MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

45. KÖTET

1938

JANUÁR–JÚNIUS

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST 1970

A kiadásért felelős: Császár Ákos,
a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkára

Eredeti kiadásról készült változatlan utánnyomás

Külföldi terjesztés:
KULTURA KÖNYV- ÉS HÍRLAP
KÜLKERESKEDELMI VÁLLALAT
BUDAPEST 62,
P. O. B. 149

This book is a reproduction of the original, published
in Budapest

General Distributors:
KULTURA Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
BUDAPEST 62, P. O. B. 149,
Hungary

Printed in Hungary, 1970

---

69 - 2006 - Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat

MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

45. KÖTET

1938

JANUÁR–JÚNIUS

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST 1970

KULTURA

International Mathematical Journals from Hungary

ACTA MATHEMATICA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARIAE

Editor: G. Hajós
Size: 24 cm, 400 to 500 pp.
Published in English, French, German or Russian

Vols. 1-20, 1950-1969, with Suppl. to vol. 5
and HUNGARICA ACTA MATHEMATICA, Vol. 1 1949

mostly reprinted,	clothbound set	US $	394,-
	unbound set	US $	352,-
Vols. 1-19	per vol.	US $	18,-
Vol. 20 and forthcoming vols.	per vol.	US $	16,-

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

Editor: A. Rényi
Size: 24 cm. 500 to 700 pp.
Published in English, French, German, Hungarian
or Russian (1952-1954: Hungarian)
Summaries in English, French, German, Hungarian and Russian

O. S. Vols. 1-3, 1952-1954, all publ; partly reprinted
N. S. Vols. 1-9, 1956-1965, all publ; partly reprinted

Clothbound set		US $	134,-
Unbound set		US $	110,-
Single vols.	per vol.	US $	10,-

Continued as:

STUDIA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM HUNGARICA

Auxilio Consilii Instituti Mathematici
Academiae Scientiarum Hungaricae
Editor: A. Rényi
Size: 24 cm, cca 450 pp.
Published in English, French, German or Russian

Vols. 1-4, 1966-1969,	clothbound set	US $	72,-
Single vols. (also forthcoming vols.)	per vol.		16,-

MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖNIG DÉNES ÉS POGÁNY BÉLA

NEGYVENÖTÖDIK ÉVFOLYAM

1938

JANUÁR—JÚNIUSI FÜZET

BUDAPEST, 1938

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

JELENTÉS AZ 1938. ÉVI KŐNIG GYULA-JUTALOMRÓL.

(Az Eötvös Loránd Mat. és Fiz. Társulat 1938. április 7-én tartott üléséből.)

Mélyen tisztelt Társulat!

Egy negyedszázadja, hogy valamennyiünk mestere: Kőnig Gyula nem hat többé tanítványaira személyesen és közvetlenül. Ránk, fiatalabb nemzedékre már nem hatott személyesen; ezért tulajdonképpen úgy kellene neveznünk őt: mestereinknek mestere. Mégis mesterünknek valljuk őt magát mi is; mert szelleme hatott ránk és hat ránk írásain keresztül, hat ránk legkiválóbb tanítványainak: a mi tanítómestereinknek közvetítésével, hat ránk abban a tiszta tudományos légkörben, amiben mi is nevelkedtünk, s ami hogy Hazánkban a matematika terén kiterjedt: elsősorban Kőnig Gyula érdeme volt.

Társulatunk az ő emlékét ünnepeli meg kétévenkint, amikor egy matematikusunknak ebben a légkörben végzett munkája eredményét Kőnig Gyula-jutalommal tünteti ki. Az idei — kilencedik — Kőnig Gyula-jutalom odaítélése tárgyában javaslattételre Társulatunk Választmánya 1937. november 18-án tartott üléséből bizottságot küldött ki; a bizottság elnöke Rados Gusztáv; tagjai: Fejér Lipót, Kerékjártó Béla, Szücs Adolf és Kalmár László. A bizottság alapos megfontolás után, melynek folyamán figyelembevette mindazok munkásságát, akik a jutalomra tekintetbe jöhetnek, egyhangúan úgy határozott, hogy dr. Lipka István egyetemi adjunktus urat, a M. Kir. Ferencz József-Tudományegyetemen az algebra magántanárát ajánlja a Választmánynak a Kőnig Gyula-jutalommal való kitüntetésre. A Társulat Választmánya ezt a javaslatot 1938. február 10-én tartott ülésén egyhangúan elfogadta.

A bizottság alulírottat bízta meg azzal a megtisztelő feladattal, hogy LIPKA ISTVÁN munkásságát jelentés keretében ismertesse. Feladatomat nagymértékben megkönnyítette, hogy az elmúlt évek számos kiváló előadójának jelentését vehettem mintául; de megkönnyítette LIPKA dolgozatainak világos fogalmazása és problémáinak érdekessége is.

LIPKA dolgozataiban főképpen az algebrához és a függvénytanhoz tartozó kérdésekkel foglalkozik. Az algebra különböző területei közül a függvénytanhoz legközelebb eső: a komplex számok algebrája, más néven funkcionális algebra, érdekli leginkább; viszont a függvénytannak elsősorban azok a kérdései ragadják meg, amelyek az algebrával összefüggenek.

Így 1. sz. dolgozatában,[1] a budapesti Egyetem bölcsészettudományi Karához 1923-ban kéziratban benyujtott, nyomtatásban meg nem jelent, doktori értekezésében, egy algebrai tételnek hatványsorokra való átvitelének lehetőségét vizsgálja. Ha $f(z)$ és $\varphi(z)$ két polinom, könnyen eldönthetjük, van-e az $f(z)=0$ és $\varphi(z)=0$ egyenleteknek közös gyöke: megalkotjuk $f(z)$ és $\varphi(z)$ együtthatóiból az ismert módon rezultánsukat; ennek eltűnése a közös gyök létezésének szükséges és elegendő feltétele. Sokkal mélyebb és nehezebb a megfelelő kérdés akkor, ha

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots \tag{1}$$

és

$$\varphi(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n+\cdots \tag{2}$$

két hatványsor, amelyek pl. az egységkörben mindketten összetartóak. LIPKA minden n-re megalkotja az

$$f_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n,$$
$$\varphi_n(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n$$

hatványsor-szeletek rezultánsát, R_n-et. Az

$$f(z)=\frac{z+\vartheta}{1-z},\quad \varphi(z)=\frac{z+\vartheta}{1+z}$$

[1] A számozás LIPKA dolgozatainak e jelentés függelékeként szereplő jegyzékére utal.

hatványsorok példáján megmutatja, hogy az $R_n \to 0$ feltétel nem szükséges a közös gyök létezéséhez: a mondott példánál, ha $\frac{1}{\sqrt{2}} < \vartheta < 1$, $R_n \to \infty$. Az $R_n \to 0$ feltétel nyilván nem lehet elegendő sem a közös gyök létezéséhez, hiszen ha pl. $f(z) = \varphi(z) = e^z$, akkor R_n minden n-re 0, közös gyök még sincs. Lipka megmutatja ezzel kapcsolatban, hogy ha az (1) és (2) hatványsorok összetartási sugara nagyobb 1-nél, akkor pusztán az együtthatók nagyságrendjéből következik, hogy $R_n \to 0$, akár van közös gyök, akár nincs; sőt $\sqrt[n]{R_n} \to 0$ s még több is: minden k-ra $n^k \sqrt[n]{\frac{R_n}{(2n)!}} \to 0$. Ezzel szemben, ha a két hatványsor közül csak az egyik összetartó 1-nél nagyobb sugarú körben, a másiknak összetartási sugara 1, akkor előfordulhat, hogy $R_n \to \infty$. Mélyebb meggondolással: a Hadamard-féle determinánsegyenlőtlenség felhasználásával Fejér Lipót ösztönzésére megmutatta, hogy $R_n \to 0$, sőt $\sqrt[n]{R_n} \to 0$ akkor is érvényes, ha mindkét összetartási sugár 1, de az

$$a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2 + \ldots, \qquad b_0^2 + b_1^2 + \cdots + b^2 + \cdots$$

sorok is összetartóak. Mindezek a jelenségek arra mutatnak, hogy a rezultáns szokásos normálása csak az algebra szempontjából célszerű, a függvénytan szempontjából nem; felvetődik tehát az a kérdés, hogy lehet-e olyan — általában szintén a két hatványsor együtthatóitól függő — $\mathsf{P}_0, \mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n, \ldots$ sorozatot definiálni, hogy az «átnormált» $\frac{R_n}{\mathsf{P}_n}$ rezultánssorozat zérushoz tartása szükséges feltétele legyen a közös gyök létezésének, anélkül, hogy ez a feltétel magától teljesüljön akkor is, ha nincs közös gyök. Lipka megmutatja, hogy ilyen sorozat az R_n-eket előállító determinánsok bizonyos aldeterminánsaiból egyszerű módon képezhető.

Lipka 2. sz. dolgozatában gyökelhatárolási vizsgálatokkal foglalkozik. Legyen

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0)$$

n-edfokú polinom; CAUCHY egy klasszikus tétele szerint ennek mind az n zérushelye a

$$|z| < 1 + \frac{1}{|a_n|} \operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|)$$

körlapon, tehát egyúttal az általában nagyobb

$$|z| < 1 + \frac{1}{|a_n|} (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|)$$

körlapon fekszik. LIPKA azt a kérdést veti fel, hogy mikor van rajta $f(z)$-nek minden zérushelye már a kisebb

$$|z| < 1 + \frac{1}{|a_n|} (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_k|)$$

körlapon. Megmutatja, hogy ehhez elegendő, hogy $f(z)$-nek legalább $n-k$ zérushelye a

$$|z| \geqq (2^{\frac{1}{n-k-1}} - 1)^{-1} \tag{3}$$

körkülsőn feküdjék; ebből adódik, hogy az $f(z) = 0$ egyenletnek mindig legalább $k+1$ gyöke van a csupán az a_0, $a_1, \ldots$, a_k és a_n együtthatóktól függő sugarú

$$|z| < \operatorname{Max}\left\{ (2^{\frac{1}{n-k-1}} - 1)^{-1},\ 1 + \frac{1}{|a_n|} (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_k|) \right\}$$

körlapon. Ez a tétel speciális esetként ($k = n-2$) tartalmazza FEKETE egy eredményét. Ugyanebben a dolgozatában még egy másik korlátot is megad LIPKA az egyenlet $k+1$ gyökének abszolút értékére nézve. LIPKA módszere abban áll, hogy $f(z)$-t két tényezőre bontja; ha $f(z)$ zérushelyei növekvő abszolút érték szerint z_1, $z_2, \ldots$, z_n, akkor az egyik tényezőnek z_1, $z_2, \ldots$, z_k és z_n a zérushelyei, a másiké a többi; az első tényezőre alkalmazza CAUCHY fentemlített tételét (ezért hagyta meg e tényezőnek a legnagyobb abszolút értékű z_n gyököt), a második tényezőről pedig azt használja fel, hogy zérushelyei mind a (3) körkülsőn feküsznek. LIPKA e módszerét BERWALD[2] további gyökelhatárolási tételek bebizonyítására használja.

---

[2] L. BERWALD, Elementare Sätze über die Abgrenzung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung, *Acta Sc. Math.*, 6 (1934), 209—221. oldal.

3. sz. dolgozatában LIPKA, HAAR ALFRÉD ösztönzésére, a MITTAG LEFFLER-féle E_α függvényt fejti aszimptotikus sorba. Az

$$E_\alpha(x) = 1 + \frac{x}{\alpha!} + \frac{x^2}{(2\alpha)!} + \cdots + \frac{x^n}{(n\alpha)!} + \cdots \quad (\xi! = \Gamma(\xi+1))$$

transzcendens egész függvény MITTAG-LEFFLERnek analitikus függvények maximális egyszerűen összefüggő regularitási tartományukban érvényes sorfejtésére vonatkozó vizsgálataiban játszik lényeges szerepet. Ha $\alpha = 1$, akkor ez a függvény maga az exponenciális függvény; ha $\alpha = 2$, akkor $E_\alpha(x) = \cosh\sqrt{x} = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}})$, tehát ha pl. $x > 0$ és $x \to \infty$, akkor $E_2(x) \sim \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}}$ és $E_2(x)$ az $\frac{1}{2} e^{\sqrt{x}}$-től csak olyan függvényben különbözik, amely x bármilyen magas hatványával megszorozva 0-hoz tart. Általában, ha α egész szám, akkor világos, hogy

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left(e^{\sqrt[\alpha]{x}} + e^{\varrho\sqrt[\alpha]{x}} + \cdots + e^{\varrho^{\alpha-1}\sqrt[\alpha]{x}}\right) \quad \left(\varrho = e^{\frac{2\pi i}{\alpha}}\right)$$

és itt az aszimptotikus viselkedés szempontjából csak azok a tagok döntőek, amelyekben a kitevő valós része nemnegativ; a többi tag bármely n esetén $o(x^{-n})$ rendű. LIPKA — MITTAG-LEFFLER és WIMAN idevágó vizsgálatainak kiegészítéseként — megmutatja, hogy általában minden valós α-ra érvényes az

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_\mu e^{\varrho^\mu x^{\frac{1}{\alpha}}} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{x} - \frac{1}{\Gamma(1-2\alpha)}\frac{1}{x^2} - \cdots - \frac{1}{\Gamma(1-k\alpha)}\frac{1}{x^k} - \cdots$$

aszimptotikus kifejtés, ahol $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{\alpha}}$; μ 0-tól kezdve addig fut mindkét irányban a pozitiv és negatív egész számokon át, amíg $\varrho^\mu x^{\frac{1}{\alpha}}$ valós része nemnegatív. Ez a sorfejtés nem konvergens, hanem — mint aszimptotikus kifejtés — abban az értelemben érvényes, hogy a sor bármely részletösszegének $E_\alpha(x)$-től való különbsége, osztva az utolsó figyelembevett taggal, 0 felé tart, ha x valamely állandó φ értékhez tartozó $x = re^{i\varphi}$ sugár mentén végtelenbe tart. Ugyanilyen aszimptotikus kifejtést kap LIPKA komplex a esetén is, de ekkor x-nek nem sugár, hanem olyan logaritmikus csavarvonal mentén kell végtelenbe tartania, hogy $x^{\frac{1}{a}}$ irjon le a kezdőpontból kiinduló sugarat. A bizonyitás HAAR egy tételének segitségével történik, amely viszont az analitikus számelmélet egy nevezetes módszerének: számelméleti függvények aszimptotikus viselkedése vizsgálatának a megfelelő DIRICHLET-sor segitségével, átvitele folytonos függvényekre. A DIRICHLET-sor szerepét HAAR módszerénél a függvény LAPLACE-transzformáltja veszi át. LIPKA ezt a HAAR-féle módszert nem magára $E_a(x)$-re, hanem $E_a(y^a)$-ra alkalmazza, mert ez utóbbinak, mint F. BERNSTEIN és DOETSCH megmutatták, elemi függvény a LAPLACE-transzformáltja.

4. sz. dolgozatában LIPKA a függvénytan egy nevezetes, az algebrában is sokat alkalmazott tételének, a ROUCHÉ-féle tételnek, általánositásával, vagy inkább szinguláris határeseteinek pontos diszkussziójával foglalkozik. ROUCHÉ tétele — az egységkör esetére megfogalmazva — azt mondja ki, hogy ha $f(z)$ és $g(z)$ a $|z| \leqq 1$ körlapon reguláris függvények, továbbá az egységkörön

$$|g(z)| < |f(z)| \tag{4}$$

(tehát ott $f(z) \neq 0$), akkor $f(z) + g(z)$-nek ugyanannyi zérushelye van az egységkör belsejében, mint $f(z)$-nek. FEJÉR megjegyezte, hogy ha $f(z) + g(z)$ az egységkörön sehol sem 0, akkor a (4) egyenlőtlenségben egyenlőséget is megengedhetünk, de akkor külön fel kell tennünk, hogy az egységkörön $f(z)$ sem 0; azaz a (4) feltétel ebben az esetben a következővel helyettesithető:

$$|g(z)| \leqq |f(z)| \quad \text{és} \quad f(z) \neq 0, \quad \text{ha} \quad |z| = 1. \tag{5}$$

LIPKA azt az esetet vizsgálja, amikor $f(z) + g(z)$-nek vannak az egységkörön is zérushelyei, de azzal a megszorítással, hogy ezek mind egyszeres zérushelyek; felteszi (5)-öt és megmutatja, hogy ez esetben $f(z) + g(z)$-nek akkor és csak akkor van ugyanannyi zérushelye az egységkör belsejében, mint $f(z)$-nek, ha az egységkör minden olyan z helyén, ahol $f(z)+g(z)=0$, $\frac{z}{g(z)}\left(f'(z)+g'(z)\right)$ pozitív valós szám. LIPKA dolgozatában feltételeit másképpen, a $\frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|$ és $\frac{\partial}{\partial y}\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|$ parciális differenciálhányadosok segítségével fejezi ki; a fenti egyszerűbb fogalmazás lényegében TERASAKÁ-tól származik. TERASAKA[3] azt is megmutatja LIPKÁhoz csatlakozó dolgozatában, hogy ha $f(z)+g(z)$-nek van többszörös gyöke az egységkörön, akkor az egységkör belsejében $f(z)+g(z)$-nek (az (5) feltétel teljesülése esetén) *kevesebb* zérushelye van, mint $f(z)$-nek, úgy hogy LIPKA megszorító feltételére valóban szükség van. Alkalmazásként LIPKA többek között bebizonyítja JULIA egy fixponttételének élesítését. JULIA tétele a következő: ha a $|z|\leqq 1$ körlapon $f(z)$ reguláris és ott $|f(z)|<1$, akkor van egy és csak egy olyan z_0 hely az egységkör belsejében, hogy $f(z_0)=z_0$. LIPKA megmutatja, hogy ez az állítás abban az általánosabb esetben, ha a $z=1$ pont kivételével teljesül az $|f(z)|<1$ feltétel, azonban $f(1)=1$, akkor és csak akkor érvényes, ha $f'(1)>1$. 4. sz. dolgozatában LIPKA felteszi még azt is, hogy $f(z)$ hatványsorának együtthatói mind valósak; ezt a feltevést azonban 5. sz. dolgozatában kiküszöböli.

A ROUCHÉ-tétel más természetű általánosítását alkalmazza LIPKA gyökelhatárolási tételek bizonyítására 7. sz. dolgozatában. Ez az általánosítás, tulajdonképpen HADAMARD egy topológiai tételének kétdimenziós speciális esete, a következő: ha $f(z)$ és $g(z)$ a $|z|\leqq 1$ körlapon reguláris függvények, továbbá az egységkörön $f(z)\neq 0$ és az $f(z)$ és $g(z)$ (vektoroknak tekintett) komplex számok

$$\left(f(z)\cdot g(z)\right)=\Re f(z)\,\Re g(z)+\Im f(z)\,\Im g(z)=$$
$$=\Re\left(\overline{f(z)}\,g(z)\right)=|f(z)|^2\,\Re\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

«skaláris sorozata» állandó előjelű, akkor $g(z)$-nek ugyanannyi zérushelye van az egységkör belsejében, mint $f(z)$-nek. (Hogy

---

[3] H. TERASAKA, Über eine Verschärfung des Rouché-Lipkaschen Satzes, *Proceedings Phys. Math. Soc. of Japan*, (3) **11** (1929), 90—94. oldal.

a ROUCHÉ-tétel ebben speciális esetként benne van, így adódik: ha az egységkörön $|g(z)| < |f(z)|$, akkor ott

$$\left(f(z)\cdot f(z)+g(z)\right) = |f(z)|^2\,\Re\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right) = |f(z)|^2\left(1+\Re\frac{g(z)}{f(z)}\right) \geqq$$

$$\geqq |f(z)|^2\left(1-\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|\right) > 0,$$

tehát $f(z)+g(z)$-nek ugyanannyi zérushelye van az egységkör belsejében, mint $f(z)$-nek.) LIPKA megmutatja, hogy ezt a tételt fel lehet használni az ENESTRÖM-KAKEYA-tételhez hasonló természetű gyökelhatárolási tételek bizonyítására. Az ENESTRÖM-KAKEYA-tétel szerint, ha $a_0 \geqq a_1 \geqq \cdots \geqq a_n > 0$, akkor a

$$g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0 \tag{6}$$

egyenletnek nincs gyöke az egységkörben. LIPKA megmutatja, hogy ha nem tesszük fel, hogy $a_0 \geqq a_1$, csak azt, hogy $a_0 > 0$, a többi együtthatóról azonban azt tesszük fel, hogy legalább olyan gyorsan fogynak, mint valamely $\frac{1}{2}$ hányadosú mértani haladvány tagjai:

$$a_1 \geqq 2a_2,\ a_2 \geqq 2a_3, \ldots,\ a_{n-1} \geqq 2a_n > 0,$$

akkor a (6) egyenletnek komplex gyöke nem lehet az egységkör belsejében. Megmutatja továbbá, hogy ha a $0 \leqq k \leqq n$, s a

$$2a_k,\ a_{k-1}+a_{k+1},\ a_{k-2}+a_{k+2}, \ldots \tag{7}$$

sorozat ($a_{-1} = a_{-2} = \cdots = a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$) konvex (azaz bármely tagja kisebb a két szomszédos tag számtani közepénél), akkor pontosan k gyöke van a (6) egyenletnek az egységkör belsejében. Egyszerűen belátható, hogy ez a feltétel teljesül, ha a $0, a_0, a_1, \ldots, a_k$ és az $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, 0$ sorozatok konvexek; az ilymódon az előzőből adódó tételt LIPKÁval egyidejűen EGERVÁRY is bebizonyította. Fontos szerepe van LIPKA e tételeinek bebizonyításánál FEJÉR következő tételének: ha a $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sorozat konvex, akkor a $\frac{c_0}{2} + c_1 \cos\vartheta + c_2 \cos 2\vartheta + \cdots +$

$+ c_n \cos n\vartheta$ cosinuspolinom ϑ valós értékeinél nemnegatív. LIPKÁnak ez a dolgozata nagy visszhangot keltett az irodalomban; BERWALD[4] általánosította és élesítette LIPKA egyes tételeit, majd többen foglalkoztak LIPKA dolgozatából kiindulva olyan, az egyenlet együtthatói között fennálló lineáris egyenlőtlenségekkel, amelyekből a gyökök elhelyezkedésére lehet következtetni. Legutóbb ONOFRI[5] LIPKA egyik tételét a következőképpen általánosította hatványsorokra: ha a valós együtthatójú

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

hatványsor az egységkörben összetartó, k valamely nemnegatív egész szám és a (7)-hez hasonlóan képezett

$$b_0 = 2a_k,\ b_1 = a_{k-1} + a_{k+1},\ b_2 = a_{k-2} + a_{k+2}, \ldots,$$
$$b_k = a_0 + a_{2k},\ b_{k+1} = a_{2k+1}, \ldots,\ b_{k+n} = a_{2k+n}, \ldots$$

végtelen sorozat kétszeresen monoton — azaz minden n-re $b_n \geqq 0$, $b_n - b_{n+1} \geqq 0$ és $b_n - 2b_{n+1} + b_{n+2} \geqq 0$ —, sőt

$$b_0 - 2b_1 + b_2 > 0,\ b_1 - 2b_2 + b_3 > 0, \ldots,\ b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2} > 0, \quad (8)$$

akkor $f(z)$-nek pontosan k zérushelye van az egységkör belsejében. LIPKA legutóbbi (17. sz.) dolgozatában megmutatja, hogy ez az általánosítás nagyon egyszerűen bebizonyítható az eredeti tételnél alkalmazott módszerével, FEJÉR megfelelő, cosinussorokra vonatkozó tételének felhasználásával; eközben kiderül, hogy a (8) egyenlőtlenségek közül elég az elsőt megkövetelni. Ebbe a gondolatkörbe tartozik még LIPKÁnak 8. sz. rövid dolgozata; ebben amellett, hogy elegáns módon megoldja BERWALDnak egy az ENESTRÖM-KAKEYA-tétel pontosítására vonatkozó feladatát, megmutatja, hogy hasonló módon pontosítható 7. sz. dolgozatának egyik tétele is.

Mint KERÉKJÁRTÓ megjegyezte, a ROUCHÉ-tételnek LIPKA 7. sz.

---

[4] L. BERWALD, Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze, *Math. Zeitschrift*, **37** (1933), 61—76. oldal.

[5] L. ONOFRI, Intorno agli zeri di alcune classi di funzioni analitiche, *Memorie d. Reale Accademia d'Italia*, **6** (1935), 1267—1291. oldal.

dolgozatában használt, fentemlitett általánositásánál elegendő az $(f(z)\cdot g(z))$ skaláris szorzat pl. pozitiv voltát az egységkörnek azokban a pontjaiban feltenni, amelyekben az

$$f(z)\times g(z)=\Re f(z)\,\Im g(z)-\Im f(z)\,\Re g(z)=$$
$$=\Im\left(\overline{f(z)}\,g(z)\right)=|f(z)|^2\,\Im\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

«vektori szorzat» eltűnik. Ezt a megjegyzést használja LIPKA 9. sz. dolgozatában DIEUDONNÉ egy tételének élesitésére. A kérdéses tétel a következő. Legyen $f(z)$ a $|z|\leqq 1$ körlapon reguláris és ott csak a ± 1 pontokban eltűnő függvény; tehát $f(z)=(z^2-1)\,g(z)$, ahol $g(z)$ reguláris és nem tűnik el máshol a $|z|\leqq 1$ körlapon. Tegyük fel továbbá, hogy $\frac{g'(z)}{g(z)}$ nem vesz fel az egységkörön olyan értéket, amely a képzetes tengelynek $(i,\ i\infty)$, vagy $(-i,\ -i\infty)$ félsugarára esik; azaz

$$\text{ha } |z|=1,\ \Re\frac{g'(z)}{g(z)}=0,\ \text{akkor } \left|\Im\frac{g'(z)}{g(z)}\right|<1. \tag{9}$$

Akkor $f'(z)$-nek az egységkör belsejében pontosan egy zérushelye van. Ez a tétel bizonyos hasonlóságot mutat a ROLLE-tételhez. LIPKA megmutatja, hogy a (9) feltétel a következővel helyettesithető:

$$\text{ha } |z|=1,\ \Re\frac{g'(z)}{g(z)}=0,\ \text{akkor } \Im z\ \Im\frac{g'(z)}{g(z)}<1.$$

Ugyanebben a dolgozatában bebizonyit egy másik, hasonló tételt arra az esetre, amikor a $z=1$ hely legalább kétszeres zérushelye $f(z)$-nek.

Az analizisnek egy a mechanikával is összefüggő, végeredményben azonban egy algebrai kérdésre visszavezethető problémájával foglalkozik LIPKA 6. sz. dolgozatában. A feltételes szélsőérték-feladatoknál csak azt az esetet szokás tárgyalni, amikor a feltételi relációk mind egyenletek; pedig bizonyos mechanikai kérdések, pl. egy természetes konzervativ rendszer egyensúlya stabilitásának kérdése, ha a kényszerfeltételek részben egyenlőtlenségek, olyan szélsőérték-feladatra vezetnek, amelynél egyenlőtlenség-feltételek is vannak. LIPKA az ilyen feladatokat a következő kérdésre vezeti vissza: adva van egy quadratikus alak; eldöntendő, vajjon ez a változók pozitív értékeinél pozitív-e. Ez az algebrai kérdés PÓLYA egy kritériumának segítségével is megoldható; LIPKA egy másik, a kérdés quadratikus természetének jobban megfelelő megoldást ad. Szorítkozzunk egyszerűség kedvéért háromváltozós quadratikus alakokra. Egy ilyen alak biztosan bír a kívánt sajátsággal, azaz az első térnyolcadban pozitív, ha pozitív az egységkocka három, nem a koordinátasíkokban fekvő lapján. Azaz csak azt kell megvizsgálnunk, vajjon a quadratikus alaknak ezeken a lapokon felvett minimumai pozitívok-e. Amennyiben valamelyik minimum a lap belsejében éretik el, a szokásos módszerrel meghatározható; ellenkező esetben valamelyik élén éretik el s ekkor megint vagy az él belső pontjában, amikor is szintén az analízis szokásos módszerével határozható meg, vagy pedig valamelyik csúcsban. LIPKA tehát meghatározza a szóbanforgó lapok síkján és élek egyenesén a quadratikus alak minimumát, továbbá értékét a csúcsokban; a kívánt viselkedéshez szükséges és elegendő, hogy e minimumok közül azok, amelyek magán a lapon, illetve élen (és nem a meghosszabbításán) éretnek el, valamint a csúcsokban felvett értékek, pozitívok legyenek. Részletesebb diszkussziót csak az az eset igényel, amikor valamelyik lap síkján nem egy pontban éretik el a minimum, hanem egy egyenes mentén; ebben az esetben meg kell még néznünk, átmegy-e ez az egyenes a lap belsején. Ennek megfelelően az általános (akárhányváltozós) esetben szükség lehet arra, hogy megvizsgáljuk, van-e egy bizonyos lineáris egyenlőtlenségrendszernek megoldása: ez pedig DINES egy módszerével könnyen eldönthető.

10. sz. dolgozatában LIPKA a BUDAN-FOURIER-tétel pontosításával foglalkozik. Könnyű látni, hogy abban az esetben, ha az $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ valós együtthatójú egyenlet minden gyöke valós, bármely (a, b) intervallumban pontosan annyi gyöke van, amennyivel több jelváltás van az

$$f(a),\ f'(a), \ldots,\ f^{(n)}(a)$$

sorozatban, mint az

$$f(b),\ f'(b), \ldots,\ f^{(n)}(b)$$

sorozatban. LIPKA megmutatja, hogy ez abban az esetben is érvényes, ha komplex gyökök is vannak, feltéve, hogy az (a, b) intervallum az egyenlet JENSEN-féle körrendszerén kivül fekszik. (Az $f(x) = 0$ egyenlet JENSEN-féle körrendszerén az $f(x)$, $f'(x), \ldots, f^{(n-2)}(x)$ polinomok komplex $\alpha + \beta i$ zérushelyeihez tartozó $(x - \alpha)^2 + y^2 \leqq \beta^2$ körlapok egyesitési halmazát értjük.) Alkalmazásként, Sz. NAGY GYULA egy meggondolását felhasználva, megmutatja LIPKA, hogy ha $f(x)$ minden komplex zérushelye benne van egy $(x-a)^2 + y^2 \leqq r^2$ körben, ahol $a < -r\sqrt{n}$, akkor az $f(x) = 0$ egyenlet pozitiv gyökeinek számát pontosan megadja a DESCARTES-féle jelszabály.

Ugyancsak a pozitiv gyökök számának a DESCARTES-féle jelszabály segitségével való meghatározásával foglalkozik LIPKA 11. sz. dolgozatában. A dolgozat első része a következő tétel bizonyitása: ha

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0$$

valós együtthatójú egyenlet, akkor van olyan valós együtthatójú

$$y = g(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

TSCHIRNHAUSEN-transzformáció, hogy a transzformált

$$\begin{aligned} F(y) &= b_0 + b_1 y + \cdots + b_n y^n = \\ &= b_n \big(y - g(x_1)\big)\big(y - g(x_2)\big) \ldots \big(y - g(x_n)\big) = 0 \end{aligned}$$

egyenletnek egyrészt ugyanannyi pozitiv gyöke legyen, mint az $f(x) = 0$ egyenletnek, másrészt ugyanannyi, mint ahány jelváltás van a $b_0, b_1, \ldots, b_n$ sorozatban. Magát ezt a tételt nagyon könnyű volna bebizonyitani; hiszen a LAGRANGE-féle interpolációs feladat megoldhatóságából evidens, hogy az egyenlet gyökei tetszésszerinti értékekbe átvihetők alkalmas TSCHIRNHAUSEN-transzformációval (egyenlő gyökök természetesen csak egyenlőkbe); tehát, ha az $f(x) = 0$ egyenletnek p pozitiv gyöke van, akkor az egyenlet alkalmas (és nyilvánvalóan valós együtthatóju) TSCHIRNHAUSEN-transzformációval átvihető, pl. az $(x-1)^p (x+1)^{n-p}$ egyenletbe; ennek pedig p jelváltás van az együtthatói között. LIPKA azonban a bizonyítás folyamán gondosan ügyel arra, hogy a transzformáció a komplex gyököket komplex számokba vigye át. Hogy miért, az a dolgozat második részéből derül ki; itt megmutatja LIPKA, hogyan lehet egy a kívánt tulajdonságú TSCHIRNHAUSEN-transzformációt effektive, az egyenlet gyökeinek ismerete nélkül, pusztán a gyökökre vonatkozó bizonyos, az együtthatókból könnyen megállapítható egyenlőtlenségek segítségével meghatározni.

12. sz. dolgozatában gyökelhatárolási tételeket irreducibilitási vizsgálatokra alkalmaz LIPKA. Ilyen alkalmazás már PERRON-nál is előfordul és a legegyszerűbb esetben az az alapgondolata, hogy ha az egész együtthatójú

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n \quad (a_n \neq 0) \tag{10}$$

polinomnak legfeljebb egy zérushelye van az egységkörön kívül, vagy magán az egységkörön, akkor ez a polinom irreducibilis (a racionális számok testében); különben ugyanis két egész együtthatójú tényezőre bomolnék, s az egyik tényező minden zérushelyének abszolút értéke 1-nél kisebb volna, ami lehetetlen, mert e zérushelyek szorzata zérustól különböző egész szám. LIPKA ugyane módszerrel, de egyszerűbben, mint PERRON, MAYER egy gyökelhatárolási tételét alkalmazva, megmutatja, hogy a (10) polinom irreducibilis, ha $|a_1| > 1 + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$; sőt akkor is, ha $|a_1| > |1 + a_2| + |a_3| + |a_4| + \cdots + |a_n|$ (ehhez LIPKA egy BERWALD-féle tételt használ); továbbá élesíti PERRON egy másik tételét, amennyiben bebizonyítja, hogy a (10) polinom irreducibilis, ha $a_2 > 5(|a_1| + |a_3| + |a_4| + \cdots + |a_n|)^2$ (PERRON 5 helyett 16^{n-1}-gyel teszi fel a megfelelő egyenlőtlenséget), vagy ha $a_2 > 2(1 + |a_1| + |a_3| + |a_4| + \cdots + |a_n|)^2$. Ezekben az esetekben két zérushely van az egységkörön kívül, de azok nem lehetnek valósak, úgy hogy szétbomlás esetén ez a két zérushely együttmaradna. LIPKA e dolgozatában még többek között

WIESNER egy tételére ad új, egyszerű bizonyítást, amely szerint bármely egész együtthatós polinom, amelynek van racionális zérushelye, abszolút tagjának bizonyos természetű megváltoztatásával irreducibilissé tehető.

14. sz. dolgozatában LIPKA a VIVANTI—PRINGSHEIM—BOREL—DIENES-tétel általánosításaival foglalkozik. A tétel a legegyszerűbb (VIVANTI-féle) alakjában azt mondja ki, hogy pozitív együtthatójú hatványsornak, amelynek konvergenciasugara 1, mindig szinguláris helye az 1 pont. Ezt a tételt LANDAU vitte át DIRICHLET-sorokra a következőképpen: ha a pozitív együtthatójú

$$D(s) = a_1 e^{-\lambda_1 s} + a_2 e^{-\lambda_2 s} + \dots + a_n e^{-\lambda_n s} + \dots$$
$$(\lambda_1 < \lambda_2 < \dots;\ \lambda_n \to \infty;\ s = \sigma + it)$$

DIRICHLET-sor konvergenciatartománya a $\sigma > 0$ félsík, akkor az $s = 0$ pont szinguláris helye $D(s)$-nek. FEKETE, a VIVANTI-tétel DIENES-féle általánosításának megfelelően, megmutatta, hogy elegendő itt az együtthatóktól a pozitívság helyett megkövetelnünk, hogy egy bizonyos π-nél kisebb *szögben* feküdjenek, amelynek a kezdőpont a csúcsa. LIPKA megmutatja, hogy amennyiben az

$$|a_1|^2 e^{-\lambda_1 s} + |a_2|^2 e^{-\lambda_2 s} + \dots + |a_n|^2 e^{-\lambda_n s} + \dots$$

DIRICHLET-sor konvergenciaabszcisszája szintén 0, akkor elegendő az is, ha az együtthatók egy bizonyos a kezdőponton átmenő *körben* feküsznek. SZÁSZ OTTÓ [6] egy megjegyzése óta tudjuk, hogy valamennyi ilyen általánosítás közvetlenül következik az eredeti VIVANTI-, illetve LANDAU-féle tételből, ha azt (esetleges forgatás után) az $\Re a_1 e^{-\lambda_1 s} + \Re a_2 e^{-\lambda_2 s} + \dots + \Re a_n e^{-\lambda_n s} + \dots$ sorra alkalmazzuk; ez a LIPKA-féle általánosításra is vonatkozik. Így a bizonyítás (bár nem használja a SZÁSZ OTTÓ-féle megjegyzést) nem mély; a tétel maga mégis érdekes. Hasonló természetű általánosítást ad LIPKA SZÁSZ OTTÓ egy tételére is.

---

[6] O. SZÁSZ, Über Singularitäten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen am Rande des Konvergenzbereiches, *Math. Annalen*, **85** (1922), 99—110. oldal.

15. sz. dolgozatában LIPKA bebizonyit egy függvénytani tételt, amely HURWITZ egy tételének éppúgy élesítése, mint JENTZSCH egy tételének. Legyen az

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

hatványsor konvergenciasugara 1. HURWITZ tétele szerint az

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

hatványsorszeletek zérushelyeinek az egységkör belsejében azok és csak azok a pontok torlódási helyei, amelyek $f(x)$-nek zérushelyei. Az egységkörön magán viszont JENTZSCH tétele szerint minden hely torlódási hely, akár zérushelye $f(x)$-nek, akár nem. LIPKA azt vizsgálja, miben különbözik mégis a zérushelyek viselkedése a konvergenciakör többi pontjainak viselkedésétől. HURWITZ megmutatta, hogy ha $f(x) = 0$, $|x| < 1$, akkor x-nek minden környezetében van bizonyos n-től kezdve $f_n(x)$-nek is zérushelye; LIPKA megmutatja, hogy ez az egységkörön fekvő zérushelyekre is érvényes. LIPKA tétele ugyan nem fordítható meg; azonban a túlkonvergencia lehetőségéből világos, hogy a konvergenciakör többi helyére nem szükségképpen érvényes ugyanez. Ha pedig feltesszük még azt is, hogy $a_n \to 0$, akkor LIPKA rámutat arra, hogy a FATOU-RIESZ-tétel bizonyításmódjából következik, hogy ha az egységkör valamely x helye (ahol $f(x)$ még reguláris) torlódási helye a szeleteknek az egységkör *belsejében* fekvő zérushelyeinek, akkor $f(x) = 0$.

LIPKA 16. sz. dolgozata a mátrixelmélethez tartozik. Ha az x véges négyzetes mátrix sajátértékei mind különbözőek, más szóval $\det f'(x) \neq 0$, ahol $f(\lambda) = \det(x - \lambda)$ az x mátrix karakterisztikus polinomja, akkor, mint ismeretes, x azokkal és csak azokkal a mátrixokkal cserélhető fel, amelyek x (skalár-együtthatójú) polinomjaként írhatók. LIPKA megengedi, hogy $\det f'(x) = 0$ legyen, de $\det f''(x)$ már ne tűnjék el (ez pl. akkor áll, ha $f(\lambda)$ zérushelyei mind kétszeresek, $f'(\lambda)$-éi pedig mind egyszeresek). Ebben az esetben LIPKA megmutatja, hogy minden, az x mátrixszal felcserélhető y mátrix $y = \varphi(x) + \sqrt{\psi(x)}$

alakban írható, ahol φ és ψ skalár-együtthatójú polinomok. Fordítva azonban nem igaz: $\varphi(x) + \sqrt{\psi(x)}$ nem mindig cserélhető fel x-szel (csak akkor, ha $\sqrt{\psi(x)}$ felcserélhető).

Ismertetésem, ha kissé hosszúra nyúlt is, nem terjedhetett ki minden részletre; azonban úgy vélem, láthatók belőle Lipka-munkásságának főbb jellemvonásai. Dolgozataiban Lipka az algebra és a függvénytan különböző ágaihoz tartozó problémákat old meg rátermett kézzel. Problémái és eredményei nemcsak a megfelelő speciális területet művelő szaktudós számára érthetőek és érdekesek, hanem minden matematikus számára. Munkássága külföldi szakkörökben is elismerésre talált, dolgozataihoz többen csatlakoztak. Mindezek alapján úgy vélem, hogy Lipka István érdemes arra, hogy a Tekintetes Társulat Kőnig Gyula-jutalommal kitüntesse.

Lipka István munkáinak jegyzéke.

1. Hatványsor-szeletek Sylvester-féle resultáns sorozatáról (bölcsészetdoktori értékezés). Budapest, 1923. (Kézirat; 30 oldal.)

2. Über die Abgrenzung der Wurzeln von algebraischen Gleichungen, *Acta Sc. Math.*, **3** (1927), 73—80. oldal.

3. Über asymptotische Entwicklungen der Mittag-Lefflerschen Funktion $E_a(x)$, *Acta Sc. Math.*, **3** (1927), 211—223. oldal.

4. Eine Verallgemeinerung des Rouchéschen Satzes, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **160** (1929), 143—150. oldal.

5. Megjegyzés egy fixpont-tételhez, *Mat. és Fiz. Lapok*, **37** (1930), 58—62. oldal.

6. Ein Extremalproblem, nebst Anwendung auf eine Stabilitätsfrage, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **166** (1931), 9—15. oldal.

7. Zur Theorie der algebraischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten, *Acta Sc. Math.*, **5** (1931), 69—77. oldal.

8. Erste Lösung der Aufgabe 112 (L. Berwald), *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver.*, **42** (1932), 76—77. oldal.

9. Zu den Verallgemeinerungen des Rolleschen Satzes, *Acta Sc. Math.*, **6** (1933), 180—183. oldal.

10. Egy Fourier-féle tételről, *Mat. és Term.-Tud. Értesitő*, **53** (1935), 149—154. oldal.

11. Über die DESCARTESsche Zeichenregel, *Acta Sc. Math.*, **7** (1935), 177—185. oldal.

12. Többtagúak irreducibilitásáról, *Mat. és Term-Tud. Értesítő*, **54** (1936), 349—357. oldal.

13. Jelentés az 1936. évi KŐNIG GYULA-jutalomról, *Mat. és Fiz. Lapok*, **43** (1936), 14—26. oldal.

14. DIRICHLET-sorok és hatványsorok szingularitásairól, *Mat. és Term.-Tud. Értesítő*, **55** (1936), 272—279. oldal.

15. Über den Zusammenhang zweier Sätze der Funktionentheorie, *Acta Sc. Math.*, **8** (1937), 160—165. oldal.

16. Mátrixok szorzásáról, *Mat. és Term.-Tud Értesítő*, **56** (1937), 376—381. oldal.

17. Hatványsorok zéróhelyeiről, *Mat. és Term.-Tud. Értesítő*, **57** (1938), sajtó alatt; 9 oldal.

Kalmár László.

REPORT ON THE GYULA KŐNIG PRIZE FOR THE YEAR 1938.

The Council of the LORÁND EÖTVÖS Mathematical and Physical Society awarded the GYULA KŐNIG Prize for the year 1938 to Dr. ISTVÁN LIPKA, privat-docent of Algebra at the University of Szeged. The object of this paper ist to give an analysis of the papers of LIPKA, which deal with problems in Algebra and in Theory of Functions.

László Kalmár.

A MAGASSÁGPONTTAL BÍRÓ TETRAÉDERRŐL.

I. §.

1. «A háromoldalú gúlák, egyszerűségük folytán, ugyanoly szereppel bírnak a testek közt, mint a háromszögek a síkidomok közt; mert, valamint minden egyenesvonalú síkidom háromszögekből összetettnek tekinthető, épúgy minden síkok által határolt test háromoldalú gúlákból tehető össze; de amíg a geométerek mindig sokat foglalkoztak a háromszögek tanulmányozásával és szüntelenül mélyítették azok tulajdonságainak ismeretét, addig — úgy látszik — a háromoldalú gulák tulajdonságait mindig csak felszínesen érintették; ama problémák közül, melyek ezen testtel kapcsolatban felvethetők, még igen kevés van megoldva».

Ezen szavakkal kezdi LAGRANGE a tetraéderekről írt értekezését [1] és fenti megállapításai, melyek ma sem vesztették érvényüket, kiegészíthetők azzal, hogy a tetraéder már felkutatott tulajdonságai általában kevésbbé ismertek, mint a háromszögé. Az általános tetraéder [2] tudvalevőleg hat független adattal van meghatározva, természetes tehát független meghatározó alkatrészekül az éleket választani, különös tekintettel arra, hogy az élek segélyével a tetraéder többi alkatrészei (él- és lapszögei, magasságai, lapjainak területe, köbtartalma stb.) szimmetrikusan fejezhetők ki.

---

[1] LAGRANGE, Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires (1773), Oeuvres, Tome III., pp. 661—692.

[2] Az általános, valamint a magasságponttal v. élérintő gömbbel bíró tetraéderekre nézve l. M. ZACHARIAS, Elementargeometrie, Encyklopädie d. math. Wiss. III. AB9.

Amidőn azonban a tetraédernek valamely kitüntetett faja (magasságponttal, vagy élérintő gömbbel bíró tetraéder,[2] izogonikus, vagy izodinamikus tetraéder[3]) képezi a vizsgálat tárgyát, amikor az élek többé nem függetlenek, hanem azok közt relációk állnak fenn, akkor célszerű az élek helyett olyan független paramétereket választani meghatározó adatokul, melyek az illető tetraéderfajnál éppoly szimmetrikus szereppel bírnak, mint az élek az általános tetraédernél.

2. A következőkben az olyan tetraéderek főbb tulajdonságait tárgyaljuk szimmetrikus paraméterek segélyével, melyeknek magasságai egy pontban találkoznak. Ezek a magasságponttal bíró vagy *ortocentrikus* tetraéderek — azonkivül, hogy magasságpontjuk van — még számos oly analogiát mutatnak a háromszöggel, amely az általános tetraédernél nem áll fenn.

Miután az ortocentrikus tetraéder négy független adattal van meghatározva, közelfekvő gondolat a négy tetraéderlap területeinek mérőszámait választani független paraméterekül. Ez a paraméter-választás azonban, tekintettel az ortocentrikus tetraéder lapterületei és többi alkatrészei közt fennálló relációk bonyolultságára (l. IV. §. 3.), nem célszerű.

Ezzel szemben azok a paraméterek, melyeknek bevezetése és alkalmazása jelen dolgozat tárgya, igen egyszerű kapcsolatban vannak az ortocentrikus tetraéder alkatrészeivel, első sorban annak éleivel, lapterületeivel és köbtartalmával, melyek közvetlenül a paraméterek elemi szimmetrikus függvényeivel fejezhetők ki (III. §).

Jelen I. §-ban röviden ismertetjük dolgozatunk eredményeit. Elsőnek néhány előkészítő megjegyzést teszünk a háromszöggel kapcsolatban.

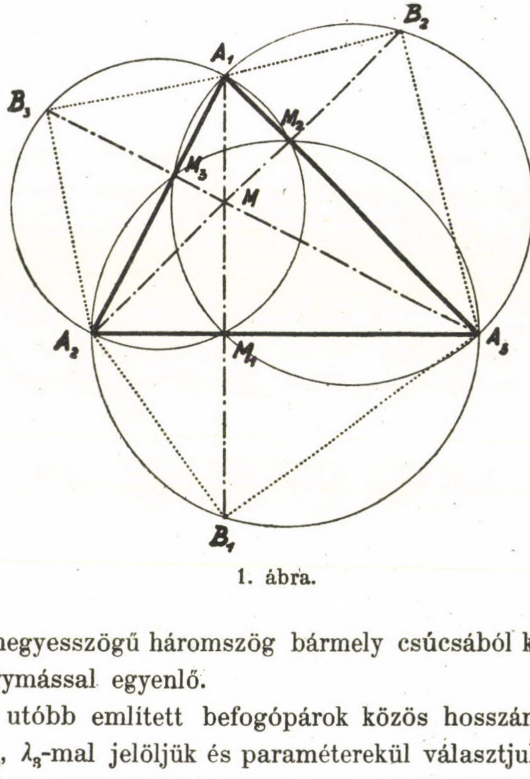
3. Szerkesszünk egy hegyesszögű háromszög mindegyik oldalára, mint átfogóra egy-egy olyan derékszögű háromszöget, mely-

---

[3] Az izogonikus és izodinamikus tetraéderekre nézve l. I. NEUBERG, Über die Berührungskugeln eines Tetraeders, Jahresb. d. d. Math. Ver. 16. k. (1907) S. 345—358.

nél a derékszög csúcsa a hegyesszögű háromszög megfelelő magasságának meghosszabbítására esik. (1. ábra.) Az így nyert alakzat a következő tulajdonságokkal bír.

I. Mindegyik derékszögű háromszögnek az átfogóra merőleges magassága mértani középarányos a hegyesszögű háromszög megfelelő magassága és annak «alsó» metszete közt.



1. ábra.

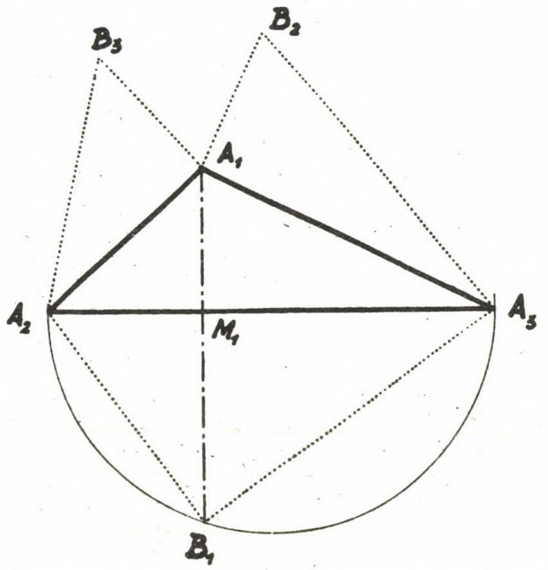
II. A hegyesszögű háromszög bármely csúcsából kiinduló két befogó egymással egyenlő.

Ha az utóbb említett befogópárok közös hosszának négyzeteit λ_1, λ_2, λ_3-mal jelöljük és paraméterekül választjuk, úgy ezek segélyével a hegyesszögű háromszög oldalai és területe a következőkép fejezhetők ki:

$$\overline{A_2A_3}^2 = \lambda_2 + \lambda_3, \quad \overline{A_3A_1}^2 = \lambda_3 + \lambda_1, \quad \overline{A_1A_2}^2 = \lambda_1 + \lambda_2, \tag{1}$$

$$4\,T^2 = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2. \tag{2}$$

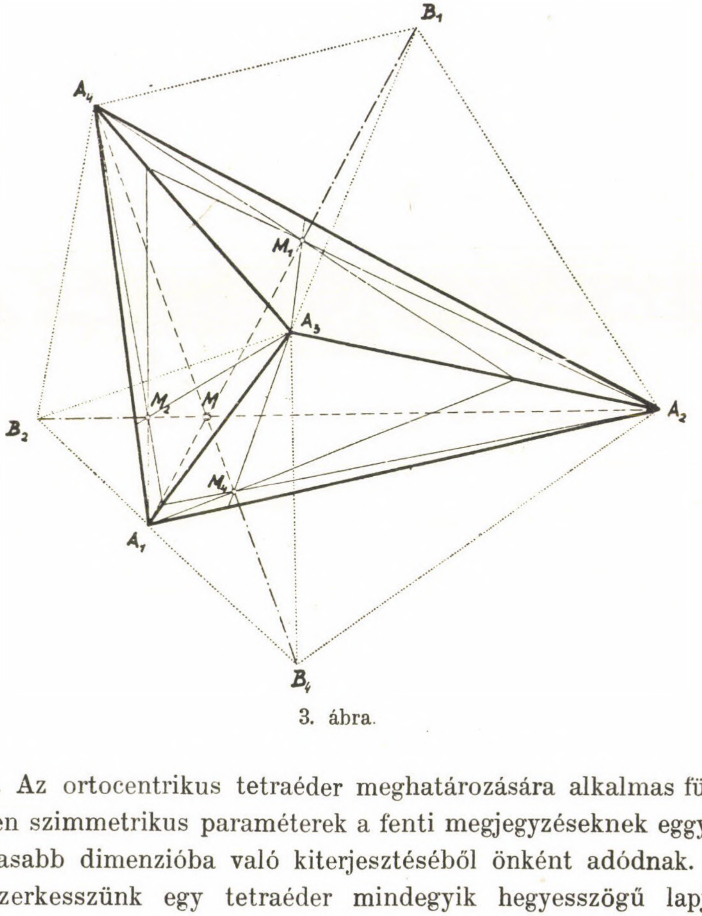
Ha az 1. ábrát a II. tulajdonsága alapján hálózatnak tekintjük és belőle — a derékszögű háromszögeket átfogójuk körül megfelelően elforgatva — tetraédert szerkesztünk, úgy a következő ismert[2] eredményhez jutunk: Adott hegyesszögű háromszöghöz, mint átfogólaphoz egy és csak egy derékszögű tetraéder szerkeszthető (a tetraéder tükörképét itt nem tekintjük tőle különbözőnek) és a hegyesszögű átfogólap területének négyzete (2) szerint egyenlő a befogó lapok területeinek négyzetösszegével.



2. ábra.

4. Tompaszögű háromszög esetében az 1. ábrán látható alakzat és ezzel együtt a paraméterek mértani értelmezése a következőkép módosul. A tompaszög csúcsán át a háromszög síkjára emelt merőlegest messük a leghosszabb oldala, mint átmérő fölé szerkesztett gömbbel és a két metszéspont bármelyikét kössük össze a tompaszögű háromszög csúcspontjaival. Az így keletkezett tetraéder hálózata (2. ábra) veszi át jelen esetben a hegyesszögű háromszöghöz tartozó 1. ábrabeli alakzat szerepét.

Ha ugyanis az ily módon a tompaszögű háromszöghöz, mint alaphoz szerkesztett gúla magasságának négyzetét *negatív* előjellel, a másik két oldalél négyzetét pozitív előjellel paraméterekül választjuk, úgy az (1), (2) relációk ez esetben is érvényesek. A fentiek által a λ_1, λ_2, λ_3 paraméterek minden háromszögre definiálva vannak, azzal a közelebbi meghatározással, hogy hegyesszögű háromszög esetén mind a három paraméter pozitív, míg tompa- (derék-) szögűnél egy paraméter negatív (zérus).



3. ábra.

5. Az ortocentrikus tetraéder meghatározására alkalmas független szimmetrikus paraméterek a fenti megjegyzéseknek eggyel magasabb dimenzióba való kiterjesztéséből önként adódnak.

Szerkesszünk egy tetraéder mindegyik hegyesszögű lapja, mint átfogólap fölé (kifelé) a fentiek szerint egy-egy derékszögű tetraédert, továbbá mindegyik tompaszögű lapja fölé (amennyiben ilyenek vannak) egy-egy olyan tetraédert, amilyet 4. alatt definiáltunk. Az így nyert alakzat (3. ábra) a következő tulajdonsággal bir: Az eredeti tetraéder bármelyik csúcsából kiinduló három «befogó»-él akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha az eredeti tetraéder ortocentrikus, azaz ha magasságai egy pontban találkoznak. Az ortocentrikus tetraéderre tehát jellemző, hogy a fenti módon ráillesztett tetraéderek 12 befogóéle közt csak négy különböző hosszúság fordul elő. Ezen hosszak négyzeteit megfelelő előjellel paraméterekül választva és $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$-gyel jelölve, az ortocentrikus tetraéder ϱ_{ik} élei, F_i lapterületei és V köbtartalma a következőképpen fejezhetők ki:

$$\varrho_{ik}^2 = \lambda_l + \lambda_k, \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4) \tag{1*}$$

$$4 F_i^2 = \lambda_k\lambda_l + \lambda_l\lambda_m + \lambda_m\lambda_k, \tag{2*}$$

$$36 V^2 = \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4\lambda_1 + \lambda_4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \tag{3}$$

Hegyesszögű lapokkal biró ortocentrikus tetraéder és annak fenti módon szerkesztett «befogó» tetraéderei közt tehát a következő pythagorasi relációk érvényesek:

Bármely él négyzete egyenlő a hozzá illeszkedő derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszegével.

Bármely lapterület négyzete egyenlő a hozzá illeszkedő derékszögű tetraéder befogó lapjainak négyzetösszegével.

A köbtartalom négyzete egyenlő a befogó tetraéderek köbtartalmainak négyzetösszegével.

Valamint az 1. és 2. ábra a háromdimenziós simplexnek, azaz a tetraédernek két dimenzióba való lefejtése, ugyanúgy a 3. ábrával szemléltetett test a négydimenziós simplex három dimenzióba való «lefejtésének» tekinthető.

6. A IV. §-ban az ortocentrikus tetraéder alkatrészei közt fennálló néhány jellegzetes összefüggést vezetünk le a fent értelmezett paraméterek segélyével.

Az V. §-ban végül vázoljuk a jelen bevezetés elején említett többi tetraéderfajoknak paraméteres előállítását.

II. §.

1. Jelöljük az $A_1A_2A_3$ hegyesszögű háromszög (1. ábra) magasságpontját M-mel, a magasságok talppontjait M_1, M_2, M_3-mal,

továbbá — (i, k, l) az (1, 2, 3) bármely permutációját jelentvén — az $\overline{A_k A_l}$ oldal hosszát ϱ_i-vel, végül az $\overline{A_k A_l}$ oldal, mint átmérő fölé rajzolt körnek és az $\overline{A_i M}$ magasság meghosszabbításának metszéspontját B_i-vel.

A B_i pontot A_k-val és A_l-lel összekötő egyenesek nyilván egymásra merőlegesek, tehát az $A_2B_1A_3$, $A_3B_2A_1$, $A_1B_3A_2$ háromszögek derékszögűek.

Nyilvánvaló[4] továbbá, hogy

$$\overline{MM_i}.\overline{M_iA_i} = \overline{M_iA_k}.\overline{M_iA_l}$$

és

$$\overline{M_iB_i}^2 = \overline{M_iA_k}.\overline{M_iA_l},$$

tehát

$$\overline{M_iB_i}^2 = \overline{MM_i}.\overline{M_iA_i}, \tag{4}$$

vagyis bármelyik derékszögű háromszög $\overline{M_iB_i}$ magassága a M_iA_i magasság és annak $\overline{MM_i}$ alsó metszete közötti mértani középarányos.

Az $\overline{A_kA_l}$ átmérővel bíró kör átmegy a M_k és M_l magassági talppontokon, tehát

$$\overline{A_iM_k}.\overline{A_iA_l} = \overline{A_iM_l}.\overline{A_iA_k},$$

továbbá

$$\overline{A_iB_k}^2 = \overline{A_iM_k}.\overline{A_iA_l} \quad \text{és} \quad \overline{A_iB_l}^2 = \overline{A_iM_l}.\overline{A_iA_k},$$

következésképen

$$\overline{A_iB_k} = \overline{A_iB_l}, \tag{5}$$

vagyis az $A_1A_2A_3$ háromszög bármely csúcsából kiinduló két befogó egymással egyenlő.

Ha tehát a

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \overline{A_1B_2}^2 = \overline{A_1B_3}^2, \\ \lambda_2 &= \overline{A_2B_3}^2 = \overline{A_2B_1}^2, \\ \lambda_3 &= \overline{A_3B_1}^2 = \overline{A_3B_2}^2 \end{aligned} \tag{6}$$

---

[4] Az $MM_i A_k$ és $A_iM_iA_l$ háromszögek hasonlóságának közvetlen következménye.

mennyiségeket paraméterekként vezetjük be, úgy az $A_1A_2A_3$ háromszög oldalait ezen paraméterekkel nyilván a

$$\overline{A_kA_i^2} = \varrho_l^2 = \lambda_k + \lambda_i \tag{1}$$

egyenletek fejezik ki, q. e. d.

Minthogy továbbá az $A_1A_2A_3$ háromszög kétszeres területe

$$2F = \varrho_1 . \overline{M_1M} + \varrho_2 . \overline{M_2M} + \varrho_3 . \overline{M_3M} = \varrho_1 . \overline{M_1A_1} = \varrho_2 . \overline{M_2A_2} = \varrho_3 . \overline{M_3A_3},$$

azért

$$4F^2 = \varrho_1^2 . \overline{M_1M} . \overline{M_1A_1} + \varrho_2^2 . \overline{M_2M} . \overline{M_2A_2} + \varrho_3^2 . \overline{M_3M} . \overline{M_3A_3},$$

vagyis (4) szerint

$$4F^2 = (\varrho_1 . \overline{M_1B_1})^2 + (\varrho_2 . \overline{M_2B_2})^2 + (\varrho_3 . \overline{M_3B_3})^2,$$

$$4F^2 = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 \tag{2}$$

q. e. d.

2. Ha egy hegyesszögű háromszög mindegyik oldala, mint átmérő fölé gömböt szerkesztünk, az így nyert három gömbnek két valós közös pontja van, melyek egymásnak a háromszög síkjára vonatkozó tükörképei.

Ha tehát az $A_kA_lB_i$ derékszögű háromszögeket átfogóik körül egyik vagy másik értelemben elforgatjuk, míg B_1, B_2 és B_3 csúcsaik egybe esnek ($\overline{A_iB_k} = \overline{A_iB_l}$), úgy a derékszögű $A_1A_2A_3B'$, illetőleg $A_1A_2A_3B''$ tetraédereket nyerjük, melyeknek B', illetőleg B'' csúcsából nyilván az $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_1}$, $\overline{A_1A_2}$ átfogóélek mindegyike derékszög alatt látszik. Amennyiben e két tetraédert, melyek egymás tükörképei, nem tekintjük különbözőnek, úgy a $A_1A_2A_3$ hegyesszögű háromszöghöz, mint átfogólaphoz egy és csak egy derékszögű tetraéder szerkeszthető.

A (2) egyenlet szerint továbbá az átfogó lap területének négyzete egyenlő a befogó lapok területeinek négyzetösszegével.

Ha a $A_1A_2A_3$ háromszögnek pl. az A_1 csúcsnál lévő szöge derékszög, akkor az A_1 csúcsot tartalmazó derékszögű háromszögek egyenesdarabokká fajulnak, tehát ez esetben $\lambda_1 = 0$.

3. Ha az $A_1A_2A_3$ háromszögnek (2. ábra) az egyik, pl. A_1 csúcsnál levő szöge tompa, úgy a λ_i paramétereket — miután

jelen esetben azoknak előbbi definiciója értelmét veszti — a következőképen értelmezzük: A tompaszög csúcsából induló $\overline{A_1M_1}$ magasság meghosszabbításának és a $\overline{A_2A_3}$ átmérőjű körnek B_1 metszéspontját összekötjük A_2-vel és A_3-mal. Továbbá a tompaszög csúcsán át $\overline{A_1A_2}$-re, illetőleg $\overline{A_1A_3}$-ra emelt merőlegeseket messük A_2 körül $\overline{A_2B_1}$ sugárral, illetőleg A_3 körül $\overline{A_3B_1}$ sugárral leirt körrel. Ily módon a $A_1A_2A_3$ tompaszögű háromszöghöz három derékszögű háromszöget illesztettünk, melyek közül egynek az átfogója, kettőnek pedig egyik befogója az eredeti háromszög egy-egy oldala. Minthogy

$$\overline{A_1B_3}^2 - \overline{A_1B_2}^2 = \overline{A_2B_3}^2 - \overline{A_3B_2}^2 - (\overline{A_2A_1}^2 - \overline{A_3A_1}^2) =$$
$$= \overline{A_2B_3}^2 - \overline{A_3B_2}^2 - (\overline{A_2B_1}^2 - \overline{A_3B_2}^2) = 0,$$

azért az így nyert alakzatnál is az $A_1A_2A_3$ háromszög bármely csúcsából kiinduló két befogó egymással egyenlő,

Ha tehát tompaszögű háromszög esetén a

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= - \overline{A_1B_2}^2 = - \overline{A_1B_3}^2, \\ \lambda_2 &= \overline{A_2B_3}^2 = \overline{A_2B_1}^2 \\ \lambda_3 &= \overline{A_3B_1}^2 = \overline{A_3B_2}^2 \end{aligned} \tag{6*}$$

mennyiségeket vezetjük be paraméterekként, úgy nyilván ismét

$$\overline{A_kA_l}^2 = \varrho_i^2 = \lambda_k + \lambda_l, \tag{1}$$

továbbá

$$4F^2 = \overline{A_2A_3}^2 . \overline{A_1M_1}^2 = \overline{A_2A_3}^2 (\overline{A_1A_3}^2 - \overline{M_1A_3}^2) =$$
$$\overline{A_2A_3}^2 . (\overline{B_1M_1}^2 - \overline{A_1B_2}^2) = \lambda_2\lambda_3 + (\lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1; \tag{2}$$

tehát a paraméteres előállítás általánosan érvényes azzal a közelebbi meghatározással, hogy hegyesszögű háromszögnél mind a három paraméter pozitiv, míg tompa-(derék-)szögű háromszögnél egy paraméter negativ (zérus).

4. Ha egy tompaszögű háromszög leghosszabb oldala mint átmérő fölé gömböt szerkesztünk, úgy a tompaszög csúcsán át a háromszög síkjára állitott merőleges a gömböt két pontban

metszi, melyek egymásnak a háromszög síkjára vonatkozó tükörképei. Ha tehát a 2. ábrabeli alakzatból, mint hálózatból nyerhető két tükrözve kongruens tetraédert nem tekintjük különbözőknek, úgy egy tompaszögű háromszöghöz egy és csak egy olyan tetraéder szerkeszthető, melynek további három lapja derékszögű háromszög.

5. A λ_1, λ_2, λ_3 paraméterek (1) alapján a ϱ_i oldalakkal közvetlenül kifejezhetők:

$$\lambda_1 = \frac{\varrho_2^2+\varrho_3^2-\varrho_1^2}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{\varrho_3^2+\varrho_1^2-\varrho_2^2}{2}; \quad \lambda_3 = \frac{\varrho_1^2+\varrho_2^2-\varrho_3^2}{2} \qquad (7)$$

és ha ezen összefüggések segélyével a λ_i paramétereket (2)-ből illetőleg a vele aequivalens

$$8F^2 = \lambda_1(\lambda_2+\lambda_3) + \lambda_2(\lambda_3+\lambda_1) + \lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)$$

egyenletből elimináljuk, úgy a közismert

$$16F^2 = 2\varrho_2^2\varrho_3^2 + 2\varrho_3^2\varrho_1^2 + 2\varrho_1^2\varrho_2^2 - \varrho_1^4 - \varrho_2^4 - \varrho_3^4$$

HERON-féle területi képletet nyerjük.

III. §.

1. Az ortocentrikus tetraéderek alak szempontjából hasonlóan osztályozhatók, mint a háromszögek. Nevezzünk rövidség kedvéért egy triédert hegyes-, derék-, illetőleg tompaszögűnek, ha annak összes élszögei hegyes-, derék-, illetőleg tompaszögek. Ortocentrikus tetraédernek vagy minden triédere hegyesszögű, vagy egy triéder derék-, illetőleg tompaszögű és a többi három hegyesszögű.

E tétel igazolására nyilván elegendő kimutatni, hogy ortocentrikus tetraéderben nem fordulhat elő két olyan közös csúcscsal bíró élszög, melyek egyike hegyes, másika tompa. Ha ugyanis egy tetraéderben

$$\widehat{A_1A_2A_3} < 90^\circ \quad \text{és} \quad \widehat{A_1A_2A_4} > 90^\circ,$$

akkor a tetraédernek A_3 és A_4 csúcsból induló magasságai — miután mindketten merőlegesek az $\overline{A_1A_2}$ élre — az A_2 csúcson átmenő és $\overline{A_1A_2}$-re merőleges sík két különböző oldalán vannak, egymást tehát nem metszhetik.

2. Ha az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder (3. ábra) minden élszöge hegyes, úgy a fentiek szerint szerkeszthető mind a négy lapjára, mint átfogólapra egy (és kifelé csak egy) derékszögű tetraéder. Ki fogjuk mutatni, hogy ha bármelyik A_i csúcsból kiinduló három befogóél egymással egyenlő, azaz ha

$$\overline{A_iB_k} = \overline{A_iB_l} = \overline{A_iB_m}, \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4) \tag{8}$$

akkor az $\overline{A_iB_i}$ egyenesek a tetraéder megfelelő $A_kA_lA_m$ lapjaira merőlegesek és egy pontban találkoznak, tehát az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder ortocentrikus.

Ha a B_i és B_k csúcspontokból az $\overline{A_lA_m}$ élre merőlegeseket bocsátunk, úgy ezek a (8) relációk szerint nyilván a $\overline{A_lA_m}$ élt ugyanabban a C_{lm} pontban metszik. A B_i, B_k és C_{lm} pontokon át fektetett sík merőleges a $\overline{A_lA_m}$ élre, tehát az $A_lA_mB_i$ és $A_lA_mB_k$ síkokra is, és így tartalmazza a $\overline{B_iA_k}$ és $\overline{B_kA_i}$ éleket. Eszerint a $A_iB_iA_kB_k$ pontok *egy* síkban vannak, mégpedig egy *olyan* síkban, mely a $\overline{A_lA_m}$ élre merőleges. Következésképpen:

I. az $\overline{A_iB_i}$ egyenes az $\overline{A_kA_l}$, $\overline{A_lA_m}$, $\overline{A_mA_k}$ élek mindegyikére és így a $A_kA_lA_m$ tetraéderlapra merőleges, más szóval a tetraédernek egyik magasságvonala,

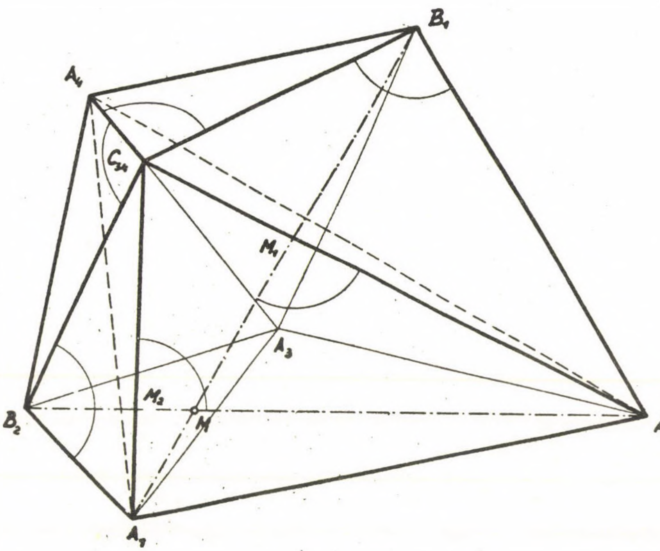
II. ezen magasságvonalak bármely $\overline{A_iB_i}$, $\overline{A_kB_k}$ párjának van közös pontja, a magasságok tehát[5] — mivel nem fekhetnek mind egy síkban — egy pontban találkoznak.

Kimutatjuk továbbá, hogy ha a $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder hegyesszögű és ortocentrikus, úgy a fenti módon ráillesztett derék-

---

[5] Ha tetszőleges számú egyenes közül bármely kettőnek van közös pontja, úgy azok vagy mind egy ponton mennek át, vagy mind egy síkban feküsznek. Ha három magasság egy síkba esik, úgy a tetraéder hasábbá fajul el.

szögű tetraéderek befogóélei a (8) relációkat kielégítik. Messük el e végből az alakzatot az ortocentrikus tetraédernek, például $\overline{A_1M}$ és $\overline{A_2M}$ magasságain át fektetett síkkal (l. 4. ábra). Minthogy $\overline{A_1B_1}$ és $\overline{A_2B_2}$ a $A_1A_2C_{34}$ háromszög magasságvonalai és $\widehat{A_2B_1C_{34}}$, valamint $\widehat{A_1B_2C_{34}}$ derékszögek, azért ugyanúgy, mint az 1. ábra esetében következik, hogy $\overline{B_1C_{34}} = \overline{B_2C_{34}}$, eszerint nyilván $\overline{B_1A_4} = \overline{B_2A_4}$.



4. ábra.

Az előbbi meggondolás valamennyi megfelelő befogóélpárra érvényes, tehát ki van mutatva, hogy ortocentrikus tetraéder esetén a befogóélek a (8) relációkat kielégítik.

3. Minthogy a fentiek szerint a

$$\overline{A_1B_2}^2 = \overline{A_1B_3}^2 = \overline{A_1B_4}^2 = \lambda_1,$$
$$\overline{A_2B_3}^2 = \overline{A_2B_4}^2 = \overline{A_2B_1}^2 = \lambda_2,$$
$$\overline{A_3B_4}^2 = \overline{A_3B_1}^2 = \overline{A_3B_2}^2 = \lambda_3,$$
$$\overline{A_4B_1}^2 = \overline{A_4B_2}^2 = \overline{A_4B_3}^2 = \lambda_4$$

relációk karakterisztikusak a hegyesszögű ortocentrikus tetraéderre, azért a λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 mennyiségeket bevezethetjük, mint az ortocentrikus tetraéder meghatározására szolgáló független szimmetrikus paramétereket.[6]

Ezen paraméterek segélyével az élhosszúságok ϱ_{ik}^2 négyzetei, valamint a lapterületek F_i^2 négyzetei nyilván ugyanazon képletekkel fejezhetők ki, mint a háromszög esetében.

A $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder hatszoros köbtartalma továbbá

$$6V = F_1.\overline{MM_1} + F_2.\overline{MM_2} + F_3.\overline{MM_3} + F_4.\overline{MM_4} = F_i.\overline{A_iM_i},$$
$$(i=1,2,3,4)$$

tehát

$$36V^2 = \Sigma F_i^2.\overline{MM_i}.\overline{M_iA_i}$$

és miután a $\overline{MM_i}.\overline{M_iA_i}$ szorzatokra nézve — mint az a 4. ábra alapján nyilvánvaló — a (4) relációk érvényesek,

$$36V^2 = \Sigma(F_i.\overline{M_iB_i})^2,$$
$$36V^2 = \lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_3\lambda_4\lambda_1+\lambda_4\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

vagyis az $A_1A_2A_3A_4$ ortocentrikus tetraéder köbtartalmának négyzete egyenlő a ráillesztett derékszögű tetraéderek köbtartalmainak négyzetösszegével.

Hasonló meggondolásokkal kimutatható, hogy a fenti (1), (2), (3) összefüggések tompaszögű ortocentrikus tetraéderre is érvényesek, ha a paraméterek értelmezését ezesetre az előző §-ban a tompaszögű háromszögnél ismertetett módon terjesztjük ki. Eszerint, ha az ortocentrikus tetraédernek A_i csúcsnál levő triédere tompa-(derék-)szögű, akkor λ_i negatív (zérus).

---

[6] A most bevezetett paraméterek még a következő tulajdonsággal bírnak: Ha az ortocentrikus tetraéder A_i csúcsába $\frac{1}{\lambda_i}$ súlyt helyezünk, az így nyert tömegrendszer súlypontja a magasságpont.

IV. §.

1. A paraméteres előállítás alapján nyilvánvaló az ortocentrikus tetraéder egyik jellemző tulajdonsága, miszerint a szembenfekvő élek négyzetösszegei egymással egyenlők.[2] Ugyanis a

$$\varrho_{12}^2+\varrho_{34}^2,\ \varrho_{13}^2+\varrho_{24}^2,\ \varrho_{14}^2+\varrho_{23}^2$$

összegek mindegyike (1) szerint $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4$-gyel egyenlő.

Nevezzük rövidség kedvéért éltengelyeknek a szembenfekvő élek felezőpontjait összekötő távolságokat. A tetraéder éleiből alkotott bármelyik $A_iA_kA_lA_m$ torznégyszög oldalainak C_{ik}, C_{kl}, C_{lm}, C_{mi} felezőpontjai parallelogrammát határoznak meg, melynek $C_{ik}C_{lm}$ és $C_{kl}C_{mi}$ átlói éltengelyek és $\overline{C_{ik}C_{kl}}=\overline{C_{lm}C_{mi}}$, ill. $\overline{C_{kl}C_{lm}}=\overline{C_{mi}C_{ik}}$ oldalai a ϱ_{il}, illetőleg ϱ_{km} tetraéderélek felével egyenlők. Következésképpen

$$\overline{C_{ik}C_{lm}}^2+\overline{C_{kl}C_{mi}}^2=\frac{\varrho_{il}^2+\varrho_{mk}^2}{2}=\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}{2},$$

tehát

$$\overline{C_{12}C_{34}}=\overline{C_{13}C_{24}}=\overline{C_{14}C_{23}},\tag{10}$$

azaz egy ortocentrikus tetraéder éltengelyei egyenlők egymással.[2]

2. Jelöljük az i-dik tetraéderlapnak a k-dik csúcsból induló magasságát h_{ik}-val (h_{ik} általában $\neq h_{ki}$); ekkor $h_{ik}=\dfrac{2F_i}{\varrho_{lm}}$. Minthogy továbbá a h_{ik}, h_{ki} magasságok és a ϱ_{ik} él által alkotott háromszög síkja a ϱ_{lm} élre merőleges, azért az ortocentrikus tetraédernek a ϱ_{lm} élhez tartozó belső lapszöge, α_{lm} egyenlő a h_{ik} és h_{ki} magasságok által alkotott szöggel. Eszerint

$$\cos\alpha_{lm}=\frac{h_{ik}^2+h_{ki}^2-\varrho_{ik}^2}{2h_{ik}h_{ki}}=\frac{4(F_i^2+F_k^2)-\varrho_{ik}^2\varrho_{lm}^2}{8F_iF_k},$$

vagyis (1)-re és (2)-re való tekintettel

$$\cos\alpha_{lm}=\frac{\lambda_l\lambda_m}{F_iF_k}.$$

Az ortocentrikus tetraéder belső lapszögeire nézve tehát a következő relációk állanak fenn:[7]

$$\cos \alpha_{12} \cdot \cos \alpha_{34} = \cos \alpha_{13} \cdot \cos \alpha_{24} = \cos \alpha_{14} \cdot \cos \alpha_{23} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}{F_1 F_2 F_3 F_4}. \tag{11}$$

3. A bevezetésben felemlitettük a kérdést, hogyan határozhatók meg az ortocentrikus tetraéder többi alkatrészei a lapok F_i területeiből. Miután a ϱ_{ik} élek négyzetei és a λ_i paraméterek közt lineáris kapcsolat van, nyilván az első idevágó feladat a λ_i paraméterek meghatározása az adott F_i területek alapján. Ha a (2) egyenletekből például λ_2, λ_3, λ_4-et elimináljuk,[8] úgy a

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 [(4F_3^2+\lambda_1^2)^2(4F_4^2+\lambda_1^2)^2 + (4F_4^2+\lambda_1^2)^2(4F_2^2+\lambda_1^2)^2 + \\ + (4F_2^2+\lambda_1^2)^2(4F_3^2+\lambda_1^2)^2] - \\ - [3\lambda_1^4+4(F_2^2+F_3^2+F_4^2-3F_1^2)\lambda_1^2+4(F_2^2+F_3^2+F_4^2-F_1^2)^2] \\ (4F_2^2+\lambda_1^2)(4F_3^2+\lambda_1^2)(4F_4^2+\lambda_1^2) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

egyenlethez jutunk. A paramétereknek, tehát egyúttal az éleknek meghatározása az adott F_i területekből eszerint negyedfokú egyenletek megoldására van visszavezetve.

Ha pedig a (2) és (3) egyenletekből mind a négy λ_i paramétert elimináljuk, úgy a HERON-képlet analogonját nyerjük, mely az ortocentrikus tetraéder köbtartalma és lapterületei közti összefüggést határozza meg. A képletek bonyolultsága miatt az eredményt csupán szimmetriasikkal biró ortocentrikus tetraéderre nézve közöljük. Ez esetben $\lambda=\lambda_3=\lambda_4$, $F_3=F_4=F$ és az F_1, F_2, F és V közt fennálló összefüggés:[9]

---

[7] L. W. Fr. MEYER, Arch. Math. Phys., 8. k. (1905), p. 135.

[8] L. LAGRANGE, l. c. [1].

[9] Közvetlenül verifikálható (2*) és (3) alapján, hogy F, F_1, F_2 és V a

$$16F_1^2F_2^2 - 2\Delta\lambda^2 - 3\lambda^4 = 0,$$
$$16F_1^2F_2^2 - 72V^2\lambda - \lambda^4 = 0$$

egyenleteket identikusan kielégitik. Ezeknek λ-ra vonatkozó rezultánsa a (13) egyenlet. Továbbá a

$$\Delta^2 - 16F_1^2F_2^2 = 4(2F+F_1+F_2)(2F+F_1-F_2)(2F-F_1+F_2)(2F-F_1-F_2)$$

kifejezés analog a HERON-képletben szereplő szorzattal.

$$27(36V^2)^4+2\Delta(\Delta^2-144F_1^2F_2^2)(36V^2)^2-16F_1^2F_2^2(\Delta^2-16F_1^2F_2^2)^2=0, \quad (13)$$

ahol

$$\Delta=8F^2-2(F_1^2+F_2^2).$$

4. Amig a fentiek tanúsága szerint az ortocentrikus tetraéder lapterületei és többi alkatrészei közt lényegesen bonyolultabb relációk állanak fenn, mint a háromszög oldalai és egyéb alkatrészei között, addig az ortocentrikus tetraéder alakjára nézve (l. III. §) ugyanolyan egyszerű, a lapterületekből alkotott quadratikus formák előjele mérvadó, mint a háromszög esetén. A $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ oldalakkal biró háromszög esetén ugyanis tudvalevőleg

$$\operatorname{sgn}\cos\alpha_i=\operatorname{sgn}(\varrho_k^2+\varrho_l^2-\varrho_i^2).$$

Az ortocentrikus tetraédernél (2) szerint

$$F_k^2+F_l^2+F_m^2-F_i^2=\lambda_i(\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m) \quad (14)$$

és (7) szerint

$$\varrho_{ik}^2+\varrho_{il}^2-\varrho_{kl}^2=2\lambda_i,$$

tehát

$$\operatorname{sgn}\cos\gamma_{ij}=\operatorname{sgn}\lambda_i=\operatorname{sgn}(F_k^2+F_l^2+F_m^2-F_i^2), \quad (j=k,\ l,\ m) \quad (15)$$

ahol γ_{ij} az i-dik csúcsnál a j-dik lapon lévő élszög, következésképen az ortocentrikus tetraéder valamely triédere hegyes- (derék-), illetőleg tompaszögű a szerint, amint a vele szemközti lap területének négyzete kisebb (egyenlő), illetőleg nagyobb, mint a többi lapterületek négyzetösszege.

V. §.

1. Ha egy $A_1A_2A_3A_4$ tetraédernek van belső élérintő gömbje, azaz létezik olyan gömb, mely az összes $\overline{A_iA_k}$ éleket egy-egy belső B_{ik} pontban érinti, úgy nyilván bármelyik A_i csúcs a szomszédos B_{ik}, B_{il}, B_{im} érintéspontoktól egyenlő távolságra van. Ezek szerint a

$$\lambda_i=\overline{A_iB_{ik}}=\overline{A_iB_{il}}=\overline{A_iB_{im}} \qquad (i,\ k,\ l,\ m=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

mennyiségek a belső élérintő gömbbel biró tetraéderek meghatározására alkalmas paraméterek, melyek az élekkel homogén lineáris kapcsolatban vannak:

$$\varrho_{ik} = \lambda_i + \lambda_k. \tag{16}$$

2. Ha a $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder *izogonikus*, azaz mindegyik $\overline{A_iA_k}$ éle a beirt gömbnek a C_l és C_m érintéspontjaiból 120° alatt látszik, akkor a

$$\lambda_i = \overline{A_iC_k} = \overline{A_iC_l} = \overline{A_iC_m} \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4)$$

mennyiségeket vezethetjük be paraméterekként, és például az élek ezen paraméterekkel a következőképpen fejezhetők ki:

$$\varrho_{ik}^2 = \lambda_i^2 + \lambda_i\lambda_k + \lambda_k^2. \tag{17}$$

3. Az *izodinamikus* tetraédernek jellemző tulajdonsága,[3] hogy a szemben levő éleinek szorzatai egymással egyenlők:

$$\varrho_{ik}\varrho_{lm} = \varrho_{il}\varrho_{km} = \varrho_{im}\varrho_{kl},$$

tehát ezen relációk alapján a

$$\lambda_i = \frac{\varrho_{ik}\varrho_{il}}{\varrho_{kl}} = \frac{\varrho_{il}\varrho_{im}}{\varrho_{lm}} = \frac{\varrho_{im}\varrho_{ik}}{\varrho_{mk}} \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4)$$

mennyiségek az izodinamikus tetraéderek paraméteres előállítására felhasználhatók és általuk az élek következőképen fejezhetők ki:

$$\varrho_{ik} = \sqrt{\lambda_i\lambda_k}. \tag{18}$$

Egerváry Jenő.

ÜBER DAS TETRAEDER MIT HÖHENSCHNITTPUNKT.

Für ein Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ mit den Kantenlängen $\varrho_{ik} = \overline{A_iA_k}$ bestehen die Relationen

$$\varrho_{12}^2 + \varrho_{34}^2 = \varrho_{13}^2 + \varrho_{24}^2 = \varrho_{14}^2 + \varrho_{23}^2$$

bekanntlich[2] dann und nur dann, wenn das Tetraeder orthozentrisch ist, d. h. falls die vier Tetraederhöhen sich in einem Punkte treffen.

Werden auf Grund dieser Relationen die Grössen

$$\lambda_i = \frac{\varrho_{ik}^2 + \varrho_{il}^2 - \varrho_{kl}^2}{2} \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4)$$

als unabhängige Parameter eingeführt, so lassen sich die Kantenquadrate ϱ_{ik}^2, Seitenflächenquadrate F_i^2 und das Quadrat des Volumens V durch die elementare symmetrische Funktionen der λ_i folgendermassen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \varrho_{ik}^2 &= \lambda_i + \lambda_k, \\ 4F_i^2 &= \lambda_k\lambda_l + \lambda_l\lambda_m + \lambda_m\lambda_k, \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4) \\ 36\,V^2 &= \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4\lambda_1 + \lambda_4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Für ein spitzwinkliges orthozentrisches Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ haben die Parameter λ_i folgende geometrische Bedeutung: Wird über jede Seitenfläche F_i als Hypotenusenfläche ein rechtwinkeliges Tetraeder errichtet, so sind je drei aus einer Tetraederecke A_i auslaufenden Kathetenkanten einander gleich, mit der gemeinsamen Länge $\sqrt{\lambda_i}$. Eine entsprechende Bedeutung haben die Parameter bei einem stumpfwinkeligen orthozentrischen Tetraeder, wobei ein Parameterwert negativ wird.

Wird in der Tetraederecke A_i die Masse $\frac{1}{\lambda_i}$ angebracht, so fällt der Schwerpunkt dieses Massensystems mit dem Höhenpunkte zusammen.

Mit Hilfe der Parameterdarstellung werden einige, auf das orthozentrische Tetraeder bezügliche Sätze hergeleitet.

Eugen Egerváry.

ULTRASPHAERIKUS POLINOMOK ÖSSZEGÉRŐL.

A Matematikai és Fizikai Lapok 38. kötetében (1931, 161—164. oldal) FEJÉR LIPÓT bebizonyította, hogy az

$$(1-2xz+z^2)^{-\lambda} = P_0^{(\lambda)}(x) + P_1^{(\lambda)}(x)z + \cdots + P_n^{(\lambda)}(x)z^n + \cdots \quad (1)$$

sorfejtés által értelmezett ultrasphaerikus polinomok a következő egyenlőtlenségnek tesznek eleget:

$$P_0^{(\lambda)}(x) + P_1^{(\lambda)}(x) + \cdots + P_n^{(\lambda)}(x) > 0, \quad (2)$$
$$-1 < x < +1, \; 0 < \lambda \leq \tfrac{1}{2}; \; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Ez a figyelemreméltó eredmény FEJÉR egy régebbi tételének az általánosítása, amely a $P_n^{(\frac{1}{2})}(x)$, azaz a LEGENDRE-féle polinomok esetére vonatkozik.

Könnyen belátható, hogy ez a tétel nem igaz, ha $\lambda > \frac{1}{2}$ vagy $\lambda < -\frac{1}{2}$. A jelen közlemény főleg a $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$ esettel foglalkozik, amelyben — mint ki fogom mutatni — a (2) alatti egyenlőtlenségek változatlanul érvényesek. Ennek alábbi bizonyítása talán valamivel elemibb jellegű mint a FEJÉR által a $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ esetben alkalmazott okoskodás, amennyiben az integrálok használatát teljesen elkerüli. Viszont úgy látszik, hogy a FEJÉR által vizsgált eset mélyebben fekvő, mint az, amellyel mi foglalkozunk.

Bizonyításunk a $P_n^{(\lambda)}(x)$ polinomok következő jól ismert előállításán alapszik, amely (1)-ből azonnal következik. Legyen

$$(1-u)^{-\lambda} = \alpha_0 + \alpha_1 u + \cdots + \alpha_n u^n + \cdots; \quad (3)$$

akkor

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = 2\alpha_0\alpha_n \cos n\theta + 2\alpha_1\alpha_{n-1}\cos(n-2)\theta + \cdots + \left\{ \begin{array}{ll} 2\alpha_{\frac{n-1}{2}}\alpha_{\frac{n+1}{2}} \cos\theta, & \text{ha } n \text{ páratlan}, \\ \alpha_{\frac{n}{2}}^2 & \text{, ha } n \text{ páros}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Az általánosabb $-1 < \lambda < 0$ feltétel mellett

$$\alpha_0 > 0, \ \alpha_1 < 0, \ \alpha_2 < 0, \ldots; \tag{5}$$

tehát a (4) előállításból látható, hogy $n \geqq 1$ esetén $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ el nem tűnő együtthatói valamennyien pozitívok, kivéve $\cos n\theta$ együtthatóját, amely negatív. Írjunk már most a (2) alatti összegben $x = \cos\theta$-t, s tekintsük az így keletkező n-edfokú trigonometrikus többtagúban $\cos m\theta$ együtthatóját; itt m pozitív egész szám, $1 \leqq m \leqq n$. Ez a tag fellép a $P_m^{(\lambda)}(\cos\theta)$, $P_{m+2}^{(\lambda)}(\cos\theta)$, $P_{m+4}^{(\lambda)}(\cos\theta), \ldots$ kifejezésekben, és a kérdéses együttható $-u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ alakú lesz, ahol $u_0, u_1, u_2, \ldots$ pozitív számok. Ennek a véges összegnek utolsó tagja nyilván $u_{\frac{n-m}{2}}$ vagy $u_{\frac{n-m-1}{2}}$, a szerint amint $n - m$ páros vagy páratlan. Az $\{u_\nu\}$ végtelen sorozat m-től és λ-tól függ, n-től azonban független.

Tekintsük a $-u_0+u_1+u_2+\cdots$ *végtelen* összeget. Ez nyilván a $(2-2\cos\theta)^{-\lambda}$ függvény trigonometrikus kifejtésében $\cos m\theta$ együtthatója. Ez a kifejtés azonban jól ismeretes,[1] és tudjuk, hogy együtthatói (eltekintve az állandó tagtól) valamennyien negatívok. Következőleg ugyanez érvényes a fentebb tekintett véges összegre is.

Összefoglalva látjuk, hogy a (2) alatti összegben $x = \cos\theta$-t írva, oly trigonometrikus többtagút kapunk, melynek valamennyi nem állandó tagja negatív együtthatóval bír. *Egy ilyen trigonometrikus többtagú azonban minimumát a $\theta = 0$ helyen veszi fel.*

Kimondhatjuk tehát a következő tételt:

Legyen $-1 < \lambda < 0$. A (2) alatti összeg a $-1 \leqq x \leqq +1$ közben minimumát az $x = +1$ helyen (és $n \geqq 1$ esetén csak az $x = +1$ helyen) *veszi fel.*

Azonban (1)-ből

$$P_0^{(\lambda)}(1) + P_1^{(\lambda)}(1) + \cdots + P_n^{(\lambda)}(1) = \binom{n+2\lambda}{n}, \tag{6}$$

---

[1] Lásd például E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON: A course of modern analysis, 4. kiadás, Cambridge 1927, 263. oldal, 40. feladat.

tehát a mondottak értelmében

$$P_0^{(\lambda)}(x)+P_1^{(\lambda)}(x)+\cdots+P_n^{(\lambda)}(x)>\binom{n+2\lambda}{n}, \tag{7}$$

$$-1<x<+1,\quad -1<\lambda<0;\ n=1,2,3,\ldots.$$

A (7) jobboldalán szereplő binomiális együttható pozitiv, ha $-\frac{1}{2}<\lambda<0$ és negativ, ha $-1<\lambda<-\frac{1}{2}$. Ezzel a $-\frac{1}{2}<\lambda<0$ esetre vonatkozó állításunk bizonyitva van.

Végezetül — meggondolásaink elemi jellegét jobban kidomboritandó — egyszerű bizonyitást adunk a $(2-2\cos\theta)^{-\lambda}$ trigonometrikus kifejtésének fent használt tulajdonságára. A (3) előállitásból, amely $|u|=1$-re egyenletesen összetartó, következik

$$(2-2\cos\theta)^{-\lambda}=|(1-e^{i\theta})^{-\lambda}|^2=|a_0+a_1e^{i\theta}+a_2e^{2i\theta}+\cdots|^2, \tag{8}$$

úgyhogy a kérdéses együttható számára a következő kifejezést nyerjük:

$$2(a_0a_m+a_1a_{m+1}+a_2a_{m+2}+\cdots),\qquad m\geqq 1. \tag{9}$$

Azonban (3)-ban $u=1$-et írva:

$$a_0+a_1+a_2+\cdots=0 \tag{10}$$

adódik; tehát

$$\begin{gathered}a_0a_m+a_1a_{m+1}+a_2a_{m+2}+\cdots=\\ =a_1(a_{m+1}-a_m)+a_2(a_{m+2}-a_m)+a_3(a_{m+3}-a_m)+\cdots.\end{gathered} \tag{11}$$

Mivel $1<1-\lambda<2$, tudjuk, hogy $(1-u)^{1-\lambda}$ együtthatói pozitivok (kivéve a lineáris tagot). Tehát $a_2-a_1>0$, $a_3-a_2>0,\ldots$, amiből, (5) tekintetbevételével, (11) negatív volta közvetlenül látható. *Szegő Gábor.*

ON THE SUM OF ULTRASPHERICAL POLYNOMIALS.

In vol. 38 (1931, pp. 161—164) of this periodical FEJÉR proved the positivity of the sums

$$P_0^{(\lambda)}(x)+P_1^{(\lambda)}(x)+\cdots+P_n^{(\lambda)}(x),$$

provided $-1<x<+1$ and $0<\lambda<\frac{1}{2}$; here the ultraspherical polynomials $P_n^{(\lambda)}(x)$ are defined as the coefficients of the expansion of $(1-2xz+z^2)^{-\lambda}$. The present paper deals with the case $-1<\lambda<0$ with the result that the minimum of the sum in question in $-1\leqq x\leqq+1$ is attained for $x=+1$; it is positive or negative, according to $-\frac{1}{2}<\lambda<0$, or $-1<\lambda<-\frac{1}{2}$. *Gábor Szegő.*

A HALMAZELMÉLETI GEOMETRIA ÚJABB FEJLŐDÉSE.

Különböző korok különböző problémaköröket tekintettek a geometria feladatainak. Legelőször természetesen csak az egyszerű elemi idomok belső és egymáshoz való viszonyait vizsgálták. Később az analitikai geometria megmutatta, hogy ezek az egyszerű idomok egyszerű algebrai egyenletekkel jellemezhetők. Az algebrai módszer bevezetésének azután természetes következménye volt, hogy az összes algebrai egyenletekkel jellemezhető idomok tulajdonságait is fel kellett venni a geometria problémái közé. A differenciálszámítás felfedezése adta a geometriának a következő lökést, mert ettől fogva már minden olyan idomot is geometriainak lehetett tekinteni, amely differenciálható függvényekkel állítható elő. Aránylag elég hamar felmerültek olyan problémák is, amelyek differenciálható függvényekkel már nem voltak megoldhatók. Ezen a fokon azonban, amikor már nemcsak differenciálható, hanem általában folytonos függvényekkel előállított pontkonfigurációkat vizsgálunk, egymást követik a naiv szemlélettel ellenkező tulajdonságok. Egy egész négyzetet betöltő folytonos görbe, vagy egy egész kockát betöltő felület, amelynek még hozzá a felszíne zérus, bizonyos tekintetben inkább elriasztják mint megnyugtatják az általánosításra törekvő szellemet. Az ilyen paradox tulajdonságok fellépése csak támogatja azt a felfogásunkat, hogy a függvényekkel való előállítás módszerének bizonyos fokon túl szükségkép zsákutcába kell vezetni, mert ha a geometriát alkalmazott függvénytannak tekintjük, tulajdonképen magát a függvényt tesszük geometriai fogalommá és így elhanyagoljuk a függvényekkel ki nem fejezhető specifikus geometriai tartalom pontos definícióját. Ezt láthatjuk a következő példán is: az $y = x^2$

parabolát nyilván mindenki görbének nevezi anélkül, hogy közben a görbe szigorú definíciójára gondolna. De vajjon csak azért görbe-e ez a parabola, mert a síkban másodfokú egyenlettel állítható elő? Nyilván nem, hanem a pontjai közt kell valami olyan rendezettségi viszonynak lennie, amely őt a felületektől és testektől elválasztja. Hiszen ezt a parabolát egy (u, v) paramétersík segítségével úgy is definiálhatjuk, hogy térbeli koordinátáit az $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = 0$ folytonos függvények állítsák elő. Ilyen módon a parabolát akár folytonos felületnek is nevezhetnénk, ami csak még jobban szembeállítja az analitikusan definiált felület- és görbefogalmat a szemlélettel.

Görbe, felület, test, dimenzió, tér: állandóan használt szavai a köznapi nyelvnek is. Ezek tartalmáról a legegyszerűbb esetekben van is valamilyen intuitív fogalmunk, de a legáltalánosabb esetben analitikus módszerekkel még sem tisztázhatjuk őket, mert ezek a fogalmak a geometria különlegesen geometriai tartalmú magvához tartoznak. Ép ezért teljes általánosságban legcélszerűbb abból kiindulnunk, hogy a geometria tárgya tulajdonkép minden pontkonfiguráció, másszóval ponthalmaz. Az alapfogalmak pontos definíciójának ez esetben a ponthalmaz fogalmán kell felépülnie, ebből a fogalomból kell kibányásznunk azokat a jellemző vonásokat, amelyek a görbe, felület, test, dimenzió, vagy tér fogalmait meghatározzák. A halmazelméleti geometria a legújabb időben ép azért fejlődött olyan sokat, mert tisztázta ezeket a fogalmakat és megmutatta, hogyan juthatunk el az általános halmazfogalomtól a speciális geometriai idomokhoz. A következőkben az idevágó vizsgálatokat fogjuk enciklopedikusan összefoglalni. Az eredmények azonban ma már annyira szétágaznak, hogy szinte minden munkában található egy-egy új fogalomalkotás; ezért a rendkívül zsúfolt anyagból csak azt választottuk ki, ami szerintünk a problémakör világos áttekintéséhez nélkülözhetetlennek látszott. Ezt a kiválasztást úgy igyekeztünk elvégezni, hogy az olvasó előtt tisztán álljon az a tendencia, mely szerint a geometria legmélyebben fekvő alapját az úgyszólván kaotikus rendezetlenségű halmazok szolgáltatják, a klasszikus formákhoz pedig a halmaz tulajdonságainak fokozatos megszorításával lépésről-lépésre juthatunk el.

I. A DIMENZIÓ ELMÉLETE.

1. A metrikus tér.

A modern halmazelméleti geometria alapjait FRÉCHET[1] rakta le híres doktori értekezésében, amelyben rámutatott arra, hogy a geometria tekintélyes része a távolság fogalmának három egészen egyszerű tulajdonságán alapul. Ez a három tulajdonság a következő: 1° valamely p ponttól egy másik q pontig számított távolság ugyanakkora, mint a q-tól p-ig mért távolság (szimmetria); 2° két különböző pont közti távolság sohasem zérus (pozitívitás); 3° egy háromszög oldala nem nagyobb a másik kettő összegénél (háromszög-egyenlőtlenség). Ezt a három tulajdonságot véve alapul bármely T halmaz elemei közt oly módon definiálhatunk megfelelő távolságfogalmat, hogy T minden p, q elempárjához rendelünk egy és csakis egy olyan pq számot, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

1° $pq = qp \geqq 0$;

2° pq *akkor és csakis akkor* 0, *ha* $p = q$;

3° $pq + qr \geqq pr$.

Az ilyen módon *metrizált* T halmaz elemeit *pontoknak* nevezzük, a pq számot pedig p és q közti *távolságnak*. Vezessük még be a következő fogalmat: a T halmaz p elemét az A részhalmaz *torlódási pontjának* mondjuk, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható A-nak olyan p-től különböző q pontja, amelyre nézve $pq < \varepsilon$. Az olyan T halmazt, amelyben a torlódási pont fogalmát a távolság segítségével ilyen módon definiáltuk, *metrikus térnek* nevezzük. A legspeciálisabb metrikus tér természetesen a közönséges euklidesi tér, de metrikus terek a nem-euklidesi, például RIEMANN-féle terek is. Lehet persze ezeknél sokkal általánosabb metrikus tereket is konstruálni: metri-

[1] FRÉCHET, 1.

kus tér például az is, amelynek pontjai a $0 \leqq x \leqq 1$ intervallumban definiált korlátos függvények, az $f(x)$, $\varphi(x)$ pontok közti távolságként pedig az $|f(x) - \varphi(x)|$ számot tekintjük. Világos, hogy egy metrikus tér minden részhalmaza is önálló metrikus térnek tekinthető.

Alapfogalmak. Most, hogy a metrikus tér fogalmát megállapítottuk, módunkban van összeállítani a halmazelméleti geometria nekünk szükséges alapfogalmait is. Jelöljük $A \supset B$ vagy $B \subset A$ szimbólummal azt a tényt, hogy B a T metrikus tér A halmazának része. $A.B$ jelenti az A és B halmazok közös pontjaiból álló halmazt, $A+B$ az A és B halmazok összes pontjaiból álló halmazt, $A—B$ pedig B komplementumát A-ban, vagyis A mindazon pontjainak halmazát, amelyek nem pontjai egyúttal B-nek is. A'-vel jelöljük A összes torlódási pontjainak halmazát. *Zárt halmaznak* nevezzük az olyan halmazt, amely minden torlódási pontját magában foglalja, amelynél tehát $A' \subset A$. *Nyilt halmaznak* nevezzük A-t akkor, ha $T—A$ zárt halmaz. Valamely p pontot magában foglaló nyilt halmazt *p környezetének* is szokás mondani. Az $\bar{A}=A+A'$ halmazt *A zárt hüvelyének* nevezzük. Fontos a *halmaz határának* fogalma: A határának hívjuk az $F(A)=\bar{A}.\overline{T—A}$ halmazt. Ha tehát A nyilt halmaz, akkor $F(A)=\bar{A}—A$. *Bármely A halmaz F(A) határa mindig zárt halmaz.* Pl. az x, y-síkon az $x^2+y^2<1$ nyílt halmaz határa az $x^2+y^2=1$ körvonal, vagy a térben az $x^2+y^2<1$, $0<z<1$ nyilt halmaz határa az $x^2+y^2=1$, $0 \leqq z \leqq 1$ palástból és az $x^2+y^2 \leqq 1$, $z=0$, illetőleg $x^2+y^2 \leqq 1$, $z=1$ körlapokból álló henger. Az A halmaz *átmérőjének* nevezzük azt a $d(A)$ számot, amelyet a következő módon nyerünk: képezzük A minden p, q pontpárjára nézve a pq távolságot, ezeknek a pq számoknak felső határa $d(A)$.

Az A halmaz *sűrű* B-ben, ha $A' \supset B$, vagyis ha B minden pontja torlódási pontja A-nak. *A önmagában sűrű*, ha $A' \supset A$. Egy önmagában sűrű és zárt halmaz neve *perfekt halmaz*; A tehát akkor és csakis akkor perfekt, ha $A'=A$. A sűrű halmaz fogalmának ellentettje a *sehol sem sűrű* halmazé. A akkor sehol sem sűrű B-ben, ha $B—\bar{A}$ sűrű B-ben. Pl. egy egyenes, vagy egy sík seholsem sűrű a háromdimenziós euklidesi térben. Lehetséges természetesen az is, hogy egy halmaz és komplementuma is sűrűek. Pl. a racionális koordinátájú pontok halmaza sűrű a közönséges euklidesi térben, de sűrű e halmaz komplementuma is. Mindkettő önmagában is sűrű. A sűrűség és önmagában való sűrűség fogalmai azonban függetlenek egymástól. Így pl. a $0 \leqq x \leqq 1$ intervallumban *sehol sem sűrű, de perfekt* halmaz a CANTOR-*féle disz-*

kontinuum. Ez a következőkép keletkezik: osszuk a $0 \leqq x \leqq 1$ intervallumot három egyenlő részre és vegyük el belőle a középső harmad belsejét, szóval az $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ nyilt intervallumot. Osszuk a megmaradt két intervallumot három-három egyenlő részre és vegyük el belőlük a középső halmazok belsejét, tehát az $\frac{1}{9} < x < \frac{2}{9}$ és a $\frac{7}{9} < x < \frac{8}{9}$ nyilt intervallumokat. Ezt az eljárást minden határon túl folytatva a megmaradó ponthalmazt nevezzük CANTOR-féle diszkontinuumnak. Könnyű belátni, hogy ez a halmaz perfekt ugyan, de sehol sem sűrű a $0 \leqq x \leqq 1$ intervallumban.

Egyszerű kimutatni, hogy *tetszőlegesen sok zárt halmaz közös pontjainak halmaza is zárt* és *tetszőlegesen sok nyilt halmaz összege is nyilt halmaz*. De nem igaz az, hogy végtelen sok zárt halmaz összege is zárt. Ezzel a halmazok egy újabb osztályához, az úgynevezett F_σ-halmazokhoz jutottunk el: *megszámlálható végtelen sok zárt halmaz összegét nevezzük F_σ-halmaznak.* Ugyanígy *megszámlálható végtelen sok nyilt halmaz közös pontjainak halmazát G_δ-halmaznak* hívjuk. Nyilván minden zárt halmaz F_σ és minden nyilt halmaz G_δ, de ezenkívül igaz az a tétel is, hogy *bármely metrikus térben minden zárt halmaz G_δ és minden nyilt halmaz F_σ*. A zárt és nyilt halmazok tehát egyszerre F_σ- és G_δ-halmazok is.

Az *összefüggő halmaz* fogalmára van még szükségünk: A akkor összefüggő halmaz, ha A-t önálló metrikus térként tekintjük és ezt a teret két tetszőleges legalább egy-egy pontból álló A_1, A_2 zárt halmazra bontva ezeknek mindig van közös pontjuk, vagyis ha $A_1 . A_2 \neq 0$, bárhogy is választjuk A-ban a zárt A_1 és A_2 halmazokat. Pl. az $x^2+y^2=1$ kör nyilván összefüggő halmaz, de már *nem összefüggő a $0 \leqq x \leqq 1$ egyenesdarab racionális vagy irracionális pontjaiból álló halmaz.* Legyen ugyanis R a $0 \leqq x \leqq 1$ egyenesdarab racionális pontjainak halmaza. Ha ezt metrikus térnek tekintjük, a $0 \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$, illetőleg $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1$ intervallumok racionális pontjainak halmazai zártak az R térben, de nincs közös pontjuk, az összefüggésre jellemző feltétel tehát nem teljesül. Ugyanígy beláthatjuk, hogy az irracionális pontok halmaza sem összefüggő.

Ha a T_1 tér A halmazának minden p pontjához a T_2 tér B részhalmazának egy és csakis egy q pontját rendeljük, úgy *A egyértelmű leképezését* definiáltuk B-re. A p pontnak megfelelő q pontot *p képének* nevezzük, A mindazon pontját pedig, amelyeknek q a képe, *q ősének* hívjuk. Ugyanígy az A halmaz képe B, illetve B őse A. Ha A

minden pontjának csak egy őse van, *a leképezés egy-egyértelmű.* Az A halmaz B-re való egyértelmű leképezése *folytonos*, ha A minden torlódási pontjának B egy torlódási pontja felel meg. Ha pedig A leképezése B-re egy-egyértelmű és folytonos is, ezenkívül B minden torlódási pontjának őse is torlódási pontja A-nak, akkor a leképezést *topologikus leképezésnek*, B-t pedig *A topologikus képének* nevezzük. A topologikus leképezések rendkívül fontosak a halmazelméleti geometriában.

Láttuk, hogy az euklidesi térben van egy megszámlálható sűrű halmaz, t. i. a racionális koordinátájú pontok halmaza. Az olyan metrikus teret, amelynek az euklidesi térhez hasonlóan megvan az a tulajdonsága, hogy kiválaszthatunk belőle egy megszámlálható sűrű halmazt, *szeparábilis térnek*[1] hívjuk. A szeparábilis metrikus terek geometriai szempontból úgyszólván az egyedül számbajövők, mert a geometriailag érdekes terek szinte kivétel nélkül szeparábilisak. Pl. az euklidesi tér minden részhalmaza (önálló metrikus térként tekintve) szeparábilis. De ezenfelül is a szeparábilis terek halmazelméleti geometriája bizonyos mértékig hasonló az euklidesi terekéhez. Ennek világosabb megértésére tekintsük az n-dimenziós euklidesi térben a $0 \leqq x_k \leqq \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ relációkkal definiált n-dimenziós intervallumot. Az n-dimenziós euklidesi tér kézenfekvő általánosítása az olyan $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ végtelen sok koordinátájú pontokból álló tér, amelyekre nézve Σx_i^2 konvergens és az $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ és $(y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots)$ pontok távolságát a $\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)^2}$ kifejezéssel definiáljuk, ahol a gyökjel alatti sor konvergens. Ebben az ú. n. HILBERT-*féle térben végtelen-dimenziós alapintervallumnak* tekinthetjük az összes olyan $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ pontokból álló halmazt, amelyben az x_k koordináta eleget tesz a $0 \leqq x_k \leqq \frac{1}{k}$ feltételnek. URYSOHN[2] a következő fontos tételt bizonyította be: *minden szeparábilis metrikus tér topologikusan leképezhető a végtelen-dimenziós alapintervallum valamely részhalmazára. A végtelen-*

---

[1] FRÉCHET. 1.

[2] URYHSOHN 3

dimenziós alapintervallum tehát olyan univerzális tér, amely minden szeparábilis teret topologikus értelemben magában foglal. Mivel pedig a végtelen-dimenziós alapintervallum topologiája szinte azonos a közönséges n-dimenziós euklidesi térével, érthető, hogy URYSOHN tétele következtében a szeparábilis tereket messzemenő általánosságuk ellenére is az euklidesi terek természetes és közvetlen topologiai általánositásának tekinthetjük.

Az euklidesi tér halmazai között különösen nagy szerepet játszanak az n-dimenziós gömbbe bezárható ú. n. *korlátos* halmazok. Könnyű belátni, hogy ezek azonosak azokkal az euklidesi halmazokkal, amelyeknek minden végtelen részhalmazából kiválasztható egy konvergens pontsorozat. Ezt a tulajdonságot általánositandó, *kompakt térnek* szokás nevezni az olyan metrikus teret, amelyben minden végtelen részhalmaznak van legalább egy torlódási pontja. Az euklidesi tér maga nem kompakt ugyan, mert pl. az abszcissza-tengely $x = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ abszcisszájú pontjainak nincs torlódási pontjuk, de, mint említettük, *minden korlátos és zárt részhalmazuk kompakt metrikus tér.* A végtelen dimenziós HILBERT-féle tér sem kompakt, azonban az említett *alapintervalluma már kompakt metrikus tér.* A kompakt metrikus terek fontos tulajdonsága, hogy *minden kompakt metrikus tér egyúttal szeparábilis tér is,* ennek megforditása azonban — mint az euklidesi tér példáján is láthattuk — már nem igaz. A kompakt metrikus terek között különösen jelentősek az összefüggő terek. Az egynél több pontból álló kompakt és összefüggő metrikus tereket *kontinuumnak* nevezzük. A klasszikus geometriában vizsgált görbék és felületek korlátos darabjai egytől-egyig kontinuumok. Érthető tehát, ha azt mondjuk, hogy a halmazelméleti geometriában is a kontinuumok játsszák a főszerepet.

A kompakt és a szeparábilis terek között állnak a *félkompakt* terek. Így nevezzük a megszámlálható sok kompakt tér összegeként előállitható metrikus tereket. Nyilvánvaló, hogy minden félkompakt tér is szeparábilis.

2. A dimenzió fogalma.

Mint a matematika történetében már annyiszor, a dimenzió fogalmának meghatározásánál is előállt az az eset, hogy a szemléletesen oly világos és egyszerű dimenzió fogalmát csak sok eredménytelen kisérlet után sikerült teljes általánosságban is definiálni. Már EUKLIDES érinti futólag a dimenzió fogalmát, majd FRÉCHET [1] és HAUSDORFF [2] határozottan sikertelennek mondható kisérletei mellett, POINCARÉ [3] egy ötletét felhasználva, BROUWER [4] állapitja meg először kifogástalanul a kompakt metrikus terek dimenziójának világos fogalmát. De ez a definició sem tökéletes még, mert csak az egész tér dimenzióját határozza meg, holott a dimenzió nyilván pontról-pontra változható lokális tulajdonság. Gondoljunk pl. egy kockára, amely egy négyzetben folytatódik, ez pedig egy belőle kiálló egyenesdarabban végződik. Ezt az egyszerű metrikus teret a kocka pontjaiban nyilván három-dimenziósnak, a négyzet pontjaiban két-dimenziósnak, az egyenesdarab pontjaiban pedig egy-dimenziósnak tartjuk. Azt, hogy valamely tér egyes pontjaiban hány dimenziós, először MENGER [5] és URYSOHN [6] definiálták. Tartalmilag azonos definiciójuk MENGER lényegesen plasztikusabb fogalmazásában a következő:

Az egy pontot sem tartalmazó halmazt (-1)*-dimenziósnak nevezzük és feltesszük, hogy minden* $-1 \leqq k \leqq n-1$ *egész számra már definiáltuk a dimenzió fogalmát. A* T *metrikus teret* p *pontjában legfeljebb* n*-dimenziósnak nevezzük, ha vannak* p*-nek olyan tetszőlegesen kicsiny átmérőjű* K_p *környezetei, amelyeknek* $F(K_p)$ *határai legfeljebb* $(n-1)$*-dimenziósak. Ha* T *a* p *pontban nem legfeljebb* n*-dimenziós, akkor*

---

[1] FRÉCHET 2.
[2] HAUSDORFF 2.
[3] POINCARÉ 1.
[4] BROUWER 2.
[5] MENGER 1.
[6] URYSOHN 1.

azt mondjuk, hogy T legalább n-dimenziós p-ben. Ha T a p pontban legfeljebb n-dimenziós, de legalább n-dimenziós is, akkor a T teret p pontjában n-dimenziósnak mondjuk. A T teret általában $\begin{matrix}\textit{legfeljebb}\\ \textit{legalább}\end{matrix}$ n-dimenziósnak nevezzük, ha T $\begin{matrix}\textit{minden pontjában legfeljebb}\\ \textit{egy pontjában legalább}\end{matrix}$ n-dimenziós.

Ebből a definícióból következik, hogy a T metrikus tér A részhalmazának dimenziója nem lehet nagyobb, mint az egész T téré. Tekintsük az egyetlen p pontból álló (p) halmazt metrikus térként. Akkor p minden K_p környezete maga a (p) tér, K_p határa $F(K_p)$ viszont egyetlen pontot sem tartalmaz, tehát $F(K_p)$ definíciónk értelmében (-1)-dimenziós. Tekintve, hogy eszerint p minden környezetének határa (-1)-dimenziós, azért (p) legfeljebb nulla-dimenziós lehet. De (p) tartalmaz egy pontot, következéskép nem (-1)-dimenziós, vagyis (p) legalább nulla-dimenziós. *Az egy pontból álló (p) tér tehát éppen nulla-dimenziós.* Ugyanilyen módon igazolhatjuk be azt is, hogy *bármely T metrikus tér nulla-dimenziós minden olyan pontjában, amely T-nek nem torlódási pontja.* De az is könnyen bebizonyítható, hogy *minden megszámlálható végtelen sok pontból álló tér is nulla-dimenziós.* Vegyünk ezekután szemügyre egy összefüggő metrikus teret. Könnyen belátható, hogy az összefüggő tér minden p pontja bármely elég kicsiny K_p környezetének $F(K_p)$ határa tartalmaz legalább egy pontot, vagyis *minden több pontból álló összefüggő metrikus tér bármely pontjában legalább egydimenziós.* Eszerint az egyenes is legalább egydimenziós. De ha figyelembe vesszük, hogy az egyenes bármely x_0 pontjához rendelve az $x_0 - \frac{1}{n} < x < x_0 + \frac{1}{n}$ környezeteket $(n = 1, 2, \ldots)$, ezek határai az $x_0 - \frac{1}{n}$ és $x_0 + \frac{1}{n}$ pontokból álló nulla-dimenziós halmazok, akkor ebből következik, hogy az egyenes legfeljebb egy-dimenziós. Definíciónk szerint tehát *az egyenes minden pontjában egy-dimenziós tér.* Ugyancsak könnyen belátható, hogy *az egyenes bármely részhalmaza akkor és csakis akkor egy-dimenziós, ha tartalmaz egy egyenesdarabot.* Ennek alapján rögtön rámutathatunk egy *kontinuum számosságú nulla-dimenziós halmazra* is, t. i. az egyenes irracionális pontjainak halmazára. Ez ugyanis, nem tartalmazván egyetlen egyenesdarabot sem, az előbbi tétel szerint nulla-dimenziós halmaz.

Mint láttuk, a tér dimenziója csakis az egyes pontok kis környezeteinek határaitól függ. De nem kell azt hinni, hogy a p pontban n-dimenziós tér *valamennyi* p-hez tartozó környezete határának $(n-1)$-dimenziósnak kell lennie, hanem elég, ha csak *kiválaszthatunk* olyan p-hez tartozó tetszőlegesen kicsiny környezeteket, amelyek határai $(n-1)$-dimenziósak. Jó példa erre a következő:[1] legyen T a sík összes olyan (x, y)-koordinátájú pontjainak halmaza, amelyeket az alábbi relációk határoznak meg:

$$0 \leqq x \leqq 1, \qquad y = 0,$$
$$x = \frac{1}{n}, \qquad 0 \leqq y \leqq \frac{1}{n}, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$x = \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}, \qquad 0 \leqq y \leqq \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2},$$

ahol $n_1 = 1, 2, \ldots$ és n_2 minden olyan egész számú értéket felvesz, amely mellett $n_2 > n_1^2 + n_1$. Ez a kontinuum $(0, 0)$-ban nyilván két-dimenziós, de a $(0, 0)$ pont környezeteiként T-nek a $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$, $-\frac{1}{n} < y < \frac{1}{n}$ négyzetbe eső pontjait választva, ezek határa az $x = \frac{1}{n}$, $0 \leqq y \leqq \frac{1}{n}$ egyenesdarab, tehát egy egy-dimenziós halmaz.

3. Dimenzió és szemlélet.

Láttuk, hogy az egyenes egy-dimenziós tér; ebben az esetben tehát az általános dimenziófogalom a szemlélettel megegyező eredményre vezet. Jelöljük E_n-el az n-dimenziós eukli-

---

[1] MENGER 6.

desi teret. Már BROUWER kimutatta,[1] hogy *az E_n tér n-dimenziós*. De ezen túlmenőleg érvényes a következő tétel is:[2] *az E_n tér valamely A részhalmaza akkor és csakis akkor n-dimenziós, ha A tartalmaz egy n-dimenziós intervallumot. Az E_n tér nyilt részhalmazainak határai tehát legfeljebb $(n-1)$-dimenziós halmazok.*[3] Ezek szerint a közönségesen n-dimenziósnak mondott gömb vagy az n-dimenziósnak nevezett intervallum a dimenzióelmélet szempontjából is n-dimenziós. A dimenzió definíciója tehát ezekben az esetekben tökéletesen fedi a szemléletet.

Már láttuk, hogy az összefüggő halmazok legalább egydimenziósak, ami szintén csak a szemlélettel való megegyezést igazolja. De ezt a nyomot még tovább is követhetjük, ha az összefüggés magasabbfokú analógiáit definiáljuk. Nevezzük e célból *nulla fokban összefüggőnek* az egyetlen pontból álló halmazokat és tegyük fel, hogy a legalább k-ad fokú összefüggést $0 \leqq k \leqq n-1$ esetre már definiáltuk, akkor *legalább n-ed fokban összefüggőnek* nevezzük a T metrikus teret, ha T bármely szétbontásánál két olyan A, B zárt részhalmazára, amelyekre nézve $T-A \neq 0$ és $T-B \neq 0$, az $A \cdot B$ halmaz mindig tartalmaz egy legalább $(n-1)$-ed fokban összefüggő részt. Ha n a legnagyobb egész szám, amely mellett T legalább n-ed fokban összefüggő, akkor T-t *n-ed fokban összefüggőnek* mondjuk. Az n-ed fokban összefüggő kontinuumokat röviden *n-ed fokú kontinuumoknak* nevezzük. Világos, hogy a legalább 1-ed fokban összefüggő halmazok definíciója megegyezik az összefüggő halmaz közönséges definíciójával; egyik előző tételünkből következik tehát, hogy a *legalább 1-ed fokban összefüggő halmazok legalább egydimenziósak is*. De ennél több is igaz,[4] ugyanis *valamely legalább n-ed fokban összefüggő halmaz minden pontjában*

---

[1] BROUWER 2.
[2] MENGER 2, URYSOHN 6.
[3] MENGER 2, URYSOHN 7.
[4] MENGER 5.

legalább n-dimenziós. Ennek a tételnek bizonyos határokon belül igen szemléletes megfordítása is igaz:[1] *egy kompakt vagy félkompakt metrikus tér akkor és csakis akkor legalább n-dimenziós, ha tartalmaz egy n-ed fokú kontinuumot.* Eszerint *az n-dimenziós félkompakt tereket jellemzi, hogy tartalmaznak egy n-ed fokú kontinuumot, de nem tartalmaznak egyetlen $(n+1)$-ed fokú kontinuumot sem.* Ez a tétel még szemléletesebbé teszi a dimenzió fogalmát, mert rámutat arra, hogy a dimenzió növekedése és az összefüggés fokozatosan szorosabbá válása valóban párhuzamos jelenségek. Nem szabad azonban azt hinnünk, hogy egy n-dimenziós kompakt tér *minden* pontja egy n-ed fokú kontinuumon fekszik. Példa erre az a T tér, amely a $0 \leqq x \leqq 1$, $-1 \leqq y \leqq 0$, ezenkívül az $\frac{1}{2n+1} \leqq x \leqq \frac{1}{2n}$, $0 \leqq y \leqq 1$ téglalapokból és az $x = 0$, $0 \leqq y \leqq 1$ egyenesdarabból áll. Ez a T tér minden pontjában kétdimenziós, de az $x = 0$, $0 \leqq y \leqq 1$ egyenesdarab pontjai $(0, 0)$ kivételével nem fekszenek T egyetlen n-ed fokú kontinuumán sem. Egész más a helyzet, ha csak az 1-ed fokú, más szóval csak a közönséges értelemben vett kontinuumokat tekintjük. Ezekre nézve MAZURKIEWICZ[2] bebizonyította, hogy *egy kompakt T tér minden olyan pontja, amelyben T legalább egy-dimenziós, T valamely részkontinuumán fekszik.*

Az előbbi tételek kompakt vagy legalábbis félkompakt terekre vonatkoznak. Amint olyan általános szeparábilis tereket tekintünk, amelyek már nem félkompaktak, a fentemlített igen szemléletes tételek elvesztik általános érvényességüket. Világosan mutatja ezt a következő példa:[3] legyen C az x, y-sík $0 \leqq x \leqq 1$, $y = 0$ egyenesdarabjában konstruált már említett CANTOR-féle diszkontinuum. Kössük össze az x, y-sík $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ és C minden p pontját egy $E(p)$ egyenesdarabbal. Mivel a

[1] HUREWICZ—MENGER **1** és HUREWICZ **6.**
[2] MAZURKIEWICZ **1.**
[3] KNASTER—KURATOWSKI **1.**

perfekt C halmaz a $0 \leqq x \leqq 1$, $y = 0$ egyenesdarabban sehol sem sűrű, azért C komplementuma megszámlálható végtelen sok nyílt intervallum összege. Jelöljük A-val C mindazon pontjának halmazát, amelyek valamelyik ilyen nyílt intervallum végpontjai. Legyen S_1 mindazon $E(p)$ egyenesdarab racionális ordinátájú pontjainak halmaza, amelyek A valamely p pontját kötik össze az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ponttal. Legyen ezenkívül S_2 mindazon $E(p)$ egyenesdarabok irracionális ordinátájú pontjainak halmaza, amelyek $C-A$ valamely p pontját kötik össze az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ponttal. KNASTER és KURATOWSKI bebizonyították, hogy az $S = S_1 + S_2$ halmaznak a következő meglepő tulajdonságai vannak: 1° S *összefüggő, de nem tartalmaz egyetlen kontinuumot sem,* 2° *ha az egyetlen* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *pontot S-ből elvesszük, S összefüggése annyira megszűnik, hogy a megmaradó halmaz már nem tartalmaz egyetlen több pontból álló összefüggő részhalmazt sem.* Mivel S összefüggő, szóval minden pontjában 1-dimenziós halmaz, az 1° tulajdonságból azt olvashatjuk ki, hogy *van olyan szeparábilis* (de nem félkompakt) *metrikus tér* (t. i. az S halmaz), *amely nem tartalmaz semmilyen kontinuumot sem, mégis mindenütt egy-dimenziós.* Vegyük el S-ből az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pontot és jelöljük S^*-gal az így keletkező halmazt. Ez a halmaz nyilván minden pontjában egy-dimenziós, de 2° szerint nem tartalmaz egyetlen több pontból álló összefüggő részt sem. Másszóval *az összefüggés elégséges, de távolról sem szükséges feltétele annak, hogy egy halmaz pozitív-dimenziós legyen.* Megemlítjük végül, hogy MAZURKIEWICZ[1] *szerkesztett minden n-re olyan n-dimenziós G_δ-halmazt, amelynek nincs egyetlen több pontból álló összefüggő része sem.* Ha ezeket a tulajdonságokat a félkompakt terek viselkedésével hasonlítjuk össze, azt látjuk, hogy a dimenzió fogalma kompakt és félkompakt terekben teljesen megfelel a szemlélet követelményeinek, de ez a szemléletesség

[1] MAZURKIEWICZ 2.

megszünik, ha elhagyjuk a félkompakt tereket. Ebben azonban semmi meglepő sincs, mert az általános szeparábilis terek maguk is túlmennek a szemléletesség legszélsőbb határán is.

4. Az összegtétel.

Láttuk, hogy egy egyenes racionális pontjainak halmaza nulla-dimenziós, amint hogy nulla-dimenziós az irracionális pontok halmaza is; a kettő összege azonban (t. i. maga az egyenes) minden pontjában egy-dimenziós. De a racionális pontok halmaza F_σ, az irracionális pontoké pedig G_δ-halmaz. Ha csupa F_σ-halmaz összegét tekintjük, akkor már más a helyzet, mert[1] *egy szeparábilis metrikus tér megszámlálható sok legfeljebb n-dimenziós F_σ-halmazának összege is legfeljebb n-dimenziós halmaz.* Ezt a tételt szokás a dimenzióelmélet összegtételének nevezni. Legyen a T szeparábilis metrikus tér legfeljebb n-dimenziós A halmaza *egyszerre* F_σ- és G_δ-halmaz is (ez teljesül pl., ha A zárt vagy nyilt). Legyen ezenkivül B a T tér tetszőleges legfeljebb n-dimenziós részhalmaza. Könnyen beigazolható,[2] hogy *$A+B$ is legfeljebb n-dimenziós.* Nevezzük *maradandóan n-dimenziósnak* az olyan halmazt, amely bármely legfeljebb n-dimenziós halmazzal egyesítve is n-dimenziós összeget ad; akkor az előbbi tételt így is kifejezhetjük: *egy szeparábilis metrikus térnek az egyszerre F_σ- és G_δ-halmazai maradandóan n-dimenziósak.* Ennek a tételnek megforditása azonban még eléggé speciális kompakt terekben sem igaz, mert *a legtöbb kompakt térben lehet szerkeszteni*[3] *olyan maradandóan nulla-dimenziós halmazt, amely G_δ ugyan, de nem F_σ.*

Az F_σ-halmazokra vonatkozó összegtétel értékes korolláriuma a következő tétel:[4] *egy szeparábilis metrikus tér bármely*

---

[1] HUREWICZ 3, TUMARKIN 1, félkompakt terekre MENGER 2, kompakt terekre URYSOHN 1, 7.

[2] HUREWICZ 3.

[3] ALEXITS 2.

[4] TUMARKIN 1.

n-dimenziós A halmazához megadható egy A-t magában foglaló, n-dimenziós G_δ-halmaz. Másik fontos kiegészítője[1] az összegtételnek, hogy *egy szeparábilis metrikus tér bármely n-dimenziós részhalmaza szétbontható $n+1$ nulla-dimenziós halmazra, de nem bontható szét $(n+1)$-nél kevesebb nulladimenziós részre.* Ez a tétel még a következő valamivel kevesebbet mondó alakban is kifejezhető:[2] *egy m és egy n-dimenziós halmaz összege legfeljebb $(m+n+1)$-dimenziós.*

5. A dimenziórészek.

Jelöljük T^n-el a T metrikus tér mindazon pontjából álló halmazt, amelyekben T legalább n-dimenziós. T^n neve: a T tér *n-ik dimenziórésze.* Világos, hogy $T = T^{-1} \supset T^0 \supset T^1 \supset \ldots \supset T_n \supset \ldots$ és könnyű kimutatni,[3] hogy *minden dimenziórész F_σ-halmaz.* MENGER[4] beigazolta, hogy *kompakt vagy legalábbis félkompakt terekben T^n minden pontjában legalább n-dimenziós.* Egészen más azonban a helyzet akkor, ha T nem félkompakt, hanem csak szeparábilis metrikus tér. Ez esetben csak azt állíthatjuk,[5] hogy *T^n legalább $(n-1)$-dimenziós, sőt T^n minden nyílt részhalmaza is legalább $(n-1)$-dimenziós.* Nevezzük az olyan T metrikus teret *gyengén n-dimenziósnak,* amely n-dimenziós ugyan, de T^n csak $(n-1)$-dimenziós. A nem gyengén n-dimenziós metrikus tereket *erősen n-dimenziósnak* mondjuk. Már SIERPIŃSKI[6] is *szerkesztett gyengén 1-dimenziós teret,* majd ennek alapján MAZURKIEWICZ[7] *konstruált minden n-re gyengén n-dimenziós szeparábilis metrikus tereket.* Ennek ellenére is minden szeparábilis metrikus térre igaz[8] az, hogy *T^n zárt hüvelye*

---

[1] HUREWICZ **3**, TUMARKIN **1**, kompakt terekre URYSOHN **7**.

[2] HUREWICZ **3**.

[3] MENGER **2**, URYSOHN **7**.

[4] MENGER **4**.

[5] MENGER **4**.

[6] SIERPIŃSKI **1**.

[7] MAZURKIEWICZ **3**.

[8] HUREWICZ **3**, TUMARKIN **1**, kompakt terekre MENGER **2** és URYSOHN **7**.

mindig legalább n-dimenziós. Láttuk, hogy félkompakt terekben T^n minden pontjában n-dimenziós, vagy röviden *homogén n-dimenziós.* Ezt azonban még akkor sem állíthatjuk szeparábilis terekben, ha azok erősen n-dimenziósak. *Van ugyanis olyan erősen egy-dimenziós szeparábilis metrikus tér, amely nem tartalmaz egyetlen homogén egy-dimenziós részhalmazt sem.*[1]

6. A szétbontási tétel.

Ha egy telket elég kis parcellákra osztunk, a szemléletből következik, hogy mindig lesznek olyan pontok, amelyekben három parcella is találkozik. Ennek az egyszerű ténynek a következő preciz fogalmazása is igaz:[2] *ha egy n-dimenziós kockát véges sok elég kis átmérőjű zárt részre bontunk, mindig akadnak olyan pontok, amelyek $n+1$ ilyen részben foglaltatnak.* Ez az eredmény azt sejtteti, hogy a dimenzió fogalmát az alacsonyabb dimenziók előzetes definiciója, tehát rekurzivitás nélkül is lehet definiálni részekre való bontás segitségével. Az első ilyen irányú tétel a következő volt:[3] *minden n-dimenziós kompakt metrikus T térhez megadható olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy ha T-t véges számú ε-nál kisebb átmérőjű zárt részre bontjuk, akkor fellépnek olyan pontok, amelyek $n+1$ ilyen részhez tartoznak, de ez a felbontás úgy is eszközölhető, hogy egyetlen pont se tartozzék $n+2$ részhez.* Ezzel a tétellel az n-dimenziós kompakt tereket tökéletesen jellemeztük ugyan, maga a tétel azonban, mint később kiderült, egyrészt nem csak kompakt terekre érvényes, másrészt mélyebben fekvő dimenzióbeli sajátosságoknak is csak egyik speciális esetét fejezi ki, amennyiben a következő általános szétbontási tétel is érvényes:[4]

Ha T tetszőleges szeparábilis metrikus tér, akkor megadható olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy T bármely szétbontásánál véges

---

[1] MAZURKIEWICZ **4.**

[2] LEBESGUE **1, 2,** BROUWER **2,** SPERNER **1.**

[3] URYSOHN **1. 7,** MENGER **2.**

[4] MENGER **6,** HUREWICZ **1, 4,** ČECH **1.**

számú ε-nál kisebb átmérőjű $A_1, A_2, \ldots A_j$ *zárt halmazra, ezek között van mindig*

2 *olyan* A_{i_1}, A_{i_2} *halmaz, amelyeknél* $A_{i_1} \cdot A_{i_2}$ $(n-1)$*-dimenziós,*

3 *olyan* $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}$ *halmaz, amelyeknél* $A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot A_{i_3}$ $(n-2)$*-dimenziós,*

. . . .

k olyan $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ *halmaz, amelyeknél* $A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}$ $(n-k+1)$*-dimenziós,*

. . . .

$n+1$ *olyan* $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{n+1}}$ *halmaz, amelyeknél* $A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_{n+1}}$ 0*-dimenziós.*

Az $A_1, A_2, \ldots, A_j$ *zárt halmazok azonban úgy is választhatók, hogy ezek közül*

2 *közös pontjainak halmaza legfeljebb* $(n-1)$*-dimenziós,*

3 *közös pontjainak halmaza legfeljebb* $(n-2)$*-dimenziós,*

. . . .

k közös pontjainak halmaza legfeljebb $(n-k+1)$*-dimenziós,*

. . . .

$n+1$ *közös pontjainak halmaza legfeljebb* 0*-dimenziós,*

$n+2$ *közös pontjainak halmaza* (-1)*-dimenziós, vagyis pont nélküli legyen.*

7. Topologikus szorzatok dimenziója.

Az n-dimenziós euklidesi tér általánositásaként definiálhatjuk két metrikus tér T_1 és T_2 *topologikus szorzatát,* amelyet $T_1 \times T_2$-vel szokás jelölni. $T_1 \times T_2$ jelenti az összes (p_1, p_2) pontpárok halmazát, ahol p_1 a T_1, p_2 pedig a T_2 tér valamely pontja, ezenkívül $T_1 \times T_2$ metrikáját a következő módon definiáljuk: ha p_1q_1 jelenti a T_1 tér p_1, q_1 pontjai távolságát, p_2q_2 pedig a T_2 tér p_2, q_2 pontjai távolságát (mindkét távolságot természetesen T_1, illetőleg T_2 speciális metrikájában értelmezve), akkor a $T_1 \times T_2$ tér (p_1, q_2), (p_2, q_2) pontjainak egymástól való távolságát a $\sqrt{(p_1q_1)^2 + (p_2q_2)^2}$ kifejezés adja meg.

Könnyű bebizonyítani,[1] hogy *ha* T_1 *legfeljebb m-dimenziós,* T_2 *pedig legfeljebb n-dimenziós szeparábilis metrikus tér, akkor* $T_1 \times T_2$ *legfeljebb* $(m+n)$*-dimenziós lehet.* Sokáig igen kérdéses volt, vajjon igaz-e általában az az úgynevezett szorzattétel, mely szerint egy m- és egy n-dimenziós tér topologikus szorzata nem csak legfeljebb, hanem pontosan $(m+n)$-dimenziós. PONTRJAGIN[2] egy példája azt bizonyitja, hogy *a szorzattétel teljes általánosságban még kompakt metrikus terekre sem igaz.* PONTRJAGIN ugyanis *a négy-dimenziós euklidesi térben olyan két-dimenziós* K_1 és K_2 *kontinuumokat tud szerkeszteni, amelyeknél* $K_1 \times K_2$ *nem négy, hanem csak három-dimenziós.* De ha a szorzattétel teljes általánosságban nem helyes is, mégis érvényes egy olyan speciális esete, amely a legfontosabb esetekben, mint pl. az n-dimenziós euklidesi tér is, jól alkalmazható. Ez a tétel a következő:[3] *egy n-dimenziós kompakt és egy 1-dimenziós szeparábilis metrikus tér topologikus szorzata* $(n+1)$*-dimenziós.* Ebből azután indukcióval nyerjük, hogy *n legalább egy-dimenziós kompakt metrikus tér topologikus szorzata legalább n-dimenziós.* Nevezzük egy pillanatra *lokálisan (n-ed fokban) összefüggőnek* az olyan metrikus teret, amelynek minden pontjához található a pontnak tetszőlegesen kicsiny átmérőjű (n-ed fokban) összefüggő környezete, akkor azt is kimondhatjuk,[4] hogy *n lokálisan összefüggő kontinuum topologikus szorzata n-ed fokban lokálisan összefüggő n-ed fokú kontinuum.* Látjuk tehát, hogy *az n-dimenziós euklidesi tér n-ed fokban összefüggő és n-ed fokban lokálisan összefüggő is.*

8. Folytonos leképezések.

Könnyű belátni, hogy egy halmaz dimenziója folytonos leképezéssel növelhető vagy csökkenthető is. Ha pl. egy n-dimen-

---

1 MENGER 6.
2 PONTRJAGIN 1.
3 HUREWICZ 5.
4 ALEXITS 1.

ziós gömböt centrális projekcióval a középpontjára húzunk össze, akkor ezzel egy n-dimenziós kontinuumot egy 0-dimenziós halmazra (egy pontra) képeztünk le folytonosan. A megforditott esetre példa az egyenesdarab ismert PEANO féle leképezése az n-dimenziós kockára. Itt egy 1-dimenziós kontinuumot képezünk le folytonosan egy n-dimenziósra. Ennek ellenére azt mondhatjuk, hogy a folytonos leképezések nem egészen rendszertelenül befolyásolják a leképezett tér dimenzióviszonyait, mert e két fogalom közt a következő összefüggés áll fenn:[1] *ha egy n-dimenziós kompakt metrikus tér képe* $m \leq n$-*dimenziós T tér, akkor T-ben van olyan pont, amelynek ősei egy* $(n-m)$-*dimenziós halmazt alkotnak. Ha pedig egy n-dimenziós kompakt metrikus tér képe az* $m \geq n$-*dimenziós T tér, akkor T-ben van olyan pont, amelynek legalább* $m-n+1$ *őse van.*

A folytonos leképezések között dimenzióelméleti szempontból nagyjelentőségűek az úgynevezett *ε-leképezések*. Ezen a T tér olyan folytonos leképezését értjük, amelynél T képének bármely pontja minden ősétől egy előre megadott $\varepsilon > 0$ számnál kisebb távolságra fekszik. T valamely ε-leképezéssel nyert képét T *ε-képének* nevezzük. ALEXANDROFF[2] bebizonyította a következő tételt: *bármely kompakt, metrikus T térhez megadható olyan* $\varepsilon > 0$ *szám, hogy T minden ε-képének dimenziója legalább akkora legyen, mint T-é. Ha pedig T egy euklidesi térben fekvő n-dimenziós kompakt zárt halmaz, akkor bármely ε-hoz található olyan n-dimenziós komplexus,*[3] *amely T-nek ε-képe.* Ez a tétel teljesen jellemzi az euklidesi terek n-dimenziós kompakt és zárt részeit: ezek olyan halmazok, amelyek *minden* $\varepsilon > 0$ *mellett leképezhetők egy n-dimenziós komplexusra, de mindegyikhez megadható olyan kis* $\varepsilon > 0$ *is, hogy egy* $(n-k)$-*dimenziós komplexus* $(k > 0)$ *már ne lehessen*

---

[1] HUREWICZ 2.

[2] ALEXANDROFF 1.

[3] Az n-dimenziós komplexus kifejezés véges számú n-dimenziós poliéder összegét jelenti.

az adott kompakt és zárt halmaz ε-képe. Az ε-leképezésekhez hasonló topologiai fontosságuk van a *lényeges leképezéseknek.* A T térnek az n-dimenziós K kockára való folytonos leképezését akkor nevezzük lényegesnek, ha a leképezés nem modifikálható folytonosan oly módon, hogy K határlapjainak pontjai változatlanok maradjanak, de amellett K valamely belső pontja ne legyen képe T-nek. ALEXANDROFF beigazolta,[1] hogy *egy euklidesi tér minden n-dimenziós kompakt és zárt T részhalmaza bármely $m \leqq n$ mellett lényegesen leképezhető egy m-dimenziós kockára, de T minden $m > n$-dimenziós kockára való folytonos leképezése már nem lényeges.*

Az n-dimenziós euklidesi térben egyik legegyszerűbb folytonos leképezésfajta az ortogonális projekció. Nyilvánvaló, hogy projekcióval csökkenthetjük egy halmaz dimenzióját, de növelhetjük is, mint azt a következő példa mutatja: legyenek $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ olyan $0 \leqq t \leqq 1$ értékekre definiált folytonos függvények, amelyek a $0 \leqq t \leqq 1$ intervallumot a $0 \leqq x_k \leqq 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ n-dimenziós egységkockára képezik le (PEANO-görbe). Legyen A az $(n+1)$-dimenziós euklidesi térnek az a részhalmaza, amelyben az $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ pont koordinátáit a $0 \leqq t \leqq 1$ intervallumnak azzal a leképezésével nyerjük, amelynél t-hez hozzárendeljük az $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t), x_{n+1} = t$ pontot. Könnyű belátni, hogy A a $0 \leqq t \leqq 1$ intervallum topologikus képe, tehát egyik következő tételünk szerint *1-dimenziós kontinuum.* Ha azonban A-t az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordináták n-dimenziós euklidesi terére projiciáljuk ortogonálisan, akkor A projekciója a $0 \leqq x_k \leqq 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ n-dimenziós egységkocka, vagyis *A dimenziója 1-ről n-re növekszik.* Természetes, hogy az $m < n$-dimenziós euklidesi térnek egy n-dimenziós halmazát valamely n-dimenziós euklidesi térre projiciálva, a halmaz képe esetleg n-nél alacsonyabb dimenziójú is lehet. NÖBELING[2] azonban kimutatta, hogy *ha A az*

---

[1] ALEXANDROFF 2.

[2] NÖBELING 2.

$m > n$-dimenziós euklidesi tér n-dimenziós kompakt és zárt részhalmaza, akkor az m-dimenziós térben kijelölhető olyan n-dimenziós euklidesi résztér (n-dimenziós hipersík), amelyre ortogonálisan projiciálva A-t, A projekciója is n-dimenziós.

Utoljára említjük a legfontosabbat, t. i. a topologikus leképezéseket. Magából a dimenzió definiciójából következik, hogy *ha T^* a T metrikus tér topologikus képe, akkor T^* minden pontjában ugyanannyi dimenziós, mint ahány dimenziós T a megfelelő pontban.* Másszóval *a dimenzió topologikus invariáns.* Ebből az igen fontos tételből könnyen következtethető BROUWER klasszikus tétele,[1] amely szerint *egy n-dimenziós intervallum topologikus képe nem lehet egy $m \neq n$-dimenziós intervallum.* Ezt a tételt nevezte a régebbi topologia a dimenziószám topologikus invarianciája tételének.

9. Univerzális terek.

Már említettük URYSOHN alapvető tételét, amely szerint minden szeparábilis metrikus tér topologikusan leképezhető a végtelen-dimenziós alapintervallum egy részére. A végtelen-dimenziós alapintervallum tehát az összes szeparábilis metrikus terek univerzális tere, amennyiben azokat topologikai értelemben magában foglalja. Mivel a végtelen-dimenziós alapintervallum kompakt metrikus tér, URYSOHN tételéből következik, hogy minden szeparábilis metrikus tér topologikusan leképezhető egy végtelen-dimenziós kompakt metrikus tér egy részére. HUREWICZ[2] azonban azt is bebizonyította, hogy *bármely n-dimenziós szeparábilis metrikus tér topologikusan leképezhető egy megfelelően választott, ugyancsak n-dimenziós kompakt metrikus tér valamely részére.* Azt azonban még ezek alapján nem állíthatjuk, hogy van olyan n-dimenziós univerzális tér is, amelynek valamely részére minden n-dimenziós szeparábilis metrikus tér

---

[1] BROUWER 1.
[2] HUREWICZ 1.

topologikusan leképezhető. De már régebben ismeretes volt,[1] hogy a *nulla-dimenziós szeparábilis metrikus terek univerzális tere a* CANTOR-*féle diszkontinuum. Egydimenziós univerzális tér pedig egy a háromdimenziós euklidesi térben megrajzolható görbe.*[2] Vagyis, ha $n = 0$ vagy 1, akkor van n-dimenziós univerzális tér, amely mindkét esetben része a $(2n+1)$-dimenziós euklidesi térnek. Ezekből az esetekből következtette **MENGER**, majd vázolta is a bizonyítást,[3] hogy *minden n-dimenziós szeparábilis metrikus tér topologikusan leképezhető a $(2n+1)$-dimenziós euklidesi tér egy részére.* Ennek a tételnek azóta részletes bizonyításai is ismeretesek.[4] *Itt $2n+1$ a legalacsonyabb szám, mert bebizonyítható, hogy minden n-re meg lehet adni a $(2n+1)$-dimenziós euklidesi tér olyan n-dimenziós részhalmazát, amely a $2n$-dimenziós euklidesi tér semmilyen részére sem képezhető le topologikusan.*[5] De sikerült a $(2n+1)$-dimenziós euklidesi térben egy n-dimenziós univerzális teret is előállítani és pedig a következőképen: tekintsük a $(2n+1)$-dimenziós euklidesi térnek mindazon pontjait, amelyeknek $2n+1$ koordinátája közül *legfeljebb n racionális,* a többi (legalább $n+1$) tehát *irracionális.* Jelöljük ezek halmazát U_n-el. Az U_n halmaz n-dimenziós és NÖBELING[6] bebizonyította, hogy *U_n egy n-dimenziós univerzális tér, amennyiben minden n-dimenziós szeparábilis metrikus tér topologikusan leképezhető U_n egy részére.* Mindezekből a tételekből láthatjuk, hogy az euklidesi tér önmagában véve ugyan nagyon speciális természetű, mégis igen sokat foglal magában; ezeknek a tételeknek lényege ugyanis abban áll, hogy *még a legáltalánosabb véges dimenziójú szeparábilis metrikus terek is topologiailag azonosak az euklidesi tér részhalmazaival, a végtelen dimenziósak pedig topologikusan*

---

1 SIERPIŃSKI **1.**
2 MENGER **3.**
3 MENGER **6.**
4 NÖBELING **1,** PONTRJAGIN—TOLSTOWA **1.**
5 FLORES **1.**
6 NÖBELING **1.**

egyenlőnek tekinthetők a végtelen-dimenziós alapintervallum részeivel. A szeparábilis metrikus terek topologiai tulajdonságaik tekintetében tehát teljesen jellemezhetők az euklidesi terekben, illetőleg a végtelen-dimenziós alapintervallumban megvalósítható részhalmazokkal. Ha tehát valamilyen topologiai invariáns vizsgálatáról van szó, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a vizsgált szeparábilis tér része az euklidesi térnek.

II. AZ ABSZTRAKT TÉRTŐL AZ EUKLIDESI TÉRIG.

10. Az absztrakt tér fogalma.

Már az előző részben is láttuk a metrikus tér példáján, hogy a tér fogalmának lényege nem a koordinátákkal való leírás lehetőségében áll, hanem a pontok egymásközti viszonyában jut kifejezésre; ezért vezettük be már a legelején a metrikus teret. A metrikus tér azonban minden általánossága mellett is még mindig túlságosan speciális ahhoz, hogy a térfogalom legelemibb alakjának tekinthessük. A topologia szempontjából ugyanis csak az a lényeges, hogy a térben a folytonosság fogalma definiálható legyen és így topologikus leképezésekről beszélhessünk. De ennyi azután már elég is. Mivel pedig a folytonosság fogalma egyedül a torlódási pont fogalmán alapul, azt mondhatjuk végeredményben, hogy *a tér absztrakt értelemben olyan halmaz, amelyben valamilyen módon kijelölhetők bizonyos torlódási pontoknak nevezett elemek.* A térfogalom tehát két részből áll: a halmaz fogalmából és egy elvből, amellyel a halmaz elemeinek organizált jelleget adunk, amennyiben az elemeket két csoportra osztjuk, t. i. *torlódási pontokra és izolált pontokra.* Ezt a felfogást célszerű egy példával is illusztrálni. Tekintsük az összes 0 és 1 közé eső x számok halmazát, 0-t és 1-t is beleértve. A $0 \leq x \leq 1$ *számhalmaz* önmagában véve még nem tér, de azzá válik, ha elemeinek egymáshoz való viszonyát tisztázzuk, pl. ha két x_1, x_2 szám egymástól való távolságaként az $|x_1-x_2|$ számot tekintjük. De térként kezelhetjük a $0 \leqq x \leqq 1$ számhalmazt akkor is, ha a torlódási pont fogalmát minden távolságfogalom segítsége nélkül önkényesen definiáljuk, pl. a következő módon: a $0 \leqq x < \frac{1}{2}$ számhalmaz semmilyen részhalmazának sincs torlódási pontja, az $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ számhalmaz minden végtelen részhalmazának pedig egy és csakis egy torlódási pontja van, ez az $x = \frac{1}{2}$ szám. Ezáltal a $0 \leqq x \leqq 1$ számhalmaz absztrakt értelemben térré válik ugyan, de természetesen a torlódási pont szokatlan definíciója folytán ez az absztrakt tér nagyon idegenszerű. Ennek ellenére definiálhatjuk benne az összes topologiai fogalmakat, a zárt, nyílt, sűrű, stb. halmazokat, másszóval ennek a térnek is van topologiája, ha az el is üt a megszokottól. Megállapodhatunk tehát abban, hogy a legáltalánosabb értelemben vett absztrakt tér olyan halmaz, melynek elemeit pontoknak nevezzük és ezek felett a pontok felett egy organizációs elv uralkodik, amely a pontokat két csoportra osztja, ú. m. torlódási és izolált pontokra. A következőkben az absztrakt tér fogalmából indulunk ki és megmutatjuk, hogyan lehet innen eljutni a szemléletes térfogalomhoz néhány egyszerű halmazelméleti természetű axioma segítségével. Kijelöljük tehát többek közt az euklidesi tér helyét is az absztrakt terek minden térfogalmat felölelő anyagában.

Világos, hogy az absztrakt térben érvényes topologia természete attól függ, milyen axiomáknak vetjük alá azt az organizációs elvet, amellyel meghatározzuk a torlódási pont fogalmát. Ilyen axiomarendszerekben bővelkedik a matematikai irodalom. A legfontosabbak a következő szerzőktől származnak: Fréchet,[1] Riesz F.,[2] Hausdorff,[3] Kuratowski,[4] Sierpinski.[5] Tekintve, hogy ezek ismertetése igen messze vezetne, csak egyet fogunk közülük

[1] Fréchet 1.
[2] Riesz 1.
[3] Hausdorff 1.
[4] Kuratowski 1.
[5] Sierpiński 2.

ismertetni és pedig a torlódási pontnak a környezet fogalmán alapuló definícióját.

Tekintsük ismét a $0 \leqq x \leqq 1$ számhalmazt. Ebből közönségesen úgy csinálunk teret, hogy az x_1, x_2 számok távolságaként az $|x_1 - x_2|$ számot definiáljuk. De ugyanerre az eredményre juthatunk akkor is, ha a távolság fogalma helyett a tetszőleges x pont környezeteinek nevezzük az x pont köré írt különböző $\varrho > 0$ sugarú körök belsejét. Ezekután a $0 \leqq x \leqq 1$ tér valamely A részhalmaza torlódási pontjának nevezzük az olyan x pontot, amelynek minden környezete tartalmazza A-nak is legalább egy x-től különböző pontját. Ez az eljárás természetesen nincs a $0 \leqq x \leqq 1$ számok halmazához kötve, hanem csak a környezet fogalmához. Ezért az absztrakt terek közül *topologikus térnek* nevezhetünk minden olyan halmazt, amelynek bármely p eleméhez (pontjához) hozzárendeltünk bizonyos K_p halmazokat, ezeket *p környezeteinek* nevezzük és a torlódási pontot oly módon definiáljuk, hogy p-t akkor és csakis akkor nevezzük a tér A halmaza torlódási pontjának, ha p minden K_p környezete tartalmazza A-nak legalább egy p-től különböző pontját. Az ilyen általános topologikus terek természetesen még mindig nagyon idegenszerűek is lehetnek. Tekintsük pl. topologikus térnek az olyan euklidesi síkot, amelyben a tetszőleges p pont környezeteit a p-ben végződő egyenesdarabok alkotják. Ennek a topologikus térnek a szokottól nyilván lényegesen eltérő tulajdonságai vannak.

Ha azt kívánjuk, hogy a T topologikus térnek legalább alapvető tulajdonságai hasonlítsanak a metrikus tér ponthalmazainak megfelelő tulajdonságaihoz, akkor a topologikus térnek az előbb említett FRÉCHET-féle definicióját[1] néhány megszorításnak kell alávetnünk. Ezért azt követeljük, hogy a környezet fogalma teljesítse a következő feltételeket:[2]

1° *T bármely p pontjának környezetei tartalmazzák p-t.*

---

[1] FRÉCHET 3.

[2] HAUSDORFF 1.

2° *Ha* $K_p^{(1)}$ *és* $K_p^{(2)}$ *környezetei a p pontnak, akkor* $K_p^{(1)} \cdot K_p^{(2)}$ *is tartalmazza p egy környezetét.*

3° *Ha q tetszőleges pontja* K_p*-nek, akkor van q-nak olyan környezete, amely része* K_p*-nek.*

4° *Ha p és q különböző pontjai T-nek, akkor található p-hez olyan* K_p *és q-hoz olyan* K_q *környezet, amelyeknek nincs egyetlen közös pontjuk sem.*

A topologikus tereknek ezt a fajtáját HAUSDORFF-*féle topologikus térnek* nevezzük.

11. A Hausdorff-féle topologikus tér tulajdonságai és viszonya a metrikus térhez.

A HAUSDORFF-féle topologikus térben definiálhatjuk mindazokat az alapvető topologiai fogalmakat, amelyeket a metrikus térben definiáltunk. A ponthalmazelméleti alaptételek nagyjából meg is egyeznek ebben a kétfajta térben, de némely dologban már igen nagy lehet köztük az eltérés. Így pl. a metrikus terek több pontból álló összefüggő részhalmazai a szemléletnek megfelelően mindig legalább kontinuum számosságúak. Ezzel szemben URYSOHN szerkesztett[1] olyan összefüggő HAUSDORFF-*féle topologikus teret, amely csak megszámlálható végtelen sok pontból áll.* Ennek a *T* térnek igen meglepő tulajdonságai közül említésre méltó, hogy *T*-ben nem lehet olyan folytonos függvényt definiálni, amely két különböző értéket vesz fel, vagyis *minden T-ben definiált folytonos függvény szükségkép konstans.* Ennek alapján önként adódik az a probléma, milyen természetűek azok a topologikus terek, amelyekben van nem konstans folytonos függvény is? A választ a környezetekre vonatkozó 4° axioma további megszorításával adhatjuk meg. Tekintsük a következő axiomákat:

4*a*. *T minden p pontját nem tartalmazó F zárt halmazhoz*

---

[1] URYSOHN 4.

megadható olyan F-et tartalmazó G nyilt halmaz, amelynek p megfelelően választott K_p környezetével nincs közös pontja.[1]

4b. T minden közös pont nélküli zárt F_1, F_2 halmazpárjához megadható olyan F_1-t, illetőleg F_2-t tartalmazó G_1, illetőleg G_2 nyílt halmaz, amelyeknek nincs közös pontjuk.[2]

Könnyen belátható, hogy az $1°-3°$ és $4b$ axiomákat teljesítő tér a $4a$ axiomát is teljesíti, a $4a$ axiomából viszont a $4°$ axioma következik. Ennek megfordítottját azonban már nem állíthatjuk, a HAUSDORFF-féle topologikus terek tehát általánosabbak az $1°-3°$ és $4a$ axiomáknak alávetett, ú. n. *reguláris tereknél*, ezek pedig általánosabbak az $1°-3°$ és $4b$ axiomákat is teljesítő, ú. n. *normális tereknél*. Ezt láthatjuk a következő két példán: legyen T az euklidesi (x, y) koordináta-sík. Minden $(0, 0)$-tól különböző (x, y) pont környezetének az (x, y) köré írt $\varrho>0$ sugarú nyilt köröket tekintjük, a $(0, 0)$ pont környezeteiként pedig az $x^2+y^2<\varrho$ nyilt köröket, amelyekből azonban eltávolítjuk a $0<x<\varrho$, $y=0$ nyilt egyenesdarabot. Az így keletkező T tér HAUSDORFF-*féle topologikus tér ugyan, de nem reguláris.* Legyen most T az x, y-sík $y\geqq 0$ része, ahol az x-tengelyen kivül fekvő pontok környezetei a $\varrho>0$ sugarú körök, ha azonban (x, y) az x-tengelyen fekszik, akkor (x, y) környezeteiként az x-tengelyt (x, y)-ban érintő $\varrho>0$ sugarú köröket tekintjük. *Ez a T tér reguláris, de nem normális.* A nem konstans folytonos függvényekre felvetett problémánkat URYSOHN a következőkép oldotta meg:[3] *ahhoz, hogy egy T* HAUSDORFF-*féle topologikus tér közös pont nélküli F_1, F_2 zárt halmazaihoz meg lehessen adni olyan folytonos $f(x)$ függvényt, amely F_1 minden pontjában 0, F_2 pontjaiban pedig az 1 értéket veszi fel, ezenkívül T minden egyéb pontjában $0\leqq f(x)\leqq 1$, szükséges és elegséges, hogy T normális legyen.*

Bármely metrikus térben a p pontot tartalmazó nyilt hal-

---

[1] VIETORIS 1.

[2] TIETZE 1.

[3] URYSOHN 4.

mazokat tekintve környezeteknek, a metrikus teret HAUSDORFF-féle topologikus, sőt normális térként foghatjuk fel. Könnyen belátható ugyanis, hogy ilyen módon az 1°—3° és 4*b* axiomák is teljesülnek, tehát *minden metrikus tér egyúttal normális tér is*, következéskép *a metrikus tér fogalma speciálisabb a topologikus terek fogalmánál.* Mivel azonban csak a metrikus tereknek és — mint láttuk — különösen a szeparábilis metrikus tereknek vannak olyan tulajdonságaik, amelyek a szemléletes topologiához hasonló topologia megalapozását teszik lehetővé, felmerül az a probléma, mikor aequivalens topologiai szempontból egy HAUSDORFF-féle topologikus tér egy szeparábilis metrikus térrel? Másszóval: mikor lehet egy HAUSDORFF-féle topologikus teret egy szeparábilis metrikus térre topologikusan leképezni? Ezt az igen fontos kérdést is URYSOHN oldotta meg HAUSDORFF[1] következő axiomája segítségével:

5° *A T topologikus tér környezetei között legyen megszámlálható sok, jelöljük ezeket $K^{(1)}, K^{(2)},\ldots, K^{(n)},\ldots$-el, úgy hogy ha p tetszőleges pontja T-nek és K_p tetszőleges környezete p-nek, a kiválasztott $K^{(1)}, K^{(2)},\ldots, K^{(n)},\ldots$ környezetek között legyen p-nek egy K_p-ben foglalt környezete is.*

Ezekután kimondhatjuk URYSOHN metrizációs tételét:[2] *ahhoz, hogy egy T topologikus tér valamely szeparábilis metrikus térre topologikusan leképezhető legyen, szükséges és elégséges, hogy T normális legyen és eleget tegyen az 5° axiomának.* A normalitás feltételét ebben az esetben még enyhíteni is lehet, mert TYCHONOFF[3] kimutatta, hogy *az 5° axiomának eleget tevő reguláris terek egyszersmind normálisak is,* vagyis URYSOHN tételében *a normalitás feltételét T reguláris voltával is helyettesíthetjük.* A szeparábilis terek között is különösen fontosak a kompakt terek. Ezek metrizáció-problémáját szintén URYSOHN[4]

---

1 HAUSDORFF **1.**
2 URYSOHN **5.**
3 TYCHONOFF **1.**
4 URYSOHN **2.**

oldotta meg, midőn bebizonyította, hogy *valamely kompakt topologikus T tér akkor és csakis akkor képezhető le topologikusan egy kompakt metrikus térre, ha T az $1^\circ-4^\circ$ axiomákon kívül még az 5° axiomának is eleget tesz.*

A környezet fogalma nélkül is még egy igen egyszerű módon általánosíthatjuk a metrikus tér fogalmát, ha t. i. a távolság fogalmát a háromszög-egyenlőtlenség nélkül definiáljuk, vagyis ha a p, q pontok pq távolságát csak a következő két axiomának vetjük alá: 1° $pq = qp \geqq 0$ és 2° pq *akkor és csakis akkor* 0, *ha* $p = q$. Az olyan teret, amelyben ezzel a gyengébb távolságfogalommal definiáljuk a torlódási pont fogalmát, *félmetrikus térnek* nevezzük. A félmetrikus tér lehet olyan természetű is, hogy nyílt halmazait tekintve környezeteknek, az így keletkező tér még csak nem is HAUSDORFF-féle topologikus tér; viszont nem állíthatjuk minden HAUSDORFF-féle topologikus térről, de még csak minden normális térről sem, hogy félmetrikus. Így URYSOHN tételeit félmetrikus terekre nem alkalmazhatjuk minden további nélkül. Ezek metrizációjánál tehát más természetű tételekre van szükségünk. Az ezideig legáltalánosabb ilyennemű tételt CHITTENDEN[1] egy régebbi tételének kimélyítéseként WILSON[2] mondotta ki. Eszerint, *ha a félmetrikus T térben a pq távolság még azt a feltételt is teljesíti, hogy bármely két*

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots ; \; r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

pontsorozatnál a

$$\lim_{n \to \infty} (pq_n + q_n r_n) = 0$$

relációból

$$\lim_{n \to \infty} pr_n = 0$$

is következik és megfordítva a

$$\lim_{n \to \infty} pr_n \neq 0$$

reláció a

$$\lim_{n \to \infty} (pq_n + q_n r_n) \neq 0$$

[1] CHITTENDEN 1.
[2] WILSON 1.

relációt vonja maga után, akkor T topologikusan leképezhető egy metrikus térre. Figyelemreméltó, hogy ennél a tételnél a szeparábilitás fogalma nem játszik közre, WILSON tétele tehát minden félmetrikus térre alkalmazható. Említésre méltó, hogy a félmetrikus és a metrikus terek közé még egyéb jellegzetes tértípus is ékelődik be, a távolság fogalma tehát fokozatosan építhető fel.[1]

12. A konvex tér.

Az előző pontban a legfontosabb térfogalmak axiomatikus bevezetését és a köztük fennálló összefüggéseket igyekeztünk bemutatni. Különösen nagy súlyt helyeztünk azokra a feltételekre, melyek mellett az absztrakt tér aequivalensnek mondható a metrikus tér fogalmával. Mivel az absztrakt terek között a metrikus tér áll legközelebb a szemléletes térfogalomhoz, az euklidesi térhez vezető utunkon most már a metrikus tér fogalmából indulunk ki, és arra a kérdésre keresünk választ, milyen feltételeknek kell a távolság fogalmát alávetni, hogy egy metrikus tér minél inkább megközelítse a klasszikus geometriai térfogalmat? Ez esetben azonban már nem topologiai aeqivalenciára gondolunk, tekintve, hogy a topologikus leképezéseknél a metrika teljesen el is torzulhat, hanem a topologikus leképezéseknél speciálisabb leképezések invariánsaival fogunk foglalkozni. Legyen pq a T metrikus tér p, q pontjainak, p^*q^* pedig a T^* tér p^*, q^* pontjainak távolsága (a távolságokat természetesen T, illetőleg T^* sajátos metrikájában fejezve ki). Ha a T teret úgy képezzük le topologikusan a T^* térre, hogy bármely két p, q pont p^*, q^* képét tekintve $pq=p^*q^*$ legyen, akkor a leképezést *izometrikusnak*, T^*-t pedig *T izometrikus képének* nevezzük. Az izometrikus leképezés tehát az euklidesi kongruencia-fogalom metrikus aequivalense.

Az euklidesi tér egyik jellemző tulajdonsága konvex voltában áll, ami azt jelenti, hogy egy n-dimenziós euklidesi teret egy $m>n$-dimenziós euklidesi tér részeként fogva fel, az n-dimen-

[1] ALEXITS 3.

ziós tér bármely két pontját összekötő egyenesdarab is része az n-dimenziós térnek. Ha tehát az euklidesi térhez hasonló metrikájú absztrakt teret akarunk szerkeszteni, akkor elsősorban a konvexitás metrikus fogalmát kell bevezetnünk. Ezt MENGER [1] a háromszög-egyenlőtlenség megszorításával érte el. A háromszög-egyenlőtlenség szerint ugyanis bármely három pontra nézve $pq + qr \geqq pr$. Ha itt az egyenlőség jele érvényes, vagyis ha $pq + qr = pr$, akkor azt mondjuk, hogy *q a p és r pontok közbenső pontja.* Ezekután a T metrikus tér A részhalmazát *konvexnek* nevezzük, ha A tartalmazza bármely két pontjának valamely közbenső pontját is. Az így definiált konvexitás nyilvánvalóan invariánsa az izometrikus leképezéseknek. A konvex terek szerkezete tekintetében a következő főtétel érvényes: [2] *egy kompakt, vagy legalábbis teljes* [3] *konvex T tér bármely p, q pontpárjához megadható T-nek olyan S részhalmaza, amely izometrikus a pq hosszúságú egyenesdarabbal.* Ebből a tételből következik, hogy *euklidesi terekben a klasszikus értelemben definiált konvexitási fogalom megegyezik a metrikus konvexitás fogalmával.* További közvetlen folyomány ennek a tételnek, hogy *minden kompakt, vagy legalább teljes konvex tér lokálisan összefüggő.* [4] Ezekből a tételekből következik az is, hogy *egy konvex térben minden p, q pontpárhoz találhatunk legalább egy középpontot.* Ezen olyan r pontot értünk, amelyre nézve $pr = qr = \frac{pq}{2}$. Mivel egy pontpárnak általában nem csak egy középpontja van, a konvexitás fogalmát specializáljuk,

---

[1] MENGER 7.

[2] MENGER 7.

[3] A T metrikus tér akkor *teljes*, ha minden CAUCHY-féle pontsorozatának egy és csakis egy torlódási pontja van. Itt CAUCHY-féle pontsorozatnak neveztük az olyan $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ végtelen pontsorozatot, amelyre nézve minden $\varepsilon > 0$ mellett $p_n p_{n+k} < \varepsilon$, hacsak n elég nagy. Nyilvánvaló, hogy *minden kompakt metrikus tér teljes*, aminek megfordítása azonban már nem helyes, mint azt az euklidesi tér példája is igazolja. A teljes tér fogalma tehát általánosabb a kompakt metrikus tér fogalmánál.

[4] MENGER 7.

ha külön kikötjük, hogy minden pontpárnak csak egy középpontja legyen. Az ilyen terek között is különösen egyszerű szerkezetűek azok a konvex terek, amelyekben még a következő feltétel is teljesül: *minden pontpárnak csak egy középpontja van és minden p, q pontpárhoz találhatunk egy és csakis egy olyan r pontot, hogy q a p, r pontpár középpontja legyen.* Az ilyen tereket *regulárisan konvex tereknek* fogjuk nevezni. A regulárisan konvex és teljes terek nevezetes tulajdonsága,[1] hogy *két pontjuk egy és csakis egy egyenessel izometrikus halmazt határoz meg.*

Mivel a konvex és teljes terekben két pontot egy egyenesdarabbal izometrikus kontinuum köt össze, azért a konvex és teljes tereknél azt várhatjuk, hogy bennük a nem-euklidesi geometria valamelyik fajtája érvényes. Ezeknek a nem-euklidesi geometriáknak egyik ismert válfaja az úgynevezett MINKOWSKI-metrikájú geometria.[2] A MINKOWSKI-féle geometria és a konvex terek közti kapcsolatot BUSEMANN[3] a következő módon állapította meg. Legyen T olyan regulárisan konvex teljes tér, amely a következő axiomát is teljesíti: ha a $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ pontsorozatra és a q, r pontokra nézve

$$\lim_{n\to\infty} p_n q = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} (p_n q - p_n r) = \infty,$$

akkor fennállnak a

$$\lim_{n\to\infty} (p_n q - p_n r_1) = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} (p_n q - p_n r_2) = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} (p_n q - p_n r_3) = \infty$$

relációk is, ahol r_1 a p, q pontpár középpontja, r_2, illetőleg r_3 pedig azáltal van meghatározva, hogy p a q, r_2, illetőleg q a p, r_3 pontpár középpontja. Ezt az axiomát *határkör-axiomának* nevezzük. BUSEMANN tétele ezekután így mondható ki: *egy háromdimenziós T tér akkor és csakis akkor* MINKOWSKI-*metrikájú, ha T teljes, regulárisan konvex és teljesíti a határkör-axiomát.*

---

[1] MENGER 7.
[2] MINKOWSKI 1.
[3] BUSEMANN 2.

13. A felület metrikus görbülete.

Már a bevezetésben említettük azokat a nehézségeket, amelyekbe a felület fogalmának tisztán geometriai meghatározása ütközik. A klasszikus álláspont általában a GAUSS-féle felületben látja a felület fogalmát kikristályosodni, vagyis azokat a kétdimenziós kontinuumokat szokás differenciál-geometriai felületeknek tekinteni, amelyekben GAUSS—RIEMANN-féle normál-koordináták definiálhatók. Így a felület klasszikus definiciója teljesen a függvényekkel való előállíthatóság gondolatkörében mozog. Ha a felületek problémáját a metrikus tér lényegesen általánosabb szempontjából akarjuk vizsgálat tárgyává tenni, akkor elsősorban a GAUSS-féle görbület differenciál-geometriai fogalmát kell általános metrikus terekben meghatároznunk. Ezt a nehéz kérdést WALD[1] oldotta meg és ezzel utat nyitott a felületelmélet halmazelméleti-geometriai megalapozásának.

Jelöljük S_k-val a következő felületet: ha $k>0$, akkor S_k olyan $\frac{1}{\sqrt{k}}$ sugarú gömbfelület, amelyben két pont távolsága az őket összekötő legrövidebb $\frac{1}{\sqrt{k}}$ sugarú körív hosszúsága; ha $k=0$, akkor S_k az euklidesi sík; ha $k<0$, akkor S_k a k görbületű hiperbolikus sík. A T metrikus tér A részhalmazáról azt mondjuk, hogy *S_k-ba ágyazható*, ha S_k-ban található egy A-val izometrikus részhalmaz. WALD a T metrikus tér p pontja körül fekvő négy pontból álló halmazokat vizsgálja oly módon, hogy kiválaszt egy négy pontból álló A halmazt és keres olyan $k(A)$ számot, amely mellett az A halmaz $S_{k(A)}$-ba ágyazható. Tegyük fel, hogy akárhogyan is választjuk p körül a négy pontból álló A halmazt, a $k(A)$ számok egy meghatározott $k(p)$ számhoz konvergálnak az esetben, ha A a p pontra húzódik össze, vagyis, hogy minden $\varepsilon>0$ számhoz megadható olyan $\delta>0$, hogy $|k(p)-k(A)|<\varepsilon$ legyen, hacsak A mind a négy pontja p-től δ-nál kisebb távolságra fekszik. Feltéve, hogy p környezetei

[1] WALD 2, 3.

nem redukálódnak egy ívre és van ilyen módon definiált $k(p)$ szám, akkor *ezt a* $k(p)$ *számot nevezi* Wald T *görbületének a* p *pontban.*[1] Wald bebizonyítja,[2] hogy *ha egy kompakt és konvex tér minden pontjában meghatározható a* $k(p)$ *görbület, akkor* p*-ben a vonalelem* Gauss*-féle értelemben definiálható és a* Gauss*-féle görbület megegyezik* $k(p)$*-vel.* Eszerint a felületelmélet Wald következő alaptétele[3] segítségével osztható be a metrikus terek elméletébe: *a* T *metrikus tér akkor és csakis akkor* Gauss*-féle értelemben vett felület, ha* T *kompakt és konvex, ezenkívül minden pontjában létezik a* $k(p)$ *görbület. Ez esetben* $k(p)$ *nem más, mint a felület* Gauss*-féle görbülete.*

14. Az n-dimenziós euklidesi tér.

Az előző két pontban megismerkedtünk néhány csak a tér metrikájára vonatkozó kritériummal, amelyek segítségével bizonyos fajta nem-euklidesi terek metrikusan jellemezhetők. Most azt kérdezzük, milyen metrikus feltételek mellett izometrikus egy metrikus tér magával az n-dimenziós euklidesi térrel? Vezessük be mindenekelőtt a következő determinánst:

$$D(p_1, p_2, \dots p_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & (p_1p_2)^2 & (p_1p_3)^2 & \dots & (p_1p_n)^2 \\ 1 & (p_1p_2)^2 & 0 & (p_2p_3)^2 & \dots & (p_2p_n)^2 \\ 1 & (p_1p_3)^2 & (p_2p_3)^2 & 0 & \dots & (p_3p_n)^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & (p_1p_n)^2 & (p_2p_n)^2 & (p_3p_n)^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Itt p_ip_j a T metrikus tér p_i és p_j pontjainak egymástól való távolságát jelenti. Az n-dimenziós euklidesi teret Menger[4] a következő módon jellemezte: *a* T *metrikus tér akkor és csakis ak-*

---

[1] Wald 3.
[2] Wald 3.
[3] Wald 3.
[4] Menger 7.

kor izometrikus az n-dimenziós euklidesi térrel, ha 1° T *teljes és regulárisan konvex,* 2° T *bármely* $n+2$ *pontjára nézve*

$$D(p_1, p_2, \ldots, p_{n+2}) = 0,$$

3° T *bármely* $2 \leqq k \leqq n+1$ *pontjára nézve*

$$\operatorname{sgn} D(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \operatorname{sgn} (-1)^k \text{ vagy } 0,$$

4° *van T-nek olyan* $n+1$ *pontja, amelyre nézve*

$$\operatorname{sgn} D(p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}) = \operatorname{sgn} (-1)^{n+1}.$$

Hasonló módon sikerült egyéb olyan igen általános terek metrikus jellemzése is, amelyekben a távolság komplex szám.[1]

15. Befejezés.

A fent vázolt metrikus módszerrel sikerült metrikus terekben a differenciálgeometria számos egyéb kérdését is tárgyalni. Így pl. az ívgörbület és hosszúság, ezzel kapcsolatban a geodetikus görbék fogalma és exisztenciája is beilleszthető a metrikus geometriába.[2] Legújabban a variáció-számítás exisztenciaproblémáit is sikerült a halmazelméleti geometria módszereivel az eddiginél nagyobb általánosságban és amellett igen egyszerűen tárgyalni.[3] Az egydimenziós kontinuumok elmélete pedig a görbék kiterjedt elméletévé terebélyesedett.[4] Láthatjuk tehát, hogy a halmazelméleti geometria módszerei a matematika legkülönbözőbb ágazataiban is mindinkább polgárjogot nyernek. Ennek oka elsősorban az az általánosság és az axiomatikus gondolkodásnak az a tisztasága, amely a halmazelméleti geometriában lépten-nyomon megnyilatkozik. Minden jel arra mutat, hogy ezek a vizsgálatok még távolról sincsenek lezárva.

---

1 Wald **1.**

2 Menger **8.**

3 Menger **9.**

4 A görbeelmélet enciklopedikus áttekintését l. pl. Alexits, *Az új görbeelmélet.* Mat. és Fiz. Lapok **44** (1937). 1—37. l.

Remélhető, hogy ilyen módon a geometria látszólag egymástól független részei végső alapjukban a halmazelméleti geometriában kristályosithatók ki. Ezekre a kérdésekre bizonyára már a legközelebbi jövő megadja a választ.

Irodalom.

ALEXANDROFF, P. **1.** *Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehung zur elementaren geometrischen Anschauung.* Mathematische Annalen **98** (1928), 617—636. l.

2. *Dimensionstheorie.* Mathematische Annalen **106** (1932), 161—238. l.

ALEXITS, G. **1.** *Über das topologische Produkt der im kleinen zusammenhängenden Räume.* Monatshefte für Mathematik und Physik **39** (1932), 263—266. l.

2. *Über Baumkurven.* Monatshefte für Mathematik und Physik **40** (1933), 407—410. l.

3. *Sur la notion d'écart dans les espaces abstraits.* Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres, Varsovie. (Nyomtatás alatt.)

BROUWER, L. E. I. **1.** *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl.* Mathematische Annalen **70** (1910), 161—165. l.

2. *Über den natürlichen Dimensionsbegriff.* Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **142** (1912), 146—152. l.

BUSEMANN, H. **1.** *Über die Geometrien, in denen die «Kreise mit unendlichem Radius» die kürzesten Linien sind.* Mathematische Annalen **106** (1932), 140—160. l.

ČECH, E. **1.** *Sur la dimension des espaces parfaitement normaux.* Bulletin International de l'Académie de Bohême (1932), 1—18. l.

CHITTENDEN E. W. **1.** *On the equivalence of ecart and voisinage.* Transactions of the American Mathematical Society **18** (1917), 161—166. l.

FLORES, A. **1.** *Existenz n-dimensionaler Komplexe, die nicht in den R_{2n} einbettbar sind.* Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums **5** (1934), 17—23. l.

FRÉCHET, M. **1.** *Sur quelques points du calcul fonctionnel.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **22** (1906), 1—74. l.

2. *Les dimensions d'un ensemble abstrait.* Mathematische Annalen **68** (1910), 145—168. l.

3. *Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **165** (1917), 359—360. l.

HAUSDORFF, F. **1.** *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, 1914).

2. *Dimension und äusseres Mass.* Mathematische Annalen **79** (1919), 157—179. l.

HUREWICZ, W. **1.** *Über das Verhalten separabler Räme zu kompakten Räumen.* Proceedings of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **30** (1927), 425—430. l.

2. *Über stetige Bilder von Punktmengen II.* Proceedings of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **30** (1927), 159—165. l.

3. *Normalbereiche und Dimensionstheorie.* Mathematische Annalen **96** (1927), 736—764. l.

4. *Grundriss der Mengerschen Dimensionstheorie.* Mathematische Annalen **98** (1928), 64—88. l.

5. *Sur la dimension des produits Cartésiens.* Annals of Mathematics (2) **36** (1935), 194—197.

6. *Ein einfacher Beweis des Hauptsatzes über Cantorsche Manningfaltigkeiten.* Prace Matematyczno-Fizyczne **44** (1936), 289—292. l.

HUREWICZ, W.—MENGER, K. **1.** *Dimension und Zusammenhangsstufe.* Mathematische Annalen **100** (1928), 618—627. l.

KNASTER, B.—KURATOWSKI, C. **1.** *Sur les ensembles connexes.* Fundamenta Mathematicae **2** (1921), 206—253. l.

KURATOWSKI, C. **1.** *Sur l'opération $\bar{A}$ de l'Analysis Situs.* Fundamenta Mathematicae **3** (1922), 182—199. l.

2. *Topologie I.* (Warszawa—Lwów 1935), 285 l.

LEBESGUE, H. **1.** *Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces n et n+p dimensions.* Mathematische Annalen **70** (1910), 166—168. l.

2. *Sur les correspondances entre les points de deux espaces.* Fundamenta Mathematicae **2** (1922), 256—285. l.

MAZURKIEWICZ, S. **1.** *Sur la décomposition d'un domaine en deux sous-ensembles punctiformes.* Fundamenta Mathematicae **3** (1922), 65—75. l.

2. *Sur les problèmes $\varkappa$ et λ de Urysohn.* Fundamenta Mathematicae **10** (1927), 311—319. l.

3. *Sur les ensembles de dimension faible.* Fundamenta Mathematicae **13** (1929), 210—217. l.

4. *Sur le noyau n-dimensionnel d'un espace métrique, séparable.* Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres **22** (1929), 51—58. l.

MENGER, K. **1.** *Über die Dimensionalität von Punktmengen I.* Monatshefte für Mathematik und Physik **33** (1923), 148—160. l.

2. *Über die Dimensionalität von Punktmengen II.* Monatshefte für Mathematik und Physik **34** (1924), 137—161. l.

3. *Allgemeine Räume und Cartesische Räume.* Proceedings of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **29** (1926), 476—482. l.

4. *Das Hauptproblem über die dimensionelle Struktur der Räume.* Proceedings of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **30** (1927), 138—144. l.

5. *Zusammenhangsstufen und Cantorsche Mannigfaltigkeiten.* Proceedings of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **30** (1927), 705—709. l.

6. *Dimensionstheorie* (Leipzig und Berlin 1928), 318 l.

7. *Untersuchungen über allgemeine Metrik, I—III.* Mathematische Annalen **100** (1928), 75—163. l.

8. *Untersuchungen über allgemeine Metrik IV.* Mathematische Annalen **103** (1930), 466—501. l.

9. *Die metrische Methode in der Variationsrechnung.* Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums **8** (1937), 1—32. l.

MINKOWSKI, H. 1. *Geometrie der Zahlen* (Leipzig, 1896—1910).

NÖBELING, G. 1. *Über eine n-dimensionale Universalmenge im R_{2n+1}.* Mathematische Annalen **104** (1931), 71—80. l.

2. *Die Projektionen einer kompakten n-dimensionalen Menge im R_k.* Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquims **4** (1933), 24—25. l.

POINCARÉ, H. 1. *Pourquoi l'espace a trois dimensions. Dernières pensées* (Paris, 1913), 57—97. l.

PONTRJAGIN, L. 1. *Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **190** (1930), 1105—1107. l.

PONTRJAGIN, L.—TOLSTOWA, G. 1. *Beweis des Mengerschen Einbettungssatzes.* Mathematische Annalen **105** (1931), 734—745. l.

RIESZ, F. 1. *Stetigkeit und abstrakte Mengenlehre.* Atti del IV. Congresso Internazionale dei Matematici (Roma, 1908) **2**, 18—24. l.

SIERPIŃSKI, W. 1. *Sur les ensembles connexes et non-connexes.* Fundamenta Mathematicae **2** (1921), 81—95. l.

2. *La notion de dérivée comme base d'une théorie des ensembles abstraits.* Mathematische Annalen **97** (1927), 321—337. l.

SPERNER, E. 1. *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes.* Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **6** (1928), 245—272. l.

TIETZE, H. 1. *Beiträge zur allgemeinen Topologie I.* Mathematische Annalen **88** (1923), 290—312. l.

TUMARKIN, L. 1. *Über die Dimension nicht abgeschlossener Mengen* Mathematische Annalen **98** (1928), 638—656. l.

TYCHONOFF, A. 1. *Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn.* Mathematische Annalen **95** (1926), 139—142. l.

URYSOHN, P. 1. *Les multiplicités cantoriennes.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, **175** (1922), 440—442. l.

2. *Über die Metrisation der kompakten topologischen Räume.* Mathematische Annalen **92** (1924), 275—293. l.

3. *Der Hilbertsche Raum als Urbild der metrischen Räume.* Mathematische Annalen **92** (1924), 302—304. l.

4. *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen.* Mathematische Annalen **94** (1925), 262—295. l.

5. *Zum Metrisationsproblem.* Mathematische Annalen **94** (1925), 309—315. l.

6. *Mémoire sur les multiplicités cantoriennes I.* Fundamenta Mathematicae **7** (1925), 30—137. l.

7. *Mémoire sur les multiplicités cantoriennes I* (folytatás). Fundamenta Mathematicae **8** (1926), 225—359. l.

Veress, P. 1. *Valós függvények* (Budapest, 1934), 175 l.

Vietoris, L. 1. *Stetige Mengen.* Monatshefte für Mathematik und Physik **31** (1921), 173—204. l.

Wald, A. 1. *Komplexe und indefinite Räume.* Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums **5** (1934), 32—42. l.

2. *Zur Differentialgeometrie der Flächen I. Eine neue Definition der Flächenkrümmung.* Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums **6** (1935), 29—39. l.

3. *Begründung einer koordinatenlosen Differentialgeometrie der Flächen.* Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums **7** (1936), 24—46. l.

Wilson A. W. 1. *On semi-metric spaces.* American Journal of Mathematics **53** (1931), 361—373. l.

Alexits György.

L'ÉVOLUTION RÉCENTE DE LA GÉOMÉTRIE DES ENSEMBLES.

Le mémoire précédent est consacré à une étude encyclopédique de la géométrie des ensembles. La première partie s'occupe de la théorie de la dimension, due à Menger et Urysohn, dans la deuxième partie on a esquissé les fondements de la théorie des espaces abstraits. L'auteur a tâché de démontrer, surtout dans la deuxième partie, qu'on peut construire une chaîne continue d'axiomes topologiques et métriques qui assurent la connexion entre les espaces abstraits généraux et les espaces intuitifs (espaces euclidiens et certains espaces non-euclidiens).

Georges Alexits.

A DESCARTES-FÉLE JELSZABÁLY KITERJESZTÉSEIRŐL.

1. §. A jelszabály pontos formája.

A DESCARTES-féle jelszabály szerint egy valós együtthatós algebrai egyenlet pozitív gyökeinek a száma legfeljebb annyi, mint az együtthatók sorozatában fellépő jelváltások száma. Ismeretes az is, hogy, ha az egyenletnek minden gyöke valós, akkor az együtthatók sorozatában fellépő jelváltások száma pontosan egyenlő a pozitív gyökök számával. A DESCARTES-féle jelszabály utóbbi, ú. n. pontos formáját a következőképpen bizonyítom be.[1]

Ha az

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

valós együtthatós egyenletnek minden gyöke valós, akkor az $f(x)$ polinom gyöktényezős felbontása a következő alakú:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - p_i) \prod_{i=m+1}^{n} (x + q_i) = \varphi(x)\, \psi(x), \quad p_i > 0, \ q_i > 0.$$

E felbontás első faktorában, a

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - p_i) = x^m - \sum_{(i)} p_i x^{m-1} + \sum_{(i,j)} p_i p_j x^{m-2} - \cdots$$

[1] Ez a bizonyítás implicite bentfoglaltatik: Über die Descartes-sche Zeichenregel. (Acta litt. ac scient., Szeged, 7 (1935) 177—185. o.) c. dolgozatomban.

polinomban m jelváltás lép fel, tehát pontosan annyi, mint az $f(x)=0$ egyenlet pozitív gyökeinek a száma. Már most, ha a $\varphi(x)$ polinomot egy $(x+q_i)$ faktorral szorozzuk, ahol $q_i>0$, akkor egy ismert lemma[2] szerint a $\varphi(x)(x+q_i)$ polinom együtthatóinak sorozatában fellépő jelváltások száma legfeljebb annyi, mint amennyi a $\varphi(x)$ polinomében volt. E lemma ismételt alkalmazásával nyerjük, hogy a

$$\varphi(x)(x+q_{m+1})(x+q_{m+2})\ldots(x+q_n)=f(x)$$

polinom együtthatóinak sorozatában fellépő jelváltások száma legfeljebb m. De az $f(x)=0$ egyenlet pozitív gyökeinek a száma: m, és így a DESCARTES-féle jelszabály szerint az együtthatók sorozatában fellépő jelváltások száma legalább m. Ebből következik, hogy a jelváltások száma egyenlő a pozitív gyökök számával.

2. §. Transzcendens egyenletek pozitív gyökeiről.

A DESCARTES-féle jelszabály transzcendens egyenletekre is érvényes.[3] Transzcendens egyenleten értem az

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots=0 \tag{1}$$

egyenletet, ahol $f(z)$ olyan az egész z komplex-síkban konvergens hatványsor, amelynek végtelen sok együtthatója különbözik a zérótól. Ha az (1) alatti egyenlet valós együtthatójú, akkor pozitív gyökeinek a száma nem lehet nagyobb, mint az együtthatók sorozatában fellépő jelváltások száma. (Ha e jelváltások száma véges, akkor a pozitív gyökök száma is az.) A DESCARTES-féle jelszabálynak az 1. §-ban bebizonyított ú. n. pontos formája azonban már nem érvényes akármilyen fajta transzcendens egyenletre. Legyen például

$$f(z)=e^{-z}=1-\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\cdots=0.$$

---

[2] PÓLYA—SZEGŐ: Aufgaben und Lehrsätze... II. 38. old. 4.
[3] L. [2] 43. o., 38.

Az utóbbi egyenlet együtthatóinak sorozatában végtelen sok jelváltás lép fel, a pozitív gyökök száma pedig: nulla. Azonban áll a következő

I. tétel. *Legyen az* (1) *alatti egyenletben fellépő* $f(z)$ *transzcendens egészfüggvény nulladfajú, továbbá legyen az* (1) *egyenletnek minden gyöke valós, akkor az együtthatók sorozatában fellépő jelváltások száma egyenlő a pozitív gyökök számával.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $f(0)=1$, ; ekkor, mivel feltételünk szerint az $f(z)$ függvény nulladfajú, az $f(z)$ WEIERSTRASZ-féle szorzat előállítása a következő alakú:

$$f(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right), \tag{2}$$

ahol a_ν valósszám. Azt is feltesszük, hogy az $f(z)=0$ egyenlet pozitív gyökeinek a száma véges. Ugyanis, ha az egyenletnek végtelen sok pozitív gyöke van, akkor az általánosított DESCARTES-féle jelszabály szerint az együtthatók sorozatában fellépő jelváltások száma is végtelen, és így a pozitív gyökök száma megegyezik a jelváltások számával.

Tekintsük a (2) alatti szorzat előállítás n-ik részletszorzatát, ez a következő alakú n-edfokú polinom:

$$f_n(z)=\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)=a_{0n}+a_{1n}z+a_{2n}z^2+\cdots+a_{nn}z^n.$$

Mivel a $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z)=f(z)$ egyenletesen fennáll a komplex-sík bármely véges tartományában, azért WEIERSTRASZ egyik ismert tétele szerint, egy tetszés szerint megadott ν indexre

$$\lim_{n=\infty} a_{\nu n}=a_\nu. \tag{3}$$

Tekintsük most az (1) alatti hatványsornak egy tetszésszerinti

$$a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m$$

m-edfokú szeletét. A (3) alatti egyenlőség alapján következik, ha az n számot elegendő nagynak választjuk, hogy az $f_n(z)$ polinom együtthatóinak sorozatában legalább annyi jelváltás lép fel, mint az $a_0, a_1, \ldots, a_m$ sorozatban. Azonban, ha az n elegendő nagy, akkor tekintettel arra, hogy (1) egyenlet pozitív gyökeinek a száma véges, az $f_n(z)=0$ algebrai egyenlet együtthatóinak a sorozatában a DESCARTES-féle jelszabály pontos formája szerint annyi jelváltás lép fel, mint amennyi az (1) egyenlet pozitív gyökeinek a száma. E szerint az $a_0, a_1, \ldots, a_m$ sorozatban legfeljebb annyi jelváltás lép fel, mint amennyi az (1) egyenlet pozitív gyökeinek a száma, bármi legyen is az m értéke. Ebből következik, hogy az (1) egyenlet együtthatóinak sorozatában legfeljebb annyi jelváltás van, mint amennyi a pozitív gyökök száma. De másrészt a DESCARTES-féle jelszabály szerint a jelváltások száma legalább annyi, mint a pozitív gyökök száma, és így következik, hogy e két számérték egyenlő.

Megjegyzés. Az I. tétel még akkor is érvényes marad, ha a nulladfajú $f(z)$ függvényt egy $e^{\alpha z}$ faktorral szorozzuk, ahol $\alpha > 0$. Ugyanis egy ismert lemma[4] szerint az $e^{\alpha z}$-vel való szorzás az $f(z)$ együtthatósorozatában fellépő jelváltások számát csak csökkentheti, s mivel a DESCARTES jelszabálya szerint e jelváltások száma nem lehet kisebb, mint a pozitív gyökök száma, azért az $e^{\alpha z}$-vel való szorzás a jelváltások számát nem változtathatja meg.

A továbbiakban olyan transzcendens egyenleteket fogunk tekinteni, amelyeknek komplex (nem valós) gyökei is vannak, azonban feltesszük, hogy a komplex gyökök száma véges. A pozitív gyökökről is mindig feltesszük azt, hogy számuk véges (ellenkező esetben ugyanis a jelváltások száma is végtelen). Az ilyen egyenletekre áll a következő:

II. tétel. *Legyen az* (1) *alatti egyenletben fellépő valós együtthatós transzcendens egészfüggvény nulladfajú s legyen az egyenlet komplex és pozitív gyökeinek a száma véges.*

[4] L. [2] 42. o., 34.

Essenek a komplex gyökök mind olyan r sugarú körbe, amelynek centruma a negatív valós tengelyen fekszik, s a centrumnak a nullaponttól való távolsága nagyobb, mint $r\sqrt{\omega}$, ahol ω a pozitív és komplex gyökök számának az összegével egyenlő. Akkor az egyenlet pozitív gyökeinek a száma egyenlő az együtthatók sorozatában fellépő jelváltások számával.

Bizonyitás. Legyen az $f(z)$ függvény WEIERSTRASZ-féle szorzat előállítása a következő:

$$f(z)=\prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right)\prod_{\nu=1}^{m}\left(1-\frac{z}{\zeta_\nu}\right)\left(1-\frac{z}{\bar{\zeta}_\nu}\right),$$

ahol a_μ a valós, ζ_ν pedig a komplex gyököket jelenti. E végtelenszorzat ama $f_\omega(z)$ részletszorzatára, amely csupán az $f(z)=0$ egyenlet pozitív és komplex gyökeit tartalmazza, alkalmazom a következő tételemet:[5] *Ha egy n-edfokú, valós együtthatós algebrai egyenletnek összes komplex gyökei egy olyan r sugarú körben feküsznek, amelynek centruma a negatív valós tengelyen van, s a nullaponttól távolabb esik, mint $r\sqrt{n}$, akkor az egyenlet együtthatóinak sorozatában fellépő jelváltások száma egyenlő a pozitív gyökök számával.* E tétel szerint, tekintettel a II. tétel feltételére, következik, hogy az $f_\omega(z)$ részletszorzat együttható-sorozatában annyi jelváltás lép fel, mint amennyi az (1) egyenlet pozitív gyökeinek a száma. Most egy az előbbiekben már használt lemma,[6] s a DESCARTES-féle jelszabály alkalmazásával nyerjük, hogy bármely $f_n(z)$ részletszorzat együttható-sorozatában is pontosan annyi jelváltás lép fel, mint amennyi az (1) egyenlet pozitív gyökeinek a száma, feltéve, hogy $n\geqq\omega$. E megjegyzés alapján, tekintettel arra, hogy $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z)=f(z)$ egyenletesen áll fenn bármely véges tartományban, teljesen olyan módon, mint az I. tétel bebizonyításának megfelelő részé-

[5] LIPKA I.: Egy Fourier-féle tételről, Matematikai és Természettud. Értesítő 53 (1935) 149—154. o.
[6] L. [2]

ben, nyerjük, hogy (1) egyenlet együtthatóinak sorozatában legfeljebb annyi jelváltás lép fel, mint amennyi a pozitív gyökök száma. E szerint a DESCARTES-féle jelszabályból következik, hogy a jelváltások száma egyenlő a pozitív gyökök számával.

III. tétel. *Legyen az* (1) *alatti valós együtthatós* $f(z)$ *függvény nulladfajú, s legyen az* (1) *egyenlet komplex gyökeinek a száma:* k. *A negatív gyökööket jelölje:* $q_1 \geqq q_2 \geqq \cdots \geqq q_\mu \geqq \cdots$ *Az együtthatók sorozatában fellépő jelváltások száma legyen véges, s jelentse* $f^{(\varkappa)}(z)$ *az* $f(z)$ *deriváltjai közül az első olyant, amelynek együtthatói egyenlő előjelűek (tehát* $f^{(\varkappa)}(x)$ *állandó előjelű, ha* $x \geqq 0$*). Jelöljön* $-\delta \leqq y \leqq \delta$, $-\infty < x < \infty$ *egy olyan sávot, amely nem tartalmazza az*

$$f(z)=0,\ f'(z)=0,\ldots,\ f^{(\varkappa-1)}(z)=0 \qquad (4)$$
$$(z=x+iy)$$

egyenletek komplex gyökeinek egyikét sem. Akkor az (1) *alatti egyenlet együtthatóinak sorozatában pontosan annyi jelváltás lép fel, mint amennyi a pozitív gyökök száma, ha a negatív* q_μ *gyökökre teljesül még a következő feltétel*

$$\sum_{\mu=M+\varkappa-2}^{\infty} \frac{1}{q_\mu^2} > 8\frac{k}{\delta^2}, \qquad (5)$$

ahol q_M *az* (1) *egyenletnek egy olyan negatív gyökét jelenti, amelynek az abszolút értéke nagyobb, mint a* (4) *alatti egyenletek pozitív gyökei (ezeknek a száma véges) közül bármelyik.*

Bizonyítás. Tekintsük az

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ldots,\ f^{(\varkappa)}(x) \qquad (6)$$

sorozatot, ahol $f^{(\varkappa)}(x)$ állandó előjelű, ha $x \geqq 0$. Jelentse $v(x)$ a (6) alatti sorozatban fellépő jelváltások számát, és vizsgáljuk $v(x)$ változását, amikor $0 \leqq x < \infty$. $v(x)$ értéke nyilván akkor változik, ha x áthalad a (6) alatti függvények valamelyikének egy nullahelyén. Legyen először $\xi > 0$ az

$$f'(x),\ f''(x),\ldots,\ f^{(\varkappa-1)}(x) \qquad (6')$$

függvények valamelyikének nullahelye, azonban $f(x)$ ne tűnjék el az $x=\xi$ helyen. E szerint feltehetjük, hogy

$$f^{(i)}(\xi)=0, \qquad 1 \leqq i \leqq \varkappa-1,$$

azonban

$$f^{(i-1)}(\xi) \neq 0.$$

Megmutatjuk, hogy ekkor

$$f^{(i-1)}(\xi)\,f^{(i+1)}(\xi)<0. \tag{7}$$

Legyen rövidség kedvéért $f^{(i-1)}(x)=\varphi(x)$, $f^{(i)}(x)=\varphi'(x)$ és számítsuk ki a $-\log \varphi(x)$ második deriváltját; ez a következő alakú:

$$\frac{[\varphi'(x)]^2-\varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi^2(x)}=\sum \frac{1}{(x-\alpha_\mu)^2}+2\sum \frac{(x-\beta_\nu)^2-\gamma_\nu^2}{[(x-\beta_\nu)^2+\gamma_\nu^2]^2}, \tag{8}$$

ahol α_μ a $\varphi(x)$ függvény valós, $\beta_\nu \pm i\gamma_\nu$ pedig a képzetes nullahelyeit jelenti. Tekintsük a (8) alatti kifejezés első összegének azt a részét, amely kizárólag a negatív α_μ gyököket tartalmazza. Legyen ez a következő alakú

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(x+|\alpha_\nu'|)^2}, \qquad 0>\alpha_1' \geqq \alpha_2' \geqq \cdots .$$

Jelentse b a (4) alatti egyenletek pozitív gyökeinek egy olyan felső korlátját, amelyre a III. tétel feltételével összhangban, fennáll a $|q_M|>b$ egyenlőtlenség; továbbá legyen N az első olyan index, amelyre $|\alpha_N'|>|q_M|$. Ekkor a Rolle-féle tételt $(i-1)$-szer egymásután alkalmazva az $f(x)$ függvényre, a $\varphi(x)=f^{(i-1)}(x)=0$ egyenlet negatív gyökeinek reciprok négyzetösszegére nyerjük, hogy:

$$\sum_{\nu=N}^{\infty} \frac{1}{\alpha_\nu'^2} \geqq \sum_{\nu=M+i-1}^{\infty} \frac{1}{q_\nu^2}. \tag{9}$$

Már most, ha $0 \leqq x \leqq b$, akkor (9) szerint következik, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(x+|\alpha_\nu'|)^2} \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(b+|\alpha_\nu'|)^2} \geqq \frac{1}{4}\sum_{\nu=N}^{\infty} \frac{1}{\alpha_\nu'^2} \geqq \frac{1}{4}\sum_{\nu=M+i-1}^{\infty} \frac{1}{q_\nu^2}. \tag{10}$$

Mivel a (8) alatti kifejezés második összegében álló törtre fennáll, hogy

$$-\frac{(x-\beta_\nu)^2-\gamma_\nu^2}{[(x-\beta_\nu)^2+\gamma_\nu^2]^2} \leqq \frac{1}{\gamma_\nu^2},$$

azért, tekintettel arra, hogy egy LAGUERRE—BOREL-féle tétel szerint[7] a $\varphi(x)=f^{(i-1)}(x)=0$ egyenlet komplex gyökeinek a száma legfeljebb k, a (8) alatti második összegre a következő becslést nyerjük:

$$\frac{k}{\delta^2} \geqq -\sum \frac{(x-\beta_\nu)^2-\gamma_\nu^2}{[(x-\beta_\nu)^2+\gamma_\nu^2]^2}. \tag{11}$$

Végül, mivel a (8) alatti első összegre fennáll a

$$\sum \frac{1}{(x-\alpha_\mu)^2} \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(x+|\alpha'_\nu|)^2}$$

egyenlőtlenség, az (5), (10) és (11) alatti figyelembe vételével következik, hogy a (8) alatti kifejezés pozitív a $(0, b)$ intervallumban. Ebből látható, hogy, ha egy $\xi>0$ helyen valamelyik $f^{(i)}(\xi)=0$, akkor fennáll a (7) alatti reláció.

Ezzel megmutattuk, hogy a (6) alatti sorozatban a jelváltások száma nem változik, ha x a (6') alattí függvények valamelyikének egy nullahelyén halad át.

Most legyen $\xi>0$ az $f(x)$ függvény valamelyik nullahelye, tehát

$$f(\xi)=f'(\xi)=\cdots=f^{(k)}(\xi)=0,\ f^{(k+1)}(\xi)\neq 0.$$

Ekkor könnyen belátható, hogy a (6) alatti sorozatban pontosan k jelváltás vész el, amikor x áthalad a ξ helyen.[8]

Ezzel megmutattuk, hogy a (6) alatti sorozat tulajdonképpen egy ú. n. általánositott STURM-féle sorozat. E szerint, ha még

---

[7] BOREL E.: Leçons sur les fonctions entières, Paris (1900), 37. o.

[8] L. a Fourier—Budan-tétel bizonyitását, PERRON O.: Algebra II. (1933) 16. o.

az $x=0$ helyen $f(0)\neq 0$ s b nagyobb, mint a sorozatban fellépő függvények pozitív nullahelyeinek bármelyike, akkor

$$v(0)-v(b)=v(0)$$

pontosan egyenlő az (1) egyenlet pozitív gyökeinek a számával.

3. §. Egy Laguerre-féle problémáról.

A III. tétel bizonyításában alkalmazott módszer egy nevezetes LAGUERRE-féle probléma új megoldására vezetett. Legyen $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+z^n$ a továbbiakban egy n-edfokú, valós együtthatós polinom. LAGUERRE-től származik a következő idea: Keresendő egy $\varphi(z)$ valós együtthatós polinom, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: 1. $\varphi(z)=0$ egyenletnek nincsen pozitív gyöke. 2. Az $f(z)\varphi(z)=0$ egyenlet együtthatóinak sorozatában fellépő jelváltások száma pontosan egyenlő az egyenlet pozitív gyökeinek a számával. Ezzel a kérdéssel kapcsolatban, az előző paragrafusban alkalmazott módszer felhasználásával, bebizonyítjuk a következő ismert tételt:[9]

Az

$$(1+z)^k f(z)=0$$

egyenlet együtthatóinak sorozatában fellépő jelváltások száma pontosan egyenlő a pozitív gyökök számával, ha a k elegendő nagy pozitív egészszámot jelent.

Bizonyítás. Legyen $(1+z)^k f(z)=\varphi(z)$; bebizonyítjuk, hogy a

$$\varphi(z),\ \varphi'(z),\ \varphi''(z),\ldots,\ \varphi^{(n+k)}(z) \tag{12}$$

sorozat egy általánosított STURM-féle sorozat. A

$$\varphi(z)=(1+z)^k f(z)=$$
$$=\sum_{i=0}^{n+k}\left\{\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1}a_{n-1}+\binom{k}{i-2}a_{n-2}+\cdots+\binom{k}{i-n}a_0\right\}z^{n+k-i},$$
$$\binom{k}{\lambda}=0,\quad \text{ha}\quad \lambda<0,$$

---

[9] L. [2] 72. old., 187.

formulából könnyen látható, hogy a z^{n+k-i} együtthatója pozitív, ha i egy bizonyos korlát alatt marad. Legyen ugyanis

$$\mathrm{Max}(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|) = a$$

és legyen $i \leqq \frac{k}{2}$; akkor, mivel

$$\binom{k}{i} > \binom{k}{i-1} > \cdots > \binom{k}{i-n},$$

következik, hogy

$$\begin{aligned} \left|\binom{k}{i-1} a_{n-1} + \binom{k}{i-2} a_{n-2} + \cdots + \binom{k}{i-n} a_0\right| < \\ < an\binom{k}{i-1} < \binom{k}{i}, \end{aligned} \tag{13}$$

ha csak

$$\frac{k}{i} \geqq an + 1.$$

Legyen M olyan egészszám, melyre

$$M \geqq an + 2$$

s válasszuk a k számot a M egészszámú többszörösének; akkor a (13) alattiból következik, hogy z^{n+k-i} együtthatója pozitív, ha

$$i \leqq \frac{k}{M}.$$

Eszerint a (12) alatti sorozatot lezárhatjuk azzal az $f^{(x)}(z)$ függvénnyel, amelyre

$$x = n + k\left(1 - \frac{1}{M}\right),$$

mivel ennek az $f^{(x)}(z)$ függvénynek minden együtthatója pozitív és így $f^{(x)}(x) > 0$, ha $x \geqq 0$. Most már tekintsük a

$$\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(x)}(x) \tag{14}$$

sorozatot és legyen $\xi > 0$ a

$$\varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(x-1)}(x)$$

függvények valamelyikének nullahelye, azonban $\varphi(x)$ ne tűnjék el az $x=\xi$ helyen. Ekkor egy bizonyos λ-ra

$$\varphi^{(\lambda-1)}(\xi) \neq 0, \ \varphi^{(\lambda)}(\xi)=0, \qquad 1 \leqq \lambda \leqq \varkappa-1.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\varphi^{(\lambda-1)}(\xi)\varphi^{(\lambda+1)}(\xi) < 0. \tag{15}$$

Legyen $\varphi^{(\lambda-1)}(x)=\psi(x)$ s jelöljük α_μ-vel a $\psi(x)=0$ valós, $\beta_\nu \pm i\gamma_\nu$-vel pedig a komplex gyökeit. Tekintsük a 2. § (8) alatti kifejezésének első összegét (itt természetesen a (8) alatti két összegben fellépő tagok száma véges), amelyben a valós α_μ gyökök szerepelnek. Mivel a $\varphi(x)=0$ egyenletnek az $x=-1$ k-szoros gyöke, azért a $\varphi^{(\lambda-1)}(x)=\psi(x)=0$ egyenletnek legalább

$$k-(\varkappa-2)=\frac{k}{M}-n+2$$

-szeres gyöke; amely tetszésszerinti nagy szám, ha k értékét elegendő nagynak választjuk. E szerint a (8) alatti kifejezés első összegében fellépő

$$\frac{N}{(x+1)^2} \tag{16}$$

törtnek (ahol N az $x=-1$ gyök multiplicitása a $\psi(x)=0$ egyenletben) a számlálója tetszésszerinti naggya tehető, ha a k értékét elegendő nagynak választjuk. Ebből következik, hogy a (8) alatti kifejezés első összegének az értéke állandóan egy tetszés szerint megadott pozitív korlát felett marad, ha az x egy $0 \leqq x \leqq b$ intervallumban változik (feltéve természetesen, hogy k elegendő nagy). Most már, mivel a $\varphi^{(\nu)}(z)=0$, $(\nu=1, 2,\ldots, \varkappa-2)$ egyenlet komplex gyökeinek a száma nem lehet nagyobb, mint amennyi a $\varphi(z)=0$ egyenlet komplex gyökeinek a száma, következik, hogy a (8) alatti második összegre fennáll a következő becslés:

$$\frac{m}{\delta^2} \geqq -\sum \frac{(x-\beta_\nu)^2-\gamma_\nu^2}{[(x-\beta_\nu)^2+\gamma_\nu^2]^2}, \tag{17}$$

ahol m az $f(z)=0$ egyenlet komplex gyökeinek a számát és

$-\delta \leqq y \leqq \delta$ egy olyan sávot jelent, melybe a (14) alatti függvények egyikének sem esik komplex nullahelye.

Azt kell még megmutatnunk, hogy bármilyen nagy is a k egészszám, az előbbi sáv szélessége csupán az $f(z)=0$ egyenlet meghatározó adataitól függ, azonban független a k számtól. Ha ezt megmutattuk, akkor a k számot elegendő nagynak választva (16) és (17) alatti figyelembe vételével (8)-ból következik, hogy

$$\frac{[\psi'(x)]^2-\psi(x)\psi''(x)}{\psi^2(x)}>0,$$

ha $0\leqq x\leqq b$, és így fennáll a (15) alatti egyenlőtlenség.

Tehát mutassuk meg, hogy az előbbi $-\delta\leqq y\leqq\delta$ sáv szélessége független a k-tól. Ha a z változóra a

$$z=\zeta-1$$

transzformációt alkalmazzuk, akkor az $f(z)=0$ egyenlet gyökei csupán egy a valós x-tengellyel párhuzamos eltolódást szenvednek és $\varphi(z)$ átmegy a

$$\varphi(z)=(1+z)^k f(z)=\zeta^k f(\zeta-1)=\zeta^k g(\zeta)=\theta(\zeta)$$

függvénybe, ahol $g(\zeta)$ olyan n-edfokú pólinom, amelynek komplex nullahelyei minden olyan $-\delta\leqq y\leqq\delta$ sáv külsejébe esnek, amelynek külsejében feküsznek az $f(z)$ polinom komplex nullahelyei is. Ennek értelmében, mivel még

$$\frac{d^\nu\varphi(z)}{dz^\nu}=\frac{d^\nu\theta(\zeta)}{d\zeta^\nu},$$

elegendő azt megmutatnunk, hogy a $\theta^{(\nu)}(\zeta)=0$ egyenlet komplex gyökei egy olyan sávnak a külsejében maradnak, amelynek a szélessége csupán a $g(\zeta)=0$ egyenlet meghatározó adataitól függ, azonban független a k-tól. Írjunk a ζ helyett z betűt és számítsuk ki a $z^k g(z)$ függvény ν-ik differenciálhányadosát. Legyen $g(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+z^n$, akkor

$$\begin{aligned}\theta^{(\nu)}(z)&=\{z^k g(z)\}^{(\nu)}=\\&=\{k(k-1)\ldots(k-\nu+1)a_0+(k+1)k\ldots(k-\nu+2)a_1z+\cdots+\\&+(k+n-1)(k+n-2)\ldots(k+n-\nu)a_{n-1}z^{n-1}+\\&+(k+n)(k+n-1)\ldots(k+n-\nu+1)z^n\}\,z^{k-\nu}=\Phi_\nu(z)z^{k-\nu}.\end{aligned}$$

Osszuk a $\Phi_\nu(z)$ polinomot a $(k+n)(k+n-1)\ldots(k+n-\nu+1)=c$ szorzattal, akkor, ha $\nu\geqq n$, a következő polinomot nyerjük:

$$\frac{1}{c}\Phi_\nu(z)=\frac{k-\nu+n}{k+n}\,\frac{k-\nu+n-1}{k+n-1}\cdots\frac{k-\nu+1}{k+1}a_0+$$
$$+\frac{k-\nu+n}{k+n}\,\frac{k-\nu+n-1}{k+n-1}\cdots\frac{k-\nu+2}{k+2}a_1z+\cdots+$$
$$+\frac{k-\nu+n}{k+n}a_{n-1}z^{n-1}+z^n.$$

Most már, ha k értékét az n-hez viszonyítva igen nagynak választjuk, akkor az előbbi $\frac{1}{c}\Phi_\nu(z)$ polinomban az a_0 faktorára fennáll a következő asymptotikus egyenlőség

$$\frac{k-\nu+n}{k+n}\,\frac{k-\nu+n-1}{k+n-1}\cdots\frac{k-\nu+1}{k+1}\sim\left(1-\frac{\nu}{k}\right)^n,$$

s általában az a_i faktorára a

$$\frac{k-\nu+n}{k+n}\,\frac{k-\nu+n-1}{k+n-1}\cdots\frac{k-\nu+i+1}{k+i+1}\sim\left(1-\frac{\nu}{k}\right)^{n-i}$$

asymptotikus egyenlőség. Eszerint, ha k elegendő nagy, akkor az $\frac{1}{c}\Phi_\nu(z)$ polinom együtthatói tetszésszerinti keveset különböznek a

$$F(z)=a_0\left(1-\frac{\nu}{k}\right)^n+a_1\left(1-\frac{\nu}{k}\right)^{n-1}z+\cdots+$$
$$+a_i\left(1-\frac{\nu}{k}\right)^{n-i}z^i+\cdots+a_{n-1}\left(1-\frac{\nu}{k}\right)z^{n-1}+z^n$$

olinom együtthatóitól és így a

$$\frac{F(z)}{\left(1-\frac{\nu}{k}\right)^n}=a_0+a_1\frac{z}{1-\frac{\nu}{k}}+\cdots+$$
$$+a_i\left(\frac{z}{1-\frac{\nu}{k}}\right)^i+\cdots+\left(\frac{z}{1-\frac{\nu}{k}}\right)^n=0 \qquad (18)$$

egyenlet komplex gyökei is tetszésszerinti keveset fognak különbözni a $\theta^{(\nu)}(z)=0$ egyenlet komplex gyökeitől. A (18) alatti kifejezésből látható, hogy a $F(z)=0$ egyenlet bármely gyökét megkapjuk, ha a $g(z)=a_0+a_1z+\cdots+z^n=0$ egyenlet valamelyik z_i gyökét megszorozzuk $\left(1-\frac{\nu}{k}\right)$-val. Eszerint

$$z_i\left(1-\frac{\nu}{k}\right)$$

csak keveset különbözik a $\theta^{(\nu)}(z)=0$ egyenlet valamelyik gyökétől. Azonban

$$1\leqq\nu\leqq\varkappa=n+k\left(1-\frac{1}{M}\right),$$

amiből következik, hogy

$$1-\frac{\nu}{k}\geqq\frac{1}{M}-\frac{n}{k}.$$

Az utóbbi egyenlőtlenségből, mivel $J(z_i)>\delta$, nyerjük végül, hogy

$$\left|J\left\{z_i\left(1-\frac{\nu}{k}\right)\right\}\right|\geqq|J(z_i)|\left(\frac{1}{M}-\frac{n}{k}\right)>\frac{\delta}{M}.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a valós tengely befoglalható egy olyan fix szélességű sávba, amelybe (14) alatti $\varphi^{(\nu)}(z)=0$ egyenletek egyikének sem esik komplex gyöke, feltéve, hogy $\nu\geqq n$, továbbá, hogy k elegendő nagy.

Ha pedig $\nu<n$, akkor, mivel a $\binom{\nu}{i}$ binomiális együtthatók egy fix korlát alatt maradnak, a

$$\begin{aligned}\{z^kg(z)\}^{(\nu)}&=\{k(k-1)\ldots(k-\nu+1)g(z)+\\&+k(k-1)\ldots(k-\nu+2)z\binom{\nu}{1}g'(z)+\cdots+z^\nu g^{(\nu)}(z)\}z^{k-\nu}\end{aligned}\tag{19}$$

formulából nyomban következik, hogy

$$\frac{\{z^kg(z)\}^{(\nu)}}{k(k-1)\ldots(k-\nu+1)}\sim g(z).z^{k-\nu},$$

ha csak k elegendő nagy és $0\leqq z\leqq b$.

A (19) alatti formulából nyomban látható az is, hogy a (14) alatti függvények pozitív nullahelyeit magában foglaló $(0, b)$ intervallum hossza, kizárólag az $f(z)$ polinom meghatározó adataitól függ és független a k-tól. A (19) alatti kifejezés ugyanis állandóan pozitív, ha z pozitív és nagyobb mint a $g(z), g'(z), \ldots, g^{(\nu)}(z)$ függvények pozitív nullahelyeinek bármelyike.

Most már a paragrafus elején kimondott tétel bebizonyításának további részletei teljesen egyeznek a III. tétel bizonyításának megfelelő részeivel, s ezért azoknak ismétlésébe nem bocsátkozunk.

Lipka István.

ÜBER DIE ERWEITERUNG DER DESCARTES-SCHEN ZEICHENREGEL.

§. 1. Es enthält einen neuen Beweis des folgenden wohlbekannten Satzes: Hat eine algebraische Gleichung nur reelle Wurzeln, dann ist die Zahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Koeffizienten genau gleich der Anzahl der positiven Wurzeln.

§. 2. Satz I. Es sei

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

eine ganze Funktion vom Geschlechte Null. Die Gleichung $f(z)=0$ habe nur reelle Wurzeln, dann ist die Zahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Koeffizienten von $f(z)$ genau gleich der Anzahl der positiven Wurzeln.

Satz II. Die Funktion $f(z)$ vom Geschlechte Null habe nur reelle Koeffizienten, und die Anzahl der positiven und komplexen Wurzeln von $f(z)=0$ sei endlich. Die komplexen Wurzeln sollen alle in einem Kreise vom Radius r liegen, der in der Halbebene $R(z)<0$ liegt. Das Zentrum dieses Kreises vom Radius r liege auf der negativen reellen Achse und es habe einen Abstand von dem Nullpunkte, der grösser als $r\sqrt{\omega}$ ist, wo ω die Summe der Anzahl der positiven und komplexen Wurzeln bedeutet. Dann ist die Zahl der Zeichenwechsel in der Koeffizientenreihe von $f(z)$ genau gleich der Anzahl der positiven Wurzeln.

Satz III. Es sei k die Anzahl der komplexen Nullstellen der Funktion $f(z)$ vom Geschlechte Null. Es seien: $q_1 \geqq q_2 \geqq \cdots \geqq q_\mu \geqq \cdots$ die negativen Nullstellen. Die Koeffizientenreihe von $f(z)$ habe nur eine endliche Anzahl von Zeichenwechseln und $f^{(\varkappa)}(z)$ bedeute die erste solche Derivierte von $f(z)$ die ein konstantes Vorzeichen hat, wenn z positiv ist. Es bezeichne $-\delta \leq y \leq \delta$, $-\infty < x < \infty$ einen Streifen, in dem keine der Gleichungen

$$f(z) = 0,\ f'(z) = 0, \ldots, f^{(\varkappa-1)}(z) = 0 \tag{1}$$

eine komplexe Wurzel hat. Dann ist die Zahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Koeffizienten gleich der Anzahl der positiven Wurzeln von $f(z)$, wenn die negativen Wurzeln q_μ der Ungleichung

$$\sum_{\mu = M + \varkappa - 2}^{\infty} \frac{1}{q_\mu^2} > 8 \frac{k}{\delta^2}$$

genügen, wo q_M eine negative Wurzel bedeutet, die einen grösseren Betrag $|q_M|$ hat als alle positive Wurzeln der Gleichungen (1).

§. 3. Es enthält eine neue Behandlung eines bekannten LAGUERRE-schen Problems.

Stephan Lipka.

MEGJEGYZÉS A TÖRÉSES FÉNYVISSZAVERŐDÉSHEZ

Ismeretes, hogy a víz alatt lévő tárgynak a víz felszínétől való távolsága a ténylegesnél kisebbnek látszik. Ezen alapszik az is, hogy a folyadékkal telt edénynek az alja bizonyos látszólagos deformációt szenved. Az utóbbi jelenséggel, abban a speciális esetben amikor az edény alja síkszerű L. MATTHIESSEN foglalkozott,[1] s többek között a következő eredményt találta: Egy vízmedence alján lévő egyenes vonaldarab, amely a megfigyelő szemén áthaladó függőleges síkban fekszik, egy negyedrendű síkgörbe darabjának látszik. MATTHIESSEN ezt a görbét «nyujtott conchoid»-nak nevezi. Ugyanerre az eredményre jutott újabban, habár más úton KEDVES M.[2] is, s megjegyezte, hogy a szóbanforgó negyedrendű görbe hasonlóan szerkeszthető, mint a NIKOMEDES-féle conchoid. Hangsúlyozni kívánom, hogy *az itt szereplő negyedrendű görbe tulajdonképpen egy a görbeelméletben jól ismert nagy görbeosztálynak a tagja.* Ez a görbeosztály a *cissoid* néven ismert görbék összessége.

Tekintsünk olyan vízzel telt edényt, amelynek az alja nem szükségképpen síkszerű. A megfigyelő szemén át fektessünk egy függőleges síkot, amely az edény alját egy görbedarabban metszi. Az alábbiakban megmutatom, hogy ennek a görbedarabnak, a fénytörés által keletkezett ú. n. astigmatikus képe egy cissoidnak a darabja.

---

[1] L. MATTHIESSEN: Das astigmatische Bild des horizontalen, ebenen Grundes eines Wasserbassins. Annal. d. Physik IV. 6 (1901) 347. o.

[2] KEDVES M.: Töréses fényvisszaverődés. Mathematikai és Phys. Lapok 30—31 (1924) 30—40. o.

A cissoid definiciója a következő.[3] Legyen k és k' két tetszésszerinti, egy síkban fekvő görbe és O egy ugyanott fekvő pont. Az O ponton keresztül fektessünk egy g egyenest, amely a k görbét P pontban, k' görbét pedig P' pontban metszi. A g egyenesen jelöljük meg azt a Q pontot, amelyre $OQ = OP' - OP$ (az összes P, ill. P' metszéspontokra vonatkozólag). Ha most a g egyenest az O pont körül forgatjuk, akkor Q pont leír egy c görbét, amelyet k és k' görbék O pontra (pólusra) vonatkozó cissoidjának nevezünk. Ez a cissoidális szerkesztés, röviden szólva abban áll, hogy két adott görbe rádiuszvektorát egymásból levonjuk. Ebben a definicióban természetesen bentfoglaltatik az összeadás is, hiszen nem kell egyebet tennünk, mint a k görbét annak O pontra vonatkozó szimmetrikusával helyettesíteni.

Az előbbiekben felvetett kérdést egy konkrét esetben fogjuk tárgyalni. Tekintsünk egy félgömb alakú, folyadékkal telt edényt. A megfigyelő szeme essék a gömb centrumán áthaladó függőleges egyenesbe. Ha a megfigyelő szemén s a gömb középpontján át egy függőleges síkot fektetünk, akkor ez a sík a félgömböt egy $\varkappa$ félkörben metszi. Legyen R a $\varkappa$ félkör egy tetszésszerinti pontja és jelölje O azt a pontot, amelyet a megfigyelő szeme elfoglal. A $\varkappa$ félkör egy R pontját a megfigyelő abban a P' pontban fogja megpillantani, amelyet a következőképpen nyerünk:[4] Az R pontból kiinduló sugár P-ben megtörve jut el az O pontba. Ha az OP-nek a meghosszabbitását metszésbe hozzuk az R ponton áthaladó függőleges egyenessel, akkor nyerjük a P' pontot.

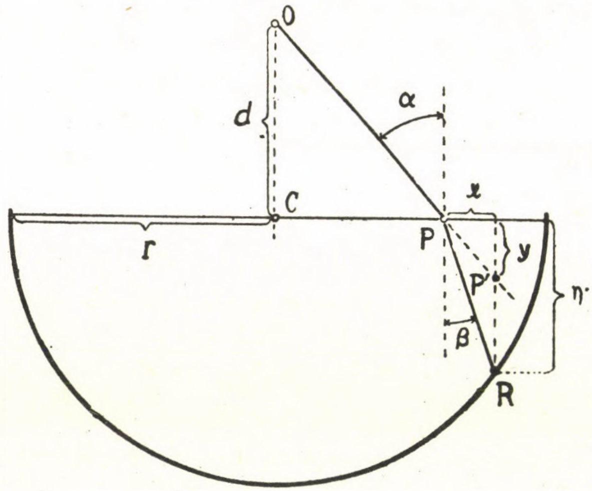
Az OP félsugáron mérjük le az $OT = PP'$ vonaldarabot, akkor a T pont, ha R változik, leír egy k' görbét. Legyen k az az egyenes, amelyben a $\varkappa$ félkör síkja metszi a folyadék felszínét, akkor nyilvánvaló, hogy a P' pont a k és k' görbéknek O-ra vonatkozó cissoidját írja le, ha az R pont változik. Ez a

---

[3] H. WIELEITNER: Spezielle ebene Kurven, Leipzig (1908) 2. o.

[4] L. pl. RHORER L.: Physika (1914) 387. o.

c cissoid a $\varkappa$ félkör astigmatikus képe. Megmutatjuk, hogy a c görbe egy *negyedrendű cissoid.* Mindenekelőtt meghatározzuk a k' alapgörbe egyenletét. Legyen α az OP sugár beesési szöge,



β a törésszöge és n jelentse a törésmutatót. Az ábra szerint nyilván állanak a következő formulák:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \tag{1}$$

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg}\alpha, \tag{2}$$

$$\frac{x}{\eta} = \operatorname{tg}\beta, \tag{3}$$

$$(d \operatorname{tg}\alpha + x)^2 + \eta^2 = r^2. \tag{4}$$

A (3) és (4) alatti formulákból következik, hogy

$$x^2 = \operatorname{tg}^2\beta\left\{r^2 - (d \operatorname{tg}\alpha + x)^2\right\}, \tag{5}$$

(1) és (2) alattiból pedig, hogy

$$\operatorname{tg}^2\beta = \frac{x^2}{(n^2-1)\,x^2 + n^2y^2}\cdot \tag{6}$$

Végül a (6) alattiból (5) és (2) figyelembe vételével, nyerjük a k' alapgörbe következő egyenletét:

$$n^2y^4 + n^2x^2y^2 + 2dx^2y + d^2x^2 - r^2y^2 = 0. \qquad (7)$$

Ez a görbe olyan negyedrendű (elliptikus) görbe, amelynek két kettőspontja van. Az egyik kettőspont az: $x = 0$, $y = 0$ pont. A másik kettőspontot megkapjuk, ha bevezetjük a (7) alatti egyenletbe az (x, y, z) homogén koordinátákat. Ekkor $z = 0$-ra a (7)-ből a következő egyenletet nyerjük

$$n^2y^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Ebből az egyenletből látható, hogy az (1, 0, 0) végtelen távoli pont izolált kettős pontja a k' görbének. Most már a c cissoid rendje, a nélkül, hogy annak egyenletét levezetnénk, könnyen meghatározható a következő tétel alapján:[5]

Ha a k és k' alapgörbék m-, ill. n-ed rendűek és ezek a görbék β-, ill. γ-szor mennek át az O póluson, továbbá ha a végtelenben α metszéspontjuk van, akkor a k és k' görbék O-ra vonatkozó cissoidjának rendje:

$$\nu = 2mn - (\beta n + \gamma m + \alpha). \qquad (8)$$

A mi esetünkben k egy egyenes, tehát $m = 1$. A k' görbe kétszer halad át az O póluson, mivel a (0, 0) pont kettőspontja k'-nek. Tehát $\gamma = 2$; $\beta = 0$. A k és k' görbéknek a végtelenben $\alpha = 2$ számú metszéspontja van, mivel az előbbiek szerint az (1, 0, 0) pont k'-nek kettőspontja. Ezek figyelembe vételével (8)-ból következik, hogy

$$\nu = 4.$$

Abban az esetben amikor az edény alja síkszerű, egy az alapon fekvő egyenes vonaldarabnak az astigmatikus képe szintén cissoid lesz. Ennek a cissoidnak az alapgörbéje egy egyenes

---

[5] L [3] 3. o.

és egy ellipszis. Ugyanis, ha a folyadék mélységét t-vel jelöljük, akkor a (3) alatti helyett a következő formula érvényes

$$\frac{x}{t} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Az utóbbi formulából (6) szerint adódik a következő egyenlet

$$(n^2 - 1)x^2 + n^2y^2 = t^2.$$

Ez egy ellipszis egyenlete, mivel $n > 1$. Ebben az esetben

$$m = 1, \ n = 2, \ \beta = \gamma = 0, \ \alpha = 0,$$

és így (8)-ból következik, hogy a szóbanforgó *cissoid negyedrendű.*

Lipka István.

EINE BEMERKUNG ZUR REFLEXION MIT BRECHUNG.

Das Ziel der vorstehenden Arbeit ist eine allgemeine Methode zur Behandlung des folgenden bekannten Problems zu geben: Es ist die Form zu bestimmen, in der einem in ein mit Wasser gefülltes Gefäss hineinschauenden Auge der Grund dieses Gefässes erscheint. Es wird ein Halbkugel-förmiges Gefäss betrachtet, gefüllt mit Flüssigkeit. Der Schnitt des Grundes mit der Einfallsebene erscheint in diesem Falle als eine Kissoide von vierter Ordnung.

Stephan Lipka.

SIMMONS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI TÉTELÉNEK ÚJ BIZONYÍTÁSA ÉS ÁLTALÁNOSÍTÁSA.

Bevezetés.

Egy urnában a fekete és b fehér golyó van ($a>b$). Végezzünk $n=N(a+b)$ húzást, a golyókat minden húzás után visszatéve az urnába. Az n húzás alatt kihúzott fehér golyók száma legyen S. Érvényes a következő tétel:

Valószínűbb, hogy S kisebb Nb-nél, mint, hogy ezt a számot meghaladja, vagyis, ha az $S<Nb$, illetőleg $S>Nb$ egyenlőtlenségek valószínűségeit P-, illetőleg Q-val jelöljük, úgy

$$P>Q, \quad \text{ha} \quad a>b.$$

Továbbá, ha N elég nagy, a $P-Q$ különbség megközelítően egyenlő a

$$\Delta=\frac{a-b}{3\sqrt{2\pi nab}}$$

értékkel.

Ezt a tételt a fentitől kissé eltérő fogalmazásban és értelmezésben SIMMONS bizonyította be egy nagy, 43 oldalra terjedő értekezésben,[1] érdekes kísérleti adatokkal, továbbá a tétellel

[1] T. C. SIMMONS, *A New Theorem of Probability.* Proceedings of the London Mathematical Society, 26. kötet, 1894—95, 290—334. oldal.

SIMMONS tételével foglalkozik RAGNAR FRISCH munkája is: *Solution d'un problème du calcul des probabilités (Premier problème de* SIMMONS*).* Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1924, 153—174. oldal és Comptes Rendus, 1924 nov.

SIMMONS tételének részleteit, valamint a rávonatkozó irodalmi utalásokat JORDAN KÁROLY professzor Úrnak köszönöm, aki e dolgozat elkészítésénél egyébként is nagymértékben segítségemre volt.

kapcsolatos kérdések részletes tárgyalásával együtt. Azonban egyszerűsége és fontossága ellenére kevesen ismerik és csaknem valamennyi valószínűségi könyvből hiányzik.

Dolgozatunk célja, hogy a tételt (az általános ismétléses valószínűségekre vonatkoztatva) bebizonyítsuk és általánosítsuk. Munkánkat három fejezetre osztjuk. Az elsőben az ismétléses valószínűségek főbb tulajdonságainak ismertetése után a SIMMONS-tétel első részét, a $P>Q$ egyenlőtlenséget bizonyítjuk be és néhány evvel összefüggő kérdést tárgyalunk. A második fejezet a tétel második részét, azaz a $P-Q$ különbség aszimptotikus értékének meghatározását tartalmazza. Ez a bizonyítás SIMMONS módszerének nagymérvű egyszerűsítésével történik.

Visszatérve a tételnek fenti egyszerű fogalmazására, legyen p a fehér golyó húzásának valószínűsége: $p=\frac{b}{a+b}$, és igy $Nb=np$ a fehér golyók számának aritmetikai átlaga. *Itt tehát az np átlag egész szám* és tételünk, valamint annak az első két fejezetben adott bizonyítása csak erre a speciális esetre vonatkozik. A harmadik fejezetben mellőzzük ezt a megszorító feltételt és a $P-Q$ különbség aszimptotikus értékét az általános esetben határozzuk meg. Az itt követett bizonyítás SIMMONS eljárásától teljesen eltérő.

1. §. A $P>Q$ egyenlőtlenség bizonyítása.

Legyen két egymást kizáró (vagy ellentétes) E, illetőleg E' esemény bekövetkezésének valószínűsége p, illetőleg q (úgy, hogy $p+q=1$). Annak a valószínűsége, hogy n kisérlet folyamán az E esemény éppen r-szer, az E' esemény pedig $(n-r)$-szer következzék be, ismeretes tétel szerint egyenlő a

$$T_r=\binom{n}{r}p^r q^{n-r} \tag{1}$$

értékkel.

Említsük meg ezen «ismétléses valószínűségek» néhány, egyébként jól ismert tulajdonságát, melyekre a következő tárgyalásban szükségünk lesz.

a) A T_r valószínűség a $(p+q)^n$ kéttagú hatványsorba fejtett alakjában az $r+1$-ik taggal egyenlő.

b) A kifejtés tagjai között T_m a legnagyobb tag, ha m egyenlő az $(n+1)p$-ben foglalt legnagyobb egész számmal. Ha np egész szám, amit (mint már jeleztük) a dolgozat első részében feltételezünk, akkor $m=np$, vagyis az észlelt «gyakoriság» m/n egyenlő a p valószínűséggel.

Az np szorzatnak még más szerepe és értelmezése is van, melyeket érdemes megvizsgálni. Ha a T_r valószínűséget, mint p függvényét tekintjük és keressük azt az értéket, mely mellett maximumát felveszi, tehát ahol $\frac{dT_r}{dp}=0$, ugyancsak az $r=np$ összefüggést találjuk.

Határozzuk most meg az r értékek átlagát:

$$m=\sum_{r=0}^{n} rT_r = np. \qquad (2)$$

Ha az np szorzat egész szám, az r értékek átlaga és a T_r valószínűségek maximumának helye összeesik.

c) A legvalószínűbb kombináció valószínűsége tehát megközelítőleg, és ha np egész szám, akkor pontosan

$$T_m=\binom{n}{m}p^{np}q^{nq}. \qquad (m=np)$$

Stirling képletének alkalmazása, nagy n esetében, T_m-re a következő közelítő értéket adja

$$T_m \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}. \qquad (3)$$

Ha $n \to \infty$, a T_m valószínűség 0-hoz közeledik.

Simmons tételének első része azt mondja, hogy $p<q$ esetében az átlagnál (vagy a maximumnál) kisebb r értékek valószínűsége nagyobb, mint az átlagnál (vagy a maximumnál) nagyobb r értékek valószínűsége, vagy másképpen, hogy negatív

$r-np$ eltérés valószinűbb, mint pozitiv eltérés. Ha az E esemény bekövetkezésének valószínűsége $V\{E\}$, és

$$P=V\{r<m\}, \quad Q=V\{r>m\},$$

akkor tételünk a következőképpen fogalmazható:

A $p<q$ egyenlőtlenség maga után vonja a $P>Q$ egyenlőtlenséget.

A fenti jelölések mellett

$$P=\sum_{r=0}^{m-1} T_r, \quad Q=\sum_{r=m+1}^{n} T_r. \tag{4}$$

A bizonyitáshoz egy segédtételre van szükségünk.

A (2) összefüggésből, ha tekintetbe vesszük, hogy $\sum_{r=0}^{n} T_r=1$, kapjuk, hogy

$$\sum_{r=0}^{n}(m-r)T_r=0,$$

azaz

$$\sum_{r=0}^{m-1}(m-r)T_r=\sum_{r=m+1}^{n}(r-m)T_r, \tag{5}$$

Legyen már most

$$T_{m-r}=T_m u_r, \quad (r=1, 2, 3,\dots, m)$$

és

$$T_{m+r}=T_m v_r. \quad (r=1, 2, 3,\dots, n-m)$$

Ekkor a (4) alapján

$$P=T_m\sum_{r=1}^{m} u_r \quad \text{és} \quad Q=T_m\sum_{r=1}^{n-m} v_r; \tag{6}$$

az (5) összefüggés pedig azt fejezi ki, hogy

$$\sum_{r=1}^{m} r u_r=\sum_{r=1}^{n-m} r v_r. \tag{7}$$

Legyen k az első index, amelyre

$$u_k<v_k.$$

A k szám okvetlenül nagyobb, mint 1. Ugyanis

$$u_1=\frac{1}{1+\frac{1}{nq}}, \quad v_1=\frac{1}{1+\frac{1}{np}}$$

és, mivel $q>p$, innen következik, hogy $u_1>v_1$. Másrészt, a k számról nem kell semmit feltételeznünk. Ha ugyanis $u_r>v_r$ az r minden lehetséges értékére ($r\leqq m$), akkor k-nak az $m+1$ értéket adjuk, és a bizonyítás változatlanúl alkalmazható. Ez a bizonyítás a következő:

Felírhatjuk a fentiek alapján, hogy

$$\sum_{r=k}^{m}(r-k+1)u_r<\sum_{r=k}^{n-m}(r-k+1)v_r \tag{8}$$

és

$$\sum_{r=1}^{k-1}(k-r-1)u_r>\sum_{r=1}^{k-1}(k-r-1)v_r. \tag{9}$$

Képezzük a (7) és (8) egyenlőtlenségek különbségét és adjuk hozzá a (9) egyenlőtlenség megfelelő oldalait:

$$(k-1)\sum_{r=1}^{m}u_r>(k-1)\sum_{r=1}^{n-m}v_r.$$

Mint láttuk, $k>1$, tehát az előbbi egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\sum_{r=1}^{m}u_r>\sum_{r=1}^{n-m}v_r,$$

ami (6) alapján azonos a bebizonyítandó tétellel: $P>Q$.

(A fent említett esetben, ha $k=m+1$, a (8) egyenlőtlenség baloldalán 0 áll.)

Most térjünk vissza az (5) összefüggésre, mellyel kapcsolatban néhány érdekes eredményt említhetünk meg.

Jelöljük m_1-gyel és m_2-vel az m átlagnál kisebb, illetőleg nagyobb r-értékek valószínű értékeit (vagy aritmetikai átlagait), azaz

$$m_1=\frac{1}{P}\sum_{r=0}^{m-1}rT_r=\frac{m}{P}\sum_{r=1}^{m-2}\binom{n-1}{r}p^rq^{n-1-r}=\frac{mP'}{P},$$

$$m_2=\frac{1}{Q}\sum_{r=m+1}^{n}rT_r=\frac{m}{Q}\sum_{r=m}^{n-1}\binom{n-1}{r}p^rq^{n-1-r}=\frac{mQ'}{Q}.$$

Innen

$$m(P-P')=P(m-m_1)=\sum_{r=0}^{m-1}(m-r)\,T_r$$

és

$$m(Q-Q')=Q(m_2-m)=\sum_{r=m+1}^{n}(r-m)\,T_r,$$

vagyis (5) szerint

$$P-P'=Q'-Q. \tag{10}$$

Könnyen nyerjük innen még A. GULDBERG egy eredményét is.[2] A fenti összefüggésekből

$$P(m-m_1)=Q(m_2-m),$$

ahonnan

$$P\gtreqqless Q,\ \text{a szerint, hogy}\ m\gtreqqless\frac{m_1+m_2}{2}.$$

Egyszerűen kiszámíthatjuk a (10) különbségek közös értékét is. Az ismeretes

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1} \tag{11}$$

összefüggés segítségével felírhatjuk, hogy

$$P=q\sum_{r=0}^{m-1}\binom{n-1}{r}p^rq^{n-1-r}+p\sum_{r=0}^{m-2}\binom{n-1}{r}p^rq^{n-r-1}=$$

$$=q\binom{n-1}{m-1}p^{m-1}q^{n-m}+(p+q)\sum_{r=0}^{m-2}\binom{n-1}{r}p^rq^{n-r-1}=qT_m+P',$$

tehát a (10) különbségek közös értéke qT_m, a (7) összegeké pedig mq.

Megjegyezzük még, hogy a $P-P'$ és $Q'-Q$ különbségek értéke könnyen adódik, mint egy BERTRAND-féle képlet speciális esete.[3] Eszerint

$$\sum_{r=0}^{\varrho}(np-r)\,T_r+\sum_{r=\varrho+1}^{n}(r-np)\,T_r=2p(n-\varrho)\,T_\varrho, \tag{12}$$

ahol ϱ egész számot jelöl.

---

[2] Nouvelles Annales de Mathématiques. 1922—23. p. 251.

[3] Újabb bizonyítását lásd M. FRÉCHET *Sull' espressione esatta di uno scarto medio* (Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari, 6, 1935) cimű cikkében.

Ha $np=m$ egész és $\varrho=m$, az előbbi egyenlet baloldalán a fentiek szerint $m(P-P')+m(Q'-Q)=2m(P-P')$ áll, tehát

$$m(P-P')=p(n-m)T_m=mqT_m,$$

ami azonos a fenti eredménnyel.

Ha np nem egész szám, legyen $\varrho=np-s$ a benne foglalt legnagyobb egész rész $(0\leq s\leq 1)$. Ekkor a (11) képlet így írható:

$$\left(P-P'+\frac{np-\varrho}{np}T_\varrho\right)+(Q'-Q)=2\frac{n-\varrho}{n}T_r;$$

másrészt, világos, hogy

$$P+Q=1-T_\varrho \text{ és } P'+Q'=1-\binom{n-1}{\varrho-1}p^{\varrho-1}q^{n-\varrho}=1-\frac{\varrho}{np}T_\varrho,$$

ahonnan

$$P-P'+\frac{np-\varrho}{np}T_\varrho=Q'-Q,$$

tehát

$$P-P'=\frac{q}{p}\frac{\varrho}{n}T_\varrho,\quad Q'-Q=1-\frac{\varrho}{n}T_\varrho \tag{13}$$

ϱ minden egész értékére.

2. §. A $P-Q$ különbség aszimptotikus értékének meghatározása.

Az 1. §-ban bebizonyított $P>Q$ egyenlőtlenséget kiegészíthetjük még a Simmons által adott aszimptotikus értékkel, mely a mi jelöléseink mellett a következő alakú:

$$\Delta=\frac{q-p}{3\sqrt{2\pi npq}}.$$

A bizonyítást a binomiális kifejtések azonos átalakításai segítségével végezzük. Legtöbbször csak formális kifejtésekre szorítkozunk, és a szereplő kifejezések valószínűségszámítási jelentésétől is eltekintünk. Erre természetesen csak a számítások folyamán kell figyelemmel lennünk, mert az eredmény, a már említett megszorításon kívül, teljesen általános.

A már alkalmazott (11) összefüggés segitségével könnyen bebizonyithatók a következő képletek:

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{n+1}{r}p^r q^{n+1-r}-\sum_{r=0}^{m-1}\binom{n}{r}p^r q^{n-r}=qT_m, \tag{13}$$

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{n+k+1}{r}p^r q^{n+k+1-r}-\sum_{r=0}^{m}\binom{n+k}{r}p^r q^{n+k-r}=$$

$$=-p\binom{n+k}{m}p^m q^{n+k-m}= \tag{14}$$

$$=-\left(\frac{nq}{n-m}\right)^k\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n-m}\right)\left(1+\frac{2}{n-m}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n-m}\right)}pT_m.$$

Ez az összefüggés n és m minden egész értékére fennáll; $k=0$-ra kis átalakitással a (13) képletet nyerjük. Legyen rendre $k=0, 1, 2,\ldots, s$ és adjuk össze a megfelelő összefüggéseket:

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{n+s+1}{r}p^r q^{n+s+1-r}-\sum_{r=0}^{m-1}\binom{n}{r}p^r q^{n-r}=$$

$$=qT_m-pT_m\sum_{r=1}^{s}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{nq}\right)\left(1+\frac{2}{nq}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{nq}\right)}, \tag{15}$$

ahol $m=np$. Keressük a jobboldalnak $\frac{1}{n}$ növekvő hatványai szerint való kifejtését. A számitás eredménye:

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{n+s+1}{r}p^r q^{n+s+1-r}-\sum_{r=0}^{m-1}\binom{n}{r}p^r q^{n-r}=(q-sp)T_m+$$

$$+\frac{p^2 s(s+1)(s+2)}{6nq}\left(1-\frac{3ps^2+(p+10)s+10-4p}{20nq}+\cdots\right)T_m. \tag{16}$$

Ez az összefüggés érvényes marad akkor is, ha s helyébe bármilyen egész vagy törtszámot irunk.

A $p+q=1$ összefüggésből következik, hogy

$$n = np\left(1+\frac{q}{p}\right),$$

ehát, ha $s=\frac{q}{p}$, akkor

$$n = m(s+1), \quad n+s+1 = (m+1)(s+1).$$

Ha a fenti egyenletben p és q helyébe az $1/(s+1)$ és $s/(s+1)$ értékeket írjuk és s-et egész számnak tekintjük, a SIMMONS által vizsgált speciális esetre jutunk. A számítások elvégzése után s helyébe $\frac{a}{b}$-t írva, végül is a bevezetésben említett eredményt kapjuk. Azonban ezt egy lépésben is elvégezhetjük, ha a fentiek alapján a (16) kifejtésben s helyébe a $\frac{q}{p}$ törtet írjuk, n és $n+s+1$ helyébe pedig a kiszámított értékeket. Ha ekkor rövidség kedvéért a $\sum_{r=0}^{m-1}\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$ kifejezést P_m-mel jelöljük, úgy a (16) baloldalának első tagja P_{m+1} lesz és (16) a következő alakra hozható:

$$P_{m+1}-P_m = \frac{p+1}{6m}\left(1-\frac{6+9q-2q^2}{20mq}+\cdots\right)T_m. \quad (m=np) \qquad (17)$$

A $P+Q+T_m=1$ összefüggésből következik, hogy

$$D = P-Q = P_m-Q_m = 2P_m+T_m-1 = D_m,$$

ahonnan

$$D_{m+1}-D_m = 2(P_{m+1}-P_m)+T_{m+1}-T_m. \qquad (18)$$

Azonban

$$\frac{T_{m+1}}{T_m} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{nq}\right)\left(1+\frac{2}{nq}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{nq}\right)}, \quad \text{ahol } k=\frac{q}{p}.$$

A fenti kifejtéshez hasonló számítás adja, hogy

$$T_{m+1} = \left(1-\frac{1}{2m}+\frac{2+7q+2q^2}{24m^2q}+\cdots\right)T_m, \qquad (19)$$

úgy, hogy a (18) képlet szerint

$$D_{m+1}-D_m=-\frac{q-p}{6m}\left(1+\frac{2q^2-17q-14}{20mq}+\cdots\right)T_m. \qquad (20)$$

Világos, hogy ha $n\to\infty$ (vagy ami ugyanazt jelenti, $m\to\infty$), akkor $D\to 0$; tehát felirható, hogy

$$D_m=\left(X+\frac{Y}{m}+\frac{Z}{m^2}+\cdots\right)T_m, \qquad (21)$$

ahol a sorbafejtés együtthatói ismeretlenek. Mivel D-re csak aszimptotikus értéket keresünk, elég lesz az előbbi kifejtés első együtthatóit kiszámitani. Mivel

$$\frac{Y}{m+1}=\frac{Y}{m}-\frac{Y}{m^2}+\cdots \quad \text{és} \quad \frac{Z}{(m+1)^2}=\frac{Z}{m^2}-\frac{2Z}{m^3}+\cdots,$$

azt kapjuk, hogy

$$D_{m+1}=\left(X+\frac{Y}{m}+\frac{Z-Y}{m^2}+\cdots\right)T_{m+1}=$$

$$=\left(X+\frac{2Y-X}{2m}+\frac{12q(2Z-3Y)+X(2+7q+2q^2)}{24m^2q}+\cdots\right)T_m,$$

ahonnan

$$D_{m+1}-D_m=\left(-\frac{X}{2m}+\frac{X(2+7q+2q^2)-36qY}{24m^2q}+\cdots\right)T_m. \qquad (22)$$

A (20) és (22) kifejtésekben $\frac{1}{m}$ megfelelő hatványainak összehasonlitása révén X-re és Y-ra a következő értékeket találjuk:

$$X=\frac{q-p}{3},\quad Y=-\frac{q-p}{3}\cdot\frac{4(q+1)(2-q)}{45q}.$$

A (21) összefüggésből most már rögtön következik, hogy

$$P-Q=\frac{q-p}{3}\left(1-\frac{4(q+1)(2-q)}{45npq}+\cdots\right)T_m. \qquad (23)$$

Ha $n\to\infty$, akkor a (3) összefüggés tekintetbevételével a D különbségre a következő aszimptotikus értéket nyerjük:

$$\Delta=\frac{q-p}{3\sqrt{2\pi npq}}. \qquad (24)$$

Megjegyzés. Az alkalmazott eljáráshoz hasonló módon kiszámithattuk volna a (17) képlet segítségével a P valószínűség $\frac{1}{m}$ hatványai szerint való kifejtését, és abból levezethettük volna a D különbség megfelelő kifejtését. Megfordítva, a (23) összefüggés segítségével felírhatjuk a P valószínűséget a következő alakban:

$$P=\frac{1}{2}-\frac{p+1}{3}\left(1-\frac{2(q+1)(2q-1)}{45npq}+\cdots\right)T_m. \qquad (25)$$

Ha n végtelen nagy lesz, P (és így Q is) $\frac{1}{2}$-hez tart, ami egyébként előrelátható is volt.

3. §. Az általános eset.

Ebben a részben eltekintünk attól a megszorító feltételtől, hogy az np szorzat egész szám és m alatt az np-ben foglalt legnagyobb egész számot értjük:

$$m=np-s. \qquad (0\leqq s\leqq 1)$$

Az alkalmazandó módszer hasonló ahhoz, mellyel az ismétléses valószínűségekből Bernoulli tételét szokás levezetni. Ehhez előbb szükségünk lesz a P és Q valószínűségek bizonyos átalakitására, amelyek segitségével e valószínűségeket határozott integrálok alakjában állíthatjuk elő.

A (4) képletek alapján

$$\begin{aligned} P&=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{n}{r}q^{n-r}(1-q)^r,\\ Q&=\sum_{r=m+1}^{n}\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}=\sum_{r=0}^{n-m-1}\binom{n}{r}p^{n-r}(1-p)^r, \end{aligned} \qquad (26)$$

Ha

$$F_k(x)=\sum_{r=0}^{k}\binom{n}{r}x^{n-r}(1-x)^r, \qquad (27)$$

úgy

$$P=F_{m-1}(q),\ Q=F_{n-m-1}(p).$$

Differenciáljuk a (27) egyenlet mindkét oldalát x szerint:

$$F_k'(x)=\sum_{r=0}^{k}\binom{n}{r}\left[(n-r)x^{n-r-1}(1-x)^r-rx^{n-r}(1-x)^{r-1}\right]=$$

$$=\sum_{r=0}^{k}\frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}x^{n-r-1}(1-x)^r-$$

$$-\sum_{r=1}^{k}\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}x^{n-r}(1-x)^{r-1}=$$

$$=\sum_{r=0}^{k}\frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}x^{n-r-1}(1-x)^r-$$

$$-\sum_{r=0}^{k-1}\frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}x^{n-r-1}(1-x)^r=\frac{n!}{k!(n-k-1)!}x^{n-k-1}(1-x)^k.$$

Tehát

$$F_k(x)=(n-k)\binom{n}{k}\int_0^x t^{n-k-1}(1-t)^k dt.^4 \qquad (28)$$

Így

$$P=m\binom{n}{m}\int_0^q t^{n-m}(1-t)^{m-1}dt,$$

$$Q=(n-m)\binom{n}{m}\int_0^p t^m(1-t)^{n-m-1}dt.$$

---

[4] A (27) valószínűségnek előállítása nem-teljes Beta-függvénnyel ismeretes. Ha

$$I_x(k+1,\,n-k)=\frac{B_x(k+1,\,n-k)}{B(k+1,\,n-k)}=\frac{1}{B(k+1,\,n-k)}\int_0^x t^k(1-t)^{n-k-1}dt,$$

a (28) képlet a következő alakban írható:

$$F_k(x)=I_{1-x}(n-k,\,k+1). \qquad (28')$$

Másrészt, mint azt JORDAN Professzor úr megjegyezte, a (28′) képletből parciális integráció (és a (28) levezetésénél alkalmazott összegezési eljárás) segítségével azonnal megkaphatjuk a (27) valószínűséget.

E valószínűség numerikus kiszámítására szolgálnak PEARSON nagyszabású táblázatai: *Tables of the incomplete Beta-function*, Cambridge University Press, 1934.

Ha n elég nagy, a

$$B = \frac{n!}{h!\,l!}\int_0^x t^l(1-t)^h dt \qquad (h+l=n-1) \tag{29}$$

integrál aszimptotikus értékét úgy kapjuk, hogy bevezetjük a

$$t = \frac{l}{n-1} - v\frac{1}{n-1}\sqrt{\frac{hl}{n-1}}$$

változó-cserét, és az integrálandó kifejezést (illetőleg annak logaritmusát) Taylor-sorba fejtjük. Az eredmény:[5]

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_T^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi(T), \tag{30}$$

ahol

$$\Phi(T) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^T e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{31}$$

az ismeretes valószínűségi-integrál. Itt

$$T = C + D + O(n^{-\frac{3}{2}}) \tag{32}$$

és

$$C = [l - x(n-1)]\sqrt{\frac{n-1}{hl}},$$

$$\begin{aligned} D = \frac{1}{3}\left(\frac{13}{12(n-1)} - \frac{n-1}{12hl}\right)(C^3+3C) - \\ - \frac{l-h}{3\sqrt{hl(n-1)}}(C^2+2) - \frac{(l-h)^2}{18hl(n-1)}C^5. \end{aligned} \tag{33}$$

Ezt a képletet fogjuk alkalmazni a $P-Q$ különbség aszimptotikus értékének meghatározására. Ha P, illetőleg Q esetében a megfelelő T értékeket T_1-gyel, illetőleg T_2-vel jelöljük, úgy

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{T_1}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{T_2}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

---

[5] A számítás részleteit lásd például B. L. van der Waerden: *Empirische Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten*, usw. (Berichte der Akad. zu Leipzig. 87. kötet, 1935. 353—364. oldal) cikkében.

és

$$\Delta = P-Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{T_1}^{T_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2}[\Phi(T_2)-\Phi(T_1)]. \tag{34}$$

Mivel D nagyságrendje $n^{-\frac{1}{2}}$, a Δ különbséget a következő alakban írhatjuk:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(T_2-T_1) - \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}(T_2^3-T_1^3)+\cdots = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(T_2-T_1)+O(n^{-\frac{3}{2}}).\end{aligned} \tag{35}$$

Itt a T_1 és T_2 értékeket a (33) segitségével számítjuk ki, ahol

T_1 esetében $l_1 = nq+s$, $h_1 = np-s-1$, $x_1 = q$;
T_2 « $l_2 = np-s$, $h_2 = nq+s-1$, $x_2 = p$.

Így

$$C_1 = (s+q)\sqrt{\frac{n-1}{(nq+s)(np-s-1)}}.$$

A négyzetgyökös kifejezést a következő alakra hozhatjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{npq}}\left(1+\frac{s(q-p)+q^2}{2npq}+\cdots\right),$$

tehát

$$C_1 = \frac{s+q}{\sqrt{npq}} + O(n^{-\frac{3}{2}}).$$

D_1 kifejezésében az első tag $n^{-\frac{3}{2}}$-rendű, a harmadik pedig $n^{-\frac{7}{2}}$-rendű. A második tagban $C_1^2\dfrac{l_1-h_1}{3\sqrt{(n-1)l_1h_1}}$ nagyságrendje $n^{-\frac{3}{2}}$, es így elég lesz a $-\dfrac{2(l_1-h_1)}{3\sqrt{(n-1)l_1h_1}}$ tagot kiszámítunk:

$$D_1 = -\frac{2(q-p)}{3\sqrt{npq}}\left(1+\frac{s+q^2(3-2q)}{2npq(q-p)}+\cdots\right)+O(n^{-\frac{3}{2}}).$$

Végül

$$T_1 = \frac{3(s+q)-2(q-p)}{3\sqrt{npq}} + O(n^{-\frac{3}{2}}) = \frac{3s+p+1}{3\sqrt{npq}} + O(n^{-\frac{3}{2}}).$$

Teljesen hasonló számítással kapjuk, hogy

$$T_2 = \frac{-3s+q+1}{3\sqrt{npq}} + O(n^{-\frac{3}{2}}).$$

A Δ különbség (35) kifejezéséből látjuk, hogy $\Delta > 0$ (azaz $P > Q$), ha $T_2 > T_1$. Jelen esetben tehát ennek feltétele:

$$-3s + q + 1 > 3s + p + 1,$$

ahonnan

$$6s < q - p.$$

Mivel feltételünk szerint $q > p$, az előbbi egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy $0 < s < \frac{q-p}{6}$, vagyis, hogy az m egész szám eleget tesz a

$$np - \frac{q-p}{6} \leq m \leq np$$

egyenlőtlenségnek. Itt azonban feltettük, hogy n elég nagy.

A Δ különbség aszimptotikus értéke

$$\Delta_s = \frac{q-p-6s}{3\sqrt{2\pi npq}} + O(n^{-\frac{3}{2}}). \qquad (36)$$

Abban a speciális esetben, amikor np egész szám, vagyis $s=0$, a $P-Q$ különbség aszimptotikus értéke megegyezik az előbbi §-ban talált (24) kifejezéssel:

$$\Delta_0 = \frac{q-p}{3\sqrt{2\pi npq}}.$$

Feldheim Ervin.

NOUVELLE DÉMONSTRATION ET GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE SIMMONS SUR UN PROBLÈME DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

Nous avons donné dans ce travail une nouvelle démonstration pour les deux théorèmes suivants dus à SIMMONS: [1]

Théorème I. Soient p la probabilité constante d'un événement E, et q celle de l'événement contraire, et supposons que $q > p$. Faisons n

expériences indépendantes, au cours desquelles la «répétition» de E sera r. Ici n est un nombre tel que la valeur probable $m=np$ de r est un entier. Posons

$$P = \text{Prob}\,\{r<m\}, \qquad Q = \text{Prob}\,\{r>m\}.$$

Alors, on a l'inégalité

$$P > Q.$$

Théorème II. Dans les conditions précisées, si le nombre n des expériences est très grand, la différence $P-Q$ admet l'expression asymptotique suivante :

$$\Delta = \frac{q-p}{3\sqrt{2\pi npq}}.$$

Dans le § 3, nous avons étudié la différence $P-Q$ dans le cas plus général où np n'est pas un entier, mais m est l'entier le plus voisin de np ; et nous avons déterminé, par une méthode entièrement différente de celle du § 2, l'expression asymptotique de $P-Q$.

Ervin Feldheim.

A CAUCHY-FÉLE EXPONENCIALIS SOR.

Történeti áttekintés.

Fizikai problémák tették szükségessé a FOURIER-sorokkal rokon $\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu \cos \mu_\nu x + b_\nu \sin \mu_\nu x)$ alakú sorok vizsgálatát, ahol $\{\mu_\nu\}$ bizonyos meghatározott számsorozat. CAUCHY tette az első kisérletet[1] egy ilyszerű, igen általános sorosztály konvergencia-bizonyítására. Bár PICARD ezt a «szép módszert»[2] a residuum-elmélet legnevezetesebb alkalmazásai közé sorozza, mégis hosszú ideig nem részesült ez kellő figyelemben.

Ennek okát főként két dologban kereshetjük. Egyik az, hogy időközben közkinccsé válnak a STURM—LIOUVILLE-féle sorok, s ezek a fizikában alkalmasabbaknak bizonyultak a CAUCHY-féle soroknál. Másik — s talán fontosabbik — az, hogy CAUCHY bizonyítása a szigorúságot illetőleg sok kívánni valót hagy; ellenben DIRICHLET-nek alig nehány év mulva megjelenő nevezetes értekezése, — melyben a FOURIER-sorok konvergenciáját bizonyítja — szigorúság tekintetében kifogástalan.

Jóval később főként POINCARÉ[3] egyik dolgozata terelte ismét a figyelmet CAUCHY módszerére. Ő a residuum-elméletet nem az eredeti CAUCHY-féle sorokra, hanem magára a STURM—LIOUVILLE-féle problémára alkalmazza, megmutatva ezzel CAUCHY módsze-

[1] Sur les résidus des fonctions exprimées par des integrales définies. Oeuvres complètes, t. 7. (2e série) p. 393.

[2] Méthode de Cauchy pour obtenir la série de Fourier et des séries analogues. Traité d'analyse, t. 2. (3e. éd.) p. 187.

[3] Sur les équations de la physique mathématique. Rendiconti di Palermo, t. 8. (1894) pp. 57—156.

rének előnyét a fizikában előforduló függvénysorok tárgyalásánál is.[4] Ettől kezdve mind többen alkalmazzák a «POINCARÉ—CAUCHY módszert»[5] differenciál-egyenletek saját függvényei szerint haladó sorokra. Kiemelendő e téren TAMARKINE[6] dolgozata, melyben bebizonyítja, hogy a saját függvények szerinti kifejtések ugyanazon feltétel mellett konvergálnak, illetőleg divergálnak, mint a FOURIER-sor.

Fordítsuk most figyelmünket ismét az eredeti CAUCHY-féle sorokra. E sorok első szigorú konvergencia-bizonyítását PICARD-nál[7] találjuk. Az ő bizonyítása azonban csak arra az esetre vonatkozik, midőn a generátor-függvény korlátos változású. Jelen dolgozat tárgyát elsősorban a konvergenciának általánosabb feltétel mellett való bizonyítása képezi.[8] Látni fogjuk, hogy *bármely* LEBESGUE-*féle értelemben integrálható függvény «*CAUCHY-*féle exponenciális sora»*[9] *mindig konvergál, valahányszor konvergens a függvény* FOURIER-*sora.*

A mienkhez hasonló ú. n. aequikonvergencia-bizonyítást szép számmal találunk az irodalomban. TAMARKINE említett munkáján kívül figyelemreméltó HAAR-é,[10] melyben FOURIER—LEGENDRE-, továbbá W. H. YOUNG-é,[11] melyben FOURIER—BESSEL-sorok aequi-

---

[4] Hasonló irányú munkákat már POINCARÉ előtt is találunk. L. különösen: DINI, Serie di Fourier e altre rappresentationi analitiche, Pisa 1880.

[5] Ezen elnevezést TAMARKINE használja.

[6] Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires et sur la généralisation de la série de Fourier. Rendiconti di Palermo, t. 34. (1912) pp. 345—382.

[7] L. a [2] jegyzetet.

[8] Erre vonatkozó eredményeinket illetőleg l. Des séries exponentielles de Cauchy. Comptes Rendus, t. 200 (1935, 1er Semestre) pp. 1712—14.

[9] Ezt az elnevezést — a [8] jegyzetben idézett dolgozatban is — PICARD nyomán használom. L. például Sur les développements de Cauchy en séries d'exponentielles et sur certaines identités remarquables. Bulletin des sciences mathématiques, t. 38. 2e série (1913) pp. 152—159.

[10] Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen. Math. Ann. Bd. 78. (1917) pp. 121—136.

[11] On series of Bessel functions. Proceedings of the London Math. Society, v. 18. (1919—20) pp. 163—200.

konvergenciáját találjuk. Megemlítjük végül SZEGŐ[12] szép dolgozatát, melyben (a LEGENDRE-polinomokat magábafoglaló) igen általános ortogonális polinomok szerint haladó soroknak a FOURIER-sorokkal való aequikonvergenciáját bizonyítja.

Ezekkel szemben csak azt jegyezzük meg, hogy a mi aequikonvergencia-tételünk — amint majd látni fogjuk — igen könnyen bizonyítható. Mielőtt azonban ennek tárgyalásához kezdenénk, foglaljuk össze röviden a CAUCHY—PICARD-féle bizonyítás gondolatmenetét.

Az exponenciális sor tárgyalása Cauchy—Picard szerint.

Tekintsünk egy, az egész síkban meromorf $\mathfrak{F}(z)$ függvényt. Az origo köré írt ϱ sugarú körön integrálva:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} \mathfrak{F}(z)dz = \sum_{\varrho} R,$$

ahol $\sum_{\varrho} R$ jelenti $\mathfrak{F}(z)$ residuumainak összegét a ϱ sugarú körben. Vegyünk most egy számsorozatot: $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots; \varrho_n \to \infty$ és tegyük fel, hogy majdnem minden φ-re

$$\lim \varrho_n e^{i\varphi}\mathfrak{F}(\varrho_n e^{i\varphi}) = F(\varphi); \; z = \varrho e^{i\varphi}.$$

Tegyük fel ezenkívül azt, hogy $\varrho_n|\mathfrak{F}(\varrho_n e^{i\varphi})|$, φ minden értékére, egyenletesen korlátos. Ebben az esetben:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi)d\varphi = \lim_{n\to\infty} \sum_{\varrho_n} R.$$

Ezt a formulát alkalmazza CAUCHY az

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{\psi(z)}{\pi(z)}\int_{x_0}^{x} e^{z(x-t)}f(t)dt; \; x_0 < x$$

[12] Über die Entwicklung einer willkürlichen Function nach den Polynomen eines Orthogonalsystems. Math. Zeitschrift, Bd. 12. (1922) pp. 61—94.

függvényre, hol $\psi(z)$ és $\pi(z)$ transzcendens egész függvények, melyekre még később teszünk megszorításokat, $f(t)$ pedig (x_0, x)-ben értelmezett valós függvény.

Vizsgálnunk kell $z\mathfrak{F}(z)$ határértékét, midőn $|z|$ a $\{\varrho_n\}$ sorozaton keresztül végtelenhez tart.

Picard megmutatta, hogy bármely korlátos változású $f(t)$-re egyrészt

$$\lim z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-t)}f(t)\,dt = f(x-0),$$

midőn $|z|$ — valamely, az $R[z]>0$ félsíkba eső, sugár mentén — minden határon túl nő; másrészt, hogy a határértékben szereplő kifejezés $R[z]\geq 0$-ra egyenletesen korlátos.

Tegyük fel ennek alapján, hogy

$$\lim \frac{\psi(-z)}{\pi(-z)} = 1 \quad \text{és} \quad \lim \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} = 0$$

majdnem minden φ-re $\left(-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\right)$, midőn $|z|$ a $\{\varrho_n\}$ sorozaton keresztül végtelenhez tart. Tegyük fel továbbá, hogy a lim jel alatti kifejezések $R[z]\geq 0$-ra egyenletesen korlátosak, midőn $|z| = \varrho_n$ $(n=1, 2,\ldots)$. Ha most $\pi(z)$-nek ezenkívül csak egyszeres gyökei vannak, $f(x-0)$-ra a következő sort nyerjük:

$$\frac{1}{2} f(x-0) = -\sum_{\pi(\lambda)=0} \frac{\psi(\lambda)}{\pi'(\lambda)}\int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-t)}f(t)\,dt. \qquad a)$$

Teljesen analog sor nyerhető $f(x+0)$-ra:

$$\frac{1}{2} f(x+0) = \sum_{\pi(\lambda)=0} \frac{\chi(\lambda)}{\pi'(\lambda)}\int_{x}^{x_1} e^{\lambda(x-t)}f(t)\,dt, \qquad b)$$

ahol $\chi(z)$ szintén transzcendes egész függvény. Itt azt kell feltennünk, hogy $\lim \frac{\chi(z)}{\pi(z)} = 1$ és $\lim \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} e^{z(x_1-x)} = 0.$

Az *a)* és *b)* sorokból könnyen nyerhetünk egy egyszerűbb új sort. Tegyük fel ugyanis, hogy $\psi(z)+\chi(z)=\pi(z)$ és adjuk össze az *a)* és *b)* alatti sorokat. Meggondolva még, hogy $\psi(\lambda)+\chi(\lambda)=0$, nyerjük a CAUCHY-féle exponenciális sort:

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\sum_{\pi(\lambda)=0}\frac{\chi(\lambda)}{\pi'(\lambda)}\int_{x_0}^{x_1}e^{\lambda(x-t)}f(t)\,dt$$

vagy még valamivel áttekinthetőbb alakban:

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu e^{\lambda_\nu x};$$

$$c_\nu=\frac{\chi(\lambda_\nu)}{\pi'(\lambda_\nu)}\int_{x_0}^{x_1}e^{-\lambda_\nu t}f(t)\,dt,\quad \pi(\lambda_\nu)=0,\quad |\lambda_\nu|\leq|\lambda_{\nu+1}|.$$

$\pi(z)$-től itt csak azt kell megkövetelnünk, hogy az említett feltétel mellett

$$\lim\frac{\psi(z)}{\pi(z)}e^{z(x-x_0)}=0,\quad \lim\frac{\chi(-z)}{\pi(-z)}e^{z(x_1-x)}=0,$$

illetőleg, hogy $\left|\frac{\psi(z)}{\pi(z)}e^{z(x-x_0)}\right|$ és $\left|\frac{\chi(-z)}{\pi(-z)}e^{z(x_1-x)}\right|$ az $R[z]\geq 0$ félsíkba eső $|z|=\varrho_n$ $(n=1, 2,\ldots)$ félkörökön egyenletesen korlátos legyen. Ezekből ugyanis nyilván következik, hogy

$$\lim\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)}=\lim\frac{\pi(-z)-\chi(-z)}{\pi(-z)}=1$$

és

$$\lim\frac{\chi(z)}{\pi(z)}=\lim\frac{\pi(z)-\psi(z)}{\pi(z)}=1,$$

illetőleg, hogy e hányadosok a ϱ_n sugarú félkörökön korlátosak.

*

Visszatekintve eme konvergencia-bizonyításra észrevehetjük, hogy az exponenciális sor részletösszegeinek

$$\sum_{\varrho_n}c_\nu e^{\lambda_\nu x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho_n)}\frac{\chi(z)}{\pi(z)}\int_{x_0}^{x_1}e^{z(x-t)}f(t)\,dt\,dz$$

alakjában csak az integrandus konvergenciáját vizsgáltuk, holott az integrál konvergálhat a nélkül, hogy az integrandus is konvergálna. Ezért kellett a CAUCHY—PICARD-féle bizonyításban $f(x)$-re felesleges megszorítást tenni. Ki kellett használnunk például azt, hogy $z\int\limits_{x_0}^{x} e^{-z(x-t)}f(t)\,dt$ az $R[z]\geq 0$ félsikon egyenletesen korlátos, ami azonban nem teljesül bármely FOURIER-sorba fejthető függvényre. A fenti gondolatmenettel tehát nem lehet a konvergencia-bizonyítást a függvények oly általános osztályára kiterjeszteni, mint a FOURIER-sorok klasszikus elmélete szerint.

Ezt a hiányt fogjuk az alábbiakban áthidalni azáltal, hogy a részletösszegek fenti alakjában magát az integrált fogjuk elemezni, előbb azonban kissé módosítjuk, helyesebben általánosítjuk a CAUCHY—PICARD-féle feltevést $\pi(z)$-re.

Az exponenciális sor általánosabb meghatározása.

Tekintsük a z komplex számsíkon az origo köré $\varrho_1<\varrho_2<\varrho_3<\cdots$, $(\varrho_\nu\to\infty)$ sugarakkal írt $K_1, K_2, K_3,\ldots$ köröket,[13] illetőleg az $R[z]\geq 0$ félsíkba eső félköröket: $K_1^+, K_2^+, K_3^+,\ldots$

Vegyünk most egy $\pi(z)$ transzcendens egész függvényt, mely kielégíti az alábbi két feltételt:

1. $\pi(z)$-nek csak egyszeres gyökei vannak,

2. két — ugyancsak transzcendens egész — összeadandóra bontható: $\pi(z)=\chi(z)+\psi(z)$, úgy hogy található legyen oly $\sigma>0$ és $\{K_n^+\}$ halmaz, hogy n minden értékére

$$\int\limits_{K_n^+}\left\{\left|\frac{\psi(z)}{\pi(z)}\right|+\left|\frac{\chi(-z)}{\pi(-z)}\right|\right\}|e^{\sigma z}|\,|dz| = O(1). \qquad a)$$

Jelöljük $\bar\sigma$-sal ezen feltételt kielégítő σ számok felső határát

[13] Körök helyett vehetünk más — a végtelenben torlódó — görbesereget is. Elegendő kikötnünk például azt, hogy a görbék valamennyien konvexek, s a valós és képzetes tengelyre egyaránt szimmetrikusak legyenek.

és tekintsünk egy $\bar{\sigma}$-sal egyenlő hosszúságú valós (x_0, x_1) intervallumot. Ezt nevezzük a $\pi(z)$-hez tartozó *határintervallum*nak.[14]

Az exponenciális sort mármost következőképpen definiálhatjuk. Legyen $f(x)$ az (x_0, x_1) határintervallumban értelmezett LEBESGUE-féle értelemben integrálható — röviden L integrálható — függvény. $f(x)$ CAUCHY-féle exponenciális során a következő sort értjük:

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{\lambda_\nu x}; \quad c_\nu = \frac{\chi(\lambda_\nu)}{\pi'(\lambda_\nu)} \int_{x_0}^{x_1} e^{-\lambda_\nu t} f(t)\, dt.$$

Az $\sim$ jel — a FOURIER-soroknál szokásos jelöléshez hasonlóan — semmit sem mond a sor konvergenciájára, illetőleg összegére vonatkozólag; csupán azt akarjuk vele kifejezésre juttatni, hogy az együtthatók $f(x)$-szel a jelzett vonatkozásban vannak.

Mutassuk ki, hogy *a)* valóban kevesebb megszorítást tartalmaz, mint az eredeti CAUCHY—PICARD-féle feltétel. Megmutatjuk, hogy már a

$$\left|\frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{\sigma z}\right| < M_\sigma, \quad \left|\frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} e^{\sigma z}\right| < M_\sigma; \quad \sigma < \bar{\sigma}, \quad z \varepsilon \{K_n^+\}$$

feltételből következik *a)*, hol M_σ egy n-től független számot jelent. Válasszunk egy δ számot úgy, hogy $\sigma + \delta < \bar{\sigma}$. Ekkor

$$\int_{K_n^+} \left|\frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{\sigma z}\right| |dz| =$$

$$= \int_{K_n^+} \left|\frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{(\sigma+\delta)z}\right| |e^{-\delta z}|\, |dz| < M_{\sigma+\delta} \int_{K_n^+} |e^{-\delta z}|\, |dz| =$$

$$= M_{\sigma+\delta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varrho_n e^{-\delta \varrho_n \cos \varphi} d\varphi < \pi \frac{M_{\sigma+\delta}}{\delta},$$

amivel állításunkat igazoltuk.

---

[14] Az A. LÉAUTÉ nál szereplő *intervalle limite* (l. a [13] sz. jegyzetet) csak speciális esetben egyezik az itt bevezetett határintervallummal.

A Cauchy-féle sor általános konvergencia-feltétele.

E fejezetben bebizonyítjuk a következő tételt:

Bármely L integrálható függvényre:

$$\sum_{\varrho_n} c_\nu e^{\lambda_\nu x} = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin \varrho_n(x-t)}{x-t} f(t)\,dt + \eta(\varrho_n, x),$$

ahol $\eta(\varrho_n, x)$ egyenletesen zérushoz tart $(x_0+\delta, x_1-\delta)$-ban, ha $n \to \infty$, bármily kicsiny pozitív szám legyen is δ.

Valamely exponenciális sor konvergenciájának szükséges és elegendő feltétele tehát az, hogy a tételünkben szereplő Dirichlet-integrál konvergáljon. E szerint, ha $f(x)$ Fourier-sora (x_0, x_1) valamely belső helyén konvergens, akkor — mint ahogy az első fejezetben említettük — konvergens egyúttal $f(x)$ minden exponenciális sora e helyen.

Ellenben $f(x)$ valamely exponenciális sorának a konvergenciájából nem következik feltétlenül Fourier-sorának a konvergenciája. Ha ugyanis $\frac{n}{\varrho_n} \to 0$, akkor $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin \varrho_n(x-t)}{x-t} f(t)\,dt$ konvergálhat a nélkül, hogy $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin n(x-t)}{x-t} f(t)\,dt$ is konvergálna. *Ha* azonban — mint valamennyi alábbi példánkban — $\varrho_n = O(n)$, *akkor az exponenciális sor a* Fourier-*sorral aequikonvergens.*

Tételünk bizonyításához szükségünk lesz a következő segédtételre:

$\int_{x_0}^{x_1} e^{-z(t-x_0)} f(t)\,dt$ egyenletesen zérushoz tart $\frac{1}{|z|}$-vel az $R[z] \geq 0$ félsíkban, bármely L integrálható $f(t)$-re.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_0 = 0$; továbbá, mivel állításunk $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \beta$-ra; $\beta > 0$, $z = \varrho e^{i\varphi}$, triviális, elég például $\frac{\pi}{2} - \beta \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$-re szorítkozni. Nézzük integrálunk valós részét:

$$I=\int_0^{x_1} e^{-t\varrho\cos\varphi}\cos(t\varrho\sin\varphi)f(t)\,dt.$$

Legyen $\Phi(t)=\int_0^t \cos(u\varrho\sin\varphi)f(u)\,du$. Ha I-t parciálisan integráljuk:

$$I=\int_0^{x_1} e^{-t\varrho\cos\varphi}\Phi'(t)\,dt=e^{-x_1\varrho\cos\varphi}\Phi(x_1)+$$

$$+\int_0^{x_1}\varrho\cos\varphi\,.\,e^{-t\varrho\cos\varphi}\Phi(t)\,dt\leq 2\,|\,\Phi(t)\,|_{\max};$$

ez azonban a Riemann-lemma következtében zérushoz tart $\frac{1}{\varrho}$-val. Hasonló becslést végezve integrálunk képzetes részére is, könnyen meggyőződhetünk segédtételünk helyességéről.

Ezután rátérhetünk konvergencia-tételünk bizonyitására. Tekintetbevéve, hogy $\frac{\psi(z)}{\pi(z)}=1-\frac{\chi(z)}{\pi(z)}$, nyerjük hogy

$$\sum_{\varrho_n} c_\nu e^{\lambda_\nu x}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{K_n^+}\frac{\psi(z)}{\pi(z)}\int_{x_0}^{x_1} e^{z(x-t)}f(t)\,dt\,dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{K_n^+}\int_{x_0}^{x_1} e^{z(x-t)}f(t)\,dt\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{K_n^+}\frac{\chi(-z)}{\pi(-z)}\int_{x_0}^{x_1} e^{-z(x-t)}f(t)\,dt\,dz. \quad (*)$$

A bizonyitás lényegét az az észrevétel képezi, hogy az itt szereplő középső integrál $f(x)$ Dirichlet-integráljával egyenlő. Az integrálok sorrendjét felcserélve valóban:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_n^+}\int_{x_0}^{x_1} e^{z(x-t)}f(t)\,dt\,dz=\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin\varrho_n(x-t)}{x-t}f(t)\,dt.$$

Hátra van még annak kimutatása, hogy az első és utolsó integrál zérushoz tart és pedig egyenletesen $(x_0+\delta,\ x_1-\delta)$-ban. Nézzük például az elsőt:

$$\left|\int_{K_n^+} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} \int_{x_0}^{x_1} e^{z(x-t)} f(t)\, dt\, dz\right| =$$

$$= \left|\int_{K_n^+} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} \int_{x_0}^{x_1} e^{-z(t-x_0)} f(t)\, dt\, dz\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x_1} e^{-z(t-x_0)} f(t)\, dt\right|_{\max} \cdot \int_{K_n^+} \left|\frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)}\right| |dz|.$$

Segédtételünk alapján *a)* figyelembevételével valóban látható, hogy integrálunk zérushoz tart. Teljesen hasonló becslést nyerhetünk a (*) alatti utolsó integrálra is.

Azt is könnyen beláthatjuk, hogy a szóbanforgó két integrál $(x_0+\delta, x-\delta)$-ban egyenletesen tart zérushoz, ha meggondoljuk, hogy az *a)*-ban szereplő kifejezés σ-nak monoton növekvő függvénye.

A Cauchy-féle sor viselkedése a határintervallum végpontjain.

Az eddigiekből nem tűnik ki, hogy miként viselkedik az exponenciális sor az x_0 és x_1 pontokban. Erre vonatkozólag előbb egy régebbi eredményt ismertetünk. Tegyük fel A. Léauté szerint,[15] hogy

$$\lim \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{(x_1-x_0)z} = l, \quad \lim \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} e^{(x_1-x_0)z} = L; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

majdnem mindenütt. A határérték arra az esetre vonatkozik, midőn $|z|$ a $\{\varrho_n\}$ sorozaton keresztül, φ-nek valamely meghatározott értéke mellett, minden határon túl nő. Tegyük fel ezenkívül azt, hogy z tekintetbe jövő értékeire $\left|\frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{(x_1-x_0)z}\right|$, illetőleg $\left|\frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} e^{(x_1-x_0)z}\right|$ egyenletesen korlátos.

[15] Comptes Rendus t. 153. (1911, 2e Semestre) pp. 1064—66.

Ebben az esetben bármely korlátos változású $f(x)$-re az exponenciális sor egyenlő

$$x = x_1\text{-re} \quad \frac{f(x_1-0)-lf(x_0+0)}{2}\text{-vel}$$

és

$$x = x_0\text{-ra} \quad \frac{f(x_0+0)-Lf(x_1-0)}{2}\text{-vel.}$$

A. Léauté feltételei helyett mi másokat vezetünk be. Éspedig tegyük fel, hogy

$$\int\limits_{K_n^+}\left|\frac{\psi(z)}{\pi(z)}e^{\sigma z}-l\right||dz|=O(1);\int\limits_{K_n^+}\left|\frac{\chi(-z)}{\pi(-z)}e^{\bar{\sigma}z}-L\right||dz|=O(1). \quad \beta)$$

Vizsgáljuk ebben az esetben az exponenciális sort például $x=x_1$-re. Adjunk hozzá a (*) alatt szereplő első integrálhoz $\frac{l}{2\pi i}\int\limits_{K_n^+}\int\limits_{x_0}^{x_1}e^{z(x_0-t)}f(t)\,dt\,dz$-t. Lesz tehát

$$\sum_{\varrho_n} c_\nu e^{\lambda_\nu x_1} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n^+}\left[\frac{\psi(z)}{\pi(z)}e^{z(x_1-x_0)}-l\right]\int\limits_{x_0}^{x_1}e^{-z(t-x_0)}f(t)\,dt\,dz -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n^+}\frac{\chi(-z)}{\pi(-z)}\int\limits_{x_0}^{x_1}e^{-z(x_1-t)}f(t)\,dt\,dz - \frac{l}{2\pi i}\int\limits_{K_n^+}\int\limits_{x_0}^{x_1}e^{z(x_0-t)}f(t)\,dt\,dz +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n^+}\int\limits_{x_0}^{x_1}e^{z(x_1-t)}f(t)\,dt\,dz.$$

Az itt szereplő első integrál a már alkalmazott segédtétel miatt $\beta)$ figyelembe vételével nullához tart. Ugyancsak nullához tart a második integrál. A harmadik és negyedik integrálban viszont cseréljük fel az integráció sorrendjét, s rögtön látjuk, hogy

$$\sum_{\varrho_n} c_\nu e^{\lambda_\nu x_1} = \frac{2}{i\pi}\int\limits_0^{\bar{\sigma}}\frac{\sin\varrho_n t}{t}\,\frac{f(x_1-t)-lf(x_0+t)}{2}\,dt + o(1).$$

Hasonlóan nyerjük $x=x_0$-ra

$$\sum_{\varrho_n} c_\nu e^{\lambda_\nu x_0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\sigma} \frac{\sin \varrho_n t}{t}\, \frac{f(x_0+t)-Lf(x_1-t)}{2}\, dt + o(1).$$

Egyenlőségeinket a FOURIER-sorra alkalmazva, látni fogjuk, hogy ugyanarra az eredményre jutottunk, mint amelyre a klasszikus elmélet teljesen más úton vezetett.

Az exponenciális sor tagonkénti integrálása.

Emlékeztetünk LEBESGUE egy nevezetes tételére, mely szerint, ha

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_a^b (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\,dx.$$

Ezt a tételt fogjuk most általánosítani, és pedig nemcsak az eddig megismert exponenciális sorokra, hanem egy még általánosabb sorosztályra. A $\pi(z)$-re tett *a)* alatti megszorítás helyett ugyanis most csak azt tegyük fel, hogy $\sigma<\bar{\sigma}$-ra

$$\int_{K_n^+} \left\{ \left| \frac{\psi(z)}{\pi(z)} \right| + \left| \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} \right| \right\} |e^{\sigma z}|\,|dz| = O(\varrho_n).$$

Tekintsük ismét az

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{\lambda_\nu x};\; c_\nu = \frac{\chi(\lambda_\nu)}{\pi'(\lambda_\nu)} \int_{x_0}^{x_1} e^{-\lambda_\nu t} f(t)\,dt,\; x_1-x_0=\bar{\sigma}$$

sort[16] és vizsgáljuk például azt az esetet, midőn $\pi(0)=0$.

---

[16] Más szempontból is érdemes figyelmünket ily általánosabb sorosztályra fordítani. Egyik érdekes eredmény erre vonatkozólag a következő. Tekintsük azt az exponenciális sort, melynél $\pi(z)$-re csak az

$$\int_{K_n^+} \left\{ \left| \frac{\psi(z)}{\pi(z)} \right| + \left| \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} \right| \right\} |e^{\sigma z}|\,|dz| = O(\varrho_n^m);\; \sigma<\bar{\sigma}$$

Azt állítjuk, hogy *a tagonkénti integrálással nyert sor konvergens és összegére vonatkozólag:*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = c + c_0 x + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\lambda_\nu} e^{\lambda_\nu x};\ x_0 < x < x_1,$$

ahol c egy alkalmasan választott konstans.

A bizonyítás céljából írjuk fel a tagonkénti integrálással nyert sor részletösszegeit:

$$c + c_0 x + \sum_{\varrho_n} \frac{c_\nu}{\lambda_\nu} e^{\lambda_\nu x} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{K_n^+} \frac{\psi(z)}{z\pi(z)} \int_{x_0}^{x_1} e^{z(x-t)} f(t)\,dt\,dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{K_n^+} \frac{1}{z} \int_{x_0}^{x_1} e^{z(x-t)} f(t)\,dt\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{K_n^+} \frac{\chi(-z)}{z\pi(-z)} \int_{x_0}^{x_1} e^{-z(x-t)} f(t)\,dt\,dz.$$

Az első és utolsó integrál a már alkalmazott becslés szerint zérushoz tart. A középsőhöz adjuk hozzá a következőt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_n^-} \frac{1}{z} \int_{x_0}^{x} e^{z(x-t)} f(t)\,dt\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{K_n^+} \frac{1}{z} \int_{x}^{x_1} e^{z(x-t)} f(t)\,dt\,dz,$$

ahol K_n^--szal jelöltük K_n-nek az $R[z] \leq 0$ félsikba eső részét. Mivel ez ismét zérushoz tart, nyerjük végül, hogy

$$c + c_0 x + \sum_{\varrho_n} \frac{c_\nu}{\lambda_\nu} e^{\lambda_\nu x} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{K_n} \frac{1}{z} \int_{x_0}^{x} e^{z(x-t)} f(t)\,dt\,dz + o(1) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + o(1).$$

Ez pedig éppen a bizonyítandó tétel.

---

feltétel teljesülését kötjük ki, ahol m tetszésszerinti pozitív egész szám Bebizonyítható ekkor, hogy bármely m-szer differenciálható függvény — valamely $\bar{\sigma}$-nál kisebb intervallumban — e sor alapfüggvényei szerint haladó egyenletesen konvergens sorba fejthető.

Példák az exponenciális sorra.

Most néhány példát mutatunk az exponenciális sorra, melyek egyúttal meg fogják világítani azt is, hogy az a sorosztály, mellyel eddig foglalkoztunk, mennyire általános természetű. Példáink tárgyalása előtt azonban megemlítjük, hogy az exponenciális sor áttekinthető trigonometrikus alakot nyer, ha $\chi(z) = -\psi(-z)$. Ez esetben $\pi(z) = \chi(z) - \chi(-z)$, s az exponenciális sor ily alakú lesz:

$$f(x) \sim \frac{\chi(0)}{2\chi'(0)} \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\chi(i\mu_\nu)}{\chi'(i\mu_\nu) + \chi'(-i\mu_\nu)} \int_{x_0}^{x_1} f(t) \cos \mu_\nu (x-t)\,dt,$$

ahol $0, \pm\mu_1, \pm\mu_2, \ldots$ rendre a $\chi(iz) = \chi(-iz)$ egyenlet gyökei.

1. A $\chi(z) = e^{\pi z}$, $\psi(z) = -e^{-\pi z}$ esetben a Fourier-sort nyerjük. Meg kell vizsgálnunk mindenekelőtt, hogy feltételeink teljesülnek-e? Ehhez elegendő kimutatnunk, hogy $\varrho_n = n + \frac{1}{2}$-re

$$\left| \frac{e^{-\pi z}}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}} e^{2\pi z} \right| = \frac{1}{|1 - e^{-2\pi z}|} < 2; \quad z \varepsilon \{K_n^+\}.$$

Ennek belátásához vegyük tekintetbe, hogy $|z| = n + \frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$-re

$$|1 - e^{-2\pi z}| \geq |R[1 - e^{-2\pi z}]| = 1 - e^{-\pi(2n+1)\cos\varphi} \cos[\pi(2n+1)\sin\varphi].$$

Nézzük most azt a φ_n értéket, melyre $\sin\varphi_n = \frac{4n+1}{4n+2}$. Minthogy $\varphi_n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$-re, ill. $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\varphi_n$-re $\cos[\pi(2n+1)\sin\varphi] \leq 0$, azért $|1 - e^{-2\pi z}| \geq 1$. Viszont $-\varphi_n < \varphi < \varphi_n$-re

$$|1 - e^{-2\pi z}| > 1 - e^{-\pi(2n+1)\cos\varphi_n} = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}(8n+3)^{\frac{1}{2}}} > \frac{1}{2}.$$

Ezzel valóban igazoltuk, hogy az $e^{\pi z} - e^{-\pi z}$ függvény feltételeinknek eleget tesz, és pedig 2π hosszúságú határintervallummal.

Tekintetbe véve ezután, hogy az $e^{i\pi z} - e^{-i\pi z} = 0$ egyenlet pozitív gyökei: $\mu_\nu = \nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, számítsuk ki az exponenciális sor együtthatóit:

$$\frac{\chi(0)}{2\chi'(0)}=\frac{1}{2\pi},\quad \frac{2\chi(i\nu)}{\chi'(i\nu)+\chi'(-i\nu)}=\frac{2e^{i\pi\nu}}{2\pi\cos\pi\nu}=\frac{1}{\pi}.$$

Lesz tehát

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}f(t)\cos\nu(x-t)\,dt,$$

amiben valóban a FOURIER-sorra ismerünk.

Könnyen meggyőződhetünk továbbá arról, hogy $l=L=-1$. Ugyanis

$$\int_{K_n^+}\left|\frac{-e^{-\pi z}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}e^{2\pi z}+1\right||dz|=$$

$$=2\varrho_n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{e^{-2\pi z}}{1-e^{-2\pi z}}\right|d\varphi<4\varrho_n\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2\pi\varrho_n\cos\varphi}d\varphi<1.$$

Ebben az a jól ismert eredmény jut kifejezésre, hogy bármely folytonos függvény FOURIER-sora — amennyiben konvergens — az $x=0$, ill. $x=2\pi$ helyeken $\frac{f(0)+f(2\pi)}{2}$-höz konvergál.

2. A $\chi(z)=e^{az}(z+h)$, $\psi(z)=e^{-az}(z-h)$, $(a>0,\ h>0)$ esetnek megfelelő exponenciális sor:

$$f(x)\sim\frac{h}{2(1+ah)}\int_{x_0}^{x_1}f(t)\,dt+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\mu_\nu}{2a\mu_\nu-\sin 2a\mu_\nu}\int_{x_0}^{x_1}f(t)\cos\mu_\nu(x-t)\,dt,$$

hol $\mu_1, \mu_2, \ldots$ sendre a $z+h$ tg $az=0$ egyenlet pozitív gyökei.[17] A határintervallum: $x_1-x_0=2a$. Ez a *hővezetés elméletében fontos szerepet játszó sor* már FOURIER-nál szerepel, természetesen konvergencia-bizonyítás nélkül.

3. Fenti példánk — valamint a FOURIER-sor — speciális esete a következőnek: $\chi(z)=G(z)e^{az}$, $\psi(z)=H(z)\,e^{-az}$, ahol $G(z)$ és $H(z)$ két megegyező fokszámú polynom. A FOURIER-sor esetében alkalmazott bizonyítás mintájára itt is meggyőződhe-

[17] PICARD, Traité d'analyse t. II. (3e éd.) pp. 198—203.

tünk arról, hogy feltételeink ki vannak elégítve, ha $x_1 - x_0 = 2a$ és $l = \frac{1}{L} = \lim_{|z| \to \infty} \frac{H(z)}{G(z)}$.

Látjuk e példa révén, hogy bármely FOURIER-sorba fejthető $f(x)$-hez, mely nem tűnik el a határintervallum mindkét végpontján, található oly exponenciális sor, mely a határintervallum belsejében $f(x)$-hez konvergál, ellenben az intervallum egyik végpontján előre megadott értéket vesz fel.

4. Érdekes sort nyerünk midőn

$$\chi(z) = \int_0^1 e^{zt} \varphi(t)\, dt, \quad \psi(z) = -\chi(-z),$$

ahol $\varphi(t)$ $(0, 1)$-ben differenciálható függvény. Feltéve ezenkívül — a számolás egyszerűsitése végett — hogy $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, könnyen beláthatjuk, hogy feltételünk ki van elégítve. $\chi(z)$-t és $\psi(z)$-t parciálisan integrálva:

$$\chi(z) = \frac{1}{z} e^z - \frac{1}{z} \int_0^1 e^{zt} \varphi'(t)\, dt, \quad \psi(z) = \frac{1}{z} e^{-z} - \frac{1}{z} \int_0^1 e^{-zt} \varphi'(t)\, dt.$$

$$\left| \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^z \right| = \left| \frac{e^{-z} - \int_0^1 e^{-zt} \varphi' dt}{e^z + e^{-z} - \int_0^1 (e^{zt} - e^{-zt}) \varphi' dt} e^z \right| <$$

$$< \frac{1 + \int_0^1 |\varphi'|\, dt}{\left| 1 - e^{-2z} - \int_0^1 [e^{-(1-t)z} + e^{-(1+t)z}] \varphi' dt \right|}.$$

A nevezőben szereplő integrál, fentebb alkalmazott segédtételünk következtében, egyenletesen zérushoz tart. Látható tehát, hogy $\left| \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^z \right|$ egyenletesen korlátos, ha $z \varepsilon \{K_n^+\}$; $\varrho_n = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

A megfelelő exponenciális sor:

$$f(x) \sim \frac{\int_0^1 \varphi dt}{2\int_0^1 t\varphi dt} \int_0^1 f(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int_0^1 \varphi \cos \mu_\nu t dt}{\int_0^1 t\varphi \cos \mu_\nu t dt} \int_0^1 f(t) \cos \mu_\nu (x-t) dt$$

ahol $0, \pm\mu_1, \pm\mu_2, \ldots$ az $\int_0^1 \varphi(t) \sin zt dt = 0$ egyenlet gyökei.

Alkalmazzuk eredményünket $f(x) = \varphi(x)$-re:

$$\varphi(x) = \frac{c_0^2}{2\int\limits_0^1 t\varphi dt} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu^2}{\int\limits_0^1 t\varphi \cos \mu_\nu t dt} \cos \mu_\nu x;$$

$$0 < x < 1, \; c_\nu = \int\limits_0^1 \varphi(t) \cos \mu_\nu t dt.$$

Egyenlőségünk mindkét oldalát $x\varphi(x)$-szel szorozva, képezzük $x[\varphi(x)]^2$ határozott integrálját a $(0, 1)$ intervallumon. Figyelembe véve mármost, hogy a fenti sor részletösszegei — amint arról könnyen meggyőződhetünk $0 \leq x \leq 1$-re egyenletesen korlátosak, az integrációt a jobboldalon tagonként végezhetjük:

$$\int\limits_0^1 x[\varphi(x)]^2 dx = \frac{c_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2.$$

Ezzel figyelemreméltó egyenlőséget nyertünk, mely emlékeztet a PARSEVAL-formulára.

5. Eddigi példáinkban $\pi(z)$ gyökei növekvő abszolut értékkel a képzetes tengely felé közeledtek. Most egy más típusú exponenciális sort tekintünk. Legyen

$$\chi(z) = e^z \cos z, \; \psi(z) = -e^{-z} \sin z.$$

$\pi(z)$-nek ebben az esetben végtelen sok valós gyöke van, amit rögtön beláthatunk, ha meggondoljuk, hogy a $\pi(z) = 0$ egyenlet, gyökeit illetőleg, a $\operatorname{tg} z = e^{2z}$ egyenlettel aequivalens.

Be kell bizonyítanunk, hogy $\pi(z)$ feltételeinknek eleget tesz. Ehhez csak azt kell megmutatnunk, hogy $\left|\frac{\operatorname{tg} z}{1-e^{-2z}\operatorname{tg} z}\right|$ és $\left|\frac{\operatorname{ctg} z}{1+e^{-2z}\operatorname{ctg} z}\right|$ alkalmasan választott $\{K_n^+\}$ halmazon korlátosak, amit — ismét a FOURIER-sor esetében követett eljárást alkalmazva — nem nehéz belátni.

Fejes László.

SUR LES SÉRIES EXPONENTIELLES DE CAUCHY.

On trouve dans un mémoire de CAUCHY [1] une application remarquable du calcul des résidus se rapportant à certaines séries qui renferment comme cas particulier le développement en série de FOURIER. C'est M. PICARD [2] qui a donné une démonstration rigoureuse de la convergence de ces séries — appelées séries exponentielles de CAUCHY. Mais sa démonstration n'est valable que dans le cas particulier où la fonction génératrice est à variation bornée.

J'ai fait — dans une Note des Comptes Rendus [3] — la remarque que la série de CAUCHY d'une fonction $f(x)$ intégrable au sens de M. LEBESGUE est certainement convergente pour chaque valeur de x, où la série de FOURIER de $f(x)$ converge.

Dans cet article nous donnons en premier lieu — après une introduction historique — une définition des séries exponentielles de CAUCHY moins restrictive que celle de CAUCHY—PICARD. Nous démontrons ensuite sous cette condition plus générale *l'équiconvergence des séries de* CAUCHY *avec les séries de* FOURIER.

Nous faisons ensuite une recherche sur la *convergence pour les extrémités de «l'intervalle limite»* et de même sur *l'intégration terme à terme* des séries exponentielles.

Nous terminons par plusieurs exemples qui nous éclairent sur le caractère général de la classe de séries dont nous nous sommes occupé dans cet article.

Ladislas Fejes.

A KIVÁLASZTÁSI AXIÓMÁRÓL ÉS VELE KAPCSOLATOS KÉRDÉSEKRŐL.

Bevezetés.

A kiválasztási axiómát a maga általánosságában először E. ZERMELO mondotta ki és használta fel a jólrendezhetőségi tétel bizonyítására.[1] Dolgozataiban az axiómát lényegileg a következőképpen fogalmazza meg:

Ha S páronként közös elem nélküli, nem üres H halmazokból álló halmaz, akkor létezik olyan K «kiválasztási halmaz», amely minden H-ból tartalmaz egy és csakis egy elemet és más elemet nem is tartalmaz.

Bár első pillanatra ez az axióma magától értetődőnek látszik, a valóság az, hogy már megszámlálható sok H halmaz esetében sem adható meg *általában* a K kiválasztási halmaz, ami egyszerűen annyit jelent, hogy *általában* nem adható meg olyan elv, amelyik megmondaná, hogy egy adott H-nak melyik eleme van a K-ban. Ezt másképp is megfogalmazzuk. Egy halmaz a CANTOR-féle értelemben akkor van definiálva, ha akármilyen elemről eldönthető, hogy eleme-e a halmaznak, vagy sem. K definíciója folytán részhalmaza az ΣH-nak. Az axióma azonban még nem nyújt eljárást, amellyel eldönthetnénk, hogy ha valamely e eleme a ΣH-nak, akkor egyúttal eleme-e a K-nak, vagy pedig nem.

Meg kell azonban jegyezni, hogy amellett, hogy ekkora nehézséget rejt magában ez az axióma, másfelől — amint azt SIERPIŃSKI

---

[1] E. ZERMELO: Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Math. Annalen.* Bd. 59. p. 514—516; továbbá E. ZERMELO: Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. Ugyanott. Bd. 65. p. 107—128.

több helyen is megmutatta [2, 3] — nagy szerepet visz nemcsak a szorosan vett halmazelméletben, hanem az analizisben is.

Az is igaz viszont, hogy ezek miatt a nehézségek miatt nagyon sok matematikus csak az axióma legegyszerűbb (l. alább) és az analízis felépítéséhez elkerülhetetlen alakjait használja fel. Természetesen még ekkor is fennmarad a törekvés, hogy tisztázzuk: mikor nélkülözhető a használata és hol elkerülhetetlen. Arról, hogy egy tételnek a bebizonyításához az axióma használata tényleg elkerülhetetlen, csak úgy győződhetünk meg, hogy kimutatjuk, hogy e tételből következik az axióma.

Az analizis felépítéséhez — ha eltekintünk egy-két bizarrabb kérdés megoldásától (pl. függvényegyenleteknek nem-folytonos megoldása; nem-mérhető halmaz létezése; stb.) — elégséges, ha a következő, lényegesen enyhébb posztulátumot fogadjuk el:

Z *posztulátum. Ha*

$$E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$$

páronkint közös elem nélküli nem üres halmazok sorozata, akkor van olyan

$$e_1, e_2, \ldots e_n, \ldots$$

elemsorozat, hogy $e_n \in E_n$, minden n-re.

Sierpiński megmutatta, hogy a fenti célra még ennyit sem kell kikötni. Ő a ***Z*** helyett ezt mondja ki: [4]

P *posztulátum. Ha*

$$E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$$

páronkint közös elem nélküli nem üres halmazok sorozata, akkor van olyan

$$e_1^\star, e_2^\star, \ldots e_n^\star, \ldots$$

---

[2] W. Sierpiński: L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et l'Analyse. *Bull. de l'Ac. des Sciences de Cracovie.* 1919. p. 97—152.

[3] W. Sierpiński: Leçons sur les nombres transfinis. Paris (Coll. Borel). p. 103—138.

[4] W. Sierpiński: l. c. [2] p. 119.

végtelen elemsorozat, hogy különböző indexű elemek különböző E_i halmazokba tartoznak (de nem szükséges, hogy a sorozatban minden E_n-ből legyen elem).

Bizonyos esetekben még ezt is lehet enyhíteni, ha a következőket posztuláljuk:

***V** posztulátum. Legyen*

$$E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$$

páronkint közös elem nélküli nem üres halmazok sorozata, akkor van olyan

$$V_1, V_2, \ldots V_n, \ldots$$

véges halmazokból álló sorozat,[5] *hogy* $V_n \subset E_n$ *és végtelen sok* $V_n \neq 0$.[6]

Hogy **V** enyhébb, mint a **P**, azt valószínűvé teszik A. FRAENKEL[7] vizsgálatai, amelyek szerint véges számosságú halmazokra is posztulálnunk kell általában a kiválasztás lehetőségét, de ez a posztulálás kevesebb a nem-végesekre vonatkozó posztulátumnál. Megfordítva azonban minden külön posztulálástól függetlenül világos, hogy **P** → **V**.[8]

Ezekután megmondjuk, hogy mi a dolgozatunk célja. VERESS PÁL egyik munkájában[9] két tételt mutatott ki az állítássorozatokra vonatkozólag, amelyekből a valós függvénytan rendkívül sok tétele következik. Bizonyításához felhasználta a ZERMELO-axióma **Z** alakját. Minthogy e tételeknek ilyen távoli következményei vannak, azt hiszem nem érdek nélkül való, hogy megvizsgáljuk, mennyiben kell kihasználni a kiválasztási posztulá-

---

[5] Nem szükséges azonban, hogy a V_n-ek számossága egyenletesen korlátos legyen.

[6] $H = 0$ azt jelenti, hogy H üres; $K \subset M$ pedig azt jelenti, hogy K részhalmaza az M-nek.

[7] A. FRAENKEL: Sur une atténuation essentielle de l'axiome du choix. *Comptes Rendus. Paris.* t. 192. p. 1072.

[8] **A** → **B** azt jelenti, hogy az **A** tételből következik a **B** tétel.

[9] P. VERESS: Über eine Beweismethode in der Theorie der abstrakten Räume. *Acta Szeged.* Bd. VI. 1932. p. 34—45.

tumot. Bebizonyítjuk, hogy az első állítássorozat-tétel aequivalens a *V*-vel; míg a második állítássorozat-tétel az *m*-dimenziós euklidesi tér esetében független a *(Z, P, V)*-től.[10] Kimutatjuk továbbá, hogy CANTOR szorzat-tétele (Durchschnittssatz), meg a BOREL-tétel a folytonos állítássorozatok tételével aequivalens. Végül CANTOR tételének és a félig-folytonos függvényekre vonatkozó két tételnek az aequivalenciájáról lesz szó.

1. §.

Ismeretes a következő tétel:[11]

T_1 *tétel. Legyen E az e elemeknek valamely halmaza és*

$$A_1, A_2, \dots A_n, \dots$$

az e-kre értelemmel bíró állításoknak[12] *egy monoton*[13] *sorozata. Ha E olyan tulajdonságú, hogy*

1. *minden e-hez tartozik a sorozatban egy* A_n *állítás, amely e-re érvényes,*

2. *az E minden E' végtelen részhalmazához található egy olyan állítás:* A_m, *amely E' végtelen sok elemére érvényes,*

akkor van a sorozatban olyan A_N *állítás, amely az E halmaz minden elemére érvényes.*

A következőkben bebizonyítjuk, hogy a T_1-tétel és a *V* posztulátum egymással aequivalens.

Hogy $V \to T_1$, azt az idézett bizonyítás egy csekély módosításával így mutathatjuk meg:

Legyen

$$A_1, A_2, \dots A_n, \dots$$

---

[10] *(Z, P, V)* jelenti a *Z, P* és *V* posztulátumok akármelyikét.

[11] VERESS PÁL: Valós függvények (Budapest) p. 35.; továbbá l. c.[9] p. 35.

[12] Az *A* állításnak akkor van értelme egy *e* elemre, ha *vagy* az áll fenn, hogy *A* érvényes az *e*-re *vagy* az, hogy nem.

[13] Egy állítássorozatot akkor mondunk *monotonnak*, ha abból, hogy *e*-re az A_n állítás érvényes, következik ugyanarra az *e*-re minden nagyobb indexű állítás érvényessége is.

egy monoton állítássorozat és E oly halmaz, amelyre teljesülnek a $\boldsymbol{T}_1$ tétel követelményei. Jelölje E_n azoknak az elemeknek a halmazát, amelyekre az első érvényes állítás A_n. Ilyen módon kapunk egy halmazsorozatot:

$$E_1, E_2, \dots E_n, \dots$$

Ha csak véges sok $E_n \neq 0$, akkor van ezek között egy legnagyobb indexű: E_N. Az A_N állítás a monotonitás folytán a kisebb indexű E_n halmazok minden elemére érvényes. Minthogy ekkor $n > N$ esetében $E_n = 0$, ennélfogva

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_N.$$

Tehát A_N érvényes az E összes elemeire.

Elég tehát azt megmutatnunk, hogy az

$$E_1, E_2, \dots E_n, \dots$$

halmazsorozatban nem lehet végtelen sok nem-üres halmaz. Ez a tény pedig a $\boldsymbol{V}$ posztulátum segítségével nagyon egyszerűen következik, mert ha végtelen sok $E_n \neq 0$ volna, akkor volna $\boldsymbol{V}$ szerint egy

$$V_1, V_2, \dots V_n \dots$$

halmazsorozat a posztulátumban megjelölt tulajdonságokkal. $\Sigma V_n = E'$ ekkor E-nek egy végtelen részhalmaza. De a $\boldsymbol{T}_1$-tétel 2. követelésével ellentétben az állítássorozat bármely A_m tagja ennek az E'-nek csak a

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_m$$

véges részhalmazára volna érvenyes. Az ellentmondásból következik, hogy csak véges sok $E_n \neq 0$ van.

Ezzel az aequivalencia első felét be is bizonyítottuk.

Be kell még bizonyítanunk, hogy $\boldsymbol{T}_1 \rightarrow \boldsymbol{V}$. Legyen

$$E_1, E_2, \dots E_n, \dots$$

egy páronkint közös elem nélküli, végtelen sok nem üres halmazból álló halmazsorozat és tegyük fel, hogy a $\boldsymbol{V}$ posztulátum erre nem teljesül. Ha a T_1-et helyesnek fogadjuk el, akkor az utóbbi feltevés ellentmondáshoz vezet.

Tekintsük ugyanis az $E = \sum_1^\infty E_n$ halmazt. Az E halmaz e elemeire vonatkozólag az n-edik állítás legyen az, hogy[14]

$$e \in (E_1 + E_2 + \cdots + E_n).$$

Az így definiált állítássorozat monoton, mert ha e-re teljesül az

$$e \in (E_1 + E_2 + \cdots + E_n)$$

állítás, akkor világos, hogy teljesül rá az

$$e \in (E_1 + E_2 + \cdots + E_n + \cdots + E_{n+p})$$

állítás is minden $p \geq 1$-re.

Az E halmaz eleget tesz a T_1-tétel 1. feltételének, mert e akkor lehet eleme az E-nek, ha eleme valamelyik E_n-nek, de akkor teljesül rá az

$$e \in (E_1 + E_2 + \cdots + E_n)$$

állítás. Eleget tesz azonban az E a második feltételnek is, mert ha E' egy végtelen részhalmaza az E-nek, akkor kell, hogy valamelyik E_m-ből végtelen sokat tartalmazzon. Ha u. i. akármelyik E_n-ből csak véges sokat tartalmazna, akkor E'-nek véges halmaznak kellene lennie, mert feltevésünk szerint nincs olyan halmaz, amely végtelen sok E_n-ből tartalmazna úgy elemet, hogy mindenikből legfeljebb véges sokat tartalmaz. Ha pedig E_m-ből végtelen sokat tartalmaz, akkor az A_m állítás, vagyis az, hogy

$$e \in (E_1 + E_2 + \cdots + E_m)$$

legalább ezekre az elemekre, tehát végtelen sokra, érvényes; azaz teljesül a tétel 2. követelése is.

De akkor a T_1 szerint van olyan A_N állítás, amely E minden elemére teljesül, azaz E minden elemére érvényes az

$$e \in (E_1 + E_2 + \cdots + E_N)$$

---

[14] $e \in H$ azt jelenti, hogy e eleme a H halmaznak.

állítás. Ez feltevésünkkel ellentétben azt fejezi ki, hogy az

$$E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$$

sorozatban csak véges sok $E_n \neq 0$ van.

Abból a feltevésből, hogy V az adott halmazsorozatra nem teljesül, a T_1 segítségével ellentmondáshoz jutottunk, tehát $T_1 \rightarrow V$.

Ezzel állításunkat teljesen bebizonyítottuk.

2. §.

A T_1-tétel esetében — az 1. és 2. feltételek teljesülésén kívül — nem kötöttünk ki semmi tulajdonságot az E-re vonatkozólag. Ha az E-ről kikötjük, hogy az elemei egy HAUSDORFF-féle térnek [15] a pontjai és azonkívül az E kompakt és zárt, akkor a 2. követelést helyettesíthetjük a következővel:

Ha az E halmaz egy e pontjára érvényes az A_n állítás, akkor az e ponthoz tartozik egy nem kisebb indexű A_{n+p} állítás és egy környezet úgy, hogy ebben a környezetben E minden pontjára érvényes az A_{n+p} állítás.

Ha a kompakt és zárt E halmazhoz tartozó állítássorozatra teljesül ez a feltétel, akkor az állítássorozatot *folytonosnak* mondjuk.

Az állítássorozat folytonosságából és az 1. feltétel teljesüléséből következik a 2. feltétel. Ezt így láthatjuk be: [16]

Ha E' az E-nek egy végtelen részhalmaza, akkor van ennek legalább egy torlódási helye, s és ez eleme E-nek. Van tehát s-re egy érvényes állítás a sorozatban: A_n. A folytonosság miatt van azonban olyan A_{n+p} állítás és olyan környezet, amelynek

---

[15] A HAUSDORFF-féle tér olyan topologikus tér, amelyben a konvergencián kívül a környezet is értelmezve van úgy, hogy az eleget tesz a HAUSDORFF-féle környezet-posztulátumoknak. Megjegyezzük, hogy a HAUSDORFF-féle tér helyett lehetne az alábbiakban mindenütt FRÉCHET-féle L-teret mondani (ahol pedig csak a konvergencia van értelmezve).

[16] VERESS: Valós függvények, p. 36.

minden E-hez tartozó pontjára érvényes az A_{n+p}. De s akármilyen környezetében E'-nek végtelen sok pontja van, ami éppen a második feltétel teljesülését jelenti.

Ezek szerint kimondható a következő tétel:[17]

***T_2*-tétel.** *Ha az E kompakt, zárt halmaz minden pontjára érvényes az*

$$A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$$

monoton és folytonos állítássorozat valamelyik állítása, akkor van köztük olyan A_N állítás, amely E minden pontjára érvényes.

Azt állítjuk, hogy az m-dimenziós euklidesi térre vonatkozólag a T_2-tétel a *(Z, P, V)*-től függetlenül is igaz.

Legyen E az m-dimenziós térnek egy kompakt, zárt halmaza. Teljesüljenek E-re a T_2 követelései és jelölje az

$$E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$$

halmazsorozatban E_n azoknak az elemeknek a halmazát, amelyekre az első érvényes állítás A_n. A bizonyításhoz elég kimutatnunk, hogy csak véges sok $E_n \neq 0$.

Az m-dimenziós térben minden $E_n \neq 0$-hoz hozzá lehet rendelni az E-ből egy jóldefiniált pontot s_n-et a következőképpen:

Tekintsük a térnek azokat a pontjait, amelyeknek első koordinátái egyenlők az E_n-ben lévő pontok első koordinátáinak az alsóhatárával. (Hogy ilyen alsóhatár létezik, az az $E_n \neq 0$ halmazok kompaktságából következik.) A tér ilyen tulajdonságú pontjai között vannak olyanok, amelyek az E_n-nek vagy izolált pontjai, vagy pedig torlódási helyei. Ezek a pontok mindenesetre elemei az E-nek, mert E zárt. Legyen ezeknek a pontoknak a halmaza $E_{n,1} \subset E$. Ha $E_{n,1}$ csak egyetlen pontot tartalmaz, akkor ezt rendeljük E_n-hez. Ha többet, eljárásunkat megismételjük az $E_{n,1}$ halmazra és a második koordinátákra, é. i. t.; legfeljebb m lépésben eljutunk egy olyan $E_{n,k}$-hoz ($k \leq m$),

[17] V. ö. l. c. [16] p. 36.

amely csak egyetlen s_n pontból áll és ez a pont eleme E-nek. Ezt a jóldefiniált pontot rendeljük az E_n-hez. Az s_n-nek még az a tulajdonsága is megvan, hogy vagy magára s_n-re, vagy pedig s_n akármilyen kis környezetében lévő pontokra A_n az első érvényes állítás.

Ha most feltesszük, hogy végtelen sok $E_n \neq 0$ volna, akkor az

$$E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$$

végtelen halmazsorozathoz tartoznék egy meghatározott

$$s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$$

végtelen pontsorozat úgy, hogy $s_n \in E$, minden n-re. Minthogy E kompakt és zárt, ennek a sorozatnak van torlódási helye. Egy ilyen torlódási helye legyen az $s \in E$. Ekkor azonban tartozik s-hez egy rá érvényes állítás A_n. De akármelyik állítás legyen is az A_{n+p}, nem található hozzá olyan környezet, amelyben E-nek minden elemére érvényes volna az A_{n+p}. Ugyanis s minden környezetében vannak olyan pontok, amelyekre, vagy amelyek környezetében lévő pontok valamelyikére az első érvényes állítás nagyobb indexű, mint A_{n+p}. Ez pedig ellentmondásban van a folytonossággal.

Korollárium. A ponthalmazok és a valós függvények elméletének azok a tételei, amelyek a $\boldsymbol{T}_2$ tételből következnek, az m-dimenziós euklidesi tér esetében függetlenek a $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{V}$ posztulátumoktól.

Megjegyzés. A $\boldsymbol{V}$ posztulátummal igazolható, hogy ha a $\boldsymbol{T}_1$ tétel 2. feltevése teljesül egy Hausdorff-féle térben lévő kompakt, zárt halmazra és egy állítássorozatra, akkor az állítássorozat egyúttal folytonos is.

3. §.

A Hausdorff-féle térre vonatkozólag Cantor szorzat-tétele és a $\boldsymbol{T}_2$-tétel egymással aequivalens.

Cantor szorzat-tétele így mondható ki:

C-tétel. *Ha*

$$E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$$

egy halmazsorozat a következő tulajdonságokkal:

1. $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$
2. E_1 *kompakt,*
3. *minden n-re E_n zárt és nem üres,*

akkor a halmazsorozat közös pontjainak a halmaza $\prod\limits_1^\infty E_n = D$ (vagyis a szorzat-halmaz) sem lehet üres.

Először megmutatjuk, hogy $T_2 \rightarrow C$.[18] Tegyük fel C-vel ellentétben, hogy D üres. Az E_1 kompakt és zárt halmaz pontjaira legyen az n-edik állítás az, hogy[19]

$$e \in C(E_n)$$

Ha D üres, akkor minden e-re van egy érvényes állítás. Az állítások monotonok és — minthogy az E_n-ek zártak — egyúttal folytonosak is. Van tehát T_2 szerint egy A_N állítás

$$e \in C(E_N),$$

amely E_1 minden pontjára érvényes. Ez pedig a C 3. fetételével ellentétben azt jelentené, hogy E_n üres, hacsak $n \geq N$.

Most mutassuk meg, hogy $C \rightarrow T_2$. Legyen az E kompakt, zárt halmaz minden pontjára érvényes az

$$A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$$

monoton és folytonos állítássorozat egy-egy állítása és jelölje az

$$E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$$

halmazsorozatban E_n azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekre az első érvényes állítás A_n. Annyit kell csak bebizonyítanunk, hogy csupán véges sok $E_n \neq 0$ van.

---

[18] V. ö. l. c. [16] p. 38.

[19] $C(H)$ jelenti a H halmaz komplementer halmazát.

Ha végtelen sok volna, akkor képezhetnénk a következő halmazsorozatot:

$$S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$$

ahol

$$S_n = E_n + E_{n+1} + \cdots + H_n(E_i).$$

Itt $H_n(E_i)$ jelenti az $E_n + E_{n+1} + \cdots$ halmaznak azokat a torlódási helyeit, amelyek az $E_1 + E_2 + \cdots + E_{n-1}$ halmazban vannak. Az

$$S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$$

halmazsorozatra teljesülnek a $\boldsymbol{C}$ követelményei, mert

1. $S_1 \supset S_2 \supset \ldots$ az S_n-ek szerkesztése szerint;

2. $S_1 = E_1 + E_2 + \cdots + E_n + \cdots = E$ a feltétel szerint kompakt és zárt;

3. a szerkesztés szerint minden S_n zárt, továbbá (minden n-re) $S_n \neq 0$, különben csak véges sok $E_n \neq 0$ volna.

Mégis ellentmondásban a $\boldsymbol{C}$-vel a szorzat-halmaz üres; mert ha e pontja az E-nek, akkor tartozik e-hez egy rá érvényes állítás A_n és — a folytonosság miatt — van hozzá egy környezet meg egy A_{n+p} állítás, amely ebben a környezetben lévő minden $e \in E$-re érvényes. Ekkor azonban S_{n+p} ezt a pontot egy egész környezetével együtt nem tartalmazhatja. Tehát bármely pontja is e az E-nek, D-nek nem lehet pontja, azaz D üres. Az ellentmondás abból származott, hogy feltettük, hogy végtelen sok $E_n \neq 0$. Ezzel pedig igazoltuk, hogy $\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{T}_2$.

Korollárium. $\boldsymbol{T}_2$ az m-dimenziós térben független a ($\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{V}$)-től (amint azt az előző paragrafusban közvetlenül is bebizonyítottuk), mert SIERPIŃSKI kimutatta,[20] hogy a CANTOR-tétel az m-dimenziós térre tényleg független.

4. §.

A HAUSDORFF-féle tér esetében a BOREL-tétel és a $\boldsymbol{T}_2$ egymással aequivalens.

[20] W. SIERPIŃSKI: Un théorème sur les ensembles fermés. *Bull. de l'Ac. des Sciences de Cracovie.* 1918. p. 49—51.

Borel befödési tétele a következő:

B *tétel. Ha egy kompakt, zárt halmaz befödhető az*

$$M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots$$

nyilt halmazok egy végtelen sorozatával, akkor befödhető közülök véges sokkal is.

1. $\boldsymbol{T}_2$-ből folyik a **B**.[21] Ugyanis legyen az E kompakt zárt halmaz pontjaira az n-edik állítás az, hogy

$$e \in (M_1 + M_2 + \cdots + M_n).$$

Világos, hogy az állítássorozatunk monoton. De folytonos is, mert ha $e \in (M_1 + M_2 = \ldots M_n)$, akkor e-nek egy kis környezetére is igaz ez az állítás, tekintve, hogy $M_1 + M_2 + \cdots + M_n$ nyilt halmaz. Van tehát olyan A_N, azaz

$$e \in (M_1 + M_2 + \cdots + M_N)$$

állítás, amely E minden pontjára érvényes. De ez éppen a Borel-tétel.

2. Hogy $\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{T}_2$, az szintén ilyen könnyen következik. Legyen ismét

$$A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$$

egy monoton, folytonos állítássorozat és E oly kompakt, zárt halmaz, amelynek minden pontjára van a sorozatban egy érvényes állítás. Jelölje továbbá $E_n \subset E$ azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekre A_n az az első érvényes állítas, amelyhez már tartozik olyan környezet, hogy E-nek minden ebben a környezetben lévő pontjára is érvényes ez az állítás. Így kapjuk az

$$E_1, E_2 \ldots E_n, \ldots$$

halmazsorozatot.

Az E_n halmaznak azok a környezetei, amelyekben E pontjaira A_n érvényes, adnak egy nyilt halmazt, M_n-et, amely tartalmazza E_n-et. Ilyen módon kapjuk a nyilt halmazoknak egy

$$M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots$$

[21] V. ö. l. c. [9] p. 37—38.

sorozatát, amelyek befödik a kompakt és zárt E halmazt. De akkor a BOREL-tétel szerint E-t befödi ezek közül véges sok:

$$M_1, M_2, \ldots M_N$$

is. Az A_N állítás viszont akkor E minden pontjára érvényes.

1. *Korollárium.* CANTOR szorzat-tétele és BOREL befödési tétele egy HAUSDORFF-féle térben egymással aequivalens.[22]

2. *Korollárium.* Kompakt, zárt halmazon mindenütt folytonos függvény egyenletes folytonosságának bebizonyításához nem szükséges a BOREL—LEBESGUE-tétel, hanem elégséges maga a BOREL-tétel is. (U. i. az egyenletes folytonosság-tétele rögtön következik T_2-ből.)

5. §.

Ismeretes, hogy a torlódási helyet — és ennélfogva a zárt halmazt is — kétféleképpen szokás definiálni:[23]

a. A t pontot az E halmaz torlódási helyének nevezzük, ha a t bármely környezetében van E-nek t-től különböző pontja is.

a. A t pontot az E halmaz torlódási helyének nevezzük, ha van az E halmazban olyan $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ pontsorozat, amely a t-hez tart.*

E két definíció egyezését csak a $\boldsymbol{P}$ posztulátummal lehet igazolni. Viszont az *a* és *a** definíciók aequivalenciája, amint azt SIERPIŃSKI megmutatta, maga után vonja a $\boldsymbol{P}$-t.[24]

Hasonlóképpen két definíciót lehet adni a félig-folytonosságnak is (pl. felülről-folytonosság esetében):

β. Az $f(x)$ függvény felülről folytonos az x_0 helyen, ha minden $0 < \varepsilon$-hoz van olyan környezete az x_0-nak, hogy ebben minden x pontra

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

[22] Ez a korollárium speciális esete SAKS egy tételének. V. ö. SAKS: Sur l'équivalence de deux théorèmes de la Théorie des ensembles. *Fundamenta Mathematicae.* Tome II. p. 1—3.

[23] V. ö. l. c. [2] p. 119.

[24] V. ö. l. c. [2] p. 120—121.

β^*. Legyen $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ egy tetszőleges sorozat, amely az x_0-hoz tart. Az $f(x)$ függvény felülről folytonos az x_0 helyen, ha minden $0 < \varepsilon$-hoz és minden x_0-hoz konvergáló sorozathoz van olyan N, hogy valahányszor $n > N$, mindannyiszor

$$f(a_n) < f(x_0) + \varepsilon.$$

A helyzet — amint azt majd megmutatjuk — itt is ugyanaz, mint a torlódási hely esetében, azaz β és β^* akkor és csak akkor aequivalens, ha elfogadjuk a $\boldsymbol{P}$-posztulátumot.

Ismeretesek továbbá a következő tételek:

$\boldsymbol{T}_3$. *Kompakt zárt halmazon felfelé (lefelé) folytonos függvények felülről (alulról) korlátosok.*

$\boldsymbol{T}_4$. *Kompakt zárt halmazon minden felfelé (lefelé) folytonos függvény értékkészletének Weierstrass-féle felső- (alsó) határát fel is veszi.*

Érdekes, hogy akár az α és β, akár pedig az α^* és β^* definíciókat fogadjuk el, következik, hogy e három tétel: $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{T}_3$ és $\boldsymbol{T}_4$ egymással aequivalens.

Lássuk be először, hogy $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{T}_3$ és $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{T}_4$. Ez azonban szinte magától értetődik, mert az előbbiek szerint $\boldsymbol{C}$-ből folyik a $\boldsymbol{T}_2$. Ebből viszont tüstént következik $\boldsymbol{T}_3$ is és $\boldsymbol{T}_4$ is.[25]

Bizonyítsuk most be, hogy $\boldsymbol{T}_3 \to \boldsymbol{C}$. Legyen

$$E = E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$$

egy halmasorozat, amelyekre teljesülnek a CANTOR-tétel követelményei, de

$$\prod_1^{\infty} E_n = D = 0$$

és definiáljuk E-n a következő függvényt: E-nek az $(E_n - E_{n+1})$ pontjaiban legyen (minden n-re)

$$f(x) = n.$$

Világos, hogy ha $D = 0$, akkor

$$E = (E_1 - E_2) + (E_2 - E_3) + \dots + (E_n - E_{n+1}) + \dots$$

---

[25] V. ö. l. c. [16] p. 46—47. és p. 77.

ahol végtelen sok $(E_n - E_{n+1}) \neq 0$, különben $D \neq 0$ volna. A fenti függvény felülről folytonos, mert — ha elfogadjuk az α és β definíciókat — bármely x_0-nak van β-nak megfelelőleg olyan környezete, hogy abban minden x-re

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

U. i. x_0 pontja valamelyik $(E_n - E_{n+1})$ halmaznak, mert kell, hogy legyen egy első olyan E_{n+1}, amelynek x_0 már nem pontja, különben $D \neq 0$ volna. Ha x olyan, hogy $x \in (E_k - E_{k+1})$, ahol $k \leq n$, akkor a feltétel teljesülése nyilvánvaló. x_0-nak van azonban olyan környezete, hogy abban nincs már olyan x, amely olyan $(E_k - E_{k+1})$ halmaznak volna az eleme, amelyre $k > n$. T. i. ha nem volna, akkor α szerint x_0 torlódási helye volna az E_k-nak $(k > n)$, tehát x_0 nem lehetne pontja az $(E_n - E_{n+1})$ halmaznak, mert E_k zárt és részhalmaza az E_{n+1}-nek.

Az α^* és β^* definíciók szerint pedig az $f(x)$ felülről-folytonosságát így láthatjuk be: Tegyük fel, hogy az

$$x_0 \in (E_n - E_{n+1})$$

helyen $f(x)$ nem volna felülről folytonos. Ez azt jelenti, hogy van olyan sorozat, hogy bár

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \to x_0,$$

mégsem lehet hozzá találni olyan N-et, amelyen túl az

$$f(a_n) < f(x) + \varepsilon$$

egyenlőtlenség fennállana, azaz a sorozatnak van egy részsorozata

$$a_1', a_2', \ldots, a_n', \ldots \to x_0,$$

amelyiknek minden tagja eleme az E_{n+1}-nek. De akkor kell, hogy $x_0 \in E_{n+1}$ legyen, mert E_{n+1} zárt α^* szerint, azaz feltevésünkkel ellentétben az x_0 nem lehetne eleme az $(E_n - E_{n+1})$ halmaznak.

Ha pedig $f(x)$ felülről folytonos az E kompakt zárt halmazon, akkor $\boldsymbol{T}_3$ szerint kellene, hogy $f(x)$ egyúttal felülről korlátos legyen, holott akármilyen nagy G számhoz van az E-ben olyan x pont (pl. az $(E_n - E_{n+1})$ halmaz akármelyik pontja, hacsak $n > G$), hogy

$$f(x) > G.$$

Az ellentmondásból következik, hogy D nem lehet üres.

Még azt kell megmutatnunk, hogy $\boldsymbol{T_4} \rightarrow \boldsymbol{C}$. Ezt a bizonyitást pontosan úgy végezhetjük, mint az előbbit, azzal a különbséggel, hogy itt legyen

$$f(x) = \frac{n}{n+1},$$

ha

$$x \in (E_n - E_{n+1})$$

minden n-re. Ha $\boldsymbol{C}$ nem volna igaz, akkor a $\boldsymbol{T_4}$-gyel ellentétben kimutatható volna, hogy az E_1 kompakt zárt halmaz minden pontjában felülről folytonos $f(x)$ függvény a halmazon nem venné fel felső határát, az 1-et.

Megmutatjuk még, hogy β és β^* definiciók aequivalenciája maga után vonja a $\boldsymbol{P}$ posztulátumot.[26] A bizonyitást lineáris térben végezzük, de ugyanolyan könnyen megy m-dimenziós térre is.

Legyen

$$E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$$

egy halmazsorozat, amelyre tegyük fel, hogy nem teljesül a $\boldsymbol{P}$, míg ugyanakkor $\beta \longleftrightarrow \beta^*$. Az adott halmazsorozat, minden tagját egyértelműen beletranszformálhatjuk a $(0, 1)$ intervallumba. E_n-re a transzformációs formula lehet[27]

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2n(n+1)} \left(\frac{x}{1+|x|} + 2n+1 \right).$$

A $(0, 1)$ intervallumban definiálhatjuk a következő függvényt: Ha x képpontja a ΣE_n valamelyik elemének, akkor legyen

$$f(x) = 1,$$

[26] Ezt a tényt a közönséges folytonosság esetében bebizonyította W. SIERPIŃSKI l. c. [2] p. 130.

[27] V. ö. l. c. [2] p. 120.

különben legyen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -1, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Ha ***P*** nem teljesül a fenti halmazsorozatra, akkor ez a függvény az $x = 0$ helyen felülről folytonos β^* szerint; mert akármilyen sorozattal tartsunk is a zérus helyhez, a sorozatban végesszámú tag kivételével a pontok nem képpontok (különben ***P*** teljesülne a képpontokra, tehát a sorozatra is) és ennélfogva egy bizonyos N indexű tagon túl tényleg

$$f(a_n) < f(0) + \varepsilon, \quad \text{ha } n > N.$$

Ellentétben azonban azzal a feltevésünkkel, hogy $\beta \longleftrightarrow \beta^*$, az $x = 0$ helyen az $f(x)$ nem folytonos felülről β szerint, mert az $x = 0$ helynek akármilyen kis környezetében is vannak képpontok, ahol pedig $f(x) = 1$, tehát már $\varepsilon = \frac{1}{2}$ esetében sem teljesül a β által követelt egyenlőtlenség.

Ezzel bebizonyítottuk, hogyha $\beta \longleftrightarrow \beta^*$, akkor kell, hogy ***P*** is igaz legyen.

* * *

Legyen szabad végül ezúton is hálás köszönetet mondanom Veress Pál egyetemi m. tanár úrnak azért a jóindulatért, amivel munkámat kisérte. Az itt tárgyalt problémák is részben a vele való beszélgetés közben merültek fel.

Egyed László Levente.

ÜBER DAS AUSWAHLAXIOM UND MIT IHM ZUSAMMENHÄNGENDE FRAGEN.

In den Vorigen wurde der Zusammenhang einiger Fragen der reellen Funktionentheorie mit dem Auswahlaxiom untersucht.

§. 1. Nehmen wir das folgende Postulat (genannt V) an:

Sei

$$E_1, E_2, \dots E_n, \dots$$

eine Folge von paarweise elementfremden, nicht leeren Mengen. Dann gibt es eine Mengenfolge

$$V_1, V_2, \dots V_n, \dots \quad (V_n \subset E_n)$$

deren Glieder endlich viele Elemente enthalten, und für welche unendlich viele V_n von der Nullmenge verschieden sind.

Ferner ist der folgende von Herrn P. Veress stammende Satz bekannt:

Satz $\boldsymbol{T_1}$. *Sei*

$$A_1(e),\ A_2(e), \ldots\ A_n(e), \ldots$$

eine monotone[28] *Folge von Aussagen und E eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *zu jedem Element e aus E gibt es eine für e gültige Aussage $A_n(e)$ aus der Folge,*

2. *zu jeder unendlichen Teilmenge E' von E gehört eine Aussage $A_m(e)$, die für unendlich viele Elemente von E' gilt.*

Dann gibt es in der Folge eine Aussage $A_N(e)$, die für alle Elemente von E gültig ist.

Es wurde gezeigt, dass das Postulat $\boldsymbol{V}$ und dieser Satz äquivalent sind.

§ 2. Aus Satz $\boldsymbol{T_1}$ folgt:

Satz $\boldsymbol{T_2}$. *Ist für jeden Punkt der kompakten, abgeschlossenen Menge E eine Aussage der monotonen, stetigen*[29] *Aussagenfolge*

$$A_1(e),\ A_2(e), \ldots\ A_n(e), \ldots$$

gültig, so gibt es unter diesen eine Aussage $A_N(e)$, die für alle Elemente von E gilt.

Dieser Satz ist im m-dimensionalen euklidischen Raum von dem Auswahlaxiom (auch von $\boldsymbol{V}$) unabhängig).

§ 3. Der Cantorsche Durchschnittssatz und der Satz $\boldsymbol{T_2}$ sind äquivalent.

§ 4. Der Überdeckungsatz von Herrn Borel und $\boldsymbol{T_2}$ sind äquivalent.

§ 5. Für die halbstetigen Funktionen kann man folgende Sätze aussprechen:

Eine auf einer kompakten, abgeschlossenen Menge nach oben (unten) stetige Funktion ist von oben (unten) beschränkt.

Eine auf einer kompakten, abgeschlossenen Menge nach oben (unten) stetige Funktion nimmt ihr Maximum (Minimum) in dieser Menge an.

Wir bewiesen, dass diese Sätze bei den beiden gewöhnlichen Definitionen der Abgeschlossenheit und der Halbstetigkeit mit dem Cantorschen Satz gleichwertig sind.

L. Egyed.

---

[28] Eine Aussagenfolge wird monoton genannt, wenn aus der Gültigkeit von $A_n(e)$ diejenige von $A_{n+1}(e)$ folgt.

[29] Eine Aussagenfolge wird stetig genannt, wenn zu jedem Punkt aus E, für die eine Aussage $A_n(e)$ gilt, stets eine Umgebung und eine Aussage $A_{n+p}(e)$ so existiert, dass $A_{n+p}(e)$ für jeden Punkt dieser Umgebung gültig ist ($p \geq 0$).

A KÉT BOLYAI MAROSVÁSÁRHELYI EREKLYE-MÚZEUMA.[1]

A nagymultú marosvásárhelyi református Kollégium, mely hamarosan fennállásának 400 éves jubileumát fogja megünnepelhetni, az 1937. év végén csendes házi ünnepség keretében nyitotta meg nagyértékű (40,000 kötetet számláló) könyvtárában BOLYAI FARKAS (1775—1856) és fia BOLYAI JÁNOS (1802—1860) ereklyéinek gyüjteményét. Hosszú évek gyüjtésének eredménye e múzeum, melynek mostani méltó elhelyezését magának a Kollégiumnak, valamint lelkes barátainak (BÜRGER DEZSŐ, dr. CZAKÓ JÓZSEF) áldozatkészsége tette lehetővé, a KOVÁTS BENEDEK jelenlegi könyvtárőr buzgó támogatásával és gróf TELEKI DOMONKOS készségével. A Bolyaiak kinyomatott munkái és a rájuk vonatkozó irodalom mellett számos eredeti kézirat, levél, okirat, kép és használati tárgy van itt egybegyüjtve, amelyeknek megőrzése nemcsak kegyeletes, hanem egyszersmind kulturális cselekedet is.

Igen érdekes például itt látni azokat a kis térbeli (felhajtható) ábrákat, melyeket a Kollégium derék székely nyomdásza, KALI SIMON — valószínűleg minden sokszorosító eljárás nélkül — egyenként metszegethetett ki BOLYAI FARKAS utasításai szerint *Tentamen*-jének egyes példányai számára.

A Múzeum értékes darabja BOLYAI FARKAS koponyája, melyet apa és fiú 1911-ben történt exhumálása óta őriz kegyelettel a Kollégium. Ezt kiegészíti az a jólismert arckép, melyet SZABÓ JÁNOS festőművész készített BOLYAI FARKAS-ról, aki különben fiatal korában maga is festegetett: egy önarcképét és két történeti tárgyú kompozicióját őrzi a Múzeum.

Igen jellegzetes az a levelezés, melyet apa és fiú (gyakran címzés és megszólítás nélkül, néha «Ön»-özve vagy «Kegyed»-ezve egymást) folytattak egymással színlapok hátán, gyászjelentések oldalán stb., mikor

[1] Jelen ismertetés adatait GULYÁS KÁROLY úrnak, a marosvásárhelyi ref. Kollégium nyug. tanárának, a marosvásárhelyi Teleki-könyvtár őrének köszönjük.

mindketten egy városban, Marosvásárhelyen laktak. Ennek a levélanyagnak rendezése egyébként még csak most van folyamatban.

Bolyai Farkas használati tárgyai közül, amelyek a Múzeumban láthatók, felemlítjük a következőket. Kis hosszúkás festett láda, mellyel Bolyai Farkas hat és féléves korában szülőfalújából, Bolyáról, elhagyva a szülői házat, az enyedi ref. Kollégiumba bevonult. Zöld csempékkel rakott kétméteres oszlopkályha, Bolyai Farkas kályharakó mesterségének és füstemésztő kísérletezéseinek eredménye. Egy durván ácsolt, le sem nagyon gyalult szék, melyen ülve alkotta Bolyai Farkas matematikai és drámai műveit. Egy fapohár, melybe Bolyai Farkas verseinek hamvát gyüjtötte — önkritikájának és szerénységének tanújeleképen.

Nem hiányoznak természetesen a Bolyai-Múzeumból annak az elkésett, de annál lelkesebb elismerésnek tanúbizonyságai sem, melyet abszolút geometriájával Bolyai János aratott. Ez az elismerés, immár évtizedek óta, a geometria mindennyelvű irodalmában meg van örökítve. Hogy e siker, melyet Bolyai János már nem érhetett meg, a nagyközönség számára is szemlélhetővé váljék, a Bolyai-Múzeum megszerezte azokat a koszorúkat is — dedikált szalagjaikkal együtt — melyeket 1902-ben a kolozsvári Ferencz József-Tudományegyetem kapott, midőn oly méltó módon megünnepelte Bolyai János születésének 100 éves fordulóját.

A marosvásárhelyi ref. Kollégium, hol a matematika minden időkben kellő megbecsülésnek örvendett, a magyar tudományosság őszinte háláját érdemelte ki azzal a cselekedetével, mellyel a magyar nemzeti kultúra két nagy alakjának ily méltó emléket állított.

Kimutatás

az 1937. évi november hó 1-től 1938. évi március hó 31-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíjak.

1933-ra : Fejes Zsigmond (6), Ujj Gyula (8), Schwartz Ilona (4). *Összesen 18 P.*

1934-re : Fejes Zsigmond (4), Girsik Géza (7), Lajta Ernő (6), Terkán Lajos (4), Tóth Lajos (6). *Összesen 27 P.*

1935-re : Bruck Ferenc (4), Dér Zoltán (6), Forró Magdolna (8), Girsik Géza (5), Halász Ernő (8), Lóky Béla (8), Maróthi Ferenc (8), Rigó Ferenc (8), Terkán Lajos (8), Theisz Edéné Vajk Magda (4), Vészi Gábor (8). *Összesen 75 P.*

1936-ra : Albert Anna (8), Bolla Györgyné (8), Bruck Ferenc (1), Bujtás János (6), Dér Zoltán (6), Erdey-Grúz Tibor (8), Fejes László (4), Halász Ernő (8), Heuer Ede (8), Lassovszky Károly (8), Lipka István (6), Lóky Béla (8), Maróthi Ferenc (8), Oltay Károly (8), Orbán György (6), Péter Rózsa (8), Somogyi Antal (8), Sós Ernő (8), Szelianszky Ferenc (3), Sziklai Jenő (6), Terkán Lajos (8), Tolnai Jenő (8), Vészi Gábor (8), Zigány Ferenc (6). *Összesen 164 P.*

1937-re : Albert Anna (8), Beke Manó (8), Bertrám Brunó (6), Blau Györgyné Bálint Emma (8), Bolla Györgyné (8), Breszlauer Arturné (8), Bugarszky István (8), Bujtás János (6), Darkó Béla (6), Dér Zoltán (6), Fejes László (8), Fraunhoffer Lajos (8), Goldziher Károly (8), Hartly Domokos (6), Halász Ernő (8), Heuer Ede (8), Horvay Béla (8), Jáky József (8), id. Jurányi Henrik (8), Krbek Ferenc (8), Lengyel Béla, egyet. (8), Lengyel Béla műegyet. (8), Lipka István (6), Lóky Béla (8), Maróthi Ferenc (8), Nagy Ferenc (8), Neogrády Sándorné Haich S. (8), Neubauer Konstantin (8), Patai Imre (8), Schay Géza (8), Somogyi Antal (8), Szász Pál (8), Szekeres Kálmán (8), Székely Károly (6), Sziklai Jenő (6), Tardos Vida (6), Vészi Gábor (8). *Összesen 278 P.*

1938-ra : Bacsó Vilmos (6), Balyi Károly (6), Barta József (8), Cseh Elekné Tillinger Stefánia (8), Darkó Béla (6), Erdős Pál (8), Faragó

Andor (8), Fenyő István (8), **G**yulai Zoltán (4), **H**adarits Vendel (8), Hajós György (8), Hausbrunner Vilmos (8), Holenda Barnabás (6), **J**elitai József (8), **K**lug Lipót (8), Kövessi Ferenc (8), Kuzaila Péter (6), **L**ipka István (6), **N**yári Béla (6), **O**rtvay Rudolf (8), **P**ogány Béla (8), **R**ados Gusztáv (8), Rados Ignác (8), Renner János (8), **S**omogyi Antal (8), **Sz**abó Gábor (8), Széky István (6), Sziklai Jenő (6), Szőke Béla (8), **T**angl Károly (8), Török Elemér (6), **V**arga Zoltán (2), Vörös Cyrill (6). *Összesen 226 P.*

1939-re : **G**yulai Zoltán (4), **L**ipka István (6), **S**omogyi Antal (8), **V**arga Zoltán (6). *Összesen 24 P.*

1940-re ; **S**omogyi Antal 8 *P.*

2. Előfizetési díjak.

1937-re : Ág. h. ev. Rudolf gimn., Békéscsaba (1), Kilián Frigyes. Bp. IV. (6), Ferenc József Tanítók Háza, Bp. (8), Term. Tud. Társulat, Bp. (8), Műegy. Kémiai- Fizikai Tanszék, Bp. (8), Ref. gimn. Fizikai Szertára, Debrecen (6), Polg. Isk. Tanárképző Főisk., Szeged (6) *Összesen 43 P.*

1938-ra : Ág. h. ev. Rudolf gimn., Békéscsaba (4), Csillagvizsgáló Int.. Bp.-Svábhegy (8), Meteorol. és Földmágn. Int. Bp. (8), Kalazantinum Könyvtára, Bp. (8), Bernardinum Könyvtára, Bp. (8), Norbertinum Könyvtára, Bp. (8), Pesti Izr. Hitközség gimn.-a (8), Term. Tud. Társulat. Bp. (8), Technol. és Anyagvizsg. Int., Bp. (8), Műegy. Kémiai-Fizikai Tanszék, Bp. (8), Műegy. I. Math. Gyűjtemény, Bp. (8), Ref. Horthy M. gimn.. Kisújszállás (6), Szt. Benedek r. Közp. Könyvtár, Pannonhalma (6), Bánya- és Erdőmérnöki Kar, Sopron (6), Polg. Isk. Tanárképző Főisk., Szeged (6). *Továbbá a m. kir. Vallás- és Közoktatásügyi Minisztérium előfizetése a következő középiskolák tanári könyvtárai számára :* Balassa Bálint gimn., Balassagyarmat, Lorántffy Zsuzsánna lgimn., Békéscsaba. Verbőczy I. gimn. Bp., I., Mátyás-király gimn., Bp. II., Toldy F. gimn., Bp. II., Árpád gimn., Bp. III., Berzsenyi D. gimn., Bp. V., Bolyai gimn., Bp. V., Kölcsey F. gimn., Bp. VI., Kemény Zs. gimn., Bp. VI., Mária Terézia lgimn., Bp. VI., Madách I. gimn., Bp. VII.. Szent István gimn., Bp. XIV., Erzsébet Nőiskola lgimn., Bp. XIV., Középisk. Tanárképző Int.-i gyak. gimn., Bp. VIII., Zrínyi M. gimn.. Bp. VIII., Fáy A. gimn., Bp. IX., Széchenyi I. gimn., Bp. X., Szt. László gimn., Bp. X., Kossuth gimn., Cegléd, Szent Imre gimn., Csongrád, Középisk. Tanárképző Int. gyak. gimn., Debrecen, Fazekas M. gimn., Debrecen, Dobó I. gimn., Eger, Koháry I. gimn., Gyöngyös, Révai M. gimn., Győr, Apponyi A. lgimn.. Győr, Klebelsberg K. gimn., Hatvan.

József nádor gimn., Jászberény, Somssich P. gimn., Kaposvár, Katona I. gimn., Kecskemét, Deák F. gimn., Kispest, Bessenyei Gy. gimn., Kisvárda, Csanád vezér gimn., Makó, Teleki Blanka lgimn., Mezőtúr, Hunfalvy I. gimn., Miskolc, Szabolcs vezér gimn., Nagykálló, Kossuth L. gimn., Pestszenterzsébet, Középisk. Tanárképző Int., gr. Széchenyi I. gyak. gimn., Pécs, Áll. gimn., Pestszentlőrinc, Széchenyi I. gimn., Sopron, Áll. lgimn., Sopron, Kisfaludy S. gimn., Sümeg, Klauzál G. gimn., Szeged, Baross G. gimn., Szeged, Árpádházi Szt. Erzsébet lgimn., Szeged, Ybl M. gimn., Székesfehérvár, Garay I. gimn., Szekszárd, Horváth M., gimn., Szentes, Áll. gimn., Szentgotthárd, Verseghy F. gimn., Szolnok, Bánffy Katalin lgimn., Szolnok, Faludy F. gimn., Szombathely, Áll. lgimn., Szombathely, Könyves K. gimn., Újpest, Kanizsay Dorottya lgimn., Újpest, Deák F. gimn., Zalaegerszeg, Kir. egyetemi kath. gimn., Bp. II., Kir. kath. Eszterházy M. nádor gimn., Dombóvár, Kir. kath. gr. Széchenyi István gimn., Jászapáti, Kir. kath. Szt. László gimn., Mezőkövesd, Kir. kath. Fráter Gy. gimn., Miskolc, Kir. kath. gimn., Nyiregyháza. (504) *Összesen 612 P.*

1939-re: Meteorol. és Földmágnességi Int. Bp. *2 P.*

3. Adomány és segély.

Magyar Tud. Akadémia 500 P, Bláthy Ottó Titusz 10 P. Összesen 510 P.

4. Vegyesek.

Matematikai és Fizikai Lapokért: Stechert-cég (Lipcse) 10·47 P, Antal Márk (Kolozsvár) 40 P, Bernardinum könyvtára (Bp.) 30·50 P. Hirdetésért: Stabilovolt (Berlin) 23·90 P. Összesen 104·87 P.

Budapesten, 1938 márc. 31-én.

Szabó Gábor,
pénztáros.

International Mathematical Journals from Hungary

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

Publishers: „Bolyai" Mathematical Institute at the University of Szeged
Editors: A. Haar, B. Kerékjártó, F. Riesz, L. Kalmár, L. Rédei, Gy. Szőkefalvi-Nagy, B. Szőkefalvi-Nagy.
Size: 24 cm, 250 to 350 pp.
Published in English, French, German or Russian

Vols. 1-30, 1922-1969, mostly reprinted,	clothbound set	US $	538,-
	Unbound set	US $	466,-
Single vols, except Vol. 12	per vol.	US $	16,-
Vol. 12 A+B		US $	32,-
Forthcoming vols.	per vol.	US $	16,-

PUBLICATIONES MATHEMATICAE

Publishers: Mathematical Institute of the University of Debrecen
Editors: A. Rényi, T. Szele, O. Varga, J. Aczél, B. Gyires A. Kertész, A. Rapcsák, B. Barna
Size: 24 cm, 300 to 400 pp.
Published in English, French, German or Russian

Vols. 1-16, 1949-1969, partly reprinted,	clothbound set	US $	272,-
	Unbound set	US $	240,-
Single vols. (also forthcoming vols.)	per vol.	US $	16,-

ANNALES UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTIENSIS de Rolando Eötvös Nominatae

SECTIO MATHEMATICA

Editor: A. Császár
Size: 24 cm, 150 to 200 pp.
Published in English, French, German or Russian

Vols. 1-12, 1958-1969, mostly reprinted,	clothbound set	US $	144,-
Vols. 1, 2, 5-12 and forthcoming vols. unbound,	per vol.	US $	10,-
Vol. 3/4, (404 pp.) memorial vol. devoted to L. Fejér	clothbound	US $	22,-

International Physical Journals from Hungary

ACTA PHYSICA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

Editor: P. Gombás
Size: 24 cm, cca 450 pp.
Published in English, French, German or Russian

Vols. 1-27, 1950-1969, partly reprinted with HUNGARICA ACTA PHYSICA, Vol. 1, 1949,	clothbound set	US $	426,-
	Unbound set	US $	370,-
Single vols. 1-25	per vol.	US $	14,-
Vol. 26 and forthcoming vols.	per vol.	US $	16,-

ACTA PHYSICA ET CHEMICA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS
(Series I: ACTA CHEMICA, MINERALOGICA ET PHYSICA)
(Series II: ACTA CHEMICA ET PHYSICA)

Editors: Á. Budó, G. Fodor, Á. Kiss, K. Széll, Z. Szabó,
Gy. Bruckner, P. Fröhlich, Zs. Szentpétery, T. Széki.
Size: 24 cm, 80 to 300 pp.
Published in English, French, German or Russian
Series I: Vols. 1-7, 1929-1940, all publ.
Series II: Vols. 1-3, 1942-1950, all publ.
Nova Series: Vols. 1-14, 1955-1968, partly reprinted

All as above,	clothbound set	US $	240,-
Single vols. (also forthcoming vols.)	unbound, per vol.	US $	9,-

Special supplement to vol. 8, 1962

Mészáros, COMPLETE CATALYTIC LABORATORIES I-II

545 pp; many tables and figures

Edition in English, bound	US $	140,-
Edition in Russian, bound	US $	100,-
Edition in Hungarian, bound	US $	100,-

ACTA PHYSICA ET CHIMICA DEBRECINA

Publishers: University of Debrecen
Editor: L. Imre
Size: 24 cm, 150 to 350 pp.
Published in English, German, Hungarian or Russian

Vols. VIII-XIV. (N. S. 1-7), 1962-1968,	clothbound set	US $	64,-
Single vols. (also forthcoming vols.)	unbound per vol.	US $	6,-

Mathematical and Physical Journals (Reprints) in Hungarian

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

Editors: A. Rényi, Gy. Alexits
Size: 24 cm, 300 to 400 pp.

Vols. 1-19, 1950-1969,	clothbound set	US $	188,-
	Unbound set	US $	150,-
Vols. 1-18	per vol.	US $	8,-
Vol. 19 and forthcoming vols.	per vol.	US $	5,-

Publications of the Mathematical and Physical Section of the Hungarian Academy of Sciences.

MATEMATIKAI LAPOK

Publishers: „Bolyai" Mathematical Society and Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences
Editor: P. Turán
Size: 20 cm (Vols. 1-17), 24 cm (Vols. 18-)
Summaries in English, French, German or Russian

Vols. 1-20, 1950-1969, partly reprinted,	clothbound set	US $	216,-
	Unbound set	US $	176,-
Vols. 1-8,	per vol.	US $	12,-
Vols. 9-18,	per vol.	US $	8,-
Vol. 19 and forthcoming vol.	per vol.	US $	5,-

Mathematical quarterly. Issues regularly the bibliography of Hungarian mathematical literature. Continues and develops the traditions of the former valuable periodical

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

Publishers: „L. Eötvös" Mathematical and Physical Association
Mathematical editors: G. Rados (1892-1913), L. Fejér (1914-1932) D. Kőnig (1933-1943).
Physical editors: G. Bartoniek, R. Kövesligethy, Gy. Zemplén, S. Mikola, B. Pogány, R. Ortvay.
Size: 24 cm, 250 to 500 pp. (Vols. 1-27, 48-50) 120 to 250 pp. (Vols. 28-47)
Summaries in German (Vols. 28-50)

Vols. 1-50, 1892-1943, all published, mostly reprinted, with General Index,	clothbound set	US $	850,-
	Unbound set	US $	750,-
Vols. 1-27, 48-50	per vol.	US $	18,-
Vols. 28-47	per vol.	US $	14,-
General Index to vols. 1-50			free of charges

Fundamental periodical of Hungarian mathematical and physical research. Most of the authors may be ranked among the best scientists of that period.

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

Publishers: Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences
Editor: L. Jánossy
Size: 24 cm. cca 600 pp.

Vols. 1-19, 1953-1969,	clothbound set	US $	152,-
Single vols. 1-18, unbound	per vol.	US §	7,-
Vol. 19 and forthcoming vols.	per vol.	US $	5,-

Physical publications of the Mathematical and Physical Section of the Hungarian Academy of Sciences

EXPORT IMPORT

Könyvek
Újságok
Folyóiratok
Zeneművek
Hanglemezek
Iskolai szemléltető eszközök
Nyomdai munkák
Művészeti cikkek
Antikvár könyvek és folyóiratok
Ektachromok

Books
Newpapers
Periodicals
Sheet Music
Gramophone Records
Didactic Material
Printing Jobs
Artistic Goods
Second-hand Books and Back Periodicals

MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

45. KÖTET

II. RÉSZ. JÚLIUS–DECEMBER

1938

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT

BUDAPEST 1968

MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

NEGYVENÖTÖDIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES és POGÁNY BÉLA

BUDAPEST, 1938

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

A kiadásért felelős: Császár Ákos,
a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkára
Eredeti kiadásról készült változatlan utánnyomás

Külföldi terjesztés:
KULTURA KÖNYV- ÉS HÍRLAP
KÜLKERESKEDELMI VÁLLALAT
BUDAPEST 62,
P. O. B. 149
This book is a reproduction of the original, published
in Budapest

General Distributors:
KULTURA Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
BUDAPEST 62, P. O. B. 149,
Hungary
Printed in Hungary, 1968

68-513 Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

negyvenötödik kötetének tartalma.

Bolyai Farkas.

TRANSZVERZALITÁS ÉS ORTOGONALITÁS.

A variációszámítás általános elméletében is nagy szerepet játszik GAUSS következő tétele: Az egy pontból kiinduló, vagy a felület valamely görbéjére merőlegesen vont geodetikus vonalakon egyenlő hosszúságú íveket lemérve, a végpontokat összekötő görbe, az ú. n. geodetikus kör illetőleg parallela, merőleges a sereg vonalaira. A variációszámításban e körök illetőleg parallelák szerepét az extremális seregek transzverzálisai játszák. Ezek különösen a variációszámítás KNESER-féle elméletében nagyjelentőségűek. A transzverzális általános értelmezése az

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)\, dt$$

n függvényre vonatkozó integrál esetében[1] abból a követelésből adódik, hogy ha például az egyik végpont, a t_1-nek megfelelő, fix, akkor a másik végpont úgy variálandó, hogy az I integrál változása 0 legyen. Ennek a követelésnek úgy lehet eleget tenni (feltéve, hogy az n dimenziós térben az

$$x_i = x_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

extremális görbét határoznak meg, vagyis eleget tesznek az EULER—LAGRANGE-féle

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

differenciálegyenleteknek), ha a $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ variációk kielégítik ezt az egyenletet:

$$F_{\dot{x}_1}\delta x_1 + F_{\dot{x}_2}\delta x_2 + \cdots + F_{\dot{x}_n}\delta x_n = 0,$$

[1] F az $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ változók elsőfokú, pozitív homogén függvénye.

vagyis a $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ elemek az $x_1 \ldots x_n, \dot{x}_1 \ldots \dot{x}_n$-hez rendelt

$$F_{\dot{x}_1}(\xi_1 - x_1) + F_{\dot{x}_2}(\xi_2 - x_2) + \cdots + F_{\dot{x}_n}(\xi_n - x_n) = 0$$

$(n-1)$ dimenziós síkon feküsznek; $n=2$ esetében például:

$$F_{\dot{x}_1}\delta x_1 + F_{\dot{x}_2}\delta x_2 = 0$$

e transzverzalitás feltétele.

Ha $\delta x_1 = \dot{\bar{x}}_1$, $\delta x_2 = \dot{\bar{x}}_2$ tesszük, ahol tehát $\dot{\bar{x}}_1$ és $\dot{\bar{x}}_2$ a transzverzális (x_1, x_2) pontjához tartozó iránycosinusokkal arányosak, akkor

$$F_{\dot{x}_1}\dot{\bar{x}}_1 + F_{\dot{x}_2}\dot{\bar{x}}_2 = 0 \tag{1}$$

a transzverzális differenciálegyenlete.

Ha az integrál jele alatt álló **F** függvény: $\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$, vagyis az integrandus az E, F, G főmennyiségekkel jellemzett felület vonaleleme, akkor a Gauss-tételek szerint az extremális sereg transzverzálisai merőlegesek e sereg vonalaira. Felmerül a kérdés, hogy *minő alakúnak kell az integrálandó* $\mathbf{F}(u, v, \dot{u}, \dot{v})$ *függvénynek lennie, hogy az* E, F, G *által jellemzett felületen levő extremális seregre a transzverzálisok merőlegesek legyenek, vagyis mi a merőlegesség szükséges feltétele?*

A transzverzalitás feltétele (1) szerint:

$$\mathbf{F}_{\dot{u}}\dot{\bar{u}} + \mathbf{F}_{\dot{v}}\dot{\bar{v}} = 0. \tag{2}$$

A felületen az $(\dot{u}, \dot{v})$ és az $(\dot{\bar{u}}, \dot{\bar{v}})$ által meghatározott irányok egymásra merőlegesek, ha

$$(E\dot{u} + F\dot{v})\dot{\bar{u}} + (F\dot{u} + G\dot{v})\dot{\bar{v}} = 0. \tag{3}$$

A (2) és (3) egyenletekből következik, hogy:

$$\lambda(E\dot{u} + F\dot{v}) = \mathbf{F}_{\dot{u}}; \ \lambda(F\dot{u} + G\dot{v}) = \mathbf{F}_{\dot{v}}, \tag{4}$$

ahol λ arányossági faktor. Az (u, v) fixnek tekintendő pontban:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\dot{u}}d\dot{u} + \mathbf{F}_{\dot{v}}d\dot{v} = \lambda[(E\dot{u} + F\dot{v})d\dot{u} + (F\dot{u} + G\dot{v})d\dot{v}] \tag{5}$$

és minthogy **F** függvénynek, hogy az integrál független legyen a t parameter választásától, elsőrendű homogénnek kell lennie az $\dot{u}$- és $\dot{v}$-ban, tehát:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\dot{u}}\dot{u} + \mathbf{F}_{\dot{v}}\dot{v} = \lambda(E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2) \tag{6}$$

és így (5)- és (6)-ból

$$\frac{d\mathbf{F}}{\mathbf{F}} = \frac{(E\dot{u}+F\dot{v})\,d\dot{u} + (F\dot{u}+G\dot{v})\,d\dot{v}}{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,d\log(E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2),$$

miből:

$$\mathbf{F} = \varphi(u, v)\sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2}.$$

Azt látjuk tehát, hogy *a transzverzálisok a szóbanforgó esetben csakis akkor lehetnek merőlegesek az extremálisok seregére, ha az integrandus a vonalelemtől csak egy, a pont helyzetétől függő faktorban különbözik.*

Ugyanilyen gondolatmenettel kaphatjuk azt az eredményt hogy ha az n dimenziós tér vonaleleme

$$ds = \sqrt{\Sigma a_{ik}dx_i dx_k}$$

és $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, $(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n)$ irányok merőlegességének feltétele a

$$\Sigma a_{ik}dx_i\delta x_k$$

bilineáris alak eltűnése, akkor annak a szükséges feltétele, hogy az

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)\,dt$$

integrálhoz tartozó extremális seregre a transzverzálisok merőlegesek legyenek, az, hogy:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\sqrt{\Sigma a_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}$$

legyen, ahol $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ tetszésszerinti, a variációszámításban szereplő folytonossági feltételeknek megfelelő függvény. Könnyen belátható, hogy a talált feltétel egyúttal elégséges is ahhoz, hogy a transzverzális az extremális seregre merőleges legyen.

A talált alak a legkisebb működés mechanikai elvében is szerepel.

A minimális felületek elméletéből ismeretes, hogyha azt kívánjuk, hogy a minimális felület határvonala egy adott $\varphi(x, y, z)=0$ felületen maradjon, akkor a minimális felület a határvonal mentén a $\varphi=0$ felületre (melyet transzverzális felületnek mondhatunk) merőleges. Általában felmerül a kérdés, hogy ha *azt kívánjuk, hogy az*

$$I = \iint F(x, y, z, p, q)\, dxdy$$

kettős integrálnak a

$$z = f(x, y)$$

felület extremálisa legyen (vagyis I variációja eltűnjön, ha z-t variáljuk) *és egyúttal a felület határvonala a $\varphi(x, y, z) = 0$ felületen maradjon, milyennek kell lenni az integrál jele alatt álló F-nek, hogy az extremális felület a transzverzális felületre merőleges legyen?*

Ha az extremális határvonala a $\varphi(x, y, z)=0$ felületen marad, akkor fennáll ez a reláció[1]

$$\varphi_x F_p + \varphi_y F_q - \varphi_z(F - pF_p - qF_q) = 0. \tag{7}$$

Az extremális felület normálisának iránycosinusai arányosak a

$$p, q, -1$$

mennyiségekkel; a $\varphi = 0$ felület normálisának iránycosinusai pedig arányosak a $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$-vel, tehát az extremális merőleges a transzverzálisra, ha

$$p\varphi_x + q\varphi_y - \varphi_z = 0. \tag{8}$$

A (7)- és (8)-ból következik, hogy:

$$F_p = \lambda p, \; F_q = \lambda q, \; F - pF_p - qF_q = \lambda. \tag{9}$$

Az első két egyenletből az F-re, mint p és q függvényére, ezt a parciális differenciálegyenletet kapjuk:

$$qF_p - pF_q = 0,$$

[1] L. Bolza: Vorl. über Variationsrechnung, p. 671.

melynek megoldása:

$$F=\Phi(p^2+q^2),$$

ahol Φ a p^2+q^2 tetszésszerinti függvénye. A Φ közelebbi meghatározására tekintetbe vesszük a (9) alatti harmadik egyenletet, λ értékét például az első egyenletből véve. Így kapjuk az

$$F-pF_p-qF_q=\frac{F_p}{p}$$

egyenletet, melyben $F=\Phi(p^2+q^2)$ téve:

$$\Phi(p^2+q^2)-2\Phi'p^2-2\Phi'q^2=2\Phi',$$

ahol Φ' a Φ-nek p^2+q^2 szerinti differenciálhányadosa. Ha p^2+q^2 helyett u-t írunk, akkor ezt az egyszerű differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{\Phi'}{\Phi}=\frac{1}{2(u+1)},$$

miből:

$$\Phi=C\sqrt{p^2+q^2+1},$$

ahol C a p és q-tól független, tehát x, y, z tetszésszerinti függvénye. Arra az eredményre jutottunk, hogy a keresett *F integrandus a minimális felület problémájánál szereplő $\sqrt{1+p^2+q^2}$-től csak egy p- és q-tól független faktorban különbözik.*

Beke Manó.

TRANSVERSALITÄT UND ORTHOGONALITÄT.

Es wird die Frage aufgeworfen, was für eine Form der in der Variationsrechnung auftretende Integrand haben muss, dass, so wie bei den geodetischen Linien, die Extremale und die Transversale sich unter rechtem Winkel schneiden. Die Frage wird (die Orthoganalitäts-bedingung durch die bilineare Differentialform definiert) damit beantwortet, dass der Integrand die Form:

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)\sqrt{\Sigma a_{ik}\dot{x}_i\dot{y}_k}$$

haben muss.

In zweiter Linie wird dieselbe Frage bei der Variation der Doppelintegrale damit beantwortet, dass der Integrand die Form

$$\varphi(x, y, z)\sqrt{1+p^2+q^2}$$

haben muss.

E. Beke.

ADALÉK A TÉRBELI GÖRBÉK ELMÉLETÉHEZ.

Rados Gusztáv úr «A térbeli görbék elméletéhez» c. régebbi közleményében[1] kimutatja, hogy «valamely térgörbe P pontjához tartozó érintőjén átfektetett siksor síkjain előállítván a térgörbe ortogonális vetületeit: a térgörbe P pontjához tartozó simuló síkban fekvő lesz köztük az, amelynek görbületi sugara a többiekhez képest minimum». A következő sorokban e tétel általánosításaképpen meghatározom a térgörbének egy tetszőleges síkon előállított ortogonális vetületének görbületét. De előbb meg akarom jegyezni, hogy ha Rados úr tételének bizonyításánál a felületelmélet elemeit is fel akarjuk használni, akkor e tétel minden számítás nélkül következik a Meusnier-féle tételből. Ugyanis, ha a térgörbe érintőjén átfektetett S síkra a térgörbe pontjaiból merőlegeseket vonunk, akkor egy hengerfelületet kapunk, melynek a vont merőlegesek az alkotói. Az S sík e hengerfelületet merőlegesen, az adott görbe simuló síkja pedig ferdén metszi. Mindkettő a P pontbeli érintőn megy át. Hajlásszögüket jelöljük ω-val: akkor Meusnier tételét alkalmazva a projiciáló hengerre, azt kapjuk, hogy az S síkon levő vetületnek a P ponthoz tartozó görbületi sugara r és a térgörbe ϱ görbületi sugara között a

$$\varrho = r \cos \omega$$

reláció áll fenn, ahol ω az S sík és a simuló sík hajlásszöge. Ezzel a szóbanforgó tétel be van bizonyítva,

Ugyancsak rövid úton számitható ki a térgörbének a főnormálisán átvonuló S síkra való vetítéssel keletkezett síkgörbe

[1] Math. Természettud. Ért. 8. kötet, 46. lap.

görbületi sugara is. Ugyanis, tegyük fel, hogy a térgörbe P pontjához tartozó főnormálisán átfektetett S sík a P-hez tartozó simuló síkkal ω szöget alkot. Most megint vetítjük a térgörbét az S síkra. A vetítő egyenesek az S síkra merőleges hengerfelületet alkotnak, melynek a szóbanforgó főnormális egyúttal normálisa. Az S sík és az adott görbe simuló síkja tehát a hengerfelület normálisán mennek át és így az Euler-féle tétel alkalmazható. Az S síkon levő vetület az egyik főmetszete a hengernek, ennek görbületi sugarát jelöljük r-rel, a másik főmetszet pedig a henger alkotója, melynek görbületi sugara végtelen. Az Euler-tétel szerint tehát

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\cos^2\omega}{r}, \text{ vagyis } r=\varrho\cos^2\omega. \qquad (A)$$

Rados úr tételének analogiájára tehát azt kaptuk, hogy *az adott térgörbe görbületi sugara nagyobb, mint a főnormálison átmenő síkon levő ortogonális vetületének görbületi sugara.*

Most számítsuk ki a térgörbének egy tetszésszerinti S síkra való vetületének görbületi sugarát. A számítás egyszerűsítése céljából vektoriálisan számolunk. A térgörbe pontjait egy tetszés szerint felvett pontjától számított s ívhosszúsággal határozzuk meg. A koordinátarendszer kezdőpontjától, melyet az S síkon választunk, a térgörbe P pontjához húzott vektor legyen $\mathbf{x}(s)$. Ezen P pontnak az S síkon levő vetülete legyen $\mathbf{y}(s)$ (az S síkon felvett kezdőponttól számítva az $\mathbf{y}$ vektort). Megjegyezzük, hogy itt az s mint paraméter szerepel. Legyen továbbá az S síkra merőleges egységvektor $\mathbf{e}$.[1] A P pontnak S síkon levő vetülete Q, az ehhez tartozó vektor:

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}-(\mathbf{ex})\mathbf{e},$$

ahol $(\mathbf{ex})$ az $\mathbf{e}$ és $\mathbf{x}$ skaláris szorzata. Innen, s szerint differenciálva:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'&=\mathbf{x}'-(\mathbf{ex}')\mathbf{e},\\ \mathbf{y}''&=\mathbf{x}''-(\mathbf{ex}'')\mathbf{e}.\end{aligned}\qquad (1)$$

[1] A jelölésekre nézve l. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie, I. k., p. 29.

A vetületnek a Q ponthoz tartozó görbületének négyzete:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{(\mathbf{y}')^2(\mathbf{y}'')^2 - (\mathbf{y}'\mathbf{y}'')^2}{[(\mathbf{y}')^2]^3}. \tag{2}$$

Az (1) alattiból:

$$(\mathbf{y}')^2 = (\mathbf{x}')^2 - 2(\mathbf{e}\mathbf{x}')^2 + (\mathbf{e}\mathbf{x}')^2 = (\mathbf{x}')^2 - (\mathbf{e}\mathbf{x}')^2.$$

De minthogy

$$(\mathbf{x}')^2 = 1, \quad (\mathbf{e}\mathbf{x}') = |\mathbf{x}'| \cos(\mathbf{e}, \mathbf{t}),$$

ahol $|\mathbf{x}'| = 1$, $\mathbf{t}$ az érintő irányában vont egységvektor és $(\mathbf{e}, \mathbf{t})$ jelenti az $\mathbf{e}$ egységvektornak és a P pontban vont érintőnek a szögét. Így tehát:

$$(\mathbf{y}')^2 = \sin^2(\mathbf{e}, \mathbf{t}).$$

Ugyanígy számítva:

$$(\mathbf{y}'')^2 = (\mathbf{x}'')^2 \sin^2(\mathbf{e}, \mathbf{f}),$$

ahol $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$ az $\mathbf{e}$ egységvektor és a főnormális hajlásszöge. Így tehát:

$$(\mathbf{y}')^2(\mathbf{y}'')^2 = (\mathbf{x}'')^2 \sin^2(\mathbf{e}, \mathbf{t}) \sin^2(\mathbf{e}, \mathbf{f}). \tag{3}$$

A (2) alatti számlálóban levő

$$(\mathbf{y}'\mathbf{y}'') = (\mathbf{x}'\mathbf{x}'') - 2(\mathbf{e}\mathbf{x}')(\mathbf{e}\mathbf{x}'') + (\mathbf{e}\mathbf{x}')(\mathbf{e}\mathbf{x}'').$$

Minthogy $\mathbf{x}'\mathbf{x}'' = 0$, tehát:

$$(\mathbf{y}'\mathbf{y}'') = -(\mathbf{e}\mathbf{x}')(\mathbf{e}\mathbf{x}'') = -|\mathbf{x}''| \cos(\mathbf{e}, \mathbf{t}) \cos(\mathbf{e}, \mathbf{f})$$

és végül:

$$[(\mathbf{y}')^2]^3 = \sin^6(\mathbf{e}, \mathbf{t}),$$

tehát, minthogy $(\mathbf{x}'')^2 = \frac{1}{\varrho^2}$,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varrho^2} \frac{\sin^2(\mathbf{e}, \mathbf{t}) \sin^2(\mathbf{e}, \mathbf{f}) - \cos^2(\mathbf{e}, \mathbf{t}) \cos^2(\mathbf{e}, \mathbf{f})}{\sin^6(\mathbf{e}, \mathbf{t})}. \tag{4}$$

Az $\mathbf{e}$, $\mathbf{t}$ és $\mathbf{f}$ vektorok háromélű zugot alkotnak, melyben a (tf) szög derékszög. A gömbháromszögtan cosinustétele szerint:

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{t}, \mathbf{f}) = 0 = \cos(\mathbf{e}, \mathbf{t}) \cos(\mathbf{e}, \mathbf{f}) + \\ + \sin(\mathbf{e}, \mathbf{t}) \sin(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \cos[(\mathbf{e}, \mathbf{t}), (\mathbf{e}, \mathbf{f})], \end{aligned} \tag{5}$$

ahol $[(\mathbf{e}, \mathbf{t}), (\mathbf{e}, \mathbf{f})]$ az $(\mathbf{e}, \mathbf{t})$ és $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$ síkok hajlásszöge.

Az (5) alatti felhasználásával a (4) alattiból ez lesz:

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{\varrho^2}\cdot\frac{\sin^2(\mathbf{e},\mathbf{f})\sin^2[(\mathbf{e},\mathbf{t},\ \mathbf{e},\mathbf{f})]}{\sin^4(\mathbf{e},\mathbf{t})}.$$

Ha még tekintetbe vesszük, hogy $[(\mathbf{e},\mathbf{t}),(\mathbf{e},\mathbf{f})]$-fel szemközti $(\mathbf{t},\mathbf{f})$ szög derékszög, vagyis

$$\frac{\sin[(\mathbf{e},\mathbf{t}),(\mathbf{e},\mathbf{f})]}{1}=\frac{\sin[(\mathbf{e},\mathbf{t}),(\mathbf{t},\mathbf{f})]}{\sin(\mathbf{e},\mathbf{f})},$$

akkor röviden:

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\sin^2[(\mathbf{e},\mathbf{t}),(\mathbf{t},\mathbf{f})]}{\varrho^2\sin^4(\mathbf{e},\mathbf{t})}$$

és az előjeltől eltekintve:

$$\frac{1}{r}=\frac{\sin[(\mathbf{e},\mathbf{t}),(\mathbf{t},\mathbf{f})]}{\varrho\sin^2(\mathbf{e},\mathbf{t})}.$$

Ha az S sík átmegy a $\mathbf{t}$ érintőn, akkor $\mathbf{e}$ merőleges $\mathbf{t}$-re, az $[(\mathbf{e},\mathbf{t})(\mathbf{t},\mathbf{f})]$ szög pedig az S sík és az adott térgörbe simuló síkja ω hajlásszögének pótszöge, tehát

$$\frac{1}{r}=\frac{\cos\omega}{\varrho},$$

ami Rados úr tételével megegyezik. Ha pedig az S sík átmegy az $\mathbf{f}$ főnormálison, akkor $\mathbf{e}$ merőleges lévén az $\mathbf{f}$-en átmenő S síkra, merőleges egyúttal $\mathbf{f}$-re is, és így $\mathbf{f}$ merőleges $\mathbf{e}$-re és $\mathbf{t}$-re, tehát az $(\mathbf{e},\mathbf{t})$ sík merőleges az $(\mathbf{f},\mathbf{t})$ síkra, az $[(\mathbf{e},\mathbf{t}),(\mathbf{t},\mathbf{f},)]$ szög derékszög, az $(\mathbf{e},\mathbf{t})$ szög pedig pótszöge az S sík és a simuló sík hajlásszögének, ω-nak, tehát

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\varrho\sin^2(\mathbf{e},\mathbf{t})}=\frac{1}{\varrho\cos^2\omega},$$

ami az (A) alattival megegyezik.

Beke Manó.

ZUR THEORIE DER RAUMKURVEN.

Herr G. RADOS bewies in einer älteren Arbeit, dass der Krümmungsradius einer Raumkurve kleiner ist, als der Krümmungsradius der orthogonalen Projektion der Kurve auf eine, durch die Tangente der Kurve hindurchgehenden Ebene. Dieser Satz, welcher durch Rechnung bewiesen wurde, wird hier als Folgerung des MEUSNIER'schen Satzes der Flächentheorie dargestellt. Es wird auch als Folgerung des EULER'schen Satzes die Behauptung bewiesen, dass der Krümmungsradius der orthogonalen Projektion auf eine, durch die Hauptnormale hindurchgehende Ebene stets kleiner ist als der Krümmungsradius der Raumkurve. Es wird überhaupt der Krümmungsradius der orthogonalen Projektion auf einer beliebigen Ebene berechnet.

E. Beke.

MEGJEGYZÉS AZ EXPONENCIÁLIS SORHOZ.

Az exponenciális függvény szokásos értelmezése

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

és a véges TAYLOR-sor maradéktagja azt az eredményt szolgáltatják, hogy pozitív x mellett az

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

sor értékét bármely két szomszédos részletösszeg értéke közrefogja. Ez a soralakból csak akkor folyik közvetlenül, ha x nem haladja meg az egységet, ámbár a tény x-nek *minden* pozitív értékénél igaz.

Az exponenciális függvényt lehet végtelen sorával is definiálni. Nem érdektelen ekkor a részletösszegek fenti tulajdonságát magán a soralakon megállapítani. Más szóval: A végtelen sorával értelmezett e^{-x} függvény e sornak

$$s_{n-1}(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

részletösszegétől az

$$e^{-x} - s_{n-1}(x) = (-1)^n\frac{x^n}{n!}\left[1 - \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} - \cdots\right]$$

különbséggel tér el. Állításunk az, hogy *a zárójelben álló sor összege pozitív.* Ennek bizonyítására elég megmutatnunk, hogy a

$$\varphi(x, a) \equiv 1 - \frac{x}{a+1} + \frac{x^2}{(a+1)(a+2)} - \cdots \qquad (a>0)$$

függvény a következő alakra hozható:

$$e^{-x}\left(1+\frac{a}{a+1}x+\frac{a}{a+2}\frac{x^2}{2!}+\frac{a}{a+3}\frac{x^3}{3!}+\cdots\right).^{1}$$

E tényt többféleképp is beláthatjuk.

1°. A Cauchy-féle szorzási szabály azonnal igazolja az

$$e^x\left(1-\frac{x}{a+1}+\frac{x^2}{(a+1)(a+2)}-\cdots\right)=$$
$$=1+\frac{a}{a+1}x+\frac{a}{a+2}\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

egyenlőséget azon az alapon, hogy

$$\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{a+1}+\frac{1}{(n-2)!}\frac{1}{(a+1)(a+2)}-\cdots=$$
$$=\frac{a}{a+n}\frac{1}{n!}.$$

Ez az egyenlőség ugyanis, ha $(a+1)(a+2)\ldots(a+n)$-nel szorzunk és $b=a+n$-et irunk, nem más, mint

$$\binom{b}{n}-\binom{b}{n-1}+\binom{b}{n-2}-\cdots=\binom{b-1}{n},$$

amely közvetlen folyománya a jól ismert

$$\binom{b}{k}-\binom{b-1}{k}=\binom{b-1}{k-1}$$

azonosságnak.

2°. Az

$$f(x,\ a)\equiv e^x\varphi(x,\ a)\equiv e^x\left[1-\frac{x}{a+1}+\frac{x^2}{(a+1)(a+2)}-\cdots\right]$$

függvényt x szerint differenciálván, kapjuk:

$$f'(x,\ a)=e^x\frac{a}{a+1}\varphi(x,\ a+1)=\frac{a}{a+1}f(x,\ a+1);$$

[1] A soralakból világos, hogy pozitiv x-nél

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots>0$$

és az $e^x.e^{-x}=1$ összefüggésből (mely a sorok szorzási szabályából következik), hogy $e^{-x}>0$.

innen

$$f''(x, a) = \frac{a}{a+1}\,\frac{a+1}{a+2} f(x, a+2) = \frac{a}{a+2} f(x, a+2),$$

. . . .

$$f^{(n)}(x, a) = \frac{a}{a+n} f(x, a+n);$$

tehát

$$f^{(n)}(0, a) = \frac{a}{a+n}$$

és így $f(x, a)$ hatványsora:

$$f(x, a) = 1 + \frac{a}{a+1} x + \frac{a}{a+2}\,\frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{a}{a+n}\,\frac{x^n}{n!} + \dots$$

Ebből rögtön adódik a keresett reláció.

3°. Úgy is eljárhatunk, hogy $\varphi(x, a)$ eredeti alakjában az együtthatókat, mint a függvényeit, részlettörtekre bontjuk:

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\,(n-k)!}\,\frac{1}{a+k}$$

és átrendezünk az $\frac{1}{a+k}$ alakú tagok szerint. Így adódik, hogy

$$\varphi(x, a) = 1 - \frac{x}{a+1}\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots\right) -$$

$$- \frac{x^2}{1!\,(a+2)}\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots\right) - \dots =$$

$$= e^{-x}\left(\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!\,(a+n)}\right) = e^{-x} \sum_{0}^{\infty} \frac{a}{a+n}\,\frac{x^n}{n!}.$$

4°. A $\varphi(x, a)$ függvény két alakjának igazi forrása talán a

$$J(x, a) = \int_0^x t^{a-1} e^t dt \qquad (a > 0)$$

integrál.[2] Alkalmazzuk erre ismételten a parciális integrálást:

---

[2] Stieltjes ezt az integrált használja egy más irányú vizsgálatban (Oeuvres complètes, tome II, p. 574).

$$J(x,\,a)=\left[\frac{t^a}{a}e^t\right]_0^x-\frac{1}{a}\int_0^x t^a e^t dt=\cdots=$$

$$=\frac{e^x}{a}\left[x^a-\frac{x^{a+1}}{a+1}+\frac{x^{a+2}}{(a+1)(a+2)}-\cdots+\right.$$

$$\left.+(-1^n\frac{x^{a+n}}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}\right]+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{a(a+1)\ldots(a+n)}\int_0^x t^{a+n}e^t dt.$$

Az utolsó tag abszolút értéke nyilván kisebb, mint

$$\frac{|x|^{a+n+1}e^{|x|}}{a(a+1)\ldots(a+n)(a+n+1)},$$

mely zérushoz tart, ha $n\to\infty$. Ennélfogva

$$J(x,\,a)=\frac{1}{a}e^x x^a\left[1-\frac{x}{a+1}+\frac{x^2}{(a+1)(a+2)}-\cdots\right]=$$

$$=\frac{1}{a}e^x x^a \varphi(x,\,a).$$

Másrészt, ha e^t-t hatványsorával helyettesítjük, t^{a-1}-gyel szorzunk és tagonként integrálunk, a

$$J(x,\,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{a+n}}{(a+n)n!}$$

egyenlőség származik. A két eredmény összehasonlítása a kívánt összefüggést nyujtja.

Szücs Adolf és *Grosschmid Lajos*.

REMARQUE SUR LA SÉRIE EXPONENTIELLE.

Si l'on définit la fonction exponentielle par sa série, il n'est pas sans intérêt de démontrer directement (sans faire intervenir le reste de la formule de TAYLOR) que, pour $x>0$, la valeur de e^{-x} est toujours comprise entre deux sommes partielles consécutives de la série. C'est ce qui peut être basé sur *l'identité*

$$1-\frac{x}{a+1}+\frac{x^2}{(a+1)(a+2)}-\cdots\equiv e^{-x}\left[1+\frac{a}{a+1}x+\frac{a}{a+2}\frac{x^2}{2!}+\cdots\right]$$

dont les auteurs donnent quatre démonstrations.

Adolphe Szücs et *Louis de Grosschmid*.

TÖBBMÉRETŰ TEREK BEFEDÉSE KOCKARÁCCSAL.

1. §. Bevezetés.

A homogén elsőfokú alakokra vonatkozó MINKOWSKI-féle tétel[1] a következő:

Legyen a valós együtthatós

$$\xi_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \quad (i=1,\ldots, n)$$

elsőfokú alakok együtthatóiból alkotott determináns ± 1, *akkor megadhatók* $0,\ldots, 0$*-tól különböző* $x_1,\ldots, x_n$ *egész számok úgy, hogy*

$$|\xi_1| \leqq 1,\ldots, |\xi_n| \leqq 1.$$

Itt az egyenlőségi jel többnyire el is maradhat. *Határesetnek* nevezünk éppen egy olyan esetet, melynél az egyenlőségi jelet elhagyva, a tétel helytelen. Ezekre a határesetekre vonatkozólag mondotta ki MINKOWSKI[2] következő sejtését:

I. *Határeset csakis akkor következhetik be, ha valamelyik* ξ_i *minden együtthatója egészszám.*

MINKOWSKI sejtését az $n=2$, 3 esetekre igazolta.[3] Később B. LEVI[4] $n=4$-re, H. JANSEN[5] $n=5$, 6-ra, végül Th. SCHMIDT[6]

---

1 MINKOWSKI: *Geometrie der Zahlen*, Leipzig (1896—1910). 104—105. l.

2 Lásd 1 és MINKOWSKI: *Diophantische Approximationen,* Leipzig (1907). 28. l.

3 MINKOWSKI: *Dioph. Appr.* 28, 74. l.

4 B. LEVI: *Un teorema del Minkowski sui sistemi di forme lineari a variabili intere.* Rend. Circ. mat. Palermo, 31 (1911). 318—340. l.

5 H. JANSEN: *Lückenlose Ausfüllung des* R_n *mit gitterförmig angeordneten n-dimensionalen Quadern.* Diss. Kiel. (1909).

6 Th. SCHMIDT: *Über die Zerlegung des n-dimensionalen Raumes in gitterförmig angeordnete Würfel.* Schr. math. Sem. und Inst. angew. Math. Univ. Berlin, Bd. 1 (1933). 186—212. l.

$n=7$-re igazolta a sejtést. A sejtés eddig minden n-re bizonyítást nem nyert.

Az I. sejtés a következővel egyenértékű:[7]

I. a. *Az n-méretű teret egyszeresen fedő kockarács* (azaz: rácsszerűen elhelyezkedő kockák összessége[8]) *tartalmaz két, közös lappal bíró kockát.*

A következőkben mindig a sejtés ez utóbbi alakjával foglalkozunk.

Jelen dolgozat nemcsak a teret egyszeresen fedő, hanem (ellentétben az eddigi irodalommal) a teret mindenütt ugyanannyiszorosan fedő kockarácsokat is vizsgálja. Ezekre vonatkozólag a következő kérdést vetjük fel:

II. *Van-e az n-méretű térben a teret mindenütt ugyanannyiszorosan fedő kockarács, mely nem tartalmaz két, közös lappal bíró kockát?*

Erre a kérdésre meg is adjuk a feleletet: a válasz $n \leqq 3$ esetben nemleges, $n > 3$ esetben pedig igenlő. Ez a jelen dolgozatnak egyik főeredménye. Vizsgálatunk tehát az I. sejtést is igazolja $n \leqq 3$ esetben.

A jelen dolgozatban mindig az n-méretű euklidesi térben dolgozunk s ennek alakzataival foglalkozunk. Ennek valamely lineáris részterét röviden *tér*nek mondjuk. Az n-méretű térben rögzítve gondoljuk az egymásra merőleges x_1-,..., x_n-irányokat s majd ezeket választjuk a koordinátarendszer tengelyirányainak.

Előkészítő részekben foglalkozunk a pontráccsal és kockaráccsal. Ezek után egy tételt bizonyítunk be, mely feljogosít arra, hogy az I. és II. kérdésköröknél racionális elhelyezkedésekre szorítkozhassunk. Bizonyos csoportalgebrai megfontolások után megadjuk I. és II. csoportelméleti, illetőleg csoportalgebrai

---

[7] V. ö. B. Levi i. m. és Koksma: *Diophantische Approximationen.* Erg. der Math. IV. 4. Berlin (1936). 15—16. l. Lásd még O. H. Keller: *Über lückenlose Erfüllug des Raumes mit Würfeln.* J. für reine u. angew. Math. 163 (1931). 231—248. l.

[8] A bevezetésben szereplő fogalmakat a későbbiek folyamán szabatosan körülírjuk.

megfelelőit s ez jelen dolgozat másik főeredménye, amely módot nyujt arra, hogy a II. kérdésre megadjuk a feleletet.

2. §. Szabályos pontrendszer, pontrács.

*Szabályos pontrendszer*nek nevezzük az n-méretű tér egy P ponthalmazát, ha P valamely A pontját választva kezdőpontnak, P pontjainak helyzetvektorai (a vektorösszegezéssel, mint csoportműveletté) csoportot alkotnak.

Következőleg, akárhogyan válasszuk is meg A-t, ugyanazon vektorcsoportot nyerjük. E vektorcsoportot *P-csoport*nak, elemeit *P-vektor*oknak, P pontjait *P-pont*oknak nevezzük. A vektorösszeg kommutativitása miatt a P-csoport ABEL-féle.

Valamely tér pontjai például szabályos pontrendszert alkotnak.

1. Tétel. *Egy P szabályos pontrendszer minden pontján át valamely T térrel párhuzamos teret fektetve, ezeknek valamennyi pontja szabályos P' pontrendszert alkot.*

Bizonyítás. Az n-méretű tér valamennyi vektora által alkotott csoportnak alcsoportja egyrészt a P-csoport, másrészt a T-csoport. A P'-vektorok e két alcsoport elemeinek összegei, vagyis a P'-vektorok összessége a két alcsoport szorzata. Ez tehát szintén alcsoport.

2. Tétel. *Egy P szabályos pontrendszernek valamely T térbe eső pontjai szabályos pontrendszert alkotnak.*

Bizonyítás. P-nek T-be eső pontjai alkossák a P' ponthalmazt. A P'-vektorok csoportot alkotnak. Ugyanis az n-méretű tér valamennyi vektora által alkotott csoportnak alcsoportja egyrészt a P-csoport, másrészt a T-csoport. A P'-vektorok e két alcsoport közös elemei. Ezek tehát valóban csoportot alkotnak.

Egy szabályos pontrendszert *pontrács*nak mondunk, ha nincs torlódási helye.

P és P' pontrácsok *egybevágók*, ha egymásból eltolással keletkeznek.

Az n-méretű térben elhelyezkedő P pontrács *m-méretű*, ha van m-méretű tér, mely minden P-pontot tartalmaz, viszont nincs m-nél kisebb méretű tér, mely e tulajdonsággal bír. Az m-méretű P által meghatározott m-méretű teret P-térnek nevezzük.

Ha, valamely P pontrácsra vonatkozólag, a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ vektorok P-vektorok, függetlenek és bármely P-vektor előállitható egész a_i-k mellett a $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_m\mathbf{v}_m$ alakban, akkor a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ vektorokat P *alapvektorainak* nevezzük.

3. Tétel. *Egy m-méretű P pontrácshoz megadható m alapvektor.*[9]

Bizonyítás. A bizonyítást a méretszámra vonatkozó teljes indukcióval végezzük.

Legyen először $m=1$. A P-vektorok hosszának alsó határa nem lehet 0, mert akkor P pontjainak lenne torlódási helyük. Van egy P-vektor $\mathbf{v}_1$, melynek hossza ez az alsó határ. Ellenkező esetben ugyanis volnának P-vektorok, melyeknek hosszai ezt az alsó határt tetszőlegesen jól megközelítenék; tehát P egy A pontjának $|\mathbf{v}_1| + \varepsilon$ sugarú környezete P-nek végtelen sok pontját tartalmazná s így ezeknek volna torlódási helyük. P valamely A pontjából kiindulva képezzünk egy P' pontrácsot a $\mathbf{v}_1$ alapvektorral. Mivel $\mathbf{v}_1$ P-vektor, P tartalmazza P' minden pontját. Viszont P-nek nem lehet P'-be nem tartozó pontja; ily pontot ugyanis P' legközelebbi pontjával összekötő vektor hossza $|\mathbf{v}_1|$-nél kisebb lenne, ami ellentmond $\mathbf{v}_1$ értelmezésének. Tehát P azonos P'-vel s így $\mathbf{v}_1$ alapvektora P-nek is.

Tegyük fel, hogy tételünk $(m-1)$-méretű pontrácsra helyes. Legyen P m-méretű. Van tehát m pontja, melyek nem esnek egy $(m-2)$-méretű térbe s így ezek egy $(m-1)$-méretű T teret határoznak meg. P-nek T-be eső pontjai 2. szerint szabályos P^*-pontrendszert s, torlódási helyük nem lévén, pontrácsot alkotnak. Feltevésünk értelmében van tehát P^*-nak $(m-1)$ alapvektora: $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Ezek egy $(m-1)$-méretű parallelotopot

---

[9] V. ö. BIEBERBACH: *Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume.* Math. Annalen, 72 (1912). 402. l. és MINKOWSKI: *Geom. d. Zahlen.* 172. l.

határoznak meg. Akárhogyan helyezzük is el ezt a parallelotopot a T térben, az nyilván mindig tartalmaz belsejében vagy határán P^*-pontot. Fedjük le e parallelotopot egy $(m-1)$-méretű, r-sugarú gömbbel. Következőleg a T tér bármely pontjának r-sugarú környezetében van P^*-pont.

Fektessünk P valamennyi pontján át T-vel párhuzamos teret. P pontrács-volta miatt ezek mindegyike a P-pontoknak P^*-al egybevágó halmazát tartalmazza. E terek nem torlódhatnak T-hez, mert akkor P^* valamely A pontjának $2r$-sugarú környezete a T-hez torlódó terek közül végtelen sokból tartalmazna P-pontot s így a P-pontoknak is volna torlódási helyük. Messük ezeket a párhuzamos tereket az m-méretű P-térben egy A-n áthaladó e egyenessel. A nyert metszéspontok 1. és 2. értelmében szabályos P' pontrendszert, sőt pontrácsot alkotnak, mert ha P'-nek torlódási helye lenne, a megfelelő, T-vel párhuzamos terek is torlódnának. Mivel P' egyméretű, a már bebizonyítottak szerint van $\mathbf{v}'_1$ alapvektora. Vezessen $\mathbf{v}'_1$ A-ból B'-be, a B'-n áthaladó T-vel párhuzamos tér egy P-pontja legyen B. Az A-ból B-be vezető vektor legyen $\mathbf{v}_1$. Tehát $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}'_1$ párhuzamos T-vel.

Állítjuk, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ alapvektorai P-nek. Ugyanis: Értelmezésük szerint P-vektorok. Legyen $\mathbf{p}$ tetszőleges P-vektor s vezessen A-ból C-be. Messe e-t a C-n áthaladó T-vel párhuzamos tér C'-ben. Mivel AC'-vektor P'-vektor, $AC'=a_1\mathbf{v}'_1$. Tehát $\mathbf{p}-a_1\mathbf{v}'_1$ párhuzamos T-vel, de akkor $\mathbf{p}-a_1\mathbf{v}_1$ is párhuzamos s ez P-vektor lévén:

$$\mathbf{p}-a_1\mathbf{v}_1 = a_2\mathbf{v}_2+\dots+a_m\mathbf{v}_m.$$

Vagyis

$$\mathbf{p} = a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+\dots+a_m\mathbf{v}_m.$$

Végül a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ vektorok függetlenek, mert különben valamennyien párhuzamosak lennének egy $(m-1)$-méretű térrel s így P nem lenne m-méretű.

E bizonyításból egyszersmind kiolvashatók a következő tételek is:

4. Tétel. *A P pontrácshoz megadható r úgy, hogy a P-tér bármely pontjának r-sugarú környezetében legyen P-pont.*

5. Tétel. *Ha az m-méretű P-pontrácsnak egy i-méretű térbe eső pontjai i-méretű pontrácsot alkotnak s ennek alapvektorai* $\mathrm{v}_1,\dots,\mathrm{v}_i$ $(i<m)$, *megadhatók* $\mathrm{v}_{i+1},\dots,\mathrm{v}_m$ *úgy, hogy* $\mathrm{v}_1,\dots,\mathrm{v}_i$, $\mathrm{v}_{i+1},\dots,\mathrm{v}_m$ *alapvektorai legyenek P-nek.*

3. §. Kockarács.

Az n-méretű térben elhelyezkedő, egységnyi élhosszúságú, a koordinátatengelyekkel párhuzamos élű, n-méretű kockák valamely halmazát *kockarács*nak nevezzük, ha középpontjaik pontrácsot alkotnak. A K kockarácshoz tartozó e pontrácsot $P(K)$-val jelöljük. Megengedjük, hogy egy kockarács kockái egymást részben fedjék. A K kockarács kockáit *K-kockák*nak mondjuk.

Az n-méretű kockát határoló $(n-1)$-méretű kockákat a kocka *lap*jainak nevezzük. Két kockáról akkor mondjuk, hogy *érintkeznek*, ha közös belső vagy határpontjaik vannak.

Egy K kockarácsot *térfedő*nek mondunk, ha a tér minden pontját, mely nem esik valamely K-kocka lapjára, K-nak ugyanannyi kockája tartalmazza. Ha e szám k, a kockarács a teret *k-szorosan fedi.*

Egy K kockarács *m-méretű*, ha $P(K)$ m-méretű. A K kockarács *alapvektorai*nak $P(K)$ alapvektorait nevezzük. K és K' kockarácsok *egybevágók*, ha $P(K)$ és $P(K')$ egybevágó.

K és K' kockarácsok *egyenlők*, ha ugyanazon pontokat tartalmazzák és pedig a tér minden pontját, mely nem esik K vagy K' valamely kockájának lapjára, K-nak és K'-nek ugyanannyi kockája tartalmazza.

Egy kockarács *oszlopozott*,[10] ha van két, közös lappal bíró kockája; vagyis, ha a $P(K)$-csoportnak van oly eleme, mely valamelyik koordinátatengellyel párhuzamos egységvektor.

[10] V. ö. a 14. tétel bizonyításával.

Ilyen fogalomalkotás mellett a bevezetésben említett MINKOWSKI-féle sejtés a következő alakot ölti:

I.a. *Az n-méretű tér egyszeresen térfedő kockarácsa oszlopozott.*

A többszörös térfedésre vonatkozó kérdésünk pedig, melyet a bevezetésben felvetettünk:

II. *Van-e az n-méretű térben nem oszlopozott, térfedő kockarács?*

Egyenlő kockarácsokra vonatkozólag szükségünk lesz a következő tételre:

6. Tétel. *Ha K k-szorosan térfedő és K egyenlő K'-vel, akkor K' is k-szorosan térfedő.*

Bizonyítás. A K'-kockák lapjaira nem eső A pont vagy nem fekszik valamely K-kocka lapján, vagy igen. Az első esetben A-t K-nak k kockája s így K és K' egyenlősége miatt K'-nek is k kockája fedi. A második esetben A megközelíthető sem K-kockák, sem K'-kockák lapjaira nem eső pontokkal; minthogy ezeket az előbbiek szerint K'-nek k kockája fedi, torlódási helyüknek, A-nak is (nem esvén K'-kocka lapjára) ilyennek kell lennie.

4. §. Racionális kockarács.

Egy kockarács *racionális,* ha a $P(K)$-vektorok koordinátái racionálisak. Az I. és II. kérdésköröknél vizsgálatainkat racionális kockarácsokra korlátozhatjuk, ugyanis:

7. Tétel. *Ha van az n-méretű térben nem oszlopozott, k-szorosan térfedő kockarács, akkor van az n-méretű térben nem oszlopozott, k-szorosan térfedő, racionális kockarács is.*[11]

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van $P(K)$-vektor $\mathbf{p}$, melynek x_1-koordinátája irracionális.

Osztályozzuk K kockáit. Két kockát akkor sorolunk ugyanazon osztályba, ha a középpontjaikat összekötő vektor x_1-ko-

---

[11] $k=1$ esetre vonatkozólag v. ö. TH. SCHMIDT i. m.

ordinátája racionális. Minthogy e tulajdonság reflexív, szimmetrikus és tranzitív, valóban osztályokat értelmez.

K kockarács-volta miatt bármely két osztály egybevágó. Egy O osztály kockái kockarácsot alkotnak, ugyanis $P(O)$ az osztályok értelmezése következtében szabályos pontrendszer és $P(O)$-nak torlódási helye nem lehet, mivel $P(K)$-nak részhalmaza.

Ha egy O osztályt x_1-irányban eltolunk, egy az O-val egyenlő O' kockarácsot nyerünk (*a*). Ha ez állításunk nem volna helyes, akkor lenne két pont A és B, melyek nem esnek valamely O-kocka határlapjára, melyeknek összekötő vektora x_1-irányú s melyeket O különböző számú kockái tartalmaznak. Az A és B pontokat összekötő e egyenest O kockáinak lapjai távolságokra darabolják; a lapok metszéspontjainak ugyanis nem lehet torlódási helyük, mert akkor lenne torlódási helye $P(O)$-nak is. E távolságok mindegyikét O-nak ugyanannyi kockája fedi. Különben lenne e-n két szomszédos, különböző sok kocka által lefedett távolság, ami csak úgy lehetséges, hogy a két távolság közös végpontjában e-re merőlegesen emelt $(n-1)$-méretű E térre támaszkodó K-kockák között van O-hoz tartozó és nem O-hoz tartozó is. Ez azonban lehetetlenség, mert az E-tér x_1-koordinátája vagy racionális, vagy irracionális, s így vagy minden E-re támaszkodó K-kocka O-hoz tartozik, vagy egy sem. Tehát e minden távolságát O-nak valóban ugyanannyi kockája fedi. A és B ezen távolságok belső pontjai, mivel nem esnek valamely O-kocka lapjára. Következőleg A-t és B-t is ugyanannyi O-kocka fedi, vagyis (*a*) állításunk helyes.

Legyenek az osztályok i-méretűek. *Egy O osztályhoz tartozó i-méretű $P(O)$-tér: T nem tartalmaz az O-tól különböző O^* osztályhoz tartozó $P(O^*)$-pontot (b).* Ha ugyanis T tartalmazna $P(O^*)$-pontot, P_1-et és $P(O)$ valamely pontja P_0, akkor tartalmazná T a P_0-ból és P_1-ből felépített egyméretű pontrács minden pontját. Minthogy azonban P_0 és P_1 x_1-koordinátái irracionális számban különböznek, ezen egyméretű pontrács pontjainak x_1-koordinátái egymástól valamennyien irracionális számban különböznek, vagyis T végtelen sok osztályból tartalmazna középpontot. Tehát, az osztályok egybevágósága miatt, T e végtelen sok osztály valamennyi középpontját tartalmazná. Következőleg T valamely pontjának 4. szerint O-hoz megadott r-sugarú környezete e végtelen sok osztály mindegyikéből tartalmazna középpontot s így $P(K)$-nak lenne torlódási helye, ezt pedig kizártuk.

(b)-ből következik, hogy $i<n$. Ha ugyanis $i=n$ volna, azaz az előbb értelmezett T n-méretű lenne, akkor (b) szerint csak egyetlen osztály lehetne. Ez azonban ellentmond p-re vonatkozó feltevésünknek.

Egy osztálynak 3. szerint van i alapvektora: $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i$. Tehát (b) és 5. szerint található $\mathbf{v}_{i+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ úgy, hogy $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_{i+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ alapvektorai legyenek K-nak. Az értelmezés szerint $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i$ vektorok x_1-koordinátái racionálisak.

Válasszuk kezdőpontul K valamely K_0 kockájának középpontját. Bármely $P(K)$-pontnak erre vonatkozó helyzetvektora $a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_n\mathbf{v}_n$ alakban írható. Az itt szereplő $a_1,\ldots,a_n$ egészszámokat az illető K-kocka koordinátáinak mondjuk. Egy osztály kockáinak $a_{i+1},\ldots,a_n$-koordinátái tehát ugyanazok.

K_0 csak véges sok K-kockával érintkezhet, minthogy $P(K)$-nak nincs torlódási helye. Van tehát a K_0-al érintkező K-kockák a_n koordinátáinak felső korlátja: $a_n<s_1$, ahol s_1 racionális. Legyen $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i$ vektorok racionális x_1-koordinátái nevezőinek valamely közös többszöröse s_2.

Ha a $\mathbf{v}_n$ vektor x_1-koordinátáját $\frac{1}{s_1 s_2}$-re változtatjuk, egy új vektort nyerünk s ezt $\mathbf{v}'_n$-vel jelöljük. Képezzünk K_0-ból kiindulva a $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1},\mathbf{v}'_n$ alapvektorokkal egy új kockarácsot s ezt K'-vel jelöljük. K' egyes kockái tehát K megfelelő kockáiból x_1-irányban való eltolással keletkeznek.

K' a teret k-szorosan fedi. Ugyanis egy oszlopának kockáit, a_n-koordinátájuk ugyanaz lévén, ugyanannyival toltuk el az x_1-irányban, s így egy oszlop (a) szerint önmagával egyenlő kockarácsba ment át. Tehát, mint ilyenek összege, K' is

egyenlő K-val. Következőleg 6. szerint K' is k-szorosan fedi a teret.

K' nem oszlopozott. Tegyük fel, hogy K_0-nak és K' valamely K_1' kockájának közös lapja van. Legyen K_1 azon K-kocka, melyből eltolással K_1' keletkezett. Mivel K_0 érintkezik K_1'-vel, (a) szerint K_0 érintkezik K_1 osztályával is. Ez osztály minden kockájának közös a_n-koordinátája tehát, köztük K_1-é is, s_1-nél kisebb. K_1' középpontjának helyzetvektora tehát

$$a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_i\mathbf{v}_i+a_{i+1}\mathbf{v}_{i+1}+\cdots+a_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}+a_n\mathbf{v}_n',$$

ahol $a_n<s_1$. Mivel K_0-nak és K_1'-nek közös lapja van, e helyzetvektor egységvektor, s így x_1-koordinátája is egészszám. Ámde e helyzetvektor x_1-koordinátája csak úgy lehet racionális, ha $a_{i+1}\mathbf{v}_{i+1}+\cdots+a_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}$ x_1-koordinátája racionális, mivel $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_n'$ vektorok x_1-koordinátái racionálisok. Viszont az $a_{i+1}\mathbf{v}_{i+1}+\cdots+a_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}$ vektor x_1-koordinátája csak akkor racionális, ha $a_{i+1}=\cdots=a_{n-1}=0$, mivel e vektor különben nem lenne $P(O)$ vektor. K_1' középpontjának helyzetvektora tehát

$$a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_i\mathbf{v}_i+a_n\mathbf{v}_n'.$$

Ennek x_1-koordinátáját s_2-vel szorozva az első i tag s_2 értelmezése szerint egészszámot ad. Az utolsó tag pedig $\frac{a_n}{s_1}$ lesz, ami $a_n<s_1$ miatt csak akkor egészszám, ha $a_n=0$; tehát K_1' középpontjának helyzetvektora

$$a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_i\mathbf{v}_i.$$

Mivel ez $\mathbf{v}_n'$-t nem tartalmazza, K_1' azonos K_1-el. K azonban nem oszlopozott s így K_0-nak nem lehet közös lapja K_1-el s a vele azonos K_1'-el sem.

Ha K'-ben képezzük, amint K-ban tettük, az x_1-koordináták racionalitása szerint az osztályokat, itt $(i+1)$-méretű osztályokhoz jutunk, hiszen alapvektorai például $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_n'$ lennének. Eljárásunkat tehát a szükség szerint megismételve végül is oly nem oszlopozott, k-szorosan térfedő K^1 kockarácshoz jutunk, melyben az osztályok n-méretűek, azaz valamennyi $P(K^1)$-vektor x_1-koordinátája racionális.

Az egész eljárás folyamán, mellyel K-ból K^1-et nyertük, az $x_2, \ldots, x_n$-koordinátákat nem változtattuk. Tehát megismételhetjük egész eljárásunkat, melyet x_1-re vonatkozólag végeztünk, x_2-re,..., x_n-re a nélkül, hogy a már előzőleg racionálissá tett koordinátákat megváltoztatnók. Végül is oly K^n kockarácshoz jutunk, mely nem oszlopozott, k-szorosan térfedő és amelyre nézve a $P(K^n)$-vektorok valamennyi koordinátája racionális, azaz K^n racionális. Tételünk pedig éppen ilyen kockarács létezését állította.

5. §. Csoportalgebrai meggondolások.

Valamely véges C csoport elemei legyenek $A_1, \ldots, A_r$. A C csoporthoz tartozó[12] *csoportalgebra* vagy *csoportgyűrű*[13] oly gyűrű, melynek elemei $a_1A_1 + \cdots + a_rA_r$, ahol $a_1, \ldots, a_r$ tetszőleges valós számok. Ezekre az összeadás és szorzás úgy van értelmezve, mint közönségesen a polinomokra. Szorzatban a valós számok a csoport elemeivel sorrendre nézve felcserélhetők, a csoport elemeire pedig a csoport műveleti szabályai érvényesek.

A csoportalgebra két eleme akkor és csakis akkor egyenlő, ha a bennük szereplő $a_1, \ldots, a_r$ számok azonosak.

A következőkben a csoport mindig Abel-féle s így a csoportalgebra kommutatív gyűrű. A csoportalgebrának csak azon elemei fognak szerepelni, melyekben $a_1, \ldots, a_r$ egészszámok.[14]

A csoportalgebra felfogható a csoport bővítésének, ha valamely A csoportelemhez a csoportalgebra $1 \cdot A$ elemét rendeljük.

---

[12] Alaptestnek mindig a valós számtestet választjuk.

[13] V. ö. például Van der Waerden: *Moderne Algebra*, Berlin, I. (1937) 49. l., II. (1931) 149. l. és M. Deuring: *Algebren*. Erg. der Math. IV. 1. Berlin (1935) 2. l.

[14] Tehát alaptestnek a valós számtest helyett bármely 0-karakterisztikájú testet választhattunk volna.

A következőkben ezek között nem is teszünk különbséget. Beszélhetünk tehát a csoportalgebrában például két csoportelem összegéről. A következőkben a C csoport elemeivel mindig ilymódon (a csoportalgebrában) számolunk.

A csoport egységelemét 1-el jelöljük.

A C csoport valamennyi elemének összegét *csoportösszeg*nek nevezzük és ΣC-vel jelöljük. A csoportösszeg nyilván változatlan marad, ha valamelyik csoportelemmel megszorozzuk. Egy $[A]=1+A+A^2+\cdots+A^{\alpha-1}$ összeget a C csoport *sor*ának nevezünk. Az $A^\alpha=\bar{A}$ elemet e sor *záróelem*ének mondjuk.

8. Tétel. *Ha a csoportalgebra valamely B elemére nézve $B.[A]=k.\Sigma C$, akkor $B.(\bar{A}-1)=0$.*

Bizonyítás. Szorozzuk a feltételi egyenlet mindkét oldalát $(A-1)$-el. Minthogy $[A].(A-1)=\bar{A}-1$ és $\Sigma C.(A-1)=0$, éppen állításunkat nyerjük.

6. §. Racionális kockarácshoz tartozó csoport.

Az n-méretű térben elhelyezkedő racionális K kockarács alapvektorainak koordinátái racionális számok. Van tehát az alapvektorok x_1-koordinátái nevezőinek közös többszöröse a_1, meghatározható hasonlóan $a_2,\ldots, a_n$. Vagyis pl. $\frac{1}{a_1}$ közös osztója 1-nek és az alapvektorok x_1-koordinátáinak.

Válasszuk a koordinátarendszer kezdőpontjául valamelyik K-kocka egyik csúcspontját. Tekintsük az $x_i=\frac{m}{a_i}$ egyenletű, $(n-1)$-méretű tereket, ahol m tetszőleges egészszám. E terek az n-méretű teret $\frac{1}{a_1},\ldots,\frac{1}{a_n}$ élű derékszögű parallelotopokra bontják. E parallelotopok rendszerét D-vel, középpontjaik halmazát $P(D)$-vel jelöljük. Mivel $a_1,\ldots, a_n$ többféleképen megválaszthatók, a K kockarácshoz többféleképen szerkeszthetünk ily D rendszert.

Minthogy a K-kockák lapjai a D-t értelmező $(n-1)$-méretű tereken fekszenek, valamely K-kocka egy D-parallelotopot vagy egészében tartalmaz, vagy közös belső pontjuk nincs. Vagyis bármely K-kocka D-parallelotopokból felépíthető.

A $P(D)$ ponthalmaz pontrács, ugyanis alapvektorai pl. a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ hosszúságú vektok: $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n$.

Az elmondottakból következik, hogy a $P(K)$-vektorok elemei a $P(D)$-csoportnak. A $P(K)$-csoport tehát alcsoportja a $P(D)$-csoportnak.

A $P(K)$-csoportnak a $P(D)$-csoportra vonatkozó $P(D)/P(K)$ osztócsoportját (faktorcsoportját), illetőleg az ezzel izomorf absztrakt csoportot a (D-re vonatkozólag) K-hoz tartozó *K-csoportnak* nevezzük.[15] A K-csoport egy-egy eleméhez tehát a $P(K)$-csoportnak egy-egy mellékcsoportja tartozik. A K-csoport egységeleméhez éppen a $P(K)$-csoport tartozik.

Valamely $P(D)$-vektorhoz a K-csoport azon elemét rendeljük, mely az illető $P(D)$-vektort tartalmazó mellékcsoporthoz tartozik.

Legyen K_0 a K-kockarács valamely kockája. Minthogy K_0 is D-parallelotopokból van felépítve, van a K_0 által tartalmazott D-parallelotopok közt egy, melynek középpontjának koordinátái a legkisebbek; ezt K_0 *sarokparallelotopjának* nevezzük s ennek középpontját választjuk a következőkben a helyzetvektorok kezdőpontjául.

A K kockarács valamely K_1 kockáját meghatározzák az általa tartalmazott D-parallelotopok középpontjainak helyzetvektorai. Mivel ezek $P(D)$-vektorok, mindegyikükhöz a K-csoport egy-egy elemét rendeltük. Képezzük e hozzárendelt elemek összegét (a csoportalgebrában) s a csoportalgebra így nyert elemét rendeljük a K kockaráshoz. A csoportalgebra így nyert eleme ugyanis, amint azt a következő számítás mutatja, nem függ attól, hogy a kockarács melyik K_1 kockájából indultunk ki.

K_1 sarokparallelotopja középpontjának helyzetvektora legyen

---

[15] A K-csoport tehát élesen megkülönböztetendő a $P(K)$-csoporttól. — Ha K n-méretű, a K-csoport véges.

$\mathfrak{u}_1$, ez tehát $P(K)$-vektor. A K_1 által tartalmazott D-parallelotopok középpontjainak helyzetvektorai e szerint

$$\mathfrak{u}_1+a_1\mathfrak{d}_1+\cdots+a_n\mathfrak{d}_n, \tag{1}$$

ahol az $a_1,\ldots,a_n$ egészszámok minden értéket felvesznek a $0\leq a_i<\alpha_i$ határok között.

A K-csoportnak a $P(D)$-csoportba tartozó $\mathfrak{d}_1,\ldots,\mathfrak{d}_n$ vektorokhoz rendelt elemei legyenek $A_1,\ldots,A_n$. Viszont $\mathfrak{u}_1$-hez rendelt eleme 1, mivel $\mathfrak{u}_1$ $P(K)$-vektor. Tehát a csoportalgebrának a fentiek szerint K-hoz rendelt eleme:

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq a_i<\alpha_i} A_1^{a_1}A_2^{a_2}\ldots A_n^{a_n} &= \prod_{i=1}^{n}(1+A_i+A_i^2+\cdots+A_i^{\alpha_i-1}) = \\ &= [A_1]\cdot[A_2]\ldots[A_n].\end{aligned} \tag{2}$$

Az $[A_i]$ sorokat a (D-re vonatkozólag) *K-hoz tartozó soroknak* nevezzük. Amint fentebb már említettük (2) valóban független $\mathfrak{u}_1$-től, azaz K_1 megválasztásától.

9. Tétel. *A racionális K kockarács akkor és csakis akkor oszlopozott, ha* (tetszőleges D-re vonatkozólag) *a hozzátartozó sorok záróelemeinek valamelyike az egység.*

Bizonyítás. K akkor és csakis akkor oszlopozott, ha van valamely x_i-tengellyel párhuzamos $\mathfrak{e}_i$ egységvektor, amely $P(K)$-vektor. Másrészt $\mathfrak{e}_i$ akkor és csakis $P(K)$-vektor, ha a K-csoportnak hozzá, mint $P(D)$-vektorhoz, rendelt eleme az egységelem. Azonban $\mathfrak{e}_i=\alpha_i\mathfrak{d}_i$, s így a K-csoportnak ehhez rendelt eleme $A_i^{\alpha_i}=\bar{A}_i$. Vagyis K akkor és csakis akkor oszlopozott, ha valamelyik $\bar{A}_i=1$.

10. Tétel. *A racionális K kockarács akkor és csakis akkor k-szorosan térfedő, ha* (tetszőleges D-re vonatkozólag) *a K-hoz tartozó sorok szorzata a K-csoport csoportösszegének k-szorosa.*

Bizonyítás. K akkor és csakis akkor k-szorosan térfedő, ha minden D-parallelotopot k darab K-kocka tartalmaz. Vagyis, ha bármely a $P(D)$-csoportba tartozó $\mathfrak{v}$-vektor k darab különböző (a $P(K)$ csoportba tartozó) $\mathfrak{u}_1$-re nézve szerepel az (1) vektorok között. Azaz k darab különböző $a_1\mathfrak{d}_1+\cdots+a_n\mathfrak{d}_n$ vektor van (ahol $0 \leqq \alpha_i < a_i$), mely $\mathbf{v}$-ből levonva $P(K)$-vektort ad, vagyis amely a $P(K)$-csoport ugyanazon mellékcsoportjához tartozik, mint $\mathbf{v}$. Legyen a $P(K)$-csoportnak $\mathbf{v}$-hez rendelt eleme V. Tehát az előbbiek szerint k darab $\alpha_1\mathbf{d}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{d}_n$ $(0 \leqq \alpha_i < a_i)$ vektornak V a hozzárendeltje. Azaz V k-szor szerepel a (2) kifejezésben. A K kockarács így minden D-parallelotopot akkor és csakis akkor fed k-szorosan, ha a K-csoport minden eleme k-szor szerepel (2)-ben, azaz (2) éppen a K-csoport csoportösszegének k-szorosa.

11. Tétel. *Annak, hogy az n-méretű térben legyen k-szorosan térfedő, nem oszlopozott kockarács, szükséges és elégséges feltétele az, hogy található legyen véges, Abel-féle csoport és ennek n darab sora úgy, hogy ezek záróelemei az egységtől különbözzenek és a sorok szorzata a csoportösszeg k-szorosa legyen.*

Bizonyítás. A 7., 9., 10. tételek kimondják, hogy feltételünk szükséges. Be fogjuk bizonyítani, hogy feltételünk egyben elégséges is.

Tegyenek eleget a C csoport s ennek $[A_1],\ldots,[A_n]$ sorai a tételben tett kirovásoknak. Itt $[A_i]$ jelöli röviden az $1+A_i+\cdots+A_i^{a_i-1}$ sort.

Legyenek a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\frac{1}{a_1},\ldots,\frac{1}{a_n}$ hosszúságú vektorok: $\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_n$.

Tekintsük az $l_1\mathbf{d}_1+\cdots+l_n\mathbf{d}_n$ vektorokat, ahol $l_1,\ldots,l_n$ egészszámok. Ezek közül válasszuk ki azokat, melyekre nézve

$$A_1^{l_1}A_2^{l_2}\ldots A_n^{l_n}=1. \tag{3}$$

Az így kiválasztott vektorok (3)-ból kiolvashatóan csoportot alkotnak, csoportjukat választjuk $P(K)$-csoportnak. E csoport segítségével szerkesztünk egy K kockarácsot.

Állítjuk, hogy e K kockarács eleget tesz tételünk követelményeinek.

$\frac{1}{a_1},\ldots,\frac{1}{a_n}$ közös osztói 1-nek és a $P(K)$-vektorok megfelelő koordinátáinak. Tehát a $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n$ által meghatározott D parallelotoprendszer megfelel a jelen § elején elmondottaknak.

A $P(D)$-csoportba tartozó $l_1\mathbf{d}_1 + \cdots + l_n\mathbf{d}_n$ vektorhoz rendeljük a C csoport azon L elemét, melyre

$$A_1^{l_1} A_1^{l_2} \ldots A_n^{l_n} = L. \tag{4}$$

Tehát (3) szerint a $P(K)$-csoport elemeihez és csak ezekhez az egységet rendeljük. Viszont a $P(K)$-csoport valamely mellékcsoportjának minden eleméhez (4) a C csoportnak ugyanazon elemét rendeli. E hozzárendelés szerint C izomorf a $P(D)/P(K)$ osztócsoporttal. Ha ugyanis egy $P(D)$-vektorhoz L_1-et, egy másik $P(D)$-vektorhoz L_2-t rendeltük, akkor a két vektor összegéhez (4) az $L_1 L_2$ szorzatot rendeli. Vagyis C éppen a (D-re vonatkozólag) K-hoz tartozó K-csoport.

A $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n$ vektorokhoz (4) éppen a C csoportnak $A_1, \ldots, A_n$ elemeit rendeli. Tehát $[A_1], \ldots, [A_n]$ éppen a (D-re vonatkozólag) K-hoz tartozó sorok.

Minthogy az $[A_1], \ldots, [A_n]$ sorok záróelemei az egységtől különlönböznek és e sorok szorzata C csoportösszegének k-szorosa, a 9. és 10. tételek értelmében a K kockarács valóban nem oszlopozott és k-szorosan térfedő.

A most bebizonyított 11. tétel megengedi, hogy a bevezetésben említett I. és II. kérdéskörökbe vágó vizsgálatokat csoportelméleti, illetőleg csoportalgebrai úton folytathassuk le. Hogy ez az eljárás mennyire használható lehet, azt a következő § mutatja.

7. §. Térfedő kockarácsok oszlopozottsága.

A 11. tétel módot nyujt arra, hogy a II. kérdésre megadjuk a feleletet. Ezt a feleletet a következő két tétel foglalja magában.

12. Tétel. *Ha $n \leq 3$, akkor az n-méretű tér minden térfedő kockarácsa oszlopozott.*

Bizonyítás. A 11. tétel értelmében a háromméretű térre vonatkozó állításunkat azzal igazoljuk, ha kimutatjuk, hogy a véges, ABEL-féle C csoportra s ennek $[A_1]$, $[A_2]$, $[A_3]$ soraira nézve, melyeknek $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ záróelemei az egységtől különbözők, nem állhat fenn

$$[A_1].[A_2].[A_3] = k.\Sigma C. \tag{5}$$

A két-, ill. egyméretű esetekre vonatkozólag az (5)-nek megfelelő egyenleteket nem kell külön vizsgálnunk, mert $\alpha_3 = 1$, ill. $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ esetén (5) azokat magában foglalja.

Tegyük fel, hogy (5) fennáll s ellentmondásra fogunk jutni. A 8. tétel szerint (5)-ből következik

$$[A_1].[A_2].(\bar{A}_3-1) = 0.$$

A 8. tételt kétszer újból alkalmazva

$$[A_1].(\bar{A}_2-1)(\bar{A}_3-1) = 0, \tag{6}$$

$$(\bar{A}_1-1)(\bar{A}_2-1)(\bar{A}_3-1) = 0.$$

Vagyis

$$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1+\bar{A}_2+\bar{A}_3=\bar{A}_1\bar{A}_2+\bar{A}_1\bar{A}_3+\bar{A}_2\bar{A}_3+1. \tag{7}$$

A baloldal valamelyik tagja tehát 1 kell, hogy legyen. A záróelemekre vonatkozó feltevésünk miatt

$$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3=1. \tag{8}$$

Tehát (7)-ből következik

$$\bar{A}_1+\bar{A}_2+\bar{A}_3=\bar{A}_1\bar{A}_2+\bar{A}_1\bar{A}_3+\bar{A}_2\bar{A}_3.$$

A jobboldal valamelyik tagja tehát $\bar{A}_1$-el egyenlő. A záró elemekre vonatkozó feltevésünk miatt ez csak a jobboldal utolsó tagja lehet, azaz

$$\bar{A}_2\bar{A}_3=\bar{A}_1=A_1^{\alpha_1}. \tag{9}$$

(8)-ból és (9)-ből következőleg

$$\bar{A}_1^2=1.$$

Hasonlóan

$$\bar{A}_2^2=1, \quad \bar{A}_3^2=1. \tag{10}$$

A (6) egyenlet így is írható:

$$[A_1].(1+\bar{A}_2\bar{A}_3) = [\bar{A}_1].(\bar{A}_2+\bar{A}_3).$$

Tehát (9) szerint

$$(1+A_1+\cdots+A_1^{\alpha_1-1})(1+A_1^{\alpha_1}) = (1+A_1+\cdots+A_1^{\alpha_1-1})(\bar{A}_2+\bar{A}_3).$$

A baloldalon csak A_1 hatványai állanak. A jobboldalon szerepel $\bar{A}_2$ és $\bar{A}_3$, tehát ezek is hatványai A_1-nek:

$$\bar{A}_2 = A_1^{\mu}, \quad \bar{A}_3 = A_1^{\nu}. \tag{11}$$

Legyen a G csoportban A_1 kitevője λ, vagyis λ a legkisebb egészszám, melyre

$$A_1^{\lambda} = 1.$$

(10)-ből, (11)-ből és a záróelemekre vonatkozó feltevésünkből következőleg

$$\mu = \nu = \frac{\lambda}{2},$$

vagyis

$$\bar{A}_2 = \bar{A}_3.$$

Tehát (9) és (10) szerint

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_2\bar{A}_3 = \bar{A}_2^2 = 1.$$

Ez pedig ellentmond a záróelemekre vonatkozó feltevésünknek.

13. Tétel. *Ha $n > 3$, akkor van az n-méretű térben nem oszlopozott térfedő kockarács.*

Bizonyítás. A 11. tétel értelmében a négyméretű térre vonatkozó állításunkat azzal igazoljuk, ha megadunk egy véges, ABEL-féle C csoportot és ennek $[A_1]$, $[A_2]$, $[A_3]$, $[A_4]$ sorait úgy, hogy

$$[A_1]\cdot[A_2]\cdot[A_3]\cdot[A_4] = k.\Sigma C. \tag{12}$$

Ha ilyet megadtunk, akkor (12) mindkét oldalát bármely nem egység-záróelemű sorral ismételten szorozva oly egyenleteket nyerünk, melyek a 11. tétel értelmében állításunkat négynél magasabb méretszámú terekre igazolják. Elegendő tehát oly példát megadnunk, melyre (12) fennáll.

Legyen R és S a véges, ABEL-féle C csoport két eleme. A csoport értelmező egyenletei legyenek:

$$R^{12} = 1, \quad S^2 = 1. \tag{13}$$

A sorokat a következőképen választjuk meg:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= R\;, & a_1 &= 6,\\
A_2 &= RS\,, & a_2 &= 4,\\
A_3 &= R^2S, & a_3 &= 3,\\
A_4 &= R^4S, & a_4 &= 3.
\end{aligned}
$$

Az így értelmezett 24-edrendű C csoportra és $[A_1]$, $[A_2]$, $[A_3]$, $[A_4]$ soraira nézve fennáll (12) és pedig abban $k=9$. Erről, (13) figyelembevételével, egyszerű számítás meggyőz. A négyméretű térben tehát van kilencszeresen térfedő, nem oszlopozott kockarács.[16]

A 12. és 13. tételekkel lényegileg egyenértékű a következő:

14. Tétel. *Az n-méretű teret többszörösen fedő kockarács $n \leqq 3$ esetén egyszeresen fedő kockarácsok összege; $n>3$ esetén ez általában nem helyes.*

Bizonyítás. $n \leqq 3$ esetén a többszörösen térfedő K kockarács 12. szerint oszlopozott. Két, közös lappal bíró kockájának középpontján áthaladó e egyenesen ezen kockák középpontjai egyméretű pontrácsot határoznak meg. E pontrács pontjait, mint középpontokat tartalmazó K-kockák K-nak egy *oszlopát* alkotják. K kockarács-volta miatt K ily oszlopokból tevődik össze. Ezen oszlopok mindegyike az e-re merőleges T térből egy $(n-1)$-méretű kockát metsz ki s ezek T-ben többszörösen térfedő kockarácsot alkotnak. Ha T-ben $\big((n-1)$-méretben$\big)$ igaz tételünk, akkor n-méretben is igaz, mert egy T-ben levő egyszeresen fedő kockarács kockáit kimetsző oszlopok (alkalmasan megválasztva) az n-méretű teret egyszeresen fedő kockarácsot alkotnak. Azonban egyméretben tételünk nyilván helyes s így az előzők szerint helyes két-, és háromméretű térben is.

Hogy $n>3$ esetén a tétel állítása általában nem helyes, azt 13. bizonyításának példája mutatja. Ha ugyanis ez is egyszeresen fedő kockarácsok összege volna, akkor oszlopozott lenne, mivel $n=4$ esetén az I. sejtés helyes.

*

[16] Ennek alapvektorai a 11. bizonyításának gondolatmenete szerint meghatározhatók; ezek pl. $\mathbf{v}_1(2,0,0,0)$, $\mathbf{v}_2(\frac{1}{3},-\frac{1}{2},0,0)$, $\mathbf{v}_3(\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},0)$, $\mathbf{v}_4(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0,\frac{1}{3})$.

A 12. tétel az I. sejtés helyességét is kimondja a legegyszerűbb $n=1, 2, 3$ esetekben.

A 11. tétel szerint a Minkowski-féle sejtéssel egyenértékű a következő állítás:

I. b. *Ha a véges,* Abel-*féle* C *csoportra s annak* n *darab sorára nézve*

$$[A_1]\cdot[A_2]\ldots[A_n] = \Sigma C,$$

akkor az $[A_1], [A_2], \ldots, [A_n]$ *sorok záróelemeinek valamelyike az egység.*

Hajós György.

BEDECKUNG MEHRDIMENSIONALER RÄUME MIT WÜRFELGITTER.

Sind $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ unabhängige Vektoren des n-dimensionalen Raumes, so heisst die durch die Ortsvektoren $a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_m\mathbf{v}_m$ ($a_1, \ldots, a_m$ beliebig ganz) gekennzeichnete Punktmenge bekanntlich ein Punktgitter. Ein System kongruenter, parallel liegender, n-dimensionaler (einander ev. teilweise auch überdeckender) Würfel, deren Mittelpunkte ein Punktgitter bilden, wird Würfelgitter genannt. Minkowski vermutete, dass ein den n-dimensionalen Raum *einfach* bedeckendes Würfelgitter zwei an einer ganzen Seitenfläche aneinanderstützende Würfel haben muss.

Im vorliegenden Aufsatze werden auch die den Raum *mehrfach* bedeckenden Würfelgitter in Betracht gezogen. Für solche erweist sich die der Minkowskischen entsprechende Vermutung nur für $n \leq 3$ als richtig. Für höhere Dimensionen wird sie durch ein Gegenbeispiel widerlegt.

Es wird bewiesen, dass man sich bei solchen Untersuchungen auf rationale Würfelgitter beschränken darf, d. h. auf solche, bei welchen der Abstand je zweier Seitenebenen sich rational zur Würfelkante verhält.

Das Haupthilfsmittel der Beweisführung ist folgender Äquivalenzsatz: Die Minkowskische Vermutung (bzw. das entsprechende für k-fache Bedeckung) ist für den n-dimensionalen Raum dann und nur dann falsch, wenn es eine endliche Abelsche Gruppe, darin n Elemente $A_1, \ldots, A_n$ und n ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gibt, so dass $A_i^{a_i} \neq 1$ und das Produkt der Summen $1+A_i+A_i^2+\cdots+A_i^{a_i-1}$ (in der zur Gruppe gehörenden Gruppenalgebra gerechnet) die Summe (bzw. das k-fache der Summe) aller Elemente der Gruppe ist. *Georg Hajós.*

POLIÉDEREKRE VONATKOZÓ SZÉLSŐÉRTÉK-FELADATOK.

STEINER 1841-ben a párisi akadémiának egy dolgozatot terjesztett be, melyben — LHUILIER kutatásaihoz kapcsolódva — számos elemi geometriai szélsőérték-feladatot tárgyal.[1] Eredményei közül kiemeljük itt a következőt:

I. *Valamely zárt konvex síkgörbébe írt legnagyobb területű n-szög bármely csúcspontjában fektethető a görbéhez oly támaszvonal, mely párhuzamos a két szomszédos csúcsponton át rajzolt szelővel.*

Már STEINER felveti a megfelelő kérdést a körülírt minimális területű n-szögre nézve. A felelet:

II. *Valamely konvex görbe köré írható legkisebb területű n-szög minden oldalának felezőpontja rajta van a görbén.*

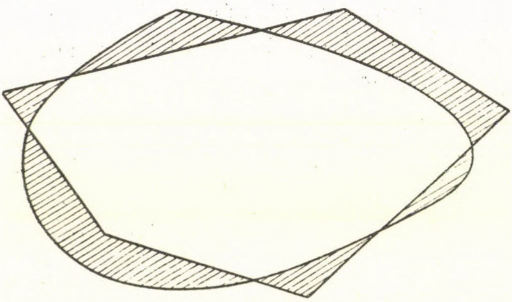
Mindkét esetben azt az n-szöget kerestük, melyre a görbe és az n-szög közt fekvő idom területe a lehető legkisebb. Ámde a görbe és az n-szög közti résznek egyszerű értelemmel bíró jelentést adhatunk nemcsak beírt vagy körülírt, hanem tetszésszerinti n-szög esetében is. Tekintsük ugyanis azon pontok halmazát[2] (1. ábránkon a vonalkázott rész), melyek a görbe, illetőleg az n-szög által határolt tartományok közül az egyikben és csakis az egyikben fekszenek. E halmaznak biztosan van területe, s e területet az n-szögnek a görbétől való *eltérés*-

[1] Über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene..., Gesammelte Werke, II., S. 177—308. L. különösen S. 242.

[2] A szóbanforgó halmaz ezen egyszerű értelmezésére KŐNIG DÉNES professzor úr hívta fel a figyelmemet.

ének nevezzük. Érdemes megemlíteni, hogy az eltérés akkor és csak akkor nulla, ha az n-szög a görbével egybeesik.

A fenti tételekben a görbébe írt, illetőleg a görbe köré írt n-szögek közül kerestük azt, melyre az eltérés minimális. Felmerül természetszerűleg a kérdés: milyen tulajdonsággal rendelkezik az az n-szög, melynek egy előre megadott zárt konvex görbétől való eltérése a sík összes n-szögei közül a lehető legkisebb?[3] Ezt az n-szöget *simuló n-szög*nek nevezzük s könnyen bebizonyítható a következő rávonatkozó tétel:[4]



1. ábra.

III. *Valamely zárt konvex görbéhez szerkesztett simuló n-szög minden egyes oldalának azon két pontja, mely az illető oldalnak egy-egy negyedét metszi le, a görbén rajta van.*

Megjegyzendő, hogy e tételek csak szükséges feltételt adnak az extremális n-szögre. Ami pedig a szélsőérték exisztenciáját illeti, erre még később külön ki fogunk térni, de már itt előrebocsátjuk, hogy tárgyalandó szélsőérték-feladatainknak mindig van megoldásuk.

*

[3] Ezen n-szögnek valamely (a, b)-ben értelmezett $y = f(x)$ görbeív esetében megfelel az az n vonaldarabból álló nyilt $y = P_n(x)$ poligon, melyre $\int_a^b |f(x) - P_n(x)|\,dx$ minimális.

[4] FEJES L.: Sokszögekre vonatkozó szélsőérték-feladatokról. Középiskolai Mat. és Fiz. Lapok, VIII. (1937), 8. szam, ahol megtaláljuk egyben I.-nek és II.-nek is egyszerű bizonyítását.

Fordítsuk most figyelmünket e tételeknek térre vonatkozó analogonjaira. Ezek tárgyalását indokolttá teszik azok a különbségek, melyek a második és harmadik dimenzió közt vannak. Gondoljuk meg mindenekelőtt, hogy igen sok planimetriai tételnek egyáltalában nem felel meg hasonló tétel a térben. Például szolgáljon az az érdekes tény, hogy míg egy L kerületű és T területű JORDAN-görbébe mindig beírható egy kör, melynek sugara csak L-től és T-től függ,[5] addig bármily (az $F^3 < 36\pi V^2$ feltételt kielégítő) pozitív F, V és ε számokhoz megadható oly F felszínű és V térfogatú test, melybe ε-nál nagyobb sugarú gömb nem írható.[6]

Már ez is mutatja, hogy a harmadik dimenzióba való lépés sok váratlan és meglepő dolgot eredményez s hozzátehetjük, hogy gyakran nagy nehézségeket is rejt magában. De különösen áll ez a poliéderekre. Egy klasszikus extrémum-feladattal, az izoperimetrikus problémával kapcsolatban pl. STEINITZ a következőket írja:[7] Während das isoperimetrische Problem bei Polygonen... erledigt ist, gestalten sich die entsprechenden Aufgaben im Raume mannigfaltiger und begegnen grossen Schwierigkeiten. Die Untersuchungen sind auch über die ersten Anfänge noch nicht hinausgekommen.

---

[5] Ennek egy egyszerű bizonyítását l. GRÜNWALD GÉZA és TURÁN PÁL: Über den Blochschen Satz. Szegedi Acta VIII. (1937). 238. l.

[6] Ennek belátása végett tekintsünk egy F felszínű és V térfogatú testet és helyezzük el felületén a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokat oly sűrűn, hogy a felület bármely pontja köré írt ε sugarú gömbben legyen legalább egy P_i pont. Kössük össze e pontokat a testnek egy tetszésszerinti O belső pontjával és tekintsük az $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \ldots, \overline{OP_n}$ szegmentumok azon $s_1, s_2, \ldots, s_n$ részét, melyek az O köré rajzolt ε sugarú gömbön kívül esnek. Vegyük most körül $s_1, s_2, \ldots, s_n$-et kis keresztmetszetű hengerfelületekkel, s helyettesítsük ezek segítségével a felületet egy másik zárt felülettel, melynek az $s_1, s_2, \ldots, s_n$ vonaldarabok a külsejében fekszenek. Ezen új felületbe nem helyezhető ε-nál nagyobb sugarú gömb, jóllehet területe, illetőleg térfogata — a hengerek keresztmetszetét elég kicsinyre választva — tetszőlegesen kevéssel különbözik F-től, illetőleg V-től.

[7] Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern. Crelle Journal. Bd. 158. (1927), S. 129—153., Bd. 159. (1928), S. 133—143. L. a bevezetést.

Mondhatjuk, hogy a poligonra vonatkozó legtöbb tételnek nincs egyszerű térbeli megfelelője. Vizsgáljuk meg ezután, miként áll ez a fentemlített tételeknél.

*

Az eltérést a térben épp úgy értelmezhetjük, mint a síkban: valamely $\mathfrak{P}$ poliédernek egy $\mathfrak{T}$ testtől való eltérésén azon pontok halmazának térfogatát értjük, melyek $\mathfrak{P}$ és $\mathfrak{T}$ egyikében és csakis egyikében vannak. A feladatok azonban, melyekkel itt szembenállunk, a síktól eltérőleg igen különbözők lehetnek. Más-más feladatra jutunk ugyanis a szerint, amint meghatározott lap-, csúcs-, vagy élszámú poliédereket hasonlítunk össze. De éppúgy kereshetjük az extrémumot a STEINER-féle értelemben «egyenlő típusú» poliéderek[8] közül. Az alábbiakban csak az első esettel foglalkozunk, s így a következő kérdéssel állunk szemben: Milyen feltételnek tesz vajjon eleget az az n-lap, melynek egy előre megadott konvex $\mathfrak{T}$ testtől való eltérése a lehető legkisebb, midőn 1. a $\mathfrak{T}$-be írt, 2. a $\mathfrak{T}$ köré írt, 3. valamennyi n-lap közül keressük az extrémumot? Vegyük sorra e három feladatot.

Míg a síkban a beírt n-szögre vonatkozó tétel bizonyítható legkönnyebben, addig a térben már nem ilyen egyszerű a megfelelő feladat megoldása. Itt csak a legkisebb lapszámú poliéderre, a 4-lapra szorítkozunk.

I*. *Valamely zárt konvex felületbe írt legnagyobb köbtartalmú tetraéder minden egyes csúcspontjában fektethető a felülethez az átellenes lappal párhuzamos támaszsík.*

Ellenkező esetben ugyanis a tetraéder térfogata a csúcspontoknak a felületen történő elmozgatásával növelhető lenne.

A körülírt poliédernél már megtaláljuk a síkbeli tétel analogonját.

II.* *Valamely konvex test köré írt minimális köbtartalmú n-lap valamennyi lapjának súlypontja a testen rajta van.*[9]

---

[8] L. pl. STEINITZnek az előbbi jegyzetben idézett dolgozatát.

[9] Az I*. és II*. alatti eredmények bizonyára nem újak és csak a teljesség kedvéért tárgyaljuk e helyen őket.

A bizonyitáshoz felhasználjuk a GULDIN-szabályt, mely tudvalevőleg kimondja, hogy valamely forgástest térfogata a forgatott síkidom területének és az idom súlypontja által leírt körív hosszának szorzatával egyenlő. Ebből következik, hogy ha valamely síkidomot egyik súlyvonala körül elforgatunk, a keletkező két forgástest térfogatai egyenlők lesznek. Bármilyen más egyenes körül történik viszont az elforgatás, mindig azon forgási test térfogata lesz nagyobb, amely a síkidom súlypontját tartalmazó részének forgásából keletkezett.

Vegyünk már most szemügyre egy $\mathfrak{T}$ köré írt n-oldalú poliédert, mely nem rendelkezik a tételünkben megjelölt tulajdonsággal. Válasszuk ki ennek egyik lapját, melynek S súlypontja $\mathfrak{T}$-n kívül fekszik, s tekintsük e lapnak a $\mathfrak{T}$-vel közös pontjait. Eme pontok halmaza egy konvex K síkidomot alkot, mely egy vonaldarabból, vagy egyetlen pontból is állhat. Tehát K mindenesetre elválasztható S-től egy a lap síkjában fekvő o egyenessel. A lapnak o körüli megfelelő irányban történő infinitézimális elforgatásával egy új, $\mathfrak{T}$-t magába záró, n-lapot nyerünk, melynek térfogata az eredeti poliéderrel szemben csökkent.

Mielőtt a fentebb felvetett harmadik feladat tárgyalásához kezdenénk, térjünk ki egy pillanatra az extremális sokszögek, illetőleg poliéderek exisztenciájának kérdésére. STEINER még — amint ismeretes — bizonyítás nélkül felteszi a szélső érték létezését. Erre a hiányra WEIERSTRASS kritikája terelte a figyelmet s említésreméltó, hogy a STEINER által felvetett szélsőértékfeladatok közt van olyan, melynek nincs megoldása.[10] Az itt tárgyalt feladatok esetében azonban ez a nehézség könnyen áthidalható. Az eltérés ugyanis, melynek minimizálására törekszünk, az eddigi feladatokban véges számú paraméternek valamely zárt intervallumban értelmezett folytonos függvénye, melynek WEIERSTRASS jól ismert tételénél fogva biztosan van minimuma.

Tekintsük példaképpen a legutóbbi feladatot. A körülírt poli-

---

[10] L. STEINITZ idézett dolgozatából különösen a 13. §-t.

éder a lapok külső normálisainak irányával egyértelműen meg van határozva. Mivel pedig minden irányt két adat jellemez, ezért a körülírt n-lapokat a $2n$-dimenziós térnek egy tartományára egyértelműen leképezhetjük. Tekintsük most a tartomány azon pontjait, melyekhez oly n-lapok tartoznak, melyek térfogata egy tetszésszerinti $\mathfrak{T}$ körül írt tetraéder térfogatánál nem nagyobb. E pontok halmaza mindenesetre zárt s a szélsőérték szempontjából tekintetbejövő poliéderek térfogata eme zárt halmaz pontjainak folytonos függvénye, amiből következik a minimum exisztenciája.

Térjünk ezután a harmadik feladatra, ahol mindenekelőtt az extrémum létezését fogjuk kimutatni.

A minimális eltérésű n-lap — vagy az n-szög esetében már használt kifejezéssel élve: símuló n-lap — exisztenciájának bizonyítását szintén a WEIERSTRASS-féle tételre vezetjük vissza. Az alábbiakban azonban csak konvex poliéderekre szorítkozunk[11] s kimutatjuk, hogy a legfeljebb n-lappal biró konvex poliéderek között van olyan, melynek egy előre megadott konvex $\mathfrak{T}$ testtől való eltérésére minimális.

Az összehasonlítandó poliédereket STEINITZ szerint[12] a következő módon jellemezzük: Tekintsünk a térben $2n-4$ számú $P_1, P_2, \ldots, P_{2n-4}$ pontot és vegyük szemügyre az e pontokat tartalmazó legkisebb konvex testet. Ez a $\mathfrak{P}$ test: konvex poliéder, mely azonban egy sík poligonná vagy egy vonaldarabbá, sőt (mivel a pontok egybeeshetnek) egyetlen ponttá is degenerálódhat. Emlékeztetünk most az EULER-féle poliéder-tételnek egy ismert következményére, mely szerint valamely n lappal biró poliédernek legfeljebb $2n-4$ csúcspontja lehet. Ezért bármely konvex n-lap a $P_1, P_2, \ldots, P_{2n-4}$ pontoknak egy rendszerével egyértelműen jellemezhető. Nézzük viszont most azon

---

[11] Valószinű, hogy bármely nem konvex n-laphoz szerkeszthető egy kisebb eltérésű n-lappal biró konvex poliéder. A síkra az analog tétel közvetlenül belátható.

[12] L. STEINITZ dolgozatából a 12. §-t.

pontrenszereket, melyekhez oly poliéderek tartoznak, melyek lapjainak száma legfeljebb n és melyek egy $\mathfrak{T}$-t körülvevő gömbben vannak. E pontrendszerek a $3(2n-4)$-dimenzios térben zárt halmazt alkotnak, s $\mathfrak{P}$-nek $\mathfrak{T}$-től való eltérése e halmazon folytonosan változik. Tehát azon n-lapokra, melyek egy $\mathfrak{T}$-t körülvevő gömbbe esnek, az eltérés felveszi alsó határát, mely minden esetre kisebb a test V térfogatánál.

Ezek szerint már csak azt kell kimutatnunk, hogy a V-nél kisebb eltérésű konvex n-lapok egy gömbben vannak. Ez azonban nemcsak n-lapra, hanem bármely konvex testre is igaz. Vegyük ugyanis figyelembe, hogy valamely $\mathfrak{K}$ konvex testnek $\mathfrak{T}$-től való eltérése: $V-V_b+V_k$, ahol V_b, illetőleg V_k a $\mathfrak{K}$-nak $\mathfrak{T}$-n belül, illetőleg kívül eső részének a térfogata. Feltevésünknél fogva $V-V_b+V_k<V$, azaz $V_k<V_b$, tehát még inkább fennáll az, hogy $\mathfrak{K}$ azon részének térfogata, mely egy $\mathfrak{T}$-t körülvevő r sugarú $\mathfrak{G}$ gömbön kívül van, kisebb $\mathfrak{G}$ térfogatánál. Ebből pedig következik, hogy $\mathfrak{K}$ benne van azon P pontok halmazában, melyekre a P-t és $\mathfrak{G}$-t magába záró legkisebb konvex test térfogata kisebb $2\,\dfrac{4\pi r^3}{3}$-nál. E halmaz azonban egy $\mathfrak{G}$-vel koncentrikus és, amint egyszerű számítás mutatja, $R<4r$ sugarú gömb.

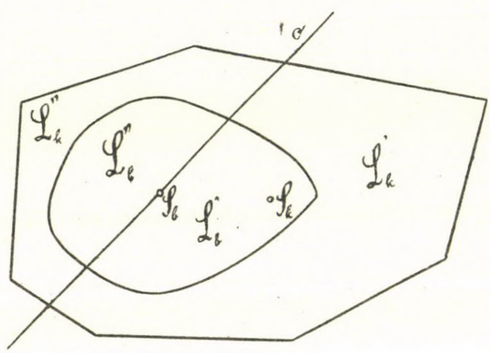
Ezzel a szélsőérték létezését konvex poliéderekre kimutattuk s most rátérhetünk a $\mathfrak{T}$ konvex testhez tartozó símuló n-lap jellemzésére. Egyszerűbb kifejezésmód kedvéért azonban mindenekelőtt egy megszorítást teszünk $\mathfrak{T}$-re. Tegyük fel ugyanis, hogy $\mathfrak{T}$ felülete nem tartalmaz síkrészt. Azonnal látható, hogy ez esetben a símuló n-lap minden egyes lapjának egy része $\mathfrak{T}$ belsejébe, másik része $\mathfrak{T}$-n kívül esik. Kimutatjuk már most az alábbi tételt:

III.* *Valamely (síkrészt nem tartalmazó) zárt konvex felülethez fektetett símuló n-lap minden egyes lapjára teljesül a következő két feltétel: 1. A lapnak a felületbe és a felületen kívül eső részei egyenlő területűek, 2. a felületen belül, illetőleg kívül levő két rész súlypontja egybeesik.*

Látható, hogy tételünk a különböző fogalmazás ellenére teljesen megfelel a simuló n-szögre kimondott tételnek.

A tételünkben foglalt első állítás bizonyításához tegyük fel, hogy — III*-gal ellentétben — az egyik lapon a felületbe eső rész területét illetőleg τ-val ($\tau \neq 0$) különbözik a kívül eső résztől. Ez esetben az eltérés egy infinitezimális eltolással csökkenthető. Ha ugyanis a lapot sajátmagával párhuzamosan kevéssel, mondjuk h-val, eltoljuk, akkor az eltérés közelítőleg τh-val változik s az eltolást megfelelő irányban végezve τh-val csökken.

Hátra van még tételünk második részének bizonyítása. Szemeljünk ki poliéderünkön egy L-lapot, melyen a $\mathfrak{T}$-be eső L_b



2. ábra.

rész súlypontja S_b nem esik egybe S_k-val, azaz az L-lap $\mathfrak{T}$-n kívül levő L_k részének súlypontjával. Rajzoljunk most S_b-n keresztül egy L síkjában fekvő o egyenest, melyről csak azt kötjük ki, hogy ne menjen át S_k-n. Az o egyenes L_b-t és L_k-t két részre osztja. Jelöljük ezeket L_b'-, L_b''-, illetőleg L_k'-, L_k''-vel (l. a 2. ábrát), miközben a megegyező felső indexek o-nak ugyanazon oldalán fekvő részeket jelölnek. Hajtsunk most L-en egy o körüli infinitézimális elforgatást végre s jelöljük az egyes részek forgásából keletkező forgástestek térfogatát rendre $V(L_b')$-, $V(L_b'')$-, $V(L_k')$- és $V(L_k'')$-vel. A poliéder eltérése forgás közben $V(L_b')+V(L_k'')-V(L_b'')-V(L_k')$-vel változik. Ámde a GULDIN-szabály szerint $V(L_b')=V(L_b'')$, tehát az eltérés változása:

$V(L_k')-V(L_k'')$. Ez azonban ugyancsak a GULDIN-szabály értelmében zérustól különböző. A poliédernek $\mathfrak{T}$-től való eltérése tehát megfelelő irányú infinitézimális elforgatással csökkenthető.

Befejezésül még egy érdekes problémára szeretném a figyelmet felhívni. Megemlítjük először is, hogy megadható oly konvex $\mathfrak{T}$-test, melyhez rajzolt símuló n-lap bizonyos éleinek egy darabja $\mathfrak{T}$ belsejében fekszik. Valószínűnek látszik ezzel szemben, hogy a símuló n-lap egyetlen csúcspontja sem fekhet $\mathfrak{T}$ belsejében.

Fejes László.

ÜBER EINIGE EXTREMUMAUFGABEN BEI POLYEDERN.

Wir knüpfen in dieser Arbeit an zwei von STEINER[1] herrührenden Extremumaufgaben an. Man betrachte zunächst eine konvexe geschlossene Kurve $\mathfrak{K}$ und ein in derselben Ebene liegendes geschlossenes Polygon $\mathfrak{P}$. Fassen wir jetzt diejenigen Punkte ins Auge, welche von den beiden von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}$ begrenzten Gebieten in einem und nur in einem liegen. Die Menge dieser Punkte besitzt sicher ein Inhaltsmass, das wir als die *Abweichung* zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{K}$ bezeichnen wollen. Die STEINER'schen Aufgaben lauten nun: was für eine Eigenschaft besitzt dasjenige n-Eck, welches die kleinste Abweichung von $\mathfrak{K}$ besitzt 1. unter allen in $\mathfrak{K}$ liegenden, 2. unter allen $\mathfrak{K}$ umgebenden n-Ecken. Wir stellen nun die Frage: wodurch ist dasjenige n-Eck ausgezeichnet, welches die kleinste Abweichung von $\mathfrak{K}$ besitzt, indem wir *alle* n-Ecken der Ebene zur Konkurrenz zulassen.

Es werden hier die analogen Aufgaben und besonders die Existenz des Extremums im Raume behandelt, wobei wir statt n-Ecken die Polyeder mit gegebener Flächenzahl in Betracht ziehen.

Ladislaus Fejes.

BOLYAI FARKAS ARCKÉPÉHEZ.*

Bolyai Farkas — folyóiratunk e számához mellékelt — arcképének eredetije a marosvásárhelyi református kollégium tanári könyvtárában, a Bolyai-ereklyék közt van. Világosbarna papíron, fekete- és fehér krétával készült rajz, 25×30 cm-es méretben. Farkas Dániel asztalosnak fiától vásárolta meg 1898. május 7-én 5 forintért a kollégium részére Koncz József, az akkori könyvtáros. Báró Kemény Pálné marosvásárhelyi házának (Zeyk-ház, Kazinczy-u. 13.) udvarán lakott ez az asztalos. A bárónétól került hozzá a kép. Koncz József szerint Szabó János rajzolta, bár neve nincs feltüntetve rajta. Bolyai Farkas nagyon pártolta Szabó Jánost; 1829-ben 110 forintot gyüjtött számára, hogy Bécsből lejöhessen. Az eddig elmondottakat Koncz Józsefnek a képkeret hátlapjára erősített feljegyzése és 1898. május 8-án kelt aláírása bizonyítja. Dékáni Kálmán dr., későbbi könyvtáros 1925. június 8-án kelt, ugyanoda mellékelt soraival és aláírásával megerősíti és kiegészíti ezeket az adatokat.

Gulyás Károly rajztanár, jelenleg a marosvásárhelyi Teleki-könyvtár őre, aki korábban a református kollégium tanári könyvtárának volt az őre, lerajzolta és részletesen méltatta ezt a

* A fényképfelvételeket Stausz Simon készítette részemre a helyszínen. A lemezeket a marosvásárhelyi református kollégiumnak ajándékoztam.

E cikkem már sajtó alatt volt, mikor arról értesültem, hogy Szász Pál egyetemi magántanár úr birtokában is van egy hasonló Bolyai Farkas-mellkép. Nagyobb méretben, fekete-fehér irónnal készített rajz. A művész neve és az időpont is fel van tüntetve rajta: »Szabo. 1846.« Szász Károly (1798—1853) marosvásárhelyi professzor, illetőleg Szász Károly (1829—1905) püspök hagyatékából való. Ezen a képen a kabátszárnyak egymásrahajlásának sorrendje ellentétes a Thanhoffer-féle másolatéval.

képet egy cikkében,[1] de az eredeti fényképben eddig sehol nem jelent meg, pedig GULYÁS ítélete szerint ez az egyetlen művészi arckép BOLYAI FARKASról. Jellemzi a «legmelegebb közvetlenség, a megfigyelés pontossága, a szemek egyéni állása, a hajfürtök puhán omló vonalainak gondos, szeretetteljes kezelése. Mindezt csak hosszas tanulmányozás, öntudatos művészi lélek elmélyedése eredményezheti».

«Kétségtelenül német rajziskolát, esetleg a bécsi képzőművészeti Akadémiát látogatta» SZABÓ JÁNOS, aki Marosvásárhelyt született 1794-ben és ott is halt meg 1851-ben. BOLYAI FARKAS szivesen elbeszélgetett vele. «1850—51 táján is negyedórányira eljár [hozzá] estéként a kollégium melletti lakásáról diskurálni».

Fénykép — sajnos — csak már a ravatalon nyugvó BOLYAI FARKASról készült. Második házasságából született fia: GERGELY egy másik képét is említi: «nem csak halva photografirozott képe van meg, hanem olajban is meg van, SZABO által levéve ha jol emlékszem 846ba = 71 vagy 72 éves korába. SZABO derék müvész volt, elég jó is a' kép, de a' szemeivel éppen egészen nem vagyok megelégedve».[2] BEDŐHÁZI szerint: «Hetven éves korában pártfogoltja SZABÓ JÁNOS festette le, e képről van másolva, s kijavitva az akademia birtokában levő festvény.» «A SZABÓ JÁNOS által festett képet GERGELYnek adta, de az uton eldörgölődött, s Bolyából később vissza hozatta, hogy SZABÓ Jánossal igazittassa meg, de akkorra már, mint megjegyzi „az igazitó is letörlődött a nagy tábláról.“»[3] STÄCKEL fölemlítvén ezt a képet, azt állítja róla, hogy akkor «FARKAS 50 éves volt (1835)».[4] Kettős tévedés. Először is BOLYAI FARKAS 1825-ben volt 50 éves. Másodszor STÄCKEL félreértette BEDŐHÁZInak a kép

---

[1] *Bolyai Farkas egyetlen művészi arcképtanulmánya.* Pásztortűz. Cluj-Kolozsvár, 1924. dec. 25. X. 284—287.

[2] SZABÓ SÁMUELhez írt leveléből. Kelte: Bolya, 1867. ápr. 20. A M. Tud. Akadémia kézirattárában.

[3] BEDŐHÁZI JÁNOS: *A két Bolyai.* 1897. 333.

[4] STÄCKEL PÁL: *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai.* I. 215.

közölt másolata alá írt megjegyzését: «SZABÓ JÁNOS festménye a negyvenes évek elejéről.»[5] Ez az 1840-es évekre vonatkozik, nem pedig FARKAS negyvenes életéveire.

KONCZ JÓZSEF még azt remélte, hogy az akadémia részére a másolatot «TREFORT minister ur őnagyméltósága festeti ROSKOVICS IGNÁCZ jeles fiatal festővel.»[6] Nem igy történt: THANHOFFER LAJOS, orvos, egyetemi tanár festette meg. Ez a másolat több tekintetben (pl. kéztartás) eltér a BEDŐHÁZI könyvében közölt SZABÓ-képtől. Az akadémiai másolat terjedt el. Ez szerepel a *Tentamen* második kiadásában, a magyar posta BOLYAI-bélyegén. E THANHOFFER-féle másolat nyomán készült az az olajfestmény, amely a marosvásárhelyi szabadkőmíves páholyból került[7] a marosvásárhelyi BOLYAI-ereklyék közé.

DÁVID LAJOS szerint[8] a könyvének címlapja előtt álló BOLYAI FARKAS-kép valószinűleg 1825-ben készült KEMÉNY SIMON báró részére.

Sajnos, BOLYAI JÁNOSról nem tudunk arcképet közölni, mert nincs. Marosvásárhelyi kéziratai közt találtam egy helyet, ahol ezt mondja: «egész katonai ingénieur-hadnagyi teljes parádéban le-vett mely-képemet is, bizonyos atyámtoli méltatlanság [és az] a'ra következett méltatlankodás' (indignatio) következésében, öszve-szaggattam: a'nyira nem vágytam az a'féle mások által vad vitatni szokott, *külső* halhatatlanságra,». Ezt BOLYAI GERGELY így adja elő ugyanabban a levelében, amelyből már egyszer idéztem: «JÁNOSnak a' képe nincs meg, pedig mint főhadnagy nagyba olajba le volt véve ganz parádéban, hanem az Öreggel egykor veszekedve haragjában kardjával a' rámábol oly szépen kikanyaritotta, hogy csak rámája maradt.»[2] A hiányzó arckép helyett valamit elárul a külsejéről az útlevele. Ezt iratainak átnézése közben találtam meg Marosvásárhelyt

---

[5] BEDŐHÁZI,[3] 272. után.

[6] KONCZ JÓZSEF: *A marosvásárhelyi kollégium története.* 309. lap harmadik lábjegyzetében.

[7] KOVÁTS BENEDEK, jelenlegi könyvtáros mondotta így nekem.

[8] DÁVID LAJOS: *A két Bolyai.* 194.

1938. augusztusában. A nagyszebeni katonai parancsnokságtól kapta, hogy Medgyesen át hazavihesse az intézetből DÉNES nevű fiát. A németnyelvű útlevél[9] szerint az akkor 48. életévéhez közeledő BOLYAI JÁNOS termete: közepes, arca: hosszúkás, haja: őszbevegyült, szeme: kék, szája, orra: arányos. A haj színére (gräulich = őszes) vonatkozó megállapítással bizonyos ellentétben úgy láttam a helyszínen, hogy BOLYAI JÁNOS 1911-ben kihantolt koponyacsont-darabjaihoz ma is sűrű, sötétbarna haj tapad.

Jelitai József.

ZUM BILDNIS DES FARKAS VON BOLYAI.

Das hier wiedergegebene Bildnis ist das am meisten getreue und künstlerisch wertvolle Bildnis des FARKAS (WOLFGANG) von BOLYAI. Das Original (schwarz—weisse Kreidezeichnung auf lichtbraunem Papier, Grösse 25×30 cm), vom ungarischen Meister JÁNOS SZABÓ für die freiherrliche Familie von KEMÉNY ausgeführt, befindet sich in der Bibliothek des protestantischen Kollegiums in Marosvásárhely (Siebenbürgen).

Ein Bildnis des JÁNOS (JOHANN) von BOLYAI ist nicht vorhanden. Über sein Äusseres enthält sein vorgefundener Reisepass (1849) folgende Angaben: mittlere Statur, Gesicht: länglich, Haare: gräulich, Augen: blau, Mund, Nase: proportioniert.

József Jelitai.

---

[9] Feldkriegs-Kanzlei-Direktion des Siebenbürgischer General-Kommandos. 410. Gratis. Hermannstadt, 27. Aug. 1849.

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1938. évi matematikai tanulóversenyről.

Társulatunk XLII. matematikai tanulóversenyét 1938. október 15-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 33, Szegeden 7 versenyző jelentkezett; beadtak Budapesten 24, Szegeden 4 dolgozatot.

A verseny tételei a következők voltak:

I. Bebizonyítandó, hogy egy egész szám akkor és csak akkor négyzetösszege két egész számnak, ha kétszerese ily tulajdonságú.

II. Bebizonyítandó, hogy minden 1-nél nagyobb n egész számra:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}>1.$$

III. Nevezzünk egy háromszög tranzverzálisának minden oly egyenesdarabot, mely a háromszög egy csúcsát a szembenfekvő oldalnak (vagy meghosszabításának) egy pontjával köti össze. Bebizonyítandó, hogy minden hegyesszögű háromszöghöz létezik a térnek oly pontja, ahonnan a háromszög valamennyi tranzverzálisa derékszög alatt látszik.

A versenydolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság FEJÉR LIPÓT elnöklete alatt a következő tagokból állott: EGERVÁRY JENŐ, FARAGÓ ANDOR és KŐNIG DÉNES előadó. E bizottság 1938. nov. 6-án tartott ülésén KŐNIG DÉNES előadói előterjesztése alapján a következő javaslatban állapodott meg.

«A legjobb két dolgozat szerzői BODÓ ZALÁN és WEISZ ALFRÉD, akik figyelemreméltó matematikai invencióról tettek tanúbizonyságot. BODÓ ZALÁN elismerésreméltó szabatossággal és rövidséggel oldja meg az I. feladatot és részben (t. i. egy a végeredményt nem befolyásoló elírástól eltekintve) a II. feladatot is. A III. feladatra adott megoldásában hiányzik annak igazolása, hogy a szóbanlévő három gömb egy ponton megy át (ahol is a háromszög hegyesszögű voltára kellene hivatkozni). Majd egy homályos fogalmazású mondat következik, de, tekintve az ezt követő igen szabatos okoskodást, a Bizottság felteszi, hogy a versenyző ezt a részletet is helyesen látta. WEISZ ALFRÉD mind a három feladatot szépen és helyesen oldja meg; azonban a III. tétel bizonyításának elején szereplő kör és gömb közös pontjának létezését nem egészen helyesen indokolja, hiszen ehhez nem elég a háromszög egyetlen szögének hegyes voltát felhasználni. Ezek alapján a Bizottság azt indítványozza, hogy az egyesített első és második b. Eötvös Loránd jutalom két egyenlő részre osztva BODÓ ZALÁNnak és WEISZ ALFRÉDnak ítéltessék oda. BODÓ ZALÁN a budapesti XIV. ker. Szt. István-gimnáziumban HÁMORI MIKSÁnak, WEISZ ALFRÉD pedig a budapesti V. ker. Bolyai-reáliskolában HORVÁTH BENŐnek tanítványa volt. Dícséretre javasolja a Bizottság SOMOGYI ANTAL és SCHREIBER BÉLA dolgozatait, akik lényegileg szintén mind a három feladatot megoldották. Végül még érdemesnek tartja a Bizottság megemlíteni, hogy öt versenyző is megtalálta a II. feladat legegyszerűbb megoldását, de ezek a jutalmazásnál nem jöhettek tekintetbe, mert sem az I., sem a III. feladatot nem oldották meg».

A Bizottság e javaslatát a Választmány 1938. november 17-én tartott ülésén egyhangúlag elfogadta. Az ugyanazon a napon tartott előadóülésen RADOS GUSZTÁV elnök adta át a díjakat a verseny győzteseinek.

Bodó Zalán jutalmazott dolgozata.

I. tétel. A) Legyen egy szám x két egész szám négyzetösszege:

$$x = a^2 + b^2.$$

Ekkor

$$2x = (a+b)^2 + (a-b)^2;$$

$a+b$ és $a-b$ egész számok, mivel a és b az.

B) Ha egy szám x kétszerese két egész szám négyzetösszege:

$$2x = a^2 + b^2,$$

akkor

$$x = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$

$\frac{a+b}{2}$ és $\frac{a-b}{2}$ egész számok, mert $2x=a^2+b^2$ miatt a és b egyszerre páros vagy páratlan.

II. tétel. Tételünk helyes $n=2$, 3, 4 esetében. Minden más esetben $n>4$, azaz $4n<n^2$ s így sorunknál kisebb:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \cdots + \frac{1}{4n}.$$

Ezt még csökkentjük azáltal, hogy első n tagjának nevezőjét $2n$-nek, az ezután következő $2n$ tagjának nevezőjét $4n$-nek vesszük. Ekkor

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{n}{2n} + \frac{2n}{4n} = 1.$$

III. tétel. Az illető pont csak az a pont lehet, ahol a háromszög oldalfelező pontjai körül az illető féloldallal szerkesztett gömbök metszik egymást. De ez valóban megfelel. Mert, ha például ezt a pontot összekötjük az egyik csúcshoz tartozó tranzverzálisok felezőpontjával, egy síkot nyerünk (mert a tranzverzálisok felezési pontjai egy a megfelelő oldallal párhuzamos és az átelleni ponttól és ez oldaltól egyenlő távolságra fekvő egyenesen feküsznek). E sík pedig nem más a tranzverzálisok szempontjából, mint a háromszög síkjának a tranzverzálisok felezési pontján átmenő egyenes körüli forgatása.[1] Így a pontunknak bármelyik tranzverzális felezési pontjától való távolsága egyenlő a tranzverzális felével. Tehát a ponton mindegyik tranzverzális felezési pontja körül mint középpont körül szerkesztett gömb átmegy. Ez pedig annak feltétele, hogy e pontból a tranzverzális derékszög alatt látszódjék.

Weisz Alfréd jutalmazott dolgozata.

I. tétel. Be kell bizonyítanunk egyrészt, hogy ha

$$2k = x^2 + y^2,$$

akkor

$$k = q^2 + r^2;$$

másrészt, ha

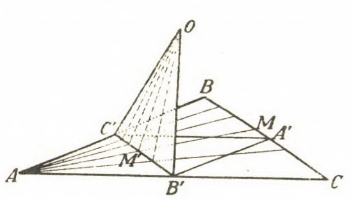
$$k = q^2 + r^2,$$

akkor okvetlenül

$$2k = x^2 + y^2.$$

---

[1] E homályos mondat például a következő okoskodással volna pótlandó. Legyenek a hegyesszögű $ABC\triangle$ oldalfelező pontjai A', B', C' és legyen O az AB, BC, CA oldalak mint átmérő fölé szerkesztett három gömb egyik közös pontja. Akkor $B'A = B'O$ és $C'A = C'O$ s így a $B'C'A$ és $B'C'O$ háromszögek kongruensek. Az A-n átmenő tetszőleges AM tranzverzális felezőpontja, M', rajta fekszik $B'C'$-n, és így a $B'C'A$ és $B'C'O$ háromszögeknek fentemlített kongruenciájánál $M'A$ és $M'O$ egymásnak *megfelelő* alkatrészek; ezért $M'A = M'O$. (Ez a meggondolás azt is mutatja, hogy az $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ háromszögeket úgy lehet rendre $B'C'$, $C'A'$, illetőleg $A'B'$ körül elforgatni, hogy az A, B, C pontok egy O pontban egyesüljenek; éppen az így adódó pontból látszódnak az összes tranzverzálisok derékszög alatt.) *Szerk.*



A) Ha $2k = x^2 + y^2$, akkor x is, y is egyszerre vagy páros, vagy páratlan tartozik lenni, azaz felírhatjuk, hogy

$$x + y = 2q,$$
$$x - y = 2r.$$

Ebből

$$x = q + r,$$
$$y = q - r.$$

És így

$$x^2 + y^2 = (q+r)^2 + (q-r)^2 = 2(q^2+r^2),$$

vagy

$$2k = 2(q^2+r^2),$$

azaz

$$k = q^2 + r^2.$$

Tehát egy szám akkor négyzetösszeg, ha kétszerese is az.

B) Ha

$$k = q^2 + r^2,$$

akkor

$$2k = 2q^2 + 2r^2 = (q+r)^2 + (q-r)^2 = x^2 + y^2.$$

Tehát, ha egy szám négyzetösszeg, okvetlenül a kétszerese is az, azaz egy szám *csak akkor* négyzetösszeg, ha kétszerese is az.

II. tétel. Mivel 2-re az adott egyenlőtlenség igaz:

$$f(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{26}{24} > 1,$$

tehát elég bebizonyítanunk, hogy ha egyenlőtlenségünk n-re igaz, igaz $(n+1)$-re is, azaz

$$f(n+1) \geqq f(n) > 1,$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} \geqq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2},$$

vagy egyszerűsítve

$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} \geqq \frac{1}{n}.$$

A baloldalon a tagok száma $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, a legkisebb tag $\frac{1}{(n+1)^2}$, tehát felírhatjuk

$$(2n+1)\frac{1}{(n+1)^2} \geqq \frac{1}{n}$$

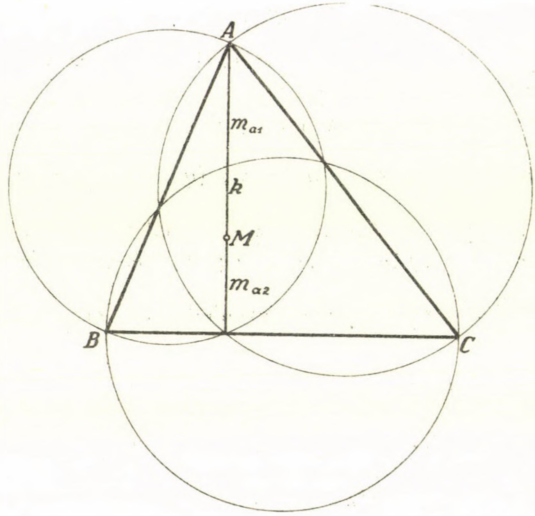
vagy kifejtve:

$$n^2 \geqq n + 1.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség azonban minden 1-nél nagyobb n egész számra igaz, tehát kiindulásunk is igaz és így

$$f(n+1) > f(n) > f(2) > 1 \qquad \text{q. e. d.}$$

III. tétel. Vizsgáljuk meg, hogy az AB, BC és CA átmérőjű gömböknek mikor van közös pontja? Az (AB) és (AC) gömbök oly k körben metszik egymást, melynek síkja e gömbök centrálisára és így az $[ABC]$ síkra merőleges. E kör vetülete az $[ABC]$ síkra éppen az $ABC\triangle$-nek A-ból kiinduló magasságvonala. (A rajz alapján könnyen belátható.) Tehát a (BC) gömb e kört mindig két pontban tartozik metszeni (O és O'),



míg A e gömbön kívül fekszik; míg ha A e gömbön belül van, akkor a k kör is teljes egészében a gömbön belül van. Más szóval: ha az $ABC\triangle$ hegyesszögű, az (AB), (AC) és (BC) gömböknek két közös pontja van: O és O' (melyek természetesen a háromszög síkjára nézve szimmetrikusak); ha tompaszögű, a három gömbnek közös pontja nincs (ha éppen derékszögű, például A-nál, az O és O' természetesen A-ban egybeesik).

Már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy O- és O'-ből az $ABC\triangle$ minden tranzverzálisa derékszög alatt látszik. Tekintsük például az A-n keresztülmenő transzverzálisokat, az AQ_i-ket. Az OQ_i sugársor az $[OBC]$ síkban fekszik. Mivel OA merőleges OB- és OC-re, tehát OA az egész $[OBC]$ síkra merőleges és így mindegyik OQ_i-ra is. Más szóval az O

pontból az A-n keresztülmenő összes tranzverzálisok derékszög alatt látszanak. Hasonló meggondolás érvényes a B és C pontra is. Az O' pontra ugyancsak érvényes az O-ra megállapított tétel.

Még meghatározhatjuk pontosabban az O és O' helyét az $ABC\triangle$-höz képest. Mivel följebb kimutattuk, hogy a gömbök metszőköreinek vetületei az $[ABC]$ síkon az $ABC\triangle$ magasságvonalai, tehát O és O' a háromszög magassági pontjában. M-ben, az $ABC\triangle$ síkjára emelt l egyenesen fekszenek. Az $OM=O'M$ távolságot is meghatározhatjuk a k körökből. Legyenek a magasságvonalakon az M által létesített szeletek m_{i1}, m_{i2}, akkor az ismert tétel szerint:

$$\overline{OM}^2 = \overline{O'M}^2 = m_{a1} \cdot m_{a2} = m_{b1} m_{b2} = m_{c1} m_{c2}$$

Tehát az O, illetőleg O' pontok távolsága M-től: $\pm\sqrt{m_{i1} m_{i2}}$. Derékszögű háromszög esetében m_{i1}, illetőleg $m_{i2}=0$, tehát O, illetőleg O' az $[ABC]$ síkba esik, mint feljebb láttuk. Tompaszögű háromszög esetében m_{i1} vagy m_{i2} negatív, tehát az $OM=O'M$ távolság imaginárius, ami ugyancsak egyezik a fentiekkel.

Jelentés az 1938. évi XX. Károly Irén fizikai tanulóversenyről.

A versenyt a Társulat okt. hó 22-én tartotta meg Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 25 jelentkező volt, Szegeden 2. Budapesten 23-an adtak be dolgozatot, Szegeden 2-en. Tehát összesen 25-én.

A verseny tételei a következők voltak:

I. Egy kg súlyú, 30° hajlásszögű lejtőre egy kg-os kockát helyezünk. Hogy a kocka le ne csússzék, cérnával a lejtő felső végébe ütött szöghöz erősítjük. Ezután a cérnát elégetjük, hogy a kocka lecsúszhassék. Csúszás közben mennyi lesz a lejtőből és kockából álló rendszer súlya? Ha a kocka helyett egy kg-os hengert helyezünk a lejtőre, az a cérna elégetése után legurul a lejtőn. Mennyivel könnyebb a rendszer ekkor?

II. A Nap közepének színképében egy bizonyos vonal hullámhossza 5900 Å. Ez a vonal 0·04 Å-nyi eltolódást mutatott, amikor a színképet a Nap egyenlítőjében a Nap szélétől jövő fény adta. Számítsuk ki, hogy mekkora a Nap egyenlítője egy pontjának kerületi sebessége.

A dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság, melynek elnöke TANGL KÁROLY, tagjai MIKOLA SÁNDOR, POGÁNY BÉLA és SZABÓ GÁBOR voltak, 1938. nov. 15-én tartott ülésén SZABÓ GÁBOR előadói jelentése alapján a következőket állapította meg:

«A versenyzők java része elég jó készültséget mutatott és az ismeretek alkalmazásában elég jó készséget. Három versenyző, névszerint GÁLLIK ISTVÁN, CSIKI JENŐ és WEISZ ALFRÉD mind a két feladatot megoldotta. GÁLLIK ISTVÁN teljesen kifogástalanúl és a második feladat megoldásában igen ügyesen, röviden végezte a számítást. Mind a hárman örvendetes jelét adták eredeti felfogásuknak és találékonyságuknak.

A Bizottság tisztelettel javasolja, hogy GÁLLIK ISTVÁNnak, aki a gödöllői premontrei gimn.-ban végzett és BALYI KÁROLY tanár tanítványa volt, az *első díj;* CSIKI JENŐnek, aki a budapesti X. ker. áll. Szt. László-reálgimn.-ban végzett és LISINTZKY FERENC tanár tanítványa volt, úgyszintén WEISZ ALFRÉDnek, aki a budapesti V. ker. áll. Bolyai-reáliskolában végzett és HOFFMANN ERNŐ tanár tanítványa volt, egy-egy *második díj* ítéltessék meg.

Kiemelésre méltónak tartja még a Bizottság KOMLÓS JÁNOS dolgozatát is, amelyben csak a második feladatra vonatkozó részben vannak kisebb pontatlanságok, amik miatt az eredmény is hibás. Javasolja a Bizottság, hogy KOMLÓS JÁNOS, aki a pécsi Széchenyi István gyakorló reáliskolában végzett és MASSZI FERENC tanár tanítványa volt, *dicséretben* részesíttessék».

A Bizottság e javaslatát a Választmány 1938. november 17-én tartott ülésén egyhangúlag elfogadta. Az ugyanezen a napon tartott rendes előadó-ülésen RADOS GUSZTÁV elnök kihirdette a verseny eredményét és a díjakat átadta a nyerteseknek.

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1938. évi május 21-én tartott XLIII. közgyűlés.

A közgyűlést Rados Gusztáv elnök az alábbi beszéddel nyitotta meg.

Üdvözlöm a megjelent t. tagtársaimat és kedves vendégeinket, akik megjelenésükkel biztató tanújelét adták annak, hogy a hazai művelődés emelésére irányuló törekvéseinkkel egyetértenek és e tekintetben velünk együttéreznek.

Tisztelt Közgyűlés! Hazánk összes intézményei és az egész magyarság felekezeti és világnézeti különbség nélkül mélységes kegyelettel ünnepli Szent István, első királyunk, elhúnytának 900. évfordulója alkalmából e nagy királyunk dicsőséges emlékét. Ebből az ünneplésből mi is áhitatos érzéssel vesszük ki részünket és hódoló tisztelettel hajtjuk meg zászlónkat az ő hadvezéri kiválósága, államférfiúi genialitása és nagy emberi erényei előtt. Valójában őt kell honalapitónak tekintenünk, aki állami közigazgatásunk megszervezésével, alkotmányunk szilárd alapjának lerakásával és a magyarságnak a nyugati kereszténységhez való csatolásával évezredekre biztosította az ellenségektől oly gyakran körülvett és gonosz szándékkal megtámadott hazánk fennmaradását. Ezért Szent István, dicsfénytől övezett királyunk emlékét mi és még késői nemzedékek is időtlen időkig áldani fogják.

Áttérve társulati évünk kimagasló eseményeinek felsorolására, legelsőbben meg kell emlékeznem választmányunk amaz egyhangú határozattal hozott javaslatáról, amellyel Neumann János honfitársunknak tiszteleti taggá való megválasztását ajánlja a közgyűlésnek.

NEUMANN JÁNOS a jelenkor legkiválóbb matematikusainak és elméleti fizikusainak egyike, a washingtoni National Academy tagja és a princetoni egyetem mellett létesített kutatóintézet tanára. Ebben csekély számú elsőrangú tudós társaságában felette becses eredményeket érlelő kutatómunkát folytat. Ő bámulatos sokoldalúsággal fontos és közelismerésben részesült eredményekkel gazdagította a matematika és elméleti fizika számos fejezetét. Különösen kiemeljük az aritmetika logikai alapvetésére, az algebrai számok elméletére, a halmazelméletre, a majdnem szakaszos függvények elméletére vonatkozó nagyértékű dolgozatait; az elméleti fizika terére esnek az atommechanika és az ergod-hipotézis tisztázása, a quantum-elmélet szigorú matematikai felépítésére vonatkozó nagyértékű eredményei. Tekintettel a magyar névnek dicsőségére váló nagy érdemeire és arra, hogy külföldi elhelyezkedése mellett szülőföldjéről sem feledkezett meg és hogy őt gyakran előadóasztalunk mellett üdvözölhettük, meggyőződésünk, hogy NEUMANN JÁNOS bőven rászolgált arra, hogy őt tiszteleti tagjaink sorába iktassuk.

Örömmel emlékezem meg arról, hogy az idei évben esedékes KŐNIG GYULA jutalomra ismét érdemes laureatus akadt, még pedig LIPKA ISTVÁN, a Ferenc József-egyetem magántanárának személyében, aki az algebrai egyenletek elmélete és a függvénytan terén folytatott vizsgálódásával itthon és a külföldön is elismerésben részesült és így a neki egyhangúan odaítélt jutalomra érdemessé vált.

Az idén is hírneves külföldi tudós tisztelt meg bennünket Társulatunkban tartott előadásával. POHL R. W., a göttingai egyetem tanára és Németország egyik legkiválóbb fizikusa felette érdekes előadásban az elektronnak átlátszó kristályokban való vezetésére vonatkozó, sok évre terjedő kutatásainak eredményeit ismertette velünk.

A jelen egyesületi évben sem nélkülöztük a Magyar Tudományos Akadémia és a Vallás- és Közoktatásügyi Minisztérium számottevő anyagi támogatását, mellyel folyóiratunk megjelenését lehetővé tették. Legyen szabad e nagylelkű segítséget ezen a helyen is megköszönnöm.

Beszédem végére érkezve abban a hitben és reményben, hogy Társulatunk tagjainak érdeklődése és a tudomány művelésében tanúsított hazafias buzgósága a jövőben is fenn fog maradni, nyitom meg 43. közgyűlésünket.

Ezután a közgyűlés, a Választmány fentebb említett javaslatát egyhangúlag elfogadva, NEUMANN JÁNOST, a princetoni Institute for Advanced Study tanárát, a társulat tiszteleti tagjává választotta.

Majd POGÁNY BÉLA ügyvezető titkár tartotta meg itt következő beszámolóját.

«Társulatunk az elmult társulati évben — a mait beleszámítva — 11 előadó, 3 választmányi és 1 közgyűlést tartott. Az előadók száma 13, az előadások közül 7 matematikai, 6 pedig fizikai tárgyú volt. Ez évben R. W. POHL, göttingai professzor tisztelte meg társulatunkat előadás tartásával. Az előadók és előadások részletes jegyzékét a majdan nyomtatásban megjelenő titkári jelentés melléklete fogja tartalmazni.

A folyó társulati évben még egy előadó ülésünk lesz, melyen W. SIERPIŃSKIT, a kiváló lengyel matematikust, a varsói Tudományos Társulat elnökét üdvözölhetjük majd az előadói asztalnál.

Az idén kiosztásra kerülő KŐNIG GYULA-jutalmat a Választmány LIPKA ISTVÁN tagtársunknak ítélte oda.

A Társulat rendezésében lefolytatott matematikai és fizikai tanulóversenyek ezévi eredményeit illetően legyen szabad utalnom a Mat. Fiz. Lapok legutóbbi számában megjelent részletes beszámolóra. A versenyek eredményéről, szokás szerint, értesítettük a nagymélt. m. kir. vallás- és közoktatásügyi miniszter urat, a nyertesek volt tanárainak és iskoláinak üdvözletet küldtünk.

A M. Tud. Akadémia az elmult évben 1000 P, a Vallás- és Közoktatásügyi Minisztérium 500 P segéllyel támogatta a Társulatot a Mat. Fiz. Lapok kiadásában. A Minisztérium folytatólag megrendelte ezidén is a Mat. Fiz. Lapokat 63 középiskola számára. BLÁTHY OTTÓ TITUSZ m. kir. udvari tanácsos és NAGY L. JÓZSEF tagtársaink pénzadománnyal, RÉTHY MÓR nagynevű elhúnyt tagtársunk hagyatékából pedig RÉTHY OSZKÁR Ganz-gyári főmérnök úr könyvadománnyal gazdagította Társulatunkat.

Szomorodott szívvel emlékezünk meg RHORER LÁSZLÓ választmányi tagtársunk, továbbá SZERÉNYI GÉZA és WINTER JÓZSEF tagtársaink elhúnytáról.

A Választmány elhatározta, hogy a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok szerkesztőjének évenként két példányt ajánl fel Kürschák József «*Matematikai Versenytételek*» c. munkájából, azzal a céllal, hogy a szerkesztőség egy a VI. és egy a VII. osztályt végző diákmunkatársát jutalmazza velök. Az idén először ez már meg is történt.

A Mat. Fiz. Lapok 44. évfolyamának július—decemberi füzete megjelent, a 45. évfolyam január—júniusi száma sajtó alatt van és több mint 9 ívnyi terjedelemben júniusban megjelenik. Cserefolyóirataink száma az előző évekhez képest nem változott és remény van rá, hogy rövidesen sikerül majd azokat — a hiányokat pótolva — a tagok számára az eddiginél hozzáférhetőbb módon elhelyezni».

Ezután a Közgyűlés a lelépő választmányi tagokat, névszerint Egerváry Jenőt, Jordan Károlyt, Lassovszky Károlyt, Lóky Bélát, Sarkadi Károlyt, Veress Pált újra megválasztja; az elhúnyt Rhorer László helyére pedig Bay Zoltánt választja meg. A számvizsgáló bizottságba (melynek a Választmány részéről Faragó Andor és Stachó Tibor lettek tagjai) a Közgyűlés a maga részéről Goldziher Károlyt és Renner Jánost küldi ki.

Szabó Gábor pénztárosi jelentéséből a zárszámadást és a vagyonmérleget alább közöljük. A Közgyűlés megadja a felmentvényt a pénztárosnak.

1937. évi zárszámadás.

Bevétel:

		Pengő
1. Maradvány az 1936. évről:		
a) kézi pénztárban	62·47 P	
b) postatakarékpénztárban	1008·24 «	
c) a Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban	709·90 «	
d) Károly Irén-alap	1020·— «	2800·61
2. Tagdíjak		1080·—
3. Előfizetési díjak		706·94
4. Magyar Tudományos Akadémia segélye		1000·—
5. Államsegély		1000·—
6. Adományok		30·—
7. Kamatok		58·09
8. Vegyesek (Hirdetés, Mat. és Fiz. Lapok)		128·50
	Összesen:	6804·14

Kiadás:

		Pengő
1. Nyomda és expedíció		2650·—
2. Tanulóverseny		110·—
3. Kezelési költségek és a Tud. Társ. és Int. Orsz. Szövetsége Díjkezelőségének jutaléka		112·13
4. Vegyesek		123·46
5. Pénztári maradvány:		
a) kézipénztárban	55·16 P	
b) postatakarékpénztárban	1305·49 «	3808·55
c) Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban	1427·90 «	
d) Károly Irén-alap	1020·— «	
	Összesen:	6804·14

Vagyon-mérleg.

Vagyon:

		Korona	Pengő
1. Koronaértékpapirosok (Magy. Lesz. és Pénzv. Bank Letétkimutatása, a Pesti Hazai Első Takarékpénztár Egyesület takarékkönyve és a Magy. Kir. Állampénztár Fizetési Könyve szerint)		29,008·—	
2. Pénzkészlet:			
a) kézipénztárban	55·16 P		
b) postatakarékpénztárban	1305·49 «		3808·55
c) a Magy. Lesz. és Pénzv. Bankban	1427·90 «		
d) Károly Irén-alap	1020·— «		
3. Tagdíj- és előfizetési díj-hátralék			200·—
4. Nyomtatványok			100·—
	Összesen:	29,008·—	4108·55

Teher:

	Korona	Pengő
1. Nyomdai tartozás		66·26
2. Egyenleg	29,008·—	4042·29

Szabó Gábor s. k.
pénztáros.

Megvizsgáltuk és rendben lévőnek találtuk.

Budapest, 1938. április hó 29-én.

Dr. STACHÓ TIBOR s. k., FARAGÓ ANDOR s. k., Dr. GOLDZIHER KÁROLY s. k., RENNER JÁNOS s. k.

Előadások:

1937. nov. 18. A tanulóversenyek eredményeinek kihirdetése. EGERVÁRY JENŐ: Megjegyzések az idei matematikai tanulóverseny geometriai feladataihoz.

1937. dec. 2. FORRÓ MAGDOLNA: A párizsi fizikai kongresszusról.

1937. dec. 16. ALEXITS GYÖRGY: A távolság fogalma absztrakt terekben.

1937. jan. 27. SZEPESI ZOLTÁN: A gammasugarak Compton-szórásának intenzitás-eloszlásáról. PAPP GYÖRGY: Gammasugarak szóródásánál fellépő mageffektusról.

1937. febr. 10. RÉDEI LÁSZLÓ: Az $ax^2-by^2=z^4$ határozatlan egyenlet és a Pell-féle egyenlet.

1937 febr. 24. VÉSZI GÁBOR: Diffrakciós jelenségek tallium és kadmium atóm-sugarakkal.

1938. márc. 10. RIESZ FRIGYES: A Jordan-féle görbetételről.

1938. márc. 24. LASSOVSZKY KÁROLY: Egy fotometriai kettőscsillag (SV Tauri) pályaelemei.

1938. ápr. 7. KALMÁR LÁSZLÓ: Jelentés az 1938. évi Kőnig Gyula-jutalomról. RADOS GUSZTÁV elnök átadja a jutalmat Lipka Istvánnak. LIPKA ISTVÁN: A Descartes-féle jelszabály kiterjesztéseiről.

1938. máj. 7. R. W. POHL (Göttingen): Neuere Untersuchungen über Elektronenleitung in durchsichtigen Kristallen.

1938. máj. 21. HAJÓS GYÖRGY: A többméretű tér befedése kockaráccsal.

1938. jún. 2. W. SIERPIŃSKI (Warszava): Les ensembles projectifs.

*

Választmányi ülések voltak: 1937. nov. 10., 1938. febr. 3. és 1938. május 21.

Az 1938. évi XLIII. rendes közgyűlés volt: 1938. május 21.

Új tagok:

Dr. Egyed László Levente, egyet. tanársegéd, Budapest.
Erőd János, tanárjelölt, Budapest.
Huhn Péter, tanárjelölt, Szeged.
Dr. Ispánovits Alajos, ciszt. r. tanár, Székesfehérvár.
Kónya Albert, tanárjelölt, Szeged.
Dr. Róna Erzsébet, Budapest.
Surányi János, tanárjelölt, Szeged.

Meghaltak:

Éber József, gimn. tanár, Budapest.
Oszlaczky Szilárd, póstafőfelügyelő, Budapest.
Söpkéz Sándor, műegyetemi tanár, Budapest.
Szerényi Géza, reálisk. tanár, Budapest.
Winter József, gimn. tanár, Budapest.

Beküldött könyvek.

A cserefolyóiratokon kívül lapunk szerkesztősége újabban a következő könyveket kapta ajándékképpen.

Az «American Mathematical Society (New York)»-tól:

1. CH. N. MOORE: *Summable series and convergence factors*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol XXII. (New York, American Mathematical Society, 1938).

2. R. C. ARCHIBALD: *A semicentennial history of the American Mathematical Society* (New York, American Mathematical Society, 1938).

3. Semmicentennial addresses of the American Mathematical Society (New York, American Mathematical Society, 1938).

International Journals from Hungary

ANNALES UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS
DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

Sectio: MATHEMATICA
Vols. 1-9 1958-1966 mostly reprinted
unbound per Vol US $ 8,-

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

O. S. Vols. 1-3. 1952-1954 all publ. Partly reprinted
N. S. Vols. 1-9. 1956-1965 all publ.

Unbound set	US $	110,-
Cloth bound set	US $	134,-

Continued as „STUDIA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM HUNGARICA"

STUDIA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM HUNGARICA

Vols. 1-2, 1966-1967

Unbound, per vol. US $ 12,-

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS
ACTA PHYSICA ET CHIMICA

Series I.

„Acta Chimica, Mineralogica et Physica"
Vols. 1-7, 1929-1940 all publ.

Series II.

„Acta Chimica et Physica"
Vols. 1-3 1942-1950 all publ.

Nova Series:

„ACTA PHYSICA et Chimica"
Vols. 1-13, 1955-1967

Price of the three series together unbound US $ 170,-

ACTA PHYSICA et CHIMICA DEBRECINA

Vols. VIII-XII. (N. S. 1-5) 1962-1966
unbound per vol. US $ 6,-