MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

NEGYVENHARMADIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES és POGÁNY BÉLA

BUDAPEST, 1936

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

negyvenharmadik kötetének tartalma.

MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES ÉS POGÁNY BÉLA

NEGYVENHARMADIK ÉVFOLYAM

1936

JANUÁR—JÚNIUSI FÜZET

BUDAPEST, 1936

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Kőnig Dénes* (**XI., Horthy Miklós-út 28., Hadik-pensio**), a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* (**XI., Budafoki-út 8.**) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikban lehető rövidségre törekedjenek, azokhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghivók expedíciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Szabó Gábor* pénztáros címére (Budapest, XI., Verpeléti-út 7.) intézendők. Postatakarékpénztári csekkszámla száma: 5997.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány*, Budapest, XI., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *B. Pogány*, Budapest, XI., Budafoki-út 8.

KÜRSCHÁK JÓZSEF.[1]

1864—1933

Egybegyűltünk, hogy Kürschák József-nek, műegyetemünk egykori nyilvános rendes tanárának, a matematika mesterének emlékét ünnepeljük, munkásságáról megemlékezzünk, életéből és műveiből ösztönzést nyerjünk. Több mint három éve — 1933 március 26-án — vesztettük el, de hangja még fülünkbe cseng, rózsás arca s őszbeborult feje még előttünk áll s ha dolgozataiba merülünk, szellemének eredetisége, gondolatainak mélysége ma is lenyűgöz bennünket.

Kürschák József 1864 március 14-én Budán született. Atyját korán elvesztette s öccsével együtt áldozatoslelkű anyja neveli fel. A vízivárosi kapucinusoknál — részben magánúton — végzett elemi után a budai reálba kerül, hol tanulmányait jelesen, de — mint maga megvallotta — különös figyelmet későbbi tudományának még nem szentelve végzi el.

Hogy így mi késztette arra, hogy 81-ben a kir. József Műegyetemnek mennyiség- és természettantanárt képző egyetemes osztályára beiratkozzék, azt pontosan megállapitani nem tudjuk. Később sokszor hangsúlyozta, hogy lassan fejlődött. Az *ötévi* tanulmány után kiállitott távozási bizonyítványból azonban kétségtelenül kiderül, hogy a fordulat másodéves korában, műegyetemünk két matematikusa, Hunyady Jenő és Kőnig Gyula hatására következett be.

[1] A m. kir. József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem mérnöki és épitészmérnöki karának 1936 május 3-i ünnepi ülésén tartott emlékbeszéd.

Az ismeretközlés, az előadások terén, melyek a differenciálegyenletek és variációszámítás kivételével a matematika akkori területét csaknem felölelték, különösen HUNYADY JENŐ tevékenykedett. De nagyobb fontosságot kell tulajdonítanunk a tanárjelöltek részére különböző fejezetekből rendezett matematikai gyakorlatoknak, melyekben KÜRSCHÁK JÓZSEF mind HUNYADY-nál, mind KŐNIG-nél öt éven át nagy szorgalommal résztvett, melyeket később lankadatlanul maga is tartott s öntevékenységre ébresztő hatásuk miatt minden előadás fölébe helyezett. És ezekben rá kétségtelenül KŐNIG GYULA volt döntő és maradandó hatással. A hálás tanítvány ezt mindig hangoztatta, harminc évvel később mesteréről tartott emlékbeszédében leszögezte s egy helyt mindennél többetmondóan így összegezte: «Magam egész működésemhez tőle nyertem irányítást».

A jó földbe vetett mag hamarosan meghozza gyümölcsét. A tanítvány ugyan mesterétől egyelőre elszakad s 22 éves korában mint helyettes tanár a rozsnyói kat. főgimnáziumhoz kerül, de alkotó munkássága így is megindul.

A körbe és köré írt sokszögekről szóló első értekezés (1887) már szembeszökően mutatja szerzője egy-két jellemző vonását. Nevezetesen: az elemi és felsőbb matematika határkérdései iránti előszeretetet, a problémák egyéni, közvetlen megoldására irányuló készséget, nemkülönben azt a ritka képességet, mely országúttá taposott kérdésekbe is elmélyedni kész s ezeket új gondolatokkal gazdagítani tudja. A dolgozat ugyanis a kúpszeletek projektív származtatása kapcsán ismert svájci STEINER meggondolásainál is egyszerűbben és teljesebben kimutatja, hogy a körbe (illetve köré) írt közönséges n-szögek között a szabályosak kerülete és területe a legnagyobb (illetve legkisebb) s először hangsúlyozza azt, hogy e mérőszámok nemcsak a szögpontok kettőzésénél, — mint addig megállapították — hanem bármily szaporításánál is növekvő (illetve csökkenő) sorozatot alkotnak. Hangsúlyozza STEINER-rel szemben azt is, hogy a szélső érték létezését hallgatagon nem fogadja el, hanem kimutatja, amivel szerzőjének az akkoriban még új, a német

WEIERSTRASS-hoz fűződő kritikus és szigorú irány iránti érzékét is elárulja.

Az első dolgozatban tehát egy többváltozós szélsőérték-feladatnak elemi megoldásáról van szó. Ily feladatok magasabb szinten mozgó általánosításával a *variációszámítás* foglalkozik. Ez határozott integrálok értékének változását, variálását vizsgálja az integrálandóban fellépő *függvények* változása esetén. Azt a szerepet, amelyet a közönséges szélsőérték-feladatoknál az ismeretlen *mennyiségekre* előálló algebrai vagy transzcendens egyenletek játszottak, itt az ismeretlen *függvényekre* adódó *differenciálegyenletek* veszik át. Mivel a mechanika, ma mondhatjuk már az egész fizika differenciálegyenletei ilyen — a természet csodás ökonómiáját mutató — variációs elvekből adódnak, e gondolatkör fontosságára felesleges szót vesztegetnem.

KÜRSCHÁK JÓZSEF következő két, sőt 1912-ig minden hosszabb értekezése éppen variációszámítási differenciálegyenletekkel foglalkozik. Ismertetésükre tudni kell, hogy VÁLYI GYULA 1880-ban, kolozsvári doktori értekezésében azzal a másodrendű parciális differenciálegyenlettel foglalkozott, mely egy kettős integrál variálásánál fellép, ha az integrálandó az ismeretlen függvénynek éppen csak két elsőrendű deriváltjától függ. Hogy csak egy példát mondjak, ez az eset a LAPLACE-féle differenciálegyenlettel kapcsolatban a kevéssé terhelt rugalmas hártya potenciális energiájánál. VÁLYI azt vizsgálta, hogy ez az egyenlet MONGE módszerével mikor s hogyan integrálható, vagyis megoldása úgynevezett első integrálok ismeretében legfeljebb egy integrálásra mikor vezethető vissza. KÜRSCHÁK JÓZSEF egyrészt kimutatja, hogy a variálandó integrálban a két független, sőt a függő változó is felléphet, ha — mint VÁLYI-nál — a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének kettős gyöke van, másrészt VÁLYI eredményeire jóval áttekinthetőbb úton és alakban jut. Sikerének titka a differenciálegyenletnek egy-egy VÁLYI választásánál célszerűbb átalakításában, úgynevezett *érintkezési transzformációjában* áll, s ha az itt szunnyadó mélyebb vonatkozást csak később fedi is fel, az alaki kérdésekben oly érzéket mutat, mely minden matematikai készsége közül később is — úgy vélem — a legkiemelkedőbbnek nevezhető.

1888-ban KÜRSCHÁK JÓZSEF a Rozsnyón töltött két év s néhány debreceni hónap után Pestre, az V. kerületi főreálhoz kerül, még ebben az évben középiskolai tanári, majd két év mulva bölcsész-, értsd matematika-fizika doktori oklevelet szerez. De álma csak 91-ben teljesül, amikor repetitorként a műegyetemre, KŐNIG GYULA mellé kerül. Még ez évben magántanárrá habilitál, 92-ben adjunktusi megbízást nyer s 93-ban mint a műegyetemre kinevezett beosztott középiskolai tanár megházasodik. Középiskolai matematikatanárának és igazgatójának leányát, MAYER RIZÁ-t veszi el, aki egész életét férje harmónikus életének, tanári és tudományos munkássága biztosításának szenteli. Hogy erre minő szükség volt, a következő kép mutatja.

91—97-ig KÜRSCHÁK JÓZSEF az Analizis I. folyamának *valamennyi* osztályra kiterjedő gyakorlatait tartja. 92-től ehhez a Matematika elemei című előadás, sőt 94-től a Geometria I. folyamának előadásai és gyakorlatai járulnak. Bár a heti óraszám így is 9—11 körül jár, KÜRSCHÁK JÓZSEF heti három órás magántanári előadásokat is hirdet s ezeket váltogatva a differenciálegyenletek, az algebrai alakok és számok köréből tartja meg. Az idősebb mérnöknemzedék még élénken emlékezik KÜRSCHÁK JÓZSEF-re, nemcsak mint világos, érthető s szorgalmas előadóra, de mint KŐNIG GYULA igen mélyen szántó előadásainak szélesebb kört megnyerő megvilágitójára s hasznos kiegészitőjére is.

Kevesebben tudják, hogy ez alatt KÜRSCHÁK JÓZSEF-nek négy hosszú, a körmérésről, az invariánsok elméletéről, az analitikus, majd az egészfüggvényekről írt pompás összefoglalása s HUNYADY JENŐ egyik determinánstételéhez fűződő dolgozata jelenik meg a megalakuló Matematikai és Fizikai Társulat lapjában, melynek egész életében legszorgalmasabb munkatársa volt.

Az elismerés nem késik, a 32 éves tudóst műegyetemünk 96-ban rendkívüli tanári címmel tünteti ki s a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagjává választja. A 97 március idusán a másodrendű parciális differenciálegyenletek egy osztályáról tartott székfoglaló előadás nemcsak azért említésre méltó, mert ebben KÜRSCHÁK JÓZSEF a variációszámítással kapcsolatban elért eredményeit kettőnél több független változóra általánosítja, hanem és főleg azért, mert a svájci HIRSCH eredményeire támaszkodva, tételei megfordíthatóságát is kimutatja s igy bizonyos keretben a *variációszámítás inverzióját* is tárgyalja.

Csak két év, öt kisebb dolgozat és a komplex gammafüggvényről írt összefoglalás választja el ez előadást KÜRSCHÁK JÓZSEF-nek a variációszámításról írt egyik kiemelkedő dolgozatától, melyben HIRSCH említett eredményei alapján kimutatja, hogy *variációs problémák másodrendű differenciálegyenletei érintkezési transzformációval szemben is variációs problémák differenciálegyenletei maradnak.*

KÜRSCHÁK JÓZSEF «majdnem kétségtelennek» tartja, hogy e tétel magasabb rend esetén is fennáll, de a szigorú bizonyítástól a bonyodalmas számítás visszatartja. Azt azonban már négy év mulva, 1903-ban leszögezi, hogy e tételből nemcsak DARBOUX ama tétele válik nyilvánvalóvá, mely szerint minden másodrendű *közönséges* differenciálegyenlet variációs feladat egyenlete, mert minden más másodrendű közönséges differenciálegyenletbe érintkezési transzformációval átvihető, hanem bizonyos MONGE—AMPÈRE-egyenletekre s így különleges esetként ezekre vonatkozó első vizsgálataira is fény derül.

Műegyetemi tevékenységére visszatérve azt látjuk, hogy KÜRSCHÁK JÓZSEF 1897 és 1902 között a Geometria II.-től akkor különálló Analizis II. folyamát és az ekkor elkülönülő építészek és vegyészek Analizis és geometria előadását tartja. A függvénytan, a differenciálegyenletek s a projektív geometria köréből hirdetett különleges előadásokkal a heti óraszám még mindig 10—11 körül jár. Csak 1902-ben enyhül a helyzet, amikor KÜRSCHÁK JÓZSEF mint 1900-ban kinevezett nyilv. rendkívüli tanár véglegesen az Analizis és geometria I. folyamát veszi át, melybe az építészek és vegyészek tíz évre újból bekapcsolódnak.

Az anyag — egyváltozós valós és részben komplex analízis, lineáris algebra, sík és térbeli metrikus és projektiv geometria — akkoriban teljesen heterogén s igy különbözőképpen csoportosítható volt. Kürschák József, aki a problémák önálló vizsgálatát kedvelte, a csoportosítást évről évre váltogatta, sokszor — harmincöt év alatt bizonyára a változatosság után szomjúhozva — egy csoport fejezeteit is szétszórta. Az, hogy előadásai üdeségüket végig megtartották, valamint sok kérdés és tétel változó beállitásban is beváló eredeti megvilágítást és bizonyítást nyert, nem kis mértékben ennek köszönhető.

Kürschák József az alapfogalmakat és domináló tételeket élesen kidomborította, a mélyebb, tisztán matematikai érdekű átmeneteket tompította a nélkül, hogy pongyolaságokba, látszatbizonyításokba tévedt volna. Műszaki példákat nem adott, mert ezekre magát illetékesnek, elsőéves hallgatóságát érettnek nem tartotta. A tiszta matematikában maradva *matematikai gondolkodásra* nevelt. A többit az irodalom forgatására bízta. A túlterheléstől nálánál jobban senki nem óvakodott. Elve az volt, hogy keveset, szabatosan, világosan és mindenekfelett öntevékenységre serkentően tanítsunk. «A tudományból — mondotta — magam is igazán csak azt értettem meg, amit önállóan átgondoltam, vagy egy, ha szerény lépéssel is, előbbrevittem».

Előadásai mellett Kürschák József a század első éveiben a két Bolyai műveinek újabb kiadásánál segédkezik, Paul Stäckel-lel együtt Bolyai János-nak a prioritásban vele osztozó Nicolaj Lobacsevskij vizsgálataira vonatkozó, érdekfeszitő észrevételeit publikálja, erősen megrostálva és bő magyarázatokkal ellátva, végre Kőnig Gyula monografikus nagy művének sajtó alá rendezésében vesz részt a mester idősebb tanítványával, Rados Gusztáv-val együtt, kit tisztelettel és szeretettel üdvözlünk körünkben.

A nagy elfoglaltság ellenére három rövid dolgozatra is marad idő. Egyről meg kell emlékeznünk.

Korunk princeps mathematicoruma, a Magy. Tud. Akadémia Bolyai-nagydijának nyertese, David Hilbert a geometria alapjairól 1899-ben megjelent híres ünnepi iratában az euklidesi geometria sarkigazságait öt csoportban kristályositotta ki s megvizsgálta, hogy egy elemi geometriai igazság igazolására minő sarkigazságok, feltételek, szerkesztéseknél segédeszközök szükségesek.

Az, hogy *valamennyi* axiómát szükségképpen igénybevevő szerkesztéseknél a *vonalzó és körző* elégtelen, — gondoljunk itt a kocka kettőzésére, a szög harmadolására vagy a kör négyzetesítésére — a 19. században bebizonyosodott. Hogy a vonalzót a körző pótolja, azt Mascheroni 1797-ben, újabb felfedezés szerint Mohr, a dán Euklides, már 1672-ben kimutatta. 1843-ban Steiner azt a régi sejtést is igazolta, hogy a vonalzó és körzővel végezhető szerkesztéseknél *a vonalzó mellett a körző*, tehát a sík valamennyi pontja körül valamennyi sugárral megrajzolt körök serege, *egy pont körül egyetlen sugárral rajzolt körrel* pótolható.

Hilbert említett művében többek között kimutatta, hogy a folytonossági axiómákra nem támaszkodó szerkesztéseknél *vonalzó mellett* a minden körzőtáskában található kéttűs *mérőkörzővel*, tehát a puszta távolságátrakóval is megelégedhetünk a nélkül, hogy e két eszköz a többi szerkesztéseknél a vonalzót és körzőt pótolhatná.

Kürschák József mármost 1902-ben, egy másféloldalas dolgozatában megállapitja, hogy *a vonalzó és a tetszésszerinti nyílású*, tehát csuklós *mérőkörző, pusztán vonalzóval és egyetlen egy nyílású*, tehát merev *mérőkörzővel pótolható*. Mivel a geometria hilberti bibliájának azóta megjelent hat kiadásából minden matematikus ezt, felfedezőjének nevével együtt, előbb-utóbb megtanulja, Kürschák József legismertebb eredményének nevezhetjük.

Nem tudom, gondolt-e Kürschák József arra a hasonlóságra, mely a vonalzó melletti valamennyi kör s a vonalzó melletti Steiner-kör, tehát *egy középpont* körül *egy sugárral* megrajzolt kör esetével mutatkozik. Azt hiszem, nem, mert azt, hogy a Hilbert-féle szerkesztések vonalzóval és az egyetlen nyilású mérőkörzőnek a sík *egyetlenegy pontja* körül való használatával is elvégezhetők, csak kilenc év mulva a német VAHLEN állapította meg. De hogy KÜRSCHÁK JÓZSEF erre az újabb egyszerűsítésre is súlyt fektetett, az egy 1930-ban írt dolgozatából kiderül. Ebben a 28 éve szunnyadó kérdésre visszatér és a dán HJELMSLEV legújabb vizsgálatait taglalja, melyek nemcsak a folytonosság, hanem a párhuzamosság axiómájától is független s így a nem euklidesi, például a BOLYAI-geometriában is előforduló szerkesztésekkel foglalkoznak. A vonalzó s a KÜRSCHÁK-féle egynyílású mérőkörző HJELMSLEV szerint ezeknél is elegendő. Nyitva marad mindenesetre az a kérdés, — s ezt KÜRSCHÁK JÓZSEF fel is veti — lehet-e a vonalzó mellett az egynyílású mérőkörzőnek egy pont körül való alkalmazásával ezeknél a szerkesztéseknél is megelégedni.

1904-ben, negyvenéves korában KÜRSCHÁK JÓZSEF, mint a műegyetemen felállított új, III. matematikai tanszék nyilvános rendes tanára, működésének legjelentősebb, csak a világháború kitörésével lezáródó korszakába lép. Ez időszakban — melyre 1906—1909 a vegyészmérnöki és egyetemes osztály dékánságának tisztje is esik — 14 értekezése és JACQUES HADAMARD-ral, az Institut tagjával a matematika francia enciklopédiájába a számtestek és algebrai sokaságok általános tulajdonságairól (LANDSBERG német cikke nyomán) írt ismertetése jelenik meg. Ez időszak elejére és végére esik továbbá egy-egy emlékbeszéd, az első HERMITE-ről. a nagy francia kültagról az Akadémián, a második KŐNIG GYULÁ-ról, a szeretett mesterről a műegyetemen.

A dolgozatok közül először azt kell kiemelnem, amelyben KÜRSCHÁK JÓZSEF a már említett HIRSCH egyik érdekes, de különleges esetekre szorítkozó értekezése alapján annak szükséges és elegendő feltételét állapítja meg, hogy egy n-változós másodrendű parciális differenciálegyenlet éppen variációs feladat egyenlete legyen.

Egy, a szimmetrikus mátrixokra vonatkozó dolgozata alapján KÜRSCHÁK JÓZSEF az ilyen egyenletek többtagújának, valamint a variálandó integrál integrálandójának, tehát mechanikai problémáknál a kinetikai potenciálnak szerkezetére is fényt derít. Az általánosított kinetikai potenciál feltételeiről szóló következő dolgozatában vizsgálatai első részét HIRSCH egy másik értekezéséhez fűződően, több ismeretlen függvényt tartalmazó másodrendű parciális differenciálegyenletek rendszerére általánosítja.

1902 óta KÜRSCHÁK JÓZSEF a Hollandiában megjelenő Revue semestrielle des publications mathématiques magyar munkatársa is. Tudományos és munkatársi érdemei elismeréseként a németalföldi tudományos társaság 1907-ben tiszteleti tagjává választja. Nagy nemzetközi sikerét azonban csak öt év mulva, alapgondolatában, eszközeiben és eredményeiben egyaránt legkiemelkedőbb értekezésével éri el, melyet «Az abszolút érték fogalmának általánosítása» címmel 1912 március 18-án az Akadémián, majd találóbban «Határértékképzés és általános testelmélet» cím alatt a cambridgei nemzetközi kongresszuson is bemutatott.

Legyen szabad a műegyetemi bevezető előadásaiból közvetlenül az élő tudomány mélyére szántó KÜRSCHÁK JÓZSEF-et e dolgozat hátterének és alapgondolatának kidomborításával bemutatnom.

A matematika elemeiben az 1, 2, 3,... természetes számok körét lépésről lépésre újabb számok, a zérus, a negatív egész és a törtszámok hozzácsatolásával tudvalevően a racionális számok tartományára bővítjük úgy és azért, hogy az összeadás és szorzás értelmezése után ezek megfordíthatóságát, másszóval ismert együtthatójú elsőfokú, egyismeretlenű egyenletek megoldhatóságát biztosítsuk.

Az algebra művelői nem is olyan régen észrevették, hogy ez eljárás konzekvens folytatása abban áll, hogy a racionális számok körét is újabb elemek adjungálásával az úgynevezett *algebrai számok* tartományára zárjuk le, melyben minden racionális együtthatójú s egyismeretlenű algebrai egyenlet megoldhatóságát, többtagújának elsőfokú tényezőkre való bonthatóságát biztosíthatjuk. Az így előálló bővitést *algebrai lezárásnak* nevezik. Neves előfutárok, különösen DEDEKIND és HENSEL után a német STEINITZ

1910-ben mindama sokaságok, úgynevezett *testek* algebrai lezárhatóságát is kimutatta, melyeknek elemei között — tartalmi jelentésüktől teljesen absztrahálva — a racionális számok összeadására, szorzására s e két művelet egyértelmű megforditására *alakilag* emlékeztető kapcsolatok állanak fenn.

Kürschák József nyomban megállapította, hogy Steinitz eljárása, tisztán algebrai szempontokat követve, a legegyszerűbb esetben a szokott útról letért.

A geometria és a mérés szempontjaiból két és félezer éves utat követve, ugyanis az analízis elemeiben a racionális számok körét először az irracionális számok bevezetésével a valós számok algebrailag részben tág, részben szűk tartományára bővítjük s a képzetes számok bevezetésével a komplex számok tartományára csak ezután zárjuk algebrailag le.

Steinitz klasszikus dolgozata után két évvel Kürschák József éppen azt mutatta meg, hogy az abszolút érték, az összetartás s a határérték fogalmainak megfelelő általánositásával absztrakt testekre ez az eljárás is minden ízében átvihető.

Az első lépésnél, az irracionális számok bevezetésénél ugyanis 1872 óta megállapitjuk, hogy minden racionális szám, azaz véges vagy szakaszos végtelen tizedestört, ugyanily számok (például kerekített értékeik) összetartó sorozatának határértéke, de fordítva racionális számok számos összetartó sorozata, mint például egy nem szakaszos tizedestört kerekített értékeinek sorozata, racionális számhoz nem tart. Azzal, hogy ezeknek is határértéket tulajdonitunk, éppen új, úgynevezett irracionális számokat értelmezünk, amelyeknek a racionális számokhoz való csatolásával a valós számok tartományára jutunk. Ez már *perfekt*, teljes a szó olyan értelmében, hogy minden összetartó sorozatának van határértéke. Ez a lépés, mint látjuk, az összetartás, a határérték s így a távolság vagy abszolút érték fogalmára támaszkodik. Általánosítása tehát ezek általánositását követeli meg.

Kürschák József mármost megállapitja, hogy minden, általa *értékelhetőnek* nevezett test, vagyis olyan, amelynek elemeire az abszolút érték additiv és multiplikatív tulajdonságaival biró, valós, nem negativ függvény: az elemek úgynevezett *értékelése* értelmezhető, esetleg új elemek hozzácsatolásával először *perfektté*, azután *algebrailag zárttá*, végre egy olyan *értékelt* testté egészíthető ki, mely perfekt és algebrailag zárt, minden szót a most már kézen fekvő általánositott értelemben véve.

A legnagyobb nehézséget itt az algebrailag lezárt test értékelése okozta. A Kürschák-*féle értékelés* éppen olyan, — mint Ostrowski később kimutatta, az egyetlen — mely a perfekt értékelt test algebrai kibővítésénél a régi elemek értékelését nem módosítja. A viszonyok finomságát az mutatja, hogy Ostrowski szerint az értékelt *nem perfekt* test bármely algebrai kibővítését is lehet e permanencia-tulajdonsággal értékelni, de itt már a kibővített test — meghatározható összes — értékelése különféleképp történhet.

Lehetetlen Kürschák József e ma már *klasszikusnak* tekintett munkájának nagy, s napról napra növekvő hatását ismertetnem. A multat illetően csak a kezdettől fogva legérdemesebb továbbfejlesztőnek, a Baselben működő Ostrowski-nak a Mathematische Zeitschrift 1935. évi kötetében megjelent 140 oldalas munkájára hivatkozom s a jelenben Mahler-nek az Acta Mathematicában folyó közleménysorozatára utalok, mely a Kürschák-féle értékelést pseudoértékelés néven közelfekvően módositva, a testeket is átfogó, *gyűrűk*-nek nevezett sokaságokra általánosítja s e fogalom messzemenő alkalmazását helyezi kilátásba.

De térjünk vissza a világháború éveire, amelyek fegyverzörejében Kürschák József múzsája is csak egyszer, 1914-ben, az Akadémia rendes tagjává való választást követő székfoglaló értekezésben szólal meg. Ez a kettős integrálok variálásánál fellépő differenciálegyenletek azonos eltűnésével, másszóval azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy bizonyos értelemben különböző variációs feladatok megoldása mikor azonos. Az egyszeres integráloknál Euler-re visszamenően ismert tételt 1906-ban Koenigsberger, Kőnig Gyula egyik mestere igyekezett általánosítani, de a helyes nyomra először Kürschák József bukkan. Teljesen még az ő eredménye sem megnyugtató s így nyolc év mulva a szegedi Actában a kérdésre újból visszatér, sőt — beszélgetéseiből tudom — halálos betegsége előtt is ez a kérdés foglalkoztatja.

1916-ban emelkedik Kürschák József a műegyetem rektori székébe. A rektorok díszes sorában ő az első, aki a Rector Magnificus címet viselheti. Rektori beszédében egy aerodynamikai tanszék felállítását először ő sürgeti. Az a fáradozása, melyet a Temesvárra, majd Kassára tervezett műegyetem ügyében kifejtett, sajnos, veszendőbe ment.

Ez időszaknak egy szép eredménye mégis megmaradt, az Analizis és analitikus geometria 1920-ban megjelent, két kiadást megérő első kötete, melyet Kürschák József hallgatóinak szánt, de később ezek igényeitől eltérőnek, a maga előadási szabadságában gátlónak talált s így szaktársai elismerése s biztatása mellett sem folytatott.

A gyászos idők elmultával Kürschák József kutató kedve lassan visszatért. Élete utolsó 13 évére tíz dolgozat, két történeti áttekintés és két, a Bolyai-ak centennáriumával kapcsolatos előadás esik. Ez időszak egyik jelentős eredménye az irreducibilis formákról írt értekezés, mely Bauer Mihály és a svájci Dumas tételeit összefoglalva általánosítja. Másik nevezetes terméke a «Matematikai Versenytételek» kötete, melyben Kürschák József a Matematikai és Fizikai Társulat 32 éven át tartott tanulóversenyeinek anyagát gyüjti össze. Az egykor díjnyertes megoldásokat megrostálja, nagyrészben újakkal pótolja s oly ragyogó jegyzetekkel látja el, melyek a tudományos vizsgálatokkal fennálló kapcsolatokba, sokszor a matematika egy egész ágába is nagyszerű betekintést nyujtanak.

Ez a munka maradandó jele annak az állandó s meleg érdeklődésnek is, melyet Kürschák József az elemi matematika s oktatása iránt mutatott, melynek érdekében mint a Középiskolai Tanárképző Intézet és a Tanárvizsgáló Bizottság, nemkülönben a Közoktatási Tanács tagja, több mint két évtizeden át annyit fáradozott. Utolsó vágya az volt, hogy nyugalomba vonulva is mint az Akadémia 1931-ben megválasztott osztálytitkára a Matematikai és Természettudományi Értesítőt szerkessze s a tanárjelölteknek tudománya kedvelt ágaiból előadásokat tarthasson.

Kürschák József, akiről eddig sub specie aeternitatis emlékeztünk meg, nekünk, tanár és tudós mellett több, megértő, jóakaratú, melegszivű embertársunk is volt. A sors kegye, mely sikerekkel elhalmozta, magas polcra emelte, a problémák ötletszerű meglátásával és megoldásával megáldotta, aranyos derűvel áradt ki egyéniségéből. Ez a derű és boldogság lelkének és szellemének fiatalságát, csodálatraméltó rugalmasságát halálos ágyáig megőrizte. Így a fiatalságnak is mindvégig lelkes barátja maradt, eszméit és törekvéseit mindenkor megértette és felkarolta. Minden jóért és szépért lelkesedett. Reformokért ennek ellenére nem harcolt, mert az erőszakot nem szerette s a jó és helyes, az igaz előbb-utóbb való diadaláról meg volt győződve.

Csak egybe, hazánk feldarabolásába, nem tudott beletörődni. Megszállott területre ezért nem lépett, bár a felvidékhez származása, kezdő tanári éveinek emléke, sőt Pozsonyban működő egyetlen testvére fűzte.

De munkás életében Német- és Franciaországban, Angliában, Svájcban és Hollandiában, sőt Dél-Afrikában megjelent cikkeivel minden határon áttört s a tudományban magának méltó helyet biztosított.

Így vált Kürschák József, az elvont matematikus, egyetemes és nemzeti értékünkké, kinek szobra oszlopcsarnokunkat egykor bizonyára díszíteni fogja.

Stachó Tibor.

JOSEF KÜRSCHÁK.

1864—1933

Gedenkrede über den, durch seine Bewertungstheorie bekannten, am 26. März 1933 gestorbenen ungarischen Mathematiker. Gehalten am 3. Mai 1936 a. d. kgl. ungarischen Universität für Technische- und Wirtschaftswissenschaften von

Tibor von Stachó.

JELENTÉS AZ 1936. ÉVI KŐNIG GYULA-JUTALOMRÓL.

A nyolcadik Kőnig Gyula-jutalom odaítélése ügyében a Választmány a következő Bizottságot küldötte ki. Elnök: Fejér Lipót, tagok: Egerváry Jenő, König Dénes, Szűcs Adolf és Lipka István. A Bizottság egyhangúlag úgy határozott, hogy a jutalmazásra dr. Kalmár László-t, a szegedi Ferencz József Tudományegyetem magántanárát, egyetemi adjunktust ajánlja a Választmánynak. Alulirottnak jutott az a ránézve igen megtisztelő feladat, hogy a kitüntetésre ajánlottnak munkásságát jelentés keretében ismertesse. Alulírott e feladatot örömmel vállalta, mert Kalmár László-nak immár egy évtizedre terjedő munkássága bővelkedik fontos és érdekes eredményekben, és így a velük való foglalkozás sok tanulsággal is jár. Ő sokoldalú matematikus és produkciói nem korlátozódnak a matematika valamely speciális fejezetére. Nagy tudásával a matematika bármely területén otthonosan mozog és erős kritikai érzékével a lényegest a lényegtelentől könnyen szétválasztva, megtalálja a problémák megoldásának legrövidebb útját. Eredményei a tiszta matematika következő ágaiba tartoznak: függvénytan, analitikus számelmélet, algebra, halmazelmélet, matematikai logika. De térjünk rá Kalmár László matematikai munkáinak ismertetésére.

Legelső dolgozata, amely doktori értekezése, függvénytani tárgyú. Megjelent a Matematikai és Fizikai Lapok 36-ik kötetében, címe: Az interpolációról. E tartalmas dolgozat az interpoláló eljárások körébe vágó következő problémával foglalkozik: Legyen C egy megadott Jordan-görbe az x komplex síkban. Tekintsünk a C görbén n_1 számú, egymástól különböző pontot és legyenek ezek $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}) = P_1$. Hasonlóképpen jelentsen $P_2 = (x_1^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)})$ n_2 számú a C görbén fekvő, egymástól különböző pontot, és így tovább, általában jelentsen $P_k = (x_1^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)})$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ n_k számú, egymástól különböző pontot a C görbén. $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ legyenek olyan természetes számok, amelyek eleget tesznek a $\lim_{k=\infty} n_k = \infty$ feltételnek. x-nek minden a C görbe zárt belsejében reguláris $f(x)$ függvényéhez megalkotjuk az $L_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ polinom sorozatot, ahol $L_k(x)$ az $f(x)$ függvényt az $x_1^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$ helyeken interpoláló Lagrange-féle polinom, tehát

$$L_k(x) = \sum_{i=1}^{n_k} \frac{f(x_i^{(k)})}{x - x_i^{(k)}} \frac{\omega_k(x)}{\omega_k'(x_i^{(k)})}, \quad \omega_k(x) = \prod_{i=1}^{n_k} (x - x_i^{(k)}).$$

A kérdés most már az, vajjon választható-e a

$$P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots \tag{I}$$

sorozat egyszersmindenkorra úgy, hogy a $\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x)$ egyenlet a C görbe zárt belsejében egyenletesen fennálljon? E problémát Fejér Lipót oldotta meg és eredménye a következő: Tekintsük azt a $z = \varphi(x)$ függvényt, amely a C görbe külsejét a $|z| > r$ körkülsőre képezi le kölcsönösen egyértelműen és konformisan, továbbá, amely az $x = \infty$ helyen a $\lim \frac{\varphi(x)}{x} = 1$ feltételt kielégíti. A konform ábrázolás elmélete szerint ezt a $\varphi(x)$ függvényt és r sugarat az előbbi feltételek egyértelműen meghatározzák, továbbá a $\varphi(x)$ függvény folytonos a C görbén. A $\varphi(x)$ leképezés vigye át a C görbén fekvő $x_1^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$ pontokat a $z_i^{(k)} = \varphi(x_i^{(k)})$ pontokba $(k=1, 2, 3, \ldots, i=1, 2, \ldots, n_k)$ és jelentse σ a $|z| = r$ kör valamely tetszésszerinti γ ívének a hosszát. A $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_{n_k}^{(k)}$ helyek közül essék ν_k számú a γ ívre. Most már Fejér tétele azt mondja, hogy ha $\lim_{k=\infty} \frac{\nu_k}{n_k} = \frac{\sigma}{2\pi r}$, akkor a $\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x)$ egyenletesen fennáll a C görbe zárt belsejében. Tehát az iménti feltétel elégséges ahhoz, hogy az (I) alatti sorozat ú. n. «jól interpoláló» sorozat legyen. Kalmár disszertációjában bebizonyítja, hogy a FEJÉR-féle feltétel nemcsak elégséges, hanem egyszersmind szükséges is ahhoz, hogy az (I) alatti sorozat jól interpoláló sorozat legyen. KALMÁR mély függvénytani meggondolásokkal jut el a következő általános érvényű formulához

$$\lim_{k=\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} G(z_i^{(k)}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(re^{i\vartheta})\, d\vartheta,$$

amely bármely a $|z| = r$ körön folytonos és valós $G(z)$ függvényre teljesül, ha az (I) alatti sorozat jól interpoláló sorozat. Ebből a formulából azután, WEYL egy tételének alkalmazásával levezeti a FEJÉR-féle feltétel szükségességét. KALMÁR-nak e szép eredményével WALSH amerikai matematikus nemrégen megjelent Interpolation and Approximation by Rational Functions c. könyvében részletesen foglalkozik.

Az analitikus számelméletet, ezt az utóbbi időben nagy népszerűségnek örvendő tudományágat is jelentős eredményekkel gazdagította KALMÁR. Egy igen általános tételt talált, amely bizonyos fajta DIRICHLET-sorok koefficiensösszegének a megbecslésére vonatkozik. Ebbe a témakörbe tartozó híres probléma az ú. n. prímszám-probléma, amely a $\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u}$ differencia becslésére vonatkozik, $\pi(x)$ jelentvén a pozitív x-nél nem nagyobb prímszámok számát. DE LA VALLÉE POUSSIN bebizonyította, majd később, sokkal egyszerűbben, LANDAU, hogy a következő függvény:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) - 1}{n^s} = -\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right),$$

— ahol $\zeta(s)$ a jól ismert RIEMANN-féle $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ függvény és $\Lambda(n) = \log p$, ha $n = p^k$ (ahol p prímszám és $k \geqq 1$), különben pedig $\Lambda(n) = 0$ — reguláris a

$$\sigma > 1 - \frac{c_1}{\log \operatorname{Max}(c_2, |t|)}, \; (s = \sigma + it), \; (c_2 > 1),$$

tartományban és ugyanott $|f(s)| < c_3 \log^{c_4} \operatorname{Max}(c_2, |t|)$. Ebből a tényből azután DE LA VALLÉE POUSSIN mély meggondolásokkal levezette az $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) - 1}{n^s}$ DIRICHLET-sor koefficienseinek részletösszegére vonatkozó következő megbecslést

$$\sum_{n \leqq x} \Lambda(n) = x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}), \tag{1}$$

amelyből végül parciális összegezéssel, könnyen adódik, hogy

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

KALMÁR idevonatkozó vizsgálatainak gerincét az a már előbb említett tétel képezi, amely alulról korlátos együtthatójú DIRICHLET-sorok koefficiensösszegének becslésére vonatkozik. E tétel segítségével az előbb említett DE LA VALLÉE POUSSIN-féle mély meggondolások alkalmazása nélkül adódik az (1) alatti formula. KALMÁR szóbanforgó tétele a következőképpen hangzik: Legyen az

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

DIRICHLET-sor a $\sigma > 1$ félsíkban konvergens és legyenek a sor koefficiensei alulról korlátosak. Alkalmazzuk $a(s)$-re a $P\left(-\frac{d}{ds}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m p_m \frac{d^m}{ds^m}$ differenciáloperátort és legyen a $\sigma > 1$ félsíkban

$$\left| P\left(-\frac{d}{ds}\right) a(s) \right| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m p_m \frac{d^m a(s)}{ds^m} \right| \leqq c\,|s|^{\varkappa}, \quad (\varkappa > 0)$$

ahol $P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m$, $p_m \geqq 0$, egy olyan nem konstans hatványsor, amely minden x-re konvergens, és ha x pozitív, úgy minden pozitív ε-ra: $P(x) = O(e^{\varepsilon x})$. Akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ DIRICHLET-sor koefficiens összegére áll a következő becslés

$$A(x) = \sum_{n \leqq x} a_n = O\left(\frac{x}{\{P(c \log x)\}^{2^{-[\varkappa+1]}}}\right)$$

minden c-re, amely < 1. Ha ebben a tételben $P(x)$ függvényt alkalmasan választjuk, akkor HARDY és LITTLEWOOD egy mély tételéből következik az x-nél kisebb prímszámok számára a következő LITTLEWOOD-féle aszimptotikus formula

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x . \log\log x}}\right),$$

amely a legutóbbi időkig a legélesebb ilyenfajta becslés volt.[1] Említésre méltó az a tény, hogy KALMÁR tételének alkalmazásával a következő gyengébb maradéktagbecslés:

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(xe^{-\sqrt[14]{\log x}}\right)$$

a komplex függvénytan módszereinek alkalmazása nélkül is levezethető és pedig az addig ismert legelemibb levezetésnél (LANDAU) is egyszerűbb módon. KALMÁR módszerében különösen az a meglepő, hogy a generátor-függvény analítikai folytathatóságát, a régebbi módszerekkel ellentétben, teljesen figyelmen kívül hagyja és ezáltal rövidebb úton jut célhoz.

További két dolgozatában, melyek szintén az analitikus számelmélet körébe tartoznak, az ú. n. factorisatio numerorum problémájával foglalkozik. Ez a probléma a PILTZ-féle osztóprobléma analogonja és a következőben áll: Legyen $n (\geqq 2)$ adott pozitív egész szám. Megállapítandó, hogy n hányféleképpen bontható fel 1-nél nagyobb egész számok szorzatára, a tényezők számának korlátozása nélkül. Két felbontás csak akkor számít azonosnak, ha bennük a tényezők sorrendje is meg-

---

[1] Újabban ugyanis CSUDAKOV a még ennél is élesebb

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(xe^{-(\log x)^c}\right) \quad \left(c > \frac{1}{2}\right)$$

becslést találta.

egyezik. Jelölje e különböző felbontások számát $f(n)$. Mivel az $f(n)$ számelméleti függvény nagyon szabálytalanul viselkedik, KALMÁR az $\frac{1}{n}[f(1)+f(2)+\cdots+f(n)]$ középértéket vizsgálja, vagy, ami ugyanaz, a $F(n)=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$ szummatorikus függvényt és a következő aszimptotikus formulához jut:

$$F(n)=-\frac{n^{\varrho}}{\varrho\zeta'(\varrho)}+O\left(n^{\varrho}e^{-\alpha\log\log n.\log\log\log n}\right),$$

ha

$$\alpha<\frac{1}{2(\varrho-1)\log 2},$$

ahol ϱ a $\zeta(s)=2$ egyenlet egyetlen pozitiv gyöke. Ehhez a formulához olyképpen jut el, hogy képezi az $f(n)$-hez tartozó $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\frac{1}{2-\zeta(s)}$ generátorfüggvényt és ennek viselkedését vizsgálja a $\sigma=\varrho$ egyenesen, WEYL-nek a diophantikus approximatiókra adott módszerét alkalmazva. Ezután az analitikus számelmélet szokásos módszereinek alkalmazásával jut el az előbbi formulához. Itt érdemes felemlíteni, hogy a CAUCHY-féle integráltétel alkalmazásában KALMÁR, a szokásos görbevonalú integrációs utat egy egyszerű fogással elkerüli. Megemlítendő még, hogy idevonatkozó vizsgálataiban a $\zeta(s)$ függvény néhány olyan tulajdonságát is megállapitja, mely önmagában véve is érdekes.

KALMÁR algebrai tárgyú dolgozatában a RUFFINI—ABEL-féle tétel bebizonyitásának egy különösen előadás céljára alkalmas egyszerűsítését adja. A RUFFINI—ABEL-féle tétel szerint az általános n-edfokú egyenlet nem oldható meg gyökjelekkel $n\geqq 5$ esetében. E tétel ismert bebizonyitása az algebrai megoldhatóság GALOIS-féle kritériuma alapján történik, hivatkozással arra a tételre, hogy az n elemű alternáló csoport $\mathfrak{A}_n$, $n\geqq 5$ esetében, egyszerű csoport. KALMÁR az utóbbi tételt a következő sokkal egyszerűbben bizonyítható tétellel pótolja: Legyen $\mathfrak{G}$ valódi invariáns alcsoportja a $\mathfrak{A}_n$ alternáló csoportnak; továbbá legyen p egy olyan páratlan prímszám, amely $\leqq n$. Akkor van $\mathfrak{A}_n$-nek olyan $\mathfrak{U}$ alcsoportja, amely a $\mathfrak{G}$ csoportot mint p indexű alcsoportot tartalmazza. Ebből a tételből nyomban következik, hogy $n \geqq 5$ esetében az $\mathfrak{A}_n$ csoportnak nincsen prímszám indexű invariáns alcsoportja, amint azt az algebrai megoldhatóság GALOIS-féle kritériuma megköveteli.

Hézagpótló KALMÁR-nak az a dolgozata, amely a halmazelmélet körébe tartozik és ezen belül a sakkhoz hasonló játékok elméletével foglalkozik. Ennek az elméletnek alapjait ZERMELO vetette meg, felismervén, hogy a játékban szereplő fogalmak (nyerő helyzet, legjobb húzás) pontos matematikai megfogalmazásra szorulnak. ZERMELO bebizonyította, hogy az olyan játékokban, ahol a lehetséges helyzetek száma véges n szám, egy nyerő helyzetből kiinduló játékos olyan taktikát követhet, mellyel legfeljebb n lépésben a játszmát megnyeri. Ebben a bizonyításban KŐNIG DÉNES egy hézagot talált. ZERMELO ugyanis hallgatólagosan kizárja bizonyos helyzetismétlődéseknek a lehetőségét. ZERMELO azután KŐNIG DÉNES egy idevonatkozó tételének alkalmazásával a hézagot áthidalta. KALMÁR megmutatja, hogy az eredeti ZERMELO-féle bizonyítás megfelelő kiegészítéssel szabatossá tehető és a végességi feltételek kiküszöbölésével az elmélet lényegesen tovább fejleszthető. Elemi halmazelméleti módszerekkel megmutatja, hogy nyerő helyzetben van olyan taktika, amely nyerésre vezet a helyzetek ismétlődése nélkül.

Rátérve most már azokra a vizsgálatokra, amelyeket KALMÁR az utóbbi években végzett, meg kell állapitanunk, hogy a matematika legfiatalabb ágát, a matematikai logikát gyarapította igen jelentős eredményekkel. A matematikai logika olyan problémákat fogalmaz meg matematikailag szabatos formában és old meg a matematika módszereinek alkalmazásával, továbbá alkalmaz a matematika felépítésére, amelyeket régebben a logika körébe utaltak. Sajnos, e szép és fontos tudományágat aránylag csak kevés matematikus műveli és ismeri, ezért talán nem lesz céltalan, ha jelentésünkben annak lényegét és célkitűzéseit röviden vázoljuk. Kezdjük a matematikai logika elemi részével az ú. n. állítás-kalkulussal (Aussagenkalkül). A klasszikus logika szerint bármely állításunknak van valamilyen logikai értéke és pedig az állítás, vagy «igaz«, vagy «hamis». E kétféle logikai érték «igaz», illetőleg «hamis», jele $\uparrow$, illetőleg $\downarrow$. Például, ha az $a|b$ (a osztója b-nek) állítás logikai értékét $(a|b)$-vel jelöljük, akkor $(2|4)=\uparrow$ és $(2|3)=\downarrow$. Az állítások többféleképpen összekapcsolódhatnak és ezáltal új állítások keletkezhetnek. Például a következő két «igaz» állítást: $2|4$, $3|6$ egybekapcsolom akkor, amikor azt állítom, hogy $2|4$ és $3|6$, vagy jelben $2|4\ \&\ 3|6$. Nyilvánvaló, hogy $(2|4\ \&\ 3|6)=\uparrow$, ezzel szemben $(2|3\ \&\ 2|4)=\downarrow$, $(2|6\ \&\ 2|3)=\downarrow$, $(2|3\ \&\ 3|5)=\downarrow$. Itt tulajdonképpen mindig két logikai érték kapcsolódott össze és pedig formulákban kifejezve a következőképpen: $\uparrow\ \&\ \uparrow=\uparrow$, $\downarrow\ \&\ \uparrow=\downarrow$, $\uparrow\ \&\ \downarrow=\downarrow$, $\downarrow\ \&\ \downarrow=\downarrow$. Utóbbi formulák a logikai értékekre egy operációt definiálnak, melynek neve: *konjunkció*. A konjunkción kívül, a klasszikus logika fogalmainak megfelelőleg, még négy más logikai operációt is definiálunk. Ezek az operációk: a negáció, implikáció, diszjunkció, ekvivalencia. Legcélszerűbb a két: $\uparrow$, $\downarrow$ logikai értéket egy kételemű halmaznak $\{\uparrow, \downarrow\}$ tekinteni és az operációkat e halmazon definiált olyan függvényeknek tekinteni, amelyeknek argumentumai logikai értékeket vesznek fel s a függvényértékek szintén logikai értékek. Eszerint például a konjunkció egy kétváltozós függvény, amely a négy helyen felvett értékkel meg van határozva. A *negáció* egyváltozós függvény, jele: $\bar{A}$ (nem A), ha $A=\uparrow$ (például $A=(2|4)$), akkor $\bar{A}=\downarrow$ és ha $A=\downarrow$ (például $A=(2|3)$), akkor $\bar{A}=\uparrow$. A többi operáció kétváltozós, jele és definíciója a következő:

Implikáció. Jele $A\rightarrow B$ (ha A akkor B). Definíciója: $\uparrow\rightarrow\uparrow=\uparrow$, $\downarrow\rightarrow\uparrow=\uparrow$, $\uparrow\rightarrow\downarrow=\downarrow$. $\downarrow\rightarrow\downarrow=\uparrow$.

Például $\underbrace{(2|4\ \&\ 3|6)}_{\uparrow}\rightarrow\underbrace{(2|6)}_{\uparrow}=\uparrow$, $\underbrace{(2|3\ \&\ 3|6)}_{\downarrow}\rightarrow\underbrace{(2|6)}_{\uparrow}=\uparrow$ stb., általában $(a|b\ \&\ b|c)\rightarrow(a|c)$.

Diszjunkció. Jele: $A\vee B$ (A vagy B). Definíciója: $\uparrow\vee\uparrow=\uparrow$, $\downarrow\vee\uparrow=\uparrow$, $\uparrow\vee\downarrow=\uparrow$, $\downarrow\vee\downarrow=\downarrow$.

Például $\underbrace{(2|4)}_{\uparrow}\vee\underbrace{(3|6)}_{\uparrow}=\uparrow$, $\underbrace{(2|3)}_{\downarrow}\vee\underbrace{(3|5)}_{\downarrow}=\downarrow$ stb.

Ekvivalencia. Jele: $A \sim B$ (A ekvivalens B-vel). Definíciója: $\uparrow \sim \uparrow = \uparrow$, $\downarrow \sim \uparrow = \downarrow$, $\uparrow \sim \downarrow = \downarrow$, $\downarrow \sim \downarrow = \uparrow$.

Például $(2|4) \sim (3|6) = \uparrow$, $(2|4) \sim (3|5) = \downarrow$, $(2|3) \sim (3|5) = \uparrow$
$\uparrow \sim \uparrow = \uparrow$ $\uparrow \sim \downarrow = \downarrow$ $\downarrow \sim \downarrow = \uparrow$.

Most már, ha véges számú logikai változót az imént definiált operációk segítségével valamiképpen összekapcsolunk, akkor egy logikai formula keletkezik. Például $\big(A \sim (\overline{B \vee C})\big) \rightarrow \big((B \,\&\, C) \rightarrow A\big)$. A formula keletkezési módját megfelelő zárójelezéssel tüntetjük fel. Ilyen módon megalkottunk egy kalkulust (állítás-kalkulus), mely nagymérvű analógiát mutat az algebrával. Elég például csak arra utalnunk, hogy itt is érvényes például a következő kommutatív törvény: $A \,\&\, B = B \,\&\, A$, a következő asszociatív törvény: $A \,\&\, (B \,\&\, C) = (A \,\&\, B) \,\&\, C$, vagy például a következő két disztributív törvény: $(A \,\&\, B) \vee C = (A \vee C) \,\&\, (B \vee C)$, $(A \vee B) \,\&\, C = (A \,\&\, C) \vee (B \,\&\, C)$. Egy olyan $\mathfrak{A}$ logikai formulát, melyre mindig fennáll, hogy $\mathfrak{A} = \uparrow$ bármilyen logikai értékeket helyettesítünk is a benne fellépő változók helyébe, azonosságnak nevezünk, például $A \rightarrow A$. Azt, hogy egy formula azonosság-e, nyilván el lehet dönteni véges számú lépéssel. Az állításkalkulusnak egyik fontos problémája az, hogy létezik-e véges számú olyan azonosság, melyekből bármely azonosság véges számú *helyettesítés*sel és *leválasztás*sal levezethető. Helyettesítésnek nevezzük azt a műveletet, mikor egy $\mathfrak{A}$ formulában egy bizonyos változó helyébe egy $\mathfrak{B}$ formulát írunk be. Leválasztásnak nevezzük azt a műveletet, amikor a következő két formulából: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ a $\mathfrak{B}$ formulát származtatjuk. A helyettesités nyilván azonosságot azonosságba visz át, a leválasztás pedig két azonosságból, azonosságot választ le. Az imént említett problémára a felelet igenlő és ezért azt mondjuk, hogy az állítás-kalkulus axiomatizálható. Az alap-azonosságok, amelyekből a többiek levezethetők (helyettesitéssel és leválasztással), az axiomák. KALMÁR az állítás-kalkulus axiomatizálhatóságára vonatkozó tételnek egy, az eddigieknél sokkal egyszerűbb és kényelmesebb bizonyítását adja.

A matematikai logika felsőbb része, az ú. n. függvénykalkulus, logikai függvényekkel, azaz olyan egy- vagy többváltozós függvényekkel foglalkozik, amelyek egy tetszőleges J halmazon (tárgy-tartomány) vannak definiálva és értékeik logikai értékek. Ilyen logikai függvény például $(x|y)$, amely az egész számok halmazán van definiálva. Ezekre a logikai függvényekre a logikai operációkon kívül alkalmazhatunk ú. n. *kvantifikátorokat*. Ezek bizonyos függvényoperációk: eredményük oly függvény, amely eggyel kevesebb változót tartalmaz (egy változót «lekötnek»), hasonlóan, mint ahogy például $\int_0^1 f(x)\,dx$ nem függ x-től. A függvénykalkulus a következő két kvantifikátorral foglalkozik: (x) («minden x-re») és (Ex) («van olyan x, melyre»); definíciójuk: $(x)F(x) = \uparrow$ vagy $\downarrow$ a szerint, amint minden J-be tartozó x-re $F(x) \equiv \uparrow$, vagy nem; $(Ex)F(x) = \downarrow$ vagy $\uparrow$ a szerint, amint $F(x) \equiv \downarrow$ minden J-be tartozó x-re, vagy nem. Véges számú logikai függvényből logikai operációk és kvantifikátorok alkalmazásával keletkező kifejezést formulának nevezzük; különösen fontosak azok a formulák (Zählausdruck), amelyekben minden változó le van kötve. Ezek értéke csak J és a formulában szereplő függvények választásától függ. Azonosságnak nevezünk egy ilyen $\mathfrak{A}$ formulát, ha az J tartomány és az $\mathfrak{A}$-ban szereplő logikai függvények *bármely* választásánál $\mathfrak{A} = \uparrow$; kielégíthetőnek, ha J és a logikai függvények *választhatók* úgy, hogy $\mathfrak{A} = \uparrow$ legyen. Itt már nincs közvetlenül adva oly véges számú lépésből álló eljárás, amellyel eldönthető, vajjon egy adott formula azonosság-e; ily eljárás keresése alkotja a függvénykalkulus legfontosabb problémáját, az ú. n. eldöntés-problémát. Minthogy $\mathfrak{A}$ akkor és csak akkor azonosság, ha $\overline{\mathfrak{A}}$ nem elégíthető ki, azért az eldöntés-probléma így is fogalmazható: keresendő oly eljárás, amivel eldönthetjük bármely formuláról, vajjon kielégíthető-e. Az eldöntés-probléma ebben a fogalmazásában, mint speciális esetet magában foglalja egy axiómarendszer ellenmondásmentességének a problémáját is. KALMÁR idevonatkozó vizsgálatai egyrészt az eldöntés-probléma redukciójával, másrészt annak speciális esetben való megoldásával foglalkoznak.

Löwenheim megmutatta, hogy az eldöntés-problémát elegendő lenne binér formulákra megoldani, azaz olyanokra, melyekben legfeljebb kétváltozós logikai függvények fordulnak elő. A Löwenheim által konstruált binér formulákban, azonban mindig fellép az ú. n. fix «identitás függvény» : $I(x, y)$. $I(x, y) = \uparrow$ vagy $\downarrow$ a szerint, amint x és y ugyanaz az eleme J-nek vagy nem. Kalmár megmutatta, hogy ez az indokolatlanul fellépő identitás-függvény kiküszöbölhető, amennyiben bebizonyította, hogy minden az identitás-függvényt tartalmazó $\mathfrak{A}$ binér formulához konstruálható egy olyan $\mathfrak{B}$ szintén binér formula, amely nem tartalmazza az identitás-függvényt, továbbá, ha $\mathfrak{A}$ egy K tartományban kielégíthető, akkor $\mathfrak{B}$ is kielégíthető egy bizonyos L tartományban és megfordítva. Egy későbbi dolgozatában Kalmár a Löwenheim-féle konstrukciót egy egyszerűbbel helyettesíti. Az eldöntés-probléma redukciós elméletébe tartozik még Kalmárnak a következő tétele is: Egy tetszésszerinti formula kielégíthetőségének kérdése visszavezethető olyan formula vizsgálatára, mely egyetlen függvényváltozót tartalmaz és praefixuma a következő alakú

$$(Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_m)(x_{m+1})(x_{m+2})(Ex_{m+3})(x_{m+4})(x_{m+5})\ldots(x_n).$$

A formula praefixumán a következőt értjük: A matematikai logika egyik tétele szerint bármely formula olyan normálalakra hozható, amelyben a kvantifikátorok mind a formula elején állnak, negáció nélkül. A kvantifikátorok e sorozatát a formula praefixumának nevezzük. Kalmár előbbi tételében szereplő praefixum már közel áll ahhoz az esethez, amikor az eldöntés-probléma egyszerűen megoldható. Ennek az esetnek az $(Ex_1).(Ex_2)\ldots(Ex_m)(x_{m+1})(x_{m+2})\ldots(x_n)$ praefixumú formula felel meg. Kalmár egy a Mathematische Annalen-ben megjelent dolgozatában megoldja az eldöntés-problémát abban az esetben, amikor a formula praefixumában csak kétszer lép fel az (x) jel (generális kvantifikátor) és ezek a jelek egymás mellett állanak.

Kalmár matematikai munkássága ismertetésének a végére érve, meg kell még említenünk, hogy egy az egész számok axiomatikus elméletébe vágó megjegyzését LANDAU a Grundlagen der Analysis c. könyvében publikálta. Ez az összeadás és szorzás rekurziós egyenleteinek kielégithetőségére vonatkozik. A PEANO-féle axiomatikában egy kérdés nincs elintézve; ezt a hézagot először DEDEKIND hidalta át komplikált meggondolásokkal. KALMÁR a DEDEKIND-féle meggondolásokat egy egyszerű ötlettel megkerüli.

A kitüntetettnek munkássága felett tartott szemlénk a következőkben összegezhető. KALMÁR a matematika több ágában lényegesen új eredményeket produkált, fontos problémákat oldott meg, lezártnak látszó elméleteket tovább fejlesztett. Tevékenykedett a matematika legkonkrétabb és legabsztraktabb területén egyaránt. Az utóbbi területen a matematikai logikában elért eredményei közelebb vittek bennünket az itt szereplő kérdések megoldásához. E vizsgálatok az irodalomban máris visszhangra találtak; elég ha HILBERT és BERNAYS Grundlagen der Mathematik c. nagy művére utalunk. Dolgozatainak jellemzője a világos, szabatos fogalmazás, ami referens munkáját nagy mértékben megkönnyitette, és a szigorúság.

A Bizottság mindezek alapján javasolja a Választmánynak, hogy az 1936. évi Kőnig Gyula jutalmat dr. KALMÁR LÁSZLÓ-nak ítélje oda, és ezzel egyik legkiválóbb matematikusunkat részesítse méltó elismerésben.[1]

Lipka István.

Kalmár László munkáinak jegyzéke.

1. Az interpolációról, Mat. és Fiz. Lapok, 33 (1926), 120—149. o.
2. Zur Theorie der abstrakten Spiele, Acta Szeged 4 (1928), 65—85. o.
3. Über die Abschätzung der Koeffizientensumme Dirichletscher Reihen Acta Szeged, 4 (1929), 155—181. o.
4. Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie, Acta Szeged, 4 (1929), 248—252.

[1] Társulatunk Választmánya 1936 április 2.-i ülésén e javaslatot elfogadva, az 1936. évi Kőnig Gyula-jutalmat KALMÁR LÁSZLÓ-nak ítélte oda. Az ugyanezen a napon tartott előadóülésen RADOS GUSZTÁV elnök adta át a Kőnig Gyula-érmet a jutalmazottnak. *Szerk.*

5. A «factorisatio numerorum» problémájáról, Mat. és Fiz. Lapok, 38 (1931), 1—15. o.

6. Über die mittlere Anzahl der Produktdarstellungen der Zahlen, Acta Szeged, 5 (1931). 95—107. o.

7. Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem, Acta Szeged, 5 (1932), 222—236. o.

8. Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, Verhandlungen des internationalen Math.-Kongresses, Zürich (1932), 2. k., 337—338. o.

9. Ein Beweis des Ruffini—Abelschen Satzes, Acta Szeged, 6 (1932), 59—60. o.

10. Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten, Math. Annalen, 108 (1933), 466—484. o.

11. Über einen Löwenheimschen Satz, Acta Szeged, 7 (1934), 112—121. o.

12. Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls, Acta Szeged, 7 (1935) 222—243. o.

BERICHT ZUR VERTEILUNG DES JULIUS KŐNIG-PREISES VOM JAHRE 1936.

Die Budapester Loránd Eötvös Mathematische und Physikalische Gesellschaft hat ihren Julius Kőnig-Preis für 1936 Herrn Dr. L. Kalmár zuerkannt. Kommission: L. Fejér Präsident; Mitglieder: E. Egerváry, D. Kőnig, A. Szűcs; Referent: St. Lipka. Hier gibt der Referent eine Analyse und Würdigung der Kalmárschen mathematischen Arbeiten, die sich auf Funktionentheorie, analytische Zahlentheorie, Algebra, Mengenlehre und mathematische Logik beziehen und deren Liste sich am Ende des Referates befindet.

St. Lipka.

A SZÁMELMÉLET ALAPTÉTELÉRŐL.

Bevezetés.

1. Az *elemi számelmélet alaptételét* — amely szerint *minden természetes szám lényegében*[1] *csak egyféleképpen állítható elő törzsszámok szorzataként* — a tankönyvek legtöbbnyire vagy a legnagyobb közös osztó, vagy a legkisebb közös többszörös alaptulajdonságainak felhasználásával bizonyítják be. A legnagyobb közös osztón alapuló tárgyalás[2] abból indul ki, hogy két egész számnak, a-nak és b-nek,[3] legnagyobb közös osztója, d, előállítható

$$d = ax + by \tag{1}$$

alakban, ahol x és y egész számok. Ezt vagy a legnagyobb közös osztó meghatározására szolgáló EUKLIDES-féle algoritmus segitségével bizonyítják be, vagy úgy, hogy megmutatják, hogy a legkisebb pozitív egész szám, mely az (1) alakban előállítható, osztója a-nak is, b-nek is. A legkisebb közös többszörösön alapuló tárgyalás[4] kiindulópontja az a tétel, hogy két egész szám legkisebb közös többszöröse[5] osztója bármely közös többszörö-

---

[1] Azaz a tényezők sorrendjétől eltekintve.

[2] L. pl. P. G. LEJEUNE DIRICHLET: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Braunschweig (4. kiadás, 1894), 4., 5., 8. §; P. BACHMANN: *Niedere Zahlentheorie*, erster Teil, Leipzig (1902), 34., 35., 40., 41. old.

[3] Egész számon mindig racionális egész számot értek; latin kis betű mindig ilyent jelöl.

[4] L. pl. GROSSCHMID LAJOS: *Előadások a mathematika elemeiből*, Budapest (1923), 2., 6., 7. §; E. LANDAU: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, erster Band, Leipzig (1927), 5—12. old.

[5] Azaz pozitív közös többszöröseik legkisebbike.

süknek. Mind a két tárgyalásmód a *törzsszámok alaptulajdonságának* bebizonyításával folytatódik, amely szerint *egész számok szorzata csak úgy lehet osztható egy törzsszámmal, ha valamelyikük osztható vele.*

Ebből viszont a számelmélet alaptétele — amely nyilván így is fogalmazható: *ha*

$$p_1p_2\cdots p_r = q_1q_2\cdots q_s, \tag{2}$$

ahol $p_1, p_2, \dots, p_r, q_1, q_2, \dots, q_s$ *mind törzsszámok, akkor* $r=s$ *és* $p_1, p_2, \dots, p_r$ *sorrendtől eltekintve ugyanazok, mint* $q_1, q_1, \dots, q_s$ — például r szerinti teljes indukcióval adódik. Ha $r=1$, akkor a tétel evidens:[6] ekkor ugyanis (2) szerint

$$p_1 = q_1q_2\cdots q_s,$$

ami, minthogy p_1 törzsszám, csak úgy állhat fenn, ha a jobboldalon is csak egy tényező van s az egyenlő p_1-gyel. Tegyük fel, hogy igaz a tétel, ha a baloldalon r tényező van; akkor $r+1$ tényező esetére így adódik: ha

$$p_1p_2\cdots p_rp_{r+1} = q_1q_2\cdots q_s, \tag{3}$$

akkor a $q_1q_2\cdots q_s$ szorzat osztható p_{r+1}-gyel, tehát, minthogy p_{r+1} törzsszám, valamelyik tényezője is; de mivel ezek is törzsszámok, valamelyikük, például q_k, egyenlő kell hogy legyen p_{r+1}-gyel. De akkor (3)-ból

$$p_1p_2\cdots p_r = q_1q_2\cdots q_{k-1}q_{k+1}\cdots q_s;$$

itt már csak r tényező áll a baloldalon, tehát a feltevés szerint $r=s-1$ és a baloldalon álló tényezők sorrendtől eltekintve ugyanazok, mint a jobboldalon állók; így $r+1=s$ és $p_1, p_2, \dots, p_r, p_{r+1}$ sorrendtől eltekintve ugyanazok, mint $q_1, q_2, \dots, q_s$.

2. Ismeretesek azonban a számelmélet alaptételének a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös fogalmá-

[6] Még inkább evidens a tétel $r=0$ esetében (0 tényezőből álló szorzaton 1-et szokás érteni).

tól független bebizonyításai is. Már GAUSS[7] is adott közvetlen bebizonyítást a törzsszámok alaptulajdonságára; újabban pedig F. A. LINDEMANN,[8] ZERMELO[9] és KLAPPAUF[10] közöltek nagyon egyszerű közvetlen bebizonyításokat a számelmélet alaptételére. Ez utóbbi körülmény késztet arra, hogy közöljem azt a bebizonyítást, melyet az 1932/33. tanév óta több egyetemi előadásomban is tárgyaltam. Ez a bebizonyítás a következő lemmán alapul:

Ha négy nemnegatív egész szám, a, b, c és d, teljesíti az

$$ab = cd \tag{4}$$

egyenletet, akkor van további négy oly nemnegatív egész szám, t, u, v, w, hogy

$$a = tu, \quad b = vw, \quad c = tw, \quad d = uw. \tag{5}$$

	c	d
a	t	u
b	v	w

(A t, u, v, w számokat célszerű az oldalt látható táblázatban elhelyezni.)

Ez a lemma — amelyet a továbbiakban «négyszámtétel» néven fogok említeni — nyilvánvaló következménye a számelmélet alaptételének.[11] Az 1. §-ban azonban megmutatom, hogy

[7] C. F. GAUSS: *Disquisitiones arithmeticae*, Sectio secunda, art. 13., 14., *Werke*, erster Band, Göttingen (Zweiter Abdruck, 1870), 14., 15. old., l. még KÜRSCHÁK JÓZSEF: *Matematikai versenytételek*, Szeged (1929), 16., 17. old.

[8] F. A. LINDEMANN: The Unique Factorization of a Positive Integer, *Quarterly Journal of Math.*, Oxford Series, **4** (1933), 319—320. old.

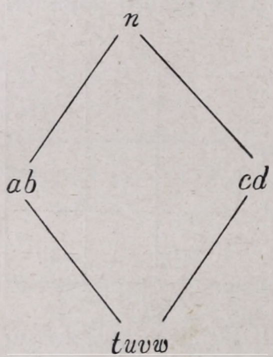
[9] E. ZERMELO: Elementare Betrachtungen zur Theorie der Primzahlen, *Nachrichten Göttingen*, Math.-Phys. Klasse, Fachgruppe I: Mathematik, Neue Folge, **1** (1934), 43—46. old., különösen 43—44. old.

[10] G. KLAPPAUF: Beweis des Fundamentalsatzes der Zahlentheorie, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver.*, **45** (1935), *130.* old.

[11] Ennélfogva a négyszámtétel érvényes minden olyan integritási tartományban, amelyben az egyértelmű törzstényezős előállítás tétele érvényes; l. A. KORSELT: Vollständige Lösung einer neuen diophantischen Aufgabe, *Math. Annalen*, **112** (1936), 395—410., különösen 396—397. old. KORSELT szerint (természetes számok esetére, a számelmélet alaptételének következményeképpen) már EULER ismerte a négyszámtételben foglalt állítást.

nagyon egyszerűen be lehet bizonyitani a számelmélet alaptételének felhasználása nélkül is.

A négyszámtétel «csírájában» mutatja meg a számelmélet alaptételének okát. Ha ugyanis valamely n pozitiv egész számot kétféleképpen kezdünk el szorzatra bontani: $n=ab$, $n=cd$, akkor alkalmas továbbontás útján: $a=tu$, $b=vw$, illetőleg $c=tv$, $d=uw$, mindkettőből ugyanahhoz az $n=tuvw$ felbontáshoz juthatunk (mint ezt az 1. ábra szemlélteti). Minthogy hasonlóan minden, a további szétbontás közben lehetséges «elágazás» után következik be ilyen «összetalálkozás», plauzibilis, hogy a legvégén minden szétbontás ugyanabba a végső szétbontásba torkollik. Ez a gondolatmenet megfogalmazható úgy, hogy a számelmélet alaptételének bebizonyitását adja: kitűnik innen a négyszámtételnek a számelmélet alaptételével való tisztán kombinatorikai kapcsolata. E kapcsolat kombinatorikai természetének kidom-borítására a 2. §-ban a négyszámtételről a számelmélet alaptételére való áttérést szemléletesen, *gráfelméleti tételként* fogom megfogalmazni, mégpedig kétféleképpen is. Ugyanitt megmutatom, hogy ez az átmenet, ha nem helyezünk súlyt a meggondolás kombinatorikai jellegére, minden gráfelméleti megfogalmazás nélkül is, nagyon egyszerűen elvégezhető.



1. ábra.

A 3. §-ban a négyszámtételt általánositom többtényezős szorzatokra és ez általánosítás segítségével újból bebizonyitom a számelmélet alaptételét. A 4. §-ban pedig megmutatom, hogy a négyszámtétel nem tekinthető a számelmélet alaptételének bebizonyitására szolgáló *ad hoc* módszernek, hanem az elemi számelmélet számos más tétele is könnyen következik belőle. Olyan tételekről van szó, amelyeket rendesen a legnagyobb közös osztó (1) előállításából, néha a legkisebb közös többszörös fentemlitett alaptulajdonságából szoktak bebizonyitani; a négyszámtétel segítségével való bebizonyításuk azonban didaktikai szempontból előnyösebb, mert könnyebben megjegyezhető: ugyanis minden egyes esetben nyilvánvaló, hogy melyik az a négy szám, amelyre a négyszámtételt alkalmazni kell.

1. §.

3. A négyszámtételt a szerint menő teljes indukcióval fogom bebizonyítani; azaz egyrészt megmutatom, hogy igaz e tétel négy oly a, b, c, d számra, amelyek közül $a = 0$, másrészt, hogy, ha (adott pozitív a mellett) igaz a tétel bármely négy oly a', b', c', d' számra, ahol $a' < a$, akkor igaz (tetszőleges b, c, d mellett) az a, b, c, d számokra is.[12]

Ha $a=0$, akkor (4) szerint $cd=0$, tehát vagy $c=0$, vagy $d=0$.

$a = 0, \quad c = 0.$

	c	d
a	0	d
b	b	1

Az első esetben a baloldali, a másodikban a jobboldali táblázatból olvashatók le t, u, v, w oly értékei, amelyek az (5) egyenletnek eleget tesznek.

$a = 0, \quad d = 0.$

	c	d
a	c	0
b	1	b

Tegyük fel most már, hogy a négyszámtétel igaz négy oly a' b', c', d' számra, ahol $a' < a$; feladatunk megmutatni érvényességét az a, b, c, d számokra ($a > 0$) is. Osszuk el c-t a-val, legyen a hányados [13] q, a maradék r; akkor

$$c = aq + r, \quad 0 \leqq r < a. \tag{6}$$

---

[12] Az alkalmazások szempontjából elég volna a négyszámtételt abban az esetben bebizonyítani, ha a, b, c, d egyike sem 0; azonban épp a teljes indukcióval való bebizonyítás megkönnyítésére célszerű azt is megengedni, hogy valamelyikük 0 legyen. — Szimmetria-okokból fel lehetne tenni, hogy a a legkisebb a, b, c, d közül; ez azonban nem egyszerűsítené lényegesen a bebizonyítást.

[13] Ha $a > c$, akkor természetesen $q = 0$ (és $r = c$).

Innét és (4)-ből
$$ab = cd = aqd + rd,$$
$$rd = a(b - qd). \tag{7}$$

Minthogy $r < a$, alkalmazhatjuk a négyszámtételt az $a' = r$, $b' = d$, $c' = a$, $d' = b - qd$ számokra;[14] van tehát négy oly i, j, k, l szám, hogy (l. a jobboldali táblázatot)

	a	$b-qd$
r	i	j
d	k	l

$$r = ij, \quad d = kl, \quad a = ik, \quad b - qd = jl. \tag{8}$$

(8) második és negyedik egyenletéből
$$b = qd + jl = (qk + j)\,l, \tag{9}$$

	c	d
a	i	k
b	$kq+j$	l

(6)-ból, (8) harmadik és első egyenletéből
$$c = ikq + ij = i(kq + j). \tag{10}$$

(8) harmadik egyenlete, (9), (10) és (8) második egyenlete[15] mutatja, hogy a baloldalt álló táblázatból leolvasható $t = i$, $u = k$, $v = kq + j$, $w = l$ számok eleget tesznek az (5) egyenleteknek, qu. e. d.

4. Az (5) egyenletekből nyilvánvaló, hogy, ha a, b, c, d egyike sem 0, akkor t, u, v, w is *pozitív* egész számok; továbbá, hogy, ha a, b, c, d mind nagyobbak 1-nél és sem $a = c$, $b = d$, sem pedig $a = d$, $b = c$ nem áll, akkor t, u, v, w közül legfeljebb egyik lehet egyenlő 1-gyel.

2. §.

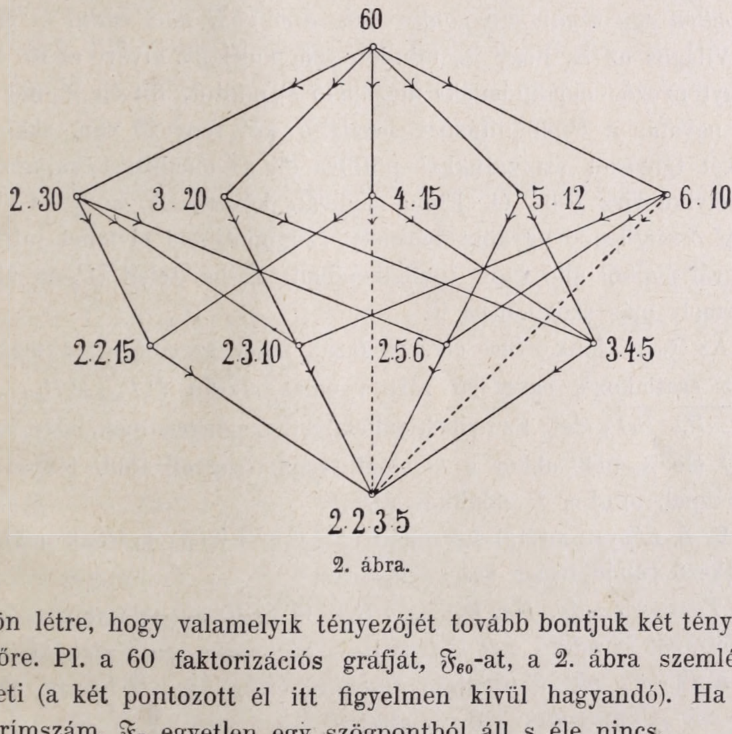
5. Legyen n adott, 1-nél nagyobb egész szám. Az n szám *faktorizációs gráf*-ján a következő $\mathfrak{F}_n$ irányított gráfot[16] értjük. Feleltessünk meg n minden
$$n = n_1 n_2 \ldots n_r$$

[14] Ezek egyike sem negatív; a', b', c'-re ez világos, d'-re pedig (7)-ből következik.

[15] Ha $a \neq 0$, akkor (4)-ből és (5) első, harmadik és negyedik egyenletéből már következik (5) második egyenlete is, úgy hogy (9) tulajdonképpen nélkülözhető.

[16] A gráfelmélet itt felhasznált alapfogalmaira nézve l. D. KÖNIG: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig (1936) 1. §-át.

1-nél nagyobb egész tényezők szorzataként való előállításának (beleértve az $r = 1$ esetnek megfelelő $n = n$ előállítást is) egy-egy pontot, mégpedig két előállításnak akkor és csak akkor ugyanazt a pontot, ha azok csak a tényezők sorrendjében térnek el egymástól. A P és Q pontokat akkor és csak akkor kössük össze egy $\overrightarrow{PQ}$ irányított éllel, ha a P-nek megfelelő szorzatelőállításból (röviden: a P előállításból) a Q előállítás úgy



2. ábra.

jön létre, hogy valamelyik tényezőjét tovább bontjuk két tényezőre. Pl. a 60 faktorizációs gráfját, $\mathfrak{F}_{60}$-at, a 2. ábra szemlélteti (a két pontozott él itt figyelmen kívül hagyandó). Ha p prímszám, $\mathfrak{F}_p$ egyetlen egy szögpontból áll s éle nincs.

Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{F}_n$ *véges* gráf. Ugyanis n előállításainál csak véges számú szám jöhet figyelembe tényezőként (minden tényező kisebb lévén n-nél); s a tényezők száma nyilván (jóval) kisebb, mint n. E szerint $\mathfrak{F}_n$-nek véges számú szögpontja van,[17] tehát

[17] $\mathfrak{F}_n$ szögpontjainak száma az az $f(n)$ függvény, amellyel két dolgozatomban: A «factorisatio numerorum» problémájáról, *Mat. és Fiz. Lapok*, 38

(minthogy két-két szögpont legfeljebb egy éllel van összekötve) éleinek száma is véges.

Ha n valamely P szorzatelőállításánál valamelyik tényező összetett szám, akkor ennek két tényezőre való szétbontásával oly előállításhoz jutunk, amelybe visz P-ből $\mathfrak{F}_n$-nek éle.[18] Forditva is, ha $\mathfrak{F}_n$-nek P-ből indul ki éle, akkor a P előállításnál legalább egy tényező összetett szám. E szerint a számelmélet alaptétele úgy fejezhető ki, hogy *az $\mathfrak{F}_n$ faktorizációs gráfnak egyetlen egy olyan szögpontja van, amelyből nem indul ki él.* Világos az is, hogy $\mathfrak{F}_n$ minden szögpontjába, kivéve az $n=n$ «egytényezős előállításnak» megfelelő P_0 pontot, fut éle $\mathfrak{F}_n$-nek; ha ugyanis a P előállításnál legalább két tényező van, akkor e két tényezőt szorzatukkal pótolva oly Q előállítást kapunk, amelyből visz P-be él. Ebből nyilván következik, hogy az $\mathfrak{F}_n$ gráf *összefüggő;* ugyanis bármely szögpontjából el lehet jutni a gráf éleiből álló úton (nyilellenében) P_0-ba, tehát (P_0-on át) bármely más szögpontba is.

Az $\mathfrak{F}_n$ gráfnak *nincs ciklusa* (azaz irány szerint is egymáshoz csatlakozó, egyszerű zárt vonalat alkotó $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_3}, \ldots$, $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$, $\overrightarrow{P_kP_1}$ élei). Ez nyilvánvaló következménye annak, hogy, ha $\overrightarrow{PQ}$ éle $\mathfrak{F}_n$-nek, akkor a Q előállításnál (eggyel) több tényező szerepel, mint a P előállításnál.

6. A négyszámtétel folyományaként a $\mathfrak{G}=\mathfrak{F}_n$ gráfnak a következő tulajdonsága van:

T tulajdonság. Ha $\overrightarrow{PQ}$ és $\overrightarrow{PR}$ a $\mathfrak{G}$ gráfnak valamely szögpontjából kiinduló, két különböző szögpontba futó élei, akkor van $\mathfrak{G}$-nek oly S pontja, amelybe Q-ból is, R-ből is visz $\mathfrak{G}$-nek pályavonala[19] (l. 3. ábra).

(1931), 1—15. old. és Über die mittlere Anzahl der Produktdarstellungen der Zahlen, erste Mitteilung, *Acta Scientiarum Math.*, **5** (1930—32), 95—107. old. foglalkoztam.

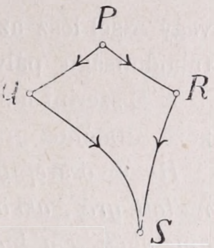
[18] A $\overrightarrow{PQ}$ élt P-ből *kiinduló*, Q-ba *futó*, P-ből Q-ba *vivő* élnek mondom; hasonlóan később pályavonalak esetén.

[19] Azaz irány szerint is egymáshoz csatlakozó éleinek önmagát nem metsző nyitott vonalat alkotó sorozata. (Ciklus nélküli gráfnál az önmagát

Legyen ugyanis a P előállítás

$$n = n_1 n_2 \ldots n_r$$

és keletkezzék ebből a Q előállítás azáltal, hogy n_i-t ab-re, az R előállítás pedig azáltal, hogy n_j-t cd-re bontjuk fel ($i, j = 1, 2, \ldots$, vagy r). Ha $i \neq j$, akkor állításunk evidens: Q-ban n_j-t cd-re bontva ugyanahhoz az S előállításhoz jutunk, mintha R-ben n_i-t ab-re bontjuk, úgy, hogy $\overrightarrow{QS}$ és $\overrightarrow{RS}$ élei $\mathfrak{F}_n$-nek.



3. ábra.

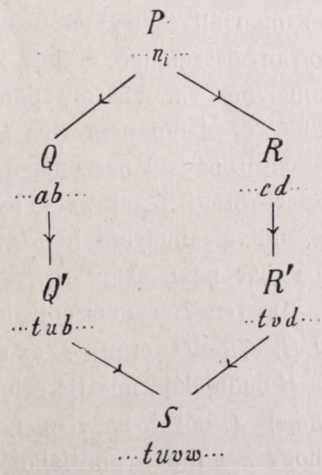
Tegyük fel tehát, hogy $i = j$; akkor

$$n_i = n_j = ab = cd,$$

tehát a négyszámtétel szerint van négy oly szám, t, u, v, w, hogy

$$a = tu, \quad b = vw, \quad c = tv, \quad d = uw.$$

Minthogy Q és R különböző pontok, sem $a = c$, $b = d$, sem $a = d$, $b = c$ nem állhat, tehát a **4.** megjegyzése szerint t, u, v, w közül legfeljebb egyik lehet 1. Ha egyik sem 1, akkor jelentse Q' a Q-ból a-nak tu-val, R' az R-ből c-nek tv-vel való pótlásával keletkező előállítást; akkor Q'-ben b-t vw-vel, R'-ben pedig d-t uw-vel pótolva ugyanahhoz az S ellőállításhoz jutunk, úgy, hogy $\overrightarrow{QQ'S}$ és $\overrightarrow{RR'S}$ a kívánt tulajdonságú pályavonalak (4. ábra). Hasonlóan járhatunk el, ha t, u, v, w közül valamelyik 1; ekkor ezt az 1-gyel egyenlő tényezőt el kell hagynunk, úgy, hogy Q' vagy Q-val, vagy S-sel, R' vagy R-rel,



4. ábra.

---

nem metszés feltétele magától teljesül.) Az irányítást nem tekintve egymáshoz csatlakozó élek önmagát nem metsző nyitott vonalat alkotó sorozatát *út*nak nevezik.

vagy S-sel lesz azonos; ekkor tehát a $\overrightarrow{QS}$ és $\overrightarrow{RS}$ élek a kívánt tulajdonságú pályavonalak.

7. E szerint a számelmélet alaptétele bennefoglaltatik a következő általános gráfelméleti tételben:

Ha $\mathfrak{G}$ összefüggő, véges, ciklus nélküli, T tulajdonságú irányított gráf, akkor $\mathfrak{G}$-nek egyetlen egy olyan U pontja van, amelyből nem indul ki él.

Hogy *van* ilyen U pont,[20] az közvetlenül belátható. Válaszszuk ugyanis P_1-et $\mathfrak{G}$ pontjai közül tetszőlegesen, P_2-t, P_3-at,... pedig sorra úgy, hogy $\mathfrak{G}$-nek legyenek $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$,... élei. E pontok sorozatában nem fordulhat elő ismétlődés (mert $\mathfrak{G}$-nek nincs ciklusa), tehát a sorozatnak vége szakad (mert $\mathfrak{G}$ véges); utolsó pontja a kívánt tulajdonsággal bír.

Annak megmutatására, hogy ilyen U pont csak *egy* van, bebizonyítom, hogy, ha $\mathfrak{G}$ valamely U pontjából nem indul ki él, akkor bármely más A pontjából visz U-ba pályavonal. (Ebből persze következik, hogy A-ból indul ki él.) Tegyük fel, hogy ez nem áll és legyen $\mathfrak{G}$ egy lehető legkevesebb ponttal bíró olyan összefüggő, véges, ciklus nélküli, T tulajdonságú gráf, amelynek van két oly pontja, U és A, hogy U-ból nem indul ki él és A-ból nem visz U-ba pályavonal.

Minthogy $\mathfrak{G}$ összefüggő, van oly ω útja, amely A-t U-val összeköti (l. 5. ábra). Legyen ω-n B az első olyan pont U-tól számítva, amelyből nem visz U-ba pályavonal (ilyen pont van, ha más nem, akkor A).

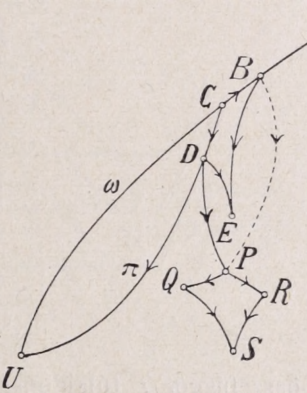
Legyen B szomszédja az ω úton U felé C ($C \neq U$, mert sem $\overrightarrow{UB}$, sem $\overrightarrow{BU}$ él nincs, az előbbi az U-ra tett feltevés, az utóbbi a B definíciója miatt); a feltevés szerint van olyan π pályavonal, amely C-ből U-ba visz. Legyen π C-ből kiinduló éle $\overrightarrow{CD}$. Minthogy π minden pontjából visz U-ba pályavonal, B nincs rajta π-n; továbbá az ω út BC élének irányítása szükségképpen $\overrightarrow{CB}$,

---

[20] Ez a tény, $\mathfrak{F}_n$-re alkalmazva, annak felel meg, hogy n felbontható törzstényezők szorzatára.

különben a $\overrightarrow{BC}$ él és π a B-ből U-ba vivő pályavonalat adna. Ennélfogva a T tulajdonság miatt $\mathfrak{G}$-nek van oly E pontja, ahova B-ből is, D-ből is visz pályavonal (ebből egyébként nyilvánvaló, hogy $D \neq U$).

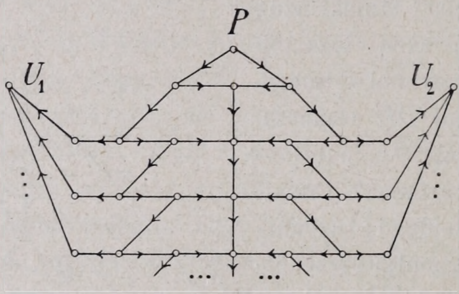
Tekintsük most azt a $\mathfrak{G}'$ irányított gráfot, amelyet B, D, továbbá $\mathfrak{G}$-nek azok a *pontjai* alkotnak, amelyekbe vagy B-ből, vagy D-ből visz $\mathfrak{G}$-nek pályavonala, továbbá $\mathfrak{G}$-nek azok az *élei*, amelyeken legalább egy ilyen pályavonal átmegy. A π pályavonal DU szakasza, valamint a BE, DE pályavonalak $\mathfrak{G}'$-höz tartoznak. Ennélfogva $\mathfrak{G}'$ összefüggő; ugyanis bármelyik szögpontja összeköthető vagy B-vel, vagy D-vel, tehát minthogy ezek (E-n át) egymással is összeköthetők, $\mathfrak{G}'$ bármely szögpontja összeköthető bármely másik szögpontjával is. Minthogy $\mathfrak{G}'$ része $\mathfrak{G}$-nek, világos, hogy véges és ciklus nélküli gráf. Továbbá $\mathfrak{G}'$ is T tulajdonságú. Legyenek ugyanis $\overrightarrow{PQ}$ és $\overrightarrow{PR}$ ($Q \neq R$) élei $\mathfrak{G}'$-nek; minthogy ezek $\mathfrak{G}$-nek is élei, van $\mathfrak{G}$-nek oly S pontja, amelybe Q-ból is, R-ből is visz pályavonala. Azonban e pályavonalak (s így az S pont is) hozzátartoznak $\mathfrak{G}'$-höz is; ugyanis a $\overrightarrow{DP}$ vagy $\overrightarrow{BP}$ pályavonalat (ilyen van, mert P pontja $\mathfrak{G}'$-nek) akár a $\overrightarrow{PQ}$ éllel és a $\overrightarrow{QS}$ pályavonallal, akár a $\overrightarrow{PR}$ éllel és az $\overrightarrow{RS}$ pályavonallal meghosszabbítva $\mathfrak{G}$-nek D-ből, illetőleg B-ből kiinduló pályavonalát kapjuk.



5. ábra.

Minthogy $\mathfrak{G}'$-nek kevesebb szögpontja van, mint $\mathfrak{G}$-nek (ugyanis C nem lehet pontja $\mathfrak{G}'$-nek. mert $\mathfrak{G}$-nek nincs ciklusa), $\mathfrak{G}'$-re áll a bebizonyítandó állítás. U-ból $\mathfrak{G}'$-nek sem indulhat ki éle, tehát adódik, hogy $\mathfrak{G}'$ minden pontjából visz $\mathfrak{G}'$-nek pályavonala U-ba. Ez azonban ellentmond annak, hogy B-ből nem visz U-ba pályavonala $\mathfrak{G}$-nek, tehát $\mathfrak{G}'$-nek sem.

8. Az imént bebizonyított tétel végtelen gráfokra nem érvényes, amint ezt a 6. ábrán szemléltetett, lefelé határtalanul meghosszabbítandó gráf mutatja. Ennek az összefüggő, T tulajdonságú gráfnak nincs ciklusa; mégsem indul ki sem az U_1, sem az U_2 szögpontjából éle.[21] Könnyen meg lehet adni olyan



6. ábra.

véges, összefüggő, T tulajdonságú, de ciklussal bíró gráfot is, amelynek két ilyen szögpontja van.[22]

9. Annál meglepőbb viszont, hogy a T tulajdonság egy kis módosításával olyan tételhez jutunk, amelynél nem kell a gráfról feltennünk sem azt, hogy véges, sem azt, hogy nincs ciklusa. Ez a módosított T' *tulajdonság* a következő:

Ha PQ és PR a $\mathfrak{G}$ gráfnak valamely szögpontjából két különböző pontjába vivő élei, akkor vagy van $\mathfrak{G}$-nek ($\overrightarrow{QR}$ vagy $\overrightarrow{RQ}$ irányítású) QR éle, vagy pedig van olyan S pontja $\mathfrak{G}$-nek, amelybe Q-ból is, R-ből is visz éle $\mathfrak{G}$-nek.

Be fogom tehát bizonyítani a következő tételt:

---

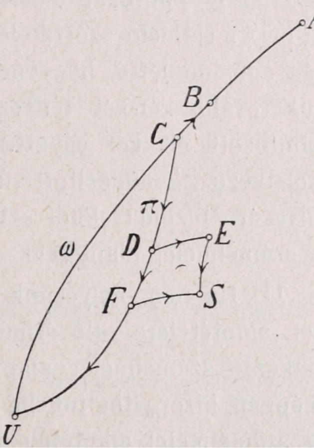
[21] A P pontot és a belőle kiinduló két élt el lehetne hagyni; azért vettem ezeket hozzá a gráfhoz, hogy, a faktorizációs gráfokhoz hasonlóan, csak egy olyan pontja legyen, amelybe nem fut él.

[22] Ilyen gráf keletkezik pl. a 6. ábrán látható gráfból, ha P és a belőle kiinduló élek elhagyása után azt hengerre rajzoljuk úgy, hogy a «pagoda» legfelső «emelete» egybeessék valamelyik alsó «emelettel».

Ha a $\mathfrak{G}$ összefüggő irányított gráf T' tulajdonságú, akkor legfeljebb[23] *egy olyan U pontja lehet, amelyből nem indul ki él.*

Ismét elegendő bebizonyítanunk, hogy, ha a $\mathfrak{G}$ gráf U pontjából nem indul ki él, akkor $\mathfrak{G}$ bármely másik A pontjából visz U-ba pályavonal. Tegyük fel ugyanis, hogy ez $\mathfrak{G}$ valamely A pontjára nem áll. Kössük össze A-t U-val ismét $\mathfrak{G}$ egy ω útjával és legyen ezen, U-tól számítva, B az első pont, amelyből nem visz pályavonal U-ba, legyen továbbá C a B pont szomszédja az ω úton U felé. Akkor C-ből visz π pályavonal U-ba és a BC él irányítása $\overrightarrow{CB}$.

Legyen π-n, U-tól számítva, D az első olyan pont, amelyből indul ki olyan $\overrightarrow{DE}$ él, hogy E-ből nem visz pályavonal U-ba (l. 7. ábra); ilyen D pont van, ha más nem, akkor C. Világos, hogy $D \neq U$; legyen F a D pont szomszédja π-n U felé. E nincs rajta π-n (különben vinne E-ből pályavonal U-ba), így mindenesetre $E \neq F$. A T' tulajdonság szerint a következő három eset közül valamelyiknek állnia kell:



7. ábra.

a) $\mathfrak{G}$-nek van $\overrightarrow{FE}$ éle. Ez ellentmond D definíciójának, mert ekkor F-ből is indulna ki oly $\overrightarrow{FE}$ él, amelynek másik végpontjából nem visz U-ba pályavonal.

b) $\mathfrak{G}$-nek van $\overrightarrow{EF}$ éle. Ez az él π $\overrightarrow{FU}$ szakaszával együtt E-ből U-ba vivő pályavonalat adna, ellentétben E definíciójával.

c) $\mathfrak{G}$-nek van E-ből és F-ből ugyanabba az S pontba vivő $\overrightarrow{ES}$ és $\overrightarrow{FS}$ éle. D definíciója szerint S-ből visz U-ba pálya-

[23] Könnyen látni, hogy ha $\mathfrak{G}$ végtelen gráf, akkor nem feltétlenül van ilyen U pont.

vonal; ez $\overrightarrow{ES}$-sel együtt (ill., ha e pályavonal átmenne E-n, ennek egy része) E-ből U-ba vivő pályavonalat adna, ellentétben E definiciójával.

10. A most bebizonyitott gráfelméleti tételt is fel lehet használni a számelmélet alaptételének bebizonyitására. E célból az n szám faktorizációs gráfjának fogalmát úgy módositjuk, hogy a P és Q pontokat akkor is összekötjük egy $\overrightarrow{PQ}$ éllel, ha a P-nek megfelelő szorzatelőállitásból a Q-nak megfelelő előállitás úgy jön létre, hogy nem egy, hanem több tényezőjét bontjuk tovább két-két tényezőre. (L. $n = 60$ esetén a 2. ábrát, a pontozott élekkel együtt.) Annak bebizonyitását, hogy az igy keletkező $\mathfrak{F}_n'$ módositott faktorizációs gráf T' tulajdonságú, az olvasóra bizom; ebből a **9.** tétele segitségével újból következik a számelmélet alaptétele.

11. Ha nem helyezünk súlyt a négyszámtételről a számelmélet alaptételére való átmenet tiszta kombinatorikai jellegére, akkor a számelmélet alaptételét legegyszerűbben a következőképpen bizonyithatjuk be a négyszámtételből. Tegyük fel, hogy a számelmélet alaptétele nem áll, és legyen n a legkisebb oly pozitiv egész szám, amelynek két, lényegesen különböző, törzstényezős előállitása van: P és Q. Foglaljuk össze tetszésszerint P bizonyos tényezőit (nem valamennyit) és legyen ezek szorzata a, mig P többi tényezőinek szorzata b; hasonlóan legyen Q bizonyos tényezőinek szorzata c, a többi tényezőjének szorzata pedig[24] d. Akkor a, b, c, d kisebbek n-nél, úgy hogy ezek csak lényegében egy-egyféle módon bonthatók fel törzstényezők szorzatára. Az n szám P felbontását megkapjuk, ha $n=ab$-ben a és b helyébe törzstényezős felbontásukat irjuk; hasonlóan megkapjuk a Q felbontást, ha $n=cd$-ben c és d helyébe törzstényezős felbontásukat irjuk.

---

[24] Pl. a legyen P egyik törzstényezője, b a többiek szorzata; hasonlóan c és d a Q előállitásra nézve.

Minthogy $ab = cd$, a négyszámtétel szerint van négy oly pozitív egész szám, t, u, v, w, hogy

$$a = tu, \quad b = vw, \quad c = tv, \quad d = uw. \tag{11}$$

Nyilván t, u, v, w is kisebbek n-nél, így ezeknek is egy-egy törzstényezős felbontásuk van.[25] Ha e törzstényezős felbontásokat t, u, v, w helyére a (11) egyenletekbe beírjuk, megkapjuk a, b, c, d egy-egy törzstényezős előállítását, tehát ezek *egyetlen* törzstényezős előállítását. E szerint n-nek P előállítását úgy kapjuk meg, hogy az $n = tu.vw$ egyenletbe, a Q előállítást pedig úgy, hogy az $n = tv.uw$ egyenletbe beírjuk t, u, v, w helyébe ezek törzstényezős előállítását. Igy tehát P és Q, a feltevéssel ellentétben, csak a tényezők sorrendjében különböznek egymástól.

3. §.

12. A négyszámtételt többtényezős szorzatokra a következőképpen általánosíthatjuk:[26]

Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_r$; $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *olyan nemnegatív egész számok, amelyek között fennáll az*

$$a_1 a_2 \ldots a_r = b_1 b_2 \ldots b_s$$

egyenlet. Akkor van oly, nemnegatív egész számú elemekkel bíró, r sorból és s oszlopból álló mátrix, amelynek az egyes soraiban álló elemek szorzata rendre $a_1, a_2, \ldots, a_r$, *az egyes oszlopaiban álló elemek szorzata pedig rendre* $b_1, b_2, \ldots, b_s$.

---

[25] Ha valamelyikük 1, akkor törzstényezős előállításán a «0 tényezős» szorzatot értjük; tehát 1 helyébe törzstényezős előállítását beírni annyit jelent, mint elhagyni az 1-et.

[26] KORSELT szerint (l. a [11] lábjegyzetben idézett helyet) ez az általánosítás szerepel KRONECKER «Vorlesungen über Zahlentheorie»-jában. Azonban e mű egyetlen általam ismert kiadásában (L. KRONECKER: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, erster Band [több nem jelent meg], herausgegeben von K. HENSEL, Leipzig (1901)) nem található erre vonatkozó rész. A Korseltnél álló szövegből világos, hogy e tételre, mint a számelmélet alaptételének következményére gondol.

Ha $r=1$ vagy $s=1$, akkor a tétel tautologikus. Ha $r=s=2$, akkor éppen a négyszámtételbe megy át. Elegendő tehát a következő két dolgot megmutatnom:

a) Ha a tétel igaz $r=2$, $s=2$, valamint egy bizonyos r és $s=2$ esetére, akkor igaz r helyett $r+1$-gyel $s=2$ esetére.

b) Ha a tétel igaz — egy bizonyos r érték mellett — $s=2$, valamint egy bizonyos s esetére, akkor igaz s helyett $s+1$-gyel is.

Elegendő *b)*-t megmutatnom, hiszen *a)* ebből az $r=2$ specializálással, a szóbanforgó mátrix sorainak oszlopaival való felcserélésével és s helyébe r tételével keletkezik.

Legyen tehát igaz a tétel r egy bizonyos értéke mellett $s=2$-re, valamint egy bizonyos s-re. Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_r$; $b_1, b_2, \ldots, b_s, b_{s+1}$ $r+s+1$ olyan nemnegatív egész szám, amelyek között fennáll az

$$a_1 a_2 \ldots a_r = b_1 b_2 \ldots b_s b_{s+1} \tag{12}$$

egyenlet. Alkalmazzuk a bebizonyítandó tételt mindenekelőtt az $a_1, a_2, \ldots, a_r$; $b_1, b_2, \ldots, b_{s-1}, b'_s = b_s b_{s+1}$ számokra. Adódik, hogy van oly (t_{ij}) $(i=1, 2, \ldots, r;\ j=1, 2, \ldots, s)$ mátrix, amelynek elemei nemnegatív egész számok, úgy, hogy

$$a_i = t_{i1} t_{i2} \ldots t_{is}, \quad \text{ha} \quad i=1, 2, \ldots, r; \tag{13}$$

$$b_j = t_{1j} t_{2j} \ldots t_{rj}, \quad \text{ha} \quad j=1, 2, \ldots, s-1, \tag{14}$$

míg

$$t_{1s} t_{2s} \ldots t_{rs} = b_s b_{s+1}.$$

Alkalmazzuk most a bebizonyítandó tételt a $t_{1s}, t_{2s}, \ldots, t_{rs}$; b_s, b_{s+1} számokra. Adódik, hogy van $2r$ olyan nemnegatív egész szám, $u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_r$, hogy

$$t_{is} = u_i v_i, \quad \text{ha} \quad i=1, 2, \ldots, r; \tag{15}$$

$$b_s = u_1 u_2 \ldots u_r; \tag{16}$$

$$b_{s+1} = v_1 v_2 \ldots v_r. \tag{17}$$

A (13) és (15) egyenletekből

$$a_i = t_{i1} t_{i2} \ldots t_{i,s-1} u_i v_i, \quad \text{ha} \quad i=1, 2, \ldots, r;$$

ez az egyenlet, továbbá (14), (16) és (17) mutatja, hogy a tétel a (12) egyenlet bal- és jobboldalán álló számokra is igaz: a keresett mátrix

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \dots & t_{1,s-1} & u_1 & v_1 \\ t_{21} & t_{22} \dots & t_{2,s-1} & u_2 & v_2 \\ & & \dots & & \\ t_{r1} & t_{r2} \dots & t_{r,s-1} & u_r & v_r \end{pmatrix}.$$

13. A négyszámtétel ez általánosításából a számelmélet alaptétele nagyon egyszerűen adódik. Tegyük fel ugyanis, hogy

$$p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s,$$

ahol $p_1, p_2, \dots, p_r, q_1, q_2, \dots, q_s$ törzsszámok. A négyszámtétel általánosítása szerint van olyan nemnegatív egész számú elemekből álló mátrix, amelynek első, második, ..., r-edik sorában álló elemek szorzata rendre $p_1, p_2, \dots, p_r$, első, második, ..., s-edik oszlopában álló elemek szorzata pedig rendre $q_1, q_2, \dots, q_s$ (és több sora vagy oszlopa nincs). De akkor e mátrix minden sorában vagy oszlopában, egy-egy elem kivételével, csupa 1 áll; az egyetlen, 1-től különböző elem a kérdéses sorhoz vagy oszlophoz tartozó p_i, illetőleg q_j. De akkor r is, s is egyenlő a mátrix 1-től különböző elemeinek számával; maguk ez elemek, a mátrix sorai szerint rendezve, rendre p_1-gyel, p_2-vel, ..., p_r-rel, a mátrix oszlopai szerint rendezve pedig rendre q_1-gyel, q_2-vel, ..., q_s-sel egyenlők; azaz $p_1, p_2, \dots, p_r$ csak sorrendben különböznek $q_1, q_2, \dots, q_s$-től.

4. §.

14. Megmutatom, hogy a négyszámtétel nagyon jól használható néhány, az elemi számelméleti előadásokban szerepelni szokott további tétel bebizonyítására is. E §-ban szám mindenütt pozitív egész számot jelent; minthogy oszthatósági tételekről van szó, nyilvánvaló, hogyan lehet azokat tetszőleges racionális egész számokra átvinni.

Ha egy ab szorzat osztható egy c számmal, de egyik tényezője, a, relatív prímszám c-hez, akkor a szorzat másik tényezője, b, osztható c-vel.

Ugyanis a feltevés szerint van olyan d egész szám, hogy

$$ab = cd, \tag{18}$$

a négyszámtétel szerint van négy oly t, u, v, w egész szám, hogy

$$a = tu, \quad b = vw, \quad c = tv, \quad d = uw. \tag{19}$$

Minthogy a-nak és c-nek nincs más közös osztója, mint 1, szükségképpen $t=1$, tehát $c=v$, $b=cw$, azaz b osztható c-vel. Abban az esetben, ha c törzsszám, ez a tétel átmegy a törzsszámok alaptulajdonságának kéttényezős szorzatra vonatkozó speciális esetébe. A tényezők száma szerinti teljes indukcióval bebizonyíthatjuk ebből a törzsszámok alaptulajdonságát a maga általánosságában s így, a bevezetésben részletezett módon, a klasszikus mederben maradva is eljuthatunk a számelmélet alaptételéhez. (Ez az a mód, ahogyan egyetemi előadásaimban be szoktam bizonyítani a számelmélet alaptételét.)

15. *Valamely ab szorzat minden osztója előállítható a egy osztójának b egy osztójával való szorzataként.*[27] Ha ugyanis d osztója ab-nek, akkor van olyan c egész szám, hogy (18) fennáll; a négyszámtételt alkalmazva adódik, hogy van négy oly t, u, v, w egész szám, amelyekre (19) fennáll. A (19) egyenletek mutatják, hogy u osztója a-nak, w osztója b-nek és d ezeknek szorzata.

Világos, hogy fordítva, a bármely osztójának b bármely osztójával való szorzata osztója d-nek. Általában ab valamely osztója többféleképpen is előállítható a tételben említett módon. Azonban:

Ha a relatív prímszám b-hez, akkor ab minden osztója csak egyféleképpen állítható elő a és b egy-egy osztójának szorzataként. Ez belátható a **14.**-ben bebizonyított tétel segítségével is; a négyszámtételből közvetlenül így adódik: ha ab valamely osztója, d, kétféleképpen is előállítható a és b egy-egy osztójának szorzataként:

$$d = ef, \quad d = gh,$$

---

[27] A bebizonyításból látszik, hogy ez a tétel nem egyéb, mint a négyszámtételnek más (kevésbbé szimmetrikus) megfogalmazása.

ahol (azt, hogy k osztója l-nek, a szokott módon a $k|l$ jellel jelölve)

$$e|a, \quad f|b, \quad g|a, \quad h|b,$$

akkor $ef = gh$, tehát a négyszámtétel szerint van négy oly t, u, v, w szám, hogy

$$e = tu, \quad f = vw, \quad g = tv, \quad h = uw. \tag{20}$$

Minthogy $u|e$ és $e|a$, az oszthatóság ú. n. tranzitív sajátsága folytán $u|a$; hasonlóan $u|h$ és $h|b$ miatt $u|b$; tehát $u = 1$, mert a-nak és b-nek nincs más közös osztója. Hasonlóan, $v|g$ és $g|a$ miatt $v|a$, $v|f$ és $f|b$ miatt $v|b$ s így $v = 1$. E szerint (20)-ból $e = t = g$, $f = w = h$, vagyis a kétféle előállítás mégis csak ugyanaz.

Ezek az alkalmazások már eléggé mutatják a négyszámtétel használhatóságát az elemi számelmélet tárgyalásánál.

Kalmár László.

ÜBER DEN FUNDAMENTALSATZ DER ZAHLENTHEORIE.

Es werden mehrere Beweise für den Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie (Satz von der eindeutigen Darstellbarkeit der natürlichen Zahlen als Produkte von Primzahlen) gegeben, unabhängig vom Begriff und Eigenschaften des größten gemeinsamen Teilers (oder der kleinsten gemeinsamen Vielfachen). Sämtliche Beweise beruhen auf dem folgenden Lemma («Vierzahlensatz»):

Genügen die nichtnegativen ganzen Zahlen a, b, c, d der Gleichung $ab=cd$, so gibt es vier weitere nichtnegative Zahlen t, u, v, w, so daß $a = tu$, $b = vw$, $c = tv$, $d = uw$.

Dieser Satz wird natürlich ohne Anwendung des Fundamentalsatzes der Zahlentheorie, durch vollständige Induktion in Bezug auf a bewiesen. Der Übergang zum Fundamentalsatz der Zahlentheorie wird sowohl graphentheoretisch, wie auch rein zahlentheoretisch geführt. Schließlich wird gezeigt, daß der Vierzahlensatz auch sonst für Vorlesungszwecke nützlich ist, da daraus auch einige weiteren elementar-zahlentheoretischen Sätze ziemlich direkt zu entnehmen sind.

László Kalmár.

A KÖZÉPÉRTÉK FOGALMÁRÓL.

1. A matematikában és alkalmazásaiban a középértékek többnyire csak elszigetelten léptek föl; a legújabb évekig hiányzott egy általános elmélet, sőt a középérték fogalmának általános meghatározása is. Ennek a hiánynak a pótlására az első lépést tudtunkkal 1929-ben tette meg O. Chisini.[1] Ő fogalmazta meg először szabatos definícióban azt, amit minden matematikus többé vagy kevésbbé tudatosan a középérték fogalmához fűzött. Az ő munkája alapján kifejlődött és Kolmogoroff,[2] Nagumo,[3] de főleg de Finetti[4] dolgozataival ma már bizonyos mértékig befejezettnek tekinthető elméletet akarom itt néhány megjegyzéssel kiegészítve ismertetni.

Chisini és de Finetti nyomán a középértéknek kétféle definicióját ismertetjük. Az első ezek közül tisztán formális és a középérték fogalmához fűzött azon a követelményen alapul, hogy n szám középértéke az adott számok nagyságával (a számok sorrendjére való tekintet nélkül) egyértelműen meg legyen határozva, mégpedig úgy, hogy ha az n szám egyenlő egymással, középértékük is egyenlő legyen velük.

Fel kell tételeznünk, hogy a középérték bármilyen n számú

---

[1] O. Chisini: Sul concetto di media, Periodico di Mathematiche n. 2. 1929.

[2] A. Kolmogoroff: Sur la notion de la moyenne, Atti dei Lincei XII. 1930., p. 388—391.

[3] M. Nagumo: Über eine Klasse der Mittelwerte, Japanese Journal of Mathematics VII. 1930, p. 71—79.

[4] B. de Finetti: Sul concetto di media, Giornale dell Istituto Italiano degli Attuarii, II. 1931, p. 388—391.

értékre is definiálva van. Valójában tehát középértéket határoz meg az $\{x_i\}$ változók bizonyos tartományában értelmezett

$$K_2(x_1, x_2),\ K_3(x_1, x_2, x_3), \ldots,\ K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots \qquad \text{(I)}$$

egyértékű valós függvények sorozata, melyben mindegyik

$$K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

függvény

1. szimmetrikus: $K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$;

2. eleget tesz a $K(x, x, \ldots, x) = x$ föltételnek.

CHISINI 2. helyett a

$$2a. \qquad \text{Min}\ x_i \leqq K(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq \text{Max}\ x_i$$

követelményt állitotta fel, melyből 2. nyilván folyik, de nem megfordítva. A $2a$.-nak is eleget tevő középértékeket DE FINETTI nyomán *intern* közepeknek fogjuk nevezni.

Az ismeretes középértékek nagy része még ezenfelül a következő tulajdonságokkal bír:

3. monoton: ha $x_1 \leqq y_1,\ x_2 \leqq y_2, \ldots,\ x_n \leqq y_n$, akkor

$$K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq K_n(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

$3a$. növekvő: ha minden $x_i \leqq y_i$, de legalább egy $x_j < y_j$, akkor

$$K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < K_n(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

$3a$.-ból minden intern középértékre következik a szűkebb értelemben vett intern tulajdonság is, hogy tudniillik, ha az x_i értékek nem mind egyenlők, akkor:

$$\text{Min}\ x_i < K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \text{Max}\ x_i.$$

Mert ha például

$$K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{Max}\ x_i$$

volna, akkor valamelyik, a Max x_i-nál kisebb, x_j érték helyett ezt a maximális értéket helyettesítve, a középértéknek $3a$. szerint nőni kellene, holott $2a$. szerint a Max x_i-nál nagyobb már nem lehet.

Ez a tétel nem fordítható meg, valamely középérték lehet a szűkebb értelemben intern, a nélkül, hogy valóban növekvő volna. Erre példának a

$$K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tfrac{1}{2}[\mathrm{Max}\, x_i + \mathrm{Min}\, x_i]$$

középértéket ($n > 2$) hozhatjuk fel.

4.-nek soroljuk fel a legérdekesebb tulajdonságot, az asszociativitást:

$$K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K_n(K_k, K_k, \ldots, K_k, x_{k+1}, \ldots, x_n);$$

azaz a középérték nem változik, ha a változók valamely csoportjának mindegyik tagját e csoport középértékével helyettesítjük.

Az asszociativitásnak más formában való értelmezését adta Goldziher.[5] Ez arra az esetre is vonatkozik, amidőn csak $K_2(x_1, x_2)$ van definiálva. Legyen:

$$K_2(x, y) = k, \quad K_2(x, k) = l \quad \text{és} \quad K_2(k, y) = m.$$

K_2 asszociativ Goldziher szerint, ha

$$K_2(l, m) = k.$$

Ez a tulajdonság 4.-nek egyik következménye. U. i. 4.-ből először is az következik, hogy:

$$K_4(x, y, x, y) = K_2(x, y) = K_{2n}(x, y, x, y, \ldots, x, y),$$

mert hiszen minden x, y pár helyettesíthető a k, k párral és 2. szerint

$$K_{2n}(k, k, \ldots, k) = k.$$

Ennek alapján mármost

$$K_2(l, m) = K_4(l, m, l, m) = K_4(x, k, m, m) = K_4(x, k, k, y) =$$
$$= K_4(x, y, k, k) = K_4(k, k, k, k) = k.$$

Hogy megfordítva a Goldziher-féle értelemben vett asszociativitásból következik-e 4., erről nem is beszélhetünk, minthogy Goldziher definiciójában csak K_2 szerepel és az esetleg

[5] Goldziher Károly: Über die Verwendung von Mittelwertprozessen in der Bevölkerungstatistik und in der Zinsrechnung, Skand. Aktuarietidskrift 1920. p. 73.

nem is terjeszthető ki több számra, vagy pedig nem egyértelműen.[6] Például ha

$$k = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

akkor egyben

$$k = \tfrac{1}{2}\,[\mathrm{Max}\ x_i + \mathrm{Min}\ x_i],$$

a megfelelő függvények $n=3$ esetre azonban már különböznek.

2. Az ismert közepek között nincs meg sem az asszociatív tulajdonsága, sem a monotonitása az antiharmonikus középnek:

$$h = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

De mind a négy tulajdonsága megvan még így is igen sok függvénynek, melyiket tekintsük tehát valamely kérdésben valódi középértéknek? Ez mármost attól a céltól függ, amelyre a középértéket fölhasználjuk.

Például az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékű áruk átlagos ára az az érték, amelyet tulajdonítva az áruk mindegyikének, az áruk együttes értéke változatlan marad. Ebben az esetben tehát az aritmetikai közép a megfelelő.

Hogy egy más esetet is lássunk, tekintsünk egy áramkört, melyben két vezető van párhuzamosan kapcsolva x_1, illetőleg x_2 ellenállással. Mit értsünk e két vezető átlagos ellenállásán? Nyilván egy akkora ellenállást, hogy, ha mind a két vezetőt egy-egy ilyen ellenállású vezetővel cserélnők ki, az ellenállásoknak az áramkörre való hatása változatlan maradna, azaz az áramkörben továbbra is ugyanakkora intenzitású áram folyna, mint előbb. Ha az elágazási pontokban a feszültség V_1, illetőleg V_2, az áramintenzitás az egyes vezetőkben i_1, illetőleg i_2, Kirchhoff második törvénye szerint:

$$V_1 - V_2 = i_1 x_1 = i_2 x_2.$$

---

6 A kiterjesztés lehetőségét és eljárását illetőleg l. G. Aumann: Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente I. Math. Annalen 109. 1933, p. 235—253.

Innen:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{V_1 - V_2}{x_1} + \frac{V_1 - V_2}{x_2}.$$

Azt kívánjuk, hogy az átlagos ellenállásra vonatkozólag is

$$i = (V_1 - V_2)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)$$

legyen. Ebből pedig az átlagos x ellenállásra a

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

összefüggés következik, ami a harmonikus közepet definiálja.

Utolsó példának említsünk egy feladatot a politikai számtan köréből. Ha $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tőkék esedékesek rendre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ idő mulva, akkor e tőkék középlejáratán értünk egy olyan x időt, hogy ha e tőkék mind x idő mulva volnának esedékesek, az együttes kamat ugyanakkora volna, mint a valódi esedékességi időkkel. Az x érték attól függ, hogy egyszerű, vagy pedig kamatos kamatot számítunk. Az első esetben

$$x = \frac{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n}{t_1 + t_2 + \cdots + t_n},$$

tehát x az x_i időknek a t_i súlyokkal képezett aritmetikai közepe és *független a kamatlábtól.*

A második esetben x már a kamatlábtól is függ, tudniillik kell, hogy (v-vel a diszkont-tényezőt jelölve):

$$(t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\, v^x = t_1 v^{x_1} + t_2 v^{x_2} + \cdots + t_n v^{x_n}$$

legyen, ahonnan a középlejárat

$$x = \frac{1}{\log v}\left\{\log \sum_1^n t_i v^{x_i} - \log \sum_1^n t_i\right\},$$

mint súlyokkal képezett exponenciális közép adódik.

Az első példában az árak közepét kerestük úgy, hogy az együttes ár változatlan legyen, azaz, hogy

$$x + x + \cdots + x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

legyen; a másodikban pedig, hogy

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$$

legyen és így tovább.

Előbb tehát azt a hatást, melyet az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók, illetőleg azok mindegyikének az x változóval való helyettesitése előidéz, az

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

függvény méri, a másodikban az

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$$

függvény, a harmadikban az

$$F(x_1\, x_2, \ldots, x_n) = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n,$$

illetőleg az

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t_1 v^{x_1} + t_2 v^{x_2} + \cdots + t_n v^{x_n},$$

függvény méri.

A hatást mérő függvény (röviden: hatásfüggvény) bevezetésével jutunk el a középérték második definiciójához: *Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékeknek az $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hatásfüggvényre vonatkozó közepe az a k szám, melyre*

$$F(k, k, \ldots, k) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

A k meghatározása ebből az összefüggésből a

$$k = f^{-1}[F(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \tag{II}$$

egyenlettel történik, ahol az

$$f(x) = F(x, x, \ldots, x)$$

függvény inverz függvényét a szokásos módon $f^{-1}(x)$-szel jelöltük. Hogy k ebből az egyenletből egyértelműen meghatározható legyen, föl kell tennünk, hogy az $f(x)$ függvény a szűkebb értelemben monoton növekvő (v. csökkenő). Föltéve még, hogy a hatásfüggvény szimmetrikus, k a középértékekre kimondott 1. és 2. követelménynek eleget tesz. Középértéket definiál tehát minden monoton növekvő (csökkenő) $f(x)$-et értelmező szimmetrikus hatásfüggvény. Hogy k intern közép legyen, ahhoz még föl kell tennünk, hogy ha x_1 az $\{x_i\}$ értékek legkisebbikét, x_n a legnagyobbikát jelöli,

$$F(x_1, x_1, \ldots, x_1) \leqq F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq F(x_n, x_n, \ldots, x_n),$$

Ha a hatásfüggvény még ezenfölül maga is minden változójának monoton függvénye, akkor az általa definiált középérték is monoton, s ha a hatásfüggvény növekvő, a középérték is az. Mindez a (II) definicióból közvetlenül folyik, tekintetbe véve, hogy monoton növekvő függvénynek inverz függvénye is monoton növekvő.

Megfordítva, minden középértékhez tartozik hatásfüggvény, mégpedig nemcsak egy, hanem végtelen sok. Ha ugyanis a

$$k = K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

függvény középérték, akkor

$$K(k, k, \ldots, k) = k = K(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

tehát a K függvény maga is hatásfüggvény. De akkor hatásfüggvény K-nak minden $\varphi(K)$ függvénye is, ahol $\varphi(x)$ bármilyen monoton függvény. Nincs is más hatásfüggvény, csak olyan, amely $\varphi(K)$ alakban írható. Mert, ha $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ a K középértéket definiáló valamely hatásfüggvény, akkor

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(K, K, \ldots, K) = \varphi(K).$$

3. Az ismeretes középértékek legtöbbjénél a hatásfüggvény megválasztható úgy, hogy

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

legyen, ahol $f(x)$ valamely monoton függvényt jelent. Például az aritmetikai középnél

$$f(x) = x,$$

a geometriainál

$$f(x) = \log x,$$

a harmonikus középnél

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

a quadratikus középnél

$$f(x) = x^2.$$

Természetesen az $f(x)$ függvény helyett mindig választható az $af(x) + b$ függvény is, ahol a és b tetszésszerinti állandó. Az alábbiakban mindig nemcsökkenő monoton függvényről beszélünk, de nyilván éppen úgy lehetne nemnövekvő függvényt is választani; ez utóbbi eset negatív a választásával az előbbire visszavezethető.

Most azzal a kérdéssel akarunk foglalkozni, hogy melyek azok a középértékek, amelyek a fönt emlitett módon egy $f(x)$ folytonos monoton függvénnyel definiálhatók. A monotonitást, mégpedig a szűkebb értelemben, tehát határozottan növekvő voltot $f(x)$-ről fel kell tételeznünk, mert különben a

$$k = f^{-1}\left[\frac{1}{n}\sum_1^n f(x_i)\right] \tag{III}$$

összefüggés nem adja meg egyértelműen a k középértéket.

Ilyen $f(x)$ függvénnyel való előállitáshoz szükséges, hogy a középérték maga is növekvő legyen. Ha ugyanis $x_i \leq y_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, de legalább egy i-re $x_i < y_i$, akkor monoton növekvő $f(x)$ mellett, (k_x-szel az x_i változók, k_y-nal az y_i változók közepét jelölve):

$$f(k_x) = \frac{1}{n}\sum_1^n f(x_i) < \frac{1}{n}\sum_1^n f(y_i) = f(k_y),$$

amiből az $f^{-1}(x)$ monoton növekvő volta miatt $k_x < k_y$ következik.

Második szükséges feltétel az, hogy a középérték asszociativ legyen. Ugyanis ha

$$f(k) = \frac{1}{n}\cdot\sum_1^n f(x_i),$$

akkor k_j-vel jelölve az első j változó közepét, $(j < n)$,

$$f(k_j) = \frac{1}{j}\cdot\sum_1^j f(x_i),$$

tehát
$$f(k)=\frac{1}{n}\cdot\{j\cdot f(k_j)+f(x_{j+1})+\cdots+f(x_n)\},$$
azaz k középértéke a $k_j, k_j,\ldots, k_j, x_{j+1},\ldots x_n$ változóknak is. Végül szükséges föltétel még az is, hogy a középérték a változóinak folytonos függvénye legyen, amit a középérték III. alatti előállításából az $f(x)$ függvény folytonosságát tekintve, azonnal láthatunk.

Ez a három föltétel együttesen elegendő is a középértéknek ilyen módon való előállítására. Éppen ezt mondja ki a következő Kolmogoroff-Nagumo-tétel:[7]

Minden folytonos, növekvő, asszociatív középértékhez tartozik olyan folytonos, növekvő $f(x)$ függvény, mely a középértéket
$$k=f^{-1}\left[\frac{1}{n}\sum_1^n f(x_i)\right] \tag{III}$$
alakban megadja.

A tétel bizonyításához az $f(x)$ függvényt kell a középértékből meghatároznunk. E függvény meghatározása összefüggésben van Fejér Lipót-nak egy régebbi kérdéstételével.

Ez a kérdés a következő. Mérjünk fel a sík derékszögű koordinátarendszerében az X-tengely x_1 abszcisszájú pontjában a értéket, az x_2 pontjában pedig b értéket. Legyen adva valamilyen középérték: $K_2(x, y)$. Az $\frac{x_1+x_2}{2}$ pontban mérjük fel a $k=K_2(a, b)$ ordinátát, továbbá a $\frac{3x_1+x_2}{4}$, illetőleg $\frac{x_1+3x_2}{4}$ pontban a $K_2(a, k)$, illetőleg $K_2(k, b)$ ordinátát. Az eljárást tovább folytatva, az $\langle x_1, x_2\rangle$ intervallum fokozatos felezésével előálló minden szakasz közepére mérjük föl a szakasz szélső pontjaiban felmért ordináták középértékét. Ezt a szerkesztési eljárást alkalmazta Leibniz a *geometriai* középre, s így nyerte az exponenciális (lánc-) görbét.[8] A kérdés mármost az, hogy

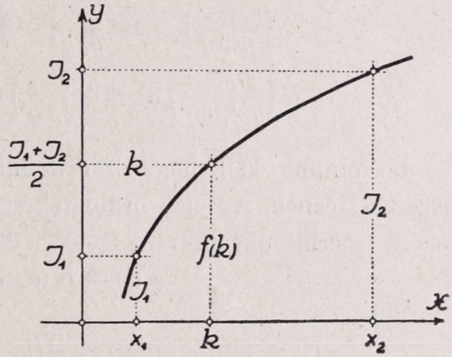
---

[7] L. a [2], [3] és [4] lábjegyzetben idézett műveket, továbbá Hardy—Littlewood—Pólya: Inequalities, Cambridge, 1934, p. 158—163.

[8] L. pl. Leibniz—Kowalewski: Analysis des Unendlichen. Ostwalds Klassiker Nr. 162, p. 13—14.

általában milyen középértékeknél kaphatunk ezzel a Leibniz-féle szerkesztéssel folytonos görbét, és a középérték ismeretével hogyan határozható meg ennek a görbének az egyenlete.

Ennek a kérdésnek előbbi kérdésünkkel való kapcsolatát a következő meggondolás világítja meg. Tegyük fel, hogy ismeretes az az $f(x)$ függvény, mely középértékünket (III) alapján definiálja. (L. az ábrát.)



A feltételeink szerint

$$f(k) = \tfrac{1}{2}\,[f(x_1) + f(x_2)],$$

tehát az $f(x_1) = y_1$ és $f(x_2) = y_2$ jelöléssel:

$$k = f^{-1}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az f^{-1} inverz függvényre vonatkozólag az y_1 és y_2 abszcisszák aritmetikai közepéhez éppen a k ordináta tartozik, vagyis az f^{-1} függvény a Leibniz-féle szerkesztéssel nyerhető.

A szerkesztési eljárás fokozatos keresztülvitele helyett — Kolmogoroff-ot követve — az $f^{-1}(x) = \varphi(x)$ függvényt egységesen definiáljuk, először például a $\langle 0, 1\rangle$ zárt szakasz racionális abszcisszáira.

Legyen tehát a középérték az (I) sorozat által adva. Az $a<b$ pozitív számokat tetszés szerint megválasztva, tegyük:

$$\varphi(0) = f^{-1}(0) = a, \quad \varphi(1) = f^{-1}(1) = b.$$

Legyen továbbá $x<1$ pozitív racionális szám. Egyszerűség kedvéért irjuk x-et

$$x = \frac{p}{p+q}$$

alakba, ahol p és q pozitív egész számok. Definícióképen legyen mármost

$$\varphi\left(\frac{p}{p+q}\right) = K(\underbrace{b, b,\ldots, b}_{p\text{-szer}}, \underbrace{a, a,\ldots, a}_{q\text{-szor}}) = K\begin{pmatrix} b, & a \\ p, & q \end{pmatrix}.$$

A definíció az összes racionális számokra egyértelmű. Ha ugyanis

$$\frac{p}{p+q}=\frac{p'}{p'+q'}, \quad \text{azaz} \quad pq'=p'q,$$

akkor az asszociatív tulajdonságnak egy már előbb felhasznált következménye szerint

$$\varphi\left(\frac{p}{p+q}\right)=K\begin{pmatrix}b, & a\\ p, & q\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}b, & a\\ pq', & qq'\end{pmatrix}=$$
$$=K\begin{pmatrix}b, & a\\ qp', & qq'\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}b, & a\\ p', & q'\end{pmatrix}=\varphi\left(\frac{p'}{p'+q'}\right).$$

Igazolnunk kell, hogy ez a definíció megfelel a LEIBNIZ-féle szerkesztésnek. Az első ordinátákra ez azonnal látható. Definíciónk szerint ugyanis:

$$\varphi\left(\tfrac{1}{2}\right)=K(a,\ b)=k,$$

továbbá

$$\varphi\left(\tfrac{3}{4}\right)=K(b,\ b,\ b,\ a)=K(b,\ b,\ k,\ k)=K(b,\ k)$$

és ugyanúgy

$$\varphi\left(\tfrac{1}{4}\right)=K(a,\ k)$$

amint azt a LEIBNIZ-féle szerkesztés előírja.

Általánosságban ezt mármost a következő segédtétellel lehet belátni:

Ha K asszociatív közép és $x+y=u+v$, akkor a

$$k_1=K\begin{pmatrix}b, & a\\ x, & y\end{pmatrix} \quad \text{és} \quad k_2=K\begin{pmatrix}b, & a\\ u, & v\end{pmatrix}$$

középértékeknek közepe:

$$K(k_1,\ k_2)=K\begin{pmatrix}b & , & a\\ x+u, & & y+v\end{pmatrix}.$$

Ugyanis

$$K\begin{pmatrix}b & , & a\\ x+u, & & y+v\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}b, & a, & b, & a\\ x, & y, & u, & v\end{pmatrix},$$

azonban az asszociatív tulajdonság szerint ez utóbbiban az x-számú b és y-számú a helyébe írható $(x+y)$-szor a k_1 közép, ugyanígy a megmaradó számok helyébe $(u+v)$-szer a k_2 közepük, tehát

$$K\binom{b\ ,\quad a}{x+u,\ y+v} = K\binom{k_1\ ,\quad k_2}{x+y,\ u+v} = K(k_1, k_2)$$

az $x+y=u+v$ egyenlőség folytán.

Ha mármost a $\frac{p}{q}$, illetőleg $\frac{p'}{q'}$ abszcisszához a φ_1, illetőleg φ_2 ordináta tartozik, azaz

$$\varphi_1 = K\binom{b,\quad a}{p,\ q-p} = K\binom{b\ ,\quad a}{pq',\ qq'-pq'}$$

és

$$\varphi_2 = K\binom{b\ ,\quad a}{qp',\ qq'-qp'},$$

akkor a segédtétel szerint:

$$K(\varphi_1, \varphi_2) = K\binom{b\qquad ,\qquad a}{pq'+qp',\ 2qq'-(pq'+qp')}$$

és valóban ezt a függvényértéket rendeli definiciónk e két abszcissza aritmetikai közepéhez, a $\frac{pq'+qp'}{2qq'}$ abszcisszához.

A $\varphi(x)$ függvény tehát ezzel a racionális abszcisszákra egyértelműen definiálva van a Leibniz-féle szerkesztésnek megfelelőleg. Továbbá $\varphi(x)$ a racionális számokra értelmezett monoton növekvő függvény. Ha ugyanis $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$, akkor a

$$K\binom{b,\quad a}{p,\ q-p} = K\binom{b\ ,\quad a}{pq',\ qq'+pq'}$$

középben együttesen éppen úgy qq' számú a és b szám szerepel, mint a

$$K\binom{b\ ,\quad a}{p'q,\ qq'-p'q} = K\binom{b\ ,\quad a}{p',\ q'-p'}$$

középben, de ez utóbbiban $p'q > pq'$ miatt többször fordul elő a nagyobb b szám, mint az előbbiben. És így a középérték monotonitása miatt az utóbbi közép nagyobb az előbbinél.

Irracionális abszcisszákra mármost a definició folytonosan terjeszthető ki. Ha az $x<1$ pozitív irracionális szám határértéke az $r_1<r_2<r_3<\cdots$ racionális számok monoton növekvő sorozatának, akkor legyen definició szerint:

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi(r_n).$$

Hogy ez a határérték létezik és független az irracionális számot értelmező sorozat megválasztásától, az tekintettel arra, hogy a középérték is monoton, a monoton sorozatok elméletéből azonnal következik.

Hátra van még annak a kimutatása, hogy az így most már minden valós abszcisszára értelmezett $\varphi(x)$ függvény folytonos. Mint monoton függvénynek másfajta diszkontinuitása, mint szakadása nem is lehet. Tegyük föl, hogy az x helyen szakadása volna, tehát például a szokásos jelölés szerint

$$\varphi(x+0)=y_1>\varphi(x-0)=y_2$$

volna. Legyen $K(y_1, y_2)=k$. A K középérték föltevésünk szerint monoton és így a szorosabb értelemben is intern, tehát

$$y_1>k>y_2.$$

Válasszuk az $\varepsilon>0$ számot úgy, hogy

$$y_1>k+\varepsilon>k-\varepsilon>y_2$$

legyen. Ehhez az ε számhoz tartozik a K függvény folytonossága miatt olyan $\delta>0$ szám, hogy ha

$$0<y_1-y'_1<\delta \quad \text{és} \quad 0<y'_2-y_2<\delta,$$

akkor

$$k+\varepsilon>K(y'_1, y'_2)>k-\varepsilon. \tag{IV}$$

Minthogy y_1 jobboldali határérték, bizonyára van olyan az $r_1>x$ racionális abszcisszához tartozó y'_1 ordináta és ugyanígy oly $r_2<x$ racionális abszcisszához tartozó y'_2 érték, mely egyenlőtlenségünknek eleget tesz, s még ezen fölül

$$\tfrac{1}{2}(r_1+r_2)\neq x, \quad \text{például} \quad \tfrac{1}{2}(r_1+r_1)=r>x.$$

A megfelelő $K(y'_1, y'_2)$ középérték, mely az r abszcisszához tartozik, a IV. egyenlőtlenségnek eleget tesz, holott az (x, r) közben van a k-nál nagyobb ordináta is, ami a $\varphi(x)$ monoton voltának ellentmond. Tehát $\varphi(x)$ folytonos, monoton függvény s inverz függvénye, $f(x)$ a középértéket a tételben kimondott módon megadja.

A tágabb értelemben vett monotonitás, illetve internitás az $f(x)$ függvény létezéséhez nem elegendő. Például $k = \text{Max}\{x_i\}$ közép folytonos, asszociativ és monoton, de nem határozottan növekvő és nem is tartozik hozzá a (III)-nak eleget tevő $f(x)$ függvény.

Az $f(x)$ függvény, melynek létezését így kimutattuk, differenciálható középértékre egy quadraturával meghatározható. Tegyük föl ugyanis egy pillanatra, hogy a meghatározandó $f(x)$ függvény is differenciálható. Az $f(x)$-et meghatározó függvényegyenlet:

$$f[K(x_1, x_2)] = \tfrac{1}{2}\cdot[f(x_1) + f(x_2)].$$

Differenciálva x_1 szerint:

$$f'(K)\, K_{x_1}(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2} f'(x_1),$$

míg az x_2 szerint való differenciálással:

$$f'(K)\, K_{x_2}(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2} f'(x_2).$$

Két utóbbi egyenletünkből az $f'(K)$ függvényt kiküszöbölve:

$$f'(x_1) = \frac{K_{x_1}(x_1, x_2)}{K_{x_2}(x_1, x_2)}\cdot f'(x_2).$$

Tegyük itt most már

$$x_1 = x,\ x_2 = c,\ f'(c) = a \quad \text{és} \quad \frac{K_{x_1}(x_1, x_2)}{K_{x_2}(x_1, x_2)} = a(x),$$

akkor

$$f(x) = a\int a(x)\,dx + b. \qquad \text{(V.)}$$

Itt valóban két paraméter (a és b) lépett föl, megfelelőleg annak, hogy, ha $f(x)$ függvényegyenletünknek megoldása, akkor $a\, f(x) + b$ is az.

Ha tehát van differenciálható $f(x)$ függvény, az csak az (V) egyenlettel adott lehet. Másfelől azonban a szerkesztés szerint csak egy folytonos megoldás lehetséges (az a és b paraméterektől eltekintve), amely mint monoton függvény majdnem mindenütt differenciálható, tehát majdnem mindenütt megegyezik az $a\int a(x)\,dx + b$ függvénnyel s így, minthogy mindkét függvény folytonos, minden helyen megegyezik vele.

Veress Pál.

ÜBER DEN BEGRIFF DES MITTELWERTES.

Unter einem Mittelwert der n Zahlen: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verstehen wir nach DE FINETTI eine symmetrische Funktion $M(x_1, x_2, \ldots x_n)$, für die

$$M(x, x, \ldots, x) = x$$

gilt.

Nach einer anderen Definition von O. CHISINI ist m ein Mittelwert der Zahlen: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in bezug auf die Funktion $F(x_1, x_2 \ldots, x_n)$, wenn

$$F(m, m, \ldots, m) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ist.

Es wird gezeigt, dass jede Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, für welche $F(x,x,\ldots,x)$ monoton wachsend ist, einen Mittelwert $M(x_1\, x_2, \ldots, x_n)$ im Sinne der ersten Definition eindeutig bestimmt und umgekehrt zu jedem Mittelwert $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ unendlich viele Funktionen $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ im Sinne der zweiten Definitionen gehören, die alle in der Form $\varphi[M(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ ausgedrückt werden können, wo $\varphi(x)$ eine beliebige monoton wachsende Funktion bedeutet.

Ist der Mittelwert $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ monoton wachsend, stetig und associativ, so gibt es eine monoton wachsende, stetige Funktion $f(x)$, so dass

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

gewählt werden kann.

Dieser KOLMOGOROFF-NAGUMOscher Satz wird im Zusammenhang mit einer älteren Fragestellung von L. FEJÉR bezüglich der Verallgemeinerung der LEIBNIZschen Konstruktion der Kettenlinie bewiesen.

P. Veress.

NYOLC ASSZOCIÁLT PONT ÁLTAL MEGHATÁROZOTT 35 MÁSODRENDŰ FELÜLETRŐL.

Bevezetés. HESSE egy tétele szerint egy másodrendű felület két polártetraéderének 8 szögpontja mindig 8 asszociált pont. Megfordítva: 8 asszociált pontból bárhogyan alkossunk is 2 tetraédert, ezek mint polártetraéderek, mindig meghatároznak 1 és csakis 1 másodrendű felületet.

Ennek a bizonyításához szükségünk lesz REYEnek a torzötszögek poláris tulajdonságairól tett néhány megállapitására. Egy torzötszög 10 szemközti elempárja t. i. a tér egy tetszőleges síkjából egy polármező 10 homológ elempárját metszi ki. E polármező benne van abban a térbeli polaritásban, melynek az ötszög bármelyik 4 szögpontja alkotta tetraéder a polártetraédere és melyben az 5-ik szögpont polársikja tetszőlegesen felvett sikunk. Ugyanezen polármező polárháromszögeit metszik ki az öt szögponton átmenő harmadrendű térgörbék is sikunkból. (A kúpszeletsorokra vonatkozó DESARGUES-féle tétel egyik analogonja.)

E megállapitásokhoz kapcsolódik továbbá még egy HESSE-féle tétel, mely szerint, ha 8 asszociált pont közül bármelyik 6 ponton át harmadrendű térgörbét fektetünk, akkor a 7-ik és 8-ik pont összekötő egyenese e görbének bisecansa lesz. Ezek után kimutatjuk, hogy a 6 kiválasztott pont alkotta torzhatszög 10 szemközti síkpárja a 7-ik és 8-ik pont összekötő egyenesét egy involució 10 homológ pontpárjában metszi és ebben az involucióban maga a 7-ik és 8-ik asszociált pont, valamint az első 6 pont meghatározta harmadrendű térgörbe által kimetszett 2 pont is homológ pontpár.

Nyolc asszociált pont most már 35-féleképpen bontható fel tetraéderpárokra és így 35 másodrendű felületet határoz meg. Felületeink mindegyikéből az őt megadó 2 polártetraéder élein levő pontok és lapjain levő kúpszeletek könnyen szerkeszthetők. A felületi pontok az előbb említett involuciók kettőspontjai gyanánt adódnak, a kúpszeletek pedig a 3 pont síkján a többi 5 pont meghatározta polármezők magkúpszeleteiként. A 8 asszociált pont 28 egyenest és 56 síkot határoz meg; így 28 pontpárt és 56 kúpszeletet kapunk: a pontpárok mindegyikén 15, a kúpszeletek mindegyikén pedig 5 felület megy át a 35 közül.

Ha 35 felületünk közül kettőt kiválasztunk, ezeknek vagy 2 közös kúpszeletük van (az előbbi 56 kúpszelet közül), vagy 4 közös pontpárjuk (az előbbi 28 pontpár közül). Utóbbi esetben a 4 pontpáron még egy 3-ik felület is átmegy, vagyis e 4 pontpár 8 asszociált pontot jelent. A 28 pontpár összesen 108 ilyen asszociált pontnyolcast ad meg.

A 28 pontpár mindegyike, mint láttuk, 15 felületen van rajta, a többi 20 felület mindegyikére nézve pedig konjugált. Olyan felület pedig, melyre nézve a 8 asszociált pontot tevő 4 pontpár mindegyike konjugált, a 35 felület között 8 van.

Végül bebizonyítjuk, hogy ha 8 asszociált pontunk valós, akkor a 35 felület közül mindig csak egy felület képzetes, 34 pedig valós, és pedig 16 felület elliptikus, 18 hiperbolikus. A 28 pontpárból 12 képzetes és 16 valós, az 56 kúpszeletből pedig 8 képzetes és 48 valós.

1. §. *Egy másodrendű felület két polártetraéderének 8 szögpontja 8 asszociált pont.* (HESSE).[1]

Legyen $A_1A_2A_3A_4$ és $A_5A_6A_7A_8$ a két polártetraéder. Bebizonyitható, hogy e két tetraéder 8 szögpontján és 2 nem konjugált élén át mindig fektethető másodrendű vonalfelület.

[1] L. REYE: Geom. d. Lage III. (1892) 196. old. és II. 135. old.

Ugyanis két nem konjugált egyenesen levő ama síksorok, melyekben a konjugált síkokat feleltetjük meg egymásnak, projektívek, és így például:

$$A_1A_2(A_3A_4A_7A_8) \barwedge A_5A_6(A_4A_3A_8A_7).$$

Egyúttal tehát:

$$A_1A_2(A_3A_4A_7A_8) \barwedge A_5A_6(A_3A_4A_7A_8),$$

és e két utóbbi projektiv síksor képződménye valóban olyan másodrendű vonalfelület, mely átmegy mind a 8 pontunkon és az A_1A_2, A_5A_6 egyeneseken. Ugyanígy a 8 szögpont bármelyik két nem konjugált éllel másodrendű vonalfelület által köthető össze és így szögpontjaink előállíthatók 3 másodrendű felület metszéspontjai gyanánt, tehát valóban 8 asszociált pontot jelentenek.

2. §. *Egy torzötszög 10 szemközti elempárja a tér egy tetszőleges síkjából egy polármező 10 homológ elempárját metszi ki. E polármező bennfoglaltatik abban a térbeli polárrendszerben, melynek az ötszög 4 szögpontja alkotta tetraéder a polártetraédere és melyben az 5-ik szögpont polársíkja polármezőnk síkja.*[2]

Legyen $A_1A_2A_3A_4A_5$ a torzötszög és ε az adott sík, mely egyik szögpontra sem illeszkedik. A torzötszög egy szemközti elempárján mindig egyik élét és a fennmaradó 3 szögponton levő síkját értjük, például: A_1A_2 és $A_3A_4A_5$. A szemközti elempárok száma: $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$.

Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder mint polártetraéder és A_5, ε mint pólus és polársík, meghatároznak egy térbeli polárrendszert. Ebben ötszögünk minden szemközti elempárja konjugált elempár. Ugyanis az A_5 pontra illeszkedő minden él (pl. A_4A_5) átmegy szemközti síkjának ($A_1A_2A_3$-nak) a pólusán és az A_5-re illeszkedő minden sík (pl. $A_3A_4A_5$) átmegy szemközti élének (A_1A_2-nek) a konjugáltján.

---

[2] L. ugyanott II. 135. old.

Messük most már e polárrendszert az ε síkkal. Mivel például az $\varepsilon.(A_1A_2)$ pont polársíkja $A_5.(A_3A_4)$ sík, azért az ε polármezejében $\varepsilon.(A_1A_2)$ és $\varepsilon.(A_3A_4A_5)$ pólus és poláris. Továbbá például az $\varepsilon.(A_1A_2A_3)$ egyenes konjugáltja A_5A_4 és így ε síkon $\varepsilon.(A_1A_2A_3)$ és $\varepsilon.(A_4A_5)$ poláris és pólus. Látható tehát, hogy az ε síkból ötszögünk minden szemközti elempárja (akár a sík, akár az él illeszkedik A_5-re) valóban a kérdéses polármezőnek egy homológ elempárját metszi ki.

E metszet egyébként egy jólismert *(10_3, 10_3)-konfiguráció.* Ugyanis ötszögünk minden élén 3 sík és minden síkján 3 él van, tehát a metszet minden pontján 3 egyenes és minden egyenesén 3 pont van. Mivel a metszetet tulajdonképpen az $A_1A_2A_3$ háromszögnek az A_4 és A_5 pontokból az ε síkra való $A'_1A'_2A'_3$, $A''_1A''_2A''_3$ projekciói, továbbá az $\varepsilon.(A_4A_5)=S$ pont és az $\varepsilon.(A_1A_2A_3)=s$ egyenes alkotják, és mivel $A'_1A''_1$, $A'_2A''_2$, $A'_3A''_3$ egyenesek az S pontra, az $A'_1A'_2.A''_1A''_2$, $A'_2A'_3.A''_2A''_3$, $A'_3A'_1.A''_3A''_1$ pontok pedig az s egyenesre illeszkednek, azért világos, hogy konfigurációnk azonos azzal a Desargues-féle konfigurációval, melyet két *perspektív* háromszög, valamint perspektivitásuk centruma és tengelye alkot. A konfigurációnak a polármező révén összetartozó *10* elempárja a következő:

A'_1 és $A''_2A''_3$; A'_2 és $A''_3A''_1$; A'_3 és $A''_1A''_2$;
A''_1 és $A'_2A'_3$; A''_2 és $A'_3A'_1$; A''_3 és $A'_1A'_2$;
végül S és s.

3. §. *Egy torzötszög köré írható kétszeresen végtelen sok harmadrendű térgörbe az ötszög egyik szögpontjára sem illeszkedő síkból ugyanazon polármező polárháromszögeit metszi ki, melyet az ötszög szemközti elempárjai határoznak meg a síkon.*[3]

Megtartva jelöléseinket, az ε síkon vegyünk fel egy tetszőleges p egyenest. Ez mint *bisecans* az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pontokkal együtt megad egy harmadrendű térgörbét: R^3-t. Ugyanis az

$$A_1A_2(A_3A_4A_5) \barwedge p(A_3A_4A_5) \quad \text{és} \quad A_4A_5(A_1A_2A_3) \barwedge p(A_1A_2A_3)$$

[3] L. Reye: id. h. II. 225. old.

projektiv siksor-párok képződményeiként keletkező 2 másodrendű vonalfelület p egyenesen kivül éppen olyan R^3-ban metszi egymást, melynek A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pontjai, p pedig bisecansa. Ez az R^3 görbe az ε síkot p-nek 2 valós, vagy konjugáltképzetes pontjában és egy 3-ik, okvetlenül valós P pontban metszi; e pontot rendeljük p egyeneshez homológ elem gyanánt.

Ugyanigy az ε sík tetszőleges Q pontja is megad az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pontokkal együtt egy R_1^3 görbét, mely például a közös alkotóival biró

$$Q(A_1A_2A_3A_4A_5),\ A_1(QA_2A_3A_4A_5)$$

másodrendű kúpfelületek metszésgörbéje gyanánt szerkeszthető. Ez az R_1^3 görbe az ε síkot még 2 valós, vagy konjugáltképzetes pontban metszi, melyek összekötő egyenese: q okvetlenül valós és ezt rendeljük Q ponthoz homológ elem gyanánt.

Ha már most a Q pont illeszkedik a p egyenesre, akkor az R^3, R_1^3 görbéken át egyetlen másodrendű felület: F^2 fektethető azáltal, hogy R_1^3-nek egy tetszőleges pontjából bisecanst húzunk R^3-höz; ez R_1^3-nek csak egyszerű secansa és így vele egy másodrendű vonalfelület által összeköthető. Ez az F^2 felület tartalmazza az ε sík P, Q pontjait és p, q egyeneseit, mivel ezek R^3-nek, illetőleg R_1^3-nek pontjai, illetőleg bisecansai. Ezért F^2 és ε sík metszete a p, q egyenespárból áll; csakhogy Q pont a p egyenesen van, P pont pedig nincs rajta, a P pontnak tehát q egyenesen kell lennie. Ezzel be is bizonyítottuk, hogy P és p, valamint Q és q egy polármező homológ elempárjai és hogy az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pontokon átmenő bármely harmadrendű térgörbe oly háromszög szögpontjaiban metszi az ε sikot, melynek minden oldala a szemközti szögpont polárisa, mely tehát *polárháromszög*.

Ez a polármező azonos az ötszög szemközti elempárjai által meghatározott polármezővel, mert ha Q pontot például az $A_1A_2A_3$ síkon vesszük fel, akkor az általa megadott R^3 görbe szétesik az $A_1A_2A_3$ sík egy kúpszeletére és az A_4A_5 élre, tehát az ε síkkal való polárháromszög-metszetének 2 szögpontja valóban az $\varepsilon.(A_1A_2A_3)$ egyenesen van, a 3-ik pedig az $\varepsilon.(A_4A_5)$ pont.

A 2. és 3. §-ban tárgyalt két tétel a teljes négyszögre és a szögpontjai meghatározta *kúpszeletsorra* vonatkozó DESARGUES-tétel térbeli analogonjának tekinthető.

4. §. *Ha 8 asszociált pont közül bármelyik 6 ponton át harmadrendű térgörbét szerkesztünk, ennek a 7-ik és 8-ik pontot összekötő egyenes bisecansa lesz.* (HESSE tétele).[4]

Kimutatjuk először, hogy 2 *elsőfajú negyedrendű térgörbének* legfeljebb *8* közös pontja lehet. Legyen ugyanis az R^4, R^4_0 görbék 3 közös pontja A_1, A_2, A_3 és a 2 görbét az A_1A_2 bisecansukkal összekötő másodrendű vonalfelületek : Φ^2, Φ^2_0. E felületek az A_1A_2 alkotón kívül egy R^3 görbében metszik egymást, melynek tehát A_1A_2 szintén bisecansa, átmegy A_3 ponton és az R^4, R^4_0 görbéknek minden A_1, A_2-től különböző metszéspontján is. Ugyanígy az A_1A_3 bisecans oly R^3_0 görbét szolgáltat, mely átmegy A_2 ponton és az R^4, R^4_0 görbéknek minden A_1, A_3-tól különböző metszéspontján. De R^3-nek és R^3_0-nek legfeljebb 5 közös pontja lehet, és mivel A_1, A_2, A_3 közt nincs közös pontjuk, azért R^4-nek és R^4_0-nek valóban legfeljebb 8 közös pontja lehet.

Ha R^4-nek és R^4_0-nek valóban 8 közös pontja van, akkor ez a 8 pont *asszociált*, mert előállítható, mint 3 másodrendű felület 8 metszéspontja. Legyen e 8 metszéspont : A_1, A_2,..., A_8 és R^3 legyen az A_1, A_2,..., A_6 pontok meghatározta harmadrendű térgörbe. Az R^4-et, illetőleg R^4_0-et közös A_7A_8 bisecansukkal összekötő Φ^2, Φ^2_0 másodrendű felületek az A_7A_8 alkotón kívül éppen az R^3 görbében metszik egymást és igy ennek A_7A_8 egyenes valóban bisecansa.

5. §. *Ha két tetraéder 8 szögpontja egy harmadrendű térgörbe 8 pontja, vagy pedig 8 asszociált pont, akkor mindig van egy és csakis egy olyan térbeli polárrendszer, melynek e két tetraéder polártetraédere.*

Legyen tehát először $A_1A_2A_3A_4$ és $A_5A_6A_7A_8$ egy R^3 görbébe

---

[4] L. REYE: id. h. III. 21. old.

írt két tetraéder. Az $A_1A_2A_3A_4$ polártetraéder és az A_5. $A_6A_7A_8$ pólus-polársík-pár meghatároz egy π polárrendszert, melyből az $A_6A_7A_8$ sík egy polármezőt választ ki. Mivel a 3. §. szerint az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pontokon átmenő minden harmadrendű tér-görbe e polármezőnek egyik polárháromszögét metszi ki az $A_6A_7A_8$ síkból, azért $A_6A_7A_8$ háromszög maga is polárháromszög és $A_5A_6A_7A_8$ polártetraéder a π polárrendszerben.

Ha pedig $A_1, A_2, \ldots, A_8$ 8 *asszociált* pont, akkor az $A_6A_7A_8$ sík által a π polárrendszerből kiválasztott polármezőben A_6 polárisa ismét A_7A_8 egyenes lesz, mert az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 pontok meghatározta harmadrendű térgörbének A_7A_8 egyenes a 4. §. szerint bisecansa. Az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_7 és A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_8 ponthatosok meghatározta harmadrendű térgörbék révén pedig arról győződhetünk meg, hogy A_7 pont polárisa A_6A_8, A_8-é pedig A_6A_7. Ennélfogva az $A_6A_7A_8$ most is polárháromszög, illetőleg $A_5A_6A_7A_8$ most is polártetraéder a π polárrendszerben.

E bizonyítás egy mellékeredményre is vezet. Ha ugyanis az $A_1, A_2, \ldots, A_6$ pontok meghatározta R^3 görbének az A_7A_8 bisecansával való metszéspontjai: X, Y, akkor ezek is konjugált pontok a π polárrendszerben, mert az $A_6A_7A_8$ síkon keletkező polármezőnek A_6XY is polárháromszöge.

6. §. *Nyolc asszociált pont közül bármelyik 6 pont alkotta torzhatszög 10 szemközti síkpárja a 7-ik és 8-ik pont összekötő egyenesét egy involució 10 homológ pontpárjában metszi; ebben az involucióban homológ pontpár maga a 7-ik és 8-ik asszociált pont is, valamint az első 6 pont meghatározta harmadrendű térgörbe által kimetszett 2 pont is.*

Legyen ismét $A_1, A_2, \ldots, A_8$ a 8 asszociált pont és válasszuk ki az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ torzhatszöget. Ennek szemközti síkpárja például $A_1A_2A_3$, $A_4A_5A_6$, vagyis két olyan sík, mely együttesen mind a 6 szögpontot kimeríti. Ilyen szemközti síkpár összesen $\frac{1}{2}\cdot\binom{6}{3} = 10$ van.

Az 5. §-ban láttuk, hogy az $A_6A_7A_8 = \varepsilon$ síkon az $A_1A_2A_3A_4A_5$

ötszög által létesített polármező bennfoglaltatik abban a π polárrendszerben, melynek $A_1A_2A_3A_4$, $A_5A_6A_7A_8$ polártetraéderei. E polármezőben pl. $A_1A_2A_3$ és A_4A_5 nyoma poláris és pólus, tehát $(A_1A_2A_3).(A_7A_8)$ polárisa az $A_4A_5A_6$ sík nyoma lesz (mert A_7A_8 pólusa A_6). De akkor az A_7A_8 egyenest $A_1A_2A_3$ és $A_4A_5A_6$, és ugyanígy a hatszög minden szemközti síkpárja is a π polárrendszer szerinti konjugált pontpárokban metszi, amivel tételünket igazoltuk is, mert e konjugált pontpárok valóban involuciót alkotnak és az 5. § szerint ebben A_7A_8, valamint X, Y is involuciós társak.

7. §. *Nyolc asszociált pont 35-féleképpen bontható fel tetraéderpárokra és így 35 polárrendszert, vagyis ezek magfelületeiként 35 másodrendű felületet határoz meg. E felületek mindegyike az őt megadó két polártetraéder 12 élén levő 24 pontja, illetőleg a 8 lapon levő 8 kúpszelete révén szerkeszthető. 8 asszociált pontunk 28 egyenest és 56 síkot határoz meg, ami 28 pontpárt és 56 kúpszeletet jelent; 35 másodrendű felületünk közül e pontpárok mindegyikére 15 és e kúpszeletek mindegyikére 5 felület illeszkedik.*

Legyen ismét $A_1, A_2, \ldots A_8$ a 8 asszociált pont. A következőkben az A_iA_j egyenest a_{ij}-vel, az $A_iA_jA_k$ síkot a_{ijk}-val és az $A_iA_jA_kA_l$, $A_mA_nA_oA_p$ polártetraéder-pár meghatározta π polárrendszer magfelületét F^2_{ijkl} vagy F^2_{mnop} jellel jelöljük. E tetraéderpárok és egyúttal a magfelületek száma: $\frac{1}{2}\cdot\binom{8}{4}=35$; az a_{ij} egyenesek száma: $\binom{8}{2}=28$, az a_{ijk} síkoké pedig: $\binom{8}{3}=56$.

Az $F^2_{ijkl}\equiv F^2_{mnop}$ felületnek például az a_{ij} tetraéder-éllel való két metszéspontja: D'_{ij}, D''_{ij} nem más, mint a felület által az a_{ij} egyenesen indukált involució két kettőspontja, ez az involució pedig a 6. §. szerint már a 8 asszociált ponttal együtt adva van: az $A_kA_lA_mA_nA_oA_p$ hatszög 10 szemközti síkpárja határozza meg az a_{ij} egyenesen és benne A_i, A_j is involuciós társak. A D'_{ij}, D''_{ij} pontok természetesen harmonikusan választják szét az involució minden párját és így az A_i, A_j párt is. Ily módon valóban 24 pontját kapjuk felületünknek: mindkét polártetraéderének 6—6 élén levő pontjait. De ezáltal már a 8 tetraéderlapon levő kúpszeleteit is ismerjük a felületnek: például az a_{ijk} lapon levő K^2_{ijk} kúpszelete nem más, mint az a_{ijk} síkon az $A_l A_m A_n A_o A_p$ ötszög 10 szemközti elempárja által meghatározott polármező magkúpszelete. Ennek természetesen $A_i A_j A_k$ is polárháromszöge és így átmegy a

$$D'_{ij},\ D''_{ij};\ D'_{jk},\ D''_{jk};\ D'_{ki},\ D''_{ki}$$

pontokon, melyek meg is határozzák.

A 28 a_{ij} egyenes és az 56 a_{ijk} sík mindegyikén van egy D'_{ij}, D'_{ij} pontpár, illetőleg egy K^2_{ijk} kúpszelet. Így összesen 56 D_{ij} pontot és 56 K^2_{ijk} kúpszeletet nyerünk. A 35 felület közül minden D'_{ij}, D''_{ij} pontpáron $\binom{6}{2} = 15$ felület megy át, mert ennyi tetraédernek az éle a_{ij} és minden K^2_{ijk} kúpszeleten $\binom{5}{1} = 5$ felület megy át, mert ennyi tetraédernek a lapja a_{ijk}.

8. §. *A 35 F^2_{ijkl} felület közül kettőt kiválasztva, ezek vagy 2 közös K^2_{ijk} kúpszelettel, vagy 4 közös D_{ij} pontpárral bírnak. Utóbbi esetben a 4 közös pontpáron egy 3-ik felület is átmegy, vagyis e 4 pontpár 8 asszociált pontot jelent. A 28 D_{ij} pontpár 105 ilyen asszociált pontnyolcast ad meg.*

Ha két felületet felírunk F^2_{ijkl} alakban, akkor közös indexeik száma lehet: 3, 2, 1 vagy 0. Tekintve, hogy a közös index nélküli felületek azonosak: $F^2_{ijkl} \equiv F^2_{mnop}$, az 1 közös index esete pedig azonos a 3 közös index esetével: például F^2_{ijkl} és $F^2_{imno} \equiv F^2_{pjkl}$, azért valójában csak kétféle eset fordulhat elő: felületeinknek 3 vagy 2 közös indexük van.

Ha a két felületnek 3 közös indexe van, akkor két K^2_{ijk} kúpszeletben metszik egymást: például az $F^2_{ijkl} \equiv F^2_{mnop}$, $F^2_{pjkl} \equiv F^2_{mnoi}$ felületek a K^2_{jkl}, K^2_{mno} kúpszeletekben, mert a_{jkl} és a_{mno} közös polártetraéder-lapjuk.

Ha a 2 felületnek csak 2 közös indexe van, pl. $F^2_{ijkl} \equiv F^2_{mnop}$, $F^2_{ijmn} \equiv F^2_{klop}$, akkor mindenesetre közös pontjaik a következők:

$$D'_{ij},\ D''_{ij};\ D'_{kl},\ D''_{kl};\ D'_{mn},\ D''_{mn};\ D'_{op},\ D''_{op},$$

(mert a_{ij}, a_{kl}, a_{mn}, a_{op} közös polártetraéder-éleik). E 8 pont valóban asszociált, mert egy 3-ik felület is átmegy rajtuk, tudniillik $F^2_{ijop} \equiv F^2_{klmn}$.

Látható tehát, hogy a 28 D_{ij}-pontpárból 4 olyan pontpár, melynek indexei egymástól mind különbözők és igy kimerítik mind a 8 indexet, mindig 8 asszociált pontot jelent, mert rajtuk a 35 felület közül 3 megy keresztül. Ilyen asszociált pontnyolcast e szerint annyit kapunk, ahányféleképpen 8 szám felbontható 4 számpárra. Jelöljük általában Z_{2n}-nel azt a számot, mely megmondja, hogy hányféleképpen lehet beosztani $2n$ elemet n elempárra. Tekintve, hogy a $2n$ elem mindegyike a többi $2n-1$ elemmel párosítható és e $2n-1$ elempár mindegyike annyi csoportban van benne, ahányféleképpen a fennmaradó $2n-2$ elem felbontható $n-1$ elempárra, azért a következő rekurzív formulát kapjuk:

$$Z_{2n} = (2n-1).Z_{2n-2}.$$

Csakhogy $Z_2 = 1$, tehát

$$Z_4 = 3.1 = 3,\ Z_6 = 5.3.1 = 15,\ Z_8 = 7.5.3.1 = 105$$

és teljes indukcióval (képletünk alapján):

$$Z_{2n} = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots 5.3.1,$$

vagyis az első n páratlan szám szorzatával egyenlő. Az 56 D_{ij}-pontból e szerint $Z_8 = 105$ asszociált pontnyolcas készíthető.

9. §. *Bármelyik D'_{ij}, D''_{ij} pontpár a rajta át nem menő 20 másodrendű felület mindegyikére nézve konjugált. Olyan felület pedig, amelyre nézve egy asszociált pontnyolcast tevő 4 pontpár mindegyike konjugált, a 35 felület között 8 van.*

A D'_{ij}, D''_{ij} pontpár nincs rajta pl. az $F^2_{iklm} \equiv F^2_{jnop}$ felületen, melynek

$$A_i A_k A_l A_m,\ A_j A_n A_o A_p$$

a meghatározó polártetraéderei. E felület által az a_{ij} egyenesen indukált involucióban e szerint A_i társa az $a_{ij}.a_{klm} = B_i$ pont, A_j társa pedig az $a_{ij}.a_{nop} = B_j$ pont. Így tehát B_i és B_j, mint az $A_k A_l A_m A_n A_o A_p$ hatszög egyik szemközti síkpárja által kimetszett pontpár, involuciós társak a D'_{ij}, D''_{ij} kettőspontokat definiáló involucióban. Mivel ugyanebben A_i és A_j is involuciós társak, azért az involuciós rokonságot $\overset{(i)}{\overline{\wedge}}$ szimbolummal jelölve:

$$D'_{ij}D''_{ij}A_iB_j \overset{(i)}{\overline{\wedge}} D'_{ij}D''_{ij}A_jB_i;$$

csakhogy:

$$D'_{ij}D''_{ij}A_jB_i \overline{\wedge} D''_{ij}D'_{ij}B_iA_j,$$

és így:

$$D'_{ij}D''_{ij}A_iB_j \overline{\wedge} D''_{ij}D'_{ij}B_iA_j,$$

sőt a homolog D'_{ij}, D''_{ij} pontpár involutorikus volta miatt:

$$D'_{ij}D''_{ij}A_iB_j \overset{(i)}{\overline{\wedge}} D''_{ij}D'_{ij}B_iA_j.$$

Ilyenformán a D'_{ij}, D''_j is involuciós társak abban az involucióban, melyben A_i párja B_i és A_j párja B_j, vagyis D'_{ij}, D''_{ij} is konjugált pontpár az $F^2_{iklm} \equiv F^2_{jnop}$ felületre nézve és ugyanígy minden rajta át nem menő felületre nézve. E felületek száma: $35-15=20$.

Válasszunk ki most a D-pontok konfigurációjából egy asszociált pontnyolcast, pl. a következőt:

$$D'_{ij}, D''_{ij}; D'_{kl}, D''_{kl}; D'_{mn}, D''_{mn}; D'_{op}, D''_{op}.$$

E 4 pontpár mindegyike konjugált lesz mindazon felületekre nézve, melyek egyikükön sem mennek keresztül. Ilyen felület pl.: $F^2_{ikmo} \equiv F^2_{jlnp}$. Mivel az i, j; k, l indexekből négyféle olyan párositást készíthetünk, melyben maguk az i, j; k, l párok nem fordulnak elő:

$$i, k;\ i, l;\ j, k;\ j, l$$

és ezek mindegyikéhez hozzákapcsolhatjuk a hasonló módon alkotott

$$m, o;\ m, p;\ n, o;\ n, p$$

párok mindegyikét, azért így 16 indexnégyest, ill. 8 olyan felületet kapunk, melyre nézve 4 pontpárunk mindegyike konjugált. Ezek:

$$F^2_{ikmo} \equiv F^2_{jlnp},\ F^2_{ikmp} \equiv F^2_{jlno},\ F^2_{ikno} \equiv F^2_{jlmp},\ F^2_{iknp} \equiv F^2_{jlmo},$$
$$F^2_{ilmo} \equiv F^2_{jknp},\ F^2_{ilmp} \equiv F^2_{jkno},\ F^2_{ilno} \equiv F^2_{jkmp},\ F^2_{ilnp} \equiv F^2_{jkmo}.$$

10. §. *Nyolc valós asszociált pont által meghatározott 35 másodrendű felület közül mindig csak 1 felület képzetes, 34 pedig valós és pedig 16 elliptikus, 18 hiperbolikus. Az 56 D_{ij}-pont közül 24 képzetes és 32 valós, az 56 K^2_{ijk}-kúpszelet közül pedig 8 képzetes és 48 valós.*

Először azt bizonyítjuk be hogy, ha 8 asszociált pontunk valós, akkor *nem lehet mind a 35 felület képzetes.* Tegyük fel e végből az ellenkezőjét, vagyis hogy minden felület képzetes, így pl. az $F^2_{1357} \equiv F^2_{2468}$ felület is. E felület tehát minden egyenesen elliptikus involuciót indukál és ezért pl. az a_{12} egyenesen az

$$A_1,\ a_{12}.a_{357}\,;\ A_2,\ a_{12}.a_{468}$$

pontpárok szétválasztják egymást. Akkor viszont az

$$A_1,\ A_2\,;\ a_{12}.a_{357};\ a_{12}.a_{468}$$

pontpárok nem választják szét egymást, vagyis az a_{12} egyenesen az $A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ hatszög meghatározta involució hiperbolikus és így kettőspontjai: D'_{12}, D''_{12} valósak. E szerint az a 15 felület, mely e 2 ponton átmegy, nem lehet képzetes.

A továbbiakban az is ki fog derülni, hogy *valós sem lehet mind a 35 felület,* sőt az is, hogy a valós felületek közül *nem lehet mind sem elliptikus, sem hiperbolikus.* Az egyes típusok ismertetőjelei: képzetes felület polártetraéderének minden éle elliptikus (a rajta indukált involució természetére nézve), míg a valósak közül az elliptikus felület polártetraéderének egyik lapján levő 3 éle elliptikus, a szemközti szögponton levő 3 éle pedig hiperbolikus; végül hiperbolikus felület polártetraéderének csak 2 szemközti éle lehet elliptikus, a többi 4 él mind hiperbolikus.

Tételezzük most már fel, hogy mind a 35 felület valós (hiszen láttuk, hogy kell valós felületnek lenni) *és hogy mind elliptikus.* Ekkor pl. az

$$F^2_{1235} \equiv F^2_{4678},\ F^2_{1345} \equiv F^2_{2678}$$

felületek is elliptikusak. Ezeknek 2 közös kúpszeletük van:

K_{135}^2 és K_{678}^2. Bebizonyítjuk, hogy ezek közül az egyik képzetes, a másik valós. Legyen pl. K_{135}^2 képzetes. Akkor az

$$a_{13},\ a_{35},\ a_{51}$$

élek elliptikusak, a következő élek:

$$a_{21},\ a_{23},\ a_{25}\ ;\ a_{41},\ a_{43},\ a_{45}$$

pedig hiperbolikusak. Ebből már következik, hogy az

$$F_{1245}^2 \equiv F_{3678}^2 \text{ és } F_{2345}^2 \equiv F_{1678}^2$$

felületek hiperbolikusak, mert az $A_1A_2A_4A_5$ tetraéder élei közül az

$$a_{12},\ a_{45}\ ;\ a_{14},\ a_{25}$$

szemközti élpárok hiperbolikusak, viszont a_{15} és így a vele szemközti a_{24} él is elliptikus. Hasonlóképpen az $A_2A_3A_4A_5$ tetraédernek is csak két éle elliptikus: a_{35} és a_{24}. Igy tehát a K_{678}^2 kúpszelet két hiperbolikus felületen is rajta van, vagyis valós.

Ha viszont abból indulunk ki, hogy az elliptikus $F_{1235}^2 \equiv F_{4678}^2$, $F_{1345}^2 \equiv F_{2678}^2$ felületek 2 közös kúpszelete közül az egyik valós, akkor a másikról derül ki, hogy képzetes. A jelölések bonyolításának elkerülése végett ne K_{135}^2-ről, hanem K_{678}^2-ről tételezzük fel, hogy valós. Ekkor az $A_6A_7A_8$ polárháromszögnek csak az egyik oldala elliptikus: legyen ez a_{68}, az a_{67} és a_{78} pedig hiperbolikusak. Most már, mivel $A_4A_6A_7A_8$ egy elliptikus felület polártetraédere, azért többi élei közül csak a_{47} lehet még hiperbolikus; az $A_4A_6A_8$ lapon lévők: a_{46} és a_{48} elliptikusak. Hasonlóképpen az $A_2A_6A_7A_8$ tetraédernek még az a_{27} éle hiperbolikus, a_{26} és a_{28} elliptikusak. Igy azonban az $A_2A_4A_6A_8$ tetraédernek 5 éléről: a_{46}, a_{48}, a_{68}, a_{26}, a_{28} élekről már tudjuk, hogy elliptikusak, de akkor a 6. él: a_{24} is elliptikus és az $F_{2468}^2 \equiv F_{1357}^2$ felület képzetes. A K_{135}^2 kúpszelet, mely ezen rajta van, ilyenformán szintén képzetes. Az $F_{3678}^2 \equiv F_{1245}^2$, $F_{1678}^2 \equiv F_{2345}^2$ felületek ezúttal is hiperbolikusaknak mutatkoznak. Ugyanis az $A_3A_6A_7A_8$ tetraéder szemközti élei közül a_{68} és a_{37} elliptikusak (utóbbi t. i. $A_1A_3A_5A_7$-nek is éle); mivel pedig a_{67} és a_{78} hiperbolikusak, azért a velük szemközti a_{38}, ill. a_{36} élek is hiperbolikusak és így maga az F^2_{3678} felület, valamint hasonlóan F^2_{1678} is, hiperbolikus.

Mindenképen beigazolódott tehát feltevésünk helytelensége, vagyis nem lehet mind a 35 felület elliptikus, sőt valós sem lehet mind a 35, mert képzetes felületet is találunk valós elliptikus felületekből kiindulva. Ha még bebizonyitjuk azt is, hogy *nem lehet mind a 35 felület hiperbolikus*, akkor már igazoltuk a fentiek alapján, hogy vannak képzetes és valós felületek és utóbbiak közt vannak elliptikusak és hiperbolikusak.

Tegyük fel tehát, hogy minden felület hiperbolikus. Akkor az

$$F^2_{1245} \equiv F^2_{3678}, \quad F^2_{2345} \equiv F^2_{1678}$$

felületek mindkét közös kúpszelete: K^2_{245} és K^2_{678} valós, vagyis az

$$A_2A_4A_5, \quad A_6A_7A_8$$

háromszögek oldalai közül csak 1—1 lehet elliptikus; válaszszuk úgy a jelöléseket, hogy a_{24}, ill. a_{68} legyen ez a két oldal. A polártetraéderekben ezekkel szemközti élek, vagyis

$$a_{15}, \; a_{37}; \; a_{35}, \; a_{17}$$

tehát szintén elliptikusak, minélfogva

$$F^2_{1235} \equiv F^2_{4678}, \quad F^2_{1345} \equiv F^2_{2678}$$

már elliptikus felületek, mert átmennek a képzetes K^2_{135} és a valós K^2_{678} kúpszeleteken!

Eddigi meggondolásainkból kiderült, hogy az

$$F^2_{1235} \equiv F^2_{4678}, \quad F^2_{1345} \equiv F^2_{2678}$$

felületek elliptikus volta maga után vonja az

$$F^2_{1245} \equiv F^2_{3678}, \quad F^2_{2345} \equiv F^2_{1678}$$

felületek hiperbolikus voltát és megforditva. Jelöléseinket mindig úgy választottuk, hogy elliptikusnak az

$$a_{13}, \; a_{35}, \; a_{51}; \; a_{24}; \; a_{68}$$

éleket, hiperbolikusaknak pedig az

$$a_{21}, \; a_{23}, \; a_{25}; \; a_{41}, \; a_{43}, \; a_{45}; \; a_{67}, \; a_{78}$$

éleket vettük. Ekkor a hiperbolikus felületek polártetraédereiben az a_{68}-cal szemközti a_{37}, a_{17} élek ismét elliptikusaknak, a többi élek:

$$a_{36},\ a_{38}\ ;\ a_{16},\ a_{18}$$

pedig hiperbolikusaknak bizonyultak. Az elliptikus felületek polártetraédereiben pedig K^2_{678} kúpszelet valós és a_{68} él elliptikus voltánál fogva a K^2_{468}, ill. K^2_{268} kúpszeletek bizonyulnak képzeteseknek, az élek közül pedig

$$a_{46},\ a_{48}\ ;\ a_{26},\ a_{28}$$

elliptikusaknak és a_{47}, a_{27} hiperbolikusaknak.

Most már 25 él természetét ismerjük; még 3 él hiányzik:

$$a_{56},\ a_{57},\ a_{58}.$$

Ámde az $F^2_{5678} \equiv F^2_{1234}$ felület hiperbolikus, mert $A_1A_2A_3A_4$ polártetraéderének élei közül csak a_{13} és a_{24} elliptikusak. Viszont másik polártetraéderében a_{68} elliptikus és így a vele szemközti a_{57} él is elliptikus, a_{56} és a_{58} pedig hiperbolikusak.

Látható tehát, hogy a 28 a_{ij}egyenes közül mindenképpen *16 bizonyul hiperbolikusnak és csak 12 elliptikusnak:* fenti jelöléseink mellett az $A_1A_3A_5A_7$, $A_2A_4A_6A_8$ *tetraéderpár 12 éle.* Ebből az is következik, hogy *csak az* $F^2_{1357} \equiv F^2_{2468}$ *felület lehet képzetes, a többi 34 felület valós.* A valós felületek közül elliptikusak most már azok lesznek, melyeken képzetes kúpszeletek is vannak, vagyis melyeknek 3 közös indexük van az F^2_{1357} felülettel. Mivel tehát e felületnek csak egyik indexét kell kicserélni a 2, 4, 6, 8 indexek valamelyikével, azért $4.4 = 16$ *elliptikus felületünk lesz, a többi 18 hiperbolikus.*

Az elliptikus felületek:

$$F^2_{2357} \equiv F^2_{1468},\quad F^2_{3457} \equiv F^2_{1268},\quad F^2_{3567} \equiv F^2_{1248},\quad F^2_{3578} \equiv F^2_{1246},$$
$$F^2_{1257} \equiv F^2_{3468},\quad F^2_{1457} \equiv F^2_{2368},\quad F^2_{1567} \equiv F^2_{2348},\quad F^2_{1578} \equiv F^2_{2346},$$
$$F^2_{1237} \equiv F^2_{4568},\quad F^2_{1347} \equiv F^2_{2568},\quad F^2_{1367} \equiv F^2_{2458},\quad F^2_{1378} \equiv F^2_{2456},$$
$$F^2_{1235} \equiv F^2_{4678},\quad F^2_{1345} \equiv F^2_{2678},\quad F^2_{1356} \equiv F^2_{2478},\quad F^2_{1358} \equiv F^2_{2467}.$$

A hiperbolikus felületek pedig:

$$F^2_{1234}\equiv F^2_{5678},\; F^2_{1236}\equiv F^2_{4578},\; F^2_{1238}\equiv F^2_{4567},$$
$$F^2_{1245}\equiv F^2_{3678},\; F^2_{1247}\equiv F^2_{3568},\; F^2_{1256}\equiv F^2_{3478},$$
$$F^2_{1258}\equiv F^2_{3467},\; F^2_{1267}\equiv F^2_{3458},\; F^2_{1278}\equiv F^2_{3456},$$
$$F^2_{1346}\equiv F^2_{2578},\; F^2_{1348}\equiv F^2_{2567},\; F^2_{1368}\equiv F^2_{2457},$$
$$F^2_{1456}\equiv F^2_{2378},\; F^2_{1458}\equiv F^2_{2367},\; F^2_{1467}\equiv F^2_{2358},$$
$$F^2_{1478}\equiv F^2_{2356},\; F^2_{1568}\equiv F^2_{2347},\; F^2_{1678}\equiv F^2_{2345}.$$

Az 56 D_{ij}-pont közül 24 képzetes, t. i. az $A_1A_3A_5A_7$, $A_2A_4A_6A_8$ tetraéderpár 12 élén levő pontok; a többi 32 pont valós. Az 56 K^2_{ijk}-kúpszelet közül pedig 8 képzetes, t. i. az előbbi tetraéderpár 8 lapján levők, a többi 48 kúpszelet pedig valós.

Minden F^2_{ijkl} felületen 24 D_{ij}-pont és 8 K^2_{ijk}-kúpszelet van; ezek közül elliptikus felület esetén 12 pont, ill. 6 kúpszelet valós, a többi 12 pont, ill. 2 kúpszelet pedig képzetes. Hiperbolikus felület esetén viszont a 24 pont közül 16 valós és 8 képzetes, a 8 kúpszelet pedig mind valós. (Ezek a megállapitások az elliptikus, ill. hiperbolikus felületek polártetraédereinek tulajdonságaiból következnek.)

Láttuk a 7. §-ban, hogy egy D_{ij}-pontpárra 15 felület illeszkedik. Ha a pontpár képzetes, akkor e 15 felület közül egyik a képzetes felület, a többi 14 valós éspedig 6 hiperbolikus, 8 elliptikus. Ugyanis, mivel hiperbolikus felület polártetraéderében elliptikus éllel elliptikus él van szemben, azért pl. a D'_{13}, D''_{13} képzetes pontpárra illeszkedő hiperbolikus felületet csak úgy kaphatunk, ha az 1, 3 indexek mellé még az $A_2A_4A_6A_8$ tetraéder 6 éle közül valamelyiknek az indexeit választjuk.

Valós D_{ij}-pontpár esetén természetesen mind a 15 ráilleszkedő felület valós éspedig 6 elliptikus, 8 hiperbolikus. Ugyanis elliptikus felület polártetraéderében hiperbolikus éllel elliptikus él van szemben és így pl. a valós D'_{12}, D''_{12} pontpárra illeszkedő elliptikus felületet csak úgy kaphatunk, ha az 1, 2 indexek mellé még az $A_1A_3A_5A_7$, $A_2A_4A_6A_8$ tetraéderek $A_3A_5A_7$, ill. $A_4A_6A_8$ lapjain levő 3—3 él valamelyikének az indexeit választjuk.

Azt is láttuk a 7. §-ban, hogy egy K^2_{ijk}-kúpszeleten 5 felület halad át. Ha a kúpszelet képzetes, ezen öt felület egyike természetesen a képzetes felület, a 4 valós felület pedig nyilván mind elliptikus. Ha viszont a kúpszelet valós, akkor mind az öt rajta átmenő felület valós éspedig 3 hiperbolikus, 2 elliptikus. Ugyanis pl. a valós K^2_{123} kúpszeletre illeszkedő hiperbolikus felületet csak úgy kaphatunk, ha 4-ik index gyanánt a *4, 6, 8* indexek egyikét választjuk, mert csak ekkor lesz az a_{13} elliptikus éllel szemben is elliptikus él.

Egy K^2_{ijk}-kúpszeleten 6 D_{ij}-pont van: az $A_iA_jA_k$ polárháromszög 3 élén levő 6 pont. Ha a kúpszelet képzetes, akkor természetesen mind a 6 rajta levő D_{ij}-pont is képzetes; ha pedig valós a kúpszelet, akkor a 6 pont közül 2 képzetes és 4 valós, mert a polárháromszögnek csak egyik éle elliptikus, a másik kettő hiperbolikus.

Végül: egy D_{ij}-pontpáron 6 K^2_{ijk}-kúpszelet megy át, mert a 3-ik indexet 6-féleképpen választhatjuk, lévén összesen 8 A_i-pont. Ha pontpárunk valós, a ráilleszkedő 6 kúpszelet is természetesen mind valós. Ha pedig a pontpár képzetes, akkor a 6 kúpszelet közül 2 képzetes, t. i. az ill. a_{ij} élre illeszkedő két tetraéderlapon levő 2 kúpszelet, a többi 4 kúpszelet pedig valós.

Elek Tibor.

SUR LES 35 SURFACES DU 2^d ORDRE DÉTERMINÉES PAR 8 POINTS ASSOCIÉS.

1. Les 8 sommets de deux tétraèdres polaires d'une surface du 2^d ordre sont 8 points associés. (Hesse.)

2. Les 10 couples d'éléments opposés d'un pentagone gauche déterminent sur un plan quelconque de l'espace 10 couples d'éléments homologues d'un champ polaire. Ce champ polaire est contenu dans le système polaire dont le tétraèdre déterminé par 4 sommets de notre pentagone est le tétraèdre polaire et dans lequel le plan polaire du cinquième sommet est le plan de notre champ polaire. (Reye.)

3. Les ∞^2 courbes gauches du 3^e ordre circonscrites à un pentagone gauche rencontrent un plan, qui ne passe par aucun sommet du pentagone, dans les triangles polaires du même champ polaire que les 10 couples d'éléments opposés de notre pentagone déterminent sur ce plan. (Reye.)

4. La courbe gauche du 3^e ordre menée par 6 points quelconques de 8 points associés a pour bisécante la droite menée par les 7^e et 8^e points. (Hesse.)

5. Il y a toujours un seul système polaire dont deux tétraèdres inscrits à une courbe gauche du 3^e ordre sont les tétraèdres polaires. Un seul système polaire est déterminé aussi par deux tétraèdres dont les 8 sommets sont 8 points associés.

6. Les 10 couples de plans opposés de l'hexagone gauche déterminé par 6 points quelconques d'entre 8 points associés rencontrent la droite menée par les 7^e et 8^e points en 10 couples de points homologues d'une involution. Cette involution comprend les 7^e et 8^e points associés et les deux points d'intersection de la courbe gauche du 3^e ordre déterminée par les 6 premiers points comme des couples de points homologues.

7. Huit points associés déterminent 35 couples de tétraèdres et ainsi 35 systèmes polaires, c'est-à-dire 35 surfaces du 2^d ordre. Les 24 points d'intersection de chacune des 35 surfaces sur les 12 côtés de ses deux tétraèdres polaires et les 8 sections coniques sur les 8 plans des deux tétraèdres se construisent très simplement. Les 8 points associés déterminent 28 droites et 56 plans; cela fait 28 couples de points et 56 sections coniques; par chaque couple de points passent 15 surfaces et par chaque section conique passent 5 surfaces parmi les 35.

8. Si nous envisageons deux des 35 surfaces, elles ont deux sections coniques communes (parmi les 56 sections coniques) ou 4 couples de points communs (parmi les 28 couples de points). Dans ce dernier cas, par ces 4 couples de points passe aussi une troisième surface (parmi les 35 surfaces), c'est-à-dire les 4 couples de points représentent 8 points associés. Les 28 couples de points déterminent ainsi 105 octogones aux sommets associés.

9. Chacun des 28 couples de points est conjugué par rapport à chacune des 20 surfaces qui ne le traversent pas. Le nombre des surfaces, par rapport auxquelles chacun des 4 couples de points représentant 8 points associés est conjugué, est 8.

10. Parmi les 35 surfaces déterminées par 8 points associés réels il y a toujours une surface imaginaire. Parmi les 34 surfaces réelles, 16 surfaces sont toujours elliptiques et 18 hyperboliques. Parmi les 28 couples de points, 16 couples sont toujours réels et 12 imaginaires conjugués. Parmi les 56 sections coniques, 8 coniques sont toujours imaginaires et 48 réelles. *T. Elek.*

ERŐSÁRAMÚ DISZKONTINUUS GÁZKISÜLÉSEK DINAMIKUS KARAKTERISZTIKÁIRÓL.

Bevezetés.

A diszkontinuus gázkisülések azon csoportjával, mely igen nagy maximális áramerősséggel biró áramlökéseket mutat (kondenzált kisülések), BAY[1] és BUKOVSZKY[2] foglalkoztak. BAY idézett dolgozataiban egy sztroboszkópikus és egy tiszta elektromos mérési módszert ad meg az időtartamok és az áramerősségek meghatározására. Az általa meghatározott áramerősség egy *középáramintenzitás* (i_k), mely a jelenség több karakterisztikus tulajdonságának leirásánál meghatározó paraméterül szolgálhat.

Kivánatosnak látszott e vizsgálatok oly irányú kiterjesztése, mely a kisülés momentán adatairól is felvilágositást nyujt. Így különösen a feszültség és áramerősség összetartozó értékpárjainak, az iv gyulladási feszültségének, a gyulladás időbeli lefolyásának kérdése az, melyre a középértékmódszer nyujtott ugyan általános támpontokat, de melynek pontos megvizsgálása oszcillografikus módszert igényel. Tekintettel arra, hogy a középértékmódszer eredményei szerint az áramlökések időtartamának nagyságrendje 10^{-5}—10^{-6} sec, mely idő alatt az áramerősség zérustól többszáz amperig változik, a jelenségek oszcillografálására csupán katódsugár oszcillográf jöhet számitásba.

Diszkontinuus gázkisülések oszcillografikus vizsgálatával töb-

---

1 BAY ZOLTÁN: M. T. Akad. Mat. és Természettud. Értesitője XLVII, 569, 1930. és LI., 20, 1934.

2 BUKOVSZKY FERENC: Mat. és Fiz. Lapok, XLII, 1935.

bek között H. Gawehn[1] is foglalkozott. Gawehn vizsgálatait, melyeknek eredményeire az alábbiakban gyakrabban hivatkozunk, igen kicsiny áramerősség és feszültségértékeknél végezte (nagyságrend szerint 10^{-3} A, 10^{2} V) és így nem érinthette azokat a kérdéseket (ívkarakterisztika stb.), melyekkel jelen dolgozat foglalkozik.

Kísérleti berendezés.

Az itt vizsgált kondenzált kisüléseknél általában háromféle típusú kisülés jelentkezik. A jelenséget a minimális áramerősségű Townsend kisülés vezeti be, ezt követi a csillókisülés, lényegesen nagyobb áramerősséggel; a gázban tértöltések lépnek fel, a gáz világít. Az áramerősség növelésével beáll az anomális katódesés, amely, ha kellő magas értéket vesz fel, a csillókisülést ívkisülésbe viszi át. Mindegyik típusú kisülésre jellemző az összetartozó áramerősség-feszültség értékek menete, az *I—V karakterisztika*. A kisülés stacionárius állapotait jellemző sztatikus karakterisztikák mellett itt bennünket elsősorban a *dinamikus* karakterisztikák érdekelnek. A kísérleti berendezés a karakterisztikákon kívül az áramerősség-idő (*I—T*) diagrammok felvételére is ki volt képezve.

Vizsgálataimnál oly kisülési csövet alkalmaztam, amelyben az ívkisülés könnyen volt elérhető, de a csillókisülésnek is jelentős szerepe maradt. Kísérleteimet nem terjesztettem ki a Townsend kisülésre, mert az a kicsiny áramerősségek folytán a jelenségnek kevésbbé jelentékeny részét képezi.

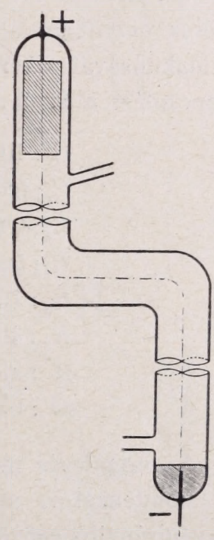
Az ívgyulladás feszültsége elsősorban a katód anyagától függ. Azonkívül, mint Bay idézett dolgozatában kimutatta, a tiszta csillókisülés és tiszta ívkisülést mutató áramlökések feszültsége között egy praktikusan ki nem küszöbölhető intervallum van. A katód anyagát tehát úgy kellett megválasztani, hogy az ívgyulladás reprodukálható, az említett intervallum lehetőleg

---

[1] H. Gawehn: Ann. d. Phys. (5) **20**, 601, 1934. — H. Gawehn u. G. Valle: Ann. d. Phys. (5), **23**, 381, 1935.

kicsiny legyen. Legalkalmasabbnak bizonyult egy finom fémporral szennyezett higanyfelület. A katód anyagát képező higany legnagyobb részét, a már desztillálással és elektrolizissel megtisztított higanyból, közvetlenül a csőbe desztilláltam. Néhány ccm hasonló módon tisztított higanyt egy külön kisülési csőbe zártam úgy, hogy a beforrasztott bevezető-drót egy kissé kinyúljék a higanyfelületből. A csövet az ívkisülés beálltáig terheltem. Az iv közvetlenül a benyúló drót mellett gyulladt és annak anyagát elporlasztotta. Az így szennyezett higanyból adtam néhány cseppet a kisérletek céljaira szolgáló kisülési csőbe.

A kisülési cső suprax-üvegből készült, hossza 80 cm, belvilága 30 mm, vas anóddal, higany katóddal, az árambevezetésekre wolfram beforrasztásokkal (1. ábra). Hogy az anódról esetleg lehulló szennyezések ne juthassanak a katód felületére, a csőnek az ábrában feltüntetett alakot adtam. A csövet a szokásos módon gondosan megtisztítottam.



1. ábra.

A vizsgálatok neongázban történtek, melyet egy diffuziós szivattyú állandóan köráramban tartott és intenzív káliumelektródos kisülésen vitt keresztül, amiáltal biztosítva volt a gáz megkívánt tisztasága. A gáz nyomását Mac Leod manométerrel mértem a kisülési cső beömlő és elvezető nyilásánál; az így kapott két nyomás középértékét tekintettem a csőben uralkodó nyomásnak. A csövet tápláló áramlökéseket Bay idézett dolgozatában leírt módon, forgó higanysugár átkapcsolóval állítottam elő.

Az oszcillogrammok felvételére egy Ardenne-féle nullponthibamentes katódsugár-oszcillográfcsövet alkalmaztam. Az elektromos berendezést úgy konstruáltam meg, hogy egyrészről alkalmas legyen az $I-T$, $I-V$ diagrammok felvételére és a szükséges kalibrálások elvégzésére, másrészről az átmenet a különböző céloknak megfelelő kapcsolások között, a cső üzembentartása mellett, rövid idő alatt legyen elvégezhető.

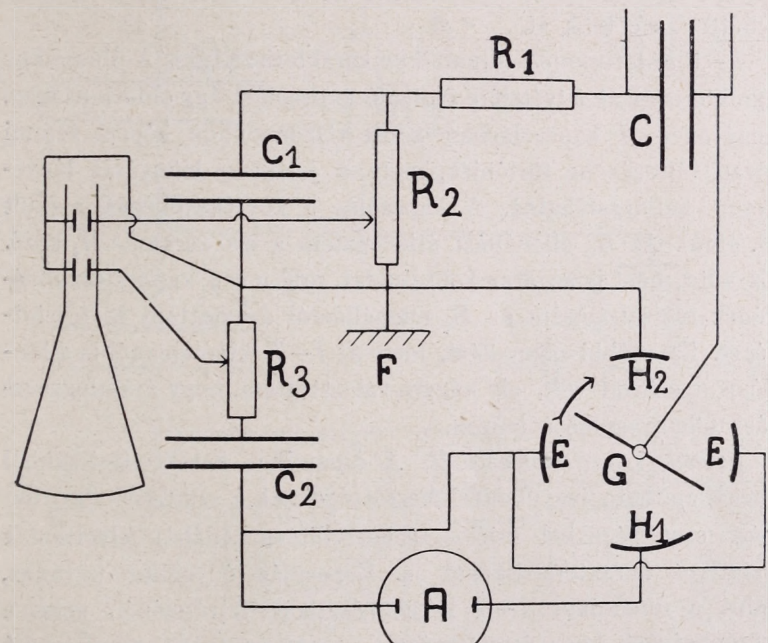
I—T diagrammok. A jelenség időbeli lefolyásának vizsgálatára az $I-T$ diagrammok szolgálnak. Mint említettük, az áramlökések igen rövid ($10^{-5}-10^{-6}$ sec) idő alatt folynak le és a jelenség beállásának időbeli bizonytalansága ennél nagyobb is lehet, ezért a szokásos, a jelenséggel szinchron működő időeltérítő eljárásokat nem lehetett alkalmazni. A feladat hasonló ahhoz, amelyet Rogowski és Flegler csillapitott elektromos rezgések oszcillografálásánál megoldottak.[1] Ezen eljárás megfelelő átalakitásával sikerült a kivánt megoldást megtalálni. Az elvi kapcsolást a 2. ábra mutatja. Az ábra jelölései:

C : 10 mF 10 kV kondenzátor
C_1: 0·0276 mF, 10 kV kondenzátor
C_2: 0·0283 mF, 10 kV «
R_1: 500 Ω önindukciómentes ellenállás
R_2: 10^6 Ω « «
R_3: 40—300 Ω « «
A : kisülési cső
G : higanysugár átkapcsoló.

A berendezés működése a következő: Áramforrásul szolgál a C kondenzátor, melyet egy magasfeszültségű transzformátor, egyenirányitó csövön keresztül, állandó feszültségre tölt (lásd 4. ábra). A forgó átkapcsoló higanysugara a nyil irányában elfordulva érintkezésbe jut az E szektorokkal, miáltal $C_1 C_2$ kondenzátorok sorbakapcsolva feltöltődnek. A higanysugár továbbhaladásával a kontaktus megszakad, C_1 kondenzátor R_2 ellenálláson keresztül kisül, C_2 viszont töltve marad. H_1 és H_2 szektorok úgy vannak kiképezve, hogy a higanysugár előbb érje H_1-t és csak azután H_2-t. Abban a pillanatban, amikor H_2-t is elérte a higanysugár, egyrészt a C_2 kisül a csövön keresztül, másrészt C_1 újból feltöltődik, ezúttal C egész feszültségére. Az időeltéri-

[1] Arch. f. Elektrotechn. **15**, 297—303, 1925, Nr. 4.

téshez szükséges feszültségváltozást C_1 kondenzátor feltöltődése adja s az Ardenne cső eltérítő lemezeire R_2-ről vehető le potenciométeres kapcsolással. Az áramerősséggel arányos feszültségváltozást R_3-ról vettem le. Ezt az ellenállást egyetlen szál konstantán huzal alkotta és így az praktikusan önindukciómentes volt. Az R_1 ellenállás párhuzamosan kifeszitett ellenállásdrótok-



2. ábra.

ból készült, R_2 nagyértékű, igen nagy terhelésre méretezett szilitellenállás. R_1 értékét úgy kellett megválasztani, hogy a C_1R_1 rendszer időállandója a jelenség lefolyásának idejével egyezzék.

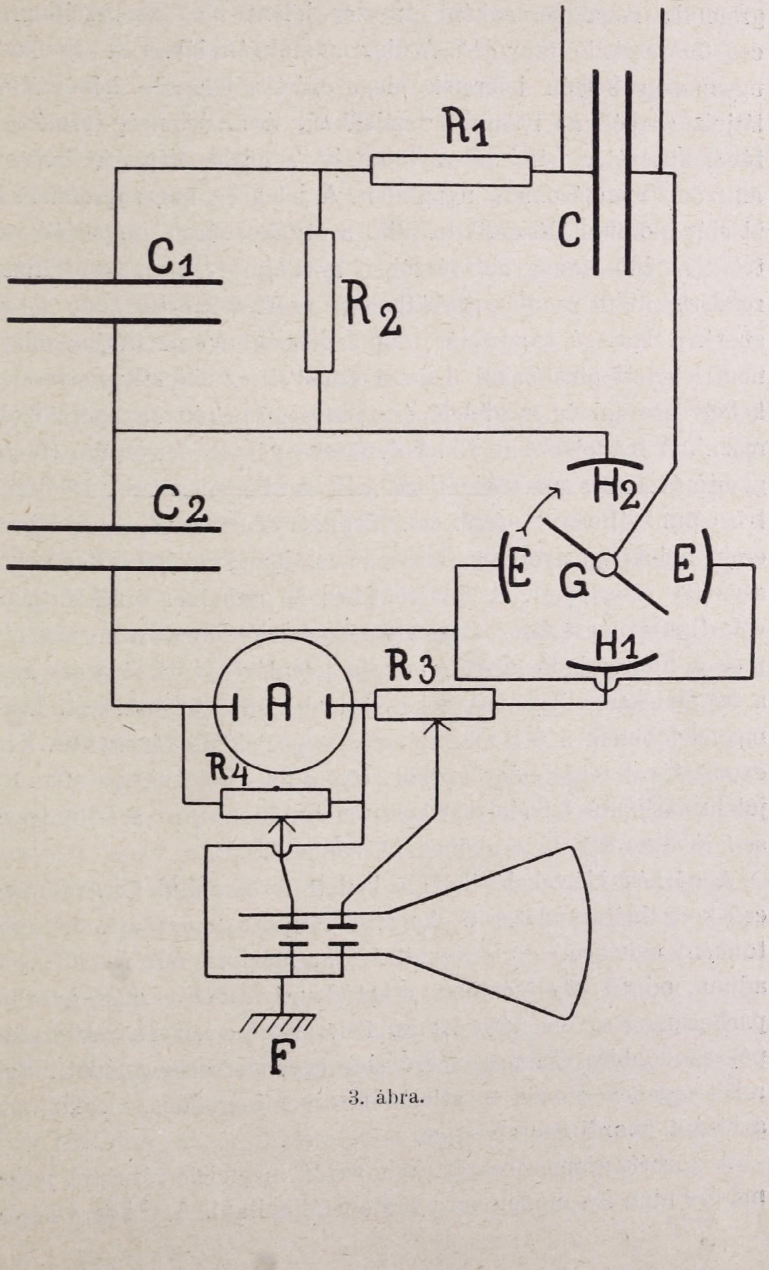
Önindukciós I—T diagrammok (csillapított rezgések). A kisülési cső helyébe önindukciós tekercset téve, a kisütőkörben csillapított rezgések keletkeznek (l. I. tábla). Az így kapott oszcillogramm szolgált a berendezés működésének ellenőrzésére és az időkoordináta kalibrálására. Hogy a rezgés túlhamar ne csillapodjék, R_3 ellenállást igen kicsinyre vettem (4 Ω). Az időkoordináta kalibrálása úgy történt, hogy a rezgések által keltett elektromos hullámra beállítottam egy, hullámhosszakra pontosan kalibrált, szuper rádióvevőkészüléket; a vétel rezonanciamaximuma igen jól megállapithatóan 270 m hullámhosszon volt, vagyis a görbének a nullvonallal egybeeső két pontja között $4{\cdot}5.10^{-7}$ sec telik el.

I—V diagrammok (dinamikus karakterisztikák). A dinamikus karakterisztikák felvételére szolgáló kapcsolást úgy oldottam meg, hogy az *I—T* kapcsolásban adott viszonyokhoz képest semmi olyan változás ne történjék, mely a jelenség lefolyását lényegesen befolyásolhatná. A kapcsolás a következőképen alakult (3. ábra). Az R_3 ellenállást áthelyeztem a cső sarka és H_1 közé. Ez adta most is az áramkoordinátát, míg a cső kapocsfeszültségének regisztrálására az R_4 ellenállásról ágaztattam le feszültséget. Ez utóbbi ellenállást, mely az *I—T* felvételeknél is állandóan a csövön volt, oly nagyra választottam, hogy áramfogyasztása elhanyagolható legyen.

Sztatikus karakterisztikák. A dinamikus karakterisztikákból megállapitható ívgyulladási feszültségeknek a sztatikus ívgyulladási feszültségekkel való összehasonlítása céljából felvettem a sztatikus karakterisztikákat is. Kapcsolás lényegileg ugyanaz, mint a dinamikus *I—V* karakterisztikák felvételénél, azzal a különbséggel, hogy áramforrásul magasfeszültségű, egyenáramú dinamó szolgált (5000 *V*). A görbe felvétele oly módon történt, hogy a dinamó feszültségét fokozatosan, igen lassan emeltem, míg a cső kigyulladt, majd a kisülés végigmenve a csilló karakterisztikán, ívkisülésbe ment át.

A dinamikus V—T diagrammokat nem sikerült oszcillografálni, mert ennél a kapcsolásnál az Ardenne cső eltérítő lemezpárjai egymáshoz viszonyítva igen nagy (többezer volt) feszültség alá estek volna. Ezért ezeket a diagrammokat az összetartozó *I—T* és *I—V* oszcillogrammokból grafikusan határoztam meg.

Fotografikus eljárás és a diagrammok kiértékelése. A forgó



3. ábra.

higanykapcsolót szinchronmótor hajtotta, tehát a jelenség diagrammja másodpercenként 42-szer jelent meg az oszcillograf cső fluoreszkáló ernyőjén. A diagrammok általában az ernyőnek ugyanazon helyén jelennek meg, ezért a jelenség képét állni látjuk, csupán az ivkarakterisztikáknál van a jelenség természetéből kifolyólag némi bizonytalanság, a görbe képe, különösen alacsony nyomásoknál, nyugtalan. A jelenség nagyságrendekkel kisebb idő alatt játszódik le, mint a váltakozóáram időperiódusa, tehát az idő legnagyobb részében a világitó pont a koordináta rendszer (0, 0) pontján tartózkodik, ezért a *görbék* képe fényszegény. Hosszú expozíciós időt a görbék nyugtalansága miatt nem lehetett alkalmazni, hanem e helyett az objektív fényerejét kellett növelni és megfelelő érzékenységű negatívanyagot alkalmazni. A rendelkezésre álló Voigtländer gép 4·5 fényerejű, 15 cm gyujtótávolságú anastigmátjára két darab, egyenként 18 dioptriás punktálüveget szereltem. Ezáltal sikerült elég nagy fényerejű objektívet nyernem, bár az anastigmát tökéletes korrigáltsága így szenvedett. A felvételekhez 26 Scheiner érzékenységű «Martina»-lemezt használtam. Az expozícióidőnek határt szabott még a fluoreszkáló ernyőn mindig jelenlévő szórt fény is, ami a felvételeken eléggé erős feketedés alakjában jelentkezett. Legmegfelelőbbnek a 0·1 másodperces expozicióidő bizonyult. Egy expozicióval tehát négy görbét vettem fel s hogy mégis sikerült jól használható felvételeket készitenem, az csupán a különlegesen jó fluoreszkáló ernyőnek köszönhető.

A görbék kiértékeléséhez le kellett fotografálni az Ardennecső koordinátarendszerét. Az egyik eltérítő lemezpárra 10 voltonként emelkedő egyenfeszültséget, a másikra váltófeszültséget adtam, minek következtében a katódsugár a fluoreszkáló ernyőn párhuzamos egyeneseket írt le. Felcserélve a lemezpárok szerepét, az előbbire csaknem merőleges egyenes sereg adódott. Ezt a két egyenes sereget egyetlen lemezre fotografálva, megkaptam a kivánt koordinátarendszert.

A görbék áramerősségértékeit az R_3 megfelelő részének megmérése után ily módon meg tudtam állapitani. A V koordinátákat tartalmazó görbéknél a feszültségkalibrálást úgy eszközöltem, hogy minden egyes görbénél az oszcillogramm felvétele után R_4 ellenállásra a kisülési cső kikapcsolása mellett ismert feszültséget adtam. Az ily módon eltéritett katódsugár képét ugyanarra a lemezre fotografáltam, amelyre előzőleg az oszcillogrammot vettem fel. R_4-ről levéve a feszültséget, az föld- (0) potenciálra került. Ez a helyzet adta az oszcillograf $I-V$ értékeinek közös nullpontját. A kalibráláshoz használt (1000 V) feszültséget magasfeszültségű egyenáramú dinamó szolgáltatta és azt egy Hartmann—Braun-féle preciziós, forgótekercses, nagyfeszültségű műszerrel mértem le.

Az oszcillogrammokat a kiértékelés céljából megnagyitottam. A görbéket és az Ardenne-cső koordinátarendszerét egy fix beállitású nagyitógéppel kivetitve lerajzoltam. Ezen nagyitott görbéket az Ardenne-cső koordinátarendszere segitségével derékszögű koordinátarendszerbe tettem át. A 7. ábrában feltüntetett karakterisztikák mind ebben az alakban láthatók.

A tényleges kapcsolás a 4. ábrában van megadva, mely az előbbiekben megadott elvi részletkapcsolásokat tartalmazza. Az összes görbetipusok felvételéhez szükséges kapcsolást egyetlen berendezésben kellett egyesiteni, hogy az átkapcsolások rövid idő alatt megtörténhessenek. Az R_5 ellenállást azért iktattam az áramlökések körébe, hogy a különben abnormisan magasra ugró iv-áramerősséget kellőképpen lecsökkentsem, miáltal elértem azt, hogy az ivkarakterisztika nem haladt túl a fluoreszkáló ernyő szélén és a csilló karakterisztika is jól megfigyelhető áramerősség értékeket mutatott. Vizsgálataimat 7·35—0·57 *mm Hg* nyomásintervallumban végeztem. Ezen intervallumban több sorozat felvételt készitettem, minden nyomásnál három dinamikus $I-T$ és $I-V$ felvételt. Egyet tiszta csillókisülésnél, egyet az ivgyulladás kezdeténél és egyet a biztos ivgyulladásnál. Ezekhez járult minden nyomásnál a sztatikus karakterisztika felvétele. Az egy nyomáshoz tartozó felvételeket lehetőleg rövid idő alatt kellett elkésziteni, nehogy közben zavaró változások lépjenek fel. A kapcsolások összesitésével sikerült ezen hét felvétel idejét az $I-V$ diagrammohoz tartozó nyolc feszültségkalibrálási pont felvételével együtt harminc percre leszorítanom.

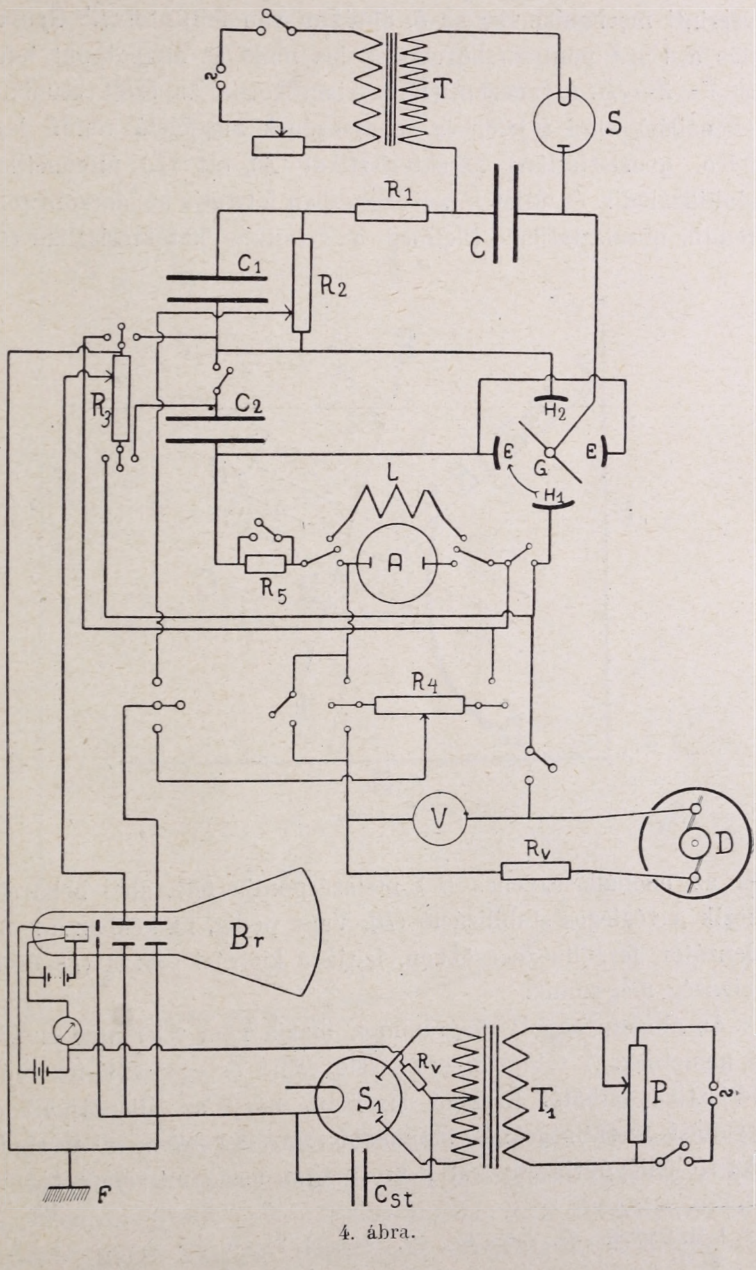
Kísérleti eredmények.

A következőkben a vizsgálatok eredményeit ismertetem, egyben megkísérlem a karakterisztikakutatás eddigi eredményeinek felhasználásával a tapasztalt jelenségeknek egyszerű magyarázatát adni.

Gawehn idézett dolgozataiban kimutatta, hogy a gázkisülések az állapotsíkon egy sztatikus karakterisztikával általában nem jellemezhetők, mert ez az eljárás csak határesetben, végtelen lassú változásoknál jogosult. A gyorsan lefolyó változásokat Gawehn szerint áttekinthetően tárgyalhatjuk az állapotsík kisebb-nagyobb mérvű *eltorzulásai* által, melyek az állapotváltozás sebessége szerint az első-, illetve magasabbrendű, *quasisztatikus* karakterisztika seregeket eredményezik. Az állapotsík egy $I-V$ értékpárja nem jellemzi egyértelműen a kisülés egy állapotát, mivel vannak olyan, a kisülést jellemző tényezők (termikus viszonyok, tértöltések eloszlása stb.), melyek nem követik tehetetlenségmentesen a gyorsabb lefolyású változásokat, hanem mindig bizonyos késéssel veszik fel az új egyensúlyi helyzetnek megfelelő értékeiket s ezáltal befolyásolják az állapotpont útját.

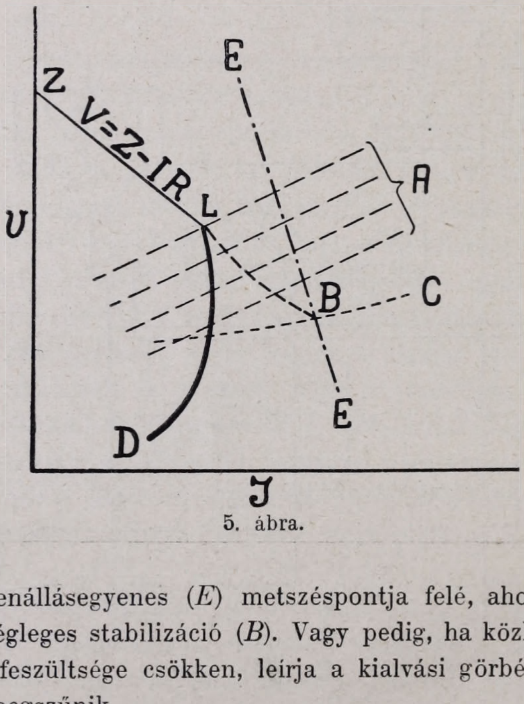
Ezek a meggondolások nem magyarázzák meg hiánytalanul az itt tapasztalt jelenségeket. Bennünket elsősorban az ívgyulladás mechanizmusa érdekel, amelyre vonatkozólag eddig nem történtek dinamikus karakterisztika vizsgálatok. Azonban a tiszta csillókisülések eredményei sem egyeznek teljesen Gawehn eredményeivel, mivel azok lassú lefolyású jelenségekre vonatkoznak és azokra is csak nagyon kis áramerősségeknél.

A gyujtás után Gawehn összes felvételeiben az állapotpont csak csökkenő feszültségeken fut keresztül, mely körülménynek meggondolásaiban is lényeges szerep jut. A gyujtás Gawehn



4. ábra.

szerinti mechanizmusa az 5. ábrában van feltüntetve.[1] Gyulladás a $V=Z$ pontban következik be, majd az állapotpont lefut a $V=Z-IR$ egyenesen (R a kisütőkörbe kapcsolt ohmikus ellenállás), eléri a jelenség sebességének megfelelő rendű legfelső, quasisztatikus karakterisztikát (A), ott (L) átmenetileg stabilizálódik és útját innen lassabban folytatja az alacsonyabbrendű, quasisztatikus, illetőleg a sztatikus karakterisztika (C)



5. ábra.

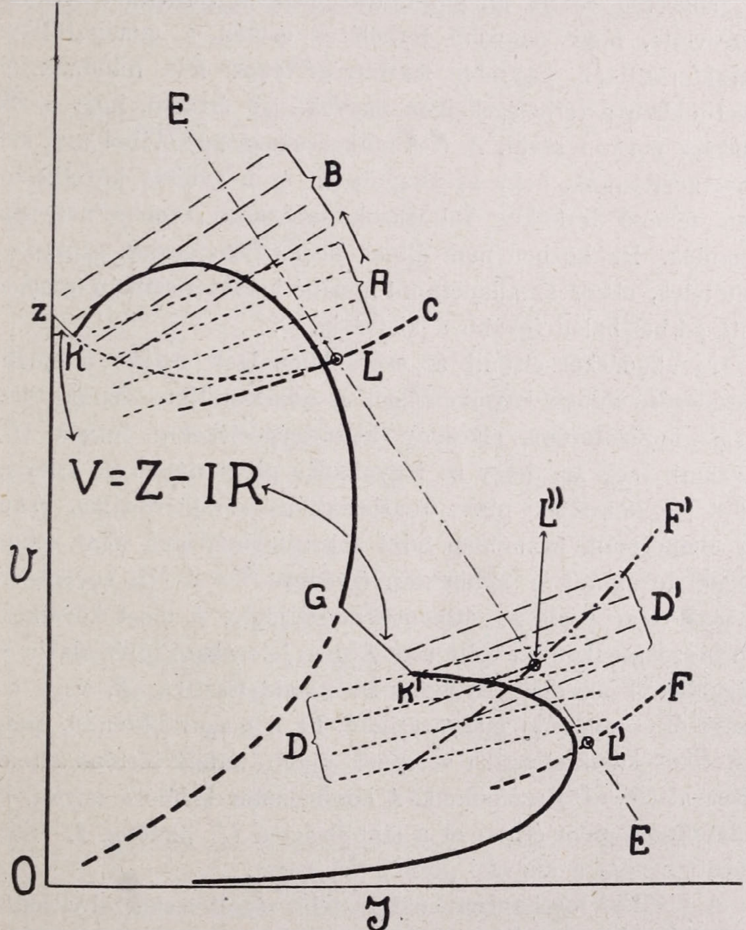
és az ellenállásegyenes (E) metszéspontja felé, ahol bekövetkezik a végleges stabilizáció (B). Vagy pedig, ha közben a kondenzátor feszültsége csökken, leírja a kialvási görbét (D) és a jelenség megszűnik.

Az általam kapott diagrammok alakja nem felel meg ennek a menetnek. A táblában egy tiszta csilló és egy csilló-ívkarakterisztika látható. Ezekből kivehető, hogy az állapotpont a gyujtási feszültségeknél *magasabb* feszültségeken is áthalad. Az itt fellépő viszonyokat a 6. ábrában megadott sémán tanul-

---

[1] H. Gawehn—G. Valle loc. cit. 394. old. Fig. 8.

mányozhatjuk. A gyulladás a Z pontban következik be. Az állapotpont a $V=Z-IR$ egyenesen igen kicsiny utat (ZK) ír le, K-ban már eléri a legmagasabban fekvő, magasabbrendű,



6. ábra.

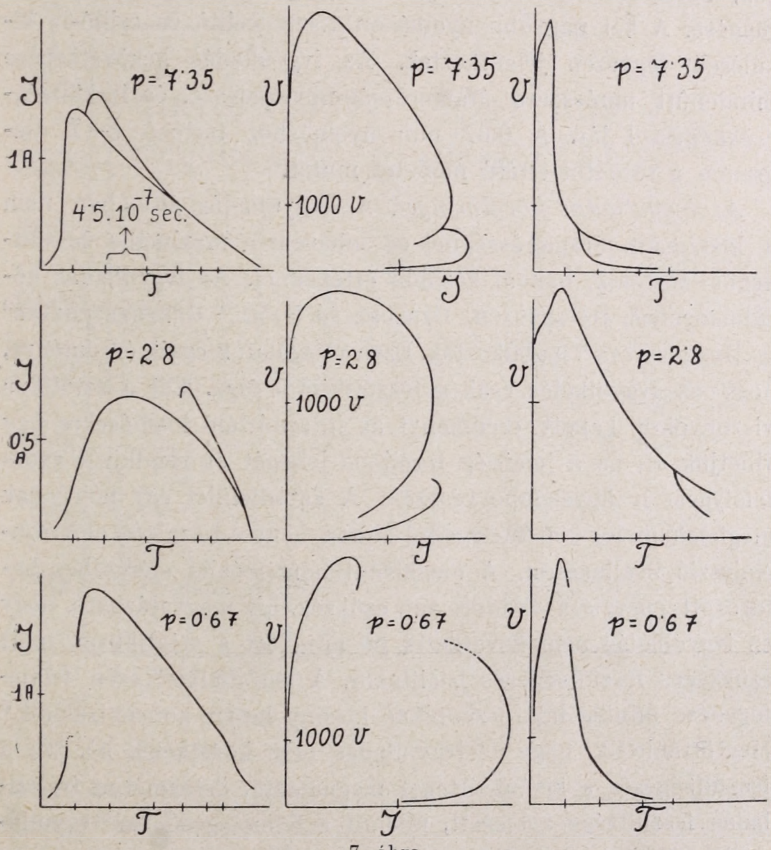
quasisztatikus karakterisztikát. Ha az A karakterisztika sereg állna, akkor az állapotpont a KL görbén haladna az L pont (E ellenállásegyenes és C alacsonyabbrendű karakterisztika metszéspontja) felé. Az állapotpont a valóságban a KG (vastagon kihúzott) görbeszakaszt írja le, amit úgy magyarázhatunk, hogy az *A* karakterisztika sereg az állapotpontnak *K*-ban történt átmeneti stabilizációja után még tovább tolódik felfelé a *B* helyzetbe és az állapotpontot magával viszi. Már GAWEHN észrevette, hogy nagyobb terhelések esetén a quasisztatikus karakterisztikák nagyobb feszültségértékek felé tolódnak el. Esetünkben a terhelések igen nagyok, így érthető, hogy a *ZK* szakasz nagyon rövid. A *KG* görbeszakasz menetéből arra kell következtetnünk, hogy az állapotpont és a gyujtás következtében fellépő termikus változások sebessége azonos nagyságrendűek. Ha közben nem állnak be az ívkisüléshez szükséges feltételek, akkor az állapotpont a csilló karakterisztikán (szaggatott görbe) halad tovább a kialvásig.

Ívgyulladáskor eltűnik az esetünkben igen magas anomális katódesés, minek következtében a quasisztatikus karakterisztikák ugrásszerűen alacsony feszültségértékekre jutnak (*D*). Gyakori eset az, hogy az ívgyulladás pillanatában az állapotpont (*G*) közelében nincs quasisztatikus karakterisztika, ekkor az állapotpont, hasonlóan mint a gyujtásnál, igen nagy sebességgel továbbfut a momentán érvényes $V = Z - IR$ egyenesen, míg *K'*-ben beáll az átmeneti stabilizáció. A most következő görbeszakasz konvex volta és a *K'*-ben jelentkező törés alakja — függetlenül az alacsonyabbrendű karakterisztika (*F*, vagy *F''*) helyétől — csak úgy magyarázható, ha a magasabbrendű, quasi sztatikus karakterisztika seregnek újabb, felfelé történő eltolódásával ($D \rightarrow D'$) számolunk. A kondenzátor kisülése folytán az állapotpont nem érheti el a stabilizációs *L'*, illetőleg *L''* pontokat, hanem a kialvási görbén fut végig.

A kisülési mechanizmusnak fentebb vázolt szakaszai láthatók voltak a fluoreszkáló ernyőn, míg a fotografiákon a nagy sebességgel leírt és ezért nagyon fényszegény *ZK* és *GK* egyenesszakaszok nem jelentkeznek. Ezen egyenesszakaszok nagyobb nyomások felé rövidülnek, sőt el is tűnnek.

A jelenség időbeli lefolyásáról felvilágosítást nyujtanak a fotografált $I - T$ oszcillogrammok, valamint az összetartozó

I—T, *I—V* oszcillogrammokból grafikusan szerkesztett *V—T* diagrammok. Egy *I—T* oszcillogramm a táblában látható. Az ívgyulladást az áramerősség ugrásszerű növekedése jellemzi. Bay idézett dolgozatában, kísérletei alapján megállapítja, hogy



7. ábra.

nagy áramerősségek a csillókisülésnek ívkisülésbe való átmenetele folytán jöhetnek létre. Megfigyeléseim szerint, eléggé kicsiny külső ellenállás esetében az íváramerősség többszáz amperre is felnövekedhet. Ez a körülmény Bay méréseit teljes mértékben igazolja. A görbe szakadása megfelel az *I—V* karakterisztikák *GK* darabjának; és megadja az ívgyulladás időpontját.

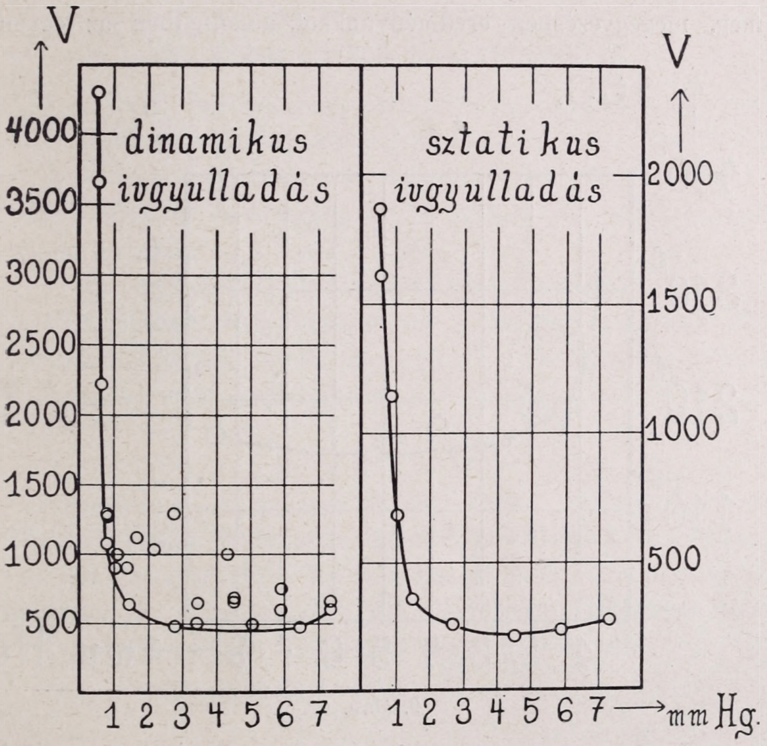
Dinamikus karakterisztikákat fotografáltam a megadott nyomásintervallumon belül kilenc különböző nyomáson. Összesen száznyolc felvételt készitettem. A 7. ábrában a 7·35, 2·8, 0·67 *mmHg* nyomásokhoz tartozó $I-T$, $I-V$ és $V-T$ diagrammok láthatók, amelyből kivehető a görbék alakjának a nyomástól való függése. A két nagyobb nyomáson tiszta csilló és csilló-ív kisülések vegyesen jelentkeztek. Az ívgyulladás bekövetkezése mindenütt ugrásszerű áramerősség-növekedéssel és feszültségcsökkenéssel jár. A 0·67 mm nyomáshoz tartozó $I-T$ diagramm a többitől eltérő menetet mutat.

Az ívgyulladás körülményei. Az ívgyulladás általában nem a maximális áramerősségnél és sohasem a maximális feszültségnél történik, hanem későbbi értékeknél. Az ívgyulladás körülményeivel DÄLLENBACH, GERECKE és STOLL,[1] GÜNTHERSCHULZE[2] és DRUYVESTEYN[3] foglalkoztak. Ezen vizsgálatok egyik eredménye, hogy az ívgyulladás csak a feszültségtől függ. Ezt a sztatikus viszonyokra kapott eredményt az intermittáló kisülésekre úgy vihetjük át, ha a jelenség termikus jellegét és rendkívül gyors lefolyását is figyelembe vesszük. A katódfelület egy pontjának megfelelően fel kell melegedni ahhoz, hogy a termikus elektronemisszió beállhasson. A megkivánt hőmérséklet eléréséhez határozott energiára és időre van szükség. Így magyarázható, hogy az ívgyulladás nem következik be mindjárt a sztatikusan mért szükséges feszültségesés beálltakor. A katódfelület erős felmelegedése mindig mikroszkópikus kicsiny helyre koncentrálódik.[4] Megtörténhetik, hogy az ívgyulladás nem következik be, bár a feszültségesés a kivánt értéket meghaladta, de ismét az ívgyulladás feszültsége alá esett, mielőtt a felmelegedés az ívgyulladáshoz szükséges értéket elérte volna. Ez esetben tiszta csillókisülést kapunk.

---

[1] W. DÄLLENBACH, E. GERECKE u. E. STOLL: Phys. ZS. **26**, 10, 1925.
[2] A. GÜNTHERSCHULZE: Handb. d. Phys. XVII. 313, 1926.
[3] M. J. DRUYVESTEYN: ZS. f. Phys. **73**, 727, 1932.
[4] R. SEELIGER u. J. SCHMEKEL: Phys. ZS. **27**, 730, 1926.

Általában kimondhatjuk tehát, hogy az ívgyulladás beállásának nem elégséges feltétele, hogy a feszültség a sztatikus mérésekből megállapitott ívgyulladási feszültségnél nagyobb legyen,

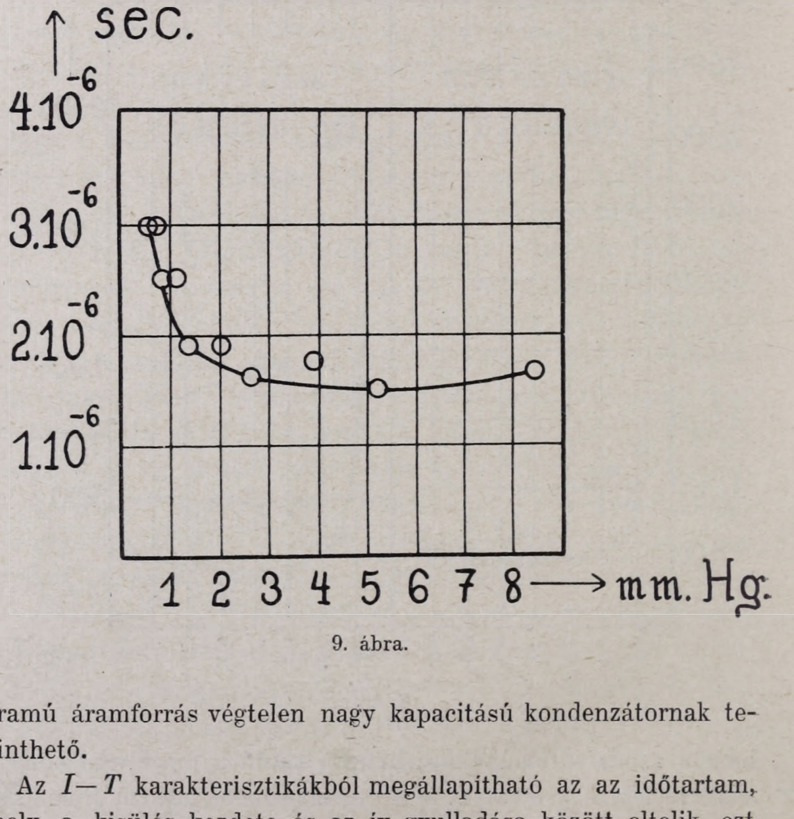


8. ábra.

hanem azonkívül szükséges, hogy a katód a megkívánt hőmérsékletre felmelegedjék. Az egyes nyomásokhoz tartozó dinamikus ívgyulladási feszültségek erős szórást mutatnak, de az ívgyulladáshoz szükséges *minimális* feszültség görbéje megállapitható. A sztatikus karakterisztikákból[5] is megállapitottam az ívgyul-

[5] A táblában egy sztatikus karakterisztika felvétel is meg van adva, amelyen az *OZ* szakasz, a sztatikus csilló- és alatta a sztatikus ívkarakterisztika látható.

ladási feszültségeket (8. ábra). Ezen értékek mind alatta vannak a dinamikus ívgyulladási feszültségeknek, de a két görbe menete hasonló. BAY idézett dolgozatában megállapitja, hogy nagyobb kondenzátorértékeknek alacsonyabb ívgyulladási értékek felelnek meg, megegyezésben eredményünkkel, amennyiben az egyen-



9. ábra.

áramú áramforrás végtelen nagy kapacitású kondenzátornak tekinthető.

Az $I-T$ karakterisztikákból megállapitható az az időtartam, mely a kisülés kezdete és az ív gyulladása között eltelik, ezt nevezzük az ívgyulladás késésének.[1] Felvételeim azt mutatják,

[1] Az ívgyulladás természetében rejlő bizonytalanság legerősebben a késésnél jelentkezik. Az előbbiekben leírt módon preparált higanykatód esetében, e bizonytalanság miatt, a késési időre vonatkozólag nem kaptam eléggé reprodukálható adatokat, ezért a higanykatód felületét rövid ideig tartó levegőkisüléssel, minimális mértékben oxidáltam. Az így kapott

hogy ez a késés a gáznyomás függvénye (9. ábra). A görbe menetét úgy értelmezhetjük, hogy alacsony nyomásoknál kisebb lévén a katódon ütköző pozitiv ionok száma, több idő szükséges az ívgyulladást kiváltó hőenergia létrehozására.

Az eredmények összefoglalása.

1. Sikerült felvenni nagy maximális intenzitású és igen rövid időtartamú áramlökések karakterisztikáit.

2. A karakterisztikákon jól látható a csilló és ívkisülés közötti különbség és átmenet. Az ív gyulladását a karakterisztika törése jellemzi.

3. Az ívgyulladás feszültsége és késése a nyomás függvénye.

4. A Gawehn Valle-féle teória a kisérleti feltételek által adott különbségek figyelembevételével a dolgozatban vizsgált jelenségcsoportra alkalmazható.

*

Jelen munka a m. kir. Ferenc József Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében készült. Ezúton is őszinte köszönetemet fejezem ki az intézet igazgatójának, dr. Bay Zoltán egyetemi ny. r. tanár úrnak, aki vizsgálataim elvégzését lehetővé tette és értékes tanácsaival segitségemre volt.

Szeged, 1935. november 1.

Levius Ernő.

---

diagrammok az eddig tárgyaltakhoz teljesen hasonló menetet mutatnak és a késésre vonatkozólag meglepően jól reprodukálható adatokat szolgáltatnak. Az ívgyulladás késéséhez külsőleg nagyon hasonlit a kisülés megindulásának késése (Zündverzug), amely azonban a jelenségek mechanizmusát tekintve lényegesen más jelenség. Erre vonatkozólag lásd: K. Zuber: Ann. d. Phys. **76**, 231, 1925. és Ann. d. Phys. **81**, 205, 1926 és M. v. Laue: Ann. d. Phys. **76**, 261, 1925.

DYNAMISCHE CHARAKTERISTIKEN VON DISKONTINUIERLICHEN ENTLADUNGEN HOHER STROMINTENSITÄT.

In einer Entladungsröhre mit langer positiver Säule wurden diskontinuierliche Entladungen von etwa 10^{-5} sec Dauer bei einer Maximalintensität von einigen Ampères hergestellt. Die dynamische Strom-Spannungs-Charakteristik dieser Entladungsart wurde mit Hilfe einer Ardenne-schen Kathodenstrahlröhre photographiert. Mittels einer geeignet gewählten Zeitablenkung gelang auch die Aufnahme des Zeitablaufs der Erscheinung. Die Aufnahmen zeigten deutlich den Unterschied zwischen Glimm- und Bogencharakteristiken. Der Umschlag der Glimmentladung in eine Bogenentladung innerhalb eines Stromstosses, konnte gut verfolgt werden (wohl zum erstenmal bei so rasch verlaufenden Stromstössen) und gestattete die Bestimmung der Bogenzündspannung, sowie des Bogenzündverzuges.

Die Befunde werden theoretisch gedeutet. Es zeigt sich, dass gewisse Unterschiede zwischen den Ergebnissen von Gawehn und Valle und den hiesigen bestehen, jedoch lässt sich die theoretische Deutung von Gawehn und Valle auf die hier untersuchten Erscheinungen unter besonderer Berücksichtigung der verschiedenen experimentellen Bedingungen übertragen. Die Abweichungen erklären sich dadurch, dass die hier untersuchten Stromstösse eine etwa 1000-mal kürzere Entladungsdauer und eine etwa 1000-mal höhere Stromintensität aufweisen.

Die Ergebnisse werden graphisch und durch Originalaufnahmen dargestellt.

Szeged, Institut für theoretische Physik der Universität.

Ernő Levius.

IRODALOM.

Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei. Két kötet, Budapest, Franklin-Társulat, 1935, XIV+476+X+460 oldal.

Az analízis új magyarnyelvű tankönyvének ismertetője elé természetszerűen vetődnék az a feladat, hogy összehasonlítsa a művet hasonlótárgyú régebbi művekkel, annak eldöntése végett, vajjon indokolt-e az új mű megjelentetése s ha igen, miért. A jelen esetben azonban nem is lehet szó ilyen összehasonlításról, annyira eltér SZÁSZ PÁL műve módszerében az analízisnek nemcsak magyar tankönyveitől, hanem az ismeretes külföldi tankönyvektől is. A szerző ugyanis az egyes fejezetek élére nem definíciókat és általános tételeket tesz: definíciókat, amelyek a tapasztalat szerint a kezdőt gyakran elriasztják absztrakt fogalmazásukkal és tételeket, amelyek a kezdőben többnyire csak rendszerük logikai szigorúságának csodálatát keltik fel, nem pedig tartalmuk értékelését. De még azzal sem elégszik meg a szerző, hogy a szükséges fogalmakat egy-két példán világítsa meg, mielőtt pontos definíciójukat adja, hanem az alkalmasan választott feladatok oly nagy tömegét dolgozza ki, hogy eközben a kívánt fogalom önkéntelenül átmegy az olvasó vérébe. Így aztán a definíció inkább csak a már megszerzett fogalom tudatosítására és lényeges jegyeinek kiemelésére szolgál. Hasonlóan, az egyes tételek általános megfogalmazását és bebizonyítását számos speciális esetük világos taglalása előzi meg. Magától értetődik e módszernek nagy didaktikai előnye és nyilvánvaló, hogy ilyen tankönyvre szükség volt.

A megvilágító feladatok mellett nem maradnak el természetesen a már megszerzett anyag gyakorlására és alkalmazására vonatkozó feladatok sem. A feladatok ilyen nagy száma mellett a szerző nem szorítkozhatott csupa úgynevezett elegáns, egy-egy fogással röviden elintézhető feladatra. Ez azonban nem hibája a műnek! Jól ismert annak a középiskolai tanulónak a típusa, aki csupa olyan első- és másodfokú egyenleten nevelkedett, amelynek véletlenül egész számok a megoldásai; ez a tanuló, amikor először old meg olyan feladatot, amelynél nem áll fenn ez a szerencsés véletlen, panaszkodik, hogy «nem jött ki a megoldás». Hasonló veszélyt rejt magában az, ha csupa elegáns feladatot adunk a kezdőnek. Igenis, hadd tudja meg, hogy vannak olyan feladatok is, amelyeknek megoldása, még ha elvben egyszerű is, technikai nehézségek legyőzését kívánja meg.

Viszont helyes elv az, hogy egy-egy feladat lehetséges megoldásai közül a legelegánsabbat tárjuk a kezdő elé. Ez alól csak akkor engedhető meg kivétel, ha egy másik tárgyalásmód különösen tanulságos voltánál fogva kínálkozik. Szász Pál kiváló pedagógiai érzékkel mindenhol megtalálja a helyes útat, úgyhogy e szempontból is csak alig lehet kifogásolhatót találni a könyvben. Hogy mégis említsek egy példát: annak megmutatására, hogy $\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \to 0$, a könyvben használt $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^m m} < 2m$ egyenlőtlenség helyett célszerű lett volna az ugyanúgy (sőt valamivel egyszerűbben) kimutatható $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m^2} < 2m$ egyenlőtlenségre hivatkozni.

Természetes, hogy a könyv e tárgyalásmód mellett kevesebb anyagot ölel fel, mint a hasonló terjedelmű tankönyvek általában. Mindamellett nemcsak az egyetemi differenciál- és integrálszámítás előadásokban általában előadott anyagot tárgyalja (talán egyetlen kivétel a többszörös integrálok tárgyalása, amely, sajnos, helyszűke miatt kimaradt a könyvből és csak a paraméteres integrál című részben az integrálások sorrendjének felcserélésére vonatkozó tétel pótolja néhány alkalmazás szempontjából), hanem meglepően sok, a haladók számára is tanulságos dolgot. Így például külön fejezetet szentel a racionális és trigonometrikus polinomoknak; itt megismerteti az olvasót a nevezetesebb speciális polinomrendszerekkel (Legendre-, Laguerre-, Hermite- és Csebisev-féle polinomok); itt tárgyalja a Lagrange- és Hermite-féle, valamint a trigonometrikus interpolációt, Fejér és Bernstein tételeit trigonometrikus, valamint Markov tételét racionális polinomokról, végül Weierstrass approximációs tételeit. Megemlítendők e szempontból még a Cauchy-féle függvényegyenletekről, néhány speciális differenciálegyenletről, továbbá a Fourier-sorokról, valamint az Euler-féle összegképletről szóló részei is.

A mű beosztása általánosságban a szokásos: az első kötet a határértékkel, a folytonosság és a differenciálhányados fogalmával és alkalmazásaival, a második kötet az integrálszámítással, a végtelen sorokkal, valamint a többváltozós függvények elméletével foglalkozik. Az irracionális számokat a Cantor-féle eljárással vezeti be, aminek nagy didaktikai előnye a Dedekind-féle bevezetésmóddal szemben, hogy ugyanabba a gondolatkörbe tartozik, amivel a differenciál- és integrálszámítás elemeiben amúgy is foglalkozni kell, tudniillik a végtelen sorozatok elméletébe. Előbb azonban természetesen racionális tagokból álló sorozatokon ismerkedik meg az olvasó a határérték törvényeivel. Hasonlóan, az általános függvényfogalom bevezetése előtt, külön fejezet foglalkozik az elemi függvényekkel, egyenkint azoknak differenciálásával és görbéjük menetének taglalásával. Itt talán első pillanatra túlságba vitt «epszilonozás»-nak tűnik fel több helyen az, hogy a differenciálhányadosra vonatkozó, a függvény konvexségét, illetőleg konkávságát kifejező egyenlőtlenségből (mint például $\cos\beta < \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\beta - \alpha} < \cos\alpha$, ha $0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi$) nem következtet a szerző közvetlenül a differenciálhányados értékére, hanem előbb felírja a megfelelő ε-os egyenlőtlenséget. Ne felejtsük azonban el, hogy a differenciálhányados e helyen még nincs általánosan definiálva, épp e példák kapcsán jut el az olvasó e fontos fogalomhoz. Figyelemreméltó egyébként a szerzőnek az epszilonozásban általában követett módszere: az ε-os egyenlőtlenség feltételét a lehető legtermészetesebb (ha nem is mindig a legegyszerűbb) alakban kapja meg azáltal, hogy *megoldja* az egyenlőtlenséget. A differenciálszámítás alkalmazásai során nagy súlyt helyez a szerző a geometriai alkalmazásokra.

A határozott integrált, mindenekelőtt természetesen folytonos függvény esetén, a határozatlan integrál előtt tárgyalja; ezúttal meglehetősen absztrakt módon: területről csak a határozott integrál bevezetése után beszél. Az az olvasó azonban, aki az első kötetet már átdolgozta, jelentős absztrakcióképességre tett szert; ha nem akarjuk, hogy ez visszafejlődjék, nem szabad parlagon hagynunk. Egyébként pedig ez a tárgykör didaktikai szempontból nagyon kényes: túl korai hivatkozás a szemléletre azt eredményezhetné, hogy az olvasó a szigorú tárgyalást feleslegesnek tartaná.

A speciális függvények integráljának explicit kiszámítására szolgáló módszereknél hiányolható, hogy $\sin x$ és $\cos x$ racionális függvényeinek integrálására csak a $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítést adja meg a könyv és nem tárgyalja azokat az eseteket, amelyekben már a $z = \cos x$ vagy a $z = \operatorname{tg} x$ helyettesítés is (mégpedig rendesen egyszerűbben) célhoz vezet. Mindössze egy feladatnál használja a $z = \sin x$ helyettesítést, mint «ad hoc eljárást».

Mintaszerű a végtelen sorokról szóló fejezet. A klasszikus konvergenciakritériumokat éppúgy tárgyalja, mint a szummabilitásra vonatkozó tételeket. Ebben a fejezetben kerül tárgyalásra azoknak az elemi függvényeknek Taylor-sora is, amelyeket nem tárgyalt már példaképpen előbb a szerző. Az integrálszámítás alkalmazása megkönnyíti a tárgyalást.

A többváltozós függvényekről szóló utolsó fejezeten kissé meglátszik, hogy erre már csak kevés hely jutott. A szerző mindjárt az n-változós függvényekre vonatkozó definíciókat adja; az egyes nehezebb bizonyításokat azonban két-, illetőleg háromváltozós függvényeken végzi el, az analóg általános bizonyítást az olvasóra hagyva. A kitűnő előkészítés után azonban ez a fejezet sem fog nehézséget okozni az olvasónak.

Említésre méltó a könyvnek végig világos előadása, szabatos stílusa, valamint a történeti szempontok kidomborítása. A szerző a nevezetesebb tételeknél idézi azok forrását.

Szász Pál könyve nagy nyeresége a magyar tankönyvirodalomnak. Kezdők és haladók egyaránt haszonnal tanulmányozhatják. Referens tapasztalatból mondhatja, hogy kitűnő segédeszköz az analízishez kezdők részére tartott egyetemi gyakorlatoknál. Különösen alkalmas középiskolai tanárok számára a differenciál- és integrálszámítás köréből az egyetemen hallottak felfrissítésére.

Kalmár László.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Leipzig, B. G. Teubner, 1897—1935.[1]

A matematikusok három nemzedéke több mint negyven esztendőn át dolgozott az Encyklopaedián. Azon férfiak közül, akik a ma befejezetten előttünk fekvő nagy művet 1894-ben megtervezték és előkészítették, ma már egy sincs életben, az 1895 szeptemberében tartott és a nagy terv megvalósítását bevezető első lipcsei konferencia tagjai közül pedig már csak egy: dr. Alfred Ackermann-Teubner. Ha az utolsó cikknek és a IV. kötet regiszterének befejezését a véletlenek sorozata

---

[1] A nagy német matematikai Encyklopaedia befejeződése oly esemény a matematika történetében, hogy illendő, hogy erről lapunk is megemlékezzék. Erre legalkalmasabbnak látszott magyar fordításban közölni azt a «Schlusswort zu dem Gesamtwerk»-et, melyet az Encyklopaedia «Akademische Kommission»-ja nevében C. Carathéodory közölt az utoljára (1935 szeptemberében) megjelent Encyklopaedia-füzetben, mely a IV. kötet regiszterét tartalmazza. Ehhez csak annyit fűzünk hozzá, hogy az Encyklopaediának magyar munkatársai is voltak, és pedig: Kármán Tódor, Riesz Marcel, Szász Ottó, Zemplén Győző és (a csonkán maradt francia kiadásban) Kürschák József. Carathéodory müncheni professzor úr és a B. G. Teubner lipcsei kiadócég szivesek voltak e közléshez engedélyüket megadni. Fogadják érte őszinte köszönetünket.

Szerk.

nem késleltette volna, akkor legalább Walther von Dyck, aki, mint az Akademische Kommission elnöke, teljes négy évtizeden át munkaerejének javát ez Encyklopaediának szentelte, megérte volna fáradozásainak megkoronázását. Csodálatos energiával párosult szívóssága, mellyel hosszú betegségének utolsó napjáig fáradozott kitűzött céljának elérésén, tette lehetővé az Encyklopaedia befejezését. Amidőn nem egészen egy évvel ezelőtt meghalt, a tulajdonképpeni munka már befejeződött: már ki volt szedve az utolsó cikk utolsó lapja is; csak az nem adatott meg Dyck-nek, hogy az utolsó füzet megjelenését megélje és megírja a művet bezáró jelentését úgy amint megírta az első kötet számára az «einleitender Bericht»-jét.

Ha ezt a bevezető jelentést ma elolvassuk és e mellett a kész Encyklopaediát nézzük, mindenekelőtt az tűnik fel, hogy a hatalmas vállalkozás eredeti célkitűzései a munka folyamán igen nagy mértékben eltolódtak. Eredetileg oly mű megírásáról volt szó, melynek célja lett volna a matematikának a XX. századba eső haladását ismertetni. Ehhez a 240 ívhez további 1000 ív járult és a matematika számos fejezetét illetően a tárgyalás a mai időkig terjed. Eleinte csak *ABC*-rendbe szedett rövid cikkek voltak tervbe véve, amelyek a távolabb állók számára legjobb esetben is csupán első tájékozódásra lettek volna alkalmasak; ma pedig oly mű áll rendelkezésünkre, mely nemcsak a specializált szakembernek saját területén tesz kiváló szolgálatot, hanem a kívülállók által felvethető kérdésekre is megadja a legszabatosabb választ.

Felix Klein volt az a férfi, kinek befolyása alatt a Franz Meyer által megtervezett mű ebbe az új irányba terelődött. Az Encyklopaediának hasznára vált, hogy e tudós, aki a mult század hetvenes éveiben mint fénylő meteor emelkedett fel a matematikai égboltozaton, igen korán abbahagyta a tulajdonképpeni produktív munkát és hosszú életének második felében minden erejét organizatorikus munkák nak, amilyen az Encyklopaedia, szentelte. A matematika történetének minden periodusában ritkák voltak az oly férfiak, akik, mint Klein, képesek voltak e messze szétágazó tudomány minden területét összességében áttekinteni és egymással összemérni. Ezenfelül azonban Klein igazi ereje és nagysága, mely lehetővé tette, hogy az Encyklopaedia sorsát oly nagy mértékben befolyásolja, abban a képességében rejlett, hogy összefüggéseket fedett fel ott is, ahol más ilyeneket nem is keresett volna, valamint szívósságában, mellyel minden részletnek utánajárt. A nagy kérdésekre irányított széles látókör nála a részletek szeretetével egyesült; e tekintetben Klein egészen magában álló jelenség volt. Az Encyklopaedia minden cikkében, és különösen azokban, melyek 1920 előtt jelentek meg, érezhető Klein hatása; e hatást azon a nagyszámú konferencián fejtette ki, melyet a szerkesztőkkel és referensekkel elsősorban Göttingában, de másutt is Németországban, sőt a külföldön is tartott; ezekhez még rendkívül terjedelmes levelezés járult. KLEIN e működése által az Encyklopaedia sokkal egységesebbé vált, mint amennyire ez hasonló méretű munkáknál szokásos. Ha ma az Encyklopaedia nemcsak cikkek laza egymásutánjából áll, hanem szerves egységet mutat, úgy az egyedül és kizárólag KLEIN áldozatkész munkálkodásának köszönhető, mely több mint egy negyed századon át tartott,

Természetes, hogy KLEIN egynémely főcélja nem valósulhatott meg oly mértékben, amennyire kívánta volna. Ő az Encyklopaediát eszköznek tekintette arra, hogy egyrészt a matematika minden alkalmazását közelebb hozza a tiszta matematika művelőihez, másrészt pedig arra, hogy az elméleti kutatás új eredményeit a gyakorlati alkalmazásokra alkalmassá tegye. Ez okból szerepelnek az első kötetben oly cikkek, melyek a statisztikát, nemzetgazdaságtant és életbiztosítást tárgyalják, a negyedikben pedig a ballisztika és a hajó elmélete mellett, mely utóbbi már EULER-t is érdekelte, oly cikkek is, melyek tisztára technikai tárgyakkal foglalkoznak. Eredetileg pláne egy külön kötet volt tervbe véve a matematika technikai alkalmazásainak tárgyalására. A fellépett nehézségek miatt erről azonban maga KLEIN hamarosan lemondott. E nehézségek a mai világban még feltűnőbbekké és nagyobbakká válnak és azzal a ténnyel függnek össze, hogy a technika és újabban a matematikai fizika is sokkal gyorsabban változik, mint a matematika és hogy másrészt a matematika befolyása e disciplinákra elsősorban oly körülményeken múlik, melyeket nem könnyü rendszerbe foglalni.

Természetes, hogy az A. SOMMERFELD szerkesztésében megjelent fizikai kötetek H. A. LORENTZ remek cikkével az elektrodinamikáról és elektronelméletről, W. PAULI klasszikus cikkével a relativitáselméletről, L. BOLTZMANN, H. KAMERLINGH ONNES, H. MINKOWSKI stb. közleményeivel hatásosan előmozdították a matematikai fizika fejlődését. Az asztronomiai kötet, anyagának elrendezésével visszatükrözi oly korán elhúnyt szerkesztőjének, K. SCHWARZSCHILD-nak szellemét. A mechanikát tartalmazó kötet pedig, mely különlegesen sokat köszön KLEIN szerkesztői tevékenységének, a technikai problémáknak és a külföld matematikai-technikai téren elért eredményeinek valóságos kincsesbányája.

Mindemellett az Encyklopaedia elsősorban a tiszta matematika művelőinek «Nachschlagewerk»-je és mint ilyen, a kutatás elsőrangú eszköze. Ez az eredmény nem kis mértékben annak a körülménynek köszönhető, hogy az idők folyamán oly stílus fejlődött ki, mely lehetővé tette, hogy a citátumok tömege dacára a tulajdonképpeni szöveg olvasható legyen. Szerencsés véletlen folytán A. PRINGSHEIM cikkei, melyek világosságuk és szabatosságuk folytán azonnal példaszerűeknek találtattak, még 1900 előtt jelentek meg. Írásmódjuk bizonyára számos későbbi munkatársat befolyásolt munkájában.

Már korán felmerült az az óhaj, hogy az aktualitás megőrzése céljából újabb eredmények, melyek egy már lezárult részben nem vétettek figyelembe, utólag felvétessenek az Encyklopaediába. Az első alkalmat ehhez Kneser variációszámítási cikke szolgáltatta, mely 1900 szeptemberében lezárult, de megjelenése néhány évig elhalasztatott. Kneser ugyane tárgyra vonatkozó tankönyve, mely 1900-ban jelent meg s amely az addig csak keveseknek hozzáférhető Weierstrass-féle elméletet általánosan ismertté tette, új életet adott a variációszámításnak. Ilymódon szükségesnek mutatkozott 1904-ben, Kneser cikkével egyidejűleg, egy kiegészítő cikket közölni (Hahn és Zermelo tollából), hogy ebben figyelembe vétessenek a variációszámítás időközben elért újabb eredményei, melyek elsősorban Hilbert-nek, v. Escherich-nek, Osgood-nak és magának Knesernek köszönhetők.

Ezek a részletek azért érdekesek, mert később a kiegészítő cikkek felvétele rendszerré vált. Így például 1919-ben jelent meg Lichtenstein nagy cikke a potenciálelméletről és a konform leképezésekről, melyet 1921-ben Bieberbach függvénytani cikke követett. A második kötet egész hátralévő része ilyszerű kiegészítő cikkeket tartalmaz, illetőleg oly tárgyakkal foglalkozik, melyek csupán 1900 után fejlődtek ki.

Sok esetben maga az Encyklopaedia adta meg a lökést egyes vizsgálatok folytatására. Ez áll mindenesetre Osgood függvénytani cikkére, melyet húsz évvel később Bieberbach egészített ki. Bizonyos fokig ugyanez áll Dehn-nek és Heegaard-nak az analysis situst tárgyaló cikkére is, habár Brouwer alapvető vizsgálatai, melyek körülbelül e cikk megjelenésével egyidejűleg indultak meg, e cikktől teljesen függetlenek.

Egyes elszigetelt esetekben azonban néhány régen megjelent cikk is meglepően fiatal maradt: így például A. Voss cikke a mechanika elveiről oly szabatosan van fogalmazva, hogy, bár jóval a relativisztikus mechanika kifejlődése előtt íródott, még ma is haszonnal tanulmányozható.

Leginkább elavult az aritmetikát és algebrát tárgyaló első kötet. Ennek több oka van; a főok az, hogy az algebra csak az utolsó évtizedekben érte el a fogalmak szabatosságának és élességének azt a fokát, melyet az analízis már 1900 előtt elért; ehhez járul az a körülmény, hogy ezzel az axiomatikus megvilágítással kapcsolatban az algebra tartalma és módszereinek alkalmazási területe rendkívüli mértékben kiterjedt.

A Deutsche Mathematikervereinigung kezdeményezésére és egyetértésben a kiadóvállalattal a kartelbe lépett Akadémiák bizottsága elhatározta, hogy e kötetet teljesen átdolgozva második kiadásban is megjelenteti. Az akadémiai bizottság ajánlatára 1934-ben szerkesztőkül H. HASSE (Göttingen) és E. HECKE (Hamburg) választattak meg, akik mindketten e választást elfogadták. Az új kiadás előmunkálatai már meglehetősen előrehaladtak és remélhető, hogy a két kötetre tervezett mű néhány éven belül elkészül.

München, 1935 augusztusában.

C. Carathéodory
(ford. Kőnig Dénes).

O. Spiess: Basel anno 1760. Nach den Tagebüchern der ungarischen Grafen Joseph und Samuel Teleki. Verlag E. Birkhäuser, Basel, 1936, VIII + 179 lap.

A bázeli egyetem 1760 április 15-én ünnepelte alapításának 300. évfordulóját. Az ünnepségre vonuló díszmenet élén az egyetem rektora haladt a város fejével. Utána — mint SPIESS könyvében olvassuk — nem az egyetem tanárai és a megjelent főméltóságok következtek, hanem először három magyar egyetemi hallgató: a TELEKI grófi család ott időző ifjú sarjai. A gazdag kereskedő és iparos város, amely már régen elűzte a saját nemességét, mindenképpen kitüntette az egyetemén tanuló erdélyi főnemeseket. A TELEKI grófok közül először JÓZSEF, a későbbi főigazgató és koronaőr, jelent meg Bázelben, utána unokaöccse ÁDÁM és végül mostoha nagybátyja SÁMUEL, a későbbi kancellár, a marosvásárhelyi Teleki-könyvtár alapítója. A matematika vonzotta őket oda, a BERNOULLI-ak neve. E világhírű család két tagja tanított akkor a bázeli egyetemen: DÁNIEL fizikát és öccse, JÁNOS matematikát. DÁNIEL kövérkés, élénk, többnyire jókedvű emberke, aki szép délutánokon órákig sétál a városban vagy a Rajna hídján többnyire valamelyik TELEKI-vel, vagy tíz évvel fiatalabb öccsével. Az 50 éves JÁNOS is kisnövésű; feltűnik hatalmas sasorra. Komolyabb, ridegebb; beszéd közben idegesen rázza fejét, különös szem- és szájmozgások kíséretében.

TELEKI JÓZSEF gróf kilenc hónapon át heti négy órában volt BERNOULLI DÁNIEL magántanítványa. Közel két évi külföldi tanulmányútjáról (Svájc, Hollandia, Franciaország) rendszeres naplót vezetett. Ezeket az igen értékes magyarnyelvű feljegyzéseket a M. Tud. Akadémia kézirattára őrzi. E sorok írója fordította le belőle a svájci olvasót érdeklő részeket németre, az itt ismertetett könyv szerzője SPIESS OTTÓ,[1] a bázeli egyetem

---

[1] E helyen is köszönetet mondok FEJÉR LIPÓT egyetemi tanár úrnak, aki figyelmemet reá, a BERNOULLI-ak tudós kutatójára, felhívta.

matematikus professzora részére. Könyvének 36—105. oldalain található ez a fordítás, amelyet Spiess később a bázeli egyetemi könyvtárnak kikölcsönzött eredetivel még össze is hasonlított dr. Péter Ferenc és E. Hunstiger-Lamadin segítségével.

Teleki Sámuel gróf tanulmányai során 17 hónapig tanult matematikát Bázelben. A privát kollégiumokért Bernoulli János-nak 51, Dániel-nek 6 új körmöci aranyat fizetett és azt tartja, hogy «nagyobb haszonnal soha a pénzemet nem költöttem, mint itten az tanulásra nézve». Úti naplóját (1759—1763, Bázel, Utrecht, Leyden, Párizs) Biás István rendezte sajtó alá (1908). Imre Sándor kitűnő bevezetést írt hozzá. A Spiess könyvében közölt német fordítás (116—151) dr. Péter Ferenc tollbamondása. Verzár Frigyes hazánkfia, aki jelenleg szintén a bázeli egyetem professzora, mindig készséges segítője volt tanártársának munkájában.

Teleki József gróf naplóiban többször említi egy másik diáriumát, ahová egyes dolgokat részletesebben írt le. Spiess kérésére állandóan kutatok utána, de eddig minden fáradozásom sikertelen maradt. Más gyanított és keresett naplók sem kerültek elő. A Teleki-eknek bázeli magyar diákokkal való levelezéséből is hosszas keresés után csak négy kivonatot közölhetett Spiess könyvének függelékében (155—160). Ezek közül Kis Gergely levelét a gyömrői Teleki-levéltárból másoltam, Fogarasi Pap József-ét pedig az Országos Levéltár Teleki-tárának Teleki Sámuel-osztályából. Kérésemre kettőt (Thordai Sámuel és Rhédey Ádám gróf levelét) Kelemen Lajos küldött Kolozsvárról.

Spiess már első olvasásra megállapította Teleki József gróf följegyzéseiről, hogy az akkori bázeli egyetemi életnek egyetlen reánk maradt részletes rajza. Szerinte a keresetlen hangú Teleki-naplókat Bázel történelmének jövő kutatói nem hagyhatják figyelmen kívül. Spiess-nek a naplókat ismertető előzetes előadása és cikke olyan nagy érdeklődést keltett, hogy könyvének első 100 példánya azonnal elkelt és még a hollandiai merített papirosú, bőrkötésű példányokra is akadt jelentkező, pedig darabja 40 svájci frank (az egyszerűé 7·50).

Már a könyv külön borítólapjáról két igen érdekes arc tekint ránk: a két Teleki gróf. A 18. század a matematikát a fölvilágosodás legerősebb fegyverének tartotta: a matematika akkor divatos és népszerű volt, még a szalónok is kíváncsisággal és érdeklődéssel fogadták. A Teleki grófok komolyságára és derekasságára vall, hogy a divaton messze túlmenő alapossággal és kitartással foglalkoztak vele. Spiess-nek a naplók elé írt bevezetése (1—35) gondos és részletes tanulmány; az akkori bázeli élet egészen megelevenedik előttünk. Igen érdekes Teleki József gróf kiadási naplójának kivonata (107—115). A jegyzetek (161—163) és a névmutató (164—179) a szerző sokoldalúságát dícsérik. Az ízléses külsejű könyvet 14 szép kép díszíti: a két TELEKI-n és a két BERNOULLI-n kívül, SOCIN, ISELIN, RAMSPECK professzorok és az akkori Bázel képei.

Ezek a naplók nemcsak bázeli család- és várostörténeti szempontból érdekesek, hanem művelődéstörténeti jelentőségűek is. TELEKI JÓZSEF gróf például beszámol BERNOULLI DÁNIEL kísérleti fizikai előadásairól is. A BERNOULLI-ak úttörők ezen a téren: JAKAB (DÁNIEL nagybátyja) és JÁNOS (DÁNIEL apja) tartották az első, kísérletekkel összekötött előadásokat és DÁNIEL fokozott buzgósággal követte őket ezen a téren. A TELEKI-ek matematikai tanulmányainak mineműségéről a naplók sajnos keveset közölnek. Egyhelyütt azonban TELEKI JÓZSEF leírja, hogy Bázelben töltött utolsó napjait BERNOULLI DÁNIEL még arra akarta felhasználni, hogy fogalmat adjon neki az integrálszámításról is, hogy legalább annyira vigye őt, hogy idővel e tárgyban is továbbképezhesse magát. Ismételten felemlíti itt azt a rendkívüli hálát, melyet mestere iránt érez, és hozzáfűzi, hogy BERNOULLI DÁNIEL is örült az ifjú tanítványánál elért eredménynek.

SPIESS természetesen — kevés kivétellel — csak a Svájcra vonatkozó naplórészeket közli és ismerteti. A naplóknak a matematikus és fizikus olvasót érdeklő legfontosabb egyéb helyeit más alkalommal szeretném bemutatni.

Jelitai József.

Kőnig Dénes: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen (Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe). Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1936; XI + 258 lap.[1]

Itt közöljük a szerző magyar fordításában e könyv előszavát.

A gráfelmélet két szempontból tekinthető: először is, mint az egyméretű komplexusok elmélete, első fejezetét alkotja az általános topológiának; másodszor pedig — ha eltekintünk folytonossági és geometriai tartalmától — mint a *kombinatorika* és az absztrakt *halmazelmélet* egy ága fogható fel. E könyvben e második felfogást kívántuk érvényre juttatni, elsősorban azáltal, hogy a gráfok elemeinek — a pontoknak és éleknek — semmiféle geometriai jelentést nem tulajdonítunk: a pontok (szögpontok) tetszőleges egymástól megkülönböztethető elemek és egy-egy él nem egyéb, mint két végpontjának valamely összefoglalása. Néhány példa és alkalmazás kivételével könyvünk szigorúan ragaszkodik

[1] Az E. ARTIN szerkesztésében megjelenő «Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern» c. könyvsorozat 16. kötete.

ehhez az absztrakt felfogáshoz, melyet már 1873-ban Sylvester hangsúlyozott. A geometriai beszédmód, melyet mégis alkalmazunk, igen kényelmes terminológiát szolgáltat, a nélkül, hogy geometriai szemléletre vagy geometriai axiómákra kellene hivatkozni. Ennek a gráfelméleti terminológiának nagy heurisztikus értéke van: «természetes» problémákat vet felszínre és igen absztrakt fogalomalkotásokat szemléletes képekhez kapcsol, amiáltal gyakran egymástól távolállónak látszó fogalmak és problemák közti új összefüggések jutnak napvilágra. Ez az absztrakt (kombinatorikus) felfogás hasznára van a geometriai topológiának is; ezt mutatja a többméretű kombinatorikus (Poincaré—Veblen-féle) topológia nagymérvű fejlődése az utóbbi években. Persze az egynél több méretű komplexusok és sokaságok elméletében a folytonossági meggondolások mellőzése már sokkal nagyobb nehézségeket okoz. Ez okból — hogy a könyv teljesen elemi jellegét megőrizzük — az *abszolút* gráfelméletre szorítkozunk, mely a gráfokat *önmagukban* tekinti és nem terjeszkedünk ki a *relatív* gráfelméletre, mely a gráfokat felületeken vagy terekben vizsgálja (csupán a XII. fej. 5. §-a alkot ez alól kivételt). Az anyagot továbbá azáltal is korlátoztuk, hogy — kevés kivétellel — mellőztük a megszámlálási kérdéseket.

Úgy, mint a matematikának legtöbb újabb fejezete, a gráfelmélet sem öncélképpen keletkezett, hanem a matematikának és természettudományoknak régibb ágaihoz kapcsolódva. Hogy már itt felemlítsük a gráfokra vonatkozó legfontosabb munkákat: Kirchhoff dolgozata (1847) az elektromosság elméletének, Petersen-é (1901) az invariánselméletnek és Menger-é az új görbeelméletnek köszöni keletkezését. P. Hertz egy dolgozata (1922) által a formális logika is forrásává vált gráfelméleti kutatásoknak. Cayley és Sylvester gráfokra vonatkozó vizsgálatai nagyrészt kémiai kérdésekből származtak. Némely szerző azonban már öncélképpen foglalkozott gráfelméleti kérdésekkel: G. Brunel és A. Sainte-Laguë mellett itt elsősorban H. Whitney említendő, akinek rendszeres kutatásai az utóbbi évekbe esnek és bizonyára még nincsenek lezárva.

A természettel való érintkezés mellett igen sokat köszön a gráfelmélet az emberek egymásközötti érintkezésének is. A kombinatorikának bizonyos gyakorlati, társasági problémáira gondolunk itt — hozzászámítva ezekhez a szellemi játékokat — melyek eddig különösen a *matematikai mulatságok* irodalmában tárgyaltattak. Ez az irodalom a gráfelmélet valóságos kincsesbányájának tekinthető. Így Euler-t (1736) a königsbergi hidak problémája vezette hozzá, hogy a gráfelmélet történetileg első dolgozatát közzébocsássa. Édouard Lucas volt azután az első, aki *Récréations Mathematiques*-jával (1882—1894) ezt a témakört — úgy matematikai, mint történeti tekintetben — valódi tudományos művé egyesítette. Igen természetes tehát, hogy LUCAS azok közé tartozott, akik felismerték a gráf (*réseau*) fogalmának fontosságát. A LUCAS által összegyüjtött és feldolgozott anyagot azután AHRENS — különösen matematikatörténeti tekintetben — mintaszerű művé egészítette ki. A gráfokra vonatkozó olyannyira elszórt anyag egybegyüjtésénél nagy szolgálatot tettek nekem azok a bőséges és megbízható bibliográfiai adatok, melyek AHRENS *Mathematische Unterhaltungen*-jában foglaltatnak. E tekintetben meg kell itt említenem DEHN és HEEGAARD *Analysis Situs* c. referátumát is az *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*-ben, amely világos áttekintésben (összesen hét oldalon) nyujtja a gráfok (*Liniensysteme*) elméletének történetét e század elejéig. Ez a tárgyalás könyvem egynéhány pontjának megírásánál, valósággal programmképpen szerepelt. Ugyancsak felhasználhattam SAINTE-LAGUË gráfokra vonatkozó *Mémorial*-referátumának néhány bibliográfiai adatát is.

Ami az én könyvem irodalmi adatait[1] illeti, ezekre különös súlyt helyeztem és e tekintetben teljességre törekedtem. Pontosan megadom az irodalom minden oly helyét, melyen oly fogalmat, tételt vagy bizonyítást találtam, amely haszonnal volt az én tárgyalásomra. Csupán az első fejezet alkot e tekintetben kivételt; itt lehetetlennek látszott az alapfogalmaknak és alapényeknek első megjelenését az irodalomban megállapítani, annál is inkább, mert a gráfelmélet szemléleti értelmezésénél — legalább is, ami a véges gráfokat illeti — e fejezet nagyrészt csak magától értetődő eredményeket tartalmaz. Ami azonban a későbbi részeket illeti, könyvem — úgy vélem — a gráfelmélet történetét is tartalmazza. Nem nehéz tehát megállapítani, hogy melyek azok az eredmények, amelyeket a szerző sajátjának tekint. Ami különlegesen a végtelen gráfokat illeti, ezekre vonatkozólag csak saját munkáimat idézhettem.

A könyv előadásokból keletkezett, melyeket többizben tartottam a budapesti Műegyetemen. Főtartalmának megértéséhez szükség van ugyan bizonyosfokú iskolázottságra a matematikai gondolkodásban ; matematikai tételek és fogalmak ismeretére azonban nincs szükség — legalább ami a véges gráfok tárgyalását illeti. A végtelen gráfokra vonatkozó némely vizsgálatnál az absztrakt halmazelmélet elemeinek ismeretét feltételezzük. Amit a könyv egyes helyeken az elemi számelméletből, a lineáris algebrából, a determinánselméletből, a projektív geometriából, a csoportelméletből stb. felhasznál, aligha haladja túl azt az ismeretkört, mellyel minden leendő matematikus már főiskolai tanulmányainak elején rendelkezik.

---

[1] A szerzőnevek után szögletes zárójelben foglalt vastagon nyomtatott számok a könyv végén található *Bibliographie*-ra utalnak.

Hálával kell itt megemlékeznem e gyüjtemény elhúnyt megalapítójáról, E. HILB professzorról, aki munkámat e gyüjteménybe felvette, amidőn még csak egy rövid tervezete volt készen. Évek hosszú során át, míg e könyvön dolgoztam, nagy haszonnal járt számomra az a nagybecsű érdeklődés, mellyel mélyen tisztelt tanárom, az időközben ugyancsak elköltözött KÜRSCHÁK JÓZSEF professzor, a munka haladását követte. Ő még elolvasta kéziratom legnagyobb részét és oly megjegyzésekkel kísérte, amelyek igen nagy mértékben a könyv javára váltak. Alkalmam volt könyvem egynéhány részletét más magyar (budapesti és szegedi) szaktársaimmal is megbeszélni; ezek: EGERVÁRY JENŐ, ERDŐS PÁL, FEJÉR LIPÓT, GRÜNWALD TIBOR, HAJÓS GYÖRGY, HAAR ALFRÉD (†), KALMÁR LÁSZLÓ, NEUMANN JÁNOS, SCHÖNBERGER TIBOR, VALKÓ ISTVÁN, VERESS PÁL. Köszönettel adózom nekik számos megjegyzésért és adalékért, melyek a könyv megfelelő helyén megtalálhatók. HAJÓS GYÖRGY, KALMÁR LÁSZLÓ és VERESS PÁL emellett — és pedig kritikusi alapossággal — átjavították a könyvnek csaknem valamennyi korrekturáját. Az első korrektura olvasásával továbbá H. NEHRKORN (Hamburg) volt szíves engem támogatni. Az ábrák készítésénél GRÜNWALD TIBOR tett nagy szolgálatot. Mindnyájuknak őszinte köszönetemet fejezem ki szíves közreműködésükért, éppúgy, mint az *Akademische Verlagsgesellschaft*nak a könyv szedése és korrigálása alkalmával tanúsított előzékenységéért.

Budapest (Műegyetem), 1935 szeptember.

Kőnig Dénes.

Kimutatás

az 1935. november 1-től 1936. április 4-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíjak.

1931-re: Simon Elemér (2), Ujj Gyula (2). *Összesen 4 P.*

1932-re: Lázárné Róder Irén (8), Spitz Iván (8), Tóth Géza (3), Turán Pál (6). *Összesen 25 P.*

1933-ra: Ádler Erzsébet (6), Blau Györgyné (2), Lázárné Róder Irén (2), Maróthi Ferenc (8), Öveges József (6), Péch Aladár (8), Riesz Frigyes (6), Rigó Ferenc (8), Skopál István (8), Spitz Iván (8), Szabóné Nagy Sarolta (4), Theiszné Vajk Magda (2), Tóth Géza (2), Turán Pál (8). *Összesen 78 P.*

1934-re: Blau Györgyné (4), Bolla Györgyné (8), Breuer József, Haifa (2), Bujtás János (6), Dér Zoltán (3), Erdődy Imre (8), Forró Magdolna (8), Heuer Ede (8), Kronberger Ede (4), Magyar Márta (4), Maróthi Ferenc (8), Neográdyné Haich Sarolta (8), Öveges József (4), Patai László (2), Péch Aladár (8), Pogány József (8), Radó Simon (2), Riesz Frigyes (6), Schaller Mátyás (6), Sebők Emánuel (6), Spitz Iván (8), Steiner Miklós (6), Szabóné Nagy Sarolta (8). *Összesen 135 P.*

1935-re: Bertrám Brunó (6), Bolla Györgyné (8), Bresztovszky Béla (8), Breuer József, Haifa (6), Bujtás János (6), Csegény Margit (8), Erdődy Imre (8), Éber József (2), Fenyvesi Andor (8), Fraunhoffer Lajos (8), Goldziher Károly (8), Kilcer Gyula (8), W. Müller, London (Grill) (6 40), Neográdyné Haich Sarolta (8), Orbán György (6), Pogány József (4), Radó Simon (8), Rédei László (6), Schaller Mátyás (6), Sós Ernő (8), Steiner Miklós (6), Steiner Lajos (6), Szabó Gusztáv (8), Szabó M.-né Nagy Sarolta (8), Szántó Sándor (8), Szekeres Kálmán (8), Székely Károly (6), Tolnai Jenő (8), Vámos Sándor (6). *Összesen 200 P 40 fillér.*

1936-ra: Ábrahám István (8), Báldyné Benkő Ilona (6), Balyi Ferenc (6), Barta József (8), Breuer József, Haifa (6), Cseh Elekné (8), Éber József (4), Faragó Andor (8), v. Fraknóy József (8), Gruber Nándor (8), **H**adarits Vendel (8), Hausbrunner Vilmos (8), Holenda Barnabás (6), **J**elitai József (8), **K**arai Sándor (6), Klug Lipót (8), Kövessi Ferenc (6), **M**ischung Ilona (6), Sz. **N**agy Béla (6), Nyáry Béla (6), **O**rtvay Rudolf (8), Oszlaczky Szilárd (8), **P**atai Imre (8), **R**ados Gusztáv (8), Rados Ignác (8), Rhorer László (4), Romsauer Lajos (8), Rucsinszky Lajos (8), **S**arkadi Károly (8), **Sz**őke Béla (8), **T**angl Károly (8), Tardos Vida (6), Tihanyi Miklós (6), Török Elemér (6), **V**olenszky Gyula (4), Vörös Cyrill (6), **Z**ányi László (6). *Összesen 256 P.*

1937-re: **B**acsó Vilmos (6), Báldyné Benkő Ilona (2), Breuer József, Haifa (2), **G**yulai Zoltán (6), **R**horer László (2), **T**ihanyi Miklós (6), **V**olenszky Gyula (4). *Összesen 28 P.*

1938-ra: **G**yulai Zoltán 2 P.

2. Előfizetési díjak:

1931-re: Somssich rg. Kaposvár 6 P.

1933-ra: Ferenc József Tanítók Háza, Bp. 8 *P.*

1934-re: Zrínyi M. rg. Bp. (8), Ferenc József Tanítók Háza Bp. (8), *Összesen 16 P.*

1935-re: Orsz. Met. és Földmágn. Int. Bp. (8), Apponyi A. lg. Győr (6), Révai M. reálisk. Győr (3). *Összesen 17 P.*

1936-ra: Kir. József Nádor Műegy. Kém. Fiz. Tanszék, Bp. (8), Ciszterci Tanárképző Könyvtára, Bp. (8), Pesti Izr. Hitközség rg. (8). Ág. ev. Rudolf rg. Békéscsaba (6), Szt. Benedek Rend Közp. könyvtár, Pannonhalma (6), Ref. Horthy M. rg. Kisújszállás (6), József Nádor Műegy. Bánya-Kohó és Erdőmérn. Kar., Sopron (6). *Továbbá a M. kir. Vallás. és Közokt. Minisztérium előfizetése a következő állami, ill. kir. kat. középiskolák tanári könyvtára számára:* Balassa B. rg. Balassagyarmat, Lorántfy Zsuzsánna llíc., Békéscsaba, Verbőczy J. rg. Bp. I., Mátyás király rg. Bpest II., Toldy Ferenc reálisk. Bp. II., Árpád rg., Bp. III., Berzsenyi D. rg. Bp. V., Bolyai reálisk. Bp. V., Kölcsey F. rg. Bp. VI., Kemény Zs. reálisk. Bp. VI., Mária Terézia lg. Bg. VI., Madách I. gimn. Bp. VII., Szt. István rg. Bp. VII., Erzsébet Nőiskola llíc. Bp. VII., Középisk. Tanárképző Int. Gyak. Gimn. Bp. VIII., Zrínyi M. rg. Bp. VIII., Fáy A. rg. Bp. IX., Széchenyi I. rg. Bp. X., Szt. László rg. Bp. X., Kossuth rg. Cegléd, Szt. Imre rg. Csongrád, Fazekas M. reálisk. Debrecen, Dobó I. reálisk. Eger, Koháry I. rg. Gyöngyös, Révai M. reálisk. Győr, Apponyi A. lg. Győr, Reálgimn. Hatvan, József Nádor rg. Jászberény, Somssich P. rg. Kaposvár, Katona J. reálisk. Kecskemét, Deák F. rg. Kispest, Bessenyei Gy. rg. Kisvárda, Csanád Vezér rg. Makó, Teleki Blanka llíc. Mezőtúr, Hunfalvy J. reálisk. Miskolc, Szabolcs Vezér rg.

Nagykálló, Kossuth L. rg. Pestszenterzsébet, Középisk. Tanárképző Int., Gr. Széchenyi I. Gyak. Reálisk. Pécs, Széchenyi I. rg. Sopron, Leánygimn. Sopron, Kisfaludy S. rg. Sümeg, Klauzál G. rg. Szeged, Baross G. reálisk. Szeged, Árpádházi Szt. Erzsébet llíc. Szeged, Ybl M. reálisk. Székesfehérvár, Garay J. rg. Szekszárd, Horváth M. rg. Szentes, Reálgimn. Szentgotthárd, Verseghy F. rg. Szolnok, Faludy F. rg. Szombathely, Leánylic. Szombathely, Könyves K. rg. Ujpest, Kanizsay Dorottya llíc. Ujpest, Deák F. rg. Zalaegerszeg, Leánylíc. Szolnok, Kir. egyet. kat. rg. Bp., Kir. kat. Eszterházy M. rg. Dombovár, Kir. kat. Gr. Széchenyi l. rg. Jászapáti, Kir. kat. Szt. László rg. Mezőkövesd, Kir. kath. Fráter Gy. gimn. Miskolc, Kir. kath. gimn. Nyíregyháza (488). *Összesen*: *536 P.*

1937-re : Csillagvizsg. Intézet, Bp. Svábhegy 8. P.

3. Adomány.

Bláthy Ottó Titusz 10 P.

Budapest, 1936 április 4.

Szabó Gábor
pénztáros.

Franklin-Társulat nyomdája. — Ábrai V.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA. — ÁBRAI V.

MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES ÉS POGÁNY BÉLA

NEGYVENHARMADIK ÉVFOLYAM

1936

JÚLIUS—DECEMBERI FÜZET

BUDAPEST, 1936

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Kőnig Dénes* (**XI., Horthy Miklós-út 28., Hadik-pensio**), a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* (**XI., Budafoki-út 8.**) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra, valamint minden korrekturára pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghivók expediciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Szabó Gábor* pénztáros címére (Budapest, XI., Verpeléti-út 7.) intézendők. Postatakarékpénztári csekkszámla száma: 5997.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány*, Budapest, XI., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *B. Pogány*, Budapest, XI., Budafoki-út 8.

EGY NUMERIKUS KONGRUENCIA TELJES MEGOLDÁSA.[1]

A címben említett kongruencia a következő:

$$f(x) \equiv x^{p-2}+2x^{p-3}+3x^{p-4}+\cdots+\frac{p-1}{2}x^{\frac{p-1}{2}}+\frac{p+1}{2}x^{\frac{p-3}{2}}+ \\ +\frac{p+3}{2}x^{\frac{p-5}{2}}+\cdots+(p-2)x+(p-1)\equiv 0 \pmod{p}, \tag{1}$$

amelyben p páratlan törzsszámot jelent és az együtthatók a p modulus redukált maradéksorának nagyság szerint rendezett számai.

Erről a kongruenciáról ki fogjuk mutatni, hogy

$$x \equiv 1 \pmod{p}$$

az egyetlen gyöke és hogy ennek multiplicitása $(p-2)$*-vel egyenlő.*

Hogy $x \equiv 1 \pmod{p}$ az (1) alatti kongruenciát kielégíti, azt verífikálással közvetlenül kimutathatjuk. Ugyanis

$$f(1) \equiv 1+2+\cdots+p-2+p-1 \equiv \frac{p(p-1)}{2} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Hogy az 1-en kívül az (1) alatti kongruenciát más szám nem elégítheti ki, annak a közvetlen kimutatása nehézséggel jár; de ez közvetlenül evidenssé lesz, mihelyt kimutattuk, hogy az $x \equiv 1$ gyöknek multiplicitása $(p-2)$-vel egyenlő. Ennek a bebizonyítására elegendő kimutatni, hogy az $f(x)$-nek összes deriváltjai egészen a $(p-3)$-dik rendszámig az $x=1$ helyen

[1] Előadás a Mat. és Fiz. Társulat 1936. május 30-án tartott közgyűlésén.

mod p zérussal kongruens helyettesitési értékeket szolgáltatnak, míg a $(p-2)$-edrendű deriváltnak helyettesitési értéke ezen a helyen mod p a zérustól különböző.

Hogy a következő számításokat ne kelljen megszakítanom, ideirom a következő ismeretes és a következőkben ismételten fölhasználandó, binomiális együtthatókra vonatkozó egyenlőséget

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}, \tag{B}$$

melynek helyességéről teljes indukció útján könnyen meggyőződhetünk.

Áttérve az $f(x)$ deriváltjainak az $x=1$ helyen való kiszámítására, ki fogjuk mutatni, hogy

$$f(1)\equiv 0,\ f'(1)\equiv 0,\ldots,\ f^{(p-3)}(1)\equiv 0,\ f^{(p-2)}(1)\not\equiv 0 \pmod{p}. \tag{2}$$

Mindenekelőtt látjuk, hogy

$$f'(x)\equiv (p-2).1x^{p-3}+(p-3).2x^{p-4}+\cdots+\frac{p-1}{2}\,\frac{p-1}{2}\,x^{\frac{p-3}{2}}+$$

$$+\frac{p-3}{2}\,\frac{p+1}{2}\,x^{\frac{p-5}{2}}+\frac{p-5}{2}\,\frac{p+3}{2}\,x^{\frac{p-7}{2}}+\cdots+2(p-3)x+1.(p-2),$$

tehát

$$f'(1)\equiv (p-2).1+(p-3).2+\cdots+\frac{p-1}{2}\,\frac{p-1}{2}+$$

$$+\frac{p-3}{2}\,\frac{p+1}{2}+\frac{p-5}{2}\,\frac{p+3}{2}+\cdots+2(p-3)+1.(p-2);$$

ha e kifejezés első sorában a

$$p-2,\ p-3,\ldots,\ \frac{p-1}{2}$$

tényezőket a mod p velük respektive kongruens

$$-2,\ -3,\ldots,\ -\frac{p+1}{2}$$

számokkal pótoljuk, a második sorban az első tényezőket a mod p velök kongruens

$$-\frac{p+3}{2},\ -\frac{p+5}{2},\ldots,\ -(p-2),\ -(p-1)$$

számokkal pótoljuk, $f'(1)$ számára a következő kifejezés adódik:

$$f'(1) \equiv -\left[2.1 + 3.2 + \cdots + \frac{p+1}{2}\,\frac{p-1}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{p+3}{2}\,\frac{p+1}{2} + \cdots + (p-1)(p-2)\right] \pmod{p},$$

azaz

$$f'(1) \equiv -2!\left[\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{\frac{p+1}{2}}{2} + \cdots + \binom{p-1}{2}\right] \pmod{p};$$

ha pedig a (B) alatti relációra tekintettel vagyunk, akkor

$$f'(1) \equiv -2!\binom{p}{3} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Teljesen hasonló meggondolásokkal mutatható ki ez az általános reláció:

$$f^{(k)}(1) \equiv (-1)^k (k+1)!\binom{p}{k+2} \pmod{p},$$

mivel pedig

$$\binom{p}{1} \equiv 0, \binom{p}{2} \equiv 0, \ldots, \binom{p}{p-1} \equiv 0, \binom{p}{p} \not\equiv 0 \pmod{p},$$

a (2) alatti állítás helyessége evidenssé lesz és így

$$x \equiv 1 \pmod{p}$$

az (1) alatti kongruenciának $(p-2)$-szeres gyöke. Mivel pedig valamely kongruenciának fokszámát felülmúló számban gyökei nem lehetnek, ha a modulus törzsszám, azért

$$x \equiv 1 \pmod{p}$$

az (1) alatti kongruenciának egyetlen gyöke. Tehát e kongruencia többtagújának gyöktényezős előállítása

$$f(x) \equiv x^{p-2} + 2x^{p-1} + \cdots + (p-2)x + p - 1 \equiv (x-1)^{p-2} \pmod{p}. \quad (3)$$

Ez az identikus kongruencia könnyen verifikálható. Ugyanis

$$(x-1)^{p-2} \equiv x^{p-2} - \binom{p-2}{1} x^{p-3} + \cdots +$$

$$+ (-1)^k \binom{p-2}{k} x^{p-2-k} + \cdots + (-1)^{p-2}\binom{p-2}{p-2};$$

a $(-1)^k\binom{p-2}{k}$ binomiális együttható mod p így írható:

$$(-1)^k\binom{p-2}{k}\equiv$$

$$\equiv(-1)^k\frac{(p-2)(p-3)\ldots(p-2-k+2)(p-2-k+1)}{2.\,3\ldots\,k}\equiv$$

$$\equiv(-1)^k\frac{(-2)(-3)\ldots(-k)(-k-1)}{2.\,3\ldots\,k}\equiv$$

$$\equiv(-1)^{2k}(k+1)\equiv(k+1)\pmod{p},$$

amivel a (3) alatti identitás helyessége újból ki van mutatva.

Az eddigiek alapján módot találunk egy bizonyos cyklikus determináns rangszámának meghatározására.

Ismeretes ugyanis a következő tétel.

Ha az

$$f(x)\equiv a_0x^{p-2}+a_1x^{p-3}+\cdots+a_{p-2}\equiv 0 \pmod{p}$$

kongruenciában $a_{p-2}\not\equiv 0 \pmod{p}$ *és különböző gyökeinek száma* σ*-val egyenlő, akkor a*

$$C=\begin{vmatrix} a_0 & a_1\ldots a_{p-3} & a_{p-2}\\ a_1 & a_2\ldots a_{p-2} & a_0\\ . & \ldots\;. & .\\ a_{p-2} & a_0\ldots a_{p-4} & a_{p-3}\end{vmatrix}$$

cyklikus determináns rangszámát mod p *a következő képlet adja:*

$$\rho=p-1-\sigma.$$

E tételből tüstént következik, hogy az

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\ldots\ldots & p-2 & p-1\\ 2 & 3 & 4\ldots & p-1 & 1\\ . & . & \ldots & . & .\\ p-1 & 1 & 2\ldots & p-3 & p-2\end{vmatrix}$$

determináns rangszáma mod p pontosan $p-2$, azaz maga a determináns p-vel osztható (ami különben tüstént belátható, ha e determináns első sorához az összes többieket hozzáadjuk), míg $(p-2)$-edfokú aldeterminánsai között kell olyannak lenni, amely p-vel nem osztható, amit közvetlenül látni nem lehet.

Végül megemlítem, hogy ezek a meggondolások lépésről lépésre átvihetők a GAUSS-féle számtestben szereplő az (1) alatti kongruenciával analog kongruenciára. Ha

$$p = p_1 + p_2 i$$

kéttagú komplex törzsszám és ennek normáját ν-vel jelöljük, úgyhogy

$$\nu = p_1^2 + p_2^2,$$

akkor

$$1, 2, \ldots, \nu - 1$$

a p modulusnak redukált maradéksora. Ezzel a maradéksorral mint együtthatókkal képezvén az

$$x^{\nu-2} + 2x^{\nu-3} + \cdots + (\nu-2)x + (\nu-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

kongruenciát, ennek ismét egyetlen gyöke

$$x \equiv 1 \pmod{p}$$

és ennek multiplicitása ismét $(\nu - 2)$.

Rados Gusztáv.

DIE VOLLKOMMENE LÖSUNG EINER NUMERISCHEN KONGRUENZ.

Im vorstehenden Aufsatz wurde der Beweis für den nachfolgenden Satz erbracht:

Die Kongruenz mit dem ungeraden Primzahl-Modul p

$$x^{p-2} + 2x^{p-3} + 3x^{p-4} + \cdots + (p-2)x + p - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

hat die einzige Wurzel

$$x \equiv 1 \pmod{p},$$

und ihre Multiplicität ist genau $p-2$.

Vermittels dieses Satzes ergibt sich unmittelbar, dass der Rang der cyklischen Determinante

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & p-2 & p-1 \\ 2 & 3 & \ldots & p-1 & 1 \\ . & . & \ldots & . & . \\ p-1 & 1 & \ldots & p-3 & p-2 \end{vmatrix}$$

mod p genau gleich $p-2$ ist.

Gustav Rados.

EGY NEVEZETES RESULTÁNSRÓL.

Legyenek az x complex változós és complex együtthatós

$$f(x) \equiv c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1} x + c_n = 0 \tag{1}$$

algebrai egyenletnek, amelyben $n \geqq 1$ és

$$c_0 \neq 0, \tag{2}$$

összes gyökei (mindegyik annyiszor írva, amennyi a multiplicitása):

$$x_1 = u_1 + iv_1,\ x_2 = u_2 + iv_2, \ldots,\ x_n = u_n + iv_n, \tag{3}$$

ahol az u-k és v-k valósak, míg $i = \sqrt{-1}$.

Ismeretes, hogy az

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \quad \text{és} \quad v_1, v_2, \ldots, v_n$$

valós számok meghatározása egyváltozós valós együtthatós algebrai egyenletek valós gyökeinek a megkeresésére visszavezethető feladat. Ennek a ténynek igazolása során két resultánsdeterminánssal találkozunk, amelyeknek elemei egyváltozós valós polynomok úgy, hogy az említett resultánsok is ilyenek. Döntő körülmény annak kimutatása, hogy *e resultánsok egyike sem azonosan zérus.* Elég természetesen a kettő egyikével foglalkoznunk. Minthogy a kézikönyvek ezt a kérdést vagy nem érintik, vagy nem világítják meg teljesen, úgy véljük, hogy itt közlendő három bizonyításunk[1] némi érdeklődésre tarthat számot.

---

[1] Az első és harmadik bizonyítás Szűcs Adolf-tól, a második Grosschmid Lajos-tól származik.

Első bizonyítás.

Miután az

$$f(x) \equiv c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

egyenletben c_k helyett $\alpha_k + i\beta_k$-t és x helyett $u + iv$-t írtunk ($k=0, 1, 2,\ldots, n$; α_k, β_k, u és v valós mennyiségek), válasszuk szét $f(x)$ valós és képzetes részét:

$$f(x) \equiv P(u, v) + iQ(u, v).$$

Tegyük fel, hogy a P és Q polynomok u szerinti resultánsa azonosan zérus. Ekkor minden valós v-hez tartozik a

$$P(u, v) = 0,\ Q(u, v) = 0$$

egyenleteknek egy (általában complex) közös

$$u = a + bi$$

gyöke, mely az adott egyenlet számára az

$$x = a + bi + vi = a + (b+v)i$$

gyököt szolgáltatja. Nem bizonyos azonban, hogy két különböző v értékhez két különböző x érték tartozik. Ha ugyanis v_1 és v_2 mellett

$$u_1 = a_1 + b_1 i$$

és

$$u_2 = a_2 + b_2 i$$

közös gyökei a fenti egyenletrendszernek, lehet, hogy

$$a_1 = a_2,$$
$$b_1 + v_1 = b_2 + v_2$$

és ez esetben csak egy x gyököt kaptunk. Azonban az u-ra vonatkozó

$$P(u, v_2) = 0,\ Q(u, v_2) = 0$$

egyenletek valós együtthatókkal bírnak, tehát $a_2 + b_2 i$-vel együtt $a_2 - b_2 i$ is gyöke mindkét egyenletnek és ezzel is szerkeszthetünk egy

$$x_2 = a_2 + (-b_2 + v_2)\, i$$

gyököt az eredeti egyenlet számára. Mármost mind a három gyök megegyezése:

$$a_1 + (b_1+v_1)i = a_2 + (b_2+v_2)i = a_2 + (-b_2+v_2)i$$

csak úgy lehetséges, hogy

$$a_1 = a_2, \ b_2 = 0, \ v_2 = b_1 + v_1.$$

Ez az eset tehát biztosan nem következik be, ha v_2-t úgy válasszuk, hogy

$$v_2 \neq b_1 + v_1$$

legyen.

Így tovább mehetünk. Ha $v_1, v_2, \ldots, v_m$-hez találtunk különböző

$$x_1 = a_1 + (b_1 + v_1) i,$$
$$x_2 = a_2 + (b_2 + v_2) i,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_m = a_m + (b_m + v_m) i$$

gyököket és felveszünk egy újabb valós v_{m+1} értéket, a belőle leszármaztatott

$$a_{m+1} + (b_{m+1} + v_{m+1}) i$$

és

$$a_{m+1} + (-b_{m+1} + v_{m+1}) i$$

gyökök egyike sem lesz új az esetben, midőn bizonyos m-nél nem nagyobb, egyenlő vagy különböző r és s indexekre nézve

$$a_{m+1} = a_r, \quad b_{m+1} + v_{m+1} = b_r + v_r,$$
$$a_{m+1} = a_s, \quad -b_{m+1} + v_{m+1} = b_s + v_s.$$

Minthogy a most felírt egyenlőségekből

$$v_{m+1} = \tfrac{1}{2}\left[(b_r + v_r) + (b_s + v_s)\right]$$

következik, ezek az egyenlőségek nem állhatnak fenn valamennyien, ha v_{m+1}-et úgy választjuk, hogy ne essék össze a

$$b_1 + v_1, \ b_2 + v_2, \ldots, b_m + v_m$$

számok egyikével sem és ne legyen egyenlő két ilyen számnak számtani közepével.

E szerint, ha a $P(u, v)$ és $Q(u, v)$ polynomok u szerinti resultánsa azonosan zérus volna, akkor lehetne akárhány különböző gyököt találni a megadott egyenlet számára. De tudjuk, hogy nincs több különböző gyök, mint a fokszám, tehát a szóban forgó resultáns nem lehet azonosan zérus.

Második bizonyítás.

Ha az (1)-ben írjuk valós u, v változókkal: $x = u + iv$, továbbá:

$$c_0 = a_0 + i\beta_0, \ c_1 = a_1 + i\beta_1, \ldots, c_n = a_n + i\beta_n,$$

ahol az a-k és β-k valós számok, akkor a föntiek alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv c_0x^n + \cdots + c_n \equiv f(u+iv) \equiv \\ &\equiv (a_0+i\beta_0)(u+iv)^n + \cdots + a_n + i\beta_n \equiv \\ &\equiv c_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \equiv \qquad (4) \\ &\equiv c_0\big(u-u_1+i(v-v_1)\big)\ldots\big(u-u_n+i(v-v_n)\big) \equiv \\ &\equiv P(u, v) + iQ(u, v), \end{aligned}$$

ahol is

$$P(u, v) \equiv a_0(u)v^{\mu} + \cdots + a_{\mu}(u), \qquad (5)$$

$$Q(u, v) \equiv b_0(u)v^{\nu} + \cdots + b_{\nu}(u) \qquad (6)$$

a valós u, v változók valós együtthatós polynomjai, és tehát az

$$a_0(u), \ldots, a_{\mu}(u) \quad \text{és} \quad b_0(u), \ldots, b_{\nu}(u)$$

coefficiens-polynomok is valósak; itt persze $a_0(u) \cdot b_0(u) \not\equiv 0$.[2]

Mármost bizonyos, hogy akármelyik $x = x_k = u_k + iv_k$ gyökre nézve $(k = 1, 2, \ldots, n)$:

$$P(u_k, v_k) = Q(u_k, v_k) = 0,$$

miért is az

$$R(u) \equiv \mathrm{Res}_v\big(P(u, v), Q(u, v)\big) \equiv \begin{vmatrix} a_0(u)\ldots a_{\mu}(u)\ldots \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_0(u)\ldots b_{\nu}(u)\ldots \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

---

[2] Ha a c_0-ban $a_0 \cdot \beta_0 \neq 0$, akkor $\mu = \nu = n$; ha pedig az a_0, β_0 közül az egyik zérus, akkor az $(1+i)f(x)$ polynomra nézve ugyancsak $\mu = \nu = n$. Mindeme tényekre azonban alább semmi szükségünk.

resultánsegyenletnek az u_k egyik valós gyöke. Kimutatjuk, hogy

$$R(u) \neq 0. \tag{8}$$

Ugyanis az

$$R(u) \equiv 0 \tag{9}$$

feltevésből következik, hogy a $P(u, v)$, $Q(u, v)$ polynomoknak van oly $d(u, v)$ közös osztópolynomjuk, amely a v változót *de facto* tartalmazza;[3] szóval:

$$P(u, v) \equiv P_1(u, v)\, d(u, v) \text{ és } Q(u, v) \equiv Q_1(u, v)\, d(u, v), \tag{10}$$

ahol P_1 és Q_1 argumentumaiknak (nem szükségképpen valós) polynomjai. A (4) miatt tehát

$$f(x) \equiv c_0(x-x_1)\ldots(x-x_n) \equiv f(u+iv) \equiv$$
$$\equiv \big(P_1(u, v) + iQ_1(u, v)\big).d(u, v),$$

s így, tekintettel az $f(u+iv)$ *egyértelmű* felbomlására irreducibilis polynomok szorzatára,[4] bizonyos, hogy a $d(u, v)$ az

$$x-x_1, \ldots, x-x_n$$

lineártényezők legalább egyikét, mondjuk az

$$x - x_1 \equiv u+iv-u_1-iv_1$$

tényezőt tartalmazza. De akkor a (10) alapján az $(x-x_1)$ a $P(u, v)$, $Q(u, v)$ polynomoknak is közös factora; és mivel a $P(u, v)$, $Q(u, v)$ *valósak*, azért közös factoruk egyben az irreducibilis

$$\overline{x} - \overline{x}_1 = u - iv - u_1 + iv_1 \tag{11}$$

is. Szóval a (4) szerint a (11) tényező az $f(u+iv)$-ben is fellép, ami pedig absurdum. — Q. E. D.

---

[3] L. GROSSCHMID, *Megjegyzés egy algebrai tételhez*, Szt. Istv. Akad. Ért. 1921, p. 189—193.

[4] L. például GROSSCHMID, *Fejezetek az algebrából* (Bpest 1923), 44. §.

Harmadik bizonyítás.

A szóbanforgó resultánsnak kiszámítjuk legmagasabb fokú tagját.

Tekintsük először azon esetet, midőn az adott egyenlet legmagasabb fokú tagjának együtthatója

$$c_0 = \alpha_0 + \beta_0 i$$

igazi complex szám, azaz olyan, hogy

$$\alpha_0 \neq 0, \ \beta_0 \neq 0.$$

Írjuk ki részletesen az

$$(u+iv)^n \equiv \varphi_n(u, v) + i\psi_n(u, v)$$

hatványt; tudvalevőleg

$$\varphi_n(u, v) = u^n - \binom{n}{2} u^{n-2}v^2 + \cdots$$

$$\psi_n(u, v) = \binom{n}{1} u^{n-1}v - \binom{n}{3} u^{n-3}v^3 + \cdots$$

Tehát az

$$f(u+iv) = P(u, v) + iQ(u, v)$$

kifejezésben szereplő polynomok így kezdődnek:

$$P(u, v) \equiv (\alpha_0\varphi_n - \beta_0\psi_n) + \cdots$$

$$Q(u, v) \equiv (\beta_0\varphi_n + \alpha_0\psi_n) + \cdots$$

A kiirt $\alpha_0\varphi_n - \beta_0\psi_n$ és $\beta_0\varphi_n + \alpha_0\psi_n$ tagokban u-nak minden k-adik ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) hatványa valóban fellép[5] (egy-egy tagban) és u^k mellett v^{n-k} áll. A ki nem írt tagokban u^k mellett v-nek csak alacsonyabb hatványa állhat. Ha tehát a P és Q polynomokat u hatványai szerint rendezzük, az együtthatókban szereplő legmagasabb v hatvány a kiirt $\alpha_0\varphi_n - \beta_0\psi_n$ és $\beta_0\varphi_n + \alpha_0\psi_n$ tagokból ered.

[5] Ezt nem állíthatnók, ha α_0 és β_0 nem különböznének mindketten zérustól.

Tartsuk meg a P és Q-nak u szerinti R resultánsában minden elemből csak a legmagasabb v hatványt tartalmazó tagot. Az ilymódon kapott R' determináns nem egyéb, mint az $a_0\varphi_n-\beta_0\psi_n$ és $\beta_0\varphi_n+a_0\psi_n$ polynomok u szerinti resultánsa és a benne előforduló v-ben legmagasabb fokú tag egyszersmind az R resultánsnak is legmagasabb fokú tagja. Mármost az az érdekes, hogy az R' resultánst könnyen kiszámithatjuk azon JACOBI-féle tétel[6] alapján, mely szerint, ha a, β, γ, δ állandók és f, φ az u változónak két tetszésszerinti n-edfokú polynomja, akkor

$$\mathrm{Res}\,(af+\beta\varphi,\ \gamma f+\delta\varphi) = (a\delta-\beta\gamma)^n\,\mathrm{Res}\,(f,\ \varphi).$$

E tételre támaszkodván,

$$\begin{aligned} R' &= \mathrm{Res}_u(a_0\varphi_n-\beta_0\psi_n,\ \beta_0\varphi_n+a\psi_n) = \\ &= (a_0^2+\beta_0^2)^n\,\mathrm{Res}_u(\varphi_n,\ \psi_n) = \\ &= (a_0^2+\beta_0^2)^n \frac{1}{(-2i)^n}\,\mathrm{Res}_u(\varphi_n+i\psi_n,\ \varphi_n-i\psi_n) = \\ &= \left(\frac{a_0^2+\beta_0^2}{-2i}\right)^n \mathrm{Res}_u\,[(u+iv)^n,\ (u-iv)^n]. \end{aligned}$$

Az utolsó sorban szereplő resultáns kiszámitására a szorzatalak kinálkozik. Az $(u-iv)^n$ polynomnak ugyanis egyetlen, n-szeres zérushelye van: $u=iv$. Ha ezt az $(u+iv)^n$ polynomba helyettesitjük, az eredményt n-edik hatványra emeljük (mert n egyenlő helyettesitési eredményt kell összeszoroznunk) és végre $(-1)^{n\cdot n}$-nel szorzunk, megkapjuk a resultánst. Tehát

$$R' = \frac{(a_0^2+\beta_0^2)^n}{(-2i)^n}\,(-1)^{n^2}(2iv)^{n^2},$$

azaz

$$R' = (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}\,2^{n^2-n}\,|\,c_0\,|^{2n}v^{n^2}.$$

Ez az egytagú az

$$R = \mathrm{Res}_u(P,\ Q)$$

resultánsnak is v-ben legmagasabb fokú tagja legalább az esetben, midőn c_0 igazi complex szám.

---

[6] L. például GROSSCHMID, *Fejezetek az algebrából*, p. 232.

Végre könnyen beláthatjuk, hogy eredményünk a megszorítás elejtése után is érvényes.

Szorozzuk ugyanis $f(x)$-et egy olyan $p+qi$ számmal, hogy a

$$(p+qi)\,f(x) = (p+qi)\,c_0 x^n + \cdots$$

polynom legmagasabb fokú tagjának együtthatója igazi complex szám legyen.[7] Most tehát a

$$(p+qi)\,f(x) = (pP-qQ) + i\,(qP+pQ)$$

alakra alkalmazhatjuk a tételt, azaz

$$\mathrm{Res}_u(pP-qQ,\ qP+pQ)$$

legmagasabb fokú tagja:

$$(-1)^{\frac{n^2-n}{2}}\, 2^{n^2-n}\, |(p+qi)c_0|^{2n} v^{n^2}.$$

Másrészt azonban, a Jacobi-tétel szerint,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_u(pP-qQ,\ qP+pQ) &= (p^2+q^2)^n\,\mathrm{Res}_u(P,\ Q) = \\ &= |p+qi|^{2n}\,\mathrm{Res}_u(P,\ Q).\end{aligned}$$

Ennélfogva $\mathrm{Res}_u(P,\ Q)$ legmagasabb fokú tagja ismét

$$(-1)^{\frac{n^2-n}{2}}\, 2^{n^2-n}\, |c_0|^{2n} v^{n^2}.$$

Látjuk, hogy e resultáns sohasem azonosan zérus, sőt, hogy fokszáma pontosan n^2.

Grosschmid Lajos és Szűcs Adolf.

SUR UN RÉSULTANT REMARQUABLE.

En cherchant les racines complexes de l'équation algébrique à coefficients complexes

$$f(x) \equiv c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0,$$

on est amené à poser

---

[7] Ha c_0 valós vagy tisztán képzetes, $p+qi$-t választhatjuk $1+i$-nek, mint fentebb a [2] jegyzetben. Ha pedig c_0 igazi complex szám, akkor $p+qi=1$ is megfelel.

$$c_k = a_k + i\beta_k, \quad (k=0, 1, \ldots, n),$$
$$x = u + iv,$$
$$f(x) = P(u, v) + iQ(u, v)$$

(P et Q étant deux polynomes à coefficients réels), et à chercher les solutions réelles du système d'équations

$$P(u, v) = 0, \quad Q(u, v) = 0.$$

Peut-il arriver que le résultant de ces équations, relativement à u par exemple, est identiquement nul?

La réponse est négative, et les auteurs en donnent trois démonstrations. La première est basée sur l'impossibilité qu'une équation algébrique ait plus de racines distinctes qu'il y a d'unités dans son degré. La deuxième fait état de l'unicité de la décomposition en facteurs d'un polynome à deux variables. La troisième consiste à calculer le terme du plus haut degré en v du résultant en question et, pour abréger les calculs, elle utilise un théorème de JACOBI sur les résultants.

Louis de Grosschmid et Adolphe Szücs.

VÉGTELEN GRÁFOK EULER-VONALAIRÓL.

1. §. Ismeretes a következő EULER-től származó tétel:

Egy véges sok élből álló gráfnak akkor és csak akkor van EULER-vonala, ha

1. a gráf összefüggő,
2. minden szögpontjában párosszámú él találkozik.[1]

Itt egy véges gráf EULER-vonala alatt értjük éleinek oly

$$P_1P_2,\ P_2P_3, \ldots,\ P_{n-1}P_n,\ P_nP_1$$

sorozatát, melyben a gráf minden éle pontosan egyszer fordul elő.

Következőkben kiterjesztjük ezt a tételt végtelen gráfokra. Egy végtelen gráf EULER-vonalán értjük az éleknek oly

$$\ldots P_{-2}P_{-1},\ P_{-1}P_0,\ P_0P_1,\ P_1P_2, \ldots$$

mindkét irányban végtelen sorozatát, melyben a gráf minden éle pontosan egyszer fordul elő. Dolgozatunk célja annak igazolása, hogy a *szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy végtelen gráfnak legyen* EULER-*vonala, a következő:*

E 1. *a gráf összefüggő,*

E 2. *megszámlálható sok éle van,*

E 3. *nincs olyan szögpontja, melyben páratlanszámú él fut össze,*

---

[1] L. pld. D. KÖNIG: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936. 20. l. Ugyanitt (33. l.) vannak felvetve mindazon problémák, melyeknek megoldását jelen dolgozat tartalmazza.

E 4. *hagyjuk el a gráf egy tetszőleges véges részgráfját, a megmaradó gráf darabjai*[1] *közt*

a) *legfeljebb két végtelen gráf van,*

b) *sőt, ha az elhagyott véges gráf párosfokú,*[2] *akkor pontosan egy végtelen gráf van.*

Mielőtt áttérnénk tételünk igazolására, előbb az E 4 feltételt egy más, valamivel kevesebbet követelővel cseréljük fel. Ugyanis elégséges az E 4-ben szereplő tetszőleges véges részgráfok helyett véges élvonalakat[3] vizsgálni, sőt elégséges a gráf egy tetszőleges szögpontján átmenő véges élvonalak vizsgálata. Vagyis E 4 helyére a következő kritériumot tesszük:

E 4'. *van a gráfnak egy következő tulajdonságú szögpontja: hagyjunk el a gráfból egy ezen a szögponton átmenő tetszőleges véges élvonalat; a megmaradó gráf darabjai közt*

a) *legfeljebb két végtelen gráf van,*

b) *sőt, ha az elhagyott élvonal zárt, pontosan egy végtelen gráf van.*

Megjegyezzük még, hogy abban az esetben, ha a vizsgálandó gráf minden szögpontjában végesszámú él találkozik, az E 2, 3 feltétel nyilvánvalóan pótolható a következővel:

E 5. *a gráf párosfokú.*

[Ha t. i. egy összefüggő gráf minden szögpontjában véges sok él találkozik, akkor a gráf élei megszámlálhatók.[4]]

2. §. Először megmutatjuk, hogy feltételeink szükségesek. Ez E 1, 2, 3-nál nyilvánvaló, tehát részletesen csak E 4-gyel kell foglalkozni.

---

[1] Azokat az *összefüggő* gráfokat, amelyekre egy gráf szétesik, a következőkben e gráf *darab*jainak fogjuk nevezni.

[2] Egy gráfot *párosfokú*nak nevezünk, ha a gráf minden szögpontjában véges és pedig párosszámú él találkozik.

[3] Egy véges élvonal alatt értjük a gráf egy oly $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$ élsorozatát, melyben egy él legfeljebb egyszer fordul elő. Az élvonalat nyiltnak vagy zártnak nevezzük a szerint, hogy P_1 és P_n megegyezik vagy nem.

[4] Kőnig, id. h., 79. l.

Tegyük tehát fel, hogy a vizsgálandó gráfnak van EULER-vonala, vagyis, hogy létezik a

$$\ldots, P_{-2}P_{-1}, P_{-1}P_0, P_0P_1, P_1P_2, \ldots$$

EULER-vonalat reprezentáló élvonal. Hagyjunk el a gráfból egy tetszőleges véges g részgráfot. Mindenesetre vannak oly μ és ν egészszámok, hogy a

$$P_\mu P_{\mu+1}, P_{\mu+1}P_{\mu+2}, \ldots, P_{\nu-1}P_\nu \qquad (P_\mu \neq P_\nu)$$

véges élvonal, melyet V-vel jelölünk, tartalmazza a g gráf összes éleit. Jelöljük továbbá a gráfból a V élvonal elhagyása után megmaradó

$$\ldots, P_{\mu-2}P_{\mu-1}, P_{\mu-1}P_\mu \quad \text{és} \quad P_\nu P_{\nu+1}, P_{\nu+1}P_{\nu+2}, \ldots$$

végtelen gráfokat V_{-1}, illetőleg V_{+1}-el. Nyilván a g gráf elhagyása után megmaradó $\bar{g}$ gráf darabjai közül csak azok lehetnek végtelen gráfok, melyek a V_{-1}, V_{+1} gráfok valamelyikét tartalmazzák. Ilyen tehát legfeljebb kettő lehet. Evvel tehát igazoltuk E 4a-t. Most áttérünk E 4b igazolására, vagyis igazoljuk, hogy, ha g párosfokú, akkor $\bar{g}$-nak egyetlen végtelen darabja van. T. i. konstruálható $\bar{g}$-nak egy oly élvonala, mely részgráfja V-nek is és amely élvonal összeköti a P_μ szögpontot a P_ν szögponttal. [A konstrukció a következő: P_μ a V-nek páratlanfokú szögpontja, míg g párosfokú, tehát g elhagyása után (g részgráfja V-nek) marad még V-nek egy $P_\mu P_{i_1}$ éle. Továbbá P_{i_1} a V-nek párosfokú szögpontja és a párosfokú g elhagyása után az előbbiek szerint maradt még V-nek egy $P_\mu P_{i_1}$ éle. Ebből következik, hogy V-nek maradt még egy $P_\mu P_{i_1}$-től különböző $P_{i_1}P_{i_2}$ éle is. Ez az eljárás csak akkor akadhat meg, amikor elérjük a P_ν szögpontot; de ekkor már előállítottuk a kívánt élvonalat.] Ennek az élvonalnak létezése azonban maga után vonja $\bar{g}$ egy oly végtelen darabjának létezését, melynek mind a V_{-1}, mind a V_{+1} gráf része. Ekkor azonban $\bar{g}$-nak nyilvánvalóan csak egyetlen végtelen darabja van.

Evvel tehát igazoltuk az E 1, 2, 3, 4 feltétel szükségességét. Ebből természetesen következik a kevesebbet követelő E 1, 2, 3, 4′ feltétel szükségessége is.

3. §. A feltétel elegendő voltának bizonyításához a következő segédtételt fogjuk felhasználni:

Egy G gráfnak van Euler-*vonala, ha az* E 1, 2, 3 *feltételen kívül teljesíti a következő feltételt:*

E 6. *G-nek van egy oly szögpontja, hogy bárhogyan hagyunk is el G-ből egy ezen a kitüntetett szögponton átmenő véges élvonalat, a megmaradó gráfnak pontosan egy végtelen darabja van.*

Ennek a segédtételnek bizonyítása két lépésben történik.

a) Számozzuk meg G éleit tetszőleges módon.

Konstruálunk először egy oly V_0 véges zárt élvonalat, mely

1. átmegy G kitüntetett szögpontján,

2. tartalmazza élei közt a G gráf első sorszámú élét,

3. ha G-ből elhagyjuk V_0-t, a megmaradó $\overline{V_0}$ gráf teljesíti az E 1, 2, 3, 6 feltételt, még pedig az E 6-ot úgy, hogy a benne szereplő kitűntetett szögpontnak választható oly szögpont, mely szögpontja a V_0 gráfnak is.

A konstrukció a következő:

Vegyük G-nek egy oly v élvonalát, mely a kitüntetett szögpontból, Q_0-ból indul ki és amely tartalmazza G első sorszámú élét. G-ből v elhagyása után megmaradó $\bar{v}$ gráf darabjai között E 6 szerint csak egy végtelen gráf van; a többi (t. i. véges) darabjait hozzácsatoljuk v-hez. Az ily módon nyert g gráfról azt állítjuk, hogy vagy nincs, vagy két páratlanfokú szögpontja van. [Ugyanis először tekintve, hogy g véges gráf, minden szögpontjában végesszámú él fut össze. A g azon szögpontjai, melyek nem szögpontjai a G-ből g elhagyása után megmaradó $\bar{g}$ gráfnak, ugyanolyan fokúak g-ben, mint G-ben. Ezen szögpontok tehát, tekintve, hogy végtelenfokúak nem lehetnek, párosfokúak. A g azon szögpontjai pedig, melyek szögpontjai $\bar{g}$-nak is, egyúttal szögpontjai v-nek is. Továbbá tekintve, hogy ezen szögpontok nem szögpontjai a g-ből v elhagyása után megmaradó gráfnak, ugyanolyan fokúak g-ben, mint v-ben. A v gráfnak viszont a szerint, hogy v zárt vagy nyilt élvonal, vagy nincs vagy két páratlanfokú szögpontja van.] Már most, ha g-nek van két páratlanfokú szögpontja, akkor e szögpontok ezek szerint szögpontjai a $\bar{g}$ gráfnak is; tekintve pedig, hogy $\bar{g}$ összefüggő, $\bar{g}$ tartalmaz oly élvonalat, mely az utóbbi két szögpontot köti egymással össze. Ezt az élvonalat csatoljuk g-hez; legyen az így keletkezett gráf v'. Tekintve, hogy v' párosfokú, az 1. §-ban említett EULER-féle tétel szerint v' felfogható egy zárt élvonalnak. A G-ből v' elhagyása után megmaradó $\bar{v}'$ gráf darabjai között E 6 szerint csak egy végtelen gráf van. A $\bar{v}'$ véges darabjait csatoljuk v'-höz; legyen az így keletkezett véges gráf g'. A g' gráf párosfokú. (Ugyanis ugyanúgy, mint g vizsgálatánál, g'-nek csak oly pont lehetne páratlanfokú szögpontja, amely v'-nek is páratlanfokú szögpontja.) Mindenesetre tehát előállítottunk egy összefüggő párosfokú gráfot (g-t, ill. g'-t), mely EULER gráftétele szerint felfogható egy V_0 zárt élvonalnak. Azt állítjuk, hogy a V_0 eleget tesz a kívánt feltételeknek. Ugyanis átmegy Q_0-on és tartalmazza élül G első sorszámú élét, tehát teljesíti 1.-et és 2.-t. Míg 3. teljesülése, vagyis az, hogy a G-ből V_0 elhagyása után megmaradó $\overline{V}_0$ teljesíti az E 1, 2, 3, 6 feltételt a következőképpen látható be:

E 1 teljesül, mert a $\overline{V}_0$ gráf azonos $\bar{g}$-val, illetőleg $\bar{g}'$-val.

E 2, 3 teljesül, mert a $\overline{V}_0$ gráf úgy keletkezett G-ből, hogy elhagytunk belőle egy párosfokú véges gráfot.

E 6 teljesül, még pedig úgy, hogy a kitüntetett szögpontnak választható a $\overline{V}_0$ gráf oly Q_1 szögpontja, mely szögpontja egyúttal a V_0 gráfnak is. Ugyanis legyen v_1 a $\overline{V}_0$-nak tetszőleges a Q_1-en áthaladó élvonala. A $\overline{V}_0$-ból v_1 elhagyása után megmaradó gráf legyen $\bar{v}_1$. A v_1 élvonal és a V_0 zárt élvonal, tekintve, hogy Q_1 mindkettőnek szögpontja, együtt egy olyan gráfot alkotnak, amely felfogható egy v_2 élvonalnak. Tekintve, hogy v_2 tartalmazza szögpontul Q_0-t, G-ből a v_2 élvonal elhagyása után megmaradó $\bar{v}_2$ gráf darabjai között E 5 szerint csak egy végtelen gráf van. A $\bar{v}_2$ gráf azonban azonos $\bar{v}_1$-val.

b) A $\overline{V}_0$ gráf teljesíti az E 1, 2, 3, 6 feltételt (még pedig az E 6-ot úgy, hogy kitüntetett szögpontnak választható $\overline{V}_0$ oly szögpontja, mely szögpontja V_0-nak is). Tehát az előbbi konstrukciót megismételhetjük a $\overline{V}_0$ gráfra és ennek segítségével nyerhetünk egy oly V_1 zárt élvonalat, melynek V_0-lal nincs közös éle, amely tartalmazza szögpontul a Q_1 pontot és amely tartalmazza a G gráf azon legalacsonyabb sorszámú élét, melyet V_0 nem tartalmaz. Továbbá a G-ből V_0 és V_1 élvonalak elhagyása után megmaradó gráf teljesíti az E 1, 2, 3, 6 feltételt, még pedig E 6-ot úgy, hogy a kitüntetett szögpontnak választható oly szögpont, mely szögpontja a V_1 élvonalnak is. Ezt az eljárást folytatva nyerjük a

$$V_0, V_1, V_2, \ldots$$

közös él nélküli zárt élvonalak végtelen sorozatát. Ez a végtelen élvonalsorozat kimeríti a G gráf éleit, továbbá a V_i élvonal tartalmazza szögpontul a Q_i és Q_{i+1} szögpontokat ($i=1, 2, \ldots$). Azonban a V_0 zárt élvonal felfogható egy Q_1-ből kiinduló és ugyanide visszatérő élvonalnak, míg a V_i zárt élvonal felbontható két, a Q_i és Q_{i+1} pontokat összekötő V'_{-i} és V_{+i} nyilt élvonalra ($i=1, 2, 3, \ldots$). A

$$\ldots V'_{-n}, V'_{-n+1}, \ldots, V'_{-1}, V_0, V'_1, \ldots, V'_m, V'_{m+1}, \ldots$$

egymásba kapcsolódó élvonalak sorozata pedig megadja a G gráf egy EULER-vonalát.

4. §. Egy második segédtétel, melyre szükségünk lesz és amely önmagában sem látszik érdektelennek, a következő:

A szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy végtelen G gráfnak legyen végesből kiinduló, végtelenbe haladó EULER-*vonala, vagyis, hogy felírhatók legyenek élei a*

$$P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, \ldots$$

egyoldalúan végtelen sorozatban, a következő:

E* 1. *a gráf összefüggő,*

E* 2. *megszámlálható sok éle van,*

E* 3*a*. *vagy van a gráfnak pontosan egy páratlanfokú szögpontja,*

E* 3*b*. *vagy, ha nincs páratlanfokú szögpontja, akkor van legalább egy végtelenfokú szögpontja,*

E* 4. *a gráf előbbi pontban kitüntetett nem párosfokú szögpontjának az a tulajdonsága van, hogy G-ből elhagyva egy ezen a szögponton átmenő tetszőleges véges élvonalat, a megmaradó gráf darabjai közt egy végtelen gráf van.*

Ezen E* feltétel szükségességének bizonyitása hasonlóan történik az E feltétel szükségességének fent adott bizonyitásához. Tekintve pedig, hogy az E* feltétel szükségességét a továbbiakban úgy sem fogjuk felhasználni, ezt a bizonyitást nem is részletezzük. Az E* feltétel elégségességének bizonyitását a 3. § tételének bizonyitásához hasonlóan végezzük és pedig ismét két lépésben.

a) Számozzuk meg a G gráf éleit tetszőleges módon. Konstruálunk egy oly V_0 nyilt élvonalat, mely

1. átmegy G kitüntetett szögpontján,

2. tartalmazza a G gráf első sorszámú élét,

3. G-ből elhagyva a V_0 élvonalat, a megmaradó $\overline{V_0}$ gráf teljesiti az E* feltételt, még pedig E* 4-et oly módon, hogy a kitüntetett szögpontnak választható oly szögpont, mely szögpontja a V_0 élvonalnak is.

A konstrukció a következő:

Vegyük G-nek egy a kitüntetett szögpontból Q_0-ból kiinduló oly v nyilt élvonalát, mely tartalmazza élül a G gráf első sorszámú élét. Legyen ennek az élvonalnak a Q_0-tól különböző végpontja Q_1. [Ilyen élvonal létezik. Ugyanis tekintve, hogy G összefüggő, tartalmaz egy olyan élvonalat, amely Q_0-ból indul ki és tartalmazza G első sorszámú élét. Ha ez az élvonal zárt, akkor, mint párosfokú gráf, nem merítheti ki G-nek Q_0-ban összefutó nem párosszámú élét. Tehát ehhez a zárt élvonalhoz csatolható G-nek egy Q_0-ból kiinduló éle, ami által a zárt élvonalból előállitottunk egy kivánt nyilt élvonalat.] Tekintsük a

G-ből v elhagyása után megmaradó $\bar{v}$ gráfot. Ennek a gráfnak E* 4 szerint csak egy végtelen darabja van. A $\bar{v}$ gráf véges darabjait csatoljuk v-hez; legyen az így nyert gráf g. A g gráfnak Q_0 és Q_1 páratlanfokú szögpontja, míg a többi szögpontjai párosfokúak. [Ugyanis a g gráf Q_0-tól és Q_1-től különböző szögpontjainak párosfokúsága a 3. § $a)$ pontjában szereplő g gráf párosságához hasonlóan következtethető. A g gráfnak a Q_0 szögpont, aszerint, hogy Q_0 a G gráfnak páratlan- vagy végtelenfokú szögpontja, nem szögpontja, illetőleg szögpontja $\bar{g}$-nak; tehát g-nek ezeknek az eseteknek megfelelően olyan fokú szögpontja, mint G-nek, illetőleg v-nek; mindkét esetben tehát ez a szögpont páratlanfokú. A Q_1 szögpont szögpontja $\bar{g}$-nak, tehát g-ben ugyanolyan fokú, mint v-ben; vagyis páratlanfokú.] A g gráf tehát felfogható egy Q_0-t Q_1-vel összekötő V_0 nyílt élvonalnak (l. 6. § $a)$). A V_0 élvonal nyilvánvalóan teljesíti az 1., 2. kívánalmakat. Teljesíti továbbá 3.-at is. [A Q_1-ben összefutó V_0-élek száma megegyezik G és g Q_1-ben összefutó élei számának különbségével. A Q_1 szögpont tehát a szerint, hogy G-ben páros- vagy végtelenfokú, $\overline{V_0}$-ban páratlan-, illetőleg végtelenfokú szögpont. Míg a $\overline{V_0}$-ra vonatkozó többi kívánalom ahhoz hasonlóan látható be, ahogyan a 3 § $a)$-ban szereplő $\overline{V_0}$-ra beláttuk az E 1, 2, 3, 6 teljesülését.]

$b)$ Tekintve az előbb bebizonyítottakat, a $\overline{V_0}$ gráfra konstrukciónk megismételhető. Ilyen módon nyerünk egy a Q_1, Q_2 különböző végpontokkal bíró oly V_1 élvonalat, mely nem tartalmaz V_0 élei közül egyet sem, ellenben tartalmazza G azon legalacsonyabb sorszámú élét, melyet V_0 nem tartalmazott. Az eljárást folytatva nyerjük a

$$V_0, V_1, V_2, \ldots$$

közös él nélküli nyilt élvonalak oly végtelen sorozatát, melyek rendre egymásbakapcsolódnak a Q_1, $Q_2, \ldots$ szögpontokban és amelyek kimerítik a G gráf éleit. Ezen élvonalak sorozata megadja azonban a G gráf egy keresett egyoldalúan végtelen EULER-vonalát.

5. §. Ebben a §-ban megadjuk az E 1, 2, 3, 4′ feltétel elégségességének bizonyítását.

Ha egy G gráfra ezen a feltételen kivül teljesül a 3. §-ban szereplő E 6 feltétel is, akkor a 3. § szerint G-nek van EULER-vonala; tegyük tehát fel, hogy ez az eset nem áll fenn, vagyis tegyük fel, hogy G-nek van egy oly v élvonala, hogy a G-ből v elhagyása után megmaradó $\bar{v}$ gráfnak két végtelen darabja van. A v élvonal az E 4′ b szerint csak nyilt élvonal lehet. Csatoljuk a $\bar{v}$ gráf véges darabjait a v gráfhoz; legyen az igy keletkezett gráf G_0. A 3. § *a)* pontjában szereplő g gráfra vonatkozó meggondolásokhoz hasonlóan következtethető, hogy G_0-nak két páratlanfokú szögpontja van, vagyis az, hogy a G_0 gráf felfogható egy Q_{-1}, illetőleg Q_{+1} végpontokkal biró V nyilt élvonalnak. A $\bar{V}$ gráf két végtelen darabból áll, jelöljük ezeket a darabokat G_{-1}, illetőleg G_{+1}-vel. Azt állitjuk, hogy a G_{-1}, illetőleg G_{+1} gráfok teljesitik a 4. §-ban szereplő E* feltételt, még pedig E* 4-et úgy, hogy a kitüntetett szögpontnak választható Q_{-1}, illetőleg Q_{+1}. [Nézzük például G_{+1}-et. E* 1, 2 nyilván teljesül. A $\bar{V}$ gráf Q_{+1} szögpontban összefutó éleinek száma egyenlő a G gráf és V gráf ezen szögpontban összefutó élei számának különbségével. A Q_{+1} szögpont tehát aszerint, hogy G-nek páros-, illetőleg végtelenfokú szögpontja, G_{+1}^{*}-nek páratlan-, illetőleg végtelenfokú szögpontja. Mindenesetre tehát teljesül E* 3. Az E* 4 feltétel ahhoz hasonlóan látható be, ahogyan a 3. § *a)* pontjában szereplő $\bar{V}_0$ gráfra vonatkozó E 6 feltételt igazoltuk.] Ez pedig azt jelenti, hogy a G_{-1}, illetőleg G_{+1} gráfok a Q_{-1}, illetőleg Q_{+1} szögpontból kiinduló egyoldalúan végtelen E_{-1}, illetőleg E_{+1} EULER-vonalnak foghatók fel. Az

$$E_{-1},\ V,\ E_{+1}$$

egymásba kapcsolódó gráfok pedig megadják a G gráf egy keresett EULER-vonalát.

Ezzel tehát befejeztük tételünk bizonyitását.

6. §. Befejezésül három kiegészitő megjegyzést teszünk.

a) Ismeretes a következő véges gráfokra vonatkozó LISTING-féle tétel:[1]

Legyen egy véges gráf páratlanfokú szögpontjainak száma $2n$. (Minden véges gráf páratlanfokú szögpontjainak száma páros.) Létezik az élvonalaknak oly

$$V_1, V_2, \ldots, V_n$$

rendszere, mely az adott gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza.

Ez a tétel dolgozatunk módszeréhez hasonlóan átvihető végtelen gráfokra. Ugyanis igazolható a következő — ebben a dolgozatban nem bizonyított — tétel:

Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy végtelen G gráfhoz tartozzon a (véges vagy egyoldalúan végtelen vagy mindkétoldalúan végtelen) élvonalaknak oly véges

$$V_0, V_1, \ldots, V_n$$

rendszere, melyben G minden éle pontosan egyszer fordul elő, a következő:

1. *a gráfnak véges sok darabja van,*
2. *megszámlálható sok éle van,*
3. *véges sok páratlanfokú szögpontja van,*
4. *létezik egy oly M szám, hogy G-ből egy tetszőleges véges g részgráf elhagyása után megmaradó $\bar{g}$ gráf végtelen darabjainak száma nem nagyobb M-nél.*

b) Ismeretes a következő véges gráfokra vonatkozó EULER-féle tétel:[2]

Bármely véges gráf élei kimerithetők egy oly zárt

$$P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n, P_nP_0$$

élsorozattal, hogy ebben az élsorozatban a gráf minden éle pontosan kétszer forduljon elő.

---

[1] L. pl. KŐNIG id. h., 22. l.

[2] L. pl. KŐNIG id. h., 23. l.

Ennek a tételnek végtelen gráfokra való átvitele a következő: *A szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy G gráf élei kimeríthetők legyenek egy*

$$\ldots P_{-2}P_{-1},\ P_{-1}P_0,\ P_0P_1,\ P_1P_2,\ldots$$

mindkét oldalon végtelen sorozattal úgy, hogy ebben a végtelen élsorozatban G minden éle pontosan kétszer forduljon elő, az, hogy

1. *a gráf összefüggő,*
2. *megszámlálható sok éle van,*
3. *elhagyva G-ből egy, tetszőleges véges gráfot a megmaradó gráfnak pontosan egy végtelen darabja van.*

Tekintsük ugyanis azt a G^* gráfot, mely úgy keletkezik, hogy G minden e éle mellé veszünk egy e' élet, mely ugyanazon két szögpontot köti össze, mint e. Ekkor a G gráfra vonatkozó kívánalom nem jelent mást, minthogy a G^* gráfnak legyen Euler-vonala, vagyis, hogy a G^* gráfra teljesüljön az E feltétel. Azonban E 1, 2 akkor és csak akkor teljesedik G^*-ra, ha G-re teljesedik a fenti 1. és 2., míg E 3 mindig teljesedik G^*-ra, mert G^*-nak nem lehet páratlanfokú szögpontja. Továbbá azt állítjuk, hogy G^*-ra az E 4 feltétel akkor és csak akkor teljesedik, ha G teljesíti a fenti 3.-at. Ugyanis tegyük fel először, hogy G-nek van egy oly g részgráfja, hogy a G-ből g elhagyása után megmaradó $\bar{g}$ gráf darabjai közt két végtelen gráf van. Jelöljük ezeket a végtelen gráfokat γ_1 és γ_2-vel. Kettőzzük meg g éleit, ilymódon kapjuk a Γ párosfokú gráfot. Elhagyva G^*-ból a Γ párosfokú gráfot, a megmaradó gráf darabjai közt két végtelen gráf van, mert ezek a végtelen gráfok γ_1, illetőleg γ_2 élei megkettőzésével állíthatók elő. Az azonban, hogy a G^* gráfból a párosfokú Γ gráf elhagyása után megmaradó gráf darabjai között két végtelen gráf legyen, ellenkezik az E 4*b* feltétellel. Ilyen módon tehát, abból a feltevésből kiindulva, hogy G nem teljesíti 3.-at, arra jutottunk, hogy G^* nem teljesíti E 4-et.

Ha pedig G teljesíti a 3.-at, akkor könnyen belátható, hogy elhagyva G^*-ból egy tetszőleges g gráfot, a megmaradó $\bar{g}$ gráfnak pontosan egy végtelen darabja van; vagyis G^* teljesiti E 4-et. [Ha u. i. $\bar{g}$-nak több végtelen darabja van, akkor g-nek azon részét hagyva el G^*-ból, mely G-nek is része, több végtelen darabbal biró gráfot kapunk.]

Evvel tehát állitásunkat igazoltuk.

c) KŐNIG DÉNES emlitett könyvében a következő problémát is felveti:

Az n-dimenziós tér $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rácspontját (hol az x-ek tetszőleges egész számok) kapcsoljuk össze egy-egy éllel az $(x_1+1, x_2, \dots, x_n)$, $(x_1, x_2+1, \dots, x_n), \dots, (x_1, x_2, \dots, x_n+1)$ rácspontokkal. Ezeket a kapcsolásokat a tér összes rácspontjaira elvégezve kapjuk az n-dimenziós tér közönséges rácsgráfját.

Van-e az n-dimenziós tér közönséges rácsgráfjának EULER-*vonala?*

Dolgozatunk tételéből, sőt már a 3. § tételéből is, a legegyszerűbben következtethető az *igenlő* válasz.[1] Ugyanis E 1, 2 nyilvánvalóan teljesedik, teljesedik továbbá E 3 is, mert a gráf minden szögpontjában $2n$ él találkozik. Teljesedik ezenkívül az E 6 feltétel is, mert elhagyva a gráfból egy *tetszőleges* véges élvonalat, a megmaradó gráf darabjai közt pontosan egy végtelen gráf van. Vegyük ugyanis az n-dimenziós tér egy oly n-dimenziós kockáját, mely belsejében tartalmazza az elhagyott élvonal szögpontjait. Az elhagyás után megmaradó gráf darabjai közül csak az lehet végtelen, mely tartalmaz az előbbi kockán kívül fekvő rácspontot. Ilyen darab azonban csak egy van.

Erdős Pál, Grünwald Tibor
és Weiszfeld Endre.

---

[1] Ennek a tételnek egy direkt bizonyítását adja E. WEISZFELD: Über Gitterpunkte des mehrdimensionalen Raumes; e dolgozat a szegedi *Actákban* fog megjelenni.

ÜBER EULERSCHE LINIEN UNENDLICHER GRAPHEN.

Die Verfasser beantworten die bei D. König: «Theorie der endlichen und unendlichen Graphen» (Leipzig, 1936) aufgeworfene Frage, wie man die bekannten Euler'schen Graphen-Sätze, die sich dem Problem der Königsberger Brücken anschliessen, auf *unendliche* Graphen ausdehnen kann. U. A. wird folgender Satz bewiesen.

Ein unendlicher Graph besitzt dann und nur dann eine (beiderseits unendliche) Euler'sche Linie, d. h. dann und nur dann kann man die Kanten des Graphen in einer beiderseits unendlichen Folge von der Art

$$\ldots, P_{-2}P_{-1}, P_{-1}P_0, P_0P_1, P_1P_2, \ldots$$

(wo jede Kante nur einmal vorkommt) aufzählen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Der Graph ist zusammenhängend.
2. Er besitzt abzählbar unendlichviele Kanten.
3. Er besitzt keinen solchen Knotenpunkt, in dem eine ungerade Anzahl von Kanten zusammenlaufen.
4. Entfernt man in beliebiger Weise endlich viele Kanten, so gibt es unter den zusammenhängenden Bestandteilen des entstehenden Graphen *a)* höchstens zwei *unendliche* Graphen; *b)* bilden die weggelassenen Kanten einen solchen Graphen, in dem nach jedem Knotenpunkt eine gerade Anzahl von Kanten laufen, so gibt es genau einen *unendlichen* Graphen.

Hieraus ergibt sich z. B. unmittelbar, dass der gewöhnliche *Gitter-Graph* des n-dimensionalen Euklidischen Raumes für jedes n eine beiderseits unendliche Euler'sche Linie besitzt.

P. Erdős, T. Grünwald, E. Weiszfeld.

BERNOULLI DÁNIEL ÉS JÁNOS EGYKORÚ TELEKI-ÚTINAPLÓK ÉS LEVELEK TÜKRÉBEN.

Teleki József gróf (1738—1796) kora legműveltebb magyarjainak egyike. Az első magyarországi protestánsok közé tartozik, aki magas közméltóságra (főispán, főigazgató, titkos tanácsos, koronaőr) emelkedett. Sokat utazott, igen jól beszélt több idegen nyelven. Ífjúkorában majd két évig külföldön tanult. Erről az útjáról rendszeres és pontos magyarnyelvű naplót vezetett. Feljegyzéseit a M. T. Akadémia kézirattára őrzi. Eddig alig jelent meg belőlük valami nyomtatásban. Bázelre vonatkozó naplója is először e sorok írójának német fordításában látott napvilágot, Spiess Ottó, bázeli matematikus professzor könyvében.[1] Itt csak a Bernoulli-akra vonatkozó részeket kívánjuk lehetőleg hű idézetekben bemutatni.

Az ifjú gróf a Buda—Győr—Bécs—Linz—Regensburg—Augsburg—Ulm—Schaffhausen útvonalon át érkezett két kísérőjével Bázelbe. Már másnap: 1759. júl. 27-én «Reggel mentem Bernoulli Daniel Uramhoz híres Mathematicushoz, aki egyébb részeiben is ugyan a Mathesisnek, de kivált az Analysisben nagy embernek esmértetik a tudós világtol. Három Bernoulli-ak vóltak ekkor Basiléában, egyik Bernoulli Miklos igen öreg, és a mint mondották már tanitani alkalmatlan ember, de tsak ugyan Professor; a másik Bernoulli Daniel, ez az, akinél vóltam és a ki a Londoni Tudos Társaságnak, és a Parisi, 's Ber-

[1] O. Spiess: *Basel anno 1760. Nach den Tagebüchern der ungarischen Grafen Joseph und Samuel Teleki.* Basel, 1936. Ismertetését l. folyóiratunkban: 43. 1936. 106—108.

lini Akademiaknak is Tagja; A harmadik BERNOULLI JÁNOS ennek Testvér Ötse; Ehez nem mehettem most azért, hogy MAUPERTUIS épen ekkor vonaglott nálla, a mint hogy délután meg is holtt. Ez a MAUPERTUIS vólt a Berlini Scientiarum Academianak Praesesse; Születése szerint Frantzia. Jó szivvel látott ez a BERNOULLI DANIEL Uram, 's igérte, hogy ha ottan maradnék; minden kigondolható segítséggel lészen; Délután pedig hozzám jött latogatásomra.»

Közben a gróf két hetet Solothurn, Morat, Avenches, Lausanne és Genf[2] megtekintésére fordít, Aug. 10-én «el indultam Genevából viszsza Basel felé ott kivánván tölteni a telet, mert elöbbeni szándekomot melyel hazul el indultam, meg változtattam, mind azért, hogy Geneva sokkal drágább hely Basileánal, mind pedig azért hogy Basileaban hires két ember vólt az én tzelomhoz képest kiváltt a két egy Testvér BERNOULLI Uram DANIEL, és JÁNOS.»

A matematika történetében figyelemreméltó jelenség, hogy a 18. század német nyelvterületről származó, vezető matematikusai LAMBERT kivételével mind bázeliek.[3] Ide tartoznak: a világhírű BERNOULLI-családból JAKAB (1654—1705) és öccse: JÁNOS (1667—1748), utóbbinak fiai: Dániel (1700—1782) és János (1710—1790), L. EULER (1707—1783), az idősebb és ifjabb BERNOULLI MIKLÓS, J. HERMANN, N. FATIO, S. KŐNIG és G. CRAMER. Az egyetlen kivétel LAMBERT, születési helye: Mülhausen (Elzász) akkor politikailag szintén Svájchoz tartozott. A bázeli egyetem matematikus tanára több mint 100 éven át a BERNOULLI-családból került ki. JAKAB (1687—1705), utána öccse JÁNOS[4] (1705—1743) és végül ennek fia JÁNOS (1743—1790). Mellettük MÍKLÓS († 1759) és DÁNIEL (1748-tól 1777-ig a fizika tanára a

---

2 Genfből meglátogatta VOLTAIRE-t is. E naplórészletet közölte a *Napkelet.* 3. 1925. 406—408.

3 O. SPIESS: *L. Euler* (Die Schweiz im deutschen Geistesleben. 63—64. kötet). 27.

4 «seit LEIBNIZ tot und NEWTON alt war, der erste Mathematiker der Welt.» SPIESS [3] 35.

bázeli egyetemen) is tartottak matematikai előadásokat. Az idézeteinkben szereplő nagytehetségű DÁNIEL és JÁNOS nem érik el ugyan apjuk: JÁNOS, és nagybátyjuk: JAKAB jelentőségét, de különösen DÁNIEL még mindig kora első matematikusai közé tartozott. A párisi akadémia díját tízszer nyerte el, öccse: JÁNOS négyszer.

Az aug. 21-i naplóbejegyzés szerint «BERNOULLI DANIEL Uramnál, és JÁNOSnál vóltam, Amannál az Algebrára, minthogy már az előtt meg igérte, Collegiumot kértem; Adott is egy héten négy orát, de még meg nem határozta magát mitsoda Auctort kövessen velem, ugyan tsak oda hajlott inkább, hogy a CLAIRAUT Algebráját vétesse meg velem». Ez a kitűnő könyv: *Éléments d'algèbre* 1746-ban jelent meg Párizsban.[4a] Kiadásainak nagy pontosságú jegyzékében 1761. márc. 4-én szerepel 8 livre 10 sou «A CLAIRAUT Uram Algebraja, és Geometriájáért».[5]

Két előkelő svájci ifjú: P. C. v. PLANTA és A. H. v. SPRECHER ugyanakkor aritmetikát tanult BERNOULLI JÁNOS-tól; aug 22-én TELEKI JÓZSEF is hozzájuk szegődött, de nem maradt meg állandó harmadiknak, mert már általa tanult dolgokat hallott.

Aug. 24-én «Vóltam leg elöszer BERNOULLI DANIEL Uramnál Collegiumon 's kezdettük az Algebrat. Nem CLAIRAUTon, mint a minap mondotta vólt, hanem más könyven kezdette, melynek titulussa ez: *Principia Matheseos Universalis, seu introductio ad Geometriae methodum Renati Des Cartes conscripta ab Er. Bartholino* Casp. Fil. Amst 1683. Tiz orától fogva 11ig ott voltam». DESCARTES korszakalkotó főműve, a *Géométrie* ugyan már 1637-ben megjelent, de az új szellem csak lassan terjedt el a barátok és tanítványok buzgólkodása nyomán. Legnagyobb érdemeket ebben a munkában F. van SCHOOTEN szerzett, aki a leideni egyetemen tartott előadásokat DESCARTES

[4a] Hat franciaнyelvű kiadást ért 1801-ig. Német fordítását (1752) használták a göttingai egyetemen. Hollandusra is lefordították 1760-ban.

[5] «a Livre tészen mintegy 8 nállunk valo garast, a sou egy Livrének huszad reszit és így nem egészen egy polturát». Az akkori «rhenusi» forint = 60 krajcár. A garas három, a poltura másfél krajcár.

módszeréről. Egy ilyen előadását adta ki tanítványa: Erasmus Bartholinus 1651-ben Leidenben. Itt a későbbi, bővített amsterdami kiadásról van szó.

Teleki József gróf nemcsak matematikát tanult kilenc hónapig heti négy különórában Bernoulli Dániel-től, hanem rendszeresen eljárt kisérleti fizikai előadásaira is. Csak egy pár kisérletről számol be részletesen naplójában, ami annál sajnálatosabb, mert a világirodalomban sem ismerünk az övénél régebbi leírást nyilvános egyetemi előadásban bemutatott kisérletekről. A Bernoulli-ak úttörők ezen a téren: Jakab (Dániel nagybátyja) és János (Dániel apja) tartották az első ilyen előadásokat és Dániel fokozott buzgósággal követte őket ezen a téren. Nem volna igazságos dolog mai szemmel bírálni ezeket a kisérleteket: nem szabad elfelejtenünk, hogy azóta majd két évszázad telt el.[6]

Bernoulli Dániel «Physicum Experimentale közönséges Collegium»-át az akkori Auditorium Physicum épületében (Stachelschützenhaus am Petersplatz) tartotta, ahol jelenleg az egészségügyi intézet van elhelyezve. Már aug. 28. és 31-én is jelen volt a gróf. Az első részletes beszámoló a szept. 7-i: «Dél után a Publicum Physicum Experimentale Collegiumban vóltam; rendes experimentumot tsináltt Bernoulli Daniel Uram annak meg mutatására, hogy a hang in vacuo, vagyis inkabb in aere maxime rarefacto, igen kitsinyé hallik. Ama kis üveget a melyet másként Lachrimiae Batavicaenek neveznek, és a mely a közönséges levegő égben akkorát szól, mint egy pisztoly a Campana Pneumatica alá tette a tetejin lévén a harangnak bizonyos kis réz darabon, mely oly mesterseggel vólt készítve, hogy meg huzván a harang tetejiből ki jövő kis réz rudatskát az a kis

[6] Még 100 évvel később is ritka volt a kisérlet. Az *Életképek* c. folyóirat 1848-ban a 684. oldalon ezt írja: «A' physica tanára [Rozsnyón] egész éven át két kisérletet mutatott. A' léget kiszivó gép által megfojtotta a' verebet, 's öröme határtalan volt, ha dadogó nyelve mondhatá: «Vident iam moritur avicula». «A' második fontos kisérlet volt Des Cartes ördögcséinek előmutatása».

uveg onnat le eshetett. Tett azért ugyan azon harang alá egy faragott darab köre, meg tüzesitett vas karikát; ki huzatván annakutánna a levegő eget a harang alól, le botsatotta a tüzes vaskarikára, az emlitett réz rudatskát egy kiség fel huzván, a Lachrimat, mely a tüzes vas karikában bé esvén el pukkantt, de a pukkanása tsak akkorának tetszett, mint ha egy bolhát ölne meg az ember. Más experimentumot is tsinált annak megprobalására, hogy a forró víznek melege mennyire extendalja a levego eget. Vett bizonyos egynehány tekervényű üveget elé, melynek a közepin kenyeső vólt; Azt az üveget azért a forro vizbe bé tévén a kenyeső meg mozdultt, és mind odébb odébb ment mig nem osztán egy helyt meg állott; mely hely a mely tavol volt az első állásátol a kényesőnek, annyival szelesitette a meleg a levegő eget».

Négy nap mulva, szept 11-én «Dél után Physicum Collegiumon vóltam. Rendes Experimentumot tsináltt Bernoulli Daniel Uram annak meg mutatására, hogy a ritka levegő égben hamarébb kezd a viz fórni és igy a forrásra a levegő égnek nyomásais sokát tészen; Ugyanis a kevesse meleg vizet, melyben könnyen el tarthattuk az ujjunkat, az Antliara [légszívó] a Recipiens alá egy üvegben fel tétette; annakutánna ki huzattván a levegő eget a Recipiens alól, láttuk hogy az a lágy meleg viz forrani kezdett, és utolyára anyira forrott, mintha a leg nagyobb tüzön lett vólna. Ezt probálta a tejjel is a még hamarébb és könynyebben kezdett forrani. Második Experimentumot tsináltt annak meg bizonyitására, hogy a fában igen sok levegő ég vagyon, és hogy ha a levego ég a mely a porussai közzé szorultt a viz tetején fen nem tartaná, minden még a leg könyebb fais le menne a fenekére; és igy következés képen hogy a fának fibrái magában nehezebbek a viznek. Melyet igy probált meg. Tett egy pohár vízbe két darab fenyő fátskát egygyet nagyobbat, másikat kissebbet, mely a vízből mindenik felig kiállott. Tette ezen pohár vizet a Recipiens alá 's a levego eget ki huzattvan ismét belé botsáttata, 's igy ketszer vagy háromszor ki huzatván, és ismét belé botsátván a levegő eget utolyára a fenekire a kissebbik fa leszállott, de a nagyobbik le nem szállott ugyan egészen, de semmi sem állott ki belőlle, hanem in equilibrio vólt a vizzel; de tsak ugyan ezis le szállott vólna, ha meg egyszer vagy kétszer a levegő eget ki huzták volna. Hogy ezen Experimentumban a levegő eget ki huzni és ismét belé botsátani kellett, annak könnyű az oka: Mert a midőn kihuzzák a levegő eget, akkor ki jő a fának porussaiból a levegő ég, mikor pedig belé botsátyák akkor a bé menő aer belé taszitya a vizet a már meg üresültt porusokba, és igy nehezebbé lészen a fa mindaddig, mig osztán egészen le is szál, midőn tudnillik anyira ki jő a levegő ég a fából, hogy az annak helyit el foglaló viz a fa fibraival edgyütt nehezebb leszsz a viznél. Hasonló Experimentummal probálta meg aztis hogy a vizben is vagyon aer».

Egy hét elteltével, szept. 18-án »Délután Bernoulli Uram Physicum Collegiumán vóltam, de Elasticitate Aeris egynehány rendes Experimentumokat tsináltt, és a többi között egyet, a melynek le irása minthogy hoszszatska, és tulajdonképen nemis ide tartozik most el hagyom».

Végül szept. «21[a] Délután pedig a Physicum Collegiumban voltam. Egynéhány Experimentumot tsinál Bernoulli Uram annak meg bizonyitására, mely igen szükséges légyen a levegő ég minden dolognak táplálására, ugymint a halaknak madaraknak, sőt még a tűznek is. Ez utolsók meg bizonyitására, alája tette a Recipiensnek a gyertyát mely, mihelyt a Recipiens alól ki huzta az Antlia a levegő eget, leg ottan el aludtt. A tzinegét alája tévén a Recipiensnek azis mihelyt a levegő ég meg ritkultt mindgyárt oda lett, és tsak alig pihegett, mig ismét belé botsátván a levegő eget, meg ujjultt. A vizben lévő hal ugyan meg nem döglött oly hirtelen, de mind fel jött a szinére a viznek, mig a levego eget belé botsátván ismét a fenekére le szállottak; Az az egy kár vólt, hogy ezen Collegiumon vólt vége a Physicum Collegium Publicumnak; melyet egyébb dolgaira nézve a mint mondotta Bernoulli Uram, nem folytathatott tovább».

Ellátogatott Bernoulli Dániel egy másik délutáni «közönséges Collegiumára» is amelyet a ma is álló egyetemi épületben (im Untern Collegium am Rheinsprung) tartott. Dec. 18-i bejegyzése szerint: «Alig vala ennek a nagy embernek egynéhány gyermek halgatója, azok is pedig a mint latszott 's magais mondotta, igen értetlenek; Melynek azt az okát adta, hogy itten bé vett rosz szokás, hogy a gyermekeket mihelyt 15 esztendősök, vagy olyan formán, mindgyart Artium Magisternek szeretik tenni, a midőn még nem hogy maga Magister lehetne, de tanítványnakis sokszor rosz». A laureatus és magister artium fokozatok az akkori bölcsészeti (facultas artium) tanulmányok sikeres elvégzését jelentik.

Az ifjú gróf egy pár tanulótársán kivül leginkább professzoraival érintkezik: velük sétál a «Rhenusi hidon» a «Péter Platzon», őket és társaságukat látogatja. Dec. 24-én «haza jövén Bernoulli Daniel Uramot a házamban találtam, igen derék jóféle ember, 's hozzám kiváltképen igen jó szivvel viseltetik. Egy kisség nállam mulatván el mentt». Márc. 9-én «Szép nap lévén délután sétálni mentünk, 's egészen ötödfélig sétáltam nagy részént Bernoulli Daniel urammal, kivel szokása szerint sokat beszélgettünk, mert igen szeretett beszélni, mindenkor többire jó kedve lévén. És ambator sokkal öregebb az ötsénél János-nal, de tsak ugyan jobb kedvű, tréfássabb, 's ifjabbnakis tetszik». Másnap: 10^{a} Délután el hivott magához Conversatioban Bernoulli János Uram, 's ottan itt való gazdag kereskedő ember Weisz Urammal meg esmerkedtetett; kártyázván egy darabig azután Jeanré Uram holmi Electricum Experimentumokat tsínáltt az ott lévő Aszszonyságok kedviért, melyek szépek vóltak». A professzor feleségének nagybátyját és a többi vendéget szórakoztató fizikus: tanítványa, S. R. Jeanneret volt.

Bernoulli Dániel látva főleg a Telekiek nagy érdeklődését, felkérte A. Socin magántanárt, hogy mutasson elektromos kísérleteket. Három hónapig tanult tőle a gróf. Márc. 21-én «Délután két órakor, mint szoktunk Socin Uramnál az Electricum Collegiumon vóltunk a Butteliával való Electrizatiohoz fogott, melyet közönségessen Lejdai Experimentumnak hivnak és avval rendes experimentumokot tsináltt». Ápr. «10^a Nem voltam sehol a SOCIN Uram Electricum Collegiumán kivül; mely már szinte vége felé vagyon, és azért minden nap járjuk».

Ekkor már három TELEKI gróf tanult Bázelben: november óta másodunokatestvére ÁDÁM, a későbbi Cid-fordító (1740—1792) és jan. 2-a óta mostoha nagybátyja, a későbbi kancellár és könyvtáralapitó SÁMUEL (1739—1822). Márc. «27^a Ebédre BERNOULLI DANIEL Uram, és egynéhány Kereskedő emberek a Koronába jőttenek kiket ottan egyébbféle borok után, melyet mi hárman számokra hozattunk, Tokaji Aszszuszőlő borral, melyet még magammal hoztam fel jól tartottam. Szokása ezeknek az itt valóknak, hogy a midőn néha neki gondolják magokat, 's jobban akarnak lakni, mint othon, vendegfogadoba mennek; s ugy jöttek ezekis ma ide a Koronába, talán rész szerint réánk nézve is, [SÁMUEL megérkezése óta ott étkezett a három TELEKI], kik mindnyájan (voltak ötön) BERNOULLI DANIEL Urammal egy dohányozó helyre járnak; Maga ugyan BERNOULLI DANIEL Uram nem dohányozik, de mégis többire mindennap délután eljár a Dohányozo Szobába, a milyenek itten szamoson vagynak. Megmondottam régen, hogy egyszer megudvarlom ottan ő kegyelmét, fogatkozott ugyan, hogy igen sokféle nép gyűlvén oda, nem érdemes, hogy meg nézzem; de tsak ugyan, azt mondja, ha kivánom örömmel el viszen». Bár a kártyázás (tarok, l'hombre) nagyon elterjedt volt, BERNOULLI DÁNIEL a «Tobakstubliba» «sem jádzik, hanem tsak beszélget, a mint másoktól hallom. Az ötse JÁNOS szereti játzodni».[7]

Hogy ifjú főnemeseink milyen nagy megbecsülésben részesültek, azt jól szemlélteti a bázeli egyetem háromszázados alapítási évforduló ünnepségén (1760. ápr. 15) a menet leírása: «Rector TURNEISEN Uram Oberst-Zunft-Meister JESCH Urammal, Azután mentem én Deputatus MERIAN Urammal, Utánnam TELEKI

[7] «Besonders JOHANN BERNOULLI erweist sich als richtige Spielratte.» (SPIESS [1] 21.)

Samuel Ötsém Uram Deputatus Fürstenberger Urammal utánna Teleki Ádám Ötsém Deput. Burckhard Urammal, és ugy utánnunk a több Professorok, a több Tanátsbéli személyekkel 's azután a Rhetusok [Svájc délkeleti részéből származó előkelő ifjak] 's az egész Déákság, mely mindazáltal igen kevésből állott». Az egyetem ez alkalommal is kitetsző elnéptelenedése volt ifjaink nagy megbecsülésének főoka. A hallgatóság más egyetemekre tódult (Strassburg, Göttinga, Jéna, Lipcse, Halle). A három bázeli orvosprofesszornak egy ízben összesen csak 6 tanitványa akadt. A városi polgárság mind kevesebb pénzhez jutott az egyetem révén, ami annak tekintélyét csökkentette. Érthető, ha tárt karokkal fogadták a gazdag magyar főnemeseket, akik fejenkint 7—8-szor annyit költöttek, mint az átlagos hallgató.[8]

Vége felé járt Teleki József gróf bázeli tartózkodása. Máj. 5-én «Professor Bernoulli Daniel Uram ajándékozott nékem egy magatol du Cré [Crest] Uramtol tsináltt Thermometrumot, és egyszersmind a Farenheitianum Neutonianum, Reamurianum és de l'Islianum Thermometrumoknak ehez és egy más köztt való Relatiojat mutato figurajat ezen Thermometrumoknak; Eleget mentettem magamat, de tsak rám tudta, 's azután énis, mint olyan nagyhirű és érdemű embernek az ajándékát, és a kinek hozzám valo jó indulatyárol, és baratságáról bizonyos vóltam, rolla való meg emlekezesemnek okáért el vettem». Máj. 19-én «Dél előtt Bernoulli Dániel Uramnál lévén, minthogy már a jövő hétfűn innen el menni szándékoztam; a Calculus Integralisrol akartt valami ideat tsinálni, hogy el menetelem előtt ha tsak abba az állapotba is tegyen hogy annakutánna idővel magamtolis tovább vihessem. Nem tudom én ennek az embernek hozzám való indulatyát eléggé soha meg köszönni, mert ugy tetszik, hogy szinténugy örvendett a midőn tanításának bennem valami foganatyát látta». Máj. 23-án «Megküldöttem Bernoulli Daniel Uramnakis a 9 holnapi Colle-

[8] Spiess [1] 26, 29.

giumnak az árrát, melyet en magam 3 aranyra szabván egyet egyet, esett mind öszve 27 arany». Kiadási naplója szerint ez a 27 hollandi dukát 126 rajnai forintot tett ki. BERNOULLI DÁNIEL a «27 aranyat nagyon megköszönte, és hogy felette soknak tartya assecuráltt». Indulása előtt két nappal «mentem Professor BERNOULLI DANIEL Uramhoz, kivel igen sokáig, és egészen 12 őig beszélgettem; igérte, hogy Parisba fog addressirozni de la CONDAMINE, de BUFFON, és CLAIRAUT Uramhoz, mind, kivált a Mathesisben nagy emberekhez; kiknek a neveket a kezembe adja az oda menetelem iránt pedig az alatt irandó Leveleben praevenialja».

Hollandiából TELEKI JÓZSEF gróf többször váltott levelet BERNOULLI DÁNIEL-lel. Naplója szerint Leidenbe két levele érkezett tőle. Az 1760. szept. 7-i második levélben DÁNIEL «nyájassan ir, és arrol a methodusrol tudosit a melyel értt annak meg mutatására, quod tempus quod corpus cadens ex altitudine verticali impedit, est aequale tempori, quo pendulum simplex semel vibratur, si altitudo casus sit ad longitudinem penduli, uti quadratum peripheriae circuli, est ad duplum quadratum diametri, quod est fere ut $4\frac{15}{16}$ ad 1. A figurajátis az Experimentumának maga adjiciálta».

Két hónappal később Párisból küld BERNOULLI DÁNIEL-nek egy levelet, «melyben egyebek között az ALEMBERT Uram minap az Academia egyben gyülésekor 12^a hujus az inoculatiorul elolvastatott munkájárul tudositom». D'Alembert ebben az értekezésében: *Sur l'application du calcul des probabilités à l'innoculation de la petite vérole* több pontban megtámadta BERNOULLI DÁNIEL a párizsi akadémiának küldött, korábbi, hasonló tárgyú dolgozatát: *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et les avantages de l'innoculation pour la prévénir.*[9] A különböző korosztályokban a

---

9 Mindkét, a valószínűségszámítás történetében nevezetes értekezés (1760) egykorú másolata megvan a M. T. Akadémia kézirattárában: Vegyes. 4—r. 39. 1, 2—3.

himlő-okozta halandóságnövekedést igyekszik benne megállapítani az infinitezimális számítás segítségével.

Az 1761. jan. 12-i párizsi naplóbejegyzés szerint «Bernoulli Daniel Uramnak pedig a 1^a Decembr. irott Levelére valaszlok, 's meg irom, hogy az Esprits-Fortokról való munkámnak itten ki jött második Editioját ő kglmének dedicaltam, és hogy egy jó Barátom egy *Avertissement* ot de bizony hirem nelkül nyomtatatott eleibe melybe az ő kglme Leveleibe könyvemre rakott ditséreteket belé tette». Teleki József gróf még Bázelben fogalmazta ezt a kis hitvédő iratát: *Essai sur la foiblesse des esprits-forts.* Az Augsburgban 1762-ben megjelent kiadás (16-r, XX+128) bevezetésében az V. oldalon ez áll: «L'Academicien et l'illustre Mr. Bernoulli, dans une lettre du mois de Décembre adressée à l'auteur s'exprime ainsi: „S'il est bien déplorable que la cause de Dieu aît besoin de défenseurs, il vous est bien glorieux d'avoir si bien défendu cette cause. Vos argumens sont concluans, sublimes & spirituels"».

Párizsból hazafelé Teleki József gróf megint útba ejtette Bázelt, hogy felkereshesse a két Bernoulli-t. Harmadnap, 1761. márc. 23-án «Socin Uramnál vóltam. Szép Experimentumot mutatott az Electrica Atmosphaeranak a körülötte való testekbe való Actiójáról. A positiva Electricitas atmosphaeraja negative electrizal; az az ki hajtya a testekből a naturaliter bennek lévő Electricus tüzet, de tsak anyira kell a testet a sistema Electrizatumhoz tartani, hogy ne jöjjön szikra belőlle, mert ugy positiva electricitást ad, mint tudva van. Tsináltt egy mas experimentumot is Pater Precaria [Beccaria] után, tudniillik annak meg mutatására, mely erős effutuma vagyon a vizen keresztül vett szikrának. Tsináltt e szerint egy ágyú formát viaszból, melynek egy kis ürege lévén oda egy tsep vizet botsát bé annak tetejibe egy kis réz szegetske vagyon, melyre egy borso szemet teszen a viz felibe a vizen alól egy drót mégyen a vizig, mely drot az üveg, és electrizáltt táblával communical. A midőn az ember el akarja lőni akkor a szikra a mely a droton a vizen keresztül, a felyebb emlitett kis réz szegetskére, kin a borso van siet, utyába a vizet megtágasitya, a mely osztán a borsó szemét bizonyos distantiára el lövi. Ez igen mulatságos experimentum». Továbbutazása előtti nap «Bernoulli Daniel Uram meg mutatta délután a maga fel találta *acus magneticae inclinationis*. Minden emberektől el butsuztam; kiváltt Bernoulli Daniel Uramtul nem kevés meg illetődésemmel».

Az előzőkben a két Bernoulli-ról rajzolt képet van hivatva kiegésziteni Teleki Sámuel gróf úti naplójának egy részlete.[10] Ő több mint kétszerannyi ideig tanult Bázelben. Matematikai tanulmányairól összefoglalóan ezt írja: «4^a Martii 1760 Kezdettem Bernoulli János Uramnál, kiis Matheseos P. P. ord. az Mathematicum Collegyiomaimat privatim; Gyermekségemtől fogva őrőkke nagy kivánságom vólt Mathesist tanúlni de abban soha eddig modom nem lehetett, mostan pedig a' Sz. Isten a' ki minden dolgaimat kegyelmesen igazgatta, ebbenis jó alkalmatosságot parantsolt, ollyant pedig hogy ehez hasonlot Baselen kivűl ritkán sőt talám nemis találhattam volna, mert e' mái napon ritka párja az Mathesisben a' Bernoulliaknak, sőt én nemis tudok még senkit a' kit hozzájok hasonlithatnék, és semmiben egyébben nem vétenek hanem hogy munkákot nem irnak (mint az Apjok ama nagy emlékezetű Bernoúlli János tselekedett 's dolgozott) igaz dolog hogy Praemiumért sokszor irtanak, és gyakran répoltáltanak praemiumat mások felett, és az illyen munkátskájok kiis vagyon nyomtatva de ezen kivűl nem sokat irtanak; Az idősebb atyafi Bernoulli Daniel Uram irt egy *Hydrodynamicát* in 4° és valami *Exercitationes Mathematicaet*; a' kissebbik atyafi Bernoulli János Uram pedig az Praemiumért dolgozott munkáin kivűl Könyvet nem irt, hanem az Irás hellyett használ az Tudos világnak, szorgalmatos és epűletes tanittásával; Igaz az hogy az Mathesis Newton és Leibnitz után senkitől nagyobb Incrementumat nem vett mint az Bernoulliaktól, tudni illik ezeknek attyoktól Bernoulli Jánóstol, és annak Testvérétől Jakabtol; és az mostan

---

10 Lehetőleg híven az Országos Levéltárban lévő eredetihez: 88–96 l.

elő Két Testvér atyafitól BERNOULLI DANIELtől 's JÁNOSTOL. én ugyan boldognak tartom magamot hogy az Mathesisben illyen Praeceptoraim lehettenek. Akarván azért ezen jó alkalmatossággal az Mathesist ex fundamento tanúlni; Kezdettem Letzkéimet az Arithmeticán, melyben semmi bizonyos Auctort nem kővettűnk hanem aztat BERNOULLI JÁNOS Uram maga Irásaiból 's fejiből tanította; ennek vége lévén, Kezdettünk Geometriát, és azt tanúltúk az PARDIES Geometriája szerint, ennekis vége lévén Trigonometriat tanultunk az TAQUET Trigonometriája szerint. Azután az Algebra Principiumaimat tanította az ERASMUS BARTOLINUS szerint; eztis Isten jóvoltából el végezvén kezdette tanittani VOLFIUST, el kezdvén in Elementis Analyseos az III Caputon mind végig egészen az Calculus Differentialisig; és az Calculus Differentialist, Differentio Differentialist, Integralist, Exponentialist, és Infinitorumat hasonlóképen mind végig VOLFIUS szerint tanitotta egészen, igen nagy contentumommal és epűletesen; meg vallom hogy in Mathematicis illyen nagy facilitást 's promptitudot senkiben nem gondolhattam mint ebben az emberben vagyon; és a' mit a' Mathesisben tudok Isten után egészen néki tulajdonittom 's holtig kőszőnőm. Az Cursusomat az Mathesisben e' szerint el végezvén circa finem Maii, hogy mégis ezen nagy Mathematicusnak taníttásából epűlhessek; kezdettem nálla tanúlni az Attya letzkéit mellyeket adott Marchio de l'HOSPITÁLnak az Calculus Integralis felett és az mellyek az Attya múnkái kőzőtt bé vagynak nyomtatva az harmadik Tomusban; de nem continuálhatám sokaig mert Junius végin félben kelleték hagynom az Hollandiába való keszűlődésem miatt: Mind őszve Tizen Hét holnapokig jártam privatim az Collegiumait ezen jó Praeceptoromnak, minthogy az el múlt Februariusban Két orán jártam hozzá minden nap azért hogy az egész Cursusomat jobban absolválhassam, mellyet Istené az Ditsőség egész Contentumomra absolváltamis.

BERNOULLI DANIEL Uram nem szokott kűlőmben senkinekis privatim Collegiumokat adni, Nyáron által pedig szokott az Physicum Auditoriumban többire minden hétben egyszer Experim. Physicat taníttani publice igen győnyőrűségesen, és ezen Collegiumait mind az Két nyáron jártam 's nagy őrőmmel halgattam; Minek utánna pedig az őttsénél in Mathesi sublimiori és az Calculusokban progressusokat tettem vólna, nagy vágyásom vólt ezen ritka tudományú nagy Mathematicusnakis Tanittásából privatim valamit épűlni; Azért midőn a' többi között egy alkalmatossággal estve az Sz. Peter Platzon sétálnék e' Nyáron ezen Bernoulli Daniel Urammal 's holmi Mathematicumokról 's magam Tanulásáról véle discurrálnék, meg jelentém szándékomat hogy én igen kivánnék nálla egy privatum Collegiumat venni az Mechanicaban, minthogy már az Calculusokat tudom annyira hogy azok által az Mechanicátis meg érthetném 's tanulhatnám (mert az igaz hogy az Mathesisnek egy részitis Calculus nélkűl nem lehet ollyan jól meg tanulni 's meg érteni, mint az Calculusok által) és azon beszédemre mindgyárt igéré Joakarattyát, minthogy ez az Drága ember engemet eleitől fogva szeretett és hozzám nagy szivességet mutatott 's annak előtteis gyakran hozzája el jártam 's magais én hozzám el jőtt 's meg vallom hogy mindenkor mikor vélle voltam az Discursussábolis igen sokat tanultam; 's nagyonis kívánta az én előmenetelemet az Mathesisben segitteni; és arra nézve minden velem való beszélgetése mindenkor Tanittásból állott; sokszor Nyáron által estve ki szokott setálni menni az' Szent Péter Platzra (mellyis a leg kiesebb sétáló hely Basiléában) hol egyedűl, hol pedig az öttsével; és ottan egymásra találván edgyűtt sétáltúnk hól Tiz hol pedig némelykor Tizen egy orakorigis, és illyen alkalmatossággal soha egyéb dologról nem beszéllett, hanem szokása szerint Mathematicumokat Pysicumokat hozott elő és azokról nagy Tudománnyál beszélgetett és ennél distinctusobb embert az Taníttásban 's beszédbennis soha sem hallgattam; győnyőrűséges szép rendel és igen világosan tanittya a' leg nehezebb dolgotis; Kezdettem pedig a' Mechanicában privatím járni az Tanittasát ezen drága 's tudos embernek 18^a Maii 1761, mellyet Kendeffi Elek Urfi is én velem edgyűtt halgatott; és halgattam 's jártam volna az Tanittását éppen elindulasomnak napjáig nagy őrömmel, de 15^a Jullii félben kelleték hagynom reménységem 's akaratom ellen, mert bizonyos alkalmatosság adván elő magát el indula az nap Del után egy orakor BEBNOULLI DANIEL Uram Helvetiában bizonyos dolgai végett; mely uttyátis az én szerencsetlenségemre el nem halaszthatta; el indulása napján pedig Tiz orától fogva egesz tizenkét oráig egy más vegtiben tanittott igen szépen *de Legibus motus et Viribus vivis* kivánván a' mennyiben lehetett kipotolni az mit el kelletett mulatnia; el utazásával. Tizenkét orakor pedig egy mástól igen szépen el butsuzánk egy mást meg tsokolván, és igy kedves jó Praeceptoromtól meg kelleték válnom, a' kit őrökke betsűllők, szeretek, és a' kinek Tanulásomban sokat kőszőnők; el butsuzásomkoris meg kért hogy az mit távol létemben tanulok 's nem érthetek, tőlle levelem által meg kérgyem. Mind ISELLIUS Uramnál, mind BECKIUS Uramnál, mind az Két BERNOULLI Uraiméknál az Collegiumaimat KOVÁTS JOSEF Uram velem edgyűtt halgatta 's az Mathesisben nevezetesen szép progressusokat tett, és én magam reszemről nagy szerentsémnek tartom hogy ebben ő Kegyelmének és ő kglmében ha Istennek tettszik Édes Hazámnak 's Nemzetemnek szolgálhattam».

A jövőbe látott TELEKI SÁMUEL gróf, mikor ezt a mondatot leírta. A vele a BERNOULLI-aktól együtt tanuló KOVÁTS JÓZSEF nevelte később nagyenyedi professzor korában SIPOS PÁL-t, az első önálló magyar matematikust.[11]

Nemrégiben egy BERNOULLI-jegyzetet mutattak Zürichben SPIESS professzornak. Címe «Mechanica, — a Cl. DAN. BERNOULLIO pertractata — nullo utente libro per quem aditus ad illam auditoribus suis muniretur, ipso quandoquidem ex ingenio suo illum illis parante et, ut dicunt, ex tempore. — Basiliae Ao 1760 et 1761». A kb. 360 oldalas latin jegyzetet egy boroszlói fizikus Danzigban vásárolta egy könyvárustól. Az első oldalon a következő idegen kézírású bejegyzés áll: «J'ai fait copier et mettre en ordre ce que j'avois anoté seul au logis pour moi

---

[11] L. e folyóiratban: 41. évf. 1934. 45—54. és 42. évf. 1935. 134—138.

meme, chaque jour en sortant de sa leçon. C. de T.» Könnyű kitalálni, e betűk jelentését: Comte de TELEKI, SÁMUEL tehát később rendbeszedette és kidolgoztatta a maga feljegyzéseit, amelyekről SPIESS ezt írja: «Es wäre wert es einmal herauszugeben und ist jedenfalls vorgemerkt»![12]

A TELEKI-ek látogatása előtti évtizedben a bázeli egyetemen anyakönyvezett magyar tanulók száma 2 és 4 közt ingadozik, utána 8—9, sőt 12—13-ra emelkedik, 1770-ben megint 2-re esik. TELEKI JÓZSEF gróf ajánlásával és támogatásával tanult Bázelben a marosvásárhelyi kollégium későbbi tanára KIS GERGELY (1738—1787), aki pártfogójának így számol be tapasztalatairól: «Meg adtam Tiszt. BERNOULLI Uramnak a Ngod levelét, alig találta hellyét, ugy örvendett a Nagy Philosophus, mihelyt Ngodrol emlekezetett tettem, a' levelet mindjárt elolvasta, 's azt mondja sic ergo D. Comes malevalet, sed certe ille morbus est longe diversus ab eo quem D. Comes sibi repraesentat, forte tam indoctus aliquis medicus persvasit, ego puto esse speciem potius Hypochondriae. En emphatice describaltam hogy néha kivált igy 's amugy roszszul van Ngod, de tsak nem akarta hinni, azt mondja többi között: Nihil metuite, hic morbus non obstat quominus Dns Comes per centum annos vivat. El kérdezte Ngtok Mltgs Uri familiajat, nevezetesen pedig Ngod statussat, hivatalait, házát s. a. t. ugy hogy szintén két óráig mind tsak a Ngodrol való kérdezösködés volt a' Discursus materiája. Azután osztán engemet magamat vett elő, szintén gyermekségemtől fogva elő kellett beszelleni hol, mit, 'es mi moddal tanultam, meddig akarok peregrinalni, miket akarok főképen tanulni; mondván hogy Mathesist-is akarnék 's igen jo lenne ha tanitana, erre azt felelé, hogy maga letzkét nem ád hanem az Ötsének recommendal». Később így folytatja: «De BERNOULLI JÁNOS Uramat-is nem akarom ki hagyni a ditséretek' sergéből, mikor eo kegyelménél voltam, hozodik elő viszont a Mathesis, 's mondom hogy szeretném valamit tanulni,

---

12 E sorok írójához intézett sorai. (Bázel, 1936. márc. 23.)

azt mondja tsudálkozással: Atqui vos Hungari non soletis Mathesim discere, de bizony mondom valami keveset szoktunk mi is, legalább szeretnénk tanulni. 11^{dik} napja hogy itten mulatok, ha peregrinatiomat mind illyen kedves dolgok között tölthetném el, reménylem nem unnám meg magamat. Sokat gondolkodtam hogy ha talám tsak meg maradnék itten leg alább harom honapig a Mathesisért megmondottam BERNOULLI DANIEL Urámnak ezen kételkedesemet az okokkal egyjütt, 's eő kegyelme maga igy deliberalt, consideratis considerandis mennyek által most Bernába, vagyon ugy mond ottís a Physicaban és Mathesisben alkalmas Professor, attol sokat lehet epülni, azután vegyek ha tettzik egy két honapot az itt valo mulatásra az alatt a' mi amott el maradna, ki potolhatom».[13]

Úgy látszik, hogy TELEKI JÓZSEF gróf fia nevelőjéül választotta KIS GERGELY-t, akiről BERNOULLI DÁNIEL ezt írta neki: «je l'ai trouvé fort prevenant tant du coté des moeurs que des connoissances; vous ne sauriez mieux choisir pour l'education de M^r votre fils;».[14]

Két évvel később gróf BETHLEN FARKAS is «unice a BERNOULLI-akért»[15] megy Bázelbe.

Az ott tanult magyarok egyik legkiválóbbja FOGARASI PAP JÓZSEF (1744—1784) a jeles filozófus. Aligha akad magyar tudós, aki több külföldi pályadíjat nyert.[16] Ő lett volna a pesti egyetem első protestáns tanára, ha kinevezése után röviddel meg nem hal Marosvásárhelyt, ahol a kollégiumban tanított. Itt két

---

13 A gyömrői TELEKI-levéltárban őrzött levél kelte: Bázel, 1766. aug. 26.

14 BERNOULLI DÁNIEL levele TELEKI JÓZSEF grófhoz. (Bázel, 1766. aug. 20.) A gyömrői TELEKI-levéltárban.

15 BETHLEN PÁL gróf levele (Bonyha, 1768. júl. 8.) az Országos Levéltárban (TELEKI SÁMUEL-osztály 292).

16 Nemcsak Hollandiában, hanem Berlinben is. Ott neve «PAP de FAGARAS» alakban szerepel (A. HARNACK: *Gesch d. Akad. zu Berlin.* 2. 308.). Az 1777-ben kiírt: Quel est le Fundamentum virium ? pályakérdés díját nyerte 1779-ben. Özvegyének (Wiebel Carolina Wilhelmina) 170 aranyat nyomó 4 «praemiumért» 918 magyar forint 6%-os «interessét» adta TELEKI JÓZSEF gróf. (M. T. Akad. kézirattára. Vegyes 4-r. 39. 60.)

leveléből idézünk. Az egyikben[17] ezt írja TELEKI SÁMUEL grófnak: «Tiszteletes Professor BERNOULLI JÁNOS Uram kinek Levelével Nsgodnak udvarlani szerentsém van a Nagyságod Uri recommendatioja mellett igen jo szivvel látott is szolgálattyát ajánlotta, tartokis mind magam egyedül privatum Collegiumat, mind pedig Grof BETHLEN FARKAS Urfinak adni szokott Letzkéjét járom lévén e szerint minden nap ő kegyelmével két Orám». «Majusra egésszen el végezi, a' melly időre ugy reménlem a Mathematicus Cursusomnak is vége lészen, mert BERNOULLI JÁNOS Uram éppen ugy mégyen a' mint az ember maga kivánnya, semmit sem késik ha láttya hogy a' Tanitvánnya a Dólgot meg értette, ha pedig andalog, vagy sokszor kérdi meg az el monnott Dolgot, haragszik; de a Dolognak elé adásaba igen szép módot tart. Ennél való Tanulásomatis ugy igyekezem follytatni hogy se Nagyságod, hogy engemet commendálni méltóztatott, se én hogy ebbe Nsgod bölts Tanáttsát követtem, meg ne bánnyuk. Tanulásomat ha az Isten engedi ő kegyelménél el végezvén Testimonialist vészek rólla és udvarlok vélle alázatoson Nagyságodnak».[18] Egy év mulva azt olvassuk, hogy «végezvén egyébkéntis Tiszt. Professor BERNOULLI Uram az én tanitásomnak cursussát (ki is nékem adott privata letzkejibe HOSPITALIUS differentialis a maga Attyának integralis calculussát, és Mechanicaban valo inventiojit tanitotta el»[19] még május elején elindult Bázelből.

Az előzőkben igyekeztem a BERNOULLI-akra vonatkozó magyar levéltári anyagot ismertetni. Befejezésül szeretnék a hiányokra is rámutatni. TELEKI JÓZSEF gróf útinaplóiban több helyen említi egy «másik diáriumát», amelybe egyes dolgokat részletesebben irt le. Eddig sem a budapesti, sem a vidéki (Gyömrő, Kolozsvár, Marosvásárhely, Nagyenyed, Szirák) levéltárakban

17 Bázel, 1769. dec. 22. Az Országos Levéltárban. (TELEKI SÁMUEL-osztály 614).

18 Nem tudok e bizonyítvány hollétéről. Az Orsz. Levéltárban nincs nyoma.

19 Frankfurt O., 1770. dec. 7. Orsz. Levéltár. TELEKI S.-oszt. 615.

nem sikerült nyomára akadni. KOVÁTS JÓZSEF (TELEKI SÁMUEL gróf kísérője és tanulótársa) is vezetett naplót, amely hihetőleg a nagyenyedi BETHLEN-kollégium levéltárának egyéb kincseivel együtt pusztult, vagy kallódott el 1848—49-ben. A bázeli egyetemen akkoriban tanult kb. másfélszáz magyar hallgató névsorán [20] indult levéltári kutatás és levelezés is csak elenyésző kis mértékben volt eredményes. Nagy köszönettel venném, ha esetleg e sorok olvasása nyomán, valahol még lappangó adatokról értesülhetnék.

Jelitai József.

DANIEL UND JOHANN BERNOULLI NACH DEN UNGARISCHEN TAGEBÜCHERN UND BRIEFEN DER GRAFEN JOSEF UND SAMUEL TELEKI.

Graf JOSEF TELEKI (1738—96) erhielt während seiner Studien in Basel 9 Monate Privatunterricht von DANIEL BERNOULLI über Mathematik. Graf SAMUEL TELEKI (1739—1822) lernte daselbst 17 Monate als Privatschüler von JOHANN II. BERNOULLI höhere Mathematik und nachher 2 Monate von DANIEL BERNOULLI Mechanik. Beide haben den öffentlichen Vorlesungen DANIEL BERNOULLI's über Experimentalphysik und den privaten Vorlesungen A. SOCIN's über Elektrizität beigewohnt. Da Berichte von Hörern über solche Kurse aus jener Zeit kaum bekannt sind, so ist es ein besonderer Glücksfall, dass JOSEF TELEKI in seinem Tagebuche Sept. 1759 einige Experimente beschreibt. Hier werden alle diese Tatsachen mit Belegen dargestellt. Man findet übrigens die deutsche Übersetzung der angeführten Stellen in dem Buche von O. SPIESS: *Basel anno 1760. Nach den Tagebüchern der ungarischen Grafen Joseph und Samuel Teleki.* Basel, 1936.

J. Jelitai.

---

[20] VERZÁR FRIGYES: *Régi magyar vonatkozások Baselben.* Debreceni Szemle. 5. 1931. 310—314.

EGY ÚJ FREKVENCIAMÉRŐ.

A frekvenciamérő az úgynevezett «technikai frekvenciák» mérésére alkalmas, körülbelül 16—1000 HERTZ frekvenciaintervallumban. Rezonancián alapszik, közvetlen mutató leolvasással. A készüléket a mellékelt fénykép ábrázolja. A műszer jelenlegi kivitelben az Institut für angewandte Elektrizität der Universität Göttingen műhelyében készült M. REICH professzor úr, az intézet igazgatójának szíves engedélyével. A kész műszerrel végzett vizsgálatok bebizonyították, hogy az a fenti frekvenciák mérésére alkalmas és a használatos frekvenciamérők felett előnyei is vannak.

A készülék kivitele: Lényegében egy lemezelt vasmagos tekercs (150—200 menet) melyre a mérendő frekvenciával bíró feszültséget kapcsoljuk (I.). A tekercsből kiálló meghosszabbított lemezelt vasmag mentén egy kevésmenetű (5—10 menet) tekercs (II.) mozdulhat el. A tekercs elmozdulását skála előtt elforduló mutató jelzi, úgyhogy a mérendő frekvencia a skálán közvetlenül leolvasható. A mozgó tekercs két vége kondenzátorhoz (1—10 mF.) van kapcsolva. Az I. és II. tekercs csévelése ugyanazon irányú. A II. tekercs két vége spirál alakú rugók segítségével van két kapocshoz kivezetve, hogy lehető legyen különböző kapacitású kondenzátorok bekapcsolása (ábra 1.).

A készülék elmélete: Legyen az I. tekercre adott váltófeszültség frekvenciája n, akkor az I. tekercsben folyó áram: $J_1 \cos \omega t$, ahol: $\omega = 2\pi n$. Ez a II. tekercsben olyan feszültséget és ezáltal áramot indukál, amely φ fáziskülönbséggel van az I. tekercsben folyó áramhoz eltolva, vagyis: $J_2 \cos (\omega t - \varphi)$. Tegyük fel egy pillanatra, hogy a II. tekercs rövidre van zárva, akkor a két tekercs egymásra kölcsönösen *erőt fejt ki*, jelen esetben taszitani fogják egymást, mint az a THOMSON ELIHU kisérletéből jól ismeretes. Ez az erő, ha a tekercs méreteitől eltekintünk nagy megközelitésben:

$$P \approx J_1 \cos \omega t . J_2 \cos (\omega t - \varphi).$$

Ez megadja tehát a kölcsönösen ható erő nagyságát egy periodus minden időpillanatára. De fontos egy perioduson keresztül az *átlagosan ható erő*, igy ennek átlagos értékét kell venni; mivel:

$$\overline{\cos \omega t . \cos (\omega t - \varphi)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \omega t \cos \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \omega t \sin \varphi)\, dt = {}^1\!/_2 \cos \varphi.$$

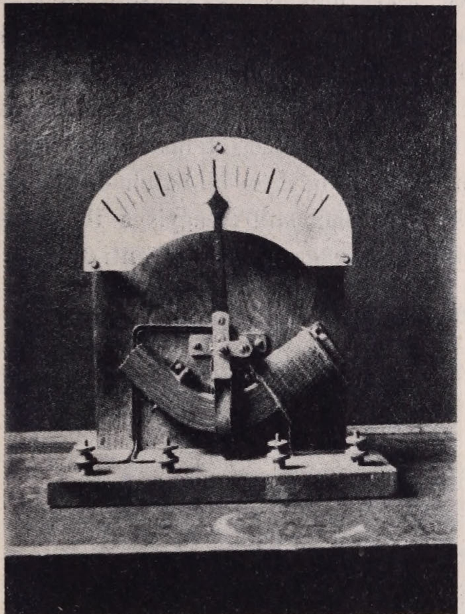
Tehát az átlagos erő, melyet a két tekercs egymásra kölcsönösen kifejt, egyszerüen igy irható fel:

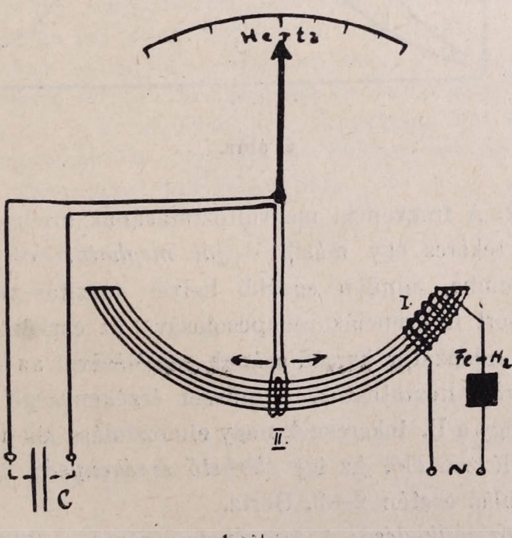
$$P \approx {}^1\!/_2 J_1 J_2 \cos \varphi.$$

Mint látható, *az erő függ φ-től*, a két tekercsben folyó áram fáziskülönbségétől. Jelen esetben (a II. tekercs rövidre van zárva), φ majdnem 180°; azaz *az erő negatív*, tehát taszitás áll be. Ha $\varphi < 90°$-nál, akkor P pozitiv, tehát *vonzás* fog beállani; ha $\varphi = 90°$, akkor $P = 0$, azaz a II. tekercs *nyugalomban* lesz. Már most a II. tekercsbe iktatott kondenzátor segitségével a φ változtatható 0°—180°-ig. Rezonancia esetén $\varphi = 90°$, ekkor és csak ekkor, se vonzás, se taszitás. Más szóval rezonancia esetén (egy bizonyos n_0-nél) a II. tekercs beáll *egy jól meghatározott nyugalmi helyzetbe.* Kitérve a II. tekercset ezen nyugalmi helyzetéből, azonnal vonzás vagy taszitás lép fel, a szerint, hogy φ kisebb vagy nagyobb lett 90°-nál. Az ábra 2. jól megmagyarázza, hogy a φ fáziskülönbség hogyan változik a rezonancia maximum (n_0) környékén.

A rezonancia feltétele:

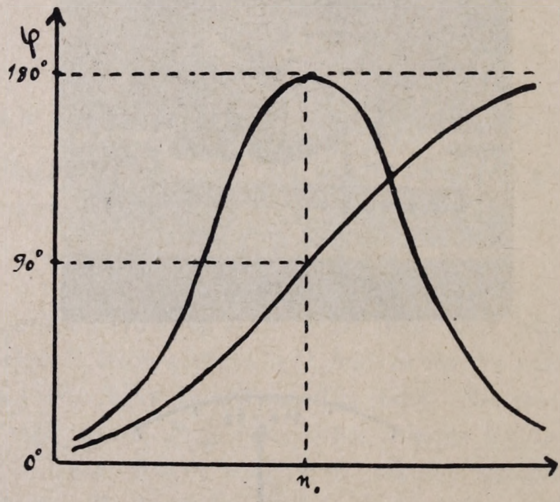
$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{vagy:} \quad L = \frac{1}{\omega^2 C},$$





1. ábra.

ahol: $\omega = 2\pi n$; a készüléknél $C =$ konstans de $L \neq$ kons., mivel a II. tekercs a vasmag mentén elmozdulva, annak önindukciója, ha távolodik a II. tekercstől: kisebbedik, ha közeledik, nagyobbodik. Változtassuk meg az I. körben a frekvenciát (pl. nagyobbítsuk), akkor, hogy a fenti egyenlőség teljesüljön L-nek kisebbednie kell — ezt pedig csak úgy éri el, ha elmozdul előbbi helyzetéből (távolodik az I. tekercstől); vagyis a II. tekercs olyan nyugalmi helyzetbe fog beállani, ahol a fenti feltétel megint tel-



2. ábra.

jesülve lesz. A frekvencia megváltoztatásának eredménye tehát, hogy a II. tekercs egy másik — *jól meghatározott* — helyen jön nyugalomba, minden egyébb helyen taszitás vagy vonzás áll be. Ismert frekvenciák rákapcsolásával az eszközt kalibrálni lehet. A kondenzátor kapacitásának cserélésével az eszköz *mérési határai* változtathatók. A műszer érzékenysége azáltal fokozható, hogy a II. tekercsnek nagy elmozdulása kis önindukcióváltozást idézzen elő. Az igy *elérhető érzékenység* 60°-os mutató elfordulás esetén 2—3. Hertz.

Az eszköz működése: A frekvenciamérőnek a többi mutatóleolvasásos eszközök felett előnye, hogy nem befolyásolja a váltóáramgörbe *alakja* (Formfaktor), a *temperatúra* és *független a ráadott feszültségtől.* A váltóáramgörbe alakjának befolyása a rezonanciakör kiépítése miatt, a temperatúra (JOULE-hő) a vastag tekercsek révén marad befolyástalan. A készüléknek legnagyobb előnye, hogy független a ráadott feszültségtől. Ennek egyszerű oka, hogy a II. tekercs a súlypontján indifferens helyzetben van felfüggesztve, tehát sem nehézségi erő, sem valami más erő (pl. rugó) nem fejt ki erőt a nyugalmi helyzet irányába.

Bászel Károly.

EIN NEUER FREQUENZMESSER.

Der Frequenzmesser ist für die Messung der sog. «technischen Frequenzen» geeignet, in einem Frequenzintervall von 16 bis 1000 Hertz, mit Zeigerablesung (Zeiger-Frequenzmesser). Im Prinzip eine fixe grosse Spule mit Eisenkern, die Fortsetzung des Eisenkernes umgibt eine kleine bewegliche Spule; an die letztere ist ein Kondensator geschaltet, um den Resonanskreis auszubilden. Bei Anlegen verschiedener Frequenz an die grosse Spule, stellt sich die kleine Spule (versehen mit einem Zeiger) in verschiedene, jedoch gut definierte Stellungen ein, wodurch die gesuchte Frequenz an der Zeigerskala unmittelbar ablesbar ist. — Es ist durch diese Einrichtung eine Reihe grundsätzlicher Schwierigkeiten beseitigt: der Einfluss der Spannung, Einschaltdauer (Temperatur) und Wellenform.

Karl Bászel.

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1936. évi XL. matematikai tanulóversenyről.

Társulatunk XL-ik matematikai tanulóversenyét 1936 okt. 17-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 23, Szegeden 8 versenyző jelentkezett, beadtak Budapesten 16 dolgozatot; Szegeden egy versenyző sem adott be dolgozatot.

A verseny tételei a következők voltak:

I. Bebizonyítandó, hogy

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1).2n}=$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

II. Legyen az ABC háromszögön belül választott S pont oly tulajdonságú, hogy az ABS, BCS, CAS háromszögek megegyező területűek. Bebizonyítandó, hogy S az ABC háromszög súlypontja.

III. Legyen a egy tetszőlegesen adott pozitív egész szám. Bebizonyítandó, hogy mindig van egy és pedig csakis egy pozitív egész x, y számokból álló (x, y) számpár, amelyre

$$x+\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}=a.$$

A beadott dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság, mely Rados Gusztáv elnöklete alatt a következő tagokból állott: Egerváry Jenő, Faragó Andor, Fejér Lipót, Stachó Tibor, Szűcs Adolf, Veress Pál és Kőnig Dénes előadó, az előadó előterjesztésének meghallgatása után az 1936. okt. 24-én tartott ülésén a következő javaslatban állapodott meg.

«A versenydolgozatokat illetően örvendetesen kedvező eredményről számolhatunk be, amennyiben a legtöbb beadott dolgozat egy vagy két feladat helyes, és pedig igen változatos módon kifejtett megoldását adja és a legnehezebb, III.-ik, feladatra is öt többé-kevésbbé elfogadható megoldás érkezett be. A legjobb dolgozat szerzője SZELE TIBOR, aki a debreceni ref. gimnáziumban dr. Mester István tanítványa volt. Neki javasoljuk kiadni az első b. Eötvös Loránd díjat. Bár a II. feladatra adott megoldása kissé hosszadalmas, egész dolgozata és különösen a III. feladat kidolgozása szabatos matematikai gondolkozásról tanuskodik. Legközelebb áll hozzá KEPES ÁDÁM, aki a budapesti Szt. István reálgimnáziumban Marczinkó Andor tanítványa volt. Neki javasoljuk a második b. Eötvős Loránd díj kiadását. Dolgozata az első két feladat szép megoldását tartalmazza, a III. tétel kidolgozása azonban fogalmazás tekintetében fogyatékos. Még jobban mutatkozik e hiány SURÁNYI JÁNOS és GERGELY JÁNOS dolgozataiban és így, bár ők is lényegileg mind a három feladatot megoldották, dolgozataikat csak dícséretre ajánlhatjuk».

A Bizottság e javaslatát a Választmány 1936. nov. 12-én tartott ülésén egyhangúlag elfogadta, Az ugyanezen a napon tartott előadó ülésen Rados Gusztáv elnök adta át a díjakat a verseny győzteseinek.

Az 1936. évi XL. matematikai tanulóversenyen díjat nyert dolgozatok.

Szele Tibor dolgozata.

I. feladat. Bebizonyítandó egyenlőségünk baloldalát az

$$\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

azonosság alapján így alakítjuk át:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}. \qquad (1)$$

Írjuk most fel a következő összeget:

$$s_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}.$$

Vonjuk ki ezen egyenlőség mindkét oldalából az

$$\frac{1}{2}s_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

egyenlőség megfelelő oldalait. Eredményünk:

$$s_{2n}-\frac{1}{2}s_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}.$$

Ismételjük meg e kivonást:

$$s_{2n}-\frac{1}{2}s_n-\frac{1}{2}s_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+$$
$$+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}.$$

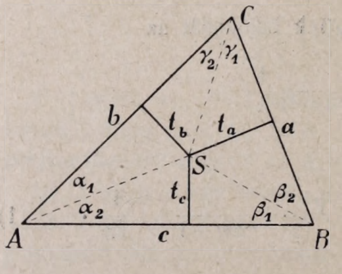
Tehát az

$$s_{2n}-\frac{1}{2}s_n-\frac{1}{2}s_n=s_{2n}-s_n$$

különbség a bizonyítandó egyenlőség (1) alatti átalakított baloldalát adja. Mivel pedig másfelől s_n az első n természetes szám reciprokának összegét jelenti, azért a bizonyítandó egyenlőség jobboldalát így is írhatjuk:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=s_{2n}-s_n. \qquad (2)$$

(1) és (2) szerint igazolandó egyenlőségünk mindkét oldala az $s_{2n}-s_n$ számmal egyenlő, tehát az oldalak egymással is egyenlők, q. e. d.



II. feladat. 1°. Ha a, b, c jelentik az ABC △ oldalait és t_a, t_b, t_c az S-ből a megfelelő oldalakra bocsátott merőleges hosszúságát, akkor a feltétel így fejezhető ki:

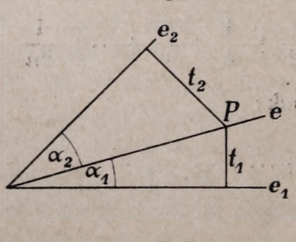
$$\frac{at_a}{2}=\frac{bt_b}{2}=\frac{ct_c}{2}$$

és innen:

$$t_a:t_b=b:a;\quad t_b:t_c=c:b;$$
$$t_c:t_a=a:c.$$

2°. *Segédtétel: Ama pontok mértani helye, melyek két egymást metsző egyenestől állandó arányú t_1 és t_2 távolságra vannak: egy oly egyenes, mely átmegy a két adott egyenes metszéspontján.*

A feladat szempontjából elég a tételt csak O metszőpontjuktól számított e_1, e_2 félegyenesekre bizonyítani.



Ha P oly pont, melynek az e_1, e_2 egyenesektől való t_1, t_2 távolságára nézve $\frac{t_1}{t_2}=k$, akkor egyszersmind

$$\frac{t_1}{OP}:\frac{t_2}{OP}=\sin\alpha_1:\sin\alpha_2=k.$$

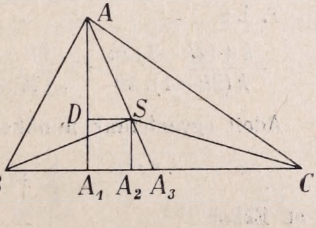
Tehát P-nek az $\widehat{e_1 e_2}$-et $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = k$ arányban osztó e egyenesen kell feküdnie. Ez egyenesnek minden pontja kielégíti e feltételt, az egyenesen nem fekvő pontra pedig a $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{t_1}{t_2}$ arány mindenesetre más lesz. A P pont mértani helye tehát valóban az e egyenes.

3° Az 1° pontban nyert eredményünk szerint tehát S-nek három különböző egyenesen kell feküdnie. E három egyenes rendre A-ra, B-re, C-re illeszkedik és a megfelelő szögeket

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c}{b}, \quad \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{b}{a}$$

arányban osztja. Az S a három egyenes közös pontja, tehát *legfeljebb egy S pont létezik.*

4° Ezzel a feladat első része megoldást nyert. Már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy a háromszög S súlypontja mindig kielégíti a feltételt, tehát *egy ilyen pont viszont mindig létezik.* E végből elég kimutatnunk, hogy pl. az $SBC \, \triangle$ területe az $ABC \, \triangle$-ének $\frac{1}{3}$ része, ha S az $ABC \, \triangle$ súlypontja. Mint ismeretes, a súlypont minden súlyvonalat, tehát a BC oldalhoz tartozót is $2:1$ arányban metsz, úgy, hogy S-től BC-ig terjedő SA_3 darabja $\frac{1}{3}$ része az AA_3 súlyvonalnak. Ha meghúzzuk az AA_1 magasságot és az S-en át BC-val párhuzamos egyenesnek e magassággal való metszéspontját D-vel jelöljük, akkor egyszersmind $\overline{A_1 D} = \frac{1}{3} \, \overline{A_1 A}$. Mivel pedig $A_1 D$ megegyezik az $SBC \, \triangle$-nek SA_2 magasságával, azért világos, hogy $SBC \, \triangle$ területe valóban $\frac{1}{3}$ része az $ABC \, \triangle$-ének, mert alapjuk közös, magasságuk viszonya pedig $1:3$; q. e. d.



III. feladat. Az a adott számhoz mindenesetre választhatunk legkisebb olyan x pozitív egész számot, melyre nézve a $2(a-x)$ szorzat a $k(k-1)$ általános taggal jellemzett

$$2, 6, 12, 20, 30, \ldots$$

sorozatnak tagja. Ebben az esetben

$$(x+y-1)(x+y-2) = k(k-1),$$

azaz $y = k - x + 1$ az a és x ismeretében meg van határozva. Ha tehát

$$\frac{n(n-1)}{2} < a \leq \frac{(n+1)n}{2},$$

akkor $a-x=\frac{n(n-1)}{2}$ és

$$x+y-1=n, \text{ azaz } y=n-x+1.$$

Innen látható, hogy (x, y) egész számpár minden a esetében végtelen sok határozható meg. Ezek közül azonban mindig csak az az egy felel meg, melyet meghatároztunk. Ez megfelel, mert nemcsak x, hanem y is pozitív, ugyanis:

$$n \geqq x.$$

Más számpár azonban sohasem felel meg, mert ha x-et a legközelebbi megfelelő számnak választjuk is $\left(\text{pl. } x=a-\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)$, y már negatív.

Kepes Ádám dolgozata.[1]

I. feladat. Kiindulunk a következő azonosságból:

$$\frac{1}{(2k-1).2k}+\frac{1}{k}=\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}. \qquad (1)$$

T. i.:

$$\frac{k+(2k-1)2k}{k(2k-1).2k}=\frac{2k-1+2k}{(2k-1)2k} \text{ és } \frac{1-4k+2}{(2k-1)2k}=\frac{4k-1}{(2k-1)2k}.$$

Adott egyenletünk mindkét oldalához adjunk hozzá

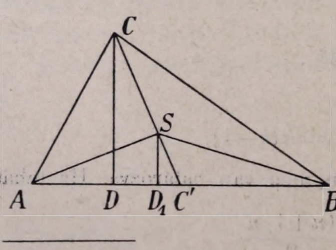
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$$

-et. Ekkor

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5.6}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{(2n-1)2n}=$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}.$$

Az így felírt egyenlet azonosság, mert az (1) azonosság értelmében a baloldalt és jobboldalt sorrendben vett bármely két tag összege egyenlő.



II. feladat. Feltevés szerint

$$t_{ABS}=t_{BCS}=t_{ACS}=\frac{1}{3}t_{ABC}. \qquad (1)$$

Mivel az $ABC\,\Delta$-ben és $ABS\,\Delta$-ben az AB alap közös, kell hogy ehhez tartozó magasságaik aránya $3:1$ legyen. A CS egyenes messe az AB oldalt

[1] A III. feladatra adott megoldását nem közöljük.

C'-ben. Ekkor a hasonló CDC' és SD_1C' háromszögek alapján $\overline{C'C}:\overline{SC'} = 3:1$ és $\overline{CS}:\overline{SC'} = 2:1$. Az ASC és ASC' háromszögek CS, ill. CS' alapra vonatkoztatott magassága közös és, minthogy alapjaik aránya $2:1$, kell, hogy területeik aránya is $2:1$ legyen. Tehát $t_{ASB} = 2t_{ASC'}$ és így az (1) feltétel alapján egyszersmind $t_{ASB} = 2t_{ASC'}$. Ezen egyenlet, tekintve, hogy a két háromszög magassága közös, azt jelenti, hogy $\overline{AB} = 2\overline{AC'}$. A C' tehát az $\overline{AB}$ felezőpontja, azaz CC' az $ABC\triangle$ súlyvonala és ezt az S pont $2:1$ arányban osztja. Az S tehát az $ABC\triangle$ súlypontja, q. e. d.

Jelentés az 1936. évi Károly Irén fizikai tanulóversenyről.

A Társulat XVIII. Károly Irén fizikai tanulóversenyét 1936. október hó 24-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 7 jelentkező volt, Szegeden 6. Budapesten 6 adott be dolgozatot, Szegeden 4. Összesen tehát 13 jelentkező volt és 10 adott be dolgozatot.

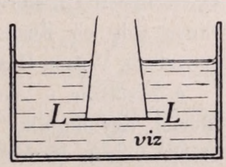
A verseny tételei a következők voltak :

I. 1. A rajznak megfelelő alakú edényt annyira nyomunk be vízbe, hogy a feneke gyanánt szolgáló LL lap éppen leesik, ha 1 kg súlyú vizet töltünk az edénybe. Leesik-e ez a lap, ha

a) 1 kg higanyt,

b) 1 kg alkoholt töltünk az edénybe ?

c) 1 kg súlyú ólomdarabot helyezünk rá ?



2. Mi lesz, ha a bemerített edény felfelé bővül ? A feleleteket indokoljuk meg.

II. 10 mikrofarados sűrítőt 10,000 voltra feltöltünk. Mennyibe kerül a benne felhalmozott energia, ha a villamosművek a kilowattórát 35 fillérért árulják ?

III. Vízszintes papirosra kis kerek foltot rajzolunk. A papirosra üvegkockát helyezünk, úgy, hogy a foltot elfedje. Ha a foltot a kocka valamelyik oldallapján keresztül akarjuk nézni, nem látjuk. Ha azonban a foltra vizet cseppentünk és úgy helyezzük rá az üvegkockát, látjuk. Mi ennek a magyarázata ? (Az üvegnek levegőre vonatkoztatott törésmutatója $\frac{5}{3}$, a vízé $\frac{4}{3}$.)

A dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság, melynek elnöke Tangl Károly, tagjai Mikola Sándor, Pogány Béla, Rybár István és Szabó Gábor voltak, 1936. november 5-én tartott ülésén Szabó Gábor előadói jelentéstétele alapján a következő javaslatban állapodott meg :

«Legjobban csepei Zoltán István dolgozott. Az első feladat hatodik kérdése kivételével mind a három feladatot jól oldotta meg. Magyarázatai világosak. Csak az első feladat megoldását bevezető tárgyalása hosszadalmas és nem eléggé szabatos. Utána SZÉLPÁL ISTVÁN következik, aki az első feladat négy kérdésére igen ügyesen, röviden felelt; a második feladatot jól oldotta meg és a harmadik feladatra is kifogástalanul adta meg a magyarázatot, de állításait számadatokkal nem támasztotta alá. Az első feladat két kérdésére nem jól felelt.

Harmadik helyre ifj. CSIZMÁS LAJOS és KEPES ÁDÁM dolgozatait sorolhatjuk. Előbbi az első és harmadik feladatot teljesen és jól oldotta meg, de hosszabb matematikai meggondolásokkal. A második feladat megoldásában jó gondolatmenet szerint haladt, de eredménye hibás, mert a kapacitás és feszültség értékeit nem ugyanazon mértékrendszer egységeiben kifejezve helyettesítette az energia képletébe. Utóbbi pedig (KEPES ÁDÁM) az első és harmadik feladatot jól oldotta meg, de az elsőt felesleges számítások előrebocsátásával. A második feladatban ugyancsak az egységek elvétése miatt hibás eredményt hozott ki.

Ezek alapján a bizottság azt javasolja, hogy CSEPEI ZOLTÁN ISTVÁN-nak, aki a kaposvári Somssich Pál rg-ban végzett és ERCSEY JAKAB tanár tanítványa volt, az első Károly Irén-díj, SZÉLPÁL ISTVÁN-nak pedig, aki a szegedi Klauzál Gábor rg-ban végzett és DOMBI BÉLA tanár tanítványa volt, a második Károly Irén-díj adassék ki; végül, hogy ifj. CSIZMÁS LAJOS, aki a bpesti III. ker. Árpád rg-ban végzett és FÁJ ÁRPÁD tanár tanítványa volt és KEPES ÁDÁM, aki a bpesti XIV. ker. Szt. István rg-ban végzett és WEGER HENRIK tanár tanítványa volt, dícséretben részesíttessék.»

A Bizottság e javaslatát a Választmány 1936. november 12-én tartott ülésén egyhangúlag elfogadta. Az ugyanezen a napon tartott rendes előadó-ülésen RADOS GUSZTÁV elnök kihirdette a verseny eredményét és a díjakat átadta a győzteseknek.

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1936. évi május 30-án tartott XLI. közgyűlés.

A közgyűlést Rados Gusztáv elnök az alábbi beszéddel nyitotta meg:

Tisztelt Közgyűlés!

Szeretettel üdvözlöm a báró Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat itt egybegyűlt tagjait és t. vendégeinket, külön melegséggel a vidékről jötteket, akik megjelenésükkel Társulatunk iránti, áldozatokra is kész érdeklődésüknek tanujelét adják. Az idei társulati évünk zavartalan, csendes munkában telt el és csak néhány kiemelkedő mozzanatról számolhatunk be. Mindjárt a társulati év elején ünnepelte az ország és vele együtt az egész világ ősrégi Pázmány Péter-tudományegyetemünk megalapitásának 300. évfordulóját. Ebből az ünneplésből Társulatunk is kivette a részét, amidőn üdvözlő iratában kiemelte egyetemünknek, a hazai művelődés e kiváló gócpontjának, dicsőséges multját és jelenét, amelynek tanárai közül számosan örökbecsű alkotásokkal ajándékozták meg a világot s ily módon az egész kultúrvilágnak hálás elismerését kiérdemelték, amiről a jubileumi ünnep fényes lefolyása meggyőzően tanuskodott.

Egy másik kiemelkedő eseménye a lefolyt évnek a f. é. március 2-ra esett Kőnig Gyula-emlékünnepélyünk volt, amelyen megemlékezve úttörő tanítómesterünknek a kutatás és tanítás terén szerzett elévülhetetlen, nagy érdemeiről, az 1936. évre eső Kőnig Gyula-érmet Kalmár László-nak, a Ferenc József-egyetem magántanárának átnyujthattuk, aki fiatal kora ellenére nagyértékű s mélyen szántó kutató munkájának eredményeivel magára vonta a hazai és külföldi körök figyelmét és bőven megérdemelte azt a kitüntetést, amelyben Társulatunk őt részesítette. Nagy lelki megnyugvásunkra és hazánk jövője iránti bizodalmunk megerősítésére szolgál az a körülmény, hogy a jelen mostoha viszonyok mellett sem lankad ifjúságunk munkakedve és munkaereje és hogy eszményi tudományszeretettel, áldozatos munkával, nagyértékű alkotásokkal gazdagítja azokat a tudományokat, amelyeknek művelését Társulatunk zászlajára irta.

Mélységes hálával emlékezünk meg arról a nagylelkű támogatásról, amelyben a Magyar Tudományos Akadémia Társulatunkat részesíteni kegyes volt, amidőn segélyét 500 P-ről 1000 P-re felemelte s ezzel a taglétszámunk sajnálatos csökkenése ellenére folyóiratunknak zavartalan megjelenhetését biztosította.

Ugyancsak hálás köszönetet mondunk a magas vallás- és közoktatásügyi kormányzatnak azért a bevételeinket számottevően emelő intézkedéseért, amellyel folyóiratunk előfizetési árát 61 középiskola számára kiutalványozta.

Tisztelt Közgyűlés! Ámbár a viszonyok ma még csak csekély javulás tüneteit mutatják, mi bízva a magyar igazság végleges győzelmében, tántorítlanul haladunk előre azon az úton, amelyet dicső elődeink számunkra kijelöltek: a pihenést nem ismerő és — ha kell — áldozatos munka útján, mert él bennünk is az a tőlük vallott meggyőződés, hogy értékes kultúrjavak termelésével nemzetünk létalapjait megerősítjük.

E termelő munkában való részvételre híva fel kedves tagtársaimat, az 1936. évi közgyűlésünket megnyitom.

Az elnöki megnyitó után Pogány Béla ügyvezető titkár számolt be a Társulat lefolyt évi működéséről és az év Társulatunkat érdeklő fontosabb eseményeiről:

Tartottunk 9 előadó, 3 választmányi és 1 közgyűlést. Az előadó üléseken 12 előadás hangzott el és pedig 7 matematikai és 5 fizikai tárgyú. — A titkári jelentés során kiemeli, hogy Rados Gusztáv elnököt a M. Tud. Akadémia algebrai és számelméleti kutatásaiban elért fontos eredményeiért az Akadémiai Nagyjutalommal, Bláthy Ottó Titusz választmányi tagot pedig a gyakorlati elektrotechnika körébe vágó úttörő munkásságáért a Marcibányi Jutalommal tüntette ki. Tangl Károly alelnököt a m. kir. vallás- és közoktatásügyi miniszter az Országos Természettudományi Tanács elnökévé nevezte ki.

A közgyűlés meleg ünneplésben részesíti a kitüntetetteket.

A továbbiakban beszámol a titkári jelentés a VI. König Gyula jutalom odaítéléséről, az 1935. évi tanulóversenyek eredményeiről, a Mat. és Fiz. Lapok-ról, valamint cserefolyóiratainkról. — Jelenti, hogy az alapszabályok értelmében 6 választmányi tag, úgyszintén az egész tisztikar megbizatása lejárt.

A közgyűlés a lelépő választmányi tagokat, névszerint Faragó Andor-t, Gruber Nándor-t, Mikola Sándor-t, Ortvay Rudolf-ot, Riesz Frigyes-t és Rybár István-t, valamint a tisztikart, névszerint Rados Gusztáv-ot (elnök), Tangl Károly-t és Fejér Lipót-ot (alelnökök), Pogány Béla-t és Kőnig Dénes-t (titkárok), Császár Elemér-t és Szücs Adolf-ot (jegyzők), végül Szabó Gábor-t (pénztáros) újra megválasztja.

A számvizsgáló-bizottságba a következő évre a választmány részéről Faragó Andor és Tass Antal, a közgyűlés részéről Renner János és Stachó Tibor küldettek ki.

Szabó Gábor pénztári jelentéséből a zárszámadást és a vagyonmérleget itt közöljük:

1935. évi zárszámadás.

Bevétel:

		Pengő
1. 1934. évi zárszámadási maradvány:		
a) kézi pénztárban	65·64 P	
b) postatakarékpénztárban	882·16 «	2850·80
c) Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban	883·— «	
d) takarékkönyvben (Károly Irén-alap)	1020·— «	
2. Tagdíjak		1246·—
3. Előfizetési díjak		490·94
4. Adományok		44·—
5. Államsegély		400·—
6. Magyar Tudományos Akadémia segélye		1000·—
7. Kamatok		53·17
8. Vegyesek		90·82
	Összesen:	6175·73

Kiadás:

		Pengő
1. Nyomdai költségek		2700·—
2. Tanulóverseny		80·—
3. Kezelési költségek és a Díjkezelőség jutaléka		106·08
4. Vegyesek		218·02
5. Pénztári maradvány:		
a) kézipénztárban	52·84 P	
b) postatakarékpénztárban	1100·79 «	
c) Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban	898·— «	3071·63
d) takarékkönyvben (Károly Irén-alap)	1020·— «	
	Összesen:	6175·73

Vagyon-mérleg.

Vagyon:

		Korona	Pengő
1. Koronaértékpapirosok (Magy. Lesz. és Pénzv. Bank Letétkimutatása, a Pesti Hazai Első Takarékpénztár betétkönyve és a Magy. kir. Állampénztár Fizetési Könyve szerint)		29,008·—	
2. Pénzkészlet:			
a) kézipénztárban	52·84 P		
b) postatakarékpénztárban	1100·79 «		
c) a Magy. Lesz. és Pénzv. Bankban	898·— «		3071·63
d) takarékkönyvben (Károly Irén-alap)	1020·— «		
3. Tagdíj és előfizetési díj hátralék			200·—
4. Nyomtatványok			100·—
	Összesen:	29,008·—	3371·63

Teher:

	Korona	Pengő
1. Nyomdai tartozás		31·75
2. Egyenleg	29,008·—	3339·88

Szabó Gábor s. k.
pénztáros.

Megvizsgáltuk és helyesnek találtuk.

Budapest, 1936. április hó 15-én.

Tass Antal s. k., Stachó Tibor s. k., Faragó Andor s. k.,
Renner János s. k.

Előadások:

1935. nov. 14. A tanulóversenyek eredményének kihirdetése. — SZÜCS ADOLF: Megjegyzések az idei matematikai tanulóverseny 1. tételéhez. KŐNIG DÉNES: Megjegyzések az idei matematikai tanulóverseny 3. tételéhez.

1935. dec. 12. TURÁN PÁL és ERDŐS PÁL: Az interpoláció alappontjainak eloszlásáról. (Előadta TURÁN PÁL.)

1936. febr. 6. BUDÓ ÁGOSTON: Újabb vizsgálatok a kétatomos molekulák triplett energianivóiról.

1936. márc. 5. SZÁSZ PÁL: A szabályos sokszögek néhány maximum- és minimumtulajdonságáról.

1936. márc. 19. GYULAI ZOLTÁN: Megfigyelések az alkalihalogénkristályok növekedésének mechanizmusához.

1936. ápr. 2. LIPKA ISTVÁN: Jelentés az 1936. évi KŐNIG GYULA-jutalomról. KALMÁR LÁSZLÓ: A számelmélet alaptételéről.

1936. ápr. 30. BARTA JÓZSEF: Az egyenletesen megterhelt körlemez kerületérték feladatáról.

1936. máj. 28. BUKOVSZKY FERENC: Nagyintenzitású áramlökésekkel táplált neonkisülés fényemissziójáról. LEVIUS ERNŐ: Erősáramú gázkisülések dynamikus karakterisztikáiról.

1936. máj. 30. RADOS GUSZTÁV: Egy numerikus kongruenciáról.

*

Választmányi ülések voltak: 1935. nov. 14.; 1936. ápr. 2.; 1936. máj. 23.

*

Közgyűlés (XLI): 1936. máj. 30.

Új tagok:

Barta József mérnök, műegyet. előadó, Budapest.
Hajós György műegyet. tanársegéd, Budapest.
Neumann Erzsébet tanárnő, Budapest.
Szelianszky Ferenc reálisk. tanár, Szeged.
Szőkefalvi Nagy Béla egyet. gyakornok, Szeged.
Varga Zoltán tanárjelölt, Gödöllő.
Vince István tanár, Budapest.
Weiszfeld Endre egyet. hallg., Budapest.
Dr. Zányi László kegyesrendi tanár, Szeged.

Meghaltak:

Bodola Lajos ny. műegyet. tanár, Budapest.
Buchböck Gusztáv egyet tanár Budapest.
Bujk Béla ny. rg. tanár, Karcag.
Gruber Nándor ny. reálisk. tanár, Budapest, vál. tag.
Grynaeus István, egy. m. tanár, Budapest.
Jakab Imre, geofizikus, Chile.
Ilosvay Lajos nyug. államtitkár, műegy. tanár, Budapest.
Karay Sándor ny. ref. gimn. igazgató, Debrecen.
Koschowitz Gyula honvéd alezredes, Budapest.
Privorszky Alajos ny. főisk. tanár, Budapest.
Tóth Aladár, főisk. tanár, Pannonhalma, alapító-tag.
Waldapfel János nyug. gyakorló gimn. tanár, Budapest.

Kimutatás

az 1936. április 5-től október 31-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíjak.

1932-re: Bay Zoltán (6), Boharcsik Pál (6), Girsik Géza (2), Hartly Domokos (6), Kerényi Dénes (4), Lajta Ernő (3), Mihalovits Alajos (2), Runtágné Perényi Gizella (3), Tóth Lajos (6), Walek Károly (6). *Összesen 44 P.*

1933-ra: Ádler Erzsébet (2), Baintner Géza (4), Boharcsik Pál (4), Mihalovits Alajos (6), Runtágné Perényi Gizella (6), Scholc Pál (8), Terkán Lajos (6), Theisz Edéné Vajk Magda (6), Tóth Géza (6). *Összesen 48 P.*

1934-re: Ádler Erzsébet (8), Blau Györgyné (4), Csada Imre (6), Csaplár Konrád (2), Dér Zoltán (3), Frank János (2), Görbe Imre (6), Kronberger Ede (2), Magi Ferenc (6), Magyar Márta (4), Mihalovits Alajos (6), Rigó Ferenc (8), Runtágné Perényi Gizella (3), Scholc Pál (8), Skopál István (8), Terkán Lajos (4), Tóth Géza (4), Turán Pál (6). *Összesen 90 P.*

1935-re: Ádler Erzsébet (6), Bródy Imre (8), Bugarszky István (8), Cholnoky Jenő (8), Csaplár Konrád (6), Erdey Grúz Tibor (8), Erdős Pál (6), Ferenczy Zoltán (8), Frank János (6), Gróh Gyula (8), Krbek Ferenc (8), Lengyel Béla, műegy. (8), Marcell György (8), Mihalovits Alajos (6), Neugebauer Tibor (8), Péch Aladár (8), Róna Zsigmond (8), Schay Géza (8), Scholc Pál (4), Spitz Iván (4), Szász Pál (8), Wodetzky József (8). *Összesen 158 P.*

1936-ra: Bródy Imre (8), Bugarszky István (8) Cholnoky Jenő (2), Darvas Jenő (8), Erdős Pál (4), Gróh Gyula (8), Hajós Géza (6), Kovács János (8), Krbek Ferenc (8), Kuzaila Péter (6), Lengyel Béla, műegy. (8), Marcell György (8), Mihalovits Alajos (6), Nagy Ferenc (8), Neográdyné Haich Sarolta (8), Neugebauer Tibor (8), Papp Margit (8), Schaller Mátyás (6), Szabó Gábor (8), Széky István (6), Varga Zoltán (6), Winter József (8). *Összesen 154 P.*

1937-re: Bauer Mihály (8), Ortvay Rudolf (8), Török Elemér (6), Varga Zoltán (2). *Összesen 24 P.*

2. Előfizetési díjak.

1935-re: Ferenc József Tanítók Háza, Bp. VIII. (8), Ref. gimn. Bp. IX. (8) *Összesen 16 P.*

1936-ra: Műegyet. I. Mat. Gyüjtemény, Bp. XI. (8), Ferenc József Tanítók Háza, Bp. VIII. (8), Technol. és Anyagvizsg. Intézet, Bp. VIII. (7·94), Miskolci ref. gimn. (4). *Összesen 27·94 P.*

1937-re: Miskolci ref. gimn. (4).

3. Adomány és segély.

Nagy L. József 20 P, Magyar Tud. Akadémia 500 P.

Budapesten, 1936 okt. 31-én.

Szabó Gábor
pénztáros.

Újabb magyar matematikai könyvek.

Kürschák József: *Matematikai versenytételek.* Tanulóversenyein kitűzte az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat 1894—1928; megoldásokkal és jegyzetekkel; VIII+133 lap, Szeged, 1929.

Bolti ára 10 P; Társulatunk tagjai 40%-os kedvezménynyel megrendelhetik a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok kiadóhivatalában (Budapest, XI., Verpeléti-út 22, III. 4.)

Grosschmid Lajos: *Másodfokú alakok algebrája* (Matrixok és elemi osztók); XVI+741 lap, Budapest, 1933.

Bolti ára 20 P; Társulatunk tagjai 50%-os kedvezménynyel megrendelhetik Társulatunk pénztárosánál, Szabó Gábor tanár úrnál (Budapest, XI., Verpeléti-út 7).

Stachó Tibor: *Felsőbb mennyiségtan;* 623 lap, Budapest, 1933.

Bolti ára kötve 30 P. Főbizományos: Németh József könyvkereskedése (Budapest, XI., Horthy Miklós út 15).

Veress Pál: *Valós függvények,* 175 lap, Budapest, 1934.

Bolti ára fűzve 6 P, kötve 7·50 P; Társulatunk tagjai 20%-os kedvezménnyel megrendelhetik a Studium könyvkereskedelmi részvénytársaságnál (Budapest, IV., Kecskeméti-u. 8.)

Zigány Ferenc és **Uhlyárik Jenő:** *Ábrázoló mértan;* 436 lap és 7 tábla, Budapest, 1934.

Bolti ára 20 P. Főbizományos: Németh József könyvkereskedése (Budapest, XI., Horthy Miklós-út 15.).

Szász Pál: *A differenciál- és integrálszámítás elemei* (az előszót irta: Fejér Lipót), I. köt. XIV+476 lap, II. köt. X+460 lap, Budapest, 1935.

A két kötet bolti ára 38 P, mely összeg a Franklin-Társulatnál (Budapest, IV., Egyetem-u. 4) 3 pengős részletekben törleszthető.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA. — ÁBRAI V.