MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

44. KÖTET
1937

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST 1968

MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

NEGYVENNEGYEDIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES és POGÁNY BÉLA

BUDAPEST, 1937

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

A kiadásért felelős: Császár Ákos,
a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkára
Eredeti kiadásról készült változatlan utánnyomás

Külföldi terjesztés:
KULTURA KÖNYV- ÉS HÍRLAP
KÜLKERESKEDELMI VÁLLALAT
BUDAPEST 62,
P. O. B. 149
This book is a reproduction of the original, published
in Budapest

General Distributors:
KULTURA Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
BUDAPEST 62, P. O. B. 149,
Hungary
Printed in Hungary, 1968

---

68 - 510 Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

negyvennegyedik kötetének tartalma.

AZ ÚJ GÖRBEELMÉLET.

A háromdimenziós tér analitikai geometriájában görbének szokás nevezni azoknak a pontoknak az összességét, amelyeknek (x, y, z) koordinátái az

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\quad (0 \leqq t \leqq 1) \qquad (1)$$

folytonos függvényekkel fejezhetők ki. A görbének ez a definíciója jól bevált egészen addig, amíg csak PEANO[1] be nem bizonyította, hogy egy négyzet, vagy akár egy kocka is előállítható az (1) alatti alakban. Így az a helyzet állt elő, hogy vagy ezt a definíciót kellett feladni, mint a görbék általános definícióját, vagy pedig a négyzetet, sőt még a kockát is görbének kellene tekintenünk, ami viszont a minden emberben intuitive élő szemléletes görbefogalommal ellenkeznék. Ezt a nehézséget elkerülendő, egyesek az (1) alatti alakban előállítható geometriai alakzatokat csak akkor tekintették görbének, ha az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ folytonos függvények olyanok, hogy különböző t értékekhez különböző pontokat rendelnek. Ez utóbbi görbefogalom alá valóban csupa olyan geometriai alakzat tartozik, amely intuitive is görbének tekinthető, ekkor azonban az a baj, hogy az így definiált görbefogalom mellett egy görbének nem lehetnek többszörös pontjai, tehát még az olyan egyszerű és feltétlenül görbének nevezhető idom sem lehetne ebben az értelemben görbe, mint pl. két egymást metsző ív. Felesleges talán az összes kisérleteket felsorolnunk, amelyek a görbe fogal-

[1] PEANO 1. (A szerző neve utáni számok a cikk végén levő irodalomra vonatkoznak.)

mának általános és minden tekintetben kielégítő definícióját célozták, hiszen már ez a két példa is rámutat azokra a nehézségekre, amelyekbe mindjárt az elindulásnál beleütközünk: nem könnyű olyan fogalomalkotásra bukkanni, amely minden intuitive görbének nevezett idomot magában foglal és egyszesmind kirekeszti azokat a konfigurációkat, amelyeket közönségesen nem szokás görbének hívni. Ezekre a nehézségekre jellemző, hogy csak 1922 körül sikerült MENGER[1] és URYSOHN[2] egymástól független vizsgálatainak megfelelő görbedefiniciót találni. Ez a modern görbefogalom egyrészt szemléletes és az intuitív görbefogalommal is összhangban áll, másrészt a görbéknek olyan geometriai elmélete fejlődött ki belőle, amely a régebbi sporadikus eredményeket egységes szempontból nézve foglalja össze. De ezenkivül is a MENGER—URYSOHN-féle görbeelmélet számos új és meglepő geometriai tulajdonságot hozott felszínre. Nyugodtan mondhatjuk, hogy ma ez az elmélet tekinthető a modern geometriai fejlődés egyik legesztétikusabb ágának. Megérdemlik tehát ezek a német, amerikai, lengyel és orosz irodalomban ma már közkeletű vizsgálatok, hogy eredményeikről magyar nyelven is összefoglaló képet nyujtsunk. Ez már csak azért is kívánatos, mert az elmélet fogalomalkotásai egyszerűek és eredményei könnyen megfogalmazhatók, ha a bizonyitások néha bonyolultak is. A következőkben az a célunk, hogy ezt az elméletet fő vonásaiban összefoglaljuk. Bizonyitásokat nem közlünk, mert csakis az eredmények összefoglalására törekszünk. E helyett azonban az egyes problémák és megoldások fejlődését és összefüggését szeretnők kidomboritani és néhány konkrét példán megvilágitani. Mielőtt tulajdonképeni tárgyunkra rátérnénk, a legszükségesebb ponthalmazelméleti alapfogalmakat is összeállítjuk, hogy ez a referátum azoknak is olvasható legyen, akiknek érdeklődési körétől a ponthalmazok elméletének alapjai is távolesnek.

---

[1] MENGER 1.
[2] URYSOHN 1.

Halmazelméleti alapfogalmak. A következőkben minden geometriai alakzatot, vagy általánosabban ponthalmazt, az n-dimenziós euklidesi térben fekvőnek képzelünk; n-dimenziós euklidesi térnek nevezzük az n koordinátával jellemzett pontoknak azt az összességét, amelyben az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koordinátájú pont és az $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ koordinátájú pont közti d távolság a

$$d = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

szám. A következőkben R_n mindig az n-dimenziós euklidesi teret jelenti, tehát $n=1$ esetben R_1 az egyenes, $n=2$ esetben R_2 a sík, $n=3$ esetben pedig R_3 a háromdimenziós analitikus geometriai tér. A háromdimenziós gömb analógiájára n-dimenziós gömbnek nevezzük mindazon pontok halmazát, amelyeknek $x_1, x_2, \ldots x_n$ koordinátái eleget tesznek az

$$(x_1-c_1)^2 + (x_2-c_2)^2 + \cdots + (x_n-c_n)^2 \leqq r^2$$

egyenlőtlenségnek. Itt r a gömb sugarát, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ pedig középpontjának a koordinátáit jelentik.

A következő szokásos jelöléseket fogjuk használni: $A+B$ vagy ΣA_i jelenti az A és B halmazok, illetve az összes A_i halmazok pontjaiból álló halmazt, függetlenül attól, hogy ezek a pontok egy vagy több A_i halmazban fordulnak-e elő. $A.B$ vagy ΠA_i jelenti az A és B halmazok, illetve az összes A_i halmazok közös pontjainak halmazát. $A-B$ jelöli a B halmaz komplementumát az A halmazban, vagyis az A halmaznak azokból a pontjaiból alkotott halmazt, amelyek nem pontjai a B halmaznak is.

Az R_n tér legegyszerűbb halmazai a *nyilt* halmazok. Az A halmazt akkor nevezzük nyíltnak, ha A minden p pontjához találhatunk egy teljesen A-ban fekvő n-dimenziós gömböt, amelynek p a középpontja. Nyilvánvaló, hogy pl. egy kör belseje (a körvonal nélkül) a síkon, vagy egy ellipszoid belseje (az ellipszoid-felület nélkül) az R_3 térben nyílt halmaz. Az R_n tér p pontja *környezetének* nevezünk minden olyan nyílt halmazt, amely a p pontot magában foglalja. Ha azt mondjuk, hogy $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ a p pont *tetszőlegesen kicsiny* környezetei, akkor ezen azt értjük, hogy ha p köré akármilyen kis sugarú n-dimenziós gömböt is írunk, elég nagy n mellett a p pont minden U_n környezete benne van ebben a gömbben. Így a síkon a (0, 0) koordinátájú pontnak tetszőlegesen kicsiny környezete, pl. az $x^2+2y^2=\frac{1}{n}$ ($n=1, 2, \ldots$ ad inf.) ellipsziseken belül fekvő pontokból alkotott halmazok, másszóval azok a halmazok, amelyeknek pontjai eleget tesznek az $x^2+2y^2<\frac{1}{n}$ egyenlőtlenségeknek. Különösen fontos a következőkben a *környezet határának fogalma.* Ezt következőképpen definiáljuk: a p pont U környezetének határa R_n-U mindazon pontjaiból álló halmaz, amelyeknek tetszőleges közelében található U-nak is pontja. U határát $B(U)$-val fogjuk jelölni. Így pl. a síkon az $x^2+2y^2<1$ relációt kielégítő pontok halmaza a (0, 0) pont környezete; ha ezt jelöljük U-val, akkor ennek $B(U)$ határa az $x^2+2y^2=1$ ellipszis. Vagy az R_3 tér valamely p pontja köré írt oktaéder belseje a p pont környezete. Ezt U-val jelölve $B(U)$ maga az oktaéderfelület lesz.

A nyílt halmaz fogalmával egyenlő fontosságú a *zárt* halmazé. Az R_n tér A halmazát akkor nevezzük zártnak, ha $R_n - A$ nyílt halmaz. Egyszerűen beigazolható, hogy A akkor és csakis akkor zárt halmaz, ha az R_n tér minden olyan pontja, amelyhez található A-nak tetszőlegesen közelfekvő pontja, az A halmazban fekszik. Zárt halmaz pl. minden egy pontból álló halmaz, vagy az $a \leq x \leq b$ intervallum, vagy pedig az egyenesen a $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$ koordinátájú pontok halmaza. Ugyancsak könnyen belátható, hogy egy p pont U környezetének $B(U)$ határa mindig zárt halmaz. Minden tetszőleges A halmazhoz tartozik egy A-t tartalmazó legkisebb zárt halmaz. Ezt $\bar{A}$-al jelöljük és A *zárt hüvelyének* nevezzük. Pl. a p pont U környezetének zárt hüvelye az $\bar{U} = U + B(U)$ halmaz. A zárt halmazok közt különösen fontosak az R_n tér *korlátos* zárt halmazai. Ezek olyan zárt halmazok, amelyek az R_n tér valamely véges sugarú n-dimenziós gömbjének belsejében fekszenek. Legyen K egy több pontból álló korlátos zárt halmaz. Ha K két tetszőleges p és q pontjához ki lehet választani K-ból minden n-re egy olyan $p=p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n=q$ pontsorozatot, hogy a sorozat két egymásutáni tagja közti távolság tetszőlegesen kicsiny legyen, ha n elég nagy, akkor a több pontból álló korlátos és zárt K halmaz neve *kontinuum*. Így pl. egy egyenesdarab vagy egy gömbfelület kontinuum, de nem kontinuum a sík $x+y=1$ egyenese, mert nem korlátos és ugyancsak nem kontinuum az $y=0$, $0 \leq x \leq 1$ és $2 \leq x \leq 3$ egyenesdarabok összegének halmaza sem, mert az $x=1$ és $x=2$ pontok között szakadása van. A kontinuum fogalmának bizonyos folytonossági jellege van, ebből következik, hogy ha majd a görbe fogalmát definiáljuk, akkor abban a kontinuum fogalmának is valahogyan szerepelnie kell.

A halmazelméletben a végtelen halmaz pontjainak száma helyett a halmaz *számossága* kifejezést szokás használni. Bennünket a következőkben csak kétféle számosság érdekel: a *megszámlálható végtelen* és a *kontinuum számosságú végtelen*. Egy halmazra akkor mondjuk, hogy megszámlálható végtelen számosságú, ha minden pontjához hozzárendelhetünk egy közönséges egész számot oly módon, hogy különböző pontoknak különböző egész szám feleljen meg és viszont. Kontinuum számosságúnak pedig akkor nevezünk egy halmazt, ha minden pontjához hozzárendelhetjük a $0 \leq x \leq 1$ intervallum egy pontját oly módon, hogy különböző pontoknak az intervallumban is különböző pontok feleljenek meg és viszont. Bebizonyítható, hogy a megszámlálható végtelen számosság a legkisebb fajta végtelen abban az értelemben, hogy minden végtelen halmaznak van egy megszámlálható végtelen része is. Ezzel szemben a kontinuum számosság a végtelenségnek magasabb fokát jelenti, mert egy kontinuum számosságú halmaz pontjaihoz nem lehet az említett módon hozzárendelni a természetes egész számokat. Bármely kontinuum természetesen kontinuum számosságú végtelen halmaz, de vannak olyan kontinuum számosságú korlátos és zárt halmazok is, amelyek nem tartalmaznak semmiféle kontinuumot sem. Ez a tény a görbeelméletben nagy fontosságú.

1. A görbe fogalma.

A MENGER—URYSOHN-féle görbeelmélet kiindulópontja a következő definició:[1] *Görbének nevezzük az olyan kontinuumot, amelynek bármely pontjához úgy lehet kijelölni tetszőlegesen kicsiny környezeteket, hogy ezek határai ne tartalmazzák a kontinuumnak egyetlen részkontinuumát sem.* Definiciónk értelmében tehát egy ponthalmaz akkor görbe, ha kontinuum és ha minden pontjának van olyan tetszőlegesen kicsiny környezete, amelynek határából — durván szólva — csak diszkrét pontok fekszenek a görbén, nem pedig egész vonal- vagy felületdarabok. Ez utóbbi, leglényegesebb feltétel a szemléletből fakad, mert ha egy egyszerű analitikai geometriai síkgörbét tekintünk és annak valamelyik pontja köré pl. egy nyilt körlapot írunk, akkor ez a körlap a pont környezete, határa pedig (a körvonal) legfeljebb néhány pontban metszi csak a görbét, de nem tartalmazza a görbének egy vonalszerű részét sem. Hangsúlyozzuk azonban, hogy nem kell bármely pont *összes* környezeteinek olyanoknak lenniük, hogy határuknak ne legyen a görbével közös részkontinuumuk, hanem csak annyit kívánunk, hogy minden ponthoz *ki lehessen jelölni* ilyen környezeteket a pont köré írt akármilyen kicsiny sugarú n-dimenziós gömbben is.

Mindazokat a geometriai alakzatokat, amelyeket az elemi szemlélet alapján görbének neveznénk, MENGER—URYSOHN-féle értelemben is görbének kell neveznünk. A szemlélet alapján ugyanis nagyjából a differenciálható görbéket és ezek összegéből alkotott kontinuumokat hívhatjuk görbének. Hogy a differenciálható görbék MENGER—URYSOHN-féle görbék is, az nyilvánvaló. Az pedig, hogy véges vagy megszámlálható végtelen sok differenciálható görbéből alkotott kontinuum is görbe, a következő általános tétel[2] folyománya: *Véges vagy megszámlálható vég-*

[1] MENGER **1, 2, 3** és URYSOHN **1, 2.**
[2] URYSOHN **1** és MENGER **2.**

telen sok görbe összegéből álló kontinuum is görbe. Látjuk tehát, hogy görbedefiníciónk nem mond túlkeveset, viszont nem mond túlsokat sem, mert azt is be lehet bizonyítani,[1] hogy az R_n *közönségesen magasabb dimenziójúnak nevezett alakzatai* (pld. síkdarabok, vagy egy kocka) *nem görbék.* Különösen egyszerű a síkgörbék jellemzése, amit szemléletesen kifejezve így fogalmazhatunk meg: A síknak azok a kontinuumai görbék, amelyek nem tartalmazzák a sík egyetlen nyílt részhalmazát sem. Görbefogalmunkat tehát a szemlélet teljesen igazolja; mert ami intuitive görbe, azt mi is görbének nevezzük és amit a szemlélet magasabb dimenziójú idomnak tart, azt mi sem hívjuk görbének. A szemléletes görbék és a magasabb dimenziójú idomok közé ékelődnek még azok a sokszor «patologikusnak» is mondott kontinuumok, amelyekről a szemlélet semmit sem mond, hanem mindenki egyéni ízlésére bízza, hogy görbének nevezi-e őket vagy sem. Ezeknek egy része definiciónk értelmében görbe. Ez azonban nem hibája, hanem előnye az elméletnek, mert ezek patologikusnak tartott jellemvonásait általános érvényű törvényszerűségekkel magyarázza meg és így a «patologikus» jellegű kontinuumok kaoszában rendet és rendszert teremt. Hogy a görbe fogalma milyen sokféle kontinuumot tartalmazhat, azt néhány példán mutatjuk mcst be. Ezek az egyébként is hasznos példák síkgörbék; egyszerűség kedvéért C_1, C_2, stb. görbéknek fogjuk őket nevezni. A jobb áttekinthetőség kedvéért a példák konstrukcióinak kezdővonásait referátumunk végén (33. l.) ábrákon mutatjuk be.

C_1 az a sík kontinuum (lemniszkáta), amelynek x, y koordinátáit az

$$(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0$$

egyenlet szabja meg.

C_2 az $y=\frac{x}{n}$ egyenesek $0\leqq x\leqq\frac{1}{n}$ $(n=1, 2,\ldots$ ad. inf.) darabjainak összege.

---

[1] L. MENGER 8.

$$C_3: \begin{cases} x = 0, & -1 \leqq y \leqq 1, \\ 0 < x < \dfrac{1}{\pi}, & y = \sin \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

$$C_4: \begin{cases} 0 \leqq x \leqq 1, & y = 0, \\ \dfrac{1}{2^n} \leqq x \leqq 1 - \dfrac{1}{2^n}, & y = \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ & (n = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.}), \\ x = \dfrac{2k-1}{2^n}, & 0 \leqq y \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ & (k = 1, 2, \ldots 2^{n-1};\ n = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.}). \end{cases}$$

$$C_5: \begin{cases} 0 \leqq x \leqq 1, & y = 0, \\ \left(x - \dfrac{2k-1}{2^n}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{2^{2n}}, & y \geqq 0, \\ & (k = 1, 2, \ldots 2^{n-1};\ n = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.}), \\ \left(x - \dfrac{2k-1}{2.3^n}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4^{2n}}, & y \geqq 0, \\ & (k = 1, 2, \ldots 3^n;\ n = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.}). \end{cases}$$

C_6: Jelölje D a Cantor-féle diszkontinuumot, amelyet a következőkép lehet előállítani: az $y = 0$, $0 \leqq x \leqq 1$ egyenesdarabból távolítsuk el az $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ halmazt. A megmaradó $0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}$ és $\frac{2}{3} \leqq x \leqq 1$ intervallumokból távolítsuk el az $\frac{1}{9} < x < \frac{2}{9}$ és $\frac{7}{9} < x < \frac{8}{9}$ halmazokat. Folytassuk ezt az eljárást ugyanígy tovább, vagyis a megmaradt intervallumokat három egybevágó részre osztva, távolítsuk el a középsőt. Ezt a műveletet minden határon túl folytatva a megmaradó pontok halmaza a D diszkontinuum. Erről beigazolható, hogy kontinuum számosságú zárt halmaz. Kössük össze D minden pontját a sík $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pontjával. Az így keletkező kontinuum számosságú egyenesdarab összegét nevezzük C_6 görbének.

2. Az elágazási rend, a görbék osztályozása.

Láttuk, hogy egy kontinuum görbe volta az egyes pontok kis környezetei határainak minőségi viselkedésétől függ, amennyiben kikötöttük, hogy ezeknek a vizsgált kontinuummal ne legyen közös részkontinuumok. De nem tettünk semmiféle kikötést a környezetek határai és a vizsgált kontinuum közös pontjaiból álló halmaz pontjainak mennyiségére nézve. Ez a mennyiségi vizsgálat hivatott arra, hogy az egyes görbetípusokat megvilágítsa.

Legyen A tetszőleges halmaza az R_n térnek és p egyik pontja A-nak. Ha a p ponthoz megadhatunk olyan tetszőleges kicsiny $U_1, U_2, \ldots U_n, \ldots$ környezeteket, hogy ezek $B(U_n)$ határainak az A halmazzal csak véges számú közös pontjuk legyen, akkor a p pontot A *reguláris* pontjának nevezzük. Ha az A és $B(U_n)$ halmazok közös pontjaiból álló $A \cdot B(U_n)$ halmazoknak az $U_1, U_2, \ldots U_n \ldots$ környezetek megfelelő kiválasztása esetén legfeljebb megszámlálható végtelen sok pontjuk van, akkor p *racionális* pontja A-nak. Ha pedig az $A . B(U_n)$ halmazok mindenkép kontinuum számosságúak, bárhogy is választjuk meg az U_n környezeteket, akkor p az A halmaz *irracionális* pontja. Ha egy görbe minden pontja reguláris, illetőleg racionális, illetőleg irracionális, akkor ezt a görbét reguláris, illetve racionális, vagy a harmadik esetben irracionális görbének nevezzük. Példáink közül C_1 és C_2 nyilvánvalóan reguláris görbék, C_3, C_4, C_5 pedig racionális görbék. Az is világos, hogy a C_3 görbe $x = 0$, $-1 \leq y \leq 1$ darabjának pontjai, valamint a C_4 görbe $0 \leq x \leq 1$, $y = 0$ darabjának pontjai racionális, de nem reguláris pontok. Alig nehezebb azt kimutatni, hogy a C_5 görbe $0 \leq x \leq 1$, $y = 0$ darabján fekvő pontok sem regulárisak. E három görbe többi pontjai azonban nyilván reguláris pontok. Nem így a C_6 görbe, mert ennek minden pontja irracionális pont. C_6 szerkesztését ugyanis úgy állapítottuk meg, hogy az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pontból kontinuum számosságú egyenes induljon ki és minden ilyen egyenes körül kontinuum számosságú egyenes sűrűsödjék. Egy pont tetszőlegesen kicsiny környezetének határa tehát a C_6 görbe kontinuum számosságú részkontinuumát metszi, akárhogyan is választjuk ezt a környezetet.

A görbéknek reguláris, racionális és irracionális görbékre való felosztása még nem elég finom, mert az egyes osztályokon belül is éles különbségek mutatkoznak. Így pl. a C_1 görbe (0, 0) pontjában csak négy ív találkozik, míg a C_2 görbe (0, 0) pontjában végtelen sok ív fut össze, noha C_1 és C_2 is reguláris görbék. Az ilyen különbségeket a pont elágazási rendjének fogalmával világíthatjuk meg. Azt mondjuk ugyanis, hogy a C görbe p pontja legfeljebb m-ed rendű, ha p-hez megadhatunk olyan $U_1, U_2, \ldots U_n, \ldots$ tetszőlegesen kicsiny környezeteket, hogy minden $C.B(U_n)$ halmaz legfeljebb m pontot tartalmazzon. Ha p legfeljebb m-ed rendű, de nem legfeljebb k-ad rendű, ahol $k<m$, akkor a legfeljebb jelzőt elhagyhatjuk és azt mondjuk, hogy p elágazási rendje éppen m. Az 1-ed rendű pontokat *végpontoknak*, a 2-ed rendűeket *közönséges pontoknak*, a 3-ad és ennél magasabb rendű pontokat pedig *elágazási pontoknak* nevezzük. Példáink közül a C_1 görbének nincs végpontja, hanem a (0, 0) negyedrendű elágazási ponton kívül minden pontja közönséges pont. A C_2 görbe $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ koordinátájú pontjai végpontok, a (0, 0) pont elágazási pont, minden egyéb pontja közönséges pont. A (0, 0) elágazási pont köré tetszőlegesen kicsiny $U_1, U_2, \ldots U_n, \ldots$ környezeteket írva, azt látjuk, hogy a $C_2.B(U_n)$ halmazok pontjainak száma ugyan véges maradhat, de mindig növekszik, ha a környezetek kisebbednek, mert akkor a $B(U_n)$ határok mindig több $y=\frac{x}{n}$ görbe ágat metszenek. Az ilyen reguláris elágazási pontokat, amelyek rendje minden egész számnál nagyobb, *növekvő rendű* pontoknak nevezzük. A C_3 görbénél már említettük, hogy az $x=0$, $-1 \leq y \leq 1$ darabok pontjai nem regulárisak, tehát elágazási pontok. Ugyancsak nem reguláris elágazási pontok a C_4 és C_5 görbében a $0 \leq x \leq 1$, $y=0$ darabra eső pontok sem. A C_3 görbé-

nek van egy végpontja is és pedig az $x=\frac{1}{\pi}$, $y=0$ pont. Ezeken kívül csupa közönséges pontja van. A C_4 görbe reguláris pontjai közül az $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ koordinátájú pont végpont, a többi közönséges pont, vagy pedig negyedrendű elágazási pont. A C_5 görbe összes reguláris pontjai közönséges pontok. A C_6 görbének, mint láttuk, minden pontja irracionális elágazási pont, noha a szó közönséges értelmében csak az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pontban ágaznak el egyes részei.

3. A végpontok eloszlása.

A végpontok számos tulajdonsága megegyezik azokkal, amelyeket az ember intuitive is hajlandó a végpontokról feltételezni. Így könnyű meggyőződni arról, hogy a C görbét egyik p végpontja sem darabolhatja szét, mert különben a p pontban C-nek két egyébként különálló részkontinuuma — C' és C'' — találkoznék, p-nek tehát akármilyen kis U környezeténél a $C'.B(U)$ és a $C''.B(U)$ halmaz is tartalmazna legalább egy-egy pontot. A p pont elágazási rendje ezek szerint legalább 2 lenne és így p nem lehetne végpont. De nemcsak, hogy egyik végpont sem darabolja szét a görbét, hanem még a végpontok halmaza sem. Jelöljük a C görbe összes végpontjainak halmazát C^1-el. A görbeelmélet egyik legegyszerűbb tétele[1] szerint *a $C-C^1$ halmaz két tetszőleges pontját össze lehet kötni $C-C^1$ egy részkontinuumával.* Ebből azonnal következik, hogy a C^1 halmaz nem tartalmazhat kontinuumot, mert ha volna C^1-ben egy K kontinuum, akkor K csupa végpontból állna. Ha tehát K-ból a K^1 halmazt elvennénk, semmi sem maradna, holott épp most említettük, hogy a $K-K^1$ halmazban egész kontinuumoknak is kell lenniük. A végpontok halmaza tehát úgyszólván szétszórt pontokból áll. De még ennél is többet mondhatunk, ha

---

[1] MENGER 3 és URYSOHN 2.

bevezetjük a legerősebben szétszórt jellegű, úgynevezett nulladimenziós halmazokat. Nulladimenziósnak mondjuk azt a halmazt, amelynek bármely pontjához találhatunk olyan tetszőlegesen kicsiny környezeteket, amelyeknek határai a halmaz egyetlen pontját sem tartalmazzák. (Ilyenek pl. a $0 \leqq x \leqq 1$ intervallumban a racionális vagy az irracionális pontok halmazai.) A végpontok halmazának szétszórt voltát ezekután következőkép jellemezhetjük:[1] *Egy görbének vagy nincs végpontja, vagy ha van, a végpontok halmaza nulladimenziós.* A C görbe végpontjai C^1 halmazának ebből a tulajdonságából azonnal következik, hogy a $C-C^1$ halmaz a C görbében mindenütt sűrű, ami annyit jelent, hogy C minden pontjának tetszőleges közelében található $C-C^1$-nek is egy pontja.

Az eddig elmondottak a végpontoknak csupa olyan tulajdonságát tárták fel, amit a szemlélet alapján el is várhattunk tőlük: a görbét a végpontok halmaza nem darabolja fel, a végpontok halmaza nemcsak, hogy nem tartalmaz kontinuumot, de még nulladimenziós is, a közönséges és elágazási pontokból álló halmaz pedig a görbében mindenütt sűrű. Mindez egészen természetesnek látszik. Annál meglepőbb, hogy lehet olyan görbét is szerkeszteni, amelyben a végpontok halmaza is mindenütt sűrű. Ezt a görbét[2] nevezzük C_7-nek és a következő módon szerkesztjük meg (1. ábra): Állítsunk a $0 \leqq x \leqq 1$, $y=0$ egyenesdarab minden $x = \frac{2k-1}{2^n}$ abszcisszájú pontjába olyan egyenesdarabot, amely a $0 \leqq x \leqq 1$ egyenesdarabot merőlegesen metszi s amelynek hosszúsága felfelé és lefelé is $\frac{1}{2^{n+1}}$. Az így keletkező görbét jelöljük $C^{(1)}$-el. Állítsunk most a $C^{(1)}$ görbe minden $x = \frac{2i-1}{2^m}$, $-\frac{1}{2^{m+1}} \leqq y \leqq \frac{1}{2^{m+1}}$ egyenesdarabjának $y = \pm \frac{2k-1}{2^{m+n}}$ ordinátájú pontjába olyan merőleges egyenesdarabot, amelynek hosszúsága jobbra és balra $\frac{1}{2^{m+n+1}}$. Az így

[1] MENGER 3 és URYSOHN 2.
[2] MENGER 6.

keletkező görbét jelöljük $C^{(2)}$-vel. Ismételjük meg ezt az eljárást a $C^{(2)}$ görbén; a szerkesztést minden határon túl folytatva a $C^{(1)}, C^{(2)},\dots C^{(n)},\dots$ görbéket nyerjük. Jelentse $\overline{\sum_{n=1}^{\infty} C^{(n)}}$ a $C^{(1)}, C^{(2)},\dots C^{(n)},\dots$ görbék összegéből alkotott halmaz zárt hüvelyét. A C_7 görbe definiciója:

$$C_7 = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} C^{(n)}}.$$

Nyilvánvaló, hogy a $C^{(n)}$ görbék egyenesdarabjainak szabad végei a C_7 görbének is végpontjai. De C_7 bármely pontjának tetszőleges közelében van ilyen szabad vég, következéskép a C_7 görbe végpontjainak halmaza C_7-ben mindenütt sűrű. Ennek a különös szerkezetű görbének végpontjaira még visszatérünk a 9. pontban.

4. A közönséges pontok eloszlása.

Egy görbe másodrendű pontjait neveztük közönséges pontoknak. Ezek azért tarthatnak különösebb érdeklődésre számot, mert az elemi geometriában szereplő görbék pontjai javarészt közönséges pontok. Azt természetesen nem állíthatjuk, hogy minden görbének van közönséges pontja, mert pld. a C_6 görbe is csupa irracionális pontból áll. Első pillantásra mégis azt hinné az ember, hogy ilyesmi csak irracionális, vagy legalább is csak irreguláris görbéknél lehetséges. A lényegesen egyszerűbb reguláris görbéknél azonban azt várnók, hogy ezekben mindig vannak közönséges pontok is. Ezt a hiedelmet megcáfolja Sierpiński egy példája.[1] Ez olyan reguláris görbe, amely kizárólag 3-ad és 4-ed rendű elágazási pontokból áll. Ezt a görbét nevezzük C_8 példánknak; szerkesztése a következő (l. ábra): Legyen H akármilyen egyenlőoldalú háromszög. Kössük össze oldalainak felezőpontjait, akkor H négy egybevágó egyenlőoldalú háromszögre bomlik. Jelöljük ezeket H_1, H_2, H_3, H_4-el

[1] Sierpiński 1.

és jelentse H_4 a középsőt. Ennek belsejét elhagyva, jelöljük K_1-el a megmaradó $H_1+H_2+H_3$ kontinuumot. Ha H_1, H_2, H_3 oldalainak felezőpontjait összekötjük, mindegyikben négy-négy egyenlőoldalú háromszög keletkezik. Jelöljük a H_i-ben keletkezetteket H_{i1}, H_{i2}, H_{i3}, H_{i4}-el és jelentse H_{i4} ezek közül a középsőt. Mindegyik H_i háromszögből H_{i4} belsejét elhagyva marad a $K_2=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} H_{ij}$ kontinuum. Ezt az eljárást korlátlanul folytatva a K_1, K_2,... K_n,... kontinuumokat kapjuk, ahol K_n az utána következőket magában foglalja. Ezeknek a kontinuumoknak a közös pontjaiból alkotott $\prod_{n=1}^{\infty} K_n$ halmazt jelöljük K-val. Általános ponthalmazelméleti tételekből következik, hogy K kontinuum, ezenkívül nyilvánvaló, hogy K nem tartalmazhatja a síknak egyetlen nyílt halmazát sem, tehát K síkgörbe. Könnyen belátható, hogy a K görbében a H kiindulási háromszög csúcsainak megfelelő három pont közönséges pont. K-nak azok a pontjai, amelyekben két háromszög oldalai találkoznak, negyedrendűek, a többi pedig harmadrendű pont. K-nak tehát három másodrendű csúcspontján kívül csak 3-ad és 4-ed rendű elágazási pontjai vannak. Ha néhány ilyen háromszöggörbét úgy illesztünk össze, hogy összes csúcsaik érintkezzenek, de egyéb közös pontjuk ne legyen, megkaptuk a C_8 görbét, melynek már csak 3-ad és 4-ed rendű elágazási pontjai vannak.

Azoknál a szemléletesebb görbéknél, amelyeknek közönséges pontjaik is vannak, ezek halmaza legfeljebb két részből állhat:[1] egy közönséges magnak nevezett halmazból, ez a közönséges pontok halmazának tulajdonképeni lényeges része és esetleg még egy másik halmazból, amely azonban csak nulladimenziós lehet. Mielőtt a közönséges magot jellemeznénk, be kell vezetnünk az ív és a topologikus kör fogalmát. Állítsuk elő az R_n térben fekvő C görbe pontjainak x_1, x_2,... x_n koordinátáit egy t paraméter folytonos függvényeiként:

$$x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\dots\ x_n=x_n(t). \qquad (2)$$

[1] MENGER 8.

Ha t egy egyenesdarabon variál és a (2) alatti előállítás olyan, hogy különböző t értékeknek különböző $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ pontok felelnek meg a C görbén, akkor a C görbét *ívnek* nevezzük. Ha pedig t egy körvonalon variál és a (2) alatti előállítás különböző t értékekhez különböző $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ pontokat rendel, akkor a C görbe neve *topologikus kör*. Szemléletes képpel élve tehát azt lehetne mondani, hogy az egyenesdarabot, illetőleg körvonalat nyujtható anyagból képzelve, az ív, illetőleg a topologikus kör olyan görbe, amely az egyenesdarab, illetőleg körvonal deformációja útján keletkezik, ha ügyelünk arra, hogy a deformációnál sem szakadás, sem pedig összeforrasztás ne keletkezzék. A közönséges magot ezekután azzal jellemezhetjük,[1] hogy *a közönséges mag vagy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok olyan ív összege, amelyeknek csak végpontjaik lehetnek közösek, vagy pedig a közönséges mag identikus magával a görbével.* Az első esetet látjuk megvalósítva az ívnél, vagy pld. a C_1, C_2, C_3, C_4 és C_5 görbéknél. A második esetre példa a körvonal, amely közönséges magjával identikus. A körvonalnak, illetőleg a topologikus körnek ez a viselkedése egyúttal jellemző tulajdonsága is, mert *egy görbe akkor és csakis akkor topologikus kör, ha minden pontja közönséges pont.*[2] Ugyanilyen egyszerű az ív görbeelméleti jellemzése is.[3] *Egy görbe akkor és csakis akkor ív, ha két végpontjától eltekintve csak közönséges pontjai vannak.*

5. Az elágazási pontok eloszlása.

Az elágazási pontok természetesen a legkülönbözőbb módon oszolhatnak el, hiszen minden háromnál magasabb elágazási rendű pont közéjük tartozik. A görbeelméletnek azonban az eloszlási lehetőségek sokféleségében is sikerült rendszert fel-

---

[1] Menger 7 és Ayres 1.

[2] Menger 1, 3, Urysohn 1, 2 és Frankl 1.

[3] Menger 1, 2, Urysohn 1, 2 és Frankl 1.

fedeznie. Ennek ismertetésénél először a reguláris elágazási pontokat vesszük sorra. Jelöljük C^n-nel a C görbe legfeljebb n-ed rendű pontjainak halmazát, ahol n véges egész számot jelent. AYRES a következő fontos tételt bizonyította be:[1] *Ha* $n \geqq 3$, *akkor a* $C^{2n-3}-C^{n-1}$ *halmaz nulladimenziós, vagy pedig egy pontot sem tartalmaz.* Ebből az eredményből egyrészt az következik, hogy *egy görbe n-ed rendű* ($n \geqq 3$) *elágazási pontjainak halmaza legfeljebb nulladimenziós lehet,* másrészt könnyű belőle levezetni a következő érdekes tételt[2] is: *Ha egy görbének csak legfeljebb n-ed rendű pontjai vannak, akkor ebben a görbében a legfeljebb* $\left(\frac{n}{2}+1\right)$*-ed rendű pontok halmaza mindenütt sűrű.* Ennek a tételnek közvetlen folyománya, hogy ha egy görbe minden pontjának elágazási rendje ugyanaz a véges n szám, akkor n csakis 2 lehet. Ha tehát egy görbét akkor nevezünk homogén véges rendűnek, ha minden pontjának elágazási rendje ugyanaz a véges szám és figyelembe vesszük, hogy a 4. pontban kifejtettek szerint a topologikus kör az egyetlen csak másodrendű pontokból álló görbe, akkor ezt az eredményt úgy is kifejezhetjük, hogy *a topologikus kör az egyetlen homogén véges rendű görbe.*[2] Nem véletlen tehát, hogy a SIERPIŃSKI-féle C_8 görbe nemcsak 3-ad rendű pontokból áll, hanem 4-ed rendűekből is és hogy a mindkét fajtájú pontok halmazai mindenütt sűrűek C_8-ban, hanem ez a jelenség a reguláris elágazási pontokra vonatkozó fenti általános törvényszerűségek szükséges következménye. Nem szabad azonban azt hinnünk, hogy az *összes* reguláris görbék közt a topologikus kör az egyetlen homogén rendű, hanem csak az olyan reguláris görbék közt, amelyekben a pontok elágazási rendje egy bizonyos véges szám alatt marad. Ha a növekvő rendű pontokat is figyelembe vesszük, azzal a meglepő ténnyel találjuk magunkat szemben, hogy *van olyan reguláris görbe is, amelynek*

---

1 AYRES **1.**

2 URYSOHN **2,** WHYBURN **3** és KÜNNETH **1.**

minden pontja növekvő rendű.[1] Mivel azonban eddig csak igen bonyolult példák ismeretesek, közlésüktől el kell tekintenünk. A reguláris elágazási pontok halmaza, mint a C_8 görbe példáján láttuk, tartalmazhat ugyan kontinuumokat, de az is lehetséges, hogy csak egyes pontokból áll, mint pld. a C_1 és C_2 görbéknél, amelyeknek csak egy elágazási pontjuk van. A nem reguláris, vagy rövidebben irreguláris elágazási pontok halmazánál azonban az utóbbi eset nem fordulhat elő. HUREWICZ egyik általános tételéből[2] következik ugyanis, hogy *ha az irreguláris pontok halmaza tartalmaz legalább egy pontot, akkor tartalmaz egy egész kontinuumot is.* A C_3 görbében pld. az irreguláris pontok halmaza az $x = 0$, $-1 \leqq y \leqq 1$ egyenesdarab, a C_4 és C_5 görbékben pedig a $0 \leqq x \leqq 1$, $y = 0$ egyenesdarab pontjai irregulárisak. De még az irreguláris pontok közt is külön hely illeti meg az irracionális pontokat, mert HUREWICZ tételéből az is következik, hogy *ha egy görbének van legalább egy irracionális pontja, akkor az irracionális pontok halmaza tartalmaz egy kontinuumot is.* Erről a halmazról azonban még többet is mondhatunk, mint a racionális pontok halmazáról. Ennek megvilágítására vegyük először szemügyre a C_3, C_4, C_5 racionális görbék irreguláris pontjainak halmazait. Ezek, mint láttuk, egyenesdarabok, tehát önálló görbeként tekintve reguláris görbék. Az irracionális pontok halmazáról azonban sikerült bebizonyítani,[3] hogy önálló halmazként tekintve egyetlen pontjában sem lehet reguláris. Ebből azonban még nem következik, hogy ne lehetne racionális halmaz. MAZURKIEWICZ szerkesztett[4] is olyan bonyolult síkgörbét, amelynél az irracionális pontok halmaza önálló halmazként tekintve minden pontjában csak racionális elágazási rendű.

---

[1] URYSOHN 2.
[2] HUREWICZ 1.
[3] MENGER 3 és URYSOHN 2.
[4] MAZURKIEWICZ 4.

6. Folytonos görbék.

Az eddig tárgyalt görbefogalom túl általános ahhoz, hogy minden ilyen értelemben vett görbe szemléletes is legyen. Ha a szemlélethez közelálló görbék természetével akarunk közelebbről megismerkedni, az általános görbefogalom speciális eseteit kell szemügyre vennünk. Kapcsolatot kereshetünk pld. a régebbi folytonos görbe fogalommal. Az R_n térben azokat a görbéket hívjuk folytonosnak, amelyeknek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinátáit az

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t), \ldots,\ x_n = x_n(t), \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

folytonos függvényekkel lehet definiálni. HAHN[1] és MAZURKIEWICZ[2] kimutatták, hogy *egy görbe akkor és csakis akkor folytonos, ha minden pontjában lokálisan összefüggő.* Az a kifejezés, hogy a C görbe p pontjában lokálisan összefüggő, a következőt jelenti: p köré írva egy tetszőleges kis ϱ sugarú n-dimenziós gömböt, megadhatunk olyan kis $\delta > 0$ számot, hogy minden pontot, amelynek távolsága p-től δ-nál kisebb, C-nek egy olyan részkontinuuma kösse össze p-vel, amely teljesen a p köré írt ϱ sugarú gömbbe esik. A folytonos görbék nevezetes tulajdonsága, hogy *bármely két pontjuk összeköthető a görbe egy részívével.*[3]

Példáink közül C_3 és C_6 nem folytonos görbe, mert C_3 az $x = 0$, $-1 \leqq y \leqq 1$ egyenesdarab pontjaiban nem lokálisan összefüggő, C_6 pedig éppen csak az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pontban lokálisan összefüggő. Már ezeknek a példáknak alapján is gyanítható, hogy a nem folytonos görbék bonyolultabb szerkezetűek, különösen, ha elég sűrűek bennük azok a pontok, amelyekben a görbe nem lokálisan összefüggő. Valóban ez is a helyzet, mert *ha egy görbe sehol sem lokálisan összefüggő, akkor az irra-*

[1] HAHN 1.
[2] MAZURKIEWICZ 1 és 2.
[3] KALUZSAY 1, MOORE 1 és MAZURKIEWICZ 2.

cionális pontok halmaza mindenütt sűrű benne.[1] De még a nem folytonos racionális görbéknek is lehetnek nagyon meglepő tulajdonságaik, amennyiben *olyan racionális görbék is vannak, amelyek nem tartalmaznak egyetlen ívet sem.*[2] A nem folytonos irracionális görbék természetesen még «patologikusabb» viselkedésűek is lehetnek, így KNASTER[3] olyan rendkívül bonyolult irracionális síkgörbét szerkesztett, amelynek meglepő tulajdonságai közt szerepel többek közt az is, hogy *minden részkontinuuma irracionális, sőt minden pontjában irracionális görbe.* De ha bármilyen különös tulajdonságú nem folytonos görbéket is lehet szerkeszteni, mégis *minden nem folytonos görbéhez meg lehet adni olyan folytonos görbét, amely a nem folytonosat magában foglalja.*[4] Ezzel a tétellel a folytonos görbék szemléletes voltába vetett esetleges reményeink összeomlottak. Ha igazán szemléletes görbékkel kivánunk foglalkozni, a folytonosság feltételének további megszorítására van szükségünk.

A keresett feltételhez közelebb jutunk, ha a C_4 és C_5 görbék tulajdonságait vesszük szemügyre. Mindkettő folytonos, de ha a C_4 görbéből az $x=\frac{1}{2}$, $0 \leqq y \leqq 1$ egyenesdarab kivételével az összes $x=\frac{2k-1}{2^n}$, $0 \leqq y \leqq \frac{k}{2^{n-1}}$ egyenesdarabokat elhagyjuk, a megmaradó görbe már nem folytonos, mert a $0 \leqq x \leqq 1$, $y=0$ egyenesdarab pontjaiban nem lokálisan összefüggő. A C_4 folytonos görbéből tehát ki lehet emelni egy nem folytonos részgörbét. C_5-ről viszont kimutatható,[5] hogy nemcsak maga C_5, hanem minden belőle kiválasztott részkontinuum is folytonos görbe. Az ilyen természetű görbéket, amelyeknek minden részkontinuuma is folytonos görbe, örökletesen folytonos görbék-

---

1 ALEXITS 2.

2 KNASTER 2.

3 KNASTER 1.

4 STEPANOFF—TUMARKIN 1.

5 L. MENGER 8. A C_5 görbe példája különben KNASTER-nek egy MENGERhez intézett leveléből való.

nek fogjuk nevezni. Ezeknek egyik fontos osztályát adja meg a következő tétel:[1] *Minden reguláris görbe örökletesen folytonos.* Hogy azonban megfordítva nem minden örökletesen folytonos görbe reguláris, azt a C_5 görbe példája is igazolja, amely — mint tudjuk — a $0 \leqq x \leqq 1$, $y = 0$ egyenesdarab pontjaiban racionálisan irreguláris. De ez a legszélsőbb lehetséges eset, mert *minden örökletesen folytonos görbe racionális.*[2] Ezzel a tétellel megtaláltuk a kapcsolatot az intuitiv görbék felé, mert most már láthatjuk, hogy ezeket az örökletesen folytonos görbék között kell keresnünk.

7. Az elágazás alaptétele.

Az olvasónak bizonyára feltűnt már, hogy pld. a C_6 görbe pontjai elágazási pontok ugyan, mert elágazási rendjük > 3, de az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pont kivételével mégsem ágaznak el az egyes pontokból részkontinuumok oly módon, ahogy azt közönségesen érteni szoktuk. A C_2 görbe egyetlen 4-ed rendű elágazási pontjából viszont tényleg 4 különböző ág fut szét. A két görbe elágazási pontjai közti különbség oka abban rejlik, hogy C_1 folytonos, C_6 pedig nem folytonos görbe. Nöbeling ugyanis bebizonyította a következő tételt,[3] amelyet méltán nevezhetünk az elágazás alaptételének: *Egy folytonos görbe minden véges n-ed rendű pontjában éppen n olyan ív találkozik, amelyeknek ezen a ponton kívül nincs más közös pontjuk; ha pedig p növekvő rendű, vagy irreguláris pont, akkor p-ből végtelen sok ilyen ív ágazik szét.* Ez a tétel helyreállíthatja az elmélet szemléletes voltába vetett bizalmunkat, mert most már láthatjuk, hogy folytonos görbéknél az elágazási rend megegyezik az elágazás intuitív definiciójával: n-ed rendű elágazás tényleg n effektív ágat jelent. Ha azonban n végtelen, akkor ugyan vég-

[1] Menger 3 és Urysohn 2.
[2] Whyburn 6.
[3] Nöbeling 3.

telen sok különböző ív ágazik szét, de figyelembe kell vennünk, hogy ezeknek az íveknek a hosszúságai még akkor is nullához konvergálhatnak, ha az elágazási pont irreguláris. Példa erre a C_5 görbe, amelynek pld. a $(0, 0)$ pontjában összefutó, de egyébként közös pont nélküli íveiből minél többet választunk ki, annál rövidebbek lesznek azok a $(0, 0)$-ba torkoló ívek, amelyeknek az eddig kiválasztottakkal $(0, 0)$-on kívül nincs más közös pontjuk. Ezért a $(0, 0)$ és $(0, 1)$ irreguláris pontokat sem lehet végtelen sok olyan ívvel összekötni, amelyeknek e két ponton kívül nincs más közös pontjuk.

8. A folytonos görbék szerkezete.

Legyen C folytonos görbe, amelynek p, q és r három különböző pontja. Ha C minden q-t és r-t összekötő részkontinuuma tartalmazza a p pontot is, akkor azt mondjuk, hogy p elválasztja a q és r pontokat. A C folytonos görbének azokat a pontjait, amelyek C valamely pontpárját elválasztják, C elválasztási pontjainak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy egy ív belső pontjai elválasztási pontok, de két végpontja már nem az. MOORE[1] kimutatta, hogy a folytonos görbék közt az ív képviseli az elválasztási pontokban leggazdagabb típust, mert *minden folytonos görbének van legalább két olyan pontja is, amely nem elválasztási pont.* Minél bonyolultabb egy görbe, annál kevésbé alkalmas elválasztási pontok képzésére, mert *egy folytonos görbe elágazási pontjai közül legfeljebb megszámlálható végtelen sok lehet egyúttal elválasztási pont is.*[2] Az elválasztási pont fogalmával rokon a következő fogalom: ha a C folytonos görbe p pontjában C-nek n olyan részkontinuuma találkozik, amelyeknek p az egyetlen közös pontjuk, akkor a p pontot C n-ed rendű osztópontjának nevezzük. Itt n bármely véges egész szám lehet, de jelenthet megszámlálható vagy akár kon-

---

[1] MOORE 2.
[2] WHYBURN 1.

tinuum számosságú végtelent is. Az n mennyiséget p szétbontási rendjének nevezzük. A szétbontási rend és az elágazási rend közti kapcsolat világos, ugyanis egy pont szétbontási rendje nem lehet nagyobb elágazási rendjénél. Mert ha p szétbontási rendje n, akkor p minden elég kis környezetének valamennyi p-ben összefutó kontinuumon van legalább egy határpontja, következéskép p elágazási rendje $\geqq n$. Érdekes, hogy egy folytonos görbe nem állhat csupa magasabb rendű osztópontból még akkor sem, ha csak elágazási pontjai vannak, mint pld. a C_8 görbének. KURATOWSKI és ZARANKIEWICZ [1] egyik közös tétele szerint ugyanis *egy folytonos görbének legfeljebb megszámlálható végtelen sok háromnál magasabb szétbontási rendű osztópontja lehet.*

Az elválasztási pont fogalmának lokális analogonját URYSOHN [2] vezette be a lokális összefüggés fogalmának mintájára: A C folytonos görbe p pontját elkerülhető pontnak nevezzük akkor, ha bármilyen kis ϱ sugarú n-dimenziós gömböt is írunk p köré, mindig megadhatunk egy $\delta > 0$ számot oly módon, hogy két tetszőleges pont, amelyek p-től legfeljebb δ távolságra vannak, összeköthető legyen C-nek valamely a p köré írt ϱ sugarú gömbbe eső, de p-t nem tartalmazó részkontinuumával. Az el nem kerülhető pontokat elkerülhetetlen pontoknak hívjuk. Nyilvánvaló, hogy egy folytonos görbe elválasztási pontjai egyúttal elkerülhetetlen pontok is, ami azonban megfordítva nem igaz. Példa erre a körvonal, amelynek minden pontja elkerülhetetlen, de egyik sem elválasztási pont. Az elkerülhetetlen pontoknak az elválasztási pontokhoz való hasonlósága még határozottabbá válik, ha WHYBURN következő tételét [3] is figyelembe vesszük: *Egy folytonos görbe elágazási pontjai közül legfeljebb megszámlálható végtelen sok lehet elkerülhetetlen.* Látható tehát, hogy a bonyolultabb folytonos görbék főleg elkerülhető pontokból állanak.

---

[1] KURATOWSKI—ZARANKIEWICZ 1.
[2] URYSOHN 3.
[3] WHYBURN 4.

Ezt a következő tételek is megerősitik: *Racionális folytonos görbékben az elkerülhetetlen pontok halmaza mindenütt sűrű;*[1] *ha pedig egy folytonos görbe csupa elkerülhető pontból áll, akkor minden pontja irracionális.*[2]

Ezekhez a fogalmakhoz némileg hasonlít a következő fogalomalkotás: ha a C síkgörbe p pontjának minden elég kicsiny U környezetéből a $C.U$ halmazt eltávolítjuk és az így keletkező $U-C.U$ halmaz legalább n különböző nyilt halmazból áll, akkor azt mondjuk, hogy a C görbe p pontja körül legalább n-ed rendben darabolja szét lokálisan a síkot. A legalább szó elmarad, ha n a legkisebb olyan szám, amely mellett a C görbe p körül legalább n-ed rendben darabolja szét a síkot. ZARANKIEWICZ[3] bebizonyította, hogy *ha* $2 < n < +\infty$, *akkor a C síkgörbe legfeljebb megszámlálható végtelen sok pontja körül darabolhatja szét lokálisan n-ed rendben a síkot.* Ebből a tételből azonnal következik a sík topologiájában oly nagy jelentőségű JORDAN-tételnek a következő megfordítása:[4] *Ha egy síkgörbe minden pontja körül ugyanazon véges rendben darabolja szét lokálisan a síkot, akkor ez a görbe topologikus kör.*

9. Reguláris és aciklikus görbék.

Az 1. pontban említettük, hogy ha egy kontinuum véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok görbe összege, akkor maga is görbe. Ezt a tételt racionális görbékre is specializálhatjuk:[5] *Ha véges vagy megszámlálható végtelen sok racionális görbe összege kontinuum, akkor ez a kontinuum is racionális görbe.* Nem igaz azonban ez a tétel, ha reguláris görbék összegéről van szó, még akkor sem, ha csak két reguláris görbét összegezünk, mert már két reguláris görbe összege is lehet irregu-

---

1 WHYBURN 4.
2 AYRES 2.
3 ZARANKIEWICZ 2.
4 ZARANKIEWICZ 1.
5 URYSOHN 1, 2.

láris. Ha pld. a C_5 görbe $y \geqq 0$ ordinátájú pontjait tekintjük, könnyű meggyőződnünk arról, hogy ezek halmaza reguláris görbe. Ugyancsak reguláris görbe C_5-ben az $y \leqq 0$ ordinátájú pontok halmaza is. A kettő összege azonban maga a C_5 görbe, amelyről viszont már tudjuk, hogy irreguláris. Az ilyen példák alapján önként vetődik fel az a kérdés, hogy egy reguláris görbe egyesítése bármely másik reguláris görbével mikor eredményez ismét reguláris görbét? Erre a következőkép válaszolhatunk:[1] *A C reguláris görbét bármely más reguláris görbével egyesítve akkor és csakis akkor reguláris görbe a két görbe összege is, ha a C görbe elágazási pontjaiból alkotott halmaz zárt hüvelye nem tartalmaz semmilyen kontinuumot sem.* Világos, hogy ennek a feltételnek eleget tesznek a véges számú ívből összeállított görbék, más néven ívkomplexusok is. Az ívkomplexusok eszerint reguláris görbék, sőt még azt is állíthatjuk, hogy *egy görbe akkor és csakis akkor ívkomplexus, ha csak véges számú elágazási pontja van.*[2]

Sokat tanulmányozott fajtája a reguláris görbéknek az aciklikus görbék osztálya. Ezek a sík topologiájában és részben a gráfok elméletében is jelentős szerepet töltenek be. Aciklikusnak nevezzük az olyan folytonos görbét, amely nem tartalmaz egyetlen topologikus kört sem. Lényeges tulajdonságuk a regularitás, mert beigazolható,[3] hogy *minden aciklikus görbe reguláris.* De még a reguláris görbék közt is különleges helyet kell biztosítani az aciklikus görbéknek, amit a következő tételek is igazolnak: *A C folytonos görbe akkor és csakis akkor aciklikus, ha a következő feltételek egyikét teljesíti:* 1° *C bármely két pontját C-nek egy és csakis egy részíve köti össze;*[4] 2° *C minden pontja vagy végpont, vagy elválasztási pont;*[5] 3° *C*

---

[1] Whyburn **7.**
[2] Menger **8.**
[3] Menger **6.**
[4] Menger **6.**
[5] Wilder **1** és Menger **6.**

minden részkontinuumának van legalább két végpontja.[1] Ha a 2° feltételben elválasztási pont helyett annak lokális analogonját, vagyis elkerülhetetlen pontot mondunk, a C görbe már nem aciklikus (pld. a kör), de igaz[2] az, hogy *ha a C folytonos görbének csak végpontjai és elkerülhetetlen pontjai vannak, akkor C olyan reguláris görbe, amelynek legfeljebb megszámlálható végtelen sok elágazási pontja van.* Mivel ennek a tételnek a premisszáit a 2° feltétel értelmében az aciklikus görbék is bőségesen teljesítik, azért kimondhatjuk azt a már régebben is ismert tételt,[3] hogy *egy aciklikus görbének legfeljebb megszámlálható végtelen sok elágazási pontja lehet.* Az eddigiekből látható, hogy az aciklikus görbék tulajdonságai valóban olyanok, amilyeneket az intuitív görbefogalom alapján is elvárhatunk a görbéktől. Ennek ellenére a 3. pontban konstruált C_7 példa nyilvánvalóan aciklikus görbe, a végpontok halmaza tehát még egy aciklikus görbében is mindenütt sűrü lehet, holott az aciklikus görbék végpontjainak szétszórtsága tekintetében nemcsak a 3. pontban közölt általános tétel igaz, hogy t. i. a végpontok halmaza nulladimenziós, hanem még ennél lényegesen több is:[4] *A C aciklikus görbe végpontjainak halmazát C bármely nulladimenziós részével egyesítve, még a két egyesített halmaz is nulladimenziós.*[5] Az aciklikus görbéknek ezeken az egyszerű tulajdonságaikon kívül jelentős sajátságuk még a következő is:[6] *Minden lokálisan összefüggő kontinuum tetszőleges nulladimenziós zárt halmazához tartozik egy olyan aciklikus görbe, amely része a kontinuumnak és az adott zárt halmazt magában foglalja.* Ez a tétel magasabb-

---

[1] MENGER 6.

[2] WHYBURN 5.

[3] WAŻEWSKI 1.

[4] ALEXITS 1.

[5] Két nulladimenziós halmaz összege nem feltétlenül nulladimenziós. Példa: a $0 \leqq x \leqq 1$ intervallum racionális és irracionális pontjainak halmaza. Ezek nulladimenziós halmazok, összegük azonban maga az intervallum, tehát nem nulladimenziós halmaz.

[6] GEHMAN 1.

rendű analogonja egy régebbi tételnek;[1] ez modern kifejezésmóddal élve így szól: a sík minden korlátos, zárt és nulladimenziós halmazának pontjain keresztülfektethetünk egy ívet.

10. A görbék topologikus tulajdonságai.

Legyen A tetszőleges ponthalmaz és rendeljük A minden p pontjához valamely B halmaznak egy, és csakis egy p' pontját oly módon, hogy ha A-ban valamely $p_1, p_2, \dots p_n, \dots$ pontsorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$, akkor a $p_1, p_2, \dots p_n, \dots$ pontokhoz rendelt $p_1', p_2', \dots p_n', \dots$ pontok sorozata is konvergáljon a p-hez rendelt p' ponthoz. Ezt a műveletet az A halmaz A'-re való folytonos leképzésének nevezzük, az A halmaz pontjaihoz rendelt p' pontokból álló A' halmazt pedig A képének hívjuk. Ha A különböző pontjainak A'-ben is különböző pontok felelnek meg, akkor a folytonos leképzést topologikus leképzésnek, az A' halmazt pedig A topologikus képének nevezzük. Így pld. az ív az egyenesdarabnak, a topologikus kör pedig a körvonalnak a topologikus képe. A topologikus leképzések nagy jelentősége abban áll, hogy egy nyilt halmaz topologikus képe szintén nyilt, egy kontinuum topologikus képe szintén kontinuum, egy p pont tetszőlegesen kicsiny környezeteinek topologikus képei a p-hez rendelt p' pont tetszőlegesen kicsiny környezetei lesznek, a környezetek határainak topologikus képei pedig szintén határai a környezetek topologikus képeinek. Ezek a tulajdonságok arra a fontos eredményre vezetnek, hogy *minden* MENGER—URYSOHN-*féle görbe topologikus képe is* MENGER—URYSOHN-*féle görbe és emellett még minden pont elágazási rendje is változatlan marad.*[2]

A topologiai kutatásokban azonban nemcsak a topologikus leképzéseknek van nagy jelentőségük, hanem számos más folytonos leképzésnek is. Fontosak pld. azok a folytonos leképzé-

[1] RIESZ 1 és SCHÖNFLIES 1.
[2] MENGER 2 és URYSOHN 2.

sek, amelyek egy görbét valamelyik részhalmazára képeznek le. Ilyen leképzés pld. az is, ha egy körvonalat negyedfordulattal elforgatunk. Ez esetben nyilván egyetlen egy pont sem marad eredeti helyén. Ha azonban az $a \leqq x \leqq b$ intervallumot képezzük le folytonosan önmagára, akkor ezt a leképzést egy olyan folytonos $f(x)$ függvény adja meg, amelynek értékkészlete maga az $a \leqq x \leqq b$ intervallum. Ebből következik, hogy $f(x)-x$ minimuma $\leqq 0$, maximuma pedig $\geqq 0$. Van tehát a és b között olyan x_0 pont is, ahol $f(x_0)=x_0$. Az x_0 pont eszerint a leképzésnél nem változtatja helyét, amit úgy szokás kifejezni, hogy x_0 az $f(x)$ leképzés fixpontja. Látjuk tehát, hogy egy intervallum önmagára való folytonos leképzésénél mindig fellép egy fixpont is, míg a körnek megadtuk olyan önmagára való folytonos leképzését, amelynek nem volt egyetlen fixpontja sem. Ennek az elemi ténynek jelentős általánosítása a következő tétel:[1] *Egy aciklikus görbének valamely részhalmazára való folytonos leképzésénél mindig fellép legalább egy fixpont.* De ezenfelül azt is be lehet igazolni,[2] hogy ez az aciklikus görbék jellemző tulajdonsága, amennyiben *egy nem aciklikus folytonos görbének mindig van fixpont nélküli folytonos leképzése is valamelyik részhalmazára.*

A folytonos leképzésekre vonatkozik ALEXANDROFF következő tétele is:[3] *bármely C görbéhez és bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható C-nek egy ívkomplexumra való folytonos leképzése, amelynél C pontjai ε-nál kisebb távolságra mozdulnak csak el.* A kontinuumok érdekes fajtái a folytonos leképzésekkel definiált ú. n. *abszolút retraktok.* Egy K kontinuumot akkor nevezünk abszolút retraktnak, ha minden K-t tartalmazó halmaz folytonosan leképezhető K-ra oly módon, hogy K pontjai ennél a leképzésnél ne mozduljanak el. Az abszolút retraktok nem feltétlenül görbék, de lehetnek görbék is. Ezekre nézve BORSUK

---

1 SCHERRER 1.
2 NÖBELING 1.
3 ALEXANDROFF 2.

kimutatta,[1] hogy egy *görbe akkor és csakis akkor abszolút retrakt, ha aciklikus görbe.*

A görbék topologikus leképzései között fontosak egy görbe önmagára való leképzései. Ezek tekintetében a következő fogalomalkotás ad alkalmat mélyreható vizsgálatokra: a C görbét akkor nevezzük homogénnek, ha C minden tetszőlegesen választott p és q pontpárjához megadható C-nek olyan önmagára való topologikus leképzése, amelynél a kiválasztott p pont képe a q pont. MAZURKIEWICZ bebizonyította,[2] hogy *a topologikus kör az egyetlen homogén folytonos síkgörbe.* Ezzel szemben VAN DANTZIG kimutatta[3] egy VIETORIS által szerkesztett[4] nem folytonos és irracionális térgörbéről, hogy az is homogén. Mivel MAZURKIEWICZ tétele folytonos sikgörbékre vonatkozik, VAN DANTZIG példája viszont nem folytonos és irracionális térgörbe, az a kérdés merül fel, hogy e két szélső eset közé beiktatható-e a topologikus körön kívül más görbe is? Ez a rendkívül nehéz kérdés ilyen általánosságban még megoldatlan, de egy közbeeső fontos esetet elintéz a következő tétel:[5] *A topologikus kör az egyetlen homogén racionális görbe.*

11. Metrikus terek és univerzális görbék.

Megállapodásunk szerint minden eddigi vizsgálódásunk az n-dimenziós euklidesi térben fekvő görbékre vonatkozott. De eltekintve a kizárólag síkgörbéket illető speciális tételektől, az egész eddig tárgyalt anyag végső alapjai az euklidesi térnek abban a tulajdonságában gyökereznek, hogy egy háromszög két csúcsa közti távolság mindig kisebb, mint a háromszög másik két oldalának hosszúsága együttvéve. Ez azonban nem speciális euklidesi tulajdonság, hanem könnyen átvihető az euklidesinél

---

1 BORSUK 1.
2 MAZURKIEWICZ 3.
3 VAN DANTZIG 1.
4 VIETORIS 1.
5 ALEXITS, l. a következő cikket («Homogén racionális görbékről»)

sokkal általánosabb, ú. n. metrikus terekre is. Ezt a FRÉCHET által bevezetett[1] rendkívüli jelentőségű fogalmat következőkép definiáljuk: Legyen R valamely közelebbről meg nem határozott tetszőleges absztrakt halmaz. R elemeit pontoknak, az R halmazt pedig metrikus térnek nevezzük, ha minden p, q pontpárhoz tartozik egy és csakis egy pq szám (ez a p és q pontok egymástól való távolsága), amelynek a következő tulajdonságai vannak: 1. $pq \geqq 0$, 2. $pq = qp$, 3. $pq = 0$ akkor és csakis akkor, ha $p = q$, 4. bármely három p, q, r pontra fennáll a $pq + qr \geqq pr$ egyenlőtlenség (ú. n. háromszögegyenlőtlenség). Metrikus tér lehet egészen különös, egyáltalában nem geometriai halmaz is; pld. a magyarországi vasúti állomások halmaza is metrikus tér, ha pontokként az állomásokat választjuk, távolságként pedig a legrövidebb menetrendi időt vesszük, ami alatt egyik állomás a másikból vonattal elérhető. Bármely metrikus térben mindazon pontok halmazát, amelyek távolsága p-től $\leqq \varrho$, a p pont köré írt ϱ sugarú gömbnek nevezzük. Ezzel a fogalommal az R metrikus tér nyílt és zárt halmazait, egy pont környezetét és ennek határát formálisan ugyanúgy definiálhatjuk, mint az n-dimenziós euklidesi térben. Az R metrikus teret kompaktnak[2] nevezzük, ha minden végtelen pontsorozatából kiemelhető egy konvergens részsorozat. Ha pedig a több pontból álló R kompakt metrikus tér bármely p, q pontpárjához találhatunk olyan $p_0 = p$, p_1, p_2,... $p_n = q$ véges pontsorozatot, hogy e sorozat két egymásutáni tagja közti távolság tetszőlegesen kicsiny legyen, ha n elég nagy, akkor az R kompakt metrikus teret metrikus kontinuumnak nevezzük. Ha egy metrikus kontinuum minden pontjához meg lehet adni olyan tetszőlegesen kicsiny U_1, U_2,... U_n,... környezeteket, hogy ezek határai ne tartalmazzák a metrikus kontinuum egyetlen metrikus részkontinuumát sem, akkor a metrikus kontinuumot metrikus görbének nevezzük. Látható, hogy a metrikus

[1] FRÉCHET 1.
[2] FRÉCHET 1.

görbe fogalmának definíciója formálisan ugyanaz, mint az euklidesi görbéké. Megvan továbbá minden eszközünk arra is, hogy a görbék pontjainak elágazási rendjét, folytonos görbéket, stb. szintén formálisan ugyanúgy definiáljuk, mint azt az euklidesi görbéknél tettük. Sőt, ha az euklidesi görbéket önálló metrikus tereknek tekintjük, azt látjuk, hogy az euklidesi görbék a metrikus görbéknek csak igen speciális esetei.

Ha a vasúti állomások terére és az ehhez hasonló, egyáltalában nem geometriai szelleműnek látszó metrikus terek lehetőségére gondolunk, úgy látszik, mintha a metrikus görbék túlságosan általános fogalmak lennének és első pillantásra nehezen tételezhető fel, hogy ezekben a rendkívül sokat felölelő terekben olyan sokrétű geometriáról lehessen beszélni, mint amilyent a modern görbeelmélet képvisel. Annál meglepőbb, ha azt állítjuk, hogy *a kizárólag síkgörbékre vonatkozó speciális tételeken kívül minden eddigi tételünk változatlanul érvényes metrikus görbékre is.* Ez a tény akkor válik érthetővé, ha figyelembe vesszük, hogy a görbeelméletben felhasznált fogalmak, mint pld. a görbe, az elágazási rend, a lokális összefüggés, az elválasztási pont, stb. csupa olyan, a görbét körülvevő tértől független tulajdonságot fejeznek ki, amelyek változatlanul megmaradnak, ha egy görbét topologikusan leképezünk egy másik görbére. Ha tehát feltételezhetnénk azt, hogy bármely metrikus görbe topologikusan leképezhető egy euklidesi görbére, akkor a görbeelmélet fogalmainak topologikus invarianciája folytán természetes lenne, hogy a metrikus görbék geometriája az euklidesi görbékével szinte azonos volna. De épp az euklidesi térbe való leképezhetőség tényében éri el a modern görbeelmélet úgyszólván a csúcspontját. Menger ugyanis bebizonyította,[1] hogy *minden metrikus görbe topologikusan leképezhető a háromdimenziós euklidesi tér egy görbéjére, sőt megadható a háromdimenziós euklidesi térben egyetlen egy olyan folytonos görbe is, amelynek megfelelő részére bármely metrikus görbe topolo-*

[1] Menger 4, 5.

gikusan leképezhető. Ha a tétel bizonyitása bonyolult is, az utolsó részében emlitett univerzális görbét, amelynek valamely részgörbéjére bármely metrikus görbe topologikusan leképezhető, mégis érdemes megismernünk. Osszuk a $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq z \leqq 1$ egységnyi kockát 27 egybevágó kockára, amelyeknek élei tehát egyenként $\frac{1}{3}$ hosszúságúak (l. az ábrák közt a C_9 görbét). Ezek közül 7 kockának nincs közös éle az egységnyi kockával. A többi 20 kocka összege egy kontinuum, amelyet K_1-el fogunk jelölni. Osszuk fel most a K_1 kontinuum 20 kockáját rendre 27 egybevágó kockára, vegyük ki ezek közül azokat, amelyeknek a K_1 kontinuum kockáival nincs közös élük. A 400 megmaradó $\frac{1}{9}$ hosszú élű kocka összegét nevezzük K_2 kontinuumnak. Ha K_2 minden kockájával hasonlókép járunk el és ezt az eljárást minden határon túl folytatjuk, a K_1, $K_2, \ldots K_n, \ldots$ kontinuumokat nyerjük. Könnyű kimutatni, hogy ezek közös pontjainak halmaza $C_9 = \prod_{n=1}^{\infty} K_n$ görbe, sőt folytonos görbe. Annál mélyebben fekvő tétel azonban az, hogy C_9 az említett *univerzális görbe,* amelynek megfelelő részére bármely metrikus görbe topologikusan leképezhető.

Ehhez az univerzális görbéhez hasonló Ważewski[1] univerzális aciklikus görbéje. *Ez olyan aciklikus síkgörbe, amelynek megfelelő részére bármely aciklikus görbe topologikusan leképezhető.* Ebből természetesen az is következik, hogy topologiailag minden aciklikus görbe síkgörbének tekinthető, tehát bármely aciklikus görbe önáthatolások nélkül lerajzolható egy papirlapra. Önként kínálkozik ezekután az a probléma, hogy az aciklikus görbéken kívül milyen görbék képezhetők még le topologikusan a sík egy részére? Ezt a kérdést a gráfok elméletében König[2] vetette fel és részben meg is oldotta. Egyszerű és elég általános görbeelméleti megoldását Kuratowski[3] találta meg, midőn bebizonyította, hogy *egy legfeljebb véges számú topolo-*

[1] Ważewski 1.
[2] König 1.
[3] Kuratowski 1.

gikus kört tartalmazó görbe akkor és csakis akkor nem képezhető le topologikusan egy síkgörbére, ha tartalmazza a következő két görbe egyikét: a) öt ív, amelyek közül négy a tetraéder éleihez hasonlóan kapcsolódik, az ötödik pedig két szemben fekvő élet köt össze; b) tíz ív, amelyek egy ötszöget alkotnak átlóival együtt.

A fentemlített két univerzális görbével szemben kimutatható, hogy nincs olyan *reguláris,*[1] illetőleg *racionális*[2] univerzális görbe, amelynek valamilyen részére bármely reguláris, illetőleg racionális görbét topologikusan le lehetne képezni. *De van olyan univerzális síkgörbe, amelynek megfelelő részére bármely síkgörbe topologikusan leképezhető.*[3]

12. A görbeelmélet helye a geometriában.

Az eddigiekben összefoglaltak nem tartalmazzák a görbeelmélet összes fontosabb eredményeit, de még a közölt tételek között is akad elég sok, amelyet általánosabban is lehetett volna fogalmazni. Ennek az az oka, hogy az elmélet egyszerűen megfogalmazható és a szemléletességet kidomborító részeit akartuk bemutatni. Az elmaradt részeket viszont a referens inkább általánosító absztrakcióknak tartja, mint a halmazelméleti geometria szemléletes lényegét feltáró kutatásoknak. Ha a referátumból kimaradtak részben igen nagyjelentőségűek is a specialista számára, de a más téren működő matematikust nem viszik közelebb a görbeelmélet szinte kézzelfogható tartalmához. Ezért nem szerepelnek ebben a referátumban Reschovsky vizsgálatai[4] a racionális görbékről, Whyburn ciklikus elemeinek[5] elmélete, vagy Alexandroff kombinatorikus jellegű kutatásai sem.[6] De

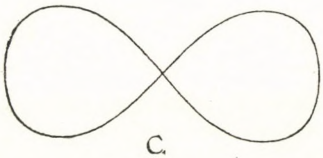
---

1 Nöbeling 2.
2 Reschofsky 1.
3 Sierpiński 2.
4 Reschovsky 1.
5 Whyburn 2.
6 Alexandroff 1.

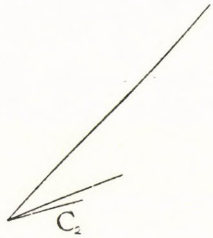
azt reméljük, hogy ezzel szemben a referált anyag mindenki számára vérbeli geometriát jelent. Ennek a geometriának jellemző vonása, hogy igen általános fogalomalkotásokból indul ki és a legegyszerűbb úton igyekszik kapcsolatot találni a klasszikus geometria speciálisabb alakzataival is. Ezen az úton olyan törvényszerűségek merülnek fel, amelyek a gyakran patologikusnak mondott halmazelméleti konstrukciók elszigeteltnek látszó jelenségeit is rendszerbe foglalják. Erre pedig már annál is inkább szükség van, mert még az analitikus módszerekkel definiált görbéknek is lehetnek olyan tulajdonságaik, amelyeket sokan talán a halmazelméleti patologicitások közé sorolnak. Példa erre a C_5 görbe, amely tudvalevőleg az automorf függvények elméletében is jelentős szerepet tölt be, de — mint láttuk — több tulajdonsága egyáltalában nem fedi azt a képet, amit a klasszikus matematikában talán természetesnek gondoltak.

A klasszikus álláspont szerint a geometria csak olyan pontkonfigurációkkal foglalkozik, amelyek analitikus módszerekkel előállithatók. Ez esetben azonban egyrészt nehéz eldönteni, hogy milyen határok közt nevezhetünk egy tárgyat geometriainak, és mikor nevezzük patologikusnak, másrészt maga a függvényekkel való előállítás módszere is sokszor zavarba ejtő eredményekre vezet, ahelyett, hogy tisztázna egy felvetett problémát. Így pld. az olyan görbe, amely egy négyzetet betölt, vagy az olyan felület, amelynek felszíne nulla mértékű, ha úgy tetszik, az analitikus módszer «patologikus» jelenségének is tekinthető. Ha ezeket a tényeket figyelembe vesszük, önként adódik a modern halmazelméleti geometria gondolata, amely a geometriát nem tekinti a függvénytan alkalmazásának, hanem a térfogalom legáltalánosabb formáiból indul ki és egyenként veszi sorra a legspeciálisabb euklidesi térig vezető út állomásait.

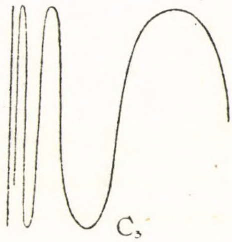
A görbeelmélet az általános halmazelméleti geometriának csak egyik lépcsőfoka. A tér általános elmélete utáni következő lépés ugyanis a dimenzióelmélethez visz. Ennek speciális esete az egydimenziós kontinuumok elmélete: ez az itt vázolt görbe-



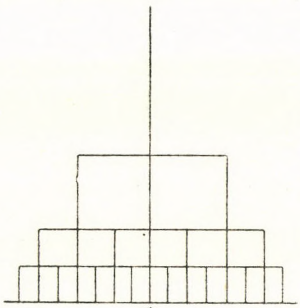
C_1



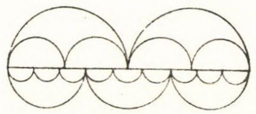
C_2



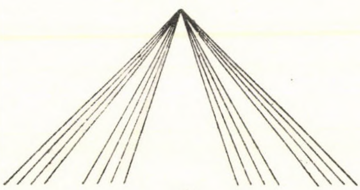
C_3



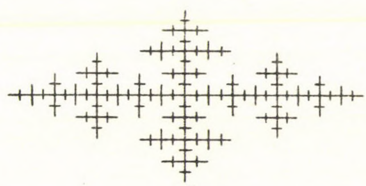
C_4



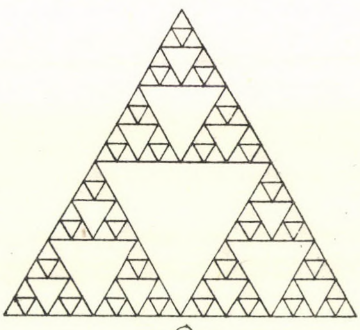
C_5



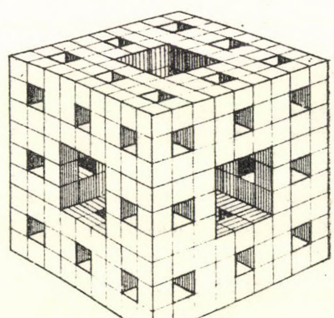
C_6



C_7



C_8



C_9

elmélet. Az euklidesi geometriához vezető úton az ezután következő állomás a metrikus geometria lehetne. Ez azokkal a megszorításokkal foglalkozik, amelyek az általános metrikus tér távolságfogalmán végrehajtva ennél speciálisabb terekhez vezetnek. Ilyen módon sikerült a konvex tereket, a MINKOWSKI-féle teret, a kétdimenziós RIEMANN-féle tereket és az n-dimenziós euklidesi teret is metrikájuk alapján jellemezni, valamint a differenciálgeometria egyes eredményeit a koordináták közti relációktól függetlenül, metrikus úton kifejteni. Reméljük, hogy ezekre a kérdésekre még egyszer visszatérhetünk és megmutathatjuk azt az útat, amely a ponthalmaz általános fogalmával kezdődik és az euklidesi térrel végződik.

*

Kellemes kötelességemnek tartom, hogy e helyen köszönetet mondjak az ábrák készítéséért NAGYBÁNYAI NAGY ZOLTÁN tanár úrnak.

Irodalom.

ALEXANDROFF, P. **1.** *Über kombinatorische Eigenschaften allgemeiner Kurven.* Mathematische Annalen **96** (1927), 512—554 l.

2. *Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung.* Mathematische Annalen **98** (1928), 617—636 l.

ALEXITS, G. v. **1.** *Über Baumkurven.* Monatshefte für Mathematik und Physik **40** (1933), 407—410. l.

2. *Über im kleinen zusammenhängende Kontinua.* Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 7 (1936), 13 l.

AYRES W. L. **1.** *On the regular points of a continuum.* Transactions of the American Mathematical Society **33** (1931), 252—262 l.

2. *On avoidable points of continua with an application to end points.* Mathematische Zeitschrift **34** (1932), 161—178 l.

BORSUK, K. **1.** *Sur les rétractes.* Fundementa Mathematicae **17** (1931), 152—170 l.

DANTZIG, D. VAN **1.** *Über topologisch homogene Kontinua.* Fundamenta Mathematicae **15** (1930), 102—125 l.

FRANKL, F. **1.** *Über die zusammenhängenden Mengen von höchstens zweiter Ordnung.* Fundamenta Mathematicae **11** (1928), 96—104 l.

FRÉCHET M. **1.** *Sur quelques points du calcul fonctionnel.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **12** (1906), 1—74 l.

GEHMAN, H. M. **1.** *Concerning acyclic continuous curves.* Transactions of the American Mathematical Society **29** (1927), 553—568 l.

HAHN, H. **1.** *Mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurve.* Sitzungsberichte der Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien **123** (1914), 2433—2489 l.

HUREWICZ, W. **1.** *Normalbereiche und Dimensionstheorie.* Mathematische Annalen **96** (1927), 736—764 l.

KALUZSAY **1.** *A felületekre vonatkozó Jordan-tétel megfordítása.* Mathematikai és Physikai Lapok **24** (1915), 101—141 l.

KNASTER, B. **1.** *Un continu dont tout sous-continu est indécomposable.* Fundamenta Mathematicae **3** (1922), 247—286 l.

2. *Über rationale Kurven ohne Bögen.* Monatshefte für Mathematik und Physik **42** (1935), 37—44 l.

KŐNIG, D. **1.** *A vonalrendszerek nemszámáról.* Mathematikai és Természettudományi Értesitő **29** (1911), 345—350 l.

KURATOWSKI, C. **1.** *Sur le problème des courbes gauches en topologie.* Fundamenta Mathematicae **15** (1930), 271—283 l.

KURATOWSKI, C. — ZARANKIEWICZ, C. **1.** *A theorem on connected point sets.* Bulletin of the American Mathematical Society **33** (1927), 571—575 l.

KÜNNETH, H. **1.** *Ein Theorem der Kurventheorie.* Monatshefte für Mathematik und Physik **36** (1929), 149—152 l.

MAZURKIEWICZ, S. **1.** *O pewnej klasyfikacyi punktow, leżących na kontinuach dowolnych.* Comptes Rendus de la Société des Sciences, Warszawa **9** (1916), 429—442 l.

2. *Sur les lignes de Jordan.* Fundamenta Mathematicae **1** (1920), 166—209 l.

3. *Sur les continus homogènes.* Fundamenta Mathematicae **5** (1924), 137—146 l.

4. *Sur les courbes d'ordre* $\mathfrak{c}$. Fundamenta Mathematicae **16** (1930), 337—347 l.

MENGER, K. **1.** *Zur Entstehung meiner Arbeiten über Dimensions- und Kurventheorie.* Koninklijke Akademie van Wettenschappen te Amsterdam. Proceedings of the Section of Sciences **29** (1926), 1122—1124 l. (Ez a rövid értekezés a wieni Akadémiánál 1921-ben elhelyezett kézirat lenyomata.)

2. *Über die Dimensionalität von Punktmengen I.* Monatshefte für Mathematik und Physik **33** (1923), 148—160 l.

3. *Grundzüge einer Theorie der Kurven.* Mathematische Annalen **95** (1926), 277—306 l.

4. *Allgemeine Räume und Cartesische Räume I.* Koninklijke Akademie van Wettenschappen te Amsterdam. Proceedings of the Section of Sciences **29** (1926), 476—482 l.

5. *Allgemeine Räume und Cartesische Räume II.* Koninklijke Akademie van Wettenschappen te Amsterdam. Proceedings of the Section of Sciences **29** (1926), 1125—1128 l.

6. *Über reguläre Baumkurven.* Mathematische Annalen **96** (1927). 572—582 l.

7. *Remarks concerning the paper of W. L. Ayres On the regular points of a continuum.* Transactions of the American Mathematical Society **33** (1931), 663—667 l.

8. *Kurventheorie* (Leipzig und Berlin, 1932), 374 l. (Ez a könyv a mai napig egyetlen összefoglaló kézikönyve a görbék modern elméletének.)

MOORE, R. L. **1.** *A theorem concerning continuous curves.* Bulletin of the American Mathematical Society **23** (1916—17), 233—236 l.

2. *Concerning the cut-points of continuous curves and of other closed and connected point-sets.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A. **9** (1923), 101—106 l.

NÖBELING, G. **1.** *Eine Fixpunkteigenschaft der Baumkurven.* Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums **2** (1930), 19—20 l.

2. *Über regulär eindimensionale Räume.* Mathematische Annalen **104** (1932), 81—91 l.

3. *Eine Verschärfung des n-Beinsatzes.* Fundamenta Mathematicae **18** (1932), 23—38 l.

PEANO, G. **1.** *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane.* Mathematische Annalen **36** (1890), 157—160 l.

RESCHOVSKY, H. **1.** *Über rationale Kurven.* Fundamenta Mathematicae **15** (1930), 18—37 l.

RIESZ, F. **1.** *Sur les ensembles discontinus.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **141** (1905), 650—653 l.

SCHERRER, W. **1.** *Über ungeschlossene stetige Kurven.* Mathematische Zeitschrift **24** (1925), 125—130 l.

SCHÖNFLIES, A. **1.** *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten II.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung (1908) Ergänzungsband, 257—259 l.

SIERPIŃSKI, W. **1.** *Sur une courbe dont tout point est un point de ramification.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **160** (1915), 302—305 l.

2. *Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **162** (1916), 629—632 l.

STEPANOFF, W.—TUMARKIN, L. **1.** *Über eine Erweiterung abgeschlossener Mengen zu Jordanschen Kontinuen derselben Dimension.* Fundamenta Mathematicae **12** (1928), 43—46 l.

URYSOHN, P. **1.** *Sur la ramification des lignes cantoriennes.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **175** (1922), 481—483 l.

2. *Mémoire sur les multiplicités cantoriennes II.* Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wettenschappen te Amsterdam **13** (1928), Nr. 4. 172 l.

3. *Über im kleinen zusammenhängende Kontinua.* Mathematische Annalen **98** (1928), 296—308 l.

Vietoris, L. **1.** *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen.* Mathematische Annalen **97** (1927), 454—472 l.

Ważewski, T. **1.** *Sur les courbes de Jordan ne renfermant aucune courbe simple fermée de Jordan.* Annales de la Société Polonaise de Mathématiques **2** (1924), 49—170 l.

Whyburn, G. T. **1.** *Concerning the cut points of continua.* Transactions of the American Mathematical Society **30** (1928), 579—609 l.

2. *Concerning the structure of a continuous curve.* American Journal of Mathematics **50** (1928), 167—194 l.

3. *On regular points of continua and regular curves of at most order n.* Bulletin of the American Mathematical Society **35** (1929), 218—224 l.

4. *Local separating points of continua.* Monatshefte für Mathematik und Physik **36** (1929), 305—314 l.

5. *Concerning points of continuous curves defined bi certain im kleinen properties.* Mathematische Annalen **102** (1929), 313—336. l.

6. *Concerning heriditarily connected continua.* American Journal of Mathematics **53** (1931), 374—384 l.

7. *Concerning addition of regular curves.* Monatshefte für Mathematik und Physik **38** (1931), 1—4 l.

Wilder, R. L. **1.** *Concerning continuous curves.* Fundamenta Mathematicae **7** (1925), 341—377 l.

Zarankiewicz, C. **1.** *Über eine Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes.* Fundamenta Mathematicae **13** (1929), 264—268. l.

2. *Über die lokale Zerschneidung der Ebene.* Monatshefte für Mathematik und Physik **39** (1932), 371—376 l.

Alexits György.

LA NOUVELLE THÉORIE DES COURBES.

Depuis quelques années se développait une théorie générale des courbes. Cette théorie est basée sur les travaux fondamentaux de Menger et Urysohn. Le mémoire présent est une étude sommaire des résultats de la nouvelle théorie des courbes.

Georges Alexits.

HOMOGÉN RACIONÁLIS GÖRBÉKRŐL.

Az előző cikkben («Az új görbeelmélet») szerepel a következő tétel:[1] *A topologikus kör az egyetlen homogén racionális görbe.* Célunk ennek az eddig még meg nem jelent tételnek a bebizonyítása.

Először is azt állítjuk, hogy ha C homogén görbe, akkor C-re nézve fennáll a következő három alternativa:

1° C vagy minden pontjában lokálisan összefüggő, vagy egyik pontjában sem az.

2° C-nek vagy minden pontja elkerülhető, vagy minden pontja elkerülhetetlen.

3° C-nek vagy minden pontja n-edrendű, vagy egyik sem az.

Mivel C homogenitása folytán bármely tetszőleges p pontjához megadható C-nek olyan önmagára való topologikus leképzése, hogy p képe C akármelyik q pontja legyen és a lokális összefüggés, elkerülhető pont, vagy egy pont rendje topologikus leképzésekkel szemben invariáns tulajdonságok, nem lehetséges az, hogy a p pontnak meglegyen egyik vagy másik felsorolt tulajdonsága, topologikus képének pedig, vagyis C akármelyik q pontjának, ne legyen meg ugyanaz a tulajdonsága. Ezzel alternativáink fennállását bebizonyítottuk. Legyen ezekután C homogén racionális görbe. Ha C legalább egy pontban nem volna lokálisan összefüggő, akkor 1° szerint sehol sem lehetne az. Ez azonban lehetetlen, mert akkor irracionális pontokat is kellene tartalmaznia.[2] C tehát minden pontjában lokálisan össze-

---

[1] A következőkben az egész terminologia megegyezik az előző cikkével. Az idézetek is az előző cikk irodalmára vonatkoznak.

[2] ALEXITS 2.

függő, másszóval folytonos görbe. Tegyük fel, hogy a C folytonos és racionális görbének van egy elkerülhető pontja is. Ez sem lehetséges, mert akkor 2° értelmében C minden pontja elkerülhető volna és így C nem lehetne racionális görbe.[1] Eszerint C olyan folytonos görbe, amelynek minden pontja elkerülhetetlen, következéskép C-nek csak megszámlálható végtelen sok elágazási pontja lehet.[2] A C görbének van tehát egy végpontja, vagy egy közönséges pontja is. Tehát a 3° alternatíva szerint C vagy csupa végpontból áll, vagy csupa közönseges pontból. Mivel pedig az első eset lehetetlen,[3] marad a második. Bebizonyitottuk ilyen módon, hogy C minden pontja közönséges pont, ami viszont annyit jelent, hogy C topologikus kör.[4] Épp ez volt a bebizonyítandó tétel.

Alexits György.

SUR LES COURBES RATIONNELLES ET HOMOGÈNES.

On dit qu'une courbe C est homogène, si à tout couple de points p, q de C existe une transformation topologique de C en elle-même par laquelle on peut faire correspondre au point p le point q. Il est connu que le cercle topologique est la seule courbe plane continue et homogène,[5] mais dans l'espace à trois dimensions on peut construire une courbe irrationnelle au sens de M. Menger qui n'est pas continue, mais qui est quand même homogène.[6] Dans la note présente nous démontrons le théorème suivant:

Parmi les courbes rationnelles le cercle topologique est la seule courbe homogène.

Georges Alexits.

---

1 Ayrès 2.

2 Whyburn 4.

3 Menger 3 és Urysohn 2.

4 Menger 1, 3, Urysohn 1, 2 és Frankl 1,

5 S. Mazurkiewicz, Fund. Math. 5 (1924), p. 137—146.

6 D. Van Dantzig, Fund. Math. 15 (1930), p. 102—125.

EGY ÁLTALÁNOS EGYENLŐTLENSÉG.

Kimutatjuk a következő tényt:

Ha a pozitív egész $n>1$, továbbá az

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{1}$$

pozitív számok nem mind egyenlők és a valós $x \neq 0$, akkor:

$$\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}} < \left(\sqrt[n]{a_1^{a_1^x}a_2^{a_2^x}\ldots a_n^{a_n^x}}\right)^x. \tag{I}$$

Itt az $\sqrt[n]{}$ és a hatványok *pozitive* értendők. Nyilvánvaló, hogy az (I)-et így is írhatjuk:

$$\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{(a_1^x+\cdots+a_n^x)} < (a_1^{a_1^x}\ldots a_n^{a_n^x})^x; \tag{I$^{\text{bis}}$}$$

az (I) alak mégis annyiban érdekesebb, hogy benne az

$$\frac{1}{n}(a_1^x+\cdots+a_n^x) \text{ illetve } \sqrt[n]{a_1^{a_1^x}\ldots a_n^{a_n^x}} \tag{2}$$

számtani, illetve *geometriai közepek* szerepe jobban kidomborodik.

Megjegyzések. Evidens, hogy az (I) alatt az «=» jel írandó:
1. az $x=0$ esetben, *minden* természetes n mellett; valamint
2. az $n=1$ esetben, *minden* valós x mellett.

Mindjárt itt óhajtjuk megemliteni, hogy a fönti (I) formula, ha abban $x=1$-et írunk, oly relációba megy át, amely az (I)-gyel lényigileg aequivalens; l. alább *3. Coroll.* (III); és továbbá, hogy ez az utóbbi egyenlőtlenség a G. Pólya—G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I. (Berlin 1925) című munkálat II. Abschnitt, *78. feladatának* utolsó képletével (p. 54) egybeesik, hacsak ez utóbbiban az összes p-súlyok helyett az egységet írjuk. Nevezett szerzők az éppen kiemelt és rokon képletek motiválását — alábbi okfejtésünktől eltérőleg — az $x \log x$ függvény konvexitására alapítják; l. *loco cit.* p. 209 (megoldás az említett *78. feladathoz*).

Meg kell még állapítanunk, hogy itt következő tárgyalásaink egyszerűsége és egyöntetűsége főként annak a körülménynek köszönhető, hogy az x *független vállozót* az (I) felírás képében szerephez juttattuk.

*

Az (I) reláció igazolása. Mindenekelőtt észrevesszük, hogy elegendő az

$$x > 0 \tag{3}$$

esetre szorítkoznunk. Ugyanis, ha írjuk $y>0$ mellett:

$$x = -y; \quad \frac{1}{a_1} = b_1, \ldots, \frac{1}{a_n} = b_n, \tag{4}$$

akkor a pozitiv x argumentum esetére érvényesnek feltételezett (I) alapján:

$$\left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}} = \left(\frac{b_1^y + \cdots + b_n^y}{n}\right)^{\frac{b_1^y + \cdots + b_n^y}{n}} <$$
$$< \left(\sqrt[n]{b_1^{b_1^y} \cdots b_n^{b_n^y}}\right)^y = \left(\sqrt[n]{a_1^{a_1^x} \cdots a_n^{a_n^x}}\right)^x, \tag{5}$$

ami a (3) megszorítás jogosultságát igazolja.

Legyen tehát $x>0$ és vegyük az ($\mathrm{I}^{\mathrm{bis}}$) mindkét oldalán az illető mennyiségek természetes logarithmusait, a

$$\log a_1 = \lambda_1, \ldots, \log a_n = \lambda_n \tag{6}$$

jelölési egyszerűsítésekkel; ezúton kapjuk, hogy

$$(e^{\lambda_1 x} + \cdots + e^{\lambda_n x}) \log \frac{e^{\lambda_1 x} + \cdots + e^{\lambda_n x}}{n} < x(\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + \lambda_n e^{\lambda_n x}). \tag{7}$$

És valóban, ha a

$$\varphi(x) = x \frac{\Sigma \lambda_1 e^{\lambda_1 x}}{\Sigma e^{\lambda_1 x}} - \log \frac{\Sigma e^{\lambda_1 x}}{n} \tag{8}$$

függvényt tekintjük,[1] akkor látjuk, hogy egyrészt

$$\varphi(0) = 0, \tag{9}$$

másrészt pedig

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{x}{(\Sigma e^{\lambda_1 x})^2}\left[(\Sigma e^{\lambda_1 x})(\Sigma \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}) - (\Sigma \lambda_1 e^{\lambda_1 x})^2\right] > 0, \tag{10}$$

lévén $x > 0$ és ugyanakkor egyik közismert LAGRANGE-féle azonosság értelmében

$$(\Sigma e^{\lambda_1 x})(\Sigma \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}) - (\Sigma \lambda_1 e^{\lambda_1 x})^2 = \sum_{1 \leq i < k \leq n} e^{(\lambda_i + \lambda_k)x} (\lambda_i - \lambda_k)^2 > 0, \tag{11}$$

miután hiszen a (6) következtében legalább két λ bizton különböző. Szóval $x > 0$ esetén a (8) alatt írt

$$\varphi(x) > 0; \tag{8$^{\text{bis}}$}$$

miért is bizonyos, hogy érvényes a (7) és így az előzőek alapján az (I^{bis}), valamint végül az (I) is; q. e. d.

*

Az éppen kimutatott (I) egyenlőtlenségből eredő relációk változatos sokaságából kiemeljük a következőket.

1. Corollarium. Az $x = 0$ értéket kirekesztvén, az R. M. FOSTER-féle[2]

$$F(x) = \left(\frac{\Sigma a_1^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \tag{12}$$

középérték az x egész valós tartományában *monoton növekszik.* Ugyanis a (6) és (8) jelölésekkel a (12)-ből:

$$\frac{1}{F(x)} \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{x^2}\left[x \frac{\Sigma \lambda_1 e^{\lambda_1 x}}{\Sigma e^{\lambda_1 x}} - \log \frac{\Sigma e^{\lambda_1 x}}{n}\right] = \frac{\varphi(x)}{x_2} > 0 \tag{13}$$

---

[1] Általában:

$$\Sigma A_1 = A_1 + A_2 + \cdots + A_n; \tag{α}$$

továbbá alább:

$$\Pi A_1 = A_1 A_2 \ldots A_n. \tag{β}$$

[2] H. L. RIETZ—F. BAUER, Handbuch der mathematischen Statistik (Leipzig-Berlin 1930), p. 9.

a (8^{bis}) miatt, hacsak $x>0$; míg az $x<0$ esetre nézve állításunkat a (4) átírással nyert

$$F(-y)=\frac{1}{\left(\frac{\Sigma b_0^y}{n}\right)^{\frac{1}{y}}} \tag{14}$$

összefüggés igazolja.

2. Corollarium. Egyszerűen kiderül, hogy

$$\lim_{x\to 0} F(x)=\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}=G. \tag{II}$$

Megint csak elég az $x>0$ eset tekintetbevétele, mert ha már

$$\lim_{x\to +0} F(x)=G, \tag{15}$$

akkor a (14) alapján nyomban adódik a (II).

A (15)-re nézve mindenekelőtt észrevesszük, hogy jólismert egyenlőtlenség alapján[3]

$$F(x)>\left(\sqrt[n]{a_1^x\ldots a_n^x}\right)^{\frac{1}{x}}=G, \tag{16}$$

másrészt pedig az (I^{bis}) következtében:

$$F(x)<(\Pi a_i^{a_i^x})^{\frac{1}{\Sigma a_i^x}}; \tag{17}$$

mivel továbbá evidenter

$$\lim_{x\to +0}(\Pi a_i^{a_i^x})^{\frac{1}{\Sigma a_i^x}}=G, \tag{18}$$

azért a (15) s így a (II) is igazolva van.

Meg kell jegyeznünk, hogy a (II)-t közvetlen sorfejtéssel is verifikálhatjuk.[4]

Ezekután *per definitionem* tevén:

$$F(0)=\lim_{x\to 0} F(x)=G, \tag{19}$$

---

[3] Nem mind egyenlő pozitív számok *számtani közepe* nagyobb, mint ugyanezen számok *geometriai közepe*.

[4] L. G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya, Inequalities (Cambridge 1934), p. 15 et 42.

az $F(x)$ *folytonossága* a 0 pontban biztosítva van, és tehát az *1. Coroll.* eredménye oda bővül, hogy az $F(x)$ *középérték-függvény* az *egész* $(-\infty, +\infty)$ valós intervallumban monoton növekedő.[4a]

Mindezek alapján mellékesen az is világos, hogy

$$F(0) < F(1) < F(2), \tag{20}$$

azaz

$$G < A < Q, \tag{21}$$

ahol is

$$A = F(1) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \tag{22}$$

az a-k *számtani közepe*, míg

$$Q = F(2) = \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \tag{23}$$

ugyanazon a számok ú. n. *quadratikus közepe.*

3. Corollarium. Tegyük az (I)-ben az $x=1$ értéket, akkor a (22) jelölés szemmeltartásával kapjuk, hogy

$$\left(\frac{\Sigma a_1}{n}\right)^{\frac{1}{n}\Sigma a_1} = A^A < \sqrt[n]{a_1^{a_1} \ldots a_n^{a_n}}. \tag{III}$$

Ugyanezt az egyenlőtlenséget megkapjuk azáltal is, hogy az $y=x \log x$ függvény konvexitási habitusát az $x>0$ tartományban figyelembe vévén, a súlyponthelyzetre vonatkozó JENSEN-féle tételt alkalmazzuk.[5] Ezen a címen ugyanis:

$$A \log A < \frac{1}{n} \Sigma a_1 \log a_1. \tag{III$^{\text{bis}}$}$$

Egyébiránt látjuk, hogy a (III)[6] az (I)-ből azáltal is származik, hogy az (I)-ben az

$$a_1^x = c_1, \ldots, a_n^x = c_n \tag{24}$$

[4a] Cfr. PÓLYA—SZEGŐ, id. mű p. 54, *82. feladat.*

[5] L. pl. BEKE M.: Diff.- és Int.-számítás I. (Budapest 1910), p. 206 sq.

[6] Pontosabban a (III)-mal egyenértékű relácio.

helyettesitésekkel élünk. És megfordítva is, a c-kkel felírt (III)-ból a (24) révén visszakapjuk az (I)-et. Ebben az értelemben tehát az (I) és a (III) aequivalensek. Mindazonáltal az (I) — miként már föntebb reámutattunk — a változó x paraméter jelenléte következtében hajlékonyabb.

Ha nem mind egyenlő x értékekkel:

$$1 < x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n, \tag{25}$$

akkor, tekintvén az $y = x^x$ függvénynek $x > 1$ mellett érvényes monoton növekedését, a (III)-ból kapjuk az

$$a_1 = x_1^{x_1},\ a_2 = x_2^{x_2}, \ldots, a_n = x_n^{x_n} \tag{26}$$

helyettesitésekkel, hogy

$$P = \left(\frac{\Sigma x_1^{x_1}}{n}\right)^{\frac{1}{n}\Sigma x_1^{x_1}} < \sqrt[n]{\Pi x_1^{x_1^{x_1}+1}} = R. \tag{III$^{\text{ter}}$}$$

Észrevesszük, hogy

$$P < x_n^{x_n^{x_n}+1} > x_1^{x_1^{x_1}+1} < R, \tag{27}$$

szóval a (III$^{\text{ter}}$) egyáltalában nem *triviális.*

4. Corollarium. Ha az (I)-ben az $x = 2$ értéket írjuk, akkor a

$$Q^{Q^2} < (\Pi a_1^{a_1^2})^{\frac{1}{n}} \tag{IV}$$

egyenlőtlenséget nyerjük, amelyben Q a (23) alatt értelmezett quadratikus közép.

Ugyancsak a (IV)-gyel aequivalens összefüggést kapunk, ha a (III)-ban az

$$a_1 = c_1^2,\ a_2 = c_2^2, \ldots, a_n = c_n^2 \tag{28}$$

változtatásokat eszközöljük.

5. *Corollarium.* Tegyük végül az (I)-ben az $x = -1$ értéket, akkor a (4) jelölésekkel:

$$\left(\frac{\Sigma b_1}{n}\right)^{\frac{1}{n}\Sigma b_1} < \sqrt[n]{\Pi b_1^{b_1}}, \tag{29}$$

ami persze nem egyéb, mint a (III) a b-kkel felírva. Minthogy pedig az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok *harmonikus közepe:*

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\frac{1}{a_1}} = \frac{n}{\Sigma b_1}, \tag{30}$$

azért a (29) így is írható:

$$\left(\frac{1}{H}\right)^{\frac{1}{H}} < \sqrt[n]{\Pi b_1^{b_1}}, \tag{29^{bis}}$$

vagy ha tetszik

$$H^{\frac{1}{H}} > \sqrt[n]{\Pi a_1^{\frac{1}{a_1}}}, \tag{29^{ter}}$$

azaz végül is:

$$\left(\frac{n}{\sum\frac{1}{a_1}}\right)^{\frac{1}{n}\sum\frac{1}{a_1}} > \sqrt[n]{a_1^{\frac{1}{a_1}}\ldots a_n^{\frac{1}{a_n}}}. \tag{V}$$

*

Tekintve, hogy[7]

$$H = F(-1) < F(0) = G, \tag{31}$$

az (V)-ből kapjuk, miszerint *a fortiori:*

$$(a_1\ldots a_n)^{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}} > \left(a_1^{\frac{1}{a_1}}\ldots a_n^{\frac{1}{a_n}}\right)^n. \tag{V^{bis}}$$

6. Corollarium. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok úgynevezett *kontraharmonikus közepe*

$$C = \frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{a_1+\cdots+a_n} = \frac{(F(2))^2}{F(1)} = \frac{Q^2}{A}, \tag{32}$$

s így a (21) szerint

$$Q^2 = CA < CQ, \tag{33}$$

azaz

$$Q < C. \tag{34}$$

És ha

$$\min(a_1, \ldots, a_n) = a_1 \quad \text{és} \quad \max(a_1, \ldots, a_n) = a_n, \tag{35}$$

---

[7] L. *1.* és *2. Coroll.*

akkor evidenter: $a_1 < C < a_n$; úgyhogy a közvetlenül igazolható

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = a_1 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = a_n \tag{36}$$

relációknak, valamint az összes megelőzőeknek figyelembevételével írhatjuk az

$$a_1 < H < G < A < Q < C < a_n \tag{VI}$$

kapcsolatsort, mint amely a H, G, A, Q, C középértékek egyébként is jólismert nagyságrendje.

Grosschmid Lajos.

EINE ALLGEMEINE UNGLEICHUNG.

Verfasser gibt einen einfachen Beweis und sechs Korollare des folgenden Satzes.

Sind die positiven Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n>1)$ nicht sämtlich untereinander gleich, so gilt für jede reelle Zahl $x \neq 0$ die allgemeine Ungleichung

$$\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}} < \left(\sqrt[n]{a_1^{a_1^x} a_2^{a_2^x} \ldots a_n^{a_n^x}}\right)^x.$$

L. von Grosschmid.

EGY NEVEZETES REZULTÁNSRÓL.[1]

(Kivonat egy GROSSCHMID LAJOS-hoz és SZŰCS ADOLF-hoz intézett levélből.)

. . . .

Valóban elkerülte figyelmemet[2] az a lehetőség, hogy $P(u, v)$-nek és $Q(u, v)$-nek minden valós u mellett közös nem valós v gyöke legyen, oly módon, hogy $u+iv$ mégis csupán végesszámú értéket jelent. A dolog t. i. nem olyan triviális, mint ahogy könyvem megírásánál gondoltam. Most a következő bizonyítást találtam, mely talán valamivel rövidebb az [1] alatt említett bizonyításoknál.

Legyenek az $f(x)$ polinom gyökei: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ és tekintsük egyidejűleg a konjugált komplex együtthatókkal képezett $g(x)$ polinomot, amelynek gyökei a konjugált $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_n$ számok. Akkor

$$f(u+iv) = P(u, v) + iQ(u, v),$$
$$g(u-iv) = P(u, v) - iQ(u, v),$$

oly értelemben, hogy ezek *azonosságok*, melyek nem valós u, v értékekre is fennállanak. Ha most már u_1, v_1 a $P = 0$, $Q = 0$ rendszernek egy megoldása, akkor

$$f(u_1+iv_1) = 0, \quad g(u_1-iv_1) = 0;$$

---

[1] Arról a tételről van szó, melyre GROSSCHMID LAJOS és SZŰCS ADOLF (*Egy nevezetes resultánsról*, Matematikai és Fizikai Lapok, 43. k., 1936, 120. l.) három bizonyítást adott. Az itt használandó jelölések is ugyanazok.

[2] O. PERRON: Algebra, B. 2, zweite Auflage, Berlin und Leipzig, 1933, S. 48.

tehát u_1+iv_1 egyenlő valamelyik ξ_λ-val és u_1-iv_1 valamelyik $\bar{\xi}_\mu$-vel, úgy, hogy $u_1=\frac{\xi_\lambda+\bar{\xi}_\mu}{2}$. Eszerint u_1 csak végesszámú értéket vehet fel és ugyanez adódik v_1-re is: $v_1=\frac{\xi_\lambda-\bar{\xi}_\mu}{2i}$. És ezt kellett kimutatnunk.

. . . .

München, 1937. márc. 15.

O. Perron

(németből fordította *Kőnig Dénes*)

ÜBER EINE RESULTANTE.[1]

(Aus einem Briefe an die Herren L. v. Grosschmid und A. Szűcs.)

. . . .

Ich habe in der Tat die Möglichkeit übersehen,[2] dass $P(u, v)$ und $Q(u, v)$ zu jedem reellen u sehr wohl eine nicht reelle Wurzel v gemeinsam haben könnten, derart, dass die Summe $u+iv$ doch nur endlich viele Werte darstellt. Die Sache ist eben nicht so trivial, wie ich bei Abfassung meines Buches geglaubt hatte. Nun habe ich mir den folgenden Beweis zurecht gelegt, der vielleicht etwas kürzer ist, als die unter [1] erwähnten Beweise.

Betrachtet man neben dem Polynom $f(x)$, dessen Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ seien, auch das Polynom $g(x)$ mit den konjugiert-komplexen Koeffizienten, dessen Wurzeln dann die konjugierten Zahlen $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_n$ sind, so ist

$$f(u+iv) = P(u, v) + iQ(u, v),$$
$$g(u-iv) = P(u, v) - iQ(u, v).$$

---

[1] Es handelt sich um den Satz, für den L. v. Grosschmid und A. Szűcs (*Sur un résultant remarquable*, Matematikai és Fizikai Lapok, B. 43, 1936, S. 127) drei Beweise gegeben haben. Es werden hier dieselben Bezeichnungen benützt, wie dort.

[2] O. Perron: Algebra, B. 2, zweite Auflage, Berlin und Leipzig, 1933, S. 48.

und zwar sind das *Identitäten*, die auch für nicht reelle u, v gelten. Ist nun u_1, v_1 eine Lösung des Systems $P=0$, $Q=0$, so ist

$$f(u_1+iv_1)=0,\ g(u_1-iv_1)=0;$$

also u_1+iv_1 gleich einem ξ_λ und u_1-iv_1 gleich einem $\bar{\xi}_\mu$, also $u_1=\frac{\xi_\lambda+\bar{\xi}_\mu}{2}$. Daher sind für u_1 nur endlich viele Werte möglich; ebenso ergibt sich auch, dass für v_1 nur endlich viele Werte möglich sind: $v_1=\frac{\xi_\lambda-\bar{\xi}_\mu}{2i}$. W. z. b. w.

. . . .

München, den 15. März 1937.

O. Perron.

EGY HALMAZELMÉLETI TÉTELRŐL.

Bebizonyítjuk egészen elemi úton a következő tételt:[1]

Az M nem megszámlálható halmaz minden x eleméhez legyen az M véges számú, de x-től különböző eleme hozzárendelve; ekkor van az M-nek olyan N végtelen részhalmaza, hogy az N egyetlen eleme sincs az N valamely eleméhez hozzárendelve.[2]

Kimutatjuk először, hogy létezik egy n egész szám úgy, hogy az M halmaznak végtelen sok olyan eleme van, amelyekhez pontosan n elem van hozzárendelve. Valóban, feltéve az ellenkezőt, csak véges sok olyan elem lenne, amelyekhez 0 elem, véges sok, amelyekhez 1 elem, véges sok, amelyekhez 2 elem lenne hozzárendelve,...; vagyis az M halmazt kimerítenők ezen megszámlálható sok véges halmazzal, ami lehetetlen. Azok az elemek, amelyekhez n elem van hozzárendelve, az ő hozzárendeltjeikkel együtt alkossák a H (végtelen) halmazt. H tehát szétesik végtelen sok (nem szükségkép idegen) elemrendszerre, amelyek mindegyike egy «alapelem»-ből és n «hozzárendelt»-ből áll.[3] Két eset lehetséges: 1. H-nak minden eleme csak

---

[1] A problémát függetlenül TURÁN PÁL is felvetette.

[2] Ha az M kontinuumnyi számosságú, akkor N kontinuumnyi számosságúnak is megválasztható, amint azt LÁZÁR DEZSŐ kimutatta a KŐNIG GYULA tétel segítségével. V. ö. D. LÁZÁR, On a problem in the theory of aggregates, *Compositio Mathematica* 3 (1936), 304. l.

[3] Az ezután következő okoskodás analóg azzal, amely RAMSAY: On a Problem of Formal Logic (*The Foundation of Mathematics and Other Logical Essays*, London 1931) 82. oldalán található.

véges sok ilyen rendszerben fordul elő, 2. van a H-nak legalább egy olyan x_1 eleme, amely végtelen sok rendszerben fordul elő.

Az első esetben vegyünk egy tetszőleges R_1 rendszert és hagyjuk el a H-ból mindazokat a rendszereket, amelyekben az R_1-nek legalább egy eleme előfordul. A megmaradókból vegyünk ki ismét egy rendszert, R_2-t és hagyjuk el mindazokat, amelyekben az R_2 egy eleme előfordul. Ezt az eljárást nyilván korlátlanul folytathatjuk, mert H végtelen sok rendszeréből minden egyes lépésnél csak véges sokat hagyunk el. Az így adódó $R_1, R_2, \ldots$ rendszerek alappontjai szolgáltatják a keresett N halmazt.

A második esetben hagyjuk el H-ból azokat a rendszereket, amelyekben x_1 nem fordul elő. Így olyan H_1 halmazt nyerünk, amely végtelen sok rendszerből áll és mindegyik tartalmazza az x_1 elemet. Itt is két eset lehetséges: vagy a H_1-nek minden x_1-en kívüli eleme csak végesszámú rendszerben fordul elő, vagy pedig van olyan x_1-től különböző x_2 elem, amely végtelen sokban fordul elő. Az első esetben vegyünk egy tetszőleges R_1 rendszert es hagyjuk el H_1-ből mindazokat a rendszereket, amelyekben az R_1-nek legalább egy az x_1-től különböző eleme előfordul. A megmaradókból vegyünk ki ismét egy rendszert, R_2-t és hagyjuk el mindazokat, amelyekben R_2 valamely az x_1-től különböző eleme előfordul. Mindig véges sok rendszert hagyván el, ezt az eljárást korlátlanul folytathatjuk. Az így adódó $R_1, R_2, \ldots$ rendszerek alapelemei, elhagyva közülük az esetleg előforduló x_1-et, szolgáltatják a kívánt N halmazt. A második esetben hagyjuk el ismét H_1-ből azokat a rendszereket, amelyekben x_1 nem fordul elő; így nyerjük a H_2 halmazt, mely végtelen sok rendszerből áll és mindegyik rendszer tartalmazza az x_1 és x_2 elemet; s. i. t. Így eljárva képezzük a $H_1, H_2, \ldots, H_k$ halmazokat mindaddig, amíg valamelyikre nézve az első eset nem következik be. Tekintettel azonban arra, hogy végtelen sok rendszer $(n+1)$ közös elemmel nem birhat, legkésőbb H_n-re vonatkozólag az első esetnek kell bekövetkeznie. Ha az első eset H_k-ra következik be, akkor az utasítás szerint képezett

$R_1, R_2, \ldots$ rendszerek közül azon véges sokat elhagyva, melyek alapeleme az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ elemek valamelyike, a megmaradók alapelemei szolgáltatják a keresett N halmazt.[4]

Grünwald Géza.

ÜBER EINEN MENGENTHEORETISCHEN SATZ.

In dieser Arbeit beweisen wir den folgenden Satz: Jedem Elemente x der nicht abzählbaren Menge M seien endlich viele von x verschiedene Elemente von M zugeordnet; dann besitzt die Menge M eine unendliche Teilmenge N mit der Eigenschaft, dass nie ein Element von N einem Elemente von N zugeordnet ist.

Géza Grünwald.

---

[4] A bizonyított tételnek, amint erre KŐNIG DÉNES professzor úr volt szíves figyelmemet felhívni, a következő gráfelméleti fogalmazás adható. Egy megszámlálhatatlanul végtelen sok szögpontot tartalmazó irányított gráf minden szögpontjából (kifelé) végesszámú él indul ki. Akkor a gráf szögponthalmazának van olyan végtelen N részhalmaza, hogy bárhogy választunk is ki két szögpontot az N-ből, ezek nincsenek egy éllel összekötve.

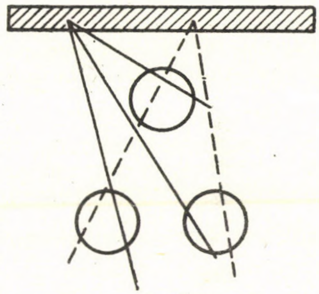
ZÁPOROK (SHOWEREK) NAPI INGADOZÁSA.

A kozmikus sugárzásra vonatkozó minden következtetés tulajdonképpen extrapolálást jelent a nagyságrendekkel kisebb energiájú földi (radioaktív) sugarakon tett tapasztalatokból. De éppen ebben rejlik a kozmikus sugárzás fontossága, mert segítségével módunkban áll elméleti fizikai tételeink helyességét az anyag és sugárzás kölcsönhatásáról rendkívül nagy energiák esetében is ellenőrizni.

Újabban már a radioaktív γ sugarakon is megfigyelték, hogyha a sugár atommaggal találkozik és energiája elegendő nagy (több mint az elektron nyugalmi energiájának kétszerese), úgy egy ú. n. elektronpárra, vagyis egy elektronra és egy pozitronra bomlik szét, melyek a γ sugár eredeti irányától kevéssé eltérő irányokban folytatják útjukat. A kozmikus sugarak energiája minden esetben nemcsak hogy több, de 100, sőt 1000-szerese az elektron nyugalmi energiájának. Ennek megfelelően, ha atommaggal találkoznak nemcsak egy, de sok, esetleg 1000-nél több elektronpárra bomlanak szét. Ezen elektronpárok összességét záporoknak (showereknek) nevezzük. Az elektronpárok körülbelül egyforma energiát nyernek, függetlenül attól, hogy mekkora volt az ütköző sugár energiája. Heisenberg újabban kimutatta (levélbeli közlés), hogy nemcsak γ sugarak ütközésekor keletkezhetnek elektronpárok, hanem bármely korpuszkuláris sugárzásból is, hacsak energiája elegendő nagy, pontosabban, ha a hozzárendelhető hullámhossz $10^{-13}-10^{-14}$ cm-nél kisebb; és az elektronpárokon kívül a záporokban neutrinók is keletkezhetnek, melyek maguk is képesek másodlagos záporokat kiváltani.

Mindenekelőtt arról kell röviden szólnom, hogy a záporokat mi módon tudjuk észlelni. Kétféle kisérleti berendezés áll rendelkezésre. Az egyik a WILSON-kamra. Mágneses térbe helyezve a kamrát, a záporkorpuszkulák energiájuknak és töltésük előjelének megfelelően különböző görbületű pályákat futnak be és így egyenkint észlelhetők. Amennyiben ólomlemezt helyezünk a WILSON-kamra terébe, úgy evvel a zápor keletkezés valószínűségét megnöveltük, jobban mondva a zápor keletkezési helyét a kamrába helyeztük át; megfigyelhetjük tehát vajjon a záport kiváltó sugár hagy-e ködnyomot, vagy nem, vagyis ionizáló-e vagy sem. A másik berendezés a koincidencia módszer egy

1. ábra.



2. ábra.

alakja (ROSSI). A GEIGER—MÜLLER-féle számlálócsőben minden áthaladó ionizáló sugár egy feszültséglökést hoz létre. Több egymásfölött tengelyeikkel ugyanazon síkban elhelyezett számlálócsőben (1. ábra, vertikális koincidenciák), ha egyszerre létesül feszültséglökés, úgy ebből arra következtethetünk, hogy egyetlen ionizáló sugár haladt át rajtuk és szólaltatta meg valamennyi számlálócsövet. A 2. ábra szerinti háromszög elrendezésben azonban egyetlen sugár nem képes mindhárom számlálócsövön áthaladni, ha tehát mégis mind a három egyszerre szólal meg, úgy vagy egy sugár haladt két csövön át és egy szekundärje jutott a harmadik csőbe (szaggatott vonalak), vagy mindegyik csövön más sugár hatolt át (kihúzott vonalak), melyek egyidejűleg keletkeztek és ezért az esetek túlnyomó részében egyazon zápor részei. Míg tehát a WILSON-kamra segítségével a záporrészecskéket egyénenkint tudjuk megfigyelni, a koincidencia módszerrel nem állapíthatjuk meg, hogy hol keletkezett a zápor, vagy hogy hány részből áll, viszont nagy statisztikai anyagot nyerünk a számlálócsövek feletti anyagban keletkezett záporok számáról. A záporok száma annál nagyobb, minél közelebb van a záporok keletkezési helye a számlálócső elrendezéshez (kisebb a szétszóródás) és minél nagyobb rendszámú elemben keltődnek. Ezért a berendezés fölé 1·5 cm vastag ólomréteget szokásos helyezni. Többet nem érdemes, mert a záporrészek hatótávolsága körülbelül 1·5 cm ólom lévén a vastagabb rétegben keletkező záporok közül is csak az alsó 1·5 cm-ben kiváltottak juthatnak a számlálócsövekbe. Az ólomréteg természetesen elfogja a levegőben keletkezett záporrészecskéket.

Sok kísérlet utal arra, hogy a záporokat nem maga a primär kozmikus sugárzás váltja ki, hanem közbülső sugárzások segítségével. GEIGER és FÜNFER nyomán záporok keletkezésekor a következő sugárfajokat különböztetjük meg:

A) primär kozmikus sugárzás, légkörünkön kívül ered, azonos a vertikális koincidenciákat kiváltó primär kozmikus sugárzással, melyről a szélességi effektus alapján tudjuk, hogy jobbára elektromosan töltött korpuszkulákból áll.

B) sugárzás foton természetű, keletkezik az *A)* sugárzásból mint szekundär sugárzás. Kiváltja a záporokat.

C) sugárzás elektronpárokból áll, a *B)* sugárzásból keletkeznek atommaggal való ütközéskor.

D) sugárzás foton természetű, a *C)* sugárzásból mint fékezési sugárzás keletkezik, keménysége körülbelül a radioaktiv γ sugarakéval egyenlő.

E) sugárzás elektron természetű, a *D)* sugárzás abszorpciójakor fényelektromos és COMPTON folyamatokban keletkezik, energiája aránylag igen kicsi.

A *C)* és *E)* sugárzások azok, melyek együttvéve okozzák a zápor elrendezésben (2. ábra) észlelhető koincidenciákat.

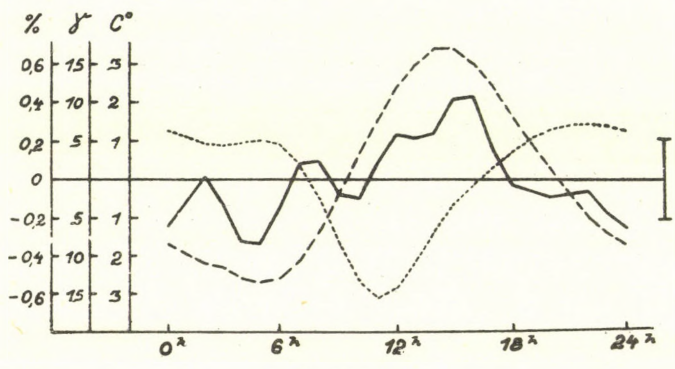
Az újabb kisérletek nem igazolták minden tekintetben GEIGER és FÜNFER felfogását a záporok keletkezéséről. Egyrészt az *E)* és *D)* sugárzások létezése nem egészen biztos; AUGER mérései szerint záporokat ionizáló sugár is kivált, tehát a *B)* sugárzás részben biztosan nem foton természetű; és végül JOHNSON[1] azt tapasztalta, hogy tengerszinten a záporok kisebb szélességi effektust mutatnak mint a vertikális koincidenciák, továbbá az azimuthoz képest szimmetrikus az eloszlás, amiből mindenesetre következik, hogy az *A)* sugárzás nem azonos természetű a vertikális koincidenciákat létesítő sugárzással.

Az *A)* sugárzás természetének meghatározására szolgálnak a jelen dolgozatban ismertetendő vizsgálatok is. Amennyiben a záporokat ugyanaz a primärsugárzás váltja ki, amelyik az egymás fölött elhelyezett számlálócsövek esetében a vertikális koincidenciákat, úgy utóbbi tulajdonságait zápor elrendezésben is észlelnünk kellene. A vertikális koincidenciákat létrehozó sugárzás egyik jellegzetes tulajdonsága, hogy erőssége a déli órákban növekedést mutat (napi menet). Sikerült bebizonyitanunk,[2] hogy e napi menetet a föld mágnesesterének hatása, jobban mondva annak ingazodása hozza létre. A földi mágneses tér erőssége ugyanis a déli órákban éri el legalacsonyabb értékét és így a földre érkező elektromos töltésű részekre gyakorolt eltérítő hatása délben a legkisebb; tehát délben kisebb energiájú részek is elérik földünket, s így az intenzitás növekedik. A napi menet ilyképpen való magyarázatából szükségszerűen következik, hogy a vertikális koincidenciákat elektromos töltésű primärsugárzás váltja ki. Amennyiben a záporok intenzitásában hasonló napi periodust észlelnénk, úgy ebből következnék; hogy az *A)* sugárzás ugyancsak korpuszkuláris (ionizáló) természetű.

JOHNSON és STEVENSON,[3] valamint saját méréseim szerint, a légnyomás változása a záporok számát erősebben befolyásolja,

[1] TH. H. JOHNSON: Phys. Rev. 47, 318, 1935.
[2] J. BARNÓTHY u. M. FORRÓ, Zeitschr, f. Phys., 104,534 1937.
[3] TH. H. JOHNSON u. C. E. STEVENSON: Phys. Rev. 47, 578, 1934.

mint a vertikális koincidenciák számát. Miután ezen légnyomási effektus lényegében abszorpciós effektus, következik, hogy minél kisebb energiájú egy sugárzás, annál jobban befolyásolja erősségét a légnyomás változása, tehát az a tény, hogy a záporok esetében nagyobb barométereffektust kaptunk, úgy értelmezendő, hogy a záporokat egy kisebb energiájú puhább sugárzás váltja ki; minél puhább viszont egy sugárzás, annál erősebben téríti el a mágneses tér. Ha tehát a záporokat korpuszkuláris sugárzás váltja ki, úgy azt kellene várnunk, hogy a záporok esetében



3. ábra.

ben a napi menet erősebben, nagyobb amplitudóval jelentkezik, mint a vertikális koincidenciák esetében.

1935. decemberétől 1936. május közepéig folytatólagosan, továbbá 1936. szeptemberében, összesen 110 napon keresztül regisztráltam a záporok napi menetét koincidencia berendezéssel, a számlálócsövek és az ólom elhelyezése a 2. ábrán látható. A záporok közepes óraértékeit közepes barométerállásra korrigáltam a napi közepekből számított barométereffektus alapján. Az így nyert napi menet görbéjét (%-ban) a 3. ábra tünteti fel. A pontozott vonal a földmágneses tér horizontális komponensének közepes napi menetét mutatja ($\gamma = 10^{-5}$ Gauss-egységben). Láthatjuk, hogy a záporok erősségének maximuma és a horizontális intenzitás minimuma semmiképpen sem esik egybe. Korrelációt számítva[4] a két menet közt a korrelációs együttható $r = -0{\cdot}056 \pm 0{\cdot}21$ értékéhez jutunk, vagyis az eredmény úgy fogható fel, hogy a két mennyiség változása közt nem észlelhető összefüggés. Ezzel szemben vertikális koincidenciák esetében a számítás $r = -0{\cdot}891 \pm 0{\cdot}041$ korrelációs együtthatót ad a vertikális koincidenciák erőssége és a horizontális intenzitás napi menete közt. A vertikális koincidenciák esetében azt is kimutattuk (l. c.), hogy a napi menet amplitudója a téli hónapokban — hol a földmágneses tér napi menete kisebb — szintén kisebb mint nyáron. A záporokkal mért anyagot ezért két csoportba osztva is megvizsgáltam: az egyik csoportba soroltam a december, január és márciusban végzett méréseket, mikor a mágneses tér értéke $8{\cdot}10^{-5}$ Gauss volt a napi középérték alatt, míg a másik csoportba az április május és szeptemberben végzett méréseket soroltam, hol a mágneses tér déli minimuma $22{\cdot}10^{-5}$ Gauss-al volt kisebb, mint a napi középérték. A záporerősség ingadozásának amplitudója mindkét esetben egyforma volt, a korreláció a záporok és a földmágneses tér napi menete közt alig nagyobb hibájánál, azonban a téli hónapokban pozitív értékű, vagyis a mágneses tér csökkenésekor a záporok intenzitása is csökkenni látszik, mely jelenségnek fizikai értelmet tulajdonítani nem tudunk. A 3. ábrán szaggatott vonallal berajzoltam a mérés ideje alatti közepes napi hőmérsékletváltozás menetét is. Mint láthatjuk a záporok és a hőmérsékletváltozás menete szembeötlően párhuzamos; a közöttük számított korrelációegyüttható értéke $r = 0{\cdot}72 \pm 0{\cdot}10$, úgyhogy a két mennyiség közti összefüggés reálisnak tekinthető. A temperaturaeffektus $0{\cdot}074 \pm 0{\cdot}010$ % pro fok Celsiusra adódik.

Az eredményekből azt a következtetést vonhatjuk, hogy a vertikális koincidenciákkal ellentétben a záporok napi menete független a földmágneses tér napi változásától; ami kis amplitudó található, azt a hőmérséklet változása hozza létre.

---

[4] Többszörös korreláció a záporok száma a mágneses tér intenzitása és a hőmérséklet napi menetei közt.

Míg azonban vertikális koincidenciák esetében a légkör hőmérsékletének növekedésekor a sugárzás intenzitása csökken, ($TE = -0{\cdot}097 \pm 0{\cdot}017$ % pro fok C) addig a záporok esetében a hőmérséklet növekedésekor a záporok száma nő.

Feltéve, hogy a záporokat kiváltó *A)* sugárzás elektromosan töltött korpuszkulákból áll, azt vártuk, hogy a mágneses tér menetével tükörképes napi menet a záporok esetében a nagyobb amplitudójú lesz, mint a vertikális koincidenciák esetében, hiszen az *A)* sugárzás, mint a barométereffektusból láthattuk, puhább. Evvel szemben azt tapasztaltuk, hogy a napi menet kisebb és nincs összefüggésben a mágneses térrel. Szükségszerűen azt a következtetést kell levonnunk, hogy az *A)* sugárzás nem elektromos töltésű, s így nem ionizáló sugárzás.

Felmerülhet még az az aggály, hogy talán a záporok esetében azért nem találunk napi menetet, mert a záporokat egy súlyosabb részekből, pl. protonokból álló sugárzás váltja ki, mint a vertikális koincidenciákat, s így az *A)* sugárzás — annak ellenére, hogy energiája valamivel kisebb — mágneses merevsége nagyobb és így kevésbé befolyásolható a földmágneses tér változásával. Störmer elmélete alapján azonban kitűnik, hogy a mi mágneses szélességi helyzetünk mellett, egy töltéssel rendelkező sugárnak, hogy egyáltalában elérhesse földünket, oly nagy energiájúnak kell lenni, hogy a különbség, amennyivel egy proton sugárzás kevésbé befolyásolható a mágneses tér által, mint egy elektron sugárzás, csupán 30 % ; ami nem képes a záporok napi menetének hiányát megmagyarázni.

Mielőtt azonban véglegesen arra következtetnénk, hogy az *A)* sugárzás, ellentétben Geiger és Fünfer elképzelésével nem ionizáló természetű, a mérési anyagot egy teljes évre kell kiterjeszteni, hogy a legnagyobb mágneses ingadozást mutató hónapokról is kellő statisztikus pontosságú anyag álljon rendelkezésre.

A mérések lehetővétételeért dr. Tangl Károly-nak, a Kísérleti Fizikai Intézet igazgatójának és a Természettudományi Tanácsnak köszönettel tartozom.

Budapest, 1937. március 10. *Forró Magdolna.*

TAGESGANG DER SCHAUERINTENSITÄT.

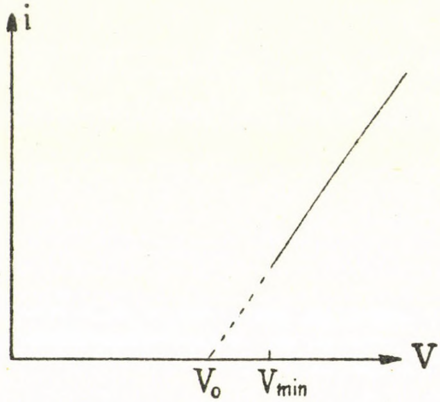
Ich habe mit einer Dreieck-Zählrohr-Anordnung und 1·5 cm *Pb* über den Röhren den täglichen Verlauf der Schauerintensität während 110 Tagen registriert. Aus den Messergebnissen kann man auf keinen Zusammenhang zwischen den Schauerintensitätsverlauf und dem Tagesgang der Horisontalintensität des erdmagnetischen Feldes schliessen; obzwar bei einer schauerauslösenden primär Strahlung aus geladenen Korpuskeln ein grösserer — durch das erdmagnetische Feld verursachter — Tagesgang zu erwarten wäre wie der Tagesgang der Vertikalkoinzidenzen. Aus dem grösseren Barometereffekt der Schauer folgt nähmlich, dass die schauerauslösende Strahlung weicher ist. Die primäre schauerauslösende Strahlung scheint also aus nicht geladenen Teilchen zu bestehen. Demgegenüber zeigte sich eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Gang der Aussentemperatur, also ein Maximum spät Nachmittag. Der positive Korrelationskoeffizient beträgt $r = 0{\cdot}72 \pm 0{\cdot}10$ und der Temperatureffekt $TE = 0{\cdot}07 \pm 0{\cdot}01$ % pro Grad Celsius.

Magdalene Forró.

A GEIGER—MÜLLER-FÉLE SZÁMLÁLÓCSŐBEN LÉTREJÖVŐ KISÜLÉSEK KATÓDSUGÁR OSCILLOGRÁFFAL VALÓ VIZSGÁLATA.

1. A Geiger—Müller-féle számlálócső.

A számlálócső kisnyomású (10—200 mm) gázban elhelyezett fémhengerből és tengelyében kifeszített fémszálból áll. Kössük egy változtatható feszültségű áramforrás negatív pólusához a hengert, pozitív pólusához pedig a szálat. Elegendő nagy feszültség esetén a csövön áram halad át. A feszültséget változtatva meghatározhatjuk a számlálócső feszültség-áram karakterisztikáját. SVEN WERNER mérései[1] a következő eredményt adják (1. ábra). A henger és a szál közti feszültséget (V) növelve, egy meghatározott V_0 eléréséig áram jelenléte nem figyelhető meg. Ha a V_0 értékét túllépjük, a csövön rövid ideig tartó áramlökések haladnak át. Folytonos áramot csak a V_{min} elérése után mérhetünk. A feszültséget tovább növelve kis áramerősségeknél (kb. 10 μA-ig) az áramerősség lineárisan nő a feszültséggel.



1. ábra.

[1] Zs. f. Ph. 90, 1934, 384.

A csőben végbemenő folytonos kisülés tehát a V_{min}-on alul nem tartható fenn. A karakterisztika V_0 és V_{min} közé eső instabil részét előállíthatjuk, ha a csövet pl. fénybesugárzásnak tesszük ki. Ilyen módon elérhetjük, hogy folytonos áram halad át a csövön abban az esetben is, ha a henger és szál közti feszültség a V_0 és V_{min} közti feszültségtartományba esik. Sven Werner mérései szerint az így nyert áramerősség értékek a fényintenzitástól függetlenek és a stabil karakterisztika meghosszabbítását adják. A fénybesugárzással tehát nem új kisülést állítottunk elő, hanem ebben a területben instabil karakterisztikát stabilizáltuk. Az így előállított szaggatott vonal az áramlökések megjelenésével definiált V_0 kezdeti feszültségnél éri el az abscissa-tengelyt.

A csőben lejátszódó jelenséget a következőképpen magyarázhatjuk.[2] A számlálócsövön különböző sugárzások — például kozmikus sugárzás — jelenlétében egyenlőtlen időközökben nagysebességű korpuszkulák haladnak át. Ezek az útjukba eső gázrészeket ionizálják. A keletkezett elektrónok és pozitív ionok az elektrosztatikus térnek megfelelő sebességgel az elektródokhoz futnak. Ez a sebesség a V feszültséggel nő. Mikor a V_0 kezdeti feszültséget elérjük, a szál felé tartó elektrónok az elektromos térben egyre gyorsulva elegendő energiát nyernek ahhoz, hogy maguk is ionizálhassanak. Az így keletkezett szekundér elektrónok a térben gyorsulva új lökésionizáció primér elektrónjaivá válnak s a keletkező elektrónok száma egyre nő, végül a szálra egy elektrón lavina zúdul. A lavina nagysága a V értékétől függ s a csövön áthaladó korpuszkula csak mint kiváltó ok szerepel. Miután a lavina utolsó elektrónja is a szálhoz érkezett, a cső ismét eredeti állapotába kerül, áram nem halad át rajta. A feszültség emelésével a lavina elektrónjainak száma és sebessége egyre nő s a V_{min} eléresekor képes lesz arra, hogy maga termeljen a henger közelében egy új elektrónt. Ez az egy elektrón elegendő ahhoz, hogy új lavinát

---

[2] Zs. f. Ph. 97, 1935, 455. (Hippel und Frank).

indítson meg; ez ismét termel egy elektrónt. A csövön tehát folytonos áram halad át, ha cső feszültsége V_{min}-nál nagyobb. Ezt az áramot a külső ionizáló korpuszkula indítja meg, de fennmaradásához már külső ionizáló hatásra nincs szükség. Azt mondhatjuk, hogy a kisülés a V_0 és V_{min} között önállótlan, a V_{min}-on túl pedig önálló. Az önálló kisüléshez szükséges új elektrón keletkezhet pl. azáltal, hogy az elektródok felé tartó iónok a gázrészekkel ütközve azokat ionizálják. A lökésionizáció közben elektrón ugrás által fény keletkezhet, mely a hengeren fotoeffektus útján szintén kiválthat elektrónt.

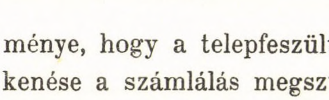
Mivel kis áramerősségeknél a karakterisztika egyenes, a csőben folyó áramot jellemezhetjük a

$$V - V_0 = R_b i$$

egyenlettel, ahol R_b-t a cső belső ellenállásának nevezhetjük.

Látható, hogy a V_0 és V_{min} közti instabil területben a cső alkalmas arra, hogy a hozzá érkező korpuszkulákat megszámolja, mivel ebben a területben minden egyes korpuszkula érkezését a cső megfigyelhető áramlökéssel jelzi. Azért a V_0 és V_{min} közti feszültségtartományt számlálási tartománynak nevezzük.

A számláláshoz szükséges V feszültség a gyakorlatban használatos számlálócsöveknél 1000 Volt nagyságrendű. Ezt a feszültséget rendszerint egymásután kapcsolt száraztelepek rendszere szolgáltatja. A számlálócső ezek szerint számolni fog, ha a közvetlenül ráhelyezett telepfeszültség értéke a számlálási tartományba esik. Maga a számlálási tartomány aránylag szűknek mondható (10 Volt nagyságrendű). Ennek az a következménye, hogy a telepfeszültségnek néhány százalékkal való csökkenése a számlálás megszűnését, vagy a lökésnagyság lényeges változását idézi elő; néhány százalékkal való emelkedése pedig a csőben önálló kisülést okozhat. Nagyobb számlálási tartományt kapunk, ha a csövön levő feszültséget nem ebben a



2. ábra.

tartományban választjuk meg, hanem elegendő nagy (10^9 Ohm nagyságrendű) R_k külső ellenállás (2. ábra) bekapcsolása után a csőre V_{min}-nál nagyobb feszültséget helyezünk. A kozmikus korpuszkula érkezése a csőben önálló kisülést idéz elő. A fellépő áram következtében az A pont feszültsége egyre csökken s mikor a csövön levő feszültség a V_{min} alá jut, a kisülés véget ér.

A számlálócsőhöz érkező korpuszkula a csőben áramlökést vált ki, melyet alkalmas berendezéssel felerősíthetünk. Ezáltal a számlálócső alkalmassá válik korpuszkuláris sugárzások vizsgálatára. Különösen hasznosnak bizonyult a számlálócső a kozmikus sugárzásnak úgynevezett koincidencia-módszerrel való vizsgálatában. A koincidencia berendezésben két számlálócsövet tengelyükkel párhuzamosan egymás fölött helyezünk el. Alkalmas berendezésekkel elérhetjük, hogy a koincidencia-készülék csak azon sugarak érkezését jelzi, melyek mindkét csövön egy meghatározott időnél kisebb időn belül haladnak át. Ez a meghatározott idő a készülék felbontóképessége. Számolni fogja tehát a készülék azt a kozmikus sugarat, mely mindkét csövön áthalad (valódi koincidencia), de jelezni fogja két olyan kozmikus sugárnak érkezését is, melyek közül az egyik csak az egyik csövön, a másik csak a másik csövön halad át, de érkezésük között a felbontóképességnek megfelelő időnél kisebb idő telt el (véletlen koincidencia).

A készülék ezek szerint alkalmas arra, hogy vele a kozmikus sugárzás intenzitásának irányok szerint való eloszlását vizsgáljuk.[3] A véletlen koincidenciák által okozott hiba annál kisebb, minél kisebb a koincidencia-készülék felbontóképessége. Ezidőszerint legkisebb felbontóképességgel (2.10^{-5} sec) rendelkezik a BARNÓTHY-féle koincidenciajelző készülék.[4]

A koincidencia-készülékkel elérhető legjobb felbontóképesség nagyságát a számlálócsőben létrejövő kisülés szabja meg, a

---

[3] Lásd pl. J. BARNÓTHY und M. FORRÓ: Zs. f. Physik. 100. 1936. 742.
[4] J. BARNÓTHY: Die Naturwissenschaften. Heft 47, 1933. S. 835.

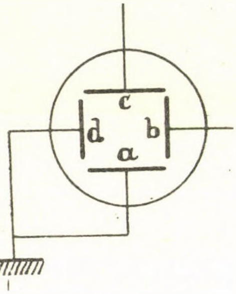
felbontóképesség határát tehát ennek ismeretével határozhatjuk meg. Dolgozatom célja ennek a kisülésnek vizsgálata.

Megvizsgáljuk, milyen hatással van a kisülésre a számlálócsőre helyezett feszültség nagysága, a számlálócsőhöz kapcsolt R_k külső ellenállás nagysága, a cső által képviselt kapacitás, a töltőgáz nyomása stb.

A számlálócső kisülésének és feltöltődésének lefolyására a számlálócső szálának feszültségváltozásaiból (a 2. ábrán látható berendezésben az *A* pont feszültségváltozásaiból) következtethetünk.

Ennek megvizsgálása céljából olyan eszközre van szükségünk, mely kis késleltetési idejével s kis tehetetlenségével követni tudja ezen gyors feszültségváltozásokat. Erre a célra alkalmas eszköz a katódsugár oscillograf.

Eltérítő lemezei közül az *a* és *d* lemezeket (3. ábra) földeljük. A katódsugár s ezzel az ernyőn jelentkező világító folt vízszintes irányban tér ki, ha a *b* lemeznek, s függőlegesen, ha a *c* lemeznek adunk a földétől különböző feszültséget.



3. ábra.

Ha az *A* pontot a *c* lemezhez kapcsoljuk, a világító folt az *A* pont feszültségváltozásainak megfelelőleg függőlegesen fog mozogni. MEDICUS forgótükörrel vizsgálta a folt mozgását.[5] Azt találta, hogy az *A* pont feszültsége minden egyes feszültséglökés alkalmával kezdeti értékéről rendkívül gyorsan legnagyobb értékére ugrik, azután jóval lassabban eredeti helyzetébe tér vissza. E szerint a számlálócsőben a következő jelenség játszódhat le. A korpuszkula által kiváltott elektrónlavina a szál pozitív feszültségét csökkenti. A kisülés megszakadása után a szál az R_k ellenálláson át visszanyeri eredeti feszültségét. Azt is mondhatjuk, hogy az egész folyamat a számlálócső gyors

[5] Zs. f. Ph. 74, 1932, 350.

kisüléséből és lassú feltöltődéséből áll. A kisülés időtartamát MEDICUS 2.10^{-5} sec-ra becsülte.

A következőkben a folyamat első részét, tehát a számlálócső kisülését vizsgáljuk. A második rész különösebb érdeklődésre nem tart számot, mivel ez nem más, mint a cső által képviselt kondenzátornak az R_k ellenálláson át való feltöltődése.

A kisülés időbeli lefolyását megvizsgálhatjuk, ha a világító foltot a kisülés időtartama alatt a *b* lemez segítségével vízszintes irányban mozgatjuk, az *A* pontot pedig éppen úgy, mint az előbb, a *c* lemezhez kötjük.

2. A katódsugár vízszintes eltérítésére szolgáló berendezés.

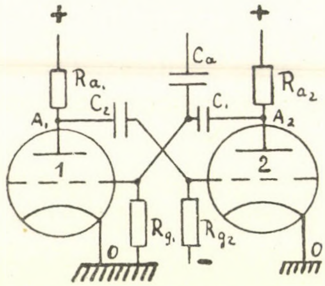
A katódsugár vízszintes eltérítésének szokásos módja az, hogy miután a vizsgálandó feszültséget a *c* lemezre helyeztük, a *b* lemezre változtatható frekvenciájú sinus, vagy kipp[6] rezgéseket helyezünk s a frekvenciát addig változtatjuk, míg a vízszintes eltérítések a függöleges kiütésekkel szinkron mennek végbe. Ebben az esetben minden egyes periódust ábrázoló görbe az ernyőn egymást fedi s a görbék egymást erősitve fotografálható képet adnak.

A vízszintes eltérítésnek ezt a fajtáját periódikus vízszintes eltérítésnek fogom nevezni. Vizsgálataimban erre a célra egy LEYBOLD u. v. ARDENNE-féle kippkészülék szolgált.

A számlálócsőben létrejövő kisülések azonban nem egyenlő időközökben következnek be. A fenti berendezéssel legfeljebb egy-egy kisülés képe jelenik meg az ernyőn, minden egyes kisülésé más és más helyen. A kisülés gyors lefolyása következtében a kép fényszegény, fényképezésre s pontos mérésre nem alkalmas.

6 A kipprezgések önindukciómentes berendezésekkel előállított periódikus feszültségváltozások. Ilyen kipprezgések keletkeznek pl., ha kondenzátor ohmikus ellenálláson át töltődik mindaddig, míg feszültsége a vele párhuzamosan kapcsolt glimmlámpa gyúlási feszültségét eléri, ekkor a glimmlámpán keresztül kisül, míg feszültsége ennek oltási feszültségére csökken. A glimmlámpa kialvása után a kondenzátor ismét töltődni kezd s az előbbi jelenség ismétlődik.

Ha azt a célt tűzzük ki, hogy a számlálócső kisülését ábrázoló görbék az oscillográf ernyőjén egymást födve fotografálható képet adjanak, olyan berendezést kell szerkesztenünk, mely eleget tesz a következő kívánalmaknak. *a)* A vízszintes kitérítés akkor kezdődjék, mikor a kisülés megindul. *b)* A katódsugár egyenletes sebességgel mozogjon vízszintes irányban legalább addig, míg a kisülés tart. *c)* A következő kisülés újra a nyugalmi pontban találja a katódsugarat.



4. ábra.

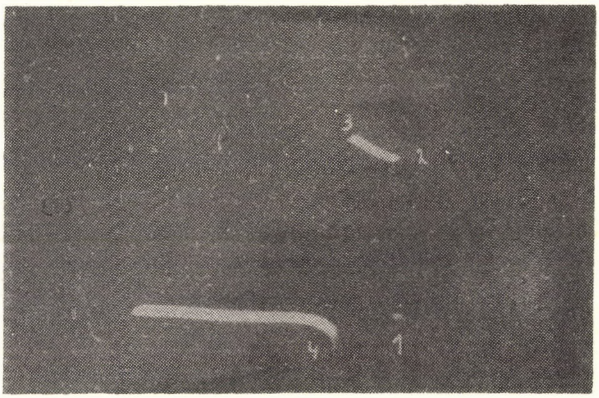
Erre a célra alkalmasnak találtam a következőkben ismertetendő relét, melyet katódsugár oscillográfnál először alkalmazott Knoop és Gábor.[7] A 4. ábrán látható berendezésben adjunk a 2. cső rácsának oly nagy negatív feszültséget, hogy anódárama éppen megszűnjék. Nevezzük a rendszernek ezt az állapotát, melyet az 1. cső nagy anódárama és a 2. cső nulla anódárama jellemez, I. állapotnak. Juttassunk az 1. cső rácsára a C_a kondenzátoron át negatív feszültséglökést. Az 1. cső rácsfeszültsége a lökés kezdeti pillanatában csökkenni kezd. Ez a csökkenés az 1. cső által erősítve emeli a 2. cső rácsfeszültségét, anódáramát megindítja s ez az áramnövekedés a C_1 kondenzátoron át az 1. cső rácsfeszültségét tovább csökkenti. A visszacsatolás következtében tehát az 1. cső rácsfeszültségcsökkenése önmagát tovább csökkenti. Vizsgálatainkban elhanyagolható kicsiny τ idővel[8] a megindító negatív lökés kezdete után az 1. cső rácsa nagy negatív lökést, a 2. cső rácsa pedig nagy

[7] Gábor: L. Forschungsheft der Stud. Ges. f. Höchstspannungsanlagen. Berlin 1927.

[8] τ-t a rendszer késleltetési idejét a $C_{k_1}R_{a_1}$ és a $C_{k_2}R_{b_2}$ időkonstansok határozzák meg, ahol C_{k_1} és C_{k_2} az 1. és 2. csövek káros rácskapacitásai, R_{a_1} az 1. cső külső, R_{b_2} pedig a 2. cső belső ellenállása. A késleltetési időt tehát a káros kapacitások csökkentésével s kis belső ellenállású, nagyteljesítményű csövek alkalmazásával lehet csökkenteni. Készülékemnél τ 10^{-6} sec nagyságrendű volt.

pozitív lökést kap. Ezáltal a rendszer átmegy a II. egyensúlyi állapotba, melyben az 1. cső anódárama nulla, a 2. csövön pedig nagy anódáram s rácsáram folyik át.

Ezt az állapotot két ok szüntetheti meg. Vagy az 1. cső rácsfeszültsége emelkedik az R_{g_1} ellenálláson át olyan értékre, hogy anódárama megindulhat, vagy a 2. cső rácsfeszültsége csökken az R_{g_2}-n át addig, míg a rácsáram megszűnése után anódárama csökkenni kezd. A két jelenség közül az, amelyik előbb következik be, a rendszert visszaviszi az I. állapotba.

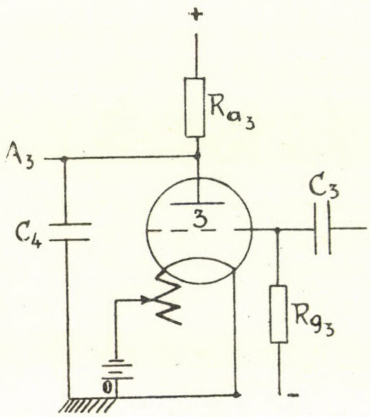


5. ábra.

Ebben az állapotban a rendszer tartósan megmarad, de újabb külső negatív lökés ismét végig játszatja a rendszerrel a fennt leírt jelenséget.

Mivel a II. egyensúlyi helyzet beállta után az 1. cső rácsfeszültsége annál gyorsabban nő, minél kisebb a $C_1R_{g_1}$ időkonstans s a 2. cső rácsfeszültsége annál gyorsabban csökken, minél kisebb a $C_2R_{g_2}$ időkonstans, a II. állapot élettartamát a két időkonstans közül a kisebbik határozza meg. Ha a $C_1R_{g_1}$-et nagynak választjuk a $C_2R_{g_2}$-hez képest, az utóbbinak változtatásával a II. állapot élettartamát tetszőlegesen változtathatjuk. Pozitív feszültséglökés a rendszert meghagyja az I. állapotban.

Vizsgáljuk meg periodikus vízszintes eltérítéssel az A_1 pont feszültségváltozásait (5. ábra). A lökés megérkezte előtt az A_1 pont feszültségét az 1. pont ábrázolja. A lökés átviszi a rendszert a II. állapotba, az 1. cső anódárama megszűnik s az A_1 pont feszültsége rendkívül gyorsan a 2. pontig emelkedik. A II. állapot tartama alatt az A_1 pont feszültsége lassan tovább emelkedik. Ennek oka az, hogy az anódáram megszűnése miatt az anód áramforrás pozitív pólusának feszültsége emelkedik. Mikor a rendszer visszakerül az I. állapotba, az A_1 pont feszültsége a 3. pontból a 4. pontba kerül.

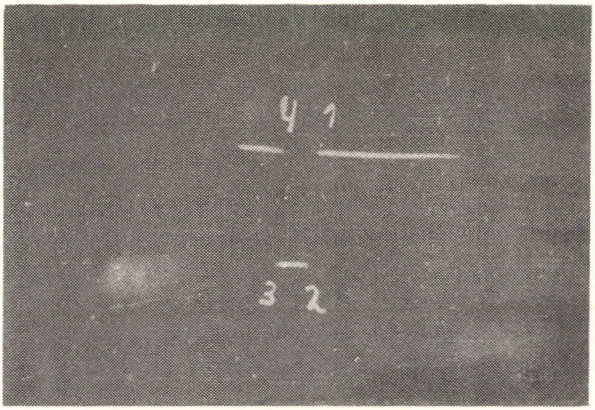


6. ábra.

A kívülről jövő negatív lökés tehát az A_1 ponton pozitív feszültséglökést idéz elő gyakorlatilag a negatív lökés érkezésének pillanatában, melyet egy bizonyos idő elteltével negatív feszültséglökés követ, mely a rendszert a II. állapotból visszaviszi az I. állapotba. Ez azonban a külső lökés lefolyásától teljesen függetlenül következik be s időpontját egyedül a $C_2R_{g_2}$ időkonstans határozza meg. A feszültséglökés nagysága gyakorlatilag i_1 R_{a_1}-el egyenlő, ahol i_1 az 1. cső anódárama a I. állapotban.

A fennt leírt relé A_1 pontját kapcsoljuk a C_3 kondenzátoron át a wolfram katódot tartalmazó 3. cső rácsára (6. ábra). A 3. cső rácsa oly nagy negatív feszültségen van, hogy anódáram éppen nem folyik át rajta. Vizsgáljuk meg, hogy a relé állapotváltozásai közben hogyan változik az A_3 pont feszültsége. Abban az esetben, ha a C_4 kapacitás értéke nulla, az A_3 pont feszültségváltozásairól a 7. ábrán látható képet kapjuk.

A külső negatív lökés hatására az A_1 pontból nagy pozitív lökés érkezik a 3. cső rácsára s a cső anódáramát nulláról a telítési tartományba emeli; ennek megfelelőleg az A_3 pont feszültsége az 1. pontból a 2. pontba kerül. Jóllehet az alatt az idő alatt, míg a relé a II. állapotban van, a 3. cső rácsfeszültsége az R_{g_3} ellenálláson át csökken, nagy $C_3R_{g_3}$ időkonstans esetében a cső a telítési tartományban marad. Mikor a relé visszakerül az I. állapotba, a 3. cső anódárama ismét megszűnik, s az A_3 pont feszültsége a 3. pontból a 4. pontba, kezdeti értékére kerül vissza.

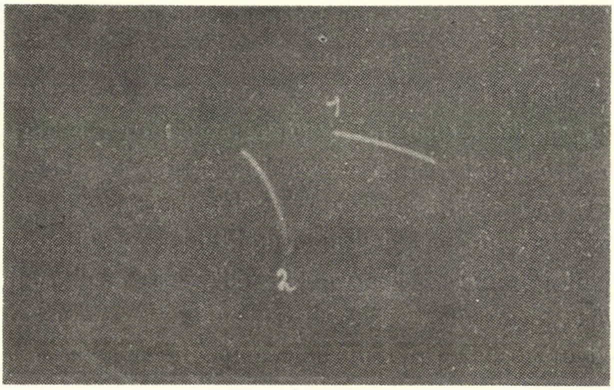


7. ábra.

Mivel a telítési áram nagysága egyedül az izzító áram erősségétől függ, azt mondhatjuk, hogy a külső negatív lökés kezdetének pillanatában az A_3 ponton ‾|_|‾ alakú feszültséghullám indul meg, melynek szélessége, azaz időtartama a $C_2R_{g_2}$ időkonstanstól, magassága pedig a 3. cső izzító áramerősségétől függ.

Ha a C_4 kondenzátor értéke nem nulla, az A_3 pont feszültsége másképpen változik (8. ábra). Míg a 3. cső anódárama nulla, az A_3 pont az áramforrás pozitív pólusának feszültségén van (1. pont), a C_4 kondenzátor az áramforrás feszültségére van feltöltve. A telítési áram megindulásakor C_4 a vezetővé lett 3. csövön át kezd kisülni. A telítési áram következtében az

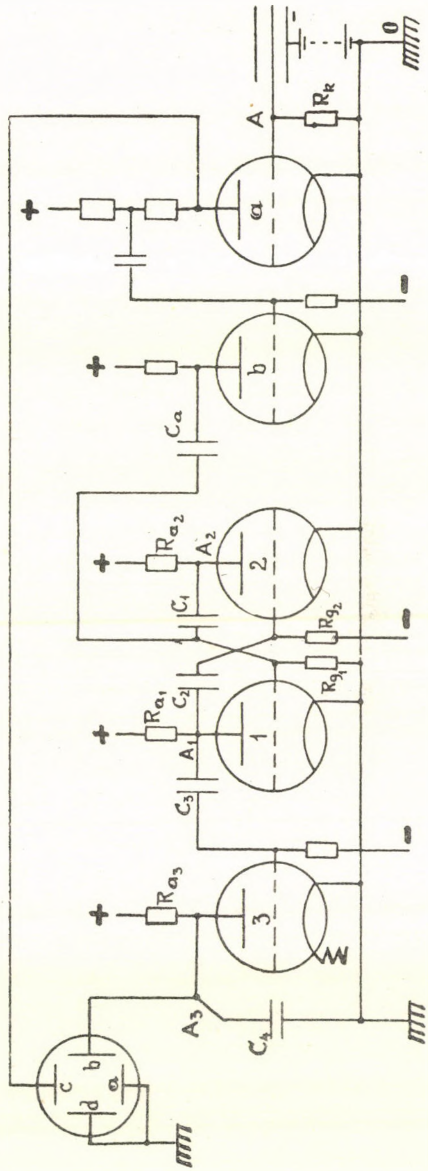
A_8 pont feszültsége nem exponenciálisan, hanem egyenletesen csökken. Ha a telítési áram i_t, a cső belső ellenállása R_{b_8}, az A_8 pont feszültsége az $i_t R_{b_8}$ érték elérésekor megszűnik csökkenni. Ha a telítési áramot úgy választjuk meg, hogy az A_8 pont feszültsége a II. állapot végéig ne érje el ezt az értéket, akkor az A_8 pont feszültsége a II. állapot egész tartama alatt az idővel egyenletesen változik, majd a II. állapot megszüntével (2. pont) exponenciálisan nő eredeti értékéig. Ez az exponenciális szakasz megfelel a C_4 kondenzátornak az R_{a_8} óhmikus ellenálláson át való újra töltődésének.



8. ábra.

Mostanáig a periodikus vízszintes eltérítésre szolgáló berendezést használtuk fel arra, hogy készülékünk egyes pontjainak feszültségváltozásait megvizsgáljuk s ezáltal működéséről világos képet nyerjünk. A továbbiakban nincs szükségünk a periodikus vízszintes eltérítésre, erre a célra készülékünket használjuk fel a következőkben ismertetendő módon.

Ha a katódsugár oscillográf b lemezét (3. ábra) az A_8 ponthoz kapcsoljuk, a katódsugár a nyugalmi állapotban a b lemez felé hajlik s a világító folt az ernyő szélén jelenik meg. A külső lökés érkezésének pillanatában a világító folt vízszintes irány-



9. ábra.

ban egyenletes sebességgel mozogni kezd s mozog a $C_2R_{g_2}$ időkonstanssal szabályozható ideig. Ennek befejeztével az R_{a_3} által változtatható idő alatt eredeti helyére kerül vissza. Ezzel tehát követelményeinknek megfelelő berendezést nyertünk a vízszintes eltérítésre.

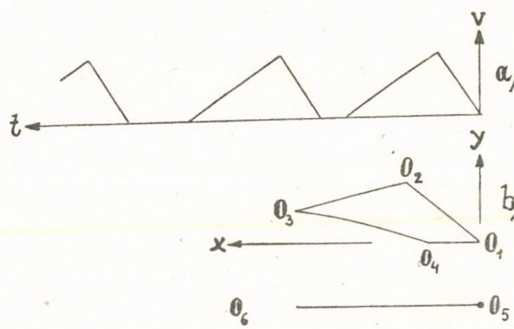
Jóllehet a kozmikus sugarak a számlálócső A pontján (2. ábra) negatív feszültséglökéseket indítanak meg, az A pontot mégsem kapcsolhatjuk közvetlenül a c eltérítő lemezhez. Ezáltal ugyanis az R_k ellenállással parallel kapcsolnánk az oscillográf kondenzátorai között fekvő gázzal töltött tér ellenállását, mely változó s az R_k-nál nagyságrendileg kisebb értéket képvisel. Ezért az A pontot az «a» elektroncső (9. ábra) rácsához kapcsoltam, ennek anódlemezéről a kisülés pozitív lökés formájában került az oscillográfhoz. Ezt a pozitív lökést a b csővel ismét negatív lökéssé kellett alakítanom, hogy a relét működésbe hozza. Ezzel egyúttal azt is elértem, hogy a relé lökései nem jutottak vissza a számlálócsőhöz. Az «a» cső a számlálócső lökéseit az oscillográf felé erősíti, a b cső felé azonban erősítésre nincs szükség, azért ebben az irányban az «a» cső anódellenállásának csak egy részét használtam fel s ezzel a késleltetési időt kisebbítettem. Mivel a késleltetési idő az «a» és 1. csövek külső ellenállásával, a b és 2. csövek belső ellenállásával nő, nagy teljesítményű csöveket kellett alkalmaznom. Az «a» és b helyen a Vatea Px4200, az 1. és 2. helyeken a Vatea Ex 730 csöveket használtam.

Katódsugár oscillográf gyanánt Leybold—Ardenne-féle $Ab3$ katódcső szolgált.

Számlálócsövem 0·01 cm átmérőjű acélszálból s 3·70 cm hosszú, 3·70 cm belső átmérőjű sárgaréz hengerből állt. A számlálócső üvegcsőben nyert elhelyezést. Az acélszálat az üvegcső két leforrasztott vége tartotta, így egyéb szigetelő alkalmazása nem volt szükséges s a töltőgáznak idegen szigetelő anyaggal való szennyezését elkerültem.

3. Az oscillogramm kiértékelése.

Ha valamely nem periodikusan ismétlődő feszültségváltozás (10 *a)* ábra) oscillogrammját meg akarjuk kapni, a feszültségváltozást az oscillográf *c* lemezéhez vezetjük, a *b* lemezt pedig a fennt leírt berendezés A_3 pontjához kötjük. Az oscillogramm kiértékelésére a következő módszert dolgoztam ki. A világító folt nyugalmi helyzete az O_1 pont (10. *b)* ábra). A vizsgálandó feszültségváltozás bekövetkeztével a *c* lemez a katódsugarat felfelé, a *b* lemez pedig egyenletes sebességgel vízszintesen akarja mozgatni. Végeredményben a folt az O_1O_2 utat teszi



10. ábra.

meg. Ekkor a vizsgálandó feszültség csökkenni kezd. Mikor a folt az O_3 pontot eléri, az egyenletes vízszintes kitérítés megszűnik s a folt exponenciálisan csökkenő sebességgel visszafelé kezd mozogni. Az O_4 pontban a vizsgálandó feszültség elérte eredeti értékét, az O_4O_1 darab vízszintes.

A folt az O_1 pontban megvárja a következő feszültségváltozást s új útja az előbbit födni fogja, ha a feszültségváltozások időbeli lefolyása egyforma. A fényképezéshez elegendő idő elteltével a *c* lemezt alkalmas fix negatív feszültséghez kötjük azért, hogy a folt az eddig leírt görbét ne zavarja. A nyugalmi pont ekkor az O_5-be kerül, a folt pedig az oscillogramm alá egy abscissa tengelyt húz.

Az így nyert oscillogrammnak $O_1O_2O_3$ részét rajzolta a folt egyenletes vízszintes kitérés mellett. Ha azt akarjuk, hogy az O_3O_4 részből egy darab még ide tartozzék, a 3. cső izzító áramának kisebbítésével csökkentjük a vízszintes kitérés sebességét. Az egyenletes vízszintes kitérítés időtartamát úgy fogjuk megválasztani, hogy a kérdéses feszültségváltozásnak csak érdeklődésünkre számottartó része essék ezen tartományba.

A nyert oscillogramm kiértékelése végett helyezzük a derékszögű koordináta rendszer kezdőpontját az O_1 pontba. Az abscissa tengely irányát már kijelölte a katódsugár. Az $O_1O_2O_3$ darab minden egyes pontjához rendelhetünk tehát egy (x, y) értékpárt. A kérdéses szakaszt akkor ismerjük teljesen, ha megtudjuk mondani, hogy ezen x-ek bármelyikéhez mekkora t idő s bármely y-hoz mekkora v feszültség tartozik. Mérjük úgy az időt és a feszültséget, hogy $x = 0$-nak $t = 0$, $y = 0$-nak $v = 0$ feleljen meg. Ha az oscillográf kitérítési érzékenysége e mm/Volt, valamely y_1-hez tartozó feszültség

$$v_1 = \frac{y_1}{e} \text{ Volt.} \tag{1}$$

Vizsgáljuk most azt, hogy valamely x_1-hez mekkora t_1 tartozik. Míg a folt vízszintes irányban x_1 utat tett meg, a b eltérítő lemezhez $\frac{x_1}{e}$ feszültség érkezett. Ezalatt az idő alatt a feltöltött C_4 kondenzátor, ha kapacitása C,

$$Q = C\frac{x_1}{e}$$

töltést vesztett.

De

$$Q = \int_0^{t_1} i dt.$$

Mivel azonban i nem más, mint a kérdéses idő alatt konstans i_t telítési áram,

$$C\frac{x_1}{e} = i_t t_1$$

s ebből

$$t_1 = \frac{C}{ei_t} x_1.$$

Ebben az egyenletben C és e könnyen mérhető. A 3. cső telítési áramát a következőképpen mértem. Miután az O_5 pontból az abscissa tengely irányát a katódsugárral kijelöltettem, kivettem a reléből a C_4 kondenzátort, ekkor a folt minden külső lökés érkezésekor az O_6 pontba ugrott. Az O_5O_6 távolság nyilván nagyobb, legfeljebb egyenlő az előbb húzott vízszintes vonal hosszával, mivel most a C_4 nélkül van ideje az A_3 pontnak legkisebb értékét felvenni, mielőtt a relé a telítési áramot megszüntetné. Az A_3 pontnak ez a lehető legnagyobb feszültségváltozása:

$$i_t R_{a_3} = \frac{\overline{O_5O_6}}{e},$$

tehát

$$i_t = \frac{\overline{O_5O_6}}{eR_{a_3}},$$

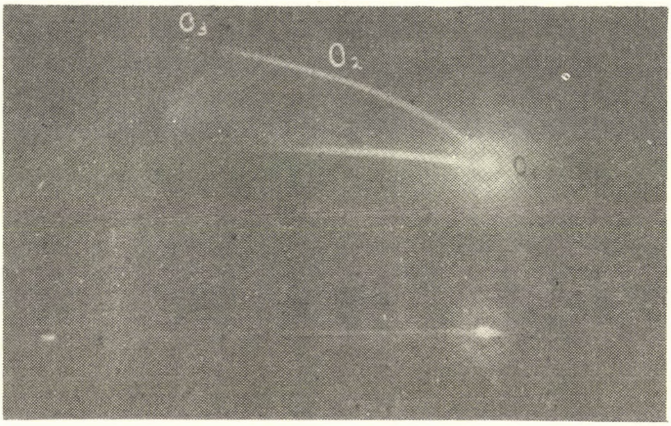
azaz

$$t_1 = \frac{CR_{a_3}}{\overline{O_5O_6}} x_1. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) segítségével az oscillogrammot kiértékelhetjük.

4. A számlálócső kisülésének oscillogrammja.

A fent leírt módon a katódsugároscillográf ernyőjén megkaptam a számlálócső kisülésének oscillogrammját (11. ábra). A felvétel exponálási ideje 30 sec volt. Az ábrából látható, hogy a kozmikus beütés megérkezte után az A pont feszültsége először gyorsan, azután lassan negatív értelemben nő, azaz a feltöltött számlálócső kisülése megkezdődött. Látható, hogy a jelenség ezen első része, melyet az O_1O_2 szakasz ábrázol, az exponálási idő alatt történt minden beütésnél egyformán játszódik le. Az O_2 ponton túl haladva azt látjuk, hogy egyes kisülések megszakadnak, de a meg nem szakadt kisülések görbéi az O_1O_2 folytatásában továbbra is egymásra esnek. Az O_3 felé haladva, a görbe egyre halványabb lesz. Ez annak a jele, hogy egyre több és több kisülés szakad meg s az O_3-ig alig néhány kisülés jut el. Látható, hogy a kisülés megszakadása után az A pont feszültsége negativ értelemben ismét csökken, azaz a számlálócső az R_k ellenálláson át újra feltöltődik. Mivel az egyes kisülések különböző időkben szakadtak meg, végső állapotát is különböző időpillanatokban éri el a cső.



11. ábra.

Sven Werner tapasztalatait felhasználva a 11. ábra alapján a számlálócső működését a következőképpen magyarázhatjuk. A kozmikus sugár megérkezése után a számlálócsőben önálló kisülés jön létre. Az A pont feszültsége a kisülés közben egyre negatívabb lesz, tehát több elektron érkezik a szálhoz, mint amennyit onnan az R_k ellenállás lefutni enged. E miatt a számlálócsövön uralkodó feszültség csökken, a kisülési áram egyre gyengébb lesz. Egy bizonyos feszültség elérése után (O_2) a kisülések kezdenek megszakadni. Ez a feszültség megfelel Sven Werner V_{min}-ának, melyen alúl nem tudta az önálló kisülést tartósan fenntartani. Ezen feszültség és a számlálócső kezdeti feszültsége által határolt tartományba az egyes kisülések különböző mélyen hatolnak be s mielőtt a kezdeti feszültséget elérnék, valamennyien megszakadnak.

A kisülés tartama alatt a számlálócső feszültsége és a rajta áthaladó áram erőssége változik. Ezek pillanatnyi értékét jelöljük V, ill. i-vel Ha a számlálócső kezdeti feszültsége V_0, akkor Sven Werner szerint

$$V - V_0 = iR_b$$

ahol R_b, a számlálócső belső ellenálľása az általunk használt áramerősségeknél ($i < 1 \mu A$) konstans. Mivel az i nagyságát a $V - V_0$ feszültség szabja meg, a

$$V - V_0 = E$$

feszültséget nevezhetném a számlálócső hatásos feszültségének. Az így átalakult

$$E = iR_b \tag{3}$$

egyenlet azt mondja, hogy a számlálócsövet árameloszlás szempontjából helyettesíthetjük olyan óhmikus ellenállással, mely a cső belső ellenállásával egyenlő, végein pedig akkora feszültség hat, mint a cső hatásos feszültsége.

A kisülés kezdetének pillanatában a cső feszültsége (V) egyenlő a telep feszültségével (V_T). Ugyanekkor a hatásos feszültség értéke

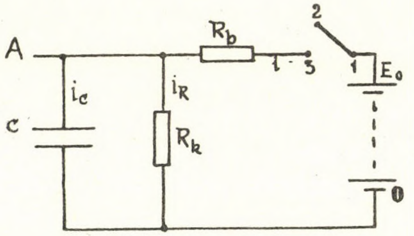
$$E_0 = V_T - V_0.$$

A hatásos feszültségnek ezt az értékét a hatásos feszültség kezdeti értékének fogom nevezni.

Kisülés közben a szálra felhalmozódott elektrónok miatt a V értéke egyre csökken s vele együtt fogy a hatásos feszültség is. A V legalacsonyabb értékét éri el, mikor a V_0-al egyenlővé válik, ekkor a hatásos feszültség értéke

$$E = V_0 - V_0 = 0.$$

Árameloszlás, s ami bennünket érdekel, az A pont feszültségváltozásai szempontjából a számlálócső köre ezek alapján a



12. ábra.

12. ábrán látható rendszerrel helyettesíthető. Itt E_0 a hatásos feszültség kezdeti értéke, c pedig a szálnak, a hozzá kapcsolt elektroncső rácsának, vezetékeknek, stb. káros kapacitása. A $t=0$ időpillanatban létesitett (1, 3) kapcsolás a kozmikus sugarat helyettesíti. Jelöljük az A pont változó feszültségét v-vel s határozzuk meg időbeli lefolyását.

Bármely t időpillanatban

$$E_0 = iR_b + v,$$

de

$$i = i_c + i_R = \frac{dq}{dt} + \frac{v}{R_k}.$$

Tehát

$$E_0 = \left(\frac{dq}{dt} + \frac{v}{R_k}\right) R_b + v = \frac{vR_b}{R_k} + cR_b \frac{dv}{dt} + v.$$

A változók szétválasztása után integrálhatunk:

$$\int_0^v \frac{1}{(R_b + R_k)v - E_0 R_k}\, dv = -\int_0^t \frac{1}{cR_b R_k}\, dt.$$

A megoldás

$$v = \frac{E_0 R_k}{R_b + R_k}\left(1 - e^{-\frac{R_b + R_k}{cR_b R_k}t}\right). \tag{4}$$

Amennyiben a számlálócső belső ellenállása konstans, az oscillogrammból nyert $(v,\ t)$ értékpárok eleget kell hogy tegyenek a 4. egyenletnek. Ha ezek közül két értékpárt kiválasztunk, legyenek ezek $(v_1,\ t_1)$ és $(v_2,\ t_2)$, ezek segítségével a 4. egyenlet két ismeretlenje E_0 és R_b kiszámítható.

Az egyenletben szereplő c-t a következőképpen mértem. Készítettem a számlálócső kisüléséről olyan oscillogrammot, melynél az egyenletes vízszintes kitérítésnek első, rövidebb részére esik a számlálócső kisülése, a másik, hosszabb részben a számlálócső feltöltődése folyik le. Ebben a hosszabb részben kapott görbék nem mások, mint a c kapacitásnak az R_k ellenálláson át való feltöltődési görbéi. Bármely görbe két tetszőleges pontja, meghatározza a c értékét.

A 11. ábrán látható oscillogramm $R_k = 2{\cdot}2.10^8$ Ohm külső ellenállás mellett készült. A töltőgáz 123 mm Hg nyomású hydrogéngáz volt. A c kapacitás méréseimnél $17{\cdot}5.10^{-12}$ F-ot tett ki. Az oscillogramm

$$t_1 = 11{\cdot}5.10^{-4} \text{ sec}; \; v_1 = 18{\cdot}8 \text{ Volt}$$

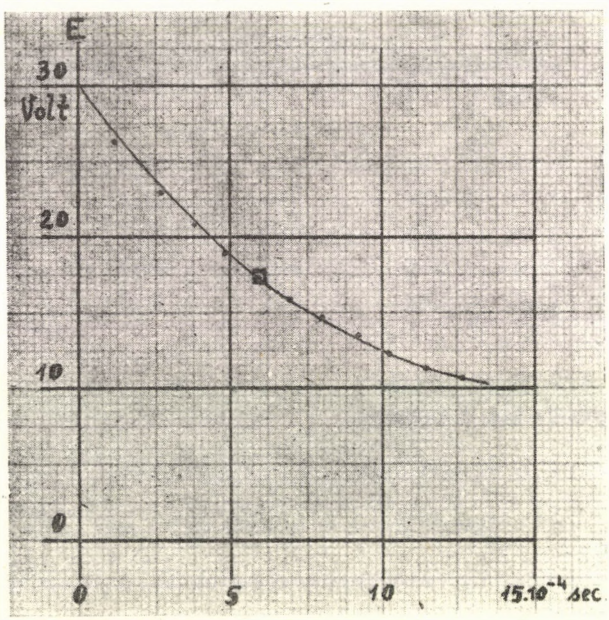
és

$$t_2 = 5{\cdot}9.10^{-4} \text{ « }; \; v_2 = 13{\cdot}0 \text{ «}$$

értékpárjait kiválasztva a 4. egyenlet két ismeretlenjére a következő értékeket kapjuk:

$$E_0 = 30{\cdot}1 \text{ Volt}, \; R_b = 0{\cdot}54.10^8 \text{ Ohm}.$$

Ezek után a hatásos feszültség ($E = E_0 - v$), mint az idő függvénye a 4. egyenlettel kiszámitható. A számítás eredményét a



13. ábra.

13. ábra kihúzott görbéje ábrázolja. A vonal melletti pontok az oscillogrammból nyert értékek. A négyzettel jelölt pont az első leszakadási helynek felel meg.

Megvizsgáltam a számlálócső kisüléseit

a) különböző telepfeszültségek mellett, de egyébként változatlan körülmények között,

b) különböző külső ellenállás mellett,

c) ugyanazon töltőgáz különböző nyomása mellett,

d) több, egyforma nyomású töltőgáz mellett.

a) A számlálócső kisülése különböző telepfeszültségek mellett.

A fent ismertetett módon felvettem a 145 mm Hg nyomású hydrogéngázzal töltött számlálócső kisülésének oscillogrammját különböző telepfeszültségek mellett. A külső ellenállás $R_k=2{\cdot}20.10^8$ Ohm volt. Az 1. táblában a V_T jelzésű oszlop feltünteti a felhasznált telepfeszültségeket.

1. táblázat.

Szám	V_T	E_0	V_0
1	1390 Volt	20·8 Volt	1369 Volt
2	1395 «	25·7 «	1369 «
3	1400 «	30·8 «	1369 «
4	1405 «	36·1 «	1369 «
5	1415 «	45·7 «	1369 «

Például a 2. számmal jelölt 1395 Volt telepfeszültséggel készült oscillogramm két értékpárját

$$v_1= 2{\cdot}5 \text{ Volt}; \; t_1=1{\cdot}1.10^{-4} \text{ sec}$$

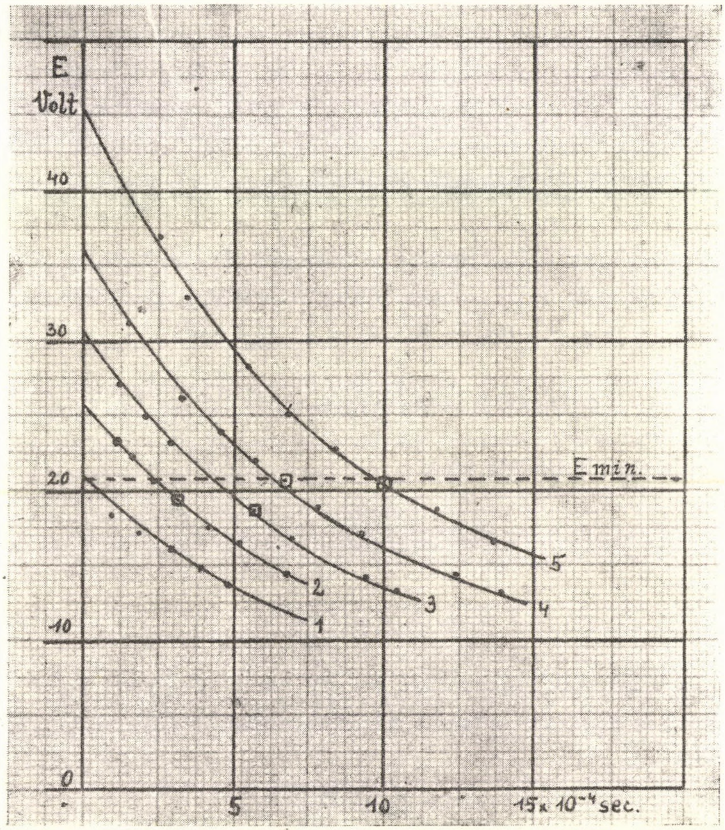
és

$$v_2=11{\cdot}8 \text{ « }; \; t_2=7{\cdot}1.10^{-4} \text{ «}$$

kiválasztva a 4. egyenlet segítségével az E_0 és R_b kiszámítható. Az eredmény:

$$E_0=25{\cdot}7 \text{ Volt}; \; R_b=0{\cdot}59.10^8 \text{ Ohm}.$$

Ennek birtokában a kisülést ábrázolhatjuk (14. ábra 2. görbe). A többi négy oscillogramm egy-egy (v, t) értékpárjának felhasználásával az E_0 értékét mind a négy esetre kiszámíthatjuk a 4. egyenletből.* Az eredményt az 1. táblázat harmadik oszlopa



14. ábra.

tünteti fel. A negyedik oszlopban a számlálócső kezdeti feszültségét találhatjuk, melyet a

$$V_0 = V_T - E_0$$

egyenletből nyerünk.

* Ennél a számításnál már csak egy-egy értékpár felvételére volt szükség, mivel a cső belső ellenállása mind az öt esetben ugyanaz.

A táblázatból láthatjuk, hogy amennyivel emeltük a telepfeszültséget, annyival emelkedett a hatásos feszültség kezdeti értéke, E_0, ami várható is volt.

Az öt kisülést a 14. ábra görbeserege tünteti fel. Látható, hogy különböző telepfeszültségek mellett a kisülés legelső megszakadása 1 Volt-nyi pontossággal ugyanazon hatásos feszültség (E_{min}) elérésekor következik be. A 14. ábrából látható, hogy minél nagyobb a telepfeszültség s ezzel E_0, annál később éri el a hatásos feszültség az E_{min} értéket; a cső az egyes kisülések közben annál hosszabb ideig ég.

Ha a telepfeszültséget s ezzel E_0-t olyan értékre emeljük, hogy a görbe $t=\infty$-hez tartozó pontja sem éri már el E_{min}-ot, a számlálócső már nem számol, hanem tartósan ég. A $t=\infty$-hez tartozó hatásos feszültség értéke a 4. egyenletből

$$E_\infty = E_0 - \frac{E_0 R_k}{R_b + R_k}.$$

A tartós égés feltétele tehát

$$E_0 - \frac{E_0 R_k}{R_b + R_k} = E_{min},$$

azaz

$$E_0 = E_{min} \frac{R_b + R_k}{R_b}. \tag{5}$$

A számlálási tartomány alsó határa tehát az $E_0=0$, felső határát az 5. egyenlet adja. A számlálási tartomány hossza ezek szerint

$$\Delta V = E_{min} \frac{R_b + R_k}{R_b}. \tag{6}$$

Ugyanazon csőnél tehát a számlálási tartomány annál nagyobb, minél nagyobb külső ellenállást alkalmazunk.

b) A számlálócső kisülése különböző külső ellenállás mellett.

A mérést 61 mm nyomású nitrogéngáztöltéssel, $V_T = 1216$ Volt telepfeszültséggel végeztem. Felvettem a kisülés oscillogrammját a 2. táblában feltüntetett R_k értékek mellett.

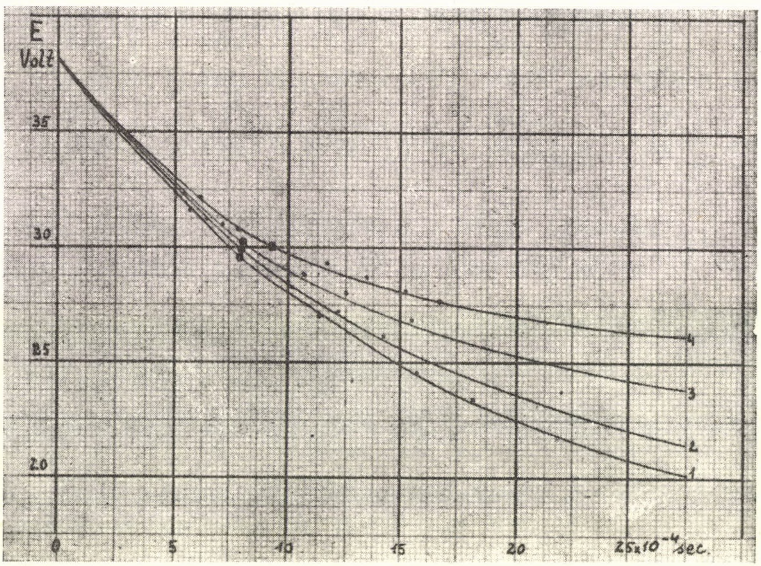
2. táblázat.

Szám	R_k	E_{min}	ΔV (számított)	ΔV (mért)
1	$2{\cdot}20 \cdot 10^8 \Omega$	29·5 Volt	72·2 Volt	~75 Volt
2	1·62 «	29·9 «	61·2 «	~60 «
3	1·10 «	30·4 «	51·3 «	~50 «
4	0·78 «	30·0 «	45·2 «	~45 «

Az oscillogrammok kiértékelése után az ismertetett módon kiszámítottam E_0 és R_b értékét. Az eredmény:

$$E_0 = 38{\cdot}2 \text{ Volt}, \quad R_b = 1{\cdot}60.10^8 \text{ Ohm}.$$

Ezen értékek segítségével a kisülés a 15. ábra görbeseregével ábrázolható. Az E_{min}-ok a 2. táblázat harmadik oszlopában találhatók. Ha ezek közül a legnagyobbat E_{min}=30·4 Voltot fogadjuk el, kiszámíthatjuk a 6. egyenlet alapján az egyes R_k értékekhez tartozó számlálási tartományt. A negyedik oszlop a számítás eredményét, az ötödik oszlop pedig a közvetlenül mért értékeket adja.



15. ábra.

c) A számlálócső kisülése ugyanazon töltőgáz különböző nyomása mellett.

Ugyanazon $R_k = 2{\cdot}20.10^8$ Ohm külső ellenállás mellett felvettem a 61, 80, 100, 123, 145 mm nyomású hydrogéngázzal töltött számlálócső oscillogrammját. Mivel a kisülés lefolyására nem a telepfeszültség, hanem a hatásos kezdeti feszültség értéke jellemző, legalkalmasabb lenne az oscillogrammokat a hatásos feszültség ugyanazon kezdeti értéke mellett felvenni. Mivel azonban ezt előre nem tudjuk, kénytelen voltam minden egyes nyomásnál a számlálási tartományba eső, több telepfeszültség mellett oscillogrammokat felvenni. Az *a)* fejezetben leírt módon minden egyes nyomásra kiszámítottam az E_0 és R_b értékeket s kikerestem a legnagyobb $E_{\min}$ értékét. Az eredményeket a 3. táblázat tünteti fel.

3. táblázat.

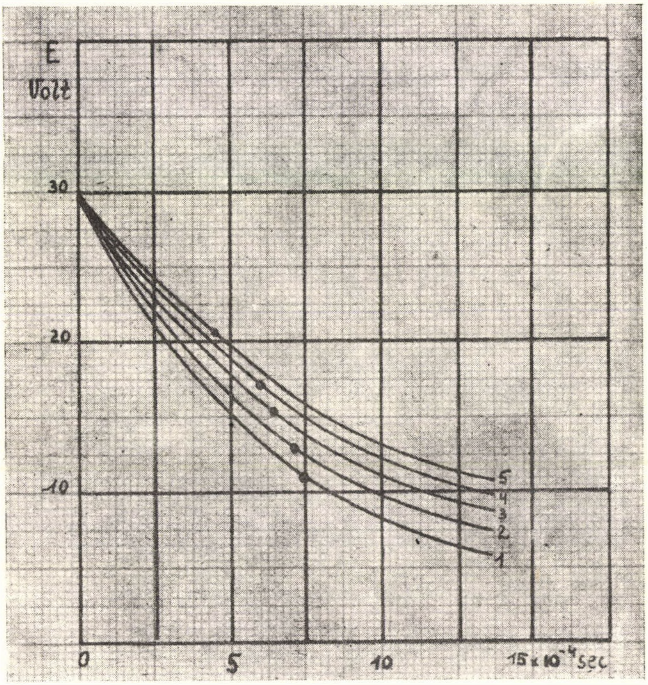
Szám	p	R_b	$E_{\min}$	V_0	ΔV
1	61 mm Hg	$0{\cdot}35.10^8\Omega$	11·0	956 Volt	80·0 Volt
2	80 «	0·42 «	13·0	1058 «	81·2 «
3	100 «	0·48 «	15·3	1162 «	85·5 «
4	123 «	0·54 «	17·1	1270 «	86·8 «
5	145 «	0·59 «	20·7	1369 «	98·0 «

Összehasonlítás végett kiszámítottam a 4. egyenlet segítségével a kisülés lefolyását az itt szereplő p nyomások esetén azon feltétellel, hogy a hatásos kezdeti feszültség értéke minden esetben

$$E_0 = 30 \text{ Volt.}$$

A számítás eredményét a 16. ábra adja. A nagy pontok az $E_{\min}$-ot jelentik.

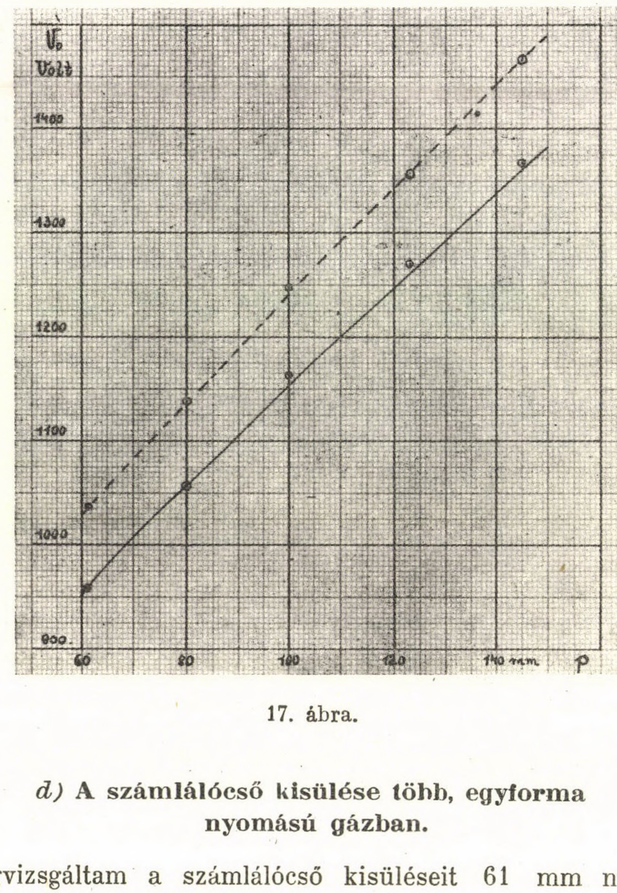
A $V_0 = V_T - E_0$ egyenletből kiszámítottam minden egyes nyomáshoz tartozó kezdeti feszültséget. Az így kapott V_0 értékeket tünteti fel a 3. táblázat ötödik oszlopa. SVEN WERNER a nyomás és kezdeti feszültség között számbeli összefüggést állított fel. Ezen összefüggésben két konstans szerepel, melyet két (p, V_0) értékpárból ki lehet számítani. SVEN WERNER nyomán a 61 és 80 mm nyomású hydrogénhez tartozó V_0 értékek felhasználásá-



16. ábra.

val ábrázoltam a kezdeti feszültségeket a nyomás függvényében. Ezt tünteti fel a 17. ábra kihúzott görbéje.

A 3. táblázat hatodik oszlopa végre az egyes nyomásokhoz tartozó számlálási tartományt tünteti fel $R_k = 2{\cdot}20.10^8$ Ohm külső ellenállás mellett. Ezeket az értékeket a kapott R_b, $E_{\min}$ értékekkel a 6. egyenlet által számítottam ki. Ha ezeket a ΔV értékeket a 17. ábrába rajzolt (p, V_0) pontokra függőlegesen felrakjuk, a kapott pontok a szaggatott vonalat határozzák meg. Ezáltal a számlálócső kisüléséről alkotott képünket a következőkkel egészíthetjük ki. A kihúzott vonal alatt fekvő tartományban a számlálócső nem számol. A két vonal közti terület a számlálási tartomány, mely a nagyobb nyomások felé kitágul. A szaggatott vonal fölött fekvő területben a számlálócső tartósan ég.



17. ábra.

d) A számlálócső kisülése több, egyforma nyomású gázban.

Megvizsgáltam a számlálócső kisüléseit 61 mm nyomású H_2, N_2, O_2 és Ar töltéssel. A nyert oscillogrammokból az előzőkben leírt módon kiszámítottam az R_b-t és megkerestem a legnagyobb E_{min}-ot. Az eredményt a 4. táblázat foglalja magában.

4. táblázat.

Szám	Gáz	R_b	E_{min}	V_0	ΔV
1	H_2	$0{\cdot}35.10^8\Omega$	11·0 Volt	956 Volt	80·0 Volt
2	O_2	1·18 «	14·2 «	1595 «	40·7 «
3	N_2	1·60 «	29·5 «	1180 «	72·2 «
4	Ar	1·72 «	21·6 «	705 «	48·2 «

A fenti táblázatban szereplő négy gáz anyagi tulajdonságai és a mért R_b, E_{min}, ΔV mennyiségek között összefüggést nem találtam, ehhez a mérések számának szaporitására lenne szükség. Ilyen összefüggés kimutatása későbbi vizsgálat tárgyát képezheti.

Függelék.

A kisülés lefolyásában lényeges változást veszünk észre, ha Trost[9] nyomán a töltőgázhoz néhány mm nyomású alkoholgőzt adunk. Az alkoholos csöveknél a Trost által megfigyelt jelenségek közül a következőket tapasztaltam.

A számlálási tartomány rendkívüli módon megnövekedett, a cső többszáz Voltnyi területen számolt.

A telepfeszültség növelésével az A pont feszültséglökései, ellentétben az alkoholmentes csövekkel, nem ugyanannyival növekednek, mint amennyivel a telep feszültségét növeltük.

A kisülés időtartama az alkoholgőz hozzáadásával nagyságrendileg megkisebbedik.

Az utóbbi jelenség miatt a kisülés oscillogrammja az alkoholmentes csövekhez képest fényszegény képet ad. A kisülést ábrázoló halvány vonalat teljesen eltünteti a hatalmas fényudvar, melyet a katódsugár a nyugalmi helyzetben való relative hosszú tartózkodása miatt az ernyőn létrehoz. Ez a fényudvar az alkoholmentes csövek lassúbb kisülésénél nem volt oly zavaró hatású, hogy megszüntetésére szükség lett volna.

---

[9] Zs. für techn. Phys. 16. 1935, 407.

Az alkoholos csövek kisüléseinek vizsgálata előtt azonban ezt a nehézséget ki kell küszöbölnünk.

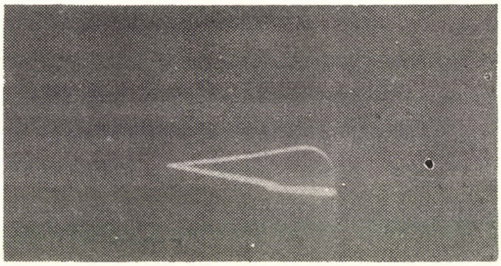
Jóllehet a jelen dolgozatban az alkoholos csövek kisülésével nem foglalkozom, ezek későbbi vizsgálataim tárgyát képeznék, a kipprelé technikai kivitelének teljessége végett az említett zavaró körülmény kiküszöbölésének egyik módját itt adom.

Az újabb típusú katódcsövekben a világító folt élesre állítása az ú. n. elektronlencsével történik. Az elektronlencse két egyforma fémlemezből áll. Egyik maga az anódlemez; a másik, az ú. n. lencseelektród, az anódlemeztől 0·5—1 cm távolságban, ennek a katód felé néző oldalán van elhelyezve. Mindkét lemez középen át van fúrva, hogy a katódsugár a lyukon áthaladhasson. A lencseelektród feszültségének változtatásával változtatjuk a két lemez között létesült elektrosztatikus teret, mely a katódsugárra hasonló hatást gyakorol, mint a gyüjtőlencse a fényre. A lencseelektród segítségével a folt élességét az ernyőn változtatni tudjuk s elérhetjük azt is, hogy a folt az ernyőn egyáltalában nem jelenik meg.

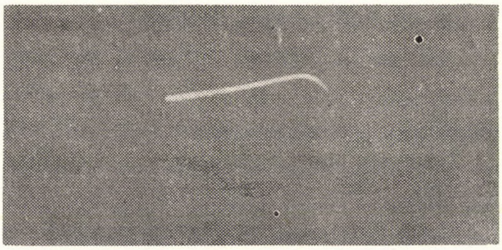
A kipprelé működése közben adjuk a lencseelektródra kondenzátoron át az A_2 pont (9. ábra) lökéseit. Mivel ezek a lökések az A_1 pont lökéseinek (5. ábra) tükörképei, a kozmikus beütés pillanatában a lencseelektródra nagy negatív feszültséglökés érkezik. Elegendő nagy átvivő kondenzátor esetén s ha a lencseelektród a fix feszültséget adó teleppel elegendő nagy ellenálláson át van összekötve, ezt a feszültségtöbbletet meg is tartja a II. állapot végéig. Ekkor ismét eredeti állapotába kerül vissza.

A fix feszültség alkalmas megválasztásával elegendő nagy (150—200 Volt) lökéssel elérhetjük, hogy a világító folt csak a II. állapot tartama alatt jelenik meg az ernyőn, az I. állapot alatt pedig a katódsugár a csőben szétszóródva az ernyőn nem képez foltot. De éppen a II. állapot alatt történik az oscillogramm bennünket érdeklő részének felvétele.

Tehát ilyen módon elérjük, hogy a kozmikus beütés pillanatában a világító folt megjelenik az ernyőn. Egyenletes vízszintes eltérítés mellett leírja a kívánt oscillogramm részt, majd a II. állapot megszűntével, mikor az egyenletes vízszintes kitérítés megszűnik, a világító folt eltűnik az ernyőről.



1



2

18. ábra.

A 18. ábrán látható oscillogrammnak, mely egy kondenzátor kisülését és feltöltődését ábrázolja (1. kép), alsó része ilyen módon eltüntethető (2. kép).

*

Méréseimet a Kir. Magy. Pázmány Péter Tud. Egyetem Kisérleti Fizikai Intézetében végeztem. Ezúton is hálás köszönetemet fejezem ki az intézet igazgatójának, dr. TANGL KÁROLY egyet. ny. r. tanár úrnak, ki munkám elvégzését intézetében lehetővé tette. A Természettudományi Tanácsnak köszönöm az anyagi támogatást. Köszönetemet fejezem ki dr. FORRÓ MAGDOLNA tanársegéd kisasszonynak, valamint v. dr. BARNÓTHY JENŐ tanársegéd úrnak állandó érdeklődésükért és értékes tanácsaikért. KURTHA GÉZA műszerész úrnak a készülékek összeállításánál igénybevett segítségét ezúton is köszönöm.

Összefoglalás.

Dolgozatom célja a Geiger—Müller-féle számlálócsőben a kozmikus sugárzás által létrehozott kisüléseknek vizsgálata volt. A számlálócső hengerét a telep negativ pólusához, szálát pedig nagy (kb. 10^9 Ohm) ellenálláson keresztül a telep pozitiv pólusához kötjük. A kisülés lefolyására a számlálócső szálának feszültségváltozásaiból következtetünk. E végből a szálat az oscillográf függőleges eltérítő lemezéhez kapcsoljuk, vízszintes eltérítésre pedig a Gábor-féle kipprelét használjuk.

Az így előállitott oscillogrammból a következőket olvashatjuk ki: Az egymásután következő kisülések egyformán folynak le, de az egyes kisülések időtartama különböző.

A kisülési görbe két pontjának segítségével kiszámítható a számlálócső belső ellenállása (R_b) s kezdeti feszültsége. Az így nyert két érték segítségével szerkesztett elméleti kisülési görbével a tényleges kisülési görbe kielégítő módon egyezik. Ez megegyezésben van Sven Werner azon méréseivel, amelyek szerint R_b a kis áramerősségeknél (kb. $10 \mu A$-ig) állandó.

Különböző telepfeszültségek mellett vizsgálva a számlálócső kisülését, azt találjuk, hogy nagyobb telepfeszültségeknél a kisülés tovább tart. Mindegyik telepfeszültséghez megkereshetjük a számlálócsőnek azt a feszültségét, melynél a legrövidebb ideig tartó kisülés megszűnik. Azt találjuk, hogy a különböző telepfeszültségekhez tartozó ezen V_{min} értékek egy Voltnyi pontossággal megegyeznek. Ez megegyezésben van Sven Werner vizsgálataival.

A számlálási tartomány vizsgálatánál azt találtuk, hogy ezt a külső ellenállás növelésével tágíthatjuk.

Ugyanazon töltőgáz különböző nyomása mellett vizsgálva a kisüléseket, azt találtuk, hogy a nyomással a belső ellenállás, valamint a számlálási tartomány nő.

Végül négy különböző gázban vizsgáltam a számlálócső kisülését s kiszámítottam a hozzájuk tartozó belső ellenállást és számlálási tartományt.

A függelékben oly berendezést írtam le, mellyel gyors kisüléseknél elkerüljük a nyugalmi pontban sokáig időző katódsugárnak a fényképezőlemezre gyakorolt zavaró hatását. Ezen berendezésnél a Gábor-féle relé alkalmas pontján kapott feszültséglökés az oscillográf elektronlencséjére kerül s a világító pontot az ernyőről a vizsgálandó oscillogramm leírása után eltünteti.

Béll Béla.

UNTERSUCHUNG DER IM GEIGER—MÜLLER'SCHEN ZÄHLROHRE AUFTRETENDEN ENTLADUNGEN MITTELS KATHODENSTRAHL-OSCILLOGRAPHEN.

Zweck der Untersuchung war die Erforschung der Entladungen im Geiger—Müller-schen Zählrohren. Das Zylinder des Zählrohres wird unmittelbar mit dem negativen Pol, der Faden durch einen grossen (10^9 Ohm) Wiederstand mit dem positiven Pol einer Hochspannungsbatterie verbunden. Auf den Verlauf der Entladung können wir aus den Spannungsänderungen des Fadens schliessen. Um diese verfolgen zu können, verbinden wir den Faden mit der vertikalen Ablenkungsplatte eines Kathodenstrahl-Oscillographen. Zur horizontalen Ablenkung benützen wir ein Kipprelais nach Gábor. Aus den erhaltenen Oscillogrammen können wir folgende Schlüsse ziehen. Die einzelnen Entladungen sind in ihrem Verlauf ähnlich, aber ihre Zeitdauer ist verschieden. Mit Hilfe von zwei Punkten der Entladungskurve kann man den inneren Wiederstand des Zählrohres (R_b) und die Anfangsspannung berechnen. Mit diesen zwei Werten kann man eine theoretische Entladungskurve konstruieren, welche mit der wirklichen Entladungskurve genügend übereinstimmt. Dieser Umstand steht in gutem Einklang mit Befund von Sven Werner, nach welchem R_b bei kleinen Stromstärken konstant ist.

Wenn wir die Entladung bei verschiedenen Batterie-Spannungen untersuchen, finden wir, dass bei grösseren Batterie-Spannungen die Entladung länger dauert. Zu jeder Batterie-Spannung können wir jene Spannung des Zählrohres finden, bei welcher die am kürzesten dauernde Entladung abgebrochen wird. Wir finden, dass diese $V_{\min}$ Werte bei den verschiedenen Batterie-Spannungen mit einer Genauigkeit von 1 Volt übereinstimmen. Dies stimmt mit den Untersuchungen von Sven Werner überein.

Bei der Untersuchung des Zählbereiches ergibt sich, dass dieser Bereich durch die Vergrösserung des äusseren Wiederstandes vergrössert werden kann.

Wenn wir die Entladungen bei gleichbleibendem Füllgas, aber verschiedenen Gasdrucken untersuchen, ergibt sich, dass mit dem Drucke sowohl der innere Wiederstand, wie auch der Zählbereich grösser wird.

Weiter untersuchte ich die Entladung des Zählrohres bei vier verschiedenen Gasen und berechnete die dazu gehörenden inneren Wiederstände und Zählbereiche.

Im Anhang beschreibe ich eine solche Einrichtung, mit der wir bei raschen Entladungen vermeiden können, dass der in dem Ruhepunkte lange verweilende Kathodenstrahl das viel lichtschwächere Oscillogramm auf der photographischen Platte stört. Bei dieser Einrichtung wird der von dem geeigneten Punkte des Gábor-schen Relais abgenommene Spannungsstoss an die Elektronlinse des Oscillographen gelegt und lässt den leuchtenden Punkt nach der Beschreibung des untersuchenden Oscillogrammes von dem Schirm verschwinden.

Béla Béll.

ÚJ MÓDSZER AZ ELEKTROLITEK MAGASFREKVENCIÁJÚ VEZETŐKÉPESSÉGÉNEK MEGHATÁROZÁSÁRA.

Bevezetés.

Debye és Falkenhagen[1] az elektroliteken végzett elméleti vizsgálataik folyományaképpen előre kimondották, hogy az igen magas frekvenciájú áramkörbe helyezett elektrolit vezetőképességének az alacsonyabb frekvenciákon mért vezetőképességhez viszonyítva meg kell növekednie. Az effektust, melyet a régebbi elektrolit elméletekkel meg sem lehetett volna magyarázni, többeknek[2] sikerült kimutatni, lemérni és azt az elmélettel jó közelitésben megegyezőnek találták.

Debye és Falkenhagen elmélete a régiektől abban tér el, hogy az oldatban levő ionok kölcsönös hatását még a nagy higitások esetében is figyelembe veszi és egy, az elektromos előtérben elmozduló ionra ható új erőt vezet be, az úgynevezett relaxatiós erőt. Ezt az erőt a következőképpen magyarázzák. Tegyük fel, hogy a külső térerősség nulla. Ekkor az ionok kölcsönös vonzásuk és taszitásuk következtében egyen-

[1] Debye P. és Falkenhagen H. Phys. Z. **29.** 401. old.
[2] Sack H. Phys. Z. **29.** 627. old.
Rieckhoff H. Ann. Phys. **2.** 577. old.
Rieckhoff H. és Zahn H. Z. Phys. **53.** 619. old.
Zahn H. Z. Phys. **51.** 350. old.
Wien M. Ann. Phys. (5) **11.** 429. old., Phys. Z. **31.** 793. old.
Neese O. Ann. Phys. **8.** 929. old.
Schiele J. és Wien M. Ann. Phys. **7.** 624. old.
Deubner A. Phys. Z. **30.** 946. old., Ann. Phys. **5.** 305. old.
Malsch J. Phys. Z. **33.** 19. old., Ann. Phys. **12.** 865. old.

súlyi helyzetet vesznek fel, vagyis úgy helyezkednek el, hogy az összes többi ionoknak egy tetszőlegesen kiválasztott ionra való hatásának eredője zérus. Ekkor az ion és az azt körülvevő többi ion helyzete centrálszimmetrikus. Ha azonban a külső elektromos teret bekapcsoljuk, akkor az ionok a töltésüknek megfelelően egymással ellentétes irányban elmozdulnak, minek következtében az eredetileg centrálszimmetrikus ionfelhő asszimmetrikussá lesz és a kiválasztott ionra fékező erőt fog gyakorolni. Ez a relexatiós erő. A fellépő fékező erő következtében az ion vándorlási sebessége csökken, vagy ami vele egyértelmű, az oldat vezetőképessége kisebb lesz.

A fékező erő csökkenthető, ha az elektromos erőtér hatására, csak oly keveset mozdul el az ion a nyugalmi helyzetéből, hogy ez az állapota az előbbitől csak lényegtelenül különbözik. Ez bekövetkezik, ha a külső elektromos erőtér igen nagy frekvenciájú, mikor is az ionok csak ide-oda rezgő mozgásokat végeznek a nyugalmi helyzetük körül, de annyira nem távolodnak el ettől, hogy lényeges fékező erő felléphessen, vagyis a magasfrekvenciájú térben az elektrolit vezetőképessége megnövekszik. Az effektus, amely az elektrolitek minőségétől és azok koncentrációjától függ, csak igen magas rezgésszámú árammal mérve mutatható ki, és akkor is csak százalékrendű. Az eddig kidolgozott mérőmódszerek esetében az 1—16 m.-ig terjedő hullámsávnak megfelelő frekvenciákat alkalmazták. Természetesen ily magas frekvenciáknál az eddig szokásos vezetőképesség mérési módszerek nem alkalmazhatók, hanem új módszereket kellett kidolgozni. Méréseim célja egy oly mérőmódszer kidolgozása volt, mely a többi módszer hibáitól mentes. Ezt, mint a továbbiakból kitűnik, sikerült is elérnem.

A mérőmódszer.

Az idézett szerzők által kidolgozott eljárásokat itt nem ismertetem. Csupán azt említem meg, hogy e módszerek közös hátránya, hogy igen nagy követelményt támasztanak a magasfrekvenciájú rezgéseket előállító berendezéssel szemben úgy a rezgések intenzitását, mint a rezgésszám állandóságát illetőleg. Ugyanis e mérőmódszerek közös jellemvonása, hogy az elektrolit vezetőképességének mérését visszavezetik egy hangolt körben folyó rezonans áram intenzitásának mérésére. Ez a rezonans áram azonban nemcsak az elektrolit vezetőképességének a függvénye, hanem elsősorban az adóban folyó magasfrekvenciájú áram intenzitásával arányos. Nyilvánvaló, ha ez utóbbi ingadozik, úgy ez az ingadozás az elektrolit vezetőképességének a mérésében is teljes súllyal számitásba jön. Ha az adó intenzitás ingadozása pl. 1%, akkor a mérés pontossága sem lehet ennél nagyobb, ha a többi hibától el is tekintünk.

Ezt a hibát elkerülendő, az említett szerzők nagy méretű akkumulátorokkal és különleges eljárásokkal igyekeztek az adó konstans működését biztositani.

A munkám céljául egy oly mérőmódszer kidolgozását tűztem ki, mely az adó intenzitás ingadozásaiból eredő hibákat kiküszöböli, az elektrolit magasfrekvenciájú vezetőképességének meghatározását nagyobb pontossággal teszi lehetővé, és végül az adónak a táplálását a körülményes és drága akkumulátor üzem helyett a hálózatból is megengedi.

A mérőmódszerem elektródnélküli és a RIECKHOFF[3] által alkalmazott eljáráshoz hasonló. Különbség csak a Lecher-rendszer előnyösebb hangolásában és a differenciál mérést megengedő baretterpár alkalmazásában van. Ami a mérőmódszeremben új és lényeges, az a barettpár kiegyenlítésének megoldása és ezzel a mérés pontosságának az adóintenzitás ingadozásaitól való függetlenítése.

A mérőmódszerem lényege a következő; az ellenütemű csőgenerátor tekercsével A induktiv csatolásban van egyrészt az L Lecher-drótpár, másrészt a K kompenzálókör. 1. ábra. A Lecher-rendszernek az adótól távolabb eső végét egy drótív Z zárja le. Ebben az ívben helyezhető el a hengeres üvegpohár E, mely

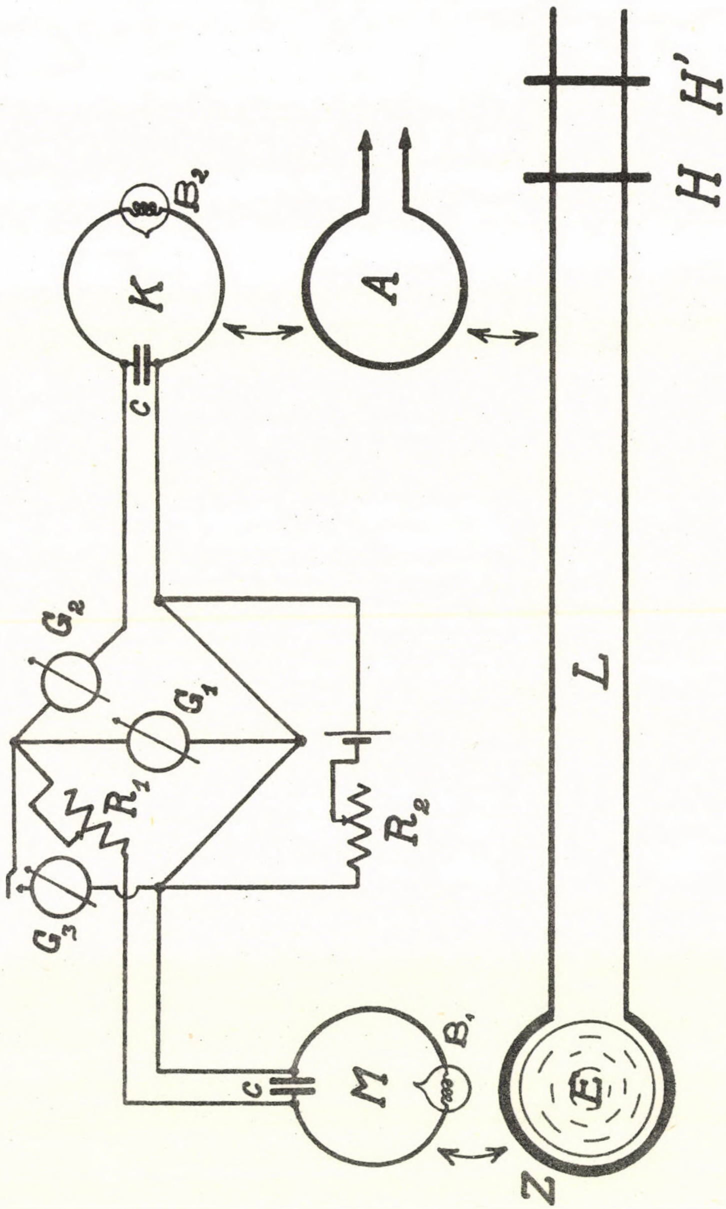
[3] RIECKHOFF H. Ann. Phys. 2. 577. old.

a mérendő elektrolitet tartalmazza. A záróívvel laza induktív csatolásban áll az *M* mérőkör. A benne folyó magasfrekvenciájú áram intenzitása arányos a Lecher-rendszerben folyóéval. A *H* híd eltolásával a Lecher-rendszert az adó rezgéseivel rezonanciába hozzuk. Ekkor a drótívben az áramerősségnek maximuma van. Az elektrolitba behatoló mágneses erővonalak abban örvényáramot indukálnak. Az elektrolit által felvett energia a rendszert csillapítja és így *Z* záróívben a rezonans áram intenzitása az elektrolit vezetőképességének a függvénye. Vagyis minél nagyobb az elektrolit vezetőképessége, annál kisebb lesz a rezonans áram és ennek megfelelőleg kevesebb áram indukálódik a rendszerrel csatolásban lévő *M* mérőkörben.

A mérőkörben folyó magasfrekvenciájú áram intenzitásának mérése a belekapcsolt baretter B_1 segítségével történik olymódon, hogy a baretternek a magasfrekvenciájú áram intenzitásától függő ellenállását Wheatstone-hídban mérjük. A *K* kompenzálókörben szintén van egy baretter B_2, ez képezi a híd másik ágát. A kompenzálókör az adóval induktív csatolásban lévén, ennek ellenállása ugyancsak az adó által előállított magasfrekvenciájú rezgések intenzitásától függ. Ha tehát az adóintenzitás ingadozásai következtében a mérőkör baretterének B_1 ellenállása nő, vagy csökken a kompenzáló kör barettere B_2 is hasonlóképpen viselkedik. Tehát a Wheatstone-hídnak az egyensúlya sem fog változni, feltéve, hogy a baretterek ellenállás viszonyát úgy választottuk meg, hogy az adó ingadozásait szimmetrikusan kövessék.

A Wheatstone-híd baretteres ágaiban a baretterekkel sorba van kapcsolva az R_1 változtatható ellenállás és a G_2 kis ellenállású milliamper mérő. Az első a baretterpár kiegyenlítését, a másik pedig az ezeken átfolyó egyenáram intenzitásának mérését teszi lehetővé.

Az effektus mérése már most következőkép történik: *KCl* és $MnSO_4$-ból olyan oldatokat készitek, melyek alacsonyfrekvenciájú vezetőképessége megegyezik. A *KCl* oldatot a mérőedénybe öntöm és a mérő, illetőleg kompenzáló körök csatolásának kellő



1. ábra.

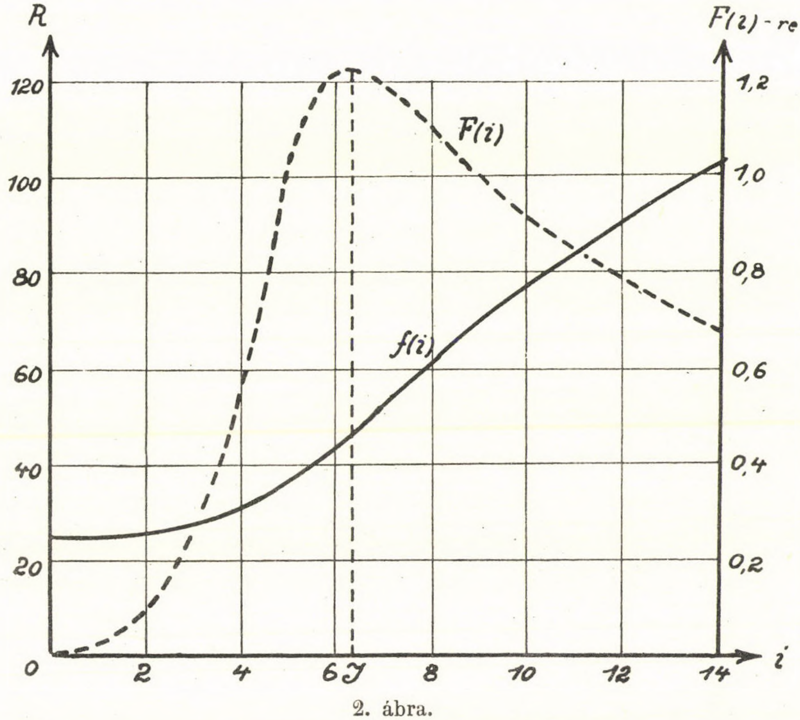
beállításával elérem, hogy a baretterek ellenállásának aránya akkora lesz, mint amekkorát a Wheatstone-híd null-ágának az árammentesítése megkíván. Ezután a *KCl* oldat vezetőképességét 2—3%-kal növelem. Mivel a vezetőképesség növekedése a rezonans áram intenzitását csökkenti, kisebb lesz a mérőkör baretterének ellenállása is. Tehát az eredetileg kiegyensúlyozott Wheatstone-híd galvanométere kitér és kitérése a vezetőképesség növekedésével lesz arányos. Ebből meghatározom, hogy 1% vezetőképesség növekedésnek hány skálarész galvanométer kitérés felel meg. Ezután a *KCl* oldatot kicserélem egy oly $MnSO_4$ oldattal, amelynek alacsony frekvenciájú vezetőképessége megegyezik az első *KCl* oldat vezetőképességével. Mivel ennek a magasfrekvenciájú vezetőképessége nagyobb, mint a *KCl* oldaté volt, a galvanométer szintén kitér. A skálarészekből meghatározhatom az $MnSO_4$ oldatnak a *KCl* oldathoz viszonyított vezetőképesség növekedését. Azért kell a *KCl* oldatot összehasonlító oldatul választani, mert ennek az effektusa az $MnSO_4$ oldathoz viszonyítva kicsiny.

A baretterpár kiegyenlítése.

Miután mérőmódszerem alapját a baretterek kompenzáló kapcsolása képezi, fordítsuk figyelmünket a baretterre.

Fessenden után, baretternek nevezünk minden olyan, vékony, többnyire platina, vagy wolframszálból készített drótot, amelynek ellenállása a rajta átfolyó magasfrekvenciájú áram intenzitásának függvénye lévén, ez utóbbi mérését lehetővé teszi. Hogy az áram okozta Joule-hő minél magasabb hőmérsékletre hevítse a szálat, a levegő okozta hőelvezetést is meg kell szüntetni és ezért a szálat evakuált térbe helyezik. Minél vékonyabb a szál, annál kisebb intenzitású magasfrekvenciájú áramot lehet a baretterrel mérni. Ezért azt többnyire a Wollaston-szál maratása utján készítik. Mivel az én módszeremben az adó elegendő magasfrekvenciájú energiát állított elő, nem volt szükségem ilyen rendkívül vékony szálakra és a célnak igen megfeleltek azok a kis izzólámpácskák is, melyeknek fogyasztása 4 voltnál 35—40 milliamper volt. Ezekből egy sorozat állt rendelkezésemre az Újpesti Egyesült Izzólámpa r. t. igazgatóságának szivessége folytán.

Vizsgáljuk meg, mi annak a feltétele, hogy az általában egymástól különböző ellenálláskarakterisztikával biró baretterek az



2. ábra.

ellenállásukat az izzitóáram bizonyos intervallumában úgy változtassák meg, hogy ellenállásaik aránya állandó maradjon. WIEN[4] is megkisérelte ennek a kérdésnek a megoldását, de amint írja, nem sok eredménnyel.

A 2. ábrán látható egy 4 *V*, 35 *MA* fogyasztású biztosító lámpácska ellenálláskarakterisztikája, az izzítóáram függvényében. (*f*(*i*) görbe.)

[4] MALSCH J. és WIEN M. Ann. Phys. **83**. 310. old.

Mielőtt a kiegyenlítés problémáját tárgyalnánk, azt kell eldönteni, hogy a karakterisztika melyik pontja alkamlas munkapontul. Nyilván az, amelyiknél az adott izzítóáram erősség változására, a legnagyobb ellenállás változás következik, mert ez dönti el a mérés érzékenységét. Hogy ez a körülmény mennyire fontos, kitűnik abból, hogy az elektrolit vezetőképességét éppen a baretter ellenállásából kell meghatároznunk. De ha a baretter nem reagál nagy ellenállásváltozással az elektrolit vezetőképességének változására, akkor pontos mérés alig lehetséges, mert a baretter ellenállását nem áll módunkban tetszőleges pontossággal megmérni. Ennek ugyanis, a technikai nehézségekről nem is beszélve, határt szabnak a külső temperatura ingadozások következtében előálló ellenállásváltozások.

A baretter munkapontjául a karakterisztika ama pontját kell választani, amelyben az izzítóáram, mondjuk 1%-os megváltozása a legnagyobb százalékú ellenállásváltozást vonja maga után. A maximális érzékenységű pontot magából az ellenálláskarakterisztikából határozhatjuk meg az alábbi módon.

Változzék meg az áram intenzitása di-vel. Ennek következtében a baretter ellenállása dr-rel. $\frac{di}{i}$ és a $\frac{dr}{r}$ hányadosok jelentik az áramerősségnek, illetőleg az ellenállásnak az i és r kezdeti értékhez viszonyított megváltozását. Nyilvánvaló, hogy annál érzékenyebb lesz a baretter, minél nagyobbb $\frac{dr}{r}$ relatív ellenállásváltozással követi az adott $\frac{di}{i}$ relatív intenzitásváltozást. A maximális érzékenységű pontja a karakterisztikának azon i értéknél lesz, ahol a $\frac{dr}{r} : \frac{di}{i}$ hányados a maximumát éri el. Ez a hányados az i függvénye s jelöljük $F(i)$-vel. Ha az ellenállásgörbe egyenletét $r = f(i)$-vel jelöljük, akkor a baretter érzékenységi görbéjének egyenletét így írhatjuk fel:

$$F(i) = \frac{\frac{dr}{r}}{\frac{di}{i}} = \frac{i}{r} \cdot \frac{dr}{di} = i \frac{f'(i)}{f(i)} \cdot \qquad (1)$$

Mivel $f(i)$ pontosan nem ismeretes, azért az érzékenységi görbét az (1) egyenlet alapján az ellenállásgörbéből grafikus eljárással határoztam meg. A görbe menetéből látható (2. ábra szakgatott vonal), hogy az érzékenységnek elég éles maximuma van. De ebből rögtön következik, hogy súlyt kell helyezni az izzítóáram, vagyis a munkapont helyes beállítására. Jelöljük a legalkalmasabb munkaponthoz tartozó áramerősséget I-vel. Az $I=6{\cdot}4$ MA esetében van az érzékenységnek maximuma és itt az értéke 1·25. Ez annyit jelent, hogyha az izzitóáram megváltozik 1%-kal, akkor ez 1·25%-os ellenállásváltozást okoz.

Wien az általa alkalmazott baretterek érzékenységi görbéjét nem a karakterisztikából, hanem közvetlenül határozta meg. Megemlítem, hogy az általam grafikusan meghatározott görbe menete az övével[5] teljesen egyezik. Az én eljárásom könnyebben keresztülvihető és ezért egyszerűbb.

Miután ismerjük a baretter legérzékenyebb pontjának meghatározását, rátérhetünk a baretterpár kiegyenlítésének problémájára.

A cél tehát az, hogy azok az ellenállásingadozások, melyek a mérő és a kompenzáló körben az adó intenzitás ingadozásai következtében egyidejűleg jelentkeznek, ne változtassák meg a baretterek ellenállásának arányát, s így a Wheatstone-híd egyensúlya megmaradjon.

A mérőkör baretteréül több lámpácska közül azt választottam, amelyiknek az érzékenységi maximuma a legnagyobb volt. A kompenzálókör baretteréül pedig olyat, amelyiknek az ellenálláskarakterisztikája az előbbiével leginkább megegyezett. Ilyenformán adva volt két nem nagyon különböző ellenálláskarakterisztikájú baretter és a mérőkör baretterének érzékenységi maximuma által meghatározott áramerősség. A baretterek maximális érzékenységű helyéhez tartozó meredeksége és ellenállása különbözők voltak. A görbék meredekségén nem változtathattam, mert ezek a lámpácskák belső konstrukciójával vannak meg-

---

[5] Malsch J. és Wien M. Ann. Phys. **83.** 309. old.

határozva. A lámpácskák elé, kívülről kapcsolt ellenállásokkal ugyan, a karakterisztikákat önmagukkal párhuzamosan fölémelhettem, de erre az eljárásra írja WIEN,[6] hogy megkísérelte, de nem nagy eredménnyel. El kellett tehát dönteni, hogy elvileg van-e lehetősége a két karakterisztikát a baretterek elé kapcsolt ellenállások segítségével úgy megváltoztatni, hogy az őket izzító áramok intenzitásának egyforma arányú megváltozása esetében a baretterek ellenállásának aránya is állandó maradjon.

Fejezze ki a mérőkör baretterének ellenálláskarakterisztikáját az $r_1 = f(i)_1$ és a kompenzálókörét pedig az $r_2 = f(i)_2$ egyenlet. Annak a feltétele, hogy az $\frac{r_1}{r_2}$ arány az i értékétől független legyen az, hogy e hányados i-szerinti deriváltja minden i értéknél eltűnjön.

Ez általában nem teljesül, de nem is szükséges. Elég, ha a görbének egy szakaszára nézve igaz. E szakasz középpontjának abszcisszája legyen az érzékenységi maximummal meghatározott $i = I$ és a határai az I-t körülvevő $+\Delta i$ és $-\Delta i$, ahol a $+\Delta i$ és a $-\Delta i$ jelentik az adó által indukált áram I középérték körüli maximális ingadozását. Mivel már egyszerű eszközökkel sikerül az adó intenzitásának állandóságát 1—2 ezrelékig biztositani, azért Δi-k ezrelék rendűek lévén, a karakterisztikának az általuk határolt igen kicsi darabját feltétlenül egyenesnek tekinthetjük, különösen akkor, ha még azt is figyelembe vesszük, hogy itt a karakterisztika legegyenesebb részével van dolgunk.

A mérőkör baretterének ellenállás egyenesét (a munkapont kis környezetében) írja le az $r_1 = M + a_1 i$ és a kompenzáló baretterét pedig az $r_2 = K + a_2 i$ egyenlet, ahol a_1 és a_2 az egyenesek irányhatározója, M és K az egyeneseknek az ordinátával való metszéspontjának távolsága az origótól. A baretterek ellenállásának aránya akkor lesz független az áram ingadozásától, ha ezek arányának i szerinti deriváltja zéróval egyenlő.

---

[6] MALSCH J. és WIEN M. Ann. Phys. **83.** 310. old.

Azaz

$$\frac{d\dfrac{M+a_1 i}{K+a_2 i}}{di}=0, \tag{2}$$

mikor is

$$Ma_2=Ka_1. \tag{3}$$

Az a_1 és a_2 együtthatókon nem változtathatunk, mert azokat a munkapont helyzete határozza meg. De az M és K konstansok, a baretterek elé kapcsolt ellenállásokkal megváltoztathatók. Ugyanis, ha a baretterrel egy ellenállást sorba kapcsolunk, akkor az ennek az ellenállását növeli, ami azáltal jut a görbén kifejezésre, hogy azt függőlegesen, de önmagával párhuzamosan felemeli. Ily módon az ellenállás egyenes, mely nem más, mint a görbe I abszcisszához tartozó pontjának az érintője, szintén emelkedik. S így módunkban áll minden esetben az M, illetőleg K konstansokat előtétellenállásokkal úgy megváltoztatni, hogy a (3) feltétel teljesüljön. Ismét hangsúlyozom, hogy ez csak addig igaz, amíg a karakterisztika kérdéses része egyenesnek tekinthető. Továbbá feltételeztük, hogy mindkét baretteren egyidejűleg egyenlő intenzitású áram folyik át. (Ez utóbbi feltételt könnyű megvalósitani, mert a köröknek csupán az adóhoz való csatolását kell megfelelően beállítani.)

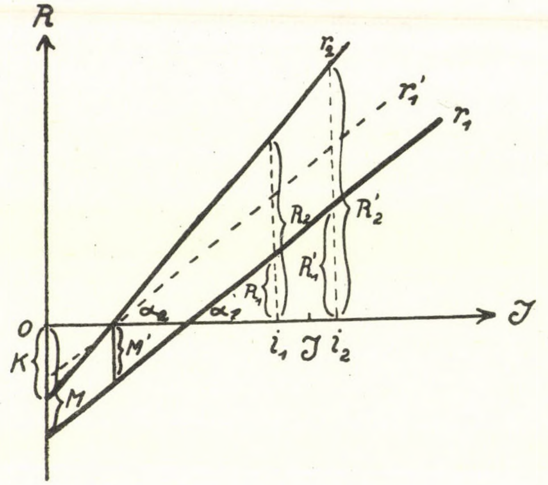
Tegyük fel, hogy ismeretesek az M, K, a_1 és a_2 konstansok. Három eset lehetséges a nullfeltétel figyelembe vétele alapján:

1. $M=K\frac{a_1}{a_2}$. Ez esetben a baretterpár ki van egyenlítve, tehát nem szükséges előtétellenállás bekapcsolása. Ez általában nincs így, csak véletlenül lehetséges.

2. $M\neq K\frac{a_1}{a_2}$. És pedig $M<K\frac{a_1}{a_2}$, ez esetben az M-mel jelzett baretter elé $M'=K\frac{a_1}{a_2}-M$ nagyságú ellenállást kapcsolunk, mikor is a nullfeltétel teljesül.

3. $M>K\frac{a_1}{a_2}$. Az egyenletet K-ra nézve oldjuk meg és ez elé kapcsoljuk a K' nagyságú ellenállást.

A fejtegetéseimből kitűnik, hogy a barettereket az egyik vagy másik elé kapcsolt ellenállásokkal mindig ki lehet úgy egyenlíteni, hogy azok ellenállásaránya, az izzító áram bizonyos intervallumában állandónak tekinthető. Az előtét ellenállás nagysága, az imént mondottak szerint számítható. Csakhogy ehhez ismerni kellene az M, K, a_1, a_2 konstansokat. De ezeknek a meghatározása igen körülményes lenne s az ellenálláskarakterisztikákból nyerhető értékek, csak tájékoztatásra jók. Az alábbiakban azt a kísérleti eljárást fogom ismertetni, mely-



3. ábra.

nek alapján az előtétellenállás meghatározható a konstansok ismerete nélkül.

Jelöljük a két baretter ellenállását az egyenes mentén r_1, illetőleg r_2-vel (3. ábra).

A $\frac{r_1}{r_2}$ hányados csak akkor lesz független az i-től, ha az egyenesek az abszcisszatengelyen metszik egymást. Ehhez az r_1 egyenest egy M' darabbal fel kell emelni. M' az az ellenállás, amit az M elé kell kapcsolni. A M' ellenállást a következőkép számíthatjuk.

Az i_1 és i_2 intenzitásoknál kisérletileg meghatározzuk a baretterek ellenállását. Ezek R_1, R_2 és R_1', R_2'. (Az i_1 és i_2 a görbe egyenes részén vett érték.) Ha az r_1 egyenest, M' darabbal, önmagával párhuzamosan felemeljük, akkor az R_1 és R'_1 is M'-rel nagyobb lesz. Ez esetben azonban

$$\frac{R_2}{R_1+M'}=\frac{R'_2}{R'_1+M'}, \tag{4}$$

ahonnan

$$M'=\frac{R_1R'_2-R_2R'_1}{R_2-R'_2}. \tag{5}$$

Ha M' számára negatív érték adódnék, akkor

$$\frac{R_1}{R_2+K'}=\frac{R'_1}{R'_2+K'}, \tag{6}$$

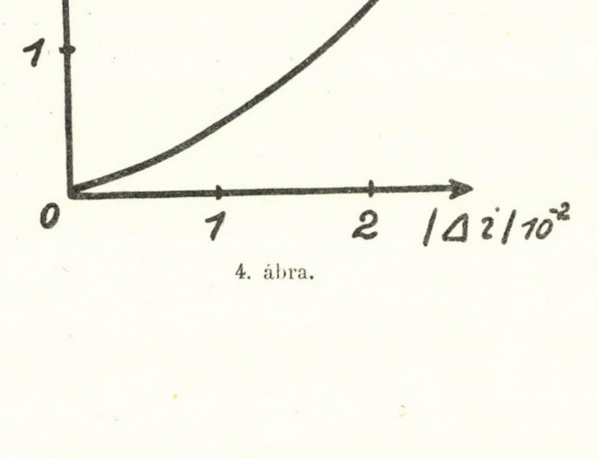
ahonnan

$$K'=\frac{R'_2R_1-R_2R'_1}{R'_1-R_1}, \tag{7}$$

ahol K' az r_2 elé kapcsolandó ellenállást jelenti.

Megjegyzem, hogy a baretterek ellenállásának a meghatározása igen egyszerűen eszközölhető, de még így is ez az eljárás csak inkább elméleti jellegű, mert a baretterek kisérleti kiegyenlítése, amint azt majd később ismertetni fogom, egyszerűen keresztülvihető.

Hogy mily mértékben sikerült a baretterpár kiegyenlítése, annak illusztrálására szolgáljon a 4. ábra, melynek a vízszintes



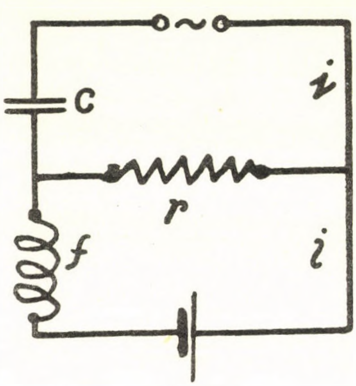
4. ábra.

tengelyére az áram intenzitásának ingadozását vittem fel, százalékban kifejezve, a függőlegesre pedig az ellenállásarány megváltozását, százezredekben. Láthatjuk, hogyha az áramerősség a baretterekben egyidejűleg 1%-ot ingadozik, akkor az ellenállások aránya a százalék ezredrészénél is kevesebbet változik. A valóságban azonban 1%-os ingadozások nem is fordultak elő, mert a rezgések intenzitása 1—2 ezrelékig minden különösebb nehézség nélkül állandó értéken tartható volt.

A baretterkör.

Most a baretterkörben folyó egyen- és váltóáram szerepét, a baretterkör impedanciáját és az elektrolit által okozott intenzitáscsökkenést tesszük vizsgálat tárgyává.

A baretterkörben folyó magasfrekvenciájú áram intenzitásváltozása az elektrolit vezetőképességének a függvénye. Hasonlóképpen a baretter ellenállása is az lesz. Hogy a baretter ellenállását mérni tudjuk, szükséges, hogy azon egyidejűleg egyenáram is follyék át. Mindkét áramfajtának van melegítő hatása, tehát a baretter ellenállása az egyenáram intenzitásától is függ. Már most az a kérdés, hogy mekkora a két áramfajta együttes melegítő hatása, illetőleg mekkora annak az áramnak az intenzitása, amelyik ugyanúgy melegíti a szálat, mint a váltó- és egyenáram együttvéve. Legyen ezen eredő áram intenzitása *I*. A váltóáram effektív értékét jelöljük $\mathfrak{i}$-vel, az egyenáramét *i*-vel.



5. ábra.

Az *r* ellenálláson keresztül (5. ábra) egyidejűleg egyen- és váltóáram folyik keresztül a nélkül, hogy azok egymást zavarnák. A *C* kondenzátor az egyenáramot, az *f* fojtótekercs pedig a váltóáramot zárja le az áramforrások felé.

A váltóáram okozta JOULE-féle hő dt idő alatt

$$dQ_1 = \mathrm{i}^2 r dt \tag{8}$$

és az egyenáramé:

$$dQ_2 = i^2 r dt. \tag{9}$$

Az eredő JOULE-hő a kettő összege, azaz

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 = r(\mathrm{i}^2 + i^2)\, dt, \tag{10}$$

ahonnan

$$I = \sqrt{\mathrm{i}^2 + i^2}. \tag{11}$$

A magasfrekvenciájú áram $d\mathrm{i}$ intenzitásváltozása dr-rel változtatja meg a baretter ellenállását. A pontos mérés szempontjából fontos, hogy e változás minél nagyobb legyen. Vizsgáljuk meg, hogy a $\frac{dr}{d\mathrm{i}}$ hányados hogyan függ a baretteren átfolyó egyenáramtól.

A baretter ellenállásának az egyenlete (egy kis szakaszon belül) így írható:

$$r = A + aI = A + a\sqrt{\mathrm{i}^2 + i^2} \tag{12}$$

és ebből

$$\frac{dr}{d\mathrm{i}} = a \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\mathrm{i}^2 + i^2}}. \tag{13}$$

A (13)-ból kitűnik, hogy az lenne a legkedvezőbb, ha az egyenáram intenzitása zéróval lenne egyenlő. De mivel ez nem lehetséges, azért arra kell törekedni, hogy az i lehetőleg kicsi legyen. Ha $i = \frac{\mathrm{i}}{10}$, akkor az egyenáram melegítő hatása a váltóáramhoz viszonyítva elhanyagolható

Ha $i = \frac{\mathrm{i}}{10}$, akkor a (13) alapján a váltóáram egy százalékos megváltozása az ellenállást igen közel a%-kal változtatja meg. Ha ellenben $i = 10\mathrm{i}$, akkor a váltóáram 1%-os megváltozása az ellenállást csak $\frac{a}{10}$%-kal változtatja meg. Ez a nagyságrendbeli különbség az ellenállásmérés pontosságát is ugyanannyival csökkenti.

Természetesen, ha a váltóáram intenzitása nagyon kicsi, akkor, hogy a karakterisztika meredekebb részére jussunk, sok egyenárammal kell megterhelni a barettert. Ezt a hibát elkerülendő, a rezgéseket előállító adót úgy méreteztem, hogy az a kellő intenzitást biztositani tudta.

A baretterpár kiegyenlítésének tárgyalásánál feltételeztük, hogy a mérő, illetőleg a kompenzáló körben indukált áramok intenzitása arányos az adó rezgőkörében folyó áram intenzitásával. Ez szigorúan csak akkor igaz, ha a baretterkör impedanciája független az áramerősségtől. Ez a valóságban azonban nincs így, mert a növekvő áramerősséggel a baretter ellenállása is nő s vele a baretterkör impedanciája. Azaz, ha az adókör intenzitása 1%-kal nagyobb lesz, akkor a baretterkörben az intenzitásnövekedés az 1%-nál valamivel kisebb lesz. Ezt a hibát elkerülendő, a baretterkör önindukcióját, azaz a menetsugarát oly nagyra választottam, hogy a kör induktiv ellenállása a baretter ohmikus ellenállásánál sokkal nagyobb lett. Mivel ennek következtében az impedancia csak lényegtelenül volt nagyobb az öninduktiv ellenállásnál, azért a baretter ellenállásának kicsiny ingadozásai az impedanciát nem változtatták meg. Tehát a kiegyenlítéshez megkívánt arányosság követelményeinek sikerült eleget tennem.

A LECHER-drótpár záróívébe helyezett elektrolitben örvényáramok indukálódnak. Hogy az elektrolitben indukált áram intenzitása milyen függvénye a frekvenciának, az elektrolit vezetőképességének, az elektrolit mennyiségének, általában az elektrolitnek és a záróívnek a kölcsönös térbeli helyzetétől hogyan függ, ezidőszerint pontosan nem ismeretes. De elég, ha annyit tudunk, hogy az örvényveszteség okozta csillapitás a rendszerben folyó rezonans áram intenzitását az elektrolit vezetőképességével arányosan csökkenti.*

Minket a mérőmódszer szempontjából elsősorban az érdekel, hogy a baretterpárt akkor is ki lehet-e egyenlíteni, ha a rendszer elektrolitet is tartalmaz. Ez esetben ugyanis módszerünk nullmódszer. A nullmódszernek az abszolút módszerhez viszonyitva nagy előnye az, hogy az elektrolit vezetőképességválto-

* Méréseim tanusága szerint.

zása közvetlenül mérhető, míg az abszolút módszernél az effektus két abszolút értékre meghatározott vezetőképesség különbségeként adódik.

A mérőkörben folyó magasfrekvenciájú áram I_m intenzitását az alábbi egyenlettel írhatjuk le:

$$I_m = I_a c_1 c_2 (1-k). \tag{14}$$

Ahol I_a az adókörben folyó magasfrekvenciájú áram intenzitása, c_1 és c_2 a LECHER-rendszer és az adókör, illetőleg a LECHER-rendszer és a mérőkör közti csatolási tényező és k az elektrolit vezetőképességétől függ. Ez utóbbi zérus, ha a vezetőképesség is az, vagyis ha nincs örvényáramú veszteség. De egynél mindig jóval kisebb és értéke, az én méréseimben, 0·1—0·02 között volt.

A kompenzáló körben folyó magasfrekvenciájú áram I_k intenzitását az

$$I_k = c_3 I_a \tag{15}$$

írja le, ahol a c_3 az adó- és a kompenzálókör közti csatolási tényező. Amint a két utóbbi egyenletből kitűnik, a mérő- és kompenzálókörökben folyó magasfrekvenciájú áram intenzitása egyenesen arányos az adó körében folyóéval. Ezek egymástól csak konstans tényezőkben térnek el. A c_1, c_2, c_3 csatolási tényezők 0 és 1 között tetszőlegesen beállíthatók és értékük független az áram intenzitásától. Az $(1-k)$ tényező adott folyadék mennyiség és térbeli elhelyezkedés esetében csakis az elektrolit vezetőképességétől függ. Tehát különböző vezetőképességű elektrolitek esetében is a csatolási tényezők helyes beállításával elérhetjük azt, hogy mindkét baretterkörben a magasfrekvenciájú áram intenzitása egyenlő legyen. Továbbá, mivel a fenti tényezők az áram intenzitásától függetlenek, azért a baretterkörökben folyó áram intenzitása arányos az adó mindenkori rezgésintenzitásával és annak esetleges ingadozásait arányosan követi. Így a baretterpár még akkor is kiegyenlíthető, ha a rendszer elektrolitet is tartalmaz.

Ezzel be is fejeztem a baretterekre vonatkozó fejtegetéseimet és rátérek a mérőberendezés fontosabb részeinek ismertetésére.

A mérőberendezés.

1. Az adó.

A magasfrekvenciájú rezgéseket előállító generátor, egy kétcsöves ellenütemű (Holborn) kapcsolású adó volt. A csövei 12 W teljesítményű *RX* 4100 jelű Vatea-csövek voltak. A rács és az anódkör egy-egy drótívből állt és a rezgőkörök kapacitását a csövek rács-anód kapacitása képezték. Az adó hasznos teljesítménye 4 wattot tett ki. Az előállított rezgések hullámhossza 348 cm volt. Ennél rövidebbet az említett szerzők közül csak Rieckhoff alkalmazott. A hullámhosszat Lecher-drótpáron határoztam meg.

2. Áramforrások.

Az adó csöveinek izzítására 4 voltos 36 ampèrórás akkumulátort használtam. Mivel ez aránylag kicsi teljesítményű, csak rövid ideig tudta volna a 2 ampèr intenzitású fűtőáramot állandó feszültségen szolgáltatni, azért azt ellenálláson keresztül az egyenáramú hálózatra kapcsoltam (Puffer-kapcsolás). Az ellenállás beszabályozásával elértem, hogy sok órás üzem esetében sem változott meg az akkumulátor feszültsége többet 0·01 voltnál.

Az anódáramot egy oly hálózati anódpótlóból nyertem, melynek feszültségét egy 210 volt gyujtási feszültségű és 60 MA teljesítményű glimmlámpával stabilizáltam. Ezzel a berendezéssel elértem, hogy a rezgések intenzitása 1—2 ezreléknél többet nem ingadozott, ami a célnak teljesen megfelelt.

Szükségesnek tartom itt megemlíteni, hogy a többi szerző által kidolgozott eljárások esetében többszáz ampèr-órás fűtőakkumulátort és néhány száz voltos és aránylag nagy teljesítményű anód-akkumulátort kellett alkalmazni. Egy ilyen telep beszerzése és üzembentartása természetesen sokkal körülményesebb, mint az én, majdnem tisztán hálózati, berendezésemé.

3. A Lecher-drótpár.

Vízszintesen kifeszített 180 cm hosszú és a végén 5 cm sugarú vastagabb vezetőívvel *(Z)* lezárt drótpár képezte a LECHER-rendszert.

A rendszer hangolása, mint ismeretes, úgy történik, hogy a drótpárt egy vezetővel áthidaljuk és ennek eltolásával a rendszert rezonanciába hozzuk. A rendszer hangolása azonban rendkívül éles és az áthidaló vezetőnek a feszültségi csomóponttól való néhány milliméteres eltolása majdnem teljesen megszünteti a rendszerben folyó áramot. A mérés pontossága megköveteli a rezonans áram helyes beállítását, mert az itt elkövetett hiba a vezetőképesség mérésében 20—30-szorosan jelentkezik. RIECKHOFF ezt a hibát úgy kerülte el, hogy a hidat mikrométer-csavarral tolta el.

Én ilyen megoldást csak nehezen alkalmazhattam volna a távhangolás miatt. Ez utóbbira azért volt szükség, mert a kezelőnek minden helyzetváltoztatása a rendszert kisebb-nagyobb mértékben elhangolja, ami állandó galvanométerjárást von maga után. Az általam alkalmazott eljárás egy megfigyelésen alapszik és rendkívül finom hangolást enged meg.

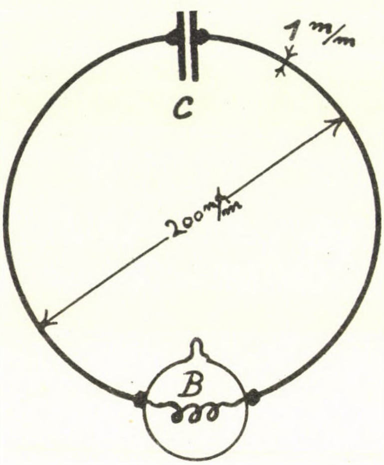
Ha a LECHER-drótpár csomóponton túli részét egy második vezetővel áthidaljuk (1. ábra), akkor ez a rendszert kis mértékben hangolja. Ha most a *H* híddal a rendszert élesre hangoljuk, akkor a *H'* híd eltolásával igen finoman szabályozhatjuk a rezonans áram erősségét, mert ennek 10—15 cm-rel való eltolása is csak néhány százalékkal változtatja meg a rezonans áramot. A *H'* hídhoz egy fonalat kötöttem és ennek segélyével a rendszert 4 m távolságról hangolhattam. Ez az eljárás a célnak teljesen megfelelt.

4. A mérőedény.

A mérőedény 800 cm^3 űrtartalmú, vékonyfalú hengeres üvegpohár volt, amelyet egy a záróív alatt álló kis asztalkára helyeztem el oly módon, hogy azt a záróív a közepével egy magasságban koncentrikusan vette körül. Miután az elektrolit okozta csillapitás elég nagy mértékben függött az edény és az iv kölcsönös helyzetétől, azért az edény aljára három szemölcsöt fuvattam, melyek az asztalka megfelelő mélyedéseibe illeszkedve, az edény és a záróiv kölcsönös helyzetének állandóságát biztositották.

Itt említem meg még azt is, hogy a csillapítás az elektrolit mennyiségétől is erősen függött és ezért mindig pontosan állandó térfogatú oldattal dolgoztam (500 cm^3).

5. A baretterkörök.



6. ábra.

A baretterkörök a 6. ábra szerinti méretben és elrendezésben készültek. A baretterek foglalat nélküli izzó (biztosító) lámpácskák voltak. A C kondenzátor (300 cm) a magasfrekvenciájú áram útját biztosította. A kondenzátor pólusairól összesodort vezetékek mentek a WHEATSTONE-hídhoz. Hogy a baretterkör kellő mechanikus szilárdsággal rendelkezzék, az egészet szigetelő-gyűrűre erősitettem. Végül a baretterköröket szigetelő állványok segítségével csatoltam az adó, illetőleg a záróivhez.

6. A Wheatstone-híd.

Csak annyiban különbözött a szokásostól, hogy az egyik baretterággal sorba (1. ábra) egy kis ellenállású árammérőt G_1 a másikkal pedig 0·1 Ohmos dugaszolást megengedő ellenállásszekrényt R_1 kapcsoltam.

A berendezés nagy követelményt nem támasztott a galvanométerrel szemben és azért $1 \cdot 10^{-8}$ Amp./skálarész érzékenységű tükrös galvanométer mint nulleszköz megfelelt. E galvanométer eléggé gyors járású volt, de ez fontos is, mert csak így lehetett a Lecher-drótpárt gyorsan hangolni.

7. Az árnyékolás.

Oly tökéletes árnyékolást, mely a rendszer közvetlen közelében való észlelést megengedte volna, nem csinálhattam, mert akkor az egész berendezést árnyékoló fémdobozba kellett volna zárnom. Ezt pedig a berendezés aránylag nagy méretei és az árnyékoló részekben keletkező örvényáramú veszteségek tették lehetetlenné. Ezért úgy csoportosítottam az összes vezetőket, hogy azok az észlelő asztalomtól legalább 3—4 méternyire voltak. Az észlelő asztalon csak a galvanométer leolvasására való távcső és egy forgatható dob voltak. Ez utóbbira csavarodott a rendszer fínom beállítását végző hídjának a mozgatására szolgáló zsinór vége. Így azután nem volt zavar az árnyékolás hiánya miatt.

8. Az alacsonyfrekvenciájú vezetőképesség mérése.

Ez a közismert Kohlrausch-módszerrel történt. Summer helyett azonban egy zenei frekvenciát előállító csőadót használtam, mert így mind a hangmagasság, mind az intenzitás állandó maradt a mérés folyamán. A merülő-elektródok nagyságát mindig a mérendő elektrolit vezetőképességéhez mérten választottam.

E helyütt említem meg, hogy az elektrolit temperatura ingadozása miatti hibát úgy igyekeztem elkerülni, hogy nagymennyiségű elektrolitet használtam (500 cm^3) és a szoba hőmérsékletén mértem. Arra ugyanis gondolni sem lehetett, hogy a magasfrekvenciájú részt részben, vagy egészben termosztátba helyezzem. Ez a megoldás megfelelt és könnyű belátni, hogy ily nagy tömegű és szobatemperaturájú folyadékmennyiség a néhány perces mérés alatt nem változtatja meg számbavehetően a hőmérsékletét.

Egy mérés lefolyása.

Ezt a fejezetet a baretterpár kisérleti kiegyenlitésének ismertetésével kezdem, bár erre minden mérési sorozat megkezdése előtt nem volt szükség, sőt egyik napról a másikra is, csak némi korrigálást kellett végeznem.

A baretterpár kiegyenlitési elméletének tárgyalása azt eredményezte, hogy az mindig elvégezhető az egyik, vagy a másik baretter elé kapcsolt megfelelő ellenállással. Ez azonban az ott ismertetett eljárással nagyon hosszadalmas volna és a Kohlrausch-dob ágainak arányát is pontosan be kellene állitani a baretter-ellenállások arányának megfelelően. Ha figyelembe vesszük azt, hogy a pontos beállitás a hid-arány százezred részeit érinti, akkor előtűnik ennek az eljárásnak nehézsége. Ezért az alábbi módon jártam el, ami szerint mind az előtételellenállás, mind a dobarány automatikusan a szükséges értékre áll be.

Az érzékenységi maximumra jellemző áramerősség képezi a kiindulás alapját. (6·4 *MA*),

A Wheatstone-hidat tápláló akkumulátor r_2 ellenállását (1. ábra) úgy szabályoztam be, hogy a mérőkör baretterén 6·4 *MA* intenzitású egyenáram folyjon át (az adó még nem működik). A Kohlrausch-dob beállitásával a nullág galvanométerét árammentesitem. Ez esetben mindkét baretteren ugyanolyan intenzitású áram fog keresztülfolyni. Most az r_2 ellenállás változtatásával, mondjuk 2%-kal csökkentem a barettereken átfolyó áram intenzitását. A baretterek ellenállása most meg fog változni, és mivel még nincsenek kikompenzálva, az ellenállásaik aránya is megváltozik. Ennek következtében a nullág galvanométere kitér. Jelezzük a kitérést α_1-el. Tudva azt, hogy a kikompenzáláshoz az egyik baretter előtét-ellenállását növelni, vagy csökkenteni kell, egy ellenállásdugó kihúzásával növeljük az r_1 előtétellenállást pl. 1 Ohmmal. A dob beállitásával árammentesitjük a nullágat. Ezután az áram intenzitását növeljük 2%-kal. Most a galvanométer újra kitér. Legyen ez a kitérés α_2. Ez vagy kisebb, vagy nagyobb α_1-nél. Ha kisebb, annyit jelent, hogy az előtétellenállás helyes irányban változott meg. Ha a_2 nagyobb lett volna a_1-nél, akkor éppen ellenkezőleg az előtétellenállást csökkenteni kellett volna. Miután az ellenállás változtatásának irányát megállapítottuk, a kiegyenlítést így folytatjuk. Tegyük fel, hogy növelni kell az előtét-ellenállást. Egy bizonyos ellenállás bekapcsolása után a dobbal a nullágat árammentesítjük és utána az intenzitást növelve, (az intenzitás változás mindig 2%) a galvanométer kitérését leolvassuk. Ez az előbbinél kisebb lesz. Ezt az eljárást addig folytatjuk, míg a kitéréseknek minimuma lesz. Az ellenállás további növelése, a kitéréseket újra nagyobbítaná.

Ily módon tehát elértük, hogy egyrészt a kiegyenlítéshez szükséges előtétellenállás benne van a baretterkörben, másrészt a dob is az ellenállások arányának megfelelően be van állítva. Ezeken azután, némi korrekciótól eltekintve nem kell változtatni. Az itt kissé hosszadalmasan vázolt eljárás a valóságban percek alatt elvégezhető.

A befejezett kiegyenlítés után a barettereken átfolyó áram intenzitásának 1—2%-kal való megváltoztatása a hídarányt a százalék ezredrészénél is kevesebbel változtatja meg, holott ugyanekkor az ellenállásaik 2—3%-kal változnak meg.

Az egyenáramra nézve elvégzett kiegyenlítésnek a tulajdonképpeni célja az, hogy a váltóáramú kiegyenlítést megkönnyítse. Tudniillik végeredményben az adó ingadozásait kell kikompenzálni. De az itt vázolt eljárást magasfrekvencián nagyon nehezen végezhettük volna el. Magasfrekvenciára nézve akkor lesz a baretterpár kiegyenlítve, ha a rajta átfolyó magasfrekvenciájú áram intenzitása ugyanakkora lesz, mint amekkorán az egyenáramú kiegyenlítés történt. Ez akkor következik be, amikor a baretterek ellenállása a magasfrekvenciás áram hatására akkora lesz, mint az egyenáram esetében. A baretter ellenállását a rajta átfolyó áram intenzitásából (G_2 árammérő állandóan mutatja) és a G_3 nagy ellenállású voltmérővel mért feszültségesésből határozhatjuk meg.

Az adót bekapcsolom, és a mérendő elektrolitet tartalmazó edényt a záróívbe helyezem és a rendszert lehangolom. Az r_2 ellenállást úgy szabályozom be, cca. 0·5 *MA* intenzitású egyenáram folyjék majd a váltóáramra is kikompenzált baretteréken keresztül.

A magasfrekvenciájú áramra nézve tehát a baretterpár akkor lesz kiegyenlítve, ha a baretterkörökben folyó magasfrekvenciájú áram és az igen kevés egyenáram effektív intenzitása egyenlő lesz az egyenáram ama intenzitásával, amelyen a kikompenzálás történt. Ezt a baretterkörök csatolásának beállításával oly módon lehet elérni, hogy a rezonanciára hangolt rendszerhez azt addig közelítem, míg a baretter ellenállása elérte az egyenáramú kiegyenlítésnek megfelelő értéket. Az ellenállást, a baretteren keresztül folyó csekély egyenáram intenzitásából, illetőleg előálló feszültségesésből határoztam meg. Ezután a kompenzálókört addig közelítettem az adóhoz, míg a nullág galvanométere nem mutatott kitérést. Ez akkor következett be, amikor a kompenzálókör ellenállása megfelelt az egyenáramú kiegyenlítésnek.

Jellemző a kikompenzálás jóságára, hogy ugyanakkor, amikor az elektrolit vezetőképességének 1%-os megváltozása 10 skálarész kitérést adott, az adó intenzitás-ingadozása okozta kitérések 0·1 skálarésznél kisebbek voltak.

A mérés.

Meghatározandó a 0·01 mol. conc. *KCl* oldattal megegyező vezetőképességű $CuSO_4$ oldatnak az előbbihez viszonyított magasfrekvenciájú effektusa.

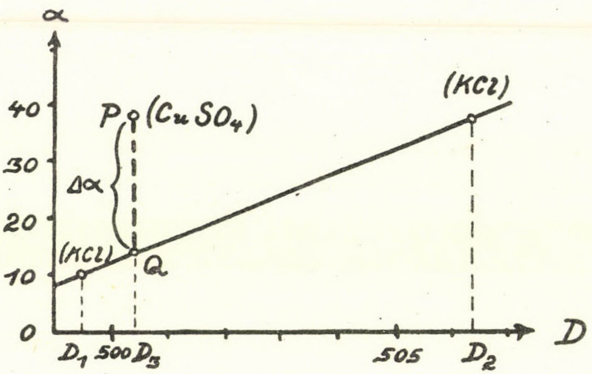
Mindenekelőtt az oldatokat készitettem el. A 0·01 mol. conc. *KCl* oldathoz az 1 molos oldat higitásával jutottam. Ezután az oldat alacsonyfrekvenciájú vezetőképességét meghatározandó, a Kohlrausch-berendezés merülőelektrodjait az oldatba helyeztem. A Kohlrausch-híd előtétellenállását úgy szabályoztam be, hogy a hangminimum lehetőleg az 500 dobosztályzatra essék. (Itt a legkisebb a relatív hiba.) Majd egy töményebb $CuSO_4$ oldat higitása útján az előbbivel igen közel megegyező vezetőképességű oldatot készítettem. Az eltérés a két oldat között 2—3 dobosztályrész, tehát 0·8-1.2% volt. Mindkettőből 1—1 litert készitettem.

Ezután az adót bekapcsoltam és a már előbb kikompenzált rendszer záróívébe helyeztem a *KCl* oldatot. A szükséges kisebb utána állításokat elvégeztem azért, hogy a nullág galvanométere ne mutasson kitérést. Ezzel a tulajdonképpeni mérés a kezdetét vette. Mindenekelőtt meg kellett állapitani, hogy az 1% vezetőképesség növekedés, hány skálarész galvanométer kitérést ad. A *KCl* oldat alacsonyfrekvenciájú vezetőképességének meghatározásánál, a hangminimum a dob $D_1=499\cdot5$ osztályzatánál volt. Ezután az elektrolitet a magasfrekvenciájú térbe helyeztem, a rendszer finom hangolását elvégeztem ekkor a galvanométer $a_1=10\cdot3$ skálarész kitérést mutatott. Ezután néhány cm^3 töményebb oldatot öntöttem a mérőedényben lévő oldathoz, összekevertem és ugyanannyit el is vettem belőle, hogy az elektrolit mennyisége ne változzék. Mivel megnőtt az elektrolit vezetőképessége, a galvanométer is kitért, új helyzete $a_2=37\cdot9$ skálarész volt. Ezután meghatároztam az elektrolit alacsonyfrekvenciájú vezetőképességét, a hangminimum $D_2=506\cdot3$ osztályzatnál volt. Egy dobosztályzatnak megfelelő vezetőképességváltozás tehát $\frac{37\cdot9-10\cdot3}{506\cdot3-499\cdot5}=\frac{27\cdot6}{6\cdot8}=4\cdot06$ sk. rész.

Mivel 1 dobosztályzatnak 0·4% vezetőképességváltozás felelt meg, azért 1% vezetőképességváltozásnak (több mérésből középelve) 9·9 skálarész adódott.

Ezután a mérendő $CuSO_4$ oldat alacsonyfrekvenciájú vezetőképességét határoztam meg $D_3=500\cdot4$, majd a magasfrekvenciájú vezetőképességnek megfelelő galvanométerkitérést $a_3=38\cdot1$. Ha D_1 vagy D_2 pontosan megegyeznék D_3-mal, akkor az effektus a megfelelő galvanométerkitérések különbségéből lenne kiszámitható. De mivel e mérésnél nincs így és általában nem is könnyű megcsinálni, azért ezen adatokból grafikus úton határozzuk meg az effektust.

A vizszintes tengelyre a dob osztályzatait (7. ábra), a függőlegesre pedig a galvanométerkitérést visszük fel. A különböző vezetőképességű KCl oldatok egy egyenest határoznak meg. A $CuSO_4$ oldat magasfrekvenciájú vezetőképességének megfelelő pont a KCl oldat egyenese fölött van. Ez annyit jelent, hogy a $CuSO_4$ oldat magasfrekvenciájú vezetőképessége nagyobb,



7. ábra.

mint az alacsony frekvencián vele megegyező vezetőképességű KCl oldaté.

Az effektust galvanométer skálarészekben a $\overline{PQ}=\Delta\alpha$ távolság adja. $\Delta\alpha=24$ és az effektus százalékban $\Delta x=\frac{24}{9\cdot9}=2\cdot42\%$.

A mérést többször ismételtem és ezek középértékét fogadtam el véglegesnek.

Mérési eredmények.

$MnSO_4$, $CuSO_4$ és $CrCl_3$ elektroliteknek a KCl oldatra vonatkozó magasfrekvenciájú effektusát határoztam meg. A mérések eredményét az alábbi táblázatokban foglaltam össze. Ezek első rovata az elektrolit molconcentrációját, a második a mért effektust százalékban, a harmadik a számított effektust ugyancsak százalékban. a negyedik a mérési sorozat középhibáját, az ötödik pedig az elektrolit hőmérsékletét tartalmazza.

Táblázatok.

Hullámhossz: $\lambda = 3{,}48$ m.

$MnSO_4$ (2—2 értékű elektrolit)

Mol conc.	Effektus mérve	Effektus számítva	Közép hiba	Hőmérsék. C°
$2{,}2.10^{-3}$	5·36 %	5·11 %	0·3 %	24·6
9.10^{-3}	2·84 %	3·63 %	0·047 %	22·6
$3{,}6.10^{-2}$	1·67 %	0·94 %	0·086 %	23·2
$CuSO_4$ (2—2 értékű elektrolit)				
$2{,}2.10^{-3}$	2·32 %	5·11 %	0·2 %	25·4
9.10^{-3}	2·43 %	3·63 %	0·03 %	23·1
$3{,}6.10^{-2}$	1·21 %	0·94 %	0·23 %	24·6
$CrCl_3$ (3—1 értékű elektrolit)				
$9{,}5.10^{-4}$	2·40 %	1·72 %	0·4 %	22·1
$4{,}5 \cdot 10^{-3}$	1·11 %	1·27 %	0·085 %	22·1
$1{,}5 \cdot 10^{-2}$	0·78 %	0·43 %	0·14 %	25·2

A táblázatokból látható, hogy a mért effektus a számítottal a hibahatáron belül részint megegyezik, részint attól lényegesen eltér. Különösen érdekes az $MnSO_4$ és a $CuSO_4$ oldat viselkedése, amennyiben az elmélet szerint mind a kettőre egyforma effektus adódik, míg méréseim szerint a $CuSO_4$ oldat effektusa minden koncentráción jelentékenyen kisebb, mint a megfelelő koncentrációjú $MnSO_4$ oldaté.

Hogy az eltéréseket nem a mérés hibája magyarázza csupán, az következik abból is, hogy a mérési sorozatok középhibája legtöbbször kisebb az eltéréseknél.

A többi szerzők által meghatározott effektusok hasonló eltéréseket mutatnak.

Az eltérések részint azzal is magyarázhatók, hogy a mért oldatok koncentrációja az elmélet megengedte határon mozgott.

Ugyanis az effektus pontos számítása csak nagyon híg oldatokra lehetséges.

Nagyon kis koncentrációjú oldatok vezetőképességét azonban a módszeremmel nem határozhattam meg, mert ezek az oldatok csak igen kis csillapítást, illetőleg baretterellenállásváltozást okoztak. Ennek következtében a mérés, vagy ami egyre megy, a baretterellenállás meghatározásának hibája az effektus nagyságrendjét elérte.

A mérési eredményeim az alkalmazott mérőfrekvencia szempontjából áthidaló jellegűek, amennyiben ezen a hullámhosszon az említett elektrolitek effektusát nem mérték. Az enyémnél rövidebb hullámhosszon egyedül Rieckhoff mért (106 cm), mig az összes többi szerzők az enyémnél jóval magasabb hullámhosszon (8—16 m) határozták meg az effektust.

A mérés hibája.

A mérés hibái két részből tevődnek össze. Az egyik az alacsony-, a másik a magasfrekvenciájú vezetőképesség meghatározásának a hibája.

Az alacsonyfrekvenciájú vezetőképesség meghatározásának a hibája egyedül a hangminimum beállításának a bizonytalansága volt. Ugyanis a vezetőképességeket abszolút értékre meghatározni nem kellett, csupán a vezetőképesség különbségeket, azaz relativ mérést végeztem. (Szisztematikus hibák kiestek.) Hőmérsékletingadozásokkal számolnom nem kellett a nagy folyadékmennyiség és a két mérést elválasztó rövid időköz miatt. Koncentráció meghatározásának hibája az effektus mérésében nem játszott szerepet, csupán az effektus számításában. De mivel az effektus a koncentrációval nagyon lassan változik, azért az itt elkövetett 1—2%-os hiba elhanyagolható. Az alacsonyfrekvenciájú vezetőképesség meghatározásának maximális hibája 0·15% és a középhibája 0·05%.

A magasfrekvenciájú vezetőképesség hibája nagyon sok tényező eredője. Ezeket külön-külön még csak becsülni is nehéz lenne.

Ezek a híd beállításának, az oldatmennyiség meghatározásának, a galvanométerjárásnak és a galvanométerleolvasásnak a hibái. Ezeket együttesen a következőkép határoztam meg.

0·01 mol konc. *KCl* oldatból nagyobb mennyiséget készítettem, egy mérőlombikkal (500 cm^3) a mérőedénybe töltöttem és a hidat elhangoltam, majd a galvanométer kitérését leolvastam. Ezután a mérőlombikba ismét 500 cm^3 oldatot töltöttem, a hidat lehangoltam, az előbbi oldatot az újabbal kicseréltem, a hidat ismét lehangoltam és a galvanométerkitérést leolvastam. A két galvanométerkitérés különbsége adta a magasfrekvenciájú vezetőképesség meghatározásának a hibáját. A maximális hiba 0·1—0·2 skálarész volt, ami ez esetben a vezetőképesség 0·01—0·02 százalékának felelt meg.

Figyelemreméltó, hogy a magasfrekvenciájú vezetőképesség meghatározásának a hibája jóval kisebb, mint az alacsonyfrekvenciájú vezetőképesség meghatározásának a hibája.

A galvanométerjárás, mely szintén a magasfrekvenciájú mérés hibáját fokozta, a szoba temperaturájának volt a függvénye. Ugyanis az időben lassan, vagy gyorsan változó szobatemperatura a Wheatstone-híd különböző temperatura-koefficiensű ágaiban ellenállásváltozásokat és termoáramokat létesitett és ezzel galvanométerjárást okozott. Ez a galvanométerjárás gyors hőmérsékletváltozás következtében (ablak kinyitása) oly nagy lehetett, hogy az általa okozott hiba az effektus nagyságrendjét is elérte. Kellő elővigyázat esetében a galvanométerjárás igen lassú volt és egyenletes menete a leolvasott skálarészek korrigálását lehetővé tette. Az előbb megadott hiba a lassú járás figyelembevételével adódott.

A fentiek alapján az elektrolit vezetőképességének meghatározásánál elkövetett hibát, mint az alacsony és a magasfrekvenciájú mérés hibáinak összegét adom meg. A hiba: 0·05%+ +0·01%=0·06%. Miután az effektus meghatározásához mind a mérendő, mind az összehasonlító elektrolit vezetőképességét meg kell határozni, a hiba az előbbinek a kétszerese. Mivel az effektus csak százalékrendű, azért az 1%-os effektus relatív hibája 12%. A relatív hiba kisebb koncentrációknál kissé nagyobb, a nagyobbaknál kisebb.

*

Méréseimet a Kir. Magy. Pázmány Péter Tud. Egyetem Kísérleti Fizikai Intézetében végeztem. Ez úton is hálás köszönetet mondok dr. TANGL KÁROLY egyet. ny. r. tanár úrnak, ki munkám elvégzését intézetében lehetővé tette. Köszönetemet fejezem ki dr. FORRÓ MAGDOLNA tanársegéd kisasszonynak, valamint v. dr. BARNÓTHY JENŐ és BAINTNER GÉZA tanársegéd úraknak értékes tanácsaikért. KURTHA GÉZA műszerész úrnak, ki a készülékeim összeállításában segédkezett, fáradozásait ez úton is köszönöm.

Összefoglalás.

1. Az elektrolit magasfrekvenciájú vezetőképességének mérésére új módszert dolgoztam ki. Ezzel $MnSO_4$, $CuSO_4$, $CrCl_3$ oldatoknak KCl oldathoz viszonyított magasfrekvenciájú ú. n. DEBYE-FALKENHAGEN-effektusát határoztam meg.

Mérőmódszerem az eddigiektől abban tér el, hogy a mérőfrekvencia intenzitásingadozásai következtében előálló hibát egy kompenzáló kapcsolású baretterrel küszöbölöm ki. Módszerem a RIECKHOFF által kidolgozott eljáráshoz hasonlóan elektródnélküli. Az elektrolit vezetőképességét közvetett úton abból a csillapításból határozom meg, amelyet az elektrolit egy lehangolt Lecher-drótpár záróívébe helyezve a benne keletkező örvényáramú veszteség folytán okoz. RIECKHOFF-tól eltérőleg a mérő barettkörön kívül még egy kompenzáló barettkört is alkalmazok. A két baretter egy Wheatstone-híd egy-egy ágát képezi, Az egyik baretter a Lecher-drótpár záróívéhez, a másik pedig az adó rezgőköréhez csatolódik induktív úton.

Az adókör intenzitásingadozásai egy irányban változtatják meg mindkét baretter ellenállását és ha ezek kezdeti értékét megfelelően választjuk, akkor a baretterek ellenállásának aránya független lesz az áram ingadozásaitól. Ily módon a mérés pon-

tosságát függetleníteni lehet az adó intenzitás ingadozásaitól.

2. Ismertetem azt az eljárást, amellyel a baretter ellenálláskarakterisztikájából grafikus úton is meghatározható a baretter érzékenységi görbéje.

3. Kimutatom, hogy a baretterek egyike, vagy másika elé kapcsolt előtétellenállás azok karakterisztikáját úgy változtatja meg, hogy az izzító áram bizonyos intervallumában az ellenállások aránya független az áram intenzitásától, s így annak ingadozásaitól is.

4. Táblázatokban ismertetem a mérési eredményeket, melyek az elmélettel a hibahatáron belül eléggé megegyeznek.

NEUE METHODE ZUR BESTIMMUNG DER HOCHFREQUENZ-LEITFÄHIGKEIT VON ELEKTROLYTEN.

Es wird eine neue Methode zur Bestimmung des Hochfrequenz-Leitvermögens von Elektrolyten beschrieben und der Debye-Falkenhagen-Effekt der Lösungen $MnSO_4$, $CuSO_4$ und $CrCl_3$ im Vergleich zur Lösung KCl bestimmt.

Die verwendete Messmethode unterscheidet sich von den anderen dadurch, dass der durch die Intensitätsschwankungen der Messfrequenz verursachte Fehler mit einem Baretter in Kompensationschaltung behoben wurde. Die Methode ist ausserdem — änlich dem Verfahren von Rieckhoff—elektrodenlos. Das Leitvermögen der Elektrolyten wurde indirekt aus der Dämpfung bestimmt, die durch die Wirbelstromverluste in einem abgestimmten Lecher-System entstehen. Im Gegensatz zu Rieckhoff wurde ausser dem Mess-Baretter-Kreis noch ein Kompensations-Baretter-Kreis verwendet, die je einen Zweig der Wheatstone-Brücke bildeten. Der eine Baretter war mit dem Schlussbogen des Lecher-Systems, der andere mit dem Schwingungskreis des Senders induktív gekoppelt.

Die Intensitätsschwankungen des Senders beeinflussen den Widerstand beider Baretter im gleichem Sinne, und falls die Anfangswerte entsprechend gewählt werden, wird das Verhältniss der Baretter-

Widerstände unabhängig von den Stromschwankungen. Die Messgenauigkeit wird also unabhängig von den Intensitätsschwankungen des Senders.

Es wird ein Verfahren dargelegt mit dem graphisch die Empfindlichkeitsänderung der Baretter aus ihren Widerstandskarakteristiken ermittelt werden kann.

Es wird gezeigt, dass ein Vorschaltwiderstand vor einem der Baretter, dessen Karakteristik in dem Sinne verändert, dass in einem bestimmten Bereich des Heizstromes das Verhältniss der Widerstände unabhängig von der Stromstärke und von dessen Schwankungen wird.

Die Messergebnisse sind in Tabellen zusammengefasst; sie stimmen innerhalb der Fehlergrenzen ziemlich gut mit der Theorie überein.

Institut f. Experimentalphysik. Budapest, d. 10. Apr. 1937.

Ernő Ács.

IRODALOM.

Hárs János: Hogyan számolt magyarországi György mester 1499-ben? Budapest, 1936, 30 oldal.

Az *Arithmetice summa tripartita Magistri Georgij de Hungaria* című 20 oldalas mű, mely minden valószínűség szerint 1499-ben Hollandiában nyomatott, a matematika-történeti munkák közül először S. GÜNTHER «*Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525*» című művében 1887-ben talál említést és pedig a CHASLES-féle könyvtár párisi árverésére 1881-ben kiadott katalógus alapján. HELLEBRANT ÁRPÁD a M. Tud. Akadémia alkönyvtárnoka 1893-ban felfedezte e művecske egy példányát a hamburgi városi könyvtárban és ennek alapján a M. Tud. Akadémia 1894-ben újból kiadta az eredeti latin szöveget és pedig SZILY KÁLMÁN és HELLER ÁGOST igen alapos «Jelentés»-eivel együtt, melyek (német matematikatörténészek kikért véleményét is figyelembe véve) a mű keletkezését és az egykorú számtankönyvek irodalmában elfoglalt helyét illetőleg értékes adalékokat tartalmaznak. A rendkívüli ritka eredeti kiadás egy példánya most már megvan Budapesten is, a Nemzeti Múzeumban, és pedig gr. APPONYI SÁNDORnak, a nagy magyar könyvgyüjtőnek híres hungarica-gyüjteményéből.

Ami a munka tartalmát illeti, ez három részből áll. Az első rész a számtan 9 alapműveletét (species) tárgyalja, a második a számvetést («per projectiles»), a harmadik 15 «regulá»-t (feladatot), melyek között a hármas-szabály foglalja el a legnagyobb helyet. Összefoglalva — CURTZÉnak HELLERtől idézett szavai szerint — GYÖRGY mester munkája szépen kikerekített tárgyalását adja annak a szokásos anyagnak, melyet többé-kevésbbé az összes egykorú számtankönyvek tartalmaznak. HELLER ÁGOST ehhez hozzáfűzi, hogy «GYÖRGY mester arithmetikája semmiféle, ugyanazon korból származó számtani könyvvel nem áll olyan nexusban, melynek következtében a művet egyszerű kompilatiónak lehetne tekinteni». E vélemény alapján e magyar szerzőtől származó első számtankönyv kultúrtörténeti szempontból kétségtelenül figyelemreméltó.

Indokoltnak és örvendetesnek kell tehát mondanunk, hogy Hárs János lefordította magyarra György mester *Arithmetiká*ját és e fordítást bevezetéssel, jegyzetekkel és magyarázó példákkal ellátva kiadta.

A bevezetésben György mester munkája mellett a többi XV. századbeli «számolókönyv» tárgyát ismerteti és rátér György mester magyar voltának bizonyítékaira is. Az egyik bizonyítéka, hogy György mester egyhelyütt az «aurea ytalorum hungarorumque ragulá»-ról is megemlékezik. (Itt azonban a ragula — helyesen: regula — nem pénzt jelent, mint ahogy H. J. fordítja, hanem szabályt). Másik bizonyítéka — mely persze a nyelvészek ellenőrzésére szorul — hogy «a latin szöveg mögött néha tőről-metszett magyaros szórend húzódik meg». — E bevezetés egy sajnálatos hibáját ki kell itt igazítanunk. Heller fentebb idézett szavait e bevezetés is idézi (9. l.), de egy-két szavát úgy változtatja meg, hogy ezzel az idézet éppen az ellenkező értelmet kapja. — A fordításhoz fűzött és ábrákkal megvilágított bő jegyzetek nagyban megkönnyítik a régies beszédmódja folytán természetszerüleg nehézkes fogalmazású szöveg megértését.

Hárs János füzetének megjelenése talán fel fogja hívni az illetékesek figyelmét a magyar művelődéstörténet ama kérdésére, hogy tulajdonképpen ki volt Georgius de Hungaria?

Kőnig Dénes.

Dr. Sályi (Springer) István: Mennyiségtan, Mechanika, Szilárdságtan. Különlenyomat a Gépészeti Zsebkönyvből, Budapest, Kir. Magyar Egyetemi Nyomda, 1937, 393 oldal.

Dr. Pattantyús Á. Géza szerkesztésében egy kétkötetes *Gépészeti Zsebkönyv* jelent meg, amely 11 csoportvezető és 95 munkatárs 123 tanulmányát foglalja egybe 3024 szövegoldalon 2044 ábrával. Három tanulmány fenti címen különlenyomatban is megjelent s e lap olvasóinak érdeklődésére is számíthat.

A *Mennyiségtan* fejezete 106 oldalon csak arra szorítkozik, hogy a Zsebkönyv erre támaszkodó tanulmányainak, kiváltkép a 88 oldalt felölelő *Mechanika* és a 189 oldalt elfoglaló *Szilárdságtan* fejezetének megértését és használhatóságát elősegítse.

A külföldi irodalom példáitól eltérve a szerző ezt — helyesen — úgy iparkodik elérni, hogy a szokott táblázatok után nem többé-kevésbbé odavetett definiciókat és ennek megfelelő tétel- és képlettárt ad, hanem az egy és többváltozós valós analizis, a komplexváltozós függvénytan s a vektor-algebra és analizis keretében maradva az alapfogalmakat és alaptételeket lehetőleg szabatosan leszögezve lépten-nyomon *példákon* szemlélteti.

A szerző az analizist, az analitikus és differenciálgeometriát korszerűen a skaláris és vektoriális függvények fonalára fűzi fel. Ez az eljárás tudvalevően egy a szokottnál szemléletesebb, egységesebb és helyenként általánosabb tárgyalást enged meg.

Az ugyanerre a fonalra fűzhető determinánsok és elsőfokú egyenletrendszerek, sorbafejtések, felületek elmélete sajnos *teljesen* hiányzik, bár a nem definiált determináns több helyen szerepel. Feltűnő — éppen mérnököknek szánt összefoglalásban — a *közelítő mennyiségtan* hiánya is. A zsebkönyvnek a számoló (és tulajdonképpen szerkesztő) műszerekről írt, más szerző tollából eredő, fejezete e hiányt nem pótolja. Ugyanígy a FOURIER-sornak a LAURENT-féle sorbafejtéssel kapcsolatos megemlítése e fontos kérdéskörről képet aligha ad.

Mindenesetre örvendetes, hogy a nomográfia legegyszerűbb tényei a kellő helyen röviden szerepelnek.

A szűk keret kétségtelenül nehéz feladat elé állította a szerzőt s így helyes, hogy kevésről, de világosan írt. Bőven elszórt példái is — bizonyára — a világos felelevenítés, nem pedig egy első enciklopedikus ismertetés szolgálatában állanak.

A *Matematika* fejezetének ilyen, közvetlenül a műszaki *Mechanika* és *Szilárdságtanra* szabott összeállítása után természetesen e két fejezet rövid tárgyalása vált lehetővé.

Így örömmel állapítjuk meg, hogy a hazai irodalom a gépészmérnököknek szánt *Mechanikának* s a vele kapcsolt legszükségesebb matematikai apparátusnak egy szigorú és korszerű áttekintésével gazdagodott.

Stachó Tibor.

Kimutatás

az 1936. november 1-től 1937. március 31-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíjak.

1931-re: **K**arsay János 4 P.

1932-re: **B**ruck Ferenc (6), **F**arkas Dénes (6), **G**irsik Géza (3), **K**arsay János (6), **L**ajta Ernő (3), Lengyel Béla egyet. m. tanár (8), **Sch**warz Ilona (8), **U**jj Gyula (4). *Összesen 44 P.*

1933-ra: **B**oharcsik Pál (2), Bruck Ferenc (4), **F**arkas Dénes (6), Finkey József (2), **H**artly Domokos (6), **T**óth Lajos (6). *Összesen 26 P.*

1934-re: **B**oharcsik Pál (6), **D**etre László (4), Déri Zsigmond (8), **F**arkas Dénes (6), Finkey József (6), **H**artly Domokos (6), **K**őrös László (6), **N**eumann János (8), **R**untágné Perényi Gizella (3), **T**heisz Edéné Vajk Magda (6), Tóth Géza (4), Turán Pál (2). *Összesen 65 P.*

1935-re: **Á**dler Erzsébet (2), **B**eke Manó (8), Blau Györgyné Bálint Emma (8), Boharcsik Pál (6), Breszlauer Arturné Blau Ilona (8), **D**arkó Béla (6), **F**arkas Dénes (6), Finkey József (6), **H**artly Domokos (6), Heuer Ede (8), id. **J**urányi Henrik (8), **K**őrös László (6), Kőnig Theodora (3), Kronberger Ede (4), **M**agyar Márta (8), Mísángyi Vilmos (8), **N**eubauer Konstantin (8), Neumann János (8), **P**atai László (8), Péter Rózsa (8), **R**untágné Perényi Gizella (6), **S**ebők Emánuel (6), Seres Iván (4), **T**óth Géza (1), Turán Pál (4). *Összesen 154 P.*

1936-ra: **B**eke Manó (8), Bertrám Brunó (6), Blau Györgyné Bálint Emma (8), Boharcsik Pál (6), Breszlauer Arturné Blau Ilona (8), **C**holnoky Jenő (6), Csaplár Konrád (6), Darkó Béla (6), Erdős Pál (4), **F**arkas Dénes (6), Fejér Lipót (8), Ferenczy Zoltán (8), Finkey József (6), Fraunhoffer Lajos (8), **G**oldziher Károly (8), **H**artly Domokos (6), Horvay Béla (8), **J**áky József (8), id. Jurányi Henrik (8), **K**edves Miklós (6), Kilczer Gyula (8), Kőrös László (6), **L**uckhaub Gyula (8), **M**agyar Márta (8), Misángyi Vilmos (8), **N**eubauer Konstantin (8), Neumann János (8), **P**ogány Béla (8), **R**óna Zsigmond (8), **Sch**ay Géza (8), Seres Iván (1), Szabó Gusztáv (8), Szabó Miklósné Nagy Sarolta (8), Szántó Sándor (8), Szász Pál (8), Szekeres Kálmán (8), Székely Károly (6). *Összesen 261 P.*

1937-re : **Á**brahám István (8), **B**alyi Károly (6), **C**saplár Konrád (2), **E**rdős Pál (8), **F**aragó Andor (8), Fenyő István (8), Finkey József (6), **H**adarits Vendel (8), Hajós György (8), Hausbrunner Vilmos (8), Holenda Barnabás (6), **J**elitai József (8), **K**lug Lipót (8), Kövessi Ferenc (8), Kuzaila Péter (6), **N**yári Béla (6), **O**szlaczky Szilárd (8), **P**app Margit (8), **R**ados Gusztáv (8), Rados Ignác (8), Rhorer László (4), Romsauer Lajos (8), Rucsinszky Lajos (8), **S**arkadi Károly (8), Schaller Mátyás (6), Szabó Miklósné Nagy Sarolta (8), Széky István (6), Szőke Béla (8), **V**arga Zoltán (4), Vörös Cyrill (6), **W**inter József (8), **Z**ányi László (6). *Összesen 224 P.*

1938-ra : **F**inkey József (4) **R**horer László (4), Rucsinszky Lajos (8), **S**zabó Miklósné Nagy Sarolta (4), **T**ihanyi Miklós (6), **V**arga Zoltán (4), **Z**ányi László (2). *Összesen 32 P.*

2. Előfizetési díjak.

1932-re : Ref. gimn. Hajdunánás (6).

1933-ra : Ref. gimn. Hajdunánás (6).

1934-re : Ref. gimn. Hajdunánás (6).

1935-re : Norbertinum, Bp. (4), Ref. gimn. Hajdunánás (6). *Összesen 10 P.*

1936-ra : Orsz. Meteor. és Földmágn. Intézet, Bp. (8), Norbertinum, Bp. (2), Term. Tudom. Társulat, Bp, (8), Ref. gimn. Hajdunánás (6). *Összesen 24 P.*

1937-re : Ág. h. ev. Rudolf gimn., Békéscsaba (5), Orsz. Meteor. és Földmágn. Intézet, Bp. (8), Műegyet. I. Math. Gyűjtemény, Bp. (8), Kalazantinum, Bp. (8), Bernardinum, Bp. (8), Pesti Izr. Hitközség gimn. (8), Technol. és Anyagvizsg. Intézet Bp. (7·94), Ref. Horthy gimn., Kisújszállás (6), Zrínyi M. reálisk. nevelőint., Pécs (6), Szt. Benedek-rend, Pannonhalma (6), Bánya-, Kohó- és Erdőmérnök-kar, Sopron (6). *Továbbá a M. kir. Vallás- és Közokt. Minisztérium előfizetése a következő középiskolák tanári könyvtárai részére :* Balassa B. gimn., Balassagyarmat, Lorántffy Zsuzsánna lgimn., Békéscsaba, Verbőczy J. gimn., Bp. I., Mátyás kir. gimn., Bp. II., Toldy F. gimn., Bp. II., Árpád gimn., Bp. III., Berzsenyi D. gimn., Bp. V., Bolyai gimn., Bp. V., Kölcsey F. gimn., Bp. VI., Kemény Zs. gimn., Bp. VI., Mária Terézia lgimn., Bp. VI., Madách I. gimn., Bp. VII., Szt. István gimn., Bp. XIV., Erzsébet-Nőiskola lgimn., Bp. XIV., Középisk. Tanárképző gimn., Bp. VIII., Zrínyi M. gimn., Bp. VIII., Fáy A. gimn., Bp. IX., Széchenyi I. gimn., Bp. X., Szt. László gimn., Bp. X., Kossuth gimn., Cegléd, Szt. Imre gimn., Csongrád, Középisk. Tanárképző gimn., Debrecen, Fazekas M. gimn., Debrecen, Dobó I. gimn., Eger, Koháry I. gimn., Gyöngyös, Révai M. gim., Győr, Leánygimn., Győr, Gimnázium, Hatvan, József Nádor gimn., Jászberény, Somssich P. gimn., Kaposvár, Katona J. gimn., Kecskemét, Deák F. gimn., Kispest, Bessenyei Gy. gimn., Kisvárda, Csanád-vezér gimn., Makó, Teleki Blanka lgimn., Mezőtúr, Hunfalvi J. gimn., Miskolc, Szabolcs-vezér gimn., Nagykálló, Kossuth L. gimn., Pestszenterzsébet, Középisk. Tanárképző Széchenyi I. gimn., Pécs, Gimnázium, Pestszentlőrinc, Széchenyi I. gimn., Sopron, Leánygimn., Sopron, Kisfaludy S. gimn., Sümeg, Klauzál G. gimn., Szeged, Baross G. gimn., Szeged, Árpádházi Szt. Erzsébet lgimn., Szeged, Ybl M. gimn., Székesfehérvár, Garay J. gimn., Szekszárd, Horváth M. gimn., Szentes, Gimnázium, Szentgotthárd, Verseghy F. gimn., Szolnok, Bánffy Katalin lgimn., Szolnok, Faludy F. gimn., Szombathely, Leánygimn., Szombathely, Könyves K. gimn., Ujpest, Kanizsay Dorottya lgimn., Ujpest, Deák F. gimn., Zalaegerszeg, Bp., II. ker. kir. egyet. kath. gimn., Dombovári kir. kath. Eszterházy M. gimn., Jászapátii kir. kath. Széchenyi I. gimn., Mezőkövesdi kir. kath. Szt. László gimn., Miskolci kir. kath. Fráter Gy. gimn., Nyíregyházai kir. kath. gimn. (504). *Összesen*: *580·94 P.*

3. Adományok, segélyek.

Magyar állam 500 P., Magy. Tud. Akadémia 500 P., Bláthy Ottó Titusz 10 P.

Budapesten, 1937. márc. 31-én.

Szabó Gábor,
pénztáros.

Franklin-Társulat nyomdája. — Ábrai V.

GRÁFOK FELÜLETEKEN.

Tartalom.

Néhány gráfelméleti és felülettopológiai alapfogalomról.

Legyen adva a pontok egy megszámlálható rendszere. Legyenek ezen pontrendszer bizonyos pontpárjai JORDAN-ívek segítségével összekötve. Egy pontpárt legfeljebb egy ív kössön össze. Az így kapott alakzatot *gráfnak* nevezzük. A JORDAN-íveket a gráf *éleinek*, a pontrendszer azon pontjait, melyekbe legalább egy él fut, a gráf *szögpontjainak* nevezzük. A szerint, hogy a gráf szögpontjainak (és ezzel együtt éleinek) száma véges vagy végtelen, a gráfot *végesnek*, illetve *végtelennek* nevezzük.

Dolgozatunk 1—4. §-ában gráf alatt mindig véges gráfot fogunk érteni. Minden gráf karakterizálható egy kombinatorikus sémával, melyben az egymással összekötött pontpárak ambói szerepelnek. Két gráfot *egyenlőnek* nevezünk, ha a két gráf szögpontjai úgy jelölhetők meg, hogy ezen jelölések segítségével a két gráfot ugyanazon kombinatorikus séma karakterizálja.

Két gráfot *homöomorf*nak nevezünk, ha azok leképezhetők egymásra topologikusan.

Azon összefüggő gráfokat, melyekre egy nem összefüggő gráf szétesik, a gráf *darab*jainak nevezzük.

Egy az egymástól különböző A pontokkal bíró

$$A_1A_2,\ A_2A_3, \ldots,\ A_{n-1}A_n$$

gráfot *út*nak nevezünk.

Egy az egymástól különböző A pontokkal bíró

$$A_1A_2,\ A_2A_3, \ldots,\ A_{n-1}A_n,\ A_nA_1$$

gráfot *kör*nek nevezünk.

Reguláris egy gráf, ha minden szögpontjában ugyanannyi él találkozik. E szám adja a reguláris gráf *fokszámát.*

Véges fokú egy gráf, ha minden szögpontjában véges sok él találkozik.

Egy P szögpont egy G gráfnak akkor *artikulációja*, ha G-nek P-től különböző szögpontjai oly módon oszthatók két A és B osztályba, hogy G minden A-ból B-be vezető útja átmegy P-n. Egy gráfot artikulációi — szemléletesen kifejezve — *tag*okra bontják.[1]

*

Elemi felület alatt nyilt körlemezzel homöomorf ponthalmazt értünk.

Legyen adva egy következő tulajdonságú összefüggő ponthalmaz: a ponthalmaz tetszőleges pontjának van a nyilt körlemezzel homöomorf környezete. Az ilyen ponthalmazokat *határvonalnélküli felületeknek* nevezzük. Hagyjunk el a felületből megszámlálható sok elemi felületet (vagyis «pontozzuk» a felületet megszámlálható sokszor). Az ilyen módon nyert ponthalmazokat *határvonallal bíró felületeknek* nevezzük.

Dolgozatunkban a felületeket mindig önmagukban, minden környező tér nélkül képzeljük. Azzal tehát pl., hogy egy felület realizálható-e a háromdimenziós euklidesi térben önáthatolás nélkül, nem fogunk törődni.

Minden felület felbontható megszámlálható sok (elemi) háromszögre. Ha egy felület véges sok háromszögre bontható fel, akkor a felületet *zárt*nak, ellenkező esetben *nyilt*nak nevezzük. Nyilt felületek csak dolgozatunk 6. §-ában fognak szerepelni. Minden más helyen (tehát már az itt következőkben is) zárt felület helyett egyszerűen felületet fogunk írni.

Legyen egy felület háromszögekre felosztva. Legyen a felosztás

[1] Az itt bevezetett fogalmakra és elnevezésekre nézve l. D. KÖNIG: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.

szögpontjainak, illetve éleinek száma α_0, illetve α_1 legyen továbbá az elemi felületek száma α_2. Az általánosított EULER-féle poliédertétel szerint a

$$H = 3 - \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2$$

szám független a felosztástól. Ezt a felületre jellemző H számot a felület *összefüggési számának* fogjuk nevezni. (Azt is fogjuk ilyenkor mondani, hogy a felület H-szorosan összefüggő.)

Irányítsuk az előbbi felosztás minden háromszögét valamilyen módon. Ezek az irányítások a háromszögek oldalait is irányítják, még pedig minden élt, mely nem része egy határvonalnak, kétszer. Ha a háromszögek úgy irányíthatók, hogy ez az irányítás minden ily élen két ellenkező irányítást indukál, akkor a felületet *kétoldalú*nak, ellenkező esetben pedig *egyoldalú*nak nevezzük. (MÖBIUS-szabály.)

Egy H-szorosan összefüggő határvonalnélküli

a) kétoldalú felület *nemszámán* a $\dfrac{H-1}{2}$,

b) egyoldalú felület *nemszámán* a $H-1$ számot értjük.

Határvonallal bíró felületek nemszámainak értelmezésére kimondjuk, hogy egy felület nemszáma nem változik, ha a felületből kivágunk egy elemi felületet (vagyis ha a felületet pontozzuk).

Legyen adva egy felületen egy k kör. Feküdjenek az A és B pontok a k kör egy pontjának környezetében oly módon, hogy a k kör ezen környezetben elválasztja az A és B pontokat. Ha található a felületnek egy oly A és B végpontokkal bíró JORDAN-íve, mely egészében a k kör környezetében fekszik és nincs k-n pontja, a k kört *egypartú* körmetszetnek nevezzük; ellenkező esetben *kétpartú*nak. Kétoldalú felület minden köre kétpartú.

*Projektív sík*nak fogjuk nevezni a kétszeresen összefüggő, határvonalnélküli egyoldalú felületet.[2] Elhagyva a projektív síkból egy elemi felületet, kapjuk a MÖBIUS-féle szalagot.[3]

---

[2] E három adat a felületet topológiai értelemben tudvalevőleg meghatározza. (A felülettopológia alaptétele.)

[3] A felületek topológiájára vonatkozólag idézzük a következő munkákat: KŐNIG DÉNES: Az analysis situs elemei; I. Felületek. Budapest, 1918. Von KERÉKJÁRTÓ: Vorlesungen über Topologie. Berlin, 1923. SEIFERT und THRELFALL: Lehrbuch der Topologie. Leipzig, 1934.

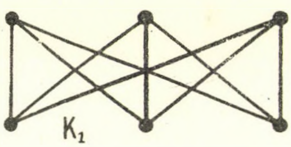
Bevezetés.

Közismert a következő probléma:

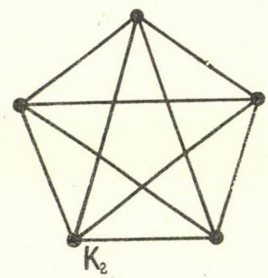
Legyen adva a síkban három ház és három kút, vezessünk a három ház mindegyikéből a három kút mindegyikéhez egy-egy utat a síkban úgy, hogy ezek az utak ne messék egymást.

A feladatnak, mint ismeretes, nincs megoldása.

Egy másik hasonló tárgyú probléma, a Weiske-féle, azt kérdezi, *lehet-e a síkban rajzolni öt tartományt úgy, hogy ezek közül bármely kettő egy vonal mentén érintkezzék.* Mint ismeretes, a válasz itt is tagadó.



1. ábra.



2. ábra.

Mindkét feladatnál — mint könnyen belátható — tulajdonképpen arról van szó, hogy az 1., illetőleg 2. ábrán látható gráfok síkbarajzolhatók-e vagy nem.[4] (Ez úgy értendő, hogy lehet-e gráfot úgy síkbarajzolni, hogy azon kereszteződések ne keletkezzenek.)

Felmerül tehát általánosan a kérdés, hogy egy gráf mikor síkbarajzolható? Vagy még általánosabban, hogy egy megadott gráf mikor rajzolható fel egy N-ednemű egy- vagy kétoldalú felületre.[5]

Kétoldalú felületre ezen általános kérdéssel először Kőnig

[4] Az első problémánál ez triviális, míg a másodiknál abból következik, hogy ha a feladat megoldható lenne, akkor felvéve az öt tartomány mindegyikében egy pontot, ezen pontok egymással mind összeköthetők lennének a nélkül, hogy ezen összekötések metszenék egymást.

[5] Feltehető az általánosság csorbítása nélkül, hogy az adott felületnek nincsen határvonala. Így a válasz csupán a felület nemszámától és egy- vagy kétoldalúságától függ; v. ö. a [2] jegyzettel.

DÉNES foglalkozott.[6] Megállapítja, hogy minden gráf felrajzolható egy elég magas nemszámú kétoldalú felületre, továbbá, ha egy gráf az N-ed nemű kétoldalú felületre felrajzolható, akkor felrajzolható minden N-nél magasabb nemű felületre is. Ilyen módon tehát, ha ismerjük a legalacsonyabb nemű kétoldalú felületet, melyre a gráf felrajzolható, akkor már tudjuk, hogy a gráf mely kétoldalú felületekre írható fel és melyekre nem. Ennek a minimális nemszámú felületnek a nemszáma tehát egy a gráfra jellemző szám; ezt a számot nevezi KŐNIG a gráf nemszámának. Mi a következőkben ennek a határvonalnélküli-nek feltételezett felületnek az *összefüggési számát* fogjuk a gráf *kétoldalú nemszámának* nevezni[7] és a G gráfhoz tartozó ezen számot $N^2(G)$-vel fogjuk jelölni.

Ilyen módon tehát egy G gráf felrajzolható az $N^2(G)$-szeresen összefüggő határnélküli kétoldalú felületre. De felrajzolható ugyanezen gráf az $N^2(G)+1$-szeresen összefüggő határvonal nélküli egyoldalú felületre is. Ugyanis rajzoljuk fel G-t az $N^2(G)$-szeresen összefüggő határvonalnélküli kétoldalú felületre és vágjunk ki ebből a felületből egy körlemezt, melynek nincs közös pontja a gráffal, majd illesszünk a kivágott körlemez helyére egy MÖBIUS-szalagot (pl. az úgynevezett «süvegfelület» alakjában). Ilyen módon már elő is állítottuk a kívánt felületet. Ebből a meggondolásból továbbá következik az is, hogy minden gráf felrajzolható egyoldalú felületre is. Mivel pedig természetesen itt is, mint kétoldalú felületeknél, ha egy gráf felrajzolható egy bizonyos nemszámú egyoldalú felületre, akkor a gráf felrajzolható minden ennél magasabb nemű egyoldalú felületre is, bevezethetjük az *egyoldalú nemszám* fogalmát. Egy G gráf egy-

---

[6] Vonalrendszerek kétoldalú felületeken. Mat. és Természettud. Értesítő. XXIX. 1911. 112—117. l. Arra az esetre, midőn a gráf bármely két szögpontját összeköti egy él, l. már a következő dolgozatot: HEAWOOD: Map-colour theorem, Quarterly Journal of Mathematics, 24. 1890. 332—338. l.; 29, 1898, 270—285. l.

[7] Itt ez a definició a célszerűbb, mert mi egyoldalú felületekkel is fogunk foglalkozni.

oldalú nemszámának fogjuk nevezni azon határvonalnélkülinek feltételezett legkisebb összefüggési számmal biró egyoldalú felületnek az *összefüggési számát*, melyre G felrajzolható. Ezt a gráfra jellemző számot $N^1(G)$-vel fogjuk jelölni.

Az előbbi meggondolás szerint tehát

$$N^1(G) \leq N^2(G)+1.$$

Előfordul felrajzolási problémáknál, hogy nem törődünk avval, hogy a felület egy- vagy kétoldalú-e, hanem egyszerűen csak a legkisebb összefüggési számmal biró felületet keressük, melyre gráfunk felrajzolható. Ilyenkor ennek a felületnek az *összefüggési számát* a gráf *nemszámának* fogjuk nevezni és $N(G)$-vel fogjuk jelölni. Természetesen

$$N(G) = \min\,[N^1(G),\ N^2(G)].$$

*

Kőnig Dénes foglalkozott először avval a kérdéssel, hogy hogyan lehet meghatározni egy gráf belső kombinatorikus tulajdonságaiból a gráf nemszámát.[8] Meg is adott egy ilyen módszert, mely azonban nem tekinthető teljesnek. Dolgozatunk egyik célja éppen ennek a módszernek a kiegészítése és egyoldalú felületre való átvitele.

Avval a kérdéssel, hogy egy gráf nemszáma mikor 1, vagyis hogy egy gráf mikor sikbarajzolható, ujabban mások is foglalkoztak. Megemlítjük Kuratowski, Menger, Whitney és Mac Lane Saunders erre vonatkozó eredményeit.

Kuratowski kimutatta,[9] hogy *egy gráf akkor és csak akkor sikbarajzolható, ha nem tartalmaz sem az 1. sem a 2. ábrán látható gráffal homöomorf részgráfot.*[10] (Ezeket a gráfokat mi Kuratowski-féle gráfoknak fogjuk nevezni.)

---

[8] A vonalrendszerek nemszámáról. Mat. és Természettud. Ért. 1911. XXIX. 345—350. l.

[9] Sur le problème des courbes gauches en Topologie, Fundamenta Mathematicae. 1930. XV. 271. l.

[10] Kőnig [6] lábjegyzetben idézett munkájában már megemlíti ezt a két gráfot, mint a «legegyszerűbb» sikba nem rajzolható gráfokat.

MENGER egyidejűleg ennek a tételnek következő speciális esetét találta[11]: *egy reguláris harmadfokú gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz az 1. ábrán látható gráffal homöomorf részgráfot.*

WHITNEY[12] a következő fogalmat vezeti be:

a G és G' gráfok *duál* gráfok, ha a két gráf élei közt oly kölcsönösen egyértelmű vonatkozás létesíthető, hogy ha g a G gráf tetszőleges részgráfja, továbbá g és g' a két gráf közt létesített vonatkozás által egymásnak megfeleltetett gráfok, akkor fennáll a [13]

$$g_1-g_0+g_d+(G'-g')_0+(G'-g')_d = G'_0-g'_d$$

egyenlet, ahol általában egy γ gráf szögpontjainak, éleinek, illetőleg darabjainak számát γ_0, γ_1, γ_d-val jelöltük.

A dualitás fogalmával mármost WHITNEY tétele a következő: *egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha van duálja.*

Végül MAC LANE SAUNDERS[14] a következő fogalmakat használja: Legyenek $k_1, k_2, \ldots, k_n$ egy gráf bizonyos körei. A

$$k_1+k_2+\cdots+k_n \quad (\text{mod } 2)$$

összegen értendő az a gráf, mely mindazon élekből áll, melyek e körök közül a páratlan sokban fordulnak elő. A körök ezen sorozatát *teljesnek* nevezi a G gráfban, ha G bármely köre előállítható és pedig egyetlenegyféleképpen, mint a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ körök némelyikének összege (mod 2). Mármost a síkbarajzolhatóság feltétele a következő:

egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha tartalmaz egy oly teljes körsorozatot, melyben a gráf bármely éle legfeljebb kétszer fordul elő.

---

[11] Über plättbare Dreiergraphen und Potenzen nichtplättbarer Graphen, Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien. 67. 1930. 85—86. l. és Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums. 1930. 30—31. l.

[12] Non separable and planar graphs, Transactions of the American Mathematical Society. 34. 1932. 339—362 l.

[13] $G'-g'$ alatt a G'-ből g' éleinek elhagyása után megmaradó gráfot értjük.

[14] A combinatorical condition for planar graphs, Fundamenta Mathematicae, 1936. XXVIII. 22. l.

Megemlitjük végül, hogy Mac Lane Saunders egy eddig még meg nem jelent cikkében fel fog állitani egy az előbbihez hasonló kritériumot, melynek segitségével az lesz eldönthető, hogy egy gráf gyűrűre rajzolható-e, vagy nem.

1. §. Az egyoldalú felületekre való felrajzolhatóságról.

Kőnig[15] kimutatta a következő tételt:

Rajzoljuk fel az adott összefüggő gráfot az $N^2(G)$-szeresen összefüggő határvonalnélküli kétoldalú F felületre. Ekkor a G gráf az F felületet csupa elemi felületre osztja.

Ebben a §-ban ezt a tételt átvisszük egyoldalú felületekre: *Egy adott összefüggő G[16] gráf felrajzolható úgy az $N^1(G)$-szeresen összefüggő határvonalnélküli egyoldalú F felületre, hogy a gráf létesítette felosztás megyéi elemiek legyenek. Továbbá, ha $N^1(G)$ páratlan, akkor tetszőleges felrajzolás esetén a gráf létesítette felosztás megyéi elemiek, míg, ha $N^2(G)$ páros, akkor egy tetszőleges felrajzolás esetén a megyék nem mind szükségképpen elemiek, hanem lehet közöttük legfeljebb egy nem elemi, hanem a Mőbius-szalaggal homőomorf.*[17]

Tételünk bizonyitását több lépésben végezzük.

1. Lemma. Az $N^1(G)$-szeresen összefüggő felületen a G létesítette felosztás megyéi vagy elemiek, vagy a Mőbius-szalaggal homőomorfok.

Tegyük ugyanis fel, hogy van egy m megye, mely sem nem elemi, sem nem homőomorf a Mőbius-szalaggal. Legyen a k az m megyének oly kétpartú körmetszete, mely az m megyét oly m_1 és m_2 megyékre osztja, hogy m_1 hőmőomorf m-el. Ha a k kör az F felületet nem darabolja szét, akkor felvágva F-et k mentén kapunk egy két határgörbével biró és F-nél alacsonyabb nemű

---

[15] L. a [6] lábjegyzetben idézett munkában.

[16] Feltesszük, hogy G nem fa, vagyis azt, hogy tartalmaz kört.

[17] Az utóbbi eset következhet pl. be, ha egy síkbarajzolható gráfot felrajzolunk a projektív síkra.

egyoldalú felületet, melyre G fel van rajzolva. Ez azonban $N^1(G)$ definiciója miatt lehetetlen, fel kell tehát tennünk, hogy a k kör az F felületet szétdarabolja. Ekkor azonban az egyik darab nyilván az m_1 megye. Ha a k kör mentén m_1 helyébe egy MŐBIUS-szalagot teszünk, akkor kapunk egy F-nél alacsonyabb nemű egyoldalú felületet, melyre F fel van irva. Tehát feltevésünkből mindenképpen ellentmondás következik.

2. Lemma. A G létesítette felosztás megyéi közt legfeljebb egy lehet homőomorf a MŐBIUS*-szalaggal.*

Ismételjük meg ugyanis az előbbi gondolatmenetet valamelyik MŐBIUS-szalaggal homőomorf megyére, avval a különbséggel, hogy most ennek a megyének a helyére egy körlemezt teszünk. Ekkor, ha a megyék közt több MŐBIUS-szalag is van, egy F-nél alacsonyabb nemű egyoldalú felületet kapunk, melyre G fel van rajzolva. Ez azonban lehetetlen.

3. Lemma. Legyen adva egy összefüggő Γ gráf, melyre

$$N^1(\Gamma) \leq N^2(\Gamma).$$

Rajzoljuk fel Γ-t az $N^1(\Gamma)$-szeresen összefüggő határvonalnélküli egyoldalú F felületre. A Γ gráf létesítette felosztás megyéi elemiek.

Tegyük ugyanis fel, hogy ez nem igaz. Ekkor az 1. Lemma szerint található egy MŐBIUS-szalaggal homőomorf m megye. Legyen a k kör az m megyének következő tulajdonságú körmetszete: a k körmetszet az F felületet két darabra osztja, az egyik darabon fekszik a Γ gráf, a másik darab pedig homőomorf a MŐBIUS-szalaggal. Vágjuk szét F-et a k kör mentén és tegyünk a MŐBIUS-szalag helyére egy körlemezt. Ekkor oly $N^1(\Gamma)-1$-szeresen összefüggő határvonalnélküli felületet nyerünk, melyre Γ fel van rajzolva. Ez azonban azt jelentené, hogy a Γ gráf nemszáma

$$N(\Gamma) < N^1(\Gamma),$$

ami pedig feltételi egyenlőtlenségünk miatt lehetetlen.

Ezután kimutatjuk, hogy ha $N^1(G)$ páratlan szám, akkor G az $N^1(G)$-szeresen összefüggő határvonalnélküli egyoldalú felületet elemi részekre osztja. A bizonyítást a 3. Lemma segítségével végezzük. Kimutatjuk ugyanis, hogy

$$N^1(G) \leq N^2(G).$$

Tegyük ugyanis fel, hogy ez az egyenlőtlenség nem áll fenn. Ekkor tehát

$$N^1(G) > N^2(G),$$

amiből tekintetbe véve a dolgozatunk bevezetésében említett

$$N^1(G) \leq N^2(G) + 1$$

egyenlőtlenséget, következik, hogy

$$N^1(G) = N^2(G) + 1.$$

Ez azonban, tekintve, hogy $N^2(G)$, mint egy határvonalnélküli kétoldalú felület összefüggési száma, páratlan, azt jelentené, hogy $N^1(G)$ feltevésünkkel ellentétben páros szám.

Végül áttérünk annak kimutatására, hogy ha $N^1(G)$ páros szám, akkor G felrajzolható az $N^1(G)$-szeresen összefüggő határvonalnélküli egyoldalú F felületre úgy, hogy azt csupa elemi részre ossza.

Rajzoljuk fel ugyanis G-t tetszőleges módon F-re; ha csupa elemi részt kapunk, nincs mit bizonyítanunk, tegyük tehát fel, hogy a megyék közt van nem elemi is. Ekkor tehát a 2. Lemma szerint van egy a Möbius-szalaggal homőomorf megye, míg a többi elemi. És így található F-en egy következő tulajdonságú k kör:

1. k az F felületet két darabra vágja, az egyik darab homőomorf a Möbius-szalaggal,
2. k tartalmazza a G gráfnak egyetlen egy élét, e-t,
3. k-nak az e élen kívül nincs közös pontja G-vel.

Hagyjuk el G-ből az e élt és tegyünk helyére egy az e él végpontjait összekötő oly Jordan-ívet, mely a k kör levágta Möbius-szalagot elemivé vágja. Ekkor visszakapjuk a G gráfot éspedig oly felrajzolásban, mely kívánalmainknak megfelel.

Evvel az egyoldalú felületekre való felrajzolhatóságról szóló tételünk bizonyítását befejeztük.

2. §. Összefüggő gráfok nemszámainak meghatározása.

Legyen adva egy összefüggő G gráf, jelöljük szögpontjait $A_1, A_2, \ldots, A_n$-el. A G gráf egy *irányított C ciklusán* értjük a következő kombinatorikus sémát:[18]

$$(C) \qquad (A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}, \ldots A_{i_{\nu-1}}A_{i_\nu}A_{i_1}),$$

ahol az

$$A_{i_1}A_{i_2},\ A_{i_2}A_{i_3}, \ldots,\ A_{i_{\nu-1}}A_{i_\nu},\ A_{i_\nu}A_{i_1}$$

szomszédos pontok össze vannak kötve élekkel a G gráfban. Egyszerűség kedvéért azt fogjuk mondani, hogy a C ciklus tartalmazza a G gráf $A_{i_1}A_{i_2}, A_{i_2}A_{i_3}, \ldots, A_{i_{\nu-1}}A_{i_\nu}, A_{i_\nu}A_{i_1}$ éleit.

A C ciklussal *ellenkezően irányított* ciklusnak nevezzük a

$$(-C) \qquad (A_{i_1}A_{i_\nu}A_{i_{\nu-1}} \ldots A_{i_3}A_{i_2}A_{i_1})$$

ciklust.

A G gráfunkat a $C_1, C_2, \ldots, C_m$ ciklusok *összegének* mondjuk, ha G minden élét ezek a ciklusok pontosan kétszer tartalmazzák. (Lehetséges, hogy egy élt ugyanazon ciklus tartalmaz kétszer.)

A G gráfot a $C_1, C_2, \ldots, C_m$ ciklusok *orientálható* összegének nevezzük, ha G a $C_1, C_2, \ldots, C_m$ ciklusok oly összege, hogy G tetszőleges A_iA_j élének megfelelően a $C_1, C_2, \ldots, C_m$ ciklusok sémájában A_iA_j és A_jA_i ambók mint szomszédos pontpárok szerepelnek.

Végül a G gráfot a $C_1, C_2, \ldots, C_m$ ciklusok *nem orientálható* összegének nevezzük, ha bármily előjelsorozat mellett sem fogható fel G a

$$\pm C_1,\ \pm C_2, \ldots,\ \pm C_m$$

ciklusok orientálható összegeként.

Ezután bevezetünk még egy fogalmat. Legyen a G gráf a $C_1, C_2, \ldots, C_m$ ciklusok összege. Legyen

$$A_kA_{k_1},\ A_kA_{k_2}, \ldots,\ A_kA_{k_l}$$

---

[18] A sémában szereplő A-k nem okvetlenül különbözők. Ciklikus permutációval egymásba átmenő ciklusokat nem tekintünk különbözőknek.

az éleknek oly sorozata, hogy két egymásra következő él, továbbá az első és utolsó él, egy-egy C ciklusban szomszédos élek. Nyilván a G gráfnak A_k-ból kiinduló összes élei osztályozhatók ilyen tulajdonságú élsorozatokra. A $C_1, C_2, \ldots, C_m$ ciklusok rendszerét az A_k *pontban összefüggőnek* nevezzük, ha G élei az A_k pontban egyetlen ilyen élsorozatot alkotnak.

Legyen mármost a G gráf oly módon felrajzolva az N-szeresen összefüggő határvonalnélküli kétoldalú F felületre, hogy a G létesítette felosztás megyéi elemiek legyenek. Ekkor azt állítjuk, hogy G felfogható, mint[19]

$$3 - N - G_0 + G_1$$

számú ciklus minden pontban összefüggő orientálható összegeként. Ugyanis tekintve, hogy G az F felületet elemi részekre osztja, az általánosított Euler-féle formula szerint, az elemi részek száma

$$3 - N - G_0 - G_1.$$

Már most ha ezen elemi megyéket valamilyen módon irányítjuk, akkor ezek az irányítások a megyék határvonalain ciklusokat indukálnak. Nyilván G minden szögpontban összefüggő összege ezen ciklusoknak. Tekintve pedig, hogy F kétoldalú felület, a Möbius-szabály szerint a megyék irányithatók olymódon, hogy G az indukált ciklusok orientálható összegeként legyen felfogható.

Hasonlóan látható be, hogy ha egy G gráf olymódon van felrajzolva az N-szeresen összefüggő határvonalnélküli egyoldalú felületre, hogy a G létesítette felosztás megyéi elemiek, akkor G felfogható

$$3 - N - G_0 - G_1$$

számú ciklus, minden pontban összefüggő nem orientálható összegeként.

Azt állítjuk most, hogy ezen állítások a következőképpen meg is fordíthatók:

---

[19] A G gráf szögpontjainak, illetőleg éleinek számát jelöltük G_0 illetőleg G_1-el.

Legyen a G gráf ν-számú minden pontban összefüggő ciklus orientálható összege. Ekkor G felrajzolható a

$$3 - G_0 + G_1 - \nu$$

összefüggési számmal bíró határvonalnélküli kétoldalú felületre.

Legyen G ν-számú minden pontban összefüggő ciklus nem orientálható összege. Ekkor G felrajzolható az

$$3 - G_0 + G_1 - \nu$$

összefüggési számmal bíró egyoldalú felületre.

Tekintsük ugyanis pl. az első állítást. Legyen tehát G a

$$\begin{array}{ll} (C_1) & (A_{\alpha_1}A_{\alpha_2}A_{\alpha_3}\ldots A_{\alpha_{i_1}}A_{\alpha_1}), \\ (C_2) & (A_{\beta_1}A_{\beta_2}A_{\beta_3}\ldots A_{\beta_{i_2}}A_{\beta_1}), \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (C_\nu) & (A_{\mu_1}A_{\mu_2}A_{\mu_3}\ldots A_{\mu_{i_\nu}}A_{\mu_1}) \end{array}$$

ciklusok orientálható összege. Vegyünk fel ν számú elemi felületet. Legyenek ezen felületek határvonalai $i_1, i_2, \ldots$ illetőleg i_ν oldalú sokszögek. Jelöljük ezen sokszögek szögpontjait rendre

$$\begin{array}{l} A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_{i_1}}, \\ A_{\beta_1}, A_{\beta_2}, \ldots, A_{\beta_{i_2}}, \\ \vdots \quad\ \ \vdots \quad\quad\ \ \vdots \\ A_{\mu_1}, A_{\mu_2}, \ldots, A_{\mu_{i_\nu}} \end{array}$$

-vel. (Ilyen módon természetesen különböző szögpontokat is jelöltünk ugyanazon betűvel.) Feltételeink miatt a G gráf tetszőleges A_kA_l élének megfelelően található ezen poligonsorozat oldalai közt pontosan két A_kA_l-lel jelölt oldal. Identifikáljuk a két poligon ezen két oldalát olymódon, hogy az ugyanazon betűkkel jelzett pontok egymásra essenek. Ha ezt a műveletet az összes poligonoldalakra elvégezzük, akkor kapunk egy határvonal nélküli F felületet.

Az F felületen a ν számú poligon identifikált oldalai egy G' gráfot alkotnak. Azt állítjuk, hogy a G' gráf egyenlő a G gráffal. Ugyanis a G' gráf különböző szögpontjai különböző betűkkel vannak jelölve.[20] Ebből és konstrukciónkból pedig már következik, hogy két A pont akkor és csak akkor van a G' gráfban egy éllel összekötve, ha az ugyanezen betűkkel jelölt pontok G-ben is össze vannak kötve egy éllel. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a G és G' gráfok egyenlők.

Ezek után már csak azt kell kimutatnunk, hogy F kétoldalú és összefüggési száma

$$3 - G_0 + G_1 - \nu.$$

Az utóbbi állítás következik az általánosított EULER-formulából, ha tekintetbe vesszük, hogy a $G = G'$ gráf az F felületet elemi részekre osztja. Az F felület kétoldalúsága a MÖBIUS-szabályból következik. Ugyanis tekintetbe véve, hogy G a $C_1, C_2, \ldots, C_m$ ciklusok orientálható összege, következik, hogy ezen ciklusok az általuk határolt megyéken egy a kétoldalú felületekre karakterisztikus irányitást indukálnak.

Ezzel tehát a kétoldalú felületekre vonatkozó állításunkat igazoltuk. Teljesen hasonló módon történik az egyoldalú felületekre vonatkozó állításunk igazolása.

Ezek után egy összefüggő G gráf nemszámainak meghatározása a következőképpen történik:

Legyen az összefüggő G gráf ν számú ciklus orientálható összefüggő összegeként előállítható, de ne legyen felfogható több mint ν számú ciklus orientálható összefüggő összegeként. Ekkor

$$N^2(G) = 3 - G_0 + G_1 - \nu.$$

Legyen az összefüggő G gráf ν számú ciklus nemorientálható összegeként előállítható, de ne legyen felfogható több, mint ν számú ciklus nemorientálható összefüggő összegeként. Ekkor

$$N^1(G) = 3 - G_0 + G_1 - \nu.$$

A második állítás pl. a következőképpen látható be.

---

[20] Mert ha a két szögpont ugyanazon betűvel lenne jelölve, akkor a G gráf ugyanezen betűvel jelölt szögpontjában nem lennének a $C_1, C_2, \ldots, C_m$ ciklusok összefüggőek, hanem legalább is két csoportba esnének.

Az ebben a §-ban levezetett felrajzolhatósági tétel szerint F felrajzolható a

$$3 - G_0 + G_1 - \nu$$

összefüggési számmal bíró határvonalnélküli egyoldalú felületre. Azt kell tehát csupán kimutatnunk, hogy G ennél kisebb összefüggési számmal bíró határvonalnélküli egyoldalú felületre nem rajzolható fel. Valóban, ha felrajzolható lenne, akkor az 1. § tétele szerint felrajzolható lenne úgy, hogy a G létesítette felosztás megyéi elemiek legyenek. Ekkor azonban az ebben a §-ban levezetett tétel szerint G felfogható lenne több mint ν számú ciklus összefüggő nemorientálható összegeként. Ez azonban feltevésünkkel ellenkezik.

Teljesen hasonlóan látható be a kétoldalú felületekre vonatkozó állításunk is.

3. §. Nem összefüggő gráfok nemszámainak meghatározása.

Legyen adva egy nem összefüggő G gráf, melynek darabjai $G_1, G_2, \ldots, G_n$. A G gráf nemszámait a következő formulák határozzák meg:

I. $N(G) = \Sigma N(G_i)$,

II. $N^2(G) = \Sigma N^2(G_i)$,

III. $N^1(G) = \Sigma N(G_i) + \varepsilon = N(G) + \varepsilon$,

ahol az

$$N(G_i) < N^1(G_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

esetben $\varepsilon = 1$, míg minden más esetben $\varepsilon = 0$.

A formulák helyessége a következőképpen látható be:

a) Legyenek a $G_1, G_2, \ldots, G_n$ gráfok rendre felrajzolva az $N(G_1), N(G_2) \ldots, N(G_n)$-szeresen összefüggő határvonalnélküli felületre. Ekkor ezekből a felületekből megfelelő pontozásokkal és összeforrasztásokkal előállítható egy $\Sigma N(G_i)$-szeresen összefüggő határvonalnélküli felület, melyre a G gráf fel van rajzolva. Mindenesetre tehát

$$N(G) \leq \Sigma N(G_i).$$

Másrészről legyen G felrajzolva az $N(G)$-szeresen összefüggő határvonalnélküli F felületre. Vágjuk szét F-et felületekre oly módon, hogy ezekre a felületekre legyenek rendre felírva a G gráf darabjai és egészítsük ki körlemezekkel ezeket a felületeket határvonalnélküli $F_1, F_2, \ldots, F_n$ felületekké. Nyilván F összefüggési száma nem kisebb az $F_1\ F_2, \ldots, F_n$ felületek összefüggési számainak összegénél. Tekintve pedig, hogy a $G_1, G_2, \ldots, G_n$ gráfok rendre fel vannak rajzolva az $F_1, F_2, \ldots, F_n$ felületekre, következik, hogy az F_i felület összefüggési száma nem kisebb, mint $N(G_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Ebből tehát összeadással

$$N(G) \geq \Sigma N(G_i)$$

következik, ami pedig tekintetbe véve az előbbi egyenlőtlenséget, éppen a kívánt I. egyenlőséget adja.

b) A II. formula teljesen hasonlóan látható be.

c) Tegyük először fel, hogy $\varepsilon=0$, vagyis, hogy pl.

$$N^1(G_1) = N(G_1);$$

bebizonyítjuk, hogy

III*a*. $$N^1(G) = N(G).$$

Ugyanis rajzoljuk fel G_1-et az $N^1(G_1) = N(G_1)$-szeresen összefüggő határvonalnélküli egyoldalú F_1 felületre. Rajzoljuk továbbá fel a $G_2, \ldots, G_n$ gráfokat az $N(G_2), N(G_3), \ldots, N(G_n)$-szeresen összefüggő $F_2, F_3, \ldots, F_n$ felületekre. Az $F_1, F_2, \ldots, F_n$ felületekből pontozásokkal és összeforrasztásokkal előállítható egy

$$\Sigma N(G_i) = N(G)$$

összefüggési számmal biró határvonalnélküli oly egyoldalú felület, melyre a G gráf fel van rajzolva. Mindenesetre tehát

$$N^1(G) \leq N(G).$$

Ebből azonban $N(G)$ definiciója miatt következik a kívánt III*a*. egyenlet.

Tegyük most fel, hogy $\varepsilon=1$. Ekkor[21]

---

[21] Ez $N(G_i)$ definiciójából és a bevezetésben említett

$$N^1(G_i) \leq N^2(G_i) + 1$$

egyenlőtlenségből következik.

$$N^1(G_i) = N(G_i) + 1 \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Kimutatjuk, hogy ebben az esetben

IIIb. $$N^1(G) = N(G) + 1.$$

Tekintve, hogy tetszőleges gráf esetén

$$N(G) \leq N^1(G) \leq N(G) + 1,$$

azt kell csupán kimutatnunk, hogy

$$N^1(G) \neq N(G).$$

Legyen G felrajzolva az $N^1(G)$ összefüggési számmal bíró határvonalnélküli egyoldalú F felületre. Vágjuk szét ezt az F felületet kétpartú és szétdaraboló körmetszetek segítségével oly felületekre, hogy a G darabjai rendre ezen felületeken feküdjenek.[22] Egészitsük ki körlemezek segítségével ezeket a felületeket határvonalnélküli $F_1, F_2, \ldots, F_n$ felületekké. Nyilván az F felület összefüggési száma nem kisebb az $F_1, F_2, \ldots, F_n$ felületek öszszefüggési számainak összegénél. Azonban az $F_1, F_2, \ldots, F_n$ felületek közt, tekintve, hogy F-et kétpartú és szétdaraboló körmetszetek segítségével vágtuk szét, van legalább egy egyoldalú felület.[23] Ha ez a felület pl. F_1, akkor nyilván F_1 összefüggési

[22] Ez a következőképpen történhet: vegyünk a G létesitette megyék közül egyet. Ezen megye minden határgörbéje környezetében, vegyünk fel egy, a megye belsejében fekvő kört. (Ezek a körök nyilván kétpartúak.) Ismételjük meg ugyanezt a G létesitette megyék mindegyikére. Ha az ilyen módon nyert körök mentén felvágjuk F-et, nyilván a G gráf darabjai különböző felületdarabokon fognak feküdni. Azokat a felületeket, melyeken nincsen gráf, «visszaforrasztjuk». Most még igazolnunk kell, hogy a felmetszést létesítő körök mindegyike szétdaraboló. Ha ugyanis valamelyik nem lenne ilyen, akkor ezen kör mentén felvágva F-et, egy F-nél alacsonyabb nemű egyoldalú felületet nyernénk, melyre G fel van rajzolva. (Tekintetbe vettük, hogy kétpartú körmetszet egyoldalú felületet meghagy egyoldalúnak.) Ez azonban lehetetlen.

[23] Ha egy egyoldalú felületet egy kétpartú és szétdaraboló körmetszet mentén vágunk fel, akkor a kapott két felület közül legalább az egyik egyoldalú. Ha most ezen felületek valamelyikét megint felvágjuk egy kétpartú és szétdaraboló körmetszet mentén, akkor megint lesz a kapott három felület között legalább egy egyoldalú. Okoskodásunkat folytatva, megkapjuk llításunk bizonyítását.

száma nem kisebb, mint $N^1(G_1)$. Tekintve pedig, hogy az $N^1(G)$-szeresen összefüggő felület összefüggési száma nem kisebb, mint az $F_1, F_2, \ldots, F_n$ felületek összefüggési számainak összege, következik, hogy

$$N^1(G) \geq N^1(G_1) + N(G_2) + \cdots + N(G_n) = \Sigma N(G_i) + 1 = N(G) + 1.$$

Ebből azonban már következik a kívánt IIIb. egyenlőség is.

Megjegyzések.

1. A formulákból látható az az egyszerű tény, hogy egy gráf síkbarajzolható darabjai nem játszanak szerepet a gráf nemszámában.

2. Legyen adva egy artikulációval bíró gráf, melynek tagjai a $G_1, G_2, \ldots, G_n$ gráfok. Mint könnyen belátható, a $G_1, G_2, \ldots, G_n$ gráfokra fennállnak az I., II., III. relációk. Ilyen módon tehát artikulációs gráfok nemszámainak meghatározása visszavezethető artikulációnélkü gráfok nemszámainak meghatározására.

4. §. Egy felrajzolhatósági tétel.

Ebben a §-ban a következő tételt igazoljuk:

Legyen adva egy tetszőleges összefüggő G gráf. Található egy oly F felület, melyre oly módon rajzolható fel G, hogy a G gráf az F felületet egyetlen elemi részre osztja.[24]

A 2. § tételei szerint ez a következő tétellel equivalens: *tetszőleges összefüggő G gráf felfogható egy minden pontban összefüggő ciklusként.*[25]

Az utóbbi a következőképpen látható be.

Az EULER-féle gráftétel[25a] szerint G élei befuthatók mint zárt élsorozat oly módon, hogy G minden éle pontosan kétszer legyen befutva. Vagyis, ha G szögpontjait $A_1, A_2, \ldots, A_n$-el jelöljük, létezik egy oly

$$(C) \qquad (A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} \ldots A_{i_{\nu-1}} A_{i_\nu} A_{i_1})$$

---

[24] Ez tulajdonképpen megfordítása a következő tételnek: Minden összefüggő felület valamely összefüggő gráffal egyetlen elemi felületre bontható.

[25] Pontosan azt kellene mondanunk, hogy egyetlen ciklus minden pontban összefüggő összege.

[25a] L. például KŐNIG [1] lábjegyzetben idézett munkájában, 23. l.

C ciklus, mely a gráf minden élét pontosan kétszer tartalmazza. Feladatunk csupán az, hogy egy minden pontban összefüggő ciklust állítsunk elő. Tegyük tehát fel, hogy C az A pontban nem összefüggő, hanem, hogy létezik az éleknek oly két

$$A_1A_{\alpha_1}, A_1A_{\alpha_2}, \ldots, A_1A_{\alpha i},$$
$$A_1A_{\beta_1}, A_1A_{\beta_2}, \ldots, A_1A_{\beta_j}$$

sorozata, melyben a szomszédos élek és az első s utolsó él C-ben szomszédosak. Tekintsük a C ciklust és fordítsunk meg benne egy

$$A_1A_{\alpha_k}\ldots A_{\beta_l}A_1$$

részt (melyben az első és utolsó helyet kivéve A_1 nem szerepel). Vagyis tekintsük a

$$(C') \qquad (A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{\alpha_p}\underbrace{A_1A_{\beta_l}\ldots A_{\alpha_k}A_1}A_{\beta_q}\ldots A_{i_\nu}A_{i_1})$$

ciklust. Nyilván a C' ciklus az A_1-ből kiinduló éleket eggyel kevesebb csoportba osztja, mint C (mert hiszen két különböző csoportot egyesített, míg a többi csoportokat változatlanul hagyta). Továbbá minden A_1-től különböző szögpontban C' összefüggési viszonyai megegyeznek C összefüggési viszonyaival. Ha tehát ezt az eljárást ismételjük, végül is kapunk egy oly A_1-ben összefüggő ciklust, melynek az $A_2, A_3, \ldots, A_n$ pontokban való összefüggési viszonyai megegyeznek a C ciklusnak összefüggési viszonyaival.

Ezután ugyanezen eljárást megismételjük rendre az $A_2, A_3, \ldots, A_n$ pontokra, míg végül is kapunk egy kívánt tulajdonságú ciklust.

Evvel állításunk bizonyítását befejeztük.

5. §. Végtelen gráfok felrajzolhatósága.

A következő tétel végtelen gráfok felrajzolhatóságának kérdését visszavezeti véges gráfok felrajzolhatóságának kérdésére:

Egy végtelen G gráf akkor és csak akkor rajzolható fel egy F felületre, ha G minden véges részgráfja felrajzolható F-re.

Mielőtt tételünket igazolnánk, levezetjük a következő segédtételt:

Egy adott véges gráf egy adott felületre csak véges sokféleképpen rajzolható fel.[26]

Segédtételünk igazolása a következő lemma segítségével történik:

Legyen adva egy határvonallal bíró felületnek két határpontja A és B. Ez a két pont csak véges sokféleképpen köthető egymással össze egy Jordan-*ív segítségével.*

Ha ugyanis az A és B pontok a felület két különböző határgörbéjén fekszenek, akkor nyilván ez az összekötés csak egyféleképpen történhet; így tehát csak avval az esettel kell foglalkoznunk, amikor az A és B pontok ugyanazon határgörbén fekszenek.

Tegyük először fel, hogy az $\widehat{AB}$ ív az F felületet nem darabolja szét. Messük fel F-et az $\widehat{AB}$ ív mentén. Legyen az így nyert felület F_1. Az F_1 felület nemszáma nem nagyobb, mint F nemszáma, továbbá F_1 határgörbéinek száma vagy megegyezik F határgörbéinek számával, vagy annál eggyel nagyobb.[27] Ebből tehát következik, hogy az F_1 felület csak véges sokféle lehet. Így tehát lemmánk igazolása céljából a következőt kell kimutatnunk: Legyen adva az előbbi F felület és a vele homöomorf F'. Legyenek F'-n A', B' az A és B pontoknak megfelelő pontok. Legyen F-en, ill. F'-n az $\widehat{AB}$, illetőleg $\widehat{A'B'}$ oly Jordan-ív, hogy ha F-et, ill. F'-t $\widehat{AB}$, illetőleg $\widehat{A'B'}$ mentén felmetsszük, akkor az F, illetőleg F'-ból keletkező F_1, illetőleg F_1' felületek egymással homöomorfak. *Ebben az esetben található az F és F' felületeket egymásba vivő oly topologikus leképzés, mely az $\widehat{AB}$ és $\widehat{A'B'}$ íveket egymásnak felelteti meg.* Ez a következőképpen látható be: legyen az $\widehat{AB}$, illetőleg $\widehat{A'B'}$

[26] Két felrajzolást akkor tekintünk *megegyezőnek*, ha F leképezhető önmagára topologikusan úgy, hogy a két felrajzolt gráf egymásnak feleljen meg.

[27] A szerint, hogy az $\widehat{AB}$ ívből és a határgörbe valamelyik A és B közt fekvő ívéből álló kör egypartú vagy kétpartú.

ivből keletkezett két ív F_1-en, illetőleg F_1'-n: e_1, e_2, illetőleg e_1', e_2'. Mint könnyen belátható, ha F_1-nek ugyanannyi határgörbéje van, mint F-nek, akkor az e_1, e_2, illetőleg e_1', e_2' ívek ugyanazon határgörbén fekszenek, míg ha F_1-nek eggyel több határgörbéje van, akkor ezen élek különböző határgörbéken fekszenek. Azonban mindkét esetben található az F_1 és F_1' felületeknek oly topologikus leképzése, mely az e_1 és e_1', illetőleg e_2 és e_2' éleket egymásba viszi át. Ha tehát az e_1, e_2, illetőleg e_1', e_2' éleket egymással összeforrasztjuk, akkor az F_1, illetőleg F_1' felületből visszakapjuk az eredeti F, illetőleg F' felületet. míg az F_1 és F_1' közti leképzésből egy az F és F' közti, kívánalmainknak megfelelő leképzést kapunk.

Teljesen hasonlóan bizonyítható lemmánk azon esete, amikor az $\widehat{AB}$ ív szétdarabolja az F felületet.

Ezek után segédtételünk igazolása teljes indukcióval történik. Ugyanis egy élből álló gráfokra segédtételünk nyilvánvalóan igaz; tegyük tehát fel, hogy k-nál kevesebb élt tartalmazó gráfokra is igaz; igazolni fogjuk k számú élt tartalmazó gráfokra is. Legyen tehát g egy k számú élből álló gráf. Hagyjuk el g egy tetszőleges e élét. A $g-e$ gráfra indukciós feltevésünk miatt igaz tételünk. Rajzoljuk fel tehát a $g-e$ gráfot minden lehető módon. Egy tetszőleges felrajzolásnál az e él segédtételünk szerint, csak véges sokféleképpen helyezhető vissza. (Ha egyáltalán visszahelyezhető.) Így tehát valóban a g gráf is csak véges sokféleképpen rajzolható fel.

Ezek után áttérünk tételünk bizonyítására.

A feltétel szükséges volta nyilvánvaló; hogy elégséges is, azt a KőNIG-féle[28] végtelenségi lemmával fogjuk igazolni.

Legyen G_1, G_2,... a G gráf véges részgráfjainak oly végtelen sorozata, melynek minden eleme tartalmazza részgráful az előtte álló elemeket, továbbá amely összességében tartalmazza a G gráf bármely élét. Rajzoljuk fel a G_n gráfot az F felületre valamilyen

[28] Sur les correspondances multivoques des ensembles, Fundamenta Mathematicae, 8, 1926, 114—134. l.

módon és feleltessünk meg ennek a felrajzolásnak egy $P_{n,1}$ pontot. Most rajzoljuk fel a gráfot az előbbitől különböző módon az F felületre és feleltessünk meg ennek a felrajzolásnak egy $P_{n,2}$ pontot. Haladjunk így tovább minden különböző felrajzolásnak megfeleltetve egy pontot. Tekintve, hogy segédtételünk szerint, csak véges sok különböző felrajzolás létezik, ilyen módon egy véges

$$P_{n,1}, P_{n,2}, \ldots, P_{n,r}$$

pontsorozatot kapunk. Ez a pontsorozat legyen a végtelenségi lemmában szereplő véges Π_n ponthalmaz.

Tekintsük a $P_{n,i}$ pontnak megfelelően felrajzolt G_n gráfot. Hagyjuk el G_n azon éleit, melyek G_{n-1}-nek nem élei. Ilyen módon kapunk egy bizonyos módon felrajzolt G_{n-1} gráfot. Ennek a felrajzolásnak megfelel egy $P_{n-1,j}$ pont. Kössük össze a $P_{n,i}$ pontot a $P_{n-1,j}$ ponttal. Ismételjük meg ezt a műveletet az összes P pontokra. Ilyen módon kapunk egy végtelen gráfot, melynek a Kőnig-féle végtelenségi lemma szerint, van egy

$$P_{1i_1}P_{2i_2}P_{3i_3}\ldots$$

alakú végtelen útja. Az ezen pontoknak megfelelő felrajzolások megadják a végtelen gráfnak egy az F felületre való felrajzolási módját.

Megjegyzés. A most levezetettek szerint egy végtelen gráf csak akkor nem síkbarajzolható, ha tartalmaz egy síkba nem rajzolható véges gráfot. Ez a gráf azonban a Kuratowski-féle gráftétel szerint tartalmaz egy Kuratowski-féle gráfot. Kimondhatjuk tehát, hogy *a Kuratowski-féle felrajzolhatósági tétel végtelen gráfokra is helyes.*

*

Ezek után áttérünk olyan gráfok vizsgálatára, melyek nem rajzolhatók fel egyetlen felületre sem. Vegyük azt a végtelen $K_{1,\infty}$, illetőleg $K_{2,\infty}$ gráfot, mely megszámlálható sok K_1, illetőleg K_2 gráfból (l. az 1. és 2. ábrát), mint darabból áll. Igazolni fogjuk, hogy egy *véges fokú G gráf akkor és csak* *akkor rajzolható fel valamely felületre, ha nincs sem a* $K_{1,\infty}$, *sem a* $K_{2,\infty}$ *gráffal homöomorf részgráfja.*[29]

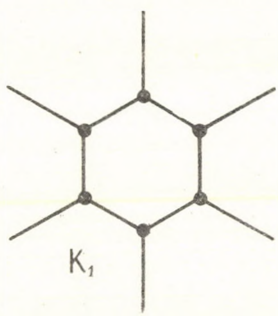
Legyen ugyanis $K_{i,\infty}$-nek $K_{1,n}$ oly részgráfja, mely $K_{i,\infty}$-nek n számú darabjából áll ($i=1, 2$). A 3., illetőleg 4. ábra szerint, úgy a K_1, mint a K_2 gráf a projektiv síkba rajzolható. Tehát

$$N^1(K_i) = N(K_i) = 2. \qquad (i=1,\ 2)$$

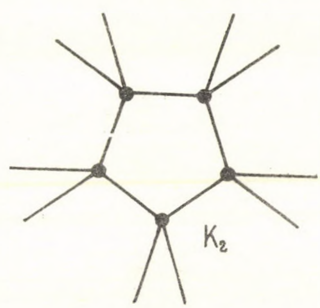
Ekkor azonban a 3. § szerint

$$N(K_{i,n}) = \sum_1^n N(K_i) = 2n. \qquad (i=1,\ 2)$$

Ez azonban azt jelenti, hogy $K_{i,\infty}$-nek ($i=1, 2$) tetszőleges nagy nemszámmal bíró részgráfja is van, amiből pedig következik,



3. ábra.



4. ábra.

hogy $K_{i,\infty}$ ($i=1, 2$) nem rajzolható fel egyetlen felületre sem. Ekkor azonban természetesen egy oly G gráf, mely tartalmaz a $K_{1,\infty}$, illetőleg $K_{2,\infty}$ gráffal homöomorf részgráfot, szintén nem rajzolható fel egyetlen felületre sem. Evvel tehát állításunk egyik részét igazoltuk.

Ezután áttérünk annak igazolására, hogy ha egy G gráf nem rajzolható fel egyetlen felületre sem, akkor tartalmaz vagy a $K_{1,\infty}$,

---

[29] Nem véges fokú végtelen gráfok esetén nem lehet mindig kijelölni végtelen sok különálló KURATOWSKI-féle gráfot. (Vegyünk fel például végtelen sok KURATOWSKI-féle gráfot úgy, hogy mindannyiuknak legyen egy közös szögpontja.) Ilyen esetben csak végtelen sok *közösélnélküli* KURATOWSKI-féle gráfot lehet biztosítani.

vagy a $K_{2,\infty}$ gráffal homöomorf részgráfot. A G gráf feltételünk szerint nem síkbarajzolható, tehát a végtelen gráfokra átvitt KURATOWSKI-féle tétel szerint tartalmaz egy K_1-el, illetőleg K_2-vel homöomorf $\varkappa$ részgráfot. Hagyjuk el a G gráf mindazon éleit, melyeknek van közös pontja a $\varkappa$ gráffal. (Tehát a $\varkappa$ éleit is.) Legyen az így kapott gráf G'. Tekintve, hogy G végesfokú, csak véges sok élt hagytunk el belőle. Így tehát nyilván a G' gráf sem rajzolható fel semmiféle felületre. Így a G' gráf sem síkba rajzolható, tehát tartalmaz egy K_1, illetőleg K_2 gráffal homöomorf részgráfot. Ezen gondolatmenetet folytatva nyerjük, hogy G-nek van végtelen sok egymástól különálló részgráfja, melyek vagy K_1-el, vagy K_2-vel homöomorfak. Ekkor azonban ezek közül kiválasztható úgy végtelen sok gráf, hogy ezek együttesen vagy $K_{1,\infty}$-el, vagy $K_{2,\infty}$-el homöomorf gráfot alkossanak.

Evvel tehát tételünk bizonyítását befejeztük.

Tételünk illusztrálására szolgáljon a háromdimenziós tér közönséges rácsgráfja. Ez a gráf tartalmaz részgráful a K_1, illetőleg K_2 gráffal homöomorf részgráfot.[30] Ebből tehát következik, hogy tartalmaz végtelen sok ilyen, egymástól különálló gráfot is, tehát tartalmaz úgy a $K_{1,\infty}$, mint a $K_{2,\infty}$ gráffal homöomorf részgráfot. Tehát

a három dimenziós tér közönséges rácsgráfja, nem rajzolható fel egyetlen felületre sem. (Ugyanez áll fenn természetesen háromnál magasabb dimenziós terek rácsgráfjaira is.)

6. §. Nyilt felületekre való felrajzolhatóságról.

Vegyünk egy tetszőleges nyilt F felületet. Nevezzük ezt a nyilt felületet N-ednemünek, ha F tetszőleges zárt részfelületének nemszáma nem nagyobb N-nél, ellenben van F-nek oly zárt részfelülete, melynek nemszáma pontosan N. Nevezzük továbbá az N-ednemű nyilt F felületet két-, illetőleg egyoldalúnak, a szerint, hogy F minden zárt részfelülete kétoldalú,

[30] L. KŐNIG [1] lábjegyzetben idézett munkájának 199. l.

illetőleg van köztük egyoldalú is. Ezekkel az elnevezésekkel a következő tétel mondható ki:

A véges vagy végtelen G gráf akkor és csak akkor rajzolható fel az N-ednemű egy-, illetőleg kétoldalú nyilt felületre, ha G felrajzolható az N-ednemű egy-, illetőleg kétoldalú zárt felületre, míg a nem véges nemű nyilt felületre minden gráf felrajzolható.

Tételünk első része nyilvánvaló, csupán a második résszel kell részletesebben foglalkozni.

Vegyünk fel egy gömböt és vágjunk ezen megszámlálható sok, egymástól szeparált lyuk-párat. Forrasszuk össze ezen lyukak határolta köröket páronkint. Legyen az így nyert felület Φ. Azt állítjuk, hogy *minden véges vagy végtelen gráf felrajzolható Φ-re.* Ugyanis ábrázoljuk G-t egy gömbön; ekkor természetesen keletkezhetnek többszörös pontok is. Elérhető azonban megfelelő felrajzolással (tekintve, hogy G-nek megszámlálható sok éle van), hogy csak megszámlálható sok kettőspontot kapjunk. Tekintsük most egy tetszőleges kettősponton átmenő e_1 és e_2 éleket. Vágjunk a gömbön a kettőspont környezetében két lyukat, melyek az e_1 él különböző oldalán fekszenek és forrasszuk össze a két lyukat határoló köröket. Az így nyert felületen már most helyettesíthető az e_2 él egy a gráfot nem metsző éllel. Ilyen módon tehát egy kettőspontot már eltüntettünk. Hasonló módon megszabadulhatunk a többi kettősponttól is. Nyilvánvaló továbbá az is, hogy ha e köröket megfelelő irányítással forrasztjuk össze, akkor G éppen a Φ felületre lesz felrajzolva.

Evvel tehát igazoltuk, hogy minden gráf felrajzolható Φ-re. Azonban ebből, tekintetbe véve, hogy minden nem végesnemű nyilt felület tartalmaz egy Φ felületet,[31] következik már állításunk is.

---

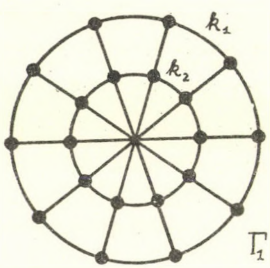
[31] Ugyanis található a zárt részfelületek oly végtelen sorozata, hogy a sorozat bármely eleme tartalmazza a sorozatban előtte álló felületeket részfelületül, továbbá bármely elem nemszáma nagyobb legyen, mint a sorozatban előtte álló felületek nemszáma.

7. §. Az egy- és kétoldalú nemszámok kapcsolatáról.

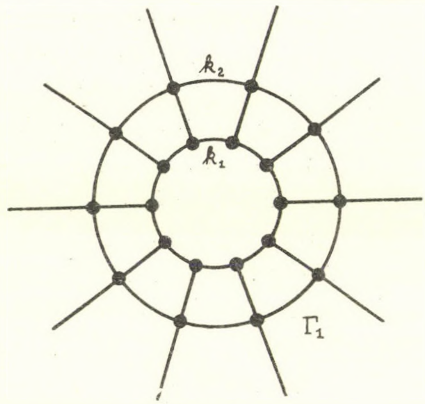
Már dolgozatunk bevezetésében említettük a triviális

$$N^1(G) \leq N^2(G) + 1$$

egyenlőtlenséget. Ennek segítségével, ha ismerjük egy gráf kétoldalú nemszámát, van egy egyszerű felső határunk a gráf egy-



5. ábra.



6. ábra.

oldalú nemszámára. Most avval a kérdéssel fogunk foglalkozni, hogy ha ismerjük egy gráf egyoldalú nemszámát, lehet-e felső korlátot találni a gráf kétoldalú nemszámára. A válasz, mint látni fogjuk, tagadó.

Először is, hogy a helyzetre rávilágítsunk, megmutatjuk, hogy

$$N^2(G) - N^1(G)$$

tetszőleges nagy lehet. Vegyük ugyanis az 5. §-ban szereplő $K_{i,n}$ gráfot, mely n számú KURATOWSKI-féle K_i gráfból (mint darabból) áll ($i=1, 2$). Erre a 3. § formulái szerint

$$\left.\begin{aligned} N^2(K_{i,n}) &= \sum_1^n N^2(K_i) = \sum_1^n 3 = 3n \\ N^1(K_{i,n}) &= \sum_1^n N^1(K_i) + \varepsilon = \sum_1^n 2 = 2n \end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2),$$

tehát

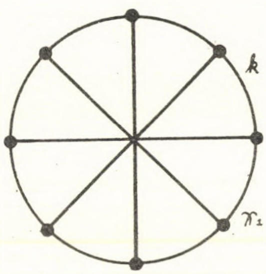
$$N^2(K_{i,n}) - N^1(K_{i,n}) = n \qquad (i=1, 2),$$

ahol n tetszőleges nagy egész számot jelenthet.

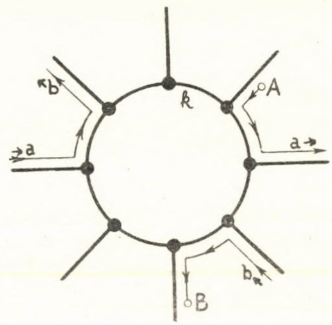
Most tovább megyünk és kimutatjuk, hogy ha

$$N^1(G) = 2,$$

vagyis, ha G felrajzolható a projektív síkra, akkor még $N^2(G)$ tetszőleges nagy lehet. Tekintsük ugyanis az 5. ábrán ($n=1$) látható Γ_n gráfot. (Ez a gráf $n+1$ koncentrikus körből, $k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}$-ből és $2n+3$ számú $n+1$ élből álló «átmérőből»



7. ábra.



8. ábra.

áll. Az ábra középpontja nem szögpontja a gráfnak.) Ez a gráf, mint a 6. ábra mutatja, felrajzolható a projektív síkra.

Azt állítjuk, hogy

$$N^2(\Gamma_n) > 2n+1.$$

Mielőtt ezt bebizonyítanánk, levezetjük a következő segédtételt:

Tekintsük a 7. ábrán ($n=1$-re) látható γ_n gráfot (n tetszőleges pozitív egész szám). A γ_n gráf egy k körből és $2(n+1)$ átmérőből áll. (Az ábra középpontja nem szögpontja a gráfnak.) *Ez a gráf nem rajzolható fel oly módon a $2n+1$-szeresen összefüggő határvonalnélküli kétoldalú felületre, hogy a k kör a felületen ponttá összehúzható legyen (azaz, hogy a k elemi felületet határoljon) és a γ_n gráf minden «átmérője» a k kör határolta elemi felületen kívül haladjon.*

Tegyük ugyanis fel, hogy ez a felrajzolási mód lehetséges lenne. Legyen a 8. ábrán a k kör határolta elemi felület és a k kör környezete ábrázolva ezen felrajzolási mód mellett. Ha felveszünk két nem a gráfon fekvő pontot, melyek nem feküsznek a k kör határolta elemi felületen, akkor — mint az ábrából könnyen leolvasható (ahol példaképpen egy A-t és B-t összekötő út látható) — ez a két pont összeköthető egymással egy a gráfot nem metsző úttal. Ez azonban azt jelenti, hogy a γ_n gráf felületünket pontosan két részre osztja. Tehát az általánosított EULER-féle formula szerint[32]

$$(\gamma_n)_0-(\gamma_n)_1+2\geq 3-(2n+1),$$

ahol $(\gamma_n)_0$ és $(\gamma_n)_1$ a γ_n gráf szögpontjainak, illetőleg éleinek számát jelenti. Azonban

$$(\gamma_n)_0=4(n+1)$$
$$(\gamma_n)_1=6(n+1),$$

tehát előbbi egyenlőtlenségünkből a

$$2\leq 0$$

ellentmondás következik.

Evvel tehát segédtételünket bebizonyítottuk, most áttérünk a Γ_n gráfra vonatkozó állításunk igazolására. Teljes indukciót alkalmazunk n-re. A Γ_0 gráf nyilván nem síkbarajzolható, hiszen azonos az első KURATOWSKI-féle gráffal s így bizonyítandó egyenlőtlenségünknek megfelelően

$$N^2(\Gamma_0)>1.$$

Tegyük tehát fel, hogy tételünket igazoltuk minden n-nél kisebb egész számra; igazolni fogjuk n-re is. Tegyük ugyanis fel, hogy, ellentétben a bizonyítandó egyenlőtlenséggel, Γ_n felrajzolható a $2n+1$-szeresen összefüggő határvonalnélküli kétoldalú felületre. Ekkor gráfunk k_1 körét segédtételünk szerint nem lehet ponttá húzni a felületen. [Ugyanis, ha lehetne, akkor Γ_n «átmérői» között legalább egy az ezen kör határolta

[32] Azért áll egyenlőtlenség, mert nem tudjuk, hogy γ_n felületünket elemi részekre osztja-e.

elemi felületen lenne, mert hiszen a k_1 kör és Γ_n $2(n+1)$ számú «átmérője» egy γ_n gráfot alkotnak. Tehát tekintve, hogy a Γ_n gráf tetszőleges két szögpontjához található Γ_n-nek egy ezen két szögpontot k_1 metszése nélkül összekötő útja, következik, hogy ha Γ_n egy «átmérője» a k kör határolta elemi felület belsejében volna, akkor az egész Γ_n gráfnak ezen az elemi felület belsejében kellene feküdni, vagyis Γ_n-nek síkbarajzolhatónak kellene lenni.] Ha tehát felületünket ezen kör mentén felvágjuk és a kapott kétoldalú felületet körlemezekkel határvonalnélküli felületté egészítjük ki, akkor nyerünk egy legfeljebb $2n-1$-szeresen összefüggő határvonalnélküli kétoldalú felületet. Azonban erre a felületre fel van rajzolva Γ_n-nek egy Γ_{n-1} része, ami pedig indukciós feltevésünk szerint lehetetlen. Evvel tehát állításunk bizonyítását befejeztük.

*

Ezek után felmerülhet az a kérdés, hogy létezik-e egy oly gráf,[33] mely felrajzolható egy bizonyos egyoldalú felületre, de nem rajzolható fel egyetlen kétoldalú felületre sem. A válasz tagadó, vagyis

ha egy (véges vagy végtelen) gráf felrajzolható valamely egyoldalú felületre, akkor felrajzolható egy kétoldalúra is.

Mielőtt tételünket levezetnénk, először igazoljuk a következő segédtételt:

Ha egy véges g gráf egy egyoldalú F felületet elemi felületekre bont, akkor a g gráfnak van oly köre, melynek mentén F-et felmetszve, ez kétoldalúvá lesz.

Legyen ugyanis k egy oly F-en fekvő kör, hogy felmetszve F-et k mentén, ez kétoldalúvá lesz. Messe a k kör gráfunkat rendre a $P_1, P_2, \dots, P_\mu$ pontokban. (Feltehető, hogy k nem megy át g egyetlen szögpontján sem, továbbá, hogy k-nak csak véges sok közös pontja van g-vel.) Legyen a k körnek P_1 és P_2 közt fekvő íve i és ffeküdjön ezen i ív a g létesítette felosztás e

[33] Az világos, hogy ilyen véges gráf nincs.

elemi felületén. Az e elemi felületet határoló élekből alkotható g-nek egy oly P_1-et és P_2-t összekötő u útja, hogy az i ív és ezen u út egy elemi felületet határoljanak. Ekkor azonban nyilvánvaló, hogy ha a k kör i ívét ezen u úttal helyettesítjük, akkor ismét oly k' kört nyerünk, mely mentén F-et felvágva, az egyoldalúvá lesz. A nyert k' körre gondolatmenetünk megismételhető. Végül is megkapjuk g-nek egy kívánt tulajdonságú körét.

Ezek után tételünk a következőképpen látható be:

Feltehető, hogy G végtelen és nem rajzolható fel az $N^1(G)$-szeresen összefüggő határvonalnélküli *kétoldalú* felületre. Ekkor az 5. § tételei szerint van G-nek oly véges g részgráfja, hogy

$$N^1(g) = N^1(G)$$

és

$$N^2(g) > N^1(g) = N^1(G).$$

Legyen már most G felrajzolva az $N^1(G)$-szeresen összefüggő határvonalnélküli egyoldalú F felületre. Az 1. § 3. Lemmája szerint a g gráf elemi részekre osztja az F felületet. Van tehát g-nek, segédtételünk szerint, egy

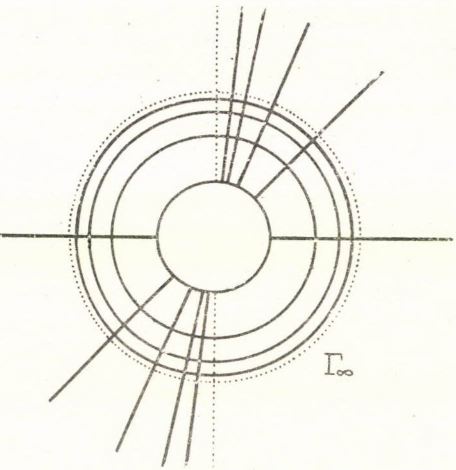
$$k = A_1, A_2, \ldots, A_n, A_1$$

köre, mely mentén felvágva F-et, az egyoldalúvá lesz. Vágjuk fel F-et k mentén. Legyen az így keletkezett kétoldalú felület F'. Legyen továbbá az ezen felületen fekvő $G—k$ gráfból keletkezett gráf Γ, legyenek továbbá ezen gráf $A_1, A_2, \ldots, A_n$-ból keletkezett szögpontjai $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$, illetőleg $A''_1, A''_2, \ldots, A''_n$. Forrasszunk az F' felülethez hidakat oly módon, hogy a Γ gráf A'_1 és A''_1, illetőleg A'_2 és $A''_2, \ldots$, illetőleg A'_n és A''_n pontjai egymással összeforraszthatók legyenek. Ekkor Γ-ból visszakapjuk a $G—k$ gráfot. Ez azonban azt jelenti, hogy a $G—k$ gráf felrajzolható egy kétoldalú felületre. Ekkor azonban (tekintve, hogy k véges gráf) a G gráf is felrajzolható valamely kétoldalú felületre.

Ezzel tehát állításunk bizonyítását befejeztük.

*

Tekintsük a 9. ábrán látható projektív síkra felrajzolt megszámlálhatóan sok JORDAN-ívből álló Γ_∞ *görbét.*[34] Ez a görbe megszámlálhatóan sok koncentrikus körből (melyek konvergálnak a pontozott körhöz) és megszámlálhatóan sok «átmérőből» (melyek a pontozott «átmérőhöz» konvergálnak) áll. Ez a görbe, mint az ábra mutatja, felrajzolható a projektív síkra. De tekintve, hogy tartalmaz tetszőleges magas indexű Γ_n gráfot részgörbéül, Γ_∞ nem rajzolható fel egyetlen kétoldalú felületre sem. Tehát



9. ábra.

Γ_∞ egy oly megszámlálható sok JORDAN-*ívből álló görbe, mely felrajzolható minden egyoldalú felületre, de nem rajzolható fel egyetlen kétoldalú felületre sem.*

Vázsonyi Endre.

GRAPHEN AUF FLÄCHEN.

Die Arbeit gehört zur relativen Graphentheorie und schliesst sich Untersuchungen von D. KÖNIG (1911) und C. KURATOWSKI (1930) an.

§ 1. Zeichnet man auf eine einseitige Fläche von möglichst niederem Geschlecht einen zusammenhängenden endlichen Graphen, so sind die durch den Graphen erzeugten Länder nicht unbedingt Elementarflächen; es kann vorkommen, dass ein solches Land mit dem MÖBIUSschen Band homoeomorph ist. Es ist aber möglich unseren Graphen auf diese Fläche auch so zu zeichnen, dass alle Länder elementar sind.

§ 2. Eine kombinatorische Methode zur Bestimmung der Geschlecht-

[34] A Γ_∞ görbe nem gráf.

zahl der ein- oder zweiseitigen Fläche von niedrigstem Geschlecht, auf welche ein gegebener zusammenhängender endlicher Graph gezeichnet werden kann.

§ 3. Bestimmung dieser Geschlechtzahlen, wenn sie für die einzelnen zusammenhängenden Bestandteile, in welche der gegebene endliche nicht zusammenhängende Graph zerfällt, bekannt sind.

§ 4. Zu jedem zusammenhängenden endlichen Graphen lässt sich eine Fläche bestimmen, die durch den Graphen in eine einzige Elementarfläche zerlegt wird.

§ 5. Ein unendlicher Graph lässt sich dann und nur dann auf eine Fläche zeichnen, wenn alle seine endlichen Teilgraphen auf diese Fläche gezeichnet werden können. Der Satz von KURATOWSKI gilt auch für unendliche Graphen, wenn die Menge ihrer Kanten abzählbar ist. Ein dem KURATOWSKI-schen entsprechendes Kriterium dafür, dass ein unendlicher Graph sich auf keine einzige Fläche zeichnen lässt. (Der Gittergraph des n-dimensionalen Raumes mit $n>2$ lässt sich z. B. auf keine Fläche zeichnen.)

§ 6. Der Fall offener Flächen.

§ 7. Zu einer jeden zweiseitigen Fläche mit gegebener beliebig grosser Geschlechtszahl lässt sich ein endlicher Graph so bestimmen, dass er wohl auf die projektive Ebene, nicht aber auf die gegebene zweiseitige Fläche gezeichnet werden kann. Wenn aber ein endlicher oder unendlicher Graph auf eine einseitige Fläche gezeichnet werden kann, so lässt er sich auch auf eine zweiseitige Fläche zeichnen. Es gibt jedoch eine aus abzählbar vielen JORDAN-Bögen bestehende *Kurve* (kein Graph), die sich auf jede einseitige, aber auf keine zweiseitige Fläche zeichnen lässt.

Endre Vázsonyi.

MEGJEGYZÉS KÜRSCHÁK JÓZSEF EGY MUNKÁJÁHOZ.

KÜRSCHÁK[1] egyszerű és teljes elemi-geometriai bebizonyítását adta annak az ismert[2] tételnek, mely szerint *a körbe írt konvex n-szögek között a szabályos n-szögnek (és csak ennek) van a legnagyobb területe.*[3] Bebizonyítását a következő segédtételre alapította:

Legyen ABCD a körbe írt olyan konvex négyszög, melynél

$$\widehat{AD} \text{ ív} > \widehat{BC} \text{ ív.}^{4}$$

Jelöljük az AC és BD átlók metszéspontját S-sel. Akkor

$$\overline{AS} > \overline{BS} \quad \text{és} \quad \overline{DS} > \overline{CS}.^{5}$$

Ezt KÜRSCHÁK az euklidesi geometriának a kerületi szögekre vonatkozó tétele alapján bizonyítja, t. i. a következőképpen: mivel $\widehat{AD} > \widehat{BC}$, azért a megfelelő kerületi szögekre $ABD\sphericalangle > BAC\sphericalangle$, tehát az ABS háromszögben $\overline{AS} > \overline{BS}$ s ugyanígy folyik $\overline{DS} > \overline{CS}$.

---

[1] J. KÜRSCHÁK: Über dem Kreise ein- und umgeschriebene Vielecke, Mathematische Annalen 30 (1887), p. 578—581.

[2] V. ö. J. STEINER: Über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt, Gesammelte Werke 2, p. 179—242, különösen p. 242.

[3] A terület mérőszámának fogalmát nem használva, a tétel így fejezhető ki: *ha $P^{\star}$ a körbe írt szabályos n-szög, P pedig u. a. körbe írt nem szabályos n-szög, akkor $P^{\star}$ háromszögekre bontható úgy, hogy azokból bizonyosakat elhagyván, a megmaradt háromszögekből P összerakható.* KÜRSCHÁK bebizonyítása közvetlenül a tétel ez alakjának kimutatására szolgál.

[4] Itt $\widehat{AD}$ ív alatt az A és D végpontokkal bíró két körív közül az értendő, amely a B és C pontot nem tartalmazza; hasonlóan értendő a $\widehat{BC}$ ív.

[5] Ebből nyilván következik, hogy a $BSC\triangle$ kongruens az $ASD\triangle$ egy részével, tehát az $ABD\triangle$ területe nagyobb az $ABC\triangle$ területénél. Ezt alkalmazza KÜRSCHÁK bebizonyításában.

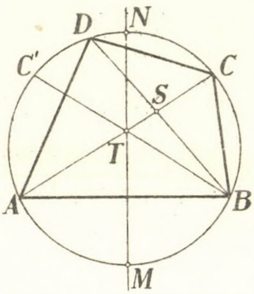
Ettől eltekintve, a fenti tétel bebizonyításában KÜRSCHÁK nem használja fel az euklidesi axiomát.

Az alábbiakban e segédtételnek *az euklidesi axiomától független* bebizonyítását mutatom be. Ezzel a beirt n-szögek területére vonatkozó fenti tétel KÜRSCHÁK-féle bebizonyítása az euklidesi axiomától függetlenné válik, tehát érvényes a BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-féle geometriában is.[1]

*

A fenti segédtétel az euklidesi axiomától függetlenül következőkép bizonyítható be.

Tekintsük az $\overline{AB}$ oldal MN felező merőlegesét (ábra). Az A és C pontok ez MN egyenesnek két különböző oldalán vannak; mert ha C is azon az oldalon volna, mint A vagy épen N-be esnék, akkor (mivel MN az $ADCB$ ivet N-ben felezi) $\overset{\frown}{BC} \geqq \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC}$ állana, amiből $\overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{AD}$ következnék, a feltevéssel ellentétben. Tehát MN metszi AC-t egy az A és C közé eső T pontban. Messe a BT egyenes a kört másodszor C'-ben. Minthogy BT nyilván az AT egyenesnek, a kör pedig önmagának az MN egyenesre vonatkozó tükörképe: világos, hogy a C' pont C-nek MN-re vonatkozó tükörképe. Tehát $\overset{\frown}{AC'} = \overset{\frown}{BC}$. Ennélfogva a feltevés alapján $\overset{\frown}{AD} > \overset{\frown}{AC'}$, vagyis C' az $\overset{\frown}{AD}$ ívnek valamely A és D közé eső pontja. Ebből folyólag az AC egyenesen T az A és S között van. Ámde $\overline{AT} = \overline{BT}$, minek folytán



$$\overline{AS} = \overline{AT} + \overline{TS} = \overline{BT} + \overline{TS},$$

továbbá a BST háromszögben

$$\overline{BT} + \overline{TS} > \overline{BS},$$

[1] KÜRSCHÁKnak az idézett helyen a köré írt n-szögekre vonatkozó megfelelő tételre, valamint a be-, ill. köré írt n-szögek kerületére vonatkozó hasonló tételekre adott bebizonyításai az *euklidesi axiomától szintén függetlenek.* V. ö. szerzőtől: Konvex és monoton függvényekről, Matematikai és Fizikai Lapok 36 (1929), p. 50—56, különösen p. 55.

következőleg

$$\overline{AS} > \overline{BS}.$$

Ugyanígy következik a feltevésből, hogy

$$\overline{DS} > \overline{CS}.$$

Qu. e. d.

Szász Pál.

BEMERKUNG ZU EINER ARBEIT VON J. KÜRSCHÁK.

J. Kürschák [1] hat für den bekannten Satz,[2] laut welchem *unter allen konvexen n-Ecken, die einem Kreise eingeschrieben sind, das regelmässige den grössten Inhalt hat,* einen einfachen und vollständigen, elementargeometrischen Beweis gegeben. Sein Beweis ist auf den folgenden Hilfsatz gegründet:

Es sei ABCD ein dem Kreise eingeschriebenes konvexes Viereck, bei dem

$$\text{Bogen } \widehat{AD} > \text{Bogen } \widehat{BC}$$

ausfällt. Bezeichnet man den Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD mit S, so gilt

$$\overline{AS} > \overline{BS} \text{ und } \overline{DS} > \overline{CS}.$$

In vorliegender Note wird dieser Hilfsatz — den J. Kürschák auf Grund des euklidischen Satzes über Peripheriewinkel beweist — *unabhängig vom euklidischen Axiom* bewiesen. Damit wird der J. Kürschäksche Beweis des oben angeführten Satzes über den Inhalt der eingeschriebenen n-Ecke vom euklidischen Axiom unabhängig, und gilt daher auch in der Bolyai—Lobatschefskijschen Geometrie.[3]

Paul v. Szász.

---

[1] J. Kürschák: Über dem Kreise ein- und umgeschriebene Vielecke, Mathematische Annalen 30 (1887), S. 578—581.

[2] Vgl. J. Steiner: Über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt, Gesammelte Werke 2, S. 179—242, besonders S. 242.

[3] Die von J. Kürschák a. a. O. für den entsprechenden Satz über umgeschriebene n-Ecke und für die ähnlichen Sätze über den Umfang der ein- bezw. umgeschriebenen n-Ecke gegebenen Beweise sind ebenfalls *vom euklidischen Axiom unabhängig.*

BOLYAI FARKAS EGY ISMERETLEN LEVELE ÉS AZ INSTITUTUM PENSIONALE HUNGARICUM.

Az alább közölt BOLYAI-levél eredetije a gyömrői TELEKI-levéltárban[1] van. BOLYAI FARKAS 1825-ben írta TELEKI JÓZSEF grófnak, a Magyar Tudományos Akadémia későbbi első elnökének, aki akkor a Helytartótanács tiszteletbeli titkára volt.[2] A Helytartótanács felügyelete alá tartozott a levél első mondatában említett «Institutum», pontosabban Institutum Pensionale Hungaricum, ahová 1824 júl. 1-vel való felvételét remélte a marosvásárhelyi kollégiumnak azóta világhírre emelkedett matematikus professzora. Második feleségének, a levél szerint «idős beteges» NAGY TERÉZ-nek jövőjét akarta volna biztosabbá tenni ezzel a lépéssel. Sietnie kellett, mert a belépés korhatára az 50. életév volt, amit ő 1825 febr. 9-én ért el.

Az Országos Levéltár több tisztviselőjének szíves segítségével sikerült megkeresni ennek a feledésbemerült «nyugdíjintézetnek» a gyökerét. Felállítását «AUGUSTIN HOLTSCHE Rait Offr [Rationum Officialis] der P. h. Hoffkammer-Buchhl.» kérte 5 félives németnyelvű felségfolyamodványban «Ofen 1 Julij 795» hivatkozva arra, hogy «Wayl. S. M. JOSEPH der 2te ein ähnliches Institut für die oesterreichischen Wirtschafts-Beamten schon unterm 22^{t} Hornung [Februar] 787. zu genehmigen geruhet

---

1 E helyen is köszönetet mondok TELEKI TIBOR gróf Őkegyelmességének és a levéltárt rendező IVÁNYI BÉLA dr. Őméltóságának, a szegedi Ferencz József-tudományegyetem tanárának, hogy kutatásomat lehetővé tették.

2 *Schematismus inclyti regni Hungariae pro anno 1824.* pag. 97.

haben;».[3] A következő évben (1796) már 2000 példányban kinyomtatták (latinul és németül) az alapszabályokat.[4] Állami és magántisztviselők is beléphettek ebbe az intézetbe: «privati pensionalis Instituti in Regno Hungariae, partibusque Eidem adnexis pro Officialibus tam in Regiis, quam & Privatorum honoratioribus Servitiis constitutis, eorundemque Viduabus, & Orphanis Prolibus erigendi», amely 1797. jan. 1-én kezdte meg működését. A vele kapcsolatos bizottság: «Deputatio Altissime approbati Instituti Pensionalis Hungarici» az 1807. évi *Schematismus*ban szerepel először. Megtaláljuk 1824-ben is, amikor BOLYAI FARKAS be akart lépni. Ekkor elnöke BOROS JÓZSEF, 14 ülnöke közül az utolsó: «D. PAULUS Jun. EÖTVÖS, Exc. Camerae R. H. A. Concipista, una Instituti hujus Actuarius.»[5] Őt említi BOLYAI. Ezek után lássuk a levelet, amelynek két (pontokkal jelölt) szavát nem sikerült teljesen kibetűzni. A papiros ott foltos és lyukas. A címzésben és a megszólításban előforduló R. Sz. B. rövidítés jelentése: Római Szent Birodalmi.

Méltoságos R. Sz. B. Grof Széki TELEKI JÓSEF Ur ö Nagyságának, a' Felséges Királlyi Helytarto Tanáts' nagy érdemü Titoknokjának, méltóztatott Jó Mlgs Patronus Uramnak alázatos tisztelettel *Pesten*

Méltoságos R. Sz. B. Grof és Secretarius Ur,
Méltoztatott Jó Mlgs Patronus Uram!

Kevés napokkal azután, hogy az ősszel Ngdnak írni bátorkodtam, vettem az Actuarius ÖTVÖS PÁL Urnak az Institutum petsétjével megerőssitett levelét, melybe jelenti a 1ª Julii 1824 valo bé-vétettetésemet, és azt hogy az első esztendőre 47 rhf 33 xrral tartozom; azonnal az akkor Pesten lévő TSIKI-nek boltjában itt le-tettem azt, megkérvén ötet levélben, hogy azt a' Ngod méltóztatott útmutatása szerint maga hellyén fizessebé, és az assecuratorius libellust hozza-le: de ö vissza jövet

[3] Országos Levéltár. Helyt. Grem. Extr. 1795. fons 6. pos. 3.
[4] Grem. Extr. 1796. norm. fons 3. pos. 26—29. A latin szöveg (18 Oct. Nro. 23028) 11 oldalon 37 §-ból áll.
[5] *Schematismus.*² pag. 129.

azzal mentette magát, hogy véghez nem vitte, hogy a' Duna iszonyu áradása miatt Budára nem mehetett; 's azt-is mondja, (nem tudom mennyibe igaz) hogy Ngdat instálta, hogy méltoztatnék a' pénzt által-venni — nem lévén egyéb mit tennem, arra kértem, hogy assignálja Pestre; az igérte, hogy assignálja KAPPEL és Compagnie nevű kereskedő Házhoz; melyről én ÖTVÖS PÁL Urat tudositottam-is: de talán ezen levelem felérkezése elött, a' pénznek meg nem menetele miatt ki-rekesztetettem, mellyet ÖTVÖS PÁL Ur mint Actuarius nemrég vett levelében meg-is irt: ezen ártatlan talált szerencsétlenségbe kötelességemnek látom még eggyet probálni; TSIKI-tol . . s . i . . . át vettem, ugy adta a' mint ő kész meg- . . . . nni azt egy ÖTVÖS PÁL Urnak irt levelembe, melyet az irt pénzzel eggyütt viszen most PETRÁSKO Ur, belé zártam, 's instáltam, hogy vigye véghez, hogy a' midön nem a' magam hibája miatt esett, és már bé-voltam vétetve, ki ne rekesztessem, és a' mikor PETRASKO Bétsből vissza jő, az assecurans libellust hozhassa-le.

Alázatoson engedelmet instálok, hogy Ngodnak alkalmatlankodni bátorkodom; az a' ditső feljülírás, mely alatt a' Haza az emberiség védangyalait, 's Vallásunk hatalmas oszlopait tiszteli, gyujtotta bennem ezt a' bizodalmat: méltoztatik tudni Ngod, millyen nyomorult a' Vásárhellyi Professor' állapotja, a' kinek, midön a' jelenvalóba is nehezen élhet, akármely nemes és a köz jóra törekedő tüze lenne-is, a' jövendöbe lehető el-erötelenülésre, el-maradhato Özvegyre, Árvákra valo ki-nézésbe elalszik — nékem különösebben nagy szerentsétlenségemre esett ezen véletlen ki-rekesztetésem; mert én bizonyosan bévétetve gondolván megamat, a mult esztendő utolsó napján egy idős beteges léányt elvettem; a' ki, ha szintén nem gondolnám-is, hogy engemet, a' ki még alkalmas egésségü vagyok, felül-éljen, nagyon el-kedvetlenednék, ha a' bizonytalan jövendöre nézve ezen reménységét el-vesztené: alázatoson instálok azért Ngodnak; méltoztassék egy néhány a' maga hellyén tejendő *néhány* szavával egy pár embert meg-tartani; hogy ha lehetne PETRÁSKO, mikor Bétsből vissza-jő, hozná-le magával az assecuratorius libellust; holtig háládatos szivvel fogom Ngod kegyességét köszönni; maradván mind végig alázatos méjj tisztelettel

Mlgos Grof Ur Ngodnak alázatos szolgája

Mvásárhellyen 1825. 2ª Aprilis. *Bolyai Farkas*

Math. et Phys. Professor.

Az Országos Levéltárban 1824-től egészen 1830-ig bezáróan átnéztem a kamarai osztály mutató-könyveit (Index protocollorum centralium; Elenchi dep. Cassal. Oeconom.), de nem találtam nyomát, hogy BOLYAI FARKAS valamit befizetett volna. Erdélyi volta nem lett volna akadály. Erdélybe, sőt Galiciába valók is beléphettek,[6] ha a szükséges hatósági orvosi vizsgálatot[7] sikerrel kiállották. Anyagi helyzete is kedvezőbb volt ezidőtájt.[8]

A levél elején említett TSIKI (CSIKI) MÁRTON Pestre járó marosvásárhelyi boltos volt «és egy lemenője férje révén ma is tartja a familia az ő hajdani lábas házát a Sáros-utca sarkán.»[9] PETRÁSKÓ GERGELY is ottani vaskereskedő, «a mai Takarékpénztár háza volt az övé».[9] Családja később (1831) magyar nemességet kapott.[10] KAPPEL pesti kereskedőről már 1815-ben ezt olvassuk: «Hr. KAPPEL, Material- und Spezerey-Handl. hat sein Gewölb (zum blauen Einhorn) sammt Wohnung in der Waitznergasse im eig. Hause.»[11]

Jelitai József.

---

[6] «Compluribus tam Regiis, quam Privatorum Officialibus è Magno Principatu Transylvaniae, et Regno Galliciae Fine sui ad altissime approbatum Institutum Pensionale Hungaricum Receptionis, et Incorporationis semet insinuantibus»; Helyt. 1805. Dep. Fund.—Saec. Polit. fons 6. pos 8.

[7] Ugyanott az orvosi bizonyítvány nyomtatott mintája. (24 Jan. 804. 2162.)

[8] V. ö. DÁVID LAJOS: *A két Bolyai élete és munkássága.* 1923. 125.

[9] GULYÁS KÁROLY, a marosvásárhelyi TELEKI-könyvtár őre írja BIÁS ISTVÁN ottani levéltáros közlése alapján e sorok írójához intézett szíves levelében. (1937. máj. 17.)

[10] Dr. TEMESVÁRY JÁNOS: *A magyar-örmény nemes családok czímerlevelei* Szamosújvár. 1896. 232.

[11] *Adreßbuch der Koeniglichen Frey-Stadt Pesth.* 1815. S. 138. Verzeichniß der übrigen incorporirten Glieder des Handelstandes, worunter mehrere mit dem Klein-Handel auch den Handel all'in Grosso verbinden. S. 135—142.

WOLFGANG v. BOLYAI UND DAS INSTITUTUM PENSIONALE HUNGARICUM.

Nach dem Tode seiner ersten Frau (1821) heiratete W. v. Bolyai im Jahre 1824 Therese v. Nagy. Im Anschluss hieran wurde er auf sein Ansuchen mit Beginn ab 1. Juli 1824 in das Institutum Pensionale Hungaricum (gegründet 1796) aufgenommen. Da er aber schon die erste Jahreszahlung (47 Gulden 33 Kreuzer) versäumte, wurde er seiner Mitgliedschaft naturgemäss verlustig. In dem gegenständlichen Brief (Marosvásárhely, 2. Apr. 1825; Original im Teleki-Archiv, Gyömrő, Ungarn), dessen ungarischer Text vorstehend im Wortlaut wiedergegeben ist, bittet er um die Fürsprache des Grafen Josef Teleki in dieser Angelegenheit.

József Jelitai.

CLAIRAUT, LA CONDAMINE, D'ALEMBERT ÉS KORTÁRSAIK EGYKORÚ TELEKI-UTINAPLÓK TÜKRÉBEN.

TELEKI JÓZSEF és SÁMUEL grófok 1760 körüli útinaplóiban nemcsak a bázeli,[1] hanem a párizsi, németalföldi és más matematikusokra és fizikusokra is találunk adatokat. Legtöbbször CLAIRAUT, LA CONDAMINE, d'ALEMBERT, CASTILLON, MUSSCHENBROEK, NOLLET, LA CAILLE, LALANDE, FONTAINE szerepelnek feljegyzéseikben, amelyeknek gazdag és értékes anyagából itt csak a lapunk olvasóit érdeklő részeket idézzük.

TELEKI JÓZSEF gróf Bázelből először a Rajna mentén Hollandiába utazott. Leidenbe érkezve 1760. szept. 10-én «mentem leg először professor MOESCHENBROCK Uramhoz a ki a Physica Experimentalisban oly híres ember. Már igen öreg 70 esztendőn felyül járo ember; kövérsége középszerű, 's még jó erejiben van».[2] Egy hét mulva: «Voltam reggel tsak Curiositásból a MUSCHENBROEK Uram Phisica Experimentalis Letzkéjén; Az Auditoriuma számos vólt; Többen voltak hatvannál az Auditori; Bántam, hogy végig nem halgathatom tőlle ezt a Collegiumát; E volt 8 orától fogva 9-ig.» Szept. 25-én «Reggel ALEMAND Uram a Professor, mint tegnap meg igérte vólt, meg mutogatta az Experimentalis Physicahoz el keszitett Cabinetját mely akár a sokaságát az Instrumentumoknak, akar a szépségét nezi az

[1] BERNOULLI DÁNIEL *és* JÁNOS *egykorú Teleki-útinaplók és levelek tükrében.* E folyóiratban: 43. évf. 1936. 142—160.

[2] P. von MUSSCHENBROEK (1692—1761) Duisburg és Utrecht utan 1739-ben került leideni tanszékére. Még csak 68 éves volt.

ember egy a leg főbb Particularis emberek Collatioja közzül, a kit lehessen látni.»[3] Másnap «Meg irom Bernoulli Daniel Uramnak, hogy Moschenbroek-kal ugyan nem beszéllettem, de Allemand-dal beszélvén ugy látom, hogy a spontanea rotatio acuum in formam ⌉⌊ incurvaturum, post electrisationem, melyet Bernoulli Daniel Uram találtt ki leg elsőben, és én Socin Uramnál láttam Basileaban, itten esméretlen dolog, mert Allemand Uram azt mondotta rá, hogy az egyenes tő is forog, ha meg electrizalják, mely nem lévén igaz, prodálta magát az által, hogy nem tudja azt az observatiot. Kérem ezen kivűl, hogy velem a mint el kezdette Correspondentiat tartson.»

Teleki Sámuel gróf csak a következő év nyarán jutott ki Hollandiába. Utrechtben 1761. aug. 25-én «voltam Matheseos Prof. Castellionius Uramnál tsak ősmerkedni, de nem vólt otthon, osztán most estve maga nállam vólt egy darabig beszélgetett én velem a' Sectio Conicákról 's az Calculusokról; de meg vallom hogy ha szabad első tekintetre itélni, rosz opiniom vagyon rolla, mert 1° magát ditséri jó Mathematicusnak, mely ha ugy volnais nem illik, 2° A' Két Bernoulli-ak tudományokban 's tanittasokban hibát 's fogyatkozást keres, azt mondván hogy mindent tsak Analytice demonstrálnak 's resolválnak, és nem tudgyák 'a Geometrica Demonstratiok szerint resolvalni ugy 'a mint kellene tudni, azokat 'a Problemákotis, mellyeknek resolutiojok kőnnyebb 's világosabb volna methodo Geometrica mint Analytica; már pedig eo ipso, hogy ollyan embereket gyaláz (a' kik praescribaltanak in Mathesi a' tudos világ előtt) nem tarthatom derék embernek; nem szégyenli azt mondani arrol az éles eszű 's az egész tudos világ előtt nagy meritúmú bőlts Bernoulli Danielről, hogy tud ugyan inveniálni, de a' mit inveniál nem tudgya componálni 's jól le irni; pedig én Bernoulli Danielnél soha jobb 's tisztább tanittó embert nem hallgattam; és nexust valakinek az gondolatiban jobbat 's

[3] I. N. S. Allamand (1713—1787) a fizika tanára volt Leidenben 1742 óta.

világosabbat mint neki soha se tapasztaltam; Kűlőmbenis ha jól meg gondollya az ember, bajos volna a' Mathesisben egy ollyan embertől ujj Inventiókat várni, a' ki azt a' mit már egyszer tudis nem capax jó rendben 's nexussal le irni, mert az Mathesisben edgyik dolgot a' masikból kell az embernek ki hozni, meg érteni, 's methodo mathematica deducálni, 's demonstrálni. Denique még látom ez után mit ér Castellionius Uram; 's hogy ha leheté Praeceptora Bernoulliaknak 'a Mathesisben.»[4]

«17ª Sept. Allott bé az Diligentia, Reggel el mentem IX orakor Professor Wesseling Uramhoz Univ. Historiára; kinekis volt től Száz Tanitványánál a' Házában, sokan fennis állottak sokan az Ajton kivűl a' Pitvarbolis halgatták a' kik a' Házban bé nem fértenek;» «Onnét X orakor P. Hahn Uramhoz mentem Physicára, ottis sokan voltanak, majd annyin mind Wesseling Uramnál; solide kezdett még eddig tanittani Háhn Uramis, a' Müssenbroëck Uram Physicája Compediuma szerint;»[5]

Szept. 20: «Ez nap virradolag meg holt Leÿdában a' hires Műssenbroëck alig volt egy hetig fekvő beteg. Erre nézveis jól rendelte az Isten az én gondolatimat hogy Leydában nem mentem mert már most ha ott volnékis nagy kőltsegemmel ide jőnék. 21ª Jó reggel hozzám kűldőtt a' Műssenbroëck Uram fia kiis Ultrajectumi kereskedő 's meg jelentette az Attyának szomorú halálozását; bánom örökké hogy ezt a' Nagy Physicus Müssenbroëckot egyszeris nem láthatám, jóllehet néhányszor kerestem Leydában létem alatt.»[6]

---

[4] Castellionius, helyesen Castillioneus, olasz származású: Castiglione-Fiorentino-ból való. Tulajdonképpeni neve: G. F. M. M. Salvemini (1708—1791). Több, a matematika történetében igen fontos munkát ő rendezett sajtó alá: *Opuscula Neutoni*, 1744; *Leibnitii et Johannis Bernoullii commercium philosophicum et mathematicum*, 1745; Euler: *Introductio in analysin infinitorum*, 1748. Az utrechti egyetemen 1755—1763 a matematika tanára volt, később De Castillon néven a berlini akadémia tagja, 1787-től a matematikai osztály direktora.

[5] A heidelbergi I. D. Hahn (1729—1784) a fizikát és a csillagászatot tanította 1753 óta Utrechtben.

[6] Utrajectum = Utrecht.

«22ª 8 bris Hozzám jött Prof. Hahn Uram 's el hozta magával irásban az maga Praelectioit a' Mussenbroeck Physicájára; mellyből a' nevezetesebbeket magamnak ki irtam a' Könyvben kötött fejér Pappirosra. [6a] Nagyon betsüllem méltán ezen barátságát mellyet senkivelis mással nem tselekedett. Ezen Hahn Uram minden Héten szeredan Publiceis tanitt és Physicum Experimentumokat is tsinál szépeket, a' melyre a' Professorok közülis sokan a Varosiak közülis el szoktanak jőnni.»

Most térjünk vissza Teleki József grófhoz, aki 1760. nov. 4-én érkezett Párizsba. Másnap «Dél után Clairaut Uramot kerestem, és ő kglmét otthon is kapván engem igen jó szivvel látott, 's velem mindgyártt maga elis jött Mairan Uramhoz, de ő kglmét otthon nem kapván, hozzám jött onnan Clairaut Uram 's sokat tudakozodott a Magyar nyelvről 's kértt, hogy ha haza megyek egy Magyar Vocabulariumot küldgyek ő kglmének;» [7]

A. Cl. Clairaut (1713—1765) kora egyik legkitűnőbb matematikusa. Mint kb. egy századdal előbb élt fényes tehetségű honfitársa: B. Pascal, ő is matematikus apa [8] gyermekének született és pedig 21 közül másodiknak. Már 12 éves és 8 hónapos korában [9] bemutatták egy dolgozatát a párizsi tudomá-

---

[6a] A M. Tud. Akadémia könyvtárában lévő példányban (Musschenbroek: *Institutiones Physicae*, 1748) nincs kézírásos bejegyzés.

[7] I. I. D. de Mairan (1678—1771) követte Fontenelle-t az Académie des sciences titkárságában.

[8] «M. Clairaut, qui enseigne les Mathematiques avec succès» «lut aussi à l'Academie un Ecrit sur cette matiere.» *(Sur l'inscription du cube dans l'octaedre.) Histoire de l'académie royale des sciences 1725* (Amsterdam, 1732) 64, 71. A berlini akadémia levelező tagja volt. Egy leánya kivételével minden gyermekét eltemette.

[9] «M. Clairaut, fils de M. Clairaut dont nous avons parlé en 1725 lut à l'Académie un Memoire assés ample qu'il avoit fait sur quatre nouvelles Courbes Géometriques de son invention», «le tout avec beaucoup de netteté & d'élégance. Cet Auteur étoit alors âgé de 12 ans 8 mois. Autrefois de pareilles productions auroient fait honneur aux plus habiles Géometres; & aujourd' hui la louange en est à partager entre l'excellence des nouvelles Méthodes, & le genie singulier d'un Enfant». *(Histoire de l'académie royale des sciences 1726* [Amsterdam, 1732] 61.)

nyos akadémiának, amely a király engedélyével 18 éves korában tagjai közé választotta.[10] Nem véletlen, hogy BERNOULLI DÁNIEL hozzá küldi a TELEKI-eket: CLAIRAUT 1730-ban Bázelben tanult KŐNIG és MAUPERTUIS-vel a BERNOULLI-aktól.

Mint TELEKI JÓZSEF gróf nov. 7-én irja: «Minap CLAIRAUT Uram a Bibliothecajat oferálván, ma hozzá küldöttem egy Mathematicus könyvért, 's küldötte egy WALMESLEY nevű Anglusnak a munkáját, melynek a Titulussa ez: *Analyse des mesures des rapports, et des angles.*»[11] Másnap: «sehol ki nem vóltam egész nap hanem enni. Ben dolgoztam a Calculus differentialison.» A következő napon «Dél után vóltam CLAIRAUT Uramnál de tsak az Hugát találtam, a kiben az az Asszonyokban ritka patientia van, hogy a Calculusra adta magát, 's abban a férjének segitségére van.»

Még 16. évét se érte el 3 évvel fiatalabb öccse, akiről ezt olvassuk: «M. CLAIRAUT, frere cadet de celui dont nous avons parlé en 1726 a lu aussi a l'Académie une Methode qu'il a trouvée pour former tant de Triangles qu'on voudra, avec cette condition, que la somme des quarrés de deux côtés soit double, triple, quadruple, & c. du quarré de la base; & comme ce qui est dit des quarrés convient à toutes les figures semblables, il prend, au-lieu de quarrés, des Segmens de Cercles semblables, & découvre par-là les quadratures de quelques especes de Lunules. Il rend plus étendue & plus générale la Méthode de M. de l'HÔPITAL», «il quarre encore quelques autres portions de la Lunule, par une méthode differente de celles de M[rs]. WALLIS & TSCHIRNHAUS. Il a 14 ans & ce seroit bien assez qu'il entendît les découvertes de ces grands Géometres, sans y rien ajouter, & sans renchérir sur eux; mais on a déja vu que la Géometrie est extrêmement précoce dans cette Famille». *(Histoire de l'académie royale des sciences 1730* [Amsterdam, 1733] 132, 133.)

[10] Több ilyen eset nem fordult elő. A felvétel korhatára különben 20 év volt.

[11] CH. WALMESLEY (1721—1797), angol bencés (egy időben a párizsi rendház feje volt) idézett munkája (címének folytatása: *ou Reduction des intégrales aux logarithmes et aux arcs de cercle,* Paris, 1749) R. COTES: *Harmonia mensurarum,* Cambridge 1722 című híres könyvének magyarázatos kibővítése. Egykorú ismertetés szerint: «le Traité de M. COTES est écrit d'une manière si peu méthodique, qu'il n'existoit pas, pour ainsi dire pour la plupart des Mathématiciens». *(Journal des sçavans.* Amsterdam, 1754. Janvier, 23.)

CLAIRAUT nem volt nős.[12] «Son ménage était tenu par une jeune gouvernante fort jolie, à laquelle il avait appris à calculer, et que „sa mort, dit DIDEROT, laissa dans le veuvage"».[13]

Nov. 12-én «Ebéden CLAIRAUT Uramnál vóltam, hol meg ösmerkedtem 1° Montduglas Urammal, a ki Historiam Matheseos Frantziaul irtt sub titulo: *Histoire des Mathematiques*, 2° de MARTIGNI nevű ifju emberrel a ki Status Consiliarius, és a CLAIRAUT Uram tanítványa vólt, 's a Mathesisben jól versatus ember; 4° Abbe de la CAILLE Urammal, ki a király költségin egynéhány esztendővel ezelőtt *Caput bonae spei*-hez küldetett vólt Astronomica Observatiokra. 4° Egy FERNER nevű svecussal, a ki most Angliából jött, és talán Upsaliai Professor lévén, most a sveciai király engedelméből és költségin utaz.»

I. E. MONTUCLA (1725—1799) itt említett munkája P. STÄCKEL szerint: «die erste Geschichte der Mathematik, die diesen Namen verdient».[14] N. L. de LA CAILLE (1713—1762) a leghíresebb francia csillagászok egyike; matematikai és fizikai munkái is rendkívül népszerűek voltak.[15] B. FERNER (1724—1802) az asztronómia professzora Carlscronában, később Upsalában; a svéd trónörökös nevelésében is résztvett.

«Másik, a mit láttam vólt delután 3 orakor az Academia Scientiarumnak Introitussa, hová CLAIRAUT Urammal, ő kglmétől, az ebedről mentünk. Vagyon ennek az Academiának egyben gyülése a régi *Louvre*be (au vieux Louvre) jollehet ez a nevezete ennek a Louvrenek nem helyes minthogy nints más, a kit ujj Louvrenek hivjanak. Olvastak ekkor egynehányan kiki a maga munkáját, ugymint Secretaire FOUCHI Uram, a WINSLO

---

12 «ne s'est point marié» *Biographie universelle* 8, 325.

13 I. BERTAND: *Clairaut. Sa vie et ses travaux.* Journal des savants. Paris, 1866. 138.

14 Göttingische Gel. Anz. 162. 1. 1900. 251.

15 A *Leçons éléméntaires de mathématiques* (Paris, 1741) például M. CANTOR szerint 10 olasznyelvű kiadást ért el, logarithmikus-trigonometrikus tábláinak (1760) még 1832-ben is jelent meg új kiadása. Könyvtárainkban többnyire munkáinak (mechanika, optika, asztronómia) latin átdolgozásait találjuk.

Uram, Anatomicus Elogiumát, ki születésire sveciai fi vólt Protestans, de itt Papistává lett; most du HAMEL az egy tartományában Frantzia Orszagnak a gabonat el vesztegető féregről; ez a munka hoszszú vólt, de igen meg unták a Halgatók, mert nem vólt benne semmi igen derék dolog, 's azért senki nemis tapsolt néki. Harmadikat THIERRY Uram, amelyben a Venusnak a Napon valo által menetelérõl, mely a' jövő Esztendőben Juniusban fog véghez menni, holmi Reflexiokat irtt. Küld ennek meg nézésére minden nevezetesebb tudos societas mindenfelé Observatorokat, a melyek között az ide valo Scientiarum Academiais küld kétfelé; ugymint Muszka Országba, és Roderique nevű szigetbe Africaba. Negyediket ALEMBERT Uram az Inoculatiorul, melyben a BERNOULLI DANIEL Uram nem régen kijött kis Traktatskáját critizálja. Ez a munka, ha nem mindenekben helyes is,- de jeles vólt.»[16]

BERNOULLI DÁNIEL itt megtámadott értekezésének számításaiban — amelyekkel megfelelő statisztika hiányában a himlő-okozta halandóságnövekedést igyekezett megállapítani — a himlőbe esés valószínűsége és a himlőben megbetegedett egyén meghalásának valószínűsége is állandó számérték: nem függ az életkortól és egyéb körülményektől. D'ALEMBERT ezt kétségbevonta. Szerinte a himlőoltás hasznos az összességre, de az egyént veszélybe sodorhatja. A himlő nagy pusztításai[17] folytán a vita az érdeklődés központjában folyt. Nemcsak d'ALEMBERT

---

[16] I. P. GRANDJEAN de FOUCHY (egykorú nyomtatványokon FOUCHI) 1743 óta volt titkár. A Párizsban 1760-ban elhalt I. B. WINSLOW, a kitűnő orvosprofesszor a híres BOSSUET hatása alatt lett katolikus. Dán származású; apja és nagyapja lutheránus lelkész volt. A második előadó teljes neve: H. L. DUHAMEL—DUMONCEAU. A harmadiké: C. F. CASSINI de THURY; 1756 óta a párizsi csillagvizsgáló igazgatója. (F. THIERRY, keresett orvos nem volt tagja az akadémiának.) D'ALEMBERT kritikájáról már volt szó e folyóiratban: 43. 1936. 151—152.

[17] «défigure un quart du genre humain» «si l'inoculation s'étoit introduite en France en 1723, on eut déja sauvé la vie à près d'un million d'hommes, sans y comprendre leur postérité. (De LA CONDAMINE: *Memoire sur l'inoculation de la petite verole.* Haye, 1754. 3, 70).

vett benne részt,[18] hanem LA CONDAMINE,[19] I. TREMBLEY [20] és mások is. A bázeli egyetemi könyvtár nemrégiben megszerezte a gothai BERNOULLI-gyüjteményt: 800 szerzőtől 5000 levél, ugyanannyi egyéb kézirat. Legyen szabad erre vonatkozólag O. SPIESS sorait idéznem: «In der Gothaer Sammlung ist ein kleiner Recueil von Schriften, die sich auf die Impfung beziehen. Im Mittelpunkt steht der Aufsatz von DANIEL BERNOULLI und die Polemik von d'ALEMBERT, die dieser in der Académie des Sciences vorgetragen hat, bei welchem Anlass ja JOSEF TELEKI zugegen war. Da DANIEL Polemik hasste, so übernahm TELEKI seine Verteidigung, indem er ein längeres Schriftstück verfasste, in dem er ziemlich scharf gegen d'ALEMBERT ins Feld zieht. Leider fehlt der Schluss dieser Arbeit, die ich nur flüchtig angesehen habe. Der ganze Streit, an dem sich besonders LA CONDAMINE beteiligt — einige der Schriften erschienen im Druck — wäre vielleicht kein übles Thema für eine medizinische Dissertation, doch müsste der Bearbeiter auch etwas von Wahrscheinlichkeitsrechnung verstehen, denn es dreht sich zum Teil um die irrtümliche Auffassung dieser Disziplin von Seiten d'ALEMBERTS. Vielleicht liesse sich auch der TELEKIsche Aufsatz herausgreifen, so dass man das übrige in den Kommentar nähme.» [21]

Ide vág a gyömrői TELEKI-levéltár két eddig ismeretlen levele. Az egyikben BERNOULLI DÁNIEL 1763. máj. 13-án ezt írja TELEKI JÓZSEF grófnak: «Mons^r de la CONDAMINE est parti pour l'Angleterre, ou il fera un sejour de quelques mois. C'est autant de delay de l'apologie qui doit paroitre sous Votre illustre nom: Monsieur Votre Oncle aportera ávec lui les opuscules de DALEMBERT, que vous pouvrez lire à loisir. Cette affaire ne doit

---

[18] *Réflexions sur l'inoculation.* Oeuvres complètes de d'Alembert. Tome premier. Paris, 1821. 463—514.

[19] Munkáinak jegyzékéből (Biographie universelle. 9. 7.) 1754 és 1775 közt cím szerint is 7 tartozik ide. (Egyik két kötetes.) Különösen: *Lettres à Daniel Bernoulli sur l'inoculation,* 1760.

[20] M. CANTOR: *Vorles. ü. Gesch. d. Math.* 4. 238.

[21] E sorok írójához intézett leveléből (Bázel, 1937. jan. 20.)

pas Vous donner le moindre embaras; j'aurai soin que rien ne se passe qui soit indigne du nom de l'Auteur.» A másikban CLAIRAUT foglal állást: «Mr de la CONDAMINE me dit que vous vous occupés a defendre Votre Ami Mr BERNOULLI, c'est un bien usage à faire de votre tems, et la besogne me paroit d'ailleurs avantageuse. Car son adversaire a donné bien prise contre lui. Son memoire sur les probabilités me revolte.» (TELEKI JÓZSEF grófhoz írt leveléből. 1763. aug. 27.) Nemcsak LA CONDAMINE, hanem CAIRAUT is BERNOULLI DÁNIEL pártját fogta. Egy lelkes svájci hazafi nagy adománya lehetővé teszi SPIESSnek a BERNOULLI-levelezések közzétételét. Ez talán fényt fog deríteni arra a kérdésre, hogy miért nem jelent meg TELEKI JÓZSEF gróf védőirata. Mindenesetre házassága (1762) és hosszabb betegeskedése (1765 és 1768 közt) is gátolhatta a befejező munkálatokban.[22]

1760. nov. 15-i naplóbejegyzése szerint «Reggel vóltam de la CONDAMINE Uramnál, ki egyébbként is a Mathesisben valo tudományáról, de nevezetesen a Perouba a Meridianus graditsának meg merésére valo küldetéséről hires. A midőn ez Perouba az Equator alá mentt akkor MAUPERTUIS Uram az itt való CLAIRAUT Urammal a Polus felé Lapponiába küldetett, hasonló véggel, hogy tudniillik a Meridianus Gradussát meg mérje. Véghez vivén mindenik nagy accuratioval a réá bízott dolgot ugy találtatott, hogy egy gradussa a Meridianusnak hoszszabb a Polus felé, mint az Aequator alatt, és így a föld alma formán lapos, az az az Polusoknál altal menő diametere kissebb, mint a mely az Aequatort éri, melyről már ez előtt NEUTON a maga Hypothesisse szerint vélekedett, de az eddig valo observatiok vélle ellenkeztek. Ez a CONDAMINE Uram már igen hanyatlani kezdett öreg ember, gondolnám felyül van 70 en; Nagyon siketis, ezt az utban kapta a mint mondják; A midőn hozzá mentem nem tudtam, de mindgyárt maga meg mondá. Mentem onnan

[22] «je ne scai ci cette defense paroitra bientot» írja BERNOULLI DÁNIEL 1763. jan. 14-én TELEKI SÁMUEL grófnak. (E folyóiratban közölt levelében. 21. 1912. 215.)

Abbé de la CAILLE Uramhoz, 's otthonis kaptam» «Hivott az után hogy a midőn szép napok lésznek, tsak menyek hozzá és ha gyönyörködöm benne, tsináljunk együtt vélle Observatiokat, melyet én néki nagyon meg köszöntem, és hogy el jövök tőlle tanulni, meg ígértem.»

CH. M. de LA CONDAMINE (1701—1774) társai az amerikai kutató úton LA CAILLE és BOUGUER voltak. Ugyanakkor (1736) MAUPERTUIS a lappok földjén végzett méréseket CLAIRAUT, CAMUS, CELSIUS, LEMONNIER és OUTHIER kíséretében.

Nov. 21-én «Dél előtt vóltam CLAIRAUT Uramnál, ki kérésemre egy Calculus Differentialisra tartozó Problemát adott, hogy megfejtsem. Mentem onnan de la CONDAMINE Uramhoz, kivel osztán együtt a Thuileriesre sétálni mentem fel vévén ő kglmét a szekeremre.» «Estve vóltam Abbé de la CAILLE Uramnál, kivel Iupitert observáltuk egy kevés ideig, de tsak hamar onnan ismét el jöttem, nem lévén egész készülettel és azt ígérvén, hogy holnap ha hozzá megyek a holdnak fogyatkozását observáltatya velem.»

Másnap «Este Abbé de la CAÍLLE Uramhoz mentem, és ottan az *Eclipsis Lunaet* observáltuk, mely 8 orára 4 minutára lévén meg mondva a Tabulákba 8 ora elött mintegy 8 minutával, és igy mind öszve mintegy 12 vel kezdődött elébb el mint a Tabulák mondották. Nem vólt telyes fogyatkozás, de tsak ugyan több volt felinél meg homályosodva a holdnak. Tartott 10 oraig, és mintegy 20 minutaig, kovetkezésképen szinte 2 ½ orát. Vóltak ott még két más frantzia ifjak, a kik szinténugy mint én Curiositásbol voltak ottan. Ennek az Abbé de la CAILLE-nak meglehetős eszközei vannak, 's mind a magáé, valamivel él.»

Nov. 25-én «Ebéd előtt CLAIRAUT Uramhoz menvén a minap adott egyik Problemájának solutiojával, ebédre meg marasztott; hol az Apja is volt, ugyan Mathematicus, de nem a fiával érő, DAUBENTON Uram a ki minap BUFFON Uram rendelésébol a király Historia Naturalisra tartozó Cabinetyat meg mutatta;» «A CLAIRAUT Uram kerésére az Apját szekeremen szállására vivén, onnan mentem DURAND nevű Bibliopolahoz a de la CONDAMINE Uram két in quarto ki jött munkáját keresni, az Americaba valo utyarol, és a Meridianus gradussainak meg méréséről & c.»

G. L. L. comte de BUFFON (1707—1788), a nagy természettudós a valószínűségszámítás történetében is szerepel egy újfajta (geometriai) feladattal foglalkozó dolgozatával (körlap-, négyzet-, vagy tű-alakú tárgy dobása négyzetes, vagy sávos mezőre). BUFFON megoldása az egykorú tudósítás szerint: «déterminé par une aire de Cycloïde avec beaucoup d'élégance, au jugement de l'Académie.»[23] L. I. M. DAUBENTON az említett gyűjtemény igazgatója volt és a Collège de France tanára. DURAND könyvkereskedő nevét abban a korban kiadott munka címlapján is megtaláljuk.[24]

Nov. 27-én «Reggel FERNER Urammal a NOLLET Uram Physica Letzkéjére mentünk; igen nagy Auditoriuma vólt tobben vóltak benne 500 nál; ez a NOLLET Uram Abbás, Membruma az Academia scientiarumnak, irta a *Leçons Physiques*t; Igen a Mediae magnitudinis stellák közzé való a tudosok kőzőt, ugy tartom.» «Onnan mentem FERNER Urammal az operába,» «Az operábol viszszá jövén FERNER Uramot haza vittem, és annak alkalmatosságával ő kegyelméhez beis fordultam.»

I. A. NOLLET (1700—1770) a Collège Navarre tanára volt, 1753-ban ő kezdette el ott a kisérleti fizika tanitását.[25]

Nov. 28-án «Egész nap sehol sem vóltam, egy tzedulát küldőttem CLAIRAUT Uramhoz, melyben kerdem, hogy mikor leszsz a BUFFON Uram által az Academie Françoisebe az ujjonnan választandó Membrumnak bé vetetésének tzeremoniaja.» Másnap «Vóltam reggel CLAIRAUT Uramnál, ujabban egy Problemát

---

[23] *Histoire de l'académie royale des sciences 1733* (Amsterdam) 62.

[24] CLAIRAUT: *Élémens de Géometrie.* A Paris Chez DURAND, Libraire, rue Galande, Hôtel Lesseville, à la Sagesse. 1775. Avec Approbation & Privilège du Roi.

[25] Discours prononcé par M. l'Abbé NOLLET en commençant le cours de Physique experimentale nouvellement fondé. *(Journal des sçavans.* Amsterdam, 1753. Octobre, 3—12.)

adott; A minapi ellipsisről való Problema felettébb nagy munkát kivántt vólna az ő kgelme methodussa szerint mert az x ad 8 avam potentiam vólt fel vive, melyet magais látván, azt mondotta, hogy más methodust kellene keresni, 's gondolja, hogy lehetis találni; a Problema e vólt: Data ellipsis *acb*, (id est datis ejus ellipseos, utrisque axibus) dato puncto *e*, invenire positionem lineae *eg*, talem ut $fg^2 \times fe$ sit maximum omnium productorum possibilium ex fg^2 in *ef*.»

Teleki József gróf naplójának rajzá után készitett ábra.

Dec. 3-án «Vóltam reggel Clairaut Uramnál, kinek a közelebb adott munkáját ki dolgozva elvittem, ismét mást adott melyeken magamat igen jól gyakorlottam a Calculusban.»

Harmadnap «mentem Clairaut Uramhoz de ő kglmét nem találtam az 3 Integralissainak demonstratioját oda vittem, 's ott hagytam. Onnan mentem de la Condamine Uramhoz kinek multt napokban az Academie Françoisebe valo választatását agratulaltam. Onnan egy szállást mutatni jött velem,» «Ez a de la Condamine Uram rendes öreg ember, egyenes indulatu, nem sok tzeremoniát tsinál, és ámbátor meg lehetős jó kedvű, tsak ugyan látzik már az őregség rajta, mert felejt, és sembel sokat a szolgájára.»

Közben La Condamine megismertette de la Fontaine-nel és engedélyt kapott, amelynek alapján mindenkor résztvehetett az akadémia űlésein.

Dec. 8-án «Dél előtt Clairaut Uramnál vóltam, s a meg tsináltt munkát ő kglméhez el vittem, ismét mást adott, és avval edgyütt egy Magyarra forditani valo szokkal telyes papirossat.»

Harmadnap «Dél-után Ferner Uramhoz mentem és ő kglmével edgyütt Abbé Nollet Uramhoz, ki minap a Collegiumába azt igérte vala, hogy ha hozzá megyünk az instrumentumait megmutatya, melyet most elé nem hozott, de kétség kivűl mászorra halasztya. Beszéltünk az Electricitásrul, melyben Nollet

Uram magát kétség nélkűl az elsőnek tartya; ha más nem is. FRANCKLIN-nel egy Americaban Philádelphiaban lako Anglussal, (ki a mostani hadakozástol fogva Londonba van) nagyon ellenkezik, ki az Electricitásrul való maga tsinálta experimentumait ki botsátotta.» Ezt a könyvet TELEKI JÓZSEF gróf még Bázelben megvásárolta.[26] FRANKLIN önéletrajzának fordításában olvashatjuk, hogy ennek a könyvnek közzététele «nem volt inyére NOLLET abbénak, aki akkor a királyi család természetfilozófiai oktatója volt s mint ügyes kísérletező már előbb megírta és kiadta a villamosság egy új elméletét, amely akkor közelfogadásnak örvendett.»[27] Fenti naplóidézet folytatása így hangzik: «Nem lehet tagadni, hogy nagy része a világnak, legalább a tudossabb világnak NOLLET Uramot FRANKLINnek kitsiny vetélkedő társának tartyák.» «Vóltam la FONTAINE Uramnális, kinek minap meg mutatott de la CONDAMINE Uram. Beszélgetvén ő kglmével az Analysisrul, commendálta a TAYLOR Uram munkáját». «FONTAINE Uram a mint tegnap előtt CLAIRAUT Uramis rólla meg esmérte jó Mathematicus»

Dec. 11-én «Vóltam reggel CLAIRAUT Uramnál, kinek a meg tsináltt munkámat el vittem. Onnan ő kglmét a szekeremre fel vettem, és TURGOT Uramhoz, és még egy más ösmerőssihez el vittem, az elsőt otthon nem találtuk, a másodiknál ott hagytam.»[28] Negyednap: «CONDAMINE Uram tegnapi kérése szerint la FONTAINE Uramot a szekeremre fel vettem, és ő kglmétől CONDAMINE Uramhoz mentünk. Délután sehol sem vóltam FERNER Uramon kivűl.»

Dec. 15-én «Reggel CLAIRAUT Uramnál vóltam, ő kegyelmétől mentem de la CONDAMINE Uramhoz, kit otthon kaptam ugyan de hozzá be nem mehettem, mert a szolgája kimentt a varosra, 's a ház külső ajtaját bé zárta. Maga CONDAMINE Uram 4 vagy 5 dik szobába szokott lenni, 's mivel süket a zörgést telyeség-

---

[26] Kiadásai közt 1760. márc. 12-én: «FRANCKLIN könyviért *de Electricitate* 2 fr 40 xr.»

[27] WILDNER ÖDÖN: *Franklin Benjamin önéletrajza.* 247.

[28] É. F. TURGOT, Marquis de Consmont.

get nem hallja; Vagyon ugyan a Házába bé szolgáló tsengetyű, de annak a drotya a kin jár el törtt volt és e szerint majd egy fertály oráig magam és a szolgáloja tsak haszontalan zörgettünk az ajtaján. El menvén én osztán egy kevés ideig a Thuilerieshez, onnan ismét viszszá jöttem 's az alatt a szolgája el érkezett, 's bé menvén hozzá követett a tsengetyűje hibázásáért. Igen jóféle egyenes indulatu nem sok tzeremoniat tsináló öreg ember. Viszsza vittem ő kglmének a d'ALEMBERT Uram munkája párját.»

Harmadnap «Vóltam reggel CLAIRAUT Uramnál, hol FERNER Urammal és a Hugával CLAIRAUT Uramnak sokat bolondoztunk.» Dec. 24-én «CLAIRAUT Uramnál vóltam reggel. De la CONDAMINE Uramot nem találtam.»

Dec. 30-án «CLAIRAUT Uramnál vóltam ebéden, hová ő kglme minap azt ígérte, hogy kedvemért el fogja hívni de GOIGNÉS Uramot, a ki a Hunnusok eredetit 5 volumenben in 4° szépen tractálta; mely a Magyar Historianak épen a kezdete levén kivánni lehetne, hogy vagy egy tudos Magyar akadna, a ki ily jól el kezdett Historiat continualna, ne maradna Nemzetűnknek idegenek előtt valo becstelenségére, ily idegentől el kezdett munka a mi lágyságunk miatt félben, melyet magais DEGOIGNÉS Uram ekkor nékem a discursus közben mondott. Voltak itt ekkor DEGOIGNÉS Uramon kivül TENNON Uram, hires Chirurgus, és Academiae Scientiarum Membrum, kitől Tiszteletes INTZE Uram számára valo TROICAR nevű Instrumentumról tudakozodván igazitott egy BARDIER nevű Mechanicushoz, és meg mondta hogy az a kés tsinálo (mert e tsinálja) vigye elébb hozzá hadd nézze meg ő; az ifjú HALLER Uram a hires HALLER Uram Fia; nem gondolom hogy az Apját utól érje, különben elég jeles ember. Ott volt FERNER Uramis a Svecus.»

DEGUIGNES munkájának cime: *Histoire generale des huns, des turcs, des mogols.* (Paris, 1756.) Az egykorú lapok részletesen ismertetik.[29] TENON sebésztanártól a beszúrásra való

[29] *Journal des sçavans* (Amsterdam) 28 (1757 juin) 3—24, 31 (1757 nov.) 23—45, 223—233, 32 (1757 dec.) 42—63.

trocart (trois-quarts) eszközről kérdezősködött nagybaczoni Intze István (1679—1776) kérésére, aki Leidenben tanult és 1745 óta a marosvásárhelyi kollégium tanára volt. Az idősebb Haller csak 1753-ig tanitott Göttingában, azóta hazáját, Svájcot szolgálta magas állásokban. Fia természettudományokkal és régészettel foglalkozott.

1761. jan. 6-án «Ismét nállam vólt délután Clairaut Uram a Hugával, és du Voisin Uram a Hollandus követség mellett lévő egyik Frantzia pap.» Jan. 10-én «Reggel Clairaut Uramhoz mentem, és ő kglmének a minap adott Problemáját el vittem, 's ismét mást adott. De la Condamine Uramnalis vóltam, de mivel 12^{a} lejendő bé vetelére az Academie Françoise be készűltt es az akkor el mondandó Discursusát írta nem sokaig mulattam ott.»

Jan. 12-én délután «a de la Condamine Uram Academie Françoise be valo bé vetelét nézni mentem. Vagyon az *Academie Francoise*-nek egybengyűlése a Louvrebe valamit az *Academie des Sciences*é tsak hogy ez fenn, ama pedig alatt van. Vagynak annak tagjai rend szerént 40 en, kik közzé most Condamine Uramotis bé vették. A bé vételnek Tzeremoniaja állott ebből: Három órakor dél után minden ember a kinek du Clos Uramtul az Academia Secretariussátol Billetje vólt (nékem Condamine Uram szerzett) abba a Palotába fel gyűltt. Egy asztal volt a közepin, mely korül az Academia tagjai ültek az egyik végin ültt a President de Buffon Uram, a másik végin de la Condamine Uram. El jővén az idő de la Condamine Uram a maga Discursussát el olvasta fel tett kalappal, mely jelessen vólt irva; Erre de tsak igen rövideden de Buffon Uram felelt ugyan fel tett kalappal. Ennek így vége lett. Ugyan ezen alkalmatossággal el olvasának valami verseket, melynek ítélte az Academia az *eloquentiae praemium*ot; 's ott lévén az Auctora Mormantel Uram az Aurea Monetat mindgyárt a kezibeis adá Buffon Uram. Igen szép versek voltak meg kell vallani a Pataknak szépségekről.»

Condamine székfoglaló beszéde: «Son discours de réception n'a rien de remarquable; il est simple et clair comme ses autres écrits. La réponse de BUFFON est majestueuse et sublime.»[30] MARMONTEL jutalmazott munkája: *Un morceau académique sur les Charmes de l'étude, couronné en 1760.*

Jan. 19-én «Dél után a VATELET Uram az Academie Françoisbe való bé vételén vóltam; Éppen olyan Caeremoniában ment véghez, mint ma egy hete a de la CONDAMINE Uramé. D'ALEMBERT Uram valami munkáját olvasta el a Historiárol, és annak jól irásának modjárol. Onnan mentem CLAIRAUT Uramhoz, tsak az Atyafiát találtam ott másokkal edgyütt.»[31]

Harmadnap «Reggel vóltam de la CONDAMINE Uramnál, ki a minap el mondott, és már ki nyomtatott Discursussanak egy Exemplárjával meg ajándekozott. Ez az emberséges ember tsak mintegy öt esztendeje hogy meg házasodott, egy Atyafiát vette el, 's tsak a minap tudtam meg hogy házas, most házasságanak okait számlálta elő, 's egyebbrőlis sokat beszélgettünk. Innen mentem CLAIRAUT Uramhoz.»

CONDAMINE életrajzai szerint derült kedélyű volt. kiváncsi természete sokszor vakmerőségre ragadta. Idős, beteges és süket állapotban vette feleségül unokahugát a pápa engedélyével.

Másnap «Este FONTAINE Uramnál vóltam; sokáig beszélgettünk edgyütt a Frantzia Országi Administratiojarol.»

Jan. 24-én «Reggel ismét d'ALEMBERT Uramhoz mentem SCHREIBER Urammal; találtukis és jó szívvel fogadott. Ez a d'ALEMBERT Uram fatyu gyermek, és a találtt gyermekek között vólt. Szokták az ilyen talált gyermekeket néha a városiak, kiválltt a Mester emberek magokhoz venni, 's mesterségre tanitani, mert az ilyeténeknek a közönséges terh alól valami könyebitése van, azért hogy az ilyen gyermek nálla van s mint Mester-

---

[30] Biographie Universelle. 9. 7. Akkor született PIRON epigrammja:

LA CONDAMINE est aujourd' hui
Reçu dans la troupe immortelle;
Il est bien sourd: tant mieux pour lui;
Mais non muet: tant pis pour elle.

[31] WATELET költő volt, BOILEAU követője.

inas tanul. Egy üvegesné bé menvén az Ispotályba, hol az *Enfans trouvés*-k vagynak, ilyen véggel meg akadtt a szeme d'ALEMBERTen, ki igen jeles és elmés gyereknek látzott azért elis kérte magának. Az Aszszonynál egy Abbás meg látván tsudálkozott a gyermeknek rendes és éles elméjén 's mindgyárt azon vólt, hogy az Asszonytol el kérje, látván, hogy az elméje nagyobbat igér, mint a menyi egy üveges mester legénynek kívántatik. Az oskolában adták, tsak hamar meg mutatta mire alkalmatos, s azután a lett a mi most, az az, egy az Europai leg tudossabb emberek kőzzűl. Ezt a historiaját én e szerint hallottam SCHREIBER Uramtül.

Mondják, hogy sokáig igen nagy szegénysegben éltt, melyet meg tudván a Prussiai király, leg első vólt a ki ő kegyelmének 1200 Livrenyi pensiot ajándékozott. Azt a Frantziák meg látván tsak hamar Academiae Scientiarum, és Academie Françoise tagjais lett, és már most mintegy 5200 Livre fizetése vagyon a Prussiai királyéval edgyűtt. Az öreg Asszony a ki nevelni kezdette, nagy háládatossággal van, most a Házában mindenit az az Aszszony igazgatya pénze nálla van, a ruházza, 's a költ mindenre.»

JEAN le ROND d'ALEMBERT (1717—1783) keresztneve a *Saint-Jean-Lerond*-ra emlékeztet, a párizsi *Notre-Dame* azóta lebontott keresztelő kápolnájára, amelynek lépcsőjén találták. Apja tűzértábornok volt, haláláig támogatta fiát. Az anyáról ezt olvassuk: «M^{me} de TENCIN, célèbre par son esprit et fort influente dans la société lettrée, lui fit savoir qu'elle était sa mère; mais d'ALEMBERT, la repoussant à son tour, n'en voulut jamais reconnaître d'autre que la pauvre vitrière, dont il resta jusqu'au dernier jour le fils affectueux et dévoué.» [32] Ez az üvegesné Mme ROUSSEAU volt.[33]

Jan. 31-én «Dél után az Academia Scientiarum gyulesiben

---

[32] J. BERTRAND: *D'Alembert, sa vie et ses travaux.* Revue des Deux Mondes. 15. oct. 1865. 994.

[33] J. BERTRAND: *D'Alembert.* 8. (Les grands écrivains français.)

vóltam. Estve DALEMBERT Uramnál, ki ma SCHREIBER Urammal edgyütt kerestek, mikor én St. Denisben vóltam.»

Febr. 2-án «Reggel CLAIRAUT Uramnál vóltam, 's a minap adott munkát oda vittem.» «Estve de la CONDAMINE Uramnál vóltam vatsorán, tsak egy idegen vólt rajtam kivül. Ott volt a Feleséginek Testvéreis, ki katona». Febr. 10-én «De la CONDAMINE Uram még tegnap előtt meg kérvén, ma az ötsivel edgyütt, ki a feleséginek testvére Versailliába vittem a magam alkalmatosságán.» «de la CONDAMINE Uram egy BORGARS névű Abbast rá kérvén, azzal a Versailliai kertet meg nézni mentem» «Haza jővén de la CONDAMINE Urammal ő kglme vatsorára elhivott.» Másnap «El mentem reggel CLAIRAUT Uramhoz.» Ebéden CLAIRAUT Uramnál vóltam. Ebédután ő kglmével edgyütt az *Academie des Sciences*ba mentünk.»

Febr. 14-én «Reggel vóltam d'ALEMBERT Uramnális, mondá hogy a Prussiai királynak vette Levelit, és hogy épen olyan tonuson ir, mintha meg nem ijjedett vólna egy tseppetis, azt irván; hogy a békesség rajta tsak anyit áll, mint DALEMBERTen, és hogy ha mások akarnának ő a békességtől nem vólna idegen, de ha, a mint látya, az ellenségeit másként békességes gondolatokra nem lehet hozni, hanem ellent-állással azt tartya hogy addig nem szűnik meg ellent állni, míg puszta lészsz német ország. A stylus talán nem szóról szóra így van, de az értelme a DALEMBERT Uram szava szerint, ez.» Másnap «Vóltam reggel de la CONDAMINE Uramnál; ott vóltak egy néhány tudosok, 's azok között MONTBUCLAS Uramis» «A szekeremet el kérte a CLAIRAUT Uram Atyafia.»

Febr. 17-én «Mind délben mind estve vóltam a Duc d'Orleansnál. Ebéden CLAIRAUT Uramnál vóltam, es délután ő kglmével es FERNER Uram, és még egymás ide valo emberseges emberrel egy űvegből dolgozo *Pot de Vin* névű mester emberhez mentűnk, kivel CLAIRAUT, 's FERNER Uram 's én bizonyos üveg prismákot; mivel CLAIRAUT Uram akar valami experimentumokot tsinálni egy DOLOND névű Angluss ujj tapasztalása szerint.»

Jellemző apróságot örökitett meg a febr. 21-i bejegyzés:

«Mentűl tovább ösmerem ezt a Condamine Uramot annál inkább sajnállom, hogy már az idő erőt kezd rajta venni. Az egyébb qualitasai között szerettem benne az egyenességet; Nem tud telyesseggel tettetni, vagy inkább nem akar, hozzám igen jó indulattal viseltetik; most nálla lévén annak a tettetés nelkül való maga viselésének jelét adta. Egy artificialis Magnesse volt ott egy poltzon 's azon a mint szokás, hogy a magnesi erő meg maradgyon benne, a' maga rendes pondussa fűggött; ő kglme nékem egy rendes képet mutatván, melyben a vólt a megtartásra méltó dolog, hogy nyomtatás mégis minden ember azt gondolná, hogy ama veres főlddel való festés, a kivel a festők néha rajzolni szoktak (ez ujjonnan feltaláltt mód) De a dologra. Ezt a képet a kezemben adván de la Condamine Uram, én a mint viszszá akartam tenni a hol az előtt állott a magnes mellé, meg találtam érni a magnes pondussát, s le vertem. Ekkor nem hogy mint más Gazda vigasztaltt vólna, hogy semmi, 's t. a. f. hanem még maga azt mondja mindgyártt, hogy mit tsináltam? 's nehéz leszsz már viszsza tenni &c. De tsak ugyan mindgyártt viszszá tevők 's szent vólt a békesség. En akkor ennek az engem szerető emberséges embernek igen nagyon megkedvellettem az épen festék nélkül valo maga viseletit. Még az erőtlenségis jobb kendőzés nélkűl mint az annál jobb qualitás ha tzifra.»

Valamivel később a következő megjegyzés áll: «Ez a Diderot Uram egy az Encyclopedisták közzül, és legfőbb Dalembert Urammal edgyütt a mi a Mathesist illèti, abban Dalembert Uram az egyébben Diderot Uram irta nagyobb részit a Caputoknak,»[34]

Febr. 27-én «Vóltam ebéden Clairaut Uramnál; Abbé de la Caille, Montuclas Uram, és az Apja Clairaut Uramnak, 's az ifjú Haller Uramis ott vóltak. Montuclas Uram azt igérte

---

[34] A nagy francia *Encyclopédie* 32 kötete 1751 és 1780 közt iródott, a matematikai és filozófiai cikkek legnagyobb része d'Alembert-től származik.

reménységem felett, hogy a maga *Histoire des Mathematiques*ja exemplarjat pennával corrigalni fogja 's nekem el küldi; 's én küldgyem azt ő kegyelmének helyébe, a melyet fogok venni. Ez a MONTUCLAS Uram derék ember, a Historiaját igen jónak mondja CLAIRAUT Uram; én még nem olvastam.»[35]

A márc. 2-i naplóbejegyzés szerint «Minap CLAIRAUT Urammnál ebédelvén, ő kglmével ugy maradtunk, hogy ma St Germainbe menjünk 's én arra nézve ma jó reggel a szekeremmel ő Kegyelméhez mentem, és a Hugával Mademoiselle GOULIER-rel edgyütt St Germainbe mentünk» «A király épen a szekerünk előtt menvén el a sűvegit le vette, melyet mi annak tulajdonitottunk hogy a CLAIRAUT Uram Leány Atyafia ott vólt, ki azonkivül hogy Aszszonyi nemből való, rendes ábrázatuis, sokatis tsufoltuk ezzel ő kegyelmét.» «Haza menvén kesőn 9 ora tajba el kértem CLAIRAUT Uramtul a BOSKOVITS nevű Jesuita verseit kiket Londonban irtt Deákul a nap, és holdban tapasztalható homályossagokrul az Eclipsisek alkalmatosságával. Ez a BOSKOVITS Uram születésire, a mint itt mondották Ragusi fi; itt is vólt egynéhány holnapig, kőzelebb pedig Londonba, hol oly jól tudta magát alkalmaztatni hogy ámbátor Jesuita, a Regia Societas Membrumának választatott; most onnan el jőtt és a jövő Junius Holnapnak 6 dik napján a Venusnak a napon való általmenetelit Constantzinapolyban fogja observalni. Azt mondják, hogy igen alkalmatos ember.»[36]

Márc 7-én «Vóltam CLAIRAUT Uramnál, valami experimentumot tsináltunk az ujj DOLON sistemaja szerint, mely az opti-

---

[35] TELEKI JÓZSEF gróf kiadási naplója szerint tényleg megvásárolta 30 Livreért 1761. márc. 7-én az első kiadást (2 kötet, 1758). A M. Tud. Akadémia könyvtárában csak a LALANDEtól bővített későbbi kiadás van meg. Ez már 4 kötetes. I—II. 1799. III—IV. 1802. Az utolsó kötetben MONTUCLA arcképével és életrajzával.

[36] R. G. BOSCOVICH (1711—1787) a matematika tanára volt Rómában, később Páduában. Róla írta LAGRANGE d'ALEMBERTnek: «il n'est sûrement pas indigne d'être de votre Académie, dont tous les membres ne sont pas des d' ALEMBERT, mais il le deviendrait s'il prétendait y entre d'une manière irrégulière» (J. BERTRAND: *Éloges académiques.* Nouvelle série. 305.)

caban valo NEWTON-éval ellenkezik.» Kiadásainak jegyzékében is megjegyzi: «két prismáért melyeket enis a végre tsináltattam hogy a DOLON experimentumát otthon megtsináljam 12 Livre» NEWTON azt hitte, hogy nem lehet szinezés nélküli prizmát vagy lencsét előállítani. Az első achromatikus lencsét J. DOLLOND szerkesztette.

Márc. 12-én «Sok helyeken vóltam, 's ismét el mentem CLAIRAUT Uramhoz butsuzni ily okon: Minap el butsuzván, a Huga egy kevéssé gyermeki modon viselvén magát azt CLAIRAUT Uram ott előttem szó nélkül nem álhatta, melyre nézve a Leány el fokadott sirva, 's en el butsuztam. Minthogy pedig tudtam, hogy a Mademoiselle ezért meg szégyenlette magát, ennek a dolognak helybe ütésire ismét oda irtam, hogy hozzájok megyek butsuzni 's megis marasztottak ebédre 's láttam hogy a Damának igen jól esett ez az ő kedviert való oda menetelem.»

Másnap hazafelé indult Párizsból TELEKI JÓZSEF gróf. Útközben felkereste CONDAMINE ajánló levelével ALLIOT-t Nancy—Luneville-ben. Márc. 25-én értesiti CLAIRAUT-t[36a] Bázelbe érkezéséről. Augsburgban ápr. 1-én «Vóltam LAMBERT Urammal egy BRANDER névu Mechanicusnál, kinél fel menetelemkoris vóltam. Egy Magnes artificialist akartam tőlle venni tiz forinton, 's azt mondotta, hogy hozzám kűldi, de meg fillentette magát.»[37] Münchenben ápr. 4-én meglátogatta LAMBERT ajánlásával LORIT az új akadémia titkárát és OSTERWALD matematikust, az akadémia osztályigazgatóját.

TELEKI SÁMUEL gróf 1762. nov. 29-től 1763. máj. 2-ig időzött Párizsban. Nemcsak azokat a tudósokat emliti naplójában, akiket

---

36a «CLAIRAUT erwähnt in einem Brief, dass er TELEKI ein Glas für DANIEL BERNOULLI mitgegeben habe». (O. SPIESS szíves közlése.) Erről már korábban is történt emlités. (E folyóiratban: 21. 1912. 215.)

37 G. F. BRANDER híres mechanikus volt. Később évekig levelezett a rendkívül sokoldalú és nagy munkásságú J. H. LAMBERTtel (1728—1777), akinek egyike idevágó értekezése: *Anmerkungen über den Brander'schen Mikrometer von Glas und deren Gebrauch.* Augsburg, 1769.

JÓZSEF gróf, hanem például a kitűnő csillagászt J. J. le F. de LALANDE (1732—1807)-ot is, «kivelis CLAIRAUT Uram ösmertetett meg». Másnap, 1762. dec. 8-án «La LANDE Uram nállam vólt. Ebéd után a' Letzkéjire mentem au College Royale, mellyet ád *De constructione navium*. Minthogy CLAIRAUT, De la CONDAMINE, La LANDE, du VOISIN, GRAND es ABHARD, Uraimekhoz, es Grof STARHEMBERG ő Exljához igen gyakran, 's némellyikhez majd minden nap el mégyek, arról ez után nem irok. Időm sintsen hogy napról napra irogassak; a' mít lehet fel irok diribbe darabba.»[38] Dec. 20-án «Nállam voltanak ebéden CLAIRAUT, de la CONDAMINE, La LANDE, du VOISIN, ROUSSELOT, GASTEL Uraimék.» Másnap «Astronomiát kezdettem Isten segedelmével tanúlni ROUSSELOT Uramtól, kitis La LANDE Uram commendált. A' mi az observatiokat illeti, azokat La Lande Uram mutattya meg az observatoriumon, az hova el hiva mikor szép idő vagyon 's oda megyen.»[39]

TELEKI SÁMUEL gróf gazdagon aranyozott bőrkötésű emlékkönyvében a 46 beírás közt ott szerepel: «JACOBUS ROUSSELOT, Geog. Regius Et Mathes. Profess.» (TELEKI JÓZSEF gróf emlékkönyvében 59 beírás van.)

Febr. 10-én «Egy ebédet adtam, nállam voltanak CLAIRAUT Uram 's a Huga, Du SÉJOUR Uram (conseiller à la cour des aides) a fia (conseiller au Parlement) Mr FORTIER Feleségestől (az kinél CLAIRAUT Uram szokott estvénkent Parisi modra calculalni) Mr MARIGNI, La LANDE Uram, SMITH Uram Medicinae Doctor CLAIRAUT Uram Doctora. Az ebéd 100 frforintomba kerűlt.»

«Martius kezdetin La LANDE Úr Angliában ment; minek előtte el indúlt volna De l'ISLE Uramhoz vitt 's vélle meg ösmertetett;

---

38 STARHEMBERG a monarchia párizsi követe volt, GRAND «betsülletes Banquier».

39 TELEKI SÁMUEL gróf csillagászati érdeklődésére bázeli tartózkodása alatt is találunk adatot: «1760 die 11a Junii volt reggeli 8 és 9 óra kőzőtt fogyatkozás az Napban, mellyet Prof. BERNOULLI DAN. és JÁN. Uraimékkal edgyütt néztűnk Telescopiumok által és in Camera obscura, az őreg BERNOULLIné asszonyom az az: az édes annyok házánál».

Igen vén jó ember, nagy Astronomus, de őregsegire nezve nem dolgozhatik. Egy Messiers nevű Ifju ember vagyon mellette a' ki hellyette dolgozik 's az De l'Isle Ur Observatoriumában observál. Ennél nem tartanak Parisban edgyetis a' ki jobban 's nagyobb praecisioval observallyon, de tartanak jobb astronomust eleget. Kérte De La Lande Uram hogy absentiájában mutogasson nékem nemelykor holmi Observatiokat 's igérte joakarattyát, már egyszer voltam is vélle az De L'Isle Ur Observatoriumaban.»

«2ª Apr. Az Királyi Observatoriumban voltam Rousselot es Messiers es Kováts Uraimékkal; igen szép, nagy és erőss epűlet, faragott kővekből, szép és fel emelt hellyenis fekszik. L'Abbé Chape, Academia membruma, Astronomus, kiis az Observatoriumban lakik, az Instrumentumokat meg mutogatta tsak kevés idő alatt, mert majd semmi sintsen, négy Astr. quadranson kivűl; mellyek kőzűlis az edgyik igen szép és nagy. Az observatorium alatt, lévő mélységekbenis le szállottunk, kő graditsokon, faklyával; 90 lábnyira vagyon 'a főld szinétől. Pintzéknek (Caves) nevezik; sok és hoszszú utzákból áll, mellyekis keresztűl-kasúl vadnak, ugy hogy a' ki nem tudgya a' járást el vesztené magát bennek fáklyávalis; mind kőből vadnak ki vágva, sok hellyen szorossak, és vizet tsepegnek a' kősziklák.

13ª Az Scientiarum Academia gyűlésében, vagyis Husvét után való bé állásában, jelen lévén, a' több memoire-ok kőzőtt Cassini Uram, olvasott edgyet, mellyis vólt az Német Országban a' Parisi Meridianus prolongatioja végett tett utazásaról 's operátiojiról való Historica Relatioja. Igen prodigus vólt 'a Német országi Fejedelmeknek meg ditsérésekben, az elsőtől fogva az utolsóig, ugy hogy edgyik se tarthattya magát meg ditsértetetnek, mert mind egy aránt 's felette meg voltanak ditsérve.»[40]

«Varnier Uram meg ősmertetett Ferdinand Berthoud, Uram-

---

[40] J. Chappe d' A. (1722—1769) később Tobolszkból és Kaliforniából figyelte a Vénusznak a Nap-korong előtti áthaladását.

mal kiis igen nagy Mechanicus 's hires orás mester az Pendulumok tsinálására. Most inveniált egy Machinat a' Longitudonak a' Tengeren való meg találására, mellyet meg mutatott, 's Angliában való el indulása előtt az Academiának praesentált mert CAMUS Urammal edgyűtt a' király parantsolattyából & Academiától Angliában kűldetett, egy hasonló végre inveniált ujj Machinának examinálására; melynekis egy HARISON nevű Anglus az inventora.»[41]

«17. Apr. Le PEAUTE nevű hires orás mesterrel, a' kinél lakik La LANDE Uram, és a' ki a király számára szokott dolgozni, ROUSSELOT Urammal és T. KOVÁTS Urammal Passiban voltam (egy kis ora Parishoz)» «Dom NOËLET meg látagattam, vélle meg ősmerkedtem, kiis Benedictus szerzetiből való, de Passiban lakik igen szép házakban, mellyeket a' király vett 's készittetett a' maga Physicum Instrumentumainak tartására. Igen szép és sok Instrumentumokkal ékes a' király Cabinettya, mellyeknekis nagyobb 's nemesebb részit ez a Dom NOËLE készitette 's keszittette, mostanis szűntelen azon dolgozik 's dolgoztat; nevezetesen egy Telescopiumat tsinál melynekis 22 láb a' hoszsza, 22 pollex 'a Diametere 's 2 linea; ennél nagyobb Telescopium még nem vólt; kételkednek sokan ha a' jósága meg felelé a' nagyságának. három száz ezer frantzia forintban fog fel kerűlni.» «N. B. Dom NOËLE friss ember, sokat beszéll, a' király előtt kedvessége s' nagy credituma vagyon. De Parisban Pédantnak 's Charletánnak tartatik. Az Papa Nunciussa Testvér őttsével Princeps COLONNÁ-val meg ősmerkedtem, a' De L'ISLE Uram observatoriumábanis voltam vélle, s a' Jupitert observaltúk, keveset ért az efféléhez, egyébhez sem sokat, kűlőmben igen derék Printz.»

Párizsból hazafelé utaztában kocsijának tengelye kétszer is kettétörött. Mig «egy nyomorú faluhoz közel (Sourdin-nek hívják)» egy fogadóban várakozott «egy Franczia falusi Parasztal

[41] J. HARRISON, a kompenzációs-inga feltalálója 1758-ban olyan órát szerkesztett, amely félév alatt csak 65 mp-et késett.

sokat beszéllettem; a ki nagy álmélkodásomra a HUGENIUS, NEWTON, LEIBNITZ, BERNOULLIak, CARTESIUS és VOLFFIUS Becouverteiről, munkájokrol, érdemekről, veszekedésekről superficialiter ugyan de sokat raisonnirozott 's nagy Historica cognitiot mutatott.»

Naplójának végét franciául írta. Zürichben többi közt «J'ai fait la connoissance de M^r GESNER Professeur en Mathematique, j'ai été dans un de ses Colleges, j'ai vu son Cabinet d'Histoire Naturelle, qui est tres riche & bien assorti.» Bécsben «J'ai remis mon addresse au Pere HŐLL Iesuite, de la part de M^r CLAIRAUT, je l'ai trouvé déjà prévenu en ma faveur par M^r De La LANDE, avec lequel il est en correspondance.» Pár nap mulva, 1763. jún. 27-én »J'ai etois faire la connoissance du Pere HŐLL, Iesuite, à qui j'avois des lettres de recommandation de la part de M^r M^r CLAIRAUT & La LANDE.» Honfitársa, a Selmecen született HELL MIKSA (1720—1792) volt ez a kiváló csillagász, akinek CLAIRAUT így köszöni meg a szívességét: «Je vous rends mille grâces de l'accueil obligeant que vous avez bien voulu faire au Comte TELEKJ, que j'avois pris la liberté de vous recommander,»[42]

Naplójának utolsó oldalán ez áll: «Némely Parisi ösmerőseimnek lakások. M^r CLAIRAUT, ruë du Qoq près de la verrerie. M^r De la CONDAMINE, Cul de Sac S^t Thomas du Louvre. M^r De la LANDE à la croix rouge, chez M^r Le PAUTE Horloger du Roi. M^r VARNIER sur le quay des Orfevres au coin de la ruë de Harlais. M^r Ferdinand BERTHOUD (fameux horloger) dans la même maison. M^rs GRAND & ABHARD ruë Montmartre vis-à-vis l'Eglise S^t Joseph. M^r Du VOISIN Ruë du Maìl vis-à-vis l'hôtel des Chiens. M^r ROUSSELOT ruë Vaugirard vis-à-vis l'ancienne Université, M^r BRIASSON M^nd Libraire, ruë S^t Jacques.» Ugyanazon lap másik oldalán idegen írással: «ROUSSELOT a l'hotel des Basses Plantes Ruë Vaugirard vis a vis l'ancienne Academie près le Luxembourg».

---

[42] PINTZGER FERENC S. J.: *Hell Miksa emlékezete.* II. *Hell levelezése.* I. Függelék. 193. A levél 1764. jan. 3-án kelt.

E cikk adatait sok tekintetben szerencsésen egészítik ki a gyömrői TELEKI-levéltár és a gothai gyüjtemény még közlésre váró levelei, első sorban a BERNOULLI-ak és CLAIRAUT levélváltása TELEKI JÓZSEF és SÁMUEL grófokkal A marosvásárhelyi TELEKI-levéltár idevágó levelei már megjelentek folyóiratunkban. (21. 1912. 194—223.) Utóbbiakból kiderül, hogy nemcsak TELEKI JÓZSEF gróf, hanem SÁMUEL is meg akarta védeni BERNOULLI DÁNIEL-t egy vitairatban: «J'ai même la vanité, Monsieur, de vouloir aspirer un jour à la gloire de defendre Votre Cause; et de repondre à la critique indirecte qui a été faite de Votre Hydrodinamique par Monsieur D'ALEMBERT. Le parti seroit fort inégal si je 'navois pas quelque avantage sur lui dans la bonté de Votre Cause.»[43]

Ezekből a levelekből ugyanaz a szellem árad felénk, mint az útinaplókból. Utóbbiakat akaratlanul is találóan jellemezte TELEKI JÓZSEF gróf: «En ezt a Diariumot talán masértis irom, a ki ezután olvassa, de inkább magamért.»[44]

Jelitai József.

CLAIRAUT, LA CONDAMINE, D'ALEMBERT UND IHRE ZEITGENOSSEN NACH DEN UNGARISCHEN TAGEBÜCHERN DER GRAFEN JOSEF UND SAMUEL TELEKI.

Graf JOSEF TELEKI weilte während seiner Studienreise ausser Basel längere Zeit in Leiden (27. 6—19. 10. 1760) und in Paris (4. 11. 1760—13. 3. 1761). Sein Neffe Graf SAMUEL TELEKI hielt sich nach Basel in Utrecht (11. 8. 1761— Herbst 1762) und in Paris (29. 11. 1762—2. 5. 1763) auf. JOSEF machte während seiner ganzen Reise regelmässige Tagebucheintragungen in ungarischer Sprache. Dieses mehrere Bände umfassende Tagebuch befindet sich im Besitz der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in Budapest. Das Reisetagebuch von SAMUEL erschien

[43] Sárd, 1764. ápr. 3-án kelt levelében. 21. 1912. 217.

[44] Párizsi naplóbejegyzés. (1760. febr. 26.)

1908 auch im Druck. (Ungarisch. Vorwort: IMRE. Text: BIÁS.) SAMUEL führte sein Tagebuch (Manuskript im Ungarischen Landesarchiv in Budapest) nicht so musterhaft, wie JOSEF; schon in Holland gibt es grosse Lücken, und über Paris erfährt man wenig. Der vorstehende ungarische Aufsatz enthält eine Auswahl aus diesen Reiseaufzeichnungen, deren einige im folgenden erwähnt werden.

Beide Grafen reisten mit den Empfehlungen der Brüder BERNOULLI. JOSEF erhielt von CLAIRAUT regelmässig Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung, die er löste. Er observierte mit LA CAILLE und hörte bei NOLLET, einmal auch bei MUSSCHENBROEK. SAMUEL hörte bei LALANDE und HAHN und hatte ein interessantes Gespräch mit CASTILLON über die BERNOULLI. Er lernte Astronomie von ROUSSELOT, observierte mit LALANDE, DELISLE und MESSIER. Beide Grafen besuchten mit ständiger Erlaubnis die Sitzungen der Akademie. Sie verkehrten am meisten mit CLAIRAUT, LA CONDAMINE und d'ALEMBERT.

Ein Teil ihrer Tagebuchaufzeichnungen erschien in deutscher Übersetzung, herausgegeben von O. SPIESS, unter dem Titel: *Basel anno 1760*. S. 94—103, 146—150.

József Jelitai.

IRODALOM.

Kerékjártó Béla: A geometria alapjairól. Első kötet: *Az euklidesi geometria elemi felépítése.* A Magyar Tudományos Akadémia támogatásával, Szeged, 1937, XV + 304 oldal.

Matematikai irodalmunk igen figyelemre méltó művel gyarapodott. KERÉKJÁRTÓ BÉLA terjedelmes, 300 oldalas könyvben tárgyalja a matematika legklasszikusabb ágának, az euklidesi geometriának felépítését. Azonban a geometria elemeiben csak kevéssé járatos olvasó is könnyen konstatálhatja, hogy szerzőnek e könyv megírásával nem az volt a főcélja, hogy EUKLIDES-nek lényegében már a középiskolai oktatásból is többé-kevésbé ismert «Elemei»-t kissé felfrissítve, az újabb tudományos követelményeknek megfelelő formában közzéadja, hanem annál sokkal több.

Az euklidesi geometria első, tudományos szigorúság tekintetében korunk követelményének megfelelő felépítése HILBERT-től származik. HILBERT-nek idevágó munkája, a nagyhírű «Grundlagen der Geometrie» sok helyütt szabatos rövidséggel megírt, aránylag nem nagy terjedelmű munka, ami természetszerűleg maga után vonja azt, hogy nem egy olyan részletet tartalmaz, amelyen talán könnyen átsiklik a szaktudós, azonban a kezdő olvasónak annál nagyobb nehézségeket támaszt. Szerző a megalapozáshoz szükséges axiomák bevezetésének sorrendjében követi ugyan HILBERT-et, azonban a felépítésben gondosan ügyel arra, hogy a szükséges meggondolásokat a lehető legapróbb részletekig is keresztülvigye. E mellett még tárgyalási módja olyan sokirányú s olyan terjedelmes anyagot ölel fel, hogy tanulni vágyó fiatalságunk szerzőnek könyvéből nemcsak az euklidesi geometria elemeit sajátíthatja el, hanem ezenfelül mint bevezetőt a geometria tudományába is sikerrel tanulmányozhatja. Szerző különösen kezdetben ügyel arra, hogy a tételeknek az axiomákból való levezetésében minden egyes lépést részletezzen, s ezáltal olvasóit átsegíti a legnagyobb nehézségen: a kezdet nehézségein. A részletek aprólékos, logikailag szigorú kidolgozása hozzászoktatja a kezdő olvasót ahhoz, hogy az axiomákat és feltételeket a belőlük levezethető tételektől és állításoktól élesen elhatárolva lássa, s így fokozatosan hozzászokjék a szigorú axiomatikus gondolkodáshoz.

Kétségtelen, hogy a középiskolában oktató tanárnak munkája annál érdemesebb lesz, minél alaposabban ismeri tárgyának alapjait. Szerzőnek egyik főcélja éppen az volt, hogy olyan könnyen olvasható, de azért tudományosan szigorú és magas színvonalú könyvet adjon a középiskolai tanárság kezébe, amelyből az a geometriai igazságok mélyebben fekvő összefüggéseit megismerve, kritikai érzékét növelje s azt a gyakorlati oktatásban is gyümölcsöztesse. Ezzel kapcsolatban szerző nem mulasztja el az alkalmat tüzetesebben foglalkozni azokkal a kérdésekkel, amelyek a középiskolai tárgyalásban még ma is pongyola vagy hibás megvilágításban szerepelnek. (Lásd pl. : az EUKLIDES-féle átvitel elvét, az EULER-féle poliédertételt, a szabályos test definícióját.)

De nemcsak az oktatással foglalkozó középiskolai tanár, hanem a geometria tudományának lényegét mélyebben megismerni óhajtó egyetemi hallgató is nagy haszonnal tanulmányozhatja KERÉKJÁRTÓ kitűnő könyvét. Abból nemcsak azt ismerheti meg, hogy miként épül fel egy klasszikus tudományág logikai szempontból tökéletes rendszere, hanem ezenfelül bepillantást nyerhet többek között abba a fontos szerepbe, amelyet a csoport és halmaz nagy horderejű fogalmai a korszerű matematikai kutatásokban játszanak.

A szaktudós, az egyetemi tanár is, aki a geometria alapjairól tart előadásokat, sok újat és érdekeset meríthet e műből. Hogy csak néhányat említsünk : Szerző a háromszögek kongruenciájának elméletét először a HILBERT-féle tárgyalástól eltérően, kizárólag szakaszok egybevágósága alapján tárgyalja. Ebben a megalapozásban a HILBERT-féle I. kongruencia-axioma, mint más axiomákból levezethető tétel szerepel. Igen érdekes és eredeti a háromszög nevezetes pontjainak szintétikus tárgyalása, az egyenes-sereg abszolút-geometriai fogalma alapján. Nagyon tanulságos a könyv utolsó fejezete, a «Folytonosság», ahol szerző POINCARÉ nak egy kritikai megjegyzését követve a HILBERT-féle rendszer záró axiomája, a teljességi axioma helyett a sokkal konkrétabb tartalmú ú. n. DEDEKIND-féle axiomát veszi tárgyalásának alapjául. A szaktudós a most felsoroltakon kívül még talál majd néhány olyan részletet és kritikai megjegyzést, amely az eddigi irodalomban alig, vagy egyáltalán nem szerepel.

Mindezek után még azt kell megjegyeznünk, hogy e didaktikai szempontból kifogástalan és eredeti felépítésű mű szerzője még arra is súlyt helyezett, hogy munkája az euklidesi geometria alapjaiba vágó minden eddigi fontosabb kutatási eredményt a lehetőség szerint felölel jen.

Végül meg kell állapítanunk, hogy kívánatos lenne e munkát, mely oly sok kiváló tulajdonsággal rendelkezik, s melynek további folytatólagos köteteit a matematikus olvasó-közönség kétségtelenül nagy érdeklődéssel várja, valamelyik világnyelvre lefordítani, hogy a többi művelt nemzet matematikusainak körében is minél nagyobb elterjedésnek örvendjen.

Lipka István.

Egmont Colerus: Az egyszeregytől az integrálig. Budapest, Franklin-Társulat (1937), 332 oldal.

A matematika népszerűsítésének sok nemes útját-módját ismerjük. Az egyik egy-egy játék vagy szórakoztató kérdés kapcsán mutatja be tudományunk szellemét. A másik alkalmazásai keretében világítja meg alapfogalmait. Ismét egy másik az alapok feltárásával ismeretelméleti oldaláról ad képet. Megint egy másik egy kutató méltatása során a tudomány egy-egy fejezetének fejlődéséről számol be közérthetően. Végre egy, talán a legtökéletesebb, egy-egy válogatott egyszerű kérdésen szemlélteti a matematikai probléma-állítás varázsát s a megoldás változatos dinamikáját.

Bár e lehetőségek bármelyikére az irodalom több ragyogó példáját sorolhatjuk fel, sajnálattal kell bevallanunk, hogy a nagyközönség ízlésének egyik sem felel meg. A közönség, melyet a pergő kép s a hangszóró oly felületes, de gyors ismeretszerzésre szoktatott, s amely — tudományunk kivételével — a kutatás legújabb vívmányait és időszerű kérdéseit is sokszor első kézből és nagyszerű megvilágításban kapja, *a matematika terén is* olcsó megértésre, könnyen szerezhető *tárgyi ismeretre* vágyik.

Az előttünk fekvő könyv, egy eredetijének megjelenéséig csak regényes életrajzairól ismert osztrák szépírónak lelkesedéssel, de kevés hozzáértéssel, s így sok súlyos hibával írt munkája — tagadhatatlan üzleti sikerrel — e helytelen, mert teljesíthetetlen követelés szolgálatába szegődik. Számtalan rosszhírű elődje után újabb bizonyítéka annak, amit már Euklides is megállapított, hogy a *matematikában királyok számára sincs külön út.* Másszóval: könnyű ismeretközlésről és szerzésről a rendszeresség, a teljesség, a szabatosság mellőzése árán szó sem lehet.

Így minden részletezés nélkül is világos, hogy a könyv első része, az aritmetika és az algebra, tiszta definíciók és az alaki műveleteket tudatosan megtartó általánosítások hiányában csak zűrzavaros képet ad.

Teljesen elborul a szemhatár, ha az infinitézimális számítást tárgyaló részre térünk át. A határérték, a végtelen sor, a területmérték, az érintő értelmezését hiába keressük. Mindezek itt maguktól értetődő dolgok, melyeknek legfeljebb egyszerű esetekben odavetett meghatározásáról esik szó akkor is, ha előbb vagy utóbb tágabb értelemben szerepelnek.

A legszomorúbb az, hogy mindebből sokat nem a népszerűség keresésének, hanem a szerző kétségtelen tájékozatlanságának rovására kell írnunk. Az integrálszámítás bevezető soraiból például kiderül, hogy a szerző a körmérés kétezer éve elintézett kérdését a körnégyszögesítés ötvenöt éve tisztázott problémájával részben összetéveszti, részben az utóbbi megoldhatatlanságának okát a π végtelen tizedestört, tehát (?) irracionális s így (?) nem szerkeszthető voltában látja. Annyi súlyos hiba, amennyi állítás és következtetés.

Mindebből kellő fény derül a szerző ama alapvető tévedésére, hogy magát éppen mint «a tudomány alacsonyabb fokán állót» a nagyközönség előtt alkalmas tolmácsnak tartja. Ennek csak folyománya a szerzőnek az a — szögezzük le, a matematikában is tarthatatlan — álláspontja, hogy ma is leírhat mindent, amit a XVIII. században még helyesnek tartottak.

Stachó Tibor.

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1937. évi XLI. matematikai tanulóversenyről.

Társulatunk XLI.-ik matematikai tanulóversenyét 1937. okt. 16-án tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 29, Szegeden 20 versenyző jelentkezett; beadtak Budapesten 19, Szegeden 10 dolgozatot.

A verseny tételei a következők voltak:

I. Legyen a pozitív egész $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok összege kisebb a pozitív egész k számnál. Bebizonyítandó, hogy

$$a_1!\, a_2! \ldots a_n! < k!.$$

II. Legyen a tér három köre oly tulajdonságú, hogy páronként érintkeznek és e három érintkezési pont egymástól különbözik. Bebizonyítandó, hogy e három kör vagy egy gömbön vagy egy síkon fekszik. (Két térbeli kör akkor neveztetik érintkezőnek, ha közös pontjuk és ebben közös érintőjük van.)

III. Tegyük fel, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok nem feküsznek egy egyenesen. Legyen továbbá P és Q két oly különböző pont, melyre

$$A_1P + A_2P + \cdots + A_nP = A_1Q + A_2Q + \cdots + A_nQ = s.$$

Bebizonyítandó, hogy van oly K pont, amelyre

$$A_1K + A_2K + \cdots + A_nK < s.$$

A versenydolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság FEJÉR LIPÓT elnöklete alatt a következő tagokból állott: EGERVÁRY JENŐ, FARAGÓ ANDOR, GOLDZIHER KÁROLY, STACHÓ TIBOR, SZŰCS ADOLF, VERESS PÁL és KŐNIG DÉNES előadó. E bizottság 1938. okt. 30-án tartott ülésén KŐNIG DÉNES előadói előterjesztése alapján a következő javaslatban állapodott meg.

«A versenyzők, ezúttal Szegeden is, szép számban jelentkeztek; az eredmény még sem kielégítő, amennyiben a III. tételre egyetlen helyes megoldás sem érkezett be. Ily módon, tekintve, hogy az I. tétel rendkívül könnyű volt, a dolgozatok relatív értékének megállapításánál a II. tételre beadott megoldások voltak irányadók. E tételt lényegileg nyolc versenyző oldotta meg. Közülök öten megfeledkeztek arról a lehetőségről, hogy a három közös kör-érintő párhuzamos is lehet; ketten pedig bizonyításuk egy-egy lényeges segédtételét csak kimondták, de nem bizonyították. A fennmaradó nyolcadik dolgozat szerzője: Frankl Ottó. Az ő megoldása minden eshetőséget felölel, kidolgozása igen értelmes és szabatos. Mindezeket figyelembe véve a Bizottság azt indítványozza, hogy az első díj ne adassék ki, a második b. Eötvös Loránd jutalommal pedig Frankl Ottó tüntettessék ki, aki a pesti izr. hitközség gimnáziumában Biró Kálmán tanár tanítványa volt».

A Bizottság e javaslatát a Választmány 1937. nov. 18-án tartott ülésén egyhangúlag elfogadta. Az ugyanezen a napon tartott előadó ülésen Rados Gusztáv elnök adta át a díjat a verseny győztesének.

Frankl Ottó jutalmazott dolgozata.

I. tétel. Minthogy $k>a_1+a_2+\cdots+a_n$, azért $k!>(a_1+a_2+\cdots+a_n)!$ Azonban

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\cdots+a_n)! = a_1!\,&[(a_1+1)(a_1+2)\ldots(a_1+a_2)]\times\\ &[(a_1+a_2+1)\ldots(a_1+a_2+a_3)]\times\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &[(a_1+a_2+\cdots+a_p+1)\ldots(a_1+a_2+\cdots+a_p+a_{p+1})]\times\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &[\ldots(a_1+a_2+\cdots+a_n].\end{aligned}$$

De

$$(a_1+1)(a_1+2)\ldots(a_1+a_2)>1.2\ldots a_2=a_2!,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(a_1+a_2+\cdots+a_p+1)(a_1+a_2+\cdots+a_p+2)\ldots$$
$$(a_1+a_2+\cdots+a_p+a_{p+1})>a_{p+1}!$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

és így

$$k!>(a_1+a_2+\cdots+a_n)!>a_1!\,a_2!\ldots a_n! \qquad \text{Q. e. d.}$$

II. tétel. Zárjuk ki azt az esetet, amikor a három kör egy síkban van. A közös érintők vagy párhuzamosak egymással, vagy nem.

Vizsgáljuk előbb azt az esetet, amikor az érintők párhuzamosak egymással; ekkor a kör szimmetriájának következtében az érintési pontok és a körök középpontjai egy közös síkban lesznek és a körközéppontokból a megfelelő síkokra rajzolt merőleges egyenesek az érintési pontok által alkotott háromszög oldalainak merőleges felezői; ezek tudvalevőleg egy pontban metszik egymást; ez a közös O pont a háromszög köré írt kör középpontja, és mivel a középpontban a kör síkjára rajzolt merőleges egyenes bármely pontjától a kör összes pontjai egyenlő távol vannak, így az O ponttól *mindhárom* kör összes pontjai egyenlő távol vannak. Így a három kör egy O középpontú gömbön van.

Ha az érintők nem párhuzamosak, akkor is merőlegeseket rajzolunk az illető körök lapjaira a középpontokon keresztül és ezeknek legalább is páronként kell egymást metszeniök, mert ezek páronként egy síkban vannak: abban a síkban, amely a megfelelő érintőre az érintési pontban merőleges. Mivel pedig az érintők nem párhuzamosak, azért e három most rajzolt merőleges nem lehet egy síkban és ha mégis páronként metszik egymást, akkor ezek a metszéspontok: egy közös pont. Ez az O pont külön-külön mindegyik kör pontjaitól egyenlő távol van; azonban ezeknek a köröknek vannak közös pontjaik, ezért ez az O pont mindhárom kör pontjaitól egyenlő távol van; így a körök egy O középpontú gömbön vannak.

Jelentés az 1937. évi XIX. Károly Irén fizikai tanulóversenyről.

Társulatunk XIX. KÁROLY IRÉN fizikai tanulóversenyét 1937. október 23-án tartotta meg Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 17 versenyző dolgozott, Szegeden 10. Dolgozatot Budapesten 13 adott be, Szegeden 4. Tehát 27 versenyző közül 17 adott be dolgozatot.

A verseny tételei a következők voltak:

I. Állandó feszültségű áramforrás sarkait síksűrítő fegyverzeteivel kötjük össze. Ha a sűrítő fegyverzetei, melyek között levegő van, közelebb jutnak egymáshoz, a sűrítő töltésének energiája megnagyobbodik.

a) Közeledéskor mennyivel növekszik a sűrítő energiája és mennyi energiát ad le e közben az áramforrás?

b) Mennyivel változik a sűrítő energiája, ha a fegyverzetek akkor közelednek, miután az áramforrással való összeköttetésük már megszakadt?

II. Mekkora a tömege 1 m^3 vízgőzt tartalmazó levegőnek 20° C-on és 755 mm nyomáson, ha a vízgőz nyomása 18 mm? Egy m^3 normálállapotú száraz levegő tömege 1,293 kg és a gőznek az ugyanolyan állapotjelzőkkel bíró levegőre vonatkoztatott sűrűsége 0·62.

III. Acélhuzalon függő homogén fémhenger torzió-lengéseket végez. Hogyan változik a lengésidő,

a) ha a henger mindkét mérete kétszer akkora lesz?
b) ha a huzal két mérete lesz kétszer akkora?
c) ha mindkettőnek a méretei kétszer akkorák lesznek?

A dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság, melynek elnöke Tangl Károly, tagjai Mikola Sándor, Pogány Béla, Rybár István és Szabó Gábor voltak, 1937. november 13-án tartott ülésén Szabó Gábor előadói jelentése alapján a következőket állapította meg:

«A dolgozatok azt mutatják, hogy a jelöltek alapos készültséggel jöttek a versenyre. Egy sincs köztük olyan, aki legalább egy feladatot (ha némi számítási hibával is) meg ne oldott volna. A mechanikai feladatot 9-en oldották meg hibátlanul; az elektromosságtanit 3-an, kisebb hibákkal, vagy részben 8-an; a hőtanit hibátlanul csak 1, részben jól 3.

A legjobb dolgozatot Blaho Miklós Ede készítette. Ő az egyetlen, aki — eltekintve egy hibától — mind a három feladatot jól fejtette meg. Hibája az (amely hibát különben a versenyzők legnagyobb része elkövette), hogy a sűrítő energia-növekedését egyenlőnek vette azzal az energiával, amit az áramforrás a növekedés közben kiad. De úgy látszik, észrevette, hogy ez a felvétele nem helyes, mert lábjegyzékben ezt írja: «közelítéskor a két fegyverzet közötti vonzóerő munkát végez és az ezáltal veszített energiát szintén az áramforrásnak kell pótolni». Megoldásai rövidek, logikus menetűek; magyarázó szövege szabatos.

A második jó dolgozat szerzője Gárdos Pál, aki két tételt fejtett meg hibátlanul: az elektromosságtanit és mechanikait. A harmadik tételt nem oldotta meg, de a megoldás menetét javarészben helyesen vázolta az impurumban.

Harmadik helyre a Botár Livius és Huhn Péter dolgozata sorolható. Mindketten mind a három tétel megoldásán dolgoztak, de minden részében hibátlanul csak egyet: a mechanikait sikerült megoldaniok. Botár Livius-nak az elektromosságtani tétel megoldásában csak az a hibája, hogy két számításban két különböző állandó mennyiséget $\left(\frac{F}{4\pi}\right.$ és $\left.\frac{F}{8\pi}\text{-t}\right)$ ugyanazzal a «const» jellel jelölt és így arra a következtetésre jutott, hogy a sűrítő energia-növekedése annyi, mint az áramforrás által e növekedés közben kiadott energia. A hőtani tétel megoldásában feleslegesen bonyolultan (telített gőznyomással) és részben helytelenül okoskodott. Így eredménye is hibás. Huhn Péter az elektromosságtani tétel *b)* kérdésére nézve okoskodott helytelenül. A hőtani tétel megoldásában jó gondolatmenet szerint dolgozott, de eredménye a miatt, hogy a száraz levegő nyomását nem jól állapította meg, ugyancsak hibás.

Ezek alapján tisztelettel javasolja a Bizottság, hogy Blaho Miklós

EDÉ-nek, aki a budapesti ág. h. ev. gimnáziumban végzett és RENNER JÁNOS tanár tanítványa volt, az *első díj*; GÁRDOS PÁL-nak, aki a budapesti V. ker. állami Bolyai reáliskolában végzett és DESEÖ ZOLTÁN tanár tanítványa volt, a *második díj* ítéltessék meg; végül, hogy BOTÁR LIVIUS, aki a keszthelyi premontrei rendi kat. gimnáziumban végzett és KUN KÁZMÉR tanár tanítványa volt és HUHN PÉTER, aki a szegedi kegyesrendi városi róm. kat. Dugonics András gimnáziumban végzett és SZŰCS JÁNOS tanár tanítványa volt, *dicséretben* részesíttessék».

A Bizottság e javaslatát a Választmány 1937. november 18-án tartott ülésén egyhangúlag elfogadta. Az ugyanezen a napon tartott rendes előadó-ülésen RADOS GUSZTÁV elnök kihirdette a verseny eredményét és a díjakat átadta a győzteseknek.

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1937. évi június 12-én tartott XLII. közgyűlés.

A közgyűlést RADOS GUSZTÁV elnök az alábbi beszéddel nyitotta meg:

Társulati életünk 46. évének végén ismét közgyűlésre gyűltünk össze. Kedves kötelességet teljesítek, midőn Társulatunknak itt megjelent tagjait üdvözlöm és különösen melegen azokat, akik nem sajnálva egy utazás fáradalmait és költségeit, a vidékről feljöttek, hogy velünk való együttérzésüknek kifejezést adjanak.

Közgyűléseink, amelyeken működésünkről számot adunk, Társulatunk életfája törzsének mintegy évgyűrűi. Sajnos, hogy ezek, az utolsó másfél évtizedben a trianoni katasztrófa folytán bekövetkezett szegénységünk következtében keskenyebbek, mint a háború előtti időben, de egészséges és erős a törzs gyökérzete, mert meg nem gyengült, sőt fokozottabb a lelkesedésünk ama tudományok iránt, amelyeknek művelését és oktatását Társulatunk nagynevű alapitója, br. EÖTVÖS LORÁND, zászlónkra irt.

Korunk antiintellektuális irányzata ellenére tántoríthatatlan az a meggyőződésünk, hogy az igazság fölkutatása, az igazságnak ferdítésekkel szemben való védelme, az igazságnak tudományos formába öntése és terjesztése az emberi tevékenységek egyik legnemesebbike. Az igazság tisztelete etikai lényünknek egyik legerősebb pillére és távol áll attól, hogy vallásos vagy hazafias érzésünkkel összeütközésbe juthatna. Az emberi művelődésnek az igazság szolgálatával való fejlesztése különösen nálunk a leghatásosabb honvédelemszámba is veendő. Mert anyagiakban szegény és csekély létszámánál fogva kicsiny nemzetünknek a nagy nemzetek értékelésében súlyt egyedül erkölcsi és kulturális értékünk kölcsönözhet. A nemzet létérdekeit szolgálják tehát azok, akik az emberi művelődés fejlesztéséhez számottevően hozzájárulnak.

Ez az egyedüli politikum, amely működésünkben szemünk előtt lebeg és távol áll tőlünk a tudomány művelésében a napi politikának tért engedni. Éppen ezért aggodalommal észleljük a tudománynak itt-ott politikai befolyás alá kerülését és még nagy kultúrállamoknak is tudományos autarkiára való törekvését. Az önellátás gazdasági téren is sorvasztó és nyomort terjesztő kihatású; a tudomány terén egyenesen végzetes, mert teljes meddőség a következménye. Az exakt tudományok sikeres művelése és az egész emberiség haladását előmozdító kutatás minden kultúrnemzet büszkeségének méltó tárgya, de egyszersmind közös feladata is. Semelyik nemzet e tudományokat ki nem sajátíthatja kizárólag magának, mert ezek az összes kultúrnemzetek szellemi együttműködésének köszönik létüket és fejlődésüket. Nincsen német fizika, vagy francia matematika vagy angol csillagászat. E csodabogarak a fennhéjázó nemzeti sovinizmus torzszülöttjei. De igenis ismerünk geniális német, francia, angol kutatókat. KOPERNIKUS-ra, KEPLER-re, KIRCHHOFF-ra, GAUSS-ra, RIEMANN-ra, JACOBI-ra, a lángeszű német kutatókra mély tisztelettel tekintünk fel, de mélyen meghajtjuk zászlónkat LAGRANGE, GALOIS, CAUCHY, POINCARÉ geniális francia kutatók előtt; NEWTON, CAYLEY, SYLVESTER angol; GALILEI, VOLTA olasz; ABEL norvég kutatók előtt is; és büszkeség dagasztja keblünket, hogy a mérvadó tudományos világ e fényes névsorba a mi BOLYAI JÁNOS-unk, br. EÖTVÖS LORÁND-unk, SEMMELWEIS-ünk neveit is beiktatta.

Valamint egy és ugyanaz a nap áraszt fényt és éltető meleget a föld összes országaira, azonképpen egy es ugyanaz a matematika, fizika, kémia, csillagászat, amelyet a föld összes kultúrnépei nemes versenyben, de összhangzatosan művelnek. Lehetnek stílusbeli eltérések, de tartalmuk tekintetében egység uralkodik, mert egy és oszthatatlan az igazság széles e világon.

Ettől a meggyőződéstől áthatva örömmel és hálával üdvözöltük ROLIN WAVRE kiváló svájci matematikust, ERWIN FINLAY-FREUNDLICH német csillagászt és H. MARK osztrák fiziko-kémikust. akik Társulatunkat ez évben megtisztelték azzal, hogy érdekes és tartalmas előadásaikkal előadási programmunk gazdagításához hozzájárultak.

Mélységes megilletődéssel emlékezem meg ezen a helyen is arról a súlyos veszteségről, amely a tudományt és Társulatunkat egyaránt érte dr. TASS ANTAL-nak, a m. kir. Konkoly-Thege alapitványi csillagvizsgáló intézet érdemesült igazgatójának, f. é. január hó 17.-én bekövetkezett elhúnytával. TASS ANTAL úgyis mint kitűnő kutató az asztrofizika területén, de különösen kiváló és nagysikerű szervezőtevékenységével elévülhetetlen érdemeket szerzett. Az ő önfeláldozásig fáradhatatlan buzgóságának és munkájának köszönhető a Svábhegyi Csillagvizsgáló Intézet fölállítása és fölszerelése, amivel nevét a magyar tudomány történetében megörökítette.

Az idén is hálás köszönetet mondunk a Magyar Tudományos Akadémiának és a Vallás és Közoktatási Minisztériumnak nagylelkű anyagi támogatásukért, amellyel folyóiratunk megjelenését lehetővé tették.

Végül őszinte örömmel emlékezünk meg arról a kitüntetésről, amelyben nagyérdemű ügyvivő titkárunk, POGÁNY BÉLA részesült, midőn a M. Tud. Akadémia idei nagygyűlése neki ítélte oda a nagyjutalom Marczibányi-féle mellékjutalmát. A tudományos kutatás terén szerzett igazi érdemeknek jutalmazása volt ez, amelyet ő, a preciziós fizika európai hirű művelője, itthon és Jenában éveken át hősies kitartással folytatott és a modern fizika néhány fontos kérdése tekintetében döntő fontosságú észleleteivel teljes mértékben kiérdemelt.

Tisztelt Közgyűlés! Hazánk jelenlegi szomorú helyzete arra int, hogy a haza minden fia a maga hatáskörében erejének végső megfeszítésével végzett munkájával a haza helyzetének megszilárdításához hozzájáruljon és hogy ezzel a várva várt jobb kor hajnalhasadását siettesse. Erre a munkára híva föl t. tagtársaimat, nyitom meg Társulatunk 42.-ik közgyűlését.

Az elnöki megnyitó után Pogány Béla ügyvezető titkár tartotta beszámolóját a Társulat lefolyt évi működéséről és az évnek Társulatunkat érdeklő fontosabb eseményeiről.

Tartottunk 12 előadó-, 2 választmányi- és 1 közgyűlést. Az előadóüléseken 15 előadótól hallottunk 7 matematikai és 8 fizikai tárgyú előadást. Különösen kiemelhetjük, hogy az idén három külföldi tudós: R. Wavre, E. Finlay-Freundlich és H. Mark tisztelték meg Társulatunkat előadások tartásával.

Örömmel közli, hogy Rados Gusztáv-ot, Társulatunk elnökét, a Magyar Tudományos Akadémia tiszteleti tagjává választotta.

Fájdalommal emlékezik meg négy derék tagtársunk haláláról. Ábrahám István, Grynaeusz István, Gruber Nándor és Tass Antal elvesztét fájlaljuk. Az utóbbi kettő választmányunknak is tagja volt. Gruber Nándor személyében a régi fizikus gárdának egy igen kiváló tagja hagyott el minket. Tass Antal pedig hervadhatatlan érdemeket szerzett a svábhegyi csillagvizsgáló létesítése és nívós berendezése körül. Áldás emlékükre!

A közgyűlés örömmel veszi tudomásul a Magyar Tudományos Akadémia 500 pengős és a M. Kir. Vallás- és Közoktatásügyi Minisztérium 500 pengős támogatását, és a nagylelkű adományozóknak köszönetet szavaz. A Miniszter Úr Őnagyméltósága ezenfelül a Matematikai és Fizikai Lapok 63 példányára előfizetett a magyar középiskolák számára, ami szintén jelentős támogatás.

Beszámolva az idei tanulóversenyek eredményeiről, a közgyűlés külön köszönetet szavaz Riesz Frigyes és Fröhlich Pál egyetemi tanároknak a szegedi tanulóversenyek megrendezésénél évek óta tanúsított önzetlen közreműködésükért.

Cserefolyóirataink száma az idén is 25 volt.

A közgyűlés a lelépő választmányi tagokat, névszerint Bauer Mihály-t, Bláthy Ottó Titusz-t, Kerékjártó Bélá-t, Nagy L. József-et, Patai Imré-t, Rhorer László-t újra megválasztja; az elhúnyt Gruber Nándor és Tass Antal helyére pedig Stachó Tibor-t és Lassovszky Károly-t választja meg.

A számvizsgáló bizottságba a következő évre a választmány részéről Faragó Andor és Stachó Tibor, a közgyűlés részéről Goldziher Károly és Renner János küldettek ki.

Szábo Gábor pénztári jelentéséből a zárszámadást és a vagyonmérleget alább közöljük. A közgyűlés megadja a felmentvényt a pénztárosnak.

1936. évi zárszámadás.

Bevétel:

			Pengő
1. 1935. évi zárszámadási maradvány:			
a) kézi pénztárban	52·84 P		3071·63
b) postatakarékpénztárban	1100·79 «		
c) Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban (fsz.)	898·— «		
d) takarékkönyvben (Károly Irén-alap)	1020·— «		
2. Tagdíjak			1365·—
3. Előfizetési díjak			1149·34
4. Adományok			40·—
5. Magyar Tudományos Akadémia segélye			500·—
6. Kamatok			53·68
7. Vegyesek (Hirdetés, Lapok)			46·10
		Összesen:	6225·75 *

Kiadás:

			Pengő
1. Nyomdai költségek és expedíció			2790·—
2. Tanulóverseny			160·—
3. Kezelési költségek és a díjkezelőség jutaléka			102·57
4. Vegyesek (König-plakett, tiszteletdíj, ügyviteli kiadások)			372·57
5. Pénztári maradvány:			
a) kézipénztárban	62·47 P		2800·61
b) postatakarékpénztárban	1008·24 «		
c) Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban (fsz.)	709·90 «		
d) takarékkönyvben (Károly Irén-alap)	1020·— «		
		Összesen:	6225·75

Vagyon-mérleg.

Vagyon:

		Korona	Pengő
1. Koronaértékpapirosok (Magy. Lesz. és Pénzv. Bank Letétkimutatása, a Pesti Hazai Első Takarékpénztár Egyesület takarékkönyve és a Magy. kir. Állampénztár Fizetési Könyve szerint)		29,008·—	
2. Pénzkészlet:			
a) kézipénztárban	62·47 P		2800·61
b) postatakarékpénztárban	1008·24 «		
c) a Magy. Lesz. és Pénzv. Bankban (fsz.)	709·90 «		
d) takarékpénztárban (Károly Irén-alap)	1020·— «		
3. Tagdíj- és előfizetési díj-hátralék			200·—
4. Nyomtatványok			100·—
	Összesen:	29,008·—	3100·61

* Megjegyzés: Az 1935/36. évi államsegély (500 P) 1937. évi január hó 22-én volt felvehető; ezért ez az 1937. évi zárszámadásban fog szerepelni.

Teher:

	Korona	Pengő
1. Nyomdai tartozás		894·98
2. Egyenleg	29,008·—	2205·63

Szabó Gábor s. k.
pénztáros.

Megvizsgáltuk és helyesnek találtuk.

Budapest, 1937. április hó 30-án.

Dr. Stachó Tibor s. k., Faragó Andor s. k., Renner János s. k.
a számvizsgáló bizottság tagjai.

Előadások:

1936. nov. 12. A tanulóversenyek eredményének kihirdetése. Rados Gusztáv elnök kiosztja a jutalmakat. Kárteszi Ferenc: Egy valószínüségi feladatról.

1936. nov. 19. R. Wavre (Genève): Sur le potentiel et la théorie des fonctions analytiques. (Potenciál és analitikus függvények).

1936. dec. 3. Schmid Rezső: A szénoxid-molekula belső szerkezetéről, színképe alapján.

1936. dec. 10. Gerő Loránd: Perturbáció és disszociáció a molekulák színképén.

1937. febr. 4. Erwin Finlay-Freundlich (Prága): Über das Alter der Welt und die Energiequellen der Gerstirne.

1937. márc. 4. Barta József: Középértéktétel a differenciálegyenletek első saját értékéről (alkalmazásokkal).

1937. márc. 18. Rédei László: A másodfokú számtest osztálycsoportjáról.

1937. ápr. 1. Tihanyi Miklós: A Rados-féle determinánsról. Grünwald Géza: Interpolációs többtagúak divergenciájáról.

1937. ápr. 15. Turán Pál: Ortogonalizált többtagúak interpolatórius elmélete.

1937. máj. 13. Szalay Sándor: 1. Alfa-részek rezonanciaszerű behatolása a Mg^{25} atommagba. 2. Egy új, egyszerű Wilson-kamra (kísérleti bemutatással).

1937. máj. 20. A műegyetemi fizikai intézet spektroszkópiai laboratóriumának megtekintése.

1937. máj. 29. H. Mark (Wien): Verwendung der Elektronenbeugung in Wissenschaft und Technik.

1937. jún. 12. Forró Magdolna: A kozmikus sugárzás összefoglaló ismertetése. BARNÓTHY JENŐ: Forró Magdolnával együtt végzett fontosabb mérési eredményeink a kozmikus sugarakról.

*

Választmányi ülések voltak: 1936. nov. 10-én és 1937. jún. 5-én.

*

Az 1937. évi XLII. rendes közgyűlés volt: 1937. jún. 12-én.

Új tagok:

Dr. Alexits György szfőv. tanár, Budapest.
Boros János okl. középisk. tanár, Szeged.
Fenyő István tanárjelölt, Budapest.
Szabó Katalin tanárjelölt, Szeged.
Tarnóczy Tamás tanárjelölt, Szeged.
Urbán Erzsébet egyet. tanársegéd, Szeged.

Meghaltak:

Ábrahám István gimn. igazgató, Budapest.
Rhorer László egyet. tanár, Pécs (vál. tag).
Tass Antal, a svábhegyi csillagvizsgáló intézet igazgatója, Budapest (vál. tag).

Beküldött könyvek.

A cserefolyóiratokon kívül — melyekről legközelebb fogunk beszámolni — Társulatunk, illetőleg a *Matematikai és Fizikai Lapok* szerkesztősége újabban a következő könyveket kapta ajándékképpen.

A «The University Press of the National University of Peking»-től:

W. F. OSGOOD: *Functions of real variables* (University Press, National University of Peking, 1936).

W. F. OSGOOD: *Functions of a complex variable* (University Press, National University of Peking, 1936).

A «The Macmillan Company (New York)»-tól:

W. F. OSGOOD: *Mechanics* (New York, The Macmillan Company, 1937). Ára \$ 5·00.

Az «American Mathematical Society (New York)»-tól:

J. M. THOMAS: *Differential systems*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXI. (New York, American Mathematical Society, 1937).

P. Noordhoff (Groningen)-től:

P. WIJDENES: *Five place tables* (Noordhoff, Groningen, 1937). Ára fl. 2·50.

A Kir. M. Egyetemi nyomdától:

SZTRÓKAY KÁLMÁN: *A természet titkai nyomában;* Say Kornél rajzaival (Budapest, Magyar Könyvbarátok Társasága, 1937). Ára 6 P.

International Journals from Hungary

ANNALES UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS
DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

Sectio: MATHEMATICA
Vols. 1-9 1958-1966 mostly reprinted

unbound	per Vol	US $	8,-

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

O. S. Vols. 1-3. 1952-1954 all publ. Partly reprinted
N. S. Vols. 1-9. 1956-1965 all publ.

Unbound set	US $	110,-
Cloth bound set	US $	134,-

Continued as „STUDIA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM HUNGARICA"

STUDIA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM HUNGARICA

Vols. 1-2, 1966-1967

Unbound, per vol.	US $	12,-

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS
ACTA PHYSICA ET CHIMICA

Series I.

„Acta Chimica, Mineralogica et Physica"
Vols. 1-7, 1929-1940 all publ.

Series II.

„Acta Chimica et Physica"
Vols. 1-3 1942-1950 all publ.

Nova Series:

„ACTA PHYSICA et Chimica"
Vols. 1-13, 1955-1967

Price of the three series together unbound	US $	170,-

ACTA PHYSICA et CHIMICA DEBRECINA

Vols. VIII-XII. (N. S. 1-5) 1962-1966

unbound per vol.	US $	6,-

5150