MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

NEGYVENEGYEDIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES és POGÁNY BÉLA

BUDAPEST, 1934

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

negyvenegyedik kötetének tartalma.

Oldal

FEJÉR LIPÓT: A Fourier-féle sor és a hatványsor számtani közepeinek néhány új tulajdonságáról 1
— Über einige neue Eigenschaften der arithmetischen Mittel der Fourierreihe und der Potenzreihe 16
VERESS PÁL: Az absztrakt térről 17
— Über abstrakte Räume 34
RÉDEI LÁSZLÓ: Megjegyzések K. Borsuk egyik geometriai tételéhez 36
— Zu einem geometrischen Satz von Herrn K. Borsuk 40
OBLÁTH RICHARD: Egymásra következő számközök prímszámairól 41
— Sur la distribution des nombres premiers 44
JELITAI (WOYCIECHOWSKY) JÓZSEF: Sipos Pál egy kézirata és a kochleoid 45
— Über ein Manuskript von Sipos und die Kochleoide 52
GOMBÁS PÁL: Elméleti vizsgálatok a lithiumbromid-kristály dinamikájáról 55
— Theoretische Untersuchungen über die Dynamik des Lithiumbromidkristalls 86
Schlesinger Lajos 1864—1933 87
Pénztárosi kimutatás a befolyt díjakról 89, 177
Kövesligethy Radó 1862—1934 91
EGERVÁRY JENŐ: Jelentés az 1934. évi Kőnig Gyula jutalomról 93
— Bericht zur Verteilung des Julius Kőnig-Preises vom Jahre 1934 102
TURÁN PÁL: Az egész számok prímosztóinak számáról 103
— Über die Anzahl der Primfaktoren der ganzen Zahlen 129
BERKES ZOLTÁN: Vékony alkálifém-rétegek fényelektromos vizsgálata 131
— Lichtelektrische Untersuchungen an dünnen Alkali-Metallschichten 160
A Budapesti M. Kir. Tanárképzőintézet mennyiségtani továbbképző tanfolyama 162
Tanulóversenyek 168
Társulati élet 172

MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES ÉS POGÁNY BÉLA

NEGYVENEGYEDIK ÉVFOLYAM

1934

JANUÁR—JÚNIUSI FÜZET

BUDAPEST, 1934

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

Lap

FEJÉR LIPÓT: A Fourier-féle sor és a hatványsor számtani közepeinek néhány új tulajdonságáról ... 1

VERESS PÁL: Az absztrakt térről ... 17

RÉDEI LÁSZLÓ: Megjegyzések K. Borsuk egyik geometriai tételéhez ... 36

OBLÁTH RICHARD: Egymásra következő számközök primszámairól ... 41

JELITAI (WOYCIECHOWSKY) JÓZSEF: Sipos Pál egy kézirata és a kochleoid 45

GOMBÁS PÁL: Elméleti vizsgálatok a lithiumbromidkristály dinamikájáról 55

Schlesinger Lajos † ... 87

Pénztárosi kimutatás a befolyt díjakról ... 89

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Kőnig Dénes* (**I., Horthy Miklós-út 28., Hadik-pensio**), a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* (**I., Budafoki-út 8.**) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikban lehető rövidségre törekedjenek, azokhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghivók expedíciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Szabó Gábor* pénztáros címére (Budapest, I., Verpeléti-út 7.) intézendők. Postatakarékpénztári csekkszámla száma: 5997.

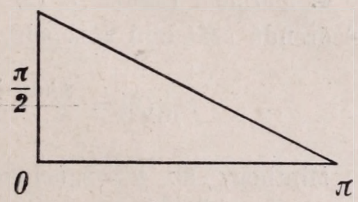
Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du sécretaire *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

A FOURIER-FÉLE SOR ÉS A HATVÁNYSOR SZÁMTANI KÖZEPEINEK NÉHÁNY ÚJ TULAJDONSÁGÁRÓL.[1]

1. Az utóbbi évtizedekben szép eredménnyel tanulmányozták a mathematikusok a FOURIER-féle sor és a hatványsor részletösszegeit, valamint ezeknek a számtani közepeit. A kutatók érdeklődése nem szorítkozik a különböző konvergencia-kérdésekre, amelyek a részletösszegek vagy a számtani közepek *végtelen* sorozatára vonatkoznak, hanem kiterjed az *egyes* közelítő alakzatok *menetére* is, összehasonlítva azt a kifejtett függvényével. Előadásomban néhány, utóbbi természetű új eredményt óhajtok megbeszélni.

2. Kezdem egy első elemi példával. Tekintsük azt a ferde egyenes vonaldarabot, mely a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ és $(\pi, 0)$ koordinátájú pontokat köti össze.



1. ábra.

Ez a vonaldarab az

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \qquad (1)$$

lineáris függvénynek felel meg, amelynek a $(0, \pi)$ számközhöz tartozó FOURIER-féle sinussora a következő alakú:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots, \qquad (2)$$

$$0 < x \leqq \pi.$$

[1] Az «Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat» 1933 dec. 14-iki ülésén tartott előadás. Ugyanezt az előadást előzőleg 1933 tavaszán, az északamerikai Egyesült-Államok több keleti és közép-nyugati egyetemén tartottam.

3. E sinussor n-indexű részletösszege (szelete):

$$S_n^{(0)}(x) = s_n(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}. \tag{3}$$

E részletösszegeket, mint ismeretes, nagyon alaposan vizsgálták meg, mivelhogy ezek képezik alapját a klasszikus GIBBS-féle jelenségnek. Ezekkel tehát nem akarok tovább foglalkozni, hanem csak egyszerűen GIBBS, BÔCHER és RUNGE ismert munkáira utalok.

Egy tulajdonságát a (3) alatti szeleteknek azonban mégis megemlitem, mert ez a következőkben szerepet játszik: az

$$s_n(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}$$

szelet pozitív, ha $0 < x < \pi$, bármi legyen is az n pozitív egészszám értéke. Ezt a tételt, mint sejtést, 1910-ben mondottam ki, s D. JACKSON és T. H. GRONWALL hamarosan be is bizonyitották. Később én egy harmadik bizonyítást, LANDAU pedig egy negyediket talált erre a teljesen elemi tényre.

4. Mármost áttérek a (2) alatti sinussor részletösszegeinek elsőrendű számtani közepeire:

$$S_n^{(1)}(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1}. \tag{4}$$

Minthogy az $y = s_n(x)$ görbék, $n = 1, 2, 3, \ldots$, mind az x-tengely fölött feküsznek, hacsak $0 < x < \pi$, tehát az

$$y = S_n^{(1)}(x), \qquad (n=1, 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

középgörbék is mind az x-tengely fölött haladnak, ha $0 < x < \pi$.

Másrészt meg egy a FOURIER-féle sor elsőrendű közepeire vonatkozó általános tételből tüstént következik, hogy

$$S_n^{(1)}(x) < \frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

ha $0 < x < \pi$; vagyis, hogy az $y = S_n^{(1)}(x)$ középgörbék mind teljesen az $y = \frac{\pi}{2}$ egyenes alatt feküsznek, ha mindig $0 < x < \pi$.

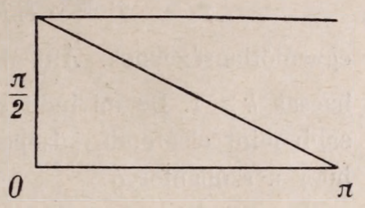
(Emlékeztetek még arra, hogy az $S_n^{(1)}(x)$ elsőrendű arithmetikai közepeknél a GIBBS-féle jelenség nem lép föl.)

1912-ben, továbbmenőleg, azt találtam, hogy az

$$y = S_n^{(1)}(x)$$

elsőrendű középgörbék teljesen az

$$y = f(x) = \frac{\pi - x}{2} \tag{7}$$



2. ábra.

egyenes alatt haladnak, ha $0<x<\pi$. Ugyanis, könnyű számolással, a $\frac{\pi-x}{2} - S_n^{(1)}(x)$ különbség számára a következő figyelemreméltó formula adódik:

$$\begin{aligned}\frac{\pi-x}{2} - S_n^{(1)}(x) &= \frac{\pi-x}{2} - \frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_n(x)}{n+1} = \\ &= \frac{1}{n+1}\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2 dt,\end{aligned} \tag{8}$$

amelyből nyilvánvaló, hogy

$$\frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_n(x)}{n+1} < \frac{\pi-x}{2}, \qquad n=0,1,2,3,\ldots;\ 0<x<\pi. \tag{9}$$

Összefoglalóan mondhatom, hogy az $S_n^{(1)}(x)$ elsőrendű közepekre

$$0 < S_n^{(1)}(x) < \frac{\pi-x}{2}, \qquad n=1,2,3,\ldots;\ 0<x<\pi \tag{10}$$

érvényes.

5. Tekintsük ezután a (2) alatti elementáris sinussor $S_n^{(2)}(x)$ másodrendű és $S_n^{(3)}(x)$ harmadrendű számtani közepeit. (Pl. a CESÀRO-félékre gondolhatunk). Ezek természetesen szintén eleget tesznek a

$$0 < S_n^{(2)}(x) < \frac{\pi-x}{2}, \tag{11}$$

$$0 < S_n^{(3)}(x) < \frac{\pi - x}{2}, \tag{12}$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots; \ 0 < x < \pi$$

egyenlőtlenségeknek. Általában $0 < S_n^{(k)}(x) < \frac{\pi - x}{2}$ érvényes, hacsak $k \geqq 1$. De mi indit engem arra, hogy áttérjek a magasabb mint elsőrendű közepekre? Újabban azt a tételt találtam, hogy a szóbanforgó

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots$$

sor $S_n^{(3)}(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, harmadrendű számtani közepei mind konvexek, fölülről nézve, a $0 < x < \pi$ közben. Ugyanezen sor $S_n^{(0)}(x)$ zérusrendű, $S_n^{(1)}(x)$ elsőrendű és $S_n^{(2)}(x)$ másodrendű közepei azonban nem mind konvexek a $0 < x < \pi$ közben. Amidőn tehát tekintjük egymásután e végtelen sinussor zérusadrendű, elsőrendű, másodrendű és harmadrendű arithmetikai közepeinek végtelen sorozatait, a $k = 3$ rendszámnál meglepő változás tárul elénk: a harmadrendű közepek mind konvexek fölülről nézve az egész $0 < x < \pi$ számközben.

Hogy az $S_n^{(0)}(x)$, $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$ közepek e tulajdonsággal nem birnak, ez következik e Cesàro-közepek második deriváltjára érvényes asymptotikus képletekből:

$$\frac{d^2}{dx^2} S_n^{(0)}(x) = n \left\{ \frac{\cos (2n+1)\frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} + \varepsilon_n(x) \right\}, \tag{13}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} S_n^{(1)}(x) = \frac{\sin (n+1)x + \delta_n(x)}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}, \tag{14}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} S_n^{(2)}(x) = -\frac{1}{4n \sin^3 \frac{x}{2}} \left\{ 2 \cos \frac{x}{2} + \cos (2n+3) \frac{x}{2} + \eta_n(x) \right\}, \tag{15}$$

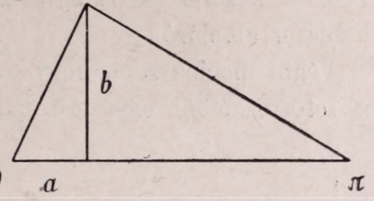
ahol

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n(x) = \lim_{n=\infty} \delta_n(x) = \lim_{n=\infty} \eta_n(x) = 0, \tag{16}$$

éspedig egyenletesen minden $\sigma \leqq x \leqq \pi - \sigma$ számközben $(\sigma > 0)$.

Ezen asymptotikus formulák segítségével az $S_n^{(0)}(x)$, $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$ középgörbék inflexióspontjait nagy n értékre könnyen diszkutálhatjuk, és nevezetesen a fenti állítást egyszerűen bebizonyíthatjuk.

6. Mármost áttérek egy második példa tárgyalására. Kössük össze egyenesvonallal a (0, 0) pontot az (a, b) ponttal, azután az (a, b)-t a $(\pi, 0)$ ponttal. Most



3. ábra.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{a}x, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq a, \\[2ex] b\dfrac{\pi - x}{\pi - a}, & \text{ha} \quad a \leqq x \leqq \pi, \end{cases} \tag{17}$$
$$0 < a < \pi; \; b > 0,$$

és az $f(x)$ Fourier-féle sinussora

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{2b}{a(\pi - a)} \Big\{ & \frac{\sin a \sin x}{1^2} + \\ & + \frac{\sin 2a \sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin na \sin nx}{n^2} + \cdots \Big\}. \end{aligned} \tag{18}$$

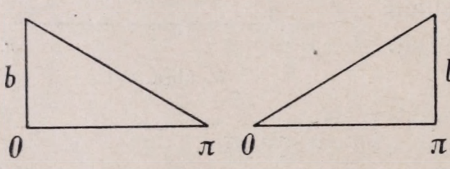
Mármost ez $f(x)$ «tetőfüggvény» $S_n^{(0)}(x)$, $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$, $S_n^{(3)}(x)$ közepeire is ugyanolyan hangzású tételek érvényesek, mint előbb; vagyis

$$0 < S_n^{(0)}(x), \tag{19}$$
$$0 < S_n^{(1)}(x) < f(x), \tag{20}$$
$$0 < S_n^{(2)}(x) < f(x), \tag{21}$$
$$0 < S_n^{(3)}(x) < f(x), \tag{22}$$

és az $S_n^{(3)}(x)$ harmadrendű arithmetikai közepek az n index minden értékére fölülről nézve konvexek az egész $0 < x < \pi$ közben.

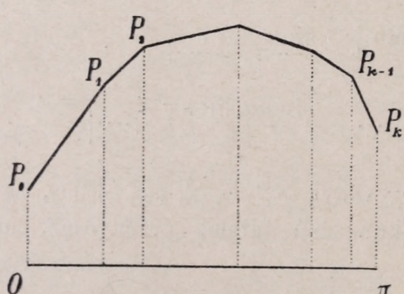
A tetőfüggvény Fourier-féle sinussora részletösszegeire vonatkozó $0 < S_n^{(0)}(x)$ egyenlőtlenség L. Koschmiedertől való. Az ő bizonyítása a ferde vonaldarab Fourier-féle sinussora részletösszegeinek az imént tárgyalt megfelelő tulajdonságán alapszik. A tetőfüggvényre vonatkozó többi tétel új. Bizonyitásuk részleteibe természetesen nem bocsátkozhatom ez előadás keretében, de később mégis egyet-mást mondani fogok a bizonyitási módszer alapjáról.

Végül megjegyzem, hogy az előbb tekintett ferde vonal esete a tető esetéből egyszerű határátmenettel adódik. Ha ugyanis b állandó marad és a zérushoz tart, akkor előáll egy a $(\pi, 0)$ ponton átmenő ferde egyenes vonal. Ha pedig b újra állandó marad és a a π-hez konvergál, akkor előáll egy a $(0, 0)$ kezdőponton átmenő ferde egyenes vonal. Mindkét határesetben a tetőfüggvényre az imént megfogalmazott tételek érvényesek.



4. ábra.

7. Legyen, harmadszor, $f(x)$ az a függvény, melyet egy $P_0, P_1, \dots, P_k$ szögpontokkal biró, nyilt egyenesvonalú poligon definiál. Ez a $k+1$ szögponttal biró poligon feküdjön $0<x<\pi$-re egészen az abszcisszatengely fölött, és legyen fölülről nézve konvex (nem-konkáv).



5. ábra.

Mármost emlékeztetek egy elemi tételre, amely W. Blaschke, Ph. Frank és G. Pick bizonyos vizsgálataiban játszik szerepet, amely szerint ilyen $f(x)$ poligonfüggvény mint végesszámú tetőfüggvény összege állitható elő:

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \cdots + \varphi_l(x). \tag{23}$$

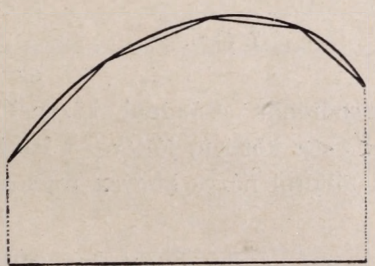
(Az előállitásban a 6. pontban emlitett határesetek is fölléphetnek; a φ tetőfüggvények száma legföljebb $(k+1)$-gyel, vagyis a nyilt $f(x)$ poligon szögpontjainak számával egyenlő.)

A $0 < x < \pi$ közben pozitiv és felülről konvex poligonfüggvénynek végesszámú tetőfüggvény összegeként való eme előállításából azonban egy csapásra következik, hogy az imént a tetőfüggvény FOURIER-féle sinussorára fogalmazott egyenlőtlenségek érvényesek a poligonfüggvény sinussorára is. Szoritkozom a poligonfüggvény $S_n^{(3)}(x)$ közepére. Az $f(x)$ (23) alatti előállításából először is következik, hogy az $f(x)$ poligonfüggvény $S_n^{(3)}(x)$ közepe — melyet talán $S_n^{(3)}[f]$-fel jelölök — egyenlő az összes $S_n^{(3)}[\varphi]$ közepek összegével, vagyis

$$S_n^{(3)}[f] = \sum_{\nu=1}^{l} S_n^{(3)}[\varphi_\nu]. \tag{24}$$

Minthogy az előzőek szerint az $S_n^{(3)}[\varphi]$ közepek mind pozitívok és fölülröl konvexek a $0 < x < \pi$ közben, és minthogy továbbá végesszámú ilyen függvény összege ugyancsak pozitiv és fölülről konvex a $0 < x < \pi$ közben, tehát már be is bizonyítottuk, hogy $f(x)$ poligonfüggvényünk $S_n^{(3)}(x)$ közepei pozitívok és konvexek a $0 < x < \pi$ közben.

8. Legyen végre $f(x)$ egy a $0 < x < \pi$ közben tetszőleges pozitiv és fölülről konvex (nem-konkáv) függvény. Ilyen $y = f(x)$ görbét egyenletesen és tetszőleges pontossággal tudunk megközeliteni egy ugyanilyen beírt egyenesvonalú poligonnal $(0 \leqq x \leqq \pi)$. Ámde a $0 \leqq x \leqq \pi$ közben egyenletesen konvergáló függvénysorozat határfüggvénye pozitiv és nemkonkáv a $0 < x < \pi$ közben, ha a függvénysorozat minden egyes tagja is evvel a tulajdonsággal bir. Így tehát triviális határátmenettel, amelynél n rögzítve van, nagyon könnyen a következő tételhez jutok:



6. ábra.

Ha az $f(x)$ függvény a $0<x<\pi$ közben pozitív, és fölülről nézve konvex (nem-konkáv), akkor FOURIER-féle sinussorának zérusrendű, elsőrendű, másodrendű és harmadrendű közepei (vagyis az $S_n^{(0)}(x)$, $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$ és $S_n^{(3)}(x)$ közepek) a következő tulajdonságokkal bírnak:

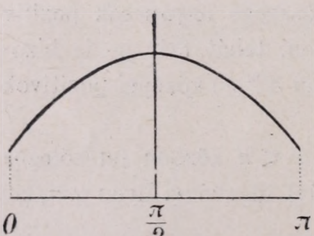
$$0 < S_n^{(0)}(x), \tag{25}$$
$$0 < S_n^{(1)}(x) \leqq f(x), \tag{26}$$
$$0 < S_n^{(2)}(x) \leqq f(x), \tag{27}$$
$$0 < S_n^{(3)}(x) \leqq f(x), \tag{28}$$

ha

$$0 < x < \pi;\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Azonkívül az $S_n^{(3)}(x)$ harmadrendű számtani közepek fölülről nézve mind konvexek az egész $0<x<\pi$ közben.

Az utóbbi, a konvexitásra vonatkozó tétel az alacsonyabbrendű $S_n^{(0)}(x)$, $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$ számtani közepekre nem érvényes.



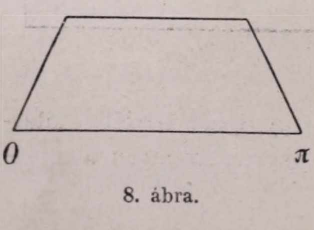
7. ábra.

9. Ehhez egy fontos megjegyzést fűzök. Ez vonatkozik arra az érdekes speciális esetre, amelyben az $y=f(x)$ görbe a $0 \leqq x \leqq \pi$ közben az

$$f(\pi - x) = f(x) \tag{29}$$

szimmetria-tulajdonsággal bír.

Ebben a szimmetrikus esetben az $f(x)$ függvénynek már az $S_n^{(2)}(x)$ másodrendű számtani közepei is mind konvexek az egész $0<x<\pi$ közben, föltéve — ismétlem — hogy $f(x)$ maga pozitív, és fölülről nézve konvex vagy nem-konkáv.



8. ábra.

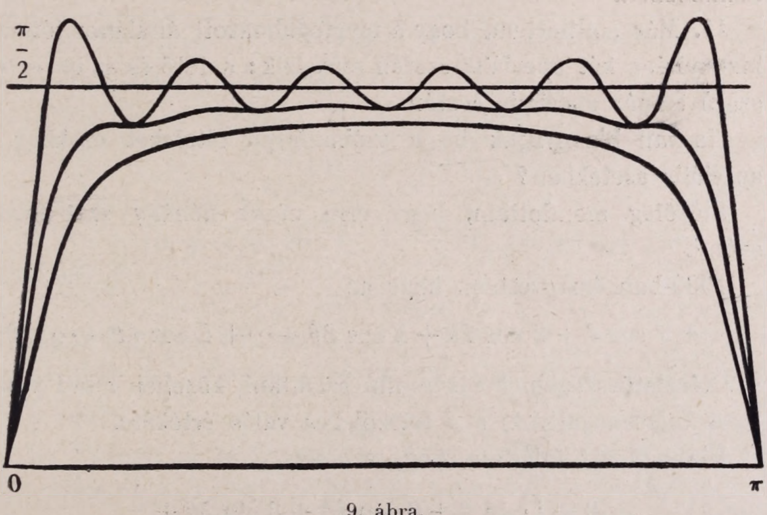
Ez a szimmetrikus esetre vonatkozó tétel mélyebben fekszik, mint az előbbi általános tétel. Bizonyítását föl lehet építeni arra az esetre, amikor az $y=f(x)$ függvényt a $0 \leqq x \leqq \pi$ közben egyenlőszárú trapéz ábrázolja.

10. A 9. ábra e szimmetrikus esetre vonatkozó tételt illusztrálja és pedig abban a képzelhető legegyszerűbb esetben, amidőn az $f(x)$ függvény állandó az egész $0 \leqq x \leqq \pi$ közben (tehát $y = f(x)$ fölülről nem konkáv). Az

$$f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < x < \pi, \tag{30}$$

függvény FOURIER-féle sinussora:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\pi}{2} = 2\Big(0 + \frac{\sin x}{1} + 0 \cdot \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \\ + 0 \cdot \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\Big). \end{aligned} \tag{31}$$



9. ábra.

A 9. ábra (melyet RAISZ IVÁN szíves fáradozásának köszönhetek) felső görbéje a (31) alatti sinussor 12 indexű részletösszegét, vagyis az

$$S_{12}^{(0)}(x) = s_{12}(x) = 2 \sum_{\nu=1}^{6} \frac{\sin(2\nu - 1)x}{2\nu - 1}$$

összeget ábrázolja. A középső görbe a (31) alatti sor 12 indexű elsőrendű számtani közepét, vagyis $S_{12}^{(1)}(x)$-et, az alsó görbe pedig e sor 12 indexű másodrendű, CESÀRO-féle számtani közepét: $S_{12}^{(2)}(x)$-et ábrázolja. Az érdekes $S_{12}^{(0)}(x)$, $S_{12}^{(1)}(x)$ görbéket megtalálhatjuk H. S. CARSLAW-nak a FOURIER-sorról írt könyvében a híres GIBBS-féle jelenség diszkussziójával kapcsolatban, amely jelenség az $S_n^{(0)}(x)$ részletösszegeknél föllép, míg az $S_n^{(1)}(x)$ elsőrendű számtani közepeknél már eltűnik. Ha már most ezt a három görbét a konvexitás-konkavitás szempontjából vizsgáljuk, azt tapasztaljuk, hogy az $S_{12}^{(0)}(x)$ és $S_{12}^{(1)}(x)$ középgörbék konvex és konkáv ívekből vannak összerakva. Ellenben az új $S_{12}^{(2)}(x)$ görbe, amely a (31) alatti sinussor 12 indexű másodrendű CESÀRO-féle közepét ábrázolja, fölülről nézve konvex az egész $0 < x < \pi$ számközben.

11. Már említettem, hogy a megfogalmazott általános tételek bizonyítása két speciális eseten nyugszik: a tető és az egyenlőszárú trapéz speciális esetén.

Hogyan bizonyítjuk be a szóbanforgó tételeket ezekben a speciális esetekben?

Előzőleg mondottam, hogy erre nézve néhány szót fogok szólni.

1900-ban észrevettem, hogy az

$$1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + 2\cos 3\theta + \cdots + 2\cos n\theta + \cdots \tag{32}$$

sor részletösszegeinek elsőrendű számtani közepei mind pozitívok (nem-negatívok) a θ tetszőleges valós értékére.

Újabban azt találtam, hogy a

$$\begin{aligned} 0 + 1\cdot\sin\theta + 0\cdot\sin 2\theta + 3\sin 3\theta + \\ + 0\cdot\sin 4\theta + 5\sin 5\theta + \cdots \end{aligned} \tag{33}$$

sor részletösszegeinek másodrendű számtani közepei (és pedig úgy a CESÀRO-, mint a HÖLDER-félék) mind pozitívok a $0<\theta<\pi$ közben.

Továbbá azt találtam, hogy a

$$0 + 1\cdot\sin\theta + 2\sin 2\theta + 3\sin 3\theta + \cdots \tag{34}$$

sor részletösszegeinek harmadrendű számtani közepei (és pedig úgy a CESÀRO-, mint a HÖLDER-félék) mind pozitívok a $0<\theta<\pi$

közben. (A 0 indexű közép természetesen mindkét sor esetében kivételt képez; ez a közép azonosan zérus).

Már most ez a két új tétel, amely a már EULER által is tekintett (33) és (34) alatti sorok bizonyos arithmetikai közepeire vonatkozik, adja az alapot a jelzett általános tételek bizonyítására.

Ezenkívül egy lemma játszik fontos szerepet, amelyet, kiindulva L. KOSCHMIEDER egy figyelemreméltó észrevételéből, a következőképpen fogalmaztam meg:

Ha $\lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0, \dots \lambda_n \geqq 0$, de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \neq 0$, úgy

$$\lambda_1 \sin x \sin y + \lambda_2 \sin 2x \sin 2y + \dots + \lambda_n \sin nx \sin ny \geqq 0 \tag{35}$$

akkor és csak akkor érvényes a

$$\begin{cases} 0 < x < \pi \\ 0 < y < \pi \end{cases} \tag{36}$$

négyzet belsejében, ha

$$\lambda_1 \sin x + 2\lambda_2 \sin 2x + \dots + n\lambda_n \sin nx \geqq 0 \tag{37}$$

érvényes a

$$0 < x < \pi \tag{38}$$

számköz belsejében.

Továbbá, ha (37)-ben a $>$ jel érvényes, akkor (35)-ben is a $>$ jel érvényes.

12. Előadásom első részében olyan $f(x)$ függvények szerepeltek, amelyek a $0 < x < \pi$ közben pozitivok és fölülről nézve konvexek (nem konkávok). Láttuk, hogy ha ilyen függvény FOURIER-féle sinussora részletösszegeire az ismételt arithmetikai középképezés processzusát alkalmazzuk, az $f(x)$ számára olyan trigonometrikus közelítő-görbéket nyerünk, amelyek éppen úgy pozitívok és fölülről konvexek a $0 < x < \pi$ közben, mint maga az $f(x)$. Ez az eredmény új irányban mutatja be az ismételt középképezés «kiegyenlítő hatását». Még több ilyen jellegű tételt találtam, de ezekről itt nem szólok. Inkább más tárgyra térek át, és bemutatom az ismételt középképezés egy másik újszerű kiegyenlítő hatását.

Legyen

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{39}$$

a $|z| < 1$ körben reguláris $f(z)$ analytikai függvény hatványsora. Fölteszem, hogy $f(z)$ «egyrétű» (schlicht) a $|z| < 1$ körben, vagyis, hogy ha z_1 és z_2 e kör belsejének két tetszőleges egymástól különböző helye, akkor az $f(z_1)$ és $f(z_2)$ függvényértékek is különböznek egymástól. Képletben:

$$f(z_1) \neq f(z_2), \text{ ha } z_1 \neq z_2, \quad |z_1|, |z_2| < 1. \tag{40}$$

Kérdem: $f(z)$ közelítő részletösszegei

$$S_n^{(0)}(z) = s_n(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n, \tag{41}$$
$$n = 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

egyrétűek, vagy nem-egyrétűek a $|z| < 1$ kör belsejében?

Erre nézve két példát fogok tárgyalni.

Első példa. Legyen

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots. \tag{42}$$

Itt $f(z)$ reguláris és egyrétű a $|z| < 1$ egységkörben. Minthogy azonban most

$$\frac{ds_n(z)}{dz} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}, \tag{43}$$

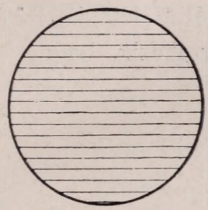
tehát a $\dfrac{ds_n(z)}{dz}$ gyökei mind az egységkör belsejében feküsznek, ha $n \geqq 2$. E szerint a geometriai haladvány részletösszegei nem egyrétűek a $|z| < 1$ egységkör belsejében.

Második példa. Második példának választom a logarithmus numerikus kiszámolására oly fontos

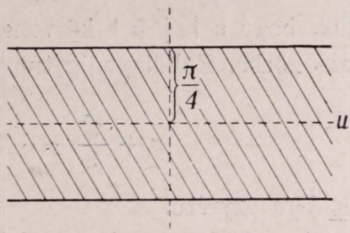
$$f(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots \tag{44}$$

hatványsort. Most a $w = u + iv = f(z)$ függvény megint reguláris és egyrétű a $|z| < 1$ körben. Közelebbről: $f(z)$ a z-sík

$|z| < 1$ egységkörének a belsejét leképezi a w-síknak egy $\frac{\pi}{2}$ szélességű, és az u-tengellyel párhuzamos végtelen sávjának a belsejére.



10. ábra.



11. ábra.

Ezúttal azonban $\big($a (44) alatti sor esetében$\big)$ az összes

$$s_n(z) = \frac{z}{1} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{z^{2n-1}}{2n-1}, \qquad (45)$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

részletösszegek is egyrétűek az egész $|z| \leqq 1$ zárt egységsugarú körlemezen. (Ez J. W. ALEXANDER eredménye). Erre a tényre egy rendkívül egyszerű bizonyítási módot találtam, melyet itt már csak azért is közlök, mert hasonló módszerrel bizonyítom be idevágó általános tételeimet is.

Legyen

$$s_n(e^{i\theta}) = u(\theta) + iv(\theta), \qquad (46)$$

akkor nyilván

$$u(\theta) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos(2\nu-1)\theta}{2\nu-1},$$
$$v(\theta) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(2\nu-1)\theta}{2\nu-1}. \qquad (47)$$

Minthogy, tudvalevőleg, a $v(\theta)$ sinuspolinom pozitív, ha $0 < \theta < \pi$, e szerint az $s_n(e^{i\theta})$ képpont $v(\theta)$ ordinátája pozitív, ha $e^{i\theta}$ az egység-körvonal fölső felét (pl. a pozitív értelemben) befutja. Ámde ugyanakkor

$$\frac{du(\theta)}{d\theta} = -\sum_{\nu=1}^{n} \sin(2\nu-1)\theta \qquad (48)$$

nem-pozitív, vagyis az $s_n(e^{i\theta})$ képpont $u(\theta)$ abscisszája monoton fogy. Ha most végre még figyelembe vesszük azt is, hogy a $|z|=1$ körvonal képe (melyet $s_n(e^{i\theta}) = u(\theta) + iv(\theta)$ létesít) szimmetrikus a függvénysík u-tengelyére, az előzőek alapján mondhatjuk, hogy a $|z|=1$ körvonalnak $s_n(e^{i\theta})$ által létesített képe JORDAN-görbe. Ebből pedig tudvalevőleg következik, hogy

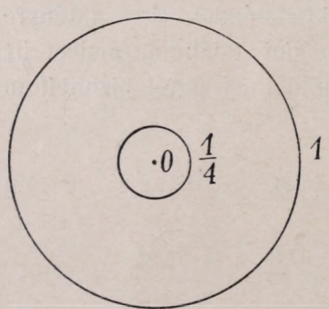
$$z + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{z^{2n-1}}{2n-1} \tag{49}$$

$|z| \leqq 1$-re egyrétű.

A tárgyalt két példa mutatja, hogy valamely, összetartási körében egyrétű hatványsor részletösszegei lehetnek egyrétűek is, meg nem is.

13. Már most SZEGŐ a következő mélyenfekvő tételt bizonyította be:

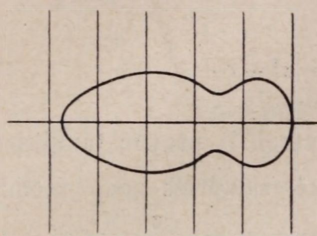
Ha $f(z)$ $|z|<1$-re reguláris és egyrétű, akkor hatványsorának összes részletösszegei egyrétűek a $|z|<\frac{1}{4}$ körben (természetesen $s_0(z) \equiv$ constans kivételével). Ez a tétel $\frac{1}{4}$-nél nagyobb sugárértékre nem érvényes.



12. ábra.

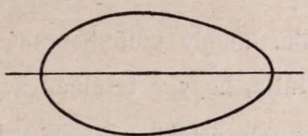
14. Ha, mint SZEGŐ, a $|z|<1$-re reguláris és egyrétű függvények összességére terjeszkedem ki, akkor a jelzett eredményhez nincs mit hozzátennem. Én azonban most az egyrétű $f(z)$ függvények egy alosztályára fogok szorítkozni. Először is fölteszem, hogy a $w=f(z)$ függvény $c_0, c_1, c_2, \dots c_n, \dots$ együtthatói mind valósak, vagyis, hogy a $|z|<1$ körnek a $w=f(z)$ függvény által a $w=u+iv$ függvénysíkon létesített képe szimmetrikus e sík u-tengelyére. Másodszor azt a lényeges kikötést teszem, hogy a $w=f(z)$ leképezésnél a $|z|=r$, $(0<r<1)$, körvonalaknak megfelelő képgörbék a »v-tengely szerint konvexek« legyenek, vagyis, hogy valamely, a v-tengellyel párhuzamos egyenes egy képgörbével

vagy két pontot, vagy egyet, vagy egyet se bírjon közösen (13. ábra). Ez akkor áll elő, ha $zf'(z)$ képzetes komponense állandó előjelű a $|z|<1$ kör felső felében.



13. ábra.

Ha a $|z|<1$ körnek $w=f(z)$ létesítette képe egyáltalában



14. ábra.

konvex (végesben fekvő, vagy akár nem), akkor föltételünk mindenesetre teljesül (14. ábra).

Már most azokra az egyrétű $f(z)$ függvényekre, amelyek a kimondott két föltételnek eleget tesznek, érvényes a következő tétel:

Az

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots \tag{50}$$

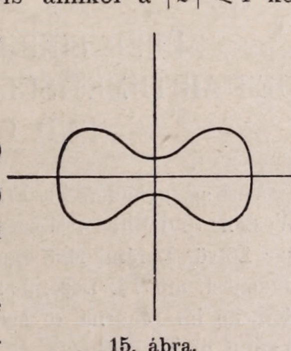
hatványsor részletösszegeinek $S_n^{(3)}(z)$ harmadrendű számtani közepei egyrétűek az egész $|z|<1$ kör belsejében (természetesen $S_0^{(3)}(z)\equiv$ constans kivételével).

15. Különösen érdekes az a speciális eset, amikor még $c_0=c_2=c_4=\cdots=0$ is érvényes, vagyis amikor a $|z|<1$ kör képe úgy az u valóstengelyre, mint a v képzetes tengelyre szimmetrikus.

Most

$$f(z)=c_1z+c_3z^3+c_5z^5+\cdots, \tag{51}$$

és érvényes a következő tétel: az (51) hatványsor $S_n^{(2)}(z)$ másodrendű közepei az egész $|z|<1$ körben egyrétűek.



15. ábra.

Különben az $f(z)$ függvényeknek erre az alosztályára élesíteni tudom a SZEGŐ-féle tételt, amely, mint láttuk, a leképező hatványsor eredeti részletösszegeire vonatkozik. Alosztályunk $f(z)$ függvényeire nézve ugyanis az összes szeletek egyrétűek a

$$|z| < \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{52}$$

körben.

A

$$\frac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + \cdots \tag{53}$$

példa, amely különben más tekintetben is nagyon tanulságos, mutatja, hogy e tételben az $\frac{1}{\sqrt{3}}$ körsugárérték nem pótolható nagyobb értékkel. (Megjegyzem, hogy $w = \frac{z}{1-z^2}$ a $|z| < 1$ kört az $\frac{1}{2}i$-től $+\infty i$-ig, és $-\frac{1}{2}i$-től $-\infty i$-ig egyenesvonalúan fölmetszett végtelen w-síkra képezi le.)

Röviden összefoglalva: előadásom első részében megmutattam, hogy miképpen lehet egy konvex görbe Fourier-féle sinussorából egyszerű középképezéssel ugyancsak konvex trigonometrikus approximációs-görbéket származtatni a görbe számára, második részében pedig megmutattam, hogy mikép lehet egyrétű függvény részletösszegeiből, szintén egyszerű középképezéssel, ugyancsak egyrétű leképezést szolgáltató approximációspolinomokat formálni a függvény számára.

Fejér Lipót.

ÜBER EINIGE NEUE EIGENSCHAFTEN DER ARITHMETISCHEN MITTEL DER FOURIERREIHE UND DER POTENZREIHE.

Vortrag, gehalten im Frühling 1933 an mehreren Universitäten des Westens und Mittelwestens der Vereinigten Staaten von Amerika und vor der Eötvös Loránd Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft in Budapest, am 14. Dezember 1933. Erscheint demnächst in englischer Sprache im «Journal of Mathematics and Physics of the Massachusetts Institut of Technology», 1934.

Leopold Fejér.

AZ ABSZTRAKT TÉRRŐL.

Bevezetés.

Az absztrakt tér fogalmának megalkotásához a matematika fejlődésének természetes útja vezetett. Ennek a fejlődésnek a lényege a fokozatos *általánosítás* és *összefoglalás* volt, amint azt az alábbiakban néhány szóval kifejtjük.

Az első lépés volt a fejlődésnek ezen az útján a betűszámnak, illetőleg a *képletnek* a bevezetése, amely ugyanazon számítás más és más számadatokkal való elvégzésének megkönnyebbítése végett történt. Ilyen képlet adja meg pl. a kamatot kifejezve a kamatlábbal, a tőkével és az idővel, vagy a megtett út nagyságát kifejezve az idővel és a sebességgel. Ezekben a képletekben meghatározott mennyiség (pl. 5 perc) helyett betű (t) áll, a betű éppen akármekkora mennyiséget helyettesíthet. A képlet az egy esetre talált, meghatározott mennyiségek közötti összefüggést *általánosítja* és az összes lehetséges esetekre vonatkozó eredményeket *összefoglalja*. Az összefoglalással egyben azonban egy új elméletnek, a betűkkel való számolásnak (algebrának) vetette meg az alapját.

A második lépés elvezet a képletről a *függvény* fogalmára. Ez a lépés abban áll, hogy absztrahálunk attól is, hogy a képletben szereplő betű milyen mennyiséget (időt, sebességet, tömeget) jelent és csak azt tartjuk szem előtt, hogy ez a mennyiség egy valós számmal mérhető. Az egyes képletek helyett ármost az őket reprezentáló függvényt tanulmányozzuk (pl. a fent példáknak felhozott képletek helyett a *lineáris függvényt)* és az arra nyert eredményeinket közvetlenül alkalmazzuk az azonos formájú képletek mindenikére.

Ennél a lépésnél is ismert eredmények általánositása és összefoglalása történt, ami azonban megint a matematika egy új fejezetének: a függvénytannak lett kiindulópontja.

Az itt vázolt gondolatmenetet fejezi ki POINCARÉ[1] a következő szavakkal:... «la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes...»

A harmadik lépés vezet el ezen az úton az absztrakt tér fogalmához. Ezt a lépést MAURICE FRÉCHET francia matematikus tette meg e század elején.[2] Ennek a lépésnek a szükségességét az adta meg, hogy foglalkoznunk kell olyan függvényekkel is, amelyeknek független változója nem valós szám, sőt nem is az n-dimenziós tér pontja, hanem pl. maga is egy közönséges értelemben vett függvény, vagy görbe, vagy halmaz és i. t. Egy ilyen függvény tehát a közönséges függvények, görbék, vagy halmazok egy halmazának minden eleméhez rendel egy valós számot. A függvény integrálja, a görbe ívhossza, vagy a halmaz mérete és ezeknek valamely összetett függvénye mind például szolgálhat erre az általánosabb függvény-fogalomra. A matematika egy igen fontos fejezetének, a variációszámitásnak feladata pl. függvény (vagy görbe) függvényének szélső értékeit megállapitani, ami ezeknek a függvényeknek beható tanulmányozását teszi szükségessé.

A függvény tanulmányozását azonban meg kell előznie a változási tartomány vizsgálatának. Ezeknek az általános függvényeknek a változási tartománya nagyon különböző lehet, az állhat pl. ponthalmazokból, folytonos függvényekből, mérhető függvényekből és i. t. Ezeket a változási tartományokat nem akarjuk külön tárgyalni, mert bizonyos tulajdonságok nem a változókhoz vannak kötve, hanem azoknak olyan sajátságaihoz, amelyek más változóknak is megvannak. Ezek szerint a sajátságok szerint kell tehát a változókat csoportositanunk, hogy az

---

[1] H. POINCARÉ: L'avenir des mathématiques, pl. Rend. di Palermo 26 (1908), p. 156.

[2] M. FRÉCHET: Sur quelques points du calcul fonctionel, Rend. di Palermo 22 (1906), p. 1—74. L. még: Les espaces abstraits. Paris. 1928.

összes típusokkal külön-külön való foglalkozást elkerülhessük és általános tételeket nyerhessünk.

Így már elérkeztünk ahhoz a ponthoz, hogy POINCARÉ szerint a különböző dolgoknak egy nevet adjunk. Az általános, vagy mint mondani fogjuk, *absztrakt* függvény (*funkcionális* vagy *operáció*) változási tartományát *absztrakt térnek* nevezzük, a változó maga az absztrakt tér egy *eleme*. Hogy mik a tér elemei, azt szándékosan nem nevezzük meg, ezek éppen azok a különböző dolgok, melyeknek most egy nevet adtunk. Lehetnek az elemek az n-dimenziós tér pontjai is, s így az absztrakt tér fogalma magában foglalja az n-dimenziós teret is. A «tér» elnevezés itt azért szerepel, mert egyrészt ez a fogalom lép ebben az általánosításban az n-dimenziós tér helyébe, másrészt pedig a közönséges térre ismert elemi fogalmakat is átvisszük reá.

Legkevésbbé távolodunk el a közönséges tértől, ha absztrakt terünkben *quantitatív összefüggések megállapíthatóságát*, szóval bizonyos *metrikát* tételezünk föl. Az absztrakt tér legegyszerűbb fajtája az lesz, amelyben bármely két elem *távolsága* definiálva van. Hogy miben áll a távolságnak ez a definiciója, azt éppen úgy figyelmen kívül hagyjuk, mint ahogy a tér elemeit sem neveztük meg. Fel kell azonban tennünk, hogy a távolságnak így bevezetett fogalma az euklidesi távolság lényeges tulajdonságaival bír (l. a 3. §-t), különösképpen, hogy az nem-negatív szám.

Ha a távolság értelmezve van, akkor az infinitezimális fogalmak már azonnal definiálhatók. Nevezetesen az $e_1, e_2, e_3, \ldots$ elemek sorozatát *konvergens*-nek mondjuk, ha van a térnek oly e_0 eleme, melyre nézve az (e_ν, e_0) távolság 0-hoz tart; ez esetben az e_0 elem a sorozat limesze. A limesz fogalma már magával hozza a torlódási elem, a zárt halmaz, a folytonosság és i. t. fogalmát is. (L. alább részletesen.)

De a konvergenciát nem tudjuk mindig távolság segítségével értelmezni, erre példa a függvénysorozatoknak közönséges értelemben való konvergenciája. Nem ismerünk u. i. olyan távolságdefiniciót, mely a (mondjuk $\langle 0, 1\rangle$ szakaszban értelmezett egyváltozós, esetleg csak a folytonos) függvények minden párjára értelmezve volna úgy, hogy az (f_ν, f) távolság akkor és csak akkor tartana 0-hoz, amikor f_ν konvergál az f-hez. Foglalkoznunk kell tehát olyan térrel is, amelyben távolság nincs definiálva, csak konvergencia.

De még tovább is mehetünk. Ahhoz, hogy halmazok egymásra való leképezésének folytonosságáról beszélhessünk, elégséges az, hogy a térben a halmaz torlódási elemének fogalma meg legyen állapitva. A torlódási elem azonban nem értelmezhető mindig konvergens sorozatok bevezetésével. Pl. ha az euklidesi térben torlódási elemen a halmaz *kondenzációs pontját* értjük (olyan pontot, melynek minden környezetében a halmaznak nem-megszámlálható sok pontja van), akkor a torlódási elem nyilván nem definiálható sorozattal, vagyis megszámlálható sok elemmel.

Így jutunk el az absztrakt térnek mind általánosabb és általánosabb fajtájához. A következő pontban látni fogjuk, hogy még abban a legáltalánosabb esetben is, midőn a térre semmilyen infinitezimális fogalmat nem vezetünk be, tudunk használható tételeket felállitani.

Végül még egy kérdést. Mit nyujt nekünk az absztrakt tér elmélete?

Az absztrakt térre vonatkozó vizsgálatok kettős célt szolgálnak. Az első cél gondolkozás-ökonomiai értékű, hogy t. i. a lényegileg azonos tételeket és bizonyitásokat ne kelljen a különböző elemekből álló terekre külön-külön ismételnünk. Látni fogjuk például, hogy a közönséges, egyváltozós tartományra és függvényre ismert tételek nagy része bizonyitásával együtt átvihető a legkülönbözőbb elemekből álló terek egy nagy csoportjára.

A második cél inkább elméleti jellegű. Ez t. i. abban áll, hogy az egyes feltevések horderejét megismerjük. Példákat fogunk látni arra, hogy milyen tételek következnek csupán abból, hogy a térben a konvergencia értelmezve van s az bizonyos egyszerű követelményeket kielégit; s mely tételekhez szükséges a távolság fogalma vagy még más további feltevés és i. t. Ezek a vizsgálatok mutatják meg tisztán, hogy bizonyos tények valóban min múlnak, aminek a belátása a dolgok maradék nélküli megértéséhez elengedhetetlen.

A következő cikkekben ezekből a vizsgálatokból óhajtunk valamit izelitőnek nyujtani.

1. §. Az állítások sorozatára vonatkozó tétel.[3]

Egy halmaz e elemeire kimondható (értelemmel biró) valamely állitást jelöljünk $A(e)$-vel. Azt a tényt, hogy az $A_1(e)$ állitásnak bármely e_0-ra való érvényességéből következik a $A_2(e)$ állitásnak érvényessége is az e_0-ra, jelben így fejezzük ki: $A_1(e) \rightarrow A_2(e)$; szavakban: $A_1(e)$-ből következik $A_2(e)$. Pl. ha e komplex számot jelent és $A_1(e)$ az az állitás, hogy $|e| < 1$, $A_2(e)$ pedig az, hogy $|e| < 2$; akkor $A_1(e) \rightarrow A_2(e)$.

Az e-re vonatkozó állitásoknak $A_1(e)$, $A_2(e)$, $A_3(e)$,... sorozatát *monoton*-nak mondjuk, ha

$$A_1(e) \rightarrow A_2(e) \rightarrow A_3(e) \rightarrow \ldots$$

Pl. jelentsen e ismét komplex számot és legyen $A_\nu(e)$ az az állitás, hogy $|e| < \nu$, akkor az $\{A_\nu(e)\}$ sorozat $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ monoton.

Az állitások monoton sorozatára vonatkozik a következő

I. tétel: *Legyen E az e elemeknek valamely halmaza és $\{A_\nu(e)\}$ az e-re vonatkozó állításoknak egy monoton sorozata. Ha E olyan tulajdonságú, hogy*

1. *valahányszor $e \varepsilon E$ (azaz e bentfoglaltatik E-ben), mindig van a sorozatban oly $A_n(e)$ állítás $(n = n(e))$, mely az e-re érvényes,*

2. *az E minden E' végtelen részhalmazához található egy oly $A_m(e)$ állítás $(m = m(E'))$, mely az E' halmaz végtelen sok elemére érvényes,*

[3] L. szerzőtől: Über eine Beweismethode in der Theorie der abstrakten Räume. Acta Szeged. VI. (1932). p. 34—45.

akkor van a sorozatban egy olyan $A_N(e)$ állítás, mely az E összes elemeire érvényes.

A bizonyítás a következő módon történhetik. Az 1. feltétel szerint minden e-hez tartozik egy $A_n(e)$ állítás, mely az e-re érvényes, s akkor az állítássorozat monotonitása miatt minden nagyobb indexű állítás is érvényes e-re. Van tehát az e-hez egy *legelső* (legkisebb indexű) érvényes állítás. Ennek az állításnak az indexe természetesen függ az e-től. Vegyük szemügyre ezeknek az indexeknek a halmazát, ha az e az E halmaz összes elemeit befutja. Ez a halmaz bizonyos természetes számoknak a halmaza; bebizonyítjuk, hogy *korlátos* halmaz.

Ha ugyanis nem volna korlátos, akkor tartalmazna egy $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ minden határon túl növekvő sorozatot. E sorozatban n_k jelöli valamely e-re vonatkozó legelső érvényes állítás indexét. Tartozik tehát az n_k-hoz legalább egy e_k elem (esetleg több vagy végtelen sok is), amelyre a kisebb indexű állítások egyike sem érvényes. Válasszunk minden n_k-hoz egy ilyen e_k elemet és alkossuk meg ezekből az

$$e_1, e_2, e_3, \dots \qquad (*)$$

végtelen sorozatot.[4] Az e_k elemre az $A_\nu(e)$ állítások közül a $\nu < n_k$ indexűek nem, az $\nu \geqq n_k$ indexűek azonban mind érvényesek. A (*) sorozat az E halmaznak egy végtelen részhalmaza: E'. Ehhez az E' részhalmazhoz azonban a 2. feltevéssel ellentmondásban nincs olyan $A_m(e)$ állítás, mely az E' végtelen sok ele-

---

[4] A bizonyításnak ebben a pontjában ki van használva a következő axióma: ha adva van az E_1, E_2, $E_3, \dots$ *megszámlálható* sok, páronként közös pont nélküli halmaz, akkor van olyan E halmaz, mely az E_ν halmazok mindegyikéből pontosan egy elemet és csak ezeket az elemeket tartalmazza.

Megjegyezzük, hogy ez az axióma a klasszikus analízis felépítéséhez elengedhetetlen (pl. már a folytonos függvényekre vonatkozó elemi tételek bizonyításához is szükséges); azonban lényegesen kevesebbet követel, mint a sokak által kifogásolt ZERMELO-féle kiválasztási axióma, amely az E halmaz létezését arra az esetre is posztulálja, amelyben az $\{E_\nu\}$ halmaz-sorozat helyett a halmazoknak akármilyen számosságú halmaza van adva.

mére érvényes volna. Bármilyen szám ugyanis az m, az $A_m(e)$ állítás legfeljebb csak azokra az e_k elemekre érvényes, melyeknek indexe $k \leqq m$, tehát csak véges sok elemre.

Az n_k számok halmaza tehát korlátos, s így van oly N természetes szám, hogy $n_k \leqq N$ minden k-ra. Ez pedig azt jelenti, hogy az $A_N(e)$ állítás az E halmaz minden e elemére érvényes; a kimondott tételt tehát bebizonyitottuk.

Megjegyezzük, hogy az állítás-sorozat monotonitásának a feltevése is elkerülhető. Ha t. i. egyáltalában van végtelen sok olyan állítás, amely a halmaz elemeire kimondható, akkor azokból mindig előállíthatunk egy monoton sorozatot a következő módon: $A'_1(e)$ állítás legyen azonos az $A_1(e)$ állítással, az $A'_n(e)$ állítás pedig legyen az, hogy az e elemre az $A_1(e), A_2(e), \dots A_n(e)$ állítások közül *legalább az egyik* érvényes. A szokásos jelöléssel:

$$A'_n(e) = A_1(e) \vee A_2(e) \vee \cdots \vee A_n(e).$$

Az $A'_n(e)$ sorozat nyilván monoton, reá a fent bebizonyitott tételt alkalmazva, mondhatjuk:

Ha egy halmaz olyan tulajdonságú, hogy

1. *a halmaz minden elemére érvényes az*

$$A_1(e),\ A_2(e),\ A_3(e), \dots$$

állítássorozat egy-egy állítása,

2. *a halmaz minden végtelen részhalmazához tartozik egy olyan állítás, mely e részhalmaz végtelen sok elemére érvényes,*

akkor van az állítás-sorozatban véges sok olyan állítás, hogy a halmaz minden elemére már e véges sok állítás közül is érvényes valamelyik.

A következő cikkekben ezeket a tételeket alkalmazzuk olyan térre, melyre már infinitezimális elemek bevezetését is feltesszük.

2. §. Topologikus tér és topologikus térben értelmezett függvény.

Topologikusnak[5] nevezzük azt a teret, amelyben az elemek valamely sorozatának konvergenciája és a konvergens sorozat limesze definiálva van oly módon, hogy

1. az $e, e, e, \ldots$ azonos elemekből álló sorozat konvergens és limesze e;

2. ha az $e_1, e_2, e_3, \ldots$ sorozat konvergens és limesze e, akkor a sorozat minden $e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \ldots$ részsorozata is konvergens és limesze ugyancsak e.

A konvergencia jelölésére a szokásos jeleket tartjuk meg itt is: $e_\nu \to e$, vagy $\lim\limits_{\nu \to \infty} e_\nu = e$.

Az ismert konvergencia-fogalmak (számsorozat konvergenciája, függvénysorozat közönséges vagy egyenletes konvergenciája és így tovább) mind kielégítik ezt a két követelményt.

A topologikus tér E halmazának az e elem *torlódási eleme*, ha van olyan, az E elemeiből álló, konvergens sorozat, melynek limesze e. *Zárt*-nak nevezzük az E halmazt, ha tartalmazza minden torlódási elemét. *Kompakt*-nak nevezzük az E halmazt, ha E minden végtelen részhalmazának van torlódási eleme.

A közönséges, n-dimenziós tér *topologikus*, ha benne a konvergenciát a szokásos módon definiáljuk, ($P_\nu \to P$, ha a $P_\nu P$ távolság 0-hoz tart). Az n-dimenziós térben minden *korlátos* halmaz kompakt, ez éppen az ismeretes BOLZANO-WEIERSTRASS-féle tétel. Általában azonban a topologikus térben nem tudunk korlátos és nem-korlátos halmazokat megkülönböztetni, mert hiszen a korlátosság már metrikus fogalom; ezért a BOLZANO-WEIERSTRASS-féle tétel érvényessége itt mint a kompakt halmaz definiciója szerepel.

---

[5] Az elnevezés az irodalomban nem egységes; HAUSDORFF szűkebb, FRÉCHET tágabb értelemben használja a *topologikus* nevet, mint az itt történik. De ha a tér kompakt halmazairól beszélünk, nincs célja annak, hogy általánosabb tér-definiciót használjunk s ezért alkalmazzuk itt ebben az értelemben a *topologikus* nevet.

Topologikus terünkben (vagy annak egy halmazán) értelmezünk egy $f(e)$ valós függvényt, ha a tér (a részhalmaz) minden e eleméhez egy $f(e)$ valós számot rendelünk hozzá.

Az E halmazon értelmezett $f(e)$ függvényt az e_0 helyen, $(e_0 \varepsilon E)$, *folytonosnak* nevezzük, ha $f(e_\nu) \to f(e_0)$, valahányszor $e_\nu \to e_0$ és $e_\nu \varepsilon E$ minden ν-re.

Az E halmaz minden elemén folytonos függvényt az *E halmazon folytonosnak* mondjuk.

Az

$$A_1(e) \to A_2(e) \to A_3(e) \to \cdots$$

monoton állítás-sorozatot *folytonosnak* nevezzük, ha az a következő feltételt kielégíti: ha e_0-ra az $A_n(e)$ állítás érvényes és $e_\nu \to e_0$, akkor van a sorozatban olyan $A_{n+p}(e)$ állítás $(p \geqq 0)$ és van olyan m természetes szám, hogy az $A_{n+p}(e)$ állítás az e_ν elemre is érvényes, hacsak $\nu \geqq m$.

A topologikus térre vonatkozólag következik mármost I. tételünkből az alábbi

II. tétel: *Ha az E halmaz kompakt és zárt, továbbá valahányszor $e_0 \varepsilon E$, mindig van az*

$$A_1(e) \to A_2(e) \to A_3(e) \to \cdots$$

folytonos, monoton állítás-sorozatban oly $A_n(e)$ állítás, mely az e_0-ra érvényes,

akkor van az állítás-sorozatban oly $A_N(e)$ állítás, mely E valamennyi elemére érvényes,

E tétel feltételei szerint ugyanis az I. tétel 1. követelménye nyilván ki van elégítve. De a 2. követelmény is teljesül, mert ha E' az E-nek végtelen részhalmaza, akkor E'-nek van torlódási eleme: e_0, minthogy E kompakt. Van tehát az E-ben oly $\{e_\nu\}$ sorozat, mely e_0-hoz konvergál. De e_0 maga is eleme E-nek, mert E zárt és így érvényes rá egy $A_n(e)$ állítás. Az állítás-sorozat folytonossága miatt érvényes e szerint egy $A_{n+p}(e)$ állítás egy elég nagy indextől kezdve az $\{e_\nu\}$ sorozat minden elemére, tehát végtelen sok elemre. Ezért az I. tétel alkalmazható s abból azonnal következik a II. tétel állítása.

Ennek a tételnek alkalmazására példaképpen megmutatjuk, hogy az alábbi, a közönséges függvényekre jól ismert WEIERSTRASS-féle tétel minden topologikus térben értelmezett függvényre is fennáll:

Ha az $f(e)$ függvény egy topologikus tér E kompakt és zárt halmazán folytonos, akkor $f(e)$ az E-n korlátos és értékkészletének alsó és felső határát E-ben fel is veszi.

Legyen ugyanis $A_n(e)$ az az állítás, hogy

$$|f(e)| < n.$$

Az $\{A_n(e)\}$ állítás-sorozat nyilván monoton. De folytonos is, mert ha $e_\nu \to e_0$ és

$$|f(e_0)| < n,$$

akkor az $f(e_\nu) \to f(e_0)$ miatt elég nagy ν-re

$$|f(e_\nu)| < n;$$

tehát ezekre az e_ν elemekre is érvényes az $A_n(e)$ állítás. Van e szerint oly $A_N(e)$ állítás, mely az E halmaz minden elemére érvényes, vagyis

$$|f(e)| < N,$$

tehát az $f(e)$ függvény korlátos.

Az $f(e)$ függvény értékkészletének, mint korlátos halmaznak, van véges felső határa: M és véges alsó határa: m. Válasszuk az

$$M_1 < M_2 < M_3 < \cdots$$

monoton növekvő sorozatot úgy, hogy

$$\lim_{\nu \to \infty} M_\nu = M$$

legyen.

Ha ármost az E halmaznak nem volna olyan e_0 eleme, amelyre nézve

$$f(e_0) = M,$$

akkor az E minden elemére

$$f(e) < M$$

volna. Akkor pedig volna az M_ν számok sorozatában minden e elemhez olyan M_n szám is $(n = n(e))$, hogy

$$f(e) < M_n.$$

Tekintsük most ennek az utolsó egyenlőtlenségnek teljesülését az $A_n(e)$ állításnak. A II. tételből az előbbi módon következik, hogy van akkor olyan $A_N(e)$ állítás is, mely E minden elemére érvényes. Ez pedig azt jelenti, hogy minden e-re

$$f(e) < M_N < M,$$

tehát M nem volna az $f(e)$ értékkészletének felső határa.

Kell tehát az E halmazban olyan e_0 elemnek lenni, melyre nézve $f(e_0) = M$, s ugyancsak egy olyan e_0' elemek is, melyre nézve $f(e_0') = m$ s ezzel a WEIERSTRASS-tételt igazoltuk.

3. §. Metrikus tér.

Metrikus-nak nevezzük a teret, ha abban a *távolság* értelmezve van, azaz a tér minden e_1, e_2 elempárjához hozzá van rendelve egy (e_1, e_2) valós szám, mint e két elem távolsága, éspedig úgy, hogy

1. (e_1, e_2) akkor és csak akkor zérus, ha az e_1 és e_2 elemek összeesnek;

2. a tér bármely három elemére:

$$(e_1, e_2) \leqq (e_1, e_3) + (e_2, e_3).$$

Ebből a két feltételből már következik, mint az könnyen kimutatható, hogy

3. ha e_1 és e_2 a tér két különböző eleme, akkor

$$(e_1, e_2) = (e_2, e_1) > 0.$$

A 2. feltételt a tér *háromszög-tulajdonságának* szokás nevezni, mert ez a közönséges térre vonatkozólag azt mondja ki, hogy a háromszög két oldalának összege nem kisebb a harmadik oldalnál.

A metrikus tér valamely elemeiből álló

$$e_1, e_2, e_3, \ldots$$

sorozatot *konvergensnek* nevezzük, ha van a térben oly e_0 elem, melyre nézve az (e_ν, e_0) távolság a 0-hoz tart, ha $\nu \rightarrow \infty$. A konvergencia értelmezésével metrikus terünket topologikussá tettük s így reá mindazok a fogalmak, melyeket a topologikus térre bevezettünk, már minden további nélkül definiálva vannak. De a távolság fogalmának felhasználásával ezeket a fogalmakat most már tovább is elemezhetjük, és újabb fogalmakat is bevezethetünk.

Nevezetesen az e elem *ϱ-sugarú környezetén* értjük azoknak az elemeknek halmazát, melyek e-től ϱ-nál kisebb távolságra vannak. Az e elem az E-halmaznak *belső eleme*, ha van e-nek olyan környezete, mely teljesen az E-ben van. *Nyilt halmaznak* nevezzük azt a halmazt, amelynek minden eleme belső elem.

Ami mármost a konvergencia fogalmát illeti, valamely $\{e_\nu\}$ konvergens sorozatra a háromszög-tulajdonságból következik, hogy az (e_m, e_n) távolság is tetszésszerinti kicsiny, ha az m és n elegendő nagy. A sorozat konvergenciájának tehát szükséges feltétele az úgynevezett CAUCHY-féle feltétel, hogy t. i. minden pozitív ε számhoz található legyen oly N küszöbszám, hogy $(e_m, e_n) < \varepsilon$, valahányszor $m > N$ és $n > N$.

Ez a feltétel a valós számok tartományában és a közönséges, n-dimenziós térben elegendő is ahhoz, hogy az $\{e_\nu\}$ sorozat konvergens legyen. Általában azonban nincs így, a CAUCHY-féle feltétel pl. a racionális számok metrikus terében, két szám távolságának a közönséges módon (különbségük abszolut értékével) való definiciója mellett, nem elegendő a konvergenciához.

Azt a metrikus teret, amelyben a CAUCHY-féle feltétel elegendő a konvergenciához, *teljesnek* nevezzük. Teljes metrikus térben a CAUCHY-féle feltétel tehát a konvergenciának szükséges és elegendő feltétele.

A távolság fogalma lehetővé teszi, hogy (miként a vektoroknál a *hosszt*, a számoknál az *abszolút értéket* értelmezzük) a metrikus tér elemeinek *hosszát* is bevezessük. A térben egy tetszésszerinti elemet *null-elemnek* választva (jele 0), az e elem hosszán per definitionem az

$$\| e \| = (e, 0)$$

távolságot értjük.

Azt a halmazt, amelyben az elemek hossza egy véges korlát alatt van, *korlátosnak* nevezzük; a korlátosság természetesen független a 0-elem választásától. Azonnal belátható a háromszög-tulajdonságból, hogy korlátos halmazban bármely két elemnek egymástól való távolsága is korlátos. Továbbá, ha $\{e_\nu\}$ konvergens sorozat és $\lim e_\nu = e_0$, akkor az e_ν elemekből álló halmaz korlátos és ha e a tér egy tetszésszerinti eleme, az (e_ν, e) számsorozat is konvergens és

$$\lim (e_\nu, e) = (e_0, e).$$

Kiemeljük ennek az utolsó összefüggésnek egy különösen fontos esetét, hogy t. i.

$$\lim \| e_\nu \| = \| e_0 \|.$$

Ezek a tények a számsorozatokra vonatkozólag jól ismertek. Most látjuk, hogy érvényességükhöz a számoknak éppen csak az a tulajdonsága szükséges, hogy a szám abszolút értéke az 1. és 2. követelményeknek megfelelőleg legyen definiálva. Igy *a bizonyítás megváltoztatása nélkül* átvihetők e tételek minden metrikus térre. Ezzel konkrét példákat is adtunk arra, amit a bevezetésben az absztrakt tér-elmélet célját illetőleg általánosságban mondottunk. Most még, annak a megmutatására is, hogy milyen természetű konvergens-sorozatokra érvényesek tételeink, a közönséges, n-dimenziós tér (R_n) mellett példaképpen felsorolunk néhány más metrikus teret.

Legelső példának választjuk a *folytonos függvények terét*, melyet rövidség kedvéért F-térnek fogunk nevezni. Ennek a térnek elemei az $a \leqq x \leqq b$ zárt szakaszban értelmezett egyváltozós valós függvények; az $f(x)$ és $g(x)$ elemek távolságát így értelmezzük:

$$(f, g) = \operatorname*{Max}_{a \leqq x \leqq b} | f(x) - g(x) |.$$

A konvergencia itt tehát a függvénysorozat *egyenletes konvergenciáját* jelenti, amiből evidens, hogy *az F-tér teljes.*

A második példának választandó *Q-tér* elemei az n-dimenziós tér valamely pozitív mértékű E halmazán értelmezett, négyzetükkel egyetemben LEBESGUE-féle értelemben integrálható függvények. A távolság négyzete legyen az

$$(f, g) = \int_E (f-g)^2 \, dv$$

szám. A konvergencia e szerint *átlagos konvergenciát* jelent, azaz $f_\nu \to f$, ha

$$\int_E (f - f_\nu)^2 \, dv \to 0.$$

Hogy a Q-tér is teljes, metrikus tér, az minden nagyobb fáradság nélkül igazolható.

Harmadik példának vegyük a HILBERT-*féle teret.* Ennek elemei azok az

$$X = X(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

végtelen sok koordinátájú *vektorok,* melyekre a

$$\sum_1^\infty x_\nu^2$$

sor konvergens. Az X és Y vektorok távolságának négyzete legyen:

$$(X, Y) = \Sigma (x_\nu - y_\nu)^2.$$

A részletekbe való bocsátkozás nélkül megjegyezzük, hogy ha itt x_ν a Q-tér valamely f elemének egy teljes, orthogonális függvényrendszerre vonatkozó ν-edik FOURIER-együtthatóját jelenti, akkor az X-vektornak az f függvényhez való hozzárendelésével a Q-tér egy-egyértelműen és folytonosan leképezhető a HILBERT-féle térre. Ez éppen az ismeretes RIESZ-FISCHER tételnek a lényege. A leképezésnél a RIESZ-PARSEVAL formula következtében a távolság számértéke is változatlanul megmarad.

4. §. Metrikus térben értelmezett folytonos függvény.

Minthogy a metrikus tér egyben topológikus is, a 2. §-ban bebizonyított WEIERSTRASS-tétel a metrikus térben értelmezett folytonos függvényre is igaz. A távolság fogalmának felhasználásával azonban itt ismét többet is mondhatunk a folytonos függvényre vonatkozólag. De mielőtt erre rátérünk, a metrikus tér kompakt halmazaira vonatkozólag teszünk egy megjegyzést. Az R_n-ben a BOLZANO-WEIERSTRASS-tétel szerint minden korlátos halmaz kompakt. Ez a tétel *nem vihető át* minden metrikus térre, amint azt pl. az F-tér

$$f_\nu = \sin \nu x, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

korlátos halmaza mutatja; ennek a halmaznak ugyanis egyetlen rész-sorozata sem konvergens.

A BOLZANO-WEIERSTRASS-tételben példát látunk tehát egy olyan tényre, amely nem tisztán a távolság létezésének következménye. A halmaz korlátosságából nem következik általában annak kompakt volta, lássuk tehát, hogy a halmaz mily más tulajdonsága az, ami a kompakt voltát biztosítja. A BOLZANO-WEIERSTRASS-tétel bizonyításának elemzése rávezet erre a döntő tulajdonságra, amelyet alább ismertetünk.

Legyen ε tetszésszerinti pozitív szám. Nevezzük az R_n mindazon pontjait, melyeknek minden koordinátája ε-nak egészszámú többszöröse, az ε-hoz tartozó *rácspontoknak*. Világos, hogy az R_n minden pontja a hozzá legközelebbi rácsponttól $\varepsilon . \sqrt{n}$-nél kisebb távolságra van. Továbbá minden véges intervallumban csak véges sok rácspont van. Minthogy minden korlátos halmaz egy véges intervallumnak részhalmaza, következik ebből, hogy *minden korlátos halmazhoz található véges sok rácspont úgy, hogy a korlátos halmaz minden pontja e véges sok rácspont közül valamelyiktől legfeljebb $\varepsilon . \sqrt{n}$ (tehát ε kellő megválasztásával tetszésszerinti kis) távolságra van.*

Ez az R_n korlátos halmazának az a tulajdonsága, amelyen a halmaz kompakt volta alapszik. Valóban FRÉCHET szerint:

ahhoz, hogy valamely teljes, metrikus tér E halmaza kompakt legyen, szükséges és elegendő, hogy minden ε számhoz tartozzék a térnek véges sok, $e_1, e_2, \ldots e_n$, eleme úgy, hogy E bármely e eleme legalább egy i-re az $(e_i, e) < \varepsilon$ egyenlőtlenségnek eleget tegyen.

A bizonyitás részletezése helyett csak röviden megjegyezzük, hogy a feltétel elegendősége a *skatulyaelv* alapján, felhasználva a távolság háromszögtulajdonságát, egyszerűen kimutatható. A szükségessége pedig kiviláglik abból, hogy ha az E halmazban volna valamely ε-hoz végtelen sok olyan $e_1, e_2, e_3, \ldots$ elem, hogy mindig

$$(e_i, e_k) \geqq \varepsilon, \quad \text{hacsak} \quad i \neq k;$$

akkor ezeknek az elemeknek a halmazában két különböző elem távolságának alsó határa is legalább ε, tehát egy részsorozat sem lehetne konvergens. Könnyű belátni, hogy az $\{e_i\}$ elemek választhatók úgy is, hogy valamennyien az E halmaz elemei legyenek.

Metrikus térben mármost a függvény folytonossága a 2. §-ban adott definició mellett, a CAUCHY-féle definició alapján is értelmezhető: *valamely $f(e)$ függvény az e_0 helyen folytonos, ha $f(e)$ ingadozása az e_0 hely elegendő kis környezetében tetszésszerinti kicsiny, vagyis ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz tartozik oly $\delta > 0$, hogy*

$$|f(e) - f(e')| < \varepsilon,$$

valahányszor

$$(e, e_0) < \delta \quad \text{és} \quad (e', e_0) < \delta.$$

A két definició aequivalens volta a szokásos módon, a 4. lábjegyzetben emlitett axióma felhasználásával igazolható.

Valamely E halmaz minden elemében folytonos függvényt az E halmazon folytonosnak nevezzük. Ha E kompakt és zárt, akkor az E halmazon folytonos függvény E-ben *egyenletesen folytonos*, azaz minden pozitiv ε-hoz van oly δ, hogy

$$|f(e) - f(e')| < \varepsilon, \quad \text{hacsak} \quad (e, e') < \delta.$$

Ezt a tételt a II. tételből semmivel sem több fáradsággal igazoljuk, mint amennyit már az egyváltozós, közönséges függvényrekre ismert speciális eset bizonyítása is igényel.

Legyen ugyanis $\varepsilon > 0$ adva és jelentse $A_n(e)$ azt az állítást, hogy $f(e)$ ingadozása az e helynek $\frac{1}{n}$ sugarú környezetében ε-nál kisebb. Hogy ez az állítás-sorozat monoton, az világos. De folytonos is. Mert ha az e_0 elemre az $A_n(e)$ állítás érvényes, akkor az e_0-nak $\frac{1}{2n}$ sugarú környezetében minden elemre érvényes az $A_{2n}(e)$ állítás. Hogy az E halmaz minden elemére érvényes a sorozatnak egy állítása, ez éppen azt jelenti, hogy $f(e)$ az E minden elemén folytonos. A II. tétel követelményei tehát mind ki vannak elégítve és így van a sorozatban egy az E összes elemeire érvényes $A_N(e)$ állítás, ami éppen az $f(e)$ egyenletes folytonosságát jelenti.

Az R_n-re vonatkozólag ezt a tételt a Borel-Lebesgue-féle *beföđési-tétel*-ből szokás bebizonyítani. A Borel-Lebesgue-tételt nemcsak ebben, hanem minden más esetben is pótolja a 2. § II. tétele. Bebizonyítjuk ugyanis, hogy a Borel-Lebesgue-tétel maga is következménye a II. tételnek. A bizonyítást mindjárt egy teljes, metrikus térre vonatkozólag végezzük, a tétel tudniillik erre is igaz, ha fogalmazásában a «korlátos halmaz» helyett «kompakt halmazt» mondunk. Bebizonyítjuk tehát a következő *befödési* (vagy *beborítási*) tételt:

Legyen adva valamely metrikus térben egy kompakt és zárt E halmaz, továbbá a nyilt halmazoknak egy serege úgy, hogy E minden eleme e sereg valamelyik halmazában benne van (az E halmaz a nyilt halmazok seregével be van *borítva)*. Akkor van a nyilt halmazok seregében véges sok olyan $O_1, O_2, \ldots O_n$ halmaz, hogy az E halmaz minden eleme már e véges sok halmaz valamelyikében is benne van (az E halmaz már e véges sok nyilt halmazzal is be van borítva).

Legyen ugyanis az $A_n(e)$ állítás a következő: az e elem a köréje írt $\frac{1}{n}$-sugarú környezetével együtt teljesen benne van a sereg valamely O halmazában. Valamelyik $A_n(e)$ állitás az E minden elemére érvényes, mert a feltételünk szerint e benne van valamelyik nyilt halmazban, tehát annak belső eleme. Ugyanebből az okból következik, hogy az állítás-sorozat folytonos. Ha t. i. az e elemre $A_n(e)$ igaz, akkor az e elemnek $\frac{1}{2n}$-sugarú környezetére az $A_{2n}(e)$ állitás érvényes.

Hogy az állitás-sorozat monoton, az triviális.

Minthogy E kompakt és zárt, van egy az E összes elemeire érvényes $A_N(e)$ állítás, azaz az E bármely pontja egy $\frac{1}{N} = 2\varrho$ sugarú környezetével egyetemben benne van a sereg valamely nyilt halmazában.

A 3. §-ban ismertetett FRÉCHET-tétel szerint található a ϱ számhoz n elem: $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ úgy, hogy E minden pontja valamelyik e_i-nek ϱ-sugarú környezetében van. Válasszuk ki a nyilt halmazok seregéből azokat az $O_1, O_2, \ldots O_n$ halmazokat, amelyek rendre az $e_1, e_2, \ldots e_n$ elemeket beborítják, ezek a halmazok nyilván befödik E-t is.

Az állitás-sorozatok tételének más alkalmazásait illetőleg utalok a [3] lábjegyzetben idézett dolgozatra, az absztrakt tér elméletének kimerítő tárgyalását pedig megtalálja az olvasó FRÉCHET-nek [2] alatt idézett könyvében.

Veress Pál.

ÜBER ABSTRAKTE RÄUME.

Nach einer Einleitung über den Begriff des abstrakten Raumes wird folgender Satz bewiesen:

Es sei

$$A_1(e), A_2(e), A_3(e), \ldots$$

eine Folge von Aussagen über die Elemente e einer beliebigen Menge E. Gibt es

1. zu jedem Elemente $e \varepsilon E$ eine Aussage der Folge, die für dieses Element gültig ist,

2. zu jeder unendlichen Teilmenge E' von E eine Aussage der Folge, die für unendlich viele Elemente von E' gültig ist,

dann gibt es in der Folge endlich viele Aussagen

$$A_1(e),\ A_2(e), \ldots\ A_N(e)$$

so, dass für jedes Element der Menge E schon eine von diesen endlich vielen Aussagen gültig ist.

Es werden einige Anwendungen dieses Satzes auf topologische und metrische Räume und in solchen Räumen erklärte, stetige Funktionen gemacht.

Paul Veress.

MEGJEGYZÉSEK K. BORSUK EGYIK GEOMETRIAI TÉTELÉHEZ.

K. Borsuk[1]-tól ered a következő tétel:

a) *Bárhogyan bontsunk is szét n halmazra egy n-méretű euklidesi teljes gömböt, legalább egyik halmaz átmérője megegyezik a gömb átmérőjével.*

Tételét K. Borsuk topologiai eszközökkel bizonyítja, s mint maga megjegyzi, a tétel elemi geometriai jellege dacára nem látott elemi geometriai utat, ami a bizonyításhoz vezetne.

A következőkben csupán Heine-Borel befödési tétele segítségével az állítást egy (véges) kombinatorikus feladatra vezetem vissza. Ebből az $n=3$ esetre könnyen nyerem a tétel bizonyítását,[2] de az $n \geqq 4$ esetet nem sikerült ezen az úton végleg elintéznem. Jóllehet a tételnek elemi geometriai jellege csupán az $n=3$ esetben van — az $n=2$ eset nem érdekes, s a következőkben fel is tételezem, hogy $n \geqq 3$ — mégis érdemesnek tartom a kombinatorikus feladatra való visszavezetést az $n \geqq 4$ esetekben is, az így nyert feladatnak érdekessége miatt. E mellett e visszavezetés az $n \geqq 4$ esetben nem jelent semmi külön fáradságot.

Nyilvánvaló, hogy a tétel így is fogalmazható:

b) *Bárhogyan bontjuk szét n halmazra egy n-méretű eukli-*

---

[1] K. Borsuk: Über die Zerlegung einer euklidischen n-dimensionaler Vollkugel in n Mengen. Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-kongresses Zürich 1932, 192. lap.

[2] A tételre, illetve ennek b) alatti fogalmazására szíves beszélgetés közben Veress Pál úr hívta fel figyelmemet.

desi gömb S felületét, legalább az egyik halmaz — a határpontok hozzászámítása után — tartalmaz átellenes[3] *pontokat.*

A tétel még abban az egyszerű esetben sem egészen kézenfekvő, ha $n=3$, továbbá a részhalmazok összefüggők s határaik JORDAN-görbék. Ennek az esetnek tárgyalását előrebocsátom, a nélkül, hogy ezt a részletet a továbbiakban felhasználnám.

A mondott esetben vagy van a három halmaznak közös határpontja, ekkor az állítás helyessége nyilvánvaló, vagy nincs ilyen határpont, ekkor könnyen látható, hogy a teljes határgörbe: két, közös pont nélküli zárt JORDAN-görbe. Legyenek ezek c_1, c_2 és legyenek az adott halmazok h_1, h_2, h_3; ezek határa alkalmas jelöléssel rendre c_1, c_2, c_1+c_2. Jelentse a felső vonás (h', P' stb.) az átellenes leképzést. Minthogy c_1 minden pontja határpontja h_1-nek és h_3-nak, azért az állítás helyessége nyilvánvaló, ha c'_1-nak akár h_1-gyel, akár h_3-mal van közös (belső vagy határ-) pontja. Elég tehát még azzal az esettel foglalkoznunk, amelyben c'_1 a h_2 belsejében és ugyancsak c'_2 a h_1 belsejében van. Legyen ekkor C'_1 és C'_2 a c'_1, c'_2 görbéknek egy-egy pontja és legyen c egy összekötő (nyitott) JORDAN-görbe C_1 és C_2 között a h_3 belsejében. Akkor c' összeköti a C'_1, C'_2 pontokat, amelyek h_2-ben, illetve h_1-ben vannak, tehát c'-nak van h_3-mal egy közös C' (belső) pontja. Azonban C is pontja h_3-nak, s ezzel a tételt a mondott esetre kimutattuk.

Ezután az általános esettel foglalkozom. A **b)**-bén S-en gömb helyett egy W: $0 \leq x_i \leq 1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ kocka felületét is érthetjük (természetesen a [3] alatti definíció érvényben tartásával). A következőkben kizárólag olyan zárt kockákról fogok beszélni, amelyeknek élei a koordinátatengelyekkel párhuzamosak s a csúcsok koordinátái racionálisak. Előbb a következő előkészületet teszem.

Legyen h zárt ponthalmaz, $h \prec S$ («h bentfoglaltatik S-ben») és legyen h átellenes pontpár nélküli. Legyen P bármely pontja

[3] Átellenes két olyan különböző pont, amelyek S középpontjától egyenlő távolságra, vele egy egyenesben vannak.

h-nak. Minthogy P átellenese, P', nem pontja h-nak és h zárt, azért P-nek van olyan n-méretű $w(P)$ környezete,[4] amelyre $w'(P).h=0$ (az a, b halmazok közös része $a.b$). A $w(P)$ választható kockának is, és az is kiköthető, hogy P belső pontja legyen még annak a $w_{\frac{1}{3}}(P)$ kockának is, amelynek éle harmadrésze $w(P)$ élének és a két kocka középpontjai közösek; végül feltehető, hogy $w(P)$ éle kisebb 1-nél (a W élénél). Kimutatom, hogy:

c) A h bármely két P, P_1 pontjára $w_{\frac{1}{3}}(P)+w_{\frac{1}{3}}(P_1)$ átellenes[5] pontpár nélküli («$+$» a halmazok egyesítésének jele).

Ugyanis mindenekelőtt $w_{\frac{1}{3}}(P)$ (és éppigy $w_{\frac{1}{3}}(P_1)$) átellenes pontpár nélküli, mert éle $<\frac{1}{3}$, míg W éle 1. Ha tehát mégis $w_{\frac{1}{3}}(P)+w_{\frac{1}{3}}(P_1)$-nek lenne egy (X, X') átellenes pontpárja, akkor feltehető, hogy $X \prec w_{\frac{1}{3}}(P)$ és $X' \prec w_{\frac{1}{3}}(P_1)$; egyszersmind feltehető, hogy az itt szereplő kockák elseje a másodiknál nem kisebb. Az előbbiből $X' \prec w'_{\frac{1}{3}}(P)$, tehát a $w'_{\frac{1}{3}}(P)$ és $w_{\frac{1}{3}}(P_1)$ kockáknak van közös pontja. Akkor $w'(P)$ tartalmazza $w_{\frac{1}{3}}(P_1)$-t, azaz P_1-et is, ellentétben $w(P)$ értelmezésével.

Heine-Borel szerint legyen $\overline{h}$ véges számú olyan $w_{\frac{1}{3}}(P)$ kocka egyesített halmaza, mellyel $h \prec \overline{h}$. A **c)** szerint $\overline{h}$ is átellenes pontpár nélkül való. Akkor a $h^{*}=S.\overline{h}$ halmazról a következők igazak: $h \prec h^{*} \prec S$; h^{*} véges számú $n-1$-méretű kocka egyesítési halmaza; h^{*} is átellenes pontpár nélkül való.

Mármost felteszem, hogy **b)**-vel ellentétben van olyan $S=h_1+h_2+\cdots+h_n$ előállítás, amelyben minden h_i átellenes pontpár nélküli zárt halmaz (páronként nem szükségképpen közös pont nélkül). Az előbbit minden egyes h_i-re alkalmazva, az imént mondottak az $S=h_1^{*}+h_2^{*}+\cdots+h_n^{*}$ felbontásra is igazak, s ez utóbbiban minden h^{*} véges számú $n-1$-méretű kocka egyesítési halmaza. Ezek a kockák (a «kockákra» fent tett megszorítás miatt) mindannyian előállíthatók egybevágó kockák egyesítésével, s maguk a h_i^{*} halmazok is eleve eme kockák egyesítésével nyert halmazokul vehetők. Ha még rendre h_i^{*} $(i=n, n-1, \ldots, 2)$

[4] $w(P)$ természetesen nem része S-nek.

[5] Átellenes itt is úgy értendő, mint [3] alatt.

megalkotásánál mellőzzük azokat a kockákat, amelyek $h_1^*, h_2^*, \ldots, h_{i-1}^*$ valamelyikében szerepelnek, akkor a fentiek még inkább érvényesek, s így nyertük a következőt:

d) *Ha* K. Borsuk *tétele nem érvényes, akkor az n-méretű kocka felülete feldarabolható egybevágó ($n-1$-méretű) teljes kockákra, s ezek mindannyian alkalmasan úgy egyesíthetők n halmazzá, hogy e halmazok egyike sem tartalmaz átellenes pontpárt* (a feldarabolásnál a határpontok az érdekelt kockák mindegyikéhez hozzászámítandók).

Ezzel a tételt visszavezettük egy kombinatorikus feladatra. Ennek alapján az $n=3$ esetre bebizonyítom a tételt. Felteszem, hogy a tétel $n=3$ mellett nem érvényes, s ebből **d)** alapján következik, hogy lehet egy (3-méretű) kocka S felületét egybevágó négyzetekre feldarabolni s ezeket három h_1, h_2, h_3 halmazzá úgy egyesíteni, hogy ezek egyike sem tartalmaz átellenes pontpárt. Tekintem a h_1, h_2, h_3 halmazok összes határait alkotó vonalrendszert. Ebből kiválasztok egy c kettőspontnélküli zárt görbét (törtvonalat), mégpedig olyant, amelynek (egyik) belseje, m, lehetőleg kis területű. Az m egészben valamelyik h_i-hez, mondjuk h_1-hez tartozik, továbbá az m határának, c-nek minden pontja határpontja h_1-nek. A c valamely C pontja nem lehet közös határpontja h_2-nek és h_3-nak, mert akkor C közös határpontja volna mindhárom h_i-nek, s akkor a C, C' pontpár ellentmond a feltevésnek. Következőleg c a h_1 mellett csupán például h_2-t határolja. Minthogy tehát c minden pontja h_1 és h_2 határán van, azért a feltevés miatt c' a h_3 belsejében van. Ugyancsak kell tehát, hogy a c' által határolt m' is a h_3 belsejében legyen, mert különben ellenkezésbe jutnánk m minimumsajátságával. Ha tehát a h_i ($i=1, 2, 3$) halmazokat úgy változtatjuk meg, hogy h_1-ből töröljük m-et, s ez utóbbit h_2-höz számítjuk hozzá, akkor ama halmazok még mindig átellenes pontpár nélküliek; e mellett a határvonalak összes hosszúsága megkisebbedett, mert c már nem határa egyik halmaznak sem. Az eljárást ismételve, végül is h_1, h_2, h_3 helyébe olyan halmazok lépnek, amelyek átellenes pontpár nélküliek, egyesítési halmazuk S, de már közülük az egyik üres halmaz. Ezzel a nyilvánvaló ellentmondással a tételt az $n=3$ esetre kimutattuk.

Rédei László.

ZU EINEM GEOMETRISCHEN SATZ VON HERRN K. BORSUK.

Der folgende Satz rührt von K. Borsuk[1] her:

Bei jeder Zerlegung einer n-dimensionalen euklidischen Vollkugel in n Mengen ist der Durchmesser mindestens einer von diesen Mengen dem Durchmesser der ganzen Kugel gleich.

Seinen Satz beweist K. Borsuk mit topologischen Mitteln, und dabei bemerkt er: «Trotz des elementargeometrischen Charakters dieser Behauptung, scheint es keinen elementargeometrischen Weg zu geben, der zum Beweise führt».

Ich erhalte mit Hilfe des Heine-Borelschen Überdeckungssatzes auf elementarem Wege zuerst folgendes:

Gälte der Satz von K. Borsuk nicht, so liesse sich die Oberfläche S eines n-dimensionalen Würfels geeigneterweise so in kongruente $(n-1)$-dimensionale Würfel zerlegen und all diese so in n Mengen vereinigen, dass keine dieser Mengen gegenüberliegende Punkte enthält. Dabei sind zu jedem Würfel seine sämtlichen Randpunkte zuzuzählen und als gegenüberliegende Punkte gelten zwei verschiedene, mit dem Mittelpunkte von S in einer Gerade liegende Punkte.

Damit ist der Satz auf eine (endliche) kombinatorische Aufgabe zurückgeführt, genauer gesagt, auf die Unlösbarkeit dieser Aufgabe. Diese Unlösbarkeit stellt sich im Falle $n=3$ mit Hilfe eines Reduktionsverfahrens leicht heraus, und somit ist der Satz für $n=3$ auf diesem Wege bewiesen. Jedenfalls hat der Satz nur für $n=3$ echt elementargeometrischen Charakter. Für $n \geq 4$ gelang mir die Erledigung der obigen kombinatorischen Frage nicht.

Ladislaus Rédei.

EGYMÁSRA KÖVETKEZŐ SZÁMKÖZÖK PRIMSZÁMAIRÓL.

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítőjében közöltem a következő tételt:[1]

Az egyenlő x hosszúságú

$$\langle 1,\ldots, x\rangle,\ \langle x,\ldots, 2x\rangle,\ldots,\ \langle (n-1)x,\ldots, nx\rangle \tag{1}$$

intervallumok mindenikében kevesebb primszám van, mint a megelőzőben, ha x elég nagy és

$$3n < \log x. \tag{2}$$

Werner Weber úr (Göttingen) szíves volt figyelmeztetni, hogy levezetésem nem adja ki a tételt egész terjedelmében. Maga a tétel azonban helyes. Sőt sokkal több igaz, amennyiben bebizonyitjuk a következő tételt:

Ha x elég nagy szám, az (1) *alatti n számú x hosszúságú intervallum mindenikében kevesebb primszám van, mint a megelőzőben, ha*

$$n < \log^m x, \tag{3}$$

ahol m akármily egész számot jelenthet.

Ez a tétel, melyet Erdős Pál úr volt szíves velem közölni, azért mond többet a megelőzőnél, mert, ha n azon intervallumok száma, melyekben a primszámok száma monoton csökken, e második tételben n a $\log x$ bármely hatványánál nagyobb lehet, míg az első tételben a $\log x$ első hatványának nagyságrendjéből való. (Weber úr oly levezetést közölt velem, mely $m \leqq 9$ esetére vonatkozik.)

---

[1] Obláth, *Mat. és Természettud. Ért.* 47 (1930), p. 250 és *Tôhoku Math. Journ.* 32 (1930), p. 328.

Tételünk bebizonyítása céljából a primszámtétel LITTLEWOOD-féle alakjából[1] indulunk ki, mely szerint az x-nél nem nagyobb primszámok száma

$$\pi(x)=\int_2^x \frac{dz}{\log z}+O\left(xe^{-\alpha\sqrt{\log x\log_2 x}}\right),$$

ahol $\log_2 x=\log\log x$ és α pozitív konstans, melynek számértékére nincs szükségünk. Tehát a $(k-1)x$ és kx közötti primszámok száma

$$u_k(x)=\pi(kx)-\pi\big((k-1)x\big)=$$
$$=\int_{(k-1)x}^{kx}\frac{dz}{\log z}+O\left(kxe^{-\alpha\sqrt{\log(k-1)x\log_2(k-1)x}}\right); \tag{4}$$

k-t úgy akarjuk megválasztani, hogy $k<n$ mellett

$$u_{k+1}(x)<u_k(x) \tag{5}$$

teljesüljön.

A (4) formulából következik, hogy

$$U_k(x)=u_k(x)-u_{k+1}(x)=$$
$$=\int_{(k-1)x}^{kx}\frac{dz}{\log z}-\int_{kx}^{(k+1)x}\frac{dz}{\log z}+O\left(kxe^{-\alpha\sqrt{\log x\log_2 x}}\right)=$$
$$=\int_{(k-1)x}^{kx}\left(\frac{1}{\log z}-\frac{1}{\log(z+x)}\right)dz+O\left(kxe^{-\alpha\sqrt{\log x\log_2 x}}\right),$$

ahol az ordós tagot megnagyobbítottuk. Az integrandus monoton csökkenő, ha $z\geqq 2$, amint erről differenciálással könnyen meggyőződhetünk.[2] Ha tehát $V_k(x)$-szel jelöljük az

---

[1] LANDAU, *Math. Zeitschr.* 20 (1924), p. 90, különösen p. 103, és ugyanott p. 105, l. továbbá LANDAU, *Zahlentheorie* II. (1927), p. 47, Satz 403. Tudtommal LITTLEWOOD tétele máig a legpontosabb, l. például INGHAM, *The Distribution of Prime Numbers* (Cambridge Tracts in Math., No. 30) Cambridge 1932, p. 66, Theor. 24.

[2] Idézett dolgozataimban a bebizonyítandó tételt minden k számra, mely bármily előre megadott M számnál kisebb, már elintéztem, sőt azt,

$U_k(x)$-ben fellépő integrált az ordós tag elhagyásával,[1] akkor $k \geqq 2$-re

$$V_k(x)=\int\limits_{(k-1)x}^{kx}\left(\frac{1}{\log z}-\frac{1}{\log(z+x)}\right)dz \geqq x\left(\frac{1}{\log kx}-\frac{1}{\log(k+1)x}\right)=$$

$$=\frac{x\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\log kx \log(k+1)x}>x\frac{\log\left(1+\frac{1}{k+1}\right)}{\log^2(k+1)x}>\frac{\gamma x}{(k+1)\log^2(k+1)x},$$

ahol γ pozitív abszolút állandó. Ez a formula a megelőző [2] lábjegyzet szerint $k=1$-re is fennáll.

A két egymásra következő intervallum primszámai számának különbsége tehát

$$U_k(x) \geqq \frac{\gamma x}{(k+1)\log^2(k+1)x}+O\left(kxe^{-\alpha\sqrt{\log x \log_2 x}}\right).$$

Hogy az utóbbi intervallumban kevesebb primszám legyen, mint a megelőzőben, elég, ha az első tag túlnyomó, azaz

$$\frac{\gamma x}{(k+1)\log^2(k+1)x}>O\left(kxe^{-\alpha\sqrt{\log x \log_2 x}}\right),$$

---

hogy $u_2(x)<u_1(x)$, már LANDAU bebizonyította (*Nouv. Ann. de Math.* 4. série 1 (1901), p. 281); minthogy azonban az itt alkalmazott számítással is kimutatható, $k=1$-re is levezetjük. A szöveg későbbi jelöléseit alkalmazva:

$$V_1(x)=\int\limits_2^x\frac{dz}{\log z}-\int\limits_x^{2x}\frac{dz}{\log z}=$$

$$=\int\limits_2^x\left(\frac{1}{\log z}-\frac{1}{\log(z+x)}\right)dz-\int\limits_x^{x+2}\frac{dz}{\log z}\geqq(x-2)\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{\log 2x}\right)-\frac{2}{\log x};$$

tehát elég nagy x-re

$$V_1(x)>\beta x\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{\log 2x}\right),$$

ahol β pozitív abszolút állandó.

[1] Ugyanis

$$\log\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k+1}\right)^3-\cdots;$$

ezért

$$\log\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\geqq\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{k+1}\right)\geqq\frac{3}{4}\,\frac{1}{k+1}.$$

ami ki van elégitve, ha

$$e^{\alpha\sqrt{\log x \log_2 x}} > O\left((k+1)^2 \log^2 (k+1)\, x\right).$$

Ha tehát $k<x$, elegendő feltétel:

$$e^{\alpha\sqrt{\log x \log_2 x}} > O\,(k^2 \log^2 x);$$

azaz az (1) sorozat intervallumaiban a primszámok száma monoton csökken, ha

$$k = o\left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}\sqrt{\log x \log_2 x}}}{\log x}\right). \tag{6}$$

Egyszerű számítás meggyőz róla, hogy a (6) feltétel kielégíthető, ha — k helyett megengedhető legnagyobb értékét, n-et beirva —

$$n < \log^m x,$$

ahol m akármily egész szám lehet, amivel tételünket teljesen bebizonyítottuk.

Analog tétel áll fenn a számtani sor primszámairól is.

Kedves kötelességet teljesítek, amidőn köszönetet mondok Bauer Mihály és Erdős Pál uraknak, akiknek értékes észrevételeit a bizonyításban is felhasználtam.

Obláth Richard.

SUR LA DISTRIBUTION DES NOMBRES PREMIERS.

Le contenu de la note est la démonstration du théorème suivant. *Pour x assez grand, chaque intervalle de la suite*

$$\langle 1,\ldots,x\rangle,\ \langle x,\ldots,2x\rangle,\ldots,\ \langle (n-1)\,x,\ldots,nx\rangle$$

contient moins de nombres premiers que l'intervalle précédent, si l'on a

$$n < \log^m x,$$

où m désigne un nombre entier quelconque.

La démonstration est fondée sur le théorème des nombres premiers, sous la forme qu'a donnée à ce théorème M. Littlewood.

Richard Obláth.

SIPOS PÁL EGY KÉZIRATA ÉS A KOCHLEOID.

SIPOS PÁL,[1] jelenlegi ismereteink szerint, az első magyar matematikus, akinek munkássága eredeti és kora színvonalán álló. Főértekezését[2] a berlini akadémia adta ki és aranyéremmel jutalmazta. Ő az első magyar matematikus, aki akadémiai kitüntetésben részesült.

Nagyenyeden született 1759-ben. Az ottani híres kollégium diákja volt. Matematikára a legderekabb enyedi tanárok egyike: KOVÁTS JÓZSEF[3] tanította, aki ifjú korában majd négy évig tanult matematikát Bázelben, Utrechtben, Leydenben és Párizsban. A nála hét évvel fiatalabb TELEKI SÁMUEL gróf, a későbbi nagy

---

[1] E helyen is köszönetet mondok DÁVID LAJOS dr. egyetemi tanár úrnak, aki figyelmemet évekkel ezelőtt SIPOS PÁL-ra felhívta és kutatásaimban állandó érdeklődésével és értékes tanácsaival támogatott.

A debreceni egyetem matematikai szemináriumának közleményeiben (VI. füzet. WOYCIECHOWSKY JÓZSEF: *Sipos Pál élete és matematikai munkássága.* 1932., 124 l.) részletesen közölt eredményeimet, amelyeket részben Társulatunk 1932. évi november hó 10-i rendes előadó ülésén is körvonaloztam, itt számos új adattal egészítem ki.

[2] *Sammlung deutscher Abhandlungen.* 1790—91. (Berlin, 1796) 201—230. lap.

[3] Gr. RHÉDEI ÁDÁMNÉ Erdélyből («Szilvás 18 Nov 1795») ezt írja édes anyjának, gróf TELEKI SÁMUELNÉnak Bécsbe: «Professor KOVÁTS helyibe, az iffju KOVÁTSot tették, többnyire az olyanok a kiknek nintsen a dologba semmi interesséjek, mind inkább kivánták volna SIPOST; azt mondják hogy KOVÁTS tsak a Bátya Testamentomának köszönheti a Professorságot; mert a Bátya azt írta a Testamentomába, hogy a Colegyomnak 16000 forintot testál ha az Ötsit érdemesnek tartják a Professorságnak el nyerésire; ha pedig arra nem tartják érdemesnek ugy tsak 8000 forintot testál a Colégyomnak.» (Az *Országos Levéltár Teleki-tárának Teleki Sámuel osztályában.* 1493. missilis.)

kancellár kísérőjeként járt ezeken a helyeken. A gróf naplójából[1] tudjuk, hogy Bázelben 17 hónapig tanultak BERNOULLI JÁNOS-tól és ennek bátyjától: DÁNIEL-től.[2] Párizsban pedig CLAIRAUT, CONDAMINE, LALANDE és GESNER ismeretségébe jutottak.

Pályája kezdetén SIPOS három éven át a szászvárosi gimnáziumban tanít, majd három évig a sziráki kastélyban, Nógrád megyében, az ifjú TELEKI JÓZSEF gróf nevelője.[3] A kastély ura: az idősebb József gróf,[4] Sámuel unokaöccse, szintén járt fiatalkorában Bázelben, ahol kilenc hónapig volt BERNOULLI DÁNIEL magántanítványa.[5] Utána Párizsban CLAIRAUT-tól tanult matematikát négy hónapon át. A M. T. Akadémia kézirattárában felfedezett, eddig kiadatlan naplóiban ő is részletesen beszámol tanulmányairól. Párizsban eljárt az akadémia üléseire és sok kiváló matematikussal érintkezett, akik közül naplójában leggyakrabban szerepel: CONDAMINE, CAILLE, FERNER, MONTUCLA, D'ALEMBERT, NOLLET, FONTAINE.

SIPOS PÁL 1791 őszén iratkozott be az oderai Frankfurt, azóta megszűnt egyetemére. A kúpszeletekről latin nyelven írt

---

[1] TELEKI ÁDÁM-nak írja Bázelből 1761. május 17-én: «Ich habe noch hier meine privata collegia nicht zu Ende gebracht, viel mehr habe ich unlängst mir neues angefangen, bey dem H. Prof. DANIEL BERNOULLI, so ich mit der grössten Zufriedenheit anhöre; und bey dem anderen H. Prof. BERNOULLI handeln wir itzo de Rectificatione Curvarum.» IMRE SÁNDOR idézi gróf TELEKI SÁMUEL nyomtatásban is megjelent *Úti Naplójá*hoz írt bevezetésének LVII. lapján.

[2] Aki «nem szokott külömben senkinek is privatim collegiumokat adni». Az előbbi jegyzetben említett *Napló*. 47. l.

[3] Az idősebb fiúkat CORNIDES DÁNIEL nevelte. A «Hofmeister» fizetéséről ezt olvassuk a grófi apa 1780. máj. 3-i fogalmazványán (Akad. kézirattára. Vegyes 4-r. 39): «Das Gehalt wäre 300 Guld., freyer Tisch, Quartier und Bedienung.» A nevelőtől többi közt elvárja a gróf «4° dass er auch die Mathematik wenigstens so viel wisse, dass er den *Weidler*, oder das *Compendium Wolfianum* in 2 Bänden in 8° verstehe und auslegen könne.»

[4] A későbbi koronaőr, aki MÉSZÖLY GEDEON szerint: «Magyarország legeurópaibb mágnása». *Széphalom*. 1927. 52. l.

[5] BERNOULLI DÁNIEL elismeréssel ír TELEKI JÓZSEF és SÁMUEL matematikai képességeiről. (GULYÁS KÁROLY: *Gróf Teleki Sámuel levelezése külföldi mathematikusokkal*, Math. Phys. Lapok. 1912. 218. l.).

értekezését innen ajánlja volt tanítványának, az ifjú TELEKI JÓZSEF grófnak. Erre az értekezésére újabban bukkantam a M. T. Akadémia kézirattárában.[1] Címlapja hiányos: TRACTATUS DE CONICIS S... GEOMETRICE... AUCT... PAULO S..., TRANSILVANO... CIVE UNIVERSIT... Az ajánlás kelte: «Francofurti ad Viadrum. Die 20 Martii 1792». E szerint a kiegészítés nem «cive universitatis Vindobonae», ahogyan LÉSZAY a SIPOS hagyatékában talált kéziratról hibásan írta KAZINCZY-nak,[2] hanem «Viadrinae». Ezzel megdől az az állítás, hogy SIPOS a bécsi egyetemnek polgára lett volna. Protestáns volta sem tette ezt valószínűvé.

Az ajánlásból megtudjuk, hogy már 1787-ben megmutatta az első fogalmazást tanítványa bátyjának és az ő bátorítására folytatta tanulmányait; mint az előszóban mondja: «initiaque tentavi *Doctrinae de conicis sectionibus geometrice explanatae*».

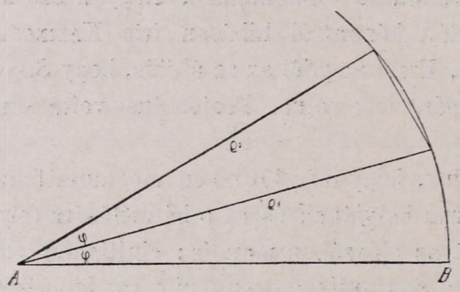
Az ajánlás (III—VIII), előszó (X—XII) és megfelelő bevezetés után, 160 számozott oldalon 199 §-ban tárgyalja a kúpszeleteket, egy függelékkel. A szöveghez tartozó 70 ábra még nem került elő. Tételei nem egyenlet alakjában jelennek meg, hanem szavakkal fogalmazott aránypárokban.

A bennünket most leginkább érdeklő rész a 16 oldalra terjedő és 20 §-t tartalmazó Appendix: *De curva accentrica.* Ez a görbe a kochleoid íve. SIPOS az AB távolságot folytonosan kisebbedő sugarú körívbe hajlítja.[3] Az előálló körívseregnek AB közös érintője a közös A pontban. A folytonosan változó helyzetű B végpont transzcendens görbét ír le, amelyet néhai SZILY KÁLMÁN joggal SIPOS-görbének nevezett el. Az irodalomban eddig elfogadott kochleoid (csigaházalakú) név FALKENBURG mérnöktől származik, aki SIPOS után majd 100 évvel szintén felfedezte ezt az érdekes és fontos görbét, amelynek első nyomtatott adata[4] J. PERKS-től való. A jelzett módon való előállításban a

[1] Menny. 4-r. 5.
[2] *Kazinczy Ferenc Levelezése.* XIV. 484. 1.
[3] SIPOS latin szövegeit (egy ábrával) a német kivonatban közlöm.
[4] *Philosophical Transactions.* XXII. 1700. 445 1.

publikálás elsősége SIPOS-é. GOLDBACH ugyan már 1726-ban felvet hasonló problémát, de levele csak 1843-ban jelent meg nyomtatásban.

Kéziratának 151. oldalán SIPOS kimondja görbéjének következő nevezetes tulajdonságát: a 2φ hajlású ϱ_2 vezetősugárra, annak végpontjában emelt merőleges a φ hajlású ϱ_1-et a SIPOS-görbén metszi. Ebből folyik az az «auffallend einfache Näherungskonstruktion», amelyet J. TROPFKE csak a félkör esetére, M. KOPPE levele alapján (1918) közöl,[1] pedig az bármilyen körívre érvényes alakban már 1792-ben megtalálható SIPOS-nál.



1. ábra.

Görbéjével SIPOS nemcsak a kör ívét méri meg,[2] hanem a szöget is felosztja tetszésszerinti számú egyenlő részre.[3]

Ebből a latin kéziratból fejlődött ki SIPOS főértekezése. Ennek első részét Berlinben adta át BODE akadémikusnak, a híres asztronómusnak. BODE-nak, a M. T. Akadémia kézirattárában talált leveléből és a berlini akadémia üléseinek naplóiból kiderült, hogy háromszor küldött pótlást főértekezéséhez. Olyan rossz idő járt akkor a berlini akadémiára, kiadványai olyan késéssel jelentek meg, hogy SIPOS dolgozata, amely csak 1795-re készült el teljesen, még belekerült az 1790—91-re szóló kötetbe. SIPOS különben 1700 és 1854 közt az egyetlen matematikus, akinek dolgozatát a berlini akadémia közölte, a nélkül, hogy az akadémiának tagja lett volna.

Berlinben, az akadémia levéltárában talált SIPOS-aktacsomó-

---

1 *Geschichte der Elementar-Mathematik.* 4^2 (1923). 205. l. Fig. 24.
2 *Appendix.* § 16, Problema 2.
3 § 19, Problema 4.

ból megállapitottam, hogy a matematikai osztályban TEMPELHOFF[1] javaslatára először 50 arannyal akarták jutalmazni SIPOS felfedezését, a gazdasági bizottság azonban csak aranyérmet és 100 különlenyomatot engedélyezett.

SIPOS főértekezésében az általa feltalált eszköz: az *izométer* segítségével 12-féle feladatot old meg, mai tudásunk szerint is kifogástalanul és — amint már néhai SZILY KÁLMÁN is elismeri — igen ügyesen.

A kochleoid poláregyenlete:

$$\varrho = k\frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

amint legutóbb megállapitottam, először EULER-nél 1759-ben fordul elő, nem pedig — mint eddig hitték — MALFATTI-nál. MALFATTI levele (1783) különben is csak 1876-ban jelent meg nyomtatásban, úgyhogy a publikálásban megelőzte KÄSTNER göttingai professzor is, aki a *Göttingische Anzeigen* 1797. évfolyamában levezette ezt az egyenletet, amikor 96 sorban ismertette SIPOS eszközét. Megtaláljuk ezt az egyenletet SIPOS-hoz írt hosszú gratuláló levelében is. SIPOS — amint KAZINCZY levelezéséből tudjuk — sehogysem tudta elolvasni KÄSTNER igen rossz írását. KAZINCZY-nak ajándékozta a levelet azzal, hogy másolatot kér róla. KAZINCZY közölni akarta nyomtatásban. A levél jelenleg az *Orsz. Széchenyi-könyvtár* kézirattárában van. Csak hosszas küszködéssel sikerült teljesen kibetűznöm. Nyomtatásban nyolc oldal. W. LOREY szerint: «Auf diesen Brief, der interessante Angaben über KÄSTNERS Entwicklung bringt, wird man zurückgreifen müssen, wenn man nachholt, was 1919 zur 200. Wiederkehr von KÄSTNERS Geburtstag vergessen wurde: eine ausführliche Biographie dieses verdienstvollen, später zu Unrecht oft unterschätzten Mathematikers».[2]

SIPOS főértekezésének legfontosabb része az ellipszis rekti-

[1] GAUSS ítélete szerint TEMPELHOFF: «einer der besten deutschen Mathematiker». (*Bolyai és Gauss levelezése.* 1899. 35. l.)

[2] *Jahresber. d. d. Math. Ver.* 43. 93. l. 1933.

fikációja a SIPOS-görbe segítségével. Eljárásáról ezt olvassuk KÄSTNER levelében: «Was aber von ihrer Rectification gesagt wird, mag ich nicht untersuchen. Ich müsste mir dazu den Vortrag der Abhandlung ganz analytisch umarbeiten, u. es ist mir darinn vieles zu undeutlich. Rectification der Ellipse, zumahl wenn sie sehr eccentrirt is, gehört unter die Fragen der Analysis die noch EULER u. LA GRANGE für sehr schwer halten».

SIPOS tényleg nehezen érthető eljárását kihámozva a következő formulára jutottam:

$$S = \frac{4(a+b)^3}{(a-b)^2} \cos\left(\frac{\pi\sqrt{ab}}{a+b}\right),$$

hol a és b az ellipszis féltengelyei; ez az ellipszis kerületének SIPOS-féle közelítő értéke.

Hogy ennek a formulának jelentőségét megállapithassam, átkutattam a budapesti és berlini könyvtárakban rendelkezésre álló irodalmat. Közel félszáz ellipsziskerület-közelítést találtam; ezek közül 39-et közöltem és 22-t sorba is fejtettem. Több képletre részletes számtáblázatokat is készítettem.

Vizsgálatom végeredménye SIPOSra a legkedvezőbb. A korabeli közelítések nyomába sem léphettek az ő eljárásának. A hasonló egyszerűségű formulák közül ma sem ismerek pontosabbat az övénél.

A SIPOS-formula mindkét határesetben: $b=0$, $a=b$, pontos és legnagyobb hibája $b=\frac{a}{10}$-nél csak 0·14%.

A legújabb és legjobb közelítések egyikét 1913-ban adta R. SOREAU.[1] A SIPOS-formulának nemcsak a sorfejtése áll közelebb az ellipsziskerület pontos értékét adó másodfajú teljes elliptikus integrál sorfejtéséhez, de numerikus értékei is jobbak mindkét SOREAU-féle közelítés számadatainál.

SIPOS 1805-től 1810-ig a sárospataki főiskola tanára. Az ot-

---

[1] *Comptes Rendus.* 156. 1514. l.

tani levéltár anyagából megállapithattam, hogy neki köszönhető az 1810-es pataki tanterv matematikai része, amely egészen modern: majdnem azt az anyagot öleli fel, mint a XIX. század utolsó évtizedeinek magyar gimnáziuma.[1]

Trigonometrikus táblát is adott ki SIPOS 1807-ben Pozsonyban. A negyedkör tízes rendszerű szögbeosztása Magyarországon először ebben a latinnyelvű táblázatban található, alig pár évvel az első külföldiek után. Sem ismertetését, sem hasonlónak nyomát eddig sehol sem találtam. SIPOS $\log x$-ből és x^2-ből számítja a trigonometrikus függvények logaritmusát.[2] Ez tényleg lehetséges, mert a sorfejtések $\log x$-en kívül csak páros hatványt tartalmaznak, amit így kimondva sehol sem találtam.

Élete végén SIPOS református pap Tordoson, Szászváros mellett (1806—1816).

SIPOS mint filozófus MÁRTON ISTVÁN mellett második kiváló KANT-tanítványunk. Jeles szónok volt és ügyes versíró,[3] KAZINCZY egyik legjobb barátja.[4] Egymással váltott 90 levelükben igen szeretetreméltó embernek mutatkozik a tudós SIPOS PÁL.

Jelitai (Woyciechowsky) József.

---

[1] KORNIS GY.: *A magyar művelődés eszményei.* I. 328. l.

[2] Nagyobb táblázatok pl. logsin α-t ma is log α-ból számítják, de nem α^2 segélyével, mint SIPOS.

[3] *Ode occasione jacti pro novo aedificio in Ill. Coll. S. Patak fundamenti.* 1806. die 23. Septbr. Ezenkívül több latin és magyar epigrammája, verse kiadatlan. (Akadémiai kézirattár. Tört. 2-r. 20., Vegyes. 4-r. 39. Az *Országos Levéltár Teleki-tárának Teleki Sámuel-osztályá*-ban is van egy eddig ismeretlen, «Béts, 19. Febr. 1794.» keltezésű verse. Levéltári száma 1615.)

[4] KAZINCZY erdélyi útján felkereste SIPOS-t is, akinek «egész Bibliothecája» «legfeljebb száz darab» könyvből állt. «Az éjet nagy részében álmatlanul töltém, kivált hogy SIPOS előttem a' tiszta égen a' csillagzatokat magyarázgatá». (Kiadatlan akadémiai kézirat. Földl. 4-r. 3.)

ÜBER EIN MANUSKRIPT VON SIPOS UND DIE KOCHLEOIDE.

Paul Sipos (sp. schiposch, 1759—1816) ist gegenwärtig der erste ungarische Mathematiker, von dem selbständige Arbeiten bekannt sind.

Der Verfasser entdeckte im Archiv der Ungarischen Akademie der Wissenschaften ein bisher unbekanntes, lateinisches Manuskript von Sipos: «TRACTATUS DE CONICIS S[ECTIONIBUS] GEOMETRICE [EXPLANATIS] AUCT[ORE] PAULO S[IPOS], TRANSILVANO». Gewidmet dem Reichsgrafen Josef Teleki Jun. «Francofurti ad Viadrum. Die 20 Martii 1792.» Daher war der protestantische Sipos kein Hörer der Wiener (katholischen) Universität. Lészay las seinerzeit Viadrinae falsch für Vindobonae.

Es erhellt aus der Widmung, dass Sipos schon 1787 die erste Abfassung fertig hatte.

Nach Widmung (III—VIII) und Vorwort (X—XII) behandelt er in 199 Paragraphen (S. 1—160) die Kegelschnitte. Für alle Sätze wird die Proportionsform benützt; die Wiedergabe in Worten macht den Inhalt der ausgesprochenen Sätze noch unübersichtlicher. Alle 70 Figuren fehlen gegenwärtig.

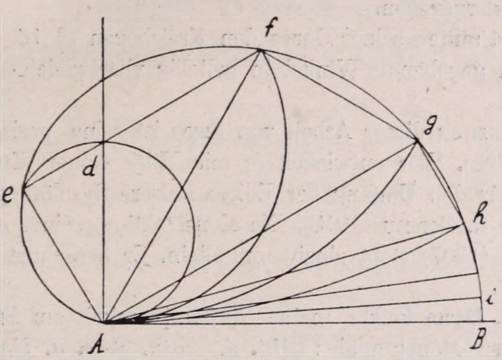
Entschieden Neues enthält der Anhang: *De curva accentrica* (S. 145—160, § 1—20). Diese Kurve ist die Kochleoide. Sie wird hier folgender Art gefunden:

«Quod si recta *AB* in puncto *A* immote fixa extremitate alia *B* ea ratione circumagi concipiatur, ut continuo magis magisque incurvetur, incurvataque formet semper veri nominis arcus *Am*, *Al*, *Ak* &c., donec ad ultimum abeat in circulum perfectum, atque punctum *B* incidat in *A*; curvam, quae interea a puncto *B* describi concipitur, dicimus accentricam.» (§ 1.)

Sipos spricht unter anderem folgende wichtige Eigenschaft seiner Kurve aus: die Normale errichtet im Kurvenpunkte des Leitstrahles 2φ trifft den Leitstrahl φ im Kurvenpunkte φ. (Figur oben.)

Hieraus folgt die «auffallend einfache Näherungkonstruktion», die bei Tropfke (*Gesch. d. Elementar-Math.* 4^2, S. 205, Fig. 24) für den Halbkreis mit dem Namen M. Koppe (1918) erwähnt wird, obgleich sie sich schon in verallgemeinerter, für jeden Kreisbogen gültiger Form bei Sipos (1792) befindet:

«Hac ratione liquet dati arcus *Ade*, quoad directam ejus longitudinem, approximationem peragi geometrice posse; siquidem arcus, qui chordas sequentes *Ae*, *Af*, *Ag* &c subtendere concipiuntur, ejusdem sunt longitudinis directae ad ipsas chordas propius propiusque accedant, quo anguli intercepti chorda et tangente bisectio continuata longius est; ut adeo illa semper chorda, in qua bisectio subsistit, ex. gr. *Ai*, exhibeat proxime veram inter reliquas longitudinem arcus dati.» (§ 13.)



2. ábra.

Diese infinitesimale geometrische Rektifikation (nach Fig. XIII. von Sipos. Abh. Berlin, 1790—91. Anhang) findet sich schon 1759 bei Euler, aber nur für den Kreisquadranten. Für die Selbständigkeit von Sipos spricht, dass sein Manuskript (1792) und seine vorerwähnte preisgekrönte Abhandlung (gedruckt 1796) in jeder Hinsicht eine stufenförmige Entwicklung aufweisen, die bei einer Entlehnung von Euler nicht möglich wäre. Er behauptet selbst von seiner Kurve: «eine Art von Spirallinie, welche von den übrigen bisher bekannten verschieden ist». Die explicite Form der Polargleichung, die Euler ebendort angibt, findet sich bei ihm nicht. Kästners Brief und Besprechung bestätigen auch die Selbständigkeit von Sipos.

Die Bibliographie der Kochleoide (E. Wölffing, *Boll. di bibl. e storia d. sc. mat.* III. 1900, S. 97—99) ergänze ich hier mit folgenden neuen Daten:

Euler rektifiziert den Kreisquadranten und gibt gleich als erster die Polargleichung der erzeugten Kurve in der Form

$$v = \frac{q \sin \Phi}{\Phi}.$$

(*Novi Comm. Acad. Petropol.* VIII. 1760—61, S. 26. Vorgelegt 1759. Gedruckt 1763.) Bis jetzt galt als erster Malfatti (1783). Die Polargleichung kommt auch in KÄSTNERS Brief (1796) und Besprechung *(Gött. Anz.* 1797, S. 113) vor. Die vorerwähnte infinitesimale geometrische Rektifikation, wobei die Kochleoide erzeugt wird, findet sich bei EULER, für einen beliebigen Kreisbogen aber erst bei SIPOS (1792), später bei SCHEFFLER (1849) und GOERING (1899). Das Verfahren ist auch in der Enzyklopädie von WEBER—WELLSTEIN (2^2, 1907, S. 280—281) ohne Namennennung wiedergegeben.

SIPOS misst mittels seiner Kurve den Kreisbogen (§ 16, Problema 2) und teilt den gegebenen Winkel in beliebig viele gleiche Teile (§ 19, Problema 4).

Die Fortsetzung dieser Arbeit von SIPOS ist seine preisgekrönte Abhandlung (1795). Hier entwickelt er mit Hilfe seiner Kurve ein Verfahren, das für den Umfang der Ellipse bessere Resultate gibt, als beide Formeln von R. SOREAU (1913). Die Konstruktion seiner trigonometrischen Tafeln (1807) steht einzig und allein. Er berechnet logsin x aus log x und x^2.

Prof. L. v. DÁVID lenkte meine Aufmerksamkeit auf SIPOS. Näheres in meiner SIPOS-Monographie: *Mitt. d. math. Sem. d. Univ. Debrecen* (Ungarn). VI. Heft, 1932. (39 Näherungsformeln für den Ellipsenumfang, 22 davon auch in Reihen entwickelt. Briefe von BODE und KÄSTNER.)

Josef v. Jelitai (Woyciechowsky)

ELMÉLETI VIZSGÁLATOK
A LITHIUMBROMID-KRISTÁLY DINAMIKÁJÁRÓL.

1. Bevezetés.

Ezen dolgozat célja, hogy a lithiumbromid-kristály néhány fizikai állandóját teljesen elméleti úton, *empirikus konstansok figyelembe vétele nélkül* határozzuk meg. Először a lithiumbromid-molekula kötésével fogunk foglalkozni, majd rátérünk a kristály tárgyalására, meghatározzuk a kristály rácsállandóját, rácsenergiáját, szublimációhőjét, kompresszibilitását és ultravörös sajátfrequenciáját.

A legújabb időkben W. Lenz[1] és H. Jensen[2] dolgoztak ki egy statisztikai módszert, mely poláris molekulákra és ionkristályokra, melyek közé a *LiBr* is tartozik, jól alkalmazható. W. Lenz és H. Jensen áttérnek a Thomas—Fermi-féle differenciálegyenletről az ezen egyenletnek megfelelő variációproblémára, melyet a Ritz-féle approximációs módszerrel oldanak meg. Módszerüknek Thomas[3] és Fermi[4] módszerével szemben először is az az előnye, hogy az ő statisztikai atommodelljükben az atom külső részeiben az elektronsűrűség exponenciálisan csökken, ami megegyezik a quantummechanika eredményeivel, míg Thomasnál és Ferminél az elektronsűrűség csak mint $\frac{1}{r^6}$ tűnik el a végtelenben, másodszor pedig ez a statisztikai módszer negatív ionokra is alkalmazható.

---

[1] W. Lenz. ZS. f. Phys. 77, 713. 1932.
[2] H. Jensen. ZS. f. Phys. 77, 722. 1932.
[3] E. Fermi. ZS. f. Phys. 48, 73. 1928.
[4] L. H. Thomas. Proc. Cambridge Phil. Soc. 23, 542. 1926.

Számításainkban részben ezt a statisztikai módszert fogjuk alkalmazni. Statisztikát a *LiBr*-nál természetesen csak a Br^- ionra alkalmazhatunk, mert csak ennek van elegendő elektronja, a Li^+ ionra, minthogy csak két elektronja van, statisztikát nem alkalmazhatunk. Míg tehát Jensen a *RbBr*-ra, vagyis egy olyan kristályra végzett számításokat,[1] melyben az ionok dimenziói közel egyenlők, addig mi itt egy olyan kristállyal foglalkozunk, melyben a kation az anionhoz képest nagyon kicsi. Egy közelítő eljárással sikerül a *LiBr* kristály rácsenergiájára egy analitikai kifejezést nyerni, melynek segítségével rátérhetünk a további kérdések tárgyalására. Számításainkban, hasonlóképen mint Jensen, el fogjuk hanyagolni az ionok deformálhatóságát, az ezen elhanyagolásból származó kis hibára a kristály tárgyalásánál még részletesebben rátérünk.

Mielőtt a *LiBr* kristály tárgyalására rátérnénk, még előbb W. Lenz és H. Jensen statisztikai módszerének főbb eredményeit összefoglaljuk, mert ezekre a továbbiakban szükségünk lesz.

2. W. Lenz és H. Jensen statisztikai atommodellje.

Mint már említettük, Lenz és Jensen a Thomas—Fermi-egyenletről áttérnek az ezen egyenletnek megfelelő variációproblémának a megoldására. Minthogy azonban a variációproblémára való áttérés nem egyértelmű, a következőképpen járnak el. Képezzük egy sok elektront tartalmazó atom statisztikai energiakifejezését. Az atommag körüli teret elemi $d\tau$ nagyságú cellákra bontjuk fel, melyekben a mag potenciálját ψ-t és az elektronfelhő potenciálját φ-t állandónak tekinthetjük. Ha az elektron töltése $-\varepsilon$, az elektronok térbeli sűrűsége n, akkor az atom potenciális energiája a $d\tau$ cellára vonatkoztatva

$$-(\psi + \tfrac{1}{2}\varphi)\,\varepsilon n d\tau.$$

A kinetikus energia, minthogy az elektrongáz Fermi-statisztikát követ, $n^{\frac{5}{3}}$-al arányos. A $d\tau$ cellára eső kinetikus energia

[1] H. Jensen l. c.

$$\frac{\varkappa}{4\pi}\, \varepsilon^{\frac{1}{3}} a_H (4\pi\varepsilon n)^{\frac{5}{3}}\, d\tau,$$

ahol $\varkappa = \frac{3}{5}\left(\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$, a_H = első hidrogén-rádius.

Az atom teljes energiája tehát a következő

$$E = \int \frac{d\tau}{4\pi} \left\{ -(\psi + \tfrac{1}{2}\varphi)\, 4\pi\varepsilon n + \varkappa \varepsilon^{\frac{1}{3}} a_H (4\pi\varepsilon n)^{\frac{5}{3}} \right\}.$$

Továbbá, ha N az atomban levő elektronok száma, akkor fennáll, hogy

$$N = \int n\, d\tau.$$

Az integrációt mindkét esetben az egész térre kell kiterjeszteni.

Ki lehet mutatni, hogy E-nek n szerinti variációja a Thomas—Fermi-egyenletre vezet. A feladat már most abban áll, hogy n-et úgy határozzuk meg, hogy E minimummal bírjon. Ezt a problémát Lenz és Jensen a Ritz-féle approximációs módszerrel oldják meg. Hogy E-t egyszerűbb alakra hozzuk, célszerű n-et a Poisson-egyenletből kifejezni, mely szerint

$$\Delta\varphi = 4\pi\varepsilon n$$

$\Delta\varphi$-t E-be beírva nyerjük:

$$E = \int \frac{d\tau}{4\pi} \left\{ -(\psi + \tfrac{1}{2}\varphi)\, \Delta\varphi + \varkappa \varepsilon^{\frac{1}{3}} a_H (\Delta\varphi)^{\frac{5}{3}} \right\}. \tag{1}$$

A feladat most az, hogy $\Delta\varphi$-t alkalmasan választott függvények segítségével állítsuk elő, pl.:

$$\Delta\varphi = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu f_\nu(r)$$

r egy tetszőleges pontnak a magtól való távolsága.

A c_ν koefficienseket úgy kell meghatározni, hogy (1) minimum legyen.

Az $f_\nu(r)$ függvényeket Jensen a következő szempontok figyelembevételével választotta ki:

I. A magtól távol $\Delta\varphi$ exponenciálisan csökkenjen. Ezáltal megegyezésben marad a hullámmechanika eredményeivel.

II. $r=0$-nál $\Delta\varphi$ $\frac{3}{2}$-ed rendben váljon végtelenné. Ezen követeléssel megegyezésben marad a THOMAS—FERMI-elmélettel.

III. Független változónak, főképpen mathematikai nehézségek elkerülése céljából $x=\sqrt{\frac{r}{\lambda}}$-t vezette be, ahol λ egy paraméter, melyet úgy kell meghatározni, hogy az energia minimum legyen.

IV. Az első három követelménynek eleget tevő $\frac{e^{-x}}{x^3}$ függvényt egy polynom harmadik hatványával, $\left(\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu x^\nu\right)^3$-el szorozta. A harmadik hatvány ismét mathematikai nehézségek elkerülése végett szükséges.

Végeredményben $\Delta\varphi$ a következő lesz

$$\Delta\varphi = \frac{N\varepsilon}{A}\frac{e^{-x}}{x^3}\left(\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu x^\nu\right)^3 \tag{2}$$

$$r=\lambda x^2, \tag{3}$$

ahol N jelenti az atom vagy ion elektronjainak számát, A onnan határozható meg, hogy az atom vagy ion elektronjainak össztöltése $-N\varepsilon$, így A számára a következő értéket kapjuk $A=\lambda^3 P_0$, ahol P_0 egy polynom a c_ν-kben.

Az elektronfelhő potenciálját, φ-t a (2) egyenlet megoldása adja. Minthogy csakis gömbi szimmetriával biró atomok vagy ionok jönnek tekintetbe a (2) egyenlet baloldalán levő LAPLACE operator nagyon leegyszerűsödik, a differenciálegyenlet integrálható lesz és φ számára a következő kifejezést nyerjük.

$$\varphi = -\frac{N\varepsilon}{r}\left(1-g(x)\right), \quad \text{ahol} \quad g(x)=e^{-x}\sum_{\mu=0}^{3m+1} a_\mu x^\mu$$

az a_μ koefficiensek a c_ν-kből számíthatók ki.

$\Delta\varphi$-t és φ-t, továbbá $\psi=\frac{Z\varepsilon}{r}$-t ($Z$ az atom rendszáma) (1)-be beirva és az integrációt elvégezve nyerjük

$$E = -\frac{(Z\varepsilon)^2}{\lambda} F_1 + \frac{(Z\varepsilon)^2}{\lambda^2} \frac{a_H}{Z^{\frac{1}{3}}} F_2,$$

ahol az F_1 és F_2 kifejezések a c_ν-ktől és az ionizációfoktól, $\frac{Z-N}{Z}$-től függenek.

λ-át az energia minimum-követeléséből, vagyis a $\frac{\partial E}{\partial \lambda} = 0$ egyenletből kell meghatározni. Innen λ számára nyerjük

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{F_1}{F_2} \frac{Z^{\frac{1}{3}}}{a_H}.$$

Ennek segítségével E számára kapjuk:

$$E = -\frac{1}{4} \frac{F_1^2}{F_2} Z^{\frac{7}{3}} \frac{\varepsilon^2}{a_H}.$$

A c_ν-k a következő egyenletekből határozhatók meg

$$\frac{\partial}{\partial c_\nu}\left(\frac{F_1^2}{F_2}\right) = 0.$$
$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, m$$

Az eddigi fejtegetéseink teljesen általánosak voltak, vagyis tetszésszerinti számú c_ν állandóra fennállottak. Nulladik közelítésben csak a c_0 állandót tartjuk meg, a többi c-t 0-nak vesszük. Ekkor a $\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu x^\nu$ kifejezés $c_0 = 1$-re redukálódik. Az első közelítésben a c_1-et is megtartjuk, ekkor $\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu x^\nu = 1 + c_1 x$. Számításainkban ezt a közelítést fogjuk használni.[1] Ezen közelítésben a $g(x)$ függvényben szereplő a_μ koefficiensek a következők:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = \frac{4}{P_0}(27c_1^3 + 15c_1^2 + 3c_1),\ a_3 = \frac{4}{P_0}(7c_1^3 + 3c_1^2),$$

$$a_4 = \frac{4}{P_0} c_1^3,\ P_0 = 2\sum_{n=0}^{3} \binom{3}{n} (n+2)!\, c_1^n.$$

Az első közelítésben F_1 és F_2 csak c_1-től és az ionizációfoktól függenek. Ezen esetben a c_ν-ket determináló egyenlet-

[1] A második közelítés azonos az elsővel. Lásd H. Jensen l. c.

rendszer 1 egyenletre redukálódik. JENSEN több ionizációfokra meghatározta c_1 és $\frac{1}{2}\frac{F_1}{F_2}$ összetartozó értékeit, a Br^- ionnál ezek a következők:

$$c_1 = 0{\cdot}254,\quad \frac{1}{2}\frac{F_1}{F_2} = 10{\cdot}33. \tag{4}$$

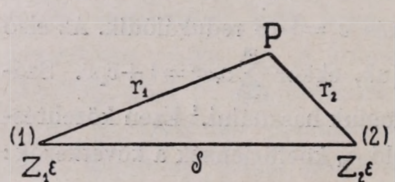
Itt ezen elméletnek csak rövid összefoglalását adtuk és főképen azokat a pontokat emeltük ki, melyek a továbbiakhoz szükségesek.

3. A lithiumbromid-molekula.

A kétatomos poláris molekula statisztikai energiakifejezéséből indulunk ki, mely JENSEN szerint a következő:

$$\begin{aligned} E = Z_1 Z_2 \frac{\varepsilon^2}{\delta} - \int \frac{d\tau}{4\pi}\left(\frac{Z_1\varepsilon}{r_1} + \frac{Z_2\varepsilon}{r_2} + \frac{1}{2}\varphi\right)\Delta\varphi + \\ + \varkappa\varepsilon^{\frac{1}{3}} a_H \int \frac{d\tau}{4\pi}(\Delta\varphi)^{\frac{5}{3}}, \end{aligned} \tag{5}$$

ahol Z_1 és Z_2 az egymástól δ távolságra levő magok rendszáma, φ a molekula elektronfelhőjének a potenciálja, $-\frac{\Delta\varphi}{4\pi}$ a sűrűsége, r_1 és r_2 egy tetszőleges P pontnak az (1), illetőleg a (2) magtól való távolsága (1. ábra).



1. ábra.

Amint már a bevezetésben megjegyeztük, ebben a számításban eltekintünk az ionok deformálhatóságától, vagyis a polarizációtól és első közelítésben a molekula elektronfelhőjét az (1) és (2) ionok elektronfelhőinek egyszerű szuperpoziciója gyanánt fogjuk fel. Vagyis

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2$$
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Ha $\Delta\varphi$-t és φ-t (5)-be beirjuk, és ha a molekulának így nyert energiakifejezéséből kivonjuk a szabad ionok energiáját, akkor nyerjük:

$$
\begin{aligned}
\Delta E = Z_1 Z_2 \frac{\varepsilon^2}{\delta} - \int \frac{d\tau}{4\pi} \left(\frac{Z_1 \varepsilon}{r_1} \Delta\varphi_2 + \frac{Z_2 \varepsilon}{r_2} \Delta\varphi_1 \right) - \\
- \frac{1}{2} \int \frac{d\tau}{4\pi} (\varphi_1 \Delta\varphi_2 + \varphi_2 \Delta\varphi_1) + \\
+ \varkappa \varepsilon^{\frac{1}{3}} a_H \int \frac{d\tau}{4\pi} \left[(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)^{\frac{5}{3}} - (\Delta\varphi_1^{\frac{5}{3}} + \Delta\varphi_2^{\frac{5}{3}}) \right].
\end{aligned}
\tag{6}
$$

ΔE azt az energiaváltozást adja, mely fellép, ha az ionokat a végtelenből egy bizonyos δ távolságig közelitjük egymáshoz. Ezt a kifejezést fogjuk most alkalmazni a *LiBr* molekulára. A feladatunk az lesz, hogy megállapitsuk ΔE minimumához tartozó δ-t, ez egyenlő a molekula magtávolságával. ΔE minimuma pedig az az energia, amely szükséges ahhoz, hogy a molekulát ionjaira szétbontsuk. Mielőtt a molekula magtávolságának és $\Delta E_{\min}$ meghatározására rátérnénk, foglalkozzunk részletesebben ΔE egyes tagjainak fizikai jelentésével.

ΔE négy tagból áll. Az első tag a magok Coulomb-energiája, a második tag mindegyik magnak a másik ion elektronfelhőjével való kölcsönhatásából származik, a harmadik tag az elektronfelhők egymásra való hatásának eredménye. Ez a három tag adja tehát az ionok elektrosztatikus kölcsönhatását. Egészen más természetű a negyedik tag, amely quantummechanikai eredetű, és amely a Fermi-gáz kinetikus energiájának a megváltozását adja. Mint ismeretes, a Fermi-statisztika szerint a koordináta-impulzustér egy elemi cellájában csak legfeljebb egy elektron, illetőleg a spin figyelembe vételével két elektron foglalhat helyet. Így az elektronok az impulzustér összes legalsó celláit betöltik, vagyis egy egyenletes sűrűen betöltött gömbben foglalnak helyet, az impulzustér kezdőpontja körül. Ha a két iont egymáshoz közelitjük, akkor a két elektronfelhő szuperpoziciója folytán az elektronsűrűség megnagyobbodik, ez azonban az előbb mondottak szerint csak úgy lehetséges, ha elektronok az impulzustér magasabb celláiba, vagyis magasabb energiájú állapotba jutnak. Tehát ha a két elektronfelhőt egymásba toljuk, energiát kell közölnünk a rendszerrel, vagyis munkát kell végeznünk. Ennek felel mag a taszítást kifejező negyedik energiaterm.

Legyen az 1 indexszel jelölt ion a Li^+, a 2 indexszel jelölt ion a Br^-. Mint már említettük, a Br^- iont statisztikailag fogjuk tárgyalni, minthogy elegendő elektronja van. A Li^+ ionra azonban nem alkalmazhatunk statisztikát, ezt a következőképen vesszük figyelembe. A Li^+ ion a Br^--hoz képest nagyon kicsi. (Lásd lejebb.) Méretei még kisebbek, mint a *He K* héja, minthogy a Li^+ rendszáma 3, elektronjainak száma pedig 2. Mint látni fogjuk, a Li^+ ion elektronfelhőjének sűrűsége rendkívül gyorsan csökken, így tehát már a maghoz nagyon közel elektrosztatikus szempontból úgy fog viselkedni, mint egy proton. Ugyanis egy radiális szimmetriával biró elektrosztatikus gömbnek a hatását a gömbön kivül mindig helyettesithetjük azzal a hatással, melyet a gömb töltése, a gömb középpontjában egyesítve, kifejt. Minthogy a Br^- ion méretei a Li^+ ionhoz képest nagyok, azért a fentebbi megfontolás alapján az utóbbit elektrosztatikus szempontból helyettesíthetjük egy protonnal, vagyis a Li^+ ion elektronfelhőjét egészen összehúzzuk a magra. Így tehát a (6) alatti energiakifejezés első három tagjába (melyek a két ion elektrosztatikus kölcsönhatását adják), a következő értékek lépnek:

$$Z_1 = 1, \quad \varphi_1 = 0, \quad \Delta\varphi_1 = 0. \tag{7}$$

A (6) alatti kifejezés negyedik tagjára azonban nem lehet ezt az egyszerűsitést alkalmazni, ami ezen tag fizikai jelentéséből, melyet fentebb fejtettünk ki, azonnal kitűnik. Ugyanis ez a tag éppen azáltal jön létre, hogy az ionok közelitésekor az elektronfelhők szuperpoziciója révén az elektrongáz sűrűsége megnagyobbodik. Míg elektrosztatikus szempontból egy olyan pontban, mely a Li^+ ion elektronfelhőjén kívül fekszik a Li^+ ion elektronfelhőjének, mint elektrosztatikus gömbnek a hatása, a gömb középpontjában összevont össztöltés hatásával helyettesíthető, addig ezen quantummechanikai tagnál éppen az a lényeges, hogy a tér egy pontjában a két ion elektronfelhője milyen mértékben szuperponálódik. A (6) alatti kifejezés első három tagjában a (7) alatti egyszerűsítő feltevések következtében elhanyagolt elektrosztatikus vonzó és taszitó erők összege igen nagy közelitésben nulla, ha ellenben a negyedik tagra is alkalmaznánk a (7) alatti egyszerűsitő feltevéseket, akkor ez eltűnne, aminek következtében egy pozitiv energiatermet, vagyis egy taszitó erőt hanyagolnánk el ezen esetben indokolatlan módon. Így tehát a negyedik tagnál figyelembe fogjuk venni azt, hogy a Li^+ ion elektronfelhőjének habár nagyon kicsi, de mégis véges kiterjedése van.[1]

A Li^+ ionra, minthogy csak két elektronja van, statisztikát nem alkalmazhatunk, itt az elektronfelhő sűrűségét hullámmechanikailag állitjuk elő. A Li^+ ion egy kételektron probléma, melyet A. E. HYLLERAAS oldott meg. A Li^+ ion alapállapotának sajátfüggvénye teljesen hasonló a H atom alapállapotának sajátfüggvényéhez, az elektronoknak egymásra való hatásából származó perturbáció az effektiv magtöltésben jut kifejezésre. A Li^+ ion alapállapotának sajátfüggvénye HYLLERAAS[2] szerint a következő:

$$\eta(r^{(1)}, r^{(2)}) = \chi(r^{(1)})\chi(r^{(2)})$$

$$\chi(r^{(i)}) = \frac{Z_{\text{eff}}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{a_H^{\frac{3}{2}}} e^{-Z_{\text{eff}}\left(\frac{r^{(i)}}{a_H}\right)}$$

$$(i=1,\ 2)$$

$r^{(1)}$ és $r^{(2)}$ a két elektronnak a magtól való távolságát jelenti,

$$Z_{\text{eff}} = Z_1 - \frac{5}{16} = \frac{43}{16}.$$

A sajátfüggvényekből az elektronfelhő sűrűsége a következőképen adódik:

$$-\frac{\Delta\varphi_1}{4\pi} = -2\varepsilon\chi(r)\chi^{\star}(r) = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{43}{16}\right)^3 e^{-\frac{43}{8}\left(\frac{r}{a_H}\right)} \frac{\varepsilon}{a_H^3}$$

$$\Delta\varphi_1(r_1) = \left(\frac{43}{8}\right)^3 e^{-\frac{43}{8}\left(\frac{r_1}{a_H}\right)} \frac{\varepsilon}{a_H^3}. \tag{8}$$

---

[1] A mi közelitésünk JENSEN energiaformuláiból (l. c. 736) is levezethető, ha figyelembe vesszük, hogy $g_1(\delta)$ $g_2(\overline{x}_2)$-höz képest, ha $\delta > 3a_H$, kicsi. Egyúttal az is kitűnik, hogy ezen közelitő eljárásunk és a pontos számitás közti különbség nagyon kicsi.

[2] A. E. HYLLERAAS. ZS. f. Phys. 66. 771. 1930.

A Br^- ion elektronsűrűségét, mint említettük, statisztikailag vesszük figyelembe. Első közelítésben $\Delta\varphi_2$ a következő lesz:

$$\Delta\varphi_2(x_2) = \frac{N_2\varepsilon}{\lambda_2^3 P_0} \frac{e^{-x_2}}{x_2^3} (1 + c_1 x_2)^3 \tag{9}$$

$$r_2 = \lambda_2 x_2^2,$$

ahol c_1 és λ_2 (4) által vannak adva.

(8)-ból és (9)-ből látható a két ion közti nagyságkülönbség. Ugyanis az ion méreteit az elektronfelhője determinálja. (8) szerint $\Delta\varphi_1$ mint $e^{-5\cdot4\left(\frac{r}{a_H}\right)}$ csökken r növekedtével. $\Delta\varphi_2$ csökkenése sokkal lassúbb. Ugyanis (9)-ből (4) segítségével nyerjük, hogy $\Delta\varphi_2$ mint $e^{-5\cdot8\sqrt{\frac{r}{a_H}}}$ csökken. A két ion relatív nagyságáról a $\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_2}$ hányados tájékoztat. A (8) és (9) formulákból (4) segítségével nyerjük, hogy

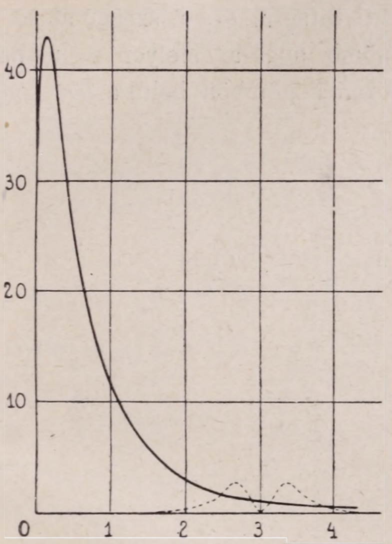
$$\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_2} \cong \frac{155}{268} \frac{1}{\left[1\cdot5 + \left(\frac{r}{a_H}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^3} \frac{e^{-5\cdot4\left(\frac{r}{a_H}\right)}}{e^{-5\cdot8\sqrt{\frac{r}{a_H}}}}$$

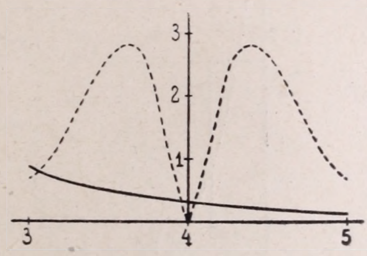
r_1 és r_2 helyébe most r-et írtunk, ugyanis $\Delta\varphi_1$-et és $\Delta\varphi_2$-t most ugyanazon a helyen kell venni. Ez a hányados r egyes értékeinél a következő:

r	$1a_H$	$2a_H$	$3a_H$	$4a_H$	$5a_H$
$\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_2} \cong$	6.10^{-2}	4.10^{-3}	1.10^{-4}	3.10^{-6}	6.10^{-8}

$\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_2}$ tehát r növekedtével nagyon erősen csökken, ez igazolja előbbi, a két ion nagyságkülönbségére vonatkozó állításunkat.

Visszatérve a (6) alatti energiakifejezésre annak 4-ik tagjába a fentebb mondottak szerint a (8) és (9) alatti kifejezéseket kell behelyettesítenünk. $(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)^{\frac{5}{3}}$-nak az integrációja csak numerikusan végezhető el, $\Delta\varphi_1^{\frac{5}{3}}$-nak és $\Delta\varphi_2^{\frac{5}{3}}$-nak az integrációja ellenben akadály nélkül keresztülvihető, minthogy azonban az integrandus egy különbség, melynek tagjai egyenlő nagyságrendűek, célszerű a különbséget az integráció végrehajtása előtt képezni. Ezen integrál kiszámítását egyszerűsíthetjük a következő megfontolásokkal. Mint (8)-ból látható, a Li^+ ion elektronfelhőjének sűrűsége az atommagtól távolodva, rohamosan csökken, csak egy kis gömbön belül lesz jelentős értéke. (2. ábra.)





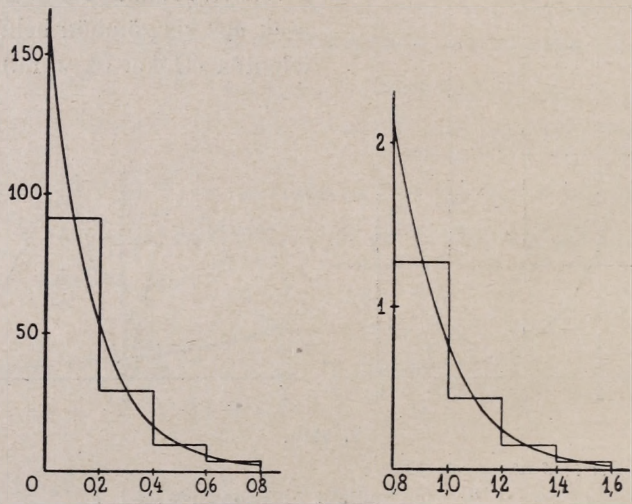
2. ábra.

Abszcissza: δ a_H egységekben:

Ordinata: — a Br^- ion radiális elektronsűrűsége, ---- a Li^+ ion radiális elektronsűrűsége $\left.\right\}$ $\frac{\varepsilon}{a_H}$ egységekben.

Az integrációnál csak ezen a gömbön belüli térrész fog jelentős szerepet játszani, az ezen gömbön kívüli térrészben az integrál értéke az előbbihez képest kicsi és első közelítésben elhagyható. Ezen a gömbön belül a Br^- ion elektronsűrűségét egy konstans átlagértékkel helyettesítjük. Mi azt az elektronsűrűséget választjuk átlagértékül, mellyel a Br^- ion a Li^+ ion elektronfelhőjének középpontjában, vagyis a Li^+ ion magjának helyén bír. A Li^+ ion magja, mint középpont körül koncentrikus gömböket fektetünk, az igy keletkező gömbhéjak mindegyikében a Li^+ ion elektronsűrűségét is helyettesítjük egy átlagértékkel, mégpedig azzal az értékkel, melyet az elektronsűrűség két egymásután következő gömbfelület egymástól való távolságának felezőpontjában vesz fel. Vagyis a Li^+ ion elektronsűrűségét egy lépcsős függvénnyel helyettesitjük, mely a 3. ábrán van feltüntetve.

Ezen egyszerűsitésekkel a fenti integrál egy összeggé alakitható át. Jelen esetben azon gömb sugara, melyen belül az integrál értéke jelentős $\sim 1a_H$ ezen a gömbön belül a Br^- ion



3. ábra.

Abszcissza: r_1 a egységekben.

Ordinata: $\Delta\varphi_1 \frac{\varepsilon}{a_H^3}$ egységekben.

elektronsűrűsége jó közelitésben helyettesíthető a fentebb definiált átlagértékkel. Mi azonban még néhány külső gömbhéjat is figyelembe vettünk és a gömb sugarát $1{\cdot}6a_H$ nagyságúnak választottuk. Ezen külső gömbhéjaknál már nem lehet a Br^- ion elektronsűrűségét oly jó közelitésben az előbbi átlagértékkel helyettesiteni, mint a belsőkre, de ezekben már csak kis értéke van az integrálnak, úgyhogy a fellépő hiba kicsi. A legbelső gömb sugarát $0{\cdot}2a_H$ nagyságúnak választottuk, minden következő gömb sugarát $0{\cdot}2a_H$-val növeltük. Általában az i-edik gömb sugara $\frac{2i}{10}a_H$. A $d\tau$ köbtartalomelemek helyébe most a gömbhéjak köbtartalma lép. Az i-edik gömbhéj köbtartalma legyen τ_i

$$\frac{\tau_i}{4\pi} = \frac{1}{3}\left(\frac{2i}{10}\right)^3 a_H^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{2(i-1)}{10}\right)^3 a_H^3 = \frac{8}{3}\,10^{-3}\,[i^3 - (i-1)^3]\,a_H^3.$$
$$i=1,2,3,\ldots,8$$

Ezen közelítéssel számitott integrál a pontos numerikus integrációval számitott integrál értékénél mindig kissé kisebb.

A fentiek szerint tehát az

$$\int \frac{d\tau}{4\pi}\left[(\Delta\varphi_1+\Delta\varphi_2)^{\frac{5}{3}}-(\Delta\varphi_1^{\frac{5}{3}}+\Delta\varphi_2^{\frac{5}{3}})\right] \tag{10}$$

integrált a következő összeggel helyettesitjük:

$$\sum_{i=1}^{8}\left\{[\Delta\varphi_1(r_{1i})+\Delta\varphi_2(\overline{x}_2)]^{\frac{5}{3}}-[\Delta\varphi_1(r_{1i})^{\frac{5}{3}}+\Delta\varphi_2(\overline{x}_2)^{\frac{5}{3}}]\right\}\frac{\tau_i}{4\pi}, \tag{11}$$

ahol $r_{1i} = \frac{2i-1}{10}a_H$ és $\overline{x}_2 = \sqrt{\frac{\delta}{\lambda_2}}$.

A (7) alatti értékeket és (11)-et (6)-ba beirva nyerjük:

$$\begin{aligned}\Delta E = \frac{Z_2\varepsilon^2}{\delta} - \int\frac{d\tau}{4\pi}\frac{\varepsilon}{r_1}\Delta\varphi_2 + \\ + \varkappa\varepsilon^{\frac{1}{3}}a_H\sum_{i=1}^{8}\left\{[\Delta\varphi_1(r_{1i})+\Delta\varphi_2(\overline{x}_2)]^{\frac{5}{3}}-[\Delta\varphi_1(r_{1i})^{\frac{5}{3}}+\Delta\varphi_2(\overline{x}_2)^{\frac{5}{3}}]\right\}\frac{\tau_i}{4\pi}.\end{aligned} \tag{12}$$

Az $\int\frac{d\tau}{4\pi}\frac{\varepsilon}{r_1}\Delta\varphi_2$ Green tételével könnyen kiszámitható,[1] az egész egyszerű számitásnak csak a végeredményét adjuk meg

$$\int\frac{d\tau}{4\pi}\frac{\varepsilon}{r_1}\Delta\varphi_2 = -\,\varepsilon\varphi_2(\delta) = \frac{N_2\varepsilon^2}{\delta}\left(1-g_2(\overline{x}_2)\right)$$
$$N_2 = Z_2 + 1.$$

---

[1] H. Jensen: l. c.

Ezt (12)-be behelyettesitve és összevonva nyerjük:

$$\Delta E = -\frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{N_2 \varepsilon^2}{\delta} g_2(\overline{x}_2) + \\ + \varkappa \varepsilon^{\frac{1}{3}} a_H \sum_{i=1}^{8} \left\{ [\Delta\varphi_1(r_{1i}) + \Delta\varphi_2(\overline{x}_2)]^{\frac{5}{3}} - [\Delta\varphi_1(r_{1i})^{\frac{5}{3}} + \Delta\varphi_2(\overline{x}_2)^{\frac{5}{3}}] \right\} \frac{\tau_i}{4\pi}. \tag{12'}$$

Az energia kifejezése 3 tagból tevődik össze, melyeket a rövidség kedvéért a következőképen fogunk jelölni:

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= -\frac{\varepsilon^2}{\delta} \\ W_2 &= \frac{N_2 \varepsilon^2}{\delta} g_2(\overline{x}_2) \\ W_3 &= \varkappa \varepsilon^{\frac{1}{3}} a_H \sum_{i=1}^{8} \left\{ [\Delta\varphi_1(r_{1i}) + \Delta\varphi_2(\overline{x}_2)]^{\frac{5}{3}} - [\Delta\varphi_1(r_{1i})^{\frac{5}{3}} + \Delta\varphi_2(\overline{x}_2)^{\frac{5}{3}}] \right\} \frac{\tau_i}{4\pi} \end{aligned}\right| \tag{12''}$$

$$\Delta E = W_1 + W_2 + W_3.$$

W_1 jelenti a két ion COULOMB-energiáját. W_2 fizikai jelentése a következő. Midőn a Li^+ iont, melyet elektrosztatikus szempontból protonnal helyettesítettünk a Br^- ionhoz közelítjük, akkor a Br^- ion magja taszító erőt fog gyakorolni a Li^+ ionra, mivel azonban az elektronfelhő a Br^- ion magjának hatását leárnyékolja, a Br^- ion magja csak $N_2 g_2(\overline{x}_2)\varepsilon$ effektív töltéssel fogja a Li^+ iont taszítani. Ezen effektusnak felel meg a W_2 energiaterm. W_3 fizikai jelentését már fentebb tárgyaltuk. W_2 és W_3 azon energiatermek, melyek az ionok elektronfelhőinek kiterjedése következtében lépnek fel, vagyis onnan származnak, hogy az ionok nem pontszerűek. A későbbiekben ezen energiatermek összegét W_f-el jelöltük, tehát

$$W_f = W_2 + W_3.$$

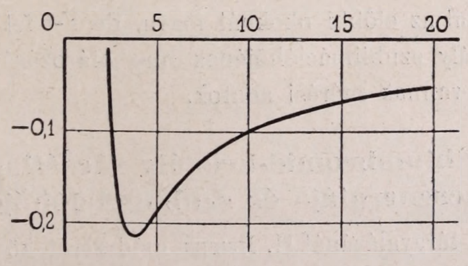
(12′) adja a $LiBr$ molekula kötési energiáját, mint a magtávolság függvényét. Az eredményeket az I. táblázatban foglaltuk össze.

I. Táblázat.

δ	W_1	W_2	W_3	W_2+W_3	ΔE
2·0	—0·50000	+0·33321	+0·63124	+0·96445	+0·46445
2·5	—0·40000	+0·13515	+0·23450	+0·36965	—0·03035
3·0	—0·33333	+0·05991	+0·10662	+0·16653	—0·16680
3·5	—0·28571	+0·02837	+0·04108	+0·06945	—0·21626
3·7	—0·27027	+0·02137	+0·02986	+0·05123	—0·21904
3·74	—0·26738	+0·02020	+0·02797	+0·04817	—0·21921
3·8	—0·26316	+0·01859	+0·02554	+0·04413	—0·21903
4·0	—0·25000	+0·01415	+0·01877	+0·03292	—0·21708
4·5	—0·22222	+0·00736	+0·00898	+0·01634	—0·20588
5·0	—0·20000	+0·00397	+0·00448	+0·00845	—0·19155
6·0	—0·16667	+0·00125	+0·00124	+0·00249	—0·16418
8·0	—0·12500	+0·00016	+0·00013	+0·00029	—0·12471
10·0	—0·10000	+0·00003	+0·00002	+0·00005	—0·09995

Az első oszlop a magtávolságokat tünteti fel a_H egységben. A második oszlopban W_1, a harmadikban W_2, a negyedikben W_3, az ötödikben pedig W_2 és W_3 összege, vagyis az össztaszításnak megfelelő energia áll $\frac{\varepsilon^2}{a_H}$ egységekben. Az utolsó oszlopban a molekula kötési energiája van feltüntetve ugyanilyen egységekben.

A 4. ábra ΔE-t mint a magtávolság függvényét mutatja.



4. ábra.

Abszcissza: δ a_H egységekben.

Ordinata: ΔE $\frac{\varepsilon^2}{a_H}$ egységekben.

A kötési energia, ΔE minimuma δ következő értékénél fekszik

$$\delta_0 = 3{\cdot}74 a_H = 1{\cdot}99\,\text{Å}. \tag{13}$$

Ezen értéket mérési eredményekkel sajnos nem hasonlíthatjuk össze, mert a *LiBr* molekulára vonatkozólag nincsenek mérési adatok. Ellenben összehasonlíthatjuk eredményünket JOSEPH E. MAYER és LINDSAY HELMHOLZ[1] számításaival, akik M. BORN és JOSEPH E. MAYER[2] elmélete alapján, melyben az ionok közt működő erőtörvény empirikus adatok segítségével lesz meghatározva, számították a *LiBr* molekula tehetetlenségi momentumát, melyre a következő értéket kapták $I = 0{\cdot}375 . 10^{-38}$ gr cm². Ebből a molekula magtávolságára a következő érték adódik: $\delta = 1{\cdot}88$ Å. Az általunk számított magtávolság csak 5·9%-al nagyobb, mint J. E. MAYER és L. HELMHOLZ által számított félempirikus érték.

A molekula kötési energiája, vagyis ΔE minimuma a következő:

$$-\Delta E_{\text{min}} = 0{\cdot}21921 \frac{\varepsilon^2}{a_H}.$$

Ha ezen energiáról áttérünk a molekula kötési energiájának 1 molra vonatkoztatott és kalóriákban kifejezett értékére, V-re, akkor nyerjük, hogy

$$V = 136{\cdot}9 \frac{\text{Kal}}{\text{Mol}} \tag{14}$$

ezen eredményt szintén nem hasonlíthatjuk össze közvetlenül a tapasztalattal az előbbi okoknál fogva, de V-t fel fogjuk használni a kristály szublimációhőjének meghatározásánál, amelyre vonatkozóan vannak mérési adatok.

4. A lithiumbromid-kristály rácsállandója, rácsenergiája és szublimációhője.

A kristály tárgyalásánál H. JENSEN módszerét követjük. Ismét az energiakifejezésből indulunk ki. Ha (5) analógiájára képezzük

---

[1] JOSEPH E. MAYER u. LINDSAY HELMHOLZ: ZS. f. Phys. 75, 19. 1931.
[2] M. BORN u. JOSEPH E. MAYER: ZS. f. Phys. 75. 1. 1931.

a kristály teljes energiáját és ebből levonjuk a szabad ionok energiáját, akkor a kristály rácsenergiáját nyerjük. A rácsenergia (6) analógiájára a következő

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k}{}' Z_i Z_k \frac{\varepsilon^2}{r_{ik}} - \int \frac{d\tau}{4\pi} \sum_{i,k}{}' \left(\frac{Z_i \varepsilon}{r_i} + \frac{1}{2} \varphi_i \right) \Delta\varphi_k + \\ + \varkappa \varepsilon^{\frac{1}{3}} a_H \int \frac{d\tau}{4\pi} \left\{ \left(\sum_{i=0}^{\infty} \Delta\varphi_i \right)^{\frac{5}{3}} - \sum_{i=0}^{\infty} (\Delta\varphi_i)^{\frac{5}{3}} \right\} \tag{15}$$

r_{ik} az i-edik magnak a k-adiktól való távolsága, r_i egy tetszőleges pontnak az i-edik magtól való távolsága. A szummációt, minthogy végtelen kiterjedésű rácsra végezzük el a számítást, minden i-re és k-ra 0-tól ∞-ig ki kell terjeszteni $i = k$ kivételével.

A rácsenergia két részre bontható, az egyik a rács összes ionjainak Coulomb-energiája, ezt U_1-el jelöljük, a másik rész az ionok elektronfelhőinek kiterjedésétől származik, az innen származó energiarészt U_f-el jelöljük. Tehát

$$U = U_1 + U_f.$$

Számításainkat most specializáljuk kősótipusú kristályokra, melyekhez a *LiBr* is tartozik. U_1-et mint ismeretes, Madelung és Ewald határozták meg, és kősótipusú kristályokra azt találták, hogy

$$U_1 = -\frac{1 \cdot 7476 \varepsilon^2}{\delta} n,$$

ahol n a rácsban levő ionpárok száma, δ a rácsállandó.

U_f egyszerű alakra hozható. Ugyanis mivel az elektronfelhő sűrűsége exponenciálisan csökken, azért U_f kiszámitásánál kősótipusú kristályoknál mindegyik ionnak csak hat közvetlen szomszédját szükséges első közelitésben figyelembe venni. Ennek alapján sikerült Jensen-nek U_f-et a következőképen átalakitani

$$U_f = n 6 . W_f,$$

ahol W_f a molekulára vonatkozó, U_f-hez teljesen analóg jelentésű energiaterm.

A mi esetünkben

$$W_f = W_2 + W_3$$

ahol W_2 és W_3 (12″) által vannak adva.

Tehát a $LiBr$ rácsenergiája a következő:

$$U = -n\frac{1{\cdot}7476\varepsilon^2}{\delta} + n6\,(W_2 + W_3). \qquad (16)$$

Ha bevezetjük az egy ionpárra eső rácsenergiát $\frac{U}{n} = u$-t, akkor nyerjük

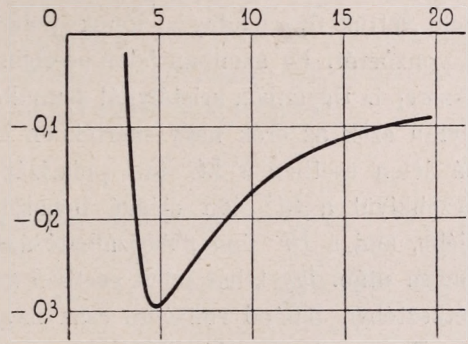
$$u = -\frac{1{\cdot}7476\varepsilon^2}{\delta} + 6\,(W_2 + W_3). \qquad (17)$$

Itt is teljesen hasonló feladattal állunk szemben, mint a molekulánál, meg kell állapítanunk, hogy u milyen δ mellett bír minimummal. Az u minimumához tartozó δ lesz a kristály rácsállandója. Az eredmények a II. táblázatban vannak összefoglalva.

II. Táblázat.

δ	$\frac{U_1}{n}$	$6W_2$	$6W_3$	$\frac{U_f}{n}$	u
2·0	—0·87380	+1·99926	+3·78744	+5·78670	+4·91290
2·5	—0·69904	+0·81090	+1·40700	+2·21790	+1·51886
3·0	—0·58253	+0·35946	+0·63972	+0·99918	+0·41665
3·5	—0·49931	+0·17022	+0·24648	+0·41670	—0·08261
4·0	—0·43690	+0·08490	+0·11262	+0·19752	—0·23938
4·5	—0·38836	+0·04416	+0·05388	+0·09804	—0·29032
4·9	—0·35665	+0·02688	+0·03084	+0·05772	—0·29893
4·93	—0·35448	+0·02586	+0·02958	+0·05544	—0·29904
5·0	—0·34952	+0·02382	+0·02688	+0·05070	—0·29882
5·5	—0·31775	+0·01320	+0·01428	+0·02748	—0·29027
6·0	—0·29127	+0·00750	+0·00744	+0·01494	—0·27633
8·0	—0·21845	+0·00096	+0·00078	+0·00174	—0·21671
10·0	—0·17476	+0·00018	+0·00012	+0·00030	—0·17446

Az első oszlopban δ van feltüntetve a_H egységekben. A második oszlopban a kristály összes ionjainak COULOMB-energiája egy ionpárra vonatkoztatva, a harmadik oszlopban $6W_2$, a negyedikben $6W_3$, az ötödikben ez utóbbi két energiaterm összege, vagyis $\frac{U_f}{n}$, az utolsó oszlopban pedig az egy ionpárra vonatkoztatott rácsenergia, u áll. Az összes energiatermek $\frac{\varepsilon^2}{a_H}$ egységekben vannak megadva.



5. ábra.
Abszcissa: δ a_H egységekben.
Ordinata: u $\frac{\varepsilon^2}{a_H}$ egységekben.

Az 5. ábra a kristály rácsenergiáját mint δ függvényét mutatja

u minimuma δ következő értékénél fekszik

$$\delta_0 = 4{\cdot}93 a_H = 2{\cdot}62 \text{Å} \tag{18}$$

A mért rácsállandó

$$\delta = 2{\cdot}74_5 \text{Å}.^1$$

Az elméletileg meghatározott rácsállandó csak 4·6%-kal tér el a mért rácsállandótól. A számított rácsállandó kissé kisebbnek adódott a mértnél, ennek oka a következő. Számításainkban a (10) alatti integrált a (11) alatti összeggel helyet-

[1] Handb. d. Phys. XXIV. 334.

tesítettük. Azonban amint kiemeltük, a (11) alatti összeg mindig kissé kisebb, mint a (10) alatti integrál, így tehát egy kis taszítóerőt hanyagoltunk el. Azonkívül, minthogy jelenleg a kation nagyon kicsi, a kristály rácsenergiájának számításánál második közelítésben mindegyik ion 6 közvetlen szomszédján kívül még a síkbeli diagonálisok mentén fekvő szomszédokat is figyelembe kell venni, melyek hatásából szintén egy kis taszítóerő adódik. Ezzel szemben azonban, amint már a bevezetésben említettük, nem vettük figyelembe az ionok polarizálhatóságából származó vonzóerőt. Ez azonban jelen esetben szintén csak másodrendű szerepű. Ugyanis a kristálynál fennálló szimmetria viszonyok folytán ezek az erők nagy mértékben kompenzálódnak. Továbbá jelen esetben a Li^+ ion polarizálhatósága nagyon kicsi, ezenkívül a Li^+ ion eléggé behatol a Br^- ion elektronfelhőjébe, ami a Br^- ion polarizálhatóságának csökkenését vonja maga után. Így tehát jelen esetben az ionok polarizációja következtében fellépő vonzóerő csak nagyon kis szerepet játszik. Ezen másodrendű effektusok figyelembevétele már nagyon komplikált számításokra vezet, különösen az okoz nagy nehézséget, hogy a polarizálhatóságnak az atom belsejében való változása nem ismeretes. Ezen másodrendű effektusok megbecsülése azt mutatja, hogy ezen effektusok eredője egy kis taszitóerő. Tehát remélhető, hogy második közelítésben ezen másodrendű effektusok figyelembevételével a mért és a számitott rácsállandó közti számszerű megegyezés javul.

A II. táblázatból a kristály rácsenergiáját is megállapíthatjuk, amely nem más, mint a $\delta = \delta_0$-hoz tartozó energiaminimum

$$-u_{\min} = 0{\cdot}29904 \frac{\varepsilon^2}{a_H}.$$

Ebből az 1 molra vonatkoztatott és kalóriákban kifejezett rácsenergiára nyerjük

$$U = 186{\cdot}7 \frac{\text{Kal}}{\text{Mol}} \tag{19}$$

M. Born és Joseph E. Mayer[1] empirikus konstansokat figyelembe vevő elmélete alapján Joseph E. Mayer és Lindsay Helmholz[2] a következő eredményt kapták $U = 188{\cdot}3 \frac{\text{Kal}}{\text{Mol}}$. A mi értékünk ettől csak 0·9%-kal tér el.

A (19) alatti eredményt közvetlenül nem hasonlíthatjuk össze a tapasztalattal, mert a *LiBr* kristály rácsenergiájára vonatkozóan nincsenek mérések. De összehasonlíthatjuk a tapasztalattal a kristály szublimációhőjét, melyet a rácsenergiából és a molekula kötési energiájából könnyen kiszámíthatunk. Ugyanis, ha S jelenti a kristály szublimációhőjét az abszolút nulla fokon, akkor fennáll a következő összefüggés

$$S = U - V.$$

Ezen összefüggésből a *LiBr*-ra nyerjük

$$S = 49{\cdot}8 \frac{\text{Kal}}{\text{Mol}}$$

K. Fajans[3] H. v. Wartenberg[4] kisérleti adataiból határozta meg S-et és a következő értéket kapta $S = 47 \frac{\text{Kal}}{\text{Mol}}$. Eredményünk ettől csak 6%-kal tér el. Tehát az elméleti és kisérleti eredmények itt is jól megegyeznek.

5. A lithiumbromid-kristály kompresszibilitása.

A kompresszibilitás, k definiciója a következő

$$k = -\frac{1}{v_0}\left(\frac{dv}{dp}\right)_{p=0}$$

---

[1] M. Born u. Joseph E. Mayer l. c.

[2] Joseph E. Mayer u. Lindsay Helmholz l. c.

[3] K. Fajans u. E. Schwartz. ZS. f. Phys. Chem. Bodenstein-Festband 717. 1931.

[4] H. v. Wartenberg u. Ph. Albrecht, ZS. f. Elektrochem. 27. 162. 1921. és H. v. Wartenberg u. H. Schulz, ZS. f. Elektrochem. 27. 568. 1921.

p jelenti a nyomást, v a p nyomáshoz tartozó térfogatot, v_0 a 0 nyomáshoz tartozó térfogatot. A számítások egyszerűsítése céljából áttérünk k reciprokjára

$$\frac{1}{k} = -v_0 \left(\frac{dp}{dv}\right)_{v=v_0}.$$

Infinitesimális változásoknál fennáll

$$-du = pdv,$$

vagyis

$$\frac{du}{dv} = -p,$$

innen

$$\frac{d^2u}{dv^2} = -\frac{dp}{dv}$$

tehát

$$\frac{1}{k} = v_0 \left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)_{v=v_0}. \tag{20}$$

Válasszuk v_0-nak az éppen 1 ionpárt tartalmazó elemi cellát. Ekkor u az ezen cellára vonatkozó rácsenergia, u tehát (17) által van megadva. Az elemi cella definiciójából következik, hogy

$$v = 2\delta^3,\text{[1]} \tag{21}$$

innen

$$dv = 6\delta^2 . d\delta,$$

tehát

$$\frac{d\delta}{dv} = \frac{1}{6\delta^2}.$$

Ezek segítségével a (20) alatti formulát átalakíthatjuk

$$\frac{du}{dv} = \frac{du}{d\delta}\frac{d\delta}{dv} = \frac{1}{6\delta^2}\frac{du}{d\delta}$$

$$\frac{d^2u}{dv^2} = -\frac{1}{3\delta^3}\frac{du}{d\delta} + \frac{1}{6\delta^2}\frac{d^2u}{d\delta^2}\frac{d\delta}{dv} = -\frac{1}{3\delta^3}\frac{du}{d\delta} + \frac{1}{36\delta^4}\frac{d^2u}{d\delta^2}.$$

Minthogy az egyensúlyi helyzetben az erő eltűnik, azért

$$\left(\frac{du}{d\delta}\right)_{\delta=\delta_0} = 0,$$

[1] A 0 indexet most elhagytuk, ugyanis δ_0-t most változónak tekintjük. A számítások végén ismét áttérünk $\delta = \delta_0$-ra.

tehát

$$\left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)_{v=v_0} = \frac{1}{36\delta_0^4}\left(\frac{d^2u}{d\delta^2}\right)_{\delta=\delta_0}. \tag{22}$$

(21) és (22) segitségével nyerjük, hogy

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{18\delta_0}\left(\frac{d^2u}{d\delta^2}\right)_{\delta=\delta_0}. \tag{23}$$

Ezen formula segitségével a *LiBr* kristály kompresszibilitása egyszerűen számitható ki

$$u = -\frac{1{\cdot}7476\varepsilon^2}{\delta} + \frac{6N_2\varepsilon^2}{\delta} g_2(\overline{x}_2) +$$

$$+ 6\varkappa\varepsilon^{\frac{1}{3}}a_H \sum_{i=1}^{8}\left\{[\varDelta\varphi_1(r_{1i}) + \varDelta\varphi_2(\overline{x}_2)]^{\frac{5}{3}} - [\varDelta\varphi_1(r_{1i})^{\frac{5}{3}} + \varDelta\varphi_2(\overline{x}_2)^{\frac{5}{3}}]\right\}\frac{\tau_i}{4\pi}$$

$$\frac{du}{d\delta} = \frac{1{\cdot}7476\varepsilon^2}{\delta^2} - \frac{6N_2\varepsilon^2}{\delta^2} g_2(\overline{x}_2) + \frac{6N_2\varepsilon^2}{\delta} g_2'(\overline{x}_2) +$$

$$+ 10\varkappa\varepsilon^{\frac{1}{3}}a_H [\varDelta\varphi_2(\overline{x}_2)]' \sum_{i=1}^{8}\left\{[\varDelta\varphi_1(r_{1i}) + \varDelta\varphi_2(\overline{x}_2)]^{\frac{2}{3}} - \varDelta\varphi_2(\overline{x}_2)^{\frac{2}{3}}\right\}\frac{\tau_i}{4\pi}$$

$$\frac{d^2u}{d\delta^2} = -\frac{3{\cdot}4952\varepsilon^2}{\delta^3} + \frac{12N_2\varepsilon^2}{\delta^3} g_2(\overline{x}_2) - \frac{12N_2\varepsilon^2}{\delta^2} g_2'(\overline{x}_2) + \frac{6N_2\varepsilon^2}{\delta} g_2''(\overline{x}_2) +$$

$$+ 10\varkappa\varepsilon^{\frac{1}{3}}a_H [\varDelta\varphi_2(\overline{x}_2)]'' \sum_{i=1}^{8}\left\{[\varDelta\varphi_1(r_{1i}) + \varDelta\varphi_2(\overline{x}_2)]^{\frac{2}{3}} - \varDelta\varphi_2(\overline{x}_2)^{\frac{2}{3}}\right\}\frac{\tau_i}{4\pi}. \tag{24}$$

A vesszők δ szerinti differenciálhányadost jelentenek. $\frac{d^2u}{d\delta^2}$-ban a $[\varDelta\varphi_2(\overline{x}_2)]' \sum_i \{\cdots\} \frac{\tau_i}{4\pi}$ tag differenciálásából még egy tag lép fel, melyben mint szorzó $[\varDelta\varphi_2(\overline{x}_2)]'^2$ szerepel, ezt a tagot, mivel a többi taghoz viszonyitva magasabbrendű kicsi, elhagytuk.

$g_2(\overline{x}_2)$ és $\varDelta\varphi_2(\overline{x}_2)$ δ szerinti differenciálhányadosai a következő összefüggések

$$\delta = \lambda_2.(\overline{x}_2)^2 \quad \text{és} \quad \frac{d\overline{x}_2}{d\delta} = \frac{1}{2\lambda_2\overline{x}_2}$$

figyelembe vételével egyszerűen képezhetők:

$$g_2(\overline{x}_2) = e^{-\overline{x}_2}\sum_{\mu=0}^{3m+1} a_\mu.(\overline{x}_2)^\mu$$

$$g_2'(\overline{x}_2) = \frac{1}{2\lambda_2} e^{-\overline{x}_2}\left\{\sum_{\mu=0}^{3m+1}\mu a_\mu.(\overline{x}_2)^{\mu-2} - \sum_{\mu=0}^{3m+1} a_\mu.(\overline{x}_2)^{\mu-1}\right\} \tag{25}$$

$$g_2''(\overline{x}_2) = \frac{1}{4\lambda_2^2} e^{-\overline{x}_2} \Big\{ \sum_{\mu=0}^{3m+1} a_\mu . (\overline{x}_2)^{\mu-2} - \sum_{\mu=0}^{3m+1} (2\mu - 1) a_\mu . (\overline{x}_2)^{\mu-3} + \\ + \sum_{\mu=0}^{3m+1} \mu (\mu - 2) a_\mu . (\overline{x}_2)^{\mu-4} \Big\} \tag{26}$$

$$\varDelta\varphi_2(\overline{x}_2) = \frac{N_2\varepsilon}{A} \frac{e^{-\overline{x}_2}}{(\overline{x}_2)^3} (1 + c_1\overline{x}_2)^3 = \frac{N_2\varepsilon}{A} e^{-\overline{x}_2} \left(c_1 + \frac{1}{\overline{x}_2}\right)^3.$$

Vezessük be a következő jelölést $c_1 + \frac{1}{\overline{x}_2} = T$. Ezen jelöléssel nyerjük:

$$[\varDelta\varphi_2(\overline{x}_2)]' = - \frac{N_2\varepsilon}{2A\lambda_2} \frac{e^{-\overline{x}_2}}{(\overline{x}_2)^3} \{(\overline{x}_2)^2 T^3 + 3T^2\} \tag{27}$$

$$[\varDelta\varphi_2(\overline{x}_2)]'' = \frac{N_2\varepsilon}{4A\lambda_2^2} \frac{e^{-\overline{x}_2}}{(\overline{x}_2)^6} \{(\overline{x}_2)^3 (1 + \overline{x}_2) T^3 + \\ + 3\overline{x}_2 (3 + 2\overline{x}_2) T^2 + 6T\} \tag{28}$$

$\frac{d^2u}{d\delta^2}$-t (23)-ba helyettesítve a következő eredményt kapjuk

$$k = 4{\cdot}32.10^{-12} \frac{\text{cm}^2}{\text{dyn}}.$$

Míg a mért kompresszibilitás

$$k = 4{\cdot}28.10^{-12} \frac{\text{cm}^2}{\text{dyn}},\ [1]$$

ezzel eredményünk nagyon jól megegyezik.

6. A lithiumbromid-kristály ultravörös sajátfrequenciája.

Kősó típusú kristályok ultravörös sajátfrequenciájára L. G. Carpenter és L. G. Stoodley[2] vezettek le egy formulát azon feltevés alapján, hogy az ionok közt működő taszítóerők $\frac{b}{r^n}$ alakúak, ahol b és n az iontól függő állandók. Mi megtartjuk ezen szerzők elméletének alapgondolatait, de meggondolásaikat általánosítjuk tetszésszerinti erőtörvényre.

---

[1] International Critical Tables.

[2] L. G. Carpenter and L. G. Stoodley. Phil. Mag. 5. 823. 1928.

L. G. CARPENTER és L. G. STOODLEY a következő feltevések alapján dolgozták ki elméletüket:

1. A kristályban az ellenkező töltésű ionok által alkotott rácsok egymáshoz képest mint merev komplexumok végezhetnek rezgést.

2. Ezen rezgések frequenciája azonos a kristály ultravörös sajátfrequenciájával.

3. A rezgések amplitudója elegendő kicsi, úgyhogy a rezgés egyszerű harmónikus rezgésnek tekinthető, vagyis a nyugalmi helyzetből való kimozdulásnál fellépő rugalmas erő arányos az elmozdulás első hatványával.

4. Egy ion elmozdulásánál fellépő rugalmas erő csakis a legközelebbi 14 ellentétes előjelű ion jelenlététől függ, a többi ionok hatása elhagyható.

Ezen alapfeltevésekből a kristály ultravörös sajátfrequenciája, vagyis az a frequencia, mellyel az M_1 tömegű pozitív rács az M_2 tömegű negatív rácshoz képest rezeghet, a következő ismert formulából adódik

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F(M_1+M_2)}{M_1 . M_2}}, \tag{29}$$

ahol F a rácsra vonatkozó rugalmas erő állandója.

Ha a rácsban L egyenlő előjelű ion van, akkor

$$F = Lf,$$

ahol f az egy ionra vonatkoztatott rugalmas erő állandója. Ez az összefüggés onnan következik, hogy a fennálló szimmetriaviszonyok folytán az összes ellentétes előjelű ionpárok egyenlő hatást fejtenek ki egymásra, úgyhogy a rácsra vonatkozó rugalmas erő, az egyes ionokra vonatkozó rugalmas erők összege.

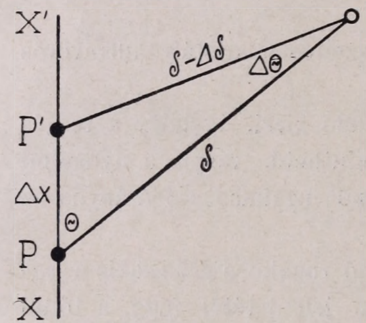
Továbbá fennáll

$$M_1 = Lm_1$$
$$M_2 = Lm_2,$$

ahol m_1 és m_2 a pozitív, illetőleg a negatív ion tömege. Ezen összefüggések segítségével (29) a következő alakra hozható

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}. \qquad (29')$$

Mielőtt f meghatározására rátérnénk, célszerű egy általános kifejezést levezetni két ion közt fellépő azon rugalmas erőre, mely akkor jön létre, ha az egyik iont a másikhoz képest egy elemi távolsággal oly irányba mozditjuk el, mely az ionok középpontjait összekötő egyenessel θ szöget zár be (6. ábra).



6. ábra.

A két ion közt működő erő legyen $K(\delta)$, ezen erőnek a XX' irányba eső komponense $K(\delta)\cos\theta$. Mozduljon el a P ion Δx-el az XX' irányban. Feltesszük, hogy Δx δ-hoz képest kicsi. A fellépő rugalmas erő $-\Delta K(\delta)$

$$\begin{aligned}\Delta K(\delta) &= \frac{d}{dx}\left[K(\delta)\cos\theta\right]\Delta x = \\ &= \left[\frac{dK(\delta)}{d\delta}\frac{d\delta}{dx}\cos\theta - K(\delta)\sin\theta\frac{d\theta}{dx}\right]\Delta x.\end{aligned} \qquad (30)$$

Mivel feltettük, hogy Δx δ-hoz képest kicsi, azért fennáll, hogy

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta x} = -\cos\theta \quad \text{és} \quad \delta\Delta\theta = \Delta x\sin\theta,$$

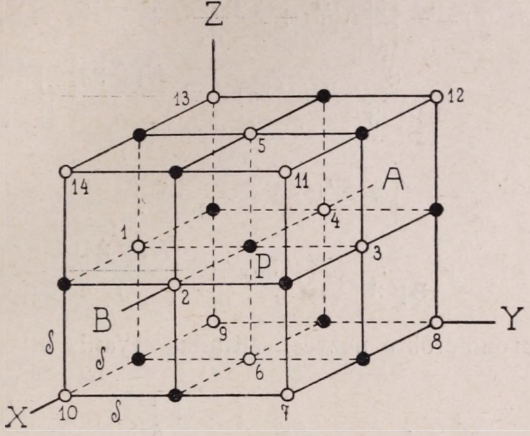
amint ez a 6. ábrából közvetlenül látható. Ezek segítségével (30) a következő alakra hozható

$$\Delta K(\delta) = -\left[K'(\delta)\cos^2\theta + \frac{K(\delta)}{\delta}\sin^2\theta\right]\Delta x. \qquad (31)$$

A vessző itt is δ szerinti differenciálhányadost jelent.

Ezen formula segitségével f könnyen meghatározható. A 7. ábra a kősó típusú kristályok struktúráját mutatja, a fekete pontok a pozitív, a körök a negatív ionokat jelentik.

Számítsuk ki a (31) formula segítségével azt a rugalmas erőt,



7. ábra.

mely fellép, ha a P iont az X tengellyel párhuzamos AB irányban Δx-el elmozdítjuk.

A 2 és 4 ionok által gyakorolt erő, mivel $\Theta = 0$ a következő

$$\Delta K(\delta) = -\,2K'(\delta)\,\Delta x.$$

Az 1, 3, 5, 6 ionok esetében $\Theta = \frac{\pi}{2}$, tehát az általuk gyakorolt erő

$$\Delta K(\delta) = -\,4\,\frac{K(\delta)}{\delta}\,\Delta x.$$

A térbeli diagonálisok mentén fekvő 7—14-es ionoknál

$$\cos\Theta = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \sin\Theta = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

tehát az általuk kifejtett erő

$$\Delta K(\delta) = -\,\frac{8}{3\sqrt{3}}\left[K'(\sqrt{3}\delta) + 2\,\frac{K(\sqrt{3}\delta)}{\delta}\right].$$

Tehát a 14 legközelebbi ellentétes előjelű ion által kifejtett összhatás

$$\Delta K(\delta) = -\left\{2\left[K'(\delta) + 2\frac{K(\delta)}{\delta}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{8}{3\sqrt{3}}\left[K'(\sqrt{3}\delta) + 2\frac{K(\sqrt{3}\delta)}{\delta}\right]\right\}_{\delta=\delta_0} \Delta x.$$

Tehát

$$f = -\left\{2\left[K'(\delta) + 2\frac{K(\delta)}{\delta}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{8}{3\sqrt{3}}\left[K'(\sqrt{3}\delta) + 2\frac{K(\sqrt{3}\delta)}{\delta}\right]\right\}_{\delta=\delta_0}. \tag{32}$$

A COULOMB-erőkre nézve f eltünik, ugyanis

$$\frac{d}{d\delta}\left(\frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) = -\frac{2\varepsilon}{\delta^3} \quad \text{és} \quad 2\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\delta^2}\right)}{\delta} = \frac{2\varepsilon}{\delta^3}.$$

Ezen egyenletek jobboldalának összege 0, teljesen hasonlóan mutatható ki, hogy (32) jobboldalának második tagja is eltűnik. Így tehát (32)-ben $K(\delta)$ helyébe csakis azon erőket kell helyettesítenünk, melyek az ionok elektronfelhőinek kiterjedése következtében jönnek létre. Vagyis $K(\delta)$ helyébe csakis a $W_f(\delta)$ energiatermnek megfelelő erőket kell beírni. Ezen erők a mi esetünkben azonban exponenciálisan csökkennek, úgyhogy a térbeli diagonálisok mentén fekvő 8 ion erőhatásaitól eltekinthetünk, vagyis a (32) alatti kifejezésben a jobboldalnak csak első tagját kell figyelembe venni. Ha a $K(\delta)$ erőről rögtön áttérünk a $W_f(\delta)$ energiára, akkor nyerjük, hogy

$$f = 2\left[W_f''(\delta) + \frac{2}{\delta} W_f'(\delta)\right]_{\delta=\delta_0}. \tag{33}$$

$$W_f(\delta) = \frac{N_2\varepsilon^2}{\delta} g_2(\overline{x}_2) +$$

$$+ \varkappa\varepsilon^{\frac{1}{3}} a_H \sum_{i=1}^{8} \left\{[\Delta\varphi_1(r_{1i}) + \Delta\varphi_2(\overline{x}_2)]^{\frac{5}{3}} - [\Delta\varphi_1(r_{1i})^{\frac{5}{3}} + \Delta\varphi_2(\overline{x}_2)^{\frac{5}{3}}]\right\} \frac{\tau_i}{4\pi}$$

$$W_f'(\delta) = -\frac{N_2\varepsilon^2}{\delta^2} g_2(\overline{x}_2) + \frac{N_2\varepsilon^2}{\delta} g_2'(\overline{x}_2) +$$

$$+ \frac{5}{3} \varkappa\varepsilon^{\frac{1}{3}} a_H [\Delta\varphi_2(\overline{x}_2)]' \sum_{i=1}^{8} \left\{[\Delta\varphi_1(r_{1i}) + \Delta\varphi_2(\overline{x}_2)]^{\frac{2}{3}} - \Delta\varphi_2(\overline{x}_2)^{\frac{2}{3}}\right\} \frac{\tau_i}{4\pi} \tag{34}$$

$$W_f''(\delta) = \frac{2N_2\varepsilon^2}{\delta^3} g_2(\bar{x}_2) - \frac{2N_2\varepsilon^2}{\delta^2} g_2'(\bar{x}_2) + \frac{N_2\varepsilon^2}{\delta} g_2''(\bar{x}_2) +$$
$$+ \frac{5}{3} \varkappa\varepsilon^{\frac{1}{3}} a_H \left[\Delta\varphi_2(\bar{x}_2)\right]'' \sum_{i=1}^{8} \left\{\left[\Delta\varphi_1(r_{1i}) + \Delta\varphi_2(\bar{x}_2)\right]^{\frac{2}{3}} - \Delta\varphi_2(\bar{x}_2)^{\frac{2}{3}}\right\} \frac{\tau_i}{4\pi}. \qquad (35)$$

$W_f''(\delta)$ képezésénél hasonlóképpen, mint (24)-ben elhagytuk a $[\Delta\varphi_2(\bar{x}_2)]' \sum_i \{\cdots\} \frac{\tau_i}{4\pi}$ kifejezés differenciálásából fellépő azon tagot, melyben $[\Delta\varphi_2(\bar{x}_2)]'^2$ mint szorzó szerepel, ugyanis ez a többiekhez viszonyítva magasabbrendű kicsi.

(34)-et és (35)-öt (33)-ba helyettesítve, nyerjük:

$$f = \left[\frac{2N_2\varepsilon^2}{\delta} g_2''(\bar{x}_2) + \frac{10}{3} \varkappa\varepsilon^{\frac{1}{3}} a_H \left\{\left[\Delta\varphi_2(\bar{x}_2)\right]'' + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2}{\delta} \left[\Delta\varphi_2(\bar{x}_2)\right]'\right\} \sum_{i=1}^{8} \left\{\left[\Delta\varphi_1(r_{1i}) + \Delta\varphi_2(\bar{x}_2)\right]^{\frac{2}{3}} - \Delta\varphi_2(\bar{x}_2)^{\frac{2}{3}}\right\} \frac{\tau_i}{4\pi}\right]_{\delta=\delta_0}.$$

f ezen értékét (29')-be helyettesítve a *LiBr*-ra a következő sajátfrequenciát kapjuk

$$\nu = 9{\cdot}27 . 10^{12}\ \mathrm{sec}^{-1}$$

ezen frequenciának megfelelő hullámhossz

$$\lambda = 32{\cdot}4\ \mu. \qquad (36)$$

A lithiumbromid-kristály sajátfrequenciáját nem mérték, de más kristályokra vonatkozó kisérleti adatokból a sajátfrequencia nagyságát közelítőleg meghatározhatjuk. Ugyanis H. Rubens és H. v. Wartenberg,[1] továbbá O. Reinkober[2] több alkalihalogenid kristály maradéksugárzásának (Reststrahlen) hullámhosszát mérték. Cl. Schaefer és F. Matossi ezen eredményeket a fluorid-, chlorid-, bromid- és jodidokra külön egy-egy görbében tüntették fel,[3] melyek a megfelelő halogenid alkalijának atomsúlya és az illető alkalihalogenid-kristály maradéksugárzásának hullám-

[1] H. Rubens u. H. v. Wartenberg, Berl. Ber. old. 169. 1914.

[2] O. Reinkober, ZS. f. Phys. 39. 437. 1926.

[3] Cl. Schaefer u. F. Matossi. Das ultrarote Spektrum, old. 305. Berlin, 1930.

hossza közti összefüggést mutatják. Ezen görbékből a *LiBr* kristály maradéksugárzásának hullámhossza extrapolálható, így a maradéksugárzás hullámhosszára 31μ adódik. A kristály ultravörös sajáthullámhossza és maradéksugárzásának hullámhossza nem azonosak, a sajáthullámhossz mindig nagyobb a maradéksugárzás hullámhosszánál. A maradéksugárzás hullámhosszának sajáthullámhosszra való átszámítása eddig csak a *NaCl* és *KCl* kristályoknál sikerült,[1] ugyanis az átszámításhoz szükséges diszperziós adatok csak ezen kristályoknál ismeretesek. Ezen két kristálynál a sajáthullámhossz $\sim 17\%$-al nagyobb a maradéksugárzás hullámhosszánál. Ha feltesszük, hogy a hasonló típusú kristályok maradéksugárzásának hullámhossza és sajáthullámhossza közti relatív különbség ugyanakkora, akkor a *LiBr* maradéksugárzása hullámhosszának fenti extrapolált értékéből a *LiBr* ultravörös sajátrezgésének hullámhosszára a következő értéket nyerjük $\lambda = 36\mu$. Az ily módon kisérleti adatokból közelítőleg meghatározott hullámhosszal a (36) alatti eredményünk elég jól megegyezik.

7. Összefoglalás.

Ezen dolgozatban a *LiBr* kristály néhány fizikai állandóját határoztuk meg. Számításainkat teljesen elméleti alapon végeztük, *empirikus konstansokat nem használtunk fel.* A Br^- iont statisztikailag tárgyaltuk, a Li^+ iont elektrosztatikus szempontból protonnal helyettesítettük, az elektrongáz kinetikus energiájának megváltozásánál, a Fermi-féle taszításnál, hullámmechanikailag vettük figyelembe a Li^+ ion elektronfelhőjét.

Megvizsgáltuk a *LiBr* molekula kötését. Az eredmények a következők: magtávolság $\delta_0 = 1{\cdot}99 \mathring{A}$, a kötési energia 1 molra vonatkoztatva $V = 136{\cdot}9 \frac{\mathrm{Kal}}{\mathrm{Mol}}$.

Meghatároztuk a *LiBr* kristály rácsállandóját, rácsenergiáját, szublimációhőjét, kompresszibilitását és ultravörös sajáthullám-

[1] O. Fuchs u. K. L. Wolf: ZS. f. Phys. 46. 506. 1928.

hosszát. Eredményeink a következők: rácsállandó $\delta_0 = 2{\cdot}62 \mathring{A}$, rácsenergia 1 molra vonatkoztatva $U = 186{\cdot}7 \frac{\mathrm{Kal}}{\mathrm{Mol}}$, szublimációhő 1 molra vonatkoztatva $S = 49{\cdot}8 \frac{\mathrm{Kal}}{\mathrm{Mol}}$, kompresszibilitás $k = 4{\cdot}32 . 10^{-12} \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{dyn}}$, ultravörös sajáthullámhossz $\lambda = 32{\cdot}4\ \mu$.

Ezekből a tapasztalattal a következőket hasonlíthattuk össze:

	Számítás	Mérés	
Rácsállandó	$2{\cdot}62\ \mathring{A}$	$2{\cdot}74_5\ \mathring{A}$	4·6%
Szublimációhő	$49{\cdot}8 \frac{\mathrm{Kal}}{\mathrm{Mol}}$	$47 \frac{\mathrm{Kal}}{\mathrm{Mol}}$	6·0%
Kompresszibilitás	$4{\cdot}32 . 10^{-12} \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{dyn}}$	$4{\cdot}28 . 10^{-12} \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{dyn}}$	1·0%
Sajáthullámhossz	$32{\cdot}4\ \mu$	$\sim 36\ \mu$ (extrapoláció)	10 %

Az utolsó oszlopban fel van tüntetve, hogy a számított adatok a mértektől hány %-kal térnek el.

*

Jelen munka a kir. Magy. Pázmány Péter Tudományegyetem elméleti fizikai intézetében készült. Az intézet igazgatójának, dr. Ortvay Rudolf egyetemi ny. r. tanár úrnak ezúton is hálásan köszönöm, hogy a munkám elkészítését lehetővé tette és hogy értékes tanácsaival támogatott. Dr. Neugebauer Tibor egyetemi tanársegéd úrnak állandó támogatásáért és értékes útbaigazításaiért mondok hálás köszönetet.

Budapest, 1933 december.

Gombás Pál.

THEORETISCHE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE DYNAMIK DES LITHIUMBROMIDKRISTALLS.

In dieser Arbeit wurden einige Konstanten des Lithiumbromidkristalls auf theoretischem Wege bestimmt. *Es wurden keine empirischen Konstanten zu Hilfe genommen.* Das Br^- Ion behandelten wir statistisch nach der Methode von W. Lenz und H. Jensen, das Li^+ Ion ersetzten wir in elektrostatischen Beziehungen durch ein Proton, in dem Energieterm, welcher die kinetische Energieänderung der atomaren Elektronenwolken ausdrückt, nahmen wir die Elektronenwolke des Li^+ Ions wellenmechanisch in Betracht.

Zuerst wurde das $LiBr$ Molekül untersucht, dann gingen wir zur Behandlung des Kristalls über. Die Resultate sind folgende:

Molekül.

Kernabstand	1·99 Å
Bindungsenergie pro Mol	136·9 $\frac{\text{Kal}}{\text{Mol}}$

Kristall.

	Theorie	Beobachtung	
Gitterkonstante	2·62 Å	2·74$_5$ Å	4·6%
Gitterenergie pro Mol	186·7 $\frac{\text{Kal}}{\text{Mol}}$	—	—
Sublimationswärme pro Mol	49·8 $\frac{\text{Kal}}{\text{Mol}}$	47 $\frac{\text{Kal}}{\text{Mol}}$	6·0%
Kompressibilität	$4{\cdot}32 . 10^{-12} \frac{\text{cm}^2}{\text{dyn}}$	$4{\cdot}28 . 10^{-12} \frac{\text{cm}^2}{\text{dyn}}$	1·0%
Ultrarote Eigenwellenlänge	32·4 μ	$\sim$ 36 μ (extrapoliert)	10 %

In der letzten Spalte sind die Abweichungen der theoretischen Werte von der Beobachtung angegeben.

P. Gombás.

SCHLESINGER LAJOS

(1864—1933)

Súlyos veszteség érte a matematikus-világot, midőn 1933. december 16-án SCHLESINGER LAJOS Giessenben, mint az ottani egyetem nyugalmazott rendes tanára, többéves betegség után meghalt. Nagy vesztesége ez a magyar kultúrának is, melynek SCHLESINGER hosszú éveken át hűséges szolgálója volt.

SCHLESINGER Nagyszombatban született, 1864. november 1-én. Középiskolai tanulmányait Magyarországon, egyetemi tanulmányait Németországban (Heidelberg, Berlin) végezte. A doktori fokot 1887-ben a berlini egyetemen szerezte meg, mely őt már 1889-ben magántanárrá habilitálta. 1897-ben rendkívüli tanár lett Bonnban, az 1897—1911. éveket pedig Kolozsvárott töltötte, mint az ottani egyetem nyilvános rendes matematikatanára. 1911-ben hasonló minőségben a budapesti egyetemre neveztetett ki, ahol azonban csak igen rövid időt töltött; még ez évben elfogadta a giesseni egyetem meghívását, ahol M. PASCH utóda lett. 1930-ban nyugalomba vonult. Hogy SCHLESINGER Magyarország elhagyására rászánta magát, abban — azokon a szoros kötelékeken kívül, melyek SCHLESINGER-t ifjúsága óta a német tudományos körökhöz fűzték — bizonyára családi körülményeknek is részük volt: SCHLESINGER veje volt L. FUCHS-nak, a berlini egyetem nagynevű matematikus-professzorának.

SCHLESINGER kutatásai között különösen értékesek azok, amelyek a lineáris differenciálegyenletrendszerekre vonatkoznak és igen nagy elismerést szereztek neki matematika-történeti kutatásai is (BOLYAI, GAUSS). Ezekkel, valamint a differenciálegyenletek elméletére vonatkozó német kézikönyveivel (melyek egyike három kiadást ért meg) és úgyis, mint az egyik vezető német matematikai folyóiratnak, a Crelle-féle Journalnak társszerkesztője, nagy és általánosan elismert szolgálatot tett a matematikai kultúrának.

De speciálisan magyar szempontból is nagy érdemei voltak, így pl. éppen a Bolyai-kultusz terén: az ő működése nagy mértékben járult hozzá, hogy ma már az egész matematikus-világ Bolyai János-t a legelső matematikai lángelmék közé sorozza. Schlesinger buzgó tagja volt a M. T. Akadémiának és a mi Társulatunknak: a Mathematikai és Természettudományi Értesítőt, valamint e Lapokat értékes magyarnyelvű dolgozatokkal gazdagította. A Kolozsvárott töltött 13 év alatt nemcsak mint tudós előadó, de mint szervező is kiváló érdemeket szerzett. Farkas Gyulá-val és Vályi Gyulá-val együtt döntő szerepe volt abban, hogy a kolozsvári egyetemen kitűnő szemináriumi könyvtár keletkezett (amely számunkra, sajnos, azóta elveszett) és hogy így a kolozsvári matematikai tudományos élet, amely ma Szegeden folyik tovább, újabb szép fejlődésnek indult.

Schlesinger Lajos emlékét a magyar tudományosság is mindenkor hálás kegyelettel fogja megőrizni.

Kimutatas

a Tudományos Társulatok és Intézmények Országos Szövetségének Díjkezelősége útján 1933. október 7-től 1933. december 31-ig befizetett és a Társulat pénztárába 1933. október 7-től 1934. február 8-ig közvetlenül befizetett összegekről.

1. Tagdíjak.

1928, 1929 és *1930-ra:* Körös László 18 P.

1931-re: **A**rató Frigyes (8), **B**ruck Ferenc (4), Beck Salamonné (8), **F**rigyesné Schwartz Emmy (3), **G**irsik Géza (8), Goll György (8), Grosschmid Lajos (4), **H**orváth Elemér (2), **L**ázárné Róder Irén (8), Lenkey Lehel (8), **N**eubauer Konstantin (8), **P**éch Aladár (8), Proszt János (6), **S**uták József (8), **Sz**almay Rupert (6), Szerényi Géza (3), **T**eller Ede (8), Turán Pál (8), **U**jj Gyula (4). *Összesen 120 P.*

1932-re: **Cs**ada Imre (6), Csaplár Konrád (2), **D**éri Zsigmond (8), **E**rdődy Imre (8), **G**oll György (8), Grosschmid Lajos (8), ifj. **K**unfalvi Rezső (8), **N**eubauer Konstantin (8), **P**éch Aladár (8), Proszt János (6), **Sch**aller Mátyás (6), Strauss Hermann (8), Suták József, (8), **Sz**erényi Géza (2), Szűcs Adolf (8), **T**eller Ede (8). *Összesen 110 P.*

1933-ra: **B**ertrám Brunó (6), Bresztovszky Béla (8), Bujtás János (6), **Cs**aplár Konrád (4), Csegény Margit (8). **E**msztKálmán (8), **F**raunhoffer Lajos (8), **G**oldziher Károly (8), Grosschmid Lajos (8), Gyulai Zoltán (4), **H**adarits Vendel (8), Hang Dániel (6), Holenda Barnabás (6), **K**edves Miklós (6), id. Kövesligethy Radó (8), Kőrös László (6), ifj. Kunfalvi Rezső (8), **L**assowszky Károly (4) Lóky Béla (8), **M**ischung Ilona (6), **R**adó Simon (8), Romsauer Lajos (8), Rucsinszky Lajos (8), **S**teiner Lajos (4), Székely Károly (6), **T**olnai Jenő (8), **V**ámos Sándor (6), Volenszky Gyula (2). *Összesen 184 P.*

1934-re: **Á**brahám István (8), **B**auer Mihály (8), Buchböck Gusztáv (8), **G**ruber Nándor (8), Gyulai Zoltán (6), **H**ancsok Kálmán (6), Hausbrunner Vilmos (8), Holenda Barnabás (6), **K**arai Sándor (6), **Ny**ári Béla (6), **O**rtvay Rudolf (8), **P**atai Imre (8), **R**ados Gusztáv (8), Romsauer Lajos (8), **Sz**ász Pál (8), Széky István (6), Szőke Béla (8), **T**örök Elemér (6), **V**olenszky Gyula (6), Vörös Cyrill (8). *Összesen 144 P.*

1935-re: **B**acsó Vilmos (6), **Gy**ulai Zoltán (4). *Összesen: 10 P.*

2. Előfizetési díjak.

1931-re: Fazekas Mihály reálisk. Debrecen (6).

1932-re: Műegyetemi I. Math. Gyüjtemény, Bp. (6), Bolyai reálisk. Bp. (8), Zrinyi M. reálgimn. Bp. (8), Fazekas Mihály reáliskola, Debrecen (2). *Összesen 24 P.*

1933-ra: Műegyetemi I. Math. Gyűjtemény, Bp. (4), Toldy Ferenc reálisk. Bp. (8), Grill könyvkeresk. Bp. (W. Müller, London) (6·40), Kilián könyvkeresk. Bp. (6), Eggenberger könyvkeresk. Bp. (Szt. Benedekrendi reálgimn. Esztergom) (7·20), Szt. László reálgimn. Bp. (8), Eszterházy M. kir. kath. reálgimn. Dombovár (4), Révai M. reálisk. Győr (6), Széchenyi I. reálgimn. Sopron (4), Szt. Benedekrendi Közp. Könyvtár, Pannonhalma (6), Polgári iskolai Tanárképző Főiskola, Szeged (6). *Összesen: 65·60 P.*

1934-re: Norbertinum, Bp. (6), Eggenberger könyvkeresk. Bp. (Gyakorló főgimn. Bp.) (7·20), Ág. h. ev. Rudolf reálgimn. Békéscsaba (6), Kegyesrendi Tanárképző (Kalazantinum), Bp. (8), Horthy Miklós reálgimn. Kisújszállás (6), Szt. Benedekrendi Közp. Könyvtár, Pannonhalma (6), Bánya- és Erdőmérn. Főiskola, Sopron (6), Polg. isk. Tanárképző Főiskola, Szeged (6), Horváth M. reálgimn. Szentes (6), Széchenyi I. reálgim., Sopron (4), Csanád Vezér reálgimn. Makó (6), *Összesen 67·20 P.*

3. Adományok.

Bláthy Ottó Titusz 8 P, Kőrös László (Berlin) 26 P, Nagy L. József 20 P, Sárközy Pál 6 P. *Összesen 60 P.*

Budapesten, 1934. február 8-án.

Szabó Gábor pénztáros.

Franklin-Társulat nyomdája. — Ábrai V.

A KŐNIG GYULA JUTALOM.

Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkívüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi reánk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhöz képest még kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzívebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is.

Kérjük ennélfogva tisztelt tagtársainkat,

1. hogy hátralékos tagdíjaikat (évenkint 8, ill. 6 pengőt) szíveskedjenek *Szabó Gábor* pénztárosnak (Budapest, XI., Verpeléti-út 7. I. 2.) vagy postatakarékpénztári csekkszámlánkra (száma 5997), vagy pedig a Tudományos Társulatok és Intézmények Orsz. Szövetségének Díjkezelősége útján befizetni.
2. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával,
3. hogy gyüjtsenek új tagokat.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA: ÁBRAI V.

MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES ÉS POGÁNY BÉLA

NEGYVENEGYEDIK ÉVFOLYAM

1934

JÚLIUS—DECEMBERI FÜZET

BUDAPEST, 1934

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

Oldal

Köveslígethy Radó † — — — — — — — — — — — — — — — — — — 91

EGERVÁRY JENŐ: Jelentés az 1934. évi Kőnig Gyula jutalomról — — — 93

TURÁN PÁL: Az egész számok primosztóinak számáról — — — — — — 103

BERKES ZOLTÁN: Vékony alkálifém-rétegek fényelektromos vizsgálata — 131

A Budapesti M. Kir. Tanárképzőintézet mennyiségtani továbbképző tanfolyama — — — — — — — — — — — — — — — — — — 162

Tanulóversenyek — — — — — — — — — — — — — — — — — 168

Társulati élet — — — — — — — — — — — — — — — — — — 172

*

E füzet mellékleteként Társulatunk minden tagjának megküldjük Rados Gusztáv «Kürschák József emlékezete» c. akadémiai emlékbeszédét, melynek példányait a M. Tud. Akadémia ajándékképpen volt szíves Társulatunknak átengedni.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Kőnig Dénes* (**XI., Horthy Miklós-út 28., Hadik-pensio**), a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* (**XI., Budafoki-út 8.**) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikban lehető rövidségre törekedjenek, azokhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghivók expedíciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Szabó Gábor* pénztáros címére (Budapest, XI., Verpeléti-út 7.) intézendők. Postatakarékpénztári csekkszámla száma: 5997.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány,* Budapest, XI., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *B. Pogány,* Budapest, XI., Budafoki-út 8.

KÖVESLIGETHY RADÓ

1862–1934.

Mély fájdalommal kell jelentenünk, hogy 1934. október 12-én örökre lehúnyta szemét Társulatunk Választmányának kiváló tagja, a csillagászat magyar Nesztora: dr. KÖVESLIGETHY RADÓ, egyetemi tanár.

A gyász nemcsak Társulatunké, amelynek 16 éven át (1897—1913) volt ügyvezető titkára és ezen Lapok szerkesztője, hanem osztózik abban az egész tudományos világ, mert KÖVESLIGETHY RADÓ nevét asztroszpektroszkópiai dolgozatai és a szeizmonomia körébe vágó alapvető munkái mindenfelé ismertté tették.

Páratlan nyelvtudása, sokoldalúsága, szeretetreméltó egyénisége és kitűnő pedagógus érzéke egyaránt predesztinálta őt reprezentáló tudományos vezetőszerepre, mint tanítványok nevelésére.

Tudományos érdemeit minden oldalról elismerték. 28 éves korában már magántanár volt a budapesti tudományegyetemen, ahol 1897-től mint nyilvános rendkívüli, 1904 óta pedig nyugalomba vonulásáig közel három évtizeden át mint nyilvános rendes tanár látta el a kozmográfiai tanszéket. Ott alapította meg 1906-ban a Földrengési Számoló Intézetet és a Földrengési Obszervatóriumot, mely intézeteknek mindvégig nagytekintélyű igazgatója volt. A Magyar Tudományos Akadémia már 1895-ben levelező-, majd 1909-ben rendes tagjai sorába iktatta. A külföld a földrengéskutatás terén szerzett tudományos érdemeinek elismeréséül 1906-ban az «Association Internationale de Sismologie» titkárává választotta meg.

Kövesligethy Radó Veronában született, ahol katonatiszt édesatyja átmenetileg állomásozott. Bécsben szerezte doktori oklevelét. De mindezek dacára testestül-lelkestül magyar volt, aki nemcsak önmagának, hanem hazájának is elismerést és tekintélyt szerzett. Mint (tankönyv) írónak nagy érdemei vannak a a csillagászati műszavak és kifejezések magyarra való átültetésében és meghonositásában.

Mint európai látókörű elme, állandó összeköttetésben állott a külföld tudósaival és különösen meleg barátság fűzte szülöországának szaktársaihoz, akik előadások tartására is meghívták; mert Kövesligethy Radó épp oly jól beszélt olaszul, mint a három nagy világnyelven és latinul.

Mindazok, akik ismerték, csak a legnagyobb tisztelet és elismerés hangján emlékezhetnek meg róla, mert ő egyike volt azoknak a napjainkban már ritkán található sokoldalú tudósoknak, akiket méltán illet meg a «polihisztor» jelző.

Most, amikor a kegyetlen Sors elszólította körünkből, mélyen fájlaljuk elköltöztét. Hiányát érezzük tudós elméjének és melegszivű rokonszenves egyéniségének, aki fáradhatatlan munkabírással dolgozott utolsó lehelletéig, míg kiesett kezéből a toll.

Ravatalára Társulatunk is elhelyezte a megbecsülés és elismerés koszorúját és valameddig Társulatunk élni fog, emlékét mindig kegyelettel fogjuk megőrizni.

JELENTÉS AZ 1934. ÉVI KŐNIG GYULA JUTALOMRÓL.

Társulatunk választmánya 1933. június 10-én tartott ülésén az 1934. évben esedékes hetedik Kőnig Gyula jutalomra vonatkozó javaslattételre a következő bizottságot küldte ki. Elnök: Rados Gusztáv, tagok: Fejér Lipót, Kőnig Dénes, Szücs Adolf és Egerváry Jenő.

A bizottság mindenre kiterjedő gonddal mérlegelve azon magyar matematikusok munkásságát, akik az alapitvány ügyrendi szabályzata[1] értelmében tekintetbe veendők, úgy határozott, hogy a hetedik Kőnig Gyula jutalommal való kitüntetésre dr. Veress Pál-t, a budapesti Pázmány Péter Tudományegyetem magántanárát javasolja a választmánynak. Egyszersmind alulirottnak juttatta azt a rá nézve igen megtisztelő, de még inkább nehéz feladatot, hogy a kitüntetésre javasoltnak matematikai munkásságáról jelentést készitsen.

Veress Pál munkássága több irányba tagozódik; a tiszta matematika művelésén kivül még, mint az Budapesi Középiskolai Tanárképzőintézet előadó tanára, a matematikai oktatás terén, továbbá a biztositási matematika terén is állandó tevékenységet fejt ki. Az alapitvány rendelkezésének megfelelően, ebben a jelentésben elsősorban a tiszta matematika körébe eső munkásságával kell foglalkoznunk, melynek gerincét függvényhalmazokra vonatkozó vizsgálatai alkotják.

Ebbe a témakörbe esik 1917-ben Kolozsvárott, továbbá 1918-ban, majdnem változatlanul, a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesitőjében megjelent doktori értekezése, melyben Arzelà egy tételét általánositva

[1] Mat. és Fiz. Lapok, 27. k., 102. l.

(melyről e jelentés folyamán még szó lesz), a folytonos függvényeknek polinomokkal való approximálására vonatkozó WEIERSTRASS-féle tételt viszi át függvényoperációkra.

Tudvalevőleg a függvény és függvényoperáció (funkcionál) analóg fogalmak, azzal a lényeges különbséggel, hogy míg valamely $f(x)$ függvény egy $\{x\}$ számhalmaz minden eleméhez rendel hozzá egy számot, addig egy $F(f)$ függvényoperáció egy $\{f(x)\}$ függvényhalmaz minden eleméhez rendel hozzá egy számértéket.

A függvényekre vonatkozó klasszikus tételeknek függvényoperációkra való átvitele terén az egyik első jelentékeny eredmény RIESZ FRIGYES-től származik: Ha a $F(f)$ függvényoperáció korlátos és lineáris, azaz eleget tesz a

$$F(f+g) = F(f) + F(g)\ ;\ F(cf) = cF(f),\ c = \text{constans}$$

disztributivitási feltételeknek, úgy előállitható a következő STIELTJES-féle integrállal:

$$F(f) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

hol $\alpha(x)$ az (a, b) intervallumban értelmezett korlátos ingadozású függvény.[1]

A fentebb említett WEIERSTRASS-féle tétel szerint minden az (a, b) intervallumban értelmezett folytonos függvény egyenletesen approximálható polinomokkal, azaz minden pozitív ε-hoz meghatározható egy olyan $P(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ polinom, melyre

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad (a \leqq x \leqq b).$$

FRÉCHET és DIENES eredményeit továbbfejlesztve, VERESS a WEIERSTRASS-féle tétel következő analogonját mutatja ki doktori értekezésében:

---

[1] A függvényekre vonatkozó analog tétel a következő: Ha $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ korlátos és a

$$f(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots x_n+y_n) = f(x_1, x_2, \ldots x_n) + f(y_1, y_2, \ldots y_n)\ ;$$
$$f(cx_1, cx_2, \ldots cx_n) = cf(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

disztributivitási feltételeknek eleget tesz, úgy

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n.$$

Az $F(f)$ folytonos függvényoperációnak a LEBESGUE szerint integrábilis $f(x)$ függvények egy kompakt, zárt halmazán felvett értékkészlete egyenletesen megközelíthető

$$P_n(f) = F_0 + \sum_{i=1}^{n} \int f(x_1) f(x_1) \ldots f(x_i)\, d^i a_n (e_1, e_2, \ldots e_i)$$

alakú funkcionálpolinomokkal.

További két dolgozatában VERESS a — már az előbbi tétel kimondásában is szereplő — *kompakt* függvényhalmazokkal foglalkozik. A kompakt halmaz fogalmát FRÉCHET vezette be; a fogalomalkotás szükségességét a számhalmazok és függvényhalmazok közt mutatkozó lényeges különbség indokolja. Míg ugyanis egy végtelen, korlátos számhalmaznak mindig van konvergens részhalmaza, addig egy korlátos függvényhalmaznak általában egy konvergens részhalmaza sincs.[1] Tehát, hogy a számhalmazoknál megszokott, a BOLZANO-WEIERSTRASS-féle tételen alapuló következtetési módok függvényhalmazokra átvihetők legyenek, ahhoz egy, a korlátosságot kiegészítő, illetve magábafoglaló megszorítás szükséges. Ez történik a FRÉCHET-féle fogalomalkotásban: egy halmaz kompakt, ha annak minden végtelen részhalmaza legalább egy konvergens sorozatot tartalmaz. A definicióból nyilvánvaló, hogy a kompaktság kérdésének csupán olyan halmazokra van értelme, melyekre a konvergencia, pl. az elempárok távolsága (számhalmaznál két szám különbségének abszolút értéke) segélyével definiálva van, viszont a távolság definiciója, az ismeretes távolsági posztulátumok[2] által megszabott kereteken belül, nyitva marad.

Egy, a távolságfogalom bevezetésével metrizált $\{A\}$ halmazra

[1] Pl. az $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin 2x, \ldots$ függvényhalmazból egy konvergens sorozat sem választható ki, bármely szokásos konvergenciafogalmat véve alapul.

[2] Egy $\{A\}$ halmaz $A_i A_j$ elempárjaira definiált $\overline{A_i A_j}$ távolságfogalomnak a következő posztulátumokat kell kielégíteni:

$$\text{I. } \overline{A_i A_i} = 0,$$
$$\text{II. } \overline{A_i A_j} > 0, \text{ ha } A_i \text{ és } A_j \text{ különbözők,}$$
$$\text{III. } \overline{A_i A} \leqq \overline{A_i A_k} + \overline{A_j A_k}.$$

nézve a kompaktság szükséges és elegendő (korlátos számhalmazra nyilván mindig teljesülő) feltétele az, hogy minden pozitiv ε-hoz kiválasztható véges számú $A_1, A_2, \dots A_n$ elem úgy, hogy az A és A_i elemek távolsága $\overline{AA_i} < \varepsilon$, azaz a halmaz bármely eleme az $A_1, A_2, \dots A_n$ elemek egyikétől ε-nál kisebb távolságra van.

Veress fentebb említett dolgozataiban ezen tétel bizonyitását adja, továbbá ennek alapján függvényhalmazok kompaktsági kritériumait állapitja meg, a következő távolságdefiniciókat véve alapul:

	Függvényhalmaz	Távolságfogalom	Konvergencia
A mérhető H alaphalmazon értelmezett függvények.	mérhető	$\lim (\varepsilon + M_{\lvert f-g\rvert<\varepsilon})$ [1]	en mesure
	négyzetesen integrálható	$\int_{(H)} (f-g)^2\, dx$	en moyenne
	korlátos	$\max_{x \subset H} \lvert f-g \rvert$	egyenletes

A Fundamenta Mathematicae-ben 1925-ben megjelent «Über kompakte Funktionenmengen und Bairesche Klassen» c. dolgozatában, mely úttörő ebben az irányban s mely Fréchet-t egy idevágó dolgozat megirására inspirálta,[2] még csupán részleges eredményre jut, míg a szegedi Actákban 1927-ben megjelent «Über Funktionenmengen» c. dolgozata már mind a három említett kompaktsági típus rendszeres tárgyalását adja. Főeredményei a következők:

A mérhető H alaphalmazon értelmezett függvényhalmaz akkor és csak akkor kompakt

I. en mesure konvergenciát véve alapul, ha a halmaz függvényei mérhetők és

[1] $M_{|f-g|<\varepsilon}$ jelenti azon halmaz mértékét, melyen $|f-g| < \varepsilon$.

[2] L. Fréchet: Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables, Fund. Math. T. IX.

1. egyenlő mértékben «majdnem» korlátosak,[1]
2. egyenlő mértékben «majdnem» folytonosak.[2]

II. en moyenne konvergenciát véve alapul, ha a halmaz függvényei négyzetesen integrálhatók és

1. az $\int\limits_{(h)} f^2 dx$ halmazfüggvények egyenletesen folytonosak,[3]
2. az I. 2. feltételt teljesítik.

III. egyenletes konvergenciát véve alapul, ha a halmaz függvényei

1. egyenletesen korlátosak
2. egyenlő mértékben folytonosak[4]

a H alaphalmazon.

A III. kompaktsági kritérium valamely (a, b) zárt intervallumban értelmezett folytonos függvények halmazára alkalmazva adja az Arzelà-féle tételt.

A fentebb megadott kompaktsági kritériumok nagyon hasonlítanak egymáshoz. Mindhárom esetben egy, a korlátosságra vonatkozó és egy, az ingadozásra vonatkozó feltételnek az összes függvényekre egyenlő mértékben való teljesülése szükséges. Ez a megfigyelés vezette Veress-t a szegedi Actákban 1932-ben megjelent «Über eine Beweismethode in der Theorie der abstrakten Räume» c. dolgozatában kimondott következő tétel felfedezésére:

---

[1] Azaz minden pozitív η-hoz tartozik egy $M > 0$ úgy, hogy egy η mértékű halmaz kivételével

$$|f(x)| < M$$

a halmaz minden $f(x)$ függvényére.

[2] Minden pozitív ε- és η-hoz beosztható a H alaphalmaz mérhető, disjunkt $H_1, H_2, \ldots H_n$ részhalmazokra úgy, hogy $f(x)$ ingadozása ε-nál kisebb a $H_i - h_f$ halmazok mindegyikén, hol h_f egy η-nál kisebb mértékű halmaz.

[3] Azaz minden pozitív ε-hoz tartozik egy δ úgy, hogy a halmaz minden $f(x)$ függvényére $\int\limits_{(h)} f^2 dx < \varepsilon$, ha a h halmaz mértéke $< \delta$.

[4] Minden pozitív ε-hoz tartozik egy $\delta > 0$ úgy, hogy a halmaz összes $f(x)$ függvényeire nézve

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |x_1 - x_2| < \delta.$$

Legyen adva az

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

állitások egy sorozata. Ha egy halmaz oly tulajdonságú, hogy

1. minden elemére érvényes egy A_n állitás.
2. minden végtelen részhalmazához található olyan A_m állitás, mely a részhalmaz *végtelen* sok elemére érvényes, akkor van az állitássorozatban véges sok

$$A_1, A_2, \ldots A_N$$

állitás úgy, hogy a halmaz minden elemére ezek valamelyike érvényes.

Ennek a tételnek számos alkalmazása van. Amellett, hogy belőle a fentebb ismertetett kompaktsági kritériumok azonnal kiolvashatók, magában foglalja a Borel- és Lebesgue-féle befödési tételeket. A tétel fogalmazásából nyilvánvaló továbbá, hogy alkalmazható oly halmazokra is, melyeknél a távolság, sőt a környezet fogalma sincs értelmezve.

Veress Pál két dolgozatában a Baire-féle függvényklasszisokkal foglalkozik. A Baire-féle klasszifikáció szerint a véges, zárt intervallumban értelmezett egyértékű folytonos függvények alkotják a nulladik osztályt. Az első osztályba kerülnek azok a nem folytonos függvények, melyek folytonos függvények egy konvergens sorozatának határfüggvényei; általában a p-dik osztályt alkotják azok a függvények, melyek alacsonyabb osztályú függvények konvergens sorozatának határfüggvényei, de nem tartoznak bele egyetlen p-diknél alacsonyabb osztályba sem.

Lebesgue kimutatta, hogy ezen osztályok mindegyikében van függvény, továbbá kritériumot adott arra, hogy egy adott függvény a p-dik osztályba tartozzék. Veress Pál a Lebesgue-féle kritérium helyett egy másikat vezetett be (csak korlátos függfényekre), felhasználva, hogy a halmazok klasszisokba sorozhatók a függvényekre vonatkozó klasszisoktól függetlenül is. Ugyanis a nyilt és zárt halmazok együttesen az első osztályt alkotják, a p-dik osztályú halmazok pedig a $(p-1)$-dik osztályú halmazok határhalmazai. Így már most bebizonyítható, hogy ahhoz, hogy az E halmazon értelmezett, korlátos $f(x)$ függvény a p-dik klaszszisba tartozzék, szükséges és elegendő, hogy minden pozitív ε-hoz az E halmaz felosztható legyen véges sok, közös pont nélküli, p-dik klasszisú $E_1, E_2, \ldots E_n$ halmazra úgy, hogy $f(x)$ ingadozása az E_i halmazok mindegyikén ε-nál kisebb legyen.

Ebből az is következik, hogy minden p-dik osztályú függvény egyenletesen approximálható p-dik osztályú lépcsősfüggvényekkel (azaz olyanokkal, melyek csak véges sok különböző értéket vesznek fel).

A függvényklasszisoknak ezen, VERESS-től származó tárgyalási módja már eddig is méltánylásra talált, amennyiben HAHN Reelle Funktionen című könyvében a függvényklasszisok ismertetésénél a VERESS-féle felfogást is részletesen tárgyalja.

Áttérve egyéb tárgyú dolgozataira, a Skandinavisk Aktuarietidskrift 1926-ik évfolyamában megjelent egyik dolgozatában VERESS, STIELTJES-integrál segélyével, a legáltalánosabb formáját adja bizonyos integrálokra, illetőleg összegekre vonatkozó egyenlőtlenségeknek, melyekre biztositási matematikai alkalmazásuk folyamán irányult a figyelme. Először bebizonyítja a következő tételt:

Legyenek $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ az (a, b) intervallumban definiált, korlátos ingadozású függvények, melyek a

$$\varphi(a) \neq \psi(b), \; \psi(a) \neq \psi(b)$$

és a

$$\frac{\psi(t) - \varphi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \geqq \frac{\psi(t) - \psi(a)}{\psi(b) - \psi(a)}$$

feltételeknek eleget tesznek. Ekkor minden oly monoton csökkenő $f(t)$ függvényre, mely $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ szakadási helyein folytonos,

$$\frac{\int_a^b f(t)\, d\varphi(t)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \geqq \frac{\int_a^b f(t)\, d\psi(t)}{\psi(b) - \psi(a)}. \qquad (*)$$

Abban a speciális esetben, ha $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ integrábilis függvények primitív függvényei, azaz

$$\varphi(t) = \int_a^t g(x)\,dx\,; \quad \psi(t) = \int_a^t h(x)\,dx,$$

(*)-ből adódik a JENSEN-STEFFENSEN-féle egyenlőtlenség:

$$\frac{\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \geqq \frac{\int_a^b f(t)\,h(t)\,dt}{\int_a^b h(t)\,dt}, \text{ ha } \frac{\int_a^t g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \geqq \frac{\int_a^t h(x)\,dx}{\int_a^b h(x)\,dx}.$$

Ha viszont φ és ψ a

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_k\,; \quad \psi(t) = k+1\,; \quad t_k \leqq t < t_{k+1}\,;$$
$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = b$$

formulák által definiált «lépcsőfüggvények» és $f(t_k) = f_k$, úgy (*)-ből következik:

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu \varphi_\nu}{\sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu} \geqq \frac{\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu}{n+1}, \text{ ha } \frac{\sum_{\nu=1}^{k} \varphi_\nu}{k+1} \geqq \frac{\sum_{n+1}^{n} \varphi_\nu}{n+1}, \qquad (**)$$

vagyis két csökkenő

$$\varphi_0 \geqq \varphi_1 \geqq \cdots \geqq \varphi_n,$$
$$f_0 \geqq f_1 \geqq \cdots \geqq f_n$$

sorozatra (minthogy ez esetben a (**) feltétel mindig teljesül) a CSEBISEV-féle egyenlőtlenség.

A CSEBISEV-féle egyenlőtlenségnek egy elemi tárgyalását is adta VERESS a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok IX-ik kötetében.

Ugyanitt (VII. kötet) jelent meg egy dolgozata az EULER-féle poliédertételről, melyben megmutatja, hogy a nevezett tételnek egy a középfokú tankönyvekben igen elterjedt, hibás bizonyításmódja megmenthető kellő megszorító feltevésekkel, és pedig olyan poliéderekre, melyeknek felülete lapjaiból úgy rakható össze, hogy az ujonnan hozzátett lap a már összerakott felületrészhez mindig egy *összefüggő* élsorozatban csatlakozzék. VERESS bebizonyítja, hogy az ilyen összerakás mindig lehetséges a gömbbel homeomorph poliéderfelületekre, ha a felület lapjai elemi felületek.

VERESS PÁL munkáit, a minden részletre kiterjedő gondosságon és szabatos fogalmazáson kívül többnyire az a célkitűzés jellemzi, hogy látszólag távoleső, vagy csupán lazán összefüggő tételek közös forrását felkeresve, azokat összefüggő rendszerbe foglalja. E tekintetben legtöbb sikerre számithat a szegedi Actákban 1932-ben megjelent dolgozatában szereplő tétel felállításával, mely előreláthatólag az eddigieken kívül még számos problémakörben lesz alkalmazható.

Legyen szabad továbbá e helyen is kiemelni VERESS-nek azt a nem mindig osztatlan rokonszenvre találó, de annál inkább elismerésreméltó törekvését, mely egyrészt a biztosítástechnikában, másrészt a középfokú oktatásban szokásossá vált, matematikailag hibás számítási és következtetési módok korrigálására irányul. Ezt a tendenciát mutatják a biztosítási matematika körébe vágó dolgozatai; az elsők között volt, akik szigorú kritika alá vonták a biztosításnál alapul vett statisztikai adatokat, valamint azok felhasználási módját. Erről a szellemről tanúskodik középiskolai mennyiségtani tankönyve is, melyben úgy az anyagválasztás, mint a tárgyalási mód tekintetében szerencsésen egyezteti össze a matematikai és a jogos pedagógiai szempontokat.

Végül megemlítjük, hogy VERESS a BOLYAI-aknak a külföld előtt való megismertetésében is részt vett az Ungarische Jahrbücher 1926-ik évfolyamában írt tanulmányával, mely nem matematikus olvasók számára sikerült képet ad a BOLYAI-ak életéről és munkásságáról.

Mindezek alapján a Bizottság javasolja a Választmánynak, hogy az 1934-ik évi Kőnig Gyula jutalmat VERESS PÁL-nak ítélje oda.[1]

Egerváry Jenő.

---

[1] Társulatunk választmánya 1934. ápr. 12-i ülésén e javaslatot elfogadva, az 1934. évi Kőnig Gyula jutalmat VERESS PÁL-nak ítélte oda.

Veress Pál matematikai munkái.

1. Az integrábilis függvényekre értelmezett függvényoperációról. Diszszertáció. Kolozsvár, 1917.

2. Egy Arzelà-féle tétel általánosítása és annak alkalmazása. Math. és Természettud. Értesítő 1918.

3. Über kompakte Funktionenmengen und Bairesche Klassen. Fund. Math. VII. 1925.

4. On certain inequalities by Steffensen. Skandinavisk Aktuarietidskrift 1926.

5. Die beiden Bolyai und die absolute Geometrie. Ungarische Jahrbücher 1926.

6. A Baire-féle függvényklasszisokról. Mat. Fiz. Lapok 1926.

7. Über Funktionenmengen. Acta Szeged III. 1927.

8. Elemi Mennyiségtan. Középiskolai tankönyv, Budapest. I. köt., 1927. II. kötet, 1929. III. kötet, 1930. IV. kötet, 1931.

9. Logaritmus- és kamatos-kamattáblák. Budapest, 1929.

10. Euler poliedertételéről. Középisk. mat.-fiz. Lapok VII. 1930.

11. A munkabérek hatása a szociális biztosítás díjára. Magyar Bizt. Tud. Szemle II. kötet, 1931.

12. Contributo alla matematica delle assicurazioni sociali. Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuarii III. 1932.

13. Über eine Beweismethode in der Theorie der abstrakten Räume. Acta Szeged VI. 1932.

14. Aritmetikai közepekre vonatkozó egyenlőtlenségekről. Középisk. mat.-fiz. Lapok IX. 1932.

15. Statisztikai vizsgálatok a rokkantsági biztosítás köréből. Magyar Bizt. Tud. Szemle. III. 1932.

BERICHT ZUR VERTEILUNG DES JULIUS KŐNIG-PREISES VOM JAHRE 1934.

Die Budapester Loránd Eötvös Mathematische und Physikalische Gesellschaft hat ihren Julius Kőnig-Preis für 1934 Herrn Dr. P. Veress für seine mathematische Arbeiten zuerkannt. Kommission: G. Rados, Präsident; Mitglieder: L. Fejér, D. Kőnig, A. Szűcs; Referent: E. Egerváry. Hier gibt der Referent eine Analyse und Würdigung der Veress'schen Arbeiten, die sich hauptsächlich auf Funktionenmengen beziehn und deren Liste sich am Ende des Referates befindet.

E. Egerváry.

AZ EGÉSZ SZÁMOK PRÍMOSZTÓINAK SZÁMÁRÓL.

1. §.

Legyen

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

és legyen

$$U(n) = r, \quad V(n) = a_1 + \dots + a_r. \tag{1}$$

Azaz $U(n)$ jelenti n *különböző*, $V(n)$ pedig az *összes* prímfaktorai számát. A következőkben ezt a két számelméleti függvényt vizsgáljuk. Ezekre vonatkozólag két főeredmény ismeretes: az egyik[1] azt mondja, hogy ha azon n számok számát N-ig, amelyekre $U(n) = \nu$ fix szám, $\Pi_\nu(N)$-el jelöljük, akkor

$$\Pi_\nu(N) \sim \frac{1}{(\nu-1)!} \frac{N(\log\log N)^{\nu-1}}{\log N}, \tag{2}$$

ahol a $\sim$ jel $N \to \infty$-re értendő. Ugyanaz áll a $V(n)$-re is. A másik[2] szerint, ha $\Phi(x)$ az x változónak oly pozitiv függvénye, melyre

$$\Phi(x) \to \infty, \text{ ha } x \to +\infty, \tag{3}$$

akkor azon n számok $M(N)$ száma N-ig, melyekre az

$$\left.\begin{aligned} U(n) &> \log\log N + \Phi(N)\sqrt{\log\log N}, && (4a)\\ U(n) &< \log\log N - \Phi(N)\sqrt{\log\log N} && (4b)\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

---

[1] E. Landau: *Über die Verteilung der Zahlen, welche aus ν Primfaktoren zusammengesetzt sind.* Gött. Nachr. 1911. 362—381.

[2] Hardy and Ramanujan: *The normal number of prime factors of n.* Quart. J. 1917. 76—92.

egyenlőtlenségeknek egyike teljesül, $o(N)$.[1] Ugyanez áll $V(n)$-re is. Ezek nyersen azt fejezik ki, hogy N-ig majdnem minden szám olyan, hogy körülbelül log log N számú különböző prímfaktora van; ugyanez áll az összes prímfaktorok számára is. Ez könnyen következnék, ha (2)-t elfogadnók az esetre is, mikor ν függ N-től. De ezt nem tudjuk bizonyítani; HARDY és RAMANUJAN azonban épp azáltal bizonyítják tételüket, hogy (2)-t egy oly egyenlőtlenséggel helyettesítik, mely akkor is áll, ha ν függ N-től; és pedig azt bizonyítják, hogy ha A egy ν-től és N-től független állandó, akkor

$$\Pi_\nu(N) < A \frac{N}{(\nu-1)!} \frac{(\log\log N)^{\nu-1}}{\log N}.$$

E dolgozatban HARDY és RAMANUJAN (4) alatti tételét két új módon nagyon egyszerűen bizonyítom és a tételt két irányban általánosítom.

Az első bizonyítás gondolatmenete a következő: Legyen

$$R(N) = \sum_{n=1}^{N} \big(U(n) - \log\log N\big)^2. \tag{5}$$

Tegyük fel, hogy a tétel nem igaz; ez azt jelenti, hogy van az N-eknek oly végtelen $N_1, N_2, \ldots$ sorozata, hogy $M(N_i) > aN_i$, *ahol a nem függ i-től és pozitív;* i végigfut 1-től végtelenig a pozitív egész számokon át. De ekkor az $M(N_i)$ számú szám mindegyikére

$$\big(U(n) - \log\log N_i\big)^2 > \Phi(N_i)^2 \log\log N_i,$$

azaz

$$R(N_i) = \sum_{i=1}^{N_i} \big(U(n) - \log\log N_i\big)^2 > M(N_i)\,\Phi(N_i)^2 \log\log N_i >$$

$$> aN_i \Phi(N_i^{\ 2} \log\log N_i$$

---

[1] Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ egyváltozós függvények, $g(x)$ valós és pozitív, elég nagy x-től. Ekkor $f(x) = o\big(g(x)\big)$ azt jelenti, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0$, az $f(x) = O\big(g(x)\big)$ pedig, hogy az $\frac{|f(x)|}{g(x)}$ egy számkorlát alatt marad. Ha $f(x)$ egy parametert tartalmaz, akkor az O jelentését l. 123. lap 2. lábjegyzet.

volna, vagy máskép

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{R(N)}{N \log\log N} = +\infty. \tag{6}$$

Ezzel szemben a 2. §-ban látni fogjuk, hogy

$$R(N) = O(N \log\log N), \tag{7}$$

ami (6)-al ellentmond; (7)-el tehát a (4) tétel is be van bizonyítva.

$V(n)$-re a bizonyitás szórul-szóra ugyanez marad; ott is minden a

$$D(N) = \sum_{n=1}^{N} \left(V(n) - \log\log N\right)^2 = O(N \log\log N) \tag{8}$$

reláció bebizonyitásán múlik. Több fáradtsággal a szigorúbb

$$\begin{aligned} R(N) &= N \log\log N + o(N \log\log N),\\ D(N) &= N \log\log N + o(N \log\log N),\\ \sum_{n=1}^{N} &\left(U(n) - \log\log N - B\sqrt{\log\log N}\right)^2 =\\ &= (1+B^2) N \log\log N + o(N \log\log N),\\ \sum_{n=1}^{N} &\left(V(n) - \log\log N - B\sqrt{\log\log N}\right)^2 =\\ &= (1+B^2) N \log\log N + o(N \log\log N) \end{aligned} \tag{9}$$

relációkat nyerhetnénk; utóbbi két reláció azt fejezi ki, hogy (4)-ben a második tag nem javitható $\Phi(N)\sqrt{\log\log N}$-ről $B\sqrt{\log\log N}$-re ((9)-ben B az N-től független konstans). Ezen relációk bizonyitására csak utalni fogunk.[1]

---

[1] Mindezek bizonyitása teljesen elemi, csak a

$$\sum_{p_i \leq x} \frac{1}{p_i} = \log\log x + A + o(1)$$

reláció kell, ami MERTENS nyomán (l. pl. LANDAU: *Handbuch der Vert. der Primzahlen* I.) teljesen elemi. A (7) és (8)-hoz pláne csak

$$\sum_{p_i \leq x} \frac{1}{p_i} = \log\log x + O(1)$$

kell.

Fenti eredmények úgy is kifejezhetők, hogy az $U(n)$ és $V(n)$ számelméleti függvények «majdnem mindig helyettesíthetők» az elemi $\log\log n$ függvénnyel; ez alatt azt értjük, hogy

$$\frac{\sum_{n=2}^{N}\left(U(n)-\log\log n\right)^2}{\sum_{n=2}^{N}U(n)^2}\to 0, \tag{10}$$

ha $N\to\infty$. Ezt a következőképpen láthatjuk be. Mint a 2-ik §-ban bizonyítani fogjuk,

$$\sum_{n=2}^{N}U(n)^2 \sim N(\log\log N)^2,$$

és így (10) bizonyításához elég a

$$\sum_{n=2}^{N}\left(U(n)-\log\log n\right)^2 = o\left(N\,\overline{\log\log N}^2\right)$$

relációt bebizonyítani. Ami az utóbbit illeti:

$$\sum_{n=2}^{N}\left(U(n)-\log\log n\right)^2 =$$

$$= \sum_{n=2}^{N}\left(\overline{U(n)-\log\log N}+\overline{\log\log N-\log\log n}\right)^2 \leqq$$

$$\leqq 2\Big[\sum_{n=2}^{N}\left(U(n)-\log\log N\right)^2+\sum_{n=2}^{N}(\log\log N-\log\log n)^2\Big].$$

Az első tag (7) alapján $O(N\log\log N)$; a második pedig:

$$\sum_{k=2}^{N}(\log\log N-\log\log k)^2 =$$

$$= \sum_{k=2}^{[\sqrt{N}]}(\log\log N-\log\log k)^2+\sum_{k=[\sqrt{N}]+1}^{N}(\log\log N-\log\log k)^2 <$$

$$< \sqrt{N}(2\log\log N)^2+\sum_{k=1}^{N}(\log\log N-\log\log\sqrt{N})^2 =$$

$$= 4\sqrt{N}(\log\log N)^2+N\log^2 2 = O(N);$$

azaz

$$\sum_{k=2}^{N}\left(U(k)-\log\log k\right)^2 = O(N\log\log N).$$

Q. e. d.

$V(n)$-re szórul-szóra ugyanez áll.

Feltűnő, hogy annak ellenére, hogy minden n-re $V(n) \geqq U(n)$, majdnem minden számra $V(n) \sim U(n)$. Ezen tényállásnak egy kifejezője a következő, ERDŐS PÁL-tól származó reláció:

$$L(N) \equiv \sum_{n=1}^{N} \frac{U(n)}{V(n)} = N + o(N). \tag{11}$$

Ezt a következőkép lehet egyszerűen bebizonyítani:

$$L(N) = \sum_{n=1}^{N} 1 - \sum_{n=1}^{N} \frac{V(n) - U(n)}{V(n)} = N - \sum_{\substack{n \leqq N \\ V(n) < \frac{1}{2}\log\log N}} \frac{V(n) - U(n)}{V(n)} - $$
$$- \sum_{\substack{n \leqq N \\ V(n) \geqq \frac{1}{2}\log\log N}} \frac{V(n) - U(n)}{V(n)}. \tag{12}$$

Mivel minden n-re $V(n) - U(n) \geqq 0$, azért

$$0 < \sum_{\substack{n \leqq N \\ V(n) \geqq \frac{1}{2}\log\log N}} \frac{V(n) - U(n)}{V(n)} < \frac{2}{\log\log N} \sum_{n=1}^{N} (V(n) - U(n)). \tag{13}$$

Minthogy — mint a 2-ik §-ban látni fogjuk —

$$\sum_{n=1}^{N} U(n) = N \log\log N + O(N)$$
$$\sum_{n=1}^{N} V(n) = N \log\log N + O(N),$$

azért (13)-ból

$$\sum_{\substack{n \leqq 1 \\ V(n) \geqq \frac{1}{2}\log\log N}} \frac{V(n) - U(n)}{V(n)} = O\left(\frac{N}{\log\log N}\right) = o(N). \tag{14}$$

Továbbá, mivel

$$0 \leqq \frac{V(n) - U(n)}{V(n)} < 1,$$

azért

$$0 < \sum_{\substack{n \leq N \\ V(n) < \frac{1}{2} \log \log N}} \left(\frac{V(n) - U(n)}{V(n)} \right) < \sum_{\substack{n \leq N \\ V(n) < \frac{1}{2} \log \log N}} 1 \, ; \tag{15}$$

az utolsó összeg HARDY és RAMANUJAN fenti tétele szerint $o(N)$. (14) és (15) alapján (11) be van bizonyítva. Analóg módon lehetne bizonyítani, hogy az $\frac{U(n)}{V(n)}$ számelméleti függvény majdnem mindenütt helyettesíthető $f(x) \equiv 1$-el, a szó előbb használt értelmében; ezzel jelenleg nem foglalkozunk. Maga az a tény, hogy a «legtöbb» számra $V(n) \sim U(n)$, plauzibilisebbé válik, ha tekintetbe vesszük azon ismert tényt,[1] hogy azon n számok száma N-ig, melyekre $U(n) = V(n)$,

$$\sim \frac{6}{\pi^2} N$$

(ezt $N \to \infty$-re kell érteni.), tehát a számok egy nagy százalékára határozottan egyenlőség áll fenn.

A 3-ik §-ban a (4) tételre egy második, egyszerű analytikus bizonyítást adunk. A plauzibilis út az volna, hogy az

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(U(n) - \log \log n \right)^2 x^n \qquad |x| < 1$$

függvény szingularitását vizsgálnók $x \to 1$-re *analytikusan*[2] és ebből következtetnénk vissza egy TAUBER típusú tétellel $f(x)$ együttható-összegeire. Ez a fáradságos út talán járható HARDY és LITTLEWOOD azon módszerével, melyet a GOLDBACH-sejtés tárgyalásánál használnak; azonban nem ezt fogjuk követni. Tekintve, hogy a $2^{U(n)}$ és $2^{V(n)}$ számelméleti függvények multiplikativok, a

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{rU(n)}}{n^s}, \quad \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{rV(n)}}{n^s} \tag{16}$$

(r tetszőleges fix valós szám)

[1] GEGENBAUER: *Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie.* Denkschr. Akad. Wien 1885. 37—80.

[2] Tehát $\sum_{n=1}^{N} U(n)^2$ és $\sum_{n=1}^{N} U(n)$ előbb nyert asymptotikus értékeit nem használva.

DIRICHLET-sorok által értelmezett függvények szingularitásai könnyen felismerhetők. De ekkor a

$$\sum_{n=1}^{N} 2^{rU(n)}, \quad \sum_{n=1}^{N} 2^{rV(n)}$$

kifejezések asymptotikus értékére (ha $N \to \infty$) könnyen fogunk tudni következtetni. Pontosan a következőt fogjuk kapni:[1] Legyenek $c_1, \dots c_6$, r és N-től független pozitív, D és E pedig csak r-től függő konstansok, melyekre $c_3 \leqq D$, $E \leqq c_4$, $|r| \leqq \frac{1}{2}$. Legyen továbbá $\delta(r) = \frac{1}{2}$, ill. 1, ha $r \geqq 0$, ill. $r < 0$.

Ekkor

$$\left|\sum_{n=1}^{N} 2^{rU(n)} - DN \log^{2^r-1} N\right| < c_1 N (\log N)^{2^r-1-\delta(r)} \tag{17a}$$

és

$$\left|\sum_{n=1}^{N} 2^{rV(n)} - EN \log^{2^r-1} N\right| < c_2 N (\log N)^{2^r-1-\delta(r)}. \tag{17b}$$

Ebből (4) tételt a következőkép nyerjük. Legyen $\Phi(x)$ (3) alatt definiált függvény. Tegyük fel, hogy a tétel nem volna igaz, azaz volna az $N_1, N_2, \dots$ számoknak oly végtelen sorozata, hogy akármelyik i-re azon n számok száma N_i-ig, melyekre csak

$$U(n) > \log\log N_i + \Phi(N_i)\sqrt{\log\log N_i},$$

nagyobb volna aN_i-nél, ahol a egy i-től független konstans, melyre $0 < a \leqq 1$. Ekkor, ha most $r > 0$,

$$\sum_{n=1}^{N_i} 2^{rU(n)} > aN_i 2^{r\left(\log\log N_i + \Phi(N_i)\sqrt{\log\log N_i}\right)} \tag{18}$$

volna $i = 1, 2, \dots$-ra; vagy, ha (17a) helyett a belőle következő

$$\sum_{n=1}^{N_i} 2^{rU(n)} < 2c_4 N_i \log^{2^r-1} N_i \tag{19}$$

---

[1] A maradéktag jó becslésére most nem helyezünk súlyt. Az $r \geqq 0$ és $r < 0$ esetek közti különbség csak látszólagos, csak a — rövidsége miatt alkalmazott — módszer miatt lépett fel.

egyenlőtlenséget vesszük, mely fennáll $N_i > c_5$-re, akkor (18) és (19)-ből

$$2c_4 N_i \log^{2^r-1} N_i > e^{r \log 2 \left(\log\log N_i + \Phi(N_i)\sqrt{\log\log N_i}\right)} . aN_i \tag{20}$$

volna, vagy

$$e^{(2^r-1)\log\log N_i} > e^{r \log 2 \left(\log\log N_i + \Phi(N_i)\sqrt{\log\log N_i}\right) + \log \frac{a}{2c_4}} . \tag{21}$$

De ekkor, ha

$$r = \frac{1}{\sqrt{\log\log N_i}}, \quad N_i > \max(c_5, e^{e^4}),$$

tekintve hogy

$$|2^r - 1 - r\log 2| < c_6 |r|^2 \quad \text{ha} \quad |r| \leqq \frac{1}{2},$$

$$e^{\log 2 . \sqrt{\log\log N_i} + O(1)} > e^{\log 2 . \sqrt{\log\log N_i} + \Phi(N_i) \log 2 + \log \frac{a}{2c_4}}$$

volna, ami (3) miatt lehetetlen. Ha pedig léteznék az egész számoknak oly végtelen $N_1, N_2, \ldots$ sorozata, hogy bármelyik i-re azon n számok száma N_i-ig, melyekre

$$U(n) < \log\log N_i - \Phi(N_i)\sqrt{\log\log N_i}, \tag{22}$$

nagyobb volna aN_i-nél, ahol a megint pozitív, i-től független konstans, akkor ugyanígy jutunk ellentmondáshoz; csak akkor $r = -\frac{1}{\sqrt{\log\log N_i}}$ fog célhoz vezetni. $V(n)$-re a bizonyítás szórul-szóra ugyanaz.

A II. és III-ik fejezetben adott bizonyítási módok sokféle általánosításra adnak alkalmat; például mindkét mód (4)-el analog tételt ad oly $\psi(n)$ számelméleti függvényekre, melyek az

$$\psi(n) = \sum_{\substack{p_i/n \\ p_i \neq p_k}} \psi(p_i) \tag{23}$$

alakú formulákkal vannak definiálva.[1] $\psi(p_i) \equiv 1$-re adódik ebből

---

[1] Ekkor $\log\log N$ szerepét a $\psi(p_i)$-re tett bizonyos megszorítások mellett $\sum_{p \leqq N} \frac{\psi(p)}{p}$ veszi át. Ez áll már pl. ha $\psi(p_i)$-ről azt tesszük fel, hogy pozitív, $p_i \to \infty$-re korlátos és $\sum_{(i)} \frac{\psi(p_i)}{p_i}$ divergens.

(4) tétel az $U(n)$-re; ugyanez áll fenn oly $f(n)$-ekre, melyeket úgy nyerünk, ha (23)-ban az összegezés n *összes* prímfaktoraira terjesztendő ki, nemcsak a különbözőkre, mint (23)-ban. Ekkor $\psi(p_i)\equiv 1$ adja $V(n)$-et. Ezeket most nem részletezzük, valamint azon sok egyéb más eredményt sem, melyeket ezen módokon elérhetünk. 4-ik §-ban egy másirányú általánositásról szólunk röviden. N-ig $O(\sqrt{N})$ számú (k^2+1) alakú szám van; a 4. § tétele azt mondja, hogy azon (k^2+1) alakú számok száma N-ig, melyekre (4a) vagy (4b) teljesül, $o(\sqrt{N})$. Ez nyersen azt mondja, hogy majdnem minden (k^2+1) alakú számnak N-ig $\log\log N$ különböző prímfaktora van.[1] Ez a

$$J(N)=\sum_{k^2+1\leqq N}\{U(k^2+1)-\log\log N\}^2=O(\sqrt{N}\log\log N)\qquad(24)$$

relációból nyerhető ugyanúgy, ahogy (5)-ből nyertük (4)-et; ezért elég (24)-et bizonyitani. A bizonyitás elemi, mert csak a

$$\sum_{\substack{p\leqq N\\ p\equiv 1 \bmod 4}}\frac{1}{p}=\frac{1}{2}\log\log N+O(1)\qquad(25)$$

relációt használjuk fel, ami elemi.[2] (24) egy korollariuma az, hogy

$$\sum_{\substack{k^2+1\leqq N\\ k^2+1=\text{prímszám}}}1=O\left(\frac{\sqrt{N}}{\log\log N}\right).\qquad(26)$$

Ez igazolva lesz, ha megmutatjuk, hogy azon (k^2+1) alakú számok $K(N)$ száma N-ig, melyeknek $\frac{1}{2}\log\log N$-nél kevesebb külön-

---

[1] A tétel és bizonyitás csekély módositással átvihető (x^2+1)-ről akármily polynomra, felhasználva RADEMACHER következő megjegyzését: legyen $f(x)$ irreducibilis és jelentse $\nu(p)$ az $f(x)\equiv 0 \bmod p$ inkongruens megoldásai számát; ekkor $\sum\limits_{p\leqq N}\frac{\nu(p)}{p}=\log\log N+A+o(1)$. Ezen tétel azonban már nem elemi. Az általános esetben $\log\log N$ helyébe $k\log\log N$ lép, ahol k a polynom különböző irreducibilis faktorainak száma.

[2] MERTENS: *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie.* Crelle J. 1874.

böző prímfaktoruk van, még mindig $O\left(\frac{\sqrt{N}}{\log\log N}\right)$. Tegyük fel ellenkezőleg, hogy volna oly $\Phi_1(x)$ melyre

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi_1(x)=+\infty$$

és volna egy oly $N_1, N_2, \ldots$ végtelen sorozat, melyre

$$K(N_i)>\frac{\sqrt{N_i\Phi_1(N_i)}}{\log\log N_i}. \quad (i=1,2,\ldots) \tag{27}$$

Mivel ekkor (24) minden ilyen tagja nagyobb $\frac{1}{4}(\log\log N_i)^2$-nél, (24) és (27)-ből

$$J(N_i)>\tfrac{1}{4}(\log\log N_i)^2\frac{\sqrt{N_i\Phi_1(N_i)}}{\log\log N_i},$$

azaz

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{J(N)}{\sqrt{N}\log\log N}=+\infty \tag{28}$$

következnék, ami (24)-el ellentmond. Magasabb közepeket és $U(n)$ helyett más függvényt véve, az eredmény talán javítható; erről más alkalommal.

2. §.

E §-ban a (7) és (8) relációkat fogjuk bizonyítani és a (9) relációk bizonyítását vázoljuk.

I. segédtétel.

$$\sum_{p_ip_k\leq N}\frac{1}{p_ip_k}=(\log\log N)^2+O(\log\log N).$$

U. i.

$$\Big(\sum_{p_i\leq\sqrt{N}}\frac{1}{p_i}\Big)^2<\sum_{p_ip_k\leq N}\frac{1}{p_ip_k}<\Big(\sum_{p_i\leq N}\frac{1}{p_i}\Big)^2,$$

ami a

$$\sum_{p_i\leq x}\frac{1}{p_i}=\log\log x+O(1) \tag{29}$$

miatt épp az I. segédtételt adja.

A (9) bizonyításához a

$$\sum_{p_i p_k \leqq N} \frac{1}{p_i p_k} = (\log\log N)^2 + 2a(\log\log N) + o(\log\log N) \quad (30)$$

reláció kell, amihez viszont csak a már említett

$$\sum_{p_i \leqq x} \frac{1}{p_i} = \log\log x + a + o(1) \quad (31)$$

reláció szükséges.

II. Segédtétel.

$$\sum_{n=1}^{N} U(n) = N \log\log N + O(N).$$

Mivel $U(n) = \sum_{p_i/n} 1$, ahol az összegezés n *különböző* prímfaktoraira terjesztendő ki,

$$\sum_{n=1}^{N} U(n) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{p_i/n} 1 = \sum_{p_i \leqq N} \sum_{\substack{n \\ n \equiv 0 \bmod p_i \\ n \leqq N}} 1^{1} = \sum_{p \leqq N} \left[\frac{N}{p}\right],$$

azaz

$$\left|\sum_{n=1}^{N} U(n) - \sum_{p \leqq N} \frac{N}{p}\right| = \sum_{p \leqq N} \left(\frac{N}{p_i} - \left[\frac{N}{p_i}\right]\right) < N,$$

vagyis, (29)-et tekintve,

$$\sum_{n=1}^{N} U(n) = N \log\log N + O(N).$$

A (9) relációkhoz a II. helyébe

$$\sum_{n=1}^{N} U(n) = N \log\log N + aN + o(N) \quad (32)$$

lép; itt fel kell használni (31)-et és a

$$\sum_{p \leqq x} 1 = o(x) \quad (33)$$

relációt, aminek bizonyítása szintén teljesen elemi.

[1] A két összegezés sorrendjét felcseréltük.

III. segédtétel.

$$\sum_{n=1}^{N} V(n) = N \log \log N + O(N).$$

Mivel $V(n) = \sum_{p_i/n} 1$, ahol az összegezés n *összes* prímfaktoraira terjesztendő ki,

$$\sum_{n=1}^{N} V(n) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{p_i/n} 1 = \sum_{p^\alpha < N} \left[\frac{N}{p^\alpha}\right],$$

azaz

$$\left| \sum_{n=1}^{N} V(n) - \sum_{p^\alpha \leqq N} \frac{N}{p^\alpha} \right| < \sum_{p^\alpha \leqq N} 1 < N. \tag{34}$$

De (29) miatt

$$\sum_{p^\alpha \leqq N} \frac{1}{p^\alpha} = \sum_{p_i \leqq N} \frac{1}{p_i} + \sum_{\substack{p_i^\alpha \leqq N \\ \alpha \geqq 2}} \frac{1}{p_i^\alpha} = \log \log N + O(1)$$

és így (34)-et tekintve, III. igazolva van.

A (9) relációhoz a III. helyébe

$$\sum_{n=1}^{N} V(n) = \log \log N + (a + b) N + o(N) \tag{35}$$

lép; itt $b = \sum_i \frac{1}{p_i (p_i - 1)}$. Ennek bizonyítására fel kell használni a (31) és (33)-at.

IV. segédtétel.

$$\sum_{n=1}^{N} U(n)^2 = N(\log \log N)^2 + O(N \log \log N).$$

Vegyük tekintetbe, hogy

$$U(n)^2 = \left(\sum_{p/n} 1\right)^2 = \sum 1.$$

(Az utolsó summában 1-et annyiszor vesszük, ahányféleképp n *különböző* prímfaktoraiból egy $p_i p_k$ pár kiválasztható; éspedig ha $i \neq k$, akkor $p_i p_k$ és $p_k p_i$ különböző párnak számít, ha $i = k$, akkor p_ip_i csak egyszer.) Legyen $i \neq k$ és nézzük, hogy egy fix p_ip_k ambó hány N alatti n-nél járul $U(n)^2$-hez 1-el; nyilván azoknál és csak azoknál, melyek p_ip_k-val oszthatók. Ezek száma nyilván $\left[\frac{N}{p_ip_k}\right]$. Legyen $i = k$; a p_ip_i ambo azoknál és csak azoknál az n-eknél járul hozzá $U(n)^2$-hez 1-el, melyek p_i-vel oszthatók; tehát a p_ip_i ambo fix i-nél $\left[\frac{N}{p_i}\right]$-vel járul hozzá $\sum\limits_{n=1}^{N} U(n)^2$-hoz.

Azaz

$$\sum_{n=1}^{N} U(n)^2 = \sum_{\substack{i \neq k \\ p_ip_k \leqq N}} \left[\frac{N}{p_ip_k}\right]^{1} + \sum_{p_i \leqq N} \left[\frac{N}{p_i}\right]. \tag{36}$$

A második összeg

$$< N \sum_{p_i \leqq N} \frac{1}{p_i} = O(N \log\log N). \tag{37}$$

Továbbá

$$\left| \sum_{n=1}^{N} U(n)^2 - N \sum_{p_ip_k \leqq N} \frac{1}{p_ip_k} \right| = \sum_{p_ip_k \leqq N} \left(\frac{N}{p_ip_k} - \left[\frac{N}{p_ip_k}\right] \right) +$$

$$+ O(N \log\log N) < \sum_{p_ip_k \leqq N} 1 + O(N \log\log N) = O(N \log\log N)$$

és így, az I. segédtételt tekintve, IV. be van bizonyítva.

A 9. relációhoz

$$\sum_{n=1}^{N} U(n)^2 = N(\log\log N)^2 + (2a+1) N \log\log N + o(N \log\log N) \tag{38}$$

kell, ami (36)-ból (30) és (32) segélyével könnyen nyerhető.

V. segédtétel.

$$\sum_{n=1}^{N} V(n)^2 = N(\log\log N)^2 + O(N \log\log N).$$

---

[1] A p_ip_k-nak és a p_kp_i-nek megfelelő tagok mindkettője szerepel az összegben.

Analog módon nyerhető, mint IV-nél, a

$$\sum_{n=1}^{N} V(n)^2 = \sum_{\substack{i \neq k \\ p_i^\alpha p_k^\beta \leqq N \\ \alpha,\beta > 0}} \left[\frac{N}{p_i^\alpha p_k^\beta}\right] + \sum_{\substack{p_i^l \leqq N \\ l > 0}} (2l-1)\left[\frac{N}{p_i^l}\right] \tag{39}$$

identitás; mivel ennek direkt bizonyítása elég hosszadalmas volna, (39)-et csak verifikáljuk. $N=2$-re a tétel nyilván igaz. Tegyük fel, hogy fennáll N-re és tegyünk N helyébe $N+1$-et. A baloldal $V(N+1)^2$-el nőtt. Nézzük a jobboldal változását; az első összegben azon $p_i^\alpha p_k^\beta$-hoz tartozó tagok változnak éspedig 1-el, melyekre $p_i^\alpha p_k^\beta / N+1$. Ha tehát $N+1 = q_1^{\gamma_1} \dots q_l^{\gamma_l}$, akkor az első összeg annyival nőtt, ahányféleképp $q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \dots q_l^{\gamma_l}$-ből egy $q_i^{\varrho_i} q_k^{\varrho_k}$ alakú osztó kivehető; itt $i \neq k$ és $\varrho_i \varrho_k \neq 0$. Legyen először $i=1$ Ezek az osztók fix ν mellett: $q_1^\nu q_2 \dots q_1^\nu q_2^{\gamma_2}$, $q_1^\nu q_3 \dots q_1^\nu q_3^{\gamma_3}, \dots q_1^\nu q_l^{\gamma_l}$; számuk: $\gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_l$. Mivel ν felvehet γ_1 számú fix értéket, azon osztópárok, melyek első tényezője q_1 valamely hatványa,

$$\gamma_1(\gamma_2 + \dots + \gamma_l) = \gamma_1(\gamma_1 + \dots + \gamma_l) - \gamma_1^2$$

-el járulnak a növekvéshez. Ha most q_1 helyett $q_2, q_3 \dots q_l$-re végezzük ugyanezt, kapjuk, hogy az első összeg teljes növekvése

$$(\gamma_1 + \dots + \gamma_l)^2 - \gamma_1^2 - \dots - \gamma_l^2.$$

Nézzük a jobboldali második összeg növekedését. Ez nyilván

$$\sum_{r=1}^{\gamma_1}(2r-1) + \dots + \sum_{r=1}^{\gamma_l}(2r-1) = \gamma_1^2 + \dots + \gamma_l^2;$$

és így a jobboldal teljes növekvése $(\gamma_1 + \dots + \gamma_l)^2$, ami azonos $V(N+1)^2$-el. Tehát (39) $(N+1)$-re és így általában is igaz.

Nézzük (39)-et;

$$\sum_{1 < p_i^l \leqq N} (2l-1)\left[\frac{N}{p_i^l}\right] < N \sum_{1 < p_i^l \leqq N} \frac{2l-1}{p_i^l} < N \sum_{p_i \leqq N} \frac{1}{p_i} + \\ + N \sum_{\substack{l \geqq 2 \\ p_i}} \frac{(2l-1)}{p_i^l} = O(N \log\log N). \tag{40}$$

Viszont

$$\sum_{\substack{i \neq k \\ \alpha,\beta>0}} \sum_{p_i^\alpha p_k^\beta \leq N} \left[\frac{N}{p_i^\alpha p_k^\beta}\right] = N \sum_{\substack{\alpha,\beta>0 \\ p_i^\alpha p_k^\beta \leq N}} \frac{1}{p_i^\alpha p_k^\beta} + O\Big(\sum_{p_i^\alpha p_k^\beta \leq N} 1\Big) + O(N) =$$

$$= N \sum_{p_i p_k \leq N} \frac{1}{p_i p_k} + N \sum_{\substack{p_i p_k^\beta \leq N \\ \beta \geq 2}} \frac{1}{p_i p_k^\beta} + N \sum_{\substack{p_i^\alpha p_k \leq N \\ \alpha \geq 2}} \frac{1}{p_i^\alpha p_k^\beta} + O(N). \tag{41}$$

De

$$\sum_{\substack{p_i p_k^\beta \leq N \\ \beta \leq 2}} \frac{1}{p_i p_k^\beta} < \Big(\sum_{p_i \leq N} \frac{1}{p_i}\Big)\Big(\sum_{\substack{k,\beta \\ \beta \geq 2}} \frac{1}{p_k^\beta}\Big) = O(\log\log N). \tag{42}$$

Ugyanez áll nyilván (41) harmadik tagjára is; azaz (41)-et, (42)-őt és az I. segédtételt tekintve

$$\sum_{i \neq k,\ p_i^\alpha p_k^\beta \leq N,\ \alpha,\beta>0} \left[\frac{N}{p_i^\alpha p_k^\beta}\right] = N(\log\log N)^2 + O(N \log\log N),$$

ami (39) és (40)-el épp V-öt adja. A becsléseket pontosabban elvégezve, minden nehézség nélkül nyerjük a

$$\sum_{n=1}^{N} V(n)^2 = N(\log\log N)^2 + (2a + 2b + 1) N \log\log N + \\ + o(N \log\log N) \tag{43}$$

relációt: itt a és b a (31) és (35) alatti konstansok.

Az eddigiekből a (7) és (8) könnyen következik; pl.

$$R(n) = \sum_{n=1}^{N} U(n)^2 - 2 \log\log N \sum_{n=1}^{N} U(n) + N(\log\log N)^2 = \\ = O(N \log\log N),$$

tekintve II. és IV. segédtételt. Ugyanígy nyerjük a többi (9) alatti relációt is.

3. §.

E fejezetben végig $|r| \leq \frac{1}{2}$ és fix; $s = \sigma + ti$. Nézzük a (16) alatti függvényeket. Mivel egész triviálisan

$$|U(n)| \leq \frac{\log n}{\log 2}, \quad |V(n)| \leq \frac{\log n}{\log 2},$$

azért

$$|\varphi(s)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma-r}}, \quad |\psi(s)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma-r}},$$

azaz $\varphi(s)$ és $\psi(s)$ regulárisak $\sigma > 1 + r$-re. A szorzat abszolút konvergenciája és $2^{U(n)}$ multiplikativitása miatt $\sigma > 1 + r$-re nyilván

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \prod_i \left(1 + \frac{2^{rU(p_i)}}{p_i^s} + \frac{2^{rU(p_i^2)}}{p_i^{2s}} + \cdots\right) = \\ &= \prod_i \left(1 + \frac{2^r}{p_i^s - 1}\right). \end{aligned} \tag{44}$$

De a (44) alatti szorzat s-nek $\sigma > 1$-ben reguláris függvényét állítja elő; azaz $\varphi(s)$ folytatható $\sigma = 1$-ig; $\sigma > 1$-ben reguláris és fennáll (44). Ugyanígy $\psi(s)$ reguláris $\sigma > 1$-re, és itt

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \prod_i \left[1 + \frac{2^{rV(p_i)}}{p_i^s} + \frac{2^{rV(p_i^2)}}{p_i^{2s}} + \cdots\right] = \\ &= \prod_i \left[1 + \frac{2^r}{p_i^s} + \frac{2^{2r}}{p_i^{2s}} + \cdots\right] = \prod_i \frac{1}{\left(1 - \frac{2^r}{p_i^s}\right)}, \end{aligned} \tag{45}$$

tekintve, hogy $\left|\frac{2^r}{p_i^s}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, ha $\sigma > 1$ és $|r| \leqq \frac{1}{2}$.

A következőkben $a_1, a_2, \ldots$ az r-től és s-től független, csak ε-tól függő pozitív konstansok. $b_1(s), b_2(s) \ldots$ az s változónak és r parameternek oly függvényei, melyek $|r| \leqq \frac{1}{2}$, $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \varepsilon$-ra regulárisak, és amelyekre itt $|b_\nu(s)| < a_1$ ($\nu = 1, 2, \ldots$). Továbbá $c_1(s), c_2(s) \ldots$ az s-nek oly függvényei, melyek $\sigma_0 \geqq \sigma \geqq 1$-re és és $|t| < t_0$-ra regulárisak, és melyekre itt $|c_\nu(s)| \leqq A$; (itt σ_0, t_0 és A abszolút konstansok).

Nézzük $\varphi(s)$-et.

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \prod_{p_i < 7} \left(1 + \frac{2^r}{p_i^s - 1}\right) e^{\sum\limits_{p_i \geqq 7} \log\left(1 + \frac{2^r}{p_i^s - 1}\right)} = \\ &= b_1(s)\, e^{2^r \sum\limits_{p_i \geqq 7} \frac{1}{p_i^s - 1} + \sum\limits_{p_i \geqq 7} \left[\log\left(1 + \frac{2^r}{p_i^s - 1}\right) - \frac{2^r}{p_i^s - 1}\right]}. \end{aligned}$$

De

$$p_i \geqq 7,\ \sigma \geqq \frac{1}{2} + \varepsilon,\ |r| \leqq \frac{1}{2}\text{-re}\quad \left|\frac{2^r}{p_i^s - 1}\right| < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-1} < 1\,;$$

mivel $|z| \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-1}$-re

$$|\log(1+z) - z| < a_2 |z|^2,$$

azért

$$|B(s)| \equiv \left|\sum_{p_i \geqq 7}\left[\log\left(1 + \frac{2^r}{p_i^s - 1}\right) - \frac{2^r}{p_i^s - 1}\right]\right| < 2a_2 \sum_{p_i \geqq 7} \frac{1}{(p_i^\sigma - 1)^2},$$

vagyis $B(s) = b_2(s)$. Ha még tekintetbe vesszük, hogy

$$e^{2^r \sum\limits_{p_i \geqq 7} \frac{1}{p_i^s - 1}} = e^{2^r \sum\limits_{i} \frac{1}{p_i^s} - 2^r \sum\limits_{p_i \leqq 7} \frac{1}{p_i^s} + 2^r \sum\limits_{p_i \geqq 7} \frac{1}{p_i^s (p_i^s - 1)}} = b_3(s)\, e^{2^r \sum\limits_{i} \frac{1}{p_i^s}},$$

akkor

$$\varphi(s) = b_4(s)\, e^{2^r \sum\limits_{i} \frac{1}{p_i^s}}. \tag{46}$$

De, mint ismeretes, $\sigma > 1$-re

$$\log \zeta(s) = \sum_p \frac{1}{p^s} + \sum_i \sum_{n \geqq 2} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p_i^{ns}} = \sum_p \frac{1}{p^s} + b_5(s),\text{[1]}$$

azaz

$$\varphi(s) = b_6(s)\, \zeta(s)^{2^r}. \tag{47}$$

$\psi(s)$-re ugyanígy kapjuk, hogy

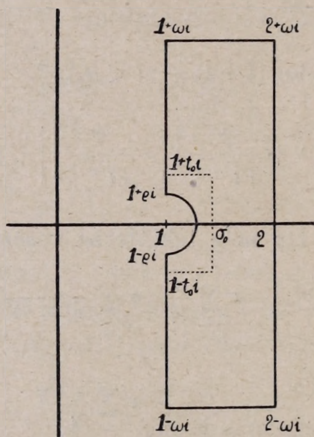
$$\psi(s) = b_7(s)\, \zeta(s)^{2^r}. \tag{48}$$

Egy ismert formula szerint

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqq x} 2^{rU(n)} \log \frac{x}{n} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{x^s}{s^2} \varphi(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{x^s}{s^2} b_6(s)\, \zeta(s)^{2^r} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{x^s}{s^2} b_6(s) \left[\frac{1}{(s-1)^{2^r}}\right] ds + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{x^s}{s^2} b_6(s) \left[\zeta(s)^{2^r} - \frac{1}{(s-1)^{2^r}}\right] ds \equiv I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{49}$$

[1] LANDAU: Handbuch der Verteilung der Primzahlen I.

Legyen először $r \geqq 0$ és nézzük I_2-t. Nevezzük l görbének az 1. ábrán látható görbét; mivel, mint ismeretes, az integrandus az l görbe zárt belsejében reguláris, a CAUCHY-féle integráltétel miatt



1. ábra.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(l)} \frac{x^s}{s^2}\, b_6(s)\left[\zeta(s)^{2r} - \frac{1}{(s-1)^{2r}}\right] ds = 0.$$

Mivel továbbá (l. LANDAU, id. h.) $\sigma \geqq 1$, $|t| \geqq 2$-re

$$|\zeta(s)| < a_3 \log |t|,$$

azért ugyanitt

$$\left|\zeta(s)^{2r} - \frac{1}{(s-1)^{2r}}\right| < |\zeta(s)|^{2r} + \frac{1}{|s-1|^{2r}} < a_4 \log^{\sqrt{2}} |t|. \qquad (50)$$

Tehát, ha $\omega \geqq 2$,

$$\left|\int\limits_{2+\omega i}^{1+\omega i} \frac{x^s}{s^2}\, b_6(s)\left[\zeta(s)^{2r} - \frac{1}{(s-1)^{2r}}\right] ds\right| < \frac{x^2}{\omega^2}\, a_1 . a_4 \log^{\sqrt{2}} \omega;$$

itt a jobboldal $\to 0$, ha $\omega \to \infty$; ugyanez áll nyilván a $\int\limits_{1-\omega i}^{2-\omega i}$-ra is. Azaz

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-\omega i}^{2+\omega i}\frac{x^s}{s^2}b_6(s)\left[\zeta(s)^{2r}-\frac{1}{(s-1)^{2^r}}\right]ds=$$

$$=\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\omega i}^{1+\omega i}\frac{x^s}{s^2}b_6(s)\left[\zeta(s)^{2r}-\frac{1}{(s-1)^{2r}}\right]ds,$$

ahol az $\int\limits_{1-\omega i}^{1+\omega i}$ integrál az ábrán látható megtört úton értendő. Mint ismert, $(s-1)\zeta(s)$ az s-nek transcendens egész függvénye és $\lim\limits_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)=1$, tehát

$$\left|\zeta(s)^{2r}-\frac{1}{(s-1)^{2r}}\right|=\left|\frac{1}{(s-1)^{2r}}\right|\cdot\left|[(s-1)\zeta(s)]^{2r}-1\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{(s-1)^{2r}}\right|\cdot\left|[1+(s-1)c_1(s)]^{2r}-1\right|,$$

ha $2\geqq\sigma\geqq 1$ és $|t|\leqq 1$.

Nyilván létezik oly $\sigma_0>1$ és $t_0>0$, hogy $1\leqq\sigma\leqq\sigma_0$, $|t|\leqq t_0$-ra

$$|(s-1)c_1(s)|\leqq\frac{1}{2}.$$

Azaz itt, tekintve, hogy $0\leqq r\leqq\frac{1}{2}$,

$$|[1+(s-1)c_1(s)]^{2r}-1|<a_5|s-1)|c_1(s),$$

tehát

$$\left|\zeta(s)^{2r}-\frac{1}{(s-1)^{2r}}\right|<\frac{a_6}{|s-1|^{2r-1}}. \tag{51}$$

És így, mivel $0\leqq 2r-1<\frac{1}{2}$, a félkörön vett integrál abszolút értékre, ha $\varrho<t_0$,

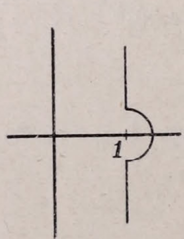
$$<\frac{1}{2\pi}\pi\varrho.x^2\frac{a_1a_6}{\varrho^{2r-1}},$$

ami $\to 0$, ha $\varrho\to 0$. Tehát az $\int\limits_{1-\omega i}^{1+\omega i}$ integrál most már vehető egészen a $\sigma=1$ egyenesen és így

$$
\begin{aligned}
|I_2| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{1-\omega i}^{1+\omega i} \frac{x^s}{s^2}\, b_6(s)\left[\zeta(s)^{2r}-\frac{1}{(s-1)^{2r}}\right] ds\right| < \\
&< \frac{x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_1}{(1+t^2)}\,\frac{a_6}{|t|^{2r-1}}\, dt < a_7 x.
\end{aligned} \tag{52}
$$

Nézzük I_1-et. Nyilván

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{b_6(1)}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{x^s}{s^2}\cdot\frac{1}{(s-1)^{2r}}\, ds + \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{x^s}{s^2}\,\frac{1}{(s-1)^{2r-1}}\,\frac{b_6(s)-b_6(1)}{s-1}\, ds.
\end{aligned} \tag{53}
$$



2. ábra.

De $b_6(s)$ definíciójából könnyen következik, hogy $\sigma \geqq \frac{1}{2}+\varepsilon$-ra

$$\left|\frac{b_6(s)-b_6(1)}{s-1}\right| < a_8,$$

azaz (53) második integrálját analóg módon, mint I_2-nél előbb, a Cauchy-tétellel $\sigma = 1$-re víve, ez is kisebb abszolút értékre, mint $a_9 x$. Azaz

$$\left|\sum_{n\leqq x} 2^{rU(n)}\log\frac{x}{n} - \frac{b_6(1)}{2\pi i}\int_{(1)} \frac{x^s}{s^2}\cdot\frac{ds}{(s-1)^{2r}}\right| < a_{10}x, \tag{54}$$

ahol $\int_{(1)}$ a 2. ábrán látható úton értendő. Mivel

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \frac{x^s}{s^2}\,\frac{ds}{(s-1)^{2r}} = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \frac{x^s}{(s-1)^{2r}}\, ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \frac{x^s(s+1)}{s^2}\,\frac{1}{(s-1)^{2r-1}}\, ds
\end{aligned}
$$

és a második integrál — mint az előbbivel analóg módon kimutatható — abszolút értékre nézve $< a_{11}x$, azért

$$\left|\sum_{n \leqq x} 2^{rU(n)} \log \frac{x}{n} - \frac{b_6(1)}{2\pi i} \int_{(1)} \frac{x^s}{(s-1)^{2^r}} ds\right| =$$

$$= \left|\sum_{n \leqq x} 2^{rU(n)} \log \frac{x}{n} - \frac{b_6(1)}{2\pi i} x \int_{(1)} \frac{x^s}{s^{2^r}} ds\right| < a_{12} x$$

De[1]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} \frac{x^s}{s^{2^r}} ds = \frac{1}{\Gamma(2^r)} \log^{2^r-1} x.$$

és így

$$\sum_{n \leqq x} 2^{rU(n)} \log \frac{x}{n} = \frac{b_6(1)}{\Gamma(2^r)} x \log^{2^r-1} x + O(x).^{2} \tag{55}$$

De, ha $\sum\limits_{n \leqq x} 2^{rU(n)} = S(x)$, akkor

$$\int_1^x \frac{S(y)}{y} dy = \int_1^x \frac{dy}{y} (\sum_{n \leqq y} 2^{rU(n)}) =$$

$$= \sum_{n \leqq x} 2^{rU(n)} \log \frac{x}{n} = \frac{b_6(1)}{\Gamma(2^r)} x \log^{2^r-1} x + O(x). \tag{56}$$

Legyen $\lambda = \lambda(x)$, melyről majd diszponálunk; ekkor nyilván, ha egyelőre csak azt kötjük ki, hogy $x > 2$-re $\lambda(x) > 0$ és $x \to \infty$-re $\lambda(x) \to 0$,

$$S(x) \log(1+\lambda) < \int_x^{x+\lambda x} \frac{S(y)}{y} dy < S(x\overline{1+\lambda}) \log(1+\lambda). \tag{57}$$

De

$$\int_x^{x+\lambda x} \frac{S(y)}{y} dy =$$

$$= \frac{b_6(1)}{\Gamma(2^r)} \{x[\log^{2^r-1}(x+\lambda x) - \log^{2^r-1} x] + \lambda x \log^{2^r-1}(x+\lambda x)\} + O(x) =$$

$$= \frac{b_6(1)}{\Gamma(2^r)} \lambda x \log^{2^r-1} x + O(\lambda x \log^{2^r-2} x) + O(x), \tag{58}$$

[1] Hadamard: Sur la distribution etc. Bull. Soc. math. France, 1896.

[2] Az O jel (61)-ig azt jelenti, hogy a becslés $0 \leqq r \leqq \frac{1}{2}$-re egyenletesen áll fenn.

azaz

$$S(x) < \frac{b_6(1)}{\Gamma(2^r)} x \log^{2^r-1} x + O(\lambda x \log^{2^r-1} x) +$$

$$+ O\left(\frac{x}{\lambda}\right) + O(x \log^{2^r-2} x),$$

ami $\lambda(x) = \frac{1}{\log^{\frac{2^r-1}{2}} x}$-re, mint legkedvezőbb választásra

$$S(x) < \frac{b_6(1)}{\Gamma(2^r)} x \log^{2^r-1} x + a_{13} x \log^{2^r-1-\frac{1}{2}} x. \tag{59}$$

(57) és (58)-ból ugyanígy

$$S(x) > \frac{b_6(1)}{\Gamma(2^r)} x \log^{2^r-1} x - a_{14} x \log^{2^r-1-\frac{1}{2}} x. \tag{60}$$

(59) és (60) (17a)-t adják $r \geqq 0$-ra; az $r < 0$ eset egy parciális integrációval erre visszavezethető. Ekkor a

$$\left| \sum_{n \leqq x} 2^{rU(n)} \log \frac{x}{n} - \frac{b_6(1)}{\Gamma(2^r)} x \log^{2^r-1} x \right| < a_{15} \frac{x}{\log x} \tag{61}$$

relációt nyerjük, amiből — $0 > r \geqq -\frac{1}{2}$-re — analóg módon, mint (57)—(60) alatt.[1]

$$\left| \sum_{n \leqq x} 2^{rU(n)} - \frac{b_6(1)}{\Gamma(2^r)} x \log^{2^r-1} x \right| < a_{16} x \log^{2^{r-1}-1} x. \tag{62}$$

Még csak — az I. § jelölésében — $c_3 \leqq \frac{b_6(1)}{\Gamma(2^r)} \leqq c_4$ helyességét kell belátnunk. $|r| \leqq \frac{1}{2}$ és a Γ függvény ismert tulajdonságai alapján elég a $c_5 \leqq b_6(1) \leqq c_6$ relációt vagy — tekintve $b_6(s)$ definícióját — a $b_6(1) \geqq c_5$ relációt belátni. De (47)-ből nyilván

[1] Az (59)—(60) és (62) alatti eredmények (17a) alatt látható módon foglalhatók össze.

$$b_6(1) =$$

$$= \prod_i \left[\left(1-\frac{1}{p_i}\right)^{2^r}\left(1+\frac{2^r}{p_i-1}\right)\right] = e^{\sum\limits_i \left\{2^r \log\left(1-\frac{1}{p_i}\right) + \log\left(1+\frac{2^r}{p_i-1}\right)\right\}} =$$

$$= e^{2^r \sum\limits_{p_i>2} \frac{1}{p_i(p_i-1)} - 2^r \sum\limits_{k=2}^{\infty} \sum\limits_{p_i>2} \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{p_i^k} + \sum\limits_{p_i>2} \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{kr}}{k(p_i-1)^k} + 2^r \log\frac{1}{2} + \log(1+2^r)} >$$

$$> e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{p_i>2} \frac{1}{p_i(p_i-1)} - \sqrt{2} \sum\limits_{p_i>2} \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{p_i^k} - \sum\limits_{p_i>2} \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^k}{k(p_i-1)^k} + \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\log 2} = c_5,$$

azaz ($17a$) be van bizonyítva. ($17b$) bizonyitása teljesen analóg.

4. §.

E §-ban a (24) relációt fogjuk bizonyítani, mely szerint

$$\sum_{k^2+1 \leqq N} \{U(k^2+1) - \log\log N\}^2 = O(\sqrt{N}\log\log N).$$

Fel fogjuk használni a

$$\sum_{\substack{p_i \leqq N \\ p_i \equiv 1 \bmod 4}} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{2}\log\log N + O(1) \tag{25}$$

relációt. Ebből

$$\Big(\sum_{\substack{p \leqq \sqrt{N} \\ p \equiv 1 \bmod 4}} \frac{1}{p}\Big)^2 < \sum_{\substack{pq \leqq N \\ p \equiv q \equiv 1 \bmod 4}} \frac{1}{pq} < \Big(\sum_{\substack{p \leqq N \\ p \equiv 1 \bmod 4}} \frac{1}{p}\Big)^2$$

miatt

$$\sum_{\substack{pq \leqq N \\ p \equiv q \equiv 1 \bmod 4}} \frac{1}{pq} = \frac{1}{4}(\log\log N)^2 + O(\log\log N). \tag{63}$$

A következőkben p mindig $4k+1$ alakú prímszámot jelentsen; ezt többé nem írjuk ki explicite.

I. segédtétel.

$$F_1(N) = \sum_{N \geqq p > \frac{3}{2}\sqrt{N}} \sum_{\substack{n^2+1 \equiv 0 \bmod p \\ n^2+1 \leqq N}} = O(\sqrt{N}).$$

Ugyanis az összegezés sorrendjét megváltoztatva

$$F_1(N) = \sum_{\substack{n \\ n^2+1 \leqq N}} \sum_{\substack{p/n^2+1 \\ p > \frac{3}{2}\sqrt{N}}} 1.$$

Fix n mellett azonban a belső összeg értéke legfeljebb 1; ugyanis, ha n^2+1-nek két különböző, $\frac{3}{2}\sqrt{N}$-nél nagyobb primfaktora volna, p_1 és p_2, akkor

$$\frac{9}{4} N < p_1 p_2 \leqq n^2 + 1 \leqq N$$

volna, ami lehetetlen. Tehát:

$$F_1(N) < \sum_{n^2+1 \leqq N} 1 = O(\sqrt{N}).$$

II. segédtétel.

$$F_2(N) = \sum_{\substack{N \geqq pq > \frac{3}{2}\sqrt{N} \\ p \neq q}} \sum_{\substack{n \\ n^2+1 \equiv 0 \bmod pq,\ n^2+1 \leqq N}} 1 = O(\sqrt{N} \log \log N).$$

Ugyanis átrendezve

$$F_2(N) = \sum_{\substack{n \\ n^2+1 \leqq N}} \sum_{\substack{pq/n^2+1 \\ p \neq q,\ pq > \frac{3}{2}\sqrt{N}}} 1.$$

Nézzük fix n mellett a belső összeget; legyen $n^2+1 = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$, ahol $p_1 > p_2 > \cdots > p_r$. Ha egyáltalán van két ily osztó, akkor $p_1 p_2$ és $p_1 p_3$ biztosan azok. Tegyük fel, hogy van egy harmadik ily osztó is; ez vagy p_1, vagy p_2, vagy p_3-al osztható. Mert ha nem, akkor $p_4 p_5$ biztosan ilyen osztó; de ekkor

$$\frac{9}{4} N < (p_1 p_2)(p_4 p_5) < n^2 + 1 \leqq N.$$

Ugyanígy jutunk ellentmondáshoz, ha a feltételezett harmadik ily osztó *csak* p_2-vel vagy csak p_3-al volna osztható p_1, p_2 és p_3 közül. Ha pedig ez a harmadik osztó $p_2 p_3$ volna, akkor viszont nem lehetne negyedik ily osztó; ugyanis ekkor $p_1 p_4$ biztosan ilyen volna és

$$\frac{9}{4} N < (p_1 p_4)(p_2 p_3) < n^2 + 1 \leqq N$$

volna, ami lehetetlen. Ha tehát van négy ily osztó, akkor az első három p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4; a negyedik — mint analóg módon kapható — p_1p_5. Ezt az eljárást folytatva kapjuk, hogyha p_l azon legkisebb primfaktora (n^2+1)-nek, melyre még $p_1p_l > \frac{3}{2}\sqrt{N}$, a belső összeg értéke $l\neq 3$-ra épp $(l-1)$;[1] $l=3$-ra pedig 2 vagy 3. De mivel $i \geqq 2$-re $p_1 > p_i$, azért $p_i < \sqrt{N}$; és így $(l-1)$-et nagyobbítjuk, ha helyébe a $\sqrt{N}$-nél kisebb összes primfaktorok számát írjuk.

Tehát

$$F_2(N) < \sum_{n^2+1 \leqq N} (1 + \sum_{\substack{p/n^2+1,\\ p \leqq \sqrt{N}}} 1) = [\sqrt{N-1}] + \sum_{p \leqq \sqrt{N}} \sum_{\substack{n^2+1 \equiv 0 \bmod p\\ n^2+1 \leqq N}} 1.$$

Fix p mellett az $x^2+1 \equiv 0 \bmod p$ kongruencia két inkongruens megoldása legyen μ_1 és μ_2; ekkor a belső összeg

$$\left[\frac{\sqrt{N-1}-\mu_1}{p}\right] + \left[\frac{\sqrt{N-1}-\mu_2}{p}\right] = 2\frac{\sqrt{N}}{p} + O(1), \qquad (64)$$

tehát

$$F_2(N) < 2\sqrt{N} \sum_{p \leqq \sqrt{N}} \frac{1}{p} + [\sqrt{N-1}] = O(\sqrt{N} \log\log N).$$

III. segédtétel.

$$F_3(N) = \sum_{n^2+1 \leqq N} U(n^2+1) = \sqrt{N} \log\log N + O(\sqrt{N}).$$

Ugyanis

$$\sum_{n^2+1 \leqq N} U(n^2+1) = \sum_{n^2+1 \leqq N} \sum_{p/n^2+1} 1 =$$

$$= \sum_{\substack{p\\ p \leqq \frac{3}{2}\sqrt{N}}} \sum_{\substack{n\\ n^2+1 \equiv 0 \bmod p\\ n^2+1 \leqq N}} 1 + \sum_{\substack{p\\ N \geqq p > \frac{3}{2}\sqrt{N}}} \sum_{\substack{n\\ n^2+1 \equiv 0 \bmod p\\ n^2+1 \leqq N}} 1$$

---

[1] T. i. ekkor az összes ily osztók: p_1p_2, $p_1p_3, \ldots, p_1p_i, \ldots, p_1p_l$.

A második összeg az I. segédtétel miatt $O(\sqrt{N})$; az első pedig (64) gondolatmenetével

$$\sum_{p\leq\frac{3}{2}\sqrt{N}}\left\{2\frac{\sqrt{N}}{p}+O(1)\right\}=\sqrt{N}\log\log N+O(\sqrt{N}).$$

IV. segédtétel.

$$F_4(N)=\sum_{k^2+1\leq N}U(k^2+1)^2=\sqrt{N}(\log\log N)^2+O(\sqrt{N}\log\log N).$$

Ugyanis nyilván

$$F_4(N)=\sum_{n^2+1\leq N}\ \sum_{p/n^2+1}\ \sum_{q/n^2+1}1.$$

Az utolsó kettős összeget vágjuk két részre a szerint, hogy $p\neq q$, ill. $=q$. Ekkor tekintve a III. segédtételt

$$F_4(N)=\sum_{n^2+1\leq N}\ \sum_{\substack{pq/n^2+1\\ p\neq q}}1+\sum_{n^2+1\leq N}\ \sum_{p/n^2+1}1=$$

$$=\sum_{pq\leq N,\ p\neq q}\ \sum_{\substack{n\\ n^2+1\equiv 0 \bmod pq,\ n^2+1\leq N}}1+O(\sqrt{N}\log\log N).$$

Továbbá

$$F_4(N)=\sum_{\substack{pq\leq\frac{3}{2}\sqrt{N}\\ p\neq q}}\ \sum_{\substack{n\\ n^2+1\equiv 0 \bmod pq\\ n^2+1\leq N}}1+\sum_{\substack{N\geq pq>\frac{3}{2}\sqrt{N}\\ p\neq q}}1\ \sum_{\substack{n\\ n^2+1\equiv 0 \bmod pq\\ n^2+1\leq N}}1+O(\sqrt{N}\log\log N).$$

A második összeg a II. segédtétel miatt $O(\sqrt{N}\log\log N)$; az első pedig, (64)-el analog gondolatmenettel tekintve (63)-at:

$$\sum_{\substack{pq\leq\frac{3}{2}\sqrt{N}\\ p\neq q}}\left\{4\frac{\sqrt{N}}{pq}+O(1)\right\}=\sqrt{N}(\log\log N)^2+O(\sqrt{N}\log\log N).$$

III. és IV. segédtételekkel a (24) reláció nyilván be van bizonyítva.

Turán Pál.

ÜBER DIE ANZAHL DER PRIMFAKTOREN DER GANZEN ZAHLEN.

Von den Herren HARDY und RAMANUJAN stammt der folgende Satz:[1] Es sei $\Phi(x)$ eine positive Funktion der reellen Variablen x, wovon wir nur die Bedingung $\lim \Phi(x) = +\infty$ fordern. $U(n)$ bedeute die Anzahl der *verschiedenen* und $V(n)$ die Anzahl *aller* Primfaktoren von n. Dann besagt der angeführte Satz, dass die Anzahl derjenigen Zahlen n bis N, für welche wenigstens eine der Ungleichungen

$$U(n) > \log\log N + \Phi(N)\sqrt{\log\log N},$$
$$U(n) < \log\log N - \Phi(N)\sqrt{\log\log N}$$

gilt, durch N dividiert zu 0 strebt. Analog steht die Sache für die Funktion $V(n)$. In dieser Abhandlung gebe ich für diesen, in der elementaren asymptotischen Zahlentheorie wichtigen Satz zwei Beweise; einen sehr kurzen, elementaren Beweis, welcher sich auf die leicht beweisbare Relation

$$\sum_{n=1}^{N-} (U(n) - \log\log N)^2 = O(N \log\log N)$$

stützt, und einen einfachen, analytischen Beweis. Ferner verallgemeinere ich diesen Satz nach zwei Richtungen; die erste bezieht sich auf die durch eine Formel von der Gestalt $\psi(n) = \sum_{p_i/n} \psi(p_i)$ definierten[2] zahlentheoretischen Funktionen und besagt Folgendes: wenn wir von den willkürlich wählbaren Werten $\psi(p_i)$ nur vorassetzen, dass 1) sie positiv sind, 2) für $p_i \to \infty$ unter einer Schranke bleiben und 3)

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{p_i \leqq N} \frac{\psi(p_i)}{p_i} = +\infty$$

ist, dann strebt die Anzahl derjenigen Zahlen n bis N, für welche wenigstens eine der Ungleichungen

$$\psi(n) > (1+\varepsilon) \sum_{p_i \leqq N} \frac{\psi(p_i)}{p_i},$$
$$\psi(n) < (1-\varepsilon) \sum_{p_i \leqq N} \frac{\psi(p_i)}{p_i}$$

[1] HARDY and RAMANUJAN: The normal number..., Quart. Journ., 1917.

[2] Es ist gleichgültig, ob wir unter den Summationszeichen alle oder nur die verschiedene Primfaktoren von n nehmen.

gilt, durch N dividiert zu 0. Wenn $\psi(p_i)\equiv 1$ ist, so geht dieser Satz in den HARDY-RAMANUJANschen über. Die zweite Verallgemeinerung bezieht sich auf ganzzahlige Polynome und lautet, wie folgt: Es sei $f(x)$ vom Grade n und die Anzahl ihrer *verschiedenen* irreduziblen Faktoren sei k; dann strebt die Anzahl derjenigen Zahlen der Form $f(n)$ unter N, für welche wenigstens eine der Ungleichungen

$$U\big(f(n)\big) > (1+\varepsilon)\, k \log\log N,$$
$$U\big(f(n)\big) < (1-\varepsilon)\, k \log\log N$$

erfüllt ist, durch $\sqrt[n]{N}$ dividiert zu 0. Der Beweis des letzteren beruht auf der Relation

$$\sum_{f(n)\leqq N} [U\big(f(n)\big) - k \log\log N]^2 = O\,(\sqrt[n]{N} \log\log N). \tag{1}$$

Ich benütze hiezu folgende Bemerkung von RADEMACHER: wenn ν_p die Anzahl der inkongruenten Lösungen der Kongruenz $f(x)\equiv 0 \bmod p$ bedeutet, so ist bei irreduziblen $f(x)$

$$\sum_{p\leqq N} \frac{\nu_p}{p} = \log\log N + O(1). \tag{2}$$

Im Spezialfalle $f(x)\equiv x^2+1$ ist diese Relation (2) elementar und die entsprechende Relation (1) ist also *elementar* bewiesen. Hieraus gewinnen wir — also ebenfalls elementar — dass

$$\sum_{\substack{k^2+1\leqq N \\ k^2+1 = \text{prim}}} 1 = O\left(\frac{\sqrt{N}}{\log\log N}\right).$$

Dasselbe gilt für die Funktion $V(n)$.

Ich beweise ferner mittels des Satzes von HARDY-RAMANUJAN eine interessante Relation des Herren P. ERDŐS, nämlich die folgende:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{U(n)}{V(n)} = N + o(N).$$

Paul Turán.

VÉKONY ALKÁLIFÉM-RÉTEGEK FÉNYELEKTROMOS VIZSGÁLATA.

(Összetett katódok.)

I. A mérési berendezés és a vizsgálatok menete.

1. §. A vizsgálatok célja.

A fényelektromos effektusra vonatkozó vizsgálatok kétségtelenné teszik, hogy szelektív fotoelektromos viselkedést oly, igen vékony alkálifém-rétegek mutatnak, melyek elektronegativabb alátétfémen helyezkednek el. A régebbi vizsgálatok szerint szelektív effektus akkor várható, ha az alkáliréteg és az alapfém között úgynevezett közbenső réteg található, mely az alkáliával reagáló anyagból (oxigén, hidrogén, naftalin) áll. Ives[1] újabb vizsgálatai ezzel szemben arra utalnak, hogy tiszta alátétfémen lévő alkálirétegek is mutathatnak szelektív fényelektromos effektust.

Vizsgálataimban célul tűztem ki az *M*—*A* tipusú (*M* alátét, *A* alkáli fém) két tiszta fémből összetett gázmentes fotokatód fényelektromos viselkedésének a 300 $\mu\mu$-től 800 $\mu\mu$-ig terjedő hullámtartományban való meghatározását. Vizsgálataimat kiterjesztettem egyrészt a rétegvastagság és a fényelektromos hasznosság fokának «*A*»-nak, másrészt a rétegvastagság és a fényelektromos küszöb összefüggésének megállapítására. Az összefüggés abban áll, hogy a hasznosság foka, — tehát az 1 cal. energiával beeső monokromatikus fénysugár által kiváltott elektromos töltés Coul.-ban vett számértéke — egyazon hullámhosszúságnál is maximális lesz bizonyos rétegvastagságnál, másrészt a hasznosság spektrális eloszlását ábrázoló görbe bizonyos

---

[1] H. Ives—H. B. Briggs: Phys. Rev. 1931. 38. 1477. old.

rétegvastagságnál maximumot mutat. Tehát ekkor szelektiv fotoelektromos effektus áll elő. Az alkálifém-réteg vastagságának változásával jár együtt a fényelektromos küszöb vándorlása is.[1] Az emlitett érzékenységgörbék tanulmányozása lehetővé teszi a küszöb és a hasznosság foka közötti összefüggés megfigyelését is. A mutatkozó szelektiv viselkedés értelmezéséhez szükséges volt a rétegvastagság változtatásán kivül úgy az alap, mint az alkálifém változtatása is. Alátétfémként wolframot, nikkelt, molibdent és thoriumos wolframot használtam. A jelenségek tiszta megfigyelését célozta ezenkivül a cellába elektrolitikus úton bevitt alkálifémek használata is. (*Na* és *K*).

Az alátétanyag szerepének felderitését a szigetelő (üveg) alátéten lévő alkáli rétegek vizsgálata segitette elő. (Lásd: II. fej. 2. §.) A fényelektromos mérésekből kapott küszöb értékének ellenőrzéséül az egyes rétegvastagságok esetében a vele összefüggő kilépési munkát « V_0» közvetlenül is meghatároztam, kontaktpotenciál mérés segélyével. A két úton kapott érték összehasonlitása egyben a katód gáztartalmára enged következtetni, ugyanis, ha a katód abszorbeált gázréteget is tartalmaz, úgy a kilépési munka, V_0 és a hosszúhullámú határ, λ_0 nem az

$$eV_0 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

egyenlet értelmében függ össze.

A két érték kapott egyezése bizonyitotta a katód gázmentességét.

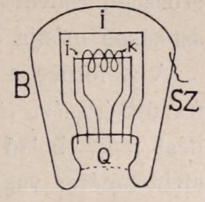
A jelenségcsoport magyarázatát elméleti úton próbálom megadni a katód úgynevezett áteresztési együtthatójának kiszámitásával. (Lásd: III. fej. 2. §.)

2. §. A fotocellául szolgáló vákuumcső.

A vákuumcső üvegbúrájába, mely ólommentes nátronüvegből (Moosbrunn) készült, 4 elektróda található: izzószál *I*, tiszta

[1] J. Brady: Phys. Rev. 1932. 41. 613. old.

wolframból (22 μ vastag, 25 mm hosszú) kontakt-potenciálméréshez, ezt koncentrikusan körülvevő spirális fotókatód (*K*), a megnevezett fémekből (*Mo, W, Ni* és thoriumos-wolfram 0·3 mm átmérővel), valamint a segéd izzószál *I'* thoriumos wolframból, az alkálifém beelektrolizálásához (1. ábra).



1. ábra.

Az izzítható spirális a tulajdonképeni fotokatód «*K*.» Az üvegfalon előállitott alkálifémrétegekkel az «*Sz*» szonda létesit érintkezést.

A csövek evakuálását nagy gonddal a következő módon végeztem: Egyszerre négy darab egyenlő felépitésű csövet evakuáltam a diffuziós sugárlégszivón. A szivás körülbelül 10—12 óra hosszszat tartott, eközben az üvegbúra hőmérséklete 450 C° volt. A búra melegitését kétóránként körülbelül 10—10 percig szüneteltettem, miközben az elektródákat körülbelül 3000 C°-ra hevitettem. E periodikus hőkezelés (légzés) nagymértékben elősegitette az üvegfalon és az elektródákon abszorbeált gázok eltávozását. Szivás befejeztekor a búrában 10^{-6} mm H_g-nyomás uralkodott (Mac-Leod-dal mérve). A csövekbe ezután az alkálifémeket elektrolizis segitségével juttattam be.[1] Az elektródák eközbeni izzitásával a még felszabaduló gázok kémiailag kötődnek az alkálifémmel és annak nagy részével együtt a lapitott részen kondenzálódnak (*Q*). Ezen eljárás többszöri ismétlésével igen tiszta fémfelületek és magas vákuum (10^{-8} mm H_g, ionizációs manométerrel mérve) — nyerhető. Kellemetlen mellékkörülmény, hogy az alkálifém feleslege a lapitott részből ólmot csap ki és az kismértékben vezető lesz. A kisérletekhez szükséges méretű nátronüveg quettsch előállitása nem sikerült, ezért kellett a szokásos ólomüveg quettsch-et használni.

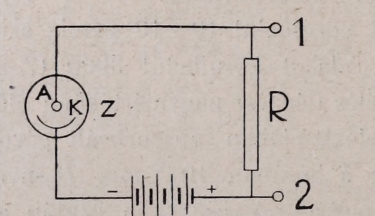
[1] MÁRTON L.—ROSTÁS E.: ZS. f. techn. Phys. 1929. 10. 52. old.

3. §. Az erősítő berendezés. (Csővoltmérő.)

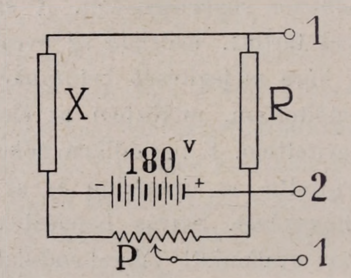
A lapitott rész említett, aránylag nagy vezetőképessége $\left(10^{-9}\frac{1}{\Omega}\right)$ a fényelektromos áramot schunt-öli, ezért annak mérésére nagy erősségű csővoltmétert szerkesztettem. A fotoáram mérésének szokásos módja a következő:[1]

A Z fotocella fényelektromos árama az R nagyellenálláson feszültségesést létesít, melyet 1. és 2. pontok között R-hez képest nagy belső ellenállású voltmérővel mérhetünk. Ez lehet elektrométer vagy csővoltmérő.

Ha a cella szigetelése A és K pontok között végtelen nagy, úgy a megvilágitáskor keletkező potenciálkülönbség 1. és 2. pon-



2. ábra.



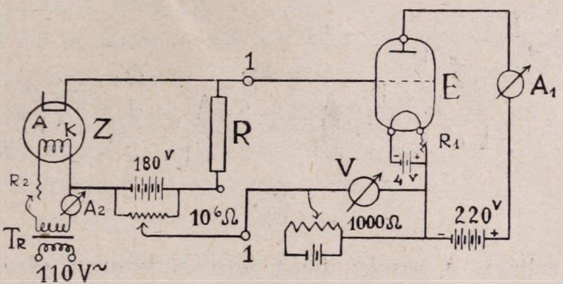
3. ábra.

tok között pontosan arányos a fény erősségével és a cella úgynevezett sötétárama zérus. Esetünkben a sötétáram nem zérus a lapitott rész vezetése miatt, melynek értéke körülbelül 10^9 Ohm. E sötét áram elektroncsöves voltmérő használata esetén, mint nemkivánatos munkapont eltoló előfeszültség jelentkezik. Ezt a 3. ábra szerinti kompenzációs kapcsolással sikerült ártalmatlanná tennem.

A telepre kapcsolt X cellaellenállás és R nagyellenállás, melynek értéke 5.10^8 Ohm volt, mint feszültségelosztó szerepel. A parallel kapcsolt P feszültségosztón ($10^6\ \Omega$), az 1. pontnak megfelelő potenciál szintén feltalálható, úgy, hogy az 1. és 1'.

[1] Simon—Suhrmann: Lichtelektrischen Zellen, 1932. 159. old.

pontok között mindaddig nem lesz potenciálkülönbség, míg csak X cellaellenállás értékét a megvilágítás meg nem változtatja. Ezen ellenállásváltozás által az R mentén előálló feszültségesés változása a fény erősségével szintén arányos, de a sötétáram állandóan zérus értékű. A használt fényelektromos feszültségmérő-berendezés vázlata a 4. ábrában látható.



4. ábra.

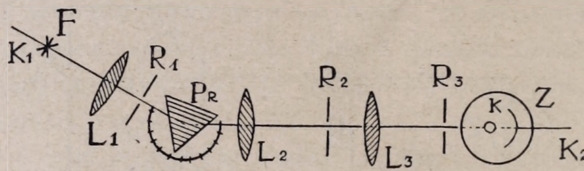
A berendezés működése a következő:

A cella megvilágításakor az E elektroncső rácsa negatív töltést kap, anódárama csökken. A használandó fényerősséget az szabja meg, hogy az anódáramváltozásnak a csőkarakterisztika egyenes részén kell mozognia. Méréseim szerint ez 0·8 mA. volt, mely 3 Volt fotofeszültséget, illetőleg 60.10^{-10} A fotoáramot jelent. A csővoltméter erősítési tényezője $1{\cdot}5.10^{5}$. Ily módon 2.10^{-11} A nagyságú áram mérhető, 5.10^{-12} A még becsülhető volt.

4. §. A megvilágító berendezés. (Monokromátor.)

Monokromatikus fény előállítása Pohl-féle monokromátor segélyével történt. A berendezés vázlata az 5. ábrában látható. Működése a következő: Az F fényforrás fényét az L_1 kondenzor-lencse az R_1 résre (0·5 mm) gyűjti, a P prizma által felbontott fényt — az R_1 rés színképét — L_2 lencse az R_2 résre képezi le. Az R_2 rés által kiválasztott monokromatikus fénysugarakat L_3 lencse gyűjti a Z fotocella katódjára (R_2=0·2 mm)

R_3 a megvilágító zár. A prizma megfelelő áttétel segélyével, a karok állásától függetlenül mindig minimális deviációban állítja elő az R_2 résen a fénysugarakat. Fényforrásul LEITZ gyártmányú 6 A-es szénívlámpa szolgált, melynek áramát a lehetőségig konstáns értéken tartottam. A monokromátor optikája kvarz. A különböző hullámhosszú sugarak a K_1 kar elforgatásával juttat-



5. ábra.

hatók a cellára. A karok állása körosztályzaton olvasható le, melynek egyes osztáspontjaihoz tartozó hullámhosszakat ZEISS-spektrométerrel határoztam meg.

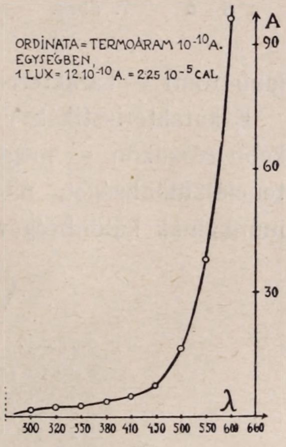
I. Táblázat.

$K°$	49	50	50·5	51	52	53	54	55	55·5	56	57	57·5	58
$\lambda_{\mu\mu}$	680	640	610	585	550	500	455	410	390	375	340	310	300

Az egyes hullámhosszakhoz tartozó fényerősséget termoelemmel állapítottam meg (ZEISS 7606. sz.) kapcsolatban a HARTMANN—BRAUN-féle tükrös galvanométerrel (Type 155. B. — 2492. sz.). A berendezés 1 LUX fényerősségre $1{\cdot}2.10^{-11}$ A áramot jelzett (6. ábra).

Látható, hogy a hosszabb hullámok felé nő az intenzitás, mely körülmény a fényelektromos küszöb pontosabb meghatározását segítette elő.

A fényelektromos feszültséget mérő berendezés amúgy is elég komplikált volta nem tette lehetővé külön fényerősségmérő fotocella alkalmazását. A fényerősség esetleges ingadozásait a következő úton ellenőriztem: Mindenekelőtt gondoskodtam arról, hogy a fényforrásul szolgáló ívlámpa izzítóárama konstans értékű legyen. Jóminőségű szén (C. CONRADTY: Nürnberg Kinomarke noris «*HS*» Germany) alkalmazásával elértem, hogy a fényerősség 6—8 percig nem változott, amiről a leírt fényerősségmérővel győződtem meg. Ilyenfajta — nagyszámú — mérés eredményeinek középértékeként adódik a 6. ábra görbéje. Már a görbe szabályos menete, de főként a fotoemissziós méréseknél nagy szerepet játszó 300 $\mu\mu$-tól 450 $\mu\mu$-ig terjedő rész lineáris volta kizárttá teszik, hogy a jelentkező és a II. fejezetben leírt szelektív fényelektromos viselkedés (maximumok és minimumok az érzékenység-görbékben), a megvilágító berendezés fényerősség eloszlásával legyen magyarázható. A fényerősség esetleges ingadozásait oly módon ellenőriztem, hogy a spirális katódon mutatkozó fotoeffektust összehasonlítottam az üvegbúra belső oldalán levő kompakt alkáliréteg fotoeffektusával. (Ehhez csak az 1. ábrában látható, a kompakt réteggel érintkező «*Sz*» szondát kellett katódként kapcsolni, mikor is az eredeti fotokatód, mint anód szerepelt.)



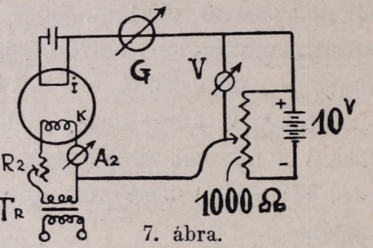
6. ábra.

Hasonló, de nem egyidejű összehasonlítás eszközölhető magán a spirálison keletkező kompakt alkáli fémrétegek fotoemissziójával is, minthogy ennek érzékenységgörbéje éppen úgy normális menetű, mint az előbbi, üvegen lévő kompakt alkalirétegeké. A kompakt réteg tehát, mint látható, helyettesíti az ellenőrző fotocellát.

A végzett fotoemissziós mérések igen nagy száma csökkenti a fényerősség változásaiból eredhető hiba súlyát.

5. §. A kontakt-potenciál változásának mérése.

A fényelektromos küszöb kapott értékeinek ellenőrzését a fotokatód különböző állapotaihoz tartozó kilépési munka közvetlen mérésével eszközöltem. E célból mérendő volt a külön-

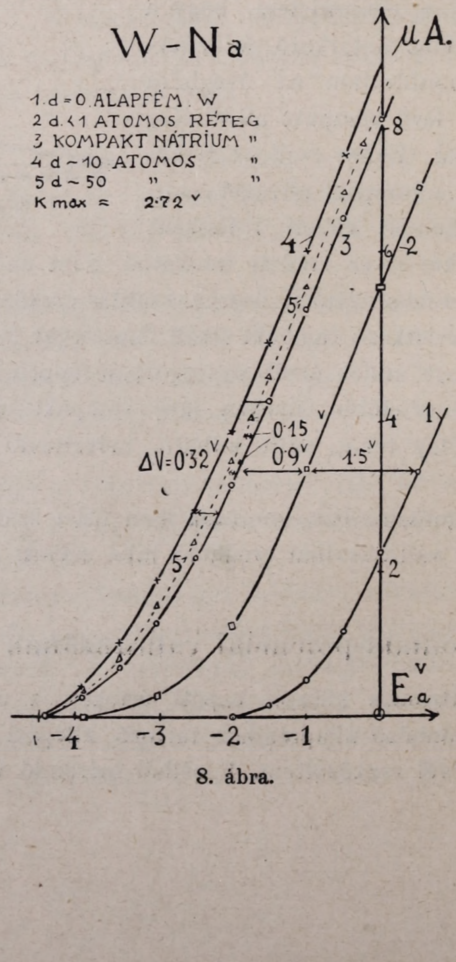


7. ábra.

böző állapotú fotokatódnak egy állandó elektródával szemben mutatkozó kontakt-potenciálja (7. ábra — Langmuir).

Ezen berendezés segélyével az anód, tehát a vizsgálandó fotokatód különböző állapotaihoz tartozó lendületi-áram — (Anlaufstrom) — karakterisztikák nyerhetők. (8. és 9. ábra.)

E karakterisztikák Voltokban mért távolsága — legmeredekebb részükön — megadja az elektródák közötti kontakt potenciálkülönbséget, mely mint ismeretes, a két fém kilépési munkáinak különbségével egyenlő.

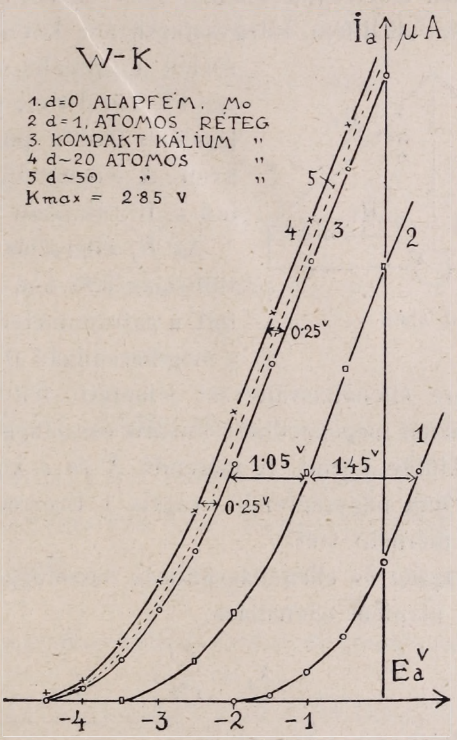


8. ábra.

Tiszta fémekre az egyenlet:[1]

$$K = V_{01} - V_{02},$$

ahol V_{01} az izzószál, V_{02} az alkálifém kilépési munkája.



9. ábra.

Az izzószál állapota változatlan, így K megváltozása egyenlő az alkálifém kilépési munkájának megváltozásával, azaz

$$\Delta K = \Delta V_{02}.$$

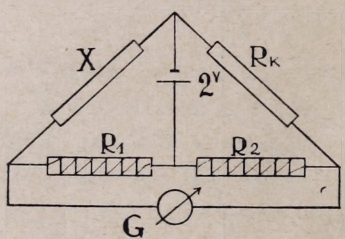
E mérések 0·01 Volt-ig pontosak.

---

[1] O. W. Richardson: Hb. der Radiologie. IV. 41. old.

6. §. A rétegvastagság megállapítása.

A cella üvegbúráját körülbelül 200 C°-ig felmelegítve, az alkálifém a fotokatódra űzhető, ahol az a spirális keresztmetszetét növelve, annak elektromos ellenállását csökkenti. Az ellenállásváltozásból az alkálifém rétegvastagságára következtettem. Az észlelt maximális ellenállásváltozás 1% körül volt, a mérés tehát legalább 0·01% pontosságot igényelt. A felhasznált WEATHSTONE-híd a 10. ábrában látható.



10. ábra.

Az R_1 ellenállás 1%-os megváltozása 330 mm kiütést létesített a galvanométeren, úgy, hogy a még becsülhető 0·25 mm kiütés százezred rész ellenállásváltozást jelentett, feltételezve az ily kis változásoknál megengedhető lineáris összefüggést, ellenállásváltozás és kiütés között. A mérendő X és a kompenzáló R_k ellenállás 1 Ohm nagyságrendű, vagyis 1 tízezred Ohm változás még jól mérhető volt.

Rétegvastagság és ellenállásváltozás összefüggése:

A spirális alapfém ellenállása,

$$X_1 = \frac{\beta_1 l}{r^2 \pi},$$

ahol l a dróthossz méterekben,

r a drótsugár mm-ben,

β_1 az alapfém fajlagos ellenállása.

d mm-vastagságú alkálifém-réteg ellenállása,

$$X_2 = \frac{\beta_2 l}{2 r \pi . d},$$

ahol β_2 az alkálifém fajlagos ellenállása, melyről feltételezem, hogy 1 $\mu\mu$ vastagságig még nem változik erősen.

E két parallel kapcsolt ellenállás eredője:

$$X = \frac{X_1 X_2}{X_1 + X_2}$$

és így az ellenállás megváltozása

$$\Delta X = X_1 - X = X_1\left(1 - \frac{X_2}{X_1 + X_2}\right) = X_1 \frac{X_1}{X_1 + X_2}.$$

Mivel β_1 és β_2 nagyságrendben egyenlő, azért

$$X_1 \frac{X_1}{X_1 + X_2} = X_1 \frac{\beta_1 \frac{l}{r^2 \pi}}{\beta_1 \frac{l}{r^2 \pi} + \beta_2 \frac{l}{2 r \pi . d}} = X_1 \frac{2d}{2d + r}.$$

Minthogy $2r = 0{\cdot}3$ mm és d kisebb, mint 1 mikron, ezért

$$\Delta X = \frac{2d}{r} X_1.$$

Méréseim szerint $X_1 = 0{\cdot}795$ Ohm.

E számításokból 1 $\mu\mu$ rétegvastagságnak $\frac{2.10^{-6}}{0.15} = 10^5$-ed rész ellenállásváltozás felel meg. Méréseim szerint a kiütés ekkor 0·25 mm, tehát

$$d = 4y,$$

ahol y a galvanométer kiütése és d a rétegvastagság milimikronokban.

Az alkáli atomok átmérője[1] 2.10^{-8} cm ill. 4.10^{-8} cm, így a rétegvastagság atomokban

$$d = 20y, \quad \text{illetőleg} \quad = 10y.$$

1 mm galvanométer kiütésnek tehát 10—20 atomvastagságváltozás felel meg. A II. fejezetben megadott rétegvastagságokat ezen számítás alapján határoztam meg.

A termoáramok által okozott hibát az áramirány megfordításával kapható második méréssel küszöböltem ki.

---

[1] Hb. der Phys. XIII. 2. 253. o.

E mérések természetesen csak tájékoztató jellegűek, pontosságuk nem haladja meg az 50%-ot. A réteg feltételezett egyenletessége és a fajlagos ellenállás állandósága meglehetősen kétséges.

II. Mérési eredmények.

1. §. Vizsgálatok *M—A* összetételű kathódon.

a) W—Na összetételű fotokatód. (11. ábra.)

Az üvegbúra melegítésével a fotokatódra nátrium űzhető, melynek vastagsága meghaladja az 1 μ-t. (Ellenállásmérésből számítva.)

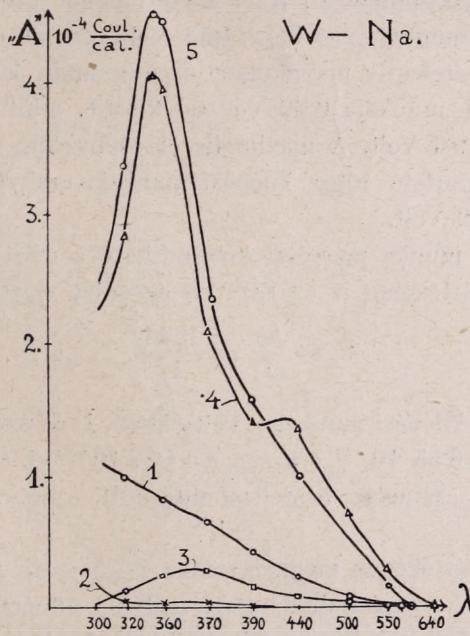
A fényelektromos érzékenység görbéje (11. ábrában 1-gyel jelölve) normális menetű, azaz növekvő fényfrekvenciával növekvő fotoáramot mutat. A hosszúhullám határ $\lambda_0 = 550$ $\mu\mu$-nál észlelhető. A hasznosság foka, «A» $= 10^{-4}$ Coul/cal,, mely érték a kísérleteimben maximálisan elérhetőnek körülbelül fele. (A megadott «A» értékek 350 $\mu\mu$-nál értendők.)

A fotokatódot kb. 3000 C°-ra hevítve, tiszta wolframfelület áll elő, mely a használt hullámtartományban fényelektromos érzékenységet nem mutat. Ez szintén a katód gázmentességét bizonyítja, ugyanis már kevés gázszennyezés is 350 $\mu\mu$-ig hozza előre a wolframnak eredetileg 275 $\mu\mu$-nál lévő fényelektromos küszöbét.

A fotokatód leizzítása után körülbelül félóra mulva a nátrium visszapárolgása folytán már ismét fényérzékeny a katód, az érzékenység-görbe (11. ábra, 2. sz.) menete most is normális, $\lambda_0 = 400$ $\mu\mu$, «A» $= 10^{-5}$ Coul/cal. További 2—3 órai pihenés után (szobahőmérsékleten) a görbe 350 $\mu\mu$-nál igen gyenge szelektív maximumot mutat, $\lambda_0 = 500$ $\mu\mu$ «A» $= 2.10^{-5}$ Coul/cal. (3. sz. görbe.)

A görbe menete körülbelül 14 óra mulva a leizzítás után érdekes változásokat mutat: 350 $\mu\mu$ hullámhossznál éles szelektív maximuma, 400 $\mu\mu$-nál minimuma és 410 $\mu\mu$-nál második, igen kis maximuma van. A küszöb értéke ekkor az elérhető legkisebb, $\lambda_0 = 640$ $\mu\mu$. «A» értéke közel maximális, 4.10^{-4} Coul/cal. (11. ábra, 4. sz. görbe).

A rétegvastagság ekkor 10—20 atomosnak becsülhető. A katód állapotában ezután hosszú idő alatt sem történik lényegesebb változás, kissé érzéketlenebb lesz. — A katódon lévő nátrium vastagsága az üvegbura adagolt, kismértékű melegítésével foko-



11. ábra.

zatosan növelhető. Eközben a szelektív maximumok fokozatosan eltűnnek, előbb a kisebb, majd körülbelül 50 atomos réteg esetében már csak a főmaximum észlelhető, mikor is «A» értéke eléri maximumát, 5.10^{-4} Coul/cal. és a küszöb 590 $\mu\mu$ hullámhosszig húzódik vissza (5. sz. görbe).

100 atomot meghaladó vastagságoknál szelektivitás már biztosan nincs, a réteg mindinkább láthatóvá lesz és a kompaktréteg tulajdonságait mutatja (11. ábra 1. sz. görbe).

A jelenségsorozat fordított értelemben is előállítható. Ugyanis a kompakt-réteg a spirális fokozatos hevítésével mind vékonyabbá tehető, miközben a jelzett rétegvastagságoknál a jellemzett viselkedés észlelhető.

A párhuzamosan történő kontakt-potenciál mérések (I. fejezet, 5. §) a kompakt-réteg kilépési munkáját 2·15 V.-ban állapítják meg, ugyanis a 8. ábra görbéje szerint wolfram és nátrium között a kontakt-potenciál, $K=2{\cdot}4$ Volt, ebből levonva a wolfram kilépési munkáját, $-V_{01}=4{\cdot}55$ Volt, kapjuk a jelzett értéket. A két szelektív maximumot és minimális küszöböt adó réteg kilépési munkája 0·32 Volt-tal kisebb, mint a kompaktrétegé. $V_0=1{\cdot}83$ Volt. A maximális érzékenységű, de csak egy maximumot mutató réteg kilépési munkája csak 0·15 Volt-tal kisebb, azaz 2 Volt.

A kilépési munka másrészt kiszámítható a mért fényelektromos küszöb értékéből is az Einstein-egyenlet segélyével,

$$V_0=\frac{hc}{e\lambda_0}=\frac{1236}{\lambda_0},$$

ahol V_0 a *Na* kilépési munkája, Volt-okban, λ_0 az észlelt küszöb, $\mu\mu$-okban, $h=6{\cdot}55\ 10^{-27}$ erg sec, $e=4{\cdot}77\ 10^{-10}$ el. sztat. egység. A mérés és számolás összehasonlítása II. számú táblázatban látható.

A küszöb értékének meghatározása 2—5 $\mu\mu$-ra pontos. Természetesen λ_0 az a hullámhossz, melynél fotoáram már nem észlelhető. Mérőberendezésemnél ez 10^{-11} A-nél kisebb áramot jelentett.

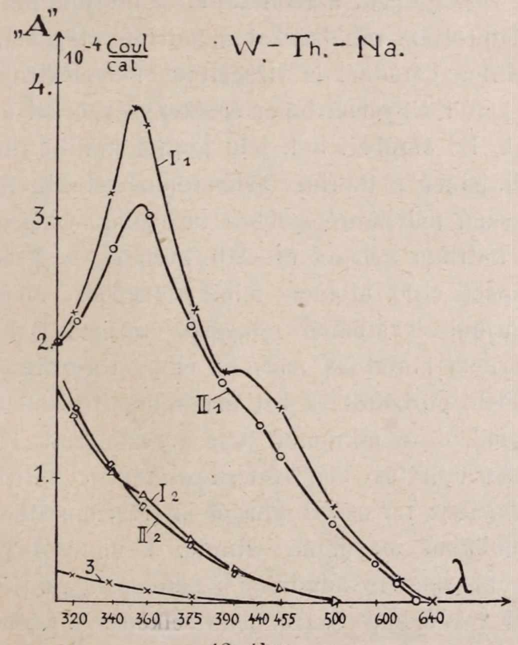
II. táblázat **W—Na katód**

d Réteg-vastagság	K Kontakt-potenciál	$\Delta K=\Delta V_0$	λ_0 számítva	$\Delta\lambda_0$	λ_0 mérve	$\Delta\lambda_0$	Jegyzet
$d>2{\cdot}50\ \mu\mu$	$2{\cdot}15^V$		580 $\mu\mu$		555 $\mu\mu$		Kompakt-réteg
		$0{\cdot}15^V$		38$\mu\mu$		35 $\mu\mu$	
$d\sim 10\ \mu\mu$	$2{\cdot}00^V$		618 $\mu\mu$		590 $\mu\mu$		50 atomos-réteg
		$0{\cdot}18^V$		48$\mu\mu$		50 $\mu\mu$	
$d\sim 4\ \mu\mu$	$1{\cdot}82^V$		666 $\mu\mu$		640 $\mu\mu$		20 atomos-réteg

A küszöb mért és számitott értékei 25—30 $\mu\mu$-re egyezőek. A küszöbeltolódás ($\Delta\lambda_0$) mért és számitott értékeinek egyezése nagy pontosságú. E körülmény szintén a katód gázmentességét bizonyitja.[1]

b) W—Th—Na **katód. (12. ábra.)**

Azon kérdés eldöntésére, hogy a leirt szelektivitás függ-e az alátétfémtől, a wolframot molibdénnel, platinával, majd nikkellel cseréltem fel. A helyettesítés biztosan felismerhető vál-



12. ábra.

tozást nem okozott, ami e fémek kilépési munkájának közel egyező voltára vezethető vissza.

A cél elérésére oly alapfémet kerestem, melynek kilépési munkája erősebben különbözik ezekétől. Ezért katód gyanánt

---

[1] Boer—Teves, Zs. f. Phys. 1933. 83, 7—8. füzet, 1. old.

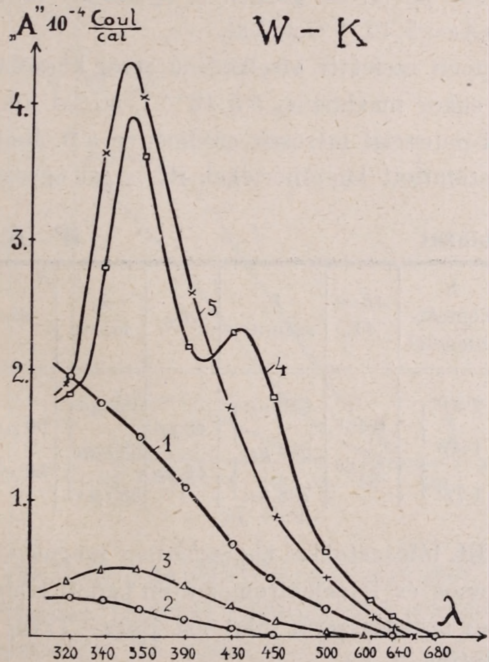
thoriumos wolfram-spirálist alkalmaztam. Ennek használata azon előnnyel járt, hogy a katód aktiválásával, illetőleg deaktiválásával tiszta thórium, illetőleg tiszta wolfram felületet állíthattam elő. Ezen eljárás ismétlésével ellenőrző méréseket egymás után végezhettem. A fényelektromos mérések menete e katódon a következő volt: A *W—Th* katódspirálist kb. 3000 C°-ra hevítve, deaktiválódik, azaz felülete tiszta wolframmá lesz. Ekkor a fényelektromos görbék menete teljesen azonos a 11. ábrán láthatókkal. Ezután a thoriumréteget ismert eljárással mind nagyobb és nagyobb vastagsággal aktiváltam ki. A thórium minden egyes rétegén előállítottam mindazokat a nátriumrétegeket, melyeket a tiszta wolfram katódnál is vizsgáltam fényelektromos szempontból. E katód fényelektromos érzékenységgörbéi a 12. ábrában láthatók. Ez ábrában a I. jelű görbék mind a thorium egyatomos, a II. jelűek a thorium többatomos rétegén levő, különböző vastagságú nátriumrétegekhez tartoznak, és pedig az 1-es indexüek a nátrium néhány (2—20) atomos, a 2-es indexüek annak kompakt (100 atomon felül) rétegéhez. Megfigyelhető, hogy a thorium egyatomos rétegéhez tartozó, tehát I. jelű görbék még nem mutatnak nagyobb eltérést a wolfram-nátrium katód megfelelő görbéitől; a két maximum itt is fellép azonos hullámhossznál, de a minimum nem oly kifejezett. Többatomos közbenső thoriumréteg kiaktiválása esetén a nátrium 2—20 atomvastagságához tartozó II. görbék eltérést mutatnak, ugyanis a hosszabbhullámú maximum eltűnik. E mérések valószínűvé teszik, hogy az alapfém minősége is befolyásolja a tiszta fémekből összetett katód fényelektromos viselkedését. Szelektív effektus létrejöttéhez azonban valamilyen alátétfém jelenléte okvetlenül szükséges, mint arról a 2. §-ban leírt kísérletekből meggyőződtem.

Jegyzet: A thoriumréteg vastagságát a *W—Th* spirális termóemissziójának mérésével állapitottam meg. Ugyanis egyatomos thoriumréteg kiaktiválódásakor a telítési áram maximális, egynél többatomos thoriumréteg kiaktiválásakor a telítési áram éppen úgy kisebb, mint nem teljesen fedő egyatomos thoriumréteg esetén.[1] Kompakt thoriumréteg kiaktiválása, sajnos, nem sikerült.

A thoriumréteg maga is fényérzékeny a használt hullámtartományban, $\lambda_{min} = 440\ \mu\mu$, ebből $V_{th} = 2{\cdot}8$ Volt (5. sz. görbe).

c) *W—K* **katód.** (13. ábra.)

Az alkálifém szerepének tisztázása céljából a vizsgálatokat káliumrétegekre is kiterjesztettem (13. ábra).



13. ábra.

Kompakt (sárgás) káliumréteg ($d > 250\ \mu\mu$) fényelektromos érzékenysége itt is normális, $\lambda_0 = 580\ \mu\mu$ «A» $= 2.10^{-5}$ Coul/cal., mely érték szintén a kísérleteimben maximálisan elérhetőnek kb. a fele (1. sz. görbe). Leizzítás után itt már percek alatt

[1] Hb. der Exp. Phys. XIII. 2. kötet. Wolfram—Thorium problem c. alatt.

fényérzékeny lesz a katód, mert a kálium gőztenziója egyazon hőmérsékleten nagyobb, mint a nátriumé. Ekkor $\lambda_0 = 450$ $\mu\mu$. «A» $= 5.10^{-5}$ Coul/cal., 350 $\mu\mu$ hullámhossznál (2. sz. görbe). További egy óra elteltével már szelektív maximum észlelhető 360 $\mu\mu$ hullámhossznál (3. sz. görbe). Maximális érzékenység 2—3 óra alatt áll elő, mikor is két maximum észlelhető, éles főmaximum $\lambda = 360$ $\mu\mu$-nál és egy kisebb 430 $\mu\mu$-nál, mely kifejezettebb, mint *Na* esetében. Ekkor észlelhető a minimális küszöb $\lambda_0 = 680$ $\mu\mu$ (4. sz. görbe). A spektrális minimum helye $\lambda = 410$ $\mu\mu$, «A» $= 5.10^{-4}$ Coul/cal.

A még éppen szelektív viselkedésű réteg küszöbe, $\lambda = 620$ $\mu\mu$ «A» értéke ekkor maximális, 5·5.10^{-4} Coul/cal (5. sz. görbe).

A kontakt-potenciál mérések eredménye a 9. ábrában látható. A mért és számított küszöbértékek itt is jól egyeznek.

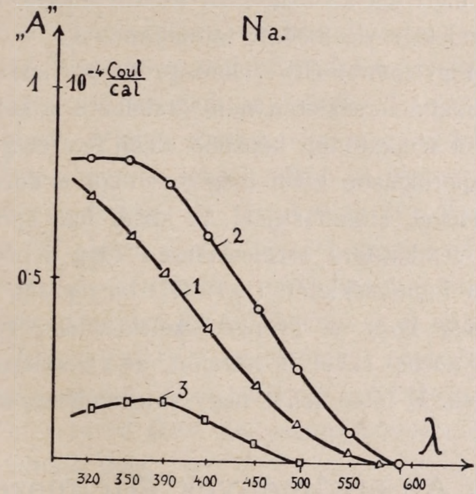
III. táblázat **W—K katód**

d Réteg-vastagság	K Kontakt-potenciál	$\Delta K = \Delta V_0$	λ_0 számítva	$\Delta\lambda_0$	λ_0 mérve	$\Delta\lambda_0$	Jegyzet
$d > 250$ $\mu\mu$	2·00^V		618 $\mu\mu$		580 $\mu\mu$		Kompakt-réteg
		0·15^V		48 $\mu\mu$		50 $\mu\mu$	
$d \sim 10$ $\mu\mu$	1·85^V		666 $\mu\mu$		630 $\mu\mu$		50 atomos-réteg
		0·13^V		42 $\mu\mu$		50 $\mu\mu$	
$d \sim 5$ $\mu\mu$	1·72^V		708 $\mu\mu$		680 $\mu\mu$		20 atomos-réteg

A II. és III. táblázatokkal kapcsolatban megjegyezhető, hogy termoelektromos és fotoelektromos úton kapott kilépési munkák egyezése nem szükségszerű, mint azt Boer—Teves meggondolásaiból láthatjuk (l. c.).

2. §. Üvegalátéten lévő alkálifém-rétegek vizsgálata.

A mutatkozó szelektivitás és küszöbeltolódás, mint látható, a katód összetételének folyománya. Bár az alapfém minősége nem befolyásolja erősebben az érzékenység-görbék menetét, kérdés, hogy jelenléte szükséges-e a szelektív maximumok fellépéséhez? A kérdés eldöntésére megvizsgáltam szigetelő (üveg) alátéten lévő alkálifém-rétegek fényelektromos viselkedését is. A kísérletek az alapfém jelenlétének szükségességét bizonyítják. Óvatos melegítéssel az üvegbúra belső falán ékalakúan változó vastagságú nátrium, illetőleg kálium-rétegeket állítottam elő. E rétegeknek különböző vastagságú helyeit világítva meg, meghatároztam az egyes vastagságok fényelektromos viselkedését. A kapott érzékenységgörbék egyáltalában nem hasonlítanak a



14. ábra.

megfelelő vastagságú, de alátétfémen elhelyezkedő vékony alkálirétegek görbéihez. E görbék egymásközött sem mutatnak lényegesebb különbséget (14. ábra).

Kompakt, jól látható ezüstös réteg görbéje normális menetű. E görbe segélyével vettem tekintetbe az üvegfal abszorpcióját a 400 $\mu\mu$ alatti hullámtartományban. Ugyancsak e réteg szerepelt a fényerősség ingadozásainak korrigálásánál is, mint említettem (2. ábra). Kompaktréteg esetében, $\lambda_0 = 570\,\mu\mu$, «A»$=6.10^{-5}$ Coul/cal. (1. sz. görbe).

Vékonyabb, hártyaszerű réteg szintén normális viselkedésű, a görbe kissé ellaposodik 350 $\mu\mu$ hullámhossznál. (Igen gyenge szelektivitás?), $\lambda_0 = 590\ \mu\mu$, «A» $= 8.10^{-5}$ Coul/cal. (2. görbe). Nagyon vékony réteg igen érzéketlen. $\lambda_0 = 580\ \mu\mu$, «A» $= 10^{-5}$ Coul/cal. (3. görbe).

A fémekből összetett katódra jellemző két maximum és a nagy érzékenységgel párosult minimális küszöb egyetlen ily rétegen sem észlelhető. Tehát az alapfém jelenléte okvetlenül szükséges ahhoz, hogy szelektív viselkedés észlelhető legyen. A fenti kisérletek egyben az alkáli fém szennyezetlenségét is bizonyítják, mert ha az oxigénnel szennyeződött volna, úgy e rétegek is szelektív viselkedést tanusítanának.

Jegyzet: Figyelemreméltó jelenség, hogy visszapárolgás az üvegfalra szobahőmérsékleten nem észlelhető. E körülmény arra mutat, hogy a fémkatódon képződő alkáli fémrétegek létrejöttében a visszapárolgáson kívül még más okok is közreműködnek, melyek e réteget állandósítják. Az alkáli fém spontán visszapárolgása a fémkatódra természetesen függ a hőmérséklettől. A szénsavhó hőmérsékletén (—79 C°) lényegesen kisebb mértékű. Érdekes, hogy a gyenge szelektivitást mutató réteg (11. ábra, 3. görbe) ekkor is létrejön, de a maximális érzékenységű már nem. E réteg tehát nagy valószínűséggel egyatomos.

III. Az eredmények értelmezése.

A kisérleti vizsgálatok kétségtelenné teszik, hogy az $M-A$ típusú, két tiszta fémből összetett katód szelektív fényelektromos érzékenységű. Szelektív viselkedés a vékony alkáli fémrétegeken akkor észlelhető, ha alátétfémen helyezkedik el. Üvegalátéten lévő rétegek érzékenysége normális. A szelektív viselkedésű alkálifém rétegvastagsága néhány atomos (2—20). Ekkor két maximum jelentkezik az érzékenységgörbékben, a rövidhullámú, mindkét alkáliánál 350 $\mu\mu$ hullámhossznál, és a hosszabbhullámú, melynek helye függ az alkáliától és az alapfémtől is (kálium esetében 430 $\mu\mu$, nátrium esetében 410 $\mu\mu$). A fényelektromos küszöb értéke az alkálifém minőségétől és rétegvastagságától függ. Minimális küszöb és két szelektív maximum fellépése egyazon rétegvastagság esetében észlelhető. Nagyobb vastagságok esetén már csak a rövidhullám maximum észlelhető és a küszöb fokozatosan nő. A fényelektromos hasznosság (A) kb. 50 atomvastagságú réteg esetében éri el maximális értékét. 100 atomosnál vastagabb réteg a kompakt alkálifém tulajdonságaival rendelkezik. Az alátétfém csak kis mértékben befolyásolja a maximumok helyét és nagyságát, jelenlétére azonban a szelektív érzékenység észlelése szempontjából okvetlenül szükség van.

Nézzük, hogyan értelmezhető a jelenségcsoport. — Tapasztalatokból leszűrt tény, hogy szelektív fotohatást csak közbenső réteggel bíró összetett katódok mutatnak. A közbenső réteg lehet alkáliszuboxid, vékony sóréteg, vagy az alapfém felületén abszorbeált gázrétegben abszorbeált alkáli atomréteg, mikor is a katód összetételét az $M-O-A-O-A$ vagy $M-H-A-H-A$ szkéma jellemzi (M alátét, A alkálifém, O oxigén, H hidrogén). Ezen Langmuir-katód jellemzője, mint Kluge[1] kimutatta, az alkálifém minőségétől függő hosszúhullámú és az attól független rövidhullámú éles maximum és a rendkívül nagy érzékenység. Az ilyen típusú katódon észlelhető szelektivitás magyarázata Fowler[2] szerint a katód ú. n. áteresztőképességének szelektív viselkedésével adható meg.

Az $M-A$ típusú katódon végzett kísérleteimnél az előállítás gondossága és a kilépési munka változásának mérése, valamint a II. fejezet 2. §-ban leírt mérések arra utalnak, hogy a katód abszorbeált gázréteget nem tartalmaz. Szelektív hatás azonban mindig közbenső réteg jelenlétére mutat. A következő meggondolás közbenső réteg kialakulását árulja el a tiszta fémekből összetett katód esetében is.

Az alátétfémmel közvetlenül érintkező alkáliatomok vegyértékelektronja, engedve a két különböző fém elektronaffinitásbeli különbségéből eredő térintenzitásnak (kontaktpotenciál), az alá-

---

[1] W. Kluge, Phys. Zs. 1933. 34. 12. 12. old

[2] R. Fowler, Proc. Roy. Soc. London. A 128. 1930.

tétfém felé húzódik, vagyis az alkáliatom polározódik. A poláros alkálirétegre rakodó atomok már egyáltalán nem, vagy ellentetten[1] polározódnak, mert elektronaffinitásuk nagyobb, mint az alatta levő kombinálódott felületé. Igen sok alkáli atomréteg esetén a polarozódás elveszti jelentőségét és a réteg a kompakt fém tulajdonságait veszi fel. Tehát mint látjuk, az alapfém felületén levő polarizált alkáli atomréteg közbenső rétegnek tekinthető.

Ezek után megpróbálom az e katód esetében észlelt szelektív viselkedést a katód áteresztési együtthatójának (D) számításával magyarázni.

Legyen az elektronok sebességeloszlása a fémben ismeretes és adjuk meg az elektronra ható potenciális energiát, mint a hely függvényét. A fényabszorpció létrejötte után lépjenek az elektronok a fém felületére, onnan egy részük arra merőleges sebességgel a vákuumba és távozzanak el a felület közeléből, hogy ott tértöltés ne keletkezzék. A felületegységen időegység alatt megjelenő «w» energiájú elektronok száma legyen $N(w)$. Az 1 cm^2 felületre jutó N számú elektron egy része visszaverődik, másik része kilép. A kilépő elektronok számának viszonya a felületre érkezőkhöz adja meg a felület áteresztési együtthatóját, D-t (transzmisszió-koefficiens). A reflexió-koefficiens $R=1-D$. Az összes kilépő elektronok száma

$$n = N(w)\,D(w)$$

és a fényelektromos áram

$$i = en = eN(w)\,D(w).$$

$e=4{\cdot}774.10^{-10}$ el. sztat. egység.

A fényelektromos érzékenység (A) értelmezés szerint (I. fejezet 1. §)

$$A = \frac{en}{a} = \frac{eN(w)\,D(w)}{a(w)},$$

---

[1] Suhrmann—Schallamach, Zs. f. Phys. 79. 153. old.

ahol $a(w)$ a tényleg abszorbeált fényenergia. A beeső és elnyelt energia között a következő összefüggés áll fenn:

$$a = a'\left(1 - \frac{r}{100}\right),$$

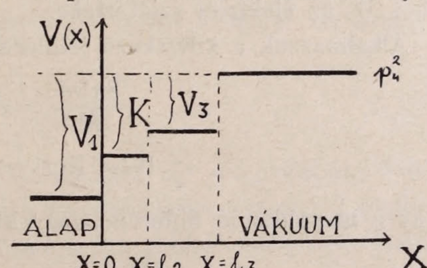
ahol r, a felület fényvisszaverő képessége, %-ban,

a' a beeső fény energiája,

a a tényleg elnyelt energia.

A feladatunk D kiszámítása. Szükségünk van az elektronra ható potenciális energia ismeretére. Katódunk összetételében három tartomány különböztethető meg, alapfém, polarizált alkáli atomréteg és a felette levő nem poláros alkáliréteg. E tartományok azzal a potenciálkülönbséggel jellemezhetők, melyeket az elektronnak le kell győznie, hogy belőlük a vákuumba juthasson. A potenciális energia analitikus alakja nem adható meg, de elegendő közelítésben minden tartományban különkülön állandó értékűnek tekinthető, mely értékek között azonban nívókülönbség van. Ezen nívókülönbségek értelmezés szerint rendre a következők; az alapfém-vákuum határfelületre jellemző az alátétfém kilépési munkája $V_1 = h\nu_1$. A poláros réteg-vákuum között uralkodó potenciálkülönbség az alapfém és alkálifém közötti kontaktpotenciállal egyenlő, azaz

$$V_2 = K = h\nu_1 - h\nu_3.$$



15. ábra.

Az alkálifém-vákuum határfelületre az alkálifém kilépési munkája jellemző, $V_3 = h\nu_3$. A potenciális energia vázolt menete a 15. ábrában látható.

Ez ábrában X a katódfelület normálisa, $X = 0$ az alapfém-polárosréteg határfelülete, $X = l_2$ a poláros és neutrális alkáli rétegek határa, $X = l_3$ a katód-vákuum határfelület abszcisszája. $V(x)$, a potenciális energia.

Az elektron mozgásegyenlete az időtől függő nem relativisztikus SCHRŐDINGER-egyenlet, mivel a fotoelektronok kis sebességűek.

$$\Delta\Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V(x)\,\Psi + \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

ahol m az elektron tömege,

h a hatáskvantum,

Ψ az elektron saját függvénye.

$V(x)$ az elektronra ható potenciális energia, mely a felvett modell alapján, minthogy az ionrácsból eredő periodicitástól eltekintünk, csak «x» függvénye.

Legyen,

$$\Psi(x, y, z, t,) = \psi(x)\, e^{-\frac{2\pi i}{h}(Et - yk_y - zk_z)}, \tag{2}$$

ahol E az elektron összes energiája, $K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2$, az elektron kiterjedés vektora, úgy

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[W - V(x)]\,\psi = 0, \tag{3}$$

ahol W az elektron sajátértéke.

Alkalmazzuk a következő jelöléseket;

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2} = \varkappa^2,$$

$$W - V(x) = p^2,$$

úgy a megoldandó differenciálegyenlet a következő lesz:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \varkappa^2 p^2 \psi = 0. \tag{4}$$

A differenciálegyenlet megoldása a határrétegektől nagy távolban

$$\psi = a e^{i\varkappa px} + a' e^{-i\varkappa px}. \tag{5}$$

Minthogy p^2, azaz az elektron kinetikus energiája pozitiv, így a fenti megoldás periodikus függvény. Az elektron mozgását tehát mint két egymással szembe futó síkhullám szuperpozicióját foghatjuk fel. «a» a balról jobbra, «a'» a jobbról balra futó hullám amplitudója. A hullámegyenlet megoldása katódunk négy tartományában a következő lesz:

$$\psi_i = a_i e^{i\varkappa p_i x} + a'_i e^{-i\varkappa p_i x}. \qquad (6)$$

«i» az egyes tartományokat jelölő index. $i = 1, 2, 3, 4$. A 4-ik tartomány a vakuum.

$$\begin{aligned} p_1^2 &= W - V_1(x) = p_4^2 - h\nu_1, \\ p_2^2 &= W - K \quad = p_4^2 - h\nu_2 = p_4^2 - h(\nu_1 - \nu_3), \qquad (7) \\ p_3^2 &= W - V_3 \quad = p_4^2 - h\nu_3, \end{aligned}$$

mert

$$p_4^2 = W,$$

az elektron kinetikus energiája (sajátértéke) a vakuumban. Az egyes határfelületek egységein átlépő részek száma,

$$a_i a_i^\star = |a_i|^2, \quad \text{illetőleg} \quad a'_i a'^\star_i = |a'_i|^2$$

-tel arányosak. Az időegységben a felület egységén áthaladó elektronok száma, tehát az elektromos áram intenzitása az elektron sebességével, azaz p_i-vel arányos, mert p_i^2 kinetikus energiát jelent. Tehát az áteresztési együttható két tartomány határfelületére

$$D = \frac{p_{i+1}|a_{i+1}|^2}{p_i|a_i|^2}. \qquad (7)$$

A reflexió együtthatókat a'_i, illetőleg $a'^\star_i$ szolgáltatják. Feladatunk tehát a (6) alatti egyenletrendszerben látható 8 amplitudó meghatározása. Az amplitudók úgy határozandók meg, hogy ψ és $\frac{d\psi}{dl}$ a határrétegekbe folytonosan menjenek át.

$$\frac{d\psi_i}{dx} = i\varkappa p_i (a_i e^{i\varkappa p_i x} - a'_i e^{-i\varkappa p_i x}) \qquad i=1,2,3,4. \qquad (8)$$

a'_4 zérusnak vehető, mert a vákuumból nem jut elektron a a fémbe vissza.

A határfeltételek segélyével, a (6) és (8) alatti egyenletekből,

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_1' &= a_2 + a_2' \\
a_1 - a_1' &= (a_2 - a_2')\frac{p_2}{p_1} \\
a_2 e^{i\varkappa p_2 l_2} + a_2' e^{-i\varkappa p_2 l_2} &= a_3 + a_3' \\
a_2 e^{i\varkappa p_2 l_2} - a_2' e^{-i\varkappa p_2 l_2} &= (a_3 - a_3')\frac{p_3}{p_2} \\
a_3 e^{i\varkappa p_3 l_3} + a_3' e^{-i\varkappa p_3 l_3} &= a_4 \\
a_3 e^{i\varkappa p_3 l_3} - a_3' e^{-i\varkappa p_3 l_3} &= a_4 \frac{p_4}{p_3}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

E hat egyenletből a 7 amplitudónak csak viszonya állapítható meg, $\frac{a_4}{a_1}$, $\frac{a_4}{a_2}$ és $\frac{a_4}{a_3}$ szolgáltatják az egyes tartományokból kilépő elektronok átmeneti valószínűségének amplitudóit. A két utolsó egyenletből

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{2e^{-i\varkappa p_3 l_3} p_3}{p_3 + p_4},$$

$$\frac{a_4}{a_3'} = \frac{2e^{i\varkappa p_3 l_3} p_3}{p_3 - p_4},$$

ezekkel a két középsőből

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{4e^{-i\varkappa p_2 l_2} p_2 p_3}{(p_2+p_3)(p_3-p_4)\,e^{-i\varkappa p_3 l_3} + (p_2-p_3)(p_3+p_4)\,e^{i\varkappa p_3 l_3}},$$

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{4e^{i\varkappa p_2 l_2} p_2 p_3}{(p_2+p_3)(p_3-p_4)\,e^{-i\varkappa p_3 l_3} + (p_2-p_3)(p_3+p_5)\,e^{i\varkappa p_3 l_3}},$$

a két elsőből pedig,

$$\frac{a_4}{a_1} =$$

$$\frac{8p_1p_2p_3}{(p_1+p_2)\,e^{-i\varkappa p_2 l_2}\left[(p_2+p_3)(p_3+p_4)\,e^{-i\varkappa p_3 l_3} + (p_2-p_3)(p_3-p_4)\,e^{i\varkappa p_3 l_3}\right] +}$$

$$\frac{8p_1p_2p_3}{+\,(p_1-p_2)\,e^{i\varkappa p_2 l_2}\left[(p_2-p_3)(p_3+p_4)\,e^{-i\varkappa p_3 l_3} + (p_2-p_3)(p_3-p_4)\,e^{i\varkappa p_3 l_3}\right]}$$

A felső alkáli réteg áteresztési együtthatója,

$$D_3 = \frac{p_4}{p_3}\,\frac{a_4}{a_3}\,\frac{a_4^\star}{a_3^\star} = \frac{4p_3p_4}{(p_3+p_4)^2}. \tag{10}$$

D_3 zérus, ha $p_3=0$, azaz, minthogy p_4^2 a vákuumbeli (összes) energia,

$$p_3^2 = p_4^2 - V_3 = p_4^2 - h\nu_3 = 0,$$

azaz

$$p_4^2 = h\nu_3. \tag{11}$$

Ennek értelme az, hogy a fotoemisszió zérus, ha az elektron energiája csak az alkálifém-vákuum határfelületen levő potenciálugrás, $h\nu_3$ legyőzésére elegendő. Ezen energiának éppen az észlelhető fényelektromos hosszúhullámú határ felel meg, λ_{03}.

A poláros rétegből származó elektronokra

$$D_2 = \frac{p_4}{p_2} \cdot \frac{a_4}{a_2} \cdot \frac{a_4^\star}{a_2^\star} = \\ = \frac{16 p_3^2 p_2 p_4}{|e^{-i\varkappa p_3 l_3}(p_3+p_4)(p_2+p_3) + e^{i\varkappa p_3 l_3}(p_3-p_4)(p_2-p_3)|^2}. \tag{12}$$

D_2 zérus, ha $p_2 = 0$, azaz

$$p_2^2 = p_4^2 - V_2 = p_4^2 - h\nu_2 = 0, \\ p_4^2 = h\nu_2 = K. \tag{13}$$

D_2, $p_3 = 0$-nál nem tűnik el.[1] A (13) egyenlet értelme, az, hogy a fotoemisszió zérussá válik, ha az elektron energiája a kontaktpotenciállal egyenlő. Kontaktpotenciál mérések szerint ezen érték 3 Volt körül van, mely értékből $\lambda_0 = 400$ $\mu\mu$, úgy, hogy az áteresztési együttható λ ezen értékénél az elmélet szerint zérus. A kisérleti eredmények a második minimum helyét tényleg kb 400 $\mu\mu$ hullámhossznál adják meg.

Az alátétfémből eredő fotoemisszió zérus lesz, ha

$$D_1 = \frac{p_4}{p_1} \cdot \frac{a_4}{a_1} \cdot \frac{a_4^\star}{a_1^\star} = \frac{64 p_1 p_2^2 p_3^2 p_4}{|(p_1+p_2) e^{-i\varkappa p_2 l_2}[(p_2+\cdots)]|^2} = 0, \tag{14}$$

azaz, ha $p_1 = 0$, vagyis

$$p_1^2 = p_4^2 - V_1 = p_4^2 - h\nu_1 = 0 \\ p_4^2 = h\nu_1. \tag{15}$$

Az alapfémből tehát csak oly elektron léphet ki, melynek energiája nagyobb az alátétfém kilépési munkájánál. Az ennek megfelelő érték a használt fémek esetében 300 $\mu\mu$ alatt van, ezen

[1] R. Fowler: Proc. Roy. Soc. London, 1930. 122. 15. old.

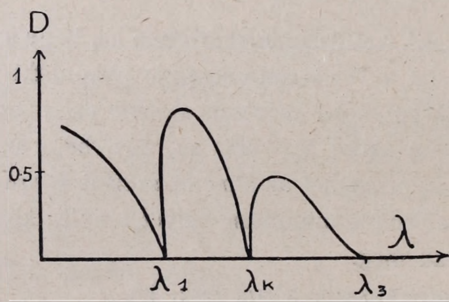
érték méréseim számára nem volt hozzáférhető az üvegfal abszorpciója miatt.

Az áteresztési együttható elméleti menete a 16. ábrában látható. Az

$$A = \frac{N(w)\,D(w)}{a(w)}, \tag{16}$$

egyenlet alapján D ismeretével a fényelektromos érzékenység görbe menetére következtethetünk, ha feltesszük, hogy $\frac{N(w)}{a(w)}$ közelítőleg állandó. Természetesen a fotoemisszió a jelzett hullámhosszaknál nem lesz zérussá, mert a fényforrás nem szolgáltat tökéletesen monokromatikus fényt és így a görbe csak minimumot mutat, mely a fénysáv frekvenciáinak megfelelő fotoáramok középértéke.

Minthogy a fény abszorpciója annál mélyebb rétegben jön létre, minél nagyobb a frekvenciája, így a fotoemissziós érzékenységgörbe alakja jól értelmezhető az áteresztési együttható szelektív viselkedésével (16. ábra).



16. ábra.

Az észlelt maximumok helye csak a 16. alatti egyenlet pontos kiértékelésével volna megadható. Ez azonban megkivánná úgy az abszorpció valószínűségének, $N(w)$-nek, mint az abszorpció együtthatójának ismeretét.

Az abszorpció helyére tett kijelentéseket úgy látszik a thoriumos wolfram alátéten levő alkálirétegek vizsgálata támasztja alá, ugyanis az egyatomos thoriumrétegben a fényabszorpció tényleg igen kicsi és így nem okoz lényegesebb változást. A hosszúhullám határértékének és e rétegvastagságnak összefüggését Brady[1] meggondolásai alapján a következőképpen ér-

[1] J. Brady, Phys. Rev. 1932. 41. 613. old.

telmezhetjük; egyatomos alkáliréteg küszöbe aránylag nagy, mert a réteg leírt polározódása miatt az elektron nagyobb energiával kötődik. Az egynél nagyobb, de még mindig csak néhány atomos réteg küszöbe az elektronok zavartalanabb sebességeloszlása miatt lesz minimális. A kompaktréteg küszöbe valószinűleg éppen a sebességeloszlás kedvezőtlenebb volta miatt nagyobb.

Az észlelt szelektív fényelektromos viselkedés magyarázata tehát az áteresztési együttható kiszámításával kielégitően sikerült.

Összefoglalás.

Az $M-A$ típusú gázmentes fotokatódon szelektív fényelektromos hatás észlelhető. Néhány (2—20) atomos részek esetében 2 szelektív maximum van, a közbülső minimum helye kálium esetében 410 $\mu\mu$ hullámhossznál, nátrium esetében 390 $\mu\mu$ hullámhossznál van. E réteg küszöbe igen kis értékű K-nál 680 $\mu\mu$, Na-nál 640 $\mu\mu$. Maximális érzékenységet kb. 50 atomos réteg mutat, ez esetben csak a rövidebb hullámú maximum jelentkezik mindkét alkália esetében 350 $\mu\mu$ hullámhossznál. 100 atomosnál vastagabb réteg a kompakt fém tulajdonságait mutatja, melyet kisebb érzékenység és maximális nagyságú küszöb jellemeznek. Na esetében 550 $\mu\mu$, K-nál 570 $\mu\mu$ a küszöb.

A rétegvastagság becslését a katódspirális ellenállásváltozásának méréséből eszközöltem. A kilépési munka kontakt-potenciálból számított és a küszöb értékétől meghatározott értéke elég jól, eltolódása nagy pontossággal egyezik. Az alátétfém minősége nem befolyásolja lényegesebben a jelentkező fotoáramot, de jelenlétére okvetlenül szükség van, mint azt az üvegen lévő egyszerű alkálirétegek nem szelektív értelmű viselkedése bizonyítja.

A jelenségcsoport magyarázatát az összetett katód áteresztési együtthatójának a hullámmechanika módszereivel eszközölt kiszámítása adja meg. A számítás két feltétel segélyével történt, 1. az alapfémen lévő polározott alkáli atomréteg mint közbenső réteg szerepel, 2. a fényabszorpció annál mélyebben fekvő rétegben jön létre, minél kisebb a hullámhossz. A küszöb értékének változása egyrészt a leírt polározódásból, másrészt az elektronok sebességeloszlásával magyarázható.

*

Ezúton is hálás köszönetemet fejezem ki dr. Tangl Károly egyet. ny. r. tanár úrnak, a Kir. m. Pázmány Péter Tud. Egyetem Kísérletifizikai Intézete igazgatójának, ki a vizsgálatok véghezvitelét megengedte és nagybecsű érdeklődésével kisérte.

Köszönetemet fejezem ki dr. Forró Magdolna tanársegédkisasszonynak, Baintner Géza tanársegéd úrnak, akik munkámban értékes tanácsaikkal támogattak. — A szíves támogatásért és a felhasznált vákuumcsövek készítéséért a Vatea Elektroncsőgyár igazgatójának, dr. techn. Patai Imre úrnak tartozom hálás köszönettel. A felhasznált eszközök nagy részét a Széchenyi Tud. Társaság támogatásával szerezhettük be, amiért e helyen is köszönetet mondok.

Berkes Zoltán.

LICHTELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN AN DÜNNEN ALKALI-METALLSCHICHTEN.

An zusammengesetzten (Metall-Alkali) Photokathoden, die von absorbiertem Gas vollkommen befreit sind, ist ein selektiver Photoeffekt wahrnembar. Dünne Schichten, von nur wenigen Atomen (2—20) zeigen zwei selektive Maxima, das dazwischen liegende Minimum liegt für Kalium bei 410 $\mu\mu$ und für Natrium bei 390 $\mu\mu$. Gleichzeitig zeigen diese Schichten eine nach längeren Wellen verschobenen Schwellenwert, und zwar, liegt die langwellige Grenze für Kalium bei 680 $\mu\mu$ und für Natrium bei 640 $\mu\mu$. Die lichtelekrische Ausbeute ist für ungefähr 50 Atom dicken Schichten am grössten, jedoch bleibt bei dieser Schichtdicke nur noch ein selektives Maximum, für beide Alkalien bei 350 $\mu\mu$ (also das kürzwelligere) bestehen. Ist die Schicht dicker als 100 Atome, so wird ihr Verhalten ähnlich dem des kompakten Metalls, mit kleiner

werdender Empfindlichkeit und einem nach kurzen Wellen verschobenen Schwellenwert. Die langwellige Grenze liegt nun bei 570 $\mu\mu$ für Kalium und bei 550 $\mu\mu$ für Natrium.

Die Dicke der Schicht habe ich durch Messung der Widerstandsänderung der Kathodenspirale näherungsweise bestimmt. Die aus Kontaktpotentialmessungen und aus der langwelligen Gränze bestimmten Werte der Austrittsarbeit waren in ziemlich guter Übereinstimmung miteinander. Die Übereinstimmung für die mit den beiden Methoden erhaltenen Werte der Differenzen der Austrittsarbeit kann als sehr gut bezeichnet werden. Ändert man das Material der Metallunterlage, so wird dadurch der Verlauf des Photostromes wenig beeinflusst, jedoch tragen sie anscheinend zum Zustandekommen des selektiven Verhaltens doch entsprechend bei, was daraus gefolgert werden kann, das auf Glas-Unterlage aufgetragenen einfachen Alkali-Schichten keine selektive Maxima auffindbar waren.

Die theoretische Erklärung der Erscheinungen wurde mit den Methoden der Quantenmechanik durch Bestimmung des Durchlässigkeitskoefficienten der zusammengesetzten Kathoden ermittelt. Bei der Berechnung wurden zwei Voraussetzungen gemacht: 1. Die auf der Unterlage haftende, polarisierte Alkali-Schicht spielt die Rolle einer Zwischenschicht. 2. Die Lichtabsorption erfolgt in desto tieferen Schichten je kurzwelliger das Licht ist. Die Verschiebung der langwelligen Grenze kann durch den Polarisationsvorgang und aus der Geschwindigkeitverteilung der Elektronen erklärt werden.

Z. Berkes.

A BUDAPESTI M. KIR. TANÁRKÉPZŐINTÉZET MENNYISÉGTANI TOVÁBBKÉPZŐ TANFOLYAMA.

A Budapesti M. Kir. Tanárképzőintézet 1927 nyara óta rendszeresen rendez továbbképző tanfolyamokat középiskolai tanárok számára. Az 1928 és 1930 nyarán tartott fizikai tanfolyamok után az idén (1934 jún. 25—júl. 14) került először sor matematikai tanfolyamra, melyre 53 ösztöndíjas és 27 ösztöndíj nélküli hallgató vétetett fel. A tanfolyam 12 előadássorozatból és 5 tanulmányi látogatásból és gyakorlatból állott. Itt közöljük a tartott előadások rövidre fogott tartalmát.

Fejér Lipót: Trigonometrikus többtagúakról (3 óra).

I. Trigonometrikus többtagúak gyökeiről. Gauss tétele. Cosinus- és sinuspolinomok. Néhány speciális eset. Alkalmazás a Fourier- és Laplace-féle sorra.

II. Sturm tétele trigonometrikus polinomokról. Hurwitz bizonyitása. Racionális egész függvények és trigonometrikus polinomok monoton együttható-sorozattal. Kakeya, Pólya, Szegő tételei. Alkalmazás a Legendre-féle és bizonyos rokon polinomokra.

III. A Fourier-sor maradéktagjáról. Továbbmenő tételek tiszta cosinus- és sinussor esetében, amikor az együtthatósorozat monoton.

Grynaeus István: Geometriai szerkesztések (6 óra).

I. Történeti megjegyzések. A delosi probléma és a trisectio-feladat megoldásai Menechmus és Pappus szerint kúpszeletek segítségével. A trisectio-feladat megoldása Sipos szerint. Vonalzóval és körzővel való megoldásokra irányuló kísérletek hiábavalóságáról. A DESARGUES-tételről.

II—III. A vonalzóval és körzővel való szerkesztések geometriai elmélete. 1. A vonalzó használatának jelentése és a vonalzóval megoldható metrikus feladatok. 2. A körző használatának jelentése és a körzővel megoldható metrikus feladatok. Példák.

IV—VI. A vonalzóval és körzővel való szerkesztések algebrai elmélete. A négyzetgyökös kifejezések redukciója és a négyzetgyökös kifejezésekkel megoldható algebrai egyenletek egy tétele. — A delosi probléma; a szög trisectiója. — A szabályos sokszögek szerkeszthetőségéről.

Huszár Géza: A kereskedelmi és politikai számtan a középiskolában (4 óra).

I—II. A kereskedelmi és a politikai számtan problémaköre. A pénzműveletek matematikájának alapfogalmai. A járadékszámítás alapegyenletének gyökeloszlása.

III—IV. A járadékszámítás alapegyenletének numerikus megoldása. A statisztikai s a biztosítási műveletek matematikájának néhány alapfogalma.

Kerékjártó Béla: A geometria megalapozásáról (6 óra).

I. Az euklidesi geometria axioma-rendszere (incidencia-, rendezési és parallel-axiomák).

II. A projektív geometria axiomatikus felépítése.

III. Az euklidesi és a nem-euklidesi geometriák felépítése a projektív geometria alapján.

IV. Kéttagú folytonos csoportok elmélete.

V. A komplex egyenes lineáris csoportja.

VI. Az euklidesi és a nem-euklidesi mozgáscsoportok.

König Dénes: Topológiai elemek a középiskolai tananyagban (6 óra).

I. A topológia (analysis situs) tárgya és anyaga: felületek, graphok. A topológia történetileg első problémája: a königsbergi hidak EULER-féle feladata, mint graphprobléma.

II. A felületek topológiájának alapfogalmai: elemi felület, keresztmetszet, körmetszet, alapszám, nemszám; felületek egy- és kétoldalúsága.

III. A Mőbius-féle köbtartalomszámítás kapcsolatban a felületek egy- és kétoldalúságával.

IV. Az Euler-féle poliédertétel, mint topológiai tétel. Szokásos hibás bizonyításairól. V. Staudt bizonyítása kapcsolatban a faalakú graphokkal.

V. Az áramelágazódásra vonatkozó Kirchhoff-féle lineáris egyenletek függetlensége, mint graph-probléma.

VI. A térképszinezés máig elintézetlen problémája.

Rados Gusztáv: Kürschák József műveinek méltatása (4 óra).

I. A matematika mint tudomány; a matematika mint az általános műveltség eleme és szerepe a nevelésben; továbbképző tanfolyamok célszerűsége. A matematika héroszai kultuszának szükségessége. Kürschák József mint kimagasló kutató, mint író, mint tanár.

II. Kürschák Józsefnek a középfokú oktatás szempontjából fontos értekezései. A szabályos sokszögekre vonatkozó tétele. A geometriai szerkesztések elmélete és az etalon (*Eichmass*) szerepe. A határérték fogalma és a szabályos számsorozatok.

III—IV. A számtest fogalma és szereplése az algebrai egyenletek és az algebrai számok elméletében. Kürschák József főműve: értékelési elmélete és ennek kihatása a nemzetközi matematikai irodalomra. Kürschák egyéb műveiről.

Riesz Frigyes: Az integrálfogalom átalakulásáról (4 óra).

I—II. A klasszikus integrálfogalom (Cauchy, Riemann, Darboux). — Folytonos függvények, monoton függvények, korlátos változású függvények integrálhatósága; Jordan tétele. — Az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele. — 0-mértékű halmazok (más néven nullahalmazok); Borel fedési tétele. — Néhány nevezetes «majdnem mindenütt» igaz tétel. — Rektifikálható görbék. — Végtelen sorozatok és sorok integrálása

(ARZELÀ és OSGOOD tételei). — Az integrálfogalom bővítésének szükségessége. — Halmazok LEBESGUE-féle mértéke; LEBESGUE integráldefiníciója.

III—IV. A LEBESGUE-féle integrálfogalom más bevezetési módjai és legfontosabb tulajdonságai. — Alkalmazások: ívhossz, felszín, függvényterek. — A differenciálás és az integrálás viszonya; primitív függvény keresése (PERRON, DENJOY, KHINTCHINE). — A STIELTJES-féle integrál és a további általánosítások (LEBESGUE, RADON, FRÉCHET, DANIELL). — Az integrál mint intervallumfüggvény, mint halmazfüggvény és mint függvényoperáció.

Stachó Tibor: Gyakorlati mennyiségtan (6 óra).

I—II. Pontos számítások. Számológégek. — Közelítő számítások. Hibák tovaterjedése.

III—IV. Numerikus táblázatok. Interpoláció és kiegyenlítés. — Grafikus táblázatok (nomográfia).

V—VI. A logaritmikus léc. — Grafikus szerkesztések.

Suták József: Szemlélet az analítikai geometriában (4 óra).

I. A geometriai fogalmak tartalma legtöbbször már a fogalmat alkotó individuumok nagy számossága folytán sem szemléltethető. Ennélfogva a fogalmak tartalmi vonatkozásaira vonatkozó tételek megállapítása sem alapulhat szemléleten. A szemléleten kezdődő tanitás feladata tehát kiválasztani, mégpedig lehető csekély számban azokat a szemléltethető fogalmakat, amelyek között levő relációk nemcsak szemléltethetők, hanem a szemlélettől való elszakadás útjait is megjelölik.

II. A különböző dimenziók meghatározásához szükséges és elégséges pontok alakzatának számokkal való jellemzése. Hogyan kell megszabadulni még a dimenziók szemléletétől is?

III. Hogyan épithető fel a geometria logikai épülete a dimenziók s a fogalmak tartalmának szemlélete nélkül? Ez a logikai épület mégis hogyan népesíti be a különböző dimenziójú tereket látható alakzatokkal.

IV. Fogalmaink tartalmában nem érzékelhető, ú. n. képzetes elemek is vannak. A minden szemlélettől függetlenül felépített logikai épületben még ezeket a nem-érzékelhető elemeket is szemléltetni tudjuk.

Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás alapfogalmai (6 óra).

I. Példák számsorozatok határértékére.

II. A $\sin x$ és a $\operatorname{tg} x$ függvény különbségi hányadosára vonatkozó egyenlőtlenségek és ezek alkalmazásai.

III. A $\frac{\sin x}{x}$, $x \sin \frac{1}{x}$ és $\sin \frac{1}{x}$ függvények.

IV. A természetes logaritmus és az exponenciális függvény.

V. Folytonos függvény határozott integrálja.

VI. A $\sin x$, $\cos x$ és e^x függvények sorbafejtése x hatványai szerint. Az e^x és a $\log x$ függvény nagyságrendje.

Tóth Géza: Fejezetek a matematikai didaktika köréből (6 óra).

I—II. A matematikai oktatás reformtörekvései 1900-tól napjainkig, tekintettel a magyar viszonyokra. — A munkáltató oktatás elvi kérdései és gyakorlati megvalósításuk az elemi matematika területén.

III—IV. A feladatkitűzés szempontjai. — Az anyag logikai elmélyítése.

V—VI. Az elemi körmérés néhány kérdése, kapcsolatban a középiskolai didaktikai eljárással.

Veress Pál: Valós számok értelmezése (6 óra).

I. Valós számok axiomatikus és genetikus értelmezése (Grassmann, Peano, Hilbert, Hölder). Természetes számok. Sorszám és számosság.

II. Természetes számok összeadása és szorzása. Az összeg és a szorzat tulajdonságai.

III. Osztás. Törzsszámok. Összetett szám fölbontása törzstényezőire. Racionális számok.

IV. Kivonás. Negatív számok. Műveletek pozitív és negatív racionális számokkal.

V. Irracionális számok. Értelmezés racionális számsorozattal.

VI. Dedekind-féle szeletalkotás. A valós számok a középiskolában.

A tanfolyam létrejöttéért és sikereért az előadó tanárokon kívül különösen Vajdinger Gyula miniszteri tanácsost, Kornis Gyulát, a T. I. elnökét, Melich Jánost, a T. I. ügyvezető alelnökét és Veress Pált, a T. I.-hez beosztott tanárt illeti köszönet. — A hallgatóság szorgalma és buzgó érdeklődése, mellyel az előadásokat kisérte, az ily tanfolyamok sűrűbb megismétlését határozottan kívánatosnak mutatja.

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1934. évi XXXVIII. matematikai tanulóversenyről.

A Társulat XXXVIII. matematikai tanulóversenyét 1934. október 13-án tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 20, Szegeden 10 versenyző jelentkezett, beadtak 17, illetőleg 6 dolgozatot.

A verseny tételei a következők voltak:

I. Legyen

$$A = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)},$$

hol n pozitív egész szám. Bebizonyítandó, hogy az

$$A, 2A, 4A, 8A, \ldots, 2^{\nu}A, \ldots$$

sorozatban van egész szám.

II. Adott körbe írt, önmagukat nem metsző sokszögek közül melyikre legnagyobb az oldalak négyzetösszege?

III. Legyen a síkban végtelen sok oly derékszögű négyszög kijelölve, melynek szögpontjai valamely derékszögű koordinátarendszerben így adhatók meg:

$$(0, 0),\ (0, m),\ (n, 0),\ (n, m),$$

hol m és n pozitív egész számok. Bebizonyítandó, hogy mindig van a kijelölt négyszögek között két olyan, hogy egyik a másikban bennfoglaltatik.

A dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság, mely Rados Gusztáv elnöklete alatt a következő tagokból állott: Faragó Andor, Fejér Lipót, Szücs Adolf és Kőnig Dénes előadó, 1934. okt. 28-án tartott ülésén a következő javaslatban állapodott meg.

«A verseny eredménye az utóbbi évekéhez képest határozott sülyedést mutat: egy dolgozat éri el a megkívánható mértéket. Ennek szerzője Weiszfeld Endre. Helyesen oldja meg az első, valamint a második feladatot is, bár ez utóbbinál két segédtételre bizonyítás nélkül hivatkozik; a harmadik feladatot elhibázza, de itt is fölényben van a többi versenyző fölött, mert ő az egyetlen, aki e harmadik tétel tartalmát megértette. A többi résztvevő — az első feladatra adott egyetlen helyes megoldástól eltekintve — egy feladatot sem oldott meg. Mindezeket tekintve, a Bizottság azt javasolja, hogy az első díj az idén ne adassék ki, a második b. Eötvös Loránd díjjal pedig WEISZFELD ENDRE jutalmaztassék, aki a budapesti állami Kemény Zsigmond reáliskolában NEUKOMM GYULA tanár tanítványa volt.»

A Bizottság e javaslatát a Választmány 1934. nov. 8-án tartott ülésén egyhangúlag elfogadta. Az ugyanezen a napon tartott előadó ülésen RADOS GUSZTÁV elnök adta át a díjat a verseny győztesének.

Weiszfeld Endre jutalmazott dolgozata.[1]

I. feladat. Tudjuk, hogy

$$1.3.5\ldots(2n-1)=\frac{(2n-1)!}{2.4\ldots(2n-2)}=\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

és

$$2.4\ldots 2n=2^n.1.2\ldots n=2^n.n!.$$

Tehát

$$A=\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}.n!\,(n-1)!}=\frac{1}{2^{2n-1}}\binom{2n-1}{n},$$

vagyis, ha $\nu=2n-1$, akkor

$$2^\nu.\,A=\binom{2n-1}{n},$$

ahol azonban $\binom{2n-1}{n}$ nyilván egész szám.

II. feladat. Tegyük fel, hogy a sokszög oldalainak száma $n>3$. Feltétlen találunk az $A_1A_2\ldots A_nA_1$ sokszögben egy csúcsot, melynél lévő α szög tompaszög. Legyen ez A_1. Az $A_nA_1A_2\triangle$-ben a cosinustétel szerint

$$A_2A_n^2=A_nA_1^2+A_1A_2^2-2A_nA_1.A_1A_2\cos\alpha=$$
$$=A_nA_1^2+A_1A_2^2+2A_nA_1.A_1A_2\cos(180^\circ-\alpha),$$

ahol $180^\circ-\alpha$ hegyes szög. Tehát

$$A_2A_n^2>A_nA_1^2+A_1A_2^2,$$

amiből következik, hogy az $A_2A_3\ldots A_nA_3$ sokszögben az oldalak négyzetösszege nagyobb, mint az eredeti $A_1A_2\ldots A_nA_1$ sokszögben.

---

[1] Az ábrákat — melyeket az olvasó könnyen pótolhat — valamint a III. feladatra adott kidolgozást itt nem nyomatjuk le. Egyébként a dolgozatot minden változtatás és javítás nélkül közöljük. *Szerk.*

Az előbbiek szerint bármely n-oldalú sokszögből, ha $n > 3$, tudunk konstruálni egy $n-1$-oldalút, melyben az oldalak négyzetösszege nagyobb, mint az eredeti sokszögé. Ebből következik, hogy a keresett sokszög csak *háromszög* lehet.

Vizsgáljuk tehát az adott r sugarú és O középpontú körbe írt $A_1A_2A_3$ háromszögeket. Legyen

$$A_3OA_2 \sphericalangle = \varphi_1,\ A_3OA_1 \sphericalangle = \varphi_2,\ A_1OA_2 \sphericalangle = \varphi_3;$$

akkor

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 360°.$$

A cosinus-tétel szerint

$$A_1A_2^2 = OA_1^2 + OA_2^2 - 2OA_1 . OA_2 \cos\varphi_3 = 2r^2[1 + \cos(180° - \varphi_3)];$$

hasonlóan

$$A_2A_3^2 = 2r^2[1 + \cos(180° - \varphi_1)]$$

és

$$A_3A_1^2 = 2r^2[1 + \cos(180° - \varphi_2)].$$

Tehát

$$A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2 =$$
$$= 6r^2 + 2r^2[\cos(180° - \varphi_1) + \cos(180° - \varphi_2) + \cos(180° - \varphi_3)].$$

Az oldalak négyzetösszege akkor maximális, ha a

$$\cos(180° - \varphi_1) + \cos(180° - \varphi_2) + \cos(180° - \varphi_3)$$

összeg maximális. Azonban

$$(180° - \varphi_1) + (180° - \varphi_2) + (180° - \varphi_3) = 180°,$$

tehát $180° - \varphi_1$, $180° - \varphi_2$, $180° - \varphi_3$ egy-ugyanazon háromszög szögei. Azonban egy háromszög szögei cosinusainak összege akkor maximum, ha a háromszög *egyenlőoldalú*, tehát ha

$$180° - \varphi_1 = 60°,\ 180° - \varphi_2 = 60°,\ 180° - \varphi_3 = 60°,$$

vagyis

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 120°.$$

Ebből következik, hogy $A_1A_2A_3$ háromszögben az oldalak négyzetösszege maximum, ha az $A_1A_2A_3\triangle$ egyenlőoldalú.

A keresett poligon tehát az *egyenlőoldalú háromszög.*

Jelentés az 1934. évi XVI-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyről.

Társulatunk XVI. «Károly Irén» fizikai tanulóversenyét 1934. október hó 20-án tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 12, Szegeden 6 versenyző jelentkezett és beadtak összesen 18 dolgozatot.

(Szegeden résztvett egy versenyen kívüli jelölt is, aki 1933. júniusában érettségizett és ő is beadta dolgozatát.)

A versenytételek a következők voltak:

1. Vékony homogén rúd egyik végén átmenő vízszintes tengely körül foroghat, másik végétől számítva negyedében függőleges fonálra függesztjük; kérdés, hogy súlyának hányadrészével húzza a rúd a fonalat?

2. Súlypontján átmenő forgástengellyel ellátott mágnestű percenkint 24-et leng, ha forgástengelye függélyes. Hányat leng percenkint, ha forgástengelye vízszintes és

a) párhuzamos a mágneses délvonallal?

b) merőleges a mágneses délvonalra?

Az észlelés helyén a mágneses lehajlás 60°.

3. Wheatstone-híd összeállításban a csúszókontaktust úgy állítottuk be, hogy a galvanométer kitérést nem mutat. Bizonyítsuk be, hogyha az összeállításban az elemet a galvanométerrel fölcseréljük, a galvanométer akkor sem fog kitérést mutatni.

A dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság, melynek tagjai Tangl Károly elnöklete mellett Császár Elemér, Mikola Sándor, Pogány Béla, Szabó Gábor és Rybár István voltak, Szabó Gábor előadói előterjesztésére a következő javaslatban állapodott meg:

A Bizottság legsikerültebbnek tartja Kisfaludy János dolgozatát, aki az esztergomi közs. Szt. Imre reáliskolában Hasenauer Andor tanítványa volt. Különösen ügyesen a 3. feladatot oldotta meg. Az 1. feladat megoldásában az a fogyatékossága, hogy a rúdnak csak vízszintes helyzetére gondolva közölte a megfejtést. Dolgozatát a Bizottság e kis szépséghiba mellett is méltónak tartja az I. díjra.

A II. díjra a Bizottság Erőd János dolgozatát tartja érdemesnek, aki a gyöngyösi áll. Koháry István reálgimnáziumban Kmoschek Elek tanítványa volt. Erőd János mind a három feladatot megoldotta, de a 2. feladatban az *a)* és *b)* esetre vonatkozó két megoldást felcserélte.

Dícséretre ajánlja a Bizottság Simonyi Károly dolgozatát, aki a budapesti III. ker. áll. Árpád reálgimnáziumban Fáj Árpád tanítványa volt. Simonyi Károly a 2. feladatot ügyesen fejtette meg; az elsőben fölöslegesen két esetet különböztetett meg, melyekről ő maga megállapította, hogy lényegileg a kettő ugyanaz. A 3. feladat megoldásában a fogalmazása nem elég világos.

A Bizottság javasolja, hogy az I. díj 3 drb. 10 koronás arany, a II. díj 2 drb 10 koronás arany legyen.

A Bizottság javaslatához az 1934. november 8-án tartott ülésén a Választmány egyhangúlag hozzájárult.

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1934. évi május 26-iki XXXIX. közgyűlés.

A közgyűlés RADOS GUSZTÁV elnök megnyitó beszédével kezdődött:

Tisztelt Közgyűlés!

Mielőtt szemlét tartunk a lefolyt társulati évünk kimagasló eseményei fölött, legelső sorban meg kell emlékeznünk arról az 1932. október 30-iki lélekemelő, kegyeletes emlékünnepélyről, amelyen társulatunk halhatatlan megalapitójának, br. EÖTVÖS LORÁNDnak síremlékét a Magyar Tud. Akadémia elnöke, BERZEVICZY ALBERT, magasan szárnyaló beszéd kiséretében leleplezte. E síremlék, melyet br. EÖTVÖS jólsikerült mellszobra díszít, monumentális egyszerűségében méltó ahhoz a nagy férfiúhoz, akinek utolsó nyugvóhelyét jelzi. Hála és elismerés illeti a Magyar Tud. Akadémia elnökségét azért a kegyeletes buzgóságáért, amellyel hajdani nagynevű elnöke síremlékének fölállitását lehetővé tette. A társulatok és testületek egész serege koszorúkkal borította el e síremléket megható és hálaérzületektől sugallt beszédek kiséretében, közöttük a mi társulatunk is, amely br. EÖTVÖS szívéhez oly közel állt és amelynek ő alapitásától haláláig elnöke volt. A résztvevő testületek nagy száma tanúságot tesz arról, hogy elhunyt nagy elnökünk a csendes és nagyeredményű, erejének teljes megfeszitésével folytatott kutatómunkája mellett még időt szakított magának arra is, hogy a hazai művelődés minden ágazatának és szervezetének szolgálatra kész segítségével rendelkezésére álljon.

Kiemelkedő és örvendetes eseménye a lefolyt évnek FEJÉR LIPÓT t. barátomnak és elnöktársamnak amerikai útja. A világ néhány kiváló matematikusa közül ő is abban a kiváló megtiszteltetésben részesült, hogy a chicagói matematikus kongresszus egy előadássorozat megtartására hivatalosan meghívta. Amerika legkiválóbb egyetemei megragadták a kedvező alkalmat arra, hogy FEJÉRt vendégükül meghívják, úgyhogy a különböző egyetemeken 18 előadást tartott. FEJÉR amerikai szereplése a magyar tudományosságnak diadalútja volt, amelyen a magyar hazának tisztelőket és barátokat szerzett. A másik elnöktársam, TANGL KÁROLY t. barátom, pedig abban a mindannyiunkat örvendeztető megtiszteltetésben részesült, hogy a Magyar Tud. Akadémia III. osztálya őt egyhangú lelkesedéssel elnökéül választotta. Amidőn új hatáskörében való működéséhez szerencsét kívánunk, meg vagyunk róla győződve, hogy e díszes új állásban is meg fogja állni helyét és rólunk sem fog megfeledkezni.

Az idei év folyamán rendezett KÜRSCHÁK JÓZSEF és HAAR ALFRÉD-emlékünnepélyeken társulatunk méltó módon adott kifejezést a múlt évben elhunyt nagynevű tagtársaink hervadhatatlan érdemei iránti hódoló elismerésének, két ülésében behatóan ismertetvén nagyértékű kutatásaiknak eredményeit, amelyekkel a tudomány fejlődésére oly élénken behatottak.

Őszinte fájdalommal értesültünk SCHLESINGER LAJOS kitűnő társunknak múlt évi december 16-án bekövetkezett elhunytáról. A lineár differenciálegyenletek elmélete és a függvénytan az ő fáradhatatlan munkásságának világszerte ismert és nagyrabecsült eredményeket köszön, amelyekkel ő a matematika történetében magának előkelő helyet biztosított. Közel másfél évtizeden át, mint a Ferenc József tud. egyetemnek kiváló tanára a hazai felső oktatás körül szerzett érdemeket, később a giesseni egyetemnek ny. r. tanára lett, és mint ilyen úgy eredeti kutatásaival, valamint a kitünő kézikönyvek egész seregének közrebocsátásával és a Crelle-Journal szerkesztő-bizottságában való közreműködésével általános nagyrabecsülésnek örvendett. A BOLYAI JÁNOS centenariummal kapcsolatos emlékünnepély rendezésével és BOLYAI JÁNOSRA vonatkozó bibliografiai munkájának kiadásával újból reáirányította a világ figyelmét a lánglelkű magyar matematikusra, akiről a francia akadémia elnöke, mint az emberiség díszéről emlékezett meg. SCHLESINGER LAJOS a jelenkor legkiválóbb matematikusai közé tartozott, emlékét kegyeletes tisztelettel fogjuk megőrizni.

A halál — tisztelt Közgyűlés! — az elmúlt évben hatalmas rést ütött a legkiválóbb magyar matematikusok során, és amidőn ezt fájó szívvel megállapítjuk, némi vigasztalással szolgál az a körülmény, hogy elhalálozott tudósainktól nevelt fiatal kutató gárda eleven és eredményes kutató munkásságával idővel nagy veszteségünket ki fogja pótolni.

A világszerte dúló gazdasági válság hullámverése hozzánk is elérkezett. A haza megcsonkítása folytán megcsökkent tagdíjbevételeink már korántsem fedezhetik folyóiratunk kiadásának költségeit. Hálás köszönet illeti azért a Magyar Tud. Akadémiát és a Vallás- és Közoktatásügyi Minisztériumot, hogy az idén is számottevő anyagi segélyükkel nekünk lehetővé teszik dicső elődeink odaadó munkájának eredményeit egy jobb jövőbe átmenteni.

Mi pedig e nagylelkű támogatással szemben megfogadjuk, hogy mostoha viszonyok között is fokozott munkásságunkkal e támogatásra a jövőben is méltóak akarunk maradni.

Ezzel a fogadalommal nyitom meg a br. Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulatnak 39. közgyűlését.

Rados Gusztáv elnöki megnyitója után Pogány Béla ügyvezető titkár számolt be a Társulat lefolyt évi működéséről és az év fontosabb mozzanatairól:

Társulatunk a lefolyt esztendőben 11 előadó-, 3 választmányi- és 1 közgyűlést tartott. Az előadó üléseken 13 előadás hangzott el, és pedig 9 matematikai és 4 fizikai tárgyú.

Az ülések közül ünnepélyesebb keretek közt zajlottak le:

Az 1934. márc. 8-iki *Kürschák József-emlékülés*, melyen Társulatunk egy évvel ezelőtt elhúnyt kiváló alelnökének matematikai munkásságáról Rados Gusztáv elnök és Szücs Adolf tartottak magasszárnyalású beszámolót, s mely ülésen a Magyar Tudományos Akadémia, valamint a Kir. József-Műegyetem is képviseltették magukat.

Az 1934. március 22-iki *Haar Alfréd-emlékülés*, melyen Riesz Frigyes méltatta korán elhunyt nagytehetségű matematikusunk érdemeit. Ezen az ülésen a Magyar Tudományos Akadémia és a szegedi Ferenc József Tudományegyetem képviselői vettek részt.

Az 1934. április 12-iki ülésen Egerváry Jenő tartotta referátumát az idei Kőnig Gyula-jutalom odaítéléséről, rendkívül érdekes összefoglaló előadásban ismertetve a jutalom laureátusának, Veress Pálnak sokoldalú matematikai munkásságát.

Kegyeletes szavakkal emlékezik meg az ügyvezető titkár Társulatunk két világhírű tagjának: Painlevé Pál tiszteleti tagunknak és Schlesinger Lajos giesseni egyetemi tanár hazánkfiának az 1933. év folyamán bekövetkezett gyászos elhúnytáról.

Painlevé Pál a mult század legkiválóbb matematikusainak és fizikusainak egyike volt, aki mint államférfiú is nagy érdemeket szerzett. Emlékét választmányunk jegyzőkönyvileg megörökítette és a francia követséget erről átiratban értesítette, ahonnan dec. 5-én meleghangú köszönő levél érkezett elnökünk címére.

Schlesinger Lajos világhírű tekintély volt a lineáris differenciálegyenletrendszerek terén. Buzgó tagja volt Akadémiánknak és Társulatunknak. Emlékét kegyelettel fogjuk megőrizni.

Társulatunk egy kiváló érdemű régi tagját, Klug Lipót egyetemi tanárt 80-adik születésnapja alkalmából a választmány írásban üdvözölte, Miután ügyvezető-titkár beszámolt még a tanulóversenyekről, a Matematikai és Fizikai Lapokról, valamint cserefolyóiratokról, az automatikusan megüresedő választmányi tagsági helyek betöltésére került a sor. A közgyűlés a lelépő választmányi tagokat, névszerint: Bauer Mihályt, Bláthy Ottó Tituszt, Patai Imrét, Kerékjártó Bélát, Nagy Józsefet és Rhorer Lászlót egyhangúlag újra megválasztja.

Szabó Gábor pénztárosi jelentéséből a zárszámadást és vagyonmérleget itt közöljük:

1933. évi zárszámadás.

Bevétel:

		Pengő
1. 1932. évi zárszámadási maradvány:		
a) kézi pénztárban	47·84 P	
b) postatakarékpénztárban	935·95 «	
c) Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban	845·60 «	2849·39
d) takarékkönyvben (Károly Irén-alap)	1020·— «	
2. Tagdíjak		1357·20
3. Előfizetési díjak		208·34
4. Adományok (Patai Imre 684·34 P, Hoór Tempis Móric 50 P, Bláthy O. Titusz 10 P, Sárközy Pál 12 P, Tóth Aladár 6 P, Nagy L. József 20 P, Kőrös László 26 P)		808·34
5. Államsegély		500·—
6. Magyar Tudományos Akadémia segélye		500·—
7. Kamatok		74·05
8. Vegyesek		20·—
	Összesen:	6317·32

Kiadás:

		Pengő
1. Nyomdai költségek		2695·—
2. Tanulóverseny		172·98
3. Kezelési költségek		18·60
4. Vegyesek		227·54
5. Pénztári maradvány:		
a) kézipénztárban	78·21 P	
b) postatakarékpénztárban	736·99 «	
c) Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban	1368·— «	3203·20
d) takarékkönyvben (Károly Irén-alap)	1020·— «	
	Összesen:	6317·32

Vagyon-mérleg.

Vagyon:

	Korona	Pengő
1. Korona értékpapirosokban:		
a) A Magy. Lesz. és Pénzv. Bankban:		
2600 K. n. é. 4%-os fővárosi kölcsönkötvény	2600·—	
1800 « « « 6%-os hadikölcsönkötvény (4. kibocsátás)	1800·—	
300 « « « 4%-os magyar koronajáradékkötvény (Károly Irén alapítvány)	300·—	
2200 « « « 6%-os hadikölcsönkötv. (6. kibocsátás) (Károly Irén alapítvány)	2200·—	
2000 « « « $5\frac{1}{2}$%-os hadikölcsönkötvény (4. kibocsátás)	2000·—	
10000 « « « 6%-os hadikölcsönkötvény (3. kib.) Kőnig-alap	10000·—	
b) a Pesti Hazai Takarékpénztárban $\frac{04557}{c_2}$ jelzésű könyvben	108·—	
c) Állami kezelésben: Majthényi Ottó-hagyaték	10000·—	
2. Pénzkészlet:		
a) kézipénztárban 78·21 P		
b) postatakarékpénztárban 736·99 «		
c) a Magy. Lesz. és Pénzv. Bankban 1368·— «		
d) takarékkönyvben (Károly Irén-alap) 1020·— «		3203·20
3. Tagdíj és előfizetési díj hátralék		200·—
4. Nyomtatványok		100·—
Összesen:	29008·—	3503·20

Teher.

	Korona	Pengő
Nyomdai tartozás		1477·93
Egyenleg	29008·—	2025·27

Szabó Gábor s. k.
pénztáros.

Megvizsgáltuk és rendben találtuk.

Budapest, 1934. március hó 16-án.

Tass Antal s. k., *Faragó Andor* s. k., *Renner János* s. k., *Veress Pál* s. k.
a számvizsgáló bizottság tagjai.

Előadások.

1933. nov. 9. Az 1933. évi matematikai és fizikai tanulóversenyek eredményeinek kihirdetése és a díjak ünnepélyes átnyujtása. Pogány Béla: A neutrális krypton-atóm Zeeman-jelenségeiről.

1933. nov. 23. Rédei László: A Pell-féle egyenletről. Vermes Miklós: Az elektroncső erősítéséről és egyenirányításáról.

1933. dec. 7. Fejér Lipót: A Fourier-sorról.

1934. jan. 25. Kerékjártó Béla: A függvénytan topológiai problémái.

1934. febr. 8. Hajós György: Menger graph-tételéről.

1934. febr. 22. Gombás Pál: A lithiumbromid-kristály dinamikájáról.

1934. márc. 8. *Kürschák József-emlékülés.* Rados Gusztáv: Kürschák József néhány geometriai vizsgálatáról és értékelési elméletéről. Szűcs Adolf: Kürschák József munkássága a parciális differenciálegyenletek körében.

1934. márc. 22. *Haar Alfréd-emlékülés.* Riesz Frigyes: Haar Alfréd matematikai munkássága.

1934. ápr. 12. Egerváry Jenő: Jelentés az 1934. évi Kőnig Gyula jutalomról (Referatum Veress Pál matematikai munkásságáról.)

1934. ápr. 26. Erdős Pál és Turán Pál: Az interpolációról (előadta Turán Pál).

1934. máj. 26. Bay Zoltán: Áramlökések új vizsgálati módszere.

XXXIX. Közgyűlés volt: 1934. május 26-án.

Választmányi ülések voltak: 1933. nov. 9-én, 1934. ápr. 12-én és 1934. máj. 12-én.

Új tagok:

Dr. Detre László, csillagvizsgáló intézeti asszisztens, Budapest, Erdős Pál, bölcsészettanhallgató, Budapest, Dr. Rédei László, egyetemi m. tanár, Mezőtúr, Dr. Orbán György, egyetemi tanársegéd, Pécs, Dr. Wigner Jenő, a princetoni egyetem tanára, USA és Budapest.

Kimutatás.

a Tudományos Társulatok és Intézmények Országos Szövetségének Díjkezelősége útján 1934. január 1-től október 31-ig befizetett és a Társulat pénztárába 1934. február 9-től október 31-ig közvetlenül befizetett összegekről.

1. Tagdíjak.

1930-ra: Sziklai Jenő 6 P.

1931-re: Frigyesné Schwartz Emmy (3), Lengyel Béla (egyet.) (8), Simon Elemér (3) Ujj Gyula (2). *Összesen 16 P.*

1932-re: Bolla Györgyné (8), Cholnoky Jenő (8), Csizhegyi Lajos (Kolozsvár) (6), Éber József (6), Heuer Ede (8), id. Jurányi Henrik (8), Koschowitz Gyula (8), Kronberger Ede (4), Lenkey Lehel (8), Neográdyné Haich Sarolta (8), Patai László (6), Scholz Pál (8), Skopál István (8), Szerényi Géza (6), Tomits Iván (8), Zigány Ferenc (8). *Összesen 116 P.*

1933-ra: **B**lau Györgyné (6), Breuer József (Haifa) (6), **C**holnoky Jenő (8), Csizhegyi Lajos (Kolozsvár) (6), **É**ber József (4), **F**rank János (2), **G**róh Gyula (8), **H**ajós Géza (6), id. **J**urányi Henrik (8), **K**oschowitz Gyula (8), Kronberger Ede (2), **L**assovszky Károly (4), **M**arcell György (8). Misángyi Vilmos (8), Sz. **N**agy Gyula (6), Neubauer Konstantin (8), **S**ós Ernő (8), Strauss Hermann (8), Szántó Sándor (8), Szerényi Géza (3), Sziklai Jenő (6), Szmertnik István (7). **V**olenszky Gyula (4), **Z**igány Ferenc (8). *Összesen: 150 P.*

1934-re: **B**áldyné Benkő Ilona (8), Breuer József (Haifa) (4), **C**holnoky Jenő (8), **D**arkó Béla (6), **F**raknóy József (8), Frank János (4), **G**róh Gyula (8), **H**orvay Béla (8), **I**losvay Lajos (8), **J**elitai József (8), id. Jurányi Henrik (8), **K**edves Miklós (6), Klug Lipót (8), Kossowitz Gyula (8), Kovács János (8), Kövessi Ferenc (6), Kuzaila Péter (6), **L**assowszky Károly (8), Lengyel Béla (műegy.) (8), **M**arcell György (8), Magdics Gáspár (8), Misángyi Vilmos (8), Mischung Ilona (6), **N**agy Ferenc (8), Neubauer Konstantin (8), Neugebauer Tibor (8), **O**rbán György (6), Oszlaczki Szilárd (8), **P**écsi Albert (8), **R**ados Ignác (8), Rédei László (6), **S**arkadi Károly (8), Strauss Hermann (8), Szabó Gábor (8), Szabó Gusztáv (8), Sziklai Jenő (6), **T**angl Károly (8), Tardos Vida (6), Tobisch János (4), **W**igner Jenő (8), **Z**igány Ferenc (8). *Összesen 298 P.*

1935-re: **B**alyi Ferenc (6), Bauer Mihály (8), **R**enner János (8), **S**arkadi Károly (8), Sziklai Jenő (2), **T**ardos Vida (6), Tihanyi Miklós (6), Tobisch János (8). *Összesen 52 P.*

1936-ra: Tobisch János 8 P, *1937-re:* Tobisch János 2 P. *Összesen 10 P.*

2. Előfizetési díjak:

1932-re: Ref. reálgimn., Miskolc (6).

1933-ra: Műegyetemi I. Math. Gyüjtemény, Bp. (4), Orsz. Meteor. és Földmágn. Intézet, Bp. (6), Kemény Zs. reálisk. Bp. (5), Kölcsey F. reálgimn. Bp. (8), Ref. gimn. Bp. (8), Technol. és Anyagvizsg. Intézet Bp. (7·94), Szt. Imre reálgimn. Csongrád (6), Ref. reálgimn. Miskolc (6). *Összesen 50 P 94 f.*

1934-re: Műegyetemi I. Math. Gyüjtemény, Bp. (8), Orsz. Meteor. és Földmágn. Intézet, Bp. (8), Ranschburg G. könyvkeresk., Bp. (7·20), Kemény Zs. reálisk., Bp. (8), Kölcsey F. reálgimn., Bp. (8), Pesti Izr. Hitközség reálgimn.-a, Bp. (8), Ref. gimn., Bp. (8), Ref. reálgimn., Miskolc (6). *Összesen 61 P 20 f.*

1935-re: Kemény Zs. reálisk., Bp. 3 P.

3. Adományok.

Magyar Tud. Akadémia 500 P, Magyar Állam 450 P., Nagy L. József 20 P., Balyi Ferenc 4 P. *Összesen 974 P.*

Budapesten, 1934. okt. hó 31-én.

Szabó Gábor, pénztáros.

Franklin-Társulat nyomdája. — Ábrai V.

Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkívüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi reánk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhöz képest meg kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzívebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is.

Kérjük ennélfogva tisztelt tagtársainkat,

1. hogy hátralékos tagdíjaikat (évenkint 8, ill. 6 pengőt) szíveskedjenek *Szabó Gábor* pénztárosnak (Budapest, I., Verpeléti-út 7. I. 2.) vagy postatakarékpénztári csekkszámlánkra (száma 5997), vagy pedig a Tudományos Társulatok és Intézmények Orsz. Szövetségének Díjkezelősége útján befizetni.
2. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával,
3. hogy gyüjtsenek új tagokat.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA: ÁBRAI V.