192 NOV. 09

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

522

AZ EÖTVÖS LÓRÁND

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT ÉS MIKOLA SÁNDOR

HUSZONKILENCEDIK ÉVFOLYAM

I–VIII. FÜZET 1922 JANUÁR–DECZEMBER.

FOLYÓIRAT
1925/26 1-110
EGYETEMI KÖNYVTÁR
SZEGED

BUDAPEST 1922

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LÓRÁND MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

A Mathematikai és Physikai Lapok előfizetési ára erre az évre 200 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai a lapot tagsági díjuk fejében kapják.

Minthogy a Mathematikai és Physikai Lapok egyes régibb évfolyamai teljesen elfogytak, kérjük tisztelt tagtársainkat, akik azokat nélkülözhetik, bocsássák a Társulat rendelkezésére.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a mathematikai tárgyúak *Fejér Lipót* (**V., Falk Miksa-utcza 15.**), a fizikai tárgyúak pedig *Mikola Sándor* (**VII., Vilma királynő-út 19.**) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikban lehető rövidségre törekedjenek és hogy arra pontos címüket is irják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások *Mikola Sándor* titkár címére (VII., Vilma királynő-út 19.) küldendők.

A folyóirat és a meghivók expediciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Rybár István* pénztáros címére (VIII., Múzeum-körút 6—8.) intézendők.

Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkivüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi ránk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhöz képest meg kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzivebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is. Csak így alakul ki bennünk a jövőnk biztosításához annyira szükséges bizalmunk önmagunkhoz.

Kérjük ennélfogva tisztelt tagtársainkat,

1. hogy hátralékos tagdijaikat küldjék be a Társulatunk pénztárosához *Rybár István*-hoz (VIII., Múzeum-körút 6—8.).
2. hogy az új társulati évtől (1923-tól) kezdve emelje fel mindenki, aki teheti, a tagsági díjat bizonyos méltányos összeggel (egészitse ki például 200 koronára) önszántából,
3. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával és hogy a világháború alatt és az utána következő időkben költözködésre kényszerített tagtársaink figyelmét hívják fel hasonló cselekedetre,
4. hogy gyűjtsenek új tagokat.

Adományok.

Az 1921-ik évben a Mathematikai és Physikai Társulat részére a következő adományok folytak be :

	K
A Magyar Tud. Akadémia	2,000
Orsz. Szabadoktatási Tanács	3,000
A vall. és közokt. min.	25·000
Ganz és tsa Danubius R.-T.	25,000
Ganz Villamossági R.-T.	20,000
Takarékpénztárak és bankok egyesülete	20,000
Sasvári Géza az Eötvös Loránd plakettre	1,000

A Mathematkai és Physikai Társulat tisztikara.

Elnök : Fröhlich Izidor (VIII., Muzeum-körút 5—8.)
Alelnökök : Rados Gusztáv.
Tangl Károly.
Titkárok : Fejér Lipót (V., Falk Miksa-utca 15.)
Mikola Sándor (VII., Vilma királynő-út 19.)
Jegyzők : Kopp Lajos.
Kürschák József.
Pénztáros : Privorszky Alajos (VII., Ilka-utca 32.)

Előadások.

1921-ben a Mathematikai és Physikai Társulat ülésein a következő előadások tartattak:

Ápr. 8-án. Dr. Hoór Tempis Mór: Az energia gazdálkodás fejlődéséről.

Ápr. 22-én. Privorszky Alajos: Egy elemi geometriai szerkesztésről.

Ribár István: A polározás szöge alatt visszavert fényről.

Máj. 14-én. Rados Gusztáv: Adalék a trigonometrikus egyenletek elméletéhez.

Fröhlich Pál: A fénytörés geometriai törvényének érvényességi határáról.

Kedves Miklós: Két egyszerű demonstrációs eszköz bemutatása.

Nov. 3-án. Tangl Károly: Az Eötvös-törvényről.

Nov. 17-én. Kürschák József: Irreducibilis formák.

Dec. 1-én. Gáti Béla: Az Amerika és Europa közti telefonkábel.

Dec. 15-én. Veress Pál: A folytonos függvények közelítése polynomokkal.

Császár Elemér: A quantum emisszió hypnotezise a fekete sugárzás elméletében.

Franklin-Társulat nyomdája: Géczy Kálmán.

FOLYÓIRAT
1925/26 1-110
EGYETEMI KÖNYVTÁR SZEGED
A m. kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem KÖNYVTÁRA SZEGED

BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓK HATVÁNYÖSSZEGEIRŐL.

Ismeretes és könnyen igazolható, hogy

$$\binom{2a}{a} = \binom{a}{0}^2 + \binom{a}{1}^2 + \binom{a}{2}^2 + \cdots + \binom{a}{a}^2$$

mindig osztható az $a+1$ és $2(2a-1)$ számokkal.[1]

Dolgozatomban e tétel első részének következő általánositásával foglalkozom: *Az*

$$A_0 = \binom{a}{0}, \ldots, \; A_k = (-1)^k \binom{a}{k}, \ldots, \; A_a = (-1)^a \binom{a}{a} \quad (0)$$

számok r-dik hatványainak összege r minden pozitív egész értékénél osztható $(a+1)$-gyel.

1. Tárgyalásom a következő észrevételből indul ki:

Legyen $a+1$ a p törzsszámnak legalább α-dik hatványával osztható és jelentse γ a

$$0, 1, 2, \ldots, \alpha-1$$

számok valamelyikét. Ha a (0) alatti A számokat az adott sorrendben $p^{\alpha-\gamma}$ tagú csoportokba osztjuk, akkor az egy csoportba sorozott számok modulo $p^{\gamma+1}$ egymással kongruensek.

---

[1] Ennek bebizonyitását Szily Kálmán a *Mathematikai és Physikai Lapok* II. kötetében (1894) a 397. lapon feladatnak tűzte ki. A feladat megoldásai a III. kötetben (1895) a 324—332. lapon jelentek meg. Közülök Bauer Mihály megoldása a következő eredeti tétel bebizonyitására is kiterjeszkedik:

Ha $a+1$ osztható a p törzsszámmal, akkor

$$\binom{a}{0}^{2n} + \binom{a}{1}^{2n} + \cdots + \binom{a}{a}^{2n}$$

nemcsak az $n=1$ esetben, hanem n minden pozitiv egész értékénél osztható p-vel.

Ugyanis minden csoportban csak a legelső szám indexe osztható $p^{\alpha-\gamma}$-val. Tehát, ha

$$A_b = (-1)^b \binom{a}{b} \quad \text{és} \quad A_{b+1} = (-1)^{b+1}\binom{a}{b+1}$$

ugyanazon csoport két szomszédos tagja, akkor a $b+1$ szám okvetlenül vp^β alakú, hol v nem osztható p-vel és $0 \leqq \beta < \alpha-\gamma$, azaz $\alpha \geqq \beta + \gamma + 1$. Továbbá föltevésünk szerint $a+1 = up^{\beta+\gamma+1}$, (hol u esetleg még p-vel, sőt ennek valamely hatványával osztható).

Ha most már a

$$(b+1)\binom{a}{b+1} = (a-b)\binom{a}{b}$$

azonosságban tekintetbe vesszük, hogy

$$b+1 = vp^\beta \quad \text{és} \quad a-b = (up^{\gamma+1} - v)p^\beta,$$

akkor innen

$$v\binom{a}{b+1} = (up^{\gamma+1} - v)\binom{a}{b}.$$

Tehát

$$v\binom{a}{b+1} \equiv -v\binom{a}{b} \qquad (\text{mod}\, p^{\gamma+1}),$$

azaz

$$\binom{a}{b+1} \equiv -\binom{a}{b} \qquad (\text{mod}\, p^{\gamma+1}).$$

E kongruenczia értelmében egy csoport bármely *két szomszédos* tagja és ennélfogva annak *valamennyi* tagja modulo $p^{\gamma+1}$ egymással kongruens.

2. *Legyen $a+1$ a p törzsszámnak legalább α-dik hatványával osztható és jelentse γ a*

$$0, 1, 2, \ldots, \alpha-1, \alpha$$

számok valamelyikét. A (0) *alatti A számok közül kiválasztva azokat, melyeknek indexe a p-nek $\alpha-\gamma$ kitevőjű hatványával osztható, a kiválasztott számok r-dik hatványainak összege p^γ-val osztható.*

A $\gamma = 0$ esetben $p^\gamma = p^0 = 1$, tehát ekkor a tétel helyessége nyilvánvaló. Általános érvényességét γ-ról $(\gamma + 1)$-re következtetve bizonyítjuk be.

Legyen rövidség kedvéért $q = p^{\alpha-\gamma-1}$ és $q' = pq = p^{\alpha-\gamma}$, hol most már $\gamma < \alpha$. Ha az A számokat adott sorrendjükben q' tagú csoportokba sorozzuk, akkor minden csoportban éppen p számnak van a q-val osztható indexe. Ezek a számok (mint a csoport valamennyi száma) az 1. alatti tétel értelmében egymással modulo $p^{\gamma+1}$ kongruensek. Ennélfogva

$$\begin{aligned} & A_0^r + A_q^r + \cdots + A_{(p-1)q}^r + \\ & + A_{pq}^r + A_{(p+1)q}^r + \cdots + A_{(2p-1)q}^r + \\ & + A_{2pq}^r + A_{(2p+1)q}^r + \cdots + A_{(3p-1)q}^r + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \equiv p(A_0^r + A_{q'}^r + A_{2q'}^r + \cdots) \qquad (\mathrm{mod}\ p^{\gamma+1}). \end{aligned}$$

Ha a tétel γ-ra érvényes, akkor itt a zárjelbe foglalt összeg p^γ-val osztható, tehát a kongruenczia bal oldalán álló összeg $p^{\gamma+1}$-gyel osztható.

3. A bebizonyított tétel abban a szélső esetben, midőn $\gamma = \alpha$, röviden így fogalmazható:

Ha $a+1$ osztható p^α-val, akkor a (0) *alatti A számok r-dik hatványainak összege szintén osztható p^α-val.*

Ha r páros szám és $\alpha = 1$, akkor ez éppen Bauernek a bevezetés jegyzetében idézett tétele.

4. Ha $a + 1$ törzstényezőkre bontott alakja

$$a + 1 = p_1^\alpha p_2^\beta \cdots p_m^\mu,$$

akkor a (0) alatti számok r-dik hatványainak összege a 3. alatti tétel értelmében a

$$p_1^\alpha, \quad p_2^\beta, \ldots, \quad p_m^\mu$$

törzsszámhatványok mindegyikével és ennélfogva az $a+1$ számmal is osztható.

Kürschák József.

BIZONYOS KÉTINDEXŰ SZÁMTÁBLÁZATOKRÓL.

I.

Legyen adva egy végtelen sorozat, melynek minden eleme a + vagy — jelek valamelyike. Minden ily sorozat a következő módon meghatároz egy másik sorozatot, mely szintén csak e két jelet tartalmazza. Az első sorozat bármely eleme alá a + jelet írjuk, ha ez az elem megegyezik a közvetlenül rákövetkezővel, ellenben a — jelet, ha a közvetlenül rákövetkezőtől különbözik. Ugyanezen utasítással a második sorozatból egy harmadik, ebből egy negyedik, stb. keletkeztethető. Az első sorozat az egész így definiált kétindexű táblázatot egyértelműen meghatározza. Például:

0. − − − − − + + + − − − − − + + + − − − − ···
1. + + + + − + + − + + + + − + + − + + + ···
2. + + + − − + − − + + + − − + − − + + ···
3. + + − + − − + − + + − + − − + − + ···
4. + − − − + − − − + − − − + − − − + ···
5. − + + − − + + − − + + − − + + ···
6. − + − + − + − + − + − + − + ···
7. − − − − − − − − − − − − − − ···
8. + + + + + + + + + + + + + + ···
9. + + + + + + + + + + + + ···

. . . .

Kérdésünk a következő:

Milyen módon kell választani az eredeti sorozatot, hogy valamelyik későbbi sorozat csupa megegyező jelből álljon[1] *és ha ez bekövetkezik, legkésőbb hanyadik sorozat fog csupa megegyező jelből állni?*

---

[1] E kérdés felvetését Karlovszky Bertalan festőművésznek köszönöm.

Ha + helyett +1-et, — helyett —1-et írunk és az első sorozat (melyet táblázatunk 0-adik sorának akarunk nevezni):

$$\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, \ldots, \varepsilon_{0k}, \ldots,$$

akkor táblázatunk i-edik sorának k-adik elemét az

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{i-1,\,k} \cdot \varepsilon_{i-1,\,k+1}$$

rekurziv képlet értelmezi. Innen $i=1, 2, 3, \ldots$ esetére

$$\varepsilon_{1k} = \varepsilon_{0k}\varepsilon_{0,\,k+1},$$

$$\varepsilon_{2k} = \varepsilon_{1k}\varepsilon_{1,\,k+1} = (\varepsilon_{0k}\varepsilon_{0,\,k+1})\cdot(\varepsilon_{0,\,k+1}\varepsilon_{0,\,k+2}) = \varepsilon_{0k}\varepsilon_{0,\,k+1}^{2}\varepsilon_{0,\,k+2},$$

$$\varepsilon_{3k} = \varepsilon_{2k}\cdot\varepsilon_{2,\,k+1} = (\varepsilon_{0k}\varepsilon_{0,\,k+1}^{2}\varepsilon_{0,\,k+2})\cdot(\varepsilon_{0,\,k+1}\varepsilon_{0,\,k+2}^{2}\varepsilon_{0,\,k+3}) =$$
$$= \varepsilon_{0k}\varepsilon_{0,\,k+1}^{3}\varepsilon_{0,\,k+2}^{3}\varepsilon_{0,\,k+3},$$

. . . .

És általában

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{0k}\varepsilon_{0,\,k+1}^{\binom{i}{1}}\varepsilon_{0,\,k+2}^{\binom{i}{2}}\cdots\varepsilon_{0,\,k+i-1}^{\binom{i}{i-1}}\varepsilon_{0,\,k+i}, \tag{I}$$

a mint az az

$$\binom{i-1}{\lambda} + \binom{i-1}{\lambda-1} = \binom{i}{\lambda} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, i)$$

képletek segitségével teljes indukczióval közvetlenül igazolható.

Legyen most $i=2^{\nu}$ a 2 valamely hatványa. Ismeretes, hogy ez esetben az

$$\binom{i}{1}, \binom{i}{2}, \ldots, \binom{i}{i-1}$$

binomiális együtthatók valamennyien *páros* számok,[1] úgy hogy erre az esetre az (I) képlet a következő módon egyszerűsödik:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{0k}\varepsilon_{0,\,k+i}.$$

Tegyük most fel, hogy az eredeti sor periodikus és egy periodusa $i=2^{\nu}$ elemből áll,[2] azaz hogy minden k-ra:

$$\varepsilon_{0k} = \varepsilon_{0,\,k+i}.$$

---

[1] A II. pontban bebizonyitandó tétel ezt a tételt mint speczialis esetet foglalja magában.

[2] Ezt a következőkben úgy is fogjuk kifejezni, hogy «i szerint periodikus».

Ekkor:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{0k}\varepsilon_{0,\,k+i} = \varepsilon_{0k}^2 = 1,$$

vagyis az i-edik sor csupa 1-esből áll. Tehát:

1. Ha az eredeti sor 2 valamely hatványa (2^ν) szerint periodikus, akkor legkésőbb az ezt követő 2^ν-edik sor csupa $+1$-ből áll.

Mivelhogy egy csupa $+1$-ből álló sort megelőző sor vagy ugyanilyen, vagy csupa -1-ből áll, azért ez esetben már legkésőbb a $2^\nu-1$-edik sor is csupa megegyező elemből fog állani.

Lássuk, hogyan fordítható meg eredményünk.

Ha az $i=2^\nu$-edik sor minden eleme $+1$, azaz

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{0k}\varepsilon_{0,\,k+i} = 1,$$

akkor innen minden k-ra

$$\varepsilon_{0k} = \varepsilon_{0,\,k+i},$$

azaz ekkor eredeti sorunk $i=2^\nu$ szerint periodikus. Ha most már valamely (i-edik) sor csupa 1-ből áll és i nem is épen a 2 valamely hatványa, akkor is az eredeti sor periodikus a 2 valamely hatványa szerint. Ha t. i. az i-edik sor csupa 1-es, akkor minden későbbi sor is ilyen, tehát a 2^ν-edik is, ha csak $2^\nu \geqq i$. És erre az esetre már láttuk, hogy az eredeti sornak 2^ν szerint periodikusnak kell lenni. Tehát:

2. Csak az esetben juthatunk csupa 1-esből (vagy akár csak csupa megegyező elemből) álló sorhoz, ha az eredeti sor 2 valamely hatványa szerint periodikus és pedig 2^ν szerint periodikus, ha az i-edik sor áll csupa 1-ből és $i \leqq 2^\nu$.

Legyen a legkisebb szám, mely szerint eredeti sorunk periodikus: 2^ν. (Ha t. i. egy sorozat a 2 valamely hatványa szerint periodikus, akkor a legkisebb periodus elemeinek a száma is csak 2 egy hatványa lehet, 1-et beleértve). Legyen továbbá az i-edik az első csupa 1-ből álló sor. Az 1. tétel szerint ekkor $i \leqq 2^\nu$. De egyszersmind $i > 2^{\nu-1}$. Ha t. i. $2^{\nu-1} \geqq i$ volna, akkor a 2. tétel szerint — ellentétben feltevésünkkel — már $2^{\nu-1}$ szerint is periodikus volna az eredeti sor. Tehát

3. Ha a 2 legalacsonyabb hatványa, mely szerint eredeti sorunk periodikus, 2^ν és az i-edik sor az első, mely csupa 1-*ből áll, akkor*

$$2^{\nu-1} < i \leq 2^\nu.$$

Az i tehát meghatározza a ν-t, de nem viszont. Könnyű belátni, hogy, adva lévén a ν, az i minden értéket, a mely ezen egyenlőtlenségnek megfelel, felvehet. Ez kiderül, ha a csupa 1-ből álló sorból kiindulva, *visszafelé* haladva alkotjuk meg a kétindexű táblázat sorait (minden sornak ekkor első eleme szabadon írható elő, ezentúl azonban a táblázat egyértelműen meg van határozva).

A megelőzőkben szerepelt ± 1 értékű ε-okat, mint -1 hatványait írhatjuk. Legyen általában

$$\varepsilon_{ik} = (-1)^{a_{ik}},$$

hol az a_{ik}-k egész számok, melyeknek értéke csak mod 2 jön tekintetbe. A most vizsgált két indexű $\{\varepsilon_{ik}\}$ táblázatnak egy mod 2 teljesen meghatározott $\{a_{ik}\}$ táblázat felel meg. Egy tetszőleges

$$a_{01},\ a_{02}, \ldots,\ a_{0k}, \ldots$$

0-adik sorból kiindulva, a további sorokat az

$$a_{ik} = a_{i-1,\,k} + a_{i-1,\,k+1}$$

rekurziv képlet határozza meg, míg az (I) képletnek itt a következő felel meg

$$a_{ik} = \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} a_{0,\,k+\lambda}. \tag{I*}$$

Eredményeink erre az $\{a_{ik}\}$ táblázatra megfogalmazva a következők:

Akkor és csak akkor áll egy sor csupa 0-*ból* (mod 2), *ha a* 0-*adik sor* mod 2 *a* 2 *valamely hatványa szerint periodikus. Ha* 2^ν *a* 2 *legalacsonyabb hatványa, mely szerint e sor* mod 2 *véve periodikus, ha továbbá az i-edik sor az első, melynek minden eleme* 0 (mod 2), *akkor*

$$2^{\nu-1} < i \leq 2^\nu.$$

II.

Az e tételben foglaltak általánosítása czéljából a megelőzőkben felhasznált

$$\binom{2^\nu}{k} \equiv 0 \pmod 2) \qquad (k=1, 2, \ldots, 2^\nu-1)$$

kongruencziák bizonyos általánosításaira lesz szükségünk. Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy tetszőleges p törzsszámra

$$\binom{p^\nu}{k} \equiv 0 \pmod p. \qquad (k=1, 2, \ldots, p^\nu-1) \qquad (A)$$

Ez $\nu=1$-re jól ismert kongruenczia, mely a

$$\binom{p}{k} = p\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}$$

alakból közvetlenül belátható: $k<p$ lévén, p és $k!$ relativ törzsszámok s így $\binom{p}{k}$-val együtt $\frac{(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$ is egész szám. Tetszőleges ν-re teljes indukczióval bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $\nu-1$-re a bizonyitandó kongruencziák helyesek. Ez annyit jelent, hogy az

$$(1+x)^{p^{\nu-1}} = \sum_{k=0}^{p^{\nu-1}} \binom{p^{\nu-1}}{k} x^k$$

kifejtésben az első és utolsó együttható kivételével, melyek 1-gyel egyenlők, minden együttható osztható p-vel.

Ezt a tényt az

$$(1+x)^{p^{\nu-1}} \equiv 1 + x^{p^{\nu-1}} \pmod p)$$

kongruencziával akarjuk kijelölni, hol a két polynom közé helyezett $\equiv$ jel azt jelentse, hogy a két oldalon x megegyező hatványainak együtthatói mod p kongruensek (azonos kongruenczia) és nem csak azt, hogy a két oldal minden x egész számra kongruens. A polynomok közti kongruercziát a következőkben is mindig ebben a *szűkebb értelemben* értjük.[1] Kongruens polynomok p-edik hatványai is kongruensek, tehát

$$(1+x)^{p^\nu} = \left[(1+x)^{p^{\nu-1}}\right]^p \equiv \left(1+x^{p^{\nu-1}}\right)^p. \pmod p)$$

[1] Hogy a következőkben levezetendő (polynomok közötti) kongruencziák *tágabb értelemben* helyesek, az (a kis FERMAT-féle tétel alkalmazásával) sokkal könnyebben igazolható.

Ámde a $\nu=1$-re vonatkozó már igazolt tétel szerint

$$(1+x^{p^{\nu-1}})^p=1+\binom{p}{1}x^{p^{\nu-1}}+\binom{p}{2}x^{2p^{\nu-1}}+\cdots+x^{p^\nu}\equiv 1+x^{p^\nu} \pmod p$$

és így

$$(1+x)^{p^\nu}\equiv 1+x^{p^\nu}, \pmod p \qquad (A^*)$$

a mi a közbülső együtthatókra épen az (A) kongruencziákat fejezi ki.

A most bebizonyított tételnek egy további általánosítására lesz még szükségünk, mely a binomiális együtthatók, azaz $(1+x)^n$ együtthatói helyett az általánosabb

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{s-1})^n$$

kifejezés kifejtésében fellépő együtthatókra vonatkozik. E kifejtésben x^k együtthatóját, mivelhogy $s=2$ esetében $\binom{n}{k}$-ba megy át, az

$$\binom{n}{k}_s$$

jellel akarjuk jelölni, úgy, hogy

$$(1+x+\cdots+x^{s-1})^n=\sum_{k=0}^{(s-1)n}\binom{n}{k}_s x^k.$$

Ezek az $\binom{n}{k}_s$ számok szerepelnek a valószínűségszámításban, az ú. n. MOIVRE-féle probléma[1] megoldásában és így (s-edrendű) MOIVRE-féle számoknak akarjuk őket nevezni. Ezek értelmezve vannak, ha

$$0\leqq k\leqq n(s-1)$$

[1] L. pl. CZUBER: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 3. kiad., I. kötet, 1914., p. 63. A MOIVRE-féle számok, a mint már MONTMORT megállapította, a binomiális együtthatókkal a következőképen fejezhetők ki:

$$\binom{n}{k}_s=\sum_{\nu=0}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\binom{k+n-\nu s-1}{n-1}.$$

E képletet a következőkben nem használjuk fel. Megemlítjük még, hogy NETTO *Lehrbuch der Combinatorik*-jában (p. 118, 132) az

$$\binom{n}{k}_s=\Phi^{(n)}(\int k;\ 0,\ 1,\ 2,\cdots,\ s-1)$$

jelt használja.

JÓZSEF TUDOMÁNYEGYETEM KÖNYVTÁRA
M. kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem KÖNYVTÁRA SZEGED

és a két szélsőnek az értéke:

$$\binom{n}{0}_s = \binom{n}{n(s-1)}_s = 1.$$

Ha $n=1$, a MOIVRE-féle számok értéke:

$$\binom{1}{k}_s = 1 \qquad {\scriptstyle (k=0,1,2,\dots s-1)}$$

és innen magasabb n-ekre a MOIVRE-féle számokat az

$$(1+x+\dots+x^{s-1})^n = (1+x+\dots+x^{s-1})(1+x+\dots+x^{s-1})^{n-1}$$

azonosságból közvetlenül kiadódó

$$\binom{n}{k}_s = \binom{n-1}{k}_s + \binom{n-1}{k-1}_s + \binom{n-1}{k-2}_s + \dots + \binom{n-1}{k-s+1}_s \qquad (R)$$

rekurzív képlet szolgáltatja, megjegyezve, hogy itten $\binom{m}{\lambda}_s$ zérusnak veendő, ha λ negativ vagy $m(s-1)$-nél nagyobb. Ha például $s=3$, akkor innen a harmadrendű MOIVRE-féle számok a PASCAL-féle háromszögnek megfelelő következő háromszög alakjában adódnak:

$n=0$;															1
$n=1$;													1	1	1
$n=2$;											1	2	3	2	1
$n=3$;									1	3	6	7	6	3	1
$n=4$;							1	4	10	16	19	16	10	4	1
$n=5$;					1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1
$n=6$;			1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1
$n=7$;	1	7	28	77	161	266	357	393	357	266	261	77	28	7	1

. . . .

és $s=4$ esetére:[1]

---

[1] A hatodrendű MOIVRE-féle számok táblázata megtalálható például BERTRAND: *Calcul des probabilités*-jében (2. kiadás, p. 20), a mi elrendezésünkhöz képest kissé eltolva. Történetileg, a koczka hat lapjának megfelelően, ezek a hatodrendű MOIVRE-féle számok léptek fel legelőször és pedig MOIVRE-t (1711) megelőzően, már GALILEI, HUYGENS (1657) és MONTMORT (1710) munkáiban. Az $\binom{n}{k}_6$ számok rekurziv származtatását MONTMORT és JACQUES BERNOULLI (1713) ismerte fel.

$n=0;$													1
$n=1;$										1	1	1	1
$n=2;$							1	2	3	4	3	2	1
$n=3;$				1	3	6	10	12	12	10	6	3	1
$n=4;$	1	4	10	20	31	40	44	40	31	20	10	4	1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Az (A) képlet általánositásaképen kimutatjuk most, hogy p tetszőleges törzsszám, ν tetszőleges pozitiv egész szám lévén:

$$\left.\begin{aligned} &\binom{p^\nu}{k}_s \equiv 0 \pmod p, \quad \text{ha} \quad k \not\equiv 0 \pmod{p^\nu} \\ \text{és} \qquad & \\ &\binom{p^\nu}{k}_s \equiv 1 \pmod p, \quad \text{ha} \quad k \equiv 0 \pmod{p^\nu}. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Ez a most bebizonyitandó állitás a polynomokra fentebb már használt kongruenczia-jelöléssel a következő módon fejezhető ki:

$$(1+x+\cdots+x^{s-1})^{p^\nu} \equiv 1+x^{p^\nu}+\cdots+x^{(s-1)p^\nu} \pmod p. \qquad (B^\star)$$

E képletet $s=2$-re már bebizonyították: ez az $(A^\star)$ képlet. Az általános esetben s-re vonatkozó teljes indukcziót alkalmazunk, tehát felteszszük, hogy $s-1$-re igaz, vagyis:

$$(1+x+\cdots+x^{s-2})^{p^\nu} \equiv 1+x^{p^\nu}+x^{2p^\nu}+\cdots+x^{(s-2)p^\nu} \pmod p. \qquad (1)$$

Másrészt $s=2$-re (a binomiális együtthatókra) is igaz a tétel s igy $(1+x+\cdots+x^{s-2})$-t röviden z-vel jelölve:[1]

$$[(1+x+\cdots+x^{s-2})+x^{s-1}]^{p^\nu}=(z+x^{s-1})^{p^\nu}=\sum_{\lambda=0}^{p^\nu}\binom{p^\nu}{\lambda} z^{p^\nu-\lambda}x^{\lambda(s-1)} \equiv$$

$$\equiv z^{p^\nu}+x^{(s-1)p^\nu} = (1+x+\cdots+x^{s-2})^{p^\nu}+x^{(s-1)p^\nu} \pmod p$$

és (1)-et figyelembe véve:

$$(1+x+\cdots+x^{s-1})^{p^\nu} \equiv 1+x^{p^\nu}+\cdots+x^{(s-2)p^\nu}+x^{(s-1)p^\nu}, \pmod p$$

a mivel a $(B^\star)$, azaz (B) kongruencziák helyessége igazolva van.

Mellékesen megemlitjük még, hogy a most bebizonyitott té-

---

[1] A $\equiv$ jel mindenkor x hatványainak együtthatóira vonatkozik.

tel úgy általánosítható, hogy tetszőleges a_0, a_1,... egész számokra fennáll az

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_{s-1}x^{s-1})^{p^\nu} \equiv a_0+a_1x^{p^\nu}+a_2x^{2p^\nu}+\cdots+a_{s-1}x^{(s-1)p^\nu} \pmod p$$

azonos kongruenczia. Ez teljesen a most elintézett

$$a_0=a_1=\cdots=a_{s-1}=1$$

eset mintájára bizonyítható be, vagy pedig a kis FERMAT-féle tétel segítségével erre az esetre vezethető vissza. E kongruencziából a binomiális együtthatók számos oly oszthatósági tulajdonsága olvasható le, melynek közvetlen igazolása bizonyos nehézségekkel járna. Ha pl.:

$$s=\varrho+1 \quad \text{és} \quad a_\sigma=\binom{\varrho}{\sigma}, \quad (\sigma=0,1,2,\ldots,\varrho)$$

akkor e kongruencziából következik, hogy tetszőleges p törzsszámra:

$$\binom{\varrho p^\nu}{\sigma p^\nu} \equiv \binom{\varrho}{\sigma}. \pmod p$$

Ez $\sigma=1$ esetében az a kongruenczia, a melyre — itt nem részletezendő módon — vezettettünk volna, ha a (B), (B^*) kongruencziákat egy megelőző jegyzetben említett MONTMORT-féle képlet alapján próbáltuk volna igazolni.

III.

Most egy az I. pont végén tárgyaltnál általánosabb kétindexű számtáblázatot akarunk vizsgálni, mely $s=2$-re amabba megy át. A táblázatot a tetszőleges egész számokból álló

$$a_{01}, a_{02}, \ldots, a_{0k}, \ldots$$

(0-adik) sorból kiindulva most az

$$a_{ik}=a_{i-1,k}+a_{i-1,k+1}+\cdots+a_{i-1,k+s-1}$$

rekurziv képlettel képezzük, hol s egyszersmindenkorra megadott pozitiv egész szám.[1] Ha $i=1, 2, \ldots$, rendre adódik:

$$a_{1k} = a_{0k} + a_{0,k+1} + \cdots + a_{0,k+s-1},$$
$$a_{2k} = a_{1k} + a_{1,k+1} + \cdots + a_{1,k+s-1} =$$
$$= (a_{0k} + a_{0,k+1} + \cdots + a_{0,k+s-1}) + (a_{0,k+1} + \cdots + a_{0,k+s}) + \cdots$$
$$+ (a_{0,k+s-1} + \cdots + a_{0,k+2s-2}) =$$
$$= a_{0k} + 2a_{0,k+1} + 3a_{0,k+2} + \cdots + sa_{0,k+s-1} + \cdots + 2a_{0,k+2s-3} +$$
$$+ a_{0,k+2(s-1)}$$

. . . .

és általában:

$$a_{ik} = a_{0k} + \binom{i}{1}_s a_{0,k+1} + \binom{i}{2}_s a_{0,k+2} + \cdots + \binom{i}{i(s-1)-1}_s a_{0,k+i(s-1)-1} + a_{0,k+i(s-1)}, \tag{II}$$

a mint ez a MOIVRE-féle számokra megismert (R) rekurziv képlet segítségével teljes indukczióval közvetlenül igazolható. Az i-edik sor k-adik elemét a 0-adik sor elemeinek függvényeképen ez a most nyert

$$a_{ik} = \sum_{\lambda=0}^{(s-1)i} \binom{i}{\lambda}_s a_{0,k+\lambda} \tag{II}$$

independens képlet adja meg. Ez felel meg az I. pont (I*) képletének. Világos, hogy, ha táblázatunk egy sora csupa megegyező c számból áll, akkor a rákövetkező is ilyen: minden száma sc.

Táblázatunk számait a következőkben egy törzsszámmodulusra akarjuk vizsgálni.

Egy mod 3 tekintett ily táblázat pl. a következő ($s=3$):

0 1 2 0 1 2 0 2 2 0 2 1 0 2 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 | 0 1 2 0 1 2 0 2 2 0...
0 0 0 0 0 1 1 1 1 | 0 0 0 0 0 1 1 1 1 | 0 0 0 0 0 1 1 1 1 | 0 0 0 0 0 1 1 1...
0 0 0 1 2 0 0 2 1 | 0 0 0 1 2 0 0 2 1 | 0 0 0 1 2 0 0 2 1 | 0 0 0 1 2 0...
0 1 0 0 2 2 0 0 1 | 0 1 0 0 2 2 0 0 1 | 0 1 0 0 2 2 0 0 1 | 0 1 0 0...
1 1 2 | 1 1 2 | 1 1 2 | 1 1 2 | 1 1 2 | 1 1 2 | 1 1 2 | 1 1 2 | 1 1 2 | 1 1...
1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ...

(a további elemek zérusok)

---

[1] A harmad- és negyedrendű MOIVRE-féle számokra fentebb adott két «háromszög» ily táblázatok egy-egy példájának tekinthető ($s=3$, illetve 4), ha az összes sorokat jobbra és balra zérusokkal folytatjuk. (Ezért helyeztük ott az *utolsó* számokat egy függélyes oszlopba).

Kimutatjuk tetszőleges p törzsszámra és tetszőleges ν számra a következő tételt:

Táblázatunk p^ν-edik sora mod p véve akkor és csak akkor periodikus p^ν szerint, ha a 0-adik sora sp^ν szerint periodikus mod p.

Legyen a (II) képletben $i=p^\nu$. Alkalmazva a II. pont (B) képleteit, nyerjük, hogy minden k-ra:

$$a_{p^\nu,k} \equiv a_{0k} + a_{0,k+p^\nu} + a_{0,k+2p^\nu} + \cdots + a_{0,k+(s-1)p^\nu}. \pmod p$$

Tegyünk itt k helyébe $k+p^\nu$-t; akkor

$$a_{p^\nu,k+p^\nu} \equiv a_{0,k+p^\nu} + \cdots + a_{0,k+(s-1)p^\nu} + a_{0,k+sp^\nu} \pmod p.$$

E két kifejezés különbsége:

$$a_{p^\nu,k} - a_{p^\nu,k+p^\nu} \equiv a_{0k} - a_{0,k+sp^\nu}. \pmod p$$

Ez az eredmény mutatja, hogy akkor és csak akkor lesz minden k-ra

$$a_{p^\nu,k} \equiv a_{p^\nu,k+p^\nu}, \pmod p$$

ha minden k-a

$$a_{0k} \equiv a_{0,k+sp^\nu}, \pmod p$$

a mivel a kimondott tétel be van bizonyítva.

Tegyük fel a következőkben, hogy $s=p$ törzsszám és tekintsük táblázatunk számait e törzsszámmodulusra. Ebben a speciális esetben a nyert tétel így szól:

A p^ν-edik sor akkor és csak akkor periodikus p^ν szerint mod p, ha az eredeti sor $p^{\nu+1}$ szerint periodikus mod p ($\nu=0, 1, 2, \ldots$).

Táblázatunk képezési törvénye szerint bármelyik sora tekinthető «eredeti» sornak és így eredményünk így általánosítható:

Az n-edik sor (n tetszőleges) akkor és csak akkor periodikus mod p véve $p^{\nu+1}$ szerint, ha az ($n+p^\nu$)-edik sor mod p periodikus p^ν szerint ($\nu=0, 1, 2, \ldots$).

Tegyük fel, hogy valamely sor, pl. az i-edik mod p periodikus p^ν szerint, akkor látnivalóan minden későbbi s így az $i+p^\nu-1$-edik is periodikus mod p ugyancsak p^ν szerint. Tételünket tehát

$n=i-1$-re alkalmazva innen az adódik, hogy az $i-1$-edik sor mod p ez esetben periodikus $p^{\nu+1}$ szerint. Ha tehát valamely sor mod p megegyező számokból áll, azaz «periodikus $p^0=1$ szerint», akkor a megelőző sor periodikus p szerint, az ezt megelőző p^2 szerint stb., végül tehát az eredeti sor is periodikus p valamely hatványa szerint. Ha pedig az eredeti sor p^ν szerint periodikus, akkor ismét utolsó tételünk szerint a $p^{\nu-1}$-edik sor periodikus $p^{\nu-1}$ szerint, tehát a $(p^{\nu-1}+p^{\nu-2})$-edik sor $p^{\nu-2}$ szerint stb.; végül a

$$p^{\nu-1}+p^{\nu-2}+\cdots+p+1=\frac{p^\nu-1}{p-1}$$

-edik sor periodikus 1 szerint, azaz mod p megegyező számokból áll. Tehát ezen $s=p$ esetben:

Akkor és csak akkor áll valamely sor csupa mod p megegyező számból, ha az eredeti sor p-nek valamely hatványa szerint mod p véve periodikus.

Meggondolásunk mutatja továbbá, hogy

Ha a p legalacsonyabb hatványa, mely szerint eredeti sorunk mod p periodikus, p^ν és az i-edik az első oly sor, mely mod p megegyező számokból áll, akkor

$$1+p+p^2+\cdots+p^{\nu-2}<i\leq 1+p+p^2+\cdots+p^{\nu-1}.$$

Így általánosítható az I. pont végén nyert eredmény.

Kőnig Dénes.

POLYNOMOK MARADÉKAINAK PERIODICITÁSÁRÓL.

Abból a problémából, a melyet a megelőző czikk I. pontjában KÖNIG DÉNES tárgyalt, fakadt a következő kérdés is:

Legyen $f(x)$ olyan polynom, a mely minden egész számú x esetében egész számú értéket vesz fel (a polynom együtthatói nem szükségképen egész számok); legyen továbbá p valamely prímszám és vizsgáljuk az

$$\ldots, f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), \ldots$$

mindkét irányban végtelen sorozat maradékait, modulo p. Vajjon periodikus-e a maradékok sorozata és mekkora a periodus?

Mielőtt e kérdésre felelnénk, idézzük a differencziaszámítás azon jól ismert eredményét, hogy minden polynom rendezhető — és pedig egyféleképen — nemcsak az x hatványai, hanem az $\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \binom{x}{2}, \ldots$ polynomok szerint is. Ha ugyanis $f(x)$-nek fokszáma n, akkor egy és csakis egy olyan a_n állandó van, hogy az

$$f(x) - a_n\binom{x}{n}$$

különbség fokszáma legfeljebb $n-1$ legyen. Miután a_n-et meghatároztuk, találhatunk ismét egyféleképen olyan a_{n-1} állandót, hogy az

$$f(x) - a_n\binom{x}{n} - a_{n-1}\binom{x}{n-1}$$

kifejezés fokszáma legfeljebb $n-2$ legyen és így tovább. Végre az $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ számok alkalmas választásával az

$$f(x) - a_n\binom{x}{n} - a_{n-1}\binom{x}{n-1} - \cdots - a_1\binom{x}{1}$$

kifejezés értéke állandó lesz. Ha ezt az állandót a_0-sal jelöljük, akkor $f(x)$-nek a binóm-együtthatók szerint rendezett alakja:

$$f(x) = a_0 + a_1\binom{x}{1} + a_2\binom{x}{2} + \cdots + a_n\binom{x}{n}.$$

Az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ számoknak egyszerű jelentésük van. Ennek felismerésére vezessük be a differencziaszámításban használt

$$\Delta\,\varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$$

jelölést, valamint az ebből ismétléssel származó

$$\Delta^2\varphi(x) = \Delta\big(\Delta\,\varphi(x)\big) = \varphi(x+2) - 2\,\varphi(x+1) + \varphi(x)$$

$$\Delta^3\varphi(x) = \Delta\big(\Delta^2\varphi(x)\big) =$$
$$= \varphi(x+3) - 3\,\varphi(x+2) + 3\,\varphi(x+1) - \varphi(x)$$

. . . .

jelöléseket. Minthogy

$$\Delta(\varphi_1 + \varphi_2) = \Delta\,\varphi_1 + \Delta\,\varphi_2$$

$$\Delta(c\,\varphi) = c\,\Delta\,\varphi \qquad \text{(ha } c \text{ állandó),}$$

továbbá

$$\Delta\binom{x}{k} = \binom{x+1}{k} - \binom{x}{k} = \binom{x}{k-1},$$

azért

$$\Delta\,f(x) = a_1 + a_2\binom{x}{1} + \cdots + a_n\binom{x}{n-1},$$

$$\Delta^2 f(x) = a_2 + a_3\binom{x}{1} + \cdots + a_n\binom{x}{n-2}$$

. . . .

$$\Delta^n f(x) = a_n.$$

Helyettesitsünk $x = 0$-t az $f(x)$, $\Delta\,f(x)\ldots$, $\Delta^n f(x)$ kifejezésekbe. Látjuk, hogy

$$a_0 = f(0),\ a_1 = \Delta\,f(0),\ a_2 = \Delta^2 f(0), \ldots, a_n = \Delta^n f(0).$$

Mindebből következik, hogy $f(x)$ helyettesítési értékei akkor és csakis akkor lesznek minden egész számú x-nél egész számok, ha az

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$$

együtthatók valamennyien egész számok.

Tekintsük már most az egész $a_0, a_1, \ldots, a_n$ együtthatókkal bíró

$$f(x) = a_0 + a_1 \binom{x}{1} + \cdots + a_n \binom{x}{n}$$

polynom helyettesítési értékeit modulo p (p prímszám) és tegyük fel, hogy a_n nem osztható p-vel.

Az állítjuk, hogy *az $f(x)$ polynom helyettesítési értékei periodikus sorozatot alkotnak és a periodus p-nek azon legalacsonyabb p^α hatványa, a mely n-nél nagyobb.*

E tétel bebizonyítása végett nézzük, hogy ha ω pozitív egész szám, mikép lehet az $f(x+\omega) - f(x)$ különbség x minden értékénél p-vel osztható. Legyen röviden

$$\delta\varphi(x) = \varphi(x+\omega) - \varphi(x).$$

Világos, hogy

$$\Delta\, \delta\varphi(x) = \delta\, \Delta\, \varphi(x),$$

továbbá, ha x-nek minden egész értékénél $\delta f(x)$ osztható p-vel, akkor

$$\Delta\, \delta f(x),\ \Delta^2 \delta f(x), \ldots,\ \Delta^{n-1} \delta f(x)$$

szintén oszthatók.

A

$$\begin{aligned}
\delta f(x) &= a_1 \delta \binom{x}{1} + a_2 \delta \binom{x}{2} + \cdots + a_n \delta \binom{x}{n} \\
\Delta\, \delta f(x) &= \phantom{a_1 \delta \binom{x}{1} +{}} a_2 \delta \binom{x}{1} + \cdots + a_n \delta \binom{x}{n-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta^{n-1} \delta f(x) &= \phantom{a_1 \delta \binom{x}{1} + a_2 \delta \binom{x}{1} + \cdots +{}} a_n \delta \binom{x}{1}
\end{aligned}$$

egyenlőségeket alulról felfelé olvasván látjuk, hogy $\delta f(x)$, $\Delta\, \delta f(x), \ldots, \Delta^{n-1} \delta f(x)$ akkor és csakis akkor lesznek mind p-vel oszthatók, ha $\delta\binom{x}{1}, \delta\binom{x}{2}, \ldots, \delta\binom{x}{n}$ szintén ilyenek. Mivel pedig

$$\delta\binom{x}{1} = \binom{x+\omega}{1} - \binom{x}{1} = \binom{\omega}{1}$$

$$\delta\binom{x}{2} = \binom{x+\omega}{2} - \binom{x}{2} = \binom{x}{1}\binom{\omega}{1} + \binom{\omega}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta\binom{x}{n} = \binom{x+\omega}{n} - \binom{x}{n} =$$

$$= \binom{x}{n-1}\binom{\omega}{1} + \binom{x}{n-2}\binom{\omega}{2} + \cdots + \binom{\omega}{n},$$

ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy az

$$\binom{\omega}{1}, \binom{\omega}{2}, \ldots, \binom{\omega}{n}$$

számok mindegyike p-vel osztható legyen. Mikor következik ez be?

Minthogy $\binom{\omega}{1} = \omega$, mindenesetre ω-nak p-vel oszthatónak kell lenni. Legyen

$$\omega = p^{\alpha} g,$$

a hol g nem osztható p-vel. Ismert képlet[1] segítségével megállapithatjuk, hogy $\binom{\omega}{k}$ prímtényezős előállítása p-nek hanyadik hatványát tartalmazza. ω!-ban ugyanis p az

$$\left[\frac{\omega}{p}\right] + \left[\frac{\omega}{p^2}\right] + \left[\frac{\omega}{p^3}\right] + \cdots$$

kitevővel fordul elő (a hol $[a]$ az a-ban foglalt legnagyobb egész számot jelenti), tehát p kitevője az $\binom{\omega}{k} = \frac{\omega!}{k!(\omega-k!)}$ prímtényezős előállításában

$$\beta = \left(\left[\frac{\omega}{p}\right] - \left[\frac{k}{p}\right] - \left[\frac{\omega-k}{p}\right]\right) + \left(\left[\frac{\omega}{p^2}\right] - \left[\frac{k}{p^2}\right] - \left[\frac{\omega-k}{p^2}\right]\right) + \cdots$$

[1] BACHMANN, Niedere Zahlentheorie, I. Teil, p. 52.

Az egyes zárjelben levő kifejezések nyilvánvalóan nem negatívok, mert

$$[a] + [b] \leqq [a + b],$$

tehát $\beta \geqq 0$.

Ha $k < p^\alpha$, akkor $\beta \geqq 1$, mert

$$\left[\frac{\omega}{p^\alpha}\right] = g, \quad \left[\frac{k}{p^\alpha}\right] = 0, \quad \left[g - \frac{k}{p^\alpha}\right] = g - 1,$$

és így a zárójeles kifejezések egyike

$$\left[\frac{\omega}{p^\alpha}\right] - \left[\frac{k}{p^\alpha}\right] - \left[g - \frac{k}{p^\alpha}\right] = 1.$$

Ellenben ha $k = p^\alpha$, akkor $\beta = 0$, mert a $\nu = 1, 2, \ldots, \alpha$ esetben

$$\left[\frac{\omega}{p^\nu}\right] = gp^{\alpha-\nu}, \left[\frac{k}{p^\nu}\right] = p^{\alpha-\nu}, \quad \left[\frac{\omega - k}{p^\nu}\right] = gp^{\alpha-\nu} - p^{\alpha-\nu}$$

és midőn $\nu > \alpha$, bevezetvén a $g : p^{\nu-\alpha}$ osztás g' hányadosát és $r \geqq 1$ maradékát,

$$\left[\frac{\omega}{p^\nu}\right] = \left[g' + \frac{r}{p^{\nu-\alpha}}\right] = g', \qquad \left[\frac{k}{p^\nu}\right] = \left[\frac{1}{p^{\nu-\alpha}}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{\omega - k}{p^\nu}\right] = \left[g' + \frac{r-1}{p^{\nu-\alpha}}\right] = g'.$$

Eszerint az $\binom{\omega}{1}, \binom{\omega}{2}, \ldots, \binom{\omega}{n}$ számok akkor és csakis akkor oszthatók valamennyien p-vel, ha $p^\alpha > n$.

Ha tehát p^α a p-nek azon legalacsonyabb hatványa, mely nagyobb n-nél, akkor az

$$f(x + \omega) - f(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

congruentia x-nek minden egész értékénél, ha ω alatt pozitív egész számot értünk, azon esetekben áll fenn, midőn ω a

$$p^\alpha, \quad 2p^\alpha, \quad 3p^\alpha, \ldots$$

számok valamelyike.

Más szóval: $f(x)$ helyettesítési értékei modulo p periodikus sorozatot alkotnak és e sorozat primitív periodusa p^α.

Szücs Adolf.

EGY A SYMMETRIKUS, MULTILINEARIS FORMÁRA VONATKOZÓ MINIMUMFÖLADAT.

1. §.

Symmetrikus, multilinearis formákról.

a) A $z_1, z_2, \dots z_n$ változók symmetrikus, multilinearis formája alatt a következő kifejezést értjük:

$$\begin{aligned} S = S(z_1, z_2, \dots z_n) = c_0 z_1 z_2 \dots z_n + c_1 \Sigma z_1 z_2 \dots z_{n-1} + \dots + \\ + c_{n-1} \Sigma z_1 + c_n, \end{aligned} \tag{1}$$

hol $c_0, c_1, \dots c_n$, a forma együtthatói, tetszőleges valós vagy komplex számok.

Ha a S formát a $z_1, \dots z_n$ változók egyes csoportjai szerint rendezzük, az S forma következő átrendezéseit nyerjük:

$$\begin{aligned} S &= z_1 S_{1,0}(z_2, \dots z_n) + S_{1,1}(z_2, \dots z_n) \\ &= z_1 z_2 S_{2,0}(z_3, \dots z_n) + (z_1 + z_2) S_{2,1}(z_3, \dots z_n) + S_{2,2}(z_3, \dots z_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= z_1 z_2 \dots z_k S_{k,0}(z_{k+1}, \dots z_n) + \dots + \\ &+ (z_1 + z_2 + \dots + z_k) S_{k,k-1}(z_{k+1}, \dots z_n) + S_{k,k}(z_{k+1}, \dots z_n) \\ &= \sum_{\varkappa=0}^{k} S_{k,\varkappa}(z_{k+1}, \dots z_n) . s_{k-\varkappa}(z_1, \dots z_k), \end{aligned} \tag{2}$$

hol

$$S_{k,\varkappa}(z_{k+1}, \dots z_n) = \sum_{\nu=0}^{n-k} c_{\varkappa+\nu} s_{n-k-\nu}(z_{k+1}, \dots z_n); \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \dots k) \tag{3}$$

és $s_\nu(z_1 \dots z_h)$ a $z_1, \dots z_h$ változók ν-edrendű elemi symmetrikus függvényét jelenti.

Ha a S forma rendezése más indexű z-k szerint történik, a következő jelölést fogjuk használni:

$$
\begin{aligned}
S &= z_h S^{(h)}_{1,0} + S^{(h)}_{1,1} \\
&= z_h z_l S^{(h,l)}_{2,0} + (z_h + z_l)\, S^{(h,l)}_{2,1} + S^{(h,l)}_{2,2} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

β) Ha a $z_1, z_2, \ldots z_n$ változók mind egyenlők, s közös értékük ζ, úgy az S symmetrikus, multilinearis forma (1) a következő polynomba megy át:

$$
G(\zeta) = S(\zeta, \zeta, \ldots \zeta) = c_0 \zeta^n + \binom{n}{1} c_1 \zeta^{n-1} + \cdots + c_n \tag{5}
$$

$G(\zeta)$-t a következőkben a S formához adjungált polynomnak fogjuk nevezni.

Ha a $z_1, z_2, \ldots z_n$ változók közül $z_{k+1} = z_{k+2} = \cdots = z_n = \zeta$, úgy a S forma a következő, k változós, symmetrikus, multilineáris formába megy át:

$$
S(z_1, z_2, \ldots z_k, \zeta, \ldots \zeta) = \sum_{\varkappa=0}^{k} H^{(k)}_{\varkappa}(\zeta)\, s_{k-\varkappa}(z_1 \ldots z_k), \tag{6}
$$

hol

$$
\begin{aligned}
H^{(k)}_1(\zeta) &= \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-k+1)}\, G^{(k)}(\zeta) \quad \left(G^{(l)}(\zeta) = \frac{d^l G(\zeta)}{d\zeta^l}\right) \\
H^{(k)}_2(\zeta) &= \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-k+2)} \left[G^{(k-1)}(\zeta) - \frac{\zeta}{n-k+1} G^{(k)}(\zeta) \right] \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
H^{(k)}_k(\zeta) &= G(\zeta) - \binom{k}{1} \frac{\zeta}{n} G'(\zeta) + \binom{k}{2} \frac{\zeta^2}{n(n-1)} G''(\zeta) - \cdots + \\
&\quad + (-1)^k \frac{\zeta^k}{n(n-1)\ldots(n-k+1)} G^{(k)}(\zeta) = \\
&= \left(1 - \frac{\zeta}{n-k+1} \frac{d}{d\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{n-k+2} \frac{d}{d\zeta}\right) \cdots \left(1 - \frac{\zeta}{n} \frac{d}{d\zeta}\right) G(\zeta).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

(A $z_2 = z_3 = \cdots = z_n = \zeta$ specialis esetben:

$$
S(z_1, \zeta, \zeta, \ldots \zeta) = \frac{1}{n} G(\zeta)\, z_1 + \left[G(\zeta) - \frac{\zeta}{n} G'(\zeta) \right].) \tag{9}
$$

(2) és (6)-ból közvetlenül látható, hogy a $S_{k,k}$ formához adjungált polynom:

$$
G_k(\zeta) = S_{k,k}(\zeta, \zeta, \ldots \zeta) = H^{(k)}_k(\zeta). \tag{10}
$$

γ) A következőkben a $z_1, z_2, \ldots z_n$ változóknak kizárólag oly értékrendszerei fognak szerepelni, melyek a

$$S = c_0 z_1 z_2 \ldots z_n + c_1 \Sigma z_1 z_2 \ldots z_{n-1} + \cdots + c_{n-1} \Sigma z_1 + c_n = 0 \quad (11)$$

symmetrikus, multilinearis relatiónak eleget tesznek. Egy ily $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ értékrendszer azon elemeit, melyeknek absolut értéke nem kisebb (nem nagyobb), mint ugyanazon értékrendszer bármely más elemének absolut értéke, rövidség kedvéért *absolut legnagyobb* (legkisebb) elemeknek fogjuk nevezni. Egy oly értékrendszer, melynek minden eleme egyenlő absolut értékű, *közös absolut értékű értékrendszer.* Egy értékrendszer, melynek minden eleme egyenlő, *összeeső értékrendszer.* Viszont egy oly értékrendszer, melynek nincs két egymással egyenlő eleme, *széteső értékrendszer.*

δ) Ha $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ egy, az $S=0$ relatiót kielégítő értékrendszer, úgy minden ε-hoz $(\varepsilon > 0)$ van oly $(z_1^+, z_2^+, \ldots z_n^+)$ széteső értékrendszer, melyre nézve

$$S(z_1^+, z_2^+, \ldots z_n^+) = 0; \; |z_k^+ - z_k| < \varepsilon, \; (k = 1, 2, \ldots n); \quad (12)$$

és $z_h^+ \neq z_k^+$, *ha* $h \neq k$.

Legyen a $z_1, z_2, \ldots z_n$ sorozatban z_k az első, mely egyik reákövetkező z_h-val egyenlő; ekkor:

I. Ha a

$$S = z_k S^{(k)}_{1,0} + S^{(k)}_{1,1} = 0 \quad (13)$$

formában $S^{(k)}_{1,0} = 0$, tehát egyszersmind $S^{(k)}_{1,1} = 0$, úgy z_k az $S=0$ relatio fennállása mellett tetszőlegesen változtatható.

II. Ha $S^{(k)}_{1,0} \neq 0$, úgy 1. §. *a)* (4) szerint

$$z_k = -\frac{S^{(k)}_{1,1}(z_1, \ldots z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots z_n)}{S^{(k)}_{1,0}(z_1, \ldots z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots z_n)} = -\frac{S^{(k,h)}_{,1} z_h + S^{(k,h)}_{2,2}}{S^{(k,h)}_{2,0} z_h + S^{(k,h)}_{2,1}}, \quad (13')$$

tehát nyilván z_h tetszőleges kis változtatásával elérhető, hogy $z_k^+ \neq z_h^+$ és $|z_k^+ - z_k| < \varepsilon$.

Ezen eljárást legfeljebb $n-1$-szer ismételve, oly $(z_1^+, \ldots z_n^+)$ értékrendszerhez jutunk, mely a $S=0$ relatiót kielégíti, *széteső* s melyre $|z_k^+ - z_k| < \varepsilon$, $(k = 1, 2, \ldots n)$.

η) Ha $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ *egy, az* $S=0$ *relatiót kielégítő értékrendszer és a* $S(z_1 \ldots z_n)$ *forma nem minden* c_k *együtthatója 0-sal egyenlő, akkor minden* ε*-hoz* $(\varepsilon > 0)$ *tartozik egy* δ *úgy, hogy, ha a*

$$S^+(z_1, \ldots z_n) = c_0^+ z_1 z_2 \ldots z_n + c_1^+ \Sigma z_1 z_2 \ldots z_{n-1} + \cdots + c_n^+ \tag{14}$$

forma együtthatóira fennáll

$$|c_k^+ - c_k| < \delta \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n),$$

akkor az $S^+=0$ *relatiót kielégítő értékrendszerek közt van legalább egy:* $(z_1^+, z_2^+, \ldots z_n^+)$, *melyre* $|z_k^+ - z_k| < \varepsilon$, $(k=1, 2, \ldots n)$. Más szóval, ha a S forma nem minden együtthatója **0**, úgy a $S=0$ relatio által meghatározott értékrendszer a forma együtthatóinak (a jelzett értelemben) folytonos függvénye.

I. Ha a $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ értékrendszer elemei közt vannak egyenlők, úgy 1. §. *δ)* szerint van oly $(z_1', \ldots z_n')$ értékrendszer, mely széteső s melyre nézve $|z_k' - z_k| < \frac{\varepsilon}{2}$, $(k = 1, 2, \ldots n)$.

II. A $(z_1', \ldots z_n')$ széteső értékrendszer elemei közt van legalább egy: z_k', melynek együtthatója a $S=0$ relatióban nem 0. Ha ugyanis mindegyik z_k' együtthatója 0, úgy fennállnak a következő egyenlelek (l. 1. §. *a)* (2—4)):

$$S_{1,0}^{(k)} = S_{1,0}(z_1', z_2', \ldots z_{k-1}', z_{k+1}', \ldots z_n') = 0, \quad (k=1, 2, \ldots n),$$

azaz részletesen:

$$\begin{array}{c} c_0 s_{n-1}^{(1)} + c_1 s_{n-2}^{(1)} + \cdots + c_{n-2} s_1^{(1)} + c_{n-1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0 s_{n-1}^{(n)} + c_1 s_{n-2}^{(n)} + \cdots + c_{n-2} s_1^{(n)} + c_{n-1} = 0, \end{array} \tag{15}$$

hol $s_p^{(h)}$ a $z_1', z_2', \ldots z_{h-1}', z_{h+1}' \ldots z_n'$ mennyiségek p-edrendű elemi symmetrikus függvényét jelenti.

Miután a $c_0, c_1, \ldots c_{n-1}$ együtthatók nem mindegyike 0, a (15) linear, homogen egyenletrendszernek van nem triviális megoldása, tehát determinánsa

$$D=\begin{vmatrix} s_{n-1}^{(1)}, & s_{n-2}^{(1)}, \dots & s_1^{(1)}, & 1 \\ s_{n-1}^{(2)}, & s_{n-2}^{(2)}, \dots & s_1^{(2)}, & 1 \\ \cdot & \cdot \quad \cdots & \cdot & \\ s_{n-1}^{(n)}, & s_{n-2}^{(n)}, \dots & s_1^{(n)}, & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{16}$$

Azonban $D=\prod_{k>h}(z'_k-z'_h)$, D eltünéséből következnék tehát, hogy a $(z'_1, z'_2, \dots z'_n)$ értékrendszer elemei közt van legalább két egyenlő, ellentétben azon föltevésünkkel, hogy $(z'_1, \dots z'_n)$ *széteső* értékrendszer.

Legyen mármost z'_k egy oly elem, melynek együtthatója nem 0, úgy (4) szerint

$$z'_k=-\frac{S_{1,1}(z'_1,\dots z'_{k-1}, z'_{k+1},\dots z'_n)}{S_{1,0}(z'_1,\dots z'_{k-1}, z'_{k+1},\dots z'_n)}=-\frac{S_{1,1}^{(k)}}{S_{1,0}^{(k)}};\quad S_{1,0}^{(k)}\neq 0, \tag{17}$$

tehát a

$$z_h^+=z'_h,\ h\neq k;\quad z_k^+=-\frac{S_{1,1}^+(z'_1,\dots z'_{k-1}, z'_{k+1},\dots z'_n)}{S_{1,0}^+(z'_1,\dots z'_{k-1}, z'_{k+1},\dots z'_n)} \tag{17'}$$

értékrendszer a (14) $S^+=0$ relatiót kielégíti s minthogy (17′) szerint z_k^+ a c_k^+ együtthatók tört, linearis függvénye és $S_{1,0}^+\neq 0$, nyilván minden ε-hoz tartozik oly δ, hogy ha $|c_k^+-c_k|<\delta$, $(k=0, 1, 2,\dots n)$, $|z_k^+-z'_k|<\frac{\varepsilon}{2}$ $(k=1, 2,\dots n)$. Azonban I. szerint $|z'_k-z_k|<\frac{\varepsilon}{2}$, tehát $|z_k^+-z_k|<\varepsilon$, $(k=1, 2,\dots n)$. q. e. d.

2. §.

A minimumföladat s a minimális értékrendszerek általános tulajdonságai.

a) A következőkben rövidség kedvéért valamely $(z_1,\dots z_n)$ értékrendszer elemei absolut értékeinek legnagyobbikát $M(|z_1|, |z_2|,\dots |z_n|)$-el (legkisebbikét $m(|z_1|, |z_2|,\dots |z_n|)$-el) fogjuk jelölni.

I. tétel. *$M(|z_1|, |z_2|,\dots |z_n|)$ a $S=0$ relatiót kielégítő összes értékrendszerekre nézve egy, a $c_0, c_1,\dots c_n$ együtthatóktól függő positiv ϱ alsó határral bir.*

Jelölje C a $|c_0|$, $|c_1|, \dots |c_n|$ számok legnagyobbikát, úgy a $S=0$ relatióból következik:

$$|c_0|\,|z_1 z_2 \dots z_n| + \dots + |c_{n-1}|\{|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|\} \geqq$$
$$|c_0 z_1 z_2 \dots z_n + \dots + c_{n-1}(z_1 + z_2 + \dots + z_n)| = |c_n|$$
$$C\,[M^n + nM^{n-1} + \dots + nM] = C\,[(1+M)^n - 1] \geqq |c_n| \quad (18)$$
$$M \geqq \sqrt[n]{1 + \frac{|c_n|}{C}} - 1.$$

Tehát a $M(|z_1|, |z_2|, \dots |z_n|)$ számhalmaznak van egy

$$\varrho(c_0, c_1, \dots c_n) \geqq \sqrt[n]{1 + \frac{|c_n|}{C}} - 1$$

alsóhatára.

β) ***II. tétel.*** *Az $S=0$ relatiót kielégítő $(z_1, z_2, \dots z_n)$ értékrendszerek közt van legalább egy, melyre nézve*

$$M(|z_1|, |z_2|, \dots |z_n|) = \varrho,$$

(azaz $\varrho = \min M(|z_1|, |z_2|, \dots |z_n|)$).

Legyen

$$\left(z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, \dots z_n^{(i)}\right), \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \qquad (19)$$

az értékrendszerek oly sorozata, melyre nézve

$$M(|z_1^{(i)}|, |z_2^{(i)}|, \dots |z_n^{(i)}|) \to \varrho, \quad \text{ha} \quad i \to \infty.$$

Ekkor minden ε-hoz ($\varepsilon > 0$) tartozik oly N, hogy, ha $i > N$, $|z_k^{(i)}| < \varrho + \varepsilon$, ($k = 1, 2, \dots n$). Tehát a (19) sorozatból kiválasztható oly részsorozat:

$$\left(z_1^{(i^\star)}, z_2^{(i^\star)}, \dots z_n^{(i^\star)}\right), \quad (i^\star = i_1, i_2, i_3, \dots) \qquad (19')$$

melyre nézve az egyes $z_k^{(i^\star)}$ elemek, véges, meghatározott $z_k^\star$ határértékekkel birnak, azaz:

$$z_k^{(i^\star)} \to z_k^\star, \; (k = 1, 2, \dots n) \quad \text{és} \quad M(|z_1^{(i^\star)}|, |z_2^{(i^\star)}|, \dots |z_n^{(i^\star)}|) \to \varrho,$$

ha $i^\star \to \infty$.

A $(z_1^\star, z_2^\star, \dots z_n^\star)$ értékrendszer nyilván a $S=0$ relatiót is kielégíti és

$$M(|z_1^\star|, |z_2^\star|, \ldots |z_n^\star|) = \varrho = \min M(|z_1|, |z_2|, \ldots |z_n|).$$

tehát a *(β)* állitásban foglalt követelményeknek megfelel.

γ) Az előzők alapján a minimumföladatot a következőképen fogalmazhatjuk:

Meghatározandó a

$$S = c_0 z_1 z_2 \ldots z_n + c_1 \Sigma z_1 z_2 \ldots z_{n-1} + \cdots + c_n = 0 \tag{11}$$

symmetrikus, multilinearis relatiót kielégítő $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ *értékrendszerekre nézve* $\varrho = \min M(|z_1|, |z_2|, \ldots |z_n|$ *és meghatározandók mindazon* $(z_1^\star, z_2^\star, \ldots z_n^\star)$ *értékrendszerek, melyekre a minimum eléretik, azaz melyekre*

$$M(|z_1^\star|, |z_2^\star|, \ldots |z_n^\star|) = \varrho. \tag{20}$$

Mindazon $(z_1^\star, z_2^\star, \ldots z_n^\star)$ értékrendszereket, melyekre nézve

$$\text{I. } S(z_1^\star, z_2^\star, \ldots z_n^\star) = 0, \quad \text{II. } M(|z_1^\star|, |z_2^\star|, \ldots |z_n^\star|) = \varrho,$$

az $S=0$ *relatióhoz tartozó minimális értékrendszereknek fogjuk nevezni.*

δ) Ha $(z_1^\star, \ldots z_n^\star)$ *egy, a* $S=0$ *relatióhoz tartozó minimális értékrendszer és a*

$$S = S_{1,0}^{(k)} z_k^\star + S_{1,1}^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{21}$$

relatiókban (l. 1. §. *a)* 4.) *minden k-ra* $z_k^\star$ *együtthatója,* $S_{1,0}^{(k)}$ *zérustól különböző, úgy a* $(z_1^\star, \ldots z_n^\star)$ *minimális értékrendszer közös absolut értékű.*

Ha a minimális értékrendszer nem közös absolut értékű, úgy van elemei közt legalább egy: $z_h^\star$, melyre

$$|z_h^\star| < \varrho$$

azonban (21)-ből, minthogy $S_{1,0}^{(h)} \neq 0$, tehát $z_h = -\frac{S_{1,1}^{(h)}}{S_{1,0}^{(h)}}$ és z_h a többi elemek folytonos függvénye, tehát van olyan ϑ, $(0<\vartheta<1)$, melyre

$$|z'_h| = \left| \frac{S_{1,1}(\vartheta z_1, \vartheta z_2, \ldots \vartheta z_{h-1}, \vartheta z_{h+1}, \ldots \vartheta z_n)}{S_{1,0}(\vartheta z_1, \vartheta z_2, \ldots \vartheta z_{k-1}, \vartheta z_{k+1}, \ldots \vartheta z_n)} \right| < \varrho$$

és (22)

$$|z'_k| = \vartheta |z_k| \leqq \vartheta\varrho < \varrho \quad (k = 1, 2, \ldots h-1, h+1, \ldots n).$$

Ekkor a $(z'_1, \dots z'_n)$ értékrendszer a $S=0$ relatiót kielégíti és $M(|z'_1|, \dots |z'_n|) < \varrho$, azaz $(z_1, \dots z_n)$ nem minimális értékrendszer. A (δ) állításban foglalt feltételeknek eleget tevő minimális értékrendszer tehát csak közös absolut értékű lehet.

η) Legyen $(z_1^\star, \dots z_n^\star)$ egy, a $S=0$ relatióhoz tartozó oly minimális értékrendszer, melynek nem minden eleme egyenlő s melynek mindegyik $z_k^\star$ eleméhez tartozó együttható a

$$S = S_{1,0}^{(k)} . z_k^\star + S_{1,1}^{(k)} = 0 \quad (k=1, 2, \dots n) \tag{21}$$

relatiókban 0-tól különböző, azaz $S_{1,0}^{(k)} \neq 0$, $(k = 1, 2, \dots n)$. Ekkor (2. §. δ)) szerint mindenesetre $|z_1^\star| = |z_2^\star| = \dots = |z_n^\star| = \varrho$. Továbbá:

Ha $z_k^\star$ és $z_h^\star$ különböző elemek s egyikük, $z_k^\star$ befutja a $|z| = \varrho$ kört, miközben a $z_k^\star$ és $z_h^\star$-től különböző többi $z_l^\star$ $(l \neq h, l \neq k)$ elemek állandók, úgy $z_h^\star$ ugyancsak a $|z| = \varrho$ kört futja be (ellenkező irányban, azaz $z_k^\star$ és $z_h^\star$ a $|z| = \varrho$ kör két pontjában, az alábbi (24) másodfokú egyenlet gyökpontjaiban találkoznak).

1. §. (4) szerint (a $S_{2,0}$, $S_{2,1}$, $S_{2,2}$ együtthatók h és k indexeit rövidség kedvéért elhagyva)

$$\begin{aligned} S = z_k^\star S_{1,0}^{(k)} + S_{1,1}^{(k)} &= z_k^\star(z_h^\star S_{2,0} + S_{2,1}) + z_h^\star S_{2,1} + S_{2,2} \\ &= z_k^\star z_h^\star S_{2,0} + (z_k^\star + z_h^\star) S_{2,1} + S_{2,2} = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

A (23)-ban szereplő bilinear forma disciminansa az (η) föltételek teljesülése esetén 0-tól különböző. Ugyanis, ha

I. $S_{2,1}^2 - S_{2,0} S_{2,2} = 0$ és $S_{2,0} \neq 0$, úgy

$$\begin{aligned} S_{2,0} S &= z_k^\star z_h^\star S_{2,0}^2 + (z_k^\star + z_h^\star) S_{2,1} S_{2,0} + S_{2,0} S_{2,2} = \\ &= (z_k^\star S_{2,0} + S_{2,1})(z_h^\star S_{2,0} + S_{2,1}) = 0, \end{aligned}$$

tehát a $S_{1,0}^{(k)} = z_h^\star S_{2,0} + S_{2,1}$ és $S_{1,0}^{(h)} = z_k^\star S_{2,0} + S_{2,1}$ mennyiségek legalább egyike 0, (η) föltétellel ellentétben.

II. $S_{2,1}^2 - S_{2,0} S_{2,2} = 0$ és $S_{2,0} = 0$, ekkor egyidejűleg $S_{2,1} = 0$, tehát ismét $S_{1,0}^{(k)} = z_k^\star S_{2,0} + S_{2,1} = 0$.

Ezek szerint $S_{2,1}^2 - S_{2,0} S_{2,2}$ 0-tól különböző lévén, a

$$\zeta^2 S_{2,0} + 2\zeta . S_{2,1} + S_{2,2} = 0 \tag{24}$$

egyenlet két gyöke: ζ_1, ζ_2 különbözők, továbbá a

$$\begin{aligned} z_k^\star z_h^\star S_{2,0} + (z_k^\star + z_h^\star) S_{2,1} + S_{2,2} &= 0 \\ \zeta_1^2 S_{2,0} + 2\zeta_1 \,.\, S_{2,1} + S_{2,2} &= 0 \\ \zeta_2^2 S_{2,0} + 2\zeta_2 \,.\, S_{2,1} + S_{2,2} &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

egyenletek fennállásából következik

$$\begin{vmatrix} z_k^\star z_h^\star, & z_k^\star + z_h^\star, & 1 \\ \zeta_1^2, & 2\zeta_1, & 1 \\ \zeta_2^2, & 2\zeta_2, & 1 \end{vmatrix} = (\zeta_1 - \zeta_2)\,[2\zeta_1\zeta_2 + 2z_k^\star z_h^\star + (\zeta_1 + \zeta_2)(z_k^\star + z_h^\star)] = 0$$

s, minthogy $\zeta_1 + \zeta_2$

$$\frac{z_k^\star - \zeta_1}{z_k^\star - \zeta_2} : \frac{z_h^\star - \zeta_1}{z_h^\star - \zeta_2} = -1. \tag{27}$$

A (27) egyenlet tudvalevőleg azt fejezi ki, hogy a $z_k^\star$, $z_h^\star$, ζ_1, ζ_2 komplex számokat ábrázoló pontok egy körön feküsznek s a $(z_k^\star, z_h^\star)$ és (ζ_1, ζ_2) pontpárok egymást elválasztják. Ebből viszont következik:

$$|z_k^\star| = |z_h^\star| = |\zeta_1| = |\zeta_2| = \varrho.$$

Ugyanis, ha $|\zeta_1| + |\zeta_2|$, hanem például $|\zeta_1| < |\zeta_2|$, úgy $|\zeta_1| < |z_k^\star| = |z_h^\star|$, azaz

$$(z_1^\star, \ldots z_{k-1}^\star, \zeta_1, z_{k+1}^\star, \ldots z_{h-1}^\star, \zeta_1, z_{h+1}^\star, \ldots z_n^\star)$$

egy minimális értékrendszer különböző absolut értékű elemekkel, a mi az (η) föltételek teljesülése esetén (2. §. δ)) szerint lehetetlen. Tehát $z_k^\star$, $z_h^\star$, ζ_1, ζ_2 a $|z| = \varrho$ körön feküsznek s ha $z_k^\star$ befutja ezen kört a $z_k^\star \zeta_1 z_h^\star \zeta_2 z_k^\star$ értelemben, úgy $z_h^\star$ ugyanezt a kört a $z_h^\star \zeta_1 z_k^\star \zeta_2 z_h^\star$ értelemben futja be.

Az összes

$$\left(z_1^\star, \ldots z_{k-1}^\star, z_k^\star e^{i\theta}, z_{k+1}^\star, \ldots z_{h-1}^\star, -\frac{z_k^\star e^{i\theta} S_{2,1} + S_{2,2}}{z_k^\star e^{i\theta} S_{2,0} + S_{2,1}}, z_{h+1}^\star, \ldots z_n^\star\right), \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi) \tag{28}$$

értékrendszerek, köztük $(z_1^\star, \ldots z_{k-1}^\star, \zeta, z_{k+1}^\star, \ldots z_{h-1}^\star, \zeta, z_{h+1}^\star, \ldots z_n^\star)$, hol ζ a (24) egyenlet egyik gyökét jelenti, minimális értékrendszerek.

Corollarium. (η)-feltételek teljesülése esetén van legalább egy széteső minimális értékrendszer. Legyenek $z_h^\star$ és $z_k^\star$ a $(z_1^\star, \ldots z_n^\star)$ minimális értékrendszer oly elemei, melyek különbözők s melyek közül legalább az egyik többszörös multiplicitású (ha ilyen elempár nincs, úgy a minimális értékrendszer széteső). A fentiek szerint $z_k^\star$ és $z_h^\star$ a $|z| = \varrho$ kört egyidejűleg futják be, tehát $z_k^\star$ helyébe $z_k^\star e^{i\theta}$ téve, θ alkalmas választásával elérhető, hogy I. $z_k^\star$, $z_h^\star$ az új minimális értékrendszernek eggyel kisebb multiplicitású elemei, II. (η)-feltétel érvényes marad. Ezen eljárást legfeljebb $n-2$-szer ismételve, oly minimális értékrendszerhez jutunk, melynek minden eleme egyszeres multiplicitású, mely tehát széteső.

3. §.

Összeeső minimális értékrendszerek existentiája.

a) Legyen az (1. §. *a)* (2))-ben szereplő formák

$$S_{1,1},\ S_{2,2}, \ldots\ S_{n-1,n-1},\ S_{n,n} = c_n \quad (c_n \neq 0)^1 \tag{29}$$

sorozatában $S_{k,k}$ az első, mely a minimális értékrendszerek egyikére nézve sem tűnik el.[1] Ekkor *a* $S(z_1, \ldots z_n) = 0$ *relatióhoz tartozó* $\varrho = \min M(|z_1|, \ldots |z_n|)$ *és a* $S_{k-1,k-1}(z_k, \ldots z_n) = 0$ *relatióhoz tartozó* $\varrho_{k-1} = \min M(|z_k|, \ldots |z_n|)$ *egyenlők:*

$$\varrho_{k-1} = \varrho.$$

I. *(a)* föltevés szerint van oly $(z_1^\star, \ldots z_n^\star)$ minimális értékrendszer, melyre nézve $S_{k-1,k-1}(z_k^\star, \ldots z_n^\star) = 0$; azonban

$$\begin{aligned} \varrho = M(|z_1^\star|, \ldots |z_n^\star|) &\geqq M(|z_k^\star|, \ldots |z_n^\star|) \geqq \\ &\geqq \min M(|z_k|, \ldots |z_n|) = \varrho_{k-1}, \end{aligned} \tag{30}$$

tehát $\varrho \geqq \varrho_{k-1}$.

II. Legyen $(z_k^+, \ldots z_n^+)$ egy a $S_{k-1,k-1} = 0$ relatióhoz tartozó minimális értékrendszer, azaz $M(|z_k^+|, \ldots |z_n^+|) = \varrho_{k-1}$; ekkor

[1] A $c_n = 0$ esetben a minimumföladat triviális. $\varrho = 0$ és $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$ az egyetlen minimális értékrendszer.

(1. §. *a)* (2)) szerint a $(0, 0, \dots 0, z_k^+, \dots z_n^+)$ értékrendszer a $S=0$ relatiót kielégíti, tehát

$$\varrho = \min M(|z_1|, \dots |z_n|) \leqq M(0, \dots, 0, |z_k^+|, \dots |z_n^+|) = \varrho_{k-1}, \quad (30')$$

tehát $\varrho \leqq \varrho_{k-1}$.

A (30), (30') egyenlőtlenségekből következik $\varrho = \varrho_{k-1}$.

β) Ha $S_{k-1, k-1}$, *valamely* $(z_1^\star, \dots z_n^\star)$ *minimális értékrendszerre nézve eltűnik, úgy egyidejűleg*

$$S_{k-1, 0}, S_{k-1, 1}, \dots S_{k-1, k-2} \quad (31)$$

is eltűnnek. Ez esetben tehát (l. 1. §. *a)* (2)) a $z_1^\star, \dots z_{k-1}^\star$ elemekre csupán a

$$|z_h^\star| \leqq \varrho, \quad (h = 1, 2, \dots k-1)$$

feltétel áll fenn, különben tetszőlegesek.

Ellenkező esetben legyen $S_{k-1, l}(z_k^\star, \dots z_n^\star)$ a (31) sorozat egyik 0-tól különböző tagja. Ekkor a $z_1, z_2, \dots z_{k-1}$ változók $S(z_1, \dots z_{k-1}, z_k^\star, \dots z_n^\star)$ formájának van 0-tól különböző együtthatója (l. 1. §. *a)* (2)), s miután nyilván

$$z_1 = 0, \; z_2 = 0, \dots z_{k-1} = 0$$

egy a

$$S(z_1, \dots z_{k-1}, z_k^\star, \dots z_n^\star) = 0$$

relatiót kielégítő értékrendszer, tehát (1. §. *η)*) szerint minden ε-hoz $(\varepsilon > 0)$ van oly δ, ill. θ, $(0 < \theta < 1)$, úgy, hogy ha

$$|S_{k-1, \varkappa}(\theta z_k^\star, \dots \theta z_n^\star) - S_{k-1, \varkappa}(z_k^\star, \dots z_n^\star)| < \delta, \quad (\varkappa = 0, 1, \dots k-1),$$

akkor a $S(z_1 \dots z_{k-1}, \theta z_k^\star, \dots \theta z_n^\star) = 0$ relatiót kielégítő $(z_1 \dots z_{k-1})$ értékrendszerek közt van legalább egy $(z_1^+, \dots z_{k-1}^+)$, melyre

$$|z_h^+ - 0| = |z_h^+| < \varepsilon, \quad (h = 1, 2, \dots k-1).$$

Azonban I. a $(z_1^+, \dots z_{k-1}^+, \theta z_k^\star, \dots \theta z_n^\star)$ értékrendszer az $S = 0$ relatiót kielégíti, továbbá II. ε alkalmas választása mellett

$$M(|z_1^+|, \dots |z_{k-1}^+|, |\theta z_k^\star|, \dots |\theta z_n^\star|) \leqq M(\varepsilon, \theta\varrho) < \varrho,$$

vagyis $(z_1^\star, \dots z_n^\star)$ nem minimális értékrendszer.

γ) A $S_{k,k}$ forma a $S_{k-1,k-1}(z_k,\dots z_n)=0$ relatióhoz tartozó minimális értékrendszerek egyikére nézve sem tűnik el, tehát (2. §. δ)) szerint a $S_{k-1,k-1}=0$ relatióhoz csupán közös absolut értékű minimális értékrendszerek tartoznak.

Ha ugyanis volna egy, a $S_{k-1,k-1}=0$ relatióhoz tartozó $(z_k^\star,\dots z_n^\star)$ minimális értékrendszer, melyre $S_{k,k}=0$, úgy $(0,\dots 0, z_k^\star,\dots z_n^\star)$ egy, a $S=0$ relatióhoz tartozó minimális értékrendszer, melyre $S_{k,k}=0$, ellentétben (α) föltevésünkkel.

δ) Az $S_{k-1,k-1}(z_k,\dots z_n)=0$ relatióhoz tartozó minimális értékrendszerek közt van legalább egy összeeső.

(γ) szerint a $S_{k-1,k-1}=0$ relatióhoz tartozó összes $(z_k^\star,\dots z_n^\star)$ minimális értékrendszerek közös absolut értékűek, azaz

$$|z_k^\star|=|z_{k+1}^\star|=\dots=|z_n^\star|=\varrho.$$

Legyenek ezek közül $z_h^\star$ és $z_l^\star$ különbözők s a $|z|=\varrho$ körön szomszédosak, továbbá legyen a $|z|=\varrho$ kör azon $\widehat{z_h^\star, z_l^\star}$ íve, mely a többi pontokat tartalmazza, L_0 hosszúságú.

Végül ugyancsak (γ) szerint a

$$S_{k-1,k-1}=S_{k,k-1}^{(h)}z_h^\star+S_{k,k}^{(h)}=0,$$
$$S_{k-1,k-1}=S_{k,k-1}^{(l)}z_l^\star+S_{k,k}^{(l)}=0$$

relatiókban $S_{k,k}^{(h)}$ és $S_{k,k}^{(l)}$ 0-tól különbözők, tehát (2. §. η)) szerint a

$$\zeta^2 S_{k+1,k-1}+2\zeta S_{k+1,k}+S_{k+1,k+1}=0$$

egyenlet gyökei: ζ_1 és ζ_2 különbözők, továbbá $|\zeta_1|=|\zeta_2|=\varrho$, és a $(z_h^\star, z_l^\star)$ pontpár a (ζ_1,ζ_2) pontpárt elválasztja.

Legyen pl. ζ_1 a fent említett $\widehat{z_k^\star, z_l^\star}$ ív belsejébe eső gyökpont. Ha $z_h^\star, z_l^\star$ számok a $(z_k^\star,\dots z_n^\star)$ értékrendszerben egyszer fordulnak elő, úgy a $(z_k^\star,\dots z_{h-1}^\star, \zeta_1, z_{h+1}^\star,\dots z_{l-1}, \zeta_1, z_{l+1}^\star,\dots z_n^\star)$ minimális értékrendszer a $|z|=\varrho$ kör oly ívén fekszik, mely a $\widehat{z_h^\star, z_l^\star}$ ív belsejében fekszik; ha a $z_h^\star, z_l^\star$ számok többszörösek, úgy ezen eljárást legfeljebb $n-k-1$-szer ismételve jutunk kisebb köríven fekvő minimális értékrendszerhez.

Tekintsük már most a $S_{k-1,k-1}=0$ relatióhoz tartozó minimális értékrendszerek összességét. Mindegyik minimális értékrendszerhez tartozik a $|z| = \varrho$ körnek (legalább egy) legkisebb íve, mely az értékrendszer összes elemeit tartalmazza.

Legyen ezen, az összes értékrendszerekhez tartozó minimális ívek hosszának alsó határa L. Ki fogjuk mutatni, hogy $L = 0$.

Legyen ugyanis

$$\left(z_k^{\star,j},\ z_{k+1}^{\star,j}, \ldots z_n^{\star,j}\right) \quad (j = 1, 2, 3, \ldots) \tag{32}$$

a minimális értékrendszerek oly sorozata, melyhez tartozó legrövidebb ívek L_j hossza L-hez konvergál. Válasszunk ki a (32) sorozatból oly

$$\left(z_k^{\star,j^\star},\ z_{k+1}^{\star,j^\star}, \ldots z_n^{\star,j^\star}\right) \quad (j^\star = j_1, j_2, j_3, \ldots) \tag{32'}$$

részsorozatot, melynél az egyes $z_h^{\star,j^\star}$ elemek meghatározott $z_h^{\star\star}$ határértékkel birnak, azaz

$$z_h^{\star,j^\star} \to z_h^{\star\star},\ (h = k, k+1, \ldots n);\ L_{j^\star} \to L, \text{ ha } j^\star \to \infty.$$

Ekkor a $(z_k^{\star\star}, z_{k+1}^{\star\star}, \ldots z_n^{\star\star})$ értékrendszer nyilván a $S_{k-1,k-1} = 0$ relatiót kielégíti, minimális, tehát, ha $L > 0$, a fenti eljárással kisebb ívre redukálható, vagyis szükségképen $L = 0$. Ekkor $z_k^{\star\star} = z_{k+1}^{\star\star} = \cdots = z_n^{\star\star}$, azaz létezik *legalább egy összeeső* minimális értékrendszer.

δ') Minthogy *(β)* szerint a $z_1^\star, z_2^\star, \ldots z_{k-1}^\star$ elemek tetszőleges értéket vehetnek fel, tehát, a $S_{k-1,k-1}(z_k, \ldots z_n) = 0$ relatióhoz tartozó *összeeső* minimális értékrendszer elemeinek közös értékét ζ-val jelölve, $z_1^\star = z_2^\star = \cdots = z_{k-1}^\star = \zeta$, tehető s a $(\zeta, \zeta, \ldots \zeta)$ értékrendszer egy, az eredeti $S = 0$ relatióhoz tartozó, *összeeső*, minimális értékrendszer.

η) Minthogy eddigi levezetéseinkben általános folytonossági és konvergenciatételeken kívül csupán első- és másodfokú egyenletek megoldásait használtuk föl, s minthogy továbbá a $S = 0$ relatiót kielégítő bármely *összeeső* értékrendszer az adjungált

$$G(\zeta) = c_0\zeta^n + \binom{n}{1} c_1\zeta^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

n-edfokú algebrai egyenletnek egy gyöke, tehát levezetéseink az algebra alaptételének egy bizonyítását tartalmazzák. Valamely algebrai egyenlet (absolut legkisebb) gyöke ezen felfogásban, mint egy, TCHEBYCHEF-féle értelemben föltett minimumföladat egyik (mindig létező) megoldása szerepel.

Az eddigiek szerint a (2. §. γ)) alatt föltett minimumföladat általános megoldását a következőképen fogalmazhatjuk:

III. tétel. *A*

$$S = c_0 z_1 z_2 \ldots z_n + c_1 \Sigma z_1 z_2 \ldots z_{n-1} + \cdots + c_n = 0 \tag{11}$$

symmetrikus, multilinearis relatióhoz tartozó minimális értékrendszerek közt mindig van legalább egy összeeső és

$$\varrho = \min M(|z_1|, |z_2|, \ldots |z_n|)$$

egyenlő a $S=0$ relatióhoz adjungált

$$G(\zeta) = c_0\zeta^n + \binom{n}{1} c_1 \zeta^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \tag{5}$$

egyenlet absolut legkisebb gyökének absolut értékével.

4. §.

A maximumföladat.

a) Ha a (2. §. β. és γ.)-ban foglalt tételeket a

$$\bar{S}(z_1, z_2, \ldots z_n) = z_1 z_2 \ldots z_n S\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots \frac{1}{z_n}\right) = 0 \tag{33}$$

symmetrikus, multilinearis relatióra alkalmazzuk, a következő tételeket nyerjük:

I'. tétel. $m(|z_1|, |z_2|, \ldots |z_n|)$ *az $S = 0$ relatiót kielégítő összes értékrendszerekre nézve egy, a $c_0, c_1, \ldots c_n$ együtthatóktól függő P felsőhatárral bir:*

$$m < \frac{1}{\sqrt[n]{1 + \frac{|c_0|}{C}} - 1}. \tag{34}$$

II'. tétel. *Az $S=0$ relatiót kielégítő $(z_1, z_2, \dots z_n)$ értékrendszerek közt van legalább egy, melyre nézve*

$$m(|z_1|, |z_2|, \dots |z_n|) = P,$$

azaz

$$P = \max m(|z_1|, |z_2|, \dots |z_n|).$$

β) Tehát a maximumföladat a következő:

Meghatározandó a

$$S = c_0 z_1 z_2 \dots z_n + c_1 \Sigma z_1 z_2 \dots z_{n-1} + \dots + c_n = 0 \qquad (11)$$

symmetrikus, multilinearis relatiót kielégítő $(z_1, z_2, \dots z_n)$, értékrendszerekre nézve $P = \max m(|z_1|, |z_2|, \dots |z_n|)$ és meghatározandók mindazon $(z_1^\star, z_2^\star, \dots z_n^\star)$ értékrendszerek (maximális értékrendszerek), melyekre a maximum eléretik, azaz melyekre

$$m(|z_1^\star|, |z_2^\star|, \dots |z_n^\star|) = P. \qquad (35)$$

A föladat általános megoldása:

III'. tétel. *A $S=0$ relatióhoz tartozó maximális értékrendszerek közt mindig van legalább egy összeeső és*

$$P = \max m(|z_1|, |z_2|, \dots |z_n|)$$

egyenlő a $S=0$ relatióhoz adjungált $G(\zeta) = 0$ (5) algebrai egyenlet absolut legnagyobb gyökének absolut értékével.

5. §.

Az adjungált egyenlet gyökei s az extremális értékrendszerek közti reciprocitás.

a) Legyenek a

$$G(\zeta) = c_0 \zeta^n + \binom{n}{1} c_1 \zeta^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

adjungált egyenlet gyökei: $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n$ s legyen $(z_1, z_2, \dots z_n)$ egy tetszőleges, a $S=0$ relatiót kielégítő értékrendszer.

Ekkor a 3. §. III. tétele szerint

$$M(|z_1|, |z_2|, \dots |z_n|) \geqq m(|\zeta_1|, |\zeta_2|, \dots |\zeta_n|) \qquad (36)$$

és 4. §. III'. tétele szerint

$$m(|z_1|, |z_2|, \ldots |z_n|) \leq M(|\zeta_1|, |\zeta_2|, \ldots |\zeta_n|) \tag{36'}$$

azaz a $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ és $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)$ pontcsoportokat semminő, a 0 pont körül leírt kör nem választja el.

β) Miután

$$\begin{aligned} \zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n &= (-1)^n \binom{n}{n} \frac{c_n}{c_0} \\ \Sigma\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_{n-1} &= (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \frac{c_{n-1}}{c_0} \\ &\ldots \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n &= -\binom{n}{1} \frac{c_1}{c_0}, \end{aligned} \tag{37}$$

tehát, ha a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ gyökök elemi symmetrikus függvényeit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$-nel, a $z_1, z_2, \ldots z_n$ változók elemi symmetrikus függvényeit $s_1, s_2, \ldots s_n$-nel jelöljük, a $S=0$ relatió a következő alakban írható:

$$s_n - \frac{\sigma_1 s_{n-1}}{\binom{n}{1}} + \frac{\sigma_2 s_{n-2}}{\binom{n}{2}} - \cdots + (-1)^n \sigma_n = 0, \tag{38}$$

vagy

$$\sum_i (z_1 - \zeta_{i_1})(z_2 - \zeta_{i_2}) \ldots (z_n - \zeta_{i_n}) = 0, \tag{39}$$

hol $i_1, i_2, \ldots i_n$ az $1, 2, \ldots n$ számok összes permutatióit befutják.

A $S=0$ relatiónak (39) alakja közvetlenül mutatja, hogy a relatio a 0 pont eltolásával szemben invariáns.

E szerint, (5. §. *α)*) figyelembevételével:

IV. tétel. *Ha a $z_1, z_2, \ldots z_n$; $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ számok a* (39) *relatiót, (ill. elemi symmetrikus függvényeik a* (38) *relatiót) kielégítik, úgy a $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ és a $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)$ pontcsoportokat semminő kör (v. egyenes) nem választja el.* (L. I. H. Grace, Proceedings of the Cambridge Phil. Soc. V. 11. pp. 352—57.)

γ) Az $S=0$ relatio, mint (38) és (39)-ből közvetlenül kitűnik, a $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ és $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)$ változókra nézve symmetrikus. *A $S=0$ relatióhoz tartozó bármely minimális* *(maximális)* $(z_1^\star, z_2^\star, \dots z_n^\star)$ *értékrendszer s a* $G(\zeta)=0$ *adjungált egyenlet gyökrendszere:* $(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n)$ *közt reciprocitás áll fenn oly értelemben, hogy a* $(z_1^\star, z_2^\star, \dots z_n^\star)$ *értékrendszert egy adjungált egyenlet gyökrendszeréül választva, a megfelelő* $S^\star=0$ *relatióra nézve* $(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n)$ *maximális (minimális) értékrendszer.*

Ugyanis, ha $(z_1^\star, z_2^\star, \dots z_n^\star)$ minimális (ill. maximális) értékrendszer, úgy

$$M(|z_1^\star|, |z_2^\star|, \dots |z_n^\star|) = m(|\zeta_1|, |\zeta_2|, \dots |\zeta_n|) \tag{37}$$

illetőleg

$$m(|z_1^\star|, |z_2^\star|, \dots |z_n^\star|) = M(|\zeta_1|, |\zeta_2|, \dots |\zeta_n|) \tag{37'}$$

s ezen egyenletekből és a (36), (36') egyenlőtlenségekből a fenti állítás közvetlenül következik.

6. §.

Az extremális értékrendszerek discussiója.

a) A $S_{k,k}$ *formákhoz tartozó*

$$\left.\begin{aligned} G_k(\zeta) = H_k^{(k)}(\zeta) &= \left(1-\frac{\zeta}{n-k+1}\frac{d}{d\zeta}\right)\left(1-\frac{\zeta}{n-k+2}\frac{d}{d\zeta}\right)\cdots \\ &\cdots\left(1-\frac{\zeta}{n}\frac{d}{d\zeta}\right)G(\zeta) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

(l. 1. §. *β)* (8—10)) *adjungált egyenletek absolut legkisebb gyökeinek absolut értéke:* ϱ_k *a* k *indexszel monoton növekszik:*

$$\varrho \leqq \varrho_1 \leqq \varrho_2 \leqq \dots \leqq \varrho_{n-1}. \tag{38}$$

(8) szerint

$$\left.\begin{aligned} G_k(\zeta) &= \left(1-\frac{\zeta}{n-k+1}\frac{d}{d\zeta}\right)G_{k-1}(\zeta) = \\ &= -\frac{\zeta^{n-k}}{n-k+1}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^{n-k+1}G_{k-1}\left(\frac{1}{\xi}\right)\right]_{\xi=\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

s miután a $\xi^{n-k+1}G_{k-1}\left(\frac{1}{\xi}\right)=0$ egyenlet absolut legnagyobb gyöke a Gauss-féle tétel folyományaképen nem kisebb, mint a derivált

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi^{n-k+1} G_{k-1}\left(\frac{1}{\xi}\right)\right] = 0$$

egyenlet absolut legnagyobb gyöke, tehát $\xi = \frac{1}{\zeta}$ substitutióval keletkező $G_{k-1}(\zeta) = 0$ egyenlet absolut legkisebb gyöke nem nagyobb, mint a derivált egyenletből $\xi = \frac{1}{\zeta}$ substitutióval keletkező $G_k(\zeta)$ egyenlet absolut legkisebb gyöke, vagyis $\varrho_{k-1} \leqq \varrho_k$.

A $\varrho_{k-1} = \varrho_k$ egyenlőség (ugyancsak a Gauss-féle tétel szerint) akkor és csak akkor következik be, ha $G_{k-1}(\zeta) = 0$ absolut legkisebb gyökei közt van legalább egy többszörös multiplicitású.

Legyenek továbbá a $G_{k-1}(\zeta) = 0$ $n-k+1$-edfokú egyenlet absolut legkisebb, tehát a $|z| = \varrho_{k-1}$ körön levő gyökei $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_p$, rendre $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_p$ multiplicitással, ekkor a $G_k(\zeta) = 0$ $n-k$-adfokú egyenletnek $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_p$ nyilván ν_1-1, $\nu_2-1, \ldots \nu_p-1$-szeres multiplicitású gyökei. Miután

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p \leqq n - k + 1, \tag{40}$$

tehát a $G_k(\zeta) = 0$ egyenletnek $n-k$ gyöke közül legfeljebb $n-k+1-p$ gyöke (mindegyiket multiplicitása szerint számítva) van a $|z| = \varrho_{k-1}$ körön. $n-k+1-p \leqq n-k$, azaz $G_k(\zeta) = 0$ minden gyöke a $|z| = \varrho_{k-1}$ körön van akkor s csak akkor, ha I. (40).ben az egyenlőség jele érvényes, azaz $G_{k-1}(\zeta) = 0$ minden gyöke a $|z| = \varrho_{k-1}$ körön van és II. ha $p = 1$, azaz ha $G_{k-1}(\zeta) = 0$ minden gyöke összeesik. Ezen meggondolást $k = 1, 2, \ldots$ elvégezve, nyerjük, hogy *a $G_k(\zeta) = 0$ egyenletnek akkor s csak akkor van minden gyöke a $|z| = \varrho$ körön, ha a $G(\zeta) = 0$ egyenlet minden gyöke összeesik.*

β) Ha a $S_{1,1}$ forma a $S=0$ relatióhoz tartozó minimális értékrendszerek egyikére sem tűnik el, úgy a $G(\zeta)=0$ egyenlet összes absolut legkisebb gyökei egyszeres multiplicitásúak, a minimális értékrendszerek mind közös absolut értékűek, s ha a $G(\zeta) = 0$ egyenletnek nincs minden gyöke a $|z| = \varrho$ körön, összeesők.

Ha ugyanis a $G(\zeta)=0$ egyenlet egyik gyöke: $\zeta_\varkappa$ legalább kétszeres multiplicitású, úgy $G(\zeta_\varkappa)=G'(\zeta_\varkappa)=0$ és (1. §. (7—10)) szerint:

$$S_{1,1}(\zeta_\varkappa,\ldots\zeta_\varkappa)=H_1^{(1)}(\zeta_\varkappa)=G(\zeta_\varkappa)-\frac{\zeta_\varkappa}{n}G'(\zeta_\varkappa)=0,$$

vagyis a $S_{1,1}$ forma a $(\zeta_\varkappa,\ldots\zeta_\varkappa)$ minimális értékrendszerre eltűnik, föltevésünkkel ellentétben. Ha viszont $G(\zeta)=0$ összes absolut legkisebb gyökei egyszeres multiplicitásúak, úgy $S_{1,1}$ egyik minimális értékrendszerre sem tűnik el. Mert, ha $S_{1,1}$ eltűnik a $S=0$ relatióhoz tartozó minimális értékrendszerek valamelyikére, úgy $\varrho_1 \leqq \varrho$, holott miután $G(z)=0$ összes absolut legkisebb gyökei egyszeresek, *(a)* szerint szükségképen $\varrho_1 > \varrho$.

Továbbá, miután a *(β)* feltételekkel egyidejűleg (2. §. *δ)*) feltétele mindig teljesül, tehát az összes minimális értékrendszerek közös absolut értékűek.

Végül, miután *(β)* feltétellel egyidejűleg (2. §. *η)*) feltétel teljesül, tehát, ha van a minimális értékrendszerek közt olyan, melynek nem minden eleme egyenlő, úgy (2. §. *η)* Cor.) szerint van egy $(z_1^\star, z_2^\star,\ldots z_n^\star)$ *széteső* minimális értékrendszer.

Azonban a $(z_1^\star, z_2^\star,\ldots z_n^\star)$ minimális értékrendszer s $G(\zeta)=0$ egyenlet $(\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)$ gyökrendszere közti, (5. §. *γ)*)-ban kimutatott reciprocitásból következik, hogy, ha a $(z_1^\star, z_2^\star,\ldots z_n^\star)$ értékrendszert, mint gyökrendszert fogjuk föl, a $(\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)$ értékrendszer egy, a $S^\star(\zeta_1,\ldots\zeta_n)=0$ relatióhoz tartozó maximális értékrendszer. A $S^\star=0$ relatióhoz tartozó adjungált egyenlet $z_1^\star, z_2^\star,\ldots z_n^\star$ gyökei mind egyszeres multiplicitásuak lévén, a $S^\star=0$ relatióhoz, mint közvetlenül fentebb kimutattuk, csupán közös absolut értékű maximális értékrendszerek tartoznak, azaz $|\zeta_1|=|\zeta_2|=\cdots=|\zeta_n|=\varrho$.

Ha tehát a $G(\zeta)=0$ egyenletnek nincs minden gyöke a $|z|=\varrho$ körön, úgy *(β)* föltétel esetén a $S=0$ relatióhoz tartozó összes minimális értékrendszerek összeesők.

Corollarium. *(a)*-ban kimutattuk, hogy ha a $S=0$ relatióhoz adjungált $G(\zeta)=0$ egyenletnek nem minden gyöke egyenlő, úgy a $S_{1,1}=0$, $S_{2,2}=0,\ldots$ relatiókhoz adjungált $G_1(\zeta)=0$

$G_2(\zeta)=0,\ldots$ egyenleteknek nincs minden gyöke a $|z|=\varrho$ körön, tehát a $S_{1,1}=0$, $S_{2,2}=0,\ldots$ relatiókhoz tartozó minimális értékrendszerek közt nincsenek szétesők.

γ) Ha valamely $(z_1^\star, z_2^\star,\ldots z_n^\star)$ minimális értékrendszerre nézve $S_{h,h}$ a $S_{1,1}$, $S_{2,2}\ldots$ sorozat első el nem tünő tagja, úgy a $G(\zeta)=0$ egyenlet absolut legkisebb gyökei közt legalább egy h-szoros multiplicitású.

Feltevés szerint $S_{h-1,h-1}(z_h^\star, z_{h+1}^\star,\ldots z_n^\star)=0$, tehát $\varrho_{h-1}\leqq\varrho$. Azonban *(α)* szerint $\varrho\leqq\varrho_1\leqq\cdots\leqq\varrho_{h-1}$, s az egyenlőségi jelek csak akkor érvényesek, ha a $G(\zeta)=0$, $G_1(\zeta)=0,\ldots G_{h-1}(\zeta)=0$ egyenleteknek legalább egy absolut legkisebb közös gyökük van. De (1. §., *β)* (7) és (10)) szerint ekkor a $G(\zeta)=0$, $G'(\zeta)=0,\ldots G^{(h-1)}(\zeta)=0$ egyenleteknek is van közös gyökük, azaz a $G(\zeta)=0$ egyenletnek van egy h-szoros absolut legkisebb gyöke.

Ekkor a $z_1^\star, z_2^\star,\ldots z_{h-1}^\star$ elemek tetszőlegesek (miután az ezek szerint kifejtett S forma együtthatói eltűnnek), míg a $(z_h^\star,\ldots z_n^\star)$ elemek a $G(z)=0$ egyik h-szoros gyökével esnek össze. Ugyanis, minthogy $S_{h,h}^{(l)}(z_h^\star,\ldots z_n^\star)\neq 0$, $(l=h, h+1,\ldots n)$, tehát (2. §. *η)* és Cor.) szerint, ha a $z_h^\star,\ldots z_n^\star$ elemek nem mind egyenlők, úgy a $S_{h-1,h-1}=0$ relatióhoz tartozó minimális értékrendszerek közt van egy *szétesö*, ellentétben *(β)* Corollariummal, mely szerint a $S_{h-1,h-1}=0$ relatióhoz tartozó minimális értékrendszerek közt nincs széteső.

δ) ***V. tétel.*** *Ha a*

$$S_{1,1}, S_{2,2},\ldots$$

sorozatban $S_{k,k}$ az első, mely a $S=0$ relatióhoz tartozó minimális értékrendszerek egyikére sem tűnik el, úgy a $G(\zeta)=0$ absolut legkisebb gyökei közt van legalább egy k-szoros s nincs magasabb multiplicitású. A minimális értékrendszerek elemei közül $k-1$ lehet tetszőleges és $k-1$-nél több nem. $k-1$ tetszőleges elem esetén a többi $n-k+1$ elem a $G(z)=0$ egyenlet valamelyik absolut legkisebb k-szoros gyökével esik egybe.

Feltevés szerint van oly minimális értékrendszer, melyre $S_{k-1,k-1}=0$, tehát $\varrho_{k-1}\leqq\varrho$. Azonban *(α)* szerint

$$\varrho \leqq \varrho_1 \leqq \cdots \leqq \varrho_{k-1}$$

s egyenlőség csak akkor áll fönn, ha a

$$G'(\zeta) = 0,\ G_1(\zeta) = H_1^{(1)}(\zeta) = 0, \ldots G_{k-1}(\zeta) = H_{k-1}^{(k-1)}(\zeta) = 0$$

egyenleteknek, tehát egyidejűleg a

$$G(\zeta) = 0,\ G'(\zeta) = 0, \ldots G^{(k-1)}(\zeta) = 0$$

egyenleteknek van közös gyökük, azaz a $G(\zeta) = 0$ egyenletnek van egy k-szoros absolut legkisebb gyöke. Viszont nincs k-nál magasabb multiplicitású, mert, ha egyik gyök: $\zeta_\varkappa$ legalább $k+1$-szeres és $|\zeta_\varkappa| = \varrho$, úgy (1. §. *β)* (7—10)) szerint

$$S_{k,k}(\zeta_\varkappa, \ldots \zeta_\varkappa) = H_k^{(k)}(\zeta_\varkappa) = G(\zeta_\varkappa) - \binom{k}{1} \frac{\zeta_\varkappa}{n} G'(\zeta_\varkappa) + \cdots +$$

$$+ (-1)^k \frac{\zeta_\varkappa^k}{n(n-1)\ldots(n-k+1)} G^{(k)}(\zeta_\varkappa) = 0,$$

vagyis a $S_{k,k}$ forma a $(\zeta_\varkappa, \ldots \zeta_\varkappa)$ minimális értékrendszerre eltűnik, föltevésünkkel ellentétben.

Legyen továbbá $(z_1^\star, \ldots z_n^\star)$ egy oly minimális értékrendszer, melyre $S_{k-1,k-1}(z_k^\star, \ldots z_n^\star) = 0$, tehát (3. §. *β)*) szerint egyidejűleg $S_{k-1,0} = S_{k-1,1} = \cdots = S_{k-1,k-2} = 0$. Ekkor a $z_1^\star, z_2^\star, \ldots z_{k-1}^\star$ elemek tetszőlegesek. Viszont k elem nem lehet tetszőleges, különben ezeket 0-sal egyenlővé téve, adódik $S_{k,k} = 0$, feltevésünkkel ellentétben.

Végül a *(γ)*-ban szereplő meggondolásból $h = k$ esetre következik, hogy, ha $k-1$ elem tetszőleges, úgy a többi $n-k+1$ elem a $G(\zeta) = 0$ egyenlet valamely k-szoros absolut legkisebb gyökével esik egybe.

η) Széteső minimális értékrendszerek létezésének szükséges és elegendő feltétele az, hogy a $G(\zeta) = 0$ egyenlet minden gyöke egyenlő absolut értékű legyen.

I. A feltétel szükséges, mint azt (6. §. *β)*) alatt kimutattuk.

II. A feltétel elegendő. Ha ugyanis a $S = 0$ relatiót a

$$s_n - \frac{\sigma_1 s_{n-1}}{\binom{n}{1}} + \cdots \pm \frac{\sigma_{n-1} s_1}{\binom{n}{n-1}} \mp \sigma_n = 0$$

alakban irjuk, hol, mint eddig s_p, illetőleg σ_p a $z_1, z_2, \ldots z_n$, illetőleg $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ számok p-edrendű elemi symmetrikus függvényeit jelentik, úgy

$$z_1 = \frac{\dfrac{\sigma_1 s^{(1)}_{n-1}}{\binom{n}{1}} - \dfrac{\sigma_2 s^{(1)}_{n-2}}{\binom{n}{2}} + \cdots \pm \dfrac{\sigma_{n-1} s^{(1)}_1}{\binom{n}{n-1}} \mp \sigma_n}{s^{(1)}_{n-1} - \dfrac{\sigma_1 s^{(1)}_{n-2}}{\binom{n}{1}} + \cdots \pm \dfrac{\sigma_{n-1}}{\binom{n}{n-1}}},$$

hol $s^{(1)}_p$ a $z_2, z_3, \ldots z_n$ számok elemi symmetrikus függvényét jelenti. Ha mármost

$$|\zeta_1| = |\zeta_2| = \cdots = |\zeta_n| = \varrho \quad \text{és} \quad |z_2| = |z_3| = \cdots = |z_n| = \varrho,$$

úgy (ha $\bar{a}$ az a konjugáltját jelenti):

$$z_1 = \frac{\sigma_n \left[\dfrac{\varrho^{2(1-n)} \bar{\sigma}_{n-1} \bar{s}^{(1)}_{n-1}}{\binom{n}{1}} - \dfrac{\varrho^{2(2-n)} \bar{\sigma}_{n-2} \bar{s}^{(2)}_{n-2}}{\binom{n}{2}} + \cdots \pm 1 \right]}{\pm s^{(1)}_{n-1} \left[\dfrac{\varrho^{2(1-n)} \sigma_{n-1} \bar{s}^{(1)}_{n-1}}{\binom{n}{n-1}} - \dfrac{\varrho^{2(2-n)} \sigma_{n-2} \bar{s}^{(2)}_{n-2}}{\binom{n}{n-2}} + \cdots \pm 1 \right]},$$

azaz

$$|z_1| = \left| \frac{\sigma_n}{s^{(1)}_{n-1}} \right| = \left| \frac{\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_n}{z_2 z_3 \ldots z_n} \right| = \varrho.$$

Ha tehát a $G(\zeta) = 0$ adjungált egyenlet minden gyöke egyenlő absolut értékű s közös absolut értékük ϱ, úgy egy minimális értékrendszer $n-1$ eleme a $|z| = \varrho$ körön tetszőlegesen fölvehető s a $S = 0$ relatióból meghatározott n-edik elem szintén a $|z| = \varrho$ körön van.

Jelen §. $(a - \delta)$-ből következik továbbá, hogy, azon eset kivételével, midőn a $G(\zeta) = 0$ egyenletnek minden gyöke egyenlő, széteső minimális értékrendszerek csupán $|z| = \varrho$ körön vannak. Azon esetben, ha $G(\zeta) = 0$ minden gyöke egyenlő, akkor a $S(z_1 \ldots z_n)$ multilinearis forma n linearis tényezőre bomlik s a hozzátartozó minimális értékrendszerek egyik eleme a $G(\zeta) = 0$

egyenlet egyetlen gyökével esik egybe, míg a többi $n-1$ elem tetszőleges. Ebben s csak ebben az esetben vannak tehát szétesö minimális értékrendszerek, melyeknek nincs szükségképen minden eleme a $|z|=\varrho$ körön.

Összefoglalólag, a minimális értékrendszerek konfiguratióit a következő osztályokra oszthatjuk:

I. *$G(z)=0$ absolut legkisebb gyökei közt vannak többszörösek s a legmagasabb előforduló multiplicitás k:*

I_1. *Ha a $G(z)=0$ egyenletnek nincs minden gyöke a $|z|=\varrho$ körön, úgy egy minimális értékrendszer $\varkappa \leq k-1$ számú eleme lehet tetszőleges s ekkor a többi $n-\varkappa \geq n-k+1$ számú eleme $G(z)=0$ valamely legalább $\varkappa+1$-szeres abs. legkisebb gyökével esik egybe. Széteső minimális értékrendszerek nincsenek.*

I_2. *Ha a $G(z)=0$ egyenlet minden gyöke a $|z|=\varrho$ körön van, úgy az (I_1) eseteken kívül széteső minimális értékrendszerek is vannak, melyeknek $n-1$ eleme a $|z|=\varrho$ körön tetszőlegesen előírható.*

II. *$G(z)=0$ absolut legkisebb gyökei mind egyszeres multiplicitásnak:*

II_1. *Ha a $G(z)=0$ egyenlet minden gyöke a $|z|=\varrho$ körön van, úgy végtelen sok széteső minimális értékrendszer van, melyeknek $n-1$ eleme a $|z|=\varrho$ körön tetszőlegesen előírható.*

II_2. *Ha a $G(z)=0$ egyenletnek nincs minden gyöke a $|z|=\varrho$ körön, hanem csupán $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_r$, akkor kizárólag összeeső minimális értékrendszerek vannak; ezek rendre a $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_r$ pontokba esnek.*

Kiemeljük a II_2. azon speciális esetét, midőn $r=1$, vagyis a $G(z)=0$ adjungált egyenletnek egyetlen, 1 multiplicitású absolut legkisebb gyöke van. Ekkor és csak ekkor van tárgyalt Tchebychef-féle minimumföladatunknak *egyetlen* megoldása, ez összeeső és a jelzett gyökpontba esik.

Analog tételek érvényesek a maximális értékrendszerekre.

Egerváry Jenő.

FOLYTONOS LEKÉPEZÉSEKRŐL.[1]

Egy síkbeli ponthalmaz leképezésén oly előírást értünk, mely e halmaz minden pontjához hozzárendel egy vagy több pontot mint «kép»-et. Egyértelmű a leképezés, ha a halmaz minden pontjának egy és csak egy képpontja van, továbbá kölcsönösen egyértelmű, ha e mellett két különböző pontnak két különböző képpont felel meg. Folytonosnak nevezünk egy ily leképezést abban az esetben, hogy két pontnak megfelelő képpontok egymáshoz tetszésszerinti közel vannak, hacsak az eredeti pontok távolsága elegendő kicsiny; másszóval: ha $P_1, P_2, \ldots$ a halmaz oly pontjai, melyek convergálnak a halmaz egy P pontjához, akkor a megfelelő $P_1', P_2', \ldots$ képpontok is convergálnak s limesük P képpontja P'; s e feltétel teljesül a halmaz bármely P pontjára s bármely hozzá convergáló $P_1, P_2, \ldots$ pontsorozatára nézve. Egy kölcsönösen egyértelmű és folytonos leképezést röviden topologikusnak nevezünk. A következőkben feltesszük, hogy a képpontok maguk is egy síkbeli ponthalmazt alkotnak.

Válasszuk most eredeti halmaznak egy körvonalon fekvő pontok összeségét; ennek topologikus képét JORDAN-görbének nevezzük. A fundamentális jelentőségű JORDAN-görbe-tétel szerint egy ilyen JORDAN-görbe a síkot két tartományra osztja s e tartományok mindegyikének határával azonos. Tekintsük most a zárt körlemeznek topologikus leképezéseit; egy ilyen leképezésnél a körvonal képe természetesen egy JORDAN-görbe, de kérdés, hogy ezek a JORDAN-görbék megadják-e az összes lehetséges JORDAN-görbéket. Másként fogalmazva e kérdést, kérdezzük, hogy ha adva van egy körvonalnak egy

[1] A Math. és Phys. Társulat 1922 márczius 9-i ülésén tartott előadás.

JORDAN-görbére való topologikus leképezése, ki lehet-e terjeszteni ezt az egész körlemezre, úgyhogy a zárt körlemeznek a JORDAN-görbére és belsejére való topologikus leképezése álljon elő. A válasz, mint a conformis leképezések elméletéből ismeretes, igenlő; ugyanis le lehet képezni a JORDAN-görbe belsejét (valamint bármely egyszeresen összefüggő tartományt is) kölcsönösen egyértelmű és conformis módon a kör belsejére: ez a conformis leképezés existentia-tétele, melyre legutóbb FEJÉR és RIESZ FRIGYES adtak nagyon egyszerű bizonyítást; ehhez hozzájárul az OSGOOD által sejtésként kimondott és CARATHÉODORY, majd egyszerűbben COURANT és LINDELÖF által bebizonyított tétel, mely szerint egy JORDAN-görbe belsejének a kör belsejére való conformis leképezése a kerületre is kölcsönösen egyértelmű és folytonos módon terjeszkedik ki. Ilyen módon a conformis leképezések elméletéből nyerjük a JORDAN-görbe és belsejének a körlemezre való topologikus leképezésének existentiáját. Kívánatos azonban a topologia szempontjából e tételnek topologikus bizonyítása s ilyet adott TIETZE s újabban ANTOINE és KERÉKJÁRTÓ.

Az említett tételből következik a JORDAN-görbének két nevezetes tulajdonsága, (melyek közül a második magában foglalja az elsőt): 1. A JORDAN-görbe minden pontja elérhető a JORDAN-görbe belsejében is, külsejében is; vagyis egy tetszésszerinti P pontjához lehet fektetni egy JORDAN-görbeívet (= zárt egyenesszakasz topologikus képe), mely e P ponttól eltekintve egészen a görbe belsejében, illetőleg külsejében fekszik. 2. A JORDAN-görbe minden pontjában sima (unbewallt) úgy belsejére, mint külsejére nézve; vagyis ha P a görbe tetszésszerinti pontja és ε tetszésszerinti positiv szám, akkor meghatározható oly $\eta>0$, hogy ha Q_1 és Q_2 a görbének tetszésszerinti, P-hez η-nál közelebb fekvő pontjai, akkor Q_1 és Q_2 összeköthetők egymással egy egészen a görbe belsejében, illetőleg külsejében haladó és ε-nál kisebb átmérőjű JORDAN-görbeív által.[1]

---

[1] E két állítás egyébként közvetlenül kiadódik a JORDAN-féle görbetételre adott bizonyításomból is (Math. és Természettud. Ért. 38. k. 94. o).

Tekintsük a körlemeznek egy másik körlemezre való topologikus leképezését; a concentrikus körök és sugarak képei a másik körlemezen egy görbevonalú poláris coordinátarendszert adnak; a concentrikus körök seregének képe egymás belsejében fekvő JORDAN-görbéknek a körlemezt teljesen kitöltő serege. Kérdés, hogy megfordítva, adva lévén egymásban fekvő JORDAN-görbéknek a körlemezt kitöltő serege, leképezhető-e ez a körlemez topologikus leképezése által a concentrikus körök seregére; a válasz tagadó, mint azt egy egyszerű példán lehet látni. Hogy egy ily görbesereg a concentrikus körök seregével legyen homoeomorph, arra nyilván szükséges, de bebizonyítható, hogy egyben elégséges is a következő feltétel: Ha P_ν, Q_ν a sereg ugyanazon j_ν görbéjén választott pontok ($\nu=1, 2, 3, \ldots$), melyek ν minden határon túl való növekedésével egy P ponthoz convergálnak, akkor a j_ν görbéken alkalmasan megválasztott $\widehat{P_\nu Q_\nu}$ ívek is P-hez convergálnak. Ugyanerre egy másik feltételként proponálta RIESZ FRIGYES az egyenletes simaság feltételét, a minek fenti feltételünkkel æquivalens volta valóban igazolható egyszerű módon. E tárgynak részletes kidolgozását illetően egy legközelebb közlendő dolgozatomra utalok.

A topologikus leképezés existentia-tételéből egyszerűen adódik, mint ANTOINE megmutatta, TIETZE deformatio-tétele; legyen adva a körlemeznek önmagára való topologikus leképezése, melynél a körvonal indicatrixa (irányítása) változatlan marad; akkor, TIETZE tétele szerint, az adott leképezést lehet az azonosságba deformálni; vagyis meg lehet adni a körlemez önmagára való topologikus leképezéseinek a $0 \leq t \leq 1$ parametertől folytonosan függő halmazát, melynél $t=1$-nek az adott leképezés és $t=0$-nak az azonos leképezés (melynél mindegyik pont önmagába megy át) felel meg. Felmerül itt a kérdés, milyen egyszerű normálformáit lehet megadni a topologikus deformatióknak, melyekkel minden, az indicatrixot megtartó leképezés előállítható; igaz-e például, hogy a körlemeznek minden önmagára való topologikus leképezése, megmaradó indicatrixszal, előállítható oly deformatióval, melynél különböző pontok pályái vagy egymástól egészen különböző, vagy pedig teljesen egybeeső JORDAN-görbeívek?

A körlemeznek minden önmagára való topologikus leképezésénél van fixpontja, vagyis oly pontja, mely képével azonos; ez BROUWER fixponttétele. Ha a körlemezt egy rugalmas lapnak képzeljük s ezen végezünk egy folytonos deformatiót, akkor minden egyes t_0 időpillanatban lesznek oly pontok, melyek eredeti helyükön vannak, ezek vagy az egész $0 \leqq t \leqq t_0$ időközben helyükön maradtak, vagy pedig közben onnan elmozdultak s a t_0 időre visszatértek. Rögzitsük e pontokat, valamint a kör kerületét a maga egészében s a többi pontokat bocsássuk szabadon; akkor a lap rugalmassága következtében bizonyos deformatio keletkezik. Minden egyes t_0 időponthoz tartozik ilyen módon az eredeti deformatióból nyert leképezésen kívül még egy másik leképezése a körlemeznek önmagára; ezek segitségével mechanikai normálformákat nyerhetünk a deformatiókra.

A folytonos leképezéseket másképen még mint folyadékok, illetőleg gázok mozgását ábrázolhatjuk. Tegyük fel, hogy ha e mozgásnál egy molekula belejut egy másiknak a pályájába, akkor ettől kezdve állandóan a másiknak pályáján marad; ez esetben az áramlások igen egyszerű typusok által jellemezhetők. Egy esetet említek, midőn ugyanis a pályavonalak zárt JORDAN-görbék s az áramlásnak csak egy örvénylési pontja van; akkor e JORDAN-görbék bármely kettője közül egyik a másiknak belsejében fekszik, továbbá a t időparameterben való folytonosság következtében teljesül e görbék seregére nézve az egyenletes símaság fentebb említett feltétele, úgyhogy e sereg a concentrikus körök seregével s így az áramlás, lényegében, egy a concentrikus körökön való áramlással æquivalens. Ha az áramlás stationárius oly értelemben, hogy egy bizonyos helyről bármely időpontban a molekulák mindig ugyanabban a mozgási állapotban indulnak ki, a mi nem egyéb, mint a POINCARÉ által vizsgált, az $f(z, t+\tau) = f(f(z, t), \tau)$ egyenlettel jellemzett analytikus iteratio esete, akkor a pályavonalak egymást nem metsző JORDAN-görbék, illetőleg JORDAN-görbeívek; ebben az esetben még közelebbről jellemezhetjük a megfelelő áramlásokat. Tegyük fel például, hogy egy molekula kiindulva eredeti helyéről oda T idő mulva visszaérkezik, akkor ennek pályáján mozgó minden más molekula is visszaérkezik T idő alatt eredeti helyére, úgyhogy összeségök lényegében egy forgást végzett, továbbá ehhez a pályához közel fekvő pályákon mozgó molekulák kevéssel különböző periodusú keringéseket végeznek. Abban az esetben, hogy minden pályán a keringési idő ugyanaz, az áramlás lényegében egy rideg anyag forgásával æquivalens.

Ebbe a témakörbe tartozik Poincaré visszatérési-tétele, mely szerint egy incompressibilis folyadék áramlásánál majdnem minden molekula visszajut elegendő nagy idő alatt kiindulási helyének tetszésszerinti közelébe. Planck-tól származik a következő, némileg hasonló probléma: egy háromszögben elbocsátott pont, mely a háromszög oldalaiba való ütközéseknél a visszaverődés törvénye szerint folytatja útját, bármely pontnak tetszésszerinti közelébe el fog jutni egy tetszésszerint megadott iránytól tetszésszerinti kevéssel különböző iránynyal — feltéve, hogy kizárunk bizonyos speciális szögű háromszögeket s a háromszögben bizonyos speciális irányokat. E problémára vonatkozóan eddig csak néhány egyszerűbb adat van s általános megoldása kivánatos. Hasonló problémával foglalkozik Kőnig Dénes és Szűcs szép dolgozata, a kockában mozgó pontról, a hol azonban az irány kérdése nem jön tekintetbe.

Az eddigi egykonturos tartományokra vonatkozó meggondolásokhoz csatlakoznak a többkonturos tartományokat illető kérdések. Tekintsük először két concentrikus körvonaltól határolt körgyűrű esetét; ha egy incompressibilis folyadék e körgyűrűn oly áramlást végez, melynek iránya a külső és belső határkörön ellenkező, akkor, Poincaré tétele szerint, lesz az áramlásnak bármely időpillanatban két fixpontja, vagyis a folyadéknak két oly molekulája, melyek ebben a pillanatban ismét, vagy pedig még mindig eredeti helyükön vannak. Kettőnél több konturos siktartományra analog tétel érvényes.

Kerékjártó Béla.

ÉSZLELÉSEK EREDMÉNYEINEK TÖRVÉNYBEFOGLALÁSA POLYNOMOK SEGÉLYÉVEL.

Úgy a fizikában, mint a statisztikában gyakran találkozunk a következő problémával: Legyen x_0, x_1, ... x_{n-1} valamely dolog n számú fokozata, a hol

$$x = x_0 + h\xi \qquad (\xi = 0, 1, 2, 0\ldots, n-1);$$

legyen továbbá valamely észlelési sorozatban az x_ξ fokozat gyakorisága y_ξ, közelitsük meg az y_ξ gyakoriságokat egy

$$f_m(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots c_m x^m$$

polynommal; jelöljük az ennek megfelelőleg kiszámitott $f_m(x_\xi)$ gyakoriságok és az észlelt y_ξ gyakoriságok közötti eltérést δ_ξ-vel

$$\delta_\xi = f_m(x_\xi) - y_\xi.$$

A megközelités mértékéül a jellegzetes eltérés (standard deviation) σ szolgál, ez a δ_ξ eltérések négyzetének átlagából vont négyzetgyök

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\delta_\xi^2}{n}}.$$

Probléma: Az y_ξ gyakoriságok egy lehetőleg alacsony fokú polynommal közelítendők meg. Az $f_m(x)$ polynom koefficiensei úgy határozandók meg, hogy valamennyi m-edfokú polynom között az $f_m(x)$ polynom legyen az, a melynek megfelelő jellegzetes eltérés σ a legkisebb. A fokszám pedig úgy választandó meg, hogy σ kisebb legyen mint egy adott ε.

Geometriai fogalmazásban azt mondhatjuk, hogy meghatározandó egy lehetőleg alacsony fokú $y = c_0 + c_1 x + \ldots c_m x^m$

A m. kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem KÖNYVTÁRA SZEGED

görbe, a mely az x_ξ, y_ξ koordinátákkal biró pontokat a részletezett módon megközelíti.

Szolgáljon például egy a statisztikából merített kérdés. 1891-ben valamely üzemben Amerikában a napi munkabérek a következők voltak:[1]

x	y	x	y
0,50	317	3,00	198
1,00	1472	3,50	254
1,50	1297	4,00	96
2,00	970	4,50	4
2,50	506	5,00	9
			$\Sigma y = 5128$

A táblázatban y jelenti az x napibért kapott munkások számát. A bérfokozatok fél dollárban vannak megállapítva, pl. 0,50 dollárt kapott 317 munkás, 1 dollárt 1472 stb. Megközelítendők az y gyakoriságok a jelzett módon egy $f(x)$ polynom által, úgy hogy σ ne haladja meg a gyakoriságok összegének egy százalékát, azaz $\sigma < 51$.

Az ily problémákat általános esetben a következőkép lehet megoldani. Választani kell egy m_1-edfokú $f_{m_1}(x)$ polynomot, melynek koefficienseit úgy határozzuk meg, hogy

$$\Phi = \frac{1}{n} \Sigma [f_{m_1}(x_\xi) - y_\xi]^2$$

minimum legyen. Jelöljük Φ minimumát $\varphi(m_1)$-el. Ez utóbbi meghatározására $m_1 + 1$ egyenlet áll rendelkezésünkre

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_\nu} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2 \cdots m_1);$$

ez egyenletek megoldása $m_1 + 1$ számú $m_1 + 1$-edrendű determináns kiszámítását teszi szükségessé, a mi hosszadalmas még akkor is, ha követjük azokat az utasításokat, melyeket GAUSS ad a legkisebb négyzetek elméletének alkalmazására.

[1] BOWLEY, Elements of Statistics, 3-rd. ed. p. 91.

Ha $\varphi(m_1) > \varepsilon^2$, akkor a számítást meg kell ismételni egy $m_1 + 1$-edfokú polynom segélyével. Az így nyert polynom valamennyi koefficiense általában az $f_m(x)$ polynoméitől eltérő értékkel bir:

$$f_{m_1+1}(x) = c'_0 + c'_1 x + \ldots c'_{m_1+1} x^{m_1+1},$$

úgy hogy az előző számítás teljesen kárba vész, sőt a második számítás — tekintettel arra, hogy több ismeretlenről van szó — még bonyodalmasabb, mint az első.

Ha $\varphi(m_1 + 1)$ is nagyobb, mint ε^2, akkor a számítást újra meg kell ismételni s ezt addig folytatni, míg elérjük, hogy

$$\varphi(m_1 + \nu) > \varepsilon^2 > \varphi(m_1 + \nu + 1);$$

ekkor a kérdés meg van oldva. Mindég lehetséges egy oly ν értéket találni, hogy e reláció ki legyen elégítve, ugyanis $\varphi(m)$ csökkenő függvény és $\varphi(n-1) = 0$. A legjobb megközelítést a fenti értelemben nyert $m = m_1 + \nu + 1$-edfokú polynom adja.

A vázolt eljárás, mint látható, rendkívül hosszadalmas, fárasztó munkát igényel. Közelfekvő volt a gondolat egy új módszert keresni, mely gyorsabban, egyszerűbb számításokkal vezet czélhoz.

Sikerült is egy oly eljárást találni, mely nemcsak az említett ismétléseknél engedi meg az összes addigi eredmények felhasználását, hanem a melyben még a tekintetbe jövő koefficiensek meghatározása is egyszerűbb — nem lévén szükség magasabb rendű determinánsok értékeinek kiszámítására — úgy, hogy az új eljárás még akkor is előnyösen lesz alkalmazható, ha a polynom fokszáma meg van adva, melylyel a legjobb megközelítés végezendő. (Ez esetben a pontosságot nem lehet előírni.)

A jelzett eljárás a következő:[1] vezessük be x helyett a ξ

[1] CH. JORDAN, Sur une Série de Polynomes dont chaque somme partielle représente la meilleure approximation d'un degré donné suivant la méthode des moindres carrés. Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 20 pp. 297—325, 1921.

4*

változót ($x = x_0 + h\xi$) és jelöljük $q_\nu(\xi)$-vel a ξ változó alábbi ν edfokú polynomját:

$$q_\nu(\xi) = \frac{\nu!}{2^\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu+\mu}{\mu} \binom{\nu-n}{\nu-\mu} \binom{\xi}{\mu}, \tag{1}$$

a hol a zárjeles kifejezések binomiális együtthatókat jelentenek. E képletből folyik:

$$q_0 = 1 \qquad q_1 = \frac{1}{2}[(1-n) + 2\xi]$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\left[\binom{2-n}{2} + 3(2-n)\xi + 6\binom{\xi}{2}\right]$$

$$q_3 = \frac{3}{4}\left[\binom{3-n}{3} + 4\binom{3-n}{2}\xi + 10(3-n)\binom{\xi}{2} + 20\binom{\xi}{3}\right]$$

$$q_4 = \frac{3}{2}\left[\binom{4-n}{4} + 5\binom{4-n}{3}\xi + 15\binom{4-n}{2}\binom{\xi}{2} + \right.$$
$$\left. + 35(4-n)\binom{\xi}{3} + 70\binom{\xi}{4}\right]$$

$$q_5 = \frac{15}{4}\left[\binom{5-n}{5} + 6\binom{5-n}{4}\xi + 21\binom{5-n}{3}\binom{\xi}{2} + \right.$$
$$\left. + 56\binom{5-n}{2}\binom{\xi}{3} + 126(5-n)\binom{\xi}{4} + 252\binom{\xi}{5}\right]$$

. . . . .

vagy pedig ha a q polynomokat ξ hatványai szerint rendezzük:

$$q_2 = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}(n-1)\xi + \frac{1}{4}(n^2-3n+2)$$

$$q_3 = \frac{5}{2}\xi^3 - \frac{15}{4}(n-1)\xi^2 + \frac{1}{4}(6n^2-15n+11)\xi -$$
$$- \frac{1}{8}(n^3-6n^2+11n-6)$$

$$q_4 = \frac{35}{8}\xi^4 - \frac{35}{4}(n-1)\xi^3 + \frac{5}{8}(9n^2-21n+17)\xi^2 -$$
$$- \frac{5}{8}(2n^3-9n^2+17n-10)\xi +$$
$$+ \frac{1}{16}(n^4-10n^3+35n^2-50n+24)$$

$$q_5 = \frac{63}{8}\xi^5 - \frac{315}{16}(n-1)\xi^4 + \frac{35}{8}(4n^2-9n+8)\xi^3 -$$

$$-\frac{105}{16}(n^3-4n^2+8n-5)\xi^2 +$$

$$+\frac{1}{16}(15n^4-105n^3+365n^2-525n+274)\xi -$$

$$-\frac{1}{32}(n^5-15n^4+85n^3-225n^2+274n-120)$$

. . . . . .

Fejtsük ki az $f_m(\xi)$ polynomot, melylyel a megközelítést elérni kívánjuk ξ hatványsora helyett q polynomsorba, a mi mindég lehetséges:

$$f_m(\xi) = a_0 + a_1 q_1 + a_2 q_2 + \cdots a_m q_m.$$

Határozzuk meg az a_0, $a_1, \ldots a_m$ kœfficienseket oly módon, hogy

$$\sum_{\xi=0}^{n-1}[\delta_\xi(m)]^2 = \sum_{\xi=0}^{n-1}[f_m(\xi) - y_\xi]^2 \tag{2}$$

minimum legyen. Ha a q polynomok tetszőlegesek volnának, a számítás nem különbözne az előzőkben felsorolt számításoktól. Minthogy azonban a q polynomok eleget tesznek a

$$\sum_{\xi=0}^{n-1} q_\nu q_\mu = 0 \quad (\text{ha } \nu \neq \mu) \tag{3}$$

egyenleteknek,[1] a számítás lényegesen egyszerűsödik, ugyanis (2) minimummá válik, ha az alábbi $m+1$ egyenlet ki van elégítve:

$$\Sigma[f_m(\xi) - y_\xi]q_\nu = 0 \quad (\nu=0,\ 1,\ 2\ldots,\ m) \tag{4}$$

Azokat az összegeket, melyeket $\xi=0, 1, 2\ldots, n-1$ értékeknek megfelelőleg kell kiszámítani, egyszerűsítés szempontjából a határok nélkül írjuk. Pl. $\Sigma\delta(m)^2$ alatt a (2) összeget, $\Sigma q_\nu q_\mu$ alatt a (3) összeget fogjuk érteni.

A (4) egyenletek a (3) reláció következtében a következő alakot veszik fel:

$$\Sigma y_\xi q_\nu - a_\nu \Sigma q_\nu^2 = 0 \tag{4'}$$

[1] Loc. cit. p. 299.

A (4′) egyenletekből az a_ν állandók értéke rendkívül egyszerűen kiszámitható; még fontosabb azonban az, hogy a_ν értéke nem függ az $f_m(\xi)$ polynom fokától m-től, tehát az $f_{m+1}(\xi)$ polynom első $m+1$ együtthatója egyenlő lesz az $f_m(\xi)$ polynom megfelelő együtthatóival, úgy hogy ha erről az előbbire kívánunk áttérni, elegendő az a_{m+1} együttható kiszámitása.

A megközelítés után fennmaradó eltérések négyzeteinek öszszegét könnyen kiszámithatjuk a (2) egyenletből

$$\Sigma\delta(m)^2 = \Sigma y_\xi^2 - a_0\Sigma y_\xi q_0 - a_1\Sigma y_\xi q_1 - \dots a_m\Sigma y_\xi q_m$$

vagy más alakban

$$\Sigma\delta(m)^2 = \Sigma y^2 - a_0^2 n - a_1^2\Sigma q_1^2 - \dots - a_m^2\Sigma q_m^2.$$

A számítás tényleges keresztülvitele úgy történik, hogy mindenekelőtt kiszámitjuk a Σy_ξ^2 és Σy_ξ értékeket, melyekből

$$a_0 = \frac{1}{n}\Sigma y_\xi \quad \text{és} \quad \Sigma\delta(0)^2 = \Sigma y_\xi^2 - a_0\Sigma y_\xi \quad \text{adódik;}$$

ha ez a mennyiség nagyobb, mint $n\varepsilon^2$, akkor tovább menve kiszámitjuk $\Sigma y_\xi q_1$ és Σq_1^2 értékeit, melyekből

$$a_1 = \frac{\Sigma y_\xi q_1}{\Sigma q_1^2} \quad \text{és} \quad \Sigma\delta(1)^2 = \Sigma\delta(0)^2 - a_1\Sigma y_\xi q_1 \quad \text{-t kapjuk;}$$

ha ez az utóbbi mennyiség még mindig nagyobb, mint $n\varepsilon^2$, akkor folytatni kell az eljárást és kiszámitani $\Sigma y_\xi q_2$ és Σq_2^2 értékeit, melyek segélyével

$$a_2 = \frac{\sum y_\xi q_2}{\sum q_2^2} \quad \text{és} \quad \sum\delta(2)^2 = \sum\delta(1)^2 - a_2\sum y_\xi q_2 \quad \text{-t kapjuk;}$$

és így tovább egész addig, míg a $\sum\delta(m)^2 < n\varepsilon^2$ reláció ki nincs elégítve. Ha ezt elértük, a probléma meg van oldva, a keresett megközelítést

$$y = a_0 + a_1 q_1 + a_2 q_2 + \dots a_m q_m$$

adja. Ha e sort még ξ hatványai szerint kivánjuk rendezni, akkor az az (1) képletek segélyével történik, egyszerű behelyettesítés által.

A számitásokat még lényegesen megrövidithetjük, ha bizonyos táblázatokat készitünk. Elsősorban Σq_ν^2 értékeit kell kiszámitanunk, ez az összeg csupán n-től és ν-től függ, egyszer és mindenkorra kiszámitható és kétdimenziós táblázatba rendezhető.

Σq_ν^2 értékeit különben a czitált értekezés szerint (p. 305.) a következő képlet adja:

$$\Sigma q_\nu^2 = \frac{n}{(2\nu+1)2^{2\nu}} \prod_{s=1}^{\nu} (n^2 - s^2). \tag{5}$$

Miután $q_\nu(\xi)$ függ n-től is, azt explicit módon $q_\nu(\xi, n)$-nek is irhatjuk. Czélszerű e mennyiség értékeire is táblázatokat késziteni, miután azonban az három változótól függ, minden ν értékre külön kétdimenziós táblára van szükség. A számértékek kiszámitásához a legjobb az (1) képletekből azokat használni fel, melyek binomiális faktorok alakjában vannak adva.

A táblázatok készitését, valamint magát az összegezést is — a későbbi számitások folyamán — egyszerűsiti az a körülmény, hogy a q_ν polynomok symmetrikusak,[1] ugyanis

$$q_\nu(\xi) = (-1)^\nu q_\nu(n-1-\xi).$$

Az értekezés végére csatolva van hat táblázat. Az első öt táblázat $q_\nu(\xi, n)$ értékeit adja $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén; e táblázatokban az n $\nu+1$-től 20-ig változik, ξ pedig 0-tól n-ig. A hatodik táblázat $\Sigma q_\nu(n)^2$ értékeit adja $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$ és $n = \nu+1, \nu+2, \ldots$ 20 értékeknek megfelelőleg.

A számitás menetét megvilágitandó, hajtsuk azt végre az értekezés elején említett példa esetén. E táblázatban $n = 10$, $x_0 = 0,50$, $h = 0,50$. Ha azt kivánjuk, hogy a jellegzetes eltérés kisebb legyen, mint *51*, akkor $\Sigma\delta^2$-nek kisebbnek kell lenni, mint $n(51)^2 = 26010$.

Ha x helyett a ξ változót vezetjük be ($x = x_0 + h\xi$), akkor táblázatunk a következő lesz:

---

[1] Loc. cit. p. 307.

ξ	y	y^2
0	317	100489
1	1472	2166784
2	1297	1682209
3	970	940900
4	506	256036
5	198	39204
6	254	64516
7	96	9216
8	4	16
9	9	81
	$\Sigma y = 5123$	$\Sigma y^2 = 5259451$

a honnan azonnal megkapjuk az a_0 értéket, valamint az eltérések négyzeteinek összegét:

$$a_0 = \frac{\Sigma y}{n} = 512,3 \quad . \qquad \Sigma\delta(0)^2 = \Sigma y^2 - a_0 \Sigma y = 2634938.$$

Mielőtt a_1 értékét meghatároznánk, vegyük figyelembe, hogy $q_1(\xi) = -q_1(9-\xi)$, következőleg a helyett, hogy az $y(\xi) . q_1(\xi)$ mennyiséget összegeznénk $\xi = 0, 1, \ldots$ 9-ig, összevonva az $[y(\xi) - y(9-\xi)]\, q_1(\xi)$ mennyiséget összegezhetjük

$$\xi = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\text{-ig}.$$

a_1 és $\Sigma\delta(1)^2$ meghatározása:

ξ	$y(\xi) - y(9-\xi)$	$q_1(\xi)$	$y \cdot q_1$
0	308	−4,5	− 1386
1	1468	−3,5	− 5138
2	1201	−2,5	− 3002,5
3	716	−1,5	− 1074
4	308	−0,5	− 154
			$\Sigma y q_1 = -10754,5$

A q_1 értékek az I. táblázatból vannak véve; a VI. táblázat szerint $\Sigma q_1(10)^2 = 82,5$ következőleg:

$$a_1 = \frac{\Sigma y q_1}{\Sigma q_1^2} = -130,357 \qquad \Sigma\delta(1)^2 = \Sigma\delta(0)^2 - a_1 \Sigma y q_1 = 1233015$$

a_2 és $\Sigma\delta(2)^2$ meghatározása:

Miután $q_2(\xi) = q_2(9-\xi)$ tehát a_2 meghatározására a következő egyszerűsített tábla szolgálhat:

ξ	$y(\xi)+y(9-\xi)$	$q_2(\xi)$	yq_2
0	326	18	5868
1	1476	6	8856
2	1393	— 3	— 4179
3	1224	— 9	—11016
4	704	—12	— 8448
			$\Sigma yq_2 = -$ 8919

a q_2 értékek a II. táblázatból vannak véve; a VI-ból pedig $\Sigma q_2(10)^2 = 1188$ következőleg:

$$a_2 = \frac{\Sigma yq_2}{\Sigma q_2^2} = -7{,}51 \qquad \Sigma\delta(2)^2 = \Sigma\delta(1)^2 - a_2\Sigma yq_2 = 1166981$$

a_3 és $\Sigma\delta(3)^2$ meghatározása:

ξ	$y(\xi)-y(9-\xi)$	$q_3(\xi)$	$y\cdot q_3$
0	308	—63	—19404
1	1468	21	30828
2	1201	52,5	63052,5
3	716	46,5	33294
4	308	18	5544
			$\Sigma yq_3 =$ 113314,5

$a_3 = 5{,}87 \qquad \Sigma\delta(3)^2 = 500879$

a_4 és $\Sigma\delta(4)^2$ meghatározása:

ξ	$y(\xi)+y(9-\xi)$	$q_4(\xi)$	$y\cdot q_4$
0	326	189	61614
1	1476	—231	—340956
2	1393	—178,5	—248650,5
3	1224	31,5	38556
4	704	189	133056
			$\Sigma yq_4 =$ —356380,5

$a_4 = -1{,}13 \qquad \Sigma\delta(4)^2 = 98527$

a_5 és $\Sigma\delta(5)^2$ meghatározása:

ξ	$y(\xi)-y(9-\xi)$	q_5	$y\cdot q_5$
0	308	$-472,5$	-145530
1	1468	1102,5	1618470
2	1201	$-78,75$	$-94578,75$
3	716	$-866,25$	-620235
4	308	$-472,5$	-145530
			$\Sigma yq_5 = 612596,75$

$a_5 = 0,1268$ $\Sigma\delta(5)^2 = 20850.$

Miután ez utóbbi mennyiség kisebb, mint 26010, tehát a kivánt pontosság el van érve; tényleg a megfelelő jellegzetes eltérés $\sigma = 45,7$ kisebb, mint 51; a keresett megközelítő polynom pedig:

$$y = 512,3 + 130,4q_1 - 7,51q_2 + 5,87q_3 - 1,13q_4 + 0,127q_5. \quad \text{(a)}$$

Gyakran czélszerű az így nyert polynomot ξ hatványai szerint rendezni. A mit könnyen elérhetünk, ha q_ν az (1) képletekből vett értékeit az (a) egyenletbe behelyettesítjük. A számítás igen egyszerű, az eredmény a következő:

$$y = 320,54 + 2144,76\xi - 1271,25\xi^2 + 280,35\xi^3 - 27,45\xi^4 + \xi^5 \quad \text{(b)}$$

Mint látjuk, a kivánt megközelítést rendkívül könnyen értük el. A számítások egy tizedét sem vették annak az időnek igénybe, melyre szükségünk lett volna, ha a kérdést a bevezetésben ismertetett módon közvetlenül oldottuk volna meg.

A számítások ellenőrzése szempontjából kiszámíthatjuk még az (a) képlet és az I—V. táblázatok segélyével az egyes δ_ξ eltéréseket:

ξ	δ	ξ	δ
0	3,54	5	79,99
1	$-24,05$	6	$-68,27$
2	63,71	7	16,35
3	$-67,15$	8	4,59
4	$-6,29$	9	$-2,44$
			$\Sigma\delta = -0,02$

Az eltérések összege tehát igen jól megközelíti az elméletnek megfelelő zérus értéket. Ha még kiszámítjuk a fenti értékekből $\Sigma\delta^2$ értékét, 45,35-öt kapunk,[1] a mi szintén eléggé megközelíti az elméletnek megfelelő $\sigma = 45{,}7$ értéket, bizonyságául annak, hogy a számítások elég pontosan végeztettek el.

Függelék. A statisztikában észlelési eredmények gyakoriságának tanulmányozásánál gyakran találunk olyan sorozatokat, melyeket polynomok helyett jobban lehet az alábbi exponenciális kifejezéssel approximálni:

$$f(x) = e^{c_0 + c_1 x + \dots c_m x^m}.$$

A megközelités elérésére a tárgyalt módszert igen egyszerűen lehet alkalmazni, feltéve, hogy megelégszünk azzal, hogy a logarithmusok eltéréseinek négyzetösszege

$$\Sigma [\log f(x_\xi) - \log y_\xi]^2$$

legyen minimum.

Eljárásunknál $f(x)$-nek a következő alakot adjuk:

$$f(x) = 10^{a_0 + a_1 q_1 + a_2 q_2 + \dots a_m q_m},$$

a miből kifolyólag az a_0, $a_1 \dots$ állandók meghatározására az előbbi képleteket alkalmazhatjuk, csak y_ξ helyébe kell mindenütt $\log y_\xi$-t irni. A jellegzetes eltérésre vonatkozó képlet ez esetben természetesen szintén a logarithmusok különbségére vonatkozik.

---

[1] A négyzetreemelést nem kell elvégeznünk, vannak táblázatok, melyek a számok négyzeteit megadják. Pl. BREMIKER, Fünfstellige Logarithmen p. 140—146.

I. Táblázat q_1 (n,ξ) értékeire.

$n \backslash \xi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	—0,5	0,5										
3	—1	0	1									
4	—1,5	—0,5	0,5	1,5								
5	—2	—1	0	1	2							
6	—2,5	—1,5	—0,5	0,5	1,5	2,5						
7	—3	—2	—1	0	1	2	3					
8	—3,5	—2,5	—1,5	—0,5	0,5	1,5	2,5	3,5				
9	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4			
10	—4,5	—3,5	—2,5	—1,5	—0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5		
11	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	
12	—5,5	—4,5	—3,5	—2,5	—1,5	—0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
13	—6	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5
14	—6,5	—5,5	—4,5	—3,5	—2,5	—1,5	—0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
15	—7	—6	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4
16	—7,5	—6,5	—5,5	—4,5	—3,5	—2,5	—1,5	—0,5	0,5	1,5	2,5	3,5
17	—8	—7	—6	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3
18	—8,5	—7,5	—6,5	—5,5	—4,5	—3.5	—2,5	—1,5	—0,5	0,5	1,5	2,5
19	—9	—8	—7	—6	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2
20	—9,5	—8,5	—7,5	—6,5	—5,5	—4,5	—3,5	—2,5	—1,5	—0,5	0,5	1,5

II. Táblázat q_2 (n,ξ) értékeire.

$n \backslash \xi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	0,5	—1	0,5									
4	1,5	—1,5	—1,5	1,5								
5	3	—1,5	—3	—1,5	3							
6	5	—1	—4	—4	— 1	5						
7	7,5	0	—4,5	—6	— 4,5	0	7,5					
8	10,5	1,5	—4,5	—7,5	—7,5	— 4,5	1,5	10,5				
9	14	3,5	—4	—8,5	—10	— 8,5	— 4	3,5	14			
10	18	6	—3	—9	—12	—12	— 9	— 3	6	18		
11	22,5	9	—1,5	—9	—13,5	—15	—13,5	— 9	— 1,5	9	22,5	
12	27,5	12,5	0,5	—8,5	—14,5	—17,5	—17,5	—14,5	—8,5	0,5	12,5	27,5
13	33	16,5	3	—7,5	—15	—19,5	—21	—19,5	—15	— 7,5	3	16,5
14	39	21	6	—6	—15	—21	—24	—24	—21	—15	— 6	6
15	45,5	26	9,5	—4	—14,5	—22	—26,5	—28	—26,5	—22	—14,5	— 4
16	52,5	31,5	13,5	—1,5	—13,5	—22,5	—28,5	—31,5	—31,5	—28,5	—22,5	—13,5
17	60	37,5	18	1,5	—12	—22,5	—30	—34,5	—36	—34,5	—30	—22,5
18	68	44	23	5	—10	—22	—31	—37	—40	—40	—37	—31
19	76,5	51	28,5	9	— 7,5	—21	—31,5	—39	—43,5	—45	—43,5	—39
20	85,5	58,5	34,5	13,5	— 4,5	—19,5	—31,5	—40,5	—46,5	—49,5	—49,5	—46,5

III. Táblázat q_3 (n,ξ) értékeire.

$n \backslash \xi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	— 0,75	**2,25**	— **2,25**	+ 0,75							
5	— 3	6	**0**	— 6	3						
6	— 7,5	10,5	**6**	— **6**	—10,5	7,5					
7	— 15	15	15	**0**	—15	— 15	15				
8	— 26,25	18,75	26,25	**11,25**	—**11,25**	—26.25	—18,75	26 25			
9	— 42	21	39	27	**0**	—27	—39	— 21	42		
10	— 63	21	52,5	46,5	**18**	**—18**	— 46,5	— 52,5	— 21	63	
11	— 90	18	66	69	42	**0**	—42	— 69	— 66	— 18	90
12	—123,75	11,25	78,75	93,75	71,75	**26,25**	**—26,25**	— 71,25	— 93,75	— 78,75	— 11,25
13	—165	0	90	120	105	60	**0**	— 60	—105	—120	— 90
14	—214,5	— 16,5	99	147	142,5	100,5	**36**	— **36**	—100,5	—142,5	—147
15	—273	— 39	105	174	183	147	81	**0**	— 81	—147	—183
16	—341,25	— 68,25	107,25	200,25	225,75	198,75	134,25	**47,25**	— **47,25**	—134,25	—198,75
17	—420	—105	105	225	270	255	195	105	**0**	—105	—195
18	—510	—150	97,5	247,5	315	315	262,5	172,5	**60**	— **60**	—172,5
19	—612	—204	84	267	360	378	336	249	132	**0**	—132
20	—726,75	—267,75	63,75	282,75	404,25	443,25	414,75	333,75	215,25	**74.25**	— **74,25**

IV. Táblázat q_4 (n,ξ) értékeire.

$n \backslash \xi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1,5	— 6	**9**	— 6	1,5						
6	7,5	— 22,5	**15**	**15**	— 22,5	7,5					
7	22,5	— 52,5	7,5	**45**	7,5	— 52,5	22,5				
8	52,5	— 97,5	— 22,5	**67,5**	**67,5**	— 22,5	— 97,5	52,5			
9	105	—157,5	— 82,5	67,5	**135**	67,5	— 82,5	—157,5	105		
10	189	—231	— 178,5	31,5	**189**	**189**	31,5	—178,5	— 231	189	
11	315	—315	— 315	— 52,5	210	**315**	210	— 52,5	— 315	— 315	315
12	495	—405	— 495	— 195	180	**420**	**420**	180	— 195	— 495	— 405
13	742,5	—495	— 720	— 405	82,5	480	**630**	480	82,5	— 405	— 720
14	1072,5	—577,5	— 990	— 690	— 97,5	472,5	**810**	**810**	472,5	— 97,5	— 690
15	1501,5	—643,5	—1303,5	—1056	— 373,5	376,5	931,5	**1134**	931,5	376,5	— 373,5
16	2047,5	—682,5	—1657,5	—1507,5	— 757,5	172,5	967,5	**1417,5**	**1417,5**	967,5	172,5
17	2730	—682,5	—2047,5	—2047,5	—1260	— 157,5	892,5	1627,5	**1890**	1627,5	892,5
18	3570	—630	—2467,5	—2677,5	—1890	— 630	682,5	1732,5	**2310**	**2310**	1732,5
19	4590	—510	—2910	—3397,5	—2655	—1260	315	1702,5	2640	**2970**	2640
20	5814	—306	—3366	—4206	—3561	—2061	—231	1509	2844	**3564**	**3564**

V. Táblázat $q_5\,(n,\xi)$ értékeire.

n \ ξ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	—3,75	18,75	—**37,5**	**37,5**	—18,75	3,75					
7	—22,5	90	—112,5	**0**	112,5	—90	22,5				
8	—78,75	258,75	—191,25	—**168,75**	**168,75**	191,25	—258,75	78,75			
9	—210	577,5	—210	—472,5	**0**	472,5	210	—577,5	210		
10	—472,5	1102,5	—78,75	—866,25	—**472,5**	**472,5**	866,25	78,75	—1102,5	472,5	
11	—945	1890	315	—1260	—1260	**0**	1260	1260	—315	—1890	945
12	—1732,5	2992,5	1102,5	—1522,5	—2310	—**1050**	**1050**	2310	1522,5	—1102,5	—2992,5
13	—2970	4455	2430	—1485	—3510	—2700	**0**	2700	3510	1485	—2430
14	—4826,25	6311,25	4455	—945	—4691,25	—4893,25	—**2025**	**2025**	4893,25	4691,25	945
15	—7507,5	8580	7342,5	330	—5632,5	—7500	—5062,5	**0**	5062,5	7500	5632,5
16	—11261,25	11261,25	11261,25	2598,75	—6063,75	—10316,25	—9056,25	—**3543,75**	**3543,75**	9056,25	10316,25
17	—16380	14332,5	16380	6142,5	—5670	—13072,5	—13860	—8662,5	**0**	8662	13860
18	—23205	17745	22863,75	11261,25	—4095	—15435	—19241,25	—15303,75	—**5775**	**5775**	15303,75
19	—32130	21420	30870	18270	—945	—17010	—24885	—23310	—13860	**0**	13860
20	—43605	25245	40545	27495	4207,5	—17347,5	—30397,5	—32422,5	—24210	—**8910**	**8910**

VI. Táblázat $\sum_{\xi=0}^{n-1} [q_\nu (n,\xi)]^2$ értékeire.

n \ ν	1	2	3	4	5
2	0,5				
3	2	1,5			
4	5	9	11,25		
5	10	31,5	90	157,5	
6	17,5	84	405	1575	3543,75
7	28	189	1350	8662,5	42525
8	42	378	3712,5	34650	276412,5
9	60	693	8910	112612,5	1289925
10	82,5	1188	19305	315315	4837218,75
11	110	1930,5	38610	788287,5	15479100
12	143	3003	72393,75	1801800	43857450
13	182	4504,5	128700	3828825	112736300
14	227,5	6552	218790	7657650	267843637,5
15	280	9282	358020	14549535	595208250
16	340	12852	566865	26453700	1249937325
17	408	17442	872100	46293975	2499874650
18	484,5	23256	1308150	78343650	4791426412,5
19	570	30523,5	1918620	128707425	8845710300
20	665	39501	2758016,25	205931880	15795911250

Jordan Károly.

A GEOMETRIAI FÉNYTAN HYPERBOLA-TÉTELÉNEK ÁLTALÁNOSÍTÁSA.

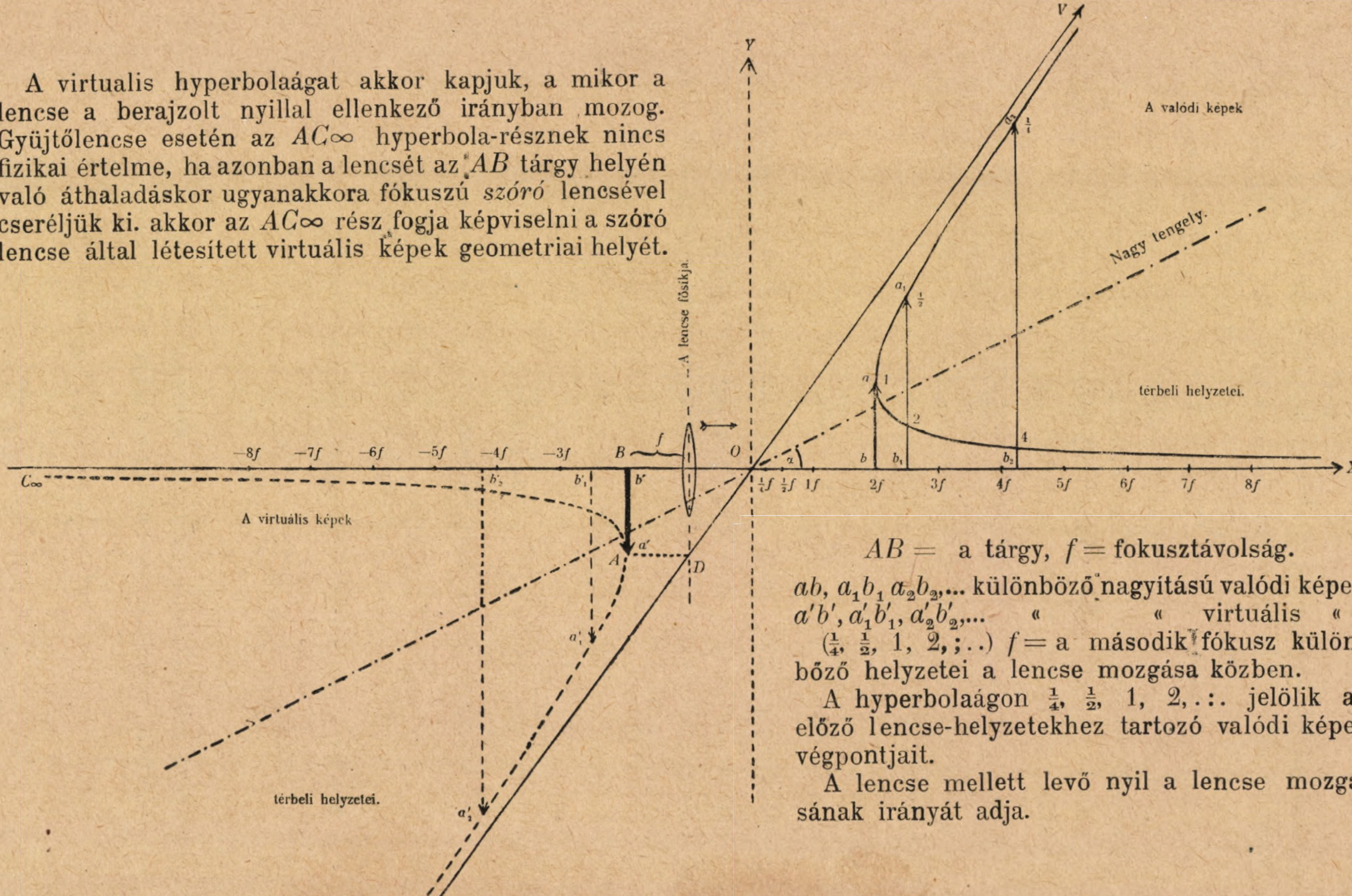
A Math. és Természettud. Értesitő XXXVIII. kötetének 255—265. lapjain sikerült bebizonyitanom, hogy *fix helyzetű térbeli pontnak képe* a lencse vagy gömbtükör tengely-irányú translatórius mozgása közben *hyperbolát ír le*, e görbe térbeli helyzete és alakja azonban egészen más a tükrök, mint a lencsék esetében. Ez a különbség a gömbtükrök és lencsék között *lényegbe vágónak* látszott, amennyiben egy és ugyanazon ernyőtávolsághoz a gömbtükrök esetén *csak egy*, a lencséknél ellenben *két*, különböző nagyitású, éles kép tartozik s ezenkívül a képek mozgási iránya a lencséknél fordulópontot mutat (1. ábra), holott a gömbtükrök hyperbolájánál (2. ábra) ilyen fordulópont nincsen.

A következőkben ki fogom mutatni, hogy ez a különbség a lencsék és gömbtükrök között nem tekinthető alapvetőnek, amennyiben *a kétféle hyperbola-typus mindkét fajta optikai eszköznél előfordulhat,* ha nem ragaszkodunk a fix helyzetű tárgy feltételéhez.

Be fogom továbbá bizonyitani, hogy *a geometriai fénytan hyperbola-tétele akkor is érvényben marad, ha nemcsak az optikai szerkezet, hanem a tárgy is egymással arányos translatórius mozgást végeznek* az optikai tengellyel párhuzamos irányban. Jelöléseim és a használt koordináta-rendszer ugyanazok maradnak, mint előző dolgozatomban.

Nagyobb áttekinthetőség kedvéért a vizsgálódást két részre osztom aszerint, amint a tárgy és lencse *ellenkező* vagy *egyenlő* irányban mozog.

A virtualis hyperbolaágat akkor kapjuk, a mikor a lencse a berajzolt nyillal ellenkező irányban mozog. Gyüjtőlencse esetén az $AC\infty$ hyperbola-résznek nincs fizikai értelme, ha azonban a lencsét az AB tárgy helyén való áthaladáskor ugyanakkora fókuszú *szóró* lencsével cseréljük ki. akkor az $AC\infty$ rész fogja képviselni a szóró lencse által létesített virtuális képek geometriai helyét.



$AB =$ a tárgy, $f =$ fokusztávolság.

ab, a_1b_1 a_2b_2,... különböző nagyítású valódi képek
$a'b'$, $a'_1b'_1$, $a'_2b'_2$,... « « virtuális «

($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, ;..) $f =$ a második fókusz különböző helyzetei a lencse mozgása közben.

A hyperbolaágon $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, ... jelölik az előző lencse-helyzetekhez tartozó valódi képek végpontjait.

A lencse mellett levő nyil a lencse mozgásának irányát adja.

1. ábra.

Koordináta-rendszerünk kezdőpontja a *második fókusz* térbeli helye abban a pillanatban, mikor az első fókusz síkja éppen a tárgy-ponton halad keresztül. E pillanattól számított t idő mulva legyen a tárgy elmozdulása az X tengely *negatív* irányában $\tau_1 = a_1 g(t)$ [hol a_1 állandó, $g(t)$ pedig az időnek egészen tetszésszerinti függvénye], a lencse elmozdulása ellenben az X tengely pozitiv irányában $\tau_2 = a_2 g(t)$ az előbbivel arányos mennyiség, akkor az első fókusztól számított tárgytávolság

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = (a_1 + a_2) g$$

s e tárgytávolságnak a lencsével együtt τ_2 értékkel elmozdult második fókusz új $\varphi = \tau_2$ helyétől számított

$$\varkappa = \frac{f^2}{\tau} = \frac{f^2}{(a_1 + a_2) g}$$

képtávolság felel meg. Ilyenformán az $N = \frac{f}{\tau}$ nagyitású kép a térnek $x = \varphi + \varkappa$ helyén fog létre jönni s ha a tárgy lineáris mérete $AB = T$, akkor az A pont képének koordinátái a következők:

$$\left|\begin{array}{l} x = \varphi + \varkappa = a_2 g(t) + \dfrac{f^2}{(a_1 + a_2) g(t)} \\ y = NT = \dfrac{fT}{(a_1 + a_2) g(t)} \end{array}\right.$$

E két egyenletből $g(t)$-t kiküszöbölve nyerjük

$$x = f\left(\frac{y}{T} + \frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{T}{y}\right) = f\left(\frac{y}{T} + K\frac{T}{y}\right)$$

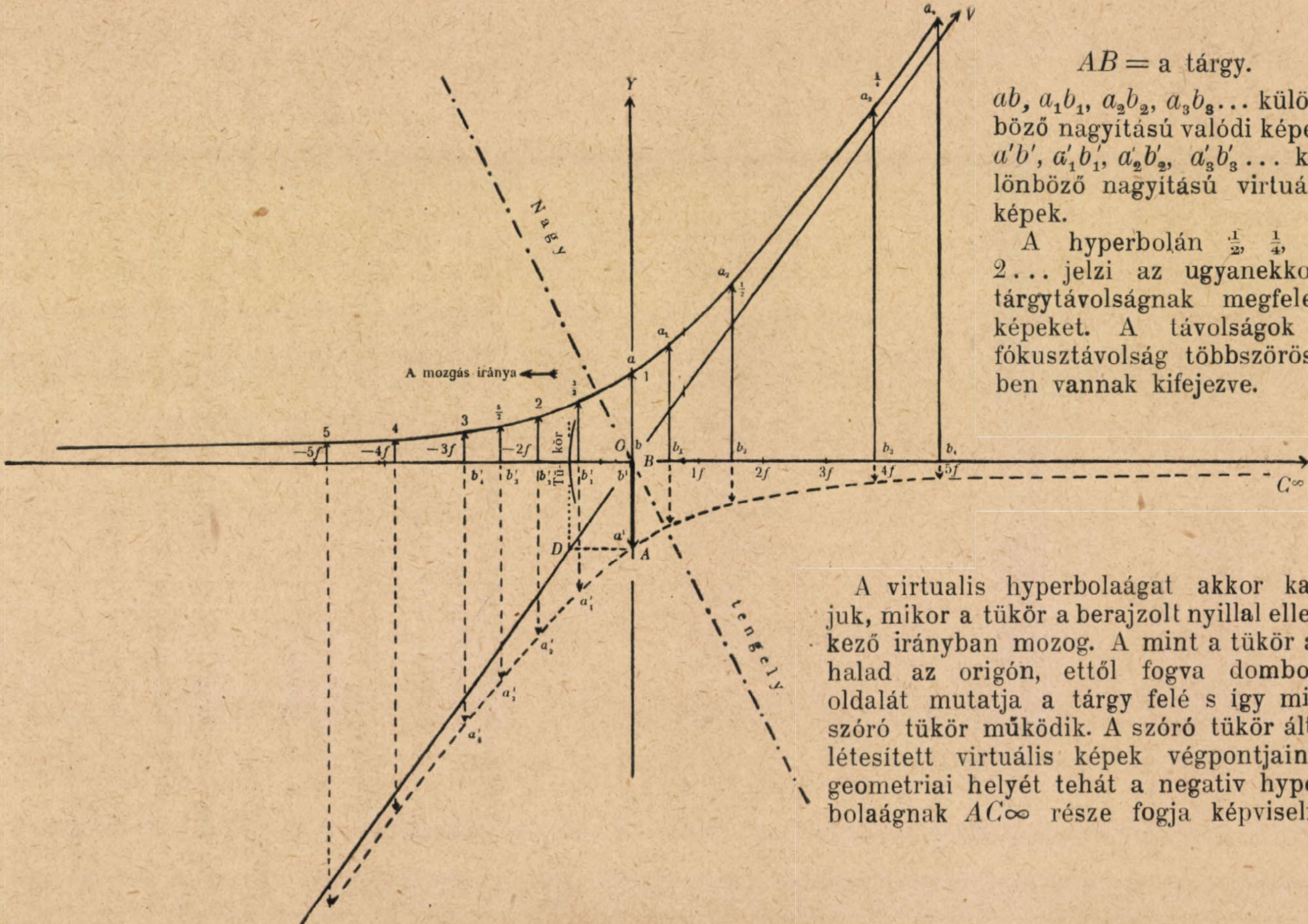
a kérdéses geometriai hely egyenletét, melyben a

$$K = \frac{\varphi}{\tau} = \frac{a_2}{a_1 + a_2} = \frac{1}{1 + \dfrac{a_1}{a_2}}$$

tényező mint állandó parameter szerepel.

Zérusra redukálva egyenletünk alakja a következő:

$$y^2 - \frac{T}{f} xy + KT^2 = o \qquad (1)$$



AB = a tárgy.

ab, a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3... különböző nagyítású valódi képek. $a'b'$, $a'_1b'_1$, $a'_2b'_2$, $a'_3b'_3$... különböző nagyítású virtuális képek.

A hyperbolán $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 1, 2... jelzi az ugyanekkora tárgytávolságnak megfelelő képeket. A távolságok a fókusztávolság többszörösében vannak kifejezve.

A virtualis hyperbolaágat akkor kapjuk, mikor a tükör a berajzolt nyillal ellenkező irányban mozog. A mint a tükör áthalad az origón, ettől fogva domború oldalát mutatja a tárgy felé s így mint szóró tükör működik. A szóró tükör által létesitett virtuális képek végpontjainak geometriai helyét tehát a negativ hyperbolaágnak $AC\infty$ része fogja képviselni.

2. ábra.

5*

s az általános séma szerint szerkesztett determinánsa

$$A = \begin{vmatrix} o & -\frac{T}{2f} & o \\ -\frac{T}{2f} & 1 & o \\ o & o & KT^2 \end{vmatrix} = KT^2 \underbrace{\begin{vmatrix} o & -\frac{T}{2f} \\ -\frac{T}{2f} & 1 \end{vmatrix}}_{A_{33} = -\frac{T^2}{4f^2}} = -K\frac{T^4}{4f^2}$$

Minthogy ez a determináns a zérustól általában különbözik s a harmadrendű A_{33} aldetermináns értéke mindig negatív, a kérdéses másodrendű görbe *hyperbola* s minthogy az (1) egyenletben lineáris tagok nem fordulnak elő, centruma egybeesik a koordináta-rendszer kezdőpontjával. Az asymptota iránytényezője $tg2\alpha = \frac{T}{f}$ ugyanaz, mint a már ismeretes esetben s a hyperbola alakja is hasonlít az előző dolgozatomban kifejtett s az 1. ábrán látható határ-esethez, melyet az (1) egyenletből $a_1 = o$ illetőleg $K=1$ helyettesítéssel nyerünk. A fordulópont helyzetét a $\frac{dx}{dt} = a_2 g'(t) - \frac{f^2 g'(t)}{(a_1 + a_2) g^2(t)} = o$ feltétel határozza meg, mert ebből $g(t) = \frac{f}{\sqrt{a_2(a_1+a_2)}}$ s a hozzátartozó abscissa-érték $x = 2f\sqrt{K}$.

E hyperbolára nézve jellemző az a tulajdonság, hogy *térbeli helyzete és alakja igen különböző mozgások mellett is ugyanaz maradhat.* Ennek oka abban rejlik, hogy az (1) egyenletben parameter gyanánt szereplő $K = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_2}}$ tényező értéke független a mozgások időbeli lefolyását jellemző $g(t)$ kifejezéstől. Minthogy tehát a K tényező értéke nem az elmozdulások abszolút értékétől, hanem csak ezeknek $\frac{a_1}{a_2}$ hányadosától függ, e hyperbola alakja és térbeli helyzete is e hányados függvényének tekinthető s éppen azért a K kifejezést *forma-tényezőnek* nevezhetjük.

A tetszésszerinti $x = nf$ térbeli helyzethez tartozó ordinátaértékeket az

$$y^2 - nTy + KT^2 = o$$

egyenlet gyökei szolgáltatják a hozzájuk tartozó nagyításokat pedig

$$\frac{y}{T} = N$$

helyettesítéssel az

$$N^2 - nN + K = o$$

egyenletből nyerjük, melynek gyökei

$$N_{1,2} = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - K} \tag{2a}$$

a gyökök szorzata

$$N_1 N_2 = K \tag{2b}$$

s a fordulópont $x = 2f\sqrt{K}$ helyzetéhez tartozó nagyítás $N = \sqrt{K}$.

A hyperbolák gyakorlati szerkesztésénél célszerűbb az adott ν-szörös nagyításokhoz tartozó térbeli helyzeteket illetve n értékeket kiszámítanunk, amikoris teljesülnie kell

$$\frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - K} = \nu$$

feltételnek, miből

$$n = \nu + \frac{K}{\nu}$$

s így előre meg tudjuk mondani, hogy az $(1, 2, 3, \cdots \nu)$-szörös nagyitások az

$$x = \left(1 + \frac{K}{1}, 2 + \frac{K}{2}, 3 + \frac{K}{3}, \cdots \nu + \frac{K}{\nu}\right) f$$

térbeli helyzetekhez tartoznak.

A jelen esetben a forma-tényező $K = \dfrac{1}{1 + \dfrac{a_1}{a_2}} < 1$, ennélfogva a fordulópont az $x = 2f\sqrt{K}$ összefüggés értelmében közelebb van a hyperbola centrumához, mint az $a_1 = o$, illetve $K = 1$ határesetben s az ugyanazon x térbeli helyzethez tartozó nagyítások is mások. Az eltérés olyan értelmű, hogy a nagyított képek nagyobbak, a kicsinyített képek ellenben kisebbek, mint az 1. rajzban látható határesetben, az asymptota helyzete azonban változatlanul ugyanaz marad.

Abban a speciális esetben, mikor a tárgy és lencse ellenkező irányban, de teljesen *azonos módon* mozognak, $a_1 = a_2$ s így a forma-tényező $K = \frac{1}{2}$ állandó és így a hozzá tartozó hyperbola alakja és térbeli helyzete ugyanaz marad, *bárminő legyen is egyébként a mozgások időbeli lefolyása*. Ez az eset tehát azért is figyelmet érdemel, mert ekkor a hyperbola abszolút invariansnak mutatkozik.

Ha a tárgy és lencse *azonos* irányban mozog, három esetet kell megkülönböztetnünk az a_1 és a_2 tényezők relatív nagysága szerint s ez a megkülönböztetés a továbbiak szempontjából fontos, mert a hyperbola alakja és térbeli elhelyezése az egyes esetekben *lényegesen* különbözik.

a) $a_1 < a_2$, *vagyis a tárgy lassabban mozog, mint a lencse.* Ebben az esetben a lencse távolsága a kiinduló ponttól t időpillanatban $\tau_2 = a_2 g.(t)$, a tárgy elmozdulása *ugyanabban a pozitív irányban* $\tau_1 = a_1.g(t)$ s így a fókusztól számított tárgytávolság $\tau = \tau_2 - \tau_1 = (a_2 - a_1) g(t)$. Minthogy e második fókusz térbeli helyzete ugyanekkor $\varphi = \tau_2$, a forma-tényező most $K = \frac{\varphi}{\tau} = \frac{a_2}{a_2 - a_1} = \frac{1}{1 - \frac{a_1}{a_2}} > 1$. A hyperbola tehát még mindig hasonlít az $a_1 = o$ határ-esethez (amikor a forma-tényező $K = 1$), de ugyanakkora ernyőtávolsághoz más nagyítások tartoznak s a fordulópont a jelen esetben messzebb van a koordináta-rendszer kezdőpontjától, mint előbb, az asymptoma helyzete azonban változatlan marad az összes lehetséges esetekben.

b) $a_1 > a_2$, *vagyis a tárgy gyorsabban mozog, mint a lencse.* Ha a mozgó tárgy sebességének iránya kiinduláskor most is a lencse felé mutatna, akkor a tárgy hamarosan utolérné a lencsét s annak mozgását megzavarná. Ennek elkerülése céljából koordináta-rendszerünkben a lencse és a tárgy mozgását *negatív irányúnak* vesszük s ezáltal egyszerű módon elérjük azt, hogy a lencse mozgásának iránya a gyorsabban haladó tárgy felé fog mutatni s így egymás mozgását a továbbiakban nem zavarják.

Ha a tárgy a kiindulás pillanatában éppen az első fókuszban van s elmozdulása t idő alatt $\tau_1 = a_1 g(t)$, a lencse elmozdulása ugyanazon irányban $\tau_2 = a_2 g(t)$, akkor a fókusztól számított tárgytávolság nyilvánvalóan $\tau = \tau_1 - \tau_2 = (a_1 - a_2)\, g(t)$. Minthogy a lencsével együtt a második fókusz is negatív irányban mozdult el $\varphi = -\tau_2$ értékkel, a forma-tényező értéke $K = \frac{\varphi}{\tau} = -\frac{a_2}{a_1 + a_2} = -\frac{1}{\frac{a_1}{a_2} - 1}$. Ebben $a_1 > a_2$, ennélfogva a formatényező az eddigiektől eltérően *negatív,* s ez a körülmény *lényegesen* megváltoztatja a hyperbola alakját és térbeli helyzetét. $\sqrt{K}$ imaginárius szám lévén, a hyperbolának *nincs fordulópontja,* hanem a folyton csökkenő nagyítású képek, a lencse mozgásának irányában haladva, asymptotikusan közelednek az optikai tengelyhez. Adott ernyőtávolsághoz tehát csak egyetlenegy éles kép tartozik s így az $N = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - K}$ megoldások közül a pozitív gyöknek csak a valódi, a negatív gyöknek pedig csak a virtuális képek esetén van fizikai értelme. A gyökök szorzata egyébként most is $N_1 N_2 = K$, csakhogy itt a forma-tényező értéke negatív.

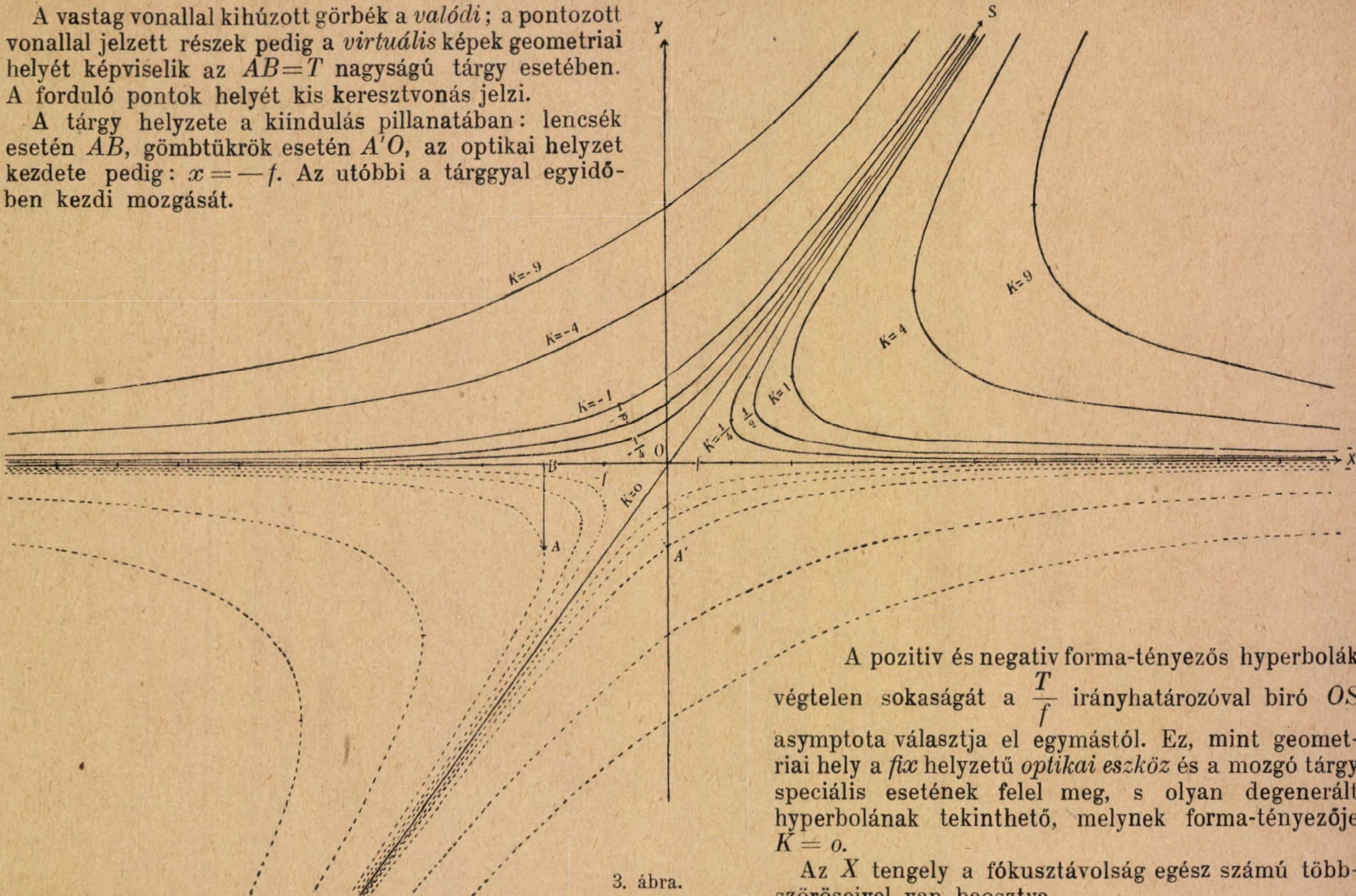
A forma-tényező abszolút értéke a tárgy és lencse elmozdulásainak állandó $\frac{a_1}{a_2}$ aránya szerint igen különböző lehet, s az $a_1 = 2a_2$ speciális esetben a $K = -1$ értéket veszi fel. Ilyenformán arra az eredményre jutottunk, hogy *a fix helyzetű tárgy és mozgó gömbtükör esetén nyert* s előző dolgozatomban részletesen ismertetett *hyperbolát* (2. ábra) ugyanakkora fókusztávolságú *gyüjtőlencse segítségével is előállíthatjuk, ha* lemondunk a fix helyzetű tárgy korlátozó feltételéről s *a tárgyat kétszer akkora sebességgel mozgatjuk, mint a lencsét.*

c) $a_1 = a_2$, *vagyis a tárgy és lencse azonos módon mozognak.* A tárgy és lencse relatív helyzete a mozgás egész folyamán változatlan lévén, a tárgytávolság s ezzel együtt a nagyitás is mindig ugyanakkora marad. Bármilyen relatív helyzetből történjék is tehát a kiindulás, a hyperbola helyett az optikai tengellyel párhuzamos egyenes fogja e képpontok geometriai helyét képviselni.

Eddigi fejtegetéseinkből világosan látható, hogy egymással arányos elmozdulások esetén a geometriai fénytan hyperbolatétele egészen általános érvényű *s az összes képzelhető esetek az* $x = f\left(\frac{y}{T} + K\frac{T}{y}\right)$ *egyenletbe foglalhatók össze.* A hyperbolák alakja és térbeli helyzete kizárólag a K forma-tényező értékétől, illetőleg az elmozdulások $\frac{a_1}{a_2}$ állandó hányadosától függ. Amíg K értéke pozitiv, addig a hyperbola fordulópontot mutat s a legegyszerűbb és legkönnyebben szerkeszthető alakot a $K = 1$, illetőleg $a_1 = o$ speciális esetben nyerjük (1. ábra, fix helyzetű tárgy és mozgó lencse), ha ellenben a forma-tényező értéke negativ, akkor a hyperbolának nincs fordulópontja s adott ernyőtávolsághoz csak egyetlen egy éles beállítás tartozik. Az átmenetet e kétféle hyperbola-tipus között a $K = o$, illetőleg $a_2 = o$ eset képviseli (mozgó tárgy és fix helyzetű lencse!), mert ekkor a hyperbola a kezdőponton átmenő *egyenessé degenerálódik* s éppen ez az egyenes adja a kétféle hyperbolasereg közös asymptotáját.

Hasonló módon be lehet bizonyitani, hogy a hyyerbola alakja és térbeli helyzete szempontjából a lencsék és gömbtükrök közt nincs lényeges különbség, mert *a kétféle hyperbola-typus mindkét fajta optikai eszköznél egyaránt előfordul,* de a relatív mozgások különböző minősége szerint *más-más esetekben.* A különbség a kétféle optikai eszköz között (a fókusznak és a valódi képeknek eltérő helyzete következtében, mindössze annyi, hogy amikor a lencsénél *nincs* fordulópontja a hyperbolának, A vastag vonallal kihúzott görbék a *valódi*; a pontozott vonallal jelzett részek pedig a *virtuális* képek geometriai helyét képviselik az $AB = T$ nagyságú tárgy esetében. A forduló pontok helyét kis keresztvonás jelzi.

A tárgy helyzete a kiindulás pillanatában: lencsék esetén AB, gömbtükrök esetén $A'O$, az optikai helyzet kezdete pedig: $x = -f$. Az utóbbi a tárggyal egyidőben kezdi mozgását.



3. ábra.

A pozitiv és negativ forma-tényezős hyperbolák végtelen sokaságát a $\frac{T}{f}$ irányhatározóval biró OS asymptota választja el egymástól. Ez, mint geometriai hely a *fix* helyzetű *optikai eszköz* és a mozgó tárgy speciális esetének felel meg, s olyan degenerált hyperbolának tekinthető, melynek forma-tényezője $K = o$.

Az X tengely a fókusztávolság egész számú többszöröseivel van beosztva.

ugyanakkor (azonos relatív mozgás esetén!) a gömbtükröknél *van* és megfordítva.

Ugyanígy ki lehet mutatni, hogy amikor $a_1 > a_2$, vagyis a tárgy a pozitív X tengely irányában gyorsabban mozog, mint a vájt tükör, akkor a forma-tényező

$$K = \frac{1}{\frac{a_1}{a_2} - 1}$$

Ennek értéke $a_1 = 2a_2$ esetben $K = 1$ s így arra az érdekes eredményre jutunk, hogy a *fix helyzetű tárgy és mozgó lencse esetén nyert hyperbolát* (l. 1. ábra.) azonos gyujtótávolságú *gömbtükör segítségével is előállíthatjuk, ha* lemondunk a fix helyzetű tárgy feltételéről *s a tárgyat kétszer akkora sebességgel mozgatjuk, mint a tükröt.* Ez az eredmény a hyperbolatétel szempontjából alapvető fontosságú, mert eleinte mindenki azt gondolja, hogy a kérdéses hyperbola-alak okvetlenül a *fix* helyzetű tárgy és a mozgó lencse *speciális* esetéhez tartozik.

Miután a különböző alakú és helyzetű hyperbolák végtelen sokaságát ilyenformán áttekintettük s a rendkívül bonyolultnak látszó lehetőségek közt a «forma-tényező» fogalmának bevezetésével rendet teremtettünk, a 3. ábrán geometriailag is feltüntetjük a forma tényező

$$K = \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 4, \pm 9$$

értékeihez tartozó hyperbolákat. A vastag vonallal kihúzott görbék a valódi, a pontozott vonallal jelzett részek pedig a virtuális képek geometriai helyét képviselik ugyanakkora $AB = T$ nagyságú tárgy esetében. A tárgy helyzete a kiindulás pillanatában: lencsék esetén az AB, gömbtükrök esetén pedig $A'O$. Az optikai eszköz ugyanekkor e kettő között, az $x = -f$ helyen van, s a tárggyal egyidőben kezdi mozgását.

A pozitív és negatív forma-tényezős hyperbolák seregét a $\frac{T}{f}$ irányhatározóval bíró s a rajzban nyillal jelzett és teljesen kihúzott OS asymptota választja el egymástól. Ez, mint geometriai hely, a fix helyzetű optikai eszköz és mozgó tárgy speciális esetének felel meg s olyan degenerált hyperbolának tekinthető, melynek forma-tényezője $K = o$. Az irodalomban első dolgozatunk megjelenése előtt csak ez az egy eset volt ismeretes.

*

Ezen a helyen rá kell mutatnunk arra is, hogy az idézett dolgozatomban bemutatott egyszerű hyperbola-szerkesztések, melyek az általános tételnek a fix helyzetű tárgyhoz ($a_1 = o$) tartozó speciális eseteit képviselik, bizonyos tekintetben érdekesebbek magánál az általános esetnél. Amíg ugyanis az általános esetben a képek geometriai helyének alakja bizonyos fokig a tárgy és az optikai eszköz mozgásának *minőségétől* is függ s *csakis egymással arányos elmozdulások vagy sebességek esetén lesz hyperbola,* addig fix helyzetű tárgy vagyis $a_1 = o$ esetén a geometriai hely alakja *teljesen független az optikai szerkezet mozgásának időbeli lefolyásától* s kivétel nélkül mindig hyperbola.

Ennek oka abban rejlik, hogy e határesetben a fókusz elmozdulása *éppen egyenlő* a tárgytávolsággal s így bármilyen $g(t)$ függvénye legyen is a fókusz elmozdulása az időnek, mindig érvényes a $\tau = g(t)$ és $x = \frac{f^2}{\tau} = \frac{f^2}{g(t)}$ összefüggés s ennek következtében a képpont koordinátái aránylag egyszerű

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{f^2}{g(t)} + g(t) \\ y &= \frac{fT}{g(t)} \end{aligned}\right\}$$

alakot öltenek, melyből *a tetszésszerinti* $g(t)$ *függvény a kiküszöbölésnél teljesen kiesik* s a hyperbola

$$x = f\left(\frac{y}{T} \pm \frac{T}{y}\right)$$

egyenlete független lesz a képet adó optikai szerkezet mozgásának minőségétől.

Teljesség kedvéért meg kell még vizsgálnunk azt a kérdést is, vajjon minő feltételek mellett degenerálódhat a képek geometriai helye egyenessé? Erre nézve feleletet ad az (1) általános egyenlet determinánsa

$$A = -K\frac{T^4}{4f^2},$$

mely az $f = \infty$ esettől (plánparallel lemez vagy síktükör!) eltekintve kétféleként válhat zérussá aszerint, amint K vagy $T = o$. A forma-tényező csakis az $a_2 = o$ esetben (fix helyzetű optikai eszköz) tünik el, a T pedig akkor, ha a tárgy gyanánt felvett pont magára az optikai tengelyre esik. Az utóbbit, mint magától értetődő esetet nem számitva kimondhatjuk, hogy *a hyperbola csak abban az esetben degenerálódik* a kezdőponton átmenő *egyenessé, ha a* képet előállító *optikai eszköz fix helyzetű,* a tárgy ellenben az optikai tengellyel párhuzamos translatorius mozgást végez.* Éppen ez az egyszerű eset volt az, mely századok óta ismeretes lévén, jelentéktelenségénél fogva azt a látszatot keltette, hogy a fordítottja ($a_1 = o$) sem lehet valami különös érdekességű. E feltevés nélkül nem tudjuk megérteni, miért nem vizsgálták meg eddig ezt az esetet s miért kerülte el a hyperbola-tétel a fizikusok figyelmét olyan teljesen lezártnak látszó kutatási területen, mint aminő a geometriai fénytan.

Bodócs István.

* Változó fókusztávolságú optikai eszközök esetén (melyekre a hyperbola-tétel szintén érvényes!) még egy eset lehetséges.

AZ EÖTVÖS-HATÁS ALKALMAZÁSA MOZGÓ NAPRENDSZERBEN.

Báró Eötvös Loránd utolsó műve a forgómérleg-kisérlet volt, a melylyel a Földön mozgó testek súlyváltozását laboratoriumban is kimutatta.[1] Ez a sulyváltozás «kétségtelen követelménye a Galilei-Newton-féle mechanikának», a mint báró Eötvös az Annalen d. Physikben megjelent értekezésében írja. Ugyanott a nehézséggyorsulás változására vonatkozó képletét kifejezetten «nyugvó naprendszerre» vonatkoztatja és talán e közlés lezárása után bekövetkezett halála akadályozta meg abban, hogy a régóta ismert, a mechanika alaptételeiből folyó tényt a «mozgó naprendszerre» alkalmazza. A következőkben megkisérlem a nehézséggyorsulás mozgás okozta változásának elvét, a mit az angolok báró Eötvös tiszteletére «the Eötvös effect»[2] — Eötvös-hatásnak — neveztek el, mozgó naprendszerre alkalmazni.

B. Eötvös a forgómérlegkisérletnél egy vertikális tengely körül forgó rendszeren vizsgálta a nehézséggyorsulás változását. Némi hasonlatosságot mutat ehhez a berendezéshez a tengelye körül forgó Föld a Nap gravitációs terében. Ha tekintetbe vesszük, hogy a sarkokon kivül a Föld felszínének minden pontja nappal általában ellenkező, éjjel pedig egyező irányban mozog a Föld keringésével, Eötvös képlete szerint a Föld valamely pontján a Nap gravitációjának változása

$$\varDelta g_s = -2\Omega \frac{dy'}{dt},$$

a hol Ω a Föld keringésének szögsebessége, $\frac{2\pi}{31.536,000} = 0{\cdot}00000019$, és $\frac{dy'}{dt}$ a Föld valamely pontjának relativ sebessége derékszögű koordináta rendszerben, a melynek $X, Y, Z,$ tengelye a földpálya tengelyével, érintőjével és sugarával esik egybe. Általában $\frac{dy'}{dt} = \cos \varepsilon \cos \varphi \cos \mu \frac{dy}{dt}$, a hol ε a Föld illető pontja párhuzamos köréhez vont érintőnek a földpálya-síkjával alkotott hajlásszöge a Nap kulminácziójának időpontjában, φ az illető pont földrajzi szélessége, μ a Föld forgásának a Nap kulminácziójától számított fázisa és $\frac{dy}{dt}$ az æquátor valamely pontjának a forgásból származó sebessége, ami körülbelül 0·5 km sec^{-1}.

Eszerint az æquátor valamely pontján solstitium idején, deleléskor a napnehézség gyorsulásának változása

$$\Delta g_s = +0{\cdot}019 \text{ cm sec}^{-2}$$

éjfélkor pedig

$$\Delta g_s = -0{\cdot}019 \text{ cm sec}^{-2}.$$

Aequinoctiumkor pedig délben

$$\Delta g_s = +0{\cdot}017 \text{ cm sec}^{-2}$$

éjfélkor

$$\Delta g_s = -0{\cdot}017 \text{ cm sec}^{-2}.$$

A Nap nehézséggyorsulása azonban a Föld felszínén vertikális és horizontális összetevőre bomlik. Általában a változás *solstitiumkor* nappal a függőleges összetevőnél

$$\Delta g_{s_v} = +2\Omega \cos(\varphi-\varepsilon) \cos \varphi \cos \mu \frac{dy}{dt}$$

a vízszintes összetevőnél

$$\Delta g_{s_h} = +2\Omega \sin(\varphi-\varepsilon) \cos \varphi \cos \mu \frac{dy}{dt}$$

éjjel

$$\Delta g_{s_v} = -2\Omega \cos(\varphi+\varepsilon) \cos \varphi \cos \mu \frac{dy}{dt}$$

$$\Delta g_{s_h} = -2\Omega \sin(\varphi+\varepsilon) \cos \varphi \cos \mu \frac{dy}{dt};$$

aequinoctiumkor nappal

$$\Delta g_{s_v} = +2\Omega \cos \varepsilon \cos^2 \varphi \cos \mu \frac{dy}{dt}$$

$$\Delta g_{s_h} = +2\Omega \cos \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi \cos \mu \frac{dy}{dt}$$

éjjel

$$\Delta g_{sv} = -2\Omega \cos \varepsilon \cos^2 \varphi \cos \mu \frac{dy}{dt} \quad \text{és}$$

$$\Delta g_{sh} = -2\Omega \cos \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi \cos \mu \frac{dy}{dt},$$

a mely képletekben $\varepsilon = 23\frac{1}{2}°$.

A napnehézség gyorsulásának változásai a Föld felszínén hozzáadódnak a földnehézség gyorsulásához és pedig nappal ellentétes, éjjel pedig egyező előjellel, vagyis végeredményben mindkét esetben negativ előjellel. Tehát a földnehézség gyorsulásának a Föld egy teljes körülforgásánál két minimumot, a függőleges iránynak pedig két maximális eltérést kell mutatni 0^h és 12^h-kor. Vagyis általában az æquátoron a földi nehézséggyorsulásnak és a függőleges irány változásának félnapos és éves periodust, más párhuzamos körökön pedig félnapos, napos és éves periodust kell mutatnia.

Az alábbi táblázatban össze vannak állítva 0^h-tól 12^h-ig a függőleges és vízszintes összetevő értékeinek változásai, — a melylyekkel a 12^h-tól 24^h-ig terjedő értékek symmetriásak, — Budapest párhuzamos körére $\varphi = 47°$.

Mivel a Budapesten végzett 1915. évi Oltay—Pekár-féle nehézséggyorsulás méréseknél[3] az egyes észleléseknél a maximális hiba

$$\pm 0{\cdot}008 \text{ cm sec}^{-2}$$

s lehet, az Eötvös-hatás megnyilvánulását a földi nehézséggyorsulás változásaiban, csak oly megfigyelések igazolhatják, a melyek közvetlenül ezen czélra végeztetnek és a melyekben nem szerepelnek azon módszeres körülmények, a melyek fennállanak azon méréseknél, a hol a középérték meghatározása a czél.

A földi nehézséggyorsulás változásai az é. sz. 47°-án, C. G. S. r.-ben.

Fázis: Δg_v	0^h	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	8^h	9^h	10^h	11^h	12^h
Ny. sols.	—0·003	·003	·002	·002	·001	·000	·000	·003	·005	·007	·009	·010	·011
Aequin.	—0·007	·006	·005	·005	·004	·001	·000	·001	·004	·005	·005	·006	·007
T. sols.	—0·011	·010	·009	·007	·005	·003	·000	·000	·001	·002	·002	·003	·003

Δg_h*													
Ny. sols.	—0·011	·010	·009	·007	·005	·003	·000	·001	·002	·003	·003	·004	·005
Aequin.	—0·008	·007	·006	·006	·004	·002	·000	·002	·004	·006	·006	·007	·008
T. sols.	—0·005	·004	·003	·003	·002	·001	·000	·003	·005	·007	·009	·010	·011

Addig, a míg az ily irányú pontos mérések elvégezve nincsenek a földi testek periodusos sulycsökkenésére és az evvel kapcsolatos korrectiókra következtetéseket vonni időelőtti, annál inkább, mert a fenti periodusok a valóságban tisztán aligha jelennek meg, hanem más hatásokkal összegeződve.

A geodézián kivül az asztronómia is bizonyságát szolgáltathatja annak, hogy vajjon de facto működik-e az Eötvös-hatás mozgó naprendszerünkben. Ugyanis a Hold a földkörüli keringése közben váltakozó sebességgel mozogván a Nap körül, épúgy mint a földi pontok, alá van vetve az Eötvös-hatásnak. És itt a következő esetek lehetségesek. Vagy tekintetbe vették a Hansen-féle holdtáblák korrectióinál a napnehézség mozgásokozta változását valamilyen formában, és ekkor az Eötvös-hatás voltaképen egy asztronómiai kalkulációs metodusnak geofizikai pendantja. Vagy pedig csak részben, illetőleg egyáltalában nem vették tekintetbe az Eötvös-hatást a Holdpálya koordinátáinak kiszámításánál, amely esetben ezek az észlelt értékekkel nem egyezhetnek meg. Mivel a Holdnak az utóbbi időkben vizsgált szekuláris akcelerációját nem sikerült maradék nélkül az árapályjelenség fékező hatására visszavezetni, nem lehetetlen, hogy a holdtáblák átvizsgálása meg fogja erősíteni azt a véleményt, a mely szerint az Eötvös-hatás a világrendszer felépítésére vonatkozó problemáknál nem nélkülözhető.

Bármint lesz is, döntősulyúak azon mérések lesznek, a melyek az Eötvös-hatásnak a mozgó naprendszerben való működését közvetlen ingamegfigyelésekkel igazolják vagy megcáfolják. A földi testek sulyának periodus változásairól csak e megfigyelések homogén és nagypontosságú sorozatai alapján alkothatni végleges képet. *Szolnoki Imre.*

Irodalom:

1. Roland Eötvös; Experimentelle Nachweis der Schwereänderung die ein auf normal gefonnter Erdoberfläche in östlicher oder westlicher Richtung bewegter Körper durch diese Bewegung erleidet. Annalen der Physik. IV. *59.* 743. — 1919. — 2. W. G. Duffield: The Investigation of Gravity at Sea. Nature. *106.* 732. — 1921. — 3. Oltay Károly: A nehézséggyorsulás budapesti értékének meghatározása. 88—111.

* «—» előjel a déli irányban való kilengést jelzi.

EGYSZERŰ WEHNELT-FÉLE SZAGGATÓ KÜLÖNBÖZŐ FÉMEKBŐL ÉS ELEKTROLITEKBŐL.

A WEHNELT-féle elektrolitikus áramszaggató több változatban és kivitelben ismeretes. A legegyszerűbb — mellyel WEHNELT először kisérletezett — alul derékszög alatt meghajlitott üvegcső, melynek végébe vékony platinadrót van forrasztva. A csőben néhány csepp higany van, ebbe merül az anód. A katód ólomlap és az elektrolit 21—25 BAUME-fokos kénsav.

Ennél az összeállításnál a szaggatócsúcs hossza és felülete nem változtatható, vagyis az áram nem szabályozható. A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy bármely összeállitott kisérletnél a szaggatócsúcs felületének és azon az áramsürüségnek változtatásával elég tág határok között lehet a másodpercenkinti szaggatások számát változtatni, ami bizonyos kisérleteknél nagyon szükséges. Ezért az ujabb WEHNELT-féle szaggatók mind szabályozható csúccsal birnak.

Az első szabályozható szaggatót is WEHNELT készitette.[1] A platinadrótot vastagabb rézdrót végéhez forrasztotta. A platinától mintegy 4 és 8 cm távolságban a rézdrótot egy síkban kétszer derékszöggel meghajlitotta.

A rézdrót két függőleges szárára megfelelő üvegcsövet huzott, de előbb a platinára alkalmazott cső nyilását lángon a platina vastagságára szűkitette. A két üvegcsövet alul a hajlásoknál a rézdrót vastagságánál kisebb belső átmérőjű kaucsukcsővel kötötte össze, hogy megakadályozza az elektrolit behatolását a hosszabb csőbe. A szűkitett cső különböző mértékű betolásá-

[1] WIEDEMANN: Annalen d. Phys. u. Chem. 68. köt. 233. o. (1899.)

val a kaucsukcsőbe, szabályozni lehet a kiálló platinacsúcsot. Ez működés közben nem szabályozható.

Az első működés közben is szabályozható szaggatót F. ERNECKE szerkesztette.[1] A platina rézcsavarorsó végéhez van forrasztva és porcellán csőbe van dugva, melynek nyilásán a platinacsúcs kinyulik. A csavartok és azzal a porcellánucső üvegedény oldalfalába légmentesen van beerősitve. A csavarorsó forgatásával a szaggatócsúcs hossza működés közben is szabályozható. Ennek módosított kivitele az, melynél a csonkakupalakú porcelláncső felülről nyulik az elektrolitbe és a csavartok az üvegedény szélen nyugvó ebonitlapba van erősítve.

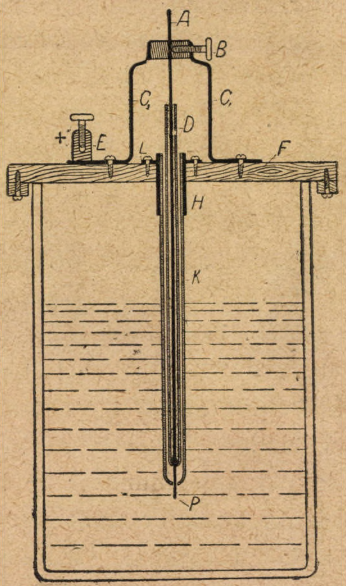
Hasonlóan szabályozható az L. ZEHNDER összeállítása.[2] Rézcsőbe dugott rézrud alsó végéhez van a platina forrasztva. A rézcső alsó végéhez átfurt zsirkőkup van kaucsukcsővel erősítve, melyen a platinacsúcs kinyulik; a kaucsukon kivül üvegcső. A rézrud a rézcső felső végére alkalmazott szorítócsavarral különböző magasságban rögzíthető. Az egész, az üvegedényen nyugvó laphoz van erősítve. I. v. PALLICH[3] rézdrótot használ katódnak és 1—2 mm vastag aczéldrótot anódnak. Mindkettő átfúrt dugóval külön üvegcsőbe van erősítve. Az acél üvegcsöve alul szűkítve van.

Igen jól működő szabályozható szaggató készíthető a mellékelt ábra szerint, mely az anód függőleges metszetét mutatja. A méretek 14 cm hosszú, 9 cm széles és 23 cm magas üvegedényhez vannak alkalmazva. 1 cm vastag deszkából kivágunk 17 cm hosszú és 9 cm széles darabot *(F)*. Közepébe 1·3 cm átmérőjű lukat furunk, kifőzzük parafinban és aszfaltlakkal bevonjuk. Mintegy 2 cm hosszú, 1·2 cm belsőátmérőjű rézcsövet *(H)*, 3 cm hosszú, 2 cm széles rézlemez *(L)* közepébe furt lukon átdugjuk és hozzáforrasztjuk. 17 cm hosszú és 1 cm külső átmérőjű üvegcső *(K)* egyik végét lángon megolvasztjuk

[1] Zeitschrift f. d. phys. u. chem. Unterricht. 12. köt. 189. o. (1899.)
[2] WIEDEMANN: Annalen d. Phys. u. Chem. IV. folyt. 12. köt. 417. o. (1903.)
[3] WIEDEMANN: Annalen d. Phys. u. Chem. IV. folyt. 3. köt. 543. o. (1900.)

és nyilását annyira szükitjük, hogy az elektródnak használt fémdrótot könnyen átdughassuk rajta. Az üvegcsövet a másik végénél a *H* csőbe pecsétviasszal beragasztjuk és a *H* csőhöz forrasztott lemez *(L)* segitségével a deszkalaphoz erősitjük.

Egy 0·4—0·6 cm vastag, 18 cm hosszú üvegcső *(D)* egyik nyilását szintén az elektród vastagságáig szűkitjük, belédugjuk az elektródot (*A* 28 cm) és olvasztott viaszt vagy ként öntünk a csőbe, mely ott megszilárdulva jól rögziti az elektródot. Ha platinát használunk, akkor azt előbb vastagabb rézdróthoz forrasztjuk és ugy ágyazzuk be. Az *A* elektródot a *K* csőbe dugjuk, melynek alsó végén a szaggatócsúcs *(P)* kinyulik.



Két 18 cm hosszú, 1 cm széles, 1 mm vastag vörös rézlemezt az ábrán látható módon (C_1C_2) meghajlitunk. A két lemez felső végét szoritócsavar *(B)* két végéhez forrasztjuk és az egyik lemez alsó végéhez is forrasztunk egy szoritócsavart *(E)*. A *B* szoritócsavaron átdugjuk az elektród felső végét és a C_1C_2 lemezt a deszkalaphoz *(F)* erősitjük. A *B* csavar lazításával működés közben is tetszőleges helyzetben rögzíthetjük az elektródot vagyis a szaggatócsúcs hosszát szabályozhatjuk. Az áram positiv sarkát az *E*-hez kapcsoljuk. A katód ólomlap vagy aluminiumlemez, az elektrolit 21—25 Baume-fokos higitott kénsav. Ezen az összeállításon még egyszerüsíthetünk, ha a *D* üvegcsövet elhagyjuk és ahelyett az elektródot az elektrolittal érintkező részen aszfaltlakkal bevonjuk.

Egy ilyen szaggatót platinacsúccsal két év óta használunk minden olyan kisérlethez, melyhez általában Wehnelt-szaggató szükséges. Egyfolytában kisebb megszakításokkal másfél óráig is volt használatban egyen- és váltakozóárammal. A használt áramerősség 20 amperig terjedt. Használat folytán a *K*-cső alsó nyilása bővül. Működés közben egyéb zavar nem fordult elő, mint a beágyazó viasz egy része kiolvadt midőn az elektrolit 60 C°-ra melegedett.

Tekintettel a platina rendkivüli nagy árára, megvizsgáltam több fémet, hogy szükségből melyik fémmel és milyen elektrolitben lehetne a platinát legjobban pótolni. Ezzel a kérdéssel már WEHNELT is foglalkozott és vizsgálta a platinát, vörös- és sárgarezet, ólmot és aluminiumot. A platinán kivül gyors porlásuk miatt a többit nem tartja megfelelőnek. Ezek közül mint legjobban működő szaggatót megemliti a vörösrezet koncentrált rézgálicoldatban. Elektrolitnek WEHNELT használt még higitott salétrom- és sósavat, koncentrált hamuzsir, szóda, káli- és nátronlug-oldatot. I. v. PALLICH az acélelektródot tartja használhatónak higitott kénsavban.

Én a következő fémekkel kisérleteztem: nikkel (1·58 mm) [a zárjelben lévő szám a használt drót vastagságát jelenti] lágyvas (1·6 mm), acél (1·8 mm), vörösréz (1·85 mm), sárgaréz (1·6 mm), ezüst (1 mm), aluminium (1·48 mm), ólom (1·38 mm). A felsorolt fémekből készült szaggatókat egy 40 cm maximalis szikrát adó induktor működtetésén hasonlítottam össze. Az induktor primer tekercsének háromféle kapcsolása van. A kisérleteket a középső «Mittelweiche Röhren»-jelzésű kapcsolással végeztem. A szaggatókat egyenlő ideig használtam és működés közben mértem a feszültséget, a szaggatott áram erősségét hődrót ampermérőn és a szikra hosszát. A kisérlethez COOPER HEWITT-féle higanygőzös egyirányítóval irányított egyenáramot és 110 volt feszültségű váltakozó áramot használtam. Alapul a platinacsúccsal biró szaggatót használtam.

Az elektródokat használat előtt és után lemértem s a súlycsökkenésből használhatóságuk megállapítható. 24 BAUME-fokos higitott kénsavban egyenárammal midőn a feszültség az egyes fémek szerint 69—72 volt és az áramerősség 4·5—7 amper között változott, a következő eredményeket kaptam. A fémek vegyjelei után az első szám a szikra hosszát cm-ekben és a másik az egy perc alatt történő porlást jelenti mm^3-ekben. *Pt* 12, —; *Ni* 12·5, 3·93; *Fe* 13, 4·29; acél 13, 4·30; *Cu* 14, 16·06; sárgaréz 13, 16·50; *Ag* 7, 14·12; *Al* 10, 11·34. A nikkel, lágyvas, acél egyenletesen jól működött. A két réz gyorsan porlott s a vörösréz porlott részei sötétvörös-barna szinűre festik az elektrolitet, az elektródot gyakran kell utánna állítani. Az ezüst erősen porlik, a folyadék fehéres, átlátszatlan lesz, az aluminium elég jó, az ólom 85 voltig nem működött. Az elporlott fémek egyrésze az elektrolitban oldódik, a többi részint az ólomlapra, részint a fenékre rakódik le.

Ugyanazon elektrolitban 110 volt feszültségű 4—5 amper erősségű váltakozó árammal az eredmények a következők: *Pt* 16, —; *Ni* 14·8, 2·35; *Fe* 15, 4·23; acél 15·7, 3·84; *Cu* 15, 4·37; sárgaréz 15·5, 4·98; *Ag* 15, 3·47; *Al* 13, 3·65; *Pb* 14, 15·57. Minden fém jól működött és a porlás nem olyan nagy mint egyenárammal, kivéve az ólmot.

13 Baume-fokos higított sósav elektrolitban 70—73 volt feszültségű 5·5—7·2 amper erősségű egyenáram használatával kapott eredmények: *Pt* 15·5, —; *Ni* 15, 13·03; *Fe* 15·5, 14·48; acél 15·5, 15·89; *Cu* 14, 31·45; sárgaréz 13·5, 17·87; *Ag* 5, 13·04; *Al* 14·5, 46·16; *Pb* 7, 17·69. A sósavban minden fém jól működött, de nagy az elektród fogyása, ami az anódon kiváló chlor oldóhatásának tulajdonitható, a porláshoz még oldóhatás is járul. A chlor erős oldóhatását igazolja az elektrolit tisztasága, mivel az elporlott fémek majdnem teljesen feloldódnak.

7 Baume-fokos higitott sósav elektrolitben 110 volt feszültségű és 4·5—5·2 amper erősségű váltakozó árammal az eredmények a következők: *Pt* 16, —; *Ni* 15, 7·64; *Fe* 18, 7·43; acél 19, 7·43; *Cu* 18, 16·98; sárgaréz 17, 14·21; *Ag* 13, 8·76; *Al* 17·5, 16·15; *Pb* 13, 13·71. Váltakozó árammal is minden fém jól működik és a porlás kisebb.

25%-os szalmiákoldatban az elektród fogyása közel egyenlő a sósavban való fogyással, de a kapott szikra jóval kisebb. A kiválló chlor sárgás-barnára festi az oldatot.

13·7 Baume-fokos nátronlugoldatban 62—68 volt feszültségű és 5·4—6·9 amper erősségű egyenárammal nyert eredmények: *Pt* 9, —; *Ni* 6·8, 0·11; *Fe* 7, 0·55; acél 7·5, 0·38; *Cu* 6·8, 1·51; sárgaréz 5, 2·83; *Ag* 7·5, 0·76; *Al* 6, 11·53; *Pb* 9·2, 0·26. A használt árammal a szaggatás nem tökéletes, egyenetlen és aránylag lassú. Ugyanazon elektrolitben 110 volt feszültségű és 5·5—6 amper erősségű váltakozóáram használatával kapott eredmények: *Pt* 10, —; *Ni* 8, 0·06; *Fe* 10, 0·32; aczél 9, 0·25; *Cu* 9, 0·84; sárgaréz 8, 1·88; *Ag* 7, 0·23; *Al* 5, 7·69; *Pb* 8·5, 16·10. A szaggatás minden fémmel egyenletes és jó. Minden fém porlása mindkét árammal feltünően kicsiny, kivéve az ólmot, váltakozó árammal.

Koncentrált rézgálicoldatban 80 volt feszültségű 5—6·5 amper erősségű egyenárammal az eredmények a következők: *Pt* 11, —; *Ni* 10,0·44; *Fe* 11·5, 1·53; acél 11·5, 0·51; *Cu* 9·5, 14·94. A sárgaréz, ezüst, aluminium és ólom nagyon rosszul vagy egyáltalában nem működött. Az előbbiek működése egyenletes és jó. A vasra és acélra vörösréz rakódik. Ugyanazon elektrolitben 110 volt feszültségű 4—6 amper erősségű váltakozóáram alkalmazásával nyert eredmények: *Pt* 10·5, —; *Ni* 10, 0·11; *Fe* 11, 3·46; aczél 15·6, 7·88; *Cu* 9, 1·23; sárgaréz 9·5, 1·49; *Al* 4, 2·3; *Pb* 15, 0·09. Minden fém egyenletesen jól működött.

A kisérleteknél szikrahossznak azt a távolságot vettem, melynél a szikraátütés állandó és egyenletes volt, a feltüntetett szikrahossznál nagyobb szikrák is kaphatók. A porlásra vonatkozó adatokat megközelitő eredményeknek kell venni, mivel kaptam kisebb és nagyobb eredményeket is, vagyis kisérletek szerint változnak. Ennek oka a kisérlet természetében van, mivel az elektród fogyását befolyásoló tényezők, mint a szaggatócsúcs hossza, az áramsűrűség, az elektrolit hőfoka, megterhelés stb. változó tényezők, így a létesitett eredmény is változik.

A megközelitő eredmények a feltett kérdésre azonban, — hogy melyik fémmel lehet legjobban helyettesíteni a platinát —

határozott feleletet adnak. Minden elektrolitben legjobbnak bizonyult a nikkel, azután a vas és acél. A többi fémek kevésbbé alkalmasak.

Általában a fémek használhatósága egyenes arányban van az olvadási hőfok magasságával, használat közben az egyes elektrolit oldó hatása a benne oldható és nem oldható fémelektród fogyása közt számbavehető különbséget nem tett. Használat után azonban a nem nemes fémből készült szaggatókat ki kell venni az elektrolitból. Az elektrolitot a használt induktor nagysága és a szükséges munkabirás szerint lehet megválasztani.

Nagyobb munkabiráshoz higitott kénsav, közepeshez koncentrált rézgálicoldat, kissé melegen (30 C°) és kisebb igénybevételhez lug használható. Nikkel szaggatóval rézgálicoldatban a Tesla-kisérletek és elektromos állóhullámok nem sokkal különböztek a platina és kénsav szaggatóval kapott eredményektől.

Használat közben megesik, hogy az elektrolit a *K* csőbe felemelkedik és kifolyik. Ennek az az oka, hogy ilyenkor a szaggató már nem csúcs, hanem mint lukszaggató működik, aminek több oka lehet. Ha a szaggatócsúcsot behuztuk a *K* csőbe, vagy az annyira elporlott, hogy a vég belülre került, a *K* nyilása annyira bő, hogy az elektródot körülvevő hézagon történik a szaggatás, vagy az elektród a fogyás folytán megvékonyult és nagy lett neki a nyilás. Ez utóbbi esetben a kihegyesedett véget levágjuk. Ha a *P*-csúcs elkopott, akkor az elektródot kivesszük, lángon megolvasztjuk a beágyazó anyagot és a fémdrótot *(A)* a *D* csőbe kijebb toljuk.

Kedves Miklós.

A RÖNTGEN-SUGARAK NEGYEDSZÁZADOS FEJLŐDÉSE.

Mikor Röntgen az *X*-sugarakat 1895-ben felfedezte, egyúttal minden lényeges tulajdonságukat megállapította. Mindjárt azt a kérdést is felvetette, vajjon korpuszkuláris vagy elektromágneses sugárzással van-e dolgunk. Észrevette a hasonlóságot az *X*-sugarak és a fény között, észrevette, hogy az új sugarak is egyenes irányban terjednek, fluoreszkálást és vegyi hatást idéznek elő, mágneses térben irányukat megtartják. Szabályos visszaverődést nem talált, de ezt úgy lehetett értelmezni, hogy a gondosan csiszolt felület is még érdes az *X*-sugarakra nézve. Elhajlást vagy általában interferenciát nem sikerült kimutatnia. Röntgen felveti azt a kérdést is, vajjon az új sugárzást nem kell-e longitudinális rezgéseknek tekinteni.[1] Közben egyre szaporodott azoknak a tapasztalatoknak száma, amelyek az *X*-sugárzás és az elektromágneses rezgések azonosságát mutatták. Marx[2] két különböző módszerrel kimutatta, hogy az *X*-sugarak fénysebességgel haladnak. Barkla[3] kimutatta, hogy az *X*-sugarak polárosak, utóbb pedig Haga[4] ezt egyszerű eljárással fotografikus úton igazolta.

De itt meg kell jegyeznünk, hogy a polározást csak a fékezésbeli *X*-sugarakon lehet megállapitani. Az *X*-sugárzásban u. i. két, egymástól lényegesen különböző fajtát kell megkülönböztetnünk. Az egyik oly éterimpulzusokból áll, melyeknek nem felel meg meghatározott rezgésszám, a másik pedig igen nagy rezgésszámú elektromágneses hullámzás. Az előbbi a fékezésbeli sugárzás, az utóbbi az anyagok sajátos vagy jellemző sugárzása.

A fékezésbeli sugárzás a katodsugár elektronjából indul ki, mikor az antikatodba ütközik és sebessége csökken. SOMMERFELD[5] magyarázata szerint a fékezés ideje alatt az elektronból elektromágneses sugárzás indul ki és ez mint *X*-sugár mutatkozik, melynek különböző irányokban változó erősségűnek és keménységűnek kell lenni. KAYE-nek és még pontosabban STARK-nak valóban sikerült ezt kimutatni.[6]

A jellemző *X*-sugárzást BARKLA és SADLER[7] fedezték fel. Hullámhosszat ekkor még nem tudtak mérni, a sugarakat avval az elnyeléssel jellemezték, amelyet valamely anyagban, pl. Al-ban szenvedtek. A nagyobb atomsúlyú elemek egyes sugarakat sokkal nagyobb mértékben nyelnek el, mint másokat. Az a sugárfaj, amelynél az elnyelés igen nagy volt, az antikatod anyagától függött. Ennek alapján kétféle sajátos sugárzást különböztettek meg. A keményebb sugárzás a *K*-sugárzás, a lágyabb pedig az *L*-sugárzás.

Ezekre a sugarakra a STOKES-féle törvény érvényes. Eszerint olyan sugarak indítják a fluoreszkáló anyagot sugárzásra, amelyeknek hullámhossza kisebb, mint a fluoreszkálás fényének hullámhossza. Az *X*-sugaraknál a kisebb hullámhossz helyett ekkor még a nagyobb keménység lépett. Ezért a sajátos *X*-sugárzást fluoreszkáló sugárzásnak is szokták nevezni.

Az *X*-sugárzás pontos elemzése csak akkor volt lehetséges, mikor LAUE[8] az interferenciát megállapította. Az első komoly kisérletet a diffrakció kimutatására HAGA és WIND[9] végezték. Az *X*-sugarakat ékalakú résen vezették át, melynek szélessége 19·6 μ és 0 μ közt változott s bizonyos diffrakciós hatást kaptak, mely SOMMERFELD[10] szerint $4 \cdot 10^{-9}$ cm impulzusszélességnek felelt meg.

BRAVAIS már 1860-ban a kristályok geometriai tulajdonságait avval a feltevéssel magyarázta, hogy a kristályokban a molekulák szabályosan helyezkednek el egymással párhuzamos síkokban. Így a molekulák térbeli rácsot alkotnak, melynek átlátszó helyei a molekulák közei. Az anyag sűrűségéből, az atom tömegéből és az 1 cm^3-ben levő molekulák számából (LOSCHMIDTféle szám) a rácsállandóra azt kapjuk, hogy 10^{-8} cm rendű. A legrövidebb ultraibolya hullámhossz ennél nagyobb, tehát a kristály térbeli rácsát fényinterferencia előállítására nem lehet használni. Az X-sugarak hullámhosszát KOCH és SOMMERFELD magyarázata szerint 10^{-9} cm rendűnek kellett feltételezni, tehát a kristályrácsot fel lehetett használni az X-sugarak interferenciájának kimutatására. FRIEDRICH KNIPPING és LAUE 1 mm széles résen áthaladó X-sugarakat goniometer asztalára helyezett kristályon bocsátottak át, a kristály körül pedig különböző irányban és távolságban fotografus-lemezeket helyeztek el. Ha pl. a kristály cinkszulfid volt és a sugarak a kockaalakú kristály lapjára merőlegesen estek, akkor a fotografus-lemezen a foltoknak olyan rendszerét nyerték, amely két, egymásra merőleges tengelyre nézve szimmetrikus. LAUE-tól származik ennek a felvételnek elméleti értelmezése és sikerült neki e komplikáltnak látszó térbeli rács és a sugarak hullámhossza között összefüggést találnia.

Az X-sugarak színképelemzésének sokkal egyszerűbb, áttekinthetőbb módszere W. H. és W. L. BRAGG-tól[12] ered. Ez az eljárás betekintést enged az X-sugárzás összetételébe, az atomelméletet lényegesen előbbre vitte és a kristályok felépítésének kutatását lehetővé tette. Ez a módszer a «visszaverődésen» alapszik. Ha csak egy atomsík lenne, akkor minden sugár visszaverődnék. De a síkok egymás alatt ismétlődnek, azért az 1., 2.,... atomsíkról visszavert sugarak kevés kivétellel kioltják egymást. A megmaradó hullámhosszak egész számú többszörösök, amelyek a következő alapegyenletnek felelnek meg:

$$n\lambda = 2d \sin \varphi,$$

ahol λ a hullámhossz, $n = 1, 2, 3, \ldots$, d két szomszédos atomsík távolsága, φ a sugarak hajlásszöge a kristálylaphoz. Ha a kristályt forgatjuk, akkor φ a 0 és 2π közt változik és így a különböző hullámhosszak egymás után lépnek fel.

Minden φ értéknél mutatkozik visszaverődés, tehát az antikatod sugárzásában minden hullámhossz megvan; vagyis folytonos színkép keletkezik. Ez a fehér fénnyel analog sugárzás a fékezésbeli X-sugárzás. Bizonyos φ értékeknél a X-sugárzás különösen erős, tehát a folytonos színkép fölé vonalas színkép helyezkedik.

A λ meghatározása végett még d értékére van szükségünk. W. L. Bragg ezt a konyhasó kristályánál következőképen határozta meg. Az atomsíkok távolsága egyenlő két szomszédos atom távolságával. Minden atomhoz d^3 térfogatú elemi kocka tartozik, tehát 1 cm^3-ben $\frac{1}{d^3}$ atom van. A hidrogénatom tömege $1{\cdot}64 . 10^{-24}$ g, a konyhasó átlagos atomsúlya $\frac{1}{2}(23 + 35{\cdot}5)$, tehát az atom átlagos tömege a konyhasóban $\frac{1}{2}(23+35{\cdot}5)\,1{\cdot}64 . 10^{-24}$ g, 1 cm^3 tömege:

$$\frac{1}{d^3}\,\frac{23+35{\cdot}5}{2}\,1{\cdot}64 . 10^{-24} = 2{\cdot}17,$$

$2{\cdot}17$ a konyhasó sűrűsége. Ebből

$$d = 2{\cdot}81 . 10^{-8}\,cm.$$

Az X-sugarak elemzésében fontos lépést jelent Debye és Scherrer[13] eljárása. Ismeretes, hogy ha valamely testre X-sugarak esnek, akkor arról szekunder sugarak indulnak ki, melyeknek egyik része szintén X-sugár. Ők kimutatták, hogy ha poralakú anyagra monochromatikus X-sugárzás esik, akkor a keletkező szekunder X-sugárzás a térben nem egyenletes, hanem az elektronoknak az atomban való szabályos elhelyezkedése folytán egyes irányokban maximumok keletkeznek. Ezek olyan kúpokon vannak, amelyeknek tengelye a primer sugárzás iránya, csúcsa pedig a poralakú vagy amorf anyagban van.

A folytonos színkép egy legkisebb hullámhossznál élesen kezdődik. Erre a hullámhosszra Einstein[14] a quantumelmélet alapján a következő összefüggést állította fel:

$$e\mathrm{V} = h\,\nu_{\mathrm{max}}.$$

e az elektron töltése, V a kisülés feszültsége, amely igen közel egyenlő avval a feszültséggel, amelyet az elektron befut. Tehát

eV az antikatodba ütköző elektron energiája. h a PLANCK-féle állandó, ν_{max} pedig az éles határ rezgésszáma, tehát $h\nu_{max}$ a kibocsátott energiaquantum.

A vonalas színkép csak akkor áll elő, ha a feszültség elég nagy. A feszültség növelésekor előbb az L-sorozat, majd a K-sorozat áll elő. A BRAGG-féle módszer arra vezetett, hogy a K és L-sugárzás a vonalak sorozatából áll.

SIEGBAHN[15] lágyabb sugárzást is talált vakuumspektrográf segítségével, mikor az urán sugárzását gipszkristályon elemezte. 3.10^{-8} és 4.10^{-8} cm közben új vonalcsoportot figyelt meg, melyet M-sorozatnak nevezett el. A K-sorozatban α_1, α_2, α_3, α_4, β és γ vonalakat ismerünk, az L-sorozatban 14, az M-sorozatban pedig 6 vonalat.

Az X-sugárzás színképe sokkal egyszerűbb, mint az optikai színkép. MOSELEYnek[16] sikerült az X-színképeken uralkodó törvényszerűséget megállapítania. Eszerint

$$\nu = A\,(N - b)^2,$$

ahol ν bármely vonal rezgésszáma, N az elem rendszáma, vagyis az a szám, mely az elem helyét a periodikus rendszerben kijelöli, A és b állandók.

Ismeretes, hogy egyes elemek színképi vonalai, *sorozatba* tartoznak. Az első ismert sorozat a hidrogén színképében a BALMER-féle sorozat. A hozzátartozó vonalak rezgésszáma:

$$\nu = N\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

ahol $m = 3, 4, 5, \ldots$, N a RYDBERG-féle állandó. E képlet szerint a színképi vonalak a sorozat határa ($m = \infty$) felé mindjobban sűrűsödnek. Ehhez hasonló képlet az X-sugarak K, L és M sorozatára is érvényes.

Miféle következtetést lehet ezekből a tapasztalatokból az atomelméletre nézve vonni? Hogyan lehet a vonalas X-színkép keletkezését a RUTHERFORD-BOHR-féle atom-elméletben értelmezni? Ismeretes, hogy a BOHR-féle elmélet szerint a quantumelméletnek megfelelően az elektron csak egyes diszkrét pályákon keringhet.

Az elektron elektromágneses sugárzást csak akkor bocsát ki, ha több quantumú külső pályáról olyan belső pályára ugrik, melyen kevesebb quantummal kering. A két pálya energiakülömbségét kisugározza. Az X-színképen a rendszám uralkodik, ez pedig a mag töltéselemeinek számával egyenlő. Tehát az X-sugárzás eredetét a maghoz legközelebb eső gyűrűkben kell keresnünk. Kossel[17] az atommaghoz legközelebb eső gyűrűt K-gyűrűnek nevezi, az utána következők az L, M, N gyűrűk. A K-sorozat olyan elektronoktól ered, amelyek stacioner állapotban a K-gyűrűn vannak. A katodsugár-részecskével való ütközés folytán az elektron energiaquantumainak száma növekszik és így olyan külső gyűrűre ugrik át, amelyen több energiaquantummal kering. Az atom stacioner állapotát visszanyerni igyekszik, ami csak úgy történhetik, ha ugyanakkor a külső gyűrűkről egy elektron a K-gyűrű üres helyére ugrik át. Eközben elektromágneses sugárzást bocsát ki, ez a K-sorozat. Az az elektron, amely a második gyűrűről tér vissza az elsőre, egy energiaquantumot sugároz ki és a K_α vonalat kelti. A harmadik gyűrűről az elsőre visszatérő elektron két energiaquantum kibocsátásával a K_β vonalat sugározza ki s. i. t.

Az L-sugárzás akkor keletkezik, ha oly elektronok, amelyek stacioner állapotban az L-gyűrűn vannak, energia elnyelésekor külső gyűrűre távoznak s helyükbe külső elektronok ugranak. Így keletkeznek az L_α, L_β,... vonalak.

Ha az elektron valamelyik külső gyűrűről az elsőre jut, több energiaquantum alakul át elektromágneses sugárzássá, mint mikor ugyanarról a gyűrűről a másodikra esik vissza. Tehát az idézett quantumelméleti összefüggés szerint a K-sugárzás rezgésszáma nagyobb, a sugárzás keményebb.

Az elnyelt energia, mint láttuk, arra kell, hogy a K, L, M elektronok külső gyűrűre jussanak. De a jellemző sugárzás akkor is előáll, ha katodsugarak helyett primer X-sugárzás esik az anyagra. Ekkor az atom az X-sugarak energiáját nyeli el. Ha E az elnyelt energia, akkor a kibocsátott rezgésszámra nézve

$$E = h\nu.$$

Ha a folytonos X-szinképet valamilyen rétegen átbocsátjuk, akkor a réteg elnyelési szinképét nyerjük. Ez mindig sávokból áll. A FRAUNHOFFER-féle abszorpciós vonalak analogonja az X-sugarak körében teljesen hiányzik. Az elnyelésre és kibocsátásra vonatkozó quantumelméleti törvény szerint a folytonos színkép határa egyúttal az elnyelési sáv határa (V_A).

KOSSEL felfogása igen egyszerűen számot ad az úgynevezett kombinációs elvekről is. A vonalak rezgésszáma között soktéle összefüggést ismerünk. Így

$$K_\alpha + L_\alpha = K_\beta,$$

vagy

$$K_\alpha + L_\gamma = K_\gamma.$$

A betűk itt a szokásos jelölés szerint a rezgésszámokat jelentik. Az előbbiek szerint u. i.

$$E_2 - E_1 = hK_\alpha,$$

$$E_3 - E_2 = hL_\alpha$$

és

$$E_3 - E_1 = hK_\beta.$$

E_i az i-edik gyűrűn levő elektron energiája. Tehát

$$hK_\alpha + hL_\alpha = hK_\beta.$$

Analog úton pl.

$$K_\gamma = K_\alpha + L_\alpha + M_\alpha.$$

Végül néhány szóval az X-sugárzas elemzésének kristálytani jelentőségéről óhajtunk szólni. W. H. és W. L. BRAGG-tól ered az a gondolat, hogy ilyen úton a kristályok felépítését kutatni lehet. A BRAGG-féle összefüggés alapján az atomsíkok távolságát meg lehet állapítani. Ha különböző kristályfelületekre ejtjük ugyanazt a monochromatikus sugárzást, akkor az atomsíkok távolságának viszonyát különböző irányokban λ ismerete nélkül meg lehet állapítani, sőt meg lehet állapítani az atomok elhelyezkedését is a kristályban.

Így a KBr kristálya olyan szerkezetű, hogy az elemi kocka mindegyik csúcspontjában és az oldallapok középpontjában egy-egy *Br*, ill. *K* atom van, a *KCl* kristály elemi kockájának minden csúcspontjában és az oldallapok középpontjában *K* atom van, az élek felező pontjában és a kocka középpontjában pedig *Cl*-atom. A halogén sók mind ilyen felépítésűek.

Ezenkívül még több kristály szerkezetét sikerült megállapitani. Így pl. a *ZnS* (szfalerit), a gyémánt s általában a szén különböző alakjainak szerkezetét. Ez utóbbiak vizsgálatánál különösen DEBYE és SCHERRER[18] jutottak szép eredményekre.

Az előbbiekben csak a legfőbb eredmények közlésére szorítkoztunk. De a finomabb részletek értelmezésében is már jól előrehaladtunk. Itt elsősorban SOMMERFELD nevét kell emlitenünk. Az *X*-színképek pontosabb elemzése az atom szerkezetének pontosabb megismeréséhez vezethet és így az *X*-színképek elemzése az anyag szerkezetének megismeréseben az optikai szinkép mellett legfontosabb segédeszközünk.

Mende Jenő.

Irodalom.

1. RÖNTGEN, Sitzungsber. d. Phys. — Med. Ges. in Würzburg, 1895; Sitzungsber. d. Königl. Pr. Ak. d. Wiss. in Berlin 1897. Összegyüjtve: W. C. Röntgens grundlegende Abh. ü. d. X-Strahlen, Würzburg, 1915. — 2. E. MARX, Ann d. Phys. *20*. 443. és 677. 1906; *28*. 37. 1909; *33*. 1305. 1910. — 3. Ch. G. BARKLA, Phil. Trans. A. *204*. 467. 1907. — 4. HAGA, Ann. d. Phys. *23*. 445. 1907. — 5. SOMMERFELD, Phys. Zeitschr., *10*. 79. 1909. — 6. KAYE, Cambr. Proc. *15*. 269.1909; STARK, Phys. Zeitschr. *10*. 902. 1909. — 7. BARKLA és SADLER, Phil. Mag. *16*. 550. 1908. — 8. FRIEDRICH, KNIPPING u. LAUE, Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Ak. d. Wiss. 1912. — 9. HAGA u. WIND, Ann. d. Phys. *68*. 884. 1899. — 10. KOCH, Ann. d. Phys. *38*. 507. 1912. — 11. SOMMERFELD, Phys. Zeitschr. *2*. 58. 1900. — 12. BRAGG, Jahrb. d. Rad., *11*. 347. 1914. — 13. DEBYE és SCHERRER, Phys. Zeitschr., *17*. 277. 1916. — 14. EINSTEIN, Ann. d. Phys. *17*. 140. 1905. — 15. SIEGBAHN, Verh. d. D. Phys. Ges., *18*. 278. 1916. — 16. MOSELEY, Phil. Mag. *26*. 2. 1913. — 17. KOSSEL, Verh. d. D. Phys. Ges. *16*. 899. és 953. 1914; *18*. 339. 1916. — 18. DEBYE és SCHERRER, Phys. Zeitschr. *18*. 291. 1917. — Az X-sugarakról jó összefoglalást nyujt SIEGBAHN, Jahrbuch d. Rad., *13*. 296. 1916; WAGNER, Phys. Zeitschr. *18*. 405. 461. 1917; MARX, Handb. d. Radiologie V, 149—688. l.; SOMMERFELD, Atombau und Spektrallinien. 3. kiadás. Vieweg 1922.

A QUANTUMELMÉLET FŐBB EREDMÉNYEI.

(Folytatás.)

A nem folytonos természeti folyamatok föltevése a fekete sugárzás vizsgálata nyomán keletkezett. Ez a jelenség a tapasztalat szerint teljesen folytonos: szinképe a leggazdagabb folytonos szinkép. Érdekes, hogy csak ezután fordult a fizikusok figyelme a természet által discontinuusnak odaállított jelenségek felé abból a célból, hogy discontinuitási feltevések alapján ezeknek törvényszerűségeit megmagyarázzák. E jelenségcsoportot a látható és láthatatlan szinképvonalak s ezeknek a külső körülmények következtében beálló változásai képezik.

8. A Rutherford-Bohr-féle atomminta, Bohr feltevései. A klasszikus elektromágneses sugárzási elméletben az elemi sugárzó-forrás a J. J. Thomson-féle atomminta volt, a mely a magneto-optikában nagyon jó szolgálatokat tett, azonban nem sikerült segélyével a vonalas szinképek tapasztalati törvényeit levezetni, továbbá a Stark-féle jelenséget s a radioaktiv α sugarakterjedése közben hirtelen bekövetkezhető nagy irányváltozást megmagyarázni. Főleg ez utóbbi jelenség megmagyarázása céljából választotta Rutherford a naprendszert utánzó atommintát. Eszerint a pozitiv töltés az atomnak pontszerű magjában van összesűrítve s nagysága $E = z.e$, hol e az elemi (pozitiv) elektromos quantum, z pedig a szóban forgó elem rendszáma a periodikus rendszerben. A pozitiv atommag körül bolygók módjára keringenek az elektronok, melyeknek együttes töltése absz. értékben egyenlő a mag töltésével. Legegyszerűbb a hydrogénatom, melynél $z = 1$, tehát e töltésű poz. atommag körül kör vagy ellipszis pályán kering egyetlen elektron.

A szinképvonalak keletkezésének megmagyarázására azonban nem látszott alkalmasnak a RUTHERFORD-féle atomminta. BOHR dán fizikusnak támadt az a gondolata, hogy a tapasztalat nyujtotta discontinuitás csirája valószinűleg az elemi sugárzó forrásokban, az ú. n. rotátorokban van, s eme gondolatát a következő három föltevésben fejezte ki. 1. Az elektron nem keringhet a mag körül tetszésszerinti sugarú körökön, hanem csak olyanokon, melyeken a keringő elektronok energiája meghatározott nagyságú értékekkel bir. (Pontosabban az elektron mozgásmennyiségének a mag középpontjára vonatkoztatott nyomatéka [Impulsmoment] egészszámú többszöröse a $\frac{h}{2\pi}$ mennyiségnek, hol h az elemi hatásquantum.) 2. E pályákon az elektron nem bocsát ki energiát, bár kering és így sebessége is változik, tehát e pályák a sugárzásmentes ú. n. «quantumpályák», az elektronok pihenő pályái. Az energiakisugárzás abban a pillanatban történik, mikor az elektron egy nagyobb sugarú körről kisebb sugarú körre ugrik át. 3. Ha egy külső nagyobb sugarú pályán az elektron energiája W_2, egy belső kisebb sugarú pályán W_1, hol $W_2 > W_1$, akkor a kisugárzott energia rezgésszámát a következő egyenlet határozza meg:

$$W_2 - W_1 = h\nu.$$

Ez a BOHR-féle szaporasági föltétel (Frequenzbedingung), mely a BOHR-féle elméletben igen nagy szerepet játszik; mert nélküle teljesen határozatlan lenne a kisugárzott energia rezgésszáma.

Ha e három alapfeltevést összehasonlítjuk az I. PLANCK-féle elmélet alapfeltevéseivel, azt találjuk, hogy az első kettő a lineáris oscillátorok esetében felismerhető, a harmadik azonban gyökeresen új s erre a lineáris oscillátorok esetében azért nem volt szükség, mert ott a rezgésszám kezdettől fogva adva volt. Ott a kisugárzott energia az energiaquantum $(h\nu)$ többszöröse is lehetett, itt mindig csak egyetlen quantum.

9. A hydrogén-typusú szinképvonalsorozatok Bohr-féle elmélete. Az olyan atomokat, melyekben egy

z-szeres poz. töltésű mag körül egyetlen elektron kering, hydrogén-typusú atomoknak nevezzük. A z lehet $1, 2, 3, \ldots, n$. Ide tartozik elsősorban maga a hydrogén, melynél $z = 1$, továbbá az egyszeresen ionizált helium; a helium esetében ugyanis $z = 2$, tehát az atommag körül két elektron kering, de ha az egyik leválik, keletkezik egy hidrogénszerű atom. BOHR először az e csoportba tartozó atomokat vizsgálja s kifejezi egy tetszésszerinti a sugarú quantumpályára (körre) vonatkozólag az a sugarat és a keringési sebességet a quantumpálya rendszámának a függvényeképen; természetesen előfordul h és az atomra jellemző más adatok is. A sugár és a keringési sebesség ismerete elégséges a keringő elektron energiájának kifejezéséhez:

$$W_n = -\frac{2\pi^2 e^4 z^2 m}{h^2 n^2}.$$

Ekkora az energia az n-ik BOHR-féle körön, $n = 1, 2, \ldots, n$; az m pedig az elektron (nyugvó) tömege. A negativ jel a vonzóerő következtében lép fel; ha n kisebbedik, W_n is kisebbedni fog. Ha most az elektron az n-ik pályáról egy belső s-ikre ugrik át, a szaporasági feltétel felhasználásával azonnal nyerhető a kisugárzott energia rezgésszáma:

$$\nu = \frac{2\pi^2 e^4 m z^2}{h^3}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2}\right) = Nz^2\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

hol s később meghatározandó poz. egész szám, jelenti annak a belső körnek a rendszámát, melyre egy külső elektron átugrik.

Hydrogén esetében $z = 1$. Ha továbbá $s = 2$ és $n = 3, 4, \ldots$, nyerjük a BALMER-féle szeriát a látható szinképben; ha $s = 1$ és $n = 2, 3, \ldots$, kapjuk a LYMAN-féle sorozatot az ultraibolyában, s végül ha $s = 3$ és $n = 4, 5, \ldots$, nyerjük a BERGMANN-féle sorozatot az ultravörösben, mely sorozatok s az őket előtüntető formulák is már a BOHR-féle elmélet előtt tapasztalatilag ismertek voltak. Az utóbbi formulából látható, hogy

$$N = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3},$$

ez a szám a RYDBERG-féle állandó, mely már BOHR előtt spektroszkopiai mérések alapján ismert volt s most más állandók segélyével nyert kifejezést. Szinte csudálatos, hogy az e, m és h állandóknak egészen más területeken mért értékeiből kiszámított N érték a korábbival meglepően egyezik.

Helium esetében $z = 2$. Ha itt $s = 3$ és $n = 4, 5, \ldots$, nyerjük a FOWLER-féle szinképi szeriát, melyet először a hydrogénnek tulajdonítottak, bár csak akkor jelentkezett, ha a hydrogéncsőben valamelyes helium volt. Ha $s = 4$ és $m = 5, 6, \ldots$, kapjuk a PICKERING-EVANS-féle sorozatot, melyet eleinte szintén a hydrogén szeriájának gondoltak.

BOHR megkisérelte a periodikus rendszer alapján az atomok felépítését. Eljárásának lényege az, hogy az elemeknek egy új periodusával mindig egy újabb elektrongyűrű kezdődik s egy-egy körön lévő elektronok száma nagyjában egyezik egy-egy periodusban lévő elemek számával; ezek a gyűrűk belülről kifelé haladva a $K, L, M, N, \ldots$-gyűrűk. Hogy azonban milyen az atomok pontos szerkezete, mekkora az egyes gyűrűkön az elektronok száma s hogy e gyűrűk egy síkban vannak-e vagy térbelileg elhelyezettek — e kérdések még megoldásra várnak.

10. Az eredeti elmélet módosításai. BOHR a tapasztalati eredmények következtében szükségesnek látta az atommag mozgását is figyelembe venni s egy újabb szeria-formulát vezetett le ama kezdőfeltétel mellett, hogy az atommag és az elektron közös tömegközéppontjuk körül keringenek. Az eredmény formailag megegyezett az előbbi formulával, azonban a RYDBERG-féle állandó részére most az elektron és atommag tömegviszonyától is függő állandó lépett:

$$N = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} = \frac{N_\infty}{1 + \frac{m}{M}},$$

hol M az atommag tömege, N_∞ pedig a jobboldali első tényezőt, a korábbi N-et jelenti. Látható ebből, hogy olyan esetekben, mikor m elenyészően csekély M-hez képest ($N \sim N_\infty$), érvényes az eredeti Bohr-féle elmélet; ha azonban ez nem áll fenn — mint épen a hydrogén és helium esetében — akkor az eredeti Rydberg-féle állandó a fentiek szerint módositandó, minek eredményeképen a tapasztalattal egyező formulát nyerünk. Látható ebből az is, hogy a Rydberg-féle szám nem univerzális állandó, hanem csekély mértékben az atomsúllyal együtt növekszik.

A Bohr-féle elmélet e szép eredmények mellett azonban még további módositásra is rászorult. Ismeretes ugyanis, hogy az egyes szeriák vonalai nagy felbontóképességű spektroszkoppal vizsgálva egymáshoz közelálló vonalakra hasadnak szét. Pl. a hydrogén Balmer-vonalai legalább is kétszeresen jelennek meg, de 5 komponens is megfigyelhető a H_α vonal helyén. Sommerfeld ezt azzal a feltevéssel próbálta magyarázni, hogy az elektron nemcsak körpályákon, hanem általában ellipszispályákon kering a mag körül, azt várva, hogy ezáltal a quantumpályák száma szaporodik s meg lesz a lehetőség új szinképvonalak keletkezésére. Mivel az ellipszist meghatározó polárkoordinaták száma kettő (a és φ), itt vált szükségessé a quantumelméletnek több szabadsági fokra való kiterjesztése; az eredmény az lett, hogy most mindegyik quantumpályához két quantumszám tartozott: a kezdetihez n és n', a végsőhöz s és s'. A Sommerfeld-féle feltevés következménye azonban csak az volt, hogy többféle lehetőséget nyujtott ugyanazon szinképvonal keletkezésére nézve, de új szinképi vonalat nem adott. — Itt kapcsolódott be a relativitás elve a quantumelméletbe: ugyanis Sommerfeld tekintetbe vette, hogy az elektronok keringési sebessége a quantumpályákon nem hanyagolható el a fény sebességéhez képest, tehát az elektron tömege nem tekinthető állandónak, hanem a sebesség függvénye. Továbbá a pályák sem meghatározott helyzetű magközeli ponttal (perihelium) biró ellipszisek, hanem olyanok, melyeknek magközeli pontja a keringés irányával egyértelműen előrehalad. E körülmények figyelembevételével levezetett Sommerfeld egy szeria-formulát, melynek közelitő alakja:

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 = Nz^2\left[\frac{1}{(s+s')^2} - \frac{1}{(n+n')^2}\right] +$$

$$+ Nz^4 a^2 \left[\frac{\frac{1}{4}+\frac{s'}{s}}{(s+s')^4} - \frac{\frac{1}{4}+\frac{n'}{n}}{(n+n')^4}\right],$$

hol a konstans. A ν_0-t nyerte SOMMERFELD először pusztán ellipszis-pályák föltevése mellett, a második tag (ν_1) adja a relativitás elve által okozott korrekciót. E formula a hydrogén és különösen a heliumvonalaknak erős felbontású spektroszkop segélyével történt széthasítását elég jól leírja, bár a gerjesztés módja szerint esetleg a formulának meg nem felelő vonalak is fellépnek. — Nevezetes körülmény, hogy a BOHR- és SOMMERFELD-féle elmélet három egyenletet szolgáltat az e, m és h állandók meghatározására s így ezek pusztán spektroszkopiai mérések révén is nyerhetők.

11. A Zeemann- és Stark-féle jelenség. A normális ZEEMANN-féle jelenség, vagyis a szinképvonalaknak normális széthasadása mágneses térben a BOHR-féle atomminta alapján a klasszikus elmélettel egybehangzóan megmagyarázható. (DEBYE[44] és SOMMERFELD.[45]) A legújabb időkben sikerüit LANDÉ[46]-nak az anomális ZEEMANN-féle jelenség elméletét is kifejteni. Kezdettől fogva kedvezőbbek voltak a viszonyok a STARK-féle jelenséget illetőleg, mely a szinképvonalaknak elektromos térben való széthasadásában áll. E jelenséget a klasszikus elektronelmélet egyáltalában nem tudta megmagyarázni. EPSTEIN[47] megmutatta, hogy a BOHR-féle atomminta segélyével a hydrogén és az egyszeresen ionizált helium esetében a STARK által megfigyelt összes vonalak elméletileg nyerhetők.

12. Egyéb eredmények. RUBINOWICZ[48] és később BOHR felállították a quantumpályákra vonatkozólag az ú. n. kiválasztáselvét (Auswahlprinzip), mely szerint az elektron egy tetszésszerinti quantumpályáról nem ugorhatik át egy másik tetszésszerinti pályára, hanem ez bizonyos szabályoknak van alávetve. Ezt alkalmazta EPSTEIN a STARK-féle jelenség magyarázata alkalmával. — EINSTEIN[49] a BOHR-féle atomminta alapján levezette a fekete sugárzásra fennálló PLANCK-féle formulát s itt egyrészt arra az érdekes körülményre jutott, hogy a BOHR-féle szaporasági föltétel ez esetben a WIEN-féle eltolódási törvény következménye, másrészt pedig a BOHR féle atom kisugárzása nem gömbhullámokban történik, hanem irányitott folyamat.

13. A Röntgen-szinképek. A RÖNTGEN-sugárzás szinképének keletkezését a BOHR-féle atomminta segitségével szinte sikerült megmagyarázni. Az erre vonatkozó részletesebb beszámolás ugyane füzet egy másik dolgozatában foglaltatik.

14. Molekulaminták. A dispersio, a polározás síkjának elfordulása mágneses térben, a sávos szinképek keletkezése főleg az anyag molekuláris szerkezetétől függ. Határozottabb formában a hydrogén-molekula szerkezete ismeretes, melynek alapján DEBYE a dispersio-formulát, SCHERRER pedig a mágneses forgatást állapitotta meg. E minta ellen azonban több ellenvetés merült fel; még sokkal bizonytalanabb a magasabbrendű elemek molekuláinak szerkezete.

A quantumelmélet minden olyan kérdésben felszinre jut, melyben az anyag atomisztikus v. molekuláris szerkezete közelebbi szerepet játszik. Igy történt, hogy BORN és COURANT[50] az említett problémáktól távoleső törvényszerűséget is, az EÖTVÖS-féle tapasztalati törvényt, mely a felületi feszültséget a hőmérséklet függvénye gyanánt állítja elő, a PLANCK-féle quantumelmélet alapján levezették. Ennek folytán br. EÖTVÖS LORÁND ezirányú munkásságának főeredménye is belekapcsolódott a mai fizikának egyik, az érdeklődés középpontjában álló elméletébe.

Az itt vázolt tények újabb érvet szolgáltatnak a discontinuitás feltevésének jogosultsága mellett. Hogy azonban mi az az egységes alap, melyre a vázolt kérdések megoldását épitenünk kell, hol kell a discontinuitást gondolnunk: a sugárzóforrások működésében-e, vagy a sugárzóenergia tovaterjedésében vagy mindkettőben — azt nem tudjuk. Az első álláspont PLANCKÉ, az utóbbiakat BOHR és EINSTEIN vallják: ugyanis a

BOHR-féle atom a sugárzó energiából csak véges quantumokat abszorbeálhat, tehát a BOHR-féle elmélet és a fényquantumok gondolata össze van kapcsolva.[51]

Császár Elemér.

Irodalom.

44. P. DEBYE: Gött. Nachr. 1916. — 45. A. SOMMERFELD: Phys. Zeitschr. *17.* 491. (1916.) — 46. A. LANDÉ: Zeitschr f. Phys. 5. 231. és 7. 398. (1921.) — 47. P. S. EPSTEIN: Ann. d. Phys. *50.* 489. (1916.) — 48. A. RUBINOWICZ: Phys. Zeitschr. *19.* 441, 465. (1918.) — 49. A. EINSTEIN: U. o. *18.* 121. (1917.) — 50. M. BORN és R. COURANT: U. o. *14.* 731. (1913.) — 51. A szinképvonalakra vonatkozó összes quantumelméleti vizsgálatok könnyen érthető modorban találhatók A. SOMMERFELD: *Atombau u. Spektrallinien* c. könyvében. (Friedr. Vierweg & Sohn in Braunschweig, 3. Auflage, 1922.)

AZ EÖTVÖS-TÖRVÉNYRŐL.

Az Eötvös-törvény a következő alakban fejezhető ki: $\alpha V_0^{\frac{2}{3}} = K(T'-T)$; a hol α a kapillaris állandó, V_0 a molekulatérfogat (molekulasúly osztva sűrűség), K az Eötvös-féle állandó, T' egy az illető folyadékra jellemző, a kritikus hőmérséklet táján levő hőmérséklet, T tetszőleges hőmérséklet. A kapilláris állandó jelenti azt az energiát, a mely szükséges a folyadék szabad felületének a területegységgel való megnagyobbitásához. Ez az állandó — α — függ a folyadék anyagi minőségétől és a hőmérséklettől, az ezektől való függést fejezi ki épen az Eötvös-féle törvény, a melyben azonban a K — igen sok, hogy ne mondjuk, az összes folyadékokra nézve — állandó mennyiség. Az Eötvös-törvény az egyszerű gáztörvénnyel analog törvényszerüséget mutat ki a folyadékokra. A két törvény külső alakjainak

$$\alpha . V_0^{\frac{2}{3}} : (T'-T) = K, \quad p\,v : T = R$$

megegyezése szembetünő; mindkettő a grammolekula-mennyiségre van vonatkoztatva, a hőmérséklet az elsőben (közel) a kritikus hőmérséklettől $(T'-T)$, a másodikban az abszolut 0°-tól van mérve.

Az Eötvös-törvényt, melyet Eötvös báró 1885-ben ismertetett, többször próbálták a fizikának alapelméleteiből levezetni. Itt Born és Courant elméletét ismertetem.[1] Ebben az elméletben a thermodinamika első főtételén, a hidrodinamika főtételén és a hidrodinamika folytonossági egyenletén kívül a quantum-

[1] Phys. Zeitschr. XIV., 1913. 731. o.

elmélet eredményei is fel vannak használva. Ezekből az egyenletekből különböző feltevésekkel és megszorításokkal megkapja az Eötvös-féle állandót, kiszámítva azt a Boltzmann-féle állandóból k-ból, a molekulatérfogatban levő molekulák számából N-ből, a Planck-féle elemi hatásmennyiségből h-ból és a hangnak az egyes anyagokban való terjedési sebességéből c-ből.

A thermikus egyensúlyi állapotban az energiára (E) és az entropiára (S) nézve áll az első főtétel

$$dE = -pdV + adF + TdS.$$

Hogy a független változó T legyen, bevezetjük a szabad energiát (H):

$$H = E - TS,$$

úgy hogy

$$dH = -pdV + adF - SdT,$$

a hol p a nyomás, V a térfogat, a a kapilláris állandó és F a felület. Innen adódik az a egyik, a következőkben felhasználandó értelmezése:

$$a = \frac{\partial H}{\partial F}. \tag{1}$$

Megállapitjuk a H kifejezését egy szabadon lebegő gömbalaku R sugaru, V térfogatu, F felületü folyadéktömegre nézve, amelyben az összenyomhatóság és a felületi feszültség hatása alatt, külső erők hatása nélkül kis rezgések mennek végbe. Ilyen rendszerre nézve áll az energiaegyenlet és a folytonossági egyenlet:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -U - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right] + C$$

és

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \rho \triangle \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0,$$

ahol Φ a sebességpotentiál, U a kohezio potenciálja, ϱ a sürüség. Kis rezgések esetében a másodfoku tagok az elsőfokon állókhoz képest elhanyagolhatók, úgy hogy a két egyenlet:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -U + C \text{ és } \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho_0 \triangle \Phi = 0$$

és mivel a hidrodinamikában $U = -\int \frac{dp}{\varrho}$, úgy hogy kis rezgésekre $U = c^2 \frac{\varrho}{\varrho_0} +$ konst., azért az előbbi két egyenletből adódik

$$c^2 \triangle \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \text{ ahol } c^2 = \left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_0. \tag{2}$$

A folyadék belsejét a folyadék felületi rétege mint egy rugalmas hártya veszi körül. A c^2 a folyadék belsejében állandó; mivel a molekularis hatásgömb sugara rendkívül kicsiny, azért a felületi rétegben a c más értékű $(c_1,)$ mint a folyadék belsejében; kimutatható, hogy

$$c_1^2 = \tfrac{1}{2} c^2. \tag{3}$$

A (2) alatti differentiálegyenlet megoldása két tényező szorzatakép írható fel, az egyik a koordinátáknak, a másik a folyó időnek a függvénye $\Phi = ue^{2\pi i \nu t}$. Ezt tekintetbe véve és polárkoordinátákra áttérve a (2) alatti egyenlet így alakul:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin \vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sin^2 \vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right] + \frac{4\pi^2 \nu^2}{c^2} = 0. \tag{4}$$

Tekintve, hogy a felületi réteg úgy viselkedik, mint egy rugalmas hártya, amelyben a felületre merőleges elmozdulások magának a felületnek az elmozdulásához képest elhanyagolhatók, azért a belsőben végbemenő rezgéseket meg kell különböztetni a felületben végbemenő rezgésektől, ez utóbbiakra nézve a (4) alatti egyenlet egyszerűsödik, ezekre nézve:

$$\frac{1}{\sin \vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{4\pi^2 \nu^2}{c_1^2} R^2 = 0. \tag{5}$$

Úgy a (4) mint az (5) alatti egyenlet gömbfüggvényekkel és Bessel-féle függvényekkel oldható meg. A megoldás mint végtelen sokféle rezgésszámu rezgés rezultánsa adódik, a megoldásnak összetevői — optikai nyelven szólva — egy egész spektrumot alkotnak (spektrum alatt itt rezgéssorozatot kell érteni). Meg lehet állapitani a (4) alatti egyenletnek megfelelő azon vonalak számát, mely vonalak közül a legnagyobb rezgésszámu ν. Ha ezt $Z_1(\nu)$-vel[1] jelöljük, akkor $Z_1(\nu) = 4\pi V\nu^3 : 3c^3$. Hasonlókép megállapitható az (5) alatti egyenletnek megfelelő azon vonalak száma is, mely vonalak közül a legnagyobb rezgésszámú ν. Ezek számát Z_2-vel jelölve $Z_2 = 2\pi F\nu^2 : c^2$. Ezek szerint a térfogati és a felületi rezgésekből eredő ν-nél még nem nagyobb rezgésszámu vonalak száma:

$$Z(\nu) = \frac{4\pi}{3} V \frac{\nu^3}{c^3} + 2\pi F \frac{\nu^2}{c^2} \quad . \qquad (6)$$

Az eddigi megfontolásokban a folytonosság feltevése szerepel. Innen kezdve belép az anyag molekularis szerkezetére vonatkozó felfogásból eredő megszorítás. Minden molekulának a mozgásban három szabadsági foka lehet, úgy hogy $Z(\nu_{max})$ egyenlő a folyadékban levő molekulák számának háromszorosával $3NV : V_0$-val. Ez összefüggés alapján a tekintetbe vehető maximalis rezgésszám ν_{max} kiszámitható.

A következőkben az anyag folytonosságának, az anyag molekularis szerkezetének és az energia folytonosságának feltevésén felül belép az energia quantum-elméletének felfogása is. A Planck-féle felfogásban az energiának és az entropiának képleteiből[2] egy linearis oscillator szabad energiájára nézve $\mathfrak{h}$-ra adódik, hogy:

$$\mathfrak{h}(x) = kTlog_n (1-e^{-x}) \text{ ahol } x = \frac{h\nu}{kT}. \qquad (7)$$

Az egész rendszer szabad energiáját megkaphatjuk, ha az egyes molekulák szabad energiáját összegezzük a különböző

[1] Annalen der Physik. 1912. 39. 834. o.
[2] Planck: Theorie der Wärmestrahlung 1913.

rezgésszámok szempontjából. Az x-től $x+dx$-ig terjedő körben levő rezgések száma $\frac{dZ}{dx}dx$. A Z-nek x szerinti differentiálhányadosát $R(x)$-szel jelölve, a rezgések száma az x-től $x+dx$-ig terjedő körben $R(x)\,dx$. Az egész rendszer szabad energiája, amely a molekulák rezgéséből ered:

$$\int_0^{x_m} R(x)\,\mathfrak{h}(x)\,dx, \text{ ahol } x_m = \frac{h\nu_{max}}{kT}$$

A hőmérséklet emelkedése következtében a folyadék kitágul, ugy hogy az egyes molekulák rezgési egyensúlyi helyzetei is megváltoznak; ennek a változásnak is megfelel egy szabad energia-rész, amelyet statikai szabad energiának nevezhetünk. Ezt H_0-val jelölve, az egész rendszer szabad energiája:

$$H = H_0 + \int_0^{x_m} R(x)\,\mathfrak{h}(x)\,dx \tag{8}$$

Akkor az (1) alatti definitiót alkalmazva

$$a = \frac{\partial H_0}{\partial F} + \frac{\partial}{\partial F}\int_0^{x_m} R(x)\,\mathfrak{h}(x)\,dx = a_0 + \frac{\partial}{\partial F}\int_0^{x_m} R(x)\,\mathfrak{h}(x)\,dx. \tag{9}$$

Az itt kijelölt művelet az eddigi egyenletek felhasználásával elvégezhető, bizonyos megengedhető elhanyagolások után adódik, hogy

$$(a - a_0)\,V_0^{\frac{2}{3}} = -KT,$$

ahol

$$K = \frac{\pi}{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}\,k\,(3N)^{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{\theta}{3T}\right)$$

és

$$\theta = \sqrt[3]{\frac{9N}{4\pi V_0}}\,\frac{ch}{k}.$$

Ha a_0-ról feltételezzük, hogy az a molekulák távolságának négyzetével fordítva arányos, akkor az $a_0 V_0^{\frac{2}{3}}$ szorzat állandó, ezt KT'-vel egyenlővé téve:

$$aV_0^{\frac{2}{3}} = K\,(T' - T) = 2{\cdot}45\left(1 - \frac{1{\cdot}22.10^{-3}c}{T\sqrt[3]{V_0}}\right)(T' - T). \tag{10}$$

A K a következő számértékek alapján van kiszámitva: $N = 6{\cdot}20.10^{23}$, $k = 1{\cdot}34.10^{-16}$ erg, $h = 6{\cdot}415.10^{-27}$ erg sec. Előfordul azonban még ezeken kívül benne c, T és V_0. A c a T-vel együtt változik. Hogy a hang terjedési sebessége milyen módon függ a hőmérséklettől az egyes anyagok esetében, erre nézve csupán a víznél vannak megmért kisérleti adatok, itt is csak a 290°—335°-ig terjedő közben. Előfordul a K-ban még a $\sqrt[3]{V_0}$ is, ami azt mutatja, hogy a K értéke kis mértékben függ az anyagi minőségtől is.

Ismeretes, hogy az Eötvös-féle törvény szempontjából megkülönböztetünk *normalis* és *anomalis* anyagokat aszerint, amint K (közelitőleg) 2·2 vagy ettől az értéktől lényegesen eltér. Az utóbbi esetben azt mondjuk, hogy a molekulák *dissociálva* vagy associálva vannak.

A normalis folyadékok esetében a K-nak ujabban észlelt értékeitől a számított érték eltér, 2—5% nagyobb a számított. Ezt Courant és Born annak tulajdonitják, hogy számításaik szerint a folyadékhártyára nézve a (3) alatti egyenlet áll. A c csökkenése c_1-re azonban nem tehető fel ugrásszerűnek, mint ahogy ez a számításban történik. Épen azért megengedhető a (10) alatti egyenletben a c-nek néhány százalékkal való megnagyobbitása.

Anomalis anyagok viselkedése, hogyha K a 2·2-nél lényegesen kisebb, a molekulák associációjával ezen elmélet keretében könnyen értelmezhető: a rendszer szabadsági foka kisebb mint $3N$. A K-nak tulságosan nagy értéke dissociációval, vagyis úgy értelmezhető, hogy a molekulán belül egyes csoportok képződnek, a melyek a molekulán belül külön is rezegnek, úgy hogy a rezgések számában $3N$ helyébe $4N$ $5N$ ···—nN irandó, úgy hogy az igy nyert konstans:

$$K_n = \left(\frac{n}{3}\right)\frac{2}{3}K. \tag{11}$$

Walden az anomalis anyagok állandóit táblázatba foglalta. Ebben táblázatban szereplő adatok a (11) alatti képlet alapján számitott valamelyik érték közelébe estek. Walden, valamint

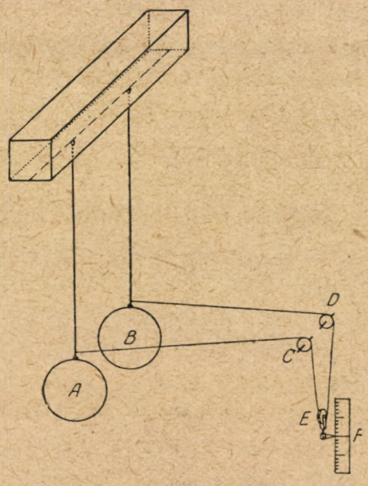
Nernst empirikus formulákat állitottak fel az anormalis anyagok állandóira, ez az elmélet azonban nem empirikus, hanem dedukált formulát ad.

Courant és Born elméletét az előbbiek szerint következőképen jellemezhetjük: 1. A folyadék energiáját a molekulák rezgésének tulajdonitják, de nem teszik fel, hogy valamennyi molekula egy és ugyanazon rezgésszámmal rezeg, mert hiszen az egymáshoz aránylag közel fekvő molekulák annyira befolyásolják egymást, hogy mozgásuk igen nagy mértékben eltér az egyszerű harmonikus mozgástól. 2. Azért kell tehát megállapitani a rendszer mozgásának differenciálegyenletét és ebből a különböző rezgésszámu rezgések számát. Ez a számitás a *folytonosságot* tételezi fel. 3. Minden molekulának mozgásában három szabadsági foka lévén, az összes rezgésfajok száma a rendszerben levő molekulák számának háromszorosával kell hogy egyenlő legyen. Itt tehát már az *anyagnak molekularis felfogása* van felhasználva. 4. Ezen az alapon meghatározható a tekintetbe vehető legnagyobb rezgésszám. 5. A rezgő molekula szabad energiáját a Planck-féle képletek alapján számitják ki, mely képletek az *energiának bizonyos foku molekularis szerkezetét* tételezik fel. 6. E képletek szerint az egyes különböző rezgésszámu rezgésekre kiszámitva a szabad energiát, a rendszer összes szabad energiája egyenlő lesz a szabad energiák összegével. 7. A szabad energia kifejezéséből könnyen kiszámitható a felületi feszültség és rögtön adódik az Eötvös-törvény. 8. Az állandó igen kis mértékben függ az anyagi minőségtől és a hőmérséklettől, de ez utóbbitól való függésre nézve felteszik, hogy ez csak látszólagos, noha e feltevés támogatására nézve csak igen kevés mérési adat áll rendelkezésre. 9. Az olyan anyagoknál, melyeknél a K a normalis értéktől igen nagy mértékben tér el, fel kell tenni, hogy a molekulák associálva, illetve dissociálva vannak s ennek folytán a rezgésfajok számának a megkisebbedése, illetve megnagyobbodása okozza a K értékének megkisebbedését, illetve megnagyobbodását.

Fröhlich Károly.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

Kísérleti összeállítás a lebegési jelenségek magyarázatához. Az összeállítás Günther dresdai tanáré.[1] Két egyszerű inga, egymáshoz közel felfüggesztve. Az ingák hossza körülbelül 1 m. Golyóik súlya 1—2 kg. (ábra). Felfüggesztésük kettős szálú, hogy a lengési síkok ne változzanak. A lengéssíkok párhuzamosak. E síkokban, a golyókkal egy magasságban, a golyók ugyanazon oldalán egy-egy könnyű csiga van felszerelve. A golyókhoz hozzá van kötve egy fonál két vége. A fonál át van vetve a két csigán és a csigák közt lecsüngő darabjára rá van helyezve egy ugyancsak könnyű, vízszintes mutatóval ellátott csiga. A mutató vége mögött függélyes osztályzat van.



Ha az ingákat lengetjük, a függő csiga le s fel mozog. Mivel kitérése minden pillanatban arányos a két inga kitéréseinek algebrai összegével, azért kitérései alapján a lebegési görbe megrajzolható. Ha a két inga hosszát, meg a lengéseik tágasságát alkalmas módon változtatjuk, megvalósíthatjuk a lebegés különféle eseteit.

Szabó Gábor.

Új módszer a szabad-esés tanulmányozására. A módszer ugyancsak Güntheré. Egyik alkalmazása ez a váltakozó áramú ívlámpa fényénél látható stroboszkopikus álló-csillag jelenségének.[2]

A Morin-féle ejtőgéptől a Günther összeállításához olyasféle az átmenet, mint a fonográfról a grammofonra. A Morin-gépnél a leejtett test egy forgó henger palástjára ír vonalat, itt egy forgó korongra.

---

[1] Zeitschrift für d. phys. u. chem. Unterricht, 1922. S. 19—21.

[2] A többi alkalmazásokat lásd Math. és Phys. Lapok 1921. 84. lap.

Az összeállítás ez: [1] Elektromos mótor, melynek forgásszáma tág határok közt változtatható. A mótor forgási tengelye vízszintes. A tengely végére rá van erősítve kemény papírosból készített, 20—36 cm átmérőjű fehér korong, melyre egyenlő szögtávolságokban bizonyos számú (10—20) fekete körczikk van festve. A korong elé egy 50 cm-es oldalakkal biró erős fakeret van helyezve, úgy, hogy a fakeret síkja párhuzamos a korongéval. A keret közepén két drót van egymástól körülbelül 7 cm távolságban függélyesen kifeszítve. Az eső test — 6 cm hosszú, 6 cm átmérőjű, ólommal töltött vascső — e közt a két drót közt esik le. A drótok közt való esés úgy van biztosítva, hogy a test felső és alsó részére egy-egy vaslemez van vízszintesen ráerősítve és ezekbe a drótok távolságában két-két lyuk van fúrva. A drótok átmennek ezeken a lyukakon. A súrlódás a drótokhoz lehető kicsiny. Az eső test a drótok síkjára merőlegesen át van fúrva. E furatba czeruza van behelyezve, úgy, hogy a hegye a forgó korong felületét érinti. A hegyet a czeruza másik vége alatt alkalmazott rugó gyengén hozzányomja a felülethez. A fakeret felső részén egy kampó van megerősítve. Az eső testet a leejtés előtt ez olyan magasságban tartja, hogy a czeruza hegye a korongot a függélyes átmérője felső végpontjához közel érintse.

A kisérlet ez: A korongot váltakozó áramú ívlámpával megvilágítjuk; azután forgásba hozzuk és a forgása sebességét addig fokozzuk, míg kialakul egy stroboszkopikus álló-csillag. Ekkor a testet leejtjük. Az esés előtt a czeruza kört ír a korongra, esés közben görbe vonalat (Galilei-féle csavarvonalat).

Ha a kör kerületére attól a ponttól kezdve, a melytől az esés megindult, egyenlő ívdarabokat mérünk le és az osztópontokhoz tartozó sugarakat megrajzoljuk, ezeknek a sugaraknak a kör és a görbe közé eső darabjai megadják az 1, 2, 3, ... időegység alatt befutott utakat. Ezek megmérésével konstatálható az úttörvény.

Ha olyan átmérőt húzunk a körben, mely a görbét a középponton kívül két pontban metszi, akkor megmérvén ezen a két metszéspontnak megfelelő esési mélységeket, s_1-et és s_2-t, a gyorsulás így adódik:

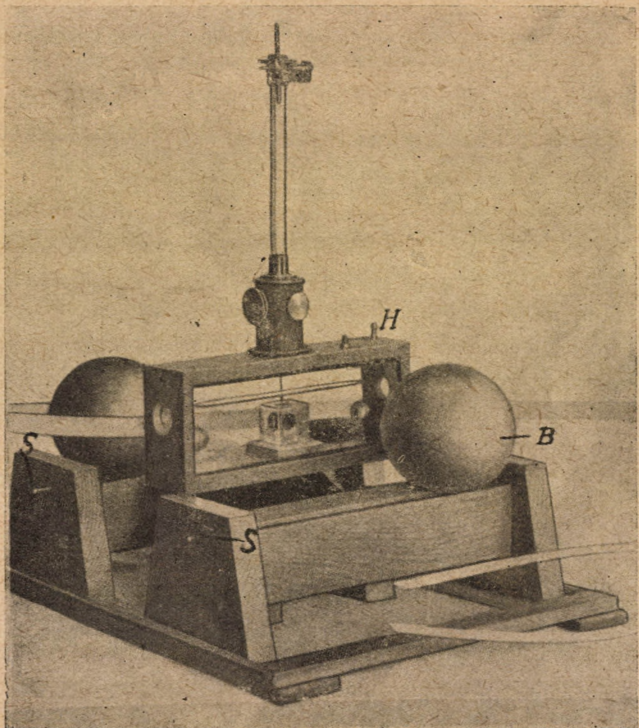
$$g = 16n^2\left(\frac{s_1 + s_2}{2} - \sqrt{s_1 s_2}\right),$$

a hol n a korong másodperczenkinti fordulatszáma.

Szabó Gábor.

[1] Zeitschrift für den phys. u. chem. Unterricht, 1922. S. 55—71.

A tömegvonzás törvényének igazolása. Az Eötvös-féle gravitácziós eszközök és módszerek, mint ismeretes, a tudós világ közkincsévé lettek. Az a folyamat, a mely a klasszikus módszerek általánosan ismertekké válását követni szokta, — hogy t. i. az eszközöket, a módszereket változtatgatják, hogy olyan czélokra is próbálgatják alkalmazni, a milyenekre eredetileg nem használtattak, — megindult az



Eötvöséire nézve is. Így: a nehézségi variometert fotografikus regisztráló készülékkel, önműködőleg forgató óraszerkezettel látták el.[1]

Az Eötvös-féle torziós mérlegek első sorban tudományos czélokra szolgálnak. Bár meg lehet mutatni velök kényelmesen a tömegvonzást, arra a pedagógiai czélra nem valók, hogy velök magát a tömegvonzás

[1] Hecker: Eötvösche Drehwage des geod. Institutes in Potsdam. Zeitschrift f. Instrumentenkunde, 1910. — Schweydar: Die photographisch registrierende Eötvössche Torsionswage der Firma Carl Bamberg in Berlin-Fridenau. Zeitsch. f. Instrumentenkunde, 1921.

törvényét demonstrácziós módon igazoljuk. THEOD. WULF megkísérelte ennek a feladatnak a megoldását.[1] Készített egy olyan torziós mérleget, a melylyel — leírása szerint — a tömegvonzás törvényének egész tartalmát kényelmesen igazolni lehet. Sőt meg lehet vele határozni tűrhető pontossággal, a gravitáczió állandóját is. (WULF ennek értékéül $6{,}78.10^{-8}$ *CGS* egységet kapott.)

Torziós mérlege lényegileg olyan, mint az EÖTVÖSÉ, de nem olyan finom és nem olyan érzékeny. Hordozható, kisérlet közben állhat az előadó asztalon is, ha az elég fix. Mérlegrúdjának tartó szála 15—20 cm hosszú, 0·1 mm vastagságú sárgaréz drót; lengésideje 50—100 másodperc. Vonzó golyói a mérlegrúddal párhuzamosan elhelyezett favályúkban guríthatók és így lényegesen hol az egyik, hol a másik kis golyó mellé állíthatók (ábra).

Az eszköz működése a rezonánczia jelenségén alapszik (mint EÖTVÖS ama mérlegéé, a melylyel a Földön mozgó tárgyak nehézségének a változását demonstrálja). Tegyük fel, hogy a vonzó golyók még nincsenek a kicsiny golyók közelében és hogy a mérlegrúd nyugalomban van. Ha ekkor a vonzó golyókat helyükre teszszük: a mérlegrúd kitér, persze nagyon kevéssel. Ha akkor, a mikor a mérlegrúd kezd visszafordulni az egyensúlyi helyzete felé, a vonzó golyókat áthelyezzük: az ellenkező oldal felé az előbbinél nagyobb kitérést kapunk. A vonzó golyóknak a mérlegrúd fordulása pillanataiban való áttevését folytatva, a mérlegrúd kitérését növelhetjük mindaddig, a míg a lengést csillapító tényezők hatása felül nem kerekedik. (WULF a 2—3 m távolságban elhelyezett ernyőn 1 m-es kitérést is kapott). Attól kezdve, hogy a csillapító erők hatása a vonzó erőkét kiegyensúlyozza, a kitérés maximuma állandó marad s a nagy golyók kellő pillanatokban való áthelyezgetésével bármeddig fenntartható. Így kényemesen és jól észlelhető.

Mérő kisérletekben, a mikor nem a vonzás demonstrálásáról van szó, a maximális kitérés előidézéséhez nem szükséges a mérleg nyugalmi állapotából kiindulni. A mérleget tetszésszerinti lengésbe lehet hozni, csak a nagy golyókat a fordulás pillanatában át kell helyezgetni. Ha a meglengetett mérlegrúd kitérései kisebbek annál a maximálásnál, a mit a vonzás fenn tud tartani, akkor a kitérések a golyók áttételei folytán állandóan növekesznek a maximálásig; ha pedig az eredeti kitérések

[1] Phisykalische Zeitschrift. 1022. S. 154—157 és Zeitschrift f. d. phys. u. chem. Unterricht, 1022. S. 152—161.

nagyobbak, akkor a golyók áthelyezései daczára is folyton kisebbednek, míg a szóbanforgó maximális értékig le nem csökkennek.

A nagy golyók anyagi minőségének, tömegének, a kis golyóktól való távolságának változtatásával — maximális kitérés észlelése alapján — a vonzási törvény egész tartalma igazolható.

Szabó Gábor.

Előadásaink.

Jan. 19-én.	Ortvay Rudolf a relativitás elméletéről szóló sorozatos előadásának I. része: Tapasztalati alapok és a Lorentz-transzformáczió.
Jan. 26-án.	II. rész: A tér-idősokaság bevezetése és alkalmazása.
Febr. 3-án.	III. rész: A Riemann-féle terek és az általános tensorkalkulus.
Febr. 10-én.	IV. előadás: A gravitáczió Einstein-féle elmélete.
Febr. 23-án.	Jordán Károly: Az interpoláczióról.
Márcz. 9-én.	Kerékjártó Béla: A felületek folytonos leképzéséről.
	Fröhlich Károly: Az Eötvös törvényről.
Márcz. 23-án.	Kőnig Dénes: A konvex testekről.
	Mikola Sándor: Néhány egyszerű demonstrácziós eszköz bemutatása.
Ápr. 6-án.	Bodócs István: A geometriai fénytan hyperbola-tétele és annak általánosítása.
	Egerváry Jenő: Algebrai egyenletek gyökeiről.
Ápr. 20.-án.	Kürschák József: Bizottsági jelentés az 1922. évi Kőnig Gyula jutalomról.
	A Kőnig Gyula jutalom ünnepélyes átadása Bauer Mihálynak.

Az 1922-ik évi Kőnig Gyula-jutalom.

Kőnig Gyögy és Kőnig Dénes 1917-ben nagynevű atyjuk emlékére Társulatunknál Kőnig Gyula-alapitványt létesítettek, melynek rendeltetése, hogy kamataiból kétévenként egy magyar mathematikus 1000 koronás «Kőnig Gyula-jutalom»-mal tüntettessék ki. Az alapítványi ügyrend szabályzata szerint az első jutalmat 1920-ban kellett volna kiadni, azonban ez a közismert viszonyok miatt akkor nem volt lehetséges. Az 1921-ik évben tartott közgyűlés határozata szerint a jutalmat először az 1922-ik évben kellett odaítélni. Ez meg is történt. A közgyűlés által kiküldött bizottság, a mely Kürschák József, Farkas Gyula, Kőnig Dénes és RIESZ FRIGYES tagtársakból állott, e kitűntetésre BAUER MIHÁLY műegyetemi adjunktus urat ajánlotta egyhangulag, a mely javaslathoz a választmány ugyancsak egyhangulag hozzájárult s a jutalmat Társulatunk elnöke az ápr. 20-ki nyilvános ülésen nagyszámban megjelent tagok jelenlétében BAUER MIHÁLY urnak ünnepélyesen átnyujtotta. A kitüntetés oly férfiút ért, a ki Társulatunk működésében kezdettől fogva részt vett. Dolgozatainak jelentékeny része folyóiratunk hasábjain és előadó üléseinken vált először ismeretessé.

Újabban megjelent magyar fizikai könyvek.

Elektrotechnika. Az elektromos áramfejlesztők, áramátalakítók és mótorok működésének alapelvei, az elektrotechnikába való bevezetéssel. 500-nál több eredeti ábrával. Írta: BOLEMAN GÉZA, m. kir. bányászati és erdészeti főiskolai rendes tanár. Második kiadás. 640 l. Selmeczbánya, Joerges Ágost özvegye és fia, 1919.

Bevezetés a fizikába. Írta: TANGL KÁROLY, egy. ny. r. tanár, a M. T. Akadémia r. tagja. 146 ábrával 352 l. Budapest, a Pantheon irodalmi intézet kiadása, 1921.

A radioaktiv anyagok. Írta: MENDE JENŐ. 196. l. Budapest, Dick Manó kiadása, 1921.

A drótnélküli telegráfia. Népszerü ismertetés. Írta: MENDE JENŐ. A Kir. Magy. Természettudományi Társulat Bugát-díjával jutalmazott munka. 192 l. Budapest, Dick Manó kiadása, 1921.

Physika. Egyetemi és főiskolai hallgatók számára. Írta: dr. RHORER LÁSZLÓ, állatorvos főiskolai ny. r. tanár, egyet. magántanár. Második kiadás. Több száz ábrával és 3 színes táblával. XVI és 548 l. Budapest, Universitas könyvkiadó-részvénytársaság, 1922.

A fény. Írta: dr. POGÁNY BÉLA, egyet. ny. r. tanár, a M. T. Akadémia l. tagja. Egy színes táblával és 239 ábrával. 366. l. Budapest, a Pantheon irodalmi intézet r. t. kiadása, 1921.

EINSTEIN: *A különleges és az általános relativitás elmélete* a nagyközönség számára. A 14-ik német kiadásból fordította VÁMOS FERENCZ. Budapest, a Pantheon irodalmi intézet r. t. kiadása, 1921.

A Mathematikai és Physikai Társulat tisztikara.

Elnök: FRÖHLICH IZIDOR (VIII., Muzeum-körút 6–8.)
Alelnökök: RADOS GUSZTÁV,
TANGL KÁROLY.
Titkárok: FEJÉR LIPÓT (V., Falk Miksa-utcza 15.).
MIKOLA SÁNDOR (VII., Vilma királynő-út 19.).
Jegyzők: KOPP LAJOS,
KÜRSCHÁK JÓZSEF.
Pénztáros: RYBÁR ISTVÁN (VIII., Muzeum körút 6—8.).

Franklin-Társulat nyomdája: Géczy Kálmán.

FOLYÓIRAT
1925/26 1–110
EGYETEMI KÖNYVTÁR
SZEGED
A M. kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem KÖNYVTÁRA SZEGED

Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkívüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi ránk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhöz képest meg kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzivebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is. Csak így alakul ki bennünk a jövőnk biztosításához annyira szükséges bizalmunk önmagunkhoz.

Kérjük ennélfogva tisztelt tagtársainkat,

1. hogy hátralékos tagdíjaikat küldjék be a Társulat pénztárosához *Privorszky Alajos*-hoz (VII. ker., Ilka-utca 32.),
2. hogy az új társulati évtől (1922-től) kezdve emelje fel mindenki, aki teheti, a tagsági díjat bizonyos méltányos összeggel (egészítse ki például 50 koronára) önszántából,
3. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával és hogy a világháború alatt és az utána következő időkben költözködésre kényszerített tagtársaink figyelmét hívják fel hasonló cselekedetre,
4. hogy gyűjtsenek új tagokat.

Ügyvezető titkár.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA: GÉCZY KÁLMÁN.