MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

NEGYVENKETTEDIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES és POGÁNY BÉLA

BUDAPEST, 1935

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

negyvenkettedik kötetének tartalma.

*

MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES ÉS POGÁNY BÉLA

NEGYVENKETTEDIK ÉVFOLYAM

1935

JANUÁR—JÚNIUSI FÜZET

BUDAPEST, 1935

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Kőnig Dénes* **(XI., Horthy Miklós-út 28., Hadik-pensio)**, a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* **(XI., Budafoki-út 8.)** címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikban lehető rövidségre törekedjenek, azokhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghivók expedíciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Szabó Gábor* pénztáros címére (Budapest, XI., Verpeléti-út 7.) intézendők. Postatakarékpénztári csekkszámla száma: 5997.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány*, Budapest, XI., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *B. Pogány*, Budapest, XI., Budafoki-út 8.

A LEBESGUE-FÉLE INTEGRÁLRÓL, MINT A DIFFERENCIÁLÁS MŰVELETÉNEK MEGFORDÍTÁSÁRÓL.[1]

A valós függvénytannak abban a nevezetes ágában, amely lehetőleg általános függvények integrálásával és differenciálásával és rokon problémákkal foglalkozik, az integrálra vonatkozó tételek időbeli és egy ideig logikai sorrendben is megelőzték azokat, amelyeket differenciálási tételeknek lehet nevezni. Így például az a tétel, hogy a monoton függvény majdnem mindenütt differenciálható, LEBESGUE alapvető könyvében[2] csaknem az utolsó oldalon kerül szóba, mint az integrálási tételek következménye, annak dacára, hogy benne nemcsak az integrálfogalom nem szerepel, de még a halmazok mérésének is csak a legegyszerűbb, néhány szóval elintézhető esete, t. i. a nullahalmaznak (0 mértékű halmaznak) a «majdnem mindenütt» kifejezésben föltételezett fogalma jut szerephez. Ennek a tételnek későbbi, az integrál fogalmától mentes és fokról-fokra egyszerűbb bizonyításai, melyek közül a sorrendben utolsót néhány év előtt ebben a folyóiratban közöltem,[3] kihatottak a differenciálással kapcsolatos többi kérdés sorsára is, annyira, hogy 30 évvel az elmélet megszületése után, 1932-ben, a zürichi

[1] E dolgozat részletes kifejtését adja azon előadás egy részletének, melyet a szerző *Az integrálfogalom átalakulásáról* címen 1934 nyarán a budapesti Tanárképzőintézet továbbképző tanfolyamán tartott (L. e Lapok 41. k., 162. l.). *Szerk.*

[2] H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris, Gauthier-Villars, 1904.

[3] RIESZ FRIGYES, A monoton függvények differenciálhatóságáról, *Mat. és Fiz. Lapok*, 38 (1931), 123—131. oldal.

kongresszuson tartott referáló előadásomban,[4] úgy tudtam csoportosítani a mások és kis részben a magam vizsgálatait, hogy a legnevezetesebb «differenciálási» tételek, köztük olyanok is, amelyek valamikor sokkal mélyebben fekvőknek látszottak, az imént idézett tétel csaknem közvetlen korolláriumaiként jelentkeztek. Előadásom végén azután megkockáztattam azt az állítást, hogy ugyancsak ebből az egyetlen tételből az integrálás teljes elmélete is nagyon gyorsan, szinte egy csapásra adódik. Az a gondolat, hogy az integrálás a differenciálás műveletének megforditásaként tárgyaltassék, természetesen nem új; fölmerült már a klasszikus integrálfogalmakkal kapcsolatban is és fölmerült újabban nemcsak magára a Lebesgue-féle integrálra, hanem különösen annak Denjoy, Perron és Kintchine nevéhez fűződő általánositásaira is, melyeknek már a kiinduló pontja is a primitív függvény létezésének és megszerkesztésének a problémája. A jelen dolgozat célja egyedül az, hogy a Lebesgue-féle integrálra az emlitett előadás végén tett állításomat valóra váltsam.

A dolgozat kiindulópontja az integrálhatóságnak pozitív függvényekre természetszerűen kínálkozó definíciója: a függvény integrálható, ha van hozzá olyan növekvő függvény, melynek a megadott függvény majdnem mindenütt differenciálhányadosa. Maga az integrálérték pedig az összes ilyen növekvő függvények változásának, azaz a végpontban és a kezdőpontban fölvett értékek különbségének alsó határa. Változó előjelű függvényekre pozitív integrálható függvények különbségeként való előállításuk révén térünk át; de talán érdekes a közvetlen definíciót is megfogalmazni, mely különben tárgyalásainkból evidens módon adódik. A függvény integrálható, ha van olyan korlátos változású függvény, melynek a megadott függvény majdnem mindenütt differenciálhányadosa. Ha van ilyen függvény, akkor több is van, és van köztük olyan, amelynek totális variációja a lehető

[4] F. Riesz, Sur l'existence de la dérivée des fonctions d'une variable réelle et des fonctions d'intervalle, *Verhandlungen des internat. Mathematiker-Kongresses*, Zürich, 1932, 1, 259—269. oldal.

legkisebb. Ez a függvény a megadott függvény integrálfüggvénye, amely a határozott integrált a szokott módon, mint az integrációs köz végpontjában és kezdőpontjában fölvett értékeinek különbségét, szolgáltatja. Ezt a minimumot szolgáltató függvényt egyébként azzal a tulajdonságával is jellemezhetnők, hogy teljesen folytonos; azonban a minimumsajátságra való hivatkozás a tárgyalás folyamán célszerűbbnek bizonyult.

Megjegyzem még, hogy kiindulhattunk volna a differenciálhányadosnak egy kevesebbet követelő értelmezéséből is, t. i. az alapul vett számköznek folytatólagos albeosztásokkal képezett, megadott beosztássorozatánál a csupán az egyes részközökre megalkotott különbségi hányadosoknak vizsgálatából, röviden mondva a megadott hálózatra nézve való differenciálásból is. Ennek a kiindulópontnak egyik kisebb előnye, hogy a differenciálhányados majdnem mindenütt való létezése még valamivel könnyebben adódik, legfőbb előnye pedig az, hogy evidens módon alkalmazható többváltozós függvényekre és ezzel ezen függvények integrálására is.

Tárgyalásainkban a «majdnem mindenütt» kifejezést, mint magától értetődőt, rövidség kedvéért sokszor elhagyom és csak a definiciók és tételek megfogalmazásában és még néha a hangsúly kedvéért használom. Integrálandó függvényeink egyszersmindenkorra az illető közön általában csak majdnem mindenütt vannak megadva, az egyenlőségek és egyenlőtlenségek csak majdnem mindenütt érvényesek, függvénysorozataink csak majdnem mindenütt összetartók. Ez a megállapodás azonban természetesen nem vonatkozik az integrálfüggvények gyanánt vagy ilyenek keresésénél tekintetbe jövő növekvő függvényekre.

Az integrál értelmezése.

A határozott integrált, egyelőre pozitív[5] függvényekre, a következő módon értelmezzük.

[5] Nem-negatív függvény helyett röviden pozitív függvényt, nem-fogyó helyett pedig növekvőt mondunk.

Az $a \leqq x \leqq b$ *számközön megadott* $f(x)$ *függvényről akkor mondjuk, hogy ezen a számközön integrálható, ha van olyan a számközön értelmezett növekvő* $F(x)$ *függvény, melyre majdnem mindenütt*

$$F'(x) = f(x).$$

Ha van ilyen $F(x)$ függvény, úgy végtelen sok van;[6] *képezzük* valamennyire *az* $F(b) - F(a)$ különbséget és tekintsük ezen *különbségek alsó határát. Ezen alsó határt nevezzük az* $f(x)$ *függvény határozott integráljának az* (a, b) *közön*; jelölése a szokásos

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Azonnal fölsorolhatnók az integrálnak néhány, az imént adott értelmezésből közvetlenül látható tulajdonságát; a tárgyalás rendje kedvéért célszerűbb előrebocsátanunk a következő általános tételt, mely összes vizsgálatainknak leghathatósabb eszköze.

1. *Legyen* $g(x)$ *egy az* $a \leqq x \leqq b$ *számközön tetszés szerint megadott függvény és jelentse* $\{G\}$ *mindazon, a számközön értelmezett, növekvő* $G(x)$ *függvények halmazát, melyekre majdnem mindenütt*

$$G'(x) \geqq g(x).$$

Ha a $\{G\}$ *halmaz nem üres, úgy van minimális lejtésű, azaz olyan* $G^*(x)$ *eleme, melyre és a halmaz bármely más* $G(x)$ *elemére az* (a, b) *köz minden* (c, d) *részén*

$$G^*(d) - G^*(c) \leqq G(d) - G(c),$$

vagy más szóval, amelyre az összes $G(x) - G^*(x)$ *függvények növekvők.*

Mindenekelőtt világos, hogy a tétel bebizonyításánál azokra a $G(x)$ függvényekre szorítkozhatunk, amelyekre $G(a) = 0$.

---

[6] Az $F(x) + C$ függvényeken kívül ilyen még például az $F(x) + C(x)$ függvény, ahol $C(x)$ az (a, b) intervallumnak megfelelő ismeretes CANTOR-féle monoton függvény.

Jelöljük $G^*(x)$-szel az (a, b) köz minden x helyén ezen $G(x)$ függvények értékeinek alsó határát. Ez az alsó határ evidenter létezik, nem negatív, $G(a)=0$ és az is világos, hogy $G^*(x)$ növekvő függvény. Azt állítom, hogy az így értelmezett $G^*(x)$ függvény a $\{G\}$ halmazba tartozik, vagyis hogy

$$G^{*\prime}(x) \geqq g(x) \tag{1}$$

és hogy a halmaz minden $G(x)$ függvényére a $G(x)-G^*(x)$ különbség növekvő függvény. Vagyis röviden, azt állítom, hogy a $G^*(x)$ függvénynek megvannak a tételünkben követelt tulajdonságai.

Kezdjük a második állításon. Legyen $G(x)$ a $\{G\}$ halmaz egy tetszésszerinti, $G_1(x)$ pedig egy olyan eleme, amelyre

$$G_1(c) < G^*(c) + \varepsilon;$$

ε egy tetszés szerint kicsiny, megadott pozitív szám. Tekintsük azt a $G_2(x)$ függvényt, mely az $a \leqq x \leqq c$ közön azonos $G_1(x)$-szel, míg $c \leqq x \leqq b$-re

$$G_2(x) = G(x) + G_1(c) - G(c).$$

Világos, hogy a $G_2(x)$ függvény a $\{G\}$ halmazba tartozik; ennélfogva

$$G^*(d) \leqq G_2(d) = G(d) + G_1(c) - G(c) < G(d) + G^*(c) + \varepsilon - G(c),$$

azaz

$$G^*(d) - G^*(c) \leqq G(d) - G(c) + \varepsilon$$

és pedig bármely pozitív ε-ra, tehát

$$G(c) - G^*(c) \leqq G(d) - G^*(d).$$

Vagyis a második állítás helyes.

Az (1) állítás bebizonyitására tekintsünk olyan, halmazunkba tartozó $G_n(x)$ sorozatot, melyre $G_n(b) - G^*(b) \leqq 2^{-n}$, tehát a

$$\sum_1^\infty [G_n(b) - G^*(b)]$$

sor összetartó, úgy hogy tehát összetartó a

$$\sum_1^\infty [G_n(x) - G^*(x)] \tag{2}$$

növekvő függvényekből álló sor is. A (2) sor $S(x)$ összege növekvő függvény, tehát majdnem mindenütt létezik az $S'(x)$ differenciálhányados. Mivel továbbá növekvők az $S(x) - S_n(x)$ függvények is, ahol az $S_n(x)$-ek a (2) sor részletösszegei, azért $S'_n(x) \leqq S'(x)$, vagy más szóval a

$$\sum_1^{\infty} [G'_n(x) - G^{\star\prime}(x)] \tag{3}$$

pozitiv tagú sor részletösszegei az $S'(x)$ korlát alatt maradnak és ennélfogva a (3) sor majdnem mindenütt összetartó. Tehát egyszersmind a (3) sor tagjai majdnem mindenütt 0-hoz tartanak, vagyis

$$G'_n(x) \to G^{\star\prime}(x). \tag{4}$$

De $G'_n(x) \geqq g(x)$ és ezért (4) alapján ugyancsak $G^{\star\prime}(x) \geqq g(x)$.

Ezzel az (1) állítást is bebizonyítottuk.

A most bebizonyított tételtől a következő megjegyzéssel jutunk vissza az integrálható függvényekhez. Tegyük föl speciálisan, hogy a tételben szereplő $g(x)$ függvény integrálható, azaz, hogy vannak a $\{G\}$ halmazban olyan $G(x)$ függvények is, amelyekre majdnem mindenütt pontosan

$$G'(x) = g(x).$$

Azt állítom, hogy akkor ilyen a $G^\star(x)$ függvény is. Mivel ugyanis $G(x) - G^\star(x)$ növekvő, azért majdnem mindenütt

$$g(x) = G'(x) \geqq G^{\star\prime}(x);$$

ebből és az (1) egyenlőtlenségből adódik, hogy majdnem mindenütt pontosan

$$G^{\star\prime}(x) = g(x).$$

Vagyis, a régebbi jelöléssel, ha az $f(x)$ függvény az (a, b) közön integrálható, akkor integrálja a tekintetbe jövő $F(b) - F(a)$ értékeknek nem csupán alsó határa, hanem van az $F(x)$ függvények közt olyan, $F^\star(x)$, amelyre pontosan

$$\int_a^b f(x)\,dx = F^\star(b) - F^\star(a).$$

Ugyancsak minden részközön, és ugyanerre az $F^{\star}(x)$ függvényre,

$$\int_c^d f(x)\,dx = F^{\star}(d) - F^{\star}(c).$$

Mert jelentsen $F_1(x)$ egy csupán a (c, d) közön tekintett növekvő függvényt, melyre ott majdnem mindenütt $F_1'(x) = f(x)$; ilyen például maga az $F^{\star}(x)$ függvény is, ha csupán a (c, d) közön tekintjük. Az $f(x)$ függvény tehát mindenekelőtt integrálható a (c, d) részközön is. Képezzük az (a, b) közön azt az $F(x)$ növekvő függvényt, mely a (c, d) közön azonos $F_1(x)$-szel, míg az (a, c) és (d, b) közökön, egy-egy additív konstanstól eltekintve, az $F^{\star}(x)$-szel egyezik meg. Akkor az (a, b) közön majdnem mindenütt $F'(x) = f(x)$, tehát $F(x) - F^{\star}(x)$ növekvő függvény, vagyis speciálisan

$$F_1(d) - F_1(c) \geqq F^{\star}(d) - F^{\star}(c).$$

Azaz $F^{\star}(d) - F^{\star}(c)$ a (c, d) közön tekintetbe jövő $F(d) - F(c)$ különbségek alsó határa, vagyis az adott értelmezés szerint $f(x)$-nek a (c, d) közön képezett integrálja.

Kimondhatjuk tehát a következő tételt:

2. *Az (a, b) közön integrálható pozitív $f(x)$ függvénynek van úgynevezett határozatlan integrálja (vagy máskép integrálfüggvénye), $F^{\star}(x)$, úgy hogy az (a, b) közön és részközein való integrálok az $F^{\star}(x)$ megfelelő két értékének különbségei. Az $f(x)$ függvény majdnem mindenütt differenciálhányadosa az $F^{\star}(x)$ függvénynek és az utóbbi mindazon növekvő $F(x)$ függvények közt, melyekre majdnem mindenütt $F'(x) \geqq f(x)$, minimális lejtésű.*

Az $F^{\star}(x)$ integrálfüggvény minimumsajátságának evidens következménye, hogy a függvény folytonos. Egyébként könnyű átlátni, hogy kezdettől fogva szorítkozhattunk volna folytonos $F(x)$ és $G(x)$ növekedő függvényekre.

Annak, hogy egy megadott növekvő függvény integrálfüggvény legyen, nagyon jól használható elégséges föltételét adja meg a következő tétel:

3. *Ha az $a \leqq x \leqq b$ számközön $F(x)$, $G(x)$ és $F(x) - G(x)$ növekvő függvények és ha $F(x)$ integrálfüggvény, akkor $G(x)$ is az.*

Legyen ugyanis $G^*(x)$ a $G'(x)$ integrálfüggvénye; akkor növekvő a $H = (F - G) + G^*$ függvény és differenciálhányadosa majdnem mindenütt $F'(x)$; tehát, mivel F föltevés szerint integrálfüggvény, azért $G^* - G = H - F$ növekvő függvény. Ugyancsak növekvő ennek a függvénynek ellentettje, $G - G^*$ is. Vagyis $G - G^*$ állandó, tehát G integrálfüggvény.

Integrálási tételek.

Bebizonyítjuk, az (a, b) közön integrálható és egyelőre még mindig csak pozitív függvényekre, a következő tételeket.

4. *Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények integrálhatók, úgy integrálható $f(x) + g(x)$ és $cf(x)$ is $(c \geqq 0)$ és*

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx; \quad \int_a^b cf(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx.$$

A második állitás, valamint az elsőből az $f+g$ függvény integrálhatósága, az integrál értelmezésének evidens következményei. A baloldali egyenlőség így adódik: Legyenek F, G, H az f, g és $h = f + g$ függvények határozatlan integráljai. Akkor először is, az $(F + G) - H$ függvény növekvő, mert az $F + G$ növekvő függvény differenciálhányadosa $f + g = h$ és mert H az ugyanevvel a sajátsággal biró függvények közül a legkisebb lejtésű. Másrészt, mivel a növekvő H függvény differenciálhányadosa $\geqq g$ és viszont G az ilyen függvények közt a legkisebb lejtésű, azért növekvő a $H - G$ függvény is. Ennélfogva a 3. tételben F helyébe H-t, G helyébe $H - G$-t téve adódik, hogy $H - G$ differenciálhányadosának, vagyis az $(f + g) - g = f$ függvénynek integrálfüggvénye. Vagyis, egy additív konstanstól eltekintve, $H(x) - G(x) = F(x)$. Tehát

$$H(b) - G(b) - H(a) + G(a) = F(b) - F(a),$$

ami pedig az integráljelölésre áttérve nem más, mint a bebizonyitandó egyenlőség.

5. *Ha* $f(x)$ *és* $g(x)$ *integrálhatók és* $g(x) \leqq f(x)$, *akkor* $f(x)-g(x)$ *is integrálható.*

Az előbbi jelöléssel és az előbbihez hasonló meggondolással adódik, hogy az $F-G$ függvény növekvő; mivel differenciálhányadosa $f-g$, azért az utóbbi valóban integrálható.

6. *Ha a véges számú vagy végtelen sorozatot alkotó* $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$ *függvények integrálhatók, akkor integrálható az*

$$f(x) = \inf f_n(x)$$

függvény is, azaz az a függvény, melynek értéke minden tekintetbe jövő x *helyen az* $f_n(x)$ *értékek közül a legkisebb vagy általánosabban ezen értékek alsó határa.*

Legyen ugyanis $\{F\}$ azon növekvő F függvények halmaza, melyekre majdnem mindenütt $F' \geqq f$ és legyen F^* ezek közül a legkisebb lejtésű. Az f_n integrálfüggvénye, F_n, nyilván az $\{F\}$ halmazba tartozik, tehát $F_n - F^*$ növekvő függvény. Ennélfogva $F_n' \geqq F^{*\prime}$. Másrészt F^* is az $\{F\}$ halmazba tartozván, $F^{*\prime} \geqq f$. Összefoglalva, majdnem mindenütt $f_n = F_n' \geqq F^{*\prime} \geqq f = \inf f_n$, vagyis végül majdnem mindenütt

$$F^{*\prime}(x) = f(x),$$

azaz f integrálható.

Változó előjelű függvények integrálása.

Változó előjelű függvényekre az integrált a következő módon értelmezzük. *Az* (a, b) *közön megadott* f *függvényt integrálhatónak mondjuk, ha majdnem mindenütt* $f = g - h$, *ahol* g *és* h *pozitív integrálható függvények és az* f *függvény határozott, illetőleg határozatlan integrálját, mint a* g *és* h *függvények megfelelő integráljainak különbségét értelmezzük.* Számolva azzal, hogy ugyanaz az f függvény még az $f = g_1 - h_1$ alakban is előállítható, ahol g_1 és h_1 ugyancsak pozitív integrálható függvények, meg kell mutatnunk, hogy *az integrál értéke nem függ az előállítás módjától,* vagyis hogy az adott esetben

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b g_1(x)\,dx - \int_a^b h_1(x)\,dx. \qquad (5)$$

Erre a célra alkalmazzuk a 4. tételt a $g+h_1=g_1+h$ összegekre; az (5) egyenlőség evidens átrendezéssel adódik.

Ha $f(x)$ *már eredetileg is pozitív, akkor* az $f=f-0$ előállításból és abból az evidens tényből, hogy a $g(x)=0$ függvény integrálható és integrálja 0, következik, hogy *az* f *függvénynek az új értelmezés szerint való integrálja megegyezik a régivel.*

Tetszésszerinti előjelű függvénynek leginkább kínálkozó előállitása a pozitiv és negativ részeire való fölbontás. Megmutatjuk, hogy ha f integrálható, úgy ezek a részek is integrálhatók. Az $f=g-h$ függvény pozitív része így írható:

$$f^+(x) = g(x) - \inf\bigl(g(x),\, h(x)\bigr);$$

mivel pedig a föltevés szerint $g(x)$, a 6. tétel folytán pedig a kivonandó függvény pozitiv integrálható függvények, tehát az 5. tétel alapján f^+ is integrálható. A negatív rész, $f^-(x)$, nem más, mint a $-f(x) = h(x) - g(x)$ függvény pozitív része, és így ugyancsak integrálható.

Integrálható még $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ is.

Megforditva, ha f^+ ét f^- integrálhatók, akkor a most adott értelmezés alapján $f=f^+-f^-$ is integrálható. Egyedül az $|f|$ függvény integrálhatóságából azonban még nem következik, hogy f is integrálható.

Tételbe foglalva:

7. *Az* $f(x)$ *függény akkor és csak akkor integrálható, ha pozitív és negatív része külön-külön integrálhatók. Az* $f(x)$ *integrálja a két utóbbi függvény integráljának különbsége. Ha* $f(x)$ *integrálható, akkor integrálható* $|f(x)|$ *is.*

A 4. és 5. tételek átvitele tetszésszerinti előjelű f, g és c esetére annyira világos, hogy talán még újra kimondanunk is fölösleges.

A 6. tételnek a következő általánosabb alakú tétel felel meg:

8. *Ha a véges számú vagy végtelen sorozatot alkotó $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$ függvények integrálhatók és ha minden n-re*

$$f_n(x) \geqq g(x), \tag{6}$$

ahol a $g(x)$ függvény integrálható, akkor integrálható az

$$\inf f_n(x)$$

függvény is. Hasonlóan, ha minden n-re

$$f_n(x) \leqq h(x), \tag{7}$$

ahol $h(x)$ integrálható, akkor integrálható a

$$\sup f_n(x) = -\inf(-f_n(x))$$

függvény is.

Véges számú függvény esetében a (6), illetőleg (7) korlátozások a föltevések közül elhagyhatók.

A tétel bebizonyitására a 6. tételt alkalmazzuk az $f_n - g$, illetőleg a $h - f_n$ pozitív, integrálható függvényekre és azután visszatérünk az f_n függvényekre. Véges számú függvény esetében a (6), illetőleg (7) korlátozások külön való posztulálása helyett $h(x)$ gyanánt a $\Sigma|f_n(x)|$ összeget, $g(x)$ gyanánt ennek ellentettjét választhatjuk.

Végtelen sorozatok és sorok integrálása.

9. *Ha az (a, b) közön integrálható $f_1(x), f_2(x), \ldots$ függvények növekvő sorozatot alkotnak és a megfelelő integrálértékek sorozata korlátos, akkor a sorozat majdnem mindenütt egy integrálható $f(x)$ függvény felé tart és tagonkint integrálható, azaz*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Jelöljük ugyanis $F_n(x)$-szel az f_n függvény integrálfüggvényét. Föltehetjük, hogy $F_n(a) = 0$. A tételben megszabott föltevés alapján az $F_n(x)$ függvények növekvő és korlátos sorozatot alkotnak, mely tehát egy $F(x)$ függvény felé tart; $F(a)=0$. Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük még azt is, hogy az f_n függvények pozitívok; máskülönben áttérhetnénk az f_n-f_1 sorozatra. Az utóbbi föltevés alapján az F függvény növekvő és ennélfogva majdnem mindenütt differenciálható. Mivel még $p > n$-re az F_p-F_n függvény is, mint az f_p-f_n pozitív függvény integrálja, növekvő függvény, azért növekvő $F-F_n$ is, tehát

$$F'(x) \geqq F_n'(x) = f_n(x).$$

Ennélfogva az

$$f(x) = \lim f_n(x) = \sup f_n(x) \leqq F'(x)$$

határérték majdnem mindenütt létezik és mivel F' integrálható függvény, azért a 8. tétel alapján f is az. Végül még

$$F(b) \geqq \int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b f_n(x)\,dx = F_n(b) \rightarrow F(b),$$

tehát

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

és ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Lebesgue szerint értelmezett integrálok esetére a tétel Beppo Levi-től ered.

Tetszésszerinti előjelű függvényekből álló végtelen sorok tagonkint való integrálásáról szól a következő tétel, amely az előzőből evidens módon, a sor tagjainak pozitív és negatív részeire való szétválasztásával és a tételnek az így keletkezett két sor részletösszegeire való alkalmazásával adódik.

10. *Ha az (a, b) közön integrálható $f_n(x)$ függvényekre a*

$$\sum_1^\infty \int_a^b |f_n(x)|\,dx$$

végtelen sor összetartó, akkor majdnem mindenütt összetartó maga a $\Sigma f_n(x)$ sor is; összege integrálható függvény és a sor tagonkint integrálható.

Bizonyitsuk még be a következő tételt:

11. *Ha az* (a, b) *közön integrálható* $f_n(x)$ *függvények majdnem mindenütt az* $f(x)$ *függvény felé tartanak, és ha ezenkívül van olyan integrálható* $g(x)$ *függvény, hogy minden n-re* $|f_n(x)| \leqq g(x)$, *akkor az* $f(x)$ *függvény is integrálható és*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

A tétel bebizonyítására tekintsük a

$$g_n(x) = \sup\left(f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots\right)$$

függvényeket. Ezek a 8. tétel alapján integrálhatók; ezenkívül fogyó sorozatot alkotnak, amely majdnem mindenütt f felé tart. Végül $|g_n| \leqq g$; ennélfogva a növekvő sorozatot alkotó $-g_n$ függvények integráljai korlát alatt maradnak. Tehát a 9. tétel alapján f integrálható és

$$\int_a^b g_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ugyanezt a meggondolást a $-f_n$ függvényekre alkalmazva, a

$$h_n(x) = \inf\left(f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots\right)$$

jelöléssel,

$$\int_a^b h_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Mivel pedig $h_n \leqq f_n \leqq g_n$ és igy

$$\int_a^b h_n(x)\,dx \leqq \int_a^b f_n(x)\,dx \leqq \int_a^b g_n(x)\,dx,$$

azért a középen álló integrálértékek is a balról és jobbról álló értékek közös határértéke, t. i. f integrálja felé tartanak. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

A most bebizonyitott tétel mint Lebesgue tétele ismeretes, természetesen a megfelelő módon értelmezett integrál esetére. Evidens módon foglaltatik benne Lebesgue-nek sorozatok integrálására legtöbbet használt tétele, mely szerint *integrálható függvények korlátos és összetartó sorozata tagonkint integrálható.* A tételnek korolláriuma még a következő tétel, amely csupán a limeszfüggvény integrálhatóságát és nem a tagonkint való integrálhatóságot állítja.

12. *Ha az* (a, b) *közön integrálható* $f_n(x)$ *függvények majdnem mindenütt az* $f(x)$ *függvény felé tartanak és ha van olyan integrálható* $g(x)$ *függvény, melyre*

$$|f(x)| \leqq g(x),$$

akkor z $f(x)$ *függvény is integrálható.*

A tétel bebizonyítására elegendő megjegyezni, hogy

$$\inf\left[g(x), \sup\left(f_n(x), -g(x)\right)\right] \to f(x)$$

és azután az előző tételt a balról álló függvények sorozatára alkalmazni.

A tételnek egyik nevezetes korolláriuma a következő, a komponált függvények integrálhatóságára vonatkozó tétel.

13. *Legyen* $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ *egy a k-dimenziós térben értelmezett folytonos függvény és legyenek* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ *az* (a, b) *közben integrálható függvények. Tegyük még föl, hogy van olyan ugyanazon közben integrálható* $g(x)$ *függvény, hogy*

$$|\varphi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))| \leqq g(x).$$

Akkor a

$$h(x) = \varphi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))$$

függvény integrálható.

A tétel bebizonyítására az $f_i(x)$ függvényeket lépcsős függvévények sorozataival állítjuk elő. Az (a, b) közt 2^n egyenlő részre osztjuk; jelentse $f_{in}(x)$ azt a függvényt, mely e részek mindegyikében állandó, és pedig értéke az f_i függvénynek a részközön vett integrálközépértéke, vagyis a megfelelő F_i integrálfüggvénynek a részközre képezett különbségi hányadosa. Akkor

$$f_{in}(x) \to f_i(x)$$

és a φ függvény folytonossága miatt ugyancsak

$$\varphi(f_{1n}(x), f_{2n}(x), \ldots, f_{kn}(x)) \to h(x).$$

De a balról álló függvények szintén lépcsős függvények, tehát evidenter integrálhatók és így $h(x)$ integrálható függvények sorozatának limesze és mivel még a föltevés szerint

$$|h(x)| \leqq g(x),$$

azért végül az előző tétel alapján a $h(x)$ függvény is integrálható.

Bizonyítsuk még be az alkalmazásai miatt fontos FATOU-féle tételt, amely ugyancsak a limeszfüggvény integrálhatóságát állítja és nem a sorozat tagonkint való integrálhatóságát.

14. *Ha az (a, b) közön értelmezett, integrálható $f_n(x)$ függvények sorozata majdnem mindenütt $f(x)$ felé tart és ha az*

$$\int_a^b |f_n(x)|\, dx$$

integrálértékek sorozata korlátos, akkor az $f(x)$ függvény integrálható.

Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy a sorozat tagjai pozitív függvények; ellenkező esetben ugyanis valamennyi függvényt pozitív és negatív részeikre bontjuk.

Pozitív $f_n(x)$ függvényekre a bizonyítás gondolatmenete lényegében a 11. tétel bizonyításának egy részlete. Képezzük a

$$g_n(x) = \inf\bigl(f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots\bigr)$$

függvényeket; ezek növekvő sorozatot alkotnak, a 6. tétel szerint integrálhatók és integrálértékeik ugyanazon korlát alatt maradnak, mint az f_n függvények integráljai. Továbbá

$$g_n(x) \rightarrow f(x)$$

és ezért a 9. tétel szerint $f(x)$ is integrálható.

Parciális integrálás.

15. *Ha $f(x)$ és $g(x)$ az (a, b) közön integrálható függvények és integrálfüggvényeik $F(x)$ és $G(x)$, akkor az $F(x)g(x)$ és $G(x)f(x)$ függvények is integrálhatók és*

$$\int_a^b F(x)\, g(x)\, dx + \int_a^b G(x)\, f(x)\, dx = F(b)\, G(b) - F(a)\, G(a).$$

Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy az f és g függvények pozitívok; ugyanis az általános esetet a pozitív és negatív részekre való fölbontással evidens módon vezethetjük vissza erre az esetre. Föltehetjük továbbá, hogy $F(a) = G(a) = 0$, mert egy C konstans hozzáadása például az $F(x)$ függvényhez a bebizonyítandó egyenlőség mindkét oldalát ugyanannyival, t. i. a $CG(b)$ hozzáadandóval változtatja meg.

Ezeket föltéve, tekintsük az $F(x)\,G(x)$ függvényt. F és G növekvő pozitív függvények, tehát szorzatuk is az. Legyen továbbá

$$H(x) = G(b)\,F(x) + F(b)\,G(x).$$

A H függvény a

$$h(x) = G(b)\,f(x) + F(b)\,g(x)$$

pozitív függvény integrálfüggvénye. A

$$D(x) = H(x) - F(x)\,G(x)$$

függvény ugyancsak növekvő; valóban, ha $x < \xi$, úgy

$$D(\xi) - D(x) = [G(b) - G(\xi)]\,[F(\xi) - F(x)] + \\ + [F(b) - F(x)]\,[G(\xi) - G(x)] \geqq 0.$$

Ennélfogva, mivel H integrálfüggvény, a 3. tétel szerint FG is az, és pedig integrálfüggvénye majdnem mindenütt létező differenciálhányadosának, azaz az

$$F(x)\,g(x) + G(x)\,f(x)$$

függvénynek. Az összeg tagonként való integrálhatósága folytán tehát csak azt kell még igazolnunk, hogy ennek az összegnek tagjai külön-külön integrálható függvények.

Az F és G függvények növekvők, tehát könnyen szerkeszthető lépcsősfüggvények limeszei és mivel még korlátosak is, azért a 12. tétel szerint integrálhatók. Fg és Gf tehát integrálható függvények szorzatai, továbbá nem nagyobbak, mint az $F(b)\,g(x)$ és $G(b)\,f(x)$ integrálható függvények. Így tehát a

13. tétel szerint az $F(x)g(x)$ és $G(x)f(x)$ függvények integrálhatók és ezzel tételünket bebizonyitottuk.

Helyettesítéssel való integrálás.

Jelentsen $x(t)$ egy az (α, β) közön folytonos növekvő függvényt, mely differenciálhányadosának, $x'(t)$-nek, határozatlan integrálja. Legyen $x(\alpha)=a$ és $x(\beta)=b$ és jelentsen $f(x)$ egy az (a, b) közön integrálható függvényt; legyen $F(x)$ az $f(x)$ függvény határozatlan integrálja. Fölösleges komplikációk elkerülése végett föltesszük, hogy $f(x)$ az (a, b) köz minden helyén egyértelműen meg van adva. Egyelőre még azt is föltesszük, hogy $f(x)$ pozitiv és korlátos: $0 \leqq f(x) \leqq A$.

Tekintsük a $\Phi(t) = F(x(t))$ függvényt. A Φ függvény növekvő; továbbá mivel $x < \xi$-re evidenter $F(\xi)-F(x) \leqq A(\xi-x)$, azért az $Ax(t)-\Phi(t)$ függvény is növekvő és minthogy $Ax(t)$ integrálfüggvény, azért a 3. tétel szerint $\Phi(t)$ is az. Differenciálhányadosa, amelynek integrálja,

$$\Phi'(t) = F'(x(t))\,x'(t) = f(x(t))\,x'(t) \tag{8}$$

és pedig t-re nézve majdnem mindenütt. Félretehetjük ugyanis mindenekelőtt azt a két nullahalmazt, amelyeken $x(t)$-nek, illetőleg $\Phi(t)$-nek nincsen meghatározott véges differenciálhányadosa. Kétségesek még azok a t helyek, amelyeknek megfelelő x helyen $F'(x)$ vagy nem létezik, vagy nem egyenlő $f(x)$-szel. Ha egy ilyen t helyen $x'(t) = 0$, akkor ott az $|F(x+h)-F(x)| \leqq A|h|$ egyenlőtlenség folytán $\Phi'(t) = 0$. Maradnak azok a helyek, ahol $x'(t) \neq 0$, illetőleg ezek közül azok, amelyekre állításunk érvényessége az imént mondottak szerint kétséges, tehát mindenesetre a t helyeknek olyan E halmaza, amelyen $x'(t)$ létezik, nem 0 és amelynek az x tengelyen való $x(E)$ képe, vagyis az $x = x(t)$ értékek halmaza, nullahalmaz. Azt állítom, hogy E is nullahalmaz, úgyhogy tehát (8) majdnem mindenütt érvényes. Jelentse E_{nm} az E halmaz azon t helyeinek összességét, amelyekre $x(t_2) - x(t_1) \geqq {}^1/_n(t_2-t_1)$, mihelyt $\alpha \leqq t_1 \leqq t \leqq t_2 \leqq \beta$ és

$x(t_2) - x(t_1) \leq 1/_m$. Minthogy az E_{nm} halmaz képe, $x(E_{nm})$, nullahalmaz, tehát bármely $\varepsilon > 0$-ra $x(E_{nm})$ bezárható az (a, b) köz olyan (a_k, b_k) részközeibe, amelyeknek hossza egyenkint legfeljebb $1/_m$ és összhossza legfeljebb $\varepsilon/_n$. Föltehetjük még, hogy mindegyikben van az $x(E_{nm})$ halmaznak legalább egy pontja. Az (α, β) köznek azok az (α_k, β_k) részközei, melyeknek a képei az (a_k, b_k) közök (többértelműség esetén például a legnagyobbakat tekinthetjük), együttesen magukba zárják az eredeti E_{nm} halmazt és mivel $\beta_k - \alpha_k \leq n(b_k - a_k)$, azért összhosszuk legfeljebb ε. Az E_{nm} halmaz tehát nullahalmaz és így nullahalmaz az $E = \Sigma E_{nm}$ halmaz is.

Összefoglalva, (8) majdnem mindenütt érvényes és mivel a Φ függvény differenciálhányadosának integrálja, azért

$$\int_\alpha^\beta f(x(t))\, x'(t)\, dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx. \quad (9)$$

Végül azt a föltevést, hogy f pozitív és korlátos, a következő meggondolással eliminálhatjuk. Ha $f(x)$ tetszésszerinti pozitív integrálható függvény, akkor az imént származtatott (9) egyenlőség érvényes az $f_n(x) = \inf(f(x), n)$ függvényekre és ebből az $f(x)$-re magára a 9. tétel alapján, határátmenettel adódik. Tetszésszerinti előjelű függvény esete pedig a pozitív és negatív részekre való szétválasztással vezethető vissza pozitív függvény esetére.

Ezzel bebizonyítottuk a helyettesítéssel való integrálás szabályát:

16. *Ha az (α, β) közön folytonos és növekvő $x(t)$ függvény integrálfüggvény és ha $f(x)$ az (a, b) közön, ahol $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$, mindenütt értelmezett integrálható függvény, akkor az $f(x(t))\,x'(t)$ függvény is integrálható az (α, β) közön és*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\, x'(t)\, dt.$$

Lebesgue integráldefiníciója; a két integrálfogalom megegyezése.[7]

Mivel a tetszésszerinti előjelű függvény integrálja a LEBESGUE-féle értelmezés alapján is a pozitív és a negatív rész integráljainak különbsége, azért elegendő a pozitív függvényekre szorítkoznunk.

LEBESGUE definíciója a mérhető halmaz és a mérték fogalmán alapszik. Korlátos (azaz egy (a, b) közben fekvő) E halmaz *külső mértéke*, m^*E, a halmazt bezáró és véges számú vagy megszámlálhatóan végtelen sok közből álló rendszerek összhosszának, azaz a közök hosszai összegének, alsó határa. A halmaz *mérhető*, ha saját külső mértékének és a kiegészítő $CE=(a, b)-E$ halmaz külső mértékének összege $b-a$, azaz az (a, b) köz hossza. Ebben az esetben a halmaz m^*E külső mértékét mE-vel is jelöljük és rövidebben a halmaz *mértékének* nevezzük.

Legyen $f(x)$ az E halmaz karakterisztikus függvénye, azaz legyen $f(x)=1$ az E halmaz pontjaiban, $f(x)=0$ a halmazon kívül. Azt állítom, hogy az E halmaz akkor és csak akkor mérhető, ha $f(x)$ eddigi értelmezésünk szerint az (a, b) közön integrálható és hogy

$$mE = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Két megjegyzést kell előrebocsátanunk. Az egyik az az egyszerű, de eddig még nem használt tény, hogy *az állandó* $f(x)=1$ *függvény integrálja bármely közön egyenlő az illető köz hosszával.* Homogenitási okokból mindenekelőtt világos, hogy a kérdéses integrálértékek arányosak a közök hosszaival, hogy tehát az $f(x)=1$ függvény integrálfüggvényei $F(x)=Ax+B$ alakúak; mivel még majdnem mindenütt $F'(x)=f(x)=1$, azért $A=1$, vagyis az arányossági faktor valóban 1.

[7] Megjegyzem, hogy a két fogalom megegyezése az alkalmazások szempontjából nem lényeges, és hogy az előzőkben kifejtett elmélet a LEBESGUE-féle helyett önállóan alkalmazható.

Másik megjegyzésünk a következő. *Ha valamely az* (a, b) *közön értelmezett* $f(x)$ *függvénynek megvan az a sajátsága, hogy bármely* $\varepsilon > 0$*-hoz van két olyan integrálható függvény,* $g(x)$ *és* $h(x)$*, hogy*

$$g(x) \leqq f(x) \leqq h(x)$$

és hogy

$$\int_a^b [h(x) - g(x)]\, dx \leqq \varepsilon,$$

akkor $f(x)$ *is integrálható.* Hogy ezt átlássuk, legyen rendre $\varepsilon = 2^{-n}$ és legyenek g_n és h_n a megfelelő függvények. Minthogy a

$$\sum_1^\infty \int_a^b [h_n(x) - g_n(x)]\, dx \leqq \sum_1^\infty 2^{-n} = 1$$

sor összetartó, azért a 10. tétel alapján majdnem mindenütt összetartó a $\Sigma(h_n - g_n)$ függvénysor is, tehát $h_n - g_n \to 0$, vagyis $g_n \to f$; ebből és például a $g_1 \leqq f \leqq h_1$ egyenlőtlenségekből f integrálhatósága a 11. tétel szerint következik.

Legyen mármost E egy az (a, b) közben fekvő halmaz és zárjuk be úgy E-t, mint CE-t egy-egy az (a, b) részközeiből álló Σ_1 és Σ_2 rendszerbe úgy, hogy a rendszerek összhosszát ugyancsak Σ_1-gyel és Σ_2-vel jelölve,

$$\Sigma_1 \leqq m^\star E + \varepsilon/2, \quad \Sigma_2 \leqq m^\star CE + \varepsilon/2$$

legyen, ahol $\varepsilon > 0$ megadott szám. Akkor a Σ_1 és Σ_2 rendszerek együttesen befedik az (a, b) közt: az azokat alkotó részközök hosszainak, tehát a megfelelő karakterisztikus függvények integráljainak összege $\Sigma_1 + \Sigma_2$; ennélfogva a 9. tétel szerint a karakterisztikus függvények összege majdnem mindenütt létezik, integrálható és integrálja $\Sigma_1 + \Sigma_2$. Másrészt a kérdéses összegfüggvény értéke mindenütt legalább 1. Ennélfogva

$$b - a = \int_a^b dx \leqq \Sigma_1 + \Sigma_2 \leqq m^\star E + m^\star CE + \varepsilon,$$

vagyis, mivel ε-t tetszés szerint választhattuk, tehát

$$b - a \leqq m^\star E + m^\star CE. \tag{10}$$

Tegyük most föl, hogy E mérhető, vagyis, hogy (10)-ben pontosan az egyenlőség érvényes. Legyen $f(x)$ az E halmaz karakterisztikus függvénye és legyenek $\sigma_1(x)$ és $\sigma_2(x)$ a Σ_1, illetőleg Σ_2 rendszerekhez tartozó részközök karakterisztikus függvényeinek összegfüggvényei, akkor az előbbi meggondoláshoz hasonlóan adódik, hogy σ_1 és σ_2 külön-külön is integrálhatók és integráljuk az (a, b) közön Σ_1, illetőleg Σ_2. Továbbá $\sigma_1(x) \geqq f(x)$ és $\sigma_2(x) \geqq 1 - f(x)$. Vagyis

$$1 - \sigma_2(x) \leqq f(x) \leqq \sigma_1(x);$$

$$\int_a^b \left[\sigma_1(x) - \left(1 - \sigma_2(x)\right)\right] dx = \Sigma_1 + \Sigma_2 - (b-a) \leqq$$

$$\leqq mE + mCE + \varepsilon - (b-a) = \varepsilon,$$

ennélfogva, második megjegyzésünk alapján, $f(x)$ integrálható és integrálja minden $\varepsilon > 0$-ra a $\Sigma_1 \leqq mE + \varepsilon/2$ és a $b - a - \Sigma_2 \geqq mE - \varepsilon/2$ mennyiségek között fekszik, tehát pontosan mE.

Fordítva, tegyük föl, hogy $f(x)$, az E halmaz karakterisztikus függvénye, a mi értelmezésünk szerint integrálható. Akkor egy már régebben is alkalmazott megjegyzésünk szerint f egy lépcsős függvényekből álló f_n sorozat limesze. Azt is föltehetjük, hogy az f_n-ek egy-egy véges számú közből álló Σ_n rendszer karakterisztikus függvényei; erre a célra csak f_n értéke helyébe ott, ahol $> 1/2$, 1-et, ahol pedig $\leqq 1/2$, ott 0-t kell tennünk, ami az f felé való konvergenciát nem zavarja. Ugyancsak f felé tartanak, és pedig fogyva, a $g_n = \sup(f_n, f_{n+1}, \ldots)$ függvények, a $\Sigma_n, \Sigma_{n+1}, \ldots$ rendszerek $\Sigma^{(n)}$ egyesítési halmazainak karakterisztikus függvényei. A

$$\Sigma^{(n)} = \Sigma_n + (\Sigma_{n+1} - \Sigma_n) + (\Sigma_{n+2} - \Sigma_n - \Sigma_{n-1}) + \cdots$$

halmaz véges számú vagy megszámlálhatóan végtelen sok egymásba nem nyúló közből áll, amelyeknek összhossza a g_n függvénynek az (a, b) közön való integrálja és ennélfogva $n \to \infty$-re f integrálja felé tart. Vagyis az E halmaz, legfeljebb egy nullahalmaz elhagyásával, bezárható olyan intervallumrendszerbe, amelynek összhossza tetszés szerint kevéssel nagyobb az f integráljánál. Ugyanez áll a CE halmazra és az $1-f(x)$ függvényre. Az esetleg elhagyott nullahalmazok tetszés szerint kicsiny összhosszú intervallumrendszerekbe zárhatók. Végeredményben, az $m^{\star}E$ és $m^{\star}CE$ külső mértékek nem nagyobbak az f, illetőleg $1-f$ függvények integráljainál és így $m^{\star}E+m^{\star}CE \leqq b-a$. Ez és a (10) egyenlőtlenség együtt a pontos egyenlőséget adják, azaz az E halmaz csakugyan mérhető. Vagyis összefoglalva, mérhetőség és a karakterisztikus függvény integrálhatósága ekvivalens tények, a mérték és a karakterisztikus függvény integrálja ugyanaz a mennyiség.

A mértéknek és a karakterisztikus függvény integráljának ebből az összefüggéséből a 8. és 9. tétel alapján evidens módon adódik véges számú, vagy megszámlálhatóan végtelen, ugyanazon (a, b) közben foglalt, mérhető halmaz közös részének és egyesitési halmazának mérhetősége és egymásba nem nyúló halmazok esetében az is, hogy az egyesitési halmaz mértéke az egyes halmazok mértékeinek összege.

Lebesgue gondolatmenetében a következő fogalomalkotás a mérhető függvény. Az $f(x)$ függvényt mérhetőnek mondjuk, ha bármely $A<B$-re mérhető az a halmaz, amelyen $A<f(x)<B$. Mérhető halmazok közös részének és egyesitési halmazának az imént megállapitott mérhetőségéből azonnal adódik, hogy ez a föltevés ekvivalens a következők bármelyikével: minden A-ra mérhetők azok a halmazok, ahol $f>A$, vagy azok, ahol $f\geqq A$, vagy ahol $f<A$, vagy ahol $f\leqq A$.

Legyen mármost $f(x)$ egy pozitiv mérhető függvény és legyen $l_0=0, l_1, l_2, \dots$ a monoton végtelenbe növekvő értékek olyan sorozata, melyre az l_n-l_{n-1} különbségek egy δ korlát alatt maradnak. Jelöljük E_n-nel azt a mérhető halmazt, amelyen $l_{n-1}<f(x)\leqq l_n$ és tegyük föl, hogy a

$$\sum_1^{\infty} l_n mE_n \tag{11}$$

«felső» összeg összetartó. Ha van ilyen l_n sorozat, akkor valamennyi hasonló tipusú sorozat is ilyen. Legyen ugyanis $\bar{l}_n$ egy másik ilyen tipusú sorozat, $\bar{l}_n-\bar{l}_{n-1}\leqq\bar{\delta}$; legyen továbbá

$\overline{E}_n$ az $\overline{l}_{n-1} < f(x) \leqq \overline{l}_n$ feltételnek megfelelő x-helyek halmaza és legyenek $e_n(x)$, $\overline{e}_n(x)$ az E_n, $\overline{E}_n$ halmazok karakterisztikus függvényei. Akkor

$$\sum_1^\infty \overline{l}_{n-1}\overline{e}_n(x) \leqq f(x) \leqq \sum_1^\infty l_n e_n(x),$$

ahol a jobbról álló kifejezés integrálható függvények összege és a (11) sor összetartása folytán a 10. tétel szerint integrálható függvény. Integrálható tehát a 11. tétel alapján a balról álló sor összege is, vagyis a $\Sigma \overline{l}_{n-1} m\overline{E}_n$ «alsó» összeg és vele együtt a

$$\sum_1^\infty \overline{l}_n m\overline{E}_n = \sum_1^\infty \overline{l}_{n-1} m\overline{E}_n + \sum_1^\infty (\overline{l}_n - \overline{l}_{n-1}) m\overline{E}_n \leqq$$
$$\leqq \sum_1^\infty \overline{l}_{n-1} m\overline{E}_n + \overline{\delta}(b-a)$$

felső összeg is összetartó.

Az imént végzett meggondolásból még az is világos, hogy egyrészt az összes l_n típusú beosztásokhoz tartozó alsó összegek nem nagyobbak egyetlen felső összegnél sem, másrészt δ alkalmas választásával az alsó és felső összegek különbsége tetszés szerint kicsinnyé tehető. Ennélfogva egy és csak egy olyan érték van, mely az alsó összegeket a felsőktől elválasztja. Ezzel az értékkel értelmezi Lebesgue az $f(x)$ függvény határozott integrálját az (a, b) közön. A Lebesgue szerint vett integrál tehát akkor létezik, ha f mérhető és ha van olyan l_n sorozat, amelyre a (11) sor összetartó; tehát például okvetlenül létezik, mihelyt f mérhető és korlátos.

A most végzett meggondolásokból egyszersmind világos, hogy *ha $f(x)$* Lebesgue *szerint integrálható, akkor az a mi értelmezésünk szerint is* és világos az is, hogy *a kétféle integrálérték megegyezik*. Csak azt kell még megmutatnunk, hogy *viszont a mi értelmezésünk szerint való integrálhatóságból a* Lebesgue *szerint való integrálhatóság következik.*

Először is megmutatjuk, hogy ha $f(x)$ a mi értelmezésünk szerint integrálható, akkor mindenesetre mérhető is. Vagyis megmutatjuk, hogy bármely A-ra mérhető az $f(x) > A$ egyenlőtlenséggel jellemzett E halmaz. Tekintsük az

$$\frac{\inf(f(x), A+h) - \inf(f(x), A)}{h} \tag{12}$$

hányadost, ahol $h > 0$; a hányados integrálható függvény és értéke az E halmazon kívül 0, míg az E halmaz helyein értéke elég kis h-ra 1, tehát határértéke is 1. Azaz a (12) hányados limeszfüggvénye nem más, mint az E halmaz karakterisztikus függvénye, $e(x)$, amely tehát, például a 11. tétel alapján, integrálható. Vagyis az E halmaz valóban mérhető.

Tekintsük ismét az l_n sorozatot. Az l_n-nek megfelelő E_n halmaz mérhető, illetőleg az $e_n(x)$ függvény integrálható; hiszen az utóbbi nem más, mint az $A = l_{n-1}$ és $A = l_n$ értékekhez tartozó $e(x)$ függvények különbsége. Mivel továbbá

$$\sum_1^{\infty} l_n e_n(x) \leqq f(x) + \delta,$$

azért a balról álló sor a 9. tétel szerint tagonkint integrálható és igy az integrálással nyert $\Sigma l_n mE_n$ sor mindenesetre összetartó. Vagyis az $f(x)$ függvény Lebesgue szerint is integrálható.

Riesz Frigyes.

SUR L'INTÉGRALE DE LEBESGUE COMME L'OPÉRATION INVERSE DE LA DÉRIVATION.

Exposé d'une théorie de l'intégration, équivalente à celle de M. Lebesgue et fondée sur les définitions suivantes. Une fonction non-négative $f(x)$, définie dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, est dite intégrable lorsqu'elle est égale, presque partout, à la dérivée d'une fonction non-décroissante $F(x)$. L'intégrale de $f(x)$ est définie comme la borne inférieure des valeurs $F(b) - F(a)$, formées pour toutes les fonctions $F(x)$ du type envisagé.

La théorie repose sur le théorème affirmant l'existence presque partout des dérivées des fonctions monotones, méthode à laquelle l'auteur a déjà fait allusion à la fin d'une conférence générale faite au dernier congrès international des mathématiciens.

Frédéric Riesz.

A REKURZÍV FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉHEZ.

Bevezetés.

1. Az elemi számelméletben függvények definiálásának legfontosabb módja a rekurzió, ami abban áll, hogy a függvénynek a 0 helyen felvett értékét közvetlenül megadjuk és az $n+1$ helyen felvett értékét az n helyen felvett értékéből építjük fel. Például $n!$ rekurzív definiciója:

$$0! = 1\,; \quad (n+1)! = n!.(n+1).$$

A felépítés módja különböző lehet. Egyváltozós függvény esetén még világos, hogy mit kell általában rekurzión értenünk: egy $\varphi(n)$ függvény rekurzióval keletkezik a k konstansból és a már definiált kétváltozós β függvényből, ha

$$\varphi(0) = k$$
$$\varphi(n+1) = \beta(n, \varphi(n)).$$

Többváltozós függvényt egyik változója szerinti rekurzióval szokás definiálni; például az $a+n$, $a.n$, a^n függvényeknek n szerint menő rekurzív definiciója rendre:

$$a + 0 = a$$
$$a + (n+1) = (a+n) + 1,$$

$$a.0 = 0$$
$$a.(n+1) = a.n + a,$$

$$a^0 = 1$$
$$a^{n+1} = a^n.\,a.$$

A rekurzióban részt nem vevő változók szerepe azonban különböző lehet.

Gödel[1] úgy definiálja a rekurziót, hogy e változókat paramétereknek tekinti, melyek rekurzió közben nem változnak. E szerint egy $r+1$ változós $\varphi(n, a_1, a_2, \ldots, a_r)$ függvény rekurzióval keletkezik egy r változós $\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ és egy $r+2$ változós $\beta(n, a_1, a_2, \ldots, a_r, b)$ függvényből, ha

$$\varphi(0, a_1, a_2, \ldots, a_r) = \alpha(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$
$$\varphi(n+1, a_1, a_2, \ldots, a_r) = \beta\big(n, a_1, a_2, \ldots, a_r, \varphi(n, a_1, a_2, \ldots, a_r)\big).$$

Ilyenek az előbb említett rekurziók is; $a+n$ rekurziójánál $\alpha(a)=a$, $\beta(n, a, b)=b+1$; $a.n$ rekurziójánál $\alpha(a)=0$, $\beta(n, a, b)=b+a$; a^n rekurziójánál $\alpha(a)=1$, $\beta(n, a, b)=ba$. Mint itt is előfordult, meg fogjuk engedni a továbbiakban is, hogy az egyes függvények ne függjenek mindazoktól a változóktól, amelyek ki vannak jelölve.

Hilbert[2] tágabb rekurziófogalmánál a rekurzióban részt nem vevő változók helyére helyettesítések történhetnek, úgy, hogy $\varphi(n+1, a_1, a_2, \ldots, a_r)$ felépítéséhez nemcsak a $\varphi(n, a_1, a_2, \ldots, a_r)$ függvényértéket, hanem a $\varphi(n, a_1, a_2, \ldots, a_r)$ *függvényt*, mint $a_1, a_2, \ldots, a_r$ függvényét, kell ismerni. Ilyen definíció például a következő:

$$\varphi(0, a) = \alpha(a)$$
$$\varphi(n+1, a) = \beta\big(n, a, \varphi(n, n+a)\big);$$

sőt a függvényértékek egymásbaskatulyázása is előfordulhat, például:

$$\varphi(0, a) = \alpha(a)$$
$$\varphi(n+1, a) = \beta\big(n, a, \varphi(n, \varphi(n, a))\big).$$

A továbbiakban a Gödel-féle rekurziót *primitív*nek, a Hilbert-félét *beskatulyázott rekurzió*nak fogom nevezni.

---

[1] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I, Monatshefte für Math. und Phys. 38 (1931), 173—198. o.

[2] D. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Annalen 95 (1916), 161—190. o., l. még: W. Ackermann, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, Math. Annalen 99 (1928), 118—133. o.

Dolgozatom tárgya: bebizonyítani, hogy *a látszólag tágabb beskatulyázott rekurzió is primitív rekurziókra vezethető vissza.*

2. *Rekurzív függvényeken* azokat a számelméleti függvényeket[3] értem, melyek a 0 és $n+1$ alapfüggvényekből[4] kiindulva véges számú helyettesítés és primitív rekurzió útján jönnek létre.

Régóta ismeretes és láttuk is, hogy $a+n$, $a.n$, a^n, $n!$ rekurzív függvények. SKOLEM[5] és tőle függetlenül később GÖDEL[1] az elemi számelméletben szerepet játszó függvények nagy részéről bebizonyították, hogy azok is rekurzívek. Mégis meg fogom adni azoknak a függvényeknek a rekurzív definícióját, melyeknek rekurzivitására a továbbiakban szükségem lesz. Dolgozatom eredménye úgy is fogalmazható, hogy *a beskatulyázott rekurziók nem vezetnek ki a rekurzív függvények osztályából.*

3. Dolgozatom 1. §-ában tehát néhány számelméleti függvény rekurzív definícióját adom meg. E § e szerint nem tartalmaz újat.

A 2. §-ban egy önmagában is érdekes segédtételt bizonyítok be: hogy *az «értékkészletrekurzió» megengedése nem bővíti a rekurzív függvények osztályá!*. Értékkészletrekurzión azt a bővebb rekurziófogalmat értem, amelynél a $\varphi(n+1)$ függvényértéket nem a közvetlen megelőző $\varphi(n)$ értékből, hanem akár-

---

[3] Számelméleti függvény itt nem valami a számelméletben szerepet játszó függvényt jelent, hanem általánosan olyan függvényt, mely változóinak nemnegatív egészszámú értékeire van definiálva és értékei is nemnegatív egész számok. A továbbiakban minden latin kis betű a nélkül, hogy ezt minden egyes esetben külön megmondanám, nemnegatív egész számot jelent.

[4] A 0 konstans és az $n+1$ függvény kitüntetett szerepe a rekurziósémából is kitűnik. Magát n-et, mint n függvényét nem kell az alapfüggvények közé venni, mert a

$$\varphi(0) = 0$$
$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + 1$$

rekurzió definiálta $\varphi(n)$ függvény mindig egyenlő n-nel.

[5] Th. SKOLEM, Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise, Videnskapsselskapets Skrifter (Kristiania) I. Mat.-Naturv. Kl. (1923), Nr. 6.

hányból az előző $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)$ értékek közül építjük fel, vagyis, amelynél $\varphi(n+1)$ meghatározásához a $\varphi(n)$ függvény egész megelőző értékkészletének ismeretére szükség van. A 3. §-ban következik dolgozatom tulajdonképpeni tárgya: a beskatulyázott rekurzió visszavezetése primitív rekurziókra.

1. §. Rekurzív definíciók.

4. Könnyen belátható, hogy nemcsak 0, hanem minden konstans rekurzív.

Ugyanis $n+1$-ben n helyére $n+1$-et helyettesítve $n+2$-t, ebben n helyére ismét $n+1$-et helyettesítve $n+3$-at kapunk, s i. t., tehát $n+k+1$ minden fix k-ra rekurzív függvénye n-nek. Ezekben a függvényekben 0-t téve n helyére, kapjuk a $k+1$ konstansokat.

5. A következő két függvényt[6] gyakran fogjuk használni annak jellemzésére, hogy egy szám 0-e vagy nem:

$$\operatorname{sg} n = \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 0 \\ 1 & \text{különben,} \end{cases}$$

és

$$\overline{\operatorname{sg}}\, n = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 0 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezek is rekurzív függvények, hiszen definíciójuk így is irható:

$$\begin{aligned} \operatorname{sg} 0 &= 0 \\ \operatorname{sg}(n+1) &= 1, \\ \overline{\operatorname{sg}}\, 0 &= 1 \\ \overline{\operatorname{sg}}(n+1) &= 0. \end{aligned}$$

A második rekurzióegyenletek jobboldalán nem szerepel ugyan explicite $\operatorname{sg} n$, illetőleg $\overline{\operatorname{sg}}\, n$, de ez — egy fenti megjegyzés

---

[6] A $\operatorname{sg} n$ függvényt n minden valós értékére szokták értelmezni — mint ahogy $n+a$-t n és a minden komplex értékére is —; itt azonban mindig csak a nemnegatív egészszámú helyekre vagyok tekintettel.

szerint — nem is lényeges. (Természetesen írhatnók a definíciókat

$$\operatorname{sg} 0 = 0$$
$$\operatorname{sg}(n+1) = 1 + 0.\operatorname{sg} n,$$

illetőleg

$$\overline{\operatorname{sg}}\, 0 = 1$$
$$\overline{\operatorname{sg}}(n+1) = 0.\overline{\operatorname{sg}}\, n$$

alakban is.)

6. Már a bevezetésben említettem, hogy $a+n$, $a.n$ és a^n rekurzív függvények. Az előző kettővel egyszersmind az $a_1+ +a_2+\cdots+a_r$ többtagú összeg és az $a_1.a_2\ldots a_r$ többtényezős szorzat is rekurzív függvénye $a_1, a_2,\ldots, a_r$-nek; ezek ugyanis helyettesítésekkel építhetők fel $a+n$-ből, illetőleg $a.n$-ből.

Könnyen belátható az is, hogy $\alpha(n, a_1,\ldots, a_r)$-rel együtt

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha(i, a_1,\ldots, a_r)$$

és

$$\prod_{i=0}^{n} \alpha(i, a_1,\ldots, a_r)$$

is rekurzívok, ugyanis

$$\sum_{i=0}^{0} \alpha(i, a_1,\ldots, a_r) = \alpha(0, a_1,\ldots, a_r)$$
$$\sum_{i=0}^{n+1} \alpha(i, a_1,\ldots, a_r) = \sum_{i=0}^{n} \alpha(i, a_1,\ldots, a_r) + \alpha(n+1, a_1,\ldots, a_r)$$

és

$$\prod_{i=0}^{0} \alpha(i, a_1,\ldots, a_r) = \alpha(0, a_1,\ldots, a_r)$$
$$\prod_{i=0}^{n+1} \alpha(i, a_1,\ldots, a_r) = \left\{\prod_{i=0}^{n} \alpha(i, a_1,\ldots, a_r)\right\}\cdot \alpha(n+1, a_1,\ldots, a_r).$$

Ezeknek a függvényeknek a továbbiak szempontjából az a fontosságuk, hogy

$$\operatorname{sg} \sum_{i=0}^{n} \alpha(i, a_1,\ldots, a_r) = \begin{cases} 1 \\ 0, \end{cases}$$

aszerint, hogy van-e n alatt (n-et is beleértve) olyan i, melyre $\alpha(i, a_1,\ldots, a_r) \neq 0$, vagy pedig minden n alatti i-re $\alpha(i, a_1,\ldots, a_r) = 0$; és

$$\operatorname{sg} \prod_{i=0}^{n} \alpha(i, a_1, \ldots, a_r) = \begin{cases} 0 \\ 1, \end{cases}$$

a szerint, hogy van-e n alatt (n-et is beleértve) olyan i, melyre $\alpha(i, a_1, \ldots, a_r) = 0$, vagy pedig minden n alatti i-re $\alpha(i, a_1, \ldots, a_r) \neq 0$.

7. Az előbbi megjegyzéseket felhasználhatjuk arra, hogy egy fontos módot adjunk rekurzív függvények képezésére. Legyen $\alpha(n, a_1, \ldots, a_r)$ oly számelméleti függvény, hogy minden $a_1, \ldots, a_r$-re van oly i, amelyre $\alpha(i, a_1, \ldots, a_r) = 0$. A legkisebb ilyen i-t akkor $a_1, \ldots, a_r$ függvényének tekinthetjük; jelöljük e függvényt $\varphi(a_1, \ldots, a_r)$-rel. Az $\alpha(n, a_1, \ldots, a_r)$ függvény rekurzivitásából magából általában nem következik, hogy $\varphi(a_1, \ldots, a_r)$ is rekurzív;[7] azonban be fogom bizonyítani, hogy *ha $\alpha(n, a_1, \ldots, a_r)$ rekurzív, továbbá van olyan rekurzív $\beta(a_1, \ldots, a_r)$ függvény, hogy $a_1, \ldots, a_r$ minden értékénél $\varphi(a_1, \ldots, a_r) \leqq \beta(a_1, \ldots, a_r)$, más szóval, ha az i-re vonatkozó $\alpha(i, a_1, \ldots, a_r) = 0$ egyenlet legkisebb megoldásaként definiált $\varphi(a_1, \ldots, a_r)$ függvénynek van rekurzív majoránsa, akkor e $\varphi(a_1, \ldots, a_r)$ függvény is rekurzív.*

Ugyanis a megelőző pont végén tett megjegyzés szerint

$$\operatorname{sg} \prod_{j=0}^{k} \alpha(j, a_1, \ldots, a_r)$$

0 vagy 1, aszerint, hogy van-e oly j, hogy $j \leqq k$ és $\alpha(j, a_1, \ldots, a_r) = 0$, azaz, hogy $k \geqq \varphi(a_1, \ldots, a_r)$, vagy $k < \varphi(a_1, \ldots, a_r)$; tehát, minthogy a feltevés szerint $\beta(a_1, \ldots, a_r) \geqq \varphi(a_1, \ldots, a_r)$, ezért

$$\varphi(a_1, \ldots, a_r) = \sum_{k=0}^{\beta(a_1, \ldots, a_r)} \operatorname{sg} \prod_{j=0}^{k} \alpha(j, a_1, \ldots, a\ ).$$

---

[7] Valóban, be lehet bizonyítani, hogy az a $\varphi(n, a, b)$ függvény, amelyről ACKERMANN [2] alatt idézett dolgozatában megmutatta, hogy nem rekurzív, szintén úgy tekinthető, mint egy $\alpha(i, n, a, b) = 0$ egyenlet legkisebb i megoldása. Ezzel és általánosabban az ú. n. többszörös rekurzióval definiált függvények egy hasonló tulajdonságával egy másik dolgozatomban fogok foglalkozni.

Ugyanis a jobboldalon álló összegnek a $k=0, 1,\ldots, \varphi(a_1,\ldots, a_r)-1$ értékekhez tartozó $\varphi(a_1,\ldots, a_r)$ számú tagja 1, a többi 0, tehát az összeg értéke valóban $\varphi(a_1,\ldots, a_r)$. Így e $\varphi(a_1,\ldots, a_r)$ függvény rekurzív függvényekből helyettesítéssel keletkezik, tehát maga is rekurzív.

8. Az $a-n$ különbségfüggvény helyett, minthogy csak olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek csak nemnegatív egészszámú értékeket vesznek fel, egy $a \dot{-} n$ függvényt vezethetünk be, mely $a-n$ negatív részét 0-val pótolja:

$$a \dot{-} n = \begin{cases} a-n, & \text{ha } a > n \\ 0, & \text{ha } a \leqq n. \end{cases}$$

Ez az $a \dot{-} n$ függvény is rekurzív. Ugyanis mindenekelőtt $n \dot{-} 1$ így definiálható:

$$0 \dot{-} 1 = 0$$
$$(n+1) \dot{-} 1 = n.$$

Ennek segítségével adódik $a \dot{-} n$ definíciója:

$$a \dot{-} 0 = a$$
$$a \dot{-} (n+1) = (a \dot{-} n) \dot{-} 1.$$

$a \dot{-} n$ segítségével a különbség abszolút értéke is rekurzív függvényként definiálható:

$$|a-n| = (a \dot{-} n) + (n \dot{-} a).$$

9. Az $\frac{a}{n}$ hányados helyett az $\left[\frac{a}{n}\right]$ függvényt vezetjük be, mely $n \neq 0$-ra az $\frac{a}{n}$-ben foglalt legnagyobb egész számot jelenti; $n=0$-ra ez nincs értelmezve, értsünk rajta ez esetben 0-t. $\left[\frac{a}{n}\right]$ rekurzív. Ezt például a **7.** pontban bizonyított tétel segítségével mutathatjuk ki. Ugyanis $n \neq 0$ esetén $\left[\frac{a}{n}\right]$ azt a számot jelenti, ahányszor n foglaltatik a-ban, vagyis azt a legkisebb i számot, amelyre $n(i+1) > a$, azaz $n(i+1) \geqq a+1$ áll. Ezt a feltételt pedig $a+1 \dot{-} n(i+1) = 0$ alakban írhatjuk. Hogy az $n=0$ esetet is figyelembe vegyük, írjuk e feltételt

$$n.\big(a+1 \dot{-} n(i+1)\big) = 0$$

alakban; $n\neq 0$ esetén ez ugyanazt jelenti, mint az előbbi; $n=0$ esetén pedig ez minden i-re teljesül, tehát a legkisebb i, amely teljesiti, $i=0$. Eszerint $\left[\frac{a}{n}\right]$ mindig a legkisebb oly i, amelyre az $n\big(a+1 \dot{-} n(i+1)\big)$ rekurzív függvény eltünik; minthogy $\left[\frac{a}{n}\right] \leqq a$, ezért $\left[\frac{a}{n}\right]$ valóban rekurzív.

$\left[\frac{a}{n}\right]$ a hányadost jelenti a-nak n-nel való osztásánál; az osztás maradéka az ugyancsak rekurzív

$$\varrho(a, n) = a \dot{-} \left[\frac{a}{n}\right] n$$

függvény.

10. Minthogy az oszthatósággal kapcsolatos függvények rekurzívnak bizonyultak, most már a számelméletben szerepet játszó függvények nagy része rekurziók és helyettesítések útján definiálható.

Legyen

$$\delta(n, a) = \begin{cases} 0 \\ 1, \end{cases}$$

aszerint, hogy n osztható-e a-val, vagy sem. Akkor

$$\delta(n, a) = \mathrm{sg}\, \varrho(n, a).$$

Legyen

$$P(n) = \begin{cases} 0 \\ 1, \end{cases}$$

a szerint, hogy n törzsszám-e, vagy sem. Az, hogy n törzsszám, egyértelmű azzal, hogy $n>1$ (azaz $n \geqq 2$) és $(n-1)!^2$ nem osztható n-nel. E szerint

$$P(n) = \mathrm{sg}\left\{(2 \dot{-} n) + \overline{\mathrm{sg}}\, \delta\big((n \dot{-} 1)!^2, n\big)\right\}.$$

Tehát $P(n)$ rekurzív; vele együtt az n-nél nem nagyobb prímszámok számát jelentő

$$\pi(n) = \sum_{i=0}^{n} P(i)$$

függvény is.

Legyen $p_0=2$; $n>0$ esetén pedig p_n a nagyság szerint n-edik *páratlan* törzsszám. p_n tehát az $n+1$-edik prímszámot jelenti, vagyis a legkisebb oly i számot, amelyre $\pi(i)=n+1$. Ez a feltétel $|\pi(i)-(n+1)|=0$ alakban írható; tehát a **7.** pontban bebizonyított tétel szerint p_n rekurzivitásának bebizonyítására még csak rekurzív majoránst kell megadni rá. Ez könnyen megadható; például elemi úton bizonyítható, hogy[8]

$$p_n < 2^{2^{n+1}}.$$

Legyen végre $\pi_a(n)$ az n szám törzstényezős előállításában p_a kitevője.[9] $n=0$-ra ez nincs értelmezve; ekkor 0-t fogok érteni rajta. $\pi_a(n)$ is rekurzív függvény. Ugyanis $n \neq 0$ esetén

$$\pi_a(n) < 2^{\pi_a(n)} \leqq p_a^{\pi_a(n)} \leqq n,$$

azaz $\pi_a(n) \leqq n$ s ez $n=0$ esetén is igaz. Továbbá, ha $n \neq 0$, $\pi_a(n)=i$ oly szám, hogy n osztható p_a^i-vel, de p_a^{i+1}-gyel már nem, tehát a legkisebb oly i, hogy $\delta(n, p_a^{i+1}) \neq 0$, azaz $\overline{\text{sg}}\,\delta(n, p_a^{i+1})=0$. Ha $n \neq 0$, akkor ez egyúttal a legkisebb oly i, hogy $n.\overline{\text{sg}}\,\delta(n, p_a^{i+1})=0$; $n=0$ esetén minden i ilyen, tehát $i=0$ a legkisebb ilyen i. Eszerint $\pi_a(n)$ mindig a legkisebb olyan i szám, amelyre $n.\overline{\text{sg}}\,\delta(n, p_a^{i+1})=0$, s így a **7.** pontban bebizonyított tétel szerint rekurzív.

11. Gyakran lehet hasznát venni a több rekurzív függvényből «összetákolt» függvénynek is: legyenek $\alpha_1(a_1,\ldots,a_r)$, $\alpha_2(a_1,\ldots,a_r)$, $\ldots$, $\alpha_k(a_1,\ldots,a_r)$ rekurzív függvények, továbbá $\beta_1(a_1,\ldots,a_r)$, $\ldots$, $\beta_2(a_1,\ldots,a_r)$, $\beta_k(a_1,\ldots,a_r)$ oly rekurzív függvények, melyek közül minden $(a_1,\ldots,a_r)$ helyen egy és csakis egy 0; akkor az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ függvényekből «összetákolt»

$$\varphi(a_1,\ldots,a_r) = \begin{cases} \alpha_1(a_1,\ldots,a_r), & \text{ha } \beta_1(a_1,\ldots,a_r)=0 \\ \alpha_2(a_1,\ldots,a_r), & \text{ha } \beta_2(a_1,\ldots,a_r)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_k(a_1,\ldots,a_r), & \text{ha } \beta_k(a_1,\ldots,a_r)=0 \end{cases}$$

függvény is rekurzív.

---

[8] L. pl. G. PÓLYA und G. SZEGŐ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (1925), Abschnitt VIII. Kapitel 2, Aufgabe 94, 133. o., továbbá Lösung, 342. o.

[9] $\pi_a(n)$ nem tévesztendő össze a fent szerepelt $\pi(n)$ függvénnyel; ez utóbbit többé nem fogjuk használni.

Ugyanis $i=1, 2,\ldots, k$-ra

$$\alpha_i(a_1,\ldots, a_r).\overline{\mathrm{sg}}\ \beta_i(a_1,\ldots, a_r)$$

α_i-vel egyenlő, ha $\beta_i=0$ és minden más esetben 0; tehát

$$\varphi(a_1,\ldots, a_r)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(a_1,\ldots, a_r).\overline{\mathrm{sg}}\ \beta_i(a_1\ldots, a_r).$$

2. §. Az értékkészletrekurzió.

12. Az értékkészletrekurzió legegyszerűbb típusának a következőt tekinthetjük:

$$\begin{aligned}&\varphi(0, a_1,\ldots, a_r)=\alpha(a_1,\ldots, a_r)\\ &\varphi(n+1, a_1,\ldots, a_r)=\beta\big(n, a_1,\ldots, a_r, \varphi(\gamma_1(n, a_1,\ldots, a_r), a_1,\ldots, a_r),\\ &\qquad\qquad \varphi(\gamma_2(n, a_1,\ldots, a_r), a_1,\ldots, a_r),\\ &\qquad\qquad \ldots, \varphi(\gamma_k(n, a_1,\ldots, a_r), a_1,\ldots, a_r)\big),\end{aligned} \tag{1}$$

ahol $i=1, 2,\ldots, k$-ra $\gamma_i(n, a_1,\ldots, a_r)\leqq n$. Ki fogom mutatni, hogy az ilyen rekurzió primitív rekurzióra és helyettesítésekre vezethető vissza, amelyeknél csak az α, β, γ_1, $\gamma_2,\ldots, \gamma_k$ függvényekből és ismert rekurzív függvényekből helyettesítéssel keletkező függvények szerepelnek; tehát *ha α, β, γ_1, $\gamma_2,\ldots, \gamma_k$ rekurzív függvények, akkor az* (1) *értékkészletrekurzióval definiált φ függvény is rekurzív.*

Ennek bebizonyítására az (1) definíciót mindenekelőtt átalakítom. A $\varphi(n+1, a_1,\ldots, a_r)$ meghatározására itt nemcsak $\varphi(n, a_1,\ldots, a_r)$ ismerete, hanem a

$$\varphi(0, a_1,\ldots, a_r),\ \varphi(1, a_1,\ldots, a_r),\ldots,\ \varphi(n, a_1,\ldots, a_r)$$

sorozat több tagjának ismerete szükséges. E sorozatot azonban egyetlen adattal is jellemezhetem: legyen

$$\psi(n, a_1,\ldots, a_r)=p_0^{\varphi(0, a_1,\ldots, a_r)}.p_1^{\varphi(1, a_1,\ldots, a_r)}.\ldots p_n^{\varphi(n, a_1,\ldots, a_r)}=$$

$$=\prod_{i=0}^{n}p_i^{\varphi(i, a_1,\ldots, a_r)};$$

ebből a fenti sorozat tagjai így számíthatók ki:

$$\varphi(i, a_1,\ldots, a_r)=\pi_i\big(\psi(n, a_1,\ldots, a_r)\big),\quad \text{ha}\quad i=1, 2,\ldots, n.$$

E ψ függvény tehát a $\varphi(i, a_1, \ldots, a_r)$ függvénynek $i=n$-ig terjedő értékkészletét jellemzi; ψ-t nevezhetjük a φ-hez tartozó «értékkészletfüggvénynek». Ennek segítségével az (1) definíció így írható:

$$\begin{aligned} &\varphi(0, a_1, \ldots, a_r) = \alpha(a_1, \ldots, a_r) \\ &\varphi(n+1, a_1, \ldots, a_r) = \gamma\big(n, a_1, \ldots, a_r, \psi(n, a_1, \ldots, a_r)\big), \end{aligned} \tag{2}$$

ahol

$$\gamma(n, a_1, \ldots, a_r, b) = \beta\big(n, a_1, \ldots, a_r, \pi_{\gamma_1(n, a_1, \ldots, a_r)}(b), \\ \pi_{\gamma_2(n, a_1, \ldots, a_r)}(b), \ldots, \pi_{\gamma_k(n, a_1, \ldots, a_r)}(b)\big),$$

tehát, ha β, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ rekurzívok voltak, γ is rekurzív.

Mármost $\psi(n, a_1, \ldots, a_r)$ a következő primitív rekurzióval definiálható:

$$\begin{aligned} \psi(0, a_1, \ldots, a_r) &= 2^{\varphi(0, a_1, \ldots, a_r)} = 2^{\alpha(a_1, \ldots, a_r)} \\ \psi(n+1, a_1, \ldots, a_r) &= \psi(n, a_1, \ldots, a_r).p_{n+1}^{\varphi(n+1, a_1, \ldots, a_r)} = \\ &= \psi(n, a_1, \ldots, a_r).p_{n+1}^{\gamma(n, a_1, \ldots, a_r, \psi(n, a_1, \ldots, a_r))} \end{aligned}$$

és $\psi(n, a_1, \ldots, a_r)$-ből $\varphi(n, a_1, \ldots, a_r)$ helyettesitéssel nyerhető:

$$\varphi(n, a_1, \ldots, a_r) = \pi_n\big(\psi(n, a_1, \ldots, a_r)\big).$$

Tehát ha α, β, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ rekurzívok voltak, $\varphi(n, a_1, \ldots, a_r)$ is rekurzív függvény.

13. Ezzel nemcsak az (1) alakú, hanem az általánosabb (2) alakú értékkészletrekurziót is primitív rekurzióra vezettük vissza. (2), részletesebben kiírva

$$\begin{aligned} &\varphi(0, a_1, \ldots, a_r) = \alpha(a_1, \ldots, a_r) \\ &\varphi(n+1, a_1, \ldots, a_r) = \gamma\Big(n, a_1, \ldots, a_r, \prod_{i=0}^{n} p_i^{\varphi(i, a_1, \ldots, a_r)}\Big), \end{aligned} \tag{2'}$$

szintén értékkészletrekurziónak nevezhető, mert a második egyenlet jobboldala a $\varphi(i, a_1, \ldots, a_r)$ függvénynek az $i=0, 1, \ldots, n$ értékekre felvett értékkészletétől függ és nyilván általánosabb mint (1), mert azoknak a φ értékeknek a száma, amelyek a jobboldalon szerepelnek, n-től is függ (t. i. éppen n). A (2) definíció magában tartalmazza például a

$$\begin{aligned} &\varphi(0, a_1, \ldots, a_r) = \alpha(a_1, \ldots, a_r) \\ &\varphi(n+1, a_1, \ldots, a_r) = \beta\Big(n, a_1, \ldots, a_r, \sum_{i=0}^{n} \beta_1(\varphi(i, a_1, \ldots, a_r))\Big) \end{aligned}$$

értékkészletrekurziót is — amely szintén nem esik az (1) eset alá; — ugyanis (2) ebbe megy át, ha

$$\gamma(n, a_1, \ldots, a_r, b) = \beta\left(n, a_1, \ldots, a_r, \sum_{i=0}^{n} \beta_1(\pi_i(b))\right).$$

Nevezzük (2)-t általános értékkészletrekurziónak; akkor az előbbiek alapján kimondhatjuk, hogy ha α és γ rekurzív függvények, a (2) általános értékkészletrekurzió is rekurzív függvényt definiál, szóval *az általános értékkészletrekurzió megengedése nem bővíti a rekurzív függvények osztályát.*

3. §. A beskatulyázott rekurzió.

14. Mielőtt az általános beskatulyázott rekurziót tárgyalnám, előbb egy egyszerű speciális eseten mutatom meg azt a módszert, ahogyan az be nem skatulyázott értékkészletrekurzióra (tehát, a megelőző § eredményét figyelembe véve, primitív rekurzióra is) visszavezethető. Ez a speciális eset

$$\begin{aligned} &\varphi(0, a) = \alpha(a) \\ &\varphi(n+1, a) = \beta\big(n, \varphi(n, \gamma(n, a, \varphi(n, a)))\big), \end{aligned} \tag{3}$$

ahol α, β, γ legyenek rekurzív függvények.

Az így definiált függvény bármely $\varphi(n, a)$ értéke véges, de n-től függő számú beskatulyázással épül fel az α, β, γ függvényekből, ahol e függvények alkalmazásának sorrendje is n-től függ; amellett a β és γ függvény első argumentumában sohasem fordul elő további beskatulyázás, hanem ott mindig valamely n-nél kisebb szám áll; a többi helyek közül azokon, ahol nincs további beskatulyázás, a áll. Például:

$$\varphi(0, a) = \alpha(a),$$

$$\varphi(1, a) = \beta\big(0, \varphi(0, \gamma(0, a, \varphi(0, a)))\big) = \beta\big(0, \alpha(\gamma(0, a, \alpha(a)))\big),$$

$$\varphi(2, a) = \beta\big(1, \varphi(1, \gamma(1, a, \varphi(1, a)))\big) =$$

$$= \beta\Bigg(1, \beta\Bigg(0, \alpha\Bigg(\gamma\Bigg(0, \gamma\Big(1, a, \beta\big(0, \alpha(\gamma(0, a, \alpha(a)))\big)\Big),$$

$$\alpha\Big(\gamma\Big(1, a, \beta\big(0, \alpha(\gamma(0, a, \alpha(a)))\big)\Big)\Big)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg),$$

. . . .

Általában, ha n-re már áll, hogy $\varphi(n, a)$ ilyen szerkezetű, akkor (3) második egyenletéből láthatjuk, hogy $\varphi(n+1, a)$ is ilyen szerkezetű.

Ezért, ha konstruálunk egy $\psi(n, a)$ függvényt úgy, hogy $\psi(0, a) = a$ legyen és ψ definíciója egyébként olyan legyen, hogy bármely n-hez van oly m, hogy $\alpha(\psi(n, a)) = \psi(m, a)$, bármely n_1-hez és n_2-höz van oly m', hogy $\beta(n_1, \psi(n_2, a)) = \psi(m', a)$, végül bármely n_1-hez, n_2-höz és n_3-hoz van oly m'', hogy $\gamma(n_1, \psi(n_2, a), \psi(n_3, a)) = \psi(m'', a)$, akkor ezek alapján majd meg tudunk határozni olyan $\omega(n)$ függvényt, hogy $\psi(\omega(n), a) = \varphi(n, a)$ legyen. Megmutatom, hogy ψ választható úgy, hogy ψ is és $\omega(n)$ is rekurzív függvények legyenek.

Legyen

$$\psi(0, a) = a$$

és $n > 0$ esetén

$$\psi(n, a) = \begin{cases} \alpha(\psi(\pi_2(n), a)), & \text{ha } \pi_0(n) = 0 \text{ (azaz } n \text{ páratlan)}, \\ \beta(\pi_1(n), \psi(\pi_2(n), a)), & \text{ha } \pi_0(n) = 1, \\ \gamma(\pi_1(n), \psi(\pi_2(n), a), \psi(\pi_3(n), a)), & \text{ha } \pi_0(n) \geqq 2. \end{cases}$$

Akkor ψ eleget tesz a kívánt feltételeknek, ugyanis

$$\alpha(\psi(n, a)) = \psi(5^n, a), \tag{4}$$

$$\beta(n_1, \psi(n_2, a)) = \psi(2.3^{n_1}.5^{n_2}, a), \tag{5}$$

$$\gamma(n_1, \psi(n_2, a), \psi(n_3, a)) = \varphi(2^2.3^{n_1}.5^{n_2}.7^{n_3}, a). \tag{6}$$

ψ definíciója könnyen olyan alakra hozható, hogy kitűnjék, hogy rekurzív függvény. Ugyanis a **11.** pontban tett megjegyzés szerint

$$\varkappa(m, n, a, b) = \begin{cases} \alpha(a), & \text{ha } m = 0 \\ \beta(n, a), & \text{ha } m = 1 \\ \gamma(n, a, b), & \text{ha } m \geqq 2 \end{cases}$$

rekurzív függvény, (ugyanis $m=1$ így írható: $|m-1| = 0$, $m \geqq 2$ így írható: $2 \dot{-} m = 0$); és ennek segítségével ψ definíciója

$\psi(0, a) = a$

$\psi(n+1, a) = \varkappa(\pi_0(n+1), \pi_1(n+1), \psi(\pi_2(n+1), a), \psi(\pi_3(n+1), a))$

alakra hozható. Ez értékkészletrekurzió, mert $\pi_2(n+1) \leqq n$, $\pi_3(n+1) \leqq n$.

15. A ψ függvény nevezetes sajátsága, hogy a belőle beskatulyázással keletkező $\psi(n, \psi(s, a))$ alakú kifejezések a ψ függvény segítségével beskatulyázás nélkül is kifejezhetők; pontosabban: van olyan $\nu(n, s)$ rekurzív függvény, hogy

$$\psi(n, \psi(s, a)) = \psi(\nu(n, s), a). \tag{7}$$

Ugyanis

$$\psi(0, \psi(s, a)) = \psi(s, a).$$

Tegyük fel, hogy már $i=0, 1, 2, \ldots, n$-re van olyan $\nu(i, s)$ szám, amelyre

$$\psi(i, \psi(s, a)) = \psi(\nu(i, s), a).$$

Akkor

$$\begin{aligned}&\psi(n+1, \psi(s, a)) = \\ &= \chi(\pi_0(n+1), \pi_1(n+1), \psi(\pi_2(n+1), \psi(s, a)), \psi(\pi_3(n+1), \psi(s, a))) = \\ &= \chi(\pi_0(n+1), \pi_1(n+1), \psi(\nu(\pi_2(n+1), s), a), \psi(\nu(\pi_3(n+1), s), a)) = \\ &= \psi(2^{\pi_0(n+1)} . 3^{\pi_1(n+1)} . 5^{\nu(\pi_2(n+1), s)} . 7^{\nu(\pi_3(n+1), s)}, a).\end{aligned}$$

Ha tehát $\nu(n, s)$-et a

$$\begin{aligned}&\nu(0, s) = s \\ &\nu(n+1, s) = 2^{\pi_0(n+1)} . 3^{\pi_1(n+1)} . 5^{\nu(\pi_2(n+1), s)} . 7^{\nu(\pi_3(n+1), s)}\end{aligned}$$

értékkészletrekurzióval definiáljuk, akkor minden n-re

$$\psi(n, \psi(s, a)) = \psi(\nu(n, s), a).$$

16. Most már könnyen bebizonyítható, hogy van olyan rekurzív $\omega(n)$ függvény, melyre

$$\varphi(n, a) = \psi(\omega(n), a).$$

Először is (4) miatt $(n=0)$

$$\psi(1, a) = \alpha(\psi(0, a)) = \alpha(a) = \varphi(0, a).$$

Tegyük fel, hogy n-hez már van olyan $\omega(n)$, hogy minden a-ra

$$\varphi(n, a) = \psi(\omega(n), a).$$

Akkor

$$\varphi(n+1, a) = \beta(n, \psi(\omega(n), \gamma(n, a, \psi(\omega(n), a)))).$$

Itt (6) szerint

$$\gamma\bigl(n, a, \psi(\omega(n), a)\bigr) = \gamma\bigl(n, \psi(0, a), \psi(\omega(n), a)\bigr) =$$
$$= \psi(2^2 . 3^n . 5^0 . 7^{\omega(n)}, a) = \psi(4 . 3^n . 7^{\omega(n)}, a),$$

továbbá (7) szerint

$$\psi\bigl(\omega(n), \gamma(n, a, \psi(\omega(n), a))\bigr) = \psi\bigl(\omega(n), \psi(4 . 3^n . 7^{\omega(n)}, a)\bigr) =$$
$$= \psi\bigl(\nu(\omega(n), 4 . 3^n . 7^{\omega(n)}), a\bigr),$$

végül (5) szerint

$$\varphi(n+1, a) = \beta\bigl(n, \psi(\nu(\omega(n), 4 . 3^n . 7^{\omega(n)}), a)\bigr) =$$
$$= \psi(2 . 3^n . 5^{\nu(\omega(n), 4.3^n.7^{\omega(n)})}, a).$$

Ha tehát $\omega(n)$-et az

$$\omega(0) = 1$$
$$\omega(n+1) = 2 . 3^n . 5^{\nu(\omega(n), 4.3^n.7^{\omega(n)})}$$

rekurzióval definiáljuk, akkor minden n-re

$$\varphi(n, a) = \psi\bigl(\omega(n), a\bigr)$$

és így $\varphi(n, a)$ rekurzív függvény.

17. Az általános beskatulyázott rekurziónál mindenekelőtt a definiálandó $\varphi(n, a_1, a_2, \dots a_r)$ függvény értéke az $n=0$ helyen meg van adva, mint az $a_1, a_2, \dots, a_r$ paraméterek már ismert függvénye: $\varphi(n, a_1, a_2, \dots, a_r) = \alpha(a_1, a_2, \dots, a_r)$; azonkívül $\varphi(n+1, a_1, a_2, \dots, a_r)$ meg van adva, mint egy kifejezés, amely a φ függvényből, továbbá már ismert $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ függvényekből véges számú egymásbahelyettesitéssel épül fel, úgy azonban, hogy φ első argumentumában mindig n álljon.

Szorítkozhatunk arra az esetre, amikor $r=1$, azaz csak egy paraméter van. Ugyanis ellenkező esetben tekintsük a

$$\xi(n, a) = \varphi\bigl(n, \pi_1(a), \pi_2(a), \dots, \pi_r(a)\bigr)$$

függvényt; ebből $\varphi(n, a_1, a_2, \dots, a_r)$ a

$$\varphi(n, a_1, a_2, \dots, a_r) = \xi(n, p_1^{a_1} . p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}) \qquad (8)$$

egyenlet szerint rekurzív függvény helyettesítésével adódik. Bebizonyítom, hogy $\xi(n, a)$ az $\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ és $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi^r$

függvények segítségével beskatulyázott rekurzióval definiálható. Ugyanis mindenekelőtt

$$\xi(0, a) = \varphi\big(0, \pi_1(a), \pi_2(a), \ldots, \pi_r(a)\big) = \alpha\big(\pi_1(a), \pi_2(a), \ldots, \pi_n(a)\big).$$

$\xi(n+1, a)$ meghatározására $\varphi(n+1, a_1, a_2, \ldots, a_r)$ definíciójában $a_1, a_2, \ldots, a_r$ helyébe rendre $\pi_1(a), \pi_2(a), \ldots, \pi_r(a)$-t kell tennünk; igy oly kifejezés adódik, amely a $\varphi, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ és a $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ függvényekből helyettesítéssel épül fel és φ első argumentumában mindenütt n áll. φ-t itt (8) segítségével kifejezhetjük ξ-vel s eközben az első argumentum nem változik, tehát ξ-re valóban beskatulyázott rekurziót kapunk. (Pl. ha $r = 2$ és φ definíciójának második egyenlete ilyen alakú:

$$\begin{aligned}\varphi(n+1, a_1, a_2) = \beta_1\big(n, a_1, a_2, \varphi(n, \beta_2(\varphi(n, a_1, a_2)),\\ \beta_3(\varphi(n, a_2, a_1)))\big),\end{aligned}$$

akkor

$$\xi(n, a) = \varphi(n, \pi_1(a), \pi_2(a)),$$
$$\varphi(n, a_1, a_2) = \xi(n, 3^{a_1}.5^{a_2})$$

és

$$\begin{aligned}\xi(n+1, a) &= \varphi(n+1, \pi_1(a), \pi_2(a)) = \\ &= \beta_1\big(n, \pi_1(a), \pi_2(a), \varphi\big(n, \beta_2(\varphi(n, \pi_1(a), \pi_2(a))), \\ &\qquad , \beta_3(\varphi(n, \pi_2(a), \pi_1(a)))\big)\big) = \\ &= \beta_1\big(n, \pi_1(a), \pi_2(a), \xi(n, 3^{\beta_2(\xi(n, a))}.5^{\beta_3(\xi(n, 3^{\pi_2(a)}.5^{\pi_1(a)}))})\big).\end{aligned}$$

Ha tehát kimutatom, hogy rekurzív függvényekből beskatulyázott rekurzióval definiált kétváltozós függvény rekurzív, akkor ez akárhány változós függvényre is igaz.

18. Legyen tehát a $\varphi(n, a)$ *kétváltozós* függvény beskatulyázott rekurzióval definiálva az $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ rekurzív függvényekből, még pedig legyen

$$\varphi(0, a) = \alpha(a)$$

és $\varphi(n+1, a)$ számára a $\varphi, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ függvényekből véges számú egymásbahelyettesítéssel keletkező oly λ kifejezés legyen megadva, amelyben φ első argumentumában mindig n áll. Ez a λ kifejezés

$$\lambda = \gamma\big(n, \varphi(n, \lambda_1), \varphi(n, \lambda_2), \ldots, \varphi(n, \lambda_l), a\big)$$

alakú, ahol γ a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ függvények egyike, vagy azokból helyettesítéssel keletkező függvény; a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ kifejezések, melyeket a λ kifejezés *alkotói*nak fogok nevezni, hasonló szerkezetű kifejezések, tehát bármelyikük, pl. λ_i ily alakú:

$$\lambda_i = \gamma_i\big(n, \varphi(n, \lambda_{i1}), \varphi(n, \lambda_{i2}), \ldots, \varphi(n, \lambda_{iu}), a\big),$$

ahol γ_i ismét a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ függvények egyike, vagy azokból helyettesítéssel keletkezik; a $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{iu}$ kifejezések pedig, λ_i alkotói, (számuk, u, természetesen függhet i-től) ismét hasonló módon épülnek fel újabb alkotókból, s. i. t. Természetesen ennek a folyamatnak előbb-utóbb meg kell szakadnia, mert a feltevés szerint λ véges számú beskatulyázással épül fel; utoljára oly kifejezésekhez jutunk, amelyeknek egy alkotójuk sincs, tehát $\gamma \ldots (n, a)$ alakúak, ahol $\gamma \ldots$ a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ függvények egyike, vagy ezekből helyettesítéssel keletkezik, vagy pedig n vagy a maga; e két függvényt szintén vegyük hozzá a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ függvényekhez, ha nem voltak köztük.

Rendezzük el λ-t, utána alkotóit: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$-t, utánuk ezek alkotóit, majd alkotóik alkotóit, stb. egy sorozatba; e sorozat tehát véges lesz. Jelöljük e sorozat elemeit rendre a következőképpen:

$$L_0, L_1, L_2, \ldots, L_v,$$

ahol tehát $L_0 = \lambda$ és mindegyik L_i alkotói e sorozatban L_i-nél később állnak; L_v-nek egy alkotója sincs. A fentiek szerint tehát mindegyik L_i ily alakú:

$$L_i = \delta_i\big(n, \varphi(n, L_{i'}), \varphi(n, L_{i''}), \ldots, \varphi(n, L_{i^{(j)}}, a\big),$$

ahol $i' > i, i'' > i, \ldots, i^{(j)} > i$ és δ_i a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ függvényekből helyettesítéssel épül fel. Nem megszorítás, ha feltesszük, hogy $i', i'', \ldots, i^{(j)}$ rendre $i+1, i+2, \ldots, v$; ugyanis δ_i-t tekinthetjük oly változók függvényeként is, amelyektől nem függ valóban. Ekkor azonban L_0 szerkezetét a következő áttekinthető alakban írhatjuk fel:

$$L_0 = \delta_0\big(n, \varphi(n, L_1), \varphi(n, L_2), \ldots, \varphi(n, L_v), a\big),$$

ahol

$$\begin{aligned} L_1 &= \delta_1\bigl(n, \varphi(n, L_2), \varphi(n, L_3), \ldots, \varphi(n, L_v), a\bigr), \\ L_2 &= \delta_2\bigl(n, \varphi(n, L_3), \varphi(n, L_4), \ldots, \varphi(n, L_v), a\bigr), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_v &= \delta_v(n, a). \end{aligned}$$

Jelöljük még $\varphi(n, L_i)$-t $(i = 1, 2, \ldots, v)$ röviden φ_i-vel; írjunk továbbá v helyett ismét l-et, $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_v$ helyett $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_l$-et (ezek természetesen nem ugyanazok, mint a fenti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$, hanem belőlük helyettesítéssel épülnek fel). Akkor a beskatulyázott rekurzió legáltalánosabb alakját $\bigl($kétváltozós $\varphi(n, a)$ függvényt definiáló rekurzióra szorítkozva$\bigr)$ így írhatjuk:

$$\begin{aligned} \varphi(0, a) &= \alpha(a), \\ \varphi(n+1, a) &= \beta_0(n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l, a), \end{aligned}$$

ahol $i = 1, 2, \ldots, l$ esetén

$$\varphi_i = \varphi_i(n, a) = \varphi\bigl(n, \beta_i(n, \varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \ldots, \varphi_l, a)\bigr).$$

19. Hasonlóan, mint a fentebb már tárgyalt speciális esetben, definiálunk egy $\psi(n, a)$ függvényt a következőképpen:

$$\psi(0, a) = a$$

és $n > 0$ esetén

$$\psi(n, a) = \begin{cases} \alpha\bigl(\psi(\pi_2(n), a)\bigr), \text{ ha } \pi_0(n) = 0, \\ \beta_0\bigl(\pi_1(n), \psi(\pi_2(n), a), \psi(\pi_3(n), a), \ldots, \psi(\pi_{l+2}(n), a)\bigr), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ha } \pi_0(n) = 1, \\ \beta_1\bigl(\pi_1(n), \psi(\pi_2(n), a), \psi(\pi_3(n), a), \ldots, \psi(\pi_{l+1}(n), a)\bigr), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ha } \pi_0(n) = 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_i\bigl(\pi_1(n), \psi(\pi_2(n), a), \psi(\pi_3(n), a), \ldots, \psi(\pi_{l-i+2}(n), a)\bigr), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ha } \pi_0(n) = i+1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_l\bigl(\pi_1(n), \psi(\pi_2(n), a)\bigr), \text{ ha } \pi_0(n) \geqq l+1. \end{cases}$$

Ha — mint feltesszük — $\alpha, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_l$ rekurzív függvények, akkor ψ is az; ugyanis, ha

$$\varkappa(m, n, a_1, a_2, \ldots, a_{l+1}) = \begin{cases} \alpha(a_1), \text{ ha } m=0, \\ \beta_0(n, a_1, \ldots, a_{l+1}) \text{ ha } m=1 \\ \qquad (\text{azaz } |m-1| = 0), \\ \beta_1(n, a_1, \ldots, a_l), \text{ ha } m=2 \\ \qquad (\text{azaz } |m-2| = 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_i(n, a_1, \ldots, a_{l-i+1}), \text{ ha } m=i+1 \\ \qquad \big(\text{azaz } |m-(i+1)| = 0\big), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_l(n, a_1), \text{ ha } m \geqq l+1 \\ \qquad (\text{azaz } l+1 \dot{-} m = 0), \end{cases}$$

akkor $\varkappa$ a **11**. pontban bebizonyított tétel szerint rekurzív függvény és segítségével ψ definíciója így is írható:

$$\begin{aligned} &\psi(0, a) = a, \\ &\psi(n+1, a) = \varkappa\big(\pi_0(n+1), \pi_1(n+1), \psi(\pi_2(n+1), a), \\ &\qquad \psi(\pi_3(n+1), a), \ldots, \psi(\pi_{l+2}(n+1), a)\big), \end{aligned} \tag{9}$$

ez pedig értékkészletrekurzió.

(9)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned} &\varkappa\big(n_0, n_1, \psi(n_2, a), \psi(n_3, a), \ldots, \psi(n_{l+2}, a)\big) = \\ &= \psi(2^{n_0}. 3^{n_1}. 5^{n_2}. 7^{n_3} \ldots p_{l+2}^{n_{l+2}}, a). \end{aligned} \tag{10}$$

20. Hasonlóan, mint a **15**. pontban, itt is bebizonyítjuk, hogy van oly rekurzív $\nu(n, s)$ függvény, hogy

$$\psi\big(n, \psi(s, a)\big) = \psi\big(\nu(n, s), a\big). \tag{11}$$

Ugyanis $n = 0$ esetén

$$\psi\big(0, \psi(s, a)\big) = \psi(s, a),$$

tehát (11) igaz lesz, ha $\nu(0, s) = s$. Tegyük fel, hogy $i = 1, 2, \ldots, n$-re már találtunk oly $\nu(i, s)$ számot, hogy

$$\psi\big(i, \psi(s, a)\big) = \psi\big(\nu(i, s), a\big),$$

akkor (9) és (10) miatt

$$\begin{aligned}
&\psi(n+1, \psi(s, a)) = \\
&= \chi(\pi_0(n+1), \pi_1(n+1), \psi(\pi_2(n+1), \psi(s, a)), \\
&\qquad \psi(\pi_3(n+1), \psi(s, a)), \dots, \psi(\pi_{l+2}(n+1), \psi(s, a))) = \\
&= \chi(\pi_0(n+1), \pi_1(n+1), \psi(\nu(\pi_2(n+1), s), a), \\
&\qquad \psi(\nu(\pi_3(n+1), s), a), \dots, \psi(\nu(\pi_{l+2}(n+1), s), a)) = \\
&= \psi(2^{\pi_0(n+1)}.3^{\pi_1(n+1)}.5^{\nu(\pi_2(n+1), s)}.7^{\nu(\pi_3(n+1), s)}\dots p_{l+2}^{\nu(\pi_{l+2}(n+1), s)}, a) = \\
&= \psi(\nu(n+1, s), a),
\end{aligned}$$

ha

$$\begin{aligned}
&\nu(n+1, s) = \\
&= 2^{\pi_0(n+1)}.3^{\pi_1(n+1)}.5^{\nu(\pi_2(n+1), s)}.7^{\nu(\pi_3(n+1), s)}\dots p_{l+2}^{\nu(\pi_{l+2}(n+1), s)}.
\end{aligned}$$

E szerint, ha a $\nu(n, s)$ függvényt a

$$\begin{aligned}
&\nu(0, s) = s \\
&\nu(n+1, s) = 2^{\pi_0(n+1)}.3^{\pi_1(n+1)}.\prod_{i=2}^{l+2} p_i^{\nu(\pi_i(n+1), s)}
\end{aligned}$$

értékkészletrekurzióval definiáljuk, akkor (11) minden n-re igaz lesz.

21. Végül bebizonyítjuk, hogy van oly $\omega(n)$ rekurzív függvény, hogy

$$\varphi(n, a) = \psi(\omega(n), a). \tag{12}$$

Minthogy (9) miatt

$$\begin{aligned}
&\psi(1, a) = \chi(0, 0, \psi(0, a), \psi(0, a), \dots, \psi(0, a)) = \alpha(\psi(0, a)) = \\
&\quad = \alpha(a) = \varphi(0, a),
\end{aligned}$$

azért $n = 0$ esetén (12) áll, ha $\omega(0) = 1$.

Tegyük fel, hogy találtunk már valamely n-re oly $\omega(n)$ számot, hogy (12) álljon. Akkor

$$\varphi(n+1, a) = \beta_0(n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l, a),$$

ahol $i = 1, 2, \dots, l$ esetén

$$\varphi_i = \varphi_i(n, a) = \psi(\omega(n), \beta_i(n, \varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \dots, \varphi_l, a)).$$

Állítom, hogy itt $i = 0, 1, 2, \dots, l$-re

$$\beta_i(n, \varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \dots, \varphi_l, a) = \psi(\mu_i(n, \omega(n)), a), \tag{13}$$

ahol $\mu_i(n, b)$ rekurzív függvénye n-nek és b-nek. Ez áll $i = l$ esetén, mert (10) miatt[10]

$$\beta_l(n, a) = \varkappa(l+1, n, a, a, \ldots, a) = \varkappa\big(l+1, n, \psi(0, a), \ldots, \psi(0, a)\big) = \\ = \psi(2^{l+1}.3^n, a),$$

tehát $\mu_l(n, b)$ gyanánt $2^{l+1}.3^n$-et választhatjuk; ez valóban rekurzív függvény (b-től egyébként nem is függ). Tegyük fel, hogy $0 \leq i \leq l$ és már találtunk oly $\mu_l(n, b), \mu_{l-1}(n, b), \ldots, \mu_{i+1}(n, b)$ rekurzív függvényeket, hogy $j = i+1, \ldots, l$-re

$$\beta_j(n, \varphi_{j+1}, \varphi_{j+2}, \ldots, \varphi_l, a) = \psi\big(\mu_j(n, \omega(n)), a\big).$$

Akkor (11) miatt

$$\varphi_j = \psi(\omega(n), \beta_j(n, \varphi_{j+1}, \varphi_{j+2}, \ldots, \varphi_l, a)) = \psi\big(\omega(n), \psi(\mu_j(n, \omega(n)), a)\big) = \\ = \psi\big(\nu(\omega(n), \mu_j(n, \omega(n))), a\big),$$

ha $j = i+1, \ldots, l$, tehát (10) miatt

$$\beta_i(n, \varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \ldots, \varphi_l, a) = \varkappa(i+1, n, \varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \ldots, \varphi_l, a, a, \ldots, a) = \\ = \varkappa\Big(i+1, n, \psi\big(\nu(\omega(n), \mu_{i+1}(n, \omega(n))), a\big), \psi\big(\nu(\omega(n), \mu_{i+2}(n, \omega(n))), a\big), \ldots, \\ , \psi\big(\nu(\omega(n), \mu_l(n, \omega(n))), a\big), \psi(0, a), \psi(0, a), \ldots, \psi(0, a)\Big) = \\ = \psi(2^{i+1}.3^n.\prod_{j=1}^{l-i} p_{j+1}^{\nu(\omega(n), \mu_{i+j}(n, \omega(n)))}, a),$$

vagyis (13) igaz, ha a $\mu_i(n, b)$ függvényt így választjuk:

$$\mu_i(n, b) = 2^{i+1}.3^n.\prod_{j=1}^{l-i} p_{j+1}^{\nu(b, \mu_{i+j}(n, b))};$$

ez valóban rekurzív függvény (mert rekurzív függvényekből helyettesítéssel épül fel).

Ennélfogva van oly $\mu_0(n, b)$ rekurzív függvény, hogy

$$\varphi(n+1, a) = \beta_0(n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l, a) = \psi\big(\mu_0(n, \omega(n)), a\big),$$

vagyis (12) áll n helyett $n+1$-gyel is, ha

$$\omega(n+1) = \mu_0\big(n, \omega(n)\big).$$

---

[10] Az utolsó l argumentumban a helyébe bármi mást is írhattam volna, azonban így lesz legalkalmasabb. Hasonló megjegyzés érvényes egy későbbi egyenletnél is.

E szerint, ha az $\omega(n)$ függvényt az

$$\omega(0)=1$$
$$\omega(n+1)=\mu_0\big(n,\ \omega(n)\big)$$

rekurzióval definiáljuk, akkor (12) minden n-re áll. Ez az $\omega(n)$ függvény rekurzív, tehát, (12) miatt, $\varphi(n, a)$ is rekurzív függvény.

Ennélfogva *a beskatulyázott rekurzió alkalmazása sem bővíti a rekurzív függvények osztályát.*

Péter Rózsa.

ZUR THEORIE DER REKURSIVEN FUNKTIONEN.

Man versteht unter einer rekursiven Funktion eine zahlentheoretische Funktion, die sich aus den Ausgangfunktionen 0 und $n+1$ mittels einer endlichen Kette von Substitutionen und *primitiven* Rekursionen gewinnen lässt. Man sagt dabei, dass die Funktion $\varphi(n, a_1, \ldots, a_r)$ aus den Funktionen $\alpha(a_1, \ldots, a_r)$ und $\beta(n, a_1, \ldots, a_n, b)$ durch primitive Rekursion entsteht, falls

$$\varphi(0, a_1, \ldots, a_r)=\alpha(a_1, \ldots, a_r)$$
$$\varphi(n+1, a_1 \ldots, a_r)=\beta(n, a_1, \ldots, a_r, \varphi(n, a_1, \ldots, a_r)).$$

Das Hauptergebnis vorliegender Arbeit ist, dass die Klasse der rekursiven Funktionen keine Erweiterung erleidet, falls man statt der primitiven Rekursionen die *eingeschachtelten* Rekursionen zugrunde legt. Man sagt dabei, dass eine Funktion $\varphi(n, a_1, \ldots, a_r)$ durch eingeschachtelte Rekursion aus gewissen Funktionen entsteht, falls zunächst $\varphi(0, a_1, \ldots, a_r)$ als eine dieser Funktionen, ferner für $\varphi(n+1, a_1, \ldots, a_r)$ ein Ausdruck angegeben ist, der aus den gegebenen Funktionen und aus $\varphi(n, a_1, \ldots, a_r)$ unter Festhaltung von n in der ersten Argumentstelle durch Substitutionen aufgebaut ist.

Diesen Satz habe ich in meiner Arbeit «Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion», *Math. Annalen,* 110 (1934), S. 612—632, bewiesen. In vorliegender Arbeit gebe ich einen einfacheren Beweis, indem ich die kombinatorischen Schwierigkeiten mit Hilfe des Satzes der eindeutigen Primfaktorenzerlegung umgehe. Es sei hier der Gedankengang des neuen Beweises kurz angegeben.

Man kann sich zunächst auf den Fall beschränken, dass die Funktion

φ zweistellig ist. (Vgl. a. a. O., Nr. **11**.) Dann lässt sich die allgemeine eingeschachtelte Rekursion auf die folgende explizite Form bringen:

$$\varphi(0, a) = \alpha(a),$$
$$\varphi(n+1, a) = \beta_0(n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l, a),$$

wobei für $i = 1, 2, \ldots, l$

$$\varphi_i = \varphi_i(n, a) = \varphi(n, \beta_i(n, \varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \ldots, \varphi_l, a))$$
$$(\alpha, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_l \text{ rekursive Funktionen}).$$

(Vgl. a. a. O., Nr. **13**; die Bezeichnung wurde hier unwesentlich abgeändert.)

Sei nun

$$\varkappa(m, n, a_1, \ldots, a_{l+1}) = \begin{cases} \alpha\,(a_1), \text{ falls } m=0, \\ \beta_0(n, a_1, \ldots, a_{l+1}) \text{ falls } m=1 \text{ (d. h. } |m-1|=0), \\ \beta_1(n, a_1, \ldots, a_l), \text{ falls } m=2 \text{ (d. h. } |m-2|=0), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \beta_i(n, a_1, \ldots, a_{l-i+1}), \\ \qquad \text{falls } m=i+1 \text{ (d. h. } |m-(i+1)|=0), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \beta_l(n, a_1), \text{ falls } m \geqq l+1 \text{ (d. h. } l+1 \dot{-} m = 0), \end{cases}$$

wobei

$$a \dot{-} b = \begin{cases} 0, \text{ falls } a \leqq b \\ a-b, \text{ sonst} \end{cases}$$

und $|a-b| = (a \dot{-} b) + (b \dot{-} a)$; und sei

$$\psi(0, a) = a$$
$$\psi(n+1, a) = \varkappa\big(\pi_0(n+1), \pi_1(n+1), \psi(\pi_2(n+1), a), \psi(\pi_3(n+1), a), \ldots, \psi(\pi_{l+2}(n+1), a)\big),$$

wobei $\pi_0(n)$ den Exponenten von $p_0 = 2$ und, für $i > 0$, $\pi_i(n)$ den Exponenten der i-ten ungeraden Primzahl, p_i, in der Primfaktorenzerlegung von n bedeutet. Da $\varkappa$ (vgl. a. a. O., Nr. **9**, **7**) und p_i, $\pi_i(n)$ (vgl. a. a. O., Nr. **10**) rekursiv sind und ψ durch eine Wertverlaufsrekursion (vgl. a. a. O., Nr. **12**) definiert wurde, ist $\psi(n, a)$ eine rekursive Funktion.

Dann ist

$$\psi(n, \psi(s, a)) = \psi(\nu(n, s), a),$$

wenn $\nu(n, s)$ durch

$$\nu(0, s) = s$$
$$\nu(n+1, s) = 2^{\pi_0(n+1)}.3^{\pi_1(n+1)}.\prod_{i=2}^{l+2} p_i^{\nu(\pi_i(n+1),\, s)}$$

definiert wird. Das gilt nämlich für $n = 0$, und wenn es schon für $0, 1, 2, \ldots, n$ statt n gilt, so ist

$$\begin{aligned}\psi(n+1, \psi(s, a)) = \chi\big(\pi_0(n+1), \pi_1(n+1)\ \psi(\nu(\pi_2(n+1), s), a),\\ \ldots, \psi(\nu(\pi_{l+2}(n+1), s), a)\big) =\\ = \psi(2^{\pi_0(n+1)}.3^{\pi_1(n+1)}.\prod_{i=2}^{l+2} p_i^{\nu(\pi_i(n+1),\, s)}, a).\end{aligned}$$

$\nu(n, s)$ ist rekursiv, da ihre Definition eine Wertverlaufsrekursion ist.

Nun gibt es eine rekursive Funktion $\omega(n)$, so dass

$$\varphi(n, a) = \psi(\omega(n), a).$$

Mit $\omega(0) = 1$ gilt das für $n = 0$, da

$$\psi(1, a) = \chi(0, 0, \psi(0, a), \ldots, \psi(0, a)) = \alpha(\psi(0, a)) = \alpha(a).$$

Nehmen wir an, dass es zu n schon eine Zahl $\omega(n)$ gibt, für welche die obige Gleichung besteht. Dann gibt es $l + 1$ rekursive Funktionen $\mu_i(n, b)$ für $i = 0, 1, \ldots, l$, für welche

$$\beta_i(n, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_l, a) = \psi\big(\mu_i(n, \omega(n)), a\big).$$

Das gilt nämlich mit $\mu_l(n, b) = 2^{l+1}.3^n$ für $i = l$, da

$$\begin{aligned}\beta_l(n, a) = \chi(l+1, n, a, \ldots, a) = \chi(l+1, n, \psi(0, a), \ldots, \psi(0, a)) =\\ = \psi(2^{l+1}.3^n, a),\end{aligned}$$

und angenommen, dass für $0 \leq i \leq l$ $\mu_l(n, b), \mu_{l-1}(n, b), \ldots, \mu_{i+1}(n, b)$ schon solche rekursive Funktionen sind, dass für $j = i+1, \ldots, l$

$$\beta_j(n, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_l, a) = \varphi\big(\mu_j(n, \omega(n)), a\big),$$

so ist mit

$$\mu_i(n, b) = 2^{i+1}.3^n.\prod_{i=1}^{l-i} p_{j+1}^{\nu(b,\, \mu_{i+j}(n,\, b))},$$

(dies ist eine rekursive Funktion), für $j = i + 1, \ldots, l$

$$\begin{aligned}\varphi_j = \psi(\omega(n), \beta_j(n, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_l, a)) = \psi\big(\omega(n), \psi(\mu_j(n, \omega(n)), a)\big) =\\ = \psi\big(\nu(\omega(n), \mu_j(n, \omega(n))), a\big),\end{aligned}$$

folglich

$$\beta_i(n, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_l, a) = \chi\big(i+1, n, \psi\big(\nu(\omega(n), \mu_{i+1}(n, \omega(n))), a\big),$$
$$, \psi\big(\nu(\omega(n), \mu_{i+2}(n, \omega(n))), a\big), \ldots, \psi\big(\nu(\omega(n), \mu_l(n, \omega(n))), a\big),$$
$$, \psi(0, a), \ldots, \psi(0, a)\big) =$$
$$= \psi\Big(2^{i+1}.3^n.\prod_{j=1}^{l-i} p_{j+1}^{\nu(\omega(n), \mu_{i+j}(n, \omega(n)))}, a\Big) = \psi\big(\mu_i(n, \omega(n)), a\big).$$

Demnach gibt es auch eine rekursive Funktion $\mu_0(n, b)$, für welche

$$\varphi(n+1, a) = \beta_0(n, \varphi_1, \ldots, \varphi_l, a) = \psi\big(\mu_0(n, \omega(n)), a\big);$$

wird also $\omega(n)$ durch die Rekursion:

$$\omega(0) = 1$$
$$\omega(n+1) = \mu_0\big(n, \omega(n)\big)$$

definiert, so ist

$$\varphi(n, a) = \psi\big(\omega(n), a\big),$$

also auch $\varphi(n, a)$ eine rekursive Funktion.

Rózsa Péter.

A STIRLING-FÉLE FORMULA EGY ELEMI BIZONYÍTÁSA.

A STIRLING-féle formula ismeretes módon[1] közvetlenül[2] származtatható az alábbi segédtételből, mely az «EULER-féle összegképlet» néven ismert tétel egy részét mondja ki:

Ha $f(x)$ az $x \geqq 1$ értékekre értelmezett folytonos, monoton $\begin{matrix}\textit{növekvő}\\ \textit{csökkenő}\end{matrix}$ és alulról $\begin{matrix}\textit{konkáv}\\ \textit{konvex}\end{matrix}$ függvény, akkor az

$$J_n = \int_1^n f(x)\,dx$$

integrálnak és az

$$s_n = \frac{1}{2} f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n)$$

összegnek a különbsége $n \to \infty$ esetén véges L határértékhez tart és e különbség eltérése a határértéktől:

$$\bigl| L - |s_n - J_n| \bigr| \leqq \frac{1}{2} \left| f(n) - f(n+1) \right|.$$

Célunk itt megmutatni, hogy ez a tétel minden számolás nélkül, a mellékelt ábrából kiolvasható. Ezt elég monoton csökkenő, konvex függvényre megmutatnunk, mert ha $f(x)$ növekvő és konkáv, akkor $-f(x)$ csökkenő és konvex.

Ilyen $f(x)$ függvény menetét mutatja a mellékelt ábra. Jelentsék azon a Q_0, Q_1, $Q_2, \ldots$ pontok az abszcisszatengely $m, m+1, m+2, \ldots$ abszcisszájú pontjait; P_0, P_1, $P_2, \ldots$ az $y=f(x)$

---

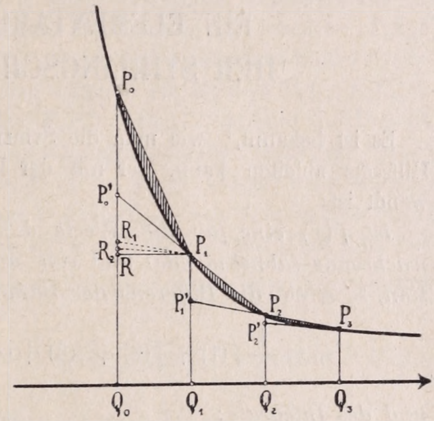
[1] L. pld. PÓLYA-SZEGŐ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Berlin 1925 Bd. I. p. 38 és 197.

[2] Az $f(x) = \log x$ helyettesitéssel.

görbe megfelelő pontjait, R pedig a P_1 pontból a P_0Q_0-ra bocsátott merőleges talppontját. Az

$$s_n - J_n = \sum_{i=1}^{n-1}\left\{\frac{f(i)+f(i+1)}{2} - \int_i^{i+1} f(x)\,dx\right\} = \sum_{i=1}^{n-1}\delta_i$$

eltérésben a δ_m tag a $P_0P_1Q_1Q_0$ trapéz területének és a görbe alatt, a Q_0 és Q_1 között fekvő területnek különbsége (az ábrán vonalkázott terület). Ha a P_1P_2 húrt meghosszabbítjuk a Q_0P_0 ordinátával való metszésig, az így nyert P_1P_0' egyenesdarab a görbe konvexitása miatt a görbe alatt marad. Tehát a $P_1P_0P_0'$ háromszög magában foglalja a δ_m területet. De a $P_1P_0P_0'$, $P_2P_1P_1'$, $P_3P_2P_2'$,... háromszögek egymás fedése nélkül elhelyezhetők a P_1P_0R derékszögű háromszögben.



Ha u. i. a P_1R_1, P_1R_2,... egyenesdarabok párhuzamosak a P_2P_1', P_3P_2',... húr-meghosszabbításokkal, akkor a $P_1P_0'R_1$, $P_1R_1R_2$,... háromszögek rendre kongruensek a $P_2P_1P_1'$, $P_3P_2P_2'$,... háromszögekkel. A görbe monotonitása miatt minden húr lefelé halad, tehát a $P_1R_kR_{k+1}$ háromszögek egyike sem nyúlik ki a P_1P_0R derékszögű háromszögből. Ezért

$$\delta_m + \delta_{m+1} + \delta_{m+2} + \cdots \leqq P_1P_0R\triangle \text{ területe} = \frac{1}{2}\,[f(m) - f(m+1)].$$

Ebből már azonnal látható, hogy a $\Sigma\delta_i$ pozitív tagú sor konvergens, továbbá, hogy

$$L = \sum_1^{\infty}\left\{\frac{f(i)+f(i+1)}{2} - \int_i^{i+1} f(x)\,dx\right\} \leqq \frac{1}{2}\,[f(1) - f(2)],$$

és a maradéktag

$$R_n = L - (s_n - J_n) = \sum_n^{\infty}\delta_n \leqq \frac{1}{2}\,[f(n) - f(n+1)].$$

Ha a differenciálhányados fogalmát is föl akarjuk használni, akkor a középértéktétel alkalmazásával az utolsó becslés helyett még a következőt is írhatjuk:

$$R_n \leqq \frac{1}{2}[f(n) - f(n+1)] = \frac{1}{2}|f'(n+\theta)| \leqq \frac{1}{2}|f'(n)|.$$

Veress Pál.

EIN ELEMENTARER BEWEIS DER STIRLINGSCHEN FORMEL.

Es ist bekannt,[1] wie man die STIRLING'sche Formel aus folgendem Hilfssatz ableiten kann, der mit der EULER'schen Summenformel verwandt ist:

Ist $f(x)$ eine für die Werte $x \geqq 1$ erklärte, stetige, monoton wachsende (abnehmende) und von unten konkave (konvexe) Funktion, so strebt die Differenz der Summe:

$$s_n = \frac{1}{2}f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n),$$

und des Integrals:

$$J_n = \int_1^n f(x)\,dx$$

mit wachsendem n einem endlichen Grenzwert L zu. Als Abschätzung der Abweichung der Differenz von dem Grenzwert gilt:

$$\big|\, L - |s_n - J_n| \,\big| \leqq \frac{1}{2}|f(n) - f(n+1)|.$$

Den Beweis führen wir für eine abnehmende, konvexe Funktion durch. Eine solche Funktion ist auf unserer Figur (S. 51) dargestellt. $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ bedeuten darauf die Punkte der Abszissenachse mit den Abszissen $m, m+1, m+2, \ldots$; $P_0, P_1, P_2, \ldots$ die entsprechenden Punkte der Kurve $y=f(x)$, und R den Fusspunkt des aus P_1 auf die Gerade P_0Q_0 gefällten Lotes.

Wird die fragliche Differenz in der Form geschrieben:

$$s_n - J_n = \sum_1^{n-1}\left\{\frac{f(i) + f(i+1)}{2} - \int_i^{i+1} f(x)\,dx\right\} = \sum_1^{n-1}\delta_i,$$

[1] S. die Fussnoten des ungarischen Textes.

so ist in dieser Summe

$$\frac{f(m) + f(m+1)}{2}$$

gleich dem Flächeninhalt des Trapezes $P_0P_1Q_1Q_0$, also wird δ_m durch die (auf der Figur schraffierte) Fläche zwischen der Sehne und dem Kurvenbogen dargestellt. Verlängert man die Sehne P_1P_2 bis zum Schnitt mit der Geraden Q_0P_0, so bleibt das so erhaltene Geradenstück P_1P_0' wegen der Konvexität der Kurve, *unter* der Kurve. Infolgedessen enthält das Dreieck $P_1P_0P_0'$ die Fläche δ_m in sich. Die Dreiecke $P_1P_0P_0'$ $P_2P_1P_1'$, $P_3P_2P_2'$,... können aber alle ohne Überdeckung in das Dreieck P_0P_1R verlegt werden. Zieht man nämlich die Graden P_1R_1, P_1R_2,... parallel den verlängerten Sehnen P_2P_1', P_3P_2',..., so sind die Dreiecke $P_1P_0'R_1$, $P_1R_1R_2$,... der Reihe nach kongruent zu den Dreiecken $P_2P_1P_1'$, $P_3P_2P_2'$,... . Da $f(x)$ abnehmend ist, ist keine Sehne nach aufwärts gerichtet, also reicht kein Dreieck $P_1R_kR_{k+1}$ aus dem Dreick P_1P_0R heraus. (Nur im Falle $\lim\limits_{n\to\infty} [f(n) - f(n+1)] = 0$ wird P_1P_0R durch die Gesamtheit dieser Dreiecke ausgefüllt, was jedoch für uns unwesentlich ist.) Es ist also:

$$\delta_m + \delta_{m+1} + \delta_{m+2} + \cdots \leqq \text{Flächeninhalt des Dreieckes } P_1P_0R =$$

$$= \frac{1}{2}[f(m) - f(m+1)].$$

Daraus ist sofort zu sehen, dass die Reihe mit positiven Gliedern $\Sigma\delta_i$ konvergiert und für das Restglied

$$R_n = L - (s_n - J_n) = \sum_n^\infty \delta_n \leqq \frac{1}{2}[f(n) - f(n+1)]$$

gilt.

P. Veress.

FALTÖLTÉSEK ÉS FALÁRAMOK HATÁSA AZ ELEKTRONCSŐ MŰKÖDÉSÉRE.[1]

Bevezetés. Alapjelenségek.

Az elektroncsövek, erősítőcsövek és adócsövek működésével, az izzókatód, anód és vezérlőrácsok, valamint a vakuum szerepével kiterjedt irodalom foglalkozik.[2] Igen kevés részletesebb vizsgálat történt azonban az üvegbura *elektromos szerepének* tisztázására. Egy érdekes jelenség, az elektroncsövek működése közben fellépő ugrásszerű változások arra indítottak, hogy az üvegfalon lejátszódó elektromos folyamatokat és ezen folyamatok hatását az elektroncső működésére, részletes vizsgálat tárgyává tegyük.

A jelenséget egy ma általánosan használatos csőtípusnál az ú. n. háromrácsos nagyfrekvencia csőnél tapasztaltuk. Az általunk vizsgált csőtípus a Philips gyártási sorozat E 447 típusszámát viseli. Egy ilyen cső elvi szerkezetét az 1. ábra tünteti fel: *a* az indirekt fűtésű katód, *b* a vezérlőrács, *c* az árnyékolórács vagy védőrács, amelynek feladata, hogy a cső karakterisztikus görbéjét a kis átfogás dacára, a negatív rácsfeszültségek felé eltolja s e célból konstans pozitív előfeszültségre van kap-

---

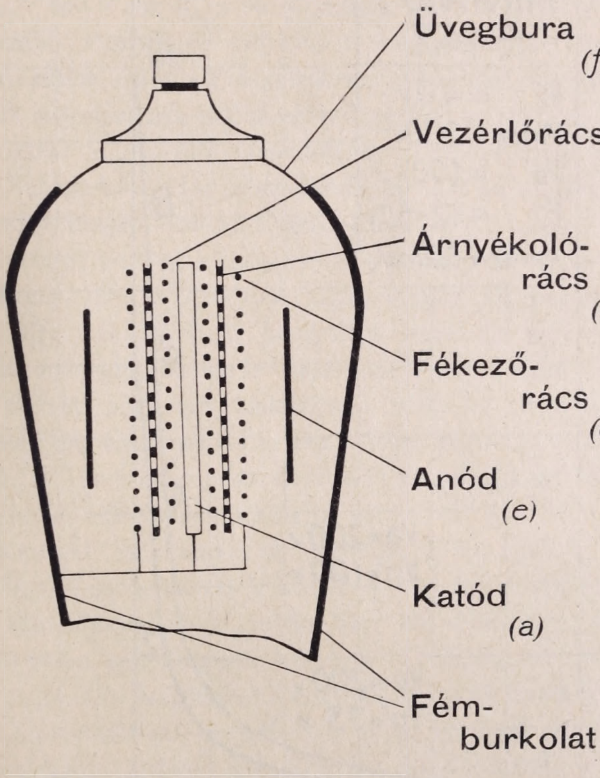
[1] Előadta RADÓ GYÖRGY a Mat. és Fiz. Társulat 1935. febr. 15-i ülésén.

[2] Nagyobb összefoglaló munkák: W. SCHOTTKY—H. ROTHE—H. SIMON: Glühelektroden und technische Elektronenröhren (Handbuch der Experimentalphysik. Band XIII.)

BARKHAUSEN: Elektronenröhren. (Verlag S. Hirzel, Leipzig.) L. R. KOLLER: The Physics of Electron Tubes. (Mc. Graw-Hill Book Co. New-York, London.)

E. L. CHAFFEE: Theory of Thermionic Vacuum Tubes. (Mc. Graw-Hill Book Co. New-York, London.)

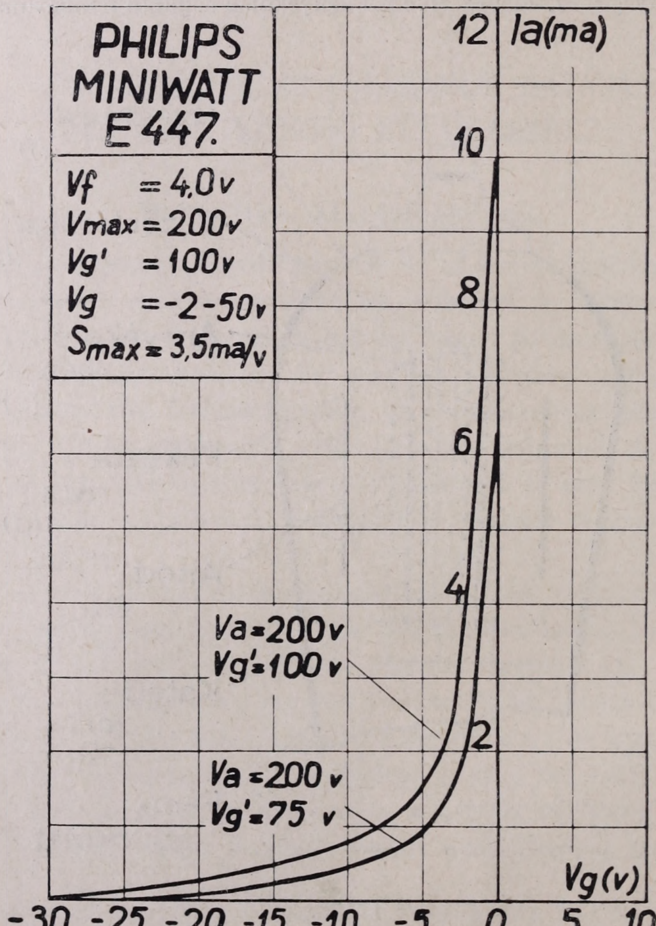
csolva, *d* a fékezőrács, amely a csövön belül össze van kötve a katóddal, s amelynek az a szerepe, hogy az anódból kilépő szekunder elektronokat az anódhoz visszaterelje, *e* az anód, *f* az üvegbura, amely kívülről árnyékolás céljából fémbevonattal



1. ábra.

van ellátva: ez a fémbevonat tartósan össze van kötve a katóddal. A cső karakterisztikus görbéi a 2. ábrán láthatók.

Az általunk észlelt jelenség egy «superheterodyne» vevőkészülék működése közben lépett fel, melyben ez az E 447 típusú cső mint középfrekvencia-erősitőcső szerepelt. A jelenség a készülék hangerejének ugrásszerű csökkenésében állt; az előzetes kisérletek azt mutatták, hogy ez az ugrásszerű csökkenés semmiféle mechanikus-termikus- vagy kontaktushibára nem



2. ábra.

vezethető vissza; a mérések ugyancsak kizárták a néha tapasztalható *rácsemisszió* lehetőségét is.

Rejtélyessé tette ezt a megfigyelést az a körülmény, hogy a nagyszámú vizsgált cső közül nem mindegyiknél lépett fel a jelenség, viszont az ilyen módon hibásnak talált csövek egy másik, teljesen hasonló felépítésű vevőkészülékben normális viselkedést mutattak. A két készülék között mindössze annyi eltérés volt, hogy amíg az első készülékben a középfrekvenciacső $E_a = 230$ V anódfeszültséget és $E_g' = 110$ V segédrácsfeszültséget kapott, addig a másik készülék aequivalens feszültségei $E_a = 190$ V és $E_g' = 80$ V voltak.

Pontosabb vizsgálatok céljából a vevőkészüléket műadóval tápláltuk, amely modulált nagyfrekvencia-energiát szolgáltatott, a kimenő teljesítményt pedig csővoltmérővel mértük. A műadó hullámhosszát 550 m-nek választottuk, a kimenő teljesitményt pedig a bekapcsolás után közvetlenül 50 mW-ra állítottuk be. A jelenséget mutató csövek használata esetén a kimenő teljesítmény néhány perccel a bekapcsolás után ugrásszerűleg 5 mW alá csökkent. Ha a készülék főkapcsolóját kikapcsoltuk és azonnal újra bekapcsoltuk, kezdetben ismét 50 mW teljesítmény volt mérhető: az ugrás csakhamar bekövetkezett s a játék tetszés szerint pontosan ismételhető volt. Az ilyen «rossz» csövek statikus műszerekkel mérve teljesen normális viselkedést mutattak, az ionizációs módszerrel mért vakuumfaktor, valamint az izoláció is, tökéletesen kielégítő volt.

A jelenséget csakhamar szándékosan is elő tudtuk idézni, például úgy, hogy a készülék közelében egy kis szikrainduktort hoztunk működésbe; ez a kísérlet arra mutatott, hogy elektromos hatásokkal van dolgunk, hiszen a szikrainduktor működése nyilván valamiféle feszültséglökést idézett elő az áramkörökben. További méréseink azt mutatták, hogy az ugrásszerű változásnál az anódáram hirtelen 0·1—0·3 mA-rel *emelkedik*, a segédrácsáram pedig pontosan ugyanezen értékkel *csökken.*

A vizsgált csöveknek tehát két elektromos állapota lehetséges: az I. állapotban, amely *labilis,* a cső erősítése, anód- és segédrácsárama normális, a II. állapotban, amely *stabilis,* az erősítés jóval kisebb, az anódáram nagyobb, a segédrácsáram kisebb, mint az I. állapotban. A két állapot között az átmenet *ugrásszerű* és valamiféle *feszültséglökés* hatása alatt következik be. Miután az anód-, illetőleg segédrácsáram ugrásszerű változása az átmenetnek szükségszerű kísérőjelensége, ezt a változást a további vizsgálatok során indikátorhatásnak tekintettük.

További vizsgálatok és feltevések.

Kitűnt, hogy az indikátorhatás (tehát a két állapot közötti ugrásszerű átmenet is) nem függ egy bemenő nagyfrekvenciaenergia jelenlététől; csakhamar sikerült kimutatni az indikátorhatást a cső statikus karakterisztikáinak felvétele közben, tehát a készüléktől függetlenül is.

A jelenség megmagyarázására különböző feltevésekkel próbálkoztunk:

Barkhausen—Kurz-féle rezgések fellépése a védőrács és fékezőrács között.

Ilyen rezgések keletkezésének feltételei az elrendezésnél adva vannak, miután a védőrács nagy pozitív feszültséget kap, a fékezőrács pedig 0 potenciálon van. Ilyen rövidhullámú rezgések kimutatására olyan csöveket készítettünk, melyeknél a fékezőrács külön kivezetéssel bírt; a rezgések beálltakor a fékezőrács áramának még negatív potenciál esetén is, pozitív értékkel kell bírni. Ilyen rácsáramok kimutatása azonban a megadott feltételek mellett nem sikerült; a Barkhausen—Kurz-féle rezgéseket más módon (detektor, csővoltmeter) sem sikerült észlelni.

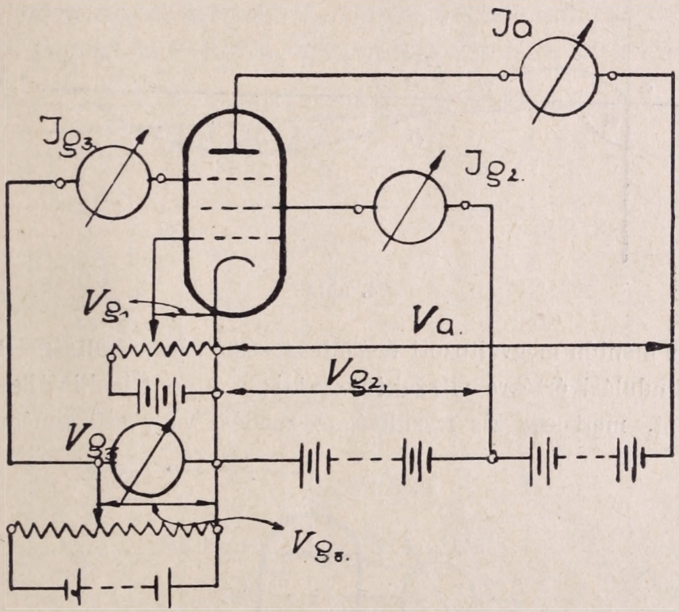
A fékezőrács szekunder elektronemissziója.

A jelenség jól magyarázható volna két körülmény egyidejű fellépése által:

a) A fékezőrács nagy szekunder emissziója.

b) A katód és fékezőrács közötti nagy átmeneti ellenállás által.

A 3. ábra azt a kapcsolást mutatja, amellyel a fékezőrács szekunder emisszióját a fékezőrács feszültségének függvényében mértük (speciális, külön rácskivezetésű csöveken), a 4. ábra a rácsáram menetét tünteti fel. A szekunder emisszió következtében nagyobb rácsfeszültségeknél a rácsáram pozitívból negatív értékbe megy át, miután *egy* beeső elektron *több* szekunder elektront vált ki. A szekunder elektronok a magasabb potenciálú *anódhoz* repülnek.



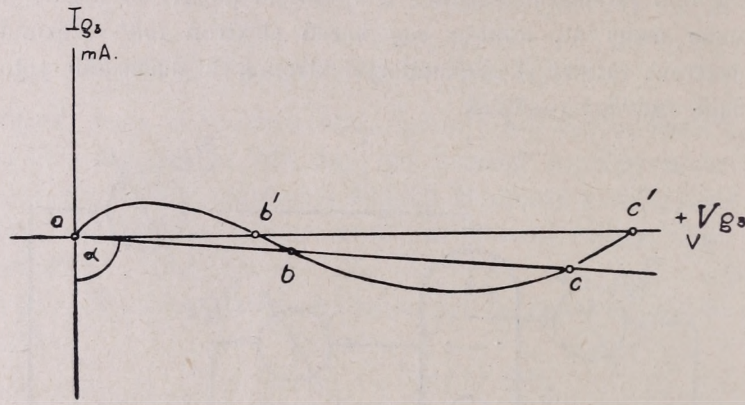
3. ábra.

Az 5. ábra azon esetnek *helyettesítő kapcsolása,* amikor a fékezőrács és katód között nagy az átmeneti ellenállás.

A 4. ábrán *abc* egyenes a fékezőrács és katód közötti *külső áramfeszültség* összefüggést ábrázolja[1] az *abe* egyenes és az ordinatatengely közötti hajlásszög tangense a R_K külső ellenállással egyenlő. A fékezőrács *lehetséges* feszültségállapotait az *a*, *b* és *c* metszéspontok jelzik, amelyekhez tartozó feszültségértékeknél a külső áram egyenlő a belső rácsárammal. Könnyen

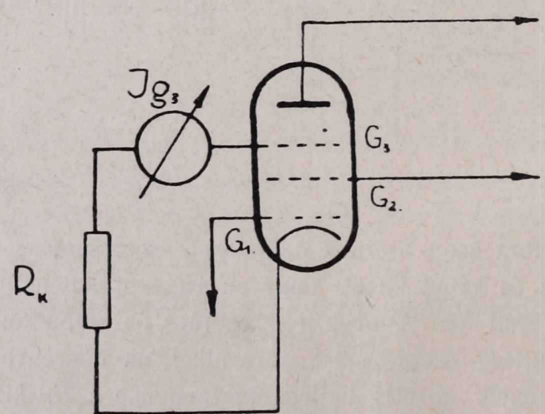
[1] BARKHAUSEN: Elektronenröhren, I. kötet, 105. oldal. 4. kiadás.

belátható, hogy az *a* és *c* pontok stabilis állapotokat képviselnek, miután egy virtuális feszültségváltozás esetén az R_K ellen-



4. ábra.

állás mentén megváltozott feszültségesés a rácsfeszültség értékét a kiindulási értékre visszakényszeríti; a *b* pont labilis állapotot jelent, mert egy kis feszültségnövekedés- vagy csökkenésnél a

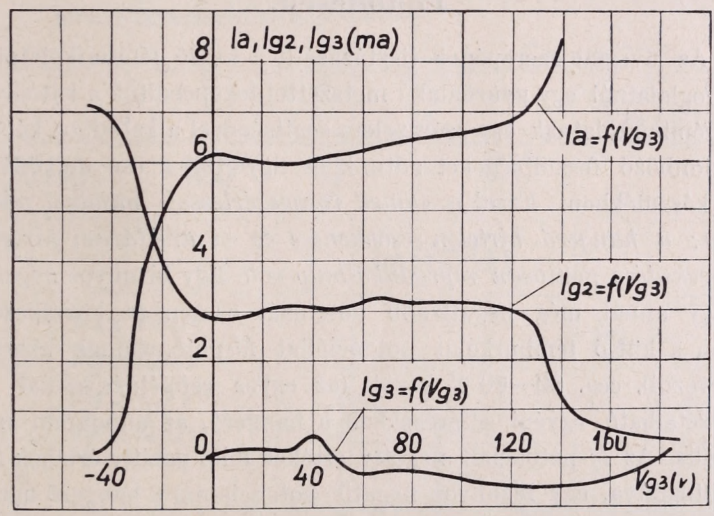


5. ábra.

rácsfeszültséget a *b* ponthoz tartozó értéktől eltávolítani igyekszik a *c*, illetőleg az *a* pont felé.

A *c* pontnak megfelelő állapot úgy állhat elő, ha a 0 potenciálú fékezőrács valamiképpen egy pillanatnyi feszültséget kap, nagyobbat, mint a *b* pontnak megfelelőt; ekkor a fékezőrács potenciálja a stabilis *c* ponthoz ugrik.

6. ábránk egy kísérletileg felvett fékezőrácsáram karakterisztikát mutat, a hozzátartozó anód- és védőrácsáramokkal együtt. Látható, hogy a *c* pontnak megfelelő feszültségértéknél az anódáram valóban erős növekedést, a védőrácsáram erős csökkenést mutat. Szabad rács esetén, amikor tehát az R_K végtelen nagy,



6. ábra.

egy megfelelő feszültséglökés után bekövetkezik az ugrás, a fékezőrács *stabilisan* nagy feszültséget kap; ezt az anódáram megfelelő változásából lehet megállapitani.

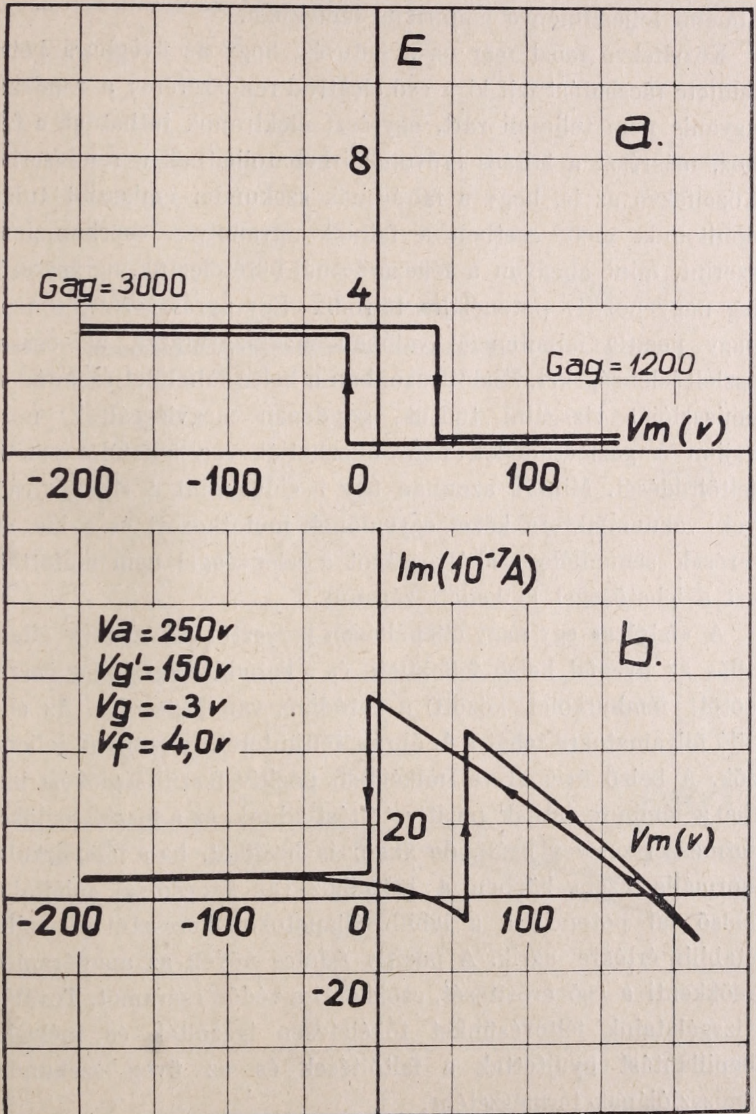
Véges R_K esetén a *c* pontnak (4. ábra) megfelelő feszültségállapotban a fékezőrács potenciálja pozitiv, az eredő rácsáram negatív (az elektronok normál iránya értelmében), éspedig éppen akkora, amennyi szükséges, hogy az R_K mentén a feszültségesés előálljon.

Az a feltevés azonban, hogy a fékezőrács és katódok között nagy átmeneti ellenállás mutatkozik, nem bizonyult igaznak:

számos «rossz» csövet kibontottunk, megmértük a kérdéses átmeneti ellenállást és a kontaktust minden esetben kifogástalannak találtuk. Mégis, az egész gondolatmenet (szekunder emisszió, feszültségugrás stb.) nem volt hiábavaló; csupán csak a fékezőrács helyett valamilyen más, imaginárius-rácsot kellett találnunk, amelynek hatása a fékezőrácséhoz hasonló. Vizsgálatainknál első sorban a faltöltések hatására gondoltunk.

Faltöltések.

Az üvegfal szerepének tisztázására a külső fémburkolatot a a foglalatnál egy gyűrűalakú metszettel lekapcsoltuk a katódról: a fémburkolatnak egy szárazelem segítségével a katódhoz képest különböző feszültségeket adtunk és figyeltük a cső működését a készülékben. *Ezzel a «külső rácsvezérléssel» mindkét jelenség: a hangerő hirtelen csökkenése és az anódáram hirtelen növekedése pontosan reprodukálható volt.* Egy bizonyos negatív, vagy annál még negatívabb potenciál esetén (a következőkben a külső fémburkolat potenciálját *M*-potenciálnak akarjuk nevezni), cca. 20—80 V között (az egyes csőpéldányoknál tapasztalható egyéni eltérésekkel) a hangerő, az anódáram normális. Az *M*-potenciált negatív értékek felől pozitív értékek felé változtatva, egy bizonyos negatív potenciálnál a hangerő ugrásszerűleg csökken, az anódáram ugrásszerűleg nő és mindkettő közel állandó marad tetszőleges pozitív *M*-potenciálértékeknél. Az ú. n. jó csövek legnagyobb része is mutatta ezt a jelenséget, azzal az eltéréssel, hogy az ugrás *pozitív M*-potenciál értékeknél következett be. Az egész folyamat tetszőlegesen reprodukálható és hysteresist mutat: negatív-pozitív irányban az ugrás később következik be, mint visszafelé, vagyis *pozitívabb M*-potenciál értékeknél. Találtunk azonban «jó» csöveket, amelyek ugrási jelenségeket egyáltalában nem mutattak. Kisérleteink eredményét két csövön a 7*a*—8*a*. ábrák tüntetik fel; melyek közül 7*a*. a «rossz» cső, 8*a*. a «jó» cső karakterisztikáit mu-


E
a.
8
4
Gag = 3000
Gag = 1200
Vm (v)
-200
-100
0
100
Im(10⁻⁷A)
Va = 250v
Vg' = 150v
Vg = -3 v
Vf = 4,0v
b.
20
Vm(v)
-200
-100
0
100
-20

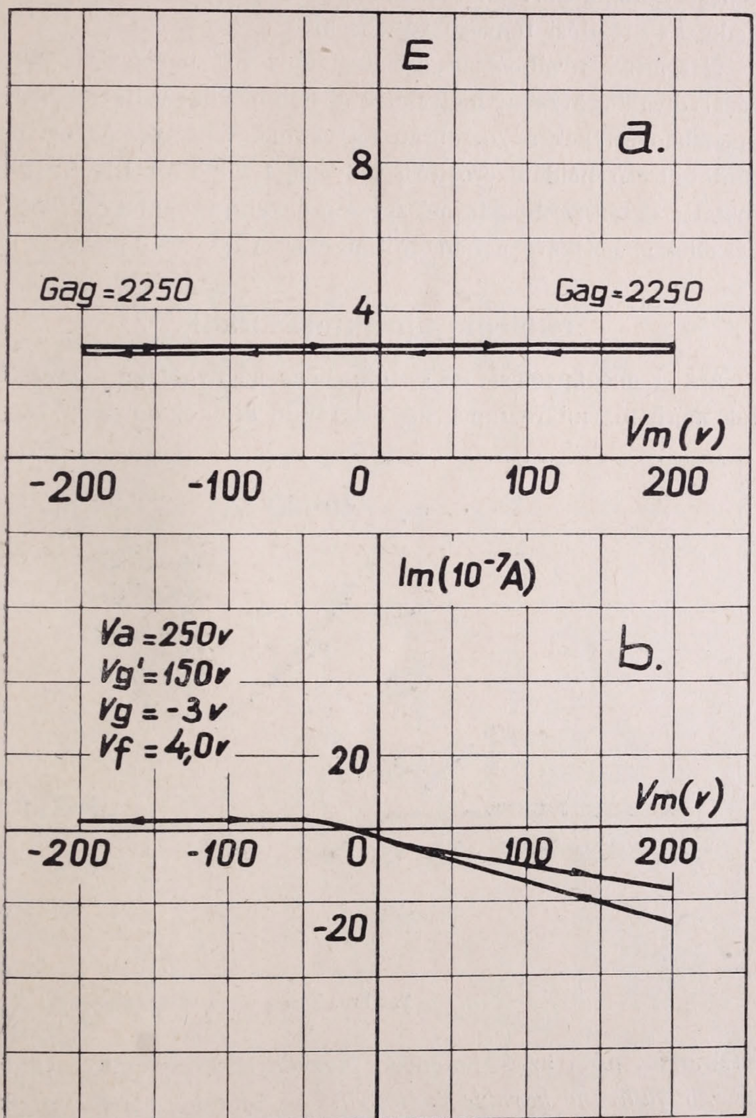
7. ábra.

tatják be. Abszcissza az M-potenciál, ordinata pedig a készülék kimenő teljesítménye empirikus léptékben.

Közelfekvő most már az a feltevés, hogy az üvegbura belső felülete rácshatást fejt ki a cső elektrod rendszerére; a rendszer ugyanis nem teljesen zárt, egyrészt elektronok juthatnak a falhoz, másrészt a falrács erővonalai behatolhatnak a rendszerbe. Közelfekvő az is, hogy a falrácsnak szekunder emissziót tulajdonítsunk, mely esetben a falrács ugyanolyan mechanizmus szerint, mint ahogyan a fékezőrácsnál feltételeztük, ugrásszerűleg nagy pozitív potenciálra töltődik. Egy ugrásszerűleg fellépő nagy pozitív falpotenciál valóban megmagyarázza az összes észlelt jelenségeket. Mielőtt azonban a belső falfelület szekunderemisszióját vizsgálni tudtuk, gondosan megvizsgáltuk, hogy vajjon a gázmaradékok nem okozhatják-e a falfelület pozitív feltöltődését. Miután azonban úgy a «jó», mint a «rossz» csövek vakuumfaktora közel egyenlőnek mutatkozott és a kis eltérések semmiféle szabályosságot a jelenséggel nem mutattak, ezt a lehetőséget ki kellett zárnunk.

A «falrács« egy nagy ellenálláson keresztül (ez a nagy ellenállás az üvegfal belső falfelülete és a katóddal vezetőileg összekötött fémburkolat között) a katódhoz van kapcsolva. Az előálló folyamatokra tehát a 4. ábrán feltüntetett viszonyok jellemzők. A belső üvegfal valamiképpen pozitív feszültséglökést kap (ha a fémburkolatnak pozitív töltést adunk, ez a feszültséglökés természetszerűleg beáll, de akkor is beállhat, ha a fémburkolat normális üzem közben a katódhoz van kapcsolva), miáltal a belső fal potenciálja a labilis állapotokon keresztül a pozitív stabilis értékre ugrik. A pozitív falrács növeli az anódáramot, csökkenti a cső erősítését, csökkenti a védőrácsáramot. További vizsgálataink feltevésünket tökéletesen igazolták és mélyebb bepillantást nyujtottak a faltöltések és az üveg szekunder emissziójának természetébe,

A falrács-hatás egyértelmű kimutatására néhány csőről teljesen eltávolítottuk a fémburkolatot; a vizsgált csövet felül is zárt fémhengerbe helyeztük, amelynek potenciálját a katódhoz


E
a.
8
4
Gag = 2250
Gag = 2250
Vm (v)
-200
-100
0
100
200
Im (10^-7 A)
b.
Va = 250v
Vg' = 150v
Vg = -3v
Vf = 4,0v
20
Vm(v)
-200
-100
0
100
200
-20

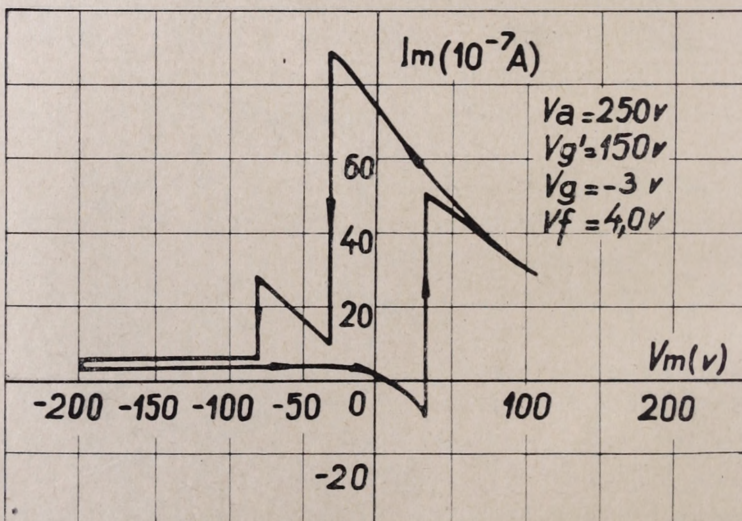
8. ábra.

képest változtattuk: jól észlelhető volt úgy az anódáram, mint pedig az erősítési tényező változása.

Vizsgáltuk továbbá az erősítési tényező[1] ugrásszerű változását olyan csöveken, melyeknek *M*-potenciálját változtattuk: a megfelelő értékek a 7*a*. ábrán fel vannak tüntetve. Az ott feltüntetett cső például erősítési tényezőjét 3000-ről 1200-ra változtatta ugrásszerűleg, természetesen ugyanott, ahol a cső, vevőkészülékbe helyezve a hangerőt ugrásszerűleg változtatta.

Faláram karakterisztikák.

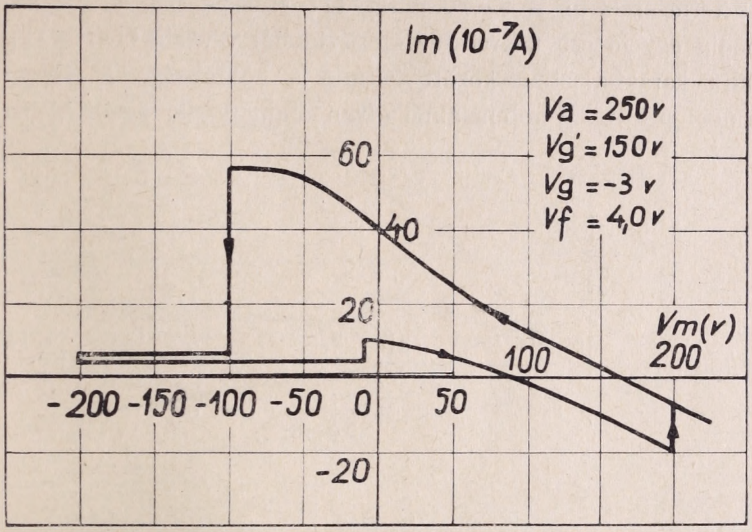
Azt a megfigyelést is tettük, hogy az üvegfalon keresztül jól mérhető, mikroamper nagyságrendű áramok folynak. Ha a



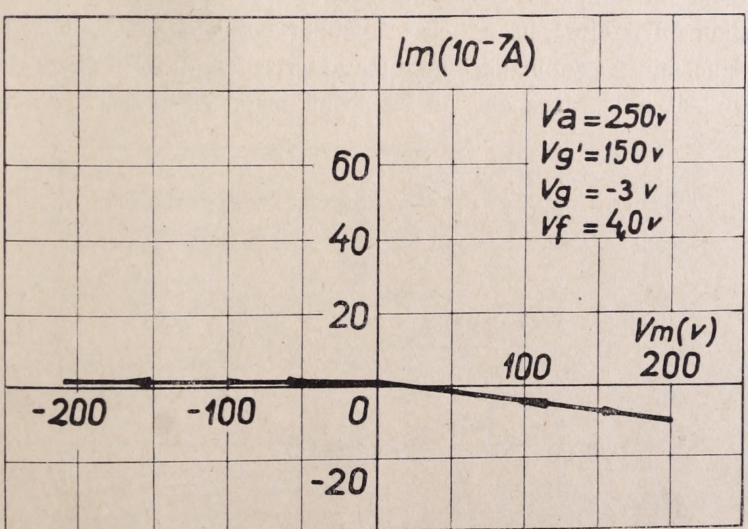
9. ábra.

faláramot, mint az *M*-potenciál függvényét felrajzoljuk, nyerjük a cső *faláram karakterisztikáját.* A faláram karakterisztika teljes felvilágositást nyujt a belső fal töltésének nagyságáról

[1] Az erősitési tényezőt statikus karakterisztikák alapján határoztuk meg, mint az áthatás reciprok értékét.

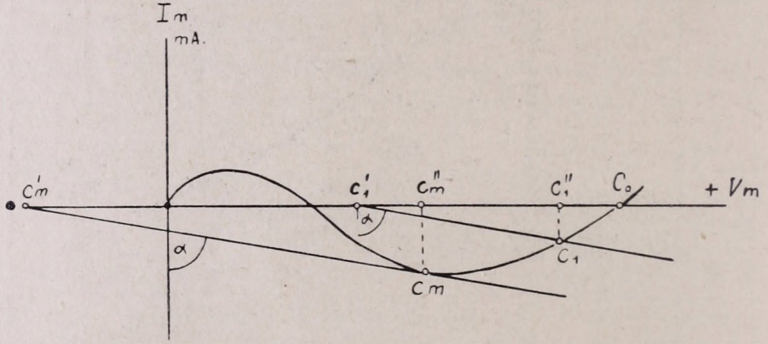


10. ábra.



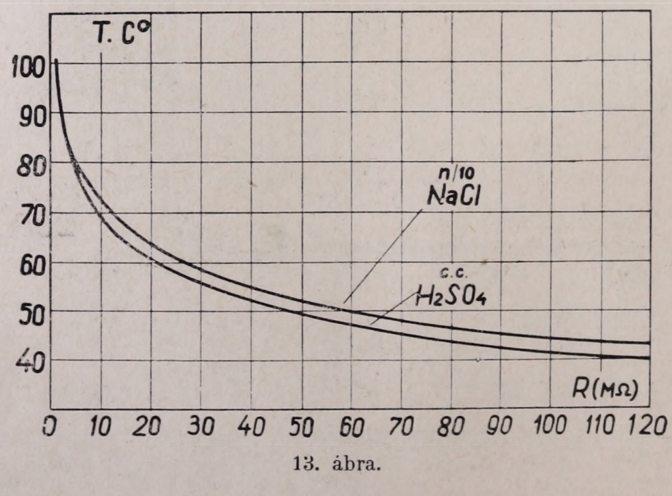
11. ábra.

és természetéről. A 9—10. ábrák két «rossz» cső, a 11. ábra pedig egy jó cső faláramkarakterisztikáját tüntetik fel. A kétfajta karakterisztika között feltűnő a különbség. A «rossz» csőnél pozitív *M*-potenciálnál olyan áram folyik, amely a fém-

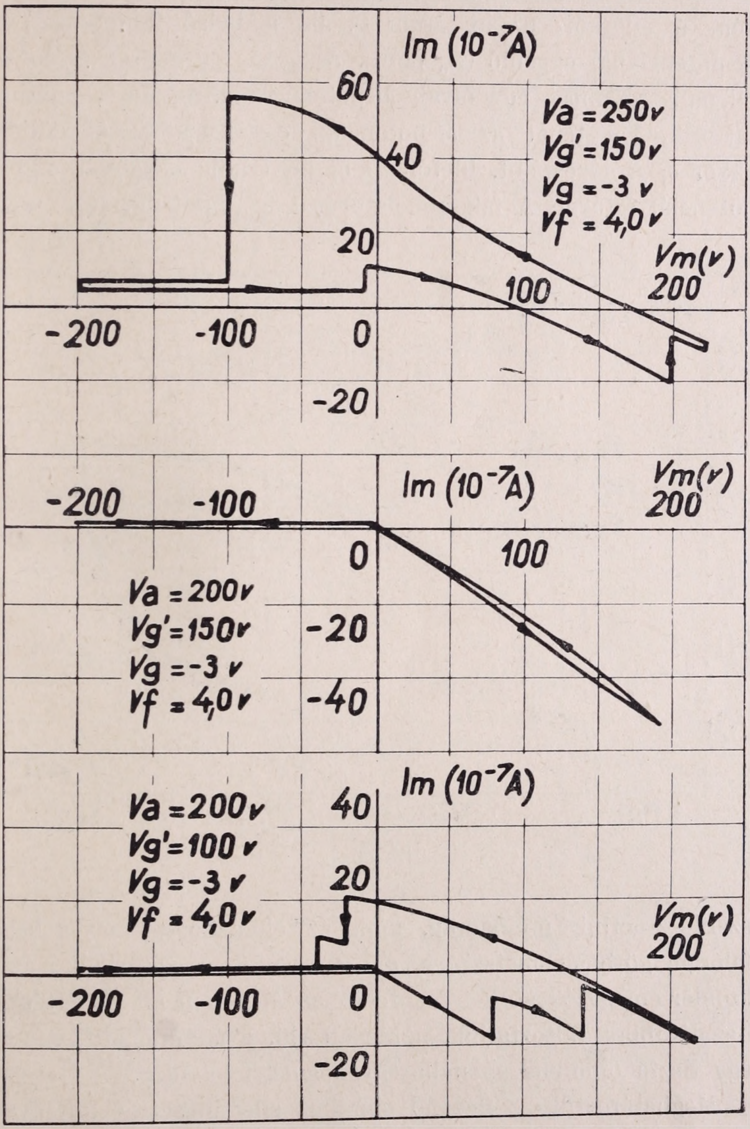


12. ábra.

burkolatból a telep felé kilép; ezt az áramirányt akarjuk pozitívnak nevezni. Pozitív feszültséggel *szemben* nyilvánvalóan csak akkor folyik áram, ha a belső falfelület *nagyobb* pozitív feszültséggel bír. Az anomális faláramkarakterisztika (9—10. ábrák) lefolyását a 12. ábra alapján érthetjük meg. Abszcissa gyanánt

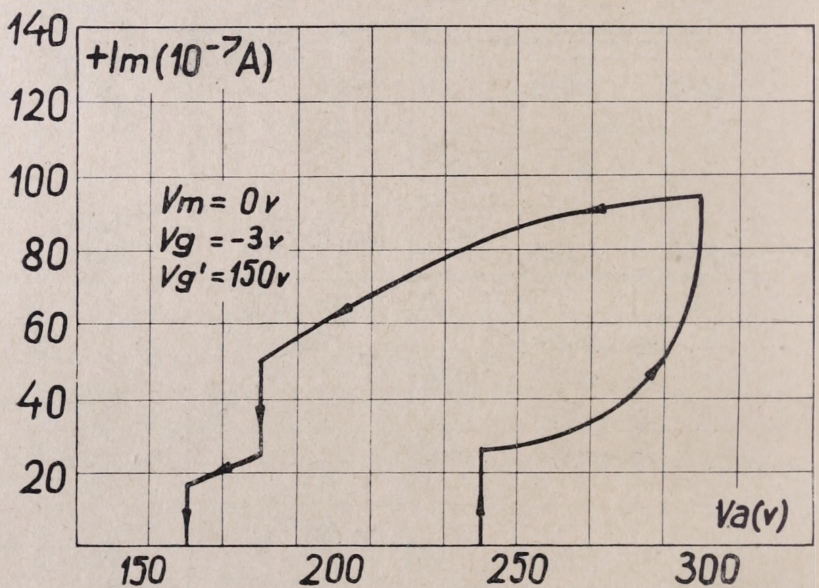


13. ábra.


Im (10^-7 A)
60
40
20
Va = 250v
Vg' = 150v
Vg = -3 v
Vf = 4,0v
Vm(v)
100
200
-200
-100
0
-20
Im (10^-7 A)
Vm(v)
200
-200
-100
0
100
Va = 200v
Vg' = 150v
Vg = -3 v
Vf = 4,0v
-20
-40
Im (10^-7 A)
Va = 200v
Vg' = 100 v
Vg = -3 v
Vf = 4,0v
40
20
Vm(v)
200
-200
-100
0
-20

14. ábra.

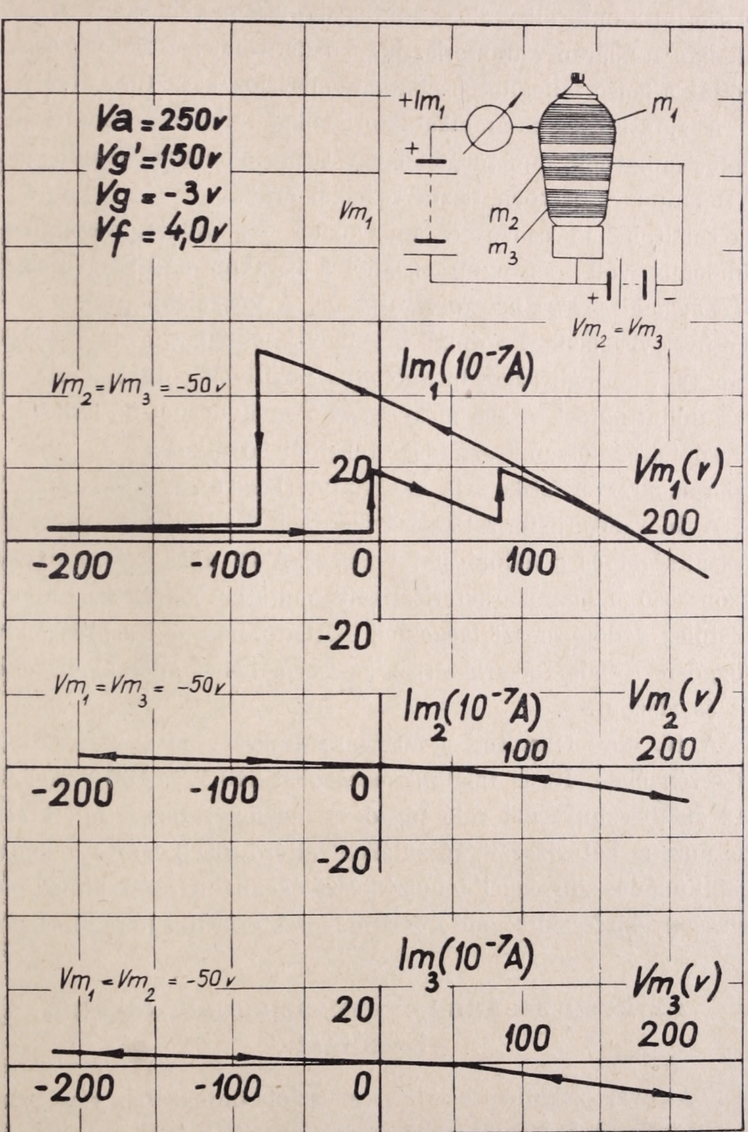
a belső falpotenciál, illetőleg az M-potenciál szerepel ordinátaként a faláram; ez az áram 0, ha a belső falpotenciál az M-potenciállal egyenlő (C_0 pont). A c_1'—c_1 egyenes a ballonfal ellenállásegyenese egy olyan M-potenciálnál, amely c_1' ponthoz tartozik. Ha tehát az M-potenciált c_0-ról c_1'-re csökkentjük, akkor c_1 metszéspont, illetőleg a c_1'' pont adja meg a belső falpotenciál értékét. A faláram lefolyását így pontról-pontra meg-



15. ábra.

szerkeszthetjük mindaddig, amíg az ellenállásegyenes a belső faláram görbéjét metszi. A c_m'—c_m egyenes már érinti a szekunder emissziós görbét, ha tehát az M-potenciált c_m' értéknél negatívabbra változtatjuk, ugrás áll elő, a faláram ettől kezdve egy tiszta ohmikus ellenállásegyenesnek felel meg.

Meghatároztuk az üvegfal ohmikus ellenállását néhány nyers üvegburán különböző hőfokoknál. Elektrodok gyanánt $NaCl$, illetőleg H_2SO_4 oldatokat használtunk. A nyert értékekről készült a 13. ábra diagramja. A bura hőfoka a cső üzeme közben cca. 50°.


Va = 250v
Vg' = 150v
Vg = -3v
Vf = 4,0v
+Im1
m1
Vm1
m2
m3
Vm2 = Vm3
Vm2 = Vm3 = -50v
Im1(10^-7A)
20
Vm1(v)
200
-200
-100
0
100
-20
Vm1 = Vm3 = -50v
Im2(10^-7A)
Vm2(v)
Vm1 = Vm2 = -50v
Im3(10^-7A)
Vm3(v)

16. ábra.

E szerint a bura ellenállása mintegy 55 $M\Omega$-ra vehető. Ezen érték alapján a faláram-karakterisztikákból kényelmesen megszerkeszthetjük a belső falfelület szekunderemissziós karakterisztikáját. A «jó» csövek faláramkarakterisztikái teljesen normális menetet mutatnak, ami megfelel egy tiszta ohmikus ellenállásnak. A faláram ez esetben tiszta vezetési áram.

Találtunk jó csöveket, amelyeknek faláramkarakterisztikája anomális volt: az ugrás ezeknél a karakterisztikáknál *pozitív M-potenciál értékeknél következik be.* A készülékben tehát azok a csövek viselkednek normálisan, melyeknek faláramkarakterisztikája vagy normális, vagy ha anomális, pozitív M-potenciál értékeknél mutat ugrást. A készülékben való működésnél az ugrások a belső falrács olyan feszültségértékeinél következnek be, ahol a faláramkarakterisztika is ugrást mutat. (Lásd a 7*a*. és 7*b*. ábrákat.) A faláramkarakterisztika két parametert tartalmaz: az anódfeszültséget és a védőrácsfeszültséget. A 14. ábra egy- és ugyanazon cső faláramkarakterisztikáit mutatja különböző anód-, illetőleg védőrácsfeszültségeknél. Látható, hogy a feszültségektől függően a faláramkarakterisztika normálisból anomálisba csap át és viszont.

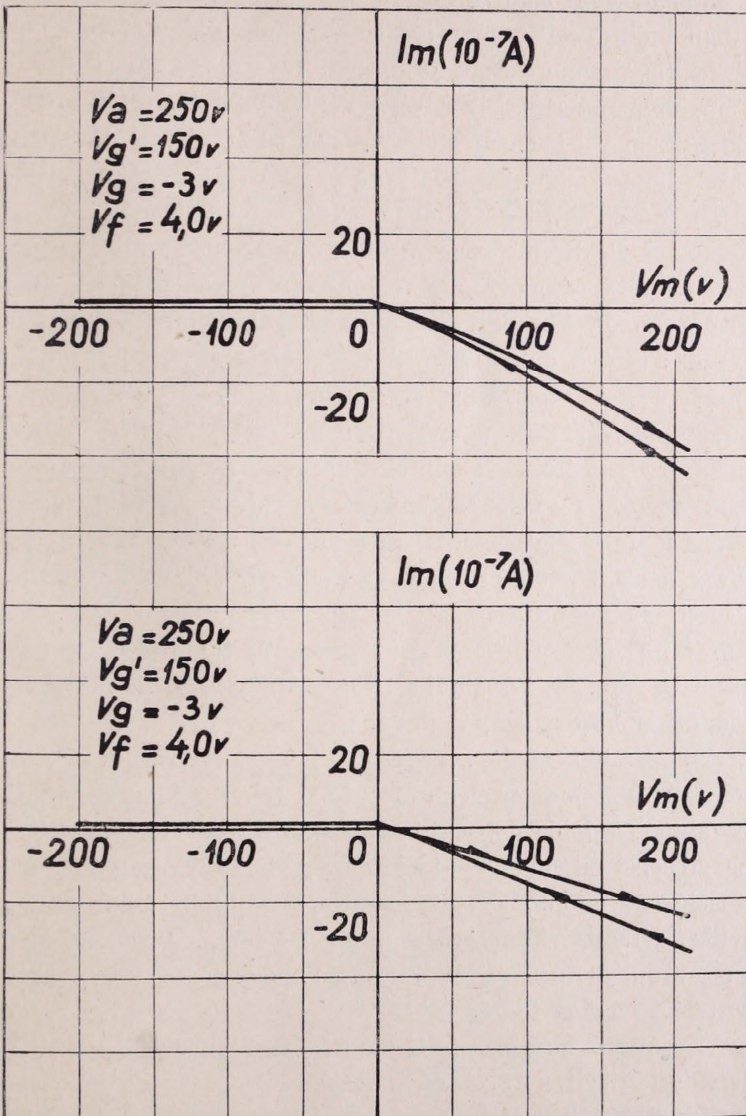
A 15. ábra feltünteti a faláram változását az anódfeszültség függvényében. Itt is találunk ugrásokat 240 V és 160 V mellett. Az anódfeszültséggel való függőség megmagyarázza, miért észleltünk a két vizsgált készüléknél eltérő viselkedést: a magasabb anódfeszültséggel dolgozó készülékeknél ugrások állnak elő, alacsonyabb feszültségnél a faláramkarakterisztika normális lehet.

Az üveg szekunder emissziójának további vizsgálata.

Az üveg szekunder elektronemissziója önmagában véve ismeretes jelenség.[1] Mégis érdekesnek látszott ennek a szekunder emissziónak az eredetét tovább vizsgálni.

---

[1] Langmuir: Rev. of Mod. Phys. 2, 171 1930.


Im(10⁻⁷A)
Va =250v
Vg'=150v
Vg = -3v
Vf = 4,0v
20
Vm(v)
-200
-100
0
100
200
-20
Im(10⁻⁷A)
Va =250v
Vg'=150v
Vg = -3v
Vf = 4,0v
20
Vm(v)
-200
-100
0
100
200
-20

17. ábra.

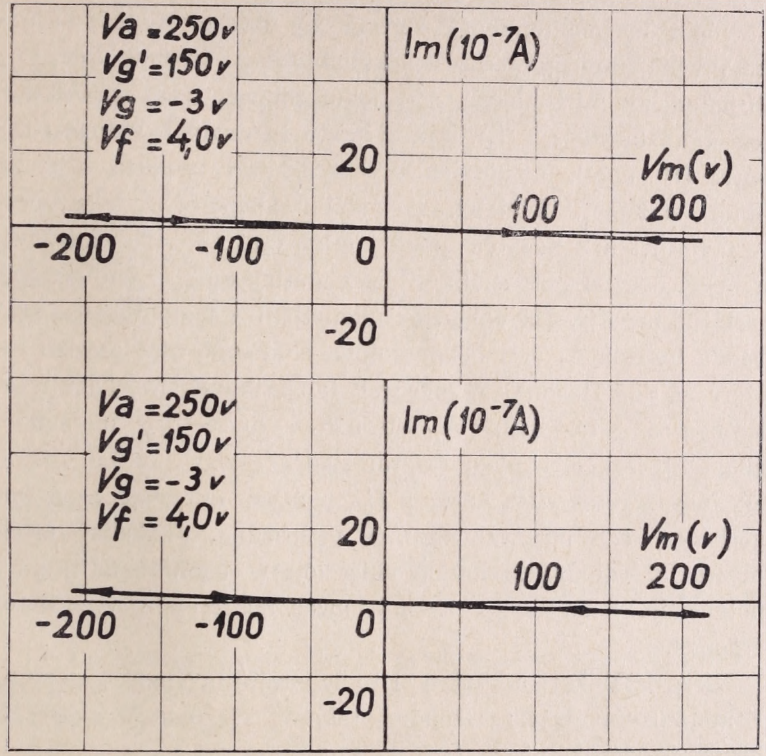
Mindenekelőtt felmerült az a kérdés, hogy az észlelt effektust a ballonfal melyik része idézi elő. Ennek eldöntésére a fémburkolatot három részre osztottuk, s az egyes részek hatását a faláramkarakterisztikák felvételénél külön vizsgáltuk (16. ábra). Kiderült, hogy a jelenség előidézésében az m_1 rész felelős, vagyis az a felület, amely szemközt van a rendszer nyitott részével.

Egy másik kérdés: valóban az üvegfelületből lépnek ki a szekunder elektronok, vagy pedig az üvegre párolgott *Mg*-, vagy más fémrétegekből? Ennek eldöntésére olyan csöveket készitettünk, amelyeknek belső falára vastagabb fémréteget párologtattunk: *ezek a csövek normális* faláramkarakterisztikákat mutattak. Ha a rápárolgott *Mg*-ot hevítéssel elűztük, anomális karakterisztikát kaptunk. Nyilvánvaló, hogy az üveg maga a szekunder elektronokat emittáló anyag. A jelenség tehát megszüntethető, ha a belső ballonfalra olyan anyagot viszünk, amelynek szekunder emissziója az üvegénél lényegesen kisebb. Ilyen anyag például a szén, amelyet a rádiócsőgyártásban empirikus alapon egyes csőtipusoknál valóban használtunk is egy-két év óta. Ennek a szénbevonatnak szerepe és fontossága így most tisztázva van. A 17. ábránk ilyen karbonalizált burájú csövek faláramkarakterisztikáit mutatja.

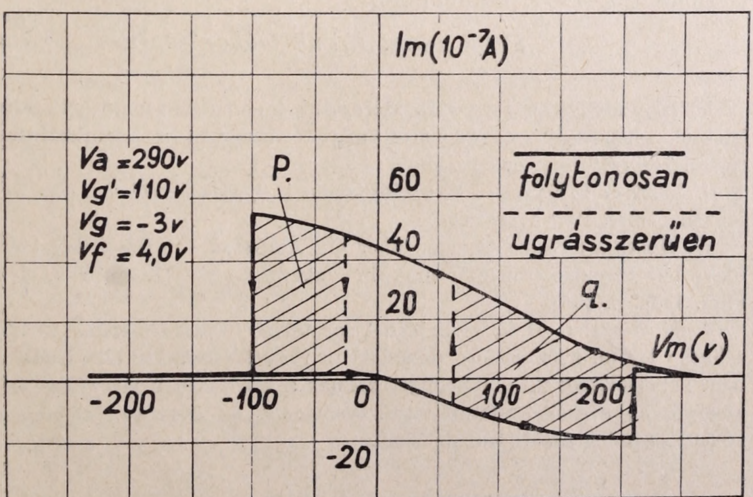
Egy további kérdés: vajjon melyik alkatrésze az üvegnek emittálja a szekunder elektronokat? A sejtés azt mondaná, hogy az üveg *Na*-ionjai. Ennek a sejtésnek igazolására megkíséreltük a belső falfelület *Na*-ionjait üveg elektrolysis útján az üveg belseje felé eltolni. Egy-két esetben sikerült ilymódon az anomális faláramkarakteresztikát normálissá tenni. Az eddigi kísérletek azonban nem elég egyöntetűek, hogy biztos végső következtetést lehetne tenni.

Vizsgáltunk még ólomtartalmú üvegeket, amelyeknek faláramkarakterisztikáit a 18. ábra mutatja.

Megpróbálták az üvegbura felületi *Na*-ionjait idegen ionokkal helyettesíteni; e célból a burákat CrO_3, $AgNO_3$ és $Al(NO_3)_3$ oldatokban főztük. Az ilyen módon kezelt burából készült csövek mind anomális faláramkarakterisztikákat mutattak.



18. ábra.



19. ábra.

Végül megemlítendőnek tartjuk egy érdekes megfigyelésünket: a faláramkarakterisztika különböző a szerint, hogy az M-potenciált folytonosan, vagy fokozatokban, tehát ugrásszerűleg változtatjuk egy batteria kivezető kapcsainak átdugaszolásával (19. ábra). A közelebbi vizsgálat azt mutatta, hogy az ábrán sraffozott felületek metastabil állapotokat jelentenek. A p területen a nagyobb pozitív áram csak addig folyik (vagyis a belső üvegfal potenciálja addig negatív), amíg a fémburkolat tartósan negatív. Ha ebben az állapotban a fémburkolatot szabaddá tesszük és újra bekapcsoljuk, a faláram alacsonyabb értékre ugrik. Hasonló viselkedést tapasztalunk ellenkező értelemben a q-területen. A p-területen mutatkozó metastabil állapotot csak olyképpen magyarázhatjuk, hogy a balfelé tolódó ellenállásegyenes (12. ábra) a C_m pontban odatapad az áramgörbéhez, azt magával viszi és deformálja. Fizikailag értelmezve: a ballonfal szekunderemisszióját a fémburkolat negatív potenciálja befolyásolja. Ez a jelenség részletesebb vizsgálatot érdemel.

Vizsgálatainkat a Vatea Rt. laboratóriumában végeztük; Egri Imre és Bényei György uraknak köszönetet mondunk közreműködésükért.[1]

Budapest, 1934. október 20.

Patai Imre, Frank Gábor és Radó György.

---

[1] Vizsgálataink lezárása után szereztünk tudomást hasonló célú kísérletekről, amelyeknek végeredményei nagy vonásokban a mieinkkel megegyeznek. Erre vonatkozó irodalom:

G. Jobst és F. Sammer: Streuelektronen in Verstärkerröhren. (Die Telefunken Röhre, Heft 1. 1934.)

W. Molthan: Beobachtungen über ein Auftreten von Doppelkarakteristiken bei Streuelektronenströmen in Vakuumröhren (Zeitschr. f. techn. Phys. 1933. S. 546).

A mi vizsgálataink az eddigieknél sok tekintetben szélesebbek és teljesebbek; így pl. a faláramok vizsgálatát a rendelkezésünkre álló irodalomban nem találtuk meg, éppenúgy azoknak a kérdéseknek tárgyalását sem, amelyek az üvegek strukturájának, felületének és a szekunder emisszió közötti összefüggésekre vonatkoznak.

EINFLUSS DER WANDLUNG UND WANDSTRÖME AUF DIE WIRKUNGSWEISE VON ELEKTRONENRÖHREN.

Die vorliegende Untersuchung wurde angeregt durch Beobachtung einer auffallenden Erscheinung während des Betriebes eines Superheterodyn-Apparates. Die Erscheinung bestand aus der plötzlichen Verminderung der Lautstärke, die scheinbar ohne jede äusseren Einflüsse eintrat.

Die nähere Untersuchung zeigte, dass die Quelle dieser Fallerscheinung in der als Mischröhre verwendeten Hochfrequenz Dreigitterröhre zu suchen ist. Diese Röhre besitzt zwei diskrete Zustände, mit verschiedenen Verstärkungsfaktoren, also zwei bestimmte, abweichende Karakteristiken. Das Umkippen vom labilen Zustand I (grösserer Verstärkungsfaktor) in den Zustand II, wird durch irgendeinen Spannungsstoss hervorgerufen. Bei dem Umspringen steigt der Anodenstrom plötzlich mit 0·1—0·2 mA und sinkt gleichzeitig der Schutzgitterstrom mit demselben Wert.

Die Erscheinung konnte weder mit dem Auftreten der Barkhausen—Kurzschen Schwingungen, noch mit etwaigen mechanischen Unvollkommenheiten in dem Aufbau der Röhre geklärt werden. Wohlt ist aber eine Erklärung zu finden, wenn man die sekundäre Emission der inneren Kolbenwand in Betracht zieht. Die innere Kolbenwand funktioniert wie ein äusseres Gitter, welches durch einen grösseren Widerstand (der Widerstand der Kolbenwand) mit der Kathode (äussere Metallisierung) verbunden ist. Für das Potential der inneren Kolbenwand gibt es drei mögliche Werte: der Potenzialwert 0 und zwei grössere positive Werte. Gleichgewicht herrscht in diesen drei Punkten, wo der durch den Widerstand der Kolbenwand bestimmte äussere Strom mit dem Sekundäremissionsstrom der inneren Kolbenwand gleich ist. Von den beiden möglichen Potentialwerten ist der kleinere Wert labil, der grössere stabil. Stellt sich das Potential vorübergehend auf diesen labilen Punkt ein, so genügt der kleinste Stromstoss um die Wand sprunghaft auf ein höheres, oder niedrigeres Potential aufzuladen, je nach dem, ob der Stromstoss positiv oder negativ ist.

Diese Erklärung liess sich experimentell vollkommen bestätigen. Zu diesem Zweck bedienten wir uns einer Versuchsröhre, deren äussere Metallisierung von der Kathode getrennt wurde. Zwischen der Kathode und der auf verschiedene Potentiale gebrachten Metallisiernng, fliesst ein Strom; den Verlauf dieses Stromes in der Abhängigkeit des Potentials der Metallisierung haben wir als Wandstromkarakteristiken bezeichnet. Sämtliche Röhren, welche im Apparat die Sprungerscheinung zeigten, haben eine anomale Wandstromkarakteristik: bei positiven Metallisierungspotentialen fliesst der Wandstrom nach aussen hin, also gegen die Spannungsquelle. Die anomalen Wandstromkarakteristiken zeigen Sprünge bei verschiedenen Metallisierungspotentialen. Die Wandstromkarakteristiken von den «guten» Röhren haben einen durchaus normalen Verlauf. Aus den Wandstromkarakteristiken können wir das Potential der inneren Kolbenwand, wie auch den Verlauf der sekundären Emission genau bestimmen.

Als Parameter erhalten alle diese Wandstromkarakteristiken die Anoden- und Zuggitterspannung. Auch bei den «schlechten» Röhren lässt sich ein gewisses Spannungsverhältnis finden, wo die Röhren eine normale Wandstromkarakteristik zeigen.

Durch nähere Untersuchung konnte festgestellt werden, dass nicht die ganze Kolbenwand für die sekundäre Emission verantwortlich ist, sondern nur der obere Teil derselben, wo die Elektronen aus dem System heraustreten können.

Es wurde gezeigt, dass die sekundären Elektronen nicht aus dem auf die Kolbenwand niedergeschlagenen Magnesiumspiegel stammen, sondern aus dem Glas; Röhren, deren Kolbenwand stark mit Magnesiumspiegel bedeckt ist, haben eine normale Wandstromkarakteristik und zeigen den Effekt nicht.

Offen steht noch die Frage, welcher Bestandteil des Glases die sekundäre Emission am stärksten hervorruft. Die Versuche zeigten, dass die Quelle der sekundären Emission höchstwahrscheinlich die Natriumionen des Glases sind.

Da die Kohle eine sehr geringe sekundäre Emission besitzt, kann die ganze Erscheinung durch das Karbonisieren der inneren Kolbenwand eliminiert werden. Röhren mit karbonisierter inneren Kolbenwand haben durchaus normale Wandstromkarakteristiken.

Imre Patai, Gábor Frank und György Radó.

A KOZMIKUS SUGÁRZÁS SOLÁRIS KOMPONENSÉRŐL.

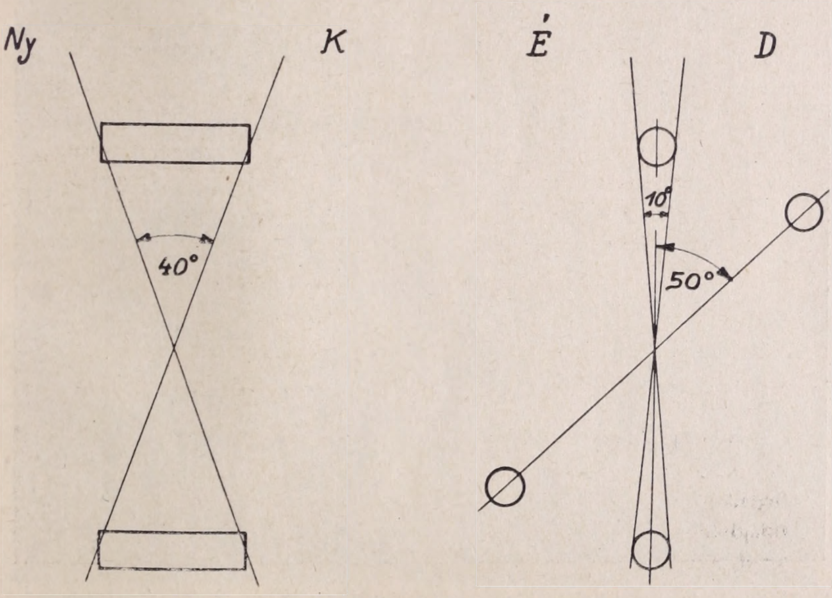
Röviddel a kozmikus sugárzás felfedezése után felmerült az a kérdés, vajjon nem jönnek-e ezek a sugarak is részben legalább a napból. Ez esetben mint az északi fényt létrehozó elektronsugarak áthatolóbb és így a föld mágneses tér által kevésbbé eltéríthető komponenseként foghatók fel. Mindjárt az első észlelések azonban kizárták, hogy a kozmikus sugárzás kizárólag a napból jövő sugárzás legyen, mert megállapítást nyert, hogy a sugárzás erőssége, illetve az általa okozott ionizáció éjjel s nappal közel egyenlő. Az 1925 és 1927-i napfogyatkozás tartama alatt (1), (2) ugyancsak nem észleltek gyöngülést. Mindezek ellenére azonban nem látszott lehetetlennek, hogy a sugárzás kis része mégis a napból jön és csupán a mérések pontatlanságán múlott, hogy nem lehetett kimutatni.

A fent említett első mérésektől eltekintve a soláris komponens meghatározására 1928 óta hosszú megfigyeléseket végeztek ionizációs kamrával Hoffmann és Lindholm (3), Lindholm (4), (5), (6), (7), Messerschmidt és Pforte (8), (9), (10), (11), Bennett, Stearns és Compton (12), Millikan és Cameron (13), (14), Wölcken (15), Hess és Steinmaurer (16), Hess (17), (18), Hess és Corlin (19), Hess és Pforte (20), Hess, Graziadei és Steinmaurer (21). Az eredményekről a vélemények megoszlóak. A szerzők általában megegyeznek abban, hogy a kozmikus sugárzás intenzitása páncélozott kamrával mérve néhány ezreléket kitevő napi periódust mutat, délutáni maximummal. E napi menetet legpontosabban Hess és Steinmaurer (16) és (21) határozták meg több évig folytatott mérésekkel. Egyes szerzők, így különösen az amerikai kutatók, a napi periódust szekundär okokra, így az atmoszférában a felmelegedés folytán előálló rétegeződésre vezetik vissza, mások viszont, így például Hess, nem tartják kizártnak, hogy az intenzitásemelkedést esetleg egy soláris eredetű komponens okozza. A napi változást koincidencia-módszerrel Barnóthy és Forró (22) határozták meg. Az intenzitás menetét azonosnak találták Hess és Steinmaurer (16) által észlelt menettel, csakhogy a maximumok és minimumok nagysága 10—20-szor akkorának adódott. Miután e mérésnél a nap közvetlenül sugarakat nem küldhetett a készüléken keresztül, tehát napból eredő sugár koincidenciákat nem csinálhatott, az eredmény kizárja, hogy a napi menetet egy soláris komponens okozza. Mindebből azonban nem következik, hogy egy gyönge soláris komponens ne létezhessék, ennek fellelésére azonban az ionizációs kamra, melyet az eddig felsorolt kutatók használtak, nem alkalmas. «Látótere» — vagyis az a térszög, amelyből érkező és a készülék felé irányuló sugarak a kamrát elérik és abban ionizációt létesítenek — ugyanis igen nagy. Az ionizációt okozó sugarak $^{2}/_{3}$-a olyan a függőleges körül írt kúpból jön, melynek nyilása a félgömb $^{1}/_{3}$-ad részével egyenlő. Elgondolható tehát, hogyha van is a napból eredő kozmikus sugárzás, annak hatása ilyen nagy «látótér» mellett nem mutatható ki, mert az egyidejűleg a többi égtájakból jövő sugárzás hatásához képest csekély és a mérési hibák alatt maradhat, ami által az észlelt intenzitás nem fog lényeges különbségeket mutatni, akár a nap a készülék «látóterében» tartózkodik, akár azon kívül van.

A koincidencia-módszer alkalmasabb a soláris komponens kimutatására, mert «látótere» lényegesen kisebb. (A «látótér» koincidencia-készüléknél az 1. ábrán látható módon berajzolt érintők által határolt térszög, miután csak ezen térszögből jövő sugarak tudnak mindkét csövön áthaladni, vagyis koincidenciákat okozni.)

Ezért Bennett, Stearns és Overbeck (23) 1932-ben megkísérelték a soláris komponens kimutatását a nap felé irányított kis «látóterű» koincidencia-berendezéssel, melyet egy teleszkópra szereltek és egy héten keresztül 2—2 órán át a nap felé, a nap közelében lévő égtájra, a zenitre és a horizontra irányitottak. Miután azonban összesen csak 78 koincidenciát észleltek, a pontosság oly csekély, hogy abból semmiféle következtetést nem lehet vonni.

A soláris komponens létezése tehát mindmáig nincs eldöntve. A kérdés megvizsgálására alkalmasnak kínálkozott munkatársammal, Forró Magdolná-val a kozmikus sugárzás csillagidő periodicitásának kimutatására épített II. sz. koincidencia-berende-

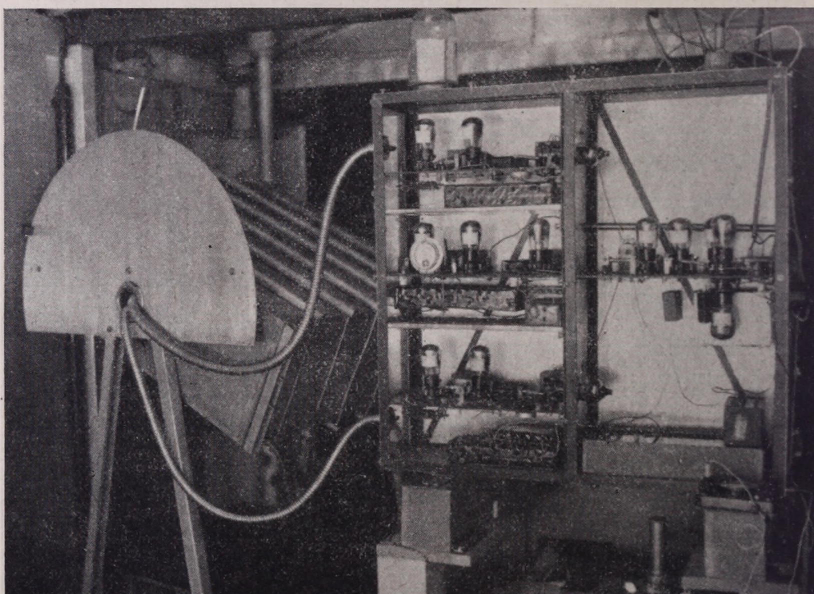


1. ábra.

zés. Részint, mert «látótere» aránylag igen kicsiny, mindössze 400 négyzetfok, automatikusan regisztráló folytatólagos mérésre van berendezve, amiáltal könnyen végezhetők vele hosszabb mérési sorozatok és végül, mert érzékenység-szabályozóval van ellátva, aminek fontosságára még később rátérek.

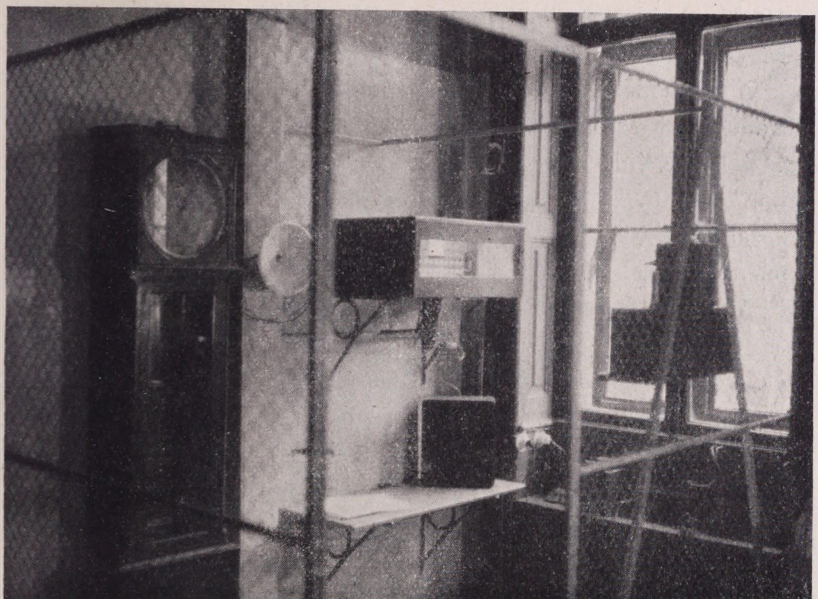
A készülék Geiger—Müller számlálócsövei 20 cm hosszúak, belső átmérőjük 4·8 cm, tangelyükkel párhuzamosan egymástól 55 cm távol vannak, úgyhogy a csövek közti érintők által bezárt szög (lásd 1. ábra) 40 fok kelet-nyugat és

10 fok észak-dél irányban. A csövek teljesen üvegbe forrasztva és 70 mm Hg nyomású emanaciómentes kifagyasztott levegővel vannak megtöltve. A csövek közé 36 cm ólmot helyeztem a szekundär sugarak és a puhább komponensek kiszűrésére. A számlálócsövek beütésszáma és evvel együtt valószínűleg érzékenységük kozmikus sugarakkal szemben változik a hőmér-



2. ábra. A toronyban elhelyezett koincidencia-berendezés. Baloldalt a számlálócsöveket és ólomabszorbenst tartalmazó doboz, vízköpennyel a nap felé fordított helyzetben. Jobbra a koincidenciajelző készülék és a szabályozó.

séklettel, mégpedig úgy, hogy magasabb hőmérsékleten az érzékenység kisebb. Ez a jelenség különösképpen a soláris komponens vizsgálatakor igen káros lehet, mert a nap besugárzásával egyidejűleg emelkedik a hőmérséklet és a csökkenő érzékenység a soláris komponens hatását ellensúlyozhatná. E jelenség kiküszöbölésére egyrészt a csöveket fémmel bélelt fadobozba helyeztem, melyet 25 mm parafaréteggel, majd 5 cm vastag víztartállyal vettem körül, melynek vize a vízvezetékből állandóan cserélődött. A még fennmaradó hőmérsékletingadozás okozta, valamint minden egyéb okból, például telepfeszültség ingadozásból származó érzékenységváltozást egy általam szerkesztett szabályozó kétszázad részére csökkentette, úgyhogy az érzékenység napi ingadozása biztosan $\pm$ 0·2‰-nél kevesebb volt.



3. ábra. A földszinti helyiségben elhelyezett regisztráló berendezés. Balra a csillagidő szerint járó kontaktóra. Középen az automata választót, a 24 számlálószerkezetet és a megvilágító berendezést tartalmazó doboz. Jobbra az automatikus fényképező berendezés. Alatta a készüléket árammal ellátó egyenirányító- és akkumulátor-telep.

A koincidenciák jelzésére Barnóthy-féle (24) koincidenciajelző készüléket használtam, melynek felbontóképessége $2 \cdot 10^{-5}$ sec, amiáltal a véletlen koincidenciák száma óránként csupán 0·2, míg a valódi koincidenciák száma átlag óránként 10 volt. A felbontóképességet egyrészt számítás útján az alkalmazott kondenzátorok és ellenállások értékeiből, másrészt olymódon is meghatároztam, hogy a véletlen koincidenciák számát a BOTHE-féle (25) eljárással mértem olyképpen, hogy a számlálócsöveket egymástól 6 m-re, vízszintesen, tengelyeik meghosszabbításában helyeztem el és e helyzetben megszámoltam a 24 óra alatt adódó koincidenciák — melyek ilyen elhelyezés mellett csak véletlenek lehetnek — számát. A külföldön használatos BOTHE-féle (25) és ROSSI-féle (26) készülékekkel, melyeknek felbontóképessége 10^{-3} sec, 11 véletlen koincidenciát kaptam volna óránként, vagyis annyit, mint amennyi a valódiak száma volt.

A koincidenciák regisztrálására szolgáló berendezés a koincidenciákat csillagidő-óránként összegezte, úgyszintén összegezte az egymásután következő napok ugyanazon órákban kapott adatait. Ezenfelül a regisztráló berendezés számláló szerkezeteinek állását még egy automatikus berendezés 6 óránként lefényképezte.

Az egész berendezést a csillagidő periodicitás kimutatására és egyéb mérésekre 1934. február 5. óta használjuk és julius eleje óta megszakítás nélkül 7000 órája üzemben van

A számlálócsövek, ólomabszorbenssel és víztartállyal együtt vízszintes — kelet-nyugat irányban álló — tengely körül golyós csapágyakon forgathatók és 5—5 fokonként rögzíthetők. Miután a mérési idő alatt a nap deklinációja $-5°43'$-től $+0°34'$-ig változott, vagyis közepesen $-2°34'30''$ volt és a kisérleti fizikai intézet földrajzi szélessége $47°29'43''$, a készüléket a függőlegestől 50°-ra dél felé forgattam el. A készülék «látótere» kelet-nyugat irányban 40 fok lévén, ennek 2 óra 40 perc elforgás felel meg, a nap kulminációja előtt 1 óra 20 perccel lép a készülék látóterébe és 1 óra 20 perccel a kulmináció után hagyja el. A regisztráló berendezés fényképező készülékével ezen időintervallum két határán egy-egy felvételt készitettem, amiáltal a napnak a készülék «látóterén» való átvonulása közben beérkezett koincidenciák számát meghatározhattam.

A méréseket 1935. március 6-tól 22-ig végeztem. Az I. táblázat tartalmazza a mérési eredményeket.

I. Táblázat.

Dátum	Regisztrált koincidenciák	
	nap «látótéren» belül	nap «látótéren» kívül
III. 6	27	235
7	32	229
8	26	233
9	31	225
10	28	157
11	16	232
12	33	232
13	22	218
14	28	243
15	25	225
16	20	220
17	25	241
18	21	241
19	35	235
20	22	189
21	33	194
22	34	221
Összesen ...	458	3770
Mérési idő ...	$45^h\ 20^m$	$362^h\ 40^m$
Koinc. pro óra...	$10{,}103 \pm 0{,}505$	$10{,}395 \pm 0{,}254$
Többlet ...	$-2{,}81 \pm 5{,}45$ %	

Mint látható, a nap átvonulása közben a koincidenciák száma a többi órák átlagához képest a hibahatáron belül 2·8%-kal kisebb; a mérések tehát egy soláris komponens létezése ellen szólnak. Ha a mérés eredményét a pozitív közepes hibával megnövelve (vagyis nap «látótéren» belül + 2·64 % többlet) vesszük tekintetbe, a számítás még így is arra vezet, hogy a napból jövő sugárzás intenzitása — feltéve, hogy lényeges szóródást nem szenvedett — nem haladhatja meg a földünkre érkező összsugárzás 1/5000-ed részét.

Köszönetet mondok dr. Tangl Károly professzor úrnak, ki méréseim menetét érdeklődésével támogatta és azok kivitelét számomra lehetővé tette, továbbá dr. Forró Magdolna egyetemi tanársegédnek számos segítségért, a Széchenyi Tudományos Társaságnak a készülék felépítéséhez nyujtott anyagi támogatásért, dr. ing. Patai Imre, a Vatea-gyár igazgatójának a rendelkezésre bocsátott nagyszámú elektroncsőért, Kurtha Géza műszerésznek az eszközök pontos elkészítéséért.

Budapest, 1935. március 25. *Barnóthy Jenő.*

Az irodalom jegyzéke.

1. W. F. G. Swann, Journ. Frankl. Inst. 200, 489, 1925.
2. W. Kolhörster, Zeitschr. f. Phys. 48, 95, 1928.
3. G. Hoffmann u. F. Lindholm, Gerlands Beitr. Geophys. 20, 12, 1928.
4. F. Lindholm, Gerlands Beitr. Geophys. 26, 141, 1929.
5. F. Lindholm, Gerlands Beitr. Geophys. 26, 414, 1930.
6. F. Lindholm, Gerlands Beitr. Geophys. 35, 224, 1932.
7. F. Lindholm, Ark. Math. Astron. och. Fysik 23, 1, 1932.
8. W. Messerschmidt u. W. S. Pforte, Zeitschr. f. Physik 73, 677, 1932.
9. W. Messerschmidt u. W. S. Pforte, Zeitschr. f. Physik 74, 187, 1932.
10. W. Messerschmidt u. W. S. Pforte, Zeitschr. f. Physik 78, 668, 1932.
11. W. Messerschmidt u. W. S. Pforte, Physik. Zeitschr. 33, 233, 1932.
12. R. D. Bennett, J. Stearns, A. H. Compton, Physic. Rev. 41, 119, 1932.
13. R. A. Millikan a. G. H. Cameron, Physic. Rev. 37, 235, 1931.
14. R. A. Millikan a. G. H. Cameron, Physic. Rev. 39, 391, 1932.
15. K. Wölcken, Zeitschr. f. Geophysik 7, 267, 1931.
16. V. F. Hess u. R. Steinmaurer, Berl. Ber. Nr. 15, 521, 1933.
17. V. F. Hess, Naturwiss. 18, 1094, 1930.
18. V. F. Hess, Nature, Lond. 127, 10, 1931.
19. V. F. Hess u. A. Corlin, Gerlands Beitr. Geophys. 31, 169, 1931.
20. V. F. Hess u. W. S. Pforte, Zeitschr. f. Physik, 71, 171, 1931.
21. V. F. Hess, H. Th. Graziadei u. R. Steinmaurer, Wiener Ber. 143, 313, 1934.
22. J. Barnóthy u. M. Forró, Zeitschr. f. Physik, 89, 437, 1934.
23. J. C. Stearns, W. Overbeck a. R. D. Bennett, Phys. Rev. 42, 317, 1932.
24. J. Barnóthy, Naturwiss. 21, 835, 1933.
25. W. Bothe: Zeitschr. f. Physik, 56, 751, 1929.
26. B. Rossi, Nature. Lond. 125, 636, 1930.

ÜBER DIE SOLARE KOMPONENTE DER KOSMISCHEN STRAHLUNG.

Das Ziel der Arbeit war nachzuprüfen ob eine solare Komponente grösserer Intensität vorhanden sei. Zur Messung wurde die vom Verfasser und M. FORRÓ zur Bestimmung der Sternzeitperiode konstruierte Zweifachkoinzidenzapparatur mit 36 cm Blei zwischen den Röhren verwendet. Die angewendete BARNÓTHY'sche Koinzidenzschaltung hat ein Auflösungsvermögen von 2.10^{-5}, so dass die zufälligen Koinzidenzen vernachlässigbar waren. Durch Temperatur und Spannungsänderungen hervorgerufene Empfindlichkeitsschwankungen der Zählrohre — die gerade bei Bestimmung der solaren Komponente die Messergebnisse stark beeinträchtigen können — wurden durch einen vom Verfasser konstruierten Regler unter $\pm 0{\cdot}02$ % herabgedrückt.

Das «Gesichtsfeld» der Apparatur war in Ost-West Richtung 40° und in Nord-Süd Richtung 10°; die Achsenebene der Zählrohre war von der Vertikalen um 50° nach Süden gedreht, so dass die Sonne sich täglich $2^h 40^m$ im «Gesichtsfeld» der Apparatur befand. Der Mittelwert der gemessenen Intensität war während der Zeit der Sonneneinstrahlung um $2{\cdot}81 \pm 5{\cdot}45$ % kleiner als in den anderen Stunden; so dass die Messungen gegen die Existenz einer solaren Komponente sprechen. Wird das Ergebnis mit dem positiven mittleren Fehler erhöht in Betracht gezogen, so kann man aus den Ergebnissen berechnen, dass die — gegenüber den Dimensionen des «Gesichtsfeldes» nicht wesentlich gestreute — solare Komponente höchstens den 1/5000 Teil der auf die Erdoberfläche auffallenden kosmischen Strahlung betragen kann.

J. Barnóthy.

IRODALOM.

Veress Pál: Valós függvények. Budapest, «Studium» könyvkereskedelmi és könyvkiadó r.-t., 1935, 175 oldal.

A matematikai analízisnek az az ága, amellyel Veress Pál munkája foglalkozik, az analízis heurisztikus módszereinek kritikájával, valószínűnek látszó sejtések megcáfolásával kezdődött és körülbelül félszázad alatt fejlődött az analízis egyik leghatalmasabb diszciplinájává, annak nem csupán az újabb problémakörökben, de még a klasszikus problémák nagy részének továbbvitelében is nélkülözhetetlen módszerévé. Veress könyve ennek a tudományágnak első rendszeres tárgyalása a magyarnyelvű tankönyvirodalomban. A könyv a szerző egyetemi előadásaiból, elsősorban egyetemi hallgatók számára készült. Olvasásához nem kell több alapismeret, mint amennyit egyetemeinken a bevezető előadásokon nyujtani szoktak. Innen elindulva, a szerző elég messze, egészen a függvénytereken értelmezett függvények (az ú. n. függvény-operációk) elméletéig vezeti el az olvasót. Mivel másrészt a könyv terjedelmét anyagi okok korlátozták, nagyon nehéz feladat elé állította a szerzőt az előadandó anyag megválasztásának a kérdése. Hogy ezt a feladatot kerek 10 nyomtatott íven szinte lehetetlen megoldani, az mindenki előtt világos, aki pl. Carathéodory vagy Hahn hasonló tárgyú, terjedelmes munkáit vagy Hobson két hatalmas kötetét, vagy Saks-nak kizárólag az integrálás elméletével és az ehhez kapcsolódó kérdésekkel foglalkozó legújabb munkáját olvasta. Részben ennek a nehézségnek tulajdoníthatók az anyag megválasztásában mutatkozó némely hiányok, amelyekre az ismertetés folyamán rá fogok térni. Sietek azonban kijelenteni, hogy a tényleg földolgozott anyagot a könyv szabatos, de azért könnyen érthető, érdekes és folyamatos előadásban tárgyalja.

Az I. rész a ponthalmazok elméletének alapfogalmait és a továbbiakhoz szükséges eredményeit ismerteti. Ebben a részben foglal helyet a szerző egy eredeti alkotása is, az állítás-sorozatra vonatkozó tétel, melyet 1932-ben a szegedi Acta-ban, legutóbb pedig a jelen folyóiratban is közölt. A tétel a későbbi tárgyalások folyamán különböző fajtájú kérdéseknek, köztük a Borel-féle födési tételnek, egységes módon való tárgyalását szolgálja.

A II. rész tárgya: a folytonos függvények, az egyenletes és a quasi-egyenletes összetartás, Weierstrass megközelítési tétele, a monoton függvény diszkontinuitásai, a korlátos változású függvény, Jordan fölbontási tétele, a teljesen folytonos függvény, a félig-folytonos függvény és előállítása folytonos függvények monoton sorozatával, végül a BAIRE-féle osztályok. A JORDAN-féle tétel bizonyítása könnyen félreérthető és néhány szónyi kiegészítésre szorul. Bár az előző oldal fejtegetéseiből talán sejthető, mégis helyesebb volna külön hangsúlyozni, hogy a háromféle variációnak alkalmas beosztások révén összegekkel való megközelítése után a közös albeosztásra kell átmenni és hogy ez a megközelítés pontosságán nem ront. Még egy megjegyzést: az ilyen nevezetes tételnél nézetem szerint a szerzőt meg kellett volna nevezni.

A III. rész a LEBESGUE-integrál elméletét tárgyalja. Leginkább ez a rész az, ami az anyag kiválogatása szempontjából megjegyzésekre késztet; elfogulatlanul bírálhatok már csak azért is, mert saját vizsgálataim a könyvben aránytalanul sokat szerepelnek. Az egyetlen differenciálási tétel, ami a munkában szerepel, a monoton függvény differenciálhányadosának majdnem mindenütt való létezése. E tétel jelentősége jobban kidomborodnék, ha szó esnék az előzményekről, mint pl. a sehol sem differenciálható folytonos függvény (WEIERSTRASS), és a következményekről, pl. arról, hogy minden egyváltozós integrálható függvény határozatlan integráljának differenciálhányadosa. Kívánatos volna a korlátos változású függvényekkel kapcsolatban a görbék ívhosszának tárgyalása. Hiányzik a tételnek egyik legérdekesebb korolláriuma, a monoton növekvő függvényekből alkotott konvergens sor tagonként való differenciálhatósága, valamint a megfelelő tétel pozitív tagú függvénysorok tagonként való integrálhatóságáról. Meg van mutatva, hogy a határozatlan integrál nemcsak korlátos változású, de teljesen folytonos függvény is, de hiányzik ennek a tételnek az előzőkből néhány szóval következtethető megfordítása. Nem esik szó STIELTJES-féle integrálról és a többváltozós függvény integrálásáról, természetesen még kevésbbé a végtelen dimenziós térben, vagy általánosabban absztrakt halmazokon való integrálásról, bár a könyv utolsó egynegyed része ilyen tereknek van szentelve.

Ez a IV. rész az absztrakt tér fogalmával, topologikus és metrikus terekkel, ezek néhány esetével (folytonos, mérhető, négyzetesen integrálható függvények terei, HILBERT-féle koordináta-tér), különösen a kompaktság kérdésével foglalkozik és ezekkel kapcsolatban az orthogonális függvények szerint való sorfejtéssel, a lineáris függvényoperációkkal, továbbá két oldalon az abszolút extrémum kérdésével a variációszámításban és vázlatosan a konformis leképezés alaptételével. A HILBERT-féle tereket, nagy és növekvő jelentőségük miatt, talán helyes lett volna részletesebben és a mai fölfogásnak megfelelő absztrakt megalapozással, vagy azzal is, tárgyalni.

A részleteiben, ismétlem, érdekes, könnyű és élvezetes stílusban megírt könyvből az olvasó sokat tanulhat. *Riesz Frigyes.*

Kimutatás

az 1934. november 1-től 1935. március 18-ig befizetett összegekről.

1. Tagdíjak.

1931-re : Schwarz Ilona 4 P.

1932-re : **H**alász Ernő (8), **K**olozsváry Béla (8), **P**atai László (2), **P**olczer Kálmán (8), **R**óna Zsigmond (8), **W**aldapfel János (8). *Összesen 42 P.*

1933-ra : **B**eke Manó (8), **B**ródy Imre (8), **B**ugarszky István (8), **C**saplár Konrád (2), **D**éri Zsigmond (8), **E**rdődy Imre (8), **É**ber József (4), **F**ejér Lipót (8), **F**erenczy Zoltán (8), **G**oll György (8), **G**rynaeus István (4), **H**alász Ernő (8), **H**euer Ede (8), **J**áky József (8), **K**ilcer Gyula (6), **K**rbek Ferenc (8), **K**ronberger Ede (4), **L**enkey Lehel (2), **M**ilakovszky László (6), **N**agy Julián (8), **P**atai László (6), **P**éter Rózsa (8), **S**chay Géza (8), **S**öpkéz Sándor (8), **S**teiner Miklós (6), **T**omits Iván (8), **V**éczi Gábor (8), **W**odetzky József (2). *Összesen 186 P.*

1934-re : **B**eke Manó (8), **B**ertrám Brunó (6), **B**ugarszky István (8), **C**saplár Konrád (4), **C**segény Margit (8), **E**rdős Pál (8), **É**ber József (8), **F**aragó Andor (8), **F**ejér Lipót (8), **F**raunhoffer Lajos (8), **G**oldziher Károly (8), **G**rynaeus István (8), **H**adarits Vendel (8), **H**ajós Géza (6), **H**alász Ernő (8), **J**áky József (8), **K**ilcer Gyula (8), **K**rbek Ferenc (8), **M**ilakovszky László (6), **R**euss Endre (8), **S**ós Ernő (8), **S**öpkéz Sándor (8), **S**zekeres Kálmán (8), **S**zékely Károly (6), **T**ass Antal (8), **T**omits Iván (8), **V**ámos Sándor (6), **V**éczi Gábor (8), **W**inter József (8), **W**odetzky József (6). *Összesen 224 P.*

1935-re : **Á**brahám István (8), **B**áldyné Benkő Ilona (6), **E**rdős Pál (2), **F**aragó Andor (8), **F**ejér Lipót (8), **F**ejes László (4), **G**ruber Nándor (8), **G**yulai Zoltán (2), **H**adarits Vendel (8), **H**ausbrunner Vilmos (8), **H**olenda Barnabás (6), **J**elitai József (8), **K**arai Sándor (6), **K**övessi Ferenc (6), **M**ilakovszky László (6), **M**ischung Ilona (6), **N**agy Ferenc (8), **N**yáry Béla (6), **O**rtvay Rudolf (8), **O**szlaczky Szilárd (8), **P**ogány Béla (8), **R**ados Gusztáv (8), **R**ados Ignác (8), **R**euss Endre (8), **R**horer László (6), **R**omsauer Lajos (8), **R**ucsinszky Lajos (8), **S**trausz Hermann (8), **S**zéky István (6), **S**ziklai Jenő (4), **S**zőke Béla (8), **T**angl Károly (8), **T**óth Aladár (6), **T**örök Elemér (6), **V**olenszky Gyula (6), **V**örös Cyrill (6). *Összesen 242 P.*

1936-ra: **B**acsó Vilmos (6), **G**yulai Zoltán (6), **M**ilakovszky László (2), **R**enner János (8), **R**horer László (2), **V**olenszky Gyula (2). *Összesen 26 P.*

2. Előfizetési díjak:

1932-re: Fazekas M. reáliskola, Debrecen, 4 P.

1933-ra: Mária Terézia leánygimn. Bp. (8), Zrinyi M. rg. Bp. (8), Term. Tudományi Társulat Bp. (8), Fazekas M. reálisk. Debrecen (4), Eszterházy M. nádor rg. Dombovár (2). *Összesen 26 P.*

1934-re: Toldy F. reálisk. Bp. (8), Grill könyvkeresk. Bp. (Müller W. London) (6·40), Kilián F. könyvkeresk. Bp. (6), Term. Tudományi Társulat Bp. (8), Szt. László rg. Bp. (8), Szt. Imre rg. Csongrád (3), Eszterházy M. nádor rg. Dombovár (6), Révai M. reálisk. Győr (6). *Összesen 51 P 40 f.*

1935-re: Ág. h. ev. Rudolf rg. Békéscsaba (6), Kegyesrendi Tanárképző (Kalazantium) Bp. (8), Term. Tudományi Társulat Bp. (8), Svábhegyi Csillagvizsg. Intézet (8), Eggenberger könyvkeresk. Bp. (7·20), Pesti Izr. Hitközség rg-a (8), Eszterházy M. nádor rg. Dombovár (1), Bánya-, Kohó- és Erdőmérnöki Kar, Sopron (6), Horthy M. ref. rg. Kisújszállás (6), Csanád vezér rg. Makó (6), Szt. Benedek-rend Közp. Könyvtára, Pannonhalma (6). *Összesen 70 P 20 f.*

1936-ra: Svábhegyi Csillagvizsg. Intézet 8 P.

3. Adományok.

Bláthy Ottó Titusz 10 P, Mattyasovszky Kasszián 8 P, Tanárképző Intézet Bp. 305 P. *Összesen 323 P.*

Budapesten, 1935. március 18-án.

Szabó Gábor, pénztáros.

Franklin-Társulat nyomdája. — Ábrai V.

Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkívüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi reánk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhöz képest meg kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzívebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is.

Kérjük ennélfogva tisztelt tagtársainkat,

1. hogy hátralékos tagdíjaikat (évenkint 8, ill. 6 pengőt) szíveskedjenek *Szabó Gábor* pénztárosnak (Budapest, XI., Verpeléti-út 7. I. 2.) vagy postatakarékpénztári csekkszámlánkra (száma 5997), vagy pedig a Tudományos Társulatok és Intézmények Orsz. Szövetségének Díjkezelősége útján befizetni.
2. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával,
3. hogy gyüjtsenek új tagokat.

MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES ÉS POGÁNY BÉLA

NEGYVENKETTEDIK ÉVFOLYAM

1935

JÚLIUS—DECEMBERI FÜZET

BUDAPEST, 1935

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Kőnig Dénes* **(XI., Horthy Miklós-út 28., Hadik-pensio)**, a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* **(XI., Budafoki-út 8.)** címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikban lehető rövidségre törekedjenek, azokhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghivók expedíciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Szabó Gábor* pénztáros címére (Budapest, XI., Verpeléti-út 7.) intézendők. Postatakarékpénztári csekkszámla száma: 5997.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány*, Budapest, XI., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *B. Pogány*, Budapest, XI., Budafoki-út 8.

EGY MINIMUM-FELADAT A KÖRBE BEÍRT SOKSZÖGEKRE VONATKOZÓLAG.

Bevezetés.

Ismeretes,[1] hogy a körbe beírt összes konvex sokszögek között az oldalak négyzetösszege a beírt szabályos háromszögre a legnagyobb. Ennek alapján nyilvánvaló, hogy $n > 3$ esetén a beírt n-szögek között nincs olyan, melyre az oldalak négyzetösszege a legnagyobb volna, mert e négyzetösszeg tetszőlegesen megközelítheti a beírt szabályos háromszög oldalainak négyzetösszegét. És nyilvánvalóan nincs oly beírt n-szög sem, melyre az oldalak négyzetösszege a legkisebb volna, mert e négyzetösszeg tetszőleges kicsiny lehet.

Az alábbiakban mármost a következő minimum-feladatot fogom megoldani: *a körbe beírt mindazon konvex n-szögek között, melyeknél az oldalaknak megfelelő ívek egyike sem nagyobb a félkörnél, melyik az, amelyre az oldalak négyzeteinek összege legkisebb?* Látni fogjuk, miszerint *a feladat megoldása*

$n = 3$ *esetén minden olyan beírt háromszög, melynek egyik oldala a körnek átmérője ;*

$n = 4, 5, 6$ *esetén az a beírt n-szög, melynek egyik oldala a kö*ı*nek átmérője és a többi oldala egymással egyenlő ;*

$n \geq 7$ *esetén a beírt szabályos n-szög.*[2]

---

[1] L. az *Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat* 1934. évi XXXVIII. matematikai tanulóversenyének II. tételét, Matematikai és Fizikai Lapok 41 (1934), p. 168.

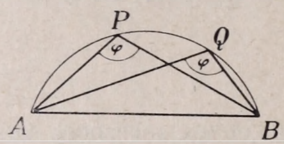
[2] Az alkalmazandó módszert illetőleg v. ö. KÜRSCHÁK J.: A körbe beirt és a kör körül irt sokszögekről, Matematikai és Természettudományi Értesitő 5 (1887), p. 153—160, vagy ugyanattól: Über dem Kreise ein- und umgeschriebene Vielecke, Mathematische Annalen 30 (1887), p. 578—581.

Tárgyalás.

1. Először is bebizonyítom az alábbi segédtételt.

I. *Segédtétel. Válasszuk az $\widehat{AB}$ köríven A és B között tetszés szerint a P pontot, azután P és B között a Q pontot úgy, hogy*

$$\widehat{AP} > \widehat{BQ} \tag{1}$$



1. ábra.

legyen. Akkor

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 \lesseqqgtr \overline{AQ}^2 + \overline{BQ}^2 \tag{2}$$

a szerint, amint

$$\widehat{AB} \lesseqqgtr \text{félkör}.$$

Bizonyítás. Legyen (1. ábra)

$$\varphi = APB\sphericalangle = AQB\sphericalangle.$$

A cosinus-tétel szerint az ABP háromszögben

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 - 2\overline{AP}.\overline{BP}\cos\varphi, \tag{3}$$

az ABQ háromszögben pedig

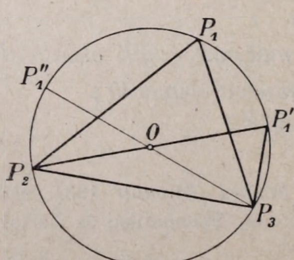
$$\overline{AB}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{BQ}^2 - 2\overline{AQ}.\overline{BQ}\cos\varphi. \tag{4}$$

De nyilván

$$ABP_\triangle \text{ ter.} > ABQ_\triangle \text{ ter.},$$

lévén e háromszögekben az $\overline{AB}$ alap közös, az ehhez tartozó magasság pedig (1) alapján az ABP háromszögben nagyobb, mint az ABQ háromszögben. Tehát

$$\overline{AP}.\overline{BP} > \overline{AQ}.\overline{BQ}. \tag{5}$$



2. ábra.

Továbbá, mivel a φ szög tompa-, derék- vagy hegyesszög a szerint, a mint $\widehat{AB} \lesseqqgtr$ félkör, ennek megfelelőleg

$$\cos\varphi \lesseqqgtr 0. \tag{6}$$

(5) és (6) alapján (3) és (4)-ből folyik (2), qu. e. d.

2. Tekintsünk valamely beirt $P_1P_2P_3$ háromszöget, melynél az oldalaknak megfelelő ívek mindegyike kisebb a félkörnél (2. ábra).

Legyen a kör középpontja O, és messe a P_2O egyenes a kört másodszor P_1'-ben, P_3O pedig P_1''-ben. Akkor nyilván

$$\widehat{P_3P_1'} = \widehat{P_2P_1''} < \widehat{P_2P_1}.$$

Mivel pedig

$$\widehat{P_2P_1} + \widehat{P_1P_3} > \text{félkör},$$

az I. segédtétel értelmében

$$\overline{P_2P_1}^2 + \overline{P_1P_3}^2 > \overline{P_2P_1'}^2 + \overline{P_3P_1'}^2.$$

Tehát a $P_1'P_2P_3$ háromszögre az oldalak négyzetösszege kisebb, mint a $P_1P_2P_3$ háromszögre. E $P_1'P_2P_3$ háromszögben a $\overline{P_1'P_2}$ oldal a körnek átmérője, tehát a $P_1'P_3P_2 \sphericalangle$ derékszög, s így e háromszög oldalainak négyzetösszege

$$\overline{P_1'P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 + \overline{P_3P_1'}^2 = 2\overline{P_1'P_2}^2.$$

Ugyanez az oldalak négyzetösszege mindazon beírt háromszögekre, melyeknek egyik oldala átmérő. Tehát $n=3$ *esetén feladatunk megoldása minden olyan beírt háromszög, melynek egyik oldala a körnek átmérője.*

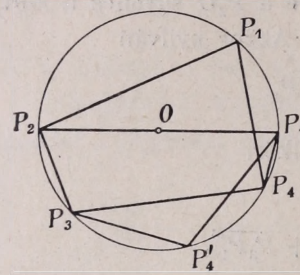
3. Tekintsünk most valamely beírt $P_1P_2P_3P_4$ konvex négyszöget, melynél az oldalaknak megfelelő ívek egyike sem nagyobb a félkörnél.

Ha két ív összege egyenlő a félkörrel, akkor a másik kettőé is egyenlő vele. Az ívek permutálásával elérhetjük, hogy két szomszédos ív a kör egyik felét, a másik két szomszédos ív pedig a kör másik felét teszi ki. A megfelelő beírt négyszög oldalai ugyanazok, mint az előbbi négyszögéi, s az I. segédtétel szerint négyzetösszegük egyenlő a beírt szabályos négyszög oldalainak négyzetösszegével.

Tegyük fel most, hogy két ív összege nagyobb a félkörnél. Az ívek permutálásával hozzuk ezeket egymás mellé. Legyenek az ívek e helyzetben $\widehat{P_1P_2} \geqq \widehat{P_1P_4}$ (3. ábra).

Ha a $\overline{P_1P_2}$ oldal nem átmérő, a P_2-vel diametrálisan szemben fekvő P_1' pont a $\widehat{P_1P_4}$ ívnek valamely közbülső pontja, s mivel $\widehat{P_2P_1} > \widehat{P_4P_1'}$, az I. segédtétel szerint

$$\overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_1P_4}^2 > \overline{P_1'P_2}^2 + \overline{P_1'P_4}^2.$$



3. ábra.

Tehát a $P_1'P_2P_3P_4$ négyszögre (melynek $\overline{P_1'P_2}$ oldala átmérő) az oldalak négyzetösszege kisebb, mint volt a $P_1P_2P_3P_4$ négyszögre. Ha a $\overset{\frown}{P_2P_3}$, $\overset{\frown}{P_3P_4}$, $\overset{\frown}{P_4P_1'}$ ívek nem mind egyenlők, akkor megfelelő permutálással hozzuk ezek legnagyobbikát és legkisebbikét egymás mellé. Legyen e helyzetben például $\overset{\frown}{P_3P_4}$ a legnagyobb és $\overset{\frown}{P_4P_1'}$ a legkisebb e három ív közül. Akkor $\overset{\frown}{P_3P_4}$ nagyobb a félkör harmadrészénél, $\overset{\frown}{P_4P_1'}$ viszont kisebb annál. Ha tehát a P_3P_4 ívnek P_4' az a pontja, melyre $\overset{\frown}{P_3P_4'}$ éppen a félkör harmadrésze, úgy $\overset{\frown}{P_3P_4'} > \overset{\frown}{P_1'P_4}$ s így az I. segédtétel értelmében

$$\overline{P_3P_4'}^2 + \overline{P_1'P_4'}^2 < \overline{P_3P_4}^2 + \overline{P_1'P_4}^2.$$

Tehát a $P_1'P_2P_3P_4'$ négyszögre az oldalak négyzetösszege kisebb, mint volt a $P_1'P_2P_3P_4$ négyszögre. Ha a $\overset{\frown}{P_2P_3}$, $\overset{\frown}{P_3P_4'}$, $\overset{\frown}{P_4'P_1'}$ ívek még mindig nem mind egyenlők, úgy az előbbi eljárást ismételve (amikor is a félkör harmadával egyenlő $\overset{\frown}{P_3P_4'}$ ív nem változik) elérjük, hogy az oldalak négyzetösszege tovább kisebbedik, s most már nemcsak, hogy az egyik oldal átmérő, hanem még a többi három egymással egyenlő is (egyenlő a beírt szabályos hatszög oldalával).

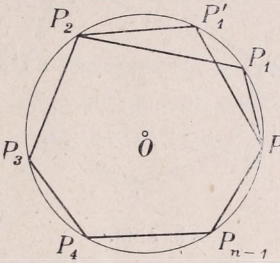
A kör sugarát véve egységnek, ez utóbbi négyszögre az oldalak négyzetösszege 7, míg a beírt szabályos négyszögre 8. A mondottakból tehát következik, miszerint $n = 4$ esetén feladatunk megoldása az és csak az a beírt négyszög, melynek egyik oldala átmérő és a többi oldala egymással egyenlő.

4. Jelöljük az egységsugarú körbe beírt szabályos n-szög oldalának mérőszámát a_n-nel. Akkor a beírt szabályos n-szög oldalainak négyzetösszege na_n^2, annál a beírt n-szögnél pedig, melynek egyik oldala átmérő és a többi oldala egymással egyenlő (vagyis egyenlő a_{2n-2}-vel) az oldalak négyzetösszege $(n-1)\,a_{2n-2}^2+4$. Megmutatom, miszerint $n \geqq 5$ esetén feladatunk megoldása vagy

a beirt szabályos n-szög, vagy ez az utóbbi beirt n-szög, a szerint, amint

$$na_n^2 \lesseqgtr (n-1)\, a_{2n-2}^2 + 4.$$ [3]

Tekintsünk ugyanis valamely beirt konvex n-szöget, melynél az oldalaknak megfelelő ívek egyike sem nagyobb a félkörnél.



4. ábra.

Tegyük fel először, hogy az ívek közül bármely kettő összege kisebb vagy ugyanakkora, mint a félkör. Ha ez az n-szög nem szabályos, akkor a legnagyobb ív a kör n-edrészénél nagyobb, a legkisebb viszont annál kisebb. Az ívek permutálásával hozzuk a legnagyobb és a legkisebb ívet egymás mellé; legyen e helyzetben (4. ábra) $\overset{\frown}{P_1P_2}$ a legnagyobb és $\overset{\frown}{P_1P_n}$ a legkisebb ív. Két eset lehetséges:

$$1^\circ \quad \overset{\frown}{P_1P_2} + \overset{\frown}{P_1P_n} < \text{félkör},$$

$$2^\circ \quad \overset{\frown}{P_1P_2} + \overset{\frown}{P_1P_n} = \text{félkör}.$$

Az 1° esetben válasszuk a körön P_1 és P_2 között a P_1' pontot úgy, hogy $\overset{\frown}{P_2P_1'}$ egyenlő legyen a kör n-edrészével. Ekkor $\overline{P_1'P_2}$ a beírt szabályos n-szög oldala, s mivel $\overset{\frown}{P_nP_1} < \overset{\frown}{P_2P_1'}$, az I. segédtétel szerint

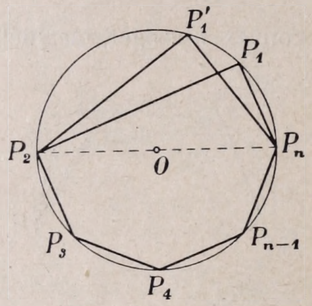
$$\overline{P_2P_1'}^2 + \overline{P_nP_1'}^2 < \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_1P_n}^2.$$

Tehát a $P_1'P_2 \ldots P_n$ n-szögre az oldalak négyzetösszege kisebb, mint volt a $P_1P_2 \ldots P_n$-re. S mivel a $\overset{\frown}{P_1'P_2}$ és $\overset{\frown}{P_1'P_n}$ ívek nyilván kisebbek a $\overset{\frown}{P_1P_2}$ ívnél, világos, hogy e $P_1'P_2 \ldots P_n$ sokszögnél is bármely két ív összege $\leq$ félkör.

A 2° esetben a $\overset{\frown}{P_2P_3}$, $\overset{\frown}{P_3P_4}, \ldots, \overset{\frown}{P_{n-1}P_n}$ ívek egyike sem lehet agyobb a legkisebb $\overset{\frown}{P_nP_1}$ ívnél, mert akkor $\overset{\frown}{P_1P_2}$-vel együtt

[3] Az egyenlőség esete nem állhat fenn, amint ez az alábbiakból ki fog tűnni.

többet tenne ki a félkörnél, a feltevéssel ellentétben. Tehát ez esetben $\widehat{P_2P_3}, \widehat{P_3P_4}, \dots, \widehat{P_{n-1}P_n}$ mind egyenlők a $\widehat{P_nP_1}$-vel (5. ábra).



5. ábra.

Válasszuk a körön P_1 és P_2 között a P_1' pontot úgy, hogy $\widehat{P_1'P_2} > \widehat{P_nP_1'}$ legyen. Akkor a $P_1'P_2 \dots P_n$ sokszögben a legnagyobb ív $\widehat{P_1'P_2}$, a legkisebb pedig a $\widehat{P_2P_3}, \widehat{P_3P_4}, \dots, \widehat{P_{n-1}P_n}$ ívek bármelyike, s mivel ezek a $\widehat{P_nP_1}$-vel egyenlők, most már pl. $\widehat{P_1'P_2} + \widehat{P_2P_3} <$ félkör, tehát e sokszög (melynél nyilván ismét bármely két ív összege $\leq$ félkör) az 1° eset alá tartozik. Az oldalak négyzetöszszege e $P_1'P_2 \dots P_n$ n-szögre ugyanaz, mint volt a $P_1P_2 \dots P_n$-re, mert

$$\overline{P_1'P_2}^2 + \overline{P_1'P_n}^2 = \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_1P_n}^2,$$

lévén $\overline{P_2P_n}$ átmérő.

Ezek szerint, ha a beírt n-szög nem szabályos és bármely két ív összege kisebb vagy ugyanakkora mint a félkör, úgy legföljebb két lépésben oly n-szögre térhetünk át, melynél az oldalak négyzetösszege kisebb, mint volt az eredetinél és egy oldala egyenlő a beírt szabályos n-szög oldalával, továbbá szintén bármely két ív összege $\leq$ félkör. Ha ez még nem a beírt szabályos n-szög, akkor az előbbi eljárást ismételhetjük, mikor is a szabályos n-szög oldalával egyenlő oldal nem változik és még egy oldal egyenlő lesz a szabályos n-szög oldalával s í. t. Végesszámú lépésben, az oldalak négyzetösszegének folytonos csökkentésével így a beírt szabályos n-szögre jutunk, ennél tehát az oldalak négyzetösszege kisebb, mint volt az eredeti beírt n-szögnél.

Tegyük fel most, hogy két ív összege nagyobb a félkörnél. Ekkor a négyszögről (3. pont) mondottakhoz hasonlóan látható be, miszerint arra a beírt n-szögre, melynek egyik oldala átmérő és a többi oldala egymással egyenlő, az oldalak négyzetösszege kisebb (ha az eredeti még nem volt ez az n-szög).

Ezekből következik, hogy ha

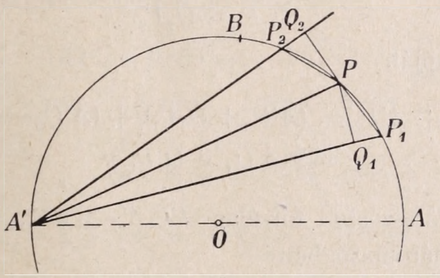
$$na_n^2 < (n-1)\,a_{2n-2}^2 + 4,$$

úgy feladatunk megoldása a beírt szabályos n-szög és csak ez, ha viszont

$$na_n^2 > (n-1)\,a_{2n-2}^2 + 4,$$

akkor feladatunk megoldása az és csak az a beírt n-szög, melynek egyik oldala átmérő, a többi oldala pedig egymással egyenlő.

5. A továbbiakban szükségünk lesz a következő tételre:



6. ábra.

A körbe beírt szabályos n-szög oldalainak négyzetösszege az n növekedtével folyvást csökken.

Ezt elemileg bebizonyítandó, előre bocsátom az alábbi segédtételt.

II. *Segédtétel. Legyen a körön* (6. ábra)

$$\widehat{AB} \text{ ív} \leqq \text{negyedkör.} \tag{1}$$

Ha P_1 és P_2 az $\widehat{AB}$ ívnek két különböző pontja és P a $\widehat{P_1P_2}$ ívet felezi, akkor

$$2\overline{AP}^2 < \overline{AP_1}^2 + \overline{AP_2}^2. \tag{2}$$

Bizonyítás. Ha A' a körnek A-val diametrálisan szemben fekvő pontja, úgy (2) nyilván aequivalens a

$$2\overline{A'P}^2 > \overline{A'P_1}^2 + \overline{A'P_2}^2 \tag{2*}$$

egyenlőtlenséggel. Könnyebb szemlélhetőség kedvéért ezt fogom bebizonyítani.

Legyen P-ből az $A'P_1$ egyenesre bocsátott merőleges talppontja Q_1, az $A'P_2$-re bocsátotté Q_2. Akkor (minthogy P a $\widehat{P_1P_2}$ ívet s így $A'P$ a $P_1A'P_2 \measuredangle$-et felezi)

$$\overline{A'Q_1} = \overline{A'Q_2}, \tag{3}$$

és

$$\overline{PP_1} = \overline{PP_2}, \quad \overline{PQ_1} = \overline{PQ_2}$$

következőleg $PP_1Q_1 \triangle \cong PP_2Q_2 \triangle$, tehát

$$\overline{Q_1P_1} = \overline{Q_2P_2}. \tag{4}$$

(3) és (4) alapján

$$\begin{aligned} \overline{A'P_1}^2 + \overline{A'P_2}^2 &= (\overline{A'Q_1} + \overline{Q_1P_1})^2 + (\overline{A'Q_2} - \overline{Q_2P_2})^2 = \\ &= 2(\overline{A'Q_1}^2 + \overline{Q_1P_1}^2). \end{aligned} \tag{5}$$

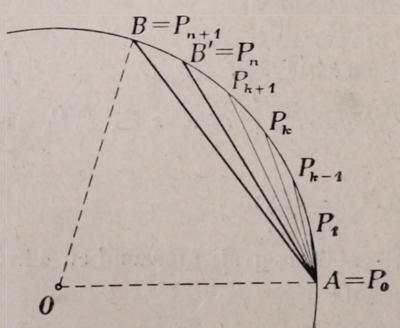
De az (1) föltevésből folyólag $PP_1A' \measuredangle > 45°$, tehát a PP_1Q_1 derékszögű háromszögben

$$\overline{Q_1P_1} < \overline{Q_1P}.$$

Ennélfogva (5)-ből

$$\overline{A'P_1}^2 + \overline{A'P_2}^2 < 2(\overline{A'Q_1}^2 + \overline{Q_1P}^2) = 2\overline{A'P}^2$$

vagyis (2*) valóban fennáll. Ezzel a II. segédtételt bebizonyitottuk.



7. ábra.

Áttérve az eredeti tétel bebizonyítására, legyen az egységsugarú körben (7. ábra) a beírt szabályos n-szög, ill. $(n+1)$-szög oldala

$$\overline{AB} = a_n, \quad \overline{AB'} = a_{n+1}.$$

Akkor a $\widehat{BB'}$ ív a kör $n(n+1)$-edrésze, amely tehát $\widehat{AB}$-ben $(n+1)$-szer, $\widehat{AB'}$-ben n-szer foglaltatik. Osszuk az

$\widehat{AB}$ ívet $(n+1)$ egyenlő részre a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokkal. Akkor P_n összeesik B'-vel. Egyöntetűség kedvéért jelöljük A-t P_0-lal, B-t P_{n+1}-gyel.

Ha $n \geqq 4$, úgy $AB \leqq$ negyedkör, tehát a II. segédtétel értelmében

$$2\overline{AP}_k^2 < \overline{AP}_{k-1}^2 + \overline{AP}_{k+1}^2 \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

vagy

$$\overline{AP}_k^2 - \overline{AP}_{k-1}^2 < \overline{AP}_{k+1}^2 - \overline{AP}_k^2 \qquad (k=1, 2, \ldots n).$$

Ebből folyólag

$$\overline{AP}_k^2 - \overline{AP}_{k-1}^2 < \overline{AP}_{n+1}^2 - \overline{AP}_n^2 \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Ez utóbbi egyenlőtlenségeket összeadva

$$\overline{AP}_n^2 < n(\overline{AP}_{n+1}^2 - \overline{AP}_n^2),$$

honnan

$$(n+1)\,\overline{AP}_n^2 < n\overline{AP}_{n+1}^2,$$

azaz

$$(n+1)\,a_{n+1}^2 < na_n^2 \quad (n=4, 5, \ldots). \tag{6}$$

Minthogy $a_3 = \sqrt{3}$ és $a_4 = \sqrt{2}$, közvetlenül látható, miszerint

$$4a_4^2 < 3a_3^2. \tag{7}$$

(6) és (7) szerint a tétel valóban érvényes. Qu. e. d.

6. Az előbbi tétel alapján mármost bebizonyitom, miszerint $n \geqq 10$ esetén feladatunk megoldása a beírt szabályos n-szög. Az egységsugarú körbe beírt szabályos tízszög oldala

$$a_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{1}$$

Minthogy Archimedes szerint $\pi < \frac{22}{7}$, azért

$$\left(1 + \frac{4}{\pi}\right)^2 > \left(2 + \frac{3}{11}\right)^2 > 5,$$

tehát (1)-re tekintettel

$$a_{10} < \frac{2}{\pi}.\text{[4]} \tag{2}$$

[4] Ez az egyenlőtlenség a_9-re még nem érvényes.

Ha $n \geqq 10$, úgy (2)-ből folyólag

$$a_n < \frac{2}{\pi},$$

s minthogy a beírt szabályos $2n$-szög kerülete a kör kerületénél kisebb, azaz

$$2na_{2n} < 2\pi,$$

következik, hogy

$$2na_n a_{2n} < 4. \tag{3}$$

De mivel nyilván $a_{2n} < a_n < 2a_{2n}$, azért

$$a_n + a_{2n} < 2a_n, \quad a_n - a_{2n} < a_{2n},$$

s ennélfogva

$$a_n^2 - a_{2n}^2 < 2a_n a_{2n}.$$

Tehát (3) alapján

$$n(a_n^2 - a_{2n}^2) < 4,$$

vagyis

$$na_n^2 < na_{2n}^2 + 4. \tag{4}$$

Azonban az 5. pont tétele értelmében

$$2na_{2n}^2 < (2n-2)\,a_{2n-2}^2,$$

tehát (4)-ből folyik, miszerint annál inkább

$$na_n^2 < (n-1)\,a_{2n-2}^2 + 4. \tag{5}$$

Minthogy a mondottak szerint $n \geqq 10$ esetén (5) fennáll, a 4. pont értelmében feladatunk megoldása ekkor valóban a beírt szabályos n-szög.

7. Tudjuk, hogy általában

$$a_{2n}^2 = 2\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right),$$

tehát $a_4 = \sqrt{2}$ folytán

$$a_8^2 = 2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}}\right) = 2 - \sqrt{2}.$$

S mivel

$$a_5^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2},$$

könnyen meggyőződhetünk, miszerint

$$5a_5^2 > 4a_8^2 + 4.$$

Tehát a 4. pont értelmében $n=5$ esetén feladatunk megoldása az a beírt ötszög, melynek egyik oldala átmérő és a többi egymással egyenlő (8. ábra).

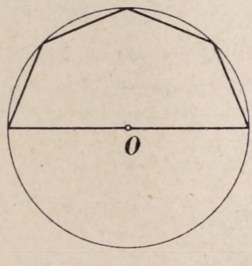
Minthogy

$$a_6 = 1, \quad a_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

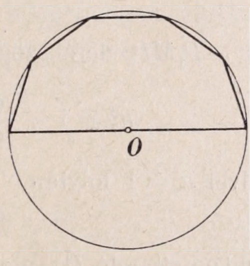
szintén könnyen meggyőződhetünk, miszerint

$$6a_6^2 > 5a_{10}^2 + 4,$$

tehát $n = 6$ esetén feladatunk megoldása az a beírt hatszög,



8. ábra.



9. ábra.

melynek egyik oldala átmérő és a többi egymással egyenlő (9. ábra).

Mint láttuk (3. pont), hasonló a megoldás az $n = 4$ esetben. Tehát $n = 4$, 5, 6 *esetén feladatunk megoldása az a beírt n-szög, melynek egyik oldala a körnek átmérője és a többi oldala egymással egyenlő.*

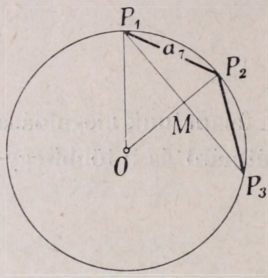
8. Az $n = 7$ esetben már

$$7a_7^2 < 6a_{12}^2 + 4. \tag{1}$$

Ez következőkép látható be.

Ismeretes,[5] hogy ha P_1, P_2, P_3 az O középpontú egység-

[5] L. pl. A. ADLER: Theorie der geometrischen Konstruktionen, Leipzig 1906., p. 209—210.



10. ábra.

sugarú körbe beirt szabályos hétszögnek három egymásra következő szögpontja s a P_1P_3 egyenesre merőleges OP_2 egyenes azt M-ben metszi (10. ábra), úgy

$$\overline{OM} = \frac{x}{2},$$

ahol x az

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \qquad (2)$$

harmadfokú egyenlet egyetlen pozitív gyöke.

Minthogy a P_1OM derékszögű háromszögben

$$\overline{MP_1}^2 = 1 - \frac{x^2}{4},$$

azért a P_1MP_2 derékszögű háromszögben

$$a_7^2 = 1 - \frac{x^2}{4} + \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 = 2 - x.$$

S mivel $a_6 = 1$ folytán

$$a_{12}^2 = 2 - \sqrt{3},$$

a bebizonyítandó (1) egyenlőtlenség a

$$7x + 2 > 6\sqrt{3} \qquad (1^*)$$

alakra hozható.

A (2) alatti $f(x)$ függvényre

$$f(1{\cdot}2) < 0, \; f(1{\cdot}3) > 0,$$

s így (2) pozitív gyöke

$$x = 1{\cdot}2\ldots .$$

Ennek alapján rögtön meggyőződhetünk, hogy (1*) valóban fennáll.

Tehát a 4. pont értelmében $n = 7$ esetén feladatunk megoldása a beirt szabályos hétszög.

Az $n = 8$ esetben szintén

$$8a_8^2 < 7a_{14}^2 + 4. \qquad (3)$$

Minthogy ugyanis

$$a_8^2 = 2 - \sqrt{2},\quad a_{16}^2 = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

könnyen meggyőződhetünk, hogy

$$8a_8^2 < 7a_{16}^2 + 4,$$

s ebből $a_{16} < a_{14}$ folytán a (3) egyenlőtlenség következik.

Tehát $n=8$ esetén feladatunk megoldása a beirt szabályos nyolcszög.

Az $n=9$ esetben ugyancsak

$$9a_9^2 < 8a_{16}^2 + 4. \tag{4}$$

Ezt (1)-hez hasonlóan láthatjuk be.

Ismeretes ugyanis,[6] hogy ha P_1, P_2, P_3 az O középpontú egységsugarú körbe beirt szabályos kilencszögnek három egymásra következő szögpontja s a P_1P_3 egyenesre merőleges OP_2 egyenes azt M-ben metszi, úgy

$$\overline{OM} = \frac{y}{2},$$

ahol y a

$$g(y) = y^3 - 3y + 1 = 0 \tag{5}$$

harmadfokú egyenlet két pozitív gyöke közül a nagyobbik.

A fentebbiekhez hasonlóan

$$a_9^2 = 2 - y,$$

tehát $a_{16}^2 = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ folytán a bebizonyitandó (4) egyenlőtlenség a

$$9y + 2 > 8\sqrt{2 + \sqrt{2}} \tag{4*}$$

alakra hozható.

Minthogy az (5) alatti $g(y)$ függvényre

$$g(0) > 0,\quad g(1{\cdot}5) < 0,\quad g(1{\cdot}6) > 0,$$

az (5) egyenlet nagyobbik pozitív gyöke

$$y = 1{\cdot}5\ldots,$$

---

[6] ADLER,[5] p. 210—211.

minek alapján könnyen meggyőződhetünk, miszerint (4*) valóban érvényes.

Tehát $n=9$ esetén feladatunk megoldása a beírt szabályos kilencszög.

A mondottakat a 6. pont eredményével összevetve, látjuk, hogy $n \geqq 7$ *esetén feladatunk megoldása a beírt szabályos n-szög.*

zzel feladatunkat teljesen megoldottuk.

9. Megjegyzem, hogy az I. segédtétel alapján könnyen belátható (v. ö. 4. pont), miszerint $n \geqq 5$ *esetén mindazon beírt konvex n-szögek között, melyeknél az oldalaknak megfelelő ívek egyike sem nagyobb a negyedkörnél, az oldalak négyzetösszege a beírt szabályos n-szögre és csak erre a legkisebb.*

Szász Pál.

EINE MINIMUM-AUFGABE ÜBER DIE DEM KREISE EINGESCHRIEBENEN VIELECKE.

In dieser Arbeit wird die folgende Aufgabe gelöst:

Unter allen konvexen n-Ecken, die einem Kreise eingeschrieben sind und den Mittelpunkt des Kreises enthalten (als inneren oder als Randpunkt), dasjenige zu bestimmen, für welches die Quadratsumme der n Seiten am kleinsten ist.

Als Lösung ergibt sich:

für $n = 3$ *jedes eingeschriebene Dreieck, dessen eine Seite ein Durchmesser des Kreises ist;*

für $n=4, 5, 6$ *dasjenige eingeschriebene n-Eck, dessen eine Seite ein Durchmesser des Kreises ist und die übrigen* $n-1$ *Seiten einander gleich sind;*

für $n \geqq 7$ *das eingeschriebene regelmässige n-Eck.*

Paul v. Szász.

A LAGRANGE-FÉLE INTERPOLÁCIÓS POLINOMOK DIVERGENCIAJELENSÉGEIRŐL.

Bevezetés.

Paul du Bois-Reymond szerkesztett először olyan folytonos (és 2π szerint periodusos) függvényt, amelynek Fourier-féle sora *egyes* pontokban divergál.[1] Az övénél egyszerűbb ilyen függvényeket Schwarz[2] és Lebesgue[3] szerkesztettek. A legegyszerűbb explicite megadott ilyen folytonos függvények Fejér-től származnak.[4] Lebesgue-től ered az a fontos észrevétel, hogy diver-

---

[1] P. du Bois-Reymond: Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln, *Abhandlungen der math.-phys. Classe der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften* **12** (1876), II. Abt., I—XXIV. és 1—102. l. Neder mutatott rá, hogy du Bois-Reymond szerkesztése oly folytonos függvényre, amelynek Fourier-féle sora *mindenütt sűrű* ponthalmazon divergál, nem helyes (L. Neder: Über stetige Funktionen mit überalldicht divergierender Fourierreihe, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **30** (1921), 153—155. l.) úgy hogy az első példa ilyen függvényre Fejér-től származik.

[2] Schwarz példája Sachse egy dolgozatában található: A. Sachse, Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Funktionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen, *Zeitschrift für Math. und Phys.*, **25** (1880), Historisch-literarische Abt., Supplementheft, 229—276 l., különösen 271. l.

[3] H. Lebesgue: *Leçons sur les séries trigonométriques* (Paris, 1906), 84—89. l.

[4] L. Fejér: *a)* Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **137** (1909), 1—5. l.; *b)* Eine stetige Funktion deren Fouriersche Reihe divergiert, *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo,* **28** (1909), 402—404. l.; *c)* Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **138** (1910), 22—53. l.; *d)* Sur les singularités des séries de Fourier de fonctions continués, *Annales de l'École Normale Supérieure,* (3) **28** (1911) 63—103. l.

gens Fourier-féle sorral bíró folytonos függvények szerkesztésénél a

$$\varrho_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2} t} \right| dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mennyiségeknek, az úgynevezett *Lebesgue-féle állandóknak* van a leglényegesebb szerepük. FEJÉR kimutatta,[5] hogy ezek $\log n$ rendben válnak az n-nel végtelenné; pontosabban

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varrho_n}{\log n} = \frac{4}{\pi^2}. \tag{1}$$

Explicite megadhatók továbbá olyan folytonos függvények, amelyeknek Fourier-féle sora *végtelen sok* helyen divergál (és pedig úgy, hogy a részletösszegek nem korlátosak); *megszámlálhatóan végtelen sok divergenciahelyet tetszőlegesen elő is lehet írni* (l. FEJÉR [4] alatt idézett munkáit). Ilyen függvények az (1) relációból kiindulva az ismert szingularitássűrítő eljárásokkal[6] is szerkeszthetők. STEINHAUS bebizonyította,[7] hogy ha egy folytonos függvény Fourier-féle sorának részletösszegei mindenütt sűrű ponthalmazon nem korlátosak, akkor egyszersmind nem korlátosak egy olyan ponthalmazon is, amelynek a *számossága* a $(0, 2\pi)$ számköz minden részközén *kontinuum*. Végül NEDER mutatott példát olyan folytonos függvényre, amelynek Fourier-féle sora a $(0, 2\pi)$ számköz *perfekt* (tehát szintén kontinuum számosságú) és *sehol sem sűrű* részhalmazán divergál.[8] Mai napig sem sikerült azonban arra a kérdésre válaszolni, hogy van-e olyan *folytonos* függvény, amelynek Fourier-féle sora *mindenütt* vagy legalábbis *pozitív mértékű halmazon* divergál.

---

[5] L. a [4] lábjegyzetben idézett *c)* dolgozatot.

[6] V. ö. pl. S. BANACH és H. STEINHAUS: Sur le principe de la condensation de singularités, *Fundamenta Math.*, **9** (1927) 50—61. l.

[7] L. NEDER doktori értekezésében: *Zur Konvergenz der trigonometrischen Reihen, einschliesslich Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise* (Göttingen, 1919) 26. l.

[8] L. [7] lábjegyzetet.

A Fourier-féle sor részletösszegei és a Csebisev-abszcisszákhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs polinomok között messzemenő analógia áll fenn.[9] Ezek az abszcisszák

$$x_k^{(n)} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad {\scriptstyle (k=1,\,2,\ldots,\,n)}, \tag{2}$$

az n-edik Csebisev-féle polinomnak,

$$T_n(x) = \cos n\theta \quad {\scriptstyle (x=\cos\theta)} \tag{3}$$

-nak a gyökei. (Ahol nem kell félreértéstől tartanunk, $x_k^{(n)}$-nél és a később definiálandó megfelelő kifejezéseknél a felső indexet elhagyjuk.) x_k számára még a következő alakot is fogjuk használni:

$$x_k = \cos\theta_k, \quad \theta_k = \theta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n}\pi. \tag{4}$$

---

[9] Ez az analogia szembetűnik, ha $L_n(x)$-et $\theta = \arc\cos x$ cosinus-polinomjaként fogjuk fel. Ugyanis könnyen verifikálható, hogy

$$l_k(x) = (-1)^{k+1} \frac{\sin\theta_k}{n} \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k} =$$

$$= \frac{1}{n}\left(1+2\cos\theta\cos\theta_k + 2\cos 2\theta\cos 2\theta_k + \cdots + 2\cos(n-1)\theta\cos(n-1)\theta_k\right)$$

s így (6) miatt

$$L_n[f(x)] = c_0 + c_1\cos\theta + c_2\cos 2\theta + \cdots + c_{n-1}\cos(n-1)\theta,$$

ahol

$$c_0 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\cos\theta_k), \quad c_r = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\cos\theta_k)\cos r\theta_k \quad {\scriptstyle (r=1,\,2,\ldots,\,n-1)}.$$

Viszont az $f(\cos\theta)$ függvény Fourier-féle sorának n-edik részletösszege

$$S_n[f(x)] = a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + \cdots + a_{n-1}\cos(n-1)\theta$$

(ugyanis $f(\cos\theta)$ páros függvény, tehát Fourier-féle sora tiszta cosinus sor), ahol

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\,d\theta, \quad a_r = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos r\theta\,d\theta \quad {\scriptstyle (r=1,\,2,\ldots,\,n-1)}.$$

E miatt az analogia miatt a Fourier-féle sort és a Csebisev abszcisszákhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs polinomokat több kutató párhuzamosan vizsgálta; l. pl. G. Faber: Über stetige Funktionen (zweite Abhandlung), *Math. Annalen*, 69 (1910), 372—443. l., különösen 9. §. Itt Faber érdekes eredményekre jut az ekvikonvergencia kérdésében.

Legyen

$$l_k(x) = l_k^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{T_n'(x_k)(x-x_k)} = (-1)^{k+1}\frac{\sin\theta_k}{n}\cdot\frac{T_n(x)}{x-x_k}; \quad (5)$$

akkor, ha $f(x)$ egy a $-1 \leqq x \leqq +1$ számközben értelmezett függvény, úgy

$$L_n(x) = L_n[f(x)] = \sum_{k=1}^{n} l_k(x) f(x_k) \quad (6)$$

az az egyetlen legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom, amely az $f(x)$ függvénnyel az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeken megegyezik. Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeket (tehát jelen esetben a Csebisev-féle polinom gyökeit) az interpoláció alappontjainak nevezik; az $l_1(x), l_2(x), \ldots, l_n(x)$ polinomokat pedig az interpoláció alapfüggvényeinek. Az

$$L_1[f(x)],\ L_2[f(x)], \ldots,\ L_n[f(x)], \ldots \quad (7$$

polinomsorozatot az $f(x)$ függvénynek Csebisev-abszcisszákhoz tartozó interpolációssorozatának nevezzük.

A (7) sorozat divergencialehetőségeinek vizsgálatánál az alapfüggvények abszolút értékének összegei, tehát a

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |\, l_k(x) \,| \qquad (n=1, 2, \ldots) \quad (8)$$

függvények ugyanazt a szerepet játsszák, mint a Lebesgue-féle állandók az analóg kérdésnél a Fourier-féle sorok esetében. Az 1. §-ban — a Lebesgue-féle állandóknak a fentebb említett Fejér-féle megbecslésével részbeni analógiában — kimutatjuk a

$$\lambda_n(x) \geqq \frac{1}{\pi} \,|\, T_n(x) \,|\, \log n - c_1(x) \quad (9)$$

becslés érvényességét, ahol $c_1(x)$ $\big($úgy, mint később $c_2(x), c_3(x), c_4(x), c_5(x)\big)$ csak az x-től függő pozitív számot jelent. Ebből következik, hogy a $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots \lambda_n(x), \ldots$ sorozat egyetlen x pontban sem lehet korlátos;[10] ellenkező esetben ugyanis a

[10] Ezt abban az általánosabb esetben is bebizonyítottam, amikor az interpoláció alappontjai a Jacobi-féle polinomok gyökei.

$T_1(x), T_2(x), \ldots, T_n(x), \ldots$ sorozat 0-hoz konvergálna, ami lehetetlen. HAHN[11] egy tételéből adódik tehát, hogy a $-1 \leqq x \leqq +1$ számköz minden x_0 pontjához van egy olyan ugyanebben a számközben folytonos $f_{x_0}(x)$ függvény, amelynek a (7) interpolációssorozata az $x = x_0$ pontban divergál, sőt nem korlátos. A fent már említett szingularitássűrítő eljárások segítségével minden, a $-1 \leqq x \leqq +1$ számközben fekvő, megszámlálható E ponthalmazhoz szerkeszthető olyan a $-1 \leqq x \leqq +1$ számközben folytonos $f(x)$ függvény, amelynek (7) interpolációssorozata az E ponthalmaz minden pontjában divergál, illetve nem korlátos.

Ebben a dolgozatban most már kimutatjuk, hogy a folytonos függvény Fourier-féle sorának pozitív mértékű halmazon való divergenciájára vonatkozó megoldatlan kérdés analogonjára a Csebisev-abszcisszákhoz tartozó Lagrange-féle interpoláció esetén pozitív válasz adható. Bebizonyítjuk ugyanis a következő tételt:

A tétel. Van olyan a $-1 \leqq x \leqq +1$ *számközben folytonos* $f(x)$ *függvény, amelynek az*

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{2n}, \quad x_2 = \cos\frac{3\pi}{2n}, \ldots, \quad x_n = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$$

Csebisev-féle abszcisszákhoz tartozó Lagrange-féle interpolációspolinomjainak sorozata a $-1 \leqq x \leqq +1$ *számköz majdnem minden pontjában divergál (sőt nem marad korlátos), vagyis az esetleges konvergenciapontok halmazának mértéke* 0.

Az $f(x)$ függvényt, egy ismeretlen állandótól eltekintve (amelynek csak létezését mutatjuk ki) effektíve megadjuk. Szerkesztésünk a következő tételen alapul:

B tétel. Megadható a $-1 \leqq x \leqq +1$ *számközben két folytonos függvény,* $g(x)$ *és* $h(x)$, *úgy, hogy a számköz egy tetszőleges* $x_0 \neq -1$ *pontjában vagy a* $g(x)$*-nek vagy a* $h(x)$*-nek a Csebisev-féle abszcisszákhoz tartozó Lagrange-féle interpolációspolinomjainak sorozata nem korlátos számsorozat.*

[11] H. HAHN: Über das Interpolationsproblem, *Math. Zeitschrift*, 1 (1918) 115—142. l.

Ebből a tételből úgy vezetjük le az A tételt, hogy kimutatjuk egy olyan λ szám létezését, amelyre az $f(x) = g(x) + \lambda h(x)$ függvénynek megvannak az A tételbeli sajátságai.

A B tétel bizonyitásához a (9)-nél élesebb egyenlőtlenségre lesz szükségünk, amelyet a 2. §-ban bizonyitunk be. Ez az egyenlőtlenség egy olyan összegre vonatkozik, amely (8)-ból úgy keletkezik, hogy elhagyjuk azon $l_k(x)$ alapfüggvényeket, amelyeknél a megfelelő x_k abszcissza a $-1 \leqq x \leqq +1$ számköznek m egyenlő részre való beosztásánál vagy az x-szel egy részbe kerül vagy pedig egy olyan részbe kerül, amely az x-től jobbra van. (Az egyszerűség kedvéért csak páratlan indexű alapfüggvényeket veszünk figyelembe, ekkor ugyanis ezek ugyanolyan előjelűek.) A kérdéses egyenlőtlenség ekkor a következő alakú:

$$\Sigma' \left| l_k(x) \right| \geqq \frac{1}{2\pi} \left| T_n(x) \right| \log m - c_3(x);$$

(az összegezési jel melletti vessző azt jelenti, hogy az összegegezés csak a fentemlitett k értékekre vonatkozik). Ez a becslés nemcsak n-ben, hanem a részközök számában, m-ben is egyenletesen áll fenn, ugyanis $c_3(x)$ nem függ m-től sem. Ennek a körülménynek köszönhető, hogy a $-1 \leqq x \leqq +1$ számköz minden pontjára vonatkozó divergencia-tételhez jutunk. Azért kell egyszerre két függvényt, $g(x)$-et és $h(x)$-et tekintenünk, mert a fenti egyenlőtlenségben (éppen úgy, mint (9)-ben) az $|T_n(x)|$ faktor is fellép és ez x és n bizonyos értékeinél kicsi. A 3. §-ban néhány további segédtételt bizonyitunk be; a $g(x)$ és $h(x)$ függvények szerkesztése, továbbá az A és B tételek bizonyitása a 4. § tartalmát képezik.

Megemlitjük, hogy módszerünk segitségével sikerült az A és B tételeknek megfelelő tételeket abban az esetben is bebizonyitani, amikor az interpoláció alappontjai az úgynevezett másodfajú Csebisev-polinomoknak, $U_n(x) = \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta}$-nak ($\cos \theta = x$), a gyökei. Tehát érvényes a következő két tétel, amelyek bebizonyítására ebben a dolgozatban már nem térünk ki.

C tétel. Van olyan a $-1 \leqq x \leqq +1$ *számközben folytonos* $f(x)$ *függvény, amelynek az* $x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ *alappontokhoz — az* $U_n(x)$ *másodfajú Csebisev-polinom gyökeihez — tartozó Lagrange-féle interpolációs polinomjainak sorozata a* $-1 \leqq x \leqq +1$ *számköz majdnem minden pontjában divergál (sőt nem marad korlátos), vagyis az esetleges konvergencia helyek halmazának mértéke* 0.

D tétel. Megadható a $-1 \leqq x \leqq +1$ *számközben két folytonos függvény,* $g(x)$ *és* $h(x)$, *úgy, hogy a számköz egy tetszőleges* $x_0 \neq -1$ *pontjában vagy a* $g(x)$*-nek, vagy a* $h(x)$*-nek az* $U_n(x)$ *gyökeihez tartozó Lagrange-féle interpolációs polinomjainak sorozata nem korlátos számsorozat.*

1. §. Az alapfüggvények abszolút értékének összegéről.

Mostantól kezdve az interpoláció alappontjai mindig a $T_n(x)$ polinom gyökei, tehát a (2) számok. A k-adik alapfüggvény (5) szerint

$$l_k(x) = \frac{T_n(x)}{T_n'(x_k)(x-x_k)} = (-1)^{k+1} \frac{\sin \theta_k}{n} \frac{T_n(x)}{x-x_k},$$

tehát a vizsgálandó összeg

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |\, l_k(x) \,| = \frac{|\, T_n(x) \,|}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \theta_k}{|\, x-x_k \,|}.$$

Ezt először egy olyan, az $x_1, x_2, \ldots, x_n$-től különböző, x helyen vizsgáljuk, amelyre $x_n < x \leqq +1$. Legyen ν a legkisebb olyan index, amelyre $x_\nu < x$ (világos, hogy $1 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > -1$); mivel $\sin \theta_k$ minden k-ra és $x - x_k = x - \cos \theta_k$ $k \geqq \nu$-re pozitív, az (5)-ből következik, hogy

$$|\, l_k(x) \,| = \frac{|\, T_n(x) \,|}{n} \frac{\sin \theta_k}{x - \cos \theta_k}$$

és így

$$\lambda_n(x) \geqq \frac{|T_n(x)|}{n} \sum_{k=\nu}^{n} \frac{\sin\theta_k}{x-\cos\theta_k}. \tag{10}$$

Mivel

$$(x-\cos\theta)^2 \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{x-\cos\theta}\right) =$$

$$= \cos\theta(x-\cos\theta) - \sin^2\theta = x\cos\theta - 1 \leqq 0,$$

ezért $\frac{\sin\theta}{x-\cos\theta}$ a θ-nak csökkenő függvénye a (θ_ν, π) intervallumban; tehát

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=\nu}^{n} \frac{\sin\theta_k}{x-\cos\theta_k} \geqq \int_{\theta_\nu}^{\pi} \frac{\sin\theta}{x-\cos\theta}\, d\theta =$$

$$= \log(x+1) - \log(x-\cos\theta_\nu) \geqq$$

$$\geqq \log\frac{1}{x-\cos\theta_\nu} - |\log(x+1)| = \log\frac{1}{x-x_\nu} - c_2(x).$$

Ha $\nu > 1$,

$$0 < x - x_\nu < x_{\nu-1} - x_\nu < \theta_\nu - \theta_{\nu-1} = \frac{\pi}{n}$$

(ugyanis $\pi \geqq \alpha > \beta \geqq 0$ esetén $\cos\beta - \cos\alpha < \alpha - \beta$, amint pl. a cosinus geometriai jelentéséből látható). Ugyanez áll, ha $\nu = 1$, mivel ekkor $x - x_\nu \leqq 1 - x_1 \leqq \theta_1 - 0 < \frac{\pi}{n}$. Tehát (10)-ből $|T_n(x)| \leqq 1$ figyelembevételével adódik, hogy

$$\lambda_n(x) \geqq \frac{1}{\pi} |T_n(x)| \left(\log\frac{n}{\pi} - c_2(x)\right) \geqq \frac{1}{\pi} |T_n(x)| \log n - c_1(x),$$

azaz megkaptuk a (9) egyenlőtlenséget, ahol

$$c_1(x) = \frac{1}{\pi}\left(c_2(x) + \log\pi\right).$$

Ez az egyenlőtlenség nyilván áll akkor is, ha $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Legyen most $-1 \leqq x \leqq x_n \leqq 0$; akkor

$$|l_k(x)| = \frac{|T_n(x)|}{n} \frac{\sin \theta_k}{\cos \theta_k - x},$$

$$\lambda_n(x) = \frac{|T_n(x)|}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \theta_k}{\cos \theta_k - x}.$$

Mivel $\dfrac{\sin \theta}{\cos \theta - x}$ a $(0, \theta_n)$ intervallumban θ-nak növekvő függvénye, kapjuk, hogy

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \theta_k}{\cos \theta_k - x} \geqq \int_0^{\theta_n} \frac{\sin \theta}{\cos \theta - x} d\theta =$$

$$= \log(1-x) - \log(\cos \theta_n - x) \geqq$$

$$\geqq \log \frac{1}{\cos \theta_n - x} = \log \frac{1}{x_n - x} \geqq \log \frac{n}{\pi},$$

mert $x_n - x \leqq x_n + 1 \leqq \pi - \theta_n < \dfrac{\pi}{n}$; tehát a (9) egyenlőtlenség most is áll.

2. §. Az alapfüggvények abszolút értékeiből alkotott bizonyos összegek becslése.

Legyen $-1 < x \leqq +1$; osszuk fel a $-1 < x \leqq +1$ számközt m egyenlő részre. Az egyes részekhez csak a jobboldali végpontot számítjuk hozzá, a baloldalit nem. Essék x a $(\mu+1)$-edik részközbe (balról számítva), ahol $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$; tekintsük k azon páratlan értékeit, amelyekre x_k az első, második, ..., vagy μ-edik közbe esik. Feltesszük, hogy vannak ilyen k értékek. Ehhez elegendő, hogy az x_n és x_{n-1} az első részközben feküdjenek, az x azonban nem; tehát, hogy

$$1 + x_{n-1} \leqq \frac{2}{m} < 1 + x;$$

ehhez viszont

$$1 + x_{n-1} = \cos \theta_{n-1} - \cos \pi \leqq \pi - \theta_{n-1} = \frac{3\pi}{2n} < \frac{6}{n}$$

miatt elég, hogy a

$$\frac{2}{1+x} < m \leqq \frac{n}{3}$$

egyenlőtlenség teljesüljön, amit fel is teszünk.

Legyen tehát $2\nu+1$ a legkisebb olyan páratlan index, amelyre $x_{2\nu+1}$ az első μ számköz egyikében fekszik és tekintsük a következő összeget:[12]

$$\lambda_n(x; m) = \sum_{k=\nu}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} | l_{2k+1}(x) | .$$

Mivel (5) miatt

$$l_{2k+1}(x) = \frac{\sin \theta_{2k+1}}{n} \frac{T_n(x)}{x - x_{2k+1}}$$

a k-nak tekintetbe vett értékeinél ugyanolyan előjelű, mint $T_n(x)$, kapjuk, hogy

$$\lambda_n(x; m) = \left| \sum_{k=\nu}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} l_{2k+1}(x) \right| .$$

Ugyanazt a becslési módot alkalmazva, mint az előző §-ban nyerjük, hogy

$$\lambda_n(x; m) = \frac{|T_n(x)|}{n} \sum_{k=\nu}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{\sin \theta_{2k+1}}{x - \cos \theta_{2k+1}} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2\pi} | T_n(x) | \int_{\theta_{2\nu+1}}^{\pi} \frac{\sin \theta}{x - \cos \theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} | T_n(x) | \left(\log \frac{1}{x - x_{2\nu+1}} - c_1(x) \right) .$$

Mivel $\nu > 0$ $\left(\text{ugyanis } 1 - x_1 < \theta_1 = \frac{\pi}{2n} < \frac{6}{n} \leqq \frac{2}{m} \text{ miatt } x_1 \text{ az utolsó részközben fekszik}\right)$,

---

[12] $\left[\alpha\right]$ az α-ban foglalt legnagyobb egész számot jelenti.

$$0 < x - x_{2\nu+1} =$$
$$= (x - x_{2\nu-1}) + (x_{2\nu-1} - x_{2\nu+1}) < \frac{2}{m} + \theta_{2\nu-1} - \theta_{2\nu+1} =$$
$$= \frac{2}{m} + \frac{2\pi}{n} < \frac{2}{m} + \frac{9}{n} \leqq \frac{5}{m};$$

innen $|T_n(x)| \leqq 1$ miatt

$$\lambda_n(x; m) \geqq \frac{1}{2\pi} |T_n(x)| \left(\log \frac{m}{5} - c_2(x)\right) \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{2\pi} |T_n(x)| \log m - c_3(x).$$

Válasszuk a

$$c_3(x) = \frac{1}{2\pi} \left(c_2(x) + \log 5\right)$$

függvényt úgy, hogy a

$$c_3(x) \geqq \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{1+x}$$

egyenlőtlenség is álljon; ekkor a fenti egyenlőtlenség érvényes $m \leqq \frac{2}{1+x}$ esetén is, hacsak ekkor $\lambda_n(x; m)$ alatt 0-t értünk. Tehát, ha $-1 < x \leqq 1$, $m \leqq \frac{n}{3}$, akkor

$$\lambda_n(x; m) \geqq \frac{1}{2\pi} |T_n(x)| \log m - c_3(x). \tag{11}$$

Ez az egyenlőtlenség lesz legfontosabb segédeszközünk a divergenciabizonyításnál.

3. §. További segédtételek a Csebisev-abszcisszákról.

Egy n-ed rendű Csebisev-abszcissza, azaz a $T_n(x)$ egy gyöke, egyúttal $3n$-edrendű, ..., $(2\nu + 1)\,n$-edrendű Csebisev-abszcissza is. Ugyanis

$$\cos \frac{2k-1}{2n} \pi = \cos \frac{(2k-1)(2\nu+1)}{2n(2\nu+1)} \pi =$$
$$= \cos \frac{2k'-1}{2(2\nu+1)n} \quad \left(k' = (2\nu + 1)k - \nu\right)$$

és $1 \leqq k \leqq n$ esetén

$$1 \leqq \nu + 1 = (2\nu + 1) - \nu \leqq k' \leqq (2\nu + 1)n - \nu \leqq (2\nu + 1)n.$$

Ebből rögtön adódik az

1. Segédtétel. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ Csebisev-abszcisszák és pedig rendre n_1-ed, n_2-ed, ..., n_r-edrendűek, ahol $n_1, n_2, \ldots, n_r$ vagy mind páratlanok, vagy mind 4-el nem osztható páros számok.[13] *Legyen n az $n_1, n_2, \ldots, n_r$ számok legkisebb közös többese. Ekkor $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ mind n-ed rendű Csebisev-abszcisszák.*

Ez világos, mert n úgy n_1-nek, mint $n_2, \ldots, n_r$-nek páratlan többszöröse.

2. Segédtétel. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ különböző számok és pedig ξ_s legyen n_s-edrendű Csebisev-abszcissza ($s=1, 2, \ldots, r$), ahol $n_1, n_2, \ldots, n_r$ vagy mind páratlanok, vagy mind 4-el nem osztható páros számok. Legyen n az $n_1, n_2, \ldots, n_r$ számok legkisebb közös többese. Legyenek továbbá $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ tetszőleges számok, melyekre $0 \leqq \eta_s \leqq 1$ ($s = 1, 2, \ldots, r$). Ekkor van olyan legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinom $P(x)$, hogy

$$P(\xi_s) = \eta_s \quad (s = 1, 2, \ldots, r),$$
$$0 \leqq P(x) \leqq 1, \quad \text{ha} \quad -1 \leqq x \leqq +1.$$

Az 1. segédtétel szerint $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ n-edrendű Csebisev-abszcisszák. Legyenek $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \ldots, \xi_n$ a többi n-edrendű Csebisev-abszcisszák és legyen $\eta_{r+1} = \eta_{r+2} = \cdots = \eta_n = 0$. Ekkor a

$$P(\xi_1) = \eta_1, \; P(\xi_2) = \eta_2, \; P(\xi_3) = \eta_3, \ldots, \; P(\xi_n) = \eta_n$$

feltételekkel meghatározott Fejér-féle «lépcsőparabola», vagyis az a legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinom, mely e feltételeket, továbbá a

$$P'(\xi_1) = 0, \; P'(\xi_2) = 0, \ldots, \; P'(\xi_n) = 0$$

---

[13] Az állítás nyilván áll általánosabban akkor is, ha $n_1, n_2, \ldots, n_r$ a 2-nek ugyanolyan hatványával oszthatók; ugyanez áll a 2. Segédtételnél is.

feltételeket teljesíti, FEJÉR[14] egy tétele szerint az egész $(-1, +1)$ intervallumban a $0 \leqq P(x) \leqq 1$ egyenlőtlenségnek is eleget tesz, s így a $P(x)$ polinomra áll a 2. segédtétel állítása.

3. Segédtétel. Legyenek n és n' páratlan relatív prímszámok. Ha ξ úgy n-edrendű, mint n'-edrendű Csebisev-abszcissza, akkor $\xi=0$. Ha ξ úgy $2n$-edrendű, mint $2n'$-edrendű Csebisev-abszcissza, akkor, vagy $\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}$, vagy $\xi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.[15]

Valóban az első esetben

$$\xi=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi=\cos\frac{2k'-1}{2n'}\pi \quad (1 \leqq k \leqq n;\ 1 \leqq k' \leqq n')$$

tehát

$$\frac{2k-1}{2n}=\frac{2k'-1}{2n'}$$

valódi tört; ha redukált alakra hozzuk, nevezője $2n$ és $2n'$-nek közös osztója, vagyis 2 lesz és így a tört $\frac{1}{2}$, tehát

$$\xi=\cos\frac{1}{2}\pi=0.$$

A második esetben

$$\xi=\cos\frac{2k-1}{4n}\pi=\cos\frac{2k'-1}{4n'}\pi \quad (1 \leqq k \leqq 2n;\ 1 \leqq k' \leqq 2n')$$

tehát

$$\frac{2k-1}{4n}=\frac{2k'-1}{4n'}$$

ismét valódi tört; ha redukált alakra hozzuk, nevezője $4n$ és $4n'$-nek közös osztója lesz; 2 azonban ez a nevező nem lehet és így a nevező 4; tehát a tört vagy $\frac{1}{4}$, vagy $\frac{3}{4}$, vagyis

$$\xi=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{vagy} \quad \xi=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

---

[14] L. FEJÉR: Über Interpolation, *Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1916, 66—91. l.

[15] A 3. Segédtétel speciális esete a következő ismert ténynek: ha n és n' 2-nek ugyanazon hatványával oszthatók, akkor $T_n(x)$ és $T_{n'}(x)$ minden közös gyöke $T_d(x)$-nek is gyöke, ahol d az n és n' legnagyobb közös osztója.

4. §. Divergáló interpolációssorozattal bíró folytonos függvények szerkesztése.

Jelölje σ_n a (8) által definiált $\lambda_n(x)$ (folytonos) függvény maximumát a $-1 \leqq x \leqq +1$ számközben és legyen $\varrho(n)$ a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ számok közt a legnagyobb. Ekkor nyilván

$$\varrho(1) \leqq \varrho(2) \leqq \cdots \leqq \varrho(n);$$

továbbá $\lambda_n(x_k^{(n)}) = 1$ miatt

$$\varrho(n) \geqq \sigma_n \geqq 1.$$

Ha valamely $f(x)$ függvény $-1 \leqq x \leqq 1$ számközben teljesíti a

$$-1 \leqq f(x) \leqq +1$$

feltételt, akkor (6) miatt $\nu \leqq n$ esetén

$$|L_\nu[f(x)]| \leqq \sum_{k=1} |l_k(x)| = \lambda_\nu(x) \leqq \sigma_\nu \leqq \varrho(n). \tag{12}$$

Legyen mármost $p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots$ a 3-nál nagyobb prímszámoknak (nagyság szerinti) sorozata, azaz $p_1 = 5, p_2 = 7, p_3 = 11, \ldots$. Minthogy $p_1 > 3$, $p_2 > 6$ és általában $p_{r+2} > p_r + 6$, ezért $p_r > 3r$.[16] Legyen $m_1, m_2, \ldots, m_r, \ldots$ a természetes számok olyan sorozata, amely a következő egyenlőtlenségeket teljesíti:

$$\log m_r > 4^r \varrho(2p_{2m_{r-1}}) \tag{13}$$

és

$$p_{m_r} \geqq 4p_1 p_2 \cdots p_{2m_{r-1}}. \tag{14}$$

Világos, hogy létezik ilyen sorozat, mert legyen pl. $m_1 = 1$ és, ha $m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}$ már ismertek, akkor legyen m_r a legkisebb egész szám, amely a (13), (14) egyenlőtlenségeket teljesíti. Közvetlenül látható, hogy

$$m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_r < \cdots,$$

sőt $m_r > 2m_{r-1}$.

[16] A $p_{r+2} > p_r + 6$ egyenlőtlenség abból következik, hogy a p_r, $p_r + 1$, $p_r + 2$, $p_r + 3$, $p_r + 4$, $p_r + 5$ hat egymásután következő szám közül legfeljebb kettő lehet prímszám. — Prímszámok helyett egy tetszőleges olyan sorozattal dolgozhattunk volna, amelyben bármely két szám relatív prím és érvényes a $p_r > 3r$ egyenlőtlenség.

Definiáljuk a $P_1(x)$, $P_2(x), \ldots, P_r(x), \ldots$ és $Q_1(x)$, $Q_2(x), \ldots, Q_r(x), \ldots$ polinomsorozatokat a következőképpen. Osszuk fel a $-1 < x \leqq +1$ számközt m_r egyenlő részre (a jobboldali végpontot mindig hozzászámítjuk a részközhöz, a baloldalit azonban nem). Nevezzük *elsőfajú abszcisszáknak* a p_{m_r+1}-edrendű Csebisev-polinom azon páratlan indexű zéróhelyeit, amelyek (balról) az első részközben feküsznek, továbbá a p_{m_r+2}-edrendű Csebisev-polinom azon páratlan indexű zéróhelyeit, amelyek az első vagy a második részközben feküsznek és így tovább, általában $p_{m_r+\mu}$-edrendű Csebisev-polinom azon páratlan indexű zéróhelyeit, amelyek az első, második,..., vagy μ-edik részközben feküsznek ($\mu = 1, 2, \ldots, m_r$) mindig kivéve azonban az esetleges 0 gyökhelyet. A p_{m_r}-edik, p_{m_r+1}-edik, p_{m_r+2}-edik,..., p_{2m_r}-edik Csebisev-polinomok minden további gyökhelyét, köztük 0-t is, *másodfajú abszcisszáknak* nevezzük. A 3. segédtétel szerint az elsőfajú abszcisszák mind különböznek a másodfajúaktól; tehát a 2. segédtétel szerint a $P_r(x)$ polinom meghatározható úgy, hogy $0 \leqq P_r(x) \leqq 1$, ha $-1 \leqq x \leqq +1$, továbbá $P_r(x)$ az elsőfajú abszcisszákon az 1 értéket, a másodfajú abszcisszákon pedig a 0 értéket veszi fel és fokszáma legfeljebb

$$2 p_{m_r} p_{m_r+1} \cdots p_{2m_r} - 1 < p_{m_{r+1}}$$

(l. a (14) egyenlőtlenséget). Nevezzük hasonló módon *harmadfajú abszcisszáknak* a $2p_{m_r+\mu}$-edik Csebisev-polinom azon páratlan indexű zéróhelyeit, amelyek az első, második,..., μ-edik részközben feküsznek ($\mu = 1, 2, \ldots, m_r$) mindig kivéve azonban az esetleges $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ gyökhelyeket; a $2p_{m_r}$-edik, $2p_{m_r+1}$-edik,..., $2p_{2m_r}$-edik Csebisev-polinomok összes többi gyökhelyét, köztük a $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ gyökhelyeket is, *negyedfajú abszcisszáknak* nevezzük. A 3. segédtétel szerint a harmadfajú abszcisszák mind különböznek a negyedfajú abszcisszáktól; tehát a 2. segédtétel szerint meghatározható a $Q_r(x)$ polinom úgy, hogy $0 \leqq Q_r(x) \leqq 1$, ha $-1 \leqq x \leqq +1$, továbbá a harmadfajú abszcisszákon az 1 értéket, a negyedfajú abszcisszákon pedig a 0 értéket vegye fel és fokszáma legfeljebb

$$4p_{m_r}p_{m_r+1}\cdots p_{2m_r} - 1 < p_{m_{r+1}}.$$

Legyen

$$\tau_1 = 1,\ \tau_r = \varrho(2p_{2m_{r-1}}) \quad (r = 2, 3, \ldots) \tag{15}$$

és képezzük a következő két sort

$$g(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{P_r(x)}{2^r \tau_r}, \quad h(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Q_r(x)}{2^r \tau_r}. \tag{16}$$

Mivel $0 \leqq P_r(x) \leqq 1$, $0 \leqq Q_r(x) \leqq 1$, mind a két sor egyenletesen konvergens és így a $g(x)$ és a $h(x)$ függvények folytonosak a $-1 \leqq x \leqq 1$ számközben, továbbá ugyanitt

$$0 \leqq g(x) \leqq 1, \quad 0 \leqq h(x) \leqq 1. \tag{17}$$

Tekintsük most már a $g(x)$ és $h(x)$ függvényeknek a Csebisev-abszcisszákhoz tartozó interpolációssorozatait:

$$L_1[g(x)],\ L_2[g(x)], \ldots,\ L_n[g(x)], \ldots \tag{18}$$

$$L_1[h(x)],\ L_2[h(x)], \ldots,\ L_n[h(x)], \ldots. \tag{19}$$

Legyen x egy tetszőleges fix szám úgy, hogy $-1 < x \leqq 1$. Kimutatjuk, hogy a (18) és (19) sorozatok közül legalább az egyik divergens, sőt nem korlátos az x pontban.

Osszuk fel a $(-1, +1$ számközt m_r egyenlő részre (minden osztáspontot a tőle balra fekvő részközhöz számítunk); feküdjön x a (μ_r+1)-edik részközben $(\mu_r = 0, 1, \ldots, m_r - 1)$ és legyen $n_r = p_{m_r+\mu_r}$. Így a természetes számoknak az $n_1, n_2, \ldots, n_r, \ldots$ (természetesen az x-től függő) sorozatát nyerjük. Tekintsük a (18), (19) sorozatok következő részsorozatait:

$$L_{n_1}[g(x)],\ L_{n_2}[g(x)], \ldots,\ L_{n_r}[g(x)], \ldots$$

$$L_{2n_1}[h(x)],\ L_{2n_2}[h(x)], \ldots,\ L_{2n_r}[h(x)], \ldots.$$

(6) és (16) miatt

$$L_{n_r}[g(x)] = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{n_r}[P_s(x)] = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3, \tag{20}$$

$$L_{2n_r}[h(x)] = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{2n_r}[Q_s(x)] = \sum\nolimits_1' + \sum\nolimits_2' + \sum\nolimits_3', \tag{21}$$

ahol

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{n_r}[P_s(x)], \quad \sum\nolimits_1' = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{2n_r}[Q_s(x)],$$

$$\sum\nolimits_2 = \frac{1}{2^r \tau_r} L_{n_r}[P_r(x)], \quad \sum\nolimits_2' = \frac{1}{2^r \tau_r} L_{2n_r}[Q_r(x)],$$

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{n_r}[P_s(x)], \quad \sum\nolimits_3' = \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{2n_r}[Q_s(x)].$$

A szerkesztés szerint a $P_s(x)$, $Q_s(x)$ polinomok $(s=1, 2, \ldots, r-1)$ legfeljebb $p_{m_{s+1}} \leqq p_{m_r} \leqq n_r$-edfokúak; tehát,

$$L_{n_r}[P_s(x)] = P_s(x), \quad L_{2n_r}[Q_s(x)] = Q_s(x), \quad (s=1, 2, \ldots r-1)$$

és így

$$0 \leqq \sum\nolimits_1 = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{P_s(x)}{2^s \tau_s} \leqq g(x) \leqq 1, \tag{22}$$

$$0 \leqq \sum\nolimits_1' = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{Q_s(x)}{2^s \tau_s} \leqq h(x) \leqq 1. \tag{23}$$

Másrészt, ha $s \geqq r+1$, $n_r < 2n_r < 2p_{2m_r} \leqq 2p_{2m_{s-1}}$ és (15) miatt

$$|L_{n_r}[P_s(x)]| \leqq \varrho(2p_{2m_{s-1}}) = \tau_s,$$

$$|L_{2n_r}[Q_s(x)]| \leqq \varrho(2p_{2m_{s-1}}) = \tau_s,$$

tehát

$$\left|\sum\nolimits_3\right|, \left|\sum\nolimits_3'\right| \leqq \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^s} < 1. \tag{24}$$

Végül (6) miatt

$$L_{n_r}[P_r(x)] = \sum_{k=1}^{n_r} l_k^{(n_r)}(x) P_r(x_k^{(n_r)}),$$

$$L_{2n_r}[Q_r(x)] = \sum_{k=1}^{2n_r} l_k^{(2n_r)}(x) Q_r(x_k^{(2n_r)}).$$

A $P_r(x)$, $Q_r(x)$ definiciója szerint

$$P_r(x_k^{(n_r)}) = 1, \quad \text{vagy } 0, \quad Q_r(x_k^{(2n_r)}) = 1, \quad \text{vagy } 0,$$

a szerint, hogy $x_k^{(n_r)}$ első- vagy másodfajú, illetve $x_k^{(2n_r)}$ harmad- vagy negyedfajú abszcissza; tehát $L_{n_r}[P_r(x)]$, illetve $L_{(2n_r)}[Q_r(x)]$ eltekintve egy, illetve két $\left(\text{az } x_k^{(n_r)} = 0\text{-hoz, illetve } x_k^{(2n_r)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\text{-}\right.$ $\left.\text{hez tartozó}\right)$ tagtól, egy olyan összeggel egyenlő, amelynek abszolút értékét a 2. § szerint $\lambda_{n_r}(x; m_r)$, ill. $\lambda_{2n_r}(x; m_r)$ adja meg és $m_r < \frac{p_{m_r}}{3} \leqq \frac{n_r}{3} < \frac{2n_r}{3}$ miatt a (11)-egyenlőtlenséggel lehet becsülni $\left(\text{vegyük figyelembe, hogy } \mu_r = 1 \text{ esetén } \lambda_{n_r}(x; m_r) = 0\right)$. Mivel FEJÉR[17] egy tétele szerint k és n minden értékére értékére

$$|l_k^{(n)}(x)| < \sqrt{2},$$

kapjuk, hogy

$$|L_{n_r}[P_r(x)]| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{n_r}(x)| \log m_r - c_3(x) - \sqrt{2},$$

$$|L_{2n_r}[Q_r(x)]| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{2n_r}(x)| \log m_r - c_3(x) - 2\sqrt{2},$$

tehát (13), (15) és $2^r\tau_r \geqq 1$ miatt

$$|\Sigma_2| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{n_r}(x)| 2^r - c_4(x),$$

$$|\Sigma_2'| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{2n_r}(x)| 2^r - c_4(x),$$

---

17 L. FEJÉR: Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte, *Math. Annalen*, **106** (1932), 1—55. l.

és végül (20), (21), (22), (23), (24) miatt

$$|L_{n_r}[g(x)]| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{n_r}(x)| 2^r - c_5(x),$$

$$|L_{2n_r}[h(x)]| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{2n_r}(x)| 2^r - c_5(x).$$

Ha most úgy a (18), mint a (19) sorozat korlátos volna, akkor a fenti két egyenlőtlenségből következnék, hogy

$$T_{n_r}(x) \to 0, \quad T_{2n_r}(x) \to 0, \quad \text{ha} \quad r \to \infty,$$

vagyis

$$\cos(n_r \arccos x) \to 0,$$

$$\cos(2n_r \arccos x) = 2\cos^2(n_r \arccos x) - 1 \to 0,$$

ami lehetetlen. Ezzel a (18), (19) sorozatokra vonatkozó állítást és vele a bevezetésben kimondott B tételt bebizonyítottuk.

Hogy az A tételt is kimutassuk, vizsgáljuk meg minden valós λ értékre az $f_\lambda(x) = g(x) + \lambda h(x)$ függvény Csebisev-abszcisszákon vett Lagrange-féle interpolációssorozatát. Legyen E_λ (Borel-féle, tehát mérhető) halmaza mindazon x pontoknak, $-1 < x \leqq +1$, amelyekre az $f_\lambda(x)$ interpolációssorozata korlátos. $\lambda \neq \mu$ esetén az E_λ és E_μ halmazok nem tartalmaznak közös pontot; ha ugyanis x_0 közös pontja volna E_λ-nak és E_μ-nek, akkor az x_0 pontban az $f_\lambda(x)$ és $f_\mu(x)$ függvényeknek korlátos volna az interpolációs sorozata, tehát a

$$g(x) = \frac{\lambda f_\mu(x) - \mu f_\lambda(x)}{\lambda - \mu}, \quad h(x) = \frac{f_\lambda(x) - f_\mu(x)}{\lambda - \mu}$$

függvényeké is, mert az $f_\lambda(x)$ és $f_\mu(x)$ függvényekből lineárisan tevődnek össze; ez pedig ellentmond a B tételnek. Tehát legfeljebb két oly E_λ halmaz lehet, amelynek mértéke $\geqq 1$, legfeljebb négy olyan, amelynek mértéke $\geqq \frac{1}{2}$, legfeljebb hat olyan, amelynek a mértéke $\geqq \frac{1}{3}$, és így tovább; vagyis legfeljebb megszámlálható sok E_λ halmaznak pozitív a mértéke. Minthogy a λ lehetséges értékeinek a halmaza azonban nem megszámlálható, ezért van olyan λ érték, amelyre E_λ nullahalmaz. Ezzel az A tételt is bebizonyítottuk.

Grünwald Géza.

ÜBER DIVERGENZERSCHEINUNGEN DER LAGRANGESCHEN INTERPOLATIONSPOLYNOME.

In dieser Arbeit beweisen wir den folgenden Satz: Es gibt eine im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ stetige Funktion $f(x)$, deren zu den Tschebyscheffschen Abscissen

$$x_k^{(n)} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

gehörige Lagrangesche Interpolationsfolge im Intervall

$$-1 \leqq x \leqq +1$$

fast überall divergiert, ja sogar fast überall unbeschränkt ist.

Géza Grünwald.

NÉHÁNY NEVEZETES EGYENLŐTLENSÉG KÖZÖS FORRÁSÁRÓL.*

1. *Legyenek*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

és

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

valós számok. Alakítsuk a második sorozat minden

$$b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_n}$$

permutációjához az

$$S = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n}$$

összeget. Melyik lesz ezen összegek közül a legnagyobb és melyik a legkisebb?

E kérdésre bizonyos konkrét esetekben — azt hiszem — mindenki azonnal megadja a helyes választ. Képzeljük például, hogy egy fiókban 10 pengős, egy másikban 20 pengős, egy harmadikban 50 pengős, egy negyedikben 100 pengős bankjegyek vannak és hogy jogunk van az egyes fiókokból 3, 4, 5, 6 bankjegyet kivenni, de ránk van bízva, hogy melyikből mennyit veszünk. Bizonyára mindenki legelőnyösebbnek fogja találni, hogy a legtöbbet (6 bankjegy) abból a fiókból vegye ki, amelyben a legnagyobb bankjegyek vannak, az utána következő legtöbbet (5 bankjegy) az 50-esek fiókjából és így tovább; viszont, hogy a legkevésbbé előnyös az lesz rá nézve, ha a legtöbb bankjegyet a 10-esek fiókjából veszi, az utána következő leg-

---

* Megjegyzések a XXXIX. matematikai tanulóverseny első tételéhez (l. ezt e kötet 166. lapján).

többet a 20-asok fiókjából, és így tovább. Azaz, ha b_1, b_2, b_3, b_4 a 3, 4, 5, 6 számok egy tetszésszerinti permutációját jelentik,

$$10.6+20.5+50.4+100.3 \leqq 10b_1+20b_2+50b_3+100b_4 \leqq$$
$$\leqq 10.3+20.4+50.5+100.6.$$

Általában is így van. *Az S összegek közül a legnagyobb az, amelyben a **b** számok ugyanúgy vannak rendezve, mint az **a** számok* (azaz a legnagyobb a szorzója a legnagyobb b, az utána következő a szorzója az utána következő b, stb.) *és a legkisebb az, amelyben a két számsorozat ellenkezőképen van rendezve.*

E tétel GROSSCHMID LAJOS egy tanitványának, FICHTL BÉLÁ-nak készülő doktori dolgozatában van így megfogalmazva. FICHTL bizonyítását nem akarjuk itt reprodukálni, mert meglehetősen nehézkes. GROSSCHMID LAJOS adott egy sokkal könnyebben áttekinthető bizonyítást, mely ABEL lemmáján nyugszik. A következő bizonyítás azon az egyszerű tényen alapszik, hogy bármely permutációból eljuthatunk egy megadott permutációhoz azáltal, hogy két-két elemet felcserélünk.

Legyen a_r a legnagyobb a és b_s a legnagyobb b. Ha $r \neq s$, akkor cseréljük fel b_r és b_s-et, miáltal az

$$S = a_1b_1 + \cdots + a_rb_r + \cdots + a_sb_s + \cdots + a_nb_n$$

összeg helyére az

$$S' = a_1b_1 + \cdots + a_rb_s + \cdots + a_sb_r + \cdots + a_nb_n$$

összeg lép, mely általában S-nél nagyobb, mert

$$S' - S = a_rb_s + a_sb_r - a_rb_r - a_sb_s = (a_r - a_s)(b_s - b_r).$$

Az $S' = S$ egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a_r = a_s$ vagy $b_r = b_s$, de akkor máris a legnagyobb a szám a legnagyobb b-vel van az S összegben megszorozva és cserére nincs szükség.

Minekutána a legnagyobb a mellé a legnagyobb b-t hoztuk, újabb cserével a nagyságban következő b-t a nagyságban következő a mellé visszük és így tovább. Az összeg minden lépésnél nagyobbodott, tehát végeredményben S kisebb (vagy akkora), mint az az összeg, amelyben a b-k *éppúgy* vannak rendezve, mint az a-k. Egyenlőség nyilván csak úgy áll fenn, ha minden csere alkalmával az ott szereplő a-k vagy b-k egyenlők. Az S összegek nem valamennyien egyenlők, ha van két különböző a és két különböző b.

A legkisebb összegre vonatkozó állítás teljesen a fenti mintára bizonyítható be.

2. Hogy a most bebizonyított kettős egyenlőtlenség nem valami üres tétel, azt következményei mutatják. Például levezethetjük belőle, hogy *tetszésszerinti*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

pozitív számok geometriai közepe kisebb, mint számtani közepük, kivéve, ha e számok valamennyien egyenlők, amikor is a két közép összeesik.

Legyen ugyanis

$$c = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

a geometriai közép és vezessük be az

$$a_1 = \frac{x_1}{c}, \quad a_2 = \frac{x_1 x_2}{c^2}, \quad a_3 = \frac{x_1 x_2 x_3}{c^3}, \ldots, \quad a_n = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{c^n} = 1;$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = \frac{1}{a_2}, \quad b_3 = \frac{1}{a_3}, \ldots, \quad b_n = \frac{1}{a_n} = 1$$

sorozatokat. A felírás rendjében ez a két sorozat máris ellenkezőképen van rendezve, tehát

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

kisebb, mint például

$$a_1 b_n + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_{n-1},$$

azaz

$$1 + 1 + \cdots + 1 \leqq \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \cdots + \frac{x_n}{c},$$

$$c \leqq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n,$$

azaz

$$\frac{x_1}{c} = \frac{x_1}{c}\frac{x_2}{c} = \frac{x_1}{c}\frac{x_2}{c}\frac{x_3}{c} = \cdots = \frac{x_1}{c}\frac{x_2}{c}\cdots\frac{x_n}{c} = 1$$

vagy végre, ha

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = c.$$

(Az említett tanulóverseny-tétel ebbe a körbe vág. Ott ugyanis

$$b_1 = \frac{1}{a_1'},\ b_2 = \frac{1}{a_2'},\ldots,\ b_n = \frac{1}{a_n'},$$

ahol $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok tetszőleges permutációját jelentik. A b-k nyilván az a-khoz képest ellenkezően vannak rendezve, ha

$$a_1' = a_1,\ a_2' = a_2, \ldots,\ a_n' = a_n,$$

amikor is az $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ összeg minimumát veszi fel és a minimum: n).

3. Egy Tchebychef-féle egyenlőtlenséget is levezethetünk, mint közvetlen folyományt, az 1. alatt bebizonyitott kettős egyenlőtlenségből.

Legyen

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

a valós számoknak két *egyformán* rendezett sorozata. Ekkor alaptételünk szerint

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$
$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \geqq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1,$$
$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \geqq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \geqq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}$$

és összeadással:

$$n(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) \geqq (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n),$$

$$\frac{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n}{n} \geqq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}. \qquad (T)$$

Hasonlóképen nyerjük, hogyha az a és b sorozatok *ellenkezőképen* vannak rendezve, akkor

$$\frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{n} \leqq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+\cdots+b_n}{n}. \qquad (T')$$

Más szavakkal: az a_ib_i szorzatok számtani közepe az első esetben nagyobb, a második esetben kisebb, mint az a_i és b_i számok számtani közepeinek szorzata.

4. Például, ha $a_1,\dots, a_n$ pozitív számok, továbbá $\alpha > 0$ és $\beta > 0$, akkor az a_i^α és a_i^β számok $(i=1, 2,\dots, n)$ egyformán vannak rendezve, tehát

$$\Sigma a_i^{\alpha+\beta} \geqq \frac{1}{n}\Sigma a_i^\alpha . \Sigma a_i^\beta .$$

Ha pedig $\alpha>0$, $\beta<0$ ($a_1,\dots a_n$ továbbra is pozitív számok), akkor ellentétes rendezés áll elő, tehát ilyenkor

$$\Sigma a_i^{\alpha+\beta} \leqq \frac{1}{n}\Sigma a_i^\alpha\Sigma a_i^\beta .$$

Legyen speciálisan $\alpha=\beta=1$; kapjuk, hogy

$$\Sigma a_i^2 \geqq \frac{1}{n}(\Sigma a_i)^2;$$

másként írva:

$$\frac{\Sigma a_i}{n} \leqq \sqrt{\frac{\Sigma a_i^2}{n}}, \qquad (Q)$$

azaz «a számtani közép kisebb, mint a quadratikus közép».

Ha az $a_1\dots a_n$ és $b_1\dots b_n$ pozitív számsorozatok ellenkezőkép vannak rendezve, akkor a (T') és (Q)-ból adódó

$$\Sigma a_ib_i \leqq \frac{1}{n}\Sigma a_i\Sigma b_i$$

és

$$\Sigma a_ib_i \leqq \sqrt{n\Sigma a_i^2 b_i^2}$$

egyenlőtlenségek jobbak, mint a Cauchy-féle

$$\Sigma a_ib_i \leqq \sqrt{\Sigma a_i^2\Sigma b_i^2}.$$

Ugyanis

$$\frac{1}{n}\Sigma a_i \Sigma b_i \leqq \frac{1}{n}\sqrt{n\Sigma a_i^2}\sqrt{n\Sigma b_i^2} = \sqrt{\Sigma a_i^2 \Sigma b_i^2}$$

és

$$\sqrt{n\Sigma a_i^2 b_i^2} \leqq \sqrt{n\cdot\frac{1}{n}\Sigma a_i^2 \Sigma b_i^2} = \sqrt{\Sigma a_i^2 \Sigma b_i^2}.$$

Hogy a szóban forgó két egyenlőtlenség közül melyik jobb, arra nincs általános válasz, mert számpéldákkal igazolható, hogy az

$$\frac{1}{n}\Sigma a_i . \Sigma b_i$$

és

$$\sqrt{n\Sigma a_i^2 b_i^2}$$

kifejezések közül hol egyik, hol másik a kisebb.

5. Még Newton-tól származik egy egyenlőtlenségsorozat, mely pozitív számok elemi szimmetrikus formáiról szól.

Legyenek

$$S_1 = \Sigma x_1,\ S_2 = \Sigma x_1 x_2,\ S_3 = \Sigma x_1 x_2 x_3, \ldots$$

a pozitív $x_1, x_2, \ldots x_n$ számok elemi szimmetrikus formái. A szóbanforgó egyenlőtlenségek ezek:

$$\frac{S_1}{n} \geqq \sqrt{\frac{S_2}{\binom{n}{2}}} \geqq \sqrt[3]{\frac{S_3}{\binom{n}{3}}} \geqq \cdots$$

Az elsőt közülük könnyen levezethetjük a Tchebychef-féle egyenlőtlenségből.

Ugyanis

$$2S_2 = x_1(x_2 + \cdots + x_n) + x_2(x_1 + x_3 + \cdots + x_n) + \cdots$$
$$= x_1(S_1 - x_1) + x_2(S_1 - x_2) + \cdots$$

Az utolsó kifejezésben az

$$x_1, x_2, \ldots$$

számok az *ellenkezően* rendezett

$$S_1 - x_1,\ S_1 - x_2, \ldots$$

számokkal vannak szorozva, tehát (T') szerint:

$$2S_2 \leqq \frac{1}{n} S_1 (nS_1 - S_1)$$

és ez már csak írásban különbözik az

$$\frac{S_1}{n} \geqq \sqrt{\frac{S_2}{\binom{n}{2}}}$$

egyenlőtlenségtől.

Szűcs Adolf.

SUR LA SOURCE COMMUNE DE CERTAINES INÉGALITÉS REMARQUABLES.

Le lemme dû à M. Fichtl :

$a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *désignant des nombres réels donnés et* $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *une permutation variable des indices* $1, 2, \ldots n$; *de toutes les sommes*

$$S = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n},$$

la plus grande est celle où les b sont rangés dans le même ordre que les a, et la plus petite est celle où les b sont rangés dans l'ordre inverse,

admet pour conséquences immédiates que la moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique, que la moyenne arithmétique d'un certain nombre de produits est supérieure ou inférieure au produit des moyennes des facteurs suivant que les valeurs prises par les facteurs sont rangées dans le même ordre ou dans l'ordre inverse (inégalités de Tchebychef), et d'autres inégalités importantes.

Adolphe Szücs.

SIPOS-KÉZIRATOK
A GYÖMRŐI TELEKI-LEVÉLTÁRBAN.

Nemrég ismertettem e folyóiratban[1] SIPOS PÁL latinnyelvű kéziratos értekezését (1792) a kúpszeletekről. Ennek a munkának az ajánlásából megállapitottam, hogy SIPOS «már 1787-ben megmutatta az első fogalmazást tanitványa bátyjának és az ő bátorításara folytatta tanulmányait». Az 1934. év júniusában megtaláltam ennek az első fogalmazásnak igen szép latinságú vázlatát a gyömrői TELEKI-levéltárban.[2] A tíz írott nyolcadrét oldalnyi kéziratot SIPOS tényleg TELEKI LÁSZLÓ grófnak[3] ajánlotta. Az akkori szokástól[4] eltérően a második oldalon megemlít egy munkát: «quod interea fere solum auctorem STURMIUM consulenti tacita quaedam subeat exprobratio». Valószínűleg LEONHARD CHRISTIAN STURM[5] az illető szerző, akinek öt részből

---

[1] 41. évf. 1934. 45—54.

[2] E helyen is hálás köszönetet mondok szíves előzékenységükért TELEKI TIBOR gróf, koronaőr, Ő kegyelmességének és a levéltárt rendező IVÁNYI BÉLA dr. Ő méltóságának, a szegedi Ferenc József-tudományegyetem tanárának, hogy kutatásomat lehetővé tették.

[3] TELEKI JÓZSEF gróf, koronaőr (†1796), elsőszülött fia (1764—1821). TELEKI MÁRIA grófnővel kötött házasságából született TELEKI JÓZSEF gróf, a M. Tud. Akadémia későbbi első elnöke.

[4] «SIPOS muss übrigens ein tüchtiger Kerl gewesen sein; man kann aber ohne eingehende historische Forschungen nie wissen, was selbständig, umgearbeitet oder entlehnt ist; die Gelehrten haben damals leider selten zitiert, noch weniger in der jetzt erforderlichen Strenge». (Prof. J. TROPFKE 1934. jan. 8-án kelt, hozzám intézett leveléből.)

[5] 1669 és 1719 közt élt. Az oderai Frankfurt egyetemén is tanított (1702—1711). Apja JOH. CHR. STURM (1635—1703) az altdorfi egyetem matematika-tanára volt.

álló *Kurtzer Begriff der gesamten Mathesis* c. nevezetes munkája 1707-ben, Nürnbergben jelent meg. SIPOS vázlatában több ábrára is hivatkozik. Nemcsak az idézett,[6] hanem az összes ábrák hiányoznak magával a hivatkozott munkával együtt. Főleg a kúpszeletek geometriai előállításával, érintőivel foglalkozik. A körmérésre és az ellipszisre vonatkozó későbbi (1795) eredményeinek csirái már ekkor (1787) mutatkoznak: «Accedit his postremo Resolutio peculiari quâdam Ellipsi mediante tentata vexati Problematis de Quadratura Circuli» (6—7. old.). A keltezés: «Saxopoli Dieb[u]s Martii Anno 1787» és aláírás bizonyítja, hogy SIPOS akkor a szászvárosi ref. gimnáziumban tanított.

Néhány gyömrői SIPOS-kézirat az oderai Frankfurtban kelt. Az egyikben[7] többi közt ezt olvassuk: «Hic statim a D[omí]ni[s] Professoribus Enyed[iensibu]s commendatus Stipendium Regium obtinui, simulque admissionem ad communem convictum media nunc quidem parte solutionis relaxata, at relaxanda ex tota si ab Illustritate V[est]rā apud Senatum Francofurtanum una alteraque Serie Litterarum fuero commendatus». Egy másikban:[8] «Excellentziád nagytekintetű ajánlására két tanulo Magyar Iffjak szoktanak szabad asztallal tápláltatni. Ezeket ugyan Excellentziad rendszerint a Kolosvári N[eme]s Collegiumbol jövő Iffjak közzül választya, mint azon ott virágzó Társaságnak jelenlévő nagy Mecaenássa:[9]», ugyanott valamivel később: «az említett asztalnál lévő heljek éppen üressen vagynak».

Alig 15 hónap mulva már azt írhatja SIPOS TELEKI JÓZSEF grófnak, hogy «egész itt létemet, melj Istennek hálá meg betsülhetetlen volt nékem, egyedül az Excellentziád gratziájának köszönhetem». «Az én dolgaim úgy, a mint el intéztem volt nem foljhattak, és fel jövetelem után Bétsbe mindjárt akadáljt szenvedtem, a hol 4 holnapokig költségesen élvén, a miatt a

[6] Számozásuk 23 és 44 közé esik.
[7] Ívrét, két oldal.
[8] Ívrét, egy oldal. 1791. nov. 7.
[9] TELEKI LÁSZLÓ gróf 1790 óta a kolozsvári kollégium kurátora volt. (ILENCZFALVI SZÁSZ PÉTER: *Jegyzegetései*. Akad. kézirattára. Napló 4-r. 6.)

késedelem miatt itt is egy Angariat [negyedévet] el vesztettem». A gróf Bécsben élő KLÁRA hugához, WARTENSLEBEN VILMOS gróf, tábornok feleségéhez fordult. Ő fizette ki SIPOS 16 arany adósságát. Igen érdekes levelének most következő része: «Két darab munkátskám által esmertettem meg magamat, meljet rész szerint a végre keszítettem, ha azzal is valahogy segíthetnék magamon: de a munkák Deákul vagynak írva, és egy könyvárros se vészi meg, míg németre nincs fordítva. Az egyik munkám egészszen Mathematicum: a másikba Metaphysica speculatiók vagynak a Mathesissel conjungálva KÁNT-nak Cosmologicum principiumi szerint, sub titulo: *Evolutio Mundorum incognitorum*, ezt közelebbről fel is olvasom a Tudos Társaság előtt».[10] A görbét pedig «meljnek néműnémű nyomdoka meg volt ugyan már az én régi munkátskámban is, most egy hozzája készített Tabellával nagyobb tökélletességre vittem, és *Quadratrix Spiralis* név alatt adtam ki, meljről ide is egy rövid *Schemat* accludalni bátorkodtam».[11]

Ez a SIPOS-görbe, amely korábbi (1792) kéziratában még *curva accentrica* néven szerepelt. A másik dolgozatnak eddig még a címét sem ismertük.

A «*Schema Quadratricis Spiralis*»-ban[12] már nemcsak az *izométer* áll készen előttünk, de megtaláljuk benne a *Beschreibung*, a későbbi, aranyéremmel kitüntetett berlini értekezés (nyomtatási éve 1796) második oldalán közölt kis táblázat 10 számadatát is. Görbéjét így határozza meg: «*Quadratrix Spiralis* illa curva est, quae omnes arcus dissimiles gradibus, et aequales directa longitudine complectitur». Tovább ez áll:

---

[10] Ez a társaság bizonyosan a «*Gelehrte Gesellschaft der Wissenschaften und Künste zu Francfurt a. d. O. 1766*», amely a Sárospataki Nagykönyvtárban őrzött oklevél bizonysága szerint SIPOS-t 1793. febr. 13-án adjunktusául nevezi ki «wegen Seiner Fähigkeiten, musterhaften Aufführung und Seines auf hiesiger Universität bewiesenen Fleißes».

[11] Francfurt. 20. Januar 1793. Ívrét, 4 oldal.

[12] Latinnyelvű kézirat, 16-r., 4 old. Mellékelve a SIPOS-görbe ábrája, amelynek betűzése még eltér a *Beschreibung*-étól.

«Ex consilio h.[ujus] t.[emporis] Magnif[ici] Rectoris, et Prof. Matheseos Vünsch normam aliquam *(Modell)* quam proxime apparabo, juxta quam ad indolem hujus curvae Mathematicum quoddam instrumentum mechanice obtineri possit, cujus usus is plane futurus est, quoad determinandam cujusvis arcus longitudinem; qui Transportatoris esse solet, quoad arcus determinandos in gradibus, aliaque problemata hujus generis multa ejusdem instrumenti ope mechanice solvi poterunt». Christian Ernst Wünsch[13] valóban 1792-ben a frankfurti egyetem rektora volt.[14]

Frankfurti egyetemi tanulmányainak befejezése után «Béts. 18^{a} Juny [1795]» keltezéssel ezt írja a matézisról: «ezt a Tudományt egyéb kötelességim és Tanulásim mellett mindenkor fovealtam, meljnek bizonysága lehet a Berlini Academiának Memoirjába most tsak hamar ki jövő Specimenem.» Majd később: «bátorkodom az Excellentziád gratziájába valo magam ajánlását ez alkalmatossággal is meg ujjitani, a midőn az Enyedi Változással egy Nyilás meg mutatta magát».[15] Bizonyosan a Kováts József halálával 1795-ben megüresedett nagyenyedi tanszékre céloz. Nem kapta meg ezt az állást, sem később egy másikat, amelyről Teleki Sámuel grófné tesz emlitést férjének, aki akkor erdélyi udvari kancellár volt Bécsben: «Meghala az udvarhelyi professor Bodola uram. Itt már most vákántia vagyon, talám ha irnál édes kincsem az consistoriumnak szegény Sipos iránt, oda csak jó volna és azt mondá Kemény Sámuel, hogy az magad recommendátioja legtöbbet tenne.»[16] Sipos csak rövid ideig tanithatta Teleki Sámuel kancellár fiát, Ferenc gró-

---

[13] Élt: 1744—1828. Majd három évtizedig (1784—1811) tanitott a frankfurti egyetemen. Poggendorff életrajzi kézikönyvében emlitett munkái (12) fizikai tartalmúak.

[14] E. Friedlaender: *Matrikeln d. Univ. Frankfurt a. O.* 2. 528.

[15] 8 r. 2 old., évszám nélkül.

[16] Marosvásárhely, év nélkül, dec. 13. Eredetije a marosvásárhelyi Teleki-könyvtárban. Másolata az Országos Levéltár Teleki-tárának Teleki Sámuel-osztályában. 2948. miss.

fot, mert annak bátyja DOMOKOS, már 1796. aug. 19-én megjegyzi édes anyjához írt levelében: «Örvendem hogy FRANTZI OTSOVSZKI keze alá jött, ki is egy valóságos jó Lelkű értelmes Ember. SIPOST sajnállom, hogy olyan közönségesen esméretes roszsz helyre adá magát».[17]

A gyömrői TELEKI-levéltár most közölt kéziratai új értékes láncszemek SIPOS kibontakozó egyéniségének ismeretéhez. Segítségükkel most már végeredményben majd egy évtizeden át (1787—1795) figyelemmel kisérhetjük fokról-fokra emelkedő eszméinek kialakulását, ami egyúttal azok önállóságát is bizonyítja. Ha SIPOS valahonnan készet vehetett volna át, nem láthatnók ezt a fejlődést.

Jelitai József.

ÜBER NEUE MANUSKRIPTE VON SIPOS.

Das TELEKI-Archiv in Gyömrő (Komitat Pest, Ungarn) enthält mehrere Manuskripte von SIPOS. Er widmet im März 1787 aus Broos (Siebenbürgen) einen lateinischen Entwurf (10 Oktavseiten) an den Reichsgrafen LADISLAUS TELEKI. Alle Figuren (er zitiert Figuren mit Nummern zwischen 23 und 44) fehlen. Diese Figuren gehörten zu der ersten Abfassung seiner späteren (1792) lateinischen Arbeit über die Kegelschnitte. (S. diese Zeitschrift: 41. 1934. 45—54.) SIPOS erwähnt in einem ungarischen Briefe (Frankfurt O. 20. 1. 1793.) eine bis jetzt unbekannte lateinische Abhandlung, die für die *Königliche Gelehrte Gesellschaft der Wissenschaften und Künste zu Frankfurt a. O.* bestimmt war. Diese Arbeit enthielt «metaphysische Spekulationen mit Mathesis conjungiert nach KANT's kosmologischen Prinzipien sub titulo *Evolutio Mundorum incognitorum.*» Die SIPOS-Kurve (Kochleoide), früher (1792) auch *curva accentrica,* heisst hier in einem lateinischen Manuskript (Frankfurt O., 20. Jan. 1793, 4 Seiten, 16°) *Quadratrix Spiralis.* Die beiliegende Figur und die sechsstelligen Zahlenwerte für Sehnenlängen der isometrischen Kreisbögen stimmen ganz mit den Daten seiner späteren preisgekrönten Berliner Ahhandlung (gedruckt 1796) überein. Diese neuen Manuskripte zeigen von 1787 bis 1795 deutlich die Entwicklung von SIPOS und bestätigen seine Unabhängigkeit.

Josef Jelitai.

---

[17] Teleki Sámuel-osztály. 1862. miss.

NAGYINTENZITÁSU ÁRAMLÖKÉSEKKEL TÁPLÁLT NEONKISÜLÉS FÉNYEMISSZIÓJÁRÓL.

Bevezetés.

A gázkisülések pozitív oszlopában lejátszódó jelenségek mechanizmusát az újabb időben az emittált sugárzás vizsgálatából kiindulva próbálják felderíteni,[1] miáltal a pozitív oszlop fényemissziójának önmagában is érdekes kérdése fokozottabb jelentőséget nyert. A kontinuus árammal táplált közönséges kisülési csöveknek elég alacsony terhelési felső határa miatt azonban az irodalomban feltalálható mérési eredmények igen kicsiny — maximálisan néhány amperig terjedő — intenzitás-intervallumra vonatkoznak.

Az utóbbi években Bay Zoltán dolgozott ki egy módszert,[2] mellyel meg lehet vizsgálni több száz amper középáramerősséggel biró áramlökésekkel táplált gázkisülések elektromos adatait. Az elektromos módszer így készen lévén, kézenfekvő volt a gondolat, hogy a fényintenzitásmérésnek nagy áramerősségekre való, már régebben kivánatos kiterjesztését nagyintenzitású (kondenzált) kisülések alkalmazásával valósitsuk meg.

Jelen dolgozat idevonatkozó vizsgálataim eddigi eredményeit ismerteti.

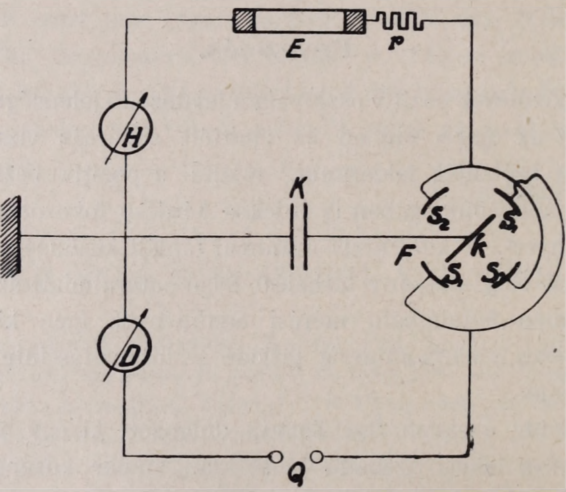
---

[1] H. Krefft—M. Reger u. R. Rompe: Zeitschrift f. techn. Physik **14**, 242., 1933. — Régebbi irodalom R. Seeliger: Die ungeschichtete und geschichtete positive Säule c. összefoglaló értekezésében, in Marx: Handb. d. Radiologie III. köt., Leipzig, 1916. 30—152. old. — V. ö. még G. Gehlhoff: Verh. d. D. Phys. Gesellsch. **21**., 349., 1919.

[2] Bay Zoltán: M. T. Akad. Mat. és Természettud. Értesítője LI., 20, 1934. és XLVII, 569, 1930.

1. §. Kísérleti berendezés.

A kísérleti berendezés elektromos része lényegében ugyanaz, mint amelyet BAY alkalmazott a kondenzált kisülésekre vonatkozó vizsgálatainál. Ezért ennek részletes leírását mellőzve, csak a kapcsolási rajzot adom meg (1. ábra), egyebekben utalok BAY idézett munkájára.



1. ábra. Elektromos berendezés.

Az 1. ábra jelölései:

Q magasfeszültségű áramforrás (transzformátor)

F synchron motorral hajtott higanyszaggató (k higanysugár, s_1, s_2 szektorpárok).

K kondenzátor (0, 2 mF),

D Hartmann—Braun rendszerű Deprez D'Arsonval árammérő,

H hődrótos árammérő,

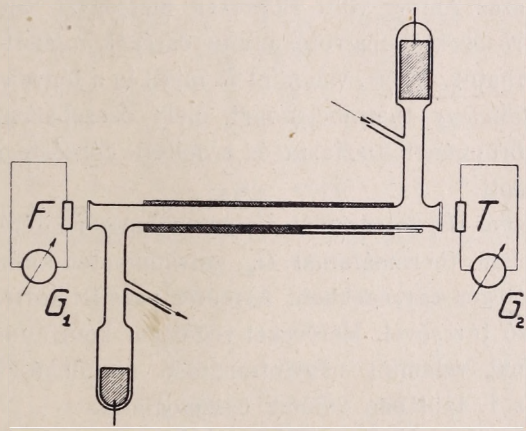
E kisülési cső,

r változtatható (0—4000 Ω) önindukciómentes ellenállás.

A kísérleti berendezés többi részéről a következő fejezetben lesz szó.

2. §. Mérési módszer.

Feladat a neongázban történő kondenzált kisülés pozitív oszlopa által kisugárzott fényenergiát meghatározni, mint a pozitív oszlop által fogyasztott energia függvényét. Mérni kellett tehát egyrészt a sugárzott energiát (a látható neonspektrumot), másrészt a cső, illetve a pozitív oszlop energiafogyasztását. Az elrendezést a 2. ábra mutatja.



2. ábra. A kisülési cső. (A nyíl a gázáram irányát jelzi.)

A sugárzott energiát a cső végéhez épített Tungsram fényelem, illetőleg az azzal egy körbe kapcsolt galvanometer méri. Minthogy a pozitív oszlop összes látható sugárzott energiáját kell mérni nem folytonos, hanem az időben szaggatott sugárzás esetén, külön meg kellett győződni arról, hogy a fényelem erre a mérésre alkalmazható. Itt két körülményre kell figyelemmel lennünk.

1. Ha a neon fényemissziójának spektrális intenzitáseloszlása megváltozik az áramerősség növelésével, akkor a fényelem érzékenységének a hullámhossztól való függése meghamisíthatja az eredményeket.

2. Kérdés, hogy a fényelem proporcionálisan működik-e az alkalmazott frekvenciájú intermittáló megterhelés mellett.[1]

A neon pozitív oszlopában ELENBAAS végzett kontinuus árammal való táplálás mellett intenzitásméréseket.[2] Eredménye az volt, hogy az általa alkalmazott gáznyomás- és áramerősség-intervallumon belül a fényintenzitáseloszlás független az áramerősségtől. ELENBAAS-nál a maximális áramsűrűség 300 mA/cm^2 volt, ami a mi esetünkben (keresztmetszet 1·35 cm^2) körülbelül 400 mA-nak felelne meg, holott a középáramerősség sok esetben több száz Amper volt. ELENBAAS megjegyzi, hogy a talált törvényszerűségektől nagyobb áramerősségek mellett esetleg eltérések várhatók. Ezért, valamint 2. miatt is a fényelemet összehasonlítottam egy thermoelemmel, mely összehasonlító mérés mindkét körülményt tisztázta és a feltett kérdésre egyértelmű feleletet adott.[3]

A fényelem (F) fotoáramát G_1 galvanométer kitérése ($S-S_0$), T thermoelem thermoáramát G_2 galvanométer kitérése ($s-s_0$) adta tetszőleges egységekben. A mérés parallel történt két külön leolvasó távcsővel. Méréseket végeztem kontinuus egyen- és váltóárammal, valamint nagyintenzitású áramlökésekkel. Ezen mérések az 1. táblában vannak összefoglalva.

Feltűnő itt az $\frac{S-S_0}{s-s_0}$ értékek igen nagy szórása (az egyes mérési csoportokon belül maximálisan rendre 8·3, 5·1, illetőleg 5·8%). Figyelembe kell azonban venni, hogy a sugárzott energiának csupán igen kis részét (mint később látni fogjuk, kevesebb mint 1%-át) tudja akár a fényelem, akár a thermoelem regisztrálni, úgyhogy az $s-s_0$ értékek pontossága a thermoelem kicsiny érzékenysége miatt nem kielégítő.[4] Mindenesetre kimond-

---

[1] R. SEWIG: Objektive Photometrie, Springer, Berlin, 1935. 39. old.

[2] W. ELENBAAS: Zs. f. Physik, **72**, 715., 1931.

[3] L. H. KREFFT—E. O. SEITZ: Phys. Zs. **35**, 930, 1934. — Zs. f. techn. Physik, **15**, 556, 1934.

[4] Bár G_1 galvanométer érzékenysége egy nagyságrenddel kisebb, mint G_2-é, mégis G_1 egy, nagyságrenddel nagyobb kitéréseket adott. Éppen a fényelemnek ez a sokkal nagyobb érzékenysége volt az egyik ok, amiért a

1. tábla.

r Ω	t-t_0 °C	I mA	I_e mA	I_k mA	S—S_0 skálarész	s—s_0 skálarész	$\frac{S-S_0}{s-s_0}$	W Watt	τ sec	Jegyzet
0	40	35	2540	184,300	77	3	25·6	4·7	$4{\cdot}51.10^{-6}$	
0	44	39	2810	202,400	85	3·1	27·2	5·3	4·58	
0	81	51	3825	286,900	202	7·3	27·6	11·3	4·23	
100	27	79	1750	38,770	53	2	26·5	3·02	$4{\cdot}89.10^{-5}$	áramlökések
600	18	61	600	5,920	51	1·8	27·7	1·9	$2{\cdot}46.10^{-4}$	
1100	9·5	34	255	1,920	84	3	28	0·95	4·24	
1100	11				96·5	3·5	27·6	1·13		
1100	16	61	450	3,320	77	3·1	24·9	1·7	4·37	
sz.	11	23	40	70	130	4·5	28·8	1·15	$7{\cdot}87.10^{-3}$	(sz. = ismeretlen, de igen nagy
sz.	13	25	45	81	143	5·2	27·5	1·55	7·35	Ω értékű szilit ellenállás)
					közép		27·14			
					maximális eltérés 8·3 %					
0	20	30			120	5	24	2·17		
0	28·5	49			266	11	24·2	3·2		
0		54			302	11	27·5			
1100		23			102	4	25·5			egyenáram
1100		30			126	5	25·2			
1100		41			213	8·5	25·1			
1100		46			259·5	10	25·9			
					közép		25·34			
					maximális eltérés 5·1 %					
0	18	29·5			98	3·7	26·5	1·92		
0	29	60			301	11	27·4	3·32		
1100		28			98	4	25			váltóáram
1100		36			150	6	25			
1100		54			287·5	11·2	25·6			
					közép		25·9			
					maximális eltérés 5·8 %					

Az összesen feltüntetett 22 mérésből közép $\frac{S-S_0}{s-s_0} = 26{\cdot}28.$

hatjuk, hogy az arányosság a két galvanométer kitérései között kielégitően konstans, vagyis, hogy a használt fényintenzitás-intervallumban, valamint a neon pozitiv oszlopának spektrális intervallumában a fényelem szaggatott megvilágitással való terhelés mellett is alkalmazható az összes energia mérésére: oly eredmény, mely a csőnek kontinuus táplálása esetén igazolva van,[1] intermittáló kisülések esetére eddig tudomásom szerint nem volt megvizsgálva.

A befektetett energia mérése külön módszerrel történt. Az áram munkája a pozitiv oszlop egy köbcentiméterében az időegység alatt

$$A = i.G$$

ahol i az áramsűrűség, G az elektromos gradiens. Ez az energia Sommermeyer és Seeliger[2] szerint három kísérletileg is elválasztható részből áll:

$$i.G = E_v + E_w + E_s$$

ahol

E_v az a része az energiának, mely a gáztérben hővé alakul át,
E_w az a része az energiának, mely a falon, vagy a falban hőképződést idéz elő és
E_s a cső falán át eltávozó sugárzási energia.

Feladatunk volna az $A = i.G$ energiát megmérni. Ennek mérésére rendszerint szondás módszereket szokás alkalmazni. Hogy ezek hátrányait elkerüljük, a következőképpen járunk el.

A csőnek középső, vízszintesen álló részére chromnickeldrótból elektromos kályhát készitettünk, melybe hőmérő volt beágyazva és a hengernek csupán a két véglapja volt szabadon (2. ábra). Ezáltal elértük, hogy az E_s energiának csupán kis

$$E_f = \frac{E_s}{\lambda}$$

---

fényelemes mérést bevezettük; a másik, hogy a fényelem működése a szobahőmérséklet kicsiny ingadozásaival szemben érzéketlen és így a méréseket kényelmesebben lehetett végezni.

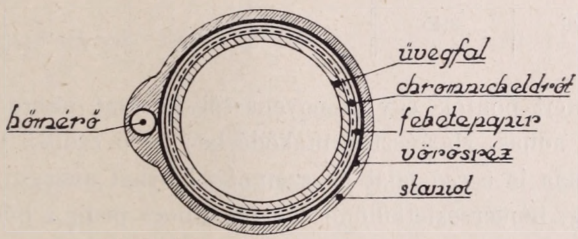
[1] H. Krefft—E. O. Seitz: Loc. cit.

[2] K. Sommermeyer: Ann. d. Physik, (5), **13**, 315, 1932. — R. Seeliger: Physik d. Gasentladungen, 2. Aufl., Leipzig, 1934. 339. old.

része távozik a csőből, a többit a hengerpalást abszorbeálja és így ez is hővé alakul át. A csőben termelt összes hőenergia tehát

$$A' = E_v + E_w + E_s\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Ezen A' és a fal hőmérséklete — pontosabban a fal és a környezet hőmérsékletkülönbsége — között nyilván egyértelmű vonatkozás áll fenn, mivel stacionárius állapotban az összes termelt hőenergia a falon keresztül adatik át a környezetnek, részben vezetés, részben sugárzás útján. Ez az összefüggés pedig kisérletileg meghatározható.



3. ábra. A kisülési cső keresztmetszete.

A kisülési cső keresztmetszetét a 3. ábra mutatja. Az üvegfalra tekercselt chromnickel fűtődrótot fekete papir, vastag vörösréz és staniolréteg boritja. A hőmérő a vörösréz és staniolréteg közé van helyezve. Ezáltal érjük el azt, hogy a hőmérő a fűtődrót esetleges egyenetlenségeiből származó hőmérsékletkülönbségek ellenére is helyesen adja a vörösréz által kiegyenlitett konstans hőmérsékletet. A kályhát jól definiált egyenárammal táplálva, kimértük a wattfogyasztásnak a hőmérsékletkülönbségtől [1] való függését. Két ilyen mérési sorozatot tartalmaz a 2. tábla.

---

[1] Szigorúan véve itt a staniol külső rétegének és a környezetnek hőmérsékletkülönbségét kell venni. Az alkalmazott két hőmérő ennél nyilván valamivel *nagyobbat* mutat. A vörösrézhenger hőmérsékletével azonban egyértelműen meg van adva az üvegfal és a külső staniolréteg hőmérséklete is.

Annak eldöntésére, hogy a környezetnek átadott energia ténylegesen

2. tábla.

1. sorozat		2. sorozat			
$t-t_0$ °C	Watt	$t-t_0$ °C	Watt	$t-t_0$ °C	Watt
5	0·43	4·6	0·424	41	4·91
7·6	0·73	7·5	0·721	47·5	5·81
10·8	1·103	11·2	1·105	56·3	7·2
15·4	1·56	15	1·539	60·5	7·88
19·5	2·09	19·7	2·117	65·5	8·68
24·5	2·68	24	2·624	69·9	9·38
35·6	4·13	29·3	3·327	74·5	10·28
48·2	5·85	34·8	4·061	79·5	11·03
65·3	8·45				

A mért pontok egy az egyenestől kevéssé eltérő folytonos görbét adnak. Másrészt a működésben lévő csőben termelt A' hőenergia is a cső falát és ezen át a kályhát melegíti, ez is előidéz egy hőmérsékletkülönbséget. Minthogy pedig a hőmérsékletkülönbség fentiek szerint egyértelműen definiálja a termelt és kifelé leadott hőenergiát, a 2. tábla alapján felrajzolt görbéből le lehetett olvasni az üzemben lévő cső vízszintes részének wattfogyasztását, a keresett A'-t, a kályhába ágyazott és egy külső, a szoba hőmérsékletét mutató hőmérő adatai alapján.

Meg kell állapítanunk, mekkora hibát követünk el, ha a mérendő A helyett a mért A' energiát vesszük figyelembe, másszóval: meg kell határoznunk λ faktor értékét.

A számolások egyszerűsítése végett feltesszük, hogy a gáztér (pontosabban a kisülés pozitív oszlopa) sugárzási szempontból homogén. Ez azt jelenti, hogy ha valamely dv térfogatelemben az időegység alatt a kisülés által termelt és $d\omega$ elemi kúpszögbe kisugárzott energia

$$dE = K . dv d\omega,$$

---

csak a hőmérsékletkülönbség függvénye és nem függ a szobahőmérséklettől, méréseket végeztem 26, 29 és 49° C szobahőmérséklet mellett. A mért pontok a mérési pontosság határain belül *ugyanazon* görbére estek.

akkor K a helytől és iránytól független, amiből a totális sugárzási energia (a henger magassága h, sugara a)

$$E_s = K \underset{\substack{(v)\\(\text{henger})}}{\iiint} dv \underset{\substack{(f)\\(\text{egységgömb})}}{\iint} d\omega = K 4 a^2 \pi^2 h$$

és

$$K = \frac{Es}{4a^2\pi^2 h}.$$

A tetszőlegesen választott x, y, z pontból egy tetszőleges f felületnek (jelen esetben a henger véglapjának) valamely df eleme

$$d\omega = \frac{df \cdot \cos\alpha}{l^2} = \frac{df \cdot l \cos\alpha}{l^3} = \frac{z}{l^3} df$$

kúpszög alatt látszik. Ebből a teljes f felület kúpszöge

$$\omega = \underset{(f)}{\iint} \frac{z}{l^3} df.$$

A térben hengeres, a véglapon síkbeli polár koordinátákat vezetve be

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \xi &= \varrho\cos\vartheta \\ \eta &= \varrho\sin\vartheta \end{aligned}\right\}$$

lesz

$$l^3 = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2} = [r^2 + \varrho^2 + z^2 - 2r\varrho\cos(\varphi - \vartheta)]^{3/2}.$$

Jelölje E_f a két véglapra eső sugárzott energiát

$$E_f = 2K \underset{(v)}{\iiint} \omega dv$$

E_f helyett nagyobbat veszek azáltal, hogy az alaptól azonos távolságra lévő pontok mindegyikéhez az ezen pontokhoz tartozó kúpszögek maximumát rendelem hozzá.[1]

---

[1] Ez a számolás pontos eredményt szolgáltat, ha csak a csőtengely mentén van kisülés. Ez a helyzet kísérletileg megvalósítható nagynyomású gázakban való kisülésekkel. (Hochdruckentladung.) Ekkor a térfogati integrál helyébe a csőtengely mentén veendő vonalintegrál lép.

$$E_f < 2K\iiint_{(v)} \omega_{\max}.df.$$

Számítsuk ki $\omega_{\max}$ értékét. Azonos z értékekhez tartozó pontok közül nyilván a tengelybe eső pontnak ($r=0$) van maximális kúpszöge.

$$\omega_{\max} = \iint_{(f)} \frac{z}{(\varrho^2+z^2)^{3/2}}\cdot df = 2\pi z\int_0^a \frac{\varrho d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{3/2}} = 2\pi\left(1-\frac{z}{(a^2+z^2)^{1/2}}\right).$$

Ezzel

$$E_f < 4\pi K\iiint_{(v)}\left(1-\frac{z}{(a^2+z^2)^{1/2}}\right)dv = 4a^2\pi^2K\int_0^h\left(1-\frac{z}{(a^2+z^2)^{1/2}}\right)dz =$$

$$= \frac{E_s}{h}\int_0^h\left(1-\frac{z}{(a^2+z^2)^{1/2}}\right)dz = E_s\left(1-\frac{(a^2+h^2)^{1/2}-a}{h}\right) =$$

$$= E_s\left(1-\frac{(1+b^2)^{1/2}-1}{b}\right)$$

$b = h/a$ a henger «relatív» magasságát jelenti. Sorbafejtve

$$\frac{E_f}{E_s} = \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{b} - \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{8b^4}$$

A numerikus értékeket betéve ($h = 210$ mm, $a = 6{\cdot}5$ mm) lesz $b = 32{\cdot}3$ és ezzel

$$\frac{E_f}{E_s} < 0{\cdot}0146.$$

Sommermeyer[1] mérései szerint E_s értéke az egész energia 5—30%-a között van különböző gáztöltés, áramintenzitás és nyomás mellett; Krefft és Seitz a sugárzási energia maximumait 20% és 30% között találják. Vegyük a legnagyobb értéket:

$$E_s = \frac{3}{10}A,$$

---

[1] K. Sommermeyer: Loc. cit. — H. Krefft—E. O. Seitz: Loc. cit. — V. ö. még M. Pirani: Zs. f. techn. Physik **11**, 482, 1930. — W. Pupp: Zs. f. Physik, **67**, 297, 1931. — M. J. Druyvesteyn: Phys. Zs. **33**, 822, 1932. — M. J. Druyvesteyn: Zs. f. Physik, **81**, 571, 1933.

és számoljuk ki a relatív hibát:

$$A - A' = \frac{E_s}{\lambda} = \frac{3}{10}\frac{A}{\lambda}$$

$$\frac{A-A'}{A} = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\lambda} \sim 0{\cdot}004 < 1\,\%.$$

Mint ez a számolás mutatja, az alkalmazott mérési módszer igen nagy pontossággal adja a befektetett energiát és az általában szokásos szondás módszerek hibáitól mentes.

A módszer sokkal általánosabb, mint ahogyan jelen vizsgálatoknál alkalmaztuk, független a frekvenciától és az áramgörbe alakjától.

3. §.

Gázkisülésekkel való kisérletezésnél egyik legfontosabb praktikus kérdés a gáz legszigorúbb tisztántartása. A jelenségek a legkisebb tisztátalanságra is nagyon érzékenyek.

Az üvegberendezés a tulajdonképpeni kisülési csövön kivül neontartályt, két diffuziós pumpát, Mac Leod manométert és káliumkályhát tartalmazott. Az egyik pumpa állandó köráramban tartotta a gázt, míg a másik az apparaturának teljes vákuumra való leszívására szolgált. A köráram egy segédkisüléssel működő káliumkályhán ment keresztül, miáltal a kisülési csőbe kerülő gáz a célnak megfelelő tisztasági fokot mutatott.[1] Ezt spektroszkopikus megfigyelések, valamint a fényemisszió értékeinek reprodukálható volta igazolták. A köráram leállítása után már néhány perccel lényeges eltéréseket mutatott a galvanométer viselkedése, amely eltérések mindig nyomtalanul eltűntek, ha a köráramot újból megindítottam. Ugyanekkor a spektroszkópban csak a neon-spektrumot lehetett megfigyelni.

A fényelem helyes működését is többször ellenőriztem és az

---

[1] Neonnak hasonló eljárással való tisztítására vonatkozólag l. pl. Bay i. m. 34. old.; — G. Gehlhoff: Verh. d. D. Phys. Ges. **13**, 183, 1911; — G. Gehlhoff in Graetz: Handb. d. El. Bd. III. 877. Leipzig, 1923; — és különösen A. Güntherschulze: Zs. f. Physik **41**, 733, 1927.

egész mérés tartama alatt reprodukálható eredményeket kaptam. A fényelem feketére festett fémdobozban volt elhelyezve, melynek a cső felőli oldalán lévő ajtóján lehetett a fényt egy vízszűrőn át a fényelemre ejteni. A vízszűrő alkalmazásával el lehetett kerülni a fényelem nagyobbmértékű felmelegedését, amely esetleg meghamisíthatta volna az eredményeket. Így fel lehetett tenni, hogy a fényelem hőmérséklete a szoba hőmérsékletével volt egyenlő, ennek ingadozásain belül pedig a fényelem működése független a hőmérséklettől.[1] Az irodalomban jól ismert fáradási jelenségek[2] elkerülése végett a fényelem kazettája mindig csak a mérés időtartamára és akkor is a lehető legrövidebb ideig volt nyitva. Külön meggyőződtem arról, hogy a szaggatás által előidézett elektromos zavarok a galvanométer nyugalmi helyzetét nem befolyásolják.

Nagyobb fényintenzitások esetén gondoskodni kellett a fényelem érzékenységének megfelelő csökkentéséről. A fényelemet nem közvetlenül, hanem potenciométerszerűen egy ellenálláson át leágaztatással kapcsoltam a galvanométerre, mely ellenállást thermoelektromos zavarok elkerülése végett külön e célra sárgarézből készítettem és amely ellenállás értéke megegyezett a galvanométer belső ellenállásával. Erre a fényelem proporcionális működésének megtartása érdekében volt szükség. Ilyenformán kétféle kapcsolásban a fényelem érzékenységét 5·205, ill. 2·03-ad részére tudtam lecsökkenteni. Ezen faktorokat több mérési sorozatból empirikusan határoztam meg és itt is ellenőriztem a reprodukálható működést.

4. §. Kontroll kísérlet.

Bay idézett dolgozatában a tényleges áramlökést egy olyannal helyettesíti, melynek középáramerőssége

---

[1] R. Sewig: Objektive Photometrie, Springer, Berlin, 1935. 38. old.
[2] W. Grundmann u. L. Kassner: Phys. Zs. **35**, **16**, **1934**.

$$I_k = \frac{I_e^2}{I} = \frac{\int\limits_0^\tau i^2 dt}{\int\limits_0^\tau i dt},$$

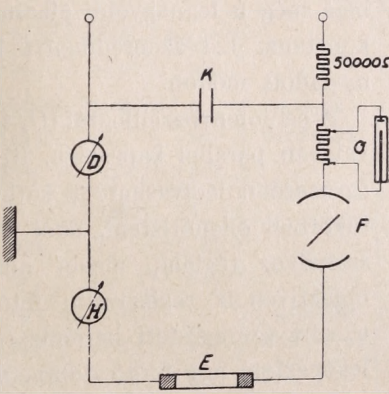
és időtartama

$$\tau = \frac{1}{n} \frac{I^2}{I_e^2}.$$

Ez a helyettesítés az ott adott elméleti meggondolások szerint elvégezhető az áram minden olyan hatására nézve, amelyik az intenzitás, illetve az intenzitás négyzetének időintegráljával mérhető. Ezen jelenségcsoportba tartoznak a gázkisüléseknél fellépő fényjelenségek is.[1]

Célszerűnek látszott olyan kisérleti feltételeket teremteni, amelyek lehetővé teszik a fenti formulák helyességének közvetlen mérésekkel való ellenőrzését.

Nagyteljesítményű magasfeszültségű (5000 V, 0·2 A) egyenáramú dynamo áramát adtam higanyszaggatón át a csőre, mellyel egy 10 mF nagykondenzátor volt parallel kapcsolva. Kapcsolást a 4. ábra mutatja. (A 4. ábrában O csillófényoszcillográfot jelent, egyéb jelölések megegyeznek az 1. ábra megfelelő jelöléseivel.)



4. ábra. Kontroll kísérlet kapcsolása.

A szaggatót synchron motor hajtotta, tehát ismert nagyságú szektorpárt alkalmazva a szaggatóban, ezáltal a kisülés ideje egyértelműen meg volt határozva és egyszerű számolással megadható.

---

[1] BAY említett dolgozatán kivül I. R. SEELIGER: Phys. Zeitschr. **33** 313, 1932. — W. UNTERHOEVEN—J. BRUYNES—C. VERBURG: Compt. Rendus, **196**, 1653, 1933.

Számitással meggyőződhetünk arról, hogy az alkalmazott áramerősségek mellett a kisütés ideje alatt a kondenzátor feszültségesése elhanyagolható kicsiny. Ez a feszültségesés

$$V - V' = \frac{I_k . \tau}{C}.$$

Legyen pl. $I_k = 50$ mA, $\tau = 7.10^{-3}$ sec, $C = 10^{-5}$ F, akkor

$$V - V' = 35 \text{ volt}$$

és mivel ($R = 93{,}000$ Ω), $V = I_k . R \sim 4650$ volt, a relativ hiba

$$\frac{V - V'}{V} < 1\,\%.$$

Itt figyelmen kivül hagytuk, hogy a dynamo a kondenzátort a kisütés ideje alatt is utánatölti. Ha még ezt is figyelembe veszszük, kimondhatjuk, hogy a feszültség és áramintenzitás görbéje még a legnagyobb alkalmazott I_k mellett is szakaszonként konstans. Ezt az eredményt kisérletileg is igazoltam az alább megadott módon.

A csillófényoszcillográf (O, 4. ábra) a kisütő kör egyik darabjával van parallel kapcsolva. Itt, mint ismeretes, az áramerősség egyszerűen leolvasható a kathodfény magasságából. Ezt forgótükörben ellenőriztem, ahol is a kathodfény képe (áramgörbe) szabályos téglalap alakot mutatott, de sikerült a jelenséget objektiven is regisztrálni fotografikusan. Fotografálásra külön e célra szerkesztett berendezést használtam. Az oszcillográfot leképeztem egy forgó dobra, melyet külön synchron motor forgatott. Minthogy a szaggatót is synchron motor hajtotta, a kisülési csőben és az oszcillográfban is a fényjelenségek a váltóáram periodusában játszódtak le, igy az egymásután következő felvételek a forgó dobon szuperponálódtak, miáltal a szükséghez képest tetszőleges hosszú expoziciós időket lehetett alkalmazni ($^1/_2$ óra). Egy rövidebb és egy hosszabb szektorpárt alkalmazva 38 és 59 mm hosszú téglalapok adódtak, mint az áramerősség oszcillogrammjai. A kisülés időtartama alatt az áramerősség tényleg konstans.

A dob átmérője 130 mm, fordulatszáma 21 sec^{-1}, amiből a kerületi sebesség $v = 856{\cdot}8$ cm sec^{-1} és végül a két szektorpárhoz tartozó kisülési idők

$$\tau_1 = 4{\cdot}4.10^{-3} \text{ sec} \quad \text{és} \quad \tau_2 = 6{\cdot}9.10^{-3} \text{ sec}.$$

Elvégeztem ezenkívül több mérési sorozatot az előzőekben megadott módszerrel a rövidebb és hosszabb szektorpárral. Egy-egy mérési sorozatot tartalmaz a 3. tábla. A kisülési időtartamok itt a BAY-féle formulával vannak kiszámítva. Az összehasonlítás azt mutatja, hogy időtartamformula helyes eredményt szolgáltat.

3. tábla.

$t-t_0$ °C	$S-S_0$ skálarész	I mA	I_e mA	I_k mA	W Watt	τ sec	Jegyzet
5·1	68	6	14	32·6	0·45	$4{\cdot}4.10^{-3}$	kisebb szektorpár
10·5	158·6	12·2	27·3	61	1·07	4·8	
12·8	226	16	36·2	81·9	1·34	4·7	
15·1	312	20	48	115·2	1·6	4·1	
21·5	610	38	87·2	200	2·33	4·5	
					közép	4·5	
5·7	62·8	6	11·1	20·5	0·5	$7{\cdot}0.10^{-3}$	nagyobb szektorpár
10·8	146	12	23	44	1·1	6·5	
14·8	227	18	33	60·5	1·57	7·1	
18·2	337	24	44	80·2	1·95	7·1	
20·6	432	28	53	100·3	2·23	6·6	
					közép	6·86	

Ugyanitt alkalom kínálkozik az I_k formula megvizsgálására is. Definíciók szerint a közép és effektív áramerősségek így adódnak a momentán áramerősségből (i):

$$I = n\int_0^\tau i.dt, \qquad I_e^2 = n\int_0^\tau i^2 dt,$$

és ezekből a BAY-féle középáramerősség

$$I_k = \frac{\int_0^\tau i^2 dt}{\int_0^\tau i dt}.$$

Jelen speciális feszültség és áramgörbe esetén ezek a formulák nagyon egyszerű eredményt adnak. Esetünkben u. i. $i = konst.$ és így

$$I = n.\tau.i, \quad I_e^2 = n.\tau.i^2, \quad I_k = i,$$

amiből egy szektorpárnál

$$\frac{I_k}{I} = \frac{1}{n\tau} = \text{konst.}$$

ezen konstans értékét τ_1 és τ_2-re kiszámítva kapjuk

$$\frac{1}{n\tau_1} = 5{\cdot}28, \quad \frac{1}{n\tau_2} = 3{\cdot}45.$$

Másrészt a 3. tábla adataiból $\frac{I_k}{I}$-t számolva látjuk, hogy ez tényleg konstans és középértékezve kapjuk

$$\left(\frac{I_k}{I}\right)_{\text{közép}} = 5{\cdot}31, \quad \text{ill.} \quad 3{\cdot}49.$$

Ezek az adatok, valamint a kisülés időtartamára vonatkozó adatok is a mérési pontosság határain belül jól megegyeznek a 3. táblában közölt (középértékmérésekből számolt), valamint egyéb, itt nem közölt mérések adataival is.

5. §. Mérési eredmények.

Az áramgörbe alakját a kisütőkörbe kapcsolt önindukciómentes (síkrács) változtatható ellenállás segítségével igen tág határok között tudtam változtatni, miáltal elértem azt, hogy a cső ugyanazon wattfogyasztás mellett is (a kisérleteknél 1 és 2 watt) igen különböző középáramerősségeknél égett. A megfelelő

4. tábla.

Tartalmazza a teljes második mérési sorozatot. $p = 3{\cdot}33$ mm, $C = 0{\cdot}2$ mF.

r Ω	$t-t_0$ °C	$S-S_0$ skálarész	I mA	I_e mA	I_k mA	W Watt	τ sec
2·9	13·0	32·5	13·3	1000	75,190	1·37	$4{\cdot}2.10^{-6}$?
	17·6	41	17	1720	174,020	1·88	2·3
	21·8	48	20	1990	198,000	2·37	2·4
14·6	8	24·5	13	700	37,690	0·8	8·2
	13	31·5	20	1085	58,860	1·35	8·1
	19·2	44·5	25·2	1385	76,120	2·06	7·9
	23	52	30	1660	91,850	2·52	7·8
43·4	5·5	17·8	13·5	445	14,665	0·5	$2{\cdot}2.10^{-5}$
	6·8	19·7	17	565	18,778	0·63	2·2
	8	21·7	20·1	680	23,050	0·8	2·1
	10·2	25	25·2	860	29,350	1·02	2·0
	12·6	27·7	29·8	1020	34,910	1·32	2·0
	17·1	35·5	40·5	1380	47,020	1·83	2·1
	21·3	39·5	45	1560	54,080	2·22	2·0
58	8	22	22	650	19,205	0·8	2·7
	12·1	27	29·6	880	26,160	1·26	2·7
	15·2	32	37·5	1135	34,350	1·61	2·0
	18·2	38	44·5	1305	38,270	1·95	2·8
	21	42	50·5	1530	46,350	2·28	2·6
81·6	7·8	20	22·5	585	15,210	0·76	3·5
	10	24·5	30·5	765	19,190	1·03	3·8
	13·5	30	39·5	1015	26,080	1·42	3·6
	17·4	37	49·5	1285	33,350	1·86	3·5
	21·5	42·5	59·5	1540	39,860	2·33	3·6
108	8·2	27	27·2	625	14,360	0·9	4·5
	11·2	31	34·3	800	18,660	1·15	4·4
	14·6	35	41	930	21,095	1·55	4·6
	17·4	39·5	50·4	1160	26,700	1·87	4·5
	20	43·5	60·5	1400	32,400	2·16	4·4
158	8·3	46	24	270	9,204	0·92	6·2
	10·7	52	31·5	620	12,200	1·08	6·1
	13·6	59·8	40	770	14,820	1·42	6·4
	16	68·8	50	970	18,810	1·7	6·3
	19	75	60	1170	22,810	2·05	6·3
208	8·8	59·3	26·3	460	8,045	0·87	7·8
	11·5	73	35	620	10,980	1·2	7·6
	14	83	43	745	12,900	1·47	8·0
	16·8	91·5	50·5	870	14,980	1·8	8·0
	19·2	100	61	1070	18,760	2·06	7·7

r Ω	$t—t_0$ °C	$S—S_0$ skálarész	I mA	I_e mA	I_k mA	W Watt	τ sec
258	9·1	71	27	435	7,008	0·91	$1{\cdot}2.10^{-4}$
	12·3	86	36·5	585	9,376	1·28	1·2
	15	100	46·5	730	11,460	1·6	1·0
	17·4	110·5	55·5	875	13,790	1·86	1·0
	20	119	64·0	1005	15,780	2·15	1·0
358	9	85·7	25	355	5,041	0·9	1·2
	11·8	107	35	465	6,177	1·23	1·3
	14·5	126	45·5	600	7,912	1·53	1·4
	16·9	139	54·9	715	9,312	1·81	1·4
	19·7	156	65	865	10,980	2·12	1·4
511·2	9·2	113	26·3	310	3,654	0·92	1·7
	13	137	35·8	415	4,810	1·36	1·8
	15·8	160	46	520	5,878	1·68	1·9
	18	177	55·5	620	6,926	1·88	1·9
782·7	9·7	126	21·2	200	1,886	0·98	2·7
	12·3	162	31	285	2,620	1·28	2·8
	14·2	182	39·5	360	3,281	1·5	3·6 ?
	17	218	50	450	4,050	1·82	2·9
	19·4	235	59·5	532	4,756	2·08	2·9
1032·7	9·5	142	20·5	170	1,410	0·95	3·5
	14	187	31	250	2,016	1·47	3·6
	16	214	40	315	2,480	1·7	3·8
	19·4	250·5	51	400	3,137	2·1	3·9
	21·1	273	61·5	480	3,746	2·28	3·9
1282·7	9·8	143	18	135	1,010	1·0	4·2
	14·9	205	31·5	225	1,607	1·58	4·7
	17	241·5	40	285	2·030	1·82	4·7
	19·4	280	50·5	360	2,566	2·08	4·7
1532·7	9	138	16	110	753	0·9	5·0
	11·7	170	22	150	1,020	1·22	5·1
	14·1	210	29·5	198	1,330	1·48	5·3
	18	255·5	39·5	260	1,710	1·93	5·5
	20·6	298	50·5	325	2,090	2·23	5·8
1809·2	8	122	12·8	80	500	0·78	6·1
	12	176	20·5	128	799	1.25	6·1
	16·2	236	30·5	185	1,122	1·73	6·5
	19·4	274	40	240	1,440	2·08	6·7
2059·2	8·6	125·5	13	78	468	0·85	6·7
	11·7	172	19·5	115	710	1·22	6·8
	15·4	231	30	170	963	1·63	7·4
	17	270	38	210	1,160	1·82	7·5
	20·8	318	48	270	1,518	2·26	7·5

r Ω	$t-t_0$ °C	$S-S_0$ skálarész	I mA	I_e mA	I_k mA	W Watt	τ sec
2559·2	8·8	129	12·2	70	401	0·88	7·4 ?
	13	195	21	110	576	1·37	8·7
	17	263	30·5	158	818	1·82	8·9
	20	309	40	200	1000	2·16	9·5
3059·2	9·4	130	11·5	58	293	0·97	9·4
	13·6	204	20·5	100	487	1·43	$1{\cdot}0.10^{-3}$
	16·5	250	27·5	130	614	1·75	1·1
	19·5	314	38	170	760	2·1	1·2
3559·2	9	129	11·6	52	233	0·9	1·2
	13·4	207	19·8	86	373	1·42	1·3
	17·1	260	26·6	116	506	1·83	1·3
	20·8	318	36	172	642	2·25	1·3
4059·2	9·6	137	12	50	208	0·97	1·4
	14	224	20·5	82	336	1·47	1·5
	17·5	277	28	115	385	1·82	1·7
	20·2	324	35	140	560	2·18	1·5

fényintenzitásokat megmérve, adódik a fénykihasználás görbéje, mint a középáramerősség függvénye.

Két teljesen külön sorozatot mértem ki különböző gáztöltés és nyomás mellett. A gáz nyomása az első sorozatnál 2·36 mm, a másodiknál 3·33 mm volt, a kondenzátor kapacitása mindkét esetben 0·2 mF, töltőgáz mindkét esetben neon. A teljes második mérési sorozatot tartalmazza a 4. tábla. A 4. tábla jelölései:

r a kör ohmikus ellenállása (rácsellenállás + műszer),
$t-t_0$ a cső és környezet hőmérsékletkülönbsége,
$S-S_0$ a galvanométer kitérése skálarészegységekben,
I középáramerősség,
I_e effektív áramerősség,
I_k Bay-féle középáramerősség,
W a cső wattfogyasztása,
τ a kisülés időtartama.

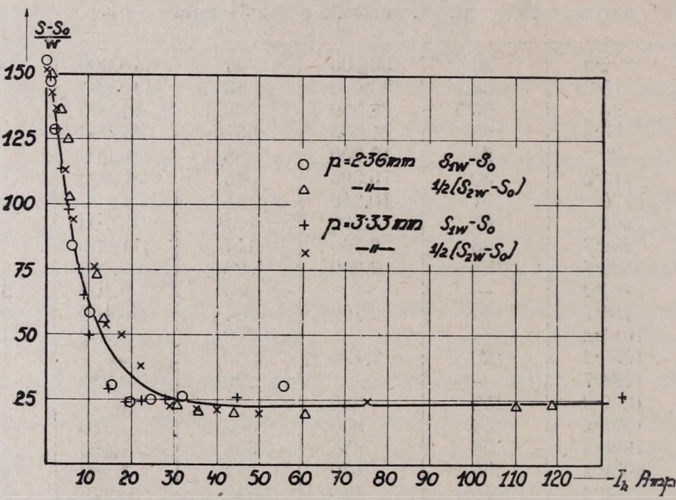
A mérés úgy történt, hogy a körbe egy bizonyos ellenállást kapcsolva, a középáramintenzitásokat a berendezés által adott határok között addig változtattam, míg a cső fogyasztása lehetőleg 1 wattnál kisebb értékektől 2 wattnál nagyobb értékekig nőtt. Ez nem volt minden esetben lehetséges, különösen a hődrótos műszernek ugyanazon shunthöz tartozó elég szűk mérési határai miatt. A műszert egy mérés alatt nem lehetett más shuntre átkapcsolni, mert ezáltal a kör ellenállása és az áramgörbe alakja is megváltozott volna. Az egy ellenálláshoz tartozó eredményeket külön grafikonban összesítettem, minden egyes méréshez felrajzolva a galvanométer kitéréseket és az I_k értékeket, mint a wattfogyasztás függvényeit, amelyek minden esetben lineáris függést adtak. Ezekből a grafikonokból azután meg lehetett határozni interpolációval az 1W, illetve 2W-hoz tartozó I_k és $S—S_0$ értékeket. Ahol nem lehetett interpolálni, ott — kivéve, ha a függvény menetétől nagyon elütő értéket kaptam volna — lineárisan extrapoláltam. Ezek az interpolált adatok az 5. táblában vannak megadva, mely tartalmazza az első mérési sorozatnak hasonlóan nyert összefoglaló mérési adatait is. Az 5. tábla 6. oszlopában megadom a 2 watt fogyasztáshoz tartozó kitéréseknek 1 wattra átszámított értékeit. Ha most az 5. tábla összetartozó értéksorozatait (2. és 3. ill. 5. és 6. oszlop) egy grafikonban feltüntetjük, (5. ábra), azt látjuk, hogy mindkét nyomás mellett az $S_{1W}—S_0$ és $\frac{1}{2}(S_{2W}—S_0)$ pontok egy görbére esnek. De az azonos nyomás melletti adatok egyesitéséből származó két görbe szintén teljesen azonos menetet mutat, ami könnyen megmagyarázható az alábbi gondolatmenet alapján.

Neon gerjesztésekor, mivel a kialakuló $2s$ és $2p$ metastabil állapotokból az alapállapotba csak elenyészően ritkán lehetséges átmenet, az egyszer már gerjesztett atom a szomszédos $2s—2p$ állapotok között oszcillál, miközben a látható neonspektrumot emittálja. A fénykibocsájtásra e szerint elsősorban a $2p_1$, $2p_2 \ldots$ $2p_{10}$ energianívók relatív telítettsége (relative Be-

5. tábla.

r	$S_{1w}-S_0$	I_k	$S_{2w}-S_0$	I_k	$\frac{S_{2w}-S_0}{2}$
1. sorozat, $p = 2{\cdot}36$ mm.					
2·9	30	56,000	47	118,000	23·5
5·8	28	56,000	45	110,000	22·5
25	25·5	32,000	39	61,000	19·5
55·8	25	24,000	37·5	44,000	18·8
80	24	19,200	38	36,000	19
111·2	30	16,300	46	30,300	23
170	57	10,840	—	—	—
261·2	85	7,200	121	13,700	60·5
282·7	88	6,500	147	11,800	73·5
532·7	128	3,320	208	7,240	104
761·2	—	—	250	5,100	125
782·7	146	2,100	254	4,460	127
1011·2	—	—	273	3,580	136·5
1059·2	160	1,430	—	—	—
1282·7	—	—	290	2,380	145
1309·2	158	980	—	—	—
1559·2	159	850	302	1,810	151
1809·2	158	655	306	1,420	153
2059·2	158	470	311	1,280	155·5
2509·2	200	450	313	970	156·5
2. sorozat, $p = 3{\cdot}33$ mm.					
2·9	27	134,000	43	180,000	21·5
14·6	26	44,000	43	75,000	21·5
43·4	25	27,500	37·5	51,000	18·8
58	24	22,000	38	40,000	19
81·6	23	18,500	38	35,000	19
108	28·5	14,500	41	29,000	20·5
158	49	10,000	76	22,400	38
208	66	8,900	100	17,800	50
258	75	7,350	115	14,500	57·5
358	92	5,000	151	12,000	75·5
511·2	115	3,800	183	6,720	91·5
782·7	130	1,900	231	4,500	115·5
1032·7	145	—	242	—	121
1282·7	—	—	266	2,400	133
1532·7	148	850	265	1,760	132·5
1809·2	148 ?	650	266	1,320	133
2059·2	144	550	280	1,300	140
2559·2	145	450	290	900	145
3059·2	132	310	294	720	147
3559·2	146	260	284	560	142
4059·2	149	200	303	490	151·5

setzung) mérvadó. ELENBAAS[1] mérései azt eredményezték, hogy $2p_2, \ldots 2p_9$ nívók relatív telítettsége független a nyomástól és a cső átmérőjétől, míg a $2p_{10}$ rel. telítettsége növekvő, a $2p_1$-é pedig csökkenő függvénye az átmérő és sűrűség szorzatának.



5. ábra. A fényemisszió, mint a középáramerősség függvénye.

A totális energiának az egyes nívók közötti százalékos eloszlását tartalmazza a 6. tábla.[2]

6. tábla.

$2p_1$	$2p_2$	$2p_3$	$2p_4$	$2p_5$	$2p_6$	$2p_7$	$2p_8$	$2p_9$	$2p_{10}$
1·98	6·98	2·58	11·68	7·12	12·70	8·90	15·08	18·56	14·12

Pl. a $2p_6$-ról a $2s$ nívóra való átmeneteknél ($2p_6 \rightarrow 2s_5 : \lambda = 6143$ Å, $2p_6 \rightarrow 2s_2 : \lambda = 6929$ Å) az összes energiának 12·7%-a sugároztatik.

Mint említettük, $2p_1$ és $2p_{10}$ változásai ellentétes irányúak, azonkívül a 6. tábla szerint a $2p_{10}$-hez tartozó relatív telítettség kb. 7-szerese a $2p_1$-hez tartozónak. Ehhez figyelembe véve

[1] W. ELENBAAS: Loc. cit.

[2] KREFFT és SEITZ (loc. cit.) újabban végzett mérései igazolják ELENBAAS eredményeit és megállapításait. A 6. tábla KREFFT és SEITZ mért eredményeiből, valamint az általuk korrigált ELENBAAS-féle eredményekből számított középértékeket tartalmazza.

még azt, hogy ELENBAAS szerint a $2p_{10}$ változása sokkal lassúbb, mint $2p_1$-é, nem követünk el lényeges hibát, ha fölvesszük, hogy e két változás egymást kiegyenlíti. Ebből az következik, hogy az összes sugárzott energia független a nyomásváltozástól és így érthető, hogy a kisérleteknél beállított két — egymáshoz egyébként is közeleső — nyomáson mért pontok egy görbére esnek. Az eredmények az 5. ábrában vannak feltüntetve. Az 5. tábla összes pontjai bizonyos szórással ténylegesen egy folytonos görbe körül helyezkednek el, amely görbe $^1/_2$ ampertől 10 amperig rohamosan, attól kezdve lassabban esik és kb. 40 ampertől kezdve vízszintesen halad.

A fentebbiek alapján ezt a görbét berajzoltuk és *ezt tekintjük a feltüntetett középáramerősség-intervallumban ($^1/_2$—120 A) a relatív fénykihasználás görbéjének.*

6. §. Az eredmények diszkussziója.

A kisérleti adatok alapján felrajzolt fénykihasználási görbe (5. ábra) diszkussziójánál elsősorban is felmerül a kérdés, hogy a görbének sajátos menete

A) vajjon a kondenzált kisülések természetében leli-e magyarázatát, vagy pedig

B) a nagy áramerősségek következménye.

Hogy kis áramerősségeknél a görbe menetét nem befolyásolják az áramlökések, hanem az csupán az áramerősség függvénye, arra nézve a következő támpontjaink vannak.

α) A 4. §-ban adott összeállításban méréseket végeztem öt különböző nagyságú szektorpárral (a megfelelő kisülési idők 4, 8, 12, 18 és 24.10^{-3} sec). A kapott galvanométer kitérésekből számitott fénykihasználások a kisülési időtől függetlenül ugyanannak adódtak.

β) A kapott eredmények kis áramerősségeknél megfelelnek a kontinuusan táplált kisülési csöveken mások által kapott eredményeknek. Ábránkban $\frac{S-S_0}{W}$, mint az I_k függvénye a relatív fénykihasználás görbéjét adja. Ennek szokásos jelölése E_s, ill. $\frac{E_s}{i.G}$. MOHLER azt találja,[1] hogy E_s cäsiumgőzben, mint az áramerősség függvénye, $^1/_2$ ampertől 4 amperig igen meredek esést mutat. SOMMERMEYER viszont neonban kis áramerősségeknél (200 mA-ig) E_s-nek lineáris emelkedését állapitja meg. Ebből, minthogy fémgőzök és nemesgázak hasonló viselkedést mutatnak, azt lehet következtetni, hogy a *Ne* is nagyobb áramerősségeknél úgy viselkedik, mint a *Cs*, vagyis, hogy a fénykihasználás görbéje valahol $^1/_2$ A táján maximumot mutat és attól kezdve meredeken esik. KREFFT és SEITZ[2] kimérik neonnak különböző méretű csövekben és különböző gáznyomások mellett a fény kihasználását 0·05 és 5 amper között és az öszszes csövekben találnak egy maximumot 200 mA és 1 A között, amitől kezdve a mérési határig *csökken* a fénykihasználás görbéje. Ez az eredmény igen jó egyezésbe hozható — legalábbis kvalitative — MOHLER és SOMMERMEYER idézett eredményeivel, valamint jelen dolgozat eredményeivel is.

E szerint *a)* és *β)* alapján kimondhatjuk, hogy kis áramerősségeknél a fénykihasználási görbe menete csupán az áramerősség függvénye. Ezt az eredményt most már nagy áramerősségekre általánositva kapjuk, hogy a *fénykihasználás görbéje nagy áramerősségeknél általában a mienkhez hasonló.*

Elfogadva ezt az eredményt, annak teoretikus megindokolásához a következőket adjuk meg.

Az elektromos tér energiája a gáztérben az elektronok kinetikus energiájává alakul. PIRANI szerint[3] ennek az energiának legnagyobb része (70—95%-a) az elektronoknak a nemesgáz-

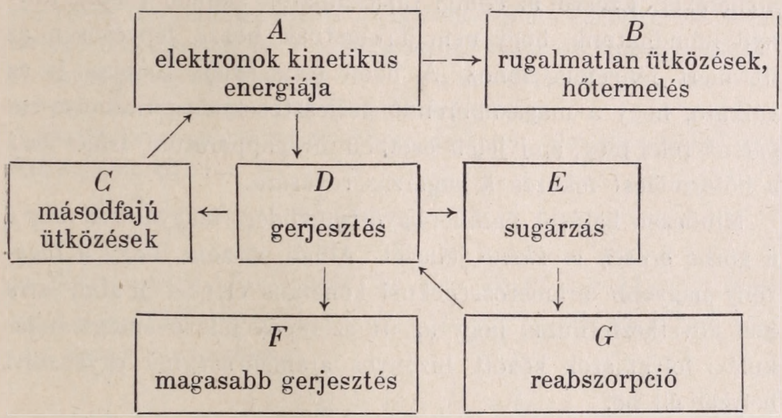
---

[1] F. L. MOHLER: Bur. of Stand. 9, 25, 1932. — M. KNOLL—F. OLLENDORFF—R. ROMPE: Gasentladungstabellen, Berlin, 1935. 99. old.

[2] H. KREFFT—E. O. SEITZ: Loc. cit. — Jelen kisérleteknél is félreismerhetetlenül mutatkozott egy maximum kb. 700 mA-nél, de a kisérleti berendezés külső paraméterei miatt ilyen kicsiny középáramerősségeknél az eredmények szórása már nagyobb a megengedettnél, úgyhogy erre nézve e kisérletek nem adnak pontos felvilágositást.

[3] M. PIRANI: Zeitschr. f. techn. Physik, **11**, 482, 1930. — M. J. DRUYVESTEYN: Phys. Ztschr. **33**, 822., 1932.

atomokkal való rugalmas ütközései folytán a fényemisszió szempontjából elvész és a gáztérben, vagy a falakon hőtermelést idéz elő. A megmaradó 5—30% idézi elő a fényemissziót. A nem rétegzett pozitív oszlop (esetünkben erről van szó) fényemissziójának mechanizmusához SEELIGER a következő egyszerű képet adja:[1]



Az elektronok kinetikus energiája a sémában adott energiaátalakulásokhoz vezethet.

Itt két hatásnélküli körfolyamat (Leerlaufprozess) lehetséges: 1. $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$ és 2. $D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow D$. A kettő egymásután is előfordulhat, lehetséges pl. hogy egy elektron energiája a 2 és 1 körfolyamatok befutása után visszajut az A állapotba.

A másodfajú ütközések száma arányos egyrészt a gerjesztett atomok, másrészt az elektronok koncentrációjával. E szerint, ha az áramerősséget (elektronsűrűséget) növeljük, mindkét koncentráció növekedvén, a másodfajú ütközések száma és ezzel együtt a sugárzást nem adó 1 körfolyamatok gyakorisága az elektron sűrűségnek valamely *magasabb* hatványával, míg a sugárzást eredményező $D \rightarrow E$ átmenetek gyakorisága a gerjesztett atomok koncentrációjával, ez viszont az elektronsűrűséggel

[1] Teljesebb energiaátalakulási sémát adnak KREFFT-REGER és ROMPE: Ztschr. f. techn. Physik, **14.** 242, 1933.

proporcionálisan növekszik. Az 1 körfolyamatot befutott energiakvantumoknak legnagyobb része pedig $A \rightarrow B$ átmenet után hőfejlődést idéz elő. Az elmondottak alapján belátható, hogy a $D \rightarrow E$ átmeneteknek is egy része a 2 és 1 körfolyamatok és az $A \rightarrow B$ átmenet után mérhető fényemisszió előidézése nélkül hőfejlődést okoz. Eddig figyelmen kívül hagytuk a $D \rightarrow F$ átmeneteket. Ezekről az eddigi tapasztalatok alapján csupán annyit mondhatunk, hogy nem járulhatnak hozzá lényegesen az itt mért fényemisszióhoz. A neon termsémája alapján is az várható, hogy a magasabbrendű gerjesztéseknek ultraibolya sugárzás felel meg, ami jelen esetben (üvegapparatura) ismét csak a hőtermelést fokozza a sugárzás rovására.

Mindezen hatások parallel együttműködése magyarázza meg a a görbe *erősen csökkenő* jellegét. Abból viszont, hogy a függvény nagyobb áramerősségeknél konstans értéket mutat, arra kell következtetnünk, hogy az itt szerepet játszó energiaátalakulási folyamatok között bizonyos áramsűrűségnél egyensúlyi helyzet áll be.

Összefoglalva a dolgozat eredményeit:

1. az itt adott módszer alkalmazható gázkisülések relatív fénykihasználásának megvizsgálására igen nagy áramerősségek esetén;

2. a mért $^1/_2$—120 A intervallumban neongázban a relativ fénykihasználás 10 A-ig rohamosan, attól kezdve lassabban esik és kb. 40 A-tól kezdve konstans.

*

Jelen munka a m. kir. Ferenc József Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében készült. Ezúton is őszinte köszönetemet fejezem ki az intézet igazgatójának, dr. Bay Zoltán egyetemi ny. r. tanár úrnak, aki munkámat állandó figyelemmel és érdeklődéssel kisérte és értékes tanácsaival mindig segítségemre volt.

Szeged, 1935. július 1.

Bukovszky Ferenc.

INTENSITÄTSMESSUNGEN IN DER NEONSÄULE BEI STROMSTÖSSEN EXTREM HOHER STROMSTÄRKE.

Es wird die Lichtemission der positiven Säule einer mit Stromstössen hoher Intensität gespeisten Neonentladung als Funktion des Wattverbrauches gemessen. Die Strahlungsenergie wurde mit einem Tungsram-Lichtelement in der üblichen Weise gemessen, zur Messung des Wattverbrauches wird eine neue Methode angegeben.

Die Entladungsröhre ist so gebaut, dass nur ein kleiner Teil der Strahlungsenergie

$$E_f = \frac{E_s}{\lambda}$$

die Röhre verlässt. Der grösste Teil der Energie : $E_s\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)$ wird dabei in der Wand absorbiert und in Wärme umgewandelt. Nun wird statt der totalen Leistung

$$A = i.G. = E_v + E_w + E_s$$

die insgesamt erzeugte Wärme

$$A' = E_v + E_w + E_s\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)$$

gemessen und der damit bedingte relative Fehler durch Rechnung verfolgt und zu $< 1\%$ gefunden. Zur Eichung des Lichtelementes wurde ein direkter Vergleich mit einem Thermoelement vorgenommen.

Die Richtigkeit der der Messung zugrunde gelegten Bayschen Formel für mittlere Stromstärke und Stossdauer wurde durch Kontrollversuche geprüft und verifiziert.

Das Endergebnis der Messungen ist in Fig. 5 dargestellt; die pro 1 Watt-Leistung gerechnete Strahlungsintensität fällt von ca $1/2$ A bis etwa 10 A Intensität sehr schnell, von da bis 40 A langsamer und von 40 A ab bleibt sie konstant.

Die Messergebnisse werden diskutiert und mit denen anderer Autoren verglichen.

Szeged, Institut für theoretische Physik der Universität.

Ferenc Bukovszky.

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1935. évi XXXIX. matematikai tanulóversenyről.

A Társulat XXXIX-ik matematikai tanulóversenyét 1935. okt. 12-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 30, Szegeden 5 versenyző jelentkezett; beadtak 22, illetőleg 3 dolgozatot.

A verseny tételei a következők voltak:

I. Legyen $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ a pozitív $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok valamely permutációja; bebizonyítandó, hogy

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geqq n.$$

II. Egy O pont tudvalevőleg akkor neveztetik egy H ponthalmaz centrumának, ha H bármely pontjának O-ra vonatkoztatott tükörképe ugyancsak pontja H-nak. Bebizonyítandó, hogy egy véges sok pontból álló ponthalmaznak nem lehet két különböző centruma.

III. Egy háromoldalú hasáb minden szögpontjához hozzárendelünk egy-egy számot oly módon, hogy minden A szögponthoz rendelt szám: számtani közepe azon három számnak, melyeket oly szögpontokhoz rendeltünk, melyek A-val a hasáb egy-egy éle által össze vannak kötve. Bebizonyítandó, hogy e hat szám megegyezik egymással.

A beadott dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság, mely RADOS GUSZTÁV elnöklete alatt a következő tagokból állott: FARAGÓ ANDOR, FEJÉR LIPÓT, SZŰCS ADOLF, VERESS PÁL és KŐNIG DÉNES előadó, 1935. okt. 27-én tartott ülésén a következő javaslatban állapodott meg.

«A legjobb két dolgozat szerzői BELLA ANDOR és CSANÁDI GYÖRGY, bár a 3. feladatra adott megoldásaik hiányosak. BELLA dolgozata különösen az 1. tételre adott ügyes bizonyításával válik ki, mely nem hivatkozik a számtani és geometriai közép közötti egyenlőtlenségre. A 2. tételre adott szép bizonyítása ugyancsak matematikai képességeiről tanúskodik. Ezért a Bizottság azt javasolja, hogy az első b. Eötvös Loránd díj BELLA ANDOR-nak adassék, aki a sárospataki ref. gimnáziumban ERDÉLYI LÁSZLÓ tanár tanítványa volt. A második díjra a Bizottság CSANÁDI GYÖRGY-öt hozza javaslatba, aki a budapesti áll. Kölcsey Ferenc reálgimnáziumban MESSIK BÉLA tanár tanítványa volt. CSANÁDI dolgozatának egyik érdeme, hogy a 3. feladatban használt módszere sokkal általánosabb tétel bizonyítására is alkalmas.

Dícséretet érdemel BAUER GYÖRGY, aki lényegileg szintén mind a három feladatot megoldotta, de fogyatékos fogalmazással, valamint KRAUSZ JÓZSEF, aki egyedül adta a 3. feladat teljes megoldását.

A Bizottság ezúttal is sajnálattal állapítja meg, hogy a dolgozatok fogalmazása túlnyomóan fogyatékos.»

A Bizottság e javaslatát a Választmány 1935. november 14-én tartott ülésén egyhangúlag elfogadta. Az ugyanezen a napon tartott előadó ülésen RADOS GUSZTÁV elnök adta át a díjakat a verseny győzteseinek.

Az 1935. évi XXXIX. matematikai tanulóversenyen díjat nyert dolgozatok.

Bella Andor dolgozata.

I. feladat. Feltehetjük, hogy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a számok első permutációja, tehát a nagyobb indexű értéke is nagyobb. Ha $a_k \geq a_l$ és $b_m \geq b_n$, illetve $a_k = a_l + \varepsilon_1$, $b_m = b_n + \varepsilon_2$, ahol ε_1 és ε_2 pozitív számok, akkor

$$\frac{a_k}{b_m} + \frac{a_l}{b_n} \leq \frac{a_l}{b_m} + \frac{a_k}{b_n}; \qquad (1)$$

ugyanis:

$$\frac{a_k}{b_m} + \frac{a_l}{b_n} = \frac{a_l + \varepsilon_1}{b_n + \varepsilon_2} + \frac{a_l}{b_n} = \frac{2b_n a_l + b_n \varepsilon_1 + a_l \varepsilon_2}{b_n(b_n + \varepsilon_2)},$$

$$\frac{a_l}{b_m} + \frac{a_k}{b_n} = \frac{a_l}{b_n + \varepsilon_2} + \frac{a_l + \varepsilon_1}{b_n} = \frac{2b_n a_l + b_n \varepsilon_1 + a_l \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2}{b_n(b_n + \varepsilon_2)};$$

Ebből nyilvánvaló, hogy

$$\left(\frac{a_k}{b_m} + \frac{a_l}{b_n}\right) + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{b_n b_m} = \frac{a_l}{b_m} + \frac{a_k}{b_n}.$$

Az $\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{b_n b_m}$-ben szereplő mennyiségek pozitívak, tehát elhagyásával a baloldal csökken (ugyanakkora, ha ε_1 vagy ε_2 zérus); és így (1) valóban fennáll. Mit mond ez a tétel? Azt, hogy a hányadosok összege semmiesetre sem nő (tehát vagy fogy vagy ugyanakkora marad), ha két nevezőt olyan értelemben cserélek fel, hogy az egyik hányadosba jusson a kisebb nevező és a kisebb számláló. — Megkeresem tehát azt az $\frac{a_x}{b_x}$ hányadost, ahol $b_x = a_1$ (ez lehetséges, mert minden a-nak megfelel egy b). Ez a b_x kisebb, mint b_1; ha tehát felcserélem, akkor az egyik hányados $\frac{a_1}{b_x}=1$ lesz, a másik $\frac{a_x}{b_1}$; (1) szerint

$$\frac{a_1}{b_x}+\frac{a_x}{b_1}\leqq\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_x}{b_x}.$$

Tehát a hányadosok összege csökkent a felcseréléssel. Ha most $\frac{a_1}{b_x}$-et rögzítem, akkor a_2 lesz a legkisebb számláló, $b_y=a_2$ a legkisebb nevező. Az $\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_y}{b_y}$ helyett a nála kisebb (vagy egyenlő) $\frac{a_2}{b_y}+\frac{a_y}{b_2}$-t téve ismét csökkentem a hányadosok összegét. Már most $\frac{a_2}{b_y}=1$-et is rögzítem és $\frac{a_3}{b_3}$-mal járok el ugyanígy. A felcserélést n-szer végezve, minden számláló egyenlő lesz a saját nevezőjével, értékük 1 lesz, tehát (figyelembe véve, hogy az összeg csökkent):

$$n=\overset{1}{1}+\overset{2}{1}+\overset{3}{1}+\cdots+\overset{n}{1}\leqq\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}.$$

Tételünk be van bizonyítva.

II. feladat. Ha a pontok száma véges, akkor van a halmazban az O centrumtól *legtávolabb* eső két pont: A és tükörképe A_1. Ekkor az O köré A-n és A_1-en keresztül húzott r-sugarú kör területére esik H minden pontja. Legyen O_x egy O-tól különböző második centrum; akkor $A_1O_x+AO_x>2r$, mert A_1O_xA $\triangle$ két oldalának összege nagyobb a harmadiknál. Ha ez így van, akkor vagy AO_x, vagy A_1O_x nagyobb r-nél. Legyen pl. $AO_x>r$. Akkor A_x lévén A tükörképe O_x-re, A_xO_x szintén nagyobb r-nél. De ekkor $AO_x+A_xO_x>2r$, $AA_x>2r$; körben az átmérőnél hosszabb egyenes nem képzelhető el, tehát A_x a kör területén kívül esik és így nem lehet a H halmaz pontja. Ezért O_x nem lehet a H halmaz centruma: H-nak centruma csak az egyetlen O lehet.

III. feladat. Legyenek A_1, A_2, A_3 az alaplap, A_4, A_5, A_6 a fedőlap megfelelő sorrendben írt csúcsai és $a_1, a_2, \ldots, a_6$ a hozzájuk rendelt számok. E hat szám számtani közepe legyen a. A feltétel szerint

$$3a_1=a_2+a_3+a_4,\quad 3a_4=a_1+a_5+a_6,$$
$$3a_2=a_1+a_3+a_5,\quad 3a_5=a_2+a_4+a_6,$$
$$3a_3=a_1+a_2+a_6,\quad 3a_6=a_3+a_4+a_5.$$

Innen összeadással:

$$3a_1+3a_4=a_2+a_3+a_4+a_1+a_5+a_6=6a,\quad \text{tehát}\quad a_4=2a-a_1,$$
$$3a_2+3a_5=a_1+a_3+a_5+a_2+a_4+a_6=6a,\quad \text{tehát}\quad a_5=2a-a_2,$$
$$3a_3+3a_6=a_1+a_2+a_6+a_3+a_4+a_5=6a,\quad \text{tehát}\quad a_6=2a-a_3;$$

a_4, a_5, a_6 ezen értékeit helyettesítve:

$$3a_1 = a_2 + a_3 + 2a - a_1, \quad \text{azaz} \quad 4a_1 = a_2 + a_3 + 2a,$$
$$3a_2 = a_1 + a_3 + 2a - a_2, \quad \text{azaz} \quad 4a_2 = a_1 + a_3 + 2a,$$
$$3a_3 = a_1 + a_2 + 2a - a_3, \quad \text{azaz} \quad 4a_3 = a_1 + a_2 + 2a.$$

Innen kivonással $4a_2 - 4a_3 = a_3 - a_2$, azaz $a_3 = a_2$ adódik és hasonlóan $a_2 = a_1$ és $a_3 = a_1$.

Csanádi György dolgozata.

I. feladat. Legyen

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} = s.$$

Szorozzuk össze s tagjait:

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n} = 1,$$

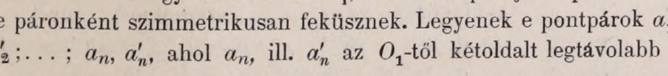
mert a nevezőben lévő szorzat tényezői egyenlőek a számlálóban lévő szorzat tényezőivel, csak más sorrendben. Így $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ mértani közepe $\sqrt[n]{1} = 1$. Viszont pozitív számok számtani közepe nem lehet kisebb a mértani középnél, tehat $\frac{s}{n} \geqq 1$ vagyis

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geqq n.$$

Az egyenlőségjel akkor áll fenn, ha $a_i = b_i$.

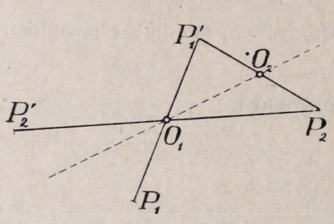
II. feladat. Bizonyítsunk indirekt módon, vagyis tegyük fel, hogy a ponthalmaznak két centruma van: O_1 és O_2. Különböztessünk meg két esetet: a szerint amint H-nak minden pontja az O_1O_2 egyenesen fekszik vagy van ezen kívül is pontja.

1. Ha a H halmaz összes pontjai egy f egyenesen feküsznek és ha a halmaznak van egy centruma: O_1, akkor H pontjai O_1 két oldalán, O_1-re páronként szimmetrikusan feküsznek. Legyenek e pontpárok a_1, a'_1; a_2, a'_2; ... ; a_n, a'_n, ahol a_n, ill. a'_n az O_1-től kétoldalt legtávolabb fekvő



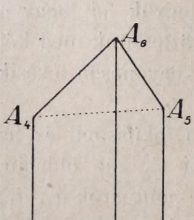
pontokat jelenti. Ha mostan a ponthalmaznak még egy centruma van: O_2 és ez is f-en fekszik, akkor kell, hogy O_2 az a_n és a'_n pontok közül az egyikhez közelebb feküdjék, mert $O_2 \neq O_1$ és $a_nO_1 = a'_nO_1$. Legyen a közelebbi a'_n; ekkor $a_nO_2 > a'_nO_2$. Ha a_n-nek O_2-re vonatkoztatott szimmetrikusa a''_n, akkor tehát $a''_nO_1 > a'_nO_1$. Azonban a'_n a pontsornak legkülső pontja, tehát a''_n csak rajta belül lehet, ha a sorozatnak véges számú tagja van.

2. Ha a halmaznak O_1O_2-n kívül is feküsznek pontjai, úgy válasszunk ki ezek közül egyet: P_1-et. Be fogjuk bizonyítani, hogy ekkor a halmaznak okvetlenül végtelen sok pontja van. P_1-nek O_1-re vonatkoztatott P_1' tükörképe szintén pontja a halmaznak. Ugyanígy P_1'-nek O_2-re vonatkoztatott tükörképe, P_2 is; s í. t. a műveletet a végtelenségig folytathatjuk, úgy, hogy P-nek O_l-re vonatkoztatott szimmetrikusát P_l'-vel, P_l'-nek O_2-re vonatkoztatott szimmetrikusát P_{l+1}-gyel jelöljük. — Most már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy az így szerkesztett pontok közül kettő nem eshet egybe. Bizonyítsunk teljes indukcióval. Tegyük fel, hogy P_k-ig egyik pont sem esett egy másikba. Ekkor P_k' nem eshet egybe valamely P_l ponttal, mert O_1O_2 különböző oldalán fekszenek és nem eshet össze egy P_l' ponttal sem, mert P_l és P_k különböző pontoknak tükörképe is különböző. Vagyis P_k' új pontot jelent. P_2 nyilván nem esik egybe P_1-gyel s P_2', P_3, P_3' s í. t. mind az előzőektől különböző pontok.



Két centrum esetében tehát a halmaznak végtelen sok pontja kell, hogy legyen, mert egy ponthoz a két centrum segítségével végtelenűl sok szükségszerűen hozzátartozó pont képezhető.

III. feladat. Legyenek a hasáb csúcsai, az ábra szerint, $A_1, \ldots, A_6$; a hozzájuk rendelt számok: $a_1, \ldots, a_6$. Tegyük fel, hogy e számok közül kettő különbözik. Ekkor nyilván kell két olyannak is különböznie, melyek egy élen fekszenek. Legyenek ezek pl. a_1 és a_4 és legyen $a_4 > a_1$. — 1) a_1 számtani közepe az a_2, a_3 és a_4 számoknak s így, $a_4 > a_1$ folytán, a_2 és a_3 közül a kisebb, pl. a_2 (hol $a_2 \leqq a_3$), kisebb a_1-nél: $a_2 < a_1$. 2) a_2 számtani közepe az a_1, a_3, a_5 számoknak; mivel $a_1 > a_2$ és $a_3 \geqq a_2$, azért $a_2 > a_5$. 3) a_5 számtani közepe az a_4, a_6, a_2 számoknak; mivel $a_4 > a_2$, $a_2 > a_5$ és így $a_4 > a_5$, azért $a_6 < a_5$. 4) Végül a_6 számtani közepe az a_5, a_4, a_3 számoknak; mivel $a_4 > a_5$ és $a_5 > a_6$, azért $a_3 < a_6$. — Azonban $a_3 \geqq a_2 > a_5 > a_6$, tehát feltevésünk ellenmondásra vezet, vagyis a csúcsokhoz rendelt számoknak mind egyenlőknek kell lenniök. — Megjegyzendő, hogy bizonyításunk alapja az, hogy a számtani közép a legnagyobb és legkisebb szám közé esik.



Ugyanerre az eredményre vezet a $3a_1 = a_2 + a_3 + a_4$, stb. egyenletrendszer megoldása is.

Jelentés az 1935. évi XVII-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyről.

Társulatunk XVII-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyét 1935. okt. 19-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 14, Szegeden 3 versenyző jelentkezett; beadtak Budapesten 12, Szegeden 2 dolgozatot. Szegeden egy versenyen kívüli résztvevő is beadta dolgozatát.

A verseny tételei a következők voltak:

1. A hang terjedési sebessége legyen $333^1/_3$ m/sec. $t=0$ időpontban eldördül az ágyú. Kiszámítandók azok a t_1, t_2, t_3, illetőleg t'_1, t'_2, t'_3 időpontok, melyekben a dörej a mikrofonokat (M_1, M_2, M_3) éri, *a)* ha nem fúj a szél, *b)* ha az x tengellyel párhuzamosan 10 m/sec sebességű szél fúj.

Másodszor adva lévén a három mikrofon előbbi koordinátái és a $t'_3-t'_2$ és $t'_2-t'_1$ észlelt időkülönbségek, mekkora hibával adódnak az ágyú koordinátái, ha azokat a szél figyelembevétele nélkül számítjuk ki?

Ágyú koordinátái:	$x=500$ m,	$y=0$ m,
M_1 «	$x=0$ m,	$y=8000$ m
M_2 «	$x=2000$ m,	$y=8000$ m
M_3 «	$x=4000$ m,	$y=8000$ m.

2. Két edényt, melyek egyike 3-szor nagyobb térfogatú, mint a másik, vékony cső köt össze. Az edényekben 15° C hőmérsékleten 760 mm Hg nyomású levegő van. A nagyobbik edényt 100° C-ra melegítjük, a kisebbiket 15° C-on tartjuk. Számítsuk ki, mekkora lesz az edényekben a levegő nyomása és hányszor több levegő lesz a nagyobb edényben, mint a kisebbikben? (Az összekötőcső térfogatát és a nagyobbik edény melegítésokozta térfogatnövekedését nem vesszük figyelembe.)

A dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság, melynek tagjai Tangl Károly elnöklete alatt: Mikola Sándor, Nagy L. József, Pogány Béla, Szabó Gábor és Rybár István voltak, Szabó Gábor előadói előterjesztésére a következő javaslatban állapodott meg:

Az első feladat első kérdését mindenki megfejtette (néhányan kisebb számítási hibával), a második kérdést már csak négyen. A többiek vagy csak vázolták a számítás menetét, vagy pedig hibásan okoskodtak és számítottak. Mindenik versenyző úgy fogta fel a feladatot, hogy a szél az x-tengely pozitív irányában fúj. Egy versenyző azonban az ellenkező irányú szél esetére is elvégezte a számítást. A harmadik kérdést senki sem fejtette meg. Volt olyan versenyző, aki a feladattól eltérően nemcsak az észlelt $t'_3-t'_1$ és $t'_2-t'_1$ időkülönbségeket vette ismerteknek, hanem a

t'_1 időt is, és így három kör közös metszéspontjának koordinátáit kereste, de így sem jutott eredményre.

A második feladat megoldásához három versenyző hozzá sem fogott. A többiek mind más-más módon próbálták azt megoldani. Legtöbbnek azonban hibás az okoskodása és ennek megfelelően a számítása is. Némelyeknek pedig nem érthető a gondolatmenete, mert semmi magyarázó szöveget nem írnak egyenleteikhez, és olyan betűt is használnak, melynek nem mondják meg a jelentését.

Csak egy versenyző fejtette meg mind a két kérdést: VALATIN JÁNOS, aki a budapesti I. ker. áll. Verbőczy reálgimnáziumban dr. TÓTH GÉZA tanár tanítványa volt.

Az elmondottak alapján a Bizottság előadója egy versenyző dolgozatát sem javasolhatta megjutalmazásra. Valatin János dolgozatát is, mivel az első feladatban érdemleges eredménye nincs, csak dícséretre ajánlotta.

Előadó javaslatát a Választmány 1935. november 14-i ülésén elfogadta.

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1935. évi június 1-i XL. közgyűlés.

A közgyűlés RADOS GUSZTÁV elnök megnyitó beszédével kezdődött:

Mélyen tisztelt Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat!

Megállapitván a közgyűlésnek alapszabályaink és a még fennálló miniszteri rendelet értelmében való határozatképességét, üdvözlöm a megjelent budapesti, és különösen melegen a vidéki tagtársainkat, akik az utazás fáradalmait és költségeit nem sajnálva eljöttek, hogy jelenlétükkel kollegiális együttérzésüknek kifejezést adjanak.

Mindannyiunkat egy cél egyesit, egy feladat lelkesit: szaktudományainknak, a matematikának és fizikának művelésével hazánk művelődését becsületes munkával szolgálni és azt előbbre vivén, hazánk létalapjainak megszilárdításához erőnkből telhetőleg hozzájárulni. Törekvésünk példák adásával és szolgálatra kész támogatással tudományunknak új híveket és művelőket toborozni.

Tisztelt Közgyűlés! Társulatunk — bár csak 44 év óta áll fenn — mégis már félszázados multra tekinthet vissza. Társulatunknak van ugyanis egy történetelőtti korszaka, amelyről a mai nemzedéknek alig van tudomása. A budapesti matematikusok már 1885 óta rendszeres összejövetelekben havonként két előadóestét rendeztek, amelyeken kiváló egyetemi és középiskolai tanárok saját kutatásaik eredményéről vagy a tudománynak haladásairól a matematika, fizika, geodézia területén referáltak.

Az előadásokat egyes vendéglőkben tartottuk.[1] Az előadásokat közös vacsora követte, mely bő alkalmat nyujtott az előadásokkal kapcsolatos eszmecserére. Ez a tagdíjmentes, alapszabályok és elnök nélküli, fesztelen társaság fennállott 1891-ig, amíg feledhetetlen első elnökünk, br. Eötvös Loránd Társulatunkat megalapította és ezzel az alapítással együtt új folyóiratnak, a Math. és Phys. Lapoknak megindítását és fenntartását biztositotta. Br. Eötvös Loránd már akkor is tisztában volt azzal, hogy folyóiratunk költségei egyedül a befolyó tagdíjakból nem fedezhetők és bizton számított a kormány és a Magyar Tud. Akadémia hathatós segélyére, mert e folyóiratot nagy hivatásánál fogva a támogatásra érdemesnek és méltónak tartotta. Br. Eötvös Loránd e várakozásában nem csalódott, mert a várt segítség el nem maradt.

Boldog időket éltünk akkor, amidőn folyóiratunk a háború befejezéséig, tehát 26 éven át, 30—32 ívnyi terjedelemben jelenhetett meg és eredeti kutatások eredményein kívül összefüggő ismertető cikksorozatokban a tudomány haladásairól szóló referátumokat, feladat-, irodalmi- és laboratóriumi rovatot vezethetett és így Társulatunk a személyes érintkezéssel járó eszméltető hatáson kívül az egyetemekről kirajzott középiskolai tanárok részére állandó továbbképző tanfolyam feladatait is teljesíthette.

A trianoni katasztrófa, amely hazánkra oly váratlanul lesujtott, e boldog állapotnak véget vetett. Az ország megcsonkitása folytán tagjaink létszáma a felére süllyedt és a megmaradt tagoknak fizetőképessége az ismételt fizetésredukciók következtében szintén a felére szállt alá, úgyhogy megcsökkent bevételeink már arra is alig elegendők, hogy folyóiratunkat erősen redukált terjedelemben kiadhassuk.

---

[1] Az első előadás 1885 őszén a Ferenciek bazárjában volt Csalányi-féle vendéglő egyik különtermében volt; két év mulva a vándorló fekete táblával együtt működésünk szinhelyét a vámházkörúti Drechsler-féle vendéglőbe tettük át; onnan végül az Andrássy-úti államvasutak nyugdíjintézetébe (az Operával szemben) költözködtünk.

Épen ezért kéréssel fordulunk a Magyar Tud. Akadémiához, hogy a nekünk eddig is nyujtott segélyt oly fokig emelni kegyes legyen, hogy a Mat. és Fiz. Lapok eredeti hivatásuknak legalább részben megfelelhessenek.

Nem kételkedünk benne, hogy az Akadémia, belátva kérésünk méltányosságát, ezt teljesíteni fogja és nem fogja közönnyel nézni, hogy egy intézmény, melyet dicső elődeink megalapították és áldozatos munkával fenntartottak és amelynek áldásos eredményei közel egy fél századon át hozzájárultak a magyar művelődés emeléséhez, anyagi támogatás híján tönkremenjen. A sors és gonosz ellenségek kemény pörölycsapásai sujtották hazánkat és annak összes intézményeit. Ezek a pörölycsapások azonban nemzetünket csak keményebbre, ellentállóbbá fogják kovácsolni, munkaképességünket elevenebbé, szívósabbá tenni és bennünket arra képesíteni, hogy a mult viszonyait egy boldogabb jövő számára átmentsük. E boldogabb jövő előkészítésére munkálkodni mi is szent kötelességünknek valljuk, és hogy e boldog jövő hajnalhasadásában mi, ma élők is gyönyörködhessünk, szívünk leghőbb vágya. Abban a reményben, hogy e vágyunk teljesülni fog, nyitom meg az 1935. évi Közgyűlésünket.

Az elnöki megnyitó után Pogány Béla ügyvezető-titkár számolt be a Társulat lefolyt évi működéséről és az év fontosabb mozzanatairól.

Társulatunk a lefolyt esztendőben 11 előadó-, 2 választmányi és 1 közgyűlést tartott. Az előadóüléseken 13 előadás hangzott el, és pedig 5 matematikai és 8 fizikai tárgyú.

Különösen kiemeli két külföldi vendégünket: O. Blumenthal aacheni professzort és Wigner Jenő hazánkfiát, a princetoni egyetem tanárát, akik érdekes előadásukkal tanújelét adták Társulatunk iránti megbecsülésüknek, illetőleg ragaszkodásuknak.

Kegyeletes szavakkal emlékezik meg Társulatunk nagyérdemű tagjának, Kövesligethy Radó egyetemi tanárnak gyászos elhúnytáról, kinek ravatalára Társulatunk is elhelyezte a kegyelet koszorúját és kinek emlékét jegyzőkönyvileg és a Matematikai és Fizikai Lapokban közölt nekrológgal megörökítettük.

Beszámolva még az idei matematikai és fizikai tanulóversenyek eredményeiről, a Matematikai és Fizikai Lapokról és cserefolyóiratainkról, az automatikusan megüresedő választmányi tagsági helyek betöltésére került a sor. A közgyűlés a lelépő választmányi tagokat, névszerint: EGERVÁRY JENŐt, JORDAN KÁROLYt, LÓKY BÉLÁt, SARKADI KÁROLYt és TASS ANTALt egyhangúlag újra megválasztja, az elhúnyt KÖVESLIGETHY RADÓ helyét pedig VERESS PÁLlal tölti be.

A számvizsgáló-bizottság tagjaiul a következő évre a Választmány részéről FARAGÓ ANDOR és TASS ANTAL, a Közgyűlés részéről pedig RENNER JÁNOS és STACHÓ TIBOR tagtársakat küldik ki.

SZABÓ GÁBOR pénztárosi jelentéséből a zárszámadást és vagyonmérleget itt közöljük.

1934. évi zárszámadás.

Bevétel:

1.	1933. évi zárszámadási maradvány:		Pengő
	a) kézi pénztárban	78·21 P	
	b) postatakarékpénztárban	736·99 «	3203·20
	c) Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban	1368·— «	
	d) takarékkönyvben (Károly Irén-alap)	1020·— «	
2.	Tagdíjak		1192·—
3.	Előfizetési díjak		261·94
4.	Adományok		38·—
5.	Államsegély		450·—
6.	Magyar Tudományos Akadémia segélye		500·—
7.	Budapesti Középisk. Tanárképző Intézettől		305·—
8.	Kamatok		69·53
9.	Vegyesek		24·43
		Összesen:	6044·10

Kiadás:

1.	Nyomdai költségek		2660·—
2.	Tanulóverseny		124·63
3.	Kőnig-plakett		212·—
4.	Kezelésiköltségek és Díjkezelőség jutaléka		89·78
5.	Vegyesek		106·89
6.	Pénztári maradvány:		
	a) kézipénztárban	65·64 P	
	b) postatakarékpénztárban	882·16 «	2850·80
	c) Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban	883·— «	
	d) takarékkönyvben (Károly Irén-alap)	1020·— «	
		Összesen:	6044·10

Vagyon-mérleg.

Vagyon:

	Korona	Pengő
1. Koronaértékpapirosokban:		
a) A Magy. Lesz. és Pénzv. Bankban:		
2600 K. n. é. 4 %-os fővárosi kölcsönkötvény	2600·—	
1800 « « « 6 %-os hadikölcsönkötvény (4. kibocsátás)	1800·—	
300 « « « 4 %-os magyar koronajáradékkötvény (Károly Irén alapítvány)	300·—	
2200 « « « 6 %-os hadikölcsönkötv. (3. kibocsátás) (Károly Irén alapítvány)	2200·—	
2000 « « « 5½ %-os hadikölcsönkötvény (4. kibocsátás)	2000·—	
10000 « « « 6%-os hadikölcsönkötvény (3. kib.) Kőnig-alap	10000·—	
b) A Pesti Hazai Takarékpénztárban $\frac{04557}{c_2}$ jelzésű könyvben	108·—	
c) Állami kezelésben: (Majthényi Ottó-hagyaték)	10000·—	
2. Pénzkészlet:		
a) kézipénztárban 65·64 P		2850·80
b) postatakarékpénztárban 882·16 «		
c) a Magy. Lesz. és Pénzv. Bankban 883·— «		
d) takarékkönyvben (Károly Irén-alap) 1020·— «		
3. Tagdíj és előfizetési díj hátralék		200·—
4. Nyomtatványok		100·—
Összesen:	29,008·—	3150·80

Teher:

	Korona	Pengő
Nyomdai tartozás		174·83
Egyenleg	29,008·—	2975·97

Szabó Gábor s. k.
pénztáros.

Megvizsgáltuk és helyesnek találtuk.

Budapest, 1935. április hó 4-én.

Tass Antal s. k., Renner János s. k., Veress Pál s. k., Faragó Andor s. k.

Előadások.

1934. nov. 8. Az 1934. évi matematikai és fizikai tanulóversenyek eredményeinek kihirdetése és a díjak ünnepélyes átnyujtása. SZALAY SÁNDOR: Vizsgálatok elektrolitek kompresszibilitására ultrahangsugarakkal és Debye ionattrakciós elmélete.

1934. nov. 22. TIHANYI MIKLÓS: A 2^n hatvánnyal jellemzett körosztási számtestek Lagrange-féle rezolvenséről.

1934. dec. 13. NAGY L. JÓZSEF: Néhány demonstrációs kísérlet.

1935. febr. 14. FRANK GÁBOR és PATAI IMRE: Nagyemissziójú izzókatódok telítési áramának mérése. RADÓ GYÖRGY: Faltöltések és faláramok hatása az elektroncső működésére. (Bemutatásokkal.)

1935. febr. 28. Vitéz BARNÓTHY JENŐ: A kozmikus sugárzás csillagidőperiodusáról.

1935. márc. 14. MARÓTHI (KURDILLA) FERENC: Összetett függvények grafikus ábrázolásáról. TURÁN PÁL: Az egész számok prímosztóinak számáról.

1935. márc. 28. KEDVES MIKLÓS: Iskolai gravitációs készülék bemutatása (kísérletekkel).

1935. ápr. 11. VERESS PÁL: A középérték fogalmáról.

1935. ápr. 30. O. BLUMENTHAL (Aachen): David Hilberts Leben und Werke. Aus Anlass der Herausgabe seiner gesammelten Abhandlungen. (David Hilbert élete és művei. Összegyüjtött dolgozatainak kiadása alkalmából.)

1935. máj. 7. WIGNER JENŐ: A csoportelmélet alkalmazása a kvantummechanikában.

1935. jún. 1. ORTVAY RUDOLF: Tapasztalataim északamerikai tanulmányutamról.

*

Közgyűles volt: 1935. jún. 1-én.

*

Választmányi ülések voltak: 1934. nov. 8-án és *1935. máj. 18-án.*

Új tagok:

DARVAS JENŐ, áll. reálgimn. tanár, Bpest.

FEJES LÁSZLÓ, bölcsészettanhallgató, Bpest.

PAPP MARGIT, Baar—Madas leányliceumi tanárnő, Bpest.

Meghalt:

KÖVESLIGETHY RADÓ, egyetemi ny. r. tanár, Budapest (1934. okt. 12.)

Kimutatás

az 1935. március 18-tól október 31-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíjak.

1932-re : Breszlauerné Blau Ilona (4), Girsik Géza (3), Görbe Imre (6), Terkán Lajos (8), Tóth Géza (5), Turán Pál (2). *Összesen 28 P.*

1933-ra : Albert Anna (8), Breszlauerné Blau Ilona (8), Csada Imre (6), Dér Zoltán (6), Erdey-Gruz Tibor (8), Fekete Jenő (8), Görbe Imre (6), Kolozsváry Béla (8), Kronberger Ede (2), Magi Ferenc (6), Magyar Márta (8), Neográdyné Haich Sarolta (8), Neumann János (8), Oltay Károly (8), Patai László (2), Róna Zsigmond (8), Schaller Mátyás (6), Sebők Emmánuel (6), Somogyi Antal (8), Steiner Lajos (4), Suták József (8), Terkán Lajos (2), Waldapfel János (8). *Összesen 150 P.*

1934-re : Albert Anna (8), Breszlauerné Blau Ilona (8), Bresztovszky Béla (8), Bródy Imre (8), Detre László (4), Erdey-Gruz Tibor (8), Fekete Jenő (8), Fenyvesi Andor (8), Ferenczy Zoltán (8), Goll György (8), Kolozsváry Béla (8), Kronberger Ede (2), Sz. Nagy Gyula (6), Oltay Károly (8), Patai László (6), Péter Rózsa (8), Radó Simon (6), Róna Zsigmond (8), Schay Géza (8), Somogyi Antal (8), Steiner Lajos (6), Suták József (8), Szántó Sándor (8), Tolnai Jenő (8), Waldapfel János (8). *Összesen 182 P.*

1935-re : Albert Anna (8), Buchböck Gusztáv (8), Cseh Elekné (8), Éber József (8), Fejes László (4), Fraknóy József (8), Hajós Géza (6), Horvay Béla (8), Ilosvay Lajos (8), Jáky József (8), Kedves Miklós (6), Klug Lipót (8), Kovács János (8), Kuzaila Péter (6), Lassovszky Károly (8), Luckhaub Gyula (8), Magdics Gáspár (8), Sz. Nagy Gyula (6), Oltay Károly (8), Papp Margit (8), Patai Imre (8), Pédery Attila (8), Somogyi Antal (8), Suták József (8), Szabó Gábor (8), Tass Antal (8), Winter József (8). *Összesen 204 P.*

1936-ra : Bauer Mihály 8 P.

2. Előfizetési díjak :

1933-ra : Közgazdasági Egyetem Math. Szemináriuma Bp. (8), Bolyai reálisk. Bp. (8), Széchenyi I. rg. Bp. (8), Apponyi A. leánygimn. Győr (6), Ybl M. reálisk. Székesfehérvár (2). *Összesen 32 P.*

1934-re : Közgazd. Egyetem Math. Szemináriuma Bp. (2), Bolyai reálisk. Bp. (8), Mária Ter. leánygimn. Bp. (8), Ciszt. Tanárképző Könyvtára Bp. (8), Norbertinum Könyvtára Bp. (2), Széchenyi I. rg. Bp. (8), Szt. Imre rg. Csongrád (1), Apponyi A. leánygimn. Győr (6), Széchenyi I. rg. Sopron (2). Ybl M. reálisk. Székesfehérvár (6). *Összesen 51 P.*

1935-re : Műegyet. I. Math. Gyüjtemény Bp. (8), Kalazantinum Bp. (8), Ciszt. Tanárképző Könyvtára Bp. (8), Technol. és Anyagvizsg. Intézet Bp. (7·94), Norbertinum Könyvtára Bp. (4), Szt. Imre rg. Csongrád (2), Révai M. reálisk. Győr (3), Ref. reálgimn. Miskolc (6), Széchenyi I. rg. Sopron (6), Garay rg. ifj. Könyvtára Szekszárd (5·40), Polg. isk. Tanárképző Főisk. Szeged (6), Horváth M. rg. Szentes (6). Továbbá a *M. kir. Vall. és Közokt. Minisztérium előfizetése a következő intézetek számára :* Verbőczy rg. Bp., Árpád rg. Bp., Berzsenyi D. rg. Bp., Madách I.

gimn. Bp., Áll. leánylic. (Erzsébet Nőiskola) Bp., Balassa B. rg. Balassagyarmat, Koháry I. rg. Gyöngyös, József nádor rg. Jászberény, Bessenyei Gy. rg. Kisvárda, Kisfaludi S. rg. Sümeg, Áll. rg. Szentgotthárd, Faludi F. rg. Szombathely, Könyves K. rg. Újpest, Deák F. rg. Zalaegerszeg, Dobó I. reálisk., Eger, Katona J. reálisk. Kecskemét, Loránttfy Zs. leánylic. Békéscsaba, Teleki Blanka leánylic. Mezőtúr, Kanizsai Dorottya leánylic. Újpest, Kir. kath. Széchenyi I. rg. Jászapáti (160 P). *Összesen 230 P 34 f.*

1936-ra : Ref. rg. Miskolc (2), Polg. isk. Tanárképző Főisk. Szeged (6). *Összesen 8 P.*

3. Segélyek, adományok.

Államsegély 400 P, a Magy. Tud. Akadémia segélye 1000 P, Nagy L. József adománya 20 P. *Összesen 1420 P.*

Budapesten, 1935. október 31-én.

Szabó Gábor s. k., pénztáros.

Újabb magyar matematikai könyvek.

Kürschák József: *Matematikai versenytételek.* Tanulóversenyein kitűzte az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat 1894—1928; megoldásokkal és jegyzetekkel; VIII+133 lap, Szeged, 1929.

Bolti ára 10 P; Társulatunk tagjai 40%-os kedvezménynyel megrendelhetik a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok kiadóhivatalában (Budapest, XI., Verpeléti-út 22, III. 4.)

Grosschmid Lajos: *Másodfokú alakok algebrája* (Matrixok és elemi osztók); XVI+741 lap, Budapest, 1933.

Bolti ára 20 P; Társulatunk tagjai 50%-os kedvezménynyel megrendelhetik Társulatunk pénztárosánál, Szabó Gábor tanár úrnál (Budapest, XI., Verpeléti-út 7).

Stachó Tibor: *Felsőbb mennyiségtan;* 623 lap, Budapest, 1933.

Bolti ára kötve 30 P. Főbizományos : Németh József könyvkereskedése (Budapest, XI., Horthy Miklós út 15).

Veress Pál: *Valós függvények,* 175 lap, Budapest, 1934.

Bolti ára fűzve 6 P, kötve 7·50 P; Társulatunk tagjai 20%-os kedvezménnyel megrendelhetik a Studium könyvkereskedelmi részvénytársaságnál (Budapest, IV., Kecskeméti-u. 8.)

Szász Pál: *A differenciál- és integrálszámítás elemei* (az előszót irta: Fejér Lipót), I. köt. XIV+476 lap, II. köt. X+460 lap, Budapest, 1935.

A két kötet bolti ára 38 P, mely összeg a Franklin-Társulatnál (Budapest, IV., Egyetem-u. 4) 3 pengős részletekben törleszthető.

Franklin-Társulat nyomdája. — Ábrai V.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA: ÁBRAI V.