MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

NEGYVENEDIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES és POGÁNY BÉLA

BUDAPEST, 1933

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

negyvenedik kötetének tartalma.

KŐNIG GYULA.[1]

(1849—1913.)

Ő rakta le az alapot, melyen hazánkban a matematikának erős vára épülhetett.

Báró Eötvös Loránd.

«Régesrégen elmult *aranykorról* mesél a rege, és egy önfeledte percben újra *hiszünk* benne. Hogy is ne, mikor magunk láttuk, magunk átéltük azt az aranykort, ifjúságunk aranykorát. Szeretjük elmult ifjúságunkat. Egyéniségünk java részét szeretjük benne — a tavasz duzzadását ereinkben, a hitet és reményt szívünkben, az eszmények világát gondolatainkban».

Nem *költő* mondta ezt ihletében. Kőnig Gyula, a *matematikus* írt így, visszaemlékezve élte tavaszára.[2] Csakugyan ama boldogok egyike volt, akik ifjúságukban anyagi gondoktól menten, zavartalanul eszményeiknek élhettek.

Kőnig Gyula 1849 december 16-án Győrött született, hol atyja jómódú kereskedő volt. Szülei, különösen finomlelkű anyja, féltő gonddal nevelték gyermeküket.

---

[1] Kürschák József e tanulmányát öt évvel ezelőtt írta a Faragó Andor és Nagy József szerkesztésében megjelenő «*Kiváló matematikusok és fizikusok*» c. gyüjtemény számára és így — szélesebb köröknek, elsősorban a tanuló ifjúságnak szólván — Kőnig Gyula magasabb matematikai ismereteket igénylő vizsgálatait éppen csak érinti. Mégis szolgálatot vélünk tenni olvasóinknak, midőn — Faragó Andor tanár úr szíves engedélyével — e posztumus nekrológot Kőnig Gyula halálának huszadik évfordulója alkalmából lapunkban közzétesszük, mielőtt még a fentemlített gyüjtemény második része megjelenhetne. *Szerk.*

[2] *Helmholtz és a jelenkori német tudományosság,* előadta a Magyar Tudományos Akadémia 1895 május 12-én tartott ünnepélyes közülésén Kőnig Gyula. (Akadémiai Értesítő, 1895.)

Még tizedik évének betöltése előtt 1859-ben a Szent Benedek-rend híres győri gimnáziumában találjuk, amelynek anyakönyveit közéletünk számos jelesének neve ékesíti, köztük a haza bölcseé, DEÁK FERENCÉ.

KŐNIG mind a nyolc osztályban az intézetnek jeles tanulója volt. Tanárain szeretettel csüngött s egy jutalomkönyvet, amellyel még az első osztályban tüntették ki, élete végéig mint kedves emléket őrizett.

A tanulásban nem volt egyoldalú. Nemcsak a matematika és a természettudományok iránt érdeklődött, hanem éppen olyan fogékony volt az ókori remekírók szépségei iránt is. A klasszikus műveltségnek később is őszinte tisztelője maradt. Hogy a latin és görög remekírók mellett a magyar lírikusok is hatottak reá, mutatja a következő hangulatos költeménye a gimnáziumi önképzőkör 1864—65-iki érdemkönyvében, a *Reménybimbók*-ban.

Egy könnyező gyermekhez.

Ha a szerelmes napsugár
A földre száll alá,
A kis virághoz elsiet
És csókot nyom reá.

Harmatcsepp lesz az égi nyom,
Melyhez mi sem rokon:
Szelid örömök csókja tán
E könny szép arcodon.

Vagy áthasítva szép szemed
Rejtélyes tengerét,
Egy vakmerő tűzé-e fel
A bú e gyöngy jelét?

Ha úgy, akkor töröld le azt
S keresd játékidat!
Hervadtá lesz a kis virág
Hosszú eső alatt.

Még nem neked való a könny
— Hisz a mosoly tied! —
Majd más idők, majd más napok
Kicsalják könnyidet.

És mégis áraszt könnyeket
Az ifjú és a vén:
Mind hordoz sajgó sebhelyet
Feljajduló szivén.

Siratja egyik nemzetét,
A multat és jelent,
Siratja a jövő miatt
A sok részvételent.

Hiú szerelmet más sirat
Es csalfa hölgy kegyét.
De még tied most a mosoly,
Használd fel idejét!

Ha a mosoly ül arcodon
Virágos föld leszen
S két víg madárka: két szemed
Mosolygva megjelen.

És százszor többet mond, jelent
Mint mit madár cseveg,
Midőn reánk tekintenek
Az ártatlan szemek.

Azért a boldog szép szemek
Vígak maradjanak,
Ne hirdessen rejtett sebet
Az ifjúi alak.

18-ik évét betöltve, Kőnig 1868 február elején Bécsben az egyetem orvosi karán iratkozott be, de már akkor matematikai előadásokat is hallgatott. Az 1868—69. tanév téli félévét a berlini egyetem bölcsészeti karán töltötte. Ugyanazon tanév nyári félévében Heidelbergben találjuk, amelynek egyetemén négy félévet töltött, egyet már doktori szigorlata után. Végre 1871 téli félévében visszatért Berlinbe s ott fejezte be egyetemi tanulmányait.

Heidelberg, hol Kőnig egyetemi éveinek felét töltötte, akkor nagy vonzóerőt gyakorolt azokra a magyar ifjakra, akik exakt tudományoknak szánták életüket. Hosszabb vagy rövidebb ideig ott voltak br. Eötvös Loránd fizikus, Than Károly és Wartha Vince kémikusok és sok más jelesünk. Ez természetes is volt. Heidelberg akkor az exakt tudomány annyi kiváló művelőjét mondhatta a magáénak, hogy törekvő ifjaink méltán iparkodtak tőlük tanulni. Ott működtek Bunsen és Kirchhoff, a színképelemzés feltalálói. Az élettant (physiologiát) Helmholtz tanította, akinek sokoldalú szelleme az élettanban, a fizikában és a matematikában egyaránt kivált. 1869-ben odakerült Koenigsberger, egy évvel az elliptikus függvények transzformátiójáról, szorzásáról és moduláris egyenleteiről írt munkájának megjelenése után. Kőnig Heidelbergben vegyest látogatott matematikai, fizikai, bölcsészeti meg orvostudományi előadásokat és szemináriumokat. Alighanem Helmholtz hírneve vonzotta Heidelbergbe. Az ő vezetése alatt végezte az idegizgatásra vonatkozó kisérleteit. Róluk írt értekezését, első tudományos dolgozatát, 1870-ben a bécsi Akadémia adta ki. Kőnig pályájára azonban Koenigsberger-nek nagyobb befolyása volt, mint Helmholtz-nak. Doktori értekezése nem az élettanból, hanem a matematikából való s az elliptikus moduláris egyenletekre vonatkozik.

Heidelbergben töltött ideje Kőnig lelkében sohasem enyésző nyomokat hagyott. Még egy negyedszázad mulva is, Helmholtz-ról való megemlékezésében, így szól Heidelbergről:

«Huszonöt éve immár, de még most is ott látom magam előtt — Németország délnyugati határszélén — a kis, kedves

Neckar-parti várost, Heidelberget; közvetlenül fölötte a német Alhambra maradványai, mintha nem is volnának romok, mintha csak eltávozott volna belőlük ami mulandó és emberi, hogy annál tisztábban hirdethessék az örök szépet; és távolabbról — de rövid sétában elérhető — erdők és hegyek hívnak magukhoz, melyekbe — hálából — saját víg élete költészetét vitte be a heidelbergi deák. A városban — mely azóta már egész, egész más lett — ódon házak és ezek között az egyetem akkor még szerény épületei. Az emberek élete az egyetem, tanárai és tanulói körül fordul meg. Ezek különben nincsenek valami sokan; mindössze egy pár száz. De összetartanak, mert összetartoznak. A szegény vidéki tanító fia és a gazdag főúri család sarja — amíg itt van — tanuló és semmi más. Ha kell, megél kis stipendiumából, de nem irnokoskodik és nem ad leckéket».

A nyilvános élet minden áramlatában részes berlini egyetemért Kőnig sohasem tudott annyira lelkesedni, mint a csendes Heidelbergért. Pedig tanári működésének és tudományos vizsgálatainak irányára életének legnagyobb részén át éppen berlini mestereinek volt a legerősebb befolyásuk: az algebra és számelmélet terén kiváló Kronecker-nek, valamint Weierstrass-nak, aki a függvénytan legfelsőbb részeinek és első alapjainak egyaránt mély elméjű kutatója volt.

Miután Kőnig hazajött, 1871 végén Budapesten a tudományegyetemen magántanári képesítést szerzett. 1873-ban a műegyetemen a matematikának helyettes tanárává, egy év mulva pedig rendes tanárává neveztetett ki. 1886—1890-ben a mérnöki és épitészeti szakosztálynak dékánja volt, 1891—93-ban pedig műegyetemi rektor. 1905-ben egy nagy könyvkiadó vállalatnak, a Franklin-Társulatnak, ügyvezető alelnökévé választatván meg, a műegyetemen nyugdíjaztatását kérte; mint cimzetes rendes tanár azonban még számos éven át tartott előadásokat a matematikának tetszése szerint választott fejezeteiből.

Hosszú tanári pályáján előadásainak tárgya ismételten megváltozott. A tanárjelölteknek tartott úgynevezett speciális előadásai felölelték a politikai számtantól kezdve az elvont halmazelméleti kérdésekig a modern matematikának legkülönbözőbb fejezeteit. A technikusoknak sem tanította mindig ugyanazt a tárgyat. Nekik legszívesebben az analizis alapvető fejezeteit adta elő. A szám, a mérés és a határérték fogalmának szigorú kifejtése különösen vonzotta. Azt lehetne hinni, hogy páratlanul egyszerű, tovább nem elemezhető dolgot végzünk, midőn a távolságokat mérve, az egyenes vonalnak minden pontjához egy valós számot és viszont minden valós számhoz egy pontot rendelünk. De a mélyebb gondolkodás azt mutatja, hogy ebben a látszólag magától értetődő folyamatban is a feltevéseknek jelentékeny sorozata rejlik. Közülük legalább a leglényegesebbeket *tudatossá* tenni, ezt tartotta Kőnig a legszebb feladatnak, amelyre a matematika tanára vállalkozhatik. Mintegy a technikusok filozófiai kiképzését látta benne, sőt erkölcsi erőt is tulajdonított az alapok eme komoly átgondolásának. Szívesen elismerte, hogy a lángész e nélkül is megtalálja útját; hisz lángelmének épen azt tekintjük, aki mintegy sugalatszerűen igaz világításban és valódi összefüggésükben látja a dolgokat. De milyen ritka a lángész. Nekünk többieknek fáradságos munkába kerül, ha nem akarunk mindig kitaposott utakon maradni, s mégis el akarjuk kerülni a tévedések forrásait. Kőnig épen a matematika alapjainak átgondolását tartotta a legalkalmasabbnak arra, hogy *fegyelmezett gondolkodáshoz* szoktasson.

Kőnig előadásainak filozófiai szinezetéből nem szabad azt következtetnünk, hogy csak az elvont gondolkodást, a szürke *elméletet* tudta megbecsülni. Valóban sohasem tévesztette szem előtt, hogy a *tényeknek* világos, értelmes, szabatos és szemléletes ismerete nélkül minden gondolatunk csak a sötétben való tapogatódzás. Azért fontosnak tartotta és vallotta, hogy a technikus laboratóriumokban minél közvetlenebb tapasztalat útján barátkozzék meg az anyagnak és a természet erőinek viselkedésével. A műhelyi gyakorlatot senki sem becsülte többre nálánál. Hisz valamikor ő maga is laboratóriumban végezte első tudományos kutatását, bár nem technikai laboratóriumban, hanem Helmholtz élettani intézetében.

Az elvont elmélkedést és a kisérleti, tapasztalati megismerést egyaránt tisztelte, még pedig nemcsak hasznukért, hanem már önmagukért. A tudományban a kultúrának *önmagában* értékes elemét látta, lelkünk egy *sajátos* szükségletének kielégítését, a művészetnek testvérét. Azt vallotta: [1]

«A tiszta tudomány saját magán kívül egyéb célt nem ismer; törvényeket keres, nem hogy javítson, nem hogy használjon, hanem csak azért, hogy tudjon».

«Ha PLATON-nak hitták is azt a görög tudóst, ki homokkal behintett abakusán rajzolgatta a kúpszeletek furcsa alakjait, azért még sem sejthette, ő ép oly kevéssé, mint bárki más abban a korban, hogy e görbe vonalak minden számoló technikának nélkülözhetetlen alapjait teszik majdan kétezer év után. Tudni akart — és semmi egyebet».

«De ami a legcsodálatosabb, az, hogy a tudomány nem elégszik meg, épúgy, mint a művészet nem elégedhetik meg a közvetlen, szorosan vett igazsággal, a tények kézzelfogható igazságával». «A legszárazabb részletekben is megkívánjuk a rendezést, az összefoglalást, az összhangzatot. S e követelés kútforrása nem a külvilágban, nem a reánk ható tüneményekben, hanem saját magunkban, gondolkodásunk módjában rejlik».

«Szóval a tudományban is megvan a szép követelése».

A gravitáció törvényét «ép annyi joggal mondhatjuk szépnek, mint igaznak, mert ahol a szépet elemezni birjuk, az nem más, mint egyszerűségükben harmonikus viszonyok öntudatos és öntudatlan hatása».

Milyen új tételekkel gazdagította KŐNIG a tudományt? Továbbá milyen már előtte ismeretes tételekre talált a réginél egyszerűbb, átlátszóbb bebizonyítást? Ha ezekre a kérdésekre minél számosabb eredménynek felsorolásával akarnék felelni, akkor többnyire olyan mezőkön kellene kalandoznom, ahová kevés olvasó

---

[1] *A természettudományok kezdetei.* Népszerű természettudományi előadások gyüjteménye, III. kötet, 17. füzet. Kiadja a K. M. Természettudományi Társulat, 1879.

követhetne. De vannak Kőnig vizsgálatai között, még pedig éppen a legnevezetesebbek között, olyanok is, amelyeket — legalább részletesebb magyarázat után — szélesebb körök is megérthetnek. Lássunk ezek közül egynéhányat.

1876-tól kezdve három éven át *Műegyetemi Lapok* címen havi folyóirat jelent meg a matematika, a természettudományok és a technikai tudományok elméletének köréből. Ennek első kötetében jelent meg Kőnig dolgozata: *Az n-edfokú algebrai egyenletek általános megfejtéséről,* amely igen meglepő tételt tartalmaz.

Jelentse $f(x)$ egy tetszőleges

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

n-edfokú egyenlet baloldalát. Az $f(x)$-hez könnyen található olyan

$$Q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

végtelen sor, amely x-nek a zérushoz közel eső értékei mellett összetartó s összegül $f(x)$ reciprok értékét adja. E sort $\frac{1}{f(x)}$ hatványsorának nevezzük.[1]

[1] Ha például

$$f(x) = 1 - x - 2x^2,$$

akkor

$$\begin{array}{ll} & 1 : (1 - x - 2x^2) = 1 + x + 3x^2 + \cdots \\ & \underline{1 - x - 2x^2} \\ \text{Maradék:} & x + 2x^2 \\ & \underline{x - x^2 - 2x^3} \\ \text{Maradék:} & 3x^2 + 2x^3 \\ & 3x^2 - 3x^3 - 6x^4 \\ & \ldots \end{array}$$

A számítást folytatva:

$$Q(x) = \frac{1}{f(x)} = 1 + x + 3x^2 + 5x^3 + 11x^4 + 21x^5 + \cdots .$$

Az első együtthatók $c_0 = 1$, $c_1 = 1$; a további együtthatók a

$$c_n = c_{n-1} + 2c_{n-2}$$

képlet szerint adódnak.

A $Q(x)$ sorról már a XVIII. században tudták, hogy együtthatói $f(x) = 0$ megoldásával szoros kapcsolatban vannak. Egyebek között már akkor ismeretes volt a következő tény:

Ha az $f(x) = 0$ egyenlet együtthatói valósak, továbbá a gyökök között van egy olyan pozitív gyök, amely minden más gyöknél kisebb abszolut értékű: akkor a megfelelő $Q(x)$ hatványsorban bizonyos tagtól kezdve minden együttható egyenlő előjelű.[1]

Kőnig tétele szintén $Q(x)$ együtthatóinak előjelére vonatkozik, de bonyodalmasabb esetben.

Jelentsen $f(x) = 0$ továbbra is *valós* együtthatós egyenletet és osztályozzuk gyökeit oly módon, hogy az egymással egyenlő abszolut értékű gyököket és csak ezeket egy osztályba foglaljuk. Kőnig azzal az esettel foglalkozott, midőn a legkisebb abszolut értékű gyökök osztálya *két* számból áll, még pedig egymással konjugált

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad a - bi = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

komplex számból.

Ebben az esetben $Q(x)$ együtthatói közül végtelenül sok pozitív előjelű és végtelenül sok negatív előjelű. (A *zérus* előjelének tetszés szerint $+$ vagy $-$ tekinthető.) Valahányszor valamely együtthatóra vele ellenkező előjelű következik, azt mondjuk, hogy *jelváltás* áll be. A c_m együtthatóig beálló jelváltások számát φ_m-mel jelöljük.[2]

Kőnig tétele a következő:

---

[1] Ha például

$$f(x) = 1 - x - 2x^2,$$

akkor $f(x) = 0$ gyökei $\frac{1}{2}$ és -1. Közülük $\frac{1}{2}$ pozitív és kisebb mint (-1) abszolut értéke, vagyis mint 1. A megfelelő $Q(x) = \frac{1}{f(x)}$ hatványsor együtthatóira (az előbbi jegyzetben) csupa pozitív számot kaptunk.

[2] Ha $c_0, c_1, c_2 \cdots$ előjelei

$$+ \quad \underset{0}{+} \quad \underset{0}{+} \quad \underset{1}{-} \quad \underset{1}{-} \quad \underset{1}{-} \quad \underset{2}{+} \quad \underset{3}{-} \quad \underset{4}{+} \quad \underset{4}{+} \quad \cdots,$$

akkor $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ az előjelek alá írt számokkal egyenlők.

Ha a valós együtthatós $f(x)=0$ egyenletnek gyökei között van két olyan konjugált gyök,

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \quad \text{és} \quad a-bi=r(\cos\varphi-i\sin\varphi),$$

amelyeknek r abszolut értéke kisebb bármely más gyök abszolut értékénél, továbbá a jelölés úgy van választva, hogy $b>0$, (tehát φ — ívmértékben kifejezve — zérus és π közé esik): akkor a

$$\frac{\varphi_1}{1}, \frac{\varphi_2}{2}, \frac{\varphi_3}{3}, \ldots, \frac{\varphi_m}{m}, \ldots$$

sorozat tagjai egy véges limesz felé közelednek és ez a limesz egyenlő a $\frac{\varphi}{\pi}$ hányadossal.[1]

[1] Például az

$$f(x)=1+x^2=0$$

egyenletnek egyáltalában csak két gyöke van s ezek az i és $-i$ konjugált komplex számok

Ebben az esetben

$$Q(x)=\frac{1}{f(x)}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots.$$

Ha az előjelek kiírásánál minden 0 helyébe a megelőző tag együtthatójának előjelét írjuk, akkor az előjelek sorozata:

$$++--++--++--++\cdots$$

Innen

$$\frac{\varphi_1}{1}=\frac{0}{1}, \quad \frac{\varphi_3}{3}=\frac{1}{3}, \quad \frac{\varphi_5}{5}=\frac{2}{5}, \quad \frac{\varphi_7}{7}=\frac{3}{7}, \ldots$$

$$\frac{\varphi_2}{2}=\frac{1}{2}, \quad \frac{\varphi_4}{4}=\frac{2}{4}, \quad \frac{\varphi_6}{6}=\frac{3}{6}, \quad \frac{\varphi_8}{8}=\frac{4}{8}, \ldots$$

A $\frac{\varphi_m}{m}$ hányados értéke

$$\frac{1}{2} \quad \text{vagy pedig} \quad \frac{1}{2}-\frac{1}{2m}$$

a szerint, hogy m páros vagy páratlan szám. Tehát e hányadosnak limesze: $\frac{1}{2}$.

Ez az eredmény megegyezik azzal, hogy az

$$i=\sqrt{-1}=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

szám esetében

$$\varphi=\frac{\pi}{2} \quad \text{és innen} \quad \frac{\varphi}{\pi}=\frac{1}{2}.$$

Igen figyelemreméltó néhány olyan tételnek König-féle bebizonyitása, amelyeket mások találtak, sőt előtte már többen bebizonyitottak, de korántsem olyan egyszerű és megkapó módon. Lássunk kettőt a *halmazelmélet* (Mengenlehre) köréből. Előbb azonban barátkozzunk meg ennek a tudományágnak nélkülözhetetlen elemeivel.

Mit nevezünk *halmaznak?* Egy kosárba rakott almák halmazt alkotnak. Egy osztály tanulóit vagy egy könyvnek mondatait egyaránt halmaznak mondjuk. Több pontot együtt ponthalmaznak, több számot együtt számhalmaznak nevezünk. Általában *halmazon* több egyed (konkrét vagy elvont tárgy, esetleg személy) összefoglalását értjük. Az összefoglalt egyedek a halmaznak *elemei.*

Megtörténhetik, hogy valamely halmazból elvéve egy elemet, azután egy másodikat, egy harmadikat s így tovább, a halmazt kimerithetjük. S ilyenkor azt mondjuk, hogy a halmaz *véges.* Ellenkező esetben a halmazt *végtelennek (transzfinitnak)* mondjuk. Egy kosár alma véges halmazt alkot. Az egyenes összes pontjainak halmaza végtelen.

A végtelen halmazok elméletét Cantor György alapitotta meg 1874—97. megjelent értekezéseiben. Tanai kezdetben nehezen terjedtek. König azonban korán felismerte jelentőségüket és 1887-ben *Analizis* cimű művébe Cantornak több tételét felvette.[1]

A halmazelmélet legelső megállapitása, hogy mikor mondunk két halmazt *aequivalensnek* vagy *egyenlő számosságúnak* (von gleicher *Mächtigkeit),* azaz mikor tekintünk két halmazt *ugyanannyi* elemből állónak?

Egy társaságnak teritett asztalról akkor mondjuk, hogy rajta ugyanannyi teríték van, mint ahány tagú az egybegyült társaság, ha mindenkinek jut teritéke és minden teritékre jut, aki lefoglalja.

Általában két véges és hasonlóképen két végtelen halmazt

---

[1] Pl., hogy a természetes számok és egy egyenesdarab pontjai nem vonatkoztathatók egymásra kölcsönösen egyértelműen.

akkor mondunk aequivalensnek, ha elemeik között *kölcsönösen egyértelmű* vonatkozás hozható létre, vagyis ha a két halmaz elemeit úgy rendelhetjük egymáshoz, hogy mindegyik halmaz bármely eleméhez a másik halmazban egy és csak egy megfelelő elem tartozik.

Például a pozitiv egész számok és a negativ egész számok igy rendelhetők kölcsönösen egyértelműen egymáshoz:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6,\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6,\ldots . \end{array}$$

Azért a pozitiv egész számok halmazát és a negativ egész számokét egyenlő számosságúnak vagy aequivalensnek mondjuk. Ha két halmaz mindegyike aequivalens ugyanazzal a harmadikkal, akkor egymással is aequivalens.

Az olyan halmazt, amely a természetes egész számok halmazával aequivalens, *megszámlálhatóan végtelennek* mondjuk. Nem minden halmaz ilyen. Ha pl. egy egyenesdarabnak minden pontjához egy természetes számot akarunk rendelni és pedig mindegyikhez mást, akkor erre a természetes számok nem bizonyulnak elegendőknek.

A véges és a végtelen halmazok között a következő lényeges különbség van. Ha véges halmazból elveszünk egy vagy több elemet, akkor a megmaradt részlethalmaz nem lehet aequivalens az eredeti halmazzal. Végtelen halmaznak ellenben mindig van *vele aequivalens* részlethalmaza.

Például az

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

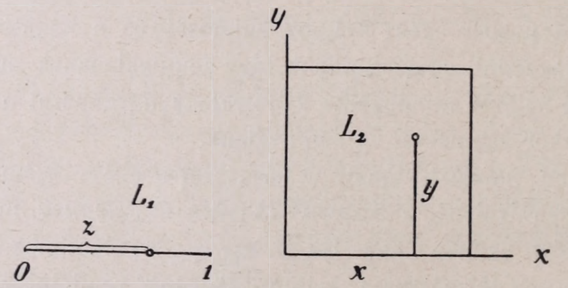
véges számhalmaznak és az ő

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$$

részlethalmazának számai nem hozhatók egymással egyértelmű vonatkozásba. Ellenben az *összes* természetes számok halmaza aequivalens azzal a részlethalmazával, amely pusztán a páros természetes számokból áll, mint ezt a következő egymáshoz rendelés mutatja:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, \ldots . \end{array}$$

Minket különösen az 1. ábra L_1 és L_2 ponthalmazai fognak foglalkoztatni. L_1 olyan *egyméretű* kontinuum, amelyet egy egyenes darabnak belső pontjai és az 1-gyel jelölt végpont alkotnak. L_2 olyan *kétméretű* kontinuum, amely egy négyzetnek belső és kerületi pontjaiból áll két (az x, illetve y tengelyre



1. ábra.

eső) oldal pontjainak híján. Az egyenesdarabnak és a négyzet oldalainak hosszúsága legyen egyaránt a hosszegységgel egyenlő.

L_2-nek azon pontjai, amelyek a négyzetnek felső oldalán vannak, együtt nyilván L_2-nek olyan részlethalmazát alkotják, amely aequivalens L_1-gyel. De van-e fordítva L_1-nek olyan részlethalmaza, amely L_2-vel aequivalens? *Szintén van!* Ezt következőképen láthatjuk be.

Ha L_1 pontjait a zérussal jelölt ponttól való távolságukkal jellemezzük, akkor L_1 minden pontjához olyan z szám tartozik, amelyre $0 < z \leqq 1$, és fordítva ezen egyenlőtlenséget kielégítő minden z szám L_1-nek egy pontját határozza meg.

Ha továbbá L_2 pontjait a kijelölt tengelyekre vonatkozó derékszögű koordinátáikkal jellemezzük, akkor L_2 minden pontjához olyan (x, y) számpár tartozik, amelyben $0 < x \leqq 1$ és $0 < y \leqq 1$, és fordítva ezen egyenlőtlenségeket kielégitő minden számpár L_2-nek egy pontját határozza meg.

Az x, y, z számokat tizedestört-alakban írjuk, még pedig *szoros értelemben* végtelen tizedestörtnek alakjában. Vagyis pl. a

$$0{\cdot}258$$

számot nem fogjuk ebben a véges tizedestört-alakban írni, sem a tőle zérusok hozzácsatolásával keletkező

$$0{\cdot}2580000\ldots$$

alakban, hanem a zérustól különböző jegyek közül az utolsót 1-gyel kisebbítjük és utána csupa kilencest teszünk, vagyis a számot így írjuk:

$$0{\cdot}257999\ldots$$

Szóval: L_1 pontjait a

$$z = 0{\cdot}c_1c_2c_3\ldots$$

alakú *szorosan vett* végtelen tizedestörtekkel jellemezzük, L_2 pontjait pedig az

$$x = 0{\cdot}a_1a_2a_3\ldots, \qquad y = 0{\cdot}b_1b_2b_3\ldots$$

alakú szintén *szorosan vett* végtelen tizedestört-párokkal. (Az a-k, b-k és c-k *számjegyeket* jelentenek.)

Most már L_2-nek minden (x, y) pontjához L_1-nek azt a pontját rendeljük, amelyet x és y jegyeiből a

$$z = 0{\cdot}a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$$

képlet ad meg.

Ily módon L_2 minden pontjához kapunk L_1-ben neki megfelelő pontot; még pedig L_2-nek két különböző pontjához L_1-nek két különböző pontját kapjuk.

Még csak az a kérdés, teljesen kitöltik-e az L_2 pontjaihoz rendelt pontok L_1-et, vagy összességük L_1-nek csak egy részlethalmazát alkotja? *Valóban az utóbbi fog bekövetkezni.*

Ugyanis pl. L_1-nek

$$z = 0{\cdot}c_1c_2\,0\,c_4\,0\,c_6\,0\,c_8\,0\,c_{10}\ldots$$

pontja nem felel meg L_2 egy pontjának sem, mert

$$x = 0{\cdot}c_1 0000 \ldots, \quad y = 0{\cdot}c_2 c_4 c_6 c_8 c_{10} \ldots$$

közül az első nem *szorosan vett* végtelen tizedestört.

Tehát csakugyan sikerült L_2 pontjait és L_1 egy *részlethalmazának* pontjait kölcsönösen egyértelműen egymásra vonatkoztatni. A mód, ahogyan ezt elértük, lényegében CANTOR-tól való. Ő ugyan tizedestörtek helyett lánctörteket használt, de ez a körülmény mellékes.

Most már áttérhetünk azokra a tételekre, amelyeknek KŐNIG-féle bebizonyításával foglalkozni akarunk, mindenekelőtt a következőre:

Az L_1 és L_2 kontinuumok egymással aequivalens halmazok.

Ezt CANTOR az előbbi eredményből további halmazelméleti meggondolásokkal vezette le.

Csak KŐNIG ismerte fel, hogy az előbbi meggondolásokon milyen keveset kell változtatni, hogy az előbbi eredmény helyett a mostani tételt kapjuk.[1] Mindössze a tizedes jegyek helyébe bizonyos jegycsoportokat kell tenni. A világhírű KLEIN FELIX ezt találó hasonlattal így szokta kifejezni: KŐNIG a tizedestörtek *atomjai* helyett a *molekuláikat* használta.

Például

$$0{\cdot}320\ 800\ 700\ 030\ 245 \ldots$$

molekulái:

$$a_1 = [3], \quad a_2 = [2], \quad a_3 = [08], \quad a_4 = [007], \quad a_5 = [0003],$$
$$a_6 = [02], \quad a_7 = [4], \ldots .$$

Általában minden molekula egy zérustól különböző jegyből és a közvetlenül előtte levő zérusokból áll.

Ha most már L_2-nek

$$x = 0{\cdot}[a_1]\,[a_2] \ldots, \qquad y = 0{\cdot}[b_1]\,[b_2] \ldots$$

pontjához L_1-nek

$$z = 0{\cdot}[a_1]\,[b_1]\,[a_2]\,[b_2]\,[a_3]\,[b_3] \ldots$$

[1] *Az egy- és többméretű sokaságok kölcsönösen egyértelmű vonatkoztatása.* Felolvasva a Mat. és Fiz. Társulat 1894 nov 15.-i ülésén.

pontját rendeljük: akkor — úgy mint előbb — most is L_2 minden pontjához kapunk L_1-ben neki megfelelő pontot; még pedig L_2-nek két különböző pontjához az L_1-nek két különböző pontját kapjuk. De most az L_2 pontjaihoz rendelt pontok teljesen kitöltik L_1-et, mert L_1-nek bármely

$$z = 0 \cdot [c_1]\,[c_2]\,[c_3]\,[c_4] \ldots$$

pontja az L_2 valamely pontjának, még pedig az

$$x = 0 \cdot [c_1]\,[c_2] \ldots, \qquad y = 0 \cdot [c_2]\,[c_3] \ldots$$

pontnak megfelelője. Most nem következhetik be az az eset, hogy x-re vagy y-ra nem *szorosan vett* végtelen tizedestört adódnék, mert minden molekula tartalmaz egy zérustól különböző jegyet.

A másik halmazelméleti tétel, amelynek Kőnig-féle bebizonyításával foglalkozni akarunk, a következő:

(Cantor aequivalentia-tétele.) *Legyen X és Y két meghatározott halmaz; X' legyen az X-nek, Y' pedig az Y-nak olyan részlethalmaza, hogy*

$$X \sim Y' \text{ és } Y \sim X'.$$

Akkor ebből mindig következik, hogy

$$X \sim Y.$$

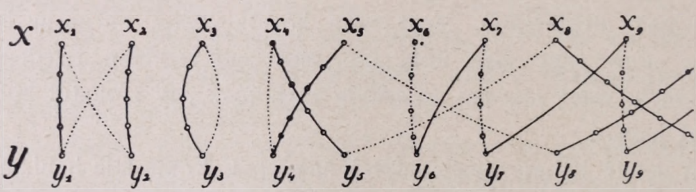
Itt $\sim$ az *aequivalentia* jele. Tehát $X \sim Y'$ azt fejezi ki, hogy X és Y' elemei egymással kölcsönösen egyértelmű vonatkozásba hozhatók. Jelentsen S ilyen vonatkozást. Hasonlóképen $Y \sim X'$ azt fejezi ki, hogy Y és X' elemei egymással kölcsönösen egyértelmű vonatkozásba hozhatók. Jelentsen T ilyen vonatkozást.

Az aequivalentia-tétel azt mondja, hogy ebben az esetben X és Y elemei szintén kölcsönösen egyértelmű vonatkozásba hozhatók.

A tételt már Cantor kimondta és például abban az esetben, midőn X és Y az előbbi L_1 és L_2 kontinuumokat jelentik, be is bizonyította. A tétel első általános bebizonyítása Bernstein-től való (1897).

KŐNIG bebizonyításának[1] szemléletessége különösen akkor szembeszökő, ha a geometria nyelvét használjuk.[2]

Legyenek tehát X és Y ponthalmazok; pontjaikat jelöljük x-ekkel, illetve y-okkal (2. ábra[3]). Minden x pontot összekötjük azzal az y-nal, amelyet az Y' halmazban az S vonatkozás hozzá rendel. Továbbá minden y pontot összekötjük azzal az x-szel, amelyet az X' halmazban az S vonatkozás hozzá rendel. Az összekötéseket S *szálaknak,* illetve T *szálaknak* nevezzük. A 2. ábrában az S szálak megszakítás nélkül, a T szálak szakadozottan vannak rajzolva. (A karikák jelentéséről később lesz szó.)



2. ábra.

Minden x pontból egy és csak egy S szál indul ki; T szál csak az olyan x pontból indul ki, amely az X' részlettartománynak pontja. Minden y pontból egy és csak egy T szál indul ki; S szál csak az olyan y pontból indul ki, amely az Y' részlettartománynak pontja.

Az egymáshoz csatlakozó szálakat egy-egy vonalba foglaljuk össze. Minthogy minden pontból legfeljebb két szál indul ki, a kapott vonalak sehol el nem ágaznak. Továbbá két közvet-

---

[1] *A halmazok elméletéhez,* Mathematikai és Physikai Lapok, XV. köt. (1906), 253—255. lap.

[2] KŐNIG GYULA a bebizonyítást elvontan fogalmazta meg. A geometriai megérzékítésre fia, KŐNIG DÉNES figyelmeztetett.

[3] KÜRSCHÁK hátrahagyott kéziratában az ábrák hiányoztak. E helyütt KÜRSCHÁK egy az itt közölthöz hasonló ábrára gondolhatott, amely a ***vég-telen*** halmazok közti vonatkoztatásokat természetszerűleg csak részben (és pedig egy *speciális* példánál) érzékíti meg. *Szerk.*

lenül egymáshoz csatlakozó szál közül az egyik mindig S szál, a másik pedig T szál.

Bármelyik vonalon *legalább az egyik értelemben* sohasem jutunk végpontba. Ha ugyanis pl. valamely x pontban kezdjük meg útunkat, akkor innen mindenesetre kiindul egy S szál; rajta eljuthatunk egy y pontba; ebből egy T szál elvezet egy x pontba; és így tovább.

Azonban az ellenkező értelmű haladásnál megtörténhetik, hogy valamely T szálon olyan x pontba érünk, amely nem az X' részlethalmazból való, vagy hogy valamely S szálon olyan y pontba érünk, amely nem az Y' részlethalmazból való. Az ilyen x, illetve y pontban nem találunk elvezető T, illetve S szálat.

Tehát a következő esetek lehetségesek:

Ia. A vonal egy x pontból kiinduló S szállal kezdődik és sehol véget nem ér, sem önmagába vissza nem tér.

Ib. A vonal egy y pontból kiinduló T szállal kezdődik és sehol véget nem ér, sem önmagába vissza nem tér.

II. A vonal egymással váltakozó S és T száluknak mindkét értelemben határtalan sorozata.

III. A vonal véges számú szálból áll és zárt. Az S és T szálak váltakozása miatt a szálak száma okvetlenül páros.

Most már X valamennyi pontját Y valamennyi pontjával a következő módon hozhatjuk kölcsönösen egyértelmű vonatkozásba. Olyan x, ponthoz, amely ***Ia, II*** vagy ***III*** típusú vonalon van, a belőle kiinduló S szálnak y végpontját rendeljük. Ellenben olyan x ponthoz, amely ***Ib*** típusú vonalon van, a belőle kiinduló T szálnak y végpontját rendeljük.

Az új vonatkozást az ábrának karikázott szálai ábrázolják. Ezek végpontjaképpen minden x és y pont szerepel, még pedig csak egyszer. Tehát az $X \sim Y$ aequivalentia így szemléletes módon van megállapítva.

Kőnig tudományos érdemei nem maradtak elismerés nélkül. Midőn nyugalomba vonult, a király a *Pro litteris et artibus* érdemjelvénnyel tüntette ki, a legnagyobb kitüntetéssel, amelyben magyar tudós vagy művész az uralkodótól részesülhetett. A Magyar Tudományos Akadémia 1881-ben levelező tagjává, 1889-ben rendes taggá, 1894-ben a III. osztálynak titkárává és 1910-ben igazgatósági taggá választotta. Jutalommal három munkáját koszorúzta. Ezek:

A másodrendű és két független változót tartalmazó parciális differenciál-egyenletek elmélete (1884. Bézsán-jutalom).

Analizis, bevezetés a mathematika rendszerébe, I. kötet. (1890-i nagyjutalom.)

Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai (1904-i nagyjutalom).

König-nek alighanem minden más kitüntetésnél kedvesebb emléke lett volna az a párját ritkító érdeklődés és elismerés, amellyel a világ minden részéről összegyült szaktársai 1904-ben Heidelbergben a nemzetközi matematikai kongresszuson halmazelméleti előadását fogadták, ha örömének édes kelyhébe nem került volna egy keserű ürömcsepp. Ez az előadás König életében és a halmazelmélet történetében fordulópontot jelent. Foglalkozzunk tehát tartalmával, fogadtatásával és a halmazelmélet történetében viselt szerepével.

Az előadás Cantor-nak azzal az ismételten kimondott sejtésével foglalkozott, hogy a kontinuumnak (pl. az egyenesdarab összes pontjaiból álló halmaznak) minden végtelen részlethalmaza, amely nem megszámlálhatóan végtelen, *aequivalens magával a kontinuummal.* Más szóval: a megszámlálhatóan végtelen halmaz számossága után mint *első* (vagy legkisebb) végtelen számosság után *másodiknak* (zweite Mächtigkeit) a kontinuumé következik.

König mintegy két héttel a kongresszus előtt olyan halmazelméleti tételt talált, amelyből — Bernstein egyik tételét is felhasználva — azt következtette, hogy Cantor sejtelme nem igaz, sőt ennél aránytalanul többet. Mi volt ez a több?

Az egyenesdarab pontjai balról jobbra menve *rendezett* halmazt alkotnak. Vagyis, ha az egyenesdarab bármely két pontja között a balra levőt kisebb rangúnak — röviden *kisebbnek* — mondjuk a tőle jobbra levőnél, akkor: valahányszor $A < B$ és $B < C$, mindannyiszor (mint a *kisebb* szó használata megkívánja) egyszersmind $A < C$.

Ha — egészen más elv szerint — az egyenesdarab pontjai között lehetne *olyan* rangbeli megkülönböztetést tenni, hogy minden részlethalmazban volna egy *legkisebb* elem, akkor azt mondanók: az egyenesdarab pontjait sikerült jól rendezni.[1]

Kőnig saját tételéből és a Bernstein-féléből azt következtette, hogy *kontinuumot nem lehet jól rendezni* (holott második számosságú halmaznál ez lehetséges).

Olyan halmaz létezése, amelyet nem lehet jól rendezni, annyira meglepő eredmény volt, hogy Kőnig sietett azt a kongresszuson bemutatni. Izgalmában és sietségében egyet elmulasztott: megvizsgálni annak a másik pillérnek hordozó erejét, amelyre saját halmazelméleti tételén kívűl merész következtetését alapította, vagyis gondos ellenőrzéssel meggyőződést szerezni arról, hogy Bernstein csakugyan *olyan általánosságban* bizonyította be tételét, ahogyan kimondotta s ahogyan Kőnig alkalmazta.

A felolvasás sikere bámulatos volt. Már az előleges érdeklődés is feltűnő volt. A kongresszus második szakosztálya szünetelt, hogy tagjai az első szakosztályban meghallgathassák Kőnig-et. Az előadás után olyan világhírű felszólalók, mint Cantor és Hilbert, méltatták a hallottak fontosságát és Kőnig meggondolásainak mélységét. Kiemelték, hogy az eredmény szinte hihetet-

---

[1] Például az

$$\begin{array}{ll} a_{11}, \ a_{12}, \ a_{13}, \dots & \text{in infinitum,} \\ a_{21}, \ a_{22}, \ a_{23}, \dots & \text{in infinitum,} \\ a_{31}, \ a_{32}, \ a_{33}, \dots & \text{in infinitum,} \\ \dots & \\ \text{in infinitum} & \end{array}$$

táblázat elemei *jól rendezett* halmazt alkotnak, ha minden sor elemeit kisebbnek mondjuk az alábbi sorok elemeinél, továbbá ugyanazon sor bármely két eleme közül a bal elemet kisebbnek mondjuk a jobbra levőnél. A fordított megállapodás után a halmaz nem volna jól rendezett.

len; de elismerték, hogy az adott pillanatban a bebizonyitásban kifogásolni valót nem találnak.

A kongresszus tagjai másról alig beszélgettek, mint Kőnig előadásáról. Még Baden örökös nagyhercege is (a kongresszusnak díszelnöke) Klein Felix-szel megmagyaráztatta magának az előadás lényegét.

S mik történtek a kongresszus után?

Cantor nem tudott belenyugodni abba a gondolatba, hogy a kontinuumra vonatkozó sejtelme megcsalta volna. Gyanuját tréfás szójátékkal így szokta kifejezni: *Ich hege kein Misstrauen gegen den König, nur gegen seinen Minister.*[1] Kőnig-nek a Berni Alpokból küldött képes levelezőlapon meg is írta abbeli meggyőződését, hogy Bernstein tétele nem igaz.

Mire ez a lap Kőnig kezéig jutott, már útban voltak Kőnig-nek sorai, amelyekben Cantor-t arról értesítette, hogy a kongresszus izgalmai után maga is nyugodtan ujból megvizsgálta Bernstein értekezését s felismerte, hogy Bernstein a tételt nem bizonyította be abban az általánosságban, ahogyan kimondta s ahogyan Kőnig felhasználta.

Keserű csalódását Kőnig megírta Hilbert-nek is. Tőle ugyancsak Svájcból a következő feleletet kapta:

Sehr geehrter Herr College.

Soeben gelangt Ihr Brief in meine Hände. Wenn ich es auch schade finde, dass Ihre Bestrebungen im Augenblick den gewünschten Erfolg nicht gehabt haben, so würde ich doch in Ihrer Stelle mich nicht so grämen, zumal Sie ja Ihre Entwicklungen durch den Druck noch nicht veröffentlicht haben und den Irrthum selbst rechtzeitig erkannten. Uebrigens haben Sie das Verdienst die Frage vom neuen und zwar auf sehr dramatische Art in Fluss gebracht zu haben. Wenigstens haben Cantor, Schönflies und ich, die wir 8 Tage nach Heidelberg in Wengen (Berner Oberland) zusammenfanden, fast über nichts anderes als das bewusste Problem geredet. Cantor ist bei seiner Meinung geblieben, dass das Continuum von der zweiten Mächtigkeit sei;

[1] Nem vagyok bizalmatlan a király (= König) iránt, csak minisztere (= segítője, Bernstein) iránt.

er behauptete sogar die Unrichtigkeit des BERSTEINschen Satzes erweisen zu können. Leider kommt er jetzt wieder in eine so aufgeregte Zeit, dass man für seine Gesundheit fürchten muss. Das herrliche Wetter, das wir hier in der Schweiz hatten, werden hoffentlich auch Sie in Norderney genossen haben. Mit den besten Grüssen, die ich insbesondere auch von meiner Frau hinzufügen soll, bin ich

Ihr ergebenster *Hilbert.*

E levél nemcsak HILBERT gyengéd tapintatának és tiszteletreméltó tárgyilagosságának bizonyítéka, hanem egyszersmind a jövőbe látásának szinte prófétai megnyilatkozása.

Valóban csakhamar KŐNIG előadásának igaz magva a belőle vont túlmerész következtetések nélkül is igen értékes felfedezésnek bizonyult, de még KŐNIG tévedése is előbbre vitte a tudományt, mert fontos új kérdést vetett fel.

Különösen ZERMELO német tudósra hatott KŐNIG előadása serkentőleg. Ő felismerte, hogy azok a helyes meggondolások, amelyekből KŐNIG kiindult, jelentéktelen általánosítással elvezetnek a legmesszebbmenő tételig, amelyet eddig számosságok összehasonlítására ismerünk.

Továbbá ZERMELO annak vizsgálatába is bocsátkozott, vajjon *minden halmaz* jól rendezhető-e, avagy csakugyan vannak olyan halmazok is, amelyeknél ez nem lehetséges? Két értekezése foglalkozik annak bebizonyításával, hogy minden halmaz jól rendezhető. Mélyen szántó fejtegetéseiben azonban olyan alapelvekre is támaszkodott, amelyek nem találtak általános elismerésre. Kitűnt, hogy a halmazelmélet némely kérdésének kielégítő megoldása csak úgy várható, hogy gondolkodásunk logikai alapjainak megvizsgálásába és tisztázásába bocsátkozunk.

Az ebben az irányban folyó vizsgálatokban KŐNIG is kivette a részét. Hosszú megfontolásainak végleg leszűrt eredményeit német munkájában fejtette ki: *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre.*

KŐNIG szeretett utazni. 1913 tavaszán is örömmel beszélt arról, hogy pünkösdkor elutazik Szent-Pétervárra és részt vesz az *Association des Académies* nemzetközi kongresszusán, mint a Magyar Tudományos Akadémia kiküldöttje. Ez az út azonban elmaradt, mert KŐNIG 1913 április 8-án hirtelen meghalt.

KŐNIG-gel csodálatosan éles, minden iránt fogékony elme szünt meg gondolkodni, kulturánkért melegen dobbanó szív hagyta abba lüktetését. Csendes elmélkedéseiben az élet küzdelmeitől távol eső kérdéseken gondolkozott; de az élettől sohasem zárkózott el s mint vezető és szervező is kivette részét kulturális céljaink megvalósitásában.

Az ő tanterve és utasitása szerint folyt évtizedeken át gimnáziumainkban a matematika tanitása. Hosszú időn keresztül a minisztériumban ő vezette a kereskedelmi iskolák ügyét. Elnöke volt annak a nemzeti bizottságnak, amely a matematikai oktatás reformálását célzó nemzetközi mozgalom támogatására hazánkban szervezve volt.

A műegyetem tanári testületének és a Magyar Tudományos Akadémiának tekintélyes tagja volt.

Élén állott mindazoknak a mozgalmaknak, amelyeknek köszönjük, hogy a matematika és fizika művelésére társulatunk és lapunk van.

Nagyságát szépen jellemezte báró EÖTVÖS LORÁND a Matematikai és Fizikai Társulat 1913-iki közgyűlésén a következő elnöki megnyitó beszédben:

«Nagy okunk van a szomorúságra.

Csak egy hét mult el azóta, hogy KŐNIG GYULÁT utolsó pihenő helyére kisértük s örökre búcsút mondtunk neki, Társulatunk egyik elnökének, alapitójának.

Alapitó! ez az egy szó fejezi ki legteljesebben azt, hogy mi volt ő nekünk, nem csupán azért, mert bölcsességével, döntő tanácsával kezdettől fogva részt vett Társulatunk szervezésében és fejlesztésében.

Többet, százszorta többet tett ő ennél.

Világraszóló tudományos munkásságával, tanítói buzgóságával és termékenyitő erejével valóban *ő rakta le az alapot, melyen hazánkban a matematikának erős vára épülhetett* s Társulatunk abban életreképessé vált.

Matematikusaink voltak már ő előtte is, a Bolyaiak világhirét magyar tudós túlszárnyalni nem fogja egyhamar, de csak az Isten különös kegyének vagy a véletlen szerencsének tudhatjuk be azt, hogy a tudomány egének e fényes csillagai éppen nekünk magyaroknak jutottak.

Ma a matematika fejlődése magyar földön már nem a véletlen szerencse dolga. Tudós munkások csoportja áll a kutatás mezején, s a munka, melyet az egyik kezd, a másik folytat, feltarthatatlanul halad előre. Azt, hogy ma nemcsak egyes matematikusainkkal dicsekedhetünk, hanem évről-évre gyarapodó matematikai iskolára mutathatunk, Kőnig Gyulának, *az alapító mesternek* köszönhetjük. Addig, amíg ez az iskola fennáll, amíg e Társulat élni fog, róla, a mesterről, vezérről és szeretett jó barátról megfeledkezni nem fogunk».

Kürschák József.

JULIUS KŐNIG.

(1849—1913.)

Eine für weitere Kreise geschriebene Schilderung des Lebenslaufes und einiger mathematischen Untersuchungen des vor zwanzig Jahren verstorbenen ungarischen Mathematikers.

J. Kürschák †.

EGY RECIPROCITÁSKÉPLETRŐL A MODULFÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉBŐL.*

1. A

$$\log \eta(\tau) = \frac{\pi i \tau}{12} + \log \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m \tau})$$

függvény $\Im(\tau) > 0$ mellett reguláris és, a logarithmus egyik meghatározott függvényágának megtartása után, a felső τ-félsíkban egyértékű. DEDEKIND, aki az $\eta(\tau)$ függvényt a modulfüggvények elméletébe bevezette, a $\log \eta(\tau)$ vizsgálatánál ilyenfajta összegekhez jutott:[1]

$$s(h, k) = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\mu}{k} \left(\left(\frac{h\mu}{k} \right)\right), \tag{1}$$

ahol h, k relatív prím pozitív egész számok. Itt s a következőkben is, valós x-re

$$((x)) = x - [x] - \frac{1}{2}.^{2} \tag{2}$$

Egyébként a $k = 1$ esetben az (1)-ben fellépő összeg üres; ekkor az a képlet az

$$s(h, 1) = 0$$

értelemben veendő.

---

* Boroszlói egyetemi tanárok budapesti látogatása alkalmából 1929 októberében a Pázmány Péter Tudomány-Egyetemen tartott előadás.

[1] *Dedekinds Erläuterungen zu Riemanns Fragmenten über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunktionen*, RIEMANNS Werke (1876), S. 438—447.

[2] DEDEKIND az idézett helyen más jelölést használ. Az ő (m, n) jele a mi írásmódunkban $6n \,.\, s\,(m, n)$. A mi $((x))$ jelünk DEDEKIND-nél $\left((x - \frac{1}{2})\right)$.

Az $s(h, k)$ összegekre DEDEKIND a ϑ-függvények elméletéből a figyelemreméltó

$$12s(h, k) + 12s(k, h) = -3 + \frac{h}{k} + \frac{k}{h} + \frac{1}{hk} \tag{3}$$

reciprocitásképletet nyerte, amelyben h, k relatív prím pozitív egész számok. Ez az egyenlet az (1) definíció következtében tisztán arithmetikai természetű; egy másik dolgozatomban[3] a (3)-at közvetlenül arithmetikai úton bebizonyítottam. A következőkben még egy bizonyítást akarok adni, amely ugyancsak független a modulfüggvények elméletétől, de analitikai segédeszközöket használ. Mellékeredményként a (3)-nak egy trigonometriai átalakítását fogom nyerni.

2. A $k = 1$ esetben (3) elemi számításokkal azonnal igazolható. Ezért ettől kezdve legyen $k \geqq 2$.

Közelfekvő az $((x))$ függvényre az ismert FOURIER-sort alkalmazni:

$$((x)) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n}.[4]$$

Ezáltal nyerjük, hogy

$$s(h, k) = -\frac{1}{\pi k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{k} \mu \sin \frac{2\pi n h \mu}{k}. \tag{4}$$

A belső összeg elemi úton kiszámítható. Legyen

$$S_m = \sum_{\mu=1}^{k} \mu \sin \frac{2\pi m \mu}{k}. \tag{5}$$

Ha k osztója m-nek, akkor

$$S_m = 0. \tag{6a}$$

A többi esetben

$$S_m = \Im\Big(\sum_{\mu=1}^{k} \mu e^{\frac{2\pi i m \mu}{k}}\Big) = \Im(U).$$

---

[3] *Zur Theorie der Modulfunktionen*, Journ. f. d. Math., 167 (1932), S. 312—336.

[4] Egész x mellett nem érvényes a fenti összefüggés, de ezt ilyen esetben nem fogjuk használni.

Itt
$$U=\sum_{\mu=1}^{k}\mu e^{\frac{2\pi i m\mu}{k}}=\sum_{\mu=1}^{k}e^{\frac{2\pi i m\mu}{k}}+\sum_{\mu=1}^{k}(\mu-1)e^{\frac{2\pi i m\mu}{k}}=$$
$$=0+e^{\frac{2\pi i m}{k}}\sum_{\nu=0}^{k-1}\nu e^{\frac{2\pi i m\nu}{k}}=e^{\frac{2\pi i m}{k}}(U-ke^{2\pi i m})=e^{\frac{2\pi i m}{k}}(U-k),$$
következőleg
$$U=\frac{k}{1-e^{-\frac{2\pi i m}{k}}}\overset{4a}{=}k\frac{1-e^{\frac{2\pi i m}{k}}}{\left|1-e^{\frac{2\pi i m}{k}}\right|^2},$$
és igy
$$S_m=-k\frac{\sin\frac{2\pi m}{k}}{4\sin^2\frac{\pi m}{k}}=-\frac{k}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi m}{k}. \tag{6b}$$
A (4), (5), (6) szerint:
$$s(h,k)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi n h}{k},$$
ahol n kihagyja a k többeseit. E szerint:
$$s(h,k)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{mk+l}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k}. \tag{7}$$
Minthogy
$$\sum_{l=1}^{k-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k}=0, \tag{8}$$
azért (7)-re egy DIRICHLET-féle összegezési eljárás[5] alkalmazható. Ugyanis
$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{mk+l}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k}=\sum_{m=0}^{M}\sum_{l=1}^{k-1}\int_0^1 x^{mk+l-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k}\,dx=$$
$$=\int_0^1\sum_{m=0}^{M}x^{mk}\sum_{l=1}^{k-1}x^{l-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k}\,dx.$$

[4a] Az U-nak ez az értéke azonnal nyerhető a
$$\sum_{\mu=1}^{k}\mu x^{\mu}=\frac{kx^{k+1}}{x-1}-\frac{x(x^k-1)}{(x-1)^2}$$
azonosságból. (Fordító megjegyzése.)

[5] LEJEUNE DIRICHLETS Werke, Bd. I., S. 420.

A belső összegben álló $(k-2)$-edfokú polynomnak (8) szerint zérushelye $x=1$, s ezért írható

$$\sum_{l=1}^{k-1} x^{l-1} \operatorname{ctg} \frac{\pi l h}{k} = (1-x)\, Q(x), \tag{9}$$

ahol $Q(x)$ egy $(k-3)$-adfokú polynom.[6] Ezekután:

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{M} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{mk+l} \operatorname{ctg} \frac{\pi l h}{k} &= \int_0^1 \sum_{m=0}^{M} x^{mk} (1-x)\, Q(x)\, dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1-x}{1-x^k} (1-x^{(M+1)k})\, Q(x)\, dx.\end{aligned} \tag{10}$$

Itt $0 \leqq x \leqq 1$ mellett

$$\left| \frac{1-x}{1-x^k} Q(x) \right| \leqq K,$$

$$\left| \int_0^1 \frac{1-x}{1-x^k} Q(x) . x^{(M+1)k} dx \right| \leqq K \int_0^1 x^{(M+1)k} dx = \frac{K}{(M+1)k+1},$$

amely utóbbi zérushoz konvergál $M \to \infty$ mellett. Eszerint (10)-ben végrehajtható az $M \to \infty$ határátmenet:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{mk+l} \operatorname{ctg} \frac{\pi l h}{k} = \int_0^1 \frac{1-x}{1-x^k} Q(x)\, dx,$$

amely helyett (7) és (9) szerint írható:

$$s(h, k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{1-x^k} \sum_{l=1}^{k-1} x^{l-1} \operatorname{ctg} \frac{\pi l h}{k}\, dx.$$

Részlettörtekre bontva

$$\frac{x^{l-1}}{1-x^k} = -\frac{1}{k} \sum_{\lambda=0}^{k-1} \frac{\varrho^{\lambda l}}{x-\varrho^{\lambda}},$$

ahol

$$\varrho = e^{\frac{2\pi i}{k}}.$$

[6] Azaz $2 \leqq k \leqq 3$ mellett $Q(x)$ állandó, mégpedig $Q(x) = \operatorname{ctg} \frac{\pi h}{3}$, illetőleg 0, a $k=3$, 2 esetek szerint.

Eszerint:

$$\frac{1}{1-x^k}\sum_{l=1}^{k-1} x^{l-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k} = -\frac{1}{k}\sum_{\lambda=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{\varrho^{\lambda l}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k}}{x-\varrho^{\lambda}}.$$

(8) miatt eltűnik a belső összeg $\lambda=0$ mellett. A λ-összeget tehát csupán a $\lambda=1$-től $\lambda=k-1$ értékekig kell kiterjeszteni. Ezzel nyerjük, hogy

$$s(h,k) = -\frac{1}{2k\pi}\int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{\varrho^{\lambda l}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k}}{x-\varrho^{\lambda}}\,dx.$$

Legyen

$$\sigma(\lambda) = \sum_{l=1}^{k-1}\varrho^{\lambda l}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k}; \tag{11}$$

akkor

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda) &= \sum_{l=1}^{k-1}\varrho^{\lambda(k-l)}\operatorname{ctg}\frac{\pi(k-l)h}{k} = \\ &= -\sum_{l=1}^{k-1}\varrho^{-l\lambda}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k} = -\overline{\sigma(\lambda)}.\end{aligned} \tag{12}$$

Tehát $\sigma(\lambda)$ tisztán képzetes, és így

$$\sigma(\lambda) = i\sum_{l=1}^{k-1}\sin\frac{2\pi\lambda l}{k}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k}.[7] \tag{13}$$

Az $s(h,k)$ így alakul:

$$\begin{aligned}s(h,k) &= -\frac{1}{2k\pi}\sum_{\lambda=1}^{k-1}\sigma(\lambda)\int_0^1\frac{dx}{x-\varrho^{\lambda}} = \\ &= -\frac{1}{2k\pi}\sum_{\lambda=1}^{k-1}\sigma(\lambda)\log\left(\frac{1-\varrho^{\lambda}}{-\varrho^{\lambda}}\right) = \\ &= -\frac{1}{2k\pi}\sum_{\lambda=1}^{k-1}\sigma(\lambda)\log(1-\varrho^{-\lambda}).\end{aligned} \tag{14}$$

Itt $(1-\varrho^{-\lambda})$ a jobbfélsíkban fekszik, s a logarithmus úgy határozandó meg, hogy

---

[7] A számitásnak kissé más elrendezésével egyébként

$$\sigma(\lambda) = -2ki\left(\left(\frac{\lambda h^{\star}}{k}\right)\right)$$

adódnék, ahol $h^{\star}$ egy olyan egész szám, amelyre $h.h^{\star}\equiv 1 \pmod{k}$.

$$|\Im(\log(1-\varrho^{-\lambda}))| < \frac{\pi}{2} \tag{14a}$$

legyen. Ha (14) mindkét oldalán konjugált komplex értékekre térünk át, akkor (12) figyelembevételével:

$$s(h, k) = \frac{1}{2k\pi}\sum_{\lambda=1}^{k-1}\sigma(\lambda).\log(1-\sigma^{\lambda}). \tag{15}$$

A (14)-ből és (15)-ből következik

$$s(h, k) = \frac{1}{4k\pi}\sum_{\lambda=1}^{k-1}\sigma(\lambda)\log\frac{1-\varrho^{\lambda}}{1-\varrho^{-\lambda}}.$$

A logarithmus jele alatt álló szám abszolút értéke 1, ugyanis

$$\frac{1-\varrho^{\lambda}}{1-\varrho^{-\lambda}} = -\varrho^{\lambda} = -e^{\frac{2\pi i\lambda}{k}},$$

tehát a logarithmus tisztán képzetes, mégpedig (14a) miatt

$$-\pi < \Im\left(\log\frac{1-\varrho^{\lambda}}{1-\varrho^{-\lambda}}\right) < \pi.$$

E szerint

$$\log\frac{1-\varrho^{\lambda}}{1-\varrho^{-\lambda}} = \frac{2\pi i\lambda}{k} - \pi i,$$

$$s(h, k) = \frac{i}{4k}\sum_{\lambda=1}^{k-1}\sigma(\lambda)\left(\frac{2\lambda}{k} - 1\right).$$

Minthogy (11) és (8) szerint $\sigma(0) = 0$, azért

$$\sum_{\lambda=1}^{k-1}\sigma(\lambda) = \sum_{\lambda=0}^{k-1}\sigma(\lambda) = \sum_{l=1}^{k-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k}\sum_{=}^{k-1}\varrho^{\lambda l} = 0.$$

Következőleg

$$s(h, k) = \frac{2i}{4k^2}\sum_{\lambda=1}^{k-1}\lambda\sigma(\lambda)$$

és (13) szerint

$$s(h, k) = -\frac{1}{2k^2}\sum_{l=1}^{k-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k}\sum_{\lambda=1}^{k-1}\lambda\sin\frac{2\pi\lambda l}{k}.$$

Az (5) és (6b) szerint azonban a belső összeget már kiszámítottuk, tehát végül

$$s(h, k) = \frac{1}{4k}\sum_{l=1}^{k-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k}\operatorname{ctg}\frac{\pi l}{k}. \tag{16}$$

3. Most már bebizonyítjuk (3)-at azáltal, hogy levezetjük a reciprocitásképletet a (16)-beli trigonometriai összegre. Ebből a célból tekintjük az

$$\frac{1}{2\pi i}\int \pi \operatorname{ctg} \pi z \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{k} \operatorname{ctg} \frac{\pi h z}{k}\, dz$$

integrált, kiterjesztve annak az R derékszögű négyszögnek oldalaira, amelynek csúcsai

$$k-\varepsilon+Ni, \quad -\varepsilon+Ni, \quad -\varepsilon-Ni, \quad k-\varepsilon-Ni \quad \left(0<\varepsilon<\frac{1}{h}\right).$$

Az integrandus mindhárom tényezőjének közös pólusa $z=0$ az R belsejében. A második tényezőnek további pólusa nincs az R-ben. A $z=0$ pólustól eltekintve, a $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ tényezőnek pólusai az R négyszögben

$$z = 1, 2, \ldots k-1,$$

az 1 residuumokkal, a harmadik tényezőnek pólusai

$$z = \frac{k}{h}, \ \frac{2k}{h}, \ldots, \ \frac{(h-1)k}{h},$$

a $\frac{k}{\pi h}$ residuumokkal. E szerint

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int \pi \operatorname{ctg} \pi z \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{k} \operatorname{ctg} \frac{\pi h z}{k} &= \\ = \sum_{l=1}^{k-1} \operatorname{ctg} \frac{\pi l}{k} \operatorname{ctg} \frac{\pi l h}{k} + \frac{k}{h}\sum_{m=1}^{k-1} \operatorname{ctg} \frac{\pi m k}{h} \operatorname{ctg} \frac{\pi m}{h} + R_0,&\end{aligned} \tag{17}$$

ahol R_0 a residuum a $z=0$ pontban. A $\operatorname{ctg} z$ LAURENT-kifejtése így kezdődik:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \cdots;$$

ezért

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{k} \operatorname{ctg} \frac{\pi h z}{k} =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{\pi z} - \frac{\pi z}{3} - \cdots\right)\left(\frac{k}{\pi z} - \frac{\pi z}{3k} - \cdots\right)\left(\frac{k}{\pi h z} - \frac{\pi h z}{3k}\right)$$

alapján, mint az $\frac{1}{z}$ együtthatója:

$$R_0 = -\frac{k^2}{3h} - \frac{1}{3h} - \frac{h}{3}. \tag{18}$$

Mivel k periodusa a (17) integrandusának, azért az R négyszögnek a képzetes tengellyel párhuzamos oldalaira kiterjesztett integrálrészek elhagyhatók. Marad tehát

$$\int_R = \int_{k-\varepsilon+Ni}^{-\varepsilon+Ni} + \int_{-\varepsilon-Ni}^{k-\varepsilon-Ni}. \tag{19}$$

Az $N \to \infty$ határátmenetnél mindkét jobboldali integrál integrandusa egyenletesen konvergál egy-egy határértékhez. Minthogy

$$\operatorname{ctg} z = i\,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}},$$

azért az első jobboldali integrálban $\operatorname{ctg} z \to -i$, a másodikban $\operatorname{ctg} z \to i$. E szerint (17), ha még (18)-at tekintetbe vesszük, $N \to \infty$ mellett a következőbe megy át:

$$-\frac{k}{2i}(-i)^3 + \frac{k}{2i}i^3 = \sum_{l=1}^{k-1} \operatorname{ctg}\frac{\pi l}{k}\operatorname{ctg}\frac{\pi lh}{k} +$$
$$+ \frac{k}{h}\sum_{m=1}^{h-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi m}{h}\operatorname{ctg}\frac{\pi mk}{h} - \frac{k^2}{3h} - \frac{1}{3h} - \frac{h}{3},$$

azaz

$$\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi l}{k}\operatorname{ctg}\frac{\pi lh}{k} + \frac{1}{h}\sum_{m=1}^{h-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi m}{h}\operatorname{ctg}\frac{\pi mk}{h} =$$
$$= -1 + \frac{h}{3k} + \frac{k}{3h} + \frac{1}{3hk}.$$

Ez a (3) reciprocitásképlet trigonometriai alakban; maga (3) rögtön következik (20)-ból, (16) segélyével.

Hans Rademacher

(németből fordította *Rédei László*.)

ÜBER EINE REZIPROZITÄTSFORMEL AUS DER THEORIE DER MODULFUNKTIONEN.*

In der Theorie der Modulfunktionen treten folgende, zuerst von DEDEKIND [1] betrachteten Summen auf:

$$s(h,k)=\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}\left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right) \tag{1}$$

mit ganzen positiven h, k, $(h, k)=1$. Hier ist zur Abkürzung für reelles, nicht-ganzes x

$$((x))=x-[x]-\frac{1}{2} \tag{2}$$

gesetzt. Für die Summen (1) gilt, wie sich aus der Theorie der Modulfunktionen ergibt, die folgende merkwürdige Reziprozitätsformel

$$12\,s(h,k)+12\,s(k,h)=-3+\frac{h}{k}+\frac{k}{h}+\frac{1}{hk}, \tag{3}$$

für die ich kürzlich einen direkten zahlentheoretischen Beweis gegeben habe,[3] und die ich hier auf andere Weise, abermals unabhängig von der Theorie der Modulfunktionen, beweise.

Aus der bekannten Formel

$$((x))=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}$$

folgt nach (1)

$$s(h,k)=-\frac{1}{\pi k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{k}\mu\sin\frac{2\pi nh\mu}{k}. \tag{4}$$

Für die Summe

$$S_m=\sum_{\mu=1}^{k}\mu\sin\frac{2\pi m\mu}{k} \tag{5}$$

ergibt sich leicht

$$\begin{aligned} S_m&=0 && m\equiv 0 \pmod{k}\\ S_m&=-\frac{k}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi m}{k} && m\not\equiv 0 \pmod{k} \end{aligned} \tag{6}$$

---

* Auszug eines an der Budapester Pázmány Péter Universität in Okt. 1929 gehaltenen Vortrages, bei Gelegenheit des Budapester Besuches von Professoren der Breslauer Universität.

Dadurch erhält man

$$s(h,k) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{mk+l}\operatorname{ctg}\frac{\pi lh}{k}. \tag{7}$$

Wegen

$$\sum_{l=1}^{k-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi lh}{k} = 0 \tag{8}$$

kann man auf (7) eine DIRICHLETsche Summationsmethode [5] anwenden:

$$s(h,k) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{k-1}\int_0^1 x^{mk+l-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi lh}{k}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{1-x^k}\sum_{l=1}^{k-1} x^{l-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi lh}{k}\,dx.$$

Partialbruchzerlegung und Berücksichtigung von (8) ergibt

$$s(h,k) = -\frac{1}{2k\pi}\int_0^1 \sum_{\lambda}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{\varrho^{\lambda l}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi lh}{k}}{x-\varrho^{\lambda}}\,dx$$

mit

$$\varrho = e^{\frac{2\pi i}{k}}.$$

Die Summe

$$\sigma(\lambda) = \sum_{l=1}^{k-1}\varrho^{\lambda l}\operatorname{ctg}\frac{\pi lh}{k} \tag{11}$$

ist rein imaginär, d. h.

$$\sigma(\lambda) = i\sum_{l-1}^{k-1}\sin\frac{2\pi\lambda l}{k}\operatorname{ctg}\frac{\pi lh}{k}. \tag{12}$$

Die Ausrechnung von $s(h, k)$ ergibt nun

$$s(h,k) = -\frac{1}{2k\pi}\sum_{\lambda=1}^{k-1}\sigma(\lambda)\log(1-\varrho^{-\lambda}) \tag{15}$$

mit

$$|\Im(\log(1-\varrho^{-\lambda}))| < \frac{\pi}{2}. \tag{14a}$$

Nimmt man in (15) auf beiden Seiten den Realteil, so erhält man

$$s(h,k) = \frac{1}{2k\pi}\sum_{\lambda=1}^{k-1}\sigma(\lambda)\frac{i\pi}{2}\left(\frac{2\lambda}{k}-1\right) = \frac{i}{2k^2}\sum_{\lambda=1}^{k-1}\lambda\sigma(\lambda).$$

Durch Eintragung von (11) und Benützung von (6) folgt schliesslich

$$s(h,k)=\frac{1}{4k}\sum_{l=1}^{k-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k}\operatorname{ctg}\frac{\pi l}{k}. \tag{16}$$

Nun werde das Integral betrachtet

$$J=\int_R \pi\operatorname{ctg}\pi z\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{k}\operatorname{ctg}\frac{\pi h z}{k}\,dz,$$

das um das Rechteck R mit den Ecken $k-\varepsilon+Ni$, $-\varepsilon+Ni$, $-\varepsilon-Ni$, $k-\varepsilon-Ni$ im positiven Sinne erstreckt; es sei $0<\varepsilon<\frac{1}{h}$. Das Residuum des Integranden für $z=0$ ist

$$R_0=-\frac{k^2}{3h}-\frac{1}{3h}-\frac{h}{3}. \tag{18}$$

Sonst hat der Integrand noch Pole erster Ordnung in

$$z=1,2,\ldots,k-1$$

und

$$z=\frac{k}{h},\ \frac{2k}{h},\ldots,\ \frac{(h-1)k}{h}.$$

Daher ergibt die Residuenrechnung

$$J=\sum_{l=1}^{k-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi l}{k}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k}+\frac{k}{h}\sum_{m=1}^{k-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi m k}{h}\operatorname{ctg}\frac{\pi m}{h}+R_0. \tag{17}$$

Bei der direkten Berechnung von J heben sich die Integrale längs den Parallelen zur imagineren Axe weg. Auf den beiden horizontalen Strecken konvergiert der Integrand gleichmässig je gegen einen Limes bei $N\to\infty$, sodass sich

$$J=-\frac{k}{2i}(-i)^3+\frac{k}{2i}i^3=-k$$

ergibt. Aus dieser Gleichung zusammen mit (17) und (18) erhält man schliesslich

$$\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi l}{k}\operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k}+\frac{1}{h}\sum_{m=1}^{h-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi m}{h}\operatorname{ctg}\frac{\pi m k}{h}=$$
$$=-1+\frac{h}{3k}+\frac{k}{3h}+\frac{1}{3hk}. \tag{20}$$

Dies ist die zu beweisende Reziprozitätsformel in trigonometrischer Form. Aus ihr folgt (3) mit Hife von (16).

Hans Rademacher.

MEGJEGYZÉS H. RADEMACHER ÚR MEGELŐZŐ DOLGOZATÁHOZ.

Legyen k pozitív egész szám, n racionális egész szám. EISENSTEIN[1] szerint

$$\left[\frac{n}{k}\right] = \frac{n}{k} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \sum_{r=1}^{k-1} \sin \frac{2nr\pi}{k} \operatorname{ctg} \frac{r\pi}{k} \tag{1}$$

hacsak n nem osztható k-val.

Bebizonyítom a következőt:

$$\left[\frac{n}{k}\right] = \frac{n}{k} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{k-1} \frac{\varrho^{-rn}}{1-\varrho^r}, \tag{2}$$

ahol ϱ primitív k-adik egységgyök; ez a (2) érvényes akkor is, ha n osztható k-val.[2]

A (2)-nek előnye az (1)-gyel szemben nemcsak az, hogy (2) abban az esetben is érvényes, ha n osztható k-val, hanem az is, hogy bizonyos esetekben a (2) könnyebben kezelhető; a (2) arithmetikai előállítása $\left[\frac{n}{k}\right]$-nak, amely körülmény ugyancsak előnyös lehet.

Az (1)-ből könnyen nyerhető a (2),[3] mégis a (2) képletet inkább közvetlenül vezetem le:

---

[1] *Aufgaben und Lehrsätze*, Journ. f. d. Math., 27 (1844), 281. l.

[2] Fenti (2)-t már régebben bebizonyítottam a doktori dolgozatomban, ez azonban nyomtatásban nem jelent meg.

[3] Természetesen fordítva is, a (2)-ből nyerhető az (1). Ennek jobboldala — itt jegyzem meg — mindig (akkor is, ha n osztható k-val) $\frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{-n}{k}\right]-1\right)$.

Minden k-hoz meghatározható (egyetlen) $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ számsorozat, amellyel

$$\left[\frac{n}{k}\right]-\frac{n}{k}=\sum_{r=0}^{k-1} x_r \varrho^{-rn}. \tag{3}$$

Ugyanis a periodicitás miatt (3) korlátlanul érvényes, hacsak érvényes az $n=0, 1, \ldots, k-1$ esetekre, azaz ha fennáll

$$-\frac{n}{k}=\sum_{r=0}^{k-1} x_r \varrho_{-rn} \quad (n=0, 1, \ldots k-1). \tag{4}$$

Ennek az egyenletrendszernek van egyetlen megoldása, mert az ő determinánsa — az $1, \varrho^{-1}, \varrho^{-2}, \ldots, \varrho^{-(k-1)}$ elemek VANDERMONDE-féle determinánsa — zérustól különböző. A (4)-et ϱ^{sn}-nel szorozva ($s=0, 1, \ldots, k-1$) és n-re összegezve:

$$-\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{k-1} n\varrho^{sn}=\sum_{n=0}^{k-1}\sum_{r=0}^{k-1} x_r \varrho^{(s-r)n}. \tag{5}$$

A jobboldal kx_s; ha $s=0$, akkor a baloldal $-\frac{k-1}{2}$, míg ugyancsak a baloldal $s=1, 2, \ldots, k-1$ mellett

$$\sum_{n=0}^{k-1} nx^n=-\frac{kx^k}{1-x}-\frac{x(x^k-1)}{(1-x)^2} \quad (x \neq 1) \tag{6}$$

azonosság szerint $\frac{1}{1-\varrho^s}\cdot$ Az (5)-ből tehát

$$x_0=-\frac{k-1}{2k};\; x_s=\frac{1}{k}\,\frac{1}{1-\varrho^s}, \quad (s=1, 2, \ldots, k-1)$$

amivel (3) szerint (2)-t bebizonyítottam.

*

Alkalmazás. H. RADEMACHER úr a megelőző lapokon közölt dolgozata[*] 2. pontjában (25—29. lapok) bebizonyitja az $[x]$ Fourier-kifejtése alapján egy DIRICHLET-féle összegezési eljárással a

---

[*] Egy reciprocitásképletről a modulfüggvények elméletéből. Ez a kötet, 24—31. lapok.

$$\sum_{l=1}^{k-1} \frac{l}{k}\left(\left(\frac{hl}{k}\right)\right) = \frac{1}{4k}\sum_{l=1}^{k-1} \operatorname{ctg}\frac{\pi l h}{k} \operatorname{ctg}\frac{\pi l}{k} \tag{7}$$

képletet, amelyben valós x-re

$$((x)) = x - [x] - \tfrac{1}{2} \tag{8}$$

és h, k relatív prím pozitiv egész számok. Jelentékenyen egyszerűbbé válik a bizonyitás a megelőző (2) alapján:

A (7) baloldala (8) és (2) szerint

$$\sum_{l=1}^{k-1} \frac{l}{k}\left(-\frac{1}{2k} - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k-1}\frac{\varrho^{-rhl}}{1-\varrho^r}\right) =$$

$$= -\frac{k-1}{4k} - \frac{1}{k^2}\sum_{r=1}^{k-1}\frac{1}{1-\varrho^r}\sum_{l=1}^{k-1} l\varrho^{-rhl}.$$

Az utolsó összeg (6) szerint $-\dfrac{k}{1-\varrho^{-rh}}$ s ezért az egész jobboldal

$$-\frac{k-1}{4k} + \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k-1}\frac{1}{(1-\varrho^r)(1-\varrho^{-rh})} =$$

$$= -\frac{k-1}{4k} + \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k-1}\frac{\varrho^{-\frac{r}{2}}\varrho^{\frac{rh}{2}}}{(\varrho^{-\frac{r}{2}} - \varrho^{\frac{r}{2}})(\varrho^{\frac{rh}{2}} - \varrho^{-\frac{rh}{2}})}.$$

Az itt szereplő (utolsó) összeg valós szám lévén, annak σ summandusa helyettesithető $\Re(\sigma)$-val; minthogy σ nevezője valós, azért a $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{k}}$ helyettesités után

$$\Re(\sigma) = \frac{\cos\frac{r\pi}{k}\cos\frac{rh\pi}{k} + \sin\frac{r\pi}{k}\sin\frac{rh\pi}{k}}{4\sin\frac{r\pi}{k}\sin\frac{rh\pi}{k}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{r\pi}{k}\operatorname{ctg}\frac{rh\pi}{k}\right),$$

s ezzel a (7) bizonyitása megtörtént.

Rédei László.

BEMERKUNG ZUR VORSTEHENDEN ARBEIT DES HERRN H. RADEMACHER.

In der vorstehenden Arbeit «Über eine Reziprozitätsformel aus der Theorie der Modulfunktionen» (S. 32—34) hat Herr H. Rademacher für einen einfachen zahlentheoretischen Ausdruck mit Hilfe einer Dirichletschen Integrationsmethode eine trigonometrische Formel (S. 34, (16)) hergeleitet. Dies ergibt sich leicht auf elementarem Wege, wie folgt.

Ist k eine beliebige positive ganze Zahl und ϱ eine primitive k-te Einheitswurzel, so lassen sich die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ leicht so bestimmen, dass für jedes ganz rationales n die Gleichung

$$\left[\frac{n}{k}\right] - \frac{n}{k} = a_0 + a_1\varrho^{-n} + a_2\varrho^{-2n} + \cdots + a_{k-1}\varrho^{-(k-1)n}$$

bestehe. Dann ergibt sich die Formel

$$\left[\frac{n}{k}\right] = \frac{n}{k} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k-1}\frac{\varrho^{-rn}}{1-\varrho^r}. \tag{2}$$

(Dies (2) folgt ebenso leicht aus einer Eisensteinschen [1] trigonometrischen Formel für $\left[\frac{n}{k}\right]$, welche doch nur die Fälle umfasst, wo n nicht durch k teilbar ist.)

Wenn man in (2)

$$((x)) = x - [x] - \tfrac{1}{2}$$

einführt, n durch $h\mu$ ersetzt und (2) mit $\frac{\mu}{k}$ multipliziert, endlich für $\mu = 0, 1, \ldots, k-1$ summiert, und gleichzeitig die Identität

$$\sum_{\mu=1}^{k-1}\mu x^\mu = -\frac{kx^k}{1-x} - \frac{x(x^k-1)}{(1-x)^2} \quad (x \neq 1)$$

in Rücksicht nimmt, dann ergibt sich leicht:

$$\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}\left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right) = -\frac{k-1}{4k} + \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k-1}\frac{1}{(1-\varrho^r)(1-\varrho^{-rh})},$$

wenn nur h ganz rational, $(h, k) = 1$ ist. Der letzte Summand ist

$$\frac{\varrho^{-\frac{r}{2}}\varrho^{\frac{rh}{2}}}{(\varrho^{-\frac{r}{2}}-\varrho^{\frac{r}{2}})(\varrho^{\frac{rh}{2}}-\varrho^{-\frac{rh}{2}})};$$

da die Summe reell ist, kann der Imaginärteil des Summanden weggeschafft werden, und so ergibt sich mit $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{k}}$ nach leichter Rechnung:

$$\sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{\mu}{k}\left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right) = \frac{1}{4k}\sum_{r=1}^{k-1} \operatorname{ctg}\frac{r\pi}{k}\operatorname{ctg}\frac{rh\pi}{k}.$$

Dies ist die oben erwähnte Formel von Herrn H. RADEMACHER.

Ladislaus Rédei.

A HARMONIKUS ANALÍZIS, AZ INTERPOLÁCIÓ ÉS A MECHANIKUS QUADRATÚRA ELMÉLETÉBEN FELLÉPŐ VÉGTELEN SOROZATOKRÓL.[1]

1. *Bevezetés.* Előadásom címében jelzett három mathematikai elmélet mindegyike annyira terjedelmes, hogy, természetesen, lehetetlen egyetlen előadás keretében az idevágó összes kutatásokat vázolnom. Így hát mindegyik elméletnek csak egy részére fogok szorítkozni. Azok a kutatások, amelyeket most szem előtt tartok, és amelyeket, azt hiszem, sikerülni fog önök elé tárnom, túlnyomó részben a huszadik században keletkeztek. Azonban az elméletek e részeiben is korunk annyi kiváló mathematikusa munkálkodott, hogy az eredményeknek jelentékeny komplexuma állott elő. Így hát e szűkebb területről is csak néhány eredményt fogok kiválasztani, azonban mindig olyanokat, amelyek jellegzetesek és további kutatások számára kiindulópontul szolgáltak.

Igyekezni fogok tehát önöknek ez uralkodó jellegzetes eredményekről áttekintést adni, amit olyan módon vélek legjobban elérni, hogy lehetőleg élesen kiemelem azt az *egyetlen alapgondolatot,* amely őket mind összefűzi. Ha előadásommal sikerült elérnem, hogy a kutatásoknak ez az egész komplexuma önök előtt kevésbbé szétesőnek látszik, célomat elértem.

2. Fourier-*sor.* Fejtegetésemet a Fourier-féle sorral kezdem.

---

[1] Előadás, melyet a szerző 1933 június 21-én a chicagói kiállításon tartott az «American Mathematical Society» és az «American Association for the Advancement of Science» A-osztálya előtt, ez utóbbi egyesület és a világkiállítás vezetőségének meghívására.

Ha $f(t)$ a t valós változó valós és integrálható, 2π szerint szakaszos függvényét jelöli, akkor az

$$
\left.
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt, \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt
\end{aligned}
\right\} \quad (n=1,2,3,\ldots) \tag{1}
$$

állandókat nevezzük az $f(t)$ függvény FOURIER-féle állandóinak, az

$$
\begin{aligned}
&a_0 + a_1\cos x + b_1 \sin x + \cdots \\
&+ a_n\cos nx + b_n\sin nx + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)
\end{aligned} \tag{2}
$$

végtelen sort pedig az $f(t)$ függvény FOURIER-féle sorának. E sor első $n+1$ tagjának összege nyilván

$$
\begin{aligned}
s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\{1 &+ 2\cos t\cos x + 2\sin t\sin x + \cdots \\
&+ 2\cos nt\cos nx + 2\sin nt\sin nx\}\,dt.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Legtöbbször célszerű azonban figyelembe venni, miszerint

$$
\begin{aligned}
&1 + 2\cos t\cos x + 2\sin t\sin x + \cdots \\
&+ 2\cos nt\cos nx + 2\sin nt\sin nx = \frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}},
\end{aligned}
$$

úgyhogy a FOURIER-sor ú. n. n-indexű részletösszege számára, az x helyen, a következő DIRICHLET-féle képletet kapjuk:

$$
s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\,dt. \tag{4}
$$

Ha tehát az x-et rögzítve gondoljuk, és ennek megfelelően

Mármost alkossuk meg az $s_0(x), s_1(x), \dots, s_n(x)$ részletösszegek számtani közepét $S_n(x)$-et:

$$S_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_n(x)}{n+1}. \tag{5}$$

Minthogy nyilván

$$\begin{aligned} S_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\{(n+1) + n.2\cos t\cos x + \\ + n.2\sin t \sin x + \dots + 1.2\cos nt\cos nx + \\ + 1.2\sin nt\sin nx\}\,dt, \end{aligned} \tag{6}$$

tehát az

$$\begin{aligned} (n+1) + n.2\cos t\cos x + n.2\sin t\sin x + \dots \\ + 1.2\cos nt\cos nx + 1.2\sin nt\sin nx = \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

azonosságból következik, hogy

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi(n+1)}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right)^2 dt, \tag{8}$$

$$(n=0, 1, 2, \dots).$$

Ha valamely számköz minden x értékének megfelel egy f érték, úgy f-et az x függvényének mondjuk. Ha egy függvényhalmaz minden f függvényének egy A érték felel meg, akkor azt mondjuk, hogy az A értéket az f-ből függvényoperáció (röviden *operáció*) útján kapjuk.

Ha tehát az x-et rögzítve gondoljuk, és ennek megfelelően $s_n(x)$ és $S_n(x)$ helyett s_n-t, illetőleg S_n-t írunk, akkor nyilvánvaló, hogy úgy a s_n, mint a S_n az $f(t)$-ből egy-egy operáció útján keletkezik:

$$s_n = s_n[f], \tag{9}$$

$$S_n = S_n[f]. \tag{10}$$

Mindkét operáció közönséges lineáris függvényoperáció. Azonban lényeges különbség közöttük az, hogy a $S_n[f]$ operáció *pozitív*, míg a klasszikus $s_n[f]$ operáció e tulajdonsággal *nem* bír. *Valamely $A[f]$ operációt pozitívnak mondunk, ha mindig $A[f] \geq 0$, valahányszor $f(t) \geq 0$ érvényes az értelmezési-számköz minden t értékére.*

Ezt az eredményt 1900-ban közöltem. Figyelemreméltó, hogy a klasszikus *indefinit* $s_n[f]$ operációból a *definit* $S_n[f]$ operáció könnyű változtatással és minden határátmeneti művelet nélkül származtatható. E két típusú lineáris függvényoperáció közötti lényeges ellentét itt különösen élesen mutatkozott, úgyhogy ez időtől fogva e jelentős megkülönböztetés mélyebben meggyökeresedett.

Az $S_n[f]$ számtani-közép operációra vonatkozólag annyit publikáltak, különböző természetű finomítást, általánosítást, továbbá alkalmazást, hogy, tekintettel ez előadásom tervére, sajnos, teljesen mellőznöm kell ezek említését. Így hát hallgatnom kell a vizsgálatok egész tömegéről, amelyhez magam is többször hozzájárultam, és amelyet más mathematikusok mély dolgozatok hosszú sorozatával gazdagítottak.

3. *A* Fourier-*sorra vonatkozó további megjegyzések.* Továbbhaladok, a Fourier-sorok körében maradván. Amint lényegében láttuk is már, az $S_n[f]$ operáció pozitivitása közvetlenül következik abból az egyszerű tényből, hogy az

$$1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + \cdots + 2\cos n\theta + \cdots \tag{11}$$

sor részletösszegeinek közönséges számtani közepei mind nemnegatívok, a θ minden valós értékére. Újabban észrevettem, hogy a

$$0 + \sin\theta + 2\sin 2\theta + 3\sin 3\theta + \cdots + n\sin n\theta + \cdots \tag{12}$$

sor $S_n^{(0)}(\theta) = s_n(\theta)$ részletösszegeinek $S_n^{(3)}(\theta)$ harmadrendű számtani közepei mind pozitívok, ha $0 < \theta < \pi$ (természetesen $S_0^{(3)}(\theta) \equiv 0$ kivételével). A (12) alatti sor zérusod-, első- és másodrendű közepeire a pozitivitás *nem* áll fönn. Továbbá észrevettem, — és ez úgy látszik mélyebben fekszik — hogy a

$$\sin\theta + 3\sin 3\theta + 5\sin 5\theta + \cdots \tag{13}$$

sor esetében már a részletösszegek másodrendű számtani közepei mind nemnegatívok, ha $0 < \theta < \pi$. (Ehhez még szabatosabb megállapításokat is fűzhetnék). A (13) alatti sor zérusod-, illetőleg elsőrendű számtani közepeire azonban a pozitivitás *nem* áll fönn.

Mármost a (12) és (13) alatti sorok e tulajdonságainak ismét megfelelnek, bizonyos értelemben, *pozitív lineáris függvényoperációk*, és pedig az $f(x)$ függvény Fourier-féle tiszta sinussorával vagy tiszta cosinussorával kapcsolatban. Ám ez operációkat itt nem írom fel, és nem is foglalkozom pozitivitásuk számos érdekes következményével.

Minthogy azonban itt egy egészen új irányú kutatással állunk szemben, legyen szabad mégis egyetlen jellemző eredményt fölemlítenem.

Legyen az $f(x)$ függvény a $0 < x < \pi$ közben pozitív és, fölülről nézve, konvex (vagy legalább is nem-konkáv). Hogy különösen érdekes speciális eset legyen előttünk, fölteszem továbbá még, hogy az $y = f(x)$ görbe az

$$f(\pi - x) = f(x), \quad 0 \leqq x < \frac{\pi}{2},$$

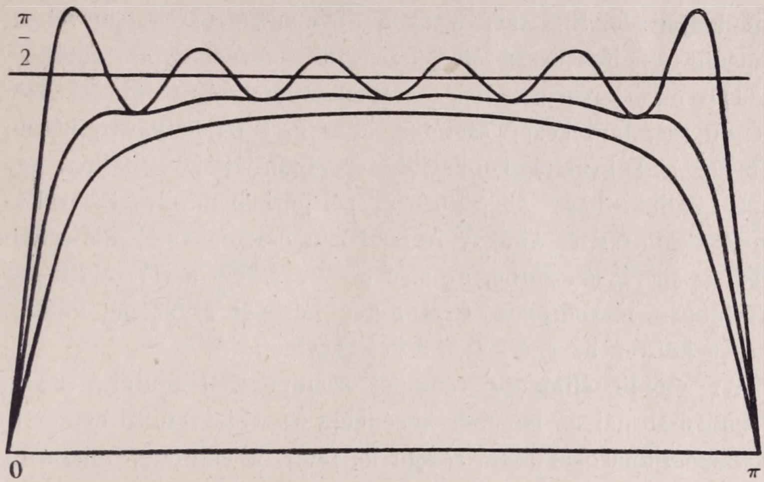
szimmétria-tulajdonsággal bír. Az $f(x)$ függvény Fourier-féle sinussora a következő alakú:

$$f(x) \sim b_1 \sin x + b_3 \sin 3x + \cdots + b_{2\nu-1} \sin (2\nu - 1) x + \cdots, \quad (14)$$

ahol

$$b_{2\nu-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin (2\nu - 1) t \, dt, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \quad (15)$$

Már most a (13) alatti sorra előzőleg adott megállapításból közvetetlenül folyik a következő tétel: az $f(x)$ függvény (14) alatti Fourier-féle sinussora részletösszegeinek másodrendű számtani közepei mind pozitívok és, fölülről nézve, konvexek az egész $0 < x < \pi$ számközben. Ellenben a zérusod- és elsőrendű közepek általánosságban *nem* konvexek az egész $0 < x < \pi$ közben.



A mellékelt ábra[1] ezt a tételt illusztrálja, éspedig a képzelhető legegyszerűbb esetben: amikor $f(x)$ állandó a $0 < x < \pi$ közben (és így $y = f(x)$ fölülről nemkonkáv). Az

$$f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad (0 < x < \pi), \tag{16}$$

FOURIER-féle sinussora

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\sin x}{1} + 0\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \\ + 0\frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots. \end{aligned} \tag{17}$$

Az ábra felső görbéje e (17) alatti sinussor 12-indexű részletösszegét, vagyis a

$$S_{12}^{(0)}(x) = \sum_{\nu=1}^{6} \frac{\sin(2\nu - 1)x}{2\nu - 1}$$

összeget ábrázolja. A középső görbe a (17) alatti sor 12-indexű elsőrendű számtani közepét, vagyis $S_{12}^{(1)}(x)$-et, az alsó görbe pedig e sor 12-indexű másodrendű CESÀRO-féle közepét, vagyis $S_{12}^{(2)}(x)$-et ábrázolja. Az $S_{12}^{(0)}(x)$, $S_{12}^{(1)}(x)$ érdekes görbéket meg-

[1] Ezt az ábrát RAISZ IVÁN tanárjelölt úr szives fáradozásának köszönhetem.

találhatjuk H. S. CARSLAWnak a FOURIER-sorról írt könyvében, éspedig a híres GIBBS-féle jelenséggel kapcsolatban, amely az $s_n(x) = S_n^{(0)}(x)$ részletösszeg esetében föllép, míg az $S_n^{(1)}(x)$ elsőrendű számtani közép esetében eltűnik. Ha már most e három görbét a konvexitás-konkavitás szempontjából vizsgáljuk, úgy azt találjuk, hogy az $S_{12}^{(0)}(x)$, $S_{12}^{(1)}(x)$ görbék mindegyike váltakozóan konvex és konkáv ívekből van összerakva. Ezzel szemben az új $S_{12}^{(2)}(x)$ görbe, az alsó görbe, amely a (17) alatti sor 12-indexű másodrendű CESÀRO-féle közepét ábrázolja, fölülről nézve konvex az egész $0 < x < \pi$ közben.

Az előbbi általános tétel új szempontból mutatja be a FOURIER-sornál az ismételt középképezés «kiegyenlítő hatását». E megfontolásokat azzal zárom le, hogy fölemlítem, miszerint az ismételt középképezés nevezetes eredményhez vezet a hatványsor esetében is. Ha

$$w = f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{18}$$

valamely hatványsor, amely a $|z| < 1$ körben reguláris és «egyrétű» (vagyis az egységkör két különböző belső helyén nem veszi föl soha ugyanazt az értéket), akkor e sor

$$S_n^{(0)}(z) = s_n(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n, \quad (n=0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{19}$$

részletösszegei általánosságban nem birnak ugyanezzel a tulajdonsággal (nem egyrétűek $|z| < 1$-re). De igenis egyrétűek a (18) alatti hatványsor részletösszegeinek $S_n^{(2)}(z)$, $S_n^{(3)}(z)$ másodrendű és harmadrendű számtani közepei, föltéve, hogy a $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ hatványsor az egyrétűek összességének egy speciális, de azért nevezetes alosztályához tartozik.

4. LAPLACE-*sor.* $S_n^{(0)}[f] = s_n[f]$-fel jelölvén egy az egységgömbön integrálható $f(\theta, \varphi)$ függvény LAPLACE-féle sorának n-indexű részletösszegét, ismeretes, hogy az egységgömb valamely rögzített (θ, φ) pontján vett $S_n^{(0)}[f]$ lineáris operáció indefinit. Ugyancsak indefinit az $S_n^{(1)}[f]$ operáció, amely a LAPLACE-sor részletösszegeinek elsőrendű számtani közepét adja. Viszont az $S_n^{(2)}[f]$ operáció *pozitív.*

Ezt az eredményt 1908-ban találtam. Ma ezt a következőképpen is tudom bizonyítani. Nyilvánvaló, hogy csak azt kell kimutatnom, miszerint a

$$P_0(\cos\theta) + 3P_1(\cos\theta) + \\ + 5P_2(\cos\theta) + \cdots + (2n+1)P_n(\cos\theta) + \cdots \tag{20}$$

sor másodrendű közepei mind pozitívok, ha $0 < \theta < \pi$. Ez azonban egy csapásra következik a $P_n(\cos\theta)$ LEGENDRE-féle polinomra érvényes

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_\theta^\pi \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{[2(\cos\theta - \cos t)]^{1/2}}\,dt \tag{21}$$

MEHLER-féle formulából, mivelhogy, mint éppen az imént jeleztem, a

$$\sin\frac{t}{2} + 3\sin 3\frac{t}{2} + 5\sin 5\frac{t}{2} + \cdots \\ + (2n+1)\sin(2n+1)\frac{t}{2} + \cdots \tag{22}$$

sor másodrendü közepei mind pozitívok, ha $0 < t < \pi$.

Nem terjeszkedem ki tovább a FOURIER- és LAPLACE-féle sorok körébe tartozó pozitív operációkra. Mégis megemlítek két fontos idevágó operációt, amelyeket DUNHAM JACKSON talált. Mindkettő szorosan kapcsolódik az első itt tárgyalt pozitív lineáris operációhoz, ahhoz, amely a FOURIER-sor elsőrendű számtani középét szolgáltatja, és amelyben tehát a $(\sin nt/\sin t)^2$ «mag» szerepel. JACKSON első operációja trigonometrikus többtagúakkal való közelítést ad oly függvények számára, amelyek bizonyos megszorításnak vannak alávetve. Második operációja tetszőleges folytonos függvényhez ad trigonometrikus közelítést; trigonometrikus interpoláción alapszik és szorosan összefügg azokkal az operációkkal, amelyeknek tárgyalására most áttérek.

5. *Interpoláció.* Előadásom e részében interpolációval foglalkozom, és nevezetesen röviden meg akarom mutatni, hogy miképpen lehet hasznosítani a pozitív lineáris függvényoperáció fogalmát az interpoláció elméletében.

Ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tetszőleges, n egymástól különböző számot jelent, akkor LAGRANGE interpolációs képlete:

$$L(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \cdots + y_n l_n(x). \qquad (23)$$

Ez a formula azt a legfeljebb $(n-1)$-edfokú racionális egész függvényt szolgáltatja, amely az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeken rendre a tetszőlegesen megadott $y_1, y_2, \ldots, y_n$ értékeket veszi fel. Itt

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}, \quad (k=1,2,\ldots,n), \qquad (24)$$

ahol

$$\omega(x) = C(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), \quad (C \neq 0). \qquad (25)$$

Rendszerint $y_1, y_2, \ldots y_n$ valamely adott $y = f(x)$ görbe ordinátái, az abszcissza $x = x_1, x_2, \ldots x_n$ értékeire; vagyis $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n)$. Ebben az értelemben tehát a klasszikus LAGRANGE-féle interpolációs formula, ha x-et rögzítve gondoljuk, egy $L[f]$ lineáris függvényoperációt értelmez. Ez az operáció azonban — *bárhogyan* választjuk is az $x_1, x_2, \ldots x_n$ abszcisszákat $(n \geqq 2)$ — *sohasem pozitív* (ha a rögzített x érték különbözik $x_1, x_2, \ldots x_n$-től). Ugyanis az $l_1(x), l_2(x), \ldots l_n(x)$, úgynevezett LAGRANGE-féle interpolációs alappolinomok mindegyike $(n-1)$-szer váltja előjelét.

Vizsgáljuk meg már most ebből a szempontból a legegyszerűbb úgynevezett HERMITE-féle interpolációs formulát:

$$X(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x) + \sum_{k=1}^{n} y'_k \mathfrak{h}_k(x). \qquad (26)$$

Ez azt a legfeljebb $(2n-1)$-edfokú racionális egészfüggvényt szolgáltatja, amelynek értéke az $x_1, x_2, \ldots x_n$ helyeken rendre $y_1, y_2, \ldots y_n$, és melynek deriváltja e helyeken rendre az $y'_1, y'_2, \ldots y'_n$ értékeket veszi fel. Itt $h_1(x), h_2(x), \ldots h_n(x)$ a (26) alatti HERMITE-féle interpoláció úgynevezett «elsőfajú alapfüggvényei»:

$$h_k(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right)\left(l_k(x)\right)^2, \quad (k=1,2,\ldots,n), \qquad (27)$$

és $\mathfrak{h}_1(x), \mathfrak{h}_2(x), \dots \mathfrak{h}_n(x)$ ez interpoláció «másodfajú alapfüggvényei»:

$$\mathfrak{h}_k(x) = (x - x_k)\left(l_k(x)\right)^2, \quad {\scriptstyle (k=1,2,\dots,n)}. \tag{28}$$

Itt $\omega(x)$ és $l_k(x)$ ugyanazt jelentik, mint előbb.

Ha már most csak egy tekintetet vetünk a $h_k(x)$ és $\mathfrak{h}_k(x)$ HERMITE-féle alapfüggvényekre, tüstént látjuk, hogy ezek, szemben a LAGRANGE-féle $l_k(x)$ alapfüggvényekkel, hogy úgy mondjam, bizonyos tendenciát mutatnak a pozitivitásra. E megállapitást szabatosabban fogalmazom meg.

A $\mathfrak{h}_k(x)$ alapfüggvény egyenlő az $l_k(x)$ $(n—1)$-edfokú polinom négyzetével, szorozva ezt a

$$w_k(x) = x - x_k \tag{29}$$

lineáris függvénnyel. E szerint $\mathfrak{h}_k(x)$ pontosan egyszer váltja előjelét, éspedig az x_k interpolációs-helyen.

A $h_k(x)$ alapfüggvény egyenlő $l_k(x)$ négyzetével, szorozva ezt a

$$v_k(x) = 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k) \tag{30}$$

lineáris függvénnyel. E szerint $h_k(x)$ is csak egyszer tudja változtatni előjelét, a $v_k(x)$ lineáris függvény X_k zérushelyén:

$$X_k = x_k + \frac{\omega'(x_k)}{\omega''(x_k)}. \tag{31}$$

(X_k mindig különbözik a x_k-tól, mert $v_k(x_k) = 1$). Ha az

$$x_1, x_2, \dots, x_n \tag{32}$$

interpolációs pontok adva vannak, akkor a

$$X_1, X_2, \dots, X_n \tag{33}$$

pontok egyértelműleg vannak meghatározva. A X_k pontot a x_k interpolációs pont *konjugált*jának nevezem.

Már most feküdjenek ezentúl az $x_1, x_2, \dots x_n$ interpolációs pontok a $-1 \leq x \leq 1$ számközben és x is legyen mindig erre a közre korlátozva. Az előzők alapján mondhatjuk:

Az elsőfajú HERMITE-*féle alappolinomok akkor és csak akkor nemnegatívok az egész* $-1 \leq x \leq 1$ *interpolációs közben, ha az*

$X_1, X_2, \ldots X_n$ konjugált pontok mind a $-1<x<1$ interpolációs közön kívül fekszenek.

Ha már most tekintjük a

$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, h_k(x) \tag{34}$$

függvényoperációt, amelynek jelentése nyilvánvaló, akkor vele kapcsolatban a következőt mondhatjuk:

A (34) alatti lineáris függvényoperáció pozitivitására szükséges és elegendő, hogy a $-1<x<1$ köz konjugált ponttól mentes legyen. (A (34) alatti formulában x a $-1 \leqq x \leqq 1$ számköz egy tetszőleges, de rögzített helyét jelenti.)

Bizonyos lineáris függvényoperáció (a (34) alatti) pozitivitásának követelése tehát arra vezetett bennünket, hogy a $-1 \leqq x \leqq 1$ számköz összes n pontból álló $x_1, x_2, \ldots x_n$ pontrendszereit két osztályba osszuk. Az első osztályba tartoznak mindama $x_1, x_2, \ldots x_n$ pontrendszerek, amelyeknek $X_1, X_2, \ldots X_n$ konjugált pontjai mind kiesnek a $-1<x<1$ közből; a második osztályba tartoznak az összes többi pontrendszerek.

Ez osztályozás, megkülönböztetés, mely egy operáció pozitivitásának követeléséből eredt, azért fontos, mert azok az $x_1, x_2, \ldots x_n$ pontrendszerek, amelyek interpolációnál használatosak és matematikailag a legérdekesebbek, majdnem mind a mi első osztályunkhoz tartoznak.

Legyenek például $x_1, x_2, \ldots x_n$ az úgynevezett Csebisev-féle abszcisszák, melyek oly sokféleképp származtathatók. Ezeket úgy kapjuk meg, hogy az x-tengelynek -1-től $+1$-ig terjedő darabja fölé, mint átmérő fölé, félkört írunk, e félkört n egyenlő ívre osztjuk, és ez egyenlő ívrészek felezőpontjait merőlegesen az x-tengelyre vetítjük.

Ebben a speciális esetben könnyű belátni, hogy $X_k = 1/x_k$, vagyis hogy az x_k interpolációs pont konjugált X_k pontja nem más, mint az x_k konjugált harmonikus párja, ha -1 és $+1$ az alappontok. Minthogy az $x_1, x_2, \ldots x_n$ pontok harmonikus konjugáltjai természetesen a $(-1, +1)$ közön kívül fekszenek, tehát a CSEBISEV-féle $x_1, x_2, \ldots x_n$ pontrendszer valóban a mi első osztályunkhoz tartozik.

Második példának választjuk azt a pontrendszert, amelyet GAUSS vezetett be a parabolikus interpoláció útján való mechanikus quadratúráról szóló híres értekezésében. Most az $x_1, x_2, \ldots x_n$ interpolációs pontok gyökei a

$$P_n(x) = 0 \tag{35}$$

egyenletnek, ahol $P_n(x)$ jelenti az n-indexű LEGENDRE-féle polinomot. Könnyű megmutatni, hogy ebben az esetben

$$X_k = \frac{x_k + 1/x_k}{2},$$

vagyis hogy most a konjugált X_k pont a x_k interpolációs ponttól a konjugált harmonikus pontig terjedő távolság felezőpontjában van. Ámde valamely pont és harmonikus párja közötti távolság felezőpontja mindig az alappontok közén kivül fekszik. E szerint a LEGENDRE-GAUSS-pontrendszer is a mi első osztályunkhoz tartozik.

Általánosabban, a

$$J_n(\alpha, \beta, x) = 0 \tag{36}$$

egyenlet $x_1, x_2, \ldots x_n$ gyökrendszere az első osztályhoz tartozik, ahol $J_n(\alpha, \beta, x)$ jelöli az n-indexű JACOBI-féle polinomot, föltéve, hogy az α, β parameterek eleget tesznek a $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$, $0 \leqq \beta \leqq \frac{1}{2}$ egyenlőtlenségeknek. Ha $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, akkor a gyökrendszer a GAUSS-féle, ha $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$, akkor a CSEBISEV-féle. Fölhivom a figyelmet egy harmadik, igen érdekes speciális esetre: $\alpha = \beta = 0$. Ebben az esetben az interpolációs pontok: -1 és $+1$, továbbá a $P'_{n-1}(x) = 0$ egyenlet $n-2$ gyöke; itt $P_{n-1}(x)$ az $(n-1)$-indexű LEGENDRE-féle polinomot jelöli.

Már most valamely függvényhez tartozó végtelen LAGRANGE-féle, vagy HERMITE-féle interpoláció-sorozatra, föltéve, hogy a pontrendszerek mind az első osztályhoz tartoznak, igen általános és meglepően egyszerűen bizonyitható tételek állapithatók

4*

meg. Ámde nem terjeszkedhetem ki tovább erre az érdekes tárgyra, áttérek harmadik és utolsó thémámra — parabolikus interpoláció útján való mechanikus quadratúrára.

6. *Mechanikus quadratúra.* Legyen $f(x)$ korlátos és RIEMANN-szerint integrálható a $-1 \leqq x \leqq 1$ közben. Ha $x_1, x_2, \ldots x_n$ ujra a $-1 \leqq x \leqq 1$ köz n egymástól különböző pontját jelenti, akkor

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k(x) \tag{37}$$

a megfelelő LAGRANGE-parabola, és a

$$Q = \int_{-1}^{+1} L(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \int_{-1}^{+1} l_k(x)\, dx \tag{38}$$

integrált nevezzük a megfelelő *mechanikus quadratúra-értéknek.* A

$$\lambda_1 = \int_{-1}^{+1} l_1(x)\, dx,\ \lambda_2 = \int_{-1}^{+1} l_2(x)\, dx, \ldots,\ \lambda_n = \int_{-1}^{+1} l_n(x)\, dx \tag{39}$$

faktorokat, vagyis a LAGRANGE-féle alapfüggvényeknek a quadratúra közére kiterjesztett integráljait, és amelyek nyilván csak az $x_1, x_2, \ldots x_n$ abszcisszáktól függnek, nevezem COTES-féle számoknak. Világos, hogy a

$$Q = Q[f] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \tag{40}$$

quadratúra-képlet szintén lineáris függvény-operációt reprezentál, amely, ezt mindjárt megjegyzem, általánosságban indefinit, vagyis a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ COTES-féle számok között pozitivok és negatívok is vannak. Ez érvényes például akkor, ha az $x_1, x_2, \ldots x_n$ pontok a $(-1, +1)$ közt n egyenlő részre osztják, az n végtelen sok értékére. Ebben az összefüggésben idézem USPENSKY és PÓLYA fontos kutatásait, és fölemlítem, hogy az utóbbi eredményei új impulzust adtak ilyen irányú kutatásoknak.

Előbbi megjegyzéseim szinte önkénytelenül vezetnek a $(-1, +1)$ köz $x_1, x_2, \ldots x_n$ pontrendszereinek egy új osztályozásához. Az első osztályba tartoznak azok az $x_1, x_2, \ldots x_n$ rendszerek, amelyekhez tartozó $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ COTES-féle számok nem negatívok, a második osztályba az összes többiek.

De létezik-e csak egy $x_1, x_2, \ldots x_n$ pontrendszer is, amely az első osztályhoz tartozik? Erre a kérdésre igenlően kell felelnünk, éspedig GAUSS, CHRISTOFFEL és STIELTJES következő klasszikus eredménye alapján: az $x_1, x_2, \ldots x_n$ LEGENDRE-féle abszcisszákhoz tartozó COTES-féle számok mind pozitívok, vagyis a quadratúra operációja pozitív. Újabban azt találtam, hogy a CSEBISEV-féle abszcisszákhoz tartozó COTES-féle számok is pozitivok; a JACOBI-féle abszcisszákhoz tartozók, ha $\alpha=\beta=0$, $\alpha=\beta=\frac{3}{4}$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=0$, és még másféle rendszerekhez tartozók is. Később SZEGŐ eredeti módon tárgyalta a COTES-féle számok pozitivitását, éspedig a legáltalánosabb JACOBI-féle pontrendszerek esetében.

Már most azokra a pontrendszerekre nézve, amelyekhez tartozó quadratúra-operáció definit, érdekes általános tételek érvényesek; úgyszintén magukra a quadratúra értékekre. Egyet az utóbbiak közül megemlítek: ha vesszük az ilyen pontrendszereknek egy tetszőleges, mindig több és több pontból álló, végtelen sorozatát, akkor a megfelelő quadratúra-értékek lim $n=\infty$-re $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$-hez konvergálnak, föltéve, hogy $f(x)$ korlátos és RIEMANN szerint integrálható a $-1 \leq x \leq 1$ közben. E tétel STIELTJES egy tételének nagymérvű általánosítása, aki az imént formulázott általános konvergencia-tételt a LEGENDRE—GAUSS-pontrendszerek speciális esetére mondotta ki. Különösen érdekesnek találom (és ez, úgy látszik, a kutatók figyelmét eddig elkerülte), hogy az olyan kitüntetett pontrendszer esetében is, mint amilyen például a CSEBISEV-féle, a mechanikus quadratúra operációja pozitív.

Mi a $-1 \leq x \leq 1$ számköz $x_1, x_2, \ldots x_n$ pontrendszereit élesen két osztályba osztottuk az interpolációval kapcsolatban; ugyancsak két osztályba osztottuk e pont n-eseket a mechanikus quadratúrával kapcsolatban. Lehet ezeket az osztályozásokat másképpen is jellemezni? Milyen összefüggés van a két osztályozás között? E kérdésekkel még foglalkozni fogok.

Még csak egy szót a quadratúrával kapcsolatban. A FOURIER- és LAPLACE-sornál, valamint az interpolációnál az eredeti, klaszszikus kifejezések (például a sor részletösszege, a LAGRANGE-féle interpolációs polinom) indefinitek; csak a modifikált kifejezések között találunk pozitíveket (arithmetikai közép, HERMITE-féle interpolációs polinom). Ellenben a quadratúránál, mint láttuk, maga az eredeti, a LAGRANGE-féle parabola útján meghatározott quadratúra pozitív, föltéve hogy a quadratúra-abszcisszák egy élesen definiált osztályba tartoznak.

7. *Befejező megjegyzések.* Végére jutottam előadásomnak, melynek a következő címet is adhattam volna: a pozitív lineáris függvényoperáció fogalmának jelentősége a harmonikus analízis, az interpoláció és a mechanikus quadratúra elméletében. Még csak egy rövid megjegyzést előadásom egész anyagára vonatkozólag. Minden egyes esetben a lineáris operációk egy sokaságával állottunk szemben, amelyből aztán kiválogattuk azokat, amelyek pozitívok, éspedig avégből, hogy bizonyos célokat elérjünk, amelyek a szóbanforgó különböző elméletekben ki vannak tűzve. Kérdem: szükséges e célok elérhetésére az operációk pozitivitása? Felelet: nem szükséges. Ha szükséges és elegendő föltételeket akarunk fölállítani, akkor bizonyos abszolút értékeket kell taglalnunk, amint azt LEBESGUE teszi a szinguláris integrálokra vonatkozó alapvető vizsgálataiban. Hát akkor miért foglalkoztunk annyira behatóan éppen a pozitív operációkkal? Mert a legelemibb operációk, amelyekkel mindhárom elméletnek egészen az elején találkozunk, szerencsére pozitívok. És a következő okból is: ha nem törekszünk teljes általánosságra, hanem operációinkat bizonyos természetes pótló megszorításoknak vetjük alá, akkor az operációk pozitivitása nemcsak elégséges, hanem szükséges föltétel is.

Fejér Lipót.

ÜBER UNENDLICHE FOLGEN, DIE IN DER THEORIE DER HARMONISCHEN ANALYSE, DER INTERPOLATION UND DER MECHANISCHEN QUADRATUR AUFTRETEN.

Identisch mit dem Vortrage, den der Verfasser am 21-ten Juni 1933 an der Chicagoer Weltausstellung vor der «American Mathematical Society» und vor der Section A der «American Association for the Advancement of Science» gehalten hat, auf Einladung dieser letzteren Association und der leitenden Persönlichkeiten der Weltausstellung. (Erschienen in englischer Sprache im «Bulletin of the American Mathematical Society», 1933).

Leopold Fejér.

DEFORMÁLT $NaCl$-KRISTÁLYOK ELEKTROMOS VEZETÉSÉHEZ. I.

1. A következő vizsgálatok folytatását és kibővítését képezik a már hároméve természetes $NaCl$-kristályokon észlelt nyomási effektusnak.[1] Ez a hatás abban állott, hogy természetes $NaCl$-kristályok egyoldalú nyomás hatására a vezetési áramban hirtelen ugrásszerű növekedést mutatnak, amely növekedés hirtelen megszűnt. A jelenségnek azt az értelmezést adtuk, hogy a nyomás hatására részben újabb ionok vesznek részt az áram közvetítésében, részben az ion mozgékonyságok növekednek meg. Joffé[2] egy nagyobb összefoglaló kritikai dolgozatban azt a véleményt nyilvánította, hogy a fentjelzett nyomási hatás nem újabb ionoknak köszöni az eredetét, hanem annak, hogy a kristályban uralkodó belső polarisatiós feszültség a nyomás hatására hirtelen megszűnik. Az ion kristályokban az ú. n. tartós áram (szemben a tartós árammal, kezdeti áramnak nevezzük a feszültség rákapcsolásának első pillanatában uralkodó áramot)

$$J = \frac{E-P}{R}$$

formulával fejezhető ki, ahol E az alkalmazott feszültség Voltokban, P a belső polarisatiós feszültség, minek eredete tértöltésekben van és csak kb. 300° C alatt jelentkezik; R a kristály ellenállása, J az ú. n. tartós áram. A P kifejlődése

---

[1] lásd: Gyulai és Hartly: Math. és Phys. Lapok **35.** 1928. 214 oldal.
[2] A. Joffé: Zeitschr. f. Phys. 62. 730. 1930.

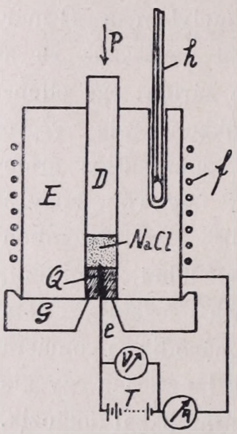
időt vesz igénybe, mely idő a másodperc tört részétől napokig tarthat. E formulából világos, hogy ha a P ugrásszerűleg eltűnik, vagy ugrásszerűleg csökkenést szenved, akkor az J ugrásszerű emelkedést mutat. JOFFÉ az ő álláspontját kisérletileg véli igazolni. Erre nézve közöl is egy schematikus ábrát (közelebbi adatok nélkül), melyben a nyomást alkalmazták az ú. n. polarisatiós áramra. Ha egy kristályról, melyben a P már teljesen kifejlődött, a külső E feszültséget levesszük és a kristályt az árammérő készüléken át rövidre zárjuk, egy ellentétes áramot észlelünk, mely folyton csökken, míg végre mepszűnik. JOFFÉ alkalmazza tehát erre a polarisatiós áram tartamára a nyomást és a mérési adatokból úgy véli, hogy a nyomás hatására nem keletkeznek laza ionok. Ezzel szemben a JOFFÉ által közölt schematikus görbén meg lehet állapitani, hogy egyfelől a nyomás hatására a polarisatiós feszültség nem tűnik el ugrásszerűen, másfelől pedig a második nyomásra jelei vannak annak, hogy a nyomásra mégis lépett fel egy kis áramváltozás.[1] Miután e jelenség nagyon kis áramokkal dolgozik, bár a kisérleteket magam is megismételtem, egészen más irányban törekedtem a kisérleti anyagot szaporitani.

2. Ha ugyanis $NaCl$-ból — akár természetes, akár synthetikus tiszta anyagból — egy présben pasztillákat csinálunk, a következő makroszkópikus megfigyelést tehetjük: ha a kiinduló anyagot mozsárban finom porrá törjük, melyben minden kocka éle kisebb 0·1 mm-nél és a pasztilla préselését szobahőmérsékleten végezzük, nagyon kemény, összeálló, sőt opalisáló pasztillát nyerünk. Egy ilyen pasztillát eltörve, abban apró kristallitok halmazát látjuk, melyben könnyen találunk milliméteres méretű síklapokat. Az apró kristályok tehát nagyobb kristályokká nőttek össze, ami csakis intenzív ionmozgás

[1] Megjegyzés a korrekturánál: A JOFFÉ intézetében egy újabb vizsgálati sorozatban (lásd A. W. STEPANOW, Zeitschr. f. Phys. **81** 561 oldal *c* pont, 1933.) ezt a kérdést újra megvizsgálták és most kifejezetten megállapították, hogy az áramnövekedés nem a polarisatiós feszültség megszűnésének a következménye.

által volt lehetséges. Más szóval a nyomás hatására a pasztillában intenzív rekristályosodás lépett fel.

Tehát míg a fentemlített egyoldalú nyomásnál egy jól fejlett természetes kristály-rács szerkezete rosszabb lett, a pasztillákban mindenoldalú nyomás hatására ellentétes folyamat lépett fel. Én tehát egy berendezéssel vizsgáltam, hogy miképen változik a pasztilla elektromos vezetőképessége a rekristályosodás folyama alatt. A kísérleti berendezés a következő volt: (lásd az 1. ábrát).



1. ábra.

D=préselő acéldugattyú, E = acéledény, $NaCl$ = kristály, Q=átfurt quarc henger, E=rézelektród. T=anódtelep, V=Voltmérő, A=Ampéremérő, f=fűtődrót, h=hőmérő, P=nyomás, G=alátét.

Meg kell jegyezni, hogy a nyomásnak ez a módja, tekintve a $NaCl$-kristályok nagyon plasztikus voltát, már 100° C hőmérsékletnél is mindenoldalú nyomásnak vehető. Ampère-mérőnek a hőmérsékletnek megfelelően egy tükrös galvanométer, vagy egy mutatós galvanométer szolgált. Miután a pasztilla erős nyomás alá vettetett és hosszabb időn át fűttetett, vette kezdetét a mérés. Különböző hőmérsékleteken, miután a hőmérséklet hosszabb időn át állandó volt, mértem a vezetőképességet kis feszültség mellett 5—100 Volt intervallumban. Az áram értékek praktice konstáns értéket adnak. Most egy mérés alatt, miközben a feszültség a pasztillán volt, a D dugattyút nyomás alá vetettük és egyszersmind figyeltem a galvanométer járását. Az eredmény röviden az, hogy bármilyen hőmérsékleten is végeztem e műveletet, a nyomás hatására mindig ugrásszerűen esett az áram. A későbbi időben ez az esés részben még további lassú esésben, részben lassú emelkedésben végződött. (Lásd az 1. táblázatot).

1. Táblázat.

Ugrásszerű áramcsökkenés mindenoldalú nyomásra 4. pasztilla.

Hőfok C°-ban	Állandó hőmérsék időtartama órákban	Constans vezetőképesség K	Vezetőképesség préselés után	K ugrásszerű esése %-ban
		10^{-10} Amp/Volt-ban		
144	19	—	—	—
99	7	—	—	—
214	13	1380	930	32·6
			lassan emelkedik 1070-ig	
214	14	1070	897	16·2
			2′ alatt esik 875-ig	
			5′ alatt emelkedik 1000-ig	
144	24	—	—	—
191	9	—	—	—
121	16	—	—	—
193	22	210	161	24·3
122	24	—	—	—
254	7	1140	1040	8·8

E jelenség értelmezése a következő. A nyomás hatására a pasztilla hossza kisebbedik, tehát a geometriai alakváltozás áramnövekedést (még ha oly kicsit is) vonna maga után. Ugyancsak ezt a hatást váltaná ki a nyomás következtében esetleges kontaktusjavulás is, bár az előzetes nyomások után e téren kevés javulás várható. A pasztillában a fent Joffé által említett belső polarisatiós feszültség szintén megvan és Joffé álláspontja szerint annak a nyomásra való megszűnése szintén áramugrást kellene létrehozzon. Tehát az összes fellépő hatások áramnövekedést kellene létrehozzanak és ezzel szemben éppen az ellenkezője lép fel. A magyarázat az, hogy a nyomásra a pasztilla rekristallizálódik, azaz részek, melyekben még tökéletlen érintkezési felületek vannak, jobbakká lesznek, azaz ionok, melyek éleken, csúcsokon foglaltak helyet, most a mindenoldalú nyomás következtében más ionokhoz közelebb kerülnek és igy az elektrostatikai erők következtében szilárdabban beépülnek. Ez a szilárdabb összeépülés makroszkopikusan is megfigyelhető. Ha ugyanis pasztillákat készitünk különböző nyomásokon és különböző hőmérsékleteken, azt észleljük, hogy nagyobb nyomásra a pasztillák áttetszőbbek lesznek, jeléül a szoros összenövéseknek. Viszont már 100° C hőmérsékleten felül, ha elég nagy nyomásokat alkalmazunk, egészen víztiszta pasztillákat nyerhetünk. Egy ilyen pasztilla már semmi külső jelét nem viseli annak, hogy egy finom szemcséjű porból ered. Ha tehát a most nyert áramesési megfigyeléseinket összevetjük a régebbi áramugrásainkkal, egységes magyarázatot adhatunk. Az egyoldalú nyomás a kristály belső szabályos elrendezését rontja és a folyamat nem játszódhatik le ionlazitás nélkül. Amig tehát a helyükből kimozditott ionok újabb stabil helyet nyernek, intenzivebb részt vesznek az áramban, mint különben. A pasztillánál pedig mindenoldalú nyomás mellett a nyomás hatására ionok, melyek más ionokhoz elég közel jutnak, hirtelen megköttetnek és kisebb mértékben vesznek részt az áramban. Precízebben mindkét esetben a mozgékony ionok számának és az ionok mozgékonyságának a szorzata szenved növekedést, illetőleg csökkenést.

3. Ezek után célszerű volt a megfigyelési anyagot tovább bővíteni és pedig lehetőleg olyan deformátióra alkalmazni, amelyik finomabb, mint egy külső durva behatás. Erre nézve kiváló anyagul szolgált a következő jelenség: Már rég ismeretes, hogy némely természetes kősókristályok optikai anisotropiát mutattak, azaz keresztezett Nikolok közé állítva őket, a látómező egyes helyein világos fényfoltok jöttek létre, nyilván az által, hogy az anisotrop helyek a fény polarizatiós síkját elforgatták. Ugyanezt a jelenséget észleltem az általam előállított víztiszta pasztillákon is. Ugyancsak észleltem azt is, hogy ha ilyen anisotrop pasztillát hosszabb időn át magasabb hőmérsékleten temperáltam, ez az anisotropia megszűnt. Más szóval — főképpen a fémeken észlelt deformálási, merevülési (Verfes-

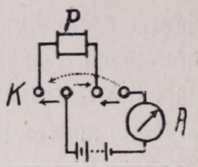
tigung) és megújhodási jelenségek analogiájára — mondhatjuk, hogy a pasztillában a préselési folyamatból belső feszülések maradtak meg, amelyek tekintve a kiindulási apró kristályok mindenféle orientációját, igen számosak és igen nagymérvűek lehetnek. Ugyancsak várhatjuk, hogy a feszülések magasabb hőmérsékleten megszűnnek, aminek a kettőstörés eltűnése kézzelfogható bizonyítékát adja. E feszülések természetesen csak ion mozgások által szűnhetnek meg, mert hisz a *NaCl*-kristály kizárólag ionokból áll. Ennélfogva tehát a problémakörünbe egy igen jó vizsgálati területül szolgál ez a jelenség, ahol tudjuk, hogy makroszkopikus térbeli ionmozgások létrejönnek, de e mozgások mégis finomabbak, mint azok, melyek az általunk kikényszerített egyoldalú, vagy mindenoldalú nyomásnál fellépnek.

A vizsgálat menete tehát a következő volt: különböző hőmérsékleten készítünk pasztillákat, lehető egyenlő nyomás mellett. Sajnos a nyomások csak megközelítőleg egyenlők, mert hydraulikus-sajtó hiányában csak egy egyszerű csavarprés állott rendelkezésemre. A pasztilla két végére a kontaktust képező graphitpor, rézpor mindjárt a présben hozzá lett préselve. Egynéhány pasztilla külön platinával vonatott be kathodelporlasztás utján.[1] A pasztillák a présből kivéve egy kis elektromosan fűthető kályhába jöttek, mely jól szigetelt elektródokkal volt ellátva. A hőmérsékletet néhány órán át kb. 60°-on tartottam, hogy az esetleges nedvességek elpárologjanak és ekkor a hőmérsékletet egy magasabb állandó értékre állítottam be és közben állandóan észleltem a vezetési értékeket. A vezetőképességet úgy egyen-, mint váltakozó árammal mérhettem. A váltakozó áramot egy kis forgó kommutátorral állítottam elő[2] és a következő kapcsolás szerint az egyenáramú árammérő készülékeimet használtam: (lásd a 2. ábrát.)

---

[1] A kathodelporlasztás útján való bevonásért BAINTNER GÉZA és KISFALUDI T. ISTVÁN uraknak e helyen is meleg köszönetet mondok.

[2] Lásd: GYULAI Z.: Ólomchlorid elektromos vezetőképességének függése *KCl* hatására. Math. és Phys. lapok. 1930. 131. oldal.



2. ábra.
P=pasztilla. K=kommutator kontaktusai. A nyilak az áram áthaladási iránya váltás előtt és váltás után. A=Ampère-mérő.

A kisérleti eredmény két pontban foglalható össze. 1. A vezetőképesség rendkívül nagy értékkel kezdődik és konstans hőmérséklet mellett aránylag gyors esést mutat. Az esés azután lassabban bár, de több napon át tart. Amint a 2. táblázat mutatja, a 3. pasztillán a vezetőképesség egy esetben 111° C hőmérsékleten 186 óra alatt közel a kezdeti érték ötezredrészére esik. Ugyancsak a 9-es számú pasztillán 300 óra mulva kö-

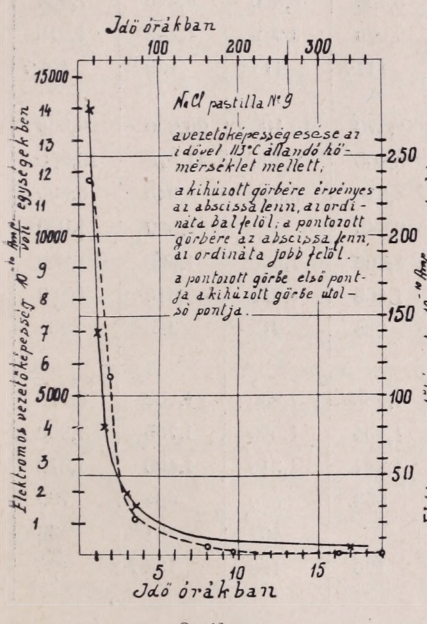
2. táblázat.

A vezetőképesség csökkenése az idővel állandó hőmérséklet mellett.

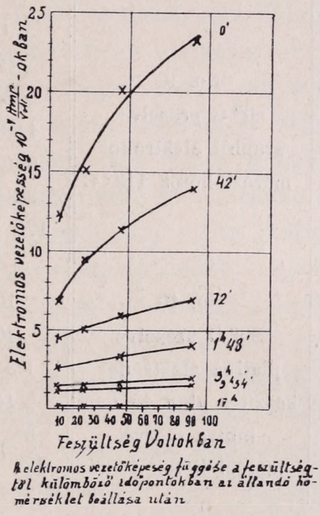
No. 3 120°C préselve			No. 9 20°C préselve			No. 10* 20°C préselve		
K= vezetőképesség 10^{-10} Amp/Volt-ban váltóárammal mérve t = az állandó hőmérsék időtartama órákban T= mérési temperatura $C°$-okban. Feszültség 91 Volt								
t	T	K	t	T	K	t	T	K
$3^h15'$	111	7,420	0	113	23,300	10'	123°	2,170
$5^h18'$	—	4,810	42'	—	13,980	40'	—	1,900
22	—	109·7	$1^h12'$	—	6,990	$1^h34'$	—	1,510
45	—	38	$1^h48'$	—	4,020	$2^h44'$	—	700
93	—	7·1	3	—	1,950	6	—	436
117	—	4·4**	$3^h34'$	—	1,530	23	—	134
189	—	1·6	17	—	235	31	—	82·5
—	—	—	40	—	122	47	—	34·6
—	—	—	70	—	22·3**	73	—	21·9
—	—	—	161	—	6·1	129	—	13·4
—	—	—	193	—	2·4	248	133°	5·5
—	—	—	305	—	0·47	393	135°	4·5
—	—	—	380	—	0·48	—	—	—

* Előállítás után 15 nap mulva észlelve.
** Innen kezdve egyenárammal mérve.

zel 5000-szer kisebb a vezetőképesség, mint kezdetben. Ezt az esetet szemléletesen tünteti fel a 3. ábra. Ugyancsak úgy látszik, hogy ha az észlelés a pasztilla elkészítése után hosszabb idő mulva kezdődik, akkor a kezdeti érték is kisebb lesz, azaz már szobahőmérsékleten megindul a pasztillában egy ú. n. megújhodási folyamat, ami a belső feszülések megszűnésével jár. (Lásd a 10-es pasztilla adatait). 2. A kezdeti



3. ábra.



4. ábra.

nagy vezetőképességek tartományában nem érvényes az Ohm törvénye. Amint ezt a 3. táblázat és a 4. ábra mutatják, az eltérés a legnagyobb áramértékeknél a legnagyobb és amint az áramértékek esnek, az Ohm törvényétől való eltérés is fokozatosan megszűnik. Mikor a pasztilla vezetőképessége konstans értéket vesz fel, az Ohm törvénye is az itt alkalmazott feszültségi intervallumban és az általam alkalmazott mérési pontosság mellett szigoruan érvényesül. Hogy a pasztilla stabil állapotot vesz fel, annak mértékéül szolgál a változatlan vezetőképesség

3. Táblázat.

A vezetőképesség feszültségi függése.

Pasztilla	Mióta van a mérési hőfokon	Feszültség Voltokban			
		6·5	23·0	45·8	91·0
No. 3	Vezetőképesség 10^{-10} Amp/Voltokban váltóárammal mérve[1]				
120° C préselve rézpor ellektródok mérési hőfok 111° C	$3^h 15'$	5,430	5,830	6,300	7,420
	$5^h 18'$	3,920	3,980	4,250	4,810
	22^h	111·8	111·0	109·8	109·7
No. 9 20° C préselve graphit elektródok mérési hőfok 113° C	0'	12,370	15,100	20,200	23,300
	42'	6,800	9,430	11,370	13,980
	72'	4,510	5,030	5,940	6,990
	$1^h 48'$	2,640	—	3,330	4,020
	$3^h 0'$	1,500	1,530	1,590	1,950
	$3^h 34'$	1,105	1,210	1,310	1,530
	17^h	224	215	225	235
No. 10 20° C préselve platina elektródok készités után 15 nap mulva mérve mérési hőfok 123°	10'	1,585	1,830	1,950	2,170
	40'	1,434	1,595	1,705	1,900
	$1^h 34'$	1,231	1,310	1,400	1,510
	$2^h 44'$	553	620	664	700
	6^h	—	407	431	436
	23^h	126	123·6	132·7	134

mellett a hőmérsékleti koefficiensek meghatározása. Ha a hőmérsékleti függés *B*. koefficiense, az ú. n. kioldási munka értéke egyezik az irodalomban meghatározott értékekkel, akkor mondhatjuk, hogy a pasztilla normális állapotot vetett fel.[2]

Az irodalomban legutóbb QUITTNER és BERAN[3] észleltek jól

[1] Forgó kommutátoron át.

[2] A hőmérsékleti függés $K = A . e^{-\frac{B}{T}}$ kifejezés *A* koefficiense az irodalomban is nagy intervallumban változik. Számszerű adatokat most azért nem közlök, mert mindkét koefficienst később szorgos vizsgálatok tárgyává szándékozom tenni.

[3] F. QUITTNER és O. BERAN. Zeitschr. f. Physik. 66. 774. 1930.

temperált természetes kristályokon nagy erősségek mellett (4500 Volttól 100.000 Volt/cm-ig) eltérést az OHM törvényétől. Összehasonlítva az ő általuk észlelt eltérést az itt észleltekkel, azt látjuk, hogy az általuk észlelt eltérések kb. 104-szer kisebbek, mint az itt múló jellegű eltérések. Hogy a QUITTNER által észlelt eltérés a kristály alaptulajdonságához tartozik-e, vagy pedig az itt észlelt labilis állapotnak egy maradványa, azt csak későbbi vizsgálatok dönthetik el.

Az itt leírt jelenség mechanizmusáról a következő képet alkothatjuk magunknak: A pasztilláknak kis kristályaiban az előállitás után nagy feszülések vannak. E feszülések törekednek lassanként kiegyenlitődni és magasabb hőmérsékleteken ez a kiegyenlitődés meglehetős gyorsan megy végbe. Ezért van az, hogy az irodalomban úgy pasztillákon, mint természetes kristályokon a rendszeres méréseket általában csak ú. n. temperálási aktus (hosszabb-rövidebb hevités magasabb hőmérsékleten) után kezdették. Ez a kiegyenlitődés ionmozgásokkal mehet végbe, tehát a folyamat alatt ionok egymás után elhagyják előbbi helyeiket és új helyzetet foglalnak el. Ha tehát a folyamat alatt mérjük a pasztilla vezetőképességét, azaz a pasztilla ionjait egy elektromos térbe helyeztük, azok ott nagyobb számban, vagy nagyobb számban és hosszabb útakon mozdulnak el, mintha az ionok már stabil helyzetükben volnának. Miután az ionok spontán elhagyják helyeiket és új helyzetet keresnek, érthető, hogy nagyobb térerősség mellett nagyobb vezetőképességet kapnak, mert a nagyobb térerősség a már úgyis labilis helyzetű ionokból olyanokat is kimozdit, amelyek a kisebb térerősség mellett még a helyükön maradtak volna. Ennek a jelenségnek igen rövid időkre kiterjedő vizsgálata még élesebb képet adhat a kristályok kellő labilis állapotáról és az átrendeződési folyamat lefolyásáról.

Összefoglalás: JOFFÉ (idézett dolgozatának 4. pontjában) megállapitja, hogy a vezetésben a rácsionok vesznek részt és a lazaionokra semmi szerep nem marad. Viszont külső mechanikai deformációknál középértékben az összes ionokra, tehát a vezetési ionokra is hatást gyakorolunk. A fent ismertetett jelenségek igen nyomatékos példáját szolgáltatják annak, hogy a vezetőképesség mechanikai állapotváltozásokkal befolyásolható. Ennélfogva tehát meg kell különböztetnünk a kristályban egy kiegyensúlyozott stabil állapotot és egy labilis állapotot, mely labilis állapot külső mechanikai hatások tartamára és azok utóhatásaként áll elő a kristály belsejében. E labilis állapotban a vezetőképesség értéke túlnyomó részben a külső hatásoknak köszönheti az eredetét és a stabilérték több ezerszerese lehet. Hogy a stabil állapotban az ú. n. lazaionoknak van-e szerepe a vezetésben, vagy kizárólag rácsionok közvetítik az áramot Joffé és Hevesy értelmében: ez a kérdés továbbra is fennáll. Mindamellett a rácsionok túlnyomó szerepe mellett szól Joffé-nak ugyancsak említett dolgozatában az 1. pont, mely szerint a vezetési mérésekkel meghatározott ionleváltási munkák jól egyeznek az olvadási hőből számított munkaértékekkel.

Az itt vázolt vizsgálati módszer további kiépítése fontos eszközül szolgálhat a belső anyagszerkezeti folyamatok megfigyelésére és így a fémeken észlelt struktúraváltozások által nyert ismereti anyag kibővítésére.

Ez eredmények első fejezetét képezik azon vizsgálati tervezetnek, melyre a Széchenyi Tudományos Társaságtól nagyobb összeget kaptam és amelyért a Társaságnak e helyen is köszönetet mondok.

Szeged, Egyetemi fizikai intézet, 1932. március hó.

Gyulai Zoltán, Szeged.

BEITRÄGE ZUR KENNTNIS ELEKTRISCHER LEITFÄHIGKEIT DEFORMIERTER *NaCl*-KRISTALLE.

NaCl-Pastillen zeigen bei allseitigem Druck in der Nähe von 200° C Temperatur auf plötzliche Drucksteigerung einen plötzlichen Leitfähigkeitsabfall. *NaCl*-Pastillen unter 120° C Temperatur hergestellt zeigen bei konstanter, etwas über 100° C Temperatur anfangs sehr grosse, dann rasch fallende Leitfähigkeit. Bei den grössten Leitfähigkeiten ist eine Abweichung vom Ohmschen Gesetze vorhanden, die jedoch mit Fortschreiten des Temperungsvorganges aufhört. Die erste Erscheinung wird als eine Rekristallisationswirkung, die zweite als Folge der Kristallerholung, Aufhören der inneren Spannungen, erklärt. *Z. Gyulai.*

ADDITÍV FESTÉSŰ *KCl*-KRISTÁLYOK ELEKTROMOS VEZETÉSE.[1]

1. Az alkáligőzben festett kristályok fényt elnyelő centrumairól az általános felfogás az volt, hogy ezek neutrális alkáli atomok, amelyeknek hiányzanak a megfelelő halogén társaik. Egyikünk (Stasiw) nemrégen olyan megfigyeléseket közölt,[2] amelyekből azt következtette, hogy e neutrális atomok magasabb hőmérsékleten elektromos mezőben elektronokat adnak le és igy a meglevő elektromos áram egy része elektronvándorlásból áll. Ez az elektronvándorlás csak rövid ideig tart és közben a kristály elszíntelenedik és az áramerő a kezdeti érték egy tört részére csökken.

Tubandt mérései szerint a *KCl* e hőmérsékleteken (500—600° C) még szigorúan ionvezető. Ez az új megfigyelés — hogy a *KCl*-ban bizonyos viszonyok mellett elektronok is résztvehetnek a kristály természetes vezetésében — nagyon új és indokolttá tette, hogy az additiv festésű *KCl* kristályok elektromos vezetését részletesebben tanulmányozzuk. A jelenség érdekes, mert a fényelektromos vezetés után egy második eset, mely mutatja, hogy egy szigetelő kristályban elektronok vándorolni képesek, ha valamelyes módon elektronokat tudunk bevinni a kristályokba. A neutrális alkáli atomok elektron leadása magasabb hőmérsékleten sajátságos analógiát képez az izzódrótok elektronsugárzásához. A kristályok ionvezetése szempontjából pedig jelentős

[1] Előadatott a Math. és Phys. Társulat 1933. április 20.-i előadó ülésén a Stasiw-féle elszíntelenitési jelenség bemutatásával.

[2] O. Stasiw: Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. K. L. 26. füzet. 1932.

változásokat várhatunk az ion kristály belsejében, ha azon egy elektronraj áthatolt, miután az elektronok a közvetlen környezetükben igen erős elektromos tereket fejtenek ki.

2. A vezető szempontunk az volt, hogy megállapitsuk azt, hogy az additiv festés esetében érvényesek-e a tiszta *KCl* kristályokra megállapitott vezetési törvényszerűségek. E törvényszerűségek a következők: *a)* Állandó hőmérsékletnél érvényes a tiszta kristályokon az OHM törvénye; *b)* a vezetőképesség a hőmérséklettől az ismert Van't HOFF-féle exponenciális törvény szerint függ.

A vizsgálatokat egy elektromos kemencében végeztük. A kristályfelületeken elektromos kontaktusként hydrokollag (De HAËN), vagy aranybevonat (HERÄUS Glanzgold) szolgált. A hydrokollag 450° C hőmérsékletig nagyon jó, magasabb hőmérsékleteken elég. Az arany ráégetésénél a kristályban már jelentékeny elszintelenedések mennek végbe. Mindig egy színes és egy színtelen kristály együtt jött az elektromos kemencébe, hogy a két darab, de egy-egy olvadékból eredő kristály teljesen egyforma körülmények között szerepeljen. A mérés egyenárammal és tükrös galvanométerrel történt. Mint ismeretes, szigetelő kristályokban egyenáram esetén belső polarizációs feszültségek fejlődnek ki, de e polarizációs feszültségek 200 C fokon felül[1] nem jelentékenyek és így az összes mérések 200° C-on felül történtek.

3. A legszembetűnőbb jelenség az, hogy egy színes kristály vezetőképessége a STASIW által megállapitott elszintelenedési hőmérséklet alatt is mindenütt folyton esik. A másik szintén új jelenség, melyet csak a színezett állapotban mutat a kristály, az, hogy nem érvényes rá az OHM törvénye. Nagyobb feszültségek mellett nagyobb a specifikus vezetőképesség értéke.

E két megállapitást tünteti fel egy egyesített mérési sorozatban az 1. táblázat. A hőmérséklet kevés ingadozással 185 órán át állandó volt. A feszültség 10 Volttól 250 Voltig terjedt.

---

[1] O. BERAN und F. QUITTNER: Zs. f. Ph. *64*, 760, 1930. — A. JOFFÉ: Zs. f. Ph. *62*, 743, 1930.

1. táblázat.

A vezetőképesség feszültség függése és időbeli változása állandó hőmérséklet mellett additív festésű KCl kristályban.

Feszültség Volt	0	16	40	65	112	137	160	185	
	óra								
	238	242	241	241·2	242	240·4	237·2	240·8	
	C°								
10·4	0·625	0·163	0·082	0·072	0·048	0·043	0·0348	—	
20·8	0·625	0·175	—	0·077	0·051	—	—	—	
41·6	0·720	0·192	0·108	0·084	0·0576	0·049	0·0348	0·036	$K = 10^{-11} \frac{\text{Amp.}}{\text{Volt}}$ egységekben
83·2	0·950	0·237	0·136	0·108	0·0727	0·0613	0·0427	0·0463	
166·4	1·37	0·387	0·221	0·173	0·1143	0·0962	0·0673	0·0738	
249·3	1·80	0·568	0·335	0·264	0·1860	0·1445	0·104	0·111	
$\frac{K\,249·3}{K\,10·4}$	2·86	3·49	4·09	3·67	3·88	3·34	3·0	3·08	

A vízszintes sorok mutatják, hogy a vezetőképesség bármilyen feszültség mellett az idővel csökken. A vertikális sorok mutatják a megfelelő feszültség mellett mért vezetőképességeket. Amint látszik, a vezetőképesség nagyobb feszültségnél nagyobb. Az utolsó sorban a két szélső feszültség mellett észlelt vezetőképességek viszonya van feltüntetve, és amint látszik, a specifikus vezetőképesség több mint háromszorosára emelkedik, ha a feszültséget 10-ről 250 Voltra emeljük. Hogy ez a viszony 3 és 4 között változik az idővel, ez a kristály belsejének állandó változására mutat.

4. A színes kristályok vezetésének hőmérsékleti függéséről nem lehet egyértelműen beszélni, miután a vezetőképesség az idővel csökken. Ennélfogva csupán arról lehet szó, hogy az elszíntelenítésük után vizsgáljuk őket. Erre nézve az első megállapitás az, hogy az elszíntelenités után qualitative úgy viselkednek, mint az eredeti kristályok, tehát érvényes rájuk az Ohm törvénye és állandó hőfok mellett állandó vezetési értéket mutatnak. A vizsgálatok azonban itt is nevezetes eredményt

hoztak. Az elszintelenités után a vezetési értékek abszolút értéke jelentékenyen kisebb, mint a velük egyidőben mért összehasonlító daraboké. A hőmérsékleti függés a már említett

$$K = Ae^{-\frac{B}{T}}$$

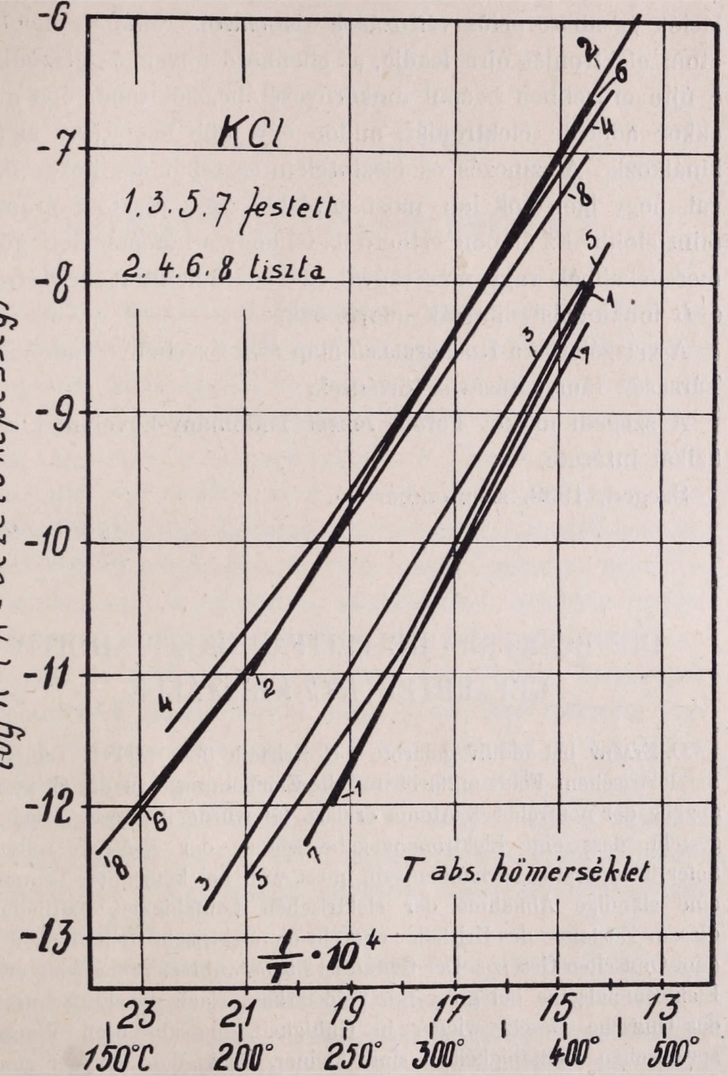
van't Hoff-féle összefüggést mutatja, de az ezen egyenlet alapján számitott ionkioldási munkák nagyobbak lesznek. Az eredményt az 1. ábra tünteti fel, és pedig négy külön mérés eredményét, mindig egy szintelen és egy színes kristály adatait. A négy-négy görbe mutatja, hogy az individuális különbségek sokkal kisebbek, mint az elszintelenítés hatása.[1]

5. Ha most az említett három jelenségről számot akarunk adni, az a fent jelzett kép alapján lehetséges. A színezést neutrális atomok alkotják. Magasabb hőmérsékleten a kristály elszintelenedik, az atomok tehát külső elektronjaikat leadják és a visszamaradó ion a látható szinképben nem abszorbeál, tehát a kristály szintelen marad. Elektromos térben az atomok könnyebben leadják elektronjaikat, és pedig nagyobb térben egyszerre több atom és így jön létre a nagyobb térben észlelt nagyobb specifikus vezetőképesség. Viszont állandó hőmérsékleten észlelve mindig kevesebb neutrális atomunk van és így jön létre a vezetőképesség állandó csökkenése.

A legutóbbi észlelet talán szintén egyszerűen magyarázható. Ugyanis elszintelenítés után a kristály vezetése sokkal kisebb. Ez azt mondja, hogy most kevesebb ion vesz részt az áramban, mert elszintelenítés után csakis ionok közvetitik a kristályban az áramot. Stasiw szerint a kristály színeződése úgy történik, hogy az alkálifürdőből elektronok vándorolnak be a kristályba. Ez elektronok egyes szabálytalan kötésű ionokat neutralizálnak. Hogy szabálytalan kötésű ionok neutralizálhatók csak, ezt fel kell vennünk, mert különben a kristálynak szét kellene esnie.

---

[1] Ez a jelenség igen fontos lehet az ionvezetés mechanizmusának szempontjából és az elérhető hatás megállapítása céljából a vizsgálatokat folytatjuk.



1. ábra.

Ha azonban egy szabálytalan kötésű ion neutralizálódott, az egész környezetének megváltozik az elektromos tere és így ő most a hőrezgések következtében is más elrendeződést vehet fel. Ezt igazolják is a különböző hőmérsékleten fellépő coagulációk és abszorpciós változások (MOLLWO).[1] Mikor e neutrális atom elektronját újra leadja, az ellenkező folyamat játszódik le, ő újra erősebben beépül ionkörnyezetébe, sőt talán épp ott és akkor adja le elektronját, midőn egy jobb beépítésre alkalom kínálkozik. A szinezés és elszíntelenités tehát azt hozza magával, hogy igen sok ion most kevésbbé vesz részt az áramban, mint előbb. Ez alapon érthető az is, hogy a hőmérsékleti görbék meredekebbek vagy más szóval az elszíntelenitett kristályokon a B ionkioldási munkák nagyobbak.

A vizsgálatok a ROCKEFELLER-alap és a Széchenyi Tudományos Társaság támogatásával történtek.

A szegedi m. kir. Ferenc József Tudomány-Egyetem kisérleti fizikai intézete.

Szeged, 1933. szeptember hó.

Gyulai Zoltán,
Stasiw Ostap.

DIE ELEKTRISCHE LEITFÄHIGKEIT ADDITIV GEFÄRBTER *KCl*-KRISTALLE.

O. STASIW hat additiv gefärbte *KCl* Kristalle über 500° C Temperatur in elektrischem Felde entfärbt und die Erscheinung mit der Elektronenabgabe der neutralen *K*-Atome erklärt. Es wurde in dieser Arbeit festgestellt, dass eine Elektronenabgabe seitens der *K*-Atome schon bei tiefer Temperatur vorhanden sein muss, weil bei konstanter Temperatur eine ständige Abnahme der elektrischen Leitfähigkeit stattfindet. In diesem Zustande des Kristalls gehorcht die elektrische Leitfähigkeit nicht dem OHMschen Gesetze. Der Grund ist höchstwahrscheinlich eine erhöhte Elektronenabgabe bei grösseren Feldstärken. Nach der Entfärbung tritt das OHMsche Gesetz wieder in Gültigkeit, die absoluten Werte der spezifischen Leitfähigkeiten sind kleiner, als in den aus der gleichen Schmelze stammenden reinen Stücken, welche mitgemessen wurden. Der Entfärbungsvorgang scheint also eine Art Temperungsvorgang hervorzubringen.

Z. Gyulai.
O. Stasiw.

[1] F. MOLLWO: Zs. f. Ph. 85, 56, 1933.

A KOZMIKUS SUGÁRZÁS TERMÉSZETE.

A kozmikus sugárzással foglalkozó kutatás egy kb. 23 éves multra tekint vissza; e kor a tudományok történetében még mindenesetre fiatal kornak számít. Ez lehet az oka, hogy ma is még oly sok tisztázatlan kérdés, annyi látszólagos ellentmondás van ebben a tudományágban. A kutatók szerte a világ minden táján sok és különböző oldalról kisérelték meg a kozmikus sugarak tulajdonságainak és természetének megállapítását, figyelembe véve mindazokat a jelenségeket, melyekre befolyással lehetnek, vagy megforditva, melyek őket befolyásolhatják. 1910-es év a kozmikus sugarak felfedezési évének vehető, ezen időpont óta az e kérdéssel foglalkozó tudományos dolgozatok igen tekintélyes számra nőttek meg; közel 1000 dolgozat foglalkozik kizárólag e kérdéssel. Ezért nem térhetek ki e dolgozat keretein belül az egész tárgykör ismertetésére, hanem a következőkben egyetlen kérdéscsoportot szeretnék csak kiragadni: a sugárzás természetének kérdését és itt a különböző lehető magyarázatokat a mai felfogás tükrében a kisérleti eredmények nyomán megvitatni.

A kozmikus sugarak igen kis intenzitással, de rendkívül nagy áthatoló képességgel érkeznek a magasságból, valószínűleg a világürből hozzánk. Jelenlétük azáltal kimutatható, hogy ionizálják a levegőt; megkülönböztethetők pedig a többi ionizációt okozó, jól ismert sugárzástól azáltal, hogy áthatolóképességük sokkal nagyobb, mint bármely más sugárzásé.

Amennyiben nem akarunk egy ismeretlen és ezért el sem képzelhető új sugárzási mechanizmust feltételezni, úgy eleve a kozmikus sugarakra is csak kétféle lehetőség áll fenn: vagy igen rövid hullámhosszú fotonok, vagy nagyon gyors és nagy energiájú korpuszkulák. E gyors korpuszkulák lehetnek protonok, α részek, pozitív vagy negatív elektronok vagy neutronok. A kisérletek feladata eldönteni, hogy e hatféle különböző lehetőség közül a kozmikus sugarakban melyikkel vagy melyekkel állunk szemben.

A legáltalánosabban elfogadott felfogás szerint a kozmikus sugárzás, midőn belép földünk légkörébe, feltétlenül legalább részben korpuszkulákból áll, ami mellett azonban nincs kizárva, hogy a beérkező sugárnyalábban már eleve bennfoglaltatnak fotonok is, sőt az is lehet, hogy a sugárzás legkeményebb komponense kizárólag fotonokból áll.

A kozmikus sugárzás természetének megállapítására a következő kisérletekből kaphatunk leginkább felvilágosításokat.

1. Az abszorpciós görbe menetéből.

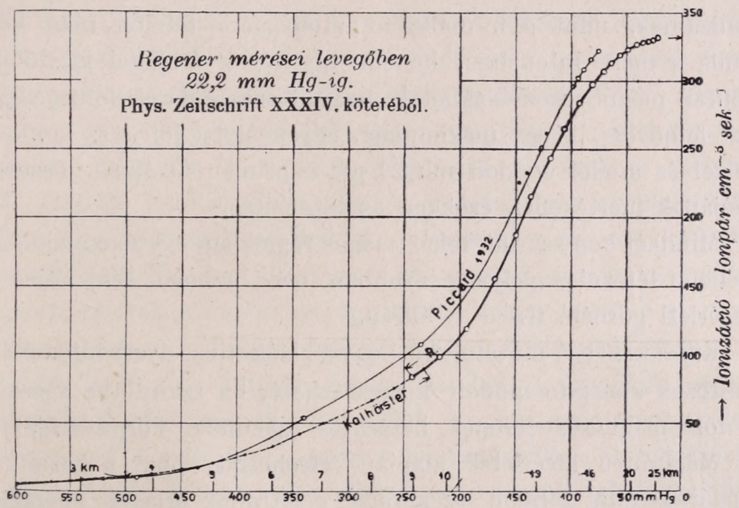
2. A koincidencia kisérletekből.

3. A sugárzás viselkedéséből elektromos és mágneses terekben.

Az abszorpciós görbe menete. A kozmikus sugarak tulajdonságainak vizsgálatára irányuló kísérletekben leggyakrabban a sugárzás intenzitását ionizációs kamrákkal szokásos meghatározni. Az ionizációs kamra egy oly nagyobb térfogatú levegővel vagy más gázzal töltött edény, melynek középső, igen jól szigetelt elektrodáját (mely többnyire elektrométer gyanánt is szolgál) egy meghatározott feszültségre feltöltjük; e töltés, ha a kamrát ionizáló sugarak érik, kisül; a kisülés sebessége mértéke az ionizáló sugárzás intenzitásának. Ilyen ionizációs kamrákkal megmérték a kozmikus sugárzás intenzitását levegőben tengerszinttől 28 km magasságig, vizben 230 m vízmélységig és különböző fémekben 1 m vastagságig.

Tekintsük először a levegőben mért intenzitásváltozás görbéjét. (Lásd 1. ábra.) A görbe legfelső részén kb. 20 km-től kezdve vizszintesbe megy át. Kérdés, összeegyeztethető-e ez a menet akár egy foton, akár egy korpuszkuláris primär sugárzás tulajdonságaival. E kérdés eldöntéséhez kiséreljük meg a görbe menetének elméleti rekonstrukcióját először egy primär foton, másodszor egy primär korpuszkuláris sugárzás feltételezésével.

Ha primär fotonok érkeznek atmoszféránk tetejére, azok ily kemény sugárzás esetében az egész légrétegben is csak 1—2 iont válthatnak ki, a legfelső légrétegben tehát gyakorlatilag nulla ionizációt okoznak. Az ionizációs kamrával mérve az intenzitást, miután a kamrával nem magát az intenzitást mérjük,



1. ábra.

hanem a sugárzás által termelt ionok számát, a legfelső légrétegekben tehát nulla intenzitást fogunk észlelni. Amint most lejjebb haladunk, a primär γ sugárzás kölcsönhatásba kerülve a levegő molekuláival termel szekundär korpuszkulákat, ezeknek az iontermelése már sokkalta nagyobb (kb. milliószor akkora), úgy hogy a mért intenzitás erősen meg fog növekedni. Az intenzitásgörbe elér egy maximumot ott, ahol a primär sugárzás egyensúlyba jut az általa termelt szekundärekkel, vagyis, ahol ugyanannyi szekundär rész eléri hatótávolságának végét, mint amennyi új rész termelődik. Ezután a sugárnyalábban a szekundär részek száma állandó és az intenzitás csökkenését a primär sugárzás intenzitásának abszorpció okozta csökkenése létesíti. E maximum elérése után, vagyis az egyensúlyi állapot elérése után, az intenzitásgörbéből számitott abszorpció együttható mértéke magának a primär sugárzás abszorpciójának.

Ha primär fotonok helyett primär korpuszkulák beérkezését tételezzük fel, úgy meggondolásunk csak annyiban fog módosulni, hogy most, miután a beérkező korpuszkulák erősebben ionizálnak, mint a fotonok, az atmoszféra tetején nem lesz nulla a mért intenzitás, hanem egy véges értékkel kezdődik, ezután megnövekedve az általa termelt szekundärek ionizációjával felnövekszik egy maximumig, egyensúlyba jön a szekundärjeivel és analog módon mint fenn, a primär sugárzás abszorpciójának mértékében csökken az intenzitás.

Mindkét kép szerint tehát magas régiókban egy maximumnak kellene léteznie, melynek azonban még nyomát sem látjuk a kisérleti görbén. (Lásd 1. ábrán.)

Kulenkampff[1] mutatott rá, hogy a kisérletileg nyert intenzitásváltozás kielégitő módon magyarázható, ha tekintetbe vesszük a föld mágneses terének hatását a szekundär korpuszkulákra. Másirányú kisérletek alapján felvehetjük, hogy a kozmikus sugárzás által termelt szekundär elektronok átlagos energiája $10^8 e$ Volt, ami $1{\cdot}59.10^{-4}$ erg energiának felel meg. A föld mágneses tere egy ilyen energiájú elektront a

$$m\frac{v^2}{\varrho} = e.v.H$$

egyenlet alapján (hol e, m, v az elektron töltése, tömege és sebessége; ϱ a pálya görbületi sugara és H a föld mágneses terének intenzitása) egy $\varrho = 6$ km sugarú körpályára kényszeriti. Az elektron ezt a körpályát egyszer vagy többször befuthatja, a szerint, hogy a hatótávolsága hányszorosa a kör kerületének (36 km-nek). Normál nyomású levegőben egy $10^8 e$ Volt ener-

[1] Kulenkampff: Naturwiss. 21, 25, 1933.

giájú elektron hatótávolsága kb. 800 m és így a körpálya 0·02-ed részét tudja csak leirni. Nagy magasságokban azonban, ahol az anyag még igen ritka, bekövetkezhet az az eset is, hogy többször írja le a körpályát. Ezáltal a légréteg egy bizonyos horizontális metszetében ugyanazt a korpuszkulát nem egyszer, hanem kétszer vagy többször mérjük és így látszólag az intenzitásra nagyobb értékeket nyerünk, mint amilyent nyernénk a föld mágneses tere nélkül. Miután első közelítésben a keletkező új részek száma egyenesen, a körpálya befutásának száma pedig fordítva arányos a nyomással: e két hatás eredményeként az intenzitás nagy magasságokban közel állandó marad, egyezésben Regener[1] méréseivel. (Lásd 1. ábra.) Amint lejjebb haladunk, a nyomás eléri azt az értéket, melynél az elektron hatótávolsága kisebb a körpálya negyedrészénél. Most már nincsenek oly szintek, melyeken ugyanaz a korpuszkula kétszer haladna át, viszont kimaradnak azok a szekundär részek, melyek a mágneses tér által visszagörbültetvén, most nem jutnak el a hatótávolságuknak megfelelő mélységig. Így a mért intenzitás görbéje ezen a darabon a térnélküli intenzitásgörbe alatt marad. Végül (kb. 18 km magasságon alul) elérjük azt a mélységet, ahová a visszagörbült elektronok már különben sem tudtak volna eljutni, ettől kezdve tehát az intenzitásgörbe összeesik a térnélküli intenzitásgörbével. Mint látjuk a kisérletileg mért intenzitásváltozás menetét a primär sugárzás természetére vonatkozó feltevés nélkül is qualitative kielégitő módon magyarázhatjuk.

Kérdés, lehet-e az intenzitásgörbe menetéből quantitatív következtetéseket is vonni? Az intenzitásgörbe mathematikai analízise alapján Millikan, később Regener és tanítványai arra az eredményre jutottak, hogy a görbe menete egy egyszerű exponenciális függvénnyel, — mely egyetlen keménységű, homogén energiájú sugárzásnak felelne meg, — nem írható le. A komponensekre való bontás mathematikai elvégzését megnehezíti, hogy

[1] E. Regener: Phys. Zeitschr. 34, 306, 1933.

a kisérletekben általában mindig az egész sugárkeveréket mérjük, mig az egyes komponenseket külön-külön megmérni nem tudjuk (legfeljebb a legkeményebb komponenst tudjuk kiszűrni, amikor igen vastag abszorbeáló réteg után pl. nagy víz mélységben mérünk). Továbbá, hogy a primär sugárzást az általa kiváltott szekundär, tertiär stb. sugárzások kísérik, melyeket a számításnál mind tekintetbe kell venni és végül, hogy a sugárzás nem egy irányból, pl. merőlegesen esik be földünkre, hanem minden irányból valószínűleg közel egyforma erősségben.

A komponensek számának meghatározásához könnyen eljuthatunk, ha az abszorpciós görbét a célnak megfelelő átalakítással ábrázoljuk. Az ionizációs kamra, mint tudjuk, egy zárt edényben termelt ionok számát méri, a környező szabad levegőben az ultrasugárzás ionizációjának értéke ettől eltérő lesz. Az ionizáció ugyanis arányos a levegő sűrűségével és ez pedig a magassággal exponenciálisan csökken. Az ultrasugárzás intenzitásának menete a szabad levegőben e két egymás ellen működő behatás eredményeként fog lezajlani: Az egyik hatásaként az ionizáció a mélyebb rétegekben csökken abszorpció miatt, a másik folyományaként az ionizáció növekedik a levegő sűrűségének növekedése miatt. Az eredő egy oly görbe lesz, mely egy bizonyos, a beeső sugárzás abszorpcióegyütthatója által meghatározott helyen maximummal bír. A szabad levegőben az ionizációt ugyan nem tudjuk mérni, de ugyanehhez az eredményhez jutunk, ha minden rétegmagasságban a kamrával mért intenzitás értéket megszorozzuk a sugárzás által áthaladt réteg tömegével. Az így nyert görbe a deformált intenzitás görbe. E deformált intenzitás görbe ugyanazokat a sajátságokat fogja mutatni, mint amilyenekkel a kamrán kívüli szabad levegő intenzitásgörbéje bír. És pedig ha a sugárzás homogén, egyetlen energiájú sugarakat tartalmaz, úgy a deformált intenzitásgörbe egyetlen, elég éles maximummal fog bírni. Ha mindenféle energia képviselve van benne, úgy egy folytonos, kimondott maximum nélküli vonalat kapunk és végül ha a sugárzás adott energiájú meghatározott keveredési arányban lévő komponensek összessége, úgy a deformált intenzitás görbe több maximummal fog birni. REGENER mérései alapján LENZ[1] megszerkesztette a deformált intenzitásgörbét és arra az eredményre jutott, hogy a kozmikus sugarakra az imént felsorolt lehetőségek közül az utolsó áll fenn, vagyis, hogy több, számszerint valószinűleg öt, különböző energiájú sugarak adott arányú keveréke. A maximumok nagysága felvilágositást ad az illető komponens relativ intenzitásáról a keverékben.

Amint most tovább akarunk menni és az egyes komponenseket exaktan meghatározni, vagyis megadni azt a mathematikai formulát, mellyel a mért adatok jól előállithatók, akkor egyrészt ki kell terjeszteni figyelmünket a sugárzás iontermelésének mechanizmusára, ami azt jelenti, hogy a sugárzás természetére határozott feltevésekből kell kiindulnunk. Másrészt az intenzitásgörbe menetére befolyással levő, fent felsorolt összes tényezőket tekintetbe kell vennünk. Ilyen formula felállitása három komponensre sikerült úgy, hogy a számitott görbe jól megközelitse a mért görbét. Mindháromnál primär fotonsugárzást tételeztek fel.

REGENER úgy véli, hogy eltekintve, hogy a teoretikus görbe jól simul a kisérleti görbéhez, a primär sugárzás foton természete mellett szól még az a körülmény is, hogy az így kiszámitott komponensek abszorpcióegyütthatóiból a komponensek energiájára oly értékek adódnak, melyek valamely elképzelhető fizikai folyamat kapcsán szabadulhattak fel.

Így pl. a másod legkeményebb komponens abszorpcióegyütthatója $0{\cdot}735.10^{-3}$-nak adódott. A KLEIN-NISHINA formula összefüggést szolgáltat az abszorpcióegyüttható és a sugárzás hullámhossza közt, vagyis segitségével a mért abszorpcióegyütthatóból kiszámithatjuk a sugárzás energiáját. E formula általános alakjában a sugárzás és anyag kölcsönhatásának tekintetbevételénél csak a molekulákban lévő szabad, külső elektronok hatását veszi számba. JEANS feltételezi, hogy a magelektronok kötése nagyon kemény sugárzással szemben már elhanyagolható és így

[1] LENZ: ZS. f. Phys. 83, 194, 1933.

a kozmikus sugárzás esetében már a magelektronok is szabadoknak tekintendők és hatásuk számításba veendő. Az így módosított KLEIN-NISHINA formulából a második legkeményebb komponens $0{\cdot}735 . 10^{-3}$ abszorpciós együttható értékéből $13{\cdot}7 . 10^{-14}$ cm hullámhosszú sugárzás adódik. EINSTEIN nyomán tudjuk, hogy a tömeg is csak a lehetséges energiafajták egyike, mely átalakulhat bizonyos körülmények közt bármiféle más energiává. Ha a proton tömegét m_p-vel jelöljük, úgy EINSTEIN szerint, ha az teljesen sugárzássá alakul át, a kibocsátott sugárzás rezgésszámát a $\nu = \frac{m_p c^2}{h}$ és a hullámhosszát a $\lambda = \frac{h}{m_p c}$ formula szolgáltatja. E formulából a proton szétsugárzása esetére $13{\cdot}1 . 10^{-14}$ cm hullámhosszúságú sugárzás adódik, ami, mint látjuk, jól egyezik a másod legkeményebb komponens hullámhosszával.

Hasonló jó az egyezés a legkeményebb komponensre, melynek ily módon egy héliummag teljes szétsugárzása felelne meg. Elég tűrhető egyezés található a lágyabb sugarak legnagyobb intenzitású komponensére, melynek hullámhossza a hélium «Massendefektjéből» számitottal egyezik, vagyis feltehető, hogy e sugárzás akkor keletkezik, midőn 4 proton és 2 elektron egy héliummaggá egyesül, ahogy ezt már MILLIKAN is feltételezte. Mindenesetre a hélium keletkezéssel járó értéket a KLEIN-NISHINA formulával számitva csak akkor nyerhetjük, ha a magelektronokat, — ellentétben mint a kemény komponensek számításánál, — most nem tekintjük szabadoknak. E korlátozás azonban nem olyan önkényes, mint amilyennek első pillanatban tűnik, mert az általános KLEIN-NISHINA formula érvényessége kisérletileg $4{\cdot}7 . 10^{-11}$ cm hullámhosszakig van ellenőrizve. A hélium keletkezése ennél kb. csak 10-szer rövidebb hullámhosszú sugárzással jár, míg a hélium szétsugárzása ennél 1360-szor rövidebbel, és így könnyen lehet, hogy míg előbbi leírásánál nem kell a magelektronokra tekintettel lennünk, utóbbi leírásánál már a KLEIN-NISHINA formulában a magelektronokat is számba kell vennünk.

A deformált intenzitásgörbéből azt is leolvashatjuk, hogy miután a hélium keletkezéssel értelmezett komponens gyakorisága a legnagyobb, úgy, amennyiben ezek az itt vázolt folyamatok valahol a világürben egyáltalában végbemennek, a keletkezési folyamatok gyakrabban kell hogy bekövetkezzenek, mint a szétsugárzások.

A többi komponens ily módon való szétválasztása ezideig kielégítő módon nem sikerült; igen valószínű, hogy ezek már nem kizárólag fotonokból állnak, hanem fotonok és korpuszkulák keverékéből. E korpuszkulák lehetnek tényleges primärek, vagy fotonok által a világür kozmikus porában ütközéssel termelt szekundärek.

E quantitatív okoskodásokat mindenesetre igen nagy óvatossággal kell kezelnünk, mert e néhány számszerű jó egyezés a a véletlen eredménye is lehet. Óvatosan formulázva talán annyit mondhatunk, hogy a kozmikus sugárzás legkeményebb két komponense a KLEIN-NISHINA formula alapján olyan hullámhosszúságértékekhez vezet, melyeknek megfelelő tömegek $\left[\frac{h\nu}{c^2}\right]$ a proton-, illetve a héliumatom tömegével egyeznek meg.

Koincidencia-kísérletek. Az ionizációs kamrákon kívül a kozmikus sugárzás vizsgálatának hathatós eszköze a GEIGER—MÜLLER-féle számlálócső. Ez egy fémcső, melynek tengelyében jól izoláltan egy vékony fémszál van kifeszítve. A csőben kis nyomású levegő vagy esetleg más gáz van. Ha a kamrafal és a szál közt pár ezer volt feszültségkülönbséget létesitünk, úgy egy bizonyos feszültség- és nyomásérték mellett spontán kisülések következnek be. E spontán kisülések bekövetkezését megelőzően, vagyis valamivel kisebb feszültségkülönbség mellett azonban a számlálócső oly labilis állapotban van, melyben önmagától ugyan nem gyullad be, de sugárzás behatására, mely a csőfalon vagy a kamra gáztöltésében egyetlen elektront képes kiváltani, kisülés indulhat meg. Ezen kiváltott elektron a tér hatására a pozitív elektroda felé gyorsul, útjában ütközéssel további elektronokat gerjeszt és végeredményben egy elektronlavinát zudít a pozitív elektrodára (célszerű, ha a pozitív elektroda a számlálócső szála). Amennyiben pl. egy nagy ellenállás közbekapcsolásával gondoskodás történik, hogy az így megindult kisülés megszakadjon, úgy módunkban áll egy ilyen számlálócsővel minden egyes ionizáló sugárrészecske beérkezését külön észlelnünk. Már itt megjegyzem, hogy az ilyen számlálócső, nagyon kemény és így nagyon kevés iont termelő γ sugárzás esetében nem szólalhat meg 100%-os gyakorisággal. Bothe és Kolhörster[1] legelső számlálócsöves kisérletei pedig bebizonyították, hogy a számlálócső praktikusan minden beérkező részecskére megszólal, vagyis 100%-os biztonsággal számol. Így tehát eleve világos volt, hogy számlálócsöves kisérletekben a kozmikus sugárzás korpuszkuláris részét regisztráljuk csak. Kérdés azonban, hogy vajjon az így mért korpuszkuláris sugárzás azonos-e a kozmikus sugárzással vagy csak annak szekundär produktuma.

A koincidencia-módszereknél két vagy több ilyen Geiger—Müller számlálócsövet kapcsolunk egy oly berendezéshez, mely csak azokat a sugarakat regisztrálja, melyek mindkét, illetve valamennyi számlálócsövön áthaladtak, vagyis melyek valamennyi számlálócsőben egyszerre inditanak meg kisülést. Az ilyen berendezések mérési pontosságát felbontóképességük határozza meg, mely alatt azt az időkülönbséget értjük, melyen belül ha két külön beütés következik be a két számlálócsőben, a készülék még mint egyidejű, egyetlen sugár áthaladása okozta beütést regisztrálja. Az eddig készített legkisebb felbontóképességű automatikus koincidencia-regisztráló készüléket Barnóthy[2] készítette, felbontóképessége 10^{-5} sec.

Bothe és Kolhörster arany abszorbensben mérték a kozmikus sugárzás korpuszkuláris részének abszorpcióját és ezt azonosnak találták az ionizációs kamrákkal a kozmikus sugárzásra adódó értékkel; amiből a korpuszkuláris és kozmikus sugárzás azonosságára következtettek. Bothe és Kolhörster kisérleti elrendezésével szemben később egyes aggályok merültek fel és ezért e méréseket Rossi[3] különös nagy gonddal megismételte és kiterjesztette.

---

[1] Bothe és Kolhörster: ZS. f. Phys. 56, 751, 1929.
[3] J. Barnóthy: Naturwiss. 21, 835, 1933.
[2] B. Rossi: ZS. f. Phys. 68, 64, 1931.

Rossi módszere a következőben állott: vett két számlálócsövet, közbehelyezett egy ólom abszorbenst, melynek vastagsága 9·7 cm volt, az ólom fajsúlya 11·3 lévén, ez 110 gr/cm^2 rétegvastagságnak felel meg. Így megmérte a korpuszkuláris, vagyis a számlálócsöveket megszólaltató sugárzás abszorpcióját. Azt találta, hogy ennek abszorpció együtthatója:

$$\mu_k = 1{\cdot}6 . 10^{-3} \ cm^2/gr.$$

(Az abszorpcióegyüttható az a szám, mely megmondja, hogy az illető abszorbens 1 cm vastag rétegén áthaladva mekkora az intenzitáscsökkenés természetes logarithmusa.) E fenti értékből a korpuszkuláris sugárzás közepes hatótávolsága (egyenlő az abszorpcióegyüttható reciprok értékével):

$$R = 625 \ gr/cm^2,$$

vagyis azzal a közelítéssel élve, hogy valamennyi e közepes hatótávolság értékkel bír, következik, hogy csak olyan korpuszkulák kerülnek észlelésre, melyek a készülék fölött lévő 625 gr/cm^2 vastagságú rétegben váltódtak ki.

Ezután Rossi ugyanazt az abszorbenst a számlálócsövek fölé helyezte, az abszorpció szempontjából a helyzet most ugyanaz, mint volt az előbbi esetben, csak most az abszorbensben a primär sugárzás által kiváltott újabb szekundär korpuszkulák is tudnak mindkét csövön áthaladni és így koincidenciákat létesíteni. Tehát ebben a második kísérletben kell hogy a koincidenciák száma az újonnan kiváltott részek számának arányában megnövekedjék.

Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a primär sugárzás a 625 gr/cm^2 vastag rétegben összesen 100 szekundär korpuszkulát termel. Ha ezen rétegen való áthaladása közben a primär sugárzás lényeges gyöngülést nem szenvedett, úgy az abszorbens 110 gr/cm^2 vastag rétegében ugyanannyi szekundär korpuszkulát kell, hogy termeljen, mint amennyi a 625 gr/cm^2-ből mint ráeső rész adódik; vagyis

$$110/625 = 17{\cdot}6.$$

Tehát az abszorbenst a számlálócsövek fölé helyezve 17·6-al több koincidenciát kellene észlelni, mint a számlálócsövek közt elhelyezett abszorbens esetében.

Ezzel szemben Rossi kisérletei azt mutatták, hogy a koincidenciák növekedése, vagyis az újonnan termelt korpuszkulák száma csak 4 volt. Ezen eltérés magyarázata nyilván abban keresendő, hogy kezdeti feltevésünk volt helytelen, vagyis, hogy a primär sugárzás már észlelhető gyöngülést szenved a 625 gr/cm^2 réteg áthaladása közben.

Célunk tehát megállapitani, hogy milyen mérvű gyöngülése a primär sugárzásnak hozható jó összhangzásba a kisérleti eredményekkel.

Tegyük fel, hogy a primär sugárzás a 625 gr/cm^2 réteg vastagságának negyedrészén való áthaladása után már eredeti intenzitásának felére csökkent. Ez esetben az a rétegvastagság, mely az intenzitást felére csökkenti, vagyis a felezőréteg vastagsága:

$$D_p = 156 \text{ gr/cm}^2.$$

Ekkor az általa termelt szekundär elektronok felét, vagyis 50-et már az első negyedben kell hogy kiváltsa, a második negyedben az intenzitás ismét felére csökken, itt tehát 25; a harmadik negyedben 12·5 és végül az utolsó negyegben 6·25 új korpuszkula fog termelődni. (E számítás bizonyos elhanyagolást tartalmaz, mely azonban a végeredményre lényeges hatással már nincs.)

Számitásunk szerint tehát a közvetlenül a számlálócsöveink felett lévő 156 gr/cm^2 abszorbensben összesen 6·25 új korpuszkula termelődik. E 156 gr/cm^2 abszorbenst helyettesíthetjük a a kisérletben odahelyezett 110 gr/cm^2 vastagságú ólomréteggel a nélkül, hogy a meggondolásunk bármiképpen is módosulna és ez esetben azt várhatjuk, hogy benne 110/156-szor 6·25 = 4·4 új korpuszkula fog kiváltódni. Mint emlitettem, a kisérletben Rossi 4 újabb korpuszkula termelődését észlelte, ami mindenesetre qualitative jó egyezésnek mondható. Következik tehát, hogy amikor feltettük, hogy a primär sugárzás felezőrétege 156 gr/cm^2 volt, igen közel jártunk a valósághoz.

Az abszorpciómérésekből azt kaptuk, hogy a korpuszkuláris sugárzás hatótávolsága 625 gr/cm², amiből kiszámítva a felező réteg vastagságát, nyerjük:

$$D_k = 437 \text{ gr/cm}^2,$$

tehát

$$\frac{D_k}{D_p} = 2{\cdot}8$$

vagyis e feltételezett primär fotonsugárzás által kiváltott szekundär korpuszkuláris sugárzás áthatolóbbnak adódik, mint maga a primär sugárzás.

E meggondolásokból és kisérletekből a kozmikus sugárzás természetére a következő következtetések vonhatók:

1. Ha a primär sugárzás tényleg foton természetű, úgy e sugárzás már lényegében quantitative elnyeletik az atmoszféra legmagasabb rétegeiben; tehát a tengerszinten végzett mérésekben ezek már alig szerepelnek. Az itt mérésre kerülő korpuszkuláris sugárzásnak semmi köze sincs az esetleg itt is létező γ sugárzáshoz. Továbbá annyi bizonyos, hogy a primär γ sugárzás szekundärjeivel egyensúlyba nem jöhet, tehát a kozmikus sugárzás abszorpciójának méréséből teljesen jogosulatlan a primär γ sugárzás abszorpciójára és így energiájára következtetni, mert az abszorpciós görbe menetének tárgyalásánál láttuk, hogy ez csak abban az esetben jogosult, ha a sugárzás már egyensúlyba jutott szekundärjeivel.

2. A második értelmezési lehetőség abban áll, hogy az észlelt korpuszkuláris sugárzás nemcsak az atmoszférában kiváltott szekundärekből áll, hanem a kozmikus sugárzás már a légkörbe való belépésekor is keverve van primär korpuszkuláris sugarakkal. Ez esetben természetesen Rossi kisérletei sem vezetnek ahhoz a lehetetlennek hangzó eredményhez, hogy a primär sugárzás kevésbbé áthatoló, mint az általa termelt szekundär.

Későbbi kisérletekben Rossi méréseit a korpuszkuláris sugárzásra vonatkozóan még nagyobb abszorbens rétegekre kiterjesztette és arra a megállapitásra jutott, hogy e korpuszkuláris sugárzás több mint 50%-ának a hatótávolsága nagyobb 1 m ólomnál és hogy legkeményebb komponensének hatótávolsága 2·5 m ólom.

Mint látjuk, e kisérletek, ha nem is zárják teljesen ki egy kozmikus γ sugárzás létezését, mindenesetre erős bizonyiték gyanánt szolgálnak, hogy létezik egy primär, légkörünk határára érkező korpuszkuláris kozmikus sugárzás is.

Elektromos és mágneses terek hatása. Érdekes és tanulságos jelenség, hogy ámbár már majdnem a legelső kisérletekben gondoltak arra, hogy a kozmikus sugarak természetét el lehetne dönteni, ha sikerülne mágneses vagy elektromos eltéríthetőségét észlelni, mégis minden erre irányuló fáradozás a közel multig eredménytelen maradt. A szóbajöhető 1 hullám- és 5-féle korpuszkuláris sugárzás közül kettőre: a γ és a neutron sugárzásra elektromos és mágneses terek nem hatnak; az elektront, protont, α részt a tér a töltés előjelének megfelelő irányban eltériti. Ezen eltéritések a kathod- és csősugarakon végzett kisérletekből jól ismertek, nehézség itt csak abban áll, hogy minél nagyobb sebességű, minél nagyobb energiájú részről van szó, annál merevebb, kevésbbé eltéríthető a sugárzás. Miután a kozmikus sugárzásról eleve tudták, hogy rendkivül nagy energiájúak, bizonyos volt, hogy csak igen erős terek alkalmazásával lehet majd észlelhető eltérítést nyerni. Mesterséges terekkel ezért mindezideig nem sikerült megbízható eredményt elérni.

Természetes erős elektromos tér zivatarok esetében fennáll, ennek hatását a kozmikus sugárzás intenzitására vizsgálták is, de egyelőre egyöntetű hatást megállapitani nem sikerült.

Közelfekvő gondolat volt a kozmikus sugarak eltéríthetőségének vizsgálatára felhasználni a föld mágneses terét, mely ha nem is nagyon nagy erősségű, mindenesetre nagy kiterjedettségénél fogva kell hogy egy beérkező, töltéssel biró sugárzást befolyásoljon. Hiszen közismert a föld mágneses terének hatása a napból jövő elektronokra, melyek az északi fény tüneményét hozzák létre. Ezeknél a föld mágneses tere az elektronokat a pólusok környezetében engedi csak bejönni és így ezek a szép tüneméyek csak a sarkvidékeken láthatók.

A föld mágneses terének hatását a kozmikus sugárzásra két különböző típusú kisérlettel lehet eldönteni. Az egyik mód, hogy egy helyen figyeljük a félgömb különböző irányaiból jövő sugarak intenzitását és nézzük, vajjon a nyert intenzitáseloszlás mutat-e egy a függőleges iránytól eltérő maximumot (a függőlegesben azért várható bármely természetű sugárzás esetében maximális intenzitás, mert egy ferdén bejövő sugár nagyobb légrétegen kénytelen áthaladni, mint egy függőlegesen beeső és így nagyobbmérvű gyöngülést is szenved.) A másik mód, hogy ionizációs kamránkkal vagy számlálócsöveinkkel útrakelünk és mérjük a sugárzás intenzitását különböző földrajzi, illetőleg mágneses szélességű helyeken.

Az első csoportba tartozó kisérletek közül Barnóthy és Forró és újabban Compton és Alvarez, valamint Johnson vizsgálatai jártak pozitív eredménnyel. E kutatók két számlálócsövet a mágneses meridiánba helyeztek és mérték a sugárzás intenzitását, miközben a két cső által megszabott térszög irányát, — mely egy keskeny nyalábot vág ki az egész félgömbből, — forgatással változtatták. Barnóthy és Forró [1] a függőlegesben lévő maximumon kívül egy kelet felé eső maximumot is nyertek és így ilyenfajta kisérleti eredmények alapján mint elsők mondhatták ki, hogy a primär kozmikus sugárzás valószínűleg γ sugárzás és elektronsugárzás keverékéből áll. Compton és Alverez [2] és Johnson [3] kisérletei viszont primär pozitív részek létezése mellett szólnak.

A második csoportba tartozó kisérletek elméleti értelmezését teljes analogiában az északi fény jelenségével Störmer adta meg. A kérdés megoldásához vezető differenciálegyenletek, sajnos, exaktan nem oldhatók meg. Lemaitre és Vallarta [4] e differen-

---

1 J. Barnóthy és M. Forró: ZS. f. Phys. 71, 778, 1931.
2 L. H. Compton és A. Alvarez: Phys. Rev. 43, 835, 1933.
3 Johnson: Phys. Rev. 43, 834, 1933.
4 G. Lemaitre és M. Vallarta: Phys. Rev. 43, 87, 1933.

ciálegyenleteket kidolgozták a kozmikus sugárzás szélességi körök mentén várható intenzitásváltozására. Ezen elmélet szerint a végtelenből V volt energiával beérkező sugarak a föld λ szélességi fokú helyét oly ϑ irányokból érhetik csak el, melyekre:

$$\sin\vartheta > K^2\frac{\cos\lambda}{R^2} - 2K/R\cos\lambda,$$

ahol $K^2 = \frac{300\,M}{V}$, és M és R a föld mágneses momentuma és sugara. Ezen egyenletből kiolvasható, hogy a minimális energiaértékek, melyekkel a bejövő korpuszkulák kell hogy földünket elérhessék, az egyenlítőtől a pólusok felé mindinkább csökkennek. Az egyenlítő táján csak kb. $10^{10}e$ Voltnál nagyobb energiájú elektron tud csak bejönni, míg a pólusokon bármilyen energiájú. Magyarország mágneses szélességében körülbelül $5.10^{9}e$ Volt minimális energiájúnak kell egy beérkező kozmikus elektronnak lenni.

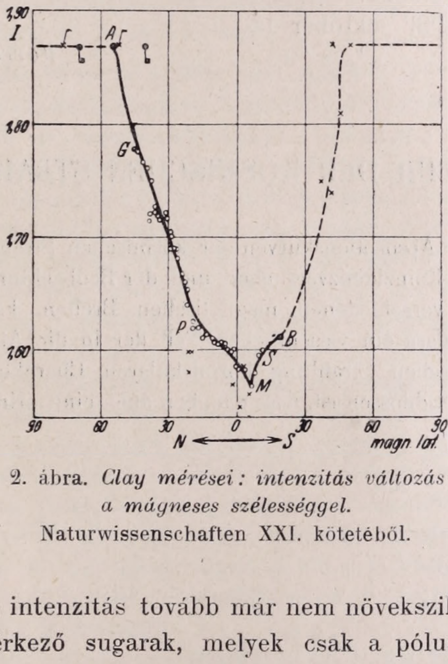
Ezen előre pontosan bejósolható effektus megtalálására már évekkel ezelőtt számos kísérletet végeztek; különböző tájakon tettek utazásokat; mindazonáltal az eredmény az volt, hogy a kozmikus sugárzás intenzitása a hibahatárokon belül mindenhol közel állandó. Érthető, hogy tehát annak ellenére, hogy a koincidencia-kísérletek a kozmikus sugárzás korpuszkuláris természete mellett szóltak, mégis e negatív kísérletek hatása alatt nagyon megingott a benne vetett hit. Végre 1933-ban először Clay,[1] majd Compton[2] és munkatársainak sikerült e sokat kutatott effektus kielégítő magyarázatát megadni. Kísérleteikben megállapították, hogy a kozmikus sugárzás intenzitása a föld különböző helyein nem állandó, hanem a várakozásnak megfelelően csökken az egyenlítő felé, (miután ide a legnagyobb energiájú korpuszkulák tudnak csak behatolni.) A csökkenés azonban — és itt van az előző kísérletek negatív eredményének a magyarázata — csak a 43. szélességi foktól kezdődik

---

[1] J. Clay: Naturwiss. 21, 43, 1933.

[2] A. H. Compton: Nature 131, 713, 1933.

az egyenlítő felé. Ami más szóval azt mondja, hogy a kozmikus sugárzás töltéssel bíró korpuszkulákból áll, azonban ezeknek energiája nem vehet fel bármely értéket, hanem energiájuk egy meghatározott alsó határral bír, melynél kisebb energiájú elektronok a beérkező nyalábban nincsenek. (Ezt az alsó határt megszabja az az energia, mely a földet övező légkör átszelésére szükségeltetik.) A leglágyabb még beérkező kozmikus elektron energiája $3 \cdot 6.10^9 e$ Volt. Ez okozza, hogy a 43°-tól kezdve a



2. ábra. *Clay mérései: intenzitás változás a mágneses szélességgel.*
Naturwissenschaften XXI. kötetéből.

pólusokig az intenzitás tovább már nem növekszik, mert nincsenek oly beérkező sugarak, melyek csak a pólusoknál tudnák elérni a földet. Az említett negatív kísérletekben pedig történetesen mindig a pólusok közelében végeztek méréseket, remélve, hogy az ott várható nagyobb mérvű intenzitásnövekedés könnyebben lesz észlelhető, mint az egyenlítő környezetében várható csökkenés. A 2. ábra Clay méréseit tartalmazza és szépen mutatja az intenzitás csökkenését az egyenlítő felé.

Az elmondottakból világosan kitűnik, hogy úgy a koincidencia-kísérletek, mint az intenzitás változása a mágneses szélességi fokok szerint, arra az eredményre vezet, hogy a kozmikus sugárzás, ha talán nem is teljes egészében, azonban mindenesetre részben primär, a világürből jövő korpuszkulákból áll. Egy primär fotonsugárzás létezését kizárólag az abszorpciós görbe analiziséből nyert eredmények támasztják alá. További precizirozást az egyes korpuszkuláris sugárzások lehető fajai közt a kisérletek mai állása mellett még nem tehetünk, de remélhetőleg a közeljövő erre is megadja a pontosabb felvilágositást.

Budapest, 1933. október 14.

Forró Magdolna.

DIE NATUR DER KOSMISCHEN STRAHLUNG.

An Hand der Absorptionskurven der kosmischen Strahlung, wie den Ergebnissen der Koinzidenzversuchen und der Beobachtung des Intensitätsverlaufes in verschiedenen magnetischen Breiten, kommt man zu dem Ergebnis, dass ein wesentlicher Teil der in die Atmosphäre einfallenden kosmischen Strahlung korpuskularen Charakter hat; wobei aber nicht ausgeschlossen ist, dass daneben auch eine primäre Quantenstrahlung existiert.

M. Forró.

IRODALOM.

Grosschmid Lajos: Másodfokú alakok algebrája; Budapest, Stephaneum, 1933. 741 lap.

A könyv a másodfokú és a bilineáris [1] alakokat tárgyalja és főként az ilyen alakok és alakpárok különböző lineáris transformátióival és a kapcsolatos aequivalentia- és reductió-kérdésekkel foglalkozik. Minthogy pedig egyrészt n-változós másodfokú alak és n-edrendű symmetrikus matrix, másrészt kétszer n-változós bilineáris alak és általános n-edrendű matrix kölcsönösen egyértelmű megfelelkezésben vannak, továbbá minthogy a szóbajövő lineáris transformátiók is mindenkor egy, ill. két, ugyancsak n-edrendű matrix által adottak, azért a tekintett transformátiók lényegükben n-edrendű matrixokkal végzett műveletek, nevezetesen matrix-kompositiók. Így tehát az előbbi kérdéscsoport természetszerűleg a matrix-kompositióknak és matrixok, ill. matrix-párok reductióinak és aequivalentiáinak vizsgálatára vezet, amely utóbbi aequivalentia-kérdések, legalább részben, az elemi-osztók elméletében nyerik megoldásukat. Ehhez képest Szerző találóan választotta könyvéhez a «matrixok és elemi-osztók» alcímet. Fordítva, a matrix-kalkulus most körvonalazott tényei az említett megfelelkezés révén az alak-elmélet területére ültethetők; ebben a dualizmusban a mű irányelvei szerint az elmélet kifejtésének mintegy altalaját a matrixok képezik, erre építve a tulajdonképpen magáértvaló elméletet, az alakok elméletét.

Az egész könyv négy nagyobb fejezetre oszlik. Az első fejezet (1—189. l.) változatos tartalmú alapvető s előkészítő megállapítások sorozata a matrixok és mindkét fajta alakok köréből. Különösen pedig itt találjuk a matrix-kalkulus elemeinek tüzetes kifejtését, amely a maga általánosságában önálló egésznek tekinthető. A második, legterjedelmesebb fejezet (190—503. l.) foglalkozik a másodfokú alak négyzet-összegre való reductiójával, valamint a megfelelő kérdéssel a bilineáris alakot illetően;

---

[1] Természetesen a bilineáris alak is felfogható mint a másodfokú alak egyik különös esete.

szerepelnek a LAGRANGE-, JACOBI-féle reductiók, mint paraméter-mentes előállítások, a paraméteres előállításokból pedig a kevésbbé elterjedt WEIERSTRASS-féle, továbbá a DARBOUX-féle reductiók. Külön foglalkozik ez a fejezet valós alakok valós transformátióval történő reductiójának kérdésével s e helyütt Szerző kitér egyes vizsgálatokra, amelyek a JACOBI-HERMITE-SYLVESTER-féle módszerek révén a másodfokú alakot kapcsolatba hozzák az algebrai egyenlet valós gyökeinek számára vonatkozó STURM-féle problémával. Ugyanitt szerepelnek WEIERSTRASS-nak azok a vizsgálatai, amelyek vonatkoznak a valós másodfokú alaknak az egység-gömbön felvett értékkészletére, akkor is, ha a változók egy homogén lineáris egyenletrendszer által korlátozva vannak. A harmadik fejezet (504—581. l.) tartalmazza az elemi-osztók részletes elméletét, valamint a matrix-aequivalentia kérdését s ez a fejezet önálló egésznek tekinthető. Végül a negyedik fejezet (582—738. l.) tartalmazza a másodfokú és bilineáris alakpárok WEIERSTRASS-féle elméletét, ezt azonban csupán abban az esetben, amelyben az alakpárokhoz tartozó alak-köteg (*Schar*) reguláris, míg a singuláris eset nem vétetett fel, tekintettel a könyvnek úgyis nagy terjedelmére. Tárgyalja azután ez a fejezet a reguláris alakpárok WEIERSTRASS-féle és DARBOUX-STICKELBERGER-féle reductióját. Végül ez a fejezet tartalmazza az automorph transformátiók vizsgálatát.

Ez az előttünk levő mű tartalmának rövid áttekintése, míg a részletekre, az annyira változatos anyaghalmazra való tekintettel, nem térhetek ki. A felsorolt tárgykörök kimerítő részletességgel tárgyaltatnak, a leggondosabb anyagösszeválogatással. A mű mindenkor egyforma figyelemben részesíti a reguláris és singuláris alak, ill. matrix esetét, valamint a különböző matrix-typusokat és aequivalentia-nemeket. A nevezetesebb vizsgálatok szinte mindannyian többoldalú megvilágításba kerülnek, s ilyenkor nem mulasztja el Szerző a különböző módszerek tanulságos egybevetését. A sokszorosan átszőtt s elágazó terület könnyebb áttekintését a könyv egyéb helyeire vonatkozó bőségesen alkalmazott hivatkozások nagymértékben elősegítik. A mű elején az alapvető s kapcsolatos irodalmi termékek felsorolását találjuk, s a mű belsejében mindenütt gondos utalások vannak a forráshelyekre, továbbá értékes szolgálatot tesz a mű végén elhelyezett névmutató, amelyek összevéve kitűnő irodalmi tájékoztatást nyujtanak. Ezek mellett, bevezetésül az egyes tárgykörökhöz, vagy máshol utólagos megjegyzésekként becses kitéréseket találunk az illető kérdések történeti hátterére vonatkozólag. A talált tételek gyakori alkalmazásban részesülnek, s néhol numerikus példákon nyernek bemutatást.

Külön nagy feladat volt Szerző számára egységet teremteni a jelölésekben s elnevezésekben; a könyv ebben is biztos útmutatóul szolgál, megemlítve a különböző szerzők nyelvhasználatát, míg hiányt pótolva, egy-egy új, találó elnevezést is látunk.

A tárgyalás általában algebrai és arithmetikai, csak kevés szerephez jutnak az analysis eszközei. Mindezekről a területekről csak keveset tételez fel a könyv olvasóitól, így a determináns-elméletnek alkalmazásba jövő részei ugyancsak előadásra kerülnek, leszámítva az egészen elemi tételeket. Ezek, valamint a minden kétséget eloszlató, minden részletet gondosan figyelembevevő előadásmód, tanulmányozásra alkalmassá teszik a könyvet a kevésbé előrehaladott olvasó számára is.

Minden szakember számára öröm az irodalomnak Grosschmid Lajos eme új, díszes könyvével való gyarapodása, örvendetes esemény ez nemcsak azért, mert benne egy klasszikussá vált elmélet nyert rendszeres feldolgozást, amely az eddigieknél, a külföldieket is ideszámítva, teljesebb, hanem azért is, mert a feldolgozott terület a mathematika több fejezetével van alapvető kötelékben s különösen a matrixok elméletének az algebra újabb fejlődése nagy és még további jelentőséget juttat.

Rédei László.

Stachó Tibor: Felsőbb mennyiségtan; Budapest, 1933. 623 lap.

A m. kir. honvédelmi minisztérium 1930-ban pályázatot hirdetett a Ludovika Akadémia műszaki tankönyveinek megírására. Stachónak a mennyiségtani tankönyvpályázaton első díjat nyert művét adta ki most a honvédelmi minisztérium a Ludovika Akadémián használandó tankönyvnek. Ez a mű azonban túlnő azon a kereten, amelynek létét köszönheti. Tartalma felöleli körülbelül mindazt, amit a műszaki főiskolákon a mérnökjelölteknek tanulniok kell, a fizikusok igényeit is kielégítheti, sőt a matematikus tanárjelölteknek is kitűnő tankönyvül szolgálhat az első bevezetésre; mint kézikönyv pedig a szakembereknek is nélkülözhetetlenné fog válni. Tárgyalásmódja szigorúság szempontjából a matematikus igényeit is kielégíti, nem esik a gyakorlati irányú könyveknek abba a gyakori hibájába, hogy a tételek érvényességi feltételeit ne mondaná ki mindenütt pontosan és álbizonyításokkal megelégedném. Annak pedig, akinek a matematika csak mint segédeszköz szükséges, nagy könnyebbségére van az, hogy az elméleti jellegű részek és a bizonyítások apróbetűs szedéssel vannak elkülönítve. Nyelve világos, középiskolai alapismeretekkel bárki által könnyen olvasható; a szemléletnek bő kihasználása a megértést nagyban megkönnyíti. Az ábrák mintaszerűek, meglátszik rajtuk a szakavatott ábrázoló geometer munkája. A tankönyvként való használhatóságot azonban, sajnos, egy körülmény nagyon meg fogja nehezíteni: a példáknak és a feladatoknak majdnem abszolút hiánya. Természetesen megfelelő példatár beiktatása a könyv terjedelmét nagyon megnövelte volna, így azonban a tankönyv mellett idegen feladatgyüjtemény használata lesz szükséges.

A mű első fejezete az alapfogalmakat ismerteti. A racionális számok ismeretét feltételezve az irracionális számokat a szerző kettős fundamentális sorozatokkal értelmezi, az értelmezést a «skatulyázás» eljárással szemlélteti. A derékszögű koordinátarendszer ismertetése után mindjárt következik az egyenes és a kúpszeletek tárgyalása. Ezután rögtön a sark- és hengerkoordináták bevezetése, amelynek talán inkább ott lett volna helye, ahol azok alkalmazásra is találnak; így önmagukban nem fogják az olvasó érdeklődését annyira lekötni, hogy az emlékezetben megmaradjanak. Mintaszerű a sorozatok és a határérték fogalmának tárgyalása, amelyhez mindjárt a végtelen sorok elméletének alapelemei csatlakoznak. A fejezet utolsó része a folytonos függvényt általában és az elemi függvényeket ismerteti igen érthető és preciz formában.

A második fejezetben a differenciálhányados, a határozott és határozatlan integrál kerül tárgyalásra, az újabb tankönyvek mintája szerint nem egymásután, hanem párhuzamosan. A fizikai és technikai alkalmazások, mint később is mindenütt, már itt bőven fellépnek, de még inkább a következő harmadik fejezetben. Ebbe a fejezetbe került különben a függvénysorok és hatványsorok tárgyalása is, továbbá a technikus szempontjából igen fontos numerikus és grafikus differenciál- és integrálszámítás ismertetése.

A komplex számokat és komplex változós függvényeket tárgyaló fejezet a könyvnek (a vektoranalízist tartalmazó fejezet mellett, melyről még szó lesz) talán a legsikerültebb része. A komplex számoknak, mint vektoroknak tárgyalása után a konformis ábrázolás, az elemi függvények és a RIEMANN-felület bevezetése következik és azután mindjárt a váltóáramok elméletében és a BOLYAI-geometriában való alkalmazások. Az alaptételnek a GOURSAT-PRINGSHEIM-féle bizonyítását adja a szerző. A könyv célját illetőleg talán megfelelő lett volna a többet feltételező, de egyszerűbb CAUCHY-féle bizonyítás is, a matematikusnak mindenesetre tetszetősebb a szerző által választott mód. A LAURENT-sor, a szinguláris helyek, a MORERA-tétel, az algebra alaptétele és a síkbeli áramlásokra való alkalmazások zárják be ezt a fejezetet.

Az egyenletek megoldásáról szóló ötödik fejezet már teljesen a gyakorlati matematikusnak van szánva. A közelítő eljárások tüzetes ismertetése mellett az elméleti rész itt indokoltan háttérbe szorul, STURM tételének például hiányzik a bizonyítása, csak az alkalmazása van ismertetve.

A hatodik fejezetben a vektoralgebrával együtt kerülnek a determinánsok és a lineáris egyenletrendszerek tárgyalásra. A hetedik fejezetben a projektív geometria elemei vannak ismertetve. Sajnálnunk kell, hogy a szerkesztési feladatokra való alkalmazhatóságuk miatt gyakorlati szempontból is fontos PASCAL- és BRIANCHON-tételek kimaradtak. De ezekért is kárpótlást nyujt a nomografiának igen kimerítő s hasonló könyvben talán első tárgyalása, amelynek a technikusok igen nagy hasznát fogják venni.

Teljesen eredeti módon vannak a kilencedik fejezetben a vektoranalízis elemei és alkalmazásai tárgyalva. A vektor-skalár, skalár-vektor és vektor-vektor függvények szerint való csoportosítás nagyon hasznosnak bizonyul. Igen áttekinthetők lesznek ebben a vektoriális tárgyalásmódban a felületelmélet tételei. A felszínmérés, felületi integrál után még az egy- és kétoldalú felületek is szóba kerülnek ebben a fejezetben.

A tizedik fejezet a differenciálegyenletek elméletének néhány egyszerű feladatát tárgyalja. A gyakorlati szempontból fontos grafikus és numerikus megoldási módok itt is nagy szerepet játszanak. A kerület-érték feladatokkal kapcsolatban a FOURIER-sor is szóba kerül s FEJÉR tétele bizonyításával együtt be van mutatva.

Az utolsó fejezet a valószínűségszámítást tárgyalja MISESnek a KAMKE által kissé módosított elmélete alapján. Nem hallgathatom el azt a megjegyzésemet, hogy korainak tartom ennek a ma még távolról sem lezárt elméletnek tankönyvbe való bevezetését. Minthogy a főcélt amúgyis az alkalmazások képezik és a szigorú logikai megalapozás itt nem döntő fontosságú, megfelelő lett volna az egyszerűbb klasszikus elmélet is. Azonban a MISES-féle második axióma, mely a legtöbb logikai nehézséget rejti magában, itt ki van kerülve, s így a STACHÓ könyvében való tárgyalást matematikai szempontból teljesen kielégítőnek találhatjuk.

Örömmel látjuk ennek a kitűnő könyvnek a megjelenését, amely a magyar matematikai tankönyvirodalomnak nagy nyeresége.

Veress Pál.

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1933. évi XXXVII. matematikai tanulóversenyről.

A Társulat XXXVII. matematikai tanulóversenyét 1933. október 7-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 32, Szegeden 7 versenyző jelentkezett, beadtak 24, illetőleg 6 dolgozatot.

A verseny tételei a következők voltak:

I. Kiszámítandó $ab + cd$ értéke, ha

$$a^2 + b^2 = 1, \tag{1}$$

$$c^2 + d^2 = 1, \tag{2}$$

$$ac + bd = 0. \tag{3}$$

II. Legyen a sakktábla 64 mezejéből 16 mező oly módon kijelölve, hogy mind a 8 sor és mind a 8 oszlop éppen 2—2 kijelölt mezőt tartalmaz. Bebizonyítandó, hogy a kijelölt mezőkre mindenkor úgy lehet egy-egy bábut, és pedig összességben 8 fehér és 8 fekete bábut elhelyezni, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan 1 fehér és 1 fekete bábu álljon.

III. A K_1 és K_2 körök egymást P-ben érintik. Messe egy P-n átmenő szelő a P-n kívül K_1-et még A_1-ben és K_2-t A_2-ben; továbbá egy P-n átmenő másik szelő K_1-et B_1-ben és K_2-t B_2-ben. Bebizonyítandó, hogy a PA_1B_1 és PA_2B_2 háromszögek hasonlók.

A dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság Rados Gusztáv elnöklete alatt a következő tagokból állott: Faragó Andor, Fejér Lipót, Szücs Adolf, Veress Pál és Kőnig Dénes előadó. E Bizottság okt. 15.-én tartotta ülését és jelentése a következő.

«A Bizottság kegyelettel emlékezik meg elhunyt nagynevű tagjáról, Kürschák Józsefről, aki e matematikai versenyek ügyét kezdettől fogva a leghatásosabban támogatta és előmozdította. Hervadhatatlan érdeme marad az első 32 verseny anyagát összefoglaló műve, amely a magyar matematikai tanító irodalom egyik legbecsesebb terméke.

Az idei versenyt illetően kedvező eredményről számolhatunk be. A legnehezebbnek bizonyult 2. feladatot hárman oldották meg. Közülük csak MAKAI ENDRE, aki a budapesti kegyesrendi gimnáziumban FERENCZI ZOLTÁN tanítványa volt, oldotta meg a másik két feladatot is. Tárgyalásai igen részletesek és világosak (csak a 2. feladathoz írt számszerű «jegyzete» nem helytálló). A Bizottság azt javasolja, hogy az első b. Eötvös Loránd díj neki ítéltessék oda. A 2. és 3. feladat tárgyalása kifogástalan FELTER KÁROLY és KEPES JENŐ dolgozatában is, sőt kidolgozásaik, rövidség tekintetében, még MAKAI megoldásai fölé is helyezendők; az 1. feladatot azonban egyikük sem oldja meg: KEPES határozott hibát követ itt el, míg FELTER tulajdonképpen csak megakad a megoldásban. Ezért a Bizottság a második b. Eötvös Loránd díjra FELTER KÁROLYt hozza javaslatba, aki a budapesti Toldy Ferenc reáliskolában ALLIQUANDER LAJOS tanítványa volt, míg KEPES JENŐ szép dolgozata határozott dícséretet érdemel.»

A Bizottság e javaslatát a Választmány 1933. nov. 9. tartott ülésén egyhangulag elfogadta. Az ugyanezen a napon tartott előadó ülésen RADOS GUSZTÁV elnök adta át a díjakat a verseny győzteseinek.

Az 1933. évi XXXVII. matematikai tanulóversenyen díjat nyert dolgozatok.[1]

Makai Endre dolgozata.

I. feladat. *a)* Tegyük fel, hogy a feladatban szereplő mennyiségek közül b és c nem egyenlő 0-val. Ekkor 3)-ból $\frac{a}{b} = -\frac{d}{c}$. Ezt a hányadost nevezzük k-nak.

1)-et és 2)-t osszuk el b^2-tel, ill. c^2-tel. Ekkor a következő egyenleteket kapjuk:

$$\frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{1}{b^2} \text{ és } 1 + \frac{d^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}.$$

Már most a fentiek szerint $\frac{a^2}{b^2} = \frac{d^2}{c^2} = k^2$. Ezt behelyettesítve a két egyenletbe, kapjuk:

$$k^2 + 1 = \frac{1}{b^2} \text{ és } 1 + k^2 = \frac{1}{c^2},$$

amiből

$$b^2 = c^2$$

[1] A tételek szövegét l. fentebb a versenyről szóló jelentésben. A dolgozatokat változtatás nélkül közöljük. *Szerk.*

vagyis

$$b = \pm c\,; \tag{4}$$

b értékét 3)-ba helyettesítve, kapjuk: $ac \pm cd = 0$,
amiből

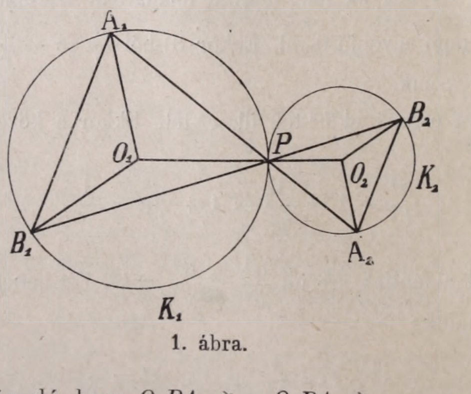
$$a = \mp d. \tag{5}$$

A 4) és 5) figyelembevételével írható: $ab + cd = -cd + cd = 0$.

b) Ennél a megoldásnál 3 esetet nem tárgyaltunk: amikor a feladatban szereplő mennyiségek közül vagy b, vagy c, vagy mindakettő 0-val egyenlő. E három eset közül csak az utolsó fordulhat elő. U. i. $b = 0$, $c \neq 0$ ellenmondásra vezetne, mert ekkor 1)-ből $a = \pm 1$. Ezt 3)-ba helyettesítve és figyelembevéve, hogy $b = 0$, írhatjuk: $\pm c + 0 = 0$, vagyis $c = 0$. Hasonlóképpen igazolhatjuk, hogy ha $c = 0$, b is 0. Ha pedig $b = c = 0$, akkor $ab + cd = a.0 + 0.d = 0$, ami egyezik a fenti eredménnyel.

Jegyzet. A *b)* levezetéstől eltekinthetünk, ha az *a)* levezetésben $\frac{a}{b} = -\frac{d}{c} = k$ helyett $\frac{b}{a} = -\frac{c}{d} = x$-ből indulunk ki, egyébként pedig az *a)* szerint folytatjuk a levezetést. Ekkor u. i. a feltétel: $a \neq 0$ és $d \neq 0$ lesz, tehát b-nek és c-nek tetszőleges értékeket tulajdoníthatunk.

III. feladat. Legyen a körök középpontja O_1 és O_2. Legyen továbbá az A_1, B_1, ill. A_2, B_2-nél levő szög α_1, β_1; α_2, β_2. Tudjuk, hogy $\overline{O_1O_2}$ átmegy P-n, vagyis $\overline{O_1P}$ és $\overline{O_2P}$ egy egyenesen fekszik.



1. ábra.

Ekkor nyilvánvaló, hogy $O_1PA_1\sphericalangle = O_2PA_2\sphericalangle$.
Már most $O_1PA_1\triangle$ és $O_2PA_2\triangle$ egyenlőszárúak.
(U. i. $\overline{O_1P} = \overline{O_1A_1}$ és $\overline{O_2P} = \overline{O_2A_2}$). Így tehát

$$\frac{A_1O_1P\sphericalangle}{2} = 90^\circ - O_1PA_1\sphericalangle \text{ és } \frac{A_2O_2P\sphericalangle}{2} = 90^\circ - O_2PA_2\sphericalangle.$$

Ezeknek az egyenleteknek pedig a jobboldalai egyenlők, tehát a baloldalak is egyenlők egymás között:

$$\frac{A_1O_1P\sphericalangle}{2}=\frac{A_2O_2P\sphericalangle}{2}\cdots 1)$$

De azt is tudjuk, hogy $\beta_1=\frac{A_1O_1P\sphericalangle}{2}$ és $\beta_2=\frac{A_2O_2P\sphericalangle}{2}$ (kerületi szög fele a középponti szögnek.) Ezeket az értékeket 1)-be helyettesítve, kapjuk: $\beta_1=\beta_2$. Hasonlóképen levezethető, hogy $\alpha_1=\alpha_2$.

A_1B_1P és A_2B_2P tehát tényleg hasonló háromszögek, mert két pár szögük egyenlő.

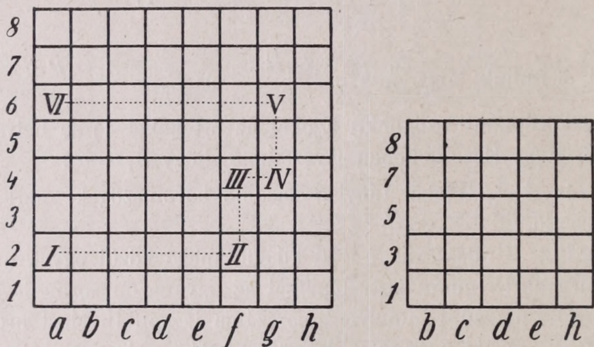
II. feladat. Kiválasztunk a 16 kijelölt mező közül egyet, amelynek sorszáma legyen I. Innen bástyalépéssel az ugyanazon soron levő másik kijelölt mezőre megyünk, amelynek sorszáma legyen II. Most próbáljunk bástyalépésben továbbmozogni a kijelölt mezőkön, de úgy, hogy mindig új mezőkre lépjünk. A II-ről a következő III-mezőre csak úgy léphetünk, ha elhagyjuk azt a sort, amelyen az I. és II. fekszik. U. i. ezen a soron a feltétel szerint nincs már más kijelölt mező. A bástyahúzásokat folytatva, ugyanilyen megfontolás alapján állíthatjuk, hogy az egyik lépésnél a sort, a következőnél pedig az oszlopot változtatjuk (amelyen t. i. a két kijelölt mező fekszik). Ezután ismét egy sorváltoztatás következik. Miután I-ről a II-re oszlopváltoztatással érkeztünk, következik, hogy oszlopváltoztatással mindig csak páros sorszámú mezőre érkezhetünk el.

A bástyahúzásokkal el fogjuk érni, hogy előbb vagy utóbb, de legkésőbb a 15. lépésnél (az ábrában az 5.-nél) arra a mezőre kerülünk, amelyik az I-gyel közös oszlopon van. Ennek a kockának sorszáma mindenesetre páros lesz, mert oszlopváltoztatással jutottunk el rá. — Oszlopváltoztatásra pedig sorváltoztatás következik és így a következő bástyahúzásunk csak az I-es mezőre történhetik.

Bástyalépéssel tehát egy zárt vonalat tettünk meg, amelynek páros számú, $2n$ szögpontja van. Már most helyezzünk a páros számú szögpontokra, azaz a páros sorszámmal ellátott mezőkre n fehér, a páratlan sorszámmal ellátott mezőkre pedig n fekete bábut.

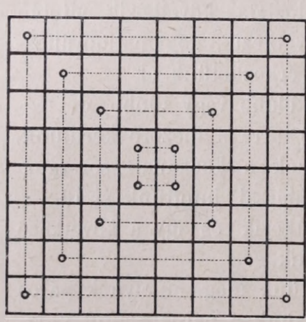
Könnyen beláthatjuk, hogy ekkor feladatunkat legalább az első $2n$ kijelölt mezőre nézve megoldottuk. Ha azokat a sorokat és hasábokat, amelyeket a bástyalépések folyamán érintettünk, különválasztjuk a tábla többi részétől, akkor tényleg ezekre a mezőkre nézve minden hasábban és minden sorban egy fehér és egy fekete bábú van.

Már most húzzuk ki a sakktáblából a különválasztott mezőket és a sakktábla megmaradt részét rajzoljuk egybe. Ekkor egy $(8-n)^2$ mezőjű kisebb táblát kapunk (l. az ábrát) rajta $(16-2n)$ kijelölt mezővel. Azért $(16-2n)$ mezővel, mert a sakktábla egy részének fenti kihúzásával egyetlen kijelölt mezőt sem húztunk ki a már sorszámmal ellátottakon



2. ábra.

kívül. Hiszen minden kihúzott sorban és minden oszlopban két mező már meg volt sorszámozva, harmadik kijelölt mező pedig a feltétel értelmében nem létezhetett rajtuk, tehát ki sem lehetett húzni. — Másrészt meg természetes, hogy mind a $2n$ sorszámozott mezőt kihúztuk.



3. ábra.

A kapott $(8-n)^2$ mezőjű táblán hasonló eljárással jelöljük ki a fehér és fekete bábuk helyeit, mint előbb. Az eljárást mindaddig folytatjuk, amíg mind a 16 kijelölt mezőre meg nem állapítottuk, hogy fehér vagy fekete bábút helyezünk el rájuk.

Jegyzet. Lehetséges, hogy a mezőkön többféleképpen állíthatjuk fel a fehér és fekete színt. U. i. az, hogy egy mezőn fehér, vagy fekete bábú van, az csak a vele (bástyahúzással megállapított) ugyanazon zárt sokszögön levő kijelölt mezőkre állapítja meg a rajtuk álló bábu színét. Márpedig 4 ilyen zárt sokszög is lehetséges (l. ábra). Ha a zárt sokszögek száma m, $2(m!)$-féleképen változhatik a színek felállítása.[1]

[1] A $2m!$ szám téves; a helyes érték: 2^m. *Szerk.*

Felter Károly dolgozata.

I. feladat. 1)-ből, ill. 2)-ből b-t, ill. d-t kifejezve

$$b = \sqrt{1-a^2}, \quad d = \sqrt{1-c^2};$$

3)-ba helyettesítve:

$$ac + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-c^2} = 0,$$
$$(1-a^2)(1-c^2) = a^2c^2;$$

a jelölt műveleteket elvégezve és rendezve:

$$a^2 + c^2 = 1 \ldots\ldots 4)$$

Az 1), 4) és a 2), 4) összehasonlításából a következő egyenlőségek adódnak:

$$c^2 = b^2, \quad a^2 = d^2,$$
$$\pm c = \pm b, \quad \pm a = \pm d;$$

egyszerűbben:

$$c = \pm b, \quad a = \pm d.$$

Ezen értékeket a kiszámítandó kifejezésbe helyettesítve kapjuk:

$$1) \; ab + cd = 0,$$
$$2) \; ab + cd = \pm 2ac.$$

II. feladat. Helyezzünk pl. a legfelső sor egyik kijelölt mezőjére egy fehér bábut (1); akkor az ezzel egy sorban álló 2. bábu fekete lesz. A 2. bábuval egy oszlopban álló 3. bábu: fehér, a 3-al egy sorban álló 4.: fekete lesz. A 4-el egy oszlopban álló 5. fehér lesz, a vele egy sorban álló 6.: fekete, stb. Ezt az eljárást folytatva könnyen belátható, hogy az 1. bábuval egy oszlopba csakis fekete bábu kerülhet. Lehet, hogy már a 4. bábu kerül az 1. alá, de akkor a két sortól (ill. oszloptól) függetlenül egy harmadikból kiindulólag újból megismételhetjük az egész folyamatot. Tehát elérhetjük, hogy a kijelölt mezőkre helyezve az egyes bábukat, minden sorban és minden oszlopban pontosan egy fehér és egy fekete bábu álljon.

III. feladat.[1] $A_1PB_1 \measuredangle = A_2PB_2 \measuredangle$, mivel csúcsszögek; $B_1O_1P \measuredangle = PO_2B_2$, mert $O_1PB_1 \measuredangle = O_2PB_2 \measuredangle = O_1B_1P \measuredangle = O_2B_2P \measuredangle$. De $B_1A_1P \measuredangle = \frac{B_1O_1P \measuredangle}{2}$ és $B_2A_2P \measuredangle = \frac{PO_2B_2 \measuredangle}{2}$. Tehát $B_1A_1P \measuredangle = B_2A_2P \measuredangle$. Innen: $PA_1B_1 \triangle \sim PA_2B_2 \triangle$.

[1] L. az 1. ábrát a megelőző dolgozatban.

Jelentés az 1933. évi XV-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyről.

Társulatunk XV-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyét 1933. október 14-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 22, Szegeden 5 versenyző jelentkezett; beadtak Budapesten 16, Szegeden 5 dolgozatot.

A verseny feladatai a következők voltak:

1. Mekkora erővel feszíti egy 75 kgr. súlyú tornász a kötelet, amelyen 1 m/sec állandó sebességgel csúszik lefelé?

2. Egy Deprez d'Arsonval rendszerű galvanometer homogén mágneses tere 1500 Gauss erősségű, négyszögalakú forgótekercse 400 menetből áll, melyeknek közepes szélessége, ill. magassága 3·0 cm, ill. 6·3 cm. Mekkora forgató nyomaték csavarja a tekercs dróttengelyét, ha a galvanometeren 0·01 milliampère-s áram halad keresztül?

3. Adva van egy üveg diszperziója, vagyis törésmutatója mint a hullámhossz függvénye az

$$n = 1.4971 + \frac{91.285}{\lambda - 1209}$$

formulával, ahol λ a hullámhossz Ångström egységekben van kifejezve. Kiszámítandó, hogy egy ilyen üvegből készült derékszögű prizmába a befogólapra merőlegesen beeső fénysugár esetében mi lesz az a határhullámhossz, mely a prizma átfogólapján még teljesen visszaverődik?

A bírálóbizottság, melynek elnöke Tangl Károly, tagjai Mikola Sándor, Pogány Béla, Rybár István és Szabó Gábor előadó voltak, örömmel állapította meg, hogy a versenyzők általában szép készültséget mutattak, Az első feladatot 9, a második feladatot 5 versenyző oldotta meg kifogástalanul. Legtöbb nehézséget a harmadik feladat okozta a versenyzőknek, úgy hogy mind a három feladatot egy versenyzőnek sem sikerült kifogástalanul megoldania.

A két elsőt kifogástalanul és a harmadikat részben jól három versenyző oldotta meg.

A bizottság tekintettel a 3-ik feladat megfejtésének fogyatékosságára és tekintettel arra, hogy e három versenyző dolgozatai között lényegesebb értékbeli különbség nincs, azt javasolta, hogy mind a három versenyző egyformán egy-egy második díjat kapjon. A nyertesek a következők:

Makai Endre, aki a budapesti kegyesrendi gimnáziumban végzett és tanára Ferenczi Zoltán volt,

Kepes Jenő, aki a X. ker. áll. Szt László reálgimnáziumban végzett és tanára Lisintzki Ferenc volt és

Tóth László, aki a X. ker. áll. Széchenyi István reálgimnáziumban végzett és tanára Eskulits Ferenc volt.

Mind a hárman bölcsészettanhallgatók.

Javasolta továbbá a bizottság, hogy dícséretben részesüljön Győry István bölcsészettanhallgató, aki a budapesti református gimnáziumban végzett és Kolozsváry Béla tanítványa volt. Az ő dolgozata csak annyiban különbözik az előbb felsoroltakétól, hogy a második feladatban az erőkart 2-szer hosszabbnak vette kelleténél és így 2-szer akkora eredményt hozott ki.

Társulatunk választmánya 1933. november 9-én tartott ülésén a bizottság ezen javaslataihoz hozzájárult s így azok határozattá váltak.

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1933. június 10-i XXXVIII. közgyűlés.

Rados Gusztáv elnöki megnyitó beszéde:

Tisztelt Közgyűlés!

Visszatekintve a lefolyt társulati évünk eseményeire, elsősorban mint fájdalmas mozzanatról meg kell emlékeznem arról a mérhetetlen nagy veszteségről, melyet Társulatunk két kitűnő tagjának Kürschák József-nek és Haar Alfréd-nak váratlan elhunytával szenvedett. Mindkettőnek halála felett érzett fájdalmunkat velünk osztja az egész mathematikus világ, amely fáradhatatlan kutatómunkájuknak gyümölcseit élvezi, amelyekkel nevüket a tudománytörténet egyik fényes lapján megörökitették és amelyek eszméltető hatásukból még sokáig nem fognak veszíteni. Társulatunk választmánya e két nagy halottjának tiszteletére emlékünnep megtartását elhatározta, amelyen e két kiváló mathematikus legfontosabb műveinek méltatásával képet kíván nyujtani kiváló alkotásaikról. Tudományos nagy érdemeiknek és kiváló emberi erényeiknek emlékét kegyelettel fogjuk őrizni.

A chicagói világkiállítás alkalmával ott tartandó mathematikai kongresszusra a világnak öt kiváló mathematikusát hívták meg előadókul. Örömmel és büszkeséggel tölti el lelkünket, hogy e kiváló mathematikusok egyike a mi kitünő mathematikus-titkárunk, Fejér Lipót barátunk, aki ottani szereplésével bizonyára gyarapítani fogja azt a tekintélyt és elismerést, amelyben a magyar mathematikusoknak széles e világon részük van.

Tanuságot tesz erről az a reánk nézve hizelgő esemény is, hogy a Princetonban felállított kutatóintézethez kinevezett négy világhirű kutató egyike NEUMANN JÁNOS hazánkfia és buzgó tagtársunk, akit már számos alkalommal szerencsénk volt előadóasztalunk mellett üdvözölni és aki a princetoni egyetemen mint Amerika egyik legkiválóbb egyetemének tanára dicsőséget szerez hazánknak.

Az a tudat, hogy hazánk művelődésének zászlaját a világ látja és tisztelettel hajlik meg előtte, reménnyel tölt el bennünket, hogy a megpróbáltatás mostani súlyos éveit komoly károsodás nélkül fogjuk átélni és hogy odaadó munkával és erőnk teljes megfeszítésével sikerülni fog a jobb jövőbe átmenteni az összes kulturkincseket, amelyeket elődeink alapvető és áldozatkész munkájának köszönünk. E törekvésünkben segítségünkre van a nagyméltóságú Vallás- és Közoktatásügyi Minisztérium és a Magyar Tud. Akadémia, melyek mindketten az idei évben is Társulatunkat számottevő segélyben részesitették. Legyen szabad e helyről is a nyújtott támogatásért meleg köszönetünket kifejeznem.

Abban a hitben, hogy a mindnyájunktól várt jobb jövő hajnalhasadása mielőbb be fog következni, nyitom meg idei közgyűlésünket.

RADOS GUSZTÁV elnöki megnyitója után POGÁNY BÉLA ügyvezető-titkár beszámol az 1932—33. társulati év főbb mozzanatairól és adatairól:

1932. október 30-án volt Társulatunk nagynevű alapítója, báró EÖTVÖS LORÁND síremlékének ünnepélyes leleplezése a Kerepesi temetőben. Ezen az ünnepélyen a Kultuszminisztérium, az Akadémia és Tudományegyetemen kívül számos társulat képviseltette magát és helyezte elismerésének pálmakoszorúját a nagy magyar fizikus sírjára. Társulatunk nevében RADOS GUSZTÁV elnök mondott beszédet, TANGL KÁROLY alelnök pedig a volt tanítványok nevében emlékezett meg nagy Mesterünkről.

1932. november 24-i előadó-ülésünkön Y. A. BARNETT ohioi professzort üdvözölhettük vendégül, aki matematikai tárgyú, angol nyelvű előadást tartott.

Az 1933. évi március hónap nagy gyászt hozott Társulatunkra. Alig egy heti időköz alatt két érdemekben gazdag, tudós tagtársunkat ragadta el a halál. Először HAAR ALFRÉD választmányi tagunkat, azután KÜRSCHÁK JÓZSEF alelnököt. Felejthetetlen két nagy tagtársunk emlékét jegyzőkönyvileg örökítettük meg. Koporsójukra Társulatunk is koszorút helyezett és mindkettő ravatalánál RADOS GUSZTÁV elnök mondott búcsúbeszédet.

1932. november 10-én a Magyar Földrajzi Társaság KÖVESLIGETHY RADÓ 70-ik születése napját ünnepelte. Ezen az ünnepélyen Társulatunkat TASS ANTAL képviselte.

1933. június 4. és 10-ike közt a Magyar Orvosok és Természetvizsgálók XLI. Vándorgyűlésén TANGL KÁROLY alelnök vett részt Társulatunk képviseletében.

Levélben üdvözöltük a Magyar Statisztikai Társaságot 1933. május 27—28-iki Egerben tartott XI. ünnepi ülése alkalmából.

Ügyvezető-titkár bejelenti, hogy FEJÉR LIPÓT meghívás folytán Amerikában időzik és ott előadásokat tart. Útja a magyar tudomány elismerését és tiszteletét jelenti. A közgyűlés ezért FEJÉR LIPÓT útjához sok sikert kíván.

Társulatunk az elmult évben 8 előadóülést, 2 közgyűlést és 3 választmányi ülést tartott. Az üléseken 9 előadás hangzott el és pedig 5 matematikai és 4 fizikai tárgyú.

Ügyvezető-titkár beszámol a tanulóversenyekről, melyek eredményeit lapunk utolsó számában közöltük.

Azután a lelépő 6 választmányi tag helyeinek, továbbá a halálozások folytán megüresedett helyek betöltésére, végül a lelépő tisztikar megújítására került a sor.

A lelépő választmányi tagok, névszerint: FARAGÓ ANDOR, GRUBER NÁNDOR, MIKOLA SÁNDOR, ORTVAY RUDOLF, RIESZ FRIGYES és RYBÁR ISTVÁN újból megválasztattak.

Az új tisztikar a Közgyűlés választása szerint a következő:

Elnök: RADOS GUSZTÁV.

Alelnökök: TANGL KÁROLY és FEJÉR LIPÓT.

Titkárok: POGÁNY BÉLA és KŐNIG DÉNES.

Jegyzők: CSÁSZÁR ELEMÉR és SZŰCS ADOLF.

Pénztáros: SZABÓ GÁBOR.

HAAR ALFRÉD helyére a választmányba a Közgyűlés KÖVESLIGETHY RADÓT, KŐNIG DÉNES helyére pedig KERÉKJÁRTÓ BÉLÁT választja meg.

SZABÓ GÁBOR pénztárosi jelentéséből a zárszámadást és a vagyonmérleget jelen számunkban közöljük.

1932. évi zárszámadás.

Bevétel:

	Pengő
1. 1931. évi zárszámadási maradvány:	
a) kézi pénztárban	64·96
b) postatakarékpénztárban	383·19
c) Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban:	
1. folyószámlán	932·—
2. betétkönyvben (Károly Irén-alap)	1020·—
2. Tagdíjak	746·—
3. Előfizetési díjak	263·74
4. Adományok	40·—
5. Államsegély	700·—
6. Magyar Tudományos Akadémia segélye	500·—
7. Kamatok	164·99
Összesen:	4814·88

Kiadás:

	Pengő
1. Nyomdai költségek	1500·—
2. Tanulóverseny	69·54
3. Kezelési költségek	13·36
4. Vegyesek	382·59
5. Pénztári maradvány:	
a) kézipénztárban	47·84
b) postatakarékpénztárban	935·95
c) Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban:	
1. folyószámlán	845·60
2. betétkönyvben (Károly Irén-alap)	1020·—
Összesen:	4814·88

Vagyon-mérleg.

Vagyon:

	Korona	Pengő
1. Korona értékpapirosokban:		
a) A Magy. Lesz. és Pénzv. Bankban:		
2600 K. n. é. 4 %-os fővárosi kölcsönkötvény	2600·—	
1800 « « « 6 %-os hadikölcsönkötvény (4. kibocsátás)	1800·—	
300 « « « 4 %-os magyar koronajáradékkötvény (Károly Irén alapítvány)	300·—	
2200 « « « 6 %-os hadikölcsönkötv. (6. kibocsátás) (Károly Irén alapítvány)	2200·—	
2000 K. n. é. 5½ %-os hadikölcsönkötvény (4. kibocsátás)	2000·—	
10000 « « 6 %-os hadikölcsönkötvény (3. kib.) Kőnig-alap.	10000·—	
b) a Pesti Hazai Takarékpénztárban $\frac{04557}{c_2}$ jelzésű könyvben	108·—	
c) Állami kezelésben: Majthényi Ottó-hagyaték	10000·—	
2. Pénzkészlet:		
a) kézipénztárban		47·84
b) postatakarékpénztárban		935 95
c) a Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban:		
1. folyószámlán		845·60
2. betétkönyvben (Károly Irén-alap)		1020·—
3. Tagdíj és előfizetési díj hátralék		200·—
4. Nyomtatványok		100·—
Összesen:	29008·—	3149·39

Teher.

	Korona	Pengő
Nyomdai tartozás		886·84
Egyenleg	29008·—	2262·55

Szabó Gábor s. k.
pénztáros.

Átvizsgáltuk és rendben találtuk.

Budapest, 1933. március hó 18-án.

Tass Antal s. k., *Faragó Andor* s. k., *Renner János* s. k., *Veress Pál* s. k.
a számvizsgáló bizottság tagjai.

Kimutatás az 1932. évi december 26-tól 1933. évi október 7-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíjak.

1928-ra: Albert Anna (8), Lóky Béla (8). *Összesen 16 P.*

1929-re: Hajós Géza (3), Kovács János (8), Oltay Károly (8). *Összesen 19 P.*

1930-ra: Czakó Adolf (8), ifj. Kunfalvi Rezső (8), Lóky Béla (8), Öveges József (6), Schay Géza (8). *Összesen 38 P.*

1931-re: Adler Erzsébet (8), Baintner Géza (4), Beke Manó (8), Bodócs István (6), Bruck Ferenc (2), Bujk Béla (6), Bukovszky Ferenc (6), Császár Elemér (8), Czukor Károly (8), Darkó Béla (6), Déri Zsigmond (8), Eberhardt Béla (2), Erdey-Gruz Tibor (8), Forró Magdolna (8), Fejes Zsigmond (8), Hoór Tempis Móric (8), Horváth Elemér (6), Jankó Antal (3), Kalmár László (6), Kolozsvári Béla (8), Kőrös László (8), ifj. Kövesligethy Radó (8), Lassowszky Károly (8), Lipka István (6), Magi Ferenc (6), Nagy Julián (8), Sz. Nagy Gyula (6), Neumann János (8), Politzer Róza (8), Riesz Frigyes (6), Rigó Ferenc (6), Róna Zsigmond (8), Runtágné Perényi Gizella (3), Simon Elemér (1), Skopál István (8), Söpkéz Sándor (8), Steiner Lajos (4), Strasser Sándor (6), Schimanek Emil (8), Schwartz Ilona (4), Szerényi Géza (5), Terkán Lajos (8), Theisz Edéné Vajk Magda (8), Vadászy Bertalan (6), Vigassy Lajos (8), Walek Károly (6), Waldapfel János (8), Weisz Livia (8), Winkler Lajos (8). *Összesen 320 P.*

1932-re: Adler Erzsébet (8), Albert Anna (8), Beke Manó (8), Bencsik Béla (4), Bodócs István (6), Breuer József, Haifa (8), Bródy Imre (8), Bujtás János (6), Czakó Adolf (8), Czukor Károly (8), Darkó Béla (6), Eberhardt Béla (2), Erdey-Gruz Tibor (8), Forró Magdolna (8), Fejes Zsigmond (6), Fraunhoffer Lajos (8), Goldziher Károly (8), Gyulai Zoltán (6), Hoór Tempis Móricz (8), Janicsek József (8), Kalmár László (6), Kedves Miklós (6), Kilcer Gyula (6), ifj. Kövesligethy Radó (8), Kőrös László (8), Krbek Ferenc (8), Lassowszky Károly (8), Lóky Béla (8), Lipka István (6), Magi Ferenc (6), Nagy Julián (8), Sz. Nagy Gyula (6), Neumann János (8), Oltay Károly (4), Öveges József (6), Politzer Róza (8), Pogátsa János (6), Riesz Frigyes (6), Rigó Ferenc (8), Runtágné Perényi Gizella (3), Söpkéz Sándor (8), Sós Ernő (8), Steiner Lajos (8), Strasser Sándor (6), Schay Géza (8), Schimanek Emil (8), Szabó Miklósné

Nagy Sarolta (6), Székely Károly (6), Theisz Edéné Vajk Magda (8), Tardos Vida (6), Tass Antal (4), Tihanyi Miklós (6), Vámos Sándor (6), Vigassy Lajos (8), *Összesen 357 P.*

1933-ra: Ábrahám István (8), Balyi Ferenc (6), Bacsó Vilmos (6), Bauer Mihály (8), Benkő Ilona (8), Darkó Béla (6), Erdős Pál (8), Faragó Andor (8), Fenyvesi Andor (8), Fornwald József (8), Forró Magdolna (8), Gruber Nándor (8), Gyulai Zoltán (2), Hancsok Kálmán (6), Hausbrunner Vilmos (8), Ilosvay Lajos (8), Kalmár László (6), Karai Sándor (6), Klug Lipót (8), Kovács János (8), Kronstein Béla (8), ifj. Kövesligethy Radó (8), Kövessi Ferenc (6), Kuzaila Péter (6), Lengyel Béla (műegy.) (8), Luckhaub Gyula (8), Magdics Gáspár (8), Nagy Ferenc (8), Neugebauer Tibor (8), Nyári Béla (6), Ortvay Rudolf (8), Oszlaczky Szilárd (8), Pécsi Albert (8), Rados Gusztáv (8), Rados Ignác (8), Renner János (8), Reuss Endre (8), Rhorer László (6), Szabó Gábor (8), Szabó Gusztáv (8), Szabó Miklósné Nagy Sarolta (4), Szász Pál (8), Szekeres Kálmán (8), Széky István (6), Szőke Béla (8), Tangl Károly (8), Tardos Vida (6), Tass Antal (8), Tihanyi Miklós (6), Török Elemér (6), Vörös Cyrill (8), Winter József (8), WoyciechowskyJózsef (8). *Összesen 386 P.*

1934-re: Balyi Ferenc (6), Bacsó Vilmos (6), Luckhaub Gyula (8), Renner János (8), Rhorer László (6), Tihanyi Miklós (6). *Összesen 40 P.*

2. Előfizetési díjak.

1928-ra: Révai Miklós reáliskola, Győr (2).

1929-re: Ciszt. r. Tanárképző (Bernardinum), Bp. (8), Révai M. reálisk., Győr (6). *Összesen 14 P.*

1930-ra: Term. Tud. Társulat, Bp. (8), Révai M. reálisk. Győr (6). *Összesen 14 P.*

1931-re: Mária Terézia leánygimn. Bp. (8), Toldy F. reálisk. Bp. (8), Széchenyi I. reálgimn. Bp. (8), Zrinyi M. reálgimn. Bp. (8), Ref. gimn. fizikai szertára, Debrecen (6), Kir. kath. Eszterházy M. reálgimn., Dombovár (6), Ág. h. ev. liceum, Sopron (6), Polg. isk. Tanárképző Főisk. Szeged (6). *Összesen 56 P.*

1932-re: Mária Terézia leánygimn. Bp. (8), Ciszt. r. Tanárképző, Bp. (8), Toldy F. reálisk. Bp. (8), Széchenyi I. reálgimn. Bp, (8), Technol. és Anyagvizsg. Intézet, Bp. (7·94 P), Grill-könyvkereskedés (W. Müller, London) Bp. (6·40 P), Kilián könyvkeresk. Bp. (6), Ref. gimn. fizikai szertára, Debrecen (6), Kir. kath. Eszterházy reálgimn., Dombovár (6), Ág. h. ev. liceum, Sopron (6), Polg. isk. Tanárképző Főisk., Szeged (6), *Összesen 76·34 P.*

1933-ra: Ág. h. ev. Rudolf rg. Békéscsaba (6), Ciszt. r. Tanárképző, Bp. (8), Kegyesrendi Tanárképző, Bp. (8), Eggenberger könyvkeresk. (Gyakorló gimn.) Bp. (7·20), Ref. Horthy reálgimn. Kisújszállás (6), Bánya- és Erdőmérnöki Főisk., Sopron (6), Csanád Vezér rg. Makó (6), Horváth M. reálgimn., Szentes (6). *Összesen 53·20 P.*

1934-re: Svábhegyi Csillagvizsgáló Intézet, Bp. (8).

3. Segélyek, adományok.

Magyar Tud. Akadémia	500·—	P
Magyar Állam	500·—	«
Patai Imre	684·34	«
Hoór Tempis Móric	50·—	«
Bláthy Ottó Titusz	10·—	«
Sárközy Pál	12·—	«
Tóth Aladár	6·—	«
Összesen	*1762·34*	*P*

Budapesten, 1933. okt. hó 7-én.

Szabó Gábor, pénztáros.

Franklin-Társulat nyomdája. — Ábrai V.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA : ÁBRAI V.