0)) = 0$; de mert $S(0) = 1$, ez is ellentmondás. E szerint az S leképezésnek nincs négyzetgyöke.

11. A sík egyszeresen tranzitiv folytonos csoportjai.

Legyen G a sík önmagára való topologikus leképezéseinek egyszeresen tranzitiv csoportja; ha A és B a sík két tetszőleges pontja, van tehát a csoportnak egy és csak egy olyan leképezése, mely A-t B-be viszi át. Ha a sík valamely I pontjának az azonos leképezést feleltetjük meg, akkor a sík minden S pontjának megfelel a G csoport egy és csak egy olyan leképezése, mely az I pontot az S pontba viszi át; ezt a leképezést is S-sel, s az azonosságot I-vel jelöljük. A csoport minden leképezése megtartja a sík irányitását; a csoport egyik leképezésének sincs fixpontja, kivéve az azonosságot.

Be fogjuk bizonyitani, hogy *a G csoport mindegyik leképezésének van a csoportban négyzetgyöke.* Tekintsük a síknak azt a leképezését, mely a sík változó X pontját az X^{-1} pontba viszi át; ez a leképezés, melyet inverziónak nevezünk, a síknak önmagára való topologikus és involutorius leképezése. Az inverziónak nyilván fixpontja I; de ezenkívül nincs más fixpontja. Ha ugyanis valamely X pont az inverziónál önmagának felelne meg, vagyis ha $X = X^{-1}$, akkor $X^2 = I$; viszont a BROUWER-féle transláció-tételből következik, hogy a sík irányítását megtartó, fixpont nélküli X topologikus leképezés négyzetének nincs fixpontja, s ezért X^2 nem lehet az azonosság.

A síknak minden önmagára való involutorius leképezése vagy a síknak egy félforgásával, vagy egy egyenesen való tükrözésével aequivalens; az első esetben a leképezésnek csak egy fixpontja van s a leképezés megtartja az irányítást; a második esetben egy egyszerű nyílt vonal összes pontjai fixpontok s a leképezés megfordítja az irányítást. Mivel az inverziónak csak egy fixpontja van, következik ebből, hogy *az inverzió megtartja a sík irányítását.*

Az inverziót szorozzuk meg a csoport S leképezésével; az így nyert $X \rightarrow X^{-1}S$ leképezés ugyancsak megtartja a sík irányítását s felcseréli egymással az I és S pontokat. A leképezés négyzetének tehát van két fixpontja I és S; a fent már alkalmazott segédtétel szerint következik ebből, hogy az $X \rightarrow X^{-1}S$ leképezésnek is van egy T fixpontja, tehát van egy olyan T pont, melyre $T = T^{-1}S$; ebből következik: $T^2 = S$, tehát T az S leképezésnek a négyzetgyöke.

A sík egyszeresen tranzitiv csoportjainak jellemzésére vonatkozó további eljárásom lényege az, hogy egy S leképezésből ismételt négyzetgyökvonással származó $S^{1/2^k}$ leképezéseket szorzom egymással s az így nyert halmazt kiegészítem sűrűsödő helyeivel; megmutatom, hogy ez az eljárás egy egyszerű nyílt vonalhoz vezet vagyis egy *a G csoportban foglalt egytagú folytonos alcsoport*hoz, melynek eleme a megadott S leképezés. A G-ben foglalt egytagú alcsoportok között van egy a G-ben invariáns alcsoport s ennek segítségével a G csoport összes leképezései a következő alakban állíthatók elő:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \text{ ha } G \text{ kommutatív;}$$
$$x' = e^b x + a, \quad y' = y + b, \text{ ha } G \text{ nem kommutatív.}$$

Ezzel meghatároztuk a sík egyszeresen tranzitív folytonos csoportjait s lényegében az összes kéttagú folytonos csoportok szerkezetét.

*

Az előadásomban ismertetett tárgykörre vonatkozó irodalom részletes jegyzéke megtalálható «Sur la structure des transformations topologiques des surfaces en elles-mêmes» c. dolgozatom végén [Enseignement Mathématique, 35., 307—308. o.].

Kerékjártó Béla.

TRANSFORMATIONS TOPOLOGIQUES ET GROUPES CONTINUS.

Dans une conférence, faite le 10 juin 1939 à la Société Baron Roland Eötvös de Mathématiques et de Physique, l'auteur a exposé quelques propriétés caractéristiques des transformations topologiques du plan appartenant à un groupe continu.

B. de Kerékjártó.

A TORZIÓ FOGALMA METRIKUS TEREKBEN.

Bevezetés.

A differenciál-geometria alapgondolata abban áll, hogy a geometriai alakzatok pontjainak koordinátáit paraméter-függvényekkel állítjuk elő és ezek differenciális tulajdonságaival jellemezzük a paraméteresen előállított alakzat lokális geometriai tulajdonságait. Ilyen módon tehát *függvénytani* tulajdonságokkal fejezzük ki az alakzatok *geometriai* tulajdonságait. Eltekintve a differenciálhatósági feltételekből származó megkötöttségtől, azt is joggal kifogásolhatjuk ennél az eljárásnál, hogy így voltaképp nem is magának a geometriai alakzatnak a tulajdonságait vizsgáljuk, hanem a paraméteres előállításéit. Bizonyos mértékig természetesen ízlés dolga, hogy magát a ponthalmazt nevezzük-e geometriai alakzatnak, vagy pedig a ponthalmazt és annak paraméteres előállítását együttesen. Semmi esetre sem tagadható azonban, hogy a geometriai intuíció eredeti, szemléletes tárgya csak a ponthalmaz, függetlenül annak előállítási módjától. De még ha bele is vesszük az analitikus előállítás fogalmát a definícióba, akkor is lehetnek a ponthalmaznak olyan analitikusan kifejezett tulajdonságai, amelyek lényegükben függetlenek az analitikus előállítástól. Az ilyen tulajdonságok analitikus kifejezése gyakorlati szempontból esetleg előnyös lehet ugyan, elvi szempontból azonban feltétlenül ki kell vizsgálni ezeknek a tulajdonságoknak az előállítási módtól független geometriai tartalmát is.

Ilyen, vagy ehhez hasonló meggondolások vezették MENGER-t,[1] amikor azt a követelményt állította fel, hogy a ponthalmazok

[1] K. MENGER, Math. Ann. **103** (1930), 466—501. l., továbbá Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **4** (1935), 1—13. l.

lokális tulajdonságait olyan módszerrel is vizsgáljuk meg, amely ezeket a tulajdonságokat kizárólag a halmaz pontjai közti távolságok segítségével jellemzi. Ennek az elgondolásnak horderejét akkor tekinthetjük át teljes egészében, ha figyelembe vesszük, hogy a távolság fogalma független az euklidesi tértől vagy a koordinátákkal való jellemzéstől és igen általános absztrakt terekben is definiálható. MENGER elgondolása szerint ezeket az ú. n. metrikus tereket a differenciál-geometriához hasonló módszerekkel vizsgálhatjuk, ha az alapfogalmakat differenciálható paraméter-függvények helyett a távolság függvényeinek segítségével definiáljuk. Ebben a geometriában természetesen a klasszikus problémák mint speciális esetek szerepelnek, amelyekből azonban felismerhetjük az általános eset és az euklidesi eset közti különbség lényegét is. Úgy látszik, az ilyen természetű vizsgálatoktól hasonló eredményeket lehet várnunk, mint amilyenek a reális függvénytanban a halmazelméleti módszer alkalmazásából születtek meg. Ehhez a távolabbi célhoz azonban először is a differenciál-geometria elemi fogalmainak metrikus átfogalmazására van szükségünk. Maga MENGER csak az ívgörbülettel foglalkozott;[2] a felület gaussi görbületének igen nehéz problémáját már WALD[3] oldotta meg. A következőkben ezekhez a kutatásokhoz kapcsolódva a torzió fogalmát fogjuk vizsgálat tárgyává tenni. Ezzel egy MENGER által már több ízben felvetett problémát sikerül elintéznünk, t. i. a torzió fogalmának beillesztését a MENGER-féle metrikus geometriába.

I. Paraméter-görbék torziója.

1. §. A torzió, mint a távolság függvénye.

Legyen C a három-dimenziós euklidesi térben a

$$p = p(s)$$

[2] K. MENGER, Math. Ann. **103** (1930), 480—491. l.

[3] A. WALD, Ergebn. eines Math. Koll. Wien **6** (1935), 29—39. l. és Ergebn. Math. Koll. Wien **7** (1936), 24—46. l.

vektoriális kifejezéssel definiált paraméter-görbe, ahol s a C görbe ívhosszúságát jelenti, $\mathbf{p}(s)$ pedig azt a vektort, amelynek komponensei a p pont x, y, z koordinátái. Jelöljük $t(p)$-vel a C görbe p pontjában klasszikus differenciál-geometriai módon értelmezett torziót, $\varrho(p)$-vel pedig p pontbeli simuló körének sugarát. Legyen továbbá p_1, p_2, p_3, p_4 a görbe négy pontja, $\overline{p_ip_j}$ a p_i, p_j pontok közti távolság és végül $V(p_1, p_2, p_3, p_4)$ a p_1, p_2, p_3, p_4 pontok alkotta tetraéder térfogata. Már DARBOUX[4] kimutatta, hogy ha $\mathbf{p}(s)$ háromszor folytonosan differenciálható függvénye az s paraméternek, akkor[5]

$$|t(p)| = 72 \lim_{p_i \to p} \frac{[\varrho(p)]^2 \cdot V(p_1, p_2, p_3, p_4)}{\overline{p_1p_2}\cdot\overline{p_1p_3}\cdot\overline{p_1p_4}\cdot\overline{p_2p_3}\cdot\overline{p_2p_4}\cdot\overline{p_3p_4}}, \quad (i=1, 2, 3, 4). \quad (1)$$

EGERVÁRY úr szóbeli közlése alapján ezt az irodalomban — úgy látszik — némileg elkallódott kifejezést a következő módon alakíthatjuk át: legyen $V(p_i, p_j, p_k)$ a p_i, p_j, p_k pontok alkotta háromszög területe, akkor a következő identitást írhatjuk fel:

$$\frac{[V(p_1, p_2, p_3, p_4)]^2}{V(p_1, p_2, p_3)\cdot V(p_2, p_3, p_4)\cdot V(p_3, p_4, p_1)\cdot V(p_4, p_1, p_2)} =$$

$$= \frac{\left[\dfrac{V(p_1, p_2, p_3, p_4)}{\overline{p_1p_2}\cdot\overline{p_1p_3}\cdot\overline{p_1p_4}\cdot\overline{p_2p_3}\cdot\overline{p_2p_4}\cdot\overline{p_3p_4}}\right]^2}{\dfrac{V(p_1, p_2, p_3)}{\overline{p_1p_2}\cdot\overline{p_2p_3}\cdot\overline{p_3p_1}}\cdot\dfrac{V(p_2, p_3, p_4)}{\overline{p_2p_3}\cdot\overline{p_3p_4}\cdot\overline{p_4p_2}}\cdot\dfrac{V(p_3, p_4, p_1)}{\overline{p_3p_4}\cdot\overline{p_4p_1}\cdot\overline{p_1p_3}}\cdot\dfrac{V(p_4, p_1, p_2)}{\overline{p_4p_1}\cdot\overline{p_1p_2}\cdot\overline{p_2p_4}}}$$

De $\varrho(p_i, p_j, p_k)$-val jelölve a p_i, p_j, p_k pontokon átmenő kör sugarát,

$$\frac{4V(p_i, p_j, p_k)}{\overline{p_ip_j}\cdot\overline{p_jp_k}\cdot\overline{p_kp_i}} = \frac{1}{\varrho(p_i, p_j, p_k)}.$$

---

[4] G. DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces. IV. kötet (Paris, 1896), 426. l.

[5] Ha a tetraéder térfogatát megfelelően irányítjuk, akkor a torzió abszolút értéke helyett a torzió előjellel ellátott értékét nyerjük. Mivel azonban vizsgálataink célja a torzió definíciója metrikus terekben, ahol természetesen a torzió előjelének semmilyen geometriai értelme sincs, célszerűbbnek látszott már itt az előkészítő euklidesi vizsgálatoknál is csak a torzió abszolút értékét tekinteni, mint ami számunkra egyedül irányadó.

Vagyis a

$$\tau_d(p) = \frac{9}{2} \lim_{p_i \to p} \frac{V(p_1, p_2, p_3, p_4)}{\sqrt{V(p_1, p_2, p_3) \cdot V(p_2, p_3, p_4) \cdot V(p_3, p_4, p_1) \cdot V(p_4, p_1, p_2)}}$$

relációban a limes jel alatti kifejezés pontosan megfelel az (1) reláció limes jel alatti kifejezésének. Ebből pedig háromszor folytonosan differenciálható görbék esetében

$$\tau_d(p) = | t(p) |$$

következik. Figyelemre méltó, hogy $\tau_d(p)$ olyan csak a görbe pontjainak egymástól való távolságaitól függő szimmetrikus kifejezés, amely alkalmas a torzió definíciójára, ezért $\tau_d(p)$-t a görbe DARBOUX-EGERVÁRY-*féle torziójának* lehetne nevezni. A $\tau_d(p)$ torzió értékes tulajdonsága, hogy $\tau_d(p)$ az ívgörbület ismert MENGER-féle

$$\frac{1}{\varrho(p)} = 4 \lim_{p_i \to p} \frac{V(p_1, p_2, p_3)}{\overline{p_1 p_2} \cdot \overline{p_2 p_3} \cdot \overline{p_3 p_1}} \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (2)$$

alakú kifejezésének háromdimenziós formális analogonja.

Ezen a kifejezésen kívül azonban még másképp is előállíthatjuk metrikus alakban a torziót. A következő módszer különösen alkalmasnak látszik a torzióval kapcsolatos metrikus vizsgálatokra. Képezzük a C görbe minden olyan p, q, r_1, r_2 pontquadruplumára a

$$\tau(p, q\,;\, r_1, r_2) = \frac{9}{2} \cdot \frac{\overline{r_1 r_2}}{\overline{pq}} \cdot \frac{V(p, q, r_1, r_2)}{V(p, r_1, r_2) \cdot V(q, r_1, r_2)} \qquad (3)$$

kifejezést, amelyekre ez a kifejezés egyáltalán értelmezhető. Ennek szükséges és elégséges feltétele nyilván az, hogy sem p, r_1, r_2, sem q, r_1, r_2 ne feküdjenek egy egyenesen. Legyen ezekután

$$\tau(p) = \lim_{q \to p} \left(\lim_{r_1, r_2 \to p} \tau(p, q\,;\, r_1, r_2) \right). \qquad (4)$$

A $\tau(p)$ számot a C görbe p pontbeli *metrikus torziójának*) nevezzük.

Ha nem akarunk kettős határátmenetet végezni, akkor a C görbe négy különböző p_1, p_2, p_3, p_4 pontjából kiindulva a

$$\tau_u(p) = \lim_{p_i \to p} \tau(p_1, p_4\,;\, p_2, p_3), \quad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (5$$

kifejezést használhatjuk fel a torzió definíciójára, ahol a p_1, p_2, p_3, p_4 pontokat úgy számoztuk, hogy az indexek növekvő sorrendje megfeleljen a görbe pozitív bejárásából nyert természetes sorrendnek. A $\tau_{II}(p)$ mennyiséget a C görbe p pontbeli *másodfajú metrikus torziójának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy ha a C görbének a p pontban van másodfajú torziója, akkor annál inkább van metrikus torziója is. Ennek a fordítottja azonban — mint azt látni fogjuk — nem feltétlenül igaz.

EGERVÁRY úr a következő megjegyzést volt szíves velem közölni: Nevezzük első görbületnek C ívgörbületét, második görbületnek C torzióját, nevezzük továbbá ennek a skálának természetes általánosításaként az n-dimenziós térben fekvő C görbe k-ik görbületének C két közeli k-dimenziós oszkuláló hipersíkja által bezárt szög és a két oszkuláló hipersík érintési pontjai közti távolság hányadosát. EGERVÁRY úr megjegyzése szerint a $\tau_{II}(p)$, vagy akár a $\tau(p)$ torzió magasabb dimenziójú formális analogonjai ép a k-ik görbületet definiálják, ezzel szemben $\tau_a(p)$-nek a k-ik görbületet előállító magasabb dimenziójú analogonjai már nem ilyen egyszerű szerkezetűek.

Erről a kérdésről bővebbet EGERVÁRY úr egy dolgozata fog tartalmazni.

2. §. A metrikus torzió viszonya a klasszikus torzióhoz.

Jelöljük S_{pqr}-el a p, q, r pontokon átmenő síkot, $\widehat{S'S''}$-vel pedig az S' és S'' síkok közti lapszöget. Mint ismeretes

$$\sin \widehat{S_{p_1p_2p_3}S_{p_2p_3p_4}} = \frac{3}{2\overline{p_2p_3}} \cdot \frac{V(p_1, p_2, p_3, p_4)}{V(p_1, p_2, p_3) \cdot V(p_2, p_3, p_5)}.$$

Eszerint (3) figyelembe vételével:

$$\tau(p_1, p_4; p_2\, p_3) = 3\, \frac{\sin \widehat{S_{p_1p_2p_3}S_{p_2p_3p_4}}}{\overline{p_1p_4}} \tag{6}$$

Könnyű ezekután kimutatni, hogy a $t(p)$ klasszikus torzió létezése maga után vonja a $\tau(p)$ metrikus torzió létezését. Bebizonyítjuk ugyanis a következő tételt:

Ha $\boldsymbol{p}(s)$ az s helyen háromszor differenciálható és differenciálhányadosai végesek, akkor

$$\tau(p) = |t(p)|.$$

Jelöljük $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{p}''$, $\boldsymbol{p}'''$-vel $\boldsymbol{p}(s)$-nek az s helyen képezett differenciálhányadosait és legyen $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(s + \Delta s) - \boldsymbol{p}(s)$, akkor differenciálhatósági feltételeinkből következik, hogy

$$\Delta\boldsymbol{p} = \Delta s . \boldsymbol{p}' + \frac{\Delta s^2}{2} \boldsymbol{p}'' + \frac{\Delta s^3}{6} (\boldsymbol{p}''' + \varepsilon),$$

ahol $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \varepsilon = 0$. Legyen S_p a C görbe p pontjához tartozó simuló sík, S_{pq} pedig az a sík, amely tartalmazza C-nek p-ben vont érintőjét és a $q = \boldsymbol{p}(s + \Delta s)$ pontot. Ez esetben S_{pq} tartalmazza a $\boldsymbol{p}'$ és $\Delta\boldsymbol{p}$ vektorokat, S_{pq} normálisa tehát merőleges erre a két vektorra, vagyis a

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{p}' . \Delta\boldsymbol{p}]$$

vektor S_{pq} normálisa irányába mutat.[6] Ha még figyelembe vesszük, hogy a $\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{p}' . \boldsymbol{p}'']$ vektor S_p-re merőleges, akkor az S_p és S_{pq} síkok közti lapszög a $\boldsymbol{v}$ és $\boldsymbol{w}$ vektorok alkotta szöggel egyenlő, tehát

$$\sin \widehat{S_p S_{pq}} = \frac{|[\boldsymbol{v} . \boldsymbol{w}]|}{|\boldsymbol{v}| . |\boldsymbol{w}|} =$$

$$= \frac{\frac{|\Delta s|^3}{6} \left| [\boldsymbol{p}' . (\boldsymbol{p}''' + \varepsilon)] . [\boldsymbol{p}' . \boldsymbol{p}''] \right|}{\left| \frac{\Delta s^2}{2} [\boldsymbol{p}' . \boldsymbol{p}''] + \frac{\Delta s^3}{6} [\boldsymbol{p}' . (\boldsymbol{p}''' + \varepsilon)] \right| \cdot \left| [\boldsymbol{p}' . \boldsymbol{p}''] \right|} =$$

$$= \frac{|\Delta s|}{3} \cdot \frac{|\boldsymbol{p}'([\boldsymbol{p}' . (\boldsymbol{p}''' + \varepsilon)]\boldsymbol{p}'') - \boldsymbol{p}''([\boldsymbol{p}' . (\boldsymbol{p}''' + \varepsilon)]\boldsymbol{p}')|}{|[\boldsymbol{p}' . \boldsymbol{p}''] + \frac{\Delta s}{3} [\boldsymbol{p}' . (\boldsymbol{p}''' + \varepsilon)]| . |[\boldsymbol{p}' . \boldsymbol{p}'']|} =$$

$$= \frac{\Delta s}{3} \cdot \frac{|[\boldsymbol{p}' . (\boldsymbol{p}''' + \varepsilon)]\boldsymbol{p}''|}{|[\boldsymbol{p}' . \boldsymbol{p}''] + \frac{\Delta s}{3} [\boldsymbol{p}' . (\boldsymbol{p}''' + \varepsilon)]| \cdot |[\boldsymbol{p}' . \boldsymbol{p}'']|}.$$

[6] Az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ vektorok vektoriális szorzatát a szokásos módon $[\boldsymbol{a} . \boldsymbol{b}]$-vel, skaláris szorzatukat pedig $\boldsymbol{ab}$-vel jelöljük.

De $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \varepsilon = 0$, következésképp[7]

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sin S_p S_{pq}}{\Delta s} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|\mathbf{p}'\mathbf{p}''\mathbf{p}'''|}{|[\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}'']|^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|\mathbf{p}'\mathbf{p}''\mathbf{p}'''|}{|\mathbf{p}''|^2} = \frac{1}{3} |t(p)|. \tag{7}$$

Tekintsük most a $\tau(p, q; r_1, r_2)$ kifejezést. Ha az r_1, r_2 pontok p-hez tartanak, akkor az $S_{pr_1r_2}$ sík S_p-hez tart, az $S_{qr_1r_2}$ sík pedig az S_{pq} síkhoz. A (6) alatti relációból tehát

$$\lim_{r_1, r_2 \to p} \tau(p, q; r_1, r_2) = 3 \frac{\sin \widehat{S_p S_{pq}}}{pq} \tag{8}$$

következik. Azonban

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\overline{pq}} = 1,$$

tehát (7) és (8) szerint

$$\lim_{q \to p} \left(\lim_{r_1, r_2 \to p} \tau(p, q; r_1, r_2) \right) = |t(p)|,$$

vagyis a (4) relációból

$$\tau(p) = |t(p)|$$

következik, q. e. d.

A $\tau_{II}(p)$ másodfajú metrikus torzió vektoriális alakban kifejezve SAUER[8] egy újabb munkájában is előfordul. Ugyanott annak a bizonyításnak a vázlata is megtalálható, hogy ha $\mathbf{p}(s)$ háromszor folytonosan differenciálható, akkor $\tau_{II}(p) = |t(p)|$.

Az eddigiekből azt láthatjuk, hogy háromszor folytonosan differenciálható görbéknél $\tau_d(p)$, $\tau(p)$, $\tau_{II}(p)$ és $t(p)$ egyenlő értékűek, sőt most bebizonyított tételünkből az is kiviláglik, hogy $\tau(p)$ mindig aequivalens $t(p)$-vel, ha ez utóbbi létezik. Tekintsünk azonban egy olyan folytonos C sík görbét, amelynek sehol sincs érintője. Ez esetben a C görbének természetesen egyik pontjában sem lehet $t(p)$ torziója. De tekintve, hogy

[7] A (7) alatti relációnak ezt az egyszerű vektoriális bizonyítását HITTRICH úrnak köszönhetem. Egy alig hosszabb bizonyítást SZMODICS úr volt szíves velem közölni.

[8] R. SAUER, Monatsh. Math. Phys. **45** (1937), 358—365. l.

a görbe sík volta folytán C bármely p_1, p_2, p_3, p_4 pont-quadruplumára nézve $V(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$, viszont e pontok helyes megválasztása esetén $V(p_1, p_2, p_3) \neq 0$ és $V(p_2, p_3, p_4) \neq 0$, a (3) illetőleg (5) alatti relációkból következik, hogy C minden pontjában $\tau_d(p) = \tau_{II}(p) = 0$. *A C görbének tehát mindenütt van $\tau_d(p)$, $\tau_{II}(p)$ és így $\tau(p)$ metrikus torziója, de sehol sincs klasszikus értelemben vett $t(p)$ torziója.*

A $\tau_d(p)$ és a $\tau_{II}(p)$ torzió között a következő összefüggést találhatjuk: *Ha a C görbének van* MENGER*-féle görbülete, akkor $\tau_{II}(p)$ létezése független a határátmenetnél szereplő $\tau(p_1, p_4; p_2, p_3)$ kifejezést meghatározó p_1, p_2, p_3, p_4 pontok sorrendjétől, és ez esetben*

$$\tau_{II}(p) = \tau_d(p).$$

Tekintsük ugyanis a következő evidens átalakítást:[9]

$$\tau(p_1, p_4; p_2, p_3) = \frac{9}{2} \cdot \frac{\dfrac{V(p_1, p_2, p_3, p_4)}{\overline{p_1p_2}\cdot\overline{p_1p_3}\cdot\overline{p_1p_4}\cdot\overline{p_2p_3}\cdot\overline{p_2p_4}\cdot\overline{p_3p_4}}}{\dfrac{V(p_1, p_2, p_3)}{\overline{p_1p_2}\cdot\overline{p_1p_3}\cdot\overline{p_2p_3}} \cdot \dfrac{V(p_2, p_3, p_4)}{\overline{p_2p_3}\cdot\overline{p_2p_4}\cdot\overline{p_3p_4}}}.$$

Feltevésünk szerint van MENGER-féle görbület, vagyis (2) szerint

$$\lim_{p_i \to p} \frac{V(p_1, p_2, p_3)}{\overline{p_1p_2}\cdot\overline{p_1p_3}\cdot\overline{p_2p_3}} = \lim_{p_i \to p} \frac{V(p_2, p_3, p_4)}{\overline{p_2p_3}\cdot\overline{p_2p_4}\cdot\overline{p_3p_4}} = \frac{1}{4\varrho(p)}.$$

Amiből (5) alapján

$$\tau_{II}(p) = 72 \lim_{p_i \to p} \frac{[\varrho(p)]^2 \cdot V(p_1, p_2, p_3, p_4)}{\overline{p_1p_2}\cdot\overline{p_1p_3}\cdot\overline{p_1p_4}\cdot\overline{p_2p_3}\cdot\overline{p_2p_4}\cdot\overline{p_3p_4}}$$

következik. Visszajutottunk tehát az (1) alatti DARBOUX-féle kifejezéshez, ami EGERVÁRY úr átalakítása szerint a $\tau_d(p)$ kifejezéshez vezet, tehát valóban $\tau_{II}(p) = \tau_d(p)$. Vegyük még figyelembe hogy $\tau_d(p)$ előállítása a pontok sorrendjétől független és állításunkat teljes egészében bebizonyítottuk.

Láttuk, hogy $\tau(p)$ létezését a klasszikus torzió létezése maga után vonja, de az az eset is lehetséges, hogy *egy görbének*

[9] EGERVÁRY úr szóbeli közlése nyomán.

mindenütt van ugyan $t(p)$ torziója, következéskép $\tau(p)$ torziója is, de egyes helyeken nincs sem $\tau_d(p)$, sem pedig $\tau_{II}(p)$ torziója. Tekintsük e célból a $< 0, 1 >$ zárt intervallumban változó σ paraméternek olyan folytonos $f(\sigma)$ függvényét, amelynek mindenütt van ugyan $f'(\sigma)$ differenciálhányadosa, de ez és ennek abszolút értéke bizonyos σ értékek mellett nem folytonos. (Mint ismeretes, $|f'(\sigma)|$ diszkontinuitási helyeinek D halmaza $< 0, 1 >$-ben sűrű is lehet.) Legyen

$$F(\sigma) = \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma$$

és definiáljuk a C görbe x, y, z koordinátáit a következő módon:

$$x = \frac{\sigma^2}{2} + \sigma, \quad y = \frac{\sigma^2}{2}, \quad z = \int_0^\sigma F(\sigma)\, d\sigma.$$

Ez esetben

$$\frac{dz}{d\sigma} = F(\sigma), \frac{d^2z}{d\sigma^2} = f(\sigma), \frac{d^3z}{d\sigma^3} = f'(\sigma),$$

vagyis

$$t(p) = \frac{\begin{vmatrix} \sigma+1 & \sigma & F \\ 1 & 1 & f \\ 0 & 0 & f' \end{vmatrix}}{1+(f\sigma-F)^2+(f\sigma+f-F)^2} = \frac{f'(\sigma)}{1+(f\sigma-F)^2+(f\sigma+f-F)^2}.$$

Mivel ezen tört abszolút értékének a nevezője mindenütt folytonos, számlálója azonban a D halmazon diszkontinuus, azért $|t(p)|$ nem lehet folytonos a C görbének a D halmaz pontjaihoz tartozó x, y, z koordinátájú pontjaiban. De előbbi tételünk szerint $|t(p)| = \tau(p)$, következéskép ezekben a pontokban $\tau(p)$ sem folytonos. Ha tehát C-nek mindenütt volna $\tau_{II}(p)$ vagy $\tau_d(p)$ torziója, akkor $\tau_{II}(p) = \tau_d(p) = \tau(p)$ folytán $\tau_{II}(p)$ illetőleg $\tau_d(p)$ sem lehetne mindenütt folytonos. Ez azonban lehetetlen, mert az 5. §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy $\tau_{II}(p)$, illetőleg $\tau_d(p)$ definiciós tartományuk minden pontjában folytonos függvények. Ezzel beigazoltuk azt az állításunkat, hogy van olyan C görbe, amelynek minden pontjában van $t(p)$ és $\tau(p)$

torziója, egyes pontjaiban azonban $\tau_{ll}(p)$ és $\tau_{d}(p)$ nem definiálható, sőt ezeknek a pontoknak a halmaza C-ben sűrű is lehet.

3. §. Sík görbék torziója.

Ismeretes, hogy a legalább háromszor differenciálható görbék között a nem egyenes sík görbéket jellemzi az összes pontjaikban érvényes $t(p) = 0$ egyenlőség. A torzió metrikus definíciója valamint a görbék sík volta azonban független a súlyos megszorítást jelentő differenciálhatósági feltételektől, ezért sokkal általánosabb eredményt remélhetünk, ha a sík görbéket a klasszikus torzió helyett a torzió valamelyik metrikusan definiált fogalmával igyekszünk jellemezni. Ebben a §-ban a klasszikus tétel általánositásaként bebizonyitjuk a következő tételt:

A nem egyenes és rektifikálható C görbe[10] *akkor és csakis akkor sík, ha $\tau_{ll}(p) = 0$.*

Ha C sík, akkor bármely pont-quadruplumára nézve $V(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$. Mivel pedig C nem egyenes, ez a pontquadruplum úgy választható, hogy $V(p_1, p_2, p_3) \neq 0$ és $V(p_2, p_3, p_4) \neq 0$. A (3) alatti reláció szerint tehát

$$\tau(p_1, p_4; p_2, p_3) = 0,$$

vagyis (5) szerint $\tau_{ll}(p) = 0$, amivel feltételünk szükséges voltát beigazoltuk.

Legyen ezekután C valamely nem egyenes rektifikálható görbe; ennek véges ívhosszúságát λ-val fogjuk jelölni. Tekintsük C két tetszőleges p, q pontját és iktassunk ezek közé $n+2$ pontot a következő módon: legyen $p_0 = p$, $q = p_{n+3}$, a p_1, $p_2, \dots, p_{n+2}$ pontok pedig essenek p_0 és p_{n+3} közé úgy, hogy $\overline{p_i p_{i+1}} = \overline{p_j p_{j+1}}$ legyen, az egymásutáni indexek pedig feleljenek

---

[10] A tételünkben szereplő C rektifikálható görbéről nem kell feltételeznünk sem azt, hogy paraméteresen van előállítva, sem pedig, hogy a háromdimenziós térben fekszik. Elég, ha C az n-dimenziós euklidesi térben fekvő rektifikálható kontinuum.

meg a hozzájuk tartozó pontok természetes sorrendjének, ha C mentén p-től q felé haladunk. Mivel

$$\sum_{k=0}^{n+2} \overline{p_k p_{k+1}} \leqq \lambda,$$

azért két-két egymásutáni pont távolságainak egyenlősége folytán

$$\overline{p_i p_{i+1}} \leqq \frac{\lambda}{n+3}. \qquad (9)$$
$$(i=0, 1, \ldots, n+2)$$

Ha tehát n elég nagy, akkor a p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3} pontok közti hat távolság tetszőlegesen kicsivé tehető. Azt állítjuk, hogy elég nagy n-re

$$\tau(p_i, p_{i+3}; p_{i+1}, p_{i+2}) < \varepsilon, \qquad (10)$$
$$(i=0, 1, \ldots, n)$$

akármilyen kicsiny szám is $\varepsilon > 0$. Ellenkező esetben ugyanis meg lehetne adni olyan i_1, $i_2, \ldots$, $i_n, \ldots$ index-sorozatot, amely mellett

$$\tau(p_{i_n}, p_{i_n+3}; p_{i_n+1}, p_{i_n+2}) \geqq \varepsilon \qquad (11)$$
$$(n=1, 2, \ldots)$$

lenne. Akkor azonban (9)-ből az következnék, hogy a p_{i_n}, p_{i_n+1}, p_{i_n+2}, p_{i_n+3} pont-quadruplum n növekedtével egyetlen $p^\star$ határponthoz tartana, amely — tekintve C zárt voltát — a C görbén feküdnék. Így a C görbe $p^\star$ pontjához tetszőlegesen közel találhatnánk olyan pont-quadruplumot, amely eleget tenne a (11) feltételnek, amiből viszont az (5) alatti definició szerint $\tau(p^\star) \geqq \varepsilon > 0$ következnék, holott feltevésünk szerint csak $\tau(p^\star) = 0$ lehetséges. Ezzel az ellentmondással a (10) alatti egyenlőség helyességét beigazoltuk. Jelöljük mármost S_i-vel a p_i, p_{i+1}, p_{i+2} pontokon átfektetett síkot, akkor (6)-ból és (10)-ből

$$3\,\frac{\sin \widehat{S_i S_{i+1}}}{\overline{p_i p_{i+3}}} < \varepsilon$$
$$(i=0, 1, \ldots, n+2)$$

következik. Mivel pedig $\widehat{S_i S_{i+}} \leqq \frac{\pi}{2}$, azért

$$\widehat{S_i S_{i+1}} \leqq \frac{\pi}{2} \sin \widehat{S_i S_{i+1}} < \frac{\pi}{6} \varepsilon \cdot \overline{p_i p_{i+3}} \leqq$$

$$\leqq \frac{\pi}{6} \varepsilon \cdot \left(\overline{p_i p_{i+1}} + \overline{p_{i+1} p_{i+2}} + \overline{p_{i+2} p_{i+3}}\right).$$

Alkalmazzuk erre a megbecslésre a (9) alatti relációt, akkor azt találjuk, hogy

$$\widehat{S_i S_{i+1}} < \frac{\pi}{2} \varepsilon \cdot \frac{\lambda}{n+3}.$$

Vegyük még figyelembe, hogy

$$\widehat{S_0 S_{n+1}} \leqq \sum_{i=0}^{n} \widehat{S_i S_{i+1}} < \varepsilon \frac{\pi}{2} \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda}{n+3} < \varepsilon \frac{\lambda \pi}{2},$$

akkor végeredményben a

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{S_0 S_{n+1}} = 0$$

relációt nyerjük. Ebből pedig az következik, hogy a $p = p_0, p_1, p_2$ pontokon illetőleg a $p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3} = q$ pontokon átmenő S_0, illetőleg S_{n+1} síkoknak van határhelyzetük és e két határsík közti lapszög 0. Másszóval a C görbe p, illetőleg q pontjában van S_p, illetőleg S_q simuló sík és

$$\widehat{S_p S_q} = 0.$$

Tekintve p és q tetszőleges voltát, ez az eredmény ép azt jelenti, hogy C sík görbe, amivel feltételünk elégséges voltát is bebizonyítottuk.

II. Metrikus terek torziója.

4. §. A torzió definíciója metrikus terekben.

Fréchet[11] ismert fogalomalkotása szerint *metrikus térnek* nevezünk bármely olyan T halmazt, amelynek minden p, q elempárjához egy és csakis egy a következő feltételeket teljesítő pq számot rendelünk:

---

[11] Fréchet, Rend. Circ. Mat. Palermo **22** (1906), 1—74. l.

1° $pq = qp \geqq 0$ *(szimmetria és pozitivitás)*;
2° $pq = 0$ *akkor és csakis akkor, ha* $p = q$;
3° $pq + qr \geqq pr$ *(háromszög-egyenlőtlenség)*.

A T metrikus tér elemeit *pontoknak*, a pq számot pedig p és q egymástól való *távolságának* nevezzük. Vezessük be a következő jelölést:

$$D(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & (p_1p_2)^2 & \ldots & (p_1p_n)^2 \\ 1 & (p_1p_2)^2 & 0 & \ldots & (p_2p_n)^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & (p_1p_n)^2 & (p_2p_n)^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Ismeretes, hogy ha $\overline{pq} = pq$, vagyis, ha pq az euklidesi távolságot jelenti, akkor

$$D(p_1, p_2, p_3, p_4) = 288\,[V(p_1, p_2, p_3, p_4)]^2,$$
$$-D(p_1, p_2, p_3) = 16\,[V(p_1, p_2, p_3)]^2,$$
$$-D(p_2, p_3, p_4) = 16\,[V(p_2, p_3, p_4)]^2.$$

Ha tehát

$$\tau(p_1, p_4; p_2, p_3) = \frac{p_2p_3}{p_1p_4}\sqrt{\frac{18\,|D(p_1, p_2, p_3, p_4)|}{D(p_1, p_2, p_3)\cdot D(p_2, p_3, p_4)}}, \tag{12 a}$$

illetőleg

$$\tau_d(p_1, p_2, p_3, p_4) =$$
$$= \sqrt{\frac{18\,|D(p_1, p_2, p_3, p_4)|}{\sqrt{D(p_1, p_2, p_3)\cdot D(p_2, p_3, p_4)\cdot D(p_3, p_4, p_1)\cdot D(p_4, p_1, p_2)}}}, \tag{12 b}$$

akkor a

$$\tau(p) = \lim_{q\to p}\Big(\lim_{r_1, r_2\to p} \tau(p, q; r_1, r_2)\Big), \quad \tau_H(p) = \lim_{p_i\to p} \tau(p_1, p_4; p_2, p_3),$$
$$\tau_d(p) = \lim_{p_i\to p} \tau_d(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

relációk az euklidesi térben megegyeznek a metrikus torzió (4), illetve (5) alatti, illetőleg DARBOUX-EGERVÁRY-féle definíciójával. Azt mondhatjuk tehát, hogy mindhárom reláció alkalmas a torzió fogalmának metrikus terekben való definíciójára. Eszerint metrikus terek torlódási pontjaiban beszélhetünk a tér $\tau(p)$, $\tau_H(p)$, vagy $\tau_d(p)$ torziójáról.

5. §. A torzió folytonossága.

Ha a T metrikus térnek mindenütt van $\tau_u(p)$ vagy $\tau_d(p)$ torziója, akkor $\tau_u(p)$, illetőleg $\tau_d(p)$ a T térben folytonos függvények.

Mivel a torzió mindhárom definíciójából következik, hogy T-nek csak torlódási pontjaiban értelmezhető a torzió, azért $\tau_u(p)$, vagy $\tau_d(p)$ minden pontban feltételezett létezéséből következik, hogy T minden pontja torlódási pont. Legyen tehát $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ T-nek egy p-hez konvergáló pontsorozata. Első feltevésünk szerint $\tau_u(p_n)$ minden n-re létezik, találhatunk tehát olyan $p_n^{(1)}$, $p_n^{(2)}$, $p_n^{(3)}$, $p_n^{(4)}$ pont-quadruplumot, hogy egyrészt $p_n p_n^{(i)} < \frac{1}{n}$ legyen ($i = 1, 2, 3, 4$), másrészt bármely előre megadott $\varepsilon > 0$ mellett teljesüljön a

$$|\tau_u(p_n) - \tau(p_n^{(1)}, p_n^{(4)}; p_n^{(2)}, p_n^{(3)})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

feltétel. De ha $pp_n \to 0$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség következtében $p_n p_n^{(i)} \to 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), vagyis elég nagy n mellett a $p_n^{(1)}$, $p_n^{(2)}$, $p_n^{(3)}$, $p_n^{(4)}$ pontok p tetszőlegesen kicsiny környezetében fekszenek. Mivel pedig feltettük, hogy $\tau_u(p)$ létezik, azért p-hez elég közeli $p_n^{(1)}$, $p_n^{(2)}$, $p_n^{(3)}$, $p_n^{(4)}$ pont-quadruplumra fennáll a

$$|\tau_u(p) - \tau(p_n^{(1)}, p_n^{(4)}; p_n^{(2)}, p_n^{(3)})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

egyenlőtlenség, vagyis ha n elég nagy, akkor

$$|\tau_u(p) - \tau_u(p_n)| < \varepsilon,$$

ami $\tau_u(p)$ folytonosságát jelenti. Ugyanígy bizonyíthatjuk be $\tau_d(p)$ folytonos voltát is.

Lényegesen kevesebbet állíthatunk a $\tau(p)$ torzió folytonossági viszonyait illetőleg. Mindenesetre érvényes a következő tétel:

Ha a C ívnek (= egyenesdarab homöomorf képe) *mindenütt van $\tau(p)$ torziója, akkor $\tau(p)$ a C térben legfeljebb másodosztályú* BAIRE-*féle függvény.*

Tekintsük a $0 \leqq x \leqq 1$ egyenesdarabnak C-re való φ topologikus leképezését és rendeljük a $p = \varphi(x)$ ponthoz a C ív

$$q^{(m)} = \varphi\left(x + \frac{1}{m}\right), \; r_1^{(n)} = \varphi\left(x + \frac{1}{2n}\right), \; r_2^{(n)} = \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

pontjait. Mivel a φ leképezés egyértelmű és egyértelműen megfordítható, azért p, $q^{(m)}$, $r_1^{(n)}$, $r_2^{(n)}$ a C ív négy különböző pontja és így $\tau(p, q^{(m)}; r_1^{(n)}, r_2^{(n)})$ értelmezhető, Azt állítjuk, hogy ez a függvény folytonos a C térben. Ha ugyanis $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x$, akkor φ folytonosságából következik, hogy bármely h mellett $\lim\limits_{i \to \infty} \varphi(x_i + h) = \varphi(x + h)$. Ha tehát $\lim\limits_{i \to \infty} p_i = p$, akkor $q_i^{(m)}$, $r_{i1}^{(n)}$, $r_{i2}^{(n)}$-el jelölve a $\varphi\left(x_i + \frac{1}{m}\right)$, $\varphi\left(x_i + \frac{1}{2n}\right)$, $\varphi\left(x_i + \frac{1}{n}\right)$ pontokat, ezek távolságai teljesítik a következő egyenlőségeket:

$$\lim_{i \to \infty} p_i q_i^{(m)} = p q^{(m)}, \; \lim_{i \to \infty} p_i r_{i1}^{(n)} = p r_1^{(n)}, \; \lim_{i \to \infty} p_i r_{i2}^{(n)} = p r_2^{(n)},$$

$$\lim_{i \to \infty} q_i^{(m)} r_{i1}^{(n)} = q^{(m)} r_1^{(n)}, \; \lim_{i \to \infty} q_i^{(m)} r_{i2}^{(n)} = q^{(m)} r_2^{(n)}, \; \lim_{i \to \infty} r_{i1}^{(n)} r_{i2}^{(n)} = r_1^{(n)} r_2^{(n)}.$$

A (12 *a*) alatti definícióból következik tehát, hogy

$$\lim_{i \to 8} \tau(p_i, q_i^{(m)}; r_{i1}^{(n)}, r_{i2}^{(n)}) = \tau(p, q^{(m)}; r_1^{(n)}, r_2^{(n)})$$

vagyis $\tau(p, q^{(m)}; r_1^{(n)}, r_2^{(n)})$ valóban folytonos függvénye p-nek. E szerint $\lim\limits_{n \to \infty} \tau(p, q^{(m)}; r_1^{(n)}, r_2^{(n)})$ legfeljebb elsőosztályú függvény, következéskép

$$\tau(p) = \lim_{m \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} \tau(p, q^{(m)}; r_1^{(n)}, r_2^{(n)})\right)$$

legfeljebb másodosztályú függvény lehet, q. e. d.

Megjegyzés. A differenciálhányadosra vonatkozó egyik ismert tételből következik, hogy egy háromszor differenciálható paraméter-függvényekkel definiált C görbét metrikus térnek tekintve, a klasszikus $t(p)$ torzió a C görbén legfeljebb elsőosztályú Baire-féle függvény. A $\tau(p)$ torzió tehát folytonosság tekintetében úgy viszonylik a $t(p)$ torzióhoz, mint egy folytonos függvény négy deriváltja a differenciálhányadoshoz.

6. §. Nulla torziójú, de nem sík metrikus kontinuumok.

A 3. §-ban bebizonyítottuk azt a tételt, hogy az olyan rektifikálható euklidesi görbe, melynek minden pontjában $\tau_{II}(p) = 0$, sík. Itt a görbe euklidesi volta fontos, mert egyébként könnyen konstruálhatunk olyan C görbét, amelynek a következő tulajdonságai vannak: 1^0 C *a kör homöomorf képe,* 2^0 *C bármely p* pontjában $\tau(p) = \tau_{II}(p) = \tau_d(p) = 0$, 3^0 *C nem izometrikus a sík semmilyen részhalmazával sem.*

Legyen C az xy-sík $(0, 0)$ pontja köré írt egységnyi sugarú körvonal, amelyen azonban a p, q pontok euklidesi $\overline{pq}$ távolsága helyett a következő pq távolságot vezetjük be:

$$pq = \begin{cases} \overline{pq}, & \text{ha } \overline{pq} \leqq 1, \\ 1, & \text{ha } \overline{pq} > 1. \end{cases}$$

A C metrikus tér minden p pontjának 1-nél kisebb átmérőjű környezete nem más, mint p euklidesi környezete. Ha tehát a p_1, p_2, p_3, p_4 pontok ilyen környezetben vannak, akkor a torzió p_1, p_2, p_3, p_4-ből származtatott mindhárom metrikus definíciója azonos az euklidesi térben elemi módon definiált háromféle metrikus torzióval, vagyis

$$\tau(p) = \tau_{II}(p) = \tau_d(p) = 0.$$

Tekintsük azonban a $p_1 = (-1, 0)$, $p_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $p_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $p_4 = (1, 0)$ pontokat, amelyeknek mind a hat euklidesi távolságuk $\geqq 1$. A C térben érvényes távolság-definíció szerint tehát erre a négy pontra nézve

$$p_i p_j = 1, \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4;\ i \neq j).$$

Olyan négy pontja azonban nincs az euklidesi síknak, amelyeknek mind a hat távolsága ugyanaz, a C metrikus tér tehát nem izometrikus semmilyen síkhalmazzal sem.

Alexits György.

DER TORSIONSBERGRIFF IN METRISCHEN RÄUMEN.

Bezeichne R einen metrischen Raum, p, q zwei Punkte aus R, pq den Abstand der Punkte p, q. Für ein n-Tupel von Punkten p_1, $p_2, \ldots, p_n$ setze man

$$D(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (p_i p_j)^2 \end{vmatrix}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ist p_1, p_2, p_3, p_4 ein beliebiges Punktequadrupel von R, so bilde man, wenn es nur möglich ist, die Ausdrücke

$$\tau(p_1, p_4 ; p_2, p_3) = \frac{p_2 p_3}{p_1 p_4} \sqrt{\frac{18 \, | D(p_1, p_2, p_3, p_4) |}{D(p_1, p_2, p_3) \cdot (D p_2, p_3, p_4)}},$$

$$\tau_d(p_1, p_2, p_3, p_4) =$$

$$= \sqrt{\frac{18 \, | D(p_1, p_2, p_3, p_4) |}{\sqrt{D(p_1, p_2, p_3) \cdot D(p_2, p_3, p_4) \cdot D p_3, p_4, p_1) \cdot D(p_4, p_1, p_2)}}}$$

Jede der folgenden drei Zahlen

$$\tau(p) = \lim_{q \to p} \Big(\lim_{r_1, r_2 \to p} \tau(p, q ; r_1, r_2) \Big), \quad \tau_{II}(p) = \lim_{p_i \to p} \tau(p_1, p_4 ; p_2, p_3),$$

$$\tau_d(p) = \lim_{p_i \to p} \tau_d(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

ist zur Definition der Torsion von R geeignet. Wir nennen $\tau(p)$ die *metrische Torsin*, $\tau_{II}(p)$ die *metrische Torsion zweiter Art*, $\tau_d(p)$ die Darboux-Egervárysche *Torsion* von R; ($\tau_d(p)$ ist ein von Herrn Egerváry geeignet umgestalteter, scheinbar etwas vergessener älterer (1896) Darbouxscher Ausdruck).

Der Name «Torsion» lässt sich für diese Ausdrücke durch folgenden Umstand rechtfertigen: *Wenn R eine dreimal stetig differenzierbare Parameterkurve ist, deren Torsion im klassischen Sinn mit $t(p)$ bezeichnet wird, so ist*

$$\tau(p) = \tau_{II}(p) = \tau_d(p) = | t(p) |.$$

Die Beziehung $\tau(p) = | t(p) |$ besteht auch dann, wenn nur so viel vorausgesetzt wird, dass die ersten drei Ableitungen der Parameterfunktionen in p existieren und endlich sind. Die Torsionsdefinition $\tau(p)$ ist also auch für Parameterkurven *mindenstens so weittragend* wie die klassische, wogegen es Parameterkurven gibt, für welche $t(p)$ und $\tau(p)$ existieren, $\tau_d(p)$ und $\tau_{II}(p)$ jedoch in einer dichten Menge *nicht* existieren. Umgekehrt ist aber auch $\tau(p) = \tau_{II}(p) = \tau_d(p) = 0$ möglich und zwar in jedem Punkte der Parameterkurve R, *ohne dass* $t(p)$ *irgendwo existiert.* Das ist z. B. bei jeder nirgends differenzierbaren stetigen ebenen Parameterkurve der Fall. Besitzt R in p eine MENGERsche Krümmung, so ist $\tau_{II}(p) = \tau_d(p)$.

Die Beiden Ausdrücke $\tau_{II}(p)$ und $\tau_d(p)$ sind, als Punktfunktionen im metrischen Raum R betrachtet, stetig ; über die Stetigkeitsverhältnisse von $\tau(p)$ lässt sich dagegen nur folgendes behaupten : Ist R ein metrischer Bogen, auf welchem $\tau(p)$ überall existiert, so ist $\tau(p)$ auf R eine Bairesche Funktion höchstens zweiter Klasse.

Die Torsion zweiter Art $\tau_{II}(p)$ steht in enger Beziehung zu den ebenen Kurven, da die folgende Verallgemeinerung eines klassischen Satzes gilt: *Damit der nicht gerade euklidische Bogen C eben sei, ist notwendig und hinreichend, dass in jedem Punkte p von C die Gleichung $\tau_{II}(p) = 0$ bestehe.* Hier ist die Euklidizität von C wesentlich, da man leicht einen metrischen, aber nicht euklidischen Bogen C konstruieren kann, für welchen zwar überall $\tau(p) = \tau_{II}(p) = \tau_d(p) = 0$ gilt und trotzdem C mit keinem ebenen Bogen isometrisch ist.

Georg v. Alexits.

VALÓS ZÉRÓHELYEKKEL BÍRÓ POLINOMOKRÓL.[1]

1. §.

I. SCHURtól[1] származik a következő tétel:

Ha a ν-edfokú ($\nu \geqq 3$) $f(x)$ polinom[2] valamennyi zéróhelye valós, akkor az

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x), \dots,\ f^{(\nu-1)}(x)$$

polinomok legnagyobb zéróhelyei monoton csökkenve úgy helyezkednek el a számegyenesen, hogy a szomszédos zéróhelyek távolságai — a fenti sorrendben — monoton nőnek (nem csökkennek).

Hasonló tétel érvényes e polinomok legkisebb zéróhelyeire is. Ha $f(x)$ zéróhelyei mind valósak, akkor ugyanez áll $f(x)$ bárhányadik differenciálhányadosára. Ezért a fenti tétel egyenértékű a következő állítással:[3]

Ha a 2-nél magasabb fokú $f(x)$ polinom valamennyi zéróhelye valós, akkor $f(x)$ legnagyobb zéróhelyének $f'(x)$ legnagyobb zéróhelyétől való távolsága kisebb, vagy egyenlő, mint $f'(x)$ és $f''(x)$ legnagyobb zéróhelyének egymástól való távolsága. Az egyenlőség csak akkor következik be,[4] ha vagy mindhárom legnagyobb zéróhely egybeesik, vagy ha $f(x)$ valamennyi zéróhelye, kivéve a legnagyobbat, összeesik.

Ha $f(x)$ legnagyobb zéróhelye többszörös, akkor a tétel triviális. Ezért feltesszük, hogy $f(x)$ legnagyobb zéróhelye egyszeres zéróhely. (Ugyanez áll ekkor $f'(x)$- és $f''(x)$-re is.)

---

[1] I. SCHUR, Journal für die reine und angew. Math. 144. (1914), 75.

[2] Polinomon az egész dolgozatban valós együtthatós polinomot értünk.

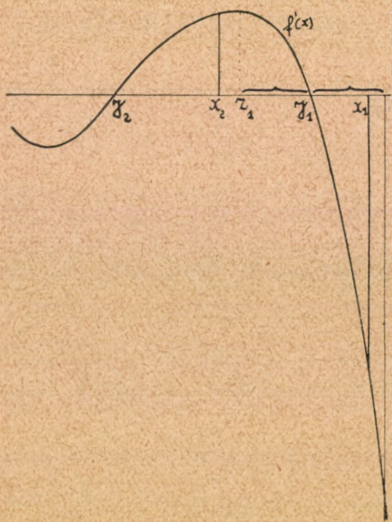
[3] Lásd [2]-t.

[4] Lásd [2]-t.

Jelöljük $f(x)$ zéróhelyeit $x_1, x_2, \dots, x_\nu$-vel, $f'(x)$ zéróhelyeit $y_1, y_2, \dots, y_{\nu-1}$-gyel.

Legyen $x_1 > x_2 \geqq x_3 \geqq \cdots \geqq x_\nu$ és $y_1 > y_2 \geqq y_3 \geqq \cdots \geqq y_{\nu-1}$. Ekkor $x_k \geqq y_k \geqq x_{k+1}$ és — ha $f''(x)$ legnagyobb zéróhelyét z_1-gyel jelöljük —

$$z_1 < y_1 < x_1.$$



1. ábra.

Schur tétele szerint

$$x_1 - y_1 \leqq y_1 - z_1,$$

ahol az egyenlőség jele csak az $x_2 = x_3 = \cdots = x_\nu$ esetben áll.

Ábrázoljuk [5] az $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ polinomok közül $f'(x)$-et. Feltesszük, hogy az (y_2, y_1) közben $f'(x) > 0$. (1. ábra.) (Megjegyezzük, hogy az y_1 zéróhely egyszeres volta miatt ez egyenértékű azzal, hogy $x > y_1$ esetben $f'(x) < 0$.) Hogy x_1 és x_2 az $f(x)$-nek szomszédos zéróhelyei, az azt jelenti, hogy az (x_2, y_1) közhöz tartozó görbeterület $\left(\int\limits_{x_2}^{y_1} f'(x)dx\right)$ és az (y_1, x_1) közhöz tartozó görbeterület $\left(\int\limits_{y_1}^{x_1} f'(x)dx\right)$ abszolút értékben egyenlő.

Schur tétele úgy is kimondható, hogy a $\overline{z_1 y_1}$ távolságot y_1-től átmérve túljutunk x_1-en (egy esetet kivéve, amikor éppen x_1-hez jutunk), vagyis

$$x_1 \leqq y_1 + (y_1 - z_1).$$

Területekkel ez a következő módon fejezhető ki:

---

[5] Az ábrák természetüknél fogva csak speciális eseteket tüntetnek fel. A feltüntetett speciális tulajdonságok természetesen nem szükségesek a tételek fennállásához.

$$\left|\int_{y_1}^{y_1+(y_1-z_1)} f'(x)dx\right| \geqq \left|\int_{y_1}^{x_1} f'(x)dx\right| = \left|\int_{x_2}^{y_1} f'(x)dx\right|$$

vagy

$$\int_{x_2}^{y_1+(y_1-z_1)} f'(x)dx \leqq 0.$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy nemcsak ez az egyenlőtlenség igaz, hanem az

$$\int_{y_2}^{y_1+(y_1-z_1)} f'(x)dx \leqq 0$$

egyenlőtlenség is fennáll és a bizonyításnál csak $f'(x)$ zéróhelyeinek valós voltát fogjuk kihasználni. Igazolni fogjuk (2. §) tehát a következő tételt:

I. tétel. *Ha a*

$$g(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

n-edfokú ($n \geqq 2$) *polinom valamennyi zéróhelye valós és*

$$a_1 > a_2 \geqq a_3 \geqq \dots \geqq a_n,$$

továbbá, ha[6]

$$A < 0,$$

akkor — $g'(x)$ legnagyobb zéróhelyét b_1-gyel jelölve —

$$F(g) = \int_{a_2}^{a_1+(a_1-b_1)} g(x)dx \leqq 0.$$

Az egyenlőség jele csak az $a_2 = a_3 = \dots = a_n$ esetben áll.

Ez a tétel nem vezethető le a SCHUR-tételből. Ez csak akkor volna lehetséges, ha minden esetben az $\int_{a_2}^{x} g(x)dx$ polinom valamennyi zéróhelye valós volna, ami azonban nyilván nem igaz. (Pl.: $n = 4$, $a_1 > a_2 > a_3 = a_4$). Az I. tétel igazolásával így nemcsak a SCHUR-tételre adunk egy új bizonyítást,[7] hanem egy

[6] Ez a feltevés azonos azzal, hogy az (a_2, a_1) közben $g(x) > 0$ illetve, hogy $x > a_1$ esetben $g(x) < 0$.

[7] A SCHUR-tételre ad bizonyítást T. POPOVICIU is: Mathematica. IX. (1935), 141.

általánosabb tételhez is jutunk, amelynél az eredeti $f(x)$ polinom zéróhelyeinek valós volta helyett elegendő — bizonyos kikötések mellett — $f'(x)$ zéróhelyeinek valós voltát megkívánni. (3. §.)

A 4. §-ban ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazzuk egy — csak valós zéróhelyet tartalmazó polinomokra vonatkozó — LAGUERRE-tételre, illetve e tételnek SZ. NAGY GYULÁ-tól származó egyik általánosítására. Ezáltal megint egy területi (integrál) tételhez jutunk. E tételnek következménye az eredeti LAGUERRE-tétel egy oly irányú általánosítása, hol a polinom zéróhelyeinek valós volta helyett elegendő — bizonyos feltételek mellett — a differenciálhányados zéróhelyeinek valós voltát feltenni. (5. §.)

A 6. §-ban egy ERDŐS PÁL-tól származó területviszony-tételt általánosítunk. E tételből következtetni tudunk egy polinom inflexiós pontjainak elhelyezkedésére, ha a polinom differenciálhányadosának valamennyi zéróhelye valós [tehát pl., ha magának a polinomnak minden zéróhelye valós]. (7. §)

2. §.

Az 1. tétel bizonyítása. Az $a_2 = a_3 = \cdots = a_n$ esetben az $F(g) = 0$ egyenlőség egyszerű integrálással igazolható.[8] Erre az esetre a tételt bizonyítottnak tekintjük. A tétel tehát igaz $n = 2$-re. Bebizonyítjuk, hogy ha igaz $n-1$-re ($n > 2$), akkor n-re is igaz.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$A = -1, \; a_1 = 1 \; \textit{és} \; b_1 = 0. \tag{1}$$

Bevezetve a $-a_i = \alpha_i$ $(2 \leq i \leq n)$ jelölést

$$0 < \alpha_2 \leqq \alpha_3 \leqq \cdots \leqq \alpha_n$$

és

$$g(x) = -(x-1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)\dots(x+\alpha_n).$$

[8] Legcélszerűbb az integrálást az $a_1 = n$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$, $A = -1$, vagyis a $g(x) = -(x-n)x^{n-1}$ alakban végrehajtani. Ebben az esetben $b_1 = n-1$.

A

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n} \tag{2}$$

összefüggésből — tekintettel $g'(b_1) = g'(0) = 0$-ra — adódik, hogy

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1. \tag{3}$$

Ebből következik, hogy

$$a_2 \leqq n-1 \leqq a_n.$$

Itt az egyenlőségi jelek csak egyidejűleg és pedig csak az $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = n-1$ esetben állnak fenn.

Jelöljük i-vel a $g(x)$ polinomnak a $-(n-1)$ pontba eső zéróhelyeinek számát (azaz a $-(n-1)$ zéróhely multiplicitását). Ha $g(-(n-1)) \neq 0$, akkor $i = 0$.

$i = n-1$ csak akkor lehetséges, ha $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = n-1$, vagyis ha $a_2 = a_3 = \cdots = a_n$. Ebben az esetben — mint már említettük — minden $n \geqq 2$-re igaz, hogy

$$F(g) = 0.$$

Ha $i < n-1$, akkor

$$a_2 < n-1 < a_n. \tag{4}$$

Vegyük azt az a számot, melyre

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_n}. \tag{5}$$

Ilyen a létezik és

$$a_2 < a < a_n.$$

Tekintsük a

$$g_1(x) = \frac{g(x)}{(x+a_2)(x+a_n)} \cdot (x+a)(x+n-1)$$

n-ed fokú polinomot. $g_1(x)$ minden zéróhelye valós, x^n együtthatója -1 és legnagyobb zéróhelye $+1$. A (3) és (5) egyenletek miatt pedig

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{n-1} = 1,$$

ami azt jelenti, hogy $g_1'(0)=0$. $g_1'(x)$ legnagyobb zéróhelye tehát 0. Ennélfogva $g_1(x)$ kielégíti az (1) feltételeket.

$g_1(x)$ értelmezéséből világos, hogy

$$i_1 > i\,(\geqq 0).$$

Itt i_1 jelöli[9] a $-(n-1)$ zéróhely multiplicitását a $g_1(x)$ polinomban.

Be fogjuk bizonyítani, hogy – ha a tétel igaz $n-1$-re –

$$F(g) < F(g_1). \tag{6}$$

Ha ezt az egyenlőtlenséget igazoltuk és ha $i_1 < n-1$, akkor a fenti módon $g_1(x)$-hez megadható a $g_2(x)$ polinom. Ez szintén kielégíti az (1)-es feltevéseket, továbbá fennáll az $i_2 > i_1$ és — ha a tétel igaz $n-1$-re — az $F(g_1) < F(g_2)$ egyenlőtlenség. Ezt az eljárást folytatva el kell jutnunk egy olyan t indexhez $(1 \leqq t \leqq n-2)$, illetve $g_t(x)$ polinomhoz, amelynél $i_t = n-1$, amelyre tehát $F(g_t)=0$. Másrészt — ha a tétel igaz $n-1$-re —

$$F(g) < F(g_1) < F(g_2) < \cdots < F(g_t) = 0.$$

Az I. tétel igazolása végett tehát csak a (6) egyenlőtlenséget kell még bebizonyítanunk. Ezt a következőkép igazoljuk:

A $g_1(x)$ polinom legnagyobb negatív zéróhelye a $-\alpha$ és a $-\alpha_3$ számok közül a nagyobbik. Jelöljük ezt $-\beta$-val. Nyilvánvaló, hogy

$$\beta \leqq n-1 \quad \textit{és} \quad \alpha_2 \leqq \beta \leqq \alpha_3, \tag{7}$$

továbbá abból, hogy $g_1(x)$-ben x^n együtthatója -1, következik, hogy a

$$(-\beta,\ 1) \ \textit{közben}\ g_1(x) > 0. \tag{8}$$

Minthogy $g(x)$-ben és $g_1(x)$-ben x^n együtthatója ugyanaz (-1), azért a

$$h_1(x) = g(x) - g_1(x) \not\equiv 0$$

[9] i_p-vel jelöljük általában a $-(n-1)$ zéróhely multiplicitását a $g_p(x)$ polinomban.

polinom legfeljebb $n-1$-ed fokú. E polinomnak az $1, -a_3, -a_4, \ldots, -a_{n-1}$ számok zéróhelyei. Mivel

$$h_1'(0) = g'(0) - g_1'(0) = 0$$

és mivel

$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} = 1 - \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_n}\right) < 1,$$

azért $h_1(x)$-nek a fentebb felsorolt $n-2$ számú zéróhelyén kívül van még egy valós zéróhelye: $-\gamma$ és erre

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_n}. \tag{9}$$

A $h_1(x)$ polinom tehát pontosan $n-1$-edfokú, minden zéróhelye valós, legnagyobb zéróhelye $+1$ és differenciálhányadosának legnagyobb zéróhelye 0. (9) miatt

$$\gamma < a_2. \tag{10}$$

$-\gamma$ tehát egyszeres és legnagyobb negativ zéróhelye $h_1(x)$-nek.

Igazoljuk, hogy

$$h_1(x) > 0 \textit{ a } (-\gamma, 1) \textit{ közben és } h_1(x) < 0, \textit{ ha } x > 1. \tag{11}$$

Ehhez elegendő kimutatni azt, hogy

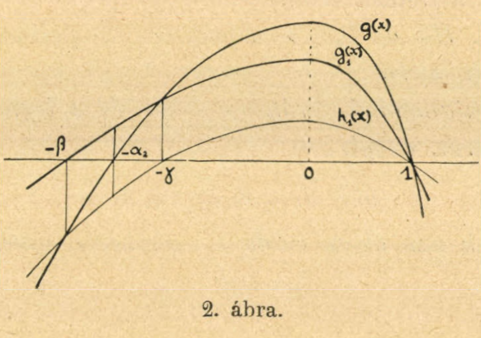
$$h_1(0) = g(0) - g_1(0) = a_2 a_3 a_4 \ldots a_{n-1} a_n - a a_3 a_4 \ldots a_{n-1}(n-1) > 0.$$

Ez azért igaz, mert (4)-ből és (5)-ből könnyen lehozható, hogy

$$a_2 a_n > a(n-1).$$

(10)-ből és (11)-ből következik ($-\gamma$ egyszeres zéróhely), hogy (2. ábra)

$$\textit{a } (-a_2, -\gamma) \textit{ közben } h_1(x) < 0. \tag{12}$$



2. ábra.

A $g(x)$, $g_1(x)$ és $h_1(x)$ polinomokra vonatkozólag

$$a_1 + (a_1 - b_1) = 1 + (1-0) = 2.$$

Az α_2 zéróhely $g(x)$-re $-\alpha_2$, $g_1(x)$-re $-\beta$, $h_1(x)$-re pedig $-\gamma$. Ennélfogva

$$F(g_1) = \int_{-\beta}^{2} g_1(x)\,dx = \int_{-\beta}^{-\alpha_2} g_1(x)\,dx + \int_{-\alpha_2}^{2} [g(x) - h_1(x)]\,dx =$$

$$= \int_{-\beta}^{-\alpha_2} g_1(x)\,dx + \int_{-\alpha_2}^{2} g(x)\,dx - \int_{-\alpha_2}^{-\gamma} h_1(x)\,dx - \int_{-\gamma}^{2} h_1(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\beta}^{-\alpha_2} g_1(x)\,dx + F(g) - \int_{-\alpha_2}^{-\gamma} h_1(x)\,dx - F(h_1).$$

(7)-ből, (8)-ból, (10)-ből és (12)-ből következik, hogy (2. ábra)

$$\int_{-\beta}^{-\alpha_2} g_1(x)\,dx \geqq 0 \quad \textit{és} \quad \int_{-\alpha_2}^{-\gamma} h_1(x)\,dx < 0. \tag{12a}$$

Ennélfogva

$$F(g_1) > F(g) - F(h_1).$$

Ha tehát a tétel igaz $n-1$-re, vagyis $F(h_1) \leqq 0$, akkor

$$F(g_1) > F(g).$$

Ezzel az I. tétel be van bizonyitva.

3. §.

Az I. tételből SCHUR tételének a következő általánosítása adódik. (Vesd össze az 5. §-ban lévő II*a*. tétellel, illetve ennek ott szereplő alkalmazásával.)

I*a*. tétel. *Ha az $f(x)$ ν-ed fokú ($\nu \geqq 3$) polinom kielégíti a következő feltételeket:*

1. *$f'(x)$ valamennyi zéróhelye valós és a legnagyobb zéróhelye egyszeres, vagyis*

$$y_1 > y_2 \geqq y_3 \geqq \cdots \geqq y_{\nu-1},$$

2. *$f(x)$-nek van olyan valós x'' zéróhelye, amelyre*

$$y_1 > x'' \geqq y_2,$$

akkor $f(x)$ *illetve* $f''(x)$ *legnagyobb valós zéróhelye,* x' *illetve* z_1, *kielégíti az*

$$x' - y_1 \leqq y_1 - z_1$$

egyenlőtlenséget. Az egyenlőség jele csak az $y_2 = y_3 = \cdots = = y_{\nu-1} = x''$ *esetben áll.*

Feltehetjük ugyanis, hogy $f'(x) > 0$, ha $y_2 < x < y_1$ és $f'(x) < 0$, ha $x > y_1$. Ekkor $f'(x)$-re az I. tételt alkalmazva nyerjük, hogy

$$\int_{x''}^{y_1+(y_1-z_1)} f'(x)dx \leqq \int_{y_2}^{y_1+(y_1-z_1)} f'(x)dx \leqq 0.$$

y_1 és $y_1 + (y_1 - z_1)$ között kell tehát lenni egy olyan $\bar{x}$ számnak, melyre

$$\int_{x''}^{\bar{x}} f'(x)dx = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $f(\bar{x}) = 0$. Az x' értelmezése miatt $\bar{x} \leqq x'$. Ha azonban $\bar{x} < x'$ volna, akkor az $(\bar{x}, x')$ közben $f'(x)$-nek valahol zérónak kellene lenni. y_1 nem volna tehát $f'(x)$-nek legnagyobb zéróhelye. Ebből következik, hogy $\bar{x} = x'$. Tekintettel $\bar{x}$ értelmezésére

$$x' \leqq y_1 + (y_1 - z_1).$$

Ez viszont azonos az Ia. tétellel.

A levezetésből közvetlenül látható, hogy az egyenlőség jele csak az $y_2 = y_3 = \cdots = y_{\nu-1} = x''$ esetben igaz.

4. §.

Ismeretes Laguerre következő tétele:

Ha egy ν*-edfokú* $f(x)$ *polinom valamennyi zéróhelye valós és két szomszédos zéróhely közti távolságot* ν *egyenlő részre bontjuk, akkor* $f'(x)$ *a két szélső rész egyikének belsejében sem tűnhet el.*

Az 1. §-ban használt indexezést megfordítva $f(x)$ zéróhelyei: $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_\nu$, $f'(x)$ zéróhelyei: $y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots \leqq y_{\nu-1}$ és $x_{i-1} \leqq y_{i-1} \leqq x_i$.

LAGUERRE tétele szerint az $x_{i-1} < x_i$ esetben

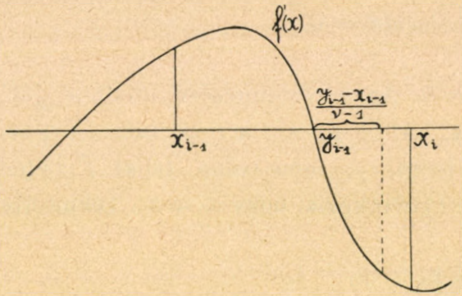
$$\frac{\nu-1}{\nu}(x_i-x_{i-1}) \geqq x_i-y_{i-1} \geqq \frac{1}{\nu}(x_i-x_{i-1}).$$

SZ. NAGY GYULA[10] ezt tovább élesitve bebizonyitotta, hogy

$$\frac{\nu-i+1}{\nu-i+2}(x_i-x_{i-1}) \geqq x_i-y_{i-1} \geqq \frac{1}{i}(x_i-x_{i-1}).$$

E tételeknél a baloldali egyenlőségi jel csak az $i=2$, $x_2=x_3=\cdots=x_\nu$, a jobboldali pedig csak az $i=\nu$, $x_1==x_2=\cdots=x_{\nu-1}$ esetben érvényes.

Mindkét tétel tulajdonképpen két egyenlőtlenségből áll, de elegendő csak az egyikkel foglalkozni, mert azt az $f(-x)$ polinomra alkalmazva a másik könnyen levezethető.



3. ábra.

A LAGUERRE-tétel és SZ. NAGY GYULÁ-nak ez a tétele abból az ismert összefüggésből következtethető, hogy $f'(x)$-nek azok a zéróhelyei, melyek nem zéróhelyei egyúttal $f(x)$-nek is, kielégítik az

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \cdots + \frac{1}{x-x_\nu} = 0 \tag{13}$$

egyenletet.

Tegyük fel, hogy az (x_{i-1}, y_{i-1}) közben $f'(x) > 0$ és ábrázoljuk $f'(x)$-et.[11] (3. ábra). $f(x_{i-1}) = f(x_i) = 0$ azt jelenti, hogy

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{y_{i-1}} f'(x)dx\right| = \left|\int_{y_{i-1}}^{x_i} f'(x)dx\right|. \tag{14}$$

[10] SZ. NAGY GYULA, Jahresbericht d. DMV. 27. (1918), 40—41.

[11] Minthogy y_{i-1} egyszeres zéróhelye $f'(x)$-nek, azért az (y_{i-1}, x_i) közben $f'(x) < 0$.

A LAGUERRE-tétel, mely azt mondja ki, hogy az $\overline{y_{i-1}x_i}$ távolság nagyobb vagy egyenlő, mint az $\overline{x_{i-1}x_i}$ távolság ν-ed része, úgy is fogalmazható, hogy az $\overline{x_{i-1}\, y_{i-1}}$ távolság $\nu-1$-ed részét y_{i-1}-től átmérve nem jutunk túl x_i-n, vagyis

$$\mu = y_{i-1} + \frac{y_{i-1}-x_{i-1}}{\nu-1} \leqq x_i.$$

Területekkel kifejezve

$$\left|\int_{y_{i-1}}^{\mu} f'(x)dx\right| \leqq \left|\int_{y_{i-1}}^{x_i} f'(x)dx\right|$$

vagy — tekintettel (14)-re —

$$\int_{x_{i-1}}^{\mu} f'(x)dx \geqq 0.$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy ez az egyenlőtlenség igaz marad akkor is, ha csak $f'(x)$ zéróhelyeinek valós voltát kívánjuk meg. Ezt tartalmazza a

II. tétel. Legyen a

$$g(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

n-edfokú polinom valamennyi zéróhelye valós és

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \dots \leqq a_n.$$

Tegyük fel, hogy $a_{k-1} \neq a_k$ *és vegyünk fel egy* p *számot oly módon, hogy*

$$a_{k-1} \leqq p < a_k, \text{ illetve a } k = 1 \text{ esetben } p < a_1.$$

Legyen $g(x) > 0$ *a* (p, a_k) *közben. Ezekután minden olyan* q *számra, amely kielégíti az*

$$a_k \leqq q \leqq a_k + \frac{a_k - p}{n}$$

feltételt igaz, hogy

$$\int_p^q g(x)\,dx \geqq 0.$$

Az egyenlőség jele csak a $k=n$, $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=p$, $q=a_n+\frac{a_n-a_{n-1}}{n}$ *esetben áll.*

Ez a tétel a következő módon élesíthető. (Ez megfelel Sz. Nagy Gyula említett Laguerre-tétel általánosításának).

Az

$$\int_p^q g(x)dx \geqq 0$$

egyenlőtlenség igaz marad akkor is, ha q *csak a gyengébb*

$$a_k \leqq q \leqq a_k+\frac{a_k-p}{k}$$

feltételt elégíti ki. Ekkor azonban az egyenlőség a már említett $k=n$, $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=p$, $q=a_n+\frac{a_n-a_{n-1}}{n}$ *eseten kívül a* $k=1$, $a_1=a_2=\cdots=a_n$, $q=a_1+(a_1-p)$, $n=2m+1$ $(m=0, 1, 2,\ldots)$ *esetben is bekövetkezik.*

A következőkben ezt az általánosabb tételt bizonyítjuk.

Mind a $k=n$, $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=p$ mind a $k=1$, $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=a_n$ esetben a tétel egyszerű számítással igazolható. Az általános tételt, hasonlóan az I. tétel bizonyításához — az említett speciális esetek felhasználásával — teljes indukcióval bizonyítjuk.

A tétel igaz $n=1$-re. Feltesszük, hogy igaz n-nél $(n>1)$ kisebbfokú polinomokra.

Jelöljük i-vel az n-edfokú $g(x)$ polinom p-től és a_k-tól különböző zéróhelyeinek számát.

a) Ha $i=0$, akkor a polinom a

$$g(x)=(-1)^{n-k+1}x^{k-1}(x-k)^{n-k+1}$$

alakban írható. Ebben az esetben

$$a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=p=0;\ a_k=a_{k+1}=\cdots=a_n=k;$$
$$k\leqq q\leqq k+1.$$

Ha $n-k+1$ páros, akkor nyilvánvaló, hogy $\int\limits_p^q g(x)dx > 0$.

Ha $n-k+1=1$, vagy $k=1$, akkor a már említett speciális esetekkel van dolgunk.

Ha $n-k+1$ az 1-nél nagyobb páratlan szám és $k>1$, akkor tekintsük a

$$g^\star(x) = -x^{k-1}(x-k)^{n-k-1}$$

$n-2$-edfokú polinomot. A

$$h(x) = g(x) - g^\star(x) = -x^{k-1}(x-k)^{n-k-1}(x-k+1)(x-k-1)$$

polinom a $(0, k-1)$ és $(k, k+1)$ közben pozitív, a $(k-1, k)$ közben negatív. Könnyen belátható, hogy $|h(k+\varepsilon)| > |h(k-\varepsilon)|$, ha $0<\varepsilon<1$. Ebből következik, hogy $\int\limits_0^{k+1} h(x)dx > 0$. Ekkor

$$\int\limits_0^q g(x)dx \geqq \int\limits_0^{k+1} g(x)dx = \int\limits_0^{k+1} g^\star(x)dx + \int\limits_0^{k+1} h(x)dx > \int\limits_0^{k+1} g^\star(x)dx.$$

Feltevésünk szerint ($g^\star(x)$ n-nél alacsonyabb fokú)

$$\int\limits_0^{k+1} g^\star(x)dx \geqq 0$$

s így

$$\int\limits_0^q g(x)dx > 0.$$

b) Ha $i>0$, akkor legyen $a^\star$ egy a p-től és a_k-tól különböző zéróhely.

A $g_1(x)$ polinomot a következőkép definiáljuk:

$$g_1(x) = \frac{g(x)}{x-a^\star}(x-a_k), \quad ha \quad a^\star > a_k$$

és

$$g_1(x) = \frac{g(x)}{x-a^\star}(x-p), \quad ha \quad a^\star < p.$$

Az n-edfokú $g_1(x)$ polinom valamennyi zéróhelye valós és a (p, a_k) közben — éppúgy mint $g(x)$ — pozitív. Belátható, hogy ebben a közben $g_1(x) < g(x)$. Ebből következik, hogy a

$$h_1(x) = g(x) - g_1(x) \not\equiv 0$$

polinom a (p, a_k) közben szintén pozitív. Minthogy $g(x)$-ben és $g_1(x)$-ben x^n együtthatója ugyanaz, azért $h_1(x)$ legfeljebb $n-1$-edfokú. Másrészt $g(x)$ valamennyi zéróhelye $a^\star$-ot kivéve $h_1(x)$-nek is zéróhelye. Ezért $h_1(x)$ pontosan $n-1$-edfokú és valamennyi zéróhelye valós.

Jelöljük $j-1$-gyel a $h_1(x)$ polinom a_k-nál kisebb zéróhelyeinek számát. Nyilvánvaló, hogy $j \leqq k$ és így

$$q \leqq a_k + \frac{a_k - p}{k} \leqq a_k + \frac{a_k - p}{j}.$$

Feltételünk szerint (a $h_1(x)$ polinom n-nél alacsonyabb fokú)

$$\int_p^q h_1(x)\,dx \geqq 0.$$

Ennélfogva

$$\int_p^q g(x)\,dx = \int_p^q g_1(x)\,dx + \int_p^q h_1(x)\,dx \geqq \int_p^q g_1(x)\,dx.$$

A $g_1(x)$ polinomnak azonban már csak $i-1$ számú p-től és a_k-tól különböző zéróhelye van. Ezzel az eljárással megszerkeszthető a

$$g_1(x),\ g_2(x), \ldots,\ g_{-1}(x),\ g_i(x)$$

csupa valós zéróhellyel bíró, a (p, a_k) közben pozitív polinomok olyan sorozata, melyben növekvő index-szel vagy a p, vagy az a_k zéróhely sokszorossága növekszik. A $g_i(x)$ polinomnak tehát már nincsen p- illetve a_k-tól különböző zéróhelye s így erre *a)* alatt már igazoltuk, hogy

$$\int_p^q g_i(x)\,dx \geqq 0. \tag{15}$$

Másrészt a szerkesztésből következik, hogy

$$\int_p^q g(x)\,dx \geqq \int_p^q g_1(x)\,dx \geqq \cdots \geqq \int_p^q g_{i-1}(x)\,dx \geqq \int_p^q g_i(x)\,dx.$$

Ezt (15)-tel egybevetve, adódik, hogy

$$\int_p^q g(x)\,dx \geqq 0.$$

Bebizonyítjuk, hogy az egyenlőség nem következhet be, vagyis, hogy

$$\int_p^q g(x)dx > 0.$$

Ugyanis (15)-ben az egyenlőségi jel csak két esetben állhat fenn:

α) $g_i(x)$-nek az a_k hely n-szeres zéróhelye és n páratlan. Ekkor a $h_i(x) = g_{i-1}(x) - g_i(x)$ polinomnak a_k pontosan $n-1$-szeres zéróhelye. Minthogy $n-1$ ebben az esetben páros, $\int_p^q h_i(x)\,dx > 0$.

β) A p hely $n-1$-szeres, a_k egyszeres zéróhelye $g_i(x)$-nek (tehát $k=n$) és $q = a_k + \frac{a_k - p}{n}\cdot$ Ekkor az $n-1$-edfokú $h_i(x)$ polinomnak p pontosan $n-2$-szeres, a_k egyszeres zéróhelye, s minthogy

$$q = a_k + \frac{a_k - p}{n} < a_k + \frac{a_k - p}{n-1}$$

azért $\int_p^q h_i(x)dx > 0$.

Tehát mind az *α)*, mind a *β)* esetben

$$\int_p^q g(x)dx \geqq \int_p^q g_{i-1}(x)dx = \int_p^q g_i(x)\,dx + \int_p^q h_i(x)dx > \int_p^q g_i(x)\,dx = 0.$$

Ezáltal tételünket teljes általánosságában igazoltuk.

5. §.

A II. tételből a Laguerre-tétel következő általánosítása adódik:

IIa. tétel. *Legyen a ν-edfokú $f(x)$ polinomnak p és q $(p<q)$ két szomszédos valós zéróhelye. Ha $f'(x)$ valamennyi zéróhelye valós és ha a (p, q) közt ν egyenlő részre osztjuk, akkor a két szélső*

$$\left(p, p + \frac{q-p}{\nu}\right) \quad \textit{és} \quad \left(q - \frac{q-p}{\nu}, q\right)$$

nyílt köz egyike sem tartalmazhatja $f'(x)$-nek a (p, q) közbe eső valamennyi zéróhelyét.[12]

Ha tehát $f'(x)$ a (p, q) közben csak egy helyen tűnik el, akkor ez nem eshet a két szélső köz egyikének belsejébe sem.

Ha ugyanis például mind a $\left(q - \frac{q-p}{\nu}, q\right)$ köz belsejébe esnének és a legkisebbet közülük α-val jelöljük, úgy

$$q - \frac{q-p}{\nu} < \alpha < q.$$

Ebből

$$q < \alpha + \frac{\alpha - p}{\nu - 1}.$$

Alkalmazva $f'(x)$-re a II. tételt, adódik, — feltéve, hogy a (p, α) közben $f'(x) > 0$ — hogy

$$\int_p^q f'(x)dx > 0.$$

Ez azonban ellentmond annak, hogy $f(p) = f(q) = 0$.

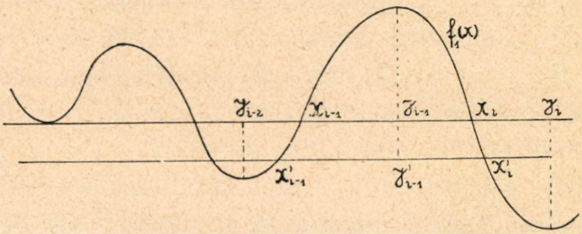
A IIa. tétel alkalmazásaként említjük a következőket:

Legyen az $f_1(x)$ polinom valamennyi zéróhelye valós: $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_\nu$. Az $f_2(x) = f_1(x) + c$ polinomnak lehetnek komplex zéróhelyei, s ezért a Laguerre-tétel $f_2(x)$-re nem mindig alkalmazható. Azonban $f_2'(x)$-nek minden zéróhelye valós.[13] (Ugyanazok, mint az $f_1'(x)$ polinomé: $y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots \leqq y_{\nu-1}$). Ennélfogva a IIa. tétel alkalmazható $f_2(x)$-re. Ennek következménye, hogy ha az $f_1(x)$ görbét egy x tengellyel párhuzamos olyan egyenessel metsszük, amely a görbének mind az (y_{i-2}, y_{i-1}), mind az (y_{i-1}, y_i)-hez tartozó szakaszát metszi, akkor a keletkező

---

[12] Megjegyezzük, hogy e tétel azon élesítése, miszerint $f'(x)$ a $\left[p + \frac{q-p}{\nu}, q - \frac{q-p}{\nu}\right]$ zárt közben legalább egyszer eltűnik, nem érvényes.

[13] Megemlítjük, hogy szerkeszthető olyan $f_2(x)$ polinom is, melynél $f_2'(x)$ valamennyi zéróhelye valós, de $f_2(x) \neq f_1(x) + c$, ahol $f_1(x)$-nek minden zéróhelye valós. Ez a megjegyzés Turán Pál-tól ered.



4. ábra.

(4. ábra) x'_{i-1}, y'_{i-1}, x'_i pontokra is igaz marad[14] a LAGUERRE-féle összefüggés, vagyis

$$\frac{\nu-1}{\nu}(x'_i-x'_{i-1}) \geqq x'_i - y'_{i-1} \geqq \frac{1}{\nu}(x'_i-x'_{i-1}).$$

*

A LAGUERRE-tételnek ismeretesek oly irányú általánosításai, melyekben az összes zéróhelyek valós volta helyett elég azt kikötni, hogy a zéróhelyek bizonyos tartományokon kívül legyenek. Így MONTEL[15] bebizonyította, hogy ha p és q $(p<q)$ a ν-edfokú $f(x)$ polinom két valós zéróhelye és a többi zéróhely közül egy sem esik a p és q pontokban a valós számegyenesre emelt merőlegesek közé, akkor a LAGUERRE-egyenlőtlenség változatlanul fennáll.

Sz. NAGY GYULA[16] ezt és saját tételét tovább általánosítva kimutatta, hogy (említett tételében) elég kikötni, hogy a többi zéróhely közül egy se essék a (p, q) átmérőjű kör belsejébe.

Vizsgálva a IIa. tétel és ezen általánosítások kapcsolatát, megállapíthatjuk, hogy a IIa. tétel nem következménye ezeknek. Ugyanis abból, hogy $f'(x)$ valamennyi zéróhelye valós, nem

---

[14] Ekkor az x'_{i-1} és x'_i helyek $f_2(x)$-nek szomszédos zéróhelyei és $f'_2(x)$ az (x'_{i-1}, x'_i) közben csak az y'_{i-1} $(=y_{i-1})$ helyen tűnik el.

[15] P. MONTEL, Bull. de la Soc. Math. de France. 58. (1930), 119.

[16] SZ. NAGY GYULA: Mat. és Természettud. Értesítő. LIII. (1935), 782 és Acta scientiarum math. Szeged. 8. (1936), 43.

következik, hogy a (p, q) átmérőjű kör belsejében $f(x)$-nek nincs zéróhelye.[17] Eldöntetlen azonban az a kérdés, hogy nem foglaltatik e Sz. NAGY GYULA, illetve MONTEL tételében a IIa. tételnek az a speciális esete, amikor $f'(x)$ a (p, q) közben csak egyszer tűnik el. Más szóval nem következik-e abból, hogy $f'(x)$ valamennyi zéróhelye valós és ezek közül csak egy van a (p, q) köz belsejében, hogy $f(x)$-nek a (p, q) átmérőjű kör belsejében nincs zéróhelye.

6. §.

Legyen a

$$g(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

n-edfokú $(n \geqq 2)$ polinom valamennyi zéróhelye valós és legyen

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \dots \leqq a_n.$$

Legyenek továbbá $g'(x)$ zéróhelyei:

$$b_1 \leqq b_2 \leqq \dots \leqq b_{n-1}. \qquad (a_{k-1} \leqq b_{k-1} \leqq a_k)$$

ERDŐS PÁL[18] bebizonyította, hogy ha $a_{n-1} \neq a_n$, akkor minden n-re

$$\frac{\int\limits_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} g(x)\,dx}{\int\limits_{b_{n-1}}^{a_n} g(x)\,dx} < 4.$$

A 4-es állandó javítható. Az állandó pontos értékét és az egyenlőtlenségnek közbülső zéróhelyekre való kimondását tartalmazza a

---

17 Pl., ha

$$f(x) = x^4 - 8x^2 - 9 = (x-3)(x+3)(x+i)(x-i),$$

akkor

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2).$$

Ebben az esetben $f'(x)$ minden zéróhelye valós és $f(x)$ komplex zéróhelyei a $(-3, 3)$ átmérőjű kör belsejében vannak.

18 Szóbeli közlés alapján. ERDŐS bizonyításának gondolatmenete eltér az e dolgozatban használt bizonyítási módoktól.

III. tétel. *Ha* $a_{k-1} \neq a_k$, *akkor*

$$\frac{1}{C_{n-k+2}} \leqq \frac{\int\limits_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} g(x)\,dx}{\int\limits_{b_{k-1}}^{a_k} g(x)\,dx} \leqq C_k, \tag{16}$$

ahol

$$C_i = \frac{2}{\left(\frac{i}{i-1}\right)^i - 2}. \qquad (i>1)$$

Mivel

$$C_i < C_{i+1} \quad \text{és} \quad \lim_{i\to\infty} C_i = \lim_{i\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{i-1}\right)^i - 2} = \frac{2}{e-2},$$

azért (16)-*ból adódik, hogy minden n-re és k-ra*

$$\frac{e-2}{2} < \frac{\int\limits_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} g(x)\,dx}{\int\limits_{b_{k-1}}^{a_k} g(x)\,dx} < \frac{2}{e-2}. \tag{17}$$

(16)-*ban a jobboldali egyenlőségi jel csak a* $k=n$, $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1}$, *a baloldali egyenlőségi jel pedig csak a* $k=2$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_n$ *esetben érvényes.*

Minthogy $\frac{2}{e-2} = \frac{2}{0{\cdot}71\ldots} < 3$, azért (17) szerint minden n-re és k-ra

$$\frac{1}{3} < \frac{\int\limits_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} g(x)\,dx}{\int\limits_{b_{k-1}}^{a_k} g(x)\,dx} < 3.$$

A (16) egyenlőtlenséget[19] — feltéve, hogy

[19] Éppúgy, mint az említett LAGUERRE-tételnél, itt is elegendő csak a jobboldali egyenlőtlenséggel foglalkozni.

$$az\ (a_{k-1},\, a_k)\ közben\ g(x) > 0 \tag{18}$$

— a

$$T_k(g) = \int_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} g(x)\,dx - C_k \int_{b_{k-1}}^{a_k} g(x)\,dx \leqq 0$$

alakban fogjuk bizonyítani.

Hasonlóan az I. és II. tételek bizonyításához először egyszerű integrálással meggyőződünk arról, hogy a $k=n$, $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}$ esetben $T_k(g)=0$.

A tétel tehát $n=2$-re igaznak tekinthető. Föltéve, hogy a tétel n-nél ($n>2$) kisebb számokra igaz, bebizonyítjuk n-re is annak érvényességét.

a) Ha $k<n$, akkor tekintsük a

$$h(x) = \frac{g(x)}{(x-a_{k-1})(x-a_k)(x-a_n)}(x-b_{k-1})^3$$

n-edfokú polinomot.

Nyilvánvaló, hogy $h'(b_{k-1})=0$.

Bebizonyítjuk, hogy

$$a\ (b_{k-1},\, a_k)\ közben\ h(x) > 0. \tag{19}$$

Ilyen x pontban ugyanis

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{(x-a_{k-1})(x-a_k)(x-a_n)}{(x-b_{k-1})^3} > 0.$$

Ezt egybevetve (18)-cal, adódik (19).

Mivel a b_{k-1} hely $h(x)$-nek háromszoros zéróhelye, azért

$$az\ (a_{k-1},\, b_{k-1})\ közben\ h(x) < 0. \tag{20}$$

A $g(x)$ és $h(x)$ polinomokban x^n együtthatója ugyanaz, s így az

$$l(x) = g(x) - h(x) \not\equiv 0$$

polinom legfeljebb $n-1$-edfokú. Nyilvánvaló, hogy $l'(b_{k-1})=0$, (19) és (20) miatt pedig

$$az\ (a_{k-1},\, b_{k-1})\ közben\ l(x) > g(x)\ és\ a\ (b_{k-1},\, a_k)\ közben\ l(x) < g(x). \tag{21}$$

Bebizonyítjuk, hogy $l(x)$ minden zéróhelye valós. $a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}$ $l(x)$-nek $n-3$ számú valós zéróhelye.

Igaz, hogy

$$l(b_{k-1}) = g(b_{k-1}) > 0. \tag{22}$$

Ha $h(a_k) \neq 0$, akkor (19) miatt

$$l(a_k) = -h(a_k) < 0. \tag{23}$$

Ha $h(a_k) = 0$, akkor az a_k hely $h(x)$-nek legalább eggyel kevesebbszeres zéróhelye, mint $g(x)$-nek. Ebből következik (a (b_{k-1}, a_k) közben $h(x)>0$ és $g(x)>0$) egy olyan $\delta>0$ szám létezése, hogy ha $0<\varepsilon<\delta$, akkor $h(a_k-\varepsilon)>g(a_k-\varepsilon)$, vagyis

$$l(a_k-\varepsilon) < 0. \tag{24}$$

Minthogy azonban ε tetszésszerinti kicsinynek választható, (22)-ből, (23)-ból és (24)-ből következik, hogy a (b_{k-1}, a_k) köz belsejében $l(x)$-nek páratlanszámú valós zéróhelye van. $l(x)$-nek a felsorolt $n-3$ zéróhelyén kívül azonban még legfeljebb két zéróhelye lehet. Ezért pontosan egy olyan η szám van, melyre

$$b_{k-1} < \eta < a_k \quad \text{és} \quad l(\eta) = 0. \tag{25}$$

η-val együtt $l(x)$-nek $n-2$ valós zéróhelyét soroltuk fel, s így $l(x)$-nek akkor is mindegyik zéróhelye valós, ha $n-1$-edfokú.

Az $l(x)$ polinom b_{k-1}-nél kisebb zéróhelyeinek száma legyen $\varkappa-1$. Itt $\varkappa-1>0$, mert $l(x)$ valamennyi zéróhelye valós, $l'(b_{k-1})=0$ és $l(b_{k-1})>0$ [lásd (13)-at]. Jelöljük ezek közül a zéróhelyek közül a legnagyobbat ξ-vel. Könnyen belátható [(18) és (20)], hogy

$$\xi \leqq a_{k-1} \quad \text{és} \quad \varkappa - 1 \leqq k - 1.^{20} \tag{26}$$

Az $l(x)$ polinomnak ξ nagyságra nézve a $\varkappa-1$-edik zéróhelye, η az erre következő zéróhelye. A (ξ, η) közben $l'(x)$ a b_{k-1} helyen tűnik el. Ezért (26)-ból, (21)-ből és (25)-ből következik — tekintettel $C_\varkappa \leqq C_k$-ra, — hogy

---

[20] $\eta, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}$ $l(x)$-nek $n-k$ számú b_{k-1}-nél nagyobb zéróhelye, s minthogy $l(x)$ legfeljebb $n-1$-edfokú, azért $\varkappa-1 \leqq n-1-(n-k) = k-1$.

$$T_\varkappa(l) = \int_{\xi}^{b_{k-1}} l(x)dx - C_\varkappa \int_{b_{k-1}}^{\eta} l(x)\,dx \geqq \int_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} l(x)dx - C_k \int_{b_{k-1}}^{\eta} l(x)\,dx >$$

$$> \int_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} g(x)dx - C_k \int_{b_{k-1}}^{\eta} g(x)dx > \int_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} g(x)dx - C_k \int_{b_{k-1}}^{a_k} g(x)dx = T_k(g).$$

Ha tehát a tétel igaz n-nél kisebb számokra, vagyis, ha $T_\varkappa(l) \leqq 0$, akkor

$$T_k(g) < 0.$$

b) Ha $k=n$, akkor az I. tétel bizonyításánál használt jelöléseket és feltevéseket alkalmazzuk (2. §.). Feltesszük tehát, hogy

$$A = -1,\; a_n = 1,\; b_{n-1} = 0 \quad \text{és} \quad -a_j = a_{n-j+1} \; (1 \leqq j \leqq n-1).$$

Az $i=n-1$ esetben [21] a tétel igaznak tekinthető.

Ha $i<n-1$, akkor ($12a$)-ból következik, hogy (2. ábra)

$$\int_{-\beta}^{0} g_1(x)\,dx \geqq \int_{-\alpha_2}^{0} g_1(x)dx = \int_{-\alpha_2}^{0} g(x)dx - \left[\int_{-\alpha_2}^{-\gamma} h_1(x)dx + \int_{-\gamma}^{0} h_1(x)\,dx\right] >$$

$$> \int_{-\alpha_2}^{0} g(x)dx - \int_{-\gamma}^{0} h_1(x)dx$$

és

$$\int_{0}^{1} g_1(x)dx = \int_{0}^{1} g(x)\,dx - \int_{0}^{1} h_1(x)\,dx.$$

Ezekből az összefüggésekből — tekintettel a $C_{n-1} < C_n$ egyenlőtlenségre — adódik, hogy

$$T_n(g_1) = \int_{-\beta}^{0} g_1(x)dx - C_n \int_{0}^{1} g_1(x)\,dx > \int_{-\alpha_2}^{0} g(x)\,dx - C_n \int_{0}^{1} g(x)dx -$$

$$- \left[\int_{-\gamma}^{0} h_1(x)dx - C_{n-1} \int_{0}^{1} h_1(x)dx\right] = T_n(g) - T_{n-1}(h_1).$$

Ha tehát a tétel igaz n-nél kisebb számokra, vagyis $T_{n-1}(h_1) \leqq 0$, akkor

$$T_n(g_1) > T_n(g).$$

---

[21] i jelöli a $-(n-1)$ zéróhely multiplicitását a $g(x)$ polinomnál.

Az I. tétel bizonyításánál használt gondolatmenetet alkalmazva nyerjük, hogy — ha a tétel igaz n-nél alacsonyabbfokú polinomokra —

$$T_n(g) < 0.$$

Ezáltal a III. tételt teljes egészében igazoltuk.

*

Megemlítjük, hogy a III. tételt nem lehet az 5. § alatt említett MONTEL-, illetve SZ. NAGY GYULA-tételnek megfelelően élesíteni. Másszóval szerkeszthető olyan polinom, melynek p és q $(p<q)$ szomszédos valós zéróhelyei, a többi zéróhelyek nem esnek a p és q pontokban a valós tengelyre emelt merőlegesek közé és amelyre (16) nem érvényes. Példa erre a

$$g(x) = (1-x)\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x^2+5x+\frac{25}{3}\right) =$$

$$= (1-x)\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}+\frac{5}{2\sqrt{3}}\,i\right)\left(x+\frac{5}{2}-\frac{5}{2\sqrt{3}}\,i\right)$$

negyedfokú polinom.[22] Itt $p = -\frac{5}{2}$, $q = 1$. A másik két komplex zéróhely valós része $-\frac{5}{2}$, s így $g(x)$ kielégíti a MONTEL-féle feltételt. $g'(x)$ egyetlen valós zéróhelye 0. Kiszámítható, hogy

$$T_4(g) = \int_{-\frac{5}{2}}^{0} g(x)\,dx - C_4 \int_{0}^{1} g(x)\,dx > 0.$$

Természetesen ez a példa még nem zárja ki, hogy más állandóval ilyen irányú általánosítás nem érvényes.

Így ERDŐS PÁL[23] bebizonyította, hogy ha $g(x)$ zéróhelyeinek valós része — q-t kivéve — nem nagyobb p-nél, akkor

[22] Ez a polinom példa arra is, hogy az I. tétel MONTEL-féle élesítése szintén nem érvényes. Ugyanis kiszámítható, hogy ekkor

$$F(g) = \int_{-\frac{5}{2}}^{2} g(x)\,dx > 0.$$

[23] Szóbeli közlés alapján.

$$\frac{\int\limits_p^b g(x)\,dx}{\int\limits_b^q g(x)\,dx} < 12,$$

ahol $p<b<q$ és $g'(b)=0$.

Igaz marad azonban a (16) *egyenlőtlenség akkor* (e tételt itt csak bizonyítás nélkül közöljük), *ha* $g(x)$ *helyett csak* $g'(x)$ *zéróhelyeinek valós voltát kívánjuk meg és ezenkívül kikötjük, hogy az* (a_{k-1}, a_k) *[illetve a* (p, q)*] közben* $g'(x)$ *csak a* b_{k-1} *helyen tűnjön el.*

7. §.

A III. tétel a 4. §-ban említett Laguerre, illetve Sz. Nagy Gyula-tételhez hasonló alakban is írható:

$$\frac{C_{n-k+2}}{1+C_{n-k+2}}\left|\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} g(x)dx\right| \geqq \left|\int\limits_{b_{k-1}}^{a_k} g(x)\,dx\right| \geqq \frac{1}{1+C_k}\left|\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} g(x)\,dx\right|, \quad (27)$$

illetve minden n-re és k-ra

$$\frac{2}{e}\left|\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} g(x)dx\right| > \left|\int\limits_{b_{k-1}}^{a_k} g(x)dx\right| > \frac{e-2}{e}\left|\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} g(x)\,dx\right|. \quad (28)$$

Legyen mármost a ν-edfokú $f(x)$ polinom differenciálhányadosának valamennyi zéróhelye valós és legyenek ezek

$$y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots \leqq y_{i-1} < y_i \leqq \cdots \leqq y_{\nu-1}$$

és legyen végül z_{i-1} az $f''(x)$-nek az (y_{i-1}, y_i) közbe eső zéróhelye. Sz. Nagy Gyula tétele szerint

$$\frac{\nu-i}{\nu-i+1}(y_i-y_{i-1}) \geqq y_i-z_{i-1} \geqq \frac{1}{i}(y_i-y_{i-1}).$$

A megfelelő függvényértékekre hasonló összefüggést kapunk, ha $f'(x)$-re (27), illetve (28)-at alkalmazzuk:

$$\frac{C_{\nu-i+1}}{1+C_{\nu-i+1}}\left|\int_{y_{i-1}}^{y_i} f'(x)dx\right| \geqq \left|\int_{z_{i-1}}^{y_i} f'(x)dx\right| \geqq \frac{1}{1+C_i}\left|\int_{y_{i-1}}^{y_i} f'(x)dx\right|,$$

azaz

$$\frac{C_{\nu-i+1}}{1+C_{\nu-i+1}}|f(y_i)-f(y_{i-1})| \geqq |f(y_i)-f(z_{i-1})| \geqq$$

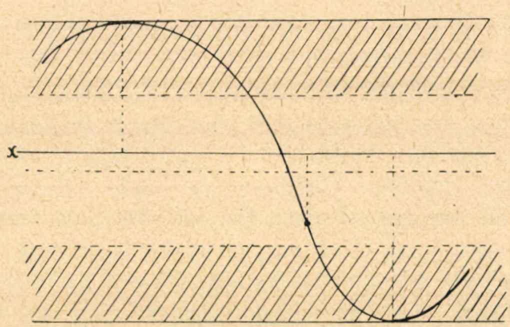
$$\geqq \frac{1}{1+C_i}|f(y_i)-f(y_{i-1})|, \quad (29)$$

illetve minden ν-re és i-re

$$\frac{2}{e}|f(y_i)-f(y_{i-1})| > |f(y_i)-f(z_{i-1})| > \frac{e-2}{e}|f(y_i)-f(y_{i-1})|. \quad (30)$$

Itt $f(z_{i-1})$ az $f(x)$ görbe y_{i-1} és y_i közé eső *inflexiós* pontjának ordinátája.

A (29), *illetve* (30) *egyenlőtlenség tehát az* $f(x)$ *görbe inflexiós pontjainak elhelyezkedésére ad felvilágosítást. E szerint* $\left(\text{tekintettel } \frac{e-2}{e} > \frac{1}{4}\text{-re}\right)$, *ha az* $f(x)$ *polinom — melyről tehát csak azt kell feltenni, hogy differenciálhányadosá-*



5. ábra.

nak valamennyi zéróhelye valós — két egymásra következő olyan pontjában, ahol az első differenciálhányados eltűnik, az érintőket meghúzzuk és az így keletkezett sávot az x *tengellyel párhuzamos egyenesekkel négy egyenlő részre osztjuk, akkor a két pont közt lévő inflexiós pont nem eshet a két szélső sáv egyikébe sem.* (5. ábra.)

Grünwald Tibor.

ÜBER POLYNOME MIT REELLEN NULLSTELLEN.

Es werden Integralsätze über Polynome mit lauter reellen Nullstellen bewiesen. Der Ausgangspunkt ist der folgende SCHUR'sche Satz: Wenn ein Polynom nur reelle Nullstellen hat, so ist der Abstand zwischen der grössten Nullstelle des Polynoms und der grössten Nullstelle des ersten Differentialquotienten nicht grösser, als der Abstand der grössten Nullstellen der ersten und zweiten Differentialquotienten. Wir zeichnen (Fig. 1) den ersten Differentialquotienten und drücken den obigen Satz mit Hilfe der Flächenstücke dieser Kurve aus. Diese Form des SCHUR'schen Satzes führt uns zu folgender Ungleichung:

$$\int_{a_2}^{a_1+(a_1-b_1)} g(x)\,dx \leqq 0.$$

Da bedeutet $g(x)$ ein Polynom mit lauter reellen Nullstellen: $a_1 > a_2 \geqq \geqq a_3 \geqq \cdots \geqq a_n$; b_1 ist die im Intervall (a_2, a_1) liegende Nullstelle des $g'(x)$ und es ist vorausgesetzt, dass in (a_2, a_1) stets $g(x) > 0$ ist. Das Gleichheitszeichen gilt nur im Falle $a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.

Dieser Satz ist keine Folge des SCHUR'schen Satzes, es folgt vielmehr aus ihm eine Verallgemeinerung dieses Satzes. Diese Verallgemeinerung ersetzt — unter gewissen Bedingungen — die Forderung, dass sämtliche Nullstellen des Polynoms reell sind, durch die schwächere Bedingung der Realität aller Nullstellen des ersten Differentialquotienten.

Dann wird dasselbe Verfahren auf den folgenden bekannten LAGUERRE'schen Satz angewendet: Hat ein Polynom n^{ten} Grades nur reelle Nullstellen, und wird das Intervall zweier benachbarten Nullstellen in n gleiche Subintervalle zerlegt, so kann die in dieses Intervall fallende Nullstelle des Differentialquotienten nicht im Innern eines äussersten Subintervalles liegen.

Der so entstehende Integralsatz führt zu einer — der obenerwähnten Verallgemeinerung des SCHUR'schen Satzes ähnlichen — Verschärfung des zum Ausgangspunkt genommenen LAGUERRE'schen Satzes.

Im letzten Teile der Arbeit verallgemeinern wir folgenden Flächenverhältnissatz von P. ERDŐS: Hat das Polynom n^{ten} Grades

$$g(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

nur reelle Nullstellen: $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ und ist $g'(b_{n-1}) = 0$, $a_{n-1} < b_{n-1} < a_n$, so gilt

$$\frac{\int\limits_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} g(x)\,dx}{\int\limits_{b_{n-1}}^{a_n} g(x)\,dx} < 4.$$

Unsere Verallgemeinerung lautet: ist $g'(b_{k-1}) = 0$, $a_{k-1} < b_{k-1} < a_k$, so gilt:

$$\frac{\int\limits_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} g(x)\,dx}{\int\limits_{b_{k-1}}^{a_k} g(x)\,dx} \leqq \frac{2}{\left(\frac{k}{k-1}\right)^k - 2} < \frac{2}{e-2} \;(<3).$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur im Falle $k=n$, $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}$.

Diese Ungleichung führt zu dem folgenden Satz über die Lage der Inflexionspunkte von Polynomen:

Wenn man in zwei aufeinanderfolgenden Punkten, wo der erste Differentialquotient verschwindet, die Tangenten zieht und den zwischen diesen liegenden Streifen durch drei, der x Achse parallel gezogenen Geraden in vier gleiche Streifen teilt, kann der zwischen diesen Punkten liegende Inflexionspunkt nicht in die äussersten Streifen fallen, soferne der Differentialquotient des Polynoms nur reelle Nullstellen hat. (Fig. 5.)

Tibor Grünwald.

BIZONYOS POLINOMOK MAXIMUMÁNAK ALSÓ KORLÁTJÁRÓL.

Bevezetés.

Ismeretes A. MARKOFF[1] következő tétele:

Legyen $f(z)$ tetszőleges n-edfokú polinom, melyre a $-1 \leqq z \leqq 1$ *számközben*

$$|f(z)| \leqq 1; \tag{1}$$

akkor ugyanitt

$$|f'(z)| \leqq n^2, \tag{2}$$

s az egyenlőség csak a $z = \pm 1$ *helyeken állhat fenn.* A szélső értéket szolgáltató polinom $\pm \cos(n \arccos z)$.

A fenti tétel más alakban: ha $f(z)$ n-edfokú polinom, akkor

$$\frac{\max\limits_{-1 \leqq z \leqq 1} |f'(z)|}{\max\limits_{-1 \leqq z \leqq 1} |f(z)|} \leqq n^2. \tag{3}$$

Az intervallum belső pontjaiban S. BERNSTEIN[2] becsülte meg a differenciálhányados értékét: *ha a* $-1 \leqq z \leqq 1$ *számközben* (1) *érvényes, akkor ugyanott:*

$$|f'(z)| \leqq \frac{n}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{4}$$

A fentiekhez hasonlóan kereshetjük a polinomok differenciálhányadosának korlátját, ha az (1) egyenlőtlenség a komplex

---

[1] *Über ein Problem von* D. J. MENDELEJEFF. (Oroszul, német kivonattal.) A szt.-pétervári Akadémia kiadványa. **62** (1889); 1—24.

[2] *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné.* Mém. publ. par la Cl. des Sc. de l'Acad. de Belgique. **4** (1912).

számsík egy tetszőleges ponthalmazára érvényes. Az első eredmény e téren RIESZ M.[3] nevéhez fűződik:

Ha a $|z| \leqq 1$ *kör kerületén* (1) *érvényes, akkor e tartományban*

$$|f'(z)| \leqq n, \tag{5}$$

s az egyenlőség csak az $\alpha.z^n$ *polinomokra áll fenn, hol* $|\alpha|=1$. Vagyis n-edfokú polinomra

$$\frac{\max\limits_{|z|\leqq 1} |f'(z)|}{\max\limits_{|z|\leqq 1} |f(z)|} \leqq n. \tag{6}$$

W. E. SEWELL[4] ellipszisalakú tartományokra általánosította RIESZ tételét: *Ha a* $(-1, 1)$ *és* $(-ai, ai)$ *tengelyű* $(0 \leqq a \leqq 1)$ *ellipszis kerületén* (1) *érvényes, akkor ott*

$$|f'(z)| \leqq \frac{n}{\sqrt{1+a^2-|z|^2}}. \tag{7}$$

SZEGŐ G.[5] korlátos, zárt, JORDAN ívvel határolt M tartományokra terjesztette ki MARKOFF tételét. Szerinte *n-edfokú $f(z)$ polinomokra* (c_1 és c_2 az n-től független állandók, $\delta > 0$ és tetszőleges)

$$\frac{|f'(z_0)|}{\max\limits_{z \varepsilon M} |f(z)|} \leqq c_1(M, z_0).n^\alpha, \tag{8}$$

ha z_0 M-nek határpontja, és M pontjai a z_0-ból húzott két olyan félegyenes közé esnek, melyek egymással $\alpha.\pi$ szöget zárnak be $(0 < \alpha \leqq 2)$. *Továbbá*

$$\frac{|f'(z_0)|}{\max\limits_{z \varepsilon M} |f(z)|} \leqq c_2(M, z_0, \delta).(1+\delta)^n, \tag{9}$$

---

[3] *Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome.* Jahresber. d. deutschen Math. Vereinigung. **23** (1914); 354—368.

[4] *On the polynomal derivate constant for an ellipse.* Amer. Math. Monthly. **44** (1937); 577—578.

[5] *Über einen Satz von* A. MARKOFF. Math. Zeitschrift. **23** (1925); 45—61.

ahol z_0 a sík tetszőleges pontja. SZEGŐ tétele nagyságrendileg pontos.

FEKETE M.[6] kimutatta, hogy azoknak a polinomoknak a gyökei, melyek miatt (9) nem javítható, az M halmazon fekszenek. TURÁN PÁL felvetette azt a kérdést, hogy fordítva mit lehet kimondani azoknak az n-edfokú $f(z)$ polinomoknak a differenciálhányadosáról, melyeknek gyökei az M halmazon fekszenek, s amelyek az M halmaz egy pontjában az 1 értéket felveszik. Ezt a feltételt kielégítő polinomosztályt $E(M)$-mel jelöljük. A kérdés így is megfogalmazható: *létezik-e $E(M)$ polinomjait tekintve*

$$\frac{\max\limits_{z\varepsilon M} |f'(z)|}{\max\limits_{z\varepsilon M} |f(z)|}$$

számára alsó korlát?

TURÁN bebizonyította, hogy ha M_1 a $(-1, +1)$ intervallum, akkor $E(M_1)$ minden n-edfokú $f(z)$ polinomjára van M_1-ben olyan ζ pont, melyben

$$|f'(\zeta)| \geqq \tfrac{1}{6}\sqrt{n}, \tag{10}$$

és ha M_2 halmaz az egységkör, akkor $E(M_2)$ minden $f(z)$ polinomjára van olyan $\zeta\varepsilon M_2$ pont, hogy

$$|f'(\zeta)| \geqq \frac{n}{2}, \tag{11}$$

mely utóbbi nem javítható. Azaz

$$\frac{\max\limits_{-1\leqq z\leqq 1} |f'(z)|}{\max\limits_{-1\leqq z\leqq 1} |f(z)|} \geqq \frac{1}{6}\sqrt{n}, \tag{12}$$

ha $f(z)\varepsilon E(M_1)$, és

$$\frac{\max\limits_{|z|\leqq 1} |f'(z)|}{\max\limits_{|z|\leqq 1} |f(z)|} \geqq \frac{n}{2}, \tag{13}$$

ha $f(z)\varepsilon E(M_2)$.

---

6 *Über den absoluten Betrag von Polynomen, welche auf einer Punktmenge gleichmässig beschränkt sind.* Math. Zeitschrift. **26** (1927); 324—344.

Az 1. §-ban TURÁN (10) alatti eredményét és annak szigoritását találjuk. Bebizonyitjuk, hogy *van olyan*

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

zérus-sorozat, hogy $f(z) \varepsilon E(M_1)$ *esetén bizonyos* $-1 \leqq \zeta \leqq 1$ *pontban*

$$|f'(\zeta)| \geqq \sqrt{\frac{n}{e+\varepsilon_n}}. \tag{14}$$

(14) nem javitható.

A 2. §-ban (10) és (11) általánositását tárgyaljuk. *Legyen* M_3 *tartomány a* SEWELL *tételében szereplő ellipszis. Ha* $f(z) \varepsilon E(M_3)$, *akkor van olyan* $\zeta \varepsilon M_3$, *hogy*

$$|f'(\zeta)| \geqq \max\left(\frac{n.a}{2}, \frac{1}{7}\sqrt{n}\right). \tag{15}$$

A 3. §-ban megvizsgáljuk, hogy a 2. § módszereivel mely tartományokra találhatjuk meg TURÁN problémájának megoldását.

Végül a 4. §-ban az 1. § tételének alkalmazását találjuk ERDŐS PÁL egy problémájával kapcsolatban. Legyen $f(z) \varepsilon E(M_1)$ és legyen $f(z)$ két gyöke közt alulról nézve mindenütt konvex (vagy konkáv), és ez a két gyök α és β. Akkor

$$|\alpha-\beta| \leqq \frac{c_n}{\sqrt{n}}, \tag{16}$$

hol ERDŐS *és* TURÁN *bizonyitása szerint*

$$c_n \leqq 16, \tag{17}$$

míg az itt talált pontos érték szerint

$$\lim_{n=\infty} c_n = \sqrt{2}. \tag{18}$$

1. §.

a) TURÁN PÁL bebizonyitotta a következő tételt: *Ha az n-edfokú* $f(z)$ *polinom összes gyökei a* $(-1, 1)$ *számközben feküsznek és ennek az intervallumnak valamely* a *pontjában*

$$|f(a)| = 1, \tag{19}$$

akkor van olyan $-1 \leqq \zeta \leqq 1$ *pont, ahol*

$$|f'(\zeta)| \geqq \frac{1}{6}\sqrt{n}. \tag{20}$$

Legyenek u. i. az $f(z)$ polinom gyökei $z_1, z_2, \ldots, z_n$, és

$$-1 \leqq z_1 \leqq z_2 \leqq \cdots \leqq z_n \leqq 1. \tag{21}$$

Valós z értékek mellett feltehetjük, hogy $f(z)$ és deriváltjai valósak.

Legyen először $a < z_1$, vagy $a > z_n$, azaz legyen $a - z_i$ előjele minden i-re ugyanaz. Akkor

$$\begin{aligned}|f'(a)| = |f(a)| \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a-z_i}\right| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|a-z_i|} \geqq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \\ = \frac{n}{2} > \frac{\sqrt{n}}{6}.\end{aligned} \tag{22}$$

Legyen másodszor

$$z_i < a < z_{i+1}. \tag{23}$$

A (z_i, z_{i+1}) számközben legyen $|f(z)|$ maximumának helye a, akkor $|f(a)| \geqq 1$, s így vele osztva a differenciálhányados abszolút értéke mindenütt kisebbedik. Feltehetjük tehát, hogy a (z_i, z_{i+1}) számközben

$$|f(z)| \leqq 1. \tag{24}$$

Feltehetjük azt is, hogy az $\left(a - \frac{2}{\sqrt{n}}, a\right)$ számközben

$$|f(z)| \geqq \frac{2}{3}, \tag{25}$$

különben ez intervallum egy β pontjában

$$|f'(\beta)| = \frac{|f(a) - f(z)|}{|a-z|} \geqq \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{6}\sqrt{n}. \tag{26}$$

(23) és (25) alapján látjuk, hogy $z_i < a - \frac{2}{\sqrt{n}} < a < z_{i+1}$.

Feltehetjük, hogy az $\left(a-\frac{2}{\sqrt{n}},\ a\right)$ számköz ζ pontjában

$$|f''(\zeta)| \leqq \frac{1}{12}\, n, \tag{27}$$

különben $|f''(z)|$ e közben állandó előjelű, a maximumhely, tehát

$$f'(a) = 0 \tag{28}$$

és

$$\left|f'\left(a-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right| = \left|\int_{a-\frac{2}{\sqrt{n}}}^{a} f''(z)\,dz\right| = \int_{a-\frac{2}{\sqrt{n}}}^{a} \left|f''(z)\right| dz \geqq \geqq \frac{1}{12}\cdot n\cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{1}{6}\sqrt{n}. \tag{29}$$

Ismeretes, hogy

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-z_i}.$$

Ezt z szerint differenciáljuk a $z=\zeta$ helyen, ahol ζ-t (27) definiálja:

$$\frac{|f(\zeta)f''(\zeta)-f'(\zeta)^2|}{f(\zeta)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\zeta-z_i)^2} \geqq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^2} = \frac{n}{4}. \tag{30}$$

(30)-ból (25), (24) és (27) alapján:

$$f'(\zeta)^2 \geqq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{n}{4} - 1\frac{n}{12} = \frac{n}{36},$$

$$|f'(\zeta)| \geqq \frac{1}{6}. \tag{31}$$

Hasonlóan kimutathatjuk, hogy van olyan $a < \eta \leqq a + \frac{2}{\sqrt{n}}$ pont, melyre $|f'(\eta)| \geqq \frac{1}{6}\sqrt{n}$.

Turán bizonyítását befejeztük. Eredményét a 4. §-ban a következő fogalmazásban használjuk fel: *Essenek az n-edfokú $f(z)$ polinom gyökei a $(-1, +1)$ számközbe és legyen $f'(a)=0$. Akkor vannak olyan ζ és η pontok, hogy*

$$a-\frac{2}{\sqrt{n}} \leqq \zeta < a < \eta \leqq a+\frac{2}{\sqrt{n}};$$

$$\left|f'(\zeta)\right| \geqq \frac{1}{6}\sqrt{n}\cdot\left|f(a)\right| \quad \text{és} \quad \left|f'(\eta)\right| \geqq \frac{1}{6}\sqrt{n}\cdot\left|f(a)\right|.$$

b) TURÁN tétele nagyságrendileg pontos, de a következőkép javitható:

I. tétel. *Essenek az n-edfokú $f(z)$ polinom gyökei a $(-1, +1)$ számközbe és legyen egy $-1 \leqq a \leqq +1$ pontban $|f(a)| = 1$. Akkor létezik olyan $-1 \leqq \zeta \leqq +1$ pont, hogy*
$n = 2, 3$ esetén:

$$|f'(\zeta)| \geqq \frac{n}{2}, \tag{32 a}$$

páros $n \geqq 4$ esetén $(n = 4, 6, 8, \ldots)$:

$$|f'(\zeta)| \geqq \frac{n}{\sqrt{n-1}}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \sqrt{\frac{n}{e}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{32 b}$$

páratlan $n \geqq 5$ esetén $(n = 5, 7, 9, \ldots)$:

$$|f'(\zeta)| \geqq \frac{n^2}{(n-1)\sqrt{n+1}}\left(1-\frac{\sqrt{n+1}}{n-1}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{n-1}{2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{n}{e}} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{32 c}$$

Tételünk nem javítható.

Bizonyitás. Keressük azt a polinomot, mely a tétel feltételeinek megfelel és differenciálhányadosának maximuma a $(-1, +1)$ számközben a lehető legkisebb. Legyen egy tetszőleges n-edfokú polinom, mely a feltételeknek megfelel, $f(z)$. Legyen

$$H_n = \max_{-1 \leqq z \leqq 1} |f'(z)|. \tag{33}$$

Keressük

$$h_n = \min_f H_n \tag{34}$$

értékét. Tételünket nyilván igazoltuk, ha bebizonyítjuk, hogy h_n a (32 *a, b, c*) alatt adott értékekkel egyenlő.

Vizsgáljuk meg, hogy H_n minek a függvénye! Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$f(a)=1. \tag{35}$$

Legyenek $f(z)=0$ egyenlet gyökei $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ahol

$$-1 \leqq z_1 \leqq z_2 \leqq \cdots \leqq z_n \leqq +1. \tag{36}$$

A polinom alakja tehát

$$f(z)=\frac{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)}{(a-z_1)(a-z_2)\ldots(a-z_n)}. \tag{37}$$

Keressük tehát

$$h_n = \min H_n(a;\, z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

értékét, hol H_n-t (33) határozza meg. A minimum létezése WEIERSTRASS tételéből következik.

Először be fogjuk bizonyítani, hogy H_n kisebbíthető, kivéve azokat az eseteket, mikor mindegyik gyök abszolút értéke 1, azaz a h_n minimumot szolgáltató polinom esetén

$$|z_i|=1 \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{38}$$

Azután a megmaradt véges számú polinom közül kiválasztjuk azt, amelyik a minimumot szolgáltatja.

Feltehetjük, hogy $|f(a)|$ az $|f(z)|$ maximuma a $(-1, 1)$ számközben, különben ezzel osztva H_n értéke kisebbedik. TURÁN bizonyításához hasonlóan különválasztjuk az $|a|=1$ és $|a|\neq 1$ esetet.

Legyen először $|a|=1$. Ekkor (22) alapján $|f'(a)|\geqq \frac{n}{2}$. Viszont az $\left(\frac{1+z}{2}\right)^n$ polinom a feltételeket kielégíti és erre H_n értéke $\frac{n}{2}$. Ezt az esetet tehát képviselheti a fenti polinom, mely (38)-nak is megfelel.

Azzal az esettel kell tehát foglalkoznunk, amikor létezik olyan $i \geqq 2$, melyre

$$z_{i-1} < a < z_i.$$

Az $|f(a)|$ abszolút maximum ilyenkor helyi maximum is, tehát

$$f'(a)=0. \tag{39}$$

Turán tételének a bizonyitásánál láttuk, hogy $|f'(z)|$ az a hely környezetében nagy értéket vesz fel, míg az a helyen (39) szerint értéke zérus. Tehát a-tól jobbra és balra $|f'(z)|$ a $(-1, 1)$ intervallumban bizonyos maximumig növekszik. Legyen a-tól pl. balra ζ ennek a maximumnak a helye $(-1 \leq \zeta < 1)$. Változtassuk meg az $f(z)$ polinomot $f_1(z)$-re úgy, hogy valamelyik belső z_k gyök helyett z'_k-t, a helyett a'-t írunk és $f_1(a')$-vel osztunk. Itt a' az $|f_1(z)|$ maximumának helye a (z_{i-1}, z_i) számközben, s ezáltal egyértelműen meg van határozva. U. i. (39) fennáll: $f_1'(a') = 0$ s Rolle tételével egyszerűen beláthatjuk, hogy ha a polinom gyökei valósak, bármely két gyöke közt a differenciálhányados egyszer és csak egyszer tűnik el. Legyen $|f_1'(z)|$-nek az a' helytől balra eső első maximuma a $(-1, 1)$ közben $|f_1'(\zeta')|$. Be fogjuk bizonyitani, hogy, amennyiben egyáltalán van $f(z)$-nek belső gyöke, létezik olyan k, melyre

$$|f_1'(\zeta')| < |f'(\zeta)|, \text{ ha } |z_k'-a| > |z_k-a|, \qquad (40)$$

azaz, ha z_k az a helytől távolodik. Tegyük fel egy pillanatra, hogy (40) már igazolva van. Távolítsuk el az a helytől balra és jobbra a lehető legmesszebb az összes gyököket, azaz vigyük a -1 és $+1$ pontokba, miáltal az $f_m(z)$ polinomot kapjuk. Ez a (38) alatti tulajdonsággal és a tétel feltételeivel rendelkezik és (40) alapján

$$|f_m'(\zeta^{(m)})| < |f'(\zeta)|. \qquad (41)$$

$|f_m'(\zeta^{(m)})|$ pedig $|f_m'(z)|$ maximuma a $(-1, a^{(m)})$ számközben, amit könnyű belátni. Ha a balra szó helyett jobbra szót írunk, a fenti gondolatmenet érvényben marad, ismét $f_m(z)$ polinomhoz jutunk, de most az $(a^{(m)}, 1)$ számköz fog szerepelni. Így $|f_m'(z)|$ maximuma a $(-1, 1)$ számközben kisebb $|f'(z)|$ maximumánál, (40)-nel tehát (38)-at is igazoljuk. (40)-et pedig bebizonyítottuk, ha megmutatjuk, hogy amennyiben van belső gyök, akkor van köztük olyan, melyre

$$\frac{d\,|f'(\zeta)|}{dz_k} \begin{cases} > 0 & \text{ha } z_k < a \\ < 0 & \text{ha } z_k > a \end{cases} \qquad (42)$$

egyenlőtlenség érvényes. E célból kiszámítjuk a $\frac{d|f'(\zeta)|}{dz}$ értéket, mely létezik, mert $f'(\zeta) \neq 0$. Ha a polinom z_k gyökét megváltoztatom, az a és a ζ pont helye is változik, tehát

$$\frac{d|f'(\zeta)|}{dz_k} = \frac{\partial |f'(\zeta)|}{\partial z_k} + \frac{\partial |f'(\zeta)|}{\partial a} \cdot \frac{da}{dz_k} + \frac{\partial f'(\zeta)}{\partial \zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz_k}. \tag{43}$$

A két utolsó tagról kimutatjuk, hogy zérus. $\frac{da}{dz_k}$ véges érték, mert a polinom gyökével deriváltjának a gyöke differenciálhatóan változik. Továbbá

$$f'(\zeta) = \frac{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)\dots(\zeta - z_n)}{(a - z_1)(a - z_2)\dots(a - z_n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\zeta - z_i}, \tag{44}$$

és így

$$\left| \frac{\partial |f'(\zeta)|}{\partial a} \right| = |f'(\zeta)| \cdot |f'(a)| = 0 \tag{45}$$

a (39) egyenlet felhasználásával.

Ha $-1 < \zeta < 1$, $|f'(\zeta)|$ helyi maximum, tehát

$$f''(\zeta) = 0. \tag{46}$$

$\frac{d\zeta}{dz_k}$ a fentiekhez hasonlóan létezik és

$$\left| \frac{\partial |f'(\zeta)|}{\partial \zeta} \right| = |f''(\zeta)| = 0. \tag{47}$$

Ha $|\zeta| = 1$, akkor $d\zeta = 0$ $f''(z)$ gyökeinek azonos elrendeződése folytán, amit könnyű igazolni. Ha pedig $d\zeta = 0$, akkor (43)-ban az utolsó tag nem szerepel.

Hátra van $\frac{\partial |f'(\zeta)|}{\partial z_k}$ kiszámítása. Tekintve, hogy $f'(\zeta) \neq 0$ esetén

$$\frac{1}{|f'(\zeta)|} \cdot \frac{\partial |f'(\zeta)|}{\partial z_k} = \frac{1}{f'(\zeta)} \cdot \frac{\partial f'(\zeta)}{\partial z_k},$$

tehát

$$\frac{d|f'(\zeta)|}{dz_k} = \frac{\partial |f'(\zeta)|}{\partial z_k} =$$

$$= |f'(\zeta)| \left[\frac{1}{a - z_k} - \frac{1}{\zeta - z_k} + \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z_k)^2 f'(\zeta)} \right]. \tag{48}$$

Ezeknek a számításoknak a birtokában (42)-t röviden igazolhatjuk. Legyen

$$h(z_k) = \frac{1}{a-z_k} - \frac{1}{\zeta - z_k} + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_k)^2 f'(\zeta)}. \tag{49}$$

Erről kell kimutatnunk, hogy megfelelő előjelű. Legyen $z_k < a$.

Ha a (49) alatti kifejezést z_k függvényeként fogjuk fel, látjuk, hogy a $z_k = a$ helyen előjelet vált, mert ott az $\frac{1}{a-z_k}$ tag dominál. Kérdés, hogy hol vált még $h(z_k)$ előjelet? Rövid átalakítással

$$h(z_k) = \frac{1}{(\zeta - z_k)^2}\left(\frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)} + (\zeta - a)\frac{\zeta - z_k}{a - z_k}\right). \tag{50}$$

Innen látjuk, hogy $h(z_k)$ az a helyen kívül csak egy pontban, az x_0-sal jelzett pontban változtat előjelet. Ha $x_0 > a$, $h(z_k)$ nem változtat előjelet a $(-1, a)$ közben, tehát mindenütt pozitív, mert az a pont közelében az intervallum szélén pozitív. Ilyenkor az összes $z_i < a$ gyökre igaz (40). Ha pedig $x_0 < a$, akkor minden az (x_0, a) intervallumba eső gyök megfelel (40)-nek. Az összes többi gyökre $h(z_k) < 0$. Ha tehát az (x_0, a) közbe nem esne gyöke $f(z)$-nek, akkor minden k-ra $h(z_k) < 0$ lenne, tehát

$$0 < \sum_{k=1}^{n} h(z_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a-z_k} - \frac{1}{\zeta - z_k} + \frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)}\cdot\frac{1}{(\zeta - z_k)^2}\right) =$$
$$= \frac{f'(a)}{f(a)} - \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} + \frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)}\cdot\frac{f'(\zeta)^2 - f(\zeta)f''(\zeta)}{f(\zeta)^2} = 0,$$

ha $|\zeta| \neq 1$, (39) és (43) alapján. Ez ellenmondás. $|\zeta| \neq 1$ esetén tehát van olyan gyök, mely a-nál kisebb és (40)-nek megfelel. Ha $|\zeta| = 1$, lineáris helyettesítéssel elérhetjük, hogy $z_1 = -1$, $z_n = +1$ legyen, s közben a differenciálhányados kisebbedik. Feltehetjük tehát, hogy ilyenkor $f(\zeta) = 0$, viszont $f'(\zeta) \neq 0$, tehát azt kell igazolnunk, hogy $a > z_k$ esetén:

$$\frac{1}{a-z_k} - \frac{1}{\zeta - z_k} > 0,$$

ami $\zeta = -1 < z_k$ esetén evidens, $\zeta = +1$ esetén könnyen igazolható, mert $a - z_k < 1 - z_k$.

$z_k > a$ esetén a bizonyítás analog. Ilyenkor azt kell igazolnunk, hogy van olyan $1 > z_k > a$, melyre $h(z_k) < 0$.

(40)-et és vele (38)-at tehát igazoltuk. Azok a polinomok tehát, amelyek h_n értéket szolgáltathatják, (38), (37) és (39) alapján:

$$f_k(z) = \frac{n^n}{2^n k^k (n-k)^{n-k}} (1-z)^k (1+z)^{n-k}. \qquad (51)$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, n)$$

Az $f_k(z)$ és $f_{n-k}(z)$ polinomok egymás tükörképei, elégséges, tehát a $k \leqq \frac{n}{2}$ esetekkel foglalkoznunk. Jelöljük az (51)-ből (33) alapján adódó értéket $H_n(k)$-val, akkor $H_n(0) = \frac{n}{2}$, s $H_n(1) \geqq \geqq \frac{n}{2}$, tehát $n = 2$, 3 esetén $h_n = \frac{n}{2}$, ami éppen (32 a).

$k \geqq 2$ esetén $|f_k'(z)|$ két maximumot vesz fel a $(-1, 1)$ számközben, jelöljük ezeket $H_n'(k)$ és $H_n''(k)$-val. De $H_n'(k) = H_n''(n-k)$ és

$$H_n'(k) =$$
$$= \frac{n^2}{2\sqrt{(n-1)k(n-k)}} \left(1 - \sqrt{\frac{n-k}{k(n-1)}}\right)^{k-1} \left(1 + \sqrt{\frac{k}{(n-k)(n-1)}}\right)^{n-k-1}.$$

Páros n esetén eljárásunk a következő: nyilván

$$H_n(k) \geqq \sqrt{H_n'(k) H_n''(k)} =$$
$$= \frac{n}{2} \sqrt{\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{k(n-k)} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n-k}\right)^{n-k-1}}.$$

De

$$\frac{1}{k(n-k)} \geqq \frac{4}{n^2},$$

és ha vizsgáljuk a $g(k) = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n-k}\right)^{n-k-1}$ függvényt a $\left(2, \frac{n}{2}\right)$ intervallumban, ott $g'(k) < 0$, tehát

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n-k}\right)^{n-k-1} \geqq \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-2}.$$

Vagyis

$$H_n(k) \geqq \sqrt{\frac{n^n(n-2)^{n-2}}{(n-1)^{n-1}n^{n-2}}} = \frac{n}{\sqrt{n-1}}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-2}{2}} =$$
$$= H_n\left(\frac{n}{2}\right).$$

(32 b) tehát be van bizonyítva, ha $n \geqq 4$ esetén

$$H_n(0) \geqq H_n\left(\frac{n}{2}\right),$$

vagyis ha

$$\frac{n}{2} \geqq \frac{n}{\sqrt{n-1}}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-2}{2}},$$

ami igaz.

(32 c) igazolása hasonlóan, de jóval bonyolultabb számítás alapján történhet. Be lehet bizonyítani, hogy $\frac{dH_n'(k)}{dk} < 0$, ha $k \geqq 2$, és hogy $H_n'\left(\frac{n-1}{2}\right) > H_n''\left(\frac{n-1}{2}\right)$. Ezek igazolása nem szükséges, így az I. tétel bizonyítását befejeztük.

2. §.

$a)$ Tekintsük a komplex számsík azon ellipszisét, melynek nagytengelye a $(-1, +1)$, kistengelye a $(-ai, ai)$ intervallum $(0 \leqq a \leqq 1)$. Legyen ezen ellipszis belső és határpontjainak összessége: $\mathcal{E}$ és kerületének egy pontja z_0. Akkor érvényes a következő

II. tétel. *Ha $f(z)$ n-edfokú polinom gyökei $\mathcal{E}$ zárt tartományba esnek, akkor*

$$|f'(z_0)| \geqq \frac{n.a}{2\sqrt{1+a^2-|z_0|^2}}|f(z_0)| \geqq \frac{n.a}{2}|f(z_0)|. \qquad (52)$$

A bizonyításban az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$f(z_0) = 1.$$

Két bizonyítást is adunk.

Vizsgáljuk a

$$z(\zeta) = e^{i\varphi}\left(\frac{1+a}{2}\zeta + \frac{1-a}{2}\cdot\frac{1}{\zeta}\right) \qquad (53)$$

függvényt. Ez a $|\zeta|=1$ egységkört $\mathcal{E}$ kerületére képezi le és ott

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = \sqrt{1+a^2-|z|^2}, \tag{54}$$

amiket egyszerű számítással igazolhatunk. A $g(\zeta)=f(z(\zeta))$ függvényt fogjuk az egységkörön vizsgálni. (52) és (54) alapján azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$|g'(\zeta_0)| \geqq \frac{n.a}{2},$$

hol ζ_0 az egységkörön a z_0-nak megfelelő pont. (53)-ban válasszuk meg φ-t úgy, hogy $\zeta_0=1$ legyen. (53) alapján

$$g(\zeta) = \frac{c_{-n}}{\zeta^n}+\cdots+\frac{c_{-1}}{\zeta}+c_0+c_1\zeta+\cdots+c_n\zeta^n,$$

tehát $g(\zeta)\zeta^n$ egy $2n$-edfokú polinom. Gyökei páronként adódnak a

$$z_k = e^{i\varphi}\left(\frac{1+a}{2}\zeta+\frac{1-a}{2}\cdot\frac{1}{\zeta}\right) \tag{55}$$
$$(k=1,2,\ldots,n)$$

másodfokú egyenletből, hol z_k az $f(z)=0$ egyenlet gyöke. Jelöljük $f(\zeta)=0$ gyökeit páronként ζ'_k és ζ''_k-val, akkor

$$\zeta'_k+\zeta''_k = \frac{2z_k}{e^{i\varphi}(1+a)};\quad \zeta'_k\zeta''_k = \frac{1-a}{1+a}, \tag{56}$$

tehát

$$(g(\zeta)\zeta^n)'_{\zeta=1} = g'(1)+n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-\zeta'_k}+\frac{1}{1-\zeta''_k}\right) =$$
$$= n + a\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-e^{-i\varphi}z_k},$$

vagyis

$$|g'(1)| \geqq a\cdot\sum_{k=1}^{n} R\left(\frac{1}{1-e^{-i\varphi}z_k}\right) \geqq a\cdot\frac{n}{2},$$ [7]

mert $z_k\varepsilon\mathcal{E}$, és így $|z_k|\leqq 1$, $R\left(\dfrac{1}{1-e^{-i\varphi}z_k}\right)\geqq\dfrac{1}{2}$.

[7] $R(z)$ jelenti z valós részét.

Ezzel a II. tétel igazolását befejeztük. $a=1$, vagyis kör esetén TURÁN (10) alatti eredménye következik tételünkből. TURÁN bizonyitása inkább a következő második bizonyitáshoz hasonlit.

b) $f(z_0)=1$ esetén:

$$\left|f'(z_0)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-z_k}\right| \geqq \frac{n.a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+a^2-|z_0|^2}},$$

ha megfelelően választott φ mellett $k=1, 2,\ldots, n$-re:

$$R\left(\frac{e^{i\varphi}}{z_0-z_k}\right) \geqq \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+a^2-|z_0|^2}}. \tag{57}$$

Legyen φ a z_0 pontban $\mathcal{E}$-hez húzott normális és a valós tengely pozitív iránya által bezárt szög. Ez esetben (57) baloldala nem negatív, tehát kisebbedik, ha z_k a z_k-z_0 vektor irányában mozog, elégséges tehát arra az esetre szorítkoznunk, amikor z_k az $\mathcal{E}$ kerületére esik. Így feltehetjük, hogy

$$z_0=\cos\alpha+ia\sin\alpha,\quad z_k=\cos\beta+ia\sin\beta. \tag{58}$$

Az ellipszis paraméteres előállitásából viszont következik, hogy a z_0 pontban húzott normális iránytangense:

$$tg\varphi=\frac{tg\alpha}{a}. \tag{59}$$

Így $R\left(\frac{a+ib}{c+id}\right)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$ alapján (58) és (59)-cel:

$$R\left(\frac{e^{i\varphi}}{z_0-z_k}\right)=\frac{\cos\varphi(\cos\alpha-\cos\beta)+a\sin\varphi(\sin\alpha-\sin\beta)}{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+a^2(\sin\alpha-\sin\beta)^2}=$$

$$=\frac{\cos\varphi}{2\cos\alpha\left(a^2+(1-a^2)\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\geqq\frac{\cos\varphi}{2\cos\alpha}.$$

Viszont (59) alapján $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+tg^2\alpha}}$, tehát

$$R\left(\frac{e^{i\varphi}}{z_0-z_k}\right)\geqq\frac{a}{2\sqrt{a^2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=\frac{a}{2\sqrt{1+a^2-|z_0|^2}},$$

s ez éppen (57).

c) Végezetül be fogjuk bizonyítani, hogy a II. tétel $a \geqq \frac{2}{7\sqrt{n}}$ esetekben nagyságrendileg pontos. Ha $a \leqq \frac{2}{7\sqrt{n}}$, az 1. § bizonyításaihoz hasonlóan kimutathatjuk, hogy, ha $f(z)\varepsilon E(\mathcal{E})$,

$$\frac{\max\limits_{z\varepsilon\mathcal{E}} |f'(z)|}{\max\limits_{z\varepsilon\mathcal{E}} |f(z)|} \geqq \frac{1}{7}\sqrt{n},$$

s ez nagyságrendileg szintén pontos. Ezt tartalmazza a III. tétel:

III. tétel. *Ha $f(z)$ n-edfokú polinom gyökei $\mathcal{E}$ belsejébe esnek és $\mathcal{E}$ egy z_0 pontjában $|f(z_0)| = 1$, akkor $\mathcal{E}$ kerületén van egy olyan ζ pont, hogy*

$$|f'(\zeta)| \geqq \max\left(\frac{n.a}{2}, \frac{1}{7}\sqrt{n}\right) \geqq \frac{n.a}{4} + \frac{1}{14}\sqrt{n}; \tag{60}$$

viszont van olyan $f_1(z)$ polinom, melyre a fenti feltételek teljesülnek és $\mathcal{E}$ pontjaira

$$|f'(z)| \leqq \frac{3}{\sqrt{(1+a^2)^3}}(na+\sqrt{n}), \tag{61}$$

ami a (60) alatt adott érték 42-szeresénél kisebb.

(60) bizonyítása az előzők alapján történhet, felhasználva azt, hogy reguláris függvény a komplex tartomány szélén veszi fel abszolút értékének maximumát. z_0-ról tehát feltehetjük, hogy $\mathcal{E}$ kerületére esik.

(61) igazolásánál is elégséges $|f'(z)|$-ét $\mathcal{E}$ kerületén vizsgálni. Legyen először $n=2m$ páros és $m \geqq 2$. Ha $n=2$, 3, akkor $\left(\frac{1+z}{2}\right)^n$ is megfelel. Legyen

$$f_1(z) = \frac{(1-z^2)^m}{(1+a^2)^m}, \tag{62}$$

mely a feltételeket kielégíti. $\mathcal{E}$ kerületén

$$|f_1'(z)| < \frac{na}{1+a^2} + \sqrt{\frac{2}{e}}\frac{\sqrt{n}}{1+a^2} < \frac{na}{1+a^2} + \frac{\sqrt{n}}{1+a^2}, \tag{63}$$

ami (61)-nél többet mond ki.

Páratlan $n=2m+1$ esetén pedig legyen

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{(1-z^2)^m(1+z)}{(1+a^2)^m\sqrt{1+a^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(\frac{(1-z^2)^m}{(1+a^2)^m}+\frac{z(1-z^2)^m}{(1+a^2)^m}\right). \end{aligned} \tag{64}$$

Ilyenkor

$$|f_2'(z)| < \frac{3}{\sqrt{(1+a^2)^3}}\left(na+\sqrt{n}\right).$$

3. §.

Megvizsgáljuk TURÁN problémájával kapcsolatban azt a kérdést, hogy a 2. § *b)*-ben használt módszert milyen M tartományokra alkalmazhatjuk.

Vizsgáljuk meg e célból, hogy mi a 2. § *b)*-nek a gondolatmenete. Legyen adva valamely tetszőleges zárt M tartomány és egy n-edfokú $f(z)$ polinom, melynek gyökei az M tartományba esnek és ennek bizonyos z_0 kerületi pontjában legyen $|f(z_0)|=1$. Akkor

$$\left|f'(z_0)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i-z_0}\right|.$$

Az $\dfrac{1}{z_i-z_0}$ komplex számokat vektoroknak is tekinthetjük. A 2. §. *b)* leglényegesebb gondolata, hogy van egy olyan irány, hogy a fenti vektoroknak ebbe az irányba eső vetületei egyirányúak és egy c_1 pozitív állandónál nagyobbak. Ha ezt igazoljuk, bebizonyítottuk, hogy

$$|f'(z_0)| \geqq c_1 \cdot n, \tag{65}$$

hol $c_1>0$ csak az M tartománytól függ.

Ahhoz, hogy a fenti értelmű irány M minden kerületi pontjában létezzék, szükséges, hogy M konvex tartomány vagy konvex görbe legyen. Ez az irány a z_0 pontban húzott normális vagy csúcs esetén bármely a csúcson és a tartományon áthaladó egyenes. Ha ezzel az iránnyal $z_0 - z$ az α szöget zárja be, $\frac{1}{z-z_0}$ vetülete $\frac{\cos\alpha}{|z-z_0|}$. Keressük tehát z_0 kerületi pontokra

$$\min_{z_0,\, z \varepsilon M} \frac{\cos\alpha}{|z-z_0|} = c_2$$

értéket. Azt kell igazolnunk, hogy $c_2 > 0$. Konvex tartományokra $c_2 \geqq 0$. A $c_2 = 0$ esetben $\cos\alpha = 0$, azaz z a z_0 pontban húzott érintő egy pontja. Tegyük fel, hogy M határvonala sehol sem egyenes, akkor $\cos\alpha = 0$ esetén $z \to z_0$ az M határgörbéjén. Ha ϱ a z_0 pontbeli görbületi kör sugara, ϱ értelmezése alapján $\frac{|z_0 - z|}{\frac{\pi}{2} - \alpha} \to \varrho$, tehát $\frac{\cos\alpha}{|z_0 - z|} \to \frac{1}{\varrho}$. Ha tehát M konvex tartomány határgörbéjén a csúcsoktól eltekintve a görbületi sugár létezik és korlátos, érvényes rá (65).

A fenti feltételeket szűkíthetjük. Tegyük fel, hogy M konvex tartományra (65) nem érvényes, azaz van $E(M)$-nek n-edfokú polinomja, melyre $z \varepsilon M$ esetén

$$|f'(z)| \leqq c.n,$$

hol $c > 0$ tetszőleges, $n > N(c)$.

Tegyük fel, hogy M tartományban $|f(z)|$ maximumát a z_0 pontban veszi fel. Ha z_0 pontban a görbületi sugár létezik, és véges, vagy a z_0 pont olyan csúcs, hogy az érintők hajlásszögének különbsége π-nél kisebb, akkor az előzők szerint van olyan n-től független c' szám, hogy

$$|f'(z_0)| \geqq c'.n.$$

Legyen z_0 pontban M határa egyenes és

$$f(z) = a \prod_{i=1}^{n} (z - z_i),$$

akkor $|f(z_0)|$ maximum volta miatt $z \varepsilon M$-re:

$$\prod_{i=1}^{n} |z_0 - z_i| \geqq \prod_{i=1}^{n} |z - z_i|. \tag{66}$$

Az M tartományról feltételezzük, hogy van olyan z pontja, melyre $|z - z_0| > 1$, viszont minden z pontjára $|z - z_0| < 1 + \delta_1$, hol $\delta_1 > 0$-ról később diszponálunk. Ezt az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, mert ha egy tartományra (65) érvényes, akkor ez megfelelően változtatott c-vel a hozzá hasonlókra is igaz, amit lineáris transzformációval igazolhatunk.

Legyen a nagyobb, mint a z_0 pontban M-et határoló egyenesdarab hossza. Ha (65) M-re nem érvényes, akkor legalább $\frac{n}{\delta_2}$ gyök a $|z_0 - z| \leqq a$ kör belsejébe esik, különben $n\left(1 - \frac{1}{\delta_2}\right)$ gyökre a fentebb tárgyalt $\frac{\cos a}{|z - z_0|} > c''$ és így

$$|f'(z_0)| \geqq c''\left(1 - \frac{1}{\delta_2}\right)n.$$

$\delta_2 > 1$ értékről is később határozunk.

Az $\frac{n}{\delta_2}$ gyökre $|z_0 - z_i| < a$, a többire $|z_0 - z_i| < 1 + \delta_1$, tehát

$$\prod_{i=1}^{n} |z_0 - z_i| < a^{\frac{n}{\delta_2}} (1 + \delta_1)^{\frac{n}{\delta_2}(\delta_2 - 1)}. \tag{67}$$

Ismeretes Csebisev[8] következő tétele:

Legyen $g(z)$ n-edfokú polinom, melyben z^n együtthatója 1. Akkor a függvény abszolút értékének maximuma a $-1 \leqq z \leqq 1$ intervallumban legalább is $\frac{1}{2^{n-1}}$, azaz

$$\max_{-1 \leqq z \leqq 1} |g(z)| \geqq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Az egyenlőség csak a Csebisev polinomra áll fenn.

A $|z_0 - z| = 1$ kör sugarai közt van olyan, mely M-ben fekszik, ennek tehát van olyan z_0-tól különböző z pontja, hogy

$$\prod_{i=1}^{n} |z - z_i| \geqq 4^{1-n}. \tag{68}$$

---

[8] G. Faber: *Über Tschebyscheffsche Polynome.* Journal für die reine und angew. Math. **150** (1919); 79—106.

(66), (67) és (68) alapján

$$a^{\frac{n}{\delta_2}}(1+\delta_1)^{\frac{n}{\delta_2}(\delta_2-1)} \geqq 4^{1-n},$$

vagy

$$a \geqq \frac{\sqrt[n]{4^{\delta_2}}}{4^{\delta_2}(1+\delta_1)^{\delta_2-1}} = A. \tag{69}$$

Ha $a > 4^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}$, megválasztható hozzá $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 1$ úgy, hogy $a < A$ legyen. Ez (69)-cel ellenmondás. Tehát a fentieket összefoglalva, mivel itt csak azt használtuk fel, hogy van 1-nél hosszabb köz a halmazban, érvényes a következő:

IV. tétel. *Legyen adva egy korlátos, zárt* JORDAN-*ívekkel határolt konvex M ponthalmaz, mely*

vagy egy olyan görbével azonos, melynek görbülete létezik és sehol sem zérus,

vagy egy olyan tartománnyal, melynek határa sehol sem olyan egyenesdarab, melynek hossza az átmérő negyedrésze lenne, vagy annál is hosszabb.

Essenek az $f(z)$ n-edfokú polinom gyökei M tartományba és vegye fel ott $|f(z)|$ maximumát a z_0 pontban.

Akkor létezik olyan $c > 0$ csupán M-től függő állandó, hogy

$$|f'(z_0)| > c.n.\,|f(z_0)|.$$

Ezt az eredményt FABER[8] tételével tehetjük pontosabbá. Ha $z = \psi(x)$ az $|x| = r$ kört M határgörbéjébe viszi át, $x = \infty$-t pedig nyujtás nélkül a kezdőpontba, előfordulhat olyan egyenesdarab, melynek hossza: $a < \frac{1}{r}$.

4. §.

a) ERDŐS PÁL a következő kérdést vizsgálta:

Legyenek $f(z)$ n-edfokú polinom gyökei $z_1, z_2, \ldots, z_n$, és

$$-1 \leqq z_1 \leqq z_2 \leqq \cdots \leqq z_n \leqq 1.$$

Legyen a polinom a (z_{i-1}, z_i) közben mindenütt alulról nézve konvex (konkáv). Kérdés, hogy mit tudunk akkor a két gyök távolságáról kimondani.

ERDŐS és tőle függetlenül TURÁN kimutatta, hogy a fenti feltételek mellett

$$z_i - z_{i-1} \leqq \frac{16}{\sqrt{n}}. \tag{70}$$

Bizonyításunk a következő: Legyen $f'(z) = 0$ egyenletnek a (z_{i-1}, z_i) közbe eső gyöke a. Akkor TURÁN tétele szerint (1. § a.) van olyan ζ pont, hogy

$$0 < a - \zeta \leqq \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \text{és} \quad |f'(\zeta)| \geqq \frac{1}{6}\sqrt{n}\,|f(a)|. \tag{71}$$

Viszont a konvexitás azt jelenti, hogy $|f'(z)|$ monoton csökken z_{i-1} és a közt, tehát ha $z_{i-1} \leqq z \leqq \zeta$:

$$|f'(z)| \geqq \frac{1}{6}\sqrt{n} \cdot |f(a)|.$$

De

$$|f(\zeta) - f(z_{i-1})| = |f(\zeta)| = \left|\int_{z_{i-1}}^{\zeta} f'(z)\,dz\right| = \int_{z_{i-1}}^{\zeta} |f'(z)|\,dz \geqq$$

$$\geqq (\zeta - z_{i-1}) \cdot \frac{1}{6}\sqrt{n} . |f(a)|,$$

másrészt $|f(\zeta)| \leqq |f(a)|$, tehát

$$\zeta - z_{i-1} \leqq \frac{6}{\sqrt{n}}. \tag{72}$$

(71) és (72) alapján

$$a - z_{i-1} \leqq \frac{8}{\sqrt{n}},$$

hasonlóan $z_i - a \leqq \frac{8}{\sqrt{n}}$, tehát

$$z_i - z_{i-1} \leqq \frac{16}{\sqrt{n}}. \qquad \text{Q. e. d.}$$

b) Az előbbi tétel javítható. Ebben az irányban elért pontos eredmény a következő:

V. tétel. *Az előző feltételek mellett*

a) páros n esetén

$$z_i - z_{i-1} \leqq \frac{2}{\sqrt{2n-3}}, \tag{73 a}$$

b) páratlan $n \geqq 3$ esetén

$$z_i - z_{i-1} \leqq \frac{2}{\sqrt{2n-3}} \cdot \frac{\sqrt{n^2-2n}}{n-1}. \tag{73 b}$$

A tétel nem javítható.

Bizonyításunk előtt egy segédtétel helyességét mutatjuk ki.

Segédtétel. Legyenek $f(z) = 0$ n-edfokú egyenlet gyökei: $z_1 \leqq z_2 \leqq \cdots \leqq z_n$, $f''(z) = 0$ gyökei pedig $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{n-2}$. Ezek nyilván $z_1, z_2, \ldots z_n$ függvényei, azaz

$$x_i = x_i(z_1, z_2, \ldots, z_n). \tag{74}$$

Kimutatjuk, hogy

$$\frac{n-2}{n} \geqq \frac{dx_i}{dz_k} \geqq 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n-2 \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{75}$$

és

$$\frac{dx_i}{dz_k} = \frac{2}{(x_1 - z_k)^2 f'''(x_i)} \left(\frac{f(x_i)}{x_i - z_k} - f'(x_i) \right). \tag{76}$$

Bizonyítás. Először (75)-öt igazoljuk. Ha bebizonyítjuk, hogy

$$\frac{dx_i}{dz_k} \geqq 0, \tag{77}$$

akkor (75) igaz, mert a polinomok együtthatói és gyökei közt fennálló összefüggés alapján

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \frac{n}{n-2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2}),$$

honnan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{dz_k} = \frac{n-2}{n}. \tag{78}$$

(78) baloldalán csupa nem-negatív tag áll, tehát bármelyik tag kisebb az összegnél.

(77) pedig azt mondja ki, hogy ha a polinom egyik gyökét megváltoztatom, a második differenciálhányados bármelyik gyöke szintén abba az irányba mozdul el. Nyilván elég ezt azzal a változtatással igazolni, hogy a második differenciálhányados helyett az elsőt vesszük. Az első differenciálhányados gyökeit

a $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-z_i} = 0$ egyenlet szolgáltatja. Ebben egy z_i megváltozik. De $\frac{1}{z-z_i}$ a z_i változót tekintve monoton növekvő függvény, s ebből már következik, hogy $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-z_i} = 0$ gyöke z_i elmozdulásának irányába mozdul el. Természetes, hogy ez a gondolatmenet csak akkor érvényes, ha minden gyök valós.

(76) igazolása egyszerű számítás alapján történhet.

Ezek után áttérünk tételünk bizonyítására. Keresni fogjuk azt az n-edfokú polinomot, mely a feltételeknek megfelel és a lehető leghosszabb olyan (z_{i-1}, z_i) közzel rendelkezik, hol a polinom alulról nézve konvex, vagyis $f''(z) \geqq 0$.

Először azt bizonyítjuk be, hogy abba az intervallumba nem eshet a polinomnak gyöke, ahol konvex alulról nézve. Legyen u. i. az intervallum (z_i, z_k), akkor azt állítjuk, hogy $f''(z) > 0$, ha $z_i < z < z_k$. Ha u. i. egy helyen $f''(\zeta) = 0$, ott kétszeres gyök van legalább. Viszont $f(z)$ minden gyöke valós, tehát $f'(z)$-nek bármely két gyöke közé esik $f(z)$-nek gyöke, k-szoros gyök helyén $f(z)$-nek $k+1$-szeres gyöke van. Így ha ζ az $f''(z)$ legkisebb gyöke a (z_i, z_k) köz belsejében, $f(\zeta) = 0$ lesz és $f'(\zeta) = 0$. De $f(z_i) = f(\zeta) = 0$ miatt Rolle tételével $f'(z)$ eltűnik a $z_i < \eta < \zeta$ helyen, $f'(\eta) = f'(\zeta) = 0$ miatt pedig $f''(\xi) = 0$, hol $\eta < \xi < \zeta$. De ez ellenmondásban van azzal, hogy $f''(z)$-nek nincs gyöke a (z_i, ζ) közben. E miatt z_i és z_k közé nem esik $f''(z)$-nek és így $f(z)$-nek sem gyöke, maguk a z_i és z_k helyek nem lehetnek többszörös gyökök, mert különben Rolle tétele alapján $f''(z)$-nek is volna gyöke z_i és z_k között. i és k egymás után következő két szám, jelöljük $i-1$, i-vel.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ alulról nézve konvex a (z_{i-1}, z_i) közben és vizsgáljuk meg, hogy ez az intervallum mikor nagyítható. Nyilván, ha $f(z)$ gyökeit úgy tudjuk változtatni, hogy $z_i - z_{i-1}$ nagyobbodik és $f''(z) \neq 0$, ha $z_{i-1} < z < z_i$. Kimutathatjuk először, hogy fenti értelmű változás létezik, kivéve azt az esetet, mikor minden gyök z_{i-1}, z_i kivételével a -1 és $+1$

pontokba esik, továbbá $f''(z_{i-1}) = 0$ (kivéve ha $i = 2$, mikor $z_1 = -1$) és $f''(z_i) = 0$ (kivéve, ha $i = n$, amikor $z_n = 1$).

Legyen először $i = 2$. Lineáris transzformációval elérhetjük, hogy $z_1 = -1$, $z_n = 1$ legyen, s közben (z_1, z_2) nem kisebbedik a konvexitás is megmarad, tehát $z_2 \leqq x_1$. Vigyük az összes gyököket: $z_3, z_4, \ldots, z_n$-t a $+1$ pontba, (77) alapján x_1 növekedni fog, a konvexitás megmarad, $z_2 \leqq x_1$ lesz. Ezután z_2-t addig növeljük, míg $z_2 = x_1$ nem lesz, miáltal (z_1, z_2) nyilván nagyobbodik. Polinomunk most már megfelel az előző bekezdésben kitűzött célnak. $i = n$ esetén az eljárás analóg.

Ezután tegyük fel, hogy $3 \leqq i \leqq n-1$. Be fogjuk először bizonyitani, hogy a

$$z_{i-1} = x_{i-2}, \quad z_i = x_{i-1} \tag{79}$$

esetet kivéve az intervallum növelhető. Az intervallumba nem esik gyök, s igy feltehetjük Rolle tételének segitségével, hogy

$$x_{i-2} \leqq z_{i-1} < z_i \leqq x_{i-1}.$$

Ha mindkét oldalon az egyenlőtlenség áll fenn, akkor z_{i-1}-et kisebbithetjük, míg valahol az egyenlőség be nem következik. Ha pedig pl.

$$x_{i-2} = z_{i-1} < z_i < x_{i-1}, \tag{80}$$

akkor a z_{i+1} gyököt kisebbitjük, ezáltal (77) miatt x_{i-2} is kisebbedik, tehát az előbbi eset fog bekövetkezni és az intervallum növelhető.

Tegyük fel, hogy legalább két különböző olyan hely van z_{i-1} és z_i-t kivéve $(-1, +1)$ belsejében, hol $f(z)$ eltűnik. Akkor ezeknek a gyököknek megfelelő eltolásával elérhetjük, hogy (80) fennálljon, azaz a (z_{i-1}, z_i) közt növelhetjük. Jelöljük u. i. a és b-vel $f(z)$ két ilyen gyökét. Ezeket a gyököket mindkét irányban mozgathatjuk. Végezzünk az a gyökkel c-szer akkora elmozdulást, mint a b-vel, hol c-ről később diszponálunk, akkor (76)-tal

$$\frac{dx_{i-2}}{da} = -\frac{2f'(x_{i-2})}{f'''(x_{i-2})}\left\{\frac{c}{(x_{i-2}-a)^2} + \frac{1}{(x_{i-2}-b)^2}\right\}$$

$$\frac{dx_{i-1}}{da} = -\frac{2f'(x_{i-1})}{f'''(x_{i-1})}\left\{\frac{c}{(x_{i-1}-a)^2} + \frac{1}{(x_{i-1}-b)^2}\right\}$$

Nyilván megválasztható c értéke úgy, hogy $\frac{dx_{i-2}}{da}$ és $\frac{dx_{i-1}}{da}$ különböző előjelű legyen. U. i. $\frac{dx_{i-2}}{dz_k} > 0$ miatt $-\frac{2f'(x_{i-2})}{f'''(x_{i-2})} > 0$, ugyanígy $-\frac{2f'(x_{i-1})}{f'''(x_{i-1})} > 0$. Így ha c a $\left(-\frac{(x_{i-1}-a)^2}{(x_{i-1}-b)^2}, -\frac{(x_{i-2}-a)^2}{(x_{i-2}-b)^2}\right)$ számközbe esik, a két kifejezés ellenkező előjelű. Ez az intervallum nem zérus hosszúságú. a-t megfelelő irányba mozgatva tehát (80) esetre jutnánk. Azaz a (z_{i-1}, z_i) számköz növelhető lenne.

Feltehetjük tehát, hogy a polinom a $(-1, +1)$ számköz belsejében legfeljebb három helyen tűnik el. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ezek a helyek: $z_{i-1} < z_i < z_{i+1}$. Ha $i+1 = n$, ismét elérhetjük a lineáris transzformáció felhasználásával, hogy $z_n = +1$ legyen, s közben (z_{i-1}, z_i) növekszik. Részcélunkat tehát ekkor elértük. $i \leqq n-2$ esetén pedig eljárásunk az előbbihez analóg.

Tehát bebizonyitottuk, hogy feladatunkkal kapcsolatban elégséges azokat a polinomokat vizsgálni, melyek alakja:

$$f'(z) = (z+1)(z-a)(z-1)^{n-2},$$

ahol

$$f''(a) = 0; \quad -1 \leqq a \leqq 1, \tag{81}$$

és

$$f(z) = (z+1)^{k-1}(z-a)(z-b)(z+1)^{n-k-1}; \quad (k=2, 3, \ldots, n-2),$$

ahol

$$f''(a) = f''(b) = 0; \quad -1 < a < b < 1. \tag{82}$$

(81)-ben a konvex intervallum hossza:

$$1 + a = \frac{2}{n-1},$$

(82)-ben pedig

$$(b-a)^2 = \frac{4}{2n-3} - \frac{4(2k-n)^2}{(n-1)^2(2n-3)}.$$

Utóbbi akkor a legnagyobb, ha $(2k-n)^2$ a legkisebb. Innen a tétel már egyszerűen kiolvasható.

Erőd János.

ÜBER DIE UNTERE GRENZE DES MAXIMUMS VON GEWISSEN POLYNOMEN.

Sei $f(z)$ ein Polynom vom Grade n, das alle Wurzeln in dem Gebiete M hat. Als Umkehrung bekannter Fragestellungen von A. MARKOFF,[1] M. RIESZ,[3] SZEGŐ[5] stellte TURÁN das Problem auf: was können wir über

$$\min \frac{\max\limits_{z \varepsilon M} |f'(z)|}{\max\limits_{z \varepsilon M} |f(z)|} = h_n(M)$$

aussagen?

Vorliegende Arbeit enthält den Beweis folgender Sätze.

§ 1. Ist M_1 das Intervall (—1, 1), so ist

$$h_n(M_1) = \sqrt{\frac{n}{e}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

§ 2. Ist M_2 die Ellipse mit den Achsen (—1, 1); $(-ai, ai)$, so gilt:

$$h_n(M_2) \geqq \frac{na}{2} \quad \text{und} \quad h_n(M_2) \geqq \frac{1}{7}\sqrt{n}.$$

§ 3. Ist M ein beliebiges konvexes Gebiet, dessen Grenze keine gerade Strecke enthält, so ist

$$h_n(M) \geqq c \, . \, n,$$

wo c eine positive Konstante bedeutet, die nur von M, nicht aber von n abhängt.

§ 4. Sei $f(z)$ ein Polynom vom Grade n, das alle Wurzeln in dem Intervall (—1, 1) hat. Ist $f(z)$ zwischen den beiden Nullstellen a und b konvex, so gilt für gerades n:

$$|a-b| \leqq \frac{2}{\sqrt{2n-3}},$$

und für ungerades n:

$$|a-b| \leqq \frac{2}{\sqrt{2n-3}} \cdot \frac{\sqrt{n^2-2n}}{n-1}.$$

Dieser Satz spricht die Verschärfung eines Resultates von ERDŐS und TURÁN aus.

Johann Erőd.

A RUBIDIUM-FÉM ENERGIASPEKTRUMÁRÓL.

1. Bevezetés.

Ebben a dolgozatban célunk, hogy a rubidium-fém valencia-elektronjainak legalsó energiasávját, annak helyzetét és szélességét, mint a rácsállandó függvényét empirikus állandók figyelembevétele nélkül, teljesen elméleti úton határozzuk meg. Először az általános elméletet fogjuk ismertetni, majd rátérünk a rubidium-fém tárgyalására, meghatározzuk a valencia-elektronok legalsó energiasávjának alsó és felső szélét mint a rácsállandó függvényét, melyek különbsége adja meg a sáv szélességét. Ezekután meghatározzuk még a szabad atom ionizációs energiáját, továbbá a rubidium-fém fontosabb állandóit, úgymint a rácsenergiáját, szublimációs energiáját és rácsállandóját. Mielőtt a rubidium-fém tárgyalására rátérnénk, összefoglaljuk a szilárd testek újabb elméletének fejlődését.

A szilárd testeket régebben két csoportra osztották: megkülönböztettek vezetőket és szigetelőket. Ismereteink bővülésével ez a felosztás szűknek bizonyult és ma — mint ismeretes — a szilárd testeket öt csoportba osztjuk: 1. Fémek. 2. Félvezetők. 3. Ionkristályok. 4. Valenciakristályok. 5. Molekulakristályok (Van der Waals-kristályok). A régebbi elmélet — amig az elektront nem ismerték — fenomenológiai módszerekkel, főként a termodinamika segítségével állapitott meg összefüggéseket a szilárd test mérhető állandói között. Ettől a fejlődési szakasztól elkülönül a mindenütt különböző modellekből kiinduló klasszikus vagy modellszerű elmélet.

A klasszikus elmélet 1900-ban a fémek elméletével kezdődik, melyet DRUDE[1] és LORENTZ[2] dolgoztak ki. A fémet pozitív ionokból és valenciaelektron-gázból gondolták felépítve, amelyre alkalmazták a MAXWELL-BOLTZMANN-féle statisztikát. Ez az elmélet értelmezni tudta a termikus emissziót s a WIEDEMANN-FRANZ-féle törvényt, de nem adott helyes eredményt a fajhőre és a fémek ellenállásának a hőmérséklettől való függésére.

Az ionkristályok elmélete 1910-ben MADELUNG[3] első értekezésével indult meg és BORN,[4] MADELUNG és munkatársaik fejlesztették tovább. Az ionkristály szerintük pozitív és negatív ionokból van felépítve. Az összetartó erőket az ionok közt működő elektrosztatikus vonzóerők szolgáltatják. A taszító erők potenciáljára B/r^n alakú kifejezést vezettek be, ahol $n > 1$, r a rácsállandó, a B és n parametereket csak a tapasztalat segítségével lehetett meghatározni.* Az elmélet jelentékeny eredménye volt, hogy az ionkristályok egyes állandóit egymással kapcsolatba lehetett hozni. Így például sikerült levezetni, hogy a kompresszibilitás a rácsállandó negyedik hatványával arányos, továbbá sikerült az ionkristályok rácsenergiáját, szublimációs hőjét, más tapasztalati állandók segítségével meghatározni. Másrészről ezen elmélet nagy hiánya az volt, hogy a taszító erőket sehogyan sem lehetett az elméletből levezetni. Ezek felvétele az elméletbe egy idegen, ad hoc, feltevés volt és ezért az elmélet nem volt egységes.

A szilárd testek másik három csoportjának klasszikus elmélete, néhány kevéssé kielégítő próbálkozástól eltekintve, nem is alakult ki. Míg itt az elmélet nem tudott tovább jutni, addig más tekintetben is kiderült, hogy klasszikus alapon a szilárd testek elmélete nem építhető fel. Így már a szilárd testek specifikus hőjének, főképp a hőmérséklettől való függésének értelmezése szükségessé tette a kvantum-elmélet szempontjai-

---

[1] P. DRUDE, Ann. d. Phys. 1, 556, 1900; 3, 369, 1900.
[2] H. A. LORENTZ, Proc. Amsterdam Akad. 7, 438, 1905.
[3] E. MADELUNG, Phys. Zs. 11, 898, 1910.
[4] Részletes irodalom található a M. BORN és M. GÖPPERT-MAYER, Handb. d. Phys. XXIV/2. Berlin, 1933.
* Az n sokkal nagyobb mint 1, pl. $NaCl$-nál $n = 9$.

nak bevezetését.[5] Végül is a kvantum-elmélet hozta meg azt az egységes alapot, melyen a szilárd testek fentemlített összes osztályainak egységes elmélete felépíthető volt.

Először a fémek elmélete fejlődött ki Pauli és Sommerfeld [6] vizsgálatai alapján. Sommerfeld a régi Drude-Lorentz-féle elméletből indult ki, de az abban alkalmazott Boltzmann-féle statisztikát a Fermi-Dirac-féle statisztikával helyettesítette. A szabad elektron és szabad úthossz fogalmát ugyanolyan értelemben használja, mint Drude és Lorentz. Sommerfeld ki tudta mutatni, hogy a modern elméletben eltűnik a klasszikus elmélet minden nehézsége. Ezzel kijelölte az útat a további fejlődés számára. A további fejlődés folyamán a szabad elektron fogalmát kellett tisztázni abban az esetben, ha az elektronok egy periodikus erőtérben mozognak, mint a fémkristályoknál. Ezt Bloch és Brillouin [7] tették meg, akik a hullámmechanika módszereinek alkalmazását vezették be a fémek tárgyalására.

Az új elmélet nyomán Bloch,[8] Peierls és Nordheim kifejtették az elektromos ellenállás behatóbb elméletét. Wigner [9] és Seitz pedig egy módszert dolgoztak ki, mellyel értelmezni lehetett egyszerűbb felépítésű fémek kötését. A gondolat a következő: a fémek semleges atómokból vannak felépítve, ezek egymáshoz való közelítésével a valenciaelektronok potenciális energiája a szabad atoméhoz képest csökken, mert mindig növekvő valószínűséggel minden valenciaelektron az ion vonzáskörébe jut. A kinetikus energia (melynek jelentős része Fermi-energia) a közeledéssel nő, kis távolságoknál igen nagy mértékben. A kötés úgy jön létre, hogy a potenciális és a kineti-

---

[5] A. Einstein, Ann. d. Phys. 22, 180, 1907. P. Debye Ann. d. Phys. 39, 789, 1912.

[6] W. Pauli, Zs. f. Phys. 41, 81, 1927. A Sommerfeld Zs. f. Phys. 47, 1, 1928.

[7] F. Bloch, Zs. f. Phys. 52, 555, 1929; Brillouin Quantenstatistik. Berlin 1931.

[8] Lásd H. Fröhlich, «Elektronentheorie d. Metalle», Struktur u. Eigensch. d. Materie XVIII. Berlin 1936.

[9] Wigner és Seitz, Phys. Rev. 43, 804, 1933.

kus energia összege, mint az elemi gömb sugarának függvénye egy meghatározott rádiusnál (rácsállandónál) minimumot mutat. A fémek kötésének értelmezésére Gombás[10] egy statisztikai módszert dolgozott ki, melynek a minket érdeklő részére még rátérünk. Ennek a módszernek a segítségével egyrészt szintén értelmezni lehet a fémek kötését, másrészt pedig az egyszerűbb fémek, alkali és földalkali fémek állandóit a tapasztalattal jó egyezésben lehet meghatározni.

A Pauli-Sommerfeld elméletből hatalmas elmélet fejlődött ki, amely ma már nemcsak a fémek, hanem az összes szilárd testek kvantummechanikáját magábafoglalja. Az elmélet kiinduló pontja a Schrödinger-egyenlet:

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-E_p)\psi = 0.$$

A feladat a sajátfüggvénynek ψ-nek és az energia-parameternek E-nek a meghatározása ama feltétel mellett, hogy $\frac{\Delta\psi}{\psi}$-nek rácsperiodicitásúnak kell lenni. Az elmélet azt mutatja, hogy míg az egyszerűbb Pauli-Sommerfeld elméletben bármilyen energia-állapot meg volt engedve, itt a helyzet egészen más. Az energia csak bizonyos intervallumokban változhat folytonosan, vagyis az energiaspektrum sávokból áll és ezek ismerete az elméletben nagyon lényeges. Ugyanis az elméletből egyszerű módon adódott, hogy a vezetőknél a valenciaelektronok legalsó energiasávjában az állapotok nincsenek mind betöltve, vagy pedig a legmélyebb sávot követő sáv azt részben fedi.

Ha pedig a valenciaelektronok legmélyebb energiasávja teljesen be van töltve és a közvetlen magasabb sáv ettől relatív messze fekszik, akkor az anyag szigetelő.

A félvezetők annyiban különböznek a szigetelőktől, hogy a betöltött és az azt követő közvetlen magasabb üres energiasávok közti energiaköz kicsi.

---

[10] Gombás, Zs. f. Phys. 94, 473, 1935; 95, 687, 1935; 99, 729, 1936; 100, 599, 1936; 104, 81, 1936; 104, 592, 1937.

A fentebb említett szigetelők csoportjába tartoznak az ionkristályok, valencia-kristályok és molekula-kristályok. Mindegyikre általánosan jellemző, hogy a valenciaelektron legmélyebb sávja teljesen be van töltve és a közvetlen magasabb sáv ettől elég messze fekszik.

Amint látható, az egész elméletben az energia spektrum ismerete alapvető, belőle a szilárd testek csaknem minden tulajdonsága kiolvasható.

A spektrumok meghatározására több közelítő módszer kínálkozik. Az általános elmélet eléggé ki van dolgozva. Igen sok problémát kvalitative meg tudunk oldani, de hiányos még az általános elméletnek konkrét példákra való alkalmazása és azok jellemző adatainak numerikus kiszámítása.

2. A módszer.

A következőkben rátérünk annak a módszernek az ismertetésére, amellyel a *Rb*-fém valenciaelektronjainak legalsó energiasávszélességét mint a rácsállandó függvényét meghatároztuk.

Mint az általános elméletből következik, az alkali-fémek esetében fennálló többtest-problémát jó közelítésben redukálni lehet egytest-problémára, és elegendő az elemi cellára szorítkozni. Az elemi cellát jó közelítésben helyettesíteni lehet egy vele egyenlő térfogatú gömbbel,[11] ami a számítások keresztülvitelét lehetővé teszi.

A valenciaelektronok energiasávjának alsó szélét[12] és ezen állapotnak megfelelő sajátfüggvényt ψ_1-et a valenciaelektron SCHRÖDINGER-egyenletéből nyerjük a következő határfeltétel mellett:

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r}\right)_{r=R} = 0, \tag{1}$$

ahol r a magtól való távolság, R az elemi gömb sugara.

Az energiasáv felső szélét és a sajátfüggvényt[13] ψ_2-t ebben

---

[11] E. WIGNER és F. SEITZ l. c.
[12] H. FRÖLICH l. c.
[13] H. FRÖLICH l. c.

az állapotban ugyanazon SCHRÖDINGER-egyenletből nyerjük a következő határfeltétellel:

$$(\psi_2)_{r=R} = 0. \tag{2}$$

Az energiasáv szélessége a megfelelő sajátértékek különbségéből adódik.

Mivel a jelen problémánál a SCHRÖDINGER-féle egyenlet exakt megoldása nagy matematikai nehézségekbe ütközne, azért egy megfelelő közelítő módszert alkalmazunk, mely GOMBÁStól származik.

GOMBÁS a fémek kötésének értelmezésére kifejtett módszeréből[14] kiindulva egy analitikai módszert dolgozott ki, melynek segítségével aránylag egyszerűen lehet az alkali-fémek valenciaelektronjainak legmélyebb energiasávját meghatározni. Ez az eljárás a variációs módszeren alapszik és mint GOMBÁS a kálium[15] esetében kimutatta, jó közelítést ad.

Az energiaértékek sajátfüggvényeinek a variációs módszerrel való meghatározásánál az orthogonalitási feltételeket, valamint a PAULI-elvet, mely szerint pl. *Rb* esetében a valenciaelektron alapállapota egy 5 *s* állapot, azáltal vesszük figyelembe, hogy a valenciaelektronok SCHRÖDINGER-féle energiakifejezéséhez hozzáadjuk az ion elektron-felhőjének statisztikailag számított kinetikus energiaváltozását, vagyis a FERMI-féle nullaponti energia megváltozását, amely azáltal jön létre, hogy a lezárt héjú alkali-ionhoz hozzávesszük a valenciaelektront. Ugyanis a FERMI-féle nullaponti energia a PAULI-elv következménye és így a PAULI-elv és az orthogonalitási feltételek, ha az ion lezárt elektronhéjjal rendelkezik, jó közelítésben helyettesíthetők ezzel az energiaváltozással, melyet a következő módon határozhatunk meg. Legyen az ion elektronsűrűsége ν, a valenciaelektronok sűrűsége $\varrho = \psi_i \psi_i^*$. Ha feltesszük, hogy a sűrűségek egyszerűen szuperponálódnak, akkor a kinetikus energia megváltozása

[14] GOMBÁS l. c.

[15] GOMBÁS, Zs. f. Phys. 111, 195, 1938.

$$
\begin{aligned}
W_F &= a \int_\tau [(\nu + \varrho)^{\frac{5}{3}} - (\nu^{\frac{5}{3}} + \varrho^{\frac{5}{3}})]\, d\tau, \\
a &= \frac{3\pi^2}{10} \cdot \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \varepsilon^2 . a_H,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

ahol $d\tau$ a térfogati elem, a_H, az első hidrogén rádiusz, ε a pozitiv elemi töltés ν ismertnek tekinthető, mert például a HARTREE-tabellákból meghatározható, ϱ-t egyelőre szintén tekintsük ismertnek.

A (3) kifejezést a számítás egyszerűsítése miatt át kell alakitani, ami a következő módon történik: meghatározzuk az r_0 rádiuszt, amelyre

$$\nu(r_0) = \varrho(r_0); \tag{4}$$

ezáltal a teret két részre osztottuk, az egyik τ_1, ahol $\nu > \varrho$ a másik τ_2, ahol $\nu < \varrho$. A (3) kifejezést mindkét térrészben sorbafejtjük és a sorbafejtésben a magasabbrendű kicsiny tagokat elhanyagoljuk, akkor

$$W_F = \frac{5}{3} a \int_{\tau_1} \nu^{\frac{2}{3}} \varrho\, d\tau - a \int_{\tau_1} \varrho^{\frac{5}{3}} d\tau + \frac{5}{3} a \int_{\tau_2} \nu \varrho^{\frac{2}{3}} d\tau - a \int_{\tau_2} \nu^{\frac{5}{3}} d\tau. \tag{5}$$

Ha a jobboldalon az első integrált kiterjesztjük az egész térfogatra, vagyis $\tau_1 + \tau_2 = \tau$-ra és az így hozzáadott tagot ismét levonjuk, akkor

$$W_F =$$
$$= \frac{5}{3} a \int_{\tau} \nu^{\frac{2}{3}} \varrho\, d\tau - \frac{5}{3} a \int_{\tau_2} \nu^{\frac{2}{3}} \varrho\, d\tau - a \int_{\tau_1} \varrho^{\frac{5}{3}} d\tau + \frac{5}{3} a \int_{\tau_2} \nu \varrho^{\frac{2}{3}} d\tau - a \int_{\tau_2} \nu^{\frac{5}{3}} d\tau. \tag{6}$$

Ebben a kifejezésben csak a jobboldal első tagja játszik lényeges szerepet, a többiek ehhez képest kicsinyek. Ez az első tag pedig úgy fogható fel, mintha a valenciaelektron olyan erőtérben volna, melynek potenciálja $-\frac{5}{3} a \nu^{\frac{2}{3}}$. Tehát a PAULI-elvet első közelítésben azáltal lehet figyelembe venni, hogy az ion elektrosztatikus potenciáljához χ-hez ezt a potenciált hozzávesszük, vagyis a következő potenciált vezetjük be

$$
\begin{aligned}
V &= \chi - \frac{5}{3} \frac{a}{\varepsilon} \nu^{\frac{2}{3}} = \chi - \varkappa (\Delta \chi)^{\frac{2}{3}}, \\
\varkappa &= \frac{5a}{3(4\pi)^{\frac{2}{3}} \varepsilon^{\frac{5}{3}}},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ahol $4\pi\varepsilon\nu = \Delta\chi$. Ha a Schrödinger-féle energia-kifejezésből ezzel a potenciállal a variációs módszer segítségével E_1-et és E_2-et, továbbá ψ_1 és ψ_2-t meghatároztuk, akkor ezeket az energiákat még korrigáljuk a (6) alatti kifejezés további tagjaival, úgyhogy végeredményben az energiasáv alsó és felső szélére nyerjük:

$$B_i = E_i + \eta_i, \tag{8}$$

ahol

$$\eta_i = -\frac{3}{5}\,\alpha\int\limits_{\tau_2} \nu_i^{\frac{2}{3}}\varrho_i d\tau - \alpha\int\limits_{\tau_1} \varrho_i^{\frac{5}{3}} d\tau + \frac{5}{3}\,\alpha\int\limits_{\tau_2} \nu_i \varrho_i^{\frac{2}{3}} d\tau - \alpha\int\limits_{\tau_2} \nu^{\frac{5}{3}} d\tau, \tag{9}$$

$$\underset{(i=1,\,2)}{\varrho_i = \psi_i\psi_i^{\star}}. \tag{9a}$$

B_1 a valenciaelektron legmélyebb energiaállapotának alsó széle, B_2 pedig a felső széle. A sáv szélessége

$$B = B_2 - B_1. \tag{10}$$

B_1 és B_2 kissé magas értékeket fog adni, mert az energia meghatározásánál elhanyagoltuk a polarizációs energiát, amely onnan származik, hogy a valenciaelektron polarizálja az iont, továbbá elhanyagoltuk még a valenciaelektronok és az ion elektronjainak kicserélési (Austausch) kölcsönhatását.

Számításainkban ezt a módszert használtuk, de míg Gombás a káliumra az empirikus rácsállandó értékénél számította ki a valenciaelektronok legmélyebb energiasávjának szélességét, addig mi a rubidiumra ezen sávszélességet mint a rácsállandó függvényét határoztuk meg.

3. A rubidium-fém tárgyalása.

Az atomi egységekben felírt Schrödinger-féle energiakifejezésből indulunk ki, amely, ha ψ 1-re normált,

$$E = -\int\limits_{\tau} \psi^{\star} V \varepsilon \psi d\tau - \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 a_H \int\limits_{\tau} \psi^{\star} \Delta\psi d\tau, \tag{11}$$

ahol V jelen esetben a rubidium ion potenciálja, amelyet célszerű a következő alakban írni:

$$V = \frac{\varepsilon}{r} + \left(\chi - \frac{\varepsilon}{r}\right) - \varkappa(\Delta\chi)^{\frac{2}{3}}, \tag{12}$$

$$\varkappa = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{3}} \cdot a_H.$$

Az első tag az ion Coulomb-potenciálja, a második az ion nem Coulomb-szerű potenciálja, a harmadik tag a Pauli-elv következménye.

A χ és $\Delta\chi$ meghatározására a Hartree-féle tabellákat[16] használtuk. Itt a Z_p rovat nem más, mint $2\chi r$, ebből χ, illetve $\chi - \frac{\varepsilon}{r}$ egyszerűen kiszámítható. A többi rovatból az elektrontöltés, illetve a sajátfüggvény négyzete számítható ki két olyan koncentrikus gömbfelület között, amelyeknek középpontja a magban van. A gömbfelületek távolsága a mag közelében igen kicsi, a magtól távolabb $1{\cdot}5\,a_H$ távolságtól $0{\cdot}2\,a_H$, ami szintén elég kicsi. Mi a gömbhéj elektron töltését a gömbhéj térfogatával osztottuk. Ennek a hányadosnak a 4π-szerese adja ezen gömbhéjon belül a $\Delta\chi$ középértékét. Az így kapott $\Delta\chi$ értékeket tekintettük a valódi értékeknek a gömbhéjt határoló két gömbfelület távolságának felezőpontjában. Az így nyert értékeket grafikusan feltüntettük s innét $\Delta\chi$ bármely r-re leolvasható volt $(\Delta\chi)^{\frac{2}{3}}$ pedig a $\Delta\chi$-ból számítható.

Mivel ezek a kifejezések nem analitikus függvények, hanem csak numerikus adatok, azért ezeket számításainknak megfelelő analitikus függvényekkel approximáltuk. Legnagyobb szerepe van a $\chi - \frac{\varepsilon}{r} - \varkappa(\Delta\chi)^{\frac{2}{3}}$ kifejezésnek, melyet a következő függvénnyel approximáltunk

$$h = -\beta r^5 . e^{-10\sqrt{\frac{r}{a_H}}}, \tag{13}$$

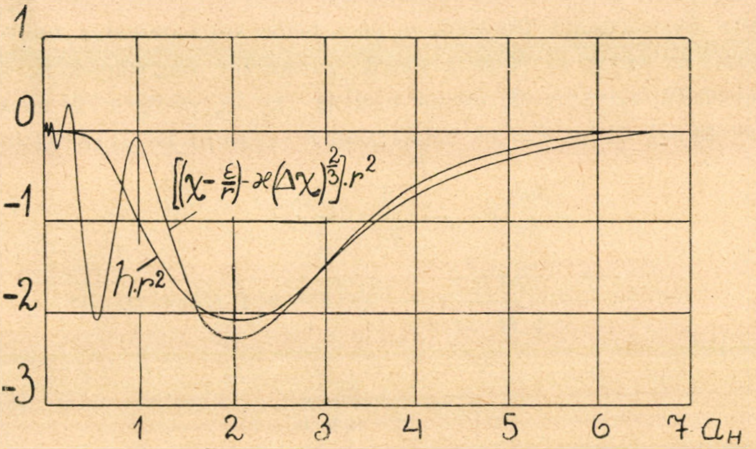
ahol a β normáló tényezőt abból a követelményből határoztuk meg, hogy az egész térre kiterjesztett $\int h d\tau$ a $\chi - \frac{\varepsilon}{r} - \varkappa(\Delta\chi^{\frac{2}{3}}$

[16] Hartree, Proc. Roy. Soc. London (*A*) 151, 103, 1935.

exakt Hartree-féle függvénnyel számított értékkel megegyezzék. Ebből a követelményből

$$\beta = \frac{72,23.10^{16}.\varepsilon}{8\pi.15!\,a_H^6}. \tag{14}$$

Az 1. ábrán feltüntettük az approximált és a közelítő függvény r^2-szeresét. Az ábrából az approximáció mértéke kitűnik. A h az ion belsejében természetesen csak az exakt függvény



1. ábra. Abszcissza: r (a_H egységekben).
Ordinata: a függvényértékek ($\varepsilon.a_H$ egységekben).

középértékét adja, ami azonban eredményeinket csak jelentéktelenül befolyásolja.

A (11) kifejezésre alkalmazzuk a Ritz-féle approximációs módszert, amely abban áll, hogy az ismeretlen függvényt, jelen esetben ψ-t, célszerűen választott alakban megadjuk és több egyelőre ismeretlen paraméterrel karakterizáljuk. Így az energiát, mint a felvett paraméterek függvényét kapjuk, ezeket pedig a minimumkövetelésből határozzuk meg.

Itt úgy járunk el, hogy megadunk egy függvényt, amely a keresettet jól megközelíti és kevés paramétert tartalmaz. Mi ψ_i-t a következő általános alakban vesszük fel:

$$\psi_i = D_i e^{-\lambda_{i0}\sqrt{r}}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} r^{\frac{k}{2}}\right). \tag{15}$$
$$(i=1,2)$$

Ugyanis GOMBÁS a kálium esetén hasonló sajátfüggvényt használva azt találta, hogy a módszer már két paraméterrel jó közelítést ad és további paraméterek felvétele az eredményeket lényegesen nem befolyásolja.

Első közelítésben a következő sajátfüggvényt vezettük be

$$\psi_i = D_i e^{-\frac{\mu_i \sqrt{r}}{2}} (1 + \gamma_i \sqrt{r}), \quad (i=1, 2) \tag{16}$$

ahol D_i normálási tényező, μ_i és γ_i pedig két parameter, melyek közül az egyik az R és a másik parameter függvényeként kifejezhető, ugyanis ψ_1 eleget tesz az (1), ψ_2 pedig a (2) határfeltételnek és ha $r = x^2$ helyettesitést vezetünk be, akkor (1)-ből

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{1}{2x}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)_{x=\sqrt{R}} =$$

$$= \frac{D_1 e^{-\frac{\mu_1}{2}\sqrt{R}}}{2\sqrt{R}}\left[\gamma_1 - \frac{\mu_1}{2}\left(1 + \gamma_1\sqrt{R}\right)\right] = 0,$$

amiből

$$\gamma_1 = \frac{\mu_1}{2 - \mu_1\sqrt{R}}, \tag{17}$$

vagyis γ_1, μ_1 és R függvénye, tehát egy állandó R-nél csak egy független parameterünk van, melyet az energiaminimumból határozhatunk meg. A D_1 normálási tényezőre a következő egyenletet nyerjük

$$\int_0^R \psi\psi^* 4\pi r^2 dr = 8\pi D_1^2 \int_0^{\sqrt{R}} e^{-\mu_1 x}(1 + \gamma_1 x)^2 x^5 dx = 1.$$

Ha a következő jelölést vezetjük be

$$\int_0^{\sqrt{R}} e^{-\mu_1 x}(1 + \gamma_1 x)^2 x^5 dx = T_0(R, \mu_1), \tag{18}$$

akkor

$$D_1 = \frac{1}{[8\pi T_0(R, \mu_1)]^{\frac{1}{2}}}; \tag{18a}$$

ψ_2-re (2) szerint fennáll

$$\psi_2(x)_{x=\sqrt{R}} = D_2 . e^{-\frac{\mu_2}{2}x}(1 + \gamma_2 x)_{x=\sqrt{R}} = 0,$$

ahonnét

$$\gamma_2 = -\frac{1}{\sqrt{R}}; \tag{19}$$

ennek figyelembevételével D_2-t ugyanúgy kapjuk, mint D_1-et,

$$D_2 = \frac{1}{[8\pi T_0(R, \mu_2)]^{\frac{1}{2}}}. \tag{20}$$

4. Az energiasáv alsó és felső szélének meghatározása.

Ezek után áttérünk az E_i energiák kiszámítására. A rövidség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket:

$$E_{ic} = -\int_\tau \psi_i^\star \frac{\varepsilon^2}{r} \psi_i d\tau, \tag{21}$$

$$E_{ik} = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 a_H \int_\tau \psi_i^\star \Delta\psi_i d\tau, \tag{22}$$

$$W_{iS} = -\int_\tau \psi_i^\star \varepsilon \left[\chi - \frac{\varepsilon}{r} - \varkappa(\Delta\chi)^{\frac{2}{3}}\right]\psi_i d\tau, \tag{23}$$

$$\underset{(i=1,\,2)}{E_i = E_{ic} + E_{ik} + W_{i_S}}. \tag{24}$$

Az integrálok kiterjesztendők az elemi gömbre. A W_{i_S}-ben azonban kiterjeszthető az egész térre, mivel $\chi - \frac{\varepsilon}{r}$ és $(\Delta\chi)^{\frac{2}{3}}$ az elemi gömb külső részében praktikusan nulla. A számítások ezáltal lényegesen egyszerűsödnek. A (21), (22), (23) energiatagokra a következőket nyerjük

$$E_{ic} = -\int_\tau \psi_i^\star \frac{\varepsilon^2}{r} \psi_i d\tau = -8\pi D_i^2 \varepsilon^2 \int_0^{\sqrt{R}} e^{-\mu_i x}(1+\gamma_i x)^2 x^3 dx =$$
$$= -8\pi D_i^2 \varepsilon^2 T_1(R, \mu_i),$$

ahol

$$T_1(R,\mu_i) = \int_0^{\sqrt{R}} e^{-\mu_i x}(1+\gamma_i x)^2 x^3 dx, \tag{25}$$

$$E_{ik} = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 a_H \int_\tau \psi_i^\star \Delta\psi_i d\tau = -2\pi\varepsilon^2 a_H \int_0^R \psi_i \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\psi_i}{\partial r}\right) dr;$$

parciális integrálással és az (1), (2) határfeltételek figyelembevételével nyerjük

$$E_{ik} = 2\pi\varepsilon^2 a_H \int_0^R \frac{\partial\psi_i^\star}{\partial r} \cdot \frac{\partial\psi_i}{\partial r} r^2 dr;$$

jelen esetben $\psi^\star = \psi_i$ és az r helyébe az x változót vezetjük be, akkor γ_1 és γ_2 (17), illetve (19) alatti értékeinek behelyettesítésével

$$E_{1k} = \frac{\pi}{4} D_1^2 \varepsilon^2 a_H \mu_1^2 \gamma_1^2 . \int_0^{\sqrt{R}} e^{-\mu_1 x}(R - 2\sqrt{R}.x + x^2) x^3 dx =$$
$$= D_1^2 \varepsilon^2 a_H T_2(R, \mu_1),$$

ahol

$$T_2(R, \mu_1) = \mu_1^2 \gamma_1^2 \int_0^{\sqrt{R}} e^{-\mu_1 x}(R - 2\sqrt{R}.x + x^2) x^3 dx; \qquad (26)$$

hasonlóan

$$E_{2k} = \frac{\pi}{4} D_2^2 \varepsilon^2 a_H . T_2(R, \mu_2),$$

ahol

$$T_2(R, \mu_2) =$$
$$= \gamma_2^2 \int_0^{\sqrt{R}} e^{-\mu_2 x}[(2 + \mu_2\sqrt{R})^2 - 2\mu_2(2 + \mu_2\sqrt{R})x + \mu_2^2 x^2] x^3 dx. \qquad (27)$$

W_{iS} is egyszerűen számítható, ugyanis (13) figyelembevételével és az $a_H^{\frac{1}{2}}$-t h-nál az exponensben elhagyva

$$W_{iS} = 4\pi\varepsilon \int_0^\infty h r^2 \psi_i \psi_i^\star dr = 4\pi\varepsilon\beta \int_0^\infty r^7 e^{-10\sqrt{r}} . \psi_i^2 dr =$$
$$= 8\pi\varepsilon D_i^2 \beta \int_0^\infty x^{15} e^{-(10+\mu_i)x}(1 + \gamma_i x)^2 dx = 8\pi D_i^2 . T_3(R, \mu_i),$$

$$T_3(R, \mu_i) = \beta \int_0^\infty x^{15} e^{-(10+\mu_i)x}(1 + \gamma_i x)^2 dx. \qquad (28)$$

D_i értékét beírva

$$E_{ic} = \varepsilon^2 \frac{T_1(R, \mu_i)}{T_0(R, \mu_i)}, \qquad (29)$$

$$E_{ik} = \varepsilon^2 a_H \frac{T_2(R, \mu_i)}{32\, T_0(R, \mu_i)}, \qquad (30)$$

$$W_{iS} = \varepsilon \frac{T_3(R, \mu_i)}{T_0(R, \mu_i)}. \qquad (31)$$

A T_0, T_1, T_2, T_3 integrálandó kifejezések kiszámításáról alább lesz szó. Az egyes energia-tagokat ε^2/a_H egységekben kapjuk. A (24), (29), (30) és (31)-ből látható, hogy $E_i R$-nek és μ-nek a függvénye. Az E_i energiaértékeket bármely R-re a Ritz-féle approximációs eljárás értelmében a minimum-követelésből, vagyis a

$$\frac{dE_i}{d\mu_i} = 0 \qquad (32)$$

egyenletből kapjuk. Az E_i minimumainak és a hozzátartozó μ_i-nek ily módon történő meghatározása azonban igen nagy matematikai nehézségekbe ütközne. Azért mi e helyett egy grafikus eljárást választottunk. Egy meghatározott R-re kiszámítottuk E_i-t mint a μ függvényét és ezen értékeket grafikusan feltüntettük és az ábrából az E_i minimumát és a hozzátartozó μ_i értéket leolvastuk.

A numerikus számítás keresztülvitele céljából vezessük be a következő jelöléseket

$$I_n(R, \mu) = \int_0^{\sqrt{R}} e^{-\mu x}.x^n dx,$$

$$K_n(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-(10+\mu)x}.x^n.dx\,;$$

ezen integrálokkal kifejezéseink a következők lesznek:

$$T_0(R, \mu_i) = I_5 + 2\gamma_i I_6 + \gamma_i^2 I_7, \qquad (34$$

$$T_1(R, \mu_i) = I_3 + 2\gamma_i I_4 + \gamma_i^2 I_5, \qquad (35)$$

$$T_2(R, \mu_1) = \mu_1^2\gamma_1^2(RI_3 - 2\sqrt{R}I_4 + I_5), \qquad (36)$$

$$T_2(R, \mu_2) = \gamma_2^2\,[(2+\mu_2\sqrt{R})^2 I_3 - 2\mu_2(2+\mu_2\sqrt{R})I_4 + \mu_2^2 I_5], \qquad (37)$$

$$T_3(R, \mu_i) = \beta(K_{15} + 2\gamma_i K_{16} + \gamma_i^2 K_{17}). \qquad (38)$$

$$(i=1,\, 2)$$

Az I_n kiszámítására vezessük be a következő helyettesítést

$$\mu x = y,$$

akkor

$$I_n = \frac{1}{\mu^{n+1}} \int_0^{\alpha} e^{-y}.y^n dy,$$

ahol

$$a = \mu \sqrt{R};$$

tehát a következő integrált kell meghatároznunk:

$$G_n = \int_0^a e^{-y}.y^n.dy,$$
$$(n=3, 4, 5, 6, 7)$$

amit a következő rekurziós formulával lehet kiszámítani

$$G_n = -e^{-a}.a^n + n\,G_{n-1}. \tag{39}$$

A számítások egyszerűek, csak nagy pontossággal kell keresztülvinni, különösen kis értékeknél, mert kis hiba a kezdőértékben a rekurziós formula hétszeri alkalmazásával megsokszorosodik. A számítást hétjegyű logaritmus-táblával végeztük el, úgyhogy a G értékek 5 jegyig pontosak.

A K_n integrálok meghatározása egyszerűbb. Itt $10+\mu=y$ helyettesítéssel kapjuk:

$$K_n = \frac{1}{(10+\mu)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-y}.y^n.dy = \frac{n!}{(10+\mu)^{n+1}}.$$

Az eddigi tárgyalásaink véges R-re vonatkoztak. Ha R-el átmegyünk $R=\infty$-re, akkor az ionizációs energia is kiszámítható, amit ugyanígy kapunk a RITZ-féle approximációs móddszerrel a SCHRÖDINGER-féle egyenletből, mint a valenciaelektron legalsó energiasávjának alsó és felső szélét. Mivel a szabad atomnál a sáv két széle összeesik, azért itt csak egy sajátfüggvényünk van:

$$\psi = De^{-\frac{\mu\sqrt{r}}{2}}(1+\gamma\sqrt{r});$$

a határfeltétel a következő

$$\psi(r)_{r=0} = 0,$$

ahol μ és γ egymástól független parameterek, mert az exponenciális tényező miatt ψ a végtelenbe eltűnik.

Az így vázolt módon különböző R értékekhez tartozó E_1 és E_2 értékeket meghatároztuk, ezeket a (9) szerint η_1, illetve η_2 értékeivel korrigáltuk és így kaptuk meg (10) szerint az energiasáv alsó és felső szélét B_1 és B_2-t, valamint az ionizációs energiát, I-t.

A meglehetősen terjedelmes számítást nem közöljük teljes részletességgel, hanem csak a végeredményeket adjuk meg. A részletekre való tájékoztatásul pedig közöljük az alsó és a felső határon egy-egy R-re vonatkozó adatainkat.

Az 1. és 2. tabella tartalmazza az $R = 6a_H$ helyen a sáv alsó és felső széléhez tartozó E_{ic}, E_{ik} és W_{iS} értékeket és ezek összegét E_i-t.

I. Táblázat.

μ	0	—0,81650	—1,03483	—1,22474	—1,55294
E_{1c}	—0,25000	—0,24432	—0,24248	—0,23997	—0,23383
E_{1k}	0,00000	0,00009	0,00035	0,00059	0,00124
W_{1S}	0,07980	0,07326	0,07065	0,06886	0,06213
E_1	—0,17020	—0,17097	—0,17148	—0,17111	—0,17046

II. Táblázat.

μ	0,40825	0	—0,51741	—1,03483
E_{2c}	—0.46774	—0,46677	—0,44929	—0,38358
E_{2k}	0,14515	0,14583	0,14535	0,14706
W_{2S}	0,33662	0,32544	0,30146	0,24403
E_2	0,01360	0,00460	—0,00248	0,00752

Ezen értékekből grafikus interpolációval kapjuk, hogy $E_1(6, \mu)$ minimuma $\mu = -1{,}05$-nél van és pedig

$$E_1 = E_1(6, -1{,}05) = -0{,}1715 \varepsilon^2/a_H.$$

Az $E_2(6, \mu)$ minimuma $\mu = -0{,}45$-nél van:

$$E_2 = E_2(6, -0{,}45) = -0{,}0028\, \varepsilon^2/a_H.$$

A számítást ily módon $R = 4a_H$-tól $R = 10\,a_H$-ig több R értéknél elvégezve, E_i-ket ugyancsak grafikus interpolációval kaptuk, melyeket η_i értékeivel korrigálva a B_i-ket nyertük. Az eredményeket a 3-ik táblázatban tüntettük fel:

III. Táblázat.

	4	5	5,4	6	8	10
B_1	—0,1725	—0,1930	—0,1906	—0,1830	—0,1560	—0,1342
B_2	—	0.0010	—0,0188	—0,0523	—0,1131	—0,1179
B	—	0,192	0,1718	0,1307	0,0429	0,0163

az $R = 4a_H$-hoz tartozó B_2 értéket nem tüntettük fel, mert a sáv felső szélére ilyen kis R-nél a módszer nem megbízható.

Az ionizációs energiára I-re a következő energiatermeket kaptuk:

$$E_c = -0,24855\varepsilon^2/a_H\,;\quad E_k = 0,03203\varepsilon^2/a_H;\quad W_S = 0,11253\varepsilon^2/a_H\,;$$
$$I = E_c + E_k + W_S = -\,0,10399\varepsilon^2/a_H\,;$$
$$\mu = 2,92,$$
$$\gamma = 2,1.$$

A sáv alsó és felső szélének menetét a 2-ik ábrán tüntettük fel.

Az ionizációs energiára, ha ψ-t még további közelítésben adnánk meg, kissé mélyebb értékeket kapnánk. További közelítés végigszámítása helyett célszerű ψ-t olymódon megválasztani, hogy az a valódi sajátfüggvényt jobban megközelítse.

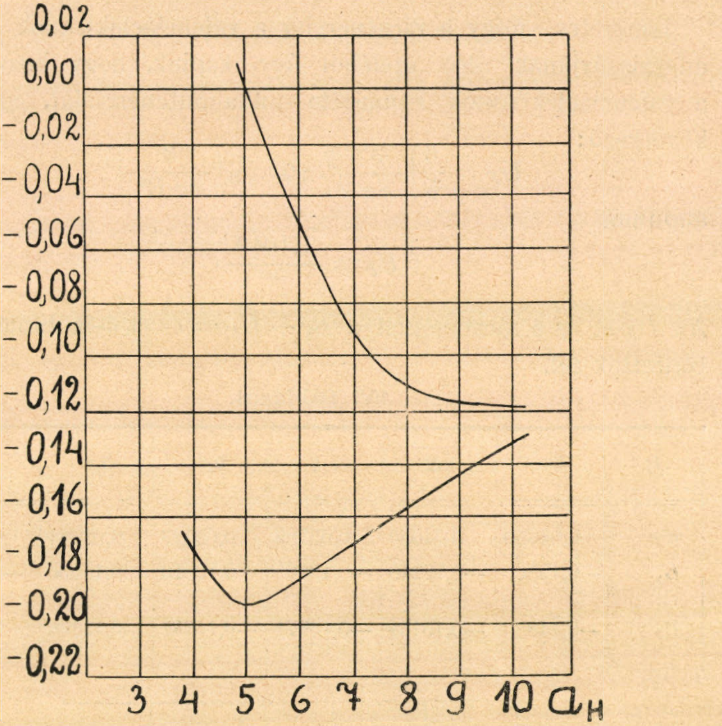
Gombás az alkaliatomok ionizációs energiájának a számítására a következő sajátfüggvényből indul ki:[17]

$$\psi = D.r^n.e^{-\lambda r}$$

és rubidium esetében ($n = 4$) a következő értéket kapja

$$I = -\,0,1215\varepsilon^2/a_H. \tag{44}$$

[17] Gombás, Ann. d. Phys. 35, 65. 1939.



2. ábra. Abszcissza: r, (a_H egységekben).
Ordinata: B_1 és B_2 $\left(\frac{\varepsilon^2}{a_H}\right.$ egységekben$\left.\right)$.

Jóllehet az ionizációs energiára ($R = \infty$), a további közelítések jobb eredményt szolgáltatnak, ez sokkal kisebb mértékben áll fenn véges R értékre, vagyis a sáv alsó és felső szélén, amint az Gombásnak a káliumra nyert eredményeiből látható;[18] ott ugyanis a további közelítések az eredményeket alig befolyásolják.

5. A rácsenergia, rácsállandó, szublimációs hő.

Hogy eredményeinket a tapasztalattal összehasonlíthassuk, kiszámítjuk az energiasáv alsó széléből a rácsenergiát, a szublimációs hőt és meghatározzuk a rácsállandót.

[18] Gombás l. c.

Ismeretes, hogy a rácsenergiát a valenciaelektronok legalsó energiasávjának alsó széléből úgy kapjuk, hogy hozzáadjuk a valenciaelektronok FERMI-féle nullapontenergiáját, amely a következő:

$$U_F = \frac{6}{5}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}} . \pi^2 \varepsilon^2 . a_H \left(\frac{3}{4\pi R^3}\right)^{\frac{2}{3}},$$

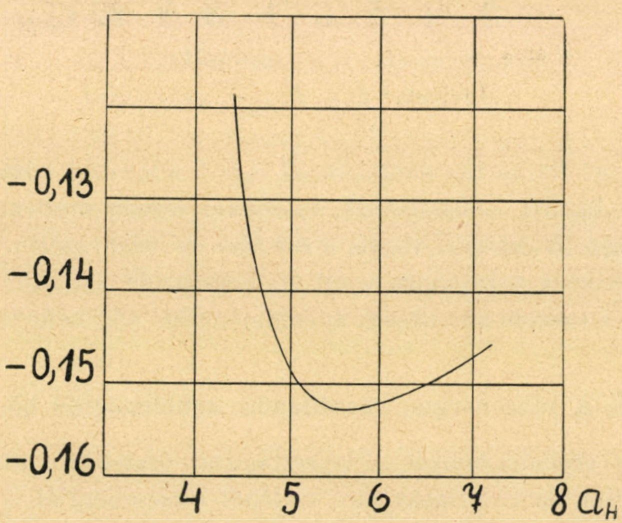
ahonnan

$$U_F = \frac{1,1049}{r^2} . \tag{45}$$

Az U_F-et és a rácsenergiát a $B_1 + U_F = U$ a 4-ik táblázatban tüntettük fel.

IV. Táblázat.

R	5	5,2	5,4	5,6	5,8	6
U_F	0,04420	0,04086	0,03789	0,03523	0,03284	0,03069
B_1	—0,1930	—0,19240	—0,1906	—0,18810	—0,18550	—0,1830
U	—0,1488	—0,15154	—0,15271	—0,15287	—0,15266	—0,15231



3. ábra. Abszcissza: r (a_H egységekben).
Ordinata: U $\left(\frac{\varepsilon^2}{a_H}\right.$ egységekben$\left.\right)$.

A rácsenergiát a 3-ik ábrán rajzoltuk fel, melyből grafikus interpolációval nyertük, hogy a stabilis egyensúlyi állapotnak megfelelő rácsenergia

$$U_0 = -0{,}15288\varepsilon^2/a_H, \tag{46}$$

a rácsállandó pedig

$$R_0 = 5{,}58a_H. \tag{47}$$

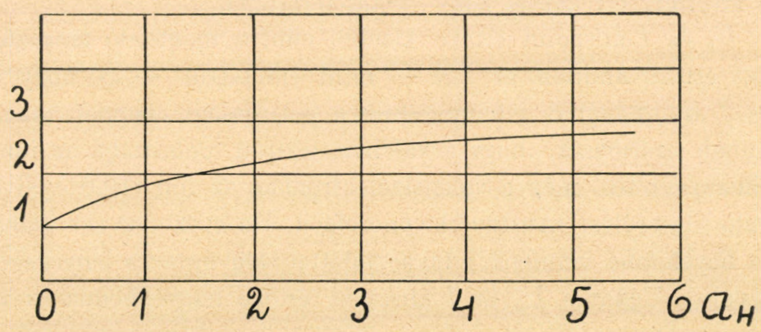
A sajátfüggvényt a stabil egyensúlyi állapotban az R_0 és μ_0-al adhatjuk meg. A μ_0-t szintén grafikus interpolációval határoztuk meg: $\mu_0 = -1{,}16\sqrt{\frac{1}{a_H}}$;

$$\psi_0(R_0, \mu_0) = D_0 e^{-\frac{\mu_0 x}{2}}(1 + \gamma_0 x),$$

ahol D_0-t a (18a), γ_0-t pedig a (17)-ből nyerjük. Az elektronsűrűség (9a) szerint, ha x helyett $\sqrt{r}$-t írunk,

$$\varrho_0 = D_0^2 e^{-\mu_0\sqrt{r}}(1 + \gamma_0\sqrt{r})^2, \tag{48}$$

ennek a függvénynek a menetét a 4. ábra tünteti fel. Az ábrából látható, hogy az elektronsűrűség a legalsó sáv szélén a



4. ábra. Abszcissza: r (a_H egységekben).
Ordinata: $\frac{\psi\psi^*}{D^2}$ $\left(\frac{1}{a_H^3}\text{ egységekben}\right)$.

stabil egyensúlyi helyzetben a konstans eloszlást jól megközelíti. Az ion belsejében $R \sim 2a_H$-ig a sajátfüggvénynek 4 csomópontot kellene felmutatni, a mi esetünkben azonban egyet se mutat fel. Ez a statisztikai tárgyalás következménye, ami eredményeink szempontjából lényegtelen.

A szublimációs hőt, S-et a rácsenergiából és az ionizációs energiából a következő módon nyerjük

$$S = |U_0| - |I| = 0{,}03138\, \varepsilon^2/a_H. \qquad (49)$$

6. Eredményeinknek a tapasztalattal való összehasonlítása.

A fentebb nyert eredményekből a tapasztalattal a következőket hasonlítottuk össze:

	Jelen munka eredményei	Kísérleti eredmények	
R_0 Å egységekben	2,97	2,81	6%
U_0 eV «	4,14	5,24	21%
I « «	3,29	4,16	21%
S « «	0,85	1,08	21%

Az utolsó oszlopban van feltüntetve, hogy a számított adatok a kísérleti értékektől hány %-kal térnek el.

U_0 és I abszolút értéke kisebb, mint a megfelelő tapasztalati érték, aminek az oka — mint említettük — az, hogy U és I számításánál elhanyagoltuk a polárossági energiát, amely onnan származik, hogy a valenciaelektron polarizálja az iont. Elhanyagoltuk még a valenciaelektronnak az ion elektronjaival való kicserélési (Austausch) energiáját. Ha ezeket az energiákat is figyelembe vennénk, a tapasztalattal való egyezés lényegesen javulna. Ugyanis U_0 és I abszolút értéke nagyobbodna és R_0 kisebbedne.

S aránylag jól egyezik a tapasztalati értékkel, mert mint U_0 és I különbsége adódik, melynek következtében az U-nál és I-nél történt elhanyagolások, mivel egyenlő nagyságrendűek, kevésbbé befolyásolják S értékét.

Jelen munka a kir. magyar Pázmány Péter tudományegyetem elméleti fizikai intézetében készült. Az intézet igazgatójának, dr. Ortvay Rudolf egyetemi nyilv. r. tanár úrnak ezúton is hálásan köszönöm, hogy munkámat állandóan figyelemmel kisérte és elkészítését lehetővé tette. Dr. Gombás Pál egyetemi magántanár úrnak állandó támogatásáért és értékes útbaigazításáért mondok hálás köszönetet.

Péter Gyula.

ÜBER DAS ENERGIESPEKTRUM DES METALLISCHEN RUBIDIUMS.

In dieser Arbeit wurde das tiefste Energieband der Valenzelektronen des metallischen *Rb*, als Funktion des Gitterabstandes, bestimmt.

Die Elementarzelle haben wir dabei, analog zu Wigner und Seitz, mit einer Kugel vom gleichen Volumen approximiert. Statt der exakten Lösung der Schrödinger-Gleichung, wurde zur Bestimmung des unteren und oberen Bandes eine Methode von Gombás benutzt, welche auf der Variationsmethode beruht und in welcher die Besetzungsvorschrift für das Valenzelektron näherungsweise dadurch berücksichtigt wurde, dass wir in dem Schrödingerschen Energieausdruck statt dem elektrostatischen Potential χ, das Potential V(vgl. Gl. (12)) einsetzten. Für das Potential V hat man den tiefsten Energiezustand zu bestimmen, welchen man mit dem Ritzschen Approximationsverfahren beliebig annähern kann. Hierzu macht man für die Eigenfunktion des unteren Bandrandes ψ_1 und oberen Bandrandes ψ_2 Ansätze, welche den Randbedingungen [vgl. *Gl* (1) und (2)] genügen und welche unbestimmte Parameter enthalten, die aus der Minimumsforderung des Schrödingerschen Energieausdruckes bestimmt werden. Die Energie des unteren und oberen Bandrandes erhält man, wenn man zu der Schrödingerschen Energie des Valenzelektrons noch eine Korrektionsenergie (η_i) hinzuaddiert.

Die Energiebandbreite als Funktion des Radius der Elementarkugel zeigt Figur 2. Mit dem unteren Rand des Energiebandes konnte auch die Gitterenergie U und mit dieser der Gitterabstand R (Radius der Elementarkugel) bestimmt werden. Für unendlich grosse Gitterabstände gibt der untere Bandrand die Ioniesierungsenergie I des freien Atoms, mit der man die Sublimationswärme S aus dem Zusammenhang $S = |U| - |I|$ erhält.

Die Resultate sind folgende :

Tabelle I.

	Resultate der vorliegenden Arbeit	Experimentelle Resultate	
Gitterkonstante in Å Einheiten	2,97	2,81	6%
Gitterenergie in e-Volt Einheiten ...	4,14	5,24	21%
Ionisationsenergie in e-Volt Einheiten... ...	3,29	4,16	21%
Sublimationswärme in e-Volt Einheiten ...	0,85	1,08	21%

In der letzten Spalte stehen die Abweichungen der theoretischen Werte von den experimentellen Resultaten. Die berechneten Werte sind zu klein, da wir die Polarisation des Atomrumpfes durch das Valenzelektron und den Austauscheffekt des Valenzelektrons mit dem Rumpfelektronen vernachlässigt haben.

Gy. Péter

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1939. évi június 10-én tartott XLIV. közgyűlés.

A közgyűlést Rados Gusztáv elnök az alábbi beszéddel nyitotta meg.

Szeretettel üdvözölvén az itt megjelent tagtársainkat és t. vendégeinket, az 1938/39. társulati évre eső utolsó gyűlésünket ezennel megnyitom.

Legyen szabad hinnünk, hogy megjelenésükkel azzal a törekvésünkkel való együttérzésüknek óhajtottak kifejezést adni, hogy azoknak a tudományoknak önzetlen és buzgó művelésével működjünk közre hazánk művelődésének felvirágoztatásán, melyeket Társulatunk halhatatlan alapítója, br. Eötvös Loránd zászlónkra írt. Törhetetlen az a meggyőződésünk, hogy magas színtájú kultúra a honvédelem legerősebb fegyvere.

Az idei társulati év folyamán két ízben is alkalmunk volt történeti fontosságú napokat átélni. Államférfiainknak bölcsesége, honpolgárainknak áldozatkészsége és honvédeink katonai derekassága lehetővé tették, hogy másfél millió rabigában senyvedő magyar testvérről lehullhattak azok a bilincsek, melyeket Trianonban gaz kezek számukra kovácsoltak és hogy hazánk területe 22,000 négyszög-kilométerrel gyarapodhatott. Hazánknak a trianoni gonoszság folytán történt igazságtalan és kegyetlen megcsonkításán érzett bánatunk húsz éven át sötétséggel borította kedélyvilágunkat. Ezt a sötétséget szinte váratlanul reménysugárral törték át az őszi és tavaszi események, megerősitvén bennünk a hitet, hogy a várvavárt jobb kor hajnalhasadásáig eljutottunk.

Az országos örömből Társulatunk is kivette a maga részét, hálatelt szívvel sürgönnyel üdvözölvén a honmentő és hongyarapító kormányzó úrunk Őfőméltóságát és akaratát végrehajtó minisztereit a Felvidék tetemes részének szerencsés visszacsatolása alkalmából.

E helyen emlékezem meg Szabó Gábor kiváló pénztárnokunk hazafias intézkedéséről, amellyel a visszacsatolt területeken lévő összes középiskoláknak folyóiratunknak egy-egy kötetét megküldötte. Az intézetek igazgatói ezt az ajándékot meleg hálával fogadták.

Noha a Felvidék megszállása mozgósítással járt és a közmondás szerint «inter arma silent musae», társulati életünk zökkenés nélkül folyt a rendes mederben.

Szép eredménnyel folytak le az idei társulati év elején tartott tanulóversenyek. Az ifjúságnak e versenyeken való élénk részvétele és dolgozataiknak kiválósága élénken tesz tanuságot ennek az intézménynek serkentő és áldásos hatásáról.

Rendes előadó üléseinken az idén is vendégül tisztelhettünk néhány kiváló külföldi kutatót. W. Sierpiński a Varsói Tud. Akadémia elnöke, a halmazelméletnek jelenleg legkiválóbb mívelője, Neumann János, a princetoni kutató intézetnek tanára, a kiváló fizikus és matematikus, és P. Debye Nobel-díjas fizikus, a berlin-dahlemi új Kaiser Wilhelm Institut für Physik igazgatója legújabb kutatásaiknak nagyértékű eredményeit voltak szívesek velünk megismertetni. Hogy ilyen elsőrangú tudósok évről-évre látogatásukkal megtisztelnek bennünket, örvendetes jele annak, hogy a magyar kultúrtörekvések a külföldön is reánk nézve hízelgő méltatásban részesülnek.

Az ország megcsonkítása Társulatunknak is megrontotta anyagi helyzetét annyira, hogy a taglétszám apadása folytán megcsökkent tagdíjakból egyedül lehetetlen volna folyóiratunk kiadása. Hogy ez egyáltalában lehetséges, azt a magyar Tud. Akadémia és a vallás- és közoktatásügyi minisztérium hathatós támogatásának köszönhetjük. Fogadják e tudománymentő segélyekért meleg hálánk kifejezését.

Kötelességet mulasztanék, ha Császár Elemér t. tagtársunknak hálás elismerésünket ki nem fejezném azért az odaadó buzgóságért, amellyel hosszú éveken át lelkiismeretességgel és kitűnő hozzáértéssel választmányunk egyik jegyzői tisztjét ellátta. E tisztről a pécsi egyetem fizikai tanszékére való kineveztetése folytán nagy sajnálatunkra kénytelen volt lemondani. Jókívánságaink kísérik őt új hivatási körébe, amelyben neki lelkünk mélyéből minél szebb sikereket kívánunk.

Mélységes sajnálattal jelentem be Szabó Gábor nagyérdemű pénztárnokunknak váratlan lemondását. Egy fontos paedagógiai megbízatása folytán az évnek egy részét vidéken tölteni lévén kénytelen, a pénztárnoki tiszttel járó teendőket nem végezhetné azzal a pontossággal, amelyet neki lelkiismerete diktál.

Társulatunk csak nehezen fogja nélkülözhetni az ő megfontolt és mindenkor célravezető tanácsait, melyekkel ügyeinket oly hathatósan előmozdította és nem fogja feledni soha azokat a hálára kötelező nagy szolgálatokat, amelyekkel neki sikerült Társulatunk pénzügyeit válságos időben rendezni.

Amidőn tőle most fájdalmas érzéssel búcsúzunk, kérjük, hogy legyen meggyőződve arról, hogy hálánk, tiszteletünk és szeretetünk kísérik őt is új munkakörébe, amelyhez neki szerencsés sikereket kívánunk.

Most pedig, hogy hazánk sorsa jobbra kezd fordulni, folytassuk friss kedvvel és teljes odaadással a haza művelődését szolgáló munkánkat. Azzal a kívánsággal, hogy e törekvéseinket siker koronázza, nyitom meg az 1939. évi közgyűlésünket.

Az elnöki megnyitó után Kőnig Dénes titkár olvasta fel az itt következő titkári jelentést.

«Társulatunk az elmúlt társulati évben — a mai üléseket beleszámítva — 12 előadó, 4 választmányi és egy közgyűlést tartott. Az előadók száma 13; az előadások közül 7 matematikai, 6 pedig fizikai tárgyú volt. Az előadók és előadások részletes jegyzékét a titkári jelentés melléklete tartalmazza.

A tanulóversenyek eredményét illetően utalunk Lapunk utolsó számában megjelent részletes beszámolóra. A versenyek eredményéről szokás szerint értesítettük a m. kir. vallás- és közoktatásügyi miniszter urat; a nyertesek volt tanárainak és iskoláinak pedig üdvözlő sorokat küldtünk.

Hálásan jelentjük, hogy a M. Tud. Akadémia az elmúlt évben is 1000 P, a Vallás- és Közokt. Minisztérium 500 P segéllyel támogatta a Társulatot lapjának kiadásában. A minisztérium továbbá ezidén is megrendelte a Matematikai és Fizikai Lapokat, és pedig 78 középiskola számára. Örömmel jelenthetjük, hogy ezek közt helyet foglalnak immár Kassa, Léva, Losonc, Ipolyság, Rozsnyó, Rimaszombat, Ungvár, Munkács, Beregszász, Érsekújvár, Nagysurány, Dunaszerdahely és Szenc gimnáziumai is. A Társulat választmánya már előzetesen elhatározta, hogy a visszatért felvidéki középiskoláknak a Matematikai és Fizikai Lapok utolsó (45.) évfolyamát ajándékképpen megküldi.

Az *American Mathematical Society* meghívta Társulatunkat félszázados jubileumára New Yorkba; mi üdvözlőirattat válaszoltunk, mely teljes szövegében megjelent a *Bulletin of the American Mathematical Society*-ban.

Lapunk 45. évfolyama 13½ ívnyi terjedelemben megjelent; a 46. kötet január-júniusi száma sajtó alatt van és körülbelül 8 ívnyi terjedelemben hamarosan megjelenik.

Cserefolyóirataink száma az elmúlt évben nem változott.

Végül szomorodott szívvel kell megemlékeznünk Éber József, Oszlaczky Szilárd és Söpkéz Sándor tagtársaink elhúnytáról».

Szabó Gábor pénztárosi jelentéséből a zárszámadást és vagyonmérleget alább közöljük. A közgyűlés megadta a felmentvényt a pénztárosnak.

A tisztikar megbizatása lejárván, a közgyűlés — egyhangúlag elfogadva a választmány javaslatát — a következő tisztikart választotta meg:

Elnök: Rados Gusztáv.

Alelnökök: Tangl Károly és Fejér Lipót.

Titkárok: Pogány Béla és Kőnig Dénes.

Jegyzők: Szűcs Adolf és Hoffmann Ernő.

Pénztáros: Jelitai József.

A lelépő választmányi tagokat, Faragó Andor, Mikola Sándor, Ortvay Rudolf, Riesz Frigyes, Rybár István, Stachó Tibor tagtársainkat a Közgyűlés újból választmányi tagokká választotta. A számvizsgáló-bizottságba (melynek a Választmány részéről Faragó Andor és Stachó Tibor lettek tagjai) a közgyűlés maga részéről Goldziher Karolyt és Renner Jánost küldte ki.

1938. évi zárszámadás.

Bevétel:

			Pengő
1.	Maradvány az 1937. évről:		
	a) kézipénztárban	55·16 P	3808·55
	b) postatakarékpénztárban	1305·49 «	
	c) a Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban	1427·90 «	
	d) Károly Irén-alap	1020·— «	
2.	Tagdíjak		1514·—
3.	Előfizetési díjak		185·—
4.	A Magyar Tudományos Akadémia segélye		1000·—
5.	Adományok		30·—
6.	Kamatok		67·19
7.	Vegyesek		79·37
		Összesen:	6684·11

Kiadás:

			Pengő
1.	Nyomda és expedíció		3480·—
2.	Tanulóverseny		190·—
3.	Kezelési költségek és a Tud. Társ. és Int. Orsz. Szövetsége Díjkezelőségének jutaléka		105·88
4.	Kőnig-plakett		212·—
5.	Titkári tiszteletdíj		200·—
6.	Vegyesek		284·11
7.	Maradvány:		
	a) kézipénztárban	72·36 P	2212·12
	b) postatakarékpénztárban	785·76 «	
	c) Magyar Leszámítoló és Pénzv. Bankban (fsz.)	334·— «	
	d) Károly Irén-alap	1020·— «	
		Összesen:	6684·11

Vagyonmérleg.

Vagyon:

			Korona	Pengő
1.	Koronaértékpapirosok (Magy. Lesz. és Pénzv. Bank Letétkimutatása, a Pesti Hazai Első Takarékpénztár Egyesület takarékkönyve és a Magy. Kir. Állampénztár Fizetési Könyve szerint)		29,008·—	
2.	Pénzkészlet:			
	a) kézipénztárban	72·36 P		2212·12
	b) postatakarékpénztárban	785·76 «		
	c) a Magy. Lesz. és Pénzv. Bankban	334·— «		
	d) Károly Irén-alap	1020·— «		
3.	Tag- és előfizetési díj-hátralék			200·—
4.	Nyomtatványok			100·—
		Összesen:	29,008·—	2512·12

Teher:

	Korona	Pengő
1. Nyomdai tartozás		19·65
2. Egyenleg	29,008·—	2492·47

Budapest, 1939. január hó 30-án.

Szabó Gábor s. k.
pénztáros.

Megvizsgáltuk és rendben lévőnek találtuk.

Budapest, 1939. április hó 27-én.

Faragó Andor s. k., Dr. Goldziher Károly s. k., Dr. Renner János s. k., Dr. Stachó Tibor s. k.

Előadások:

1938 okt. 13. Neumann János (Princeton): A sajátérték fogalmának kiterjesztéséről.

1938 nov. 17. A tanulóversenyek eredményének kihirdetése. — Veress Pál: Síkra nem rajzolható gráfokról.

1938 dec. 1. Szalay Sándor: Két atommag-reakció rezonancia-jelenségeinek vizsgálata.

1938 dec. 15. Turán Pál: Konvex függvények Fourier-soráról.

1939 jan. 19. Kovács István: Perturbációk a molekulák színképein.

1939 febr. 9. Alexits György: A torzió fogalma metrikus terekben.

1939 febr. 23. Tomka Pál: *NaCl*-pasztillák elektromos vezetése. — Gyulai Zoltán: Néhány szó festékfoszforok gerjesztéséről.

1939 márc. 9. Tihanyi Miklós: Lagrange-féle rezolvensek szorzata.

1939 márc. 30. Budó Ágoston: A molekulák alakjának és szerkezetének befolyása a dielektromos relaxációra.

1939 ápr. 20. Egerváry Jenő: A húrnégyszög térbeli analogonjáról.

1939 jún. 1. P. Debye (Berlin-Dahlem): Interferometrische Messungen von Atomabständen in freien Molekülen.

1939 jún. 10. Kerékjártó Béla: Topologikus leképezések és folytonos csoportok.

*

Választmányi ülések voltak: 1938 nov. 17, 1939 febr. 23, márc. 30 és jún. 10.

Az 1939. évi XLIV. rendes közgyűlés volt: 1939 jún. 10.

Kimutatás

az 1938. évi november hó 1-től 1939. évi március hó 31-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíjak.

1932-re: Egerváry Jenő (8), Veress Pál (8). *Összesen: 16 P.*

1933-ra: Bay Zoltán (6), Rybár István (4), Veress Pál (8). *Összesen 18 P.*

1934-re: Bay Zoltán (6), Rybár István (8), Ujj Gyula (2). *Összesen 16 P.*

1935-re: Bay Zoltán (6), Csada Imre (6), Detre László (4), Fekete Jenő (8), Hancsók Kálmán (6), Lajta Ernő (4), Riesz Frigyes (6), Rybár István (8), Schwartz Ilona (6). *Összesen 54 P.*

1936-ra: Bay Zoltán (6), Bresztovszky Béla (8), Csada Imre (6), Czukor Károly (6), Detre László (8), Fekete Jenő (8), Girsik Géza (6), Hancsók Kálmán (6), Kolozsváry Béla (8), Milakovszky László (4), Sz. Nagy Gyula (6), Riesz Frigyes (6), Rybár István (8), Scholc Pál (4), Schwartz Ilona (4), Seres Iván (7), Skopál István (8), Steiner Lajos (6), Szeliánszky Ferenc (3), Wigner Jenő (8). Összesen *126 P.*

1937-re: Bay Zoltán (8), Bresztovszky Béla (8), Breuer József (4), Bródy Imre (8), Csaplár Konrád (4), Fekete Jenő (8), Jakab Györgyné (4), Kolozsváry Béla (8), ifj. Kövesligethy Radó (8), Kronberger Ede (2), Luckhaub Gyula (8), Milakovszky László (6), Sz. Nagy Gyula (4), Neumann Erzsébet (8), Patai László (2), Péter Rózsa (8), Riesz Frigyes (6), Róna Zsigmond (8), Rybár István (8), Schimanek Emil (8), Scholc Pál (8), Sebők Emánuel (6), Seres Iván (8), Sós Ernő (8), Steiner Lajos (6), Theisz Edéné (6), Vince István (7), Wigner Jenő (8), Zigány Ferenc (8). *Összesen 193 P.*

1938-ra: Albert Anna (8), Bay Zoltán (8), Beke Manó (8), Bertrám Brunó (6), Blau Ármin (6), Blau Györgyné (8), Bolla Györgyné (8). Breuer József (6), Breszlauer Arturné (4), Bresztovszky Béla (8), Bródy Imre (8), Bugarszky István (8), Bukovszky Ferencz (6), Csaplár Konrád (6), Cholnoky Jenő (8), Dér Zoltán (6), Fejes László (8), Fekete Jenő (8), Fraunhoffer Lajos (8), Goldziher Károly (8), Gróh Gyula (8), Halász Ernő (8), Heuer Ede (8), Horvay Béla (8), Jáky József (8), id. Jurányi Henrik (8), Kerékjártó Béla (8), Kilcer Gyula (8), Krbek Ferenc (8), Kronberger Ede (4), Lassovszky Károly (8), Lengyel Béla

(Worcester) (8), Lóky Béla (6), Luckhaub Gyula (8), Marcell György (8), Maróthi Ferenc (8), Misángyi Vilmos (8), Mischung Ilona (6), Nagy Ferenc (8), Neubauer Konstantin (8), Neumann Erzsébet (2), Oltay Károly (8), Riesz Frigyes (6), Róna Zsigmond (8), Rybár István (8), Schaller Mátyás (6), Schay Géza (8), Schimanek Emil (8), Scholc Pál (8), Sebők Emánuel (6), Seres Iván (8), Söpkéz Sándor (8), Steiner Lajos (3), Szabó Miklósné (4), Szász Pál (8), Szekeres Kálmán (8), Székely Károly (6), Tardos Vida (6), Tóth Géza (5), Turán Pál (8), Wigner Jenő (8), Zigány Ferenc (4). *Összesen 360 P.*

1939-re: Balyi Károly (6), Barta József (8), Bauer Mihály (8), Bán Lajos (6), Breuer József (2), Bukovszky Ferenc (6), Csaplár Konrád (2), Cseh Elekné (8), Egyed László (4), Endrédy Vendel (8), Erdős Pál (8), Erőd János (8), Farkas Dénes (6), Fenyő István (8), Gyulai Zoltán (2), Halász Ernő (8), Hausbrunner Vilmos (8), Holenda Barnabás (6), Huhn Péter (6), Ispánovits Alajos (6), Jelitai József (8), Klug Lipót (8), Kövessi Ferenc (8), Krbek Ferenc (8), Kuzaila Péter (6), Lengyel Béla (Worcester) (8), Lóky Béla (6), Mischung Ilona (6), Nyáry Béla (6), Oltay Károly (8), Ortvay Rudolf (8), Pogány Béla (8), Rados Gusztáv (8), Rados Ignác (8), Renner János (8), Romsauer Lajos (8), Rucsinszky Lajos (8), Schaller Mátyás (6), Surányi János (6), Szabó Gábor (8), Szabó Miklósné (2), Széky István (6), Szőke Béla (8), Tangl Károly (8), Tihanyi Miklós (6), Török Elemér (6). *Összesen 308 P.*

1940-re: Erdős Pál (2), Gyulai Zoltán (6), Oltay Károly (2). *Összesen 10 P.*

2. Előfizetési díjak.

1938-ra: Ág. h. ev. gimn., Békéscsaba *2 P.*

1939-re: Ág. h. ev. gimn., Békéscsaba (6), Csillagvizsgáló Intézet Budapest, Svábhegy (8), Kalazantinum, Budapest (8), Bernardinum, Budapest (8), Norbertinum, Budapest (8), Műegyetemi I. Math. Gyűjtemény, Budapest (8), Műegy. Kémiai-Fizikai Tanszék, Budapest (8), Pesti Izr. Hitközs. gimnáziuma, Budapest (8), Ref. gimn., Kisújszállás (6), Ref. gimn., Miskolc (2), Szt. Benedekrend Közp. Könyvtár, Pannonhalma (6), Zrinyi M. reálisk. nevelőint., Pécs (6), Bánya-, Erdő- és Kohómérnöki Kar, Sopron (6). [*88 P*]. *Továbbá a Vallás- és Közokt. Minisztérium előfizetése a következő középiskolák tanári könyvtárai számára:* Balassa B. gimn., Balassagyarmat, Lorántffy Zs. leánygimn., Békéscsaba, Verbőczy J. gimn., Bp., Mátyás-király gimn., Bp., Toldy F. gimn., Bp., Árpád gimn., Bp., Berzsenyi D. gimn., Bp., Bolyai gimn., Bp., Kölcsey F. gimn., Bp., Kemény Zs. gimn., Bp., Mária Terézia leánygimn., Bp., Madách J. gimn., Bp., Középisk. Tanárképző Int. Gyak. Gimn., Bp.,

Zrinyi M. gimn., Bp., Fáy A. gimn., Bp., Széchenyi I. gimn., Bp., Szt. László gimn., Bp., Szt. István gimn., Bp., Erzsébet Nőisk. leánygimn., Bp., Kossuth gimn., Cegléd, Szt. Imre gimn., Csongrád, Középisk. Tanárképző Int. Gyak. gimn., Debrecen, Fazekas M. gimn., Debrecen, Dobó I. gimn., Eger, Koháry I. gimn., Gyöngyös, Révay M. gimn., Győr, gr. Apponyi A. leánygimn., Győr, gr. Klebelsberg K. gimn., Hatvan, József Nádor gimn., Jászberény, Somssich P. gimn., Kaposvár, Katona J. gimn., Kecskemét, Deák F. gimn., Kispest, Bessenyei Gy. gimn., Kisvárda, Csanád vezér gimn., Makó, Teleki Blanka leánygimn., Mezőtúr, Hunfalvy J. gimn., Miskolc, Szabolcs vezér gimn., Nagykálló, Kossuth L. gimn., Pestszenterzsébet, Áll. gimn., Pestszentlőrinc, Középisk. Tanárképző Int. gr. Széchenyi I. gyak. gimn., Pécs, Széchenyi I. gimn., Sopron, Áll. leánygimn., Sopron, Kisfaludi S. gimn., Sümeg, Klauzál G. gimn., Szeged, Baross G. gimn., Szeged, Árpádházi Szt. Erzsébet leánygimn., Szeged, Ybl M. gimn., Székesfehérvár, Garay J. gimn. Szekszárd, Horváth M. gimn., Szentes, Áll. gimn., Szentgotthárd, Verseghy F. gimn., Szolnok, Bánffy Katalin leánygimn., Szolnok, Faludy F. gimn., Szombathely, Kanizsai Orsolya leánygimn., Szombathely, Könyves K. gimn., Újpest, Kanizsay Dorottya leánygimn., Újpest, Deák F. gimn., Zalaegerszeg, Budapesti II. ker. kir. egyet. kath. gimn., Kir. kath. Eszterházy M. Nádor gimn., Dombóvár, Kir. kath. gr. Széchenyi I. gimn., Jászapáti, Kir. kath. Szt. László gimn., Mezőkövesd, Kir. kath. Fráter Gy. gimn., Miskolc, Kir. kath. gimn., Nyíregyháza, Áll. szlovák tannyelvű gimn., Kassa, Áll. (premontrei) gimn., Kassa, Áll. leánygimn., Kassa, Áll. gimn., Léva, Áll. gimn., Losonc, Áll. gimn., Ipolyság, Áll. gimn., Rozsnyó, Áll. gimn., Rimaszombat, Áll. gimn. (magyar és ruszin tagozattal) Ungvár, Áll. gimn. (magyar és ruszin tagozattal) Munkács, Áll. gimn., Beregszász, Áll. gimn., Érsekújvár, Áll. szlovák tannyelvű gimn., Nagysurány, Áll. gimnáziumi tanfolyam, Dunaszerdahely, Áll. gimnáziumi tanfolyam, Szenc. [*624 P*]. *Összesen 712 P.*
1940-re : Ref. gimn., Miskolc *4 P.*

3. Segélyek, adományok.

Vall. és Közokt. Minisztérium	500 P
Magyar Tud. Akadémia	500 «
Bláthy Ottó Titusz	10 «
Összesen	1010 P.

Budapesten, 1939 március 31-én.

Szabó Gábor,
pénztáros.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA. — ÁBRAI V.

MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖNIG DÉNES ÉS POGÁNY BÉLA

NEGYVENHATODIK ÉVFOLYAM

1939

JÚLIUS—DECEMBERI FÜZET

BUDAPEST, 1939

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Kőnig Dénes* (**XI., Horthy Miklós-út 28., Lénárt-pensio**), a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* (**XI., Budafoki-út 8.**) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra, valamint minden korrekturára pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

Évi tagsági díj Budapesten 8, vidéken 6 pengő. Minden befizetést Társulatunk 5997. számú postatakarékpénztári csekkszámlájára kérünk. A folyóirat és a meghívók küldésére vonatkozó felszólamlások, címváltozások *Jelitai József* pénztáros címére (II., Bimbó-út 5.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány,* Budapest, XI., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *B. Pogány,* Budapest, XI., Budafoki-út 8.

BLÁTHY OTTÓ TITUSZ

1860—1939.

Az elektrotechnika hőskorának világhírre szert tett munkása, a villamos gépek, transzformátorok és készülékek szerkesztésének több mint félévszázadon át nagysikerű mestere távozott el körünkből, amidőn 1939. szeptember hó 26-án Bláthy Ottó Titusz örökre lehúnyta szemeit.

Elköltözésével ismét megritkult azoknak a kiváló úttörőknek ma már úgyis igen megfogyatkozott sora, akik istenadta őstehetségükkel megnyitották azt a szerteágazó utat, amely századunk civilizációjának műszaki jellegét megadó elektrotechnika mai csodálatos alkotásaihoz vezetett.

Bláthy úgyszólván élete szakmájával együtt nőtt fel. Gyermekkora összeesik az erősáramú elektrotechnika gyermekéveivel, 1860. augusztus hó 11-én született Tatán. Ugyanezen időtájban fogamzik meg Jedlik Ányos termékeny elméjében a dinamóvillamos elv gondolata, amint azt az 1861-ben inventáriumozott, «Egysarki villanyindító»-nak nevezett, kis unipoláris gépéhez csatolt leírás világosan kimondja. Hasonló irányban folyik a kutatás a már iparosodott külföldön is, ahol azonban, természetesen, Jedlik laboratoriumi készülékénél gyakorlatiasabb eredményre vezet. Jedliktől függetlenül Siemens Werner 1867. január hó 17-én a berlini Tudományos Akadémia előtt bemutatja a soros, majd négy héttel később, február hó 14-én Sir Wheatstone Charles a londoni Royal Society előtt a sönt gerjesztésű dinamót. Ezzel megszületett a nagy teljesítőképességű egyenáramú áramfejlesztő gép, s az erősáramú technika fejlődése megindulhatott.

Az első nyilvános sikert az 1876. évi philadelphiai Centennary Exhibition hozta meg, amelyen a kiállítás területének főútvonalait ívlámpák fényével árasztották el. Két év mulva már a Ganz-gyár vasöntődéjét is villamos ívlámpák világítják és 1879-ben a magyar főváros közönsége már több helyen is, ú. m. az óbudai tornacsarnok-ban, a Császárfürdőben és a pesti jégpályán gyönyörködhetett a villamos ívlámpák kápráztató fényében. Az általánosabb elterjedés, nevezetesen a kis egységekre osztható belső téri világítás útját azonban csak Edison izzólámpái nyitják meg, amelyek 1879. Szilveszter estéjén ragyogtak fel először a Menlo-park zuzmaralepte fái között. Az európai döntő sikert 1881-ben a párizsi opera próbavilágítása hozta meg, amelynek munkálataiban részt vett Edison akkori magyar munkatársa, Fodor István is.

Az elektrotechnika e forrongó és merészen felfelé lendülő korszakában lép ki pályájára az ifjú Bláthy. Miután 1881-ben elvégezte a bécsi Műegyetem gépészmérnöki osztályát és rövid ideig a Magyar Állami Gépgyárban gyakornokoskodott, szinte természetesnek látszik, hogy minden új iránt fogékony szelleme a nagy lehetőségeket ígérő új iparág felé vonzza. Ezért 1883. július hó 1-én, mint szerkesztő mérnök a Ganz és Tsa szolgálatába áll, hogy azontúl élete egész munkáját e cég keretében, az elektrotechnika fejlesztésének szentelje.

A Ganz-gyár élén akkor a széleslátókörű Mechwart András állott, aki kezdettől fogva felismerte és értékelni tudta a villamos energia sokoldalú alkalmazhatóságának jelentőségét, és ezért már 1878-ban felállította a gyár elektrotechnikai osztályát azzal a feladattal, hogy a villamos gépek és készülékek gyártása és fejlesztése terén a magyar ipar számára megfelelő helyet biztosítson. Az osztály vezetésével Zipernowszky Károlyt bízta meg, akihez először Déri Miksa, majd 1883-ban Bláthy csatlakozott munkatársul.

A mult század nyolcvanas éveinek elején — amint láttuk — az egyenáramú rendszer aratta diadalait. 1882-ben helyezte üzembe az Edison-Társaság az első két közcélú körzeti villamos erőművet, Londonban és New Yorkban. Ugyanezen év őszén bizonyította be Deprez, a Miesbach és München közötti 57 km hosszú vezetéken, egyenárammal, a villamos energia nagy távolságokra való átvitelének lehetőségét. A szakértők túlnyomó többsége az egyenáramú rendszer fejlesztésében látta a jövőt, bár a lámpák — mint akkori egyetlen fogyasztók — kis feszültsége oly nagy áramerősségekre és oly nagy vezeték-keresztmetszetekre utalt, amelyek üzemi és gazdasági hátrányai már korán jelentkeztek. E nehézség csakis a feszültség növelésével volt legyőzhető, s e cél érdekében alakult ki egyfelől az Edison—Hopkinson-féle többvezetékes, másfelől a Brush-féle soros kapcsolású elosztó rendszer.

A Ganz-gyár elektrotechnikusai kezdettől fogva ama sokkal kisebb csoporthoz csatlakoztak, amely a rendkívül egyszerű, nagy egységekben is könnyen gyártható és tetszőleges nagy feszültséget is üzembiztosan fejlesztő váltakozóáramú generátort választotta az energiaellátás alapjául. Az 1883-i bécsi kiállítás egyik látványossága az «óriási» 150 lóerős gőzhajtású Mechwart—Zipernowszky-féle váltakozóáramú generátor volt, amely 1200 izzólámpát táplált közvetlenül, 54 Volt feszültséggel.

Itt kapcsolódik be a munkába Bláthy, aki a huszas életévek merész lendületével és nagy tehetségének egész alkotóerejével indul neki az akkor még teljesen rejtélyes váltóáramú problémák ismeretlen rengetegének.

Az 1884. évi torinói kiállításon a Ganz-gyár már Bláthy által szerkesztett és különösen a mágneskör helyes kialakítása folytán számottevően javított, öngerjesztő kompaundált váltóáramú generátorral szerepel és teljes sikert arat. Habár az első díjat az akkor már világhírű Edison cég nyeri el, a második díjat az elektrotechnika terén addig még alig szerepelt Ganz-gyárnak ítélik oda.

Ezen a kiállításon ismerkedett meg Bláthy azzal az új erőátviteli és elosztási rendszerrel, amelyet a francia Gaulard és az angol Gibbs 1883-ban szabadalmaztatott és alkalmazott először Londonban, s amellyel a torinói kiállítás egyes részeit világították. Ez a találmány, amelynek lényeges elemeit «szekunder generátorok»-nak nevezték, a váltóáramú generátorokkal fejleszthető nagyfeszültség átviteli előnyeit úgy igyekezett a lámpafogyasztók kis feszültségének követelményével összeegyeztetni, hogy az átviteli áramkörbe, a fogyasztás helyén, nyitott vasmagra tekercselt 1 : 1 áttételű tekercspárt iktatott be. A primer tekercsek mind sorba voltak kapcsolva, a szekunder tekercsek pedig egy-egy önálló fogyasztócsoportot tápláltak. Könnyen belátható, hogy, mivel ezen elrendezés mellett az egész terhelési áram valamennyi primer tekercsen átfolyott, a fogyasztók a terheléssel változó feszültséget kaptak, amiért is — különös tekintettel még a nyitott vasmag nagy mágneses szóródására — a rendszer legföljebb egy bizonyos terhelési állapotban adhatott kielégítő eredményt, a célbavett feladat megoldására azonban nem volt alkalmas. Hogy mennyire pusztán találomra és a jelenségek valódi okainak ismerete nélkül születtek meg abban az időben az új találmányok, arra jellemző, hogy Bláthy ama kérdésére, hogy miért nem alkalmazott szekunder generátoraiban zárt vasmagot, Gaulard azt válaszolta, hogy az káros és gazdaságtalan megoldás lenne. Egy amerikai szakértő, Kennedy, pedig úgy vélekedett, hogy a szekunder generátorok egyébként kívánatos párhuzamos kapcsolása nem lehetséges, mert óriási keresztmetszetű vezetékeket igényelne.

A Ganz-gyár elektrotechnikusai más véleményen voltak. Felismerték Gaulard és Gibbs rendszerének alapvető hibáit és 1884/85 telén kidolgozták a Bláthytól transzformátornak nevezett feszültségváltókkal dolgozó rendszert, amely a korszerű villamos energiaellátás ma is változatlanul uralkodó tényezőjévé lett. Az első szabadalmat 1885. január 2-án Zipernowszky és Déri jelentették be párhuzamos kapcsolású és tetszőleges áttételű «váltakozóáramú induktorok»-ra. A két hónappal később benyujtott «Javítás indukciós készülékeken villamos áramok transzformálásának céljára» című szabadalmi bejelentés már Bláthy nevét is viseli és az ő általa javasolt zárt vasmagú megoldásra, mégpedig annak mindkét alakjára, ú. m. a mag- és a köpenytranszformátorra vonatkozik.

Az új rendszert nagy nyilvánosság előtt először az 1885. évi budapesti Országos Kiállításon mutatták be, amelynek egész területét 1350 Volt primer feszültségen szétosztott, 70 periódusú váltóárammal világították, 75 kis köpenytranszformátor útján. A siker teljes volt. A külföldi szakértők nagy számmal keresték fel és tanulmányozták az újszerű berendezést, amelyről Ferraris Galileo tanár, korának egyik legkiválóbb fizikusa, fenntartás nélkül kijelentette, hogy az energiaátvitel problémáját teljes eredményességgel megoldotta. Ferraris e megállapításának helyességét az azóta eltelt öt és fél évtized minden tekintetben igazolta. A természetes energiaforrások nagyszabású kihasználásának és a villamos energia sokoldalú alkalmazhatóságának lehetőségeit minden kétségen felül a transzformátor feltalálása nyitotta meg az emberiség számára.

Amíg a transzformátor a nagy triász közös találmányaként indul el világot hódító útjára, addig Bláthy egyéni alkotásai és szabadalmai egymásután oldják meg azokat a sokoldalú feladatokat, amelyek a váltóáramú rendszer alkalmazásával kapcsolatban, az e téren világhírre szert tevő Ganz-gyár által szállított berendezések üzemében felmerültek, s amelyek a rendszer teljes győzelméhez nélkülözhetetlenek voltak. Ezek az úttörő munkák javarészt a Società Anglo Romana per l'Illuminazione di Roma Cerchi-i gőzerőművében (1887), majd a Tivoli-i vízerőművében (1892) folytak és világszerte méltányolt eredményekre vezettek. Sajnos, — amint ez már magyar sors — az elismerés elsősorban az olasz vállalati vezetőknek jutott osztályrészül, éppen úgy, mint ahogy tíz esztendővel később, Kandó Kálmánnak, a Valtellinán világsikert arató háromfázisú villamos vontatási rendszere is az olaszok büszkeségét tevő «sistema italiano» néven ment át a köztudatba.

Bláthy ezen korbeli alkotásai között első a higanyedényes feszültségszabályozó (1884), amely az erőmű generátorainak feszültségét önműködően akként változtatta, hogy a fogyasztási feszültség állandó maradt. Ezt követte az elektrodinamikus wattmérő (1885), amely az első olyan műszer volt, amellyel váltóáramú teljesítményt, a feszültség és az áram közötti bármely fáziseltolás esetén mérni lehetett. Ezt a műszert használta Bláthy azon úttörő kutatásainál is, amelyeket az akkor «mágneses súrlódás»-nak nevezett vasveszteségek megállapítása céljából végzett. Ugyancsak ő szerkesztette a váltóáramú munka mérésére szolgáló első készüléket is (1889), amelynek hajtóeleméül a Ferraris-tárcsát választotta. Ez a szerencsés gondolat egészen napjainkig az összes ú. n. indukciós wattóra-számlálók szerkezetének alapjául szolgált.

Hogy az új váltóáramú erőátviteli rendszernek az akkor már elterjedt egyenáramú elosztó hálózatokba való beilleszkedését elősegítse, foglalkozott abban az időben egyarmaturás áramátalakítókkal is, és a fogyasztás, illetve a váltóáram alkalmazhatóságának fokozására egyfázisú kommutátoros mótorokat szerkesztett (1891), amelyekben a korszerű mótoroknak már számos lényeges eleme megtalálható. E mótorok egyik 10 lóerős példányát — sajnos — a müncheni Deutsches Museum őrzi.

Különös figyelmet érdemelnek azok az alapvető tanulmányok, amelyeket Bláthy a Treviso-i, Cerchi-i, Innsbruck-i és Tivoli-i erőművekben váltakozóáramú generátorok párhuzamos járása és a hajtógépek szabályozóinak megfelelő kialakítása terén végzett, s amelyekkel ezt az akkor annyira bonyolultnak látszó problémát tökéletesen megoldotta. A legyőzendő nehézségekre jellemző, hogy még oly kiváló tudósok is, mint például Kittler professzor, elméleti meggondolások alapján megoldhatatlannak vélték a feladatot még akkor is, amidőn Bláthy útmutatásai alapján és szabályozói segítségével, különböző erőművekben a váltóáramú generátoroknak már egész sora dolgozott párhuzamos üzemben.

Bláthy éleslátása ugyanis felismerte, hogy a váltóáramú generátorok párhuzamos járatása velejében inga-probléma, amely megoldható, ha egyfelöl lengések keletkezését gátló szabályozókat, másfelől az ébredő lengéseket csillapító szerkezeteket alkalmaznak. Bláthy elgondolásait mindkét irányban siker koronázta és a gőzgépekkel közvetlenül kapcsolt generátorok párhuzamos járatásának lehetősége a Cerchi-erőműben már 1888-ban gyakorlati igazolást nyert. Ugyanebbe a munkakörbe tartozik Bláthynak az az úttörő találmánya is, amely relé vezérlésű hidraulikus szervómótorral vízturbinák fordulatszámának pontos és lengésmentes szabályozását célozta, s amelynek elve más cégek turbinaszabályozóinak is alapjává lett. Ilyen szabályozókkal volt felszerelve a Tivoli-i vízerőmű, amelyből kereken 30 km-es távvezeték vezetett Rómába, párhuzamos járásra fogva a vízerőmű turbinahajtású és a gőzerőmű gőzgéphajtotta váltóáramú generátorait. Ez volt az első ilyen párhuzamos üzem és egyúttal az első közcélú villamos erőátvitel, amelynek jelentőségéből semmit sem von le az a tény, hogy egy évvel az annyit emlegetett Frankfurt a/M.—Lauffen a/N.

erőátviteli berendezés után nyílt meg. Mert amíg ez utóbbi csak egy kiállítás kísérleti látványossága volt, addig a Ganz-gyár olaszországi alkotása egy világváros energiaszükségletét ellátó páratlanul nagyszabású mű.

Amidőn századunk elején a gőzturbina megjelenése egészen újszerű problémákat felvető, de a generátorok követelményeihez jobban simuló és szinte korlátlan erejű hajtógépet juttatott az elektrotechnikusok rendelkezésére, Bláthy azonnal felismerte a kínálkozó új lehetőségeket. Kitűnő szerkesztői érzéke elmés megoldásokkal legyőzi a nehézségeket és fokozatosan kifejleszti azt, a forgórészének szerkezetében és tekercselésének sajátosságaiban egészen eredeti turbogenerátor-típust, amely ma már úgyszólván az egész Földön hirdeti a magyar ipar minden versenyt kiálló teljesítőképességét.

A következő években munkásságát főleg generátorai és transzformátorai tökéletesítésének szentelte. Eközben merész alkotó ösztöne mindig járatlan utak és csúcsteljesítmények felé viszi. A teljesítmények abszolut és fajlagos (súlyegységre vonatkoztatott) értékeiben mindig az élen halad. Messze túllépné e megemlékezés kereteit, ha munkásságának ezirányú kimagasló alkotásait egyenkint felsorolnók ; de még így sem kapnánk helyes képet, mert hiszen a korabeli csúcsteljesítményeket a rohamos fejlődés egymásután túlszárnyalja és a helyes értékelést megnehezíti. Egy azonban még ma is megérdemli a külön felemlítést, nevezetesen a Subiaco-i vízerőmű 1905-ben készült generátorai, amelyek 30000 Voltos kapocsfeszültsége azóta is veretlenül áll.

A gépóriások fejlesztésének mesteri irányítása mellett otthonos maradt az alig néhány Wattot igénylő fogyasztásmérők finom kis készülékeinek világában is. Hogy e téren mekkora utat futott be, azt legbeszédesebben az mutatja, hogy wattóra számlálóinak súlya az 1889. évi kereken 20 kg-ról a legújabb típusban 1·3 kg-ra csökkent. Ezzel kapcsolatban rá kell még mutatni arra a szellemes sztroboszkópos tömeghitelesítési eljárásra is, amely, a szerkezeti részletek kiválósága mellett, Bláthy fogyasztásmérőinek előnyösen ismert pontosságát biztosítja.

Életének utolsó nagy munkája az az önzetlen kartársi érzéstől áthatott közreműködése volt, amellyel a magyar elektrotechnika másik halhatatlan mesterének, az alkotókészsége teljében tragikus hirtelenséggel elköltözött Kandó Kálmánnak félbemaradt örökét átvette és az új magyar villamos vontatási rendszert, különösen a mozdony-fázisváltók részleteinek befejezésével, a ma már kétségbe nem vonható teljes sikerhez segítette.

Ha Bláthy e nagyszabású gyakorlati tevékenysége sikerének kulcsát keressük, azt elsősorban veleszületett tehetsége kivételes intuitív és kombinatív készségében találjuk meg. A problémák velejét azonnal felismerte és a megoldásukra vezető utat szinte ösztönszerűleg jelölte ki. De mint vérbeli kutató, céltudatos következetességgel alkalmazta a mérési és a kísérleti módszereket is, amelyek eredményeinek feldolgozásában nagy segítségére volt kitűnő emlékezőtehetsége és bámulatos fejszámolóképessége, amelylyel már gyermekkorában kitűnt.

Kutatásainak eredményeit, sajnos, csak igen ritkán hozta nyilvánosságra, ami által sok nagyjelentőségű felderítés elsőbbségének dicsősége veszett el a magyar elektrotechnika számára. Így elsőnek ismerte fel és helyezte mennyiségi alapra a gerjesztő ampermenetek és a mágnesmező erőssége közötti összefüggést (1883). Behatóan tanulmányozta a villamos gépek és transzformátorok melegedését megszabó tényezőket és az erre vonatkozó számításokban először szerepeltette a ma már általánosan használt fajlagos felületi igénybevétel, Watt/dm^2, fogalmát. Ugyancsak elsőként — Steinmetzet megelőzve — ő állította fel a hysteresis és a Foucault vasveszteségek kiszámítására szolgáló exponenciális képletet (1888), ő figyelte meg először a vas mágneses öregedésének jelenségét (1890) és ő tisztázta a villamos gépekben terheléskor fellépő járulékos veszteségeket (1896), amire vonatkozó vizsgálatait kivételesen külföldi szaklapokban is közzétette.

Élénk, minden iránt fogékony szelleme azonban nem maradt a gépszerkesztés egyoldalú rabja. Országos tervek s a természettudományok különféle ágai éppen úgy foglalkoztatták, mint a civilizáció haladásának újszerű megnyilvánulásai. Élénken részt vett az Országos Középítési Tanács munkáiban, egyebek között a Villamosságügyi Törvény előkészítésében. Az assuani gáttal tárolt vízerő leggazdaságosabb kihasználására javasolt szellemes terve éppúgy méltán keltett feltűnést, mint a sakktábla játékosai számára kidolgozott egészen újszerű feladatainak gyüjteménye (Vielzügige Schachaufgaben, 1890), mert e téren is világszerte elismert tekintélynek számított. A csillagászat haladása éppúgy érdekelte, mint régebben a kerékpározás, majd az automobilizmus, amelynek lelkes híve volt.

Bár külső megkülönböztetésekre nem törekedett, érdemeiért sok méltó elismerésben volt része. A budapesti és a bécsi Műegyetem 1917-ben tiszteletbeli doktorává avatta, a Magyar Tudományos Akadémia pedig, amelynek Wahrmann- és Marczibányi díját elnyerte, 1927-ben tiszteleti tagjainak sorába választotta. Az olasz király 1907-ben a Corona d'Italia rendjel tiszti keresztjével tüntette ki és 1908-ban megkapta a m. kir. udvari tanácsosi méltóságot. Az 1900. évi párizsi világkiállításon turbogenerátoraival elnyerte az egyéni Grand Prix-t. Ganz-gyári működésének félszázados jubileuma alkalmával 1933-ban a kormányzó a Magyar Érdemrend középkeresztjével tüntette ki és szülővárosa: Tata, díszpolgárává avatta. Tiszteleti tagja volt a Magyar Mérnök- és Építész-Egyletnek, amely a Kandó Kálmán-emlékéremmel elsőnek őt tüntette ki, a Magyar Elektrotechnikai Egyesületnek és a Kir. Magyar Automobil Klubnak. Választmányi tagja volt az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulatnak, a Stella Csillagászati Egyesületnek és még számos más tudományos és társadalmi alakulatnak.

Bláthyval az elektrotechnika egyik legkimagaslóbb úttörője és képviselője távozott el az élők sorából, akinek emlékét nemcsak műszaki alkotásainak hosszú sora fogja megőrizni, hanem a kegyeletnek azon soha el nem múló érzése is, amely az utódokat arra kötelezi, hogy méltó követői legyenek az olyan, hazáját mindenkor hűséggel és tudományszakát lelkes buzgalommal szolgáló kivételes nagy egyéniségnek, mint aminő Bláthy Ottó Titusz volt.

Vitéz Verebélÿ László.

OTTÓ TITUS BLÁTHY

1860—1939.

Am 26. September 1939. starb im achzigsten Lebensjahre Hofrat Dr. Ing. h. c. OTTÓ TITUS BLÁTHY, einer der bedeutendsten Pioniere der Wechselstromtechnik. In Tata, Ungarn, 1860 geboren, absolvierte er 1881 als Maschieneningenieur an der T. H. Wien und trat, nach kurzer Tätigkeit im Konstruktionsbüro der Ungarischen Staatlichen Maschienenfabrik, in den Dienst der Firma Ganz & Co. Budapest, wo er über ein halbes Jahrhundert seine aussergewöhnlichen Geistesgaben der Förderung der Elektrotechnik widmete. Als Mitarbeiter von ZIPERNOWSKY und DÉRI, war er an der Erfindung des Transformators beteiligt (1884/85). Sodann konstruierte er den ersten automatischen Spannungsregler für Wechselstromgeneratoren (1884), den ersten elektrodynamischen Wattmesser (1889) und den ersten Verbrauchsmesser mit Ferrarisscheibe (1889). Bahnbrechend waren seine Arbeiten auf dem Gebiete des Parallelarbeitens von Wechselstromgeneratoren und der hiezu benötigter Kraftmaschienen-Regler, die den durchschlagenden Erfolg der ersten grosszügigen Kraftübertragung der Welt, Tivoli-Rom (1892) sicherten. Nach dem Erscheinen der Dampfturbine widmete BLÁTHY seine Tätigkeit der Entwicklung des Turbogenerators zu und schuf mustergültige Maschienen, die auch im Auslande ihren Markt gefunden haben. Auch wissenschaftlich war BLÁTHY auf weiten Gebieten der Elektrotechnik tätig, leider hat er aber von seinen Forschungen all zu wenig veröffentlicht. Im Jahre 1908 erhielt er den Titel eines königl. ung. Hofrates. 1917 wurde er von den Technischen Hochschulen Budapest und Wien zum Dr. Ing h. c. promoviert, und in 1927 zum Ehrenmitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften gewählt. Er erhielt mehrmals hohe Auszeichnungen und war Ehrenmitglied vieler In- und Ausländischen Vereine, u. A. korrespondierendes Mitglied des Elektrotechnischen Vereins Berlin.

László von Verebély.

RELATÍV GALOIS-FÉLE ALGEBRAI SZÁMTESTEK ÖSSZETÉTELÉRŐL.

Legyen a k alaptestre vonatkozólag $G_1(k)$ és $G_2(k)$ két relatív GALOIS-féle test, az összetett számtest legyen $G(k) = G_1 G_2(k)$. Az összetett test GALOIS-féle csoportja legyen $\mathfrak{G}$, az összetevő testek tartozzanak a $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ alcsoportokhoz. A $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ relatív prim invariáns alcsoportok. A k testben legyen $\mathfrak{p}$ oly primideál, mely a p racionális törzsszámnak osztója. Legyenek a $G_1(k)$, ill. $G_2(k)$ testekben $\mathfrak{p}$ primideáljai f_1-ed fokúak és g_1-edrendűek, ill. f_2-edfokúak és g_2-edrendűek. A $G(k)$ testben legyen a $\mathfrak{p}$ törzsideál előállításában a $\mathfrak{P}$ primideálnak (és így mindegyiknek) foka F, rendje G.

Ismeretes, hogy

$$G = \frac{g_1 g_2}{\Delta}, \tag{1}$$

hol Δ osztója (g_1, g_2)-nek. Be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

$$F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} \Delta', \tag{2}$$

hol Δ' osztója Δ-nak.

A tétel abban az esetben, mikor (g_1, g_2) relatív prim p-hez, ÖYSTEIN ORE egy fontos dolgozatából következik.[1]

1. Tartozzék a $\mathfrak{P}$ primideálhoz a $\mathfrak{H}$, ill. $\bar{\mathfrak{H}}$ felbontási, ill. tehetetlenségi csoport. A

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}), \ \mathfrak{B} = (\mathfrak{G}_2, \mathfrak{H})$$

---

[1] ÖYSTEIN ORE, Über zusammengesetzte algebraische Körper. *Acta Mathematica* **49**, (1926), 379—396. l. Az itt bebizonyítandó tétel még bizonyos irányban általánosítható.

alcsoportok rendjei legyenek h_1, ill. h_2. A $\mathfrak{H}$ rendje FG, a $\overline{\mathfrak{H}}$ rendje G, a

$$\overline{\mathfrak{H}}_1 = (\mathfrak{G}_1, \overline{\mathfrak{H}}), \ \overline{\mathfrak{H}}_2 = (\mathfrak{G}_2, \overline{\mathfrak{H}})$$

alcsoportok rendjei legyenek a_1, ill. a_2. Ismeretes, hogy

$$G = g_1 a_1 = g_2 a_2, \ F = \frac{f_1 h_1}{a_1} = \frac{f_2 h_2}{a_2}. \tag{3}$$

Képezzük a

$$\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{H}}, \ \mathfrak{B}\overline{\mathfrak{H}}$$

komplexusokat. Minthogy $\overline{\mathfrak{H}}$ invariáns alcsoportja $\mathfrak{H}$-nak, az $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{H}}$ komplexus csoport, hasonlókép a $\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{H}}$ is csoport. Az $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{H}}$, ill. $\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{H}}$ rendjei FROBENIUS szerint

$$\frac{h_1 G}{a_1} = h_1 g_1, \text{ ill. } \frac{h_2 G}{a_2} = h_2 g_2. \tag{4}$$

Az $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{H}}$ csoport invariáns alcsoportja $\mathfrak{H}$-nak, mert két invariáns alcsoport szorzata, $\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{H}}$ is invariáns alcsoportja $\mathfrak{H}$-nak, ennélfogva az

$$\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{H}}.\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{H}} \tag{5}$$

komplexus is csoport. Vizsgáljuk meg a $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{H}}$ és $\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{H}}$ csoportok legnagyobb közös alcsoportjának rendjét. Jelöljük ezt d-vel. Mindenekelőtt a vizsgált csoport tartalmazza $\overline{\mathfrak{H}}$-t, tehát

$$d \equiv 0 (\text{mod. } G), \ d = \frac{g_1 g_2}{\Delta} u, \ u \text{ rac. egész.} \tag{6}$$

Más oldalról az $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{H}}.\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{H}}$ csoport, melynek rendje $\frac{h_1 g_1 h_2 g_2}{d}$ tartalmazza az $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ csoportot, melynek rendje $h_1 h_2$, mert $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ relatív primek. Tehát lesz

$$\frac{h_1 g_1 h_2 g_2}{d} \equiv 0 (\text{mod.} h_1 h_2), \ \frac{g_1 g_2}{d} = v, \ v \text{ rac. egész,}$$

amiből

$$\frac{g_1 g_2 \Delta}{g_1 g_2 u} = v, \ uv = \Delta, \tag{7}$$

vagyis

$$d = \frac{g_1 g_2}{\Delta} = u, \ \Delta \equiv 0 \text{ (mod. } u). \tag{8}$$

Így tehát a

$$\frac{\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}}{\bar{\mathfrak{H}}}, \quad \frac{\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}}{\bar{\mathfrak{H}}} \tag{9}$$

csoportok a $\frac{\mathfrak{H}}{\bar{\mathfrak{H}}}$ ciklikus csoportnak oly alcsoportjai, melyeknek legnagyobb közös osztója u-adrendű, vagyis

$$\left(\frac{h_1 g_1}{G}, \frac{h_2 g_2}{G}\right) = \left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}\right) = u. \tag{10}$$

Ámde

$$F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} T, \quad F = \frac{f_1 h_1}{a_1} = \frac{f_2 h_2}{a_2};$$

ebből

$$\frac{h_1}{a_1} = \frac{f_2}{(f_1, f_2)} T, \quad \frac{h_2}{a_2} = \frac{f_1}{(f_1, f_2)} T, \quad T = u = \Delta'$$

és amint bebizonyítandó volt

$$F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} \Delta', \tag{2}$$

hol Δ' osztója Δ-nak.

E tétel több következményét akarjuk kiemelni.

I. Az előbbi jelöléseket alkalmazva [2]

$$f_1 f_2 g_1 g_2 \equiv 0 \ (\text{mod. } FG), \tag{11}$$

sőt

$$\frac{f_1 f_2 g_1 g_2}{(f_1, f_2)} \equiv 0 \ (\text{mod. } FG). \tag{11*}$$

II. Ha $(g_1, g_2) = 1$, akkor

$$G = g_1 g_2, \quad F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}.$$

Ez Mikao Moriya [3] egy szép dolgozatából is következik, mely Herbrand kezdeményezéseire támaszkodik és általános testekre vonatkozik.

---

[2] Bauer Mihály, Az algebrai számtestek elméletéhez. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, **34**, (1916), 90—103. l. 2. §. M. Bauer, Über zusammengesetzte Zahlkörper, *Math. Annalen* **77** (1916), 357—361. l.

[3] Mikao Moriya, Über einen Satz von Herbrand. *Journal of the Faculty of Science. Hokkaido Imperial University* **4** (1936), 182—194. l. Lásd még [4]-et, valamint e dolgozat 3. pontját.

2. MIKAO MORIYA eredményei relatív GALOIS-féle testekre specializálva, a következők.

III. Ha az előbbieken kívül még bevezetjük a következő jelöléseket

$$g_i = p^{m_i} g_i^{(0)},\ (p, g_i^{(0)}) = 1,\ G = p^M G^{(0)},\ (p, G^{(0)}) = 1,$$
$$(i=1,2)$$

akkor

$$M \leqq m_1 + m_2.$$

IV. Ha $M = m_1 + m_2$ (ami mindenesetre bekövetkezik, ha g_1 és g_2 közül valamelyik relatív prim p-hez), akkor

$$G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})}.$$

V. Ha $G = g_1 g_2$ (ami mindenesetre bekövetkezik, ha $(g_1, g_2) = 1$), akkor

$$F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}.$$

A III. összefüggés már H. WEBER eredményeiből folyik.[2] A IV. és V. túlhaladtak bizonyos régebbi eredményeket.[4] Újabban azonban észrevettem, hogy az idézett helyen alkalmazott módszerrel IV. és V. levezethető. Csak jobban ki kell használni az elágazási csoportnak, mely ott explicite fel sem lép, ismeretes tulajdonságait és alkalmazni kell a következő észrevételt:

Ha a q-adrendű $\mathfrak{Q}$ csoport tartalmazza a q_1- és q_2-edrendű $\mathfrak{Q}_1$ és $\mathfrak{Q}_2$ alcsoportokat, melyeknek az egységen kívül közös elemük nincs, ha továbbá $q = q_1 q_2$, akkor

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{Q}_1.$$

Röviden jelzem pl. az V. formula levezetését. Az $\mathfrak{A}$ tartalmazza $\mathfrak{H}$-nak egy a_1-edrendű alcsoportját $\mathfrak{H}_1$-et, a $\mathfrak{B}$ tartalmazza $\mathfrak{H}$-nek egy a_2-edrendű alcsoportját $\mathfrak{H}_2$-t. A $\mathfrak{H}_1$ és $\mathfrak{H}_2$-nek az egységen

---

[4] BAUER MIHÁLY, Relatív Galois-féle számtestek összetétele. *Math. és Természettud. Értesítő* **38**, 173—177. l. M. BAUER, Über relativ Galois'sche Zahlkörper. *Math. Annalen* **83** (1921), 70—73. l.

kívül nincs közös elemük. Ha feltesszük, hogy $G = g_1 g_2$, akkor $G = a_1 a_2$ és így

$$\bar{\mathfrak{H}} = \bar{\mathfrak{H}}_1 \bar{\mathfrak{H}}_2 = \bar{\mathfrak{H}}_2 \bar{\mathfrak{H}}_1,$$

a $\bar{\mathfrak{H}}$ nem okvetetlenül ciklikus csoport. Látható, hogy a

$$\frac{\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}_2}{\bar{\mathfrak{H}}}, \quad \frac{\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}_1}{\bar{\mathfrak{H}}}$$

csoportok a $\frac{\mathfrak{H}}{\bar{\mathfrak{H}}}$ ciklikus csoportnak relatív prim alcsoportjai, tehát tényleg

$$\left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}\right) = 1, \quad F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}.$$

Természetesen az $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{H}}_2 . \mathfrak{B}\bar{\mathfrak{H}}_1$ komplexus esetleg nem csoport.

3. Jeleztük az V. tétel bebizonyítását, mely különben (2)-*ből is következik.* Be fogjuk bizonyítani, hogy a IV. tétel M-től függetlenül helyes. Tehát mindig

$$G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})}.$$

Volt

$$\bar{\mathfrak{H}}_1 = (\mathfrak{G}_1, \bar{\mathfrak{H}}), \quad \bar{\mathfrak{H}}_2 = (\mathfrak{G}_2, \bar{\mathfrak{H}}).$$

A

$$\bar{\mathfrak{H}}_1 \mathfrak{B}, \quad \bar{\mathfrak{H}}_2 \mathfrak{B} \tag{12}$$

komplexusok, hol $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{P}$ ideál elágazási csoportja, ismét csoportok, még pedig $\bar{\mathfrak{H}}$ invariáns alcsoportjai. Az elágazási csoport ismeretes tulajdonságai alapján[5] rendjeik

$$\frac{a_1 p^M}{p^{M-m_1}} = a_1 p^{m_1}, \text{ ill. } \frac{a_2 p^M}{p^{M-m_2}} = a_2 p^{m_2}.$$

A $\bar{\mathfrak{H}}_1 \mathfrak{B} . \bar{\mathfrak{H}}_2 \mathfrak{B}$ komplexus szintén csoport. Határozzuk meg a

$$(\bar{\mathfrak{H}}_1 \mathfrak{B}, \bar{\mathfrak{H}}_2 \mathfrak{B}) \tag{13}$$

---

[5] A $\frac{\bar{\mathfrak{H}}}{\mathfrak{B}}$ csoport rendje relatív prim p-hez. $\mathfrak{B}$ rendje p hatványa.

legnagyobb közös alcsoport rendjét d-t. Minthogy a legnagyobb közös osztó $\mathfrak{B}$-t tartalmazza, lesz

$$d = p^M u, \quad u \text{ rac. egész.} \tag{14}$$

Más oldalról a komplexus tartalmazza a $\bar{\mathfrak{H}}_1\bar{\mathfrak{H}}_2$ csoportot, tehát

$$\frac{a_1 p^{m_1} . a_2 p^{m_2}}{d} = a_1 a_2 v, \quad \frac{p^{m_1+m_2}}{d} = v, \quad v \text{ rac. egész.} \tag{15}$$

Az előbbiekből

$$\frac{p^{m_1+m_2}}{p^M u} = v, \quad uv = p^{m_1+m_2-M},$$

az u tehát p-nek hatványa és így

$$u = 1, \quad d = p^M. \tag{16}$$

A

$$\frac{\bar{\mathfrak{H}}_1\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}, \quad \frac{\bar{\mathfrak{H}}_2\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$$

csoportok a $\frac{\bar{\mathfrak{H}}}{\mathfrak{B}}$ ciklikus csoportnak relatív prim alcsoportjai, tehát

$$\left(\frac{a_1 p^{m_1}}{p^M}, \frac{a_2 p^{m_2}}{p^M}\right) = 1. \tag{17}$$

Ámde

$$G = g_i a_i, \quad p^M G^{(0)} = p^{m_i} g_i^{(0)} a_i, \qquad (i=1,2)$$

ebből

$$a_i = p^{M-m_i} a_i', \quad (a_i', p) = 1, \quad (a_1', a_2') = 1, \qquad (i=1,2)$$

és így

$$G^{(0)} = g_1^{(0)} a_1' = g_2^{(0)} a_2', \tag{18}$$

vagyis az előbbiek szerint[6]

$$G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)} g_2^{(0)})}.$$

Bauer Mihály.

---

[6] A tétel bizonyos irányban általánosítható.

ÜBER ZUSAMMENGESETZTE RELATIV GALOIS'SCHE ZAHLKÖRPER.

Es seien $G_1(k)$, $G_2(k)$ relativ GALOIS'sche Zahlkörper über den Körper k. Das Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers k sei ein Teiler der rationalen Primzahl p. Die Primideale von $\mathfrak{p}$ sollen in $G_1(k)$, bzw. $G_2(k)$, bzw. im zusammengesetzten Körper $G(k)=G_1G_2(k)$ die Grade f_1 bzw. f_2, bzw. F und die Ordnungen g_1, bzw. g_2, bzw. G besitzen. Wir setzen noch

$$g_i = p^{m_i} g_i^{(0)},\quad (p,\ g_i^{(0)})=1,\quad G=p^M G^{(0)},\quad (p,\ G^{(0)})=1.$$
$$(i=1,\ 2).$$

Es werden die folgenden Formeln bewiesen:

$$G=\frac{g_1 g_2}{\Delta},\quad F=\frac{f_1 f_2}{(f_1,\ f_2)}\Delta',\quad G^{(0)}=\frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)},\ g_2^{(0)})},$$

wo Δ einen gewissen Teiler von $(g_1,\ g_2)$, ferner Δ' einen gewissen Teiler von Δ bildet.

Michael Bauer.

AZ ALGEBRAI SZÁMTESTEK ÖSSZETÉTELÉNEK ELMÉLETÉHEZ.

Legyenek $K_1(k)$ és $K_2(k)$ a k alaptestre relatív algebrai számtestek. A $K_1K_2(k)$ összetett számtestnek legyen $\mathfrak{P}$ primideálja, melynek többesei a $K_1(k)$, ill. $K_2(k)$, ill. k testekben a $\mathfrak{P}_1$, ill. $\mathfrak{P}_2$, ill. $\mathfrak{p}$ primideálok legyenek; ezek egyértelműleg meg vannak határozva. Álljanak fenn a

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{g_1}\ldots, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{P}_2^{g_2}\ldots, \quad \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}^{g}\ldots$$

összefüggések, tehát g_1, g_2 és $G = gg_2$ a $\mathfrak{P}_1$, ill. $\mathfrak{P}_2$, ill. $\mathfrak{P}$ rendjei a $K_1(k)$, ill. $K_2(k)$, ill. $K_1K_2(k)$ testekben, a primideálok fokait jelöljék f_1, ill. f_2, ill. $F = ff_2$, tehát f jelentse $\mathfrak{P}$ fokát és g a rendjét a $K_2(k)$ testre, mint alaptestre. Végül legyen a p racionális törzsszám $\mathfrak{p}$ többese és tegyük fel, hogy

$$g_i = p^{m_i} g_i^{(0)}, \quad g = p^m g^{(0)}, \quad G = p^M G^{(0)} = p^{m+m_2} G^{(0)}, \quad G^{(0)} = g^{(0)} g_2^{(0)},$$
$$(g_i^{(0)}, p) = (g^{(0)}, p) = (G^{(0)}, p) = 1, \quad (i=1,\ 2). \tag{1}$$

E dolgozatban a F, G, $G^{(0)}$-ra vonatkozó tételeket fogunk bebizonyítani, melyek Mikao Moriya [1] eredményeit, mint speciális eseteket tartalmazzák. Ezenfelül vizsgálataink vonatkozásban vannak Öystein Ore [2] egy fontos dolgozatával.

1. A vizsgálat céljából bővítsük ki a $K_1K_2(k)$ összetett testet egy $G(K_1K_2(k))$ Galois-féle testté, melynek csoportja $\mathfrak{G}$ és amelyben a $\mathfrak{P}^*$ primideál a $\mathfrak{P}$, $K_1K_2(k)$-beli primideál osztója.

---

[1] Mikao Moriya, Über einen Satz von Herbrand. *Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University* **4** (1936), 182—194. l.

[2] Öystein Ore, Über zusammengesetzte algebraische Körper. *Acta Mathematica* **49** (1926), 379—396. l.

Tartozzanak a $K_1(k)$, ill. $K_2(k)$ testek a $\mathfrak{G}$ csoport $\mathfrak{G}_1$, ill. $\mathfrak{G}_2$ alcsoportjához. Legyen a $\mathfrak{P}^\star$ szétbontási, ill. tehetetlenségi, ill. elágazási csoportja

$$\mathfrak{Z}, \text{ ill. } \mathfrak{T}, \text{ ill. } \mathfrak{V},$$

akkor az előbb szerepelt számok, mint alcsoportok indexei fejezhetők ki. Ugyanis a Galois-féle test elmélete szerint[3]

$$\begin{aligned} p^{m_i} &= (\mathfrak{V}:\mathfrak{V}\frown\mathfrak{G}_i),\ p^m = (\mathfrak{V}\frown\mathfrak{G}_2:\mathfrak{V}\frown\mathfrak{G}_1\frown\mathfrak{G}_2),\ p^M = (\mathfrak{V}:\mathfrak{V}\frown\mathfrak{G}_1\frown\mathfrak{G}_2),\\ g_i &= (\mathfrak{T}:\mathfrak{T}\frown\mathfrak{G}_i),\ g = (\mathfrak{T}\frown\mathfrak{G}_2:\mathfrak{T}\frown\mathfrak{G}_1\frown\mathfrak{G}_2),\ G = (\mathfrak{T}:\mathfrak{T}\frown\mathfrak{G}_1\frown\mathfrak{G}_2),\\ f_ig_i &= (\mathfrak{Z}:\mathfrak{Z}\frown\mathfrak{G}_i),\ fg = (\mathfrak{Z}\frown\mathfrak{G}_2:\mathfrak{Z}\frown\mathfrak{G}_1\frown\mathfrak{G}_2), FG = (\mathfrak{Z}:\mathfrak{Z}\frown\mathfrak{G}_1\frown\mathfrak{G}_2),\\ &(i=1,\ 2). \end{aligned} \tag{2}$$

Mindenekelőtt ki fogjuk mutatni. hogy

$$m \leqq m_1,\quad g \leqq g_1, \tag{3}$$

sőt, ha az egyik test relatív Galois-féle, akkor

$$g_1 \equiv 0 \pmod{g}. \tag{3*}$$

Vegyük szemügyre a

$$(\mathfrak{V}\frown\mathfrak{G}_1)(\mathfrak{V}\frown\mathfrak{G}_2), \text{ ill. } (\mathfrak{T}\frown\mathfrak{G}_1)(\mathfrak{T}\frown\mathfrak{G}_2)$$

komplexusokat. Frobenius tételei szerint

$$\begin{aligned} (\mathfrak{V}:\mathfrak{V}\frown\mathfrak{G}_1) &\geqq (\mathfrak{V}\frown\mathfrak{G}_2:\mathfrak{V}\frown\mathfrak{G}_1\frown\mathfrak{G}_2),\\ (\mathfrak{T}:\mathfrak{T}\frown\mathfrak{G}_1) &\geqq (\mathfrak{T}\frown\mathfrak{G}_2:\mathfrak{T}\frown\mathfrak{G}_1\frown\mathfrak{G}_2), \end{aligned}$$

vagyis (3) helyes. Ha pl. $K_1(k)$ relatív Galois-féle test, akkor $\mathfrak{G}_1$ invariáns alcsoport, $(\mathfrak{T}\frown\mathfrak{G}_1)$ invariáns alcsoportja $\mathfrak{T}$-nek, $(\mathfrak{T}\frown\mathfrak{G}_1)(\mathfrak{T}\frown\mathfrak{G}_2)$ komplexus csoport és így adódik (3*). Ha még behozzuk a

$$\begin{aligned} (\mathfrak{T}\frown\mathfrak{G}_i:\mathfrak{T}\frown\mathfrak{G}_1\frown\mathfrak{G}_2) = a_i,\ (\mathfrak{Z}\frown\mathfrak{G}_i:\mathfrak{Z}\frown\mathfrak{G}_1\frown\mathfrak{G}_2) &=\\ = h_i,\ a_2 = g,\ h_2 = fg,&\\ (i=1,\ 2)& \end{aligned} \tag{4}$$

jelöléseket, akkor a következő fontos összefüggéseket nyerjük:

$$G = g_ia_i,\quad F = f_i\frac{h_i}{a_i},\quad a_i,\ h_i \text{ és } \frac{h_i}{a_i} \text{ rac. egész,} \tag{5}$$

[3] Célszerű lesz számításainknál a ma elterjedt jelhasználatot követni. $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B}$ jelenti az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ csoportok legnagyobb közös alcsoportját. Ha a $\mathfrak{H}$ csoport tartalmazza $\mathfrak{K}$-t, akkor $(\mathfrak{H}:\mathfrak{K})$ jelentse $\mathfrak{K}$ indexét $\mathfrak{H}$-ra.

A következőkben még a $(\mathfrak{Z} \frown \mathfrak{G}_1 \frown \mathfrak{G}_2)$, ill. $(\mathfrak{T} \frown \mathfrak{G}_1 \frown \mathfrak{G}_2)$, ill. $(\mathfrak{V} \frown \mathfrak{G}_1 \frown \mathfrak{G}_2)$ csoportok rendjeit x, ill. y, ill. z-vel jelöljük, x osztható y-nal, y osztható z-vel.

2. A következő tételeket fogjuk bebizonyítani.

I. *Az előbbi jelöléseket megtartva:*

$$\begin{aligned} G &= \frac{g_1 g_2}{(g_1, g_2)} t, \ t \leqq (g_1, g_2), \ t \text{ rac. egész}, \\ F &= \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} U, \ U \leqq \frac{(g_1, g_2)}{t} U \text{ rac. egész}. \end{aligned} \tag{6}$$

I.* *Ha pedig pl.* $K_1(k)$ *relatív* Galois-*féle test, akkor:*

$$\begin{aligned} G &= \frac{g_1 g_2}{\varDelta}, \ \varDelta \text{ osztója } (g_1, g_2)\text{-nek}, \\ F &= \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} \varDelta', \ \varDelta' \text{ osztója } \varDelta\text{-nak}. \end{aligned} \tag{6*}$$

A G-re vonatkozó állítások (3), (3*) és (5)-ből következnek. Vegyük szemügyre a

$$(\mathfrak{Z} \frown \mathfrak{G}_1)\mathfrak{T}, \text{ ill. } (\mathfrak{Z} \frown \mathfrak{G}_2)\mathfrak{T}$$

komplexusokat. Minthogy $\mathfrak{T}$ invariáns alcsoportja $\mathfrak{Z}$-nek, ezek a komplexusok csoportok. Ha $K_1(k)$ relatív Galois-féle test, akkor a

$$(\mathfrak{Z} \frown \mathfrak{G}_1)\mathfrak{T} \,.\, (\mathfrak{Z} \frown \mathfrak{G}_2)\mathfrak{T}$$

komplexus, valamint a $(\mathfrak{Z} \frown \mathfrak{G}_1) \,.\, (\mathfrak{Z} \frown \mathfrak{G}_2)$ komplexus csoport, mert $(\mathfrak{Z} \frown \mathfrak{G}_1)$ invariáns alcsoportja $\mathfrak{Z}$-nek. Mindenekelőtt a $(\mathfrak{Z} \frown \mathfrak{G}_i)\mathfrak{T}$ csoport rendje

$$(\mathfrak{Z} \frown \mathfrak{G}_i) \text{ rendje} \,.\, (\mathfrak{T} : \mathfrak{T} \frown \mathfrak{G}_i) = h_i x g_i. \quad {\scriptstyle (i=1,\ 2)}$$

Határozzuk meg a $(\mathfrak{Z} \frown \mathfrak{G}_1)\mathfrak{T}$ és $(\mathfrak{Z} \frown \mathfrak{G}_2)\mathfrak{T}$ csoportok legnagyobb közös alcsoportjának rendjét d-t. Minthogy a legnagyobb közös alcsoport $\mathfrak{T}$-t tartalmazza, lesz

$$d = G y u, \ u \text{ rac. egész}. \tag{7}$$

Az eddigiek után

$$d = \frac{g_1 g_2}{(g_1, g_2)} t y u; \tag{8}$$

ha pl. $K_1(k)$ relatív GALOIS-féle test, akkor

$$d = \frac{g_1 g_2}{\Delta} uy. \tag{8*}$$

Más oldalról a $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{T} \cdot (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{T}$ komplexus tartalmazza a $(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1)(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)$ komplexust, tehát

$$\frac{h_1 x g_1 h_2 x g_2}{d} = h_1 x h_2 v, \ v \text{ rac., esetleg nem egész, } v \geqq 1,$$

és így

$$\frac{g_1 g_2}{d} = \frac{v}{x}, \ v \geqq 1, \ v \text{ rac.}; \tag{9}$$

ha pl. $K_1(k)$ relatív GALOIS-féle test, akkor

$$\frac{g_1 g_2}{d} = \frac{v}{x}, \ v \text{ rac. egész.} \tag{9*}$$

Az előbbiekből

$$\frac{g_1 g_2 (g_1, g_2)}{g_1 g_2 t y u} = \frac{v}{x}, \quad \frac{ytuv}{x} = (g_1, g_2), \tag{10}$$

illetőleg

$$\frac{g_1 g_2 \Delta}{g_1 g_2 y u} = \frac{v}{x}, \quad \frac{yuv}{x} = \Delta. \tag{10*}$$

A $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{T}}$ ciklikus csoportnak a

$$\frac{(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}, \quad \frac{(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$$

oly alcsoportjai, melyeknek legnagyobb közös alcsoportja u-adrendű. Ámde az alcsoportok rendjei

$$\frac{h_1 x g_1}{Gy} = \frac{h_1}{a_1} \frac{x}{y}, \text{ ill. } \frac{h_2 x g_2}{Gy} = \frac{h_2}{a_2} \frac{x}{y}$$

és így

$$\left(\frac{h_1 x}{a_1 y}, \frac{h_2 x}{a_2 y}\right) = u, \quad u = \frac{x}{y} U, \quad U \text{ rac. egész,}$$

$$\left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}\right) = U, \quad U = \frac{y}{x} u. \tag{11}$$

Ebből ismert módon

$$F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} U.$$

Azonban (10)-ből

$$Uv = \frac{(g_1, g_2)}{t}, \quad U \leqq \frac{(g_1, g_2)}{t},$$

illetőleg (10*-)ból

$$Uv = \Delta, \quad U = \Delta', \; \Delta' \text{ osztója } \Delta\text{-nak, q. e. d.}$$

3. Bebizonyítjuk a következő tételeket.

II. *Az előbbi jelöléseket megtartva,*

$$G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})} r, \; r \text{ rac egész, } (r, p) = 1, \; r \leqq p^{m_1+m_2-M}. \quad (12)$$

II.* *Ha pedig pl. $K_1(k)$ relatív* Galois-*féle test, akkor:*

$$G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})}. \quad (12^*)$$

Képezzük a

$$(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{B}, \text{ ill. } (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{B}$$

komplexusokat. Mindakettő csoport, mert $\mathfrak{B}$ invariáns alcsoportja $\mathfrak{T}$-nek. A csoportok rendjei

$$\frac{a_1 y p^M z}{p^{M-m_1} z} = a_1 y p^{m_1}, \text{ ill. } \frac{a_2 y p^M z}{p^{M-m_2} z} = a_2 y p^{m_2}.$$

Ha pl. $K_1(k)$ relatív Galois-féle test, akkor a

$$(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{B} \, . \, (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{B}$$

komplexus, valamint a $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1) \, . \, (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)$ komplexus is csoport, mert $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)$ invariáns alcsoportja $\mathfrak{T}$-nek. Határozzuk meg a $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1)\mathfrak{B}$ és $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)\mathfrak{B}$ csoportok legnagyobb közös osztójának rendjét, d-t. A legnagyobb közös osztó mindenesetre tartalmazza $\mathfrak{B}$-t, tehát

$$d = p^M z u, \quad u \text{ rac. egész.} \quad (13)$$

Másrészt a komplexus tartalmazza a $(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_1) \, . \, (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{G}_2)$ komplexust, tehát

$$\frac{a_1 y p^{m_1} a_2 y p^{m_2}}{d} = a_1 a_2 y v, \; v \geqq 1, \; v \text{ rac., esetleg nem egész,}$$

vagyis

$$\frac{p^{m_1+m_2}}{d}\,y = v,\ v \geqq 1,\ v \text{ rac.}; \tag{14}$$

ha $K_1(k)$ relatív GALOIS-féle test, akkor

$$\frac{p^{m_1+m_2}}{d}\,y = v,\ v \text{ rac. egész.} \tag{14*}$$

Az előzőkből lesz

$$\frac{p^{m_1+m_2}y}{p^M z u} = v,\quad uv = \frac{y}{z}\,p^{m_1+m_2-M},\ v \geqq 1,\ v \text{ rac.} \tag{15}$$

és ha $K_1(k)$ relatív GALOIS-féle test,

$$uv = \frac{y}{z}\,p^{m_1+m_2-M},\ v \text{ rac. egész.} \tag{15*}$$

Minthogy a $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{B}}$ ciklikus csoportnak a

$$\frac{(\mathfrak{T} \frown \mathfrak{G}_1)\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}},\quad \frac{(\mathfrak{T} \frown \mathfrak{G}_2)\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$$

oly alcsoportjai, amelyeknek legnagyobb közös osztója u-adrendű, lesz

$$\left(\frac{a_1 y p^{m_1}}{p^M z},\ \frac{a_2 y p^{m_2}}{p^M z}\right) = u,\quad u = \frac{y}{z}\,r,\ r \text{ rac. egész,}$$

ugyanis

$$G = g_i a_i,\quad a_i = p^{M-m_i}a_i',\quad (a_i', p) = 1,\quad G^{(0)} = g_i^{(0)}a_i',$$
$$(i=1,\ 2).$$

Ennélfogva

$$(a_1',\ a_2') = r \tag{16}$$

és

$$rv = p^{m_1+m_2-M},\ v \geqq 1,\ v \text{ rac.} \tag{17}$$

Ha pedig $K_1(k)$ relatív GALOIS-féle test, akkor v racionális egész és így

$$r = 1. \tag{17*}$$

Ezekből ismert módon származik a II. és II.* tétel.

Bauer Mihály.

ÜBER DIE ZUSAMMENSETZUNG ALGEBRAISCHER ZAHLKÖRPER.

Es seien $K_1(k)$ und $K_2(k)$ algebraische Zahlkörper über k. Das Primideal $\mathfrak{P}$ des zusammengesetzten Körpers $K_1K_2(k)$ sei ein Teiler von $\mathfrak{P}_1$, bzw. $\mathfrak{P}_2$, bzw. $\mathfrak{p}$, welche Primideale der Körper $K_1(k)$, bzw. $K_2(k)$ bzw. k sind. Die rationale Primzahl p sei durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Die Primideale $\mathfrak{P}_1$, bzw. $\mathfrak{P}_2$ bzw. $\mathfrak{P}$ sollen in $K_1(k)$, bzw. $K_2(k)$ bzw. $K_1K_2(k)$ die Grade f_1, bzw. f_2, bzw. F und die Ordnungen g_1, bzw. g_2, bzw. G besitzen. Wir setzen noch

$$g_i = p^{m_i} g_i^{(0)},\quad G = p^M G^{(0)},\quad (g_i^{(0)}, p) = (G^{(0)}, p) = 1, \quad (i=1,\ 2).$$

Es gelten die Formeln:

$$G = \frac{g_1 g_2}{(g_1, g_2)}\, t,\quad t \leqq (g_1, g_2),\quad F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}\, U,\quad U \leqq \frac{(g_1, g_2)}{t},$$

$$G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})}\, r,\quad r \leqq p^{m_1+m_2-M},\quad (r, p) = 1,$$

wo die Zahlen t, U, r rationale ganze Zahlen sind. Ist z. B. $K_1(k)$ ein relativ GALOIS'*scher Körper, dann bestehen die Formeln:*

$$G = \frac{g_1 g_2}{\Delta},\quad F = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}\, \Delta',\quad G^{(0)} = \frac{g_1^{(0)} g_2^{(0)}}{(g_1^{(0)}, g_2^{(0)})},$$

wo Δ einen gewissen Teiler von (g_1, g_2), ferner Δ' einen gewissen Teiler von Δ bildet.

Michael Bauer.

A SÍMULÓ n-LAPRÓL.

E lapok megelőző kötetében — «Poliéderekre vonatkozó szélsőérték feladatok» című dolgozatom végén — egy sejtést közöltem, mellyel az alábbiakban kissé behatóbban akarok foglalkozni. Ezt megelőzőleg szóljunk mindenekelőtt néhány szót a símuló n-lapról, emlékezetünkbe idézve először is: mit neveztünk valamely konvex $\mathfrak{T}$ testhez tartozó símuló n-lapnak? Ez alatt értettük azt a poliédert, melynek $\mathfrak{T}$-től való «eltérése» valamennyi n lappal bíró konvex poliéder közül a lehető legkisebb, értve eltérés alatt azon pontok halmazának térfogatát, melyek a poliéder és a test közül az egyikben és csakis az egyikben fekszenek.

Az említett dolgozatban a símuló n-lapnak egy nevezetes sajátságát ismertük meg. Láttuk, hogy *a símuló n-lap minden egyes lapjának az a két része, mely $\mathfrak{T}$ belsejében, illetőleg külsejében fekszik, területüket illetően egyenlők, súlypontjuk pedig egybeesik.*[1]

Tekintsünk szemléletesség kedvéért egy gömböt és a vele koncentrikus öt szabályos poliédert, melyeket akkorára választunk, hogy a gömb ezek felületének épp a felét messe ki. E poliéderek teljesítik a gömbre vonatkozólag a símuló n-lapnak imént megjelölt tulajdonságát.[2] Jegyezzük meg, hogy e poliéderek élei mind a gömbön kívül fekszenek. Felmerül itt a kérdés: igaz-e ez n tetszésszerinti értéke mellett és bármely konvex testre is? Vagy fordítva: Behatolhat-e valamely símuló n-lap egyik éle a testbe? A válasz —

---

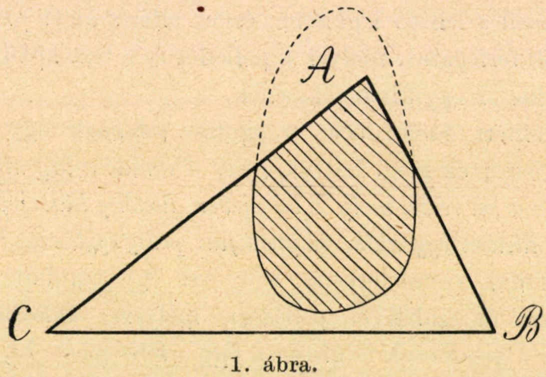
[1] Ebben a fogalmazásban tételünk csak oly testekre vonatkozik, melyeknek felülete nem tartalmaz sík részt. A tétel azonban lényegtelen módosítással átvihető tetszésszerinti konvex testekre is.

[2] Ebből természetesen még nem következik, hogy viszont az öt szabályos test egyben azonos a gömbhöz tartozó símuló 4-, 6-, 8-, 12-, illetőleg 20-lappal.

amint arról alkalmasan választott példán meggyőződhetünk — igenlő. A sejtés már most, amire hivatkoztam, ezzel szemben azt mondta, hogy egy konvex testhez tartozó símuló n-lap egy csúcsa sem fekhet a test belsejében.[3] Látni fogjuk, hogy a sejtés $n \leq 5$-re valóban helyes, $n > 5$-re azonban már nem.

*

Az $n \leq 5$-re vonatkozó állításnál sokkal többet bizonyítunk. Megmutatjuk, *hogy ha egy konvex* $\mathfrak{T}$ *testhez tartozó símuló n-lap valamely C csúcspontjában találkozó lapjai közt van háromszög, akkor C nem fekhet* $\mathfrak{T}$ *belsejében.* Ebből nyilván következik, hogy bármely konvex $\mathfrak{T}$ testhez tartozó símuló 4-lap, valamint a símuló 5-lap egyetlen csúcspontja sem fekhet $\mathfrak{T}$ belsejében, mert a 4, illetőleg 5 lappal bíró poliéderek valamennyi csúcspontjába feltétlenül torkollik a poliéderek lapjai közül legalább egy háromszög.



1. ábra.

Állításunk bizonyításához tekintsünk egy símuló n-lapot, melynek valamelyik lapja háromszög. Jelöljük ezt $ABC\triangle$-gel és tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben A benne van $\mathfrak{T}$-ben. Ekkor természetesen az $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ oldalak egy-egy részének is $\mathfrak{T}$-ben kell feküdnie. Jelöljük ezután $ABC\triangle$-nek $\mathfrak{T}$-be eső részét (1. ábrán a vonalkázott rész) t-vel. Ennek S súlypontja, a símuló n-lap említett tulajdonsága miatt, egybe kell, hogy essék az $ABC\triangle$ súlypontjával. Ez azonban t konvexitása folytán csak úgy lehet,

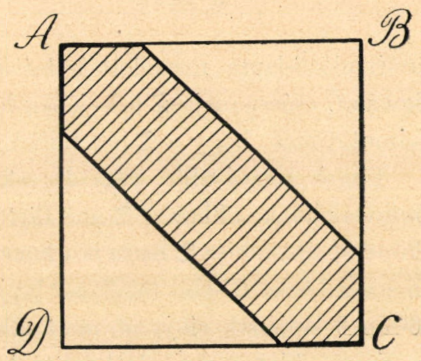
[3] Ennek síkbeli analogonja közvetlenül belátható.

ha t maga is háromszög,[4] melynek egyik csúcspontja A, másik két csúcspontja pedig $\overline{BC}$-n fekszik, éspedig egyenlő távolságra B-, illetőleg C-től. Feltevésünkkel ellentétben tehát t nem tartalmazhatja A-n kívül $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ egyetlen pontját sem, s ezzel állításunk igazolást nyert.

*

Az $n \geq 6$-ra vonatkozó állításunk igazolásához szerkesztenünk kell oly konvex $\mathfrak{T}$ testet, hogy a hozzátartozó símuló 6-lap valamelyik csúcsa $\mathfrak{T}$ belsejében feküdjék. Mielőtt e szerkesztésre térnénk, tegyünk egy előzetes megjegyzést.

Az $n \leq 5$-re vonatkozó eredményünk azon alapszik, hogy egy $ABC\triangle$ háromszögre nem rajzolható egy vele megegyező súlypontú, de félakkora területű konvex t síkidom oly módon, hogy t tartalmazná $ABC\triangle$ egyik A csúcspontján kívül az A-ban találkozó oldalak egy-egy pontját is. Az alábbi szerkesztés lényegében azon nyugszik, hogy ez négyszögre már lehetséges. Messük le például az $ABCD$ négyzetnek egy-egy negyedét az AC átlóval párhuzamos egyenesekkel. Az így megmaradó hatszög (2. ábra) súlypontja a négyzet súlypontjába fog esni, területe pedig $ABCD$-nek épp a fele lesz.

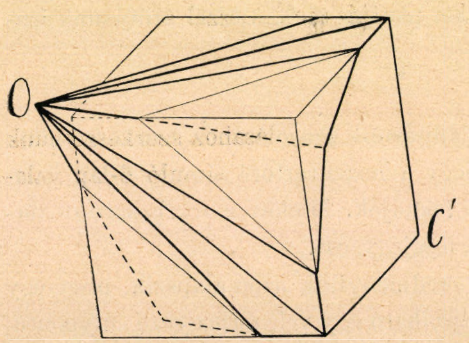


2. ábra.

Tekintsünk ezután egy kockát és rajzoljuk fel három ugyanazon C csúcspontban találkozó lapjára az imént szerkesztett hatszöget úgy, hogy C egyúttal közös csúcspontja legyen e hatszögeknek. Jelöljük a kockának C-vel átellenes csúcspontját C'-vel és válasszunk $\overline{CC'}$-nek C felé eső meghosszabbításán egy O pontot. Tekintsük most az O-ból kiinduló és a kockára rajzolt három hat-

[4] Konvex síkidom súlypontja mindig a súlyvonalak középső harmadára esik és a határok csak háromszögre éretnek el.

szög (belső vagy határ) pontjain áthaladó sugarak halmazát, illetőleg e sugárhalmaz alkotta gúla azon $\mathfrak{T}$ részét, melyet a kockának C'-ben találkozó lapjai metszenek le belőle (3. ábra). Jegyezzük meg, hogy a $\mathfrak{T}$ poliéder, ha O-t elég közel választjuk C-hez, konvex lesz; továbbá, hogy az $O \rightarrow C$ határesetben $\mathfrak{T}$ a kockába megy át.



3. ábra.

E szerkesztésből közvetlenül kitűnik, hogy — O-t elegendő közel választva C-hez[5] — a kocka teljesíti $\mathfrak{T}$-re vonatkozólag a símuló 6-lapra megadott feltételt. Nyilvánvaló továbbá, hogy a kocka C csúcspontja $\mathfrak{T}$ belsejében fekszik és most már csak azt kell kimutatnunk, hogy a $\mathfrak{T}$-hez tartozó símuló 6-lap valóban a kocka.

Ennek belátásához vegyük tekintetbe, hogy ha C-vel O-hoz konvergálunk, akkor a $\mathfrak{T}$-hez tartozó símuló 6-lapok a kockához konvergálnak, hisz $\mathfrak{T}$ maga is a kockához tart. Nyilvánvaló továbbá, hogy a kocka C'-ben találkozó lapjainak síkja közös lesz a símuló 6-lap 3 lapjának síkjával, mert ellenkező esetben nem teljesülhet a símuló 6-lapra megadott feltétel. Ki kell még mutatnunk, hogy a símuló 6-lap másik három lapja viszont a kocka C-ben találkozó lapjaival esik egybe.

Hajtsunk végre ehhez a kocka C-ben találkozó lapjain egy tetszésszerinti infinitezimális transzformációt. Ha most egyidejűleg C-vel O-hoz tartunk, akkor e transzformáció által az egyes lapok $\mathfrak{T}$-be eső részeinek területe, illetőleg súlypontja nagyobb rendben változik meg, mint maguknak a lapoknak a területe, illetőleg súlypontja. Ez azonban azt jelenti, hogy $\overline{OC}$ elegendő kicsiny

[5] Ezt a megszorítást csak a kocka C'-ben találkozó lapjai miatt kell tennünk.

értéke mellett nincs a kocka elég kis környezetében[6] magán a kockán kívül még egy 6-lap, mely teljesítené a símuló 6-lapra kirótt feltételt. S ezzel állításunk be van bizonyítva.[7]

*

Az imént bemutatott szerkesztést kis módosítással átvihetjük bármely konvex poliéderre, melynek valamelyik csúcspontjába nem torkollik a poliéder lapjai közül háromszög. Ezt figyelembe véve, eredményeinket az alábbi tételben foglalhatjuk össze: ahhoz, hogy valamely konvex n-laphoz, $\mathfrak{P}$-hez megadható legyen egy — $\mathfrak{P}$-nek egyik C csúcspontját belső pontjaként tartalmazó — konvex $\mathfrak{T}$ test, melyhez tartozó símuló n-lap $\mathfrak{P}$ legyen, szükséges és elegendő, hogy $\mathfrak{P}$-nek C-ben találkozó lapjai közt ne legyen háromszög.

Fejes László.

ÜBER DEN SCHMIEGUNGSPOLYEDER.

Es wird hier die notwendige und hinreichende Bedingung behandelt, dass zu einem konvexen Polyeder $\mathfrak{P}$ ein — einen Eckpunkt E von $\mathfrak{P}$ im Inneren enthaltender — konvexer Körper $\mathfrak{K}$ existiere, dessen Schmiegungspolyeder (d. h. derjenige Polyeder, welcher unter sämtlichen konvexen Polyedern mit vorgegebener Flächenzahl die kleinstmögliche Abweichung* von $\mathfrak{K}$ besitzt) $\mathfrak{P}$ ist. Die Bedingung besteht darin, dass unter den in E anstossenden Flächen von $\mathfrak{P}$ kein Dreieck vorhanden sei.

L. Fejes.

---

[6] A kocka ε-nyi környezetén érthetjük pl. azon 6-lapok halmazát, melyek eltérése a kockától kisebb mint ε.

[7] Arra az első pillanatra meglepő eredményre, hogy a símuló n-lap csúcspontjai a test belsejében is fekhetnek, némikép fényt derít az a könnyen belátható tény, hogy ugyanez érvényes a testben fekvő adott lapszámmal bíró maximális köbtartalmú poliéderre. Viszont a símuló n-lap és a testben fekvő maximális n-lap, valamint a minimális köbtartalmú körülírt n-lap lényegében ugyanazon extremális poliédernek különböző határesetei. (Ezt részletesebben is kifejtem «Zwei Maximumaufgaben bei Polyedern» című dolgozatomban, mely megjelenőben van a Tohoku Math. Journal-ban.)

* L. Fejes: Über einige Extremumaufgaben bei Polyedern. Mat. és Fiz. Lapok, B. 45 (1938.), 199.

EGY GEOMETRIAI LEKÉPEZÉS ALKALMAZÁSAI.

Többféle leképezés ismeretes a sík ötdimenziós kúpszelet-kontinuuma és a tér ötdimenziós lineáris komplexusainak kontinuuma között. Ezekből a leképezésekből folyó equivalencia-fogalmak révén egy-egy már ismert geometriai tétel érdekes új megvilágításba kerül. Jelen dolgozat a harmadrendű térgörbe húrjainak kongruenciája közvetítésével létesít leképezést a sík kúpszelet-összessége és a tér lineáris komplexusainak összessége között. Ebből a leképezésből egy jól ismert Poncelet-féle záródási tételnek egyszerű új bizonyítása is adódik.

1. A harmadrendű térgörbe biszekánsainak leképezése.

A C^3 harmadrendű térgörbének legyen A_1 és A_4 két tetszőleges pontja. Ehhez a két ponthoz tartozó símulósík metszésvonalát messe az A_1, ill. A_4-hez tartozó érintő az A_2, ill. A_3 pontban. Az $A_1A_2A_3A_4$ a térgörbének ú. n. símulótetraédere. Legyen E a térgörbe tetszőleges fixpontja és fussa be egy P pont a görbét. A harmadrendű térgörbe pontjait a görbe különböző húrjaiból (vagy érintőiből) vetítő síksorok — miként ismeretes — egymással projektívek; az A_1, A_4, E, P pontot a térgörbe A_1A_4 húrjából és A_1A_2, ill. A_3A_4 érintőjéből vetítő három síknégyes kettősviszonya tehát ugyanaz. Ezeknek a síknégyeseknek a négy-négy síkja a símulótetraéder szemközt fekvő éleit rendre az A_2, A_3, E_{23}, P_{23}; A_3, A_4, E_{34} P_{34}; A_1, A_2, E_{12}, P_{12} pontban metszi. A három síknégyes projektivitásából következik, hogy

$$(A_1A_2E_{12}P_{12}) = (A_2A_3E_{23}P_{23}) = (A_3A_4E_{34}P_{34}) = \frac{\lambda}{\nu} = (A_1A_4EP).$$

Az $\{A_1A_2A_3A_4, E\}$ tetraéderes koordinátarendszerben a P pont koordinátái:

$$(A_iA_jE_{ij}P_{ij}) = \frac{X_i}{X_j} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4;\ i \neq j).$$

Ha ezeket az egyenleteket az előbbiekkel összevetjük, akkor kimondhatjuk, hogy a harmadrendű térgörbe paraméteres egyenletrendszere az

$$X_1 = \lambda^3,\ X_2 = \lambda^2\nu,\ X_3 = \lambda\nu^2,\ X_4 = \nu^3$$

alakra hozható.

Vetítsük A_4-ből az $[A_1A_2A_3]$-síkra a C^3 görbét. A C^3 vetülete egy C^2 kúpszelet, E vetülete E' lesz. C^2-nek az $\{A_1A_2A_3, E'\}$ háromszöges koordinátarendszerre vonatkoztatott paraméteres egyenletrendszere nyilván:

$$x_1 = \lambda^2,\ x_2 = \lambda\nu,\ x_3 = \nu^2.$$

Könnyen belátható, hogy C^2 az A_2A_1, ill. A_2A_3 egyenest az A_1, ill. A_3 pontban érinti.

A C^3 görbe (λ_1, ν_1) (λ_2, ν_2) pontpárját összekötő p húr vonalkoordinátái:

$$p_{12} = \lambda_1^2\lambda_2^2,\ p_{13} = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1\nu_2 + \lambda_2\nu_1),\ p_{14} = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2\nu_1\nu_2 + \lambda_2^2\nu_1^2,$$
$$p_{34} = \nu_1^2\nu_2^2,\ p_{42} = -\nu_1\nu_2(\lambda_1\nu_2 + \lambda_2\nu_1),\ p_{23} = \lambda_1\lambda_2\nu_1\nu_2.$$

A C^2 kúpszelet (λ_1, ν_1), (λ_2, ν_2) pontpárját összekötő u húr vonalkoordinátái pedig:

$$u_1 = \nu_1\nu_2,\ u_2 = -(\lambda_1\nu_2 + \lambda_2\nu_1),\ u_3 = \lambda_1\lambda_2.$$

A (λ_1, ν_1), (λ_2, ν_2) homogén paraméter-pár segítségével *kölcsönös és egyértelmű leképezést állítottunk elő C^3 húrjai és az $[A_1A_2A_3]$ sík egyenesei között.* Ezáltal a paraméter-pár által közvetített leképezés geometriailag az A_4 pontból való egymásra-vetítést jelenti. A p egyenes vonalkoordinátái az u egyenes vonalkoordinátáival következőkép fejezhetők ki:

$$p_{12}=u_3^2,\ p_{34}=u_1^2;\ p_{13}=-u_2u_3,\ p_{42}=u_1u_2;\ p_{14}=u_2^2-u_1u_3,\ p_{23}=u_1u_3. \qquad \text{(I)}$$

2. Az ötdimenziós kúpszelettér és a lineáriskomplexustér leképezése egymásra.

A C^3 térgörbe olyan húrjainak, amelyek az

$$(ap) \equiv a_{12}p_{34}+a_{13}p_{42}+a_{14}p_{23}+a_{34}p_{12}+a_{42}p_{13}+a_{23}p_{14}=0$$

lineáris komplexushoz tartoznak, az $A_1A_2A_3$ síkon megfelelő u egyenesek: egy kúpszeletnek érintői. Ezeknek az $u=(u_1, u_2, u_3)$ egyeneseknek koordinátáira ugyanis fennáll az

$$a_{12}u_1^2+a_{23}u_2^2+a_{34}u_3^2+a_{13}u_1u_2-a_{42}u_2u_3+(a_{14}-a_{23})u_1u_3=0$$

egyenlet.

Megfordítva a

$$B^2 \equiv A_{11}u_1^2+B_{22}u_2^2+B_{33}u_3^2+2(B_{12}u_1u_2+B_{23}u_2u_3+B_{31}u_3u_1)=0$$

kúpszelet érintőinek a C^3 térgörbe olyan p húrjai felelnek meg, amelyek egy lineáris komplexushoz, a

$$B_{11}p_{34}+2B_{12}p_{42}+(B_{22}+2B_{31})p_{23}+B_{33}p_{12}-2B_{13}p_{13}+B_{22}p_{14}=0$$

lineáris komplexushoz tartoznak. A C^3 térgörbe p húrjai és az $A_1A_2A_3$ sík u egyenesei közötti leképezés tehát *kölcsönösen egyértelmű leképezést létesít az $A_1A_2A_3$ sík kúpszeletei és a tér lineáris komplexusai között.* Ezt a leképezést az

$$\begin{gathered} a_{12}=B_{11},\ a_{34}=B_{33};\ a_{13}=2B_{12},\ a_{42}=-2B_{23}; \\ a_{14}=B_{22}+2B_{31},\ a_{23}=B_{22} \end{gathered} \tag{II}$$

egyenletek fejezik ki.

Ha

$$(aa) \equiv a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23}=0,$$

akkor az $(ap)=0$ lineáris komplexus degenerált és egy a egyenest metsző egyenesek összességéből áll. Ekkor a megfelelő B^2 kúpszelet egyenletének együtthatóira nézve:

$$(BB) \equiv B_{11}B_{33}-4B_{12}B_{23}+2B_{31}B_{22}+B_{22}^2=0. \tag{III}$$

A $(BB)=0$ egyenletnek eleget tevő B^2 kúpszeletek tehát a tér (a) egyeneseivel vannak kölcsönös és egyértelmű vonatkozásban.

3. A leképezés alkalmazása.

a) Adva van egy sikon két kúpszelet: B^2 és C^2. *Lehetsé-ges-e olyan háromszöget írni a B^2 köré, amelyik a C^2-be van írva?* Ha létezik ilyen háromszög, akkor ez — a fenti leképezés alapján — C^3-ba írt olyan háromszögnek a vetülete, amelynek az oldalai a B^2-nek megfelelő (ap) komplexusnak sugarai. Egy komplexus sugarai általában nem alkotnak háromszöget. Egy lineáris komplexus ugyanis egy nullarendszert létesít a térben, a komplexus egy síkba eső sugarainak van egy közös pontjuk (a sík nulla-pólusa). E szerint a fenti követelménynek eleget tevő háromszög nem létezik akkor, ha B^2 a C^2-hez általános helyzetű. Ilyen háromszög akkor és csak akkor létezik, ha $(aa)=0$, vagyis a komplexus degenerált. Ebben az esetben viszont nemcsak egy, hanem ∞^1 háromszög tesz eleget a fenti követelménynek. Ha ugyanis a B^2 kúpszeletnek $[(BB)=0]$ megfelelő degenerált komplexus $(aa)=0$ tengelye körül síksort veszünk, ennek minden síkja olyan háromszögben metszi a C^3 görbét, amelynek A_4-ből $A_1A_2A_3$-ra való vetülete eleget tesz a fenti követelménynek. Ilymódon tehát bebizonyítottuk a PONCELET-től eredő jól ismert tételt: *két kúpszeletre nézve vagy 0, vagy ∞^1 azoknak a háromszögeknek a száma, amelyek az egyikbe be vannak írva és a másik köré vannak írva.*

b) Vegyünk fel a C^2 kúpszeleten hat pontot. Bontsuk fel e ponthatost két pontharmasra. A két pontharmasnak leképezésünk C^3-ba írt két háromszöget feleltet meg. E két háromszög síkja egy a egyenesben metszi egymást. Az a egyenesen átmenő bármely sík háromszögben metszi a C^3-t. Ezeknek a háromszögeknek vetülete a C^2-be van írva és a felvett két háromszöggel együtt egy olyan B^2 kúpszeletet burkol, amely eleget tesz a (III) egyenletnek.

Kimondhatjuk tehát a következő tételt is: *egy kúpszeletbe írt két háromszög oldalai egy kúpszeletnek érintői.* A C^2 kúpszeletbe írt két háromszög tehát *meghatároz* egy újabb kúpszeletet.

c) Az *a)* és *b)* alapján nyilvánvaló, hogy a (III) egyenlet teljesülése szükséges és elegendő feltétele annak, hogy létezzék a C^2-be s egyben B^2 köré írt háromszög. C^2-hez, mint vezérkúpszelethez ∞^4 ilyen B^2 válik ki az ötdimenziós kúpszeletsokaságból és e B^2 kúpszeletek valamint a tér *a* egyenesei között leképezésünk kölcsönös és egyértelmű vonatkoztatást létesített. A (III)-nak elegettevő ∞^4 B^2 kúpszeletet a C^2 által származtatott Poncelet-féle rendszernek nevezhetjük.

d) Vegyünk fel C^2-n kilenc tetszőleges pontot. Bontsuk fel e kilencest három háromszögre. Ezek a háromszögek — *b)* szerint — páronként egy-egy kúpszeletet határoznak meg. *Az így értelmezett három kúpszeletnek van egy közös érintője.*

A C^3 térgörbén megfelelő háromszögek ugyanis általában egy pontban találkozó három síkon vannak. E síkok által alkotott triéder élei a most értelmezett három kúpszeletnek megfelelői. A triéder csúcsából a C^3-hoz egy biszekáns húzható. A biszekáns vetülete mind a három kúpszeletnek érintője, mert a biszekáns a megfelelő három él mindegyikét metszi.

A pontkilences 280-félekép bontható fel 3 háromszögre és így 280 közös érintőt értelmez. Az ezek által képezett konfigurációt egy másik dolgozatban készülünk bemutatni.

e) Végre az eddigiek alapján kimondhatjuk azt a tételt, hogy *egy harmadrendű térgörbébe írt három háromszöget a térgörbe egy P pontjából vetítő három triéder oldallapjai akkor és csak akkor érintő síkjai egy másodosztályú kúpnak, ha a három háromszög síkjának van egy közös egyenese. Ha P ilyen pont, akkor a C^3 térgörbe bármely pontjának megvan ez a tulajdonsága.*

Ha ugyanis a három háromszög síkjának nincs közös egyenese, akkor is van egy közös M pontja. Ebből az M pontból csak egy biszekáns húzható C^3-hoz. Helyezzük most a leképezést közvetítő simulótetraéder A_4 csúcsát P-be. A C^3 térgörbének P-ből való vetülete az $A_1A_2A_3$ síkra egy C^2 kúpszelet. A három háromszög vetülete pedig a C^2-be írt három háromszög. A *d)* pont szerint ez a három háromszögvetület páronként három különböző kúpszelet köré van írva. Ennek folytán a fentértelmezett három vetítő triéder páronként egy-egy másodosztályú kúp köré van írva; de ez a három kúp egymástól különböző.

Ha a három háromszög síkja egy közös egyenessel bír, akkor a *b)* pont alapján belátható, hogy a három vetítő triéder oldallapjai egy másodosztályú kúp érintősíkjai.

Kárteszi Ferenc.

ANWENDUNGEN EINER GEOMETRISCHEN ABBILDUNG.

Durch Vermittlung der Kongruenz der Sehnen der Raumkurve dritter Ordnung wird zwischen der Gesamtheit der Kegelschnitte einer Ebene und der Gesamtheit der linearen Komplexe des Raumes eine umkehrbar eindeutige Zuordnung hergestellt. Diese Zuordnung ergibt u. A. auch einen neuen und einfachen Beweis eines bekannten PONCELET'schen Schliessungssatzes.

F. Kárteszi.

EGÉSZ MEGOLDÁSÚ HOMOGÉN LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEKRŐL.

Bevezetés.

Már a XIX. század 60-as éveiben — FUCHS[1] és munkatársai, HAMBURGER,[2] FROBENIUS[3] és THOMÉ-nak[4] a lineáris differenciálegyenletek elméletére vonatkozó alapvető munkássága nyomán — felmerült az a probléma, hogy mily feltételeknek kell eleget tennie egy lineáris differenciálegyenletnek ahhoz, hogy az általa definiált függvények előre megadott tulajdonsággal bírjanak.

E nagy probléma-csoporthoz tartozik az a kérdés is, hogy egy változó együtthatós lineáris differenciálegyenlet összes megoldásai mikor egész függvények. E probléma egészen általánosan még ma sincs megoldva, annak ellenére, hogy sokan foglalkoztak vele és többé-kevésbbé lényeges részleteredményeket is többen értek már el, pl. POCHAMMER,[5] POINCARÉ,[6] HILB,[7] PERRON,[8] SCHLESINGER,[9] ÅLANDER[10].

Mi az alábbiakban főképpen PERRON és ÅLANDER eredményei-

---

[1] FUCHS: Crelle's Journal Bd. 66, 68, 75, 77. Annali di matematica Ser. II. 4.

[2] HAMBURGER: Crelle's Journal Bd. 76, 83.

[3] FROBENIUS: Crelle's Journal Bd. 76, 77, 80, 85.

[4] THOMÉ: Crelle's Journal Bd. 74, 75, 76, 87, 95, 100.

[5] POCHAMMER: Crelle's Journal Bd. 73,

[6] POINCARÉ: Acta mathematica Bd. 4, 7, 8. American Journal of Math. v. 7, 8.

[7] HILB: Encykl. der Math. Wiss. II. 2, p. 471–562, 1915.

[8] PERRON: Math. Annal Bd. 66, 70. Acta Math. Bd. 34. Crelle's Journal Bd. 137.

[9] SCHLESINGER: Handb. der Theorie d. lin. Diff. Gleichungen Bd. I. p. 339.

[10] ÅLANDER: Skandinaviske Matematikerkongress VII. 1931 p. 113—116.

ből kiindulva keressük azokat a feltételeket, melyeknek eleget kell tennie egy lineáris differenciálegyenletnek ahoz, hogy összes megoldásai egész függvények legyenek.

I. A homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásáról.

Az alábbiakban a homogén lineáris differenciálegyenletet a következő alakban fogjuk tekinteni:

$$D(y) = y^{(n)} + P_1(z)y^{(n-1)} + P_2(z)y^{(n-2)} + \cdots + P_n(z)y = 0, \quad (A)$$

ahol a $P_i(z)$ együtthatók komplexváltozós analitikus függvények. A $P_i(z)$ együtthatókat a differenciálegyenlet tartományának egy tetszőleges $z=0$ helyén kifejtett $\sum\limits_{(\nu)} p_{i,\nu} z^{\nu}$ Laurentsor alakban képzeljük. (A $z=0$ helyet tetszőlegesnek tekinthetjük, mert a $z=a$ esetet a $z-a=z'$ transformatióval mindig a $z=0$ esetre vezethetjük vissza.)

Az (A) által definiált — $P_i(z)$ reguláris helyén kifejtett — függvényt az

$$y(z) = z^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} \quad (\alpha \text{ nem negativ egész szám})$$

hatványsor-alakban keressük, melynek — ismert módon meghatározható — együtthatóit determináns-alakban irjuk, mert ez alkalmat ad egyrészt egy determináns-tétel bemutatására, másrészt a megoldás konvergencia-tételének egy új bizonyitására. Az

$$y^{(n)} = -P_n(z)y - P_{n-1}(z)y' - \cdots - P_1(z)y^{(n-1)}$$

kifejezést sorozatosan differenciáljuk:

$$\begin{aligned}
y^{(n+1)} &= -P_n'y - (P_{n-1}' + P_n)y' - (P_{n-2} + P_{n-1})y'' - \cdots \\
&\quad \cdots - (P_1' + P_2)y^{(n-1)} - P_1 y^{(n)}, \\
y^{(n+2)} &= -P_n''y - (P_{n-1}'' + 2P_n')y' - (P_{n-2}'' + 2P_{n-1}' + P_n)y'' - \cdots \\
&\quad \cdots - (2P_1' + P_2)y^{(n)} - P_1 y^{(n+1)}, \qquad (1) \\
y^{(n+3)} &= -P_n'''y - (P_{n-1}''' + 3P_n'')y' - (P_{n-2}''' + 3P_{n-1}'' + 3P_n')y'' - \cdots \\
&\quad \cdots - (3P_1' + P_2)y^{(n+1)} - P_1 y^{(n+2)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n+\nu)} &= -P_n^{(\nu)}y - \left[P_{n-1}^{(\nu)} + \tbinom{\nu}{1}P_n^{(\nu-1)}\right]y' - \left[P_{n-2}^{(\nu)} + \tbinom{\nu}{1}P_{n-1}^{(\nu-1)} + \right. \\
&\quad \left. + \tbinom{\nu}{2}P_n^{(\nu-2)}\right]y'' - \cdots - \left[\tbinom{\nu}{1}P_1' + P_2\right]y^{(n+\nu-2)} - P_1 y^{(n+\nu-1)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Adjunk az $y^{(k)}$ fügvényeknek tetszőleges $y_0, y_0' \cdots y_0^{(n-1)}$ kezdőértékeket és vegyük (1)-et (A) tartományában egy tetszőleges reguláris helyen, pl. a $z=0$ helyen. Jelöljük (1) minden sorában az első n tag összegét $g_{\nu 0}$-vel és a többi tagokban a zárójeles tényezőket $g_{\nu,s+1}$-el ($s=0, 1, 2, \ldots, \nu-1$), ahol

$$g_{\nu 0} = -\sum_{i=0}^{n-1} \Big[P_{n-i}^{(\nu)} + \tbinom{\nu}{1} P_{n-i+1}^{(\nu-1)} + \tbinom{\nu}{2} P_{n-i+2}^{(\nu-2)} + \cdots + \tbinom{\nu}{i-1} P_{n-1}^{(\nu-i+1)} + \tbinom{\nu}{i} P_{n}^{(\nu-i)}\Big]_{z=0} y_0^{(i)} =$$

$$= -\nu! \sum_{i=0}^{n-1} \Big[i(i-1)\cdots 2.1 p_{n-i,\nu} + i(i-1)\cdots 2 p_{n-i+1,\nu-1} + \cdots + i p_{n-1,\nu-i+1} + p_{n,\nu-i}\Big] \frac{y_0^{(i)}}{i!} \tag{2}$$

és

$$g_{\nu,s+1} = -\binom{\nu}{s+1} P_1^{(\nu-s-1)} - \binom{\nu}{s+2} P_2^{(\nu-s-2)} - \cdots - \binom{\nu}{s+n} P_n^{(\nu-s-n)}$$

$$= \frac{-\nu!}{(s+n)!} \Big[(s+n)(s+n-1)\cdots(s+2) p_{1,\nu-s-1} + (s+n)(s+n-1)\cdots(s+3) p_{2,\nu-s-2} + \cdots + p_{n,\nu-s-n}\Big].$$

ν-nek, i-nek, s-nek 0, 1, 2, ... értékeket adva, könnyen meggyőződhetünk, hogy a $g_{\nu 0}$-knek és a $g_{\nu,s+1}$-knek e kifejezései az (1)-ben szereplő együtthatókat adják. E jelöléseket alkalmazva kapjuk (1)-ből

$$\begin{aligned}
y_0^{(n)} &= g_{0,0}, \\
y_0^{(n+1)} &= g_{1,0} + g_{1,1} y_0^{(n)}, \\
y_0^{(n+2)} &= g_{2,0} + g_{2,1} y_0^{(n)} + g_{2,2} y_0^{(n+1)}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
y_0^{(n+\nu)} &= g_{\nu,0} + g_{\nu,1} y_0^{(n)} + g_{\nu,2} y_0^{(n+1)} + \cdots + g_{\nu,\nu} y_0^{(n+\nu-1)}, \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{3}$$

Most $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, y_0^{(n+2)}, \ldots$ így kapott értékeit helyettesítsük be rendre az utána következőkbe:

$$y_0^{(n+1)} = g_{1,0} + g_{1,1} g_{0,0} = \begin{vmatrix} g_{0,0} & -1 \\ g_{1,0} & g_{1,1} \end{vmatrix},$$

$$y_0^{(n+2)} = g_{2,0} + g_{2,1} g_{0,0} + g_{2,2} g_{1,0} + g_{2,2} g_{1,1} g_{0,0} = \begin{vmatrix} g_{0,0} & -1 & 0 \\ g_{1,0} & g_{1,1} & -1 \\ g_{2,0} & g_{2,1} & g_{2,2} \end{vmatrix}.$$

Így folytatva könnyen belátható, hogy

$$y_0^{(\nu+n)} = \begin{vmatrix} g_{0,0} & -1 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ g_{1,0} & g_{1,1} & -1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ g_{2,0} & g_{2,1} & g_{2,2} & -1 & 0 \cdots 0 \\ g_{3,0} & g_{3,1} & g_{3,2} & g_{3,3} & -1 \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{\nu-1,0} & g_{\nu-1,1} & g_{\nu-1,2} & g_{\nu-1,3} & \cdots\cdots -1 \\ g_{\nu,0} & g_{\nu,1} & g_{\nu,2} & g_{\nu,3} & \cdots\cdots g_{\nu,\nu} \end{vmatrix} = \Delta_\nu, \tag{4}$$

tehát $y(z)$ hatványsorának együtthatói

$$a_{n+\nu} = \frac{y_0^{(n+\nu)}}{(n+\nu)!} = \frac{\Delta_\nu}{(n+\nu)!}. \tag{5}$$

Az így kapott $y(z) = \sum_{\nu=-n}^{\infty} a_{n+\nu} z^{n+\nu}$ megoldás konvergenciájának problémáját az alábbi fejezetben megadott tétel tisztázza. Most még megemlíthetjük e determinánsnak az alábbiakban felhasznált két tulajdonságát. Ezek:

1. Tétel:* *Ha a Δ_ν alakú determináns $g_{i,k}$ elemei pozitivok, akkor a kifejtésében is minden tag pozitív.*

Bizonyítás: Közvetlenül látható, hogy Δ_1-re és Δ_2-re igaz. Fejtsük ki Δ_ν-t az utolsó oszlop szerint, akkor

$$\Delta_\nu = g_{\nu,\nu}\Delta_{\nu-1} + \Delta'_{\nu-1}, \tag{6}$$

ahol $\Delta'_{\nu-1}$ ugyanolyan alakú, mint $\Delta_{\nu-1}$ és csak az utolsó sorban különbözik tőle. Tehát, ha állításunk $\Delta_{\nu-1}$-re igaz, akkor $\Delta'_{\nu-1}$-re is és e kifejtés alapján Δ_ν-re is.

Az is könnyen belátható, hogy Δ_ν kifejtésében a tagok száma 2^ν. Ugyanis ez Δ_1-re és Δ_2-re igaz és ha $\Delta_{\nu-1}$-re igaz, akkor (6) alapján Δ_ν-re is.

---

* E tétel a PASCAL: Repertorium der Höheren Analysis 2-te Aufl. 1910. 71. oldalon található determináns-kifejezésből is azonnal nyilvánvaló, ha ottan t helyébe 1-et teszünk.

II. A megoldás konvergenciája.

Ismeretes, hogy *az* $y(z)=\sum_{\nu=-n}^{\infty} a_{n+\nu} z^{n+}$ *sor a kifejtési helytől* (z_0) *a legközelebbi szinguláris helyig* (z') *terjedő körben konvergens.* E tételre FEJÉR LIPÓT[11] — az együtthatókra vonatkozó közös majoráns segítségével — egy igen egyszerű és szép bizonyítást adott, mely a FROBENIUS-féle és több más bizonyításnál többet mond annyiban, hogy szerinte $y(z)$ nemcsak minden $|z'-z_0|$-nál kisebb sugarú körben, hanem közvetlenül az $|z'-z_0|$ sugarú körben konvergens.

Mi most e tételnek egy új bizonyítását fogjuk bemutatni, amely szintén közvetlenül a megoldás konvergenciakörének sugarát adja meg.

Az $y(z)$ sor konvergenciakörének sugarára (5) és az I. tétel alapján fennáll:

$$\frac{1}{R}=\lim_{\nu\to\infty}\left|\sqrt[n+\nu]{a_{n+\nu}}\right|=\lim_{\nu\to\infty}\left|\sqrt[\nu]{\frac{y_0^{(n+\nu)}}{(n+\nu)!}}\right|\leq$$

$$\leq\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{\frac{1}{(n+\nu)!}\begin{vmatrix}|g_{0,0}| & -1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ |g_{1,0}| & |g_{1,1}| & -1 & 0 & \dots & 0\\ |g_{2,0}| & |g_{2,1}| & |g_{2,2}| & -1 & \dots & 0\\ |g_{3,0}| & |g_{3,1}| & |g_{3,2}| & |g_{3,3}| & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ |g_{\nu-1,0}| & |g_{\nu-1,1}| & |g_{\nu-1,2}| & \dots & \dots & -1\\ |g_{\nu,0}| & |g_{\nu,1}| & |g_{\nu,2}| & \dots & \dots & |g_{\nu,\nu}|\end{vmatrix}}. \quad (7)$$

Jelöljük a gyök alatti determinánst D_ν-vel és fejtsük ki az utolsó sor szerint. A ν_1-edik (ν_1-1-ed rendű) aldeterminánst ismét az utolsó sor szerint. Ebben a ν_2-edik ν_2-1-ed rendűt ugyanígy s. i. t. A kapott 1, 2, 3,,,, $\nu+1$ tényezős sorozatok száma — (6) alapján — sorjában $\binom{\nu}{0}, \binom{\nu}{1},,, \binom{\nu}{\nu}$. Ha ezekben a legnagyobb tag rendre $T_0, T_1,,, T_\nu$, akkor

$$D_\nu\leq T_0+\binom{\nu}{1}T_1+\binom{\nu}{2}T_2+\dots+\binom{\nu}{k}T_k+\dots+T_\nu.$$

[11] FEJÉR: Sur le calcul des limites (Comptes rendus 1906).

Legyen a legnagyobb tag $\binom{\nu}{k} T_k$, akkor

$$D_\nu \leq (\nu+1)\binom{\nu}{k} |g_{\nu,\nu_1}| \, |g_{\nu_1-1,\nu_2}| \, |g_{\nu_2-1,\nu_3}| \cdots |g_{\nu_k-1,0}|, \tag{8}$$

ahol $0 \leq k \leq \nu$ és $\nu_1 = 0, 1, 2, \ldots \nu$, $\nu_2 = 0, 1, 2, \cdots \nu_1 - 1$, $\nu_3 = 0, 1, 2, \cdots \nu_2 - 1, \ldots$. (9)

Az előbbi fejezet alapján

$$|g_{\nu,0}| \leq \nu! \sum_{i=0}^{n-1} \left(|p_{n-i,\nu}| + |p_{n-i+1,\nu-1}| + \cdots + |p_{n,\nu-i}|\right) y_0^{(i)} \leq$$
$$\leq \nu! n^2 |p_{a,\nu-b}| \, y_0^{(c)},$$

$$|g_{\nu,s+1}| \leq \frac{\nu!}{(s+1)!}\left(|p_{1,\nu-s}| + |p_{2,\nu-s-1}| + \cdots + |p_{n,\nu-s-n+1}|\right) \leq$$
$$\leq \frac{n\nu!}{(s+1)!} |p_{a,\nu-s-b}|,$$

ahol $p_{a,\nu-b}$ azon $P_a(z)$ hatványsor együtthatói, melynél a konvergenciakör sugara r_a a legkisebb. Ezeket (8)-ba írva, nagy ν-re:

$$D_\nu \leq (\nu+1)\binom{\nu}{k} \frac{\nu!}{\nu_1!} \cdot \frac{(\nu_1-1)!}{\nu_2!} \cdot \frac{(\nu_2-1)!}{\nu_3!} \cdots \frac{(\nu_k-1)!}{1!} |p_{a,\nu-\nu_1}| \, |p_{a,\nu_1-\nu_2}| \cdots$$
$$\cdots |p_{a,\nu_k}| n^{k+3} y_0^{(c)}$$

$$= \frac{(\nu+1)! \, \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-k+1)}{k! \, \nu_1 \nu_2 \nu_3 \cdots 1} |p_{a,\nu-\nu_1}| \, |p_{a,\nu_1-\nu_2}| \cdots |p_{a,\nu_k}| n^{k+3} y_0^{(c)}.$$

$\nu_1 \nu_2 \nu_3 \cdots 1$ helyébe — (9) alapján — a nem nagyobb $k!$-t téve, írjuk ezt be (7)-be. Akkor

$$\frac{1}{R} \leq \lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{\frac{\nu^k n^k}{(\nu+2)^{n-1} k! \, k!} |p_{a,\nu-\nu_1}| \, |p_{a,\nu_1-\nu_2}| \cdots |p_{a,\nu_k}|}.$$

A korlátlanul növekvő ndexű tényezők helyébe írjuk $\lim_{\nu \to \infty} \left|\sqrt[\nu]{p_{a,\nu}}\right| = \frac{1}{r_a} = a$ alapján a^{ν_i}-t. A többi korlátos indexű tényező helyébe — mivel a $P_a(z)$ sor első együtthatóinak megváltoztatása itt nem lényeges — írjunk szintén a^i-t. Akkor

$$\leq \lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{\frac{(n\nu)^k}{k!^2} a^{\nu-\nu_1} a^{\nu_1-\nu_2} a^{\nu_2-\nu_3} \cdots} = a \lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{\frac{(n\nu)^k}{k!^2}};$$

STIRLING szerint $\lim_{k\to\infty} k!\left(\frac{e}{k}\right)^k = 1$, tehát folytatólag

$$= a \lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\left(\frac{ne^2\nu}{k^2}\right)^k}. \tag{10}$$

Válasszuk szét a feladatot a $\frac{\nu}{k} = m \to \infty$ és $\frac{\nu}{k} < B$ esetekre, Az első esetben,

$$= a \lim_{\nu\to\infty} \sqrt{\left(\frac{ne^2m^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{m}}} \leq a \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{(ne^2)m} = a.$$

A második esetben (10) folytatólag

$$= a \lim_{k\to\infty} \sqrt[B]{\frac{ne^2B}{k}} = 0.$$

Tehát minden esetben $R \geq r_a$, q. e. d.

III. Egész megoldásokra vonatkozó tételek.

A teljesség kedvéért röviden megemlítjük, hogy azon homogén lineáris differenciálegyenletek közül melyeknek megoldásai egész függvények, legegyszerűbbek az állandó együtthatójúak:

$$K(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0,$$

melyek megoldásai mindig transzcendes egész függvények.

Most felmerülhet az a kérdés, hogy fordítva, egy megadott hatványsor mikor lehet megoldása valamely $K(y) = 0$ alakú differenciálegyenletnek. Erre a választ a következő érdekes BEKE-[12]-féle tétel adja meg:

Tétel: *Egy* $\sum_{(\nu)} p_\nu z^\nu$ *hatványsor akkor és csak akkor megoldása valamely* $K(y) = 0$ *alakú differenciálegyenletnek, ha az együtthatókból képezett*

$$D_1 = p_0; \quad D_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_1 & 2p_1 \end{vmatrix}; \quad D_3 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & 2!p_2 \\ p_1 & 2!p_2 & 3!p_3 \\ 2!p_2 & 3!p_3 & 4!p_4 \end{vmatrix}; \ldots$$

---

[12] BEKE: Math. és Term. Tud. Ért. XXXIV. k. 1916. 25. o.

HANKEL-*féle determinánsok egy bizonyos m indextől kezdve mind eltűnnek.*

E tétel a HADAMARD[13]-féle kompozició, illetve ennek speciális esete a BOREL[14]-féle asszociáció alkalmazásával szépen bizonyitható.

Most áttérünk arra a kérdésre, hogy a változó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet integráljai mily esetekben egész függvények és hogyan lehet ezt az együtthatókból közvetlenül felismerni. Azt már tudjuk, hogy, ha a $P_i(z)$ függvények mind egész függvények (A)-ban, akkor a megoldások is azok. Azonban a megoldások akkor is lehetnek egész függvények, ha az együtthatók nem azok. Pl.

$$y' - \frac{u'(z)}{u(z)} y = 0,$$

ahol $u(z)$ tetszőleges racionális egész függvény. Ennek az ÅLANDER-től eredő — előbb emlitett publikációjában közzétett — példának a megoldása $[y(z) = cu(z)]$ egész függvény annak ellenére, hogy az együttható nem az. Sőt, ahhoz, hogy a megoldások mind racionális egész függvények legyenek, egyenesen szükséges — amint ezt a továbbiakban bebizonyitjuk — hogy egyetlen együttható se legyen egész fügvény. Ha (A) együtthatóinak nincs más szingularitásuk, mint n-nél kevesebb számú pólus, akkor vannak egész megoldások is, amint azt a következő PERRON-féle tételből tudjuk (l. fentebb idézett munkáját):

Ha

$$P_0(z)y^{(n)} + P_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(z)y = 0$$

együtthatói egész (rac. vagy transzc.) függvények és a $P_0(z)$ függvénynek s zérus helye van, akkor legalább n—s megoldás egész függvény.

Egészen általánosan a megoldások akkor és csak akkor mind

[13] HADAMARD: Theoreme sur les séries entières. Acta math. 22. 1898.
[14] BOREL: Séries divergentes p. 96.

egész függvények, ha a megoldások hatványsorában az együtthatókra fennáll (5) szerint, hogy

$$\frac{1}{R} = \lim_{\nu \to \infty} \left| \sqrt[\nu]{a_\nu} \right| = \lim_{\nu \to \infty} \left| \sqrt[\nu]{\frac{\Delta_\nu}{(n+\nu)!}} \right| = 0.$$

Azonban, hogy ez mikor következik be, azt általában nehéz közvetlenül felismerni. Azért oly kritériumokat igyekszünk találni, melyek alapján a megoldások egész voltára az együtthatókból közvetlenül lehet következtetni. Ilyen pl. az ÅLANDER-féle kritérium (az idézett publikációjában), mely szerint: Ha (A)-ben $P_1(z)=0$, a megoldások akkor és csak akkor egész függvények, ha a $P_i(z)$ függvények $(i=2, 3, \dots n)$ is mind egész függvények. E tételt mi most általánositjuk.

2. Tétel. *Abban az esetben, ha (A)-ben a $P_1(z)$ függvény egész függvény, a megoldások akkor és csak akkor mind egész függvények, ha az összes többi együtthatók is mind egész függvények.*

Bizonyítás: Ismeretes, hogy a megoldások WRONSKI-féle determinánsára és (A) együtthatóira fennáll:

$$P_i(z) = (-1)^i \frac{D_i}{D} \quad \text{és} \quad P_1(z) = -\frac{D'}{D} = -\frac{d \log D}{d z}, \tag{11}$$

ahonnan

$$D = k\, e^{-\int P_1(z) dz}. \tag{12}$$

Ha a $P_1(z)$ függvény egész függvény, akkor D zérushelynélküli egész függvény. De akkor, ha valamelyik P_i nem volna egész függvény, (11)-ből

$$P_i(z) = (-1)^i D_i k' e^{\int P_1(z) dz}$$

alapján D_i sem volna az. Ez pedig csak úgy lehet, ha legalább egyike az y_i függvényeknek nem egész függvény. Tehát, ha $P_1(z)$ egész függvény, akkor ahhoz, hogy az y_i függvények mind egészek legyenek, szükséges, hogy a $P_i(z)$ függvények mind egész függvények legyenek. Ismeretes, hogy ez a feltétel elégséges is. Mivel az előbb említett ÅLANDER-tétel ennek speciális esete, tehát ez is igazoltnak tekinthető.

Abból, hogy $P_1(z)$ egész függvény, nemcsak a megoldások egész voltára, hanem azok minőségére is vonhatunk némi következtetést. Ilyen pl. a következő állítás:

Ha $P_1(z)$ egész függvény, akkor nem lehet mindegyik független megoldás racionális egész függvény.

Ugyanis, ha a $P_i(z)$ függvények $(i=2, 3, \dots n)$ nem mind egész függvények, akkor állításunk az előbbi tétel alapján máris nyilvánvaló, de közvetlenül belátható akkor is, ha a $P_i(z)$ függvények mind egészek, mert ha $P_1(z)$ egész, akkor

$$e^{-\int P_1(z)dz}$$

transzcendens egész függvény. De akkor (12) alapján D is az. Ez csak úgy lehet, ha az y_i függvényeknek legalább egyike transzcendens egész függvény. Tehát, ha minden együttható egész függvény, akkor legalább egy megoldás transzcendens egész függvény.

E két utóbbi megjegyzés tulajdonképpen már következik az alábbi tételből.

3. Tétel: *Ahhoz, hogy* (A)*-nak minden megoldása racionális egész függvény legyen, szükséges, hogy az együtthatók sorjában* $-1, -2, -3, \dots, -n$*-nél nem magasabb fokú racionális törtfüggvények legyenek.*

Bizonyítás: Minthogy a racionális egész függvényeknek csak pólus-szingularitásuk van, azért az ily megoldással bíró homogén lineáris differenciálegyenletek a Fuchs-féle osztályba tartoznak. Azonban ahhoz, hogy ide tartozzanak, szükséges, hogy a $P_i(z)$ együtthatók

$$P_i(z) = \frac{g_{i(\varrho-1)}(z)}{\varphi^i(z)}$$

alakra hozhatók legyenek, ahol

$$\varphi(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a)_\varrho$$

és a $g_{i(\varrho-1)}(z)$ függvények indexüknél nem magasabb fokú racionális egész függvények. Azaz a Fuchs-osztályba tartozáshoz szükséges, hogy a $P_i(z)$ függvények sorjában $-1, -2, , , , -n$-nél nem magasabb fokú racionális törtfüggvények legyenek.

A FUCHS-osztályra való hivatkozással csak ennyit tudtunk mondani (*A*) együtthatóiról. Most kimutatjuk, hogy nemcsak nem magasabb, hanem pontosan $-1, -2, , , , -n$-ed fokúak kell legyenek $P_i(z)$ függvények ahhoz, hogy a megoldás racionális egész függvény lehessen. Előbb azonban előre bocsájtuk a következő tételt:

4. Tétel: *Ha egy* VANDERMONDE-*féle determináns elemei különbözők és pozitívok, akkor összes aldeterminánsai zérustól különbözők.*

Bizonyítás: Az n-ed rendű VANDERMONDE-féle determináns egy tetszőleges $-\nu$-ed rendű $(\nu < n)-$ aldeterminánsa

$$V_{\nu i}^{(n)} = \begin{vmatrix} a_1^{i_1} & a_1^{i_2} & a_1^{i_3} & \dots & a_1^{i_\nu} \\ a_2^{i_1} & a_2^{i_2} & a_2^{i_3} & \dots & a_2^{i_\nu} \\ a_3^{i_1} & a_3^{i_2} & a_3^{i_3} & \dots & a_3^{i_\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_\nu^{i_1} & a_\nu^{i_2} & a_\nu^{i_3} & \dots & a_\nu^{i_\nu} \end{vmatrix}, \tag{B}$$

ahol

$$0 \leqq i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_\nu < n.$$

Ha kivonjuk $V_{ni}^{(\nu)}$ első oszlopának $a_1^{i_2-i_1}, a_1^{i_3-i_1}, \dots a_1^{i_\nu-i_1}$-szeresét rendre a többiből, akkor $V_{ni}^{(\nu)}$ redukálódik az első sor első eleméhez tartozó aldeterminánsra, melyben a k-adik sor s-edik eleme:

$$a_k^{i_s} - a_k^{i_1} a_1^{i_s-i_1} = a_k^{i_1}(a_k^{i_s-i_1} - a_1^{i_s-i_1}) =$$
$$= a_k^{i_1}(a_k - a_1)(a_k^{i_s-i_1-1} + a_k^{i_s-i_1-2} a_1 + \cdots + a_k a_1^{i_s-i_1-2} + a_1^{i_s-i_1-1}) =$$
$$= (a_k - a_1)(a_k^{i_s-1} + a_k^{i_s-2} a_1 + \cdots + a_k^{i_1+1} a_1^{i_s-i_1-2} + a_k^{i_1} a_1^{i_s-i_1-1}).$$

Kiemelve minden sorából $a_k - a_1$-et $(k = 2, 1, \dots \nu)$, lesz

$$V_{ni}^{(\nu)} = a_1^{i_1} S_1 \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{i_2-i_1} a_2^{i_2-j} a_1^{j-1} & \sum\limits_{j=1}^{i_3-i_1} a_2^{i_3-j} a_1^{j-1} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{i_\nu-i_1} a_2^{i_\nu-j} a_1^{j-1} \\ \sum\limits_{j=1}^{i_2-i_1} a_3^{i_2-j} a_1^{j-1} & \sum\limits_{j=1}^{i_3-j_1} a_3^{i_3-j} a_1^{j-1} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{i_\nu-i_1} a_3^{i_\nu-j} a_1^{j-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{i_2-i_1} a_\nu^{i_2-j} a_1^{j-1} & \sum\limits_{j=1}^{i_3-i_1} a_\nu^{i_3-j} a_1^{j-1} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{i_\nu-i_1} a_\nu^{i_\nu-j} a_1^{j-1} \end{vmatrix},$$

ahol

$$S_1=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_\nu-a_1).$$

Vonjuk ki e determináns s-edik $(s=3,4,\dots\nu)$ oszlopából az előtte álló oszlop $a_1^{i_s-i_{s-1}}$-szeresét. A keletkező determináns általános eleme:

$$\begin{aligned}&a_k^{i_s-1}+a_k^{i_s-2}a_1+\dots+a_k^{i_1+1}a_k^{i_s-i_1-2}+a_k^{i_1}a_1^{i_s-i_1-1}-\\&-a_1^{i_s-i_{s-1}}(a_k^{i_{s-1}-1}+a_k^{i_{s-1}-2}a_1+\dots+a_k^{i_1}a_1^{i_{s-1}-i_1-1})\\&=a_k^{i_s-1}+a_k^{i_s-2}a_1+\dots+a_k^{i_{s-1}}a_1^{i_s-i_{s-1}-1}.\end{aligned}$$

Tehát folytatólag

$$V_{ni}^{(\nu)}=a_1^{i_1}S_1\begin{vmatrix}\sum\limits_{j=1}^{i_2-i_1}a_2^{i_2-j}a_1^{j-1} & \sum\limits_{j=1}^{i_3-i_2}a_2^{i_3-j}a^{j-1} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{i_\nu-i_{\nu-1}}a_2^{i_\nu-j}a_1^{j-1}\\ \sum\limits_{j=1}^{i_2-i_1}a_3^{i_2-j}a_1^{j-1} & \sum\limits_{j=1}^{i_3-i_2}a_3^{i_3-j}a_1^{j-1} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{i_\nu-i_{\nu-1}}a_3^{i_\nu-j}a_1^{j-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum\limits_{j=1}^{i_2-i_1}a_\nu^{i_2-j}a_1^{j-1} & \sum\limits_{j=1}^{i_3-i_2}a_\nu^{i_3-j}a_1^{j-1} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{i_\nu-i_{\nu-1}}a_\nu^{i_\nu-j}a_1^{j-1}\end{vmatrix}.$$

Könnyen belátható, hogy e determináns felbontható

$$a_i=(i_2-i_1)(i_3-i_2)\dots(i_\nu-i_{\nu-1})$$

számú determináns összegére, melyeket úgy kapunk, hogy a fenti determináns minden oszlopában rendre az összegnek *csak egy* — ugyanazon j indexű — tagját tartjuk meg. Az így kapott $\nu-1$-ed rendű determinánsok mindegyikében — miután összes oszlopaikból a_1-nek előforduló hatványait kiemeltük — minden oszlop magasabb fokú, mint az előtte álló oszlopok, mert — amint könnyen belátható — a fenti determináns minden oszlopában $a_2, a_3, \dots a_\nu$-nek csak magasabb hatványai fordulnak elő, mint az előtte lévő oszlopokban. Tehát e determinánsok mindegyike ugyanolyan alakú, mint (B); azért $V_{ni}^{(\nu)}$ a következő alakba írható:

$$V_{ni}^{(\nu)}=S_1\sum_{r=1}^{a_i}a_1^{m_r}V_{nr}^{(\nu-1)},$$

ahol az m_r kitevők és a_i pozitív egész számok.

Ezen $a_2, a_3, \ldots a_\nu$ elemekből álló $V_{nr}^{(\nu-1)}$ determinánsokra ugyanezt az eljárást alkalmazva kapjuk, hogy

$$V_{nr}^{(\nu-1)} = S_2 \sum_{s=1}^{ar} a_2^{m_s} V_{ns}^{(\nu-2)},$$

ahol

$$S_2 = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \cdots (a_\nu - a_2);$$

továbbá az m_s-ek és a_r pozitív egész számok. Tehát

$$V_{ni}^{(\nu)} = S_1 S_2 \sum_{r=1}^{ai} \sum_{s=1}^{ar} a_1^{m_r} a_2^{m_s} V_{ns}^{(\nu-2)}.$$

Ezen eljárást addig folytatjuk, míg a jobboldalon álló determinánsok felső indexe 2 lesz. Akkor

$$V_{ni}^{(\nu)} = S_1 S_2 \ldots S_{\nu-2} \sum_{r=1}^{ai} \sum_{s=1}^{ar} \cdots \sum_{l=1}^{a} a_1^{m_r} a_2^{m_s} \ldots a_{\nu-2}^{m} \begin{vmatrix} a_{\nu-1}^{l_1} & a_{\nu-1}^{l_2} \\ a_\nu^{l_1} & a_\nu^{l_2} \end{vmatrix}.$$

Minthogy

$$\begin{vmatrix} a_{\nu-1}^{l_1} & a_{\nu-1}^{l_2} \\ a_\nu^{l_1} & a_\nu^{l_2} \end{vmatrix} = a_{\nu-1}^{l_1} a_\nu^{l_1} (a_\nu^{l_2-l_1} - a_{\nu-1}^{l_2-l_1}) = a_{\nu-1}^{l_1} a_\nu^{l_1} (a_\nu - a_{\nu-1}) \sum_{k=1}^{l_2-l_1} a_\nu^{l_2-l_1-k} a_{\nu-1}^{k-1},$$

azért

$$V_{ni}^{(\nu)} = S_1 S_2 \ldots S_{\nu-2} S_{\nu-1} \sum_{r=1}^{ai} \sum_{s=1}^{ar} \cdots \sum_{l=1}^{aj} \sum_{k=1}^{al} a_1^{m_r} a_2^{m_s} \ldots a_{\nu-2}^{m_l} a_{\nu-1}^{m_k} a_\nu^{m'_k}.$$

Itt $S_1 S_2 \ldots S_{\nu-1}$ az $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ elemek Vandermonde-féle determinánsának kifejtése; az utána következő összeg pedig ugyanezen elemekből álló bizonyos szorzatösszeg. Ha tehát az a_i elemek különbözők és pozitívok, akkor $V_{ni}^{(\nu)}$ nem zérus.

Megemlítjük, hogy ez a tétel nem evidens, mert — amint Beke professzor úr megjegyezte — pl. ha az a_i-k nem mind pozitívok, akkor a tétel nem igaz, így pl. a

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & -a_2 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

determinánsban az a_1 elemhez tartozó aldetermináns zérus akkor is, ha elemei $a_1, a_2, -a_2$ különbözők.

5. **Tétel**: *Ahhoz, hogy egy homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai mind racionális egész függvények legyenek, szükséges (de nem elégséges) hogy az együtthatók sorjában pontosan* $-1, -2, \ldots, -n$*-ed fokú racionális törtfüggvények legyenek.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy (A) megoldásai az egymástól lineárisan független

$$y_1 = a_0 z^{\alpha_1} + a_1 z^{\alpha_1 - 1} + \cdots + a_n,$$
$$y_2 = b_0 z^{\alpha_2} + b_1 z^{\alpha_2 - 1} + \cdots + b_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = p_0 z^{\alpha_n} + p_1 z^{\alpha_n - 1} + \cdots + p_n$$

racionális egész függvények, ahol az α_i-k egymástól különbözők. [Itt feltehetjük, hogy az α_i-k különbözők, mert ha volna az y_i-k között egyenlő fokú, akkor ezek pusztán kivonással különböző fokúakká tehetők, melyek szintén függetlenek és megoldások. Ha pl. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, akkor

$$\overline{y}_1 = b_0 y_1 - a_0 y_2 = h_0 z^{\alpha_1 - 1} + h_1 z^{\alpha_1 - 2} + \cdots,$$
$$\overline{y}_2 = c_0 y_1 - a_0 y_3 = g_0 z^{\alpha_1 - 1} + g_1 z^{\alpha_1 - 2} + \cdots$$

és

$$\overline{\overline{y}}_1 = g_0 \overline{y}_1 - h_0 \overline{y}_2 = l_0 z^{\alpha_1 - 2} + l_1 z^{\alpha_1 - 3} + \cdots.$$

Tehát az $y_1, \overline{y}_1, \overline{\overline{y}}_1$ függvények már különböző fokúak. Ha több y_i egyenlőfokú, akkor ezt az eljárást folytatjuk. Könnyen belátható, hogy az így kapott $\overline{y}_i$-k megoldások és egymástól függetlenek továbbá fordítva, ha az $\overline{y}_i$ függvények független megoldásai (A)-nak, akkor az y_i függvények is a fenti és a többi hasonló egyenletek alapján szintén független megoldásai (A)-nek]

Képezzük az y_i függvényekből alkotott Wronski-féle D_i determinánsokból (11) alapján a

$$y^{(n)} - \frac{D_1}{D} y^{(n-1)} + \frac{D_2}{D} y^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n \frac{D_n}{D} y = 0$$

kifejezést és vizsgáljuk az együtthatók fokszámát. A D és a D_i determinánsok legmagasabb fokú tagjait akkor kapjuk, ha elemeikben csak a legmagasabb fokú tagot tekintjük. Tehát D legmagasabb fokú tagja

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_0 z^{\alpha_1} & a_0 \alpha_1 z^{\alpha_1 - 1} & \cdots & a_0 \alpha_1(\alpha_1 - 1) \cdots (\alpha_1 - n + 2) z^{\alpha_1 - n + 1} \\ b_0 z^{\alpha_2} & b_0 \alpha_2 z^{\alpha_2 - 1} & \cdots & b_0 \alpha_2(\alpha_2 - 1) \cdots (\alpha_2 - n + 2) z^{\alpha_2 - n + 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_0 z^{\alpha_n} & p_0 \alpha_\alpha z^{\alpha_n - 1} & \cdots & p_0 \alpha_n(\alpha_n - 1) \cdots (\alpha_n - n + 2) z^{\alpha_n - n + 1} \end{vmatrix}$$

Szorozzuk a 2-ik oszlopot z-vel, a 3-ikat z^2-vel s. i. t. Kívül ugyanezekkel osztva, a z^{α_1}, z^{α_2}, ... z^{α_n}-ket kiemelve és egyszerűsítve kapjuk

$$\varDelta = a_0 b_0 \cdots p_0 z^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n - \binom{n}{2}} \mathfrak{D},$$

ahol

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1(\alpha_1 - 1) & \cdots & \alpha_1(\alpha_1 - 1) \cdots (\alpha_1 - n + 2) \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2(\alpha_2 - 1) & \cdots & \alpha_2(\alpha_2 - 1) \cdots (\alpha_2 - n + 2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n(\alpha_n - 1) & \cdots & \alpha_n(\alpha_n - 1) \cdots (\alpha_n - n + 2) \end{vmatrix}.$$

Most — az egyes elemekben a szorzást elvégezve — egyes oszlopoknak másokhoz való hozzáadása és kivonása által elérhetjük, hogy e determináns VANDERMONDE-féle legyen.

Ugyanily eljárással kapjuk, hogy a D_i-k legmagasabb fokú tagja

$$\varDelta_i = a_0 b_0 \cdots p_0 z^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n - \binom{n}{2} - i} \mathfrak{D}_i,$$

ahol

$$\mathfrak{D}_i = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha^{i-1} & \alpha_1^n & \alpha_1^{i+1} & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{i-1} & \alpha_2^n & \alpha_2^{i+1} & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{i-1} & \alpha_n^n & \alpha_n^{i+1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Minthogy az α_i-k különbözők és pozitivok, $\triangle \neq 0$ és a (4) tétel szerint $\triangle_i \neq 0$, tehát D-nek $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n - \binom{n}{2}$ és a D_i-k-nek $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n - \binom{n}{2} - i$ a fokszáma tehát a $\frac{D_i}{D}$-k tényleg i-edfokú racionális törtfüggvények.

6. **Tétel**: *Ha (A) együtthatói negatív együtthatós hatványsorok, akkor a megoldások mindegyike csak akkor lehet egész függvény, ha az együtthatók is mind egész függvények.*

Bizonyítás: Legyenek a $P_i(z)$ függvények együtthatói negatívok és válasszuk az $y_0, y'_0, \cdots y_0^{(n-1)}$-ket pozitívoknak, akkor (1)-ben a jobboldal minden tagja pozitív. Ha mostan (A)-nak jobboldalán csak a $P_k(z)y^{(n-k)}$ tagot tartjuk meg, ezáltal ugyancsak pozitív, de kisebb értékeket kapunk az $y_0^{(n+\nu)}$-kre. Tehát az így kapott

$$u^{(n)} = -P_k(z)\,u^{(n-k)}$$

differenciálegyenlet megoldása — ha $u_0^{(n-k)} = y_0^{(n-k)}$ — szintén pozitív együtthatójú oly hatványsor, melyben a ν-edfokú tag együtthatója kisebb, mint y-ben a ν-ed fokú tagé.

Jelöljük most $u^{(n-k)}$-t v-vel. Akkor kapjuk hogy

$$v^{(k)} = -P_k(z)v.$$

Itten két esetet különböztetünk meg, aszerint, hogy $k \neq 1$ vagy vagy $k=1$. Az első esetben, ha $P_k(z)$ nem egész, akkor már a 2. tételnél említett ÅLANDER-tételből következik, hogy a v általános megoldás nem egész függvény és így u sem az, de akkor y még kevésbbé. A második esetben a

$$v' = -P_1(z)v$$

egyenletet sorozatosan differenciálva, ha a

$$\begin{aligned} v'' &= -P'_1(z)v - P_1(z)v', \\ v''' &= -P''_1(z)v - 2P'_1(z)v' - P_1(z)v'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v^{(\nu)} &= -P_1^{(\nu-1)}v - \tbinom{\nu-1}{1}P_1^{(\nu-2)}v' - \cdots - P_1(z)v^{(\nu-1)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{13}$$

rendszerben a $P_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{1,\nu}z^\nu$ sor együtthatói negatívok és $v_0 > 0$, akkor a jobboldal minden tagja a $z=0$ helyen pozitív. Tehát $v_0^{(\nu)}$-t csökkentjük, ha a jobboldalon csak az $(\nu-1)!\,v_0 p_{1,\nu-1}$ első tagot tartjuk meg. Ez esetben, ha $P_1(z)$ nem egész függvény, akkor

$$\frac{1}{R} = \lim_{\nu\to\infty}\left|\sqrt[\nu]{\frac{v_0^{(\nu)}}{\nu!}}\right| \geq \lim_{\nu\to\infty}\left|\sqrt[\nu]{\frac{v_0}{\nu}}\right|\left|\sqrt[\nu]{p_{1,\nu-1}}\right| =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty}\left|\sqrt[\nu]{p_{1,\nu-1}}\right| = \frac{1}{r_1} > 0,$$

ahol R a v, r_1 pedig a $P_1(z)$ konvergencia-körének sugara Tehát v nem egész függvény és így u sem, de akkor y még kevésbbé.

Megjegyezzük, hogy ha (13)-ban $P_1(z)$-ről csak annyit mondunk, hogy nem egész függvény, akkor $v' = -P_1(z)v$-nek $v = ke^{-\int P_1(z)dz}$ megoldása még lehetne egész függvény, pl. ha $P_1(z) = \frac{1}{1-z}$, akkor $v = k(1-z)$.

A 6. tétel és e fejezet elején említett ÅLANDER-féle $y' - \frac{u'(z)}{u(z)}y = 0$ példa alapján könnyen belátható a következő állítás:

Ha egy egész függvény logaritmikus differenciálhányadosa nem egész függvény, akkor e differenciálhányados hatványsorának együtthatói nem lehetnek mind pozitívok.

Ugyanis, ha az $u(z)$ egész függvény logaritmikus differenciálhányadosa nem lenne egész függvény (ez előfordul pl. az összes racionális egész függvényeknél, de vannak ily transzcendens egész függvények is, pl. $(z-1)e^z$) és ha e differenciálhányados hatványsorának együtthatói pozitivok lennének, akkor a fenti ÅLANDER-féle példa megoldása a 6. tétel szerint nem lehetne egész függvény. Viszont ennek megoldásáról tudjuk, hogy ez nem más, mint az $y = ku(z)$ egész függvény.

Kun Kuti Márton.

ÜBER DIE HOMOGENEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, DEREN SÄMTLICHE LÖSUNGEN GANZE FUNKTIONEN SIND.

Im Vorhergehenden wurden — hauptsächlich von den Arbeiten PERRONS und ÅLANDERS ausgehend — jene Bedingungen untersucht, die eine homogene lineare Differentialgleichung befriedigen muss, damit alle ihre Lösungen ganze Funktionen werden.

Zuerst haben wir die Koeffizienten der Potenzreihe der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$D(y) = y^{(n)} + P_1(z)y^{(n-1)} + P_2(z)y^{(n-2)} + \cdots + P^n(z)y = 0 \qquad (A)$$

in Determinantenform geschrieben, wodurch sich eine Gelegenheit bietet einen Determinanten-Satz und einen neuen Beweis des Konvergenzsatzes der Lösungen der obigen Differentialgleichung zu erwähnen.

Dann wurden folgende Sätze bewiesen:

1. Ist in (A) die Funktion $P_1(z)$ eine ganze Funktion, so sind alle Lösungen dann und nur dann ganze Funktionen, wenn alle anderen Koeffizienten $P_i(z)$ auch ganze Funktionen sind.

2. Dafür dass alle Lösungen von (A) ganze rationale Funktionen seien mögen, ist es notwendig, aber nicht hinreichend, dass die Koeffizienten $P_i(z)$ gebrochene rationale Funktionen nicht höheren als -1, -2, -3, ..., $-n$ -ten Grades seien.

3. Wenn die Elemente einer VANDERMONDEschen Determinante verschieden und positiv sind, dann sind alle Unterdeterminanten von Null verschieden.

4. Dafür dass alle Lösungen von (A) ganze rationale Funktionen seien mögen, ist es notwendig, aber nicht hinreichend, dass die Koeffizienten gebrochene rationale Funktionen von *genau* -1, -2, -3, ..., $-n$ -ten Grades seien.

5. Wenn die Koeffizienten von (A) Potenzreihen mit negativen Koeffizienten sind, können alle Lösungen nur dann ganze Funktionen sein, wenn auch die Koeffizienten $P_i(z)$ ganze Funktionen sind.

6. Wenn die logaritmische Ableitung einer ganzen Funktion keine ganze Funktion ist, dann können nicht alle Koeffizienten der Potenzreihe dieser Ableitung positiv sein.

Martin Kun Kuti.

IRODALOM.

Charles Jordan: Calculus of Finite Differences. (Introduction by *Harry C. Carver*) 1939., XXII + 655 lap.[1]

E vaskos munka a szerző hosszú éveken át folytatott kutatásainak gyümölcse és felöleli egyetemi előadásainak anyagát. Ámbár közvetlen célja az, hogy a matematikai statisztika jelen vagy jövendő művelőit megismertesse e tudomány ma már nélkülözhetetlen módszereivel, a matematikus részére is gazdag és tanulságos olvasmányt nyujt. Az első fejezetek a differenciaszámítás alapfogalmait, műveleteit, jelölésmódját és a benne használatos legfontosabb függvényeket vezetik be (az exponenciális és trigonometrikus függvényeket, a gamma-, digamma- és trigamma-függvényeket, stb.) Külön fejezet foglalkozik a Stirling-számokkal. Az elsőfajú Stirling-számokat (S_n^m) kapjuk, ha az $(x)_n$ faktoriálist, azaz az $x(x-1)\ldots(x-n+1)$ szorzatot x hatványai szerint rendezzük: $(x)_n = \sum\limits_{m=1}^{n} S_n^m x^m$, a másodfajúakat ($\mathfrak{S}_n^m$), ha x^n-et kifejtjük az $(x)_1$, $(x)_2, \ldots (x)_n$ faktoriálisok szerint: $x^n = \sum\limits_{m=1}^{n} \mathfrak{S}_n^m (x)_m$. Míg azt a szerepet, amit a binomiális együtthatók az analizis számos ágában játszanak, mindenki jól ismeri, a Stirling-számok által nyujtott előnyök távolról sincsenek köztudatban. A szerző tehát hasznos munkát végez, midőn megmutatja, hogy e számok mily sok és változatos kérdéssel függnek össze. Egy további fejezet a Bernoulli-számokat és polinomokat tárgyalja. Az általában ismert tulajdonságok világos és tömör összefoglalása után az ú. n. másodfajú Bernoulli-polinomok elméletét kapjuk (az «elsőrendű»-eket a $\varphi_n(x+1) - \varphi_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ és $\varphi_n'(x) = \varphi_{n-1}(x)$ relációk jellemzik, míg a «másodrendű»-eket a fordított $\psi_n(x+1) - \psi_n(x) = \psi_{n-1}(x)$ és $\psi_n'(x) = \binom{x}{n-1}$ relációk), amelyet éppen szerzőnk fejtett ki tíz évvel ezelőtt a Szegedi Acta-ban.

[1] A mű magyarországi bizományosa a budapesti Eggenberger-cég; ára 25 pengő.

A nevezetes polinomsorozatok közül megtaláljuk még a STIRLING-, EULER- és BOOLE-polinomok tárgyalását egységes szempontok szerint és különös tekintettel e polinomok szerepére azon műveletek körében, amelyek a differenciaszámítás lényegéhez tartoznak. Mondanunk sem kell, hogy a különféle összegező formulák és eljárások fontosságukhoz mért helyet foglalnak el.

Az interpoláció módszereit a szerző nagy gonddal és részletességgel fejtegeti. Álláspontja az, hogy a faktoriálisok szerint rendezett képletek elméletileg egyenrangúak a hatványok szerint rendezett képletekkel és hogy gyakorlatilag még hasznosabbak, mint amazok. Ennek igazolására több alkalmat megragad. Az interpolációval kapcsolatban vizsgálat tárgyává teszi a számítási gyakorlatban elterjedt táblázatokat és arra a meglepő eredményre jut, hogy az interpoláció-képletek megengednék, hogy e táblázatokat általában tizedrésznyi terjedelemre redukáljuk, a nélkül, hogy az általuk elérhető pontosságnak ez rovására menne. Célszerű volna tehát a táblázatokat csökkentett terjedelemben jelentetni meg és kiegészíteni őket az inverz függvények tábláival.

A kiegyenlítő számítások két szokásos elve (nevezetesen a legkisebb négyzetek és a momentumok elve) szerzőnknél beható megvitatásnak tárgya. A legkisebb négyzetek elvének alkalmazását lényegesen megkönnyítik és egyszerűsítik az ortogonális polinomok, amelyeknek tulajdonságait szerzőnk jórészt saját vizsgálatai alapján fejti ki; a momentumok elvének síma és praktikus használatát pedig éppen azok a függvények biztosítják leghathatósabban, amelyeket szerzőnk G-polinomok néven vezetett be a tudományba.

A könyv utolsó fejezetei a numerikus egyenletek közelítő megoldásáról és a differenciaegyenletekről szólnak. Az elsőnek vezérelve a regula falsi; az utóbbiak tárgyalása LAPLACE, BOOLE, FOURIER, LAGRANGE, ELLIS részben feledésbe merült módszereinek szerencsés felelevenítésén nyugszik. A differenciaegyenletek értelmét és megoldásaik tartalmát jól megvilágítják azok az egyébként is érdekes valószínűségi problémák, amelyeknek elemzése például szolgál.

Az egész munkán végigvonul, hogy a szerzőt mindenekelőtt nem a sorbafejtések konvergációja érdekli, hanem az, hogy mikép lehet mennél kevesebb taggal mennél nagyobb pontosságot elérni. Nem mintha a konvergencia kérdésének fontosságát félreismerné, de ebben más feladatkört lát és ezúttal nem ezt a feladatkört választotta vizsgálatainak tárgyául. Ezenkívül más is lebeghetett szeme előtt. Az infinitezimális számítás hatalmas fejlődése több matematikai disciplinát mintegy elnyomott és sok esetben ez határozott kár volt.

Ilyen éppen a differenciaszámítás esete. A szerző tehát igyekezett a matematika ez ágának szépségeit és harmóniáját bemutatni, hogy neki új híveket szerezzen. Ezért is írta könyvét — noha honfitársunk — angolul, vagyis azon a nyelven, amelyen a legtöbb olvasóra számíthat.

A mű ízléses és teljesen az angol és amerikai kiadványokra emlékeztető kiállítása a soproni Röttig és Romwalter-nyomda szakértelmét dícséri.

Szűcs Adolf.

Gábor Szegő: Orthogonal polynomials. New York, American Mathematical Society, 1939, VII+410 lap.[1]

Itt közöljük magyar fordításban e könyv előszavát.

Az utóbbi években az ortogonális polinomok elmélete nagy fejlődésnek indult; a tárgy szorosan kapcsolódik az analízis számos fontos ágához. Az ortogonális polinomok összefüggnek a trigonometrikus, hipergeometrikus, Bessel-féle és elliptikus függvényekkel és kapcsolatba lépnek a lánctörtek elméletével és az interpoláció és mechanikus quadratura fontos problémáival; továbbá alkalmilag szerepelnek a differenciál- és integrálegyenletek elméleteiben is. Ehhez hozzáfűzhetjük, hogy általános és tanulságos illusztrációul szolgálnak az ortogonális rendszerekre vonatkozó bizonyos vizsgálatokhoz. Újabban kiderítették, hogy e polinomok némelyike jelentőséggel bír a quantum-mechanikában és a matematikai statisztikában is.

A tárgy forrása bizonyos, ú. n. Stieltjes-féle, lánctörtekre vonatkozó vizsgálatokban található. E lánctörtek különleges eseteit Gauss, Jacobi, Christoffel, Mehler és mások tanulmányozták, míg általánosabb szempontból Csebisev, Heine, Stieltjes és A. Markoff fejtették ki elméletüket.

A lánctörtek szorosan összefüggnek a momentumok problémájával, amely probléma újabban nagyot fejlődött; mégis a lánctörteket fokozatosan elhagyták mint az ortogonális polinomok elméletének kiindulópontját. Helyükbe lépett maga az ortogonalitási tulajdonság mint alaptulajdonság és mi is a tárgy itt következő kifejtésében ezt az álláspontot fogadjuk el. Ezen alaptulajdonságból kiindulóan bizonyos speciális ortogonális polinomokat vizsgálunk, olyanokat, amelyeket nagy részletességgel vizsgáltak az általános elmélettől függetlenül, sőt mielőtt még ez az elmélet keletkezett. Ebben a vonatkozásban a fentemlített

[1] Az American Mathematical Society «Colloquium Publications» c. könyvsorozatának 23. kötete. Bolti ára $ 6·—.

nevekhez hozzáfűzzük LAPLACE, LEGENDRE, FOURIER, ABEL, LAGUERRE és HERMITE nevét.

Ami tárgyunk kézikönyveit illeti, megjegyezzük, hogy az egyetlen rendszeres tárgyalás J. SHOHAT monográfiájában található: *Théorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebichef*, Mémorial des Sciences Mathématiques, Paris, 1934. A korlátolt hely rövidségre kényszerítette e munkát és ezért nem részletez számos oly problémát, melyeket különösen az utóbbi években vittek előbbre. Kívánatosnak látszott tehát, hogy e disciplina alapideáinak új és részletes kifejtésével próbálkozzunk, helyet adva különlegesen a zérus-helyek eloszlására, aszimptotikus ábrázolásokra, kifejtési problémákra és az interpoláció és mechanikus quadratura bizonyos kérdéseire vonatkozó újabb vizsgálatoknak.

Az itt következőkben részben az ortogonális polinomok általános elméletével foglalkozunk, részben pedig e polinomok speciális osztályainak a tanulmányozásával. Amint várható is, eredményeink kimerítőbbek e speciális osztályokra vonatkozólag és példaképpen megemlítjük azokat a klasszikus polinomokat, amelyek másodrendű lineáris differenciálegyenleteket elégítenek ki. Tekintve e speciális osztályok elsőrendű fontosságát az alkalmazásokban, nem lesz meglepő, hogy könyvünk elsősorban ezeknek a tanulmányozásával foglalkozik. Mégis kétségtelenül az általános elmélet, amint a XII. és XIII. fejezetben kifejtjük, tartalmazza az utóbbi évek legfontosabb haladását.

Munkánkban nem törekszünk a tárgyalás teljességére. Ellenkezőleg: vonzóvá óhajtottuk tenni az anyagot, inkább mint kimerítővé. Arra törekedtünk, hogy megadjuk a fő- és jellegzetes módszereket és ezek kapcsolatát a modern analízis némely általános fogalomalkotásával. Általában előnyben részesítettük az oly témákat, melyekhez magunk új, bár szerény adalékkal hozzá tudtunk járulni vagy amelyeket új formában tudtunk nyujtani. Ily módon a könyv számos eddig nem közölt eredményt is tartalmaz; némelyikük több évre nyúlik vissza. Így például felvettük könyvünkbe a JACOBI-féle sornak az ortogonalitási számkör végpontjaiban való CESÀRO-féle szummabilitásra vonatkozó vizsgálatot (az itt alkalmazott módszer már a LEGENDRE-féle sor klasszikus esetében is fontossággal bír). Továbbá új és egyszerűbb úton jutottunk az ortogonális polinomokra vonatkozó S. BERNSTEIN-féle aszimptotikus képlethez. Számos kisebb jelentőségű részletet is tárgyalunk; ilyenek: egyszerűsítések és kiegészítések a JACOBI- és LAGUERRE-féle polinomok aszimptotikus viselkedésének és e polinomok szerinti kifejtésének vizsgálatában; azon esetek vizsgálata, amidőn a JACOBI-féle differenciálegyenlet minden megoldása polinom; az általános JACOBI-féle polinomok $(-\infty, -1)$, $(-1, +1)$, $(+1, +\infty)$ számközökbe eső zérushelyei számának a meghatározása; a polinom-együtthatókkal és polinom-megoldásokkal bíró másodrendű lineáris differenciálegyenletekre vonatkozó HEINE—STIELTJES-féle tétel új bizonyítása stb.

Általában előnyben részesítettük azokat a problémákat, melyeket egyszerűen lehetett kimondani és tárgyalni és amelyeket többé-kevésbbé teljes alakban tudtunk prezentálni. Ez volt a főoka annak, hogy nem foglalkoztunk az ortogonális polinomok rendkívül érdekes aritmetikai és algebrai tulajdonságaival; ide tartoznának például J. SCHUR új és fontos vizsgálatai,a melyek a LAGUERRE- és HERMITE-féle polinomok irreducibilitására és rokon tulajdonságaira vonatkoznak. Továbbá nagy fontosságot tulajdonítottunk azon célunknak, hogy az irodalomban elszórt részleges és egymást részben fedő tételeket teljes eredményekkel pótoljuk, amelyekben csak természetes és szükséges megszorítások szerepelnek. Arra is törekedtünk, hogy amennyire ez csak lehetségesnek látszott, kiaknázzunk bizonyos módszereket, mint például STURM módszerét a differenciálegyenletek körében (l. a 6.3., 6.31., 6.32., 6.33. §-okat).

A LEGENDRE-féle polinomok tárgyalása az általános elmélet keretében nem volt lehetséges, de talán kívánatos sem; szferikus és más harmonikus polinomokról már rendelkezünk kimerítő tárgyalásokkal.[1] A LEGENDRE-féle polinomoknak csak azokat a tulajdonságait választottuk ki és tárgyaltuk, amelyek kiindulópontúl szolgálnak az ultraszférikus, JACOBI-féle vagy általánosabb polinomokra való általánosításoknak. Nagy fontossága ellenére mellőznünk kellett a STIELTJES féle momentum-probléma tárgyalását is, mert e tárgy az eredmények és módszerek bonyolódott apparátusának kifejtését tette volna szükségessé. Nem tárgyaltuk továbbá az egynél több változó ortogonális polinomjait sem.[2]

Könyvem a Washington University-n az 1935—1936. tanévben tartott előadásaimból alakult ki. A valós és komplex változók függvénytanában szereplő általános fogalomalkotások és módszerek ismeretét természetesen feltételezzük. Alkalomadtán a STIELTJES—LEBESGUE-féle és a LEBESGUE-féle integrált alkalmazzuk, de a könyv nagyobb részében elkerültük ezeket az integrálokat és igen kevés helytől eltekintve, nem hivatkozunk semmiféle részletekbe menő tulajdonságaikra.

---

[1] L. pl. E. W. HOBSON: The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge, 1931.

[2] L. a bibliográfiát a következő dolgozatban: D. JACKSON, Formal properties of orthogonal polynomials in two variables. Duke Mathematical Journal. Vol. 2 (1936).

A könyv végén szereplő problémák, kevés kivétellel, nem újak és nem függnek úgy össze egymással, mint például a PÓLYA—SZEGŐ-féle *Aufgaben und Lehrsätze* problémái. Többé-kevésbbé kiegészítéseknek tekintendők, melyek az illusztrálás és gyakorlat céljait szolgálják; mind tárgyukat mind módszerüket illetően néha igen távol állnak egymástól. A citátumok listája nem teljes; csupán oly eredeti dolgozatokat, néhány elsőrendű fontosságú tankönyvet és monográfiát tartalmaz, amelyekre a szövegben hivatkozás történik.

J. D. TAMARKIN-tól származott az indítvány, hogy a *Colloquium Publication*-ekben az ortogonális polinomokra vonatkozó könyv irassék; ő egyszersmind számos értékes tanácsával is résztvett e munka keletkezésében. A legnagyobb hálával emlékezem meg szíves érdeklődéséről. Két barátomtól és tanáromtól is kaptam értékes megjegyzéseket, ezek FEJÉR LIPÓT (Budapest) és PÓLYA GYÖRGY (Zürich). Kollégáim: ERDŐS PÁL (Manchester), GRÜNWALD GÉZA (Budapest), W. H. ROEVER (St. Louis), A. ROSS (St. Louis), J. SHOHAT (Philadelphia) és TURÁN PÁL (Budapest) szintén szívesek voltak közreműködni. F. A. BUTTER, Jr. (jelenleg Los Angelesben) segített a kézirat elkészítésében. Ez utóbbi segítséget a Washington University «Rockefeller Research Fund»-jának ösztöndíja (1936—1937) tette lehetővé. Tanítványom, L. H. KANTER, ugyancsak hasznos segítséget nyujtott a kézirat elkészítésében.

Formális köszönetek nem tudják teljes mértékben kifejezni hálámat azért a bátorításért és segítségért, amelyben barátoktól, kollégáktól és intézményektől részem volt. Végül még az *American Mathematical Society*-nek akarom hálás köszönetemet kifejezni, hogy könyvemet Colloquiumainak sorozatába felvette.

Washington University, 1938.

Szegő Gábor

Angolból fordította: *Kőnig Dénes.*

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1939. évi XLIII. matematikai tanulóversenyről.

Társulatunk e versenyt 1939. okt. 21-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 51, Szegeden 6 versenyző jelentkezett; beadtak Budapesten 30, Szegeden 5 dolgozatot.

A verseny tételei a következők voltak:

I. Legyenek a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 oly valós számok, hogy

$$a_1a_2>0, \quad a_1c_1\geqq b_1^2, \quad a_2c_2\geqq b_2^2.$$

Bebizonyítandó, hogy ekkor

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2)\geqq(b_1+b_2)^2.$$

II. Melyik a 2 legmagasabb hatványa, amellyel $2^n!$ osztható?

III. A hegyesszögű ABC háromszög AB, BC, CA oldalai fölé, mint átmérők fölé, kifelé rajzolt félkörökön úgy szerkesztendő egy-egy C_1, A_1, illetőleg B_1 pont, hogy

$$AB_1=AC_1, \quad BA_1=BC_1, \quad CA_1=CB_1$$

legyen.

A versenydolgozatok megbírálására kiküldött bizottság Rados Gusztáv elnöklete alatt a következő tagokból állott: Egerváry Jenő, Faragó Andor, Kalmár László, Kerékjártó Béla, Szűcs Adolf, Veress Pál és Kőnig Dénes előadó (kimentette magát Fejér Lipót és Stachó Tibor). E Bizottság 1939. nov. 4-én tartott ülésén Kőnig Dénes előadó előterjesztése alapján a következő egyhangú javaslatban állapodott meg:

«A verseny a dolgozatok minőségét és mennyiségét egyaránt tekintve igen sikeresnek mondható. A legjobb két dolgozat szerzői Sándor Gyula és Csáki Frigyes. Mindketten mind a három, de különösen a III. feladatra adott szép megoldásaikban matematikai képességeiknek biztos tanújelét adták. Mind szabatosság, mind ötletesség dolgában Sándor Gyula dolgozatát illeti az elsőbbség és ezért a Bizottság azt indítványozza, hogy az első b. Eötvös Loránd-jutalom SÁNDOR GYULÁ-nak adassék, aki a budapesti Kölcsey Ferenc-gimnáziumban NOVOBÁTZKY KÁROLY tanár tanítványa volt, a második pedig CSÁKI FRIGYESnek, aki a budapesti Bolyai-reáliskolában HOFFMANN ERNŐ tanár tanítványa volt. Még két versenyző helyesen oldotta meg mind a három feladatot: HAJNAL MIKLÓS és RÉNYI ALFRÉD. Önmagukban tekintve ők is megérdemelnék a jutalmakat, de dolgozataikat SÁNDOR és CSÁKI dolgozatai mögé kell sorozni elsősorban azért, mert az egyik (HAJNAL) az I. feladat megoldását pongyolán fogalmazta, a másik pedig (RÉNYI) a III. feladatot fölösleges hosszadalmassággal tárgyalta. HAJNAL MIKLÓS, valamint RÉNYI ALFRÉD egyébként igen érdemes dolgozatát a Bizottság dícséretre javasolja.»

A Bizottság e javaslatát a Választmány 1939. nov. 16-án tartott ülésén egyhangúlag elfogadta. Az ugyanezen a napon tartott előadóülésen RADOS GUSZTÁV elnök adta át a díjakat a verseny győzteseinek.

Sándor Gyula jutalmazott dolgozata.

I. tétel. Az $a_1c_1 \geqq l_1^2$ ill. $a_2c_2 \geqq l_2^2$ miatt

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2)=a_1c_1+a_2c_2+a_1c_2+a_2c_1 \geqq l_1^2+l_2^2+a_2c_1+a_1c_2. \tag{1}$$

Ki kell még mutatnunk, hogy $a_1c_2+a_2c_1 \geqq 2b_1b_2$. Ha az $a_1c_1 \geqq l_1^2$ és $a_2c_2 \geqq l_2^2$ egyenlőtlenségeket összeszorozzuk: $a_1c_1 . a_2c_2 \geqq l_1^2 l_2^2$ (a két egyenlőtlenség oldalai pozitívok, mert a kisebbik mennyiség négyzet, tehát pozitív; ezért szabad a két egyenlőtlenséget összeszoroznunk). Vagyis

$$(a_1c_2)(a_2c_1) \geqq l_1^2 l_2^2. \tag{2}$$

Itt $a_1a_2>0$ miatt a_1 és a_2 azonos előjelű; a másik két feltételi egyenlőtlenség miatt c_1 és c_2 előjele megegyezik a_1, ill. a_2 előjelével, tehát a_1, a_2, c_1, c_2 azonos előjelűek (vagy mind poz., vagy mind neg.). Ezért a_1c_2 és a_2c_1 poz. számok. Ilyenekre nézve a számtani középarányos a mértaninál nagyobb. Tehát

$$\frac{a_1c_2+a_2c_1}{2} \geqq \sqrt{a_1c_2a_2c_1} \geqq b_1b_2{}^* \text{ vagy } a_1c_2+a_2c_1 \geqq 2b_1b_2. \tag{3}$$

(1)-ből és (3)-ból következik

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2) \geqq l_1^2+l_2^2+2b_1b_2=(b_1+b_2)^2, \text{ q. e. d.}$$

Az egyenlőség-jel csak akkor érvényes, ha (1)-ben és (3)-ban egyenlőség-jel áll: ha $a_1c_1=l_1^2$, $a_2c_2=l_2^2$ és $a_1c_2=a_2c_1$.

---

* Ha egyenlőtlenség mindkét oldala $\geqq 0$, szabad az oldalakból négyzetgyököt vonnunk.

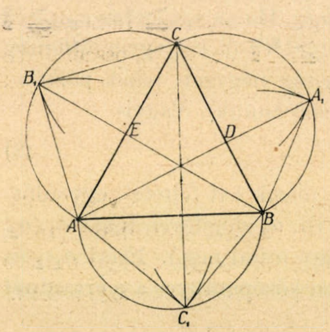
II. tétel. Első megoldás. $2^n!=2^n(2^n-1)\ldots 2.1$. E számok közül 2^1-nel osztható 2^{n-1}, 2^2-nel $2^{n-2}, \ldots, 2^n$-nel 1. Mivel az a 2^i szám, amely 2^{n-i}-vel osztható, bentfoglaltatik abban a 2^{i+1} számban, mely 2^{n-i-1}-gyel osztható, a számok 2 kitevőjét éppen 2^i-vel növelik. (U. i. $2^i(n-i-1)$ már az előbbi részletösszegben szerepel.) Ezért a keresett kitevő

$$x=2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^0=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1.$$

Második megoldás. Legendre tétele. Legyen m egész szám, p törzsszám. Az a legmagasabb kitevő, amellyel p az $m!$-ban foglaltatik : $x=\frac{m-s}{p-1}$. Itt s jelenti a p alapú számrendszerben felírt m-ben a számjegyek összegét. 2^n a 2 alapú számrendszerben egy 1-esből és zérusokból áll, tehát $s=1$, és így

$$x=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1.$$

III. tétel. Rajzoljunk A körül $AB_1=AC_1$ sugárral (A), B körül $BA_1=BC_1$ sugárral (B), C körül $CA_1=CB_1$ sugárral (C) kört. (Feltéve, hogy A_1, B_1, C_1 a feladat követelményének megfelel.) A_1 a CB mint átmérő fölé írt körön van, tehát $CA_1\perp BA_1$. Hasonlóképpen $BC_1\perp AC_1$ és $CB_1\perp AB_1$. E szerint az (A), (B), (C) körök egymást kölcsönösen merőlegesen metszik. Mivel az A középpontú (A) kör (B)-t és (C)-t merőlegesen metszi, (B) és (C) hatványvonala tartozik átmenni A-n. A hatványvonal a két kör centrálisára merőleges, tehát A-ból a CB-re bocsátott merőleges (B) és (C) hatványvonala. Két kör hatványvonala átmegy a két kör metszőpontjain is (ha azok metszik egymást). Esetünkben (B) és (C) egyik metszőpontja A_1, tehát ez az A-ból BC-re bocsátott merőlegesen van. Ennek alapján A_1 és hasonlóan B_1 és C_1 is megszerkeszthetők, mint az ABC magasságvonalainak és az oldalak mint átmérők fölé kifelé rajzolt félkörök metszéspontjai. Hegyesszögű háromszög esetén e szerkesztés mindig elvégezhető, mert a magasságok a szembenfekvő oldalakat a csúcsok között metszik, tehát az oldalak mint átmérők fölé rajzolt köröket is metszik két pontban (melyeket a háromszögoldal elválaszt és így az egyik metszéspont a külső félkörön van). Tompaszögű háromszögnél a tompaszög [sic!] csúcsából kiinduló magasság a szembenfekvő oldalt a csúcsokon kívül metszi és így a csú-



csok [sic!] mint átmérő fölé rajzolt körrel nincs valós metszéspontja; tompaszögű háromszög esetében a feladatnak nincs megoldása. Derékszögű háromszög esetében ($BAC\sphericalangle=90°$) $B_1\equiv C_1\equiv A$.

Ki kell még mutatnunk, hogy a megadott módon szerkesztett pontok kielégítik a feltételeket. Messe AA_1 a CB-t D-ben, BB_1 a CA-t E-ben. CA_1B derékszögű, tehát $CA_1=\sqrt{\overline{CD}.\overline{CB}}$ és hasonlóképpen $CB_1=$ $=\sqrt{\overline{CE}.\overline{CA}}$. Ismeretes azonban, hogy $CEL\triangle\sim CAL\triangle$. Ezért: $CE:CD=CB:CA$, vagyis $\overline{CE}.\overline{CA}=\overline{CD}.\overline{CB}$, tehát $CA_1=CB_1$. Ugyanez áll B-re és A-ra is.

A $CA_1=CB_1$ egyenlőséget így is beláthatjuk: $CD=AC$ cos $ACB\sphericalangle$, tehát $\overline{CD}.\overline{CB}=\overline{AC}.\overline{BC}$ cos $ACB\sphericalangle$. A cosinustétel szerint

$$\overline{AC}\;\overline{BC}\cos ACB\sphericalangle=\frac{\overline{AC}^2+\overline{CB}^2-\overline{AB}^2}{2}.$$

Ugyanez adódik $\overline{CB_1}^2$-re is, mert e kifejezés A-ra és B-re szimmetrikus. Tehát

$$CA_1=CB_1=\sqrt{\frac{\overline{AC}^2+\overline{CB}^2-\overline{AB}^2}{2}}. \qquad \text{(I)}$$

Innen is látható, hogy CA_1-re csak akkor kapunk reális értéket, ha $\overline{AC}^2+\overline{CB}^2\geq\overline{AB}^2$. Ha a feltételt mindhárom oldalra nézve felírjuk, ez aequivalens azzal, hogy a háromszög nem tompaszögű. Az (I) összefüggés alapján egyébként a szerkesztés is elvégezhető.

Csáki Frigyes jutalmazott dolgozata.

I. tétel. Mivel $a_1a_2>0$, azért a_1 és a_2 egyidejűleg pozitívok vagy negatívok. Sőt figyelembe véve a második és harmadik egyenletet [sic!], megállapíthatjuk, hogy a_1, a_2, c_1 és c_2 vagy mind pozitív, vagy mind a négy negatív. Mindenesetre $a_1c_2>0$ és $a_2c_1>0$. Két pozitív szám számtani közepe azonban sohasem kisebb mértani közepénél:

$$\frac{a_1c_2+a_2c_1}{2}\geq\sqrt{a_1c_1a_2c_2}.$$

(Itt a négyzetgyök pozitív jellel veendő.) Az eredetileg megadott második és harmadik egyenlet [sic!] szorzatából:

$$a_1c_1a_2c_2\geq b_1^2b_2^2.$$

Vonjunk mind a két oldalon pozitív négyzetgyököt és helyettesítsünk be a fentebbi egyenletbe [sic!]:

$$\frac{a_1c_2+a_2c_1}{2}\geq b_1b_2$$

Ezt így is írhatjuk:

$$a_1c_2+a_2c_1 \geqq 2b_1b_2.$$

És

$$a_1c_1 \geqq b_1^2,$$
$$a_2c_2 \geqq b_2^2.$$

E három egyenletet [sic!] összeadva:

$$a_1c_1+a_1c_2+a_2c_1+a_2c_2 \geqq b_1^2+2b_1b_2+b_2^2,$$

vagy:

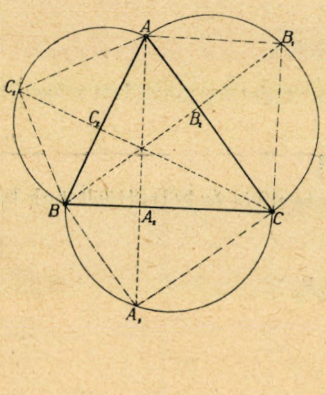
$$(a_1+a_2)(c_1+c_2) \geqq (b_2+b_2)^2 \qquad \text{q. e. d.}$$

II. tétel. Még kell határoznunk, hogy $2^n!$ törzsszámhatványok szorzatára bontott alakja hányadik hatványon tartalmazza a 2-es törzsszámot. Az 1, 2, 3,..., 2^n számok közül minden második osztható 2 első hatványával, ilyen van $\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$; minden negyedik 2^2-nel, ilyen van $\frac{2^n}{4}=\frac{2^n}{2^2}=2^{n-1}$; minden nyolcadik 2^3-nal, ilyen van $\frac{2^n}{8}=2^{n-3}$;... minden $(n-2)$-edik [sic!] osztható 2^{n-2}-nel, minden $(n-1)$-edik [sic!] osztható 2^{n-1}-nel, ilyen van $\frac{2^n}{2^{n-1}}=2$; minden n-edik [sic!] osztható 2^n-nel, ilyen van $\frac{2^n}{2^n}=1$. Ennélfogva] $2^n!$ törzsszámhatványok szorzatára bontott alakja 2-t a

$$2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

hatványon tartalmazza. Ez a legnagyobb kitevő, melyre 2-t felemelve $2^n!$ még osztható.

III. tétel. 1° *Analízis.* Tegyük fel, hogy a szerkesztést végrehajtottuk, ekkor az AB_1C, CA_1B és BC_1A derékszögű háromszögeket kaptuk. Feltevéseink szerint $AC_1=AB_1$, $BA_1=BC_1$ és $CA_1=CB_1$. Felírhatjuk ezeket az egyenlőségeket:



$$\overline{AB_1}^2+\overline{B_1C}^2=\overline{AC}^2 \quad \text{ill.} \quad \overline{AB_1}^2+\overline{CA_1}^2=\overline{AC}^2,$$
$$\overline{CA_1}^2+\overline{BA_1}^2=\overline{BC}^2 \quad \text{ill.} \quad \overline{CA_1}^2+\overline{BC_1}^2=\overline{BC}^2,$$
$$\overline{BC_1}^2+\overline{AC_1}^2=\overline{AB}^2 \quad \text{ill.} \quad \overline{BC_1}^2+\overline{AB_1}^2=\overline{AB}^2.$$

Két-két egyenlet összeadása és a mindig fennmaradó harmadik egyenlet kivonása után ezt a három egyenletet kapjuk:

$$\overline{AB}_1^2 = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{BC}^2}{2}, \quad \overline{CA}_1^2 = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2},$$

$$\overline{BC}_1^2 = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2}.$$

Jelöljük továbbá A_1 pont vetületét a BC oldalon A_2-vel; B_1-ét az AC-n B_2-vel, C_1-ét az AB-n C_2-vel. A derékszögű háromszögek ismeretes tétele szerint $\overline{AB}_1^2 = AB_2 . AC$; ebből és a fenti egyenletből

$$\overline{AB}_2 \, \overline{AC} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{BC}^2}{2}.$$

Vagyis

$$AB_2 = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{BC}^2}{2\,AC} = \overline{AB} \frac{\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{BC}^2}{2\,\overline{AC}\,.\,\overline{AB}}.$$

És mivel

$$\frac{\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{BC}^2}{2\,\overline{AC}\,.\,\overline{AB}} = \cos \alpha$$

azért

$$AB_2 = AB \cos \alpha.$$

Ugyanígy kapjuk:

$$CA_2 = AC . \cos \gamma, \qquad BC_1 = BC \cos \beta.$$

Tehát A_2 egyben az A csúcs vetülete a BC, B_2 a B csúcs vetülete az AC, C_2 a C csúcs vetülete az AB oldalon.

2° *Szerkesztés.* Ezek alapján a szerkesztés úgy történik, hogy az ABC háromszög magassági vonalait meghosszabbítjuk, míg a megfelelő köröket nem metszik. A metszéspontok lesznek a keresett A_1, B_1, C_1 pontok.

3° *Bizonyítás.* Hogy az A_1, B_1, C_1 pontok valóban megfelelnek követeléseinknek, ki kell mutatnunk, hogy $\overline{AB}_1 = \overline{AC}_1$, $\overline{BA}_1 = \overline{BC}_1$, $\overline{CA}_1 = \overline{CB}_1$. Ámde

$$\overline{AB}_1^2 = \overline{AC} . \overline{AB}_2 = \overline{AC} . \overline{AB} \cos \alpha, \quad \overline{AC}_1^2 = AB . AC_2 = \overline{AB} . \overline{AC} \cos \alpha.$$

Tehát valóban $\overline{AB}_1 = \overline{AC}_1$ stb.

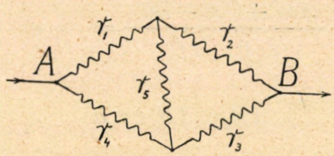
Jelentés az 1939. évi XXI. «Károly Irén» fizikai tanulóversenyről.

A versenyt a Társulat október hó 28-án tartotta meg Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 28 jelentkező volt, Szegeden 2. Budapesten 20 versenyző adott be dolgozatot, Szegeden 2.

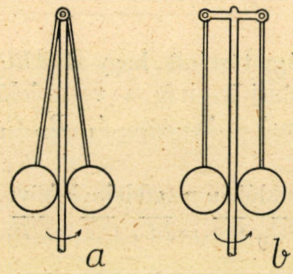
A verseny tételei a következők voltak:

1. Két egymásra merőleges síktükör közötti térben van egy világító pont. Ezen a ponton olyan síkot képzelünk átfektetve, mely mindkét tükörre merőleges. E síknak a tükrök által meghatározott negyedében jelöljük ki azokat a pontokat, melyekhez a világító pontból nem juthat el olyan sugár, mely mind a két tükrön visszaverődött.

2. Öt darab vezetéket (ellenállásuk r_1, r_2, r_3, r_4 és r_5) az ábrának megfelelő módon kapcsolunk össze. Az áram A-tól B felé halad. Mekkora



az egész rendszer ellenállása, *a)* ha az öt ellenállás egyenlő, *b)* ha $r_1 = r_4 = 1\,\Omega$ és $r_2 = r_3 = 2\,\Omega$, *c)* általános esetben?



3. Centrifugális szabályozót nyugalmi helyzetéből kiindulólag növekvő szögsebességgel forgatunk. Írjuk le, hogy mi történik a szabályozó gömbjeivel a forgatás megkezdésének pillanatától kezdve az *a)* alakú és a *b)* alakú szabályozó esetében.

A dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság, melynek elnöke Mikola Sándor, tagjai Hoffmann Ernő, Pogány Béla, Rybár István és Szabó Gábor voltak, 1939. november 9-én tartott ülésén Szabó Gábor előadói jelentése alapján a következőket állapította meg:

«A versenyzőknek a legnagyobb nehézséget a 2. feladat *c)* része okozta. Ezt teljesen senki sem oldotta meg. A többi feladat egyes részeit azonban aránylag elég sokan megfejtették. Így az 1. feladatot 6 versenyző, a 2. feladat *a)* részét 10, *b)* részét 14, a 3. feladat *a)* részét 6, *b)* részét 7 versenyző. A verseny eredménye tehát általában kielégítő.

Két versenyző, névszerint Sándor Gyula és Dolinszky Tamás, a 2. feladat említett *c)* része kivételével minden feladatot megoldott. Megoldásaik ügyesek, szabatosak.

A Bizottság ezért javasolja, hogy e két versenyzőnek egy-egy második Károly Irén-díj ítéltessék oda. Sándor Gyula a budapesti VI. ker. áll. Kölcsey Ferenc gimnáziumban végzett és Novobátzky Károly tanár tanítványa volt; Dolinszky Tamás pedig a budapesti érseki kat. gimnáziumban végzett és Schwarz Arthur tanár tanítványa volt.

Kiemelésre méltó még Vadon Géza és Halász Iván dolgozata. A Bizottság ezért javasolja, hogy Vadon Géza, aki a budapesti II. ker. áll. Mátyás király gimnáziumban végzett és Radványi László tanár tanítványa volt, továbbá Halász Iván, aki a budapesti V. ker. áll. Berzsenyi Dániel gimnáziumban végzett és Tyma Lajos tanár tanítványa volt, dicséretben részesíttessék.»

A Bizottságnak fenti javaslatát a Választmány 1939. november hó 16-án tartott ülésében elfogadta. Az ugyanezen a napon tartott előadó ülésen Rados Gusztáv elnök adta át a díjakat a verseny győzteseinek.

Kimutatás

az 1939. évi április hó 1-től 1939. évi október hó 31-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíj.

1933 ra: **W**alek Károly 6 P.

1934 re: **U**jj Gyula 2 P.

1935 re: **Cs**ada Imre (6), **D**etre László (4), **K**őnig Teodóra (2), **N**agy Béla (6), **Sch**warz Ilona (2). *Összesen 20 P.*

1936 ra: **B**resztovszky Béla (8), **Cs**ada Imre (6), **Cz**ukor Károly (6), **D**etre László (8), **G**irsik Géza (6), **K**őnig Teodóra (2), **L**ajta Ernő (4), **Sch**warz Ilona (4), **S**eres Iván (7), **W**igner Jenő (8). *Összesen 59 P.*

1937-re: **B**oharcsik Pál (6), Bresztovszky Béla (8), **Cs**ada Imre (6), **G**irsik Géza (5), **M**agyar Márta (4), **N**agy Béla (6). Neumann Erzsébet (8), **P**atai László (8), **R**óna Zsigmond (8), **Sch**imanek Emil (8), **S**eres Iván (8), **T**heisz Edéné (4), **V**ince István (8), **W**igner Jenő (8). *Összesen 95 P.*

1938 ra: **A**lbert Anna (8), **B**eke Manó (8), Blau Györgyné (8), Boharcsik Pál (6), Bolla Györgyné (8), Breszlauer Arturné (4), Bresztovszky Béla (8), Bródy Imre (8), **Cs**ada Imre (6), Csaplár Konrád (6), **D**ér Zoltán (6), **G**róh Gyula (8), **H**alász Ernő (8), Heuer Ede (8), **J**urányi Henrik (8), **K**edves Miklós (6), Kerékjártó Béla (8), Krbek Ferenc (8) Kronberger Ede (6), **L**óky Béla (6), **M**agyar Márta (8), Marczell György (8), Maróthi Ferenc (8), Milakovszky László (6), Misángyi Vilmos (8), **N**agy Béla (6), Neubauer Konstantin (8), Neumann Erzsébet (8), **O**ltay Károly (8), **P**atai László (2), **R**óna Zsigmond (8), **Sch**ay Géza (8), Schimanek Emil (8), Scholc Pál (8), **S**ebők Emánuel (6), Seres Iván (8), Söpkéz Sándor (8), Steiner Lajos (3), **Sz**abó Gusztáv (8), Szántó Sándor (8), **T**heisz Edéné (2), Tóth Géza (8), Turán Pál (8), **V**ámos Sándor (6), Vince István (2), **W**igner Jenő (8), **Z**ányi László (4), Zigány Ferenc (2). *Összesen 325 P.*

1939 re: **Cs**aplár Konrád (2), **H**ajós Géza (6), Hajós György (8), Halász Ernő (8), **K**edves Miklós (6), Kovács János (8), Krbek Ferenc (8), **L**assovszky Károly (8), Lóky Béla (6), **M**ilakovszky László (6), Misángyi Vilmos (8), **N**agy Béla (6), **O**ltay Károly (8), **S**arkadi Károly (8), **V**ámos Sándor (6), Vörös Cyrill (6), **Z**ányi László (6). *Összesen 114 P.*

1940-re: **B**auer Mihály (8), **O**ltay Károly (2). *Összesen 10 P.*

2. Előfizetés.

1938 ra: Ref. gimn., Debrecen (6).

1939 re: Techn. Anyagvizsg. Int. könyvtára (8), Kilián F. könyvkeresk., Budapest (6). *Összesen 14 P.*

3. Segély, adomány.

M. T. Akadémia (1939. II.) 500 P., Nagy L. József 20 P. *Összesen 520 P.*

Budapest, 1939. nov. 6.

Jelitai József,
pénztáros.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA. — ÁBRAI V.