7.

MATHEMATIKAI
ÉS
PHYSIKAI LAPOK

HETEDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1898

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HETEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

Második füzet.

Harmadik füzet.

*

Negyedik füzet.

Ötödik füzet.

Hatodik füzet.

Hetedik füzet.

Nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Ismertető és önálló dolgozatok.

Physikai Szemle.

Irodalom.

Megoldott feladatok.

Vegyesek.

Társulati ügyek.

KONDOR GUSZTÁV.

Nemcsak tudományával szolgálta hazáját, hanem szabadságáért számos öldöklő csatában is harczolt. Valamennyi hű bajnoka hazánknak büszkén látta ontott vére árán a hon felvirágozását minden téren, csak ő egyedül árvult el még inkább: csillagász volt. A tudományoknak és művészeteknek mindenütt keletkeztek új templomai, az ő kedvelt tudományának egyetlen volt házát is romba döntötte a háború és közel ötven éve, hogy az astronomia nálunk hajléktalan. Ritka tragicumát mégis azon gondolat enyhíté, hogy utolsó éveiben az ő fáradozása indította meg ismét a csillagászat ügyét s hogy az első lépésein az ő szeme őrködött.

Társulatunk alakító mozgalmaiban érdekkel vett részt és bár működéséből részét nem vehette ki, velünk hasonló irányban munkálkodott mint az egyetemen éppen az ő törekvései folytán létesített mathematikai szeminarium igazgatója.

Kondor Gusztáv 1825. aug. 7-én Szántován született. Középtanulmányai elvégzése után az apatini kincstári építészeti hivatal mérnökgyakornoka lett s csak ezután iratkozott be a pesti egyetemre. Tanulmányait azonban a szabadságharcz szakította félbe, melyet mint honvéd árkász-főhadnagy küzdött végig. Mérnöki oklevelét elnyervén 1850—54-ig a pesti és bécsi egyetemeken mathematikával, természettudományokkal és különösen astronomiával foglalkozott és 1855-ben a pestvárosi főreáliskola rendes tanára lett. A m. tud. Akadémia 1861-ben levelező tagjává választotta, 1863-ban a szépművészetek és bölcsészet doctorává avattatott és két évvel később már mint a tudományegyetemen a csillagászat magántanárát találjuk. 1871-ben ugyanezen egyetem elemi mennyiségtani tanszékének rendes tanára lett s 1883 óta a csillagászati előadásokat is rendszeresen tartotta. 1897 szeptember 16-án húnyt el; társai és tanítványai áldják emlékét.

Egynéhány mathematikai értekezésen kívül számos ismeretterjesztő czikket írt, hazánk földmágneses viszonyainak megismertetéséhez számos mágneses helymeghatározással járult és 28 éven át számította az akadémiai almanach naptári részét. Mint akadémikus Herschel Jánosról és két magyar csillagászról: Nagy Károlyról és Petzwal Ottóról tartott emlékbeszédet. Egyetemi előadásait gondos autografiai kiadása őrzi meg.

Béke poraira!

QUADRATIKUS BINÄR ALAKOK RENDSZEREINEK INVARIÁNSAIRÓL.

E dolgozat bizonyos számú quadratikus binär alak szimultán invariánsainak és kovariánsainak teljes rendszerének meghatározásával foglalkozik, vagyis azon invariánsok és kovariánsok meghatározásával, melyekből a többi invariáns és kovariáns mint azoknak ráczionális egész függvénye fejezhető ki.

Ez a feladat ama szimbolikus számitással, melyet Aronhold az alakok elméletébe bevezetett Clebsch és Gordan pedig rendszeresen kifejtettek, igen egyszerűen oldható meg. Már Clebsch művében és Gordan előadásaiban sem komplikáltak az erre vonatkozó tárgyalások, noha mindkét író jóval többet nyujt a teljes rendszer puszta meghatározásánál; Bruno könyvének német fordítása pedig két alak esetében néhány sorral oldja meg a feladatot. Ennek gondolatmenete még egyszerűbbé s különösen áttekinthetőbbé tehető, ha az adott alakok számát nem szorítjuk meg kettőre, hanem tetszőlegesnek hagyjuk. Azt a könnyen áttekinthető csekély számú meggondolást, mely ekkor czélhoz vezet, tartalmazza e dolgozat III. alatti része.

Dolgozatomnak nagyobb terjedelme onnan ered, hogy a binär alakok elméletéből nem akartam mást feltételezni, mint a mi e lapokban már ismertetve volt.* E végből I. és II. alatt előre bocsátottam a szimbolikus számítás első elemeit.

---

* Kopp: Az invariánsok elméletének alapjairól; Math. és Phys. Lapok I. kötetében. Ebből is csak a 206. lapig foglaltakra történik hivatkozás.

I.

1. Legyen φ az

$$f=A_0x_1^m+\binom{m}{1}A_1x_1^{m-1}x_2+\cdots+A_mx_2^m$$

$$g=B_0x_1^n+\binom{n}{1}B_1x_1^{n-1}x_2+\cdots+B_nx_2^n$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

alakok együtthatóinak (s esetleg más változóknak is) oly függvénye, mely minden egyes alak együtthatóiban homogen és lineáris. E φ függvény akkor, midőn

$$f=(a_1x_1+a_2x_2)^m,\quad g=(b_1x_1+b_2x_2)^n,\ldots,$$

az a_1, a_2 határozatlanoknak m-ed fokú, a b_1 és b_2-nek n-ed fokú, s. i. t. homogen függvényébe megy át.

A következőkre alapvető fontosságú, hogy az így nyert függvény teljesen meghatározza a φ-t, melyből f, g, . . . speczializálása által keletkezett.

Pl. ha az

$$A_0x_1^2+2A_1x_1x_2+A_1x_2^2,\quad B_0x_1^2+2B_1x_1x_2+B_2x_2^2$$

alakok együtthatóinak valamely függvénye mindegyik alak együtthatóiban lineáris, továbbá az

$$(a_1x_1+a_2x_2)^2,\quad (b_1x_1+b_2x_2)^2$$

alakokra vonatkozólag értéke:

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2=a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2,$$

akkor e függvény nyilván nem lehet más mint:

$$A_0B_2-2A_1B_1+A_2B_0.$$

Minthogy φ teljesen meg van határozva, ha tudjuk, hogy lineáris alakok hatványaira vonatkozólag e lineáris alakok együtthatóinak melyik függvényével egyenlő, azért a következőkben φ helyett rendesen ez utóbbi függvényt adjuk meg s azt φ *szimbolumának* v. *szimbolikus alakjának* nevezzük.

Ily módon számos fontos függvény szimbolizálható. Pl. maga az f alak, annak egyes együtthatói, továbbá f differencziálhányadosai, mindannyian az A-k lineáris függvényei, tehát mind a leírt módon szimbolizálhatók. Szimbolikus alakjaik:

$$f=(a_1x_1+a_2x_2)^m,$$

$$A_0=a_1^m,\ A_1=a_1^{m-1}a_2, \ldots, A_m=a_2^m,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=ma_1(a_1x_1+a_2x_2)^{m-1},\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=ma_2(a_1x_1+a_2x_2)^{m-1},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=m(m-1)a_1^2(a_1x_1+a_2x_2)^{m-2}, \quad \ldots$$

Az f és g első, második stb. *áttolásának* (Ueberschiebung) szimbolikus alakja:

$$(fg)_1=\frac{1}{mn}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2}-\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1}\right]=(ab)\,a_x^{m-1}b_x^{n-1}$$

$$(fg)_2=\frac{1}{m(m-1)n(n-1)}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right]=(ab)^2a_x^{m-2}b_x^{n-2},$$

$$\ldots$$

hol

$$(ab)=a_1b_2-a_2b_1,\quad a_x=a_1x_1+a_2x_2,\quad b_x=b_1x_1+b_2x_2.$$

2. Maga a_1 és a_2, vagy b_1 és b_2 semmit sem szimbolizál, hanem csak m-ed ill. n-ed fokú homogen függvényeiknek van szimbolikus jelentésük. Hogy mégis róluk is szólhassunk, szintén szimbolumoknak mondjuk, sőt így nevezzük összes függvényeiket is.

Az invariánsok elméletében főleg az

$$(ab)=a_1b_2-a_2b_1,\quad a_x=a_1x_1+a_2x_2,\quad a_y=a_1y_1+a_2y_2$$

alakú szimbolumok játszanak szerepet. Ezek között fontos azonosságok állanak fenn. Ugyanis

$$(ab)(xy) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

vagyis

$$(ab)(xy) = a_x b_y - a_y b_x. \qquad \text{I.}$$

Ha itt $y_1 = c_2$ és $y_2 = -c_1$, úgy továbbá

$$(ab) c_x = (ac) b_x - (bc) a_x, \qquad \text{II.}$$

és ezt következőleg is írhatjuk:

$$(ab) c_x + (ca) b_x + (bc) a_x = 0. \qquad \text{II}a.$$

Ha végre $x_1 = d_2$, $x_2 = -d_1$, akkor innen

$$(ab)(cd) + (ca)(bd) + (bc)(ad) = 0. \qquad \text{III.}$$

3. Oly függvényt, mely valamely alak együtthatóiban magasabb fokú, többé nem szimbolizálhatunk avval a kifejezéssel, melybe átmegy, ha az adott alakok lineáris alakoknak hatványaival lesznek egyenlőkké. Pl. az

$$A_0 x_1^2 + 2A_1 x_1 x_2 + A_2 x_2^2,$$

együtthatóiból képezett $A_0 A_1$ függvény jellemzésére nem elegendő az az adat, hogy annak értéke az

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2)^2$$

alakra vonatkozólag: $a_1^2 a_2^2$. Ugyanis ez a tulajdonsága A_1^2-nak is megvan.

Hogy mégis magasabb fokú alakokat is szimbolizálhassunk, következőleg járunk el.

Ha a szimbolizálandó φ függvény az f és g alakok együtthatóinak p illetőleg q-ad fokú homogen egész függvénye, akkor e φ függvényt *akként keletkezettnek* gondoljuk, hogy p külömböző

$$F_1, F_2, \ldots, F_p$$

f-fel egyenlő rendű alak és q külömböző

$$G_1, G_2, \ldots, G_q$$

g-vel egyenlő rendű alak együtthatóinak valamely Φ függvényében

az F-k és G-k együtthatói helyébe rendre f illetőleg g együtthatóit helyettesitetiük. Ha e Φ függvényt úgy veszszük fel (a mi mindig lehetséges), hogy minden egyes F és G alak együtthatóiban lineáris és homogen, akkot Φ-t már tudjuk szimbolizálni. Továbbá Φ szimboluma egyszersmind φ szimbolizálására is alkalmas, ha benne a F-k és G-k együtthatóinak szimbolumait rendre f és g külömböző szimbolumainak tekintjük.

Ily módon avval, hogy *egy* alakra *több* szimbolumot vezettünk be, a felmerült nehézséget megkerültük.

Legyen pl.

$$f = A_0 x_1^2 + 2A_1 x_1 x_2 + A_2 x_2^2$$

$$g = B_0 x_1^2 + 2B_1 x_1 x_2 + B_2 x_2^2$$

együtthatóinak $\varphi = A_0 A_2 B_1^2$ függvénye szimbolizálandó. Ekkor φ az

$$F_1 = A'_0 x_1^2 + 2A'_1 x_1 x_2 + A'_1 x_2^2$$

$$F_2 = A''_0 x_1^2 + 2A''_1 x_1 x_2 + A''_2 x_2^2$$

$$G_1 = B'_0 x_1^2 + 2B'_1 x_1 x_2 + B'_2 x_2^2$$

$$G_2 = B''_0 x_1^2 + 2B''_1 x_1 x_2 + B''_2 x_2^2$$

együtthatóiból képezett

$$\Phi = A'_0 A''_2 B'_1 B''_1$$

értékének tekinthető, midőn

$$F_1 = F_2 = f \qquad G_1 = G_2 = g.$$

Ha szimbolikusan

$$F_1 = a_x^2 \quad F_2 = \alpha_x^2 \quad G_1 = b_x^2 \quad G_2 = \beta_x^2,$$

úgy Φ szimbolikus alakja:

$$a_1^2 \alpha_2^2 b_1 b_2 \beta_1 \beta_2,$$

és e kifejezés φ szimbolizálására is alkalmas, ha a_x^2 és α_x^2-ot f két külömböző szimbolumának tekintjük, b_x^2 és β_x^2-ot pedig g két külömböző szimbolumának.

Talán nem fölösleges külön kiemelni, hogy habár φ-nek

$$\varphi = a_1^2 a_2^2 b_1 b_2 \beta_1 \beta_2$$

szimbolikus alakjában

$$a_1^2 \quad a_1 a_2 \quad a_2^2$$

és

$$\alpha_1^2 \quad \alpha_1\alpha_2 \quad \alpha_2^2$$

ugyanazon

$$A_0 \quad A_1 \quad A_2$$

együtthatókat ábrázolják, továbbá

$$b_1^2 \quad b_1 b_2 \quad b_2^2$$

és

$$\beta_1^2 \quad \beta_1\beta_2 \quad \beta_2^2$$

ugyanazon

$$B_0 \quad B_1 \quad B_2$$

együtthatókat, még sem szabad az α-k és β-k helyébe is a-kat illetőleg b-ket írni. Ugyanis az így nyert

$$a_1^2 a_2^2 b_1^2 b_2^2$$

kifejezés nem volna egyéb, mint φ helyettesítési értéke, midőn

$$f = a_x^2 \qquad g = b_x^2 .$$

Erről pedig már tudjuk, hogy φ szimbolizálására alkalmatlan. Ellenben a

$$\varphi = a_1^2 \alpha_2^2 b_1 b_2 \beta_1 \beta_2$$

szimbolikus alak teljesen meghatározza Φ-t s evvel együtt az A-k és B-k φ függvényét.

4. A φ-hez végtelenül sok oly Φ függvény található, melyből a leírt módon keletkeztethető, azért φ számára ily módon nem csak egy, hanem számtalan szimbolikus alakot nyerünk. Ez azonban nem okoz nehézségeket, mert csak az fontos, hogy a szimbolum mindig egyértelmüleg meghatározza azt, a mit szimbolizál.

5. Ha φ az

$$f = A_0 x_1^m + \binom{m}{1} A_1 x_1^{m-1} x_2 + \cdots + A_m x_2^m$$

$$g = B_0 x_1^n + \binom{n}{1} B_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + B_n x_2^n$$

alakok invariánsa, akkor nem minden neki megfelelő φ lesz egyszersmind az

$$
\begin{aligned}
F_1 &= A_1' x_1^m + \cdots + A_m' x_2^m \\
F_2 &= A_1'' x_1^m + \cdots + A_m'' x_2^m \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot \\
F_p &= A_1^{(p)} x_1^m + \cdots + A_m^{(p)} x_2^m \\
G_1 &= B_1' x_1^n + \cdots + B_n' x_2^n \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot \\
G_q &= B_1^{(q)} x_1^n + \cdots + B_n^{(q)} x_2^n
\end{aligned}
$$

rendszernek invariánsa. De már Aronhold felismerte, hogy Φ mindig úgy képezhető, hogy e követelésnek is megfeleljen.

Ugyanis egy ismeretes tétel* értelmében

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{1}{p}\left\{A_0' \frac{\partial\varphi}{\partial A_0} + A_1' \frac{\partial\varphi}{\partial A_1} + \cdots + A_m' \frac{\partial\varphi}{\partial A_m}\right\} \\
\varphi_2 &= \frac{1}{p-1}\left\{A_0'' \frac{\partial\Phi_1}{\partial A_0} + A_1'' \frac{\partial\varphi_1}{\partial A_1} + \cdots + A_m' \frac{\partial\varphi_1}{\partial A_m}\right\} \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\varphi_p &= A_0^{(p)} \frac{\partial\varphi_{p-1}}{\partial A_0} + A_1^{(p)} \frac{\partial\varphi_{p-1}}{\partial A_1} + \cdots + A_m^{(p)} \frac{\partial\varphi_{p-1}}{\partial A_m} \\
\varphi_{p+1} &= \frac{1}{q}\left\{B_0' \frac{\partial\varphi_p}{\partial B_0} + B_1' \frac{\partial\varphi_p}{\partial B_1} + \cdots + B_m' \frac{\partial\varphi_p}{\partial B_m}\right\} \\
\varphi_{p+2} &= \frac{1}{q-1}\left\{B_0'' \frac{\partial\varphi_{p+1}}{\partial B_0} + B_1'' \frac{\partial\varphi_{p+1}}{\partial B_1} + \cdots + B_m'' \frac{\partial\varphi_{p+1}}{\partial B_m}\right\} \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\varphi_{p+q} &= B_0^{(q)} \frac{\partial\varphi_{p+q-1}}{\partial B_0} + B_1^{(q)} \frac{\partial\varphi_{p+q-1}}{\partial B_1} + \cdots + B_m^{(q)} \frac{\partial\varphi_{p+q-1}}{\partial B_m}
\end{aligned}
$$

szintén invariánsok. Továbbá Euler tételénél fogva az

$$F_1 = F_2 = \cdots = F_p = f \qquad G_1 = G_2 = \cdots = G_q = g$$

esetben mind egyenlő φ-vel. Végre φ_{p+q} az F-k és G-k mindegyikének együtthatóiban lineáris. Tehát

* V. ö. Kopp i. h. 203. lap.

$$\Phi = \varphi_{p+q}$$

az összes követeléseknek megfelel.

Φ ilyetén választásának az a nagy előnye van, hogy midőn most a F-k és G-k együtthatói helyébe behelyettesítjük az f és g alakok

$$f = a_x'^m = a_x''^m = \cdots$$
$$g = b_x'^n = b_x''^n = \cdots$$

szimbolumainak együtthatóit, a nyert kifejezés az

$$a_x', \ a_x'', \ldots, \ b_x', \ b_x'', \ldots$$

lineáris alakok valamely invariánsával lesz egyenlő. Ugyanis Φ invariáns jellege nem vesz el azáltal, hogy a $F_1, F_2, \ldots, F_p$ általános m-ed rendü alakoknak és a $G_1, G_2, \ldots, G_q$ általános n-ed rendü alakoknak együtthatói helyébe az

$$a_x'^m, \ a_x''^m, \ldots, \ b_x'^n, \ b_x''^n, \ldots$$

speczialis alakoknak együtthatóit tettük.

A mondottakat a következő tételben foglalhatjuk össze:

Bizonyos számú alak bármely invariánsának szimbolikus alakja mindig úgy képezhető, hogy ama lineáris alakok valamely invariánsával legyen egyenlő, melyeknek hatványai az adott alakokat szimbolizálják.

6. Az imént levezetett tétel a magasabb rendü alakok invariánsait a lineáris alakok invariánsaival hozza kapcsolatba. Ha e kapcsolatot teljesen akarjuk ismerni, akkor még megvizsgálandó, valjon ez a tétel mennyiben fordítható meg.

Tehát legyenek f és g szimbolikus alakjai:

$$f = a_x'^m = a_x''^m = \cdots$$
$$g = b_x'^n = b_x''^n = \cdots$$

I pedig jelense az

$$a_x', \ a_x'', \ldots, \ b_x', \ b_x'', \ldots$$

valamely invariánsát.

I-nek általában nem is tulajdonitható szimbolikus jelentés, hanem csak akkor, ha az a_x-k mindegyikének együtthatóiban m-ed fokú és a b_x-k mindegyikének együtthatóiban n-ed fokú. De ha e feltétel ki van elégitve, úgy I mindig az f és g valamely invariánsának szimbolikus alakjával egyenlő.

Ha ugyanis f (egyik) szimbolikus alakja

$$f = a_x^m = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^m,$$

és f-nek az

$$x_1 = \alpha_{11} \xi_1 + \alpha_{12} \xi_2$$
$$x_2 = \alpha_{21} \xi_1 + \alpha_{22} \xi_2$$

transzformáczió utáni alakját szimbolikusan következőleg jelöljük:

$$\bar{f} = \bar{a}_\xi^m = (\bar{a}_1 \xi_1 + \bar{a}_2 \xi_2)^m,$$

akkor az eredeti és a transzformált alak együtthatói közötti kapcsolatot szimbolikusan következő egyenlet fejezi ki:

$$(\bar{a}_1\xi_1 + \bar{a}_2\xi_2)^m = \{a_1(\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2) + a_2(\alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2)\}^m$$

Jobban mondva a kapcsolatot az az $m+1$ egyenlet fogja szimbolizálni, melyet nyerünk, ha mindkét oldalon kifejtünk és a ξ-k egyenlő hatványainak együtthatóit összehasonlítjuk.

Ámde ezen egyenletek teljesen pótolhatók avval, hogy a régi és a transzformált alak szimbolumai között a következő kapcsolatot vesszük fel:

$$\bar{a}_1 = a_1 \alpha_{11} + a_2 \alpha_{21}$$
$$\bar{a}_2 = a_1 \alpha_{12} + a_2 \alpha_{22}$$

vagyis ugyanazt az egyenletrendszert, *mely lineáris alakok transzformácziójára érvényes.*

Az I szimbolizálta φ függvénynek a transzformált alakokra vonatkozó $\bar{\varphi}$ értéke tehát következőleg szimbolizálható

$$I(a'_1 \alpha_{11} + a'_2 \alpha_{21},\ a'_1 \alpha_{12} + a'_2 \alpha_{22}, \ldots).$$

E kifejezésnek pedig (az I invariáns voltánál fogva) rendezett alakja a következő:

$$r^\lambda I(a'_1, a'_2, \ldots,)$$

hol r^λ az r szubsztituticzió-determináns valamely hatványa. Tehát

$$\bar{\varphi} = r^\lambda \varphi,$$

vagyis φ az f és g-nek szimultán invariánsa.

E szerint lineáris alakok bármely invariánsa, ha csak az egyes együtthatókban alkalmas fokú, magasabb fokú alakok valamely invariánsának szimbolikus alakjának tekinthető.

Tehát a magasabb fokú alakok invariánsainak szimbolikus meghatározása azonos feladat a lineáris alakok alkalmas fokú invariánsainak meghatározásával. Ugyanez áll a kovariánsokról is, mert meggondolásaink ezekről szóról szóra ismételhetők.

II.

7. Lineáris alakok rendszereire a következö tétel érvényes: *Az*

$$a_x, \; b_x, \; c_x, \; \ldots$$

alakok invariánsainak és kovariánsainak összessége azonos az adott alakoknak s az

$$(ab), \; (ac), \; (bc), \; \ldots$$

determinánsoknak ama ráczionális egész függvényeivel, melyek x_1 és x_2-ben, a_1 és a_2-ben, b_1 és b_2-ben s í. t. homogenek.

Hogy az invariánsok összessége azonos (ab), (ac), . . . mondott függvényeivel, az e lapokban már volt bebizonyítva.*

A kovariánsokra vonatkozólag vegyük tekintetbe, hogy az

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

alak az

$$x_1 = \alpha_{11} \xi_1 + \alpha_{12} \xi_2$$
$$x_2 = \alpha_{21} \xi_1 + \alpha_{22} \xi_2$$

átalakításnál a következőbe megy át:

$$\bar{a}_\xi = \bar{a}_1 \xi_1 + \bar{a}_2 \xi,$$

---

* Kopp, i. h. 203—206. lap.

melynek együttható:

$$\bar{a}_1 = a_1 a_{11} + a_2 a_{21}$$
$$\bar{a}_2 = a_1 a_{12} + a_2 a_{22}.$$

Innen

$$r a_2 = \bar{a}_2 a_{11} - \bar{a}_1 a_{12}$$
$$r a_1 = \bar{a}_2 a_{21} - \bar{a}_1 a_{22}.$$

E szerint — eltekintve az r determinánstól — a_2 és $-a_1$-re ugyanazok a transzformáló képletek érvényesek, mint x_1 és x_2-re. Valamely invariáns jellegű kifejezés tehát nem veszti el e jelleget, ha x_1 és x_2 helyébe a_2 és $-a_1$-et helyettesítünk, sem pedig e helyettesítés megfordításánál.

Adott n lineáris alak kovariánsait tehát úgy képezhetjük, hogy az adott alakokhoz még hozzácsatolunk egy t_x alakot, azután az így nyert rendszer invariánsait képezzük, végre ezen invariánsokban t_2 és t_1 helyébe x_1 és $-x_2$-t helyettesitünk. E helyettesítésnél (at), (bt) . . . rendre a_x, b_x stb.-be megy át, tehát

$$(ab),\ (ac),\ (bc), \ldots$$
$$(at),\ (bt),\ (ct), \ldots$$

függvényeinek összességéből

$$(ab),\ (ac),\ (bc), \ldots$$
$$a_x,\ b_x,\ c_x, \ldots$$

függvényeinek összessége lesz.

8. Az I. alatt bebizonyitott tételek tartalma a mondottak után következőleg is fejezhető ki:

Az $f, g, \ldots$ alakoknak, melyeknek szimbolikus alakjai

$$f = a'^m_x = a''^m_x = \cdots$$
$$g = b'^n_x = b''^n_x = \cdots$$

összes invariánsait és kovariánsait szimbolikus alakban úgy kapjuk, hogy az

$$a'_x,\ a''_x,\ b'_x,\ b''_x,\ (a'a''),\ (a'b'), \ldots$$

szimbolumoknak mindama ráczionális egész függvényeit képez-

zük, melyek az egyes a_x-ek együtthatóiban homogenek és m-ed fokúak, az egyes b_x-ek együtthatóiban homogenek és n-ed fokúak, s í. t. végre x_1 és x_2-ben is homogenek.

9. Valamely rendszer azon

$$i_1, i_2, \ldots, i_\mu$$

invariánsainak és kovariánsainak meghatározásánál, melyekből minden más I invariáns és kovariáns mint azoknak ráczionális egész függvénye fejezhető ki, csak azokat az I-ket kell tekintetbe venni, melyek

$$(a'a''),\ (a'b'),\ a'_x \ \ldots$$

alakú szimbolumok *szorzatai*. Mert ha ezek a i-knek ráczionális egész függvényei, akkor bármely aggregutumuk is olyan.

Továbbá annak igazolására, hogy az i-dik valamely adott rendszere valóban a kivánt tulajdonsággal bír, mindig elég kimutatnunk, hogy minden I-t az

$$I = \mathbf{A}_1 i_1 + \mathbf{A}_2 i_2 + \cdots + \mathbf{A}_\mu i_\mu$$

alakban lehet előállítani, hol a $\mathbf{A}$-k megint (I-nél alacsonyabb fokú) invariánsok v. kovariánsok. Mert ha e feltétel ki van elégítve, akkor bármely I mint a i-k raczionális egész függvénye fejezhető ki, míhelyt ez a nálánál alacsonyabb fokúakról áll. Ámde a *zérús* fokú invariánsok, vagyis a puszta állandók, csakugyan a i-ik egész függvényei; tehát minden I olyan.

E megjegyzések és a 8, alatt kimondott tétel alapján most már könnyen megoldhatjuk a bevezetésben kitüzött feladatot.

III.

10. Legyen adva bizonyos számú quadratikus alak:

$$\begin{aligned} f &= A_0 x_1^2 + 2A_1 x_1 x_2 + A_2 x_2^2 \\ g &= B_0 x_1^2 + 2B_1 x_1 x_2 + B_2 x_2^2 \\ h &= C_0 x_1^2 + 2C_1 x_1 x_2 + C_2 x_2^2 \\ &\ldots \end{aligned}$$

vagy szimbolikusan

$$f = a_x^2 = a_x'^2 = \cdots$$
$$g = b_x^2 = b_x'^2 = \cdots$$
$$h = c_x^2 = c_x'^2 = \cdots$$

Továbbá jelentsen

$$\alpha_x^2, \quad \beta_x^2, \quad \gamma_x^2$$

az

$$a_x^2, \; a_x'^2, \; b_x^2, \; \ldots$$

szimbolumok közül egy-egy közelebbről meg nem határozottat.

Az adott rendszer azon I invariánsait és kovariánsait, melyek egyetlen egy szorzattal szimbolizálhatók, két osztályba oszthatjuk a szerint, hogy legalább egy tényező a négyzeten fordul elő vagy pedig I csupa külömböző szimbolikus tényező szorzata.

Az első esetben I ily alakú:

$$I = \alpha_x^2 M$$

vagy

$$I = (\alpha\beta)^2 M,$$

hol az M szimbolikus szorzatban az α illetőleg az α és β szimbolumok többé nem fordulnak elő. Ekkor tehát I az α_x^2 által szimbolizált alaknak illetőleg a $(\alpha\beta)^2$ által szimbolizált invariánsnak s az M invariánsnak v. kovariánsnak szorzata.

A második esetben

$$I = (\alpha\beta)\, \alpha_y\, \beta_z\, M,$$

Itt M egy szimbolikus szorzat; az α_y egy α_x vagy pedig $(\alpha\gamma)$ alakú tényezőt jelent a szerint, hogy

$$y_1 = x_1 \quad y_2 = x_2$$

vagy pedig

$$y_1 = \gamma_2 \quad y_2 = -\gamma_1$$

végre β_z hasonló jelentésü.

Ha most

$$y_1 = z_1 \quad y_2 = z_2,$$

akkor

$$I = (\alpha\beta)\, \alpha_x\, \beta_x\, M$$

vagy pedig

$$I = (\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\gamma) M,$$

hol az M az α és β-tól illetőleg α, β és γ-től ment. Ekkor tehát I az

$$(\alpha\beta)\, \alpha_x \beta_x$$

kovariánsnak vagy pedig az

$$(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\gamma)$$

invariánsnak és az M invariáns jellegű kifejezésnek szorzata.

Ha ellenben y és z külömböző jelentésüek, akkor legalább az egyik, mondjuk y, az x-től külömbözik, és I ily alakú

$$I = (\alpha\beta)(\alpha\gamma)\,\beta_z \gamma_t N$$

hol N megint egy szimbolikus szorzat. Ez a kifejezés most már következőleg alakítható át.

A 2. alatt kifejtett I. azonosság értelmében

$$(\beta\gamma)(zt) = \beta_z \gamma_t - \beta_t \gamma_z.$$

Tehát I következőleg is irható

$$I = (\alpha\beta)(\alpha\gamma)\,\beta_t \gamma_z N + (\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\gamma)(zt)\, N,$$

s ha ezt I előbbi alakjához hozzáadjuk, úgy

$$2I = (\alpha\beta)(\alpha\gamma)\left\{\beta_z \gamma_t + \beta_t \gamma_z\right\} N + (\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\gamma)(zt)\, N.$$

Továbbá a II. azonosság értelmében:

$$(\beta\gamma)\,\alpha_z = (\alpha\gamma)\,\beta_z - (\alpha\beta)\,\gamma_z$$
$$(\beta\gamma)\,\alpha_t = (\alpha\gamma)\,\beta_t - (\alpha\beta)\,\gamma_t$$

és innen

$$(\beta\gamma)^2 \alpha_z \alpha_t = (\alpha\beta)^2 \gamma_z \gamma_t + (\alpha\gamma)^2 \beta_z \beta_t - 2\,(\alpha\beta)(\alpha\gamma)\left\{\beta_z \gamma_t + \beta_t \gamma_z\right\}$$

vagyis

$$2\,(\alpha\beta)(\alpha\gamma)\left\{\beta_z \gamma_t + \beta_t \gamma_z\right\} = (\alpha\beta)^2 \gamma_z \gamma_t + (\alpha\gamma)^2 \beta_z \beta_t - (\beta\gamma)^2 \alpha_z \alpha_t.$$

I tehát következőleg is írható:

$$4I = (\alpha\beta)^2 A + (\alpha\gamma)^2 B + (\beta\gamma)^2 C + (\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\gamma)\, D,$$

hol

$$A=\gamma_z\gamma_t N \quad B=\beta_z\beta_t N \quad C=-\alpha_z\alpha_t N \quad D=2(zt)N$$

az I-nél alacsonyabb fokú invariánsok vagy kovariánsok szimbolumai.

Ezzel áttekintettük az összes lehetséges eseteket. Mindegyikben I-t mint

$$\alpha_x^2 \quad (\alpha\beta)^2 \quad (\alpha\beta)\,\alpha_x\,\beta_x \quad (\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\gamma)$$

alakú invariánsoknak és kovariánsoknak oly lineáris kapcsolatát állítottuk elő, melynek együtthatói megint invariánsok vagy kovariánsok. Ennélfogva az adott rendszer invariánsainak és kovariánsainak *teljes rendszere* csak az ily alakú invariánsokból és kovariánsokból áll.

Itt $(\alpha\beta)^2$-ban α és β külömböző alakok szimbolumai lehetnek vagy pedig egy alaknak külömböző szimbolumai. Ellenben az

$$(\alpha\beta)\,\alpha_x\,\beta_x \quad (\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\gamma)$$

kifejezéseknél az utóbbi esetet kizárhatjuk, mert ekkor az általuk szimbolizált függvények eltünnek. Ha ugyanis α-t felcseréljük β-val, akkor e két kifejezés megváltoztatja előjelét, holott a vizsgált esetben az általuk szimbolizált alakok az előbbiek maradnak. Ez csak úgy lehetséges, ha a szimbolizált alakok a zérussal egyenlők.

A keresett *teljes rendszert* tehát a következő invariánsok és kovariánsok alkotják:

I. Az egyes

$$a_x^2=A_0x_1^2+2A_1x_1x_2+A_2x_2^2$$

$$b_x^2,\ c_x^2,\ \ldots$$

alakok és mindegyiknek

$$(aa')^2=a_1^2a_2'^2-2a_1a_2a_1'a_2'+a_2^2a_1'^2$$
$$=2\,(A_0A_2-A_1^2)$$
$$(bb')^2,\ (cc')^2,\ \ldots,$$

invariánsa, vagyis önmagával való második áttolása.

II. Két-két alaknak

$$(ab)\,a_x b_x = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_2^2 \\ b_1^2 & b_1b_2 & b_2^2 \\ x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 \end{vmatrix}$$

alakú első áttolása és

$$(ab)^2 = A_0B_2 - 2A_1B_1 + A_2B_0$$

alakú második áttolása.

III. Három alaknak

$$(ab)(ac)(bc) = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_2^2 \\ b_1^2 & b_1b_2 & b_2^2 \\ c_1^2 & c_1c_2 & c_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 \end{vmatrix}$$

invariánsa, vagyis két alak első áttolásának s egy harmadik alaknak második áttolása.

11. A felsorolt invariánsok és kovariánsok közül már egyik sem fejezhető ki mint a többinek ráczionális egész függvénye.

Ha ugyanis valamelyik (i_0) a többinek (i_1, i_2, . . ., i_μ-nek) ily függvénye volna, akkor egy ily alakú egyenletnek kellene fennállania:

$$i_0 = \mathbf{A}_1 i_0 + \mathbf{A}_2 i_2 + \cdots + \mathbf{A}_\mu i_\mu$$

hol az $\mathbf{A}$-k megint inváriánsok vagy kovariánsok, esetleg puszta állandók. Ámde lineáris kapcsolat *állandó együtthatókkal* az i-k közt nem létezhet, mert nincs közöttük kettő, mely ugyanazon alakok együtthatóinak ugyanoly fokú függvénye volna. Ha pedig az $\mathbf{A}$-k helyébe valóban invariánsokat vagy kovariánsokat helyettesítünk, akkor az $\mathbf{A}i$ szorzat szimbolikus alakja legalább négy tényezőből áll, holott i_0 legfeljebb három tényezőnek szorzata. Tehát ebben az esetben is még a két oldal homogeneitását sem birjuk létrehozni a kivánt relációban. Ennélfogva az i-k között egyáltalában nem létezhetik oly reláczió, melynek a kivánt alakja volna, és azért i_0 nem fejezhető ki mint a többi i-nek egész függvénye.

Kürschák József.

ADATOK A VÉGTELEN SZORZATOK ELMÉLETÉHEZ.

Ismeretes dolog, hogy a $\prod_{i=1}^{\infty}(1+a_i)$ szorzat akkor és csak akkor feltétlenül összetartó, ha ilyen a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ végtelen sor is. Mily viszonyban áll a sor és szorzat akkor, ha a sor feltételesen összetartó, vagy széttartó? Erre a kérdésre hívta fel figyelmemet König tanár úr,* a ki a megoldás részleteiben is szives tanácsával támogatott. A következő megjegyzések valós szorzatokra vonatkoznak.

*

Mindenekelőtt azokra az esetekre szoríthatjuk a tárgyalást, a melyekben

$$\lim. a_i = 0;$$

mert ha ez nem áll, akkor mind a sor, mind a szorzat széttartó. Ezenkívül felteszszük, hogy a_i nem lehet -1.

Ezt a választást most már feltéve, egy bizonyos tagtól kezdve

$$|a_i| < \frac{1}{2}$$

és mint látni fogjuk, e tagtól kezdve

$$1+a_i = e^{a_i - G_i a_i^2}, \tag{1}$$

a hol

$$\frac{1}{3} < G_i < \frac{5}{6}.$$

Ugyanis

$$1+a_i = e^{\mathrm{l.}(1+a_i)} = e^{a_i - G_i a_i^2}$$

---

* Math. gyakorlatok a kir. József-műegyetemen.

de

$$\mathrm{l.}(1+a_i)=a_i-\frac{a_i^2}{2}+\frac{a_i^3}{3}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{a_i^m}{m}+\cdots,$$

tehát

$$G_i=\frac{1}{2}-\frac{a_i}{3}+\frac{a_i^2}{4}-\frac{a_i^3}{5}+\cdots$$

és így csakugyan

$$G_i<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)=\frac{5}{6}$$

másoldalról pedig

$$G_i>\frac{1}{2}-\frac{a_i}{3}>\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

Az 1) alattiakat tekintetbe véve, most már irhatjuk, hogy a

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)=e^{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-G_ia_i^2)}. \tag{2}$$

E képlet rögtön mutatja, hogy a szorzat összetartásának vizsgálatánál lényeges szerepet játszik a $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$ és $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i^2$ sorok viselkedése. Három eset lehetséges.

1) *Mindkét sor összetartó.*

2) *A sorok egyike széttartó.*

3) *Mindkét sor széttartó.*

1. Ha mindkét sor összetartó, akkor minthogy bizonyos elég nagy i-től kezdve, mint láttuk

$$\frac{1}{3}<G_i<\frac{5}{6} \tag{3}$$

a $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}G_ia_i^2$ sorok is összetartók és így 2) értelmében a szorzat is összetartó. Megjegyezzük, hogy ebben az esetben nem csak $\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1+a_i)$ összetartó, hanem a

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+xa_i)$$

szorzatok is összetartók x tetszőleges véges értékénél, hiszen ekkor a $\sum_{i=1}^{\infty} xa_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} x^2a_i^2$ sorok mindegyike összetartó.

Tehát 1) *esetben a szorzat összetartó, sőt összetartók a* $\prod_{i=1}^{\infty}(1+xa_i)$ *szorzatok is x tetszőleges véges értékeinél.*

2. Ki fogjuk mutatni, hogy *a* 2) *esetben a szorzat széttartó.* Tegyük fel, hogy a szorzat összetartó volna, a mi 2) szerint egyértelmű a $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i - G_ia_i^2)$ sor összetartásával. Feltételünk szerint a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ sorok egyike összetartó, másika széttartó. Ha pl. $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ összetartó, akkor összetartónak kellene lennie a

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i - G_ia_i^2) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i = -\sum_{i=1}^{\infty} G_ia_i^2$$

sornak is és így 3) szerint a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ sornak, a mi azonban feltételünknek ellentmond. Ha pedig $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ összetartó, akkor $\sum_{i=1}^{\infty} G_ia_i^2$ is összetartó, tehát összetartónak kellene lennie a

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i - G_ia_i^2) + \sum_{i=1}^{\infty} G_ia_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

sornak is, a mi feltételünknek ismét ellentmond. Látjuk ezenkívül, hogy a $\prod_{i=1}^{\infty}(1+xa_i)$ szorzatok is széttartók. Tehát *a* 2) *esetben a* $\prod_{i=1}^{\infty}(1+xa_i)$ *szorzatok széttartók x tetszőleges véges értékeinél.*

3. Hátra van még annak az esetnek tárgyalása, midőn a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ sorok mindegyike széttartó és így mivel $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ pozitiv tagú sor, 3) szerint a

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2,\ \sum_{i=1}^{\infty} G_ia_i^2$$

sorok mindegyike széttartó. Először is kimutatjuk, hogy a szorzat csak akkor tarthat össze, ha $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = +\infty$. Ugyanis $\sum_{i=1}^{\infty} G_i a_i^2$ pozitiv tagú sor lévén

$$\sum_{i=1}^{\infty} G_i a_i^2 = +\infty$$

tehát a szorzat és így a

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - G_i a_i^2)$$

sor összetartásánál fogva:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - G_i a_i^2) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i a_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = +\infty.$$

Tehát a szorzat összetartása már eleve ki van zárva, ha a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ sor széttartása mellett a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor oscilláló, vagy pedig $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = -\infty$. Ez utóbbi esetben a 2) képletből közvetetlenül

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + a_i) = 0.$$

Ha már most $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = +\infty$, akkor is különböző esetek léphetnek fel. Lehet, hogy a sor pozitiv tagjaiból alkotott sor széttartó, a negativ tagok sora pedig összetartó és lehet, hogy mind a pozitiv, mind a negativ tagok sora széttartó.

a) Legyen a pozitiv tagok sora széttartó, a negativ tagok sora összetartó. Akkor ugyanily viselkedésű a

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - G_i a_i^2) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (1 - G_i a_i) \tag{4}$$

sor is, mert i elég nagy értékeinél, ha a_i pozitiv, akkor

$$a_i (1 - G_i a_i) > a_i \left(1 - \frac{5}{6} \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12} a_i ,$$

ha pedig a_i negativ:

$$|a_i (1 - G_i a_i)| < |a_i| \left(1 + \frac{5}{6} \frac{1}{2}\right) = \frac{17}{12} |a_i|.$$

De az oly sorok, a melyeknek pozitiv tagjaiból alkotott sor széttartó, míg negativ tagjaiból képezett sor összetartó; széttartóak, tehát $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i - G_i a_i^2)$ és így szorzatunk is széttartó.

b) A $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor pozitiv tagjainak sora széttartó, negativ tagjainak sora szintén széttartó. Ugyanily viselkedésű a $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i - G_i a_i^2)$ sor is, mert pozitiv a_i esetében már láttuk, hogy i elég nagy értékeinél

$$a_i(1 - G_i a_i) > \frac{7}{12} a_i$$

negativ a_i-nél pedig

$$|a_i(1 - G_i a_i)| > |a_i|$$

Tehát ismeretes tétel szerint *a b) esetben lehetséges, hogy a szorzat összetart. Ha azonban nem tartana össze, mindenesetre van a szorzatnak oly elrendezése, a melynél összetart. Ez elrendezésnél azonban a sor nem tart össze, mert $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ minden elrendezésnél széttartó.*

Miután részletesen taglaltuk a szorzat összetartása körül fellépő eseteket, vessük fel a kérdést, hogy mikor lesz a szorzat olyan, *hogy noha maga esetleg nem tart össze, tényezőinek mégis van oly elrendezése, a mely mellett összetart?* Erre nézve következő tételt állithatjuk fel:

A $\prod_{i=1}^{\infty}(1 + a_i)$ szorzatnak akkor és csak akkor van oly elrendezése, a mely mellett összetartó, ha a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sornak is meg van e tulajdonsága. A két végtelen műveletsorozat általában nem ugyanazon elrendezéseknél tart össze.

Mint ismeretes a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sornak, akkor és csak akkor van oly elrendezése, a melynél összetartó, ha a sor pozitiv tagjaiból alkotott sor, valamint a negativ tagok sorra egyidejüleg vagy összetartó, vagy széttartó és a_i zérus felé konvergál. Az első esetben a sor is, a szorzat is minden elrendezésnél összetartó. A második esetben a

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i - G_i a_i^2) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(1 - G_i a_i)$$

sor az

$$a_i > 0, \quad a_i(1 - G_i a_i) > \frac{7}{12} a_i$$

$$a_i < 0, \quad |a_i(1 - G_i a_i)| > |a_i|$$

egyenlőtlenségeknél fogva, melyek i minden elegendő nagy értékénél fennállanak, szintén olyan, hogy mind a pozitiv, mind a negativ tagok sora széttartó, tehát a szóban forgó sornak és így a szorzatnak is van oly elrendezése, melynél összetartó. Esetünkben a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor lehet összetartó is, széttartó is, sőt lehet pl. oscillálva széttartó is, mint a következő sor:

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) + \cdots$$

A $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor viselkedésében még a következő esetek lehetségesek. Lehet, hogy a pozitiv tagok sora összetartó és a negativoké széttartó, vagy pedig megfordítva. Azonban az

$$a_i > 0, \quad \frac{17}{12} a_i > a_i(1 - G_i a_i) > \frac{7}{12} a_i$$

$$a_i < 0, \quad |a_i| < |a_i(1 - G_i a_i)| < \frac{17}{12} |a_i|$$

egyenlőtlenségeknél fogva, melyek i elég nagy értékeinél állanak fenn a $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i - G_i a_i^2)$ sor is ily viselkedésű, tehát a szorzatnak ezekben az esetekben nincs oly elrendezése, a melynél összetartó volna.

Térjünk most még vissza a *b)* alatti esetre, a melyben lehetséges, hogy a $\prod_{i=1}^{\infty}(1 + a_i)$ szorzat összetartó. Ki fogjuk mutatni, hogy *ebben az esetben a* $\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x a_i)$ *szorzatok közül csakis az* $x = 1$-

nek megfelelő összetartó, kivéve természetesen az $x=0$ triviális esetet. Ugyanis, a mint láttuk

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = +\infty$$

ha tehát $x<0$, akkor $\sum_{i=1}^{\infty} x a_i = -\infty$ lévén

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+xa_i)=0.$$

Ha másodszor $x>1$

$$\frac{\prod_{i=1}^{\infty}(1+xa_i)}{\prod_{i=1}^{\infty}(1+a_i)} = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{(x-1)\,a_i}{1+a_i}\right), \quad x-1>0$$

és ha ki tudjuk mutatni, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{1+a_i} = -\infty, \tag{5}$$

akkor

$$\frac{\prod_{i=1}^{\infty}(1+xa_i)}{\prod_{i=1}^{\infty}(1+a_i)} = 0$$

lévén, a $\prod_{i=1}^{\infty}(1+a_i)$ összetartásánál fogva:

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+xa_i)=0, \quad x>1.$$

Az 5) alatti állítást könnyű azonban igazolni. Feltételünk szerint a

$$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_i} = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_i}{1+a_i}\right) \tag{6}$$

szorzat összetartó. Ha tehát felteszszük, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{1+a_i}$ sor összetartó, akkor az előbbiek szerint a $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i^2}{(1+a_i)^2}$ sor is összetartó. De mivel ez az utóbbi pozitiv tagú sor és a_i a zérus felé konvergál, összetartana a $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i^2}{1+a_i}$ sor és végre összetartó volna a

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i^2}{1+a_i}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{1+a_i}=\sum_{i=1}^{\infty}a_i$$

sor is, a mi azonban feltételünkkel ellenkezik. A $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{1+a_i}$ sor tehát széttartó; de a 6) alatti szorzat összetartása miatt sem oscilláló, sem pozitiv végtelen nem lehetvén, csakugyan

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{1+a_i}=-\infty.$$

Hátra van még az az eset, midőn $0<x<1$. Ki kell mutatni, hogy ekkor is széttartó a szorzat. Tegyük fel ugyanis, hogy

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+xa_i)=\prod_{i=1}^{\infty}(1+b_i),\quad 0<x<1$$

összetartó. Itt is a $\sum_{i=1}^{\infty}b_i$, $\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2$ sorok széttartók és $\sum_{i=1}^{\infty}b_i=+\infty$. Ha tehát y-t az

$$xy=1$$

egyenletből határozzuk meg; a minek megfelelően $y>1$, akkor az előbbiek szerint a

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+yb_i)=\prod_{i=1}^{\infty}(1+xya_i)=\prod_{i=1}^{\infty}(1+a_i)$$

szorzat széttartó volna, a mi a feltételnek ellentmondana.

Megemlítjük végül, hogy 2)-ből látnivaló, miszerint egy feltételesen összetartó szorzat elrendezésének változtatásával elérhető, hogy értékkészlete a nem negativ, illetőleg a nem pozitiv számok összeségéből álljon. Itt már természetesen nem tettük fel, hogy minden $|a_i|<\frac{1}{2}$. Ennek az állításnak helyessége a sorokra vonatkozó ismeretes RIEMANN-féle tételből következik. Ez egyszersmind elvi magyarázata azon első ilynemű példának, melyet KŐNIG tanár úr közölt.*

Bauer Mihály.

---

* Analizis I. 257. l.

A TÁVOLBAHATÁSOKRÓL.

P. Drude-tól.*

I. A távolbahatások értelmezése és előfordulása.

Távolbahatásról *A* és *B* testek között akkor beszélünk, ha az *A* test valamelyes hatással van a tőle térbelileg elválasztott *B* testre, a nélkül, hogy a kettő között más testek folytonos anyagi összeköttetést létesítenének. Ez a szó-definitió két irányban szorul közelebbi magyarázatra, hogy értelmi definitióvá váljék.

A mi a «hatás» fogalmát illeti, ezt szorosabban elméleti mechanikai fogalomnak tekinthetjük és tágasabban is érthetjük. Szorosabb értelmére nézve arra kell emlékeznünk, hogy Galilei óta megállapodtak abban, hogy a test valamely hatásnak (erőnek) van alávetve, mihelyt sebessége irány és nagyság szerint nem állandó. Így hát csak a test mozgásaiból szabad esetleges távolbahatásokra kriteriumot alkotnunk, ha a definitióba csupa megfigyelhető dolgot akarunk belevonni, és ha az elméleti mechanikában a távolbahatás definiálásánál minden feltevést (hypothesist) kerülni akarunk, a mely a «hatás» vagy «erő» szóhoz fűződhetik. (Tudni illik, ha ezt a mozgás *okának* tekintjük.) Az előbbi különféleképen lehetséges, legkényelmesebben úgy, ha két, a térben egymástól elválasztott *A* és *B* test között távolbahatásról beszélünk, ha gyorsulási komponenseik a két test egymáshoz való relativ helyzetétől (esetleg relativ gyorsaságától is) függenek. A távolbahatás legegy-

* Előadta a német orvosok és természetvizsgálók 69-ik Braunschweigban tartott nagygyűlésének physikai szakosztályában 1897. (Wied. Ann. 1897. külön melléklet.)

szerűbb esete, ha a hatásra nézve a két test relativ távolsága a döntő. Azonban némely esetben még a testek kölcsönös irányulásától is függ az. Még akkor is, ha méreteik relativ távolságukhoz képest igen kicsinyek, mint pl. a mágneses testeknél. Utóbbiakat sokszor mint poláris hatásokat különböztetik meg a távolbahatások amaz első osztályától. Távolbahatásoknál az egész rendszer energiája a testek absolut sebességein kívül még az ő relativ helyzeteiktől is függ. Vagy még általánosabban szólva: az energia kifejezésében a tér különböző pontjai közötti relativ helyhatározók fordulnak elő.

Ha tágabb értelemben veszszük a hatás fogalmát, mint az elméleti mechanikában, hatást tulajdonítunk az *A* testnek valamely másik *B* testre akkor is, ha *A* jelenlétében vagy állapotváltozásaival *B*-ben is bizonyos állapotváltozások keletkeznek, a melyek nem lépnek föl, midőn *A* nincs ott, vagy az ő állapota változatlan. A hatásnak ez a tágasabb definitiója magában foglalja az elméleti mechanikai hatást, ha a test állapotába mozgását is számítjuk.

Másodszor: «a folytonos anyagi összeköttetés» kifejezés jelentését illetőleg, legyen szabad rámutatnom, hogy ez kétféle lehet: Az anyagi összeköttetés egyidőben létezik. Igy pl. ez az eset, ha *A* és *B* között kötél van kifeszítve. Vagy *A* és *B* egy és ugyanazon szilárd vagy rugalmas test különböző részei. Vagy ha *A* és *B* valamely folyadékba merűlnek, a mely mindkettőt körülveszi. Ezekben az esetekben *A*-nak mozgása, esetleg csupán jelenléte befolyásolja *B* mozgását. Azonban itt nem beszélünk távolbahatásról, hanem olyan hatásról, a melyet az anyagi összeköttetés darabjai közvetítettek. (A kötél feszítési szilárdsága, az összekötő test rugalmas tulajdonsága, a körülvevő folyadék összenyomhatlansága vagy korlátozott összenyomhatósága következtében.) Vagy: nem létezik egyidejű anyagi összeköttetés *A* és *B* között, hanem azt más, *C*, *D* stb. testek mozgása (ütközése) létesiti az egymásra következő időpontokban. Ilyen esetekben is befolyásolhatja *A*-nak mozgása vagy már létezése is *B* mozgását. De ezeket az eseteket is megkülönböztetjük a távolbahatásoktól mint közvetített hatásokat.

A közvetített hatásoknak most megbeszélt két osztályát röviden megjelölhetjük mint *nyomás* és *ütközés-közvetítést.* Az ütközésközvetítés lényegében szintén nyomás-közvetítés, mindenesetre olyan, a melynél a nyomás csak bizonyos időpillanatokban, t. i. az összeütközés alatt működik.

Azonban van sok eset, a melyekben bár helyre van állítva valamely folytonos anyagi összeköttetés *A* és *B* között, mégis távolbaható erőt tételezünk fel *A* és *B* között. Ilyen eset lép föl akkor, ha az anyagi összeköttetés az *A* és *B* közötti hatásra nézve teljesen közömbös, vagy legfölebb módosító, de nem lényeges. Például a tömegvonzás, valamint elektromos vagy mágneses testek közötti erők csupán módosulnak, ha utóbbiak valamely anyagi folyadékba merülnek.

Azonban ez az anyagi környezet nem lényeges a hatásra nézve. Hiszen ez épen úgy, sőt még erősebben létre jő anyagi környezet nélkül, azaz üres térben (vacuumban).

Ilyen eseteket tehát joggal számítunk a tulajdonképeni távolbahatásokhoz, mert nem tartoznak a nyomás vagy ütközés közvetítette hatások typusához. Azonban gyakran beszélünk *látszólagos* távolbahatásokról az *A* és *B* testek között. Tudniillik, ha anyagilag folytonos összeköttetés mellett olyan erőket nyilvánítanak egymásra, a melyek ugyan a két *A*, *B* testnek csak relativ helyzetétől (ill. gyorsaságától) függenek, azonban létrejövetelükhöz szükséges az anyagi összeköttetés. Ez lép föl pl. két folyadékkal körülvett test mozgásánál. Különösen ismeretes összenyomhatlan folyadékban lüktető két gömb esete, mint a két gömb közötti látszólagos távolbaható erő typusa. De jogosan teszszük hozzá ezt a szót «látszólagos», mivel a hatás nyomás-közvetítés által jő létre. Körülövező folyadék jelenléte nélkül a lüktető gömbök nem nyilvánítanának hatást egymásra, ha nem tartjuk számon a tömegvonzást, a mely legtöbbnyire észrevehetetlen kicsiny. A látszólagos távolbahatásokhoz tartoznak egy folyadékba merített két testnek mozgásai, melyeket a hajcsövesség befolyásol. Mindezen esetekben még az energia kifejezése is átalakítható úgy, hogy benne a két test relativ helyzete fordul elő.

Ezen fejtegetések után többnyire könnyen eldönthető adott esetekben, mikor nevezzük a tüneményeket távolbahatásoknak és mikor közvetített vagy közelbehatásoknak.

Távolbahatások:

a) elméleti mechanika szempontjából (tömegmozgatás):

a tömegvonzás,
az elektromos testek közötti erők,
a mágneses testek közötti erők,
az elektromágneses hatások,
az elektrodynamikai hatások;

b) általános szempontból (állapotváltozásra való hatás):

Indukált elektromos áramok tüneményei (a mennyiben valamely testben folyó áram erőssége állapotára nézve szintén jellemző); az összes sugárzási tünemények (a mennyiben pl. a hőmérséklet vagy chemiai sajátságok sugárzás következtében változhatnak).

Közelbehatások, többek között:

a rugalmasság tüneményei,
az ütközés tüneményei,
a csepegős és légnemű testek mechanikai tüneményei,
a hajcsövesség tüneményei,
a hővezetés tüneményei,
az elektromos vezetés tüneményei,
az elektromos potentiálkülönbség különböző testek érintkezésénél,
az elektrolizis tüneményei,
a vegyi reakcziók,
a halmazállapoti változások.

A távolba- és közelbehatások közötti különbséget röviden úgy jellemezhetjük: az előbbiek még a vacuumban is tovaterjednek, az utóbbiak csak az anyagban. Mindenesetre előfordulhat a tovaterjedés két különböző formájának egyesítése ugyanannál a tüneménynél. Poynting kifejlesztette szemlélődések szerint * az energia így terjed a környezetben (vacuumban) olyan huzal mentén, a

* I. H. Poynting, Phil. Transact. 2. p. 343, 1884. A M. P. L.-ban ismertette Fröhlich I. (I. kötet, 309. l.)

melyen keresztül elektromos áram folyik. A huzal csak arra való, hogy a környezetben folyó energiát meleggé változtassa. De mivel az anyagi húzal lényeges a tünemény létrejöttére, ezt az esetet a közvetített vagy a közelbehatásokhoz számítom.

Gondolhatók ugyan látszólagos távolbahatások az összes tüneményeknél, a melyeket a közelbehatások alatt felhoztunk. Így pl. vegyi reakczióknál (a tünemények anyagi hordozójának olyan állapotváltozása, a mely a térnek bizonyos helyeiről terjed széjjel). A mint Liesegang ilyen látszólagos távolbahatást ír le, midőn ezüstnitrát konyhasó-tartalmú zselatinban diffundál. A «holt tér» tüneményei alapján, melyeket a reakczióknál Liebreich talált, gondolhatnánk talán a folyadék-levegővel vagy az edény falával alkotott felületének valamelyes távolbahatására. De ezt mindenkép bajos volna megérteni. Azonban a tüneményt most már megfosztották titokzatosságától, a mióta Budde kutatásai következtében a reakczió-termék (chloroform) elgőzölgéséből megmagyarázható. Természetesen az elgőzölgés legnagyobb a folyadék szabad felszínén vagy szorosan alatta.

II. Távolbahatások redukálása közelbehatásokra és viszont.

a) *Elvont elmélkedések.* Sok helyen találjuk kimondva azt a nézetet, hogy merő távolbahatás valami megfoghatatlan az emberi értelemre. Ezért többféle úton iparkodtak, hogy az összes távolbahatásokat látszólagosakként tüntessék föl, és visszavezessék közelbehatásokra, vagy a nyomás-közvetítés vagy az ütközés-közvetítés hypothesise alapján. Ez az egészen elvont elmélkedés szükségképeninek kell hogy lássék; a tapasztalat szintén annak a föltevésére késztet, hogy az anyagnak bizonyos állapotváltozásai a környező vacuum állapotában is valami változást kell hogy okozzanak. Ez az eset forog fenn pl. az elektromos hatásoknál, a mint a III. szakaszban részletesebben kifejtjük.

Minthogy azonban merő távolbahatásoknál hiányzik valami anyagi összekötő tag az egymásra ható testek között, kényszerítve érezték magukat, hogy az üres teret bizonyos physikai sajátságokkal ruházzák fel azért, hogy a közvetítő szerepét neki oszthassák ki. Ennek aztán a jobb megokolására azt a hypothezist teszik, hogy a tér soha sem üres. Tele van mindig finom anyaggal, a mely a nehézségi erő hatásának nincs alávetve (súlyamérhetlen) az úgynevezett *éterrel*.

Most már két álláspontot lehet megkülönböztetni. Vagy súlyamérhetlenségétől eltekintve, minőségileg olyan sajátságokat tulajdonítnak az éternek, a milyeneket a súlyos anyagon közvetetlenül megfigyeltek. Tehát úgy fogják föl, mint finom, rugalmas vagy folyékony anyagot (a nyomás-közvetítés hypothesise szerint), mely folytonosan vagy (az ütközés-közvetítés hypothesise szerint) szakadozottan van eloszolva. Vagy lényegesen más tulajdonságokat adnak az éternek, mint az anyagnak. Ezeket czélszerűen úgy választják, hogy a tényleg megfigyelt távolbahatások mint csupán látszólagosak dedukálhatók legyenek a közelbehatásokból.

Az első álláspont inkább kielégít, mivel egységesebb felfogást alkot a tünemények összeségéről. Azonban ama második álláspontról sincsen előre kizárva egységes felfogás megalakitása. Nevezetesen, ha a sajátlagos anyagi tulajdonságokat, mint pl. az összetartást, rugalmasságot, nehézséget az éter tulajdonságaira viszik vissza. Azonban ez utóbbi épen annyira jogos, mint a fordított út. Hogy magunkat konkrét alakban fejezzük ki: az elektromos hatások visszavitele a mechanika törvényeire nem tekinthető a priori kielégitőbbnek, mint a fordított út: az anyag sajátlagos tulajdonságainak az éter tulajdonságaiból való levezetése.

Azt mindenesetre óhajtandó czélképen kell megjelölnünk, ha a különböző távolbahatásoknak a közelbehatásokra való visszavitelére csak egyféle étert használunk. Így elkerülhetnők azt a képzetet, hogy az üres tér finom anyaggal van tele, a mely nehézségekre vezet. Gondoljunk csak arra, hogy pl. az éter mindenütt jelen volna, még az anyagban is! Azt mondhatnók ugyanis: a térnek mindenütt vannak bizonyos physikai sajátságai, a melyek módosulnak azokon a helyeken, a melyeket anyag foglal el. Az egységes éterhez mint czélhoz jelentékeny mértékben közeledtünk, midőn az elektromágneses fényelmélet alapgondolata, a melyet legelőször valószínűleg FARADAY mondott ki és kivált MAXWELL nyomozott mathematikailag, az úgynevezett fényétert azonosnak állította avval az éterrel, a mely az elektromos és mágneses hatásokat közvetíti.

Mindazonáltal még nem állíthatjuk, hogy sikerült volna a tömegvonzás visszavitele ugyanannak az éternek közelbehatására. Ezt az V. szakaszban részletesebben megbeszéljük. Ha egyáltalán részben sikerült is a tömegvonzásból a közelbehatásokra való redukálás, mindenesetre más tulajdonságokat kellett tulajdonítani itt a közvetítőnek, mint a fényéternek.

A fennebb felsorolt tulajdonképeni távolbahatások közül először a sugárzás tüneményeit (legelőbb csupán a fényt) fogták föl mint közvetített hatásokat. Mert úgy NEWTON emissió-elmélete, mint HUYGHENS hullámzási-elmélete közvetett hatásokat használnak, előbbi az ütközés- utóbbi a nyomás-közvetitést. Szükségesnek kell föltünnie a sugárzás tüneményeinél a közelbehatásokra való visszavitelnek, mert terjedési sebességük véges. Tényleg az energia megmaradásának principiuma követeli, hogy megjelölhessük az energia hordozóját, székhelyét, arra az időre nézve is, a míg az éppen felvillanó A testet a fénybeli energia elhagyta, de a másik B testet még nem érte el. Tehát üres téren át való sugárzásnál kell, hogy az hordozója lehessen a fénybeli energiának. Így hát fel kell tennünk, hogy az üres térre valamely világító test befolyással van.

Másképen áll a dolog a tömegvonzással. Az ő számára eddigelé véges terjedési sebesség nem volt bizonyossággal kimutatható v. ö. alább a IV. szakaszt). Nincs is általánosan elfogadva az a vélemény, hogy minden távolbahatás, kiváltképen különösen a tömegvonzás, közelbehatásokra viendő vissza.

A mi közelebbről magának NEWTON-nak álláspontját illeti, úgy a közvetetlen távolbahatásnak, mint a közvetített hatásnak hivei a maguk értelmében magyarázták közleményeit és leveleit.* Azt

* Természetesen csak történetileg érdekes, vajjon NEWTON a közvetetlen

a nézetet, hogy NEWTON a közvetetlen távolbaható erő védője volt, mindenesetre a «Philosophiæ naturalis principia»-nak COTES eszközölte új kiadása keltette. Azt pedig kétségesnek tarthatjuk, vajjon NEWTON mindenben megegyezett-e COTES-szal, vagy nem. Nekem valószinűnek tetszik, hogy maga NEWTON az egész kérdést nem tartotta égető jelentőségűnek, mivel első gondja megfigyelhető tünemények leírására irányult. Így szól az ő «Principia»-iban: «Még nem juthattam annyira, hogy a tüneményekből a nehézség tulajdonságainak okát levezessem, hypotheziseket pedig nem koholok».

Valamely szellemi agens eszközölte közvetítés értelmében beszélnek ezek a szavak, melyeket NEWTON művének végén mond ki: «Itt helyén volna, valamit hozzáfűzni a szellemi substantiáról, a mely az összes szilárd testeket áthatja és bennük van. Ennek a szellemi substantiának ereje és tevékenysége következtében a testek részecskéi kölcsönösen vonzódnak. . . De még nem tettek elegendő kisérletet arra, hogy meghatározhassuk a törvényeket, a melyek szerint ez a szellemi substantia működik».

Nagyon eltérő módokon értelmezték azokat a szavakat, a melyeket NEWTON BENTLEY-hez írt:

«Az, hogy a gravitatió az anyagra nézve lényeges, vele összeforrott, és olyan tulajdonságú, hogy az egyik test a másikra a messzeségben hatást gyakorolhatna az üres téren keresztül valaminek a közvetítése nélkül, a mi az ő hatását és erejét egyiktől a másikig átvinné, ez az én vélekedésem szerint olyan nagy képtelenség, hogy azt hiszem, senki sem bukkanhat rá, a kinek van elegendő gondolkozó tehetsége philosophiai dolgokban. Kell, hogy a gravitatiót valamely agens okozza, a mely folytonosan bizonyos törvények szerint működik; vajjon aztán ez az agens anyagi vagy anyagtalan, olvasóim megfontolására biztam».

Eme szavak szerint úgy látszik, kizárta NEWTON a közvetetlen

távolbaható erő védője volt-e, vagy nem. Mert az exakt tudományok módszereivel nem fér össze, hogy az ő tekintélyét erősségül használja valaki a távolbaható erők hypothezise mellett vagy ellene.

távolbahatást. Azonban igazat kell adnunk ZÖLLNERnek, ha azért, hogy a BENTLEYhez intézett levél vallásos kérdésekkel függ össze, azt tartjuk NEWTON igazi véleményéül, hogy a távolbahatásnak alattomban egy transcendentalis okot tulajdonít. Ekkor azonban NEWTON mindenesetre lényegesen különbözne azoktól, a kik a távolbahatást nem transcendentalis közeli erőkre akarják visszavinni.

ZÖLLNER a tiszta távolbahatás álláspontján van. Szerinte az anyag atomokból áll, a melyek jó és rossz kedvvel vannak fölruházva és egymásra WEBER elektromos * alaptörvénye értelmében hatnak. A vonzó erők igen-igen kevéssel multják felül a taszítókat, úgy annyira, hogy a különbség nem vehető észre még a legfinomabb elektrostatikai kisérletekkel sem. Mindamellett megszerkeszthető a gravitatió, a tapasztalatnak megfelelő intenzitással, ha elegendő számú, elektromossággal töltött atóm halmozódik fel az anyagban.

Jellemző ZÖLLNER deductiójának útja-módjára nézve, miként száll ő síkra ama tétel ellen: «Corpus ibi agere non potest, ubi non est.» Ez azt fejezi ki, hogy a közvetetlen távolbaható erő felfoghatatlan. ZÖLLNER azt mondja: «Hol *van* a test? Ott a hol hat. Tehát a Hold a Föld felszínén létezik, mivel hatásai ott vehetők észre.» Ilyenféle deductióval valóban teljesen elmosódik a különbség távoli és közeli erők között. Azonban ekkor ama kérdéshez is jutunk: miért veszszük észre más tulajdonságok, pl. az áthatlanság alapján tapintó érzékünk segítségével az anyagi testeknek egészen más, még pedig biztos határait. Míg a gravitatió tulajdonságánál fogva teljességgel határtalanok és egymáson keresztül hatolhatnak. Csürés-csavarás küzdő eszközeivel a fenforgó nehézséget nem lehet legyőzni.

Az az eszme, hogy távolbaható erőket közelbeható erőkre kell visszavinni, kivált azóta nyert új megerősítést, a mióta ezt FARADAY és MAXWELL az elektromos és mágneses hatásokra nézve végrehajtották. Igy hát különösen Angliában találunk ennek az

* t. képen: elektrodinamikai. *Ford.*

eszmének lelkes követőire, a kikhez pl. még WILLIAM THOMSONt is kell számítanunk. Közben magában Angliában gyakran magasra tornyosultak a küzdelem hullámai. Ezt bizonyítja, hogy élénken vitatkoztak egyik részről BROWNE,* a kinek a közelbeható erők nem érthetőbbek, mint a távolbahatók, másrészről LODGE, PRESTON és ALLEN, a kik az utóbbiakat elvetik.

A physika kiváló képviselői Németországban csak ritkán nyilatkoztak merőben elvont természetű elmélkedésekről. Nyiltan szól E. du BOIS-REYMOND: «A természet megismerésének határairól» szóló beszédében, midőn azt mondja: «az üres téren keresztül a távolságba ható erők magukban véve érthetetlenek, sőt értelemellenesek».

Gyakran fölhozták ezzel szemben, hogy távolbahatások közelbehatásokra vihetők vissza, hogy még a typusos közelbehatások, mint két különböző test összeütközése vagy valamely test rugalmas tulajdonságai tulajdonképen távolbahatások, ha őket elég szigoruan elemezzük. Igy: nem lehet elérni soha két anyagi test valóságos érintkezését, például ütközésnél. A mint ez optikailag két NEWTON-féle üveglencse érintkező foltján kimutatható. Arra, hogy elképzelhessük a rugalmas testek alakváltozásait, azt kell gondolnunk, hogy anyagi pontokból vannak összealkotva, a melyeknek bizonyos relativ távolságuk van. Ezért a tulajdonképeni távolbahatásokat, mint pl. a gravitatiót, csak kisebb távolságra való hatások lánczolatával pótolnók, ha pl. rugalmas testek közvetítette nyomásra vinnők vissza.

Ilyen nézettel szemben meg kell jegyeznünk, hogy az éter fogalmának bevezetése után igenis gondolható, hogy valóban folytonos összefüggés van két test érintkezésénél, vagy egy és ugyanazon test részei között, legyen bár szerkezete esetleg molekuláris is. A chemiának és az elektrolizisnek tényei, épúgy a fényszórás tüne-

* BROWNE CAYLEY-t is az ő nézete követőjének nevezi, a mennyiben idéz egy levélből, a melyben CAYLEY igy ír: «Mindig abban a nézetben voltam, hogy két testnek távolságon keresztül való hatása nem nyujt nagyobb nehézséget, mint két test hatása érintkezéskor».

ményei mindenesetre úgy irhatók le legkényelmesebb és legegységesebb módon, ha az anyagi testet mint molekuláris, nem homogén részekből állót fogjuk fel.

Azonban semmi sem kényszerít arra, hogy ezek a molekuláris képződmények egymásra valódi távolbaható erőket (molekuláris távolságokra) nyilvánitsanak. Gondolhatjuk pl., hogy ezek a molekuláris erők elektromos természetűek,* melyek aztán az éter közelbehatásai által molekuláról-molekulára tovaterjednek. Ezt teszszük fel MAXWELL nyomán két térbelileg egymástól elválasztott test elektromos hatásaira nézve.

Tekintsünk most el ama elmélkedésektől, melyek a távolbahatások megértésének nehézségei körül felmerültek. Ekkor azonban előre el kell ismernünk, hogy a megfordított út, tudniillik az összes hatásoknak, még a látszólagos közelbehatásoknak is távolbahatásokként való fölfogása megkisérelhető az összes tünemények egységes leirására.

Több izben tettek, különösen NEWTON fellépése óta, ilyen kisérletet a rugalmas és optikai tulajdonságok, valamint a hajcsövesség megmagyarázására. Megnevezem itt NAVIER-t, POISSON-t, CAUCHY-t, LAPLACE-t, GAUSS-t, F. NEUMANN-t. Megjegyzésre méltó, hogy FARADAY is, a ki bevezette az elektromosságba a közelbehatásokat, az anyag szerkezetéről való nézetét tekintve a távolbahatás hivei közé sorolandó. A «speculation on the Nature of Matter» cz. művében (1844) BOSCOVICH elméletéhez csatlakozik, a ki szerint az anyag pontalakú erőcentrumokból állana.

Könnyen megérthető, hogy mióta NEWTON gravitatió törvénye az ég mechanikájának leirása körül oly fényes eredményeket ért el, más tudományágakra is alkalmaztak a NEWTON-éhoz hasonló formalismust. Ezt azonban csak kisérletnek nézhetjük, hogy a tüneményék világát mathematikailag előállitsák. Magasabb tökéletes-

* Említésre méltó kisérletet tett B. GALITZIN, hogy a molekuláris erőket és a rugalmas tulajdonságokat számitásoknak vesse alá. (Bullet. de St.-Pétersbourg. 3. 1895.) A molekulákat elektromágneses resonatorokként fogja fel. A gravitatiót azonban nem vezeti le feltevéséből.

ség és szigorúság bélyegét többé nem hordozza magán jobban vagy kevésbbé, mint az a kisérlet, hogy a tüneményeket a közelhatás törvényeivel írják le.

Ha nem vetünk ügyet philosophiai elmélkedésekre, akkor csupán a megfigyelhető dolgok leírásában elért eredmény dönti el, melyik út előnyösebb. Azonban az eredmény ellene szól ama molekuláris távolbaható erők bevezetésének ezeknél a szakmáknál. Ismeretes, milyen nehézségekkel és terjengős számításokkal küzködtek Cauchy és Neumann, hogy távolbaható erőikből az isotrop és kristályos testek optikai tulajdonságait levezethessék. Azonkívül a rugalmasság elméletében az a föltevés a tapasztalással egyenes ellenmondáshoz vezet. A mennyiben isotrop testben a két rugalmassági állandó között az ú. n. Poisson-féle relationak kellene fennállania, a mi azonban általában nem egyezik meg a megfigyelésekkel. Csakis poláris távolbaható erők bevezetésével szüntethető meg Voigt szerint ez a nehézség.

Elkerüljük ezeket a bonyodalmakat, ha a rugalmasság tüneményeit mint közelbehatásokat írjuk le, a melyeknek következtében valamely térfogatelem alakja csakis az arra az elemre gyakorolt nyomásoktól függ. Az optikát ellenmondás nélkül lehet előállítani, ha reá az elektromágnesi tér közelbehatási törvényeit alkalmazzuk.

Ámbár a hajcsövesség elméletében nem vezet a molekuláris távolbaható erők behozatala ellenmondásokhoz a tapasztalattal, de nem is jelenik úgy meg ezeknek a bevezetése, mint szükség és a kisérleteknek követelménye. Sokkal egyszerűbben és közvetetlenebbül vezethetők le a hajcsövesség tüneményei a tapasztalatból, ha azt az egyetlen közelbehatás-törvényt használjuk, hogy a folyadék felszínének nagyobbítására positiv vagy negativ munka szükséges, legyen az határfelszín a vacuummal, valamely légnemű vagy szilárd testtel, vagy egy másik folyadékkal szemben. Ennek a törvénynek valamely mélyebben fekvő okból való levezetésére elég az a föltevés, hogy az a folyadék-részecske, a mely a felszínen fekszik, más állapotban van, mint ha a folyadék belsejébe vinnők. Például Stefan szerint gondolhatunk arra, mint a chemiai rokonság erői képénél, hogy az érintkező molekulák, illetőleg atómok egymást befolyásolják. Fel kell oldozni a szomszédos atomok kötelékeinek felét, hogy egy molekulát a folyadék belsejéből a felszínre vigyünk. A tapasztalás eddigi tényei alapján a kis távolságokra való távolbahatás semmi esetre sem szükséges képzet.

Másrészt a gravitatió terén sem lehet semmi hasznát megállapitani a közelbehatások által való előállításnak a közvetetlen távolbahatás eszméjével szemben. Ezt az V. szakaszban még közelebbről megvilágitjuk.

b) *Mathematikai elmélkedések.*

Immár meg akarjuk beszélni közelebbről, mennyiben különbözik a természetben előforduló tünemények számitásának mathematikai kiindulása a szerint, a mint annak alapjául távolbaható vagy közelbeható erőket teszünk.

A távolbaható erők álláspontja szerint valamely H_1 állapotjelző (pl. a gyorsulás) a térnek P helyén, mathematikailag kifejezendő függésben van a tér egy vagy több *más* helyének H_2, $H_3, \ldots$ állapotjelzőivel. Lehetnek ezek vele egyneműek, de másfajták is. Ellenben, ha közelbeható erők létezését akarjuk mathematikailag kifejezni, olyan vonatkozások után kutatunk, a melyeknek következtében a P helyi H_1 állapot, a H_2, $H_3, \ldots$ stb.-nek a tér *ugyanazon* P helyén levő értékeitől függ.

Alak szerint közelbehatásokra visszavittnek tekinthetünk valamely tüneményt, ha teljes kiszámitásához elégséges kiinduláspontul felállitottunk egy differentiálegyenletet, vagy differentiálegyenleteknek egyidejű rendszerét. Ugyanis, az ott előforduló differentiálhányadosokat fölfoghatjuk bizonyos H_1, H_2, $H_3, \ldots$ állapotjelzőkül, a melyek mind a térnek ugyanarra a helyére vonatkoznak. Ilyen differentiálegyenleteknek integrálása ellenben mindig a tér különböző pontjai között szolgáltat összefüggéseket. Ezek az integrálok lennének az illető tünemény-csoportra nézve a távolbahatás törvényei, ha előre őket választottuk volna a számitás kiinduló pontjául. Igy például a NEWTON-féle törvény szerint ható centrális erők integráljai a közelbehatás eme törvényének:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=4\pi\rho$$

a hol X, Y, Z az erőkomponensek, ρ a sűrűség (elektromos, mágneses, anyagi).

Ezek szerint szükségtelen bonyodalomnak tűnik föl tisztán gyakorlati tekintetből, ha a közelbehatás törvényeiből indulunk ki. Mert a távolbahatás törvényei adják az integrálokat és a számítás kényelmesebben fűződik ezekhez. A megjegyzés bizonyára helyes a gravitatió körében is. Azonban az elektromos és mágneses hatások körében ez nem találó, azokban az esetekben, a melyekben a tér nincsen egyféle, homogen anyaggal (vagy éterrel) kitöltve. Ugyanis, jelentékeny bonyodalmak lépnek föl, nem homogen térben, ha a két A és B test közötti távolbahatás függ ama közegnek sajátságaitól, a mely a testeket körülveszi. A gravitatiónál ez nincs meg,* de igenis az elektromosság és mágnesség körében. Ha pl. az az eset áll előttünk, hogy két elektromossággal töltött test közül csak egyik merül szigetelő folyadékba, azonnal felírható a számítás kiinduló pontja mint közelbehatás törvénye. Azonban ennek integrálása, azaz a távolbahatás törvényének kifürkészése igen nehéz feladat, többnyire nem is oldható meg zárt alakban. Ismeretes, hogy ebben az esetben az elszigetelő folyadék szabad fölszine bizonyos távolbaható erők kiinduló pontjául vehető, azonban ezeknek erőssége csak igen-igen nehezen található meg.

Ilyen feladatoknál mint itt, a melyeknél két test közötti hatás környezetük természetétől függ és ez több különböző fajta közegből áll, a megoldás mindenekelőtt a határföltételek fölállitását követeli két különböző közeg elválasztó felületén való átmenetnél. Mindegy, akár a távolba ható, akár a közelbe ható erők álláspontján vagyunk. Csak az méltó a megjegyzésre, hogy utóbbiak,

* Az úgynevezett felhajtási tünemények könnyen számításba hozhatók és lényegében más jellemüek, mint a vonzáscsökkenés két elektromos testnek dielektrikumba merítésekor. Az első esetben a környezetnek magának van tömege, utóbbiban a környezetnek nincsen töltése.

legalább a mennyire nekem látszik, természetesebben szolgáltatják ezeket a határföltételeket, mint az előbbiek.

A távolbaható erők szempontjából nincs fennakadás, ha az elektromos erőt elektromosan polározott közeg belső P pontjában határozzuk meg. A közeget a P pont körül mint kicsiny térfogat elemet eltávolítva gondoljuk, de akkor a térfogat elem alakja változtat az eredményen. Két közeg határán való átmenetnél az elektromos erő számára a határfeltételek csak ama föltevés alapján nyerhetők, hogy a polározott közeg belső pontjára is úgy hat, mintha csak felszinén volna töltése.

A közelbeható erők álláspontjáról a határföltételeket az által nyerjük, hogy a határt nem tekintjük geometriai felületnek, hanem igen vékony átmeneti rétegnek, a melyben a határ normálisának irányában a közeg természete igen gyorsan, de folytonosan változik. Tehát az a fontos első sorban, hogy legyen közelbehatás-törvényünk nemhomogén közeg számára. Mivel közvetetlen megfigyelések csak homogén környezetbeli hatásokra vonatkozhatnak, nemhomogen közegre nézve a közelbehatás törvényeit természetesen csak valamely hipotezises következtetéssel meríthetjük a tapasztalásból. Közel eső a következő föltevés: Ha valamely közelbehatási törvény homogén közeg számára olyan alakban van kimondva, a melyben a tekintetbe vett helynek természetétől egészen függetlenül jelenik meg, úgy ebben az alakban érvényes nemhomogen közeg számára is.*

Az elektromosság és mágnesség körében most már az adódik ki, hogy a tér valamely helyén nem az erőáramlás, hanem az indukczió áramlás számára érvényes ama közelbehatási törvény, a mely a tér mágnesezési vagy dielektromos állandójától független. Ha ezt a törvényt két különböző közeg közötti végtelen vékony átmeneti rétegre alkalmazzuk, azonnal nyerjük a határfeltételt: az indukczióáramlás folytonosságát.

---

* Ezt a föltevést «Az éter physikája» cz. könyvemben (10. l.) «a közelbehatások állandósága» tételének nevezem. További folyamában is többször használtam ezt a föltevést, hogy végül ahhoz az eredményhez jussak, hogy az elektromágneses tér HERTZ-féle egyenletei nemhomogén testekre is igazak. (*D.*)

Ezek a megvilágitott pontok ugyan biztosithatnak elsőséget a közelbehatás törvényeinek az elektromos és mágneses tüneményeknek mathematikai előállitásában, de ezért mégsem kellett valóban szükségeseknek látszaniok. Ez utóbbi eset csak akkor lép föl, ha időben igen gyorsan váltakozó elektromos és mágneses tereket vonunk fejtegetéseink körébe. Erről a közelebbi szakaszban lesz szó.

Épen úgy hozhatjuk különböző alakokra az energia képletét, a melyet különös mathematikai ruházata szerint akár a távolbaható erők, akár a közelbeható erők álláspontjáról értelmezhetünk. Az első álláspontról (amint már fennebb 39. lapon megjegyeztük) az energia képletében a tér különböző pontjai közötti relativ térbeli mennyiségek lépnek föl (pl. távolságok). A közelbeható erők álláspontjáról az energia képletének térintegrálnak kell lennie; ennek elemei olyan állapotjelzők, a melyek minden elemben csak ennek saját helyére vonatkoznak.

Az energiának következő képlete

$$E = \Sigma \frac{mm'}{r}$$

a távolbahatásnak felel meg. Ebben a képletben

$$E = \tfrac{1}{2} \Sigma m V,$$

a melyben V a potentiál az m tömeggel rakott helyen, nem fordulnak ugyan elő a tér különböző pontjai közötti relativ helyhatározók, mindamellett nem felel meg a képlet mindenütt létező közelbehatásoknak. Ugyanis a tömegtől mentes helyek (azaz a vacuum) a föntebbi képletben nem fordulnak elő. Mindenütt meglevő közelbehatásoknak csupán ez a képlet felel meg:

$$E = \frac{1}{8\pi}\int d\tau \left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\} = \frac{1}{8\pi}\int d\tau F^2.$$

Valamely $d\tau$ térfogatelemben localizálva gondolhatjuk az $\frac{1}{8\pi} d\tau F^2$ energia mennyiséget, a hol F a térnek resultáns erőssége.

Ha valamely tér energiájának időbeli változásai olyan integrállal állíthatók elő, a mely annak felületén veendő, akkor a benne fellépő integrál-elemeket, a közelbehatások álláspontjáról szemlélhetőleg értelmezhetjük mint az energia zavarási komponenseit. Ilyen módon vizsgálta POYNTING az energia-áramlást elektromágneses térben. WIEN az ilyenféle elmélkedéseket bővitette és kiterjesztette a physikának más ágaira (hydromechanikára, rugalmasságra). Egyébiránt az energia-áramlásnak meghatározása a felületi integrálból nem egyértelmű. Mindig odafüggeszthetjük tetszésünk szerint valamilyen zavarási komponenseit egy inkompreszibilis mennyiségnek, azaz olyannak, a melynek összes áramlása zárt felületen át mindig zérus értékű.*

Ebben a *b)* szakaszban csupán csak formális oldalukról vizsgáltuk a közelbehatásokat. Azonban igen sok búvár igényeit még nem elégíti ki az itt megvilágitott út és mód, a melylyel távolbahatásokat közelbehatásokra vittünk vissza; ilyen volt pl. a NEWTON-féle törvénynek egyszerű helyettesítése a $\Delta V = -4\pi\rho$ differentiálegyenlettel.** Ők szeretnék megmagyarázva látni a közelbehatás törvényeinek létrejöttét oly részletes szemlélhető hasonlatok által, a melyeket legszivesebben az elméleti mechanika képzeteiből vesznek. Nemcsak bizonyos philosophiai alapokon nyugvó jogosultsága van ilyen hasonlatok összealkotására való törekvésüknek akkor, ha ennek a hasonlatnak eddig ismeretlen törvényszerűségeknek és tulajdonságoknak fölfedezésében kitaláló értéket tulajdoníthatunk. Ilyen tekintetben a kinetikai gázelmélet képzeteinek tényleg szép eredményük van. Az elektromosság elméletére vonatkozólag kielégítő mechanikai hasonlat szolgáltatására törekedett már MAXWELL, a ki ott első vitte keresztül formálisan a közelbehatások eszméjét. Az ő törekvéseit különböző oldalról próbálgatták javitani. De hiszen nem szükséges ezeknek a hasonlatoknak fejtegetésébe bocsátkoznom itt,

* Analog az eset pl.: az AMPÈRE-féle elemi törvényre nézve is. *Ford.)*

** $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$.

mivel ezen a helyen rövid idővel ezelőtt Boltzmann * adott áttekintést róluk. Különös nehézséget okoz jórészt az elektrosztatikai tulajdonságok előállítása és állíthatjuk, hogy az elektromosság elméletének egyetlen mechanikai hasonlata sem elégít ki minden kivánságot. Mindenekelőtt ki kell emelnünk mint nagy kényelmetlenséget, hogy a szabad éter alkotásáról és mechanikájáról való képzeteink annyira bonyolultak, hogy végül valószinűleg avval fognak megelégedni, hogy az éternek olyan közelbeható törvényeket tulajdonitsanak, a minőket a tapasztalatból valószinűleg inkább és inkább meg fogunk ismerni, de a melyek nem értelmezhetők a súlyamérhető anyagnak tulajdonságaiból, t. i. valamely mechanikai hasonlat szerint.

A gravitatió megmagyarázására szolgáló mechanikai hasonlatokról az utolsó fejezetben lesz szó.

Ford. *Szabó Péter dr.*

(Folytatjuk).

---

* L. Boltzmann a nürnbergi nagygyűlésen (1893.) tartott előadását.

PHYSIKAI SZEMLE.

Léghullám-megfigyelések. Dr. R. Emden jelentése. (Wiedemann. Annalen. 1897. Nr. 10.)

A müncheni léghajózási egyesület által rendezett felszállások egyikénél 1896. nov. 7. léggömbvezetőként szerepeltem. Ez utazás alkalmat adott a légmozgások különös fajtájának észlelésére és megmérésére, melyre legelőször Helmholtz «Ueber atmosphärische Bewegungen II.» (Gesam. Abhandl. III. p. 309.) értekezésében tett bennünket figyelmessé és melynek elméletét ő fejtette ki. Helmholtz kimutatta, hogy ha felső melegebb, tehát könnyebb légréteg valamely alsó hidegebb, tehát nehezebb légréteg felett vonul tova: ugyanazok a föltételek állanak fenn, mint mikor a szél vízszintes vízfelület felett fúj el. A mint a vízfelület hullámképzésre indíttatik, úgy éppen olyan módon képződnek hullámok az alsó, nehezebb légréteg felületén; hullámok, melyek a szél irányára merőlegesek és szabályos távolságokban egymásra következve a szél irányában haladnak előre. E léghullámok rendkívüli méreteket vehetnek fel. «Mivel a földszinén előforduló mérsékelt szélerősségek mellett is igen gyakran egy méter hosszú vízhullámok jönnek létre, úgy e szeleket 10° hőmérsék különbözetű légrétegekbe helyezvén át, bizonyára 2—5 km. hosszúságú hullámokat kapunk. Nagyobb 5—10 méteres tengerhullámoknak 15—30 kilometeres léghullámok felelhetnek meg; ezek már az észlelőnek egész firmamentumát befödik és magasságuk kisebb a hullámhossznál, így a sekély vízben levő hullámokhoz hasonlíthatók, melyek a vizet fenekén már tetemesen mozgásba hozzák . . .» «Hogy ily fajtájú hullámrendszerek a különböző súlyú légrétegek határfelületein igen gyakran előfordulnak, azt nagyon valószinűnek tartom, habár azok előttünk láthatatlanok maradnak is. Nyilván csak akkor láthatók e hullámok, ha az alsó réteg már annyira megtelt vízgőzzel, hogy a hullámhegyek, melyekben a nyomás csekélyebb, köddé kezdenek alakulni. Azután igen különböző szélességű csíkos, egyközű felhők terjeszkednek és néha szabályszerű ismétlésekkel váltakoznak az égboltozaton . . .» «Az általam eszközölt számítások azt mutatják, hogy a megfigyelt szélerősségnél a levegő körében nemcsak kicsiny, hanem több kilometer hullámhosszú léghullámok is képződhetnek, melyek ha a földszíne felett egy vagy több kilometer magasságban húzódnak, az alsó légrétegeket mozgásba hozzák és derűs-borús időjárást okoznak. E sajátszerűségnek oka szerintem az, hogy szélrohamok, melyeket gyakran futóesők kisérnek, meglehetős egyenlő időközökben és elég egyenletes lefolyással ugyanazon helyre napjában többször visszatérnek.»*

A légutazás 1896 nov. 7-ének reggelén történt. Az 1300 m^3 világító gázzal megtöltött «Akademia» nevű léggömb 200 méter hosszú vontatókötéllel volt felszerelve, mely az indulás előtt kiterítve feküdt a földön. Midőn a megmért léggömböt a vontatókötél súlyának megfelelőleg négy zsák ballaszttal (à 12 kg.) megkönnyítettük, az 9^h 50^m-kor teljesen beborult ég és csaknem teljes szélcsend mellett sebesen emelkedett a magasba. Alig volt már a földön a vontatókötélből néhány méter, midőn egyszerre csak hirtelen megakad a felszállás s e pillanatban a léggömb — a vontatókötél végét a földön maga után húzva — nagy gyorsasággal rohan kelet felé. Most három zsák ballasztot (36 kg.) dobtunk ki, de a kötél még mindig súrolta a földet. Csak mikor még fél zsák ballaszt repült ki, szabadult meg a léggömb a földtől. A felhajtás akadályozó oka felől csakhamar tisztában lehettünk, mert az említett pillanatban tetemesebben melegebb légrétegben éreztük magunkat, mely csekélyebb fajsúlyánál fogva a léggömb felhajtását meggátolta. A levegő hőmérséklete, mely az elindulásnál 2·7° volt, 400 m. magasságban a föld felett 9·2 fokra emelkedett. Aligha tévedünk, ha azt vesszük fel, hogy a hőmérsékletnek 2·7 fokról 9·2 fokra való gyors felszökése éppen a 200 m. magasságban következett be, a mit a vontató kötél magatartásából itélhetünk meg, mert hiszen a légáram, melybe behatoltunk, az utazás további tartama alatt 1300 m. magasságig teljesen egyenlő hőmérsékletű maradt. Ehhez járul még, hogy Münchenben a meteorologiai középponti állomás a következő hőmérsékleteket észlelte:

d. e.	8^h	3·9°
« «	10^h	4·7°
« «	12^h	12·3°
d. u.	4^h	11·1°
« «	8^h	9·1°

Tehát a délelőtt folyamán rohamos hőmérsékletváltozás állott elő. Tegyük fel, hogy a 9·2 fokú légréteg a földre szállott volna, úgy potenciális hőmérséklete, azaz hőmérséklete, melyet adiabatikus összenyomás

* Helmholtz i. m.

folytán kap: 11·2°, a mi a fönnemlített rohamos hőmérséklet-változást mennyiségileg is megmagyarázza. E meleg légáramlat sebességét 12·5 $msec^{-1}$-nek mértük, irányát pontosan W—E-nek találtuk. Tény tehát a következő: Egy 9·2 fokú légáramlat 12·5 $msec^{-1}$ sebességgel W—E irányban vonul el 2·7 fokú nyugvó légáramlat felett.

Nov. 7-én Bajorországnak majdnem valamennyi meteorologiai állomása ködöt jelentett, a müncheni középponti állomás jelentése pedig ugyancsak így hangzott: reggel erős köd. A mikor a léggömb 9^h 50^m-kor a város közvetlen közelében fekvő Oberwiesenfeldben felszállott, felettünk ködmentes levegő volt. De midőn 17 perczig gyorsan tovahaladtunk és 10^h 7^m-kor Ascheimtól, a föld felett 550 m. magasságban Münchenre visszatekintettünk, azt láttuk, hogy a várost és környékét óriási ködlepel borítja. A köd körülbelül négyzetalakú volt erősen kikerekített sarkokkal. Ez a ködtömeg hosszkiterjedését a léggömb útjának W—E irányában 7·5 km-nek találtuk; homogen szerkezetet nem mutatott, mert azután, úgy mondhatnám, ködtekercsekké gyúródott össze. Ezek az óriási ködtekercsek mindannyian egyenlő távolságban feküdtek a földön, még pedig pontosan S—N irányban, tehát merőlegesen az út, illetőleg szélirányra. Mi 15 ily tekercset számítottunk össze. E tekercseknek vastag köde teljesen eltakarta előlünk a befödött földterületet, míg a köztük fekvő felhőhengereken keresztül a Föld tisztán volt látható. E tekercsek függőlegesátmérőjét pontosan megállapítanunk nem lehetett, mégis szemmel látható volt, hogy a középső tekercsek vastagabbak a szélsőknél; mert a 100 m. magas Miasszonyunk tornyait a köd teljesen befedte és nem láthattuk, míg az egyik külső felhőtekercs — mely a giesingi templom felett feküdt — annak körülbelől ugyanoly magasságú toronycsúcsát szabadon hagyta. Valószínű, hogy a köd nem emelkedett fel 200 méternyire, mert e magasságban már jelentékenyen melegebb levegőre akadtunk. A köd felső határa tehát biztosan 100 m. fölött, s valószinűleg 200 m. alatt feküdött. Teljes pontossággal határozhattuk meg a ködtekercsek kölcsönös távolságát, mely — mivel 7·5 km. terjedelemben 15 tekercset számítottunk — 540 metert tett ki.

A ködtömegeknek ily fajtájú szerkezete legmeggyőzőbben bizonyít a mellett, hogy itt oly tüneménynyel volt dolgunk, mely a Helmholtz-féle léghullámokkal a legközvetlenebb összefüggésben áll. Ugyanis az említett reggelen minden körülmény összejátszott, hogy ezek a hullámok létrejöjjenek: a föld felett csendes, hideg légréteg; 200 m. magasságban felette pontosan W—E irányban vonul el hullámzó meleg légáram. Még meggyőzőbb lesz az összefüggés, ha az ily föltételek mellett előállható léghullámok hullámhosszait kiszámítjuk. Helmholtz* a következő számpéldát közli:

* Helmholtz i. m.

Legyen adva valamely légáram, melynek sebessége 10 $msec^{-1}$ és a mely 10 fokkal hidegebb légáram fölött huzódik el; úgy lehetségesek oly hullámok, melyek hullámhossza 550 métert tesz ki. A mi esetünkben a megfigyelt hőmérséklet-különbség 9·2° — 2·7° = 6·5°, a középsebesség körülbelül 12·5 $msec^{-1}$, az alsó légréteg nyugodt volt; így sebesség- és hőmérsékletkülönbségre nézve a HELMHOLTZ-féle példára támaszkodhatunk és a ködtekercseknek megfigyelt távolságát mérés után 540 méternyinek találtuk. Ez oly megegyezés, melynél tökéletesebbet nem is várhatunk.

E ködtekercsek képződésének folyamata miként játszódott le, az nem nyomozható. Valjon az alsó légréteg hullámhegyeit koronázták meg előbb e ködtekercsek s azután ismét a mélységbe szállottak? Vagy a felső légréteg meleg hullámvölgyei hatottak feloszlatólag egy a földön terjeszkedő ködrétegre? Vagy — mivel mindkét légréteg elválasztó felülete a föld felett csak 200 m-rel feküdt (jóval kisebb távolság, mint az 540 m. hullámhosszaság) — tisztán mechanikailag hatott-e a hullámmozgás a mélységbe és így vitte végbe a leírt alakulást? Hogy ezt eldönthessük, a hullámmagasságnak kell ismeretesnek lennie, a mit számítás által nem határozhatunk meg, hanem a mit minden egyes esetben észlelnünk kell; ez azonban a mi útunk alkalmával nem volt lehetséges. Vajjon végezhetők-e ily észleletek egyáltalában a kellő pontossággal, arra csak a jövő taníthat meg. Arra mégis megelégedéssel pillanthatunk vissza, hogy mi voltunk azok, kik első izben állapíthattuk meg a HELMHOLTZ-féle léghullámok jelenségét, megmérve egy nagyon is irányadó mennyiséget, a hullámhosszuságot, a mely adat alapján megállapíthattuk a megegyezést az észlelet és az elmélet között.
Ford. *Szekeres Kálmán.*

*

A fény minimalis eltérítése a hasábnál, elemi úton tárgyalva.

LUGOL P.* után.

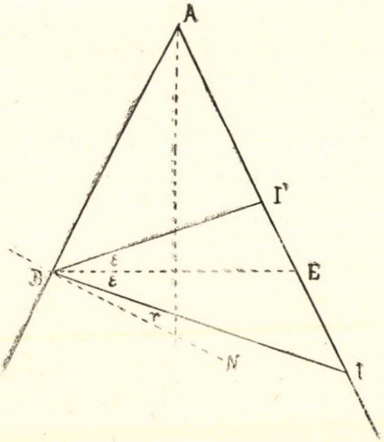
Legyen i és i' a hasáb merőleges metszetében haladó fénysugárnak a belépési és a kilépési szöge, r és r' pedig az i illetve i'-nak megfelelő szögek a hasáb belsejében. Tegyük fel, hogy $i < i'$ s ekkor egyszersmind $r < r'$. Ismeretes dolog, hogy az eltérítés nagyságát (1. ábra) a

$$D = i - r + i' - r'$$

egyenlet fejezi ki. A fénysugár terjedésének megfordíthatóságából következik, hogy ugyanakkora lesz az eltérítés az i és i' beesési szögekre nézve, továbbá, hogy a B pontnál a hasábba lépő BI és BI' megfelelő sugarak (a

* Journal de Physique, 3e série, t. VI., p. 21; 1897.

hasáb belsejében haladó sugarak közül azokat nevezzük megfelelő sugaraknak, melyekhez egyenlő eltérítések tartoznak) szimmetrikusan fekszenek a hasáb törőszögét felező egyenessel derékszöget képező BE egyenesre nézve. Ezek a megfelelő sugarak, a mint az idom egyszerű megtekintéséből látható, a BN normalissal $r = \frac{A}{2} - \varepsilon$ és $r' = \frac{A}{2} + \varepsilon$ szögeket alkotnak, s már ez a körülmény is arra enged következtetni, hogy maximalis vagy minimalis eltérítésnek kell beállani abban az esetben, a midőn a belső sugár a BE egyenes irányában halad.



Hogy ez esetben valóban minimalis az eltérítés, feltéve, hogy a hasáb anyaga oly természetű, hogy a törésmutatója $n > 1$, annak a bebizonyítására elégséges azt kimutatni, hogy az eltérítés mindinkább kisebbedik, a mint a BI' sugár közeledik a BE egyeneshez, azaz a mint a beesési szög közeledik ahhoz a különös értékhez, mely a BE sugárnak felel meg.

Az i és r szögek között fennáll a következő egyenlet:

$$\sin i = n \sin r.$$

Adjunk az i-nek kissé nagyobb $i_1 = i + \alpha$ értéket és legyen a neki megfelelő új értéke az r-nek $r_1 = r + \beta$, ekkor fent fog állani a

$$\sin (i + \alpha) = n \sin (r + \beta)$$

egyenlet is.

Ha az α és β szögek eléggé kicsinyek, akkor a sinusaik helyettesíthetők magokkal a szögekkel, a cosinusaik pedig 1-el, úgy hogy az α és β szög között a következő összefüggés lesz:

$$\alpha \cos i = n\beta \cos r,$$

ahonnan

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{n \cos r}{\cos i} = \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2 i}{1 - \sin^2 i}}.$$

Növeljük az i szöget ismét egy kis α_1 szöggel és pedig úgy, hogy az r ismét ugyanazon β szöggel növekedjék. Akkor ezen α_1 és β új növekedésekre is fent fog állani, hogy:

$$\frac{\alpha_1}{\beta} = \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2 i_1}{1 - \sin^2 i_1}}.$$

Minthogy ezek a gyökjel alatti kifejezések egy az egységnél nagyobb értékkel biró $\frac{n^2}{1}$ törtből származnak, az által, hogy úgy a számláló, mint a nevező egy és ugyanazon számmal van kisebbítve, s mivel továbbá $i_1 > i$, következik, hogy

$$\frac{n^2 - \sin^2 i}{1 - \sin^2 i} < \frac{n^2 - \sin^2 i_1}{1 - \sin^2 i_1}\text{*},$$

azaz hogy

$$\alpha_1 > \alpha.$$

---

* Hogy az $\frac{a-x}{b-x}$ alakú kifejezés abban az esetben, ha $a > b$, $\frac{a}{b}$ értékből kiindulva folytonos növekedéssel jut el a ∞ értékhez, a míg x a 0 értékből kiindulva $x = b$ értékre jut, azt igen könnyen beláthatjuk oly kifejezésből, mely azonos az $\frac{a-x}{b-x}$ kifejezéssel. Mivel

$$\frac{a-x}{b-x} \equiv \frac{a}{b} + \frac{\left(\frac{a}{b} - 1\right)x}{b-x},$$

a jobb oldali kifejezést felhasználhatjuk arra nézve, hogy meggyőződést szerezhessünk magunknak az $\frac{a-x}{b-x}$ kifejezés imént emlitett tulajdonságairól. Ugyanis $\frac{a}{b} - 1 > 0$, ha $a > b$ és így az x növekedésével, amíg $x < b$, mindig nagyobb positiv értékkel kell birni az

$$\frac{\left(\frac{a}{b} - 1\right)x}{b-x}$$

kifejezésnek. *Sz. M.*

Ha tehát az i szögnek egymásután oly α, α_1, α_2, ... növekedéseket adunk, hogy az r szög megfelelő növekedései egyenlők (β) legyenek, akkor ezek az α, α_1, α_2, ... növekedések annál nagyobbak lesznek, minél nagyobb i szöghöz tartoznak.

A midőn a fénysugár i beesési szöge α-val növekedik, az r szög pedig a β szöggel, ugyanakkor az r' szög β szöggel fogy és az i' pedig valami α' szöggel fog kisebbedni. Erre az esetre tehát az eltérítés lesz:

$$D' = i + \alpha - (r + \beta) + (i' - \alpha') - (r' - \beta) = D + \alpha - \alpha'.$$

Minthogy azonban

$$i < i',$$

és ennek következtében $\alpha < \alpha'$, lesz:

$$D' - D < D,$$

a mi annyit mond, hogy az eltérítés kisebbedik az i növekedésével mind-addig, a míg az i kisebb mint i' és így az eltérítés akkor lesz a legkisebb, a midőn $i = i'$.

Ezekből még az is kitünik, hogy az eltérítésnek más maximuma vagy minimuma nem is lehet. *Szijártó Miklós.*

*

A gravitáczió okáról. Ily czímen Wellmann V. az «Astronomische Nachrichten» 3440. számában érdekes elmefuttatást közöl. Ha ugyanis a nehézségi erőnek a távolsággal való fogyását szigorúan tekintetbe vevő barométer-képletében h (a magasság) $= \infty$, a levegő sűrűségére: $D_\infty = D_0 10^{-346}$ következik, hol D_0 a tengerszinén levő sűrűség, a mit közelítőleg az interstelláris tért betöltő anyag sűrűségének mértékéül vehetünk. Természetesen szem előtt kell tartanunk, hogy Mariotte törvénye csak a nyomás bizonyos értékei közt érvényes. E mellett feltesszük, hogy valamely test anyaga a legkisebb részecskék igen nagy számából áll, és hogy ezek méretei nagyon csekélyek az elválasztó közök nagyságához képest. Ha már most a Nap és valamelyik bolygó egy-egy részecskéjét (a és b) vesszük szemügyre, akkor ezekre a kinematikai gázelmélet szerint az interstelláris médium részecskéi minden irányban rácsnek, kivéve b-re az ab irányban és a-ra a ba irányban; az ab irányban a-ra és a ba irányban b-re ható lökések a két részecskét egymáshoz iparkodnak közelíteni, tehát mint vonzás szerepelnek. Hogy ez a vonzás arányos a tömeggel, közvetetlenűl is szembetűnő, mert az n-szer több részekből álló testre n-szer nagyobb számú lökés fog jutni, feltéve — a mi különben egyéb oknál fogva és más esetben is, pl. a gázok diffuziójánál, melyekre nézve Graham képlete áll, szokásos —, hogy az interstelláris médium lényeges ellenállás nélkül hatolhat át az égi testeken. E feltevés különben a médium fenti sűrűsége szerint eléggé megokolt és valószínű.

Valjon a hatás a távolság négyzetével fogy-e? Feltesszük, hogy legalább egy vonzó-szférán (Naprendszeren) belül ezen médium sűrűsége állandó; ez ellen sem igen lehet kifogást tenni. A médium részecskéi közül csak azok okoznak helyváltozást, melyek két testet összekötő egyenesben mozognak; a bolygókat tehát csak azon részecskék tolják a Nap felé, melyek a Nap felé a sugár irányában mozognak. Ezen mozgási irányok száma független a Naptól való távolságtól, tehát minden a Napot körülvevő concentrikus rétegre egyenlő számú részecske fog a sugár irányában esni, a területegységet ennélfogva a sugár négyzetével fordítottan arányos számú lökés fogja érni, a mi már NEWTON törvényének kifejezése. Mondhatjuk még, hogy ha m a gáz-részecske tömege, u annak sebessége, n azok száma, l a gáztartó hossza q felülettel szemben, akkor a nyomás q-ra

$$p = cmu^2q\frac{n}{l},$$

hol $\frac{n}{l}$ helyébe a δ sűrűséget tehetjük. Az interstelláris médium gyakorolta nyomás két r és r' sugarú gömbfelületre ennélfogva:

$$p = \frac{cmu^2q\delta}{r^2\pi} \quad \text{és} \quad p' = \frac{cmu^2q\delta'}{r'^2\pi}$$

vagyis, mert a gravitáczió törvénye szerint:

$$\frac{p}{r'^2} = \frac{p'}{r^2},$$

kell hogy $\delta' = \delta$ legyen; tehát a NEWTON-féle törvény fennáll, ha a vonzás szféráján belül az interstelláris médium sűrűsége állandó.

Arra a netáni ellenvetésre, hogy a médiumnak jelzett rendkívüli finomsága mellett egy másik (bolygóbeli) gáz részecskéi nagyobb számú lökéseket adhatnak az időegységben, mint a médium részecskéi és így a hatást kisebbíthetnék, már ezúttal azzal felel a szerző, hogy a médium részecskéi rendkívüli nagy — a fényével egyenlő rendű — sebességgel mozognak.

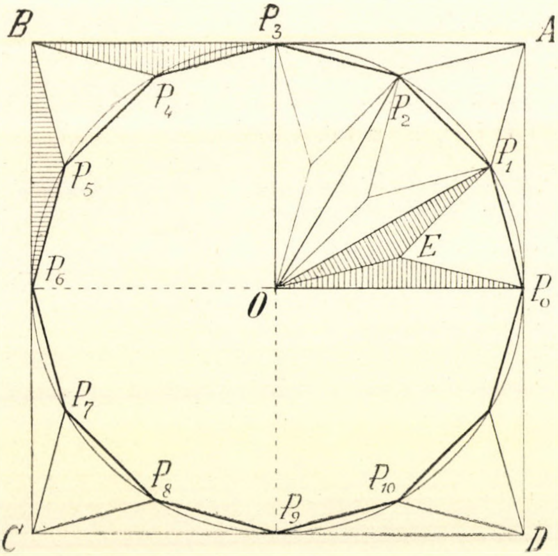
Lakits F.

A SZABÁLYOS TIZENKÉTSZÖGRŐL.

A körbe írt szabályos tizenkétszög területe egyenlő a sugár fölött emelt négyzet háromszorosával.

Ez az ismeretes tétel minden számítás nélkül következőleg bizonyítható be.

A mellékelt ábrában a P-k a beírt szabályos tizenkétszögnek szögpontjai; továbbá OP_0AP_3, OP_3BP_6, OP_6CP_9, OP_9DP_0 a sugár fölött emelt négyzetek.



Ha az OP_0 és OP_1 sugarak bezárta P_0OP_1 szöget felező egyenesre felrakjuk a tizenkétszög oldalával egyenlő OE vonaldarabot és E-t összekötjük P_0 ill. P_1-gyel, akkor

1) $P_0OE \triangle \cong BP_3P_4 \triangle$
2) $P_1OE \triangle \cong BP_6P_5 \triangle$
3) $P_0EP_1 \triangle \cong P_4BP_5 \triangle$.

Ugyanis a P_0OE középponti szög fél akkora köriven áll, mint a BP_3P_4 kerületi szög, tehát vele egyenlő. Továbbá P_0O és BP_3 egyenlők a sugárral, OE és P_3P_4 pedig a tizenkétszög oldalával. Tehát az 1) alatti háromszögekben két-két oldal s a közbe fogott szög egyenlő és ennélfogva a két háromszög valóban egybevágó.

Hasonló módon bizonyítható be a 2) alatti képlet.

Az 1) és 2) alatti képletek értelmében $P_0E = BP_4$ és $P_1E = BP_5$; továbbá P_0P_1 és P_4P_5 szintén egyenlők, mert mindketten a szabályos tizenkétszög oldalai. Tehát a 3) alatti háromszögek is valóban egybevágók.

A mondottaknál fogva a tizenkétszög területének meghatározásánál az OP_0P_1 háromszög pótolható a $BP_3P_4P_5P_6$ ötszöggel. Hasonlóképpen OP_1P_2 pótolható a $CP_6P_7P_8P_9$ ötszöggel, OP_2P_3 pedig a $DP_9P_{10}P_{11}P_0$ ötszöggel.

A tizenkétszög megmaradt részéről pedig közvetlenül világos, hogy a hozzácsatolt három ötszöggel együtt éppen az OP_3BP_6, OP_6CP_9 és OP_9DP_0 négyzeteket tölti ki.

A tizenkétszög területét tehát a leírt módon valóban három oly négyzet összegévé alakítottuk át, melyekben az oldalok egyenlők a kör sugarával.

Kürschák.

AZ ALTERNÁLÓ CSOPORT EGYSZERŰSÉGE.

Az algebrai egyenletek elméletében alapvető fontossága van annak a tételnek, hogy 4-nél több elem alternáló csoportjának az identitáson és önmagán kívül más invarians alcsoportja nincs. A tétel fontossága indokolja, hogy e sorokban vele foglalkozzunk. A bebizonyításnál felhasználjuk, hogy $n=5$ elem esetére KLEIN* egyszerű megszámlálással mutatta ki a tétel igazságát. Ennek alapján csak azt kell még megmutatnunk, hogy ha a tétel helyes n elem alternáló csoportjára, akkor fönnáll $n+1$ elem esetében is.

Előre bocsátom azt a substitucziók transzformácziójára vonatkozó megjegyzést, hogy bármely

$$s=(x_1 x_2 \ldots x_k)$$

cziklikus szubsztitucziót transzformálhatunk a

$$t=(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k})$$

cziklikus szubsztituczióba. A transzformácziót eszközli a

$$\sigma=(x_1 x_{i_1})(x_2 x_{i_2}) \ldots (x_k x_{i_k})$$

szubsztituczió. Ha az s és t egymásba átmenő különböző elempárainak száma páros, akkor a σ transzformáló szubsztituczió az alternáló csoporthoz tartozik.

Legyen már most az $n+1$ elem:

$$x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1},$$

melyek alternáló csoportja T_{n+1}. Kimutatjuk először, hogy a T_{n+1} *invariáns alcsoportja, melyet I-vel jelölünk, nem tartalmazhat*

---

* Vorlesungen über das Ikosaeder p. 18.

olyan szubsztitucziót, mely egy elemet változatlanúl hagyna. Ha volnának ilyen substitucziók az I-ben, melyek pl. az x_{n+1}-et nem változtatják, akkor ezek összessége az n első elem alternáló csoportjának, a T_n-nek, invarians alcsoportját alkotná. Ezek a szubsztitucziók ugyanis csoportot alkotnak, mert ha s és t az x_{n+1}-et változatlanul hagyják, akkor st is változatlanul hagyja az x_{n+1}-et. Jelöljük e csoportot G-vel. G-ről azt is állítjuk, hogy T_n-nek invariáns alcsoportja. Ha ugyanis G-t T_n szubsztituczióival transzformáljuk, megint csak olyan szubsztitucziókat kapunk, melyek x_{n+1}-et nem változtatják és minthogy ezek a szubsztitucziók ismét mindannyian I-ben vannak, tehát valóban G a T_n-nek invariáns alcsoportja.

Következésként G a feltételünk szerint csak 1, vagy T_n lehetne. De T_n nem lehet; mert ha T_n benne volna I-ben, akkor I tartalmazná az

$$x_1 x_2, \ldots x_n$$

elemek összes harmadrendű cziklikus szubsztituczióit; tehát előre bocsátott megjegyzésünk szerint tartalmazná az

$$(x_1 x_2 x_3), (x_1 x_2 x_4), \ldots (x_1 x_2 x_{n+1})$$

substitucziókat is, melyek közül az utolsó pl. az $(x_1 x_i x_k)$-nak a T_{n+1}-ben levő

$$\sigma = (x_i x_2)(x_k x_{n+1})\text{-}$$

val történő transzformácziója által nyerhető. Az I invarians alcsoport tehát maga a T_{n+1} volna.

Ezzel tehát kimutattuk, hogy az *I csakis olyan szubsztitucziókat tartalmazhatna, melyek az összes elemeket felcserélik.* Mellékesen azt is megjegyezzük, hogy feltevésünk szerint I csakis olyan szubsztitucziókból állhat, melyek egyenlő rendű cziklusokat tartalmaznak; mert ha pl. s-ben különböző rendű cziklusok volnának, akkor s-nek valamely hatványa $n+1$-nél kevesebb elemet tartalmazna, a nélkül, hogy az identitás volna.

Hátra van még annak a kimutatása, hogy ha s az összes elemeket felcseréli, mindig előállítható volna belőle az I-nek oly subsztituczója, mely egy elemet változatlanul hagyna, a nélkül, hogy az identitásra redukálódnék.

Ha az s az I-nek oly szubsztitucziója, mely az x_1-et x_{α_1}-gyel cseréli fel, azaz:

$$s=(x_1 x_{\alpha_1}\dots)(\dots)\dots$$

akkor az s-nek

$$\sigma=(x_1 x_{\alpha_1})(x_i x_k)\text{-}$$

-val transzformácziója által

$$t=(x_{\alpha_1} x_1\dots)(\dots)\dots$$

szubsztitucziókra jutunk, mely az s-től csakis akkor nem különbözik, ha

$$s=(x_1 x_{\alpha_1})(x_i x_k)$$

és az elemek száma 4. Minden más esetben t az s-től különbözik. E két szubsztituczió szorzata az x_1 elemet változatlanul hagyja, a nélkül, hogy

$$n+1>4$$

esetében az identitást adná; de kimutattuk, hogy I-ben nem lehet olyan szubsztituczió, mely egy elemet változatlanul hagyna, csakis, ha I maga a T_{n+1}, vagy pedig az identikus szubsztituczió. Az I invariáns alcsoport tehát nem tartalmazhat az identikus helyettesítésen kívül sem oly szubsztitucziót, a mely egy elemet változatlanul hagy, sem olyant, a mely minden elemet felcserél. Ezzel tehát a tétel be van bizonyítva.

Beke Manó.

EGY IGEN EGYSZERŰ MECHANIKAI IGAZSÁGNAK MATHEMATIKAI TÁRGYALÁSA.

Ezen a czímen jelent meg SZIJÁRTÓ MIKLÓS tagtársunk egyik közleménye e folyóirat V. kötetében a 235. l. Legyen szabad e közleményben foglalt tételnek SZIJÁRTÓ úrénál valamivel egyszerűbb bebizonyítását bemutatnom. Maga a tétel tiszta mathematikai fogalmazásban a következő:

Legyenek X, Y, Z valamely (xyz) derékszögű koordinátarendszer hasonló nevű tengelyeire felmért vonaldarabok; legyen továbbá e, e_1, e_2 három irány, a melynek iránycosinusai rendre

$$\begin{array}{ll} l,\ m,\ n & (l^2+m^2+n^2=1) \\ l_1,\ m_1,\ n_1 & (l_1^2+m_1^2+n_1^2=1) \\ l_2,\ m_2,\ n_2 & (l_2^2+m_2^2+n_2^2=1); \end{array} \qquad 1)$$

e mellett álljanak az e_1 és e_2 irányok merőlegesen e-re, úgy hogy

$$ll_1+mm_1+nn_1=0, \quad ll_2+mm_2+nn_2=0 \qquad 2)$$

és végül legyen

$$l_1X+m_1Y+n_1Z=0, \quad l_2X+m_2Y+n_2Z=0:$$

akkor kimutatható, hogy

$$P=lX+mY+nZ=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Bebizonyítás. Az

$$\begin{array}{l} lX+mY+nZ=P \\ l_1X+m_1Y+n_1Z=0 \\ l_2X+m_2Y+n_2Z=0 \end{array} \qquad 3)$$

lineár egyenletrendszer determinánsának négyzete 1) és 2) figyelembe vételével így írható:

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos(e_1e_2) \\ 0 & \cos(e_1e_2) & 1 \end{vmatrix} = \sin^2(e_1e_2),$$

úgy hogy 3)-nak megoldásai

$$\pm \sin(e_1e_2)X = P(m_1n_2 - m_2n_1)$$
$$\pm \sin(e_1e_2)Y = P(n_1l_2 - n_2l_1)$$
$$\pm \sin(e_1e_2)Z = P(l_1m_2 - l_2m_1)$$

ha pedig ezeket négyzetre emeljük, összeadjuk és közben figyelemmel vagyunk arra, hogy

$$\sin^2(e_1e_2) = (l_1m_2 - l_2m_1)^2 + (m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2,$$

akkor

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = P^2$$

adódik ki; de ez volt épen a bebizonyítandó reláczió.

Rados Gusztáv.

EGY ELEMI GEOMETRIAI TÉTEL.

A következő sorokban a hasonló idomokra voatkozólag ezt a tételt bizonyítjuk be: Legyen adva két hasonló sokszög:

$$A_1A_2 \ldots A_i \ldots A_n \quad \text{és} \quad A'_1A'_2 \ldots A'_i \ldots A'_n.$$

Legyen továbbá adva e síkon két irány: π és σ egyenesek által. Húzzunk a két hasonló sokszög csúcsaiból párhuzamosakat a π és σ egyenesekkel. Az A_i csúcson átmenő párhuzamosak legyenek: π_i és σ_i; az A'_i csúcson átmenők pedig π'_i, σ'_i. Jelöljük a π_i és σ'_i egyenesek metszéspontját: $(\pi_i\sigma'_i)$-al és megfelelően a π'_i és σ_i metszését $(\pi'_i\sigma_i)$-vel. Tételünk a következő: *E két sokszög:*

$$(\pi_1\sigma'_1),\ (\pi_2\sigma'_2),\ \ldots,\ (\pi_n\sigma'_n) \quad \text{és} \quad (\pi'_1\sigma_1),\ (\pi'_2\sigma_2),\ \ldots,\ (\pi'_n\sigma_n)$$

egyenlő területű.

Alig szükséges mondanunk, hogy tételünk bizonyításához elég lesz hasonló háromszögekre szorítkoznunk; továbbá elégséges, ha a bebizonyításnál olyan π, σ irányokra szorítkozunk, melyek egymásra merőlegesek.

Bebizonyitásunknál egyszerűség és áttekinthetőség végett a háromszögek csúcspontjainak helyzetét az illő pontoknak megfelelő komplex számok által jellemezzük. Legyen az A_i pontnak megfelelő komplex szám z_i és az A'_i-nak megfelelő complex szám: z'_i. Feltételünk tehát az, hogy $(z_1z_2z_3)$ háromszög hasonló $(z'_1z'_2z'_3)$ háromszöggel. E hasonlóság feltétele analitikai fogalmazásban a következő:

$$\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2} = \frac{z'_1-z'_2}{z'_3-z'_2} \tag{1}$$

mely egyenlőség egyrészt azt fejezi ki, hogy

$$\left|\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right| = \left|\frac{z_1'-z_2'}{z_3'-z_2'}\right|$$

azaz

$$A_1A_2 : A_3A_2 = A_1'A_2' : A_3'A_2'$$

másrészt pedig azt, hogy

$$\arg.\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2} = \arg.\frac{z_1'-z_2'}{z_3'-z_2'}$$

vagyis

$$\sphericalangle A_1A_2A_3 = \sphericalangle A_1'A_2'A_3'.$$

Az (1) alatti hasonlósági feltétel ebben az alakban is írható:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_1' & 1 \\ z_2 & z_2' & 1 \\ z_3 & z_3' & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

és ha e determinánsban:

$$z_i = x_i + iy_i; \quad z_i' = x_i' + iy_i'$$

teszszük, a hol x_i, y_i az A_i pont és x_i', y_i', az A_i' pont koordinatái, és a (2) alatti egyenletben a képzetes részt veszszük tekintetbe, akkor azt találjuk, hogy:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1' & 1 \\ x_2 & y_2' & 1 \\ x_3 & y_3' & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1' & y_1 & 1 \\ x_2' & y_2 & 1 \\ x_3' & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

x_i, y_i' ama pont koordinatai, a melyben az A_i pontból az Y-tengelylyel és az A_i' pontból az X tengelylyel vont párhuzamos egyenesek egymást metszik; ha tehát az X tengely iránya az előbb π-vel és az Y tengelyé az előbb σ-val jelzett irányok, akkor x_i y_i az előbbi jelölésben: a $(\sigma_i \pi_i')$ pont koordinatái. Éppen igy az x_i' y_i' a $(\sigma_i' \pi_i)$ pont koordinatái. A (3) alatti egyenlet tehát azt fejezi ki, hogy e két háromszög:

$$(\pi_1\sigma_1'),\ (\pi_2\sigma_2'),\ (\pi_3\sigma_3') \quad \text{és} \quad (\pi_1'\sigma_1),\ (\pi_2'\sigma_2),\ (\pi_3'\sigma_3)$$

egyenlő területű. Ezzel tehát a jelzett tétel be van bizonyítva. Még megjegyezzük, hogy a (2) egyenletből a valós rész figyelembevételével nyert tétel ezzel teljesen megegyezik, mert nem fejez ki mást, mint ugyanezt a tételt egy más helyzetbe hozott, még pedig a kezdőpont körül 90°-kal elfordított $A'_1A'_2A'_3$ háromszög esetében.

Beke Manó.

PARAMÉTERES MÓDSZER FOURIER MECHANIKAI ELVÉHEZ.

Legyen a következő egyenlőségi és egyenlőtlenségi rendszerünk:

$$\begin{aligned}
&A_{11}u_1+A_{12}u_2+\cdots+A_{1n}u_n=0\\
&A_{21}u_1+A_{22}u_2+\cdots+A_{2n}u_n=0\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&A_{i1}u_1+A_{i2}u_2+\cdots+A_{in}u_n=0\\
&B_{11}u_1+B_{12}u_2+\cdots+B_{1n}u_n\geqq 0\\
&B_{21}u_1+B_{22}u_2+\cdots+B_{2n}u_n\geqq 0\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}\tag{1}$$

homogén lineáris egész egyenletek és egyenlőtlenségek rendszere az u vezérmennyiségekre nézve, a melyben az egymástól független egyenletek száma kisebb mint a vezérmennyiségek száma, tehát ha valamennyi fölirt egyenlet független egymástól, úgy $i<n$; az egymástól független egyenlőtlenségek száma akármekkora lehet.*
A mennyiben az u vezérmennyiségeken virtuális elmozdulások componenseit akarjuk érteni, ez a rendszer Fourier elvére nézve kényszerkifejezések összetartozó rendszerét jelentheti.

Most magunk elé tűzzük: úgy határozni meg az u vezérmennyiségeket, mint részint egészen tetszőleges, részint nem negativ tetszőleges új mennyiségek homogén lineáris egész függvényeit, hogy e meghatározás által minden (1) alatti relatio és csakis ezek, vagy a belőlük következtethetők identikusan teljesüljenek, mindig csak homogén, lineáris, egész relatiókra gondolván.

---

* Math. és termt. Értesitő, XII.

1). E végből mindenek előtt kiirjuk a rendszerből az egyenleteket és még ezekhez csatolunk annyi egyenlőtlenséget a rendszerből, a hánynak a baloldala egymástól és az egyenletek baloldalaitól független, úgy hogy egyiknek a baloldala sem fejezhető ki a többinek és az egyenleteknek a baloldalaival, mint ezek homogén lineáris egész függvénye. Tegyük fel, hogy oly sorrendben vannak (1) alatt az egyenlőtlenségek, mikép a számra k első egyenlőtlenség bir ezzel a tulajdonsággal. Igy a kiirt rendszer-rész a következő:

$$\begin{array}{l}
A_{11}u_1+A_{12}u_2+\cdots+A_{1n}u_n=0\\
A_{21}u_1+A_{22}u_2+\cdots+A_{2n}u_n=0\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
A_{i1}u_1+A_{i2}u_2+\cdots+A_{in}u_n=0\\
B_{11}u_1+B_{12}u_2+\cdots+B_{1n}u_n\geqq 0\\
B_{21}u_1+B_{22}u_2+\cdots+B_{2n}u_n\geqq 0\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
B_{k1}u_1+B_{k2}u_2+\cdots+B_{kn}u_n\geqq 0.
\end{array}\tag{2}$$

Az itt lévő egyenlőtlenségek baloldalait jelöljék $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Akkor ez a kiirt rendszer-rész eképen is jegyezhető:

$$\begin{array}{l}
A_{11}u_1+A_{12}u_2+\cdots+A_{1n}u_n=0\\
A_{21}u_1+A_{22}u_2+\cdots+A_{2n}u_n=0\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
A_{i1}u_1+A_{i2}u_2+\cdots+A_{in}u_n=0\\
B_{11}u_1+B_{12}u_2+\cdots+B_{1n}u_n=s_1\\
B_{21}u_1+B_{22}u_2+\cdots+B_{2n}u_n=s_2\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
B_{k1}u_1+B_{k2}u_2+\cdots+B_{kn}u_n=s_k\\
s_1\geqq 0,\; s_2\geqq 0,\; \ldots,\; s_k\geqq 0.
\end{array}\tag{2$'$}$$

Az összes egymástól független baloldalak száma legfeljebb n, azaz a vezérmennyiségek számával lehet egyenlő. Már most a hány az egymástól független baloldal, annyi u vezérmennyiséget számitsunk ki, mint a többinek és az s nem-negativ mennyiségeknek a homogén lineáris egész függvényét. A kiszámitás eredményei nyilvánvalólag oly kifejezések a kiszámitott u vezérmennyiségek számára, a melyek által a (2)′ illetőleg (2) rendszer-rész és csak ez, vagy belőle következtethető relatiók identikusan teljesülnek, a mennyiben a többi u mennyiségek egészen tetszőlegeseknek, az s mennyiségek pedig tetszőleges nem-negativoknak tekintvék. Ezek a többi u mennyiségek és az s-ek a (2) alatti rendszer-rész paraméteres kifejezésére használt paraméterek.

2). Hátra vannak és kielégitésre várnak még a fölvett (1) alatti rendszerből eddigelé ki nem irt egyenlőtlenségek és csakis ezek, vagy olyanok, a melyek belőlük következtethetők. Minthogy ezeknek a hátralévő egyenlőtlenségeknek a baloldalai az (1) alatti többi relatiók baloldalaitól nem függetlenek, hanem azok homogén lineáris egész függvényeik, ennélfogva az s-ek homogén lineáris egész függvényeik ők, mert az egyenleti baloldalak eltünnek.

A hátralévő és még kielégitésre váró relatiók tehát eképen irhatók:

$$\begin{array}{l} C_{11}s_1+C_{12}s_2+\cdots+C_{1k}s_k \geqq 0 \\ C_{21}s_1+C_{22}s_2+\cdots+C_{2k}s_k \geqq 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ s_1 \geqq 0,\ s_2 \geqq 0,\ \ldots,\ s_k \geqq 0, \end{array} \qquad (3)$$

és most még úgy határozandók meg az s mennyiségek, mint újabb mennyiségek homogén lineáris egész függvényei, hogy mind nem-negativok legyenek és hogy a (3) alatti egyenlőtlenségek és csak ezek, vagy a belőlük következtethetők identikusan teljesüljenek.

A tárgyalás egyszerűsitése végett előbb csak az első egyenlőtlenséggel végezzünk, ehhez csatolva azonban az s-ek nem-negativ voltát állitó egyenlőtlenségeket is, azaz úgy fejezzük ki az s-eket újabb mennyiségek homogén lineáris egész függvényei gyanánt, hogy

$$\begin{array}{l} C_{11}s_1+C_{12}s_2+\cdots+C_{1k}s_k \geqq 0 \\ s_1 \geqq 0,\ s_2 \geqq 0,\ \ldots,\ s_k \geqq 0 \end{array} \qquad (4)$$

legyen és más relatiók, mint ezek, vagy ezekből következtethetők ne teljesüljenek.

3). Ha a $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1k}$ coefficiensek mind nem-negativok volnának, akkor a (4)-gyel semmi tennivalónk sem volna, mert akkor tetszőleges nem-negativ s-ekkel kielégítésre találna és a (3) alatti második egyenlőtlenséghez fordulhatnánk az elsőnek teljes mellőzésével, a mely szükségképen a (2) alattiak következményese volna. De tegyük fel, hogy van negativ ezek között a C_{11}, $C_{12}, \ldots,$ C_{1k} coefficiensek között.

Ha ekkor csak egy pozitiv van közöttük, akkor igen könnyü szerrel érhetünk czélt. Legyen ugyanis, hogy csak C_{11} pozitiv. Ez esetben $s_2, s_3, \ldots, s_k$ mennyiségeken valamint az új r mennyiségen tetszőleges nem-negativokat értve s azután úgy határozva meg s_1-et, hogy legyen

$$C_{11}s_1 = r - C_{12}s_2 - C_{13}s_3 - \cdots - C_{1k}s_k,$$

már czélnál vagyunk: nyilvánvaló, hogy ekkor (4) teljesítve van és sem több, sem kevesebb, mint ez.

4). Nem ilyen egyszerű azonban a dolog, ha egynél több pozitiv van a C_{11}, $C_{12}, \ldots,$ C_{1k} coefficiensek között és legalább egy negativ is van közöttük. Legyenek

$$C_{11} = P_1, \quad C_{12} = P_2, \quad \ldots, \quad C_{1,\nu} = P_\nu$$

a pozitivok és

$$C_{1,\nu+1} = -Q_1, \quad C_{1,\nu+2} = -Q_2, \quad C_{1,\nu+\mu} = -Q_\mu$$

a negativok; a többi legyen $=0$. Továbbá írjuk még, a jelölések megegyeztetése végett:

$$s_1 = p_1, \quad s_2 = p_2, \quad \ldots, \quad s_\nu = p_\nu$$

$$s_{\nu+1} = q_1, \quad s_{\nu+2} = q_2, \quad \ldots, \quad s_{\nu+\mu} = q_\mu$$

mihez képest a (4) alatti rendszer ezt a formát ölti:

$$\begin{gathered} P_1p_1 + P_2p_2 + \cdots + P_\nu p_\nu - Q_1q_1 - Q_2q_2 \ldots - Q_\mu q_\mu \geqq 0 \\ p_1 \geqq 0, \; p_2 \geqq 0, \; \ldots, \; p_\nu \geqq 0 \\ q_1 \geqq 0, \; q_2 \geqq 0, \; \ldots, \; q_\mu \geqq 0. \end{gathered} \tag{4'}$$

Állítom: ha minden r mennyiségen tetszőleges nem-negativot értve teszszük:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 p_1 = r_1 + r_{11} + r_{12} + \cdots + r_{1\mu} \\ P_2 p_2 = r_2 + r_{21} + r_{22} + \cdots + r_{2\mu} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ P_\nu p_\nu = r_\nu + r_{\nu 1} + r_{\nu 2} + \cdots + r_{\nu\mu} \end{array}\right\} \quad (5)_1$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 q_1 = \quad r_{11} + r_{21} + \cdots + r_{\nu 1} \\ Q_2 q_2 = \quad r_{12} + r_{22} + \cdots + r_{\nu 2} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ Q_\mu q_\mu = \quad r_{1\mu} + r_{2\mu} + \cdots + r_{\nu\mu}, \end{array}\right\} \quad (5)_2$$

akkor úgy vezettünk be új paramétereket (r), hogy a (4)', tehát egyúttal a (4) alatti egyenlőtlenségek teljesülnek és más relátiók, mint ezek, vagy ezekből következtethetők nem találnak identikus kielégitést.

Bizonyitás. 5') Hogy $(5)_1$ és $(5)_2$ a nem-negativ r-ek által identikusan eleget tesz (4)'-nek, az szembeszökő: a (4)' első egyenlőtlenségébe való helyettesitéssel

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_\nu \geqq 0$$

keletkezik, a mi tekintettel arra, hogy egy r sem negativ, identitást képez; a (4)' alatti többi egyenlőtlenségek, a miatt, hogy minden P és Q pozitiv és azáltal, hogy egy r sem negativ, szintén nyilvánképen identikusan teljesülnek $5)_1$ és $(5)_2$ révén. Hátra van az állitás ama kényesebb természetű részének a bizonyitása, hogy $(5)_1$ és $(5)_2$ más relátiókat, homogén, lineáris egész relátiókat, mint a (4)' alattiakat, vagy ezekből következtethetőket nem elégit ki identikus módon, azaz bármely nem-negativ r-ek által.

5''). Ennek a kimutatása végett minden egyéb előtt lássuk, hogy milyen relátiók tekinthetők a (4)'-ből való következményes homogén lineáris egész relátióknak. Ha ilyen ez az egyenlőtlenség:

$$L_1 p_1 + L_2 p_2 + \cdots + L_\nu p_\nu + M_1 q_1 + M_2 q_2 + \cdots + M_\mu q_\mu \geqq 0,$$

akkor kell, hogy mindazokkal a p és q mennyiségekkel teljesüljön, a melyek eleget tesznek a (4)'-nek. Ha pedig mindezekkel a p-kkel és q-kkal teljesül, akkor* kell létezniök olyan nem-negativ σ, π és χ multiplikátoroknak, hogy legyen

* Math. és phys. Lapok. 1896.

$$L_1=\pi_1+\sigma P_1,\quad L_2=\pi_2+\sigma P_2,\ \ldots,\ L_\nu=\pi_\nu+\sigma P_\nu,$$
$$M_1=\chi_1-\sigma Q_1,\quad M_2=\chi_2-\sigma Q_2,\ \ldots,\ M_\mu=\chi_\mu-\sigma Q_\mu.$$

Egy (4)'-ből származó következményes egyenlőtlenség tehát csakis ily alakú lehet:

$$(\pi_1+\sigma P_1)p_1+(\pi_2+\sigma P_2)p_2+\cdots+(\pi_\nu+\sigma P_\nu)p_\nu+$$
$$+(\chi_1-\sigma Q_1)q_1+(\chi_2-\sigma Q_2)q_2+\cdots+(\chi_\mu-\sigma Q_\mu)q_\mu\geqq 0, \tag{6}$$

ahol $\sigma\geqq 0$, és nemkülönben

$$\pi_1\geqq 0,\ \pi_2\geqq 0,\ \ldots,\ \pi_\nu\geqq 0,$$
$$\chi_1\geqq 0,\ \chi_2\geqq 0,\ \ldots,\ \chi_\mu\geqq 0.$$

A σ, π, χ nem-negativ multiplikátorok alkalmas megválasztásával minden következményes egyenlőtlenség a (6) alattiban foglaltatik és maguk az eredeti (4)' alatti egyenlőtlenségek is, úgy hogy mindazt a homogén lineáris egész egyenlőtlenséget tartalmazza a (6), a melyet a (4)' implicite vagy explicite magában foglal.

Homogén lineáris egész egyenlet nem következtethető (4)'-ből. Ugyanis, ha

$$R_1p_1+R_2p_2+\cdots+R_\nu p_\nu+S_1q_1+S_2q_2+\cdots+S_\mu q_\mu=0$$

egy következményes egyenlet volna, írjuk ezt ilyképen, két ellentétes egyenlőtlenség közvetítésével:

$$R_1p_1+R_2p_2+\cdots+R_\nu p_\nu+S_1q_1+S_2q_2+\cdots+S_\mu q_\mu\geqq 0,$$
$$-R_1p_1-R_2p_2-\cdots-R_\nu p_\nu-S_1q_1-S_2q_2-\cdots-S_\mu q_\mu\geqq 0.$$

Mindegyik teljesülni tartozik mindazokkal a p-kkel és q-kkal, a melyekkel (4)' teljesül, tehát mindegyiknek a (6) alatti alakra kell vezethetőnek lennie, azaz létezniök kell olyan nem-negativ σ', π', χ' és σ'', π'', χ'' multiplikátoroknak, hogy

$$R_1=\pi_1'+\sigma'P_1,\quad R_2=\pi_2'+\sigma'P_2,\ \ldots,\ R_\nu=\pi_\nu'+\sigma'P_\nu$$
$$S_1=\chi_1'-\sigma'Q_1,\quad S_2=\chi_2'-\sigma'Q_2,\ \ldots,\ S_\mu=\chi_\mu'-\sigma'Q_\mu$$
$$-R_1=\pi_1''+\sigma''P_1,\quad -R_2=\pi_2''+\sigma''P_2,\ \ldots,\ -R_\nu=\pi_\nu''+\sigma''P_\nu$$
$$-S_1=\chi_1''-\sigma''Q_1,\quad -S_2=\chi_2''-\sigma''Q_2,\ \ldots,\ -S_\mu=\chi_\mu''-\sigma''Q_\mu$$

legyen. Minthogy azonban minden π és mindkét σ nem-negativ s minden P pozitiv, ebből az következik, hogy minden $R=0$. Ez csak úgy lehet, hogy minden π és σ' meg $\sigma''=0$. De ha $\sigma''=0$, akkor szükségkép minden S is $=0$, a mi azzal együtt, hogy minden $R=0$, föltételezett következményes egyenletünk nem létezését jelenti.

5'''). Forduljunk már most $(5)_1$ és $(5)_2$ alatti paraméteres kifejezéseinkhez. Kimutatandó, hogy a p és q mennyiségekben csak olyan homogén lineáris egész relátiót szerkeszthetünk annak a következtében, hogy az r-ek tetszőleges nem-negativok, a mely relatió a (6) alatti alakba kényszeríthető.

Jelentsenek φ és ψ egyelőre egészen határozatlan mennyiségeket, minőkkel az $(5)_1$ és $(5)_2$ alatti kifejezéseket, mint multiplikátorokkal összefoglaljuk:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 P_1 p_1 + \varphi_2 P_2 p_2 + \cdots + \varphi_\nu P_\nu p_\nu + \\
&+ \psi_1 Q_1 q_1 + \psi_2 Q_2 q_2 + \cdots + \psi_\mu Q_\mu q_\mu = \\
&= \varphi_1 r_1 + \varphi_2 r_2 + \cdots + \varphi_\nu r_\nu \\
&+ (\varphi_1+\psi_1) r_{11} + (\varphi_1+\psi_2) r_{12} + \cdots + (\varphi_1+\psi_\mu) r_{1\mu} \\
&+ (\varphi_2+\psi_1) r_{21} + (\varphi_2+\psi_2) r_{22} + \cdots + (\varphi_2+\psi_\mu) r_{2\mu} \\
&+ \; \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ (\varphi_\nu+\psi_1) r_{\nu 1} + (\varphi_\nu+\psi_2) r_{\nu 2} + \cdots + (\varphi_\nu+\psi_\mu) r_{\nu\mu}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Hogy ez homogén lineáris egész relátiót jelentsen a p-kre és q-kra nézve, e végből szükséges és elégséges, hogy a jobboldala az r-ek bármely nem-negativ értékei mellett vagy $\geqq 0$, vagy $\leqq 0$, vagy úgy az egyik, mint a másik, azaz $=0$ legyen: olyanok tartoznak lenni a φ és ψ multiplikátorok.

Csupán csak úgy lesz minden nem-negativ r mellett $\geqq 0$ ez a jobboldal, ha

$$\varphi_1 \geqq 0, \quad \varphi_2 \geqq 0, \quad \ldots, \quad \varphi_\nu \geqq 0,$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_1+\psi_1 \geqq 0, \quad \varphi_1+\psi_2 \geqq 0, \quad \ldots, \quad \varphi_1+\psi_\mu \geqq 0, \\
&\varphi_2+\psi_1 \geqq 0, \quad \varphi_2+\psi_2 \geqq 0, \quad \ldots, \quad \varphi_2+\psi_\mu \geqq 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\varphi_\nu+\psi_1 \geqq 0, \quad \varphi_\nu+\psi_2 \geqq 0, \quad \ldots, \quad \varphi_\nu+\psi_\mu \geqq 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

tehát csupán ez alatt a föltétel alatt következik $(5)_1$ és $(5)_2$-ből, a

$$\varphi_1 P_1 p_1 + \varphi_2 P_2 p_2 + \cdots + \varphi_\nu P_\nu p_\nu + \\ + \psi_1 Q_1 q_1 + \psi_2 Q_2 q_2 + \cdots + \psi_\mu Q_\mu q_\mu \geqq 0 \tag{8)'$$

homogén lineáris egész egyenlőtlenség. Ámde mihelyt a (8) fönáll, már ez a (8)' egyenlőtlenség a (6) alatti alakra vezethető, vagyis meghatározhatók úgy a σ, π, χ nem-negativ mennyiségek, hogy legyen:

$$\varphi_1 P_1 = \pi_1 + \sigma P_1, \quad \varphi_2 P_2 = \pi_2 + \sigma P_2, \quad \ldots, \quad \varphi_\nu P_\nu = \pi_\nu + \sigma P_\nu,$$
$$\psi_1 Q_1 = \chi_1 - \sigma Q_1, \quad \psi_2 Q_2 = \chi_2 - \sigma Q_2, \quad \ldots, \quad \psi_\mu Q_\mu = \chi_\mu - \sigma Q_\mu,$$

mert tekintettel arra, hogy minden P és minden Q positiv, ez egyenletek lehetőségének a föltételeit épen a (8) alatti vonatkozások képezik. Tényleg: Ha minden ψ nem-negativ, akkor $\sigma = 0$ tétetvén, minden χ és minden π nem-negativ. Ha van negativ értékü ψ, úgy legyen, hogy ψ_1 negativ és hogy absolut értékre nagyobb negativ ψ, mint ez, nincsen; ekkor tegyük $\sigma = -\psi_1$; világos, hogy minden χ nem-negativ. továbbá az első sorból σ ez értékével $r_1 = (\varphi_1 + \psi_1) P_1$, $r_2 = (\varphi_2 + \psi_1) P_2$, stb. tehát a (8) első oszlopából folyólag minden π is nem-negativ.

Az az eset, a melyben a (7) jobboldala mindig $\leqq 0$, visszavezethető arra, a melyben mindig $\geqq 0$, nevezetesen azáltal, hogy minden φ-nek és minden ψ-nek az előjelét ellenkezőre változtatjuk. Ez az eset tehát nem szorul külön tárgyalásra.

Végre abból a czélból, hogy (7) jobboldala minden nem-negativ r mellett eltünjék, az kellene, hogy minden φ és minden $\varphi + \psi$ eltünjék, tehát hogy minden φ és minden ψ eltünjék. De ezáltal a (7) baloldala megszünik létezni, azaz nem ad egyenletet: homogén lineáris egész egyenlet nem állítható elő az $(5)_1$ és $(5)_2$-ből azzal egyezően, hogy (4)'-ből sem.

6). Miután már a (3) alatti első egyenlőtlenséget a nem-negativ r paraméterek segítségével kifejeztük $(5)_1$, $(5)_2$, vezessük be ezeket a kifejezéseket úgy (2)'-be, mint a (3) többi egyenlőtlenségeibe az s-ek helyett. Ez is megtörténvén, most a (3) helyett hasonló rendszerünk vagyon, mint az eredeti (3), csakhogy a régebbi s nemnegativ paraméterek helyett az újabb r nem-negativ paraméterekre vonatkozik az és egygyel kevesebb (1)-ből származó egyenlőtlenséget tartalmaz. Ezen az új rendszeren ugyanaz az eljárás érvényesíthető s i. t., míg minden (1)-ből való egyenlőtlenség el nem fogyott.

7). Ha már ezen a módon a (2)'-ből kiszámítható u vezérmenynyiségek meghatározvák a többi u-k, mint egészen tetszőlegesek és bizonyos számú nem-negativ tetszőleges paraméterek homogén lineáris egész függvényeiként, akkor úgy határozvák meg, hogy valamennyi (1) alatti relatió, és csakis ezek, vagy belőlük következtethetők identikusan teljesülnek.

A Fourier-féle mechanikai elvnek ezen az alapon való alkalmazása igen egyszerű. Jelentsék az u vezérmennyiségek virtuális elmozdulások componenseit és a Fourier-féle elv analytikus kifejezése legyen:

$$O_1 u_1 + O_2 u_2 + \cdots + O_n u_n \geqq 0.$$

Mindazokkal az u értékekkel állani tartozik ez, a melyek a kényszerkifejezéseket (1) kielégitik. Behelyettesitvén a (2)'-ből kiszámitott u mennyiségek paraméteres alakjait, rendezzük a kifejezést a paraméterek szerint. Az egészen tetszőleges paraméterek coefficiensei eltünni, a tetszőleges nem-negativ paraméterek coefficiensei $\geqq 0$ lenni kötelesek. Kitünik ez, ha egy paraméter kivételével a többit $=0$ írjuk.

Farkas Gyula.

A TÁVOLBAHATÁSOKRÓL.

P. DRUDE-tól.

(Második és befejező közlemény.)

III. Az elektromos-mágneses hatások és a gravitatió részletesebb összehasonlítása.

Mostanában elég általánosságban elfogadott nézet, hogy az elektromos-mágneses hatások tényleg közelbehatásokból állanak. Ellenben a gravitatióról legalább is nem állíthatjuk, hogy ez ki volna mutatva. Miben van a fajlagos különbség a tüneményeknek e két osztálya között?

Első sorban előjelbeli különbségre gondolhatnánk: egyenlő nevű elektromos vagy mágneses töltések taszítják, különnevűek vonzzák egymást, míg sulyamérhető tömegek egymást mindig vonzzák. Valóban úgy vélte MAXWELL, hogy ebben a pontban akadályt lát a gravitatiónak, mint közelbehatásnak felfogására nézve. Miután kimutatta MAXWELL az elektromágneses tér számára annak lehetőségét, hogy az energiát mint a tér egyes helyein localizáltat fogjuk föl, megmutatta, hogy a hatás különös előjele miatt a gravitatió energiájánál hasonló eljárás ahhoz a következtetéshez vezet, hogy az éternek szükségképen roppant nagy energiája lenne zavartalan állapotban, vagyis a gravitatió terén kívül. Azonban az éternek megzavart állapotában, vagyis a gravitatió terén belül ennek az energiának kisebbnek kellene lennie. Úgy látszott előtte, hogy ezt az eredményt elképzelni lehetetlen.

Mindazonáltal ezen eredmény számára az ütközésközvetítésen alapuló gravitatióelmélet közvetetlenül szolgáltat némi képzetet.

Az elmélet szerint (v. ö. az utolsó fejezetben) az éterrészecskék roppant nagy sebességgel röpködnek ide-oda. Ha sulyamérhető anyaghoz ütődnek, mozgási energiájuk csökken. Ezáltal keletkeznek a vonzási tünemények két vagy több súlyamérhető test között. Valóban e szerint kellene, hogy súlyamérhető testek közelében, azaz a gravitatió terében az éter roppant nagy energiájában csökkenést szenvedjen. (Mindenesetre részeinek mozgási energiájából, mely egyedül jöhet tekintetbe a gravitatiós hatásnál).

Ezek szerint az előjelbeli különbség még nem állapitana meg olyan nagy fajlagos különbséget egyrészt a gravitatió, másrészt az elektromos-mágneses hatások között, hogy az előbbieket nem foghatnók fel közelbehatásokul, de igenis az utóbbiakat. Inkább azt a pontot vonhatnók ide, hogy az elektromos-mágneses hatások a körülvevő közegtől függenek, de a gravitatió nem. A mint már fennebb a 41. lapon megbeszéltük, ama tünemények ugyan kényelmesebben leírhatók közelbehatás itörvényekkel, mint a távolbahatás törvényeivel, de ők maguk nem adnak támaszpontot ahhoz, hogy vajjon a körülvevő súlyamérhető közeg polározódásán kívül nem működik-e valami elektromos-mágneses, csupán távolbaható erő. Mindamellett Maxwell elő tudta állítani az elektro- és magnetostatikai erőket az egész térben, mint a feszültségi állapot egyik faját olyan képletekkel, melyek a rugalmasság elméletének mintájára vannak alakítva.*

Azonban ezek teljességgel nem szükségesek, azaz az összes tüneményeket, a melyek súlyamérhető testeken elektromos vagy mágneses térben észlelhetők, számítás alá vethetjük épen olyan jól, sőt még sokszor közvetlenebb módon,** a súlyamérhető részek

* Mindamellett fajlagos különbségek vannak eme képletek és azok között, a melyek valamely isotrop rugalmas közeg magaviseletére érvényesek. E. Beltrami mutatta ki, hogy csak igen-igen ritka esetekben tekinthetők ezek a Maxwell-féle feszültségi állapotok úgy, mint isotrop rugalmas közeghez tartozók.

** Sőt gyakran hibák is keletkezne k a Maxwell-féle feszültségi képletek alkalmazásával, ha közvetetlenül azonosítjuk azt a nyomást, a mely elektro- vagy magnetostatikai térben súlyos test felületére hat, azzal, a melyet az éter, Maxwell szerint, reá gyakorol. (Így pl. Poincaré «Électricité et Optique» I.-ben is.)

polározódása képzetének segítségével, vagy röviden: a régi elmélettel.

Csupán akkor mutatkozik a merő távolbahatás elégtelensége elektromos-mágneses hatásoknál, ha időben igen gyorsan váltakozó állapotokat veszünk tekintetbe. Ellenben ezt nem állithatjuk a gravitatióra nézve, talán abból az okból, mivel itt időbeli változó állapotok csak súlyamérhető tömegek relativ mozgása által teremthetők (és nem mint az elektromosságnál az úgynevezett súlyamérhetetlen töltések mozgása által). Amaz pedig nem történik elég gyorsan, vagy kisérlettel nem valósitható meg.

HELMHOLTZ kimutatta olyan kisérlettel, a melyet a mágneses térben forgó vezető felületén képződő elektromossággal tett, hogy az elektromos polározás elektromos mozgás, a melynek intensitása és elektrodynamikus hatása egyenlő értékű azzal az árammal, a mely a vezetőnek illető darabját megtöltötte. Ezt a kisérletezést HELMHOLTZ FARADAY emlékbeszédében kifejezetten mint a Faraday-Maxwell-féle elektromos elmélet javára döntőt emliti.

Tényleg, mivel HELMHOLTZ kisérletében a körülvevő levegő jelenléte csak mellékes dolog és mivel annak épen úgy kellett volna vacuumban is sikerülnie, ebből a kisérletből arra következtetünk, hogy egy súlyamérhető test elektromos töltésének változásakor a körülvevő vacuumban is jőnek létre állapotváltozások. Ilyen magatartás közelbeható erők föltevésére indit. (V. ö. fennebb 29. lap.)

Valószinüleg ez a kisérlet mutatta ki először tapasztalati úton a MAXWELL-féle úgynevezett eltolódási áramoknak létezését. Tisztán elméletileg is kiadódik szükségességük, ha MAXWELL alaptételéhez tartjuk magunkat: «csakis zárt áramok léteznek.»

Ezt az alaptételt levezethetjük tisztán az elméletből is. Jelezni akarjuk ezt itt, mert ez a tétel a leglényegesebb alapköve MAXWELL elméletének. Ha két, elektromossággal töltött vezetőt kisütünk őket dróttal kötvén össze, akkor ebben mindenesetre időbelileg igen gyorsan változó áram folyik. Vegyünk szemügyre valamely rövid időpillanatot, a mely alatt az áramot állandónak tekinthetjük. Valamely mágneses sark, ha a drót körül C zárt görbén viszszük, zérustól különböző positiv vagy negativ munkát fog végezni.

Ez a munka, STOKES tétele alapján, mindig kifejezhető egy integrállal olyan S felületre kiterjesztve, a melyet C görbe szegélyez. Ennek az integrálnak az elemei a mágneses erő örvény-componensei, azaz olyan mennyiségek, a melyek a térnek ama helyein különbözők a zérustól, a melyekben a mágneses erőnek nincsen potentiálja. Ebből hát szükségképen következik, hogy bármilyen módon szerkeszszük az S felületet, mindig metszeni fogja a mágneses erőnek legalább is egy örvényhelyét, mert különben a C görbementi munka nem lehetne a zérustól különböző. Ezért a mágneses erő örvényhelyei mindig gyűrűsen záródnak a (zárt) mágneses erővonalak körül. Ha tehát megengedjük azt a tételt, hogy a mágneses erő minden örvényhelyét olyanul jegyezzük, a melyen át elektromos áram folyik, úgy be van bizonyítva az a tétel is, hogy csupán zárt áramok léteznek. Azonban ha tagadjuk ezt a tételt, akkor egyik szükségképeni következés, hogy legalább a vacuumnak egyes helyein, a melyek az elektromos áram átfolyta helyeken kívül feküsznek, a mágneses erőnek nincsen potentiálja. Olyan tétel, a melyet még egyetlen elektromos elmélet sem állított fel eddigelé, és valószínűleg aligha fog valamikor felállítani.

Az elektromosságnak MAXWELL-féle közelbehatási elmélete igen lényeges kisérleti megerősítést talált a HERTZtől végzett kisérletekben, a mennyiben ki lőn mutatva az elektrodynamikai és az elektroinductiós hatások véges terjedési sebessége. Már fennebb (33. lap) hangsúlyoztuk, hogy merő távolbahatásnak nem lehet véges terjedési sebessége. Viszont, ha valamely hatásról kimutatjuk, hogy terjedési sebessége véges, ez csakis úgy gondolható, hogy a térben, a melyben a hatás tova terjed, bizonyos állapotváltozások jőnek létre, vagyis a hatás közvetített.

Analog módon, a mint a súlyamérhető testeknek dielektrikumos viselkedésük leirására tesszük, a vacuumnak mindenesetre azt a képességet kell tulajdonitanunk (ama HERTZ-féle kisérletek szerint), hogy elektromos térben polározódik, mivel a levegő jelenléte azoknál a kisérleteknél lényegtelen. Csak még az kérdéses, vajjon az éter polározódásával közvetített hatáson kivül nem marad-e fenn merőben elektromos távolbahatás számára valami maradék. Mivel véges terjedési sebessége nem lehet, abban kellene neki mutatkoznia HERTZ-nek a levegőben álló elektromos hullámokon tett kisérleteinél, hogy megakadályozná tökéletes csomóknak, azaz a hatás teljes zérushelyeinek létrejöttét. Azonban, mivel tökéletes csomókat soha nem kaphatunk, már azért sem, mert a rezgések időbeli csillapodását kisérletileg soha el nem lehet kerülni, nem nyerhetünk ebből kisérleti segédeszközt valamelyes távolbahatásoknak kiküszöbölésére. De igenis sikerül ez az utóbbi, ha ama HERTZ-féle kisérleteknél megmérjük számszerint pontosan a hatás tovaterjedésének sebességét (szabad levegőben és nem fémdrótok mentén). Ha épen pontosan az elektrostatikusan mért elektromos tömegegységnek az elektromágnesesen mérthez való viszonyát, v-t nyerjük ezen sebesség számára, akkor a számítás azt adja ki, hogy az a legáltalánosabb HELMHOLTZ-féle elektromos elmélet visszavezethető a MAXWELL-félére. Azaz: akkor ki van zárva a tiszta távolbahatásnak minden maradéka. Ebben rejlik az a nagy érdek, a mely hozzáfűződik az elektromos hullámok levegőben való terjedési sebességének megmérésére tett kisérletekhez. Az eddigi kisérletek szerint legalább is közel az a v viszonyszám adódik ki a terjedési sebesség számára. Úgy hogy ebben is további kisérleti erősséget láthatunk a MAXWELL-féle közelbehatási elmélet mellett.

A gravitatiónál nem találunk olyan tényeket, a melyek egyenesen késztetnének közelbehatások föltételezésére. Ilyenek fölfedezésére számos kisérletet tettek, de mindeddig semmi, vagy fölötte kétséges eredménynyel. Azok számára, a kiket kevésbbé philosophiai, mint inkább gyakorlati principiumok vezetnek, talán nagyobb érdekűek lesznek a gravitatiónak valamely eddig ismeretlen viselkedésének fölfedezésére irányuló kisérletek, mint maguk a gravitatiónak eddigi közelbehatási törvényei. A következő fejezetben ezeket a kisérleteket fogjuk ismertetni.

IV. Vizsgálódások Newton gravitatió-törvényének érvényességéről.

a) A tovaterjedés sebessége. Annak fölfedezése, hogy a gravitatió terjedésének sebessége véges, igen nagy jelentőségű volna arra, hogy közelbehatás gyanánt fogjuk fel. Arra, hogy valami terjedési sebességet megállapithassunk, olyan eseteket kell vizsgálnunk, a melyekben a gravitatió erőssége időbelileg változik. Mivel pedig bármely testnek tömege mindig változatlan, csak a testek gyors relativ mozgásai jöhetnek itt tekintetbe. Valóban meg is kisérlették, hogy az égi testek mozgásából következtetést vonjanak a gravitatió terjedésének sebességére, a midőn kivált százados változások befolyását tárgyalták, mert csakis ez érhet el megfigyelhető nagyságot. Azonban még különféle nézetben lehetünk arról az útról-módról, a melylyel bevezessük a számításba a terjedés véges sebességének befolyását. Részben LAPLACE eljárása szerint analog módon történik ez, mint a hogy meghatározzuk az aberratióból a fénysebességnek a föld sebességéhez való viszonyát. Ilyen képzet szerint a gravitatió terjedésének véges sebessége mellett az égi testek mozgásában háborgató componens jőne létre, mely merőlegesen áll az égitestet a Nappal összekötő egyenesre, és arányos a saját sebességének a gravitatió terjedésének sebességéhez való viszonyával.

Így következtette először LAPLACE a Hold mozgásából, hogy a gravitatiónak legalább is 10 milliomszor gyorsabban kell terjednie, mint a fénynek. Azonban ennek a következtetésnek nem szabad igen nagy fontosságot tulajdonitanunk, számbavévén a nehézséget, a melyet a holdmozgásnak mathematikai számitása már a normális háborgás componensének nagy befolyása miatt is nyújt. Azonkívül LAPLACE számitásának mathematikai föltevése sem áll jogosultságára nézve minden kétségen kivül.

A természetvizsgálók salzburgi nagygyűlésén (1881) tartott előadásában TH. V. OPPOLZER ahhoz a következtetéshez jutott, hogy a Hold elméletének tökéletlen volta miatt ez még nem szolgálhat próbakőül a NEWTON törvényéről való finom vizsgálódások számára. Inkább lehetséges ez a bolygók mozgásának háborgásaiból. Így a

Merkur, az Encke és Winnecke üstökösei mozgásainak anomáliái nem magyarázhatók meg a Nap és a többi bolygók gravitatiójának pillanatnyi terjedésével. Le Verrier szerint a Nap közelében valószíleg valamely kicsiny tömeg háborgatja a Merkurt. Oppolzer pedig lehetségesnek tartja, hogy a világtérben igen finom eloszlású háborgató tömegek léteznek. Hiszen ezt a ködfoltoknak, a coronának, az állatövi fénynek létele is valószínűvé teszi. Ilyen tömegek megmagyarázhatnák a bő anomáliákat a Merkur és az Encke üstököse mozgásában, a nélkül, hogy Newton törvényétől, annak közönséges fogalmazásában, eltérnünk kellene. Ehhez a véleményhez csatlakozik Tisserand is.

A Winnecke-féle üstökös anomáliájának megmagyarázására megközelítőleg elég lenne föltételeznünk, hogy a gravitatió terjedésének sebessége véges. Azonban ez a bolygókban túlságos nagy háborgásokat okozna, a milyeneket nem figyelünk meg. Záradékul még figyelmeztet Oppolzer oly aggodalomra, a mely az összes százados háborgások megitélésénél szem előtt tartandó. Nincs semmi biztosítékunk arra, hogy időmértékünk folytonosan szigorúan állandó maradt. Az árapály hulláma meghosszabbíthatta, a Föld összehúzódása megrövidíthette a nap tartamát.

Lehmann-Filhès-nek (a Laplace-étől eltérő) számításbeli föltevésénél az a nehézség áll elő, hogy a Napnak térbeli absolut mozgása fontos annak megitélésére nézve, milyen befolyása van a gravitatió véges terjedési sebességének. Mindenesetre levezethető az az általános eredmény, hogy az utóbbi föltételezésével ugyan megmagyarázhatók az anomaliák a bolygók periheliumának elmozdulásában, de biztos következtetések így sem nyerhetők. A Laplace-éhoz hasonló számításbeli föltevéssel J. v. Hepperger ahhoz az eredményhez jut, hogy a gravitatió szükségképen legalább is 500-szor gyorsabban terjed, mint a fény, mert különben ellenmondások jönnének létre az astronomia tényeivel.

Jó áttekintést adott ezekről az itt és a következő szakaszban megbeszélt vizsgálódásokról Oppenheim.* Ezen szerző a földpályá-

* S. Oppenheim: «Zur Frage nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation». (Jahresbericht über das k. k. akad. Gymn. in Wien, 1894—95.)

nak középhosszúságából azt számítja, hogy a gravitatió terjedésének sebessége legalább is 12 milliomszor nagyobb, mint a fénysebesség.

b) A törvény alakja. A Merkur periheliuma százados háborgásának megmagyarázására többször tettek próbát a NEWTON-féle törvény alakjának változtatásával.

Mindenekelőtt olyan számításokat említek, a melyek az ismertebb elektrodynamikai erőtörvények egyikét használják föl (pl. a WEBER-, RIEMANN-, CLAUSIUS-, GAUSS-félét).

Ezeket a számításokat bizonyos mértékig arra való kisérleteknek tekinthetjük, hogy a gravitatió terjedési sebességének véges voltát mutassák ki, de a számításnak más kiindulás-pontjának segítségével, mint a hogy *a)* alatt mondottuk. Mert már GAUSS mondotta ki azt a gondolatot, hogy az elektrodynamikai erőket a statikai hatás terjedésének véges sebességéből kell levezetnünk. Erre kisérleteket tett RIEMANN és (több eredménynyel) C. NEUMANN. Ilyenszerűleg kibővített erőtörvény alapján a bolygók mozgásának számítását végrehajtották HOLZMÜLLER, TISSERAND, SERVUS, LOEWY. Ezekből a törvényekből levezethetők a perihelium mozgásának anomaliái. Azonban ha az úgynevezett kritikus sebességnek, a mely ezekben a törvényekben előfordul, a fénysebesség értékét adjuk, akkor sem WEBER, sem RIEMANN, sem GAUSS, sem CLAUSIUS törvénye szerint nem következik a Merkurnak eddig meg nem magyarázott százados perihelium-mozgása a megfigyeléssel megegyező teljes értékben (körülbelül 41″).* Ha azonban ennek az utolsó értéknek elérésére azt a kritikus sebességet még érezhetően kisebbre vennők, mint a fénysebességet, akkor a többi bolygók számára eddig meg nem figyelt anomáliák következnének. Csak

* WEBER törvénye csak $^3/_8$-át, GAUSS-é $^3/_4$-ét adná a Merkur megmagyarázatlan perihelium-mozgásának. Azonban ez a törvény, melyet csakis G. hagyatékából merítettek, nem birhat egyetemes jelentőséggel, mert nem egyezik az energia megmaradásának principiumával. Nem is magyarázza meg az indukált áramok tüneményeit, mert benne nem jőnek elő relativ gyorsulások. G. a maga törvényét csak elektrodynamikai tüneményekre alkalmazta. RIEMANN törvénye ment mind a két hiányosságtól.

Weber és Riemann törvényeinek bizonyos combinálásával számíthatjuk ki a Merkur mozgásának anomaliáját, a mint Loewy megmutatta, a nélkül, hogy a többi bolygóknál a megfigyeléssel ellenmondáshoz jutnánk.

Más módon fogott hozzá Hall a Merkur perihelium-mozgásának megmagyarázásához. Már Newton megjegyezte a «Principia»-ban, hogy perihelium-mozgás lép föl, ha a négyzet helyett a távolságnak ettől kissé eltérő hatványát veszszük föl az erőtörvénybe. Hall megmutatja, hogy a 2·00000016-ik hatvány a Merkur perihelium-mozgását meg tudja magyarázni.

Azonban az összes megnevezett számításokból nem derül ki, hogy a gravitatió törvényének Newton-i alakja szükségképen javítandó volna, minthogy a mint a 78. lapon említettük, a Merkur periheliumának mozgása még más módon is megmagyarázható. Merőben más nézetekből indulva ki, nevezetesen bármilyen tapasztalati tény felhasználása nélkül, hanem csakis elméleti okokkal tették valószínűvé C. Neumann és H. Seeliger, hogy a gravitatió-törvénynek eddigi alakja nem fog beválni egyetemes törvényül. Nevezetesen: föltévén, hogy az egész világegyetem csillagokkal van behintve, ezeknek gravitatiós hatása valamely belső testre, pl. a Földre határozatlan lenne. Minthogy a hatás egyenlő volna azzal, a melyet végtelen nagy, mindenütt véges sűrűséggel rakott gömb belső pontra gyakorol. Ez a nehézség eltünik, mihelyt a potentiálnak ezt az alakot adjuk:

$$V = \frac{A \, . \, e^{-\alpha r}}{r} + \frac{B \, . \, e^{-\beta r}}{r} + \cdots$$

a hol A, B tetszés szerinti: α, β . . . positiv constansok. Neumann vizsgálatai szerint a potentiálnak ilyen alakja az egyetlen, a melyik adott conductoron egyetlen elektromos nyugalmi állapotot enged meg. Mivel α, β tetszés szerinti kicsinyek lehetnek, a potentiál eltérése a Newton adta alakjától a bolygó rendszeren belül egészen észrevehetetlennek tartozik maradni. Vajjon Newton törvénye igaz-e a bolygórendszeren kívül is, azt eddigi tapasztalatokból * még

* Itt csak a kettős csillagok mozgásai jöh··nek tekintetbe.

tényleg nem vonhatjuk le teljes bizonyossággal. Megszüntetné az épen említett nehézséget a SEELIGER föltételezte erőtörvény is:

$$K = \frac{mm'}{r^2} e^{-\lambda r} \text{*}$$

Sőt már $\lambda = 38.10^{-8}$ értékkel egyszerre kiszámíthatnók a Merkur periheliumának mozgását is. Azonban λ-nak ez az értéke Marsnál túlságos nagy, meg nem figyelt perihelium mozgást okozna.** Ezért azt következteti SEELIGER, hogy a Merkur perihelium-mozgása más, közelebb levő okokban fogja magyarázatát találni. A bolygó rendszer pedig kevésbé kiterjedt, semhogy szükségessé tenne NEWTON törvényén valami javítást, de a világegyetemre való kiterjesztés alkalmával lehet, hogy módosítandó lesz. Érdekes, hogy a gravitatiónak némely kinetikai elméletei szerint a NEWTON törvényének változás nélküli alkalmazása kétségbe vonandó. Ezt fogjuk a legközelebbi fejezetben megbeszélni.

R. PICTET úgy hiszi, hogy kijelölhet oly kisérleti útat, a melyen lehetséges dönteni a gravitatiónak távoli erő vagy közelbehatás képen való fölfogása között, legalább ha ezt az utolsót, mint ütközés-közvetítést fognók fel. Utóbbi esetben a világegyetem energiája tisztán kinetikai természetű. Egyik része T_1, a súlyamérhető testek kinetikai energiája, a másik része T_2, az éter kinetikai energiája. Az energiamegmaradásnak principiuma azt követeli, hogy ha az égi-testek bizonyos állásánál T_1 csökken, T_2 ugyanazzal az értékkel nagyobbodjék. Mivel a közelbehatásnak emez elmélete szerint a gravitatió tüneményeinek oka az éter kinetikai energiája, ennélfogva nagy T_2 (azaz kicsiny T_1) mellett a szabad esés gyorsulása nagyobb, mint kicsiny T_2 (azaz nagy T_1) mellett. Mivel pedig PICTET a bolygó-rendszert önmagában zártnak tekinti (= összes energiája állandó), T_1-et egyenlőnek veszi a bolygóknak a Naphoz való relativ mozgásuk kinetikai energiájával és kiszámítja az 1919 évig ennek a T_1-nek szélső változásait. Ha a gravitatió ütközés által

* Ellenben HALL-nak módosítása nem szüntetné meg a nehézséget.

** Ezt az eredményt adná NEUMANNnak legegyszerűbb törvénye is.

való közvetitésének elmélete megegyezik a valósággal, változásokat kellene észlelnünk a szabad esés g gyorsulásában, vagy ezekkel a változásokkal egyszerre, vagy bizonyos phasisbeli késéssel (nevezetesen, ha a gravitatió terjedésének sebessége véges lenne). Ellenben a tiszta távolbahatás elmélete szerint g-nek T_1 értékétől függetlennek, absolut állandónak kellene lennie (ha kihagyjuk a Nap és a Hold befolyását).

Nézetem szerint Pictet-nek utolsó következtetésében rejlik a hiba. Mert az utóbbi esetben is kell g-nek T_1-gyel principiumszerüleg változnia. Ugyanis g átlagosan annál kisebbé lesz, minél sűrűbben csoportosul az egész bolygórendszer a Nap (vagy a Föld) körül, minthogy ekkor a többi bolygók befolyása (átlagosan) a Föld vonzásának lehetőleg ellene működik. Ebben az esetben az egész bolygórendszer helyzeti energiája minimum, tehát a kinetikai energia T_1 maximum. Tehát a távolbahatás elmélete szerint is g-nek T_1-gyel ugyanazon értelemben való változása jönne ki eredményül, mint az ütközésközvetítés elmélete szerint. Általában nem is található a két elmélet megfigyelhető eredményeiben ezekből az okokból különbség, legalább akkor, ha a kinetikai elméletet a tényekkel megegyezőleg teljesen kifejlesztik, a mi nem könnyű feladat. Mert a közelbehatás elméleténél az éter kinetikai energiája T_2 teljesen azt a szerepet játszsza, mint a távolbahatásnál a bolygórendszer helyzeti energiája. Utóbbi nézet csak annyiban bir elsőséggel az előbbi előtt, hogy könnyű szerrel megengedi a g várható változásainak kiszámitását. Kell, hogy ezek igen kicsinyek legyenek arra, hogy megfigyelhessük őket, mert már a Napnak és Holdnak befolyása g-re igen csekély. Ezért hát hasznavehetetlen is a javaslat a gravitatió terjedése sebességének kikutatására. Legalább is pontosságban jóval elmaradna ez az út ama következtetések mögött, a melyeket a bolygók százados pályaváltozásából vontak.

Vajjon a gravitatió független-e a kristályos testek (mészpátgolyók) irányulásától, erre nézve subtilis kisérleteket tett A. St. Mackenzie. Éppenúgy Kreichgauer arra vonatkozólag, vajjon chemiai reactióknál vagy halmazállapotváltozásnál változatlan-e a súly? Bár kevés reményt adnak ilyenféle kisérletek váratlan eredmény elérésére annál is, a ki a Newton gravitatiótörvényének igazságában mint axiomában nem* hiszen, mégis nagyon jó, hogy ilyen irányban is kezdettek subtilis próbákat. Kivált ilyen kisérleteknél várható lett volna a kinetikai gravitatiós elméletek szerint a gravitatiónak valami minimális módosulása.

V. A gravitatió magyarázatára tett eddigi kisérletek.

Itt következőleg azokat az elméleteket beszéljük meg, a melyek a gravitatiót közelbehatásokra akarják visszavezetni. Itt többről, mint formális visszavitelről van szó (v. ö. fennebb 43. lap), nevezetesen arról, hogy a gravitatiót közvetítő hatásokról többé-kevésbbé részletezett mechanikai hasonlatokat szerkeszszünk.

a) Nyomás-közvetítés. Ezen a czímen azokat az elméleteket soroljuk fel, melyek a gravitatió megmagyarázására nem vonják bele különálló, szabadon lebegő éter-részecskéknek összeütközését. Ezek az elméletek sokszor phantastikusok, közülök csak igen kevés van valamennyire következetesen mathematikailag kifejtve, vagy általában igen keveset lehet ellenmondás nélkül kifejteni. Ez utóbbiak nak részleteibe bocsátkoznom annyival kevésbbé szükséges, a mennyiben a számos régibb elméletről W. B. Taylor az 1876-iki Smithsonian report 205. lapján «Kinetic Theories of Gravitation» cz. czikkelyében átnézetet és birálatot adott. Az újabbakról (1870-től 1879-ig) szól C. Isenkrahe «Das Räthsel von der Schwerkraft» cz. könyvében (Braunschweig, 1879).

Hooke már 1671-ben a környező közegbeli hullámok hatásából akarta megmagyarázni a gravitatiót.

Nyomási elméleteket, részint forgó mozgás vagy longitudinalis hullámok belevonásával, még igen sok szerző körvonalazott. Ezek közül megemlítjük a következőket: Huygens, J. Bernoulli, Euler, P. A. Secchi, P. Tannery.

Ezek az elméletek jórészt annyira határozatlanul vannak kör-

* A *nem* szó hiányzik az eredetiben. De minden valószínűség szerint sajtóhiba. *(Ford.)*

vonalozva, hogy alig tűrnek el kritikai vizsgálatot arra nézve, vajjon megállhatnak-e, jórészt egyáltalán nem is tűrik meg azt.* Mindenesetre ezen elméletek egyike sem ad a gravitatió létrejöttéről teljesen kielégitő, elképzelhető hasonlatot.

Bizonyos hydrodynamikai elméletek legalább következetes mathematikai kifejtést engednek meg. Ismeretes, hogy összenyomhatlan folyadékok hydrodynamikájában szintén a gravitatió közelbehatási törvényéhez:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=4\pi\rho$$

jutunk, ha X, Y, Z-t, mint a zavarás componenseit, ρ-t, mint egy forrás- vagy sülyedési-hely intenzitását fogjuk föl. Ennek a gondolatnak Riemann több mint alakszerinti jelentőséget tulajdonit, a mennyiben azt a hypothesist állitja fel, hogy a tért betöltő anyag (éter) tehetetlenség nélkül való, összenyomhatlan folyadék és hogy minden súlyamérhető atomba egyenlő időközökben abból mindig egyenlő, saját tömegével arányos mennyiségek áramlanak be és ott eltünnek. A gravitatió tüneményei azután az éter nyomásából volnának megmagyarázandók. Ezzel a Riemann elméletével rokon a Helm-é. Helmnek képzetei ugyan a Riemann-éinál bonyolultabbak, de a mellett elkerüli annak föltevését, hogy anyag tünik el. Helm szerint az éter súlyamérhető molekulákban csepegős, kivülük úgy viselkedik, mint merev test, a mely minden molekulától feszülést szenved; ez arányos azoknak tömegével. A súlyamérhető testekre gyakorolt erő arányos és megegyezően irányult a szomszédos éter-elemek elmozdulásaival. Ebből azután következik Newton törvénye.

Jarkovski (orosz) elmélete még közelebbi rokonságban van Riemann-éval. Épen úgy mint Riemann-nál, az éter beáramlik az anyagba, de ott nem tünik el, hanem anyaggá, azaz: chemiai elemekké sűrűsödik. Tehát valamely bolygónak tömege folytonosan

* V. ö. Taylor és Isenkrahe fennebb emlitett kritikai átnézetét; utóbbinak még egy czikkelyét: Zeitschrift für Math. u. Physik. 37. 163. l. Suppl. 1892.

nő, de vonzó ereje nem, mert emez a szerző szerint csakis az éter beáramlásának intenzitásától függ. Azonban e mellett elnézi, hogy az áramlás intenzitása nyilván arányosnak veendő a tulajdonképeni anyaggal. Tehát ez az idővel mégis növekednék s innen a gravitatió is. Az elméletnek más, még phantastikusabb pontjaiba nem bocsátkozom.

Bjerknes hydrodynamikai vizsgálatait több izben próbálták értékesiteni, úgy is, mint a gravitatiónak, valamint az elektromos-mágneses távolbaható erőknek hasonlatait. Összenyomhatlan folyadékban egyenlő rezgési idővel és phásissal lüktető gömbök, a Newton törvénye értelmében vonzzák egymást, ha méreteik távolságukhoz mérve igen kicsinyek. Ha rezgéseik phásisai épen ellenkezők, akkor taszítják egymást. Ugyanezt a problemát tárgyalták még Stokes, Hicks, Pearson, Basset, Riecke, Voigt. Az elektrostatikai hatás megmagyarázására akadályozó az előjel, a melylyel ezek a hydrodynamikai erők fellépnek. Több izben változtatták a föltevéseket, hogy az előjelek megfordulását elérjék. Schwedoff úgy vélte ezt az eredményt elérhetni, hogy az összenyomhatlan folyadékot összenyomhatóval pótolta. Backlund megváltoztatta a gömbök lüktetésének alakját. Azonban Korn mindkét eredményt kifogásolta. Ez utóbbi ezt az eredményt az által iparkodik elérni, hogy a gömböket likacsos felületűnek teszi fel, a melyen át az összenyomhatatlan folyadék szakaszosan ki- és beáramolhatik. Azonkívül a gömbök felülete még lüktetéseket is végez. Leahy * megmutatta, hogy szilárd, rugalmas közegben az előjelnek megfordulása lehetséges.

Az elektrodynamikai távolbahatás utánzására szolgálnak lüktető gyűrűk stb. Nem titkolhatjuk el azonban, hogy ámbár mindezek az elméleti és kisérleti kutatások nagy hydrodynamikai érdekkel birnak, de nem elégítenek ki teljesen az éterbeli távolbahatások ma-

* Leahy: Cambr. Phil. Trans. 14. (1) 45, 188 l. 1885. Itt még arra is felhívja a figyelmet, hogy valamely, még igen kevéssé is összenyomható folyadékban nagy távolságban (a mely a közeg fél hullámának hosszúságát felülmulja) a tömegmozgató erők előjelének meg kell fordulnia. Ezért tehát esetőleg a naprendszeren kívül a tömegvonzásnak előjele megváltozhat.

gyarázatában. Mindenekelőtt az elektromos inductió hatásait nem adják ki és nem érik el az elektromos elmélet MAXWELL-HERTZ-féle alapegyenleteivel való azonosságot. Sőt még, ha csak a gravitatió megmagyarázásába akarnók belevonni ezeket a hydrodinamikai kisérleteket, akkor is igen mesterkélt föltevés az olyan lüktetés, a mely az összes súlyamérhető részecskékben egyenlő periodussal és phasissal történik s a hőfoktól nem függ.

Általában a gravitatió magyarázatára való minden hasonlat, a mely folytonos rezgéseket használ, egyszerűség tekintetében hátrább áll, mint az ütközésközvetités most megbeszélendő hasonlatai. Mert rezgéshez mindig szükséges valamely erő, a mely a nyugalmat fentartja és a tehetetlenségnek (vagy ön-inductiónak) valamely faja. A meddig ebből a tekintetből a rezgés keletkezését közelebbről meg nem világitjuk, a nehézségi erő rejtélyét csupán egy más, bonyolultabb, mesterségesen teremtett rejtélylyel pótoltuk.

b) Ütközés közvetítés. Az elméletek itt megbeszélendő osztályának megalapítója LE SAGE.* Szerinte a végtelenségből (világontúli, ultramundan) testecskék áramlanak különböző irányokból. Anyagi testekre találva azokra ütést gyakorolnak, valamivel kisebbedett sebességgel tovább mennek.** Nyugalomban marad teljesen magában álló anyagi test, mert az ultramundan részecskéknek taszitásai minden oldalról egyenlő erősséggel hatván, egymást kölcsönösen semlegesitik. Azonban két anyagi test A és B egymás felé üzetik, mert az A test a B testet részben födi az A felé néző oldalon. Könnyen belátható, hogy ez az ernyőszerű hatás, tehát az A és B közötti látszólagos távolbahatás szükségképen a kölcsönös távolságnak négyzetével fordított arányosságban van.*** Nagyobb nehézségeket

* LE SAGE: «Lucrèce Newtonien» Mém. de l'acad. Roy. de Berlin, 1782.

** Hogy ez miként gondolandó a testeknek lejebb megmagyarázott likacsosságából következik.

*** Néhány physikai könyvben az az állítás található, hogy minden erő, a mely a térben folytonosan terjed, arányos $\frac{1}{r^2}$-vel. Azonban csak akkor volna megengedhető ez a következtetés, ha szabad volna állandónak venni a minden kiterjedési felületen jelenlevő összes erőt (a felület normálisának irányában véve). Ez a föltevés az energia elvével teljességgel nem igazolható és talál-okoz az erőnek a két A, B test tömegeivel való arányossága. Minden elmélet, a mely ütközés-közvetítésen alapul, első sorban olyan hatást eredményez, a mely a test felületével arányos. Arra, hogy a tömeggel való arányosságot nyerjenek, fölveszik, hogy a súlyamérhető testek a hozzájuk ütődő éteráramlattal szemben roppant likacsosak, a mennyiben minden test igen kicsiny molekulákból vagy atomokból áll, viszonylag igen nagy közökkel. Hogy megérthessük, miképen alakulnak a súlyamérhető legkisebb részecskék összefüggő képződménynyé, azt gondolhatjuk, hogy szilárd pálczácskák kötik egymással össze. Így nyerjük az anyag képéül az ú. n. szekrényes atomokat. Ezért igen sokszorta több éteratom (világontúli testecske) hatolna az anyagon keresztül, mint a mennyi reá pattan. Az ütközés hatása még mindig arányos volna a talált felülettel; azonban meg kell különböztetni valamely testnek valódi felületét látszólagos felületétől. Az előbbi arányos az atomok számával és ezzel együtt a tömeggel, azaz a súlyamérhető testnek olyan tulajdonságával, a mely a látszólagos felülettől független, állandó.

Le Sage elméletében a súlyamérhető testen áthaladt éteráramlatok vesztettek energiájukból. Legelőbb is úgy gondolhatnók, hogy ez azért történik, mivel az éteratomoknak aránylag mindenesetre kicsiny száma anyagi atomokon visszaverődik.* Ezt a meggondolást Le Sage egyszerűen figyelembe sem veszi; ezért hát, mint Vaschy megjegyzi, Le Sage elmélkedése nem szigorú. Két anyagi testnek (A, B) kölcsönös ernyőszerű hatása részben, sőt valószinűleg egészen is ellensúlyozható A és B egymás felé fordított oldalai-

---

hatunk tényleg eseteket (pl. a molekuláris mágnesnél), a melyekben az erő nem arányos $\frac{1}{r^2}$-vel. Ilyen deductiv következtetés tehát hamis, és például a Coulomb törvényének, mint tapasztalt ténynek alapvető jelentőségét nem pótolhatja semmiféle elméleti ok. Maxwell vagy Faraday erővonalainak fogalma is tiszta tapasztalati tényeken alapul.

* Ezeknek az éteratomoknak energiájából csak egy törtrészt kellene levonni, nevezetesen azt, a melyik a hátrafelé visszavert atomokra vonatkozik. A nagyon ferdén visszavert atomok ellenben mégis az átáramló éter energiájához adnának járulékot.

nak visszaverő hatása által.* Le Sage elmélkedéséből a világegyetem energiájának folytonos csökkenése adódnék ki és tényleg Le Sage szerint a gravitatiónak véget kellene érni.

Már most, hogy az energiamegmaradás principiumával egyetértésben maradjunk, és mégse kapjuk teljes ellensúlyozását két test ernyőszerű hatásának a visszaverődés hatásával szemben, W. Thomson azt a föltevést teszi, hogy az éteratómoknak anyagi atómokon való visszaverődésénél csak az előrehaladási energia szenved csökkenést, a mi magában jő tekintetbe a gravitatió számára. Ellenben ez az energiakülönbség átváltozik az éteratomok fokozott belső energiájává (forgó és rezgő mozgássá). Eme visszavert atómokban, más éteratomokhoz való ütközés alkalmával lassanként helyre áll a rendes viszony előhaladási és belső energiájuk között. Mert Maxwell a kinetikai gázelméletnek azt a tételét találta, hogy stationarius állapotban állandó viszonyok jőnek létre az egyes energia részletek között.

Le Sage elméletének Thomsontól eredő módositása szerint tehát megmaradna az energia, s a gravitatiónak sem kellene lassanként az idővel csökkennie. De megjegyzendő, hogy ő már az éteratómokat is testi képződményekül fogja fel, hiszen haladási energián kívül még belső (forgási és rezgési) energiával is kellene birniok. Thomsonnak felfogása szerint, hogy minden atom örvénygyűrű, természetesen megengedhető belső energiának a lehetősége. Azonban itt csak azt kell emlékezetbe idéznünk, hogy már anyagi molekulák számára is következtették a kiterjeszthetetlenséget, azaz belső kinetikai energiájuk hiányát (pl.: a kénesőgőznél) a fajmelegek viszonyszámából. Ez a következtetés a kinetikus gázelméletnek bizonyos képzetein alapul, a melyek épen ebben a körben jó kisérleti

---

* Kimeritő mathematikai analizisét ennek a pontnak nem találhattam. Annyival kevésbbé látszik ez feleslegesnek, mivel A. Jarolimek a molekuláris erőket visszaverődéses hatásukból akarja megmagyarázni. (Wien. Ber. (2) 88. 897 l. 1883.) Maxwell is (Encyclop. Brittan. 9 edit. «Atom» czikkely) azt mondja, hogy nem állhatna elő gravitatiós hatás, ha az éteratomok visszaverődésnél nem szenvednének veszteséget előhaladási kinetikus energiájukból. Épen igy P. Du Bois-Reymond (Naturw. Rundsch. 3. 169 l. 1888).

megerősítésre találtak azáltal, hogy az egyatomos gázokat összehasonlították a két- és háromatomosakkal.

Ezenkívül THOMSON elméletében még az a következtetés is önkényes, hogy összeütközés alkalmával az éteratom haladási energiája az ő belső energiájának javára változnék át. Mert nyilván gondolhatók összeütközések, a melyeknél ennek a fordítottja lép föl. Utóbbi pontra ISENKRAHE hitta föl a figyelmet.

RYSÁNEK más módon magyarázza meg az éteratómoknak energiabeli veszteségét az anyaghoz csapódás alkalmával. A mennyiben azt teszi föl, hogy az éteratómok az anyagra folytonosan energiát ruháznak át, s ebből állana elő az égi testek belső melege. A Nap sugárzásbeli veszteségének pótlására ilyen módon lényegében más szempontot nyertünk volna. Azonban RYSÁNEK arra figyelmeztet bennünket, hogy ez a gravitatiót okozó éter lényegében különbözne a fényétertől, mivel az előbbi átlagos terjedési sebességnek szükségképen jóval nagyobbnak kellene lennie, mint 5.10^{19} cm sec^{-1}, hogy Neptun a mozgásában az éter ellenállása következtében jelentősebb háborgatást ne szenvedjen. Hasonló eredményekhez vezetnek BOCKnak alább megbeszélendő vizsgálódásai. BROWNE is hangsúlyozza ezt az eredményt: a föltételezett gravitatioéternek és a fényéternek különböző voltát. Ugyanis mivel MAXWELL vizsgálódásai szerint a hullámoknak terjedési sebessége valamely gázban $\sqrt{5}:3$-szor akkora, mint a gázrészecskéknek átlagos haladó sebessége, ha utóbbi helyett a fénysebességet írnók be, az előbbi számára olyan érték jőne ki, a mely a gravitatió-éternek igen kicsiny lenne, tekintve az észrevehetetlen ellenállást, a melyet az égitestek mozgásuk közben szenvednek. Innen azt vonja le BROWNE, hogy lehetetlen a gravitatió redukálása közelbehatásra, mert a két különböző fajta étert túlságos bonyodalomnak tartja.

Energiaátruházás az éterről az anyagra, a mit RYSÁNEK használt fel, ellenvetésre ad alkalmat, a melyet MAXWELL mondott ki. Stationarius állapotban az egymáshoz ütköző részek átlagos kinetikai energiáinak egyenlőknek kellene lenni. Mivel pedig valamely éteratomnak kinetikai energiája az ő roppant sebességét tekintve, igen nagy, ezért a s'lyamérhető molekulák az éterzápor folytán fehér izzásba jönnének. Legalább a mennyiben az éteratomok száma a térfogategységben nem rendkívül nagy. Mindazonáltal ki lehet térni ilyen ellenvetés elől, a mint PRESTON hangsúlyozza, mivel az éteratómoknak térfogategységbeli számát tetszés szerint nagynak vehetjük, úgy hogy minden éteratomra csak mérsékelt energia mennyiség esnék.

PRESTON kifejti, hogy LE SAGE-nak minden irányban történő éteráramlásait a kinetikai gázelmélet szerint szemlélhetőleg elképzelhetjük, ha az éteratomok átlagos útjának hosszúsága igen nagynak vehető, legalább is oly nagyra, mint a bolygók közötti távolságok.* Tényleg, a kinetikai képzetek alapján sem lehet mozgásra indító erő két súlyamérhető test között, ha távolságuk a gázmolekulák átlagos úthosszához képest igen nagy. Mert olyan közökben, a melyek nagyok ezekhez az uthosszakhoz képest, szükségképen mindenütt ugyanaz a nyomás uralkodik. Az atomoknak kinetikai haladási energia-veszteségükre vonatkozólag az anyagon való visszaverődésnél, PRESTON THOMSON felfogásához csatlakozik. Az éteratomoknak haladási és belső kinetikai energiái közötti normális viszony a szabad út hosszában természetesen nem állhat helyre, csakis számos más éteratomhoz való ütődések után, azaz olyan közökben, a melyek a szabad útnak hosszát jóval fölülmulják. Ezért két olyan messze álló anyagi test között a gravitatió többé egyáltalában nem állhat fen, ha tömegeik még olyan nagyok is. Ez igen figyelemre méltó következése volna a kinetikai elméletnek és szemlélhető módon magyarázná meg a fennebb 80. lapon C. NEUMANNtól és SEELIGERtől a gravitatiónak elméleti alapon bevezetett absorptiós állandóját.**

Azonban szigorúbb megtekintésre PRESTON elmélete még kiegészítendő, a mint JAROLIMEK megmutatta. Tekintetbe kell vennünk, hogy az éteratomok szabad útjainak hosszúságai igen nagy és igen kicsiny határok között ingadoznak, csak középértékük ál-

* Az éteratomok elegendő kicsinysége mellett ez elképzelhető, még akkor is, ha az éteratomok száma a térfogategységben igen nagy.

** Természetesen, ez a PRESTON-féle képzet nem jelentene valódi absorptiót és ez a tünemény szemlélhetőségére igen kedvező.

landó. Két test (A, B) közötti gravitatióban tényleg csak olyan atomok müködhetnek, a melyek útjának hosszúsága a két test r távolságát felülmulja. Tehát minél kisebb r, annál több éteratom fog *már csakis ebből az okból* müködni a gravitatió javára. Ha pedig ezen az okon kívül, mint rendesen, az éterzápor ernyőszerű hatásának függését r-től $\frac{1}{r^2}$-nek vesszük, egészben az az eredmény, hogy a gravitatiónak r kisebbedésével gyorsabban kellene nőnie, mint $\frac{1}{r^2}$-nek. Azonban JAROLIMEK megmutatja, hogy az anyagi testek feltételezett rengeteg likacsosságát tekintve,* az ernyőszerü hatás r-től való függésének közönséges levezetése teljesen hamis. Ha felvesszük, hogy az anyagi test csak dimensió nélküli atomok csoportjaiból áll, akkor egy a atom a másik b atomot csak egyetlen éteratomnak ütésétől védelmezi, azétól, a mely épen összekötő egyenesük irányában röpül. Ez az ernyőszerű hatás egészen független az a és b közötti r relativ távolságtól.** Ezért a gravitatiőnak r-től való függése egyáltalában nem kölcsönös ernyőszerű hatás miatt áll fenn, hanem csak a JAROLIMEK felhozta első ok miatt. Ez pedig magában a NEWTON törvényét adja, annak a tételnek következtében, hogy n^2-szer annyi éteratom van, a melyeknek útjai legalább r hosszúságuak, mint olyan atomok, a melyeknek útjai legalább nr hosszúak. Mivel JAROLIMEK szerint a gravitatió még a legnagyobb elérhető úthosszakra is kiterjed és ezeknek megadható felső határuk nincsen, ezért a gravitatió bármely távolságban még hatékony lenne.

Habár JAROLIMEKnek ez az utolsó eredménye — legalább nekem

---

* S ezt valóban fel is kell tennünk, hogy a gravitatiót a tömeggel arányosnak nyerjük. (V. ö. fennebb 87. l.)

** Úgy látszik előttem, hogy ezen az úton azt az eredményt is nyerjük, hogy molekuláris távolságokban más vonzási törvények érvényesek. Mert, ha a és b egymáshoz igen közel jőnek, többé nem foghatók úgy fel, mint dimensió nélküliek r-hez képest. Ekkor olyan vonzás következik, a melyik $\frac{1}{r^m}$-mel arányos, a hol $m > 2$. Másrészt, a mint JAROLIMEK állítja, a és b még nagyobb közelségénél taszítások erednének az éteratomok visszaverődéséből. Ilyen módon az anyag rugalmassága tehető szemlélhetővé.

úgy tetszik, — behatóbb analysissel javítandó volna, mégis sokkal járul JAROLIMEK munkája a dolog tisztázásához. Mert ebben első izben hangsúlyozza teljes joggal, hogy a merőben likacsos anyagi testekkel nem bánhatunk úgy el, mintha nem volnának likacsosak.

ISENKRAHE egészen más álláspontból indul ki, hogy bevezesse az éteratomoknak haladó kinetikai energiabeli veszteségét (mely a gravitatió megmagyarázására szükséges). A mennyiben egyenesen elveti az energia megmaradásának principiumát és a rugalmatlan testek ütközéséhez csatlakozik. ISENKRAHE szerint egyik rejtélyt csak egy másikkal pótolnánk, ha a gravitatió magyarázatába a rejtélyes rugalmasságot vonnók bele. Azonkívül azt hiszi szerző, hogy közvetetlen bizonyítást adott arról, hogy a rugalmatlan ütközést kell alkalmaznunk. Ugyanis első sorban azt kérdi ő: valamely elszigetelt anyagi gömb milyen hatással van az őt környező éterre, ha az róla a rugalmas ütközés törvényei szerint pattan vissza? Felelet: semilyennel. Következésképen két gömb sem lehet hatással és fordítva az éter sem reájuk, azaz nem vonzódhatnak. Habár láttuk, hogy nagy valószínüséggel szükséges a gravitatió magyarázatára az éteratomoknak haladó kinetikai energiabeli veszteségét fölvennünk, mégsem állhat meg ISENKRAHEnak ez a bizonyítása. Mert két gömb esete lényegében más mint egy elszigetelt gömbé, minthogy az előbbi esetben a tökéletes szimmetria meg van zavarva.

ISENKRAHEnak vonakodása attól, hogy a rugalmas ütközés törvényeit használja, úgy tetszik nekem, philosophiai okokkal szintén teljességgel nem igazolható. A gravitatió magyarázatánál hasonlatokat akarunk szerkeszteni, a melyek más megfigyelhető jelenségeket használnak föl s a melyek lehetőleg szemlélhetők, azaz: érthetők. Azonban valósággal semmiféle ütközésnél nem figyelünk meg valódi energia csökkenést. A rugalmatlan ütközés csak annyiban bonyolultabb, mint a rugalmas ütközés, mert az előbbinél mechanikai energia belső hőenergiába alakul át. Tehát rugalmatlan ütközés föltevésével nem érjük el a szemlélődéseknek egyszerűsítését, csakis bonyodalmát. Ugyan föltehetjük az éteratomokat teljesen mereveknek is,* a nélkül, hogy az energia principiumáról, azaz: a rugalmas ütközés törvényeiről le kellene mondanunk.

Ezenkívül a rugalmatlan ütközés alkalmazásánál még azt a nehézséget is kapjuk, hogy egyes éteratomoknak folytonosan a súlyamérhető atomokhoz kellene tapadniok. Ezeket más éteratomok ütközése nem is űzné el. Tehát az ütközés felületének, azaz: az anyag tömegének folytonosan gyarapodnia kellene.

Az anyagnak föltételezett likacsosságát illetőleg ISENKRAHE joggal mutat rá a következő nehézségre. Annak a tételnek, hogy a gravitatió valamely test tömegével arányos, a teljes érvényessége csak akkor állana, ha az éteratomokat az anyag éppenséggel nem tartóztatná fel. Másrészt azonban ekkor semmi vonzás nem származnék. De ezt a nehézséget a BOCKtól megejtett mathematikai vizsgálat elenyésztette. Az éter ütközésbeli munkaképessége S, az egység vastagságú és sűrűségű anyagrétegen való áthaladás után legyen $S(1-k)$ értékű. Ezt a k-t az étermozgás absorptiómértékének nevezhetnők. A számitásokat egészen k^2 hatványig végrehajtván, az adódik ki, hogy a NEWTON vonzási törvényének

$$K = f\frac{mm'}{r^2},$$

f constansa k^2-tel arányos. Tehát kicsiny k mellett mindenesetre igen kicsiny, de nem zérus.

Azután kifejezi BOCK k^2-et f-fel, az éter sűrűségével és az éteratomok sebességével. Ha ez utóbbi számára a fénysebességet, az éter sűrűsége helyett THOMSON számát ($3 \cdot 10^{-23}$) választjuk, úgy $k > 300$ adódik ki, tehát igen nagynak. Arra, hogy k-t elég kicsinynek nyerjük, továbbá, hogy a bolygók számára pályájukban észrevehető mozgási ellenállást ne kapjunk, az éter sűrűségét jóval kisebbre kell vennünk THOMSON számánál, az étermolekulák sebességét pedig

* ISENKRAHE szerint a teljes ridegség az energia elvével nem egyezhet. Előttem ez érthetetlen, mert teljesen merev test oly teljesen rugalmas test, mely végtelen nagy ellenállást gyakorol összenyomás és deformatió ellenében. A deformatió nagysága azonban a rugalmas ütközés törvényének alkalmazható voltára nézve teljesen közömbös.

éppen jelentékenyen nagyobbnak, mint a fénysebességet. Azonban még mindig fenmarad egy nehézség, a melyre Bock különösen Isenkrahe gravitatióelméleténél tett figyelmessé, mely azonban hasonló módon érvényes volna minden ütközési elméletre. Egy harmadik testnek közbejötte, vagy csak általában jelenléte már erősen módosítja két más testnek kölcsönös vonzását. Ez ellenmondáshoz vezetne a megfigyeléssel pl. holdfogyatkozásoknál.

Más ütközési elméletek közül, a melyek részben ellenvetésekre adnak alkalmat, mindenesetre azonban nem jelentenek haladást az itt megbeszéltekkel szemben, még felemlítendők a következő szerzőkéi: Leray (lényegében Le Sage elmélete) H. Schramm, Crookes, H. Fritsch, Picart (szintén Le Sage elmélete) M. Vaschy (az anyag rezgéséből következik a gravitatió, a nélkül, hogy éteratomok ütközés közben veszítenének energiát stb.)

Ha áttekintjük az összes eredményt, a mely a gravitatiót közelbehatásból magyarázó kisérletekből vonható, ezt nem mondhatjuk teljesen kielégitőnek.* Csupán az ütközési elméletek szolgáltatnának szemlélhető hasonlatokat, és adnak is közvetlenül szempontokat, érdekes új kisérleti eredmények felfedezésére. De a siker ezeknek a várakozásoknak még eddig nem felelt meg. Így az ütközési elméletek szerint valószinű lenne, hogy az anyagi atomok elrendezkedése a súlyra befolyással van. Mindazonáltal Mackenzie és Kreichgauer fennebb (82. l.) említett kisérletei nem erősitették meg ezt a következést. Továbbá, a mint Isenkrahe megjegyzi, két test relativ sebességének befolyással kellene lennie vonzásukra, mihelyt sebességük összemérhető az éteratomokéval. De a csillagászati megfigyelésekből, a mint fennebb előadtuk, nem lehet meggyőző kényszerűséggel kimutatni annak a szükségességét, hogy a gravitatió számára bizonyos fajta Weber-féle törvényt vezessünk be.

Ezen kívül még az összes ütközési elméleteknél fenmarad az a nehézség is, hogy két test közötti gravitatió más testek jelenléte következtében befolyásolva látszik (v. ö. Bock).

* Így következtet Maxwell, Taylor, Browne, P. du Bois-Reymond-on kívül H. Gellenthin is. (Progr. Realgymn. Stettin, 1884.)

Még akkor is, ha ez a pont az elméletek bizonyos módosításával még elenyésztethető volna, az összes eddigi kifejtésekből és csillagászati vizsgálódásokból az derül ki, hogy azt az étert, a mely a gravitatió tüneményeit okozza, nem azonosíthatjuk a fényéterrel. Tehát a természet leirásában nem érünk el egyszerűsítést, ha a gravitatiót közelbehatásokkal pótoljuk. Természetesen igen nagy jelentőséggel birna, ha a gravitatió tüneményei nem nélkülöznének minden összefüggést az elektromos-mágneses tüneményekkel. De ilyen összefüggésre sem az eddig felállított elméletek, sem valamelyes tapasztalatok nem mutatnak. Ilyenek feltalálására hiában tett kisérletet Faraday az 1850. évben, a mikor azon fáradozott, hogy valamely vezetőnek szabad esése közben indukált áramot mutasson ki.

De még sem kell amaz önmegadó «Ignorabimus»-szal * egyszerűen lemondani arról, hogy a gravitatióról tovább gondolkozzunk. «Mert tudományos értéke annak a kérdésnek: miként hat két test egymásra, abban rejlik, hogy minket a közbeneső közeg tulajdonságainak kutatására sarkal.»** Eléggé mutatják a megnevezett ütközési elméletek, miként késztetnek kisérletekre vagy kérdések intézésére a valósághoz. Eddig a vacuumnak tulajdonságai közül még csak egyet ismerünk, nevezetesen a fényterjedés sebességét. Csak ha sikerül még több tulajdonságot felfedezni, mondjuk pl. a gravitatió törvényének véges határait, lesz majd reménységünk, hogy számbeli vonatkozásba tehetjük az úgynevezett gravitatiós állandót más tüneményekkel vagy tényekkel. Gondolható, hogy a mechanikának egyik durva érzéki hasonlata sem lesz elegendő soha a tünemények összesége számára. Ha azonban valamely ütközésközvetítésen alapuló közelbehatás elmélete teljes összhangzásban akar lenni az összes tüneményekkel, akkor azután valamely test tömegéből kell hogy következtetni lehessen az ő valódi felüle-

* P. du Bois-Reymond (Naturw. Rundschau 3. 169 l. 1888), ezzel a szóval állította annak a lehetetlenségét, hogy a gravitatiót bővebben megérthessük.

** Ezek Maxwell-nek szavai az Encyclop. Britt. 9 edit. «Attraction» czikkelyében.

tére, azaz atomjai felületeinek összességére, s ebből az egyes atoméra. Mert a gravitatiónak mindenik ütközés-közvetitési elmélete szerint a tömegnek dimenziója egy felületé.

Ekkor aztán arra is lesz reménység, hogy teremthetünk valóban absolut mértékrendszert, a mely többé nem függ Földünknek vagy valamely különösen választott anyagnak különös sajátságaitól, hanem általános sajátságokhoz, az étereihez fűződik. Az éteratomok közepes szabad útjának hosszúsága lehetne pl. a hosszúság mértéke, az időmérték pedig azonnal kiadódnék a fénysebességből.

Forditotta: *Szabó Péter dr.*

A Mathematikai és Physikai Társulat IV. tanulóversenye.

A Math. és Phys. Társulat 1897 november 18-án tartott választmányi és rendes ülésében foglalkozott a IV. tanulóverseny eredményeivel, melyekről az ügyvivő titkár a következő jelentést adja:

«A Math. és Phys. Társulat a választmánynak 1894. évi junius 22-ikén tartott ülésének határozata értelmében ez évben is rendezett mathematikai tanulóversenyt. A verseny f. évi október 23-án tartatott meg egyidőben Budapesten és Kolozsvártt s Budapesten 62, Kolozsvártt 7, összesen 69 középiskolai érettségi vizsgálatot tett tanuló jelentkezett.

A verseny zárt helyen, a társulat számos tagjának felügyelete alatt ment végbe; folyamatában szabálytalanság nem fordult elő, miről a helyszinen felvett jegyzőkönyv tanuskodik. A versenydolgozatok elkészítésére engedett négy óra elteltéig Budapesten 38, Kolozsvárott pedig 4 dolgozat adatott át az ellenőrző bizottságnak; ezek az ellenőrző tagok aláirásával ellátva lepecsételtettek.

A versenyen készült dolgozatok megbirálására az elnökség hét tagból álló bizottságot küldött ki, melynek jelentését a választmányi ülés egyhangúlag tudomásul vette». E jelentés a következő:

«A versenyen részt vett Budapesten 38 tanuló, Kolozsvártt pedig 4, összszesen 42. A feladatok a következők voltak:

1. Bebizonyítandó, hogy

$$\sin A \sin B \sin (A-B) + \sin B \sin C \sin (B-C) + \sin C \sin A \sin (C-A) + \\ + \sin (A-B) \sin (B-C) \sin (C-A) = 0,$$

ha A, B és C derékszögű háromszög szögei.

2. Bebizonyítandó, hogy minden háromszög szögeire nézve:

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} < \frac{1}{4}.$$

3. Adva vannak valamely derékszögű négyszög oldalainak metszéspontjai egy egyenessel, továbbá egyik oldalának hossza; szerkesztessék

meg a derékszögű négyszög. Mikor oldható meg a feladat és hányféleképpen?

A beérkezett dolgozatokat a Math. és Phys. Társulatnak KŐNIG GYULA elnöklete alatt SCHMIDT ÁGOSTON, RADOS GUSZTÁV, KÖVESLIGETHY RADÓ, EBERLING JÓZSEF, BARTONIEK GÉZA és BEKE MANÓ-ból álló bizottsága átvizsgálta és egyhangúlag azt határozta, hogy az első díjat FRIEDMANM BERNÁT-nak, a sátoraljaújhelyi gymnasium és HIDEGH MIHÁLY tanár növendékének itéli, a ki az első és második feladványt egészen pontosan oldotta meg, a harmadiknál pedig csak a lehető esetek megszámlálásánál követett el kis tévedést; de mind a három feladat megoldásánál mathematikai képességének szép jelét adta. Ezenkívül kiemeli még a bizottság fogalmazásának egyszerűségét, világosságát.

A második dijat WEISZ LIPÓT-nak a pécsi főreáliskola és megboldogult MAKSAY ZSIGMOND, majd HEKKINGER ISTVÁN tanár növendékének itéli a bizottság, a ki a második feladat megoldásában a háromszögbe és a háromszög köré írt körök sugarai és e körök czentrális távolságai között fennálló összefüggés segítségével még többet is bizonyított, mint a mennyit a feladat követelt; de a harmadik feladatnál, bár itt is általánosabban fogalmazta a kérdést (derékszögű négyszög helyett adott szögű parallelogrammot szerkesztett) a megoldás lehetőségének megállapításánál tévedett. Dolgozata mathematikai tudásának és a feladatok megoldásában való ügyességének bizonyítéka.

E két jutalmazandónak itélt dolgozat mellett még dicséretre méltónak véleményezi a bizottság HERUSCH ARTHUR dolgozatát, különösen a második feladatnak ügyes megoldásáért.

Kötelességének tartja a bizottság e jelentése kapcsán megemlíteni, hogy más két versenyző dolgozatát majdnem teljesen megegyezőnek találta és minthogy nem állott módjában megállapítani, kettőjük közül ki dolgozott önállóan, a két munkálatot a további birálat tárgyává nem is tette.»

Budapesten 1897 november 18-án.

Dr. Beke Manó, mint előadó. *Kőnig Gyula,* biz. elnök.

*

A két dijat a Társulat rendes ülésen báró EÖTVÖS LORÁND nehány buzdító, a kitüntettek volt tanárait is megtisztelő szó kiséretében adta át a nyerteseknek.

A verseny eredményéről felterjesztés tétetett a Vallás- és Közoktatásügyi Miniszter úrhoz is.

A Mathematikai és Physikai Társulat IV. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

1. Friedmann Bernát dolgozata.

1. Bizonyíttassék be, hogy ha A, B, C valamely derékszögű háromszög szögei, akkor

$$\sin A \sin B \sin (A-B) + \sin B \sin C \sin (B-C) + \sin C \sin A \sin (C-A) + \\ + \sin (A-B) \sin (B-C) \sin (C-A) = 0.$$

Kidolgozás.

Minthogy a képletben, melynek helyességét bizonyítani akarom, A, B és C szögek tökéletesen egyenlő szerepet visznek, tehetem $A = B + C = \frac{\pi}{2}$. E helyettesítés a bizonyítandó tételnek, melynek baloldalát u-val fogom jelölni, következő alakjához vezet:

$$u = \sin B \sin C + \sin B \sin C \sin (B-C) - \\ - \sin B \sin C - \sin B \sin C \sin (B-C).$$

2. Bebizonyítandó, hogy $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} < \frac{1}{4}$, ha A, B, C tetszőleges háromszög szögei.

Kidolgozás.

Ismert trigonometriai képlet értelmében a háromszögbe írt kör sugara

$$\rho = 4r \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

ha r a háromszög köré írt kör sugara.

---

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

Mivel mindig $\rho < r$, azért

$$\frac{\rho}{r} = 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} < 1,$$

vagy másként

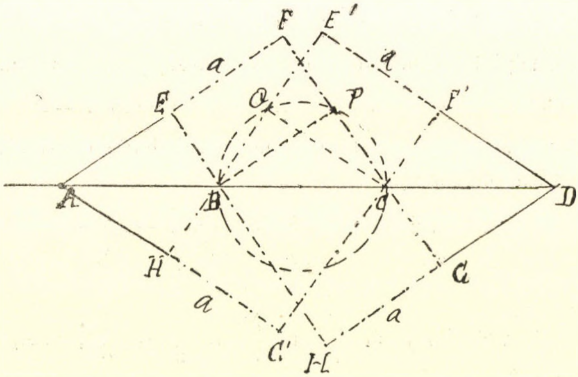
$$\sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} < \frac{1}{4}.$$

3. Adva vannak valamely derékszögű négyszög oldalainak metszéspontjai egy egyenessel, továbbá egyik oldalának hossza ; szerkesztessék meg e derékszögű négyszög. Mikor oldható meg a feladat és megoldhatósága esetében hányféleképen ?

Kidolgozás.

A kivánt szerkesztés a következőképen történik :

Az adott pontok közül két, mondjuk B és C pont távolságával mint átmérővel kört alakitok, s BC fölött a félkörben a BPC és BQC derék-



szögű háromszögeket szerkesztem, melyekben $BP = CQ = a$ az adott oldalhoszszal. Az A és D pontokból BP-vel, illetve CQ-val párhuzamosakat, a B és C pontokon keresztül pedig e távolságokra merőlegeseket. E két párhuzamos és két merőleges ad egy a feladatnak megfelelő derékszögű négyszöget. Két ily párhuzamos- és merőlegespár lévén rajzolható, az $EFGH$ és $E'F'G'H'$ derékszögű négyszögeket kapjuk.

A feladat e módon csak akkor oldható meg, ha a BPC háromszög tényleg megszerkeszthető. Ennek szükséges és elegendő feltétele : $a < BC$.

Teljesen hasonló módon kap*hat*unk megoldásokat, ha B és C pontok helyett akármelyik más két pontot választjuk. De ezen pontok felvételével is természetesen csak akkor kapunk megoldást, ha az a megoldhatóságnak elébb felírt általános feltétele itt is áll.

Röviden: A feladatnak 0, 2, 4, 6 vagy 8, 10 vagy 12 megoldása van a szerint, a mint a megoldhatóságnak általános feltétele 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy mind a 6 választható pontpárra áll. *Friedmann Bernát.*

2. Weisz Lipót dolgozata.

1. Bizonyíttassék be, hogy ha A, B és C valamely derékszögű háromszög szögei, akkor

$$\sin A \sin B \sin(A-B) + \sin B \sin C \sin(B-C) + \sin C \sin A \sin(C-A) +$$
$$+ \sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A) = 0.$$

Legyen a háromszögben C a derékszög; akkor A és B hegyes szögek. A $C\measuredangle$-re valamint az A és B szögekre nézve a következőket tudjuk:

$$\sin C = 1$$
$$\sin A = \cos B$$

és

$$\cos A = \sin B$$

továbbá

$$\sin(C-A) = \sin B$$

és

$$\sin(C-B) = \sin A.$$

Ezen összefüggéseket tekintetbe véve egyenlőségünk a következőképen írható:

$$\sin A \cos A \sin(A-B) - \sin A \cos A + \sin A \cos A -$$
$$- \sin A \cos A \sin(A-B) = 0.$$

Ezen egyenlőségben a tagok páronként megsemmisítik egymást, mi világosan a mellett bizonyít, hogy a megadott egyenlőség derékszögű háromszög esetében valóban identitás.

2. Bebizonyítandó, hogy

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} < \frac{1}{4}$$

ha A, B és C egy tetszőleges háromszög szögei.

Bármely háromszögre nézve:

$$\rho = 4r\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad 1)$$

hol ρ a háromszögbe írható kör sugara és r a háromszög köré írható kör sugara.

Az 1) egyenlőségből

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{\rho}{4r}$$

és így csak azt kell bebizonyítani, hogy:

$$\frac{\rho}{4r}<\frac{1}{4}.$$

Ennek a bizonyítását a következőképen eszközöljük:

Tudjuk, hogy

$$d=\sqrt{r^2-2r\rho},$$

hol d a háromszögbe írható kör középpontjának a körülírható kör középpontjától való távolsága. E távolság mindig valós lévén, kell hogy

$$2r\rho\leqq r^2$$

legyen.

Ha ezen egyenlőtlenség mindkét oldalát $8r^2$-tel osztjuk, akkor

$$\frac{\rho}{4r}\leqq\frac{1}{8}$$

miből következik, hogy:

$$\frac{\rho}{4r}<\frac{1}{4}.$$

Ez pedig, mint előbb láttuk, már azt bizonyítja, hogy:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}<\frac{1}{4}.$$

3. Adva vannak valamely derékszögű négyszög oldalainak metszéspontjai egy egyenessel; továbbá egyik oldalának hossza; szerkesztessék meg e derékszögü négyszög. Mikor oldható meg e feladat, és megoldhatósága esetében hányféleképen?

Mi e feladatot egy általánosabb esetében fogjuk megoldani. Nem derékszögű négyszöget veszünk, hanem általában egy alakja által adott parallelogrammát.

Vegyük a feladatot megoldottnak, és legyen $ABCD$ a meghatározott parallelogramma.

Ennek megszerkesztésére ismerjük oldalainak az adott e egyenessel való M, N, P, Q metszéspontjait és szögeit.

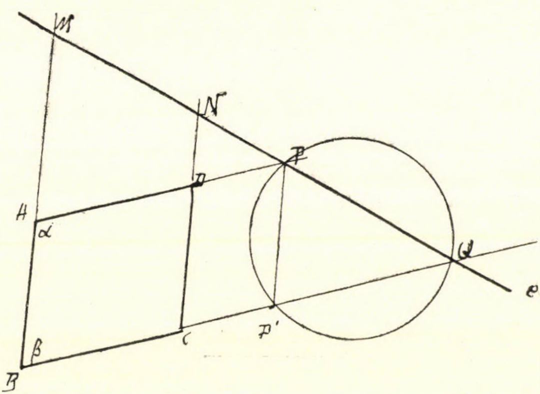
Vonjunk a P ponton keresztül AB-vel párhuzamost és legyen ennek a BC-vel való metszéspontja P'. Törekvéseink a P' pont meghatározására fognak irányulni, mert e pont megtalálása után a szerkesztés már igen egyszerű.

A P' pont meghatározására mi annak két mértani helyét fogjuk megállapítani.

A $DCP'P$ négyszög, mert szemben fekvő oldalai párhuzamosak, parallelogramma, és így

$$PP' = DC.$$

Ha tehát a $DC = p$ oldalnak hosszát adottnak veszszük, akkor a P' pont egyik mértani helye már meg van, mert az nem más, mint azon kör, mely a P pont körűl, mint középpont körül, p sugárral megvonható.



A párhuzamosságok törvényei alapján könnyen kimutatható, hogy:

$$PP'Q\sphericalangle = \beta,$$

miből következik, hogy a P' pont második mértani helye oly körív, mely a PQ távolság fölé, mint húr fölé vonható és oly tulajdonságú, hogy bármely pontjából az adott PQ távolság az adott β szög alatt látszik. E mértani hely, ép úgy mint az előbbi, az adatok segítségével, körzővel és vonalzóval könnyen megszerkeszthető.

A két mértani hely közös pontjai adják a P' pontokat. De mert általában egy kör és körív két pontban metszik egymást, tehát a problémának általában két megoldása van.

Ha a két mértani hely érintkezik egy, ha nem is metszi egymást, egy megoldás sincsen.

De a legutóbbi eset ki van zárva és így a feladatnak két vagy egy megoldása van, a szerint a mint

$$d > P > \overline{PQ}$$

vagy

$$p = d,$$

hol d a $PP'Q$ ív (átmérője) sugarának kétszerese.

A P' pont meghatározása után a parallelogramma megszerkesztése a következőképen történik:

Megvonjuk QP' egyenest; ezen fekszik a BC oldal. P ponton keresztül QP'-tel párhuzamost vonunk; ezen lesz az AD oldal. Azután az M és N pontokon keresztül a QP' egyeneshez β szög alatt hajló és egymással párhuzamos egyeneseket huzunk, és e két párhuzamos egyenes az előbbi kettővel megállapítja a keresett parallelogrammát.

De az M és N pontokon 2 pár párhuzamos egyenest lehet húzni, mely QP'-hez β szöggel hajlik és így általában $2 . 2 = 4$ illetőleg $2 . 1 = 2$ számú megoldást kapunk, a szerint a mint 2, illetőleg egy P' pontot kapunk.

Minden áll a derékszögű négyszögre is, ha β helyett egyszerűen 90°-u szöget veszünk, a midőn e problema a kitüzött feladatra redukálódik. Itt azonban nem $2 . 2$, illetőleg $1 . 2$ számú megoldást kapunk, hanem 2-t, illetőleg 1-et, mert a két párhuzamos-pár összeesik.

Weisz Lipót.

TÖBBSZÖRÖSEN PERSPEKTIV HÁROMSZÖGEK A SÍKBAN.

DESARGUES tantétele szerint, ha a két háromszög megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek egy pontban metszik egymást, akkor a megfelelő oldalok metszéspontjai egy egyenesen vannak és megfordítva.

Két háromszög ilyen viszonyát *perspektiv*-nek mondjuk.

Ezzel a tantétellel kapcsolatban az a kérdés áll elő, hogy vannak-e többszörösen perspektiv háromszögek, azaz olyanok, a melyek szögpontjait többféleképen lehet a perspektiv viszony szerint való megfelelésbe hozni?*

Erre a kérdésre felelünk meg a következőkben.

I.

Legyenek két perspektiv háromszög megfelelő szögpontjai:

$$A_i,\ B_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Válaszszuk az $A_1A_2A_3$ háromszöget a koordináta-rendszer alapjának és így a szögpontok koordinátái legyenek

$$\begin{array}{ccc} 1\ 0\ 0 & & b_{11}\, b_{12}\, b_{13} \\ 0\ 1\ 0 & & b_{21}\, b_{22}\, b_{23} \\ 0\ 0\ 1 & & b_{31}\, b_{32}\, b_{33} \end{array}$$

---

* Ezzel a kérdéssel először ROSANES és SCHRÖTER foglalkoztak. (Mathematische Annalen. 2. köt.)

Minthogy a $B_1B_2B_3$ pontok is háromszöget alkotnak, a b_{ik} elemek determinánsa

$$B \gtreqless 0.$$

A két háromszög oldalainak koordinátái:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} B_{21}B_{12}B_{13} \\ B_{11}B_{22}B_{23} \\ B_{31}B_{32}B_{33}, \end{array}$$

a hol B_{ik} az előbbi B determinánsnak b_{ik} elemhez tartozó aldeterminánsa.

Felteszszük, hogy a b_{ik}, B_{ik} elemek egyike sem 0, a mi geometriailag annyit tesz, hogy a két háromszög szögpontjai közül egyik sincs a másik háromszög valamelyik oldalán.

A megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek koordinátái

$$\begin{array}{ccc} 0 & -b_{13} & b_{12} \\ b_{23} & 0 & -b_{21} \\ -b_{32} & b_{31} & 0 \end{array} \tag{1}$$

A három egyenes egy pontban metszi egymást, ha

$$b_{12}b_{23}b_{31} = b_{13}b_{32}b_{21} \tag{2}$$

A megfelelő oldalok metszéspontjainak koordinátái

$$\begin{array}{ccc} 0 & -B_{13} & B_{12} \\ B_{23} & 0 & -B_{21} \\ -B_{32} & B_{31} & 0 \end{array} \tag{3}$$

A három pont egy egyenesben van, ha

$$B_{12}B_{23}B_{31} = B_{13}B_{32}B_{21} \tag{4}$$

Minthogy a b_{ik} koordináták homogének és feltevésünk szerint 0-tól különbözők, előre beigazithatók úgy, hogy

$$b_{21} = b_{12} \quad b_{31} = b_{13}$$

legyen. Akkor a (2) egyenlet szerint

$$b_{23} = b_{32}$$

azaz B szimmetrikus determináns.

Minthogy pedig egy determináns is adjungáltja közül, ha az egyik szimmetrikus, akkor a másik is az, a (2) és (4) egyenletek közül egyik a másiknak következése, a mi a DESARGUES tantételeit bizonyitja.

Az (1) egyenesek metszéspontjának *(perspektiv czentrum)* koordinátái

$$\frac{1}{b_{23}} \qquad \frac{1}{b_{31}} \qquad \frac{1}{b_{12}} \tag{5}$$

A (3) pontokat összekötő egyenes *(perspektiv tengely)* koordinátái

$$\frac{1}{B_{23}} \qquad \frac{1}{B_{31}} \qquad \frac{1}{B_{12}} \tag{6}$$

Ezt a perspektiv viszonyt, a melyet

$$\begin{pmatrix} A_1A_2A_3 \\ B_1B_2B_3 \end{pmatrix}$$

jellel jelölhetünk, *alapviszony*-nak fogjuk nevezni.

A két háromszög között létezhető többi viszony jelei az alapviszonyából a B pontok indexeinek permutálásával származtathatók. Ha a permutálást az S szubstituczió hajtja végre, akkor a perspektiv viszonyt S-*viszony*-nak fogjuk nevezni. E szerint az alapviszony (1)-viszonynak is mondható, mert az identikus szubstituczió jele 1.

Az S-viszony feltételi egyenlete a (2) egyenletből úgy származtatható, ha a b koordináták első indexeire az S-szubstitucziót alkalmazzuk. Ha utólagosan a

$$b_{ik} = b_{ki}$$

egyenleteket is felhasználjuk, azzal az alapviszony létezését is számbavettük.

Igy az alapviszony mellett fennáll

1. a (23)-viszony, ha

$$b_{12}^2 b_{33} = b_{13}^2 b_{22} \tag{7}$$

2. a (123)-viszony, ha

$$b_{11}b_{22}b_{33} = b_{12}b_{23}b_{31} \tag{8}$$

Ugyanez a feltétele a (132)-viszonynak is.

Hogy az összes lehetséges eseteket könnyebben áttekinthessük, válaszszuk az alapviszony czentrumát egység-pontnak.

Akkor (5) szerint

$$b_{23} = b_{31} = b_{12} = 1$$

vehető és így

1. a (23)-viszony feltétele

$$b_{22} = b_{33}$$

2. a (123)- és (132)-viszony feltétele

$$b_{11}b_{22}b_{33} = 1.$$

Tehát a perspektiv viszonya:

1. *kétszeres*, ha $b_{11}b_{22}b_{33}$ közül kettő egyenlő;
2. *háromszoros*, ha

$$b_{11}b_{22}b_{33} = 1;$$

3. *négyszeres*, ha vagy

$$b_{11} = b_{22} = b_{33}$$

vagy

$$b_{11}b_{22}b_{33} = 1 \text{ és } b_{11}b_{22}b_{33}$$

közül kettő egyenlő.

A második eset könnyen átvihető az elsőre. Mert ha pl. $b_{22} = b_{33}$ volna, elég a (23)-viszonyt alapviszonynyá és ennek czentrumát egységponttá tenni.

4. *hatszoros*, ha

$$\begin{gathered} b_{11} = b_{22} = b_{33} \\ b_{13}b_{22}b_{33} = 1. \end{gathered} \tag{9}$$

Reális háromszögeknél ez az eset nem jöhet elő.

A következőkben a két-, három- és négyszeresen perspektiv háromszögeknek olyan rendszereit mutatjuk ki, hogy a rendszer bármelyik két tagja között fennáll az illető többszörösen perspektiv viszony.

II.

$A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ háromszögek között álljanak fenn az (1) és (23)-viszonyok.

Válaszszuk $A_1A_2A_3$ háromszöget koordináta-háromszögnek és válaszszuk az egységpontot az A_1B_1 egyenesen, a melyen a két perspektiv czentrum is fekszik.

A (2) és (7) egyenletek szerint akkor $B_1B_2B_3$ koordinátáinak alakja

$$\begin{matrix} p & 1 & 1 \\ 1 & q & r \\ 1 & r & q \end{matrix} \tag{10}$$

Ha p, q, r változók, háromszorosan végtelen sok háromszögből álló rendszert kapunk, a melynek minden tagja $A_1A_2A_3$ háromszöggel kétszeresen perspektiv.

Kimutatjuk, hogy a rendszer bármelyik két tagja kétszeresen perspektiv.

Hozzunk be a régi koordináták $(x_1x_2x_3)$ helyett újakat $(y_1y_2y_3)$ a következő helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} x_1 &= py_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 &= y_1 + qy_2 + ry_3 \\ x_3 &= y_1 + ry_2 + qy_3. \end{aligned}$$

Az új koordináta-háromszög $B_1B_2B_3$ és egységpontja az A_1B_1 egyenesen van.

Ha egy háromszög szögpontjainak új koordinátái

$$\begin{matrix} p_1 & 1 & 1 \\ 1 & q_1 & r_1 \\ 1 & r_1 & q_1 \end{matrix}$$

a szögpontok régi koordinátái:

$$\begin{matrix} pp_1+2 & p_1+q+r & p_1+q+r \\ p+q_1+r_1 & 1+qq_1+rr_1 & 1+qr+q_1r \\ p+q_1+r_1 & 1+qr_1+q_1r & 1+qq_1+rr_1 \end{matrix}$$

Ha az első pont koordinátái (p_1+q+r)-rel, a mint két pont koordinátáit $(p+q_1+r_1)$-gyel osztjuk, látjuk, hogy a háromszög a (10) rendszerhez tartozik.

A rendszer legegyszerűbb esete, a melybe az általános rendszer projicziálással mindig átvihető, az, a mikor $A_1A_2A_3$-háromszög egyenlő szárú ($A_1A_2 = A_1A_3$) és az egységpont (E) úgy fekszik, hogy $A_1E \perp A_2A_3$.

Ekkor A_1E tengely körül π-szögnyi forgatással $A_1A_2A_3E$ pontrendszer $A_1A_3A_2E$-be megy át és így a kiforgatással a sík minden pontjának második és harmadik koordinátája felcserélődik. A (10) rendszer minden háromszöge tehát a kiforgatással maga-magába megy át.

E szerint ez a rendszer azon egyenlő szárú háromszögek összességéből áll, a melyeknél az egyenlő szárak metszéspontjaiból kiinduló magasságvonal E egyenesre esik.

III.

$A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ háromszögek között álljanak fenn az (1)-, (123)-, (132)-viszonyok.

Válaszszuk $A_1A_2A_3$ háromszöget koordináta-háromszögnek, az egységpontot pedig válaszszuk úgy, hogy B_1 és B_2 koordinátái

$$\begin{matrix} p & q & r \\ q & r & p \end{matrix}$$

legyenek, a mi mindig reálisan elérhető.

B_3 két első koordinátája az alapviszony folytán r, p. Hogy a viszony háromszoros legyen, a (8) egyenlet szerint a harmadik koordináta q. Tehát $B_1B_2B_3$ koordinátái

$$\begin{matrix} p & q & r \\ q & r & p \\ r & p & q \end{matrix} \qquad (11)$$

Az oldalok koordinátái

$$\begin{matrix} P & Q & R \\ Q & R & P \\ R & P & Q \end{matrix}$$

a hol pl.

$$P=qr-p^2$$

Legyen ezen háromszög jele (pqr) vagy $[PQR]$.

Ha p, q, r változók, kétszeresen végtelen sok háromszögből álló rendszert kapunk, a melynek minden tagja $A_1A_2A_3$ háromszöggel háromszorosan perspektiv.

$A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ perspektiv centrumai (5) szerint az $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{r}, \frac{1}{q}\right)$-háromszöget, tengelyei (6) szerint az $\left[\frac{1}{P}, \frac{1}{R}, \frac{1}{Q}\right]$ háromszöget alkotják, tehát a (11) rendszerhez tartoznak.

Kimutatjuk, hogy a rendszer bármelyik két tagja háromszorosan perspektiv.

Hozzunk be a régi $(x_1x_2x_3)$ koordináták helyett újakat $(y_1y_2y_3)$, a következő helyettesitéssel:

$$\begin{aligned} x_1&=py_1+qy_2+ry_3\\ x_2&=qy_1+ry_2+py_3\\ x_3&=ry_1+py_2+qy_3. \end{aligned}$$

Az új koordináta-háromszög $B_1B_2B_3$, az új egységpont pedig a régivel összeesik.

Ha egy háromszög szögpontjainak új koordinátái

$$\begin{matrix} p_1 & q_1 & r_1\\ q_1 & r_1 & p_1\\ r_1 & p_1 & q_1, \end{matrix}$$

akkor ezen szögpontok régi koordinátái

$$\begin{matrix} pp_1+qq_1+rr_1, & qp_1+rq_1+pr_1, & rp_1+pq_1+qr_1,\\ rp_1+pq_1+qr_1, & pp_1+qq_1+rr_1, & qp_1+rq_1+pr_1\\ qp_1+rq_1+pr_1, & rp_1+pq_1+qr_1, & pp_1+qq_1+rr_1. \end{matrix}$$

Ha a második és harmadik pontot felcseréljük, látjuk, hogy ez a háromszög a (11) rendszerhez tartozik.

Ezzel az van kimutatva, hogy ha $B_1B_2B_3$ és $C_1C_2C_3$ két tagja a (11) rendszernek, ezek között a

$$\begin{pmatrix} B_1B_2B_3\\ C_1C_3C_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_1B_2B_3\\ C_3C_2C_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_1B_2B_3\\ C_2C_1C_3 \end{pmatrix}$$

perspektiv viszonyok állanak fenn.

A rendszer legegyszerübb esete, a melybe az általános rendszer projicziálással mindig átvihető, az, a mikor $A_1A_2A_3$ szabályos háromszög és az egységpont (E) ennek czentruma.

Ekkor E körül $A_1A_2A_3$ háromszöget $\frac{2\pi}{3}$-szögnyi forgatással $A_2A_3A_1$-be lehet átvinni. Tehát ezen forgatással a sík minden pontjának koordinátái cziklikusan permutálódnak és így a (11) rendszer minden háromszöge maga-magába megy át. E szerint a rendszer az E centrumú szabályos háromszögek összességéből áll.

Áll tehát a következő tantétel :

Két konczentrikus szabályos háromszög háromszorosan perspektiv.

A perspektiv czentrumok és tengelyek egy-egy szabályos háromszöget alkotnak az előbbiekével közös czentrummal.

IV.

$A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ háromszögek között álljanak fenn az (1)-, (23)-, (31)- és (12)-perspektiv viszonyok.

Válaszszuk $A_1A_2A_3$ háromszöget koordináta-háromszögnek és az alapi viszony centrumát egységpontnak.

Akkor $B_1B_2B_3$ pontok koordinátái, a mint már az I. fejezetben láttuk,

$$\begin{matrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & p. \end{matrix} \tag{12}$$

Az oldalok koordinátái:

$$\begin{matrix} -p-1 & 1 & 1 \\ 1 & -p-1 & 1 \\ 1 & 1 & -p-1. \end{matrix}$$

Legyen ezen háromszög jele (p) vagy $[-p-1)$.

Ha p változó, egyszerűen végtelen sok háromszögből álló rendszert kapunk, a melynek minden tagja $A_1A_2A_3$ háromszöggel négyszeresen perspektiv. Épen úgy, mint a két előbbi fejezetben, könnyű kimutatni, hogy ugyanez áll a rendszer bármelyik két háromszögéről.

Az $A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ háromszögek perspektiv centrumai az egységpont és az $\left(\frac{1}{p}\right)$-háromszög középpontjai, tengelyei az egységegyenes és az $\left[-\frac{1}{p+1}\right]$-háromszög oldalai. Tehát ez a két háromszög is a (12) rendszerhez tartozik.

Az előbbi fejezetben tárgyalt rendszer azon háromszögei alkotnak négyszeresen perspektiv rendszert, a melyeknél p, q, r közül pl. $q = r$. Ezeknél a (23)-viszony is fellép az egységponttal, mint czentrummal és az egységegyenessel, mint tengelylyel.

Igy a konczentrikus szabályos háromszögek közül azok alkotnak négyszeresen perspektiv rendszert, a melyek oldalai párhuzamosak.

V.

Szóljunk most pár szót a hatszorosan persektiv háromszögekről.

Ilyen két háromszög (9) szerint

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E & 1 & 1 \\ 1 & E & 1 \\ 1 & 1 & E \end{array}$$

a hol E complex harmadik egységgyök.

Perspektiv centrumok:

$$\begin{array}{ccc} E^2 & 1 & 1 \\ 1 & E^2 & 1 \\ 1 & 1 & E^2. \end{array}$$

Perspektiv tengelyük ezen két háromszög oldalai:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & E & E^2 \\ 1 & E^2 & E. \end{array}$$

A négy háromszög olyan rendszert alkot, hogy közülök akármelyik kettő hatszorosan perspektiv. A másik két háromszög szögpontjai a czentrumok, oldalai a tengelyek.

Ilyen rendszert alkot síkbeli harmadrendű görbénél az a négy háromszög, a melyek közül akármelyiknek oldalai a (9) inflexiós pontot vágják ki a görbéből.

VI.

Végül álljon itt két tantétel, a melyek a megelőzők alapján könnyen bebizonyíthatók.

1. Két háromszorosan perspektiv háromszögnél a következő négy körülmény:

a) a három perspektiv czentrum egy egyenesben van,

b) a három perspektiv tengely egy pontban metszi egymást,

c) a két háromszög hat szögpontja egy kúpszeleten van,

d) a két háromszög hat oldala egy kúpszeletet érint,

vagy együtt megvan, vagy együtt hiányzik.

2. Ha két háromszög olyan perspektiv viszonyban van, hogy a czentrum és a tengely az egyik háromszögre nézve pólus és poláris, akkor ezen perspektiv viszonyon kívül a két háromszög között még három más is fennáll.

Kolozsvár, 1897 szeptember.

Vályi Gyula.

A HOMOGÉN LINEÁR DIFFERENCZIÁLEGYENLETEK ALAPEGYENLETEIRŐL.

A homogén lineár differencziálegyenletek elméletében nagy fontossága van ennek a tételnek:*

Ha két homogén lineár differencziálegyenletnek van közös integráljuk, akkor e differencziálegyenletek bármely szinguláris ponthoz tartozó alapegyenleteinek közös gyökük van. Ezt a tételt szándékozom e sorokban egy új módon bebizonyítani.

A bizonyításhoz szükségünk van egy determinánstételre, mely voltaképpen általánosítása ama determinanstételnek, melyet Rados G. úr a Math. és Phys. lapokban feladatként közölt.** Segédtételünk a következő:

Ha

$$f(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_r)^{k_r} \tag{1}$$

és

$$k_1+k_2+\dots+k_r=n,$$

akkor ez a determináns:

$$\Delta=\begin{vmatrix}
1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^{n-1} \\
0 & 1 & 2a_1 & 3a_1^2 & \dots & (n-1)\,a_1^{n-2} \\
0 & 0 & 2 & 6a_1 & \dots & (n-1)(n-2)\,a_1^{n-3} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_1!\binom{n-1}{k_1}a_1^{n-k_1-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
1 & a_r & a_r^2 & a_r^3 & \dots & a_r^{n-1} \\
0 & 1 & 2a_r & 3a_r^2 & \dots & (n-1)\,a_r^{n-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_r!\binom{n-1}{k_r}a_r^{n-k_r-1}
\end{vmatrix} \tag{2}$$

---

* Thomé Crelle Journal 76. p. 284. Frobenius Crelle Journal 80. p. 317.

** Math. és Phys. Lapok I. kötet 367. l.

az

$$[f^{(k_1)}(a_1)]^{k_1}[f^{(k_2)}(a_2)]^{k_2}\dots[f^{(k_r)}(a_r)]^{k_r} \qquad 3)$$

től, a melyben $f^{(k_i)}$ az f egész függvény k_i-ik derivált függvénye, csak egy állandó szorzóban különbözik.

E segédtétel bizonyítására tekintsük a szóban forgó determináns helyett a következőt:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_1+h & (a_1+h)^2 & \dots & (a_1+h)^{n-1} \\ 1 & a_1+2h & (a_1+2h)^2 & \dots & (a_1+2h)^{n-1} \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & a_1+\overline{k_1-1}h & (a_1+\overline{k_1-1}h)^2 & \dots & (a_1+\overline{k_1-1}h)^{n-1} \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & a_r & a_r^2 & \dots & a_r^{n-1} \\ 1 & a_r+h & (a_r+h)^2 & \dots & (a_r+h)^{n-1} \\ 1 & a_r+2h & (a_r+2h)^2 & \dots & (a_r+2h)^{n-1} \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & a_r+\overline{k_r-1}h & (a_r+\overline{k_r-1}h)^2 & \dots & (a_r+\overline{k_r-1}h)^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ezt a determinánst transzformáljuk oly módon, hogy az első k_1 sort tartalmazó részben az $(i+1)$-ik sorhoz hozzáadjuk az i-ik sor $-i$-szeresét, az $(i-1)$-ik sor $\binom{i}{2}$-szeresét, az $(i-2)$-ik sor $-\binom{i}{3}$-szorosát s í. t., a transzformácziót a k_1-ik sornál kezdve. Hasonlóképen transzformáljuk a következő k_2 sorból álló részt s í. t. Ha figyelembe veszszük, hogy a $\varphi(x)$ egész függvény s-ik derivált függvénye a

$$\psi(x)=\varphi(x+h)-\varphi(x+sh)-s\varphi(x+\overline{s-1}h)+$$
$$+\binom{s}{2}\varphi(x+\overline{s-2}h)+\dots+(-1)^s\varphi(x)$$

kifejezésben a h^s együtthatója, akkor következik, hogy az első k_1 sort tartalmazó részben az $(i+1)$-ik sor elemeiben a h^i együtthatói az első sor illető elemeinek i-ik derivált függvényei lesznek; a második rész $(i+1)$-ik sorának elemeiben a h^i szorzója a (k_1+1)-ik sor megfelelő elemeinek i-ik derivált függvényei lesznek s i. t. Ha tehát az egyes sorokból h legalacsonyabb hatványait, tehát mindössze h-nak

$$e=\binom{k_1}{2}+\binom{k_2}{2}+\cdots+\binom{k_r}{2}$$

-ik hatványát kiemeljük, akkor a megmaradó determinánsban a h^0 szorzói megegyeznek a Δ determináns elemeivel; tehát ha e D determinánst kifejtjük és h hatványai szerint rendezzük, akkor h^e-ik hatványának szorzója éppen a Δ determináns lesz. De a D determináns nem más, mint a második oszlopában levő elemek összes lehető különbségeinek szorzata. E szorzat megalkotásánál először az egy csoportba tartozó elemeket vegyük figyelembe, a melyek egymástól csakis h többszöröseiben különböznek. Ilyen módon az első részből a következő szorzatot kapjuk:

$$(k_1-1)!\,(k_1-2)!\,\ldots\,2\,.\,h^{\binom{k_1}{2}}$$

a második részből:

$$(k_2-1)!\,(k_2-2)!\,\ldots\,2\;\;h^{\binom{k_2}{2}}$$

s i. t. — Ha a második rész elemeiből vonjuk ki az első rész elemeit és a különbségekkel alkotjuk meg a szorzatot, akkor pedig k_1k_2 tényezőből álló szorzatot kapunk és mindenik tényező ilyen alakú:

$$a_2-a_1+\rho h,$$

a hol ρ egész szám. Ha ezt az eljárást folytatjuk, akkor a D determinanst a következő alakban kapjuk:

$$D=(k_1-1)!\,(k_1-2)!\,\ldots\,2\,\ldots\,(k_r-1)!\,(k_r-2)!\,\ldots$$
$$2h^e.\,\Pi\,(a_i-a_k+\rho h),$$

következésként a D determinánsban h^e szorzója csak az elül álló számbeli szorzóban különbözik ettől:

$$\Pi(a_i-a_j)^{k_i k_j}$$

Minthogy pedig:

$$f^{(k_i)}(a_i)=k_i!\,\Pi(a_i-a_j)^{k_j}$$

tehát valóban a Δ determináns csakis egy 0-tól különböző numerikus szorzóban tér el az

$$[f^{(k_1)}(a_1)]^{k_1}[f^{(k_2)}(a_2)]^{k_2}\ldots[f^{(k_r)}(a_r)]^{k_r}$$

jelzett alaktól.

Ennek előre bocsátása után térjünk át a szóban forgó tétel bizonyítására.

Legyen a két adott homogén lineár differencziálegyenlet a következő:

$$\begin{gathered}y^{(p)}+a_1y^{(p-1)}+a_2y^{(p-2)}+\cdots+a_py=0\\ y^{(q)}+b_1y^{(q-1)}+b_2y^{(q-2)}+\cdots+b_qy=0.\end{gathered}\tag{6}$$

Ha az a szinguláris ponthoz tartozó alapegyenleteknek csupa különböző gyökük van, akkor, miként ismeretes, van olyan

$$u_1,\ u_2,\ldots,u_p \tag{7}$$

kanonikus integrálja az első egyenletnek, melyek egymástól függetlenek és melyek az x független változónak az a szinguláris pont körül való járásánál állandókkal, az első alapegyenlet:

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ \omega_p \tag{8}$$

gyökeivel megszorzódnak. Hasonlóképpen a második differencziálegyenletnek van olyan

$$v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_q \tag{9}$$

kanonikus integrálrendszere, melynek elemei e körüljárásnál a második alapegyenlet

$$\rho_1,\ \rho_2,\ldots,\rho_q \tag{10}$$

gyökeivel szorzódnak. Feltételünk szerint a 8) alatti gyökök mind különbözők; éppen így a 10) alattiak is. Ha a 6) alatti differencziálegyenleteknek van közös integráljuk: y, akkor ez mind a 7) mind a 9) alatti alaprendszer segítségével lineárisan kifejezhető; tehát fönnáll e két alaprendszer között a következő identitás:

$$c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_pu_p+d_1v_1+d_2v_2+\cdots+d_qv_q=0. \qquad 11)$$

a hol c és d együtthatók állandó számértékek.

Ha már most az x független változó az a szinguláris pont körül jár, akkor e 11) alatti identitás átmegy a következőbe:

$$c_1\omega_1u_1+c_2\omega_2u_2+\cdots+c_p\omega_pu_p+d_1\rho_1v_1+d_2\rho_2v_2+\cdots+d_q\rho_qv_q=0 \qquad 12)$$

és i körüljárás után a következőbe:

$$c_1\omega_1^iu_1+c_2\omega_2^iu_2+\cdots+c_p\omega_p^iu_p+d_1\rho_1^iv_1+\cdots+d_q\rho_q^iv_q=0. \qquad 13)$$

Ha ezen egyenletben i helyett rendre e számokat teszszük:

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, p+q-1,$$

akkor oly lineár egyenletrendszert kapunk, melynek csakis akkor lesz a

$$c_1u_1,\ c_2u_2, \ldots\ d_qv_q\text{-}$$

ban 0-tól különböző megoldása, ha e determinans

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \ldots & \omega_1^{p+q-1} \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 & \ldots & \omega_2^{p+q-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \omega_p & \omega_p^2 & \ldots & \omega_p^{p+q-1} \\ 1 & \rho_1 & \rho_1^2 & \ldots & \rho_1^{p+q-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \rho_q & \rho_q^2 & \ldots & \rho_q^{p+q-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Minthogy pedig úgy az ω, mint a ρ gyökök maguk közt különbözők, tehát kell, hogy valamelyik ω gyök megegyezzék valamelyik ρ-val, vagyis kell, hogy a két alapegyenletnek közös gyöke legyen. Ezzel tehát a szóban forgó tételt arra az esetre, midőn a két alapegyenletnek csupa különböző gyökei vannak, bebizonyítottuk.

Ha a 6) alatti differencziálegyenleteknek valamely a ponthoz tartozó alapegyenleteinek egyenlő gyökei vannak, akkor e szinguguláris ponthoz szintén tartoznak olyan kanonikus integrálok, melyek egyszerű körüljárási transzformácziót szenvednek. Legyen az első differencziálegyenlethez tartozó alapegyenlet:

$$\varphi(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_\varrho)^{k_\varrho}=0 \tag{14}$$

és a második:

$$\psi(x)=(x-a_{\varrho+1})^{k_{\varrho+1}}(x-a_{\varrho+2})^{k_{\varrho+2}}\dots(x-a_r)^{k_r}=0 \tag{15}$$

a hol tehát:

$$k_1+k_2+\cdots+k_\varrho=p$$

és

$$k_{\varrho+1}+k_{\varrho+2}+\cdots+k_r=q,$$

akkor pl. az a_1 gyökhöz tartozik olyan k_1 számú

$$u_{11},\ u_{21},\ \dots\ u_{k_11}$$

lineárisan független integrál, melyek x-nek a szinguláris pont körül valójárásánál a következő transzformácziót szenvedik: *

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{I}}_{11}&=a_1u_{11}\\ u^{\mathrm{I}}_{21}&=a_1u_{21}+u_{11}\\ u'_{31}&=a_1u_{31}+u_{21}\\ \dots&\dots\\ u^{\mathrm{I}}_{k_{11}}&=a_1u_{k_11}+u_{k_1-1,1}\end{aligned} \tag{16}$$

a hol u^{I} azt a függvényágat jelöli, a mely az u-ból a körüljárás folytán válik.

Ebből következik, hogy ha x még egyszer megteszi a körüli elemi útját, akkor az előbbi ágak átmennek ezekbe:

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{II}}_{11}&=a_1^2u_{11}\\ u^{\mathrm{II}}_{21}&=a_1^2u_{21}+2a_1u_{11}\\ u^{\mathrm{II}}_{31}&=a_1^2u_{31}+2a_1u_{21}+u_{11}\\ \dots&\dots\\ u^{\mathrm{II}}_{k_{11}}&=a_1^2u_{k_11}+2a_1u_{k_1-1,1}+u_{k_1-2,1}.\end{aligned} \tag{16a}$$

* L. Jordan Cours d'Analyse III. köt. p. 173.

Egy harmadik ilyen körüljárásnál pedig a következőkbe:

$$u_{11}^{\mathrm{III}}=a_1^3 u_{11}$$
$$u_{21}^{\mathrm{III}}=a_1^3 u_{21}+3a_1^2 u_{11}$$
$$u_{31}^{\mathrm{III}}=a_1^3 u_{31}+3a_1^2 u_{21}+3a_1 u_{11}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{k_1 1}^{\mathrm{III}}=a_1^3 u_{k_1 1}+3a_1^2 u_{k_1-1,1}+3a_1 u_{k_1-2,1}+u_{k_1-3,1}$$

s i. t. A $\varphi(x)=0$ alapegyenlet minden gyökéhez tartozik a kanonikus integrálóknak ilyen csoportja. Éppen így a $\psi(x)=0$ egyenlet minden gyökéhez tartozik annyi integrál, a hányszoros az illető gyök; így pl. az a_i-hez tartozik k_i számu

$$u_{1i},\ u_{2i},\ \ldots\ u_{k_i i}$$

kanonikus integrál, melynek a 16) alatti egyenletekhez analog körüljárási relácziók felelnek meg.

Ha már most a 6) alatti egyenleteknek van közös integráljuk y, akkor ez mind az

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\varrho$$

mind az

$$a_{\varrho+1},\ a_{\varrho+2},\ \ldots,\ a_r$$

gyökökhöz tartozó kanonikus integrálokkal lineárisan kifejezhető; tehát e $p+q$ kanonikus integrál között a következő identitás áll fenn:

$$c_{11}u_{11}+c_{21}u_{21}+\cdots+c_{k1}\,u_{k,1}+\cdots+c_{1r}\,u_{1,r}+c_{2r}\,u_{2,r}+\cdots+ \\ +c_{k_r r}u_{k_r r}=0. \qquad 17)$$

Ha az x független változó az a szinguláris pont körül elemi útját megteszi, akkor az u integrálok a 16) alatti egyenletekben foglalt transzformácziót szenvedik és ha e körüljárást $p+q-1=n-1$-szer ismételjük, akkor a c állandó együtthatókra lineár egyenletrendszerre jutunk, melynek csakis akkor van a 0-tól különböző megoldási rendszere, ha ez a determináns:

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{11}^{\mathrm{I}} & u_{11}^{\mathrm{II}} & \dots & u_{11}^{(n-1)} \\ u_{21} & u_{21}^{\mathrm{I}} & u_{21}^{\mathrm{II}} & \dots & u_{21}^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_{k_1 1} & u_{k_1 1}^{\mathrm{I}} & u_{k_1 1}^{\mathrm{II}} & \dots & u_{k_1 1}^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_{1r} & u_{1r}^{\mathrm{I}} & u_{1r}^{\mathrm{II}} & \dots & u_{1r}^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_{k_r r} & u_{k_r}^{\mathrm{I}} & u_{k_r r}^{\mathrm{II}} & \dots & u_{k_r r}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

azonosan eltünik. Ha ezt a determinánst transzformáljuk úgy, hogy az első oszlopot $\frac{u_{21}}{u_{11}}$-gyel szorozván levonjuk a másodikból, továbbá az első oszlopot $\frac{u_{31}}{u_{11}}$-gyel és az új másodikat $\frac{u_{21}}{u_{11}}$-gyel szorozván a harmadikból s i. t.; figyelembe véve a 16), 16*a*), 16*b*) stb. alatti körüljárási relácziókat) és még mindenik csoportban az i-ik oszlopot $(i-1)$!-sal megszorozzuk, akkor a következőre jutunk:

$$u_{11}u_{12}\dots u_{1r}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 0 & 1 & 2a_1 & \dots & (n-1)\,a_1^{n-2} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & (n-1)(n-1)\,a_1^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_1!\binom{n-1}{k_1}a_1^{n-k_1-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & a_r & a_r^2 & \dots & a_r^{n-1} \\ 0 & 1 & 2a_r & \dots & (n-1)\,a_r^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_r!\binom{n-1}{k_r}a_r^{n-k_r+1} \end{vmatrix}$$

Minthogy pedig az elül álló tényező nem lehet identikusan 0, mert $u_{11}, u_{12}, \ldots$ mint a JORDAN-féle csoport első tagjai közől egy sem tünik el identikusan, tehát kell, hogy a mellette levő determináns eltünjék. Ez a determináns megegyezik a 2) alatti Δ determinánssal; ha tehát a $\varphi(x)=0$ és $\psi(x)=0$ alapegyenletekből egy új

$$f(x)=\varphi(x)\,.\,\psi(x)=0$$

egyenletet alkotunk, akkor kell, hogy

$$f^{(k_1)}(a_1)\,.\,f^{(k_2)}(a_2)\ldots f^{(k_r)}(a_r)=0$$

legyen.

Ha az

$$a_1,\ a_2,\ldots a_r$$

gyökök mind különbözők volnának, akkor az

$$f(x)=0$$

egyenletnek a_i csakis k_i-szeres gyöke lenne, tehát $f^{(k_i)}(a_i)$ a 0-tól különböző volna.

Feltettük, hogy a_i a $\varphi(x)=0$ egyenletnek k_i-szeres gyöke, tehát kell, hogy valamelyik a_i nem csak a $\varphi(x)=0$, hanem egyúttal a $\psi(x)=0$ alapegyenlet gyökei között is foglaltassék, vagyis kell, hogy a két alapegyenletnek közös gyökük legyen. Ezzel tehát a szóban forgó tételt egész általánosságban bebizonyítottuk.

Beke Manó.

WEIERSTRASS EMLÉKEZETE.

Weierstrass Károly 1815-ben október 31-én Ostenfeldében Westfaliában született mint az ottani polgármester fia. 1829-től 1834-ig a paderborni gimnaziumot látogatta és azután Bonnban jogot hallgatott. Csak 1838-ban, tehát 23 éves korában határozta el magát a mathematika tanulására és Münsterbe ment, a hol Guderman-nál egy mathematikai előadást látogatott, az egyedülit, melyet életében hallgatott. Miután az exament pro facultate docendi letette és a próbaévet leszolgálta, előbb a deutsch-krone-i progimnáziumnak és később a braunsbergi gimnáziumnak tanára lett. Weierstrass tizenöt éven át középiskolai tanár volt; ez idő alatt a függvénytan legnehezebb problemáiról a jelentékeny értekezéseknek egész sorát közölte. Első elismerését e dolgozataiért a königsbergi egyetem bölcsészeti karától kapta, a mely 1854-ben Richelot inditványára honoris causa doktorrá avatta. Két évvel később Weierstrass már Berlinbe ment, mint a Gewerbe-Institut (ipariskola) rendes és az egyetem rendkívüli tanára, valamint a tudományos akadémia tagja. 1864-ben a berlini egyetem rendes tanára lett. 1856 óta Weierstrass a göttingai tudós társaság levelező és 1865 óta külső tagja volt. Születésének hetvenedik évfordulóját a mathematikai világ ünnepként ülte meg, ép úgy a nyolczvanadikat is, melyen ugyancsak a göttingai tudós társaság egy üdvözlő feliratban mint a mathematikai szaknak legnagyobb élő mesterét ünnepelte.

Weierstrass 1897 február 19-én nyolczvankét éves korában halt meg Berlinben. Tanári működését már évek óta abba hagyta, de szellemi frissesége megmaradt haláláig. Még személyesen tőle távol álló mathematikusok látogatását is szivesen fogadta és tudományos igyekvéseiket érdekkel követte.

WEIERSTRASS külső megjelenése jelentékeny volt; csillogó szeme és ősz haja még annak az emlékében is meg fognak maradni, a ki őt csak ritkán látta. Arczképét az állam megbizásából a Nationalgallerie számára festették meg.

WEIERSTRASS értekezéseit és előadásait egy bizottság adja ki, a melyet a berlini tudományos akadémia a maga kebeléből kinevezett és melynek WEIERSTRASS maga is tagja volt. Az első két kötet már megjelent.

Akadémiai székfoglalójában 1857-ben WEIERSTRASS maga fejtette ki tudományos programmját. Kifejti benne, hogy az elliptikus függvények elmélete már első tanulmányozásánál mily hatalmas vonzóerőt gyakorolt reá és hogy a több változós szakaszos függvények tanulmányozását, a melyeknek létezését már JACOBI mutatta ki, a mathematika egy főfeladatának tekintette és elhatározta, hogy ő is fog vele megpróbálkozni. Hogy e nehéz feladatra előkészüljön, előbb a meglévő segédeszközök alapos tanulmányozására és kevésbé nehéz feladatok megoldására adta magát. Eme tanulmányok eredményei voltak az 1841 és 1843 között megjelent dolgozata a hatványsorok elméletéről, az analitikai függvények algebrai differencziálegyenletekkel való értelmezéséről és az analitikai fakultásokról. Most három alapvető értekezése következett a hiperelliptikus integráloknak úgynevezett megforditási problemájáról; az első a braunsbergi gimnázium értesitőjében jelent meg és a hiperelliptikus integrálok szakaszai között fennálló relácziók levezetését tartalmazta, e relácziók a JACOBI-féle megforditási probléma megoldására alapvető fontosságúak; a második és harmadik értekezés a Crelle-féle Journak 47., illetve 52. kötetében rövid kifejtését adta az útnak, a melyen ő a megforditási problémát megoldó függvényeket mint mindenütt összetartó hatványsorok hányadosait tényleg előállitja. Ez az út teljesen új és ellenkezője volt annak, melyet eddig a $p = 2$ genus esetére ROSENHAIN és GOEPEL megpróbált. Míg ezek a mathematikusok a thetafüggvényeket és az ezek között kiszámitott relácziókat választották elméletük alapjául, addig WEIERSTRASS a hiperelliptikus függvények differencziálegyenleteiből indult ki és nála a theta-függvények mint elméletének utolsó tagjai szerepelnek. A JACOBI-féle megfordítási probléma megoldását, melyet WEIERSTRASS e dolgozataiban a hiperelliptikus függvényekre először adott és melyet tetszőleges ABEL-féle integrálók számára azután előbb RIEMANN más úton és azután maga WEIERSTRASS is előadásaiban kifejtett, joggal az analizis egyik legnagyobb vivmányának tekinthetjük.

De legnyomatékosabb és legmesszebbható befolyását a mathematika fejlődésére WEIERSTRASS az analitikai függvények elméletének újból való megalapitásával és rendszeres felépitésével érte el. Ez elmélet felállításánál, mely életének főműve, az alapok biztosításánál és a fogalmak tisztázásánál legnagyobb szolgálatot tett neki az a kritika, melyet az átvett analitikai anyagon mesteri élességgel gyakorolt s mely tudományos gondolkodásának mindvégig alapvonása.

Mindenekelőtt emlékeztetünk a függvényfogalom WEIERSTRASS-féle kritikájára, mely őt arra vezette, hogy az analitikai függvényt mint ama hatványsorok összességét definiálta, melyek egy meghatározott hatványsorból folytatás útján keletkeznek. A hatványsor e szerint az ő analitikai függvényelméletének alapja; a hatványsor neki fogalmilag az irraczionális szám analogonja, mely utóbbit mint raczionális számok, végtelen összegét definiálja és alakilag is elmélete legtermészetesebb alapjának tekinti, mert észreveszi, hogy a hatványsorokkal való számolás az összeadás, kivonás, szorzás és osztás közönséges alaptörvényei szerint történik. Elméletének továbbfejlesztésére WEIERSTRASS a definicziójának lényegét és értékét abban látja, hogy a függvénynek bármily analitikai egyenlettel kifejezett tulajdonsága, a mely a komplex változónak akármely kis tartományára ki van elégítve, szükségképen az egész értelmezési tartományra érvényes, vagy röviden, hogy a tartomány *egy* helyének tulajdonságai *minden* helyre érvényesek. WEIERSTRASS példákon kimutatja, hogy ez a körülmény nem állana fenn, ha a függvényt esetleg mint analitikai kifejezést vagy raczionális függvényeknek egy tetszőleges végtelen sorával értelmeznők.

Egy, úgy alakra mint tartalomra nézve klasszikus értekezésében, az egyértelmű analitikai függvények elméletéről WEIERSTRASS a függvényeknek egy nagy osztályát, tudniillik az egyértékű és az egész síkban értelmezett és véges számú lényegesen szinguláris helylyel biró függvényeket a függvény elméletének elvei szerint tárgyalta és különösen ez osztály függvényei számára a legáltalánosabb analitikai kifejezést állította fel.

A differencziálhányados hagyományos fogalmának kritikája WEIERSTRASSt egy valós változó oly függvényeinek felfedezésére vezette, a melyek, noha adott számközön belül mindenütt folytonosak, differencziálhányadosuk sehol sem állítható elő.

Legnagyobb fontosságú az az éles megkülönböztetés, a melyet WEIERSTRASS a szerint tett, a mint egy függvény egy helyen egy értéket elér vagy azt csak tetszőlegesen megközelíti, különösen a megkülönböztetés valamely valós változó maximuma és minimuma és felső és alsó határa között. Ama tételében, hogy valós változónak folytonos függvénye felső és alsó határát tényleg mindig eléri, azaz szükségképen mindig maximuma és minimuma van, WEIERSTRASS egy oly segédeszközt teremtett, melyet ma finomabb analitikai vagy arithmetikai vizsgálatoknál egy mathematikus sem nélkülözhet.

Az említett megkülönböztetéssel szoros összefüggésben áll WEIERSTRASSnak az úgynevezett DIRICHLET-féle elvre vonatkozó kritikája. Ez oly elv, a melynek segítségével RIEMANN megállapította az ABEL-féle függvényekre vonatkozó nagyszerű elméletét. WEIERSTRASS felismerte, hogy az ezen elv alapját tevő következtetési mód nem állja meg helyét, és ezt oly módon mutatta ki, hogy példa gyanánt egy egészen egyszerű integrált adott, melynek a benne előforduló függvény tetszőlegessége (Willkür) folytán az alsó határértéke zérus ugyan, de mindazonáltal a zérus értéket soha sem veszi fel pontosan, bármiképen válaszszuk is, a végső feltételeknek megfelelőleg, a különben tetszőleges függvényt az integrál jele alatt.

A mint láttuk, WEIERSTRASS tudományos tevékenységét főleg két nagy feladatnak szentelte, tudniillik az ABEL-féle függvényekre vonatkozó elmélet fejlesztésének és az általános függvényelmélet ujjá alapitásának. Ezek és a rokon ismeretterületek képezték egyúttal amaz előadások főtárgyát, a melyeket Weierstrass a berlini egyetemen tartott; ezek mindenekelőtt az előadások az analitikai függvények elméletéről, az elliptikus, a hiperelliptikus és az Abel-féle függvényekről. Ezek az előadások számtalan jegyzetben tanitványainak körén messze túl terjedtek és a távolabb állóknak gyakran szóbeli közlés folytán is tudomásukra jutottak; csak ez előadások révén lehet tanának egész gondolattartalmát megismerni. Ezek igen világosan bizonyítják, hogy a mathematikai tudomány elsajátitására és terjesztésére az irott formulával szemben a kimondott szó egyenlő jogú tényező és ép oly nélkülözhetetlen segédeszköz.

Az előadásnak, a mely az egyváltozós analitikai függvények általános elméletére vonatkozik, tárgya a függvényelméletnek már emlitett ujjá alapitása és ez képezi a Weierstrass egész rendszerének alapját; ezt különösen a szigorú módszer és a gondolatfejlesztés természetszerű menete jellemzi.

Megemlékezünk továbbá az elliptikus függvényekről tartott előadásáról. Weierstrass eme függvények elméletét lényegesen egyszerűsitette azáltal, hogy a Jacobitól tanulmányozott függvények helyébe a $p(u)$ és $\sigma(u)$ függvényeket vezette be, a melyek a periodusok lineár transzformácziójával szemben is invariáns jellegűek. A képleteket és tantételeket e függvények használatára Weierstrass előadásai és feljegyzései nyomán Schwarz H. A. dolgozta fel és adta ki. A $p(u)$ és $\sigma(u)$ Weierstrass-féle elliptikus függvények most majdnem általánosan ismeretesek a mathematikai világban.

A hiperelliptikus függvényekről tartott előadása az előbb emlitett és Weierstrasstól értekezéseiben kidolgozott elméletnek kifejtését és tökéletesitését tartalmazza. Az Abel-féle függvényekről szóló előadásából végre látjuk, hogyan sikerült neki az eredetileg a hiperelliptikus függvények tanulmányozására számára követett útján emez általánosabb függvények elméletét felállitani. Ez az elmélet egyenlőrangú azzal, a melyet Riemann teljesen más módon majdnem ugyanabban az időben állapittatott meg. A míg RIEMANN — mint előbb említők — az ABEL-féle függvényekről szóló elméletét nem egészen kifogásolhatatlan DIRICHLET-féle elvre alapította, addig WEIERSTRASS idevágó elmélete algebrai alapon nyugszik. WEIERSTRASS, mint egy SCHWARZ H. A.-hoz intézett levelében kifejti, dogmának tekintette, — melyben különösen a többváltozós analitikai függvények beható tanulmányozása megerősitette, — hogy a függvényelméletet algebrai igazságok alapján kell felépiteni és hogy e miatt nem az a helyes út, a mely a megfordított és egyszerű és alapvető algebrai tételek bebizonyítására úgynevezett transcendens segédeszközökhöz kénytelen folyamodni.

Az algebrai alakzatok WEIERSTRASS-féle elméletére kiválóan jellemző a primfüggvény fogalma. Az által, hogy WEIERSTRASS az algebrai alakzatot a róla elnevezett normálalakban olyformán fekteti alapul, hogy a végtelen hely az alakzatnak csak egy helyét teszi ki, bebizonyítja egy analitikai és az algebrai alakzaton egyértékű függvény létezését, mely mindenütt a végesben szabályosan viselkedik és azonfelül legfeljebb az adott alakzatnak egyetlen egy adott helyén tűnik el.

Ha az algebrai alakzat *neme* vagy WEIERSTRASS szerint *rangja* nagyobb zérusnál, akkor ama függvénynek a végtelen távolban szükségképen van egy lényegesen szinguláris helye és hogyha ez a szingularitás még kellő módon jellemeztetik, WEIERSTRASS ama függvényt primfüggvénynek nevezi és bebizonyítja, hogy minden egész algebrai függvény egy és csak egyféle módon fejezhető ki, mint primfüggvények szorzata. Az a tétel a mathematikai mennyiségek egyféle szétbonthatóságáról primtényezőkre, mely egész raczionális számokra vonatkozólag nem mathematikusok előtt is ismeretes, így a primfüggvény fogalma által egy algebrai alakzat függvényeinek tartományára is meg van állapítva és ily értelemben a primideál algebrai fogalma a WEIERSTRASS-féle transcendens primfüggvénynyel lesz megvalósítva. Az említett tétel segítségével, mely szerint minden egész függvény csak egyféleképen bontható fel primfüggvényekre, jut WEIERSTRASS az ABEL-féle theoremához és ennek megfordításához, az az, hogy az arithmetika nyelvén beszéljünk, annak felismeréséhez, hogy az ABEL-féle theorema egyenletei adják annak szükséges és elegendő feltételét, hogy az algebrai alakzat egy ideálja a főideálok osztályához tartozzék. A JACOBI-féle megfordítási probléma megoldása és az ABEL-féle függvények kifejezése thetafüggvények segítségével fejezik be az előadást.

Legszorosabb vonatkozásban az ABEL-féle függvények elméletéhez áll egy jegyzet tárgya, melyet WEIERSTRASS a berlini akadémia 1869-iki havi jelentéseiben közölt és mely a legáltalánosabb n változás $2n$-szeresen szakaszos függvények fontos kérdésére vonatkozik. Egy BORCHARDT-hoz intézett levél ugyanezzel a tárgygyal foglalkozik. Sajnos, hogy az itt felállított tételek bebizonyításai még máig sem ismeretesek.

Az ABEL-féle függvényekkel való foglalkozása arra indította WEIERSTRASST, hogy egy változós analitikai függvényekről szóló elméletét több változóra kiterjeszsze ; ő a hatványsorok segítségével kifejtette a többváltozós analitikai függvények elméletét és felfedezte ez elmélet és az egyváltozós függvények elmélete közötti említésre méltó analogiákat és különbségeket. E téren való kutatásainak legfőbb eredményeit WEIERSTRASS először 1879-ben litografáltatta hallgatói számára.

WEIERSTRASS teremtő tevékenysége semmikép sem szorítkozott pusztán a függvényelméletre. Az algebra alaptételének, melynél fogva minden egyenletnek gyöke van, neki köszöni két új levezetését. Az utóbbi 1891-ben közölt bizonyítás azonkívül utat mutat, hogyan lehet a gyököket véges számú előre áttekinthető operáczióval tetszőleges pontossággal kiszámítani.

WEIERSTRASS gazdagította továbbá a lineáris transzformácziók algebráját az elemi osztók fogalmával; eme fogalom segélyével ő állította fel a szükséges és elegendő feltételeket arra, hogy két bilineár vagy quadratikus alak más két adott alakba egyszerre lineáris módon transzformálható legyen. Az elemi osztók elméletét azóta a mathematika legkülönbözőbb ágaiban bevezették és felhasználták.

A «Göttinger Nachrichten» 1883-ik évi kötetében jelent meg és WEIERSTRASS-nak SCHWARZ H. A.-hoz intézett levele az n főegységből képezett komplex mennyiségekről, a melyben azt a GAUSS-tól felvetett kérdést tárgyalja, miért nem adhatják a több mint két dimenziós sokaságot alkotó dolgok közötti relácziók a komplex számoknak még más az általános arithmetikában megengedhető fajait. WEIERSTRASS az ő kutatásának eredménye folytán valószinűnek tartja, hogy GAUSS ezt [a meg nem engedhetőséget (Unzulässigkeit)] azáltal látta megokolva, hogy több mint két főegységnek bevezetése mellett két mennyiség szorzata elenyészhetik anélkül, hogy valamelyik tényező egyenlő lenne zérussal. Mindenesetre — amint WEIERSTRASS nyomatékosan ki is emeli, — vizsgálatából kitünik, hogy az általános komplex mennyiségek algebrája nem vezethet oly eredményhez, melyet nem lehetne az egy vagy két főegységből alkotott komplex mennyiségek elméletéből egyenesen levezetni.

WEIERSTRASS egyik dolgozatában tetemesen egyszerűsíti HERMITE és LINDEMANN ama kutatásait, a melyek végeredménye az «e» és «π» számok transcendens jellegének kimutatásában állottak.

Nagyszámú értékes mathematikai közlemény WEIERSTRASS buzdítására keletkezett. Itt csak amaz említésreméltó tételekről akarunk megemlékezni, melyeket MITTAG-LEFFLER kapcsolatban WEIERSTRASSnak előbb említett vizsgálódásaival az egyértékű analitikai függvényekről kifejtett és SCHOTTKY F. érdekes értekezéséről «Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln.»

A függvény elméletnek egy ága sem maradt érintetlen WEIERSTRASS tanaitól; gondoljunk itt csak arra a befolyásra, melyet elmélete a közönséges és parcziális differencziálegyenletek tanára gyakorolt.

Más mathematikusoknak fontos és fejlődésre képes elméletei is visszavezetnek WEIERSTRASSra, ha forrásaikat kutatjuk. Igy SCHWARZ H. A. érdekes és figyelmet gerjesztő vizsgálatai minimális felületekről ama képletekhez fűződnek, melyeket WEIERSTRASS 1866-ban a berlini akadémia havi jelentéseiben kifejtett és a határszéli feladat (Randwertaufgabe) a potencziálelméletben SCHWARZ H. A. és NEUMANN C. alapvető módszerei által oly mathematikai vívmánynyá lett, mely WEIERSTRASS előbb említett a DIRICHLET-féle elvre vonatkozó kritikájának köszönhető. Továbbá az ujabban franczia mathematikusok által, különösen HADAMARD J. által kifejtett vizsgálatot egyértékű analytikai függvényekről határozott nemmel (Geschlecht) következetes továbbfejlesztései a WEIERSTRASS elméleteinek az egyértékű analitikai függvényekről. Mily fontosak ezek a vizsgálatok az arithmetikában is, legujabban fényesen mutatta HADAMARD J. (sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et tes conséquences arithmétiques. Bull. de la soc. meth. t 24. 1897), kinek lényegesen az egyértékű analitikai függvények elméletének alapján sikerült ama GAUSS óta a legelső mathematikusok által hiába keresett bebizonyitás, hogy az egy adott m számon alul fekvő primszámok számának asymptotikus értéke $\frac{m}{\log m}$.

A mi végre a függvénytan alkalmazását illeti, mindenekelőtt WEIERSTRASS előadásait a variáczíószámitásról kell említenem. Csudálatos kritikai éllel tárja fel itt WEIERSTRASS az átvett elmélet hiányait, kimutatja, hogy a régi módszerek nem a meghatározandó függvény valamennyi variáczióját, hanem csak azokat veszik figyelembe, melyek számára a meghatározandó függvény differencziálhányadosai is végtelen keveset variálnak. W. adja a kérdés megoldását, ha egy határozott integrálnak egy tetszőleges függvénynyel maximuma vagy minimuma van, akként, hogy EULER, LAGRANGE, LEGENDRE és JACOBI kriteriumaihoz egy ujat csatol.

A függvényelmélet alkalmazásaira a mechanikában és fizikában is nagy súlyt fektetett WEIERSTRASS és tanítványait sokszor e téren kutatásokra ösztönözte. E tekintetben csak BRUNS H. dissertátióját említjük, mely a potencziálfüggvény folytatását a tárgyalt test felületén túl vizsgálja és KOWALEVSKI ZSÓFIÁnak szintén WEIERSTRASS által megindított kutatásait a fény töréséről kristályos közegekben. Hiszen a tiszta mathematika viszonyairól az alkalmazott mathematikához a tudósok hajlamaik és munkakörük szerint a legkülönbözőbb nézetekkel birtak. KUMMER hitvallását e tekintetben kifejtette 1856-ban akadémiai székfoglalójában.

«A mathematika — mondja KUMMER — mint segédtudomány is, különösen a természetre alkalmazva, nem egy nagy diadalt aratott és nem tagadható, hogy ezeknek köszönheti főleg az általános becsületet, a melyben áll; de legmagasabb virágát az ő véleménye szerint csak az elvont tiszta quantum a neki sajátos elemében fejtheti ki, a hol függetlenül a természet külső valódiságától csak önönmagának a czélja.» Weierstrass meggyőződése már inkább közvetitő volt. A mathematika jelentőségét, melyet ez mint tiszta tudomány igényel, teljesen elismeri és int attól, hogy valamely tudomány czélját rajta kivül keressük: de egyúttal hangsúlyozza 1857-iki akadémiai székfoglalójában, hogy neki nem közömbös, valjon egy mathematikai elmélet a fizikában alkalmazható-e vagy sem. W. a mathematika és természeti kutatás viszonyának egy mélyebb felfogását pártolja, melynek értelmében a fizikus a mathematikában nemcsak segédtudományt lásson és a mathematikus a fizikus által felállitott kérdésekkel ne csak példagyüjteménynek tekintse módszerei számára. «Arra a kérdésre,» folytatja Weierstrass ama beszédjében, «valjon lehetséges-e, amaz elvont elméletekből, melyekhez a mai mathematika előszeretettel fordúl, valami közvetetlenül használhatót nyerni, azt szeretném válaszolni, hogy tisztán spekulativ uton fejtették ki görög mathematikusok a kúpszeletek tulajdonságait már régen, mielőtt valaki sejtette volna, hogy ezek bolygóink pályái és ő tényleg reméli, hogy még több oly tulajdonságú függvény lesz, milyeneket Jacobi az ő thetafunkczióján dicsér, mely tanítja, hány quadratra lehet minden számot felosztani, hogyan lehet egy ellipsis ivét kiegyenesíteni és mégis, teszi hozzá Weierstrass, képes, és pedig kizárólagosan ő maga az igaz törvényt kifejezni, mely szerint az inga mozog.»

Weierstrass most sok évi munkatársát a berlini egyetemen, Kronockert követte a halálba és miután Cayley és Sylvester is elhúnytak, ama klasszikus időből, melyben a mathematika mindenütt oly magas virágzásban állott, csak az ősz Hermite maradt meg Párisban, a königsbergi egyetem másik tiszteletbeli doktora. Ez az éleseszű és sokoldalú mathematikus minap a párisi akadémiában Weierstrass emlékének szives szavakat szentelt. «Híres kartársunk élete, így fejezi be Hermite nekrológusát, egészen ama tudománynak volt szentelve, melyet feltétlen odaadással szolgált. Hosszú volt és gazdag megtiszteltetésekben; de egy záródó sír előtt csak lángeszéről és arról az általános rokonszenvről emlékezünk meg, mely jellemének nemességéhez illett. WEIERSTRASS igaz volt és jó; fogadja a legnagyobb megbecsülésünket tele sajnálattal és tisztelettel, melyet emlékéhez intézünk. Emlékezete addig fog élni, míg igazságra vágyó lelkek igyekvésüket az analizis és a mathematika haladására fogják fordítani.»

Hilbert Dávid (fordította Kopp Lajos).*

* Igaz hálával tartozunk HILBERT-nek, a jeles göttingai mathematikusnak lekötelező készségeért, a melylyel beszédjének magyar kiadásához hozzájárulni szíves volt. *Rados.*

KATHÓDSUGARAK ÉS RÖNTGENSUGARAK.

Nincs még két éve, hogy Röntgen a würzburgi orvosi- és fizikai társulat ülésén előterjesztette az új sugaraknak felfedezését. De e két év elegendő volt arra, hogy a művelt nemzetek szaklapjaiban valóságos Röntgensugár-irodalom keletkezzék. Az ujság ingerétől és a teljesen szűz s olyannyira termékenynek látszó talajtól csábíttatva a kutatók egész gárdája vetette magát neki a laikusok szemében oly rejtelmes sugarak tanulmányozásának. Mint ez ilyenkor történni szokott, a legkülönbözőbb helyekről összehordott tények és megfigyelések egész serege halmozódott fel, a melyben akadnak tévesek, egymásnak ellenmondók is. Ha azonban a tények kellő számban már rendelkezésünkre állanak, kezdetét kell venni a rendszeres, kritikai feldolgozásnak, a különböző megfigyelések összhangbahozatalának, a tévedések kiselejtezésének, és a lehetőleg szerves egész kiépítésének.

A következő tanulmány ezt a feladatot igyekszik megoldani a jelenségek egyik részére nézve, és e mellett még pár egészen új és nagy jelentőségű kisérleti törvényt is állapit meg. A szerző mindkét tekintetben igen érdemes dolgot nyújt. Példáját adja egyrészt a tiszta, logikus okoskodásnak, másrészt a tervszerű, elmés kisérletezésnek. E két fegyverrel oly utat tud nyitni a jelenségek kaoszában, a mely bepillantást enged meg a jövőbe is, abba a mélyreható átalakitásba, melyet a Röntgensugarak idézhetnek elő a gázak elméletében és az elektrochemiában.

A Röntgensugarakról szóló részt megelőzi a kathódsugarakról szóló tanulmány, a mely szintén hivatva van hozzájárúlni a fogalmak tisztitásához.

Most még röviden néhány szót magáról a szerzőről. Jean Perrin egészen fiatal fizikus még, ezidőtt a párisi École Normal supérieure fizikai laboratóriumában préparateur; kisérleteit másfél éven keresztül ugyancsak itt végezte. Maga a tanulmány a párisi Faculté des Sciences-hoz benyújtott doktori értekezés, és ennek az alapján avattatott is szerző doktorrá.

Végűl még csak azt kivánom megjegyezni, hogy a jelen dolgozat Perrin úr tudtával és beleegyezésével jelenik meg magyar fordításban.

Zürich, 1897 október havában. *Ifj. Szily Kálmán.*

ELSŐ RÉSZ.

KATHÓDSUGARAK.

I.

Történeti bevezetés.

1. *Általános tulajdonságok.* Midőn az elektromos kisülés keresztülhatol valamilyen üvegedényben foglalt erősen ritkított gázon, akkor a cső falának bizonyos részeit élénk zöld fluoreszkálás világítja meg. Igen sok olyan anyag van, a mely a csőbe zárva szintén fluoreszkál, még pedig különböző színekben az anyag természete szerint; így például a hegyi kristálynál kék, az yttrium oxidnál sárga és a rubinnál vörös szinben.

Ha a kathód és a fluoreszkáló tájékok egyike közé valamilyen tárgyat helyezünk el, úgy a fluoreszkáló felületen a tárgynak árnyékrajza tünik elő. A kathód, a tárgy és az árnyék körülbelől ugyanazon egyenesbe esnek; azért szokás azt mondani, hogy a kathód sugarakat bocsát ki. Ezek a Hittorf felfedezte *kathódsugarak.*

2. Azt tapasztaljuk továbbá, hogy ezek a kathód pontjaiból kiinduló sugarak nem divergálnak minden irányban, mert csupán egy diafragma alkalmazásával is keskeny, élesen határolt sugárkévét kaphatunk. A nélkül, hogy szigorú törvényt akarnánk kifejezni, azt mondhatjuk tehát, hogy minden kibocsátó pontból egy, és csakis egy sugár indul ki meghatározott irányban.

3. Ezek a sugarak általában egyenes vonalúak, ha ugyan nem vagyunk túlközel a kathódhoz, de mágnest közelítvén hozzájuk, erősen eltéríthetők. Abban a különös esetben, midőn a sugarak egyenletesen mágneses térbe hatolnak be, a tér iránya körül csigavonalban göngyölődnek össze úgy, hogy a sugarak és a tér iránya

állandó szöget alkot. Ha ez a szög derékszög, a csavarvonal felbomlik és körré válik.

A csavarvonal a mágneses térre vonatkoztatva az óramutató járásával megegyező irányban kanyarodik.

4. Ha a kathódsugarak igen könnyen mozogható tárgyra esnek, úgy ez a sugár irányának megfelelően mozgásba jön. Ezt Crookes mutatta meg az ő hiressé vált csöveivel.

Úgy látszik, hogy a kathód ehhez hasonló, de ellenkező irányú nyomásnak van alávetve.

Végül a kathódsugarak az utjukba eső tárgyakat fölmelegítik, bizonyos esetekben izzásba hozhatják és megolvaszthatják a platinát.

5. *Elméletek.* Ezeknek a sajátságos jelenségeknek magyarázatát keresvén, alig gondoltak egyébre, mint az energia kisugárzásának két módjára; így tehát nem lehet csodálkozni, ha itt is, épen úgy mint a fény esetében ismét az a két híres elmélet, nevezetesen a kibocsátás és a hullámzás elmélete jelenik meg a színen.

Az egyik fél szerint a kathódsugarak nem egyebek, mint negativ elektromossággal töltött anyagi részecskék, a melyek a kathódtól eltaszítva óriási sebességre tettek szert; ezek a részecskék különben vagy a kathódról szakíttatnak le, vagy pedig a csőben visszamaradó gázból erednek. A mechanikai és a hőhatások így aztán közvetlenül meg lennének magyarázva; a mágneses kitérítések iránya tényleg mozgásban lévő negativ elektromosság jelenlétére vall; csupán a fluoreszkálás kimagyarázása okozott némi nehézséget.

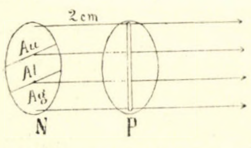
A másik fél szerint a kathódsugarakat az éthernek valamilyen rezgő mozgása idézi elő; ez a mozgás különben lehet akár új természetű, mint a milyen lenne a hosszrezgés, akár pedig egyszerűen ibolyántúli fény, rövid hullámhosszal. Ha a dolog így áll, a fluoreszkálás nem meglepő jelenség többé; a mechanikai hatások sem nyújtanak különös nehézséget, akár arra gondoljunk, hogy a közönséges fény is mutat hasonló tulajdonságokat a radiométerben, akár pedig Maxwell szerint felteszszük azt, hogy a fényhullám nyomást fejt ki az utjába eső akadályokra; a mágneses eltérítés azonban ez esetben teljesen magyarázatlan marad.

6. *Az elméletek harcza. Újabb felfedezések.* Az emisszió elmélete, melyet az angol fizikusok védelmeztek, kezdetben sokkal termékenyebbnek mutatkozott; úgy látszott, hogy a CROOKES-től kigondolt pompás kisérletek végleges felvilágosítást adnak róla. E kisérletektől vezetve fedezte fel CROOKES a mechanikai tulajdonságokat; csakhamar jelentette azt is, hogy a sugarak a kathódra merőlegesek és a gömbhéj alakú kathóddal a sugarakat a középpont felé konvergáltatta, a hol az így egyesített hatásuk a legnehezebben olvasztható anyagokat is megolvasztotta; végre azt hitte, hogy a kathódsugarak egynemű elektromozását is igazolta, midőn megmutatta, hogy két párhuzamos sugár taszítja egymást.

Másrészt megállapítván, hogy a kathód természete és illékonysága a sugárzásra nincsen hatással, CROOKES kijelentette, hogy a sugarak anyaga nem származhatik a kathódtól * és így szabatosab-

* CROOKES megmutatta, hogy a légüres cső belső falain talált fémi lerakodás nincs összefüggésben a kathódsugarakkal, és ebből azt következtette, talán kissé elsietve, hogy e sugarak a gáztól erednek és nem a kathódtól. Én is tettem oly kisérletet, a mely, noha nem teljesen meggyőző, megerősíti e hypothézis valószínüségét.

Az aluminiumból készült sík kathód N felső részén aranyozva, és alsó részén ezüstözve van. Szemben vele van a P anód, a melybe keskeny rés van vágva. Az ezen résen áthaladó sugarak oly sík nyalábot alkotnak, a melynek felső része aranyból, közepe aluminiumból és alsó része ezüstből indul ki. Ha e három részben a kathódsugarakat valóban arany, aluminium, illetőleg ezüst részecskék alkotják, úgy valószínű, hogy a sugarak különböző sebességgel birnak a három részben.



Ugyanis legyen M egy lövedék elektromos töltése, és V a potentiálesés N és P közt; legyen m a lövedék tömege és v a sebessége; akkor

$$MV = \frac{1}{2} mv^2.$$

Ámde V valamennyi lövedékre ugyanaz; ha tehát $\frac{M}{m}$ különböző az aranyra, aluminiumra és ezüstre (a mi úgy lenne, ha a lövedékek tényleg iónok), akkor v különböző lesz.

Ebben az esetben a nyaláb három része mágneses térben különbözőkép téríttetnék el; ámde a kisérlet azt mutatja, hogy egyformán viselkednek.

ban kifejezvén az emisszió-elméletet feltételezte, hogy a kathód környékén a megmaradó gáz egyes molekulái darabokra, *iónokra* hullanak szét, a melyek ellenkező elektromossággal vannak töltve, és hogy a míg a pozitiv iónokat a kathód elnyeli, a negatívok hevesen eltaszíttatnak és létrehozzák a kathódsugarakat. Feltevéséhez Schuster és J.-J. Thomson is csatlakoztak.

7. A német fizikusok viszont a kisérletek számát szaporították. Goldstein, Wiedemann és Hertz különösen a pontosságot tartva szem előtt, nagyobb gonddal irták le a tüneményeket, és megmutatták, hogy Crookes megfigyelései bizonyos esetekben kissé rövidesek voltak.

Goldstein egész tisztán látta, hogy a sugarak általában nem merőlegesek a kathódra; az előállítás körülményeit módosítván, azt tapasztalta, hogy a cső minden összeszűkülése lehet forrása a sugaraknak; végre talán közelebb járván a Röntgen-sugarak felfedezéséhez mint bárki más, kinyilatkoztatta, hogy ott, a hol a kathódsugarak megakadnak, végbemegy *valami*, a mi először is előidézi a talált test fluoreszkálását, ha ez lehetséges, de egyuttal fluoreszkálásba hozza a szomszédos testeket is.

Ebert és Wiedemann ismételve azt a kisérletet, a melyről Crookes azt vélte, hogy kimutatta vele két párhuzamos kathódsugár taszitását, arra a gondolatra jöttek, hogy e két sugár egyikét felfogják, egészen közel az eredetéhez. A másik sugár eltéritése ezzel nem módosult; az elfogott rész tehát nem hatott, és így csupán azt kellett felvenni, hogy az első sugár kezdeti iránya változik meg, ha a második sugárt előállítjuk. Ezzel a kathódsugarak elektromozásának legjobb bizonyitéka megsemmisült.

Csakhogy azt a különös dolgot észlelhetjük, a mire nem kivánok bővebben kiterjeszkedni, hogy a tér hatására a nyaláb felbomlik több egyenlőtlenül hajlított nyalábra, a melyek mindenike az egész réstől indul ki, és nem csupán a rés egy részétől. E szerint a kathódtól a természetétől független több különböző sebességgel biró sugárnyaláb indúlna ki. Lehetséges, hogy e különböző fajú sugarakat a csőben lévő különböző gázak idézik elő.

Pár nappal e kisérlet kivitele után Birkeland egy értekezése jelezte ezt a mágneses szétszóródást. Birkeland kathódja csakis aluminiumból készült.

CROOKES maga is, hogy közvetlenül igazolja ezt az elektromozást, sugárnyalábot irányított elektrométerrel összekötött fémlemezre. Ez a lemez mutatott is elektromos töltést, ámde ellentétben a várt eredménynyel, mindig pozitiv töltést.

Végre HERTZ is ki akarta mutatni az elektromosoknak feltételezett sugarak elektromos és mágneses tulajdonságait, de eredményt nem kapott, és így maga részéről a hullámzási elmélethez csatlakozott.

Ekként az emisszió-elmélet nyilvánvalólag tért veszitett, és így minden valószínütlenség nélkül mondhatta WIEDEMAN, hogy ha van is anyagátvitel a kathódsugarak mentén, ennek az anyagnak épp oly kevés szerepe van a tüneményben mint az ágyúból kilőtt golyónak a hangban, a mely az elindulást jelzi.

8. LÉNÁRD kisérletei * új vizsgálódásokat indítottak meg.

HERTZ megmutatta, hogy a finom fémlapocskák átbocsátják a kathódsugarakat. LÉNÁRD arra a gondolatra jött, hogy ily lapocskával a légüres cső falába vágott kis ablakot zárjon be; és sikerült is találnia oly lapocskát, mely elég erős volt arra, hogy a légnyomást kibirja, de egyuttal elég finom, hogy a sugarak áthatoljanak rajta. Az előállítás feltételeit a megfigyelés feltételeitől ekként elkülönítvén, a sugarakat különböző gázakba, különböző nyomás mellett behatoltathatta és új sajátságokat fedezhetett fel rajtuk.

A sugarak az ablaktól való távozásukkor erősen szétszóródnak, és az a nyaláb, a melyet két egymásmögé helyezett diafragmába fúrt két nyilás izolál, szintén igen gyorsan szóródik szét a kevéssé ritkított gázakban. Ellenkezőleg, igen tiszta marad a nyaláb a nagy mértékben ritkított gázakban; így az olyan levegőben, melynek sűrűsége kisebb mint a közönséges levegő sűrűségének százmilliómod része, LÉNÁRD tökéletesen egyenes sugarakat kapott, a melyek 1,5 m hosszú darabot gyengülés nélkül futottak be. LENÁRD azt hitte, hogy így e sugarakra vonatkozólag megismételte azokat a kisérleteket, a melyek eldöntötték, hogy a hang vagy a fény hala-

* L. *Math. Phys. L.* IV. k. 26. l.

dási közege az anyag vagy az éther-e, és mivel úgy látszott, hogy az anyag kisebb nyoma is inkább ártalmas a kathódsugarak terjedésére, mint hasznos, kijelentette, hogy az anyag-elmélet rossz.

Lénárd megmérte továbbá az előállító csőből már kilépett sugaraknak mágnes okozta eltérítését, és úgy találta, hogy ez az eltérítés független marad annak a gáznak természetétől és nyomásától, melyben a sugarak haladnak, legalább is addig a határig, a mikor már a túlnagygyá vált szétszóródás a mérést meggátolja. És úgy tetszett, mintha ez a nevezetes tulajdonság sem lenne összeegyeztethető a bombázás hypothézisével.

9. A csodálat, a melyben e szép kisérletek méltán részesültek, nem engedte meglátni a Lénárd okoskodásában rejlő hibákat, és ettől kezdve az emisszió-elmélet sok fizikus előtt halálra volt itélve.

Mindazonáltal a kathódsugarak nagyon elütők maradtak az ismert fénysugaraktól: a még kimagyarázatlan mágneses eltérítésen kívül a kutatás még a Lénárd felfedezte sajátságos elnyelési törvénynyel állt szemben, mely szerint a kathódsugarak tovaterjedésének megzavarásában, melyet valamilyen akadály idéz elő, csakis az akadály tömege játszik szerepet.

Csakis akkor, a mikor J.-J. Thomson megmérte a kathódsugarak terjedési sebességét és ezt 200 kmsec^{-1}-nek találta, míg a fény sebessége tudvalévőleg 300,000 kmsec^{-1}, sikerült ezzel a döntő kisérlettel a mély és végleges határvonalat húzni a két sugárzás között.

Így aztán nem volt más hátra, mint teljesen új fajta rezgést elképzelni, vagy pedig a támadt nehézségek daczára is visszatérni az emisszió elmélethez.

II.

A kathódsugarak elektromozása.

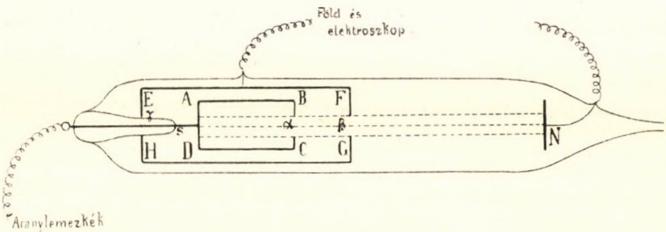
1. Az emisszió-elmélet a maga teljességében a sugarak elektromozásának feltevésén nyugszik. Megkísérlettem kideríteni azt,

vajjon ez az elektromozás létezik-e, vagy sem.* Ismeretes, hogy a zárt vezető edény belsejébe bevitt elektromos töltéseket igen könnyű kimutatni. Sőt talán ez a létező legjobb módszer annak meghatározására és mérésére, a mit elektromos töltésnek nevezünk.

Én tehát kathódsugarakat egy Faraday-féle edény belsejébe hatoltattam be.

E czélból az ábrán látható légüres csövet használtam.

ABCD minden oldalról zárt fémhenger, a melynek csakis a *BC* oldal középpontjában van egy kis nyilása, α. Ez a henger



játsza a Faraday-féle edény szerepét. Egy a cső falába S-nél beforrasztott fémdrót köti össze ezt a hengert az elektroszkóp aranylemezkéivel.

EFGH egy második fémhenger, a mely állandó összeköttetésben van a földdel és az elektroszkóp burkolatával. Csupán két kis nyilás β és γ lévén benne kivágva, a Faraday-féle edényt minden külső elektromos behatástól megvédi.

Végre *FG* előtt van a sík elektród, *N*.

Anód gyanánt szolgált az *EFGH* védőhenger, kathód gyanánt pedig az *N* elektród. A berendezés tehát olyan volt, hogy a Faraday-féle hengerbe sugárnyaláb hatolt be.

A mint ez megtörtént, a henger legott negativ elektromos töltést kapott.

A légüres cső egy elektromágnes sarkai közé volt helyezhető.

* Kisérleteim megtételekor nem volt tudomásom az e téren történt eredménytelen kisérletekről.

Mihelyt az elektromágnes felgerjesztetett, a kathódsugarak eltérültek és nem hatoltak be a hengerbe. S ez nem is kapott töltést. Egyébiránt az ennek bekövetkezésére szükséges eltérítés igen csekély volt, és az FG oldal szélei, melyek fluoreszkáló porral voltak behintve, még igen erősen világoltak, a mikor az elektroszkóp a töltésnek már nyomát sem mutatta.

Az elektromozás tehát nem tulajdonítható az elektrostatikai védés hiányos voltának; különben is, hogy jobban biztositsam ezt a védést, az $\alpha\beta$ távolságot minden baj nélkül 4 cm nagynak tettem, és a β nyilást pár tűszúrással helyettesitettem.* Sőt mint később látni fogjuk, a nyilás finom aluminiumlemezzel teljesen el is volt zárható.

2. A Faraday-féle hengerbe ily módon bevezetett és igen könynyen mérhető negativ töltések egyik kisérletsorozatról a másik sorozatra szerfölött nagy mértékben változnak, a szerint a sokféle körülmény szerint, melyek közűl csak a tekercsben keringő indukáló áram erősségét és a csőben való ritkitását említem. Hogy fogalmat adjak a jelenség nagyságáról, felemlítem, hogy csöveim egyikénél az induktor elsőrendű áramának csak egyetlen megszakítására a kathódsugarak könnyű szerrel 3000 elektrostatikus CGS egységet, vagyis 10^{-6} coulombot vittek be a hengerbe. Ugyanily körülmények közt az összes elektromosság mennyiség, a mely a csövön áthaladt, ballisztikus galvanométerrel történt mérés szerint körülbelől 200-szor akkora volt.

* Első kisérleteimben a β nyilás néhány milliméter széles volt. Ebben az esetben, ha a tekercsben az áram iránya megváltozott, úgy hogy $EFGH$ lett kathóddá, a Faraday-féle henger erős pozitiv töltést kap. Eleinte azt hittem, hogy ezt a jelenséget annak a vonzásnak lehet tulajdonítani, a melyet a kathód gyakorol a pozitiv iónokra, míg a megfelelő negativ iónok a kathódtól eltaszítva alkotják a kathódsugarakat. (*Comptes rendus* t. CXXI, p. 1130, 1895). De ez a magyarázat valószínüleg helytelen; valóban a jelenség majdnem egészen eltünik, ha a β nyilást kicsiny átmérőjü lyukak helyettesitik, még akkor is, ha e lyukak együttes felülete összehasonlitható az eredeti nyilás felületével. Tehát egyszerűen a védés volt elégtelen. Adva lévén a készülék méretei, ez az elégtelenség a potencziálnak erős esését vonja maga után a kathód környékén, a mi különben sok egyébb okból is valószínü.

Minthogy csakis a sugarak egy része hatolt be a hengerbe, azért itt csupán csak alsó határát kapjuk annak a viszonynak, a mely a sugaraktól elszállított elektromosság mennyisége és a csövön áthaladó összes elektromosság mennyisége közt fenállhat. Könnyen lehetne pontos mérést tenni homorú kathód alkalmazásával, a mely a henger nyilásában a sugarak összeségét összegyűjtené.

3. Az itt leírt kisérletek kétféleképen magyarázhatók meg. Vagy úgy, hogy a kathódsugarak szükségképen negativ elektromosságot visznek magukkal, a mint ezt az emisszió elmélete feltételezi.

Vagy pedig, hogy a jelenséget egyszerűen a potencziál kiegyenlítésének kell betudni, a mennyiben az *N* kathód potencziálja alacsonyabb lévén az *ABCD* henger potencziáljánál, midőn ezeket összekötik a sugarak, negativ elektromosságot visznek magukkal *N*-től *ABCD* felé, a nélkül hogy ezen elektromosság előjele összefüggésben lenne a sugarak természetével, ép úgy a mint vezetőben az áram iránya nem függ a vezető természetétől.

Ezt a második hypothézist azonban el kell vetnünk.

Ha ugyanis a *β* nyilást tökéletesen elzárjuk olyan finom lemezkével, a minőt Lénárd használt, megállapitottam, hogy a jelenség meggyengűl, de nem szünik meg.* Így az induktor elsőrendű áramának minden egyes megszakitására 100 elektrostatikus *CGS* egységet vihettem be a teljesen zárt vezető belsejébe oly lemezen keresztül is, a melyről úgy a kisérlet elején, mint végén mikroszkóppal kimutattam, hogy teljesen ment minden lyuktól.

E szerint a negativ töltés átvitele elválaszthatatlan a kathódsugaraktól.

III.

Kisérleti következtetések.

1. Mivelhogy a kathódsugaraknak töltésük van, ha valamely elektromos térbe hatolnak, kell hogy a hatásának alá legyenek

---

* Ha a lemez nagyon vastag, úgy természetesen megszünik minden hatás.

vetve; így például a pozitiv töltésű test vonzani, negativ töltésű test pedig taszítani fogja őket.

Már CROOKES hitte, hogy ilyen természetű hatásokat figyelt meg; de láttuk, hogy az ő kisérletei két párhuzamos kathódsugár taszítására vonatkozólag nem meggyőzőek, és különben is semmi sem biztosítja *a priori* azt, hogy ez a taszítás észrevehető nagyságu legyen.

Sőt ellenkezőleg, ha a kathódsugarak energiájukat csakugyan a kathódtól való eltaszításnak köszönik, világosan látszik, hogy a sugarak pályáját és energiáját tetszésszerint változtatni lehet, ha utjukban oly ahhoz összemérhető potencziálesést létesítünk, mint a milyennek a kathód közelében voltak kitéve. Épp úgy, mint a hogy egy csupán a nehézség hatásának alávetett test mozgása lényegesen módosúl, ha ez a test emelkedik vagy alászáll oly hegyoldalon, a melynek magassága összemérhető azzal a magassággal, a melyről a test már esett.

Ezek az elmélkedések tökéletesen beigazolhatók. Idevonatkozólag először is két qualitativ kisérletet tettem.*

Az N kathódtól kiinduló sugarak áthatolnak az anódul szolgáló

---

* Már GOLDSTEIN jelezte azt, hogy a kathódsugarak taszítást szenvednek a szikraindító negativ sarkával összekötött elektród közelében, de úgy hiszem, nem magyarázta e jelenséget.

Sokkal ujabban MAJORAÑA *(Lincei)* mutatott reá a kathódtól előidézett taszításra és az anódtol előidézett vonzásra, az enyémhez igen hasonló cső segitségével és helyesen is magyarázta meg a jelenséget. A kisegitő kathód és anód az inditó tekercs két sarkával volt összekötve.

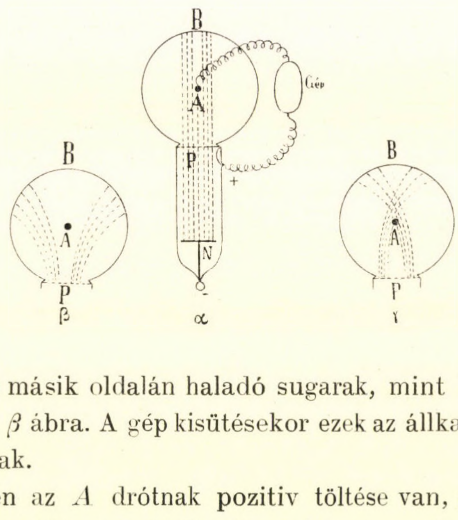
Végre DESLANDRES *(Comptes rendus,* 1897) is tanulmányozott néhány hasonló esetet, de ő ugy látszik azt hitte, hogy a kathód sugárnyalábok hatnak itt egymásra észrevehetően, a mi pedig kétségtelenül helytelen. Ugyanő még ujabban más szép kisérlettel azt is megmutatta, hogy többféle kathódsugár létezik, a melyeket ugyanaz a kathód különbözőkép taszit el.

Mindennek daczára én is leirom ide vágó kisérleteimet, egyrészt azért, mert mint közvetlen következményei a sugarak egyedül tőlem kimutatott elektromozásának időben megelőzték a fenti értekezéseket; másrészt meg azért, mert előnyt adok a tőlem használt *statikai* módszernek, a melylyel korlátlan urai vagyunk a vonzásnak és taszitásnak, a mely egyedül teszi lehetővé a létesitett potencziálkülönbség mérését, és a melynél végre a kisegitő elektród nem szolgáltat elektromosságot (a mi kiküszöböli az élősdi jelenségeket).

P fémszitán, elhaladnak egy az ábra síkjára merőleges *A* drót mellett, és a *B* gömb falán végződnek, a melyen a fémszita árnyékát lerajzolják.

Az *A* drót az *M* elektromos gépnek egyik sarka, míg a *P* fémszövet a másik sarka. Így tehát *A* és *P* közt *állandó* potencziálkülönbség létesíthető, a melynek iránya és nagysága tetszőleges. Midőn ez a potencziálkülönbség zérus, a sugarak nem eríttetnek el; ezt az esetet tünteti fel az α ábra.

Ha pedig a gép negativ sarka *A*-ban van, és a gépet lassú forgásba hozzuk, látjuk hogy miként távolodnak el egymástól lassan



β α γ

az *A* egyik és másik oldalán haladó sugarak, mint két állkapocs; ezt mutatja a β ábra. A gép kisütésekor ezek az állkapcsok hirtelen összecsukódnak.

Ha ellenben az *A* drótnak pozitiv töltése van, a dróttól elválasztott két nyaláb összeölelkezik, mint ez a γ ábrán látható, és az egyenes vonalú irányt ujra hirtelen felveszi, ha a gép kisüttetik.

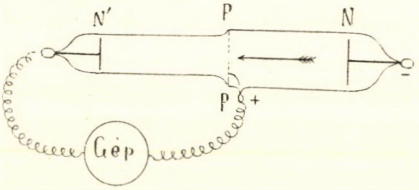
Így tehát a kathódsugarak csakis ott egyenes vonalúak, a hol az elektromos tér gyenge és így az a tény, hogy a légüres csőben e sugarak közelítőleg egyenesvonalúak, elegendő annak igazolására, hogy a kathódon szenvedett erős potencziálesés után olyanféle térbe érnek, a hol a potencziál keveset változik.

A könnyen mérhető *AP* potencziálkülönbségnek néhány ezer volttal kell egyenlőnek lennie, hogy az eltérítések élesek legyenek.

A *BAP* csőbe zárt gáz különben sötét marad, és nem székhelye semmi kisülésnek, a míg csak az *AP* potencziálkülönbség gyenge a gáz ellenállásának legyőzésére. Ha a potencziálkülönbség túlnagygyá válik, a gép magában a csőben hirtelen kisül.

2. *A potencziálesés mérése a kathódnál.* — Hasonló kisérlet lehetővé tette közelitő mérését annak a potencziálesésnek, a melynek a kathódsugarak energiájukat köszönik.

Az *N* kathódtól kiinduló sugarak áthatolnak az elektromos gép pozitiv sarkával összekötött fémszövetből álló *P* anódon. Ezután az *N'* kisegitő elektród felé tartanak, a mely fluoreszkáló porral van behintve, és összeköttetésben áll a gép negativ sarkával. Elég nagy kapaczitásnak az alkalmazása biztositja a *PN'* potencziál-

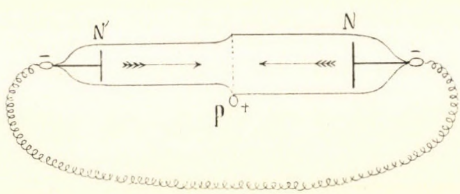


különbség változatlanságát a tekercs kisülésének pillanatában. A potencziálkülönbség mérése abszolut elektrométer segitségével történik.

Ha ez a potencziálkülömbség zérus, az *N*-től eredő sugarak élénk fluoreszkálást idéznek elő az *N'*-n. De, a mint működésbe jő a gép, a fluoreszkálás halványúl, majd pedig kialszik, a mi egészen a tizedrész voltig terjedő pontossággal könnyen mérhető potencziálkülömbségnél áll be. A gép kisütésére a fluoreszkálás hirtelen feltünik. A magyarázat közvetlen. Az *N'* és *P* közt előidézett elektromos tér ellenszegűl a kathódsugarak mozgásának, és ha e tér elég erős, úgy a sugarak zérus sebességgel érkeznek *N'*-be. A *PN'* potencziálesés tehát kisebb vagy egyenlő, mint az az ellenkező értelmű esés, a melynek a sugarak kezdetben voltak kitéve. Épp így valamely csakis a nehézség hatásának alávetett test legfeljebb oly magasságra emelkedhetik, mint a milyenről esett.

Az a tér külömben, a melyet N' és P közt kell létesíteni, hogy N'-ben bekövetkezzék a teljes elsötétedés, sokféle körülmény szerint változik, így különösen a ritkítás foka szerint. Ezt az elsötétedést 30,000 voltnyi potencziálkülömbségre könynyen észlelhettem. Ugyanabban a pillanatban az a potencziálkülömbség, a melyet az indító tekercsnek kell létesítenie N és P közt, hogy a kisülés áthatolhasson a csövön, egy mellékvezetékben kapott szikra hosszúságából durván mérve kisebbnek mutatkozott 50,000 voltnál.

E szerint bizonyos, hogy a létesített kathódsugarak 30,000 voltnál nagyobb és 50,000 voltnál kisebb potencziálesésnek voltak alávetve. Másrészről lehetséges, hogy a sugaraknak még megbecsülhető sebességük van akkor, mikor fluoreszkálást már nem



tudnak előidézni. Egy szóval azt hiszem, hogy könnyen lehet kathódsugarakat előállitani, a melyek energiájukat 40,000 voltnyi eséstől kapják, vagy jobban mondva, a melyek megállítva coulombonként 40,000 joulet képesek szolgáltatni.

3. Igen egyszerü qualitativ kisérlet ered abból a tényből, hogy a sugarak nem képesek olyan potencziálesést leküzdeni, mint a mekkoráról leestek. Ujra az előbbi csövet használtam; először is N' t összekötöm P-vel, és ekkor az N-től eredő sugarak élénken megvilágitották N'-t. Ezután N'-t nem többé P-vel, hanem N-nel kötöttem össze; azonnal hirtelen és meglepő változás jelentkezett. Az üveg falai fluoreszkálók maradtak egészen N' nivójáig; de a sugaraknak arra nem volt már elegendő energiájuk, hogy elérjék magát az elektródot, a melynek felülete teljesen elsötétült.

Ez a kisérlet mutatja még azt is, hogy az NN' rendszer potencziálja igen kevéssé változik az alatt az idő alatt, mely szükséges, hogy a sugarak egy töltése N-ből N'-be menjen; e nélkül ezek a töltések megérkeznének az N'-re és sebességüket nem vesztenék el tökéletesen, úgy hogy az elsötétedés nem lehetne teljes. Ez az idő tehát valószinűleg igen rövid a sugarak kibocsátási idejéhez viszonyítva. Másképen kifejezve, az induktor elsőrendű áramának minden egyes megszakítására az N-től kibocsátott sugarak szétoszolnának egy az NN' távolsághoz viszonyítva igen hosszú henger mentén, ha nem találnának akadályra. A még oly hosszú hengeren is igen gyönge lehet az elektromos sűrűség, és így magyarázzuk meg a párhuzamos sugarak gyönge eltaszítását.

IV.

Elméleti következtetések.

. Mielőtt bármiféle hypothézist is levezetnék, szükségesnek tartom megjegyezni azt, hogy, ha már egyszer megvan állapítva a kathódsugarak elektromozása, úgy a mágneses tértől való eltérítésük kitűnő bizonyságot nyujt a vezetési áram és a kisülési áram azonosságára vonatkozólag. Röntgen, majd Rowland megmutatták az, hogy mozgásban lévő elektromos töltés mágneses teret idéz elő; itt meg az igazoltatott, hogy a mozgásban lévő töltésre a mágneses tér van hatással.

2. Ez az elektromozás bajosan látszik összeegyeztethetőnek a hullámzási elmélettel.

Ez az elmélet már mágneses hatások létezéséhez is rosszúl alkalmazkodott; mindazonáltal fel lehetett venni azt, hogy a sugarak másképen terjednek a mágnesezett étherben, mint a nem mágnesezettben; sőt még a mágneses forgató polarizáczióhoz is lehetett hasonlítani a jelenséget.

Ámde azt nem tudjuk megérteni, legalább is ismereteink mai fokán nem, hogy a rezgések képesek lennének elektromosságot szállitani. Most tehát a nehézség valóban komolynak, az elmélet hitele pedig erősen megingatottnak látszik.

3. Az emisszió elmélet ellenben, a mely engem vizsgálataimban

vezérelt, igen jól megegyezik a sugarak elektromozásával, noha nem szükségképeni következménye és nem tökéletesen bizonyos az, hogy az ektromosság átvitelét mindig az anyag átvitele kiséri. Ez azonban mégis valószinű, és ha az emisszió elmélet megczáfolhatja az épen tőle támasztott ellenvetéseket, akkor a jelen esetben jónak kell elismernünk.

Legelőször is közömbös az, hogy a sugarak a kathódra merőlegesek-e, vagy sem, s az alakjukra vonatkozó minden különösség egyszerre meg lesz magyarázható, ha meggondoljuk azt, hogy a negativ elektromossággal töltött kathódsugarak alá vannak vetve azon elektromos tér hatásának, melyben haladnak. Épp úgy a súlyos testnek egyenetlen talajon való mozgását meg tudjuk magyarázni, a mint a pálya minden pontjában ismerjük a föld hajlását és a test sebességét.

A mi pedig Lénárd ellenvetéseit illeti, ezek súlyukból nagyot vesztenek, ha számba veszszük azt, hogy a kathódlövedékek talán mégis csak áthatolhatnak a Lénárd használta finom lemezeken. Az a körülmény, hogy ezek a lemezek kiállják a légnyomást, mit sem bizonyíthat eme feltevésünk ellen, mert hiszen ezek a lövedékek rendkívül külömbözhetnek a gázmolekuláktól. Nevezetesen körülbelűl ezerszer akkora sebességük van, mint a mekkorát a kinetikus theoria a gázmolekuláknak tulajdonit; ennélfogva tömegegységenként milliószor akkora az energiájuk, és így érthető, hogy keresztülhatolnak oly falon, a mely a gázakat nem ereszti át.

Ha ezek a lövedékek kijuthattak a Lénárd csővét elzáró ablakon, annál könnyebben fognak továbbhaladni, minél kevesebb anyagra találnak, és így megértjük, hogy miért kapott Lénárd igen tiszta sugarakat, ha az ablak mögött igen kicsi nyomású gáz volt; mindez teljes megegyezésben van az emissziós theóriával és nem azonos a hang vagy a fény természetét meghatározó kisérletekkel, a hogy ezt Lénárd hitte.

Ha ellenben növeljük annak a gáznak nyomását, melyben az anyaginak feltételezett sugarak haladnak, semmiképen sem meglepő, ha azt látjuk, hogy szétszóródnak és gyengűlnek, mert egyformán gátolja őket az egyforma tömegű akadály.

De viszont úgy látszik, hogy a nyomásnak nagyobbodására a sugarak haladásának meg kell lassúlnia, és így a mágnestől könnyebben eltéríthetőknek kell lenniök.* Ámde láttuk, hogy ez az eltérités állandó marad legalább is addig a határig, a míg a túlságos erőssé vált szétszóródás már megakadályozza a méréseket. Így például a hidrogénban az eltérités ugyanaz marad, midőn a nyomás 0,001 cm.-től 40 cm.-ig nő. Itt valódi nehézség merül fel, a mely némi tekintetben pontosabban fogja megállapitani azt a most még durva képet, a mely a kathód sugarakat elektromozott golyócskákhoz hasonlitja. Igy például még semmi feltevés sincs arra vonatkozólag, hogy mi történik, ha a kathódlövedékek a molekulákkal találkoznak. Talán azt fogják feltételezni, hogy ily összetalálkozáskor a molekula úgy viselkedik, mint rendkívül rideg akadály, és így kevés energiát abszorbeál. Ekkor tehát a lövedék lényegesen kitérittetnék a nélkül, hogy mozgása jelentékenyen meglassúlna. Más szóval, még mielőtt a sugarak sebessége nagyon alászállna, a szétszóródás már meggátolja a méréseket.

4. Végre, új hypothézist állítunk fel, ha felteszszük azt, hogy a kathódlövedékek iónok, a melyekre a molekulák ott bomlottak el, a hol az elektromos tér a legerősebb ; az iónok épúgy, mint az elektrolizisnél, 100,000 coulombot vinnének magukkal, vegyérték grammonként.

Legyen M a lövedék elektromos töltése, és V a potencziálesés, a mely az energiát kölcsönzi, legyen továbbá m a tömeg és v a sebesség. Ekkor az

$$MV = \tfrac{1}{2} mv^2$$

egyenlet J.-J. Thomson megjegyzése szerint az energia megmaradását fejezi ki, ha a surlódást nem tekintjük.

Ha a lövedékek iónok, úgy az $\frac{M}{m}$ viszony meghatározott érték.**

---

* A görbületi sugár arányos lenne a sebességgel (J. J. Thomson, *Recent Researches in Electricity*, p. 137).

** A kisérleti igazolást lehetségesnek tartom ; J.-J. Thomson megmutatta, hogy a v-t megmérhetjük ; azt hiszem, hogy ugyanazon körülmények közt a

De bármi legyen is az $\frac{M}{m}$, a fenti egyenlet mutatja, hogy a sebesség úgy változik, mint a V négyzetgyöke. Azt hiszem, hogy ez a sebesség nagy mértékben függ a kisérlet körülményeitől is. Bizonyos sugarakra kisebb 200 km sec^{-1}-nél, másokra meg talán több ezer kilométert is kitesz.

Ezekkel az óriási sebességekkel haladva, a kathód lövedékek a cső falaihoz rendkívüli hevességgel ütköznek; az ütközési pontokban hő fejlődik, és élénk fluoreszkálás. Az elveszett energiának egy másik részét Röntgensugarak alakjában fogjuk megtalálni.

V-t is meg lehetne mérni a tőlem adott módszerrel. Így aztán az $\frac{M}{m}$ viszony ismeretes lenne, és, ha az eredmény megegyeznék a hipothézissel, egy csapásra lenne megállapítva a sugarak anyagisága, és az elektrolizisre vonatkozó Faraday-féle törvények általános érvényessége.

(Folytatjuk.)

MEGOLDOTT FELADATOK.

25. *Ha az ABC háromszög magasságpontja M és a BCM, CAM, ABM háromszögek körül írt körök középpontjai A_1, B_1, C_1, bizonyíttassék be, hogy az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek kongruensek.* (Vályi.)

Harmadik megoldás Grünwald Miksa főgimnaziumi tanár úrtól Losonczon.

Legyenek a BC, CA, AB oldalak felezőpontjai rendre: a, b, c; az A, B, C szögpontokból kiinduló magasságok talppontjai pedig: α, β, γ.

Minthogy $bc \perp A\alpha$ és bc felezi az $A\alpha$ vonaldarabot, azért az $Ac\alpha b$ négyszög deltoid,

$$bca\triangle \cong bc\alpha\triangle,$$

és a $bca\alpha$ trapez egyenlőszárú. Épen így egyenlőszárú trapézek a $cab\beta$ és $abc\gamma$ négyszögek is. Minthogy pedig minden egyenlőszárú trapézhúrnégyszög, következik, hogy az $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ pontok ugyanegy F körön feküsznek (a Feuerbach-körön.)

Legyen továbbá M_1 az ABC háromszög körülírt körnek középpontja, úgy hogy MM_1 három derékszögű trapéznek $MM_1a\alpha$, $MM_1b\beta$ és $MM_1c\gamma$-nak közös oldala.

Ennélfogva az $a\alpha$, βb, $c\gamma$ húrok szimmetrálisai az MM_1 vonaldarab (Euler-féle egyenes) O középpontjában találkoznak, s ez az F középpontja.

Az F kör az $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ magasságokat még három pontban, az $a_1b_1c_1$ pontokban metszi, melyek az AM, BM, CM magassági részek középpontjai. Ugyanis

$$ABC\triangle \sim abc\triangle$$

és az oldalak aránya $2:1$, tehát a körülírt körök sugarainak az aránya szintén $2:1$. E szerint

$$M_1A=2Oa_1 \quad M_1AM\triangle\sim Oa_1M\triangle, \quad AM=2a_1M,$$

úgy hogy ezzel állításunk igazolva van.

Továbbá

$$ABM\triangle\sim a_1b_1M\triangle, \quad AB \parallel a_1b_1 \quad \text{és} \quad AB=2a_1b_1;$$

ugyan így $BC \parallel b_1c_1$ stb., tehát $a_1b_1c_1\triangle\cong abc\triangle$, és a megfelelő oldalak párhuzamosak. Ámde valamely körnek két párhuzamos és egyenlő húrja oly derékszögű négyszög oldalai, a melynek átlói a kör átmérői. E szerint aa_1, bb_1 és cc_1 az F kör átmérői, az $a_1b_1c_1$ pontok czentrikus szimmetriában vannak az abc pontokkal, vagyis ha az $a_1b_1c_1$ háromszög O pont körül egy fél fordulatot tesz, akkor az abc háromszög helyzetébe jut.

A BCM, CAM, ABM háromszögek körülírt köreinek A_1, B_1, C_1 középpontjait úgy kapjuk meg, hogy az AM, BM, CM magassági részekre azoknak a_1, b_1, c_1 pontjaiban merőlegeseket állítunk. De ezek párhuzamosak az $a_1b_1c_1$ háromszögek oldalaival, tehát oly $A_1B_1C_1$ háromszöget nyerünk, melyre nézve az $a_1b_1c_1$ háromszög ugyanaz, mint abc háromszög az ABC háromszögre nézve. Eszerint $A_1B_1C_1\triangle\cong ABC\triangle$, és a megfelelő oldalak párhuzamosak.

Minthogy továbbá $A_1B=A_1C$, következik, hogy a BC oldalra annak a pontjában emelt merőleges szintén átmegy A_1-en, és így az ABC háromszög oldalainak a szimmetriálisai az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságai, és az ABC háromszög körülírt körének a középpontja (M_1) az $A_1B_1C_1$ háromszög magassági pontja. Viszont láttuk, hogy az ABC háromszög magasságai úgy tekinthetők, mint az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalainak a szimmetriálisai, és az ABC háromszög magassági pontja $A_1B_1C_1$ háromszög körülírt körének a középpontja. E szerint a BCM, CAM, ABM háromszögek körülírt körei egybevágók, mert A_1M, B_1M, C_1M sugaraik, mint $A_1B_1C_1$ háromszög körülírt körének a sugarai, egyenlők. Ugyanekkorák természetesen az ABC háromszög körülírt körének AM_1, BM_1, CM_1 sugarai is. Minthogy tehát $AM_1=A_1M$ és $AM \parallel A_1M_1$, következik, hogy AA_1 az O ponton megy át és ebben feleztetik. Más szóval az $A_1B_1C_1$ háromszög czentrális szimmetriában van az ABC háromszöggel az O középpontra nézve.

Végre az F kör az $A_1B_1C_1$ háromszögnek is Feuerbach-köre, és így átmegy e háromszög magasságainak α_1 β_1 γ_1 talppontjain, úgy hogy most már az MM_1 távolság 3 újabb derékszögü trapéznek a közös ferde oldala ú. m.:

$$MM_1\alpha_1a_1, \quad MM_1\beta_1b_1, \quad MM_1\gamma_1c_1,$$

melyek a már említetteket derékszögű négyszögekké egészítik ki. $aa_1\alpha$ α,

$b\beta_1 b_1\beta$, $c\gamma_1 c_1\gamma$. Ezeknek közös középpontja O, melyre nézve az $a\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ pontpárok szimmetrikusak.

Az egész rajzot tehát oly módon tekinthetjük származottnak, hogy az ABC háromszög az F kör O középpontja körűl egy fél fordulatot végzett, miáltal a mutató nélküli betükkel jelölt pontok a megfelelő mutatós betüvel jelöltek helyére jutottak. Nevezetes, hogy az egyik háromszög szögpontjai a másiknak a magassági pontjától egyentő távolságra vannak, és hogy az egyik háromszög oldalainak a középpontjai egyszersmind a másik háromszög magassági részeinek a középpontjai.

*

Negyedik megoldás dr. Klug Lipót egyetemi m. tanár úrtól.

Az ABC háromszög körül írható kör középpontjának M_1-nek tükörképei a háromszög oldalaira vonatkozólag a BMC, CMA, AMB háromszögek körül írható *egyenlő* sugarú köröknek A_1, B_1, C_1 középpontjai, mert az ABC, BCA, CAB szupplementárius szögei: AMG, CMA, CMB.

Az ABC háromszög oldalainak felezőpontjai, egy oly háromszögnek szögpontjai, a melyeknek oldalai egyrészt párhuzamosak az ABC, $A_1B_1C_1$ háromszögeknek oldalaival, másrészt fél oly nagyok, mint e háromszögeknek oldalai, miből már következtetni lehet, hogy az ABC, $A_1B_1C_1$ háromszögek megfelő oldalai párhuzamosak, és hogy a háromszögek kongruensek.

Minthogy az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontja az M_1 pont, s az $ABCM$, $A_1B_1C_1M_1$ teljes négyszögek megfelelő oldalai párhuzamosak, az AA_1, BB_1, CC_1, MM_1 egyenesek egymást O felezőpontjukban metszik, s s akkép mint az ABC háromszög BC, BA, AB oldalait az A_1M_1, B_1M_1, C_1M_1 vonaldarabok merőlegesen felezik, az $A_1B_1C_1$ háromszög B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 oldalait az AM, BM, CM vonaldarabok szintén merőlegesen felezik, vagyis az ABC háromszögnek M magasságpontja, az $A_1B_1C_1$ háromszög körűlírható körnek középpontja, s M-nek tükörképei az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalaira vonatkozolag az ABC háromszögnek szögpontjai.

E tulajdonság folytán az ABC, $A_1B_1C_1$ háromszögek FEUERBACH-körei egybeesnek és középpontjuk az O pont.

*

Ötödik megoldás Maksay Zsigmond főrealiskolai tanár úrtól Pécsett.

Először is megmutatom, hogy az adott háromszög csúcsain és az M ponton átmenő körök sugarai egyenlők, mindannyian az ABC háromszög köre írható kör sugarával, a mire elég lesz igazolni, hogy

BMC háromszögnek M-nél lévő szöge $2R-A$,
BMA « « « « $2R-B$,
AMB « « « « $2R-C$.

Minthogy pedig a háromszög köré írható kör sugara csak az oldal és a szemben fekvő szög nagyságáról függ,

$$r=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

lévén, s a kiegészítő szögek sinusai egyenlők: következik, hogy: a_1, b_1, c_1 egyenlő sugarú körök czentrálisai s az MA, MB, MC magasság-szeletek, mint húros vonalaktól feleztetnek, valamint ők is felezik s pedig merőlegesen e magasságszeleteket.

E szerint M az új háromszög köré írt körczentruma és

$$MA_1=MB_1=MC_1=r,$$

azaz az új háromszög köré írt kör sugara egyenlő az adott köré írt kör sugarával.

De

$a_1 \parallel a$, mert mindkettő $\perp$ m_a-ra
$b_1 \parallel b$, « « « m_b-re
$c_1 \parallel c$, « « « m_c-re,

ezért:

$$A=A_1,\quad B=B_1,\quad C=C_1,$$

és

$$r=\frac{a_1}{2\sin A_1}=\frac{b_1}{2\sin B_1}=\frac{c_1}{2\sin C_1}$$

folytán

$$a=a_1,\quad b=b_1,\quad c=c_1$$

azaz

$$ABC\triangle\cong A_1B_1C_1\triangle.$$

KITÜZÖTT FELADAT.

32. *Meghatározandók az*

$$y=x!\,\sin\frac{\pi}{(x+1)!}$$

diophantosi egyenlet egész számú megoldásai. KÜRSCHÁK.

LINEÁR EGYENLETRENDSZEREK GRAFIKAI MEGOLDÁSA.*

A lineár egyenletrendszerek közelítő megoldására SEIDEL MEHMKE és NEKRASSOFF állitottak fel számítási eljárásokat. MEHMKE egy van den BERG-től származó grafikai módszert közöl; sőt létezik mechanikai eljárás is, mely modellen való mérésen alapszik.** A lineár egyenletrendszer megoldásának grafikai módját a gyakorlatban alkalmazzák. Így az elektrotechnikában, pl. a kábelhálózat csomópontjai körül az ágakban keringő áram intenzitásának kiszámítására lineár egyenletrendszert állitanak fel s ennek grafikai megoldása a gyakorlat igényeinek megfelelő pontosság mértékét megüti.

A megoldásnak ama módszere, a melyről a jelen alkalommal referálni szerencsém van, mindössze két tételt használ fel: az egyik a grafosztatikának a kötélpoligonra vonatkozó alaptétele, míg a másik DESARGUES-nak ama tétele, mely a perspektiv fekvésű háromszögek konfigurácziójára vonatkozik.

Talán nem lesz felesleges előrebocsátani a kötélpoligonra vonatkozó tételt, mert ezt a későbbiekben fel fogjuk használni. Legyen

---

* Előadva a Math. és Phys. Társulat 1897 márcz. 4-ikén tartott rendes ülésén.

** Ide vonatkozó értekezések közül alapvető KLINGATSCH A. két közleménye:

1. Über die geometrische Lösung eines Systems linearer Gleichungen. (Monatshäfte für Math. u. Phys. Wien. 1892.)

2. Der eingespannte Fachwerkbogen. (Zeitschr. des Oesterr. Ingen. und Archit. Vereines. 1893.)

L. továbbá az «Elektrotechnische Zeitschrift» Berlin. 1893. 37. füzet 537—540. lapjain lévő idézeteket.

a síkban adva egy tetszőleges erőpoligon, a pólusa és a hozzájuk tartozó kötélpoligon. Ha a sík tetszőleges O pontján keresztül párhuzamost vonunk az eredő erővel és ennek az egyenesnek a kötélpoligon kezdő- és záró oldalával való metszéspontjait K és L-lel jelöljük, akkor ismeretes, hogy az erőrendszer sztatikai nyomatékát az O pontra vonatkozólag nagyságra és értelemre nézve meghatározza a

$$h \, . \, \overline{KL}$$

szorzat, a hol h az erőpoligon pólusának az eredő erőtől való távolságát jelenti.

*

Adva van az

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = k_1 \\ u_2 &\equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = k_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n &\equiv a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = k_n \end{aligned} \tag{I}$$

lineár egyenletrendszer, a melyről egyelőre fölveszszük, hogy determinánsa

$$|a_{ik}| \gtrless 0.$$

Föl kell tennünk, hogy az a_{ik} együtthatók raczionálisak vagy legfeljebb oly irraczionális értékek, a melyeknek meghatározása a négy alapműveleten kívül még csak négyzetgyökvonásokat igényel úgy hogy a megfelelő vonaldarabok — a hosszegység megállapítása után — körző és vonalzó segítségével megszerkeszthetők.

A lineár egyenletrendszer grafikai megoldása azon alapszik, hogy az

$$a_{ik}x_k$$

szorzatot mechanikailag, mint forgató nyomatékot foghatjuk fel. Ezen az alapon már most kétféle utat követhetünk a szerint, a mint az a_{ik} együtthatókat erőknek és az x_k ismeretleneket karoknak tekintjük, vagy megfordítva. Tekintsük ez alkalommal az x_k ismeretleneket mint karoknak mérőszámait és az a_{ik} együtthatókat pedig mint egyugyanazon síkban működő erők mérőszámait és tegyük fel egyszerűség kedvéért, hogy a használt erők mindannyian párhuzamosak, pl. függélyesek. Ha még kitűzzük az O kezdőpontot, a melytől a karok számítandók, akkor feladatunk következőképen fogalmazható:

Szerkeszszük meg azt az

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

közös karrendszert, melyen az

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n};$$

illetve

$$a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n};$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

illetve

$$a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$$

adott erőrendszerek működvén, az eredő nyomaték az előre megadott

$$k_1, \text{ ill. } k_2, \ldots, \text{ ill. } k_n$$

értékeket veszi fel.

Látni való, hogy a grafikai megoldás kötélpoligonok szerkesztését követeli. Föltehetjük még, hogy az (I) egyenletrendszer első oszlopában álló együtthatók

$$a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}$$

között egy sem zérus; ha ugyanis valamely

$$a_{k1} = 0$$

volna, akkor legalább egyik egyenletben pl. az $u_i = k_i$ egyenletben az x_1 együtthatója a zérustól különbözik, mert ha az egyenletrendszernek ily egyenlete nem volna, akkor az x_1 ismeretlent sem tartalmazhatná. Vegyük most az

$$u_k = k_k$$

egyenlet helyett az

$$u_k + u_i = k_k + k_i$$

egyenletet, akkor ebben a_1 együtthatója biztosan a zérustól különböző lesz.

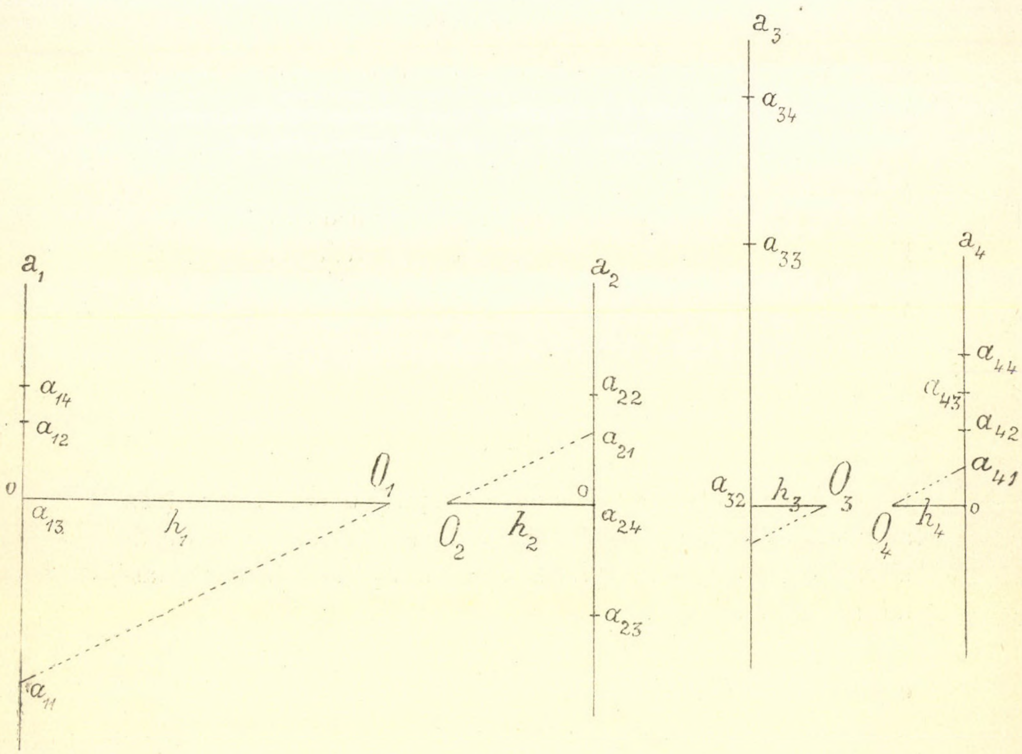
Czélszerű lesz először pusztán a szerkesztés menetét példán előadni és utólag a szükséges bizonyitásokkal kiegésziteni. Legyen pl. megadva a következő lineár egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} -5x_1+7x_2-2x_3+3x_4&=60\\ 2x_1+x_2-6x_3+3x_4&=22\\ -x_1+x_2+7x_3+4x_4&=13\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=2\,; \end{aligned} \qquad (\mathrm{I}^\star)$$

ennek megoldása

$$x_1=-4,\quad x_2=3,\quad x_3=-2,\quad x_4=5.$$

Grafikai megoldása a következőképen történhetik. (L. az 1. ábrát.)



1. ábra.

Húzunk négy függélyes vonalat* (a_1, a_2, a_3, a_4); mindegyiken választunk egy-egy 0 pontot, ettől számítva bizonyos hosszegység szerint az előjel figyelembe vételével rámérjük az együtthatókat. Az a_{11}, a_{21}, a_{31} illetőleg a_{41} pontokból tetszőleges irányban párhuzamosokat vonunk addig, míg a 0 pontokon átmenő vizszinteseket O_1, O_2, O_3 illetőleg O_4 pontokban metszik. Az 1. ábra további magyarázatára szolgáljon még, hogy

$$\overline{a_{ik-1}a_{ik}}$$

az a_{ik} erőnek megfelelő vonaldarab nagyságra és értelemre nézve; így pl.

$$\overline{a_{11}a_{12}}=7, \quad \overline{a_{12}a_{13}}=-2, \quad \overline{a_{13}a_{14}}=3,$$

mert példánkban

$$a_{12}=7, \quad a_{13}=-2, \quad a_{14}=3$$

és i. t.

Ez legyen a négy egyenlet együtthatóinak megfelelő négy erőpoligon (erőháromszög), melyeknek pólusait az O_1, O_2, O_3 illetőleg O_4 pontokban választjuk. Most egyszer s mindenkorra kiemeljük, hogy ha a következőkben rövidség kedveért azt mondjuk, hogy *a_{ik}-val párhuzamost vonunk*, ez mindig annyit jelent, hogy az 1. ábrában lévő $\overline{a_{ik}O_i}$ egyenessel parallelát huzunk. Látnivaló, hogy ilyen módon minden a_{ik} együtthatót egy-egy teljesen meghatározott irány jellemzi. Ezek után áttérünk a kötélpoligonok szerkesztésére. (L. a táblát.)

Akárhol a síkban húzunk egy függélyes l tengelyt és kitűzünk rajta egy O kezdőpontot. Erre az l függélyesre O-tól számítva nagyságra és értelemre rámérjük sorban az

$$\overline{OQ_i} = \frac{k_i}{h_i} \quad (i=1, 2, 3, 4) \qquad \text{(II)}$$

* A füzet végéhez csatolt táblán ez a négy függélyes a-ban egyesítve van és

$$\text{tg.}\, \alpha = \frac{h_i}{a_{i1}} = 2.$$

$a_{11}=-5$ ill. $a_{21}=2$ ill. $a_{31}=-1$ ill. $a_{41}=1$

vonaldarabokat, a hol h_i az 1. ábrában lévő i-dik erőháromszög magassága.*

Az ekkép meghatározott

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3 \text{ ill. } Q_4$$

pontokon át párhuzamosokat vonunk

$$a_{14},\quad a_{24},\quad a_{34} \quad \text{ill.} \quad a_{44}\text{-gyel,}$$

vagyis az erőpoligonok utolsó oldalaival. Ezek az egyenesek természetes sorrendben véve az

$$(1,4)\,(2,4)\,(3,4)\,(4,4) \equiv S_4$$

egyszerű *négy*-oldalt, a szomszédos oldalak metszéspontjai

$$(1,4)\,(2,4) = \mathrm{I}_4,$$
$$(2,4)\,(3,4) = \mathrm{II}_4,$$
$$(3,4)\,(4,4) = \mathrm{III}_4,$$
$$(4,4)\,(1,4) = \mathrm{IV}_4$$

pedig az

$$\mathrm{I}_4\mathrm{II}_4\mathrm{III}_4\mathrm{IV}_4 \equiv S_4$$

egyszerű *négy*-szöget alkotják. Ugyancsak a Q_1, Q_2, Q_3 ill. Q_4 pontokon keresztül párhuzamosokat vonunk

$$a_{13},\quad a_{23},\quad a_{33} \quad \text{ill.} \quad a_{43}\text{-mal,}$$

azután még

$$a_{12},\quad a_{22},\quad a_{32} \quad \text{ill.} \quad a_{42}\text{-vel}$$

szintén. Épúgy mint előbb

$$(1,3)\,(2,3)\,(3,3)\,(4,3) \equiv \mathrm{I}_3\mathrm{II}_3\mathrm{III}_3\mathrm{IV}_3 \equiv S_3$$

poligon fog keletkezni. Végül pedig előáll az

---

* A füzet végén mellékelt táblán

$$h_i = 2a_{i1},$$

tehát (I*) alatti példánkban

$$h_1 = -10$$

és

$$\overline{OQ_1} = \frac{60}{-10} = -6 \text{ stb.}$$

$$(1, 2)\,(2, 2)\,(3, 2)\,(4, 2) \equiv \mathrm{I}_2\mathrm{II}_2\mathrm{III}_2\mathrm{IV}_2 \equiv S_2$$

poligon. Már most az

$$S_4,\quad S_3,\quad S_2$$

poligon-sorozatból új poligon-sorozatot származtatunk le oly módon, hogy először S_4 és S_3, azután S_3 és S_2 egynevű szögpontjait összekötjük; tehát

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{I}_4\mathrm{I}_3} &= (1, 43), & \overline{\mathrm{I}_3\mathrm{I}_2} &= (1, 32),\\
\overline{\mathrm{II}_4\mathrm{II}_3} &= (2, 43), & \overline{\mathrm{II}_3\mathrm{II}_2} &= (2, 32),\\
\overline{\mathrm{III}_4\mathrm{III}_3} &= (3, 43), & \overline{\mathrm{III}_3\mathrm{III}_2} &= (3, 32),\\
\overline{\mathrm{IV}_4\mathrm{IV}_3} &= (4, 43); & \overline{\mathrm{IV}_3\mathrm{IV}_2} &= (4, 32);
\end{aligned}$$

az ekként keletkezett egyenesek metszéspontjai közül kiemeljük a következőket:

$$\begin{aligned}
(1, 43)\,(2, 43) &= \mathrm{I}_{43}, & (1, 32)\,(2, 32) &= \mathrm{I}_{32},\\
(2, 43)\,(3, 43) &= \mathrm{II}_{43}, & (2, 32)\,(3, 32) &= \mathrm{II}_{32},\\
(3, 43)\,(4, 43) &= \mathrm{III}_{43}, & (3, 32)\,(4, 32) &= \mathrm{III}_{32},\\
(4, 43)\,(1, 43) &= \mathrm{IV}_{43}; & (4, 32)\,(1, 32) &= \mathrm{IV}_{32},
\end{aligned}$$

melyek az ú. n. leszármaztatott poligonok

$$\mathrm{I}_{43}\mathrm{II}_{43}\mathrm{III}_{43}\mathrm{IV}_{43} \equiv S_{43}$$

és

$$\mathrm{I}_{32}\mathrm{II}_{32}\mathrm{III}_{32}\mathrm{IV}_{32} = S_{32}$$

szögpontjai.

Az új poligon-sorozatban a poligonok száma *egy*-gyel csökkent; példánkban háromról kettőre. Ezt az eljárást folytatjuk; $n = 4$ esetében már a második lépésnél ér véget, mert — a mint utólag be fogjuk bizonyítani — az S_{43} és S_{32} poligonok egynevű szögpontjait összecsatoló egyenesek mindannyian egy és ugyanazon a B ponton mennek keresztül, vagy más szóval az utolsó leszármaztatott poligon S_{432} sugársorrá fajul el.

A B pont ismeretével együtt az x_1 és x_2 értéke közvetetlenül adódik ki, ha a B ponton át megvonjuk az s_1-et (l. a táblát) párhuzamosan a_{i1}-gyel addig, míg az O kezdőponton átmenő vízszintest, s_0-t az A pontban metszi. Ezzel máris

$$x_1 = \overline{OA}$$

és a szilárd B pont távolsága az O-n átmenő l függélyestől adja az x_2-nek megfelelő vonaldarabot.*

A többi ismeretlen meghatározása végett az

$$\begin{array}{l} S_4,\ S_3,\ S_2 \\ S_{43},\ S_{32} \\ S_{432} \equiv B \end{array} \qquad \text{(III)}$$

poligon-rendszerben visszafelé haladva a B ponton keresztül párhuzamost vonunk úgy az S_{32} poligon valamelyik oldalával, például $\overline{\mathrm{I}_{32}\mathrm{II}_{32}}$-vel, valamint az S_2 poligon egynevű $\overline{\mathrm{I}_2\mathrm{II}_2}$ oldalával; ez adja $s_{2,32}$-őt és $s_{2,2}$-őt. Az $s_{2,32}$ és $s_{2,43} \equiv \overline{\mathrm{I}_{43}\mathrm{II}_{43}}$ metszéspontja legyen (II_3), ezen át megvonjuk a párhuzamost a_{23}-mal, vagyis az S_3 poligon megfelelő $\overline{\mathrm{I}_3\mathrm{II}_3}$ oldalával, akkor s_{23}-at kapjuk. Végre fölkeressük s_{23}-nak metszéspontját egyrészről s_{22}-vel (B-n át $\parallel a_{22}$) és másrészről s_{24}-gyel (Q_2-n át $\parallel a_{24}$).

Ezek a metszéspontok

$$(s_{23},\ s_{22}) = C$$

és

$$(s_{23},\ s_{24}) = D$$

lévén, végre C illetőleg D távolsága az l függélyestől megadja az x_3 illetőleg x_4 ismeretlen értékét.

E szerkesztés a következőképen igazolható. Be fogjuk bizonyítani:

α) hogy minden a szerkesztés folyamán fellépő egyenes iránya egyértelműen van meghatározva;

β) hogy a (III) alatti poligon-sorozatok első elemeit

$$S_4,\ S_{43},\ S_{432}$$

-őt már kezdettől fogva a megoldásnak megfelelő végleges helyzetben rajzoltuk fel (míg a többi egyenesek eleinte csak úgynevezett próbahelyzetben — irányra nézve helyesen — de általánosságban még nem a megoldásnak megfelelő fekvésben adódnak ki);

* Megemlíthető e helyen, hogy már az eddigi szerkesztés redukczió-módszer gyanánt szolgálhat.

γ) hogy a (III) alatti poligon-sorozatok utolsó elemei a megoldásnak megfelelő helyzetükben

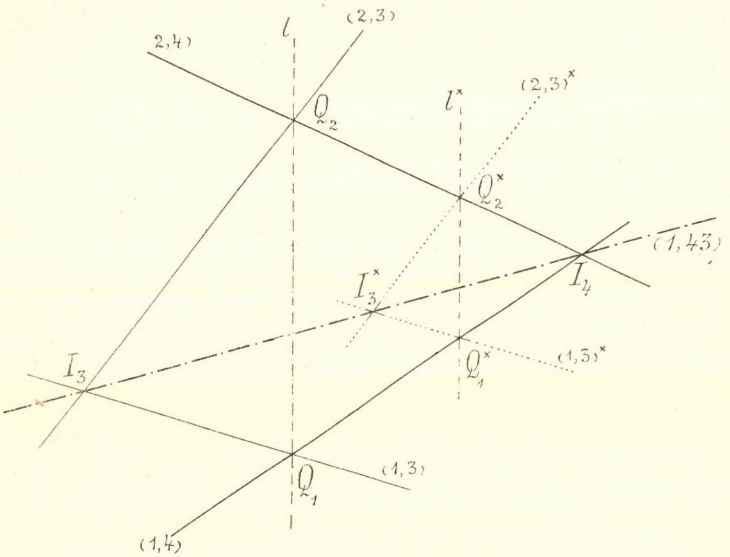
$$S_2, \quad S_{32}, \quad S_{432}$$

mindannyian oly sugársorok, a melyeknek B közös középpontja.

α) Az

$$S_4, \quad S_3, \quad S_2$$

poligonok oldalainak irányát az 1. ábrában foglalt erőpoligonok szolgáltatták.



2. ábra.

$α_1$) (L. a 2. ábrát). Nézzük az

$$S_{43}, \quad S_{32}$$

poligonok tetszőleges oldalának, pl. az

$$(1, 43) \equiv \overline{I_4 I_3}$$

egyenes szerkesztését. Valamely *l függélyes* két tetszőleges Q_1 ill. Q_2 pontján át parallelákat vonunk az első (i-dik) ill. második ($i+1$-dik) erőpoligon harmadik (k-dik) és negyedik ($k+1$-dik) oldalaival a_{13} ill. a_{23}-mal és a_{14} ill. a_{24}-gyel, akkor az

$$(1, 3)\,(2, 3) = \mathrm{I}_3$$

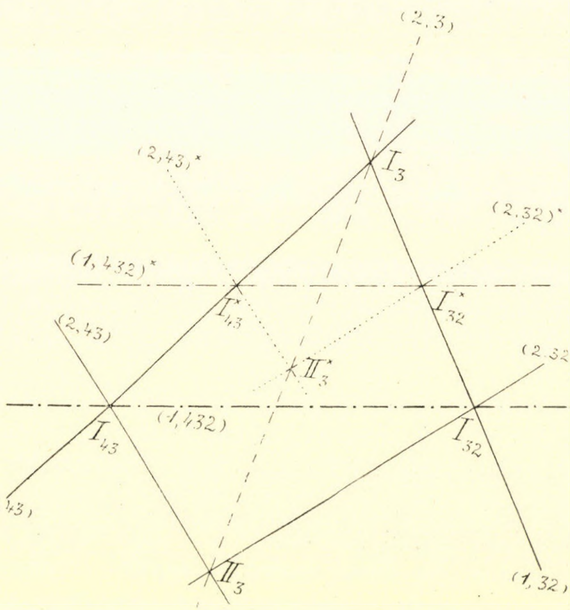
és az

$$(1, 4)\,(2, 4) = \mathrm{I}_4$$

metszéspontokat csatoló sugár

$$\overline{\mathrm{I}_3\mathrm{I}_4} \equiv \overline{\mathrm{I}_3{}^{\star}\mathrm{I}_4} \equiv (1, 43)$$

iránya független attól, hogy hol vettük fel az l függélyest (akár l-ben, akár $l^{\star}$-ben) és rajta a Q_1 ill. Q_2 pontokat, mint az a 2. ábrából Desargues-nak a perspektiv helyzetű (esetünkben hasonló és hasonló fekvésű) háromszögekre vonatkozó tétele alapján közvetetlenül belátható.



3. ábra.

a_2) Lássuk folytatólag a 3. ábrát, mely az S_{432} poligon tetszőleges oldalának pl. (1, 432)-nek a szerkesztését mutatja. Az a_{23}-mal vont párhuzamoson, (2, 3)-on tetszőlegesen választhatjuk az I_3 és

II_3 ill. II_3^* szögpontokat, ezeken keresztül csupán oly egyenesek vannak meghúzva, a melyekről $\alpha_1)$ alatt kimutattuk, hogy irányuk egyértelműen van meghatározva. A

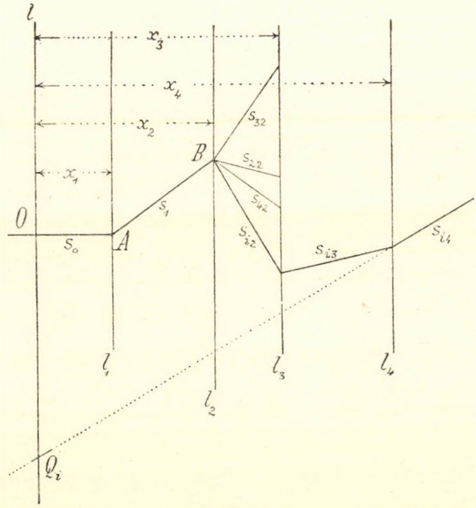
$$(II_3 I_{32} I_{43}), \quad (II_3^* I_{32}^* I_{43}^*)$$

háromszögek perspektiv helyzetűek, mert a megfelelő szögpontjaikat összekötő sugarak egy ugyanazon az I_3 ponton mennek keresztül; minthogy azonfelül

$$(2, 32) \parallel (2, 32)^*$$
$$(2, 43) \parallel (2, 43)^*,$$

tehát az eredményként talált harmadik oldalpár szintén párhuzamos:

$$(1, 432) \parallel (1, 432)^*.$$



4. ábra.

β) Az ekkép $\alpha_1)$ vagy $\alpha_2)$ mintájára leszármaztatott és meghatározott irányú egyenest azonban nem a kellő helyen nyerjük. Az új egyenes csupán abban az esetben adódik ki a megoldásnak megfelelő helyzetben, ha az alapul szolgáló egyenes párok közül egyik már mozdulatlan helyzetű volt. De a legelső S_4 poligon oldalait kezdettől fogva a megadott lineár egyenletrendszer megoldásának megfelelő helyzetben rajzoltuk. Tegyük föl ugyanis, hogy a 4. ábra azt a kötélpoligont ábrázolja, mely az egyenletrendszer

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+a_{i4}x_4=k_i,$$

i-dik egyenletének megfelel. Akkor a bevezetésben előrebocsátott grafosztatikai alaptétel értelmében az

$$a_{i1},\quad a_{i2},\quad a_{i3},\quad a_{i4}$$

erőrendszernek az l függélyesre vonatkoztatott sztatikai nyomatéka

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+a_{i4}x_4=\overline{OQ_i}\,.\,h_i,$$

hol h_i az 1. ábrában lévő i-dik erőháromszög magassága. Ebből következik, hogy

$$\overline{OQ_i}\,.\,h_i=k_i,$$

$$\overline{OQ_i}=\frac{k_i}{h_i}\cdot$$

Miután pedig a szerkesztés elején tényleg ezt a vonaldarabot mértük rá O-tól — a közös s_0 kezdő oldal metszéspontjától számítva — az l függélyesre, tehát a negyedik s_{i4} oldalt (a záróoldalt) kezdettől fogva a megoldásnak megfelelőleg rajzoltuk. Ezek után már a 2. és 3. ábra szemléletéből közvetetlenül látni, hogy S_4-gyel együtt valamennyi (III) alatti poligon-sorozat első eleme, tehát S_{43} és végül S_{432} is mindjárt a megoldásnak megfelelő helyzetben keletkeznek.

$\gamma)$ Hogy végre az

$$S_2\equiv(s_{12}s_{22}s_{32}s_{42})$$

poligon a megoldásban sugársor, az egyszerűen abból következik, hogy az 1. ábrában valamennyi erőpoligonnál úgy a kezdő segéderőt, valamint a reákövetkező oldalakat

$$\overline{a_{11}O_1}\parallel\overline{a_{21}O_2}\parallel\overline{a_{31}O_3}\parallel\overline{a_{41}O_4}$$

szintén párhuzamosaknak választottuk. Így t. i. (l. a 4. ábrát) valamennyi kötélpoligon kezdő oldalát az O ponton át összeesőnek (s_0) vehettük, akkor azután a reá következő oldalak szintén össze-esnek s_1-ben egészen az l_2 függélyes valamely B pontjáig, a honnan tehát az S_2 oldalai

$$s_{12}, \quad s_{22}, \quad s_{32}, \quad s_{42}$$

kiindulnak. Az S_{32} oldalai az S_2 szögpontjain és folytatólag az S_{432} oldalai az S_{32} szögpontjain mennek át; de láttuk, hogy az S_2 szögpontjai a B pontban egyesülnek, tehát az S_{32} és jelesen az S_{432} szintén a B czentrumból kiinduló sugársorokká fajulnak el. A B czentrumot pedig valóban az S_{432} szolgáltatja, mert a bebizonyítás $\beta)$ pontja szerint S_{432} mindjárt keletkezésekor a megoldásnak megfelelő helyzetű.

*

Lássuk még hozzávetőlegesen, hogy az egyenletrendszer determinánsának eltünése miként nyilatkozik a szerkesztésben, föltéve, hogy az egyenletrendszer egyenletei nem ellentmondók. Legyen az

$$|a_{ik}|_{(i,\, k=1,\, 2,\, \ldots,\, n)}$$

determináns rangszáma $n-1$ (azaz míg maga a determináns zérus, $(n-1)$-edfokú aldeterminánsai között legalább egy a zérustól különböző) és tegyük fel, hogy az a_{n2} elemhez adjungált aldetermináns

$$A_{n2} \gtrless 0.$$

Ha ekkor az

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 &\equiv a_{11}x_1 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = k_1 - a_{12}x_2 \\
\bar{u}_2 &\equiv a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = k_2 - a_{22}x_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\bar{u}_{n-1} &\equiv a_{n-11}x_1 + a_{n-13}x_3 + \cdots + a_{n-1n}x_n = k_{n-1} - a_{n-12}x_2
\end{aligned}$$

egyszerüen határozatlan lineár egyenletrendszert az

$$x_2 = 0$$

esetben megoldjuk, egy és csak egy

$$x_1, x_3, \ldots, x_n$$

megoldást kell kapnunk. Miután pedig ennek a redukált lineár egyenletrendszernek *grafikai* megoldásánál változatlanul fölhasználhatjuk az eredeti egyenletrendszernek megfelelő és az 1. ábrában konstruált erőpoligonokat, a mostani és az előbbi szerkesztés vonalról-vonalra megegyezik. Csupán az a különbség, hogy most az

$$
\begin{array}{l}
S_n,\ S_{n-1},\ S_{n-2}, \ldots,\ S_3,\ S_2 \\
S_{nn-1},\ S_{n-1n-2}, \ldots,\ S_{32} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_{nn-1\ldots 3},\ S_{n-1n-2\ldots 2} \\
S_{nn-1\ldots 32}
\end{array}
$$

poligonok rendszere egy lépéssel előbb fog befejeződni, vagyis már az

$$S_{nn-1\ldots 43}$$

oldalai fognak egy szilárd ponton átmenni. Ezt a megfontolást folytatva, látni, hogy ha az eredeti egyenletrendszer $|a_{ik}|$ determinánsa $(n-2)$-odrangú, akkor a poligonrendszerben már az $(n-3)$-adik sorozat poligonjai fajulnak sugársorokká és így tovább. Úgy, hogy ily módon pusztán szerkesztésünk alapján kipuhatolhatjuk az $|a_{ik}|$ determináns rangszámát.

Csillag Vilmos.

ALAPRENDSZEREK EGY VÁLTOZÓS ALGEBRAI FÜGGVÉNYEKNÉL.

(Harmadik és befejező közlemény.)

V. Az alaprendszerek meghatározásának problemája.

Legyen adva

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$
$$[\eta_i] \leqq [\eta_{i+1}]$$

n egymástól független, a változókban homogén algebrai egész függvény, melyről tételezzük fel, hogy ne alkossanak alaprendszert; ebben az esetben mindig van oly η egész függvény, mely

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i \eta_i}{\xi_1} \qquad 1)$$

alakban jelenik meg, hol ξ_1 a változókban homogen lineáris függvény, mely az u-knak nem közös osztója. *Hogy rendszerünk totális fokszámát fokozatosan lejebb szállíthassuk, míg nem a minimális fokszámhoz s így alaprendszerhez nem jutunk, meg kell határoznunk mindazokat az η-kat, melyek a föntebb fölírt alakban jelennek meg; ez a problema pedig az összes ξ_1-ek s a hozzájuk tartozó u-k meghatározásában áll.*

Egyszerűsítsük előbb feladatunkat.

Alkalmazzuk a következő helyettesítést:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ \xi_2 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2\end{aligned}\right\} \qquad \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix} \neq 0$$

Az új változók bevezetése után hagyjuk el a ξ_1-gyel osztható tagokat a megmaradtakat pedig jelöljük η'-al, tehát

$$\eta' = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i \xi_2^{\lambda_i} \eta_i}{\xi_1} = \xi_2^{\lambda_n} \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i \xi_2^{\lambda_i - \lambda_n} \eta_i}{\xi_1},$$

$$\lambda_i \geqq \lambda_{i+1}$$

hol a v-k állandó együtthatók. Ha már most $\xi_2^{\lambda_n}$ együtthatóját η-val jelöljük és azonkívül még

$$e_i = \xi_2^{\lambda_i - \lambda_n} \eta_i,$$

akkor

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i e_i}{\xi_1} = \frac{W}{\xi_1}. \tag{2}$$

Ha tehát ξ_1-et már előre meghatároztuk, akkor feladatunk többi részét következőképen fogalmazhatjuk; meghatározandók v_1, $v_2, \ldots, v_n$ állandók úgy, hogy

$$\frac{w}{\xi_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i e_i}{\xi_1}$$

egész függvény legyen.

Mint később látni fogjuk a ξ_1 meghatározására vonatkozó feladat nagy mértékben egyszerűsödik, ha az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ és w^0, $w, \ldots, w^{n-1}$ független rendszereket a következő megengedhető feltevésnek vetjük alá:

Egyszer s mindenkorra válaszszuk meg a $w^0, w, \ldots, w^{n-1}$ független rendszert egészen tetszőlegesen s rendeljük mellé az e_1, $e_2, \ldots, e_n$ független rendszert úgy, hogy

$$e_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} w^{k-1}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

legyen, hol az a_{ik}-k állandó számok és

$$|a_{ik}| \neq 0.$$

Következőleg

$$w^i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} e_k ,$$

hol a b_{ik}-k szintén állandók és

$$|b_{ik}| \neq 0.$$

Ennélfogva, ha a

$$w' = \sum_{i=1}^{n} v'_i e_i$$

kifejezésben a v'-k tetszőleges állandókat jelentenek, azokat mindig megválaszthatjuk úgy, hogy w' rendre

$$w^0, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$$

értékeket vegye fel.

VI. Kriterium arra nézve, hogy egy homogén algebrai egész függvény a változók lineár homogén függvényével osztható legyen.

Az előbbi fejezet jelöléseit használva, állítsuk fel a kriteriumot arra nézve, hogy

$$\eta = \frac{w}{\xi_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i e_i}{\xi_1} \tag{1}$$

egész függvény legyen. E végből képezzük a következő függvényeket:

$$w e_i = \sum_{k=1}^{n} v_{ik} e_k \tag{2}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

hol v_{ik}-k a v_i-knek homogén lineár, a ξ_1, ξ_2-nek pedig 2μ-ed fokú homogén függvényei, ha az e-k μ-edfokúak. Ha az 1) egyenletrendszerünkből az e-ket kiküszöböljük

$$(-1)^n \begin{vmatrix} v_{11}-w & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22}-w & \ldots & v_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nn}-w \end{vmatrix} \equiv w^n + u_1 w^{n-1} + \cdots + u_n = 0 \tag{3}$$

egyenlethez jutunk, a melyben az imént mondottak alapján u_i a $v_1, v_2, \ldots, v_n$-nek i-ed a ξ_1, ξ_2-nek pedig i_μ-ed fokú homogén függvénye. Ha tehát η egész függvény, akkor az 1) és 3) egyenletek alapján az

$$\eta^n + \frac{u_1}{\xi_1}\eta^{n-1} + \cdots + \frac{u_n}{\xi_1^n} = 0$$

n-edfokú algebrai egyenletet η-t mint algebrai egész függvényt definiálja, a mi

$$u_i \equiv 0 \, (\text{mod. } \xi_1^i) \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

kongruencziák együttes fennállását vonja maga után. De a 4) alatt felírt kongruenczia csak úgy teljesül, ha u_i-ben $\xi_1^0, \xi_1, \ldots, \xi_1^{i-1}$ együtthatói eltünnek. Ennélfogva kongruenczia-rendszerünk öszszesen

$$1+2+\cdots+n=\binom{n}{2}$$

egyenlet együttes fennállását teszi szükségessé, mely rendre 1-, 2-, . . ., n-edfokúak, tehát azoknak tanulmányozása majdnem legyőzhetetlen akadályokba ütközik. Ellenben problemánknak sokkal általánosabb alapon való tárgyalásánál ezeket az akadályokat kikerülhetjük s a megoldást lineár egyenletrendszerek megoldására vezethetjük vissza.

VII. A probléma általánosítása.

Értsünk δ alatt egy a zérus és az egység között levő raczionális törtszámot, akkor az előbbi fejezet fejtegetései alapján kimondhatjuk: hogy w-nek ξ_1^δ-nal oszthatósági feltétele

$$u_i \equiv (\text{mod. } \xi_1^{i\delta}) \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

kongruencziák együttes fennállásában áll. Minthogy u_i ξ_1, ξ_2-nek homogén egész függvénye, azért, ha $(i\delta)$-val jelöljük az $i\delta$ után következő legkisebb egész számot, kongruencziáinkat

$$u_i \equiv (\mathrm{mod.}\ \xi_1^{(i\delta)}) \quad (i=1, 2, \ldots, n) \qquad 1')$$

kongruencziákkal kell helyettesítenünk.

A tárgyalás további folyamata szükségessé teszi a δ-ák tulajdonságainak megvizsgálását.

Mindenek előtt kimutatjuk, hogy *ha van oly legnagyobb* δ, *mely mellett* $w\xi_1^{-\delta}$ *egész szám, akkor a*

$$\delta, 2\delta, \ldots, n\delta$$

*sorozatban kell egész számnak lenni.** Mert ha nem volna, akkor mindig meghatározható δ-nál nagyobb δ_1 szám úgy, hogy reá nézve

$$(i\delta) = (i\delta_1),$$

tehát a melyre nézve az 1') kongrueneziák mind teljesülnek, a mi föltevésünkkel ellenkezik.

Minthogy nekünk a maximális δ meghatározása a feladatunk, azért vizsgálódásainkat is csak olyan δ-kra kell kiterjesztenünk, melyek a maximális δ jellegével birnak, tehát a melyeknek általános alakjuk, ha m és i relativ törzsszámokat jelentenek

$$\delta = \frac{m}{i} \cdot \quad (m \leqq i, i \leqq n).$$

Ha tehát $\varphi(i)$-vel jelöljük az i-nél nem nagyobb i-hez relativ törzsszámok számát, akkor a zérus és az egység között levő összes δ-k száma:

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i).$$

Rendezzük a δ-kat nagyság szerint a következő sorozatba:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho,$$

hol

$$\delta_i < \delta_{i+1}; \ \delta_1 = \frac{1}{n}, \ \delta_\varrho = 1.$$

* Ha ez a maximális δ, nem zérus és az egység, hanem zérus és kettő között van, a $\delta, 2\delta, \ldots, n\delta$ sorozat szintén olyan tulajdonságú.

Ezek után kimutatjuk:

α) hogy $i\delta_k$ *és* $i\delta_{k+1}$ *között egész szám nincs;* mert ha volna közöttük egy m egész szám, akkor

$$i\delta_k < m < i\delta_{k+1}$$

vagy

$$\delta_k < \frac{m}{i}\ \delta_{k+1}$$

feltevésünkkel ellenkező egyenlőtlenségre jutnánk, a mennyiben δ_k és δ_{k+1} között már több δ nincs.

β) Ha $i\delta_k + a$ *egy a* $i\delta_k$ *és* $i\delta_{k+1}$ *között levő szám,* akkor

$$(i\delta_k + a) = (i\delta_{k+1}).$$

γ) $(i\delta_k)$ *egy egységgel kisebb, mint* $(i\delta_{k+1})$, *ha* $i\delta_k$ *egész szám.* Ez a zárjeles szimbolum definicziójából következik.

Ezek után térjünk át ismét feladatunkra és általánosítsuk azt a következő módon: A helyett ugyanis, hogy azt oldanók meg, miként kell a v-ket megválasztani, hogy $\frac{w}{\xi_1}$ egész függvény legyen, hasonló feladatot oldunk meg rendre $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ kitevőkre. *Általánosan felteszszük, hogy a kérdést* δ_k*-ra nézve már megoldottuk, kimutatjuk: hogyan kell ekkor* δ_{k+1}*-re megoldani.*

Minthogy a tárgyalás folyamán az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ függvényeknek a száma redukálódhatik, azért általánosan azt is feltételezzük, hogy midőn a δ_{k+1}-ik hatványhoz érünk már csak ν függvényünk van, hol

$$\nu \leqq n.$$

Ez a redukczió, miként látni fogjuk tényleg be is következhetik.

Általánosított problemánkat tehát következőképen fogalmazzuk:

Adva van

$$e_1, e_2, \ldots, e_\nu \quad \nu \leqq n$$

független rendszer, melynek minden eleme osztható $\xi_1^{\delta_k}$*-val; hogyan kell a* $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ *konstansokat meghatározni úgy, hogy*

$$w = \sum_{i=1}^{\nu} v_i e_i \qquad 1)$$

függvény $\xi_1^{\delta_{k+1}}$*-gyel osztható legyen.*

VIII. Kriterium arra nézve, hogy homogén algebrai egész függvény tört kitevőjű lineár tényezővel osztható legyen.

w alatt értsük az az előbbi fejezet végén definiált függvényt és

$$w^k + u_1 w_1^{\nu-1} + \cdots + u_\nu = 0 \qquad 1)$$

legyen az az algebrai egyenlet, melynek eleget tesz; $w^{(i)}$-t pedig definiálja a következő egyenlet:

$$w^{(i)} = v_\nu^{(i)} e_1 + v_2^{(i)} e_2 + \cdots + v_\nu^{(i)} e_\nu \qquad 2)$$
$$(i=1, 2, \ldots, \nu-1)$$

hol a $v^{(i)}$-k egészen tetszőleges állandók. Ha tehát a v-ket úgy határozzuk meg, hogy w osztható legyen $\xi_1^{\delta_{k+1}}$-el, akkor

$$w_i = w w^{(1)} w^{(2)} \ldots w^{(i-1)} \qquad 3)$$

osztható $\xi_1^{\delta_{k+1}+(i-1)\delta_k}$-val. Ha már most azt az egyenletet képezzük, melynek w_i eleget tesz s ezen egyenlet gyökeinek összegét $S(w_i)$-vel jelöljük, akkor $S(w_i)$ homogén egész függvénye a $v_i^{(k)}$-nak, melynek együtthatóit ξ_1, ξ_2 homogén egész algebrai függvényei képezik és ezenkívül

$$S(w_i) \equiv 0 \,(\text{mod. } \xi_1^{(\delta_{k+1}+(i-1)\delta_k)}). \qquad 3)$$
$$(i=1, 2, \ldots, \nu)$$

De az előbbi fejezetben megállapitott β) alatt levő tételnél fogva:

$$(\delta_{k+1} + (i-1)\,\delta_k) = (i\delta_{k+1}),$$

tehát

$$S(w_i) \equiv 0 \,(\text{mod. } \xi_1^{(i\delta_{k+1})}). \qquad 3')$$
$$(i=1, 2, \ldots, \nu)$$

Kimutatjuk, hogy ez a kongruenczia-rendszer szükséges és elégséges a v-k meghatározására; mert ha a $v_i^{(k)}$-kat úgy választjuk, hogy

$$w_i = w^i$$

legyen, akkor

$$S(w_i) = S(w^i) = S_i.$$

Ámde a szimmetrikus függvények tanából ismeretes NEWTON-féle formula szerint:

$$s_i+u_1s_{i-1}+\cdots+u_{i-1}s_1+iu_i=0.$$

Ha tehát u_{i-1} osztható $\xi_1^{(i-1)\delta_{k+1}}$-el, akkor u_i is osztható $\xi_1^{i\delta_{k+1}}$-el; de

$$u_1=s_1\equiv 0\,(\text{mod. } \xi_1^{(\delta_{k+1})}),$$

tehát

$$u_i\equiv 0\,(\text{mod. } \xi_1^{(i\delta_{k+1})}), \qquad (i=1,2,\ldots,\nu) \tag{4}$$

a mi bebizonyítandó volt.

Lássuk már most a 3') alatt levő kongruencziák megoldását. A $v_i^{(k)}$-k tetszőlegessége miatt a 3') csak úgy állhat meg, ha

$$v_{h_1}^{(1)}v_{h_2}^{(2)}\ldots v_{h_{i-1}}^{(i-1)} \qquad (h_\lambda=1,2,\ldots,\nu)$$

együtthatója oszható $\xi_1^{(i\delta_{k+1})}$-el, azaz, ha

$$S(we_{h_1}e_{h_2}\ldots e_{h_{i-1}})\equiv 0\,(\text{mod. } \xi_1^{(i\delta_{k+1})}),$$

melynek kifejtett alakja:

$$v_1S(e_1e_{h_1}e_{h_2}\ldots e_{h_{i-1}})+v_2S(e_2e_{h_1}e_{h_2}\ldots e_{h_{i-1}})+\cdots+$$
$$+v_\nu S(e_\nu e_{h_1}e_{h_2}\ldots e_{h_{i-1}})\equiv 0\,(\text{mod. } \xi_1^{(i\delta_{k+1})}), \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,\nu \\ i_\lambda=1,2,\ldots,\nu \end{pmatrix} \tag{5}$$

melyet szimbolikusan

$$S_i^{(i-1)}(v_1v_2\ldots v_\nu)\equiv 0\,(\text{mod. } \xi_1^{(i\delta_{k+1})}) \tag{5'}$$

alakba írunk. Könnyű meggyőződni, hogy

$$S_i^{(i-1)}=\frac{1}{i!}\,\frac{\partial^{i-1}S(w^i)}{\partial v_{h_1}\partial v_{h_2}\ldots\partial v_{h_{i-1}}}.$$

Minthogy w osztható $\xi_1^{\delta_k}$-val, tehát w^i és evvel együtt $S(w^i)$ $S_i^{(i-1)}$ oszthatók $\xi_1^{(i\delta_k)}$-val, ennélfogva

$$S_i^{(i-1)}=\xi_1^{(i\delta_k)}\,\overline{S_i^{(i-1)}}$$

tehát az 5') kongruenczia-rendszer helyett

$$\overline{S_i^{(i-1)}} \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\ \xi_1^{(i\delta_{k+1})-(i\delta_k)})$$

rendszert írhatjuk. A mi a VII. γ) alatt levő tétele alapján kimondja, hogy az *5') rendszerből az i-re vonatkozó tagok közül csak azokat kell megtartani, melyekre nézve $i\delta_k$ egész szám.*

Azt a körülményt, hogy $S_i^{(i-1)}$ ξ_1, ξ_2-nek homogén függvénye, úgy teszszük szemlélhetővé, hogy helyette

$$S_i^{(i-1)}(v_1, v_2, \ldots, v_\nu, \xi_1, \xi_2)$$

kifejezést írjuk. Ennek alapján azután 5') kongruenczia-rendszerünk következményeként

$$S_i^{(i-1)}(v_1, v_2, \ldots, v_\nu, 0, 1) = 0 \qquad 6)$$

$v_1, v_2, \ldots, v_\nu$-ben homogén lineár egyenletrendszert írhatjuk fel, mely ha megoldható, a megoldás általános alakja:

$$v_{\nu_1+i} = a_{i1}v_1 + \cdots + a_{i\nu_1}v_{\nu_1}.$$
$$i=1, 2, \ldots, \nu-\nu_1, \quad \nu_1 < \nu.$$

Ha már most w értéke v_{ν_1+i} értékét behelyettesítjük

$$w = v_1e_1' + \cdots + v_{\nu_1}e_{\nu_1}' \qquad 7)$$

kifejezéshez jutunk, hol az e'-k mindegyike osztható $\xi_1^{\delta_{k+1}}$-el. A v-k felírt értékrendszere egyúttal azt is kimondja, hogy az e-k száma csakugyan redukálódhatik. Lássunk ezek után módszert ξ_1 meghatározására.

IX. A rendszer diszkriminánsa.

Speczializáljuk az előbbi fejezetben kifejtett módszert arra az esetre, midőn

$$\delta_{k+1} = \delta_1 = \frac{1}{n}; \quad (i\delta_{k+1}) = 1.$$

$$\nu = n.$$

Az előbbi fejezet 3') rendszere helyébe most

$$S(w_i) \equiv 0 \pmod{\xi_1} \qquad 1)$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

rendszer lép, melyet az V. fejezet végén tett megjegyzés alapján

$$S(ww') \equiv 0 \pmod{\xi_1}$$

kongruencziával helyettesíthetünk, minthogy ez a kongruenczia a v'-k alkalmas megválasztásával

$$S(w^i) \equiv 0 \pmod{\xi_1}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

kongruencziák mindegyike átmehet, melyből pedig

$$u_i \equiv 0 \pmod{\xi_1}$$
$$(i-1, 2, \ldots, n)$$

rendszer következik, mely az oszthatóság szükséges és elégséges feltétele.

Az előbbi fejezet 5') és 6) alatt levő egyenletrendszerének a jelen esetben

$$[S(e_i e_k)]_{\xi_1=0,\ \xi_2=1} = a_{ik}$$

jelölés alkalmazásával megfelel:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} v_i = 0,$$
$$(k=1, 2, \ldots, n)$$

mely megoldható, ha,

$$|a_{ik}| = 0,$$

azaz: ha

$$|S(e_i e_k)|$$

determinansnak ξ_1 *osztója; ezt a determinanst az* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ *rendszer diszkriminánsának nevezzük, mely független rendszerre nézve nem lehet azonosan zérus.*

Mert ha

$$|S(e_i e_k)| = 0,$$

akkor

$$\sum_{i=1}^{n} v_i S(e_i e_k) = S(w e_k) = 0$$
$$(k=1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszer, melyet

$$S(ww')=0$$

egyenlet foglal magában, megoldható, de ennek az utóbbi egyenletnek

$$S(w)=0,\ S(w^2)=0, \ldots, S(w^n)=0$$

egyenletek, mind következményei, tehát a már idézett NEWTON-féle formula alapján:

$$u_i=0, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

tehát

$$w^n+u_1w^{n-1}+\cdots+u_n=0$$

következtében

$$w=0,$$

a mi nem lehet, mert $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ függetlenek egymástól.

Ezek után az alaprendszer meghatározására vonatkozó módszert következőképen írjuk le:

Mindenekelőtt megállapítjuk a kiindulásul vett rendszer diszkriminansát, melynek linear tényezői adják az összes ξ_1-ket, melyekre vizsgálódásunkat ki kell terjeszteni; azután az előbbi fejezetben megállapított módon az összes δ-ra nézve meghatározzuk az oszthatóság feltétele alapján a v-ket s ha $\delta_\varrho=1$-re nézve is teljesül az oszthatósági feltétel, akkor a rendszer totális fokszámát eggyel kisebbítjük s azután áttérünk egy másik ξ_1-re.

X. A diszkriminåns tulajdonságai.

Ha az η-k rendre $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ fokúak, akkor a rendszer totális fokszáma

$$N=\sum_{i=1}^{n}\mu_i.$$

A *rendszer diszkriminánsa* pedig, miként könnyű meggyőződni, *$2N$-edfokú.*

Ennélfogva az alaprendszer diszkriminánsa legalacsonyabb fokú.

Ha $\xi_1, \omega_2, \ldots, \xi_n$ alaprendszert és $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ egy tetszőleges rendszert képvisel, akkor

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k,$$

$$\eta_i\eta_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{ij}a_{km}\xi_j\xi_m$$

$$S(\eta_i\eta_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{ij}a_{km}S(\xi_j\xi_m),$$

tehát

$$|S(\eta_i\eta_k)| = |a_{ik}|^2 \, |S(\xi_i\xi_k)|$$

azaz: az *alaprendszer diszkriminánsa minden más rendszer diszkriminánsának osztója.*

Ennek a tételnek következménye: hogy az egyik alaprendszerből a másikba oly helyettesitéssel térünk át, melynek determinánsa állandó. Ez a tétel érvényes azután az egyenlő totalis fokszámmal biró más rendszerekre is.

Ha már egyszer az alaprendszert meghatároztuk, akkor bármely $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ rendszerre nézve az összes ξ_1-ek osztói

$$|a_{ik}|$$

helyettesitési determinánsnak.

Suták József.

KATHÓDSUGARAK ÉS RÖNTGENSUGARAK.

(Második közlemény.)

MÁSODIK RÉSZ.

RÖNTGENSUGARAK.

I.

Általános jellemzés.

1. Képzeljünk ónpapirosból vagy vékony aluminiumlemezből készített teljesen zárt burkolatot, a melynek belsejében a kathódsugarakat előállító cső van működésben. Az ily burkolat fala áthatatlan minden ismert fényre és minden elektrosztatikus hatásra nézve.

Ennek ellenére, ha a burkolathoz bariumplatincyanűrrel bevont ernyőt közelítünk, az ernyő világítani kezd, nem különben sok más fluoreszkáló anyag is. Ugyanezen elrendezés mellett a közönséges fotografáló lemez, akár van fekete papirosba burkolva, akár nincs, a sugárzás hatását megérzi.

Ha a burkolat és a fluoreszkáló ernyő közé valami tárgyat helyezünk, úgy a tárgy árnyéka az ernyőn megjelenik; az árnyék a tárgy természete szerint többé vagy kevésbbé éles. Ugyanilyen árnyék jelenik meg az ernyő helyébe tett fotografáló lemezen is, előhívás után. A légüres cső, a tárgy és az árnyék ugyanazon egyenesbe esnek: a cső tehát sugarakat bocsát ki, és ezek a *Röntgen-sugarak.**

Ha egy második, tetszőleges alakú és természetű tárgyat helye-

---

* L. Röntgen eredeti közleményeinek fordítását e lapok V. kötetének 38. és 184. lapjain, továbbá Klupáthy czikkét u. a. köt. 4—15. lapján.

zünk az első tárgy árnyékrajzát előidéző sugarak útjába, észreveszszük, hogy az árnyék elhomályosodik, de sohasem mozdul el és el sem torzul. Ez mutatja, legalább első közelítésben, hogy e sugarak nem törnek meg.

Másrészt, ha porrá törjük is a testet, a Röntgen-sugarakra vonatkozó átlátszósága nem változik meg. Ezek tehát nem verődnek vissza, — legalább észrevehetőleg nem, — úgy mint a közönséges fénysugarak, melyeket az átlátszónak mondott test, pl. az üveg, egészében átbocsát, de porrá tört állapotban feltartóztat.

Ha még megemlítjük azt, hogy a csövet rejtő burkolat közelébe helyezett elektromos test mihamar kisül, úgy felsoroltuk azokat a sajátságokat, a melyek közvetlen kvalitativ igazolást engednek meg. Látni fogjuk majd, hogy miképen állapították meg tüzetesebben és terjesztették ki ezen sajátságokat.

2. Az előzőkben adott kisérleti meghatározás mutatja, hogy a fémek korántsem oly nagy mértékben átlátszatlanok a Röntgensugarakra vonatkozólag, mint a milyenben a fényre. Másrészt nem ismerünk anyagot, mely a sugarak ezen nemére olyannyira átlátszó lenne, mint a milyen a víz vagy a kvarcz a fényre nézve. Az elnyelési együtthatók sorozatát adó pontos mérő kisérletek híján ime néhány tájékoztató adat:

A nehéz fémek, u. m. platina, arany, higany, ólom tizedmilliméternyi vastagságban gyakorlatilag véve átlátszatlanok; a réz, a vas, a czink már kevésbbé átlátszatlanok; az aluminium, a kálium- vagy mésztartalmú üvegek már több milliméternyi vastagságban is áthatolhatók; jobban átlátszók a csontok, de közel sem oly mértékben, mint a hús; a fa, a paraffin, a víz átlátszók még a decimétert meghaladó vastagságban is. Végre a gázak, noha közönséges nyomás és hőfok mellett ezek a legátlátszóbb testek, néhány méternyi rétegökkel a Röntgen-sugarakat szintén feltartóztatják.*

* Benoist szerint gázaknál az elnyelés arányos lenne a gáz sűrűségével (C. R., t. CXXXIV., p. 146). Ez a törvény azonban ellenkezésben van Rutherford ujabb megfigyeléseivel, a melyek sokkal több gázra terjeszkedtek ki (Phil. Mag. 1897. p. 244); igy nevezetesen a sósav, bár kisebb a sűrűsége, sokkal elnyelőbb mint a szénsav.

3. Innen látjuk, hogy a legsűrűbb testek általában a legerősebben elnyelőknek mutatkoznak. Ugyanezt találták a kathódsugaraknál is. De azért a két sugárzás összezavarása lehetetlen. A kathód sugarak ugyanis a századmilliméternél jelentékenyebb vastagságú szilárd testen semmi szin alatt nem hatolhatnak át.

A kathódsugarak továbbá, anyagi közegben haladva igen erősen szétszóródnak, míg a Röntgen-sugarak sohasem szóródnak szét. A kathódsugarakat igen erősen eltériti a mágnes, míg a Röntgensugarakat egyáltalán nem. A kathódsugaraknak végre negativ elektromos töltésük van, míg ezzel szemben kimutattam, hogy a *kellőképen védett* Faraday-féle hengerbe bevezetett Röntgen-sugarak semmi töltést nem adnak át.

Erre csak ugyanazt az elrendezést használhattam, a melylyel a kathódsugarak elektromozását mutattam ki, mindössze azzal a külömbséggel, hogy nagyobb pontosság kedvéért elektroszkóp helyett kvadrans elektrométert alkalmaztam.

4. Igy hát két külömböző fajú sugárzással van dolgunk; de azért közöttük egy főfontosságú vonatkozás áll fenn, a melyre azonnal rábukkanunk, mihelyt pontosan meg akarjuk határozni a Röntgensugarak eredetének a helyét.

Erre elégséges azt az egyszerü eljárást alkalmazni, a melylyel a *sötét kamara* segitségével világitó tárgyak képét kapjuk, lencsék vagy tükrök alkalmazása nélkül. A csőtől néhány centiméternyi távolságban kis lyukkal ellátott sárgarézlemezt állitunk fel, mögéje pedig szintén néhány centiméternyire érzékeny fotografáló lemezt; az előbbinek megfelelő folyamat révén a lemezen az üres cső hatásos részeinek képét fogjuk megkapni.

Így igazolhatjuk azt, hogy a cső falának csakis ama részei hatásosak, a melyeket a kathódsugarak találnak. Általánosabban, a kathódsugarak útjába valami anyagi akadályt helyezvén el a cső belsejében, ennek az akadálynak képe megjelent a sötét kamarába zárt érzékeny lemezen. Az akadálynak néha látható fluoreszkálása és a kibocsátott Röntgen-sugarak intenzitása között valamilyen egyszerű összefüggést nem sikerült találnom. Az eredmény tehát az, hogy *azokban a pontokban, a hol valami anyag a kathódsuga-*

*raknak útját állja, Röntgen-sugarak támadnak.** Ugy látszik, hogy máshol nem is fejlődnek; így maga a kathód nem bocsát ki Röntgen-sugarakat.

Jegyezzük még meg azt is, hogy a kibocsátó tájék nem úgy viselkedik, mint valamely izzó lemez, a mely több fényt bocsát ki a reá merőleges irányban, mint ferde irányban, hanem inkább úgy, mint a pillangó-égő lángja, a mely minden irányban körülbelül egyenlően sugárzik.

A gyakorlat szempontjából ezek a tulajdonságok lehetővé tették a csövek hatásfokának megjavítását. Jelenleg kitünő pontalakú sugárforrást állítanak elő úgy, hogy a konkav kathódtól kiinduló kathódsugarak találkozási pontjába *antikathódot* helyeznek: ezek a *fókusz-csövek.*

5. *Egyenesvonalú terjedés.* Az egymást nyomon követő kisérletek, melyek a Röntgen-sugarakkal a visszaverődés, a törés, vagy a diffrakczió jelenségeit igyekeztek létrehozni, nem adtak eredményül mást, mint a semmiképen meg nem zavarható egyenesvonalú terjedésüknek mindig szigorúbbá váló bizonyitását.

A szabályos visszaverődést sohasem sikerült megállapitani. Sőt ez idő szerint még a szétszórt visszaverődés is valószinűtlen. Eleinte igaz ugyan, azt hitték, hogy bizonyos anyagoknál a sugaraktól talált minden egyes pont szintén ugyanolyan sugarak forrásává válik, és így például azt találták, hogy az érzékeny lemez mögé helyezett czink-, vagy fluorpátlemez erősíti az érzékeny lemezen előidézett fényhatást. Ámde valójában úgy látszik, hogy itt egyszerüen a czinken vagy a fluorpáton előidézett láthatatlan fluoreszkálás szerepelt. Így WINKELMANN és STRAUBEL megmutatták, hogy a fluorpát esetében a látszólagos visszaverődés a megmérhető hullámhosszúságú (0,22 μ) ibolyántuli sugaraknak tulajdonítandó.

---

* Kétségtelen, hogy RÖNTGEN elejétől fogva ismerte ezt az eredményt. Ennek ellenére akkor, a mikor én végrehajtottam az ebben a szakaszban összefoglalt kisérleteket (C. R. t. CXXII. p. 716 l.) az eszmék még nem voltak tisztázva. Némelyek szükségesnek tartották a zöld fluoreszkálást, mások meg az anódban látták a sugarak forrását; végre olyanok is voltak, kik föltételezték, hogy a falaktól bizonyos távolságra anyagtalan góczpontok léteznek.

A mi a törést illeti, a használt eljárások voltaképen mind abban állanak, hogy függőleges törő élű prizmára ráirányítják a szintén függőleges síknyaláb alsó felét.

A sík nyaláb azután érzékeny lemezre esik, a melyen nyomukat hagyják úgy azok a sugarak, a melyek a prizmán áthaladtak, valamint azok, melyek nem haladtak át. A két árnyékrajz egészen egymás folytatásába esik, a mi azt mutatja, hogy törés nem történt. Az ez idő szerint legpontosabb eredmények, melyek Gouy-nak köszönhetők, azt mutatják, hogy például az aluminiumra, az üvegre, vagy a kénre vonatkozólag a törési együttható egymilliomodnál kevesebbel tér el az egységtől.

A diffrakcziót illetőleg is Gouy hajtotta végre a legjobb kisérleteket. Megszabván egy keskeny résen áthaladó sugárnyaláb elhajlásának felső határát, megmutatta, hogy ha ezek a sugarak periodikus természetűek, úgy a hullámhosszúságuk tetemesen kisebb, mint a zöld szin hullámhosszúságának századrésze, vagyis mint 0,005 μ.*

Végre a polarizáczióra vonatkozó kisérletek is csak negativ eredményre vezettek.

6. *Elméletek.* A fentiekben előadott tényeket eddigelé nem sikerült egyszerű feltevéssel összefoglalni, a mely azokat egyuttal az ismert tüneményekkel logikus kapcsolatba hozná; ebben az értelemben a Röntgen-sugarak mibenléte még ismeretlen.

Az emissziós feltevés, a mely ugyan nem épen kedvelt, mégis semmikép sem lenne kevésbbé elfogadható, mint annak idején a diffrakczió ismeretét megelőzőleg volt a fényre vonatkozólag, és talán a bizalmatlanság, melyben részesül, épen az optikában vallott kudarczának tulajdonítható.

Egy másik feltevés a Röntgen-sugarakban elszigetelt elektromágneses hullámokat, a kathódsugarak feltartóztatásakor az

* Első kisérleteim egyikében kimutattam, hogy ez a hullámhosszúság a zöldénél kisebb. Valamivel későbben Sagnac kimutatta, hogy legalább is tízszer kisebb. A Gouytól elért nagy pontosság először is a fókusz használatának tulajdonitandó, és annak a sikerült gondolatnak, hogy erős, lineáris forrásul az antikathódot használta, ezt horzsoló beesés mellett nézve.

étherrel közölt heves impulzusokat lát. Ámde így nem értem azt, hogy keskeny résből kilépő sugár miért nem mutat elhajlást.

Végre gyakran feltételezik azt is, hogy az új sugarak nem mások, mint igen rövid hullámhosszúságú periodikus rezgések.* Az egyenesvonalú terjedés ekkor tehát a Huygens-Fresnel-féle elv folyománya; ha ehhez még felvesszük azt, hogy a terjedési sebesség minden közegben ugyanaz, úgy ugyancsak ezen elv alkalmazása megadja a visszaverődés és törés elmaradásának magyarázatát is.

A kisérlet külömben semmi felvilágosítást nem nyujt arra vonatkozólag, hogy ezeket a rezgéseket transverzálisaknak, vagy longitudinálisaknak kell-e inkább feltételeznünk. Mindazonáltal inkább az első feltevéshez hajlunk, mivel már tudjuk, hogy az éther továbbíthat transverzális hullámokat, de nem vagyunk benne bizonyosak, hogy továbbíthat-e másféléket is. A Röntgen-sugarak így ibolyántúli sugarak lennének. Azon a tényen, hogy nem tudjuk őket polarizálni, éppen semmi meglepő sincsen, mert hiszen a közönséges fényt is csak törés, visszaverődés vagy diffrakczio révén vagyunk képesek polarizálni.

Végül nem tudom, hogy állítottak-e fel feltevést a Röntgen-sugarak keletkezésének mechanizmusát illetőleg. Talán felvehető az, hogy abban a pillanatban, midőn a kathódlövedékek légüres cső falába beleütköznek, ezek rezgésbe jönnek, úgyszintén a fal molekulái is. Ez utóbbiak adnák a látható vagy láthatatlan fluoreszkálást, míg a lövedékek, a melyek tán hasonlíthatatlanul kisebbek, mint a molekulák, adnák rezgésükkel a Röntgen-sugarakat.

Egy szóval még teljes bizonytalanság uralkodik. De másrészről e bizonytalanság daczára épen csak növekszik a Röntgen-sugarak jelentősége, mert az új tüneményeknek oly csoportját tárja fel, a mely a beható vizsgálatot nagyon is megérdemli.

---

* L. *Math. Phys. L.* V. köt. 137. l.

II.

A Röntgen-sugarak okozta kisülés.

A Röntgen-sugaraknak elektromos testekre való hatását, melyet már Röntgen is ismert, noha nem tette mindjárt közzé, ujból és egymástól függetlenűl fedezték fel Francziaországban BENOIST és HURMUZESCU, Angliában J.-J. THOMSON, Olaszországban RIGHI, és ezeken kívül még mások.*

Ezek a fizikusok megmutatták mindjárt azt is, hogy eltérőleg az ibolyántuli fénytől, a mely csakis negativ töltésű testeket süt ki, a Röntgen-sugarak egyformán hatnak úgy a pozitiv, mint a negativ elektromosságra, a mennyiben — legalább első megközelítésben — a hatásuknak alávetett testek teljes kisülését idézik elő. Továbbá azt is tapasztalták, hogy ugyanazon gázban a kisülés sebessége a nyomás csökkenésével kisebbedik.

BENOIST és HURMUZESCU azonkívül tapasztalták azt is, hogy a kisülési sebességre a sugaraktól talált test minőségének is van hatása; így például nagyobb a platinánál, mint az aluminiumnál. De a jelenség magyarázatában eltértek a többi fizikustól, a midőn a kisülés okát abban keresték, hogy a sugaraktól talált fal elektromos gázmolekulákat űz el magától.

J.-J. THOMSON már jobban észrevette a kisült testet körülvevő dielektrikum szerepét; ő azt jelentette ki, hogy minden gáz, ha Röntgen-sugarak hatják át, vezetővé válik az elektrolitek módjára; sőt bebizonyitottnak vette azt is, hogy minden szigetelő közeg, szilárd vagy folyékony, szintén vezetővé válhatik. Végre úgy vélekedvén, hogy ennek a vezető sajátságnak *fenn kell maradnia* egy ideig a sugarak kialvása után is, THOMSON megmutatta, hogy valamely testet ki lehet sütni olyan levegő ráfujásával is, a melyen megelőzőleg Röntgen-sugarak haladtak át, míg ha a levegő nyugalomban marad, kisülés nem mutatkozik.

Ugyanezt a kisérletet RÖNTGEN is megvalósitotta. Ő azonban

* L. *Math. Phys. L.* V. köt. 138—141. l.

THOMSONnal szemben azt állította, hogy a kisülés csakis gázokban következik be. Ha például a test a sugarakat áteresztő vezető burkolat belsejébe van helyezve, és ha a köztük lévő tért paraffin tölti be egészen, akkor a Röntgen-sugarak, noha áthatolnak a paraffinon, kiegyenlíteni nem képesek a test és a burkolat potencziálját.

Épp úgy mint RÖNTGEN, RIGHI is azt a következtetést vonta le igen csinos kisérleteiből, hogy a sugaraktól áthatolt gázak bizonyos tekintetben úgy viselkednek, mint az elektrolitek, de ő is csak a gázakra szorítja ezt a tulajdonságot. Azonfelül megállapítja, s vele VILLARI is azt, hogy néha olyan testek kisülése is bekövetkezik, a melyekre nem eshetnek rá a sugarak, ha t. i. egyenesvonalúaknak tételezzük fel őket. VILLARItól eltérőleg, a ki azt tételezi fel, hogy ebben az esetben a sugarak erősen meggörbülnek, a mi ellenkezésben van mindazzal, a mit e tárgyra vonatkozólag eddig tudunk, RIGHI azt veszi fel, hogy ezek a hatások kimagyarázhatók a konvekczióval és főleg a közvetlenül ért levegő diffúziójával.*

Gáz-hatás.

1. Ismeretes, hogy valamely vezetőről nem tünhetik el bizonyos elektromos töltés anélkül, hogy vele együtt más testeken lévő egyenlő nagyságú és ellenkező jelű töltés is el ne tünnék, mert hiszen ugyanazon erőcső végein lévő két töltésnek egy időben kell eltünnie. E szerint tehát lehetetlen, hogy a Röntgen-sugarak csakis egy vezetőt süssenek ki. Azért is azt tartottam, hogy pontos törvényekhez csakis úgy juthatok, ha mind a két kisütött testet egyidejüleg veszem figyelembe.

2. Mindig éltem azzal az elővigyázattal, hogy ónpapirossal teljesen befedett faszekrénybe zártam be nem csupán a sugarakat adó fókusz-csövet, hanem egyuttal a kisérlethez szükséges szikraindítót és az akkumulátorokat is; sőt az inditó tekercset is kivülről

* Ezek az eredmények, noha a kisérleteim kivitele idejében tétettek közé, csak sokkal később jöttek tudomásomra.

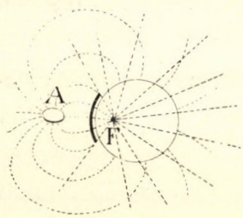
kezelhettem, a nélkül, hogy az ónpapirost fel kellett volna emelnem. Ily berendezésben az elektromos védés egészen tökéletes, úgy hogy például a szekrény belsejében erős szikrák ugorhattak át a nélkül, hogy a használt elektroszkópra vagy elektrométerre legkisebb hatással is lettek volna.

3. Azonnal megállapíthattam azt, hogy a Röntgen-sugarak kisüthetnek oly testet is, a melyet nem is érnek. A szekrény egyik fala mentén felállítottam vastag, a sugarakra teljesen átlátszatlan pléhlemezt. Belül, közel a falhoz volt a fókusz, kívül pedig az elektromos *A* test, mely az elektroszkóp aranyleveleivel volt összekötve, és ezek úgy voltak elhelyezve, hogy sugár se a testet, se az elektroszkópot ne érhesse, és a legközelebbi sugarak is 40 cm távolságban haladtak.

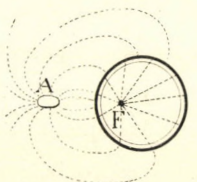
Az *A* vezető mégis igen hamar kisült; és ezt a hatást valóban a nem védett oldalon kilépő sugaraknak kellett tulajdonítanom, mert hiszen semmiféle kisülés sem jelentkezett, ha a többi oldalak hasonló pléhlemezekkel voltak fedve.

E pléhlemezek alkalmazása nélkül úgy is meg lehetett akadályozni a kisülést, ha az *A* vezetőt ónpapirossal borított és egészen az első pléhlemez árnyékába helyezett *A'* szekrénybe tettem.

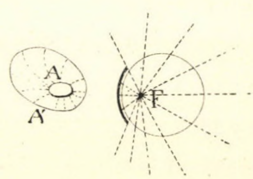
A következő három vázlat híven tünteti fel e három kisérletet.



1.



2.



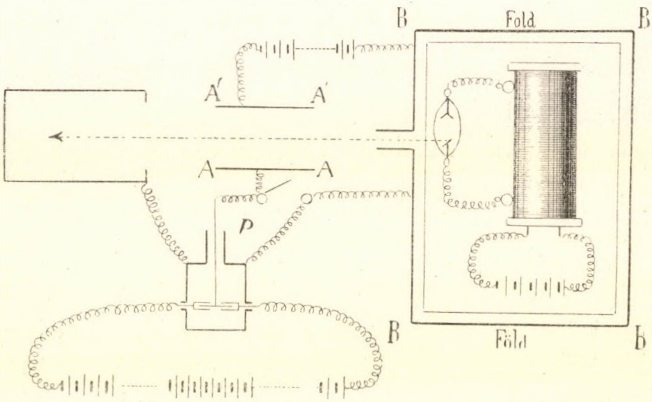
3

Az első esetben néhány sugár esik az *A*-ból kiinduló erőcsövek végein lévő töltésekre, és ekkor az *A* test kisül. A második és harmadik esetben az *A*-ból eredő erőcsövek egész vonulásukban sehol sincsenek kitéve a sugaraknak, és ekkor nincs is kisülés.

4. Ez a tapasztalat vezetett arra, hogy a következőkben leirandó

összes kisérleteimben vastag pléhlemezekkel fedjem be a fókuszt magában foglaló szekrény minden oldalát. Mindössze egy ponton van kifúrva a lemez, a hová sárgarézcső van bedugva. Így a sugarak ezen a csövön keresztül csak meghatározott irányban lépnek ki, és egy sem lép ki más irányban.

5. Ez az elrendezés lehetővé tette annak a felismerését, hogy az A test kisütésére még az sem szükséges, hogy a sugarak egy más A' testen fekvő, és A-ból kiinduló erőcsöveket záró töltésekre essenek rá, mint ez a 3. szakasz kisérleteiben történt. Teljesen



elegendő, hogy csak egy tetszőleges pontban találkozzanak a töltés erőcsöveivel.

Erről úgy győződtem meg, hogy sugárkévét bocsátottam át valamely sűrítőt alkotó két fémlemez, A és A' közt, melyek közül az egyik, A, kvadranselektrométer tűjével volt összekötve.

Az elektrométer háza a földdel, a B szekrénynyel és valamely elektromos telep középső pontjával közlekedett, a két kvadranspár pedig e telep két sarkával volt egybekötve; végre a házat és a tűt időközönként P zárlat kötötte össze. Az A lemez, mely e tűvel volt kapcsolatban, töltést kapott az A' hatására, és a P kapcsolat megszakítására a tűvel együtt a házéval egyenlő potencziálra tett szert.*

* Ezen elrendezést, melyet igen előnyösnek találtam, összes elektromos méréseimben alkalmaztam.

A sugarak az A és A' lemezt egyáltalában nem érintették. A sűrítőből való kilépésük után egy a B szekrénynyel összekötött FARADAY-féle henger belsejében végződtek. Így tehát teljesen ismert térben haladtak, és seholsem találkoztak elektromos töltéssel még a kiindulásuk és a végződésök pontjában sem, a melyek védő hengerek belsejében feküdtek.

És a sugarak mégis előidézték a kisülést az A és A' lemezek közt, és a potencziálokat mihamar kiegyenlítették. Az A és A' lemezek távolsága 2 cm és 10 cm között, potencziálkülömbségük meg 0 és 220 volt között változott.

Rövidség kedvéért *gáz hatás*-nak fogom nevezni az ily kisülést, a mely valamilyen gázban megy végbe, a mikor a sugarak az elektromos vezetőket közvetlenül nem találják.*

6. Ez a *gáz-hatás* a teljes kisülésig tart, a mit az itt következő módon egész szigorúan igazoltam.

Gondoljuk, hogy az A és A' lemezek külömböző fémek, a melyek a levegőben való érintkezés révén $A \mid A'$ látszólagos potencziálkülömbségre tesznek szert, a melyet ismertnek tételezünk fel. Kössük össze A'-t közvetlenűl az elektrométer házával (ld 194. l.). Tegyük fel végre, hogy fémhid lehetővé teszi az A és A' összekötését vagy elválasztását. Az elválasztásuk után a szemben fekvő lapoknak ellenkező elektromos töltésük van az érintkezésnél előálló potencziálkülömbség hatására.

---

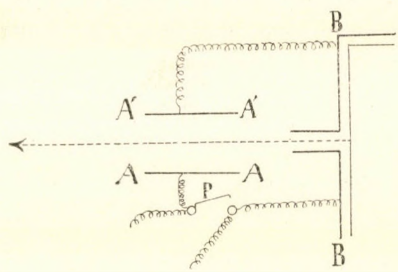
* Egész természetszerűleg felmerül az a kérdés, hogy idéz-e elő gáz-hatást az ibolyántúli fény is. Erre vonatkozólag tettem durva kisérletet, mely tagadó választ adott. BUISSON az École Normale laboratoriumában szintén negativ eredményre jutott, de ő szerintem igen nagy pontosságot ért el. Két egymástól 2,5 cm távolságban lévő sürítőt alkotó 7 cm széles és 9 cm. hosszú párhuzamos czinklemez között a lemezek érintése nélkül az összes erővonalaik metszésével 1 cm vastagságú sík ibolyántúli sugárnyaláb haladt el. A két lemez között létesített potencziálkülömbség 240 volt volt. A lemezek egyike az elektrométer tűjével közlekedett.

Egy percz tartama alatt a tű nem mozdult ki észrevehetőleg, noha a potenciálnak 1 volttal való változása a készülék skáláján 215 osztályrésznyi kitérést okozott volna.

Normális világításban az 500 osztályrészes egész skálának befutása kevesebb mint egy másodpercz alatt történt.

Ha már most a két lemez között sugárnyaláb halad el a nélkül, hogy őket érintené, kimutattam, hogy az *A* potencziálja egy az *A* | *A'* potencziálkülömbséggel pontosan egyenlő mennyiséggel változik, a mi a sürítőnek teljes kisülését bizonyítja. Így tehát a gáz-hatás olyan rendkívül gyenge terekben is nyilvánul, a melyek kétségkívül gyengébbek lehetnek 0,01 voltnál centiméterenként.

Ez a jelenség mellesleg új, igen biztos és könnyű módszert szolgáltat valamely gázban az ismeretlennek feltételezett, érintkezésből eredő látszólagos potencziálkülömbség mérésére. A potencziálok néhány másodpercz alatt kiegyenlítődnek, és úgy látszik, hogy csakis a használt elektrométer érzékenysége szab határt



a mérések pontosságának. Külömben igazoltam azt is, a mi a beállítást megkönnyíti, hogy ugyanazokat az adatokat kapjuk akkor is, ha a sugarak az *A* és *A'* lemezekre ráesnek; legalább így volt ez a kisérleteimben használt elektrométer pontossági foka mellett, a melyen 1 volt 50 mm kitérést okozott a skálán. Hadd álljon itt néhány adat a tiszta iridium és más, a kisérlet előtt gondosan megtisztított fémek közt jelentkező potencziálkülömbségekre, melyeket ezzel a módszerrel kaptam:

	volt
Platina	— 0,02
Palladium	+ 0,01
Vörösréz	+ 0,18
Czink	+ 1,06
Aluminium	+ 1,33

Az elsőrendű vezetőkből alakított lánczokra vonatkozó törvény is gondosan igazoltatott; így például meggyőződtem arról, hogy

$$Ir \mid Zn = Ir \mid Cu + Cu \mid Zn$$

egyenlőség egészen 0,015 voltnyi pontossággal fennáll.

Ilyen mérések a czink-réz párra 0,88 voltot, a platina-czink párra pedig 1,08 voltot adnak. A PELLAT-tól korábban végrehajtott mérések 0,86 voltot adtak az első és 1,02 voltot a második párra.*

7. *Az erőcsövek szerepe.* — J.-J. THOMSON föltevése, mely szerint minden gáz vezetővé válik, ha sugarak hatolnak át rajta, elégtelennek mutatkozik a gáz-hatás kimagyarázására. Valóban, ha a levegő csakis a sugarak mentén veszítené el szigetelő képességét, akkor csakis sürítés következnék be, nem pedig teljes kisülés azokban az esetekben is, a mikor a sugarak az elektromos testeket nem érintik.

De másrészről láttuk, hogy J.-J. THOMSON és RÖNTGEN megmutatták, hogy a megelőzőleg sugaraktól áthatolt levegőnek elektromos testekre való ráfuvása is kisülést idéz elő. Azt kérdezhetjük tehát, hogy a gáz-hatást nem tulajdoníthatjuk-e egyszerüen a megelőzőleg a sugarak útjába eső levegő tovavitelének, vagy diffúziójának.

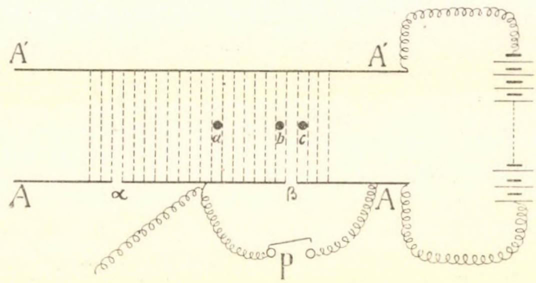
Tettem oly kisérletet, a mely kimutatja, hogy ez a magyarázat nem áll meg és egyuttal rávezet oly általános tételre, a mely megszabja a feltételeket, melyeknek a Röntgen-sugaraknak alá vetve kell lenniök, hogy a nyugalomban lévő gázba helyezett testek kisütését ezek érintése nélkül előidézzék.

Valamely négyszög alakú lap, $\alpha\beta$, a mely az $A\ A'$ sürítő egyik

* E vizsgálatok közzététele után értesültem csak arról, hogy RIGHI és MURRAY már kimondták, hogy a Röntgen-sugarakat fel lehetne használni az érintkezésből eredő látszólagos potencziálkülömbségek mérésére. Azt nem tudom, hogy jelezték-e egyuttal a mérések könnyű kivitelét is. De, a mi sokkal fontosabb abból a szempontból, a mivel én jelenleg foglalkozom, ő nekik nem csupán a *gáz-hatás*-sal volt dolguk, a mi tehát nem magában állólag lépett fel, hanem egyuttal a *fém-hatás*-sal, a miről később lesz szó. A gáz-hatásra vonatkozó mérések tehát szükségesek maradtak.

fegyverzetéből van kivágva, az elektrométer tűjével áll összeköttetésben. A kisérlet elején össze van még kötve az A fegyverzet megmaradt részével, a mely eszerint a védőgyűrű szerepét játsza. Végre A és A' akkumulátorteleppel is vannak összekötve, a mely közöttük állandó potencziálkülömbséget tart fenn. Most megszüntetjük a kapcsolatot A és $\alpha\,\beta$ közt és áteresztjük a sugarakat, a melyek nem érik az egymástól 5 cm távolságban levő fegyverzetek egyikét sem.

A kisülés igen gyors, ha az ábra síkjára merőlegeseknek feltételezett sugarak a-nál haladnak; ép ilyen gyors, ha b-nél haladnak; de a kisülés semmi, ha c-nél haladnak.*



Már pedig a $b\,c$ távolság körülbelül ugyanakkora, mint a sugárnyaláb szélessége, vagyis 0,5 cm. Tehát mindaz, a mi a gáz tovavitelétől és diffúziójától függ, nem változhatik meg észrevehetően, ha a nyaláb b helyett c-nél halad.**

Ámde az $\alpha\,\beta$ lemeztől kiinduló erővonalakat a és b helyzetben metszették a sugarak, de nem metszették a c helyzetben.

8. Így tehát arra a tapasztalatra jutottam, hogy *egy a Röntgen-*

---

* Ugyanezen gondolattól vezettetve az $\alpha\,\beta$ lemezt helyettesítettem ugyanoly nagyságú fémszövettel; ebben az esetben a kisülés igen rohamos, ha a sugarak a szövet fölött haladnak és zérussá válik, ha alatta haladnak; már pedig a fémszövet mégsem akadályozhatná meg teljesen a diffúziót.

** Nem fogadhatjuk el VILLARI ama feltevését, hogy a sugarak megkerülhetik az akadályokat; kisérletünk ellenkezőleg új módszert nyujthatna az egyenesvonalú terjedés igazolására.

sugaraktól metszett erőcső vezetőként viselkedik, feltéve, hogy gázban foglaltatik, továbbá, hogy az erőcső közvetlen szomszédságában lévő, de vele mégsem érintkező gáz szigetelő tulajdonságait megtartja.

E szerint a gázban lévő elektromos test kisül, ha a tőle kiinduló erőcsövek valamelyike találkozik a sugarakkal.

Kiemelem azt a körülményt, hogy itt *nyugalomban lévő* gázról van szó.

9. Az erőcsövek csakis a gázokban játszák ezt a szerepet, a mi a gáz-hatás elnevezést igazolja.

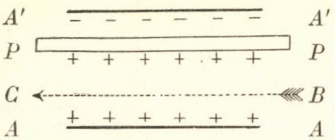
Ez RIGHInek és RÖNTGENnek már említett kisérleteiből levezethető, a melyek voltaképen abban állanak, hogy a töltött vezetőtől kiinduló erővonalak összeségét egész pályájukban tényleg szilárd vagy folyós dielektrikumba sülyesztik. A mi a szilárd paraffint illeti, magam is rájöttem az ő következtetéseikre.

Ha azonban az erőcső nem foglaltatik az egész hosszúságával valami szilárd vagy folyós szigetelőben, a gázban lévő részeit külön vezetőkké tehetik a sugarak, és így sűrítő hatások állnak elő, a mi részleges kisülés látszatával bír.

10. *A Röntgen-sugarak okozta töltések.* — Azok a felületek, melyek nem légnemű dielektrikumon vannak, ellenkező elektromos töltéseket kapnak, ha a sugarak az erőcsövek egy darabjával találkoznak és e töltések épen elegendők arra, hogy az elektromos teret e darab belsejében lerontsák. Így sikerült a Röntgen-sugarak segítségével *töltést adni* oly szigetelő testeknek, a melyeket sugarak nem értek.* Valamely lemezes sűrítő (alábbi ábra) A és A' fegyverzetei közé, velük párhuzamosan helyeztem el a P paraffinlemezt, ezután néhány másodperczig a BC-vel ábrázolt sugárnyalábot bocsátottam át, a mely sem a fegyverzeteket, sem a paraffint nem érte; végre ezt a paraffinlemezt FARADAY-féle hengerbe helyeztem, a mely azonnal erős töltést árult el. Például az ábrában feltüntetett esetben e töltés pozitiv volt; ha ezután A

* RIGHI szintén megtöltött szigetelő testeket Röntgen-sugarakkal, a melyek azonban *ráestek* a testekre.

és A' között az elektromos tér irányát megváltoztatván, újra kezdtem a kisérletet, azt tapasztaltam, hogy az előbbi kisérletből pozitiv töltésű paraffin kisült és aztán negativ töltést kapott.



Ugyanezek a kisérletek akkor is sikerültek, ha a paraffint szigetelő állványba fogott fémlemezzel helyettesítettem.*

Ugyanezen eszmemenetet követve, a sugárnyalábot a sürítő két fegyverzete közé helyezett kivájt kénhenger tengelye mentén bocsátottam át; ez esetben tehát a falak átlátszatlanok voltak a sugarakra nézve. Ekkor sürítő hatást észleltem, elég gyengét ugyan, de nem teljes kisülést.

11. *A gáz-hatás elmélete.* — A fentiekben előadott tények kifejezhetők oly módon, a mely különleges feltevés nélkül is igen egyszerű és világos szólásmódot enged meg.

Azt fogjuk mondani, hogy valamely gáznak Röntgen-sugaraktól talált összes pontjaiban egyenlő mennyiségű pozitiv és negativ elektromosság áll elő, vagyis még rövidebb kifejezéssel élve, hogy a sugarak *ionizálják* a gázat.** Ha már most elektromos térben ily módon töltések jönnek létre, a pozitiv töltések a tér irányában, a negativ töltések pedig az ellenkező irányban haladnak.

A töltéseknek e két rendszere tehát befutja azokat az erőcsöveket, a melyekben kezdettől fogva foglaltattak és ez tart vagy addig, a míg a töltések vezetőkre találnak, a hol a csövek végződnek és e vezetők *kisülését* idézik elő, vagy pedig addig, a míg valami szilárd vagy folyós szigetelő felület mechanikusan fel nem tartóztatja őket, a mely így *töltést* kap. Így az elektromos testekre való hatás nem úgy jelentkezik, mint maguknak a Röntgen-sugaraknak

* Ez az eset mégis kissé más abban a tekintetben, hogy most a tér hatására a fémen *szabad* elektromosság fejlődik, a melyet aztán megsemmisít a sugarak hatása, úgy hogy itt inkább kisülésről lehet szó, mint töltésről.

** Az *ionizáczió* szó nem hoz be semmi molekuláris feltevést; csakis azt szabad kifejeznie, hogy az ellenkező elektromosságoknak az anyag minőségéhez kötött szétválása következik be.

sajátlagos tulajdonsága, hanem mint szükséges következménye annak a megváltozásnak, a melyet e sugarak az áthatolt gázban idéznek elő.

Semmi sem bizonyítja azt, hogy a sugarak csakis a gázakat ionizálják, más testeket pedig nem. De a mi a gázakat egész biztosan jellemzi, *az egyszer már előidézett töltéseknek az elektromos tér hatására bekövetkező mozgékonyságában áll.* Ez a mozgékonyság okozza mindazokat az eltéréseket, a melyek a sugaraktól áthatott gázakat a közönséges elektrolitektől megkülönböztetik.

Ismétlem ujólag, hogy ez a szólásmód semmi feltevést sem foglal magában. A gázakban előidézett töltések valósággal léteznek; és létezésök nem csupán az erőcsövek végein nyilvánul, hanem útjok bármely pontjában is. Igy történhetett, hogy a töltéseket útjokban felfoghattam, a mint ezt az előző szakaszban láttuk. Igy vált lehetségessé az is, hogy későbbi vizsgálatokban RUTHERFORD az útjokban felfogott töltéseket Faraday-féle hengerbe belefújtatta, a hol a megszokott jelenségekkel adnak jelt létezésökről.*

12. Ez az ionizálás megmarad még egy ideig a sugarak átmenetele után is: emlékezzünk vissza arra, hogy valamely test kisülését valóban úgy is lehet előidézni, ha a sugaraktól megelőzőleg áthatott levegőt fújunk rá. Ha azonban igen sokáig, a fenforgó esetben több mint egy másodperczig várakozunk, úgy eltűnik ez a tulajdonság, a mit úgy fejezhetünk ki, hogy az előbb előidézett töltések ujra kiegyenlítődtek.

Egyuttal azt is látjuk, hogy az ionizáczió elektromos téren kívül is létesülhet. A következőkben előadandó két mérő kisérlettel igazoltam azt, hogy ez az ionizáczió nem nagyobb, ha elektromos térben létesíttetik és hogy ugy a tér erősségétől, mint irányától teljesen független.

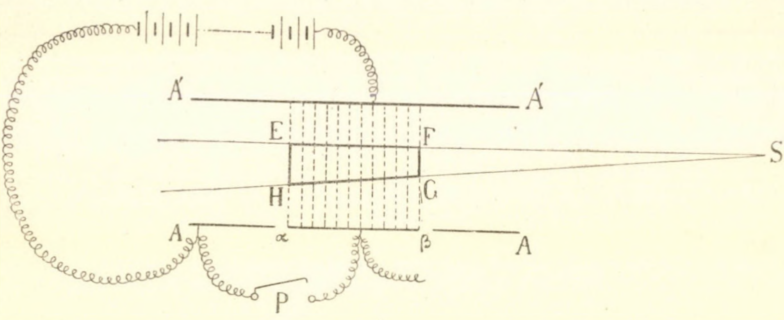
13. *Az ionizálás mérése.* Fogadjuk el egyelőre azt a feltevést,

---

* RUTHERFORDnak ezen kisérlete más tekintetben is érdekes; ha ugyanis számba veszszük a levegőáram sebességét, úgy megbecsülhetjük adott elektromos térben az iónok sebességét. RUTHERFORD így azt találta, hogy a pozitiv és negativ iónok körülbelül ugyanazzal a sebességgel haladtak, még pedig másodperczenként 1 centimeterrel centimeterenkénti 1 voltnyi térben.

hogy az ionizáczió nem függ az elektromos tértől, és vizsgáljuk egy gáznak *EFGH* térfogatát, a melyen úgy az elektrométer tűjével összekötött $\alpha\beta$ lemeztől kiinduló erővonalak, mint az *ESH* sugárkúp áthatolnak.

Az *EFGH* térfogatban keletkezett töltések az elektromos tér hatására részint $\alpha\beta$, részint A' felé indulnak útnak. Ha a tér gyenge, úgy a tökéletes szétválás bekövetkezése előtt a töltések egy része újra egyesülhet. Tehát az $\alpha\beta$ lemezhez másodperczenként érkező elektromosság mennyisége kisebb lesz, mint az *EFGH* térfogatban keletkezett mennyiség. Ha ellenben a tér sokkal erősebb, úgy az összes töltések sokkal nagyobb sebességgel rendelkezvén, az ismét-egyesülést így elkerülve, egész teljességökben kiszabadulhat-

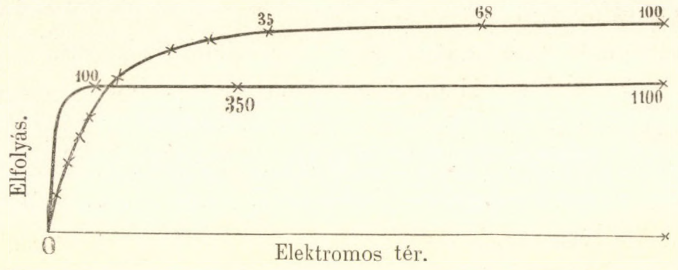


nak; ha továbbá — és ez most feltevés — az ionizálás nem növekszik, akkor az elektrométertől jelzett elfolyás vagy kiáramlás határértéket fog felvenni.

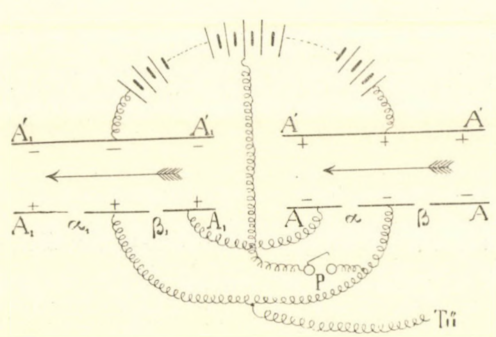
És valóban sikerült is ezt igazolnom; az A, A' fegyverzetek távolsága 1 cm-től 10 cm-ig, és a köztük lévő potencziálkülömbség 2 volttól 220 voltig változott. Az elektromos tér tehát 1 : 1100 viszonyban változott. Az elektromos tér értékét abscissának és a megfelelő elfolyást ordinátának felrakván, oly görbét kaptam, a mely világosan mutatja, hogy az elfolyás gyorsan elér meghatározott határértéket.*

* Vizsgálataim közzététele óta vett értesülésem szerint J.-J. Thomson szintén tapasztalta, hogy a kisülés sebessége a töltött testek potencziáljától függet-

Ugyanerre az eredményre jutottam még egyik zérusmethódus alkalmazásával is, a mely kiküszöböli a sugárforrás változásainak



behatását. Ugyanazon az egy elektrométeren (alábbi ábra) szembeállítottam két azonos sűrítő, AA' és A_1A_1' hatását, a melyeken egyidejűleg ugyanaz a sugárkúp halad át, de a tűvel összekötött $\alpha\beta$ és $\alpha_1\beta_1$ lemezeknek ellenkező töltésük van. A berendezés azt hozza magával, hogy a tű nem térül ki, ha a kiáramlás összege zérus. Így



megállapítottam azt, hogy az első sűrítőben a kiáramlás nem változott $\frac{1}{200}$-részével, mialatt elektromos tere 350-ről 1100-re, vagyis centiméterenkint 220 volttal emelkedett.

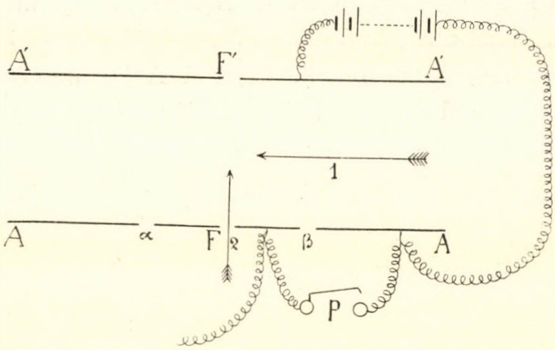
lenül határértéket ér el. De épp úgy, mint ez az elektromotoros erők mérésénél történt, itt is még a fémhatást magában foglaló bonyolódottabb kisüléssel volt dolga és ezért tartottam szükségeseknek kizárólag a gáz-hatásra vonatkozó méréseimet.

Az elfolyás eme határértéke méri az $EFGH$ térfogatban ionizált elektromosság mennyiségét.

14. Tegyük most fel, hogy a sugaraktól és az erővonalaktól bezárt szög változik; bár előre is valószínű, hogy ez az ionizálást nem változtatja meg, mindamellett jó ezt közvetlenül is igazolni.

Nem terjeszkedvén ki annak az elrendezésnek leirására, a melylyel a sugarak és az elektromos tér közti szöget 90°-ról 45°-ká tehettem, csupán azt a kisérletet irom le, a melyben arról az esetről, midőn a sugarak merőlegesek a térre, áttérhettem arra, midőn a sugarak a térrel párhuzamosak.

AA' ábránkon védőgyűrüs sűrítő, melynek $\alpha\beta$ lemeze, mint az előbbiekben is, az elektrométer tűjével közlekedik. F és F'-ben



két szűk nyilás van, a melyeken sugárkéve a szélek érintése nélkül keresztülhaladhat.

A sűrítő egy az ábra síkjára merőleges czentrális tengely körül forgatható, úgy hogy ugyanaz a sugár úgy az 1. mint a 2. irányban áthatolhat rajta. Végre az $\alpha\beta$ lemez hosszasága tökéletesen egyenlő a fegyverzetek közti távolsággal, kisérletemben 5 cm-rel. Így aztán a sugarak és az $\alpha\beta$ lemeztől kiinduló erővonalak közös térfogata a sűrítő két helyzetében ugyanaz.*

* Az F és F' nyilások nem zavarják meg észrevehetőleg az erővonalak eloszlását F és F' közt, csakis a közvetlen szomszédságukban. De ennek a helyi megzavarásnak sincsen jelentősége, mivel bizonyos intenzitáson túl a kiáramlás független a térintenzitás értékétől.

Ha tehát ugyanabban a térfogatban a gáz-hatás független az erővonalak és a sugarak közötti szögtől, úgy a fenti két esetben ugyanazt a kiáramlást kell észlelni. Ez tényleg úgy is volt, legalább akkor, midőn a fegyverzetek közti potencziálkülömbség elég nagy arra, hogy a kiáramlás mindkét helyzetben elérje a határértéket.

15. *Az egy pontban való ionizálás.* Most már minden nehézség nélkül belátható, hogy miképen értelmezhetjük és mérhetjük a határkiáramlás fogalmával az adott idő alatt, adott forrás hatására valamely tetszőleges alakú térfogatban diszocziált semleges elektromosság mennyiségét. Ez a mennyiség méri a térfogat belsejében bekövetkező *ionizácziót,* melyet ezentúl I-vel jelölünk.

Az A pontot magában foglaló végtelen kicsiny dv térfogatban ily módon előidézett ionizálás legyen dI; ekkor a $\frac{dI}{dv}$ hányados adja *az A pontbeli ionizálást.*

16. *A nyomás és a hőmérséklet befolyása.* A megelőző kisérletek közönséges légköri nyomás és hőmérséklet mellett történtek. A levegőre vonatkozólag megvizsgáltam azt, hogy miképen változik az ionizálás ezeknek a körülményeknek változásával.

Újra a lemezes sűrítő fegyverzetei közt bocsátottam át a sugárnyalábot, még pedig most is úgy, hogy a nyaláb a fegyverzeteket ne érje. A sűrítőt oly burkolat vette körül, a melyben a nyomást változtatni lehetett. Természetesen minden nyomásnál oly nagy potencziálkülömbséget létesítettem a fegyverzetek közt, hogy a határkiáramlás el legyen érve. Az elektrométer úgy volt beiktatva, mint a 192. lapon leírtuk.

Megállapítottam, hogy ha a hőmérséklet állandó marad és a nyomás 0,1 atmoszférától 1,5 atmoszféráig változik, *az ionizálás arányos a nyomással.**

Ugyanezt a készüléket használtam állandó nyomás mellett a hőmérsékleti változások hatásának tanulmányozására is. E végből mindössze csak fürdőbe kellett állítanom a sűrítőt rejtő fémszekrényt.

---

* Ezt a törvényt $^1/_{30}$-ra terjedő pontossággal igazoltam 12 cm és 76 cm-nyi higanyoszloppal mért nyomások közt, $^1/_{15}$-nyire pedig e határokon kívül.

Mindenekelőtt durva közelitéssel megállapitottam, hogy a hőmérsékleti változásnak a kiáramlásra csak kis hatása van. Ezután a fentebb leirt zérus-methodust alkalmaztam; az első sűrítő mellé állandó hőmérsékletű burokba zárt második lemezes sűrítőt helyeztem el, a melybe a sugarak az elsőből való kilépésük után hatolnak be. A két sűrítő ellenkezőleg hatott ugyanarra az elektrométerre, mert a tűvel összekötött sűrítő lemezek egyikéből pozitiv, a másikából negativ elektromosság áramlott. Az egyensúlyt helyreállítottam egy bizonyos hőmérsékletre, ezután az első sűrítő hőmérsékletét változtattam — 12°-tól egészen + 145°-ig, vagyis abszolút hőfokokban kifejezve 261°-tól egészen 418°-ig. Az egyensúly még sem bomlott meg észrevehető módon.* E szerint a melegitett sűritőben az ionizálás észrevehetően ugyanaz maradt.

Vagyis összefoglalva az eredményeket, a sugárzás egy bizonyos nemére nézve valamilyen *gáz adott pontjában az ionizálás arányos a nyomással*** *és független a hőmérséklettől.*

Meggondolva azt, hogy a gáz sűrűsége arányos a nyomással, és forditva arányos az abszolut hőfokkal, ez a törvény a következőkép is fejezhető ki:

Ugyanabban a pontban a tömegegységre eső ionizálás független a nyomástól és arányos az abszolut hőmérséklettel.

17. *A forrás távolságának befolyása.* Most állandónak hagyva a hőmérsékletet és a nyomást, a 200. lapon látható sugárkúp *ESH* testszögének egymásután oly értékeket adtam, melyek 1 : 2 : 3 : 4 arányában növekedtek. Ekkor aztán az *EFGH* térfogatban előidézett ionizálások aránya is 1 : 2 : 3 : 4 volt.

Épen így az $\alpha\beta$ lemez hosszúságát 3, 6, 9 cm-nek vettem, és a kapott ionizálások aránya szintén 1 : 2 : 3. A 12-ik szakasz végén

---

* Valóságban az igen magas hőmérsékleteknél a hevített sűrítő kevésbbé hatásosnak látszott, a különbség $\frac{1}{12}$-re is rúgott. De a velejáró nehézségek miatt nem merném helyesnek állítani ezt az eredményt.

** Benoist és Hurmuzescu azt találták, hogy a kisülési sebesség a nyomás négyzetgyökével arányos. Ámde az ő készülékükénél a sugarak ráestek a töltött felületekre és igy nekik sokkal bonyolódottabb jelenséggel volt dolguk, a melyet mi csak később tárgyalunk.

leírt zérusmethódus itt is nagyobb pontosságot nyújt; ezzel kimutattam, hogy az AA' és A_1A_1' sűrítők egymástól való távolságát jelentékenyen lehet változtatni, anélkül, hogy az $EFGH$ és $E_1F_1G_1H_1$ térfogatokra vonatkozó ionizálások egyenlősége megszűnnék.

Más szóval, a forráshoz mint középponthoz tartozó gömbhéjban a dI ionizálás, arányos e gömbhéj dw kúpszögével, arányos a dl vastagságával és független az r gömbsugártól.

E gömbhéj egy pontjában, meghatározásunk értelmében, az ionizálás számértéke $\frac{dI}{dw\,dl}\,\frac{1}{r^2}$; tehát *fordított arányban változik a pontnak a forrástól mért távolságának négyzetével.*

Ez a törvény csakis akkor lenne teljesen szigorú, ha sugár-elnyelés nem léteznék. Tényleg még a levegőben is kissé gyorsan csökken az ionizálás. Így például a helyett, hogy a forrástól 50 cm-nyire az ionizálás negyedrésze legyen annak, a mely 25 cm távolságban lép fel, azt találtam, hogy csupán 0,96-része ennek a negyednek (mindenesetre inkább több, mint kevesebb).

18. *A Röntgen-sugarak fotométriája.* Az ionizálásnak tehát hasonló szerepe van, mint a megvilágításnak a fotométriában; és így megérthetjük, hogy meghatározható, ha nem is a Röntgen-sugarak forrásának az intenzitása, mert hiszen e források ép oly szakadozók, mint az őket létesítő kisülések, de legalább *a Röntgen-sugarak mennyisége.*

A sugarak mennyiségének egysége lehet például az a mennyiség, a mely a levegőben 76 cm nyomás mellett egy a forráshoz, mint középponthoz tartozó 1 cm vastag gömbhéjban az egységgel egyenlő ionizálást létesít,* vagyis olyan ionizálást, a mely megfelel a positiv elektromosság elektrostatikus *C G S* egysége felszabadításának. Ez az egység elég czélszerű, a mennyiben egy fókuszcső a használt induktor egy megszakításra közönséges körülmé-

* Ha a Röntgen-sugarak heterogének, és ha az ionizálás kiválasztó (selectiv), úgy ez a meghatározás ugyanazokkal a bajokkal jár, a melyek a fénymennyiség fotometrikus meghatározásánál fellépnek.

nyek közt könnyen kibocsátja a testszög egységében ezt a mennyiséget.

19. *Más gázok, mint a levegő. Ionizálási együtthatók.* A megelőző mérések mind levegőben történtek. Legyen Q a fent adott meghatározás szerint a Röntgen-sugarak mennyisége, a melyet egy forrás a w testszögben egyenletesen sugároz ki; és legyen H a levegő nyomása; ekkor a forrástól r távolságban lévő dv térfogatelem ionizálása az elnyelés elhanyagolásával

$$\frac{Q}{w}\frac{H}{76}\frac{dv}{r^2}.$$

Ha most feltételezzük azt, a mit külömben ki kell mutatni, hogy más gázaknál is ugyanazok a törvények érvényesek, mint a levegőnél, akkor ugyanazon térfogatelem ionizálása más gázban

$$G\frac{Q}{w}\frac{H}{76}\frac{dv}{r^2}.$$

Javaslom, hogy a G együtthatót, a mely mindenik gázra vonatkozólag *a gáz-hatást* jellemzi, nevezzük el *ionizálási együtthatónak.*

Mérése igen könnyű; ugyanazon sűrítőt belesülyesztjük egymásután levegőbe és ugyanoly nyomású más gázba és áteresztjük a fegyverzetei közt ugyanazt a sugárkúpot. A megfigyelt ionizálások viszonya G-t fogja adni.

Ebben az értelemben már meg is kezdtem néhány mérést; ime az első eredmények:

Gáz	H_2*	NH_3	levegő	CO_2	N_2O	SO_2	HCl
Ionizálási együttható	0,026	0,1(?)	1	1,34	1,3	6	8(?)

* J.-J. THOMSON és RUTHERFORD, majd RUTHERFORD egyedül (*Phil. Mag.* 1896 nov., 1897 apr.) igen szép tanulmányban vizsgálta azokat a sajátságokat, melyekre az előzőleg Röntgen-sugarak hatásának kitett gázak szert tesznek, ha különböző elektromos terekbe, például lemezes kondenzátor fegyverzetei közé befuvatnak.

Ez a *dynamikai* tanulmány, melyet megelőzött a tőlem előadott *statikai* tanulmány (*Éclairage électrique* 1896 jun., *C. R.* 1896 aug. és nov.), kétségtelenül különbözik is tőle.

20. *Az ion-hipotézis.* Mindeddig kerültem a molekulákra vonatkozó bármely feltevést. De ha nem is szükséges, mégis érdekes lehet az a feltevés, hogy a Röntgen-sugarak a gázakban való haladtukban egyes molekulákat széttörnek. Az így keletkezett és csupán már a szétválasztás miatt ellenkező elektromosságokkal töltött iónok lehetnek azok, a melyek az imént leírt módon mozognak a gázban.

Minthogy a gázak kinetikai elméletében a molekula belső energiája független a nyomástól és arányos az abszolut hőmérséklettel, a fenti törvényeket úgy is fejezhetnők ki, hogy minden gázra nézve a széttört molekulák száma arányos a sugaraktól talált molekulák számával, bármekkora legyen is a távolságuk, és átlagos energiájukkal arányos.

Végül az ionizálási együtthatók a molekulák chemiai állandóságáról adnának felvilágositást. Különben itt is, mint a kathódsugarak esetében, új feltevést állítunk fel, ha felveszszük, hogy úgy, mint a közönséges elektrolizisben, minden vegyértékgramm 100,000 coulombot szállit magával.

21. Befejezve a *gáz-hatásnak* ezen vizsgálatát, a mely hatás, mint láttuk, a megfigyelt kisüléseknél általában a főszerepet viszi, még felemlitem, hogy *minden kisérlet, a melynél elmulasztanók e hatás gondos figyelembevételét, gyanús.* Így magam is tapasztaltam, hogy még nagy óvatosság mellett is igen könnyű megfeledkezni erővonal-csomókról, a melyek a sugaraktól találva előidézik a gázhatást, és az eredményeket így tökéletesen meghamisitják.

Kvalitativ tekintetben, valamint az összehasonlitható eredményeket illetőleg a megegyezés tökéletes. De egy kvantitativ eltérést fel kell emlitenem; RUTHERFORD (*Phil. Mag.* 1897. 254. l.) a hidrogén fajlagos vezetőképességére 0,5 értéket ád, míg én ugyane gáz ionizálási együtthatójára 0,026 értéket kaptam. Én az igen összevágó méréseimet az ebben a szakaszban előadott *statikai* módszerrel végeztem. A hidrogén gondosan meg volt tisztitva.

KISÉRLETEK A NYITÁSI EXTRAÁRAM SZIKRÁIVAL.

KÁROLY IRÉN.

Egy 6 V feszültségű és 0·4 A erejű áramkörbe kis elektromágnest és a távírásnál használatos áramszaggatót kapcsoltam be; e jeladó állomástól 35 m-nyi távolságban pedig egy Dániell-féle elem áramkörébe érzékeny galvanométert, 1900 Ω ellenállást és koherert csatoltam; a galvanométer tűje a koherer kikapcsolásakor, 58°-ot mutatott. E berendezés mellett az áram nyitásakor a következőket észleltem:

1. Ha az elektromágnes egyik végéhez elszigetelt rézdrótot csatoltam és e drót másik végét a jelfelfogó állomás kohererjéhez erősítettem, a tű mindannyiszor 57°-ra tért ki, a hányszor a nyitási extraáramot létrehoztam; egyre ment, ha a drótot akár a levegőben, akár a padlózaton húztam ki, akár egyenes irányban, akár nem. Nem változott az eredmény akkor sem, ha a drótot egy vagy több pontban oldalvezetékekkel hoztam a földdel érintkezésbe. Slaby «Die Funkentelegrafie» cz. füzetében azt állítja, hogy a drótón haladó elektromos hullámokat a föld, ha a dróthoz közel van, a dróttól eltereli; kisérleteim ezt nem igazolják. Úgy látszik, hogy a föld e hullámok irányában úgy viselkedik, mint a fémvezető, természetesen abban az értelemben, a melyben Hertz a fémvezetőket idevonatkozólag értelmezte.

2. Elszigeteltel drótot használva, a kisérlet eredménye egy és ugyanaz; sőt nem változott az eredmény akkor sem, ha e drótot elszigetelt drót segélyével a kertbe vezettem és ott mintegy 200 m hosszúságban a földre fektettem akár egyenes, akár törtvonal alakjában, avagy minden határozott irány nélkül. Száraz és esős

idő az eredmény állandóságára nem volt befolyással. Megjegyzem, hogy kisérletemet 12-szer ismételtem, s az áram zárása-nyitása minden kisérletnél 10-szer történt. Az eredmény állandóan ugyanaz volt.

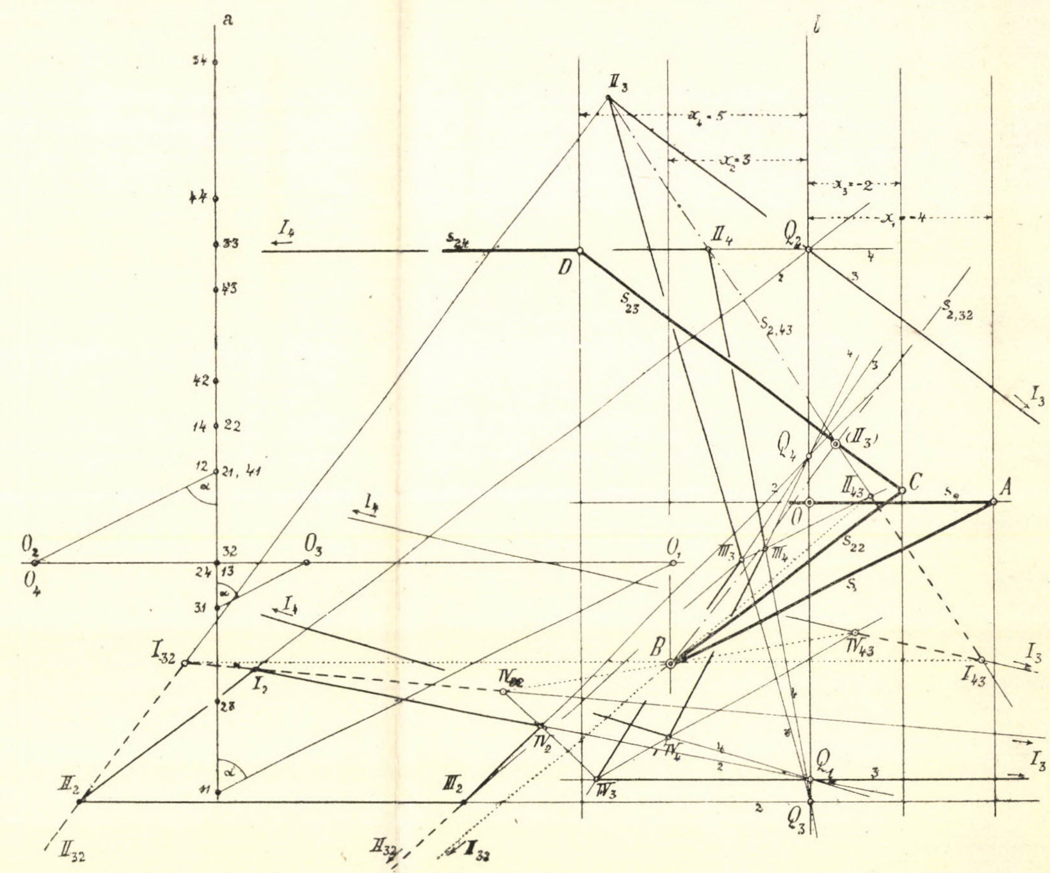
3. Ha az elektromágnest és a koherert összekötő drótot a közepén ketté vágtam, és úgy a jeladó, mint a felfogó állomáson e drótokat a földbe vezettem, a tű ujra kitért; de csak 58°-ra. Ha a drót hosszán és helyzetén nem változtattam, és a földdel nem hoztam érintkezésbe, a tű már meg sem mozdult. Vagy, ha a drótot egészen eltávolítottam, úgy, hogy a két állomást csak a levegő kötötte össze, a tű ekkor sem tért ki.

4. Ha a két állomást összekötő és a közepén kettévágott drót végei közé bármekkora nagyságú fémellenállást kapcsoltam is — 1.000,000 Ω-on felül — a tű mindig kitért 57°-ra az áramnyitásakor; sőt 3·5 m hosszú, 2 mm átmérőjű finom rézreszelékkel megtöltött üvegcső bekapcsolása sem változtatta meg az eddig talált eredményt; de már 5·5 m hosszúságú cső használásakor a tű nem tért ki.

5. Akkor is kitért a tű 57°-ra, ha az összekötő és a közepén kettévágott drót végei közé 15 mm átmérőjű vizvezetéki vízzel, vagy higított kénsavval, avagy rézgáliczoldattal megtöltött üvegcsövet kapcsoltam mindaddig, mig a cső hossza meg nem haladta a 3·5 métert; 5·5 m-nél a tű nem tért ki. Mivel feltűnt, hogy úgy a rézreszelékkel, mint a különböző folyadékokkal megtöltött üvegcső hossza egyenlő akkor is, ha a tű kitér, s megint majdnem egyforma akkor is, a mikor a tű ki nem tér: azért az összekötő és a közepén kettévágott drótot a levegőben feszítettem ki, később pedig a padlózaton húztam ki: ekkor tünt ki, hogy az áramnyitásakor a tű mindaddig 57°-ra tért ki, míg a kettévágott drót szabad végének az egymástól való távolsága nagyobb nem volt, mint 3·5 m. Ugyanezt észleltem akkor is, ha a drót végeit 6 ember lánczszerűen kapcsolta össze kezeivel mindaddig, míg a drót két végének egymástól való távolsága 3·5 m-nél nagyobb nem lett. Talán ezekben is kellene keresnünk az okát annak, hogy miért nem hoz változást létre a tű kitérésében akár a bekapcsolt fém

ellenállása, akár a folyadéké, ha a használt folyadékoszlop 3·5 m-nél nem hosszabb. Hertznek nem sikerült 10 mm átmérőjű rézgáliczczal töltött csövön az elektromos hullámokat keresztül vezetni, okát pedig e folyadékoszlop nagy ellenállásában keresi. Kár, hogy nincs megirva, mennyit tett ki a használt cső hosszúsága. Később hires művéhez írt egyik jegyzetében megemlíti (Untersuchung· über die Ausbreitung der Elektrischen Kraft, 1892. p. 121.), hogy J.-J. Thomson az elektrolytek ellenállásának a meghatározását épen az elektrolyteknek e hullámok átbocsátó képességére alapítja.

E kisérletek javarészét 1895-ben tettem; akkor a felfogó állomásnál a telepet a földáramok, a koherert pedig egy Schall-féle mikrofon pótolta; az eredmény azonban egy és ugyanaz. A mostani berendezéssel a kisérletet ismételtem, hogy újból meggyőződjem — a használt távolság mellett — arról, hogy a dróton átsikamló elektromos hullámokat a föld nem tereli el, még ha a drót a földdel érintkezik is. Az effajta hullámoknak a fémek felületén — a vasuti sineken — nagyobb távolságra való átsikamlásával most teszek kisérleteket.



Csillag V. Lineár egyenletrendszerek grafikai megoldása.

TÉTELEK AZ EGYÁGÚ HIPERBOLOIDRÓL.

1. *Ha a p egyenes polárisa valamely egyágú hiperboloidra vonatkozólag p_1, akkor a p egyenesen, valamint a p_1 egyenesen átmenő és a hiperboloidra vonatkozólag konjugált síkok a hiperboloid bármely alkotóját ugyanegy involucziós pontsorban metszik.*

Nevezzük a hiperboloid egyik alkotóját g-nek, a g, p, p_1 egyenesek egyik szelőjét x-nek, végre x-nek polárisát a hiperboloidra vonatkozólag x_1-nek.

A (gx), (px), (p_1x) pontok polársikjai $[gx_1]$, $[p_1x_1]$, $[px_1]$; ennélfogva a $[px]$, $[px_1]$; $[p_1x]$, $[p_1x_1]$ konjugált síkok a g egyenest ugyanazokban a pontokban (gx), (gx_1)-ben metszik, és így a tétel be van bizonyítva.

A tételben előforduló involucziós pontsor elliptikus vagy hiperbolikus, a szerint a mint a p és így a p_1 egyenes a hiperboloidot képzetes vagy valós pontokban metszi.

2. Az egyágú hiperboloid mindenik polártetraederének két pár szemben fekvő éle a hiperboloidot valós, a harmadik pár pedig képzetes pontokban metszi. Ennélfogva (1):

Valamely egyágú hiperboloid bármely alkotója a hiperboloid tetszőleges polártetraéderének négy lapját négy pontban metszi; ezek közül kétszer két pár egymást nem választja el és egyszer két pár egymást elválasztja; ez utóbbi pontpárak a polártetraédernek azokon a lappárjain feküsznek, a melyek a hiperboloidot képzetes pontokban metsző éleken mennek át.

3. *Valamely egyágú hiperboloid tetszőleges polártetraederének négy éle a hiperboloidot olyan nyolcz pontban metszi, a mely párosával a két rendszernek négy harmonikus alkotóján fekszenek.*

A polártetraédernek egyik lapja a hiperboloidot kúpszeletben metszi; e lapban fekvő két él a kúpszeletet négy harmonikus pontban, és így a hiperboloidot négy az egyik és másik rendszerhez tartozó harmonikus alkotóban g-ben illetve h-ban metszi. E g és h alkotók azonban a polártetraédernek az előbbi két éllel szemben fekvő éleit, mint ezeknek reciprok polárisait is metszik, mert velök egy-egy síkban a négy első metszőpont polársíkjában fekszenek.

4. *Valamely egyágú hiperboloid ama hét alkotója, mely egyik polártetraéderének szemben fekvő éleit, valamint a csúcsokat és az azokkal szemben fekvő lapokat, annak egyik alkotójától g_1-től harmonikusan elválasztja,* a polártetraéder lapjait négy-négy pontban metszi; e pontok projektivek azzal a négy ponttal, mely szerint a g_1 alkotó a polártetraedernek négy lapját metszi.*

A hiperboloid az $A_1A_2A_3A_4 \equiv a_1a_2a_3a_4$ polártetraédernek egyik lapját $a_4 \equiv A_1A_2A_3$-at egy $k^{(2)}$ kúpszeletben metszi; a g_1 alkotó pedig a $k^{(2)}$ kúpszeletet a K_1 pontban metszi. Ha az L_1, M_1, N_1 pontok az $A_1A_2A_3$ háromszög A_1, A_2, A_3 csúcsait és az ezekkel szemben fekvő oldalokat a K_1 ponttól harmonikusan elválasztják (1. ábra), akkor a $K_1L_1M_1N_1$ pontokon keresztül menő négy g_1 és négy h_1 alkotó, a tételben előforduló alkotók lesznek.

Ugyanis minthogy a K_1 ponton keresztül menő g_1 alkotó, a $K_1L_1M_1N_1$ ponton átmenő h_1 alkotókat a polártetraéder a_4, a_1, a_2, a_3 lapjaiban metszi a $g_1(a_4a_1a_2a_3)$ metszéspontokból alkotott négyes csoport projektiv a $K_1L_1M_1N_1$ pontokon keresztül menő négy h_1 alkotótól képezett négyes csoporttal a hiperboloidon és a $(K_1L_1M_1N_1)$ négyes csoporttal a $k^{(2)}$ kúpszeleten. Továbbá a négy g_1 alkotó a négy h_1 alkotót a polártetraéder lapjain metszi, ennélfogva mind a négy g_1 és négy h_1 alkotó a polártetraéder lapjait oly négy pontban metszi, melyek a $(K_1L_1M_1N_1)$ négyessel projektiv négyest képeznek.

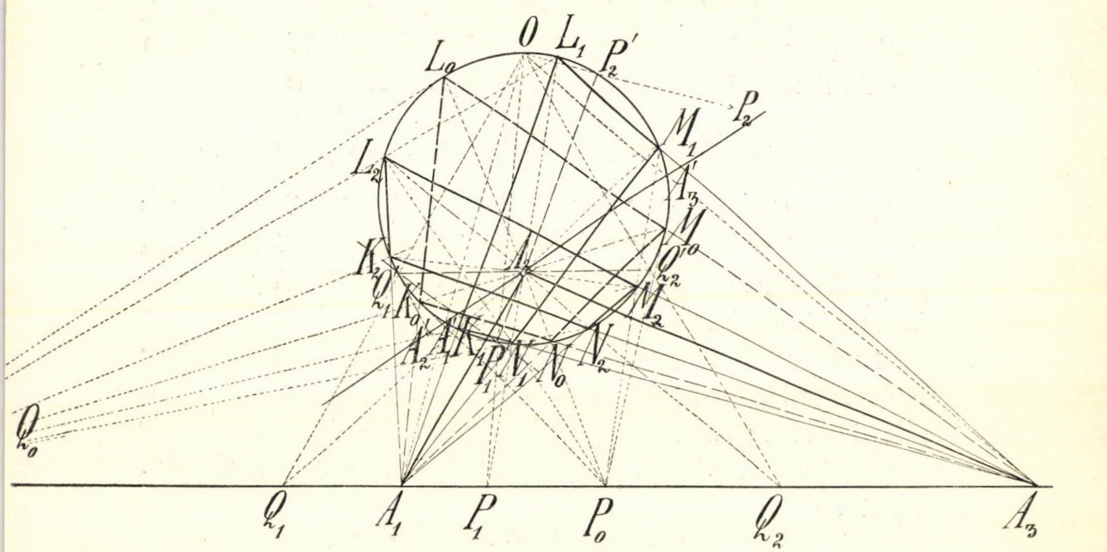
---

* Reye, Geometrie d. Lage, II. kötet 273. lap; továbbá: «Mathematikai és Physikai Lapok» IV. évf. 21. lap.

A $K_1L_1M_1N_1$ pontokon átmenő g_1 (valamint h_1) alkotókon megfelelőleg következő metszőpontok projektivek:

$$g_1(a_4a_1a_2a_3) \,\overline{\wedge}\, g_1(a_1a_4a_3a_2) \,\overline{\wedge}\, g_1(a_2a_3a_4a_1) \,\overline{\wedge}\, g_1(a_3a_2a_1a_4).$$

Ha a polártetraeder $A_1A_3 \equiv a_2a_4$, $A_2A_4 \equiv a_1a_3$ élei a hiperboloidot nem metszik valós pontokban, akkor a K_1M_1, L_1N_1 pontpárak egymást elválasztják a $k^{(2)}$ kúpszeleten, és így egyszersmind a g_1h_1 alkotóknak metszéspontjai a polártetraéder a_2a_4, a_1a_3 lapjaival.



Az A_2 ponton átmenő L_1N_1, K_1M_1 egyenesek az A_1A_3 egyenest a P_1, Q_1 pontokban metszik, mely az A_1, A_3 pontokat harmonikusan választja el, és mert ama egyeneseknek P_2, Q_2 pólusai P_1, Q_1-hez konjugáltak azért

$$A_2(A_1P_1A_3Q_1) \,\overline{\wedge}\, (A_3P_2A_1Q_2) \,\overline{\wedge}\, (A_1P_2A_3Q_2).$$

Az A_2P_2, A_2Q_2 egyenesek a $k^{(2)}$ kúpszeletet oly $K_2L_2M_2N_2$ négyszög K_2M_2, L_2N_2 csúcsaiban metszik, melynek átlós háromszöge szintén $A_1A_2A_3$, és mert

$$(A_1P_2A_3P_1) \,\overline{\wedge}\, (A_1Q_2A_3Q_1)$$

és így egyszersmind

$$L_1(A_1P_2A_3P_1) \barwedge L_2(A_1Q_2A_3Q_1),$$

azért

$$(K_1L_1M_1N_1) \barwedge L_1(A_1P_2A_3P_1) \barwedge L_2(A_1Q_2A_3Q_1) \wedge (K_2N_2M_2L_2).$$

Ebből pedig következik, hogy még a $K_2N_2M_2L_2$ pontokon átmenő g_2 és h_2 hiperboloid-alkotók a felvett polártetraédernek lapjait oly négy-négy pontban metszik, melyek a $(K_1L_1M_1N_1)$ négyes csoporttal projektiv négyest képeznek. Még pedig a $K_2L_2M_2N_2$ pontokon megfelelőleg keresztül menő g_2 (valamint h_2) alkotókon következő metszőpontok projektivek $(K_1L_1M_1N_1)$-gyel:

$$g_2(a_4a_3a_2a_1) \barwedge g_2(a_1a_2a_3a_4) \barwedge g_2(a_2a_1a_4a_3) \barwedge g_2(a_3a_4a_1a_2).$$

5. Ezekután *az egyágú hiperboloidon oly alkotókat akarunk szerkeszteni, melyeknek metszőpontjai egy megadott $A_1A_2A_3A_4$ polártetraéder a_i lapjaival, egy adott négyessel (ABCD)-vel projektiv négyest képeznek.*

E feladatnál meg kell jegyeznünk, hogy ha a polártetraéder $a_1a_3 \equiv A_2A_4$, $a_2a_4 \equiv A_1A_3$ élei a hiperboloidot képzetes pontokban metszik, akkor az $(ABCD)$ négyesben az AC elemeknek a BD elemeket el kell választani egymástól, hogy a keresett g_i alkotóra vonatkozólag

$$g_i(a_1a_2a_3a_4) \wedge (ABCD),$$

vagy

$$g_i(a_1a_4a_3a_2) \barwedge (ABCD)$$

legyen.

Az előbbiek szerint a feladat a következőre van visszavezetve: «abba a $k^{(2)}$ kúpszeletbe, a mely szerint az adott polártetraédernek $a_4 \equiv A_1A_2A_3$ lapja a hiperboloidot metszi, oly négyszögeket $K_1L_1M_1N_1$, $K_2L_2M_2N_2$-őt beírni, a melyeknek csúcsai az adott $(ABCD)$-vel projektiv négyest képeznek és a melyeknek azonkívül átlós háromszöge az $A_1A_2A_3$ háromszög».

Ez a feladat visszavezethető a következőre: «az adott polártetraéder A_1A_3 élén, mely a hiperboloidot képzetes pontban metszi, meghatározandók ama konjugált pontpárak P_1P_2, Q_1Q_2 a melyekre nézve

$$(A_1P_2A_3P_1) \barwedge (A_1Q_2A_3Q_1) \barwedge (ABCD)».$$

Ez utóbbi feladat pedig a $k^{(2)}$ kúpszelet felhasználásával STAUDT szerint * ily módon oldható meg:

Az A_1A_3 pontokat a $k^{(2)}$ kúpszeletnek tetszés szerinti 0 pontjából $k^{(2)}$-nek $A_1'A_3'$ pontjaiba projicziáljuk; az A_2 ponton átmenő $A_1'A_3'$ egyenesen az A_2' pontot akkép határozzuk meg, hogy

$$(A_1'A_2'A_3'A_2') \barwedge (ABCD).$$

Az A_2' pont polárisa $k^{(2)}$-őt a $P_1'Q_1'$ pontokban, az A_2P_1', A_2Q_1 egyenesek a $k^{(2)}$-őt újból a $P_2'Q_2'$ pontokban metszik; és a $P_1'Q_1'P_2'Q_2'$ pontoknak projekcziói 0-ból az A_1A_3 egyenesre a $P_1Q_1P_2Q_2$ pontok. Ha az A_2P_1, A_2Q_1, A_2P_2, A_2Q_2 egyenesek a $k^{(2)}$ kúpszeletet az L_1N_1, K_1M_1, K_2M_2, L_2N_2 pontokban metszik, akkor az $L_1N_1K_1M_1$ és a $K_2M_2L_2N_2$ pontokon átmenő g_1h_1, g_2h_2 hiperboloid alkotók már a keresettek.

Ugyanis:

$$(ABCD) \barwedge (A_1'A_2A_3'A_2') \barwedge (A_1'P_2'A_3'P_1') \barwedge (A_1P_2A_3P_1) \barwedge$$
$$\barwedge (K_1L_1M_1N_1) \barwedge g_1(a_1a_4a_3a_2)$$

és

$$(ABCD) \barwedge (A_1'A_2A_3'A_2') \barwedge (A_1'Q_2'A_3'Q_1') \barwedge (A_1Q_2A_3Q_1) \barwedge$$
$$\barwedge (K_2N_2M_2L_2) \barwedge g_2(a_1a_2a_3a_4).$$

6. Ha az $(ABCD)$ négyes-csoport harmonikus, akkor a P_1Q_2 és P_2Q_1 azokba a konjugált pontokba P_0, Q_0 kerülnek, a melyek az A_1, A_3 pontokat harmonikusan elválasztják; a két négyszög $K_1L_1M_1N_1$, $K_2L_2M_2N_2$ egy négyszöggé $K_0L_0M_0N_0$ egyesül, a melynek csúcsai a $k^{(2)}$-n harmonikusak; végre a négy g_1 és g_2, valamint a négy h_1 és h_2 alkotó e négyszög csúcsain vagyis az $A_2P_0Q_0A_4$ polártetraéder éleinek és a hiperboloidnak metszőpontjain keresztül menő g_0, h_0 alkotókba megy át. Ha az R_0S_0 pontok az A_2A_4 egyenesen konjugáltak és az A_2, A_4 pontokat harmonikusan el-

* Beiträge zur Geometrie der Lage, I. 52. lap.

választják, akkor a g_0h_0 alkotók az $A_1R_0S_0A_3$ polártetraédernek is metszik éleit.

Minthogy az $A_2P_0Q_0A_4$, $A_1R_0S_0A_3$ polártetraédereknek élei egyszersmind az $A_1A_2A_3A_4$, $P_0Q_0R_0S_0$ polártetraederek lapjainak metszésvonalai, és fordítva e tetraédereknek élei, amazok lapjainak metszésvonalai: a g_0, h_0 alkotók, melyek a két első tetraéder éleinek és a hiperboloidnak metszéspontjain átmennek nemcsak az $A_1A_2A_3A_4$, hanem egyszersmind a $P_0Q_0R_0S_0$ polártetraédernek lapjait is harmonikus pontokban metszik. Hasonlókép az a négy g és h alkotó, mely a két utóbbi tetraéder éleinek és a hiperboloidnak metszéspontjain megy keresztül a két első polártetraéder lapjait harmonikus pontokban metszi.

Ennélfogva:

Ha az A_1A_3, P_0Q_0 pontpárak egy egyenesen egymást harmonikusan elválasztják és egy hiperboloidra vonatkozólag konjugáltak, továbbá az A_2A_4, R_0S_0 pontpárak egymást amaz egyenes reciprok polárisán szintén harmonikusan elválasztják és konjugáltak a hiperboloidra vonatkozólag, akkor a hiperboloidnak négy harmonikus g_0 és négy harmonikus h_0 alkotói az $A_1A_3R_0S_0$, $A_2A_4P_0Q_0$ polártetraédernek éleit és az $A_1A_2A_3A_4$, $P_0Q_0R_0S_0$ polártetraédereknek lapjait ugyanabban a 16 pontban metszik, melyek négyesével ama alkotókon harmonikusan feküsznek.

7. *Egy hiperboloid négy-négy harmonikus alkotója, mely különböző rendszerhez tartozik, négy polártetraédert határoz meg; e közül kettőnek élei a hiperboloidot ama nyolcz alkotó 16 metszéspontjában metszik, és kettőnek lapjait ama nyolcz alkotó abban a 16 pontban metszi.*

A nyolcz alkotó metszéspontjait következőkép jelöljük:

$$\begin{matrix} B_1 & E_{34} & B_2 & E_{12} \\ E_{14} & C_2 & F_{23} & C_3 \\ B_4 & F_{12} & B_3 & F_{34} \\ E_{23} & C_1 & F_{14} & C_4, \end{matrix}$$

hol a sorokban és az oszlopokban levő pontok egy-egy alkotón feküsznek és akár a sorokban, akár az oszlopokban az 1-ső és 3-dik pont a 2-dik és 4-diket harmonikusan választja el.

A

$$B_1B_3,\ B_2B_4;\quad C_1C_3,\ C_2C_4$$
$$E_{12}F_{12},\ E_{34}F_{34};\quad E_{14}F_{14},\ E_{23}F_{23}$$

egyenespárak recziprok polárisok a hiperboloidra vonatkozólag, és az egyes sorokban levők egymást négy pontban metszik; mert pl. a $[B_1C_1B_3]$ sík a hiperboloidot egy kúpszeletben metszi, melyen a C_3 pont a B_1B_3 pontokat a C_1 ponttól harmonikusan választja el.

E polárisok metszéspontjai t. i.

$$E_{24}=(B_1B_3,\ C_1C_3),\quad E_{13}=(B_1B_3,\ C_2C_4),\quad F_{13}=(B_2B_4,\ C_1C_3),$$
$$F_{24}=(B_2B_4,\ C_2C_4)$$

$$A_1=(E_{12}F_{12},\ E_{14}F_{14}),\quad A_2=(E_{12}F_{12},\ E_{23}F_{23}),\quad A_3=(E_{34}F_{34},\ E_{23}F_{23}),$$
$$A_4=(E_{34}F_{34},\ E_{14}F_{14}),$$

azoknak az $E_{24}E_{13}F_{13}F_{24}$, $A_1A_2A_3A_4$ polártetraedereknek csúcsai, melyeknek élei a hiperboloidot a felvett alkotók metszéspontjaiban metszik.

Minden egyenes, mely a $B_1B_2B_3B_4$ tetraédernek egyik csúcsát a $C_1C_3C_3C_4$ tetraédernek egyik csúcsával összeköti, átmegy az $A_1A_2A_3A_4$ polártetraédernek egyik csúcsán; úgyszintén mindenik egyenesen, mely az $E_{12}E_{34}F_{12}F_{34}$, $E_{14}E_{23}F_{14}F_{23}$ tetraédereknek két csúcsát tartalmazza az $E_{13}E_{24}F_{13}F_{24}$ tetraédernek egyik csúcsa is rajta fekszik.

Úgyanis a felvett alkotók közül bármely két, különböző rendszerhez tartozón a metszéspontok, a harmonikus helyzet folytán, perspektivek. Ennélfogva a B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, B_4C_4 egyenesek közül két pár egymást az $E_{12}F_{12}$ egyenesen, és két pár az $E_{14}F_{14}$ egyenesen metszi, és mivel mind a négy egyenes nem fekszik ugyanegy síkban, azért valamennyi az $E_{12}F_{12}$, $E_{14}F_{14}$ egyeneseknek A_1 metszőpontján megy keresztül.

Ugyanígy kimutatható, hogy a

$$B_1C_i,\quad B_iC_1,\quad B_jC_k,\quad B_kC$$

egyenesek az A_i ponton mennek keresztül, az

$$E_{ik}E_{il},\quad E_{il}F_{ik},\quad E_{jk}F_{jl},\quad E_{jl}F_{jk}$$

egyenesek az E_{kl} ponton mennek keresztül, az

$$E_{ik}E_{il},\quad E_{jk}F_{jl},\quad F_{ik}F_{il},\quad F_{jk}F_{jl}$$

egyenesek az F_{kl} ponton mennek át.

Látjuk továbbá, hogy a $B_1B_3C_2C_4$ négyszög átlós háromszöge $E_{13}A_3A_4$, tehát a B_1B_3, C_2C_4 pontok az E_{13} pont és az A_2A_4 egyenestől harmonikusan vannak elválasztva. Minthogy azonban az $E_{13}E_{24}F_{13}F_{24}$ polártetraéder miatt a B_1B_3 pontok még az $E_{13}E_{24}$ pontoktól, és a C_2C_4 pontok még az $E_{13}F_{24}$ pontoktól is harmonikusan vannak elválasztva: az $E_{24}F_{24}$ pontok az A_2A_4 egyenesen feküsznek és ezeket a pontokat harmonikusan elválasztják. Ugyanígy következtethető, hogy az $E_{13}F_{13}$ pontok az A_1A_3 pontokat harmonikusan elválasztják.

E szerint az $E_{ij}F_{ij}$ hat pontpár az $A_1A_2A_3A_4$ polártetraédernek hat élén fekszik és harmonikusan választja el a csúcspontokat, valamint az $A_1A_2A_3A_4B_1B_2\ldots C_4$ pontok párosával az $E_{13}E_{24}F_{13}F_{24}$ polártetraédernek élein a csúcspontokat harmonikusan választják el.

8. Ezek után könnyen kimutatható, hogy az

$$A\equiv A_1A_2A_3A_4,\quad B\equiv B_1B_2B_3B_4,\quad C\equiv C_1C_2C_3C_4$$

tetraéderek közül bármely kettő, és a

$$T_2\equiv E_{12}F_{12}E_{34}F_{34},\quad T_3\equiv E_{13}F_{13}E_{24}F_{24},\quad T_4\equiv E_{14}F_{14}E_{23}F_{23}$$

tetraéderek közül bármely kettő, négyféleképp involucziósan perspektiv helyzetű; a harmadik tetraédernek csúcspontjai és az azokkal szemben fekvő lapjai képezik az involuczió-középpontot és síkot.

Ugyanis ha az A, B, C tetraéderek egyikének valamelyik csúcsát egy pillanatra O-val jelöljük, és e pontot egy másik tetraéder mind a négy csúcsával összekötjük, akkor ezek az összekötő egyenesek a harmadik tetraédernek csúcsain mennek át. Ennélfogva e két utóbbi tetraéder az elsőnek O csúcsára vonatkozólag perspektiv. Továbbá a második tetraédernek egy tetszés szerinti éle a harmadik tetraédernek véle homolog élét az E_{ij} vagy F_{ij} pontban metszi, mely az első tetraédernek az O csúcscsal szemben fekvő lapján fekszik; és ezen éleken fekvő de nem homolog pontok összekötő egyenesei, ugyancsak e lapnak egyik csúcsán mennek keresztül. Ezzel állításunk az A, B, C tetraéderekre be van bizonyítva, és ugyanez áll a $T_2 T_3 T_4$ tetraéderekre nézve is.

Három ily tetraéder, mint az A, B, C vagy a T_2, T_3, T_4, melynek az a kölcsönös helyzete van, hogy közülök bármely kettő a harmadiknak csúcsaira és lapjaira vonatkozólag perspektiv, STEPHANOS * szerint *desmikus tetraéder rendszert* alkot. Két desmikus tetraéder rendszert, mely közül az egyik rendszert tetraedereinek csúcspontjai, a másik rendszer éleinek metszőpontjai, és fordítva, (mint a tárgyalt alakzatban az ABC és $T_2 T_3 T_4$ tetraéderek), STEPHANOS *konjugált* rendszereknek nevez.

Ezek után az előbbi vizsgálódásunk eredményeit következő tételbe foglalhatjuk össze.

Ha az egyágú hiperboloid mindkét alkotó rendszerében négy harmonikus alkotót veszünk fel, akkor ezek egymást 16 pontban metszik. Két pár harmonikusan egymáshoz rendelt alkotónak négy metszéspontja, és a másik két pár szintén harmonikusan egymáshoz rendelt alkotónak négy metszéspontja, két tetraédernek csúcsa; ez a két tetraéder a hiperboloidnak azzal a polártetraéderével alkot desmikus tetraéder-rendszert, melynek élei a hiperboloidot a felvett alkotóknak hátralevő nyolcz metszéspontjában metszik. E nyolcz metszéspont, melyben szintén kétszer két pár harmonikusan egymáshoz rendelt alkotó jut metszéshez, két új tetraédernek csúcspontja; ezek ismét desmikus rendszert alkotnak a hiperboloidnak azzal a polártetraéderével, melynek élei a hiperboloidot az első nyolcz pontban metszik. A két desmikus tetraéder rendszer pedig konjugált egymáshoz.

* «Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres», Bulletin des Sciences Mathématiques. 1879.

9. Desmikus tetraéder-rendszert a hiperboloidtól függetlenül is szerkeszthetünk. STEPHANOS szerint egy ily rendszer meg van határozva, ha ismeretes a rendszer egyik tetraédere, és azonkívül a rendszerhez tartozó második tetraédernek egyik, amannak lapjain kívül fekvő csúcsa.

Így, ha az A tetraédernek mind a négy csúcsa $A_1A_2A_3A_4$, a B tetraédernek pedig B_1 csúcsa ismeretes, és a B_2, B_3, B_4 pontok az A tetraédernek A_1A_2, A_3A_4; A_1A_3, A_2A_4; A_1A_4, A_2A_3 szemben fekvő éleit, a C_i pontok az A tetraédernek A_i csúcsait és a velök szemben fekvő a_i lapjait a B_1 ponttól harmonikusan választják el, akkor az

$$A \equiv A_1A_2A_3A_4, \quad B \equiv B_1B_2B_3B_4, \quad C \equiv C_1C_2C_3C_4$$

tetraéderek egy desmikus rendszert képeznek.

Az ABC tetraéderek élei egymást hármasával 12 pontban metszik, melyek az előbbi rendszerhez konjugált desmikus tetraedernek csúcspontjai.

Ha az ijk mutatók 2, 3 vagy 4, és az

A_1A_i	B_1B_i	C_1C_i	élek metszéspontja E_{1i}
A_1A_i	B_jB_k	C_1C_i	« « F_{1i}
A_jA_k	B_1B_i	C_1C_i	« « E_{jk}
A_jA_k	B_jB_k	C_jC_k	« « F_{jk},

akkor az ABC rendszerhez konjugált desmikus tetraeder-rendszer:

$$T_2 \equiv E_{12}F_{12}E_{34}F_{34}, \quad T_3 \equiv E_{13}F_{13}E_{24}F_{24}, \quad T_4 \equiv E_{14}F_{14}E_{23}F_{23}.$$

Az ABC, valamint a $T_2T_3T_4$ tetraederek bármelyikének egyik csúcsa és az evvel szemben fekvő lapja, a másik két tetraéder két csúcsától, két élétől és két lapjától harmonikusan van elválasztva.

A B és C tetraéderek csúcsainak és lapjainak viszonylagos helyzete az A tetraéder irányában kitűnik a következőkből.

Az A tetraédernek lapjai a tért 15 részre osztják; ezek közül egy a véges térrész, a többi 14 pedig végtelen nagy. Ha a B_1 pont a véges térrészben van, akkor a $B_2B_3B_4$ pontok a szemben fekvő élek fölött levő hat térrész közül háromban feküsznek; a C_i pontok pedig a lapok illetve a csúcsok fölött levő nyolcz térrész közül négyben vannak. Ha STAUDT * szerint azokat a tereket is, melyekben a B_i és C_i pontok fekszenek, tetraéder tereknek vagy röviden tetraédereknek tekintjük, akkor a C_i pontok oly tetraederekben feküsznek, melynek három véges és három végtelen hosszú éle van, a $B_2B_3B_4$ pontok pedig oly tetraéderekben fekszenek, melyeknek két véges és négy végtelen hosszú éle van.

A B és C tetraéderek lapjaira vonatkozólag megjegyezzük, hogy B-nek lapjai, A-nak csúcsait páros számban, C-nek lapjai pedig A-nak csúcsait páratlan számban választják el egymástól.

Desmikus tetraéder-rendszerekkel gyakran találkozunk a geometriában. Így, ha a B_1 pont az A tetraeder lapjaitól egyenlő távolságra van, akkor $B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$ pontok az A tetraédernek lapjaitól szintén egyenlő távolságra lesznek. Tehát «egy tetraéderbe irható nyolcz gömb középpontja, két oly tetraedernek csúcspontja, mely az eredetivel együtt desmikus tetraéder-rendszert alkot».

Ha továbbá a B_1 pont az A tetraédernek súlypontja, akkor azok a $B_2B_3B_4C_1 \ldots C_4$ pontok, a melyek A-val egy desmikus rendszert képező tetraéderek csúcspontjai, az A tetraéder által meghatározott tetraéder terek súlypontjainak tekinthető.

Ez utóbbi tetraédereknek lapjai az A-nak csúcsaitól egyenlő távolságra fekszenek, s közülök egy lap végtelen távol van.

Ha az A tetraéder $A_1A_2A_3A_4$ csúcsait négy gömb középpontjának tekintjük, melyek közül az 1-ső és 2-dik, 1-ső és 3-dik, 1-ső és 4-diknek hasonlósági pontja az $E_{12}E_{13}E_{14}$ pont, akkor a gömböknek többi hasonlósági pontjai a többi $E_{ij}F_{ij}$ pont.

Ennélfogva:

Valamely tetraéder csúcsaiból leírt négy gömb nyolcz hasonlósági síkja oly két tetraédernek lapja, mely az eredeti tetraéderrel desmikus rendszert alkot; az ehhez konjugált desmikus tetraéder-rendszer tetraédereinek csúcsai, a gömbök hasonlósági pontjai lesznek. *Klug Lipót.*

---

* Die Geometrie der Lage, 188., 189., 190. pont.

AZ EGYÉRTÉKŰ EGÉSZ FÜGGVÉNYEK NEMÉROL.

(Második közlemény.)

V. A függvény minden határon túl való növekedéséről.

21. Minden $f(x)$ egész függvény abszolut értéke az x alkalmas választása által bármely szabadon választott w pozitiv számnál nagyobbá tehető. Képletben:

$$\lim_{R=\infty} M(R) = \infty,$$

hol $M(R)$ a legnagyobb értéket jelenti, melyet $|f(x)|$ a kezdőpont körül R sugárral leírt kör kerületén vagy annak belsejében felvesz.

Az, hogy $M(R)$ hogyan növekedik minden határon túl, szorosan összefügg avval, hogy az

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x_m + \cdots$$

hatványsor együtthatói mily gyorsan közelednek a zérushoz, vagyis az $f(x)$-hez tartozó P Newton-féle poligon alakjával. Lássuk tehát, hogy P-ből miként lehet $M(R)$-et közelítőleg meghatározni.*

A viszonyok különösen szemléletesekké lesznek, ha az $M(R)$ függvény menetét ama C görbével ábrázoljuk, melynek parameteres egyenletei:

$$\xi = \log R \qquad \eta = \log M(R). \tag{23}$$

Ekkor $M(R)$ közelítő meghatározása oly két C_1 és C_2 görbe kijelölését követeli, melyek közül C_1 egészen C alatt, C_2 pedig egészen C felett van. (2. ábra.)

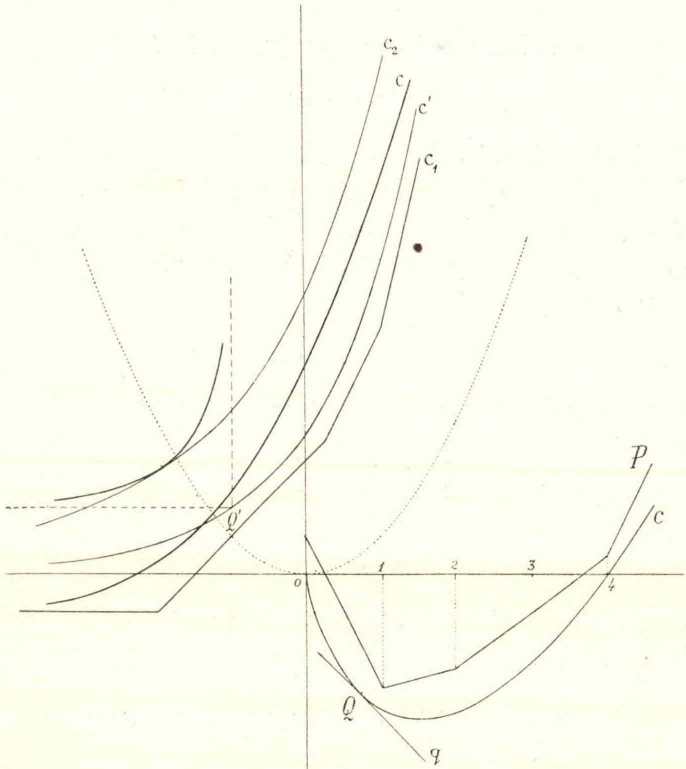
---

* Hadamard, *Sur les fonctions entières.* Bulletin de la soc., t. XXIV.

22. Az ismeretes

$$|a_m| \leqq \frac{M(R)}{R^m}$$

egyenlőtlenség értelmében m minden egész számú értékénél



2. ábra.

$$\log\left|\frac{1}{a_m}\right| \geqq m\xi - \eta.$$

Ha itt m a P valamely csúcsának u abszczisszáját jelenti, és e csúcsnak

$$\log\left|\frac{1}{a_m}\right|$$

ordinátáját v-vel jelöljük, akkor innen:

$$\eta+v-u\xi \geqq 0.$$

Tehát a C görbe minden pontja a következő egyenes felett van, vagy legfeljebb rajta:

$$\eta+v-u\xi=0.$$

Ez az egyenes a NEWTON-féle poligon (u, v) csúcsának a

$$2y-x^2=0$$

parabolára vonatkozó polárisa.

Tehát a Newton-féle poligonnak e parabolára vonatkozó poláridoma oly C_1 törött vonal, mely egészen C alatt van.

23. Hogy most már oly görbét is nyerjünk, mely egészen C felett van, induljunk ki oly

$$y=ax-\beta$$

egyenesből, melynek egy pontja sincs P felett. Akkor az m minden értékénél

$$\log\left|\frac{1}{a_m}\right| \geqq am-\beta$$

és innen

$$|a_m| \leqq e^{\beta-am}, \tag{24}$$

hol az egyenlőség jele nem vonatkozhatik m minden értékére.

Ha most már az

$$M(R) \leqq |a_0| + |a_1| R + \cdots + |a_m| R^m + \cdots$$

egyenlőtlenségben tekintetbe veszszük a 23) és 24) alatti képleteket, akkor abból

$$e^\eta < e^\beta(1+e^{\xi-a}+\cdots+e^{m(\xi-a)}+\cdots).$$

Ha $\xi-a \geqq 0$, akkor a jobb oldal végtelen nagy, és az egyenlőtlenségből további következtetéseket nem vonhatunk. Ha ellenben $\xi-a<0$, akkor innen

$$e^\eta < \frac{e^\beta}{1-e^{\xi-a}}.$$

E szerint η-t *nagyobbítjuk,* ha az

$$e^{\eta}=\frac{e^{\beta}}{1-e^{\xi-\alpha}}$$

egyenletnek megfelelőleg választjuk, melynek rendezett alakja:

$$e^{\xi-\alpha}+e^{-(\eta-\beta)}=1. \qquad 25)$$

Vagyis a 25) alatti görbének minden oly pontja, melyre vonatkozólag $\xi-\alpha<0$, a C felett van. Ámde oly pontjai, melyekre vonatkozólag $\xi-\alpha\geqq 0$, a 25) alatti görbének egyáltalában nincsenek; tehát e vonal egészen C felett van.

Ezt tudván, legyen c oly folyvást alulról konvex görbe, melynek egy pontja sincs P felett. E görbének bármely q érintője szintén egészen P alá esik, ennélfogva a neki megfelelő 25) alatti görbe egészen C felett lesz.

Tehát, ha a c minden egyes

$$y=ax-\beta$$

érintőjéhez meghatározzuk a neki megfelelő 25) alatti görbét, akkor az így nyert görbesereg burkolója oly C_2 vonal, mely egészen C felett van.

Hogy C_2 lehetőleg pontosan megközelítse C-t, legjobb c-nek magát P-t választanunk. De az alkalmazásoknál igen fontos, hogy ily C_2-t akkor is tudunk szerkeszteni, ha P-t nem is ismerjük, hanem csak oly c görbét, mely előbbi követeléseinknek megfelel.

24. A C_2 burkolta görbesereg összes vonalai egybevágók az

$$e^{\xi}+e^{-\eta}=1 \qquad 26)$$

görbével és belőle puszta eltolással keletkeznek. E görbe az abszczisszák tengelyének negátiv és az ordináták tengelyének pozitiv része közé esik, balról jobbra folyvást emelkedik, továbbá mindegyik koordinata tengely egy-egy aszimptotája. Az eltolásnál, mely e vonalat a 25) alattiba viszi át, az aszimptoták (0, 0) metszéspontja az

$$y=ax-\beta$$

egyenlet ábrázolta q egyenesnek a

$$2y-x^2=0$$

parabolára vonatkozó $Q'=(\alpha, \beta)$ polusába kerül.

Tehát a görbesereg, melyet C_2 burkol, ekként keletkezik, hogy a 26) alatti vonallal egybevágó görbe úgy csúszik a síkban, hogy aszimptotái folyvást párhuzamosak maradnak a koordinatarendszer tengelyeivel, az aszimptoták metszéspontja pedig a c görbének az emlitett parabolára vonatkozó c' polárgörbéjét írja le.

25. A C_2-ről mondottakat alkalmazzuk azon esetre, midőn

$$\lim_{m=\infty} a_m (m!)^{\frac{1}{\tau}}=0.$$

Ekkor (l. a 15. czikkelyt), ha csak a H pozitiv számot eléggé nagynak választjuk, az m-nek minden értékénél:

$$|a_m| < \left(\frac{H}{m}\right)^{\frac{m}{\tau}},$$

és innen

$$\log\frac{1}{|a_m|} > \frac{m}{\tau}\log\frac{m}{H}\cdot$$

Ekkor tehát c-nek az a görbe választható, melynek egyenlete

$$v=\frac{u}{\tau}\log\frac{u}{H},$$

hol u és v folyó pontkoordinátákat jelentenek. Ennek a $Q=(u, v)$ pontban vont q érintője:

$$y=\alpha x-\beta,$$

hol

$$\alpha=\frac{dv}{du}=\frac{1}{\tau}\log\frac{u}{H}+\frac{1}{\tau}=\frac{1}{\tau}\log\frac{eu}{H},$$

$$\beta=u\frac{dv}{du}-v=\frac{u}{\tau}\cdot$$

Az utolsó két egyenletből u-t eliminálván, a c' görbének egyenlete

$$\beta=Ke^{\tau\alpha},$$

hol α és β a folyó koordináták és

$$K=\frac{H}{e\tau}\cdot$$

E szerint C_2 a következő görbeseregnek burkolója:

$$e^{\xi}e^{-\alpha}+e^{-\eta}e^{Ke^{\tau\alpha}}=1. \tag{27}$$

C_2-nek egyenletét úgy kapjuk, hogy α szerint differencziálunk és az így nyert

$$-e^{\xi}e^{-\alpha}+e^{-\eta}K\tau e^{\tau\alpha}e^{Ke^{\tau\alpha}}=0 \tag{28}$$

egyenlet segítségével 27) alatt α-t elimináljuk. Ha pedig C_2-t parameteres egyenletekkel ábrázoljuk, akkor elég a 27) és 28) alatti egyenleteket ξ és η szerint megoldanunk. Leszen:

$$e^{\xi}=e^{\alpha}\left(1-\frac{1}{1+K\tau e^{\tau\alpha}}\right),\quad e^{\eta}=e^{Ke^{\tau\alpha}}(1+K\tau e^{\tau\alpha}). \tag{29}$$

26. Az első egyenletből a C_2 görbére vonatkozólag

$$e^{\xi-\alpha}=1-\frac{1}{1+K\tau e^{\tau\alpha}}$$

tehát

$$\lim_{\alpha=+\infty} e^{\xi-\alpha}=1$$

és

$$\lim_{\alpha=+\infty}(\alpha-\xi)=0.$$

Azaz, ha α eléggé nagy értékeire szorítkozunk, akkor

$$\alpha<\xi+\delta,$$

hol δ egy tetszés szerint választott kicsiny pozitiv szám.

Továbbá a 29) alatti második egyenletből:

$$e^{\eta}<e^{Ke^{\tau\alpha}}e^{K\tau e^{\tau\alpha}}=e^{K(1+\tau)e^{\tau\alpha}},$$

és ha még tekintetbe veszszük a ξ-ről mondottakat, úgy a ξ igen nagy értékeinél

$$e^{\eta}<e^{Qe^{\tau\xi}},$$

hol

$$Q=K(1+\tau)e^{\tau\delta}$$

egy pozitiv állandó.

Ez az egyenlőtlenség a C görbére is megtartja érvényességét, mert C egészen a C_2 alatt van. Ennélfogva $R=|x|$ igen nagy értékeinél

$$M(R)<e^{QR^\tau}.$$

Vagyis esetünkben az $x=\infty$ hely környezetében

$$|f(x)|<e^{Q|x|^\tau}. \tag{30}$$

Innen

$$|f(x)|\,e^{-|x|^{\tau+\varepsilon}}<e^{|x|^\tau(Q-|x|^\varepsilon)}.$$

Továbbá

$$\lim_{x=\infty}(Q-|x|^\varepsilon)=-\infty.$$

Tehát, ha az $f(x)$ egész függvényre vonatkozólag

$$\lim a_m(m!)^{\frac{1}{\tau}}=0,$$

akkor

$$\lim_{x=\infty} f(x)\,e^{-|x|^{\tau+\varepsilon}}=0, \tag{31}$$

bármily kicsinynek választjuk az ε pozitiv állandót.

VI. A zérushelyek sorozatáról.

27. Ha az

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m+\cdots$$

egész függvénynek végtelenül sok zérushelye van, és ezek abszolut értékük nagysága szerint rendezve:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p,\ \ldots$$

akkor

$$\lim_{p=\infty}\rho_p=\lim_{p=\infty}|a_p|=\infty.$$

Arra vonatkozólag, hogy $\rho_p=|a_p|$ mily gyorsan közeledik a végtelenhez, SCHOU* a következő tételt találta:

Ha az $x=\infty$ hely környezetében

$$|f(x)|\leqq e^{V(|x|)},$$

---

* *Sur la théorie des fonctions entières.* Comptes rendus, tome CXXV, pag. 763—4. E tételből 28) és 29) alatt levonandó eredményekre HADAMARD más úton jutott.

(hol V egy adott *pozitiv* függvény), *akkor p igen nagy értékeinél*

$$\frac{V(s\rho_p)}{p} > \log(s-1) - \varepsilon \tag{32}$$

ha csak $s > 2$ *és* $\varepsilon > 0$.*

A bebizonyításnál legyen $f(x)$ első el nem tűnő együtthatója a_k, tehát első el nem tűnő zérushelye a_{k+1}.

Akkor $f(x)$-nek és a

$$h(x) = x^k (x - a_{k+1})(x - a_{k+2}) \dots (x - a_p)$$

függvénynek hányadosa megint egyértékű egész függvény, és ennek x hatványai szerint kifejtett alakjában az abszolut tag

$$C_0 = \frac{(-1)^{p-k} |a_k|}{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_p}. \tag{33}$$

E C_0-nak abszolut értéke kisebb, mint a legnagyobb érték, melyet $\left|\frac{f(x)}{h(x)}\right|$ a kezdőpont körül tetszőleges R sugárral leírt körön felvesz.

Ha R-nek $s\rho_p$-t választjuk, akkor az R sugarú körön

$$|h(x)| > R^k (R - \rho_{k+1})(R - \rho_{k+2}) \dots (R - \rho_p) > (R - \rho_p)^p$$

vagyis

$$|h(x)| > \rho_p^p (s-1)^p.$$

Másrészt, ha csak p-t eléggé nagynak választjuk, ugyanezen a körön

$$|f(x)| \leqq e^{V(s\rho_p)}.$$

Tehát

$$\left|\frac{f(x)}{h(x)}\right| < \frac{e^{V(s\rho_p)}}{\rho_p^p (s-1)^p},$$

és ennélfogva egyszersmind

$$|C_0| = \frac{|a_k|}{\rho_{k+1}\rho_{k+2} \dots \rho_p} < \frac{e^{V(s\rho_p)}}{\rho_p^p (s-1)^p},$$

---

* Ha $1 < s \leqq 2$, akkor a tétel megtartja érvényességét, de magától értetődő dolgot állít.

és még inkább

$$|a_k| < \frac{e^{V(s\varrho_p)}}{(s-1)^p}.$$

Innen

$$V(s\rho_p) > p \log(s-1) + \log |a_k|,$$

és

$$\frac{V(s\rho_p)}{p} > \log(s-1) + \frac{\log |a_k|}{p}.$$

A jobb oldal utolsó tagjának limese a zérussal egyenlő, tehát valóban p igen nagy értékeinél

$$\frac{V(s\rho_p)}{p} > \log(s-1) - \varepsilon.$$

28. Ha

$$\lim_{m=\infty} a_m (m!)^{\frac{1}{\tau}} = 0 \qquad 34)$$

akkor (l. a 26. czikkelyt)

$$V = Qx^\tau.$$

Ekkor tehát

$$\frac{Qs^\tau |a_p|^\tau}{p} > \log(s-1) - \varepsilon$$

és ennélfogva

$$\frac{|a_p|^\tau}{p} > G$$

hol

$$G = \frac{\log(s-1) - \varepsilon}{Qs^\tau}.$$

Vagyis *a vizsgált esetben p igen nagy értékeinél*

$$|a_p| > Kp^{\frac{1}{\tau}}, \qquad 35)$$

hol $K = G^{\frac{1}{\tau}}$ alkalmasan választott pozitiv állandó.

29. Az imént nyert egyenlőtlenségből

$$|a_p|^{\tau+\varepsilon} > K^{\tau+\varepsilon} p^{1+\frac{\varepsilon}{\tau}}$$

és

$$|a_p|^{\tau+\varepsilon} - p > p(K^{\tau+\varepsilon} p^{\frac{\varepsilon}{\tau}} - 1).$$

Tehát midőn

$$\lim_{m=\infty} a_m (m!)^{\frac{1}{\tau}} = 0,$$

akkor

$$\lim_{p=\infty} (|a_p|^{\tau+\varepsilon} - p) = +\infty, \tag{36}$$

ha csak $\varepsilon > 0$.

Továbbá ugyancsak a 35) alatti képletből

$$\frac{1}{|a_p|^{\tau+\varepsilon}} < \frac{1}{K^{\tau+\varepsilon} p^{1+\frac{\varepsilon}{\tau}}},$$

és ha még tekintetbe veszszük, hogy a $\Sigma \frac{1}{p^{1+\frac{\varepsilon}{\tau}}}$ sor összetartó, akkor a következő tételt nyerjük:

A vizsgált esetben a

$$\Sigma \frac{1}{a_p^{\tau+\varepsilon}}$$

sor, hol az összegezés $f(x)$-nek összes el nem tűnő zérus helyeire vonatkozik, *feltétlenül összetartó.*

VII. Véges számú zérushelylyel biró függvények neméről.

30. Lássuk most már, hogyan lehet az előbbi fejezetekben nyert eredmények felhasználásával Poincaré tételét megfordítani. Még pedig szorítkozzunk először oly egyértékű egész függvények vizsgálatára, melyeknek csak véges számú zérushelyük van, vagy esetleg egy sincs.

Ekkor az

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots$$

egész függvény ily alakban fejezhető ki:

$$f(x) = G(x)\, e^{G(x)}, \tag{37}$$

hol $G(x)$ ráczionális egész függvényt esetleg puszta állandót jelent, $g(x)$ pedig oly hatványsort, mely az egész síkban összetartó.

Ha továbbá

$$\lim_{m=\infty} a_m (m!)^{\frac{1}{\tau}} = 0,$$

akkor az V. fejezetben mondottak értelmében

$$\lim_{x=\infty} G(x)\, e^{g(x)} e^{-|x|^{\tau+\varepsilon}} = 0, \qquad 38)$$

bármily kicsiny pozitiv számot jelent is ε.

Itt általában

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{G(x)} = 0,$$

és abban a különös esetben, midőn $G(x)$ állandó C értékű,

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{G(x)} = \frac{1}{C}.$$

Ennélfogva a 38) alatti egyenlet csak úgy állhat fenn, ha

$$\lim_{x=\infty} e^{g(x)} e^{-|x|^{\tau+\varepsilon}} = 0. \qquad 39)$$

Ha x és $g(x)$-nek valós és képzetes részekre bontott alakjai:

$$x = u + iv \qquad g(x) = U + iV,$$

akkor

$$|e^{g(x)}| = e^{U}.$$

Tehát a 39) alatti képlet még a következő alakokban is írható:

$$\lim_{x=\infty} |e^{g(x)}|\, e^{-|x|^{\tau+\varepsilon}} = \lim_{x=\infty} e^{U-|x|^{\tau+\varepsilon}} = 0$$

vagy

$$\lim_{x=\infty} (U - |x|^{\tau+\varepsilon}) = -\infty. \qquad 40)$$

E képlet alapján be fogjuk bizonyítani, hogy $g(x)$ oly ráczionális egész függvény, melynek foka kisebb τ-nál vagy legfeljebb egyenlő vele. Mielőtt azonban ezt bebizonyíthatnók, néhány általánosabb vizsgálatot kell előre bocsátanunk.

31. Jelentsen

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

egy tetszőleges hatványsort, R pedig oly pozitiv számot, mely kisebb mint e sor összetartási körének sugara.

Ha a kezdőpont körül az R sugárral leírt kör minden pontjában ismerjük $\varphi(x)$ valós részét, akkor abból $\varphi(x)$ egy additiv állandó hijján teljesen meghatározható.

Ha ugyanis az

$$x = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) = Re^{i\varphi}$$

helyen

$$\varphi(x) = U + iV,$$

akkor c_0 valós része

$$\bar{c}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U d\varphi \tag{41}$$

továbbá pozitiv m esetében

$$c_m = \frac{1}{\pi R^m}\int_0^{2\pi} Ue^{-im\varphi}\, d\varphi. \tag{42}$$

Valóban, ha c_n trigonometriai alakja

$$c_n = \rho_n e^{i\vartheta_n},$$

akkor

$$c_n x^n = \rho_n R^n e^{i(\vartheta_n + n\varphi)},$$

és ennek valós része:

$$\rho_n R^n \frac{e^{i(\vartheta_n + n\varphi)} + e^{-i(\vartheta_n + n\varphi)}}{2}.$$

Tehát

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n R^n \frac{e^{i(\vartheta_n + n\varphi)} + e^{-i(\vartheta_n + n\varphi)}}{2},$$

és innen

$$\int_0^{2\pi} U d\varphi = \rho_0 \frac{e^{i\vartheta_0} + e^{-i\vartheta_0}}{2}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n R^n \left[\frac{e^{i(\vartheta_n + n\varphi)} - e^{-i(\vartheta_n + n\varphi)}}{2in}\right]_0^{2\pi}$$

vagyis

$$\int_0^{2\pi} U d\varphi = 2\pi\rho_0 \frac{e^{i\vartheta_0} + e^{-i\vartheta_0}}{2} = 2\pi\bar{c}_0.$$

Továbbá

$$Ue^{-im\varphi} = \rho_m R^m \frac{e^{i\vartheta_m} + e^{-i(\vartheta_m + 2m\varphi)}}{2} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}{}' \rho_n R^n \frac{e^{i(\vartheta_n + \overline{n-m}\varphi)} + e^{-i(\vartheta_n + \overline{n+m}\varphi)}}{2},$$

hol a Σ melletti $'$ arra figyelmeztet, hogy az összegezés az $n=m$-nek megfelelő tagra nem terjesztendő ki.

Innen

$$\int_0^{2\pi} Ue^{-im\varphi}\,d\varphi = \rho_m R^m \frac{e^{i\vartheta_m}}{2}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \pi R^m c_m.$$

32. Legyen a $\varphi(x)$ hatványsor az egész számsíkban összetartó, továbbá lehessen a kezdőpont körül mint középpont körül a köröknek oly minden határon túl növekedő sorozatát leírnunk, hogy minden egyes c körön U *algebrailag* folyvást kisebb a sugár λ-adik hatványánál, hol λ egy adott pozitiv kitevő.

A 41) és 42) alatti képletek alkalmazásánál oszszuk a c kört két részre: a c_1 részre, melyen U pozitiv, és c_2-re, a hol U negativ. A c_1 mentén integrálván, legyen $\int Ud\varphi$ értéke I_1, a c_2-re vonatkozólag legyen $\int -Ud\varphi$ értéke I_2.

A 41) alatti képlet értelmében

$$I_1 - I_2 = 2\pi\bar{c}_0,$$

s innen

$$\frac{I_2}{R^m} = -\frac{2\pi\bar{c}_0}{R^m} + \frac{I_1}{R^m}. \tag{43}$$

Itt

$$\lim_{R=\infty} \frac{2\pi c_0}{R^m} = 0.$$

Továbbá a szóban forgó körök mindegyikén

$$\frac{I_1}{R^m} < \frac{1}{R^m}\int_0^{2\pi} R^\lambda d\varphi = \frac{2\pi}{R^{m-\lambda}}$$

tehát, ha $m > \lambda$, és R minden határon túl növekedik, akkor

$$\lim \frac{I_1}{R^m} = 0, \tag{44}$$

és a 43) alatti képlet értelmében egyszersmind

$$\lim \frac{I_2}{R^m} = 0. \tag{45}$$

A 42) alatti képletből

$$|a_m| \leq \frac{1}{\pi R^m} \int_0^{2\pi} |U|\, d\varphi,$$

vagyis

$$|a_m| \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{I_1}{R^m} + \frac{I_2}{R^m} \right). \tag{46}$$

A bal oldalon álló szám értéke független R választásától. A jobb oldalon álló kifejezés pedig a 44) és 45) alatti képletek értelmében R alkalmas választásával tetszőlegesen kicsinynyé tehető. Ennélfogva

$$|a_m| = 0,$$

ha csak $m > \lambda$.

Tehát a vizsgált esetben $\varphi(x)$ az x-nek oly raczionális egész függvénye, melynek foka legfeljebb λ egész számú részével egyenlő.

33. Visszatérvén a 30. alatt megkezdett vizsgálatokra, alkalmazzuk az imént talált eredményt a 37) alatti képletben szereplő $g(x)$ függvényre.

Erre vonatkozólag

$$\lim_{x=\infty} (U - |x|^{\tau+\varepsilon}) = -\infty;$$

tehát $R = |x|$ igen nagy értékeinél

$$U < |x|^{\tau+\varepsilon}.$$

Ennélfogva $g(x)$ oly ráczionális függvény, melynek foka legfeljebb $\tau+\varepsilon$ egész számú részével egyenlő. Minthogy továbbá ennek mindig igaznak kell lennie, bármilyen kicsinynek választjuk az ε pozitiv számot, azért $g(x)$ foka legfeljebb τ egész számú részével lehet egyenlő.

Tehát a 37) alatti képletben $e^{g(x)}$ oly törzsfüggvény, melynek neme legfeljebb τ egész számú részével egyenlő. $G(x)$ pedig, mint ráczionális függvény, 0 nemű törzstényezők szorzata.

E szerint arra az esetre, midőn az $f(x)$ egész függvénynek csak véges számú zérushelye van, kimondhatjuk a következő tételt:

Ha valamely $f(x)$ egész függvényre vonatkozólag

$$\lim_{m=\infty} a_m (m!)^{\frac{1}{\tau}} = 0,$$

akkor $f(x)$ véges nemű, és neme nem lehet nagyobb mint τ egész számú része.

A következő fejezetben ki fogjuk mutatni, hogy e tétel akkor is megtartja érvényességét, ha $f(x)$-nek végtelen sok zérushelye van.

Kürschák József.

KATHÓDSUGARAK ÉS RÖNTGENSUGARAK.

(Harmadik és befejező közlemény.)

MÁSODIK RÉSZ.

RÖNTGENSUGARAK.

III.

Fém-hatás.

1. *Értelmezés.* A megelőző vizsgálatban mindig gondom volt arra, hogy a Röntgen-sugarak és a töltött testek között az érintkezést lehetőleg kizárjam. Vagyis szabatosabban kifejezve, a sugarak sohasem érték a szigetelő vagy vezető felületeket, a melyek az érdekelt erőcsövekben foglalt gázat határolták.

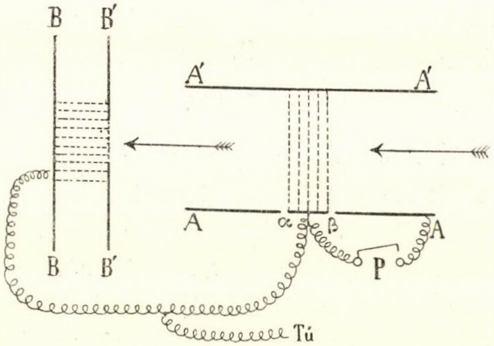
Ha nem élünk ezzel az elővigyázattal, úgy a kisülés gyakran sokkal rohamosabbá válik, mint a milyennek a fentiekben előadott törvények megszabják. *Fém-hatásnak* nevezem azt, a mi így hozzájárúl a *gáz-hatáshoz;* ez a kifejezés később igazolást fog nyerni.

E szerint ezen hatás meghatározása a következő: A *fémhatás* az, a mit a gáz-hatáshoz hozzá kell adnunk, hogy a totális hatást előidézzük.

E fém-hatást egy lemezes sürítő esetében tanulmányoztam, mikor a sugarak a fegyverzetekre merőlegesen lépnek be; és tettem ezt a gáz-hatás vizsgálatánál használt módszerhez hasonló módszer alkalmazásával.

2. A két hatást mindenekelőtt egy kompenzáló módszer segítségével összehasonlítottam egymással.

AA' olyan védőgyűrűs sürítő, mint a minőt az előzőkben leírtam; ennél azonban az $\alpha\beta$ lemez több centiméternyi hosszú a rajz síkjára merőleges irányban, és csupán egy cm széles a nyilak irányában. E nyilak oly sugárnyalábot ábrázolnak, a mely a fegyverzetek érintése nélkül áthalad az AA' sürítőn, majd belép a második BB' sürítőbe, merőlegesen ennek fegyverzeteire egy a B' fegyverzetbe vágott KL ablakon keresztűl, a mely vékonyra kalapált aluminiumlemezkével van befödve. A BB' sürítő vastagsága pontosan annyi, mint $\alpha\beta$, vagyis 1 cm. Végre a B és $\alpha\beta$ lemezek azonkívül, hogy állandóan közlekednek az elektrométer tűjével, híd révén még a földdel és az AA védőgyűrűvel vannak összekötve; ezt a hidat a sugarak áteresztése előtt megszakít-



juk, úgy hogy e lemezek először is AA potencziálján vannak. Legyen ez a potencziál zérus; A' és B'-nek valmely telep vagy ugyanoly jelű vagy ellenkező jelű potencziálokat ád ($\pm$ 120 volt), úgy hogy a B és $\alpha\beta$ lemezekből kiáramló elektromosságmennyiségek az elektrométerben vagy összegeződnek, vagy egymásból levonódnak.

A kisérlet berendezéséből következik, hogy a használt nyaláb minden egyes sugara a B-ből és $\alpha\beta$-ból kiinduló erőcsövek egyenlő hosszú darabjain hat. A gáz-hatás tehát a két sürítőben ugyanaz.* Legyen ez a hatás g. Legyen m a BB' sürítőn előidézett fémhatás;

* Lásd a *Gáz-hatás* czímű fejezetnek 14. és 17. szakaszát.

ebben a sürítőben az összes hatás, az m meghatározása értelmében $m+g$ lesz; az AA' sürítőben meg $\pm g$ a hatás.

Ha a két sürítő egymás ellen működik, úgy az elektrométer közvetlen leolvasással megadja m-et; az összegeződés esetében meg $m+2g$-t kapjuk, a honnan m és g kiadódik.

3. Így azt találtam, hogy a fém-hatás mindannyiszor zérus, ha a B és B' fegyverzetek mindenikének a sürítő belseje felé néző oldala be van kenve petroleummal, alkohollal vagy vízzel; sőt elegendő a sugaraktól talált részeket bekenni, mert a fennmaradó részek állapota semmi hatással nincs; ekkor tehát minden csakis a gázhatásra szorítkozik.

Ámde mérhető értéket vesz fel a fém-hatás, ha ezeken a belső felületeken a sugaraktól ért részek egyike például tiszta és száraz aranyból, vagy általában bárminő *fémből* van. Itt is csakis a sugaraktól ért részek hatásosak, és peddig a gázzal közvetlen határos felületükkel; az alant fekvő rétegek nincsenek semmi befolyással.

Azt is igazoltam, hogy B' töltésének előjele is közömbös. Sőt az is mindegy, hogy a B' vagy a B lemezt kötjük-e össze a tűvel, mert az egyiknek elektromosságbeli veszteségét megnyeri a másik, a mint ez már előre is valószínű volt.

4. Ha a felület két darabja külön-külön találva a sugaraktól m és m' fémhatást ád, mindig úgy tapasztaltam, hogy az együttes találás esetében a fém-hatás $m+m'$.

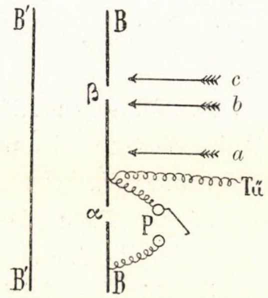
Így például kiindulván abból az esetből, hogy a BB' belső oldalai petroleummal vannak bekenve és így a fém-hatás semmi, legelőször is a B belső lapját fedtem be kalapált aranylevéllel és így bizonyos fémhatást kaptam (67 osztályrésze a skálának); ezután a B' belső lapját is befedtem aranylemezzel (úgy, hogy a sugarak aranyat érjenek a BB' kondenzátor talált erőcsöveinek két végén) és ekkor a fémhatás észrevehetőleg az előbbi adat kétszeresének mutatkozott (131 osztályrész).

Ez a kisérlet a fém-hatás additiv természetét tünteti fel.

5. De ha kisérletünk a mellett tanuskodik is, hogy joggal beszélhetünk egy bizonyos felületnek tulajdonított fémhatásról, még semmi sem bizonyítja kétségtelenül azt, hogy ez a hatás a maga

egészében ahhoz a felülethez van kötve. Így például lehetséges lenne, hogy azokban a pontokban, a hol a Röntgen-sugarak fémfelületet érnek, a fluoreszkálás módjára sugárzások keletkeznek, a melyek a környező gázon a gáz-hatást fejtik ki.

Tettem azonban oly kisérletet, a mely fölismertette az erőcsövek szerepét a gáz-hatásban,* és a mely azt bizonyítja, hogy a fémhatás kizárólagosan a talált felületen megy végbe.



A BB' sürítő fegyverzeteinek egyikéből kivágott derékszögű négyszög alakú $\alpha\beta$ lemez össze van kötve az elektométer tűjével. A kisérlet elején egybe van még kötve a B fegyverzet többi részével, a mely így a védő gyűrű szerepét játsza. Végre B és B' össze vannak kötve egy akkumulátorteleppel, a mely közöttük állandó potencziálkülömbséget tart fenn.

Most megszüntetjük a közlekedést B és $\alpha\beta$ közt, és a B fegyverzeten keresztűl, a fegyverzetekre merőleges irányban bebocsátjuk a sugarakat a sürítőbe. Itt a sugarak gáz-hatást idéznek elő, és mivel a B' belső lapja ólommal van bélelve, egyúttal fém-hatást is (a 3. szakasz utolsó sorai szerint).

Ám az $\alpha\beta$ lemeztől jelzett kisülés igen gyors, ha a sugarak a-ban haladnak (120 skálarész), észrevehetőleg ugyanaz, ha b-ben haladnak, de úgy szólván semmi (kevesebb mint 1 osztályrész), ha c-ben haladnak. Másrészt a tű kitérésének leolvasására szolgáló

* Lásd a Gáz-hatás fejezetnek 7. szakaszát.

skálán a b esetében mutatott 120 osztályrészből 40 eltünt, midőn petróleummal kentem be a B' lapot.

Az $\alpha\beta$ lemeztől tanúsitott fémhatás tehát legalább is a 40-ed részére szállt le, midőn a sugár b helyett c-ben haladt. Erre elegendő volt egy 0,5 cm-nyi eltolás, míg a sűrítő vastagsága 2 cm volt; ámde ez az eltolás nem változtathatná meg észrevehetőleg azokat a jelenségeket, melyeket valami fluoreszkáló hatás, vagy konvekczió, vagy pedig diffuzió idézne elő.

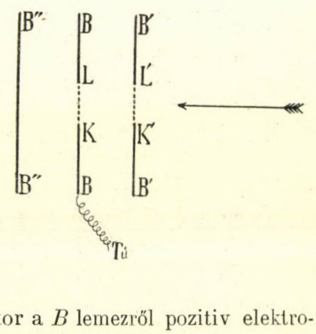
De igenis azt látjuk, hogy az $\alpha\beta$-tól kiinduló erővonalaknak a B' lap ólmán fekvő végeit a b helyzetben érték a sugarak, de nem érték a c helyzetben.

6. *A fémhatás elmélete. Felületi ionizálás.* Ugyanazt az utat követve, mint a gázhatásnál, látjuk, hogy ez a kisérlet a következő tételre vezet:

Valamely gáz és fém elválasztó felületének a Röntgen-sugaraktól talált összes pontjaiban egyenlő mennyiségű pozitiv és negativ elektromosságok keletkeznek, vagy pedig rövid szólásmóddal élve, e pontokban *felületi ionizálás* áll elő. Ha ez elektromos térben történik, akkor az egyik előjelű töltéseket azonnal elnyeli a fém, míg az ellenkező előjelű töltések a fémtől eltávolodnak, és leirják azokat az erővonalakat, a melyeknek tövén előbb voltak.*

---

* Ebből a tételből az következik, hogy valamely lemezes sűrítőben, a melynek fegyverzeteire merőlegesen esnek be a sugarak, az összes hatás $a+be$ alakú lesz, a hol a jelenti a fémhatást, be pedig a kondenzátor e vastagságával arányos gázhatást.



Szükségesnek tartottam közvetlenül kimutatni, hogy ez az a állandó tényleg létezik. Valamely zérus potencziálú és az elektrométer tűjével közlekedő B lemez mindkét oldalán, tőle egyazon távolságban van B' meg B'' lemez, a melyeket egy telep segítségével ellenkező előjelű potencziálokra töltünk. A sugarak e lemezekre merőlegesen esnek be a *vékony* aluminium-levelekkel befedett $K'L'$ és KL ablakokon keresztűl. Ekkor a B lemezről pozitiv elektromosság áramlik például a mellső oldalából, és negativ elektromosság a másik oldalából.

7. Mint a gázhatásnál, úgy itt is kimutattam, hogy valamely adott sűrítőben a fémhatástól áramlásba hozott elektromosság-mennyiség, ha az elektromos tér erősödik, gyorsan ér el határértéket.

Ez az eredmény — még mindig az előbbihez analog utat követve — lehetővé teszi annak meghatározását és mérését, a mit *egy pontban való felületi ionizálásnak* fogunk nevezni.

8. *A forrástól való távolság befolyása.* A forrástól való ugyanazon távolságban a felületegységre eső ionizálást függetlennek találtam a sugarak hajlásától.

A sugár irányára 45° alatt hajlítottam a BB' sűrítőt (238. lap) (most csak ez szerepel), a melynek KL ablaka elég széles volt, hogy széleivel az első helyzetben alkalmazott sugárkúpnak egy sugarát se fogja fel. A sűrítőben a sugaraktól áthatott térfogatot tehát meg kellett szorozni $\frac{1}{cos\,45°} = \sqrt{2}$-vel; így a gázhatás is megszorzatott $\sqrt{2}$-vel. De másrészt legalább is $\frac{1}{100}$-nyi pontossággal igazoltam azt, hogy az összes hatás is $\sqrt{2}$-vel megszorzatott. E szerint a fémhatás, a mely a kettőnek külömbsége, szintén $\sqrt{2}$-vel szorzatott meg, vagyis épp oly arányban változott, mint a sugaraktól talált felület.

Továbbá kimutattam azt, hogy a forrástól való távolság változásával a felületegységre eső ionizálás e távolság négyzetével fordított arányban változik. Vagy, a mi ugyanazt mondja, az ugyanazon testszögű kúp minden távolságban ugyanazt a fém-hatást létesíti a BB' sűrítőben, ha ez merőleges a sugarakra. De ez természetesen csak azon a határon belül van így, a míg az elnyelés elhanyagolható.

E két törvény egyesíthető a következőképen: *Az egy pontban*

Ámde a BB' sűrítőben a B és B' belső lapjai be vannak kenve petroleummal, és így a fémhatás zérus.

Minthogy a gázhatás ugyanakkora BB''-ben, mint BB'-ben. azért az elektrométer leolvasása közvetlenül megadja a BB'' sűrítő fémhatását.

Így azt találtam, hogy 1, 2, 3 és 5 cm vastagságok esetén ezt a fémhatást 41, 43, 42 és 39 skálarész képviselte.

*való felületi ionizálás fordított viszonyban változik a pont és a forrás közti távolság négyzetével.**

Ezen törvény alapján még más, a már adott módszertől független módon is definiálhatnók a sugarak mennyiségének egységét; de előnyösebbnek vélem az első definiczió megtartását.

9. *A felületi ionizálás együtthatói.* Legyen Q a Röntgen-sugarak mennyisége, a melyet valamely forrás egyenletesen sugároz az ω testszögben; az a gázat és a b fémet elválasztó felület ds elemének felületi ionizálása közönséges hőmérséklet és 76 cm nyomás esetén lesz:

$$\frac{Q}{\omega}\,\frac{ds}{r^2}\,M_{a,\,b}$$

Javaslatba hozom, hogy nevezzük *a felületi ionizálás együtthatóinak* az $M_{a,\,b}$ együtthatókat, a melyek minden gáz-fém párra jellemzik a fémhatást.

Meg is mértem — igaz, elég durva közelítéssel csupán — néhányat ezen együtthatók közül, melyek a következő táblázatban foglaltatnak:

$$M_{Au,\,\text{lev.}} = 0{,}9 \qquad M_{Zn,\,\text{lev.}} = 0{,}70$$
$$M_{Zn,\,CO_2} = 0{,}80$$
$$M_{Zn,\,H_2} = 0{,}5$$
$$M_{Pb,\,\text{lev.}} = 0{,}6 \qquad M_{Sn,\,\text{lev.}} = 0{,}6 \qquad M_{Al,\,\text{lev.}} = 0{,}0$$
$$M_{Al,\,CO_2} = 0{,}0$$
$$M_{Al,\,H_2} = 0{,}2$$

Ezek az együtthatók az állandók új csoportját adnák, a melyeket bizonyos tekintetben össze lehetne hasonlítani a felületi feszültséggel, vagy az érintkezési potencziálkülömbséggel.

10. *A nyomás befolyása.* A megelőző kisérletek mind a légköri nyomás és rendes hőmérséklet mellett történtek. De változtattam ezeket a tényezőket is.

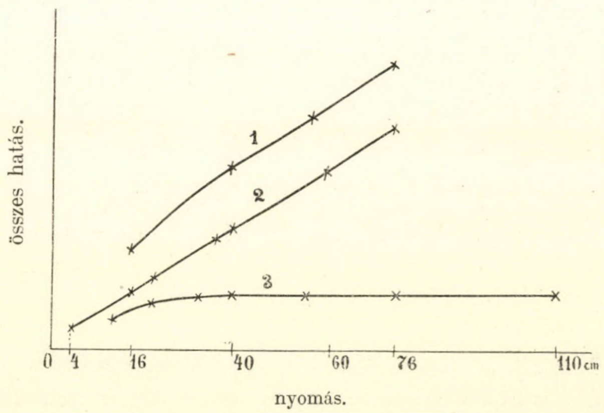
* Úgy hiszem, hogy ezen, valamint a Gázhatás fejezet 17. szakaszában adott törvény eddigelé az egyedüli pontos tételek a Röntgen-sugaraknak a távolsággal való gyengülésére. Nevezetesen egészen nyilvánvalóan hiú dolog volt távolságokat a kisütött testig mérni, mitsem törődve a gázhatással.

Lehetségesnek tartom azt, hogy úgy mint a gázhatásnál, a fémhatás is állandó nyomás alatt független legyen a hőmérséklettől: így egy czinklemez észrevehetőleg állandóan ugyanazt a fémhatást adta 15° és 120° között.

De ebben az esetben nem tudtam egyszerű törvénynyel kifejezni a nyomás befolyását.*

* Ezt a befolyást oly módon vizsgáltam, hogy megfigyeltem, miképen változik a nyomással a kisülés sebessége a sűrítőben, melynek fegyverzeteire merőlegesen lépnek be a sugarak. A megfigyelt sebességből le kellet vonni a nyomással arányos tagot, mely a gázhatást mérte. A maradék aztán a sűrítő két lapjától eredő fémhatások összegének mértéke. Nem lenne nagyon nehéz valamilyen kompenzáló módszernek alkalmazása, a mely közvetlenül, és minden nyomásra megadná az egyik lap fémhatását, de eddig még nem használtam e módszert.

Mellesleg megjegyezve, lehetetlenség elfogadni azt, a mit mindjárt kezdetben több fizikus állított, hogy, midőn a sugarak így belépnek a lemezes



sűrítőbe, a bruttó kisülési sebesség, vagyis az összes hatás mindig arányos lenne a gáz nyomásának négyzetgyökével. Ha ez a törvény valóban helyesnek is mutatkozott a sűrítő egy bizonyos vastagságára, egy más vastagságra már nem fog állni, mert az összes hatásban a gázhatás arányosan változott a nyomással; de az igaz, hogy a vastagság jelentékeny változására van szükség, hogy az összefüggés megszűnjék parabolikus lenni.

Egyébiránt erre vonatkozólag néhány közvetlen kisérletet végeztem, a melyeknek eredményeit az ábra három görbéje tünteti fel. A nyomás az abscissa és az összes hatás az ordináta. Az itt használt sűrítő 4 cm vastag volt. A sugarak belépési oldalán a lap aluminiumból volt.

11. *A kisülés általános törvénye.* Tegyük fel ismertnek minden esetben a nyomás befolyását a fémhatásra, a mi talán hosszadalmas, de könnyű méréseket fog kivánni. Így könnyen belátható, hogy a fentiekben előadott tanulmány alapján minden esetben kiszámíthatjuk azt az elektromosságmennyiséget, melyet valamely test a Röntgen-sugarak behatására elveszít, legalább is annyiban, a mennyiben integrálási nehézségek nem állnak útunkban.

Vegyük például a lemezes sűrítő egyszerű esetét, a melynek vastagsága l, s melynek aluminiumból való egyik fegyverzetére merőlegesen lépnek be a sugarak, míg a másik fegyverzete czink; és tegyük fel, hogy azt a pozitiv elektromosságmennyiséget kerestük, mely az egyik fegyverzetről a másikra megy át, midőn a sugaraknak Q mennyisége lép be a kondenzátorba. A tőlem a fentiekben adott elemi törvények közvetlen alkalmazása mutatja, hogy hidrogénban e mennyiség elektrostatikus CGS egységekben lesz:

$$Q(M_{Al,\,H_2} + l\,G_{H_2} + M_{Zn,\,H_2}) = Q(0{,}2 + l\,.\,0{,}026 + 0{,}5);$$

míg levegőben:

$$Q(M_{Al,\,\text{lev.}} + l\,G_{\text{lev.}} + M_{Zn,\,\text{lev.}}) = Q(0{,}0 + l\,.\,1 + 0{,}7).$$

12. *Gáz-elem.* — Befejezem e tanulmányt egy az előbbiekben előadottak alkalmazása gyanánt felfogható kisérletem idézésével. Ha sugárnyaláb halad keresztül czink és rézlemez között, melyek vezetőileg össze vannak kötve, akkor a sugarak iparkodnak a lemezek potencziálját kiegyenlíteni, és így áram fog haladni az összekötő drótban. Tényleg meg is valósítottam ezt a *gáz-telepet,* a mennyiben nagy felületűen kapcsoltam össze tizenkét ilyen elemet, a melyeknek mindegyikét egy-egy körülbelől 100 cm^2 felületű

Az első görbe megfelel annak az esetnek, midőn a második lap czink, és a vizsgált gáz levegő.

A második görbe annak az esetnek, midőn a második lap aluminium és a vizsgált gáz megint levegő.

A harmadik görbe annak az esetnek, midőn a második lap ismét aluminium, de a vizsgált gáz hidrogén.

E három görbe egyike sem parabola.

és egymástól pár milliméternyire lévő réz és czinklemez alkotta. Így a Thomson-féle galvanométer skáláján 50 mm-nyi állandó kitérést kaptam, a mi 7.10^{-9} ampère erősségű áramnak felel meg.* Ezen áramnak energiája talán a fémeknek az ionizált gázra gyakorolt chemiai reakcziójától származik; mindazonáltal még igen hosszas használat után sem tudtam felfedezni az elemben az elektródok polarizácziójától eredő ellen-elektromotoros erőt.

Összefoglalás.

Összegezvén a fentieket, a következőket állapítottam meg a kathódsugarakat illetőleg:

E sugarak negativ elektromosak, a mi bajosan egyeztethető össze a hullámzási elmélettel, de ellenkezőleg igen jól összefér az emissziós elmélettel (141. l,).

Ennélfogva alá vannak vetve a *statikai* elektromos tér hatásának, és pedig mindig az előrelátható értelemben (145. l.).

Ez a hatás lehetővé teszi a potencziálesés mérését a kathód környékén (147. l.).

A Röntgen-sugarakat illetőleg, eltekintve az első kisérleteimtől, a melyek hozzájárúlhattak keletkezési helyükre és szigorúan egyenesvonalú terjedésükre vonatkozólag a fogalmak tisztázásához, állanak:

E sugarak kisűlést idézhetnek elő a nélkül, hogy érnék a nyugvó gázban foglalt elektromos testeket (191. l.).

Ez a *gáz-hatás* egész a teljes kisülésig tart (193. l.).

Ez nem a sugaraktól közvetlenűl ért gáznak valami áramlásától vagy diffúziójától ered (195. l.).

Valamely gázban egy a sugaraktól metszett erőcső úgy viselkedik, mint egy vezető (197. l.).

Szabatosabban kifejezve, ott a hol a sugarak áthatolnak a gázon, egyenlő nagyságú és ellenkező jelű töltések lépnek fel (ionizá-

---

* Hasonló kisérleteket végzett Stoletov az ívlámpa ibolyántuli sugaraival. L. *Math. Phys. L.* I. köt, 222. l.

lás); ezután az elektromos tér hatására mozgásnak indulnak ezek a töltések az őket tartalmazó erőcsövek mentén mindaddig, a míg vezetőre nem találnak, a melyet kisütnek, vagy pedig szilárd avagy folyós szigetelőre, melyet megtöltenek (198. l.);

Ez az *ionizálás* a gázban független az elektromos tér lételétől, a mely azt létesíti. (199. l.) és

Igen könnyen mérhető (203. l.);

Az egy pontban való ionizálás arányosan változik a nyomással és nem függ a hőmérséklettől (204. l.);

Fordított arányban változik az illető pont és a forrás közti távolság négyzetével, mely alapon a Röntgen-sugarak *mennyiségének egységét* állapítjuk meg (205. l.);

Minden gázhoz egy *ionizálási együttható* tartozik; ez az a szám, a melylyel meg van szorozva az egy pontban való ionizálás, ha a levegő helyét az illető gáz foglalja el (206. l.);

Arra a bonyolódottabb esetre vonatkozólag, midőn a sugarak töltött felületekre esnek, a fentiekhez analog eljárással találtam:

Ha e felületek fémből valók, egy második hatás, a *fém-hatás* lép fel a nélkül azonban, hogy zavarná a gáz hatását (239. l.);

Ez a fém-hatás egyértelmű a *felületi ionizálással,* melyet a sugarak a gáz és a fém elválasztó felületén létesítenek, a hol tehát átmeneti réteg jelentkezik (241. l.);

Az egy pontbeli felületi ionizálás fordított arányban változik a forrástól való távolság négyzetével (242. l.);

Minden egyes gáz-fém párt egy *felületi ionizálási együttható* jellemez, a mely a fizikai állandóknak egy második új csoportját adja (243. l.);

Így tehát a Röntgen-sugaraktól okozott kisülés összetett bonyolult jelensége két jelenség összege gyanánt jelentkezik, a melyek külön-külön egyszerű törvényeknek hódolnak. Ez megállapítja a kisűlés általános törvényét, a melynek kiszámítása minden esetben integrálási feladatra van visszavezetve (245. l.).

*

Azon a ponton, a meddig jutottunk, a Röntgen-sugarak jellemző tulajdonságaiúl a következőket ismerjük fel: szigorúan egyenes vonalban terjednek, az akadályok meggyöngítik, de soha el nem térítik őket; fluoreszkálást ébresztenek és végre ionizálják a gázakat, a mely ionizáczió erélyesebbé válik a fémmel való érintkezéssel.

Ez az utolsó sajátság, ha nem is viszi közvetlenűl közelebb a Röntgen-sugarakat az ibolyántúli fényhez, mégis szaporítja egygyel az okok számát, a miért e sugarakban elektromos természetű rezgéseket lássunk.

De ez a sajátság főleg új utat nyit meg, a melyen nem a Röntgen-sugarak képezik a vizsgálatoknak közvetlen tárgyát, hanem csupán eszközűl szolgálnak az ionizálás előidézésére, mert hiszen átláthatjuk, hogy nem tekintve bizonyos különbségeket, a melyek csak növelhetik a vizsgálatok érdekességét, a gázak nagyfontosságú csoportjára vonatkozólag mihamar valami analog dolgot lehet létesíteni ahhoz, a mit a sókra vonatkozólag elektrolizisnek nevezünk. És ha, a mi nem igen valószínű, a gáz ionizálását anyagátvitel kiséri, előre is mérlegelhetjük az oly testek felbontásának nagy jelentőségét, a melyeknek szervezete az ismert elektrolitek szerkezetétől igen nagyon eltérő.

Így keletkezhetnék egy újabb elektrochemia.

IRODALOM.

Hittorf. Ueber die Electricitätsleitung der Gase. (*Pogg. Ann.*, CXXXVI. p. 1. 1869.)

Crookes (W.). Illumination of lines of molecular pressure. (*Phil. Mag.*, VII. p. 57. 1879.)

— On a fourth state of matter. (*Proc. Roy. Soc.*, XXX. p. 469. 1880.)

— Adresse présidentielle à la Société des Ingénieurs électriciens. (Fordítása a *Lumière électrique* XXXIX. k.-ben p. 233.)

Goldstein. Entladung der Electricität in verdünnten Gasen. (*Wied. Ann.*, XI. p. 832. 1880 és XII. p. 90. 1881.)

— Eine neue Form der electrischen Abstossung. (*Wied. Ann.)*

— Reflexion of electrical rays. (*Phil. Mag.*, XIII. p. 449. 1881.)

— Influence of the shape of the kathode... (*Phil. Mag.*, XIII. p. 455. 1881.)

THOMSON (J.-J.). Theory of the discharge in gases. (*Phil. Mag.*, XV. p. 427. 1883.)

HERTZ. Versuche über die Glimmentladung. (*Wied. Ann.*, XIX. p. 782. 1883.)

WIEDEMANN (E.). Electrische Entladungen in Gasen. (*Wied. Ann.*, XX. p. 756. 1883.)

RÖNTGEN. Electromagnetic action of dielectric polarization. (*Phil. Mag.*, XIX. p. 385. 1885.)

RIGHI. Sulla convezione elettrica. (*Lincei*, IV. p. 151. 1890.)

HERTZ. Durchgang der Kathodenstrahlen durch dünne Metallschichten. (*Wied. Ann.*, XLV. p. 28. 1892.)

WIEDEMANN (E.) u. EBERT. Ueber die angebliche Abstossung paralleler Kathodenstrahlen. (*Wied. Ann.*, XLVI. p. 158. 1892.)

LENARD. Kathodenstrahlen im atmosphærischen Druck und im äussersten Vacuum. (*Wied. Ann.*, LI. p. 225. 1894.)

— Magnetische Ablenkung der Kathodenstrahlen. (*Id.*, LII. p. 23.)

— Absorption der Kathodenstrahlen. (*Id.*, LVI. p. 255. 1895.)

THOMSON (J.-J.). Velocity of the kathode-rays. (*Phil. Mag.*, XXXVIII. p. 358. 1894.)

WIEDEMANN (E.) Entladungsstrahlen. (*Zeitschrift für Electrochemie*, p. 159. 1895.)

JEAN PERRIN. Nouvelles propriétés des rayons cathodiques (*Comptes rendus*, CXXI. p. 1130. 1895.)

JAUMANN elmélete (longitudinális hullámok) és H. POINCARÉ kritikája. (*Comptes rendus*, CXXI. p. 792 és CXXII. p. 74 és 76 ; p. 517 és 520.)

BIRKELAND. Sur un spectre de rayons cathodiques. (*Comptes rendus*, CXXIII. p. 492. 1897.)

MAJORANA. Deviazione elettrostatica dei raggi catodici. (*Lincei*, p. 183. 1897.)

DESLANDRES. Actions mutuelles des électrodes et des rayons cathodiques. (*Comptes rendus*, CXXIV. p. 678. 1897.)

— Complexité des rayons cathodiques. (*Id.*, p. 945.)

RÖNTGEN. Ueber eine neue Art von Strahlen. (*Sitz. der Würzburger physik. medic. Gesell.*, 1895 deczember.)

JEAN PERRIN. Quelques propriétés des rayons de Röntgen. (*Comptes rendus*, CXXII. p. 186. 1897 január.)

— Origine des rayons de Röntgen. (*Id.*, p. 716.)

DE HEEN és DEVELSHAUVEN. Les rayons X émanent de l'anode. (*Id.*, 383.)

D'ARSONVAL. Observations sur la photographie au travers des corps opaques. (*Id.*, p. 500.)

GALITZINE és KARNOJITZKY. Centres d'émission des rayons X. (*Id.*, p. 608.)

THOMPSON (S.-P.). Observations sur les rayons X. (*Id.*, p. 807.)

THOMSON (J.-J.). The Röntgen rays. (*Nature*, LIII. p. 391 és 581 és LIV. p. 302.)

COLARDEAU. Sur une forme de tube de Crookes... (*Journ. de Phys.*, p. 542. 1896.)

WINKELMANN és STRAUBEL. Ueber einige Eigenschaften der X-Strahlen. (*Jenaische Zeitschr. für Naturw.*, XXX. 1896.)

SAGNAC. Sur la diffraction et la polarisation des rayons de Röntgen. (*Comptes rendus*, CXXII. p. 783.)

— Illusions relatives aux pénombres. Application aux rayons X. (*Comptes rendus*, CXXIII. p. 880.)

CALMETTE és LHUILLIER. Sur la diffraction des rayons de Röntgen. (*Id.*, CXXII. p. 877.)

HURION et IZARN. Sur la déviation des rayons de Röntgen. (*Id.*, p. 1195.)

GOUY. Réfraction et diffraction des rayons de Röntgen. (*Comptes rendus*, CXXII. p. 1197.; CXXIII. p. 43 és *Journ. de Phys.*, p. 345. 1896.)

GUILLAUME (CH. ED.). Sur l'émission des rayons X. (*Comptes rendus*, CXXIII. p. 450.)

— Les rayons X. (Gauthier-Villars, 1896.)

RAVEAU. Les rayons X et la lumière ultraviolette. (*Journ. de Phys.*, p. 113. 1896.)

PORTER. Analysis of Röntgen rays. (*Nature*, LIV. p. 110.)

ROITI. (*Lincei*, p. 131. 1896.)

BENOIST (L.) és HURMUZESCU. Nouvelles propriétés des rayons X. (*Compte rendus*, CXXII. p. 235. 1896 február 3.)

— Nouvelles recherches sur les rayons X. (*Id.*, p. 379.)

— Action des rayons X sur les corps électrisés. (*Id.*, p. 779 és 926. és *Journ. de Phys.*, p. 351. 1896.)

THOMSON (J.-J.). Discharge of electricity produced by Röntgen rays. (*Electrician*, p. 491. 1896 február 7. és *Proc. Roy. Soc.*, LIX. p. 274.)

LODGE (O.). (*Electrician*, p. 473. 1896 február 7.)

RIGHI. Produzione di fenomeni elettrici per mezzo dei raggi di Röntgen. (*Acc. di Bologna*, 1896 február 9. és *Comptes rendus*, CXXII. p. 376.)

— Effets électriques des rayons de Röntgen. (*Comptes rendus*, CXXII. p. 601.)

— Gas attraversati dai raggi di Röntgen. (*Acc. di Bologna*, 1896 május 31.)

DUFOUR. Observations sur les rayons Röntgen. (*Arch. des Sc. phys. et nat.*, I. p. 111. 1896 február 10.)

JEAN PERRIN. Mécanisme de la décharge par les rayons de Röntgen. (*Éclairage électrique*, VII. p. 545. 1896 június és *Journal de Phys.*, p. 350. 1896.)

— Rôle du diélectrique dans la décharge par les rayons de Röntgen. (*Comptes rendus,* CXXIII. p. 351.)

— Décharge par les rayons de Röntgen. Influence de la pression et de la température. (*Id.,* p. 878.)

— Rôle des surfaces frappées par les rayons. (*Id.,* CXXIV. p. 455.)

— Application à la mesure des forces électromotrices de contact. (*Id.,* p. 496.)

Villari. Du reploiement des rayons X derrière les corps opaques. (*Comptes rendus,* CXXIII. p. 418.)

Thomson (J.-J.) és Rutherford. Passage of electricity through gases exposed to Röntgen rays. (*Phil. Mag.,* p. 392. 1896 november.)

Benoist (L.). Loi de transparence des gaz pour les rayons de Röntgen. (*Comptes rendus,* CXXIV. p. 146.)

Rutherford. Electrification of gases exposed to Röntgen rays and absorption of Röntgen rays by gases. (*Phil. Mag.,* p. 241. 1897.)

PHYSIKAI SZEMLE.

A folyadékok párolgási hőjének meghatározása a forráspont hőmérsékleténél.* A párolgási hő meghatározására szolgáló eddigi módszerek leginkább azon alapultak, hogy a gőzök lecsapodásakor felszabaduló hőt mérték meg alkalmas módon. A Marshall kisasszony és W. Ramsay-től közölt módszer ellenben a gőz képződésére szükséges hőt méri le. Az eljárás a következő:

Két üvegtartóba tesszük a két összehasonlítandó folyadékot; a tartók hasonlítanak oly izzólámpa körtéjéhez, melynek vékonyan kihuzott nyaka van és melyben a szén-fonalat spirálisba csavart platinadrót helyettesíti. Mindkét palaczkot oly kettősfalú köpönyegbe rakjuk, melyben a légköri nyomás alatt forró ugyanazon folyadék gözei keringenek. Mikor a palaczkban lévő folyadék már elérte forráspontját, zárjuk az elektromos áramot. A platina-drótot az áram felmelegíti és ezen meleg a gőzök fejlesztését eszközli. A fejlődő gőzök a vékony nyakon át kiszabadulnak és a levegőn lecsapódnak. Hogy a forrás megakadását kikerüljék, mindegyik palaczkba capillaris csövet raktak, mely levegőt tartalmazott.

A két palaczk súlyveszteségéből kiszámítják a képződött gőzök menynyiségét, az áram intensitásából és a platina ellenállásából megkapják a gőzök fejlesztéséhez szükséges hőt. Két folyadék párolgási hője viszonyának meghatározására az intensitás ismerete nem is szükséges.

A két platina-spirális ellenállásának összehasonlítása czéljából nem szabad feltenni, hogy ezek a forró folyadékok hőmérsékletét pontosan felvették: ők ezen ellenállásokat directe hasonlítják össze.

A folyadékok felmelegítése közben fejlődő vízgőzök mennyisége oly csekély, hogy elhanyagolható: az erre vonatkozó correctio kisebb a kísérletnél felmerülő hibák határánál, mely a szerzők szerint nem éri el az 1%-ot.

Világos, hogy ezen módszer így közvetlenül csak oly folyadékokra alkalmazható, melyek szigetelnek, a melyeknél elektrolyzis nem fordul elő. Ezen oknál fogva a szerzők nem is használhatták a vizet az össze-

* Phil. Mag. 5. s. XLI. k. 38. l. 1896 és XLIII. k. 27. l. 1897.

hasonlítás alapjául, hanem a benzint, melynek párolgási hőjét GRIFFITH és MARSHALL kisasszony directe határozták meg.

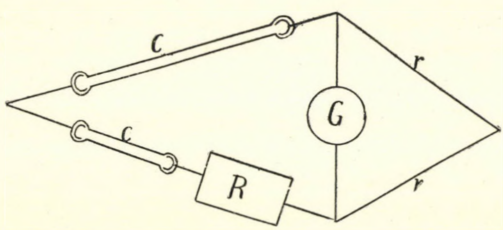
Kisérleti eredményeikből néhány fontosabb a következő :

benzin	94·4
alkohol	216·5
eczetsav	97·0
methylformiat	110·1
ethylformiat	94·4
methylacetat	97·0
ethylacetat	88·1
hangyasav	120·4
methylalkohol	261·6
chloroform	58·4
CCl^4	46·4
anilin	113·9

Mikola S.

*

A folyadékok ellenállásának mérése folytonos áramokkal.* A folyadékok ellenállásának meghatározásánál ki kell kerülni a polarizatiót, mely az elektromos áram zárása után fellép. Ezt az által érjük el, hogy folytonos áram helyett váltó áramot használunk, s a galvanometer helyett



dynamometert vagy telefont kapcsolunk be a WHEATSTONE-féle hidcombinatióba. STROUD és HENDERSON módszerét, mely a KOHLRAUSCH-tól javasolt s TOLLINGER-től először alkalmazott módszernek változata, a mellékelt rajz tünteti fel. *c* és *c* két elektrolytikus czella, melyek mindegyike vízszintes cső által összekötött két függőleges próbacsőből áll ; ezekben platin elektródok vannak. A két czella csak a csövek hosszára nézve tér el egymástól és mindegyikben ugyanazon folyadék van.

* Phil. Mag. XLIII. k. 1897. 19—27. l.

A két czella a hidnak két ágát képezi, a másik két ág egyenlő. Az egyensúlyt úgy állítjuk helyre, hogy a kisebbik czellával ugyanazon ágba rheostatot (*R*) kapcsolunk be; a *G* galvanometer megmutatja az egyensúly létrejöttét. Ez esetben a két ágon végigmenő áramintensitások egyenlők, mely feltételből az ellenállások meghatározhatók. Ezen szerkezetben az elektródok polarizatiójából származó zavarok a folytonos áramoknál is ki vannak kerülve.

A szerzők 30 voltos potencziál-különbséget használtak a hid két sarkán, több ezer ohmos elektrolytikus ellenállásokat és egy 300 ohmos d'Arsonval-féle galvanométert. A czellákat fürdőkbe helyezték, melyeket erősen kavartak, hogy a hőmérséklet egyenletes legyen. Az áramot fél perczig zárták, hogy az elektródokat polarizálják, azután 2 perczig megszakították, hogy az elektrolyt felvegye a fürdő hőmérsékletét; végre az *R* ellenállást is hozzácsatolták, miközben az áramot igen rövid ideig zárták.

A szerzők azt hiszik, hogy ezen feltételek mellett a pontosság $\frac{1}{2000}$-nél nagyobb.

A *c* czellákat egyszersmindenkorra calibrálni kell, hogy azon faktort megtudjuk, melylyel az *R* ellenállást még meg kell szorozni, hogy ez a folyadéknak ellenállását a kisérleti hőmérsékletre megadja. *Mikola S.*

*

A földkéreg deformatiója a Hold befolyása alatt. Azon földfelületi jelenségek közül, melyek némi betekintést engednek a földkéreg physikájába, a tengerjárás első sorban említendő és annál fontosabb, minthogy a præcessio alapján tett számítások eredményhez nem vezettek és ezentúl sem fognak vezetni. W. Thomson mondta ki e kedvezőtlen itéletet a British Association 1876-iki glasgowi megnyitóján és teljes joggal, miután úgy a teljesen merev, mint a folyékony sphæroid igen közel ugyanazon ténylegesen megfigyelt præcessió állandóhoz vezet. E két szélső esetben is a számított præcessio állandó oly közel áll a megfigyelthez, hogy a csekély különbségből jogos következtetéseket vonni nem lehet. Thomson ekkor a tengerjárási jelenségekre fordította figyelmét és különösen a földkéreg hullámzó mozgását tanulmányozta a Hold befolyása alatt. Darwin e számításokat kiterjesztette és általánosan ismeretes amaz eredmény, hogy a szilárd kéreg «árhulláma» $^2/_3$-a, illetve $^3/_5$-e a vizének, ha a Föld kérge illetve az üveg vagy angol aczél merevségével bir.

Mindenesetre könnyű belátni, hogy a ténylegesen megfigyelhető tengerjárás magassága a víz és szárazföld mozgásának különbségével egyenlő, ha amazt azon feltevés alatt számítjuk, hogy a Föld absolute merev. Az összehasonlításnak megvannak azonban a maga nehézségei, a mennyiben az oczeánok ismeretlen mélységtörvénye és a földfelületi configuratio szabálytalansága folytán az elméletből csupán a jelenség periodusait kölcsönözzük, míg az egyes periodusokhoz tartozó emelkedéseket alkalmas helyeken felállított mareographokon empirikusan határozzuk meg. Szerencsére azonban már e periodusok némely következtetésre jogosítanak.

Ismeretes, hogy a tengerjárási jelenség félnapos, félhavi és félévi periodussal bir. A szilárd kéreg hullámzásának befolyása a félnapos periodusban nem várható; a szárazulatok nagy tehetetlensége és tetemes súrlódása meg ellentállása nem engedheti meg ama aránylag gyors deformatiókat, melyek szükségesek volnának, hogy a naponként kétszer megjelenő árhullámra észrevehető befolyast gyakoroljon. A félévi periodus jelenségeiből a földkéreg rugalmas magaviselete szintén nem hámozható ki, minthogy e periodus egyszersmind a meteorologiai tünemények periodusával esik össze. A folyók megváltozott vízbősége, a légnyomás megváltozott elhelyezése, hőmérsékletek változása tulságos nagy és szintén szigorúan nem mérlegelhető befolyást gyakorolnak. Marad tehát a Föld rugalmas magaviseletének megitélésében a félhavi periodus. Ám a legmegbizhatóbb mareograph-feljegyzések folytán e periodus a vizek emelkedésében fel *nem* fedezhető, a mi azt bizonyítaná, hogy a félhavi periodusban a földkérgének hullámzása körülbelül a vizével egyenlő. A földkéreg tehát nem tekinthető absolute merevnek, a mit különben már az is bizonyít, hogy benne földrengési hullámok terjedhetnek.

Az erre vonatkozó számítások elég bonyolódottak, de igen egyszerű módon is végezhetők, ha az előforduló physikai állandóknak nem annyira pontos értékét, mint inkább nagyságrendjét keressük. A számítás annál mulatságosabb, minthogy a tünemény látszólag egymástól távolfekvő jelenségek között is kapcsolatot teremt.

Ha felteszszük, hogy a Föld absolut merev testét mindenütt egyenlő mély tenger borítja, akkor a tengerjárás közönségesen ismert statikai elmélete alapján a tengerszín változása $\varDelta r$ két oly pont között, melyek egyikének zenithjében áll a Hold, míg a másiktól φ foknyira fekszik:

$$\varDelta r = \frac{3}{2} \frac{M'}{M} \left(\frac{r}{E}\right)^3 r \sin^2\varphi,$$

hol $\frac{M'}{M} = \frac{1}{80}$ a Hold tömege a Föld tömegének egységeiben klfejezve, $\frac{E}{r}$ a Hold távolsága földsugarakban kifejezve. Az ismeretes értékek behelyettesítése után

$$\varDelta r = 0{,}552 \sin^2\varphi \text{ (meter)}.$$

Azon gömbi háromszögben, mely a Hold, a megfigyelési hely zenithje és az északi pólus között szerkeszthető, φ a Hold távolsága a megfigyelő zenithjétől; a többi két oldal a hely geographiai szélességének és a Hold declinatiójának 90°-ra való kiegészítője. A φ oldallal szemközt fekvő szög a Hold óraszöge a megfigyelési meridiánra vonatkozólag. Ennélfogva

$$\cos\varphi = \sin\beta\sin\delta + \cos\beta\cos\delta\cos t.$$

Ebből $\sin^2\varphi$ kiszámítható, és könnyen látnivaló, hogy a 14 napi periodusnak azaz $\cos 2\delta$-nak factora $\frac{1}{4}$ lesz. A 14 napos periodusban a víz emelkedése tehát körülbelül 0,138 meter lesz.

Gondoljuk most, hogy a Föld belsejében akár szabálytalan üreg van, melynek radiusvectora azon hely irányában, melynek zenithjében a Hold áll, r_0 legyen. E helyen tehát a földkéreg vastagsága $r-r_0$. Az üreg maga tetszésszerinti folyékony vagy gáznemű anyaggal lehet kitöltve.

A Hold irányában, jelenleg tehát a földsugár irányában is, bontsuk fel a kérget 1 mm² keresztmetszetű prizmákra; ezek egyikének tömege

$$m = 0{,}0001\, r\left(1-\frac{r_0}{r}\right) s \text{ kg.}$$

ha r = 63.700,000 dm és s a kéreg közepes sűrűsége. Ez ugyan ismét $r-r_0$ függvénye gyanánt állítható elő. A Roche-féle törvény értelmében ugyanis a sűrűség ρ távolságban a Föld középpontjától (ha egységül a földsugarat választjuk)

$$s = S(1-a\rho^2); \quad S = 10{,}10, \quad a = 0{,}764.$$

a miből r_0 és r között a középsűrűség könnyen kiszámítható. Itt azonban teljesen elegendő, ha ennek valamely állandó 2,8 és 5,5 között fekvő értéket adunk, a mi a képleteket egynemiségükben meghagyja.

Az erő, melylyel a Hold jobban vonzza egy ilyen oszlop tetejét mint alját

$$f\frac{M'}{(E-r)^2} - f\frac{M'}{(E-r_0)^2} = 2f\frac{M'}{E^3}(r-r_0),$$

ha magasabbrendű tagoktól eltekintünk, s ez egyszersmind az oszlopot a Hold irányában nyujtó erő, ha az oszlop tömege m = 1 volna. A valódi nyujtó erő tehát, ha még a földfelületi nehézségi gyorsulást egyszerüen

$$g = f\frac{M}{r^2}$$

alakban írjuk:

$$p = 0{,}0002\, g\,\frac{M'}{M}\,\frac{r^3}{E^3}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^2 rs,$$

hol mint előbb $\frac{r}{E} = \frac{1}{60}$, $\frac{M'}{M} = \frac{1}{80}$ és r decimeterekben fejezendő ki.

Ezen erővel arányos az oszlop hosszegységének megnyulása, úgy hogy

$$\frac{\varDelta r}{r-r_0}\varepsilon=p,$$

hol ε a rugalmassági modulust és $\varDelta r$ a prizma megnyulását jelenti. All ennélfogva az egyenlet:

$$\varDelta r=0{,}0002 g\frac{M'}{M}\left(\frac{r}{E}\right)^3\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^3 r^2\frac{s}{\varepsilon}$$

vagy kiszámítva:

$$\varDelta r=46050\frac{s}{\varepsilon}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^3 \text{(meter)}.$$

E kifejezésben $1-\frac{r_0}{r}$ a földkéreg vastagsága a sugár részeiben kifejezve. Ha tehát a Föld elasticitási modulusa akkora volna, mint az öntött aczélé ($\varepsilon=20{,}000$ kb), akkor

$$\varDelta r=6{,}9\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^3 \text{meter}$$

lenne, a miből máris következik, hogy a kéreg vastagsága aránylag kicsiny, legfölebb $1/2$ lehetne. Ha ellenben a kéreg vastagsága 0,1 volna, akkor a deformatió már csak 7 mm-t tesz ki.

A felírt egyenlethez mindenesetre sok szó fér. Először kifogás alá esik hogy itt is az egyensúlyi elméletre támaszkodtunk, holott ez tudomásunk szerint a tengerjárási jelenségekben rossz vagy csak durván közelítő értékeket ad. Az eljárás mindazonáltal menthető, mert a lefolyás periodusa oly hosszú, ellentétben a félnap alatt visszatérő árhullámhoz, hogy a deformatióhullám csak nagyon lassan vándorol a Föld körül. A dynamikai hatás csak jelentéktelenül lehet nagyobb, mint a statikai alapon kiszámított emelkedés. Nagyobb aggodalomra adhat okot, hogy egyenletünk csak azon földoszlopnak adja megnyulását, mely számára a Hold a zenithben áll. Nagyobb zenithtávolsággal biró kéregrészecskék deformatiója természetesen a zenithtávolság cosinusának négyzete szerint kisebb. Mivel az egyes oszlopok a Föld merevségének mértéke szerint összefüggnek, a távolabbiak mindenesetre akadályozzák a szabad terjedést, úgy hogy a tényleges deformatió mindenesetre kisebb, mint a képletből számított «árhullám». A két ellenkező hatású befolyás mindenesetre kisebbíti az elkövetett hibát, melytől első közelítésben bátran el is tekinthetünk.

Egyenletünkből könnyen eliminálható az $\frac{\varepsilon}{s}$ quotiens, ha figyelmünket a földkéreg egy másik rugalmas megnyilatkozására fordítjuk. Valamely földrengési lökés terjedési sebessége ugyanis

$$c^2 = g\,\frac{\varepsilon}{s}$$

képlet által adott, melyet már Newton állított fel. A behelyettesítésnél természetesen tekintetbe kellene venni, hogy $\frac{\varepsilon}{s}$ az egyik, úgy mint a másik esetben a kéreg különböző mélységeiben fekvő pontjaira vonatkozik. Noha e körülményt szigorúan lehetne aránylag kis fáradsággal számbavenni, mégis eltekintek tőle e helyen. A behelyettesítés eredménye

$$c^2 \Delta r = 451{,}800 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^3.$$

Ha tehát valamely helyen a földkéreg valamely lökést 500 $\frac{m}{\text{sec}}$ sebességgel közvetít, mint ezt a granitostalaj tenné, akkor a Hold okozta zenithális deformatió

$$\Delta r = 1{,}8 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^3 \text{ meter},$$

úgy, hogy $\Delta r = 225$ mm, illetve 2 mm a szerint, a mint a kéreg vastagsága a földsugár felével, vagy tizedével egyenlő.

A félhavi árhullám kimaradása feljogosít arra, hogy magasságát a víz emelkedésének negyedrészével azonosítsuk; téve tehát $\Delta r = 0{,}138$ m-t, nyerjük végre a következő egyenletet:

$$c = 1809 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\text{meter}}{\text{sec}}\right),$$

mely kapcsolatot létesít a földrengés terjedési sebessége és a földkéregnek ezen helyen való vastagsága között. A földrengés maximális terjedési sebessége ezen egyenlet szerint 1800 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$; hogy némely helyen ezen értéknél nagyobb értékeket vezettek le, tévedés, a mennyiben a rendesen alkalmazott elmélet csak egyenes sugarakban terjedő lökésekről tud. A szigorúbb kutatás azonban általában is görbült földrengési sugarakat mutat ki, s ezekben a terjedési sebesség mindig lényegesebben kisebb, mint azon számadatok, melyek egyszerűen a befutott út s az idő elosztásával jönnek létre.

Az Amt Gehreni, a St.-Goari, a Basilicatai nagy földrengések számára volt sorban $c = 742$, 567, 260 meter. E szerint e helyeken a földkéreg vastagsága sorban $1 - \frac{r_0}{r} = 0{,}55$; 0,46; 0,27 földsugárnyira tehető. Megjegyzem, hogy ezen számadatok nagyságrendje teljesen összevág ama szamítások eredményeivel, melyeket más kutatók szilárdsagtani vagy más alapon levezettek.

Mindenesetre érdekes, hogy a földrengések egészen keresetlenül összefüggésbe hozhatók a Föld testének deformatióival, úgy hogy indokolt a remény, hogy az egyik jelenség-csoport tanulmányozása a másikat is fogja előbbrevinni és mindkettő némi betekintést enged a földkéreg szerkezetébe.

Kövesligethy Radó.

A Mathematikai és Physikai Társulat ötödik rendes közgyűlése.

A f. é. április 3-ára, virágvasárnapra hirdetett közgyűlés mintegy negyven társulati tagot egyesített már a korai délelőtti órákban az egyetemi physikai intézetben. Számos tagtárs messze vidékről jött, azzal is tetézvén áldozatkészségét, hogy husvéti szünidejének első részét társulati ügyeknek szentelte.

A választmány határozata értelmében ezúttal nem hirdettünk előadásokat, hanem gondoskodás történt arról, hogy az ülés kapcsán nehány fontosabb s ujabb időben közérdekűvé vált kisérlet bemutattassék. A két főiskola physikai szertárain kívül különösen lekötötte az érdeklődők figyelmét az egyetemi physikai intézetben bemutatott stereoskop (kromskop), a bolometer és a nagyobb távolságról eszközölt sodrony nélküli Marconi féle telegrafozás, a műegyetemi physikai intézetben a Schuller Alajos tanár úr által bemutatott Linde-féle készülék a levegő folyósítására, a vacuum csövekben mutatkozó rétegzett fényjelenség és a Röntgen-fotografozás. Különös érdeklődést keltett a nagy mennyiségben előállított folyós levegő, annak absorptióspektruma s általában az összes ezzel végzett kisérletek. Őszinte örömmel és megelégedéssel hallottuk, hogy vidéki tagtársaink épen nem bánták meg megjelenésüket.

A közgyűlés közben és különösen annak befejezése után látott kisérletek és ujabb berendezések annyira foglalták le tagtársainkat, hogy a műegyetem új integrographjának szintén tervbe vett megtekintése ezúttal elmaradt.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

Dr. báró Eötvös Loránd elnök a közgyűlést a következő szavakkal nyitja meg:

Tisztelt mathematikai és physikai társulat!

Közgyűlésünknek két feladata van. Az egyik az, hogy alapszabályainknak eleget téve évről-évre elintézzük a mi társulati ügyeinket. A másik az, hogy alkalmat nyujtsunk az évben legalább egyszer azon társainknak, kik elfoglaltságuk által rendes összejöveteleinken meg nem jelenhetnek, alkalmat nyujtsunk legalább egyszer az évben arra, hogy közöttünk megjelenve velünk kezet szorítsanak és újra egyesüljenek velünk.

A társulati ügyek elintézéséről gondoskodtunk gyűlésünk napirendjében. Az ügyvivő titkár és pénztárnok el fogja mondani, a mi a társulatot érdekli.

Nekem csak az a kedves feladat jutott, hogy azokat a kedves társainkat, kik a mi meghivásunkra megjelenni sziveskedtek, — üdvözöljem és örömemnek adjak kifejezést, hogy ilyen szép számmal megjelentek, nem rettenve vissza az úti fáradalmaktól.

Azon leszünk, hogy örömet szerezzünk nekik; azon leszünk, hogy egyet-mást mutassunk is, és remélem, hogy ittlétük hirét elviszik vidékre, hogy a társulati összetartást a jövőre is megerősítsék. Fogadják a mi meleg üdvözletünket.

A mi társulatunk ügyeinek elintézésére térve át, mindenekelőtt a mai ülés jegyzőkönyvének hitelesítésére felkérem Fényes Dezső és Szabó József társainkat és átadom a szót a titkár úrnak, hogy jelentését megtegye.

Az élénk éljenzéssel fogadott megnyitó után következett a gyűlés napirendjének második pontja:

2. Titkári jelentés, Kövesligethy Radótól.

Midőn hivatalos kiküldetésem alatt, mely akkor a fővárostól távol tartott, meghozták a hírt, hogy a Mathematikai és Physikai Társulatnak mult évi közgyűlése engem volt kegyes kitüntetni bizalmával, ügyvivő titkárjának választván meg, valóban nem gondoltam, hogy ezt a kitüntetést ma oly meleg hangon, oly meleg, *igazán őszinte* hangon fogom tudni megköszönni.

Kitüntetésnek akkor is éreztem, bár számos gratulátio áldozatról szólt. No de hála vizsgálati szabályzatainknak, mindnyájan nem csupán physikusok és mathematikusok vagyunk, hanem kis mértékben legalább philosophusok is. Ezen utóbbi minőségben — melynek leple alatt nem is félek annyira a tisztelt közgyűlés censusától — hadd mondjam el azt a kis reminiscentiát, melyet mathematikus- és physikusnak elmondania nem volna szabad.

A Természettudományi Társulat cyclusos előadásainak valamelyikén egyik *igen komoly* tudósunk elég kegyetlen biologiai kisérletet mutatott be. Kis egérkét zárt a légszivattyú recipiensébe és működésbe hozta apparatusát. Már-már megfeledkezni látszott előadása közben a szegény állatkáról...: bebocsájtotta a légtartóba az éltető elemet, a megpróbáltatott áldozat talán még ma is él.

Azzal a tudattal vettem át Társulatunk ügyvivő titkárságát, hogy az nem formaságokon alapul, hanem ugyanazzal a szeretettel gyökerezik szivünkben, melylyel maga a két tudomány, melyet czímébe irt. E Társulat ez okon elpusztíthatatlan; de azért tán nem haragszik senki sem, hogy ezen theoretikus következtetésnek igazolását experimentumban is voltunk bátrak bemutatni.

És volt ennek az experimentumnak még egy jó oldala: Társulatunk czéljai közé tartozik, mint ezt alapszabályaink nyomán az első közgyűlés titkári jelentése is hangsúlyozza, időhöz nem kötött kiadványok közzététele. Ezen czélnak eddig nem tehettünk eleget; a mult év meghozta azonban ezen czél megvalósítását is és legalább megadta kezdetét.

Lapunknak egyelőre elmaradt VI. 1897-iki évfolyamára gondolok, melynek azonban első két füzetét mintegy 9 ív terjedelemben a legközelebbi napokban viszi szét a posta, s melynek harmadik physikai tartalmú füzete körülbelül 4—5 ív terjedelemben szintén annyira készen áll, hogy közvetlenül a husvéti szünet után osztható szét.

Lapunk physikai részének szerkesztője végtelen kevés kézirattal kezdte meg működését és hogy legalább a jelenleg folyó évfolyam első füzete biztosítva legyen, — nem ismerve még munkatársai szorgalmát és csak a mult képét látva maga előtt — maga ült le, hogy ezen füzetet egymaga irja meg. Mi sem dicséri annyira igen tisztelt munkatársainkat, s mi sem tünteti fel jobban a szerkesztő alapos, de örvendetes tévedését, mint ama kijelentése, hogy saját czikkeit még sokáig, de nagyon sokáig nem hozhatja, — kézirathalmazat miatt.

A mult évi októberben tartottunk igen tisztelt Elnökünknél az elmaradt évfolyam ügyében bizalmas szerkesztői értekezletet. Kézirat hiányában és mégis telve vágygyal, hogy a megesett mulasztást minél előbb pótolhassuk, alig határozhattunk egyebet, minthogy kiválóbb czikkek fordítását hozzuk, még pedig oly módon, hogy a mulasztás a rendesen megjelenő 1898-iki lap mellett f. évi április vagy májusban helyreüttessék. Az 1897. november 18-iki választmányi ülés ezt egyhangulag tudomásul is vette.

Az időközben mindsűrűbben befolyó kéziratok alapján már-már foganatosítottuk volna szándokunkat, midőn a Társulat vezetői, beható megfontolás után jobbat terveztek.

Kétségtelen ugyanis, hogy Lapunk pótlandó évfolyama a szerkesztők legjobb igyekvése mellett is csak elkésett ujság lehet. Nem volna-e tehát jobb, ha már fordításra szorúlunk, csupán klassikus értekezéseket nyujtani magyar nyelven? Ezek talán nemcsak tagtarsaink körében tetszenének és olvastatnak, hanem tetemesebb mértékben terjedhetnének és adósságunk lerovása *után* képezhetnék az időhez nem kötött kiadványok sorozatát, mely egyszersmind — a mennyire most látjuk — a leghathatósabb eszköz a Nagyméltóságu Vallás- és Közoktatásügyi minister úr támogatásának kikérésére, melyre oly nagyon szükségünk van.

E szép tervet annyi tagtársunk — vidéki tagtársunk is — helyeselte, hogy nem haboztunk Lapunk ez évi első két füzetében a «Társulati mondanivalók» czíme alatt bemutatni. A harmadik füzet ezen tervet már a választmányi ülésnek 1898. február 17-iki határozata alakjában jelzi.

E választmányi ülés lelkiismeretes eljárásában gyönyörü bizonyítékát látom Társulatunk erősségének.

Határozata folytán számos kézirat, mely eredetileg a VI. kötetnek volt szánva, felszabadult, s a most mindsűrűbben, vidékről is érkező s különösen kiemelem, kisérleti tárgyú értekezés annyira halmozódik, hogy Lapunkban fennakadás a jövőben nem is képzelhető. Midőn ezen páratlan szorgalomért tisztelt munkatársainknak köszönetet mondok, megkérném őket arra is, ne nehezteljenek, hogy a füzetnek szükségképen korlátozott terjedelme folytán egyes czikkek későbben látnak napvilágot, mint kivánatos volna.

Az 1897-iki VI. évfolyamból megjelent eddig és néhány nap multán szétküldhető:

Klein Felix: *Összehasonlító elmélkedések ujabb geometriai kutatásokról.* Fordította: Kopp Lajos.

Gauss: *A felületek általános elmélete.* Fordította: Szijártó Miklós.

Sadi Carnot: *Elmélkedés a tüz mozgató ereje s a gépek felett.* Fordította: Lukáts László.

Nyomdában van s a rajzok elkészülte után rövidesen expediálható Bólyai János Appendixe, melyet Rados Ignácz fordított.

Azonkívül készül, s a fordítók már nem sokára sajtó alá adhatják: Gauss: Intensitas vis magneticæ, fordítja: Tangl Károly, Helmholtz: Az energia megmaradásáról, fordítja: Szekeres Kálmán és Cayley, Upon Quantics czímű tanulmányaiból a VI. értekezés.

Ezen értekezésekkel az alapszabályilag egy évfolyam számára követelt terjedelem ki van merítve.

E füzetek — miként ezt Lapunk három utolsó számában mondtuk — kettős czímet és borítékot nyernek, a mennyiben egyrészt VI. kötetünk egy-egy alkotó részét teszik, másrészt pedig önálló munka gyanánt is szerepelhetnek. Ezen kötet, minthogy arra számítunk, hogy tagtársaink körén túl is terjed, 660 példányban jelenik meg, míg Lapunk jelenlegi példányszáma 100-zal kevesebb.

A IV. mathematikai tanulóversenyt most is szép sikerrel tartottuk meg mult évi október 23-ikán; eredményét a november 18-iki első szünidő utáni rendes ülésen hirdettük ki. Csak ismétlése lenne a februáriusi füzetben közlötteknek, ha lefolyásáról szólnék; elég lesz megemlítenem, hogy öszszesen 69 jelentkező közül 42-en pályáztak. Az első dijat elnyerte Friedmann Bernát, a sátoraljaujhelyi gymnasium és Hidegh Mihály tanár növendéke, a másodikat Weisz Lipót, a pécsi főreáliskola és megboldogult Maksay Zsigmond, majd Hekkinger István tanár növendéke. Herusch Artur pedig dicséretben részesült.

1892-ben indultak meg az előmunkálatok a Pallas Nagy Lexikon kiadására. Társulatunk benne élénken részt vett; megállapította bizottságilag a mathematika, physika, astronomia és meteorologia vocabulariumát; külön szerkesztő és revisió bizottságot alakított, mely mintegy 20 ülésben kiosztotta megirás végett a legalkalmasabb erőknek a czikkeket, a beérkezetteket pedig átnézte és lehetőleg homogénné tette. Mindenesetre nagy elégtételünkre szolgál, hogy dr. Bokor József, a nagy munka főszerkesztője a legnagyobb dicsérettel szól a Mathematikai és Physikai Társulat közreműködéséről, különösen kiemelve önzetlenségét, munkakedvét, állhatatosságát és pontosságát.

A lexikon megirásában a Társulatnak 25 tagja vett részt, s ezek az egész mathematikára, physikára, astronomiára, chronologiára és meteorologiára kiterjedőleg az előre kijelölt 52 ivnél jóval többet vettek igénybe.

Az elmult évben a már megszokott számu választmányi és rendes ülést tartottuk. Amazok ezuttal majdnem kizárólag csak társulati ügyekkel foglalkoztak, emezekben pedig alig számbavehető kivétellel mathematikai és physikai tárgyak együttesen szerepeltek. Az egyik deczemberi ülés különösen örvendetes jelt adott: az egyik véletlenül elmaradt előadás helyett nem kevesebb, mint öt előadó mulatatta az ülést rövid előterjesztéssel. Bár ezt az összejövetelt általánosan élvezetesnek tartották, a rövid, különösen a rövid *kisérleti* előadások nem tudtak még lábra kapni. Az ülések kielégítő módon látogatottak s látni, hogy kellemes találkozója a szaktársaknak.

Társulatunknak van jelenleg 410 rendes tagja, ezek közül 5 hölgytagja, alapítótag 13. Ezek után begyül évenkint 1550 frt tagsági dij. Mi sem bizonyítja jobban Társulatunk életképességét, vagy szerényebben kifejezve szükségességét, minthogy a pénztáros úr legszelidebb felkérésére, mely ezuttal a viszonyok folytán szükségessé vált, 1000 frtnyi hátralékos tagdij folyt be.

Ezen tetemes összeg azonban még korántsem fedezné a Társulat szükségleteit s ezért rendkívüli hálára vagyunk kötelezve a magyar Tudományos Akadémiának, a mely a Társulatot évi 1000 frttal segélyezi. Még így sem kiméltetünk meg az anyagi gondoktól és a jövőre nézve mindenesetre uj segélyforrásokat kell keresnünk. Ezekül kinálkozik legtermészetesebben, — mielőtt kérésre fognók a dolgot — uj előfizetők gyüjtése. Hiszen mindenesetre szomorú, hogy Lapunknak, mely utóbb is, bár közvetve a tanügyet is szolgáltatja, mindössze 52 előfizetője van, holott az országban van legalább 120 intézet, melynek könyvtárából Lapunknak hiányzania nem volna szabad. Nagyon kérem igen tisztelt Tagtársainkat, hogy hatáskörükben ezen a bajon is segíteni segítsenek.

Bármily kevés tagot is egyesítsen magában társaság, egy év elég idő arra, hogy veszteségektől megóva ne maradjon. Mi is siratjuk elvesztét 9 kedves tagtársunknak.

Végül kedves kötelessége marad a Titkárságnak hálát mondania, munkatársainknak, kik bámulatos szorgalommal tették lehetségessé, hogy a jelen évfolyam rendesen megjelenjék, az eddigi mulasztás gyorsan pótoltassék és további megszakításoktól félni ne kelljen. E hálánk őszinte kifejezéséhez azonban kérelem is csatlakozik, mely természetesen leginkább fővárosi Tagtársainknak szól: Míg ugyanis kéziratokban bővelkedünk, addig physikai tárgyu előadásokban nagy a hiány. Elismerem a kisérletezés nehézségét a két egyetemi intézet falain kívül, de arról is meg vagyok győződve, hogy számos szaktársam, a ki a Társulatot kellő időben a legszelidebb felkérésre meg tudta menteni, ezen a bajon is segíthet.

Engedje meg, tisztelt közgyülés, hogy jelentésemet subjektiv tárgyú megjegyzéssel rekesszem be.

Szívszorongva vettem át a közgyülés bizalmából rám hárult titkárságot, kizárólag a Társulatot dicséri, ha már egy év eltelte előtt őszintén kijelenthetem, hogy a Mathematikai és Physikai Társulat titkárjának lenni kitüntetés és szerencse.

*

A napirend 3. és 4. pontja a választmányi és a közgyülés által kiküldött pénztárvizsgálók jelentése és az 1898-iki költségelőirányzat bemutatása.

BEVÉTEL — *3. 1897. évi zárszámadás.* — KIADÁS

BEVÉTEL				
Mult évi készpénzmaradvány			312	74
Rendes tagdijakból befolyt			715	—
A m. tud. akadémia segélye			1000	—
Majthényi alap kamatai: és pedig 1895	146	—		
1896	200	—		
1897	200	—	546	—
Vegyes bevételek			1	30
Előfizetési dijak			11	—
			2586	04

KIADÁS				
Irói tiszteletdijak			304	93
A math. és phys. lapok nyomdai költségeire			700	—
Irodai költségek			59	—
Vegyes kiadások			9	23
Math. tanuló verseny költségei			80	02
Pénztári maradv. *a)* készpénzben	532	86		
b) takarékp. betétben	900	—	1432	86
			2586	04

VAGYON — *Vagyon-mérleg.* — TEHER

VAGYON				
Készpénz			532	86
Takarékpénztári betét:				
a) alaptőke-alapitványok	1060	—		
b) forgó tőke-pénztári maradvány	900	—	1960	—
1 drb 100 koronás járadékkötvény			50	—
Majthényi alap			5000	—
Tagdijhátralékok			2028	—
			9570	86

TEHER				
Franklin-társulat követelése			1181	43
1897. évi füzetek nyomdai költsége			1200	—
« « « szerkesztői t. dija			480	—
« « « irói tiszt. dija			599	43
Tiszta vagyon			6110	—
			9570	86

Budapest, 1898. április 13.

Feichtinger Győző
pénztárnok.

A számadásokat megvizsgáltuk és azokat helyeseknek találtuk.

Müller József s. k. *Balog Mór* s. k.

BEVÉTEL — 4. *1898. évi költségelőirányzat.* — KIADÁS

1897. évi zárszámadási maradvány			1432	86	Nyomdai költségek:				
Tagdijak:					*a)* Franklin-társ. követelése	1181	43		
a) hátralékos tagdijak	2028	—			*b)* 1897. évi füzetek nyomdai költ-				
b) f. é. tagdijak	1307	—	3335	—	sége	1200	—		
A m. tud. akadémia segélye			1000	—	*c)* 1898. évi füzetek nyomdai költ-				
Hirdetési dijak			80	—	sége	1200	—	3581	43
Kamatok:					Irói tiszteletdijak:				
a) az alaptőke mult évi kamatai	70	34			*a)* 1897. évi füzetek szerkesztési				
b) az alaptőke f. é. kamatai	44	40			költsége	480	—		
c) a Majthenyi-alap kamatai	200	—			*b)* 1897. évi füzetek szerzői tiszt.				
d) időközi kamatok	14	26	329	—	dijai	599	43		
Előfizetési dijak			140	—	*c)* 1898. évi füzetek szerk. költsége	480	—		
					d) 1898. évi füzetek szerzői tiszt.				
					dijai	600	—	2159	43
					Kisebb nyomtatványok:				
					a) az előadásokra sz. meghivók	80	—		
					b) külön lenyomatok	75	—		
					c) adminisztrativ nyomtatványok	55	—	210	—
					Expeditió költségei:				
					a) postai szállitás költségei	72	—		
					b) apró kiadások	8	—		
					c) szolgák jutalmazása	24	—		
					d) segédlet	30	—	134	—
					Irodai költségek:				
					a) pénztárnok tiszteletdija	50	—		
					b) a tagdijbehajtás költségei	100	—	150	—
					Math. tanuló-verseny költségei			82	—
			6316	86				6316	86

A f. é. számadások megvizsgálására a közgyülés ujra Balog Mór, Bogyó Samu és Müller József urakat kérte fel.

5. Választmányi Tagok választása.

Az alapszabályok 20. §-ának rendelkezései szerint a választmány egy harmada, még pedig a legrégebben választott négy tag lép ki. Ezek: Fröhlich Izidor; Klupathy Jenő; Mauritz Rezső; Tőtössy Béla. A választmány ugyanőket ajánlja s a beadott 36 szavazat közül esett Fröhlich Izidorra 35; Klupathy Jenőre 36; Mauritz Rezsőre 36 és Tőtössy Bélára 34 szavazat. Szavazatot kapott még Gerevich Emil (2) és Kalecsinszky Sándor (1).

Minthogy Indítványok nem adattak be, a napirend 6-ik pontja magától esett el s a mult közgyűlés jegyzőkönyve hitelesíttetvén Elnök a közgyűlést berekeszti.

Tagdijat fizettek:

1893. évre: Bein Károly.

1895. évre: Gerecz Lajos, Grünwald István, Medreczky István.

1896. évre: Benda Jenő, Heller Ágost, Kovács István, Láng Emil, Róna Zsigmond.

1897. évre: Antolik Károly, Barabás Jenő, Edvi Illés Aladár, Guta József, Heller Ágost, Javorik János, Karai Sándor, K. Kiss József, Kovács István, Kövi Imre, Láng Emil, Miller Gyula, Möller Árpád, Pető Menyhért, Privorszky Alajos, Róna Zsigmond, Szirtes Ignácz, Waldapfel János dr. Závodszky Adolf.

1898. évre: Butorka Száva dr., Félegyházy Antal, Fölser István, Gotthard Jenő, Karai Sándor, K. Kiss József, Klein Pál, Kovács Ferencz, Kövi Imre, Láng Emil, Lengyel Imre, Lukáts László, Miller Gyula, Pető Menyhért, Privorszky Alajos, Schöndorfer Gyula, Szenessy Mihály, Wagner Alajos dr., Wittmann Ferencz, Závodszky Adolf.

Budapest, 1898 május 10.

Feichtinger Győző
pénztárnok.

DIRICHLET ELVE ÉS WEIERSTRASS MEGJEGYZÉSEI EZ ELVRE.*

A physikában minden lépten nyomon találkozunk olyan problémákkal, melyek mathematikai fogalmazásban ugyanazon osztálybeli parcziáldifferencziálegyenlet olyan megoldását követelik meg, mely bizonyos térrészekben és e térrészek határán feltételeknek felel meg. Csak néhány ilyen problémát hozok fel például.

1. Jó hővezető az ő felszínének különböző darabjain érintkezvén különböző *változatlan* hőmérsékű testekkel, idő elteltével belsejében hőegyensúly áll be. Meghatározandó, hogy ekkor a test különböző pontjaiban milyen törvény szerint oszlik el a hőmérsék. A hőmérséket φ-vel jelölvén, e probléma FOURIER elmélete szerint mathematikai nyelven úgy hangzik, hogy meghatározandó az a φ függvény, mely a jó hővezető elfoglalta térben első deriváltjaival egyetemben folytonos lévén a

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

LAPLACE-féle parcziáldifferencziálegyenlet olyan megoldása legyen, mely a jó vezető határpontjaiban az előírt hőmérsék értékeket veszi föl.

2. Elektromosságot jól vezető testek minden oldalról el lévén szigetelve, rájuk elektromosságot vezetünk. Az elektromosság egyensúlyba jövén, kérdés, mi az elektromos potentiál értéke a szigetelő pontjaiban.

---

* Előadva a Math. és Phys. Társulat 1898 január 20-ikán tartott rendes ülésén.

E probléma mathematikai fogalmazásában meghatározandó az a φ potentiálfüggvény, mely a szigetelő elfoglalta térben első deriváltjaival egyetemben folytonos lévén olyan megoldása a LAPLACE-féle imént fölirt egyenletnek, mely a vezetők felszínén egy-egy állandó értéket és a végtelenben zérus értéket vesz föl.

Az 1. és 2. problémák physikai tekintetben teljesen különbözők; ellenben mathematikai tekintetben a 2. mint specziáleset foglaltatik benne az 1. problémában.

3. Egy edény folyadékkal lévén megtöltve, ebben szilárd testek adott törvény szerint mozognak; föltéve, hogy a folyadék mozgása örvénytelen, kérdés hogy mi a törvénye.

Ebben BJERKNESS pulzáló gömbjeinek hires problémája is bennfoglaltatik.

A probléma mathematikai fogalmazásban így hangzik: Keresendő egy φ függvény, mely a folyadék megtöltötte térben a LAPLACE-féle egyenlet megoldása, ugyanott első deriváltjaival egyetemben folytonos, és a folyadék külső és belső határain annak a föltételnek felel meg, hogy $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ vagy szóval a határelem normálisa irányában a φ differencziálhányadosa mindenütt egyenlő legyen a *szilárd* határelem *adott* sebesség komponensével.

4. Végtelenbe nyuló edényből nyiláson át folyadék áramlik nyugvó vele egyenlő fajsúlyú folyadékba, pl. víz csövön át tóba. Föltéve, hogy az edény alakja adva van, és a mozgás nem örvénylő de staczionär, kérdezem, milyen a folyadéksugár alakja, mi általánosan a sebesség a folyadékban pontról pontra.

Ebben áll HELMHOLTZ és KIRCHHOFF híres folyadék sugár-problémája.

Mathematikai fogalmazásban e probléma csak annyiban különbözik az előbbitől, hogy most az edény falain $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$, míg a nyiláson kiáramló folyadéksugár felszinén

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=1.$$

Ha továbbá az edényből kijövő folyadék az övétől különböző fajsúlyú nyugvó folyadékba áramlik, akkor a probléma mathematikai fogalmazása csak annyiban módosul, hogy a folyadéksugár felszínén

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=\gamma z+c,$$

hol γ és c állandók, a z pedig a folyadékpont mélységének mérőszáma.

Csak olyan problémákra szoritkoztunk, a hol a testek állapota staczionär és a hol a mathematikai fogalmazás LAPLACE-féle egyenletre vezet. Ha ezekben a problémákban a physikai körülményeket olykép módosítjuk, hogy a testek állapota változó legyen, akkor a mathematikai fogalmazás is csak annyiban módosul, hogy a LAPLACE-féle kifejezéshez egy az idő szerint vett differencziálhányadost tartalmazó tag is járul.

Mindezen nagy fontosságú problémáknál első sorban az a kérdés merül föl, hogy a mathematikai fogalmazásban meghatározandónak mondott függvény egyáltalán *létezik-e*. GREEN, a ki az 1. és a 2. alatt részletezett mathematikai problémákkal legelőször foglalkozott a maguk teljes általánosságukban,* a megoldás létezését a staczionárius állapot physikai létezéséből következtette. Ez a következtetés azonban nem elégit ki; mert mathematikai igazság bebizonyitásánál más mint mathematikai segédeszközök alkalmazását nem engedhetünk meg. Ilyen alapon nyugvó elég egyszerű bizonyítást legelőbb GAUSS,** később még egyszerűbbet DIRICHLET adott. Főleg ez utóbbi bizonyítás oly közismeretessé vált és az alapjául szolgáló elv oly nevezetesnek és szépnek látszott, hogy az DIRICHLET elvének és magát a problémát is DIRICHLET problémájának nevezték el.

Annál nagyobb volt a meglepetés a mathematikai világban, a midőn WEIERSTRASS, a szigorú bizonyitásmód e nagy mestere, a

* Ein Versuch die math. Analysis etc. OTWALD's Klassiker der exacten Wissenschaften. Nr. 61.

** Allgemeine Lehrsätze etc. OSTWALD's Klassiker der exacten Wissenschaften. Nr. 2. Pag. 41.

DIRICHLET elvének hibás voltát kézzel fogható módon demonstrálta. E közlemény czélja WEIERSTRASS kritikáját a következő hű fordításban megismertetni. Abból a czélból teszem ezt, hogy evvel a magyar közönség érdeklődését a tárgyra vonatkozó újabb literatura, főleg C. NEUMANN * és POINCARÉ ** nevezetes vizsgálatai iránt felköltsem.

Az úgynevezett Dirichlet-féle elvről.***

(Fölolvastatott a berlini tudományos Akadémia 1870 jul. 14-iki ülésén.)

A NEWTON törvényt követő erőkről tartott előadásaiban LEJEUNE DIRICHLET a potentiálelmélet egyik főtételének megokolására egy sajátságos következtetésmódot használt, a melyet később má mathematikusok, névszerint RIEMANN is, követtek, és a mely a «Dirichlet-féle elv» név alatt ismeretes.

Ez az «elv» megengedhetőségére nézve azóta nem egy kétely merült föl, melyek, miként a következőkben meg fogom mutatni, teljesen alaposak. Mielőtt azonban erre áttérnék, tekintettel arra, hogy DIRICHLET a szóban levő tárgyról semmit sem tett közzé, DIRICHLET-nek 1856 nyári félévében tartott előadásaiból DEDEKIND úrtól készített gondos jegyzetek után a következő helyet akarom közölni, a melyből teljes határozottsággal következik, hogy DIRICHLET mit vélt és hogy bizonyítása módját miként kisérlé meg igazolni:

«Adva lévén valamely véges felület, tömeggel mindig lehet, de csak egyféleképen, úgy megrakni, hogy a potentiálnak a felület mindenik pontjában egy tetszés szerint előirt (folytonosság szerint változó) értéke legyen.»

«Ennek bebizonyítására a következő tételt bocsátjuk előre»:

---

* Über die Methode des arithmetischen Mittels. Sitzungsberichte der sächsischen gelehrten Gesellschaft 1884.

** American Journal of Mathematics. Vol. XII. Pag. 211; Acta Mathematica. Vol. 20. Pag. 59.

*** WEIERSTRASS összes munkáinak 1895-ben megjelent II. kötetéből.

«Adva lévén valamely összefüggő t tér, mindig létezik egy, de csakis egyetlen egy w függvény, mely első deriváltjaival egyetemben t-ben mindenütt folytonosan változik, a t határán tetszés szerint előírt (folytonosan változó) értékeket vesz föl és a t-n belől mindenütt a

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$$

egyenletnek eleget tesz. Ez a tétel voltaképen azonos egy hőelméletivel, a mely ott mindenkinek közvetetlenül evidensnek tünik fel, hogy tudniillik a t határai állandóan bizonyos tetszés szerint előírt hőmérsékeken tartatván, mindig létezik egy, de csakis egyetlen egy hőmérsékelosztódás a t belsejében, a mely mellett hőegyensúly áll fönn; a mit úgy is lehet mondani, hogy ha az eredeti hőmérsék a tér belsejében akármilyen volt is, az egy meghatározott végsőállapothoz közeledik, a melynél egyensúly állna fönn.»

«Tisztán mathematikai evidencziából kiindulva bizonyítjuk be a tételt. Tényleg világos, hogy az összes u függvények között, a melyek első deriváltjaikkal egyetemben a t belsejében mindenütt folytonosan változnak és a t határain az előírt értékeket felveszik, kell lenni egynek (vagy többnek), a melynek esetén az egész t térre kiterjesztett

$$U=\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dt$$

integrál értéke a *legkisebb* lesz. Egy ilyen függvényt jelöljünk épen u-val, és az integrál minimumát U-val. Legyen u' valamely másik függvény, mely ugyanazokat a határ- és folytonosság követelményeket teljesíti, mint az u, és U' az integrál megfelelő értéke, akkor $U'-U$ semmikép sem lehet negativ. Téve tehát

$$u+hw=u',$$

hol h határozatlan állandó szorzót jelöl, a w egy olyan függveny, mely ép úgy folytonos mint az u és az u' és mely a t határán mindenütt egyenlő zérussal, különben pedig egészen tetszésszerű. Azután könnyen kiadódik

$$U'-U=2hM+h^2N,$$

hol

$$M=\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right)dt,$$

$$N=\int\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right)dt.$$

Részenkint való egészelés révén, tekintettel a w-re vonatkozó határ- és folytonossági föltételekre és az u első deriváltjaira vonatkozó folytonossági föltételekre, könnyen kiadódik

$$M=-\int w\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dt.$$

Miután már mostan $U'-U$ soha bármilyen kicsiny h esetén se lehet negativ, és az N véges positiv mennyiség, tehát az M szükségképen zérus; és miután ennek így kell lenni, bármilyen legyen is w, azt a következtetést kell vonnunk, hogy a t téren belül (legföljebb egyes felületek, vonalak és pontok kivételével) mindenütt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0;$$

mert ha ez a trinom a tér valamely darabjában zérustól különbözném, akkor mindenütt csak a trinommal egyenlő előjelűnek kellene fölvenni a w-t, és az M számára zérustól különböző értéket kapnánk.»

«Van tehát mindenesetre egy olyan u függvény, a mely a megkövetelt határ- és folytonossági föltételeket teljesíti és a parcziális differencziálegyenletet megoldja. De csakis *egyetlen egy* ilyen u függvény létezik. Mert ha $u'=u+w$ valamely más függvény, mely ugyanazokat a határ- és folytonossági föltételeket teljesíti, akkor a hozzá tartozó integrál

$$U'=U+\int\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)dt,$$

minélfogva az U valóban *absolut minimum;* és ha épen $U'=U$ volna, akkor az egész t térben, miként könnyen belátható, szükségkép

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = 0$$

volna. Ebből következnék, hogy w állandó; és miután folytonos és a t határán zérus, tehát mindenütt zérus, azaz u' szükségkép azonos u-val.»

«Később ki fog tűnni, hogy ez az u, a mely a határ- és folytonossági követelményeket teljesíti és a melyről tudjuk, hogy a parcziális differentiálegyenletnek legföljebb egyes pontokban, vonalakban avagy felületekben nem felel meg, annak *mindenütt* azaz minden pontban megfelel, hogy tehát ilyen kivételes helyek előfordulása lehetetlenség.»

Föltéve tehát, hogy a t térre vonatkozólag egyáltalában létezik a megállapitott határ- és folytonossági követelményeknek megfelelő függvény, arra szolgálna e szerint DIRICHLET-nek az előzőkben részletezett eljárása, hogy az x, y, z olyan függvényének létezését kimutassa, mely a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

differencziálegyenletnek és egyszersmind az adott mellékföltételeknek eleget tesz. Az utóbbi mindenik adott esetben könnyen bebizonyítható; az előbbi azonban csak abban az esetben érvényes, ha megmutatható, hogy létezik egy u függvény, mely az

$$\int\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right) dt$$

kifejezés értékét (absolut) minimummá teszi. Ez azonban semmikép se következtethető a DIRICHLET föltevéseiből, hanem csakis annyit állithatni, hogy a szóban levő kifejezés értéke számára létezik egy *alsó határ*, a melyhez akármilyen közel jöhet, annélkül azonban, hogy azt valóban szükségképen el is érje. E szerint DIRICHLET következtetésmódja gyöngének bizonyul.

Végül még egy egyszerű példával akarom az előzőket megvilágítani, a melyből DIRICHLET következtetésmódjának meg nem engedhető volta nyilvánvaló lesz.

Jelöljön ugyanis $\varphi(x)$ a reális x változónak olyan reális egyértékű függvényét, hogy először a $\varphi(x)$ és a $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ az x-nek $(-1 \ldots +1)$ számközében folytonos függvényei legyenek, és hogy másodszor a $\varphi(x)$ a számköznek -1 határán egy megadott a értéket vegyen fel, a $+1$ határán pedig egy megadott b értéket. A mellett a két állandó a és b két egymástól különböző szám legyen. Ha már mostan meg volna engedhető a DIRICHLET-féle következtetésmód, akkor a szóban levő $\varphi(x)$ függvények között kellene lenni egy olyan speciális függvénynek is, a melynek esetén az

$$I = \int_{-1}^{+1} \left(x \frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2 dx$$

integrál értéke egyenlő volna mindazok az értékek alsó határával, melyeket ez az integrál a szóban levő összességhez tartozó különböző $\varphi(x)$ függvények esetén fölvehet.

De az említett alsó határ a jelen esetben szükségképen zérus. Mert téve például

$$\varphi(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}},$$

hol ε tetszés szerint felvehető *positiv* számot jelöl, ez a függvény teljesíti az első két föltételt; és miután

$$I < \int_{-1}^{+1} (x^2+\varepsilon^2) \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2 dx,$$

és

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{b-a}{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2},$$

tehát ezen speciális függvény esetén

$$I < \varepsilon \frac{(b-a)^2}{\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

és így

$$I < \frac{\varepsilon}{2} \frac{(b-a)^2}{\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Ebből világos, hogy az I alsó határának értéke zérus, mert hiszen az ε akármilyen kicsinynek vehető föl, és az I értéke negativ egyáltalában nem lehet.

De ezt a határt nem érheti el az I értéke, bármiként válaszszuk is a $\varphi(x)$ függvényt a fentebbi két követelménynek megfelelők közül. Mert miután a $\varphi(x)$ és $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ az első követelmény szerint az x-nek folytonos függvényei, azért erre nézve szükséges volna, hogy a

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

az x-nek mindenik a $(-1 \ldots +1)$ számközhöz tartozó értékénél zérus legyen, hogy tehát a $\varphi(x)$ állandó legyen. De ez megint nem fér össze avval a megállapodással, hogy az a és a b egymástól különböző értékek.

Tehát a DIRICHLET-féle következtetésmód a jelen példa esetén, nyilvánvaló, hibás eredményre vezet.

Réthy Mór.

AZ EGYÉRTÉKŰ EGÉSZ FÜGGVÉNYEK NEMÉRŐL.

(Harmadik és befejező közlemény.)

VIII. Végtelen sok zérushelyű függvények neméről.

34. Jelentsen

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m+\cdots$$

oly egész függvényt, melyre vonatkozólag

$$\lim_{m=\infty} a_m(m!)^{\frac{1}{\tau}}=0,$$

továbbá legyenek $f(x)$ zérushelyeinek abszolut értékei nagyság szerint rendezve:

$$\rho_1=|\alpha_1|,\ \rho_2=|\alpha_2|,\ \ldots,\ \rho_p=|\alpha_p|,\ \ldots,$$

Az $f(x)$ nemének meghatározásánál az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $|a_0|>0$. Ha ugyanis

$$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{h-1}=0,$$

de $|a_h|>0$, akkor $f(x)$ helyett

$$f(x)x^{-h}=a_h+a_{h+1}x+\cdots+a_{h+m}x^m+\cdots$$

nemét vizsgálhatjuk, mert ez megegyezik $f(x)$ nemével. Ebben a sorban pedig az abszolut tag többé nem tűnik el, továbbá itt is

$$\lim_{m=\infty} a_{h+m}(m!)^{\frac{1}{\tau}}=\lim_{m=\infty} a_{h+m}\{(m+h)!\}^{\frac{1}{\tau}}=0.$$

Erre a sorra tehát közvetetlenül alkalmazhatók a mondandók.

35. Ha

$$\lim_{m=\infty} a_m (m!)^{\frac{1}{\tau}} = 0,$$

akkor (l. a 29. czikkelyt) a

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{a_p^{\tau+\varepsilon}}$$

sor az ε minden pozitiv értékénél feltétlenül összetartó. Tehát ilyen lesz akkor is, midőn $\tau+\varepsilon$ helyébe a τ-nál nagyobb egész számok legkisebbikét teszszük, melyet $(\mu+1)$-gyel fogunk jelölni.

Ennélfogva Weierstrassnak az I. fejezetben *B)* alatt idézett tételének értelmében a

$$\varphi(x) = \prod_{p=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_p}, \mu\right) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_p}\right) e^{\sum_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r} \left(\frac{x}{a_p}\right)^r} \tag{47}$$

szorzat oly μ-ed nemű egész függvénynek tényezőkre bontott alakja, melynek zérushelyei megegyeznek $f(x)$ zérushelyeivel.

Mielőtt ebből következtetést vonnánk magának $f(x)$-nek nemére, $\varphi(x)$-re vonatkozólag a következő tételt fogjuk bebizonyítani:

Ha valamely μ-ednemű $\varphi(x)$ egész függvény

1) pusztán $E\left(\frac{x}{a_p}, \mu\right)$ alakú törzsfüggvények szorzata,

2) zérushelyeinek

$$a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots$$

sorozatához található egy oly μ és $\mu+1$ közé eső τ szám, hogy

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{a_p^{\tau+\varepsilon}}$$

az ε minden pozitiv értékénél feltétlenül összetartó, akkor a kezdőpont körül mint középpont körül mindig leirható a köröknek oly minden határon túl növekedő sorozata, hogy e körök mindegyikén

$$|\varphi(x)| > e^{-|x|^{\tau+\varepsilon}}$$

hol ε egy tetszés szerint választott pozitiv számot jelent.

E körök meghatározásánál abból indulunk ki, hogy

$$\lim_{p=\infty} (\rho_p^{\tau'} - p) = +\infty, \qquad 48$$

ha $\rho_p = |a_p|$ és $\tau' > \tau$. Arra a (bennünket egyedül érdeklő) esetre, midőn $\varphi(x)$ zérushelyei megegyeznek egy oly $f(x)$ zérushelyeivel, melyre vonatkozólag

$$\lim_{m=\infty} a_m (m!)^{\frac{1}{\tau}} = 0,$$

e képletet már 29. czikkelyben bebizonyítottuk. Általános érvényessége pedig szintén könnyen belátható. Ugyanis

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_p^{\tau'}}$$

összetartásából egy ismeretes tétel * szerint az következik, hogy

$$\lim_{p=\infty} \frac{p}{\rho_p^{\tau'}} = 0.$$

Tehát

$$\lim_{p=\infty} \frac{\rho_p^{\tau'}}{p} = +\infty$$

és így valóban

$$\lim_{p=\infty} (\rho_p^{\tau'} - p) = \lim_{p=\infty} p\left(\frac{\rho_p^{\tau'}}{p} - 1\right) = +\infty.$$

---

* E tétel a következő:

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} A$ pozitiv tagú sor összetartó és benne a tagok csökkenőleg vannak rendezve, akkor

$$\lim_{n=\infty} nA_n = 0.$$

Ugyanis összetartó sornál

$$R_{mm} = A_{m+1} + A_{m+2} + \cdots + A_{2m}$$

limese zérus. Ámde esetünkben $R_{mm} > mA_{2m}$. Tehát egyszersmind

$$\lim_{m=\infty} mA_{2m} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{m=\infty} 2mA_{2m} = 0.$$

Továbbá

$$2mA_{2m} + A_{2m+1} > (2m+1)\,A_{2m+1},$$

és innen

$$\lim_{m=\infty} (2m+1)\,A_{2m+1} = 0.$$

A következőkben τ'-t a τ-től igen kevéssé külömbözőnek választjuk, minden esetre k.sebbnek mint $\mu+1$.

A 48) képletnél fogva a

$$\rho_1^{\tau'}-1,\ \rho_2^{\tau'}-2,\ \ldots,\ \rho_p^{\tau'}-p,\ \ldots \tag{49}$$

sorozatban csak véges számú negativ tag lehet. Ha tehát e sorozat elejét elhagyjuk, pusztán pozitiv tagokból álló sorozatot nyerünk. A megmaradt sorozatban kell egy *legkisebb* tagnak lennie abban az értelemben, hogy az minden későbbi tagnál kisebb, az előzők közül pedig legalább egynél sem nagyobb. Legyen e legkisebb tag

$$\rho_{p_0}^{\tau'}-p_0.$$

A

$$\rho_{p_0+1}^{\tau'}-(p_0+1),\ \rho_{p_0+2}^{\tau'}-(p_0+2),\ \ldots$$

sorozatban megint lesz egy legkisebb tag:

$$\rho_{p_1}^{\tau'}-p_1.$$

Az erre következő tagok legkisebbike legyen

$$\rho_{p_2}^{\tau'}-p_2.$$

Stb.

Az így nyert

$$\rho_{p_0}^{\tau'}-p_0,\ \rho_{p_1}^{\tau'}-p_1,\ \rho_{p_2}^{\tau'}-p_2,\ \ldots,\ \rho_{p_\nu}^{\tau'}-p_\nu\ \ldots \tag{50}$$

sorozat minden határon túl növekedik. Továbbá

$$\rho_{p_\nu}^{\tau'}-p_\nu$$

kisebb lévén a 49) alatti sorozat minden későbbi tagjánál, a h-nak minden pozitiv értékénél

$$\rho_{p_\nu+h}^{\tau'}-(p_\nu+h)>\rho_{p_\nu}^{\tau'}-p_\nu,$$

vagyis

$$\rho_{p_\nu+h}^{\tau'}-\rho_{p_\nu}^{\tau'}>h. \tag{51}$$

Irjunk most már a kezdőpont körül mint középpont körül rendre oly

$$R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_\nu,\ \ldots$$

sugarú köröket, hogy

$$R_\nu^{\tau'} - \varrho_{p_\nu}^{\tau'} = \tfrac{1}{2}. \tag{52}$$

Akkor

$$\lim_{\nu=\infty} R_\nu = +\infty ;$$

továbbá be fogjuk bizonyítani, hogy a ν eléggé nagy értékeinél a R_ν sugarú körökön

$$|\varphi(x)| > e^{-|x|^{\tau+\varepsilon}}, \tag{53}$$

ha csak τ'-t a $\tau<\tau'<\tau+\varepsilon$ egyenlőtlenségnek megfelelőleg választottuk.

36. A bebizonyításnál

$$|\varphi(x)| = \prod_{p=1}^{\infty} \left| E\left(\frac{x}{a_p}, \mu\right)\right| \tag{54}$$

tényezőit három osztályba sorozzuk.

A Π_1 első osztályba tartozó tényezőkre vonatkozólag legyen $p \leqq p_\nu$. A p ezen értékeinél

$$\rho_p \leqq \rho_{p_\nu} = \left(R_\nu^{\tau'} - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\tau'}} = R_\nu \left(1 - \frac{1}{2R_\nu^{\tau'}}\right)^{\frac{1}{\tau'}},$$

tehát

$$\frac{R_\nu}{\rho_p} \geqq \left(1 - \frac{1}{2R_\nu^{\tau'}}\right)^{-\frac{1}{\tau'}}.$$

Amde a binomiális sor szerint:

$$\left(1 - \frac{1}{2R_\nu^{\tau'}}\right)^{-\frac{1}{\tau}} = 1 + \frac{1}{2\tau' R_\nu^{\tau'}} + \cdots$$

hol az elhagyott tagok pozitivok. Ennélfogva a R_ν sugarú körön

$$\left|\frac{x}{a_p}\right| = \frac{R_\nu}{\rho_p} > 1 + \frac{1}{2\tau' R_\nu^{\tau'}}$$

és

$$\left|1 - \frac{x}{a_p}\right| \geqq \frac{R_\nu}{\rho_p} - 1 > \frac{1}{2\tau' R_\nu^{\tau'}}.$$

Továbbá ν igen nagy értékeinél

$$2\tau' R_\nu^{\tau'} < e^{\frac{1}{2}R_\nu^{\varepsilon'}},$$

hol ε' egy tetszés szerinti pozitiv szám.

E szerint az

$$E\left(\frac{x}{a_p}, \mu\right) = \left(1 - \frac{x}{a_p}\right) e^{\sum\limits_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r}\left(\frac{x}{a_p}\right)^r}$$

kifejezésben az R_ν sugarú körön

$$\left|1 - \frac{x}{a_p}\right| > e^{-\frac{1}{2}R_\nu^{\varepsilon'}}. \qquad 55)$$

A mi pedig E kitevős tényezőjét illeti, annak abszolut értéke nagyobb mint

$$e^{-\sum\limits_{r=1}^{\mu}\left|\frac{x}{a_p}\right|^r},$$

és midőn $\left|\frac{x}{a_p}\right| > 1$, még inkább nagyobb mint

$$e^{-\mu}\left|\frac{x}{a_p}\right|^\mu.$$

Ennélfogva az R_ν sugarú körön

$$\left| e^{\sum\limits_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r}\left(\frac{x}{a_p}\right)^r} \right| > e^{-\mu \frac{R_\nu^\mu}{\varrho_p^\mu}} > e^{-\tau' \frac{R_\nu^{\tau'}}{\varrho_p^{\tau'}}}. \qquad 56)$$

Az 55) és 56) egyenlőtlenség értelmében

$$\left|E\left(\frac{x}{a_p}, \mu\right)\right| > e^{-\frac{1}{2}R_\nu^{\varepsilon'}} e^{-\tau' \frac{R_\nu^{\tau'}}{\varrho_p^{\tau'}}},$$

tehát az R_ν sugarú körön:

$$\Pi_1 > e^{-\frac{p_\nu}{2} R_\nu^{\varepsilon'}} e^{-\tau' R_\nu^{\tau'} \sum\limits_{p=0}^{p_\nu} \frac{1}{\varrho_p^{\tau'}}}. \qquad 57)$$

Itt

$$p_\nu < \varrho_{p_\nu}^{\tau'} = R_\nu^{\tau'} - \tfrac{1}{2} < R_\nu^{\tau'}$$

tehát

$$\frac{p_\nu}{2} R_\nu^{\varepsilon'} < \tfrac{1}{2} R_\nu^{\tau'+\varepsilon'}.$$

Másrészt $\sum\limits_{p=0}^{p_\nu} \frac{1}{\rho_p^{\tau'}}$ kisebb a $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_p^{\tau'}}$ összetartó sornál, és ha R_ν-t eléggé nagynak választjuk, úgy még inkább kisebb mint $\frac{1}{2\tau'} R_\nu^{\varepsilon'}$.

Tehát

$$\tau' R_\nu^{\tau'} \sum_{p=0}^{p_\nu} \frac{1}{\rho_p^{\tau'}} < \tfrac{1}{2} R_\nu^{\tau'+\varepsilon'}.$$

Ha ezeket 57) alatt tekintetbe veszszük, úgy végre

$$\Pi_1 > e^{-R_\nu^{\tau'+\varepsilon'}} \tag{58}$$

Ezt tudván, térjünk át $|\varphi(x)|$ azon tényezőire, melyekben

$$p = p_\nu + h > p_\nu.$$

A p ezen értékeinél

$$\rho_{p_\nu+h}^{\tau'} > \rho_{p_\nu}^{\tau'} + h = R_\nu^{\tau'} + h - \tfrac{1}{2} = R_\nu^{\tau'}\left(1 + \frac{h-\frac{1}{2}}{R_\nu^{\tau'}}\right),$$

innen pedig

$$\rho_{p_\nu+h} > R_\nu \left(1 + \frac{h-\frac{1}{2}}{R_\nu^{\tau'}}\right)^{\frac{1}{\tau'}}$$

és

$$\frac{1}{\rho_{p_\nu+h}} > \frac{1}{R_\nu}\left(1 + \frac{h-\frac{1}{2}}{R_\nu^{\tau'}}\right)^{-\frac{1}{\tau'}}.$$

Ennélfogva a R_ν sugarú körön

$$\left|\frac{x}{a_{p_\nu+h}}\right| = \frac{R_\nu}{\rho_{p_\nu+h}} < \left(1 + \frac{h-\frac{1}{2}}{R_\nu^{\tau'}}\right)^{-\frac{1}{\tau'}} < 1.$$

Amde

$$|E(u,\mu)| > 1 - |u|^{\mu+1},$$

a $|u| < 1$. Ugyanis

$$\begin{aligned}
-\log E(u,\mu) = {} & \left(\frac{u^{\mu+1}}{\mu+1} + \frac{u^{\mu+2}}{\mu+2} + \cdots + \frac{u^{2(\mu+1)-1}}{2(\mu+1)-1}\right) + \\
& + \left(\frac{u^{2(\mu+1)}}{2(\mu+1)} + \frac{u^{2(\mu+1)+1}}{2(\mu+1)+1} + \cdots + \frac{u^{3(\mu+1)-1}}{3(\mu+1)-1}\right) + \\
& + \left(\frac{u^{3(\mu+1)}}{3(\mu+1)} + \frac{u^{3(\mu+1)+1}}{3(\mu+1)+1} + \cdots + \frac{u^{4(\mu+1)-1}}{4(\mu+1)-1}\right) + \\
& \quad \cdots
\end{aligned}$$

és minthogy itt (minden egyes zárjelben) a tagok abszolut értéke folyvást csökken, azért

$$\left|\log\frac{1}{E(u,\mu)}\right| < |u|^{\mu+1} + \frac{|u|^{2(\mu+1)}}{2} + \frac{|u|^{3(\mu+1)}}{3} + \cdots$$

Tehát

$$\log\left|\frac{1}{E(u,\mu)}\right| \leqq \left|\log\frac{1}{E(u,\mu)}\right| < \log\frac{1}{1-|u|^{\mu+1}}$$

és

$$|E(u,\mu)| > 1 - |u|^{\mu+1}.$$

Ennélfogva a R_ν sugarú körön

$$\left|E\left(\frac{x}{a_{p\nu+h}},\mu\right)\right| > 1 - \left|\frac{x}{a_{p\nu+h}}\right|^{\mu+1} > 1 - \left(1+\frac{h-\frac{1}{2}}{R_\nu^{\tau'}}\right)^{-\frac{\mu+1}{\tau'}}. \quad 59)$$

Most már jelöljük Π_2-vel $|\varphi(x)|$ azon tényezőinek szorzatát, melyekben

$$h < R_\nu^{\tau'} + \tfrac{1}{2},$$

Π_3-mal pedig azon tényezőkét, melyekben

$$h \geqq R_\nu^{\tau'} + \tfrac{1}{2}.$$

Π_2 tényezőinek száma kisebb mint $R_\nu^{\tau'+\frac{\varepsilon'}{2}}$. A mi pedig nagyságukat illeti, úgy mindegyiknek abszolut értéke nagyobb mint

$$1 - \left(1+\frac{1}{2R_\nu^{\tau'}}\right)^{-\frac{\mu+1}{\tau'}}$$

és még inkább nagyobb mint

$$1 - \left(1+\frac{1}{2R_\nu^{\tau'}}\right)^{-1} = \frac{1}{1+2R_\nu^{\tau'}}.$$

Ámde ν igen nagy értékeinél

$$1+2R_\nu^{\tau'} < e^{R_\nu^{\frac{\varepsilon'}{2}}},$$

tehát Π_2 tényezői, ha csak ν-t eléggé nagynak választjuk, rendre nagyobbak mint

$$e^{-R_\nu^{\frac{\varepsilon'}{2}}},$$

és

$$\Pi_2 > \left(e^{-R_\nu^{\frac{\varepsilon'}{2}}}\right)^{R_\nu^{\tau'+\frac{1}{2}\varepsilon'}} = e^{-R_\nu^{\tau'+\varepsilon'}} \tag{60}$$

A mi végre Π_3-at illeti, ennek tényezői az 59) képlet értelmében nagyobbak mint $1-u$, hol

$$u = \left(1+\frac{h-\frac{1}{2}}{R_\nu^{\tau'}}\right)^{-\frac{\mu+1}{\tau'}} < \left(1+\frac{h-\frac{1}{2}}{R_\nu^{\tau'}}\right)^{-1} < \tfrac{1}{2}.$$

Amde akkor

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+\frac{u^2}{1-u} = 1+u\left(1+\frac{u}{1-u}\right) < 1+2u < e^{2u}$$

innen pedig

$$1-u > e^{-2u}.$$

Ennélfogva Π_3 tényezői rendre nagyobbak, mint e felemelve a

$$-2\left(1+\frac{h-\frac{1}{2}}{R_\nu^{\tau'}}\right)^{-\frac{\mu+1}{\tau'}} = -2R_\nu^{\mu+1}\left(R_\nu^{\tau'}+h-\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{\mu+1}{\tau'}}$$

kitevőre, és még inkább nagyobbak mint

$$e^{-2R_\nu^{\mu+1}h^{-\frac{\mu+1}{\tau'}}}.$$

Tehát

$$\Pi_3 < e^{-2R_\nu^{\mu+1}\sum\limits_{h=h_0}^{\infty} h^{-\frac{\mu+1}{\tau'}}},$$

hol h_0 az első egész szám, melyre vonatkozólag

$$h_0 \geqq R_\nu^{\tau'}+\tfrac{1}{2}.$$

Amde

$$\begin{aligned}\sum_{h=h_0}^{\infty} h^{-\frac{\mu+1}{\tau'}} &= \left(h_0^{-\frac{\mu+1}{\tau'}} + (h_0+1)^{-\frac{\mu+1}{\tau'}} + \cdots + (2h_0-1)^{-\frac{\mu+1}{\tau'}}\right) + \\ &+ \left((2h_0)^{-\frac{\mu+1}{\tau'}} + (2h_0+1)^{-\frac{\mu+1}{\tau'}} + \cdots + (4h_0-1)^{-\frac{\mu+1}{\tau'}}\right) + \\ &+ \left((4h_0)^{-\frac{\mu+1}{\tau'}} + (4h_0+1)^{-\frac{\mu+1}{\tau'}} + \cdots + (8h_0-1)^{-\frac{\mu+1}{\tau'}}\right) + \\ &\quad \cdots \\ &< h_0^{1-\frac{\mu+1}{\tau'}} + (2h)^{1-\frac{\mu+1}{\tau'}} + (4h_0)^{1-\frac{\mu+1}{\tau'}} + \cdots,\end{aligned}$$

vagyis

$$\sum_{h=h_0}^{\infty} h^{-\frac{\mu+1}{\tau'}} < \tfrac{1}{2} C h_0^{1-\frac{\mu+1}{\tau'}}$$

hol

$$\tfrac{1}{2}C = 1 + 2^{1-\frac{\mu+1}{\tau}} + 2^{2-2\frac{\mu+1}{\tau}} + \cdots$$
$$= \frac{1}{1-2^{1-\frac{\mu+1}{\tau}}}.$$

E szerint

$$\Pi_3 > e^{-CR_\nu^{\mu+1} h_0^{1-\frac{\mu+1}{\tau'}}}.$$

Ámde

$$h_0 > R_\nu^{\tau'}$$

és

$$h_0^{1-\frac{\mu+1}{\tau'}} < R_\nu^{\tau'-(\mu+1)},$$

tehát végre

$$\Pi_3 > e^{-CR_\nu^{\tau'}} > e^{-R_\nu^{\tau'+\varepsilon'}}. \tag{61)}$$

A mondottak szerint ν igen nagy értékeinél a R_ν sugarú körön

$$|\varphi(x)| = \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 > e^{-3R_\nu^{\tau'+\varepsilon'}}$$

és ha még $\tau'+\varepsilon' < \tau+\varepsilon$, akkor valóban

$$|\varphi(x)| < e^{-R_\nu^{\tau+\varepsilon}}.$$

37. Minthogy $f(x)$-nek és $\varphi(x)$-nek ugyanazok a zérushelyei vannak, azért $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ az x-nek oly egyértékü függvénye, mely sehol sem tünik el. Ennélfogva

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = e^{g(x)},$$

hol $g(x)$ ismét egyértékű egész függvény.

Továbbá (l. a 26. czikkelyt)

$$\lim_{x=\infty} f(x)\, e^{-|x|^{\tau+\varepsilon}} = 0,$$

tehát $|x|$ igen nagy értékeinél

$$|f(x)| < e^{|x|^{\tau+\varepsilon}}.$$

Másrészt pedig a ν igen nagy értékeinél a R_ν sugarú körökön

$$|\varphi(x)| > e^{-|x|^{\tau+\varepsilon}}.$$

Tehát e körökön

$$|e^{g(x)}| = \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < e^{2|x|^{\tau+\varepsilon}},$$

és ha ε-t kisebbnek választottuk egy tetszőlegesen felvett kicsiny δ pozitiv számnál, akkor

$$|e^{g(x)}| < e^{|x|^{\tau+\delta}}.$$

Ezen egyenlőtlenség értelmében $g(x)$ valós része a köröknek egy minden határon túl növekedő sorozatán folyvást kisebb mint $|x|^{\tau+\delta}$. Ámde (l. a 32. czikkelyt) ez csak úgy lehetséges, hogy $g(x)$ az x-nek oly ráczionális egész függvénye, melynek foka legfeljebb $\tau+\delta$ egész számú részével egyenlő, vagyis μ-vel.

Ennélfogva a vizsgált esetben

$$f(x) = e^{g(x)} \prod_{p=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_p}, \mu\right),$$

hol az E-k μ-ed nemű törzsfüggvények és $e^{g(x)}$ is μ-ed vagy még alacsonyabb nemü törzsfüggvény.

Ezzel tehát végtelen sok zérushelyű függvényekre is be van bizonyitva Hadamard következő tétele:

Ha valamely egész függvényre vonatkozólag

$$\lim_{m=\infty} a_m (m!)^{\frac{1}{\tau}} = 0,$$

akkor az véges nemü, és neme nem lehet nagyobb mint τ egész számú része.

38. Poincaré és Hadamard tételeinek segitségével valamely adott $f(x)$ egész függvény nemét következőleg határozzuk meg.

Mindenek előtt megvizsgáljuk, létezik-e egy oly λ egész szám, melyre vonatkozólag

$$\lim_{m=\infty} a_m (m!)^{\frac{1}{\lambda+1}} = 0.$$

Ha ily egész szám nem létezik, akkar $f(x)$ végtelen nemű.

Ha ellenben léteznek ily egész számok, és közülök λ a legkisebb, akkor a függvény λ vagy $(\lambda+1)$-ed nemű.

Ugyanis POINCARÉ tétele szerint $f(x)$ nem lehet λ-nál alacsonyabb nemű, HADAMARD tétele szerint pedig legfeljebb $(\lambda+1)$-ed nemű.

Ha továbbá sikerül λ és $\lambda+1$ közt oly τ számot találni, hogy

$$\lim_{m=\infty} a_m (m!)^{\frac{1}{\tau}} = 0,$$

akkor $f(x)$ épen λ-ad nemű.

Ugyanis HADAMARD tétele szerint nem lehet $(\lambda+1)$-ed nemű.

*Ha azonban a vizsgált limes a λ és $\lambda+1$ közti τ számok egyikére vonatkozólag sem tűnik el, akkor a mondottak nem nyujtanak felvilágosítást arra vonatkozólag, valjon a függvény nemét λ vagy $\lambda+1$ adja-e meg.**

IX. A trigonometriai függvények tényezőkre bontása.

39. Hogy a mondottak alkalmazását néhány példán is felvilágosítsuk, a sinus és cosinus tényezőkre bontását tárgyaljuk.

Még pedig először a $\cos x$ és $\frac{\sin x}{x}$-nek mint x^2 függvényeinek tényezőkre bontott alakját fogjuk meghatározni.

A

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$$

sorokban x^2 m-edik hatványának együtthatói

$$a_m = \frac{(-1)^m}{(2m)!} \quad \text{ill.} \quad a_m = \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}.$$

* Ezzel az első fejezetben igért tárgyalásokat befejeztük. Mielőtt áttérnénk arra, hogy a mondottakat néhány példára is alkalmazzuk, az olvasó figyelmét az egész függvényekre vonatkozó irodalomból még a következő fontos értekezésre akarjuk felhivni, mely csak e dolgozat szedése közben jelent meg és az itt ismertetett vizsgálatok folytatásának tekinthető:

BOREL, Sur les zéros des fonctions entières, Acta mathematica 20. k.

Mindkét esetben

$$\lim_{m=\infty} a_m m! = 0.$$

Tehát mindkét sorra vonatkozólag

$$\lim_{m=\infty} a_m (m!)^{\frac{1}{\lambda+1}}$$

már akkor eltünik, mikor $\lambda=0$. Ennélfogva a vizsgált függvények neme 0 vagy 1.

A további vizsgálat azt mutatja, hogy e két szám közül 0 a helyes. Ugyanis $\cos x$-re vonatkozólag:

$$|a_m|(m!)^2 = \frac{1\,.\,2\ldots m}{(m+1)(m+1)\ldots 2m} < \frac{1}{m+1},$$

tehát

$$\lim a_m (m!)^{\frac{1}{\tau}} = 0,$$

ha $\tau = \frac{1}{2}$.

A $\frac{\sin x}{x}$ együtthatói pedig még kisebbek, az imént nyert egyenlet tehát ezekre is érvényes.

Mindkét függvény 0 nemü lévén, törzstényezőkre bontott alakjuk

$$C\prod_{p=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{a_p}\right),$$

hol a_p helyébe x^2 mindazon értékei teendők, melyekre vonatkozólag a vizsgált függvény eltünik. Még pedig $C=1$, mert

$$\cos 0 = 1 \quad \text{és} \quad \left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=0} = 1.$$

Ha még az a_p-k ismeretes értékeit behelyettesitjük, akkor

$$\cos x = \prod_{p=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{x}{(p+\frac{1}{2})\pi}\right)^2\right), \quad \frac{\sin x}{x} = \prod_{p=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{x}{p\pi}\right)^2\right).$$

40. Második példának $\frac{\sin x}{x}$ és $\cos x$-nek *mint x függvényeinek* tényezőkre bontását tárgyaljuk.

A

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

sorra vonatkozólag most

$$a_{2m+1}=0, \quad |a_{2m}| = \frac{1}{(2m+1)!}.$$

Tehát

$$\lim_{m=\infty} a_{2m+1}(2m+1)! = 0$$

és

$$\lim_{m=\infty} a_{2m}(2m)! = \lim_{m=\infty} \frac{1}{2m+1} = 0,$$

vagyis most is

$$\lim_{m=\infty} a_m m! = 0.$$

Ennélfogva a vizsgált függvény neme 0 vagy 1.

Hogy a két lehető eset közül valóban melyik forog fenn, az kriteriumainkkal legalább közvetetlenül nem dönthető el, mert 0 és 1 közt nincs oly τ szám, melyre vonatkozólag

$$\lim_{m=\infty} a_m (m!)^{\frac{1}{\tau}}$$

eltünnék.

Valóban:

$$|a_{2m}| \{(2m)!\}^{\frac{1}{\tau}} = \frac{\{(2m)!\}^{\frac{1}{\tau}-1}}{2m+1}.$$

Ámde

$$\frac{1}{m!} < \left(\frac{e}{m}\right)^m$$

és innen

$$(2m)! > \left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}.$$

Tehát

$$|a_m| \{(2m)!\}^{\frac{1}{\tau}} > \frac{1}{2m+1} \left(\frac{2m}{e}\right)^{2m\left(\frac{1}{\tau}-1\right)}.$$

Itt m igen nagy értékeinél

$$m\left(\frac{1}{\tau}-1\right) > 1,$$

ennélfogva

$$|a_{2m}| \{(2m)!\}^{\frac{1}{\tau}} > \frac{4m^2}{e^2(2m+1)}.$$

A jobb oldal limese ∞, tehát a bal oldalé sem lehet 0.

Ennek daczára a vizsgált függvényről kerülő uton igen könnyen bebizonyítható, hogy *első* nemű.

Ugyanis $\frac{\sin x}{x}$ neme ugyanaz mint

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

neme. Erre a függvényre vonatkozólag

$$|a_{2m+1}| = \frac{1}{(2m+1)!}$$

és

$$|a_{2m+1}|(2m+1)! = 1.$$

Ámde ha a vizsgált függvény 0 nemű volna, akkor e kifejezésnek minden határon túl a zérushoz kellene közelednie. Tehát $\frac{\sin x}{x}$ és $\sin x$ nem lehetnek zérus neműek, hanem mind a kettő első nemű.

Ennélfogva

$$\frac{\sin x}{x} = Ce^{ax} \Pi E\left(\frac{x}{a}, 1\right)$$

hol C és a állandók, a helyébe pedig $\frac{\sin x}{x}$ összes zérushelyei teendők. Vagyis

$$\frac{\sin x}{x} = Ce^{ax} \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' E\left(\frac{x}{p\pi}, 1\right) = Ce^{ax} \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{p\pi}\right) e^{\frac{x}{p\pi}},$$

hol a Π melletti $'$ arra figyelmeztet, hogy a szorzat képzésénél $p=0$ kizárandó.

Ha x helyébe 0-t helyettesítünk, akkor azt találjuk, hogy

$$C = 1.$$

Ha továbbá x helyébe $(-x)$-et irnnk, akkor Π azon tényezői, melyek p és $(-p)$-nek felelnek meg, kölcsönösen egymásba mennek át. Tehát a Π szorzat e helyettesítésnél egészben változatlanul marad. A bal oldal pedig szintén x-nek páros függvénye. Tehát egyszersmind

$$e^{ax} = e^{-ax},$$

s így $a=0$.

Vagyis végre

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{p\pi}\right) e^{\frac{x}{p\pi}}$$

és

$$\sin x = x \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{p\pi}\right) e^{\frac{x}{p\pi}}.$$

A $\cos x$ nemének meghatározását arra a megjegyzésre alapíthatjuk, hogy $f(x)$ és $f(mx+n)$ neme megegyezik, ha m és n állandó számértékek. Valóban, ha x helyébe annak valamely lineáris egész függvényét helyettesítjük, akkor minden μ-ed nemű törzsfüggvény megint μ-ed nemű törzsfüggvénybe megy át, és μ-ed nemű törzsfüggvények szorzata megint μ-ed nemű törzsfüggvények szorzatába.

Tehát $\sin x$ és $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ neme ugyanaz; mindkettő első nemű.

Ennélfogva egy Ce^{ax} alakú tényezőtől eltekintve

$$\cos x = \prod_{p=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{(p+\frac{1}{2})\pi}\right) e^{\frac{x}{(p+\frac{1}{2})\pi}}.$$

Végre könnyen igazolható, hogy $Ce^{ax} = 1$.

Kürschák József.

KISÉRLETEK A DRÓTNÉLKÜLI TELEGRAFFAL.*

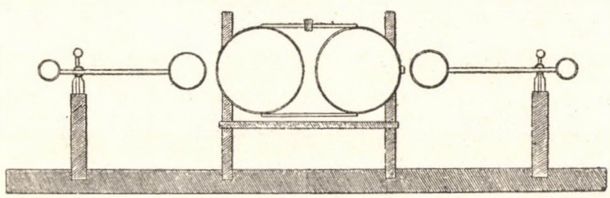
A physikai laboratoriumokban született két tudományos felfedezésnek, a HERTZ-féle hullámoknak és a BRANLY-féle koherernek ügyes felhasználásával és alkalmazásával construált MARCONI-féle drótnélküli telegraf, méltán keltett a physikusok körében figyelmet és vágyat arra, hogy a kísérletezést megejthessék. A «Zeitschrift für physik. und chemisch. Unterricht» deczember havi számában igaz örömmel olvashatták azért a többrendbeli ajánlatokat, melyek oly készülékek megszerzési helyéről tudósitanak, mely készülékekkel a MARCONI kisérleteit ismételhetjük. Ezek közől iskolánk a MAX KOHL chemnitzi mechanikus által készitett eszközöknek jutott birtokába, s midőn az érdeklődő szaktársakat a megejtett kisérletek eredményéről s a készülék leirásáról értesitjük, azzal, azt hiszszük, a tanügynek hasznos szolgálatot teszünk.

A drótnélküli telegraf olyan, mint a villamos telegraf, csakhogy nála hiányzik a vezeték; van tehát jeladója, jelvevője, de nincsen vezetéke. Alapja a HERTZ-féle elektromos hullám és a BRANLY által feltalált s LODGE által koherernek nevezett áramszakitó. A fémek köztudomás szerint mind igen jól vezetik tömör állapotban az elektromos áramot, míg a fémreszelékek oly nagy akadályokat gördítenek az áram útjába, mely több ezer Ohmnyi ellenállásnak felel meg, úgy hogy ilyen fémreszelék szigetelőnek vehető.

Kilencz cm hosszú, 0·5 cm átmérőjű üvegcsőbe helyezünk lazán fémreszeléket, (fele részben régi ezüsthatosnak, fele részben

* E czikk, a mely már február 3-án küldetett be, főbb pontjaiban TANGL KAROLY-nak ugyanaz nap, a «Kohererről» tartott előadásának ismertetéséül is szolgálhat.

10 filléres nickel pénzdarabnak durva reszelékét) s foraszszunk bele két végén platinasodronyt akként, hogy a platinadrótok belső végei 3 cm távolságra legynek, készen van a *koherer*, melylyel az alapkisérletet megejthetjük. Ha a LECHLANCHÉ-féle elem zárívébe villamos csengetyűt és koherert igtatunk, a csengetyű néma marad, mert a fémreszeléken nem képes áthaladni az elektromos áram. Midőn azonban a HERTZ-féle elektromos hullám átjárja a reszeléket, a részecskéket úgy helyezi el (polározza), hogy azok vezetőkké válnak, a villamos csengő tehát megszólal; ámde, ha a reszelékrészecskéket abból a helyzetből, melybe őket a HERTZ-féle hullám hozta, rázás vagy ütés által kihozzuk, (depolározzuk), a reszelék ismét



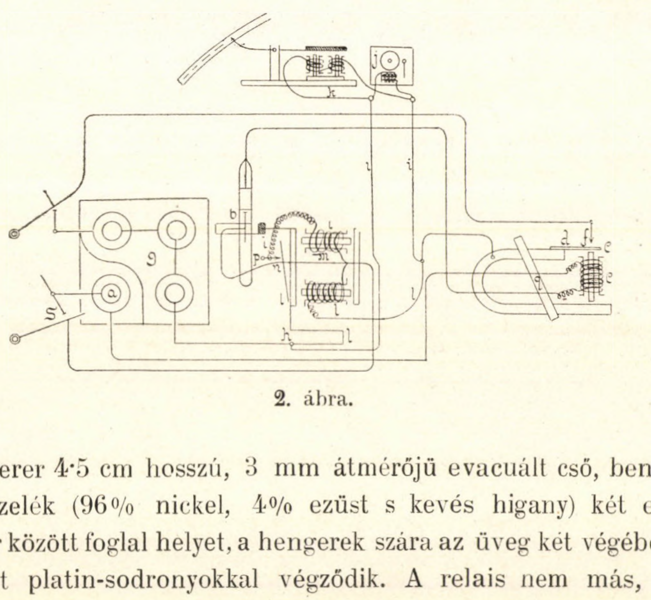
1. ábra.

rossz vezetővé válik s meggátolja az áram haladását, a csengő tehát újból elnémul. A HERTZ-féle hullám tehát polározza a fémreszelék részecskéit, a rázás vagy ütés depolározza azokat.

A HERTZ-féle hullám pedig nem egyéb mint a levegőben levő hypothetikus éther-részeknek azon módosulása, mondjuk sűrűdése és ritkulása, melyet az elektromos szikrának oscilláló rezgése hoz azokban létre. Az elektromos szikrát oscilláló rezgésbe több módon hozhatjuk. Ha a Holtz-gép negativ konduktorát négy vagy öt leydeni palaczkból álló batteria külső fegyverzetével kötjük össze, a positiv konduktorral pedig addig töltjük a leydeni-batteria belső fegyverzetét, míg abban a villamosság feszültsége akkora lesz, hogy az a tőle 2—4 cm távolságra tartott negativ konduktornak szintén nagy feszültségű elektromosságával egyesül — úgy oly erős HERTZ-féle hullámot nyerünk, mely a géptől 2—3 mtrre felállított koherert már polározza. De sokkal hatékonyabb leend a HERTZ-féle hullám, ha a STŐHRER-féle gép másodlagos tekercséből nyert áramokat vaselinolajba mártott két fémgolyó között üttetjük át. De ha a csőbe a Holtz gép szikráit üttetjük, akkor is polározódnak a fémreszelék részecskék. A Max Kohl által készített drótnélküli telegraf két részből áll, u. m. a jeladóból és a jelvevőből.

A jeladó nem más, mint a Righi-féle oscillator (1. ábra), mely ebonit-szigetelőn négy golyót tartalmaz: két kisebbet és két nagyobbat. A golyók tömörek és sárgarézből készültek, de hogy nehezebben oxidálódjanak, nickel-réteggel vannak bevonva. A nagy golyók átmérője 60 mm, a kisebbekké 30—30 mm. A nagy golyóknak egy-egy szelete szintén ebonitból készült hordócskába mélyed s egymástól 2—3 mm távolságra áll, a köztük támadt tért pedig vaselinolaj tölti ki. A töltés a hordócska tetején levő s dugóval ellátott nyiláson történik. A dugót időnként tanácsos kiemelni, hogy az oxygéntől megfosztott levegőt újabbal cseréljük fel. A kis golyók mindegyike egy-egy nagy golyó szeletével áll szemben s tőle a Sőhrer-gép üttáva szerint különböző távolságra állítandó; úgy hogy 10 cm-es üttávnak 1·5 cm; 12 cm-es üttávnak 2 cm; 15 cm-es üttávnak 2 cm; 20 cm-es üttávnak 2·5 cm távolság feleljen meg. A nagy golyók egyikének ama szelete, mely a kis golyóval áll szemben, tompa csúcsban végződik, hogy az áramnak átmenete a rossz vezető rétegen, a nagyobb feszültség következtében, gyorsabban meginduljon. A másik nagy gömbnek ama szeletét, mely a kis gömbbel szemközt áll, tanácsos időnként vaseinnal bekenni, hogy az áram által lekapott részecskék a golyó vezetőképességét ne csökkentsék. A Stöhrer-féle higanymegszakító szikrainductornak üttávát a kisérlet előtt addig kell fokozni, míg az legkevesebb 10 cm leend; ennél kisebb üttávval gyenge eredményt érünk el. A hatás biztosítására a Stöhrer-féle inductor táplálásához vagy dynamo-elektromos gépek áramát használjuk, vagy a bemártó legalább is hat poharas Bunsen-féle telephez igen erős folyadékot készítünk (4 liter vizhez 1 liter kénsav és 250 grm. kali-bichromatot). A másodlagos tekercs sarkait hajlékony és jól elszigetelt vezeték segítségével a két kisebb golyóhoz kapcsoljuk. A Stöhrer-gép működésekor a golyók között három szikra keletkezik s ezek között a középső szikra, a mint a vaselinban a két nagy golyó szelete között ide-oda himbálódik, hozza létre a HERTZ-féle hullámot, mely úgy terjed, mint a hanghullám, csakhogy sokkal nagyobb sebességgel, 300·000 km-re egy másodpercz alatt s keresztül megy nemcsak a levegőn, hanem minden szigetelőn, tehát oly anyagokon is, melyeken a fény nem bir áttörni. Hegyen, kövön, fán áthatolnak ezek a láthatatlan hullámok s csakis az elektromosság jó vezetői, a fémek fogják fel azokat.

A HERTZ-féle hullámokat felfogja a *jelvevő*. Ez a következő elmésen összefoglalt részekből áll. Az *(a)* elem (2. ábra) zárívébe kapcsolódik a *koherer (b)* és az igen érzékeny relaisnek vasmagva *(c)*.



2. ábra.

A koherer 4·5 cm hosszú, 3 mm átmérőjü evacuált cső, benne a fémreszelék (96% nickel, 4% ezüst s kevés higany) két ezüsthenger között foglal helyet, a hengerek szára az üveg két végébe forrasztott platin-sodronyokkal végződik. A relais nem más, mint egyik szárán megkurtított mágnespatkó; a szárkurtitás azért történt, hogy hozzá rugalmas szalagokkal *(d)* toldassék a hiányzó sarok *(e)*, mely, ha az *(f)* szöghöz ér, bezárja a három elemből álló *(g)* batteria zárívét; de ezt csak azon esetben teheti, ha az első áram átjárja az épen maradt sarokra merőlegesen helyezett és sodronytekercscsel körülvett *(c)* lágyvasat. Ha ez érintkezés az egyszerű mágnes sarkok taszitása folytán megtörtént, bezárul a második *(g)* batteriának zárive s az áram kezdetben egész intensitásával halad *(h)* pontig, hol két ágra szakad: az első *(i)* ágon a részintensitásu áram beszalad az elektromos csengetyűbe *(j)*, és az irógépbe *(k)* s jelt ád; a második ágban *(l)* az áram másik fele egy második *(m)* relaisnek *(n)* kalapácsába megy s mivel az még nyugalmi helyzetében összeköttetésben áll *(p)* szöggel, melyre a relaisre csavargatott sodrony egyik vége erősitve van, azért az áram futtában körüljárja a második relaisnek vaspatkóit s azokat megmágnesezvén, saját zárívét azzal szakítja meg, hogy lerántja a *(p)* szöggel érintkező kalapácsot. Ámde a kalapács összefügg a mozgatható kohererrel is, azért midőn visszaugrik, azt is megveregeti s így a koherert depolarizálván, az első áramkörben is megszünteti összeköttetéseit. Újabb Hertz-féle hullámnak kell tehát jönnie, hogy az előbbi tünemény ismétlődjék; de a Hertz-féle hullámokat a jeladóval tetszőleges időközökben állíthatjuk elő s így a készülékkel egymástól távol fekvő helyekre vezeték nélkül jeleket adhatunk vagyis drót nélkül telegrafálhatunk. Hogy a hullámokat bárhol felfoghassuk, azért van a jelvevő resonans fémrudakkal felfegyverezve, melyek a felfogott hullámokat a kohererbe vezetik s a melyek arról is biztositanak, hogy hullámainkat avatlanok ne használhassák. A resonanczia törvényei szerint, valamint az *(A)*-ra hangolt hangvilla rezgései csakis *(A)*-ra hangolt hangvillát szólaltat meg, épen úgy minden oscillatornak megvan a maga hangolt rudakkal ellátott felfogója.

E készülékkel a Stöhrer induktor másodlagos tekercsének 12 cm-es üttáva mellett hét szobán, becsukott ajtók mellett, tehát hét vastag falon át lehetett jeleket adni és pedig egyszerre a csengetyűvel és irógéppel. Az emberek nagyobb tömege sem idézett elő zavart a hullámok terjedésében, amennyiben két falon és 250 tanulón keresztül is zavartalanul történt a jelfelvevés; úgy a nagy közgyülési teremben, több százra menő hallgatósággal telt teremben is jól működött a készülék. Egyedül a villamos lámpásnak árama hatott zavarólag a hullámok terjedésére, a mennyiben az esteli órákban tett kisérletezésnél, még egy falon is alig tudott az a hullám áthatolni, mely más körülmények között a falaknak egész sorozatán a legnagyobb könnyedséggel átszaladt. A *(c)* relaisnek érzékenységét változtatja a rajta keresztbe fektetett s forgatható *(q)* hid, mely ha a sarok felé halad, az érzékenységet növeli, ha a saroktól távozik, ugyanazt apasztja. Hogy használaton kivül a telepek áramai rázás vagy egyéb okok folytán támadt zárulásoknál ne indulhassanak meg, mindkét áram zárívébe egy-egy kapcsoló szerkezet *(r)* és *(s)* van alkalmazva, melyet használat után kikapcsolnunk szükséges.

Homor István.

A KOHERER REAGÁLÁSA A HŐMÉRSÉKLET-VÁLTOZÁSNÁL.

Branly kisérlete óta a koherert nemcsak gyakorlati téren, hanem a tudományos életben is napról-napra újabb és újabb irányban kezdik értékesíteni.

Igy Leppin Ottó az Annalen der Physik und Chemie cz. folyóiratban röviden «Wirkung verschiedenartiger Wellen auf den Cohärer» (Band 65, Heft. 4. p. 885. 1898.), míg a Zeitschrift für den Pysikalischen und Chemischen Unterricht cz. lapban «Ein Neuer Versuch mit den Hertschen Spiegeln»* cz. alatt részletesebben azt bizonyítgatja, hogy a koherer alkalmas és egyszerü eszköz annak az ismert igazságnak a kimutatására, hogy a meleg az elsőrendű elektromos vezetők ellenállását nagyobbitja.

Ha ugyanis egy Leclanché-elem áramkörébe koherert és galvanométert kapcsolunk és a koherer felé elektromos hullámokat küldünk, akkor, mint először Branly kimutatta, a mágnes tű kitér egyensúlyhelyzetéből s állandóan egy bizonyos fokot mutat, de ha most, Leppin szerint, kezünket az elektromos hullám folytán ellenállásában megkisebbedett koherer közelébe tartjuk, akkor már a kéz melege is elegendő arra, hogy a tű 0°-ra térjen vissza; a kéz elvétele után a tű ismét kitér. Ebből a kisérletből Leppin azt következteti és bizonyítgatja, hogy az elektromos hullám alatt kitért tű azért megy vissza a 0°-ra a kéz közelsége miatt, mert a kéz melegsége a fémreszelékek ellenállását megnagyobbitotta; egyszersmind azt is állitja, hogy a melegség hatása alatt a fémreszelékek merev helyzete nem változott, mert csak a reszelékek rázásával

* (Eilfter Jahrgang. Viertes Heft. p. 174. 1898.)

lehetett a tűt állandóan a 0°-ra visszaterelni. Igy szerinte a koherert kényelmesen alkalmazhatjuk a melegedéssel járó ellenállásnagyobbodás kimutatására.

A kisérlet ellen — magam is többször észleltem — nincs észrevételem; de a kisérletből vont következtetést nem tarthatom helyesnek s így magát a koherert sem tekinthetem alkalmas eszköznek e szempontból arra, hogy a melegség okozta ellenállásnagyobbodást ily módon vele bemutathassuk.

Mert ha a hő a koherer ellenállását nagyobbítaná, a nélkül, hogy a koherer merev állapotját megváltoztatná — mint LEPPIN állítja — akkor a hidegnek, a melegség csökkenésének nem lehetne a kohererre éppen ugyanazon hatással. Már pedig kisérleteim azt mutatják, hogy a hideg, a hőmérséklet csökkenése a koherer ellenállását szintén nagyobbítja ép úgy, mint ugyanoly körülmény közt a hő. Tehát a koherer melegitése és hűtése egyaránt megváltoztatja a koherer ellenállását, és pedig ugyanoly körülmény mellett egyformán; a miből azt kell következtetnünk, hogy nem a fémreszelékek ellenállása változik, hanem e fémreszelékek merev állapota megy változáson át a hőmérséklet változásával. Idevágó kisérleteim röviden a következők.

Egy 60 cm hosszúságú — 10 cm-nyi is jó — 4 mm vastagságú üvegcsövet megtöltöttem mákszemnagyságú tiszta rézporral, s e koherert egy kis LECLANCHÉ-elem áramkörébe kapcsoltam érzékeny galvanométerrel. Megjegyzem, hogy a gáz- és vízvezeték csapjai közt fellépő elektromótoros erő is elegendő a LECLANCHÉ-elem helyett; legtöbbször azt használom, mert évek óta majdnem állandóan egyforma hatása van. Ha most már egy kis WIMSHURST-gép (átmérője 15 cm) 5 m távolságból elektromos hullámot küld a kohererre, a tű annyira kicsap, hogy használni alig lehet, azért még 3000 Ω ellenállást szoktam bekapcsolni a LECLANCHÉ-elem áramkörébe. Az elektromos hullám kitérítette tű egy bizonyos foknál — az adatokat a rövidség kedveért mellőznöm kell — megáll. Ha most a koherert egy kis felületén lehűtöm kénétherrel vagy chlorethyllel, a tű azonnal 0°-ra tér vissza, de mihamar elfoglalja majdnem előbbi állását. Tehát a hőcsökkenésnek ugyanazon hatása van a kohererre, mint a hőmérséklet emelésének; szilárd szénsav is ezt eredményezi; természetes, hogy a koherer merev helyzetét kívülről semminemű mechanikai uton egy esetben sem változtattam meg érintéssel, vagy rázással.

Ha azonban a koherert egész hosszában, vagy legalább nagyobb részében az említett módon lehűtöttem, a tű 0°-ra tért ki, de ott is maradt állandóan. De ugyanez következik be akkor is, ha az elektromos hullám alatt ellenállásában megváltozott koherert egész hosszában, vagy nagyobb részében bármi úton megmelegítem, mert a bizonyos fokig kitért tű effajta melegítés mellett visszatér 0°-ra és ott is marad állandóan. Tehát itt sincs különbség a melegítés és hűtés hatása közt a tűnek 0°-ra való visszatérését illetőleg; s így a koherer ellenállásának a nagyobbodását a fémrészek hőokozta ellenállásának a nagyobbodásából nem lehet kimagyarázni. De talán inkább a hőmérsékletváltozás okozta térfogatváltozásból, a mozgásból, mely a fémreszelékek merev helyzetét megváltoztatja. Különben is ugyanily eredményt érünk el a koherer rázásával is. Mert ha az elektromos hullám hatása után a koherert egy pontban gyengén megütjük, a kitért tű azonnal 0°-ra tér vissza, de nemsokára ismét elfoglalja majdnem eredeti állását; holott erősebb megütésnél a tű 0°-ra tér és ott is marad állandóan.

Sőt hanghullámokkal is ugyanezt érhetjük el. Tegyük a koherert a Hertz-féle tükörbe s térítsük ki a tűt akár elektromos hullámmal, akár hanghullámmal; a tű azonnal 0°-ra tér vissza, de ismét elfoglalja majdnem eredeti állását, mihelyt szócsővel gyengén a koherer felé beszélünk, vagy keskeny üvegcsövön keresztül a koherer egy pontja felé keltünk hanghullámot. Ha azonban akár a szócsőbe beszélünk erősebben, akár a keskeny csövön keresztül a koherer hosszában keltünk hanghullámot, a tű 0°-ra tér vissza és ott is marad végleg. De térjünk vissza a koherer melegítésével és hűtésével járó jelenségekre.

Ha a koherert erősen felmelegítjük pl. 70 C°-ra, de úgy, hogy a koherer és környezete közt hőmérsékleti különbség legyen és ekkor elektromos hullámokat keltünk, a tű kitér bizonyos fokra, de *önmagától* azonnal 0°-ra tér vissza s ott is marad állandóan.

E jelenség ujabb elektromos hullámok keltésekor újra ismétlődik mindaddig, míg a hőmérsékleti különbség elég nagy. Természetes, a tűnek 0°-ra való visszatérése később mindig lassabban és lassabban, meg-megállással, ingadozással történik, ha már a hőmérsékleti különbség a koherer és környezete közt időmúltával kisebb lesz.

De ugyanezt észleljük akkor is, ha a koherert erősen lehűtjük pl. —20—60 C°-ra, mert ha ekkor ébresztjük az elektromos hullámokat, a tű kitér bizonyos fokig, de *önmagától* azonnal visszatér a 0°-ra és ott is marad végleg.

Ujabb elektromos hullámok keltésére a jelenség ismétlődik itt is; de később a tűnek egy bizonyos fokon való állandó megmaradása hamarább bekövetkezik, mint a melegítésnél.

E két kisérlet is azt igazolja, hogy a hőmérséklet változása alatt a kohererriek nem fémellenállásváltozása, a fémreszelékek ellenállásának a nagyobbodása, mint inkább a fémreszelékeknek a hőmérsékletváltozással járó mozgása, s így a merev helyzet megváltozása okozza az elektromos hullám alatt kitért tűnek önkénytesen a 0°-ra való visszatérését és állandóan való ott maradását, sőt e jelenségnek újabb hullámoknál való ismétlődését mindaddig, míg a koherer és környezete közt a hőmérsékleti különbség megvan, mint oly tényező, mely a merev helyzetet képes megváltoztatni. Elérhetjük e tüneményt a dörzsöléssel felmelegitett kohererrel is.

De ha a koherert úgy melegitem fel, hogy környezete is ugyanazt a hőfokot mutatja, és ekkor inditok elektromos hullámokat, a tű kitér, de meg is marad a kitért fokon mindaddig, míg a koherer és környezete közt a hőmérséklet állandóan ugyanaz marad.

Vagy ha a koherert és környezetét —60 C°-on tartom s ekkor keltem az elektromos hullámokat, a tű ismét kitér, de a kitért fokon állandóan megmarad addig, míg a hőmérséklet állandóan egyforma a koherer és környezete közt. De mind e két esetben a kitért tűt 0°-ra téríthetem vissza a koherer erős megrázásával; a hőmérsékletcsökkenésnél azonban a rázásnak erősebbnek kell lennie.

E most leirt kisérlet is azt látszik igazolni, hogy a koherer hőmérsékletének a nagyobbítása vagy csökkenése az elektromos hullám hatása alatt kitért tűt csak akkor tereli a 0°-ra, ha a reszelékek mozgásban vannak; mihelyt a koherer staczionárius állapotját elérte, a reszelékek merev helyzete is megmaradt, s az elektromos hullám kitérítette tű a kitért fokot állandóan meg is tartja; de a koherer rázása, hőmérsékletének emelése vagy csökkenése a kitért tűt újból visszatereli a 0°-ra, mert a merev helyzet megváltozott.

Károly Irén.

A HELIUMRÓL.

E tárgyra vonatkozólag 1898 elejéig a következő dolgozatok jelentek meg: [1] W. F. HILLEBRAND: Americ. Journ. of Sciences and Arts *40*. 384—394; [2] W. F. HILLEBRAND: Americ. Journ. of Sciences and Arts *42*. 390—393; [3] RAMSAY: Chem. News *71*. 151; [4] CROOKES: Chem. News, *71*. 151; [5] BERTHELOT: C. R. de l'Ac. Sc. *120*. 660—662; [6] T. CLÈVE: C. R. de l'Ac. Sc. *120*. 834: [7] T. CLÈVE: Chem. News *71*. 201—202; [8] B. BRAUNER: Chem. News *71*. 271; [9] C. RUNGE és F. PASCHEN: Chemiker-Ztg. *19*. 997—998; [10] W. RAMSAY, J. NORMANN COLLIE és MORRIS TRAVERS: Journ. Chem. Soc. London 67. 684—701; [11] LANGLET (Clève): C. R. d. l'Ac. Sc. *120*. 1212; [12] EDWIN A. HILL: Americ. Journ. of Sciences and Arts *50*. 359—376; [13] H. KAYSER: Chem. News. 72. 89; [14] LORD RAYLEIGH: Chem. News. *72*. 223; [15] WILLIAM HUGGINS: Chem. News *72*. 27; [16] C. RUNGE és F. PASCHEN: Math. Natw. Mitteil. Berlin *1895*. 223—227; [17] W. CROOKES: Chem. News. *72*. 87—89; [18] HENRY WILDE: Philos. Mag. *40*. 466—471; [19] L. TROOST és L. OUVRARD: C. R. de l'Ac. Sc. *121*. 394—395; [20] CH. BOUCHARD: C. R. de l'Ac. Sc. *121*. 392—394; [21] A. de FOROST PALMER jun.: Americ. Journ. of Sciences and Arts *50*. 357—358; [22] N. LOCKYER: Chem. News *72*. 283; [23] W. PREYER: Ber. d. deutsch. Chem. Ges. *29*. 1040—41; [24] A. LANGLET: Zts. f. Anorg. Chem. *10*. 289—292; [25] J. P. KUENEN és W. RANDALL: Chem. News. *72*. 295—297; [26] LORD RAYLEIGH: Chem. News. *73*. 75—78; [27] HENRY WILDE: Chem. News *72*. 291—292; [28] R. M. DECLEY: Chem. News *72*. 297—298; [29] L. TROOST és OUVRARD: C. R. d. l'Ac. Sc. *121*. 798—800; [30] CH. MOURREU: C. R. de l'Ac. Sc. *121*. 819—820; [31] J. N. COLLIE és W. RAMSAY: Royal Soc.-ban előadás 1896. 4/2; [32] W. RAMSAY és J. N. COLLIE: Chem. News *73*. 259—60; [33] B. BRAUNER: Chem. News *74*. 223—24; [34] LORD RAYLEIGH: Chem. News *73*. 247; [35] W. RAMSAY és N. COLLIE: C. R. de l'Ac. Sc. *123*. 214—216, 542; [36] W. RAMSAY: Chem. News 73. 283; [37] K. OLSZEWSKI: Wied. Ann. *59*. 184—92; [38] LORD RAYLEIGH: Chem. News. *74*. 260. [39] BERTHELOT: C. R. d. l'Ac. Sc. *124*. 113; [40] W. RAMSAY és M. W. TRAVERS: Proc. Royal Sc. *60*. 442; [41] MORRIS W. TRAVERS: Proc. Royal Sc. *60*. 449; [42] W. RAMSAY és M. W. TRAVERS: Proc. Royal. Sc. *61*. 267; [43] H. WILDE: C. R. d. l'ac. Sc. *125*. 649.

Idestova négy éve már, hogy RAMSAY a heliumot felfedezte, ha ugyan szabad e kifejezéssel élnünk. Azóta többen és sokat foglalkoztak e tárgygyal, felőle szerzett ismereteink azonban mind ez ideig annyira hézagosak és bizonytalanok, hogy még azt sem mondhatjuk meg teljes biztonsággal, vajjon homogen elemi test-e a heliumnak nevezett gáz? Tekintettel e kérdésnek az általános chemia szempontjából való érdekességére és fontosságára, megengedik tisztelt olvasóink, hogy annak jelenlegi állásáról leszámoljunk.

E felfedezés is, mint azt más esetekben gyakran tapasztalhatni, ha nem is tudatosan, de régibb keletű. Ugyanis W. F. Hillebrand[1] a kilenczvenes évek elején az uranszurokérczek analysisével foglalkozván, azt tapasztalta, hogy ezen érczekből vakuumban, avagy kénsavval való melegítéskor gáz fejlődik. Ő e gázt nitrogennek minősitette. A különböző uranszurokérczekből e gáz eltérő, de meghatározott mennyiségben fejlődik, úgy hogy a fejlődő gáz mennyiségéből az illető uranszurokércz fajtájára biztosan következtethetünk.[2] *

Ramsay[3] az uranszurokérczek egyik fajtájából a *cleveit*ből, a melyből a kérdéses gáz különösen nagy mennyiségben fejlődik, azt vakuumban való melegítéssel előállította. A keletkezett gázt fölös mennyiségű oxygennel kevervén, a keveréken elektromos szikrákat üttetett keresztül mindaddig, a míg annak térfogata többé nem változott. Ezután a gázt a képződött, főleg nitrogenoxydtól megszabadítandó, azt tömény kaliumhydroxyd-oldat felett fogta fel. Az ily módon előállított gáz spektrumát Crookes[4] megvizsgálta s főbb vonalainak hullámhosszát megállapította. Spektruma az eddig ismert anyagok spektrumától eltérő; jellemző vonalai közül a sárga nagyon közel összeesik a nap atmosphéra D_3 vonalával, a melyet a földön eddig ismeretlen anyagnak, a heliumnak tulajdonitottak. Miután ezen első vizsgálatok alapján már valószinűnek tetszett, hogy a kérdéses gáz a Napban feltételezett heliummal identikus, Ramsay azt elemi testnek véve *helium*nak nevezte el.

A helium szabad állapotban csak kis mennyiségben fordul elő, még pedig egyes ásványvízforrásokból felbugyogó gázokban. Így a

* Palmieri L. pedig a heliumot állítólag már 1882-ben fedezte fel spectrumreactiója folytán a Vézuv egyik sublimatiójában. *Szerk.*

schwarzwaldi Wildbad-forrás,[13] a Pyrenéok kéntartalmú forrásai,[20] a lotharingiai Maizières-forrás,[30] továbbá az angolországi Bath-források[34] vizében elnyelt gáz heliumot tartalmaz. E forrásvizekbe a helium minden valószínűség szerint a föld mélyében lévő helium-tartalmú ásványokból kerül.[29]

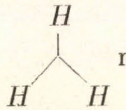
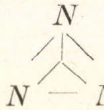
Sokkal nagyobb mennyiségben fordul elő a helium megkötött állapotban, különböző ásványokban. Így a cleveit,[3] cerit,[8] bröggerit, monazit, samarskit, yttrotantlit, hjelmit, fergusonit, tantalit, polykras, xenotim, organit[10] s eliasit[22] columbit, malacon,[40] jelentékeny mennyiségű heliumot tartalmaznak.

A heliumot ezen ásványokból legegyszerűbben úgy állitjuk elő, hogy azokat vakuumban melegitjük;[3] vagy úgy hogy ez ásványokat kaliumhydrosulfattal[6] illetve kaliumpyrosulfattal[24] kevervén, e keveréket égető csőben hevitjük. A fejlődő heliumot tömény kalilúgoldat felett fogjuk fel. Az így nyert gáz rendesen még jelentékeny mennyiségű hydrogent és nitrogent tartalmaz, a miért is izzó rézoxydon és izzó magnesiumon vezetjük keresztül; végül pedig phosphorpentoxyd fölött megszárítjuk.[24]

Arra a kérdésre, hogy vajjon homogen elemi test-e a helium, mind ez ideig biztos választ nem adhatunk. A homogenitás kérdését Ramsay és Collie diffusio útján törekedett eldönteni.[35] Ugyanis az egyik oldalán evakuált porosus csövön át diffundáltatva, a helium két különböző sűrűségű gázra bomlott, a melyek sűrűsége változatlanul 1·874, illetve 2·133 (Hydrogén: 1); törésmutatója pedig 0·1350, illetve 0·1524 (levegőé: 1) volt. Ezek szerint a helium két különböző sűrűségü gáz keverékéből állana. E két gáz spektruma azonban tökéletesen egyforma, a miért is Ramsay és Collie azon feltevést koczkáztatják, hogy esetleg a helium különböző sűrűségű molekulákat tartalmaz, a mi természetesen tekintettel egyéb analogia hiányára, még bizonyításra szorul. Morris Travers kisérletei szerint a homogenitás valószinűbb. Ugyanis a Plücker-féle csövekben az elektrodokról a cső falára sublimáló platina a heliumot lassacskán elnyeli; az elnyelt és a visszamaradt gáz között azonban nem lehetett semmiféle különbséget tenni, a mi azon esetben, ha a helium két különböző gáz keveréke lenne, nem valószinű.[41]

Spektruma a mellett szól, hogy a helium tényleg új elem, vagy legalább is valami új elemet tartalmaz.

A fajhők viszonya a hang terjedési sebességéből számítva 1·63,[10] 1·65,[10] 1·67,[24] a mi a helium gáz egy atomos volta mellett tanuskodik. Ugyancsak e mellett szólanak azon kisérletek, a melyekről J. N. Collie és W. Ramsay a Royal Society ülésén számoltak be.[31] Ugyanis Natterer szerint ugyanazon állandó nyomás és állandó áramfeszültség mellett a maximális szikrahossz a molekulában foglalt atomok számától függ és pedig egyatomos gázokban nagyobb, mint több atomosban. Kisérleteik szerint a maximális szikrahosszak ugyanazon viszonyok mellett: oxygenben 23 mm, levegőben 33 mm, hydrogenben 39 mm, argonban 45·5 mm, heliumban 250—300 mm., a mely adatok szerint a heliumnak egy atomosnak kellene lennie. Ezekkel szemben Brauner[8] a heliumot több atomosnak tartja és pedig a hydrogen következő

 módosulásának, s hasonlóan az argont  -nek.

Ez azonban lord Rayleigh szerint nem valószinű, már csak azért sem, mert a hydrogen törésmutatója nagyobb a heliuménál s a nitrogené az argonénál, a minek Brauner feltevése értelmében fordítva kellene lennie. Ezek alapján a helium gáz valószinűleg egy atomos. Eddig meghatározott tulajdonságai a következők:

A helium szintelen, szagtalan gáz. Eddig csupán csak *légnemű halmazállapotban* ismeretes. Olszewski —220°-ra lehűtvén, 125—140 atmosphérányi nyomástól hirtelen felszabadította, azonban az ekkor létrejövő gyors kiterjedéskor sem folyósodott.[37] *Kritikus pontja* tehát valószinűleg —250° alatt fekszik. Hydrogenre vonatkoztatott *sűrűsége* Langlet szerint 2·02,[11] levegőre vonatkoztatott sűrűsége pedig 0·139.[24] *Kiterjedési tényezője* 0°-tól 277°-ig, azaz a bromnaphtalin forráspontjáig ugyanaz, mint a hydrogené vagy levegőé.[25] *Viskositása* ugyanazon körülmények között ugyanazon keresztmetszetű csövön való kiömlési sebességből a levegőre vonatkoztatva 0·96.[26] Vörös izzó fémeken nevezetesen platinán, palladiumon és vason *nem diffundál* át.[42] Vizben való *absorptio koefficiense* legkisebb valamennyi gáz között: 18·2° C-on egy térfogat víz 0·0073 térfogat heliumot nyel el. Benzolban és alkoholban nem absorbeálódik.[10] *Törésmutatója* interferencziális eljárással meghatározva 0·146 (a levegőét 1-nek véve).[26] CROOKES mérései szerint a helium *spektrumában*, bármi úton is állítottuk elő a gázt, a következő hullámhosszú vonalak mindig megvannak:[17] 7065·5, 6678·1, 5876·0, 5015·9, 4922·6, 4713·4, 4471·5, 4386·3, 4258·8, 4012·9, 3962·3, 3890·5, 3888·5, 3885·9, 3819·4, 3705·4. 10^{-7} mm. Az 5876·0. 10^{-7} mm hullámhosszú sárga vonala kettős, s e vonalak a nyomás és hőmérséklet emelkedésével szétválnak.[18] Ha a heliumhoz más gáz van hozzákeverve, akkor kis nyomásokon, az idegen gáz mennyiségét szaporítva, jellemző spektrum-vonalai hamar eltünnek, míg nagyobb nyomásokon tovább fenmaradnak. Ez valószinűleg abban találja magyarázatát, hogy alacsony nyomáson rosszul, nagyobb nyomáson pedig jól vezeti az elektromosságot.[31] Érdekes jelenség az, hogy a helium gázban, ha az elektrodok nincsenek távol egymástól, még a közönséges légköri nyomásnál nagyobb nyomásosokon is folytonos a kisülés, szóval a Geissler-féle jelenség lép fel. Így RAMSAY és COLLIE kisérletei szerint[31] állandóan 170 mm elektrodtávol mellett ugyanazon feszültségű árammal a Geissler-féle jelenség már fellép: levegőben 73—74, hydrogenben 42—43, oxygenben 81, széndioxydban 92—94, cyanban 23, heliumban 1270 mm-nyi nyomáson.

Atomsúlya sűrűségéből számítva, ha egyatomosnak veszszük a gázt, 4, s így a periodikus rendszerben a hydrogen és a lithium közé jut. Egyéb chemiai tulajdonságai csak kevéssé ismertek, minthogy vegyületeket nem igen képez. Így W. RAMSAY és N. COLLIE kisérletei szerint a *Na, Si, Be, Zn, Cd, B, Y, Tl, Ti, Th, Sn, Pb, P, As, Sb, Bi, Se, S, U, Co, Cl, Pt,* még statu nascendi sem hat reá.[32]. L. TROOST és L. OUVRARD szerint vörös izzó magnesiummal erős elektromos áram hatása alatt egyesül.[19] BERTHELOT-nak sötét elektromos kisülések hatása alatt sikerült a heliumot szénhydrogenekkel egyesiteni.[39]

Annak eldöntése czéljából, hogy identikus-e a Nap heliumával, DE FOROST PALMER a Nap spectrum D_3 vonalának hullámhosszát pontosan meghatározta és $5875{\cdot}93 . 10^{-7}$ mm-nek találta.[21] CROOKES szerint a földi helium e vonalának hullámhossza $5876{\cdot}0 . 10^{-7}$ mm, szóval az identitás bebizonyítottnak vehető. Igaz, hogy a helium e vonala kettős, a Nap spektrumé pedig nem; azt azonban, hogy a Nap spektrum D_3 vonala nem látszik kettősnek C. RUNGE és F. PASCHEN véleménye szerint a dispersio okozza.[16]

Az előzőkből láthatjuk, hogy a heliumról, daczára annak, hogy már sokan foglalkoztak vele, bizony még csak keveset tudunk. Az eddigi adatokból csupán valószinűségekre következtethetünk, míg a bizonyosságot csak újabb nagyszámú kisérletek eredményei fogják meghozni. *Pekár D.*

IRODALOM.

Az elektromosság és mágnesség elmélete.

Dr. HOÓR MÓR-tól.

(Ismertetés.)

A modern mathematikai és fizikai kutatások mindig jobban és jobban megértetik velünk azt a szoros kapcsolatot, mely a mathematika s a fizika módszere között van. Mert hogy a mennyiségtan az élére állított néhány axioma alapján csakhamar deduktiv jelleget öltött, annak okát leginkább abban kell keresnünk, hogy a mennyiségtan élén álló axiomákat hosszú ideig, mint bizonyításra nem szoruló — úgy szólván — velünk született szemléleti formáknak tekintették. De a jelen század nagyszerű mathematikai kutatásai meggyőztek bennünket arról, hogy ezen axiomák felállításának épen oly induktiv módon kell történni, mint a fizika élére állított alaptételek megállapításának. S minthogy az induktiv jellegű tételek felállításánál pusztán a tapasztalatra vagyunk utalva, azért a tapasztalás durva eszközeivel megállapított tételek korlátoltságából ki kell emelkednünk s igaznak kell állítanunk oly törvényt, melyet csak durván tudtunk igazolni. S midőn ezt teszszük, azaz *midőn a tapasztalás korlátoltságából kiemelkedve igaznak állitunk olyant, a mit csak megközelitőleg tapasztaltunk, akkor nem teszünk mást, mint axiomákat állitunk fel.* S minthogy az axiomákban való hitet a bizonyosság jellegével nem ruházhatjuk fel, azért a belőlük vont következményeket is össze kell egyeztetnünk a tapasztalással, s ha azok a tapasztalástól nagyon eltérnének, akkor axiomáinkat kell tökéletesítenünk. Csak a legújabb időkben derült ki, hogy a mennyiségtan épületét szintén ily módon kell felépíteni. Az ismeretes három különböző geometriai rendszer létezésének kérdése elég bizonyságot nyújt arra nézve, hogy még nem tudtunk elég tapasztalati adatot összegyűjteni, melyek az egyik vagy másik rendszer mellett lándzsát törnének.

Érdekes, hogy midőn a mennyiségtanban az a felfogás, mely azt hangoztatja, hogy az élére állított indukcziókat is szigorú kutatás tárgyává kell tenni, uralomra kezd jutni, ugyanakkor a fizika terén uralkodó felfogásba is az említettem irány beférkőzik. S habár FARADAY nézetei csak lassan terjednek, mindazonáltal az eszme MAXWELL mathematikai éleslátásával szemléltetve diadalra jut. S míg a német fizikusok az eszme kiaknázásában iparkodnak egymást legyőzni s megteremtik HERTZ nagyszerű kisérleteit s BOLTZMANN az eszmét még tovább törekszik fejleszteni, addig a franczia patriotizmus POINCARÉ-val, habár nem is engedi az eszmét a maga tisztaságában megjelenni, mindazonáltal annak nyomásától szabadulni nem tud. S míg a HERTZ-féle kisérletek hatása alatt az angol és olasz már a drót nélkül való telegrafálás megvalósításán dolgozik, addig mi azt hisszük, hogy az új felfogás befogadásától talán teljesen elzárkóztunk. Pedig ellenkezőleg, a FARADAY-MAXWELL-féle felfogás már nálunk is uralkodik és az HOÓR M. könyvében * sokkal tisztábban jelenik meg, mint POINCARÉ munkájában. Igaz, hogy a mi szerzőnk nem emelkedik oly magaslatra, mint a nagy franczia mathematikus, de ezt szerény mathematikai irodalmunknál fogva nem is tehette. Lehetőleg csekély mathematikai eszközökkel akar tehát czélt érni. S ott, hol a magasabb mathematikai fogalmazás elkerülhető, fényes eredményt is mutat fel. A többi részben természetesen már oly tisztán és átlátszóan, csekély mathematikai eszközök felhasználásával, nem is lehetett az eszmét teljesen megvilágítani.

Munkálatát jellemzi az imént említettem irány. Nem a tapasztalástól nagyon is messze menő hipotezisek alapján törekszik okoskodásainak alapot teremteni, hanem a tapasztalással megállapított tételeket állítja fejtegetéseinek élére. A tapasztalásból kiindulva megtanuljuk, hogy meghatározott körülmények között oly jelenségek jönnek létre, melyek alapján az elektromosságra is alkalmazhatjuk a mennyiség fogalmát, a nélkül, hogy mibenlétének megmagyarázási szükségességét éreznők. Hiszen — azt lehet mondani — minden dolognál így vagyunk, csak hatásaikból ismerjük. Miután az elektromosság mennyiségi fogalmát bevezette, kimondja azt a tapasztalati törvényt, melynek segítségével ezt a mennyiséget is megmérhetjük.

Majd megismerkedünk az elektromosság térfogati-, felületi- s vonal-

---

* HOÓR M. munkája két első részét képezi a «*Magyar Mérnök- és Épitész-Egylet*» által kiadott «Elektrotechniká»-nak. Az «*Elektrotechnika*» tartalma a következő: I. R. Az elektromosság és mágnesség elmélete. Dr. HOÓR MÓR-tól. II. R. Elektromos mérő eszközök és mérések. Dr. HOÓR MÓR-tól. III. R. Dinamógépek. SÖPKÉZ SÁNDOR-tól. IV. R. Váltakozó áramú gépek és transzformátorok. STRAUB SÁNDOR-tól. V. R. Elektromos világítás. HERZOG JÓZSEF-től. VI. R. Munkaátvitel STRAUB SÁNDOR-tól. VII. R. Elektrochemia. EDVI ILLÉS ALADAR-tól.

menti sűrűségének fogalmával. Ezek után az elektromos erő- s potencziál-, az elektro-motoros erő s equipotencziál felületekkel ismerkedünk meg rövid egymásutánban.

A 6. §-ban az erővonalak-, erőcsövek-, erőáramlás- s a tiszta Faraday-féle felfogást látjuk előttünk világos és tiszta előadásban, a fejezet végén a Green-féle tételt állapítja meg meglehetős könnyűséggel. A következő fejezetet a Laplace és Poisson-féle egyenletek megállapításának szenteli s ezen egyenleteknek úgy keletkezésére, mint fontosságára nézve tiszta képet nyerünk.

Azonban az elektrostatikai indukczió- és az elektromosságnak a vezetőkön való szétoszlásának meghatározási problemája a legnagyobb s még a mai napig meg nem oldott feladatok közé tartozik. Ennek a nagy problemának jelen állásáról sem rendszeres, sem tiszta képet nem nyerünk. Az elektromos képek fogalmának a bevezetése pedig a 43. lapon teljesen homályos.

Az elektrostatikai kapaczitás- és kondenzátorok elméletének tárgyalásánál megismerkedünk azzal az elvvel, melynek segítségével az elektromosságot abszolut egységekben mérhetjük.

Az elektromos energia megmagyarázása s néhány feladat bemutatása után, bemutatja Thomson quadrans elektrometerének elméletét. Mathematikai levezetése kissé hosszadalmas. Végül megmagyarázza, hogy mit kell *heterosztatikai* és *idiosztatikai* mérés alatt érteni.

A dielektrikumoknak szánt fejezet hosszadalmas volta daczára sem nyújt világos képet arról a szerepről, melyet azok a Faraday megteremtette elméletben játszanak.

Az elektrokinematikai rész azonban már messze elmarad az elektrostatikai résztől. Majdnem úgy tűnik fel, mintha az előző fejtegetések alkalmazása itt helyén való sem volna. Az előadás terjengős; a kisérleti rész nem domborodik ki az elmélet előtt, a kettő — úgy szólván — összeolvad. Érdekes, hogy a tárgyalást egy helyen megszakítja s megismertet bennünket az elektromágneses egységrendszerrel. Oly fogalmakat is találunk itt, melyeket csak a későbbi fejezetek magyaráznak meg. Ezen meglehetős hosszú kitérés után ismerkedünk csak meg a Kirchhoff-féle törvényekkel s alkalmazásukkal.

A mágnesség elméletében az alapfogalmakat tökéletesen úgy vezeti be, mint azt az elektromosságnál láttuk. Itt is előfordulnak ugyanazok a fogalmak megfelelő elnevezésekkel. Majd egy új fogalom, a mágneses nyomaték fogalma s ezen alapon a mágnesezés erőssége nyer mathematikai formában kifejezést; ez után az egyenletesen mágnesezett szálak s a haránt mágnesezett lemezek fogalmával ismerkedünk meg.

Elég könnyedséggel mutatja be a mágneses indukczió problemáját s vezet el bennünket a mágneses indukczió együtthatójának fogalmához, melynek alapján azután megmagyarázza a paramagnetikus és diamagnetikus testek között levő különbséget. Erre a földmágnesség komponenseinek meghatározását mutatja be; azután az elektromos áramok elektromágneses hatásait fejtegeti; itt is a tárgyalás tulságosan hosszadalmas, az elmélet összevegyül a tapasztalással, fogalmazása nem elég szabatos; a 78. és 81. ábrákat nem magyarázza meg, különben is fölöslegesek; ebben a részben találjuk meg a tangens-, sinus- és Gaugain-féle busszóla elméletét.

A köráramok és haránt mágnesezett lemezek összekapcsolásának elmélete sem kisérleti, sem elméleti szempontból nem kielégítő.

Az elektromos áramok egymásra való hatásainak megvizsgálására vonatkozó fejezetben pedig csak közli az Ampère és Neumann-féle formulákat; ebben a fejezetben magyarázza meg az elektrodinamometer elvét.

Az elektromágneses indukczió és önindukczióról szóló fejezetek a munka leggyöngébb részét képezik. Terjengősségre nézve valamennyit felülmulják, a nélkül azonban, hogy világos képet nyujtanának. Találunk itt tudományos alakban formulázott tételeket, homályos, alig érthető részeket; csak a dolog világos és tiszta képét nem látjuk sehol.

A váltakozó erősségű áramok fejezete már inkább megállja a helyét, jóllehet a hosszú integrácziószámításokat meg lehetett volna rövidíteni; ezt annál is inkább meg lehetett volna tenni, mert a nehezebb levezetésű formulákhoz mathematikai nehézségek miatt úgyis csak közelítés útján jutunk.

Ez után egy hosszú fejezet következik a periodikus áramok grafikai megoldásáról; s erre áttér a kölcsönös és önindukcziós vezetők elméletére; néhány feladat bemutatása után a nem linearis vezetőkben indukált áramok fejezetéhez jutunk, a honnan az indukált elektromos mennyiségek kisérleti meghatározásához és a ballisztikus galvanometer fogalmának megmagyarázásához vezet el bennünket a szerző.

A vas, nikkel és kobalt mágneses tulajdonságainak megvizsgálása után még egyszer megismerkedünk az elektromágneses egységrendszerrel.

Az elmélet után következik annak alkalmazása az elektromos mérő eszközökre.

A munkának ez a része három fejezetre oszlik. Az első fejezetben ismerteti a *normál egységeket*, ú. m. az elemek és normál elemeket, a normál-ellenállások és ellenállásos szekrények gyakorlati mintáit, az önindukczió és kölcsönös indukczió gyakorlati mintáit, kondenzatorok és normál kondenzatorokat.

Úgy látszik azután kezdődik a II. fejezet, mert itt kezdődnek a mérő eszközök — igaz, hogy a fejezet nincs megjelölve. Ez az alkalmazási rész legszebb része. Az elméletben mindenütt rámutatott arra az elvre, melyen a készülék alapszik, itt azután első ízben a Gaugain-féle busszólát konstruálja meg, s megmutatja azokat az eszközöket, melyeket a tehetetlenségi nyomaték kisebbítésére használtak fel, majd pedig olyan galvanometerek konstruálására tér át, melyeknek tehetetlenségi nyomatéka lehető nagy. Ezek után a köráramok egymásra való hatásán alapuló elektrodinamometereket s ezzel kapcsolatban a wattmétert mutatja be. Végül Thomson absolut elektrometereit ismerteti, s azután néhány léptekkel ellátott voltmérőt mutat be.

A harmadik fejezet a gyakorlati méréseket mutatja be. A munka ez a része nagyon gyenge. Igaz, hogy előttünk állanak a nagy minták, de világos és érthető magyarázat nélkül. Nem hiszem, hogy a mérésekre bemutatott példákból valaki megtanuljon mérni. Ezek a minták csak azoknak valók, a kik a dolgot már teljesen tudják s emlékezetüket akarják felélénkíteni.

Ezzel a munka ismertetését befejezem. Láttuk, hogy az elméleti rész elemeiben teljes megvilágítást nyertek azok az indukcziók, melyek az egész rendszer alapját képezik. Azonban a kutatások további folyamán az indukcziók és dedukcziók mindinkább összekeverednek; formulázása nem mindenütt kifogástalan; a dolgok mathematikai formulázásának lehetősége és helyessége nem lép úgy előtérbe, mint a munka elején. Az elméleti rész alkalmazásában pedig csak azoknak a mérő eszközöknek leirásában emelkedik föl a köznapiságból, melyeknek alapelveit az elméleti részben már kifejtette. A gyakorlati részt pedig épen nem mondhatjuk útmutatónak. *Suták.*

*

Dr. Ernst Mach. Die Mechanik in ihrer Entwickelung. Historisch-kritisch dargestellt. Dritte Auflage. Leipzig. Brockhaus. 1897. X. 505. Ára 8 márka.

Aránylag rövid tizennégy év alatt harmadik kiadást ért Mach Mechanikája, a mi bizonyára a mellett tanuskodik, hogy a mechanikának oly irányú tárgyalása, melyet Mach indított meg, számos érdeklődőre talált. De nemcsak érdeklődők, hanem tudósok is csatlakoztak a Mach ezen irányához, kiknek az említett időközben megjelent és a mechanika alapelveire vonatkozó művei után (VIII., IX. l.) Mach méltán elmondhatja: «úgy látszik, hogy a mechanika a physikához új viszonyba lép, melynek tárgyalására néhány évtized előtt alig fordítottak figyelmet».

Mach könyve azon tényeket és gondolatokat méltatja, melyek a jelenlegi mechanikának talpkövei lettek s azzal a kérdéssel foglalkozik: «miben áll a mechanikának természettudományi tartalma, hogyan közelítjük meg, mely forrásból merítettük, és miként lehetséges azt állandó birtokunknak tekinteni?» A szerző azt tartja, hogy a természeti ismeretek forrása: a gondolatoknak tényekhez való hozzáillesztése; és a természettudományok czélja: a valóságnak mennél gazdaságosabb skematikus előadása, melynek folytán elesik minden szükségtelen képzet, s az azokhoz fűzött képzelt problémák.

Nagy gondot fordít a szerző a tudomány fejlődésének történeti kutatására: egyrészt mert ez a mechanika jelenlegi állásának megértésére szükséges; másrészt mert a történeti kutatás nemcsak a meglevő dolgok megértését mozdítja elő, hanem lehetségessé teszi az újakhoz való hozzáférést is. A mechanika történetére vonatkozó legújabb kutatásokat Mach tekintetbe veszi harmadik kiadásában és a megfelelő helyeken mindenütt utalás történik azon jelentősebb munkákra, melyek a két első kiadás óta a mechanika tudományos tárgyalását czélozzák.

A mechanikának legrégibb ága a statika, melynek — természetesen legegyszerűbb alakjában — első művelői már a hellén bölcselők voltak. A tudományt annak a körülménynek szüksége hozta létre, hogy az egyszerű nézetek, módszerek, tapasztalatok közölhetőbb alakot öltsenek és szélesebb határokra szert tehessenek. Már a statika törvényeinek tárgyalásából is látható, hogy a gondolkodás ökonómiájának és a tudomány esztetikájának sokkal inkább felel meg, ha egy bizonyos alapelvet (itt pl. a statikai nyomatékot) egy bizonyos tárgykör valamennyi ténye megértésének kulcsául fogadunk el, mintha azt vélnők szükségesnek, hogy ezt az alapelvet előbb oly tételekből kiindulva kell bebizonyítanunk, melyek azt magukban foglalják.

A dynamikai kutatások végeredménye annak a megismerése, hogy a testek egymáson — tér és anyagi állapotuktól függő — gyorsulásokat létesítenek, és hogy tömegeik vannak. A mit mi a jelenségeknél most erőnek mondunk, az már nem rejtélyes valami, hanem tényleg megmérhető mozgás-állapot, melyet a tömeg és gyorsulás szorzatával mérünk. Kétségtelen, hogy Galilei jeles elődeinek kutatásait tekintetbe vette, de valamennyit felül is haladta. Majdnem általános az a vélemény, hogy Galilei — midőn kizárólag nehéz testek mozgásáról szól — a tehetetlenségi törvényt csak vízszintes mozgásokra állította fel; pedig ő már tudta, hogy a nehézség befolyásától ment puskagolyó kimozdulásának irányában egyenesvonalúlag haladna tova. Kitűnik ez Galileinek «Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo» iratából, melynek idevonatkozó sorait Mach könyvének 500. oldalán szószerint idézi. Huyghens munkálkodásai közül Mach amaz elv felállítását tartja legértékesebbnek, melynek segítségével a lengési középpont meghatározására vonatkozó feladatot oldotta meg. Ha e feladatba a tömeg fogalmát, mely Huyghens vizsgálódásainál még hiányzott, beviszszük, úgy az eleven erő tételét kapjuk. Rosenbergnek azt a nézetét, hogy New-

TONnak is megvoltak a maga elődei, főleg az általános nehézkedés fogalmát illetőleg, MACH elfogadja, de hozzáteszi, hogy senki sem volt előtte, a ki e fogalmat oly tartalmas és energikus módon gondolta volna el és fejezte volna ki, mint éppen NEWTON. A mathematikai megoldás pedig határozottan NEWTON érdeme.

MACH ama reményének ad kifejezést, hogy a jelenlegi mechanika elemi törvényeinek helyébe majdan (a NEUMANN-féle elnevezést használva) integrál-törvények fognak lépni, mely esetben az erőfogalom fölöslegessé válnék. HERTZ már ily szellemben írta meg Mechanikáját. HERTZ szerint, ha a tömeg mozgásában az egyenes iránytól eltér, annak oka nem az erő, hanem az, hogy más tömeggel van (szilárd) összeköttetésben. Minden physikai erő ennek az összeköttetésnek hatása folytán áll elő. HERTZ mechanikájának alkalmazásánál — MACH szerint — az a körülmény okozza a legnagyobb nehézséget, hogy a legegyszerűbb esetekben a physikai erők helyettesítésére igen körülményes, gyakran nehézkes fikcziók szükségesek. De nemcsak a mechanikának, hanem a physikának is kell, hogy a legnagyobb előnyére váljék, ha a tünemények tárgyalását a HERTZ féle elv szerint iparkodnak továbbvinni.

A statika és dynamika alapelveinek tárgyalása után ez alapelvek alkalmazása és a mechanikának deduktiv fejlődése következik. A mechanika czélja nemcsak önönmaga, hanem a gyakorlati szükségletekre és más tudományokra vonatkozó feladatok megoldásában is áll. Ezeket a feladatokat a NEWTON-féle módszereken kívül más eljárásokkal is meg lehet oldani, sőt helyes is ily megoldásokat megkisérelni, annál is inkább, mert NEWTON képzetei — POINSOTval szólván — tudományos egyszerűségük és világosságuknál fogva alapvetők. Érdekesen vannak tárgyalva D'ALEMBERT és az eleven erők tétele; GAUSS tétele, a legkisebb kényszer elve; EULER és HAMILTON tételei, a legkisebb hatás elve. E tételek, mint PETZOLDTnak a dynamikai esetekre vonatkozó kutatásai, világosan kimutatják, egyszerűen csak analytikai kifejezések tapasztalati tények számára; és így a természeti jelenségek egyértelműleg meghatározhatók.

A mechanikának deduktiv fejlődését szükségkép követi a formalis (módszeres) fejlődés. «A meglevő és a majdan fellépő tények között ugyanis áttekinthető rendet kell létesítenünk, azokat rendszerbe kell foglalnunk, hogy mindenik a legcsekélyebb pazarlással föltalálható és utánképezhető legyen».

A mechanikának formális fejlődéséről szóló fejezet: a vallás és a mechanika viszonyát tárgyalja, s arra az eredményre jut, hogy e kettő teljesen különáll egymástól; azután az analytikai mechanikát, melynek EULER veti meg alapját és kellő magaslatra LAGRANGE emeli; végre a tudomány ökonomiáját. Ez utóbbi szakasz majdnem tisztán bölcseleti irányú; s MACH kifejti, hogy a tudományt magát minimum feladatnak tekinthetjük. melynek czélja a tényeket lehető teljességükben a legcsekélyebb gondolatpazarlással feltüntetni.

A mechanika a physikával és physiologiával viszonyban van. Hiszen nincsenek tisztán mechanikai jelenségek: mert ha a tömegek kölcsönös mozgásokat hoznak létre, úgy e mozgás jelenségekhez a valóságban hő, mágnesi, elektromos stb. változások fűződnek és e tömegek mozgás-jelenségeit módosítják. MACH előítéletesnek tartja azt a nézetet, hogy a mechanika a physika többi ágának alapja, és hogy valamennyi physikai jelenséget mechanikailag kellene megmagyaráznunk. Még most nem tudhatjuk, melyik physikai jelenség alapvető. A MACH által óhajtott tudományos ideálhoz, hogy t. i. a physikai jelenségek a legegyszerűbb és leggazdaságosabb alakban tárgyalandók, nagyban közeledtek HERTZ vizsgálódásai, melyek a jelenségek leirását tisztán differencziálegyenletek által végzik; továbbá HELM, OSTWALD és másoknak az «általános energetikára» vonatkozó munkái.

MACH több ízben utal a «Principien der Wärmelehre» czímű munkájára, s így czélszerű az illető helyeket a mechanikaiakkal egybevetni.

Szekeres.

Tagdijat fizettek:

1892. évre: Bartha Zsigmond, Bónis Károly, Bujk Béla, Bulyovszky Sándor, Dobay Sándor, Dohnányi Frigyes, Félix János, Fogarassi Béla, Kopp Lajos dr., Malesevits Miklós, Pap Lajos, Perger József, Széchy Ákos, Vigh Béla. Összesen 14.

1893. évre: Csomóssy Sándor, Homor István, Kopp Lajos dr., Makay István, Mialovich Mór, Miklós Ödön, Pap Lajos, Perjessy László, Pfeiffer Péter dr., Simon Ferencz, Söpkéz Sándor, Szabó József, Bp. Tatár Balázs, Tóth József. Összesen 15.

1894. évre: Aranyossi Miksa, Bein Károly, Benkő Imre, Berecz Antal, Bodola László, Édvi Illés Aladár, Erdődy Imre, Gerevich Emil dr., Grexa Loránd, Hubatsek Alajos, Kados Aladár, Kappel György, Korbuly Emil, Kuthy József dr., Medvigy János, Nesnera Aladár, Ondrus Pál, Pap Lajos, Perényi Vilmos, Perjessy László, Polereczky Jolán, Schlesinger Lajos dr., Szarvassy Margit, Szerényi Géza, Tóth József, Vidovich Bonaventura. Összesen 26.

1895. évre: Anderkó Aurél, Balog Mór, Bellágh Kálmán, Bodola László, Boros Sándor, Danch Ferencz, Dietz E. Lajos, Edelmann Sebő dr., Gerevich Emil dr., Grexa Loránd, Héjas Endre, Hornischek Henrik dr., Fr. Kiss Károly, Klupathy Jenő dr., Kont Gyula dr., Németh Antal dr., Perényi Vilmos, Pizetti Rókus, Tóth József. Összesen 19.

1896. évre: Anderkó Aurél, Bellágh Kálmán, Bóbita Endre, Bogyó Samu, Etele Károly, Ferenczy József, Ficsor József, Gerecz Lajos, Gerevich Emil dr., Grexa Loránd, Hoór Mór dr., Janell József, Juckel Gyula dr., Fr. Kiss Károly, Layer Antal dr., Nagy Vazul Pál, Novothny Endre, Ráth Arnold Lajos, Roller Mátyás, Sárkány Lajos dr., Scholtz Ágost dr., Szemethy Béla, Tóth József, Winter József, Zettner Ede. Összesen 25.

1897. évre: Baló Gyula, Bellágh Kálmán, Benda Jenő, Bláthy Ottó, Bóbita Endre, Bozóky Endre dr., Bretz Berta, Csemez József, Czakó Adolf, Ellend József, Etele Károly, Fraunhoffer Lajos dr., Gerevich Emil dr., Gidró Bonifácz, Hoór Mór dr., Horváth Mátyás, Képessy Imre, Király László, Kiss Tamás, Kmety János, Kurländer Ignácz, Lakits Ferencz dr., Neustadt Lipót, Oszlaczky Szilárd, Ráth Arnold Lajos, Riegler Sándor, Serédy Marcell, Tóth József, Vater József. Összesen 29.

1898. évre: Baló Gyula, Bodor Domokos, Bozóky Endre dr., Bretz Berta, Bukovszky János, Czakó Adolf, Demeter István, Etele Károly, Feichtinger Győző, Gidró Bonifácz, Guta József, Havas Miksa, Hoór Mór dr., Horváth Mátyás, Javorik János, Lendvay Hugó, Lévay Ede dr., Lukácsi György, Medveczky Lajos, Mihalovich Alajos, Nikolits Lázár, Ráth Arnold Lajos, Riegler Sándor, Schuller Alajos, Serédy Marcell, Soós Mihály, Stauber József, Szalay István, Szentmiklóssy Jenő, Takáts Gyula, Vörös Cyrill dr., Waldapfel János dr., Zorkóczy Samu. Összesen: 33.

1899. évre: Pallos B. Kajetán.

Előfizetési dijat fizetett:

1897. évre: a pozsonyi áll. főreáliskola.

Budapesten, 1898. okt. hó 10.

Feichtinger Győző
pénztárnok.

ADALÉK A LINEÁR ROKONSÁGOK ELMÉLETÉHEZ.*

Legyen adva a

$$\begin{aligned}\rho y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \rho y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\end{aligned} \tag{I}$$

lineár egyenletrendszer; ez minden $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ értékrendszerhez egy-egy $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ értékrendszert határoz meg, ha ρ-nak egy tetszésszerinti zérustól különböző értéket adunk.

Az $n = 3$, 4 esetekben ez az egyenletrendszer egy kollineár rokonságot állapit meg, ha benne az x-ek és y-ok, mint a sík, illetőleg tér pontjainak homogén koordinátái szerepelnek; ezek az összefüggések minden x ponthoz meghatároznak egy megfelelő y pontot.

Tekintsük most az (I)-ben az x valamint az y változókat valamely $(n-1)$-dimenziós lineár sokaság elemeihez vagy mondjuk pontjaihoz tartozó homogén koordinátáinak. Ekkor (I) alapján a sokaság minden x pontjához egy megfelelő y pont fog tartozni.

E kollineácziónak vannak kettős pontjai; ezek akkor lépnek fel, ha

$$y_1 = x_1, \; y_2 = x_2, \; \ldots, \; y_n = x_n.$$

Tegyük ezt az (I) egyenletekbe, akkor a nyert egyenletrendszerből a kettős pontok koordinátáinak meghatározása a ρ-nak csak oly választása mellett lehetséges, a mely a

---

* E czikk már megjelenőfélben volt, midőn fiatal, szép reményekre jogosító szerzőjét korai halál ragadta ki sorainkból. Szaktudománya iránti lelkesedése és odaadó ügybuzgósága emlékét felejthetetlenné teszik előttünk. *Szerk.*

$$\varphi(\rho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{n2} & \dots a_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

egyenletnek felel meg. Ezt az egyenletet a kollineáczió karakterisztikus egyenletének nevezzük. Ennek meghatározhatjuk összes gyökeit. Minden gyökéhez tartozik egy-egy homogén lineár egyenletrendszer eltünő determinánssal, a melyből legalább egy, de esetleg több kettős pontnak koordinátáit határozhatjuk meg. Ily módon megtaláljuk a kollineáczió összes kettőspontjait.

*Ha a karakterisztikus egyenlet gyökei különbözők, akkor n kettőspont van s ezek lineárisan függetlenek.**

Ennek bizonyítását két részben végezzük el.

1. *Minden gyökhöz csak egy kettőspont tartozik.*

Legyenek a karakterisztikus egyenlet gyökei

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n.$$

Ezek a feltétel szerint mind különbözők. Láttuk, hogy a ρ_i gyökhöz legalább egy kettőspont tartozik. Hogy csupán egy kettőspont tartozik, a végre be kell bizonyitani, hogy a $\varphi(\rho)$ determináns $n-1$-ed fokú aldeterminánsai a ρ_i helyen nem tünnek el mindannyian.

Ha a $\varphi(\rho)$ determináns i-dik sorában a k-dik elem aldeterminánsát $\varphi_{ik}(\rho)$-val, s ez aldeterminánsok legnagyobb közös osztóját $d(\rho)$-val jelöljük:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \dots \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \dots \varphi_{2n} \\ \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} \dots \varphi_{nn} \end{vmatrix} = \varphi(\rho)^{n-1}$$

s a baloldal minden sorából $d(\rho)$-t kiemelve

$$d(\rho)^n \Phi(\rho) = \varphi(\rho)^{n-1}.$$

Itt a jobboldal a $(\rho-\rho_i)$ gyöktényezőt pontosan az $n-1$-ik hat-

* E tételt bebizonyitás végett Rados tanár úr az 1896/7. év első felében a műegyetemen tartott mathem. gyakorlatokon közölte.

ványon tartalmazza, s így $d(\rho)$ e gyöktényezőt nem tartalmazhatja, mert különben a baloldal legalább n-edik hatványon tartalmazná, a mi nyilvánvaló lehetetlenség.

Ekként $d(\rho_i)$ nem lehet zérus; de akkor nem lehet $\varphi_{ik}(\rho_i)$ sem zérus, mert különben $d(\rho_i)$ is zérus volna. Ezzel be van bizonyítva, hogy minden ρ_i gyökhöz egy és csak egy kettőspont tartozik. Miután pedig a feltétel szerint n különböző gyök van, így azt találtuk, hogy a tárgyalt esetben a kollineácziónak pontosan n kettőspontja van.

2. *A karakterisztikus egyenlet n gyökéhez tartozó n kettőspont lineárisan független.*

Legyen a ρ_i gyökhöz tartozó kettőspont:

$$(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$$

akkor

$$\rho_i x_\alpha^{(i)} = a_{\alpha_1} x_1^{(i)} + a_{\alpha_2} x_2^{(i)} + \cdots + a_{\alpha n} x_n^{(i)} \tag{II}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha=1, 2, \ldots, n\\ i=1, 2, \ldots, n\end{pmatrix}$$

Tegyük fel, hogy a kettőspontok közt létezik egy

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_\alpha^{(i)} \equiv \lambda_1 x_\alpha^{(i)} + \lambda_2 x_\alpha^{(2)} + \cdots + \lambda_n x_\alpha^{(n)} = 0 \tag{III}$$

$$(\alpha=1, 2, \ldots, n)$$

lineár összefüggés és szorozzuk meg a (II) egyenletet λ_i-vel s összegezzünk i szerint, akkor nyerjük a

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i \lambda_i x_\alpha^{(i)} = a_{\alpha 1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_1^{(i)} + a_{\alpha 2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_2^{(i)} + \cdots + a_{\alpha n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_n^{(i)}$$

$$(\alpha=1, 2, \ldots, n)$$

egyenlőséget, s ebből a (III) figyelembevételével egy új lineár összefüggést:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i \lambda_i x_\alpha^{(i)} \equiv \rho_1 \lambda_1 x_\alpha^{(1)} + \rho_2 \lambda_2 x_\alpha^{(2)} + \cdots + \rho_n \lambda_n x_\alpha^{(n)} = 0.$$

$$(\alpha=1, 2, \ldots, n)$$

E lineár összefüggés a (III)-ból keletkezett. Most viszont ebből hasonló képezési mód mellett alkothatunk uj lineár összefüggéseket, melyek mind a (III)-ból következnek. Ekként eljutunk a

$$\begin{array}{l} \lambda_1 x_\alpha^{(1)} + \lambda_2 x_\alpha^{(2)} + \cdots + \lambda_n x_\alpha^{(n)} = 0 \\ \rho_1 \lambda_1 x_\alpha^{(1)} + \rho_2 \lambda_2 x_\alpha^{(2)} + \cdots + \rho_n \lambda_n x_\alpha^{(n)} = 0 \\ \rho_1^2 \lambda_1 x_\alpha^{(1)} + \rho_2^2 \lambda_2 x_\alpha^{(2)} + \cdots + \rho_n^2 \lambda_n x_\alpha^{(n)} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho_1^{n-1} \lambda_1 x_\alpha^{(1)} + \rho_2^{n-1} \lambda_2 x_\alpha^{(2)} + \cdots + \rho_n^{n-1} \lambda_n x_\alpha^{(n)} = 0 \\ (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \end{array} \qquad \text{(IV)}$$

lineár összefüggésekhez. Az ebben szereplő

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ \rho_1 & \rho_2 & \ldots \rho_n \\ \rho_1^2 & \rho_2^2 & \ldots \rho_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_1^{n-1} & \rho_2^{n-1} & \ldots \rho_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

determináns nem lehet zérus, mert a feltétel szerint a ρ-k mindannyian különbözők és ez a determináns pedig — mint ismeretes — csakis akkor tünhetik el, midőn a ρ-k között egyenlők vannak. De akkor a (IV) alatti homogén lineár egyenletrendszer determinánsa, ha benne ismeretlenekül $\lambda_1 x_1$, $\lambda_2 x_2$, ... $\lambda_n x_n$-et tekintjük a zérustól különböző, úgy hogy egyenletei csak a

$$\lambda_1 x_\alpha^{(1)} = 0, \ \lambda_2 x_\alpha^{(2)} = 0, \ldots, \lambda_n x_\alpha^{(n)} = 0$$

értékrendszerrel elégíthetők ki.

Legyen $x_\alpha^{(i)}$ a ρ_i gyökhöz tartozó kettőspont koordinátái közül egy olyan, a mely nem zérus, ilyen pedig mindig van, mert mindenik koordináta nem lehet zérus, akkor a

$$\lambda_i x_\alpha^{(i)} = 0$$

egyenletből következik, hogy

$$\lambda_i = 0.$$

Ez minden λ-ra kimutatható. Valamennyi λ egyenlő zérus, s így a feltételezett (III) lineár összefüggés nem valódi.

Ezzel be van bizonyítva, hogy, ha a kollineáczió karakterisztikus egyenletének gyökei nem többszörös gyökök, akkor pontosan n kettőspont van, s azok lineárisan függetlenek. A tétel jelentése $n=3$ esetben az, hogy három kettőspont van, melyek nem esnek egy egyenesbe, tehát egy háromszöget alkotnak; az $n=4$ esetben pedig a kollineácziónak van négy kettőspontja, melyek nem esnek egy síkba, s így egy tetraédert határoznak meg.

Pap Pál.

A LINEÁR EGYENLETRENDSZEREK ELMÉLETÉHEZ.

A jelen dolgozatban a következő két tétel bebizonyítását tűztem ki magamnak feladatul:

Ha az

$$u_i \equiv a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{I.}$$

továbbá a

$$v_i \equiv b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \cdots + b_{in}x_n = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{II.}$$

egyenletrendszerek megoldásai azonosak, akkor

1. *e két rendszer determinánsai egyenlő rangúak;*

2. *az egyik rendszer bármely lineár alakja lineárisan függ a másik rendszer lineár alakjaitól, azaz vannak oly α és β számok, hogy*

$$v_k = \alpha_{k1}u_1 + \alpha_{k2}u_2 + \cdots + \alpha_{kn}u_n \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

$$u_k = \beta_{k1}v_1 + \beta_{k2}v_2 + \cdots + \beta_{kn}v_n \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

az-az az egyenletrendszernek baloldalait alkotó lineár alakrendszerek a szónak Kroneckertől eredő értelmében aequivalensek.

E tételeket Rados tanár úr az 1895/6. év első felében tartott mathematikai gyakorlatain bebizonyítás végett közölte. A bizonyítás a lineár egyenletrendszerekre vonatkozó tételek ismeretét igényli. Az egyik tételt, mely következtetéseinknek alapja, bizonyítással együtt előre bocsátom.

Ha az

$$u_i \equiv a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

*egyenletrendszernek pontosan $n-m$ lineárisan független megoldása van, akkor determinánsa m-ed rangú.**

Az utóbbi tétel bebizonyítására csak azt kell kimutatni, hogy a determináns minden $(m+1)$-ed fokú aldeterminánsa zérus, de az m-ed fokúak közt van zérustól különböző.

Legyen a lineárisan független megoldások teljes rendszere:

$$x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn} \quad (k=1, 2, \ldots, n-m) \tag{III.}$$

akkor minden megoldás ezekből lineárisan állítható elő. Tehát egy tetszőleges megoldás:

$$X_\alpha = \lambda_1 x_{1\alpha} + \lambda_2 x_{2\alpha} + \cdots + \lambda_{n-m} x_{n-m\alpha} \quad (\alpha=1, 2, \ldots, n)$$

hol a λ-ák tetszőleges számok. Ha itt nem minden λ zérus, akkor nem lehet minden X sem zérus. Ugyanis a

$$\lambda_1 x_{1\alpha} + \lambda_2 x_{2\alpha} + \cdots + \lambda_{n-m} x_{n-m\alpha} = 0 \quad (\alpha=1, 2, \ldots, n)$$

egyenlőségek rendszere azt fejezné ki, hogy a felvett $n-m$ megoldás egymástól lineárisan függ. Ez pedig a feltételekkel ellenkezik.

Tegyük most fel, hogy a λ-k úgy vannak megválasztva, hogy az X számok közül tetszőlegesen kiválasztott

$$X_{k_1}, X_{k_2}, \ldots, X_{k_{m+1}}$$

számokon kívül minden más X zérus, s a mellett nem minden λ zérus. Ekkor természetesen e kiválasztott X számok közt is lesz a zérustól különböző. Ez feltehető, hiszen az

$$X_{k_{m+2}}=0, X_{k_{m+3}}=0, \ldots, X_{k_n}=0$$

egyenletrendszer $n-m-1$ egyenletből áll, s az ismeretlenek száma $n-m$; tehát a λ számok ebből az egyenletrendszerből a követelt módon meghatározhatók.

---

* A következő bizonyítás Rados tanár úrtól ered. Mathem. és Termtud. Értesítő. XIII. k. 197 lap. «A semidefinit quadratikus alakok elméletéhez.»

Az így megállapított megoldást helyettesítsük most be az eredeti egyenletrendszer $i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}$-ik egyenleteibe. Akkor az

$$\begin{array}{l} a_{i_1k_1} \; X_1 + a_{i_1k_2} \; X_2 + \cdots + a_{i_1k_{m+1}} \; X_{m+1} = 0 \\ a_{i_2k_1} \; X_1 + a_{i_2k_2} \; X_2 + \cdots + a_{i_2k_{m+1}} \; X_{m+1} = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{i_{m+1}k_1} X_1 + a_{i_{m+1}k_2} X_2 + \cdots + a_{i_{m+1}k_{m+1}} X_{m+1} = 0 \end{array}$$

egyenlőségeket kapjuk, a melyekben nem minden X szám zérus; de akkor kell, hogy determinánsa zérus legyen:

$$\left| a_{rs} \right| = 0$$
$$\begin{pmatrix} r = i_1, i_2, \ldots, i_{m+1} \\ s = k_1, k_2, \ldots, k_{m+1} \end{pmatrix}$$

Ez pedig a felvett egyenletrendszer determinánsának egy tetszésszerinti $(m+1)$-ed fokú aldeterminánsát jelenti.

Még csak azt kell kimutatnunk, hogy az m-ed fokú aldeterminánsok közt van egy, a mely a zérustól különbözik. Ugyanis, ha nem volna, akkor az egyenletrendszer determinánsa m-nél alacsonyabb, pl. $m-k$-ad rendű volna. De akkor az egyenletrendszernek legalább $n-(m-k)$ számmal lévő linearisan független megoldásának kellene lenni. Ez azonban ellentmond feltételünknek, mely szerint az egyenletrendszernek pontosan $n-m$ lineárisan független megoldása van.

A feladat első része most azonnal elintézhető. Legyen ugyanis a (III) teljes megoldási rendszere úgy az (I) mint a (II) egyenletrendszereknek. Tehát mind a két egyenletrendszernek pontosan $n-m$ megoldása van. De akkor az előbbi tétel szerint mind a két egyenletrendszer determinánsa m-ed rangú, s így egymással is egyenlő rangú.

A feladat második részének bebizonyítása czéljából vizsgáljuk az összes

$$w \equiv w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n = 0$$

egyenleteket, a melyeket a (III) értékrendszerek kielégitenek. Minden ily egyenlet együtthatói eleget tesznek az

$$x_{k_1} w_1 + x_{k_2} w_2 + \cdots + x_{kn} w_n = 0 \qquad \text{(IV.)}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n-m)$$

egyenletrendszernek. Ezt n egyenletre egészíthetjük ki, a nélkül, hogy megoldásainak rendszere megváltoznék. Csupán egyik egyenletet kell többször leírni. Az így nyert egyenletrendszer $n-m$ lineárisan független egyenletet tartalmaz s így determinánsa $(n-m)$-ed rangú. De akkor pontosan m lineárisan független megoldása van. Ilyen m lineárisan független megoldást ki lehet könynyen jelölni. Nevezetesen az (I) egyenletrendszer bármely egyenletének együttható rendszere a (IV) egyenletrendszernek egy megoldását adja. De az (I) determinánsa m-ed rangú s így pontosan m lineárisan független egyenletet tartalmaz. Legyenek ezek

$$u_{r_1}=0, \quad u_{r_2}=0, \ldots, u_{r_n}=0,$$

akkor az ezek együtthatóiból alkotott

$$(a_{i_1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$
$$i=r_1, r_2, \ldots, r_n$$

értékrendszerek szintén lineárisan függetlenek, másfelől megoldásai a (IV) egyenletrendszernek, s így egyszersmind annak teljes megoldási rendszerét képezik. A tetszőleges

$$(w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

megoldás most ezektől lineárisan függ, azaz vannak oly λ számok, hogy

$$w_a=\lambda_1 a_{r_1 a}+\lambda_2 a_{r_2 a}+\cdots+\lambda_m a_{r_m a}$$
$$(a=1, 2, \ldots, n)$$

Szorozzuk ezt x_a-val és összegezzük a szerint, akkor

$$\Sigma w_a x_a=\lambda_1 \Sigma a_{r_1 a} x_a+\lambda_2 \Sigma a_{r_2 a} x_a+\cdots+\lambda_m \Sigma a_{r_m a} x_a$$
$$w=\lambda_1 u_{r_1}+\lambda_2 u_{r_2}+\cdots+\lambda_m u_{r_m}.$$

Ezt még úgy is írhatjuk, hogy

$$w=c_1 u_1+c_2 u_2+\cdots+c_n u_n$$

t. i. ha valamely u az előbbi alakban nem szerepelt, most szerepel, de zérus együtthatóval. E szerint minden egyenlet, melyet a (III) értékrendszerek kielégítenek, homogén lineár kifejezése az

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

alakoknak. A (II) egyenletrendszer egyenletei, mind ilyenek, s így lineárisan függenek az (I) egyenletektől, azaz vannak oly α számok, hogy

$$v_k = \alpha_{k1}u_1 + \alpha_{k2}u_2 + \cdots + \alpha_{kn}u_n \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

Ha az előző gondolatmenetben u és v szerepét felcseréljük, hasonlóképen találjuk, hogy az u alakok homogén lineár kifejezései a v alakoknak:

$$u_k = \beta_{k1}v_1 + \beta_{k2}v_2 + \cdots + \beta_{kn}v_n \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

Ezzel a tétel teljes bizonyítása megtörtént.

Még az eredménynek más alakot adhatunk. Foglaljuk össze az (I) egyenletrendszerben levő alakokat egy modulrendszerré, hasonlóképp a (II) alakjait, akkor Kronecker jelzését alkalmazva eredményünket a

$$v_k \equiv 0 \text{ modd. } (u_1, u_2, \ldots, u_k)$$
$$u_k \equiv 0 \text{ modd. } (v_1, v_2, \ldots, v_k)$$
$$(k=1, 2, \ldots, n)$$

kongruencziák fogják kifejezni. Ezek pedig az æquivalentia definicziója szerint az

$$(u_1, u_2, \ldots, u_k) \sim (v_1, v_2, \ldots, v_k)$$

æquivalentiában foglalhatók össze.

Pap Pál.

A CZIKLIKUS DETERMINÁNSOK ELMÉLETÉHEZ.

Cziklikus determinánsoknak az

$$A=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-i+1} & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n-i+2} & \dots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_i & a_{i+1} & \dots & a_n & \dots & a_{i-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-i} & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

alakú determinánsok neveztetnek, melyeknek sorai az első sorból az

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

cziklikus helyettesítés ismételt alkalmazásával nyerhetők.

E lapok negyedik kötetében RADOS GUSZTÁV úr az ily determinánsokra vonatkozólag két igen figyelemre méltó tételt bizonyított be. A következőkben e két tételt más módszerekkel szándékozom újra bebizonyitani.

1. RADOS úr első tétele:

Egy cziklikus determináns első aldeterminánsaiból alkotott determináns megint cziklikus.

Más szóval, ha az A cziklikus determinánsban az i-edik sorban előforduló a_k elemhez tartozó aldeterminánst $A_k^{(i)}$-val jelöljük, úgy

$$A_k^{(1)}=A_k^{(2)}=\dots=A_k^{(i)}=A_k^{(i+1)}=\dots=A_k^{(n)}.$$
$$(k=1, 2, \dots, n)$$

Ennek bebizonyitásánál legyen

$$A^{(i)}=A_1^{(i)}x_1+A_2^{(i)}x_2+\cdots+A_n^{(i)}x_n,$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

hol az x-ek határozatlanok. $A^{(i)}$ determináns-alakban következőleg írható:

$$A^{(i)}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-i+1} & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-i+2} & \ldots & a_1 \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ a_{i-1} & a_i & \ldots & a_{n-1} & \ldots & a_{i-2} \\ x_i & x_{i+1} & \ldots & x_n & \ldots & x_{i-1} \\ a_{i+1} & a_{i+2} & \ldots & a_1 & \ldots & a_i \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-i} & \ldots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Ha itt a sorokat cziklikusan felcseréljük, még pedig oly módon, hogy minden sor egygyel alább kerüljön, az utolsó sor pedig az elsőnek helyére, akkor

$$A^{(i)}=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_n & a_1 & \ldots & a_{n-i} & \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-i+1} & \ldots & a_1 \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ a_{i-1} & a_i & \ldots & a_{n-1} & \ldots & a_{i-2} \\ x_i & x_{i+1} & \ldots & x_n & \ldots & x_{i+1} \\ a_{i+1} & a_{i+2} & \ldots & a_1 & \ldots & a_i \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ a_{n-1} & a_n & \ldots & a_{n-i+1} & \ldots & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

Végre cseréljük fel az oszlopokat is, még pedig kerüljön minden oszlop egygyel előbbre, az utolsó oszlop helyébe pedig jusson az első. Ekkor $A^{(i)}$ átmegy $A^{(i+1)}$-be.

E szerint

$$A^{(1)}=A^{(2)}=\ldots=A^{(i)}=A^{(i+1)}=\ldots=A^{(n)}.$$

A tulajdonképpen bebizonyítandó képletcsoport innen oly módon adódik, hogy x_k helyébe az egységet helyettesítjük, a többi x helyébe pedig a zérust.

2. A bebizonyitandó tételek másodika ama további kapcsolatokra vonatkozik, melyeket A aldeterminánsai között akkor nyerünk, midőn A eltünik. E kapcsolatok mások és mások a szerint, hogy A-nak mint $a_1, a_2, \ldots, a_n$ függvényének tényezői közül melyik enyészik el. Azért e további kapcsolatok tárgyalása előtt A-nak tényezőkre bontott alakjáról kell megemlékeznem.

Ez az alak ismeretes módon következőleg nyerhető. Szorozzuk meg A-t a

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

determinánssal, melyben az α-k az egység n-dik gyökeit jelentik. Leszen

$$AD=\begin{vmatrix} \varphi(\alpha_1) & \alpha_1^{n-1}\varphi(\alpha_1) & \alpha_1^{n-2}\varphi(\alpha_1) & \ldots & \alpha_1\varphi(\alpha_1) \\ \varphi(\alpha_2) & \alpha_2^{n-1}\varphi(\alpha_2) & \alpha_2^{n-2}\varphi(\alpha_2) & \ldots & \alpha_2\varphi(\alpha_2) \\ . & . & . & \ldots & . \\ \varphi(\alpha_n) & \alpha_n^{n-1}\varphi(\alpha_n) & \alpha_n^{n-2}\varphi(\alpha_n) & \ldots & \alpha_n\varphi(\alpha_n) \end{vmatrix}$$

hol

$$\varphi(\alpha_\varrho)=a_1+\alpha_\varrho a_2+\alpha_\varrho^2 a_3+\cdots+\alpha_\varrho^{n-1}a_n.$$
$$(\varrho=1, 2, \ldots, n)$$

Innen továbbá

$$AD=\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^{n-2} & \ldots & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2^{n-1} & \alpha_2^{n-2} & \ldots & \alpha_2 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & \alpha_n^{n-1} & \alpha_n^{n-2} & \ldots & \alpha_n \end{vmatrix} \varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n)=$$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} D\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n).$$

Tehát a tényezőkre bontott alakja:

$$A=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n).$$

3. A bebizonyitandó második tétel most már a következő:*

* RADOS úr az idézett helyen csak az $\alpha_\varrho=1$ esetet tartotta szem előtt.

Ha az A ciklikus determináns eltünik, még pedig akként, hogy

$$\varphi(a_\varrho) \equiv a_1 + a_\varrho a_2 + a_\varrho^2 a_3 + \cdots + a_\varrho^{n-1} a_n = 0,$$

akkor

$$A_2^{(i)} = a_\varrho A_1^{(i)}, \quad A_2^{(i)} = a_\varrho^2 A_1^{(i)}, \ldots, A_k^{(i)} = a_\varrho^{k-1} A_1^{(i)}, \ldots, A_n^{(i)} = a_\varrho^{n-1} A_1^{(i)}.$$

Minthogy $A_k^{(i)}$ értéke csak k-tól függ, azért feltehetjük, hogy $i=1$.

Ebben az esetben induljunk ki az

$$A^{(1)} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \ldots & x_{n-k+1} & \ldots & x_n \\ a_2 & a_3 \ldots & a_{n-k+2} & \ldots & a_1 \\ a_3 & a_4 \ldots & a_{n-k+3} & \ldots & a_2 \\ \cdot & \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_n & a_1 \ldots & a_{n-k} & \ldots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

determinánsból. Ha ennek első oszlopához hozzáadjuk a többi oszlopnak a_ϱ alkalmas hatványaival való szorzatait, úgy

$$A^{(1)} = \begin{vmatrix} x_1 + a_\varrho x_2 + \cdots + a_\varrho^{n-k} x_{n-k+1} + \cdots + a_\varrho^{n-1} x_n & x_2 \ldots & x_{n-k+1} & \ldots & x_n \\ a_\varrho^{n-1}\,\varphi(a_\varrho) & a_3 \ldots & a_{n-k+2} & \ldots & a_1 \\ a_\varrho^{n-2}\,\varphi(a_\varrho) & a_4 \ldots & a_{n-k+3} & \ldots & a_2 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_\varrho \varphi(a_\varrho) & a_1 \ldots & a_{n-k} & \ldots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Ha továbbá tekintetbe veszszük, hogy $\varphi(a_\varrho)$ eltünik, úgy

$$A^{(1)} = (x_1 + a_\varrho x_2 + \cdots + a_\varrho^{n-1} x_n)\, A_1^{(1)}.$$

Itt x_k helyébe az egységet, a többi x helyébe pedig a zérust helyettesítvén, valóban a bebizonyitandó

$$A_k^{(1)} = a_\varrho^{k-1} A_1^{(1)}$$

képletet nyerjük.

Kürschák József.

EGY DETERMINÁNS-TÉTEL ÁLTALÁNOSÍTÁSA.

Az Acta Mathematica czímű folyóirat 18. kötetében HILBERT «Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms» czímű dolgozatában a

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix} = \frac{[1^{n-1}2^{n-2}\dots(n-2)^2(n-1)]^4}{1^{2n-1}2^{2n-2}\dots(2n-2)^2(2n-1)}$$

egyenlőséget a gömbfüggvények elméletének felhasználásával vezeti le. Szemben ezzel a tárgyalással kivánatos ez egyenlőségben kifejezett elemi tételnek elemi eszközök segélyével való bebizonyítása. Felhasználjuk ez alkalmat mindjárt arra, hogy általánosabb determináns-tételt vezessünk le, a melyben a fentebbi mint speczíális eset benfoglaltatik.

E tétel a következő:

$$D_n(a,d)=\left|\frac{1}{a+(i+k-1)d}\right| \quad (i, k=1, 2, \ldots, n)$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+d} & \frac{1}{a+2d} & \cdots & \frac{1}{a+nd} \\ \frac{1}{a+2d} & \frac{1}{a+3d} & \cdots & \frac{1}{a+(n+1)d} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{1}{a+nd} & \frac{1}{a+(n+1)d} & \cdots & \frac{1}{a+(2n-1)d} \end{vmatrix}=$$

$$=\prod_{r=0}^{n-1}\frac{[r!\,(a+d,d)^r d^r]^2}{(a+d,d)^{2r}(a+d,d)^{2r+1}},$$

a hol az $(a+d, d)^r$ jel a

$$(a+d)(a+2d)\ldots(a+rd)$$

fakultást jelenti.

Vonjuk ki a $D_n(a,d)$ determináns n-dik oszlopát a többi oszlopból. Ekkor a k-dik oszlop i-dik eleméből lesz:

$$\frac{1}{a+(i+k-1)d}-\frac{1}{a+(i+n-1)d}=$$
$$=\frac{(n-k)d}{[a+(i+k-1)d][a+(i+n-1)d]}.$$

Mint látható, $(n-k)d$ a k-dik oszlop $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ minden elemében mint tényező fordul elő s így a determináns elé szorzóul kivehető. De a nevezőben is az egyik tényező, mivel k-tól független, az egész i-dik sorban $(i=1, 2, \ldots, n-1, n)$ ugyanaz és megegyező a sor utolsó $\dfrac{1}{a+(i+n-1)d}$ elemének nevezőjével, tehát szintén a determináns elé tehető.

Ezek után lesz:

$$D_n(a,d)=\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2\,.\,1d^{n-1}}{(a+nd)[a+(n+1)d]\ldots[a+(2n-1)d]}D'_n(a,d)$$
$$=\frac{(n-1)!\,(a+d,d)^{n-1}d^{n-1}}{(a+d,d)^{2n-1}}D'_n(a,d),$$

a hol

$$D_n'(a,d)=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+d} & \frac{1}{a+2d} & \cdots & \frac{1}{a+(n-1)d} & 1 \\ \frac{1}{a+2d} & \frac{1}{a+3d} & \cdots & \frac{1}{a+nd} & 1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{a+nd} & \frac{1}{a+(n+1)d} & \cdots & \frac{1}{a+(2n-2)d} & 1 \end{vmatrix}.$$

Vonjuk most ki $D_n'(a,d)$ n-dik sorának elemeit a többi sor elemeiből. E lépés az n-dik oszlop alkatánál fogva azonnal $(n-1)$-edfokú determinánshoz vezet, s lesz, mivel

$$\frac{1}{a+(i+k-1)d}-\frac{1}{a+(n+k-1)d}=$$
$$=\frac{(n-i)d}{[a+(i+k-1)d][a+(n+k-1)d]},$$
$$D_n'(a,d)=\begin{vmatrix} \frac{(n-i)d}{[a+(i+k-1)d][a+(n+k-1)d]} \end{vmatrix}$$
$$(i,k=1,2,\ldots,n-1)$$

s ismét kihozva a determináns elé az egyes sorok és oszlopok közös tényezőit, lesz:

$$D_n'(a,d)=\frac{(n-1)!\,(a+d,d)^{n-1}d^{n-1}}{(a+d,d)^{2n-2}}\begin{vmatrix} \frac{1}{a+(i+k-1)d} \end{vmatrix}$$
$$(i,k=1,2,\ldots,n-1).$$

Minthogy e legutolsó determináns nem más, mint $D_{n-1}(a,d)$,

$$D_n(a,d)=\frac{[(n-1)!\,(a+d,d)^{n-1}d^{n-1}]^2}{(a+d,d)^{2n-2}(a+d,d)^{2n-1}}D_{n-1}(a,d).$$

Már most $D_{n-1}(a,d)$ ugyanígy fejezhető ki $D_{n-2}(a,d)$-vel, és így tovább, végre $D_2(a,d)$ kifejezhető $D_1(a,d)$-vel és ez utolsó melynek értéke $\frac{1}{a+d}$, a zérusodik hatványra és facultásra tétetni szokott megállapodásoknál fogva így lévén írható:

$$D_1(a,d)=\frac{[0!(a+d,d)^0 d^0]^2}{(a+d,d)^0(a+d,d)^1},$$

$$D_n(a,d)=\prod_{r=0}^{n-1}\frac{[r!(a+d,d)^r d^r]^2}{(a+d,d)^{2r}(a+d,d)^{2r+1}}.$$

Ha ez egyenlet jobboldalán a számlálóban és a nevezőben az egyenlő tényezőket összefoglaljuk, a következő alakra jutunk:

$$D_n(a,d)=$$

$$\frac{[1^{n-1}2^{n-2}\dots(n-2)^2(n-1)(a+d)^{n-1}(a+2d)^{n-2}\dots(a+\overline{n-2}d)^2(a+\overline{n-1}d)]^2}{(a+d)^{2n-1}(a+2d)^{2n-2}\dots[a+2n-2)d]^2[a+(2n-1)d]}d^{n(n-1)}.$$

Ha

$$a=0,\quad d=1,$$

származik a Hilbert-féle D determináns, melynek értékéül kapjuk, ha tekintetbe veszszük, hogy

$$(1,1)^r=r!$$

a következő kifejezést:

$$D=D_n(0,1)=\frac{[0!\,1!\,2!\dots(n-1)!]^4}{0!\,1!\,2!\dots(2n-1)!},$$

vagy röviditve $[0!\,1!\dots(n-1)!]$-lel,

$$D=\frac{[0!\,1!\,2!\dots(n-1)!]^3}{n!\,(n+1)!\dots(2n-1)!}.$$

Ha a és d ezen speciális értékeit $D_n(a,d)$ legutolsó kifejezésébe helyettesítjük be, az e dolgozat elején idézett egyenlőséghez jutunk, egészen azon alakjához, a melyben ott idézve van.

Blau Ármin.

EGY ELEMI GEOMETRIAI TÉTEL.

E lapok februári számában a következő elemi geometriai tételt közöltem. Ha

$$A_1A_2 \ldots A_n \quad \text{és} \quad A'_1A'_2 \ldots A'_n$$

két hasonló sokszög, továbbá π és σ e sokszögek síkjában két irányt jelölnek, és a sokszögek csúcsaiból ezen irányokkal párhuzamosakat vonunk, az A_i-ből a π_i és σ_i, az A'_k-ból pedig a π'_k és σ'_k egyeneseket, akkor a

$$(\pi_1\sigma'_1), (\pi_2\sigma'_2), \ldots (\pi_n\sigma'_n) \text{ és } (\pi'_1\sigma_1), (\pi'_2\sigma_2) \ldots (\pi'_n\sigma_n)$$

sokszögek egyenlő területüek. E tételt csak háromszögekre és csakis arra az esetre bizonyítottuk be, midőn a π és σ irányok egymásra merőlegesek. Ha nem merőlegesek egymásra, akkor a tétel általánosságban nem érvényes.

A következő sorokban megállapítom annak a feltételét, hogy a tétel egymáshoz tetszés szerinti ω szög alatt hajló egyenesek esetében is érvényes legyen.

A szóban forgó czikkecske jelzéseit használva, legyenek az A_i pont orthogonális coordinátái: x_i, y_i, az A'_i-é pedig x'_i, y'_i.

A rendszer kezdőpontján át vonjunk az új π és σ irányokkal párhuzamosokat: Π és Σ egyeneseket. Jelöljük továbbá Π szögét az abscissák tengelyéhez α-val és Σ-ét az ordináta-tengelyhez β-val. Ha Π és Σ egy ferdeszögű koordinátarendszer tengelyei, melyekre nézve a coordinátákat X, Y-nal jelöljük, akkor:

$$\begin{aligned} x_i &= X_i \cos\alpha - Y_i \sin\beta \\ {}_i &= X_i \sin\alpha + Y_i \cos\beta \end{aligned} \qquad \text{I)}$$

és megfelelően x'_i, y'_i.

A hasonlóságnak a tétel bevezetésénél használt 2) alatti feltétele az orthogonális coordináták között két összefüggést állapit meg. A képzetes rész a következőt szolgáltatja:

$$(xy'1)-(x'y1)=0, \qquad \text{II}a)$$

ha ezt a jelzést használjuk:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = (ab1)$$

A valós rész pedig a következőt szolgáltatja:

$$(xx'1)-(yy'1)=0. \qquad \text{II}b)$$

A IIa) és IIb) alatti relácziókban az I) alatti szubstituicziót végezzük. A kellő rövidítések után a következő egyenletekre jutunk:

$$\sin 2\alpha\,(XX'1)-\sin 2\beta\,(YY'1)+\cos(\alpha+\beta)\,[(XY'1)-(X'Y1)]=0$$
$$-\cos 2\alpha\,(XX'1)+\cos 2\beta\,(YY'1)+\sin(\alpha+\beta)\,[(XY'1)-(X'Y1)]=0.$$

A szóban forgó tétel akkor lesz érvényes, ha

$$(XY'1)-(X'Y1)=0.$$

Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy a következő két egyenlet álljon fenn:

$$\sin 2\alpha\,.\,(XX'1)-\sin 2\beta\,.\,(YY'1)=0$$
$$-\cos 2\alpha\,\;(XX'1)+\cos 2\beta\,\;(YY'1)=0.$$

E rendszer determinánsa: $\sin 2(\alpha-\beta)$ csakis akkor lehet 0, ha a Π és Σ egyenesek egybeesnek, vagy egymásra merőlegesek.

Az első esetben a tételben szereplő egyenlő területü háromszögek a végtelenben vannak, a második esetben pedig a tétel általános érvényessége már be van bizonyítva. Ha e két eset egyike sem forog fenn, akkor a rendszer determinánsa nem 0, tehát kell, hogy

$$(XX'1)=0 \quad \text{és} \quad (YY'1)=0 \qquad \text{III})$$

legyen.

Vizsgáljuk meg e feltételek geometriai tartalmát.

E végből megjegyezzük, hogy az

$$|X_1-X_2|, \quad |X_1-X_3|, \quad |X_2-X_3|$$

különbségek közül legfölebb egy lehet 0; mert a háromszögnek csak egyik oldala lehet párhuzamos a Σ iránynyal. Ugyanez áll az

$$|X'_1-X'_2|, \quad |X'_1-X'_3|, \quad |X'_2-X'_3|$$

különbségekre nézve; tehát mindenesetre választható a két háromszögnek olyan két megfelelő oldala, hogy egyikük se legyen párhuzamos a Σ iránynyal. Legyenek ezek az A_1A_2 és $A'_1A'_2$. Akkor az $(XX'1)$ eltünésének szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$\rho = \frac{X_3-X_2}{X_1-X_2} - \frac{X'_3-X'_2}{X'_1-X'_2} = 0 \qquad \text{IV)}$$

legyen, mert, a mint egyszerű számítással meggyőződhetünk:

$$(XX'1) = \rho\,(X_1-X_2)\,(X'_1-X'_2).$$

Vonjunk az A_2 csúcson át Σ-val párhuzamosat, és A_1, meg A_3 csúcsokon át Π-vel párhuzamosakat, és jelöljük (X_3-X_2) távolságot d_3-mal, (X_1-X_2) távolságot d_1-gyel. Hasonló módon alkossuk meg d'_3 és d'_1 távolságokat. A IV) alatti egyenlőség tehát:

$$\frac{d_3}{d_1} = \frac{d'_3}{d'_1}$$

és ha a háromszög oldalait a_1, a_2, a_3-mal jelöljük az a_i oldalnak a Σ-hoz való hajlásszögét α_i-vel, és a másik háromszögnél megfelelő jelzést használunk, akkor az ábra szerint:

$$\frac{d_3}{d_1} = \frac{a_1}{a_3}\,\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_3} \qquad \frac{d'_3}{d'_1} = \frac{a'_1}{a'_3}\,\frac{\sin\alpha'_1}{\sin\alpha'_3} \qquad \text{V)}$$

A két háromszög hasonlósága folytán: $\dfrac{a_1}{a_3} = \dfrac{a'_1}{a'_3}$. Ha az A_2-nél levő szögét a háromszögnek, mely megegyezik nagyságra nézve az A'_2-nél levővel, (melytől esetleg értelemre nézve különbözhetik), φ-vel jelöljük, akkor:

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \varphi; \qquad \alpha'_3 = \alpha'_1 \pm \varphi$$

tehető. Az V) alatti:

$$\frac{\sin(\alpha_1+\varphi)}{\sin\alpha_1}=\frac{\sin(\alpha_1'\pm\varphi)}{\sin\alpha_1'}$$

egyenlőségekből következik, hogy:

$$\operatorname{cotg}\alpha_1=\pm\operatorname{cotg}\alpha_1'.$$

Az a_1 iránya a Σ-val tehát akkora szöget alkot, mint az a_1' iránya; de lehetnek még e szögek ellenkező értelműek is. Ugyanilyen módon következik, hogy a_1 iránya a Π-vel is akkora szöget alkot, mint a_1', vagy pedig ellenkező értelmüt. A második alternativa azonban kizárandó, mert abból következnék, hogy a Π a Σ-ra merőleges. *Ha tehát a Π és Σ irányok ferde szöget alkotnak egymással, akkor a szóban forgó tétel akkor és csakis akkor érvényes, ha a hasonló háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak.*

Budapest, 1898 márcz. 20.

Beke Manó.

A QUARCZ OPTIKAI TULAJDONSÁGAINAK RADIOMETERREL VALÓ VIZSGÁLATA.*

Fox NICHOLS megvizsgálta, miképen viselkedik a quarcz a vörösöntúli sugarakkal szemben, melyeknek nagy hullámhosszúság felel meg ($\lambda = 0{\cdot}004 - \lambda = 0{\cdot}009$ mm.).

Ezen kényes kutatásoknál elhagyta a thermoelektrikus elemet, (bolometer), hogy visszatérjen CROOKES radiometeréhez, melyet következőképen alakított át.

Az első kép a radiometernek a sugarak irányára merőleges metszet, a második kép pedig a sugarak irányában való függőleges metszete. *A* vörösréz tartó három csavaron nyugszik, melyet *B* üvegharang légmentesen zár el; *H* csap higany légszivattyúhoz vezet; *C* nyilást tükör üveg fedi, melyen keresztül a kitérés távcső és skála segítségével leolvasható. A lemérendő sugarak a másik nyiláson át juthatnak be a radiometerbe. Ezen nyilást *P* fluorit lap zárja be, mely sárgaréz tokba van foglalva. A nyilásból rövid sárgaréz cső *r* nyulik ki, melyet *k* csillámlap föd be.

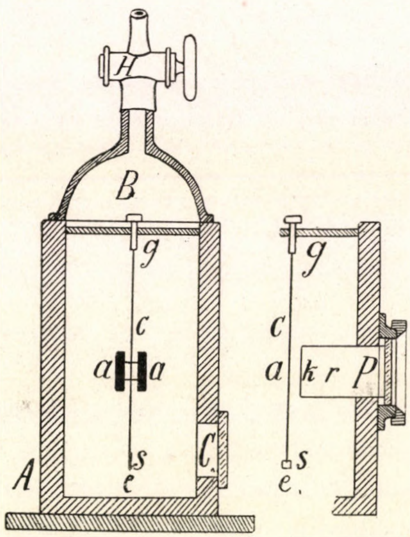
A mozogható részek a következők: két egyenlő nagy s mellső felületükön bekormozott csillám szárnyacska *aa*, melyek vékony üveg fonal *ce* két oldalán vannak megerősítve. *ce* üvegfonal finom *quarcz fonalon függ* s alól leolvasó tükröt *(s)* hord. A mozgékony részek összes súlya 7 mg. Ha a nyomás 0·05 mm s a szárnyaknak a csillámlaptól való távolsága 2·5 mm és a lengési idő 12 s, akkor a készülék a legérzékenyebb; ez esetben egy 6 m távolságban álló

---

* Fox NICHOLS: A method for energy measurements in the infrared spectrum. Physical Review t. IV. n. 4.

gyertya sugarai 60 mm kiütést adnak oly skálán, melynek tükörtávolsága 1 m. Az eszköz legérzékenyebb helyzeténél a kitérések a beeső sugárzó energia mennyiségével arányosak voltak.

Az eszköz előnyei: érzékenysége, 0 pontjának állandósága, magnetikus és thermoelektrikus tüneményektől való függetlensége, légáramok hiánya; hátrányai: nem transportabilis, szivattyúhoz van kötve és az a körülmény, hogy az energia fluorit lemezen megy keresztül, a mi visszaverődéssel és absorptióval jár.



A kisérletek következőképen folynak le: A fényforrás sugarait kösó-lencse gyűjti össze azon quarcz lemezre, melyet épen megakarunk vizsgálni, vagy az ezüst tükörre, mely étalon gyanánt szolgál.

A sugarak innét spektrometerbe jutnak, honnét mint eléggé homogén sugarak egy második kösó-lencsére esnek, mely őket összegyűjtve ráveti az egyik szárnyacskára.

Így vizsgálta meg Nichols a quarcz reflexióját és átbocsátó képességét egészen $\lambda = 0{\cdot}009$ mm hullámhosszúságig, melynél tovább a fluorit absorptiója miatt nem mehetett. Fény forrásul zircon korongot használt, melyet lámpa izzított; a quarcz lemezeket az optikai tengelyre merőlegesen hasította; a sugarak 5° alatt estek be. Felváltva használt quarcz és ezüst lemezeket, és mindig meghatározta a quarcz visszaverődési coefficiensét (alapúl véve az ezüstét). $\lambda = 0.004$ mm hossúságú sugarakból indult ki, a hullámhosszúságot folyton növelve azt tapasztalta, hogy a visszaverődés nagyságát képviselő görbe folytonosan szállt lefelé egészen $\lambda = 0{\cdot}0074$ mm-ig, hol minimumot ért el 0.29%); ezután rohamosan emelkedett elérve maximumát $\lambda = 0.00845$ mm.-nél (75%); a görbe újból leszállt, hogy eljusson a második minimumához $\lambda = 0{\cdot}0086$ mm-nél (51%) és végül felemelkedett második maximumához $\lambda = 0{\cdot}0088$ mm-nél (66%). Ettől kezdve újból szállt $\lambda = 0{\cdot}009$ mm-ig, a kisérlet határáig.

Tanulmányozta az átbocsátó képességet is; 0·0042 mm és 0·007 mm között a görbe 5 maximumot és 4 minimumot mutatott és $\lambda = 0{\cdot}007$ mm-en túl a görbe oly rohamosan emelkedett, hogy lehetetlen volt követnie.

Ismeretes, hogy Cauchy elméleti megfontolásokból kiindulva a törésmutató számára formulát állított fel, melyben a visszaverődés koefficiense is szerepel. A nyert adatokat ezen formulába helyettesítve Nichols meghatározza a quarcz törésmutatóját és két értéket nyer; az egyik a ritkább közegből sűrűbbe való átmenetre vonatkozik, a másik a fordított irányra. A $\lambda = 0{\cdot}004$ és $\lambda = 0.0074$ mm közötti közben nincs kétség az iránt, melyiket válaszszuk; ezen túl azonban másképen áll a dolog: a mutatók görbéi majdnem az érintkezésig közelednek egymáshoz, hogy azután újból szétváljanak.

Vajjon metszették-e egymást, vagy csak érintők maradtak? Nehéz eldönteni, mert ezen környékben a legkisebb tévedés, a legkisebb idegen energia az eredményeket megváltoztatja. Annyi mindenesetre bizonyos, hogy $\lambda = 0.007$ és $\lambda = 0{\cdot}008$ közben a quarcz tulajdonságai alaposan megváltoztak; a visszaverődés, mely ezen kívül olyan, mint az üvegszerű testekké, fémes visszaverődéssé változott.

Nagyon lehetséges, hogy a quarcznak $\lambda = 0{\cdot}009$ mm közelében új absorptiós-vonala van. *Mikola Sándor.*

A VÍZ ABSZOLUT KITERJEDÉSÉNEK MEGHATÁROZÁSA.

Thiesen, Scheell és Diesselhorst-tól. (Wiedemann. Annalen. 1897. Nr. 2.)

A közlekedő csövek módszere megengedi, hogy valamely folyadéknak hő okozta kiterjedését szilárd testekétől függetlenül mérjük meg. Úgy látszik, hogy ezt pontosan megvalósítva eddig csak a higanyra alkalmazták. Szerzők a víz kiterjedését emez abszolut módszerrel határozták meg a berlini Physikalisch-Technische Reichsanstaltban.

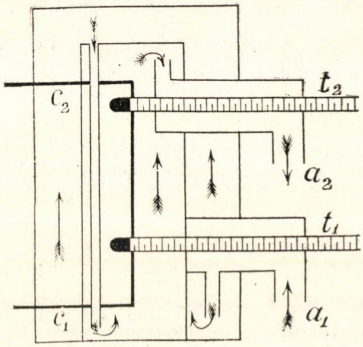
A módszer alapgondolata szerint meg kell mérni ama folyadékoszlopoknak a magasságát, a melyek egymást ellensúlyozzák. Ezek a hosszúságok a folyadékok sűrűségeivel fordítva arányosak. Azonban már *Regnault,* midőn a higany kiterjedését meghatározta, praktikus okokból, közelítőleg egyenlőknek vette az összehasonlítandó oszlopok magasságait. E helyett a nem közlekedő végeken keletkező nyomásbeli különbséget differentiál-manometerrel mérte. Ennek két szárát a szoba hőmérsékletén tartotta. Szóval, ő a hidegebb, sűrűbb higanyoszlop nyomását kiegyenlítette egy egyenlő magasságu meleg higanyoszloppal és egy rövid, szobai hőmérsékletü higanyoszloppal *. Ebben az esetben is ezt az elvet követték szerzők. A vertikális csöveket felül kötötték össze, míg a nyomásbeli különbséget alul mérték.

A készülék legfontosabb része a két egyenlő vízfürdő, a melyek állandó mérsékletet tartanak fenn, beléjük a közlekedő csövek ver-

* Az eljárás alapgondolata már *Boyle*-tól származik. Először alkalmazták pontos mérésekben *Dulong* és *Petit.*

tikális részei merülnek. Igazítható talapzatokra voltak ezek elhelyezve, a melyek egymástól 180 cm távolságban törpe kőoszlopon állottak. Mindenik fürdő két konczentrikus hengerből áll, a külső 3 m hosszú 20 cm átmérővel, a belső kissé rövidebb 14 cm. átmérővel. Egyes sárgaréz csövekből készültek nagy gonddal. Négy sárgaréz kettős gyűrű kötötte össze az egyes csődarabokat.

A kettős gyűrűknek még más szerepük is van. A két *középső* 1 m távolságban egymástól toldalékokat hord a víz oda- és elvezetésére. Az átfolyó víz tartotta a fürdőt a kívánt hőfokon. Az állandó-



hőfokú vizet nagy gonddal szerkesztett és külön szobában elhelyezett berendezés szolgáltatta.

A víz keringését az 1. rajz teszi világossá, a mely a készüléknek egyik felét mutatja. A víz belépett az alsó a toldalékcsőnél. Egy csövön a külső henger fenekéhez közel jutott, onnan kilépve az egész külső hengeren végig, aztán a belső henger fedelére erősített, körülbelül 3 m hosszú csövön annak aljára vissza folyt. Innen kijöve, a belső hengerbe ért, rajta végig egész hosszában. Végül a közel 1 m hosszú csövön a felső toldalékcsövön kifolyt. Így a víz az egész fürdőn háromszor, sőt a végeken négyszer is keresztül folyván, el lehetett kerülni a hőmérséklet minden rétegződését.

Azok a toldalékok, melyek a melegítő vizet oda és elvezették, egyszersmind vizszintesen fekvő hőmérők (t_1, t_2) befogadására is szolgáltak. Ezek mutatták a vízfürdők belsejében a hőfokot, s evvel együtt a közlekedő cső-rendszer (c_1, c_2) ama részeinek hőfokát, a melyek a fürdők tengelyéhez közel voltak. Külön berendezés, a mely egymásba csiszolt csövekből állott, következő feladatokat oldotta meg. A hőmérőket az ő segítségével a fürdőbe könynyen és gyorsan, észrevehető vízvesztesség nélkül bemeríteni s onnan eltávolítani lehetett. A hőmérők hengere a vízfürdő tengelyébe esett, a tulajdonképeni fürdőn kívül fekvő részeiket ide-oda folyó víz mosogatta. A leolvasást szilárdul megerősített mikroszkópokkal eszközölték, egy tükörüveg lapon és a hőmérők körül folyó vízen keresztül, optikailag igen kielégítő módon.

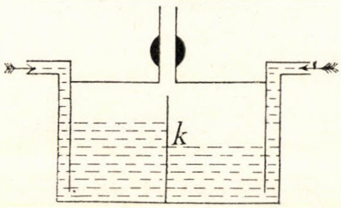
A két külső kettős gyűrű 2 m távolságban egymástól, a közlekedő csövek rendszerének vertikális és horizontális részei között közvetítette az átmenetet.

Ez a csőrendszer 6 mm belvilágu sárgarézből készült, belül fölötte tiszta fémmel beczinezve. A vízszíntes csövek, a vízfürdőktől egész 35 cm hosszúságig (s benn a fürdőben is) kettősek voltak. A tágasabb csövek mellett voltak szükek, csupán 1 mm belvilággal. Csapok segítségével a tágabb csöveket egészen el lehetett zárni. Azonban a hőfokbeli ingadozások miatt, bár azok jelentékenyek nem voltak, nem lehetett megvalósítani azt a szándékot, hogy a mérések alatt csak a jól vízszintezett szük csövek legyenek összekötve. Arra, hogy a vízszintes csövekben a fürdő hőfokáról a szoba hőfokára az átmenet lehetőleg gyors legyen, a sárgaréz csöveket szorosan a fürdők mellett 5 cm vastag ebonit tuskó szakítja meg, a két cső nyilásának megfelelő két furással.

A vízszintes csövek a 2. rajzon vázlatosan megjelölt módon, közbeiktatott tömítő szelencze segítségével, alul és felül vizes szekrényekbe nyilottak. Ezek vasállványon állottak. Az állvány annak a törpe oszlopnak közepére volt beerősítve, a mely a vízfürdőket hordja. Mindenik vizes szekrény felül csappal ellátott sárgaréz szekrényke, a melynek első és hátulsó falait tükörüveg lappal pótolták. A szekrényt egy közfal k két kamarára osztja. Ez a közfal a felső szekrényben felül és alul is, az alsó szekrényben csak felül volt áttörve. A felső szekrény megengedte, hogy a csőrendszer felső részében a nyomást kiegyenlítsék. Az alsó szekrény két kamarájában a nyomáskülönbség miatt általában felszin-különbség keletkezett. Ennek nagysága arányos volt a két vertikális csőben levő víz sűrűségeinek különbségével.

A mérések és számítások, kivált a correctiók részletes leirását a szerzők későbbi alkalomra ígérik.

A megfigyeléseknél nagy gonddal jártak el. Négy hőmérő volt felállítva a vízes szekrénykék közelében, a szoba hőfokának meghatározására. Ezeket olvasták le legelőbb. Azután a vízhőmérők leolvasása, a készülék vízszintezése, a felszinkülönbség lemérése



következett. Ugyanezeket a méréseket megfordított rendben is ismételték. Három fősorozatát hajtották végre a méréseknek 0°C-től 40°C-ig terjedő hőfokok között.

Az eredmények a következő táblázatba foglalhatók össze :

t=0°	ε=0,9998679	v=1,0001321
3·98	1,0000000	1,0000000
10	0,9997272	1,0002728
15	0,9991263	1,0008745
20	0,9982298	1,0017733
25	0,9970714	1,0029372
30	0,9956732	1,0043456*
35	0,9940576	1,0059779
40	0,9922417	1,0078190

* Az eredetiben sajtóhibából: 1,0033456.

Itt t a nemzetközi hydrogén skálában adott hőfok, ε, v a víz sűrűsége, illetőleg térfogata egy légköri nyomás alatt.

A hatodik tizedesek a táblázatban még pontosaknak tekinthetők. A mint arról könnyű meggyőződni, ε, v értékei a legpontosabb eddigi mérésekkel a 4-ik tizedesig megegyeznek. Ezek szerint a víznek legnagyobb sűrűsége a higany tágulására átszámítva (pl. a Chappuis-féle táblázattal) 4° C-nál volna.

Szabó Péter.

TÖRVÉNYSZERŰSÉGEK A SPEKTRÁLVONALAK ELRENDEZÉSÉBEN.

A gyakran hivatolt analogia fény és hang között indíthatta meg és tarthatta ébren ama kutatásokat, melyek a fényforrások szaggatott spektrumaiban harmoniát keresnek. Az eddigi sikerek nem valami nagyok, s ennek bizonyára kettős oka van. Az egyik alkalmi ok az lehet, hogy igen kevés anyagnak ismerjük teljesen tiszta és teljes spektrumát; azaz alig leszünk képesek kijelölni ama spektrumvonalak szigorú hézagnélküli egymásutánját, mely csakugyan az illető testre jellemző. Ezt leginkább érezte LOCKYER, a ki a hosszú és rövid vonalaknak nevezett módszerével iparkodott az anyagnak igazán jellemző vonalait kikeresni. A másik nehézség azonban elvi jelentőségü, mert a kisugárzott fénynemek törvényszerű megállapítása az anyag egyik tulajdonságának magyarázatát involválja, a mi mindig nehéz dolog. Ez esetben tehát hang és fény közötti analogiára gondolni sem lehet, mert előbbi mindig a testnek valamely esetleges állapota, míg a fényemissió (mely a KIRCHHOFF-féle tétel alapján minden hőmérsékletre kiterjeszthető) lételének szükséges folyománya.

Az eddigi, e téren eszközölt kutatások a következő eredménynyel jártak:

LECOQ DE BOISBAUDRAN vette észre először, hogy az alkalik spektrumai sok tekintetben hasonlítanak egymásra, úgy hogy tételül kimondhatta: növekedő atomsúlylyal az alkalik spektrumának súlypontja a növekedő hullámhosszaságok irányában tolódik el.

Hasonló következtetésekhez jut CIAMICIAN, a ki szerint ama elemek dúsabbak kevésbé törékeny vonalakban, melyeknek nagyobb chemiai elevenerő felel meg. E tételek azonban annyira általánosak, hogy további következtetésekre nem alkalmasak.

Érdekesebbek, és némileg eredményesebbek ama vizsgálatok, melyek ugyanazon egy anyagnak különböző vonalaira vonatkoznak. Már korán kifejlett ama nézet, hogy az egyes vonalak úgy foghatók fel, mint valamely alaprezgés felhangjai. A hydrogenium három jól ismert vonala H_α, H_β és H_γ STONEY szerint elegendő közelítéssel állíthatók elő mint oly rezgésnek 20, 27 és 32-dik felhangja, melynek hullámhosszasága 0,013 127714 mm. E szerint

észl. hullámhossz. milliomod mm.	számított hullámhossz. milliomod mm.
410,237	410,241
486,211	486,212
656,393	656,386.

Más anyagok, mint cadmium, magnesium s hasonlók analog szabályoknak hódolnak. Tekintettel a felhangok gyanúsan nagy rendszámára és hézagos egymásra következésére, továbbá arra, hogy már a hydrogenium H_δ vonala a szabálynak ellentmond, benne bizonyára physikai törvényt senkisem fog látni.

SCHUSTER a valószínűségi számításhoz folyamodott. Kiszámítja, hogy vonaldús spektrumban a rezgések tetszőleges elosztása mellet hány vonal felelhetne meg harmonikus viszonyoknak? Általában véve annyi kedvező esetet talál, mint a mennyit a megfigyelések is adnak, a miből következnék, hogy az atomok rezgése nem a feszített húrok törvényei szerint mennek végbe, hanem bonyolódottab törvényeknek hódolnak.

Különös, az elemek szétbonthatóságával számoló tételt iparkodik bizonyitani GRÜNWALD A., a prágai egyetemen a mathematika tanára. Legyen a primær chémiai elem, mely az A gáznemü anyagban más elemekkel chémiailag összekötve fordul elő, úgy hogy A-nak térfogati egységében az $[a]$ volument foglalja el. Ha az A

test egy másik B ugyancsak gáznemű anyaggal C-vé vegyül, az a elem más a' chemiai állapotba megy át, a mennyiben az új vegyület létesitésénél bizonyos hőmennyiséget kiad (vagy kivételes esetekben felvesz) és ennélfogva chémiailag sűrűsödik (vagy dilatatiót szenved). A C testben az a' elem a chémiai egyensúly helyreállta után $[a']$ volument foglalja el. Ismeretes chémiai alaptörvény folytán $[a']:[a]$ hányados többnyire igen egyszerű rationalis szám. Ezeket kiemelve, mondhatjuk: az összes sugarak λ hullámhosszaságai, melyeket az a elem a szabad A anyag vonalas spektrumában kilövelt úgy aránylanak azon λ' hullámhosszaságokhoz, melyeket ugyanezen elem új chemiai a' állapotában az új C vegyület spektrumában emittál, mint a megfelelő térfogatok $[a]$ és $[a']$.

E tétel természetesen csak akkor áll, ha a szóban forgó anyagok gázok, melyek sűrűsödésük állapotjától távol vannak s aránylag kis nyomás alatt állanak.

Ha tehát $[a']=[a]$, azaz, ha az elem térfogata az új C vegyületben ugyanaz, mint az eredeti A anyagban, akkor az a' és a állapotban kisugárzott hullámhosszak is ugyanazok. Az intenzitás természetesen megváltozik általában, s úgy lehetséges, hogy egyes vonalak egészen az eltünésig gyengülnek. A hydrogennek vegyi kondensatio nélkül történő összeköttetései a halogenekkel e szerint oly spektrumot ad, mely egyszerűen a hydrogenium s a megfelelő halogen elem spektrumából van superponálva.

Grünwald ez alapon a hydrogenium vonalas spektrumából a vízgőz spektrumának számos eddig ismeretlen vonalát következtette, és Liveing G. D. megfigyelései teljesen igazolták Grünwald számitásait. Ugyanez alapon sikerült a hydrogeniumspektrumot két (a) és (b) csoportra osztani, a melyek közül az elsők $\frac{19}{30}$-dal, a második $\frac{4}{5}$-öd factorral megszorozva a vízgőz spectrumának megfelelő hullámhosszaiba megy át. Ebből következnék, hogy az A anyag, jelen esetben a hydrogenium, két a és b primær elemből áll, mely B anyag, az oxygenium hatása folytán a $C=H_2O$ vegyületet adja, melyben a H elem $\frac{2}{3}$ térfogatot foglal el. Ha tehát $[a]$

és $[a']$ a primær elem térfogata a hydrogeniumban és vízben, és λ és λ' a megfelelő hullámhosszaságok, akkor $[a]$ és $[b]$ meghatározására a két

$$[a]+[b]=1,\quad \lambda'_a=\frac{19}{30}\lambda_a \text{ és } \lambda'_b=\frac{4}{5}\lambda_b,$$

vagy a tétel értelmében

$$[a]+[b]=1;\quad \frac{19}{30}[a]+\frac{4}{5}[b]=[a']+[b']=\frac{2}{3}$$

egyenlet áll, a miből

$$[a]=\frac{4}{5},\quad [b]=\frac{1}{5}$$

következik. E szerint a hydrogenium $H=a_4b$ alakú vegyület volna. Az a és b anyagok vonalai a Nap spektrumában kiváló szerepet játszanak, és b egyenesen a heliummal, a pedig a coroniummal volna azonosítható.

Ezek szerint hinnünk kellene, hogy a Napon a hydrogenium dissociált állapotban is fordul elő, a mit különben más megfigyelések is lehetségesnek tüntetnek fel.

A legtöbb sikert mutathatja fel Balmer J. Rendkívül egyszerű képlet segítségével, melynek variabilise egyszerűen a hézagnélküli folyószám a hydrogeniumnak eddig ismert 13 vonalát a képzelhető legnagyobb pontossággal állítja elő. A képlet tisztán empirikus és így hangzik:

$$\lambda_n=h\frac{n^2}{n^2-2^2};$$

ha állandó és n a folyószám $n=3$-tól kezdve. A következő táblázat összehasonlítást ad e képlet s a megfigyelés adatai között. A Cornu-féle hullámhosszaságok esetében $h=364{,}542$, a Müller és Kempf-féle mérésekben $h=0{,}3646205$ milliomod mm veendő.

Hydrogen-vonal	n	λ számítva	λ CORNU szerint	λ számítva	λ MÜLLER és KEMPF szerint
α	3	656,18	656,21	656,317	656,314
β	4	486,06	486,07	486,161	486,164
γ	5	433,98	433,95	434,072	434,071
δ	6	410,11	410,12	410,198	410,198
ε	7	396,95	396,92		
ζ	8	388,84	388,81		
η	9	383,48	383,49		
θ	10	379,73	379,73		
ι	11	377,00	376,99		
$\varkappa$	12	374,96	375,02		
λ	13	373,38	373,41		
μ	14	372,14	372,11		
ν	15	371,14	371,12		

A megegyezés észlelés és számítás között minden esetben oly tökéletes, hogy az idézett egyenlet bizonyára nem pusztán empirikus kifejezésnek nevezhető. A nevezőben előforduló 2-ős mindenesetre a végtelen hosszú hullámhosszaságnak rendszáma, mely úgy látszik, minden anyag spektrumában közös, míg h jelentősége egyelőre még homályos marad. Ha az elemek dissociálhatóságában szabad hinnünk, akkor véleményem szerint h a spektrum intenzitás maximumának hullámhosszasága a dissociatió pillanatában.

Ha ezen vagy hasonló egyenletet más anyagok spektrumaira is ki akarjuk terjeszteni, mindenekelőtt tekintetbe veendő, hogy ezek egyes vonalcsoportok, seriesek superpositiójából állanak. Az egyes sorozatok aránylag könnyen szétválaszthatók és megszerkeszthetők, minthogy vonalaiknak feltünő, közös tulajdonságaik vannak. Igy az egyik sorozat vonalai élesen határoltak, a másiké a vörös spektrumvég, a harmadiké az ibolya vég felé elmosódott határolással bírnak, míg ismét mások mindkét oldalon elmosódottak stb. A szétválasztás után kitűnik, hogy minden sorozat vonalai a spektrum törékeny vége felé sűrűsödnek s a seriest jellemző határhullámhosszaság felé konvergálnak.

KAYSER és RUNGE tanárok számos elem spektrumát vizsgálták ily módon és megállapították az egyes seriesek vonalainak egymásutánját. Eredményül kimondhatták, hogy minden sorozat vonalainak rezgési számai, vagy hullámhosszaságaik reciprok értékei n^2 fogyó hatványai szerint haladó sor által előállithatók, ha n a folyó számokat jelenti. A sor első három tagja már elegendő a hullámhosszaságok elég közelitő ábrázolására, és csupán a leghosszabb vagy legfölebb a két leghosszabb vagy legrövidebb hullámú vonal igényel több tagot meghatározására. A leghosszabb hullám rendszáma mindig $n=3$-nak veendő s igy az állandók meghatározására elegendő, ha a seriesben 3 egymásra következő vonal hullámhosszaságát ismerjük. Ha tehát τ_n a λ_n hullámhosszaságnak reciprok értéke, akkor áll:

$$\tau_n = A - \frac{B}{n^2} - \frac{C}{n^4}.$$

Minthogy az állandók meghatározása ezen KAYSER és RUNGE-féle egyenletben fölötte egyszerű, az egyenlet megbecsülhetetlen egyrészt a mérések ellenőrzése szempontjából, másrészt a seriesek összeállítására.

A közlött egyenlet, mint végtelen sor kezdő tagja, mindenesetre nem tekinthető a spektrumvonalak vonatkozásának hű kifejezője gyanánt; ezzel összefügg ama körülmény is, hogy a három állandó nem áll egymással kimutatható kapcsolatban; csak a második állandó ingadozik egynéhány százalékon belül állandó középérték körül.

BALMER J. HAGENBACH E. tanár közreműködése mellett, már régebben kutatja a spektrumvonalak törvényszerűségének zárt kifejezését. A hydrogenképlet szerencsés szerkesztője elsőbb is a lithium és thallium spektrum első vonalsorozatát vette számitás alá; csakhamar feltünt, hogy az egymásra következő hullámhosszaságok különbségeinek quotiensei igen nagy megközelitéssel az $\frac{n+2}{n-1}$ alakú sorhoz vezetnek és csupán a legnagyobb hullámhosszaságoknál észlelhetni nagyobb eltérést. A hydrogen esetében ezen sor teljes szigorusággal adható. Ha ugyanis

$$Q_n=\frac{\lambda_{n-1}-\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n+1}},\ \text{akkor}\ Q_n=\frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{n-1}{n+1}\,\frac{n+3}{n-3}.$$

A thallium megfelelő quotienseinek összehasonlítása a hydrogeniuméival azt mutatják, hogy a megfelelő két sorozat nem födi egymást, hanem hogy az egyik a másiknak számai közé intermittálva be van igtatva. Ebből sejteni lehet, hogy a teljes zárt kifejezésben az egész számú n talán értékének valamely állandó törtrészével megtoldandó. Valószínű volt tehát, hogy a hydrogen-képlet általánosabban kiterjeszthető, ha benne n helyébe $n+c$ lép. Balmer tehát a

$$\lambda_n=a\frac{(n+c)^2}{(n+c)^2-b}\quad\text{vagy}\quad \tau_n=A-\frac{B}{(n+c)^2}$$

formulát állította fel, melyet a lithium I. vonalsorozatán próbált ki, még pedig oly találó eredménynyel, hogy e képletet valamely physikai törvény kifejezése gyanánt tekinthetjük.

Kiválóan alkalmasnak mutatkozott a megvizsgálásra a helium spektruma, melyre vonatkozólag Runge és Paschen kitünő megfigyeléseket közöltek. A spektrum 267,71 és 728,18 milliomod mm között terjed, és 56 vonalat tüntet fel, mely 6 seriesre bontható. Az egyes sorozatok állandói sorban a következők :

Sorozat:	a	b	c
I_α	3420,96	3,758942	1,999392
I_β	3420,99	3,756648	1,998615
II	3120,797	3,427311	2,011946
III_α	2599,342	2,871562	1,942689
III_β	2599,317	2,869745	1,941889
IV	3678,613	4,042545	2,000229
V_α	3421,275	3,746843	1,696996
V_β	3421,109	3,747853	1,697826
VI	3679,022	4,027016	1,852937

Ezen számításokban Riggenbach tanár is vett kiváló részt és az eredmény teljesen kielégítőnek mondható. Annál is inkább, mint-hogy a legkisebb megfigyelési hiba tetemesen megváltoztatja az állandók értékét. Az I., III. és V. sorozat kettős vonalakból áll és ennek megfelelőleg természetesen állandói is kétszer vannak számítva, minden ikervonalra külön-külön.

Az új zárt formula mellett szól ennek tetemes egyszerűsége, mely csak a hydrogen képletével hasonlitható össze, s mely utóbbi már kipróbált formula az újabbnak csak speciális esete $b=4$ és $c=0$ számára. További előnye, hogy immár közömbös, mily rendszámot kap valamely vonal, csak annyi szükséges, hogy az egy sorozathoz tartozó vonalak hézagnélkül következzenek egymásra. Ha ugyanis valamely sorozat kezdővonalában pl. $\pm m$ egész rendszámmal hamis, akkor megfelelőleg az additiv c teljesen kompenzálhatja ezen hibát.

Az állandók jelentőségére nézve Balmer szintén nyilatkozik; a nyilván ama határérték, mely felé valamely series hullámhosszaságai konvergálnak. A c állandó ama eltolódás, melylyel az egyes sorozatokban n egész-számú értékei megváltoznak. Legkevésbbé kiderithető a b állandó jelentősége. Valószinű azonban, hogy négyzetes mennyiség jellegével bir. Mert ha a typikus hydrogeniumképletben b-t négyről egyre változtatjuk, akkor csupán az eredetileg páros n-eknek megfelelő hullámhosszaságok maradnak meg, és a páratlanok kiesnek, úgy hogy a hullámhosszaságok görbéje mintegy felényire redukálódik. Hasonló változás ismétlődik, ha b helyébe más, négyzetes értékeket teszünk.

Igen különös magaviseletet tanusít az $\frac{a}{b}$ hányados. Ha ezt ugyanis bármilyen sorozatban képezzük, oly számhoz jutunk, mely az egyszerű hydrogenspektrumnál megfelelőleg nyert számtól alig $1/2$ perczenttel különbözik. A hydrogennél $3645{,}42 : 4 = 911{,}372$; a helium I_α és β, II és IV sorozatában kevéssel nagyobb, mint 910, III_α és β-nál kissé nagyobb, mint 905, V_α és V_β, továbbá VI-ban közel 913. A lithiumnál ezen állandó 910,34. Minthogy a megfigyelési hibák az állandók értékét nagyon érezhető módon befolyásolják, nincs kizárva, hogy ezen viszony közeli állandósága mögött mélyebb ok is rejlik.

Rydberg svéd tudós már korábban állitott fel teljesen hasonló képletet, melyben a $B = \frac{b}{a}$ állandót azonban mindjárt eleve minden elem számára állandónak tételezte fel. Értéke szerinte 109721,6, a mi a hydrogenre érvényes 911,4 reciprok értéke. Valószínű, hogy Rydberg ezen értéket azért tekintette anyagi mineműségektől függetlennek, mert tényleg közeli középértéke az egyes elemek számára adódó meghatározásoknak, s mert ezen feltevés a többi két állandó kiszámítását tetemesen egyszerűsíti. Mindhárom állandó kiszámítása három megfigyelésből ugyanis harmadfokú egyenlet megoldását kivánja.

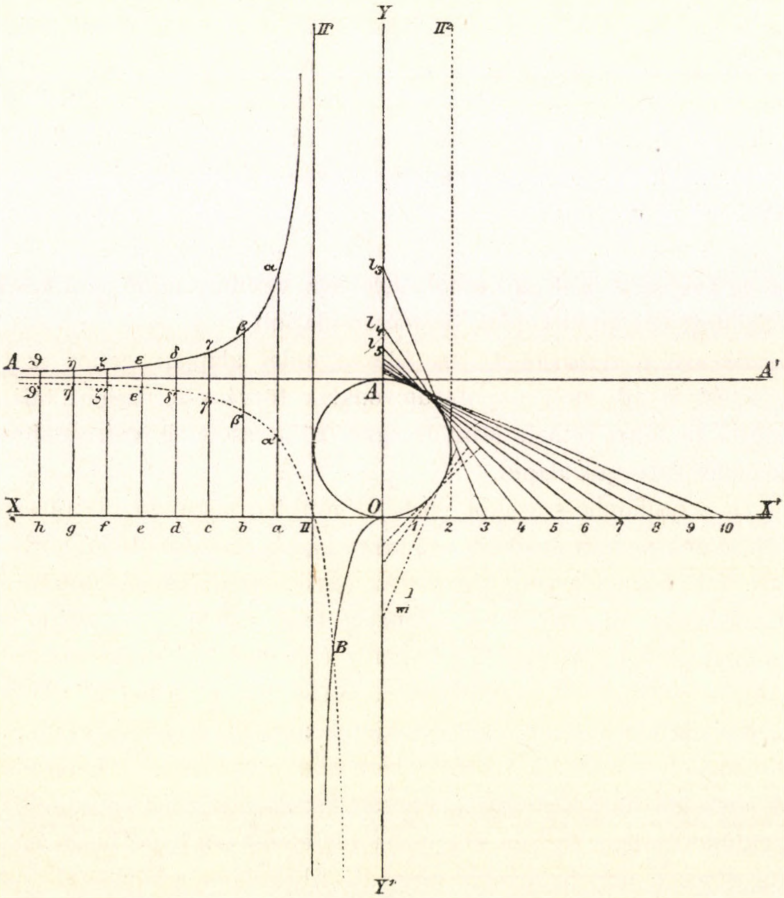
Kayser és Runge ama megjegyzése, mintha a Rydberg-féle formula kevésbbé kielégitő eredményekhez vezetne, mint az általuk felállított rövidített képlet, tévedésen alapult.

Balmer a Rydberg-Balmer-féle egyenlet alapján csinos szerkesztést is ad, mely a spektrumvonalak törvényszerűségére talán idővel kis fényt vethet. Mint legegyszerübb esetet a hydrogenium képletét fektetjük alapul.

Ha a hullámhosszaságok görbéjét minden n számára szerkesztjük, n-nek negativ értékeit sem zárva ki, akkor harmadfokú görbét nyerünk három asymptotával. Az egyik vízszintes asymptota a távolságban van az abscissa-tengely felett; jobbra és balra az ordinata-tengelytől, $2n$ távolságra s e tengelylyel párhuzamosan fekszik a többi két asymptota. A görbe három ágból áll: kettő hyperbolához hasonlít és a vízszintes asymptota felett fekszik, a két függélyes ordináta $4n$ széles köze által elválasztva; a harmadik ág ezen két függélyes ordináta között fekszik; csúcsa a koordináták kezdőpontjában van és két ága a végtelenben a hyperbolás ágak függélyesen álló határaiba megy át. Ábránkban a görbének csak bal része van meg, a jobboldali ennek teljesen symmetrikus mása. Az $a\beta\gamma$ . . . ág a hydrogenium hullámhosszaságainak görbéje, úgy hogy $a\alpha = \lambda_3$, $b\beta = \lambda_4$ . . . a hydrogenium egyes spektrumvonalainak hullámhosszasága.

Ha ismét $a = 4n$-et egységül választjuk, a hullámhosszaságok reciprok értékének görbéje is könnyen szerkeszthető. Ez is harmadfokú görbe, mely azonban csak két hyperbola alakú ágból áll.

A vízszintes asymptota a hullámhosszak görbéjével közös, az egyetlen függélyes asymptota maga az ordinátatengely. Ábránkban



ezen görbe $\alpha'\beta'\gamma' \ldots$, és $a\alpha'$, $b\beta' \ldots$, a λ_3, $\lambda_4 \ldots$ hullámhosszaságok reciprok értéke.

Az ábra jobb oldalán a hydrogeniumvonalak egyszerű szerkesztése áll. Legyen $OA = a = 3645{,}42$ Angström-féle egység; OA-n mint átmérőn leírunk kört s az abscissatengelyre felrakjuk

$n=1, 2, 3 \dots$ értékeket, melyeknek egysége $\frac{1}{4}a=911{,}372$. Az osztási pontokon át meghuzzuk a kör érintőit, akkor ezek metszése az ordinátatengelylyel $O\lambda_3$, $O\lambda_4 \dots$ adja a hullámhosszaságokat. A szerkesztés helyessége közvetlenül a hullámhosszaságok egyenletéből folyik.

(Ann. d. Phys. u. Chem. 1897. Nr. 2 felhasználásával.)

Kövesligethy Radó.

VEGYESEK.

Az «Astronomische Gesellschaft» Budapesten tartott XVII. rendes közgyűlése.

Az «Astronomische Gesellschaft», a legelőkelőbb nemzetközi csillagászati társulat ezidei rendes közgyűlését fővárosunkban tartotta meg. A társulat 1863-ban alakúlt Heidelbergben és 1865-ben Lipcsében tartotta első rendes közgyűlését. Ügyviteli nyelve ugyan a német, de közleményeiben a nemzetközi jellegnek megfelelőleg, minden nyelv használata megengedett. Két évenként tartja rendes közgyűlését Európa más-más városában, természetesen amazokat részesítvén előnyben, a melyek csillagvizsgáló intézettel bírnak. Más városokban megjelenése a csillagászat mintegy újjászületését jelzi: így vált a bambergi csillagvizsgálóra valóságos létkérdéssé a múlt ülés és hasonlóképen hatott áldásosan Budapesten is.

A társulat egyféle tagot egyesít magában; azok száma mintegy tiz év óta állandó, a budapesti választások után 340.

1866 óta «Vierteljahrschrift» czímen negyedévi folyóiratot ad ki, a mely társulati ügyeken kívül az egész világ csillagvizsgálóinak tevékenységét ismerteti és különösen újabb művek és munkálatok birálatát és fejtegetését adja. Időhöz nem kötötten megjeleníti a «Publikationen» czímen nagyfontosságú iratait, a melyek mindannyian az elméleti vagy gyakorlati astronomia terén mérvadók. A legjobban ismert talán Oppolzer «Syzygientafeln für den Mond», a mely különösen történeti fogyatkozások kiszámításánál fontos és Oppolzer klassikus «Canon der Finsternisse» czímű művének is alapját képezi.

A társulat végre nagyszabású munkálatokat is vállal, a melyek sok csillagvizsgálónak és csillagásznak együttműködését követelik. A legfontosabb a jelenleg már lezárt «Zonenunternehmen», a mely 13 observatorium közreműködésével a $-2°$ és $+80°$ parallelák között fekvő állócsillagoknak egészen a 9-ed rendig pontos helymeghatározását tüzte ki feladatáúl.

Jelenlegi elnöke Seeliger Hugó, a müncheni (bogenhauseni) csillagvizsgáló igazgatója, alelnöke Weiss Edmund, a bécsi observatorium igazgatója, titkárjai LEHMAN-FILHÉS és MÜLLER, elnökségi tagjai NYRÉN, DUNÉR és OUDEMANS.

Az elnökség a két utóbb megnevezetten kívül már szeptember 20-án érkezett Budapestre s az előkészítő elnökségi ülések után szeptember 24-ére tette első nyilvános ülését az Akadémia épületében. Ez ülésen megjelent 54 tag, köztük 41 külföldi tag és ezek kiséretében 19 hölgy, közülük 15 külföldi, a mi szokatlan nagy szám. Képviselve volt a Magyar Tudományos Akadémia br. EÖTVÖS LORÁND és HELLER ÁGOST, a Tudományegyetem FRÖHLICH IZIDOR és KÖVESLIGETHY RADÓ, a Műegyetem LIPTHAY SÁNDOR és BODOLA LAJOS, a Meteorologiai Intézet KONKOLY-THEGE MIKLÓS és KURLÄNDER IGNÁCZ, a Természettudományi Társulat SZILY KÁLMÁN, a Mathematikai-Physikai Társulat KÖNIG GYULA, a Földrajzi Társaság ERŐDI BÉLA által. A magyarországi tagok majdnem teljes számban jelentek meg. A csillagvizsgálók, a melyek képviselőt küldtek, a következők : Turin, München, Bécs (observatorium és fokmérő hivatal), Strassburg, Heidelberg (város és Königsstuhl), Bamberg, Breslau, Jena (csillagvizsgáló és üvegtechnikai intézet), Lipcse, Göttingen, Berlin (csillagvizsgáló, Urania csillagvizsgáló, Recheninstitut), Potsdam, Hamburg (csillagvizsgáló és Seewarte), Kiel, Königsberg, Kopenhága, Pulkowa, Upsala és Christiania.

SEELIGER rövid megnyitója után Dr. WLASSICS GYULA, Vallás és Közoktatásügyi minister üdvözölte franczia nyelven a társulatot. Megköszönve a figyelmet, hogy ülésük szinhelyéül ezúttal fővárosunkat választották, valóban nemes és egyszerű szavakban rámutat úgy eddigi sikereinkre a tudomány terén, mint fogyatkozásainkra, a melyeket szépíteni nem iparkodott, de menteni teljesen tudott, nem csak azon igérete által, hogy a munkától nem rettegünk vissza, hanem a múltra való utalással is. És ha eddig az ország a csillagászat műveléséből részét ki nem vehette teljes mértékben, akadtak mindig áldozatkész és lelkes férfiak, KONKOLY-THEGE MIKLÓS, az elhúnyt HAYNALD LAJOS, GOTHARD JENŐ, báró PODMANICZKY GEIZA, SZENICZEY, a kik Uraniának templomokat építettek. De most e téren is határozott haladást jelenthet be a minister úr; KONKOLY MIKLÓS gazdagon berendezett ó-gyallai csillagvizsgálóját az államnak ájándékozta, és Ő Felsége legkegyelmesebben megengedni méltóztatott, hogy a fenntartás és a személyzet költségei a jövő évi költségvetésbe fölvétessenek. A minister úr e csillagvizsgálót némileg kapcsolatba iparkodik hozni a felsőbb oktatással és mindenesetre azon lesz, hogy a jövőben hazánk e téren is lépést tartson a külfölddel, egyaránt művelve az astrophysikát, mint az astronomiát. Történeti múlt is kapcsol e tudományhoz, hiszen PTOLEMAIOS óta a legelső legnagyobb csillagász, REGIOMONTANUS több évet töltött MÁTYÁS király udvarán. A minister azután rámutat a csillagászat következetes fejlődésére, a mennyiben itt inkább, mint bárhol, minden utód elődjének alapján áll és igaz magyar vendégszeretettel üdvözli a Társulatot, a mely e lánczolatos fejlődésben már helyet talált.

Báró Eötvös azután az Akadémia és a többi tudományos társulat nevében üdvözli a megjelenteket. Ő is rámutat a magyar csillagászat eddig vigasztalan voltára és hogy az egyetlen állami csillagvizsgálót, mely a Gellérthegyet koronázta, nem birtuk fentartani. A minister úrnak munkakedvünket hangoztató szavait erősíti, és a munka komoly tudományos voltára nézve igéretet tesz. Kivánja, hogy a Társulat itteni működését siker koronázza és hogy az Akadémia felajánlott csarnokában jól érezze magát. Majd Seeliger köszönte meg a kedves fogadtatást. Ismerve a magyar csillagászok energiáját és tehetségeit, szívesen jöttek el, és a Minister úr nyilatkozata örömmel töltötte el. Kívánja, hogy a közigazgatás és közoktatás minden ágában mutatkozó fellendülés, az itt uralkodó szabad szellem és a valóban tudományos törekvés e szép országban általános érvényre jussanak. De már legelső szavaiban megemlékezik a fölötte szomorú eseményről. a mely a magyar királyi házat, a nép lelkét mélyében rendítette meg. Ők is velünk éreznek és vendégűl lépve a házba, melynek ormáról gyászlobogó leng, sietnek kifejezni részvétüket. Fájdalmunkat hallgatagon tisztelik, helyeikről emelkedvén.

A Társulat veszteségeiről megemlékezvén és különösen Gould és Tisserand érdemeit méltatván, ügyviteli dolgokra tér át az ülés. (A vagyoni állapot 87,000 Mk., az évi bevétel és kiadás kb. 30,000 Mk.) Majd Valentiner és Wolf a jövő gyűlést Heidelbergbe hívják meg. E meghivást szeptember 26-án egyhangúlag elfogadják és már másnap felolvassák a badeni nagyherczeg szivélyesen megköszönő és meghivó sürgönyét.

Az ülést öt előadás rekeszti be. Elsőnek Kreutz, az «Astronomische Nachrichten» szerkesztője kimutatást közöl az üstökösök pályameghatározásának jelen állásáról és különösen a fiatalabb nemzedéknek ajánlja ily munkálatok elvállalását. Majd Schur tanár, a göttingeni csillagvizsgáló igazgatója jelenti, hogy Olbers bremai bolygó- és üstökösmegfigyeléseit az eredeti feljegyzések alapján egészen újból számolta, úgy, hogy e fontos források használatánál immár nem lesz szükség az eredeti feljegyzésekig visszanyúlni.

Bidschof dr. a bécsi observatoriumból bemutatja ama ködfoltok és déli fekvésű Santini-féle csillagok helymeghatározó jegyzékét, melyek 1897 végéig Bécsben észleltettek, továbbá az általa és Palisa dr. által közösen számolt katalogust azon meridiánmegfigyelések alapján, melyek a bécsi Kuffner-féle observatoriumon végeztettek.

Rendkívüli figyelemmel hallgatták Brendel göttingeni tanár előadását, mely Gauss munkáinak kiadására vonatkozott. Nemsokára Gauss halála után megbízta a göttingeni tudós Társaság Schering tanárt e munkák kiadásával. Hat vaskos kötet látott is napvilágot SCHERING haláláig. Az utolsó tartalmazza GAUSS legtöbb nyilvánosságra hozott csillagászati munkáját, de még mitsem gazdag hagyatékából, úgy, hogy a 7-ik kötet a Theoria motus-on és egyéb már nyomtatott értekezésen kívül mindenekelőtt ama perturbatió-számításokat fogja adni, a melyeket GAUSS a Pallasra vonatkozólag végzett, de a melyeket sohasem publikált. Ezek nagyszámú papirfoszlányon maradtak meg, mintegy félmillió számjegy alakjában, melyek mellől minden magyarázó szöveg hiányzik. A számítás menetének reconstructiója ezek alapján fölötte nehéz, bár nem lehetetlen. Legérdekesebb ama vizsgálódás, a mely a Pallas bolygó úgynevezett libratiójára vonatkozik s a mely az által jön létre, hogy 7 Jupiterkeringés pontosan azonos 18 Pallaséval. A 8-ik kötet pótlásokat, a 9-ik életrajzi adatokat és GAUSS levelezését fogja tárgyalni.

Dr. HOLETSCHEK a bécsi csillagdáról beszámol ama kisérleteiről, a melyek segítségével az üstökösök a ködfoltok és csillaghalmazok fényességét vagy helyesebben észrevehetőségét számokban iparkodik kifejezni.

Majd következett a vallás és közoktatási minister által adott reggeli, a melyen pohárköszöntőkben sem volt hiány. Nagy örömet keltett WOLF rövid felszólalása, a melyben egyik legújabban felfedezett kis bolygóját Hungáriára keresztelte. A reggeli után a Társaság a Margitszigetre rándult, majd este hajóról gyönyörködött a kivilágított Dunapart szépségében.

Szeptember 25-ike egészen az ó-gyallai kirándulásnak volt szentelve. Vendégeinket szerfelett meglepte az observatorium valóban dús berendezése, a melynek igen sok műszere, pl. spektroskopok, sőt a nagy refractor is az ó-gyallai műhelyben készült. A szives házigazda fényesen bebizonyította egyebek között azt is, hogy a csillagászok szinte hagyományos zenekedvtelése hazánkban sem hiányzik.

Szeptember 26-án társulati ügyek után különösen Dr. WISLICENUS (Strassburg) indítványát tárgyalták, a mely csillagászati bibliographiai évkönyv kiadására vonatkozott, a mely minden a szakmába vágó elméleti munkáról vagy megfigyelésről röviden számot adjon, tehát a Fortschritte der Physik és Fortschritte der Mathematik mellé sorakoznék. Az indítványt természetesen általánosan elfogadták és felhatalmazták az «Astronomische Gesellschaft» elnökségét, hogy ezen hézagot pótló vállalatot anyagilag támogassa.

Ezután PORRO, a turini observatorium igazgatója bemutatja VITO VOLTERRA egyik dolgozatát a földi pólus mozgásának elméletéről, a mely kissé terjedelmesebben az «Acta Mathematica»-ban fog megjelenni. Tervbe vette továbbá PIAZZI csillagmegfigyeléseinek újból való reductióját, a melynek alapján katalogust is fog összeállítani. A számításban részt vesz Turinban előadó és Dr. BALBI, New-Yorkban H. S. DAVIS és neje COREITA R. DAVIS.

Végül bemutatja facsimilében BIANCHINI egynehány rajzát a XVII. századból, a melyek a csillagfényesség becslésének első kezdeteivel függnek össze. ARGELANDER és SCHIAPARELLI fájlalták e rajzok elvesztését, a melyeket PORRO íme a veronai dóm könyvtárában felfedezett.

Délután WOLF Heidelbergből Dr. PAULY-nak egyik Jenában csiszolt objectivjéről szól. 21,2*c* nyilás mellett 445*c* focustávolsággal bir, új összetételű üvegből készült és az eddigi rendszereknél sokkal tökéletesebb achromatismusa van, a mint ezt a spektroskoppal való megvizsgálás és annak eredményei számokban és görbékben bemutatják. A legszélső vöröstől a *G*-vonalig a szinek majdnem teljesen egyesülnek, csak azontúl tér el a kék, de ekkor sem annyira, mint a FRAUNHOFER-, CLARK- vagy GRUBB-féle objectiveknél, melyeket ez új lencse messze túlhalad. Míg CLARK-nál a sárga és közepes kék szinek focusainak eltérése a gyujtótávolságnak még 0,00065-öd része, addig a PAULY-féle objectivnél már csak 0,00003, tehát egészen más rendű. Megfelelőleg a sphærikus eltérés is nagyon kicsiny és ennek folytán a lencse roppant feloldó hatással bír, úgy hogy pl. η Coronæ 0''4-re álló kisérője külön látható. A csillagkorongok 6-od- és 8-adrendű csillag esetében, illetve 0''-24 és 0''-15 átmérővel bírt. A lencse szintelensége folytán a Nap és Hold képe meglepő, és ez utóbbin 700—800-szoros nagyítás mellett pompásan látszott a sánczhegységekben észrevehető rétegzéseken a színek külömbsége, a mit eddig nem vettek észre.

Az érdekes előadáshoz PAULY fűzött nehány megjegyzést, a mely különösen ez új objectivek készítésére vonatkozik. Az első üvegfaj, a melylyel 1886-ban a másodlagos spektrumot eltüntetni sikerült, nem volt tartós s csak két év előtt sikerült előállítani oly tartós üveget, a mely dispersiója folytán a chromatikus eltérést majdnem teljesen kizárja. A lencse nyilása azonban a spherikus aberratióra való tekintetből a focustávolság $\frac{1}{18}$-ánál nagyobb nem lehet, a mi külömben csillagászati megfigyeléseknél teljesen elegendő. Minthogy a chromatikus aberratió folytán a fény 52%-je elvész, képzelhető ez új lencsék előnye. ZEISS Jenában ez objectivokat már nagyobb számban készen tartja.

Utána MARCUSE értekezik a fotografiai módszerek fontosságáról geografiai helymeghatározásoknál. Minthogy az elmult években ily úton szélességmeghatározásokat jó sikerrel végzett, javaslatot tesz a módszernek általános alkalmazására különösen utazásokon. Előadó már 1893-ban gondolt ily módon a teljes helymeghatározás lehetőségére. A műszer, mely jelenleg tényleg készül, universális műszer, mely szemmel való megfigyelésre és a magasság és átmenet fotografiai registrálására egyaránt alkalmas.

Igen érdekes volt Dr. Prof. FRANZ (Breslau) előadása, a mely a Hold alakjával foglalkozott. A Föld okozta áradat folytán megdermedő Hold a

Föld felé megnyúlt. De míg az árapály és a physikai libratió szerint e megnyúlás a sugárnak csak 0,0001-ed része, addig Gussew szerint, a ki két különböző libratióban felvett holdfotografiát kimért, már 0,0500-t tenne ki. Franz a Lick-csillagdán készült öt holdkép kiméréséből a megnyúlás értékét 0,0027 sugárnyinak találja. Hansen felállította volt azt a hipothezist, hogy a Hold elfordított oldala mélyebben fekszik, mint a felénk forduló fele s hogy ennélfogva ott esetleg található levegő és víz és élet. Newcomb tagadta ezt a következtetést, mely fölött előadó és Förster, a berlini observatorium igazgatója között érdekes discussió folyt, a melyen Seeliger is részt vett. Witt Berlinből óvatosságra int azon megjegyzése által, hogy túlzott alapról felvett stereoskopikus képek (és ilyenek nyilván a libratió különböző phásisaiban felvett holdképek is) hamis benyomásokat kelthetnek.

A délután hátralevő része a város megtekintésére volt szánva. Az est a meteorologiai intézetben egyesítette ismét a társaságot.

Szeptember 27-én volt a közgyűlés harmadik és utolsó ülése. A társulati ügyek elintézése után, melyekhez ezúttal a lelépő elnökségi tagok helyébe új tagok választása járult — a választás egyhangúlag a régi elnökségre esett — ismét következtek tudományos előadások.

Elsőnek felszólalt Dr. Cohn Königsbergből, a ki a legrégibb Bessel-féle meridianmegfigyelések újraszámításának egynehány eredményéről értekezett. A reductió módszerének javítása, különösen pedig ama felfedezés, hogy Bessel lényegesen máskép fogta fel a csillagátmeneteket nappal és éjjel, a Bessel-féle katalogus pontosságát tetemesen fokozta. Hasonló fokozódott pontosságot várhatnánk a fundamentális csillagok helymeghatározásában is, ha az eredeti megfigyelések ily systematikus hibaforrások kiküszöbölése után újból vettetnének számítás alá.

Kövesligethy Radó «A spektrum-analysis két parameter egyenlete» czímen számot ad ama spektralanalytikai elméleti tanulmányairól, a melyekkel az astrophysikát az astronomia pontosságára kivánja emelni. E tanulmányokat mintegy 10 évvel ezelőtt kezdte s csak most fejezhette be. Kimutatja először is, hogy a hőelmélet két főegyenlete az astrophysikában ugyanazon szerepet játsza, mint a mechanika elvei a csillagászatban, majd gondoskodik arról, hogy az egyenletekben szereplő mennyiségek a megfigyelés által beszerezhetők legyenek. E czélból megállapítja az emissiófüggvény egyenletét a hullámhosszaságtól és a fényforrás állapotától való függésében, a mi rendkívül egyszerű, a Clausius-féle sugárzási tétel és a dispersió egyenlet által ellenőrizhető függvényalakhoz vezet. E kifejezés azonkívül híven ad vissza egy a látható spektrum terjedelmét 5-ször felülmúló bolometer mérési sorozatot. A test hőmérséke megállapítható a Draper-féle tétel segítségével az emissió-egyenletben szereplő két parameter által, még pedig függetlenül a test anyagi, felületi és nyomási viszonyaitól.

Minthogy az égi test spektrumának megfigyelése e parameterekkel együtt mindig a fényforrással egyenlő mérsékletű absolut fekete test spektrumát is adja, a hőmérsékletmeghatározás két egymástól független úton történhetik, s ezzel meg van adva a mód a csillagparallaxis lemérésére is, feltéve, hogy fotometrikus mérések kellő pontossággal eszközölhetők. A fényforrás térfogata vagy sűrűsége és nyomása azon tétel segítségével számítható, hogy a test által emittált összes energia az entropia egy kifejthető függvénye. Ez úton tehát a spektrumból a testnek állapota, nevezetesen hőmérséklete és térfogata ismeretes, és a hőelmélet termékeny két tétele közvetlenül az égre alkalmazható. Minthogy az emissió-függvény ismerete az absorptiót is ismerteti, a spektrumanalysis alkalmazhatósága immár nem csupán az izzó állapotra szorítkozik, hanem minden hőmérséklet mellett gondolható.

A valóban kitüntető figyelemmel hallgatott előadás után következett pater Fényi latinnyelvű előadása «De disquisitione circa protuberantias Coloceæ instituta». A kalocsai Haynald-observatorium már 1884 óta a protuberantiák észlelését tűzte ki főczéljáúl és előadó már 13 éven át foglalkozik e tárgygyal. Noha egyelőre teljesen csak az első négy évnek anyaga van feldolgozva, a megfigyelések nagy sorából egy érdekes eredmény máris kitünik. Ugyanis az évenkint észlelt legnagyobb protuberantiák magasságai egymásután a Nap tevékenységének ismert $11\frac{1}{9}$ évi periodusát szembeszökő módon tüntették elé. 1888-ban a legnagyobb protuberantia 158″-et ért el; 1893-ban, a maximum szakában pedig 691″-et. A mi a protuberantiák természetét illeti, ez alkalommal a Schmidt-féle napelmélet alapján bebizonyítható, hogy azok absolut üres világtérben jelennek meg. Ez elmélet szerint ugyanis a kritikus réteg sűrűsége a Napon minden szigorúsággal kiszámítható. Ámde a nap felületén a hydrogenium sűrűsége nem nagyobb, legfölebb olyan lehet, mint a kritikus rétegé, ennélfogva a lehetséges legnagyobb sűrűség akármely magasságra nézve szintén szigorúan kiszámítható. Ha most a sűrűséget csak 25″ magasságban kiszámítjuk, azt találjuk, hogy ott hydrogénium éppenséggel nem is létezhetik. Ugyanis oly térre, mint az egész Nap maga, csak egyetlen molekula jutna. Minden ez eredménynyel ellentétes alapon álló elmélet tehát eleve elvetendő.

Hartwig (Bambergből) figyelmeztet az *SS* Cygni nevű csillagra, melyet Fleming kisasszony 1896-ban fedezett fel és a mely *U* Geminorum változó csillaggal együtt egészen különálló osztályt képez. Mindkettő ugyanis hirtelenül ragyog ki, fényessége 3 nagyságrenddel nő az első 24 óra alatt, majd 14 nap alatt lassan visszasülyed eredeti fényességére. Szoros rokonságban van tehát mindkettő az úgynevezett új csillagokkal s ezért spektroskopikus megfigyelése igen hálás, de tetemes optikai segédeszközöket igényel, minthogy *SS* Cygni csak 8-ad, *U* Geminorum legfölebb 9-ed rendűvé válik. Mindkettő periodusa szabálytalan, emez 3 havi pausákban tör ki, amaz 36—63 nap alatt. A gondos megfigyelés mindenesetre az új csillagok feltűnésének okait ismertetné. Ezzel kapcsolatban említi előadó, hogy újabb változások az Andromeda ködében 1886 eleje óta nem figyelhetők meg. Más csillagászok ugyanis ismétlődő változásokról szóltak a legújabb időben.

Végül FÖRSTER (berlini observatorium) beszélt azon számadatokról, a melyek a juliusi naptárról a gregorira való átmenetelnél mértékadók. Csak nehezítés volna, ha az a javaslat, a mely szerint 128 évenkint egy szökőnap maradjon el, elfogadtatnék. A tropikus év hossza 1900-ban 365,24220 nap — 0,00006 ezredév változással, míg a gregori középév 365,24250 nap. A præcessió változása miatt nem közömbös, vajjon a tavaszi vagy az őszi æquinoctiumból, azaz az északi vagy a déli félgömb tavaszkezdetétől számítsunk. Az első esetben az év hossza 365,24236 nap + 8 százezrednap ezerévi változással, a másodikban 365,24204 nap — 20 százezrednap ezerévi változással. Bár teljesen közömbös, hogy melyik értékből indulunk ki, mégis ajánlatosabb az első, egyrészt mert minden csillagászati adat a tavaszi napéjegyenlőség pontjára vonatkozik, másrészt, mert a kultura súlypontja amúgy is az északi féltekén fekszik. A számadatok pontossága teljesen kielégítő, annál is inkább, minthogy a nap tartamának esetleges változása a kérdésben szintén fontos szerepet játszik.

Erre SEELIGER, még egyszer megköszönve a szives vendéglátást, berekesztette a XVII. rendes közgyűlést.

Az egész társaság délután az egyetemi physikai intézetben gyűlt össze, a hol br. EÖTVÖS LORÁND, a kit időközben szintén új tagúl választottak, előadást tartott azon nagyfontosságú, tagtársaink előtt nem ismeretlen vizsgálódásairól, a melyeket a nehézség és a földmagnesség terén tett. Majd bemutatta alaposan a vizsgálódásaihoz szerkesztett készülékeket, a megfigyelési módszereket és az eddig elért eredményeket, különösen amaz megfigyeléseket, a melyeket fotografiai úton registrált. E helyen nem szükséges e vizsgálódásokkal behatóbban foglalkoznunk, minthogy a Math. és Termtud. Értesítő XIV. köt. 4. füzetében terjedelmesen le vannak írva. Becsüket az Akadémia is ismerte el, midőn 2 évvel ezelőtt az akadémiai nagyjutalommal kitüntette.

E rendkívül alapos és eddig nem sejtett pontosságot adó vizsgálatok általános bámulatot keltettek, nem különben ama egyszerű és geniális előadási kisérletek is, melyeket br. EÖTVÖS használni szokott. Egyik másik tüstént a berlini Urania szertárában is honosíttatik meg.

Este az «Astronomische Gesellschaft» budapesti tagjai a főváros támogatásával baráti búcsúvacsorát adtak. Volt elég szívélyes és őszinte toast, a mely a magyar vendégszeretetet, a tagok és nejei lekötelező szivélyességét, hazánk és fővárosunk minden téren fellendülését dicsérte. Mégis legtöbb hatást tett SEELIGER felköszöntője, a mely a legörömtelibb meglepetést fejezte ki amaz e napon hallott tudományos előadás felett, a melyek a *nálunk* folyó komoly tudományos törekvést jellemzik, csendben, egészen a dolgok gyökeréig hatoló széleskörű vizsgálatokat mutatnak be, a melyek nemcsak részleteket, hanem mindjárt széles perspektivát nyujtó rendszert is létesítenek.

Szeptember 28-án elindult majdnem az egész társaság Orsovára, a honnan másnap a Kazán-szorosba, a Vaskapuhoz és Ada Kaleh-be ment. Míg itthon szakadt az eső, addig az egész gyűlés alatt tartott pompás idő ott sem lett hozzánk hűtelen. Egyik fele a társaságnak azután hazafelé indult, a másik fele Mehádia és Herkulesfürdőre rándult át.

A búcsú rendkívül szives volt és mindenütt felhangzott a kiáltás: viszontlátásra Heidelbergben.

Kövesligethy.

Tagdijat fizettek:

1892. évre: Hassák Vidor.

1893. évre: Frosch Károly.

1894. évre: Angheben Albin, Némethné Földes Izabella, Molnár Aladár, Muraközy Károly. Összesen : 4.

1895. évre: Buchböck Gusztáv, Némethné Földes Izabella, Hőgyes Endre dr., Kovács János dr., Plósz Pál dr., Vidovich Bonaventura. Összesen: 6.

1896. évre: Berkes Ottó, Frank István, Groszbauer József, Héjas Endre, Kemény Ferencz dr., Kerekes Dezső, Marcsiss János, Niedermayer Gyula, Schimanek Emil, Steiner Miklós, Vidovich Bonaventura. Összesen: 11.

1897. évre: Dirner Gusztáv dr., Dsida Ottó, Eberhardt Béla, Frank István, Groszbauer József, Hahóthy Sándor, Heller Richárd, Horostyák Gyula, Kiss E. János, Majoros Endre, Marcsiss János, Pallagi Gyula, Pfeiffer Ferdinánd, Pilcz Ottó, Scholtz Ágost dr., Stephani Ervin, Szakmáry József, Szemethy Béla, id. Szily Kálmán, Winter József. Összesen : 20.

1898. évre: Avéd Jákó, Berkes Imre, Csorba György, Demetzky Mihály dr., Frank István, Fraunhoffer Lajos dr., Gruber Nándor, Horostyák Gyula, Horváth József dr., Iszlay József dr., Jurányi Henrik, Király László, Kiss Dénes, Lutter Janos, Oszlaczky Szilárd, Osztrogonácz János, Pfeiffer Ferdinánd, Renner János, Sárgay Antal, Schenek Gyula, Schenek István dr., Schmidt Ágost dr., Scholtz Ágost dr., Szabó Ádám, Szabó János, Winter József. Összesen: 26.

1899. évre: Frank István, Osztrogonácz János. Összesen: 2.

Előfizetési dijat fizettek:

1896. évre: a budapesti II. k. áll. főgymn.

1897. évre: a budapesti II. k. áll. főgymn., a jászói pr. prépostság könyvtára, a k. r. Kalazantinum, a pannonhalmi főapátság könyvtára. Összesen: 4.

1898. évre: a budapesti II. k. áll. főgymn., a VIII. k. áll. főgymn., a jászói pr. prépostság könyvtára, a kaposvári áll. főgymn., a k. r. Kalazantinum, a pannonhalmi főapátság könyvtára. Összesen : 6.

1899. évre: a nagyváradi áll. főgymn. ifj. könyvtára.

Budapesten, 1898. nov. hó 14.

Feichtinger Győző
pénztárnok.

A TISZTA ANALIZIS ÉS A MATHEMATIKAI PHYSIKA KAPCSOLATA.

(H. POINCARÉ előadása az első nemzetközi mathematikai congresszuson Zürichben, 1897 aug. havában.) *

I.

Bizonynyal gyakrabban kérdezték önöktől, hogy mire való a mathematika és hogy azok a finom szerkezetek, melyeket tisztán az elménkből alkotunk, nem mesterségesek-e és nem-e csupán a szeszélyünk szülöttei?

Azok között, a kik e kérdést teszik, különbséget kell tennünk. A gyakorlati emberek csak azt kivánják tőlünk, hogy tanítsuk meg őket a pénzszerzés eszközeire. Ezek nem is érdemlik meg, hogy válaszoljunk nekik; inkább tőlük kellene kérdeznünk, hogy mire való annyi vagyonnak a felhalmozása, hiszen e gazdagság gyüjtése annyi időbe telik, hogy mellette el kell hanyagolniok a tudományt és a művészetet, melyek egyedül képesitik az ember lelkét arra, hogy a gazdagságnak örüljön.

Et propter vitam vivendi perdere causas.

Különben is, olyan tudomány, mely egyesegyedül az alkalmazások érdekében készül, lehetetlen; az igazságok ugyanis csakis akkor termékenyek, ha egymással szorosan összefüződnek. Ha csak azokkal foglalkozunk, melyektől közvetlen hasznot várunk, akkor a közbenső gyűrűk hiányozni fognak és nem lesz meg a lánczolat.

Azok, a kik az elméletet leginkább megvetik, a mathematikában lelik, a nélkül hogy tudnák, mindennapi táplálékukat; ha el-

---

* Ezt az előadást POINCARÉ úr szíves engedelmével közöljük. *Szerk.*

ragadtatnék e táplálék, a haladás hirtelen megakadna, és csakhamar chinai mozdulatlanságban szenderülnénk el.

De eleget foglalkoztunk ezekkel a gyakorlati férfiakkal. Ezek mellett vannak olyanok, a kiket csakis a természet érdekel és a kik azt kérdezik tőlünk, hogy képesek vagyunk-e a természetet velük jobban megismertetni?

Hogy ezeknek válaszoljunk, nem kell egyebet tennünk, mint rámutatni az égi testek mechanikájának és a mathematikai physikának már majdnem teljesen megalkotott hatalmas épületeire. Bizonynyal egyetértenek velünk abban, hogy ezek az épületek megérik azt a fáradságot, a mibe kerültek. De ez még nem elég.

A mathematikának hármas czélja van: Eszközt kell szolgáltatnia a természet tanulmányozására.

De ez még nem minden: van philosophiai, sőt æsthetikai czélja is. Segíti a bölcsészt abban, hogy mélyebben állapíthassa meg a szám, a tér és idő fogalmait.

Ezeken kívül beavatottaknak olyan gyönyörüséget szerez, mint a festészet, vagy a zene. Megcsodálhatják a számok és alakok finom harmoniáit, csudálatot kelt bennük, ha egy új felfedezés új, váratlan perspectivát nyit meg előttük; és nincs-e æsthetikai jellege ennek az élvezetnek, jóllehet az érzékeknek semmi részük sincs benne? Igaz, hogy kevés kiválasztott élvezheti ezt a maga teljességében, de nem így van-e ez más nemes művészetnél is?

Ezért nem habozom kimondani, hogy a mathematika megérdemli önmagáért, hogy műveltessék és azoknak az elméleteknek, a melyek nem alkalmazhatók a physikában, épen úgy kell létezniök, mint a többieknek.

Még ha nem volna is kapcsolatos a physikai és az æsthetikai czél, még akkor sem kellene egyiket sem feláldoznunk.

De szerencsére ez a két czél egymástól elválaszthatatlan és a legjobb eszköz arra, hogy az egyiket elérjük, az, hogy mindig a másikat tartsuk szemünk előtt, vagy legalább is, hogy szem elől ne téveszszük.

Ezt törekszem bebizonyítani azzal, hogy pontosan megállapítom a tiszta tudomány és az ő alkalmazásai közötti kapcsolatot.

A mathematikus ne legyen a physikus szempontjából csupán formulaszállító, hanem kell, hogy egyik a másiknak sokkal bensőbb munkatársa legyen.

A mathematikai physika és a tiszta analizis nemcsak határtartományok, melyek egymással jó szomszédságot tartanak; áthatják egymást kölcsönösen, szellemük egy és ugyanaz.

Jobban megértjük ezt, ha megmutatom, hogy mit kapott a physika a mathematikától és hogy viszont mit köszönhet a mathematika a physikának.

II.

A physikus nem kivánhatja az analizissel foglalkozótól, hogy új igazságot fedezzen föl számára; legfölebb segíthet neki abban, hogy valamely új igazságot megsejtsen.

Már régóta nem gondol senki sem arra, hogy a tapasztalatot megelőzze, vagy hogy a világot szedett-vedett hypothesisek alapján alkossa meg. Mindazon szerkezetekből, melyekkel száz évvel ezelőtt elég naivul mulattak az emberek, manapság csak romok maradtak.

Minden törvény tehát tapasztalatból ered; de hogy kifejezhessük e törvényeket, sajátos nyelvre van szükségünk; a közönséges nyelv nagyon szegény, nagyon határozatlan, hogy sem kifejezhetné e finom, gazdag és pontos vonatkozásokat.

Ez tehát az egyik oka annak, hogy a physikus nem nélkülözheti a mathematikát; ez szolgáltatja neki egyedül azt a nyelvet, a melyen beszélhet.

És az nem közönbös dolog, hogy a nyelv jól legyen megalkotva; hogy a physikánál maradjunk, az az ismeretlen ember a ki a *hő* szót alkotta, egész nemzedékeket tévedésbe ejtett. A hőt anyagnak tekintették egyszerüen azért, mert főnév fejezte ki és elpusztíthatlannak vélték.

Viszont annak, a ki a *villamosság* szót találta ki, az a meg nem érdemelt szerencséje volt, hogy hallgatagon megajándékozhatta a physikát egy új törvénynyel, az elektromosság megmaradásának törvényével, a mely, véletlenül, legalább a mai napig, igaznak bizonyult.

Hogy tovább folytassuk az egybevetést, azok az irók, a kik a nyelvet szépitik, a kik azt művésziesen használják, egyúttal alkalmasabbá és hajlékonyabbá is teszik a gondolatok árnyalatainak kifejezésére.

Ebből megérthető, hogy az a mathematikus, a ki pusztán æsthetikai czélt tart szeme előtt, közreműködik egyúttal azon, hogy oly nyelvet teremtsen, mely a physikust jobban kielégítse.

De ez még nem minden; a törvény a tapasztalásból számazik; de nem közvetlenül. A tapasztalat egyéni, a törvény, melyet abból megállapitunk, általános; a tapasztalat csak megközelitő, a törvény pontos, vagy legalább az akar lenni. A tapasztalat mindig bonyolódott körülmények között létesül, a törvény kifejezése e körülményeket kiküszöböli. Ez az a mit a hiba korrigálásának nevezünk.

Szóval, hogy a tapasztalatból a törvényt megállapithassuk, általánosítanunk kell; és ez a legtöbb körültekintést igényli.

De hogyan kell általánositani? Hisz minden részleges igazság számtalan sokféleképen terjeszthető ki.

A kinálkozó ezer út közül kell választanunk, legalább ideiglenesen; mi vezessen bennünket ennél a választásnál?

Nem lehet e vezető más, mint az analogia. Minő határozatlan e szó! A kezdetleges ember csak durva analogiákat ismert: azokat, a melyek az érzékeket megkapják: a hang, a szin analogiáit. Sohasem gondolt volna arra, hogy közelitse egymáshoz a fényt és sugárzó hőt.

Ki tanít meg bennünket arra, hogy felismerjük az igazi, a mély analogiát, melyet a szem nem lát, csak az ész sejt?

A mathematikai szellem az, a mely eltekint az anyagtól, hogy csupán az alakkal foglalkozzék. Ő tanitott meg bennünket arra, hogy ugyanazzal a névvel jelöljük mindazokat a valóságokat, melyek csupán az anyagban különböznek egymástól, hogy ugyanazzal a névvel jelöljük például a quaterniók és az egész számok szorzását.

Ha a quaterniókat, melyeket emlitettem, nem használták volna fel hamarosan az angol physikusok, sokan nem látnának bennük egyebet merész álomképnél; pedig, megtanítva bennünket arra, hogy közelítsük egymáshoz a látszat által szétválasztottakat, máris alkalmas eszközül szolgáltak a természet titkainak felderítésében.

Ime azok a szolgálatok, melyeket a physikus a mathematikustól várhat; de hogy ezt a segítséget a mathematika tényleg nyujthassa, kell, hogy a legszélesebb alapon műveltessék, kell, hogy a hasznossági szempont elfogulttá ne tegye, kell hogy a mathematikus művész módjára foglalkozzék a tárgyával.

Azt kivánjuk tőle, hogy segítse a látásunkat, hogy megmutassa útunkat abban a tömkelegben, a mely előttünk áll. Az lát legjobban, a ki legmagasabbra emelkedett.

Bőségesen állnak a példák rendelkezésünkre, csak a legfrappansabbakra hivatkozom.

Az első megmutatja, hogy elégséges a kifejezést változtatnunk, hogy észrevegyük azt az általánosítást, melyet addig nem is sejtettünk.

Midőn a Kepler-féle törvény helyébe a Newton-féle törvény került, még nem ismertek más mozgást, mint az ellipsziseset. Ha csak ilyen mozgásra szorítkozunk, a két törvény csakis alakra nézve különbözik egymástól; egyiktől a másikra térhetünk át egyszerű differencziálással.

És mégis Newton törvényéből egy közvetlenül kinálkozó általánosítással levezethetjük a perturbatio összes jelenségeit és az egész égi mechanikát. Ha megmaradtunk volna a Kepler-féle kifejezés mellett, soha sem tekinthettük volna a megzavart bolygók pályáit, ezen bonyolódott görbéket, melyek egyenleteit még senki sem állította elő, mint az ellipsis természetes általánosítását. A megfigyelések fejlődése nem vezetett volna egyébre, mint a chaosban való hitre.

A második példa is megérdemli, hogy meggondolásunk tárgyát alkossa.

Midőn Maxwell megkezdte munkálatait, az elektrodynamikai törvények, melyek eleddig általánosan elfogadtattak, minden ismeretes tényre vonatkozólag adtak felvilágosítást. Nem új kisérlet volt az, mely megdöntötte őket.

De új szempontból tekintve ezen elektrodynamikai törvényeket, MAXWELL észrevette, hogy ezek az egyenletek sokkal szimmetrikusabbakká válnak, ha még egy tagot függeszt hozzájuk, oly kicsiny tagot, mely a régi módszerekkel nem létesíthet észrevehető befolyást.

Tudjuk, hogy MAXWELL apriorisztikus elmélkedései husz év után érték csak meg kisérleti megerősítésüket, vagy ha úgy tetszik, MAXWELL husz évvel megelőzte a kisérletet.

Hogyan ment végbe ez a győzelem?

Ugy, hogy MAXWELL át meg át volt hatva a mathematikai szimmetria érzetétől; de vajjon lehetséges lett volna-e ez, ha már előtte mások nem foglalkoztak volna ezzel a mathematikai szimmetriával csupán a benne rejlő szépség miatt?

Ugy, hogy MAXWELL megszokta azt, hogy vektorokkal gondolkozzék, már pedig a vektorok az analizisbe a képzetes számok révén jutottak. Azok, a kik a képzetes számot kitalálták, nem igen gondoltak arra, hogy a való világ tanulmányozásánál is szerepük lesz; bizonyitja ezt eléggé az a név, a melyet adtak neki.

Szóval MAXWELL talán nem volt nagyon ügyes az analizisben, ez az ügyesség csak felesleges teher lett volna, mely akadályozta volna kutatásaiban. Ellenben a legmagasabb fokban volt kifejlődve benne a mathematikai analogiák érzéke. Ezért alkothatott nagyot a mathematikai physikában.

MAXWELL példája még egyébre is tanit.

Hogyan kell tárgyalni a mathematikai physika egyenleteit? Egyszerüen le kell-e vonnunk belőlük az összes következtetéseket, teljesen változhatatlanoknak tekintve őket? Távol legyen tőlünk; lehet, sőt kell is változtatni ezeket az egyenleteket. Csak így válhatnak hasznunkra.

A harmadik példa megmutatja, mi módon állapithatunk meg mathematikai analogiát olyan tünemények között, melyek semmiféle realis, vagy látszólagos physikai vonatkozásban sincsenek egymással és mégis az egyik tünemény törvényszerüsége segít bennünket a másik tünemény törvényeinek felfedezésében.

Ugyanaz az egyenlet, a LAPLACE-féle, szerepel a NEWTON-féle vonzásnál, a folyadékok mozgásánál, a villamos potencziálnál, a mágnességnél, a hő terjedésénél és még sok más esetben.

Mi következik ebből? Ezek az elméletek mintegy képei egymásnak; egymást kölcsönösen megvilágitják, ha egyikre a másik nyelvét alkalmazzuk; kérdezzük csak meg az elektromossággal foglalkozót, hogy nem tartja-e szerencsének, hogy föltalálták az erővonal fogalmát, melyet a hydrodynamika és a hőelmélet sugalmazott? Igy tehát a mathematikai analogiák nem csak sejtetik velünk a physikai analogiákat, hanem hasznosakká válnak még akkor is, ha ezeket az utóbbiakat nélkülözzük.

Összefoglalva tehát mondhatjuk, hogy a mathematikai physika czélja nem csak az, hogy megkönnyitse a physikusnak némely állandó kiszámitását és a differencziálegyenleteinek integráczióját. Ezen kívül még, sőt legfőkép, megismerteti vele a dolgok rejtett harmoniáját, új szempontokat mutatva neki.

Az analizis minden ága között ez a legmagasabb, a legtisztább, a mely a legtermékenyebb lesz azok kezében, a kik tudnak vele bánni.

III.

Nézzük most, mivel tartozik az analizis a physikának?

Nem feledhetjük el, hogy a tudomány történetének tanusága szerint a természet megismerésének vágya volt a mathematika fejlődésére a legállandóbb és legszerencsésebb hatással.

Először is a physikus kérdéseket tesz, melyek megoldását tőlünk várja. De azzal, hogy a problemát fölveti, már előre bőségesen megfizette azt a szolgálatot, melyet teszünk neki, ha a problemát tényleg megoldjuk.

Ha tovább folytathatom a művészetekkel való egybevetést, mondhatom, hogy az a mathematikus, a ki a külső világ létezésére nem vet ügyet, hasonló ahhoz a művészhez, a ki harmonikusan tudja kombinálni a szineket és alakokat, de nincsenek modelljei. Teremtő ereje csakhamar elsenyved.

A számok és jelek kombináczióinak száma végtelen. Hogyan válaszszuk ki ebből a tömkelegből azokat, a melyek figyelmünket megérdemlik? Pusztán a szeszély vezessen bennünket? Ez a szeszély, mely egyébként hamarosan beleunna e foglalkozásba, kétségkívül messze ragadná egyikünket a másikától és csakhamar meg se értenők egymást.

De ez csak a kisebb oldala a kérdésnek.

A physika kétségkívül megakadályoz bennünket abban, hogy tévutakra térjünk, de megóv egyúttal bennünket egy sokkal nagyobb veszélytől, megakadályoz bennünket abban, hogy szüntelen ugyanabban a körben mozogjunk.

A tudomány története bizonyítja, hogy a physika nem csak arra kényszerített bennünket, hogy válaszszunk azok között a problemák között, melyek tömegesen kinálkoznak, hanem egyúttal olyan problemákat is ránk erőszakol, a melyekre nélküle soha se gondoltunk volna.

Bármilyen változatos legyen is az ember képzelete, a természet még ezerszerte gazdagabb. Hogy ezt követhessük, oly utakat kell választanunk, melyeket elhanyagoltunk, és ezek az utak gyakran oly csúcsokhoz vezetnek, melyekről új tájakra nyilik kilátás. Mi volna ennél hasznosabb!

Vannak mathematikai symbolumok is épúgy, mint physikai valóságok. A belső harmóniát, a mely egyedül szép és következésképen egyedül méltó a fáradságunkra, úgy érthetjük meg, ha mindent különböző szempontokból vetünk egybe.

Az első példa, melyet említek, oly régi, hogy már majdnem el is felejtjük, de azért mégis a legfontosabb valamennyi között.

A mathematikai gondolkozás egyedüli természetes tárgya az egész szám. A külső világ szolgáltatta a folytonosságot, melyet kétségkívül mi találtunk fel, de melynek feltalálására a természet kényszerített bennünket.

E nélkül nem volna infinitesimalis analizisünk, az egész tudományunk az arithmetikára vagy a substituczíók elméletére szorítkoznék.

Igy azonban majdnem minden időnket és erőnket a folytonosság tanulmányozásának szenteltük. Van-e, a ki ezt megbánta, a ki kárba veszettnek tartja a rá fordított időt és munkát?

Az analizis végtelen perspectivát fejt ki előttünk, melyet az arithmetika nem is sejt; egy szempillantással áttekinthetünk egy hatalmas egészet, melynek rendje egyszerü és szimmetrikus; míg az egész számok elméletében, a hol a véletlen uralkodik, a tekintetünk, hogy úgy mondjam, minden lépésnél megakad.

Bizonynyal azt fogják mondani, hogy az egész számon kívül nincsen szigorúság, következésképen mathematikai igazság sincs; hogy az egész szám elrejtve mindenütt meg van és hogy azon kell erőlködnünk, hogy átlátszóvá tegyük azt a fátyolt, mely elfedi; vajjon ezért szakadatlanul ismétlésbe kell-e bocsátkoznunk?

Ne legyünk ilyen puristák, legyünk háladatosak a folytonosság fogalma iránt, a mely, bár *minden* az egész számból ered, egyedül képesített bennünket arra, hogy *annyit* származtassunk belőle.

Szükséges-e, hogy emlékeztessek arra, hogy Hermite meglepő eredményeket ért el a folytonos változóknak a számelméletbe való bevezetésével?

Tehát még az egész számok birodalmát is magához ragadta és a folytonosság fogalmának eme beözönlése rendet teremtett ott, a hol rendetlenség uralkodott.

Ime, ezt köszönhetjük a folytonosságnak, következésképen a physikai természetnek.

A Fourier-féle sor olyan értékes eszköz, melyet a mathematikus lépten nyomon használ. Fourier pedig ezt csakis egy physikai problemának megoldására találta fel. Ha ez a problema természetszerűen föl nem merült volna, soha sem mertünk volna a discontinuitásnak polgárjogot adni; sokáig a folytonos függvényt tekintettük volna az egyedüli valódi függvénynek.

A függvény fogalma ez által lényegesen kiterjedt és néhány logikus mathematikus által váratlan fejlődésnek indult. Ezek az analitikusok elkalandoztak olyan vidékekre, a hol a legtisztább abstractio uralkodik és a mennyire csak lehetséges volt, eltávoztak a való világtól. És erre is egy physikai problema adta meg az alkalmat.

A Fourier-féle sor mellett más analog sorok léptek be az analizis birodalmába; ugyanazon a kapun jutottak be; az alkalmazások érdekében alkottattak. Elég, ha megemlítem azokat, a melyek elemei a gömbfüggvények, vagy a LAMÉ-féle függvények.

A másodrendű parcziális differencziálegyenletek elméletének hasonló története van; leginkább a physika által és a physikáért fejlődött.

Ha a mathematikusok az ő természetes hajlamuknak engedtek volna, akkor valószinűleg ezen az úton fejtették volna ki ezen egyenletek elméletét és határföltételeit:

Tegyük fel például, hogy adva van egy másodrendű parczialis differencziálegyenletünk e két változó x, y és ezek függvénye F között. Megadták volna F-et és $\frac{dF}{dx}$-et $x=0$ mellett. Igy járt el például KOWALEVSKY az ő híres értekezésében.

Pedig sokféleképen állíthatjuk fel e problemát. Megadhatjuk F-et egy zárt görbe mentén, miként a DIRICHLET-féle problemánál teszszük, vagy megadhatjuk F és $\frac{dF}{dn}$ viszonyait, mint a hőelméletben teszszük.

A problema felállításának mindezen módjait a physikának köszönhetjük. Mondhatjuk, hogy nélküle nem ismernők a parcziális differencziálegyenleteket.

Felesleges a példákat szaporítani. Eleget mondtam már arra, hogy következtethessem, hogy ha a physikusok egy problema megoldását kérik tőlünk, akkor nem terhet rónak ránk, hanem ellenkezőleg hálával tartozunk nekik.

IV.

De ez még nem minden; a physika nem csak alkalmat ád problemák megoldására; még a megoldások módjában is segítségünkre van, még pedig kétféleképen.

Előre sejteti velünk a megoldást; és sugalmazza egyúttal magát az okoskodás menetét is.

Szóltam már a LAPLACE-féle egyenletről, mely egymástól távol eső physikai elméletek egész seregénél szerepel. Megtaláljuk a geometriában, a konform leképezés elméletében, és a tiszta analizisben, a képzetesek elméletében.

Ily módon a complex változó függvényének elméletében a mathematikus a geometriai képek mellett, melyek az ő megszokott eszközei, talál egyúttal physikai képeket is, melyeknek ép oly sikerrel veheti hasznát.

Ezeknek a képeknek köszönheti, hogy egy szempillantással áttekintheti azt, a mit a tiszta elmélet csak fokozatosan tüntethet elő. Összegyüjti ily módon a megoldás szétszórt elemeit és az intuitio egy nemével előre kitalálja az eredményt, mielőtt bizonyíthatna.

Előre látni a bizonyítás előtt! Kell-e emlékeztetnem arra, hogy a legfontosabb felfedezések így keletkeztek?

Mennyi igazság van, melyet a physikai analogiák előre sejtetnek, de szigorú bizonyítással még nem tudjuk őket igazolni!

Igy például a mathematikai physika több sorbafejtést alkalmaz. Senki sem kételkedik e sorok convergentiájában; de a mathematikai bizonyosságot még nélkülözzük.

Ezek megannyi biztos győzelmei az utánunk jövő kutatóknak.

A physika, más részről, nem csak a megoldást szolgáltatja, hanem bizonyos mértékben még következtetéseink módszereit is.

Elég, ha arra hivatkozom, hogy Klein a Riemann-féle felületek elméletében az elektromos áramlások sajátságait használta fel.

Igaz, hogy ezek az elmélkedések nem szigorúak olyan értelemben, a mint azt a mathematikus felfogja.

Ezzel kapcsolatosan felmerül az a kérdés: hogyan lehetséges az, hogy az a bizonyítás, mely nem elég szigorú a mathematikusnak, kielégíti mégis a physikust? Ugy látszik, nem lehetséges kétféle szigorúság, vagy van szigorúság, vagy nincs, és ha nincs, akkor a bizonyítás sem bizonyítás. Jobban megérthetjük ezt a látszólagos ellenmondást, ha meggondoljuk, minő viszonyok között alkalmazható a szám a természeti tüneményekre?

Miből erednek majdnem mindig a nehézségek, ha az ember szigorúságra törekszik? Olyankor ütközünk nehézségekbe, ha be akarjuk bizonyítani, hogy valamely mennyiségnek van határértéke, vagy hogy valamely függvény folytonos, vagy hogy valamely függvénynek van differencziálquotiense.

Ámde azok a számok, melyeket a physikusok kisérleti alapon mérnek, mindig csak megközelítő értékek; és másrészt bármely függvény csak tetszőleges kevéssel tér el egy nem folytonos függvénytől, valamint tetszőleges csekélylyel különbözik egy folytonos függvénytől.

A physikus tehát tetszése szerint fölteheti, hogy a tanulmánya tárgyát képező függvény folytonos, vagy hogy nem folytonos; hogy van differencziálquotiense, vagy hogy nincs; és pedig a nélkül, hogy attól kellene tartania, hogy akár tényleges, akár a jövőben teendő tapasztalatokkal ellenmondásba jön. Belátható tehát, hogy a physikus ilyen szabadság mellett könnyedén bánik el azokkal a nehézségekkel, melyek a mathematikust megakasztják.

Mindig úgy okoskodhatik, mintha minden függvény, melyet tárgyalásaiba bevezet, raczionális egész függvény lenne.

Igy értelmezendő az a megjegyzés, hogy az a bizonyitás, mely a physikust kielégíti, nem olyan, mint a minőt az analizis követel. De ebből nem következik, hogy az egyik a másik megtalálásához nem segíthet.

Már annyi physikai tételt alakítottak át szigorú bizonyítássá, hogy manapság már ez az átalakítás könnyen végezhető.

Bőségesen sorolhatnék fel erre példákat, ha nem félnék, hogy a figyelmüket kifárasztom és az előadást túlságos hosszura nyujtom.

Azt hiszem. eleget mondtam arra, hogy megmutassam, hogy az analizis és a mathematikai physika egymást támogatják, a nélkül, hogy egyik a másikának áldozatot hozna és hogy mindegyikük örülhet annak, a mi a másikat emeli.

Ford. *Beke Manó.*

A HATÁR FOGALMÁNAK ÁLTALÁNOSÍTÁSA.*

A Weierstrass-féle függvénytan terén Francziaországban újabb időben nagyobb mozgalom észlelhető. HADAMARD, BOREL, FABRY említhetők kivált, kik újabb vizsgálatoknak vetették alá a hatványsor alapján megadott monogén analitikai függvényt. HADAMARD vizsgálatai e lapokban már ismertetve voltak.** Velejök az, hogy adva lévén egy hatványsor, tisztán az együtthatók segítségével kiszámítható ama kör sugara, a melyen belül a függvény raczionális függvény módjára viselkedik, azaz csupán pólusai vannak. Módszerünk van ezenkívül az e körben levő pólusok meghatározására. Ha azonban a függvény olyan, hogy már a hatványsor összetartási körének kerületén is van más singularitás, mint pólus, akkor HADAMARD módszereivel csupán e tényt konstatálhatjuk, de többet nem.

Ezzel szemben felmerül az a feladat, hogy általánosságban megvizsgáljuk az összetartási kör kerületének egy adott pontjáról, vajjon singuláris pontja-e a függvénynek, vagy nem. A kérdés megvizsgálására a hatványsorok folytatásának elve direkt módszert ad.

FABRY-é *** az érdem, hogy a szükséges és elegendő feltétel elmés átalakításával igen becses eredményeket tudott elérni.

---

* Előadatott a február 17-iki rendes ülésen.

** Kürschák: Az analitikai függvények elméletéhez. E lapok IV. és V. kötetében.

*** Sur les points singuliers d'une fonction etc. Annales de L'École Normale 1896.
Azonkivül azóta is folyó közlemények a franczia akadémia közlönyében.

Borel * ugyanezt a kérdést más módon tárgyalja. Ő a megoldásra egy új módszer alkalmazása révén jut, melyet a *summabilis sorok* ** elméleté levezet. Ez elmélet lényegét szándékom bemutatni. Megjegyzem még, hogy e vizsgálatok fontosságát a franczia akadémia is sietett elismerni, midőn a jelen évi nagy díjért versenyző művektől azt kivánja, hogy a divergens sorok alkalmazási körének szélesbitésével foglalkozzanak.

Minden végtelen müveletsor csak akkor bír értelemmel, ha egy hozzátartozó számsorozat szabályos, vagyis bir határértékkel.

Borel vizsgálatainak kiinduló pontja már most a határ fogalmának általánosítása; a vizsgálat menetét előlegesen következőkben jellemezhetem:

α) A határ fogalmának általánosítása. β) Ennek megfelelőleg *a végtelen sornál a konvergenczia fogalma helyébe az általánosabb summabilitás fogalma lép. γ)* Az arithmetikai vizsgálatoktól a függvénytanhoz való áttérés az *egyenletes summabilitás* fogalmának segítségével történik.

I. Az általános határérték, limes generalis.

Legyen adva az

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \tag{I}$$

sorozat. Rendeljük az (I) alatti sorozathoz az

$$a(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

sort. *Ha ez a sor transcendens egész függvényt ábrázol és ha ezenkívül véges és meghatározott a*

$$\lim_{x=+\infty} e^{-x} a(x)$$

határérték, akkor a sorozatnak van limes generalisa, még pedig

$$\text{lim. gen. } a_n = \lim_{x=+\infty} e^{-x} a(x). \tag{II}$$

---

* Sur les séries de Taylor admettant etc. Journal de Mathématiques 1896.

** Théorie des séries divergentes sommables. Ugyanott.

Ki kell mutatnunk, hogy a limes generalis csakugyan a határ fogalmának általánositása, azaz ha van limes, akkor van limes generalis is és e kettő összeesik.

Legyen e végből adva az

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

szabályos számsorozat. Először is feltehetjük, hogy valós számokból áll, mert különben csak két valós számsorozatot kellene tekintetbe venni. Másodszor feltehetjük, hogy az összes számok pozitiv előjelek, máskülönben volna oly p szám, hogy az összes

$$a_0+p, a_1+p, \ldots, a_n+p, \ldots$$

számok pozitivek lennének és az értelmezés szerint

$$\text{lim. gen } (a_n+p) = p + \text{lim. gen } a_n.$$

Mind ezeket már most feltéve, rögtön látjuk, hogy a limes generalisnak nevezett határérték legfeljebb hét véges határ között ingadozhatnék, ha limes van. Könnyű azonban kimutatni, hogy ez az ingadozás nem következhetik be.

Legyen a számsorozat limese a; és értelmezzük ezt két más szabályos számsorozattal:

$$a_0' \leqq a_1' \leqq a_2' \leqq a_3', \ldots, a_n', \ldots$$
$$a_0'' \geqq a_1'' \geqq a_2'' \geqq a_3'', \ldots, a_n'', \ldots$$

be fogjuk bizonyítani, hogy bármely n-re vonatkozólag

$$a_n' \leqq \text{lim gen } a_n \leqq a_n'', \tag{III}$$

a mivel a tétel be lesz bizonyítva. A III)-ra következőkép jutunk. Minden n-hez található oly ν szám, hogy

$$a_n' < a_{\nu+k} < a_n''$$
$$(k \geqq 0)$$

és így mivel az összes számok pozitivek

$$\lim.\,\mathrm{gen.}\, a_n > \lim_{x=+\infty} e^{-x}\left((a_0-a_n')+(a_1-a_n')\frac{x}{1!}+\cdots+\right.$$
$$\left.+(a_{\nu-1}-a_n')\frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\right)+$$
$$+\lim_{x=+\infty} e^{-x}\left(a_n'+a_n'\frac{x}{1!}+a_n'\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)$$

Az első tagnak határértéke zérus, tehát

$$\lim.\,\mathrm{gen.}\, a_n \geqq a_n'$$

éppen így

$$\lim.\,\mathrm{gen.}\, a_n \leqq a_n''.$$

E tárgyalásból mindjárt látszik az is, hogy pozitiv tagú és minden határon túl növekedő sorozatnak limes generalisa is végtelen.

Arra nézve, hogy nem szabályos sorozatok birhatnak limes generalissal, szolgáljon a következő példa. Az

$$1,\ \rho,\ \rho^2,\ \rho^3,\ \ldots,\ \rho^n,\ \ldots$$

sorozat csak akkor szabályos, ha

$$|\rho|<1, \quad \text{vagy} \quad \rho=1.$$

A limes generalis

$$\lim_{x=+\infty} e^{-x}\left(1+\frac{x\rho}{1!}+\frac{x^2\rho^2}{2!}+\cdots\right)=\lim_{x=+\infty} e^{x(\rho-1)}$$

létezik, ha

$$R(\rho)<1,\text{*} \quad \text{vagy} \quad \rho=1.$$

A limes generalisnak a limessel az a közös tulajdonsága van, hogy nem változik, ha a sorozat első elemeit tetszőleges számokkal pótoljuk. Ugyanis

$$\lim_{x=+\infty} e^{-x}\left(a_0+a_1\frac{x}{1!}+\cdots+a_n\frac{x^n}{n!}+a_{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots\right)=$$
$$=\lim_{x=+\infty} e^{-x}\left((a_0-b_0)+(a_1-b_1)\frac{x}{1!}+\cdots+(a_n-b_n)\frac{x^n}{n!}\right)+$$
$$+\lim_{x=+\infty}\left(b_0+b_1\frac{x}{1!}+\cdots+b_n\frac{x^n}{n!}+a_{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots\right).$$

* $R(\rho)=\rho$ valós része.

E tulajdonság annyival inkább felemlítendő, mert a limes generalis limesnek egy másik tulajdonságát nem tartja meg. Ha ugyanis *egy sorozatnak van limes generalisa, nem következik — mint a szabályos sorozatoknál — hogy az elemekből alkotható összes sorozatoknak van limes generalisa.* Igy az előbbi sorozatból alkotott

$$1,\ \rho^2,\ \rho^4,\ \rho^6,\ \ldots$$

sorozatnak csak akkor van limes generalisa, ha

$$R(\rho^2) < 1 \quad \text{vagy} \quad \rho^2 = 1$$

s így bizonyos ρ értékekre az első sorozat bír limes generalissal, míg a második nem.

A limes generalisnak nevezett határérték határozott integrál alakjában is állítható elő. Ugyanis

$$\frac{d}{dx}(e^{-x} a(x)) = e^{-x}(a'(x) - a(x)),$$

a miből tüstént következik, hogy

$$\lim_{x=+\infty} . e^{-x} a(x) = \lim.\text{gen.}\, a_n = e^{-x_0} a(x_0) + \\ + \int_{x_0}^{\infty} e^{-x}(a'(x) - a(x))\, dx. \qquad \text{(IV)}$$

Ezen alakokból a limes generalisnak egy további sajátsága is vezethető le. Ha az

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

sorozatnak van limes generalisa, akkor (IV) szerint

$$\lim_{x=+\infty} . e^{-x}(a'(x) - a(x)) = 0$$

és így

$$\lim_{x=+\infty} . e^{-x} a'(x) = \lim_{x=+\infty} . e^{-x} a(x),$$

de a baloldalon álló határérték nem más, mint az

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

sorozat limes generalisa. Az előbbi eljárást még egyszer alkalmazva, ez ismét egyenlő az

$$a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

sorozat limes generalisával. Általában *valamely sorozat limes generalisa nem változik, ha a sorozatot csak az n-ik taggal kezdjük.* Végül még meg kell jegyezni, hogy épen úgy, mint a kitevős függvényt, bármely más transcendens egész függvényt felhasználhattunk volna a limes generalis értelmezésére.

II. Summabilis végtelen sorok. Megjegyzés más végtelen müveletsorozatokról.

Valamely végtelen sor

$$\sum_0^\infty u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{V}$$

summabilis, ha a részletösszegek sorozatának:

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots \tag{VI}$$

*van limes generalisa és létezése esetében ez az érték a sor summa generalisa.**

Itt is, mint a hogy a közönséges konvergenczia esetében a konvergenczia és a sortagok viselkedése között összefüggés van, Legyen

$$s_0 + s_1\frac{x}{1!} + s_2\frac{x^2}{2!} + \cdots + s_n\frac{x^n}{n!} + \cdots = s(x),$$

akkor

$$[e^{-x}s(x)]_{x=0} = s_0 = 0$$

és így (IV) szerint

$$\lim_{x=+\infty} e^{-x}s(x) = \int_0^\infty e^{-x}s'(x) - \int_0^\infty e^{-x}(s'(x) - s(x))\,dx$$

azonban

$$s'(x) - s(x) = u_0 + u_1\frac{x}{1!} + \cdots + u_n\frac{x^n}{u!} + \cdots = u(x),$$

---

* A szóban forgó sorozat

$$s_0 = 0,\ s_1 = u_0,\ s_2 = u_0 + u_1,\ s_3 = u_0 + u_1 + u_2,\ \ldots$$

tehát a summa generalis

$$\lim_{x=+\infty} e^{-x} s(x) = \int_0^\infty e^{-x} u(x)\, dx. \tag{VII}$$

A (VII) képletből könnyű a summabilitásnak szükséges vagy pedig elégséges feltételeit levezetni.

Szükséges feltétel arra, hogy az integrál véges és meghatározott legyen:

$$\lim_{x=+\infty} e^{-x} u(x) = 0. \tag{VIII}$$

Mivel

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2}\, dx \qquad a>0$$

konvergens, elegendő feltétel, ha

$$\lim_{x=+\infty} x^2 e^{-x} u(x) = 0. \tag{IX}$$

Ha még megjegyezzük, hogy

$$x^2 u(x) = 2\,.\,1 u_0 \frac{x^2}{2\,!} + 3\,.\,2 u_1 \frac{x^3}{3\,!} + \cdots + \\ + (n+2)(n+1) u_n \frac{x^{n+2}}{(n+2)\,!} + \cdots$$

akkor ezen eredményeket következőleg foglalhatjuk egybe.

A summabilitás szükséges feltétele, hogy

$$\lim.\ \mathrm{gen.}\ u_n = 0$$

legyen. Elegendő feltétel, pl. az hogy a

$$0,\ 0,\ 2\,.\,1 u_0,\ 3\,.\,2 u_1,\ \ldots,\ (n+2)(n+1) u_n,\ \ldots$$

sorozat limes generalisa zérus legyen.

Ez azonban az előzők alapján azonos a

$$\lim.\ \mathrm{gen.}\ (n+2)(n+1) u_n = 0$$

feltétellel.

A summabilitás és a konvergenczia egymáshoz való viszonyáról a következőket jegyezhetjük meg. Minden konvergens sornál a részletösszegek sorozata szabályos, tehát a sor summabilis és a summa generalis egyenlő a sor értékével. Pozitiv tagú valós soroknál a részletösszegek sorozata vagy szabályos, vagy pozitiv tagú minden határon túl növekedő sorozat, tehát e sorok csak akkor summabilisek, ha egyúttal konvergensek is. Általában azonban a summabilitás köre szélesebb, mint a konvergencziáé. Vizsgáljuk meg pl. a geometriai haladványt

$$1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^n+\cdots$$

itt

$$u(x)=1+\frac{\rho x}{1!}+\frac{\rho^2x^2}{2!}+\cdots=e^{\rho x}$$

és így a summa generalis

$$\int_0^\infty e^{-x}u(x)\,dx=\int_0^\infty e^{x(\rho-1)}dx$$

egy egész síkrészben létezik, t. i. ahol

$$R(\rho)<1$$

és a summa értéke

$$\int_0^\infty e^{x(\rho-1)}dx=\left[\frac{e^{x(\rho-1)}}{\rho-1}\right]_0^\infty=\frac{1}{1-\rho}.$$

A limes generalisról említettek alapján még a következő tételekkel jellemezhetjük a summabilis sorokat.

Ha valamely végtelen sor summabilis és az első n-tag körében felcseréléseket eszközlünk, a származott sor szintén summabilis.

Ha valamely végtelen sor summabilis és az első n-tagot elhagyjuk, az így származott sor szintén summabilis.

A summabilitás azonban általában nem marad meg, ha tagokat, habár az eredeti sorrendben, összevonunk.

Ha pl. a geometriai haladványban két egymásután következő tagot összevonunk, lesz:

$$(1+\rho)+\rho^2(1+\rho)+\rho^4(1+\rho)+\cdots+\rho^{2n}(1+\rho)+\cdots$$

tehát

$$u(x)=(1+\rho)e^{\rho^2x}$$

és így

$$\int_0^\infty e^{-x}\, u(x)\, dx = (1+\rho)\int_0^\infty e^{x(\rho^2-1)}\, dx$$

vagyis akkor summabilis, ha

$$R(\rho^2) < 1,$$

tehát vannak oly ρ-értékek, melyeknél az eredeti sor summabilis, míg a tárgyalt sor nem (fordítva is). Egyébiránt, ha

$$R(\rho^2) < 1, \quad (1+\rho)\int_0^\infty e^{x(\rho^2-1)}\, dx = \frac{1}{1-\rho}.$$

Még egy igen fontos tétel áll a végtelen sorokra.

Ha

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

oly végtelen sor, melyre

$$\lim.\ \mathrm{gen.}\ u_n = 0,$$

akkor ρ pozitiv valódi törtet jelentvén, a

$$\sum_0^\infty v_n, \quad v_n = u_n \rho^n$$

sorok summabilisek.

Ugyanis a summabilitásnak előbb levezetett elegendő feltétele is ki van elégítve. Hiszen

$$\lim_{x=+\infty} x^2 e^{-x} v(x) = \lim_{x=+\infty} x^2 e^{-x} u(\rho x)$$

De továbbá

$$\lim_{x=+\infty} x^2 e^{-x}\, u(\rho x) = \lim_{x=+\infty} e^{-\rho x}\, u(\rho x) \lim_{x=+\infty} x^2 e^{x(\rho-1)}$$

és mivel ρ pozitiv valódi tört, mindkét tényező határértéke zérus.

A végtelen sor után más végtelen müveletsorozatok határértékét is általánosíthatjuk. Vegyük pl. a végtelen szorzatot

$$\prod_0^\infty (1+u_n) = (1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\ldots$$

E szorzat konvergens, ha a részletszorzatok sora és azok reciprok értékeinek sora, vagyis a

$$\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$$

$$\frac{1}{\Pi_0}, \frac{1}{\Pi_1}, \frac{1}{\Pi_2}, \ldots, \frac{1}{\Pi_n}, \ldots$$

sorozatok szabályosak.* A szorzatról tehát azt mondhatjuk, hogy «szorozható», ha az előbb említett sorozatoknak limes generalisa. Azonban, ha ismét

$$\Pi(x) = \Pi_0 + \Pi_1 \frac{x}{1!} + \cdots$$

$$\lim_{x=+\infty} e^{-x}\,\Pi(x) = \Pi_0 + \int_0^\infty e^{-x}\,(\Pi'(x) - \Pi(x))\,dx,$$

tehát az első sorozat akkor és csak akkor van limes generalisa, ha a

$$\sum_0^\infty u_n \Pi_n$$

végtelen sor summabilis. Éppen így a másik limes generalis akkor és csak akkor létezik, ha a

$$\sum_0^\infty \frac{u_n}{\Pi_{n+1}}$$

sor summabilis. Ha a sorok konvergensek, akkor a szorzat is konvergens. Látni, hogy konvergens szorzatok «szorozhatók» és a két érték ugyanaz.

A szorzat általánosításánál még egy más felfogásból lehet kiindulni. «Szorozható»-nak mondhatom a szorzatot, ha a

$$\sum_0^n l.\,(1+u_n)$$

sor summabilis. Konvergens szorzatok ismét «szorozhatók». A két általánosítás természetesen általában összeesik.

* Tudvalevőleg $\Pi_0=1$, $\Pi_1=(1+u_0)$, $\Pi_2=(1+u_0)(1+u_1), \ldots$

III. Summabilitási tartomány, egyenletes summabilitás.

Ama helyek összesége, melyeken egy függvénysor summabilis, alkotja e sornak summabilitási tartományát. E tartomány magában foglalja a konvergenczia tartományt.

Legyen egyszerűség kedvéért egy hatványsor adva:

$$P(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots$$

ha behozzuk a

$$P_n(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^{n-1}, \quad P_0(z)=0$$

jelzéseket, akkor a következő határértékekről van szó:

$$\lim_{x=+\infty} e^{-x}\left(P_0(z)+P_1(z)\frac{x}{1!}+P_2(z)\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)=\lim_{x=+\infty} P(z,x)\,e^{-x}$$

A hatványsor egy bizonyos z-értékre summabilis, ha az

$$\left|e^{-w_n}P(z,w_n)-e^{-w_{n+k}}P(z,w_{n+k})\right|<\delta$$

egyenlőtlenség minden pozitiv δ-ra kielégíthető az, ha csak

$$n>N_z, \quad k\geqq 0.$$

Ha z-nek egész kontinuumában az összes N_z számoknak van egy véges felső határa, akkor a hatványsor e kontinuumban egyenletesen summabilis.

Könnyű már most kimutatni, hogy *egy hatványsor, mely bizonyos kontinuumban egyenletesen summabilis, e tartományban egyértékű monogen analitikai függvényágat ad. S így, ha a konvergenczia tartomány a szóban forgó summabilitási tartománynak igazán csak részét képezi, akkor a tartomány további helyein a summa generalis a függvény analitikai folytatását adja meg.*

Nézzük már most a tétel bizonyítását. Az egyenletes summabílitásnak fent adott definicziója még a következő alakban fogalmazható. Kell, hogy a szóban forgó tartományban az

$$e^{-w_1}P(z, w_1)+(e^{-w_2}P(z, w_2)-e^{-w_1}P(z, w_1))+\cdots$$
$$= \lim_{w_n=+\infty} e^{-w_n}P(z, w_n)$$

sor egyenletesen összetartó legyen.

Azonban minden

$$P(z, w_i)$$

maga is raczionális függvényekből álló függvénysor, mely a tartomány minden egyes helyén összetart, tehát a tartományban egyenletesen konvergens. Igy tehát WEIERSTRASS ismeretes alaptétele folytán a summa generalis

$$\lim_{x=+\infty} e^{-x}P(z, x)$$

az egész tartományban monogen egyértékű analitikai függvényágat ad.*

Térjünk át a hatványsor summabilitási tartományára.

Ez mindenesetre magában foglalja a konvergenczia tartományt. BOREL azonban kimutatta, hogy ha csak nem természetes határ a konvergenczia kör kerülete, melyen túl a függvényt analitikailag folytatni nem lehet, akkor a summabilitási tartomány e körből kinyulik. Még pedig a dolog lényege röviden úgy jellemezhető, hogy *minden szabályos kerületi pontnak van oly környezete, mely még egészen beletartozik a summabilitási tartományba.*

Mindig feltehetjük, hogy a hatványsor a zérushely környezetében van kifejtve és hogy összetartási körének sugara az egység. Legyen

$$f(z)=\sum_{0}^{n} c_n z^n = c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

A konvergenczia kör kerületének P_1, P_2 legyen két oly pontja, a melyen a függvény legfeljebb izolált singularitással bir, de úgy, hogy a P_1P_2 ív minden pontja szabályos. Akkor, mint az ábrából látható, rajzolható oly, a c kört magában foglaló, Γ tartomány, melyen belül a függvény szabályos, tehát

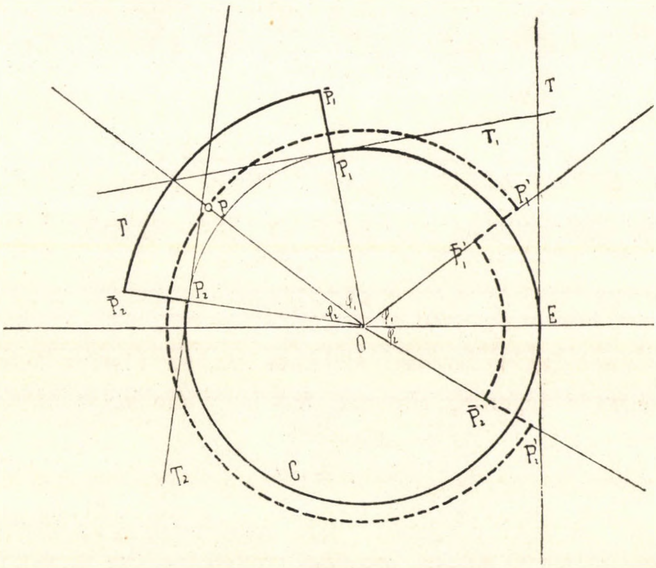
* Ezen tétel a WEIERSTRASS-féle alaptétel lényeges általánosításának tekinthető.

$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_c \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\,d\xi = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\,d\xi. \quad \text{(X)}$$

Ha P_1, P_2-ben a körhöz érintőket vonunk (az ábrán T_1, T_2), akkor a hatványsor summabilis a Γ ama részében, mely az érintők alá esik és a konvergenczia körét magában foglalja.

A tétel bebizonyítása a következő: Megvizsgálandó az

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\left(c_0 + c_1\frac{xz}{1!} + c_2\frac{x^2z^2}{2!} + \cdots + c_n\frac{x^nz^n}{n!} + \cdots\right)dx \quad \text{(XI)}$$



integrál. Az integrál jele alatt álló mennyiség a (X) folytán:

$$\frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-x}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\,\frac{x^nz^n}{n!}\,d\xi = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi}\,e^{x\left(\frac{z}{\xi}-1\right)}\,d\xi. \quad \text{(XII)}$$

Ha azonban a z pont, a Γ említett részébe pl. P pontba esik, akkor, mint azt az ábrából tüstént látni

$$R\left(\frac{z}{\xi}\right) < 1.$$

Az ábrában szakadozott vonal jelöli $\frac{z}{\xi}$ értékeit és OE az egység.

Tehát léteznek oly pozitiv M és p számok, hogy

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi} e^{x\left(\frac{z}{\xi}-1\right)} d\xi \right| < M e^{-px}$$

vagyis a (XI) integrál a mondott tartományban csakugyan konvergens, a mivel a tétel be van bizonyitva.

IV. A kerületi pontok vizsgálata.

Ez már most az előzők alapján igen könnyen eszközölhető. Legyen egy ily pont

$$z = e^{i\theta},$$

ha e pontban szabályos függvény és csak ebben az esetben az előzők szerint találhatni oly pozitiv s számot, hogy a sor az összes $(1+\varepsilon)\, e^{i\theta}$ helyeken summabilis, ha csak

$$\varepsilon < s.$$

De ennek a II. részben foglaltak alapján tüstént felirhatjuk szükséges és elegendő feltételét, úgy hogy tételünket mindjárt így fogalmazhatjuk.

Ha

$$z = e^{i\theta}$$

kerületi pont, akkor e pont a függvénynek reguláris pontja vagy nem, a mint lehet, vagy nem lehet oly δ pozitiv számot találni, mely a

$$\lim \operatorname{gen} c_n (1+\delta)^n e^{ni\theta} = 0$$

feltételt kielégíti:

Bauer Mihály.

AZ ELLENÁLLÁSÁBAN MEGKISEBBEDETT KOHERER REAGÁLÁSA A HŐMÉRSÉKLET CSÖKKENÉSÉRE.

Rég ismeretes, hogy az elektromos hullám hatása alatt, az ellenállásában megkisebbedett koherer, magasabb hőmérsékletű test közelében, eredeti, nagy ellenállását visszanyeri.

Észlelte ezt már Branly, foglalkozott ezzel már régebben Aschkinass; újra felfedezte Leppin, a ki e jelenségnek magyarázatát is adja. Leppin ugyanis az elektromos hullám hatása alatt megkisebbedett ellenállásnak újból való megnagyobbodását, a fémreszelékeknek, mint elektromos vezetőknek, a hőmérsékletemeléssel járó ellenállás nagyobbodásából magyarázza, s kizárja a hőmérséklet emelkedésének a fémreszelékek merev helyzetére való befolyását. Én e magyarázatot, e lap októberi füzetében, nem tartottam indokoltnak s ugyanott, kisérleteim alapján, kimutattam, hogy a hőmérsékletnek nemcsak emelése, hanem csökkenése is az ellenállásában megkisebbedett kohererneк eredeti, nagy ellenállását visszaállítja.

Ugyanabban a hónapban, a melyben e kérdéssel foglalkozó értekezésem megjelent, hozott a Wied. Ann. folyóirat Aschkinass-tól felette érdekes és tanulságos közleményt e tárgyról, a melyben a szerző mély kritikával kiséri a kohererjelenségre adott magyarázatokat s egyszersmind ismerteti saját, ujabb idevágó kisérleteit is. Bár ez értekezésében Aschkinass sem tartja Leppin magyarázatát helyesnek, s bár ha megerősítve is látom Aschkinass kisérleteivel is mindazt, a mit én a hőmérséklet emelkedésével járó ellenállásnagyobbodásról irtam: mégis kisérleteink egyik eminens, — érvelésem alapját képező részében felette nagy eltérés, mondhatnám, ellentmondás van közöttünk.

ASCHKINASS ugyanis azt állítja kisérletei alapján, hogy a hőmérséklet csökkenése az elektromos hullám hatása alatt az ellenállásában megkisebbedett kohererre épen semmi, vagy észre nem vehető hatással van; holott én épen azt mutattam ki e lap októberi füzetében, szintén kisérleteim alapján, hogy a hőmérséklet csökkenése ugyanazzal a hatással van az ellenállásában megkisebbedett kohererre, mint a hőmérséklet emelése: azaz mind a két esetben a koherer eredeti, nagy ellenállását visszakapja.

Az igazság kideritése, esetleges tévedéseim helyreigazitása végett is, kisérleteimet újra ismételtem; de ASCHKINASS módszerét és kisérletét is vizsgálódásom tárgyává tettem, hogy kisérleteink eredményének feltűnő eltérését, ellentmondását és okát kikutathassam.

E lapban közölt kisérleteimet tehát újból ismételtem. A 60 cm hosszúságú, 4 mm átmérőjű rézdarabkákkal megtöltött és vízszintesen elhelyezett koherer ellenállását egy kis Wimshurst-féle gép elektromos hulláma kisebbitette meg 5 m távolságból. Az így ellenállásában megkisebbedett kohérert néhány csepp kénétherrel lehűtöttem; e hőmérsékletcsökkenésre a koherer ellenállása megint megnagyobbodott, a koherer eredeti, nagy ellenállását visszanyerte, a galvanometer tűje 0°-ra tért vissza. Bármikor, s bárhányszor ismételtem ez eljárást, az eredmény következetesen ugyanaz maradt. Ugyane csövet később különböző nagyságú és különböző minőségű fémdarabkákkal töltöttem meg; az eredmény most is ugyanaz volt. Majd különböző átmérőjű réz, aczél, nickel golyócskákat szoritottam lapos elektródok közé; mind e különböző kohereknél az eredmény megegyező: a koherer a hűtéssel eredeti, nagy ellenállását visszanyeri.

Tettem kisérletet szénporral, széndarabkákkal; hosszabb és rövidebb kohererekkel; de néhány csepp kénéther mindig elegendő volt, hogy e kohererek eredeti, nagy ellenállásukat visszanyerjék. De mégis a legfeltűnőbben tüntette ki a hőmérséklet csökkenésével járó ellenállásnagyobbodást két, kissé megrozsdásodott kötőtűből álló koherer. Ha a Ries-féle elektromos szikramérőben mikrométerrel addig közelítjük a két kötőtűt, míg gyengén érintkeznek és e koherert elektromos hullámnak teszszük ki; a koherer ellenállása tetemesen megkisebbedik. Mihelyt az így ellenállásában megkisebbedett kötőtűre, vagy a kötőtűt tartó szikramérő rézgömbjére néhány csepp éthert cseppentünk, a koherer eredeti, nagy ellenállását visszanyeri.

Hogy tényleg a hőmérsékletcsökkenés és nem a csepegtetéssel járó rázás hozza létre az ellenállásnagyobbodást, kitünik már abból is, hogy a szoba levegőjének hőmérsékletével megegyező vízcseppek a koherer ellenállását nem képesek megváltoztatni.

Minthogy kivülem e kérdéssel, tudtommal, csak Aschkinass foglalkozott, de negatív eredménynyel: szükséges volt kisérleteit, módszerét vizsgálódásom körébe vonni; annál is inkább, mert kitünt, hogy az októberi füzetben megjelent kisérleteim s a belőlök vont következtetéseim helyesek, az azóta tett újabb kisérletek pedig a régieket csak megerősítik.

Talán nem csalódom, ha Aschkinassnak nem is annyira módszerében, mint inkább kohererének, alakjában, nagyságában s a fémreszelékek mennyiségében keresem azt az okot, a mely miatt nem észlelhette az ellenállásában megkisebbedett kohererre a hőmérséklet csökkenésének oly hatását, a minőt ő is már a priori feltételezett és nem konstatálhatott, de a melyet én más alakú, nagyságú és más mennyiségű rézporral megtöltött kohererrnél mindig tapasztaltam.

Aschkinass ugyanis U alakú, függőleges állású koherert használt, mely kimutathatja ugyan a hőmérsékletemelésnek az ellenállásában megkisebbedett kohererre ellenállásnagyobbító hatását, de nem elég érzékeny a hőmérsékletcsökkenéssel járó ellenállásnagyobbodás kimutatására akkor, ha az U alakú, függőleges helyzetű koherer alúl rövid és ezenkivül még kevés fémreszeléket is tartalmaz. Magam is készitettem ily alakú és minőségű koherert, de a hőmérsékletcsökkenéssel járó ellenállásnagyobbodást én sem tudtam észlelni.

Mihelyt azonban az U alakú koherert vízszintes helyzetbe hoztam vagy pedig, ha alúl hullámvonal alakjában készitettem az U alakú és függőleges helyzetű koherert, úgy hogy a koherer szárai távol estek egymástól —5 cm-nyire — és elegendő fémreszeléket tettem belé: ekkor néhány csepp kénéther elegendő volt, hogy e koherer eredeti, nagy ellenállását visszanyerje, hogy a galvanometer tűje a 0°-ra térjen vissza. Függőleges helyzetű, kevés fémreszelékű koherer is reagál a hőmérsékletcsökkenésre, ha a koherer alsó részébe kevés higanyt öntünk, föléje pedig vasreszeléket, vagy vassrófot teszünk. Effajta koherer nagyon érzékeny úgy a hőmérséklet emelésével, mint csökkenésével járó ellenállásnagyobbodás kimutatására; elegendő egy-két csepp kénéther a reszelékre, s a koherer eredeti, nagy ellenállását azonnal visszanyeri; természetes, hogy itt a higany térfogatváltozása nagy szerepet játszik.

Nehogy azonban úgy tünjék fel, mintha a kénéther csepegtetésével lehűtött koherer ellenállásának a nagyobbodását a szoba levegőjének a nagyobb hőmérséklete, tehát a hőmérséklet emelkedése idézné elő: én is, mint Aschkinass, hideg fürdőbe tettem az egész koherert akkor, mikor már az elektromos hullám a koherer ellenállását megkisebbítette. És pedig először is a 60 cm hosszúságú rézdarabkákkal megtöltött, vízszintes helyzetű kohererrel tettem kisérletet. Az ellenállásában megkisebbedett koherert — válú alakú —20 C°-ú spiritusz fürdőbe tettem óvatosan; a hőmérsékletcsökkenésre a koherer visszanyerte eredeti, nagy ellenállását, a galvanometer tűje 0°-ra tért vissza. Bárhányszor ismételtem e kisérletet, mindig úgy találtam, hogy a hőmérsékletcsökkenés a koherer ellenállását megnagyobbította; a szoba hőmérséklete minden kisérletemnél 20 C°-ú volt.

Ezután, mint Aschkinass U alakú és függőleges helyzetű, rézreszelékkel megtöltött kohererrel kisérleteztem; —20 C°-ú spiritusszal megtöltött pohárba tettem a koherert. Mindaddig, míg a függőleges helyzetű U alakú koherer alúl rövid volt, szárai közel estek egymáshoz, s kevés rézreszelékkel volt megtöltve: a kisérlet soha sem sikerült. Aschkinass értekezéséből nem tudom kivenni, de rajza után itélve, azt látom, hogy ilyes U alakú kohererrel tehetett kisérletet; effajta koherer nálam sem reagált a hőmérsékletcsökkenésre.

Ha azonban az U alakú, függőleges helyzetű, alúl hullámvonal alakjában meggörbített, elég hosszú és sok reszelékkel megtöltött koherert tettem a —20 C°-ú spirituszszal megtöltött pohárba akkor, a mikor az elektromos hullám már ellenállásában megkisebbítette, a koherer visszanyerte eredeti, nagy ellenállását. Ha a koherer a szoba hőmérsékletét —20 C° — visszanyerte, a kisérletet újból ismételhettem; az eredmény következetesen mutatta, hogy a hőmérséklet csökkenése effajta kohererneк is visszaadja eredeti, nagy ellenállását.

Most is a legérzékenyebbnek bizonyult az U alakú, függőleges helyzetű, alsó részében higanyt hordozó vasreszelékes vagy vassrófos koherer.

Az U alakú, függőleges helyzetű, alúl elég hosszú és hullámvonalas koherer használásánál nem is szükséges a fürdőt 0°-on alúl lehűteni; megteszi a hatást a kútvíz is. Így a higanymentes, rézreszelékkel megtöltött kohererнél a 12 C°-ú víz már visszaadja a koherer eredeti, nagy ellenállását, ha a szoba hőmérséklete 20 C°-ú; a higanyos kohererнél pedig a 18 C°-ú víz is elegendő, hogy az ellenállásában megkisebbedett kohererneк eredeti, nagy ellenállását visszaállitsa, a galvanometer tűjét a 0°-ra terelje.

Látjuk tehát, hogy a hőmérséklet csökkenése az elektromos hullám hatása alatt megkisebbedett kohererneк eredeti, nagy ellenállását visszaadja. Mert, ha el is tekintünk, mint a hogy én is teszek, a folytonos vezetőből álló koherertől — minő a kötőtűből, vagy pedig a higanyból és vasreszelékből álló koherer — mégis azt látjuk, hogy a pusztán csak fémreszelékből álló koherer — ha e koherer hosszú és vízszintes helyzetű, vagy ha U alakú és függőleges helyzetű is, de alúl hosszú, hullámvonalas és elegendő reszelékkel van megtöltve — a hőmérséklet csökkenésével ellenállásában következetesen megnagyobbodik.

Ha nincs hideg keverékünk, és a kútvíz hőmérséklete sem sokkal alacsonyabb, mint a szobáé, melynek hőmérsékletét a koherer mutatja és mégis óhajtanók a hőmérséklet csökkenésének a befolyását észlelni az ellenállásában megkisebbedett kohererre, ekkor előzetesen melegfürdőbe állítjuk a koherert, de olyan hőmérsékletűbe, mely nem képes az ellenállás megnagyobbítására és ezután beteszszük a koherert a kútvízbe; a koherer ellenállása azonnal megnagyobbodik, a galvanometer tűje 0°-ra tér vissza. Forró vízbe is tehetjük a koherert, de ebben az esetben akkor keltjük az elektromos hullámokat, a mikor már a koherer elegendő ideig állott a forró vízben és így a galvanometer tűje a hullám keltése után állandóan egy bizonyos fokot mutat; ha most a koherert a forróvízből kiveszszük és a kútvízbe állítjuk, a koherer ellenállása mindjárt visszanyeri eredeti, nagy ellenállását. De nem is szükséges a forró vízben állott koherert, melynek ellenállását a forró vízben az elektromos hullám megkisebbítette, hideg vízbe tenni; csak vegyük ki a forró vízből és hagyjuk a levegőn, a szoba levegőjének alacsonyabb hőmérséklete elegendő, hogy a koherer ellenállását megnagyobbítsa. Már ez egyszerű kisérlet is igazolja, hogy a hőmérséklet csökkenése a koherer ellenállását megnagyobbítja.

Ezek után még meg akartam győződni újból arról is, hogy a hőmérséklet csökkenése a hanghullámok által ellenállásában megkisebbedett kohérernek ellenállását mily irányban és mértékben változtatja meg. Már az októberi füzetben megjelent értekezésemben megemlítettem, hogy a hőmérséklet csökkenése a kohérernek a hanghullám megkisebbítette ellenállását megnagyobbítja. Azóta más módszerrel, másfajta kohérernek is észleltem az ellenállás kisebbedését a mechanikai rezgések befolyása alatt és azt is tapasztaltam, hogy a hőmérséklet csökkenése valamennyi, ily módon ellenállásában megkisebbedett kohérernek eredeti, nagy ellenállását visszaadja. A vízbe tett koherer is kimutatja e jelenségeket. Ha ugyanis egy négy literes, harangalakú, desztillált vizet tartalmazó üvegedénybe teszünk vasrófokkal megtöltött üvegcsövet, a melynek végeit paraffinnel zárjuk el úgy, hogy az elektródoknak szabadon maradt kiálló részei az üvegcső végeire erősitett gummicsőben végződjenek és e gummicsőbe tett üvegcsövön kénesőt öntünk az elektródig az elektromos áramnak könnyű bevezethetése végett: oly berendezést nyerünk, a melylyel kimutathatjuk, hogy az üvegharang rezgései ép oly erősen kisebbítik meg a vízbe tett koherer ellenállását, mint az elektromos hullám 5 m távolságból. Mihelyt a harang széleit rezgésbe hozzuk, a koherer ellenállása megkisebbedik, a galvanometer tűje 48°-ra tér ki. E kisérlet feltétlenül biztos és az eredmény mindig ugyanaz. Nem változtat a jelenségen, ha a koherert csak az elektromos hullám keltése után kapcsolom be az áramkörbe, vagy mikor már az üvegharangot jóval előbb rezgésbe hoztam; a koherer ellenállása most is megkisebbedik, a galvanometer tűje megint 48°-ra tér ki; megjegyzem, hogy e kisérletnél a koherer egészen a víz alatt volt.

Ha az így ellenállásában megkisebbedett koherert lehűtöttem, a koherer ellenállása megnagyobbodott, a galvanometer tűje 0°-ra tért vissza.

Összegezhetem tehát kisérleteim végeredményeül azt, hogy akár az elektromos, akár a hanghullám hatása alatt az ellenállásában megkisebbedett koherer a hőmérséklet csökkenésére és emelésére ép úgy visszanyeri eredeti, nagy ellenállását, mint a mechanikai rázásra.

Károly Irén.

A LEIDENFROST-FÉLE TÜNEMÉNYRŐL.

I.

Annak bizonyítására, hogy a Leidenfrost-féle cseppet az izzó lemeztől saját gőzének rétege választja el, Church és Berger különkülön kimutatták, hogy nem a csepp folyadéka, hanem csak gőze hathat vegyileg a lemezre. Poggendorf azt vélte megállapíthatni, hogy valamely elektromos áram nem mehet a cseppről át a lemezre, hogy tehát egymástól elektromosság tekintetében el vannak szigetelve. Ruff azonban kimutatta, hogy az elektromos áramok, ha gyengitve is, a cseppről annak alapzatára átmehetnek és egyik későbbi értekezésében kifejezte azt a nézetét, hogy az elektromos vezetést a csepp és lemez közt a közbenlevő gőz közvetítheti. Tyndall véleménye szerint a cseppnek a lemeztől való elszigetelését az a körülmény bizonyithatja, hogy valamely szferikus alakú téntacsepp és alatta levő izzó ezüstlemez közt keresztülláthatni. Liebig évi jelentésében azonban arra történik utalás, hogy ezen tény ellenére az átlátszatlan csepp gyors, fel- és lefelé irányított oszcillációk folytán időszakonkint az alapzattal érintkezhetik.

Ezen vizsgálódások és nézetek eredményeül a következő tétel volna felállítható: *A Leidenfrost-féle cseppet alapzatától saját gőzének rétege választja el, de a csepp ezen réteg felé kisebbnagyobb mértékben oszcillál, elannyira, hogy a körülményekhez képest az alapzatot is eléri.»*

Stark J. ezen oszcillációk bebizonyítására a következőkép járt el. Egy kb. 8 Volt feszültségű akkumulator-telep egyik sarkát valamely izzó sárgaréz, vagy ezüstlemezzel kötötte össze, míg a másik sarka egy telefonon át a lemezen fekvő Leidenfrost-féle cseppel volt vékony rézsodrony utján összekötve. Magát a cseppet gyengén savanyított vagy tiszta víz vagy klórcink vagy rézszulfátoldat alkotta.

Ha a csepp a lemez mentén hullámzott, vagy rajta az ismert csillagalakú képek látszottak, akkor a telefonban zörej volt hallható. Ha a lemezt erősen izzította, a csepp tehát messze volt a nedvesítéstől, a telefonban a zörej csak gyengén lépett fel. Ha a csepp nyugton maradt és messze állt a nedvesítés pontjától, a telefon, úgyszólván, elnémult. Ha azonban a csepp a láng eltávolítása után a nedvesítéshez közeledett, akkor oszcillálása erős recsegést keltett a telefonban. Sőt ha ez esetben nyugton maradt, mégis hangzott a telefon; 20 másodperczig finom, folyton növekedő sziszegés hallatszott, mely gyakran hangba ment át, ez a hang mindinkább emelkedett és nemsokára hangos pattanással végződött, ugyanakkor a csepp is elfolyt a lemezen.

A jelzett tünemények akkor álltak elő, ha vízcseppről volt szó, ha e helyett klórcink vagy rézszulfát oldatából állt a csepp, a telefon igen hangosan hallatszott, még magas hőfoknál is. Ez esetben természetesen a forrás és nedvesítés pontja is magasabb volt.

Azok az áramingadozások, melyeket a leirt kisérleteknél a telefon jelzett, természetesen annak az ellenállásnak a változásától erednek, melyet az áramnak a csepp és a lemez között le kell küzdenie. Ha ezt szemmel tartjuk, megértjük a fenti észlelésekre alapitott következő tételeket.

A Leidenfrost-féle csepp általában az alapzatától elválasztó gőzréteg felé le és fel oszcillál. Ezen réteg vastagsága fokozódó izzitással nő; nagy vastagságnál az oszcillációk az áram átmenetét időnként már nem segíthetik annyira elő, mint kisebb vastagságnál. *A nedvesítéshez közel a csepp oszcillációi a lemez gyorsan elmuló nedvesedését okozhatják, míg végre állandó nedvesítés áll elő.*

II.

A Leidenfrost-féle csepp szferikus alakját nyilvánvalóan a folyadék felületi feszültsége okozza. De a felületi feszültségnek a Leidenfrost-féle tüneménynél játszott ezen szerepe nem oly egyszerü, mint a minőnek látszik, és nem is az egyedüli.

A Leidenfrost-féle csepp alsó felületén a hőfok mindenesetre nagyobb mint a felsőn. Stark egy másik értekezésében * kimutatta, hogy ezen hőfokkülönbségnek az az eredménye, hogy a csepp alsó részén kisebb a felületi feszültség, mint a felsőn. Nem számítható tehát ki a csepp alakja a felületi feszültség egyetlen értéke alapján. Ha a csepp egészen szabadon lebegne, egyenletes felületi feszültség esetén gömbalakú volna; ha ugyanazon feltétel mellett a felületi feszültség valamelyik oldalon kisebb volna, mint a szembefekvőn, akkor a kisebb feszültségű helyen a felületi egyensúly elérése végett a görbületnek kellene növekednie, tehát dudorodásnak előállania. A valóságban a Leidenfrost-féle csepp épen a kisebb feszültségű oldalon fekszik. Az alsó kidudorodás ennélfogva csak igen kicsiny mértékben léphet fel, mindazonáltal a felületi feszültség ingadozásainál abban fog nyilvánulni, hogy az alsó cseppfelület kicsiny fel- és lemenő oszcillációkat végez.

A felületi feszültség a Leidenfrost-féle tüneménynél még más hatással is van.

Mindenkinek, a ki a Leidenfrost-féle tüneményt pontosabban megfigyelte, mindenesetre feltünt a csepp rendkívüli gyors kisebb-nagyobb mértékben szabályos örvényzése. Kiváló szép ez kisebb cseppeknél. Ezeknél a folyadék a csepp alsó felületén centrifugálisan a szélekhez áramlik, innen gyorsan felszáll, a felső szélen centripetalisan a középpont felé halad és ettől visszamegy a kezdetponthoz, hogy körfutását ujra kezdje.

Már Berger ezen örvénylő mozgások legközelebb fekvő okát a folyadék külömbözően megmelegített részeinek súlykülömbségeiben kereste. De ezen ok magában alig magyarázhatja meg az örvény-mozgások nagy sebességét. Ellenkezőleg ezek okát első sorban inkább más jelenségben kell keresni.

Ismeretes, hogy folyékony felületen nem állhatnak fenn feszültségi külömbségek a nélkül, hogy az erősebb feszültségü rész azonnal ki ne tágitaná a kisebb feszültségüt. *Ennélfogva a Leidenfrost-féle cseppnél a felső nagyobb feszültségü felület az alsó*

* «Wiedemann Annalen» 1896. 6. sz.

nagyobb hőfokú és így kevésbbé feszült felületet állandóan kifeszíti, így támad a leirt örvénylő mozgás ; és mert a hőfok és így a feszültség illető külömbsége állandó, azért ez a kitágítás is állandó. A LEIDENFROST-féle csepp ennélfogva az állandó kitágítás érdekes esete.

A folyadék különbözően megmelegített részeinek súlykülömbsége ugyanolyan értelmű örvénylő mozgást létesit, mint a kitágitás. Hogy azonban az utóbbinak hatása nagyobb, a következő kisérlet mutatja, melynél a két ok ellenkező irányban hat. Ha kénvirágon vagy hideg kormon fekvő vízcsepp fölé izzó testet tartunk, a cseppben a fellépő kitágitás miatt örvénylő mozgást észlelhetünk, mely a LEIDENFROST-féle csepp örvénylő mozgásával és a súlykülönbség hatásával ellenkező irányú.

Hogy a LEIDENFROST-féle cseppben tényleg ilyen kitágitás áll elő, következőképen mutathatjuk meg. Ha az izzólemezre tett folyadékban, pl. vízben finom kaolin, vagy még inkább korom részecskéket hagyunk meg, a csepp képződése után azonnal kiválik a bennt levő szilárd részecskék nagy része. Ezek finom hártyácskává tömörülnek és a felső felületen szemben a kitágulás centrumával helyezkednek el, a mint annak lennie is kell. Mint STARK idézett értekezésében kimutatta, a szilárd részecskék ily kiválása a kitágitás kisérő jelensége.

A LEIDENFROST-féle cseppen fellépő állandó kitágitási és örvénylő mozgás a jelenségre nem kicsinylendő befolyással van. Azzal, hogy a forráspontig izzitott folyadék alsó része kitágul, a hőmérséklet a csepp felületén állandóan kiegyenlitődik és így a folyadék kényszeritve van, hogy csakis felületén menjen át gőzbe ; ez a kiegyenlítés ugyanis megakadályozza azt, hogy a folyadék belseje alulról a forráspontig vagy azon túl felmelegedjék. Az esetleg belül vagy az alsó felületen támadó gőzbuborékokat az örvénylő mozgás rendszerint megakadályozza abban, hogy felszálljanak és kényszeríti őket, hogy vagy alúl vagy oldalt illanjanak el. Ebből és a fentiekből kifolyólag a *jellemző kitágítás azokhoz az okokhoz számítandó, melyek a Leidenfrost-féle cseppben belül a forrást megakadályozzák.*

Lakits Ferencz.

A FÖLD KÖZEPES SŰRŰSÉGE.

Abból az alkalomból, hogy BRAUN KÁROLY, a kalocsai csillagvizsgáló volt igazgatója, a ki jelenleg Marienscheinben, Csehországban tartózkodik, a gravitáczió állandóját, a Föld tömegét és közepes sűrűségét újabb kisérleti mérések alapján meghatározta, nem lesz érdektelen azokat a meghatározásokat összeállítani, melyek a Föld középsűrűségének értékéről a legújabb időben rendelkezésünkre állanak.

POYNTING J. H.* a manchesteri Owens College kémiai laboratoriumának pinczéjében végezte méréseit, melyeknél a közönséges mérleg egyik csészéjét aranyozott ólomgolyóval helyettesítette, a teljes egyensúlyozás után ezen golyó alá jóval nagyobb ólomgolyót hozott, aztán észlelte a mérleg kilengését, és ebből a gravitáczió állandóját f és a

$$g = \frac{4}{3}\pi f\rho R\left[1+\sigma-\left(\frac{5}{2}\sigma-\varepsilon\right)\cos^2\varphi\right]$$

képlet segélyével a Föld sűrűségét ρ-t számította. Eredménye $5{\cdot}69 \pm 0{\cdot}15$.

JOLLY FÜLÖP ** szintén a mérleget használta, csakhogy ő kettős csészéjű mérleget használt, melynél t. i. a rendes csészék alatt 21 méternyire még egy pár csésze volt felfüggesztve. A felső csészében egyensúlyozva 2 súlyt, az egyensúly megbomlik, ha az

---

* On a method of using the Balance with great delicacy etc. Proceedings of the Royal Society of London. XXVIII. 1878—79.

** Die Anwendung der Wage auf Probleme der Gravitation. I. Abhandl. der 2. Klasse der Münchener Akademie XIII. 1878. II. U. o. XIV. 1883.

egyik súlyt az alsó csészébe tesszük, a mennyiben ez a lehozott tömeg most súlyban nyer. Ha most még az alsó csésze alá nagyobb ólomgolyót teszünk, újabb súlynyereség áll elő, melyből aztán az ólomgolyó vonzása, így a gravitáczió és földsűrűség számitható. A JOLLY számitotta földsűrűség *5·692±0·068*.

WILSING J.* a potsdami asztrofizikai obszervatorium oly helyiségében, melyben a hőmérséklet lehetőleg állandó volt, különös, e czélra készült ingával kisérletezett. Az inga két végén közel egyenlő súlyú golyókkal ellátott sárgarézcső, melynek közepén volt az achátból való él, úgy hogy tulajdonképen függélyesen felállított mérlegnek lehet tekinteni. Vonzó tömegekül két öntött vasból való hengert használt; lehetőleg minden zavaró körülményt elkerült (a készülék fából és bádogból készült kettős szekrényben volt) és lehetőleg mindent számításba vett, a mire a műszer egész elméletét meg kelletett állapitani; történt pedig ez az eleven erő képlete alapján, melyből kiindulva a nehézség és a vonzás forgási nyomatékait, az egyensúlyi helyzetet és végül a Föld közepes sűrűségét számitotta. Eredményül *5·594±0·032*-őt nyert.

Ugyancsak WILSING ** kisérletei folytatásában több javitást eszközölt készülékén és a kisérletek berendezésében, melyek a vonzó hengerek pontosabb beállításában, a hőmérséklet netáni vízszintes rétegezésének egyforma megtartásában, az inga sárgaréz golyóinak ólomgolyókkal való felcserélésében állottak. A sárgaréz-, az ólomgolyókkal és a golyók nélkül végzett lengési sorozatokból a Föld középsűrűsége *5·577±0·013*.

POYNTING *** is folytatta a mérleggel való méréseit és két kitűnően egyező egyes értékeket magában foglaló észleletsor eredményéül nyeri: *5·4934±0·009*. (A valószínű hibát RICHARZ F. a

* Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde mit Hilfe eines Pendelapparates. (1. Abh.) Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. VI. 1887.

** Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde mit Hülfe eines Pendelapparates. (2. Abh.) Publicationen des Ast. Observ. zu Potsdam. VI. 1889.

*** The mean Density of the Earth. Phil. Trans. London 182 A. 1891.

Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft 33. évfolyamában adta.)

Boys C. V.* a csavarási ingához tért vissza, melynek használhatóságát azonban lényegesen előmozdította az általa a felfüggesztésre először használt kvarczfonalakkal; azonkívül a két emeltyűkart különböző magasságban helyezte el, és a vonzó tömeget a megfelelő szintben helyezte el. Kilencz mérési sort tart legjobbnak, melyek eredményei 5·5159 és 5·5291 közt fekszenek; a két, a legjobb körülmények közt végzett sor értéke alapján *5·5270±0·0002* állapít meg; a valószinű hiba azonban csak becslés és nem számítás eredménye.

Végül Braun Károly** ugyancsak a csavarási ingát alkalmazza; csakhogy rendkivülien ritkított levegőjű (17 és 4 mm-nyomású) üvegharang alatt. Vonzó tömegekül 9 kg nehéz, higanynyal töltött vasgolyókat használ. Kétféle módszert használ, az elhajlásit, melynél az ingának eltérítését észleli, melyet vonzó tömegeknek a «nullállás»-ból (azaz mikor az emeltyűkarok meghosszabbitásában állanak) való kimozdítása okoz, és a lengési módszert, mely azon alapszik, hogy a vonzó tömegek a «nullállás»-ban a lengéseket gyorsítják, 90°-nyi elfordulásnál pedig lassítják. A sárgarézből álló fonál rugalmassági utóhatásának, a lengések csillapodásának és végtelenül kicsiny ivekre való reductiójának, a készülék excentrikus részei vonzásának a befolyását stb., Braun részben számos mellékkészülékkel határozta meg és hozta számításba, részben kiküszöbölte. Az értekezésben közölt utolsó érték a Föld közepes sűrűségére 5·52725±0·0012, melyet levélben (Lampe, Beiblätter zu Wiedemann's Annalen 21. köt.) 5·52728, majd (Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesell. 33. évf.) *5·52760±0·0013*-ra módosit.

Mindezen értékek közül Boys és Braunné közeliti meg legjobban

---

* Ueber die Newton'sche Constante der Gravitation. Proc. Soc. London. 56. 1894.

** Die Gravitations-Constante, die Masse und die mittlere Dichte der Erde nach einer neuen experimentellen Bestimmung. Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften. LXIV. 1896.

azon adatot, a melyet br. EÖTVÖS LORÁND vezetett le. Már módszer dolgában is érdekes és tanulságos azon eljárás, melyet alkalmazott,* s mely hasonló méréseket egész új téren, a földmágnesség körében is megenged.

Látnivaló, hogy a Föld valódi középsűrűségének ismeretéhez mindig közelebb és közelebb jutunk, — a különböző meghatározások mindinkább jobban egyező eredményekre vezetnek, — de azért végleges számról még egyáltalán nem beszélhetünk.

Lakits Ferencz.

---

* Vizsgálatok a gravitatió és mágnesség köréből. Math. és Termtud. Ért. XIV. k. 4. füz.

A Mathematikai és Physikai Társulat V. tanulóversenye.

A Math. és Phys. Társulat 1898 november 17-én tartott választmányi és rendes ülése nagyrészt az V. tanulóverseny eredményeivel foglalkozott, a melyekről az ügyvivő titkár a következő jelentést adja:

«A Mathematikai és Physikai Társulat választmányának 1894. évi június 22-iki ülésének határozatából ez évben is rendezett mathematikai tanulóversenyt. A verseny f. évi október 29-én tartatott meg egyidőben Budapesten és Kolozsvártt s Budapesten 46, Kolozsvártt 6, összesen 52 középiskolai érettségi vizsgálatot tett tanuló jelentkezett.

A verseny mindkét helyen zárt helyiségben, a társulat számos tagjának felügyelete alatt ment végbe; folyamatában szabálytalanság nem fordult elő, a miről a helyszinen felvett jegyzőkönyv tanuskodik. A versenydolgozatok elkészítésére engedett négy óra elteltéig Budapesten 30, Kolozsvárott pedig 6 dolgozat adatott át az ellenőrző bizottságnak; ezek az ellenőrző tagok aláirásával lepecsételtettek.

Megjegyzésre érdemes, hogy a mult évben többen jelentkeztek, nevezetesen Budapesten 62, Kolozsvártt 7 tanuló; de míg ekkor 24 illetve 3 tanuló távozott dolgozat beadása nélkül, ezidén Budapesten csak 16 tanuló távozott, Kolozsvártt pedig mind a hat jelentkező versenyzett.

A versenyen készült dolgozatok megbirálására az elnökség nyolcz tagból álló bizottságot küldött ki, melynek jelentését a választmányi ülés egyhangúlag tudomásúl vette.» E jelentés a következő:

«A versenyen részt vett Budapesten 30, Kolozsvártt pedig 6, összesen 36 tanuló. A feladatok a következők voltak:

1. Határoztassanak meg n-nek mindama pozitiv egész számú értékei, a melyekre vonatkozólag 2^n+1 osztható 3-mal.

2. Bizonyíttassék be, hogy ha két háromszögben az egyik szög közös, akkor e két háromszög közül abban lesz a szögek sinusainak összege nagyobb, a melyben a nem közös szögek különbsége kisebb. E tétel alapján meghatározandó továbbá ama háromszög alakja, a melyben a szögek sinusainak összege a lehető legnagyobb.

3. Adva van egy egyenesen négy pont: A, B, C, D; oly négyzet szerkesztendő, a melynek két átellenes oldala A-n és B-n, másik két oldala pedig C-n és D-n megy keresztül.

A beérkezett dolgozatokat a Math. és Phys. Társulatnak Kőnig Gyula elnöklete alatt Beke Manó, Eberling József, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Rados Gusztáv, Rátz László és Szijártó Miklós-ból álló bizottsága átvizsgálta és egyhangúlag azt határozta, hogy az első díjat Kármán Tivadarnak, a budapesti tanárképző intézeti gyakorló főgymnasium és dr. Beke Manó tanár növendékének itéli, a ki a három feladatot helyesen oldotta meg s azonkívűl világos és szabatos fogalmazásával felülemelkedett a többi dolgozatokon.

A második díjat Gróffits Gábornak, a pozsonyi m. kir. állami főreáliskola és Göllner Károly tanár növendékének itéli a bizottság, a ki, bár nem oly tökéletes fogalmazással, de szintén helyesen oldotta meg mind a három feladatot.

E két jutalmazandónak itélt dolgozat mellett még dicséretre méltónak tartja a bizottság Orlovszky Frigyes a szamosujvári főgymnasium és Dömötör János tanár növendékének dolgozatát, a ki szintén eljutott mind a három feladatnál a helyes eredményhez, de dolgozata a fogalmazás és a szabatosság tekintetében igen fogyatékos.

Budapesten 1898 november 15-én.

Szijártó Miklós, mint előadó. *Kőnig Gyula*, biz. elnök.

*

Erre báró Eötvös Loránd elnök a két díjat nehány buzdító, a nyertesek volt tanárait is kitüntető szó kiséretében adta át.

Előbb azonban megemlékezett hosszasabban Pap Pál fiatalon elhúnyt tagtársunkról, az első öt év előtt tartott tanulóverseny nyerteséről, a ki élete rövid folyásában is dicsőséget szerzett e versenyeknek és ezáltal Társulatunknak is. A koszorú, melyet Elnökünk sírjára helyezett, az első tanulóverseny nyertesének szólt és egyaránt fejezte ki Társulatunk kegyeletét is. A műegyetem részéről Rados Gusztáv búcsúztatta a fényes pályájának kezdetén elszólított társunkat.

Köszönettel emlékezett meg végre Elnök úr Barkáts Mária, Polereczky Jolán és Szarvassy Margit tagtársainkról, a kik immár öt éve kezük izléses munkájával a két jutalomdíj diszes foglalatjáról gondoskodnak és a díjat így kedves emlékké is teszik.

A Mathematikai és Physikai Társulat V. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

1. Kármán Tivadar dolgozata.

1. feladat. Határoztassanak meg n-nek mindama positiv, egész számú értékei, a melyekre vonatkozólag 2^n+1 osztható 3-mal.

$$2=3-1$$
$$2^n=(3-1)^n.$$

De $(3-1)^n$ kifejezésnek ilyen alakja van $3k+(-1)^n$, hol k valamely egész szám. Ugyanis, ha $(3-1)^n$-t kifejtjük, az első n tagban 3-nak positiv egész számú hatványai fordulnak elő, melyek mindig oszthatók 3-mal. Az $+1)$-edik tag $(-1)^n$-nel egyenlő, mely $+1$ értéket vesz fel, ha n páros, -1-et ha n páratlan. Az első esetben

$2^n+1=3k+2$ és nem osztható 3-mal, a második esetben $2^n+1=3k$, ez osztható 3-mal. Harmadik eset nem lehet s így

a 2^n+1 kifejezés 3-mal való oszthatóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy n páratlan szám legyen.**

2. feladat. Bizonyíttassék be, hogy ha két háromszögben az egyik szög közös, akkor e két háromszög közűl abban lesz a szögek sinusainak összege nagyobb, a melyben a nem közös szögek külömbsége kisebb. E tétel alapján meghatározandó továbbá ama háromszög alakja, melyben a szögek sinusainak összege a lehető legnagyobb.

Mivel a két háromszögben két szög közös, mondjuk

$$\alpha=\alpha', \quad \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\sin\alpha'+\sin\beta'+\sin\gamma',$$

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. Szerk.

** Jegyzet: a congruentia jelét bevezetve

$$2\equiv-1 \pmod 3$$
$$2^n\equiv(-1)^n \pmod 3,\ \text{tehát ha}\ (-1)^n=-1$$
$$2^n+1\equiv 0 \pmod 3.$$

ha

$$\sin\beta+\sin\gamma>\sin\beta'+\sin\gamma',$$

de ez így alakítható át

$$2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}>2\sin\frac{\beta'+\gamma'}{2}\cos\frac{\beta'-\gamma'}{2},$$

azonban

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \qquad \alpha'+\beta'+\gamma'=180^\circ$$

$$\frac{\beta+\gamma}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2} \qquad \frac{\beta'+\gamma'}{2}=90^\circ-\frac{\alpha'}{2}$$

s az egyenlőtlenség így hangzik

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}>\cos\frac{\alpha'}{2}\cos\frac{\beta'-\gamma'}{2}$$

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2}>\cos\frac{\beta'-\gamma'}{2}.$$

De mivel $\frac{\beta-\gamma}{2}$ okvetlen 0° és 90° közt van, a $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$ annál nagyobb, minél kisebb $\beta-\gamma$, a két nem közös szög külömbsége.

Tehát meghatározott α-nál $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ legnagyobb lesz, ha $\beta-\gamma$ legkisebb lesz, vagyis nullával lesz egyenlő. De ekkor $\beta=\gamma$. Ugyanígy bármely megadott β-nál $\sin\alpha+\sin\gamma$ legnagyohb lesz, ha $\alpha-\gamma=0$, $\alpha=\gamma$, bármely γ-nál $\sin\alpha+\sin\beta$ legnagyobb lesz, ha $\alpha-\beta=0$, $\alpha=\beta$ és általában $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ értéke legnagyobb, ha a háromszög egyenoldalú.

[$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\sin\alpha+\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+$$
$$+\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$$

mely kifejezés legnagyobb, ha

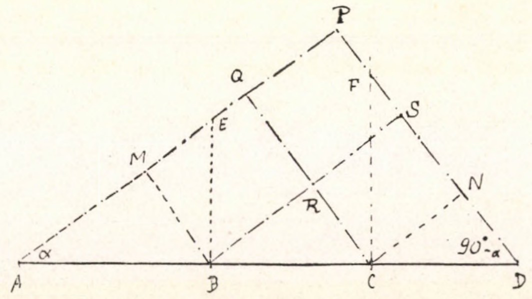
$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1 \qquad \alpha=\beta$$

$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=1 \qquad \alpha=\gamma$$

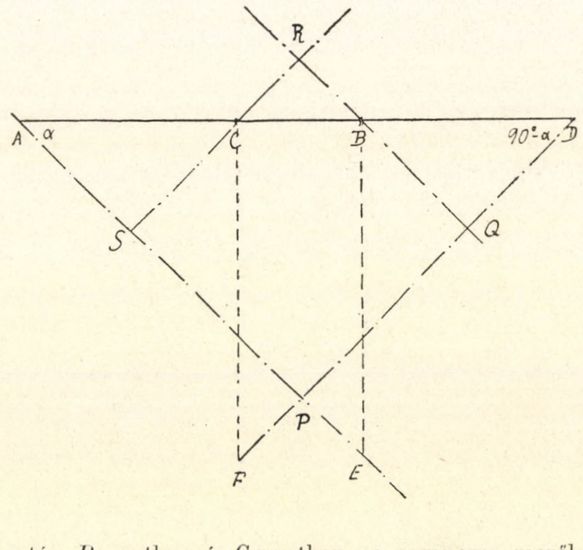
$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=1 \qquad \beta=\gamma.$$]

3. feladat. Adva van egy egyenesen négy pont A, B, C, D oly négyzet szerkesztendő, a melynek két ellentétes oldala A és B pontokon, másik két oldala C és D pontokon megy keresztül.

1) A pontok sorrendje A, B, C, D.



2) A pontok sorrendje A, C, B, D.



Szerkesztés: B pontban és C pontban az egyenesre merőlegest emelünk s az elsőre (B-ben) felmérjük $\overline{CD}$, a másodikra $\overline{AB}$ távolságot. Az így kapott E és F pontokat összekötjük A illetőleg D pontokkal. $\overline{AE}$ és $\overline{DF}$ egyenesek metszéspontja a négyzet egyik csúcsa s a négyzet két oldala az $\overline{AE}$ és $\overline{DF}$ egyeneseken fekszik, a miből a négyzet megszerkeszthető: $PQRS\square$.

Indokolás:

$$ABE\triangle \cong CDF\triangle,$$

mivel

$$\overline{BE} = \overline{CD}$$

$$\overline{CF} = \overline{AB},$$

tehát

$$BAE\sphericalangle = CFD\sphericalangle = 90° - CDF\sphericalangle.$$

Tehát APB derékszögű $\triangle$, a *P-nél levő szög 90°*. Másrészt 1) esetben

$$\overline{RQ} = \overline{PS} = \overline{BM} = \overline{AB} \sin \alpha$$

$$\overline{RS} = \overline{PQ} = \overline{CN} = \overline{CD} \cos \alpha$$

2) esetben

$$\overline{PS} = \overline{RQ} = \overline{DB} \cos \alpha + \overline{BC} \cos \alpha = \overline{CD} \cos \alpha$$

$$\overline{PQ} = \overline{RS} = \overline{AC} \sin \alpha + \overline{BC} \sin \alpha = \overline{AB} \sin \alpha.$$

De ABE-ből

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$$

vagyis

$$\overline{CD} \cos \alpha = \overline{AB} \sin \alpha$$

és

$$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{SP}$$

vagyis $PQRS$ négyszög négyzet.

[Világos, hogy minden esetben két, az egyenesre symmetricus megoldás lehető].

2. Gróffits Gábor dolgozata.

I. tétel. Határoztassék meg n-nek mindama positiv egész számú értékei, a melyekre vonatkozólag 2^n+1 osztható 3-mal.

2^n+1 még így is írható $(3-1)^n+1$, ha most $(3-1)$-nek, mint egy binomnak, bármely m-ed hatványát kifejtjük, következő alakú lesz

$$(3-1)^m = 3^m + \binom{m}{1} 3^{m-1}.(-1) + \binom{m}{2} 3^{m-2}.(-1)^2 + \cdots +$$
$$+ \binom{m}{m-1}.3(-1)^{m-1} + \binom{m}{m}.(-1)^m.$$

Látjuk, hogy az első $m-1$ tagban, 3-nak valamely hatványa fordul elő, tehát e számok oszthatók 3-mal, az utolsó tag azonban nem osztható, mert annak értéke a szerint a mint m páros vagy páratlan, $+1$ illetve -1 lesz.

Tegyük fel, hogy m páros volt, akkor 2^n értéke lesz $3(A)+1$ és ennek következtében 2^n+1 értéke lesz $=3(A)+2$, tehát ez esetben 2^n+1 nem osztható 3-mal.

Tegyük fel most, hogy m páratlan, akkor 2^n értéke lesz $3(A)-1$ és ennek következtében $2^n+1=3(A)$, a mi 3-mal osztható. Tehát látjuk ezekből, hogy 2^n+1 csak akkor lesz osztható 3-mal, ha n páratlan.

A megoldásnak tehát minden positiv páratlan egész szám megfelel. $n=(2m+1)$, a hol m egy tetszésszerinti szám.

II. tétel. Bizonyíttassék be, hogy ha két háromszögben egyik szög közös, akkor e két háromszög közül abban lesz a szögek sinusainak összege $>$ a melyben a nem közös szögek különbsége kisebb.

E tétel alapján meghatározandó továbbá ama háromszög alakja, a melyben a szögek sinusainak összege a lehető legnagyobb.

Legyenek az egyik háromszög szögei α, β, γ, a másik háromszög szögei α', β', γ'.

Feltételünk szerint $\alpha=\alpha'$ és tegyük fel hogy $\beta-\gamma<\beta'-\gamma'$, akkor a bebizonyítandó tétel az, hogy

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\sin\alpha'+\sin\beta'+\sin\gamma',$$

de mivel $\alpha=\alpha'$, azért a $\sin\alpha$ és $\sin\alpha'$-t az egyenlőtlenség két oldaláról elhagyhatjuk, úgy hogy most a bebizonyítandó tétel az, hogy $\sin\beta+\sin\gamma>$ $>\sin\beta'+\sin\gamma'$, felhasználva a két szög sinusai összegére vonatkozó logarólható képletet, az egyenlőtlenség következő alakra hozható

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}>\sin\frac{\beta'+\gamma'}{2}\,.\,\cos\frac{\beta'-\gamma'}{2}$$

de

$$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\beta'+\gamma'}{2}=90^\circ-\alpha\,(\alpha'),$$

ezért mindkét oldalról a szögek összegének sinusa elhagyható és így azt nyerjük, hogy

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2}>\cos\frac{\beta'-\gamma'}{2} \qquad a)$$

ha most feltevésünk szerint:

$$\beta-\gamma<\beta'-\gamma',$$

akkor ez áll a különbségek felére is, tehát

$$\frac{\beta-\gamma}{2}<\frac{\beta'-\gamma'}{2}.$$

De ismeretes az a tétel, hogy kisebb szögnek nagyobb a cosinusa s ezért áll az, hogy

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2} > \cos\frac{\beta'-\gamma'}{2}$$

és ezt az eredeti képletünkre alkalmazva, látjuk, hogy csakugyan igaz az, hogy ha $\beta-\gamma<\beta'-\gamma'$, akkor

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\sin\alpha'+\sin\beta'+\sin\gamma, \qquad b)$$

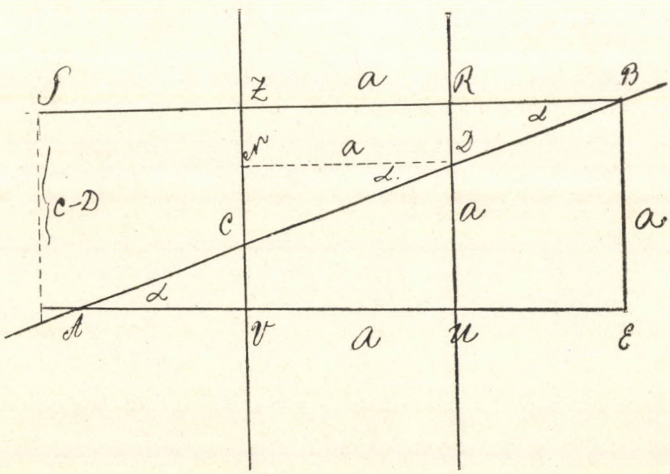
a) alatti képletből látjuk, hogy e két összeg *b)* közti különbség, akkor lesz legnagyobb, ha $\beta-\gamma$ különbsége a legkisebb, azaz $=0$.

Ugyanerre az eredményre jöttünk volna, ha feltettük volna, hogy $\beta=\beta'$, akkor hogy $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ legnagyobb legyen, kell hogy $\alpha=\beta$.

E két eredményt összevetve, $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ maximumának feltételéül nyerjük azt, hogy $\alpha=\beta=\gamma$.

Tehát a szögek sinusainak összege legnagyobb lesz az egyenoldalú háromszögnél.

III tétel. $AEB\triangle$-ből



$$\sin\alpha=\frac{a}{AB}, \qquad 1)$$

CND-ből pedig

$$\cos\alpha=\frac{a}{CD} \qquad 2)$$

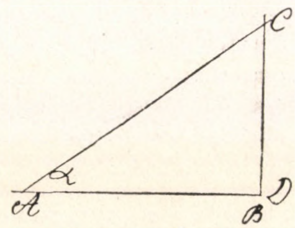
$$1):2) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{AB}}{\frac{a}{CD}} = \frac{CD}{AB}$$

azaz

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{AB}.$$

A szerkesztés ezek szerint a következő.

Megszerkesztjük CD és AB-ből az α szöget s ezt lemérjük az adott



egyenes (AB) mellé, s e szög alatt húzzuk az SB és AE egyeneseket, a melyekre C és D-ből merőlegest húzva megkapjuk a négyzetet $VURZ$-t.

Válasz Suták József «Ismertetés»-ére.

(Lásd: «Az elektromosság és mágnesség elmélete» Dr. HOOR MÓRtól, ismertetés, irta SUTÁK JÓZSEF; Math. és Phys. Lapok, VII. p. 311. 1898. október.)

Habár eredetileg nem szándékoztam SUTÁK tagtárs úr ismertetésére válaszolni, mert teljesen czéltalan dolognak tartom, ha a szerző a birálatot viszontbirálat tárgyává teszi, több szaktársam nógatására nehány megjegyzéssel akarok az idézett birálatra felelni.

Válaszom nem szól azoknak, a kik művemet áttanulmányozták és a mű megjelenése óta letelt *négy és fél év alatt* bizonyára véleményt alkottak felőle; tisztán csak azok tájékoztatására teszem megjegyzéseimet, a kik e könyvemet nem ismerik.

Midőn a M. Mérnök- és Építész-Egylet engem több szaktársammal egyetemben a terveztem prospectus alapján a szóban forgó kézikönyv megirásával megbizott, nem hittem volna, hogy szerény munkámat valaha mint mathematikai physikai művet fogják megbirálni. Nagyon örvendek ugyan, hogy SUTÁK tagtárs úr, mint *mathematikus a mathematikus szempontjából birálva* a művet, talált benne elismerésre méltót és világosan látja azokat a vezéreszméket, melyek engem e mű megirásában vezéreltek, de hangsúlyozom, hogy korántsem mathematikai physikai munkát akartam írni. Czélom az volt, hogy az addig közkézen forgó, alapos mathematikai és physikai ismeret híjján megírt elektrotechnikai művek módszerét elhagyva, az elektromosság és mágnesség elméletének főbb tételeit és igazságait oly módon ismertessem, hogy azt a gyakorlatban működő mérnökök, elektrotechnikusok és kezdő, de kellő kisérleti alappal rendelkező physikusok megérthessék. *E mű bevezetés az elektrotechnikába,* ezért alkalmazkodnia kell olvasóközönségének mathematikai képzettségéhez és az egyes fogalmakat oly módon kell tárgyalnia, hogy a gyakorlatba közvetlenül átültetni lehessen őket. Ezért mindazt, a mi a praxisban nélkülözhető, csak érintettem; mindenekelőtt elkerülni akartam, hogy az olvasó a hypothesisek és formulák tömkelegébe jutva, az áttekintést elveszítse.

Ezért az elektromos indukczió problemáját csak általánosan tárgyaltam, csak a legegyszerübb esetek tárgyalására szorítkoztam és mellőztem azokat a komplikáltabb eseteket, melyekre a gyakorlatban nincs szükség és a melyek magasabb mathematikai apparatus alkalmazását teszik szükségessé. Azt hiszem, nem is tettem volna szolgálatot a gyakorlatnak, ha a mérnöki kart gömb- és hengerfüggvényekkel, elliptikus integrálókkal stb. terheltem volna.

Ez okoknál fogva kellett az elektrokinematikában, elektrodynamikában, a köráramok elméletében is a kisérletet az elmélettel szorosabban összeolvasztani, hiszen máskülönben előtérbe jutott volna a mathematikai speculáczió és szükségessé vált volna minden részletnek a kidomborítása.

A gyakorlat igényeire való tekintettel kellett pl. tárgyalni a váltakozó irányú elektromotoros erőkkel kapcsolatos tünemények, relatiók graphikai ábrázolását, jóllehet ez elméleti szempontból teljesen fölösleges. Az elektrodynamika fejezetét csak érintettem — mert erre az elektrotechnikusnak vajmi kevés szüksége van. Épen úgy csak röviden tárgyaltam a köráramok és harántmágnesezett lemezek közötti kapcsolatot, inkább csak a kisérleti tényekre és azok mathematikai formulázására szorítkoztam, de mellőztem a kérdés általános mathematikai tárgyalását. De részletesen — a gyakorlati alkalmazás szabta módszerben — tárgyaltam a kölcsönös indukczió és önindukczió tüneményeit stb. és túlléptem azt a határt, melyet tisztán elméleti szempontból betartani kellett volna.

Egyszóval a *gyakorlat számára* írtam könyvemet, hézagot akartam pótolni az elektrotechnikai irodalomban és módot akartam nyújtani arra, hogy a kezdő az elmélet főbb részeivel könnyen megismerkedhessék. Nagyon örvendek, hogy Suták tagtárs úr e törekvésemet megismerte, hogy megismerte a *Faraday-Maxwell-féle felfogást* módszeremben, de nem tartom helyesnek az előbbiek alapján, ha a tagtárs úr művemet mint mathematikai physikai munkát birálja meg, még akkor sem, ha érdemesnek tart arra, hogy *Poincaré*-val egy sorban említsen.

Munkám *második részének*, a méréseknek megbirálása mindenesetre *még kevésbbé tartozik a mathematikusnak* hatáskörébe. Ez már a szó szoros értelmében véve műszaki munka, a melyet nem dolgozó-asztal mellett, hanem használat közben a gyakorlatban kell megbirálni. Munkám e részének irányát indokoltam és részleteztem a bevezetésében, a melyből csak a következő ritkított betűkkel írt részt idézem (8. oldal 7. pont): «A gyakorlat ez iskoláját nem pótolhatja semminemű leírás vagy magyarázat. Az elméletnek és leirásnak czélját csak a gyakorlat megszerzésére okvetlenül szükséges előzetes ismeretek közlése képezi.» A 10-ik pont bekezdésében pedig figyelmeztetem az olvasót, «hogy mérő-készülékeknek és mérő módszereknek ismertetése, írásban vagy élőszóval való tárgyalása csak a mérésbeli gyakorlat megszerzésére szükséges *előismeretek* közlését czélozza.

Ezért nem lep meg, ha SUTÁK tagtárs úr azt mondja, hogy «nem hiszem, hogy a mérésekbe bemutatott példákból valaki meg tanuljon mérni.» *Én sem hiszem;* bizonyos, hogy én többi physikus tagtársammal egyetemben nem könyvből tanultam mérni, s melegen ajánlom mindenkinek, ne fáradozzék e lehetetlen feladatnak megoldásán, de járjon laboratoriumba, a hol a tanárnak és jó könyveknek utasításait követve, mérni megtanulhat. Mert a méréssel épen úgy vagyunk, mint a többi kézbeli ügyességet igénylő, különös tehetséget feltételező tudománynyal és művészettel. A szobrászatot festészetet, az operativ chirurgiát stb. könyvből megtanulni nem lehet. Ezeket a művészeteket, melyekhez a természettani és műszaki méréseket is sorolom, a természet örök könyvéből kell tanulnunk.

A könyv megismerteti velünk a készülék-typusokat, az alapelveket, példákat szolgáltathat, de sohasem pótolhatja a közvetlen szemléletet. De tovább megyek és azt mondom, hogy az idevágó jó munkában kerülni kell még annak a látszatát is, mintha a praxist pótolni akarnók; az olvasónak éreznie kell, hogy az, a mit olvas, csak vezérfonál, utmutató, izleltető és csak a praxis előkészítésére szolgál. Éreznie kell azt, hogy az, a ki már mérni tud, szükségképen birtokában van ezernyi meg ezernyi apró részletnek, melyet a normális elme — ha nem a közvetlen szemlélet utján kapja — megemészteni, megtartani nem tud. Nem vezetett volna azért eredményre ha akkori 8 éves mérő praxisomnak — mely talán némi sikerrel járt — összes tapasztalatait részletesen ismertettem volna. De szükséges volt a keszülékeket, azoknak szerkezetét, készítését alkalmazásmódjait rendszeresen főbb vonásaiban tárgyalni.

Ezek után a gyakorlati mérőelrendezéseket röviden példaszerűen lehetett tárgyalni és fölösleges volt az elrendezések áttekinthetőségét a készülékekre vonatkozó előzetesen tárgyalt részletekkel csökkenteni.

A tagtárs úr az itt követett rendszert birálva a többi között kifejezést ad annak a meggyőződésnek, hogy az etalonok pl. normál ellenállások, condensátorok stb. nem tartoznak a mérőkészülékek közé. Ezek szerint a normálméter, a másodperczinga stb. sem volnának mérőeszközök! — Azt hiszem a tagtárs úr tévedett.

A tagtárs urnak megjegyzései annál inkább leptek meg, mert szaktársaim nyilatkozatából azt a megnyugtató tudatot merítettem volt, hogy művem eleget tesz a gyakorlat igényeinek; továbbá azt hittem, hogy fejtegetéseim folyamán új, eredeti dolgokat is említettem. Noha SUTÁK tagtárs úr ezt tagadni látszik, mégis köszönettel veszem megtisztelő figyelmét és bocsánatot kérek, ha a tagtárs urnak emlékébe idézem MICHELANGELO ismert mondását, melyet magam mindenkor szem előtt tartok, úgy hogy pl. a tagtárs úr nagyrabecsült mathematikai dolgozatait mint elektrotechnikus sohasem merném megbirálni.

Dr. Hoor Mór.

*

Megjegyzés: Ezen f. é. nov. 15-éről keltezett válasz a novemberi füzetbe már nem volt beilleszthető. *Szerk.*

PHYSIKAI SZEMLE.

Nagy hullámhosszúsággal biró hősugarak. Rubens és Nichols azt a czélt tűzték maguk elé, hogy a színkép vörösöntúli részére vonatkozó ismereteinket kibővítsék; tényleg még jókora köz van a Lebedew-től előállított — eddig legkisebb — 6 mm hosszúsággal biró elektromos hullámok és Langley 15 ezred mm hosszúsággal biró hőhullámai között. Az e fajta kutatásoknál a legnagyobb nehézség abban áll, hogy ezen hullámok az izzó testektől kibocsátott energiának csak igen csekély részét képezik; ha még azontúl prizmán vagy rácson áthaladva szétszóródnak, a kutatásnak mindjárt vége, mert a prizma elnyeli, a rács pedig az egyes színképekre szétszórván az energiát, meggyöngíti azt és azok fedését is okozza. Rubens és Nichols érdekes módszert gondoltak ki arra, hogyan lehet egyenesen, prizma vagy rács nélkül, nagy hullámhosszúsággal biró homogén sugárnyalábot kapni, a mely elég erős is legyen a tanulmányozás czéljára.

A Ketteler-Helmholtz-féle dispersio-formula a törésmutatót megadja mint két lineáris elnyelési vonal hullámhosszúságának függvényét, melyeknek egyike az ibolyántúli, másika pedig a vörösentúli részben fekszik. Ezen vonalak közelében az absorptio közel áll a fénysugaraknak a fémeken történő absorptiójához; az ilyen absorptiót azonban szükségkép fémes visszaverődés is kiséri; ennélfogva ha a megfelelő hullámokat visszaverődésnek teszszük ki, a visszavert hullámok színképéből nagy részük hiányozni fog. P. o. ha ama bizonyos vonal körében, az absorptio 30-szor nagyobb mint a közvetlen szomszédságban (épen ezen eset áll be a quarcznál $\lambda = 0{\cdot}0085$ mm közelében) akkor háromszoros visszaverődés után a szomszédos hullámok $(30)^3$-szer, azaz 27000-szer lesznek gyöngébbek. Ha még ezenkívül úgy választjuk meg a forrást, hogy az e fajta sugarakat bőségesen ontsa, a mi beáll akkor, ha a felmelegített és visszaverő test ugyanaz, a színkép háromszoros visszaverődés után csak a keresett hullámnak hosszúságát fogja mutatni.

Forrásúl szolgált porrátört fluorittal vagy quarczczal beborított platinalemez; a tükrök fluorit vagy quarcz-lemezekből állottak; egy drótrács és egy érzékeny bolométer (oly eszköz, mely az elektromos ellenállás megváltozásával méri a hőmérséklet-különbségeket) szolgált a hullámhosszúság lemérésére; ezen eszközben a platinaszalagokat lámpakorom helyett az elektrolytikus úton előállított platinával vonták be, mert az előbbeni a nagy hullámhosszúságokkal szemben nem úgy viselkedik, mint fekete test és a fluorit kibocsátotta sugaraknak csak 5%-át nyeli el. PASCHEN meghatározásai szerint a HELMHOLTZ formulájából származtatott elnyelési vonalnak említett hullámhosszúsága $\lambda = 0{\cdot}030$ mm volna a fluoritnál és $\lambda = 0{\cdot}010$ mm a quarcznál.

A rács a quarcznál a középső képtől jobbra-balra egy első és egy harmadrendű diffractiós képet ád, melyek 1°22′ illetve 4°6′ elhajlásnak felelnek meg; tehát ebből $\lambda = 0{\cdot}00885$ mm. Ezen képek energiagörbéjének alakja azt mutatja, hogy a sugarak nagyon homogének és hogy a szélső hullámhosszúságok alig térnek el 10%-kal.

A fluoritnál a sugárnyaláb három visszaverődés után a beeső energiának csak $\frac{1}{1000}$ részét tartalmazza már, mely a bolométer hőmérsékletét csak $\frac{1}{50}$ fokkal emeli. Mindazonáltal elég tisztán vehető ki a középső képtől jobbra s balra az energia elsőrendű maximumának elhajlása, a mely 3°45′-nek felel meg és $\lambda = 0{\cdot}0245$ mm-t. ad. Ezen sugarakat egy 2 mm vastagságú fluorit vagy kősó teljesen elnyeli. Csak az ezüstchlorid átlátszó rájuk nézve, a mely a beeső energia 75%-át átereszti; ha egy ezüstchloridlemezt lámpakorommal vonunk be, az absorptio csak 5%-kal emelkedik, a mi igazolása a fentebbi állításnak, mely szerint a lámpakorom ezen hullámokra nézve nem fekete. Ezeket sem a vízgőz, sem a salétromsav gőze nem nyeli el.

A meghatározott hullámhosszúság tehát a quarcznál 10%-kal, a fluoritnál pedig 20%-kal tér el attól, melyet a HELMHOLTZ-formula kiván. Azonban sok hibaforrás is van, melyeket a szerzők lelkiismeretesen fel is sorolnak. A megegyezés azonban elégséges az elmélet igazolására. A kősó még távolabb álló hullámhosszúságok megfigyelését tenné lehetővé; azonban a felület megmunkálásának nehézsége és a bolométer érzékenységének határa megakadályozták annakvégrehajtását. (J. de Ph. III. s. t. VI avril 1897.)

Mikola S.

Tagdijat fizettek:

1893. évre : Bartha Zsigmond, Bónis Károly, Dobay Sándor, Dohnányi Frigyes, Fogarassi Béla, Perger József, Széchy Ákos. Összesen : 7.

1894. évre : Csomóssy Sándor, Farbaky István dr., Homor István, Lengyel István, Makay István, Nuricsán József dr., Pfeiffer Péter dr., Söpkéz Sándor, Winkler Lajos dr. Összesen : 9.

1895. évre : Aranyosi Miksa, Bein Károly, Berecz Antal, Benkő Imre, Csajkás Mihály, Dózsa Jakab, Edvi Illés Aladár, Fabinyi Rezső dr., Homor István, Hubatsek Alajos, Korbuly Emil, Kövesligethy Radó dr., Kuthy József dr., Lengyel István, Medvigy János, Muraközy Károly, Nesnera Aladár, Pekár Dezső dr., Steécz György dr. Összesen : 19.

1896. évre : Balog Mór, Bodola László, Boros Sándor, Danch Ferencz, Edelmann Sebő dr., Grünwald István, Homor István, Kopp Lajos dr., Lengyel István, Perényi Vilmos, Pizetti Rókus, Plósz Pál dr., Szekeres Kálmán dr. Összesen : 13.

1897. évre : Bogyó Samu, Ferenczy József, Ficsor József, Grexa Loránd dr., Janell József, Katona Lajos dr.-né, Keresztély Lajos, Klimkó Mihály, Kopp Lajos dr., Layer Antal dr., Lengyel István, Nagy Vazul Pál, Szuppan Vilmos, Thán Károly dr., Vidovich Bonaventura. Összesen : 15.

1898. évre : Abt Antal, Barabás Jenő, Benda Jenő, Belláglı Kálmán, Bláthy Ottó, Csehely Adolf, Dsida Ottó, Ellend József, Farkas Gyula dr., Gerevich Emil dr., Hahóthy Sándor, Heller Ágost, Kalecsinszky Sándor, Katona Lajos dr.-né, Kopp Lajos dr., Klug Nándor dr., Kosztolányi Árpád, Kukla István, Lengyel István, Pék János, Potomcsik József, Prokess Ignácz, Schuller János, Skopal István, Straub Sándor, Széprétlıy Béla, id. Szily Kálmán, Szontágh Miklós, Thanhoffer Alajos dr., Tóth József, Vidovich Bonaventura. Összesen : 31.

100 frtnyi örökitő tagdijat fizetett : ifj. **Szily Kálmán.**

Réthy Mór műegyetemi tanár úr társulatunknak 15 frtot ajándékozott.

Előfizetési dijat fizettek:

1896—97—98. évre a debreczeni áll. főreáliskola.

1898. évre : a győri főreáliskola.

1899. évre : a szamosujvári m. k. áll. főgymn. ifj. könyvtára.

Budapesten, 1898. decz. hó 14.

Feichtinger Győző,
pénztárnok.