MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES ÉS POGÁNY BÉLA

NEGYVENEDIK ÉVFOLYAM

BUDAPEST, 1933

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkívüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi reánk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhöz képest meg kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzívebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is.

Kérjük ennélfogva tisztelt tagtársainkat,

1. hogy hátralékos tagdíjaikat (évenkint 8, ill. 6 pengőt) szíveskedjenek *Szabó Gábor* pénztárosnak (Budapest, I., Verpeléti-út 7. I. 2.) vagy postatakarékpénztári csekkszámlánkra (száma 5997), vagy pedig a Tudományos Társulatok és Intézmények Orsz. Szövetségének Díjkezelősége útján befizetni.
2. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával,
3. hogy gyüjtsenek új tagokat.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Kőnig Dénes* (**I., Horthy Miklós-út 28., Hadik-pensio**), a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* (**I., Budafoki-út 8.**) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataik ban lehető rövidségre törekedjenek, azokhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghivók expedíciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Szabó Gábor* pénztáros címére (Budapest, I., Verpeléti-út 7.) intézendők. Postatakarékpénztári csekkszámla száma: 5997.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du sécretaire *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

HARMINCKILENCEDIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és POGÁNY BÉLA

BUDAPEST, 1932

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

harminckilencedik kötetének tartalma.

KÜRSCHÁK JÓZSEF

KÜRSCHÁK JÓZSEF
(1864—1933.)

(Rados Gusztáv beszéde Kürschák József ravatalánál 1933. márc. 29-én.)

Tisztelt gyászoló közönség!

A halál kiméletlenül szedi áldozatait a kiváló magyar mathematikusok sorából. Alig egy hete, hogy utolsó nyugvóhelyére kisértük Haar Alfréd kitűnő társunkat és a halál most ismét kiragadta körünkből egyik legkiválóbb és érdemekben leggazdagabb tudósunkat, Kürschák Józsefet, a Magyar Tudományos Akadémia igazgatósági tagját és III. osztályának titkárát és a báró Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat másodelnökét, aki e tudós társaságoknak legtevékenyebb és tudományos sikerekben leggazdagabb tagjai közé tartozott.

E tudós társaságok nevében fájó érzéssel intézek búcsúszózatot megdicsőült barátunkhoz, aki távozásával nehezen betölthető ürt hagy maga után, mert ő sohasem lankadó lelkesedéssel és fáradhatatlan odaadással szolgálta a tudományt, a magyar közoktatást és társulati életünket.

Kürschák József sokoldalú és mélyen gondolkodó kutató volt, aki a mathematikának számos fejezetét maradandó becsű értékekkel gazdagitotta. Már első, az elemi geometria körébe tartozó vizsgálódásaival, különösen a geometriai szerkesztések elméletére alapvető tárgyalásaival, melyek az etalon használatára vonatkoznak, magára vonta a mathematikusok figyelmét. A mélyen szántó értékelés-elmélete, míg egyrészt a p-adikus számok elméletének betetőzése gyanánt tekinthető, másrészt a számtestek általános elméletének új fordulatot adott és számos, az ő nyomdokain haladó mathematikust új munkára ösztönzött. A variácio-számítással kapcsolatos másodrendű partiális differenciálegyenletekre vonatkozó, valamint számos algebrai és számelméleti vizsgálódásai is felette becsesek és finom elmeélről tesznek tanúságot.

Tudományos és hazafias érdemet szerzett magának Bolyai Farkas Tentamen-jének, a halhatatlan szerzőhöz méltó kiadásában való közremüködésével. Felette megtisztelő volt ő reá nézve, de a magyar tudományosságnak külföldön való megbecsülésének jele is, hogy az Encyclopédie des Sciences Mathématiques megindításakor kiváló francia tudósok őt szólították föl közremüködésre, amely felszólításnak ő derekasan megfelelt.

A magyar tanügy körül is nagyok az érdemei. Mint az országos közoktatási tanácsnak előadója, tevékeny részt vett az új középiskolai tanterv kidolgozásában. A Matematikai és Fizikai Társulat közlönyében közzétett ismertető értekezései az összefoglaló jelentéseknek mintaképei. E társulat Eötvös-pályázatain jutalmazott pályamunkák kiadása az ezekhez tőle hozzáfűzött kommentárokkal a hazai oktatóirodalomnak legbecsesebb művei közé tartozik.

Lelkes és tevékeny tagja volt a Felső Oktatási Egyesület igazgatótanácsának is, amelynek ülésein meggondolt és bölcs mérsékletről tanúskodó fölszólalásai mindenkor meghallgatásra találtak.

A Magyar Tud. Akadémia III. osztályának ügyeit, mint ennek az osztálynak titkára, lelkiismeretesen és mindenkor tapintatosan intézte. Az előadóüléseken pedig klasszikus szabatosságra és rövidségre törekedett. Az Akadémia támogatásával kiadott Mathematische u. Naturw. Berichte aus Ungarn a külföldön is becsülésben részesült folyóiratot egy évtizeden át szerkesztette.

E fölsorolás még korántsem nyujt hű képet mindarról, amit a magyar tudományos élet neki köszön; de az eddig fölhozottak is mutatják, hogy az ő halála tudományosságunknak mérhetetlen és fájdalmas nagy veszteségét jelenti.

De mennyivel fájdalmasabban érinti elköltözése a hozzá közelálló barátait és pályatársait, akik őt nemes tudományszeretetéért, egyenes és minden hamisságtól mentes jelleméért, a föltűnést kerülő szerénységeért, szókimondó bátorságáért annyira tisztelték, a mindenkor tanúsított szolgálatkészségeért és jószivűségeért pedig annyira szerették.

Szeretett Barátunk! Te a munkásságoddal dicsőséget szereztél magadnak és a hazának; tanításoddal áldást árasztottál a tanulni vágyó magyar ifjúságra; egész életműveddel pedig példát mutattál arra, hogy miképpen kell és lehet a hazát értékes és becsületes munkával szolgálni. Ezért áldott legyen emléked, mely örök dicsfényben fog ragyogni minden magyar hazafi előtt és különösen azok előtt, akik a Te nyomdokaidon a mathematikát művelni fogják, azt a tudományt, melyet a Te fáradhatatlan munkásságoddal oly bőkezűen gazdagítottál. Kürschák József, kedves barátunk és pályatársunk, Isten veled!

Rados Gusztáv.

HAAR ALFRÉD

(1885—1933.)

(RADOS GUSZTÁV beszéde HAAR ALFRÉD ravatalánál 1933. márc. 20-án.)

Tisztelt gyászoló közönség!

Fájdalmas kötelességet teljesítek, midőn a Magyar Tudományos Akadémia és a br. Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat megbízásából HAAR ALFRÉD kitűnő társunkhoz búcsúszózatot intézek és e tudós társaságok nevében ravatalára leteszem a hálás elismerés babérágát. Az ő korai elhúnyta nemcsak a hazai tudományos körökre, de a nemzetközi kultúréletre is fájdalmas veszteséget jelent, mert ő a világ legismertebb és legkiválóbb mathematikusai közé tartozott.

Ő dísze volt minden testületnek, amelyben hívatása működésre szólította. Dísze volt ő Akadémiánknak, amelyre világszerte elismert kutatásainak jelentős eredményeivel szerzett dicsősége fényt árasztott; büszkesége volt a Mat. és Fizikai Társulatnak, amelynek előadó ülésein, folyóiratában és választmányában buzgó tevékenységet fejtett ki; áldása volt a Ferencz József Tudomány-Egyetemnek, amelyen két évtizeden át úgy a tudományművelés, mint pedig a tanítás terén hervadhatatlan érdemeket szerzett magának.

HAAR ALFRÉDban, a kutatóban, az invenció gazdagsága az igazi tudós lelkiismeretességével párosult. Lelkét a tudomány iránti szeretet hevítette és fáradhatatlan kutató munkára serkentette. Az orthogonális függvényrendszerekről talált eredményei, a variáció-számítás alaptételeire vonatkozó kérdéseknek neki köszönhető tisztázása, a Plateau-problémának tőle eredő

HAAR ALFRÉD

végleges megoldása, a végtelen Abel-csoportokról levezetett tételei a mathematikai kutatásnak fényes és maradandó becsű eredményei. Ezen felül értekezései a stilusnak ékessége és világossága mellett szigorú tudományos megbizhatóságukkal tűnnek ki. Tudásának fájáról éretlen gyümölcsöt sohasem szedett le; amit pedig leszedett, az a tudomány igazi meggazdagodására vezetett.

Szívünknek kimondhatatlanul fáj, hogy e fényes tehetségű tudós, akit önzetlen tudományszeretetéért és az igazság fölismerésére irányuló fáradhatatlan munkásságáért annyira tiszteltünk, szerény és kedves egyéniségeért pedig annyira szerettünk, oly korán, még pályájának delelőjén innen dőlt ki sorainkból.

De nem szállunk perbe a Gondviselés kifürkészhetetlen intézkedésével; inkább hálával adózunk neki, hogy hazánkat ily kiváló férfiúval megajándékozta, aki rövid földi léte alatt oly sokat és értékeset alkotván, a hazai tudományosságnak dicsőségére vált.

Az ő életműve a szó legnemesebb értelmében hazafias munka volt, mert kétségtelen, hogy a mai viszonyok között az szolgálja leghasznosabban a haza érdekeit, aki, mint ő, becses kultúrértékek termelésével reá irányítja a nagy kultúrnemzetek figyelmét és rokonszenvét a szerencsétlen sorsra jutott hazánkra.

Nevét alkotásai örökítik meg. Szeretetreméltó egyéniségének kedves emlékét fájó érzéssel zárjuk keblünkbe.

Haar Alfréd, szeretett pályatársunk, Isten veled!

Rados Gusztáv.

A CSOPORTKARAKTERISZTIKÁK ELMÉLETÉRŐL.*

(Második közlemény.)

Az első közleményben (Matematikai és Fizikai Lapok **38.** k., 132. l.) egy olyan eljárást közöltem, mely egyszerűen és minden lényeges számitás nélkül elvezet a csoportkarakterisztikák fogalmára és alapvető tulajdonságaira. Ebben a dolgozatomban meg akarom mutatni, hogy az első közleményben követett eljárás miként vezet el a véges csoportok előállitásainak elméletére, amely a csoportkarakterisztikák legfontosabb alkalmazása.

A bebizonyitandó tételek túlnyomó részben magától FROBENIUStól erednek (l. az első közlemény [2] sz. jegyzetét); néhány segédtétel csak BURNSIDE és SCHUR idevágó vizsgálataiban lép fel. Nem tartottam itt sem szükségesnek, hogy minden tételnél külön megadjam az irodalmi adatokat.

A véges csoportok előállításáról.

1. Ha az adott n-edrendű csoport minden egyes

$$A, B, C, \ldots$$

eleméhez egy-egy (ν-edrendű) mátrix van rendelve és ezeknek összessége

$$(T_A),\ (T_B),\ (T_C), \ldots \tag{7}$$

azzal a tulajdonsággal bir, hogy

$$(T_{XY}) = (T_X)\ (T_Y) \qquad (X, Y = A, B, C, \ldots),$$

* Elhúnyt kiváló tudósunk egyik utolsó munkája. (Szerk.)

akkor ezekről a mátrixokról — illetőleg a megfelelő lineáris transzformációkról — azt mondjuk, hogy csoportunk egy ν-edrendű T *előállítását* szolgáltatják. Csak olyan előállításokkal fogunk foglalkozni, amelyeknél a fenti mátrixok determinánsa nem tűnik el. Ekkor nyilván $(T_E) = E$ és $(T_{A^{-1}}) = (T_A)^{-1}$. A reguláris előállítás, amelyre felépítettük a csoportkarakterisztikák fogalmát, $(T_A) = (A)$, példa erre az általános fogalomra; egy másik (triviális) példát nyerünk, ha valamennyi (T_A), (T_B), (T_C),... mátrixot a ν-edrendű egységmátrixszal identifikáljuk. Ha (P) egy olyan ν-edrendű mátrix, melynek van inverze, akkor a

$$(P)^{-1}\,(T_X)\,(P) \qquad {\scriptstyle (X=A,\,B,\,C,\dots)}$$

mátrixok is csoportunknak egy előállítását szolgáltatják, melyről azt mondjuk, hogy a (7) alatti előállítással *aequivalens*. Az aequivalencia reflexiv, szimmetrikus és tranzitív fogalom.

Mint a reguláris előállítás esetében, úgy most is rendelhetünk a csoport osztályaihoz egy-egy mátrixot. Ha ugyanis a $\mathfrak{C}_p$ osztályt az $A_1, A_2,\dots, A_{n_p}$ elemek alkotják, akkor ehhez az osztályhoz rendeljük a

$$(T_{\mathfrak{C}_p}) = (T_{A_1}) + (T_{A_2}) + \cdots + (T_{A_{n_p}})$$

mátrixot. Az osztályok kompozícióját kifejező (1) egyenlet ekkor nyomban átmegy a következő mátrixegyenletbe:

$$(T_{\mathfrak{C}_\alpha})\,(T_{\mathfrak{C}_\beta}) = (T_{\mathfrak{C}_\beta})\,(T_{\mathfrak{C}_\alpha}) = \sum_{\gamma=1}^{h} C_{\alpha\beta\gamma}\,(T_{\mathfrak{C}_\gamma}). \qquad (1'')$$

Könnyen átlátható, hogy a $(T_{\mathfrak{C}_p})$ mátrix $(p=1, 2,\dots, h)$ felcserélhető a (T_A), (T_B), (T_C),... mátrixok mindegyikével. U. i. a $(T_{\mathfrak{C}_p})\,(T_A) = (T_A)\,(T_{\mathfrak{C}_p})$ reláció közvetlen folyománya annak a ténynek (v. ö. első közlemény, 1. §), hogy az A_1A, $A_2A,\dots, A_{n_p}A$ elemek összessége ugyanaz, mint az AA_1 $AA_2,\dots, AA_{n_p}$ elemek összessége.

Be kell még vezetnünk a reducibilis, illetőleg irreducibilis előállítás fogalmát. A következő szólásmódot célszerű bevezetni erre a célra. Valamely ν-edrendű (P) mátrixhoz tartozó transzformáció a ν-dimenziós tér $x_1, x_2,\dots, x_\nu$ koordinátájú $\mathfrak{x}$ pontját vigye át az $x_1', x_2', \ldots, x_\nu'$ koordinátájú $\mathfrak{x}'$ pontba; ezt $(P)\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'$-vel fogjuk jelölni. Ha továbbá $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(k)}$ a kérdéses tér k tetszőleges pontja, akkor (könnyen megérthető jelölésben) a $c'\mathfrak{x}' + c''\mathfrak{x}'' + \cdots + c^{(k)}\mathfrak{x}^{(k)}$ pontok összességét — ahol $c', c'', \ldots, c^{(k)}$ tetszőleges állandókat jelölnek — ezen tér egy lineáris részének mondjuk; ha $k < \nu$, akkor valódi részről van szó. Ezek előrebocsátásával a (7) alatti T előállítást *reducibilisnek* mondjuk (s az ellenkező esetben *irreducibilisnek*), ha van a ν-dimenziós térnek egy olyan *valódi* lineáris része, melynek pontjait a fenti (T_A), (T_B), (T_C),... transzformációk mindegyike ugyanezen térrész pontjaiba viszi át (tehát a térrészt önmagában transzformálják). Más szóval, a reducibilitás feltétele olyan $k < \nu$ számú $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(k)}$ értékrendszer létezése, hogy a (7) alatti matrixok mindegyikére fennálljanak a

$$(T)\,\mathfrak{x}^{(p)} = c_T'\mathfrak{x}' + c_T''\mathfrak{x}'' + \cdots + c_T^{(k)}\mathfrak{x}^{(k)} \qquad \begin{matrix}(p=1, 2, \ldots, k)\\ (T=T_A,\ T_B,\ T_C, \ldots)\end{matrix}$$

alakú összefüggések. Definiciónkból rögtön következik, hogy egy reducibilis előállítással aequivalens előállítás szintén reducibilis.

2. Az irreducibilis előállítások és a csoportkarakterisztikák, illetőleg a Frobenius-féle egyenletrendszer közti összefüggésre rávezet a következő tétel, mely egész speciális esete egy Burnsidetől eredő theorémának. *Ha a* (P) *mátrix felcserélhető a* T *irreducibis előállítás valamennyi matrixával, akkor* $(P) = \varrho\,(E)$, *ahol* ϱ *egy számot és* (E) *a* ν*-edrendű egységmátrixot jelöli.*

A tétel bebizonyitása igen egyszerű. ϱ-t úgy választjuk meg, hogy $(P) - \varrho\,(E)$ determinánsa eltűnjék. Ha ez a különbség nem volna identikusan zérus, akkor a

$$\big((P) - \varrho\,(E)\big)\,\mathfrak{x} = 0 \tag{8}$$

homogén egyenletrendszernek összes megoldásai $k < \nu$ számú $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(k)}$ lineárisan independens megoldásból volnának felépithetők, azaz $c'\mathfrak{x} + c''\mathfrak{x}'' + \cdots + c^{(k)}\mathfrak{x}^{(k)}$ volna (8) általános megoldása. Ha már most $(T)\,(P) = (P)\,(T)$ $(T = T_A,\ T_B,\ T_C, \ldots)$, akkor teljesülnének a

$$\big((P)-\varrho(E)\big)(T)\mathfrak{x}^{(p)}=(T)\big((P)-\varrho(E)\big)\mathfrak{x}^{(p)}=0 \quad {\scriptstyle (p=1,2,\ldots,k)}$$

egyenletek, azaz a $(T)\mathfrak{x}^{(p)}$ számok is kielégitenék az (8) alatti egyenleteket. Ennek folytán

$$(T)\mathfrak{x}^{(p)}=c'\mathfrak{x}'+c''\mathfrak{x}''+\cdots+c^{(k)}\mathfrak{x}^{(k)}$$

volna, ellentétben a T előállítás irreducibilis voltával; tehát tényleg $(P)-\varrho(E)=0$.

Ennek a tételnek fontos következménye, hogy *irreducibilis előállítás esetén a csoport osztályaihoz rendelt mátrixok a ν-edfokú egységmátrixnak egy-egy számmal való szorzásából adódnak;* legyen

$$(T_{\mathfrak{C}_p})=\varrho_p(E). \tag{9}$$

Az (1″) alatti relációból nyomban következik, hogy ezek a ϱ_p számok kielégítik a Frobenius-féle (I) egyenletrendszert.

A ϱ_p számok a (7) alatti mátrixok nyomaiból könnyűszerrel kifejezhetők; ha a $(\mathfrak{C}_p)$ osztályt az $A_1, A_2,\ldots, A_{n_p}$ elemek alkotják, akkor könnyen átlátható, hogy

$$\mathrm{Ny}\,(T_{A_1})=\mathrm{Ny}\,(T_{A_2})=\cdots=\mathrm{Ny}\,(T_{A_{n_p}})=\frac{\nu\varrho_p}{n_p}. \tag{10}$$

U. i. a nyomok egyenlősége az $A_1, A_2,\ldots, A_{n_p}$ elemek konjugáltságának következménye; a

$$(T_{A_1})+(T_{A_2})+\cdots+(T_{A_{n_p}})=\varrho_p(E)$$

mátrix nyoma $\nu\varrho_p$. Ha tehát T egy ν-edrendű irreducibilis előállítása csoportunknak és A a $\mathfrak{C}_p$ osztály egy eleme, akkor $\mathrm{Ny}\,(T_A)=\frac{\nu\varrho_p}{n_p}$, ahol $\varrho_1, \varrho_2,\ldots, \varrho_h$ az (I) egyenletek valamely megoldási rendszere. Ezt a körülményt úgy fejezzük ki, hogy *minden irreducibilis előállítás a* Frobenius-*féle egyenletrendszer valamely megoldásához «tartozik».*

3. Aequivalens előállítások — nyilván — az (I) egyenletrendszer ugyanazon megoldásához tartoznak. A következők számára döntő jelentőségű e tétel megforditása:

Két irreducibilis előállítás, T és T', melyek — a fenti ér-

telemben — a Frobenius*-féle egyenletrendszer ugyanazon megoldásához tartoznak, aequivalensek.*

Bizonyítás. Legyen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$ a kérdéses megoldása (I)-nek, melyhez a ν-edrendű

$$T:(T_A),\ (T_B),\ (T_C), \ldots$$

és a ν'-edrendű

$$T':(T'_A),\ (T'_B),\ (T'_C), \ldots$$

irreducibilis előállitás tartozik. Tegyük fel, hogy $\nu \geq \nu'$. A T' előállításban szereplő ν'-edrendű mátrixokat egészitsük ki ν-edrendű mátrixokká olymódon, hogy mindegyikükhöz csatolunk még $\nu-\nu'$ számú sort és oszlopot, úgy, hogy az új elemek közül a diagonálisban állók 1-gyel, a többiek pedig 0-sal legyenek egyenlők. Az így nyert ν-edrendű

$$T'':(T''_A),\ (T''_B),\ (T''_C), \ldots$$

mátrixok szintén csoportunk egy előállítását szolgáltatják, mely a $\nu > \nu'$ esetben nyilván reducibilis és minden elemre vonatkozólag fennáll a $\mathrm{Ny}\,(T''_A) = \mathrm{Ny}\,(T'_A) + (\nu - \nu')$ reláció. Mindegyik itt szereplő előállítás bármelyik mátrixának n-edik hatványa (E); hiszen n-edrendű csoportunk minden eleme teljesíti az $A^n = E$ relációt. Ennélfogva minden fellépő mátrix nyoma n-edik egységgyökök összege, mert egy mátrix nyoma nem egyéb, mint a mátrixhoz tartozó szekuláris egyenlet gyökeinek összege. Minthogy végül a (T_A) és a $(T_{A^{-1}}) = (T_A)^{-1}$ mátrixokhoz tartozó karakterisztikus értékek egymás reciprokai, azért egyszersmind — egységgyökök lévén — egymás konjugált komplex értékei is. Ennélfogva $\mathrm{Ny}\,(T_A)$ és $\mathrm{Ny}\,(T_{A^{-1}})$ konjugált számok. Ezek után könnyen átlátható, hogy a következő összeg:

$$S = \sum_{(A)} \mathrm{Ny}\,(T_A)\ \mathrm{Ny}\,(T''_{A^{-1}}) = \sum_{(A)} \mathrm{Ny}\,(T_A)\left(\mathrm{Ny}\ T'_{A^{-1}}) + (\nu-\nu')\right),$$

ahol az összegezés valamennyi A csoportelemre van kiterjesztve, szükségképpen pozitiv (>0). Ugyanis a (T'_A) és $(T_{A^{-1}})$ nyomaira tett megjegyzésből következik, hogy

$$S = \sum_{(A)} \mathrm{Ny}\,(T_A)\,\overline{\mathrm{Ny}\,(T'_A)} + (\nu - \nu') \sum_{(A)} \mathrm{Ny}\,(T_A) =$$

$$= \nu\nu' \sum_{k=1}^{h} \frac{\varrho_k \bar{\varrho}_k}{n_k} + (\nu - \nu')\,\nu \sum_{k=1}^{h} \varrho_k ;$$

az itt fellépő első összeg nagyobb, mint zérus; a második összeg értéke pedig a $\varrho_1 = n_1$, $\varrho_2 = n_2, \ldots, \varrho_h = n_h$ esetben n, minden más esetben pedig 0.[1] Ennélfogva tényleg $S > 0$. Ha a fenti (T_A), illetőleg (T''_A) mátrixokban a p-edik sor q-adik elemét $m^{(A)}_{pq}$-val, illetőleg $m''^{(A)}_{pq}$-val jelöljük, akkor ezek szerint

$$\sum_{(A)} \sum_{p,\,q=1}^{\nu} m^{(A^{-1})}_{pp}\, m''^{(A)}_{qq} > 0 ;$$

tehát mindenesetre van — legalább egy — olyan α, β értékpár, hogy

$$\sum_{(A)} m''^{(A)}_{\alpha\alpha}\, m^{(A^{-1})}_{\beta\beta} \neq 0.$$

Jelöljük (P)-vel azt a ν-edrendű mátrixot, melyben az α-adik sor β-adik eleme $=1$, a többi helyen álló elemek pedig 0-sal egyenlők. Ekkor a

$$Q = \sum_{(A)} (T''_A)\,(P)\,(T_A)^{-1}$$

mátrix semmiesetre sem identikusan 0, mert α-adik sorának β-adik eleme $= \sum_{(A)} m''^{(A)}_{\alpha\alpha}\, m^{(A^{-1})}_{\beta\beta} \neq 0$. Másrészt, ha X csoportunk tetszőleges eleme,

$$(T''_X)\,(Q) = \sum_{(A)} (T''_X)\,(T''_A)\,(P)\,(T_A)^{-1} = \Big\{\sum_{(A)} (T''_{XA})\,(P)\,(T_{XA})^{-1}\Big\}\,(T_X);$$

s minthogy, ha (A) végighalad a csoport valamennyi elemén, XA is rendre átmegy a csoport minden elemébe, azért

$$(T''_X)\,(Q) = (Q)\,(T_X) \qquad (X = A, B, C \ldots).$$

---

[1] Ez következménye az első közleményben szereplő (5) alatti összefüggésnek, ha abban a $\varrho_k^{(a)}$ értékrendszert az itt szereplő ϱ_k-kal, az ettől különböző $\varrho_k^{(b)}$ megoldásrendszert pedig a triviális n_k megoldásrendszerrel ejtjük össze. (V. ö. az első közlemény [8] lábjegyzetét.)

Az itt fellépő (Q) mátrix determinánsa $\neq 0$; ugyanis ellenkező esetben legyenek a $(Q)\mathfrak{x}=0$ homogén egyenletrendszer lineárisan independens megoldásai $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \dots, \mathfrak{x}^{(k)}$ $(k<\nu)$; az utolsó relációból nyomban következnék, hogy

$$(Q)\,(T_X)\,\mathfrak{x}^{(p)}=0 \qquad (p=1, 2, \dots, k)$$

és így fennállnának a

$$(T_X)\,\mathfrak{x}^{(p)}=c'_X\mathfrak{x}'+c''_X\mathfrak{x}''+\dots+c^{(k)}_X\mathfrak{x}^{(k)}$$

relációk, ellentétben az T előállítás irreducibilitásával. Ennélfogva

$$(T''_X)=(Q)\,(T_X)\,(Q)^{-1} \qquad (X=A, B, C, \dots),$$

amiből egyrészt következik, hogy a T'' előállítás is irreducibilis, tehát szükségképpen $\nu'=\nu$, azaz T'' ugyanaz, mint T' és hogy ez az előállítás a T előállítással aequivalens.

Az eddigiekből már levonható az az eredmény, hogy *az inaequivalens előállítások száma nem nagyobb, mint h (a csoportban foglalt osztályok száma) és hogy két irreducibilis előállítás akkor és csak akkor aequivalens, ha a megfelelő mátrixoknak* (azaz a két előállításban minden egyes csoportelemhez tartozó két mátrixnak) *nyomai megegyeznek.*

4. A Frobenius-féle egyenletek valamely $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_h$ megoldásához tartozó T irreducibilis előállítás rendjét az előzőek alapján könnyen kiszámíthatjuk; az e végből alkalmazandó következő eljárás lényegében azonos Schur idézett dolgozatában szereplő megfontolásokkal. Ugyanis, ha ismét (P) jelenti az előző pontban definiált mátrixot, akkor a $Q=\sum\limits_{(A)}(T_A)\,(P)\,(T_{A^{-1}})$ mátrix a $T_A, T_B, T_C, \dots$ mátrixok mindegyikével felcserélhető; ennélfogva $Q=\lambda\,(E)$. Minthogy továbbá ebben az összegben fellépő mindegyik mátrix nyoma $\delta_{\alpha\beta}$, Q-é pedig $=\nu\lambda$ (ν a T előállítás rendje), azért $n\delta_{\alpha\beta}=\nu\lambda$. Ennélfogva a p-edik sor q-adik elemének kiszámítása a fenti mátrixreláció mindkét oldalán a

$$\sum_{(A)} m^{(A)}_{p\alpha}\, m^{(A^{-1})}_{\beta q}=\frac{n}{\nu}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{pq}$$

egyenletre vezet, melyből adódik (ha $p = \alpha$, $q = \beta$), hogy

$$\sum_{(A)} m_{\alpha\alpha}^{(A)} m_{\beta\beta}^{(A^{-1})} = \frac{n}{\nu} \delta_{\alpha\beta}.$$

Ebből az egyenletből nyomban következik, hogy

$$\sum_{(A)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{\nu} m_{\alpha\alpha}^{(A)} m_{\beta\beta}^{(A^{-1})} = \sum_{(A)} \mathrm{Ny}\,(T_A)\, \mathrm{Ny}\,(T_{A^{-1}}) =$$
$$= \sum_{(A)} \mathrm{Ny}\,(T_A)\, \overline{\mathrm{Ny}\,(T_A)} = n,$$

amiből végre — (10) tekintetbevételével — nyerjük a

$$\nu^2 \sum_{p=1}^{h} n_p \frac{\varrho_p}{n_p} \frac{\bar{\varrho}_p}{n_p} = n$$

összefüggést. Az első közleményben bebizonyított (5) egyenletet ezzel egybevetve arra az eredményre jutunk, hogy $\nu^2 = f$, ahol f jelentette azt a számot, mely megmondja, hogy a $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$ értékrendszer hányszor lépett fel a reguláris előállítás osztálymatrixainak a diagonális alakra való transzformációjánál. Végül a (10) alatti relációnak a csoportkarakterisztikák (6) definiciójával való összehasonlításából az a tétel adódik, hogy adott *csoportunk valamely irreducibilis előállításában az egyes elemekhez tartozó mátrixok nyomai a csoportkarakterisztikák egyikét szolgáltatják.*[1]

5. Hátra van még annak megállapitása, hogy csoportunk inaequivalens irreducibilis előállításainak száma (melyről már láttuk, hogy h-nál nagyobb nem lehet) h-val egyenlő. E végből felhasználom MASCHKEnak a reducibilis előállításokra vonatkozó alapvető fontosságú tételét, amelyet a legegyszerűbben a következő fogalom bevezetésével lehet kimondani. Ha T' és T'' csoportunknak ν'-ed, illetőleg ν''-edrendű előállításai, melyek nem szükségképpen különbözők, akkor a $\nu' + \nu''$-edrendű

---

[1] SCHUR idézett dolgozatában ezt a körülményt használja fel a csoportkarakterisztikák definiciójára.

$$(T_X) = \begin{pmatrix} (T'_X) & \begin{matrix} 0\ldots 0 \\ \ldots\ldots \\ 0\ldots 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0\ldots 0 \\ \ldots\ldots \\ 0\ldots 0 \end{matrix} & (T''_X) \end{pmatrix} \qquad (X=A, B, C, \ldots)$$

mátrixok nyilván szintén csoportunk egy előállítását szolgáltatják;[1] ilyenkor azt mondjuk, hogy ez az előállítás és minden vele aequivalens előállítás a T' és T'' előállításokból «épül fel» s ezt a körülményt a $T=T'+T''$ szimbolikus egyenlettel jelöljük. Közvetlenül látnivaló, miként általánosul ez a fogalom, ha kettőnél több előállításból építünk fel újakat. Maschke tétele azt mondja ki, hogy *minden reducibilis előállítás ebben az értelemben az irreducibilis előállításokból felépíthető.*[2]

Maschke tételének ma már annyi egészen egyszerű bebizonyítása létezik, hogy azt hiszem, megelégedhetem a tétel kimondásával. Alkalmazzuk Maschke tételét az első közlemény 2 §-ában tárgyalt reguláris előállításra, R-re. Legyenek az összes irreducibilis előállítások T', T'',..., $T^{(k)}$ $(k \leqq h)$, és legyen a reguláris előállítás felépítése jellemezve a következő relációval:

$$R = g'T' + g''T'' + \cdots + g^{(k)}T^{(k)},$$

ahol g', g'',..., $g^{(k)}$ természetes számok és azt jelentik, hogy a megfelelő irreducibilis előállítás hányszor használtatott fel az R felépítésénél. Jelöljük a $T^{(p)}$ irreducibilis előállítás rendjét $\gamma^{(p)}$-vel $(p=1, 2, \ldots, k)$ és tegyük fel, hogy az a Frobenius-féle egyenletrendszer $\varrho_1^{(p)}, \varrho_2^{(p)}, \ldots, \varrho_p^{(p)}$ megoldásához tartozik. Ekkor nyilván

$$n = g'\nu' + g''\nu'' + \cdots + g^{(k)}\nu^{(k)};$$

ha továbbá megalkotjuk a $(\mathfrak{C}_\alpha)$ osztályhoz tartozó mátrixot, akkor a felépítési szabály értelmében olyan diagonálismátrixhoz jutunk, melyben a diagonálisban álló elemek közül

---

[1] A (T_x) mátrixban tehát az első ν' számú sor utolsó ν'' számú helyén és az utolsó ν'' számú sor első ν' számú helyén 0 áll.

[2] *Math. Annalen*, **52**, 363. l. Schur bizonyítását l. az első közlemény [4] lábjegyzetében idézett cikk 414. oldalán.

$g'\nu'$ számú egyenlő $\varrho_\alpha^{(1)}$-val,
$g''\nu''$ számú egyenlő $\varrho_\alpha^{(2)}$-val,
. . . .
$g^{(k)}\nu^{(k)}$ számú egyenlő $\varrho_\alpha^{(k)}$-val.

Minthogy pedig — mint az első közlemény 2. §-ában láttuk — a reguláris előállításnál a $(\mathfrak{C}_\alpha)$ osztálymátrix aequivalens azzal a diagonálismátrixszal, melyben mindegyik $\varrho_\alpha^{(1)}, \varrho_\alpha^{(2)}, \ldots, \varrho_\alpha^{(k)}$ szerepel, mégpedig rendre f_1-, f_2-, ..., f_h-szor, azért látnivaló, hogy egyrészt $k=h$ és másrészt $g'\nu' = f_1, g''\nu'' = f_2, \ldots, g^{(k)}\nu^{(k)} = f_k$, azaz — az előző pontban levezetett $f_p = \nu^{(p)2}$ relációk tekintetbevételével — $g' = \nu', g'' = \nu'', \ldots, g^{(h)} = \nu^{(h)}$. Más szóval, *az inaequivalens irreducibilis előállítások száma* tényleg h, *és mindegyikük a reguláris előállítás felépítésénél annyiszor szerepel, amekkora a rendje;* a $g\nu$ szorzatok összegére megállapított fenti összefüggés pedig az $n = \nu'^2 + \nu''^2 + \cdots + \nu^{(h)2}$ egyenletbe megy át.

Látnivaló továbbá, — ugyancsak MASCHKE tételének felhasználásával — hogy ha T egy tetszőleges előállítása csoportunknak s — a fenti értelemben —

$$T = \gamma' T' + \gamma'' T'' + \cdots + \gamma^{(h)} T^{(h)},$$

ahol $\gamma', \gamma'', \ldots, \gamma^{(h)}$ természetes számok, akkor ezen előállításban az A csoportelemhez tartozó mátrix nyoma

$$\gamma'\chi'(A) + \gamma''\chi''(A) + \cdots + \gamma^{(h)}\chi^{(h)}(A),$$

ahol a jelölés úgy van választva, hogy a $T^{(p)}$ irreducibilis előállításban a mátrixok nyoma a $\chi^{(p)}(A)$ csoportkarakterisztika. Ebből következik az is, hogy *két előállítás akkor és csak akkor aequivalens, ha a megfelelő mátrixok nyomai megegyeznek stb.*

Ezzel kimerítettük a csoportkarakterisztikák lényeges tulajdonságait; nem térhetek ki azokra, melyek ezekből — többé-kevésbbé egyszerű — számításokkal adódnak.

Haar Alfréd.

ZUR THEORIE DER GRUPPENCHARAKTERE.

(Zweite Mitteilung.)

Infolge Ablebens unseres ausgezeichneten Gelehrten Alfred Haar blieb die Aufgabe einen kurzen deutschen Auszug der vorliegenden Arbeit — einer der letzten Arbeiten des Verstorbenen — abzufassen, der Redaktion zurück. Die Arbeit bildet eine Fortsetzung einer gleichbetitelten Abhandlung (Mat. Fiz. Lapok, Bd. 38 (1931), S. 132—145), die eine neue, elementare, vom Begriff der irreduziblen Darstellungen der Gruppen unabhängige Begründung der Theorie der Gruppencharaktere enthielt. In der vorliegenden zweiten Mitteilung wird gezeigt, wie sich die Darstellungstheorie endlicher Gruppen als eine Anwendung der Gruppencharaktere in diese Begründung einreihen läßt. Mit Hilfe eines bekannten Burnsideschen Satzes wird der Zusammenhang der irreduziblen Darstellungen der Gruppe mit den Lösungen des Frobeniusschen Gleichungssystems aufgedeckt; dabei wird auch der Satz gewonnen, daß die Spuren der Matrizen einer irreduziblen Darstellung gleich der Werte eines Gruppencharakters an den entsprechenden Gruppenelementen sind (diese Tatsache dient bei Schur zur Definition der Charaktere). Die Anzahl der nichtäquivalenten irreduziblen Darstellungen wird mit Hilfe eines Maschkeschen Satzes gewonnen.

(Die Redaktion.)

EGY KÜRSCHÁK-FÉLE ELEMI SZÁMELMÉLETI TÉTEL ÁLTALÁNOSÍTÁSA.

THEISINGER bebizonyította, hogy a harmonikus sor részletösszegei, $\sum_{m=2}^{m=n} \frac{1}{m}$, nem lehetnek egész számok.[1] OBLÁTH általánosította e tételt,[2] amennyiben bebizonyította, hogy $\sum_{m=k}^{m=n} \frac{a_m}{m}$ nem lehet egész szám, ha az a_m-ek pozitív egész számok és $(a_m, m) = 1$. KÜRSCHÁK[3] teljesen elemi bizonyítását adta annak a tételnek, hogy $\sum_{m=k}^{m=n} \frac{1}{m}$ nem lehet egész szám, akármilyen pozitív egész szám is a k és az n.

Ezt a tételt fogjuk általánosítani, amennyiben a $k, k+1, \ldots k+n$ speciális számtani sor helyett általánosabb számtani sorokra mutatjuk ki a tételt:

Legyenek a, d, n tetszőleges pozitív egész számok; az

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \cdots + \frac{1}{a+nd} \tag{1}$$

kifejezés nem lehet egész szám.

A bizonyításnál feltehetjük, hogy a és d relatív prímszámok, mert ha nem azok, úgy legnagyobb közös osztójuk reciprokját (1)-ből kiemelve, a másik tényező ismét (1) alakú, de a és d most relatív prímek. Ha tehát a tétel $(a, d) = 1$ esetben igaz, akkor ellenkező esetben is érvényes.

---

[1] THEISINGER: Monatshefte für Math. u. Phys., 26. k. (1915) 135. l.

[2] OBLÁTH: Matematikai és Fizikai Lapok, 27. k. (1918) 93. l.

[3] KÜRSCHÁK: Matematikai és Fizikai Lapok, 27. k. (1918) 299. l.

Legyen először $d \geq 4$; a többi esetet tárgyalásunk végén külön-külön fogjuk elintézni.

A bizonyítás a következő segédtételen alapszik: *az*

$$a+d,\ a+2d, \dots\ a+nd \tag{2}$$

számok valamelyike osztható oly p^α prímszámhatvánnyal, mely nagyobb n-nél.

Ha a segédtételt bebizonyítottuk, a bizonyítás további menete a következő. Legyen $a+kd$ osztható p^α-val, hol $p^\alpha > n$; akkor nem létezhetik oly k-tól különböző $k' < n$, hogy $a+k'd$ is osztható vele. U. i. $(a, d) = 1$ és $a+kd$ osztható p^α-val, tehát $(d, p) = 1$, mert ha nem, akkor a is osztható p-vel ellentétben avval, hogy $(a, d) = 1$. Azonkívül a sem lehet osztható p^α-val, mert különben kd is osztható lenne vele, ami $(d, p) = 1$ és $k < p^\alpha$ miatt nem lehetséges.

Ha tehát $a+k'd$ is osztható volna p^α-val, akkor

$$(k-k')\,d \equiv 0 \pmod{p^\alpha},$$
$$k-k' \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$$

lenne, ami $|k-k'| < n$ és $p^\alpha > n$ miatt nem lehetséges.

Most vezessük be az

$$(a+d)(a+2d)\dots(a+nd) = \,!\,(a+nd) \tag{3}$$

jelölést.

Ekkor (1)-t ily alakban írhatjuk:

$$\frac{!\,(a+nd) + \dfrac{a.\,!\,(a+nd)}{a+d} + \dfrac{a.\,!\,(a+nd)}{a+2d} + \dots + \dfrac{a.\,!\,(a+nd)}{a+nd}}{a.\,!\,(a+nd)} \tag{4}$$

A számláló tagjai egész számok; továbbá az $\dfrac{a.\,!\,(a+nd)}{a+kd}$ tag az előbbiek szerint p-nek alacsonyabb hatványával osztható, mint a számláló többi tagja és a nevező, tehát (4) nem lehet egész szám. Q. e. d.

E szerint csak a segédtételt kell bebizonyítanunk.

Tegyük fel e tétellel ellentétben, hogy az $a+d,\ a+2d, \dots\ a+nd$

sorozat tagjai mind csak $p^{\alpha} \leqq n$ prímszámhatványokkal oszthatók. Tekintsük az

$$\frac{!\,(a+nd)}{n!} \tag{5}$$

kifejezést és vizsgáljuk meg, hogy végső rövidítés után mi marad a számlálóban.

Legyen $\sqrt{n} < p \leqq n$; ekkor a nevezőben p éppen $\left[\frac{n}{p}\right]$-szer fordul elő tényező gyanánt. Itt $[x]$ jelenti azt a legnagyobb egész számot, mely $\leqq x$. A számlálóban, tekintve, hogy $p^2 > n$, feltételünk értelmében minden tényezőben csak legfeljebb első hatványon, még pedig legfeljebb $\left[\frac{n}{p}\right]+1$-szer fordul elő tényezőként. A rövidítés után legfeljebb p marad vissza.

Legyen $\sqrt[3]{n} < p \leqq \sqrt{n}$, akkor a p a nevezőnek $\left[\frac{n}{p}\right]$ tényezőjében fordul elő, ebből $\left[\frac{n}{p^2}\right]$-szer, mint p^2. A számlálóban, tekintve, hogy $p^3 > n$, feltételünk értelmében minden tényezőben legfeljebb második hatványon fordul elő, még pedig összesen legfeljebb $\left[\frac{n}{p}\right]+1$ tényezőben, ebből legfeljebb $\left[\frac{n}{p^2}\right]+1$-szer, mint p^2, tehát rövidítés után legfeljebb p^2 marad a számlálóban.

Ugyanúgy belátható, hogy ha $\sqrt[\alpha+1]{n} < p \leqq \sqrt[\alpha]{n}$, úgy a számlálóban rövidítés után legfeljebb p^{α} marad vissza. Tehát

$$\begin{aligned} \frac{!\,(a+nd)}{n!} &\leqq \prod_{\sqrt{n}<p\leqq n} p \cdot \prod_{\sqrt[3]{n}<p\leqq\sqrt{n}} p^2 \cdots \\ &= \prod_{p_i\leqq n} p_i \cdot \prod_{p_k\leqq\sqrt{n}} p_k \cdot \prod_{p_l\leqq\sqrt[3]{n}} p_l \cdots \end{aligned} \tag{6}$$

Másrészt azonban $d \geqq 4$ miatt

$$\frac{!\,(a+nd)}{n!} = \left(\frac{a}{1}+d\right)\left(\frac{a}{2}+d\right)\cdots\left(\frac{a}{n}+d\right) > d^n \geqq 4^n; \tag{7}$$

(6) és (7)-ből

$$4^n < \prod_{p_i\leqq n} p_i \cdot \prod_{p_k\leqq\sqrt{n}} p_k \cdots \tag{8}$$

Be fogjuk bizonyitani, hogy ez nem lehetséges. E célból vizsgáljuk meg a

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \tag{9}$$

binomiális koefficiens prímosztóit.

(9) nyilván osztható minden $n < p \leqq 2n$ prímszámmal, mert a számláló osztható vele, a nevező viszont nem.

Ugyanígy belátható, hogy (9) osztható minden

$$\sqrt[\alpha]{n} < p \leqq \sqrt[\alpha]{2n} \quad (\alpha \geqq 1)$$

primszámmal is.

Ugyanis $n!$ összesen $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^{\alpha-1}}\right]$-szer tartalmazza p-t, viszont $(2n)!$ összesen

$$\left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \left[\frac{2n}{p^3}\right] + \cdots + \left[\frac{2n}{p^{\alpha-1}}\right] + 1$$

-szer, tekintve, hogy feltételünk szerint $\left[\frac{2n}{p^\alpha}\right] = 1$. Tehát (9) a p primszámot összesen

$$1 + \left[\frac{2n}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{2n}{p^{\alpha-1}}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p^2}\right] - \cdots - 2\left[\frac{n}{p^{\alpha-1}}\right] \geqq 1$$

-szer tartalmazza $\left(\text{mivel } \left[\frac{2n}{p^k}\right] \geqq 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right)$.

Jelöljük az első egész számot, mely $\geqq x$ a $\{x\}$ jellel és legyen

$$a_1 = \left\{\frac{n}{2}\right\},\ a_2 = \left\{\frac{n}{2^2}\right\}, \ldots,\ a_k = \left\{\frac{n}{2^k}\right\}, \ldots,$$

ahol n tetszőleges egész szám; akkor

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots \geqq a_k \geqq \cdots;$$

továbbá

$$a_k < \frac{n}{2^k} + 1 = 2\,\frac{n}{2^{k+1}} + 1 \leqq 2a_{k+1} + 1;$$

tehát, minthogy a_k és a_{k+1} egész számok,

$$a_k \leqq 2a_{k+1}. \tag{10}$$

Legyen már most m az első szám, amelyre nézve $\frac{n}{2^m} \leqq 1$; akkor $a_m = 1$. Világos, hogy $2a_1 \geqq n$. Továbbá (10) szerint az

$$a_m < y \leqq 2a_m, \quad a_{m-1} < y \leqq 2a_{m-1}, \ldots, \quad a_1 < y \leqq 2a_1$$

intervallumok hiány nélkül fedik be az

$$1 < y \leqq n$$

intervallumot.

Ugyanúgy (10)-ből világos, hogy az

$$[\sqrt[k]{a_m}] < y \leqq [\sqrt[k]{2a_m}], \quad [\sqrt[k]{a_{m-1}}] < y \leqq [\sqrt[k]{2a_{m-1}}], \ldots$$
$$[\sqrt[k]{a_1}] < y \leqq [\sqrt[k]{2a_1}]$$

intervallumok hiány nélkül fedik be az

$$1 < y \leqq [\sqrt[k]{n}]$$

intervallumot. A k itt akármilyen egész számot jelent.

Az előbbiekből következik, hogy

$$\prod_{p_i \leqq n} p_i \cdot \prod_{p_k \leqq \sqrt{n}} p_k \ldots \leqq \binom{2a_1}{a_1}\binom{2a_2}{a_2}\ldots\binom{2a_m}{a_m}; \tag{11}$$

a jobboldal t. i. többszöröse a baloldalnak. Most kimutatjuk, hogy

$$\binom{2a_1}{a_1}\binom{2a_2}{a_2}\ldots\binom{2a_m}{a_m} < 4^n; \tag{12}$$

ezt, (11)-gyel s (8)-cal egybevetve, eljutunk a kívánt ellentmondáshoz.

Számolással könnyen meggyőződhetünk, hogy (12) igaz $n = 10$-ig. Legyen $n > 10$ s tegyük fel, hogy a tétel igaz minden n-nél kisebb számra; ekkor

$$\binom{2a_1}{a_1}\binom{2a_2}{a_2}\ldots\binom{2a_m}{a_m} < \binom{2a_1}{a_1} 4^{2a_2-1}, \tag{13}$$

amihez úgy jutunk, hogy a tételt $2a_2 - 1$-re alkalmazzuk; $2a_2 - 1$-re t. i. a tétel igaz, mivel $n > 2a_2 - 1$ és

$$\left\{\frac{2a_2-1}{2}\right\} = a_2, \quad \left\{\frac{2a_2-1}{4}\right\} = a_3, \ldots$$

Teljes indukcióval könnyen meggyőződhetünk, hogy $n \geqq 5$-re $\binom{2n}{n} < 4^{n-1}$, tehát (13) szerint

$$\binom{2a_1}{a_1}\binom{2a_2}{a_2}\dots\binom{2a_m}{a_m} < 4^{a_1-1+2a_2-1}.$$

Mármost nyilvánvaló, hogy $2a_1 \leqq n+1$, $2a_2 \leqq a_1+1$, és így a fenti kitevő $a_1 + 2a_2 - 2 \leqq 2a_1 - 1 \leqq n$, q. e. d.

Most még hátra van a $d = 1, 2, 3$ speciális esetek vizsgálata.

A $d = 1$ eset a KÜRSCHÁK-féle tétel.

A $d = 3$ eset s általában ha d páratlan, ugyanúgy bizonyítható, mint a KÜRSCHÁK-féle tétel.

Ugyanis legyen

$$a, \quad a+(2d+1), \quad a+2(2d+1), \dots \quad a+n(2d+1) \qquad (14)$$

a számtani sor.

Legyen 2^α a 2-nek legmagasabb hatványa, mellyel (14) valamelyik tagja osztható; azt állítjuk, hogy csak egy olyan $a+k(2d+1)$ tag van, mely 2^α-val osztható.

Tegyük fel az ellenkezőjét, hogy t. i. van még egy $a+k_1(2d+1)$ tag is, amely osztható 2^α-val. Akkor

$$a + k\,(2d+1) = x.2^\alpha$$

és

$$a + k_1(2d+1) = y.2^\alpha.$$

Itt x és y az α maximalitása miatt páratlan számok.

Legyen $a+k(2d+1)$ és $a+k_1(2d+1)$ a (14) sor két legkisebb oly tagja, mely 2^α-val osztható.

A két tagot egymásból kivonva:

$$(k_1 - k)(2d+1) = 2^\alpha (y-x),$$

és mivel $y-x$ páros, azért

$$k_1 - k \equiv 0 \pmod{2^{\alpha+1}},$$

és így $k_1 \neq k$ miatt:

$$k_1 - k \geqq 2^{\alpha+1}.$$

Azonban $a+(k+2^\alpha)(2d+1)$ osztható 2^α-val és $k_1 > k + 2^\alpha$, a mi k_1 minimalitásának ellentmond. A további bizonyitás úgy történik, mint az általános esetben.

Végül legyen $d = 2$; mivel (1)-ben az első tag $\frac{1}{a}$ s a többi kisebb ennél, azért, ahhoz, hogy (1) egész szám lehessen legalább $a+1$ tagból kell hogy álljon, azaz kell, hogy $n \geqq a$ legyen. Tehát az

$$a, \quad a+2, \quad a+4, \ldots \quad a+2n \tag{15}$$

számsorozat utolsó tagja $a+2n \geqq a+2a = 3a$ és a sorozatban minden páratlan szám előfordul, melyre nézve $a \leqq k \leqq 3a$ (mivel $(a, d) = 1$ és a páratlan).

Előfordul tehát köztük 3 valamilyen hatványa is. Ha tehát 3^α a 3-nak legmagasabb hatványa, mellyel (15) valamelyik tagja osztható, úgy $3^\alpha \geqq a$ és 3^α is előfordul (15) tagjai között; de akkor nem lehet, hogy a sorozat egy másik tagja is osztható legyen 3^α-val, mert ekkor $3^\alpha + 2.3^\alpha = 3^{\alpha+1}$ is előfordulna (15)-ben, ami 3^α maximalitása miatt nem lehetséges. A további következtetés úgy történik, mint az általános esetben.

Hasonló módon, de kissé hosszabb számitásokkal bebizonyithatjuk az utóbb tárgyalt speciális esetekre is a következő tételt: Az

$$a, \quad a+d, \ldots \quad a+nd$$

számtani sorban van olyan $a+kd$ tag, mely egy p prímszámot magasabb hatványon tartalmaz, mint a többi tag.

Ugyancsak be lehet bizonyitani a speciális esetekre is, természetesen $d = 1$ kivételével, az általános esetre bizonyitott segédtételünket is.

Obláth tételének általánosítása, hogy t. i.

$$\frac{a_0}{a} + \frac{a_1}{a+d} + \frac{a_2}{a+2d} + \cdots + \frac{a_n}{a+nd}$$

nem lehet egész szám, ha $(a_k, a+kd) = 1$, az ő módszerével bizonyítható.

Erdős Pál.

VERALLGEMEINERUNG EINES ELEMENTAR-ZAHLENTHEORETISCHEN SATZES VON KÜRSCHÁK.

Herr THEISINGER bewies, dass $\sum_{m=2}^{m=n} \frac{1}{m}$ für keinen Wert von n eine ganze Zahl darstellt. Herr OBLÁTH gab eine Verallgemeinerung dieses Satzes, indem er bewies, dass $\sum_{m=2}^{m=n} \frac{a_m}{m}$ keine ganze Zahl sein kann, wenn $(a_m, m) = 1$ ist. KÜRSCHÁK bewies elementar, dass $\sum_{m=k}^{m=n} \frac{1}{m}$ bei keinem Werte von k und n eine ganze Zahl sein kann.

Hier wird dieser Satz folgendermassen verallgemeinert, indem statt der speziellen arithmetischen Reihe

$$k, \quad k+1, \ldots \quad k+n$$

allgemeinere arithmetische Reihen betrachtet werden.

Es seien a, d, n beliebige positive ganze Zahlen, dann ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \cdots + \frac{1}{a+nd}$$

keine ganze Zahl.

Der Grundgedanke des Beweises besteht darin, dass ein Glied $a+kd$ angegeben wird, welches durch eine höhere Potenz einer Primzahl teilbar ist, als die übrigen Glieder.

Dies ergibt sich aus der Analyse der Primteiler der Ausdrücke:

$$\frac{(a+d)\,(a+2d)\ldots(a+nd)}{n\,!} \quad \text{und} \quad \binom{2n}{n}.$$

Paul Erdős.

AZ ALTERNÁLÓ CSOPORTRÓL.

Ismeretes tény, hogy n elem alternáló csoportja $\mathfrak{A}_n$ egyszerű, ha $n>4$. Ez azt mondja, hogy ha $\mathfrak{G}$ az $\mathfrak{A}_n$-nek invariáns alcsoportja, akkor $\mathfrak{G}$ vagy $\mathfrak{A}$-nel egyenlő, vagy pedig az egységre redukálódik. Az ismeretes bebizonyítások egyrésze $\mathfrak{G}$-nek oly szubstitucióját keresi, melynek ciklusai lehetőleg kevés elemet tartalmaznak.[1] Az alábbi bebizonyítás is eme típushoz tartozik, az 1. pont tárgyalásai egyszerűbbek az irodalomban ismerteknél, míg a 2. és 3. pont alattiak ismeretesek és a teljesség kedvéért vannak felvéve.

1. Határozzuk meg tehát $\mathfrak{G}$-nek oly S szubstitucióját, melynek ciklusai lehetőleg kevés elemet tartalmaznak. Két eset képzelhető. Először van S-nek egy legalább 3-elemű ciklusa. Minthogy az alternáló csoport egy egyetlen 4-elemű ciklusból álló szubstituciót nem tartalmazhat,[2] azért a betűzés alkalmas megválasztása mellett az $S=(1\,2\,3)$ határesettől eltekintve

$$S=(1\,2\,3\ldots)\ldots, \qquad (1)$$

hol a pontok helyén elemek lehetnek; mindenesetre tartalmazza S még a 4, 5 elemeket. Lehetséges másodszor, hogy S csakis 2-elemű ciklusokat tartalmaz, akkor a betűzés alkalmas megválasztásánál az $S=(1\,2)\,(3\,4)$ határesettől eltekintve

$$S=(1\,2)\,(3\,4)\ldots, \qquad (2)$$

[1] Lásd pl. NETTO: Vorlesungen über Algebra, 2. kötet, 310. l.
VAN DER WAERDEN: Moderne Algebra, 1. kötet, 144—145. l.
DICKSON—BODEWIG: Höhere Algebra, 187—189. l.

[2] Ha nem akarunk erre a tényre hivatkozni, akkor azt vesszük figyelembe, hogy $\mathfrak{G}$ tartalmazza az $S^2=(1\,3)\,(2\,4)$ szubstituciót, mely két 2-elemű ciklusból áll. Ez az eset a tárgyalás folyamán elintéződik.

hol S még mindenesetre tartalmazza az 5 elemet. Transzformáljuk S-et a $\sigma = (3\,4\,5)$ szubstitucióval, akkor az (1), illetőleg a (2) esetben

$$\sigma^{-1} S\sigma = (1\,2\,4\ldots)\ldots \neq S, \quad \text{illetőleg} \quad \sigma^{-1} S\sigma = (1\,2)\,(4\,5)\ldots \neq S.$$

Mindkét szubstitució az 1 elemet a 2-be viszi át és így az

$$S^{-1}(\sigma^{-1} S\sigma) \neq E$$

(azaz nem egység) szubstitució az S-nél kevesebb elemet változtat meg, mi a feltevéssel ellenkezik. Maradnak tehát a határesetek. A második esetben ismét $\sigma = (3\,4\,5)$-vel transzformálva, lesz

$$\sigma^{-1}(1\,2)\,(3\,4)\,\sigma = (1\,2)\,(4\,5),$$
$$S^{-1}(\sigma^{-1} S\,\sigma) = S(\sigma^{-1} S\sigma) = (3\,5\,4).$$

2. Ha tehát $\mathfrak{G}$ nem az egységcsoport, akkor tartalmaz egy egyetlen 3-elemű ciklust, pl. a következőt $S = (1\,2\,3)$. Igen egyszerűen bebizonyítható, hogy $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_n$.[1] Ha ugyanis $a_1 a_2 \ldots a_n$ az $1\,2\ldots n$ elemek tetszőleges permutációja, akkor $\mathfrak{A}_n$ tartalmazza a

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\ldots n \\ a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\ldots n \\ a_2 a_1 a_3 \ldots a_n \end{pmatrix}$$

szubstituciók valamelyikét. Minthogy azonban

$$\varphi^{-1} S\varphi = (a_1 a_2 a_3), \quad \psi^{-1} S\psi = (a_2 a_1 a_3), \quad (a_2 a_1 a_3)^2 = (a_1 a_2 a_3),$$

$\mathfrak{G}$ tartalmazza $(a_1 a_2 a_3)$-at. (Itt csak $n > 2$ van feltéve.) Sőt $\mathfrak{G}$ tartalmazza $\mathfrak{A}_n$ összes szubstitucióit, ha ugyanis a, b, c, d különböző elemek, akkor

$$(ab)\,(ac) = (abc), \quad (ab)\,(cd) = (ab)\,(ac)\,(ac)\,(cd) = (abc)\,(adc).$$

3. Ha $\mathfrak{S}_n$ n elem szimmetrikus csoportja és $n > 4$, akkor ennek nincs más valódi invariáns alcsoportja, mint $\mathfrak{A}_n$.

Bizonyítása az előzőkből kivehető.

Bauer Mihály.

ÜBER DIE ALTERNIERENDE GRUPPE.

Die alternierende Gruppe von n Elementen ist im Falle $n < 4$ bekanntlich einfach. Die hier gegebene Beweisanordnung enthält gewisse Abkürzungen.

Michael Bauer.

[1] OSKAR PERRON: Algebra, 2. kötet, 119—121. l.

EGY VÉGESSÉGI TÉTEL ÉS ALKALMAZÁSAI.

A nem-negatív egész a_i számok egy rendezett $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ rendszerét *n-tagú komplexus*nak akarjuk nevezni, ha nem minden a_i zérus. Ezekre a «kisebb» relációt úgy értelmezzük, hogy akkor legyen

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) < (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

ha minden i-re $a_i \leqq b_i$, de nem minden i-re az egyenlőség jele érvényes. Két különböző n-tagú komplexust *összehasonlíthatatlan*nak nevezünk, ha egyikük sem kisebb a másiknál. Tételünk most már a következő.

Legyen H az n-tagú komplexusok oly halmaza, melyben bármely két elem összehasonlíthatatlan; akkor a H halmaz véges.

A tétel $n=1$-re triviális. Teljes indukciót alkalmazva felteszszük, hogy $n>1$ és hogy $n-1$-tagú komplexusokra a tétel be van bizonyítva.

Legyen $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a H valamely meghatározott eleme és legyen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ egy tetszőleges másik eleme H-nak. Legalább egy i-re fennáll akkor az $x_i < a_i$ reláció, mert különben $x > a$ volna és x összehasonlítható volna a-val. Tegyük fel, hogy H végtelen halmaz. Akkor a H-nak végtelen sok (tudniillik minden a-tól különböző) $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eleme kielégíti a $x_i < a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ egyenlőtlenségek valamelyikét. Van tehát *egy* oly i, hogy a H végtelen sok elemére fennáll: $x_i < a_i$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $i=1$. Mivelhogy csak véges sok x_1 kisebb, mint a_1, van *egy* oly $b_1 (< a_1)$ szám, hogy a H végtelen sok eleme $(b_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ alakú. Minden ily elemnek megfelel egy $n-1$-tagú $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ komplexus és pedig másnak: más. Ezek az $n-1$-tagú komplexusok természetesen szintén páronként összehasonlíthatatlanok s így — tételünket $n-1$-re feltételezvén — véges számban vannak. Ezen ellentmondás megállapításával kimondott tételünket bebizonyítottuk.

A tétel első alkalmazásaképen kimutatjuk GORDAN következő tételét:[1]

Tekintsük az elsőfokú homogén diophantikus egyenletek egy tetszőleges rendszerét, hol az ismeretlenek, valamint az egyenletek száma tetszőleges. E rendszernek van végesszámú oly nem-negatív megoldása, melyekből összeadással minden nem-negatív megoldása összetehető.

Nevezzünk egy nem-negatív megoldást GORDAN-nal *egyszerű*nek, ha ez nem összege két más nem-negatív megoldásnak. Világos, hogy minden nem-negatív megoldás az egyszerű megoldásokból összeadásokkal tehető össze. Másrészt két egyszerű megoldás $a = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ és $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, mint n-tagú komplexus összehasonlíthatatlan, mert ha pl. $a > b$ volna, akkor a a nem-negatív

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \text{és} \quad (a_1, -b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n)$$

megoldásoknak az összege volna. Tételünk szerint tehát az egyszerű megoldások halmaza véges, amivel GORDAN tétele igazolva van.

Második alkalmazásul PETERSEN egy graphelméleti tételét[2] fogjuk bebizonyítani. Néhány elnevezést kell előrebocsátanunk. Egy graphot *reguláris*nak neveznek, ha minden szögpontjába ugyanannyi él fut és ez az állandó szám a graph *fokszáma.* Ha a G_1 és G_2 graphoknak szögpontjai megegyeznek, de közös élük nincs, akkor a G_1 és G_2 éleiből álló graphot G_1 és G_2 *szorzat*ának nevezik. Hasonlóképen definiálható a szorzás több tényező esetére. Ha egy reguláris graph nem bontható fel alacsonyabbfokú graphok szorzatára, *primitív*nek neveztetik. Két graphot *azonos*nak tekintünk, ha egyrészt szögpontjaik halmaza

---

[1] *Vorlesungen über Invariantentheorie,* I. k. 196—201. l. E tétel képezi az alapját annak a bizonyításnak, mellyel GORDAN (u. o., II. k., 231—236. l.) binär alapformákra az invariánsrendszer végességét igazolta.

[2] *Die Theorie der regulären Graphs,* Acta Mathematica, 15. k., 193. l.

másrészt éleik halmaza között oly kölcsönösen egyértelmű vonatkozások létesithetők, hogy mindegyikben egy szögpont akkor és csak akkor végpontja egy élnek, ha a másikban a *megfelelő* szögpont végpontja a *megfelelő* élnek.

A szóbanlévő PETERSEN-féle tétel most már így szól:

Bármily természetes szám is a ν, a ν szögpontot tartalmazó primitív reguláris graphok száma véges.

Tekintsük a ν szögpontot tartalmazó primitív reguláris graphok összességét. Feltehető, hogy valamennyiüknek ugyanazon $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ pontok a szögpontjai. E graphok bármelyikét, G-t úgy adhatjuk meg, hogy minden $(P_i, P_j) = p_{ij} = p_\varrho$ párra megadjuk azon élek számát, a_ϱ-t, melyek e graphban P_i-t és P_j-t egymással összekötik. G-t tehát egy $n = \binom{\nu}{2}$-tagú $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ komplexus határozza meg. Ha $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a G_a és $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ a G_b graphot határozza meg és $a > b$, akkor a G_b graphnak és az $(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n)$ komplexus által meghatározott ugyancsak reguláris graphnak éppen G_a a szorzata és így ez esetben G_a nem primitív. Ha tehát az összes ν szögpontot tartalmazó reguláris primitív graphokhoz tartozó n-tagú komplexusok közül bármely kettőt kiválasztunk, ezek összehasonlíthatatlanok. Végességi tételünk alapján ily módon PETERSEN tétele igazolást nyert.

Kőnig Dénes.

EIN ENDLICHKEITSSATZ MIT ZWEI ANWENDUNGEN.

Setzt man für zwei verschiedene geordnete Systeme nicht-negativer ganzer Zahlen: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) < (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, falls $a_i \leq b_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ besteht, so nennen wir zwei solche Komplexe *unvergleichbar*, falls keiner der beiden kleiner als der andere ist. Es gilt der Satz: *eine Menge paarweise unvergleichbarer n-gliedriger Komplexe ist stets endlich.* Dieser Satz wird bewiesen und angewendet zum Beweis eines GORDANschen Satzes über nicht-negative Lösungssysteme von Systemen homogener linearer diophantischen Gleichungen und eines PETERSENschen Satzes, der sich auf reguläre primitive Graphen bezieht.

Dénes Kőnig.

JELENTÉS AZ 1932. ÉVI KŐNIG GYULA JUTALOMRÓL.

Társulatunk választmánya az 1932. évi (hatodik) Kőnig Gyula-jutalom odaitélése ügyében javaslattételre egy bizottságot küldött ki, melynek tagjai lettek Rados Gusztáv, Kürschák József, Fejér Lipót és Kőnig Dénes. E bizottság, szemlét tartva azon magyar mathematikusok felett, kik az alapitvány ügyrendi szabályzata szerint tekintetbe veendők, egyhangúlag úgy határozott, hogy a jutalomra dr. Egerváry Jenőt, a budapesti állami felső ipariskola tanárát, tanárképzőintézeti előadótanárt, Társulatunk választmányi tagját ajánlja. A jutalom, az idén másodizben, azon szép plakett formájában kerül kiosztásra, melyet Társulatunk megbizásából kitűnő művészünk Beck Ö. Fülöp volt szives két évvel ezelőtt elkésziteni, s mely egyik oldalán Kőnig Gyula jól sikerült képmását ábrázolja. Az előadói jelentés megszerkesztésével, illetőleg a jutalmazandó tudományos működésének ismertetésével és méltatásával a bizottság alúlirott tagját bízta meg. E feladat nem könnyű, mert sokoldalú elmélyedést kíván. Feladatomat nagy mértékben megkönnyítette egyrészt az, hogy az itt következő ismertetés megirásánál többen segítségemre voltak, másrészt pedig az a körülmény, hogy évek hosszú során át személyes beszélgetések alkalmával volt már alkalmam Egerváry számos kutatásával megismerkednem. Ezzel kapcsolatban talán helyénvaló itt annak a megállapitása, hogy Egerváry-nak élőszóban való előadásait — talán még jobban, mint irásait — az a világosság és szabatosság jellemzi, mely csak igazi mathematikusnak sajátja. Erről Társulatunk tagjainak bő alkalmuk volt meggyőződni; hiszen Egerváry legtöbb vizsgálatát először Társulatunk előadó ülésein bocsátotta nyilvánosságra, sőt számos értékes előadásának nyomtatott publikációiban nincs is nyoma.

Az itt következő méltatás csak a nyomtatásban is megjelent munkáit ismerteti. Ennek megszerkesztésénél mintául szolgáltak számomra azok a kitűnő jelentések, melyeket a megelőző Kőnig Gyula-jutalmak odaitélése alkalmából Kürschák József (1922), Riesz Frigyes (1924), Szűcs Adolf (1926 és 1928) és végűl Fejér Lipót (1930) készitettek. Ezek az előadói jelentések teljesen az alapitvány szellemében készültek és szerzőik önzetlen és gyakran igen fárasztó munkájukkal a jutalom alapitóit őszinte hálára kötelezték.

Egerváry első dolgozata, mint bölcsészetdoktori értekezése, 18 évvel ezelőtt jelent meg [1].[1] E dolgozat az integrálegyenletekre vonatkozik, tehát oly tárgykörre, mely akkoriban, elsősorban Fredholm és Hilbert kutatásai nyomán, kb. 10 év óta a mathematikusok — különösen a göttingai iskola — érdeklődésének középpontjában állott. Megirásához — mint számos későbbi munkájához — az impulzust mesterének, Fejér Lipótnak köszöni. A

$$\varphi(x) + \int_a^b K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = f(x)$$

integrálegyenlet megoldása, hol φ az ismeretlen függvény, a, b, $f(x)$, $K(x, \xi)$ pedig adott számok, illetőleg függvények, tudvalevőleg úgy fogható fel, mint a continuumszerű végtelenbe való átvitele az elemi algebra azon feladatának, mely egy n-ismeretlenű, n egyenletből álló elsőfokú egyenletrendszer megoldását kivánja. Ezen egyenletrendszer úgy adódik, hogy az $a \ldots b$ integrálási intervallumot n egyenlő hosszúságú részletintervallumra bontjuk és az

$$\int_a^b K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

integrált az ezen beosztásra vonatkozó közelitő összegével pótoljuk. Az ismeretlenek ez esetben a keresett φ függvénynek

---

1 A szögletes zárójelben levő számok a jelentés végén található irodalmi jegyzékre utalnak.

ezen osztópontokban felvett értékei. Ezen »n-edik közelítő egyenletrendszer« megoldásából most már az integrálegyenlet megoldása általában az $n \to \infty$ határátmenettel adódik. Egerváry doktori értekezésében azt az elméletileg is és az alkalmazások szempontjából is nevezetes esetet vizsgálja, amidőn $K(x, \xi)$ az ú. n. *mag*-függvény csupán az $x - \xi$ különbségtől függ és ennek b—a szerint periodikus függvénye. E megszorító feltevés következménye, hogy a közelítő egyenletrendszer determinánsa *cyklikus* determináns lesz és mint ilyen, egy jól ismert determináns-tétel szerint, elsőfokú tényezőkre bomlik. Ez a körülmény fölöslegessé teszi a hatványsorba való kifejtést, mely az általános esetben elkerülhetetlen. Egerváry explicite kiszámítja a determináns határértékét $n \to \infty$-re és pedig Fredholm általános határáttérési módszerétől eltérő a speciális esetre szabott egyszerűbb módszerrel. Az így adódó ú. n. Fredholm-féle transcendens maga is nem hatványsoralakban, hanem primtényezős előállításban adódik. E szorzatalak evidenciába hozza azt a már régebben felismert tényt, hogy az ú. n. sajátértékek a mag Fourier-féle sorba való kifejtésénél fellépő együtthatók reciprok értékei.

Egerváry eredményeit arra az esetre is átviszi, midőn az integrál határa végtelenné lesz, és így ő az első, ki singuláris integrálegyenletet speciális módszerekkel tárgyal. A dolgozat második része figyelemreméltó alkalmazásokat ad az analízis és a mathematikai physika különböző problémáira. — Egerváry doktori értekezése csak magyar nyelven jelent meg. De a Fortschritte der Mathematik[1] és a nagy német mathematikai Encyklopädie[2] ismertetései révén — melyek érdeme szerint méltatják — a magyarúl nem értő mathematikusok között is érdeklődést és elismerést keltett.

Néhány évvel később Egerváry ismét egy az integrálegyenletek elméletével kapcsolatos problémára jutott [2]. Bertrand

---

[1] 45. k., 1304. l.
[2] II. 3_2 k., 1391. és 1453. l. (Hellinger és Toeplitz referátuma.)

vetette fel és oldotta meg először azt a csillagászati problémát, hogy melyek mindazok a centrális erőtörvények, melyek mellett egy égitest — bármi legyen is kezdőhelyzete, kezdőiránya és kezdősebessége — zárt pályát ír le. KÖVESLIGETHY[1] e problémát átvitte a seismologiába a következő probléma alakjában. «Tekintsük az összes szferikus rétegeződésű izotrop rugalmas közegeket, azaz olyanokat, melyeknél a törésmutató (a rugalmas rezgések terjedési sebességének reciprok értéke) csupán a rétegeződés középpontjától számított ϱ távolság függvénye: $\nu(\varrho)$. Meghatározandók az oly $\nu(\varrho)$ függvények, melyek mellett minden rengési görbe (seismikus trajektoria) bármily kezdőhelyzetnél és iránynál záródik.» KÖVESLIGETHY megtalálta a probléma két lényegesen különböző megoldását, melyek mellett azonban sok más megoldás is lehetséges. KÖVESLIGETHY felszólítására EGERVÁRY, aki akkor KÖVESLIGETHY mellett, mint a seismológiai számolóintézet asszistense működött, meghatározta a feladat valamennyi (végtelen sok) megoldását, teljes elintézését adván a problémának. KÖVESLIGETHY és WIECHERT törési törvényeit EGERVÁRY a nyert általános formuláiból, mint speciális eseteket vezeti le. A dolgozat mathematikai módszerének taglálásába itt nem mehetünk bele és csak annyit jegyzünk meg, hogy leglényegesebb része az ABEL-féle integrálegyenlet alkalmazásából áll.

1918-ban jelent meg EGERVÁRY első dolgozata, mely a polynomok és algebrai egyenletek körébe vág [3]. Kiindulópontul itt a sinusfüggvény, illetve sinusgörbe következő négy szemléletes tulajdonsága szolgál:

a) Egy tetszőleges zérushely és a szomszédos minimumhely közti terület megegyezik e zérushely és a szomszédos maximumhely közti területtel.

b) Két szomszédos zérushely közti területek mind megegyeznek.

c) Minden zérushely inflexiós pont.

---

[1] Math. és Természettudományi Értesítő, 1913.

d) Az összes maximumok és minimumok absolut értékre megegyeznek.

EGERVÁRY azt a kérdést veti fel, hogy azon adott n fokszámmal bíró u_n polynomok közt, melyeknek minden zérushelye valós és egyszeres, melyeknek van meg — külön-külön — az *a), b), c)* illetve *d)* tulajdonságuk. Így rendre a következő polynomokhoz jut:

a) a, b, C tetszőleges valós állandók lévén:

$$u_n(x) = C \frac{d^n[(x-a)(x-b)]^n}{dx^n};$$

ezek azok a polynomok, melyek az n-edfokú LEGENDRE-féle polynomból a független változó lineáris transformációjával adódnak (ez az eredmény FEJÉR LIPÓT-tól származik);

b) a CSEBISEV-féle $n+1$-edfokú polynomok deriváltjai;

c) az $n-1$-edfokú LEGENDRE-féle polynomból integrálással (alkalmasan választott alsó határral) és a független változó lineáris transformációjával adódó függvények. (A *c)* tulajdonság itt úgy értendő, hogy a legnagyobb és legkisebb zérushelytől nem kívánjuk meg, hogy inflexiós pont legyen);

d) maguk az n-edfokú CSEBISEV-féle polynomok.

EGERVÁRY azt is kimutatja, hogy az említett függvények az egyedüliek, amelyek az említett követelményeket kielégítik. E tulajdonságok tehát jellegzetesek az említett és az analízis számos fejezetében fontos szerepet játszó polynomokra, úgyhogy az EGERVÁRY által felismert geometriai sajátságok e polynomok bevezetésére is alkalmasak.

Számos magyar és külföldi mathematikusnál[1] keltettek érdeklődést és arattak sikert EGERVÁRY azon vizsgálatai, melyek a symmetrikus multilineáris formákkal kapcsolatos szélső-érték-

[1] L. pld. SZEGŐ, Math. Zeitschrift, 13. k. és A. COHN, u. o., 14. k. valamint VAN VLECK referátumát az algebrai egyenletek gyökei elhelyezkedésének újabb irodalmáról, Bull. of the Am. Math. Soc., 35. k.; e dolgozatok egyébként elsősorban EGERVÁRY-nak egy oly tételét idézik, melyet ő mindezideig nem publikált s amely élőszó útján terjedt el egészen Amerikáig.

feladatokkal foglalkoznak. E vizsgálatok részletes kidolgozása a Mat. és Fizikai Lapokban jelent meg [5], míg egy rövidebb összefoglalást angol nyelven a szegedi egyetem Actái közöltek [6]. A $z_1, z_2, \dots, z_n$ változók legáltalánosabb symmetrikus multilineáris formája

$$S = c_0 z_1 z_2 \dots z_n + c_1 \Sigma z_1 z_2 \dots z_{n-1} + \dots + c_{n-1} \Sigma z_1 + c_n;$$

az itt szereplő Σ összegek a z-k elemi symmetrikus formái. Tekintsük az $S = 0$ egyenlet összes $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ gyökrendszereit. Minden ily gyökrendszerhez tartozik egy m szám, mint a $|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|$ számok legkisebbike. HEAWOOD[1] és GRACE[2] vizsgálataiból kiderül, hogy van oly, csupán a $c_0, c_1, \dots, c_n$ együtthatóktól függő M korlát, melynél ezen m számok egyike sem nagyobb és amely M a mellett olyan, hogy valamely az $S = 0$ egyenletet kielégítő $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ rendszerhez tartozó m számmal megegyezik. EGERVÁRY most már a következő problémát veti fel és oldja meg: meghatározandók az $S = 0$ egyenlet mindazon $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ gyökrendszerei, melyekre $m = \min(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$ a maximális M értéket veszi fel. Fontos szerepet játszik itt az n-változós $S = 0$ egyenlet egyváltozós ú. n. adjungált egyenlete:

$$G(\zeta) \equiv c_0 \zeta^n + \binom{n}{1} c_1 \zeta^{n-1} + \dots + c_n = 0,$$

mely $S = 0$-ból úgy adódik, hogy az összes z_i-ket egymással (és ζ-val) egyenlővé tesszük. Legyenek $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ az adjungált egyenlet gyökei. EGERVÁRY kimutatja, hogy M a $|\zeta_1|, |\zeta_2|, \dots, |\zeta_n|$ számok legnagyobbikával egyenlő, amivel elegáns bizonyítását nyeri GRACE tételének, mely így formulázható: A GAUSS-féle síkban az $S = 0$ egyenletet kielégítő $z_1, z_2, \dots, z_n$ számoknak megfelelő pontok rendszere semmiféle körrel vagy egyenessel nem választható el a $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ számoknak megfelelő pontok rendszerétől. A főeredményt csak az általános esetre akarjuk itt kimondani, amidőn t. i. 1) a $G(\zeta) = 0$ egyenlet abszolút értékre

---

[1] Quarterly Journal, 38. k.

[2] Proc. of the Cambridge Phil. Soc., 11. k.

legnagyobb gyökei mind egyszeres gyökök és 2) a $G(\zeta)=0$ egyenlet nem minden gyökének M az abszolút értéke; ekkor az $S=0$ egyenletet kielégítő minden oly $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ értékrendszer, melyre

$$\min(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|) = M,$$

csupa megegyező $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ számból áll és z a $G(\xi) = 0$ egyenlet valamelyik abszolút értékre legnagyobb gyöke.

Egerváry sokat foglalkozott az algebrai egyenletek gyökeinek elhelyezkedésével, illetőleg azon tartományok meghatározásával, melyekben — az együtthatókra vagy gyökökre stb. vonatkozó bizonyos korlátozások mellett — egy-egy gyök mozoghat. Ez irányban legkimerítőbb eredményekre a trinom egyenleteknél jutott, melyeknek általános alakja:

$$Az^{n+m} + Bz^m + C = 0.$$

Az ily vizsgálatok — speciálisan a trinom egyenleteknél — a gyakorlati alkalmazások szempontjából is fontosak. Hogy csak egy példát említsünk, fellépnek — már Gauss-nál — a kamatoskamatszámításnál (hol azonban természetesen csak a valós gyökök veendők tekintetbe). Ha t. i. adva van a kezdőtőke a_0, a felnövekedett tőke s_n s az évek száma n és a kamatozási $q = 1 + \frac{p}{100}$ tényezőt keressük (p a kamatláb), akkor a véges geometriai sor összegezési képlete:

$$s_n = a_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

a q-ra mint ismeretlenre vonatkozó

$$a_0 q^{n+1} - s_n q - (a_0 - s_n) = 0$$

trinom egyenlet alakjában írható fel.

Egerváry [8] dolgozatának alapgondolata, hogy két binom szorzatának deriváltja: az általános trinom. Binom egyenlet gyökeinek pedig ismeretes módon a Gauss-féle síkban egy szabályos sokszög szögpontjai felelnek meg. Ezért a trinom egyenlet gyökhelyei úgy foghatók fel, mint két szabályos sokszög szögpontjaiba helyezett egységtömegek erőterének egyensúlyi helyzetei, ha feltesszük, hogy az erők a távolsággal fordítottan arányosak. Ezek alapján EGERVÁRY a fenti trinom egyenletre meghatároz 2 $(m+n)$ félegyenest a kezdőponton át, melyek a síkban $m+n$ szektort határoznak meg oly módon, hogy e szektorok mindegyike egy gyököt tartalmaz. Ez vonatkozik a gyökök argumentumaira. Ami pedig a gyökök abszolút értékét illeti, $m+n$ koncentrikus körgyűrűt állapit meg (a körök középpontja a kezdőpont), melyek az egyenletnek ugyancsak egy-egy gyökét tartalmazzák. EGERVÁRY annak megállapitására is ad utasitást, és pedig igen egyszerű utasitást, hogy a két említett síkbeosztás egyesitésével keletkező körgyűrűszektorok közül melyik az az $m+n$ körgyűrűszektor, melyekben a gyökök feküsznek, és azt is megállapitja, hogy az említett variabilitási tartományok bizonyos értelemben (t. i. az együtthatók argumentumainak, illetve abszolút értékeinek fixirozásánál) *pontos* variabilitási tartományok. Lényeges itt, hogy az említett szektorok csak az együtthatók argumentumaitól, az emlitett körgyűrűk pedig csak az együtthatók abszolút értékeitől függnek. EGERVÁRY e dolgozatában messze túlhalad elődeinek (NEKRASOFF, BOHL, HERGLOTZ, BIERNATZKY, HUSZÁR GÉZA) eredményein, és különösen tekintve, hogy vizsgálatai teljesen elemi symmetria- és folytonossági meggondolásokon alapulnak, ma is kívánatosnak látszik, hogy a csupán magyar nyelven megjelent dolgozat a külföld mathematikusainak is hozzáférhetővé tétessék.

A most említett vizsgálatokkal bizonyos kapcsolatokat mutat EGERVÁRY azon dolgozata [9], mely az ú. n. KAKEYA-féle tétel általánositásáról szól. Meg kell itt elégednünk azzal, hogy a főeredményt kimondjuk. Legyen P és ϱ két pozitív szám és $P \geqq \varrho$. Tegyük fel a pozitív együtthatójú

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0 \tag{1}$$

egyenlet együtthatóiról, hogy

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n$$

esetében fennállanak a

$$P\varrho a_{\nu+1} - (P+\varrho)\, a_\nu + a_{\nu-1} > 0 \tag{2}$$

egyenlőtlenségek (itt a_{-1} és a_{n+1} helyébe zérus teendő). Akkor az (1) egyenletnek m gyöke bent van a nyílt $|z| < \varrho$ tartományban, $n-m$ gyöke pedig a nyílt $|z| > P$ tartományban. Ha egy vagy több (2) egyenlőtlenség baloldala eltűnik, akkor némely gyök e tartományok határára is eshet. KAKEYA tétele innen abban a speciális esetben adódik, amidőn $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$-re fennáll a $\varrho a_{\nu+1} - a_\nu > 0$ egyenlőtlenség.

EGERVÁRY most ismertetendő három dolgozatát [6, 7, 11] — melyek egyikét SZÁSZ OTTÓ-val együtt írta — közösen az jellemzi, hogy a szekuláris egyenletek alkalmazását adja a hatványsorok és polynomok elméletében.[1]

Legyen a $|z| < 1$-re összetartó

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots$$

hatványsorra előírva az első n együttható, és pedig úgy, hogy

$$0 < c_0 \leqq c_1 \leqq c_2 \leqq \cdots \leqq c_{n-1}.$$

FEJÉR[2] a következő eredményekre jutott. Az $|f(z)|$-nek $|z| \leqq 1$-re vonatkozó maximuma nem lehet kisebb, mint a $\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} x_\nu^2 = 1$ feltétel mellett tekintett

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu (x_0 x_{n-\nu-1} + x_1 x_{n-\nu-2} + \cdots + x_{n-\nu-1} x_0)$$

quadratikus alak maximuma. Ez a maximum pedig a

$$D_n(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} c_{n-1} - \lambda & c_{n-2} & \ldots c_1 & c_0 \\ c_{n-2} & c_{n-3} - \lambda & \ldots c_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1 & c_0 & \ldots -\lambda & 0 \\ c_0 & 0 & \ldots 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

karakterisztikus egyenlet legnagyobb gyöke λ_n^*. Ehhez az értékhez csak egy oly $x_0^*, x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*$ értékrendszer tartozik, mely

[1] E vizsgálatok szintén visszhangot keltettek már eddig is; l. DIEUDONNÉ, Comptes Rendus, 192. k. és LANDAU «Über einen Egerváry'schen Satz» c. dolgozatát, Math. Zeitschrift, 29. k.

[2] Math. Ann. 97. k.

által meghatározott helyen a quadratikus alak maximális $\lambda_n^\star$ értékét veszi fel. Van továbbá egy ($|z| \leqq 1$re reguláris) racionális törtfüggvény, t. i.

$$h(z) = \lambda_n^\star \frac{x_{n-1}^\star + x_{n-2}^\star z + \cdots + x_0^\star z^{n-1}}{x_0^\star + x_1^\star z + \cdots + x_{n-1}^\star z^{n-1}},$$

melynek hatványsorba fejtése a megadott kezdőegyütthatókkal bír és amely olyan, hogy $|z| < 1$-re abszolút értékének a maximuma éppen $\lambda_n^\star$. — EGERVÁRY [6] dolgozatának legfőbb érdeme, hogy egy speciális esetben — az egyetlenben, melyre ez eddig sikerült — effektíve kiszámítja ezt a $\lambda_n^\star$ gyököt. Ezt az esetet az jellemzi, hogy valamely ϱ számra, hol $0 < \varrho \leqq 1$,

$$c_0 = \varrho^{n-1},\ c_1 = \varrho^{n-2}, \ldots, c_{n-1} = 1.$$

A $D_n(\lambda) = 0$ egyenlet legnagyobb gyökét most $\lambda_n(\varrho)$-val jelölve EGERVÁRY kimutatja, hogy $\lambda_n(\varrho)$ az n-nel és a ϱ-val monoton nő és hogy

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(\varrho) = \frac{1}{1-\varrho^2}.$$

Ami különösen a $\varrho = 1$ és $\varrho = \dfrac{n}{n+1}$ eseteket illeti, kimutatja, hogy

$$\lambda_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n-1}} \sim \frac{n}{e},$$

$$\lambda_n(1) = \frac{1}{2\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}} \sim \frac{2}{\pi} n.$$

Ezekben a $\varrho = \dfrac{n}{n+1}$ és $\varrho = 1$ esetekben EGERVÁRY egyszersmind kiszámítja a megfelelő $h(z)$ racionális törtfüggvényeket is. EGERVÁRY meggondolásai igen szellemes determinánsszámításokon alapulnak.

A SZÁSZ-szal együtt írt [7] dolgozatban tárgyalt kérdések a következő általános probléma speciális esetei. Legyen a valós

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n$$

számok választása azáltal korlátozva, hogy feltesszük, hogy a

$$\tau(t) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu \cos \nu t + \beta_\nu \sin \nu t) \qquad (1)$$

trigonometrikus polynom minden t-re *nem-negatív.* A fixen megadott

$$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_n, b_n$$

számokkal megalkotva az

$$L(\tau) = a_0 + a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + \cdots + a_n\alpha_n + b_n\beta_n$$

lineáris formát, azt a kérdést vetjük fel, hogy L milyen határok közt változhatik és mely α_ν, β_ν számokra, illetve mely $\tau(t)$ trigonometrikus polynomra éri el két szélső értékét. Fejér[1] és Szász[2] vizsgálatai alapján kérdésünkre a következő válasz adható. Legyen $\nu = 1, 2, \ldots, n$-re $c_\nu = a_\nu + ib_\nu$ és $c_{-\nu}$ a c_ν konjugált komplex értéke. Ha a

$$D_n(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} c_0-\lambda & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_{-1} & c_0-\lambda & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{-n} & c_{-n+1} & c_{-n+2} & \ldots & c_0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet legkisebb, illetve legnagyobb gyökét ω-val és Ω-val jelöljük, akkor

$$\omega \leqq L(\tau) \leqq \Omega.$$

Azok a τ polynomok, melyekre az első vagy második helyen az $=$ jel érvényes, egy homogén lineáris egyenletrendszerből adódnak.

Az a_ν, b_ν számok specializálása által Egerváry és Szász innen nevezetes eredményekre jutnak. A két legfontosabb eredményük a következő. A nem-negatív (1) alatti trigonometrikus polynomok mindegyikére állnak a következő egyenlőtlenségek, melyek egyrészt az egyes tagok amplitudójára, másrészt a po-

---

[1] Crelles Journal, 1915.
[2] Math. Zeitschrift, 1. k.

lynom differenciálhányadosának abszolút értékére szolgáltatnak felső korlátot:

$$\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2} \leqq 2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{k}\right]+2}, \qquad (k=1,2,\ldots,n$$

$$\left|\frac{d\tau}{dt}\right| \leqq \sqrt{\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}}.$$

A szerzők egyszersmind megállapitják azokat az *egyetlen* τ polynomokat, amelyekre az egyik vagy a másik egyenlőtlenségben az $=$ jel érvényes.

Ezekkel a vizsgálatokkal kapcsolatos EGERVÁRY utolsó [11] dolgozata, mely csak néhány hete jelent meg. Ez az egységkörben nem-negatív általános harmonikus polynomokra vonatkozó szélsőérték-problémákat tárgyal. Először is fixen megadott fokszám mellett pontos alsó és felső korlátokat állapit meg e függvények értékére, és itt is megállapitja azokat az egyértelműen meghatározott harmonikus polynomokat, melyek a szélső értéket szolgáltatják. Továbbá — egy S. BERNSTEIN-től megoldott probléma[1] általánositásaképpen — a következő problémát oldja meg. Az egységkörben nem-negatív n-edrendű harmonikus polynomnak adva van e kör kerületének két helyén az értéke; meghatározandó e kör egy tetszőlegesen megadott belső pontjában a polynomok minimuma. EGERVÁRY e vizsgálatai a nem-negatív trigonometrikus polynomok FEJÉR-től származó paraméteres előállitásán alapulnak.

Mint láttuk, EGERVÁRY számos munkájában a determinánselmélet fontos és hasznos segédeszköz szerepét tölti be. Az a dolgozat [10], melyről még szólnunk kell, teljességében a determinánsok, illetve mátrixok elméletébe tartozik. E jelentés irója FROBENIUS egy tételének általánositásaképpen kimondotta és graph-elméleti úton bebizonyitotta a következő tételt.[2] Bármely

[1] Bulletin de l'Académie de l'URSS, 1930.

[2] Mat. és Fiz. Lapok, 38. k.

mátrixra az oly vonalak (azaz sorok és oszlopok) minimális száma, melyek összességükben az összes el nem tűnő elemeket tartalmazzák, megegyezik az oly el nem tűnő elemek maximális számával, melyek páronként nem feküsznek egy vonalban. EGERVÁRY e tétel új (t. i. teljes indukcióra alapított) bizonyítását és általánosítását adja. Ez az általánosítás a következőképen fogalmazható. Válasszunk ki a valós, nem-negatív elemekből álló n-edrendű $\| a_{ik} \|$ matrixból n oly elemet $(a_{1\nu_1}, a_{2\nu_2}, \ldots, a_{n\nu_n})$, melyek kettesével más-más sorba és más-más oszlopba tartoznak és legyen M az összes így adódó

$$a_{1\nu_1} + a_{2\nu_2} + \cdots + a_{n\nu_n}$$

összegek maximális értéke. Legyenek másrészt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ oly nem-negatív egész számok, melyek $i, j = 1, 2, \ldots, n$-re kielégítik a

$$\lambda_i + \mu_j \geqq a_{ij}$$

feltételeket. Akkor a

$$\lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2 + \mu_2 + \cdots + \lambda_n + \mu_n$$

összeg legkisebb értéke éppen M. (A fentemlitett speciális tétel innen az esetben adódik, ha minden a_{ij} vagy 0 vagy 1.) EGERVÁRY egyszersmind bebizonyít egy ezzel az általános tétellel bizonyos tekintetben duális vonatkozásban álló tételt, mely ugyancsak érdeklődésre és további vizsgálatokra adhat alkalmat.

Ily módon áttekintvén — nagyjában időrendbeli sorrendben — EGERVÁRY JENŐ tudományos dolgozatait, melyeknek pontos jegyzéke jelentésem végén található, befejezésképpen még csak néhány általános megjegyzést akarunk tenni. EGERVÁRY többnyire igen elegáns módszerekkel számos addig ismeretes eredmény gyakran messzemenő általánosítását adta dolgozataiban. De az elért eredmények általánossága nem minden mathematikai műnél szolgálhat az illető mű érdemének kizárólagos fokmérőjéűl. A teljes általánosság néha lehetetlenné teszi — már technikailag is — a gondolatsor effektív keresztülvitelét, különösen ahol számításokról van szó, ahol tehát a matematika forma-nyelve a keresztülvitel elé néha igen szűk korlátokat állít. Néha egy speciális eset teljes végiggondolása és részletes kifejtése nemcsak a tanítás, hanem a tudomány fejlődése szempontjából is igen hasznos lehet, mert oly konkretizálásokat enged meg, amelyeket a legáltalánosabb eset tárgyalása lehetetlenné tenne. Ezen a téren látjuk Egerváry tudományos működésének legfőbb érdemét. Egerváry számolókészsége — elsősorban ami a determináns-számításokat illeti — vörös fonálként végigvonul csaknem valamennyi munkáján, és ebben a tekintetben működésében — Hunyady Jenő és Scholtz Ágoston munkáira gondolva — bizonyos fokig talán magyar mathematikai tradiciók feléledését állapíthatjuk meg.

Egerváry tudományos produkciója terjedelemre nem nevezhető nagynak; 18 éves tudományos működése alatt többéves szüneteket is találunk. Valóban Egerváry eredményeit nagyon megrostálva bocsátotta csak nyilvánosságra. Számos mathematikai gondolata még csak a jövőben vár részletes kidolgozásra és köztük tudtunkkal számos olyan is van, melyeknek eddigi munkáiban nyomát sem találjuk. Pl. az a kiváló térbeli szemlélőképesség, mely ábrázoló tehetségével együtt Egerváry-t annyira jellemzi és amelynek e jelentés írója oly sok segitséget köszön,[1] szintén csak eljövendő publikációiban fog nyilvánosságra jutni. Amidőn tehát az 1932. évi Kőnig Gyula-jutalomra dr. Egerváry Jenő-t hozzuk javaslatba,[2] tesszük ezt nemcsak elismerésül a multért, hanem egyszersmind buzdításul a jövőre.

Kőnig Dénes.

Egerváry Jenő munkáinak jegyzéke.

1. *Az integrálegyenletek egy osztályáról,* Math. és Phys. Lapok, **23,** 301—355, 1914.

2. *A seismikus trajektóriákról s az ezekkel kapcsolatos Bertrand-féle problémáról,* u. o., **26,** 1—18, 1917. Ennek német fordítása:

---

[1] L. pl. Analysis Situs c. könyvem ábráit, melyeket Egerváry készitett.

[2] Az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat választmánya 1932. ápr. 14.-i ülésén e javaslatot elfogadva 1932. évi Kőnig Gyula-jutalmát Egerváry Jenő-nek itélte oda. *Szerk.*

Über die seismischen Trajektorien und über das Bertrandsche Problem in der Seismologie, Gerlands Beiträge zur Geophysik, **14**, 284—299, 1918.

3. *Über die charakteristischen geometrischen Eigenschaften der Legendreschen und Tschebyscheffschen Polynome,* Archiv d. Math. u. Physik (3), **27**, 17—24, 1918.

4. *On a maximum-minimum problem and its connexion with the roots of equations,* Acta litt. ac scient., Szeged, **1**, 39—45, 1922.

5. *Egy a symmetrikus, multilinearis formára vonatkozó minimumföladat,* Math. és Phys. Lapok, **29**, 22—43, 1922.

6. *Über gewisse Extremumprobleme der Funktionentheorie,* Math. Annalen, **99**, 542—561, 1928.

7. *Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome* (közösen Szász Ottó-val), Math. Zeitschrift, **27**, 641—652, 1928.

8. *A trinom egyenletről,* Mat. és Fiz. Lapok, **37**, 36—57, 1930.

9. *On a generalisation of a theorem of Kakeya,* Acta litt. ac scient., Szeged, **5**, 78—82, 1931.

10. *Matrixok kombinatorius tulajdonságairól,* Mat. és Fiz. Lapok, **38**, 16—28, 1931.

11. *Verschärfung eines Harnackschen Satzes und anderer Abschätzungen für nichtnegative harmonische Polynome,* Math. Zeitschrift, **34**, 741—757, 1932.

BERICHT ZUR VERTEILUNG DES JULIUS KŐNIG-PREISES VOM JAHRE 1932.

Die Budapester Loránd Eötvös Mathematische und Physikalische Gesellschaft hat ihren Julius König-Preis für 1932 Herrn Dr. E. Egerváry für seine mathematischen Arbeiten zuerkannt. Kommission: G. Rados, Präsident; Mitglieder: L. Fejér, J. Kürschák; Referent: D. Kőnig. Hier gibt der Referent eine Analyse und Würdigung der Egerváryschen Arbeiten, deren Liste sich am Ende des Referats befindet.

Dénes Kőnig.

GÁZKISÜLÉSŰ FESZÜLTSÉGOSZTÓK.

Fizikai és műszaki célokra, ahol állandó feszültségek szükségesek, régebben kizárólag akkumulátorokat használtak. Tekintettel az akkumulátorok nagy súlyára, körülményes karbantartására, szükségesnek mutatkozott oly áramforrás szerkesztése, ami az akkumulátorok előnyét, a síma egyenáramszolgáltatást, állandó feszültségeket, kis belső ellenállást lehetőleg csekély térfogat mellett és folyadékalkatrész nélkül nyujtja.

Jelen dolgozat összefoglaló ismertetése egy, a legutóbbi években kifejlesztett berendezésnek, ami a fent kitűzött cél megvalósítására a fizika és technika több ágában alkalmasnak bizonyult. A berendezés két lényeges alkatrészből áll: az áramot szolgáltató rész, ami lehet bárminő áramforrás (egyenirányító vagy dynamo) és egy berendezés, ami az áramforrás feszültségének és a terhelésnek ingadozásait kiegyenlíti, továbbá az áramforrás feszültségét felosztja. Ez a kiegyenlítő berendezés a gázkisülésű feszültségosztó.

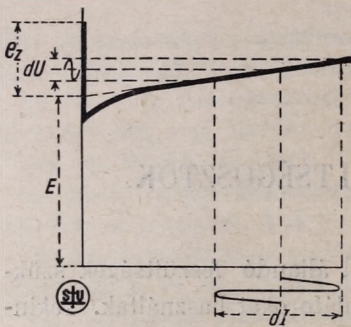
I. A gázkisülésű feszültségosztó felépítése.

1. A kisülőköz.

Az 1. ábra egy kisülőköz egyenárammal felvett karakterisztikáját mutatja. A karakterisztika bizonyos áramhatárok között közelítéssel egyenes vonalnak tekinthető.

$$w = \frac{dU}{dI} \qquad (1)$$

«váltóáramú ellenállás» a kisülőköz jellemzője. A második jellemző adata a kisülőköznek az E kezdőfeszültség, amit a



1. ábra.
Kisülőköz karakterisztikája.

karakterisztika egyenesvonalú részének meghosszabbítása metsz ki a feszültségtengelyen. A kisülőköz feszültsége

$$U = E + I.w, \tag{2}$$

ahol I a kisülőköz áramterhelése.[1] A kisülőköz egyenáramú ellenállása tehát az áramterhelésének függvénye

$$f(I) = \frac{E}{I} + w. \tag{3}$$

A harmadik jellemző adata a kisülőköznek a gyujtófeszültsége: $E + e_z$. e_z túlfeszültség szükséges, hogy a glimmkisülés meginduljon.

2. A gázpotentiométer. Számszerű adatok. Három típus a gyakorlatból.

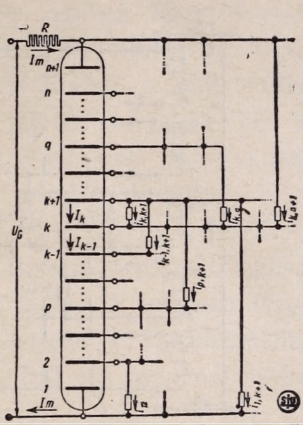
A gázfeszültségosztó két vagy több gázkisülőközből van felépítve.[2] Az ezen célra használt kisülőközök már $I = 5 \ldots 10$ mA-nél egyenes karakterisztikával bírnak. Hideg katód körülbelül 300 mA maximális terhelésig alkalmazható gázkisülésű feszültségosztó céljaira. A váltóáramú ellenállás pozitív és lehetőleg csekély értékű legyen. A gyakorlatban $w = 10 \ldots 50\ \Omega$ értékek szokásosak; átlagosan $w = 20\ \Omega$. w ezen értéke 0 es 2000 Hertz ráhelyezett áram-rezgésszámok között körülbelül megkétszereződik. A kezdőfeszültség értéke csőtípusonként változik. A gyakorlatban az $E = 70$ és $E = 140$ V körüli értékek mutatkoztak a legcélszerűbbnek. A váltóáramú ellenállás dinamikus növekedésével a kezdőfeszültség kis mértékben csökken. A gyakorlati csőtípusoknál $e_z < 50$ V.

---

[1] (2) hasonlít Wild és Duddel felfogására, amit az ívkisülések számítására vezettek be. V. ö. Handbuch der Radiologie. 4. kötet. 297. oldal.

[2] A gázkisülésű feszültségosztók a szerző javaslatai szerint épülnek. V. ö. D. R. P. 565125, 574924 (1928. június 6) és magyar szabadalom 101999, 101398, 104263.

E és w számértékek figyelembevételével (2) mutatja, hogy az áram tág határok között változhatik a kisülőközben, amíg a feszültség csak csekély százalékkal változik.[3] A kisülőközökkel párhuzamosan kapcsolt csekély kapacitású kondenzátorral elérhetjük, hogy a kisülőköz és kondenzátor eredő váltóáramú ellenállása 0—∞ frekvenciák között egy megadott csekély impedancia (pl. 25 Ω) érték alatt maradjon; ilyen kapcsolásnál a kezdőfeszültség dinamikus változását is figyelmen kívül hagyhatjuk. Egy ilyen módon kiegészített gázfeszültségosztó berendezés tehetetlenség nélküli feszültségszabályozásra alkalmas. A gázpotentiométerben a kisülőközök egymással sorbakapcsolva vannak (2. ábra) a gázzal töltött térben elhelyezve. A k-adik elektróda katód a k-adik kisülőközben és anód a $(k-1)$-dik közben. A gázpotentiométer U_G feszültségű áramforrásra R ellenálláson keresztül kapcsolódik.[4] Feltéve, hogy a gyujtás követelménye ki van elégítve (v. ö. III. fejezet), megindul a kisülés a közökön, és az elektródok a megfelelő feszültségre kerülnek. A hasznos terhelések az elektródok kivezetéseihez kapcsolódnak. Minden kisülőköz, amíg nincsen párvonalas

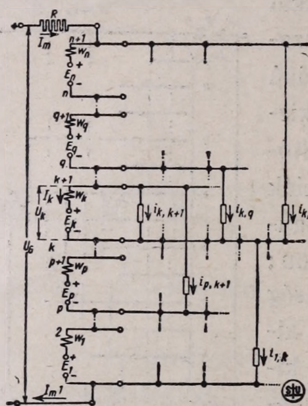


2. ábra. Az n kisülőközű gázpotentiométer. Az elektródokból minden kombinációban hasznos áramokat veszünk ki.

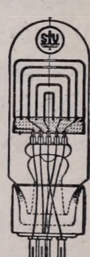
[3] A gázkisülést feszültségszabályozásra elsőnek F. SCHRÖTER (Berlin) használta fel. V. ö. D. R. P. 323799 (1917. november 10).

[4] Az előtételellenállás kb. $1/3$ U_G-t emészt fel a gyakorlatban. Az előtétellenállás úgy méretezendő, hogy a hasznos áramokon felül még egy potentiométeráram is folyjék a kisülőközön. A potentiométeráram minimálisan 10—15 mA szokott lenni. V. ö. Das Stabilisator Stromversorgungssystem. Mitteilung der Stabilovolt Gesellschaft. L. KŐRÖS u. R. SEIDELBACH, Verlag HACHMEISTER u. THAL, Leipzig 1932. Az előtétellenállás és tápláló feszültség célszerű megválasztásáról nyomás alatt van az E. T. Z.-ban FROMMER JÓZSEF (Budapest) cikke.

hasznos ellenállás bekapcsolva, felveszi a teljes generátoráramot, ami R-en átfolyik. A hasznos terhelés bekapcsolásával csökken a kisülőköz árama, megközelítően a hasznos terhelés áramával. Az üzem különböző fázisai szerint az egyes kisülőközök különböző áramokat vesznek fel, de a kapocsfeszültségek (2) szerint közel állandóak maradnak. A 3. ábra a 2. ábra elektromos helyettesítő kapcsolását mutatja. A kisülőközök az 1. ábra és a (2) egyenlet értelmében helyettesíthetők egy-egy elektromotoros E_k erővel, az elektromotoros erőkkel a w_k belső ellenállások sorosan kapcsolódnak ($k=1\cdots n$). A 4—7. ábrákon két gázpotentiométer típust mutatunk be. A 4. és 5. ábrák kisebb teljesítményű csövek («Stabilisator» *TRT* 10 és *TRT* 280/80) felépitését mutatják. A kupakszerű elektródok szigetelő tányér hornyaiban fekszenek. A legbelsőbb elektród a legpozitivabb. Négy kisülőközt tartalmaz egy csőegység. A kisülések egymástól elektromosan függetlenek, a közök csakis a közös elektródok útján kapcsolódnak. A kisülőközök 70 voltos üzemfeszültségre készülnek. A kisülőközök az elektródok nagysága szerint belülről kifelé a növekvő értékű árammal terhelhetők. A *TRT* 10 típusnál az áram-



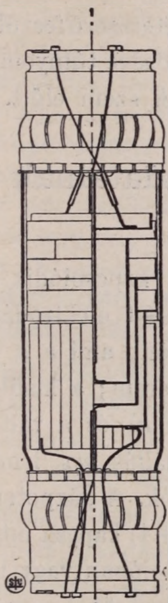
3. ábra. A gázpotentiométer elektromos helyettesítő kapcsolása. R az előtét ellenállás, $E_1 \ldots E_k \ldots E_n$ kezdőfeszültségek elektromotoros erők, $w_1 \ldots w_k \ldots w_n$ a kisülőközök váltóáramú ellenállásai.



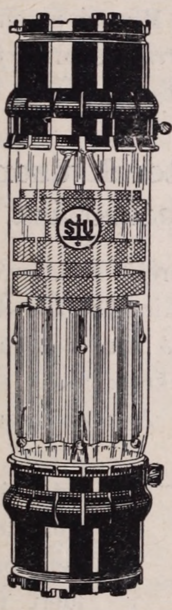
4. ábra.
A «Stabilisator» TRT 10 metszete. Átmérő 45 mm, hossza 128 mm.

5. ábra.
A «Stabilisator» TRT 10 külső képe.

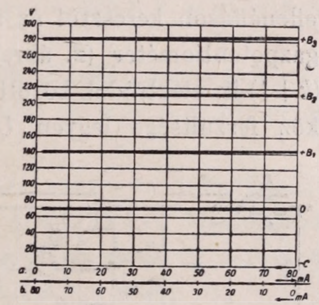
értékek 40, 60, 80, 80 mA, a *TRT* 280/80-nál 80, 80, 90, 100 mA. A vaselektródok földalkáli fém bevonattal vannak ellátva. A cső gázkeverékkel van töltve, aminek főalkotó eleme neon. A nyomás cm nagyságrendű. A *TRT* 280/80 cső karakterisztikáit a 8. ábra mutatja. A 6. és 7. ábrák a *TRT* 600/200 típust mutatják be. Az elektródok itt is kupakszerűek, tányérszerű toldalékukkal illeszkednek az üvegfalra fektetett csillámlapra. A részfeszültségek értéke 145 V. A kisülőközök 200 mA árammal terhelhetők. A «Stabilisator» csöveket tetszésszerinti számban lehet sorba kapcsolni nagyobb feszültségek állandóan tartására és osztására, párhuzamosan azonban nem kapcsolhatók, mivel a kezdőfeszültségek és a belső ellenállások a különböző csőegyedeknél nem teljesen azonos értékűek. Az üzemfeszültségeltérés az azonos típus megjelölés alatt forgalomba hozott csöveknél $\pm 5\%$ határon belül van; speciális célokra forgalomban vannak olyan csősorozatok is, ahol az egyedek feszültségének



6. ábra.
A «Stabilisator» TRT 600/200 metszete.
Átmérő 85 mm,
Hossza 350 mm.



7. ábra.
A «Stabilisator» TRT 600/200 külső képe.



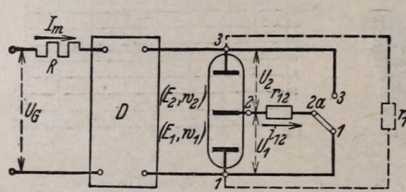
8. ábra.
a : egy «Stabilisator»
b : egy stabilizált áramforrás karakterisztikái.

legnagyobb eltérése $\pm 1{\cdot}5\%$ határon belül fekszik. Felesleges kisülőközök rövidrezárással kapcsolhatók ki.

A kisülőközök egy feszültségosztó rendszeren belül más, mint a leirt potentiométer kapcsolásban is szerepelhetnek. A részfeszültségek a fogyasztókkal sorosan kapcsolt kisütő elemekkel is redukálhatók; a párvonalas potentiométerszerű kapcsolás kombinálható soros kapcsolásokkal. Mivel a potentiométerszerű feszültségosztók, a *gázpotentiométerek* gyakorlati jelentősége túlnyomó, a további fejtegetéseinkben csakis ezeket tartjuk szem előtt.

II. Gázpotentiométerek üzemi adatainak meghatározása.

Az U_G elektromotoros erejű áramforráshoz kapcsolódik R ellenálláson keresztül az n kisülőközből álló $n+1$ elektrodájú gázpotentiométer (2. ábra). A k-adik kisülőközön, ami a k és $(k+1)$-ik elektródok között fekszik, folyik az I_k áram; a kisülőköz feszültsége legyen U_k. A kezdőfeszültség E_k és a váltóáramú ellenállás w_k ismeretes állandók. A gázpotentiométer $(n+1)$ kapcsa minden kombinációban vagy ismert i_{pq} áramokkal, vagy ismert r_{pq} ohmikus ellenállásokkal $(p=1, 2\ldots n;\ q=2, 3\ldots n+1;\ p<q)$ van megterhelve, ahol a p és q indexek azon elektrodák rendszáma, ahova a fogyasztó be van kapcsolva. Az ellenállások értékének felsőhatára nincs, a terhelő áramok eltűnhetnek. A terhelő ellenállások alsóhatárát, vagyis az áramok felsőhatárát az szabja meg, hogy a terhelés következtében egy kisülőköz sem maradhat áram nélkül.



9. ábra. Kétközös gázpotentiométer. r_{12} terhelést 1, $2a$ és $2a$, 3 között kapcsoljuk ide-oda. Az U_1 és U_2 részletfeszültségek e közben állandóak maradnak.

A gázpotentiométerrel szabályozott áramforrások üzemében következő fontos kérdések merülhetnek fel:

1. Meghatározandó a hasznos feszültségek változása, ha az U_G táplálófeszültség $\pm \Delta U_G$ értékkel változik.

Tartsuk a 9. ábra elrendezését szem előtt. U_G feszültségű áramforrásról R ellenálláson és D szűrőkörön át kapcsolódik be a legegyszerűbb: két kisülőközös gázpotentiométer. Az r_{12} hasznos terhelésben egy átkapcsoló azáltal változtatja az áram irányát, hogy felváltva a $2a$—1 és $2a$—3 kapcsolást létesíti. Grafikusan a 10. ábra tünteti fel a viszonyokat. Ch_1, Ch_2 vonalak a gázpotentiométer karakterisztikái (élesebb metszéspontok kedvéért a karakterisztikákat meredekebbre rajzoltuk.) Az $U = U_G - I.R$ egyenes és a Ch_2 vonal M_2 metszéspontja jelöli ki a I^L üresjárási gázpotentiométer áramot. Ez az állapot az *átkapcsolás* folyamata alatt lép fel. Az üresjárási részfeszültségeket: U_1^L és U_2^L az M_2-n át vont függőlegesből metszik ki Ch_1, Ch_2 karakterisztikák. Ha a tápláló feszültség megváltozik, pl. $U_G + \Delta U_G$-ra nő, úgy az $U = U_G + \Delta U_G - I.R$ és Ch_2 egyenesek új metszéspontján át vont függőlegesből a Ch_1 karakterisztikával M_2 pontból vont párhuzamos kijelöli a 2. részfeszültség változását, $\Delta U_2^{(G)}$-t.

A gyakorlatban $\pm 10\%$-os táplálófeszültség ingadozás körülbelül $\pm 0{\cdot}1\%$-os feszültségváltozást idéz elő a gázpotentiométer feszültségeinél.

2. Meghatározandó az «önváltozás», vagyis az a feszültségváltozás, ami a p és q elektródok között fekvő kisülőközök ismert árammal való megterhelése következtében egy a p és q elektródok között fekvő t-ik részfeszültségnél fellép.

A 9. és 10. ábrán i_{12} áram terheli meg az 1. részfeszültséget. A kisülóközben I_1 áram marad. U_1 a megváltozott részfeszültség. Az áram-tengelylyel A-ból vont párhuzamos kimetszi az M_2-n át vont függőlegesből a ΔU_1 feszültségváltozást, az önváltozást. Mivel az 1. kisülőköz feszültsége csökkent, az egész gázfeszültségosztó feszültsége és így a Ch_2 karakterisztika átmegy Ch_2'-be, amiáltal M_2 pont M_2'-be megy át és az I^L üresjárási áram I_m-re növekszik. Az i_{12} áramot tehát nem I^L, hanem I_m egyenesétől kell felmérni.

Az önváltozás gyakorlatban üresjárás és teljes terhelés között kb. 1—2%.

3. Meghatározandó a «közvetett változás», vagyis a $\Delta\Delta U_z$ feszültségváltozás, ami a p és q elektródok között fekvő kisülőközök ismert árammal való megterhelése következtében egy, a p és q elektródokon kívül fekvő z-ik részfeszültségnél fellép.

A 10. ábrán látjuk, hogy a 2. kisülőközön, mivel az 1. közből áramot vettünk ki, a generátor áram I^L-ről I_m-re megnövekedett. Ez az áramnövekedés a $\Delta\Delta U_2$ feszültségváltozást hozza létre. $\Delta\Delta U_2$-t a Ch_1 karakterisztikával M_2-ből vont párhuzamos metszi ki az I_m egyeneséből.

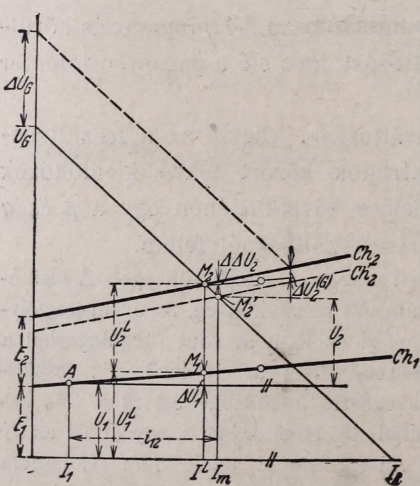
A közvetett változás nagyon csekély, a gyakorlatban körülbelül 0·01 % nagyságrendű.

4. Meghatározandó az önváltozás és a közvetett változás, ha a hasznos terhelés ellenállása ismert.

1. A tápláló feszültség ingadozásának befolyása.

a) Ohmikus előtétellenállás.

Ha a tápláló feszültség valamilyen oknál fogva ingadozik, akkor ingadozik a gázpotentiométer potentiométerárama (10. ábra).



10. ábra. Kétközös gázpotentiométer.
A karakterisztikákat áttekinthetőség kedvéért meredekebbre rajzoltuk. I^L az üresjárási áram, I_m a generátoráram terheléskor, I_1 a potentiométeráram terheléskor, U_1 és U_2 a részletfeszültségek megterhelve, ΔU_1 az önváltozás, $\Delta\Delta U_2$ a közvetett változás, $\Delta U_2^{(G)}$ a tápláló feszültség következtében lép fel.

A gázpotentiométer feszültségei ennek ellenére gyakorlatilag állandóak maradnak. Közvetlenül világos, hogy feszültségváltozás a kisülőközökön csakis a w ellenállásokban előálló potentiométeráramváltozás következtében (3. ábra) jöhet létre, mig az állandó kezdőfeszültségeknek a feszültség változásában szerepük nem lehet. Az R előtétellenállás és a w_k belsőellenállások potentiométert alkotnak és ezért a $\pm\Delta U^G$ táplálófeszültségváltozás következtében a t-ik közön létrejövő $\pm\Delta U_t^{(G)}$ feszültségváltozás, ha a gázpotentiométer terheletlen:

$$\pm \Delta U_t^{(G)} = \pm \Delta U_G \frac{w_t}{R + \sum\limits_{k=1}^{n} w_k} \cdot \tag{4}$$

és

$$\boxed{\pm \Delta U_t^{(G)} < \pm \Delta U_G \frac{w_t}{R}} \tag{4a}$$

Mivel $R \gg w_t$, a táplálófeszültség ingadozása lényegesen redukálódik. Ha a k-ik kisülőközt egy $i_{k,\,k+1}$ áramot felvevő $r^{k,\,k+1}$ ellenállással megterheljük és a k-ik közzel párvonalasan más hasznos terhelés nincsen bekapcsolva, úgy érvényes

$$U_k = E_k + I_k . w_k \tag{2a}$$

$$U_k = r_{k,\,k+1} . i_{k,\,k+1} \tag{5}$$

$$I_m = I_k + i_{k,\,k+1} . \tag{6}$$

Ezekből

$$U_k = \frac{r_{k,\,k+1}}{r_{k,\,k+1} + w_k} \cdot E_k + \frac{r_{k,\,k+1} . w_k}{r_{k,\,k+1} + w_k} \cdot I_m \tag{7}$$

U_k tehát két részből tevődik össze. Az első tag az E_k feszültségből a w_k és $r_{k,\,k+1}$ által alkotott potentiométeren redukálódik (3. ábra), a másik a generátoráram feszültségesése a párhuzamosan kapcsolt w_k és $r_{k,\,k+1}$ ellenállásokon. A táplálófeszültség ingadozása csakis a (7) egyenlet jobboldalának I_m-et tartalmazó második tagját befolyásolja, így valós w_k és $r_{k,\,k+1}$ esetén az I_m változásával fellépő feszültségváltozás a második tagon és vele együtt U_k-án $r_{k,\,k+1} = \infty$, azaz terheletlen kisülőköz esetén a legnagyobb. Az okoskodás kiterjeszthető arra az esetre, ha a hasznos terhelés nem közvetlenül a k és $k+1$ elektródokhoz kapcsolódik, hanem egyik végével 1 és k, a másik végével $k+1$ és $n+1$ közötti elektródok bármelyikéhez. $\Delta U_t^{(G)}$ értékére a terhelésnek csak minimális befolyása van, mivel a gyakorlati esetekben $\frac{r_{k,\,k+1}}{r_{k,\,k+1} + w_k} \approx 1$, így (4) gyakorlati számításokhoz, ahol amúgyis csak a várható feszültségváltozás felsőhatára érdekes, tökéletesen megfelelő.

(4) egyszersmind az előtétellenállás és gázpotentiométerből álló kör *szűrő hatásának* mértéke is. Ha az előtétkör fojtótekercset tartalmaz és ΔU_G periodikus függvénye az időnek, úgy R helyébe az előtétkör komplex ellenállása helyettesítendő a fázisszög figyelembevételével. Magasabb rezgésszám esetén a gázpotentiométerrel párhuzamosan kapcsolt kapacitások is számításba veendők.

1. Példa: Legyen $n=2$ (9. ábra); $E_1=E_2=70$ V; $w_1=w_2=20\ \Omega$; $R=2000\ \Omega$; $U_G=300$ V. Mekkora a hasznos feszültség maximális ingadozása, miközben a táplálófeszültség $\pm$ 10%-ot ingadozik, azaz $\pm\Delta U_G=\pm 30$ V? (4) szerint:

$$\pm\Delta U_1^{(G)} < \pm\Delta U_G \frac{w_1}{R} = \pm 0{\cdot}3 \text{ V, azaz } \pm 0{\cdot}4\% \text{ és } \Delta U_1^{(G)} = \Delta U_2^{(G)}.$$

Ez a csekély ingadozás is csökkenthető lenne a gázpotentiométerek kaskád kapcsolásával,[5] vagy pedig vashidrogén előtétellenállás alkalmazásával.

b) Vashidrogén előtétellenállás.

Az ohmikus előtétellenállással dolgozó gázpotentiométer elég jól szabályozott feszültséget biztosít a fogyasztóknak, de a tápláló áramforrást, annak feszültségi állapotához képest, változó árammal terheli meg (10. ábra). Kisebb áramok levételénél a generátoráram ingadozása nem játszik lényeges szerepet, de ha a tápláló áram körülbelül 80 mA, vagy annál nagyobb, úgy célszerű vashidrogén előtétellenállást alkalmazni. A vashidrogén előtétellenállás használata azonfelül lényegesen megjavítja a feszültségállandóságot ingadozó táplálófeszültség esetén.

A 11. ábrán mutatjuk egy ilyen összeállítás munkagörbéit. A vashidrogén ellenállás sarkai között fellépő 0...u feszültséghatárok között (*ab* szakasz) közelítően ohmikus ellenállásként működik; u és $3u$ feszültséghatárok között azonban az áram értéke csak $(i-\delta i)$-től $(i+\delta i)$-re változik, ahol i a $2u$ feszült-

[5] G. Sudeck (Deutsche Versuchsanstallt für Luftfahrt, Berlin) javaslata. V. ö. H. E. Kallmann, Zeitschrift für Hochfrequenztechnik 1932. 2. füzet és D. R. P. 568,951.

ségnél átfolyó áram. Igy a vashidrogén ellenállása áramváltozásokkal szemben:

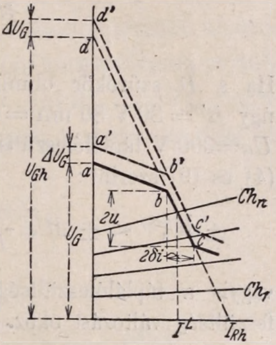
$$R_h = \frac{2u}{2\delta i} \cdot \tag{8}$$

Ezzel az R_h ellenállással kell (4) képletben számolni R helyett.

Ha a vashidrogén ellenállással sorban még ohmikus ellenállás vagy fojtótekercs, vagy vacuum-egyenirányítócső R' ellenállása van bekapcsolva, úgy (4) képlet

$$R = R' + R_h \tag{9}$$

értékkel számolandó.



11. ábra.
A vashyorogén előtétellenállás munka-viszonyai.

A 11. ábra szerint a vashidrogén ellenállás egy olyan fiktív ohmikus ellenállással helyettesithető, aminek értéke a vashidrogén áramváltozásokkal szemben tanusított ellenállásával egyenlő, egyidejüleg azonban U_G táplálófeszültség is helyettesitendő egy fiktív U_{Gh} feszültséggel. U_{Gh}-t a bc szabályozó határok közé eső vashidrogén áramkarakterisztikarész egyenesvonalú meghosszabbitása metszi ki a feszültségtengelyből; az áramtengelyből az I_{Rh} fiktív rövidjárási áramot metsz ki a meghosszabbitás. A táplálófeszültség emelkedésével az abc vonal az $a'b'c'$-be megy át és az abd háromszög a $a'b'd'$-be. Mivel $abc \cong a'b'c'$, a megnövekedett fiktív táplálófeszültség ellenére is csak az eredeti ΔU_G tápláló feszültség változással kell számolnunk a (4) képletben; így a vashidrogén ellenállás úgy hat, mintha százalékosan kisebb lenne a generátorfeszültség ingadozása és nagyobb az előtétellenállás. Ezen meggondolások a vashidrogén ellenállás hőtehetetlensége következtében csakis lassú feszültségváltozásoknál helytállóak. Gyors változások a (4) szerint játszódnak le, ahol R a pillanatnyi ohmikus, illetőleg komplex ellenállása az előtétkörnek. A gyakorlati esetekben a legtöbbször fojtótekercs van a vashidrogén ellenállással sorosan kapcsolva és így a lökésszerű táplálófeszültség változások is kellő mértékben redukáltatnak az előtétellenállásokból és gázpotentiométerből álló rendszeren.

2. Példa: Az 1. példabeli berendezést vashidrogén ellenállással látjuk el. A szabályozó határokat $u=70$ V-től, $3u=210$ V-ig választjuk, az áramfelvétel $2u=140$ V-nál legyen $i=80$ mA. $\delta=8\%$, tehát $\pm\delta i=6{\cdot}4$ mA. (8) szerint

$$R_h = \frac{2u}{2\delta i} \approx 10930\ \Omega.$$

Ha a D szűrőkör ohmikus ellenállásán 30 V feszültségesés jön létre, úgy $R' = 30\ \text{V}/80\ \text{mA} = 375$ Ohm. A vashidrogén ellenállás normális, $U_G=300$ V táplálófeszültségnél 130 V-ot emészt fel. $\pm\Delta U_G=\pm 30$ V-nál (4) és (9) szerint:

$$\pm\Delta U_1^{(G)} < \pm\,\Delta U_G \frac{w_1}{R'+R_h} \approx \pm\,0{\cdot}053\ \text{V} \quad \text{és} \quad \Delta U_1^{(G)} = \Delta U_2^{(G)},$$

vagyis a táplálófeszültség $\pm$ 10%-os ingadozása $\pm$ 0·075% hasznosfeszültség változást okoz.

2. Az önváltozás meghatározása ismert áramterhelés esetén.

A k-ik részletfeszültségre fennáll (2. és 3. ábrák)

$$I_m = I_k + \sum_{p=1}^{k}\ \sum_{q=k+1}^{n+1} i_{pq} \qquad (k=1\ldots n) \tag{10}$$

(2a) figyelembevételével

$$U_k = E_k + \left(I_m - \sum_{p=1}^{k}\ \sum_{q=k+1}^{n+1} i_{pq}\right) w_k, \tag{11}$$

fennáll azonkívül

$$U_G = \sum_{k=1}^{n} U_k + I_m R \tag{12}$$

(11) figyelembevételével

$$I_m = \frac{U_G - \sum\limits_{k=1}^{n} E_k + \sum\limits_{k=1}^{n}\ \sum\limits_{p=1}^{k}\ \sum\limits_{q=k+1}^{n+1} i_{pq} w_k}{R + \sum\limits_{k=1}^{n} w_k} \tag{13}$$

(13) jobboldala ismert tagokból áll, így I_m értéke meghatározható és ezzel (10) alapján I_k és (2a) segítségével U_k.

A ΔU_t feszültségváltozás, ami a t-ik kisülőközön azáltal jön létre, hogy a p és q-ik elektródák között különböző nagyságú $i_{pq}^{(1)}$ és $i_{pq}^{(2)}$ áramok vétetnek ki:

$$\Delta U_t = [I_t^{(1)} - I_t^{(2)}]\, w_t, \tag{14}$$

ahol $I_t^{(1)}$ és $I_t^{(2)}$ az $i_{pq}^{(1)}$, illetve az $i_{pq}^{(2)}$ terhelő áramhoz tartozó kisülőköz áram. Amíg $p<t<q$, a t-ik kisülőköz keresztárama a terhelés következtében csökkenik (v. ö. 10. ábra). Pozitív váltóáramú ellenállásnál tehát, növekvő hasznos terhelés esetén az önváltozás: feszültségcsökkenés.

(14)-ből (10) és (13) figyelembevételével:

$$\begin{aligned}\Delta U_t = &\left[\sum_{p=1}^{t}\sum_{q=t+1}^{n+1}\left(i_{pq}^{(2)} - i_{pq}^{(1)}\right)\right] w_t + \\ &+ \frac{w_t}{R+\sum\limits_{k=1}^{n} w_k}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=k+1}^{n+1} w_k\left(i_{pq}^{(1)} - i_{pq}^{(2)}\right)\right].\end{aligned} \tag{15}$$

Mivel $i_{pq}^{(2)} > i_{pq}^{(1)}$, a (15) jobboldalának második tagja mindig negatív.

Az első tag szögletes zárójelben álló része nem más, mint a t-ik közzel párhuzamosan lefolyó összes áramok változása. (16)

$$\sum_{p=1}^{t}\sum_{q=t+1}^{n+1}\left(i_{pq}^{(2)} - i_{pq}^{(1)}\right) = \Delta i_t \text{ jelöléssel} \tag{16a}$$

$$\Delta U_t = \Delta i_t w_t - \frac{w_t \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta i_k w_k}{R + \sum\limits_{k=1}^{n} w_k} \tag{17}$$

és

$$\boxed{\Delta U_t < \Delta i_t w_t} \tag{17a}$$

(17a) egyenletet a következő egyszerű meggondolással is nyerhetjük: ha a kisülőköz árama Δi_t-vel, úgy a kapocsfeszültsége $\Delta i_t . w_t$-vel változik. Ha viszont Δi_t áramot veszünk ki egy kisülőközből, mint hasznos áramot, úgy a kisülőköz árama mindig kevesebbel csökken, mint Δi_t, mert a generátoráram pozitív váltóáramú ellenállású gázpotentiométernél a terhelés folytán megnövekszik. A növekedés például a 10. ábrán $I_m - I^L$. A feszültségváltozás tehát kisebb, mint $\Delta i_t . w_t$. A 10. ábrán $\Delta U_1 = i_{12} w_1 - (I_m - I^L) w_1$. A gyakorlat követelményeinek (17*a*) egyenlet megfelel, mert a feszültségváltozás felsőhatárát adja és a gyakorlati feladatok rendszerint a megengedhető feszültségváltozás felsőhatárát írják elő.

Az elhanyagolt második tag és így az f hiba akkor lesz maximum, ha az üresenjáró gázpotentiométer valamennyi részfeszültségét határértékben theoretikusan kivehető $\Delta i_t \leqq I_m$ generátorárammal terhelnők meg:

$$f \leqq \frac{w_t I_m \sum_{k=1}^{n} w_k}{R + \sum_{k=1}^{n} w_k}. \tag{18}$$

3. Példa. Az 1. példa adatai megtartásával (9. ábra) legyen az r_{12}-be befolyó munkaáram $i_{12} = 40$ mA. Rendszertelen időközökben bekapcsolódik r_{13} is mint hasznos terhelés és $i_{13} = 10$ mA áramot vesz fel. Meghatározandó *a)* a generátoráram terheletlen gázpotentiométernél, *b)* a generátoráram terhelt potentiométernél, *c)* az üresjárási feszültségek, *d)* a terhelés következtében U_1-en fellépő feszültségváltozás.

a) A generátoráram terheletlen gázpotentiométernél (13) szerint

$$I_m^L = \frac{U_G - (E_1 + E_2) + 0}{R + w_1 + w_2} = 78{\cdot}4 \text{ mA}.$$

b) A generátoráram terhelt gázpotentiométernél (13) szerint:

$$I_m = \frac{U_G - (E_1 + E_2) + i_{12} u_1 + i_{13} w_1 + i_{13} w_2}{R + w_1 + w_2} = 79{\cdot}1 \text{ mA}.$$

A különbség tehát csak 0·7 mA.

c) Az üresjárási feszültségek (r_{12} átkapcsolás alatt, $r_{13} = \infty$) (2*a*) szerint

$$U_1^L = E_1 + I_m^L . w_1 = 71{\cdot}56 \text{ V}$$

és

$$U_1^L = U_2^L .$$

d) A terhelés következtében U_1^L-nél fellépő feszültségváltozás: (16) alapján, az 1. kisülőközzel párhuzamosan lefolyó hasznosáramok változása, miközben a gázpotentiométer üresjárásból terhelt állapotba jut

$$\varDelta i_1 = i_{12} + i_{13} = 50 \text{ mA}$$

ezzel (17*a*) szerint

$$\varDelta U_1 < \varDelta i_1 . w_1 = 1 \text{ V, azaz } U_1^L \text{ 1·4\%-a.}$$

A maximális hiba, amit a (17) jobboldalának rövidítésével elkövethetünk (18) szerint:

$$f = \frac{w_1 I_m . (w_1 + w_2)}{R + w_1 + w_2} = 0\text{·}031 \text{ V} \quad \text{azaz} \quad U_1^L \text{ 0·045\%-a.}$$

A számítási hiba tehát a gyakorlati mérési pontosság alatt van.

3. A közvetett változás meghatározása ismert áramterhelésnél.

A közvetett változás azonos szerkezetű (17) elhanyagolt tagjával, az önváltozás egyszerűsített képletében éppen a megnövekedett generátoráram hatását, vagyis a közvetett változás létrehozóját hanyagoltuk el. Ha a hasznos terhelés a p és q elektródok között növekszik, és a p és q-n kívül fekvő z-közön állandó marad, úgy egy z-ik közre (17) átmegy

$$U_z = -\frac{w_z \sum\limits_{k=p}^{q} \varDelta i_k w_k}{R + \sum\limits_{k=1}^{n} w_k} \tag{19}$$

képletbe. A közvetett változás, ha p és q között a hasznos terhelés növekszik, feszültség emelkedés. A közvetett változás csak egy tört része az önváltozásnak, innen a «$\varDelta\varDelta$» jelölés. Ha a p és q-n kívül fekvő s kisülőközök meg vannak (ohmikus ellenállással) terhelve, úgy (19), mivel $\varDelta i_s \neq 0$, csak jó közelítés. Gyakorlati számításokra az abszolút értéket

$$\boxed{\varDelta\varDelta U_z < \frac{w_z}{R} \sum_{k=p}^{q} \varDelta i_k w_k} \tag{19a}$$

felsőhatár adja. Vashidrogén előtétellenállás használata esetén, amennyiben a változás gyors lefolyású, a vashidrogén pillanatnyi ellenállását kell R meghatározásakor figyelembe venni. A pillanatnyi ellenállást a vashidrogén ellenállás által felemésztett teljes feszültség és az átbocsátott áram viszonya adja meg.

4. Példa. Meghatározandó a feszültségnövekedés U_2-nél, miközben az 1. Példán megadott berendezésnél U_1 részfeszültséget $i_{12} = 40$ mA hasznos árammal megterheljük. A közvetett változásnál a gázkisülés egyenetlenségei egy nagyságrenddel nagyobbak.

(19a) alapján $\Delta\Delta U_2 < \frac{w_2}{R} i_{12} \cdot w_1 \approx 0{\cdot}008$ V, azaz U_1 0·011%-a.

Mint látjuk, a részfeszültségek a gázpotentiométernél gyakorlatilag egymástól teljesen függetlenek. A közvetett változásnál a gázkisülés egyenetlenségei egy nagyságrenddel nagyobbak.

4. A gázpotentiométer feszültségváltozásainak meghatározása, ha a hasznos terhelések ellenállása ismert.

A gázpotentiométert (2. ábra) r_{pq} ellenállásokkal terheljük ($p = 1 \ldots n$; $q = 2, 3 \ldots n+1$; $p < q$)

$$i_{pq} = \frac{1}{r_{pq}} \sum_{s=p}^{q-1} U_s \qquad (20)$$

(10) és (2a) figyelembevételével írható

$$U_k - \left(I_m - \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=k+1}^{n+1} \sum_{s=p}^{q-1} \frac{U_s}{r_{pq}} \right) \cdot w_k - E_k = 0 \quad (k=1\ldots n) \qquad (21)$$

a (21) és (12) $n+1$ egyenletből álló egyenletrendszer segítségével kiszámíthatók az $U_1 \ldots U_n$ feszültségek és a generátoráram I_m. Ezen számítást különböző terhelő ellenállásokra elvégezve nyerhetjük a feszültségváltozásokat. Ez a számítási mód gyakorlati célokra kevéssé alkalmas hosszadalmassága folytán.[1]

A 12. ábra egy grafikus módszert mutat be[2] az üzemi adatok meghatározására, azon speciális esetre, ha a hasznos terhelő ellenállás két szomszédos elektróda közé kapcsolódik. A vizsgált z-ik kisülőköz karakte-

---

[1] Egy egyszerűsített közelítő számítási módot mutattam be R. Seidelbach-hal megadott terhelő ellenállások esetére az Archiv für Elektrotechnik, 1932. XXVI. kötet, 546—549. oldalán.

[2] A módszer Frommer József-től (Budapest) származik.

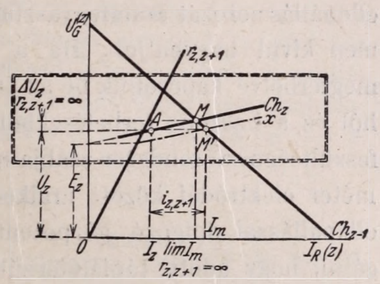
risztikája Ch_z egyedül felrajzolandó. Táplálófeszültségképpen, ha $w_k/r_{k,\,k+1}$ értékét 1 mellett elhanyagoljuk

$$U_G^{(z)} = U_G - \sum_{\substack{k=1\\k\neq z}}^{n} \frac{r_{k,\,k+1}}{r_{k,\,k+1}+w_k} E_k \approx U_G - \sum_{\substack{k=1\\k\neq z}}^{n} E_k \tag{22}$$

értéket visszük fel. Az előtétellenállás

$$R^{(z)} = R + \sum_{\substack{k=1\\k\neq z}}^{n} \frac{r_{k,\,k+1}\cdot w_k}{r_{k,\,k+1}+w_k} \approx R + \sum_{\substack{k=1\\k\neq z}}^{n} w_k \tag{23}$$

értékkel veendő figyelembe. Az $I_R(z)$ pontot az $U_G^{(z)}/R^{(z)}$ határozza meg. Az M pont vetülete az abscisszán adja a generátoráramot $\lim\limits_{r_{z,\,z+1}=\infty} I_m$, ha a z-ik köz nincs megterhelve. $r_{z,\,z+1}$ egyenest berajzoljuk a koordinátarendszerbe és összeadjuk a Ch_z karakterisztikával ugyanazon feszültségértékhez tartozó abscisszáikat. Az így nyert x és az $U_G^{(z)}$ $I_R(z)$ metszéspontjának M'-nek vetülete határozza meg I_m generátoráramot és U_z kapocsfeszültséget a terhelés bekapcsolása után. A pont projekciója adja meg I_z kisülőköz áramot, M és M' magasságkülönbsége a $\Delta U_{z\;r_{z,\,z+1}=\infty}$, az önváltozás. A kisülőközök kis váltóáramú ellenállására tekintettel ajánlatos a grafikus módszer alkalmazásánál csak a 12. ábra behatárolt részét felrajzolni és a feszültségléptéket lehetően nagyra választani.



12. ábra. Grafikus eljárás az üzemi adatok meghatározására.

III. A gázpotentiométer gyujtási viszonyai.

Amint az I. fejezetben közöltük, a kisülőközök üzembelépéséhez $E + e_z$ gyujtófeszültség, vagyis e_z túlfeszültség szükséges. A gázpotentiométer n kisülőközének gyujtásához, ha a kisülőközök egyidejűleg gyulladnak $\sum\limits_{k=1}^{n}(E_k + e_{zk})$ feszültség szükséges. Ha a kisülőközök egymásután gyulladnak, úgy az egész gázpotentiométer csak $\sum\limits_{k=1}^{n} E_k + e_{z1}$ gyujtófeszültséget kíván, ahol e_{z1} az utolsó üzembelépő kisülőköznél szükséges túlfeszültség. A közök egymásutáni üzembelépését gyujtóellenállás sorozattal érjük el. Az ellenállások célszerűen valamennyi közbenső elektródot az egyik szélső elektróddal kötik össze. A 2. ábrán például $r_{12}, r_{13}, \ldots r_{1,k+1}, \ldots r_{1,n}$ ellenállások lennének mint gyujtóellenállások szükségesek. Ha az U_G táplálófeszültséget fokozatosan 0-tól növeljük, úgy $r_{1,n}$ ellenálláson át először az n-ik köz gyullad meg, majd $r_{1,n-1}$-en az $(n-1)$-ik s így tovább. Gyujtás után már csak az üzemi feszültséget fogyasztják a közök, így amire az 1. kisülőköz kerül gyujtásra, a $\sum_{k=1}^{n} E_k + e_{z1}$ feszültségből $E_1 + e_{z1}$ marad, ami éppen elegendő az első köz gyujtásához. A gyujóellenállások glimmkisülésű gázfeszültségosztóknál elég, ha 0·1 mA nagyságrendű áramokat vezetnek, így a gyujtóellenállás sorozat áramfogyasztását gyakorlati szempontból figyelmen kivül hagyhatjuk. Ha a gázpotentiométert fogyasztókkal megterhelve kapcsoljuk be az áramkörbe, úgy az előtétellenállásból és a hasznos terhelésekből álló gyakran bonyolult ohmikus feszültségosztórendszer szabja meg a gyujtás előtt a gázpotentiométer elektródái között uralkodó feszültséget. Ohmikus előtétellenállással dolgozó gázpotentiométernél tehát meg kell vizsgálni, hogy adott táplálófeszültség, előtétellenállás és fogyasztók esetén az egyes kisülőközök megkapják-e a szükséges gyujtófeszültséget. Ha a hasznos terhelés gyujtás után kapcsolódik be, úgy a gyujtás a terheléstől függetlenül történik és határesetben az egész I_m áram kivehető hasznos terhelésképpen. Amint látni fogjuk, vashidrogén előtétellenállás használata esetén a generátoráram gyakorlatilag teljesen kihasználható azon esetben is, ha a gázpotentiométert hasznos terheléssel együtt kapcsoljuk be.

Vizsgáljuk a gyujtás feltételeit egy speciális esetben. A gázpotentiométer n egymással teljesen azonos tulajdonságú, U közepes üzemi feszültségű kisülőközből áll. m számú kisülőköz át van hidalva egy x hasznos terheléssel. Az x ellenállás, amivel együtt a gázpotentiométer bekapcsolható, az

$$[U_G - (n - m)\, U] \cdot \frac{x}{R + x} \geqq m . U + e_z \tag{24}$$

egyenletből

$$x \geqq R \cdot \frac{m.U + e_z}{U_G - n.U - e_z}. \tag{25}$$

R csökkenésével csökken a legkisebb ellenállás is, amivel a gázpotentiométer bekapcsolható. R csökkenésével viszont a kihasználatlan keresztáram nő a gázpotentiométerben. Vashidrogén előtétellenállás alkalmazása a gyujtás szempontjából előnyös, mivel a vashidrogénellenállás «hideg» vagy «langyos» ellenállása csekély. Ennek következtében kis ohmszámú hasznos terhelő ellenállás kapcsolható be (25) alapján vashidrogén előtétellenállás használatakor, vagyis a kivehető áram értéke nagy.

5. Példa. Megállapítandó, hogy mekkora maximális áramterheléssel kapcsolható be egyidejűleg az 1. Példa szerinti elrendezés *a)* ohmikus előtétellenállás, *b)* vashidrogén előtétellenállás használatával. A tápláló-feszültség legalacsonyabb értéke, 0·9 U_G veendő figyelembe, mint legkedvezőtlenebb eset. U közepes értékét a 3. Példa alapján $\approx$ 72 V-al vesszük figyelembe.

a) Ohmikus ellenállásnál (25) szerint:

$$x = R \cdot \frac{1.U + e_z}{0{\cdot}9\, U_G - 2\,U - e_z} = 2000 . \frac{72 + 50}{0{\cdot}9 . 300 - 144 - 50} \approx 3210\, \Omega$$

és

$$i_{12} \approx \frac{U_1}{x} \approx 22 \text{ mA}.$$

b) A 2. példabeli vashidrogén «langyos» ellenállása kisebb $R_h^{(e)} = 250$ Ω-nál. A szűrőkör ellenállása $R' = 375\ \Omega$. Ezzel

$$x = (R_h^{(e)} + R') \frac{1.U + e_z}{0{\cdot}9\, U_G - 2\,U - e_z} =$$

$$= (250 + 375) \frac{72 + 50}{0{\cdot}9 . 300 - 144 - 50} \approx 1000 \text{ és } i_{12} \approx 72 \text{ mA}.$$

Vagyis a gázpotentiométerből bekapcsolásával egyidejűleg kivehető áram a megengedhető maximális hasznos áram értéke fölött van. A maximális hasznos áram $I_m = 80$ mA generátoráram esetén körülbelül 65 mA-re szabható meg. A fenti eredmény azt jelenti, hogy vashidrogén előtétellenállás esetén a gyujtási feltételek vizsgálását figyelmen kívül hagyhatjuk.

IV. A gázpotentiométerek gyakorlati alkalmazásai.

Az adóberendezések első 1—5 magasfrekvenciájú fokozata, valamint a modulációs erősítő érzékenyek a feszültségingadozásra. A gázpotentiométer adóberendezéseknél a következő feladatokat végzi: *a)* Állandóan tartja a táplálófeszültséget ingadozó hálózati feszültség esetében is. *b)* Függetleníti egymástól az egyes erősítő fokozatok feszültségét az adó modulálása folyamán; a feszültségfüggetlenítés csakis olyan szabályozó elemmel történhetik, ami tehetetlenség nélkül és a legmélyebb, 0 frekvenciára (Morsejelek) is hatékony. *c)* A hangolás alatt fellépő anódáramkülönbségek folytán feszültségváltozásokat nem enged létrejönni. *d)* A rácsfeszültségeket rácsáram fellépése esetére is biztosítja[8] és függetleníti az anódáramtól. Az *a—d* alatt felsorolt előnyök az adó kisugározott rezgésszámára[9] — és az antennateljesítmény állandóságára van kedvező hatása. Oly hosszú- és rövidhullámú adóállomásoknál, ahol a hullámhossz ugrásnélküli változtathatósága követelmény és így kvarcvezérlés nem alkalmazható, üzemszerűen elérhető a feszültségek állandóantartása révén körülbelül $^1/_{50000}$—$^1/_{100000}$ rezgésszámára állandóság.[10]

A megegyező hullámhosszon sugárzó (közvetítő) adóknál a C. Lorenz AG. által az utóbbi évben kidolgozott új rendszerben a gázpotentiométerek másoldalú alkalmazást is találtak. Az új rendszer szerint az adók magasfrekvenciájú vezérléséhez szükséges váltófeszültséget (körülbelül 1.000,000 Hertz) egy, már régebben alkalmazott eljárással központban, hangvillával csatolt csőgenerátor által előállított alaphangból (körülbelül 2000 Hertz) csöves rezgésszámsokszorosítóval nyerik. Az alaphangot kábelen vezetik a 200—300 km távolságban elhelyezett adókhoz. A hangvillás generátor, a rezgésszámsokszorozók és ez utóbbiak mechaniku-

---

[8] V. ö. D. R. P. 571,733.

[9] V. ö. D. R. P. 537,197.

[10] A megadott értékben a beállítás pontatlansága és az adócsövek felmelegedésének hatása is bele van számítva. V. ö. [14] jegyzettel.

san lehangolt bemenő transzformátorai táplálását gázpotentiométerrel ellátott egyenirányítók végzik a helyi erősáramú hálózatokról. Ismeretes, hogy ha két megegyező hullámon dolgozó adó relatív rezgésszámkülönbsége másodpercenként 0·5—1 periodus, úgy a vétel már csak ott zavartalan, ahol a két adóállomás térerőssége 10 : 1 arányú. Két adó összekötő vonalának 70%-án zavart ilyen adók vétele.[11] A legutóbbi tapasztalatok mutatják, hogy az új rendszernél a relatív rezgésszámkülönbség csekélyebb, mint egy periodus 30 percben, ami által a tapasztalat szerint már 2 : 1 térerősségnél is zavartalan a vétel és a zavart zóna 15%-ra csökkenik. Egy új hálózat[12] mérései folyamatban vannak, és lehetséges, hogy ennél a hálózatnál már a keveredési zóna teljes egészében megszabadul az interferenciás zavartól.

A kommerciális, a postai stb. szolgálatban álló távirati, telefoni, nagyrezgésszámú vezetéktelefoni képtávíró-*vevőberendezések* régebben kizárólag akkumulátorokról tápláltattak. A gázpotentiométerrel szabályozott egyenirányítók ezen a téren is alkalmazást nyertek.[13] A Morsejeleket felvevő berendezésnél ugyanazokat a műszaki feladatokat szolgálják a gázpotentiométerrel ellátott áramforrások, amiket az adóknál ismertettünk. A vevőállomások csaknem kizárólag interferenciás rendszerrel dolgoznak telegráf-jelek felvételekor, tehát az áramforrással szemben támasztott igények és energiaviszonyok hasonlóak, mint az adók első fokozatainál. Az interferencia hangot körülbelül 10 HERTZ-re lehet 6—8 órás vételi periodus alatt állandóan tartani.[14] A mindinkább megkövetelt automatizálása a vevőberendezéseknek szintén az önszabályozó elemekkel ellátott hálózati táplálásra vezetett. Oly üzemeknél, ahol a hálózati feszültség kimaradása zavart okozhat, helyi benzin- vagy Dieselmotoros tartalék generátorok nyernek alkalmazást.

---

[11] W. RUNGE, Telefunken-Zeitung, 1932. december. 5—13. oldal.

[12] Frankfurt—Trier-i hálózat; rövidesen kiépül Kassel- és Freiburggal

[13] V. ö. L. KŐRÖS u. R. SEIDELBACH, Zeitschrift für Hochfrequenztechnik u. Elektroakustik, 1932, 40. kötet, 1. füzet 9—14. oldal.

[14] Az adóknál említett $^1/_{50000}$—$^1/_{100000}$ rezgésszámállandóságban a beállítás pontatlansága is bennefoglaltatik. Ez a hibaforrás vevőállomásnál elesik, mivel az interferencia hangmagasságánál csak a relatív állandóság érdekes.

Az erősítőtechnikában, különösen többfokozatú, hálózatról táplált erősítőknél gyakran alkalmazott segédeszköz a gázpotentiométer. A hangosfilm visszaadóberendezések (Telefongyár, LORENZ) valamint a felvevő berendezéseknél (Klangfilm) talál a gázpotentiométer alkalmazást. Relais-k, fotocellával kombinált elrendezések gyakran használnak gázpotentiométerrel ellátott áramforrásokat.

*

A gázpotentiométer kifejlesztési munkálatai a budapesti Telefongyár Rt.-ben kezdettek el. NEUHOLD KORNÉL és dr. techn. SZÉKELY IMRE vezérigazgató urak a legmesszebbmenő mértékben támogatták a munkámat. RITTCHEN GYULA főmérnök úr állandó személyes közreműködésével és tanácsaival segítette a kifejlesztést. A kommerciális adó- és vevőtechnikába a berlini C. LORENTZ AG. vezette be a gázfeszültségosztókat. Különösen W. HAHNEMANN igazgató, R. HERZOG és Dr. R. SEIDELBACH főmérnök urak nyujtottak a kifejlesztési munkálatokban értékes segítséget. A gázpotentiométereket a berlini Osram G. m. b. H. gyártja. A gázpotentiométer konstrukciójánál Dr. H. EWEST, P. HERE, H. FRIEDRICHSEN, G. GAIDES, O. RICHTER, Dr. H. STRAEHLER urak fejtettek ki értékes munkát. A gázpotentiométereket a berlini Stabilovolt G. m. h. H. hozza forgalomba.

Kőrös László.

DER GLIMMSTRECKENSPANNUNGSTEILER.

Der Glimmstreckenspannungsteiler stellt ein Mittel dar zur Abnahme von konstanten Spannungen von einer beliebig schwankenden Speisespannung; er teilt gleichzeitig die Nutzspannung in mehrere voneinander praktisch unabhängige Teile auf. Der Glimmteiler wurde beschrieben und seine Ersatzschaltung angegeben. Es sind Formeln abgeleitet worden, nach denen die Spannungskonstanz der stabilisierten Spannungen bei Speisespannungsschwankungen und bei Nutzlaständerungen einfach bestimmbar sind. Zusammenfassende deutsche Literaturstellen: Archiv für Elektrotechnik, Bd. 26, 1932, Heft 8, Seite 539—552; Zeitschrift für Hochfrequenztechnik und Elektroakustik, Bd. 40, 1932, Heft 1, Seite 8—14. Vgl. noch DRP. 565,125, 574,924, 561,489, 568,591, 571,733, 537,197, 544,098, D. R. G. M. 1.089,213.

Ladislaus Körös.

VIZSGÁLATOK A HŐMÉRSÉKLET- ÉS ALAKVÁLTOZÁS HATÁSÁRÓL VÉKONY PLATINARÉTEGEK ELEKTROMOS ELLENÁLLÁSÁRA.

I.

1. §. Vannak eljárások, melyek segítségével üvegből vagy más anyagból készült lemezeket igen vékony fémréteggel lehet bevonni. Ezen vékony fémrétegeknek a tömör fémekétől eltérő tulajdonságai számos kutató érdeklődését keltették fel. Közülük sokan foglalkoztak a rétegek elektromos vezetésével, vizsgálva annak különböző tényezőktől való függését.

A rétegek előállítására az újabb vizsgálatokban kétféle módszert alkalmaznak: vakuumban való elgőzölögtetést, vagy kathodporlasztást.

Az elgőzölögtetési eljárásban a fémet elektromos úton hevitik, a keletkező fémgőzök egy felfogó lemezre csapódnak le. Ha a vakuum mérsékelt, úgy a fémgőz diffuzió útján jut a lemezre, extrém vakuum esetén pedig atomsugarak alakjában. Ezzel a módszerrel nyerhetők a legtisztább rétegek.

A kathodporlasztás azon jelenségen alapszik, hogy a Geisslercsövek működése közben a kathod közelében levő felületek lassanként a kathod anyagával vonódnak be. Az újabb vizsgálatok szerint a kathodról eltávozó részecskék nem mások, mint az illető fém neutrális atomjai, tehát itt is fémgőzzel van dolgunk,[1] mely, tekintettel a mérsékelt vakuumra, a diffuzió törvényei szerint terjed.[2] A fémgőz keletkezését azzal magyarázzák, hogy a

[1] A. Hippel, Ann. d. Phys. **80**, 672, 1926.

[2] A. Günterschulze, ZS. f. Phys. **38**, 575, 1926.

kathodot bombázó gázionok lokális elgőzölgést váltanak ki.[1] Az iméntiek szerint tehát a kathodporlasztás lényegében azonos az elgőzölögtetési eljárással, csakhogy nem történhetik extrém vakuumban, s ezért a rétegnek több alkalma van idegen anyagokkal szennyeződni.[2]

2. §. K. LAUCH és W. RUPPERT[3] kísérletei azt bizonyítják, hogy a réteg összetartását nemcsak a hordozó lemezhez való tapadása okozza, hanem magának a rétegnek is jelentékeny kohéziója van. E szerzőknek ugyanis sikerült konyhasólemezekre porlasztott és megfelelő eljárással készült keretekbe foglalt *Ag*, *Au*, *Pt*, *Ni* és *Cu* rétegek alól a konyhasót leoldani s ily módon mindkét oldalukon szabad fémlamellákat előállítani. A legvékonyabb rétegük 5 mμ vastagságú volt. A rétegek «rendkívül ellenállóak és igen rugalmasak», pl. egy 30 mμ vastagságú és 6 mm átmérőjű ezüstréteg 8 mm Hg nyomást bírt ki és akusztikai rezgésekre volt képes. Ezen tapasztalatok jogosulttá teszik, hogy a vékony rétegeknek rugalmas állandóiról és hőkiterjedési együtthatójáról beszélhessünk a későbbiekben.

Röntgenvizsgálattal többeknek sikerült a rétegekben kristályok jelenlétét kimutatni.[4] Ebből azonban még nem következik, hogy a rétegek szerkezete azonos a tömör fémekével. Az

---

[1] A. HIPPEL, Ann. d. Phys. **81**, 1043, 1926 és GÜNTHERSCHULZE, l. c.

[2] A régebbi kutatasok tárgyát gyakran képezték kémiai úton előállított ezüstrétegek is. Ezek többnyire úgy készülnek, hogy a bevonandó lemezt ezüstsót tartalmazó oldatba tesszük s ehhez egy redukáló oldatot öntünk. Bizonyos előírások betartása mellett a kiváló fém a lemezt jól tapadó fényes bevonat alakjában lepi el. Az irodalomban számos ilyen célra szolgáló recept található. Legismertebb a BÖTTGER-féle.

Megemlítem még a CAREY LEA-féle eljárást, melyben az előírás szerint készült két oldat összeöntése után keletkezett csapadékot ecsettel nedvesen rákenik a bevonandó felületre és száradás után fényes ezüstréteget nyernek. (L. pl. OBERBECK, Ann. d. Phys. **46**, 268, 1892.)

[3] K. LAUCH u. W. RUPPERT, Phys. ZS. **27**, 452, 1926.

[4] H. KAHLER, Phys. Rev. **17**, 230, 1921; **18**, 210, 1921; — J. C. STEINBERG, Phys. Rev. **21**, 22, 1923; — L. R. INGERSOLL és S. S. DE VINNEY, Phys. Rev. **26**, 86, 1925; — J. D. HANAWALT és L. R. INGERSOLL, Nature, **119**, 234, 1927; — S. DEMBINSKA, ZS. f. Phys. **54**, 46, 1929; — W. BÜSSEM, F. GROSS és K. HERMANN, ZS. f. Phys. **64**, 537, 1930.

elektromos vezetőképesség anomáliáiból már régóta iparkodtak következtetéseket vonni a rétegek szerkezeti sajátosságaira, illetőleg a vezetésbeli rendellenességeket többé vagy kevésbbé szerkezeti tulajdonságokra is vezették vissza. Legújabban W. Reinders és R. Hamburger[1] foglalkoztak behatóan e kérdéssel úgy saját, valamint mások kutatási eredményeinek felhasználásával. Szerintük, ha a fém gőzfázisból olvadáspontjához képest elég hideg felületre csapódik le (pl. wolfram folyékony levegővel hűtött lemezre), úgy a szerkezet eredetileg amorph. Ezen amorph réteg kristályosodása azután annál intenzívebben megy végbe, minél alacsonyabb a fém olvadáspontja, minél nagyobb a rétegvastagság és minél magasabb a hőmérséklet.[2] A kristályosodás előhaladása közben a réteg átmegy ú. n. szemikrisztallin állapotokon, amikor a fém részben amorph részben kristályos fázisban van jelen. Végül a kicsiny krisztallitok nagyobbakká tömörülnek.

Ha a felület, melyre a réteg lecsapódik a fém olvadáspontjához képest nem elég hideg, úgy a réteg már keletkezésekor többé-kevésbbé szemikrisztallin vagy többé-kevésbbé finoman kristályos, a fém természete, a réteg vastagsága és a készítés körülményei szerint. Ebből a mondhatni előrehaladottabb állapotból indul azután ki a további szerkezeti fejlődés.

3. §. A rétegeken az ú. n. öregbedési jelenségek sokkal nagyobb mértékben mutatkoznak, mint a tömör fémeken. A frissen készült réteg elektromos ellenállása idővel változik, éspedig többnyire jelentékenyen csökken s csak hosszabb idő multán vesz fel gyakorlatilag állandó értéket. A thermikus kezelés ezt a folyamatot nagyon elősegíti (mesterséges öregbítés). Ha a réteg elég vékony, vagy a hőmérséklet elég magas, úgy az ellenálláscsökkenés előbb-utóbb növekedésbe csap át, mely a vezetés megszüntéig fokozódhatik. Az öregbedési jelenségek jól

---

[1] W. Reinders u. L. Hamburger, Ann. d. Phys. **10**, 649—669; — L. Hamburger, Ann. d. Phys. **10**, 789—824, 905—926, 1931.

[2] l. c. 650. l.

értelmezhetők a szerkezet változásával: az amorph fázis kristályosodása, majd a kis krisztallitoknak nagyobbakká tömörülése az ellenállást kisebbíti, viszont a durva krisztallizáció az összetartást rontja és ellenállásnövekedést okoz. Természetesen annál kisebb kristályszemcsék tekinthetők már durváknak, minél vékonyabb a réteg.[1]

A rétegek fajlagos ellenállása nagyobb, mint a tömör fémeké és bizonyos rétegvastagságon alul ennek csökkenésével rohamosan növekszik.[2] Az idevágó vizsgálatok eredményeinek összehasonlítását megnehezíti az, hogy a rétegek elektromos viselkedése számos — sokszor egymással is ismeretlen relációban lévő — tényezőtől jelentékenyen függ.[3] Elég ezek közül megemlítenem a szerkezeti állapot számtalan lehetőségét és a réteghez — készítés közben meg után — társuló idegen anyagokat (pl. okkludált gázok) és máris beláthatjuk, hogy a rétegek ellenállását nagymértékben befolyásolja a készítés és további kezelés módja.

A vastag rétegek rosszabb vezetését szerkezeti sajátságok és szennyeződések okozzák. A fajlagos ellenállásnak a rétegvastagságtól való függését pedig sokféleképpen magyarázzák. Az egyes elméletekben — külön-külön, vagy egymással kombinálva, — a következő három szempont szerepel: *a)* a réteg vékony voltának a vezetési elektronokra való hatása, *b)* a lamella határrétegének szigetelése, vagy rossz vezetése, *c)* a rétegek szerkezeti sajátságai. Nagy körültekintéssel tárgyalják mindezen kérdéseket Reinders és Hamburger (l. c).

4. §. Minthogy egy réteg thermikus kezelése általában jelentékeny maradandó ellenállásváltozással jár, ellenállásának tempe-

[1] Reinders és Hamburger készítettek oly wolframrétegeket, melyek még monoatomáris átlagos vastagság mellett is vezettek (l. c. 659. l.). — Hogy a legvékonyabb rétegek általában szigetelnek, annak egyik oka a készités folyamán bekövetkező öregbedés.

[2] l. pl.: J. Patterson, Cambridge Proc. **9**, 118, 1901; — B. Pogány, Ann. d. Phys. **49**, 531, 1916; — G. Braunsfurth, Ann. d. Phys. **9**, 385, 1931; Reinders és Hamburger l. c.

[3] G. Braunsfurth, l. c. 402. l.

raturakoefficienséről (α) csak akkor beszélhetünk, ha a réteg olyan állapotban van, hogy a mérés folyamán létesített hőmérsékletváltozás az ellenállást — legalább praktice — reverzibilisen változtatja meg.

A rétegek temperaturakoefficiense kisebb, mint a tömör fémeké és a rétegvastagság kisebbedésével csökken. Függ a réteg készítésének és kezelésének körülményeitől hasonló okok miatt, mint a fajlagos ellenállás.

Braunsfurth vizsgálatai szerint idegen fém hozzáadása a rétegek fajlagos ellenállását növeli, temperaturakoefficiensét csökkenti, amiből keverékkristályok jelenlétére következtet.[1]

Longden,[2] s utána többen igen vékony rétegeken negatív koefficienseket mértek. Reinders és Hamburger is *nagyon tiszta* és amorph (a folyékony levegő hőmérsékletén készült) wolframrétegeiken annál negatívabb koefficienseket találtak, minél kisebb volt a rétegvastagság.[3]

A temperaturakoefficiens anomáliáinak okát Hamburger[4] a rétegek szerkezeti sajátságaiban keresi: a kristályszemcsék ellenállásának temperaturakoefficiense pozitív, a szemcsék közti átmeneti ellenállásé nulla, az amorph fázisé pedig negatív. Eszerint negatív koefficiens — a tapasztalással egyezésben — akkor várható, mikor az amorph fázis van túlsúlyban, vagyis ha a réteg elég vékony és öregbítetlen. Az amorph fázis negatív koefficiensét Hamburger a normálisnál nagyobb atomtávolságokra vezeti vissza.[5] A hőmozgás u. i. normális atomtávolságok mellett növeli az ellenállást, mert rendetlenséget okozva gátolja az elektronok haladását, azonban nagy atomtávolságok esetén javítja a vezetést, mert alkalmat ad az atomoknak, hogy legalább időlegesen egymáshoz elég közel jussanak s ezáltal a nagy atomtávolságok vezetést gátló hatása csökken.

---

1 G. Braunsfurth, l. c. 404., 409. l.
2 A. C. Londgen, Phys. ZS. 1, 605, 1900.
3 Reinders és Hamburger, l. c. 652., 907. l.
4 l. c. 923. l.
5 l. c. 666. l.

Érdekesnek tartom még megemlíteni, hogy REINDERS és HAMBURGER által cseppfolyós levegő hőmérsékletén készített wolframrétegek ellenállásváltozása a szobahőmérsékletig való melegítéskor már az első alkalommal is teljesen reverzibilis volt, hacsak a réteg vastagsága bizonyos kritikus értéken (2 mμ) alul maradt; ellenkező esetben már fellépett a maradandó ellenállásváltozás. A szerzők ezt azzal magyarázzák, hogy a kicsiny rétegvastagság nem kedvez a kristályképződésnek, s így az eredeti struktúra a melegítés ellenére is megmarad.[1]

5. §. A deformáció hatását a vékony rétegek ellenállására tudomásom szerint csak OBERBECK és BRAUNSFURTH vizsgálták. OBERBECK[2] ezüstrétegei kémiai úton a CAREY LEA-féle eljárással[3] készültek s hordozójuk kartonpapírsáv volt. OBERBECK a kartonsávot jelentékeny mértékben hajlította. E miatt a réteg — hossza mentén — összenyomódott vagy megnyúlt, aszerint, amint a hajlítás a sáv réteges vagy rétegnélküli odala felé történt. A hajlítást a réteg ellenállásának csökkenése, illetőleg növekedése kisérte. A sávot ismét kiegyenesítve, az ellenállás közelítőleg visszatért régi értékére s az ettől való kis eltérés többnyire a legutóbbi deformációnak megfelelő irányú volt. Gyors hajlítgatás az ellenállás maradandó növekedését okozta.

BRAUNSFURTH[4] steatit hengerekre kathodikusan porlasztott ezüst- és irridiumrétegeken végzett méréseit közli. A hengereket tengelyük irányában összenyomva a rétegek ellenállásának kisebbedését észlelte, mely változás «túlnagy» nyomás alkalmazásakor irreverzibilis volt. A viszonylagos ellenállásváltozás a rétegvastagság kisebbedésével csökkent.

E kisérleteiből következteti,[5] hogy a réteg ellenállásának temperatura-függésére befolyással kell, hogy legyen a réteget hordozó anyag hőkiterjedési együtthatója is, mert amennyiben

---

[1] l. c. 652., 658., 660. l.

[2] A. OBERBECK, Ann. d. Phys. **47**, 373, 1892.

[3] Lásd a 68. lapon a jegyzetben.

[4] G. BRAUNSFURTH, Ann. d. Phys. **9**, 402, 1931.

[5] l. c. 413 l.

ez a fémétől különbözik, úgy a réteg a hőmérséklet változása folyamán olyanszerű feszültségi állapotba jut, mint a réteghordozó összenyomásakor. E következtetését közvetlen mérésekkel nem igazolja, sőt a kísérleti igazolást nem is tartja lehetségesnek zavaró mellékkörülmények miatt.

A jelenség azonban mégis észlelhető. A most következő II. részben ismertetendő s még Braunsfurth dolgozatának megjelenése előtt végzett méréseim során sikerült kimutatnom, hogy platinarétegek temperaturakoefficiense függ a réteghordozó lemez minőségétől. Ez az effektus azután — Braunsfurth gondolatmenetét éppen fordított irányban követve — arra késztetett, hogy a rétegek ellenállásának deformáció okozta változását is vizsgálat tárgyává tegyem. Erről a III. részben lesz szó.

II.

6. §. A platinarétegek előállítása egy technikai porlasztóberendezéssel történt kb. 0·05 mm Hg nyomású levegőben, 1500 volt feszültség és — a kathodra vonatkoztatva — 2 mA/cm^2 áramsűrűség mellett. A légritkitást egy Pfeiffer-gyártmányú olajos légszivattyú végezte. A rétegek hordozói «minos» és «tempax» üvegből készült 75 mm hosszú, 7—8 mm széles, 1 mm vastag lemezek voltak. E két üvegfajta lineáris hőkiterjedési együtthatói [γ_M és γ_T] egymástól jelentékenyen különböznek: a Schott & Gen. jenai cég adatai szerint $\gamma_{M_l} = 8{\cdot}60.10^{-6}$ és $\gamma_T = 3{\cdot}65.10^{-6}$; tehát $\gamma_M - \gamma_T = 4{\cdot}95.10^{-6}$.

A vizsgálatok célja megállapitani, hogy különböznek-e egymástól a minos- és tempaxüvegre porlasztott rétegek ellenállásának temperaturakoefficiensei; és ha igen, mekkora ez a különbség s hogyan függ a rétegvastagságtól?

Lényeges, hogy az egymással összehasonlított lamellák lehető egyforma vastagságúak és egyforma viselkedésűek legyenek, mert csakis ez esetben szabad a temperaturakoefficiensek között mutatkozó különbséget a réteghordozó üvegfajták hatásának tulajdonitani. Ezért az összehasonlitandó rétegek együttesen készültek és végig azonos kezelésben részesültek. Mindig három réteg készült és került észlelés alá együttesen s egy-egy ilyen rétegcsoport váltakozva vagy egy tempax- és két minos-, vagy két tempax- és egy minoslemezre porlasztott rétegből állt. A két egyfajta lemez egyazon csoporton belül az effektus ellenőrzésére szolgált.

A porlasztáskor a méréshez felhasználandó három lemezt még két másik fogta közre. Ily módon a három közbülső üveg oldallapjai nem kaptak fémbevonatot és a felső lapjukra csapódó réteg egyenletességét a szélek hatása nem zavarta.

A már kész rétegek végeit jó kontaktus kedvéért elektrolitikus rézzel vontam be. A szabadon maradt platinaréteg hosszúsága kb. 4 cm volt s így — a lemezek szélessége 0·7—0·8 cm lévén — a mérésekben tekintetbe jövő beporlasztott terület a három lemezen összesen kb. 4×2 cm^2-t tett ki, tehát jóval kisebb volt a 10×10 cm^2-es kathod felületénél, ami a rétegvastagság egyenletessége szempontjából szintén előnyös.

A temperaturakoefficiensek mérése néhány nappal a rétegek készítése után történt. Hogy addigra az ellenállás járása (természetes öregbedés) már lassú legyen, a rétegeket előzőleg 8 órán át 100° C-on mesterségesen öregbítettem. Továbbá, hogy a temperaturakoefficiens meghatározásakor újabb mesterséges öregbedés fel ne lépjen, a rétegeket az észlelések folyamán a szobahőmérséklet fölé többé már nem melegítettem, hanem ellenállásukat a szobahőmérsékleten kívül két alacsonyabb hőfokon határoztam meg, melyeket $NaCl$-jég, illetőleg CO_2hó-alkohol hidegkeverékekkel állítottam elő. Így az ellenállás a mérés alatt elég reverzibilisen változott.

A lemezek egy ebonitból és vörösrézből készült tartóba voltak befogva, szorosan egy pentánhőmérő edénye körül. Az egész egy 30 cm hosszú, alul beforrasztott, felül parafinnal tömitett csőben állt, amely majdnem nyakig belemerült a hütőkeverék befogadására szolgáló Dewar-edénybe. A csőben phosphorpentoxiddal szárított levegő volt.

Az ellenállás mérése Wheatstone-hiddal történt, 0·01 % pontossággal. A három réteg ellenállását az egyes hőmérsékleteken gyorsan egymásután mértem, miután már mindhármuk ellenállása teljesen megállapodott.

7. §. Négy különböző vastagságú (13·5—67 mμ) rétegcsoporton végeztem méréseket. A különösképpen kényes extrém vékony lamellák vizsgálatától a porlasztóberendezés technikai jellege miatt, sajnos, el kellett tekintenem.

Az eredményeket az I. számú táblázatban állítottam össze. A 2. rovat jelzi, hogy a két üvegfajta az illető rétegcsoportban hogyan van képviselve (M = minos, T = tempax). Az 5. és 6. rovat tartalmazza a minos- illetőleg tempaxüvegre porlasztott rétegek ellenállásának temperaturakoefficienseit ($\alpha_r^{(M)}$ ill. $\alpha_r^{(T)}$),[1] melyeket az

$$\alpha_r = \frac{r_2 - r_1}{(t_2 - t_1)\, r_0} \tag{1}$$

képlettel számítottam, ahol t_1 és t_2 az intervallum két szélső hőmérsékletét, r_1 és r_2 a megfelelő ellenállásokat, r_0 pedig a 0° C-hoz tartozó ellenállást jelentik.

Az 5. és 6. rovat összehasonlításából kitűnik, hogy *mind a négy rétegcsoporton belül a tempaxra porlasztott lamellák temperaturakoefficiensei kivétel nélkül kisebbek, mint a minosra porlasztottaké.* Ez meg is felel várakozásunknak, mert pl. melegítéskor az üvegen lévő réteg — az üveg és platina egymástól különböző hőkiterjedése miatt — annál jobban nyomódik össze és emiatt annál nagyobb ellenálláscsökkenés kisebbíti a réteg ellenállásnövekedését s így temperaturakoefficiensét is, minél kisebb az illető üvegfajta hőkiterjedési együtthatója. $\gamma_T < \gamma_M$, s így érthető, hogy $\alpha_r^{(T)} < \alpha_r^{(M)}$.

$[\alpha_r^{(M)} - \alpha_r^{(T)}]$ számértékei az egyes csoportokon belül meglehetősen szóródnak ugyan (8*a* rovat), — ami a zavaró mellékkörülményekre való tekintettel nem is meglepő, — de középértékeik (8*b* rovat) arra utalnak, hogy az effektus vastagabb

---

[1] Az r ill. a későbbiekben szereplő ϱ indexek azt mutatják, hogy a temperaturakoefficiens az ellenállásra ill. a fajlagos ellenállásra vonatkozik.

I. táb-

1	2	3	4	5	
A csoport száma	Üvegfajták	Réteg-vastagság	Hőmérsékleti köz	A réteg ellenállásának temperatura-koefficiense	
				minos üvegen	
		$m\mu$		$10^6 . \alpha_r^{(M)}$	
I	T M T *	67	Sz→Na Cl **	420	
			Na Cl→C O_2	416	
			C O_2→Na Cl	436	
			Na Cl→Sz	421	
II	T M T	34	Sz→Na Cl	434	
			Na Cl→C O_2	419	
			C O_2→Na Cl	424	
			Na Cl→Sz	429	
III	M T M	21	Sz→Na Cl	409 408	Közép 408·5
			Na Cl→C O_2	390 388	389
			C O_2→Na Cl	396 397	396·5
			Na Cl→Sz	406 403	404·5
IV	M T M	13·5	Sz→Na Cl	403 405	404
			Na Cl→C O_2	387 387	387
			C O_2→Na Cl	392 392	392
			Na Cl→Sz	398 399	398·5

* «*T*» = tempax, «*M*» = minos.

** «*Sz*» = szobahőmérséklet, «*Na Cl*» = *Na Cl*-jég hidegkeverék hőmérséklete, «*C* O_2» = *C* O_2hó-alkohol hidegkeverék hőmérséklete.

lázat.

6		7	8a		8b	9a	9b
A réteg ellenállásának temperatura-koefficiense		Az ellenállásra vonatkozó temperaturakoefficiensek különbsége				A fajlagos ellenállásra vonatkozó temperaturakoefficiensek különbsége különfajta üvegeken	
tempax üvegen		egyfajta üvegeken	különfajta üvegeken			ha $\mu = 0{\cdot}38$	ha $\mu = 0{\cdot}5$
$10^6 . \alpha_r^{(T)}$		$10^6 . \delta$	$10^6 . \left[\alpha_r^{(M)} - \alpha_r^{(T)}\right]$			$10^6 \left[\alpha_\varrho^{(M)} - \alpha_\varrho^{(T)}\right]$	
	Közép			Közép	Közép	Közép	Közép
404, 409	406·5	5	16, 11	13·5	18	12	8
400, 394	397	6	16, 22	19			
413, 410	411·5	3	23, 26	24·5			
408, 404	406	4	13, 17	15			
413, 419	416	6	21, 15	18	16	10	6
403, 407	405	4	16, 12	14			
409, 414	411·5	5	15, 10	12·5			
407, 412	409·5	5	22, 17	19·5			
399		1	10, 9	9·5	8	2	—2
383		2	7, 5	6			
389		1	7, 8	7·5			
396		3	10, 7	8·5			
392		2	11, 13	12	10·5	4·5	0·5
377		0	10, 10	10			
384		0	8, 8	8			
387		1	11, 12	11·5			

rétegeken nagyobb, mint vékonyabbakon, egyezésben a Braunsfurth-féle nyomási kísérletekkel.

Az egyfajta üvegeken lévő rétegek koefficiensei között is van ugyan némi különbség [δ] (7. rovat), ez azonban mindig jelentékenyen kisebb, mint a különböző üvegfajták mellett mutatkozó.

Az effektus grafikus szemléltetése az ellenállás-temperatura görbékkel német nyelven megjelent közleményemben található.[1]

8. §. Felmerül a kérdés, hogy az ellenállásra talált effektusból menyi jut a fajlagos ellenállásra [ϱ], vagyis hogy mekkora az [$a_\varrho^{(M)} - a_\varrho^{(T)}$] különbség?

Hogy ezt megtudhassuk, számítani kell az üveghez tapadó platinarétegnek a hőmérséklet változásakor beálló alakváltozását. 1 foknyi melegítéskor a platinaréteg hosszúságának [l] és szélességének [b] relatív megváltozása — tekintve a réteg csekély vastagságát — egyenlő az üveg lineáris hőkiterjedési együtthatójával [γ].

Tehát
$$\frac{1}{l}\frac{dl}{dt} = \frac{1}{b}\frac{db}{dt} = \gamma\,. \tag{2}$$

A *réteg* hőkiterjedési együtthatóját β-val, Poisson-féle számát μ-vel jelölve, elemi számítás szerint a réteg vastagságának [D] viszonylagos megváltozása

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dt} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\beta + \frac{2\mu}{1-\mu}\gamma\,. \tag{3}$$

A fajlagos ellenállást [ϱ] definiáló

$$\varrho = r\frac{bD}{l}$$

egyenlet mindkét oldalának logaritmusát t szerint differenciálva, (2) és (3) tekintetbevételével nyerjük, hogy

$$a_\varrho = a_r + \frac{1+\mu}{1-\mu}\beta - \frac{2\mu}{1-\mu}\gamma\,.$$

[1] G. Baintner, ZS. f. Phys. **73**, 697, 1932.

Ha most a_ϱ ezen kifejezését a minos- és tempaxüvegen lévő rétegekre vonatkozólag külön-külön felírjuk s az igy kapott két egyenletet egymásból kivonjuk, nyerjük, hogy

$$a_\varrho^{(M)} - a_\varrho^{(T)} = [a_r^{(M)} - a_r^{(T)}] - \frac{2\mu}{1-\mu}(\gamma_M - \gamma_T) \,. \qquad (4)$$

A numerikus számolásban nehézséget okoz, hogy a *réteg* Poisson-féle számát $[\mu]$ nem ismerjük. Megkíséreljük azonban μ-t két határ közé szoritani. Tekintve a rétegnek a tömör feménél lazább szerkezetét, eleve valószínűnek látszik, hogy nyujtáskor a réteg kevésbbé vagy legfeljebb annyira igyekszik megtartani keresztméreteit, mint a tömör platina, ez pedig azt jelenti, hogy μ-je nagyobb vagy legalább akkora, mint a tömör platináé [0·38 [1]], vagyis

$$0{\cdot}38 \leqq \mu \leqq 0{\cdot}5 \,. \qquad (5)$$

E föltevésünket támogatja az a tapasztalat, hogy tömör fémek és ötvözetek μ-je a hőmérséklet növekedtével nagyobbodik,[2] sőt szelénen és könnyen olvadó ötvözeteken megállapitást nyert, hogy az olvadáspont közelében — vagyis mikor már az összetartás jelentékenyen csökken — majdnem eléri a maximálisan lehetséges 0·5 értéket.[3]

$[a_\varrho^{(M)} - a_\varrho^{(T)}]$-nek a (4) egyenlettel számitott értékei az I. táblázat $9a$ és $9b$ rovataiban találhatók $\mu = 0{\cdot}38$, illetőleg $\mu = 0{\cdot}5$-tel számítva. Amennyiben a μ-re vonatkozó (5) alatti feltevésünk helyes, $[a_\varrho^{(M)} - a_\varrho^{(T)}]$ értékei e két rovat adatai közé esnek és látható, hogy kicsiny rétegvastagság mellett $[a_\varrho^{(M)} - a_\varrho^{(T)}]$ igen kicsiny, talán nulla, a rétegvastagság növekedtével pedig nagyobbodik. Úgy látszik tehát, hogy kicsiny rétegvastagság mellett az *ellenállásra* vonatkozó effektus $[a_r^{(M)} - a_r^{(T)}]$ jórészt — esetleg teljesen — értelmezhető a minos- és tempaxüvegeken lévő rétegek egymástól különböző méretváltozásaival, a nélkül, hogy

---

[1] F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys. 827, 1930.
[2] A. Winkelmann, *HB. d. Phys. I*, 582, 1908.
[3] Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. **9**, 1124, 1902.

ez a *fajlagos* ellenállásra számottevő hatással volna, míg a rétegvastagság növekedtével már a fajlagos ellenállásnak alakváltozás okozta módosulása is több szerephez jut.[1]

III.

9. §. Az előbbi részben tárgyalt kísérleteim — mint már említettem — arra indítottak, hogy vizsgáljam a rétegek alakváltozás okozta ellenállásváltozását. OBERBECK és BRAUNSFURTH hasonló célú vizsgálataikban (l. 5. §) a réteg deformációját nem mérték s így eredményeik részben kvalitatívek s nem alkalmasak arra, hogy a rétegek viselkedését a tömör fémével számszerűleg összehasonlítsuk.

Itt is üvegre porlasztott platinarétegekkel dolgoztam, melyek hasonlóan készültek, mint a II. részben leírt kísérletekben.

Az üveglemezt hajlítottam s meghatároztam a platinarétegen ezáltal bekövetkező viszonylagos hossz- (ε, lásd 11. §) és ellenállásváltozást $\left[\frac{\Delta r}{r}, \text{ lásd 10. §}\right]$.

10. §. A hajlítás folytán keletkező ellenállásváltozás igen kicsiny volt, körülbelül akkora, mint amekkorát a réteg hőmérsékletének 1°-nyi változása is okozhat. A mérést kellő érzé-

---

[1] Dolgozatom ezen II. részében ismertetett vizsgálataimat BRAUNSFURTH idézett cikkére való hivatkozással annak idején német nyelven közzétettem (ZS. f. Phys. 73, 691—699, 1932). Ezen említett közleményem megjelenése után vettem észre, hogy az effektust R. S. BARTLETT már előttem kimutatta (Phil. Mag. 5, 856, 1928.), az enyémmel egyező módszerrel, csak ellenőrző réteg alkalmazása nélkül (lásd: a 6. § harmadik bekezdését, 74. lap). BARTLETT ezen kísérlete BRAUNSFURTH figyelmét is elkerülte.

BARTLETT kvarckristályra, üvegre és ömlesztett kvarcra porlasztott arany-, valamint üvegre meg ömlesztett kvarcra porlasztott platinarétegeken állapította meg a réteghordozó befolyását az ellenállás temperaturakoefficiensére. Az effektust ugyanolyan irányúnak, de a platinára vonatkozót nagyobbnak találta, mint én (aranyat nem mértem). Az eltérés okát, mely többféle tényezőben kereshető, egyelőre — míg bővebb kísérleti anyag nem áll rendelkezésemre — nyílt kérdésnek kívánom hagyni.

BARTLETT *az effektusnak a rétegvastagságtól való függését és a fajlagos ellenállás temperaturakoefficienséhez való vonatkozását nem tárgyalja.*

kenységű Wheatstone-berendezéssel végeztem s hogy a hőmérséklet járása a hajlítási effektus észlelését ne zavarja, «ismert ellenállás»-ként egy a hajlítandóval együtt készült réteget használtam, mely a hőmérséklet csekély változásait éppen úgy érezte meg, mint a vizsgálandó réteg. Mindkét lemezt egy aszbeszttel bélelt kettős falú fémdobozban helyeztem el, szorosan egymás közelében. A hajlítandó lemez két kvarcéken nyugodott; közepére egy ebonitból készült ék feküdt rá, melyhez kengyel volt erősítve. A kengyelen lógott egy aluminiumrudacska s ennek alsó végére lehetett a hajlító súlyokat akasztani. A rudacska a doboz alján lévő furaton hatolt keresztül, úgyhogy a súlyok kezelése a dobozon kívül történt.

Az ellenállásváltozás nagyságára többnyire nem a csúszó kontaktus eltolásából, hanem a híd áramának megváltozásából következtettem; így pontosabban és gyorsabban lehetett mérni.

A galvanométer skáláján 1 osztásrésznyi eltolódásnak kerek számban 5.10^{-6} relatív ellenállásváltozás felelt meg, de még a tized osztásrészeket is jól lehetett becsülni. A galvanométer elkerülhetetlen járása elég lassú volt; 0·5 osztásrész 10 perc alatt már igen erős járásnak számított. Hogy a galvanométernek lehető lassú legyen a járása, az azért volt szükséges, mert mint alább (13. §) látni fogjuk, egy terhelésből és leterhelésből álló «ciklus» észlelése 8 percet vett igénybe. Az iméntiek szerint tehát — a galvanométer járását is tekintetbe véve — a 3.10^{-4} körüli viszonylagos ellenállásváltozásokat 1%-nál jóval pontosabban tudtam mérni.

11. §. A hajlított lemezen lévő réteg relatív megnyúlása a lemez hossza mentén nem egyforma, hanem középen a legnagyobb, a szélső ékek felé pedig lineárisan csökken. Kiszámítására alkalmas képlethez a hajlítás Navier-féle technikai elméletének [1] felhasználásával jutunk.

---

[1] l. pl. dr. ifj. Szily Kálmán: Mechanika, III. 38—121, 1921.

Hajlításkor a lemez egyenes tengelyéből görbe vonal lesz: az úgynevezett elasztikus vonal. Ennek görbülete

$$\frac{1}{R}=\frac{M}{EJ}, \tag{6}$$

ahol M a hajlító momentum [ez is változik a lemez hossza mentén, lásd a (7) egyenletet], E az üveg YOUNG-modulusa, J pedig a lemez keresztmetszetének tehetetlenségi momentuma a hajlítási tengelyre [1] vonatkoztatva. A hajlítás folytán az üveglemez alsó és felső lapján beálló relatív megnyúlás [ε] abszolút értéke, miként (6)-ból egyszerű meggondolással adódik

$$|\varepsilon|=\frac{v}{2}\frac{M}{EJ},$$

hol v az üveglemez vastagságát jelenti. Ez természetesen az üvegen lévő platinaréteg megnyúlása is.

Minthogy továbbá

$$M=\frac{P}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right)^{[2]} \quad \text{és} \quad J=\frac{bv^3}{12},^{[3]} \tag{7}$$

tehát

$$|\varepsilon|=\frac{3}{E}\frac{P}{bv^2}\left(\frac{L}{2}-x\right), \tag{8}$$

ahol P jelenti a terhelő súlyt, b az üveglemez szélességét, L a két alátámasztó ék egymástól való távolságát, x pedig a kérdéses helynek a középső ebonitéktől való távolságát.

A (8) képlet tehát megadja $|\varepsilon|$ lokális értékét. Ennek maximuma a középen $[x=0]$ van:

$$|\varepsilon|_{\max}=\frac{3}{E}\frac{P}{bv^2}\frac{L}{2}.$$

Az alátámasztó ékeknél $x=\frac{L}{2}$ s így $\varepsilon=0$. A platinarétegre vonatkozólag azonban nem itt volt $|\varepsilon|$ a legkisebb, mert az

[1] l. c. 41. l.
[2] l. c. 113 l. (4) egyenlet.
[3] l. c. 49. lap.

ellenállásváltozás szempontjából tekintetbe jövő réteg hossza [l] kisebb az ékek egymástól való távolságánál, L-nél, a platinaréteg két végét borító elektrolitikus rézréteg méretei miatt. A réztől szabad platina az alátámasztó ékekhez képest szimmetrikusan lévén elhelyezve, a relatív megnyúlás annak két végén $\left[x = \frac{l}{2}\right]$:

$$|\varepsilon|_{\min} = \frac{3}{E} \frac{P}{bv^2} \frac{L-l}{2} .$$

Tekintve, hogy (8) szerint $|\varepsilon|$ x-től lineárisan függ, a réteg átlagos relatív megnyúlása $|\bar{\varepsilon}|$ a maximálisnak és minimálisnak számtani közepe, vagyis

$$|\bar{\varepsilon}| = \frac{3}{2} \frac{1}{E} \frac{P}{bv^2} \left[L - \frac{l}{2}\right] . \tag{9}$$

A Young-modulust a szokásos módon, a szélső keresztmetszeteknek a hajlítás folytán bekövetkező elfordulásából [ϑ] határoztam meg.[1] $\frac{1}{E}$ értékét a következő képlet szolgáltatja:

$$\frac{1}{E} = \frac{4}{3} \frac{bv^3}{L^2} \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{P} . \tag{10}$$

E-t minden lemezen külön-külön mértem, éspedig ugyanazon éktávolsággal [L] és hajlító súllyal [P] dolgozva, mint az ellenállásváltozás észlelésekor. Így E numerikus kiszámítása mellőzhető, hanem e helyett $\frac{1}{E}$ (10) alatti kifejezését $|\bar{\varepsilon}|$-nek (9) alatti képletébe beírva, nyerjük:

$$|\bar{\varepsilon}| = 2v \operatorname{tg} \vartheta \frac{L - \frac{l}{2}}{L^2} . \tag{11}$$

Előnye ezen eljárásnak, hogy az üveglemez szélessége [b] kiesik és vastagsága [v] csak az első hatványon szerepel. Ezáltal a mérési hibák befolyása csökken.

---

[1] L. pl.: F. Kohlrausch: Lehrb. der prakt. Physik, 212 l. 1930.

12. §. Az előző két § alapján kisérletileg meghatározható, hogy hogyan függ a réteg relativ ellenállásváltozása $\left[\frac{\Delta r}{r}\right]$ az áram irányában történő relativ megnyúlástól [ε]. Tömör fémekre vonatkozó hasonló vizsgálatokban az effektus jellemzésére az úgynevezett feszültségi együtthatót

$$\sigma \equiv \frac{1}{S}\frac{\Delta r}{r} \tag{12}$$

szokás megadni, ahol S jelenti a próbatest megnyulását okozó feszültséget. A mi esetünkben a relativ megnyúlás [ε] a független változó s erről a feszültségre áttérni nem lehet, mert nem ismerjük a *réteg* rugalmas állandóit. Ezért a következőkben mint jellemző adatot a deformációs együtthatót

$$\omega \equiv \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta r}{r} \tag{13}$$

fogom használni.

Tekintettel (11)-re

$$\omega \equiv \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta r}{r}\,\frac{1}{2v\operatorname{tg}\vartheta}\,\frac{L^2}{L-\frac{l}{2}}\,. \tag{14}$$

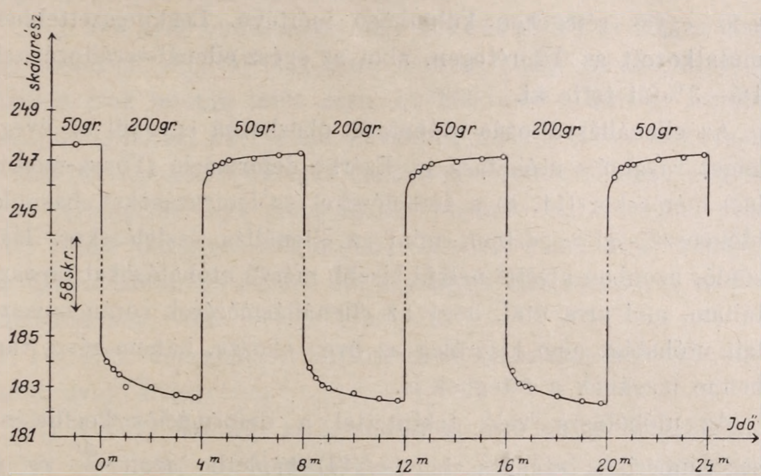
Ezen egyenlet jobboldalán csupa mérhető mennyiség szerepel.

13. §. Az alábbiakban négy platinarétegen végzett méréseimről számolok be. A rétegek jelzései $Y1$, $Y2$, $Y3$ és $T5$. Az alátámasztó kvarcékek egymástól való távolsága [L] 54·0 mm, az elektrolitikus réztől szabad platinaréteg hosszúsága [l] pedig 35—46 mm volt. Az üveglemezek szélessége 7·3—8·6 mm, vastagságuk 0·9—1·0 mm.

A rétegek mind öregek voltak: körülbelül másfél évesek; $Y2$, $Y3$ és $T5$ nem sokkal készitésük után 8 órán át 100°-on mesterségesen is öregbittettek.

Mind a négy réteget, de főként az időrendileg két elsőt [$Y1$ és $Y2$] hosszabb időn át (5—27 nap) figyeltem meg s ezalatt számos alkalommal 1—12 «ciklus»-ból (terhelés és leterhelés) álló hajlitási sorozatokat végeztem velük. A lemezek az észlelés szünetelésekor is 50 gr terhelés alatt voltak, méréskor pedig — vagy egyszerre, vagy 50 gr-onként három lépésben -- 150 gr-mal növeltem, majd ismét ugyanennyivel csökkentettem a terhelést (ciklus).

Mindjárt az *Y*1-en végzett első mérések azt mutatták, hogy a megnyúlás (a lemez réteges lapja lent) ellenállásnövekedést, az összenyomás (réteges lap fent) ellenálláscsökkenést okoz, úgy mint a tömör platinán. Ez egyezik OBERBECK-nek és BRAUNSFURTH-



1. ábra. — 1 skálarésznek $4{\cdot}70.10^{-6}$ relativ ellenállásváltozás felel meg.

nak más anyagú rétegeken szerzett tapasztalataival. A deformációs koefficiens nyujtáskor és összenyomáskor egyforma volt.

Kitűnt továbbá, hogy legalább a kisérleteimben szereplő csekély deformációk mellett az ellenállásváltozás arányos a terheléssel, tehát a deformációval is.

Az ismételt terhelések és leterhelések következtében beálló ellenállásváltozások menete egyébként is meglepően szabályos. Emellett az összes rétegeken mutatkozott bizonyos utóhatásszerű jelenség. Ez abban áll, hogy a terhelést vagy leterhelést nyomban követő ellenállásváltozás még tovább folytatódik egyre csökkenő sebességgel. Ezért az észleléskor a terhelési állapot változtatása 4 percenként történt és a terhelést meg leterhelést követőleg többször (többnyire $^1/_4$, $^1/_2$, 1, 2, 3, $3^1/_2$ perc mulva) leolvastam a galvanométer állását. Példaként közlöm az 1. ábrát, mely az $Y2$ rétegen közvetlenül egymásután végzett három ciklus lefolyását mutatja. A terhelés és leterhelés egy lépésben ($50 \rightleftarrows 200$ gr) történt. Abszcisszaként az időt, ordinátaként a galvanométeren leolvasott skálarészeket mértem fel. Látható az ellenállásváltozás szabályos menete.

Az utóhatás az egész ellenállásváltozáshoz képest nem nagy s az egyes rétegeken különböző mértékű. Legkifejezettebben mutatkozott az $Y2$ rétegen, ahol az egész ellenállásváltozásnak 1·5—3%-át tette ki.

Az ellenállásváltozás utóhatását okozhatná egyedül az üveglemez rugalmas utóhatása is. Ezért a deformáció (Young-modulus) mérésekor (11. §) a terheléseket és leolvasásokat hasonló időbeosztással végeztem, mint az ellenállás észlelésekor. Hasonló, azonban kivétel nélkül kisebb mérvű utóhatásokat tapasztaltam, ami arra utal, hogy az ellenállásmérések során tapasztalt utóhatást nem kizárólag az üveg okozza, hanem része van benne magának a rétegnek is.

Az utóhatásra való tekintettel a deformációs koefficiensek numerikus számításakor a (14) képletbe azon $\frac{\Delta r}{r}$ és ϑ értékeket írtam be, melyeket $3^1/_2$ perccel a terhelési állapot megváltoztatása után történt leolvasásokból nyertem. Ugyanis, miként az 1. ábrán látható, az ellenállásváltozás sebessége ilyenkor már igen kicsiny s ezért hosszabb ideig várni fölösleges, sőt a galvanométer járása miatt hátrányos lett volna.[1]

A három lépésben (50 gr-onként) való terheléskor beálló ellenállásváltozások összege jól egyezett az egy lépésben való

---

[1] Az 1. ábra szerinti görbékből grafikus extrapolálás útján meg lehet határozni a terhelést és leterhelést nyomban követő ellenállásváltozásokat is. Ezekből is lehet számítani a deformációs koefficienst. Azonban az extrapolálás okozta bizonytalanságot elkerülendő inkább a szövegben részletezett módon jártam el. Egyébként a kétféle módon számított koefficiensek egymástól csak kevéssé különböznek.

[$50 \rightleftarrows 200$ gr] terhelés okozta változással. Az egymást követő ciklusok is jól egyező $\frac{\Delta r}{r}$ értékeket adtak s egyáltalán az egyes rétegek deformációs koefficiensei igen jól definiált értékek voltak. Pl. az $Y2$ deformációs koefficiensét három ízben határoztam meg szabatosan egy-egy észlelési sorozattal; az eredmények: $2{\cdot}42_7$, $2{\cdot}43_3$, $2{\cdot}42_2$; — pedig az első és utolsó meghatározás között 6 nap telt el s ezalatt kisebb-nagyobb csoportokban 59 ciklust végeztem a réteggel.

Meg kell még említenem, hogy két réteg [$Y1$ és $Y2$] az első terhelések alkalmával még nem viselkedett teljesen szabályosan, hanem csak miután több órán át $250 = 50 + 200$ gr hajlító súllyal terheltem őket s ezt követőleg néhány ciklust végeztem velük. Az így kezelt rétegek szabályos viselkedésében sem gyakori terhelgetés, sem pedig újabb huzamos terhelés nem okozott többé változást. A huzamos terhelést a másik két rétegen is alkalmaztam, de kezdet óta szabályos viselkedésükre ez befolyással nem volt.

14. §. A deformációs koefficiensek számértékeiről a II. táblázat nyujt áttekintést.

A) A négy hajlított réteg adatai az első három és az utolsóelőtti *A* jelzésű sorokban találhatók. A 6. oszlop megadja az illető rétegnek az áram irányában történt átlagos relatív megnyúlását [$\bar{\varepsilon}$], mely az egy lépésben való terheléskor[1] jön létre [a (11) képlettel számítva]. A 7. oszlop a megfelelő viszonylagos ellenállásváltozást $\left[\frac{\Delta r}{r}\right]$ tartalmazza, a 8. oszlop pedig a (14) képlettel számított deformációs koefficienst, mely mind a négy esetben sok, egymástól alig különböző adat középértéke.

B) A rétegek deformációs koefficienseit számíthatjuk még a minos-tempax kisérletek során nyert $[\alpha_r^{(M)} - \alpha_r^{(T)}]$ értékekből is.[2] A tempax-üvegen 1° C-szal melegített rétegre gondolatban kényszerítsük rá a minos-üvegen ugyancsak 1° C-szal melegí-

---

1 $50 \rightleftarrows 200$ gr.

2 l. I. táblázat, 8*b* rovat.

II. táblázat.

	1	2a	2b	3	4	5	6	7	8	9
	Az észlelés módja	A harántméretek relatív megváltozása		A próbatest minősége	A réteg vagy rétegcsoport jelzése	Rétegvastagság	A hajlítás folytán keletkező		Deformációs koefficiens	
							árammal ‖ relatív megnyúlás	relatív ellenállásváltozás	észlelve	a tömör platina állandóival számítva
		$\frac{\Delta b}{b}$	$\frac{\Delta D}{D}$			$\frac{D}{m\mu}$	$10^4\,\varepsilon$	$10^4\,\frac{\Delta r}{r}$	$\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\Delta r}{r}$	
A	a réteghordozó hajlítása	$-M\varepsilon$ *	$-\mu\frac{1-M}{1-\mu}\varepsilon$ *	üvegre porlasztott vékony rétegek	*Y* 1	27	1·36	2·9	$2{\cdot}1_3$	5·0
					Y 3	12	1·47	2·85	1·93	
					Y 2	32	1·25	3·03	2·43	
B	minos-tempax mérések	ε	$-\frac{2\mu}{1-\mu}\varepsilon$		IV	13·5	—	—	2·12	7·0
					III	21	—	—	1·62	
					II	34	—	—	3·23	
					I	67	—	—	3·64	
A	a réteghordozó hajlítása				*T* 5	67	1·28	2·78	2·18	5·0
C	árammal ‖ nyújtás	$-\mu\varepsilon$	$-\mu\varepsilon$	tömör platinalemez	—	—	—	—	4·77**	

* $\varepsilon \equiv \frac{\Delta l}{l}$ jelenti az árammal párhuzamos relatív megnyúlást, μ a fém *Poisson*-féle számát, *M* az üveg *Poisson*-féle számát.

** *P. Bridgeman* méréseiből.

tett réteg méreteit. Ekkor az árammal párhuzamos relatív hosszváltozás $\varepsilon = \gamma_M - \gamma_T$ és $\frac{\Delta r}{r} = \alpha_r^{(M)} - \alpha_r^{(T)}$, tehát a deformációs koefficiens

$$\omega \equiv \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta r}{r} = \frac{\alpha_r^{(M)} - \alpha_r^{(T)}}{\gamma_M - \gamma_T} . \tag{15}$$

A minos-tempax mérésekben szereplő rétegeknek (15) szerint számított deformációs koefficiensei a II. táblázat 8. oszlopának B jelzésű soraiban találhatók. Ezen közvetett úton kapott koefficiensek kevésbbé megbízhatók, mint a hajlítási kísérletekből nyertek, hiszen elvileg két, a valóságban három rétegen végzett aránylag hosszú időt igénylő temperatúrakoefficiens-mérésekből adódnak, melyek során számos hibaforrás érvényesülhet, miként ez az I. táblázat 8*a* rovatában lévő adatok szóródásából is kitűnik; sőt az sem lehetetlen, hogy az $[\alpha_r^{(M)} - \alpha_r^{(T)}]$ differenciát nem *kizárólag* a két üvegfajta hőkiterjedési együtthatói közti különbség okozza, miként azt feltételezzük.

C) A tömör platina deformációs együtthatója 4·77. Ezt a P. Bridgeman által mért feszültségi együtthatóból[1] számítottam át, mely szabad (üveghez nem tapadó) platinalemeznek az árammal párhuzamos nyújtására vonatkozik. (Bejegyezve a II. táblázat 8. oszlopának utolsó C jelzésű sorába.)

A 8. oszlop az előzők szerint háromféle módon (A, B, C) nyert deformációs együtthatókat tartalmaz. Ezek összehasonlításakor tekintetbe kell venni, hogy az egyes módszerekben az áram irányával párhuzamos relatív megnyúlást $\left[\varepsilon \equiv \frac{\Delta l}{l}\right]$ a harántméretek (b, szélesség; D, vastagság) más-más változása kiséri, melyekről a II. táblázat 2*a* és 2*b* oszlopai adnak áttekintést. A háromféle módon nyert koefficiensek között azáltal létesítettem kapcsolatot, hogy a tömör platina elektromos állandóinak

[1] $\frac{1}{S}\frac{\Delta r}{r} = 2{\cdot}82.10^{-6} \frac{\mathrm{cm}^2}{\text{kg súly}}$, l. HB. d. Phys. (Geiger—Scheel), XIII. 34, 1928.

(P. BRIDGEMAN méréseiből)[1] és POISSON-féle számának ($\mu = 0{\cdot}38$) felhasználásával, — tekintetbe véve a $2a$ és $2b$ oszlopokban jellemzett méretváltozásokat, — kiszámítottam a hajlítási, valamint a minos-tempax mérésekben szereplő alakváltozásoknak megfelelő $\omega \equiv \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta r}{r}$ deformációs koefficienseket. Az előbbi 5·0-nak, az utóbbi 7·0-nak adódott. Bejegyezve a II. táblázat 9. oszlopába. A rétegek és a tömör platina deformációs együtthatóinak összehasonlításakor a tömör fém részéről ezek a 9. oszlop A és B soraiba bejegyzett «számított» értékek mérvadók, mert hiszen ezek adják a tömör platina deformációs koefficienseit arra az esetre, ha a tömör platinát ugyanolyan deformációknak vetnők alá, mint amilyeneket a vékony rétegek a szóbanforgó kísérletek során szenvedtek. A II. táblázat 8. és 9. oszlopainak összevetéséből látható, hogy a rétegek deformációs együtthatói mindenesetre kisebbek, mint a tömör platináé, de — legalább a vizsgált vastagságok mellett — ugyanolyan nagyságrendűek.

A hajlításból és a minos-tempax kísérletekből adódó deformációs együtthatók összehasonlítására főként a $T5$ réteg és az I. rétegcsoport alkalmasak, mert $T5$ az I. csoportnak is egyik tagja volt. Miként a II. táblázat megfelelő adataiból látható, a minos-tempax mérésekből származó koefficiens (3·64) nagyobb,

---

[1] P. BRIDGEMAN tömör platinán mérte az árammal párhuzamos nyujtást, az áramra merőleges nyujtást és a minden oldalról való összenyomást kísérő ellenállásváltozásokat. A fajlagos ellenállás relatív megváltozását bármelyik alakváltozás esetére így írja fel:

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho} = k_{\parallel}\frac{\Delta l}{l} + k_{\perp}\left(\frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta D}{D}\right)$$

ahol $k_{\parallel}$ és $k_{\perp}$ az anyagra jellemző, de az alakváltozás speciális módjától független állandók. A képlet használhatóságát az igazolja, hogy kétféle alakváltozás során végzett mérésekből meghatározott $k_{\parallel}$ és $k_{\perp}$ állandókkal kiszámítva a harmadik alakváltozásnak megfelelő $\frac{\Delta\varrho}{\varrho}$-t, a tapasztalással kielégítően egyező eredményre jutunk (lásd HB. d. Phys. XIII. 36.). A szövegben említett számításban BRIDGEMANnek az árammal párhuzamos és áramra merőleges nyujtásra vonatkozó mérési adataiból számított $k_{\parallel} = 6{\cdot}9_8$ és $k_{\perp} = 5{\cdot}2_0$ állandókat használtam fel.

mint a hajlítási kisérletekből adódó (2·18). A tömör platina adataival végzett számítás szerint is így volt ez várható (lásd a 9. oszlopot!). Sőt az észlelt koefficiensek aránya $\left[\frac{3{\cdot}64}{2{\cdot}18}=\frac{7}{4{\cdot}2}\right]$ is jól egyezik a tömör platina adataiból számított koefficiensek arányával $\left[\frac{7}{5}\right]$. Ezen jó egyezésnek azonban addig nem kivánok jelentőséget tulajdonítani, míg ezt több rétegen végzett mérések meg nem erősitik.

Ami a deformációs együtthatónak a rétegvastagságtól való függését illeti, csak az I.—IV. sz. rétegcsoportok ill. az *Y*2 és *Y*3 jelzésű rétegek hasonlíthatók össze egymással külön-külön, mert csakis ezek készültek és kezeltettek egyformán. A II. táblázatban lévő 8. oszlop megfelelő adatainak tanusága szerint a deformációs együttható a rétegvastagsággal együtt kisebbedik, egyezésben a Braunsfurth-féle összenyomási kisérletekkel.

*

Vizsgálataimat a kir. m. Pázmány Péter Tudományegyetem Kisérleti Fizikai Intézetében végeztem. Az intézet igazgatójának, dr. Tangl Károly egyetemi ny. r. tanár úrnak e helyen is mély hálával mondok köszönetet, hogy dolgozatom tárgyára figyelmemet felhívta és munkámat állandó érdeklődésével s értékes tanácsaival támogatta.

Rétegeimet Kisfaludy P. István okl. gépészmérnök úr készitette technikai porlasztó berendezésével, a rétegvastagságokat is ő határozta meg. Szíves fáradozását melegen köszönöm.

Baintner Géza.

ÜBER DEN EINFLUSS DER TEMPERATUR- UND FORMÄNDERUNG AUF DEN ELEKTRISCHEN WIDERSTAND DÜNNER PLATINSCHICHTEN.

1. Es wurde für auf Minos- und Tempaxglasstreifen kathodisch zerstäubte Platinschichten (13·5—67 mμ) experimentell nachgewiesen, dass deren Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes bzw. des spezifischen Widerstandes von der Unterlage abhängt. Als Ursache wird

(in Übereinstimmung mit R. S. BARTLETT und G. BRAUNSFURTH) die verschieden grosse, durch Temperaturänderung hervorgerufene Deformation der Platinschichten auf den beiden Unterlagen betrachtet. (Vgl. G. BAINTNER, ZS. f. Phys. **73**, 691, 1932.)

2. Es wurde auch unmittelbar der Einfluss einer Formänderung auf den Widerstand (r) dünner Platinschichten (12—67 mμ) untersucht, indem die Glasunterlage einer Biegung unterworfen wurde, wobei die anhaftende Schicht eine relative Längenänderung (ε) litt, deren Wert auf Grund der technischen Biegungslehre experimentell ermittelt wurde.

3. Die Widerstandsänderung war bei den vorgenommenen kleinen (Glas!) Deformationen proportional derselben. Die Widerstandsänderung zeigte eine kleine Nachwirkung, doch verhält sie sich bei nacheinander folgenden Biegungen überraschend regelmässig und reversibel (siehe Fig. 1). Die Deformationskoeffizienten $\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta r}{r}\right]$ der einzelnen Schichten erwiesen sich als wohldefinierte Grössen, trotz häufiger Beanspruchung der Schichten.

4. Deformationskoeffizienten wurden auch aus den Minos-Tempax Messungen (siehe unter 1.) ermittelt. Da aber bei diesen Messungen die Querdimensionen der Schicht sich anders verhalten als bei den Biegungsversuchen, ist nach einer mit den Konstanten des massiven Platins durchgeführten Berechnung zu erwarten, dass die aus den Minos-Tempax Messungen ermittelten Koeffizienten grösser ausfallen, als die aus den Biegungsversuchen stammenden. Der experimentelle Befund an einer Schicht, die nach beiden Verfahren untersucht wurde, bestätigt diese Erwartung.

5. Mit abnehmender Schichtdicke wird der Deformationskoeffizient kleiner.

6. Ein in geeigneter Weise vorgenommener Vergleich zeigte, dass die Deformationskoeffizienten der Schichten kleiner sind als der Wert für massives Platin, doch sind sie von derselben Grössenordnung.

G. Baintner.

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1931. évi XXXV. matematikai tanulóversenyről.

A Társulat XXXV. matematikai tanulóversenyét 1931. október 24-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 21, Szegeden 12 versenyző jelentkezett; beadatott 16, illetőleg 7 dolgozat.

A verseny tételei a következők voltak:

1. Legyen p a 2-nél nagyobb törzsszám. Bebizonyítandó, hogy $\frac{2}{p}$ egy és csakis egyféleképpen írható a

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

alakban, ahol x és y egymástól különböző pozitív egész számok.

2. Legyenek a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 és b olyan egész számok, hogy

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2.$$

Bebizonyítandó, hogy e számok nem lehetnek mindannyian páratlanok.

3. Egy egyenesen adva van két pont, A és B. Meghatározandó az egyenesen a P pont úgy, hogy

$$\frac{1}{1+\overline{AP}} + \frac{1}{1+\overline{BP}}$$

a lehető legnagyobb legyen. Itt $\overline{AP}$ és $\overline{BP}$ az illető egyenesdarabok puszta hosszának mérőszámát jelenti, tehát nem-negatív számok.

A dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság Rados Gusztáv elnöklete alatt a következő tagokból állott: Éber József, Faragó Andor, Fejér Lipót, Haar Alfréd, Kürschák József, Szücs Adolf és Kőnig Dénes előadó.

E Bizottság f. é. november hó 2-án tartott ülésében Kőnig Dénes jelentésének meghallgatása és a szóbajövő dolgozatok áttekintése után egyhangúlag javasolja a Választmánynak, hogy a br. Eötvös Loránd jutalom első díját Sebők György-nek, a budapesti Berzsenyi reálgimnáziumban Virág Oszkár tanítványának ítélje oda, aki az első két feladatot dícséretreméltó rövidséggel és szabatossággal oldotta meg, míg a harmadik feladatnak tőle adott megoldása még kiegészítésre szorul. A második díjjal való jutalmazásra ERNST FRIGYESnek, a pécsi Széchenyi gyakorlóreáliskolában BÓKA ISTVÁN tanítványának dolgozatát ajánlja, aki az első két feladatot kissé körülményesebben, de azért helyesen oldotta meg, míg a harmadik feladat megoldása nála is hiányos. Dícséretre ajánlja a Bizottság DÉNES PÉTER-t, aki az egyedüli, aki a harmadik feladatot teljesen megoldotta, viszont az első két feladatra adott megoldása igen zavaros.

A Bizottság ezúttal is fölötte kívánatosnak tartja hangsúlyozni, hogy a középiskolai oktatás a tanulók fogalmazásbeli készségére nagyobb gondot fordítson.

A Bizottság e javaslatát a Választmány egyhangulag elfogadta.

Az 1931. évi XXXV. matematikai tanulóversenyen díjat nyert dolgozatok.[1]

Sebők György dolgozata.

I. Legyen p a 2-nél nagyobb törzsszám. Bebizonyítandó, hogy $\frac{2}{p}$ egy és csakis egyféleképpen írható a

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

alakban, ahol x és y egymástól különböző pozitív egész számok.

Írjuk fel az egyenletet:

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy},$$

$$p\,(x+y)=2xy.$$

Mivel p nem lehet páros szám, kell, hogy p az x-nek vagy y-nak osztója legyen, ha x és y egész számok. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy: $x=ap$, ahol, ha x pozitív egész szám, a is az és fordítva.

$$p\,(x+y)=2xy,\quad p\,(ap+y)=2apy,\quad ap+y=2ay,$$

$$y=\frac{ap}{2a-1}.$$

Az $a=1$ esetet ki kell zárnunk, mert ekkor x egyenlő lenne p-vel, tehát a nem lehet $2a-1$ többszöröse, sőt közös osztója sem lehet a-nak és $(2a-1)$-nek, és mivel p törzsszám, a-nak csak ez az értéke lehet:

[1] A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

$$p = 2a - 1, \quad a = \frac{p+1}{2},$$

$$x = \frac{p+1}{2}p, \quad y = \frac{p+1}{2}.$$

Mivel ezek az x és y értékek mindig előállíthatók és pozitív egész számok, mindig van megoldás, a levezetésből látható, hogy csak ez az értékpár megfelelő.

II. Legyenek a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 és b olyan egész számok, hogy

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2.$$

Bebizonyítandó, hogy e számok nem lehetnek mindannyian páratlanok.

Tegyük fel, hogy az összes szám páratlan, bebizonyítjuk, hogy abszurdumra jutunk.

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2,$$

$$5b^2 = 5b^2,$$

$$(b^2 - a_1^2) + (b^2 - a_2^2) + (b^2 - a_3^2) + (b^2 - a_4^2) + (b^2 - a_5^2) = 4b^2 \ldots 1)$$

A baloldalon páratlan számok négyzeteinek különbségei állanak. Ezek pedig mindig oszthatók 8-cal.

Ugyanis legyen két páratlan szám $(2k+1)$ és $(2l+1)$. Akkor

$$(2k+1)^2 - (2l+1)^2 = 4(k+l+1)(k-l),$$

bármilyen egészszámok legyenek is k és l, vagy $k+l+1$, vagy $k-l$ osztható 2-vel és így a négyzetek különbsége 8-cal.

Ennélfogva 1) baloldala osztható 8-cal, viszont a jobboldal, kikötésünk szerint, hogy b páratlan, nem osztható 8-cal. Ez pedig lehetetlen. Szükséges tehát, hogy a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b számok között páros is legyen.

III. Egy egyenesen adva van két pont, A és B. Meghatározandó az egyenesen a P pont úgy, hogy:

$$\frac{1}{1+\overline{AP}} + \frac{1}{1+\overline{BP}}$$

a lehető legnagyobb legyen. Itt $\overline{AP}$ és $\overline{BP}$ az illető egyenesdarabok puszta hosszának mérőszámát jelenti, tehát nem-negatív számok.

a) A P pontnak okvetlenül az AB közben kell lennie. Ugyanis tegyük fel, hogy a P' pont az AB-n kívül, mondjuk B irányában van, vegyünk fel egy P pontot ekkor úgy B-től az A irányában, hogy $BP = BP'$. Ekkor

$$\frac{1}{1+\overline{AP}} + \frac{1}{1+\overline{BP}} > \frac{1}{1+\overline{AP'}} + \frac{1}{1+\overline{BP'}},$$

mert

$$\overline{BP} = \overline{BP'} \text{ és } \overline{AP} < \overline{AP'}, \ \overline{AP} = \overline{AP'} - \overline{PP'} = \overline{AP'} - 2\overline{BP'}.$$

Hasonlóan bizonyítjuk, ha P' az AB-n kívül A irányában van.

b) Tehát bárhol veszünk fel az AB közön kívül egy P' pontot mindig találhatunk az AB közön belül egy P pontot (esetleg az előbb említett eljárás többszörös ismétlésével), hogy

$$\frac{1}{1+\overline{AP}}+\frac{1}{1+\overline{BP}}>\frac{1}{1+\overline{AP'}}+\frac{1}{1+\overline{BP'}}.$$

Viszont, ha P a közön belül van

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AB},$$

$$\frac{1}{1+\overline{AP}}+\frac{1}{1+\overline{BP}}=\frac{2+\overline{AB}}{1+\overline{AB}+\overline{AP}.\overline{BP}}.$$

A nevezőnek legkisebb értéke pedig akkor van, ha vagy $\overline{AP}=0$, vagy $\overline{BP}=0$. Tehát

$$\frac{1}{1+\overline{AP}}+\frac{1}{1+\overline{BP}}$$

akkor a legnagyobb, ha P pont vagy A-ba, vagy B-be esik.

c) A tétel *b)* részét még a következőképpen is igazolhatjuk.

Ha az *a)* részben meghatározott P' pont a B-hez közeledik, AP' és BP' kisebbednek, tehát

$$\frac{1}{1+\overline{AP'}}+\frac{1}{1+\overline{BP'}} \quad \text{növekedik.}$$

Tehát, ha a P' egészen a B-be esik, az *a)*-ban meghatározott P pont is B-be jut. Ekkor

$$\frac{1}{1+\overline{AP'}}+\frac{1}{1+\overline{BP'}}=\frac{1}{1+\overline{AP}}+\frac{1}{1+\overline{BP}},$$

tehát most nem találhatunk oly P pontot a P' helyett, amelyhez tartozó kifejezés nagyobb lenne a P'-höz tartozóénál.

Ernst Frigyes dolgozata.

I.
$$\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},$$
$$\frac{2}{p}=\frac{x+y}{xy},$$
$$\frac{p\,(x+y)}{2xy}=1.$$

$2xy$ osztható p-vel. Az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy x osztható p-vel. Legyen

$$\frac{x}{p}=n,\quad x=np.$$

$$\frac{p\,(np+y)}{2npy}=\frac{np+y}{2ny}=1,$$

$$np+y=2ny,$$

$$2n=\frac{np}{y}+1.$$

$\frac{np}{y}$-nak egész számnak kell lennie. Két eset van. Vagy y osztható p-vel, vagy n osztható y-nal.

1) $$\frac{y}{p}=m,\quad \frac{x}{p}=n.$$

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{mp}+\frac{1}{np},$$

$$2=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}.$$

Ez csak úgy lehetséges, ha $m=n=1$, de akkor $x=y$, ez pedig a feltétellel ellenkezik.

2) $$\frac{n}{y}=E.$$

$$\frac{x}{p}=n=Ey,\quad x=Epy.$$

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{Epy}+\frac{1}{y},$$

$$\frac{2}{p}=\frac{1+Ep}{Epy},$$

$$2Ey=1+Ep,$$

$$E\,(2y-p)=1.$$

Mivel E és $2y-p$ egész számok,

$$E=1,$$

$$2y-p=1,$$

$$y=\frac{1+p}{2},$$

$$x=Epy=p\,\frac{1+p}{2}.$$

Mivel p a 2-nél nagyobb törzsszám, páratlan, s így $\frac{1+p}{2}$ egész szám.

Tehát $\frac{2}{p}$ akkor és csak akkor írható az $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ alakban, ahol x és y egymástól különböznek, ha

$$x = p\,\frac{1+p}{2},$$

$$y = \frac{1+p}{2}.$$

II. Legyen

$$\begin{aligned} a_1 &= 2n_1 + 1 \\ a_2 &= 2n_2 + 1 \\ a_3 &= 2n_3 + 1 \\ a_4 &= 2n_4 + 1 \\ a_5 &= 2n_5 + 1 \\ b &= 2m + 1 \end{aligned}$$

tehát mind páratlan szám.

$$(2n_1+1)^2+(2n_2+1)^2+(2n_3+1)^2+(2n_4+1)^2+(2n_5+1)^2=(2m+1)^2,$$

$$4\,(n_1^2+n_1+n_2^2+n_2+n_3^2+n_3+n_4^2+n_4+n_5^2+n_5)+5=4\,(m^2+m)+1,$$

$$n_1(n_1+1)+n_2(n_2+1)+n_3(n_3+1)+n_4(n_4+1)+n_5(n_5+1)+1=$$
$$=m\,(m+1).$$

Mivel $k\,(k+1)$ feltétlenül páros szám, páros számok összegei párosak, az egyenlőség egyik oldalán páros, a másikon páratlan szám áll: $2A+1=2B$. Ez ellentmondás.

III. Legyen $\overline{AB}=a$, és $AP=x$.

Két esetet különböztethetünk meg, P lehet A és B pontok között, és a vonaldarabon kívül. Ha P a vonaldarabon kívül van, a

$$\lambda = \frac{1}{1+\overline{AP}} + \frac{1}{1+\overline{BP}}$$

kifejezés ugyanazon $\overline{AP}$ értéknél mindenesetre kisebb, mint olyan P-re, amely AB között van.

Legyen P_1 az A és B között, P_2 az AB-n kívül, és $\overline{AP_1}=\overline{AP_2}=x$.

$$\lambda_1 = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+a-x},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+a+x}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\lambda_1 \geqq \lambda_2$, kivéve, mikor $x=0$, de ez azon csoport határesete, midőn P az AB belsejében van.

Tehát csak azon esetekkel foglalkozunk, melyeknél P az AB-n belül van.

$$\lambda = \frac{1}{1+AP} + \frac{1}{1+BP} = \frac{2+AP+BP}{1+AP+BP+AP.BP} = \frac{2+AB}{1+AB+AP.BP},$$

$$\lambda = \frac{2+AB}{1+AB+AP.BP}.$$

λ értéke akkor legnagyobb, amikor a tört számlálója legnagyobb, nevezője legkisebb. A számláló értéke konstans, a nevezőben egy változó érték van, $AP.BP$. Ennek lehető legkisebb értéke nulla, amikor

$$\text{vagy} \quad AP = 0$$
$$\text{vagy} \quad BP = 0.$$

Tehát λ értéke akkor legnagyobb, mikor P az A vagy B ponttal azonos.

Jelentés az 1932. évi XXXVI. matematikai tanulóversenyről.

A Társulat XXXVI. matematikai tanulóversenyét 1932. október 15-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 21, Szegeden 4 versenyző jelentkezett; beadatott 16, illetőleg 3 dolgozat.

A verseny tételei a következők voltak:

I. Bebizonyítandó, hogy ha a b természetes szám osztható az a természetes számnak n-edik hatványával, akkor

$$(a+1)^b - 1$$

osztható a-nak $(n+1)$-edik hatványával.

II. Legyen az ABC háromszögben $AB \neq AC$. Messe az A szögpontból kiinduló belső szögfelező a BC oldalt a P pontban. Bebizonyítandó, hogy

1. P a BC oldal M felezőpontja és a BC-re merőleges magassági vonal T talppontja közé esik;

2. ha a $BAC\sphericalangle$ hegyes szög, akkor

$$MAP\sphericalangle < PAT\sphericalangle.$$

III. Legyenek α, β, γ valamely hegyesszögű háromszög szögei. Bebizonyítandó, hogy ha

$$\alpha < \beta < \gamma,$$

akkor

$$\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$

A dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság Rados Gusztáv elnöklete alatt a következő tagokból állott: Éber József, Faragó Andor, Fejér

LIPÓT, KÜRSCHÁK JÓZSEF, SZÜCS ADOLF és KŐNIG DÉNES előadó. 1932. október 29-én tartott ülésén a következő javaslatban állapodott meg.

A Bizottság sajnálattal állapítja meg, hogy a Társulat XXXVI. matematikai tanulóversenye úgy a résztvevők száma, valamint az elért eredmények tekintetében hanyatlást mutat, úgyhogy az első díj odaítélésétől ez alkalommal el kellett tekinteni. A beérkezett dolgozatok közül a második és harmadik feladat helyes megoldásával kitűnik ALPÁR LÁSZLÓ, a pesti izraelita alapítványi reálgimnáziumban SZELES HENRIK tanitványa, akinek a bizottság a második br. Eötvös Loránd-díj odaítélését javasolja. Dícsérettel említi SCHÜTZ GYÖRGY-nek a harmadik feladatra adott ötletes megoldását. A Bizottság újból hangsúlyozza, hogy kívánatos volna a középiskolai oktatásban a fogalmazás szabatosságára nagyobb súlyt helyezni.

A Bizottság e javaslatát a Választmány 1932. november 10-én tartott ülésén egyhangúlag elfogadta.

Az 1932. évi XXXVI. matematikai tanulóversenyen díjat, illetve dicséretet nyert dolgozatok.[1]

Alpár László dolgozata.

I. Bebizonyítandó, hogy ha a b természetes szám osztható az a természetes számnak n-ik hatványával, akkor

$$(a+1)^b - 1$$

osztható a-nak $n+1$-edik hatványával.

II. Legyen az $ABC\triangle$-ben $AB \neq AC$. Messe az A szögpontból kiinduló belső szögfelező a BC oldalt a P pontban. Bebizonyítandó, hogy

1. P a BC oldal M felezőpontja és a BC-re merőleges magassági vonal T talppontja közé esik;

2. Ha $\widehat{BAC}$ hegyes szög, akkor

$$\widehat{MAP} < \widehat{PAT}.$$

III. Legyenek a, β, γ valamely hegyesszögű háromszög szögei. Bebizonyítandó, hogy ha

$$a < \beta < \gamma,$$

akkor

$$\sin 2a > \sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$

[1] A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

Megoldás.

I. Ismeretes a következő egyenlőség

$$\alpha^k - \beta^k = (\alpha - \beta)(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{k-2} + \beta^{k-1})$$

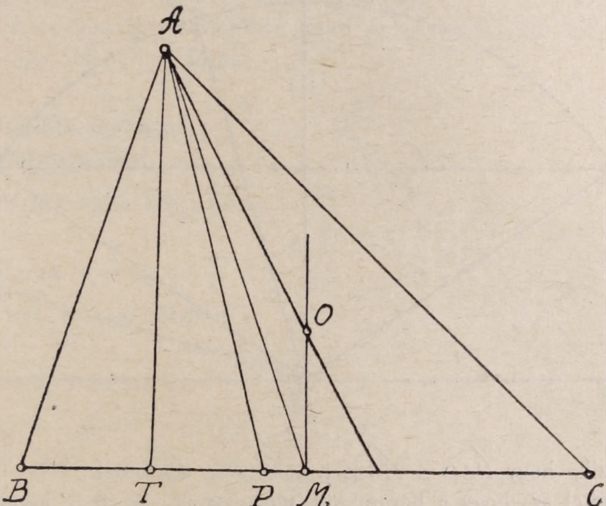
és így

$$(a+1)^b - 1 = a[(a+1)^b + (a+1)^{b-1} + (a+1)^{b-2} + \cdots + (a+1)].$$

Legyen $b = ma^n$, akkor

$$(a+1)^b - 1 = a[(a+1)^{ma^n-1} + (a+1)^{ma^n-2} + \cdots + (a+1)].$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés, azonban megadja m-szer az $(a+1)$ hatványmaradékait az a^n modulusra vonatkozólag. Ezen maradékok ösz-



szege azonban osztható a modulussal, az a^n-nel, tehát az egész szorzat osztható a^{n+1}-gyel.

II. 1. A háromszög belső szögfelezőjére ismeretes a következő összefüggés:

$$AB : AC = BP : CP.$$

Legyen jelen esetben $AB < AC$, akkor a fenti aránypárból következik, hogy $BP < CP$ és így mivel $BP + CP = BC$,

$$BP < \tfrac{1}{2} BC = BM,$$

tehát a P pont M és B közé esik.

Másrészt, ha a háromszög szögeit α, β, γ-val jelöljük, akkor

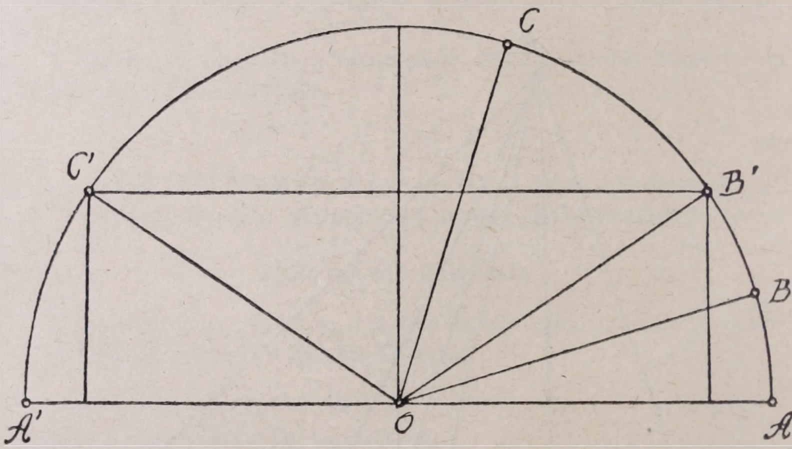
$$\widehat{BAT} = 90° - \beta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} - \beta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma - \beta}{2}.$$

Viszont a $BA < CA$ feltételből következik, hogy $\beta > \gamma$ azaz $\gamma - \beta < 0$ és így

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma - \beta}{2} = \widehat{BAT} < \frac{\alpha}{2}.$$

Minthogy pedig $\widehat{BAP} = \frac{\alpha}{2}$, ezért AP a BC-t T és M között metszi.

2. Legyen a háromszög körülírt körének középpontja O, akkor az OA egyenes BC-t M és C között fogja metszeni, t. i. az A pont az OM egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik, mint B. Ebből pedig az



következik, hogy $\widehat{PAO} > \widehat{MAP}$, t. i. $\widehat{MAP}$ a $\widehat{PAO}$-nak csak része, de ismert tétel az, hogy a háromszög ugyanazon csúcsából kiinduló magassági vonal és a körülírt kör sugara által képezett szöget az e csúcsból kiinduló szögfelezők felezik, vagyis

$$\widehat{PAO} = \widehat{PAT} > \widehat{MAP}.$$

III. Nyilván β is γ is, nagyobb mint 45°, t. i. ha $\alpha = 45° - \varepsilon_1$ és $\beta = 45° - \varepsilon_2$, akkor $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 90° + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 90°$, tehát, ha $\beta > 45°$, akkor γ még inkább nagyobb 45°-nál.

Legyen már most az egységsugarú kör középpontja O, a 0° végpontja A és vegyünk fel úgy a 0° és $\frac{\pi}{2}$ között egy B és egy C pontot, hogy $\widehat{AOB} = 45° - \varepsilon$ és $\widehat{COA} = 45° + \varepsilon$ legyen. Vegyük fel a körön még úgy a B' és C' pontokat, hogy

$$\overset{\frown}{AB'} = 2\overset{\frown}{AB} \quad \text{és} \quad \overset{\frown}{AC'} = 2\overset{\frown}{AC}$$

legyen.

Legyen továbbá a körnek és OA-nak a másik metszéspontja A', akkor $\widehat{B'OA} = 90° - 2\varepsilon$ és $\widehat{C'OA} = 90° + 2\varepsilon$, tehát $\widehat{C'OA'} = 90° - 2\varepsilon = \widehat{B'OA}$. Ebből következik, hogy a B' és C' pontok az AA' egyenestől egyenlő távolságra vannak, azaz a $\widehat{B'OA}$ és $\widehat{C'OA}$ szögek sinusai egyenlők.

Már most ha $\alpha < 45°$, akkor $\widehat{BOA}$ legyen α, akkor β nagyobb mint $\widehat{COA}$, tehát a 2β végpontja C' alá fog esni, azaz $\sin 2\beta < \sin 2\alpha$ és γ végpontja még a β végpontja alá esik, tehát $\sin 2\beta > \sin 2\gamma$.

Ha $\alpha \geqq 45°$, akkor α végpontja mindig a β-é, ezé pedig mindig a γ fölött van. Tehát $\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma$.

Ha a háromszög tompaszögű, akkor β is lehet kisebb $45°$-nál és így $\sin 2\beta$ nagyobb, mint $\sin 2\alpha$.

Schütz György dolgozatából.[1]

Az $ACBD$ idom kétszeres területe:

$$b^2 \sin 2\alpha + a^2 \sin 2\beta.$$

Az $ABCE$ idom kétszeres területe:

$$a^2 \sin 2\gamma + c^2 \sin 2\alpha.$$

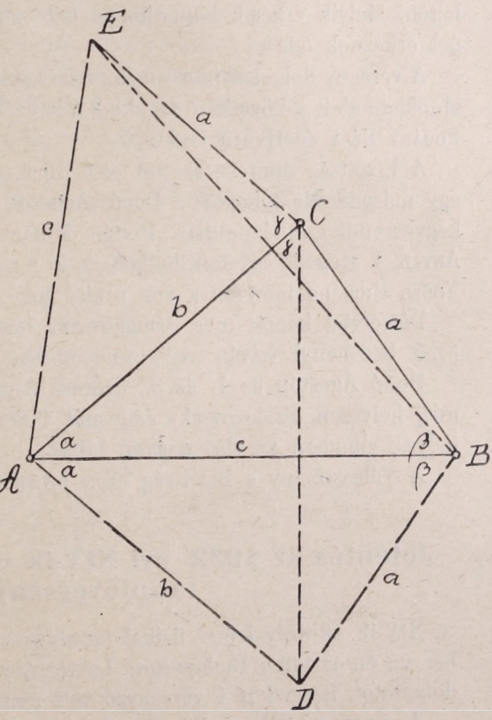
A két idom területe egyenlő, tehát

$$b^2 \sin 2\alpha + a^2 \sin 2\beta =$$
$$= a^2 \sin 2\gamma + c^2 \sin 2\alpha,$$
$$\sin 2\alpha\,(b^2 - c^2) =$$
$$= a^2 (\sin 2\gamma - \sin 2\beta).$$

De $b < c$ s így a baloldal negatív. Hogy a jobboldal is negatív legyen, az csak úgy lehetséges, hogy

$$\sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$

Tételünk bizonyítva van.



---

[1] E dolgozatból csak a harmadik feladat megoldását közöljük, amely dícséretet nyert.

Jelentés az 1931. évi XIII-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyről.

A Társulat XIII-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyét 1931. október 31-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejüleg, Budapesten 10, Szegeden 4 versenyző jelentkezett; beadtak Budapesten 10, Szegeden 2 dolgozatot.

A verseny tételei a következők voltak:

1. A kisérletezőnek voltmétert, ismert r ellenállást és galvánelemekből álló telepet adunk. Meg tudja-e határozni a telep belső ellenállását?

2. Mennyi hő fejlődik, ha 800 m magasan 180 km. óránkénti sebességgel repülő gépről a tenger fenekéig esik 100 kg-os vastömeg? (A tenger mélysége 500 m.)

3. 4 cm átmérőjű, 1 kg tömegű tömör henger és ugyanolyan külső méretű és tömegű, vékony falu cső egyszerre indul és legurul 1 m magas lejtőn. Melyik érkezik hamarább a lejtő aljára és mekkora időkülönbséggel érkeznek oda?

A verseny dolgozatainak megbírálására kiküldött Bizottság TANGL KÁROLY elnöklete alatt a következő tagokból állott: FARAGÓ ANDOR, MIKOLA SÁNDOR, POGÁNY BÉLA és RYBÁR ISTVÁN.

A Bizottság döntése szerint első díjat senki sem kapott, ellenben egy-egy második díjat kaptak: BUDÓ ÁGOSTON joghallgató, ki a budapesti kegyesrendi gimnáziumban PINTÉR MIHÁLY tanítványa volt és STRAUSZ ANTAL, a szegedi egyetem hallgatója, ki a zalaegerszegi reálgimnáziumban VOGEL RICHÁRD tanítványa volt s aki Szegeden vett részt a versenyben. Dícséretet kapott még SZIDAROVSZKY JÁNOS, mérnökhallgató, a budapesti Széchenyi István reálgimnáziumban ESKULITS FERENC tanítványa.

Budó Ágoston az 1. és 3., Strausz Antal az 1. és 2. feladatot oldotta meg helyesen, Szidarovszky Jánosnál viszont a 2. és 3. feladat megoldása helyes, ellenben az első nagyon hibás.

A Választmány a Bizottság ezen javaslatához egyhangúan hozzájárult.

Jelentés az 1932. évi XIV-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyről.

XIV-ik «Károly Irén» fizikai tanulóversenyét a Társulat 1932. október 22-én tartotta. Budapesten 14 versenyző jelentkezett és beadtak 12 dolgozatot, Szegeden 4 versenyző vett részt és beadtak 2 dolgozatot.

A verseny tételei a következők voltak:

1. Ha valamely oknál fogva megváltoznék a Föld tengelykörüli forgásának szögsebessége, mely jelenségekben volna ez észrevehető?

2. A yo-yot felhuzott állapotában nyugalomban lévő rugósmérlegre akasztjuk. Mit mutat a rugósmérleg, miközben a yo-yot elengedve az lecsavarodik, illetőleg felcsavarodik? (Jelöljük a yo-yo tömegét m-el, a fonalának hosszúságát s-el és legördülésének vagy felgördülésének idejét t-vel.)

3. 25° Celsius hőmérsékletű levegőben n=60% relatív nedvességű vízgőz van. Állandó térfogat mellett mennyire kell a levegő és vízgőz keverékének hőmérsékletét lehűteni, hogy a vízgőz telítésbe jöjjön?

A verseny dolgozatainak megbírálására kiküldött Bizottság TANGL KÁROLY elnöklete alatt: CSÁSZÁR ELEMÉR, MIKOLA SÁNDOR, POGÁNY BÉLA, RYBÁR ISTVÁN és SZABÓ GÁBOR tagokból állott.

A Bizottság döntése szerint az első díj mellőzésével második díjat kaptak: FRŐHLICH KÁROLY, ki a Mátyás király reálgimnáziumban MAGYAR KÁLMÁN tanítványa volt és LENGYEL SÁNDOR, ki a budapesti református gimnáziumban ABRAHÁM ISTVÁN tanítványa volt.

FRŐHLICH KÁROLY a 3. feladat megoldásával tünt ki, LENGYEL SÁNDOR pedig az egyedüli, aki a 2. feladat első részét helyesen oldotta meg.

Dícséretben részesültek még: PAPP ZSIGMOND, aki a Kölcsey Ferenc gimnáziumban MENDE JENŐ tanítványa volt és ZÁBORSZKY JÁNOS, aki az I. ker. Cisztercita-rendi Szt. Imre gimnáziumban LOVASS AMBRÓ tanítványa volt.

A Bizottság javaslatát a Választmány egyhangulag elfogadta.

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1932. május 21-i XXXVII. közgyűlés.

RADOS GUSZTÁV elnöki megnyitó beszéde:

«*Tisztelt br. Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat!*

Társulati életünk 42. évének küszöbén megnyitván a szabályszerűen összehívott 1932. évi közgyűlésünket, Társulatunk alapszabályainak értelmében megállapítom annak határozatképességét.

Kedves kötelességet teljesítek, amidőn a megjelent tagtársainkat szeretettel üdvözlöm, különös melegséggel azokat, akik a vidékről idefáradtak és ezzel társulati életünk iránti élénk érdeklődésüknek tanújelét adták.

Visszatekintve a lefolyt társulati évre, sajnálattal kell megállapítanunk, hogy az egész világra ólomsúllyal nehezedő gazdasági válság sorvasztó hatását velünk is érezteti, amennyiben a pénzforrásaink lassú elapadása folytán folyóiratunkat csak oly korlátolt terjedelemben adhatjuk ki, hogy az egyik főfeladatának, t. i. tagtársainkat a tőlünk művelt tudományágakban való legfontosabb haladásokról terjedelmesebb ismertető cikkekben is értesíteni, már alig képes megfelelni. E nyomasztó helyzetben segítségünkre sietett a Magyar Tud. Akadémia, mely méltányolva folyóiratunk multját és a fizika és matematika művelése körül szerzett érdemeit, ezt jelentékeny segélyben részesítette. E segítségre való készségéért, hazánk legelső tudós társaságának annyival inkább tartozunk hálával, mert tudjuk, hogy a Magyar Tud. Akadémia is ezidőszerint átmeneti anyagi nehézségekkel küzd, és amidőn Akadémiánknak e nagylelkű támogatásáért meleg köszönetünket kifejezzük, legyen szabad remélnünk, hogy ezt a jövőben sem fogja megvonni komoly tudományos munkát végző Társulatunktól. Fokozza e hálaérzetünket az a körülmény, hogy a Magyar Tud. Akadémia sikeres mozgalmat indított érdemekben gazdag volt elnöke és társulatunk nagy alapítója, br. EÖTVÖS LORÁND síremlékének felállítása érdekében. E síremlék, melyet már az idei ősszel lelepleznek, hirdetni fogja a nemzet háláját a nagy fizikusnak elévülhetetlen érdemei iránt, amelyekkel hazánknak széles e világon dicsőséget szerzett.

Mély szomorúsággal emlékszem meg e helyen is arról a súlyos veszteségről, melyet a magyar tudományos élet és vele együtt Társulatunk is két kiváló tagtársunk elhúnytával szenvedett.

Az egyik br. HARKÁNYI BÉLA, a csillagászatnak jeles művelője, aki mágnás létére és anyagi függetlensége mellett, nem a politika porondján kereste az ott sokkal könnyebben elérhető babért, hanem a legnagyobb önzetlenséggel a kisebb külső sikerrel kecsegtető tudományművelést választotta élethivatásul, amely hivatásában komoly munkával és értékes eredményekkel elnyerte a világ osztatlan elismerését.

A másik WITTMANN FERENC, a magyar elektrotechnikusoknak kiváló tanítómestere, aki úgy a kutatás terén, de különösen kiváló tanári működésével elévülhetetlen érdemeket szerzett.

Mindkét elhúnyt társunknak emlékét hálával, tisztelettel őrizzük lelkünkben.

Ha az a kép, melyet Társulatunk jelen helyzetéről nyujtottam, nem épen rózsás, mégis bizalommal tekintek a jövő elé. Hiszen a mi hivatásunk: az igazság keresése és hirdetése, a tudomány művelése és közlése, az ifjúság nevelése a legmagasztosabb hivatások egyike. Ez a tudat lelkesítsen bennünket a további munkára és adjon erőt az el nem maradható jobb jövő bekövetkezéséig a kitartásra is.

Ezzel a kívánsággal nyitom meg az 1932. évi közgyűlésünket.»

RADOS GUSZTÁV elnöki megnyitója után POGÁNY BÉLA titkári jelentésében beszámol az 1931—32. társulati év főbb mozzanatairól és adatairól:

Társulatunk az év folyamán 11 előadó- és 3 választmányi ülést tartott. Az előadó üléseken 15 előadás hangzott el, melyek közül 8 matematikai és 7 fizikai tárgyú volt. Ünnepi keretek közt folyt le 1932 febr. 18-i ülésünk, melyen elnökünknek, RADOS GUSZTÁVnak 70. születése napját ünnepeltük. A titkár beszámol a tanulóversenyek eredményeiről továbbá jelenti, hogy az 1932. évi Kőnig Gyula-jutalomérmet EGERVÁRY JENŐ tisztelt Tagtársunk kapta. Kegyeletes szavakkal emlékezik meg HARKÁNYI BÉLA bárónak és WITTMANN FERENCnek elhunytáról.

A közgyűlés tudomásul veszi NAGY L. JÓZSEF leköszönését a pénztárosi tisztségről, melyet távoli lakhelye miatt már nem vállalhatott. Évtizedes buzgó és önzetlen munkájáért a közgyűlés jegyzőkönyvi köszönetet szavaz. Helyére a közgyűlés SZABÓ GÁBORt választja meg pénztárosául és NAGY JÓZSEFET SZABÓ GÁBOR helyére a választmányi tagok közé iktatja.

A lelépő választmányi tagokat, nevezetesen EGERVÁRY JENŐt, FRÖHLICH KÁROLYt, HAAR ALFRÉDet, JORDAN KÁROLYt, LÓKY BÉLÁt, TASS ANTALt a közgyűlés újra megválasztja és HARKÁNYI BÉLA báró helyére PATAI IMRÉt választja meg.

A pénztárosi jelentés a pénztárral ideiglenesen megbízott Fröhlich Károly választmányi tag betegsége folytán az 1932. november 26-án tartott rendkívüli közgyűlésre halasztatott; a zárszámadást jelen füzetben közöljük.

Az 1931—32. társulati évben tartott előadások.

1931. nov. 12-én: A tanulóversenyek eredményeinek kihirdetése. Riesz Frigyes: Monoton függvények differenciálásáról.

1931. nov. 26-án: L. L. Silverman (a Dartmouth College tanára): Certain Definitions of Summability of Divergent Series. (Divergens sorok szummabilitásának néhány értelmezéséről.)

1931. dec. 10-én: Novobátzky Károly: A Maxwell-féle téregyenletek általánosítása.

1932. febr. 4-én: Horovitz Ena: Csősugarak viszaverődése szilárd testekről.

1932. febr. 18-án: Rados-ünnepély. Tangl Károly: Elnöki megnyitó. Fejér Lipót: Átnyujtja Rados Gusztávnak a Matematikai és Fizikai Lapok ünnepi számát. Kürschák József: Egy analitikus geometriai determináns irreducibilitása.

1932. márc. 3-án: Neumann János: Az ergod-hipotézis bizonyítása.

1932. márc. 17-én: Beck Pál: A rekrisztallizációról.

1932. márc. 31-én: Gyulai Zoltán: Deformált $NaCl$-kristályok elektromos vezetéséhez. Szegő Gábor: A Legendre-féle függvények közelítő kiszámítása.

1932. ápr. 14-én: Kőnig Dénes: Jelentés az 1932 évi Kőnig Gyula-jutalomról. Lassovszky Károly: Néhány változó csillag fotográfiai megfigyelése.

1932. ápr. 28-án: Tihanyi Miklós: A Lagrange-féle resolvens egyik tulajdonsága. Veress Pál: A Borel-féle befödési tétel egy általánosításáról.

1932. máj. 21-én: Közgyűlés. Császár Elemér: A fekete sugárzás törvényeinek általánosítása. Rédei László: A másodfokú számtest osztálycsoportjáról.

Az 1932—33. társulati évben tartott előadások.

1932. nov. 10-én: A tanulóversenyek eredményeinek kihirdetése. Woyciechowsky József: Sipos Pál ellipszis-rektifikációja (1795) és logaritmikus-trigonometrikus táblarendszere.

1932. nov. 24-én: Rendkívüli közgyűlés (Pénztárnoki jelentés). J. A. Barnett (Professor of Mathematics in the University of Cincinnati [Ohio]):

Infinitesimal transformations in certain types of function spaces. (Infinitezimális transzformációk bizonyos függvényterekben.)

1932. dec. 15-én: Politzer Rózsa: Rekurzív függvényekről.

1933. febr. 23-án: Szalay Sándor: Nagy intenzitású ultra hangsugarak tulajdonságai.

1933. ápr. 6-án: Szász Ottó: A Fourier-sor összetartásáról.

1933. ápr. 20-án: Gyulai Z. és Stasiw O.: Additív festésű KCl-kristályok elektromos vezetése. (bemutatással); előadta Gyulai Zoltán.

1933. máj. 4 én: Nagy L. József: I. a) A forgómozgás demonstrálása b) A hullámmozgás terjedésének demonstrálása. II. A matematika és fizika tanítása az osztrák középiskolákban.

1933. jún. 10. Közgyülés. Egerváry Jenő: Az egységkör leképezése polynomokkal.

Az «Eötvös Loránd» Matematikai és Fizikai Társulat 1931. évi zárszámadása és vagyonkimutatása.

A) Bevételek:

	Pengő
1. 1930. évi zárszámadási maradvány:	
a) kézi pénztárban	59·25
b) postatakarékpénztárban	107·54
c) Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban	1308·—
2. Tagdíjak	1044·41
3. Előfizetési díjak	172·94
4. Államsegély	1000·—
5. Kamatok	51·03
6. Vegyesek	84·90
Összesen:	3828·07

B) Kiadások:

	Pengő
1. Nyomdai költségek	2174·60
2. Tanulóverseny	50·—
3. Kezelési költségek	49·29
4. Vegyesek	174·03
5. Pénztári maradvány:	
a) kézipénztárban	64·96
b) postatakarékpénztárban	383·19
c) Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban	932·—
Összesen:	3828·07

Vagyon-mérleg.

A) Vagyon:

	Korona	Pengő
1. Korona értékpapirosokban,		
a) A Magy. Lesz. és Pénzv. Bankban:		
2600 K. n. é. 4 %-os fővárosi kölcsönkötvény	2600·—	
1800 « « « 6 %-os hadikölcsönkötvény (4. kibocsátás)	1800·—	
300 « « « 4 %-os magyar koronajáradékkötvény (Károlyi Irén alapítvány)	300·—	
2200 « « « 6 %-os hadikölcsönkötv. (6. kibocsátás) (Károlyi Irén alapítvány)	2200·—	
2000 K. n. é. 5½ %-os hadikölcsönkötvény (4. kibocsátás)	2000·—	
10000 « « 6 %-os hadikölcsönkötvény (3. kib.) Kőnig-alap	10000·—	
b) Pesti Hazai Takarékpénztárban $\frac{04557}{c_2}$ jelzésű könyvben	108·—	
c) Állami kezelésben: Majthényi Ottó-hagyaték	10000·—	
2. Károlyi Irén-féle kötött alapítvány		1020·—
3. Forgótőke:		
a) kézipénztárban		64·96
b) postatakarékpénztárban		383·19
c) Magyar Leszámítoló és Pénzváltó Bankban		932·—
4. Tagdíj és előfizetési díj hátralék		200·—
5. Nyomtatványok		100·—
Összesen:	29008·—	2700·15

B) Teher.

	Korona	Pengő
Nyomdai tartozás		1083·27
Egyenleg	29008·—	1616·88

Szabó Gábor s. k.
pénztáros.

A számadásokat átvizsgáltuk és rendben találtuk.

Budapest, 1932, október hó 14-én.

Renner János s. k., *Veress Pál* s. k., *Faragó Andor* s. k., *Tass Antal* s. k.,
számvizsgálók.

Kimutatás az 1931. évi május 26-tól 1932. évi december 25-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíjak.

1928-ra Suppan Vilmos (8). *Összesen 8 P.*

1929-re Bugarszky István (8), Fábián Béla (6), Hajós Géza (3), Ilosvay Lajos (8), Sebők Emánuel (6), Suppan Vilmos (8). *Összesen 39 P.*

1930-ra Bolla Györgyné (8), Fábián Béla (6), Fekete Jenő (4), Ferenczy Zoltán (6). Radó Simon (8), Tolnai Jenő (8), Tóth Géza (8), Véczi Gábor (8). *Összesen 56 P.*

1931-re **B**án Lajos (6), Blau Ármin (6), Boharcsik Pál (6), Bolla Györgyné (8), Breszlauerné Blau Ilona (8), Bresztovszky Béla (8), Bricht Lipót (8), Buchböck Gusztáv (8), **Cs**ada Imre (6), Csegény Margit (8), **D**ér Zoltán (6), **E**berhardt Béla (4), **F**ábián Béla (6), Fekete Jenő (8), Fenyvesi Andor (8), Ferenczy Zoltán (8), Frank János (2), Fraunhoffer Lajos (8), **G**örbe Imre (6) **H**aár Alfréd (6), Hadarits Vendel (8), Hang Dániel (6), Hittrich József (8), **I**losvai Lajos (8), **J**akab Imre (6), Janicsek József (8), id. Jurányi Henrik (8), **K**edves Miklós (6), Klug Lipót (8), Koren Dénes (8), Krbek Ferenc (8), Kurdilla Ferenc (8), **L**ajta Ernő (8), Lóky Béla (8), **M**arcell György (8), Mihalovics Alajos (6), **P**ék János (8), **R**ucsinszky Lajos (8), Runtágné Perényi Gizella (3), **S**challer Mátyás (6), Scholtz Pál (8), Steiner Miklós (6), **Sz**abó Gusztáv (8), Szabó Miklósné Nagy Sarolta (8), Sziklai Jenő (6), ifj. Szmertnik István (8), **T**ardos Vidor (6), Tolnai Jenő (8), Tobisch János (8), Tomits Iván (8), Tóth Géza (8), Tóth Lajos (6), **V**éczi Gábor (8), **W**eber Márton (6), **Z**ipernovszky Károly (8). *Összesen 387 P.*

1932-re **Á**brahám István (8), **B**acsó E. Vilmos (6), Bauer Mihály (8), Bertrám Brunó (6), Blau Ármin (6), Blau Györgyné (6), Breszlauerné Blau Ilona (4), Bresztovszky Béla (2), Buchböck Gusztáv (8), Bugarszky István (8), **Cs**egény Margit (8), **D**ér Zoltán (6), **F**aragó Andor (8), Fábián Béla (6), Fekete Jenő (8), Fenyvesi Andor (8), Ferenczy Zoltán (8), Frank János (6), Fröhlich Károly (8), **G**ruber Nándor (8), **H**aár Alfréd (6), Hadarits Vendel (8), Hajós Géza (6), Hang Dániel (6), Hausbrunner Vilmos (8), **I**losvai Lajos (8), **J**akab Imre (6), **K**arai Sándor (6), Klug Lipót (8), Kovács János (8), Kövesi Ferenc (6), Kurdilla Ferenc (8), Kuzaila Péter (6), **L**uckhaub Gyula (8), **M**agdics Gáspár (8), Marcell György (8), **N**agy Béla (6), **Ny**ári Béla (6), **O**rtvay Rudolf (8), Oszlaczky Szilárd (8), **P**ogány József (8), **R**ados Gusztáv (8), Rados Ignác (8), Renner János (8), Romsauer Lajos (8), Rucsinszky Lajos (8), **S**ebők Emánuel (6), Somogyi Antal (6), Steiner Miklós (6), Suppan Vilmos (8), **Sz**abó Gábor (8), Szabó Gusztáv (8), Szabó Miklósné Nagy Sarolta (2), Szántó Sándor (8), Szekeres Kálmán (8), Sziklai Jenő (6), ifj. Szmertnik István (8), Szőke Béla (8), **T**angl Károly (8), Tobisch János (2), Tolnai Jenő (8), Török Elemér (6), **W**inter József (8), Woyciechovszky József (8), **Z**ipernovszky Károly (8). *Összesen 452 P.*

1933-ra Blau Ármin (6), Buchböck Gusztáv (8), Frank János (6), Fröhlich Károly (8), Suppan Vilmos (8). *Összesen 36 P.*

1934-, 1935-, 1936-ra Blau Ármin (18). *Összesen 18 P.*

2. Előfizetési díjak.

1928-ra M. kir. Technologiai és Anyagvizsgáló Intézet Bp. (7·94). *Összesen 7·94 P.*

1930-ra Debreceni ref. gimn. fizikai szertára (6), Orsz. Meteorol. és Földmágnességi Intézet Bp. (8). *Összesen 14 P.*

1931-re Bolyai reálisk. Bp. (8), Eggenberger könyvkeresk. (Gyak. gimn.) Bp. (7·20), B. Eötvös J. kollégium Bp. (8), Ferenc József Tanítók Háza Bp. (8), Ganz és Tsa Vill. R.-T. Bp. (8), Grill könyvkeresk. (W. Müller, London) (6·40), Kemény Zs. reálisk. Bp. (8), Kölcsey F. reálg. Bp. (8), Műegyetemi I. Mat. Gyüjt. Bp. (8), Ref. gimn. Bp. (8), Szt. László reálg. Bp. (8), Tud. Egyet. Közgazd. Kar Bp. (8), Izr. reálg. Debrecen (6), Révai Miklós reálisk. Győr (6), Róm. kath. reálg. Gyula (6), Gr. Tisza István ref reálg. Kecskemét (3), Ref. reálg. Miskolc (6), Ybl Miklós reálisk. Székesfehérvár (6). *Összesen 126·60 P.*

1932-re Ág. h. ev. Rudolf reálg. Békéscsaba (6), Eggenberger könyvkeresk. (Gyakorló gimn.) Bp. (7·20), B. Eötvös J. kollégium Bp. (8), Ferenc József Tanítók Háza Bp. (8), Ganz és Tsa Vill. R.-T. Bp. (8), Kölcsey Ferenc reálg. Bp. (8), Orsz. Meteorol. és Földmágnességi Intézet Bp. (8), Ref. gimn. Bp. (8), Szent László reálg. Bp. (8), Tud. Egy. Közgazd. Kar Bp. (8), Műegyetemi I. Mat. Gyüjt. Bp. (8), Szt. Imre reálg. Csongrád (6), Izr. reálg. Debrecen (6), Révai M. reálisk. Győr (6), Róm. kath. reálg. Gyula (6), Horthy M. reálg. Kisújszállás (6), Csanád vezér reálg. Makó (6), Szt. Benedekrend Közp. Főkönyvtára Pannonhalma (6), Széchenyi István reálg. Sopron (6), Bánya- és Erdőmérnöki Főisk. Sopron (6), Horváth Mihály reálg. Szentes (6), Garay János reálg. Szekszárd (6), Ybl Miklós reálisk. Székesfehérvár (6). *Összesen 157·20 P.*

1933-ra Svábhegyi Csillagvizsgáló Int. Bp. (8), Széchenyi István reálg. Sopron (2), Ybl Miklós reálisk. Székesfehérvár (4). *Összesen 14 P.*

3. Segélyek, adományok.

Magyar állam	1200 P
Magyar Tud. Akadémia	500 «
Középiskolai Mat. és Fizikai Lapok	20 «
Nagy L. József	20 «
Összesen	*1740 P*

Budapesten, 1932. december hó 25-én.

Szabó Gábor, pénztáros.

Franklin-Társulat nyomdája. — Géczy Kálmán.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA: GÉCZY KÁLMÁN.