MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

ÖTÖDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1896

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

A MATHEMATIKAI ES PHYSIKAI LAPOK

ÖTÖDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

*

Ötödik, hatodik, hetedik és nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Ismertető és önálló dolgozatok.

Physikai Szemle.

Irodalom.

Megoldott feladatok.

Vegyesek.

Physikai Laboratorium.

JEDLIK ÁNYOS.

A Math. és Phys. Társulat f. é. január hó 16-án tartott ülését b. Eötvös Loránd elnök a következő szavakkal nyitotta meg:

Tisztelt Mathematikai és Physikai Társulat!

A hír, hogy mai ülésünkön láthatók lesznek Röntgen kísérletei, melyeknek leírása minden olvasó ember képzeletét megragadva, szerzőjük nevét az egész művelt világban egyszerre híressé tette, díszes vendégkoszorút gyűjtött máskor csak tagjaink által felkeresett otthonunkba. Társulatunk nevében örömmel üdvözlöm kedves vendégeinket s a vendéglátás szabályai szerint ma első sorban azon leszünk, hogy az ő megelégedésüket érdemeljük ki; nem is fogunk azért ma foglalkozni a magunk dolgaival s Beke Manó tagtársunknak érdeklődéssel várt szakszerű előadását az ő saját kívánsága szerint jövő ülésünkre tesszük át.

Egyet azonban még sem hagyhatok el; a kegyelet követeli, szívem sugallja, hogy fájdalmunkat kifejezzem a mi nagy öregünk, Jedlik Ányos halála felett, a kit fiatal társulatunk alakulása alkalmával, mert méltóbb czímet nem találtunk, első tagjává választott, s a kit utolsó összejövetelünk óta százados életpályája után a győri temetőben utolsó nyugvó helyére kísértem.

Volt idő, régen volt, mikor azok a kísérletek, a melyeknek folyamában Jedlik a mágnestűt folytonos forgásba hozta, még csodálatosabbaknak látszhattak, mint ma az az élő kéz, a mely csontvázának szerkezetét elárulja.

Több mint fél század mult el azóta, s az alatt a forgó mágnesből elektromos kocsi lett, a melyen naponta csodálkozás nélkül járunk kelünk. A csodálkozást idők múltán eloszlatta, részben valamivel gyarapodó tudásunk, de még sokkal nagyobb részben a mindennap látotthoz való hozzászokásunk.

Jedlik neve azért ma már nem kelt kiváncsiságot, hanem inkább tiszteletre indít, mint a tudomány történetének egy nagy alakjáé. Az ő szerénysége akadályozta meg, hogy bár megérdemelte volna, világszerte hires ember legyen; a mi kötelességünk lesz az, hogy kivívjuk legalább emlékének a tudomány történetében azt az elismerést, mely őt méltán megilleti.

Társulatunk már több ízben foglalkozott is az ő felfedezéseinek ismertetésével; azon leszünk, hogy a még hiányosat kiegészítsük. Ezzel tartozunk első tagunk emlékének, a ki a mi tudományunkat nemcsak gyarapította, hanem szerette is, úgy, mint jobban senki sem szeretheti s a ki érdeklődését annak minden haladása iránt magával hordta a sírig, úgy hogy élte végső napjain szinte türelmetlenül várta már a halált, azért, mert erős hite szerint alig várhatta, hogy ott a menyekben lelki szemei előtt feltáruljon a physikának az a sok titka, a melynek felderítésére e földön látó csövet hiába keresett.

Tündöklő, nálunk még ritka példa az ő élete arra, hogy a tudomány magában elég annak betöltésére, magában elég arra, hogy művelőjét hasznossá és boldoggá tegye.

Tiszteljük azért az ő emlékét, kövessük az ő példáját.

A RÖNTGEN-SUGARAKRÓL.*

A szikra, melyet két különböző elektromosságú test kisülésénél látunk, nemcsak a leghatásosabb, hanem a legcsodálatosabb jelenségek egyike. Itt ugyanis az elektromos energiának minden más ismert energiafajra: fény, hang, hő, mágneses és vegyi hatássá való átalakulása együttesen, egyszerre lép fel. Természetes tehát, hogy ennek vizsgálatával sokan és sokat foglalkoztak. A legnagyobb siker, melyet a physika az utóbbi időben elért — a Hertz-féle kísérletek — a szikra vizsgálatával függ össze; épp úgy, mint azok a kísérletek, a melyek Röntgen nevéhez fűződnek s mindenütt méltó és megérdemelt föltünést keltenek.

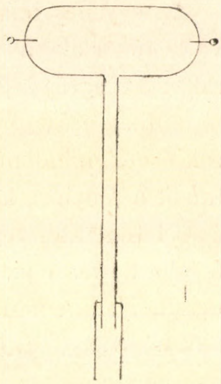
E kísérletekhez szándékozom hozzászólani, daczára annak, hogy Röntgen kísérleteiről csupán a napilapok közleményeiből szerezhettem tudomást. Engedjék meg, hogy bevezetésűl magáról a szikráról — ez új jelenségek megindítójáról — pár szóval egyetmást elmondjak.

Az a fényes csík, az a töredezett szalag, mely a levegőben két különböző villamosságú drót között átüt, más és másféle alakú lesz, ha nem levegőben, hanem más anyagokon pl. folyadékon stb. üt át. A szikra átütése a legsajátszerűbb és a legváltozatosabb akkor, mikor ritkított gázokban megy végbe. Ha olyan csőből, a melybe két drót (aluminium v. platina) van beforrasztva (1. ábra), a levegőt kiszivattyúzzuk, azt vesszük észre, hogy a ritkítás előhaladásával a szikra útja mindinkább elmosódik s a fényjelenség mintegy az egész csövet betölti. Ilyen esetben a jelenség a két drót körül nem egy-

* Előadatott a Math. Phys. Társulat 1896 jan. 16-án tartott rendes űlésén.

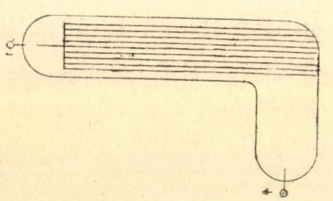
forma, épp úgy, mint más esetben a levegőben való kisülésnél is különbség van a kettő között.

Az elektromos gép pozitiv sarkával, az anóddal összekötött drót, köröskörül vöröses-kékes fénynyel van körülvéve, míg a negativ sarokkal összekötött drótnak, — a kathodnak — csupán a csúcsán látszik a kékes fény, melyet a pozitiv fénytől kis sötét köz választ el. Az üvegcső e mellett különböző színű fényben világít, fluoreszkál, épp úgy, mint a világító festékek, kagylók, stb. A ritkítás fokozásával ezen sötét köz is mindig nagyobbá és nagyobbá válik s végre az egész csövet kitölti; ekkor a cső már többé nem világít, csak a kathóddal szemben lévő üvegfal világít fluorescens színben, mintha azt szemünkkel látható fény világítaná meg.

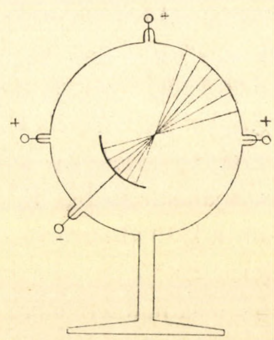


1. ábra.

Az ilyen nagy ritkítású csöveket Hittorf, majd későbben Crookes vizsgálták meg; a csöveket Crookes-féléknek szokás nevezni, mert ő e kísérleteket igen szép formákban variálta. Az ezen csövekben fellépő jelenségek olyanfélék, mintha a kathodról sugarak indulnának ki, melyek a kathod felületére merőlegesek. E sugarak, *a kathodsugarak*, irá-



2. ábra.



3. ábra.

nyát a pozitiv sark helyzete nem befolyásolja; a sugarak a pozitiv sarkon túl is folytatják útjukat (2. és 3. ábra). Ezzel ellentétben nagyobb sűrüségű levegőben a kisülés jelensége csupán a két drót közötti térre szorúl. Ezek a *kathod-sugarak* a vacuumon egyenes irányban könnyen áthaladnak. A kathod-sugarak elterjedésének megvizsgálására Crookes a kathod és az üvegfal közé fémkeresztet helyezett s ekkor az üvegfalon annak sötét árnyéka jelent meg. Ebből látjuk, hogy azok a fémeken nem hatolnak át.

Az egyenesvonalú terjedés igazolására Crookes aluminiumból vájt tükör-alakú kathodot alkalmazott s ezzel a kathodsugarakat összegyűjtötte; az ily módon összegyűjtött sugarak a gyújtópontban erősebb fényhatásokat hoznak létre. A hová ezen sugarak érnek, mindenütt fluoreszkálást létesítenek; ebben is hasonlítanak a fényhez, különösen a rövidhullámú ibolya-fénysugarakhoz és a láthatatlan vegyi hatású sugarakhoz. Az ilyen kathod-sugarak útjába helyezve az alkalikus fémföldek, így a rubin, szmaragd stb. ugyanolyan szépen világítanak, mintha igen erős fénynyel volnának megvilágítva. Különösen szép fényjelenséget mutathatunk be ily módon akkor, ha különböző anyagok csoportját helyezzük a kathodsugarak útjába. A kathod-sugarakat a mágnes eltéríti útjukból, mintha áramvezetők lennének. Crookes oly csövet is készitett, a melybe a kathod-sugarak útjába kis szárnyas kereket helyezett; ezt azután a kathod-sugarak forgásba hozták; tehát mechanikai hatásuk is van. Talán főképen ez volt az oka annak, hogy Crookes a kathod-sugarakat a kathodról leporló fémrészecskék és a ritkitott levegőrészek egyenes haladó mozgásának tartotta. Ezzel szemben a német physikusok, élükön Helmholtz,[1] fényhez hasonlóan e sugarakat a kathodról kiinduló igen gyors hullámzásnak tartják. Helmholtz tanítványai közül a nagynevű Hertz, továbbá Goldstein, ujabban pedig E. Wiedemann és Ebert foglalkoztak leginkább a kathod-sugarak tanulmányozásával.

Goldstein[2] kimutatta, hogy a kathod-sugarak nem mindig merőlegesek a kathod felületére s hogy éppen úgy reflektálódnak, mint a diffus fénysugarak. Észrevette továbbá, hogy azon esetben, ha a kathodon dombormüvű rajzok vannak, ezek a szemben lévő üvegfalra

---

[1] Lásd: Hertz *Ges. Werke* I. köt. XXV. lapon Helmholtz levelét.
[2] *Wied. Ann.* XI. kötet (1880.) és XII. k. (1881.)

vetődnek. Ugyancsak GOLDSTEIN mutatta ki először, és pedig már 1878-ban, a kathod-sugarak vegyi hatását. Ugyanis az üveg falához érzékeny papirost ragasztott, a melyre azután a kathod-sugarak segítségével a kathodul használt 20 Pfenniges nikkel darabot lefotografálta. HERTZ [1] azt tapasztalta, hogy a kathod-sugarak egyes anyagoknak igen vékony rétegén áthatolnak s ezzel valószínűvé tette, hogy itt nem a kathodról kiáramló anyagi részecskékkel, hanem valószínüleg finom hullámzó mozgással van dolgunk.

Ugyanily irányban a kathod-sugarak absorptiójára vonatkozólag HERTZ volt assistense, hazánkfia, LÉNÁRD FÜLÖP,[2] 1893-ban tett figyelemreméltó kisérleteket. Ezekkel kimutatta, hogy a különböző anyagok vékony rétegein a kathod-sugarak áthatolnak. Ő volt az első, aki a kathod-sugarakat a CROOKES-féle csövön kivül is előállította. Kisérleteinek eredménye az, hogy a kathodsugarak már magában a szabad levegőben ép úgy szétszóródnak, mint tejszerű folyadékokban, vagy füst- és ködben a gyertya fénye. Éppen ezért egy hasadék vagy drótnak képét észrevehetőleg csak pár milliméternyi távolságban lehet előállítani. Ez az oka, hogy LÉNÁRD-nak fél milliméternél vékonyabb kartonpapiroson keresztül a csőre helyezett kis aluminium-ablak képét érzékeny lemezen csak mintegy 10—20 mm.-nyi távolságban sikerült előállitania.

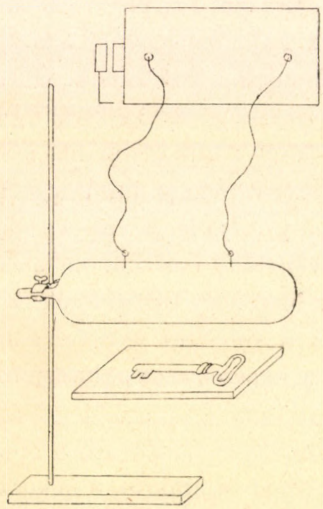
*

Mindössze ennyit tudtunk a kathod-sugarakról, a mikor RÖNTGEN kisérleteinek szenzácziós hire terjedt. Az első hír után részletesebb tudósítások híján mindjárt másnap a tudomány-egyetem physikai intézetében hozzáláttam RÖNTGEN kisérleteinek ismétléséhez, hogy t. i. a CROOKES-féle cső sugaraival átlátszatlan testeken át átlátszatlan testekről fotografiákat készitsek. A napi lapokban közölték alapján ugyanis a keresztes CROOKES-csövet RHUMKORFF-inductor segélyével megvilágitottam (4. ábra) s úgy állítottam a kazettába zárt érzékeny lemez elé mintegy 10 cm. távolságra, hogy az a kathod-

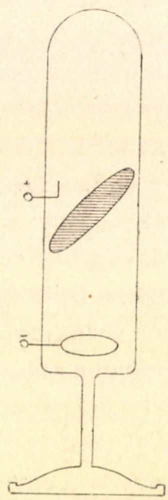
[1] *Wied. Ann.* XXXI., XXXIV. és XXXVI. köt. (1887—89.) és Ges. Schriften I. kötet.

[2] *Wied. Ann.* LI. k. (1894.) és LVI. k. (1895.) és *Math. Phys. Lapok* IV. köt. 26.

sugarak irányára merőleges legyen. Az expositió 10 perczig tartott, de az első próba nem sikerült. Gyenge volt a használt áramforrás, az alkalmazott cső sem volt megfelelő és az exponálás ideje is rövid. A kisérleteket tehát később erősebb árammal és a czélnak elég jól megfelelő ugynevezett PULUJ-lámpával ismételtem. Ez a lámpa (5. ábra) a CROOKES-csőhöz teljesen hasonló, csakhogy erősen fluoreszkáló festékkel bevont lemez van benne a kathod-sugarak útjába helyezve. E kisérlet, melynél 18—20 perczig exponáltam, már



4. ábra.



5. ábra.

sikerült. A zárt kazettára helyezett pénzdarabok, olló, kulcs stb. éles, világos képe jelent meg a fotográf-lemezem az előhiváskor. A kazettára helyezett tárgyak tehát elfogják ezeket a hatásos sugarakat s így azok alatt az érzékeny lemez változatlan marad, míg a szabad részeken elváltozik s az előhívásnál épp úgy elsötétül, mintha közönséges fény hatott volna reája.

A jelenség magyarázata azon analógiák alapján, melyeket a fény, hő és hang nyújtanak, hozzávetőleg nagyon egyszerű. A sugárzó fény és hő magyarázatára az egész világot betöltő aethert vesszük fel, a melynek sokféle hullámzása a testeket áthatja, egyeseket fölmelegít, megvilágít, míg másokon nyom nélkül áthalad, ugy mint a szellemi élet hullámzásában az eszmék nagy tömegeken nyom nélkül áthaladnak, míg egyes rokon lelkek átveszik, felkarolják, átalakítják s új eszméket keltenek belőle.

Az æther hullámzására nem reagálnak átlátszó, átbocsátó testek, míg mások elfogják azokat s egészen megszüntetik vagy új alakban kiadják; pl. a hősugarakra, melyeket lassubbaknak kell fölvennünk a fénysugaraknál, a kemény kaucsuk átlátszó, a fényre nézve azonban nem; a timsóoldat éppen fordítva viselkedik. Az æther hullámzásait egyes testek elfogják és világítanak, fluoreszkálnak. A fluoreszkálás alatt éppen azt értjük, hogy a test abban vagy más színben világít, mint a milyen ætherhullámok érik. A kathod-sugarakat szintén ilyen hullámoknak tarthatjuk, a melyek a különböző testeken vagy áthaladnak, vagy új hullámokat keltenek, fluoreszkálást idéznek elő. A kisérletek azt mutatják s Röntgen is úgy hiszi, hogy ott a hol az üvegcsövet érik, a fluoreszkálás helyén keletkeznek ezek az új hullámok, melyek a levegőben elterjedve létrehozzák az árnyék jelenségét a tárgyak mögé helyezett érzékeny lemezen. Meglehet az is, hogy magában a testben pl. a kazettára és a lemezen is fluoreszkálást keltenek és ennek hatása az, a mi a vegyi hatást létrehozza.

Ezután gyors egymásutánban próbáltuk a lapokban jelzett kisérleteket, melyeknél áramforrásul a Töpler-féle 20 lemezes megosztógépet használtam. A rendelkezésemre álló csövek közül a leghatásosabbaknak a Puluj lámpa bizonyult.

Hogy nagyobb hatást érjek el, később megkisérlettem az olajtranszformátor segélyével a kisüléseket feltranszformálni, mint a Tesla-kisérleteknél. Ily módon óriási mértékben növekszik a hatás, úgy hogy 3—4 percz alatt oly erős képeket kaptam, mint előbb 15—20 percznyi exponálás után. A nagy feszültség által tehát lehetséges lesz a ható előállítását nagy mértékben fokozni. Igaz, hogy a lámpák e mellett igen hamar tönkremennek, azért is visszatértem a kisebb feszültségü kisülésekre. Az egyik, ilyen kisérleteknél használt és tönkrement lámpa a Geissler-cső jelenségeit mutatta. Megpróbáltam tehát, hogy vajjon a ható keletkezésére feltétlenül szükséges-e a Crookes-csövek ritkitási foka. Ezzel a csővel fél órai expositio után szintén kaptam képet, de oly gyengét, mint előtte nagyobb ritkitás mellett 1—2 percz alatt. *A ható tehát a kisebb ritkitásu Geissler-csőben is keletkezik.*

Zárt dobozba helyezett aranyláncz és több fémtárgy után, melyeknek árnyékképei szépen sikerültek, az emberi kéz fotografálását próbáltuk meg. Kezemet a zárt kazettára helyezve, fölülről 10 cm.-nyi magasságban elhelyezett Puluj-lámpával megvilágítottam A háromnegyed óráig tartott exponálás alatt lehető legnyugodtabban tartottam, nehogy a kép elmosódjék. Nagy volt az örömem, mikor az előhívásnál kezem csontváza fehéren, meglepő szépen jelent meg a lemezen, körülvéve a húsrészek fátyolszerű körvonalaival, szabadon lógni látszó gyűrűvel. Természetesen több kézfotografiát csináltunk, a melyeken az ujjak csontozata igen szépen látszik, de a kézfej ízületeire és a kéztő csontjaira a sugarak nem voltak elég hatásosak.

Hogy némi tájékozást szerezzünk e ható tulajdonságairól, többféle anyagból közel egyenlő, ugyanazon anyagból pedig különböző vastagságú darabkákat helyeztem el a kazettára és azokat lefotografáltam. E kisérletekből látszik, hogy az anyagok nem egyformán nyelik el e sugarakat, mert míg pl. a papir és fa még 4—5 mm. vastag rétegben is majdnem teljesen átbocsátja, addig e vastagság mellett az eddig vizsgált fémeken (aluminium, arany, ezüst, vas, stanniol, réz), alig hatol át, a mint az az előhívott lemez képén az árnyékok világossági fokozatából látszik. Jól átbocsátanak: csillám, paraffin, papir, folypát, korom, különböző fák, víz; kevésbbé jól: aluminium, zsír, jobban a hús, porczellán, Balmain-festék, magnézium, vörös kaucsuk, üveg. Nagyon elnyelnek: a fémek, kemény fekete kaucsuk és csontok. Ugyanazon anyagból, pl. fémből, üvegből különböző vastagságú lemezek különböző mennyiséget nyelnek el, még pedig a vastagabbak többet, a mi még 3 mm. vastag fémlemezeknél is kimutatható.

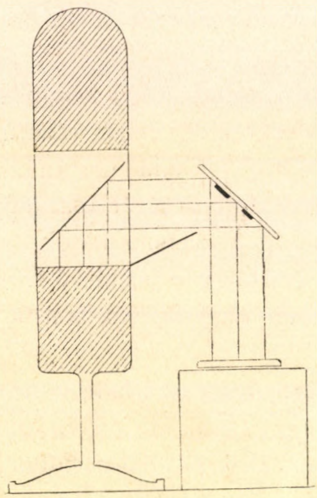
Érdekes, hogy a keményfa évgyűrűi a legnagyobb finomsággal meglátszanak és pedig világosak, tehát a többi farészeknél kevésbé átbocsátók. Ily módon az anyagok belsejében felmerülő egyenlőtlenségek, esetleg a szövetben előforduló változások, bizonynyal egészen jól kimutathatók.

Egyelőre a testek elektromos tulajdonságai és ezen absorptió között semmiféle egyszerű összefüggés sem látszik. E tanúlmánykísérleteknek érdekes következménye volt, hogy megpróbáltuk dombor-művű átlátszatlan tárgyak pl. egy régi nagy czímeres pecsét lefotografálását. E kép bámulatos hűséggel mutatja az eredeti pecsét részleteit, úgy a czimert, mint a köriratot; ugyancsak meglepő az is, hogy egy aluminium hamutartót, a melyen relief van préselve s mely így közel egyenlő vastagságú, szintén sikerült hűen lefotografálni.

Érdekesek azok a képek, melyeket orvosi szempontból készítettünk. Hőgyes tanár úr szíves közreműködésével egy hibás csontú hulla kezét vettük le. A képen a csontelváltozások mind tisztán kivehetők, de különösen tanúlságos az elaltatott tbékáról készített kép, melyen nemcsak a csontváz legfinomabb részletei láthatók, de a belső szervek nyomai is észrevehetők, úgy hogy a jelenlevő Hőgyes és Klug tanárok a képről a petefészek nagyságából konstatálták a béka nőstény voltát.

Mint physikust természetesen az érdekelt, hogy ez a ható — nevezzük Röntgen-sugaraknak, mint Boltzmann teszi, — milyen tulajdonságú. Miben hasonlít az eddig ismertekhez és miben különbözik tőlük?

Feltűnő a kathod-sugarakhoz való hasonlóság s úgy látszik, hogy keletkezésüknek közös feltételei vannak. Hasonlít a fényhez és a kathod-sugarakhoz abban is, hogy árnyékot vet, erős fluoreszkáló és talán épen ezért vegyi hatása van. Az egyenes vonalú terjedést igazolja az, hogy ha több, pl. 6 lemezt teszünk egymásra, akkor a tárgy képe azok mindegyikén megjelenik, fokozatosan növekedve, a mint a lemez távolabb volt a tárgytól. Az egymásra következő lemezek képei olyan arányban növekszenek, mintha a tárgyat látható fénynyel világítanók meg. De úgy látszik, hogy különbözik a fénytől töres és visszaverődés tekintetében. Azért mondom látszik, mert nem tartom megengedhetőnek, az eddigi kisérletek alapján határozott véleményt mondani. Eddigi kisérleteim, melyeket különösen a Röntgen-sugarak törése és visszaverődésére tettem, negativ eredményüek. A törésre fa és paraffinból készült prizmákon és lencséken át vezettem e hatót; míg a visszaverődés vizsgálatára az 5. ábrán látható kisérletet tettem. A lámpa a csillám lemez helyét kivéve staniollal volt bevonva, ezzel szemben volt 45° alatt az elzárt fotografáló lemez, melyre különböző anyagokat ragasztottam, ez alatt lent úgy helyeztem el a másik kazettába zárt lemezt, hogy arra közvetlenül a lámpából a ható máskép el nem juthatott, csak az első lemezen történő reflexio utján. Az előhivásnál ez az első lemez semmi változást sem mutatott jeléül annak, hogy az első lemezre helyezett tárgyakról ilyen távolságra kimutatható reflexio nincsen.



6. ábra.

Sem törés, sem visszaverődés tehát biztosan meg nem állapitható; egyes képek ugyan legalább nyújtanak arra reményt, hogy van törés, de biztosan nem állithatom.

Röntgen erre vonatkozó kisérleteiről csak Boltzmann és Exner tanárok czikkeiből tudok annyit, hogy ő törést és visszaverődést nem talált.

E sugarak a kathod-sugaraktól absorptio tekintetében is különböznek, mert míg a kathod-sugarak egy fél mm.-nyi rétegen nem képesek áthatolni, addig ezek igen. Másodszor a mágnes az eddigi kisérletek szerint ezekre a sugarakra nem hat, ellenben a kathod sugarakat útjukból eltériti. Ennek megvizsgálására társulatunk mélyen tisztelt elnökével, b. Eötvös tanár úrral erős mágnes patkót helyeztünk a lemez fölé mintegy 3 cm. távolságban. Az ily módon keletkező kép azonban nem mutat arra, hogy a mágnes a Röntgen-sugarakat irányukból eltéritené vagy a hatás oly kicsi, hogy az a képen észre nem vehető. Igaz, hogy e kisérletnek még kevés bizonyitó ereje van, mert a kathod-sugarakra is csak a légüres térben van kimutatva a mágnes hatása. Végre a ható előállitásában is feltünik némi különbség; mert míg a kathod sugarak a kathod felületén keletkeznek és attól függők, addig a különböző CROOKES-csövekben tett eddigi észlelések azt mutatják, hogy a RÖNTGEN-sugarak hatásának intenzitása annak a felületnek minőségétől, fluorescentiájától függ, melyeket a kathod-sugarak érnek. Minél nagyobb az és minél intenzivebb ez, annál hatásosabb amaz. Megkisérlettem, hogy van-e a RÖNTGEN-sugaraknak mechanikai hatásuk; de érzékeny mérleg egyik csészéjére hatva, az egyensulyi helyzet észrevehetően nem változott. Lehet, hogy a mérleg érzékenysége nem volt elegendő.

Összefoglalva azt tapasztaljuk először, hogy a RÖNTGEN-sugarak az ultravörös-sugarak nagy áthatoló képességét egyesitik az ibolyántúli sugarak fluoreszkáló és chemiai hatásával és másodszor feltünően hasonlóak a kathod-sugarakhoz s úgy látszik, hogy az utóbbiaktól csakis az átbocsátás és visszaverődés tekintetében különböznek.

Ezekből a tényekből a RÖNTGEN-sugarak mibenlétére nézve biztos következtetéseket vonni már csak a kisérletek csekély számánál fogva is korainak tartom. Különösen nem lehet a RÖNTGEN- és kathod-sugarak közti különbséget ma még határozottan megállapitani, mert sem egyiknek sem másiknak tulajdonságai és törvényei nincsenek kétségtelenül egyező és biztos kisérletekkel megállapitva. Nem is tartom czélszerűnek az első pillanatban feltünő analogiától elragadtatva mindjárt valami hypothesist megkoczkáztatni, mert ez a kisérletezésben igen könnyen szuggeráló hatású lehet, mint azt a physika története fényes példákkal igazolja.

Az azonban kétségtelen, hogy a tapasztalt jelenségek a RÖNTGEN-sugarak hullámzó természete mellett bizonyitanak s indokolt az a föltevés, hogy ezek is az aether hullámzásával magyarázandók.

De milyen hullámok? A tapasztalat azt mutatja, hogy a testekben kétféle hullámok keletkeznek ú. n. transversalis és longitudinalis hullámok. Ha a viz tükrére kő vagy viz csepp esik, látjuk, hogy onnan a felületen hullámok terjednek el minden irányban, gyűrűket képezve a vizfelületén; a vizrészek pedig arra merőleges irányban fel és le mozognak, mint azt az ingó csónak mutatja. Az ily hullám transversalis, mert a részek mozgása merőleges a hullám terjedésének irányára. Az az idő, a mely alatt a hullámon ringó csónak kétszer egymásután a magasba emelkedik az, melyet a a hullám rezgési idejének nevezünk, azt a sebességet pedig a melylyel egy szélső gyűrű után a másik fellép, a hullám terjedési sebességének nevezzük. Végre két gyűrű egymástól való távolsága a hullám hossza.

Természetes, hogy minél gyorsabban rezeg a hullám, annál közelebb vannak a gyűrűk egymáshoz, úgy a mint azt tapasztaljuk, ha a víz tükrét egy helyen gyorsabb vagy lassubb rythmusban ütögetjük. De azon felül a terjedési sebességtől is függ; minél nagyobb ez, annál nagyobb lesz a hullámhossza ugyanazon rezgési idő alatt is. Ez a terjedési sebesség az anyagtól függ, a melyben a hullám elterjed, mint azt a hanghullámoknál tapasztaljuk. A fény és hő magyarázatára az aetherben ilyen transversalis hullámokat kell felvenni, a melyek terjedési sebessége, a mint a kisérletek mutatják, mind egyforma, a mi arra mutat, hogy ezek valóban ugyanazon anyagnak hullámai, s a különbség közöttük csak a rezgés idejében van. Igy azok a sugarak, a melyek a prizmával előállitott szinkép vörös és ibolya része között vannak, fénysugarak; a lassúbb rezgések, mint a vörösöntúli láthatatlanok, hősugarak; mig a gyorsabbak az ibolyán tuli chemiai sugarak.

De az anyagokban mi nem csak transversalis, de olyan hullámokat is ismerünk, a melynél a részek mozgása egyirányú a terjedés irányával; ezeket longitudinalis hullámoknak nevezzük. Ilyenek útján terjed el a hang a vízben, a levegőben s azt látjuk, hogy mindazon anyagokban, melyekben transversalis hullámok elterjednek, keletkeznek longitudinalis hullámok is, de fordítva nem.

Röntgen maga — s bizonynyal ma ő erre a legilletékesebb, — a mint Boltzmann tanár czikkéből értesülünk, hajlandó e külömbségeket úgy magyarázni, hogy e sugarak az aether igen gyors, a fénynél is gyorsabb, még pedig longitudinalis hullámai, és a kathodsugaraktól csak a hosszabb hullámaikban különböznek.

Ha ez a sejtelem igaznak bizonyúl, úgy ez hatalmas támasza lesz az aether-hullámzás elméletének és közelebb visz a hypothetikus aether tulajdonságainak ismeretéhez. Ezzel hatalmas lépéssel megyünk előre.

De ha ez a remény nem teljesül is és e sugarak a kathod-sugaraktól nem különbözők is — a mi egyáltalában nincs kizárva — oly felfedezéssel van dolgunk, mely a tudomány és a gyakorlat minden ágára nagy horderejűnek igérkezik, úgy, hogy e két hatalmas tényező együtthatása folytán e téren nagy munkásságot és azt hiszem nagy eredményeket is fog szülni.

*

Tovább kisérletezvén, az *expositio idejét 45 perczről 1 perczre sikerült leszállítanom.** Ezt úgy értem el, hogy a ható keletkezésének forrását és térbeli eloszlását vettem vizsgálat alá.

A Puluj-lámpával tett kisérletek megmutatták, hogy a hatásos sugarak határozottan a foszforeszkáló felületekből indulnak ki. Ugyanezt mutatta az Ebert-féle lámpa is. Ennek elektrodjai kívül vannak az üres téren, és a kathódsugarak a lámpa — légüres üveggolyó — középpontjában elhelyezett foszforeszkáló lemezkét az üveg falon keresztül gerjesztik világításra. A lámpa terének lefotografozása egy hengerre azt mutatja, hogy a hatásos sugarak a lemezből indulnak ki, úgy hogy a kathód világos árnyékát vetik a lemezre.

Külömböző Crookes-csövekkel tett kisérletek mutatják, hogy a külömböző szinben foszforeszkáló anyagok közől különösen a *sárga és a zöld fénynyel világítók bocsátanak ki nagy mennyiségű hatásos sugarat;* a kék sugarak a leggyengébbek. Úgy látszik tehát, hogy a hatás intenzitása a világítás intenzitásával arányos.

Klupathy Jenő.

---

* Ezeket az eredményeket január 30-án tartott rendes ülésen közölte volt az előadó. *Szerk.*

AZ ÍVMÉRÉS ELMÉLETE.

(Első közlemény.)

1. A gyakorlati életben méréseket leggyakrabban *egyenes vonalú közökön* szoktak végrehajtani. Noha a gyakorlati módszer, mely szerint e méréseknél el szoktak járni, a legtöbb esetben csak a keresett mérőszám többé-kevésbé pontos *megközelítéséhez* vezet mégis ez szolgált útmutatóul azoknak az elveknek összeállításánál, melyek szerint a geometriában az egyenes vonalú közöket megmérjük.

Lényegét megvizsgálva ezeknek az elveknek, felismerjük, hogy nekik a geometriának az egyenesre vonatkozó feltevései alapul szolgálnak, különösen pedig az, hogy *minden egyenes minden más egyenessel kongruens* és hogy *az egyenes homogén.* Avval, hogy az egyenest homogénnek mondjuk, röviden azt akarjuk kifejezni, hogy bármelyik pontja oly köz (vonaldarab) határpontjának tekinthető, a mely ugyanannak az egyenesnek valamely tetszés szerint felvett közével egyenlő. Tekintetbe véve még a különböző egyenesek kongruencziájára vonatkozó előbb említett feltevést, ehhez még hozzátehetjük azt is, hogy valamely egyenes bármelyik pontja, tekinthető két oly köz határpontjának, mely valamely más egyenesben tetszés szerint felvett közzel egyenlő.

Csak e feltevések alapján alakíthatjuk *több egyenes vonalú köz összegének, az egyenes vonalú köz többszörösének és mértékének* fogalmát, valamint ugyane feltevésekre kell támaszkodnunk, midőn két egyenes vonalú közt összehasonlítunk, hogy megitélhessük, melyik közülök a *nagyobb,* ill. *kisebb.* Ilyen összehasonlítása két egyenes vonalú köznek, valamint a többszörös és mérték fogalma az egyenes vonalú közök megmérésénél nélkülözhetetlen. E mérés ugyanis lényegét tekintve abban áll, hogy a megmérendő közt a hosszúságegységül felvett köz többszöröseivel, vagy pedig a hosszúságegység mértékeiből alakított többszörösökkel hasonlítjuk össze.

2. Altalános elv a geometriában, hogy két nem kongruens idomot akkor tekintünk *egyenlőnek,* hogy ha mind a kettő oly módon osztható fel egyenlő számú részekre, hogy az első idom minden részének megfelel a másodikban egy vele kongruens rész a nélkül, hogy ez még az első idom valamely más részének is volna megfelelő és viszont a második idom részeinek ép oly módon felelnek meg az első idom részei. Ennek az elvnek alapján az egyenes vonalú közökből álló ú. n. *tört vonalakat* egyenlőknek tekinthetjük azokkal az egyenes vonalú közökkel, melyek a tört vonalokat alkotó közök összeadásából állanak elő. Igy tehát a *tört vonalok mérése visszavezethető egyenes vonalú közök megmérésére.*

Hasonló okoskodás már nem vezet többé czélhoz, mihelyt valamely egyenes vonalú közt véve fel hosszúságegységül, vele *görbe vonal íveit* akarjuk megmérni, mert ilyen iveknek legkisebb részeit sem tekinthetjük többé egyenes vonalú közöknek. ARCHIMEDES, hogy egyrészt egyenes vonalú közök és görbék íveinek, másrészt pedig különböző görbék íveinek összehasonlítására alapot nyerjen, a következő két axiomát állította fel:

1. Ama vonalok közül, melyek ugyanazt a két pontot kötik össze, a legrövidebb a két pont határolta egyenes vonalú köz.

2. Két konkáv vonal közül, mely ugyanazt a két adott pontot köti össze és e két pontot tartalmazó egyenes ugyanazon az oldalán fekszik, a kisebb az, melynek minden pontja a másik vonal és a két pontot összekötö egyenes vonalú köz határolta síkrészen belül, vagy pedig ennek határában fekszik.

Ezek az axiomák azonban oly bonyolódottak, hogy módokról kellett gondoskodni, a melyek azokat a görbék íveinek megmérésénél nélkülözhetővé teszik. Ezt a czélt újabb tárgyalásokban avval érték el, hogy *az ívek hosszúságát mint határértéket értelmezték, melyhez az ívbe beírt törtvonal hosszúsága minden határon túl közeledik, hogy ha e törtvonalat alkotó húrok száma minden ha-*

táron túl nő és e mellett minden egyes húr minden határon túl kisebbedik.

Hogy ez az értelmezés valóban az ív hosszúságának mérőszámához vezessen, szükséges, hogy bármely az ívbe beírt törtvonalból is induljunk ki és bármiféle módon szaporítsuk is a tört vonalat alkotó mindinkább kisebbedő húrok számát, minden egyes esetben határértékhez, és pedig *egy és ugyanahhoz* a határértékhez jussunk.

Ezt a kiindulópontot az *ívmérés* vagy *rektifikáczió* problémájában szabatosan DUHAMEL fejtette ki.* Fejtegetéseiben hallgatagon bennefoglalt ama feltevés mellett, hogy *a megmérendő ív minden pontjában a húroknak van határfekvésük* (a mely azonban a pont két oldalán két különböző egyenes is lehet), megmutatja, hogy az ívbe beírt tört vonal hosszúsága a húrok kisebbedésével és szaporodásával egy a tört vonal választásától és húrjai kisebbedésének módjától független határértékhez közeledik. DUHAMEL fejtegetéseit pontosabb és modernebb infinitezimális vizsgálatokkal STOLZ ** egészítette ki, aki DUHAMEL kiindulópontját egyszersmind P. DU BOIS-REYMOND e tárgyra vonatkozó vizsgálataival is hozta kapcsolatba.

3. Ha az ívmérés problémájában az *analitikai geometriai módszert* alkalmazzuk és feltesszük, hogy a görbét, melynek a P_0 és P' pontjai között elterjedő ívét meg akarjuk mérni, az $y=f(x)$ egyenlet jellemzi, hol $f(x)$ a P_0 és P' pontok x_0 és x' abszczisszái határolta $(x_0 x')$ közben x-nek oly *egyértékű, folytonos, véges és differencziálható* függvénye, a melynek *differencziahányadosa ismét folytonos,* akkor a DUHAMEL fejtegetéseiből idézett eredmények alapján kimondhatjuk, hogy a P_0P' ívnek van hosszúsága. Ugyanis az $f(x)$ függvény differencziálhatóságára vonatkozó feltétel épen azt fejezi ki, hogy ennek az ívnek minden pontjában van érintője,

* J. M. C. DUHAMEL: *Des méthodes dans les sciences de raisonnement,* II. k. 411. l.

** O. STOLZ: *B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung,* Math. Annalen XVIII. k. 268. l.

vagy a mi ugyanaz, hogy a húroknak minden pontjában van határfekvésük.

Hogy azt a határértéket, mely a P_0P' ív mérőszámát fejezi ki, valósággal kiszámíthassuk, vegyük fel ezen az íven a P_0 és P' végpontjai közé eső

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$$

pontokat, melyek koordinátái rendre:

$$x_1, f(x_1); \quad x_2, f(x_2); \quad \ldots; \quad x_{n-1}, \quad f(x_{n-1}).$$

Igy a $P_0P_1P_2 \ldots P_{n-1}P'$ tört vonal hosszúságát az

$$L_n = \sum_{r=0}^{n} \left| \sqrt{(x_{r+1}-x_r)^2+[f(x_{r+1})-f(x_r)]^2} \right| =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (x_{r+1}-x_r) \left| \sqrt{1+\left[\frac{f(x_{r+1})-f(x_r)}{x_{r+1}-x_r}\right]^2} \right|$$

kifejezés fogja szolgáltatni. Egy ismeretes középértéktétel szerint azonban

$$\frac{f(x_{r+1})-f(x_r)}{x_{r+1}-x_r} = f'[x_r+\vartheta(x_{r+1}-x_r)],$$

hol a f' függvényjelzés az $f(x)$ differencziálhányadosát és ϑ egy bizonyos a 0 és 1 közt fekvő számot jelent. Ezt behelyettesítve az L_n számára nyert kifejezésbe és áttérve a határra, mint a megmérendő ív mérőszámát nyerjük:

$$\lim_{n=\infty} L_n = \lim_{n=\infty} \sum_{r=0}^{n} (x_{r+1}-x_r) \sqrt{1+[f'[x_r+\vartheta(x_{r+1}-x_r)]]^2}.$$

Minthogy $f'(x)$ az (x_0x') számközön belül folytonos, azért *integrálható* is; ebből mindenekelőtt következik, hogy ugyan-e közben $f'(x)]^2$ szintén integrálható függvény lesz.* A $[f'(x)]^2$ integrálhatóságának azonban szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$\lim_{n=\infty} \sum_{r=0}^{n} (x_r - x_{r-1}) D_r = 0$$

* L. U. Dini: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* 254. l.

legyen, hol D_r a $[f'(x)]^2$ függvény oszczilláczióját jelenti, azaz legnagyobb és legkisebb értéke közti különbségnek abszolut értékét az $(x_{r-1}x_r)$ számközben. Hogy ha $[f'(x)]^2$ legnagyobb és legkisebb értéke az (x_{r-1}, x_r) közben $[f'(x'_r)]^2$, ill. $[f'(x''_r)]^2$ volna, akkor ugyane közben a $\left|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\right|$ függvény oszczillácziója lesz:

$$\varDelta_r = \left|\sqrt{1+[f'(x'_r)]^2}\right| - \left|\sqrt{1+[f'(x''_r)]^2}\right| =$$
$$= \frac{[f'(x'_r)]^2 - [f'(x''_r)]^2}{\left|\sqrt{1+[f'(x'_r)]^2}\right| + \left|\sqrt{1+[f'(x''_r)]^2}\right|} < D_r,$$

és így

$$\sum_{r=0}^{n} (x_r - x_{r-1})\varDelta_r < \sum_{0}^{n} r\,(x_r - x_{r-1})\,D_r.$$

Ez mutatja, hogy a $f'(x)$ függvénynyel együtt az $(x_0 x')$ közben az $\left|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\right|$ függvény is integrálható.* Ebben az esetben tehát a $\lim\limits_{n=\infty} L_n$ számára fennebb nyert értéket így írhatjuk fel:

$$\lim_{n=\infty} L_n = \int_{x_0}^{x'} dx \left|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\right|,$$

a mi nem egyéb, mint a szokásos határozott integrál, melylyel *rendesen* az $y=f(x)$ egyenlet jellemezte görbe az x_0 és x' abszczisszákhoz tartozó pontok közt elterjedő ívének hosszúságát ki szokták fejezni.

4. Ezt az eredményt, mint láttuk, csak az $f(x)$ függvényre vonatkozó jelentékeny megszorítások mellett lehetett levezetni. Így tehát az a kérdés támad, vajjon megmérhetők-e egyáltalában oly görbék ívei, a melyeknek egyenletében előforduló $f(x)$ függvény már e megszorításoknak nem felel meg többé. Du Bois-Reymond ** bizonyos tekintetben még mindig ehhez a határozott integrálhoz, mint az ív mérőszámának kifejezéséhez ragaszkodva, kimutatja, hogy még így is lehet e megszorítások közül egyeseket elejteni.

---

* L. P. du Bois-Reymond: *Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung* cz. értekezésének *Construction des Begriffes der Rectificirbarkeit* cz. fejezetét, Math. Annalen XV. k. 285. és k. ll.

** L. az i. h.

Első sorban megállapítja, hogy ha a véges és egyértékű $f(x)$ függvénynek az x_p pontban *szakadópontja* van, melyben a véges $f(x_p-0)$ értékről az ettől különböző szintén véges $f(x_p+0)$ értékre ugrik át, akkor *az* $|f(x_p+0)-f(x_p-0)|$ *hosszúságú egyenesvonalú darab a megmérendő ívhez hozzá legyen számítandó, míg két egymásra következő szakadópont,* x_{p-1} *és* x_p *közt elterjedő ív hosszúságának mérőszámát az*

$$\int_{x_{p-1}}^{x_p} dx \left|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\right|$$

határozott integrállal kifejezhetőnek tekinti. Ezzel tehát feltételezi, hogy a két szakadópont közt fekvő *minden pont bármely kicsiny környezetében találhatók pontok, melyekben* $f(x)$ *differencziálható,** valamint azt is, hogy a $\left|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\right|$ *függvény ugyanott integrálható.* Azt a feltételt, hogy a $f'(x)$ függvény is integrálható legyen elejti, mert ez csak elégséges, de eddig legalább szükségesnek fel nem ismert feltétele a $\left|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\right|$ függvény integrálhatóságának.

A szakadópontok száma Du Bois-Reymond szerint végtelen nagy is lehet, úgy azonban, hogy

$$\sum |f(x_p+0)-f(x_p-0)|,$$

hol a szummáczió az összes szakadópontokra kiterjesztendő, véges legyen. De a szakadópontoknak *pantachikus*, vagyis oly eloszlását, mely mellett bármely pont akármilyen kicsiny környezetében még szakadópontok találhatók, az (x_0x') közben nem tartja megengedhetőnek, mert akkor az $f(x)$ függvény differencziálhatóságának nem csak egyes pontokban, hanem egész folytonos közökben meg kellene szünnie.

5. A rektifikálható görbék sokkal nagyobb osztályát jelölte ki Scheeffer,** kinek e tárgyra vonatkozó vizsgálatait a következőkben egész részletességgel akarjuk ismertetni.

---

* L. Dini: *Fondamenti etc.* 261. és 262. l.

** Ludwig Scheeffer: *Allgemeine Untersuchungen über Rectificirbarkeit der Curven,* Acta Mathematica, V. k. 49. l.

Az ív hosszúságának értelmezését, Duhamel-t követve, a következő módon fejti ki:

Legyen a görbe egyenlete, melynek P_0P' ívét meg akarjuk mérni $y=f(x)$, a hol $f(x)$ a P_0 és P' pontok x_0 és x' abszczisszáitól határolt (x_0x') közben x-nek *egyértékű, véges* függvénye. Hogy ha a P_0P' íven a növekedő

$$x_{10}\,(=x_0),\ x_{11},\ x_{12},\ldots,\ x_{1m_1}\ (=x')$$

abszczisszáknak megfelelő

$$P_{10}(\equiv P_0),\ P_{11},\ P_{12},\ldots,\ P_{1m_1}(\equiv P')$$

pontokat veszszük fel, melyek ordinátái rendre legyenek:

$$y_{10},\ y_{11},\ y_{12},\ldots,\ y_{1m_1},$$

akkor a $P_{10}P_{11}P_{12}\ldots P_{1m}$ tört vonal hosszúságát az

$$L_1=\sum_{r=0}^{m_1}\left|\sqrt{(x_{1,r+1}-x_{1r})^2+(y_{1,r+1}-y_{1,r})^2}\right|$$

kifejezés fogja szolgáltatni. Ha most a P_0P' íven a felvett pontok közé tetszés szerint választott új pontokat iktatunk közbe és ezeket az előbbiekkel egy sorba egyesítve az egész sor pontjait abszczisszáik nagysága szerint rendezve így jelöljük:

$$P_{20}(\equiv P_0),\ P_{21},\ P_{22},\ldots,\ P_{2m_2}(\equiv P'),$$

hol általánosságban a P_{2r} pont koordinátái x_{2r}, y_{2r}, akkor a $P_{20}P_{21}P_{22}\ldots P_{2m_2}$ tört vonal hosszúsága lesz:

$$L_2=\sum_{r=0}^{m_2}\left|\sqrt{(x_{2,r+1}-x_{2r})^2+(y_{2,r+1}-y_{2r})^2}\right|.$$

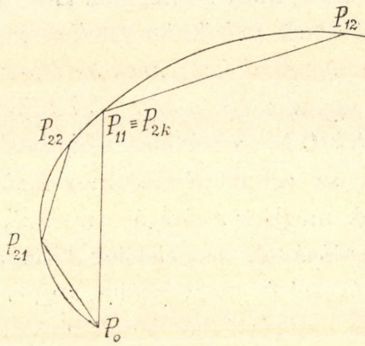
A P_0P' ív tetszés szerinti új pontjainak közbeiktatását és a már meglevőkkel egy sorba való egyesítését így tovább folytatjuk. Az n-dik közbeiktatás után előálló sorát a pontoknak abszczisszáik nagysága sorrendjében így jelöljük:

$$P_{n0},\ P_{n1},\ P_{n2},\ldots,\ P_{nm_n},$$

hol általánosságban a P_{nr} pont koordinátái x_{nr}, y_{nr}. A $P_{n0}P_{n1}P_{n2}\dots P_{nm_n}$ tört vonal hosszúsága akkor lesz:

$$L_n = \sum_{r=0}^{m_n} \left| \sqrt{(x_{n,r+1}-x_{nr})^2+(y_{n,r+1}-y_{nr})^2} \right|.$$

Mint azt már többször kiemeltük, a közbeiktatandó pontokat egész tetszés szerint választjuk. Most e választásra nézve csak azt az egy megszorítást akarjuk bevezetni, hogy n minden határon túl



1. ábra.

való növekedésével $x_{n,r+1}-x_{nr}$ r-nek minden értéke mellett minden határon túl kisebbedjék, vagy pontosabban, hogy bármely tetszés szerint kicsinynek felvett pozitiv δ értéknek megfelelőleg n-t oly nagynak lehessen választani, hogy r minden értéke mellett legyen:

$$|x_{n,r+1}-x_{nr}| < \delta.$$

Mint az 1. kép szemlélete mutatja, az

$$L_1,\ L_2,\ \dots,\ L_n,\ \dots$$

értékek, a pozitiv számoknak egy növekedő sorát alkotják. Így tehát L_n *n növekedtével vagy minden határon túl nő, vagy pedig egy pozitiv véges meghatározott L határértékhez közeledik.**

Az utóbbi esetben még lehetséges, hogy a P_0P' ív valamely

* L. KŐNIG: *Analizis* I. k. 79. l.

más $P'_{10}P'_{11}P'_{12}\ldots P'_{1m'_1}$ felosztásából kiindulva és e felosztást ismét tetszés szerinti módon tovább folytatva úgy, hogy végre két egymásra következő pont abszczisszájának különbsége a fennebb jellemzett módon minden határon túl kisebbedjék, a folyton nagyobbodó

$$L'_1,\ L'_2,\ L'_3,\ldots,\ L'_n,\ldots$$

pozitiv számok oly sorozatához jutunk, melynek tagjai n növekedtével vagy minden határon túl nőnek, vagy pedig valamely véges L' határértékhez közelednek, mely azonban az L-től különböző.

Arra, hogy a P_0P' ívnek mérőszám feleljen meg, szükséges, hogy az L_n számok n növekedtével ennek az ívnek bármely felosztása mellett egy és ugyanahhoz a véges L határértékhez közeledjenek. Ez a határérték L lesz az ív hosszúságának mérőszáma.

6. Ha tehát ennek az értelmezésnek megfelelőleg valamely P_0P' ív mérőszámának meghatározásáról van szó, első sorban az ív egy bizonyos felosztásának megfelelőleg ki fogjuk számítani az $L_1, L_2, \ldots, L_n$ értékeket és megvizsgálni, vajjon ezek n növekedtével valamely véges határértékhez közelednek-e. Ezzel a vizsgálat már teljesen befejezettnek is tekinthető, hogy ha a görbe $y=f(x)$ egyenletében előforduló $f(x)$ függvény az (x_0x') számközön belül folytonos. *Ha ugyanis $f(x)$ az (x_0x') közben folytonos és a P_0P' valamely felosztásának megfelelő $L_1, L_2, \ldots, L_n$ számok n növekedtével valamely véges L határértékhez közelednek, akkor egy tetszés szerinti más felosztásnak époly módon megfelelő L'_1, $L'_2, \ldots, L'_n$ számok n növekedtével ugyanahhoz az L határértékhez fognak közeledni.*

Állításunk bebizonyítása végett képzeljük, hogy a P_0P' ív egy bizonyos felosztásából kiindulva a pontok abszczisszáik nagysága szerint rendezett

$$P_{n0},\ P_{n1},\ P_{n2},\ldots,\ P_{nm_n}$$

sorához jutottunk volna. E pontok koordinátái legyenek rendre:

$$x_{n0},\ y_{n0};\quad x_{n1},\ y_{n1};\ x_{n2},\ y_{n2};\ \ldots;\ x_{nm_n},\ y_{nm_n}$$

és tételezzük fel, hogy e felosztásnak megfelelőleg az L_n értékek n növekedtével valamely véges L határértékhez közelednek. Legyen továbbá a pontok valamely sorozata, melyhez a P_0P' ív egy másik felosztásából kiindulva eljutottunk volna:

$$P'_{k0},\ P'_{k1},\ P'_{k2},\ \ldots,\ P'_{km'_k}$$

és e pontok koordinátái legyenek rendre:

$$x'_{k0},\ y'_{k0};\quad x'_{k1},\ y'_{k1};\quad x'_{k2},\ y'_{k2};\ \ldots;\ x'_{km'_k},\ y'_{km'_k},$$

akkor a $P'_{k0}P'_{k1}P'_{k2}\ldots P'_{km'_k}$ tört vonal hosszúsága lesz:

$$L'_k = \sum_{r=0}^{m'_k} \left| \sqrt{(x'_{k,r+1}-x'_{kr})^2+(y'_{k,r+1}-y'_{k,r})^2} \right|.$$

Válaszszuk n-t oly nagynak, hogy i minden értéke mellett

$$x_{n,i+1}-x_{ni} < \frac{\delta}{m'_k}$$

legyen, hol δ egy a 0-tól különböző tetszés szerint kicsinynek választott pozitiv számot jelent, továbbá, hogy az $f(x)$ függvény oszczillácziója minden $(x_{ni}x_{n,i+1})$ számközön belül kisebb legyen $\frac{\delta}{m'_k}$-nál (mely követelés az $f(x)$ függvény folytonossága miatt mindig elégithető ki) és végre, hogy a második felosztásból származó bármely két egymásra következő pont $x'_{k,r-1}$ és x'_{kr} abszczisszája közé az első felosztásból származó pontoknak legalább is két abszczisszája essék.

Hogy ha mostan a $P_{n0}, P_{n1}, \ldots, P_{nm_n}$ és $P'_{k0}, P'_{k1}, \ldots, P'_{km'_k}$ pontokat a P_0P' ív egy felosztásává egyesitjük és az e felosztásnak megfelelő tört vonal hosszúságát Λ_{nk}-val jelöljük, akkor lesz:

$$\Lambda_{nk} \geqq L'_k,$$

mert Λ_{nk}-ban az n-re vonatkozó feltételek következtében minden egyes a L'_k-t alkotó húr helyébe egy e húr végpontjait összekötő tört vonal lép. Hogy Λ_{nk}-t még L_n-nel is hasonlíthassuk össze, tételezzük fel, hogy

$$x_{n\alpha} < x'_{kr} < x_{n,\alpha+1},$$

akkor világos, hogy A_{nk} az L_n-nek

$$\left|\sqrt{(x_{\alpha+1}-x_\alpha)^2+(y_{\alpha+1}-y_\alpha)^2}\right|$$

tagja helyett ezt az összeget tartalmazza:

$$\left|\sqrt{(x'_{kr}-x_{n\alpha})^2+(y'_{kr}-y_{n\alpha})^2}\right|+\left|\sqrt{(x_{n,\alpha+1}-x'_{kr})^2+(y_{n,\alpha+1}-y'_{kr})^2}\right|,$$

és értéke az n-re vonatkozó feltételek következtében kisebb mint $\frac{2\delta\sqrt{2}}{m'_k}$. Így tehát látjuk, hogy

$$A_{nk} < L_n + 2\sqrt{2}\delta,$$

a miből következik, hogy

$$L_n + 2\sqrt{2}\delta > L'_k.$$

Minthogy L_n mindig kisebb marad mint L, melyhez a feltevés szerint közeledik, egyszersmind lesz:

$$L + 2\sqrt{2}\delta > L'_k$$

és mert δ minden határon túl kisebbíthető, végre lesz:

$$L > L'_k.$$

Látjuk tehát, hogy L'_k mindig ama véges határértéken alúl marad, amelyhez L_n n növekedtével közeledik. Minthogy azonban L'_k k-val együtt folyton növekedik, szükséges tehát, hogy valamely véges L' határértékhez közeledjék, amely azonban semmi esetre sem lehet nagyobb L-nél. Hogy azonban L' L-nél kisebb sem lehet, a fennebbihez egészen hasonló okoskodással bizonyíthatjuk be és így ezzel állításunk teljesen be van bizonyítva.

Rados Ignácz.

A CASUS IRREDUCIBILIS A HARMADFOKÚ EGYENLETEKNÉL.*

A XV. század végén jelent meg LUCA PACIUOLO olasz mathematikus *Summája* ** a melyben a harmadfokú egyenlet megoldását lehetetlennek tartja. Az $ax^4+cx^2=dx$ alakban irható egyenlet mellett ez a szó áll PACIUOLO említett munkájában: impossibile; és már a XVI. század elején, sőt talán már a XV. század végén megtalálta SCIPIO FERREUS, a ki Bolognában 1496-tól 1526-ig tanított, az $x^3+ax=b$ egyenlet megoldását és azt FLORIDUS nevű tanítványával talán már 1506-ban közölte. FLORIDUS 1535-ben egy mathematikai versenyen 30 feladatot adott fel TARTAGLIA-nak, a melyek mindannyian harmadfokú egyenletekre vezettek és TARTAGLIA nyolcz nappal a terminus lejárta előtt újra felfedezte a harmadfokú egyenlet megoldásának módját. CARDANO 1539-ben fordult TARTAGLIÁ-hoz, hogy közölje vele a megoldás módját, TARTAGLIA eleinte vonakodott; de később, engedve az igéreteknek, versben közölte a megoldást, sőt később a homályos verset kellően meg is magyarázta. CARDAN hozzálátott a bebizonyitáshoz és e közben jutott arra az esetre is, a melyet *casus irreducibilisnek* nevezünk. Ismeretes, hogy ez az eset akkor áll elő, a midőn a harmadfokú egyenlet discriminánsa pozitiv, a mely esetben mind a három gyök valós. A CARDAN-féle formula ekkor komplex számokból való gyökvonást követel. BOMBELLI Algebrajában, mely 1572-ben nyomatott, már használja a CARDAN, vagy mondhatnók talán SCIPIO FERREUS formuláját a casus irreducibilis esetében is oly módon, hogy az $x^3=nax+n$ egyenlet megoldásánál szereplő

* Előadatott a Math. és Phys. Társulat 1895. évi január hó 10-én.

** Summa de Arithmetica Geometria, Proportione et Proportionalita. Velencze 1497.

$$\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

gyökmennyiségek közűl az elsőt $p+\sqrt{-q}$-nak és a másodikat $p-\sqrt{-q}$-nak veszi. Ezzel természetesen nem vitte előbbre a dolgot, mert a $2p$ meghatározására az eredeti egyenlet áll rendelkezésére; de megmutatta, hogy ez a «Sophismának látszó eljárás» mégis helyes eredményre vezet. A problemát jelentékenyen előbbre vitte a korszak legnagyobb algebristája: VIÈTE, a ki kapcsolatba hozta a szög trisectiojával (1591).

CARDAN képlete a casus irreducibilis esetében komplex számokból való gyökvonást követel. Más szóval ez azt jelenti, hogy a harmadfokú egyenlet algebrai megoldását visszavezeti oly binom egyenletek lánczolatára, a melyek jobb oldalán képzetes számok is előfordulnak. Az algebrai probléma, a melyet ezzel kapcsolatban felállíthatunk, a következő: Nem lehetne-e csupa valós számból való valós gyökök segítségével reálisan kifejezni az esetben is a harmadfokú egyenlet gyökeit, midőn mind a három valós? E vizsgálatok az algebrai egyenletek elméletéből csak az elemeket követelik. A kifejezések egyszerűsítése végett használjuk a *raczionalitási tartomány* fogalmát, melyet röviden a következőként értelmezhetünk: Ha R, $R_2, \ldots, R_k$ bárminő mennyiségek, akkor mindazok a mennyiségek, a melyek az R, $R_2, \ldots, R_k$-ból a négy alapművelet segítségével állíthatók elő, az R, $R_2, \ldots, R_k$ raczionálitási tartományát alkotják. Igy pl., ha $k=1$ és $R_1=1$, akkor ez a tartomány a raczionális számok összességét tartalmazza; ha $k=2$ és $R_1=1$, $R_2=\sqrt{-1}$, akkor a raczionalitási tartomány a complex számok összességét tartalmazza. Ha az R, $R_2, \ldots, R_k$-hoz hozzáveszünk — adjungálunk — még egy másik R_{k+1} mennyiséget, akkor a raczionalitási tartomány az R_{k+1}-gyel *bővült.* Így például, ha a harmadfokú egyenlet discriminánsának négyzetgyökét is hozzávesszük az együtthatók alkotta raczionalitási tartományhoz, akkor ezzel az egyenlet raczionalitási tartománya bővült.

A második fogalom, a melyre lépten-nyomon szükség van, az egyenlet *irreduktibilitásának* fogalma, a melynek csakis a raczionalitási tartománynyal kapcsolatban van kellő értelme. Valamely egyenletet akkor mondunk irreduktibilisnek, ha baloldala nem bontható fel oly tényezőkre, a melyeknek együtthatói az előre megadott raczionalitási tartományba tartoznak. Igy pl. x^2+1 az 1 által megszabott raczionálitási tartományban, tehát a raczionális számok összességének tartományában irreduktibilis; de az 1, $\sqrt{-1}$ által megszabott tartományban már nem az, mert hiszen tényezői $x+i$ és $x-i$.

A következőkben tárgyaljuk a casus irreducibilis esetét, kimutatva, hogy valós raczionálitási tartományban az olyan harmadfokú egyenlet, melynek mind a három gyöke valós, algebrailag megoldhatatlan. E végből nem kell egyebet tenni, mint az egyenlet algebrai megoldásának kérdését pontosan fogalmazni és erre az esetre alkalmazni. A kérdéssel legelőször HÖLDER * foglalkozott kötetében. Azután KNESER ** tárgyalta. Mi inkább a KNESER tárgyalását követjük némi eltéréssel, melyet e lapok természete követelt meg.

1. *Primitiv és nem primitiv mennyiségek.* Legyen:

$$f(x)=0 \tag{1}$$

egy n-ed fokú algebrai egyenlet, a mely a szóban forgó raczionalitási tartományban irreduktibilis. Ez egyenlet gyökei:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{2}$$

Legyen továbbá

$$\varphi(t) \tag{3}$$

a t változó raczionális függvénye, akkor:

$$\eta_1=\varphi(x_1),\quad \eta_2=\varphi(x_2), \ldots, \eta_n=\varphi(x_n) \tag{4}$$

algebrai kifejezések eleget tesznek a következő algebrai egyenletnek:

$$\Phi(z)=(z-\eta_1)(z-\eta_2)\ldots(z-\eta_n)=0, \tag{5}$$

---

* HÖLDER: Ueber den Casus Irreucibilis bei der Gleichung dritten Grades. Math. Ann. 38. p. 307.

** KNESER: Bemerkungen über den sogenannten casus irreducibilis bei cubischen Gleichungen Math. Ann. 41. p. 344.

a melynek együtthatói a 2) alatti gyökök szimmetrikus függvényei, tehát az 1) alatti egyenlet együtthatói által raczionálisan fejezhetők ki.

A $\Phi(z)=0$ egyenlet nem mindig irreduktibilis a szóban forgó raczionalitási tartományban. Tegyük fel, hogy reduktibilis és egyik irreduktibilis tényezője $\Phi_1(z)$; akkor

$$\Phi_1(z)=0 \qquad 6)$$

algebrai egyenlet gyökei a 4) alatti sorban foglaltatnak. Ha egyik gyöke pl. $\eta_1=\varphi(x_1)$, akkor

$$\Phi_1[\varphi(x_1)]=0$$

vagy, más szóval, az x_1 kielégíti a

$$\Phi_1[\varphi(t)]=0$$

algebrai egyenletet, a melynek együtthatói a szóban forgó raczionalitási tartományban foglaltatnak, következésként ezt az egyenletet a 2) alatti gyökök, mindannyian kielégítik, mert hiszen az $f(x)=0$ egyenletet irreduktibilisnek mondtuk. Ebből következik, hogy ez esetben a 4) alatti kifejezések nem különböznek mindannyian egymástól, hanem csakis annyi különböző van, a hányadrendű a 6) alatti $\Phi_1(z)$ tényező. Ha e tényező fokát m-mel jelöljük, akkor a 4) alatti sorban előforduló n kifejezés között csakis m különböző fordulhat elő. Legyen az m különböző:

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$$

akkor ezek a $\Phi_1(z)=0$ egyenlet gyökei. Ha az 5) alatti $\Phi(z)$ raczionális egész függvény, másik irreduktibilis tényezője volna $\Phi_2(z)$, akkor a $\Phi_2(z)=0$ egyenletnek a $\Phi_1(z)=0$ egyenlettel volna közös gyöke, következésként minden gyökük közös lenne, a $\Phi_2(z)$ a $\Phi_1(z)$-től tehát csakis egy állandó szorzóban különbözhetik. Ezt az okoskodást folytatva, arra az eredményre jutunk, hogy a $\Phi(z)$ *minden* irreduktibilis tényezője egy állandó szorzótól eltekintve megegyezik a $\Phi_1(z)$-vel, tehát, *ha egyáltalában reduktibilis, akkor* $\Phi_1(z)$ *hatványa, vagyis:*

$$\Phi(z)=[\Phi_1(z)]^k$$

Ebből egyúttal az is következik, hogy:

$$n=mk.$$

Egy irreduktibilis egyenlet gyökének raczionalis függvénye csakis olyan irreduktibilis egyenletnek (ugyanebben a tartománv-ban) tehet eleget, a melynek foka az eredeti egyenlet fokának osztója.

Ha $k=1$, akkor az a 4) alatti mennyiségeket *primitiv* mennyiségeknek hívjuk, ellenkező esetben pedig *imprimitivek.*

Ha n törzsszám, akkor m csak 1, vagy n lehet. Az első esetben a 4) alatti mennyiségek benn vannak a szóban forgó raczionalitási tartományban, tehát, *ha n törzsszám, akkor 4) alatti mennyiségek vagy raczionalisak, vagy primitivek.*

2. *A gyökök, mint a primitiv mennyiség függvényei.* A primitiv mennyiségeknek az a fontos tulajdonságuk van, hogy velük az adott egyenlet gyökei raczionálisan kifejezhetők. Ha ugyanis

$$\eta_1=\varphi(x_1),\quad \eta_2=\varphi(x_2),\ldots \eta_n\varphi(x_n) \tag{4}$$

primitiv mennyiségek, a melyek eleget tesznek a

$$\Phi(z)=0 \tag{5}$$

irreduktibilis egyenletnek, akkor x_i raczionálisan kifejezhető η_i-vel.

Legyen:

$$\Psi(t)=(t-\eta_1)(t-\eta_2)\ldots(t-\eta_n$$

akkor

$$\Psi(t)\left[\frac{x_1}{t-\eta_1}+\frac{x_2}{t-\eta_2}+\cdots+\frac{x_n}{t-\eta_n}\right]=\Omega(t) \tag{6}$$

a 2) alatti gyökök szimmetrikus egész függvénye, tehát $\Omega(t)$ együtthatói az 1) alatti egyenlet együtthatói segitségével raczionálisan kifejezhetők. Ebből az egyenletből:

$$x_i=\frac{\Omega(\eta_i)}{\Psi'(\eta_i)} \tag{7}$$

tehát x_i az η_i segitségével raczionálisan fejezhető ki. Ennek a tételnek legegyszerűbb alkalmazásaként nyerjük, hogy *primszámfokú egyenlet bármelyik gyöke e gyök primitiv függvénye segítségével raczionalisan fejezhető ki.*

3. *Az egyenletek algebrai megoldása.* Valamely egyenletről akkor mondjuk, hogy algebrailag megoldható, ha gyökeit a binom egyenletek egy lánczolatával kiszámíthatjuk. Ha az

$$f(x)=0 \qquad 1)$$

egyenlet algebrailag megoldható, akkor előállítható a binom egyenletek egy lánczolata:

$$\begin{aligned} W_1^{n_1}&=R_1 \\ W_2^{n_2}&=R_2(W_1) \\ W_3^{n_3}&=R_3(W_1, W_2) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ W_k^{n_k}&=R_k(W_1, W_2, \ldots, W_{k-1}) \end{aligned} \qquad 8)$$

a melyben R_1 a raczionalitási tartományba tartozó mennyiségek raczionális függvénye, R_2 már a W_1-et is tartalmazza és végre R_k már az összes előző binom egyenletek gyökeinek raczionális függvénye és az 1) alatti egyenlet gyökei (vagy legalább egyik gyöke) raczionalisan fejezhető ki a

$$W_1, W_2, \ldots, W_k \qquad 9)$$

segítségével. Az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy a binom egyenletek rendszámai prímszámok. Feltehető továbbá az is, hogy a binom egyenletek föntebbi lánczolatában nincsen olyan egyenlet, a melynek gyöke az előtte levő egyenletek gyökeivel raczionálisan kifejezhető volna; mert ha volna ilyen egyenlet, azt a lánczolatból egyszerűen ki lehetne hagyni.

A binom egyenletek föntebbi lánczolata segítségével való megoldás más szóval azt jelenti, hogy az eredetileg szóban forgó raczionalitási tartományt fokozatosan kibővítjük oly módon, hogy először hozzá veszszük a W_1-et (és pedig vagy minden gyökét az első binom egyenletnek, vagy pedig, ha csak valós számok szerepelhetnek a raczionalitási tartományban, akkor csak a valós gyököt) azután a W_1-hez a W_2-t s í. t., mígnem a

$$W_1, W_2, \ldots, W_k$$

-val megbővített raczionalitási tartományban az $f(x)=0$ egyenlet egyik gyöke is benne foglalható.

4. *A prím számfokú binom egyenletek irreduktibilitása.* Egyik alapvető fontosságú tétel az algebrai egyenletek elméletében az, hogy a binom egyenlet abban a raczionalitási tartományban, a melyhez az egyenlet jobboldala tartozik, irreduktibilis. E tételnek Kronecker-től eredő bizonyítása a következő. Legyen az adott binom egyenlet

$$W^m=R \tag{10)}$$

melyben R raczionalis függvénye a megadott raczionalitási tartomány elemeinek és m prímszám. Föltesszük, hogy R nem teljes m-ik hatványa egy raczionalis mennyiségnek, azaz, hogy a 10) alatti egyenletnek nincs az adott raczionalitási tartományba tartozó megoldása. — Ha

$$W^m-R=0$$

egyenlet reducibilis volna, akkor előállítható volna:

$$W^m-R=f_1(W)\,.\,f_2(W)$$

alakban, a hol f_1 és f_2 a W-nek m-nél alacsonyabb raczionalis egész függvényei volnának. Ha a az egységnek egyik m-edrendű primitív gyöke, és W_1 a 10) alatti egyenlet egyik megoldása, akkor ez egyenlet összes gyökei:

$$W_1, aW_1, a^2W_1, \ldots, a^{m-1}W_1$$

és így az r-ed fokú:

$$f_1(W)=0$$

egyenletben a W-től ment tag, melyet P-vel jelölünk:

$$P=a^{\mu}.\ W_1^r$$

és ha mindkét oldalon m-dik hatványra emelünk :

$$P^m = R^r \tag{11}$$

egyenletre jutunk.

Minthogy r, mely az $f_1(W)$ foka, kisebb az m prímszámnál, tehát találhatók h, k egész számok, melyek az

$$rh + mk = 1$$

diophantusi egyenletet kielégítik. A 11) egyenlet bevonásával

$$R = R^{rh} R^{mk} = P^{mh} R^{mk} = (P^h R^k)^m$$

R tehát egy, a szóban forgó raczionalitásán tartományba tartozó mennyiség m-ik hatványa volna, vagyis a 10) alatti egyenletnek volna egy raczionális gyöke, a mit eleve kizártunk.

Ezzel tehát be van bizonyítva, hogy a binom egyenlet irreduktibilis.

5. *A harmadfokú egyenlet algebrai megoldása.* Legyen:

$$f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \tag{12}$$

algebrai egyenlet adva, melynek együtthatói egy megadott raczionalitási tartományba tartoznak. Tegyük fel, hogy ez egyenlet ebben a tartományban irreduktibilis. Ez egyenlet algebrai megoldása abban áll, hogy a raczionalitási tartományt egy binom egyenletlánczolat gyökeivel addig bővítjük, míg egyik gyöke a kibővült tartományban raczionálissá válik. Legyen ilyen lánczolat a 8) alatti. Tegyük fel, hogy a $k-1$ első egyenlet által még ez nem történik meg, ellenben a k-ik egyenlet megoldása által már megtörténik, vagyis, hogy a 12) egyenlet egyik gyöke a

$$W_1 W_2 \ldots W_k$$

raczionális függvénye ; a mi — harmadfokú egyenletről lévén szó — úgy is kifejezhető, hogy a 12) egyenlet a

$$W_1,\ W_2, \ldots,\ W_{k-1}$$

raczionalitási tartományban még irreduktibilis, de már a W_k-val kibővített tartományban nem az. E szerint tehát a 12) egyenlet egyik gyöke a

$$(W_1, W_2, \ldots, W_{k-1}) \tag{13}$$

raczionalitási tartományban előállitható:

$$x_1 = R(W_k) \tag{14}$$

alakban, a hol tehát az együtthatók a 13) alatti mennyiségeknek és a megfelelő egységgyököknek raczionalis függvényei.

Minthogy a 8) alatti lánczolat utolsó egyenlete irreduktibilis és prímszámfokú, tehát x_1 ez egyenlet gyökének *primitív függvénye* és így x_1 eleget tesz egy n_k-ad fokú irreduktibilis egyenletnek; tehát:

$$n_k = 3.$$

A 8) alatti lánczolat utolsó egyenlete tehát:

$$W_k^3 = R_k(W_1 W_2 \ldots W_{k-1}). \tag{15}$$

De másrészt a W_k kifejezhető raczionálisan a W_k bármely primitív raczionális függvényeivel; tehát *W_k raczionálisan kifejezhető x_1 segítségével*; azaz:

$$W_k = r(x_1, W_1, W_2, W_3, \ldots, W_{k-1}) \tag{16}$$

tehát a 15) egyenletből következik, hogy

$$r(x_1, W_1, W_2, \ldots, W_{k-1})^3 = R_k(W_1, W_2, \ldots, W_{k-1}) \tag{17}$$

Minthogy azonban a 12) alatti harmadfokú egyenlet föltételünk szerint irreduktibilis és irreduktibilis marad akkor is, ha az eredeti raczionalitási tartományt a $W_1, W_2, \ldots, W_{k-1}$-gyel kibővítjük, kell, hogy a 17) alatti egyenletet egyúttal x_2 és x_3 gyökök is kielégítsék.

Az

$$r(x_1, W_2, \ldots, W_{k-1}), \quad r(x_2, W_1, \ldots, W_{k-1})$$
$$r(x_3, W_1, \ldots W_{k-1}) \tag{18}$$

nem lehetnek mind egyenlők; mert ha mindegyik W_k-val volna egyenlő, akkor összegük, mely az x_1, x_2 és x_3 szimmetrikus függvénye, vagyis $\frac{1}{3} W_k$ raczionálisan volna kifejezve a W_1, $W_2, \ldots, W_{k-1}$ raczionalitási turtományban, vagyis a 8) alatti lánczolat utolsó egyenlete reduktibilis volna, a mi feltevésünkkel ellenkezik. E szerint tehát a 18) alatti három mennyiség között legalább két különböző van.

6. *A casus irreducibilis.* Az eddigi eredmények minden harmadfokú egyenlet algebrai megoldására vonatkoznak. A casus irreducibilis esete tudvalevőleg akkor áll elő, ha a harmadfokú egyenlet minden gyöke valós. Ez esetben, miként említve volt, a Cardan-féle képlet képzetes számokból való gyökvonást követel, vagy más szóval, a megoldáshoz szükséges 8) alatti binom egyenlet-lánczolatban előforduló W gyökök között képzetesek is foglaltatnak. A materiális probléma, melylyel foglalkozunk, az, hogy vajjon nem lehetne-e ez esetben olyan binom-egyenlet lánczolatot szerkeszteni, a melyben csakis valós mennyiségek fordulnának elő.

Más szóval ez azt jelenti, hogy nem található-e az algebrai megoldásra szolgáló olyan binom egyenletlánczolat, melynél úgy a szóban forgó eredeti raczionalitási tartománya a 12) alatti egyenletnek, valamint e tartomány fokozatos kibővítésére szolgáló W mennyiségek mindannyian valósak?

Ha ez lehetséges volna, akkor a 18) alatti három kifejezés valós volna, minthogy úgy az x_1, x_2. x_3 gyökök, mint a W mennyiségek és az eredetileg adott raczionalitási tartomány is valós. De a 18) alatti kifejezések a 15) alatti binom egyenlet gyökei, mely egyenlet jobb oldalán álló kifejezés szintén valós. Ennek a binom egyenletnek volna tehát legalább két, egymástól különböző valós gyöke, a mi lehetetlenség. Ezzel tehát kimutattuk, *hogy ha a harmadfokú egyenletnek három valós gyöke van, akkor az algebrai megoldás csakis oly binom egyenletek lánczolatával történhetik, a melyeknél képzetes mennyiségek is szerepelnek, vagy okvetlenül kell képzetes számokból is gyököt vonni.*

7. *Ez eredmények általánosítása.* Nem szándékozunk ez alkalommal a casus irreducibilis esetének általánosítását tüzetesen tár-

gyalni, mert az algebrai egyenletek elméletébe még egy-két lépéssel beljebb kellene hatolni, csak a vizsgálatok eredményét akarjuk közölni. Ha az adott egyenlet *szabályos,* azaz olyan, melynek gyökei bármelyik gyök segítségével raczionálisan kifejezhetők, akkor *valós raczionalitási tartományba tartozó binom egyenletekkel csakis az esetben oldható meg, ha megoldása csupa négyzetgyökök segítségével eszközölhető, tehát ha az egyenlet gyökei geometriai értelemben megszerkeszthető.*

Beke Manó.

PHYSIKAI SZEMLE.

Egy új sugárnemről. W. E. RÖNTGEN, Eine neue Art von Strahlen.[1] *Berichte d. Physikalisch-Medizinischen Gesellschaft zu Würzburg. 1896.*

1. Egy nagyobb fajtáju Ruhmkorff-tekercs kisülését HITTORF-féle vacuumcsővön, elegendő ritkitású LÉNÁRD-, vagy CROOKES-féle készüléken, vagy pedig más hozzájuk hasonló szerkezeten átbocsátván s a készüléket jól záró vékony fekete kartontokkal borítván, teljesen elsőtétített szobában a készülék közelében tartott bariumplatincianürrel bevont papirosernyő minden kisüléskor élénken felvillan, fluoreszkál; egészen közömbös, hogy az ernyőnek bevont vagy pedig a másik oldala fordul a készülék felé. A fluoreszkálás a készüléktől mért 2 m-nyi távolságban is észrevehető. Könnyen meg lehet győződni arról, hogy a fluoreszkálás oka a kisütő készülékből, nem pedig a vezeték valamely más részéből indul ki.

2. A jelenségen mindenek előtt feltünő az, hogy a fekete kártyapapiroson, mely a nap- vagy villamos ivfénynek semmiféle látható vagy ibolyántúli sugarát nem bocsátja át, egy olyan ható bir átmenni, mely élénk fluoreszkálást gerjeszthet s azért első sorban azt kell megvizsgálni, hogy birnak-e másféle testek ilyen tulajdonsággal, vagy nem.

Csakhamar kiderül, hogy valamennyi test átbocsátja a hatót, de nagyon különböző mértékben. Néhány példát idézek. Papiros nagyon átbocsátó:[2] mintegy 1000 lapnyi könyv mögött az ernyő észrevehetően fluoreszkált; a nyomdafesték érezhető akadályt nem alkot. Kettős whist-játék mögött szintén mutatkozott fluoreszkálás; a készülék és az ernyő közé tartott egyes kártyának a hatását a szem alig veszi észre. — Egyes stanniol-lap is alig érezhető hatásu; csak több egymásra rakott lemez árnyéka mutatkozik

---

[1] RÖNTGEN ezen értekezése a *Pester Lloyd* 1896 január 14-iki számában megjelent szövegről van lefordítva.

[2] Valamely test «átbocsátó képessége» alatt értem közvetlenül a test mögé helyezett fluoreszkáló ernyő fényességének a viszonyát az ernyő azon fényességéhez, melyet ugyanazon a helyen azonos körülmények között mutat, ha a test nincsen eléje helyezve.

világosan az ernyőn. — Vastag fatuskók átbocsátók; 2—3 cm. vastagságú fenyőfa-deszka csak keveset abszorbeál. — Egy 15 mm vastagságú aluminiumréteg jelentékenyen csökkentette a hatást, de nem volt képes a fluoreszkálást teljesen megszüntetni. — Több czentiméter vastagságú kemény kaucsuklapok még áteresztik a sugarakat.* — Egyenlő vastagságú üveglemezek külömbözőképen viselkednek, és pedig a szerint, a mint ólomtartalmuak (flintüveg) vagy nem; az előbbiek sokkal kevésbbé átbocsátók, mint az utóbbiak. — Kezünket a kisülési készülék s az ernyő közé tartván, a kéz csontjainak sötétebb árnyékát látjuk a kéznek csak kevéssé sötét árnyékában. — Vizet, szénkéneget és több más folyadékot csillámedényekben vizsgálat alá fogván, igen átbocsátóknak mutatkoztak. — Hogy a hidrogén átbocsátóbb lenne, mint a levegő, azt nem birtam észrevenni. — Réz, ezüst, ólom, arany, platina lemezek mögött a fluoreszkálás biztosan felismerhető, de csak ha a vastagság nem jelentékeny. 0,2 mm vastagságú platina még átbocsátó; az ezüst- és rézlemez vastagabb is lehet. — 1,5 mm vastag ólom jóformán teljesen utját vágja a sugárzásnak s ezen tulajdonságánál fogva gyakran alkalmazásba vettem. — Egy négyszögletes keresztmetszetű (20×30 mm) fapálcza, melynek egyik oldalfala ólomfestékkel fehérre volt festve, a készülék és az ernyő között, a szerint, hogy mily helyzetben tartjuk, külömbözőképen viselkedik; majdnem egészen hatástalan, midőn az x-sugarak a festett oldal lapjával párhuzamosan haladtak, ellenben sötét árnyékot vetett a pálcza, mikor a sugaraknak a festéken kellett áthatolniok. — A fémek sói, és pedig oldott és szilárd állapotban egyaránt, ugyanabba a sorozatba rendezhetők átbocsátó képességök szerint mint fémeik.

3. A felsorolt kisérleti eredmények, valamint mások is arra a következtetésre vezetnek, hogy a külömböző anyagok átbocsátó képessége — természetesen egyenlő vastagságokra vonatkoztatva — lényegileg függ a sűrüségöktől; vagy legalább semmi más tulajdonságuk nem érvényesűl oly nagy mértékben, mint ez.

A következő kisérletek azonban azt mutatják, hogy a sűrüség egymagában nem irányadó. Közel egyenlő vastagságú üveg, aluminium, mészpát és kvarcz lemezeket vizsgáltam meg átbocsátó képességök szempontjából; ez anyagok sűrüsége közel egyenlő s mégis egész bizonyossággal kiderült, hogy a mészpát jóval kevésbbé átbocsátó, mint a többi említett anyag, melyek körülbelül egyformán viselkedtek. Valami erősebb fluoreszkálást, nevezetesen az üvegéhez hasonlíthatót, nem vettem észre a mészpaton.

---

* A kifejezés rövidsége kedveért a *sugár* nevet szeretném használni, és pedig megkülömböztetés czéljából *x-sugár* nevet.

4. A vastagság növekedtével az összes testek kevésbbé átbocsátókká válnak. Hogy esetleg valamiféle kapcsolatot találjak az átbocsátó képesség és a vastagság között, fotografikus felvételeket csináltam, melyeknél a fotografikus lemez egy része növekedő vastagságú stanniollemez-rétegekkel volt borítva; fotometriai mérést akkor szándékozom megejteni, ha majd alkalmas fotométer áll rendelkezésemre.

5. Platinából, ólomból, czinkből és aluminiumból olyan lemezeket hengereltettem, hogy átbocsátó képességök közel egyenlővé vált. A következő táblázat magában foglalja a milliméterekben kifejezett vastagságokat, a platinára vonatkoztatott relativ vastagságokat s a sűrüségeket.

	Vastagság	Relativ vastagság	Sűrüség
Pt	0,018 mm	1	21,5
Pb	0,05 «	3	11,1
Zn	0,10 «	6	7,1
Al	3,5 «	200	2,6

Ezekből az értékekből kitetszik, hogy a külömböző fémek egyáltalában nem egyforma átbocsátó képességüek, ha a vastagságból és a sűrüségből alkotott szorzat megegyező. Az átbocsátó képesség nagyobb mértékben növekszik, mint a milyen mértékben ez a szorozat csökken.

6. A bariumplatincianürnek fluoreszkálása nem az egyetlen felismerhető hatása az x-sugaraknak. Mindenekelőtt megemlítendő, hogy más anyagok is fluoreszkálnak; így pl. a foszforokként ismert calciumvegyületek, továbbá az uránüveg, a közönséges üveg, mészpát, kősó stb.

Bizonyos tekintetben kiváló fontosságu az a tény, hogy a fotografiai lemezek is érzékenyeknek bizonyúltak az x-sugarak iránt. Ez lehetővé teszi némely jelenség rögzítését s ez úton a csalódás lehetősége könnyebben kizárható, s én tényleg minden fontosabb megfigyelést, ha egyáltalában csak lehetséges volt, fotografikus felvétellel ellenőriztem.

A fotografikus eljárásnál igen kedvezően értékesűl az x-sugarak azon tulajdonsága, hogy vékonyabb fa, papiros és stanniol lemezeken keresztül úgyszólván gyengülés nélkül birunk áthatolni, mert ez lehetővé teszi, hogy a felvétel a kazettába zárt, vagy átlátszatlan papirosba burkolt lemezre világos szobában eszközölhető. Az x-sugarak eme tulajdonsága azonban arra is figyelmeztet, hogy lemezeinket csupán fával, vagy papirossal fedve a kisütő készülék környezetében tartogatni nem tanácsos.

Kérdéses még, hogy az ezüst sókra való chemiai hatás az x-sugarak közvetlen hatása-e. Lehetséges, hogy ez a hatás az üvegben, vagy talán a zselatinrétegben gerjesztett fluoreszkálás másodlagos hatása. A «film» néven ismeretes vékony hártyák szintén használhatók a kisérletekhez.

Hogy hőt gerjesztenek-e az x-sugarak, azt kisérletileg még nem igazoltam be; mindamellett föltételezhető, hogy ez a tulajdonságuk tényleg meg van, mert hiszen a fluoreszkálás bizonyítja, hogy az x-sugarak tényleg átalakulhatnak, s biztosra vehető, hogy az összes x-sugarak nem mint ilyenek hagyják el a testet, a melyre ráestek.

A szem retinája az x-sugarakra érzéketlen; szorosan a kisülési készülékhez tartott szem semmit sem vesz észre, bár a szemet alkotó anyagoknak az eddigi tapasztalatok szerint eléggé átbocsátóknak kell lenniök,

7. Miután külömböző, aránylag nagy vastagságú testek átbocsátó képességét felismertem, siettem a prizma segítségével megtudni azt, vajjon töretnek-e bennök az x-sugarak, vagy nem. Mintegy 30° törőszögű csillámprizmát vizzel, azután szénkéneggel töltöttem meg: de sem a foszforeszkáló ernyőn, sem a fotografikus lemezen sem birtam eltolódást felismerni, a miből az x-sugarak törésére lehetett volna következtetni. Összehasonlítás czéljából ugyanakkor fénysugarakkal is történt a kisérlet; ez elterített képek 10-, ill. 20 mm-nyire tolódtak el a törés nélkül létesülóktől. — Aluminiumból, valamint kemény kaucsukból készített, szintén 30°-u prizmák oly képeket adtak, melyekből esetleg lehet némi törésre következtetni. Mindazonáltal a dolog nagyon bizonytalan s ha egyáltalában van is eltérítés, az oly csekély, hogy az x-sugarak törésmutatója a mondott esetekben legföllebb 1,05 lehet. A fluoreszkáló ernyőn ez esetben sem birtam eltolódást észlelni.

Nagyobb sűrüségű fémekből készült prizmák, csekélyebb lévén az átbocsátó képesség, mindeddig nem vezettek biztos eredményre.

Fontos lévén a kérdés, vajjon az x-sugarak egy közegből másikba való átmenetel alkalmával töretnek-e vagy nem, örvendetes, hogy a prizmán kívül még más segédeszköz is áll rendelkezésünkre. Finom porrá zúzott átlátszó testek elegendő vastagságú rétege törés és visszaverődés következtében a ráeső fényt csak kevéssé bocsátja át, s azt is szórt fény alakjában; ha már most a porok épen olyan módon átbocsátóknak bizonyulnak, mint az ugyanakkora tömegű összefüggő anyag, úgy ezzel be van bizonyítva, hogy sem törés, sem visszaverődés észrevehető mértékben nem fordul elő. A kisérletek igen finomra őrölt kősóval, elektrolitikus úton nyert ezüstporral, s a chemiai kisérletekhez igen gyakran használt czinkporral történtek; egyetlenegy esetben sem mutatkozott külömbség az átbocsátó képességre nézve, és pedig úgy a fluoreszkáló ernyővel, mint a lemezekkel tett kisérletekben egyaránt.

Hogy az x-sugarak lencsével nem gyüjthetők össze, az előadottak után magától értetődik; egy nagy kemény kaucsuk- és egy üveglencse tényleg hatástalanoknak mutatkoztak. Hengeres üvegpálczának árnyéka középen sötétebb, mint a széleken; a cső árnyéka, ha az ő anyagánál átbocsátóbb testtel van megtöltve, középen világosabb, mint a széleken.

8. Az x-sugarak visszaverődésének kérdése a megelőző pontban mondottakkal oly értelemben eldöntöttnek tekintendő, hogy a sugarak a vizsgált anyagok egyikén sem szenvednek szabályos visszaverődést. Más kisérletek, melyeket itt mellőzni kivánok, ugyanilyen eredményhez vezetnek.

Mindamellett egy megfigyelést föl kell említenem, mely első tekintetre az ellenkező eredményre látszik utalni. Fénysugarak ellenében fekete papirossal védett fotografikus lemezt üvegoldalával a kisütő készülék felé fordítva, az x-sugarak hatásának tettem ki; az érzékeny réteg csillagalakban elrendezett fényesre csiszolt platina, ólom, czink és aluminium lemezkékkel volt borítva, egy része pedig födetlenűl maradt. Az előidézett negatíven világosan ki volt vehető, hogy a feketedés a platina, az ólom, különösen pedig a czink alatt erősebb, mint a többi helyeken; az aluminium semmiféle hatást sem fejtett ki. E szerint úgy látszik, hogy a nevezett három fém az x-sugarakat visszaveri; mindamellett az erősebb feketedésnek még más oka is gondolható, miért is teljes bizonyosság okáért egy második kisérletben az érzékeny réteg s a fémlapok közé igen vékony aluminiumlapocskát helyeztem, mely az ibolyántuli sugarakra nézve átlátszatlan, de az x-sugarakra nézve átbocsátó. Minthogy az eredmény ez esetben lényegében véve ugyanaz volt, az x-sugarak visszaverődése a megnevezett fémeken be van bizonyítva.

Ha már most ezt a tényt avval a megfigyeléssel összevetjük, hogy a porok épen úgy átbocsátók, mint az összefüggő anyag; hogy továbbá érdes felületű testek az x-sugarak áthatolására nézve egészen úgy viselkednek, mint simított felületű testek, arra a nézetre jutunk, hogy szabályos visszaverődés ugyan nem jelentkezik, de hogy ezek a testek az x-sugarakkal szemben egyformán viselkednek, mint a zavaros közegek a fénynyel szemben.

S minthogy az egyik közegből a másikba való átmenetelnél törést nem birtam kimutatni, úgy tünik fel a dolog, mintha az x-sugarak az összes testekben egyenlő sebességgel terjednének és pedig egy olyan médiumban, mely mindenütt jelen van s melybe a testek részecskéi beágyazva vannak. Ez utóbbiak az x-sugarak mozgásának akadályúl szolgálnak, és pedig általában annál nagyobb fokban, mentül sűrübb az illető test.

9. Eszerint lehetséges volna, hogy egy test részeinek elrendezése is hatással lenne a test átbocsátó képességére, hogy pl. a mészpát egyenlő vastagság mellett külömbözőképen viselkednék, a szerint, amint a sugarak a tengely irányában, vagy pedig arra merőlegesen hatolnak át. Azonban a mészpáttal s a kvarczczal tett kisérletek negativ eredményt adtak.

10. Ismeretes, hogy Lénárd * a vékony aluminium-lemezkén keresztül a szabad térbe kilépő Hittorf-féle kathódsugarakra vonatkozó szép kisérleteiben arra az eredményre jutott, hogy ezek a sugarak éterbeli folyamatok s hogy valamennyi testben szétszóródva terjednek széjjel. A mi sugarainkról hasonlót mondhattunk ki.

Utolsó dolgozatában Lénárd meghatározta a külömböző testek elnyelő képességét s többi között egy légkörnyi nyomású levegőre nézve a kisülési csőben foglalt gáz nyomása szerint, 1 cm-re vonatkoztatva 4,10, 3,40, 3,10 értékűnek találta. A szikra hosszán megitélt kisülési ritkitás után itélve, kisérleteimben körülbelül ugyanakkora ritkítással volt dolgom, mely csak kivételesen volt kisebb, vagy nagyobb. A Weber-féle fotométer segítségével — jobb nem áll rendelkezésemre — sikerült foszforeszkáló ernyőm fluoreszkáló világításának intenzitását két távolságban — 100 és 200 mm a kisülési készüléktől — egymással összehasonlítanom és három, egymással jól egyező kisérleti sorozatból megállapítanom, hogy ezen intenzitások az ernyőnek a kisülési készüléktől mért távolságainak négyzetével fordítva arányosak. Eszerint a levegő a rajta átmenő x-sugarakból jóval kevesebbet tart vissza, mint a kathódsugarakból. Ez az eredmény teljesen egyezik és a fentemlített megfigyeléssel, hogy a fluoreszkáló világosság a kisülési készülékből mért 2 m-nyi távolságban is észrevehető.

A levegőhez hasonlóan viselkednek a többi testek is: az x-sugarakra nézve átbocsátóbbak, mint a kathódsugarakra.

11. Egy másik, igen figyelemre méltó eltérés a kathódsugarak és az x-sugarak viselkedése között abban a tényben rejlik, hogy sok fáradozás árán sem sikerült igen erős mágnesi terekben az x-sugaraknak mágnesokozta eltérítését észlelnem.

Már pedig a mágnessel való eltéríthetőség eddig a kathódsugarak jellemző sajátságaként ismeretes; Hertz és Lénárd észrevették ugyan, hogy a kathódsugarak több faja található, melyek «foszforeszkálást gerjesztő képességök, elnyelhetőségök és mágnessel való eltéríthetőségök tekintetében egymástól megkülömböztethetők», ámde jelentékeny eltéríthetőség mégis

---

* L. Math. Phys. Lapok IV. köt. 26.

minden egyes esetben mutatkozott s nem hiszem, hogy az a jellemző vonásuk kényszerítő ok nélkül elejtetnék.

12. Külön e czélból tett kisérletek alapján bizonyos, hogy a kisütési készülék falának az a része, mely a legerősebben fluoreszkál, a minden irányban szétterülő x-sugarak fő kiinduló pontja. Az x-sugarak e szerint abból a helyből áradnak szét, a melyen a külömböző kutatók állítása szerint a kathódsugarak az üvegfalra ráesnek. Ha a kathódsugarak a kisülési készülék belsejében mágnessel eltéríttetnek, akkor észrevehető, hogy az x-sugarak is más helyről: azaz ismét a kathódsugarak végződésének pontjából áradnak szét. Ebből az okból sem lehetnek az x-sugarak, melyek nem téríthetők el, egyszerűen az üvegfalon átmenő vagy róla visszaverődő kathódsugarak. Az eltéríthetőségben mutatkozó nagy külömbség LÉNÁRD szerint nem tulajdonítható a kisűlési készüléken kívül levő nagyobb sürűségnek.

Azért is ahhoz az eredményhez jutok, hogy az x-sugarak nem azonosak a kathódsugarakkal, hanem hogy őket a kathódsugarak a kisülési készülék üvegfalában létrehozzák.

13. A sugarak nem csak üvegben, hanem a mint ezt egy 2 mm vastagságú aluminium lemezzel elzárt kisülési készüléken észleltem, az aluminiumban is jöhetnek létre. Másféle anyagok később kerülnek vizsgálat alá.

14. A jogosultságát annak, hogy a kisűlési készülék falából kiáramló *hatót* «sugár» névvel jelölöm, részben abból az egészen szabályos árnyékképzésből merítem, mely mutatkozik, a midőn a kisűlési készülék s az ernyő (vagy lemez) közé többé vagy kevésbbé átbocsátó testeket helyezek el.

Sok ilyen árnyékképet, melyek létesítése olykor ingerlő varázsu, észleltem és részben fotografiailag rögzítettem is; így pl. a kéz csontjainak, facsévére rejtve feltekert drótnak árnyékát, szekrénybe zárt súlyrendszer árnyékát; igen meglepő egy busszóla árnyékképe, melynek mágnestűje minden oldalról fémmel van körülvéve, nemkülömben egy fémdarabé, melynek belső inhomogenítását az x-sugarak nemzette árnyékkép teljesen feltárja.

Az x-sugarak egyenes vonalu terjedése mellett bizonyít továbbá egy lyuk-fotografia, melyet a fekete papirosba burkolt kisütő készülékről készítettem; a kép gyenge ugyan, de félreismerhetetlenül helyes.

15. Sokat nyomoztam az x-sugarak interferencziáját, de sajnos, eredmény nélkül; talán a sugarak gyenge intenzitása miatt.

16. Oly irányu kisérletet, melyek feladata kideríteni az elektrosztatikus erők hatását az x-sugarakra, folyamatban vannak.

17. Felvetvén már most a kérdést, vajjon mik tulajdonképen az x-sugarak — a melyek az előbbiek szerint kathódsugarak nem lehetnek — élénk fluorescentia- és chemiai hatásaiktól elcsábítva, első pillanatban ibolyántúli fényre lehetne gondolni. Ámde azonnal nyomós ellenvetésekbe ütközünk. Hogy ugyanis az x-sugarak ibolyántúli fénysugarak lehessenek, ennek a fénynek avval a tulajdonsággal kellene birnia, hogy

a) levegőből vízbe, szénkénegbe, aluminiumba, kősóba, üvegbe, czinkbe stb. való átmenetnél törést nem szenved;

b) a felsorolt anyagok felületéről észrevehető mértékben szabályosan nem verődik vissza;

c) a közönségesen használt módon nem polarizálható; és

d) elnyeletésére az anyagoknak semmi más tulajdonsága nem oly döntő hatásu, mint a sürűség.

Ez azt mondja, hogy ezek az uj ibolyántúli sugarak egészen másként viselkednek, mint az eddig ismert vörösöntúli, látható is ibolyántúli fénysugarak.

A rokonság egy neme, úgy látszik, létezik az uj sugarak s a fénysugarak között; az árnyékképzés, a fluoreszkálás és a chemiai hatás legalább utal reája. Rég óta tudjuk, hogy az ætherben a transverzális rezgéseken kívül még longitudinális rezgések is lehetségesek, sőt némely fizikusok véleménye szerint, ilyen hullámoknak kell is létezniök. Ámde igaz, hogy létezésök mindeddig bebizonyítva nincsen s ez okból sajátságaik kisérletileg megvizsgálva még nincsenek.

Nem kell-e tán az uj sugarakat az æther longitudinális rezgéseinek tulajdonítani?

Meg kell vallanom, hogy vizsgálataim folyamán mindjobban megbarátkoztam ezzel a gondolattal s engedjék meg, hogy ezt a gyanításomat itt kifejezzem, bár jól tudom, hogy az igy adott magyarázat még bővebb támogatásra szorul.

MEGOLDOTT FELADATOK.

24. *Ha a tetraéder szemben fekvő élei egymásra merőlegesek, bebizonyítandó, hogy akkor az élek középpontjai és a szemben fekvő élek legkisebb távolságú pontjai oly gömbön feküsznek, melynek középpontja a tetraéder súlypontjában van.* (VÁLYI.)

Harmadik megoldás Csillag Vilmos műegyetemi tanársegéd úrtól.

Legyenek a tetraéder szögpontjai A_1, A_2, A_3, A_4 és az $A_i A_k$ él felező pontja A_{ik}. Két szomszédos él felező pontjainak összeköttetése párhuzamos az illető tetraéderlap harmadik élével, vagyis

$$A_{ik} A_{kl} \parallel A_i A_l \parallel A_{lm} A_{mi}$$

és

$$A_{kl} A_{lm} \parallel A_k A_m \parallel A_{mi} A_{ik}.$$

Továbbá a föltevés szerint a tetraéder szemben fekvő élei merőlegesek egymásra, jelekben kifejezve:

$$A_i A_l \perp A_k A_m.$$

Ennek következtében

$$A_{ik} A_{kl} A_{lm} A_{mi}$$

derékszögű parallelogramma. Három ily derékszögű négyszög keletkezik, a melyeknek egy-egy átlójuk közös. A három *egyenlő* átló közös felező pontja S a tetraéder súlypontja, hiszen $A_i S$ az

$$A_i A_k A_{ml}, \qquad A_i A_l A_{mk}, \qquad A_i A_m A_{kl}$$

úgynevezett súlypontsíkok közös metszésvonala. Ezzel a tételben szereplő *gömb* meg van határozva.

Jelöljük folytatólag az $A_i A_k$ és $A_l A_m$ szemben fekvő élek legkisebb távolságú pontjait A'_{ik} és A'_{lm}-mel. Minthogy esetünkben $A_l A_m$ merőleges $A_i A_k$-ra, A'_{ik} nem egyéb mint $A_i A_k$ metszése az $A_l A_m$-en átmenő $A_i A_k$-ra merőleges síkkal. E síknak minden egyenese —, jelesen $A_{lm} A'_{ik}$ egyenese is merőleges az $A_i A_k \equiv A'_{ik} A_{ik}$ élre, a minek következtében $A_{ik} A'_{ik} A_{lm}$ oly *derékszög,* a mely a fönt talált gömb $A_{ik} A_{lm}$ átmérője fölött áll; de akkor e derékszög csúcspontja A'_{ik} szintén a gömbfelületen fekszik.

*

Negyedik megoldás dr. Klug Lipót egyetemi magántanár úrtól.

Az ilyen tetraéder két-két lapja mint háromszög, avval a tulajdonsággal bir, hogy a közös élhez, mint a két háromszög közös oldalához tartozó magasságoknak ugyanegy talppontja van, mely egyszersmind a közös éllel szemben fekvő éltől legkisebb távolságban van.

Ebből folyólag, az ily tetraéder lapjainak, mint háromszögeknek FEUERBACH-körei egy gömbön feküsznek, mert a négy kör közül bármely kettő egymást két pontban metszi, még pedig a közös él felezőpontjában és ahhoz az élhez tartozó magasságok talppontjában.

Mint ismeretes a FEUERBACH-kör középpontja, a háromszög súlypontja és magasságpontjától határolt vonaldarabot 1 : 3 viszony szerint osztja. Ebből következik, hogy ama gömb középpontja az ily tetraéder bármelyik súlyvonalát szintén 1 : 3 viszony szerint osztja, vagyis a tetraéder súlypontjába esik. Ugyane pont felezőpontja a tetraéder szemben fekvő élei felezőpontját összekötő egyenesnek, míg a legkisebb távolságú pontoknak három összekötő egyenese a tetraéder magasságpontján megy keresztül.

*

Ötödik megoldás Blau Ármin tanárjelölt úrtól.

Könnyű belátni, hogy a feladatban jellemzett tetraéder szemben fekvő éleinek legkisebb távolságú pontjai és az élek középpontjai az oldallapok magassági vonalainak talppontjaival, illetőleg ezek oldalainak felezőpontjaival esnek egybe.

Bármelyik $A_k A_l A_m$ oldallap magasságvonalainak talppontjai és oldalainak felezőpontjai egy ugyanazon körön feküsznek, a melynek középpontja (K_i) ezen oldallap súlypontját (S_i) és magassági pontját (M_i) összekötő egyenesben van s az említett két pont távolságát 1 : 3 arány szerint osztja, úgy hogy

$$S_i K_i : K_i M_i = 1 : 3.*$$

Az e körön átmenő gömbök középpontjainak geometriai helye a

* Lásd a FEUERBACH féle körről szóló tételt a kitüzött feladat után, e lapok III. kötetének 81. lapján

kör középpontjában síkjára emelt merőleges egyenes. Ez egyenes átmegy a tetraéder súlypontján.

Mert, ha a tetraédernek $A_k A_l A_m$ oldallapjával szemben fekvő csúcsa A_i, akkor $S_i M_i A_i$ derékszögű oly háromszög, melynek $M_i A_i$ befogója merőleges $A_k A_l A_m$ síkra.* A K_i-ben emelt merőleges egyenes $S_i M_i A_i$ háromszög síkjába esik, mert $M_i A_i$-vel párhuzamos és K_i pontja $S_i M_i$ egyenesen van. Ha azt a pontot, a melyben e merőleges egyenes az $A_i S_i$ egyenest átmetszi, K-val jelöljük, $S_i M_i A_i$ és $S_i K_i K$ háromszögek hasonlóságánál fogva

$$S_i K : K A_i = S_i K_i : K_i M_i = 1:3,$$

a miből kitetszik, hogy K a tetraéder súlypontja.

Minthogy e bebizonyítás az összes oldallapokra érvényes, azért az eddigi fejtegetések eredményeként kimondhatjuk: hogy tetraéderünk oldallapjainak FEUERBACH-körein át konczentrikus gömbök fektethetők, a melyek középpontja a tetraéder súlypontja.

De e gömböknek közös pontjaik vannak: a tetraéder szomszédos oldallapjaihoz tartozó FEUERBACH-körök közös pontjai e szomszédos oldallapok közös élén; s mivel közös ponttal biró konczentrikus gömbök összeesők, a feladatban foglalt tételt helyesnek látjuk be, ha még meggondoljuk, hogy a szóban volt körök a feladatban szereplő összes pontokat tartalmazzák.

---

* Lásd VÁLYI GY. czikkét a tetraéder magasságairól (3. tantétel és a 7. tantétel megfordítása) a Math. és Phys. Lapok III. kötetének 56. lapján.

A FOURIER-FÉLE MECHANIKAI ELV ALKALMAZÁSAINAK ALGEBRAI ALAPJÁRÓL.

A következő tételt értem: *Ha az*

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}u_1+A_{12}u_2+\cdots+A_{1n}u_n\equiv\theta_1\geqq 0 \\ A_{21}u_1+A_{22}u_2+\cdots+A_{2n}u_n\equiv\theta_2\geqq 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}\right\} \qquad (1)$$

rendszer minden megoldásában

$$A_1u_1+A_2u_2+\cdots+A_nu_n\equiv\vartheta\geqq 0 \qquad (2)$$

akkor léteznek olyan nem-negativ λ multiplikátorok, hogy

$$\vartheta\equiv\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+\cdots \qquad (3)_1$$

azaz részletesebben írva

$$\left.\begin{array}{l} A_1=\lambda_1A_{11}+\lambda_2A_{21}+\cdots \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots \\ A_n=\lambda_1A_{1n}+\lambda_2A_{2n}+\cdots \end{array}\right\} \qquad (3)_2$$

Az a bizonyítása, a melyet máshelyen közöltem,* némely segédtételeket bizonyítás nélkül tartalmaz, de ettől eltekintve is nehézkes. Most itt egy egyszerű bizonyítást írok le, s hogy a szövege nem rövidebb, ennek csak az az oka, hogy tüzetesen kifejtem, nevezetesen három bele tartozó segéd-tételt előre megokolok.

* «A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásai» Math. és Termt. Ért. XII. 1895. U. a. némiekben teljesebb szöveggel német nyelven a Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn XII. kötetében 1895.

1. Lemma.

Ha főtételünk $(3)_1$ áll az (1)-ről, akkor ez is áll: feltéve, hogy léteznek az (1)-ben oly bal-oldalak, amelyek ott csak $=0$ lehetnek, léteznek oly nem-negativ és nem csupa eltűnő λ értékek is $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$, mikép a $(3)_2$-ban minden jobb-oldal $=0$.

Legyen ugyanis, hogy (1)-ben az első baloldal (θ_1) csak $=0$ lehet. Akkor mondható, hogy az (1) minden megoldásában $-\theta_1 \geqq 0$, mert ez csak azt állítja, hogy a θ_1 nem >0. Mivel így az (1) minden megoldásában

$$-A_{11}u_1 - A_{12}u_2 - \cdots - A_{1n}u_n \equiv -\theta_1 \geqq 0,$$

ha fötételünk áll az (1)-ről, úgy léteznek oly nem-negativ λ értékek, hogy

$$-A_{11} = \lambda_1 A_{11} + \lambda_2 A_{21} + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$-A_{1n} = \lambda_1 A_{1n} + \lambda_2 A_{2n} + \cdots$$

tehát a kimondott állításnak

$$\lambda'_1 = \lambda_1 + 1, \quad \lambda'_2 = \lambda_2, \quad \lambda'_3 = \lambda_3, \cdots$$

megfelelnek.

Ebből az is következik, hogy *ha főtételünk áll az (1)-ről, és nem léteznek oly nem-negativ és nem csupa eltűnő λ értékek, amelyek által a $(3)_2$ jobb-oldalai eltünjenek, akkor az (1)-ben nincs olyan bal-oldal, amely ott csak $=0$ lehessen.*

2. Lemma.

Ha nincs az (1)-ben oly baloldal, amely ott csak $=0$ lehessen, akkor létezik olyan u-rendszer, amelyben az (1) minden baloldala >0.

Ugyanis, ha az (1)-ben egyetlen oly θ sincs, amely ott csak $=0$ lehessen, akkor létezik oly u-rendszer $u'_1, \ldots u'_n$, amelyben $\theta_1 > 0$, létezik olyan, $u''_1, \ldots, u''_n$, amelyben $\theta_2 > 0$, sit. A következő u-rendszer:

$$u_1 = u_1' + u_1'' + \cdots$$
$$u_2 = u_2' + u_2'' + \cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_n = u_n' + u_n'' + \cdots$$

nyilvánvalólag szintén eleget tesz az (1)-nek, de e megoldási rendszerben minden $\theta > 0$.

3. Lemma.

Transformáljuk az (1)-et ezzel:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{n1}u_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n \end{array}\right\} \qquad (4)$$

amelyről tegyük fel, hogy a determinansa nem tünik el, s így belőle az u mennyiségek számára, mint a v mennyiségek functiói számára csak egyféle kifejezés-rendszer következik. Legyen a transformálás eredménye:

$$\left.\begin{array}{l} B_{11}v_1 + B_{12}v_2 + \cdots + B_{1n}v_n \equiv \theta_1 \geqq 0 \\ B_{21}v_1 + B_{22}v_2 + \cdots + B_{2n}v_n \equiv \theta_2 \geqq 0 \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (1)'$$

A (2) pedig, mint (1)' minden megoldásában teljesülő kifejezés a (4) által ebbe alakuljon át:

$$B_1v_1 + B_2v_2 + \cdots + B_nv_n \equiv \vartheta \geqq 0 \qquad (2)'$$

Ha (1)'-ről áll a főtételünk, azaz, ha léteznek oly nem-negativ λ értékek, hogy

$$\vartheta \equiv \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \cdots \qquad (3)_1'$$

vagyis, részletesebb irásban

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = \lambda_1 B_{11} + \lambda_2 B_{21} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ B_n = \lambda_1 B_{1n} + \lambda_2 B_{2n} + \cdots \end{array}\right\} \qquad (3)_2'$$

akkor (1)-ről is áll, még pedig ugyanazokkal a λ értékekkel.

Ugyanis nem tünvén el (4)-nek a determinansa, szükségképen fenállanak ezek a vonatkozások:

$$A_{1i}=a_{i1}B_{11}+a_{i2}B_{12}+\cdots+a_{in}B_{1n}$$
$$A_{2i}=a_{i1}B_{21}+a_{i2}B_{22}+\cdots+a_{in}B_{2n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

továbbá

$$A_i=a_{i1}B_1+a_{i2}B_2+\cdots+a_{in}B_n.$$

A $(3)'_2$ alattiakat rendre megszorozva az $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ coëfficiensekkel és azután összeadva, a $(3)_2$-nak i-dik kifejezéséhez jutunk.

4. *A bizonyítás.*

Felteszem, hogy n—1 vezérmennyiség (u) esetére már ki van mutatva a főtételünk helyessége és bebizonyítom, hogy e feltevésben n számának az esetében is igaz. E bizonyításban használt következtetések olyszerűek, hogy akkor is érvényesek, amikor az n—1 szám a lehető legkisebb, azaz $=1$, amely esetre főtételünk helyes volta közvetlenül belátható.

Továbbá érvényesek, bármekkora legyen is (1)-ben az egymástól független kifejezések száma, érvényesek akkor is, a midőn ez a szám nagyobb, mint a vezérmennyiségek (u) száma. (Fent idézett közleményemben kimutattam, hogy mihelyt $n>2$, már az egymástól független egyenlőtlenségek száma bármekkora lehet).

A következő transformatióval élek:

$$v_1=\vartheta\equiv A_1u_1+A_2u_2+\cdots+A_nu_n,$$
$$v_2=u_2,\quad v_3=u_3,\quad \cdots,\quad v_n=u_n,$$

amelyről felteszem, hogy abban az A_1 nem $=0$ (mindig megválaszthatók így az indexek). E rendszer determinansa $=A_1$, tehát nem tünik el, s így elég lesz a vele transformált rendszeren végezni a bizonyitást (3. Lemma!).

A transformálás után így szól a bebizonyítandó tétel: Ha a

$$\left.\begin{array}{l} B_{11}v_1+B_{12}v_2+\cdots+B_{1n}v_n\equiv\theta_1\geq 0 \\ B_{21}v_1+B_{22}v_2+\cdots+B_{2n}v_n\equiv\theta_2\geq 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (I)$$

rendszer minden megoldásában

$$v_1 \equiv \vartheta \geqq 0 \tag{II}$$

akkor léteznek oly nem-negativ λ multiplikátorok, hogy

$$v_1 \equiv \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \cdots \tag{III$_1$}$$

azaz részletesebben írva

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \lambda_1 B_{11} + \lambda_2 B_{21} + \cdots \\ 0 = \lambda_1 B_{12} + \lambda_2 B_{22} + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \lambda_1 B_{1n} + \lambda_2 B_{2n} + \cdots \end{array}\right\} \tag{III$_2$}$$

Kell, hogy az (I)-ben a v_1-nek legalább egy coëfficiense >0 legyen, másként lehetne a v_1 értéke <0, és így a (II) nem teljesülne az (I) minden megoldásában (esetleg egyben sem). Válasszuk ki az (I)-ből azokat a θ-kat, a melyekben a v_1 coëfficiense >0, és legyenek ezek a θ baloldalak: θ_k, θ_{k+1}, . . .:

Már a

$$\left.\begin{array}{l} B_{k1}v_1 + B_{k2}v_2 + \cdots + B_{kn}v_n \equiv \theta_k \geqq 0 \\ B_{k+1,1}v_1 + B_{k+1,2}v_2 + \cdots + B_{k+1,n}v_n \equiv \theta_{k+1} \geqq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{I$'$}$$

rendszer minden megoldásában is

$$v_1 \equiv \vartheta \geqq 0 \tag{II$'$}$$

Ugyanis, ha (I)'-ben lehetne $v_1<0$, akkor (I)-ben is lehetne, mert az oly θ-ban, amely (I)'-ből hiányzik: vagy nem fordúl elő a v_1 vagy negativ coëfficienssel fordúl elő.

Ezek után azt kell kimutatnom, hogy, mivel már az (I)-ből kijegyzett (I)' minden megoldásában teljesül (II), már ehhez az (I)' részleges rendszerhez is rendelhetők oly nem-negativ λ multiplikátorok, amelyekkel bebizonyítandó tételünk teljesül, vagyis amelyekkel

$$v_1 \equiv \lambda_k\theta_k + \lambda_{k+1}\theta_{k+1} + \cdots \tag{III$_1'$}$$

és részletesebb írásban

$$(\mathrm{III})_2' \begin{cases} 1 = \lambda_k B_{k1} + \lambda_{k+1} B_{k+1,1} + \cdots & (a) \\ \left.\begin{array}{l} 0 = \lambda_k B_{k2} + \lambda_{k+1} B_{k+1,2} + \cdots \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 = \lambda_k B_{kn} + \lambda_{k+1} B_{k+1,n} + \cdots \end{array}\right\} & (b) \end{cases}$$

Itt az *(a)* alatt minden $B>0$, mert ezek (I)'-ben a v_1 coëfficiensei. Igy, ha vannak oly nem-negativ és nem csupa eltünő λ értékek, amelyekkel a *(b)* teljesül, akkor ezek bizonyos pozitiv számmal szorozva az egész $(\mathrm{III})_2'$ rendszert kielégítik.

Annak a kérdésnek az eldöntése maradt már most csak hátra, hogy a *(b)* teljesíthető-e nem-negativ és nem csupa eltűnő λ-kkal? Állítom, hogy teljesíthető. Ugyanis tegyük fel az ellenkezőt. Akkor lehetne $v_1<0$, mert: abban az $n—1$ vezérmennyiségű rendszerben, amelyet (I)'-ből a v_1 tartalmú tagok kihagyásával kapunk, u. m.

$$\begin{aligned} B_{k2} v_2 + \cdots + B_{kn} v_n &\geqq 0, \\ B_{k+1,2} v_2 + \cdots + B_{k+1,n} v_n &\geqq 0, \\ \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

egy baloldalról sem állana, hogy csak $=0$ lehet. (1. Lemma $n—1$ vezérmennyiség esetére!), tehát mindegyik lehetne egyszerre >0 (2. Lemma!), de ez esetben a teljes (I)'-ben, vagyis a v_1 tartalmú tagok vissza rakásával származó rendszerben lehetne $v_1<0$.

Farkas Gyula.

AZ ANALITIKAI FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉHEZ.

(Második közlemény.)

9. Most már tegyük fel, hogy P bizonyos értékeire vonatkozólag $\limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{mP}} \right|$ kisebb mint $\frac{1}{\varrho^{P+1}}$; még pedig legyen eme P értékek legkisebbike : p. Tehát legyen

$$\limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{m,p-1}} \right| = \frac{1}{\varrho^p}, \tag{19}$$

ellenben már

$$\limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{mp}} \right| = \frac{1}{\varrho^p \varrho'},$$

hol $\varrho' > \varrho$.

Kimutatható, hogy ebben az esetben $\left| \sqrt[m]{D_{m,p-1}} \right|$ *szabályosan közeledik az* $\frac{1}{\varrho^p}$*-hez.* Azaz m elegendő nagy értékeinél nem csak

$$\left| \sqrt[m]{D_{m,p-1}} \right| < \frac{1+\varepsilon}{\varrho^p},$$

hanem egyszersmind

$$\left| \sqrt[m]{D_{m,p-1}} \right| > \frac{1-\varepsilon}{\varrho^p}, \tag{20}$$

hol ε alatt egy tetszőlegesen választott kis pozitiv szám értendő.

Mindenek előtt a (19) alatti egyenlőtlenség folytán végtelenül sok oly m érték található, melyre vonatkozólag

$$\left| \sqrt[m]{D_{m,p-1}} \right| > \frac{1-\frac{\varepsilon}{2}}{\varrho^p}. \tag{21}$$

Ha egy bizonyos $m=M$ értéktől kezdve minden m ilyen, akkor M-től kezdve minden m-re vonatkozólag a (20) alatti egyenlőtlenség is érvényes. Ennélfogva pusztán avval az esettel kell részletesebben foglalkoznunk, midőn bármely M értéken túl léteznek m-nek oly értékei, melyekre vonatkozólag a (21) alatti egyenlőtlenség nem érvényes.

A vizsgálandó esetben — m-nek bármily nagy értékeire szorítkozzunk — található egy oly $D_{m_0,\,p-1}$ determináns, melynek abszolut értéke nagyobb, mint

$$\alpha = \frac{1-\frac{\varepsilon}{2}}{\varrho^p} \tag{22}$$

m_0-dik hatványa, ellenben $|D_{m_0-1,\,p-1}| < \alpha^{m_0-1}$.

Másrészt egy ismeretes determináns-tétel szerint a

$$D_{m-1,\,p} = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_m & \dots & a_{m+p-2} & a_{m+p-1} \\ a_m & a_{m+1} & \dots & a_{m+p-1} & a_{m+p} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{m+p-2} & a_{m+p-1} & \dots & a_{m+2p-3} & a_{m+2p-2} \\ a_{m+p-1} & a_{m+p} & \dots & a_{m+2p-2} & a_{m+2p-1} \end{vmatrix}$$

determinánsnak a

$$D_{m,\,p-2} = \frac{\partial^2 D}{\partial a_{m-1},\ \partial a_{m+2p-1}}$$

második aldeterminánssal való szorzata következőleg fejezhető ki az első aldeterminánsok segítségével* :

$$D_{m-1,p}\ D_{m,\,p-2} = D_{m+1,\,p-1}\ D_{m-1,\,p-1} - D^2_{m,\,p-1}.$$

Innen

$$|D_{m,p-1}|^2 \leqq |D_{m+1,p-1}|\,|D_{m-1,p-1}| + |D_{m-1,p}|\,|D_{m,p-2}|,$$

tehát

$$|D_{m,p-1}|^2 - |D_{m+1,p-1}|\,|D_{m-1,p-1}| \leqq |D_{m-1,p}|\,|D_{m,p-2}|.$$

Itt a

---

* Ez akkor is igaz, ha $p=1$, csakhogy akkor

$$D_{m,\,p-2}=1,\ D_{m+1,\,p-1}=a_{m+1},\ D_{m,\,p-1}=a_m,\ D_{m-1,\,p-1}=a_{m-1}.$$

$$\limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{m-1,\,p}} \right| = \limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{m,p}} \right| = \frac{1}{\varrho^p \varrho'}$$

$$\limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{m,\,p-2}} \right| = \frac{1}{\varrho^{p-1}}$$

képleteknél fogva

$$|D_{m-1}| < \left(\frac{1+\varepsilon}{\varrho^p \varrho'}\right)^m \quad |D_{m,\,p-2}| < \left(\frac{1+\varepsilon}{\varrho^{p-1}}\right)^m,$$

tehát folytatólag

$$|D_{m,\,p-1}|^2 - |D_{m+1,\,p-1}|\,|D_{m-1,p-1}| < \left(\frac{1+\varepsilon}{\varrho^p}\sqrt{\frac{\varrho}{\varrho'}}\right)^{2m}.$$

Továbbá a-nak (22) alatti értelmezése szerint

$$\frac{1}{\varrho^p} = \frac{a}{1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

és így

$$\frac{1+\varepsilon}{\varrho^p}\sqrt{\frac{\varrho}{\varrho'}} = a\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\;\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{\varrho}{\varrho'}},$$

hol

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{\varrho}{\varrho'}}$$

az ε igen kicsiny értékeinél egy k pozitiv valódi törttel egyenlő.

Ezt tekintetbe vévén, végre

$$|D_{m,\,p-1}|^2 - |D_{m+1,p-1}|\,|D_{m-1,p-1}| < \left(ka\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{2m}, \tag{23}$$

mely egyenlőtlenséget most már rendre az $m=m_0$, $m_0+1, \ldots$ esetekre akarjuk alkalmazni.

Az $m=m_0$ esetében

$$|D_{m_0,\,p-1}| > a^{m_0},$$

tehát

$$|D_{m_0+1,\,p-1}|\,|D_{m_0-1,\,p-1}| > a^{2m_0}\left[1-\left(k\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{2m_0}\right] > a^{2m_0}(1-k^{2m_0})$$

s ha ismételten osztunk a

$$|D_{m_0-1,p-1}| < a^{m_0-1}$$

egyenlőtlenséggel, akkor továbbá

$$|D_{m_0+1,p-1}| > a^{m_0+1}(1-k^{2m_0}), \quad \left|\frac{D_{m_0+1,p-1}}{D_{m_0-1,p-1}}\right| > a(1-k^{2m_0}). \quad (24)$$

Mihelyt m_0 eléggé nagy, $1-k^{2m_0}$ tetszőlegesen keveset külömbözik az egységtől, tehát

$$1-k^{2m_0} > \frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}} > \left(\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{m_0+1},$$

úgy hogy

$$|D_{m_0+1,p-1}| > \left(a\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{m_0+1}, \quad \left|\frac{D_{m_0+1,p-1}}{D_{m_0-1,p-1}}\right| > a\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

és

$$\left|\sqrt[m_0+1]{D_{m_0+1,p-1}}\right| > a\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}. \quad (24')$$

Hasonlóképen kimutatható, hogy i bármely pozitív egész számú értékénél:

$$\left|\frac{D_{m_0+i,p-1}}{D_{m_0+i-1,p-1}}\right| > a(1-k^{2m_0})(1-k^{2(m_0+1)})\ldots(1-k^{2(m_0+i-1)}), \quad (25)$$

$$|D_{m_0+i,p-1}| > a^{m_0+i}(1-k^{2m_0})^i(1-k^{2(m_0+1)})^{i-1}\ldots(1-k^{2(m_0+i-1)}), \quad (26)$$

$$\left|\sqrt[m_0+i]{D_{m_0+i,p-1}}\right| > a\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}. \quad (27)$$

Minthogy e képleteket az $i=1$ esetben az imént igazoltuk, általános érvényességük bebizonyítására elég kimutatnunk, hogy mihelyt i egy bizonyos értékére helyesek, az i-nek rákövetkező értékére is igazak maradnak, azaz hogy akkor egyszersmind

$$\left|\frac{D_{m_0+i+1,p-1}}{D_{m_0+i,p-1}}\right| > a(1-k^{2m_0})(1-k^{2(m_0+1)})\ldots(1-k^{2(m_0+i)}) \quad (25')$$

$$|D_{m_0+i+1,\,p-1}| > a^{m_0+i+1}(1-k^{2m_0})^{i+1}(1-k^{2(m_0+1)})^{i}\ldots(1-k^{2(m_0+i)}) \quad (26')$$

$$\left|\sqrt[m_0+i+1]{D_{m_0+i+1,\,p-1}}\right| > a\,\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}. \quad (27')$$

E végből legyen (23) alatt $m=m_0+i$. Ekkor

$$|D_{m_0+i,\,p-1}|^2-|D_{m_0+i+1,\,p-1}|\,|D_{m_0+i-1,\,p-1}| < \left(ka\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{2(m_0+i)}.$$

Itt a (27) alatti egyenlőtlenség értelmében

$$\left(a\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{m_0+i} < |D_{m_0+i,\,p-1}|,$$

tehát

$$|D_{m_0+i+1,\,p-1}|\,|D_{m_0+i-1,\,p-1}| > |D_{m_0+i,\,p-1}|^2\,(1-k^{2(m_0+i)})$$

és

$$\frac{|D_{m_0+i+1,\,p-1}|}{|D_{m_0+i,\,p-1}|} > \frac{|D_{m_0+i,\,p-1}|}{|D_{m_0+i-1,\,p-1}|}\,(1-k^{2(m_0+i)}).$$

Ha még a jobb oldalon tekintetbe veszszük a (25) alatti egyenlőtlenséget, éppen a (25′) alatti egyenlőtlenséget nyerjük.

A (26′) alatti egyenlőtlenség a (25′) és (26) alattiak szorzata.

A (27′) alatti egyenlőtlenség pedig m_0 elegendő nagy értékeinél következőleg nyerhető. A (26′) alatti egyenlőtlenség értelmében

$$\frac{1}{a}\left|\sqrt[m_0+i+1]{D_{m_0+i+1,\,p-1}}\right| >$$

$$> (1-k^{2m_0})^{\frac{i}{m_0+i+1}}\,(1-k^{2(m_0+1)})^{\frac{i}{m_0+i+1}}\ldots(1-k^{2(m_0+i)})^{\frac{1}{m_0+i+1}}$$

$$> (1-k^{2m_0})\,(1-k^{2(m_0+1)})\ldots(1-k^{2(m_0+i)}).$$

Ámde

$$(1-k^{2m_0})\,(1-k^{2(m_0+1)}) = 1-k^{2m_0}-k^{2(m_0+1)}+k^{2(2m_0+1)} >$$

$$> 1-k^{2m_0}-k^{2(m_0+1)}$$

továbbá

$$(1-k^{2m_0})\,(1-k^{2(m_0+1)})\,(1-k^{2(m_0+2)}) >$$
$$> (1-k^{2m_0}-k^{2(m_0+1)})\,(1-k^{2(m_0+2)}) >$$
$$> 1-k^{2m_0}-k^{2(m_0+1)}-k^{2(m_0+2)},$$

stb.

Tehát

$$\frac{1}{a}\left|\sqrt[m_0+i+1]{D_{m_0+i+1,\,p+1}}\right| >$$
$$> 1-(k^{2m_0}+k^{2(m_0+1)}+\ldots+k^{2(m_0+i)})$$
$$> 1-\frac{k^{2m_0}}{1-k^2},$$

s mihelyt m_0 oly nagynak van választva, hogy

$$\frac{k^{2m_0}}{1-k^2} < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon},$$

a (27') alatti egyenlet tényleg ki van elégítve.

Ily módon a (27) alatti egyenlet valóban általános érvényességű, azaz a (20) egyenlőtlenség mindig ki van elégítve, mihelyt m nagyobb egy bizonyos m_0 számnál.

10. Most már határozzunk meg m minden pozitiv egész számú értékénél egy-egy

$$A_m^{(1)},\ A_m^{(2)}, \ldots, A_m^{(h)}, \ldots, A_m^{(p)}$$

értékrendszert úgy, hogy

$$\begin{array}{l} a_{m+p} + A_m^{(1)} a_{m+p-1} + \cdots + A_m^{(h)} a_{m+p-h} + \cdots + A_m^{(p)} a_m = 0 \\ a_{m+p+1} + A_m^{(1)} a_{m+p} + \cdots + A_m^{(h)} a_{m+p+1-h} + \cdots + A_m^{(p)} a_{m+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m+2p-2} + A_m^{(1)} a_{m+2p-3} + \cdots + A_m^{(h)} a_{m+2p-2-h} + \cdots + A_m^{(p)} a_{m+p-2} = 0 \\ a_{m+2p-1} + A_m^{(1)} a_{m+2p-2} + \cdots + A_m^{(h)} a_{m+2p-1-h} + \cdots + A_m^{(p)} a_{m+p-1} = 0 \end{array} \tag{28}$$

Ekkor

$$H_m = a_{m+2p} + A_m^{(1)} a_{m+2p-1} + \cdots + A_m^{(h)} a_{m+2p-h} + \cdots + A_m^{(p)} a_{m+p} \tag{28'}$$

képlet által értelmezett kifejezésnek értéke

$$H_m = \frac{D_{mp}}{D_{m,\,p-1}}.$$

Továbbá, ha (28) alatt m helyébe $(m+1)$-et helyettesítünk, a következő egyenleteket nyerjük:

$$\begin{aligned}
&a_{m+p+1} + A_{m+1}^{(1)} a_{m+p} + \cdots + A_{m+1}^{(p)} a_{m+1} = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{m+2p-1} + A_{m+1}^{(1)} a_{m+2p-2} + \cdots + A_{m+1}^{(p)} a_{m+p-1} = 0 \\
&a_{m+2p} + A_{m+1}^{(1)} a_{m+2p-1} + \cdots + A_{m+1}^{(p)} a_{m+p} = 0
\end{aligned}$$

Ezek a (28) és (28') alattiak segítségével még következőleg is írhatók:

$$\begin{aligned}
&\delta_m^{(1)} a_{m+p} + \cdots + \delta_m^{(h)} a_{m+p+1-h} + \cdots + \delta_m^{(p)} a_{m+1} = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\delta_m^{(1)} a_{m+2p-2} + \cdots + \delta_m^{(h)} a_{m+2p-1-h} + \cdots + \delta_m^{(p)} a_{m+p-1} = 0 \\
&\delta_m^{(1)} a_{m+2p-1} + \cdots + \delta_m^{(h)} a_{m+2p-h} + \cdots + \delta_m^{(p)} a_{m+p} = -H_m,
\end{aligned}$$

ha t. i.

$$\delta_m^{(1)} = A_{m+1}^{(1)} - A_m^{(1)}, \ldots, \delta_m^{(h)} = A_{m+1}^{(h)} - A_m^{(h)}, \ldots, \delta_m^{(h)} = A_{m+1}^{(p)} - A_m^{(p)}.$$

Innen

$$\delta_m^{(h)} = -\frac{D_{m+1,\,p-2}^{(h)}}{D_{m+1,\,p-1}} H_m = -\frac{D_{mp}}{D_{m,\,p-1}} \frac{D_{m+1,\,p-2}^{(h)}}{D_{m+1,\,p-1}}$$

hol* $D_{m+1,\,p-2}^{(h)}$ az a-kban $(p-1)$-ed fokú determinánst jelent, tehát m elegendő nagy értékeinél

$$|D_{m+1,\,p-2}^{(h)}| < \left(\frac{1+\varepsilon}{\varrho^{p-1}}\right)^m.$$

Továbbá a

$$\lim_{m=\infty}.\,\sup.\ |\sqrt[m]{D_{m,p}}| = \frac{1}{\varrho^p \varrho'},$$

$$\lim_{m=\infty}.\ |\sqrt[m]{D_{m,\,p-1}}| = \lim.\ |\sqrt[m]{D_{m+1,p-1}}| = \frac{1}{\varrho^p}$$

képletek értelmében

$$|\sqrt[m]{D_{m,\,p}}| < \frac{1+\varepsilon}{\varrho^p \varrho'},\quad |\sqrt[m]{D_{m,p-1}}| > \frac{1-\varepsilon}{\varrho^p},\quad |\sqrt[m]{D_{m+1,\,p-1}}| > \frac{1-\varepsilon}{\varrho^p}.$$

---

* Ha $p=1$, akkor $D_{m+1,\,p-h}^{(h)}=1$.

Ezeknél fogva

$$\left|\sqrt[m]{\delta_m^{(h)}}\right| < \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 \frac{\varrho}{\varrho'} < (1+\varepsilon')\frac{\varrho}{\varrho'}.$$

Tehát

$$\left|A_{m+k}^{(h)} - A_m^{(h)}\right| = \left|\delta_m^{(h)} + \delta_{m+1}^{(h)} + \cdots + \delta_{m+k-1}^{(h)}\right|$$

$$< g^m(1+g+\cdots+g^{k-1}) < \frac{g^m}{1-g},$$

hol

$$g = (1+\varepsilon')\frac{\varrho}{\varrho'}.$$

E szerint $\left|A_{m+k}^{(h)} - A_m^{(h)}\right|$ az m növekedtével minden határon túl kisebbedik és így $A_m^{(h)}$ véges és meghatározott $A^{(h)}$ határértékkel bir.

Ha az

$$A^{(h)} = \lim_{m=\infty} A_m^{(h)}$$

$$(h=1, 2, \ldots, p)$$

határértékeket egy p-ed fokú egész függvény együtthatóinak választjuk, akkor eme

$$P_p(x) = 1 + A^{(1)}x + A^{(2)}x^2 + \cdots A^{(p)}x^p$$

függvénynek $f(x)$-szel való szorzatában x^{m+p} együtthatója

$$b_{m+p} = a_{m+p} + A^{(1)}a_{m+p-1} + A^{(2)}a_{m+p-2} + \cdots + A^{(p)}a_m.$$

Ez a (28) alatti egyenletek folytán így is írható

$$b_{m+p} = \sum_{h=1}^{p} (A^{(h)} - A_m^{(h)})\, a_{m+p-h}.$$

Itt m eléggé nagy értékeinél

$$\left|A^{(h)} - A_m^{(h)}\right| < \frac{g^m}{1-g} = \frac{1}{1-g}\left((1+\varepsilon')\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^m$$

és a

$$\limsup_{m=\infty} \left|\sqrt[m]{a_{m+p-h}}\right| = \limsup_{m=\infty} \left|\sqrt[m]{a_m}\right| = \frac{1}{\varrho}$$

egyenlőség értelmében

$$|a_{m+p-h}| < \left(\frac{1+\varepsilon'}{\varrho}\right)^m,$$

úgy hogy

$$|(A^{(h)} - A_m^{(h)})\, a_{m+p-h}| < \frac{1}{1-g} \frac{(1+\varepsilon')^{2m}}{\varrho'^m}$$

és

$$|b_{m+p}| < C \frac{(1+\varepsilon')^{2m}}{\varrho'^m},$$

ahol

$$C = \frac{p}{1-g}.$$

Ennélfogva

$$\left|\sqrt[m]{\frac{b_{m+p}}{C}}\right| < \frac{(1+\varepsilon')^2}{\varrho'}$$

és

$$\lim_{m=\infty}\text{sup.}\, |\sqrt[m]{b_m}| = \lim_{m=\infty}\text{sup.} \left|\sqrt[m]{\frac{b_{m+p}}{C}}\right| \leqq \frac{1}{\varrho'}.$$

Amde e felső határ nem lehet kisebb mint $\frac{1}{\varrho'}$, mert akkor

$$D_{mp} = \begin{vmatrix} a_m & \dots & a_{m+p-1} & a_{m+p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m+p} & \dots & a_{m+2p-1} & a_{m+2p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_m & \dots & a_{m+p-1} & b_{m+p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m+p} & \dots & a_{m+2p-1} & b_{m+2p} \end{vmatrix}$$

m-dik gyökének abszolut értéke kisebb felső határral birna mint $\frac{1}{\varrho^p \varrho'}$.

E szerint

$$\lim_{m=\infty}\text{sup.}\, |\sqrt[m]{b_m}| = \frac{1}{\varrho'},$$

azaz $f(x)\, P_p(x)$ hatványsorának összetartási köre ϱ' sugarú.

A mondottak következőleg foglalhatók össze:

Ha

$$\lim_{m=\infty}\text{sup.}\, |\sqrt[m]{D_{m+p}}| = \frac{1}{\varrho^p \varrho'},$$

hol $\varrho' > \varrho$, ellenben P-nek minden p-nél kisebb értékénél

$$\lim_{m=\infty}\text{sup.}\,|\sqrt[m]{D_{m+p}}\,| = \frac{1}{\varrho^{p+1}},$$

akkor mindig létezik oly p-ed fokú egész függvény, melynek $f(x)$-szel való szorzatának összetartási köre ϱ' sugarú. E

$$P_p(x) = 1 + A^{(1)}x + \cdots + A^{(h)}x^{(h)} + \cdots + A^{(p)}x^p$$

függvény együtthatói:

$$A^{(h)} = \lim_{m=\infty} A_m^{(h)}$$

$$(h=1, \ldots p)$$

hol $A_m^{(1)}, \ldots, A_m^{(p)}$-t a (28) alatti egyenletek értelmezik.

Továbbá a ϱ' sugarú körön felül $f(x)$-nek rendes helyeken kívül csak polusai lehetnek s ezek csak ott, hol $P_p(x)=0$. Még pedig valamely $x=x'$ hely legfeljebb annyiszoros polusa lehet $f(x)$-nek, a hányszoros zérus helye $P_p(x)$-nek. Ily módon $f(x)$-nek a ϱ' sugarú körön belül levő polusainak száma — a többszörös polusokat többszörösségük foka szerint számítva — legfeljebb p lehet.

Másrészt világos, hogy $f(x)$-nek már a ϱ-sugarú körön p polusa van, mert ha e kör kerületén csak $P < p$ polus volna, már

$$\lim_{m=\infty}\text{sup.}\,|\sqrt[m]{D_{m,P}}\,|$$

tartoznék kisebbnek lenni mint ϱ^{P+1} reciprok értéke.

E szerint $f(x)$-nek a ϱ' körön belül nincs más szinguláris helye, mint a ϱ sugarú körön p polus. Ezeknek helyeit a $P_p(x)=0$ egyenlet határozza meg.

Jegyzet. Különösen egyszerűen alakulnak a viszonyok, ha $f(x)$-nek a ρ sugarú összetartási körön nincs más szinguláris helye, mint egy $x=\alpha$ egyszerű polus. Ekkor már

$$\lim_{m=\infty}\text{sup.}\,|\sqrt[m]{D_{m,1}}\,| > \frac{1}{\rho}$$

tehát

$$\lim_{m=\infty}|\sqrt[m]{a_m}\,| = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{|\,a\,|}.$$

Az egyetlen $x=a$ polust

$$1+Ax=0$$

egyenlet határozza meg, hol A az

$$a_{m+1}+A_m a_m=0$$

egyenlet

$$A_m=-\frac{a_{m+1}}{a_m}$$

gyökének határértéke. Vagyis:*

$$a=-\frac{1}{A}=\lim_{m=\infty}.\frac{a_m}{a_{m+1}}$$

és

$$|a|=\lim_{m=\infty}.\left|\frac{1}{\sqrt[m]{a_m}}\right|.$$

E két képlet figyelemre méltó alkalmazást talál az algebrai egyenletek elméletében.

Legyen először

$$f(x)=\frac{F'(x)}{F(x)}$$

hol a nevező az $F(x)=0$ algebrai egyenlet többtagúja. Ezen egyenlet gyökei közül legyen a kisebb abszolut értékű valamennyi többi gyöknél.

Ekkor $\frac{F'(x)}{F(x)}$-nek a $\rho=|a|$ sugarú körön belül egyáltalában nincs szinguláris helye és e kör kerületén $x=a$ polus az egyetlen szinguláris hely. Tehát a az

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m+\ldots$$

sor két egymásután következő együtthatójából képezett hányadosnak limese.

Az algebrai egyenletek legkisebb abszolut értékű gyökének e meghatározása lényegben BERNOULLI DÁNIEL-től származik.**

Minthogy egy $x'=x+a$ alakú helyettesítéssel bármelyik gyök meghatározása az új egyenlet legkisebb abszolut értékű gyökének kiszámítására vezethető vissza, azért e módszer az összes gyökök kiszámítására használható. (Komplex gyökök meghatározásánál a is komplex értékűnek választandó.)

---

* Az első képletet illetőleg v. ö. KÖNIG GY. A hatványsorok egy tulajdonságáról. Mathematikai és természettudományi értesítő. I. köt. (1882.)

** V. ö. WEBER, Lehrbuch der Algebra I., 341—4. ll.

Egy másik szintén ismeretes eredményt nyerünk, ha

$$f(x)=\frac{1}{F(x)}.$$

Ekkor t. azt találjuk, hogy az $F(x)=0$ egyenlet abszolut értékére nézve legkisebb gyökére vonatkozólag:

$$|a|=\lim_{m=\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[m]{a_m}}\right|,$$

hol a_m az

$$\frac{1}{F(x)}=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m+\ldots$$

sor m-dik együtthatója.

Kürschák József.

A HARMONIKUS POLUSRÓL.

(Második és befejező közlemény.)

4. Ha a (IV) egyenletbe $s=0$-t, helyettesítünk, egyszerű átalakitás után a

$$(got^{(k)}\,t^{(0)})=\frac{2}{k+2}$$

egyenletet, míg az (I) egyenletrendszer első egyenletéből

$$(got^{(0)}p)=\frac{1}{2}$$

egyenletet nyerjük, a melyekből $t^{(0)}$ kiküszöbölése által a

$$(got^{(k)}p)=\frac{1}{k+2},$$

vagy a

$$(gpot^{(k)})=-(k+1) \qquad \text{(VII.)}$$

egyenlet származtatható le.

Ha felteszszük, hogy

$$(gt^{(k-1)}\,t^{(k)}p)=-k,$$

(a mi $k=1$) esetben (I)-nek első egyenlete) és ez egyenletet átalakitás után (I) rendszernek $(k+2)$-dik egyenletével szorozzuk, nyerjük:

$$(gt^{(k)}\,t^{(k+1)}p)=(gt^{(k)}\,t^{(k+1)}\,t^{(k-1)})\;(gt^{(k)}\,t^{(k-1)}p)=-1\,.\,(k+1)\,;$$

tehát általánosan igaz, hogy:

$$(gt^{(k)}\,t^{(k+1)}p)=-(k+1) \qquad \text{(VIII.)}$$

Nevezzük (4. ábra) $T_k^{(n-2)}$ pontnak (vagy a G_k pontnak) projekczióját O-ból g-re H_k-nak és mutassuk ki, hogy a $H_k\, T^{(n-1)}_{n+2}$ egyenes átmegy a P_k ponton.

A (VIII) és (VII) egyenletből következik, ha $k=(n-2)$, akkor

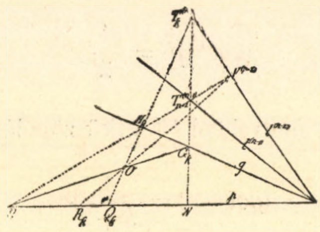
$$(gt^{(n-2)}\, t^{(n-1)}\, p)=(ot^{(n-2)}\, gp);$$

és ha a bal oldalon levő sugarakat $G_k\, T_k^{(n-2)}$-vel a jobb oldalon állókat $H_k\, T_k^{(n-2)}$-vel átmetszük, akkor

$$(G_k\, T_k^{(n-2)}\, T^{(n-1)}_{n+2}\, W)=(O\, T_k^{(n-2)}\, H_k O_k),$$

a hol a W pont, $G_k\, T_k^{(n-2)}$ és p metszéspontja.

Az utolsó egyenletből pedig az következik, hogy a $H_k\, T^{(n-1)}_{n+2}$ egyenes $(OG_k,\ WO_k)$ ponton, vagy a mi ugyanaz $(OG_k, p)=P_k$ ponton megy át.



4. ábra.

A H_k pont tehát nemcsak Q_k-nak projekcziója O-ból, hanem egyszersmind P_k-nak projekcziója $T^{(n-1)}_{n+2}$-ből g-re.

Ha a P_k pont projekcióját $T^{(n-1)}_{n+2}$-ből $t^{(n-2)}$ egyenesre $V_k^{(n-2)}$-vel, e pontnak projekczióját O-ból p-re R_k-val jelöljük azt látjuk, hogy a H_k pontcsoport a G_k pontcsoport irányában, a $V_k^{(n-2)}$ pontcsoport a $T_k^{(n-2)}$ pontsorok irányában, végre az R_k pontcsoport a Q_k pontcsoport irányában ép oly helyzetű, mint a milyen a Q_k pontcsoport a P_k pontcsoport irányában, mert azok az O és $T^{(n-1)}_{n+2}$ pontokból egymásba projicziálhatók.

Ennek pedig az a következménye, hogy a p, g, $t^{(n-2)}$ sorozókon fekvő projektiv pontcsoportoknak egyik kettőspontja az $O\,T^{(n-1)}_{n+2}$ egyenesnek metszéspontja ama tartókkal és így, mint előbb volt:

$$(Q_k R_k NM) = -n,$$
$$(P_k R_k NM) = (P_k Q_k NM)\,(Q_k R_k NM) = (-n)^2.$$

Ha az S_k pontok csoportja a P_k pontok csoportjából bizonyos s-szer végzett szerkesztés folytán keletkezett, akkor

$$(P_k S_k NM) = (-n)^s,$$

tehát ha $s = \infty$, az S_k pontcsoport N-be esik, mert

$$\frac{P_k N \,.\, S_k M}{S_k N \,.\, P_k M} = \infty$$

folytán $S_k N = 0$, minthogy $S_k M$ általában nem lesz végtelen nagy.

5. Az

$$(ABCM) = \frac{AC \,.\, BM}{BC \,.\, AM} = \frac{(AM + MC) \,.\, BM}{(BM + MC) \,.\, AM} = -k$$

kifejezés ily alakra hozható:

$$\frac{k+1}{MC} = \frac{1}{MA} + \frac{k}{MB}.$$

Ennélfogva a (III) egyenletrendszerből és a (VI) egyenletből:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2}{MP_{12}} &= \frac{1}{MP_1} + \frac{1}{MP_2} \\
\frac{3}{MP_{123}} &= \frac{1}{MP_3} + \frac{2}{MP_{12}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{n-1}{MP_{12\ldots n-1}} &= \frac{1}{MP_{n-1}} + \frac{n-2}{MP_{12\ldots n-2}} \\
\frac{n}{MQ_{n+1}} &= \frac{1}{MP_n} + \frac{n-}{MP_{12\ldots n-1}} \\
\frac{n+1}{MN} &= \frac{1}{MP_{n+1}} + \frac{n}{MQ_{u+1}}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(IX)}$$

ezekből pedig az

$$\frac{n+1}{MN} = \frac{1}{MP_1} + \frac{1}{MP_2} + \cdots + \frac{1}{MP_n} + \frac{1}{MP_{n+1}} \qquad \text{(X)}$$

egyenlet vezethető le, a mely azt mutatja, hogy az N pont M-nek harmonikus pólusa a $P_1, P_2, \ldots P_{n+1}$ pontokra vonatkozólag.

Minthogy a (IX) egyenletrendszer akkor is igaz marad, ha a P betűt, $Q, R, \ldots S$-sel helyettesitjük, azért N pont egyszersmind harmonikus pólusa M-nek a $Q_k, R_k, \ldots S_k$ pontcsoportokra vonatkozólag.

*

II. Mielőtt a (II) tételről szólanánk, legyenek előre bocsátva a következő

Segédtételek. a) «*Ha az $ABCD$ négyszög átlóspontjai*

$$X=(AD, BC), \quad Y=(BD, CA), \quad Z=(CD, AB)$$

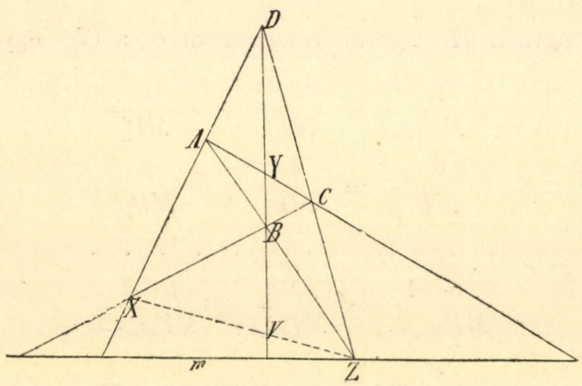
és a Z átlósponton áthuzott M egyenes oly helyzetű, hogy

$$(DXAM) = (CXBM) = k,$$

akkor

$$(CAYM) = (DBYM) = k-1.»$$

Ugyanis (5. ábra) DB, XZ egyenesek metszéspontját V-nek nevezvén:



5. ábra.

$$k = (DXAM) = (DVBM),$$

és

$$(DBYV) = -1,$$

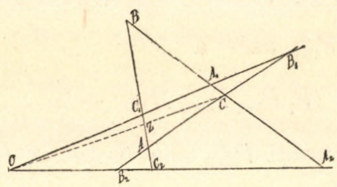
a miből

$$(CAYM) = (DBYM) = (DBYV)\ (DBVM) = k-1.$$

b) *Ha két egyenes valamely ABC háromszög BC, CA, AB oldalát az A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 pontokban metszi, akkor*

$$(BCA_1A_2)\ (CAB_1B_2) = (BAC_1C_2).$$

Ugyanis (6. ábra) ha O az $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ egyenesek metszéspontja; Z pedig az AB, OC egyeneseknek metszéspontja, akkor



6. ábra.

$$(BCA_1A_2) = (BZC_1C_2)$$
$$(CAB_1B_2) = (ZAC_1C_2);$$

innen

$$(BCA_1A_2)(CAB_1B_2) = (BZC_1C_2)(ZAC_1C_2) = (BAC_1C_2).$$

(*Jegyzet.* Az *a)* tétel a négyszög harmonikus tulajdonságának általánosítása, a *b)* tétel pedig az úgynevezett MENELAOS-tételnek általános kifejezései.)

1. Valamely síkban felveszünk n pontot $P_1, P_2, \ldots, P_n$-et és az M egyenest (7. ábra). P_iP_j és az M egyenesek metszéspontját U_{ij}-nek nevezvén, a P_{12}, P_{23} pontokat akkép határozzuk meg, hogy

$$(P_2\,P_1\,P_{12}\,M) = -1, \quad (P_3\,P_2\,P_{23}\,M) = (P_2\,P_3\,P_{32}\,M) = -1.$$

A $P_1\,P_3\,P_{23}\,P_{12}$ négyszög átlóspontjai:

$$P_2 = (P_1\,P_{12},\ P_3\,P_{23}),\quad U_{13} = (P_1\,P_3,\ P_{12}\,P_{23}),\quad P_{123} = (P_1\,P_{23},\ P_1\,P_{12})$$

lévén, az *a)* a segédtétel folytán

$$(P_3P_{12}P_{123}M) = (P_1\,P_{23}\,P_{123}\,M) = -2;$$

de minthogy $P_{23} \equiv P_{32}$, a

$$(P_1\,P_{32}\,P_{321}\,M) = -2$$

egyenletből meghatározott P_{321} pont összeesik P_{123}-mal.

Ha a P_{123} pont projekczióját U_{14}-ből $P_4 P_{23}$ egyenesre, P_{234}-nek nevezzük, akkor

$$(P_4 P_{23} P_{234} M) = -2,$$

és így ha

$$P_{1234} = (P_1 P_{234},\ P_4 P_{123}),$$

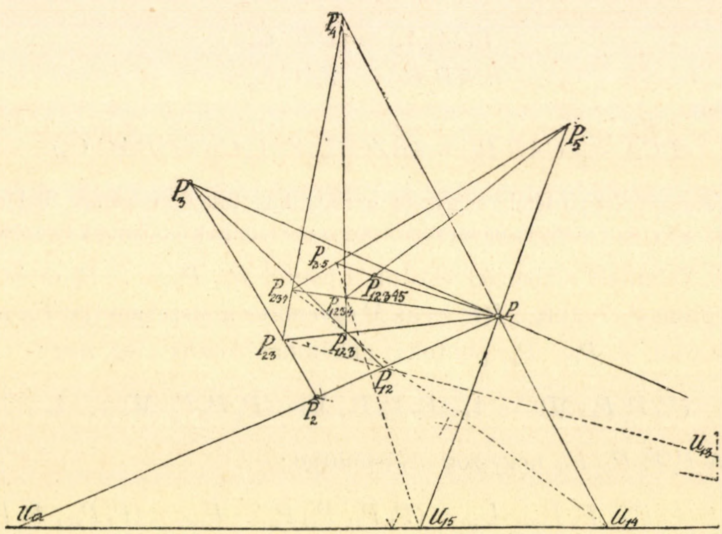
a $P_1 P_4 P_{123} P_{234}$ négyszög révén:

$$(P_4 P_{123} P_{1234} M) = (P_1 P_{234} P_{1234} M) = -3\,;$$

de minthogy $P_{234} \equiv P_{423}$, azért a

$$(P_1 P_{423} P_{4231} M) = -3$$

egyenletből meghatározott P_{4231} pont összeesik P_{1234}-gyel.



7. ábra.

Igy folytatván az eljárást, ha feltételezzük, hogy

$$(P_{n-1} P_{12\ldots n-2} P_{12\ldots n-1} M) =$$
$$= (P_1 P_{23\ldots n-1} P_{12\ldots n-1,1} M) = -(n-2),$$

és a $P_{12\ldots n-1}$ pont projekcziója U_{1n}-ből $P_n P_{23\ldots n-1}$ egyenesre $P_{23\ldots n}$, akkor

$$(P_n P_{23\ldots n-1} P_{23\ldots n} M) = -(n-2).$$

De ha $P_{12\ldots n} = (P_1 P_{23\ldots n}, P_n P_{12\ldots n-1})$, akkor a $P_1 P_n P_{23\ldots n} P_{12\ldots n-1}$ négyszög következtében ((*a*) segédtétel):

$$(P_n P_{12\ldots n-1} P_{12\ldots n} M) = (P_1 P_{23\ldots n} P_{12\ldots n} M) = -(n-1),$$

és ha még feltételezzük, hogy

$$P_{23\ldots n} \equiv P_{n2\ldots n-1},$$

akkor látható, hogy a

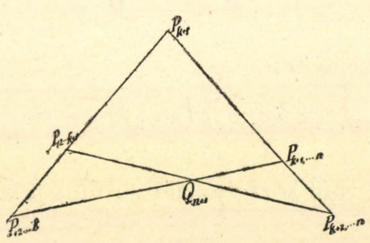
$$(P_1 P_{n2\ldots n-1} P_{n2\ldots n-11} M) = -(n-1)$$

egyenletből meghatározott $P_{n2\ldots n-1}$ pont összeesik $P_{12\ldots n}$-nel. E szerint ugyanazt a $Q_{n+1} \equiv P_{12\ldots n} \equiv P_{n2\ldots n-11}$, pontot nyerjük, történjék a szerkesztés a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ vagy $P_n, P_2, \ldots, P_{n-1}$, P_1 sorrendben felirt pontokból.

2. Hogy a II. tételnek 2. altételét bebizonyítsuk, tegyük fel, hogy

$$(P_{k+2\ldots n} P_{12\ldots k+1} Q_{n+1} M) = -\frac{k+1}{n-(k+1)} \qquad (a)$$

a mi $k=(n-2)$ esetében közvetlen belátható.



8. ábra.

Tegyük fel, hogy a $P_{12\ldots k}$, $P_{12\ldots k+1}$, $P_{k+2\ldots n}$, $P_{k+1\ldots n}$ pontok már meg vannak szerkesztve. Ekkor a két első és a két utolsó pont P_{k+1}-gyel egy-egy egyenesen fekszik (8. ábra) és

$$(P_{k+1}P_{12\ldots k}P_{12\ldots k+1}M)=-k$$
$$(P_{k+1}P_{k+2,\ldots n}P_{k+1\ldots n}M)=-[n-(k+1)],$$

mely egyenletekből

$$(P_{k+1}P_{12\ldots k+1}P_{12\ldots k}M)=k+1,$$
$$(P_{k+2\ldots n}P_{k+1}P_{k+1\ldots n}M)=-\frac{1}{n-(k+1)}.$$

Ha most a $P_{k+1}P_{12\ldots k+1}P_{k+2\ldots n}$ háromszöget a $P_{12\ldots k}$ $P_{k+1,\ldots n}$ és M egyenesekkel átmetsszük, és

$$(P_{1\ldots k+1}P_{k+2\ldots n},\ P_{12\ldots k}P_{k+1\ldots n})=X,$$

akkor a *b)* segédtétel folytán az előbbi egyenletek tekintetbe vételével

$$(P_{k+2\ldots n}P_{12\ldots k+1}XM)=-\frac{k+1}{n-(k+1)},$$

a miből pedig látható (*a*), hogy az X pont a Q_{n+1} ponttal összeesik, vagy más szóval kifejezve, hogy a $P_{12\ldots k}P_{k+1\ldots n}$ egyenes a Q_{n+1} ponton megy át.

Ha továbbá a $P_{k+1}P_{12\ldots k}P_{k+1\ldots n}$ háromszöget a $P_{12\ldots n+1}$ $P_{k+2\ldots n}$ és M egyenesekkel átmetszem, akkor a

$$(P_{k+1}P_{12\ldots k}P_{12,\ldots k+1}M)=-k,$$
$$(P_{k+1\ldots n}P_{k+1}P_{k+2\ldots n}M)=\frac{1}{n-k}$$

egyenletek következtében

$$(P_{k+1\ldots n}P_{12\ldots k}Q_{n+1}M)=-\frac{k}{n-k};$$

s ebből az egyenletből közvetetlenül kitűnik a bebizonyítandó tétel helyessége.

3. és 4. Vegyünk fel ezután a $P_1P_2\ldots P_n$ pontokhoz még egy P_{n+1} pontot a síkban. Ha a következő jelölést használjuk:

$$(U_{k(n+1)}Q_{n+1},\ P_{2\ldots k-1\,k+1\ldots n},\ P_{n+1})=$$
$$=P_{2\ldots k-1,\,k+1,\ldots n+1}=Q_k,$$
$$(P_kO_k,\ P_{n+1}Q_{n+1})=N,$$

akkor az N pont az előbbiek szerint avval a tulajdonsággal bir, hogy

$$(P_{n+1}\, Q_{n+1}\, NM) = (P_k\, Q_k\, NM) = -n.$$

Ebből látható, hogy a P és Q pontok rendszere, valamint a Q és a belőle hasonló úton levezethető a R, S . . . pontok rendszerei az N, M kollineáczió-középpont és tengelyre vonatkozólag kollineárok és hogy a kollineáczió karakterisztikája $-n$, végre hogy végtelen sokszor végzett szerkesztésből származó pontrendszer N-nel esik össze.

Az N pont ily módon, mint három pontnál szokás, az M egyenes harmonikus pólusának nevezhető a $P_1 P_2 \ldots P_{n+1}$ pontokra vonatkozólag.

5. Lássuk most, hogy a (IX) és (X) alatt levő egyenleteknek mi az értelme a jelen esetben.

A (IX) rendszer első egyenletében MP_{12}, MP_1, MP_2, az M és P_1P_2 egyenesek U_{12} metszéspontjának távolsága a P_{12}, P_1, P_2 ponttól, ellenben a második egyenletben előforduló MP_{123}, MP_3, MP_{12}, az M és P_3P_{12} egyenes metszéspontjának U_{312}-nek távolsága a P_{123}, P_3, P_{12} ponttól. E szerint MP_{12}-nek jelentése az első egyenlet szerint $U_{12}P_{12}$ vonaldarab, a második szerint $U_{312}\, P_{12}$ vonaldarab. Ha azonban a (IX) egyenlet első és második egyenletét annak a szögnek α_{12}, α_{312} sinusával osztjuk, a melyet $P_1 P_2 P_{12}$, illetőleg P_3P_{12} az M egyenessel alkot, akkor $MP_{12}\sin.\alpha_{12}$, $MP_1 \sin.\alpha_{12}$, $MP_2 \sin.\alpha_{12}$, $MP_{123} \sin.\alpha_{312}$, MP_3, $\sin.\alpha_{312}$, $MP_{12} \sin.\alpha_{312}$ kifejezések P_{12}, P_1, P_2, P_{123}, P_3, P_{12} pontoknak az M egyenestől mért távolságait jelentik. Ebből látható, hogy ha *a (IX) egyenletrendszerben MP_{ijk} . . . kifejezésnek értelme: P_{ijk} . . . pontnak távolsága az M egyenestől,* akkor két-két egyenletben előforduló egyenlő kifejezésnek egyenlő értelme is van, tehát a belőlük származó (X) egyenlet, evvel az értelmezéssel, a jelen esetben is igaz marad.

E szerint: *Valamely M egyenes harmonikus pólusa, egy az M-en átmenő síkban fekvő és $n+1$ elemből álló P_1, P_2, . . . P_{n+1} pontrendszerre vonatkozólag oly N pont, a melynek NM távolságát az M egyenestől az*

$$\frac{1}{NM}=\frac{1}{n+1}\sum_{1}^{n+1} P_k M$$

egyenlet határozza meg, a hol P_kM, P_k pont távolsága az M egyenestől.

Végül még megjegyzem, hogy mindezek a bizonyítások, a melyeket II. tételről adtam, szóról-szóra érvényesek maradnak akkor is, ha $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ pontok a térben feküsznek és M a tér tetszőleges sikja.

III. Vegyünk fel a térben $n+1$ egyenest $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$-et és még egy M egyenest. Fektessünk M-en keresztül $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ síkokat, a melyek az adott egyeneseket a $P_1^{(\alpha)}, P_2^{(\alpha)}, \ldots P_{n+1}^{(\alpha)}$; $P_1^{(\beta)}, P_2^{(\beta)}, \ldots P_{n+1}^{(\beta)}$; $P_1^{(\gamma)}, P_2^{(\gamma)}, \ldots P_{n+1}^{(\gamma)}$; ... pontokban metszik. Ha M és e pontrendszerekhez az α, β, γ, ... síkokban a II. tétel alapján a $Q_1^{(\alpha)}$, $Q_2^{(\alpha)}, \ldots Q_{n+1}^{(\alpha)}, N^{(\alpha)}$; $Q_1^{(\beta)}, Q_2^{(\beta)}, \ldots Q_{n+1}^{(\beta)}, N^{(\beta)}$; $Q_1^{(\gamma)}, Q_2^{(\gamma)}, \ldots Q_{n+1}^{(\gamma)}$, $N^{(\gamma)}$; ... pontokat szerkesztjük meg, akkor úgy a $Q_k^{(\alpha)}, Q_k^{(\beta)}, Q_k^{(\gamma)}, \ldots$ mint az $N^{(\alpha)}, N^{(\beta)}, N^{(\gamma)}, \ldots$ pontok egy-egy egyenesen Q_k-n és N-en feküsznek.

Ugyanis a

$$(P_2^{(\alpha)} P_1^{(\alpha)} P_{12}^{(\alpha)} M)=(P_2^{(\beta)} P_1^{(\beta)} P_{12}^{(\beta)} M)=(P_2^{(\gamma)} P_1^{(\gamma)} P_{12}^{(\gamma)} M)=\ldots -1$$

egyenletből meghatározott $P_{12}^{(\alpha)}, P_{12}^{(\beta)}, P_{12}^{(\gamma)}, \ldots$ pontok a P_1, P_2, M egyenesen átmenő hiperboloidnak azon P_{12} alkotóján feküsznek, a mely M-et a P_1, P_2-től harmonikusan elválasztja. Ha már most felteszszük, hogy a $P_{12\ldots n-1}^{(\alpha)}, P_{12\ldots n-1}^{(\beta)}, P_{12\ldots n-1}^{(\gamma)}, \ldots$ pontok egy $P_{12\ldots n-1}$ egyenesen feküsznek, akkor az

$$(P_n^{(\alpha)} P_{12\ldots n-1}^{(\alpha)} Q_{n+1}^{(\alpha)} M)=(P_n^{(\beta)} P_{12\ldots n-1}^{(\beta)} Q_{n+1}^{(\beta)} M)=$$
$$=(P_n^{(\gamma)} P_{12\ldots n-1}^{(\gamma)} Q_{n+1}^{(\gamma)} M)=-(n-1)$$

egyenletből meghatározott $Q_{n+1}^{(\alpha)}, Q_{n+1}^{(\beta)}, Q_{n+1}^{(\gamma)}$ pontok a $P_n, P_{12\ldots n-1}$, M egyeneseken átmenő hiperboloid egy Q_{n+1} alkotóján vannak, s hasonlókép a

$$(P_{n+1}^{(\alpha)}\,Q_{n+1}^{(\alpha)}\,N^{(\alpha)}M) = (P_{n+1}^{(\beta)}\,Q_{n+1}^{(\beta)}\,N^{(\beta)}M) = (P_{n+1}^{(\gamma)}\,Q_{n+1}^{(\gamma)}\,N^{(\gamma)}M) = -n$$

egyenletekből meghatározott $N^{(\alpha)}$, $N^{(\beta)}$, $N^{(\gamma)}$, . . . pontok.

A P_k és Q_k egyenesek e szerint *axialis-kollineár* rendszert határoznak meg, a melynek karakterisztikája:

$$(P_k Q_k N M) = -n.$$

Az N egyenest az előbbiekkel analog M egyenes polárisának nevezhetjük, a P_1, P_2, . . ., P_{n+1} egyenesekre vonatkozólag.

Klug Lipót.

A NYELVSÍPOK HANGTÜNEMÉNYEI.

A Math. és Phys. Lapok IV. kötetében * az ajaksípok hangjelenségeinek magyarázatára vezető oly nézetemet ismertettem meg, melynek segélyével nemcsak az itt föllépő összes főbb illetve ismertebb, hanem számos mellékjelenség okáról is sikerült a legszigorubb következetességgel beszámolnom.

Feladata lesz most már e soroknak kimutatni, hogy nézetem nemcsak az ajak, hanem a nyelvsípoknak, még pedig azok legbonyolultabb hangtüneményeinek megfejtéséhez is biztos kulcsot szolgáltat, sőt hogy elméletem több e téren jelenleg általán elterjedt, a tapasztalattal ellentmondásban álló téves nézet helyreigazítását is teszi lehetővé.

Mint az ajaksípok hangjelenségeinek tárgyalásánál, úgy itt is figyelmünket a következő három körűlményre fogjuk irányítani u. m. *a)* mi okozza a hang keletkezését e sípokban ? *b)* mikép alakul meg az alaphang állóhulláma és *c)* mily magasságú alaphangban szólalhatnak meg egyáltalán a különböző berendezésű nyelvsípok és mely módosulások állanak be abban a sípcső hosszának vagy a befuvás erősségének változtatása által ?

1. A hangébresztés a nyelvsípokban.

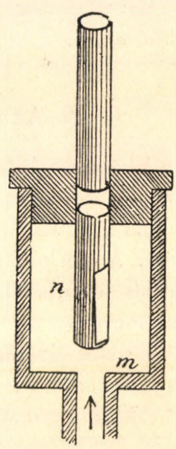
A hang keletkezését a nyelvsípokban ez idő szerint általában úgy magyarázzák, hogy az *m* légkamarába (1. ábra) behatoló légáram a levegőt itt megsürüsítvén, ez által a nyelvet az *n* sípcsőre vagy sípcsőbe szorítja ; e közben azonban a sípcsőbe behatolt első léglöket az ezen csőben lévő légoszlopot álló rezgésre is indította és a nyelv részint saját rugalmassága, részint pedig az ébresztett léghullám lökései folytán visszatéríttetik a légszekrénybe s így egy rezgést végezvén, megkezdi a másodikat ugyanazon erők ugyanolyan működése folytán, mint az elsőt. E szerint tehát a nyelv rezgését a légszekrény sürített levegőjének álló rezgése s a nyelv rugalmassági erejének visszahatása létesítik.

Vizsgáljuk meg, elégségesek-e a nyelv rezgő mozgásának előállítására ezen okok ; tegyünk egy-két kisérletet!

Vegyük ki a sípcsövet a légszekrényből s egy kautsukcső végét laposra szorítsuk össze, annyira, hogy nyilása épen a nyelv és sípcső nyilásához illjék, azután fujjunk rajta át heves légáramot s a síp megszólal, pedig e légáram egészben véve a sípcsőbe hatolt, tehát a nyelv külső felére sürített légnyomást nem gyakorolhatott.

Ha továbbá a nyelvet a sípcsőről is eltávolítjuk és egy megfelelő nyilásu keretre erősítjük, az előbbihez hasonló eljárás által a nyelv szintén megszólal, habár ekkor a sípcsőben keletkezhető álló hullám hatása is kiesik a számításból.

Különben is, mihelyt a légszekrény levegője a sürítés azon fokát elérte, melyben önmaga képes a nyelvet egyensulyi helyzetéből kiterelni, már elégséges arra is, hogy a nyelv visszatérését megakadályozza, annál is inkább, mert a nyelv becsapódása után a fujtatóból a légszekrénybe nyomuló lég csakis az itt levő lég sürűségét s így ennek feszítő erejét növelheti. És valóban, ha kissé erősebben légáramot hajtunk a légszekrénybe, a nyelv a nyilás széléhez, vagy a sípcső belsejébe szoríttatik és rezgő mozgásba nem kerül.



1. ábra.

Látnivaló e kisérletből, hogy a nyelv légszekrény és sípcső, vagyis külső sürített lég és belső állórezgésű légoszlop nélkül is megszólal, tehát egyedüli s valódi okát a nyelv rezgésének e két tényező nem képezheti.

Véleményem szerint az ok a nyelv mellett a sípcsőbe rohanó légáram szivóképességében van. Midőn ugyanis a nyelvsíp légszekrényébe fúvunk egyrészt a szekrényben lévő levegőt megsüritjük, másrészt a nyelv mögött levő hasadékon át a sípcsőbe légáramot hajtunk; ez az előtte terjedő légrétegekbe ütközvén, itt ugyan süritést okoz, maga körül és mögötte azonban szivóképessége, azaz csekély aerodynamikai nyomásánál fogva ritkulást idéz elő. A nyelv most részint a szekrényben megsüritett lég nyomása, részint a sípcsőbe hajtott légáram szivása folytán a sípcső felé hajtatik; midőn azonban a nyelv a nyilást eléri, a szivást eszközlő légáram megszakadt, s igy az egyik erő működése beszüntettetvén, a nyelv rugalmasságánál fogva eredeti helyzetébe ismét visszatérhet, hogy az előbb emlitett s ujra fellépő szivó és nyomó erők hatása alatt rezgését folytassa.

Ezen nézet, azt hiszem, az említett kisérletek alapján bővebb magyarázatra és bizonyítgatásra nem szorul, legalább egyelőre; a későbbiekben pedig látni fogjuk, hogy milyen könnyen és világosan lehet belőle a sípok hangtüneményeinek még azon bonyolult eseteit is megfejteni, melyeket eddig vagy épen nem, vagy igen hiányosan magyaráztak.*

Itt csak azon esetre akarok még vonatkozni, midőn a nyelvsípokat nem fuvás, hanem szívás által szólaltatjuk meg.

Ezen alkalommal először is a levegőt a légkamrából szivjuk ki; ezt a sípcsőben levő levegő pótolni igyekezvén, a nyelvet a légszekrény felé nyomja és egyuttal a légszekrénybe ömlik, miáltal a sipcsőben hasonlókép légritkulás támad s a nyelv rugalmasságánál fogva ismét visszacsapódik.

Ennyit röviden a nyelv rezgő mozgását vagyis a síp megszólalását előidéző okról.

2. Az alaphang hanghullámának megalakulása.

A sípcsővel felszerelt nyelvsíp megszólalásakor tudvalevőleg három hangforrás szerepel, u. m.: a nyelv rezgése, a sípcsőbe periodikusan behatoló légáramok lökései és végre a sípcsőben foglatt légoszlop álló rezgése. A periodikus légrohamok a másik két tényező rezgési állapotát tartják fenn, ezek együttesen pedig ismét a síp hangmagasságát határozzák meg.

Nézzük először a sípcső légoszlopának rezgési állapotát. Erre nézve egyesegyedül a határrétegek rezgési állapota irányadó.

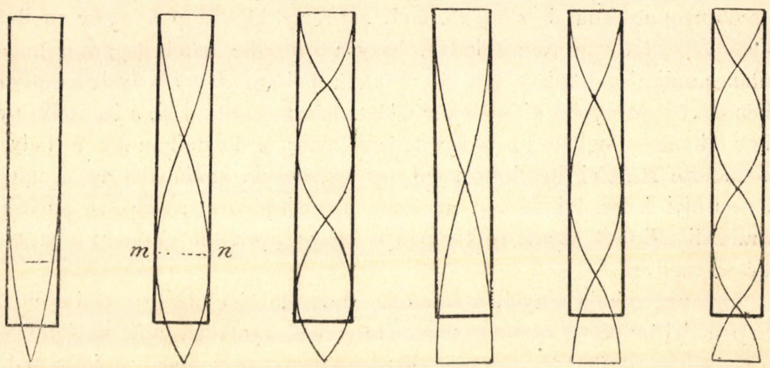
Valamint a sípcső felső végénél vagy legalább ahoz igen közel csak természetes sürüségű réteg alakulhat, úgy hasonlókép a sipcső fenekén, — mint azt már az ajaksípokról írt értekezésemben kimutattam — csak olyan réteg foglalhat helyet, melynek rezgési állapota a sipcsőbe periodikusan tóduló légáram ritkulási és sürüségi változataival, nemkülönben a légrészecskék mozgásirányával teljesen megegyez. Minthogy pedig befuvás alkalmával a légáram okozta ritkulásban a légrészecskék a sipcsőben fölfelé, szivás esetében pedig lefelé haladnak, következik, hogy a befuvás által előállitott álló hullámokat képzelt csomó (2., 3., 4. ábra), *a szivás által létesített hullámokat pedig képzelt rezgési maximum fogja jellemezni.* (5., 6., 7. ábra stb.) *Az utóbbi hullámalakok összehasonlitása az előbbi csoporttal már megfejti, azon ismeretes, de*

---

* A nyelvsípok megszólalására vonatkozó e nézetem, melyet már 1882-ben a Zeitschrift f. d. Realschulwesen czimű folyóiratban közöltem, kisérleti beigazolása daczára sem talált tudtommal az azóta megjelent akusztikai szakművekben visszhangra; csak legujabban L. A. Zellner «Vorträge über Akusztik» (Wien, 1892.) czimű munkájában fejti meg a fent előadott nézetemmel egyező módon a nyelv rezgésének megindítását.

eddigelé még ki nem magyarázott tüneményt, hogy a sípcsővel felszerelt nyelvsíp miért ad befuváskor mindig mélyebb, sziváskor pedig mindig magasabb hangot.

A sípcső álló hullámainak ilyszerü alakulása mikor és mily behatással van a nyelv rezgéseinek a számára, s így a hangmagasságra, könnyű belátni, hogy a nyelv minőségétől és a sípcsövek berendezésétől függ. Ez okból további vizsgálódásainknál külön kell szemügyre venni a lágy- és külön a kemény nyelvű sípokat, és amott külön azokat, melyek légszekrénynyel vannak ellátva, és azokat ismét, melyek csak fuvókával birnak. Lágynak tudvalevőleg olyan nyelvet nevezünk, mely rugalmasságánál



2. ábra. 3. ábra. 4. ábra. 5. ábra. 6. ábra. 7. ábra.

fogva ép úgy képes önálló rezgésre, mint együttrezgésre egy légoszlop álló rezgéseinek ráhatása által; keménynek ellenben oly nyelveket mondunk, melyek természetes rezgés számában még akkor sem történik változás, midőn a nyelv közvetlen szomszédságában keletkezett állóhullámban egyoldalúlag csomóréteg alakult.

3. Az alaphang magassága és magasságnak a sípcső hossza, vagy a a befuvás erősségének változtatása következtében előálló módosulása.

A) Lágy nyelvű sípok.

a) Légszekrénynyel ellátott lágy nyelvü sípok. Ha valamely sípot az 1. ábrában jelzett berendezés mellett lágy nyelvvel látunk el és befuvás által indítjuk hangzásra,* a sípcsőben foglalt légoszlop az előrebocsátottak szerint általában csak a 2., 3., 4-ik ábrában feltüntetett rezgési alakok egyikét veheti fel, és ezek közül mindenesetre azt, mely sajátos rezgését legkevésbbé fogja korlátozni. Hogy e korlátozást helyesen megitélhessük, szükséges kutatnunk, hogy az álló rezgésben levő légoszlop főváltozatai minő hatással vannak a nyelvre annak fő rezgési helyzeteiben.

Minthogy a légoszlopnak a nyelvvel határos rétegei a nyelv rezgő mozgását mind irány-, mind sebességre nézve elsajátítani kényszerülnek, következik, hogy midőn a nyelv legnagyobb kitéréseit elérte, ugyanakkor a lég részecskéi is rezgési irányukat megváltoztatják, s így a nyelv ezen helyzetben azon legnagyobb sürűségi, illetőleg ritkulási változatokból eredő nyomásoknak lesz kitéve, melyre a rezgő légoszlop a nyelv mellett épen képesítve van. Nem feledve, hogy a sípcsőbe hatolt légáram maga után mindig légritkulást idéz elő, könnyű belátni, hogy a nyelv a sípcsőben elért legnagyobb kitérésekor a léghullámnak ritkulási, a légszekrényben elfoglalt legkülsőbb helyzetében pedig a léghullámnak e helyre vonatkozó sürítési maximumával fog összeesni; midőn végre a nyelv egyensúlyi helyzetén átcsap, az egész légoszlopban természetes sürűség uralkodik. Ennek az a következménye, hogy a nyelv mozgásában folytonos késést szenved.

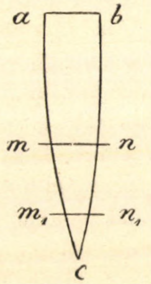
Ugyanis, midőn a nyelv a sípcsőben mozog, saját rugalmassági ereje őt egyensúlyi helyzete, vagyis a légszekrény felé gyorsítja, míg ugyanekkor a sípcsőben ritkított lég őt épen ellenkező irányban vontatja; midőn pedig a nyelv a légszekrényben halad, rugalmassága a sipcső felé tereli, a léghullám sürűsítési phasisa pedig a légszekrény felé tolja. Mindkét esetben tehát a nyelv rugalmassága akadályokkal küzd s így a rezgésnek lassúdnia kell, vagyis hangja mélyebb lesz.

Vegyük már most vizsgálat alá, hogy *minő változásokat szenved a nyelv eredeti hangja az esetben, midőn a sipcsövet fokozatosan meghosszabítjuk. Ennek a kérdésnek tárgyalása annál inkább vonzott, mert tárgyalását az akusztikának előttem ismeretes irodalmában nem találtam.*

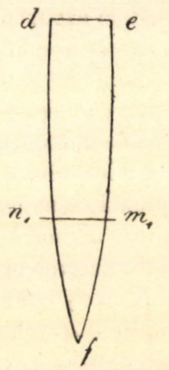
Legyen *abc* (8. ábr.) azon álló léghullám λ hosszának fele, mely léghullám a nyelvvel egyidejűleg rezeg. Egy tekintet ezen ábrára azonnal meggyőz bennünket arról, hogy mindaddig, míg a sípcsövet $\lambda/4$-nél vagyis $a\ b\ m\ n$-nél még kisebbre választjuk, a nyelv alaphangjában feltünő vál-

* Miután a zenészetben a nyelvsipok csakis befuvás által hozatnak hangzásba, ezentúl kizárólag csakis az ily módon keltett hangtünemények fejtegetésére fogunk szorítkozni.

tozás nem jöhet létre, minthogy az álló léghullámnak a sípcsőben fejlődő része a nyelv közelében különös ritkulást vagy sürűsitést még nem idéz elő s így a nyelv és az álló hullám rezgéseinek isochronismusa még nem zavartatik meg. De a mint a sípcső fokozatos meghosszabbítása alkalmával $\lambda/4$-et túllépjük, a sípcsövet pl. *m' n'*-ig meghosszabbítván, a léghullámnak a nyelv közelében fejlődő sürűségi változatai a nyelv rezgő mozgására most már befolyás nélkül nem maradhatnak és a nyelv rezgése korlátoltatik. Hogy azonban a nyelv és légoszlop rezgéseinek isochronismusa továbbra is fennmaradjon, kell, hogy most a sípban egy hosszabb *d e f* hullámnak megfelelő, *d e m' n'* hullámrésze (9-ik ábra) képződjék, miáltal a síp hangja mélyebbre száll, a nyelv és léghullám pedig ismét egybevágóan rezeg.



8. ábra.



9. ábra.

A sípcsőnek minden ujabb ily meghosszabítása — hasonló módon — a nyelv eredeti hangjában ujabb mélyülést hoz létre, de egyszersmind az álló hullám képzelt rezgési csomója is egyre a sípcső fenekéhez közelebb és közelebb vándorol, miután a nyelv rezgő mozgásának lassítására annak közvetlen szomszédságában az álló hullám részéről mindig jelentékenyebb sürűsítési és ritkulási változatok is fognak igénybe vétetni.

A nyelv hangjának fokozatos mélyedésekor mindannyiszor az álló hullám képzelt részének hosszát meghatározván, Weber W. kisérleteiből merített adatok nyomán, azon nevezetes tapasztalatra jutottam, hogy mihelyt a nyelv eredeti hangmagasságának alászállása egy egész hangot csak valamivel meghaladott, minden következő új mélyülés esetében a léghullám ezen része egy és ugyanazon sipra nézve, minden körül-*

* Lásd A. Wüllner: Experimentalphysik. I. Bd. pag. 625.

mény meghagyásával és csak a sípcső hosszának változásával — hasonlóan mint az ajaksípoknál — *állandó értéket vesz fel.*

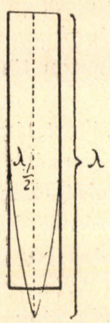
Ami pedig ezen képzeleti hullámrész hosszát különböző nyelvsípokra vonatkozólag illeti, azt találtam, hogy ez leginkább a nyelv rugalmasságának fokától függ, mivel könnyű belátni, hogy valamivel keményebb nyelv rezgő mozgásának ugyanoly mérvű fékezésére az álló hullám részéről mindenkor jelentékenyebb, a puhább nyelvre nézve pedig kisebb sürűsítési és ritkulási változatok fognak igénybe vétetni, és így az első esetben a képzeleti hullámrész valamivel kisebb, az utóbbi alkalommal pedig valamivel nagyobb értéket kényszerűl felvenni; így pl. ezen képzeleti hullámrész hosszát a Weber-féle kisérletekből meghatározva 4,5 cm-nyinek, — saját észleleteim nyomán pedig ugyanazt különböző sípokra nézve 1,8 és 4 cm. között változónak találtam.

Nem hagyhatom azonban megjegyzés nélkül, hogy a nyelv rugalmasságán kivül a sípcső átmérője is befolyással van a képzeleti hullámrész hosszára és pedig minél szükebb a cső, annál kisebb lesz egy és ugyanazon nyelvre nézve a képzeleti hullámrész hossza is, mi onnét magyarázható, hogy a szükebb csőben a behatoló léglökemek ott gyorsabb és tökéletesebb ritkulást létesítvén, e kettős okból az álló hullám megrövidülését illetőleg a képzeleti csomónak a sípcső fenekéhez való közeledését teszik szükségessé, miről nagyon könnyen meggyőződhetünk, hogy ha egy lágy nyelvvel ellátott sípcsőre egymásután szükebb és szükebb toldalék csöveket alkalmazunk, mely esetben a nyelv hangjának — bár csekély — de azért mégis eléggé észrevehető emelkedését fogjuk tapasztalni.

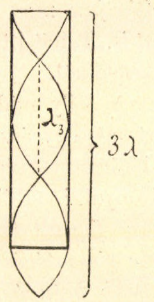
Ha tehát a fentebbiek szerint a sípcső meghosszabbításában már anynyira előrehaladtunk, *hogy a sípcső hossza a hullám képzeleti részével együtt λ hosszaságot ért el, akkor a síp okvetlenül a nyelv eredeti hangjának mélyebb octávájában fog megszólalni* (10-ik ábra), *és egyszersmind a nyelv rezgésének az álló léghullám által okozott korlátozása a maximumát érte el.* Ugyanis a sípcső hosszát még valamivel megtoldván, a síp hangja vagy az oktávánál még mélyebbre szállhat, vagy pedig a sípcsőben levő légoszlop a sípcső fölött terjedő légrétegek álló rezgéseinek némi hozzájárulásával a 3-ik ábrában kijelölt rezgési alakot sajátítja el, oly megszorítással azonban, hogy a rezgő légoszlop *m n* rezgési maximuma minél közelebb a sípcső fenekéhez huzódjék, anélkül azonban, hogy azt tullépné, s így képzeltté váljék; miután azonban a nyelv rezgésképessége az álló léghullám által már felére van leszállítva és a rezgő légoszlop a nyelv rugalmassági erejének még nagyobbmérvű fékezésére kellő képességgel már alig rendelkezik, a leghullám természetesen az utóbbi alakban fogja rezgését folytatni, vagyis a síp hangja a nyelv eredeti hangjára ismét visszaugrik.

A sípcsőnek $\lambda + \lambda/4$-ig terjedő meghosszabbítása alkalmával a nyelv eredeti hangja ép úgy és ugyanazon okból változatlan marad mint ezt a sípcsőnek 0-tól $\lambda/4$-ig terjedett meghosszabbításánál tapasztaltuk; mihelyt azonban a sípcsövet ismét $\lambda + \lambda/4$-en túl meghosszabbítjuk, a nyelv eredeti hangmagassága ujra alászáll *és midőn a sípcső hossza a képzeleti hullámrészszel kiegészítve 2λ-val egyenlővé lett, a síp a nyelv eredeti hangjának mélyebb quartjában fog hangzani, miután a 11-ik ábra szerint, mely a légoszlopnak ezen esetre vonatkozó rezgési állapotát mutatja be $2\lambda = 3\lambda_2/2$, azaz $\lambda = 3\lambda_2/4$.*

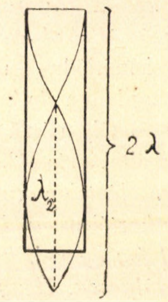
A sípcső meghosszabbítását azután még 2λ-án túl is folytatván, az említett hangmélyülési tünemények ujra ismétlődnek, *csakhogy midőn a*



10. ábra.



11. ábra.



12. ábra.

meghosszabbításban 3λ-ig jutottunk, a nyelv hangja már csak a kis terczig fog leszállani, minthogy ez esetben $\lambda = 5/6\lambda_3$-al, mint azt a 12-ik ábra világossá teszi, s i. t.

Ezek alapján tehát egész általánosságban kimondhatjuk, hogy *az oly sipcsövekre nézve, melyek hossza $n\lambda$ és $n\lambda + \lambda/4$ határok között választatott, n-nek bármily pozitiv egész számu értékére nézve — a zérust is beleértve — a síp mindig a nyelv eredeti hangján szólal meg; a sípcsőnek pedig $n\lambda + \lambda/4$-en túl eszközölt minden meghosszabbítása által a nyelv eredeti hangja le fog szállíttatni, még pedig oly módon, hogy a képzeleti hullámrészszel λ, 2λ, 3λ, . . . $n\lambda$ hosszuságra kiegészített sípcsövek alkalmazásával nyert hangok rezgésszámai úgy állanak a nyelv eredeti hangjának rezgésszámához, mint:*

$$1:2,\ 3:4,\ 5:6,\ 7:8 \text{ stb.},$$

oly törvény, mely a nyelvsípokban létrejött hangalakulásra vonatkozó magyarázatunk közvetlen eredményeként kiderült s Weber W. kísérletei által már régtől fogva igazolást nyert.

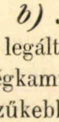
Az eddigi fejtegetésekből egyszersmind az is kitünik, hogy egy bizonyos hosszúságú sípcsővel felszerelt ily nyelvsíp befuvás által csak egyetlen egy hangot adhat, és pedig azt, melynek a sípcsőben terjedő hulláma a nyelv eredi hangját legkevésbbé képes módosítani.

Mindazonáltal a síp ezen hangjának magasságában csekélyebb változást az által idézhetni elő, hogy a sípba kellőnél erősebben vagy gyengébben fúvunk, a mi következő módon fejthető meg: *erősebb befuvás alkalmával a sípcsőbe hevesebb légáram tódulván, ezen légáram nagyobb szivóképességénél fogva egyrészt a nyelv rezgő mozgásának megindítására szükségeltető ritkulást a sípcsőben gyorsabban létesíti, másrészt pedig az említett jelentékenyebb ritkulás következtében a léghullám képzelt csomóját a sípcső fenekéhez közelebbre vonulni is kényszeríti, mi által a sípcsőben foglalt léghullám megrövidül és a síp hangmagassága emelkedik. Hasonlóképen fejthetjük meg a síp hangjának gyengébb befúvás által okozott mélyülést is.* Tehát itt teljesen ugyanazon tünemények ismétlődnek, mint az ajaksípoknál.

Azonban a síp hangmagasságának ily módon eszközölt változtatása csak igen csekély mérvű lehet; mert míg egyrészt a fokozatos gyengébb megfuvás által a sípcsőbe szorított légáram csakhamar a síp nyelvének mozgatására elégtelen erőnek fog bizonyulni, addig másrészt *erősebb befúvás következtében a légkamrában foglalt levegő nemsokára oly sürüséget fog nyerni, hogy a nyelv visszatérését a sípcsőből teljesen megakadályozza. Hogy tehát erősebb befuvás által valamely lágynyelvű sípban magasabb hangokat tudjunk létesíteni, okvetlenül szükséges arról gondoskodnunk, hogy a légkamra eltávolításával a légáramot egyenesen a nyelv mögötti hasadékba vezessük, a mint ez valóban történik is.*

b) A fuvókás hangszereknél. A lágy nyelvű sípok fuvókáját a legáltalánosabb alakjában nyerjük, ha az 1. ábrában lerajzolt nyelvsíp légkamrájából a sípcsövet kivesszük és azt rövidebbre szabva, alsó végének szűkebb ékalakot adunk úgy, hogy a sípba fúvó egyén azt kényelmesen ajkai közé illeszthesse (13-ik ábra).

Ezen nyelvsípok berendezésének főfeltétele, hogy a fuvókának a nyelv átellenében levő fala minél kisebb távolban legyen a nyelvtől, hogy így a fuvókába hatoló légáram a nyelv mögött minél tökéletesebb ritkulást létesíthessen, annál is inkább, minthogy most a nyelv az ellenkező oldalról a sűrített levegőből származott azon nyomást, mely a légszekrényes sípoknál a nyelv rezgő mozgásának megindításához és fentartásához hozzájárult, most majdnem teljesen nélkülözi.



13. ábra.

Az ezen sípok megszólalása alkalmával a sípcsőben keletkezet hullámok alakját vizsgálván, mindenekelőtt megjegyezhetjük, *hogy miután az álló hullámok befuvás által ébresztettek, általában ismét csak a 2-ik, 3-ik, 4-ik stb. ábrák által képviselt alakok egyikében rezeghetnek; miután pedig a csekélyebb tértartalmú fuvókába hatolt légáram innét a levegőt jórészt magával ragadva ez uton a fuvókában igen nagy mérvű ritkulást okoz, következik, hogy a nyelv helyén az álló léghullámra nézve okvetlenül rezgési csomónak, vagy ezzel legalább is igen megegyező rezgési állapotnak kell létesülnie.* Ha tehát az ily sípban keletkezhető alaphang hullámhosszát λ-val, a síp hosszát pedig l-el jelöljük, leszen $\lambda=2l$ és a zönge magasságára nézve nyerjük: $n=c/4l$. Míg azonban a légszekrényes sípoknál, bizonyos meghatározott hosszúságú sípcsőre nézve csak egyetlen egy — részint a sípcső hosszától, részint pedig a nyelv rugalmasságától függő — hangot voltunk képesek előállítani, addig a fuvókás sípoknál erősebb és erősebb befuvás által a 2-ik, 3-ik, 4-ik stb. ábrákban kijelölt rezgési alakoknak megfelelőleg a zöngék egész sorozatát hozhatjuk létre, *miután a lágy nyelvű sípok ily berendezésével a légsürítésből származott azon akadály, mely a légszekrényes lágy nyelvű sípoknál a nyelv gyorsuló rezgésének oly hamar határt szabott, itt mellőzve van.* Tudva pedig azt, hogy az ezen sípokban rezgő légoszlopnak egyik csomója okvetlenül a fuvóka végére fog kerülni, a 2-ik, 3-ik, 4-ik stb. ábrákban jelzett léghullámok képzeleti részei ez esetben el fognak tünni és a képzeleti csomóból valódi csomó lesz; e szerint oly hangokat leszünk képesek előállítani, melyek rezgés száma a fentebb képletileg meghatározott alaphang rezgési számához úgy állanak mint a páratlan számok. Hogy pedig maguk a lágy nyelvek ily bő határok közt terjedő hangok rezgésszámára a velök határos léghullám sürítési és ritkulási változatai által valóban kényszeríthetők, onnan is kitünik, hogy ezen sípoknak fuvókájába — minden sípcső alkalmazása nélkül — egyre erősebben fujván, a nyelv mögötti hézagban megfelelőleg gyorsabban alakuló ritkulások következtében a zöngék ép oly szakadatlan mint terjedelmes sorozatát állíthatni elő.

Tudvalevőleg a klarinét, a fagott és az oboa fuvókájában nádból metszett lágy nyelvek vannak alkalmazva; sárgaréz, vagy alpacca nyelvek itt nem alkalmazhatók, miután ezek befúvás által megnedvesedvén, kellemetlenséget okoznának; a trombitában és kürtben ezen lágy nyelveket a fuvó egyén ajkai pótolják.

Ha ezen műszerek fuvókáit hengeralakú sipcsövekkel látjuk el, akkor megfelelő módon gyakorolt erősebb és erősebb befuvás által a fentebbi törvény által kifejezett hangsorozatot bizonyos terjedelmig állíthatjuk elő.

B) A kemény nyelvű sípok.

Mivel a kemény nyelvek rezgő képességét nem korlátozzák az álló hullámban létrejött sürűsítési és ritkulási változatok, elméletünkből igen egyszerű módon leszármaztatható azon tétel, mely szerint ezen nyelvfaj — akár légszekrényben alkalmazva akár pedig csak fuvókára erősítve — csakis oly sípcsövek alkalmazásakor szólalhat meg, melyek hossza $n\lambda/2$ és $(n+1)\ \lambda/2$ határok közé esik, a mely kifejezésben t. i. λ a nyelv sajátos hangjának megfelelő álló léghullám hosszát, n pedig egy tetszésszerinti páros számot — a zerust is ide értve — jelent. A sípcsőnek ugyanis minden más hosszára nézve a sípcsőben vagy a nyelv eredeti hangjával megegyezően rezgő léghullám oly részének kellene létrejönnie, melyben a sípcső fenekétől számítva legelőbb rezgési csomóra akadunk, illetőleg képzelt rezgési maximumot találunk, vagy pedig egyátalán oly hullámnak kellene képződnie, mely a nyelvvel nem rezeg többé egyidejüleg; mivel azonban egyrészt a sípcsőben azon alkalommal, midőn abban a légoszlopot befuvás által indítjuk rezgésre, nem támadhat oly hullám, melyet képzeleti rezgési maximum jellemez, másrészt pedig a kemény nyelv rezgésképessége egy álló léghullám rezgési változatai által sohasem szenvedhet módosulást, következik, *hogy a síp ily körülmények között hangot nem adhat.*

Miután több akusztikai szakműben e tárgyról ama téves nézetet találtam feljegyezve,* hogy a keménynyelvű sípok, különböző hosszúságú sípcsövek alkalmazása mellett semmi vagy csak nagyon csekély változást szenvednek hangmagasságukban az együttrezgő légoszlop által, jó lesz az említett téves nézet megczáfolására kisérleteim egyikének eredményét közölni. Egy légkamrával berendezett sípban alpaccából kalapált és a normális a-ra hangolt kemény nyelvet alkalmaztam.

Ezen hangnak megfelelő álló rezgésű léghullám hossza 16°C-nál 0,386 m. A midőn ezen sípot fokozatosan hosszabb és hosszabb sípcsövekkel szereltem fel, azt tapasztaltam, hogy a síp csak oly csövek alkalmazása esetében szólalt meg, melyek hossza következő határok közé esett:

0	cm	... ...	18,2	cm,	azaz 0 és	közel $\lambda/2$		közé
37,5	«	... ...	58	«	«	« $2\lambda/2$	és $3\lambda/2$	közé
76	«	... ...	95·5	«	«	« $4\lambda/2$	« $5\lambda/2$	«
115	«	... ...	136	«	«	« $6\lambda/2$	« $7\lambda/2$	«

került; *minden egyébb hosszúságú sípcsőre nézve ellenben a síp néma maradt.*

---

* E tévedésre már 1882-ben a Zeitschrift f. d. Realschulwesen cz. folyóiratban figyelmeztettem az akusztikával foglalkozó szaktudósokat.

Megjegyzem azonban, hogy valahányszor a sípcső meghosszabbításában közel jutottam a felsőbb határértékekhez, a síp már nehezen és csakis gyengébb megfuvásra szólalt meg, minek magyarázatát abban találom, hogy erősebb befuvásra a sípcsőbe hatoló léglöketek az álló léghullámmal együtt a nyelv közelében oly mérvű ritkításokat létesítenek, melyek a nyelv rugalmasságára és így annak eredeti rezgésszámára zavarólag befolynak, anélkül azonban, hogy azt szabályozhatnák is.

Hogy pedig a fent bemutatott kisérleti eredmény egyszersmind abbeli nézetemet, mely szerint a síp csak akkor szólalhat meg, *midőn a sípcsőben keltett álló hullám változatai a sipcsőbe hatoló léglöketek által ott mechanikailag előidézett változatokkal teljesen megegyeznek*, nyomós tapasztalati érvvel is támogatja — úgy hiszem — kétséget nem szenvedhet.

Dischka Győző.

MEGOLDOTT FELADATOK.

24. *Ha a tetraéder szemben fekvő élei egymásra merőlegesek, bebizonyitandó, hogy akkor az élek középpontjai és a szemben fekvő élek legkisebb távolságú pontjai oly gömbön feküsznek, melynek középpontja a tetraéder súlypontjában van.* (VÁLYI.)

Hatodik megoldás Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.

Legyenek a tetraéder szögpontjai $A_1A_2A_3A_4$, a megfelelő csúcsokon átmenő magasságok: a_1, a_2, a_3, a_4. Az $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$ háromszögek mindegyikében a súlypont, magasságpont és a körülírt kör középpontja egy egyenesben, az EULER-féle egyenesben vannak. Jelöljük e pontokat az $A_kA_lA_m$ háromszögben S_i. M_i, O_i betűkkel.

Tudvalevőleg:

$$O_iS_i : O_iM_i = 1 : 3.$$

A jelzett háromszög oldalain a magasságok talppontjai s az oldalak felező pontjai a Feuerbach-kör kerületén feküsznek, a mely kör középpontja szintén az EULER-féle egyenesben van. Legyen e pont F_i.

Mint ismeretes

$$F_iO_i = F_iM_i.$$

Az előbbi proporczió és az utóbbi egyenlőségből következik, hogy:

$$O_iS_i : O_iM_i = F_iS_i : F_iM_i$$

azaz a FEUERBACH-kör középpontja az S_iM_i távolságot az O_i ponttal harmonikus viszonyban osztja, a négy pont tehát két harmonikus pontpárt alkot

$$3F_iS_i = F_iM_i$$
$$F_iS_i = S_iF_i$$

egyenlőségeket összeadván lesz

$$4F_i S_i = S_i M_i. \qquad 1)$$

Bármely élen át a szemben fekvőre merőleges sík tartalmazza az élek legrövidebb távolságát. A legrövidebb távolságok végpontjai feladatunk esetében, az illető háromszöglapokban ez élekhez tartozó magasságvonalak talppontjai, a melyek az illető lapokhoz tartozó FEUERBACH-kör kerületének pontjai.

Az $A_k A_l A_m$ háromszög EULER-egyenesén és az a_i magasságon át fektetett sík tartalmazza a tetraéder S súlypontját, M magasságpontját és O-t a körülírható gömb középpontját. E három pont tehát feladatunk esetében mindig két ily sík metszésvonalában vagyis egy egyenesben fekszik.

Megmutatom most, hogy az F_i pont az S súlypontnak $A_k A_l A_m$ háromszög síkjára eső képe, azaz, hogy az F_i pontban a háromszög síkjára emelt merőleges átmegy az S súlyponton és felezi az OM vonaldarabot. Ismeretes, hogy

$$4SS_i = A_i S_i.$$

Legyen S képe az $A_k A_l A_m$ háromszög síkjában S', mely az elébbiek folytán mindenesetre az EULER-egyenesben van.

A származott hasonló háromszögekből:

$$S_i M_i : S_i S' = 4A_i S_i : 4SS_i$$
$$S_i M_i : S_i S' = 4:1.$$

1)-ből

$$4S_i S' = S_i M_i$$
$$4F_i S_i = S_i M_i$$

és így

$$S_i S' = F_i S_i.$$

De S' és F_i az előbbiek szerint egy egyenesben esnek, tehát

$$S' \equiv F_i.$$

Továbbá:

$$F_i O_i : F_i M_i = SO : SM = 1:1,$$

vagyis az S pont felezi az $\overline{OM}$ vonaldarabot.

Most kimutatom, hogy az S pont egyenlő távolságban van az élek felező pontjaitól s a szemben fekvő élek legrövidebb távolságú pontjaitól, tehát a jelzett pontokon átmenő gömb középpontja.

Kössük össze a súlypontot a határoló lapoknak a FEUERBACH-kör kerületébe eső pontjaival. A származott négy kúp mindegyike egyenes körkúp, melynek alkotói egyenlők, mert minden kúpnak két alkotója azonos a szomszédoséval.

E szerint az S pont egyenlő távolságban van a feladatban jelzett térbeli pontoktól s így ezek egy gömb felszinén vannak. Az $A_iM_iS_i$ és SF_iS_i hasonló háromszögekből:

$$a_i : SF_i = S_iM_i : S_iF_i = 4 : 1$$

azaz

$$SF_i = \frac{a_i}{4}$$

s így az előbbiek figyelembe vételével:

$$\rho^2 = \frac{a_i^2}{16} + r_i'^2,$$

hol ρ a gömb sugara, a_i az A_i ponton átmenő magasság, r_i' az $A_kA_lA_m$ háromszöghöz tartozó Feuerbach-kör sugara, mely:

$$r_i' = \frac{r_i}{2},$$

ha r_i a háromszög köré irt kör sugara, r_i' a háromszög oldalak felező pontjai meghatározták háromszög köré írt kör sugara és így:

$$r_i' = \frac{a_{kl}a_{km}a_{lm}}{8T_i} = \frac{r_i}{2},$$

hol a_{kl} stb. a háromszög oldalai, T_i pedig területe.

Ha a tetraéder térfogata k, akkor

$$3k = T_ia_i$$

és így

$$\rho^2 = \frac{36k^2 + (a_{kl}a_{km}a_{lm})^2}{64T_i^2}.$$

Szabályos tetraéder esetében az élek érintik a megbeszélt gömböt, mert a felező pontok és a legrövidebb távolságú pontok kettenként egybeesnek, a gömb sugara pedig: $\rho = \frac{ar_2}{4}$, hol a az él nagysága.

A QUATERNIÓ ELMÉLET ELEMEI.

(Első közlemény.)

I. Történeti áttekintés.

1. Az analitikai geometria — DESCARTESE-nak e geniális alkotása — képessé tesz bennünket arra, hogy térbeli vonatkozásokat arithmetikai alakban fejezzünk ki s arithmetikai módszerekkel vehessünk vizsgálat alá. És a mennyiben a fizika alapképzeteit térbeli szemléletekre, összetett fogalmait s azok levezetését jórészt szintén térbeli vonatkozásokra és műveletekre viszi vissza: az analizis a fizikának hatalmas segédtudományává lett, annyira, hogy az utóbbi századok óriási haladását a mennyiségtan és az elméleti, sőt nem kis részben a kisérleti fizika terén is annak köszönhetjük, hogy a térbeli mennyiségekre a számító eljárás alkalmaztatott.

De épen azon fontosságnál fogva, melyet a geometriai analizis ekként az összes exakt tudományokra nézve nyert: a legkiválóbb mathematikusokat és fizikusokat állandóan foglalkoztatta a kérdés, vajjon miként lehetne a számító eljárást minél egyszerűbbé s az alkalmazás czéljaira minél megfelelőbbé tenni. A közönséges analitikai módszer ugyanis csak közvetve, a koordináta-rendszer segítségével veszi a geometriai jellegű mennyiségeket számítás alá, a mi nem egyszer a szemlélhetőség rovására történik s akárhányszor egyszerű térbeli viszonyok levezetésénél is felette fáradságos munkát igényel. *A koordináta rendszerek nélkülözhetővé tétele s oly algorithmus feltalálása, melynél minden műveleti tény és eredmény a geometriai vonatkozásokkal a legszorosabb összefüggésben álljon* képezte tehát a geometriai módszerek tovább-fejlesztésének közelebbi feladatát.

2. És úgy látszott, hogy e fontos feladat megoldása a képzetes mennyiségek segítségével válik lehetővé. Miként a pozitiv és negativ jelek az ellentett irányok kifejezésére, épúgy alkalmazhatóknak bizonyultak a komplex számok tetszőleges irányú és nagyságú egyenes — vektor — számtani kifejezésére. Ez irányban a képzetes mennyiségek alkalmazása meglehetős mérvben be is következett s a képzetes (illetve komplex) egység hatványainak, mint forgató tényezőknek használata mondhatni általánossá vált.

Azonban minél inkább felismerték a képzetes mennyiségek geometriai alkalmazásának előnyeit, annál kevésbbé látszott valószínűnek, hogy azon nehézség, mely ezek általános alkalmazásának útjában állott, leküzdhető legyen. A komplex mennyiségek segítségével ugyanis csupán az ugyanazon síkban — a reális és imaginarius tengely síkjában — fekvő egyenesek és szögek fejezhetők ki s ebből kifolyólag a velök végzett műveletek eredménye is mindig csak az illető síkban levő geometriai elemekre vonatkoztatható. A komplex számok segítségével tehát sem a síkban nem fekvő egyenes, sem ilyennek a sík bármely egyeneséhez való helyzete nem szimbolizálható.

3. E nehézség eloszlatását czélzó korábbi kisérletek közül, mint legfigyelemreméltóbbat Servois-nak az *Annales de Gergonne* lapjain 1813-ban megjelent értekezését említhetjük meg.

Servois abból indulva ki, hogy az egy síkban fekvő egyenesek irány és nagyság szerint, $a+bi$ segítségével fejezhetők ki, vizsgálja, vajjon a térbeli egyenesek nem lennének-e a

$$px+qy+rz$$

összeg segítségével szimbolizálhatók, a hol x, y, z a kezdőpontból kiinduló egyenes végpontjának koordinátái, p, q, r pedig miként i nem valós egységek. Servois ez utóbbi felvételével egészen helyes nyomon jár, csakhogy nem veszi figyelembe, hogy e felvétel az elsővel, hogy t. i. az egy síkbeli egyenesek analitikai kifejezése komplex alakú, össze nem egyeztethető. Nevezetesen az XY, XZ, YZ síkokban — megfelelőleg $z=0$; $y=0$; $x=0$-ot tevén — az egyenesek kifejezése gyanánt

$$px+qy\,;\quad px+qz\,;\quad qy+rz$$

-t nyerünk, a mi közvetlenül láthatólag kizárja azt, hogy az egyenes kifejezése tetszőleges síkban $a+bi$ alakú lehessen. S csakugyan arra a kérdésre, vajjon a $px+qy+rz$ nem vezethető-e át az $a+bi$ normal alakba, SERVOIS kielégítő feleletet hiába keres.

4. Nagyobb sikerrel tettek a geometriai elemek és vonatkozások szimbolizálását illetőleg kisérletet GRASSMANN és HAMILTON. Mellettök még MÖBIUS, BELLAVITIS nevét említhetjük meg, mint a kik, különösen MÖBIUS, nagyon sokkal járultak a geometriai kalkulus kiképzéséhez. MÖBIUS «Barycentische Calcul», «Hauptsätze der Astronomie» cz. műveiben a vektor, vektorösszeg és vektorkülönbség fogalmát szabatosan állapítja meg és állandóan s következetesen alkalmazza. Azonban a vektorokkal végzendő magasabb műveletek bevezetése és a geometriai szám fogalmának megállapítása az előbb említett mathematikusok nevéhez fűződik.

5. SCHEFFLER két imaginarius egységet vesz fel, a melyek közül az egyik: $i=\sqrt{-1}$ mint síkbeli forgató tényező szerepel, a másik pedig, melyet: i_1-gyel jelöl, a síkra merőleges irányban emeli ki $90°$-kal a vele szorzott síkbeli egyenest. Úgy, hogy bármely egyenes, a φ és ψ ívek alkalmas megválasztásával

$$e=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi+i_1\sin\psi)=re^{i\varphi}\,.\,e^{i_1\psi}$$

alakra hozható s két egyenes ρ_1, ρ_2 szorzata a következőleg fejezhető ki:

$$\rho_1\rho_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).(\cos(\psi_1+\psi_2)+i_1\sin(\psi_1+\psi_2))$$
$$=r_1r_2e^{(\varphi_1+\varphi_2)}\,e^{i_1(\psi_1+\psi_2)}.$$

Azonban némely előnyök mellett, melyek a SCHEFFLER-féle algorithmustól nem tagadhatók meg, hátránya főként az, hogy a distributiv törvény, t. i.

$$(\rho_1+\rho_2)\rho=\rho_1\rho+\rho_2\rho$$

egyenlőség fenn nem tartható. GRAVES-t, nemkülönben HAMILTON-t épen ez a körülmény késztette arra, hogy a SCHEFFLER-től választott utat, melyen kutatásaik kezdetén önállóan indultak meg, el-hagyják s más, a térviszonyokkal és fizikai vonatkozásokkal megegyezőbb módszert keressenek.

SCHEFFLER tér- vagy helyzet-kalkulusát részletesen kifejtette: «Ueber das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie» 1846; «Situationskalkul» 1852; «Polydimensionalen Grössen» 1880 cz. műveiben, s az egésznek elméleti alapot igyekszik vetni a térszám fogalmának részletes kifejezése által «Die Naturgesetze» cz. terjedelmes munkájában.

6. GRASSNANN «Ausdehnungslehre»-jében, melynek első kiadása 1844-ben jelent meg, teljesen kiképzett módszert ad a térmennyiségekkel való műveletekre; e módszernek filozófiai alapot vet s egyúttal más tudományok tárgyaira alkalmazhatóságát is kimutatja. A tőle felállított módszer, mint speczialis esetet, magában foglalja a szorosabb értelemben vett térkalkulust is, kiindulván abból, hogy minden egyenes vonaldarab (Strecke) a

$$\rho = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

alakban fejezhető ki s meghatározott és egyértelmű eredményt adó műveleteknek vethető alá. A ρ kifejezésében x_1, x_2, x_3 nevezetesen számok, e_1, e_2, e_3 pedig egymásra vissza nem vihető — t. i. három nem egy síkba eső egyenesen felvett — egységeket jelentenek.

Ez algorithmus szerint a distributiv törvény, a melyet SCHEFFLER mellőzni kénytelen, nemcsak megtartja érvényét, söt a módszer kifejtésénél GRASSMANN ép e törvény helyességének felvételéből indul ki. Ellenben az u. n. külső szorzatban (äusseres Product) fellép azon sajátsága úgy a GRASSMANN-, mint HAMILTON-féle számításmódnak, hogy a szorzók felcserélésével a szorzat előjele s illetve értéke megváltozik. A quaternio elmélet történetének szempontjából e megegyezés mellett különösen fontos az Ausdehnungslehre első (1844) kiadásának előszava, a melyben a quaternio elmélet alapfogalma, mint vektorhányados, előfordul. «Sodann kam ich» mondja GRASSMANN «zunächst auf den Begriff des Quotienten verschieden gerichteter Strecken, und verstand unter $\frac{a}{b}$, wo a

und b verschieden gerichteter Strecken von gleicher Länge vorstellen, die Grösse, welche jede in derselben Ebene liegende Strecke um den Winkel ba (von b nach a gerichtet) ändert, so dass in der That, wie es sein muss $\frac{a}{b} . b = a$ ist; und hieraus ergab sich dann der Begriff für den Fall, dass a und b von ungleicher Länge sind, unmittelbar». Itt tehát határozottan a HAMILTON-féle quaternióval van dolgunk, és pedig úgy is mint forgató (Versor), úgy is mint kiterjesztő (Tensor) tényezővel. Sőt a HAMILTON-féle elmélet egyik legfontosabb segédfogalmát, *a derékszögű versort* is megtaláljuk, és pedig a $\frac{a}{b} = \sqrt{-1}$ értékkel, a hol b és a egyenlő, egymással derékszöget alkotó egyenes darabokat jelentenek.

A fentebb közöltek után nem tagadható ugyan, hogy a quaternio fogalmát GRASSMANN-nál a leghatározottabban feltalálhatjuk, holott HAMILTON e tárgyban írt főmunkája csak kilencz évvel később, 1853-ban, jelent meg, azonban az új fogalmat GRASSMANN ekkor még csak a síkra tartja alkalmazhatónak, a mennyiben szerinte: «es ist nicht möglich, vermittelst des Imaginären auch die Gesetze für den Raum abzuleiten». Ugy, hogy ha az 1877-ben: «Der Ort der HAMILTON'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre» cz. alatt a *Mathematische Annalen* XII. kötete 375—386. lapjain GRASSMANN tollából megjelent dolgozat joggal tekinti is a HAMILTON-féle kalkulust az Ausdehnungslehre egyik speciális alkalmazásának, ez nem másítja meg azt a tényt, hogy a kiterjedéstannak ez alakban való kidolgozását, mint quaternio elméletét, HAMILTON önállóan, másokat megelőzőleg és a legapróbb részletekbe menőleg teljesítette.*

* Természetes, hogy ez mit sem von le az Ausdehnungslehre értékéből s GRASSMANN-nak a quaternio elméletre vonatkozólag megjelent közleményei becséből. Különösen értékes a quaternio elmélet helyes felfogására nézve a jelzett értekezés következő helye (376. l.): «Aber das wesentlich eigenthümliche der mittleren Multiplication im Raume als einem Gebiete dritter Stufe ist, dass die Anzahl der von einander unabhängigen Einheitsproducte (t. i. $e_1 e_2$,

GRASSMANN művei: Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik. 1844. (Második kiadása: Die Ausdehnungslehre von 1844. 1878). Die Ausdehnungslehre vollständig und in strenger Form bearbeitet. Berlin 1862. Kurze Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre. (Grunerts Archiv Bd. VI. 1845.) Az 1878-iki második kiadásnak III. függeléke). A fentebb idézett értekezésen kívül különös figyelmet érdemelnek még: «Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre». Math. Ann. Bd. XI. p. 222—240. «Sur les differents genres de multiplication» Crelle Journal XLIX. 136. l. Megemlítendők továbbá az ide vonatkozó irodalomból: V. SCHLEGEL: «System der Raumlehre 2. Theile 1872—1875» és F. KRAFT: «Abriss des geometrischen Kalkuts 1893».

7. A quaternio elmélet megalapítója s egyúttal terjedelmes rendszerré kifejtője HAMILTON a GRASSMANN-éval meglehetős rokon eszmemenet útján a térbeli egyenesnek

$$\rho = xi + yj + zk$$

kifejezéséhez jut, a hol i, j, k három egymásra merőleges egyenesen felvett egységeket jelentenek.

E vonalegységeken kívül még egy negyedik, a számegység felvételére van szükség, hogy ez egységekből képezett mennyiségeken a megfelelőleg értelmezett műveletek végrehajthatók s azok ered-

---

e_1e_3, e_2e_3, HAMILTON jelzése szerint ij, ik, jk) gleich der Anzahl der Einheiten ist, *und man daher jene* (e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3) *auf diese* (e_3, e_2, e_1) *zurückführen kann. So bleiben also dann die Einheiten des Productes, wenn man noch die (reelle) Zahleinheit hinzunimmt, dieselben, wie die ursprünglichen.* Diese einfache Beziehung verschwindet bei den Gebieten höherer Stufe, so dass die mittlere Multiplication in der Ausdehnungslehre, welche Gebiete beliebiger Stufe behandelt, keine einfache Bedeutung behält». A quaterniot GRASSMANN, az Ausdehnungslehre terminologiájának megfelelőleg, középszorzatnak nevezi s mint két egyenes darab szorzatát a következő alakban írja:

$$ab = -[a \mid b] + \mid [ab]$$

a mely teljesen azonos a HAMILTON-féle

$$ab = Sab + Vab$$

-val.

ménye ismét a felvett egységekkel képezhető legyen. A quaternió-elméletben előforduló legáltalánosabb kifejezés ehhez képest négy tagot foglal magában, a mely egymásra vissza nem vihető egységeket tartalmazván, össze nem vonhatók.* A két főelv, melyhez HAMILTON vizsgálatai folyamán eljut, vagy a melyeket alapul véve a térkalkulus minden ellenmondás nélkül kifejthető, a következő:

1. Két párhuzamos egyenes darab szorzata szám.

2. Két merőleges egyenes darab szorzata egy harmadik, mindkét szorzóra merőleges egyenes darab.

Ez az utóbbi tétel teszi képessé a quaternió-elméletet arra, a mire az egyeneseknek komplex alakja elég nem volt, hogy t. i. egy síkban fekvő egyeneseken végzett szorzási vagy osztási művelet a síkkal szöget képező egyeneshez vezessen s illetve oly alakhoz, melyben a vektorrész a síkkal általában nem párhuzamos. Ha most már tekintetbe veszszük, miszerint HAMILTON erre az eredményre csak úgy juthatott, hogy a képzetes egységnek a geometriai kalkulusban alkalmazását teljesen mellőzte: joggal elmondhatjuk, hogy a képzetes mennyiségeknek a térbeli vonatkozásokra való alkalmazása a geometriai kalkulus kiképzését csak közvetve mozdította elő, de e mellett nem egy mathematikust határozottan tévútra vezetett. A mit annyival inkább helyén valónak tartottam megjegyezni, mert nagyon sokan — teljesen helytelenül — HAMILTON módszerét ma sem tekintik másnak, mint a képzetes mennyiségek térbeli egyenesekre való alkalmazásának.

A quaternio-elméletet HAMILTON számos értekezésen kívül: «Lectures on quaternions: contain a systematic statement of a new mathemethod» 1853 és «Elements of quaternions» alapvető műveiben fejtette ki. A quaternio-elmélet irodalmából megemlítendők még: P. G. TAIT «An elementary Treatise on Quaternions» s az újabbak közül. LAISANT: «Introduction à la méthode des quaternions» 1881; GRAEFE: «Vorlesungen über die Theorie des

* Már itt megjegyezzük, hogy az u. n. vektoregységek teljesen tetszőlegesek s adott quaternio esetében ép ezért mindig egyetlen, a quaternio síkjára merőleges egységgel helyettesíthetők. Úgy, hogy HAMILTON a hármas egységrendszer használatát, a hol csak lehet mellőzi.

Quaternionen» 1883; KRAFT: «Abriss des geometrischen Kalkuls» 1883; E. SARRAU: «Notions sur la theorie des quaternions» 1889, mely utóbbi művecske MAXWELL villamosságtani nagy munkájának franczia fordításához — a quaternió-elméletből használt jelzések érthetővé tétele végett — függelékként van csatolva, de külön lenyomatban is megjelent.

8. Azon körülmény, hogy HAMILTON a tőle feltalált módszert nemcsak részletesen kifejti, hanem a geometriára és fizikai tudományokra sikerrel alkalmazza, sokkal nagyobb elterjedést biztosított a quaternio-elmélet számára, mint a minővel a GRASSMANN-féle Ausdehnungslehre dicsekedhetik. A franczia és német írók közül is többen, de kivált az angol írók a HAMILTON-féle módszer jelzéseit és fogalmait gyakran használják, úgy, hogy erre, de meg a quaternio-elméletnek kivált a mathematikai fizika terén használható voltára tekintettel ez algorithmus ismeretét a fizikusok és mathematikusok ma alig nélkülözhetik.

Miután nyelvünkön egyáltalán nincs s a külföldi irodalomban is alig van olyan rövidebb munka, melyből a quaternio-elméletet lényegében megismerni s egyúttal alkalmazásának módját elsajátítani lehetne: jelen dolgozat czélja az, hogy e hiányt némileg pótolja s egyúttal azoknak, kik a quaternió-elmélettel bővebben kivánnak foglalkozni, a részletes tanulmányhoz bevezetőül szolgáljon.

II. Vektorösszegek és különbségek.

9. A quaternió-elmélet a vektorok algorithmusa.

Vektor alatt meghatározott irányú és nagyságú egyenes darabot értünk s ha annak egyik határpontját A, a másikát B jelöli, akkor

$$AB$$

-t a vektor irány és nagyság szerinti kifejezésére használjuk.

Az irány pontos jelölése végett A-t mint kezdő, B-t mint végpontot külömböztetjük meg s *két vektort egyenlőnek mondunk akkor, ha akár a saját egyeneseiken tovatolás, akár a térben párhuzamos áthelyezés útján egymásra úgy illeszthetők, hogy kezdő* *és végpontjaik összeesnek.* E szerint tehát p. o. AB és BA vektorok egymással nem egyenlők, miután megfelelő, t. i. kezdő- és végpontjaik párhuzamos tovatolás útján csak az egyiknek 180°-ú elforditása után illeszthetők össze.

A vektor e meghatározása alapján a két alapműveletet, t. i. az összeadást és kivonást oly módon értelmezhetjük, hogy azok a vektor iménti fogalmára alkalmaztatván, mindig határozott és egyértelmű eredményre vezetnek.

10. *Összeadással* a vektorok egyszerű szinthezisét jelöljük, vagyis azoknak egymáshoz olyképen történő illesztését, hogy minden hozzáadandó vektor kezdőpontja az előzőnek vég-, s végpontja a következő hozzáadandó kezdőpontjával essék össze. Az első összeadandónak kezdő s az utolsónak végpontja, mint kezdő és végpont által meghatározott vektort pedig *összegnek* mondjuk.

Ha tehát AB, BC, CD, DE az összeadandók, akkor az összeg leend:

$$AB+BC+CD+DE=AE.$$

Az összeadandók párhuzamossága esetén az összeadás ezen értelmezés alapján azonos lesz az arithmetikai összegezéssel, tehát ennek valóban általánositása.

11. Az összeadás meghatározásából közvetlenül folyik, hogy az összeadandók tetszésszerinti csoportba foglalhatók össze, vagyis az összeadás előbb csoportonként s azután az így nyert részösszegekkel történhetik a nélkül, hogy az összeg változást szenvedne (associativ elv). Ha most már figyelembe vesszük, hogy bármely két szomszédos tag p. o. $BC+CD$ felcserélhető az egész összeg értékének változtatása nélkül, akkor könnyű belátnunk, miszerint az összeadandók sorrendje nincs befolyással az összegre (commutativ elv). Hogy pedig:

$$BC+CD=CD+BC=BD$$

ez közvetlenül folyik azon ismert tételből, a mely szerint a párhuzamos és egyenlő egyenes daraboknak megfelelő, t. i. kezdő- és végpontjait összekötő egyenesek egyenlők.

Ha tehát:

$$CD = BC_1$$

akkor egyúttal a B, C kezdő- s C_1, D végpontok által meghatározott vektorokra nézve:

$$BC = C_1D$$

és így csakugyan

$$CD + BC = BC_1 + C_1D = BD.$$

Három összeadandó esetében:

$$AB + BC + CD = (AB + BC) + CD = (BC + AB) + CD =$$
$$= BC + (AB + CD) = BC + (CD + AB) = (BC + CD) + AB \text{ etc.}$$

a hol az összeadandók nem szükségképen egy síkhoz tartoznak.

Felesleges is megjegyezni, hogy az összeadás ezen módja nem más, mint a melyet a mozgások, erők összetételénél lépten-nyomon alkalmazunk, s hogy épen az erőösszetétel ismeretes módja vezetett a geometriai összegezés fogalmára. De látható egyúttal, hogy az összeg iménti fogalmazása tisztán geometriai értelmezéssel is eljuthatunk, mihelyt a vektorok egyenlőségének feltételéül nemcsak az egység, hanem az iránybeli megegyezést is kikötjük s egyúttal a vektoroknál a szinthezis eszközlésére szükséges eltolást megengedettnek vesszük. Egyébiránt a geometriai vektor fogalma tágabb, mint a mechanikaié, mivel az erővektor támadáspontja általában csak a saját irányában tolható el, míg a geometriai vektor kezdőpontja a tér tetszőleges pontjába helyezhető át.

12. *Kivonás* alatt — miként az arithmetikában — az összeadás megfordított műveletét értjük, melynek segélyével tehát az összegből és egyik összeadandóból a másik összeadandót, mint *külömbséget* határozzuk meg. Ha e művelet jeléül itt is a kivonandó elé illesztett «—» szolgál s az összeget AC-vel, az összeg egyik tagját AB-val s ennélfogva a másikat BC-vel jelöljük, lesz:

$$AC - AB = BC; \quad AC - BC = AB$$

a szerint a mint egyiket vagy másikat választjuk kivonandóul. A kivonást e szerint úgy hajtjuk végre, hogy a kisebbítendő és kivonandó kezdő- vagy vég-, tehát egyjellegű határpontjait egyesitjük s a szabadon maradó pontokat a külömbség határpontjaiul tekintjük. A kisebbítendő szabad pontja e műveletnél — az összeadás értelmezésének megfelelőleg — jellegét megtartja, ellenben a kivonandó végpontja a külömbségnél kezdőponttá és kezdőpontja végponttá lesz.

13. Az első esetben ugyancsak BC-t nyerjük azonban, ha $-AB$, vagyis AB mint kivonandó helyett $+BA$-t, vagyis BA-t mint összeadandót tesszük, mert ez esetben leend:

$$AC+BA=BA+AC=BC$$

és épen úgy $-BC$-t $+CB$-vel helyettesítvén:

$$AC+CB=AB.$$

Hogy az alkalmazott helyettesítést igazoljuk, vegyük összeadandókul AB és BA-t, mely felvétel mellett:

$$AB+BA=AA=0$$

s ez esetben a megfordított problema szerint:

$$0-AB=BA\,;\quad 0-BA=AB$$

leend, miből következik, mint a műveletek végrehajtását lényegesen egyszerüsítő eredmény:

$$-AB=BA\,;\quad -BA=AB$$

mi által a kivonást összeadásra vezessük vissza. Ha tehát egy többtagú kifejezésben — jelű vektorok fordulnak elő, ezeket az összeadás szabálya szerint egyesíthetjük a többi tagokkal, csakhogy a határpontokat előbb felcseréljük, vagyis irányuknak 180°-kal változtatása után illesztjük be az összeget meghatározó sokszögbe. Az associativ és commutativ törvény e szerint nemcsak a pozitiv, hanem tetszőleges előjelű tagokra is fennáll.

14. Vegyünk fel egy tetszőleges egyenest s azon az

$$AB=i_1$$

vektort mint pozitiv egységet. Akkor minden ezen egyenesen fekvő vagy azzal párhuzamos vektor ρ, egyenlővé tehető $x_1 i_1$-gyel, a hol

x_1 mérőszám a fentebbiek szerint pozitiv vagy negativ, a mint ρ iránya az egységével megegyező vagy ellentétes. Tehát az összes i_1-vel párhuzamos vektorokra nézve lesz

$$\rho = x_1 i_1$$

s megforditva, minden $x_1 i_1$ alakú kifejezés az i_1-vel párhuzamos vektort jelöl.

15. Ha ρ_1 iránya i_1-gyel nem párhuzamos, akkor az i_1-t tartalmazó tagon kivül még egy más tagra is szükség van, ha a vektor kifejezésbe az i_1 egységet be akarjuk vinni. Legyen i_2 az i_1-hez — 0° és 180° kivételével — tetszőleges szög alatt hajló egyenes felvett vektoregység, akkor minden ezzel párhuzamos vektor $x_2 i_2$ által fejezhető ki, a hol, mint fentebb x_1, x_2 pozitiv vagy negativ szám. Ha most ρ végpontjaiból i_1, i_2-vel párhuzamosokat vonunk, ezek a sik alaptulajdonsága szerint metszeni fogják egymást, ha ρ egy az i_1, i_2-vel párhuzamos sikban fekszik. A metszéspont s ρ határpontjai között foglalt vektorok mértékszámait megfelelőleg x_1, x_2-vel jelölvén, a vektorok összeadásának szabálya szerint:

$$\rho = x_1 i_1 + x_2 i_2 .$$

Ha ρ ugyanazon sikbeli vektorok összege gyanánt volna adva, úgy hogy

$$\rho = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_n$$

akkor miután

$$\pi_1 = p_{11} i_1 + p_{12} i_2 , \ . \ . \ . \ , \pi_n = p_{n1} i_1 + p_{n2} i_2$$

ezen értékeket ρ kifejezésébe helyettesitvén s az összeadandók felcserélhetőséget figyelembe vevén, lesz:

$$\rho = i_1 \sum_{r=1}^{n} p_{r1} + i_2 \sum_{r=1}^{n} p_{r2} .$$

Ennélfogva kimondhatjuk, hogy az összes egy sikkal párhuzamos vektorok kifejezhetők, két ugyanazon sikkal párhuzamos vektoregység segitségével. Mivel pedig egy tetszőleges pontból az i_1, i_2-vel párhuzamosan vont egyenesek összes pontjai, tehát ezeknek összekötő vonalai is egyazon sikban feküsznek, következik az iménti tétel megfordítása gyanánt, hogy az $x_1i_1+x_2i_2$ alakú összegek s illetve vektorok mindig az i_1, i_2-vel, tehát egyazon síkkal párhuzamos síkban feküsznek.

16. Oly vektor, a mely nem az i_1, i_2-vel párhuzamos síkban fekszik, az előző pont szerint pusztán i_1, i_2-vel nem fejezhető ki, hanem csak úgy, hogy ezeken kívül még legalább egy független egységet hozunk be. Legyen i az $[i_1, i_2]$ síkkal nem párhuzamos vektoregység, akkor minden ezzel párhuzamos vektor x_3i_3-mal fejezhető ki. Huzzunk ennél fogva ρ egyik határpontjából i_3-mal párhuzamos egyenest, a másik határponton keresztül pedig fektessünk az i_1, i_2-vel párhuzamos sikot; jelöljük továbbá az i_3-mal párhuzamos egyenes átdöfési és ρ megfelelő határpontja közötti távolság mérőszámát x_3-mal, ρ másik határpontja és az átdöfési pont közötti vektort, mint a mely az i_1, i_2-vel párhuzamos síkban fekszik: $x_1i_1+x_2i_2$-vel, akkor a vektorösszeg definicziója szerint

$$\rho=x_1i_1+x_2i_2+x_3i_3.$$

A vektor e legáltalánosabb kifejezésében i_1, i_2, i_3 hossza egyenlő, t. i. a felvett mértékegység, irányuk azonban tetszőleges, csupán azon feltételhez van kötve, hogy közülök egyik sem lehet párhuzamos avval a síkkal, a melyet a másik kettőnek iránya meghatároz.

Könnyen látható, hogy ha ρ kezdőpontjából az i_1, i_2, i_3-mal párhuzamos koordináta-tengelyeket vonunk, akkor x_1, x_2, x_3 e koordinata-rendszerben ρ végpontjának megfelelő koordinátái, x_1i_1, x_2i_2, x_3i_3 pedig a ρ átlójú parallelepipedon élei.

Ha ρ több vektorösszege gyanánt volna adva, akkor az előző pontban követett eljárás segítségével azt mindig a háromtagú normálalakra hozhatjuk. Egyébiránt a quaternió-elmélet rendszerint nem használja a vektoroknak adott irányokra vonatkoztatott kifejezését, hanem lehetőleg magukon a vektorokon végzi a műveleteket. A mennyiben azonban az imént levezetett vektoralakot igénybe veszi, mint a módszer lényegével szorosan összefüggőt, a derékszögű egységrendszert alkalmazza, a hol tehát i_1, i_2, i_3 (HAMILTON jelzése szerint i, j, k) oly vektoregységeket jelentenek, a melyek mindegyike a másik kettőre merőleges.

17. A vektorra nyert kifejezésből ez esetben következik, hogy annak hossza, melyet HAMILTON mindig pozitivnak s illetve előjel nélkülinek vesz s T (tensor = feszitő, kiterjesztő) betűvel jelöl:

$$T\varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

A vektornak i_1, i_2, i_3-mal alkotta szögeinek cosinusai pedig:

$$\cos a_1 = \frac{x_1}{T\varrho}; \qquad \cos a_2 = \frac{x_2}{T\varrho}; \qquad \cos a_3 = \frac{x_3}{T\varrho}.$$

Lesz tehát:

$$\rho = T\varrho\,(i_1 \cos a_1 + i_2 \cos a_2 + i_3 \cos a_3)$$

vagyis a zárjelben levő kifejezést u_ρ-val (Unitas ρ) jelölvén:

$$\rho = T\varrho \,.\, u_\rho \,.$$

Minden vektor e szerint két tényezőre bontható, a melynek sorrendje közvetlenül láthatólag közömbös, minthogy szám és vektor szorzata alatt, bármily sorrendben legyenek is a tényezők, soha nem érthetünk egyebet, mint a vektornak saját irányában a mellette álló szám arányában való meghosszabitását vagy megröviditését. A $T\varrho$ egyébiránt annyiban külömbözik az előbb használt x_1, x_2, x_3 értékektől, hogy ezek negativok is lehetnek.

18. A vektorok összeadására és adott vektoregységekkel való kifejezhetőségére eddig levezetett tételek segítségével úgy a geometriában, mint a kinematikában lényeges egyszerűsítéseket érhetünk el, a mint erről MÖBIUS, BELLAVITIS, GRASSMANN, HAMILTON stb. művei s ezek nyomán haladó számos más geometriai és mechanikai munkából meggyőződhetünk. Mivel azonban a vektorok összegezésének módszere s az ez úton elért eredmények általánosan ismertek, ez alkalmazásokat ezúttal mellőzhetjük s a fentebbi bevezető rész után áttérhetünk a quaternió-elmélet sajátos tárgyára, a vektorok osztására és szorzására.

III. A vektorhányados (quaternio).

19. Oly kifejezések, a melyekben vektormennyiségek szorzat vagy tört tagjai gyanánt lépnek fel, úgy a geometriában, mint a fizikában gyakran fordulnak elő. Igy a geometriában két vonaldarab mérő számának szorzata a terület, háromé a térfogat; a mechanikában két vektorjellegű mennyiség, t. i. erő és kar szorzata a nyomaték stb. számbeli értékét adja. Ámde azzal, hogy e műveleteknél csupán a fellépő vektorok számértékét veszszük figyelembe, a vektorok vonatkozását csak részben fejezzük ki, úgy hogy ennek teljes eszközlése végett bizonyos, a feladat természetéhez tartozó feltételeket — a melyek t. i. a vektorok irányával állanak összefüggésben — külön kell evidencziában tartanunk s a számítás végeredményének megállapításánál figyelembe vennünk. A quaternió-elméletnek, mint a vektorok algorithmusának főfontossága épen abban keresendő, hogy a tőle megállapitott módszer segítségével nemcsak a vektorok összegét, hanem azok szorzatát és hányadosát s illetve a szorzás és osztás hányadosát úgy értelmezhetjük, hogy ez által a magasabbrendű geometriai és fizikai iránymennyiségek nemcsak nagyság, hanem egyéb viszonyaik tekintetében is közvetlenül kifejezhetők és művelet alá vehetők.

20. A vektorokkal végzendő e műveleteknél mindenekelőtt pontos értelmezésre van szükség, a melynek alapján meghatározhassuk, mit értünk e mennyiségekre vonatkozólag szorzás stb. alatt. Az értelmezésnél pedig első sorban arra kell ügyelnünk, hogy az arithmetika megállapított fogalmaival és műveleteivel összhangban maradjunk, azaz oly speczialis esetekben, a midőn a vektorokból alkotott kifejezések — p. o. mint egyirányú vektorok hányadosai — beleesnek a közönséges számfogalom körébe, a tőlünk értelmezett műveletnek a megfelelő arithmetikai művelettel azonosnak kell lennie. És mivel a vektorok osztása és szorzása csak a számfogalom bővítése mellett lehetséges, az értelmezésnél ügyelnünk kell továbbá arra is, hogy a bevezetett müveletek alkalmasak legyenek az új számfogalom egyértelmű megállapítására s továbbá

arra, hogy a bárhányszor és bármily egymásutánban végrehajtott műveletek eredményének e számfogalom alá sorozható legyen.

És valóban Hamilton két főművében a vektor-műveleteknek oly értelmezését adja, hogy néhány, a három-dimenziós tér lényeges tulajdonságaira vonatkozó alapfelvétel mellett két vektor-hányadosa az egyedüli új fogalom, a melyet be kell hozni s a melylyel úgy közvetlenül a vektorokon, valamint a vektorhányadosokon és szorzatokon végrehajtott műveletek eredményei kifejezhetők. Ha ennek az értelmezésnek szemmel tartásával tehát tetszőleges abstrakt mennyiségek és iránymennyiségek a négy alapművelet segítségével kapcsolatba hozunk, eredményül mindig vektorhányadosok (egyező vagy eltérő irányú vektorokkal) adódnak ki, épúgy, miként a valós és képzetes s illetve komplex számokon végrehajtott műveletek eredménye mindig komplex szám.

21. Első feladatunk a vektorhányadost értelmezni. Ha két ugyanazon pontból kiinduló vektornak α és β-nak hányadosát, q-val jelöljük s a vektorok viszonyba tételére az arithmetikai jelzést megtartjuk, lesz:

$$q=\frac{\alpha}{\beta},$$

a hol α, β a műveletbe vonásnál egy pontból kiinduló vektorokat jelentenek. Ha a két vektor iránya megegyezik, akkor e hányados megneveztetlen szám, úgy, hogy q ez esetben α és β értékeinek kellő változtatása mellett a teljes pozitiv és negativ, sőt mint látni fogjuk, imaginárius és komplex számsort, illetve tartományt kifejezi. Ha β nem vektor, hanem szám, akkor q szintén — α irányával megegyező — vektor. Minden más esetben q-nak a közönséges, számfogalomtól eltérő jelentése van.

22. Hogy e jelentést közelebbről meghatározhassuk, vegyük figyelembe, hogy két vektor irány és nagyság szerint van adva, ha 1. hosszaik, 2. egymással bezárt szögük, 3. e szög síkja, 4. az egyik vektornak a szög síkjában fekvő valamely egyenessel bezárt szöge ismeretes. E négy feltétel teljesen egyértékű a két vektor három-három, összesen hat meghatározó adatával (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, avagy $T\alpha \,.\cos \alpha_1$, $T\alpha \,.\cos \alpha_2$, $T\alpha \cos \alpha_3$, $T\beta \cos \beta_1$ etc.)

és pedig — mint könnyen látható — az 1. és 3. két-két, a 2. és 4. egy-egy adattal.*

Ámde az 1-ben foglalt két adatot egyre redukálhatjuk, ha elfogadjuk az arithmetikának azt a tételét, a mely szerint a nevező és számláló ugyanazon számmal szoroztatván vagy osztatván, a hányados értéke nem változik. Ehhez képest két quaternió egyenlőségéhez nem az alkotó vektorok abszolut hosszainak, hanem csak hoszszaik viszonyának megegyezése szükséges. E viszonyt HAMILTON tensornak nevezi s a quaterniót jelölő betű elé írt T-vel szimbolizálja. E szerint lesz:

$$Tq = T\frac{\alpha}{\beta} = \frac{T\alpha}{T\beta}.$$

A 2. és 3-ban foglalt 3 adatot a quaternio-elmélet lényegeseknek veszi s *két quaterniót egyenlőnek csak az esetben tekint, ha tensorukon kívül az általok bezárt szögek is egyenlők és síkjaik párhuzamosak.*** E feltételek elejtésével ugyanis oly egyenlőséget constituálnánk, a mely a nevezők (számlálók) azonossága esetén nem vonná maga után a számlálók (nevezők) teljes összeesését, ez pedig a quaternió-elméletnek, hasonlóan az arithmetikához, egyik alapfelvétele. Ellenben a negyedik meghatározó adatot, t. i. a quaternió egyik vektorának valamely qu síkbeli egyenessel bezárt

* Analitikailag — derékszögű koordinata rendszerre vonatkoztatva — a meghatározó feltételeket a következő egyenletek fejezik ki:

$$\begin{aligned}
&1.\quad a=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2};\quad b=\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\\
&2.\quad \cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2+\cos\alpha_3\cos\beta_3=\cos\gamma\\
&3.\quad \cos\alpha_1\cos\partial_1+\cos\alpha_2\cos\partial_2+\cos\alpha_3\cos\partial_3=0\\
&\quad\;\; \cos\beta_1\cos\partial_1+\cos\beta_2\cos\partial_2+\cos\beta_3\cos\partial_3=0\\
&4.\quad \cos\alpha_1\cos\varepsilon_1+\cos\alpha_2\cos\varepsilon_2+\cos\alpha_3\cos\varepsilon_3=\cos\zeta,
\end{aligned}$$

a mely hat egyenlet teljesen meghatározza $x_1, \ldots, y_3$-at, ha t. i. figyelembe vesszük, hogy $x_1 = a\cos\alpha_1, \ldots\, y_3 = b\cos\beta_3$ s $\gamma, \partial_1, \ldots, \varepsilon_1 \ldots, \zeta$ adott szögek.

** Természetes, hogy teljesen megengedett dolog lenne oly algorithmus kiképzése, mely a 2. és 3. feltételeket részben vagy egészen elejtené, a mint p. o. az arithmetika minden irányadatot figyelmen kívül hagy. Csakhogy ha az alkalmazhatóság és egyszerűség kérdését tekintjük, akkor a quaternió elmélet felvételének minden más fölött előnyt kell adnunk.

szögét, a quaternió-elmélet tetszőlegesnek hagyja s az e tekintetben való megegyezést két quaternió egyenlőségénél nem postulálja.

Ezek szerint a geometria nyelvén beszélve, a vektorhányados vagy quaternio oly meghatározott nagyságú szöget jelöl, melynek szárai állandó számviszonyban vannak, s mely síkjában vagy azzal párhuzamos síkban tetszőleges helyzetet foglalhat el, de síkjának állását nem változtathatja. Két vektor e nemű kapcsolata tehát számviszonyukat illetőleg teljesen megfelel az arithmetikai tört fogalmának, azért joggal nevezhetjük azt — de mindig a fentebb megállapított jelentés szemmeltartásával — vektorhányadosnak. Mivel pedig az így értelmezett vektorhányados, mint láttuk, 4 adat által teljesen meg van határozva, azért alkalmazta HAMILTON e kapcsolatra a quaternió elnevezést.

23. Tegyük ismét:

$$q = \frac{\alpha}{\beta}$$

s bontsuk szét mind a számlálót, mind a nevezőt a 17. p. szerint. Lesz ekkor:

$$q = \frac{T\alpha \, . \, U\alpha}{T\beta \, . \, U\beta} = \frac{Tq \, . \, U\alpha}{U\beta} \quad (22 \text{ p.})$$

És ha, miként az arithmetikában, a tört mellé írt *szám*faktort a számláló tényezőjének tekintjük (vagy a 22 p. szerint a nevező osztójának), leend:

$$q = Tq \, . \, \frac{U\alpha}{U\beta} = Tq \, . \, Uq$$

ha t. i. az $\frac{U\alpha}{U\beta}$ hányadost $U\frac{\alpha}{\beta} = Uq$-val jelöljük. Világos, hogy e szétbontást bármely quaternióra nézve elvégezhetjük s hogy a két tényező sorrendje nincs befolyással az eredményre, mert a Tq akár az első, akár a második helyre tétessék, mindig az $\frac{U\alpha}{U\beta}$ hányados számlálójának saját irányábani meghosszabítója. Vagyis:

$$Tq \, . \, Uq = \frac{Tq \, . \, U\alpha}{U\beta}$$

$$Uq \, . \, Tq = \frac{U\alpha \, . \, Tq}{U\beta}$$

s mert
$$Tq\,.\,Ua = Ua\,.\,Tq$$
következik, hogy:
$$Tq\,.\,Uq = Uq\,.\,Tq.$$

Belátható továbbá az is, hogy a quaternió számértékét egyedül a Tq, irányelemeit pedig Uq fejezi ki. Ennélfogva a q_1, q_2 quaterniók egyenlők, ha
$$Tq_1 = Tq_2;\quad Uq_1 = Uq_2.$$

A fentebbi szétbontás nagyon fontos azért, mert vele a quaternió szám és irány elemeit külön vizsgálhatjuk s ekként a legtöbb feladat megoldását lényegesen egyszerűsíthetjük.

24. Az előző pontokban a quaternió fogalmát olyképen állapítottuk meg, hogy annak teljes meghatározásához egy szám s két illetve három irányadat szükséges. Az egység quaternió: Uq, másként versor * e szerint kizárólag iránymennyiségektől függ, a melyekre nézve a következőket kell még megjegyeznünk.

a) A quaternió (versor) szöge alatt mindig azt a szöget értjük, mely a számláló vektornak a kisebbik szögtéren át a nevező vektor helyzetébe történő forgatása által keletkeztethető. Vagyis a vektorok meghatározta két szög közül mindig a homorú szöget. Ha most már a szög síkjára valamely a síkon kívül fekvő pontból tekintve a fordulás balról jobbra, vagyis az óramutató mozgásával egyező irányban történik, a szöget e pontra nézve pozitivnak, ellenkező esetben negativnak mondjuk. Ez által a szög egyértelműen van meghatározva kivéve azt az esetet, a mikor a vektorok meghatározta két szög egyenlő (t. i. 180°), tehát a vektorok ellentétes irányuak. Csakhogy ekkor a quaternio versor része is közönséges szám, t. i. —1 s így a vektorhányados a szokott értelemben vett törtté lesz.

b) A quaternio síkjának meghatározására legczélszerűbben az arra merőleges egyenes szolgál, melyet tengelynek nevezünk. A tengelyen a talppontból kiindulva két, pozitiv és negativ irányt külömböztetünk meg s pozitiv irányunak mindig azt a félsugárt

* Az elnevezés okát alább látni fogjuk.

tekintjük, a melynek összes pontjaiból — a talppontot kivéve — a quaternio szöge az ép most jelzett értelemben pozitivnak tünik fel. A quaternió sík helyzetét állandóan a pozitiv tengely határozza meg s ehhez képest két quaternió síkjának szöge alatt a pozitiv tengelyeiktől bezárt és pedig 180°-nál ismét soha nem nagyobb szöget értjük. Ha két quaternió síkjának szöge 180°-ot tesz, akkor a quaterniók egy síkba esnek ugyan, azonban tengelyeik s így magok a szögek is ellentett irányuak, tehát nem egyenlők. Ha a quaternió szöge 0° vagy 180°, akkor a quaternió síkja teljesen határozatlan, de ez esetben a hányados ismét megnevezetlen szám.

Horváth József.

ÚJ SZERKEZETŰ VILLAMOS VETÍTŐ LÁMPA.*

A jó vetítő készüléknek a fényforrás szempontjából a következő három föltételnek kell megfelelnie:

1. A fénynek lehetőleg egy pontból kell kiindulnia.

2. A fénypont helyzete állandó legyen.

3. A fényforrásnak megvilágító képessége a vetítő készülék tengelye — többnyire a horizontális — irányában maximális legyen.

E három feltételnek leginkább a Drummond mészfényégők felelnek meg, azért a hol kisebb világítással lehet beérni, azok használhatók a legczélszerűbben.

Ha azonban nagyobb fényintenzitásra van szükség — mint nagyobb előadó-termekben — a villamos ívfényt kell használnunk. Ez magában e három föltétel egyikének sem felel meg.

A fény a két szénről és az ívből indul ki, tehát nagyobb térből, és nem is homogén; a szenek elégése folytán pedig változik a világító forrás helyzete is. Ezen a hibán különböző regulatorokkal igyekeznek segíteni, melyek azonban rendszerint bonyolult szerkezetűek s kezelésük nagy gyakorlatot s vigyázatot kiván. Ezért újabb időben, különösen a nagy fényerősségű lámpáknál a kézzel való szabályozáshoz tértek vissza, mert ezek vastag szenek használata mellett — könnyen kezelhetők.

Végre a rendesen használt lámpák, melyeknél a szenek függélyesen állanak, nem is adják a világítás maximumát a horizontális irányba, hanem, mint a fotometriai mérések mutatják, körülbelül a vízszintessel 45° szöget képező irányban.

A gyakorlatban a lámpa által a horizontális irányban keltett

---

* Bemutattatott a f. é. febr. 23-án tartott rendes ülésen.

megvilágitás — föltéve, hogy a függélyes tengely körül symmetrikusan van eloszolva a fény — 0,2 *m*, ha *m* a maximális (45°) megvilágitás intenzitása, úgy hogy csak két tizedrészét kapjuk a vetitő készülék tengelye irányában a maximális intenzitásnak.

Ez az oka, hogy újabban a lámpákat 45° alatt hajlitják, s az alsó negativ szenet kissé előbbre tolva, még a positiv kráter hatása által is növelik a horizontális irányban a megvilágitást.

Én a fénypont állandósitását és a tengely irányában való maximális világitást az által igyekeztem elérni, hogy a szenek viszonyos helyzetét változtattam meg, oly módon, *hogy a positiv szenet, mely a tulajdonképeni fényforrás, vízszintesen vagyis a vetítő készülék tengelye irányában helyeztem el s a negativ szén ezzel 90—120°-nyi szöget képez.*

Ezzel a következő előnyök járnak:

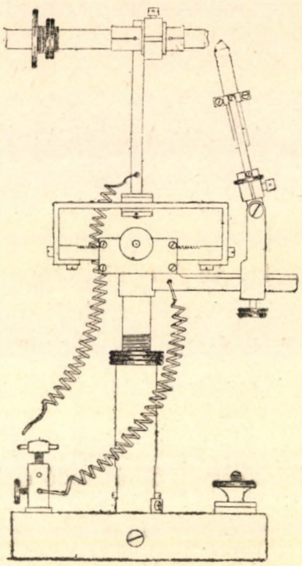
1. a fénypont mindig a vetitő készülék tengelye irányában marad s csak előre vagy hátra tolódik el, a mi tudvalevőleg nem nagy baj, mert a lencséken alkalmazott csavarok által könynyen korrigálható;

2. a megvilágitás maximuma szintén a tengely — a vetités — irányába esik, mint azt méréseim mutatják;

3. a fényforrás összes fénymennyisége a szén ilyen elhelyezése által körülbelül csak egy félgömbön oszlik el, (mig a közönséges lámpáknál az majdnem teljes gömb) ez által ugyanazon árammunka mellett ez a lámpa mintegy kétszer akkora megvilágitást ad a maximális irányban, mint a régibb ívlámpa s így sokkal takarékosabb.

Több összehasonlitó mérést tettem ezzel a lámpával s ugyanolyan, de egyirányban elhelyezett szenekkel ellátott 45° alatt hajlitott régibb lámpával, úgy, hogy mind a kettőnél a potentiálkülönbség a két szén között s a használt áram egyforma volt. A mérések eredménye az, hogy a horizontalis irányú megvilágitás ennél a lámpánál legalább *kétszer akkora*, mint a réginél, úgy a fehér fényre, mint a fotometriailag irányadó sárgászöld fényre nézve (582 μ).

A lámpát egyelőre kézzel való szabályozásra — mint egyszerűbbre — készíttettem. (Egy újabb példány, mely munkában van, egyszerű regulatorral lesz ellátva). A szerkesztésnél tekintettel voltam arra, hogy minden szükséges mozgás könnyen kivihető s a mellett a lámpa szerkezete egyszerű s ára olcsó legyen.



A rajzból látható, hogy a positiv és a negativ szén csavarokkal tolhatók el; egy másik csavar az egész lámpát függélyes irányban mozgatja, végül vízszintes tengely körül szintén csavar forgatja a lámpát, úgy hogy a szerkezet a legfinomabb beállítást is lehetővé teszi. A negativ szén egy szánon eltolható, úgy hogy könyök által annak különböző hajlást adhatni, a mi egyes kisérleteknél alkalmas.

Az összes mozgató részek alúl a kamrán kivül vannak, úgy hogy könnyen hozzájuk lehet férni s nem melegszenek fel. A positiv szenet forgatni lehet a tartójában s az által az egyenletes leégésről s jó kráterképződésről gondoskodni.

A lámpa Süss Nándor úr mechanikai tanműhelyében készült.

Klupathy Jenő.

AZ ANALITIKAI FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉHEZ.

(Harmadik közlemény.)

11. Az $f(x)$ függvénynek a ϱ' sugarú kőr kerületén való viselkedése úgy vizsgálható meg, hogy az előbbi módszert $f(x)\,P_p(x)$-re alkalmazzuk. De a következő direktebb eljárást is követhetjük.

Legyenek

$$i_0,\ i_1,\ i_2, \ldots .\ i_P$$

tetszőleges, de állandó egész számok, akkor — ha csak $P \geq p$ az

$$\begin{vmatrix} a_{m+i_0} & a_{m+i_0+1} & \ldots & a_{m+i_0+p-1} & a_{m+i_0+p} & \ldots & a_{m+i_0+P} \\ a_{m+i_1} & a_{m+i_1+1} & \ldots & a_{m+i_1+p-1} & a_{m+i_1+p} & \ldots & a_{m+i_1+P} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m+i_P} & a_{m+i_P+1} & \ldots & a_{m+i_P+p-1} & a_{m+i_P+p} & \ldots & a_{m+i_P+P} \end{vmatrix}$$

determináns az a-k és b közt levő kapcsolat alapján így is írható

$$\begin{vmatrix} a_{m+i_0} & a_{m+i_0+1} & \ldots & a_{m+i_0+p-1} & b_{m+i_0+p} & \ldots & b_{m+i_0+P} \\ a_{m+i_1} & a_{m+i_1+1} & \ldots & a_{m+i_1+p-1} & b_{m+i_1+p} & \ldots & b_{m+i_1+P} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m+i_P} & a_{m+i_P+1} & \ldots & a_{m+i_P+p-1} & b_{m+i_P+p} & \ldots & b_{m+i_P+P} \end{vmatrix}.$$

Itt bármely tag az m-nek elegendő nagy értékeinél kisebbé lesz, mint

$$\frac{(1+\varepsilon)^P}{\varrho^p\,\varrho'^{\,P-p+1}}$$

m-dik hatványa, tehát magának a determinánsnak abszolut értéke kisebbé lesz, mint

$$(P+1)!\left[\frac{(1+\varepsilon)^P}{\varrho^p \varrho'^{P-p+1}}\right]^m$$

s így a determináns m-dik gyökének felső határa nem lehet nagyobb mint

$$\frac{1}{\varrho'^{P-p+1}}.$$

Ha itt

$$i_0=0,\ i_1=1, \ldots, i_P=P,$$

akkor az

$$l_P \equiv \limsup_{m=\infty} \left|\sqrt[m]{D_{mP}}\right| \leqq \frac{1}{\varrho^p \varrho'^{P-p+1}} \qquad (P \geqq p)$$

egyenlőtlenséget nyerjük. Hasonlóképpen

$$\limsup_{m=\infty} \left|\sqrt[m]{D_{mP}^{(h)}}\right| \leqq \frac{1}{\varrho^p \varrho'^{P-p+1}} \qquad (P \geqq p),$$

ha $D_{mP}^{(h)}$ a D_{mP+1}-ből az utolsó sornak és az utolsó $P-p$ oszlop valamelyikének elhagyása által keletkezik.

Tegyük fel, hogy l_P a p-nél nagyobb P-kre vonatkozólag nem marad mindig egyenlőnek $\frac{1}{\varrho^p \varrho'^{P-p+1}}$-gyel, hanem ennél az értéknél kisebbé is lesz. Még pedig legyen P-nek legkisebb értéke, melyre vonatkozólag ez bekövetkezik $P=q$. Vagyis legyen q a legkisebb szám, melyre vonatkozólag

$$\frac{l_P}{l_{P-1}} < \frac{1}{\varrho'},$$

míg a $P=1, 2, \ldots, p-1$ és a $P=p, p+1, \ldots, q-1$ esetekben $\frac{l_P}{l_{P-1}}$ értéke $\frac{1}{\varrho}$ illetőleg $\frac{1}{\varrho'}$.

E szerint

$$\frac{l_q}{l_{q-1}} < \frac{l_{q-1}}{l_{q-2}} \quad \text{s így} \quad l_q\, l_{q-2} < l_{q-1}^2 .$$

Továbbá a

$$|D_{m,q-1}|^2 - |D_{m+1,q-1}|\,|D_{m-1,q-1}| \leqq |D_{m-1,q}|\,|D_{m,q-2}|$$

egyenlőtlenség jobb oldala kisebb mint $l_q\, l_{q-2}\,(1+\varepsilon)^2$-nak m-dik hatványa. Ha tehát

$$a = l_{q-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad k = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{l_q\, l_{q-2}}{l_{q-1}^2}},$$

akkor

$$|D_{m,q-1}|^2 - |D_{m+1,q-1}|\,|D_{m-1,q-1}| < \left(ka\,\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{2m},$$

hol k egy pozitiv valódi tört.

Innen és a

$$\lim_{m=\infty}\text{sup.}\left|\sqrt[m]{D_{m,q-1}}\right| = l_{q-1} > a$$

képletből a 9. alattiakhoz teljesen hasonló megfontolásokkal azt találjuk, hogy $\left|\sqrt[m]{D_{m,q-1}}\right|$ szabályosan közeledik a l_{q-1} limeshez.

Ezt tudván, képezzük a következő q egyenletet:

$$\begin{array}{l}
a_{m+q} \quad + A'^{(1)}_m a_{m+q-1} + \cdots + A'^{(h)}_m a_{m+q-h} \quad + \cdots + A'^{(q)}_m a_m \quad = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m+2q-1} + A'^{(1)}_m a_{m+2q-2} + \cdots + A'^{(h)}_m a_{m+2q-h-1} + \cdots + A'^{(q)} a_{m+q-1} = 0
\end{array}$$

s legyen rövidség kedvéért

$$\delta'^{(h)}_m = A'^{(h)}_{m+1} - A'^{(h)}_m$$

$$(h=1,\ 2,\ \ldots,\ q).$$

Akkor

$$\delta'^{(h)}_m = -\frac{D_{mq}\, D^{(h)}_{m,q-2}}{D_{m,q-1}\, D_{m+1,q-1}}$$

és m elegendő nagy értékeinél

$$\left|\sqrt[m]{\delta'^{(h)}_m}\right| < g' = \frac{l_q\, l_{q-2}}{l^2_{q-1}}(1+\varepsilon)$$

tehát $A'^{(h)}_m$-nak véges és meghatározott $A'^{(k)}_m$ határértéke van.

Ha az így nyert

$$A'^{(1)}, \ldots, A'^{(h)}, \ldots A'^{(q)}$$

határértékeket egy q-ad fokú egész függvény együtthatóinak választjuk, akkor eme

$$P'_q(x)=1+A'^{(1)}x+\cdots+A'^{(h)}x^h+\cdots+A'^{(q)}x^q$$

függvénynek $f(x)$-szel való szorzatában x^{m+q} együtthatója

$$C_{m+p}=a_{m+q}+A'^{(1)}a_{m+q-1}+\cdots+A'^{(h)}a_{m+q-h}+\cdots+A'^{(q)}a_m\,.$$

Ezen együttható m-dik gyökének felső határa következőleg becsülhető meg.

Az
$$\begin{array}{lll}
a_{m+p} & =b_{m+p} & -(A^{(1)}a_{m+p-1}+\cdots+A^{(p)}a_m) \\
a_{m+p+1} & =b_{m+p+1} & -(A^{(1)}a_{m+p}+\cdots+A^{(p)}a_{m+1}) \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m+2q-1} & =b_{m+2q-1} & -(A^{(1)}a_{m+2q-2}+\cdots+A^{(p)}a_{m+2q-p-1})
\end{array}$$

egyenletek segítségével az

$$\begin{array}{llll}
a_{m+q}, & a_{m+q}, & \ldots, & a_{m+p} \\
a_{m+q-1}, & a_{m+q}, & \ldots, & a_{m+p+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m+2q-1}, & a_{m+2q-2}, & \ldots, & a_{m+p+q-1}
\end{array}$$

értékrendszerek rendre mint

$$\begin{array}{lllllll}
b_{m+q}, & b_{m+q-1}, & \ldots, & b_{m+p}, & a_{m+p-1}, & \ldots, & a_m \\
b_{m+q+1}, & b_{m+q}, & \ldots, & b_{m+p+1}, & a_{m+p}, & \ldots, & a_{m+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{m+2q-1}, & b_{m+2q-2}, & \ldots, & b_{m+p+q-1}, & a_{m+p+q-2}, & \ldots, & a_{m+q-1}
\end{array}$$

lineáris függvényei fejezhetők ki, tehát az $A'^{(k)}_m$-k meghatározására szolgáló egyenletek következőleg is irhatók:

$$\begin{array}{llllll}
b_{m+q} & +B_m^{(1)}b_{m+q-1} & +\cdots+B_m^{(q-p)} & b_{m+p} & + & \\
 & +a_m^{(1)}a_{m+p-1} & +\cdots+a^{(p)} & a_m & =0 & \\
b_{m+q+1} & +B_m^{(1)}b_{m+q} & +\cdots+B_m^{(q-p)} & b_{m+p+1} & + & \\
 & +a_m^{(1)}a_{m+p} & +\cdots+a^{(p)} & a_{m+1} & =0 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
b_{m+2q-1} & +B_m^{(1)}b_{m+2q-2} & +\cdots+B_m^{(q-p)} & b_{m+p+q-1} & + & \\
 & +a_m^{(1)}a_{m+p+q-1} & +\cdots+a^{(p)} & a_{m+q=1} & =0. &
\end{array}$$

Itt a B_m-k és a_m-k az A'_m-knek bizonyos lineáris függvényei, melyekben az együtthatók az m-től függetlenek. Továbbá az eredeti egyenlet-rendszernek és az ujnak determinánsa ugyanaz lévén, az imént említett lineáris függvények együtthatóiból képezett determináns az egységgel egyenlő. A mondottaknál fogva az A'_m-k és a B_m-ek s a_m-ek közötti kapcsolat kölcsönösen egyértékű. Végre az A'_m-kkel együtt a B_m-knek és a_m-knek is véges és meghatározott B ill. a határértékeik vannak, melyek az A'-knek ugyanoly lineáris kapcsolatai, mint a B_m-ek és a_m-ek az A'_m-eknek.

Minthogy a $\delta'^{(h)}_m$-ról mondottak mintájára könnyen igazolható, hogy

$$|B^{(h)}_{m+1}-B^{(h)}_m| < g'^m = \left[\frac{l_q\, l_{q-2}}{l^2_{q-1}}(1+\varepsilon)\right]^m,$$

azért egyszersmind

$$|B^{(h)}-B^{(h)}_m| < \frac{g'^m}{1-g'} = \frac{1}{1-g'}\left[\frac{l_q\,\varrho'}{l_{q-1}}(1+\varepsilon)\right]^m.$$

Továbbá $a^{(h)}_{m+1}-a^{(h)}_m$ külömbség egyenlő a

$$\frac{D_{mq}}{D_{m,\,q-1}\,D_{m+1,\,q-1}}$$

hányadosnak s egy oly determinánsnak szorzatával, mely a

$$\begin{vmatrix} b_{m+q} & b_{m+q-1} & \dots & b_{m+p} & a_{m+p-1} & \dots & a_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m+2q} & b_{m+2q-1} & \dots & b_{m+p+q-1} & a_{m+p+q-1} & \dots & a_{m+q} \end{vmatrix}$$

determinánsból az utolsó sornak s az utolsó p oszlop valamelyikének elhagyása által keletkezett. Tehát

$$|a^{(h)}_{m+1}-a^{(h)}_m| < g''^m = \left[\frac{l_q}{l^2_{q-1}}\,\frac{1}{\varrho^{p-1}\,\varrho'^{q-p}}(1+\varepsilon)\right]^m$$

és

$$|a^{(h)}-a^{(h)}_m| < \frac{g''^m}{1-g''} = \frac{1}{1-g''}\left[\frac{l_q\,\varrho}{l_{q-1}}(1+\varepsilon)\right]^m.$$

Ha most már a

$$C_{m+p} = \sum_{h=1}^{q-p} (B^{(h)} - B_m^{(h)})\, b_{m+q-h} + \sum_{k=1}^{p} (a^{(k)} - a_m^{(k)})\, a_{m+p-k}$$

képletben tekintetve veszszük a $B^{(h)} - B_m^{(h)}$ és $a^{(k)} - a_m^{(k)}$ különbségekről mondottakon kivül még azt is, hogy $|b_{m+q-h}|$ és $|a_{m+p-k}|$ az m igen nagy értékeinél kisebbek, mint $\frac{1+\varepsilon}{\varrho'}$ illetőleg $\frac{1+\varepsilon}{\varrho}$-nak m-dik hatványai, akkor azt találjuk, hogy C_{m+p} abszolut értéke kisebb mint

$$C\left[\frac{l_q}{l_{q-1}}(1+\varepsilon)^2\right]^m$$

hol C az m-től független együtthatót jelent. Ennélfogva

$$\lim_{m=\infty}\text{sup.}\,\left|\sqrt[m]{C_{m+q}}\right| \leq \frac{1}{\varrho''},$$

hol

$$\frac{1}{\varrho''} = \frac{l_q}{l_{q-1}}.$$

Másrészt világos, hogy $\left|\sqrt[m]{C_{m+q}}\right|$ felső határa nem lehet kisebb mint $\frac{l_q}{l_{q-1}}$, tehát

$$\lim_{m=\infty}\text{sup.}\,\left|\sqrt[m]{C_{m+q}}\right| = \frac{1}{\varrho''} = \frac{l_q}{l_{q-1}}.$$

Vagyis az $f(x)\,P_q'(x)$ hatványsornak összetartási köre

$$\varrho'' = \frac{l_{q-1}}{l_q}$$

sugarú.

A ϱ'' sugarú körön belül $f(x)$-nek rendes helyeken kivül csak polusai lehetnek s ezek csak ott, hol $P_q'(x) = 0$. Még pedig valamely $x = x'$ hely legfeljebb annyiszoros polusa lehet $f(x)$-nek, a hányszoros zérus helye $P_q'(x)$-nek. Innen világos, hogy $f(x)$-nek a ϱ'' sugarú körön belül levő polusainak száma — a többszörös polusokat többszörösségük foka szerint számítva — legfeljebb q lehet.

Másrészt $f(x)$-nek már a ϱ' sugarú körön belül és annak kerületén levő polusainak száma nem lehet kisebb, mint q, mert különben már a q-nál kisebb P-re vonatkozólag volna

$$\limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{m,P}} \right| < \frac{1}{\varrho^p \varrho'^{P-p+1}}.$$

E szerint $f(x)$-nek a ϱ'' sugarú körön belül nincs más szinguláris helye, mint q polus. Ezeknek helyeit a

$$P'_q(x) = 0$$

egyenlet határozza meg. E polusok közül p a ϱ sugarú kör kerületén van, ezeket a $P_p(x)=0$ egyenlet határozza meg. A többi $(q=p)$ polus pedig a ϱ' sugarú kör kerületén van, ezeket a

$$\frac{P'_q(x)}{P_p(x)} = 0$$

egyenlet határozza meg.

Hogy ezen egyenlet bal oldalán az osztást el lehet végezni, az onnan világos, hogy $P_p(x)=0$ minden gyöke az előbbiek szerint a $P'_q(x)=0$ egyenletnek is gyöke.

12. Hogy $f(x)$ miként viselkedik a ϱ'' sugarú körön, most már egészen az előbbi módon vizsgálható meg.

A

$$\frac{l_{q+1}}{l_q}, \frac{l_{q+2}}{l_{q+1}}, \ldots, \frac{l_P}{l_{P-1}}, \ldots$$

viszonyok egyike sem lehet nagyobb mint $\frac{l_q}{l_{q-1}}$. Továbbá, ha van oly P érték, melyre vonatkozólag $\frac{l_P}{l_{P-1}}$ kisebb mint $\frac{l_q}{l_{q-1}}$ és pedig a legkisebb ily érték $P=r$, akkor

$$\lim_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{m,r-1}} \right| = l_r = \frac{1}{\varrho^p \varrho'^{q-p} \varrho''^{r-q}}.$$

Végre a $P_p(x)$-hez analog módon meghatározott

$$P''_r(x) = 1 + A''^{(1)} x + \cdots + A''^{(r)} x^r$$

r-ed fokú egész függvénynek $f(x)$-szel való szorzata a

$$\varrho''' = \frac{l_{r-1}}{l_r}$$

sugarú körben összetartó hatványsort ad. Az $f(x)$-nek e körön belül rendes helyeken kívül csak polusai vannak s ezeket a $P''_r(x)=0$ egyenlet határozza meg. Közülök p, $q-p$, illetőleg $r-q$ rendre a ϱ, ϱ', ϱ'' sugarú körön van. Az utóbbiakat

$$\frac{P''_r(x)}{P'_q(x)} = 0$$

egyenlet határozza meg.

A ϱ'' sugarú körön éppen így vizsgáljuk meg $f(x)$-t s egyáltalában ezt az eljárást újból és újból ismételhetjük, ha csak egy bizonyos P-től kezdve

$$\frac{l_P}{l_{P-1}}, \frac{l_{P+1}}{l_P} \dots$$

nem lesznek mindannyian egyenlők egymással.

Mint láttuk, az $\frac{l_{P-1}}{l_P}$ *értéke P növekedtével sohasem kisebbedik. Ha egy bizonyos $P=P^{(\lambda)}$ értékre vonatkozólag*

$$\varrho^{(\lambda)} = \frac{l_{P^{(\lambda)}-1}}{l_{P^{(\lambda)}}} > \frac{l_{P^{(\lambda)}-2}}{l_{P^{(\lambda)}-1}}$$

akkor $f(x)$ a $\varrho^{(\lambda)}$ sugarú körön belül rendes helyeken kívül csak $P^{(\lambda)}$ polussal bir.

E polusok úgy vannak elhelyezve, hogy a

$$\varrho, \varrho', \varrho'', \dots, \varrho^{(\lambda-1)}$$

sugarú körökön rendre

$$p=P', \; q-p=P''-P', \dots, P^{(\lambda)}-P^{(\lambda-1)}$$

polusa van. Ha

$$P^{(u)} \leqq P < P^{(u+1)} \qquad (u<\lambda),$$

akkor

$$l_P = \frac{1}{\varrho^p \varrho'^{q-p} \dots \varrho^{(u)P+1-P^{(u)}}}.$$

Ha tehát a $\varrho^{(\lambda)}$ sugarú kör belsejében levő polusok abszolut értékeit nagyságuk szerint rendezzük s az egyenlő abszolut értékeket ismételten irjuk fel, akkor

$$l_P = \frac{1}{\varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_P}$$

s így a mondott körben a polusok abszolut értékeinek meghatározására a következő egyenlet használható

$$\varrho_P = \frac{l_{P-1}}{l_P} = \frac{\limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{m,P-1}} \right|}{\limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{m,P}} \right|} \qquad (P < P^{(\lambda)}). \qquad (29)$$

Abban a különös esetben, midőn minden polusnak más-más abszolut értéke van

$$\frac{1}{\varrho_P} = \frac{\lim_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{m,P-1}} \right|}{\lim_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{m,P}} \right|} \qquad (P < P^{(\lambda)}). \qquad (30)$$

13. Az

$$l_0, l_1, \ldots, l_P, \ldots$$

sorozat vizsgálatánál a következő esetek következhetnek be:

1. Bizonyos $P = P^{(\lambda)}$ értéktől kezdve $l_P = 0$. Ekkor meghatározható egy oly $P^{(\lambda)}$ fokú $G(x)$ egész függvény, hogy $F(x) = f(x)\,G(x)$ az egész síkban összetartó hatványsorral egyenlő. Ekkor tehát $f(x)$ az x minden véges értékének környezetében a ráczionális függvények módjára viselkedik és az egész síkra érvényes analitikai kifejezése

$$f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}.$$

Sőt ha $l_0 = 0$, akkor már $f(x)$ maga az egész síkban szabályosan viselkedik.

2. Bizonyos $P = P^{(\lambda)}$ értektől kezdve $\frac{l_{P-1}}{l_P}$ állandó véges értékkel bír. Ekkor meghatározható egy oly $P^{(\lambda)}$ fokú $G(x)$ ráczionális egész függvény, hogy

$$F(x) = f(x)\, G(x)$$

az

$$R = \frac{l_{P^{(\lambda)}-1}}{l_{P^{(\lambda)}}}$$

sugarú körön belül szabályosan viselkedik, ellenben e kör kerületén már más szinguláritással bir, mint pusztán polusokkal. Ekkor tehát a bevezetésben említett $\mathfrak{K}$ kör sugara R és ezen a körön belül

$$f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}.$$

3. Az

$$\frac{1}{l_0}, \frac{l_0}{l_1}, \frac{l_1}{l_2}, \ldots, \frac{l_{P-1}}{P_P}, \ldots$$

sorozat csupa véges tagból áll, de minden határon túl növekedik. Ekkor bármely R sugárhoz található egy oly $P^{(\lambda)}$ egész szám, hogy

$$\frac{l_{P^{(\lambda)}-1}}{l_{P^{(\lambda)}}} > R \geqq \frac{l_{P^{(\lambda)}-2}}{l_{P^{(\lambda)}-1}}.$$

Tehát bármely R sugarú körben $f(x)$-nek rendes helyeken kivül csak polusai vannak, azaz $f(x)$ az x-nek minden véges értékének környezetében a ráczionális egész függvények módjára viselkedik.

Az egész síkban az összes polusok abszolut értékeit az

$$\frac{1}{l_0} = \frac{1}{\lim\limits_{m=\infty}\text{sup.}\left|\sqrt[m]{a_m}\right|},$$

$$\frac{l_0}{l_1} = \frac{\lim\limits_{m=\infty}\text{sup.}\left|\sqrt[m]{a_m}\right|}{\lim\limits_{m=\infty}\text{sup.}\left|\sqrt[m]{D_{m,1}}\right|},$$

$$\cdots$$

$$\frac{l_{P-1}}{l_P} = \frac{\lim\limits_{m=\infty}\text{sup.}\left|\sqrt[m]{D_{m,P-1}}\right|}{\lim\limits_{m=\infty}\text{sup.}\left|\sqrt[m]{D_{m,P}}\right|},$$

$$\cdots$$

sorozat adja meg.

4. Az

$$\frac{1}{l_0}, \frac{l_0}{l_1}, \frac{l_1}{l_2}, \ldots, \frac{l_{p-1}}{l_p}, \ldots$$

sorozat növekedése sohasem ér véget, de

$$\lim_{p=\infty} \frac{l_{p-1}}{l_p}$$

véges R értékű. Ekkor a $\mathfrak{K}$ kör sugara R és e körön belül $f(x)$-nek végtelenül sok polusa van.

14. A fentiek az analitikai függvények zérus-helyeinek meghatározására szintén mószert nyújtanak.

Ha ugyanis a

$$\varphi(x) = C_0 + C_1 x + \cdots + C_m x^m + \cdots$$

függvény a $\mathfrak{K}$ körön belül a raczionális függvények módjára viselkedik s egyszerűség kedvéért felteszszük, hogy $C_0 \gtrless 0$, akkor az

$$f(x) = \frac{1}{\varphi(x)} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots$$

függvényről ugyanez áll s ennek polusai megegyeznek $\varphi(x)$ zérushelyeivel. Ezen $f(x)$ függvény együtthatóinak meghatározása után tehát $\varphi(x)$-nek a $\mathfrak{K}$ kör belsejében levő zérus-helyeit mint $f(x)$-nek polusait az előbb tárgyalt eljárás adja meg.

Ez az eljárás nem az egyes zérus-helyeket adja meg külön-külön, hanem az egyenlő abszolut értékű zérus helyek meghatározását csak egy oly algebrai egyenlet megoldására vezeti vissza, mely a $P_p(x) = 0$ mintájára képezett két egyenletnek hányadosa. Ezt az egyenletet aztán úgy lehet megoldani, hogy pl. az egyes gyökök meghatározását lineáris transzformáczió segítségével Bernoulli módszerére vezetjük vissza.

A mi különösen a $\varphi(x) = 0$ egyenlet gyökeinek abszolut értékeit illeti, ezek következőleg határozhatók meg.

A D_{mp} determináns következőleg is irható :

$$\pm D_{mp}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & 1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 1 & \dots 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & \dots 1 \\ a_{m+p} & a_{m+p-1} & \dots a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots 0 \\ a_{m+p+1} & a_{m+p} & \dots a_{m+1} & a_m & a_{m-1} & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ a_{m+2p} & a_{m+2p-1} & \dots a_{m+p} & a_{m+p-1} & a_{m+p-2} & \dots a_0 \end{vmatrix}$$

Szorozzuk meg ebben az alakban a következővel:

$$C_0^{m+2p+1}=\begin{vmatrix} C_0 & C_1 \dots C_p & C_{p+1} \dots C_{m+2p} \\ 0 & C_0 \dots C_{p-1} & C_p \dots C_{m+2p-1} \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \dots \cdot \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \dots , \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots C_0 \end{vmatrix}$$

Ekkor:

$$\pm C_0^{m+2p+1} D_{mp} =$$

$$=\begin{vmatrix} C_{p+1} & C_p & \dots C_1 & C_0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ C_{p+2} & C_{p+1} & \dots C_2 & C_1 & C_0 & \dots 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ C_{m+2p} & C_{m+2p-1} & \dots C_{m+p} & C_{m+p-1} & C_{m+2p-2} & \dots C_{p+1} & C_p & C_{p-1} & \dots C_0 \\ 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 1 & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 & \dots 1 \end{vmatrix}$$

vagyis

$$\pm C_0^{m+2p+1} D_{mp} = E_{mp}$$

ahol

$$E_{mp} = \begin{vmatrix} C_{p+1} & C_p & \dots C_0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ C_{p+2} & C_{p+1} & \dots C_1 & C_0 & 0 & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \\ C_{m+p-1} & C_{m+p-2} & \dots C_{m-2} & C_{m-3} & C_{m-4} & \dots C_0 \\ C_{m+p} & C_{m+p-1} & \dots C_{m-1} & C_{m-2} & C_{m-3} & \dots C_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \\ C_{m+2p} & C_{m+2p-1} & \dots C_{m+p-1} & C_{m+p-2} & C_{m+p-3} & \dots C_{p+1} \end{vmatrix}$$

Ha most már $f(x)$ polusainak vagyis $\psi(x)=0$ gyökeinek abszolut értékei rendre $\sigma_0, \sigma_1, \dots$ akkor

$$\frac{1}{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_p} = \limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{mp}} \right| = \limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{\frac{E_{m,p}}{C_0^{m+2p+1}}} \right|$$

vagyis

$$\frac{1}{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_p} = \frac{1}{|C_0|} \limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{E_{m,p}} \right| \tag{31}$$

és

$$\sigma_p = \frac{\limsup\limits_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{E_{m,p-1}} \right|}{\limsup\limits_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{E_{m,p}} \right|}. \tag{32}$$

Kürschák József.

AZ ÍVMÉRÉS ELMÉLETE.

(Második közlemény.)

7. Hogy ha az $y=f(x)$ egyenletben előforduló $f(x)$ függvény folytonossága az $(x_0 x')$ számközön belül megszünik, a $P_0 P'$ ív mérőszáma létezésének eldöntése végett, hasonlóképen mint az $f(x)$ függvény folytonossága esetében akkor elég egy bizonyos felosztásból kiindulva megvizsgálnunk, vajjon L_n n növekedtével valamely véges határértékhez közeledik-e, hogy ha $f(x)$ az $(x_0 x')$ számközön belül az alább felsorolandó feltételeket kielégíti, a melyek egyszersmind *a szükséges feltételek is arra nézve, hogy a $P_0 P'$ ív mérőszáma egyáltalában létezhessék, hogy ha az $f(x)$ függvény szakadásos.*

E feltételek a következők:

1. *Hogy x minden értéke mellett $f(x+\varepsilon)$ és $f(x-\varepsilon)$ ε-nak minden határon túl való kisebbedésével véges és meghatározott $f(x+0)$, ill. $f(x-0)$ határértékekhez közeledjenek.*

2. *Hogy x minden értéke mellett $f(x)$ értéke valamely $f(x+0)$ és $f(x-0)$ közé eső, vagy pedig ezek egyikével egyenlő érték legyen.*

3. *Hogy az x értékek, melyek mellett $f(x-0)$ $f(x+0)$-tól különböző, vagy véges, vagy pedig megszámlálható végtelen sokaságot alkossanak.*

4. *Hogy az egész $(x_0 x')$ számközhöz tartozó $|f(x+0)-f(x-0)|$ értékek összege véges legyen.*

Első sorban azt mutatjuk ki, hogy szakadásos $f(x)$ függvény esetében a $P_0 P'$ ívnek egyáltalában nincsen mérőszáma, hogy ha $f(x)$ e feltételeket nem elégíti ki.

Tegyük fel ugyanis, hogy az 1. feltétel ellenére x-nek valamely az $(x_0 x')$ számközhöz tartozó ξ értéke mellett p. o. $f(\xi+\varepsilon)$ ε-nak minden határon túl való kisebbedésével nem közelednék valamely meghatározott véges határértékhez (vagyis, hogy ξ az $f(x)$ függvénynek másodfajú szakadópontja), akkor ε-t tetszőleges kicsiny pozitiv számnak választva, ennek megfelelőleg meghatározhatunk egy pozitiv $\varepsilon_1 < \varepsilon$ számot oly módon, hogy

$$|f(\xi+\varepsilon)-f(\xi+\varepsilon_1)|>c$$

legyen hol c bizonyos pozitiv számot jelent. Hasonló módon határozhatunk meg ε_1-nek megfelelőleg egy ε_2 számot, ε_2-nek megfelelőleg egy ε_3 számot stb.

Hogy ha már mostan a $P_0 P'$ ív valamely felosztásában osztópontokul azokat a pontokat veszszük fel, a melyek abszczisszái:

$$\xi+\varepsilon,\ \xi+\varepsilon_1,\ \xi+\varepsilon_2, \ldots,$$

akkor az L_n-t alkotó tagok közt lesznek ilyenek is:

$$\left|\sqrt{(\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i)^2+[f(\xi+\varepsilon_{i+1})-f(\xi+\varepsilon_i)]^2}\right|,$$

melyek közül mindegyik nagyobb c-nél. Ezek száma azonban n növekedtével minden határon túl nő és így L_n-nek ebben az esetben nem lehet véges határértéke.

Hogy ha a ξ szakadópontban az $f(\xi)$ érték a 2. feltétel ellenére nem esnék $f(\xi-0)$ és $f(\xi+0)$ közé, sem pedig ezek egyikével sem volna egyenlő, hanem ezek közül annál, a melyhez közelebb esik c-vel nagyobb vagy kisebb volna, akkor L_n kiszámításánál a $P_0 P'$ íven egyelőre a ξ szakadópontnak megfelelő Q pontot mint osztópontot elkerülhetjük. Tegyük fel, hogy L_n e feltételnek megfelelő felosztás mellett n növekedtével valamely véges L határértékhez közeledik. Hogy ha már most a $P_0 P'$ ív osztópontjai közé a Q pontot is beleveszszük, akkor L_n-nek

$$\left|\sqrt{(\eta+\varepsilon)^2+[f(\xi+\eta)-f(\xi-\varepsilon)]^2}\right|$$

tagja helyébe, mely n növekedtével az

$$|f(\xi+0)-f(\xi-0)|$$

értékhez közeledik, ez az összeg fog lépni:

$$\left|\sqrt{\varepsilon^2+[f(\xi)-f(\xi-\varepsilon)]^2}\right|+\left|\sqrt{\eta^2+[f(\xi+\eta)-f(\xi)]^2}\right|,$$

a mely n növekedtével az

$$|f(\xi+0)-f(\xi-0)|+2c$$

értékhez közeledik. L_n határértéke tehát, a melyhez jutunk, hogy ha Q-t is beleveszszük a P_0P' ív osztópontjai közé, $L+2c$ lesz.

Látjuk tehát, hogy ha az $f(x)$ függvény a 2. feltételnek nem felel meg, L_n határértéke, ha ilyen egyáltalában létezik, a P_0P' ív felosztásától függ. Így tehát ebben az esetben ennek az ívnek mérőszámot nem tulajdoníthatunk.

Legyenek az $f(x)$ függvény szakadópontjai az (x_0x') számközben:

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$$

és legyen továbbá:

$$|s_r|=|f(\xi_r+0)-f(\xi_r-0)|.$$

Mindenek előtt belátható, hogy ama szakadópontok száma, a melyekben $|s_r|$ valamely tetszés szerinti pozitiv c számnál nagyobb, okvetetlenül véges. Láttuk ugyanis, hogy L_n ilyen tagjai, mint a milyen

$$\left|\sqrt{(\eta_r+\varepsilon_r)^2+[f(\eta_r+\xi_r)-f(\xi_r-\varepsilon_r)]^2}\right|$$

n növekedtével $|s_r|$-hez közelednek. Igy tehát, hogy ha ama szakadópontok száma, melyeknek megfelelőleg

$$|s_r|>c,$$

nem volna véges, L_n se közeledhetnék n növekedtével valamely véges L határértékhez.

Ha tehát a c-t bármilyen kicsinynek is választjuk, mindig csak véges számú szakadópont létezhetik, a melynek megfelelőleg $|s|>c$. Ezért a szakadópontokat az $|s|$-ek szerint gondolhatjuk elrendezve úgy, hogy az

$$|s_1|,\quad |s_2|,\quad \ldots,$$

értékek fogyó sort alkossanak. Evvel bebizonyitottnak tekinthetjük azt is, hogy a sokaság, melyet a szakadópontok alkotnak vagy véges, vagy pedig megszámlálható végtelen sokaság.

Hogy végre a 4. feltételnek is ki kell elégíttetnie, hogy a P_0P' ívnek mérőszám felelhessen meg, szintén abból következik, hogy n növekedtével L_n-ben a

$$\left|\sqrt{(\eta_r+\varepsilon_r)^2+[f(\xi_r+\eta)-f(\xi_r-\varepsilon_r)]^2}\right|$$

tagok s_r-hez közelednek. Hogy ha tehát $\sum|s_r|$ nem volna véges, akár véges, akár pedig végtelen nagy a szakadópontok száma, akkor L_n sem közeledhetnék véges határértékhez.

Megjegyzés. Hogy ha $f(x)$ a 4. feltételt kielégíti és szakadópontjainak száma végtelen nagy, akkor $\sum_{r=1}^{\infty}|s_r|$ *konvergens végtelen sor,* és így p mindig oly nagynak választható, hogy

$$\sum_{r=p+1}^{\infty}|s_r|<\delta$$

legyen, hol δ valamely tetszés szerint kicsinynek választott pozitiv számot jelent.

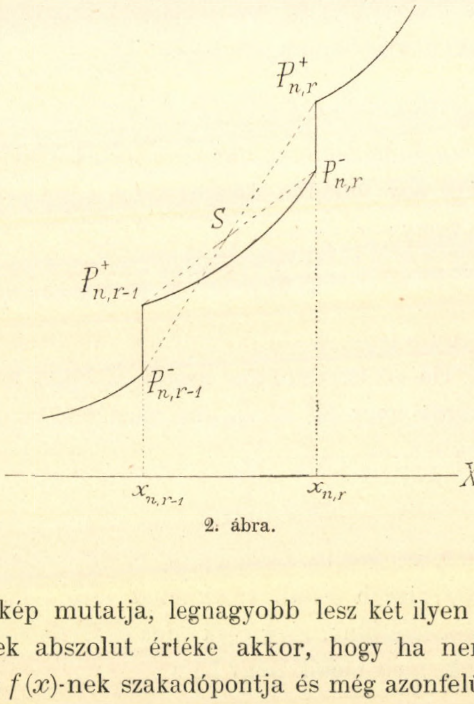
Hogy akkor is, midőn az $f(x)$ függvény szakadásos, de a felsorolt négy feltételnek eleget tesz, már egyedül abból a körülményből, hogy L_n a P_0P' ív egy bizonyos felosztása mellett valamely véges L határértékhez közeledik, következtethetünk arra, hogy az ív mérőszáma létezik, alig szorúl bizonyításra abban az esetben, hogy ha $f(x)$ értéke a szakadópontokban vagy $f(x-0)$-sal, vagy pedig $f(x+0)$-sal egyenlő. Ebben az esetben ugyanis majdnem szóról-szóra ugyanazokat az okoskodásokat kellene ismételnünk, a melyeknek segitségével a megfelelő tételt valamely folytonos $f(x)$ függvény esetében bebizonyítottuk.

Új meggondolásokra csak abban az esetben szorulunk, midőn $f(x)$ a szakadópontokban valamely $f(x-0)$ és $f(x+0)$ közt fekvő értéket vesz fel. Erre az esetre vonatkozólag ki fogjuk mutatni, hogy ha L_n n növekedtével valamely véges határértékhez közeledik, akkor $f(x)$ értékei a szakadópontokban, ha csak azok $f(x-0)$ és $f(x+0)$ közt maradnak, e határértékre nincsenek befolyással.

Legyen ugyanis $f^{(1)}(x)$ x-nek oly függvénye, mely az (x_0x') közben a szakadópontok kivételével $f(x)$-szel egyenlő, a szakadópontokban pedig valamely $f(x-0)$ és $f(x+0)$ közt fekvő értéket vesz fel. $L_n^{(1)}$-nel jelöljük annak a tört vonalnak hosszúságát, mely az $y=f^{(1)}(x)$ görbe P_0P' ívének abból a felosztásából származik, a melyben az osztópontok koordinátái ugyanazok, mint az $y=f(x)$ görbe P_0P' ívének abban a felosztásában, mely L_n-re vezetett. Ha már mostan $L_n^{(1)}$-t összehasonlítjuk L_n-nel, rögtön látjuk, hogy csak ama

$$\left|\sqrt{(x_{nr}-x_{n,r-1})^2+[f^{(1)}(x_{nr})-f^{(1)}(x_{n,r-1})]^2}\right|$$

tagjai különbözhetnek a megfelelőktől L_n-ben, amelyekben például $x_{n,r-1}$ a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ értékek valamelyikét jelenti, a melyek az $f(x)$ függvény szakadópontjai.



2. ábra.

Mint a 2. kép mutatja, legnagyobb lesz két ilyen megfelelő tag különbségének abszolut értéke akkor, hogy ha nemcsak $x_{n,r-1}$, hanem x_{nr} is $f(x)$-nek szakadópontja és még azonfelül $f(x_{n,r-1})$-et az $f(x_{n,r-1}-0)$ és $f(x_{n,r-1}+0)$ értékek közül, $f(x_{n,r})$-t pedig az $f(x_{nr}-0)$ és $f(x_{nr}+0)$ értékek közül választjuk úgy, hogy $|f(x_{nr})-f(x_{nr-1})|$ lehetőleg nagy, $f^{(1)}(x_{n,r-1})$-et és $f^{(1)}(x_{nr})$-t ellenben ugyanazok közül az értékek közül oly módon választjuk, hogy

$|f^{(1)}(x_{nr})-f^{(1)}(x_{nr-1})|$ lehetőleg kicsiny legyen, vagy pedig megfordítva. A két összehasonlitandó tag e szélső értékeit ábrázolják

$$P^-_{n,\,r-1}P^+_{nr} \quad \text{és} \quad P^+_{n,\,r-1}P^-_{nr}.$$

De

$$P^-_{n,\,r-1}P^+_{nr}-P^+_{n,\,r-1}P^-_{nr}=(SP^-_{n,\,r-1}-SP^+_{n,\,r-1})+(SP^+_{nr}-SP^{-1}_{nr}),$$

továbbá

$$SP^-_{n,\,r-1}-SP^+_{n,\,r-1}<P^-_{n,\,r-1}P^+_{n,\,r-1}$$

és

$$SP^+_{nr}-SP^-_{nr}<P^-_{nr}P^+_{nr},$$

úgy hogy

$$P^-_{n,\,r-1}P^+_{nr}-P^+_{n,\,r-1}P^-_{nr}<P^-_{nr-1}P^+_{nr-1}+P^-_{nr}P^+_{nr}.$$

Ez mutatja, hogy L_n és $L_n^{(1)}$ két megfelelő tagjának különbsége, abszolut értékét tekintve nem lehet nagyobb mint

$$|f(x_{n,\,r-1}+0)-f(x_{n,\,r-1}-0)|+|f(x_{nr}+0)-f(x_{nr}-0)|\,*$$

Hogy ha ξ szakadópontokat már az $|s|$ értékek szerint rendezve képzeljük, akkor egy fentebbi megjegyzés szerint p-t oly nagynak választhatjuk, hogy:

$$\sum_{r=p+1}^{\infty}|s_r|<\delta.$$

legyen, hol δ egy tetszés szerint kicsinynek választott pozitiv számértéket jelent. Ha ezt kapcsolatba hozzuk az épen levezetett eredménynyel, világos, hogy $L_n^{(1)}$ és L_n ama megfelelő tagjainak különbségei, a melyekben $x_{n,\,r-1}$ a

$$\xi_{p+1},\ \xi_{p+2},\ \ldots$$

értékek valamelyikét jelenti, összegül oly értéket adnak, a melynek abszolut értéke kisebb δ-nál. Hogy tehát $|L_n^{(1)}-L_n|$ értéke felől teljes tájékozást nyerjünk, még csak ama p kifejezés összegét kell megvizsgálnunk, mely előáll, hogy ha a

* A mellékelt kép csak az egyik eshetőséget tünteti fel, mely két szakadópont összekötésénél előállhat. Könnyű azonban belátni, hogy a többi esetekben egészen hasonló okoskodással érünk czélhoz.

$$\Big[\Big|\sqrt{(x_{nr}-x_{n,r-1})^2+[f(x_{nr})-f(x_{nr-1})]^2}\Big|+$$
$$+\Big|\sqrt{(x_{n,r+1}-x_{nr})^2+[f(x_{n,r+1})-f(x_{nr})]^2}\Big|\Big]-$$
$$-\Big[\Big|\sqrt{(x_{nr}-x_{n,r-1})^2+[f^{(1)}(x_{nr})-f^{(1)}(x_{n,r-1})]^2}\Big|+$$
$$+\Big|\sqrt{(x_{n,r+1}-x_{nr})^2+[f^{(1)}(x_{n,r+1})-f^{(1)}(x_{nr})]^2}\Big|\Big]$$

kifejezésbe x_{nr} helyébe rendre a

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_p$$

értékeket teszszük. Minthogy azonban e szakadópontok mindegyikének megfelelőleg oly környéket jelölhetünk ki, a mely közülük csak egyet tartalmaz, könnyen belátható, hogy n-t oly nagynak választhatjuk, hogy midőn $x_{nr}=\xi_k$, legyen :

$$\Big|\sqrt{(x_{nr}-x_{n,r-1})^2+[f(x_{nr})-f(x_{n,r-1})]^2}\Big|+$$
$$+\Big|\sqrt{(x_{n,r+1}-x_{n,r})^2+[f(x_{n,r+1}-f(x_{n,r})]^2}\Big|<|s_k|+\frac{\delta}{2p},$$
$$\Big|\sqrt{(x_{nr}-x_{nr})^2+[f^{(1)}(x_{nr})-f^{(1)}(x_{n,r-1})]^2}\Big|+$$
$$+\Big|\sqrt{(x_{n,r+1}-x_{nr})^2+[f^{(1)}(x_{n,r+1})-f^{(1)}(x_{n,r})]^2}\Big|<|s_k|+\frac{\delta}{2p}.$$

Hogy ha tehát n-et elég nagynak választjuk, mindegyik megvizsgálandó különbség abszolut értéke kisebb lesz $\frac{\delta}{p}$-nél és így mind a p különbség összege abszolut értékére nézve kisebb lesz δ-nál. Ennek alapján már most világos, hogy elég nagy n mellett

$$\big|L_n^{(1)}-L_n\big|<3\delta.$$

Minthogy pedig δ-t tetszés szerint kicsinynek választhatjuk,

$$\lim_{n=\infty}\big|L_n^{(1)}-L_n\big|=0.$$

Ha tehát L_n n növekedtével valamely véges L határértékhez közeledik ugyane határértékhez fog közeledni $L_n^{(1)}$ is, melyben $f^{(1)}(x)$ esetleg azt a függvényt jelentheti, mely a szakadópontokban az

$f(x+0)$ értékeket veszi fel. De erre a függvényre vonatkozólag láttuk, hogy ha $L_n^{(1)}$ a P_0P' ív egy bizonyos felosztása mellett valamely véges határértékhez közeledik, minden más felosztás mellett is ugyanahhoz a határértékhez fog közeledni. Minthogy azonban L_n határértéke az $L_n^{(1)}$ határértékétől nem lehet különböző, evvel állításunk be van bizonyítva.

Rados Ignácz.

PHYSIKAI SZEMLE.

Az x-sugarak és az ibolyántúli sugarak. RAVEAU: Les rayons-x et les rayons ultra-violets. *Journ. de Phys.* 3. sér. T. V. 113 l. 1896.

RÖNTGEN szerint az x-sugarak a vörösön-inneni és az ibolyán-túli sugaraktól abban különböznek, hogy nem verődnek vissza, nem töretnek, nem polarizálhatók és az absorptio a különböző testekben főleg ezek sűrűségétől függ. RAVEAU arra figyelmeztet, hogy ez a harmadik tulajdonság a két elsőnek folyománya, a mennyiben sugarakat polarizálni eddigelé csak visszaverődés vagy törés révén tudunk. Mind a három tulajdonság egyszerre ekként fejezhető ki: *Az összes testek törésmutatója az x-sugarakra nézve igen közel egyenlő az egységgel.*

Igaz ugyan, hogy mindeddig nem ismerünk vörösön-inneni vagy ibolyántúli sugarakat, melyek ilyen tulajdonságuak lennének; de jó lesz szem előtt tartani, hogy a szinszórásnak több elméletéből levezetett képletek a törésmutató határértéke gyanánt az egységet adja, ha a periodus végnélkül kisebbedik. Ugyanígy áll a dolog a mechanikai és az elektromágnesi elméletben (Helmholtz, Ketteler, Drude), melyek ugyanerre az eredményre vezetnek. Az összes átlátszó testekben, a melyekre nézve a törésmutató a periodussal fordított arányban változik, az ibolyán túl erős absorptio-vonalat mutatnának, a melyen túl a törésmutató növekedő értékeken át az egységhez közelednék. Ez az absorptio több esetben tényleg be volt igazolható, nevezetesen a levegő s az üveg esetében; az átlátszatlan testekben, különösen pedig az ezüstre nézve, melynek átlátszósága az ibolyán-túl egyre fokozódik, a törésmutató igen kicsiny (kb. 0,25), a mi szintén megegyezik az elmélettel. Így tehát RÖNTGEN nézetével szemben nem látszik éppen lehetetlennek az, hogy az x-sugarak igen rövid periodusú ibolyántúli sugarak.

Ezen föltevés mellett nem is lehetne már igazi absorptióról szólani, mert a molekularis rezgések periodusa jelentékenyen nagyobb lenne az æther rezgésekénél; s ezt RÖNTGEN tényleg ki is mutatta: azok az anyagok, melyek az x-sugarakat nem bocsátják át, «homályos közegek»-ként szétszórják őket. Tehát mindenképen új tünemény előtt állunk, mely azonban, úgy látszik, természetes következménye annak, hogy a hullámhossz többé nem nagy a molekuláris közökhöz képest. Ime, az eddig ismert adatok egymással homlokegyenest ellenkező föltevésekre vezethetnek!

*

Ujabb vizsgálatok a Röntgen-sugarakra vonatkozólag. Benoist et Hurmuzescu: Nouvelles recherches sur les rayons X. *Journ. de Phys.* Sér. 3. T. V. 110 és 168 l.

B. és H. vizsgálat alá vették a Röntgen-sugarak hatását a külső elektromos és fényhatásoktól teljesen védett elektromosan töltött vezetőkre. Érzékeny elektroszkópot négyszögletes fémházban helyeztek el, melybe a Röntgen-sugarak két ablakon keresztül voltak bebocsáthatók; ezek könnyen kicserélhető lemezekkel voltak elzárhatók. A fémház állandóan vezető közlekedésben van a földdel. Szigetelő gyanánt a dielektrin* használtatott, mely anyag az elektromos töltést hónapokon keresztül megtartja.

Erős szikraindítóból táplált Crookes-csőben gerjesztett Röntgen-sugarakat az elektroszkóp aranylemezkéire irányítván, azok mindíg összeestek,** és pedig bármily természetű volt is a velök közölt töltés. Úgy tetszett, mintha a negativ töltés rövidebb idő alatt szóródott volna szét a Röntgen-sugarak hatására.

A szétszóródás sebessége az ablakot elzáró lemez anyagi minőségétől és vastagságától függött. Vastag papirrétegen, 1 mm vastagságú aluminiumon keresztül a kisülés úgyszólván pillanatnyi volt: az aranylemezkék rögtön összeestek. 0,2 mm vastagságu czinklemezen keresztül semmiféle hatás nem mutatkozott.

A sugarakat átbocsátják az emlitetteken kívül vert arany- és ezüst lemezkék, fémoldatokkal telített papiros, zselatin, celluloid, ebonit, ón, stb.; nem bocsátják át a sárgaréz, a czink, az üveg, porczellán stb.

Ezzel B. és H. új módszert találtak a jelenség vizsgálatára, mely a fotografikus eljárással szemben érzékenyebb és közelítő méréseket tesz lehetővé.

Mindenekelőtt sikerült megállapítaniok, hogy a Röntgen-sugarak levegőbeli terjedésökben a távolságok négyzetének törvényét követik, a miből arra lehet következtetni, hogy a levegő nagy mértékben átlátszó e sugárnemre.

A mérő kisérletek úgy voltak berendezve, hogy meghatároztatott az idő, mely alatt az elektroszkóp aranylemezkéi bizonyos kezdeti széthajlásból

---

* L. Math. Phys. L. IV. 48. l.

** Righi ugyanezt a tüneményt észlelte. L. *Rend. della R. Acc. d. Scienze del Istituto di Bologna.* 1896. febr. 6.

ugyanakkora szögre összeestek: az intenzitások viszonyát az idők viszonyának viszás értéke adja meg. A távolság a Crookes-cső üvegfalának a kathodlemezkével szemben fekvő részétől az aranylemezkékig méretett.

I. Kisérletsorozat.

Távolságok	13 cm	és 20 cm
Szög	40°	« 40°
Idők	27,7 mp.	« 65 mp

A távolságok négyzetének viszonya: 2,37.
Az idők viszonya: 2,33.

II. Kisérletsorozat.

Távolságok	15 cm	és 25 cm
Szög	32°	« 32°
Idők	5,5 mp	« 14,8 mp.

Távols. négyzetének viszonya 2,78.
Idők viszonya 2,68.

További kisérletek arra engednek következtetni, hogy *a Röntgen-sugarak nem homogének.* Ugyanis a különböző Crookes-csövekből kiáramló sugarak ugyanazon az aluminium-lemezen nem egyenlően hatolnak át, és egy és ugyanazon cső esetében az átbocsátó képesség a gerjesztő szikrának hosszával, általában a kisülés körülményeivel változónak mutatkozott. Ez selectiv elnyelésre enged következtetni.

Röviden összefoglalva, úgy tetszik, hogy a Röntgen-sugarak előállítása a Crookes-cső segélyével hasonló ahhoz a tüneményhez, a midőn hő- vagy fénysugarakat hozunk létre külömböző hőmérsékletű hőforrásokkal.

*

Az elektromosságnak Röntgen-sugarak okozta kisülése; e sugarak hatása dielektromos közegekben. J. J. Thomson: Décharge de l'électricité produite par les rayons de Röntgen; effets, produits par ces rayons sur les diélectriques qu' ils traversent. *Journ. de Phys.* 3. sér. T. V. 165 l.

Ha Röntgen-sugarak elektromos testekre esnek, ezek rohamosan elvesztik töltésüket, legyen ez bár pozitív, vagy negativ. E hatás tanulmányozása végett Thomson a következő elrendezést alkalmazta. A sugarak előállítására való Ruhmkorff-féle tekercs és a légüres cső nagy csomagoló láda belsejében vannak elhelyezve; ez ónlemezzel van borítva, hogy az elektrométert ernyőként védje minden elektrostatikai háborgatás ellen, melyet az indukczió-tekercs okozhatna. Az elektrométer tűje kvarcz fonálra van függesztve.

A légüres cső oly módon van elhelyezve, hogy foszforeszkáló része körülbelül 15 hüvelyknyire legyen a láda tetejétől; a sugaraknak a ládából kb. 1 hüvelyknyi átmerőjü nyílás enged utat; ezt a nyílást aluminium- vagy vékony ónlemez zárja. Az elektromozott lemez, mely kissé nagyobb, mint a nyílás, a ládán kívül foglal helyet, kb. két hüvelyknyire fölötte s a sugarak reá esnek, miután a nyíláson keresztülhatoltak. A lemez állandó összeköttetésben van az elektrométer egyik quadránspárjával; a lemezt és a quadránsokat a lehető legnagyobb gonddal el kell szigetelni. A szigetelés tényleg jó volt és a mig a tekercs nem működött, a töltésben észrevehető veszteség nem mutatkozott. A további eljárás a következő: A két quadránspár összeköttetvén, a lemez elektrofórból, vagy kis akkumulátorokból álló nagy teleppel megtöltetik, s azáltal az egész vezetőrendszer bizonyos potencziálra emeltetik.

Az elektrométer négy quadránsán tehát a potencziál értéke ugyanaz. Most elkülönítjük a két quadránspárt; ha a szigetelés jó, a potencziálok értéke ugyanaz marad és az elektrométer nem mutat elhajlást. Th. kisérleteiben a veszteség oly csekély volt, hogy ezen körülmények között a fényfolt eltolódása alig vehető észre. De mihelyt a Röntgen-sugarak a lemezre estek, az elektromosságnak hirtelen vesztesége mutatkozott, a lemezzel összekötött quadránsok potencziálja változott és az elektrométer tükre az általa viszszavert fényvonalat néhány másodpercz alatt a skálán túlra vetette.Az elektromosság ezen vesztesége mindig beáll, bármilyen jelű az elektromosság. Ha a lemez eleinte töltés nélkül van, akkor a sugarak hatásának kitéve, lehetetlen volt bármilyen töltést kimutáthatóvá tenni. Ha a lemezt valamely potencziál értékén tartjuk meg, a veszteség rendkívül finom eszköz ezen sugarak fölismerésére; sokkal érzékenyebb, mint bármely fotografiai lemez. Kitünt, hogy ezek a sugarak, miután egy negyed hüvelyknyi vastagságú czinklemezen haladtak át, tisztán észrevehető hatással vannak valamely megtöltött lemezre.

Az elektrométer és a töltött lemeznek alkalmazása sokkal gyorsabb, mint a fotografiai lemezé és sokkal könnyebben használható mennyileges mérésekre. Annak meghatározasa végett, hogy miképen függ a Röntgen-sugarak kibocsátása a cső ritkítása fokától, a cső a légszivattyúval köttetett össze és megméretett a veszteség a ritkítás különböző fokánál.

Mindaddig mig a nyomás nem volt oly csekély, hogy a foszforeszkáló fény megjelenhessék az üvegen, semmiféle veszteség nem mutatkozott; de a veszteség még a fénylő folt megjelenése után is csekély volt, mig a pozitív sugárnyaláb fénye jelentékeny; a lemez kisülése csak akkor lett rohamossá, midőn a pozitív sugárnyaláb eltünt. Az érzékenység maximumának elérése végett a lemez potencziálértékét nyílván oly magasra kell emelni, a mennyire csak lehetséges. A sugarak okozta veszteség mindamellett előáll, midőn a lemez potencziálja az ónlemezét nem múlja felül többel, mint 3—4 volttal és eddig semmiféle jelenség sem volt észlelhető, melynek alapján azt lehetne hinni, hogy a potenciálkülönbségre nézve létezik egy alsó határ, melyen alul a vesztesség létrejönni megszünnék.

Ezen veszteség több jellemző vonásban különbözik attól, melyet az ibolyántúli sugarak okoznak s a melyre nézve a törvényeket Elster és Geitel állapították meg.

Az ibolyántúli fénysugarak először is csupán a negatív elektromos testeken okoznak kisülést, míg a Röntgen sugarak bármilyen jelü töltésre is hatnak.

Az ibolyántúli sugarak hatása továbbá csak akkor jelentékeny, ha az elektromozott test erősen elektropozitív és tiszta felületű fém. A Röntgensugarak hatása ellenkezőleg nagyon feltünő, bármilyen legyen is a fém és épp úgy érvényesül, ha a lemez szilárd vagy folyékony dielektrikummal van körülvéve, mint midőn levegőben van. Th. szilárd parafinnal vette körül a fémlemezt, továbbá szilárd kénnel, behelyezte ebonit-tömeg belsejébe, körülvette két csillámlemezzel, belemerítette paraffin-olajfürdőbe; daczára annak, hogy a szigetelés lehetőleg tökéletes volt, midőn a Röntgen-sugarak nem hatoltak át a szigetelőn és a potencziál-különbség a lemez és a ládát borító fém között nem volt több mint 10—15 voltnyi, a fémlemez töltése mindezen esetekben mégis eltünt, mihelyt a Röntgen-sugarak a szigetelőbe behatoltak.

Azt találtam, hogy az elektromosság még akkor is eltünik a lemezből, ha a tér, mely elválasztja a legközelebbi szomszédos és a földdel összekötött vezetőtől. teljesen meg van töltve szilárd paraffinnal; ebből arra kell következtetni, hogy a dielektromos közegek addig, míg rajtuk Röntgen-sugarak hatolnak át, vezetőkké lesznek *és hogy minden test vezetővé válik, midőn ezen sugarak átjárják.*

Ugy látszik tehát, hogy midőn e sugarak valamely testen keresztül haladnak, ezt a molekulák valamilyen szétválasztása kiséri, mely az elektromosság mozgását olyanforma mechanismussal teszi lehetővé, mint az elektromos áramét valamely elektrolitben.

Midőn szilárd paraffin tömegbe két pár elektród volt beágyazva, az egyik a Röntgen-sugarak irányával párhuzamosan, a másik pedig erre merőlegesen, azt tapasztaltam, hogy az elektromosság elvesztésének gyorsaságára nézve e két irány között csak nagyon csekély a különbség.

Ford. *Cs. J.*

*

IRODALOM.

Báró Harkányi Béla. A sarkmagasság-változások meghatározása és elméleti magyarázata.* Doctori értekezés. Budapest, 1896. 96 lap, 2 tábla.

1. Azon vélémény, hogy a hosszú időn át állandónak tartott sarkmagasság az idők folyamán némi, bár csekély változásokat szenvedhet, melyek oka részint helyi jellegű geologiai változásokban, részint a föld momentán polusának mozgásában keresendő, körülbelül a jelen század elején merült fel. Nem csodálkozhatunk azon, hogy ezen, mindenesetre igen kis változásoknak az akkori és régibb észlelésekből való kimutatása nagy nehézségekbe ütközött; ezen időben csak absolut sarkmagasságmérések állottak a kutatók rendelkezésére, s nagy systematikus hibáik a vizsgálandó változásokat sokszorosan felülmúlták, miért is az ezen időből származó eredmények általában kevés bizalmat érdemelnek. Indirect úton, azimut-megfigyelésekből, már Bessel megkisérlette ezen változásokat kimutatni (1820—22), de negativ eredménynyel. Utána Maxwell és Peters foglalkoztak behatóbban a tárgygyal, mindketten meridiánészleléseket használva fel, de bár az utóbbinak sikerült is a sarkmagasság periodikus változását kimutatni, az amplitudo oly kicsinynek (körülbelül $^1/_{10}$ másodpercz) adódott, hogy tekintve a felhasznált észlelések sokkal jelentékenyebb hibáit, eredményei még nem szolgálhattak a sarkmagasság-változások kétségbevonhatlan bizonyítékaiúl.

2. Ezen kérdés teljes tisztázása csak az utolsó két évtizedben sikerült, s ez főleg a használt differencziális módszer kiváló pontosságának és az észleletek tekintélyes számának köszönhető. Ezen munkálatok kiindulópontjáúl Fergola indítványa szolgált, ki azt az Europäische Gradmessung 1883-ban tartott értekezletén terjesztette elő. Hivatkozván a kérdésnek kiváló fontosságára nemcsak az astronomia és geodæsia, hanem egyúttal a geologia szempontjából is, úgyszintén az eddigi észlelésekre és elméleti

* Az e czímen megjelent érdemes művecske a csillagászat egy ujabb kérdését tárgyalja. Tartalmáról és értékéről úgy kivánjuk e lapok olvasóit tájékoztatni, hogy előszavának lényeges részét itt közöljük. *Szerk.*

vizsgálatokra, ajánlja, hogy több alkalmasan választott állomáson hosszabb időn át rendszeres sarkmagasság-mérések végeztessenek, melyeknek czélja ne a sarkmagasság abszolut értékének meghatározása, hanem csak differencziális értékek: két-két állomás sarkmagasság-különbségének levezetése legyen. Ezen czélnak oly állomások felelnének meg legjobban, melyek páronként igen közel ugyanazon parallelkörön fekszenek, mert így két-két állomáson mindig ugyanazon csillagok levén észlelhetők, azok declinatioinak hibája az eredményből teljesen kiesik. Módszer dolgában az I. verticalison való átmenetek észlelésének ad előnyt, mert az ezen módszerrel újabban elért kiváló pontosságú eredmények remélhetővé teszik, hogy ennek segélyével a szóban forgó változások kimutatása sem fog legyőzhetetlen nehézségekbe ütközni. Az indítványt az ezen czélra alakúlt specialis bizottság tüzetes megvitatás után elfogadta, azon módosítással, hogy az I. verticalis módszere mellett meridiánmódszerek sem zárassanak ki, természetesen mindig úgy, hogy két összetartozó állomás ugyanazon módszer és teljesen azonos programm szerint észleljen. Kevéssel később (1884 máj.) ezen határozatot a Fergola által kijelölt és még más 93 csillagdának megküldötték, melyek közül nehányan megigérték ugyan közreműködésüket, de 1888 végéig sem munkálataik megkezdéséről, sem elért eredményeikről jelentés nem érkezett.

Küstner ezért az Erdmessung állandó bizottságának 1888-iki értekezletén a nevezett testületet újólag felszólította, hogy támogassa az ilyfajta munkára vállalkozó observatoriumokat az észlelési programm kidolgozása, alkalmas műszerek készíttetése által és esetleg anyagi segélylyel is, hogy a méréseket mielőbb megkezdhessék. Időközben Küstner (1884—85) az aberratio állandó meghatározását czélzó berlini észleletsorozatának discussiója alkalmával arra az eredményre jutott, hogy észleléseinek tartama alatt Berlin sarkmagassága több tized-másodpercznyi változást szenvedett, mely adat, minthogy minden systematikus hibaforrás kizáratott, a szóban forgó változások első kétségtelen bizonyitékának tekinthető. Erre 1888 végén megkezdődtek az észlelések; az első állomás Strassburg volt, melyhez 1889 elején még 3 állomás: Berlin, Potsdam és Prága is csatlakoztak. Módszerül Albrecht-nek az Erdmessung 9-ik értekezletén benyújtott tervezete szerint a Horrebow-Talcott-féle módszert fogadták el, mely az utóbbi időben elért sikerek alapján igen alkalmasnak bizonyúlt ezen czélra. Egyidejüleg Helmert felszólítást intézett az összes csillagdákhoz, hogy vegyenek részt ezen munkálatokban, s dolgozzák fel a rendelkezésükre álló régibb sarkmagasság-észleleteket ezen czélból.

Az említett csillagdák munkálatai (Strassburg kivételével, hol egy utólag észrevett systematikus hibaforrás az eredmények pontosságát kétségessé tette) már az első időkben azon eredményhez vezettek, hogy a sarkmagasság mind a 3 helyen egyező változásokat szenved, melyek periodikusak, körülbelül 0,5″ amplitudoval. Ezen eredményt az említett sorozatok több évi folytatásai, s más csillagdákon végzett egyidejű mérések minden tekintetben megerősítették.

3. A mi a konstatált változások okát illeti, már az első 3 állomás jól egyező eredményei is valószínűtlenné tesznek minden olyan feltevést, mely szerint azok helyi jellegű tömeg-eltolódások vagy refractio-anomaliákból származnának. Az első az állomások nagy távolságára való tekintettel kevéssé valószínű, a második feltevés pedig bajosan egyeztethető össze a berlini és potsdami állomások igen eltérő klimatikus viszonyaival. De azért a momentán polus helyzetváltozása csak akkor válhatott teljesen bebizonyított ténynyé, ha két olyan állomás egyidejű adatai hasonlíthatók össze, melyek hosszkülönbsége elég nagy arra, hogy a kettőn észlelt változások phasiskülönbsége feltünően mutatkozzék. Ezen körülmény indította az Internationale Erdmessung bizottságát azon elhatározásra, hogy a Berlintől közel 12^h-val nyugatra fekvő Hawai szigetekre 1891 elején expeditiót küldjön, melynek feladatáúl a sarkmagasságnak az európai állomásokon használttal teljesen azonos módszer szerint való megfigyelését tűzte ki. Az állomás felállítására a Honolulu mellett fekvő Waikiki bizonyúlt a legalkalmasabbnak, s a méréseket Marcuse 1891 juniustól 1892-ig folytatta; egyidejűleg Preston is végzett ugyanezen állomáson parallel megfigyeléseket a Marcuse-éval teljesen azonos programm szerint, a U. S. Coast and Geodetic Survey megbizásából. Mindkét sorozat igen jól egyező eredménye teljesen megfelelt a várakozásnak: a honolului sarkmagasság-maximum időben a berlini minimumnak felelt meg, és viszont, egyezőleg az elméletileg várható phasiskülönbséggel. Ezáltal a momentán polus periodikus helyváltozása kétségtelenűl bebizonyítottnak volt tekinthető.

Az ezen kérdésre vonatkozó gazdag észleleti anyagot, mely az utóbbi években részint végleges, részint csak provisorius reductio alapján tétetett közzé, Albrecht állította össze, és az Internationale Erdmessung állandó bizottságának 1894-iki értekezletén terjesztette elő. Ezen az 1889—94. időközre terjedő összeállítás szerint hosszabb észleletsorozatokat végeztek: Kasanban, Pulkován, Nápolyban, Berlinben, Potsdamban, Bambergben, Karlsruheban, Strassburgban, New-Yorkban és Bethlehemben, rövidebb sorozatokkal vannak képviselve: Bécs, Kiel, Rockville (Maryland), San-Francisco és Honolulu. Ezek közül 8 hajlandó az észleléseket többékevésbbé hosszú időszakon át folytatni. Végűl még Tokio, Taskent és New-Hawen is készek a jövőben a szóban forgó munkálatokhoz csatlakozni.

Ezen kimutatásból ujabban sikerült Marcuse-nak néhány állomást alkalmasan kiválasztani, hogy ezek adataiból a momentán polus pályáját ilyfajta vizsgálatoknál igen kielégítő pontossággal levezesse. Az 1892 nov.—1894 julius időköznek megfelelő görbe alakja meglehetősen complicált, s a vizsgált változásoknak érdekes geometriai képét nyútja.

Ezen vizsgálatok kiegészítéseűl szolgálnak Chandler-nek ujabb időben megjelent dolgozatai, melyekben Bradley idejéig visszamenve. kimutatja, hogy a sarkmagasság-változások már régebben is megvoltak, de amplitudojuk és periodusok nem állandó, hanem meglehetősen tág határok közt ingadozik. Ámbár Chandler adatai a felhasznált észlelések csekély pontossága miatt nem is állják ki mindig a szigorú kritikát, mégis ezen utóbbi eredmény elvitázhatlan érdemei közé tartozik.

4. A sarkmagasság-változások elmélete újabban több vizsgálatnak képezte tárgyát. Némi nehézségeket okozott a változás mintegy 400^d-os periodusának eltérése a már régebben Peters és Maxwell által a merev sphæroid esetére levezetett 304^d periodustól. Legujabban Radau és Helmert a régibb Gyldén és Darwin-tól származó elméleti fejtegetésekből kiindulva az eltérést az észlelés és számítás közt megszüntették azáltal, hogy a 304^d periodusú mozgást egy másik, évi periodusú harmonikus mozgással kombinálják, mely utóbbi a földtest egyik főtétlenségi polusának évi periodusú tömegeltolódások által okozott ingadozásaiból származik. Hogy az észlelt amplitudot a számítottal összeegyeztethessük, ezen főtétlenségi polusnak csak igen kis mozgást kell végeznie, mely a meteorologiai okokból származó tömegáthelyezésekből igen egyszerűen magyarázható, s ezen utóbbiak egészen elégségesek ily mozgás létrehozására, mint azt W. Thomson főbb vonásokban már régebben kimutatta. A momentán polus ily módon összetett mozgása meglehetősen bonyolódott, és a periodus és amplitudo változásaival jó egyezésbe hozható.

5. Értekezésünk czélja a sarkmagasság-változásokra vonatkozó vizsgálatok jelen állásáról beszámolni, tekintettel a kérdésnek úgy gyakorlati, mint elméleti oldalára. Ezen czél értelmében az értekezés öt fejezetre oszlik, melyek tartalma rövid áttekintésben a következő :

I. A meridiánmódszerekről általában. — II. A Horrebow-Talcott-féle módszer. — III. Átmeneti észlelések az első verticalisban. — VI. A sarkmagasság-változásokra vonatkozó numerikus vizsgálatok. — V. A sarkmagasság-változások elméleti magyarázata.

MEGOLDOTT FELADATOK.

24. *Ha a tetraéder szemben fekvő élei egymásra merőlegesek, bebizonyitandó, hogy akkor az élek középpontjai és a szemben fekvő élek legkisebb távolságú pontjai oly gömbön feküsznek, melynek középpontja a tetraéder súlypontjában van.* (VÁLYI.)

Nyolczadik megoldás Skopál István főreáliskolai tanár úrtól Székesfehérvárott.

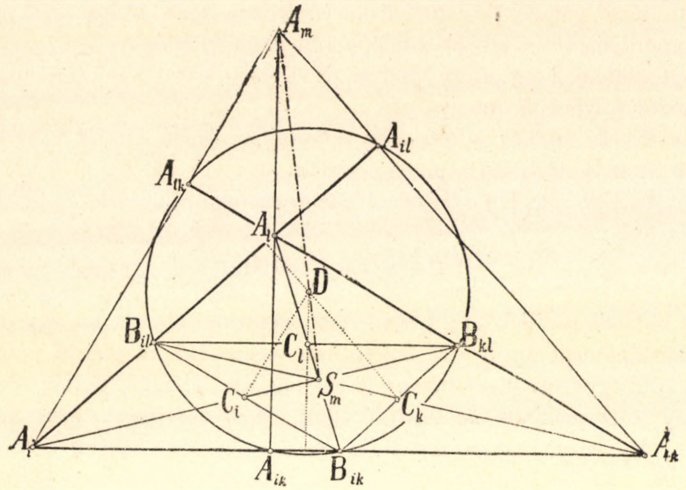
Legyenek a feladatban foglalt feltételnek megfelelő tetraéder csúcsai A_1, A_2, A_3, A_4 és legyen i, k, l, m az 1, 2, 3, 4 számok tetszőleges permutácziója.

Az A_iA_k él felező pontját B_{ik}-val jelölöm és ezen élnek az A_lA_m éltől legkisebb távolságra eső pontját A_{ik}-val.

Az A_{ik} pontot legegyszerűbben úgy határozom meg — az élek e speciális iránya mellett, — hogy az A_lA_m élen át az A_iA_k élre merőleges síkot teszek, ez metszi ki az A_{ik} pontot. Ha e pontot összekötöm az A_l, illetőleg A_m ponttal, a keletkező egyenes merőleges az A_iA_k élre, más szóval az $A_iA_kA_l$, illetőleg $A_iA_kA_m$ háromszögnek magassága. Az $A_lA_mA_{ik}$ sík merőleges lévén e két háromszög síkjára, a tetraéder azon magasság vonalait tartalmazza, a melyek az A_l és A_m ponton áthaladnak.

Ezen előleges megjegyzések módot nyújtanak arra, hogy a tétel bizonyításánál a tetraéder egyik lapján előálló viszonyok tüzetes vizsgálatára szorítkozzunk.

Legyen $A_iA_kA_l$ a tetraéder tetszőleges lapja; e háromszög magasságvonalai a szemközt fekvő oldalakból kimetszik az A_{kl}, A_{li}, A_{ik} legkisebb távolságú pontokat és a három magasságvonal metszéspontja, a fentebbiek alapján, nem egyéb mint az A_m csúcsból erre a síkra bocsátott merőleges talppontja A'_m.



2. ábra.

A B_{kl}, B_{li}, B_{ik} pontokat a szemközt fekvő csúcsokkal összekötő egyenesek egy pontban S_m-ben, a háromszög súlypontjában találkoznak. E felező pontok oly háromszöget határoznak meg, a melynek oldalai rendre parallelek az $A_i A_k A_l$ háromszög oldalaival és így:

$$A_i A_k A_l \triangle \backsim B_{kl} B_{li} B_{ik} \triangle ;$$

a hasonlósági középpont S_m.

Látjuk továbbá, hogy

$A_i\, B_{kl}$	és	$B_{li} B_{ik}$	egymást a	C_i	pontban felezik,
$A_k\, B_{li}$	«	$B_{ik} B_{kl}$	«	C_k	« «
$A_l\, B_{ik}$	«	$B_{kl} B_{li}$	«	C_l	« «

Ha e felező pontokban a B háromszög illető oldalaira merőlegeseket emelünk, ezek egymást oly D pontban metszik, a mely a B pontokon áthaladó kör középpontja.

Minthogy DC_i az $A_i A_{kl} B_{kl}$ derékszögű háromszög átfogójának felező pontjából az egyik befogóval parallel vont egyenes, ez felezi a másik befogót, az $A_{kl} B_{kl}$ távolságot.

De akkor

$$DA_{kl} = DB_{kl},$$

azaz A_{kl} is rajta van a B pontokon áthaladó körön.

Hasonló módon mutatható ki, hogy A_{li} és A_{ik} is e közön van.

Mindazon gömbök középpontjai, a melyek a kört tartalmazzák, a kör középpontjában az ő síkjára emelt merőlegesen vannak.

Azt állítom, hogy a D pontban az $A_i A_k A_l$ síkra emelt merőleges a tetraéder súlypontján megy át.

Az $A_m S_m$ egyenes a tetraéder súlypontján halad át. Ha ezen egyenesen át az $A_i A_k A_l$ síkra merőleges síkot teszek, e két sík metszésvonala az $S_m A'_m$ lesz, a mely egyenes a D ponton megy át.

Ugyanis

$$C_i C_k C_l \triangle \sim A_i A_k A_l \triangle,$$

mert oldalaik parallelek; a hasonlósági czentrum S_m. E két háromszög magasságpontjait, mint a hasonlóságban egymásnak megfelelő pontokat, összekötő egyenes: $A'_m D$ átmegy az S_m hasonlósági czentrumon.

Igy a D pontban az $A_i A_k A_l$ síkra emelt merőleges bent van az $S_m A_m A'_m$ síkban, vagyis metszi az $S_m A_m$ egyenest; legyen e metszéspont S.

Kérdés, ez az S pont mily arányban osztja az $S_m A_m$ távolságot?

Az $A_i A_k A_l$ és $C_i C_k C_l$ háromszögek hasonlósági arányszámát határozom meg.

$$A_i A_k : B_{kl} B_{li} = 2 : 1$$

$$B_{kl} B_{li} : C_i C_k = 2 : 1$$

és így:

$$A_i A_k : C_i C_k = 4 : 1$$

És tudjuk, hogy a hasonlóságban egymásnak megfelelő pontoknak a hasonlósági czentrumtól mért távolságai ugyanily arányban állnak egymással; tehát

$$S_m A'_m : S_m D = 4 : 1.$$

Mivel pedig még az $S_m A_m A'_m$, derékszögű háromszög hasonló az $S_m S D$ derékszögű háromszöghöz, következik, hogy

$$S_m A_m : S_m S = S_m A'_m : S_m D = 4 : 1$$

a miből világos, hogy S a tetraéder súlypontja.

Mindezen viszonyok a tetraéder valamennyi oldallapján fennállnak, de akkor a feladatban foglalt tétel igazsága nyilvánvaló.

Ugyanezt a feladatot analitikai módszerekkel és verifikálás útján megoldotta még Péch Aladár tanárjelölt úr is. *Szerk.*

SZÁMELMÉLETI TÉTELEK.

(Első közlemény.)

A jelen dolgozatban néhány új tételt fejtek ki a $kx+l$ általános taggal biró számtani haladványban foglalt és az m tetszőleges egész számhoz relativ prim maradékok számára vonatkozólag. E vizsgálatok egy bizonyos $\psi(m)$ számelméleti függvényre vezetnek, a mely bizonyos esetekben a számelméletből ismeretes $\varphi(m)$ függvény iteratiója gyanánt fogható fel. Végül a talált eredményeket a körosztási egyenlet elméletére alkalmazom, a mennyiben a talált számelméleti tételek alapján, ennek az egyenletnek gyökeiből alkotott hatványösszegeknek kiszámítására új és az eddigieknél elemibb módszert vezetek le.

*

1. *tétel.** *Ha k és m legnagyobb közös osztója $(k, m)=d$ és k, l, m legnagyobb közös osztója $(k, l, m)=1$, akkor a*

$$\underset{(x=1,2,\ldots,m)\,(\mathrm{mod.}\ m)}{kx+l\ (\mathrm{mod.}\ m)}$$

sorozatban $\frac{\varphi(m)}{\varphi(d)}$ oly szám van, a mely relativ prim m-hez.

Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy a $kx+l$ kifejezés (mod. m) a következő értékeket veszi fel:

$$k.1+l,\quad k.2+l,\ldots,\ k\frac{m}{d}+l.$$

* E tételt Frobenius tanár úr Berlinben az egyetemen tartott seminariumi előadásaiban bebizonyítás nélkül közölte.

Ugyanis valahányszor

$$kx+l\equiv ky+l \pmod{m}$$

mindannyiszor

$$\frac{k}{d}x\equiv\frac{k}{d}y\left(\mathrm{mod.}\,\frac{m}{d}\right)$$

és minthogy

$$\left(\frac{k}{d},\frac{m}{d}\right)=1,$$

azért

$$x\equiv y\left(\mathrm{mod.}\,\frac{m}{d}\right).$$

Viszont e kongruenczia fennállásából mindig

$$\frac{k}{d}x\equiv\frac{k}{d}y\left(\mathrm{mod.}\,\frac{m}{d}\right)$$

következik, s ebből ismét

$$kx+l\equiv ky+l \,(\mathrm{mod.}\, m).$$

Tehát a szóban forgó sorozatnak (mod. m) különböző számai a következők:

$$k.1+l,\quad k.2+l,\ldots,k.\frac{m}{d}+l. \tag{I.}$$

Legyen m és d törzstényezőkre felbontva:

$$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}\ldots p_s^{\alpha_s}$$

$$d=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_r^{\beta_r}$$

$$\alpha_i\geqq\beta_i,$$
$$(i=1,2,\ldots,r)$$

akkor

$$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}d'$$

a hol d' a d-hez képest relativ prim szám. Az (I.) alatti számok mind relativ primek d-hez, mert k osztható d-vel, míg l hozzá relativ prim. E számok tehát d-ben előforduló törzstényezőt nem tartalmaznak, tehát közülök azok és csakis azok relativ primek m-hez képest, a melyek relativ primek d'-hez. Most még az (I.) számokat $\frac{m}{dd'}$ számú csoportra osztjuk, legyen ezek közt az i-dik csoport:

$$k[(i-1)d'+1]+l,\quad k[(i-1)d'+2]+l, \dots, k[id']+l. \qquad (a)$$
$$\left(i=1, 2, \dots, \frac{m}{dd'}\right)$$

Az (a) csoportok mindegyike (mod. d') egy teljes maradéksor értékeit veszi fel. Erre nézve csak ki kell mutatnunk, hogy k relativ prim d'-hez képest. De ez valóban így van, mert k és d' minden közös osztója, közös osztója k-nak és m-nek, tehát egyszersmind közös osztója d és d'-nek, de ez — minthogy d relativ prim d-hez képest — egyenlő *egy*-gyel. Az (a) alatti csoportok mindegyikében tehát $\varphi(d')$ oly szám van, mely d'-hez és így m-hez képest is relativ prim. E csoportok számai (mod. m) különbözők, tehát az (I.) alatti számok közül

$$\frac{m}{dd'}\varphi(d')=p_1^{\alpha_1-\beta_1}p_2^{\alpha_2-\beta_2}\dots p_r^{\alpha_r-\beta_r}\varphi(d')$$

relativ prim m-hez. Azonban

$$\varphi(m)=\varphi(d')p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\dots p_r^{\alpha_r-1}(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_r-1)$$

és így

$$\frac{m}{dd'}\varphi(d')=\frac{\varphi(m)}{p_1^{\beta_1-1}p_2^{\beta_2-1}\dots p_r^{\beta_r-1}(p_r-1)\dots(p_r-1)}=\frac{\varphi(m)}{\varphi(d)}.$$

E tételnek egyik folyományát a következőkben gyakran fogjuk alkalmazni. Ez a következő:

1*b*. *Ha*

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)}\left(\text{mod. } \frac{m}{d}\right)$$

az $\frac{m}{d}$*-hez relativ prim számok, akkor a*

$$t_i+1.\frac{m}{d},\ t_i+2.\frac{m}{d}, \dots, t_i+d\frac{m}{d}$$
$$\left(i=1, 2, \dots, \varphi\left(\frac{m}{d}\right)\right)$$

sorozatok mindegyike ugyanannyi m-hez relativ primszámot tartalmaz, oly módon, hogy e sorozatok együttesen m összes relativ prim maradékait foglalják magukban.

Ugyanis, miként láttuk, minden egyes sorozatban

$$\frac{\varphi(m)}{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)}$$

oly szám van, mely úgy egymástól, mint a többi sorozat számaitól (mod. m) különböző és m-hez képest relativ prim. Összesen van tehát e sorozatokban, miként be kellett bizonyitani,

$$\varphi\left(\frac{m}{d}\right)\frac{\varphi(m)}{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)}=\varphi(m)$$

m-hez relativ prim szám.

2. *A körosztási egyenletre vonatkozó hatványösszegek.** Alkalmazzuk az eddigieket a körosztási egyenlet hatványösszegeinek kiszámítására. Legyen ismét

$$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}$$

és ρ primitiv m-dik egységgyök. Jelöljük az primitiv m-dik egységgyökök n-dik hatványainak összegét $S_n(m)$-mel. Ezt a számelméleti függvényt akarjuk kiszámitani. Ismeretes, hogy ha

$$u_1, u_2, \ldots, u_{\varphi(m)} (\text{mod.}\, m)$$

az m-hez relativ prim számok, akkor

$$S_1(m)=\rho^{u_1}+\rho^{u_2}+\cdots+\rho^{u_{\varphi(m)}};$$

ha már most $(n, m)=d$, akkor ismeretes, hogy

$$\rho^n=\pi$$

$\frac{m}{d}$-edik primitiv egységgyök, tehát

$$S_n(m)=\pi^{u_1}+\pi^{u_2}+\cdots+\pi^{u_{\varphi(m)}}$$

azonban 1*b*. értelmében az u-számok a

* V. e. DIRICHLET-DEDEKIND: Vorlesungen über Zahlentheorie. VII. Suppl.

$$t_i+1.\frac{m}{d},\ t_i+2.\frac{m}{d},\ldots,t_i+d\frac{m}{d}$$

$$\left(i=1,2,\ldots,\varphi\left(\frac{m}{d}\right)\right)$$

sorozatokban vannak elhelyezve, még pedig mindegyik sorozatban $\dfrac{\varphi(m)}{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)}$ számú u, és így, mivel

$$\pi^{x\frac{m}{d}}=1,$$

az egyugyanazon csoporthoz tartozó kitevők π-nek ugyanazt a hatványértékét adják és így

$$S_n(m)=\frac{\varphi(m)}{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)}\sum_{i=1}^{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)}\pi^{t_i}$$

vagyis

$$S_n(m)=\frac{\varphi(m)}{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)}S_1\left(\frac{m}{d}\right),\quad d=(n,m). \tag{II.}$$

E képlet alapján a hatványösszegek kiszámítása vissza van vezetve a primitiv egységgyökök összegének kiszámítására. Az

$$x^m-1=0 \tag{b}$$

egyenlet összes gyökei vagy az m-hez, vagy az m valamely osztójához tartozó primitiv egységgyökök és így x^m-1 nem más, mint az m összes osztóihoz (az egységet is beleértve) tartozó körosztási egyenletek többtagúinak szorzata. A (b) egyenletben a gyökök összege zérus. Az m-nek d osztójához tartozó körosztási egyenletben a gyökök összege $S_1(d)$, tehát az előbbi megjegyzés értelmében

$$1+\sum_d S_1(d)=0, \tag{III.}$$

a hol az összeadás az m-nek összes az egységtől különböző osztóira kiterjed. (III.)-ból mindenekelőtt világos, hogy p minden törzsszámértékénél

$$S_1(p_1)=-1$$

azonkívül

$$S_1(p_1^{\alpha_1})=0, \quad \alpha_1>1$$

mert a (III.)-ból

$$S_1(p_1^{\alpha_1})+1+\sum_{d'} S_1(d')=0$$

$$(d'=p_1, p_1^2, \ldots, p_1^{\alpha_1-1})$$

és mivel (III.) értelmében

$$1+\sum_{d'} S_1(d')=0,$$

kell, hogy

$$S_1(p_1^{\alpha_1})=0,$$

legyen, ha $\alpha>1$.

Épen így

$$S_1(m)=0$$

ha m-nek négyzetes osztója van, azaz

$$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}$$

törzstényezős előállításban az α kitevők között 1-nél nagyobb is előfordul.

Ugyanis, ha pl.

$$\alpha_i>1$$

akkor (III.)-ból

$$S_1(p_i^{\alpha_i})+1+\sum_{d'} S_1(d')=0$$

a hol d' az $\frac{m}{p_i}$ számnak 1-től különböző osztóinak értékét veszi fel. Igy tehát

$$1+\sum_{d'} S_1(d')=0$$

lévén

$$S_1(m)=0.$$

Hátra van még $S_1(p_1p_2\ldots p_s)$ kiszámítása. A (III.) alatti képlet speczializálása az

$$1+S_1(p_1)+S_1(p_2)+S_1(p_1p_2)=0$$

$$1+S_1(p_1)+S_1(p_2)+S_1(p_3)+S_1(p_1p_2)+S_1(p_1p_2)+S_1(p_1p_2)+$$
$$+S_1(p_1p_2p_3)=0$$

. . . .

képletekhez vezet, a melyekből $S_1(p_1 p_2 \ldots p_s)$ meghatározása rekurziv módon eszközölhető, oly módon, hogy a számára nyerendő kifejezés végelemzésben az $S_1(p_1)$, $S_1(p_2)$, ... $S_1(p_s)$ kifejezések egészszámú összetétele és minthogy $S_1(p_i)$ a p_i törzsszám értékétől függetlenül mindig -1-gyel egyenlő, következik, hogy $S_1(p_1 p_2 \ldots p_s)$ csakis a törzstényezők számától, s-től, függ.

E szerint a (III.) képletet $m = p_1 p_2 \ldots p_s$ esetében alkalmazván az

$$1 + \binom{s}{1} S_1(p_1) + \binom{s}{2} S_1(p_1 p_2) + \cdots + \binom{s}{s} S_1(p_1 p_2 \ldots p_s) = 0$$

relaczióhoz jutunk. Ha most s rendre az 1, 2, 3, ..., s értékeket veszi fel, akkor

$$S_1(p_1) = -1, \quad S_1(p_1 p_2) = +1, \quad S_1(p_1 p_2 p_3) = -1, \ldots$$
$$S_1(p_1 p_2 \ldots p_s) = (-1)^s$$

értékeket kapjuk.

*

Az (1) tétellel el van intézve, hogy a

$$kx + l \pmod{m}$$
$$(x = 1, 2, \ldots, m \pmod{m})$$

sorozatban hány oly szám van, mely m-hez képest relativ prim.

Analog kérdést tehetünk most már ama

$$kx + l \pmod{m}$$

sorozatra vonatkozólag, a melyben x csak az m-hez relativ prim számok értékeit veszi fel. E sorozatban foglalt számok előbbi jelölésünket megtartva a következők:

$$ku_i + l \pmod{m}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \varphi(m))$$

E kérdésre több tétellel fogunk válaszolni.

3. *tétel. Ha k és m legnagyobb közös osztója $(k, m) = 1$, ha továbbá $(l, m) = 1$, akkor a*

$$ku_i + l \pmod{m}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \varphi(m))$$

sorozatban

$$\psi(m)=\varphi(m)\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{\varphi(p_i)}\right)$$

oly szám van, mely m-hez képest relativ prim. A p_i számok m-nek törzstényezői, az u_i (mod. *m*) *számok az m-hez relativ prim számok.*

E tétel mutatja, hogy a $\psi(m)$ számelméleti függvény független k és l értékétől, a mennyiben ezek az előírt feltételeknek megfelelnek. Egyelőre a k, l számokat adottaknak veszszük. Legyen ismét m törzstényezőkre felbontott alakja

$$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}$$

és a törzstényezők szorzata

$$m'=p_1p_2\ldots p_s.$$

Mivel

$$ku_i+l\equiv ku_j+l \pmod{m} \qquad (\alpha)$$

ből

$$u_i\equiv u_j \pmod{m} \qquad (\beta)$$

következik és megfordítva (β) ismét (α)-t vonja maga után, a szóban forgó számok között $\varphi(m)$ van olyan, a mely (mod. m) különböző. Ezek a következők:

$$ku_1+l,\ ku_2+l,\ \ldots,\ ku_{\varphi(m)}+l \qquad \text{(IV.)}$$

a hol az u-k az m-hez relativ prim számok legkisebb maradékai (mod. m). Ha

$$v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{\varphi(m')}$$

az m'-hez relativ prim számok legkisebb maradékai (mod. m'), akkor a

$$v_i+1\,.\,m',\ v_i+2\,.\,m',\ \ldots,\ v_i+\frac{m}{m'}\,.\,m'$$
$$(i=1,2,\ldots,\varphi(m'))$$

számok (mod. m) különbözők és mivel ezek m törzstényezőinek szorzatához képest relativ primek, nem mások, mint az u_i számok. A (IV) alatti számok tehát a következők:

$$(kv_i+l)+1\,.\,km',\ (kv_i+l)+2km',\ \ldots,\ (kv_i+l)+\frac{m}{m'}km'. \qquad \text{(IV.*)}$$
$$(i=1,2,\ldots,\varphi(m'))$$

E helyettesítési értékek tehát $\varphi(m')$ számú $\frac{m}{m'}$ elemű csoportban vannak felírva. Minden egyes csoportban levő számok vagy egyidejűleg relativ primek m'-hez, és így m-hez is, vagy pedig egyidejűleg nem azok. Mivel a

$$\underset{(i=1,2,\ldots,\varphi(m'))}{kv_i+l\,(\mathrm{mod.}\,m')}$$

sorozatban az m'-hez relativ primek száma $\psi(m')$, következik, hogy

$$\psi(m)=\frac{m}{m'}\psi(m')=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\ldots p_s^{\alpha_s-1}\psi(m').$$

A

$$\underset{(i=1,2,\ldots,\varphi(m'))}{kv_i+l\,(\mathrm{mod.}\,m')} \qquad (\mathrm{V.})$$

sorozat a

$$\underset{(i=1,2,\ldots,m\,(\mathrm{mod.}\,m'))}{kx+l\,(\mathrm{mod.}\,m')} \qquad (\mathrm{V.}^*)$$

sorozatból úgy származik, hogy x helyébe csak az m'-höz relativ prim értékeket teszszük. Az (V.*) alatti sorozatban előfordúlnak oly x értékek, a melyek relativ primek m'-hez és olyanok, a melyeknek legnagyobb közös osztója m'-vel d, a hol d m-nek valamely osztója. Ez értékeket betéve (V.*)-ba, a következő (mod. m') különböző értékeket kapjuk:

$$\underset{\left(\omega=\varphi\left(\frac{m'}{m}\right)\right)\ (d\ m'\text{-nek különböző osztóit jelenti})}{kdv_{d_1}+l,\ kdv_{d_2}+l,\ \ldots,\ kdv_\omega+l} \qquad (c)$$

a hol a v_{d_i} számok az $\frac{m'}{d}$-hez relativ prim számok legkisebb maradékai $\left(\mathrm{mod.}\,\frac{m'}{d}\right)$. E számok mind relativ primek d-hez képest, mert l és d legnagyobb közös osztója $(l, d)=1$, tehát közülök azok és csak azok relativ primek m'-hez, a melyek relativ primek $\frac{m'}{d}$-hez. Továbbá m' törzstényezői egyszerűek lévén, kd és $\frac{m'}{d}$ legnagyobb közös osztója

$$\left(kd, \frac{m'}{d}\right)=1$$

és így a (c) alatti számok közt annyi relativ prim m'-höz képest, mint a hány $\frac{m'}{d}$-hez relativ prim szám van a

$$kdv_{d_i}+l\left(\text{mod.}\,\frac{m'}{d}\right) \qquad \text{(VI.)}$$
$$\left(i=1,2,\ldots,\varphi\left(\tfrac{m'}{d}\right)\right)$$

sorozatban. Minthogy

$$\left(d,\,\frac{m'}{d}\right)=1,$$

lehet oly m-hez relativ prim $\bar{d}$-t találni, a mely a

$$d\bar{d}\equiv 1\left(\text{mod.}\,\frac{m'}{d}\right)$$

kongruencziát kielégíti; és mivel $\bar{d}$ szintén relativ prim $\frac{m}{d}$-hez képest, a

$$\bar{d}v_{d_i}\left(\text{mod.}\,\frac{m'}{d}\right)$$
$$\left(i=1,2,\ldots,\varphi\left(\tfrac{m'}{d}\right)\right)$$

számok a sorrendtől eltekintve megegyeznek a v_{d_i} számokkal. És így a (VI.) sorozatban annyi $\frac{m'}{d}$-hez relativ prim szám van, mint a

$$kd(\bar{d}v_i)+l\equiv kv_i+l\left(\text{mod.}\,\frac{m'}{d}\right)$$
$$\left(i=1,2,\ldots,\varphi\left(\tfrac{m'}{d}\right)\right)$$

sorozatban. Ebben azonban $\varphi\left(\frac{m'}{d}\right)$ számú $\frac{m'}{d}$-hez relativ prim szám van és így ugyanennyi az m'-hez relativ primek száma a (c) sorozatban. Ha d az m' összes osztóinak értékeit veszi fel és a megfelelő sorozatokban kiválasztjuk az m'-hez relativ primszámokat, úgy megkapjuk a

$$kx+l\,(\text{mod.}\,m')$$
$$(i=1,2,\ldots,m'\ (\text{mod.}\,m'))$$

sorozatban szereplő $\varphi(m')$ számmal levő m'-höz relativ prim számot, még pedig mindegyiket egyszer. Tekintetbe véve még, hogy

$$(km'+l,\ m')=1$$

bevezetjük a

$$\psi(1)=\psi\left(\frac{m'}{m'}\right)=1$$

jelet és így a ψ számelméleti függvényre a következő függvény-egyenletben kifejezett törvényt kapjuk

$$\sum_{d'}\psi(d)=\varphi(m') \tag{VII.}$$

a hol d az m' összes osztóinak értékét, az egységet is beleértve, felveszi. A (VII.) alatti függvény-egyenletből következik, hogy

$$\psi(p_1)=\varphi(p_1)-1=\varphi(p_1)\left(1-\frac{1}{\varphi(p_1)}\right)$$

$$\psi(p_1p_2)=\varphi(p_1p_2)-1-\varphi(p_1)\left(1-\frac{1}{\varphi(p_1)}\right)-\varphi(p_2)\left(1-\frac{1}{\varphi(p_2)}\right)=$$

$$=\varphi(p_1p_2)-\varphi(p_1)-\varphi(p_2)+1=\varphi(p_1p_2)\left(1-\frac{1}{\varphi(p_2)}\right)-$$

$$-\varphi(p_2)\left(1-\frac{1}{\varphi(p_2)}\right)=\varphi(p_1p_2)\left(1-\frac{1}{\varphi(p_1)}\right)\left(1-\frac{1}{\varphi(p_2)}\right).$$

Tegyük fel, hogy már bebizonyítottuk $s-1$ törzstényezőre, hogy

$$\psi(p_1p_2\ldots p_{s-1})=\varphi(p_1p_2\ldots p_{s-1})\prod_{i=1}^{s-1}\left(1-\frac{1}{\varphi(p_i)}\right),$$

ki fogjuk mutatni, hogy analog képlet érvényes s tényezőre is. A (VII.) alatti képletből $\psi(m')$-re csak egy értéket kapunk, elég tehát kimutatni, hogy ha

$$\psi(m')=\varphi(m')\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{\varphi(p_i)}\right)$$

teszszük, akkor (VII.)-nek elég van téve. A (VII.) képletben összefoglalhatjuk azon d'-ket, a melyek egyenlő számú törzstényezőt tartalmaznak. Ha még a

$$\varphi(p_i)\left(1-\frac{1}{\varphi(p_i)}\right)=\Phi(p_i)$$
$$(i=1,2,\ldots,s)$$

röviditett jelöléssel élünk, akkor (VII.) igy írható:

$$1+\Sigma\Phi(p_1)+\Sigma\Phi(p_1)\Phi(p_2)+\cdots+\Sigma\Phi(p_1)\,\Phi(p_2)\ldots\Phi(p_{s-1})+$$
$$+\Phi(p_1)\Phi(p_2)\ldots\Phi(p_s)=\varphi(p_1p_2\ldots p_s).$$

Vagyis

$$\prod_{i=1}^{s}(1+\Phi(p_i))=\varphi(p_1p_2\ldots p_s)$$

és ez valóban identitás, mert az

$$1+\Phi(p_i)=\varphi(p_i)$$
$$(i=1,2,\ldots,s)$$

relácziók azonosan állanak fönn.

Mivel még

$$\psi(m)=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\ldots p_s^{\alpha_s-1}\psi(m')$$

azért csakugyan, a mint állítottuk:

$$\psi(m)=\varphi(m)\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{\varphi(p_i)}\right).$$

Bauer Mihály.

AZ ANALITIKAI FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉHEZ.

(Negyedik és befejező közlemény.)

III.

15. Ha valamely adott analitikai függvényre vonatkozólag, mely az $x=0$ középpont körül R sugárral leírt $\mathfrak{K}$ kör belsejében a ráczionális függvények módjára viselkedik, a II. alatt kifejtett módon meghatározzuk a $\mathfrak{K}$ belsejében levő *zérus-helyek* és *polusok* sorozatait, minden ily helyet annyiszor jegyezvén fel, a hányszoros zérus-hely, ill. polus: akkor a nyert két sorozat mindegyike — ha csak nem véges — olyan, hogy benne a tagok abszolut értékének határértéke R.

Innen fordítva az a kérdés merül fel: *Vajjon az $x=0$ középpont körül R sugárral leírt $\mathfrak{K}$ kör belsejében tetszés szerint felvett két oly*

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, \dots \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, \dots \end{matrix} \tag{33}$$

sorozathoz, melyek mindegyikében — ha csak a sorozat nem véges — *a tagok abszolut értékének határértéke R, tatálható-e mindig legalább egy oly $f(x)$ függvéng, mely*

A) *a $\mathfrak{K}$-nak egész belsejében a ráczionális függvények módjára viselkedik, és melyre vonatkozólag*

B) *a $\mathfrak{K}$ belsejében levő zérus-helyek ill. polusok sorozatai éppen az adott sorozatok.*

Hogy e kérdésre felelhessünk, elég lesz kimutatnunk, hogy valamint *véges számú*

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$$

értékhez mindig található egy oly egész függvény (t. i. az

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_r)$$

szorzat), melynek zérus-helyei éppen az adott a-k, hasonlóképpen *végtelenül sok* a esetében is a következő **alaptétel** áll fenn:

Az $x=0$ középpont körül R sugárral leírt $\mathfrak{K}$ kör belsejében felvett bármely oly

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

végtelen sorozathoz, melyben

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = R,$$

mindig található egy oly hatványsor, mely a $\mathfrak{K}$-nak egész belsejében összetartó s melyre vonatkozólag a $\mathfrak{K}$ belsejében levő zérushelyek sorozata megegyezik az adott a-k sorozatával.

Ha ugyanis e tétel értelmében sikerül két $\varphi(x)$ és $F(x)$ hatványsort úgy meghatároznunk, hogy $\mathfrak{K}$ egész belsejében összetartók, s hogy e kör belsejében $\varphi(x)$ zérus-helyei éppen a 33) alatt adott a-k, $F(x)$-nek zérus helyei pedig a β-k, akkor az

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{F(x)}$$

hányados az *A)* és *B)* alatti követelmények mindegyikének eleget tesz.

Sőt ebből az *egy* $f(x)$ függvényből könnyen határozhatjuk meg *valamennyi* oly függvényt, mely mindkét követelésünket kielégíti.

Ha ugyanis $\varphi(x)$ az egész $\mathfrak{K}$ körben összetartó hatványsort jelent, akkor

$$f(x)\,e^{\varphi(x)}$$

szintén kielégíti mindkét követelésünket csakúgy, mint maga $f(x)$.

Fordítva, ha vm. $f_1(x)$ függvény kielégíti az *A)* és *B)* követeléseket, akkor az

$$f_2(x)=\frac{f_1(x)}{f(x)}$$

hányados a $\mathfrak{K}$-nak belsejében szabályos és ott soha el nem tűnő függvényt ábrázol, tehát

$$\frac{1}{f_2(x)} \frac{d}{dx} f_2(x)$$

az egész $\mathfrak{K}$ körben összetartó

$$C_1 + C_2 x + C_3 x^3 + \cdots$$

sorba fejthető ki. Ha most már a

$$\varphi(x) = C_0 + C_1 x + \tfrac{1}{2} C_2 x^2 + \tfrac{1}{3} C_3 x^3 + \cdots$$

sorban, melynek az előbbi a differencziálhányadosa, a C_0-t úgy választjuk, hogy

$$f_2(0) = e^{C_0},$$

akkor

$$\frac{1}{f_2(x)} \frac{d}{dx} f_2(x) = \frac{d}{dx} \varphi(x)$$

és

$$f_2(x) = e^{\varphi(x)}.$$

E szerint az

$$f(x)\, e^{\varphi(x)}$$

képlet megadja az összes függvényeket, melyek az A) *és* B) *követelményeknek eleget tesznek, ha e képletben $f(x)$ egy ilyen függvényt jelent, a $\varphi(x)$ helyébe pedig mindazon hatványsorokat teszszük, melyeknek összetartási köre legalább is az egész $\mathfrak{K}$ körre kiterjed.*

16. Már most áttérvén a fenti alaptétel bebizonyitására, jelentsen

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots \qquad 34)$$

egy tetszőleges oly sorozatot, melynek minden tagja abszolut értékre nézve nagyobb mint *zérus*, de kisebb mint R, és a melyben

$$\lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = R.$$

E sorozathoz mindig található a zérusnál nem kisebb egész számoknak oly

$$m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$$

sorozata, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu} \right)^{m_\nu} \right| \qquad 35)$$

mindig összetartó, ha csak $|x| < R$.

Különösen egyszerű e m_ν kitevők választása, ha létezik egy oly μ pozitiv egész szám, hogy a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\mu}$$

sor összetartó. Ekkor t. i. minden m_ν a $(\mu-1)$-gyel tehető egyenlőnek. Ily μ szám azonban csak akkor található, ha $R=\infty$, de még akkor is csak kivételesen.

Ellenben mindenkor czélhoz vezető pl. a következő választás:

$$m_1 \geqq 1, \quad m_2 \geqq 2, \ldots m_\nu \geqq \nu \ldots$$

Ha ugyanis $|x|<R$ s mi két pozitiv számot — ρ és ρ'-t — úgy veszünk fel, hogy $|x| \leqq \rho < \rho' < R$, akkor mindig található egy oly n egész szám, hogy $|a_\nu| > \rho'$ ha csak $\nu > n$. Továbbá az n-dik tagon túl a vizsgálandó sor tagjai rendre kisebbek a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\rho'}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{\nu}$$

összetartó sor tagjainál. A szóban forgó sor tehát tényleg mindig összetartó, ha x a kezdőpont körül R sugárral leírt $\mathfrak{K}$ kör belsejében van.

Ha az m_ν kitevőket úgy határoztuk meg, hogy a 35) alatti sor a $\mathfrak{K}$ belsejében levő minden x értékre vonatkozólag összetartó, akkor egyszersmind az

$$F(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{x-a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu} \tag{36)}$$

sor is feltétlenül összetartó, ha csak $|x|<R$ és x a 34) alatt felsorolt értékek egyikével sem egyenlő.

Ha ugyanis ismét $|x| \leqq \rho < \rho' < R$, akkor ν eléggé nagy értékeinél

$$\left|\frac{1}{x-a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right| = \frac{1}{\left|1-\dfrac{x}{a_\nu}\right|}\left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right| <$$

$$\leqq \frac{1}{1-\left|\dfrac{x}{a_\nu}\right|}\left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right| < \frac{1}{1-\dfrac{\rho}{\rho'}}\left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right|,$$

tehát az $F(x)$ tagjai egy bizonyos tagtól kezdve rendre kisebb abszolut értékűek a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{\rho}{\rho'}} \left| \frac{1}{a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu} \right|$$

összetartó sor tagjainál. $F(x)$ tehát x-nek szóban forgó értékeire vonatkozólag csakugyan feltétlenül összetartó.

$F(x)$-nek ν-dik tagja következőleg is írható:

$$\frac{1}{a_\nu}\left(1+\frac{x}{a_\nu}+\cdots+\frac{x^{m_\nu-1}}{a_\nu^{m_\nu-1}}\right)+\frac{1}{x-a_\nu}$$

vagy

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right)-\frac{1}{a_\nu}\frac{1}{1-\frac{x}{a_\nu}},$$

vagyis e tag a következő függvénynek logaritmikus differencziálhányadosa:

$$E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)=\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\sum\limits_{\nu=1}^{m_\nu}\frac{1}{r}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^r}. \qquad 37)$$

Bennünket különösen ezen E függvényeknek

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) \qquad 38)$$

szorzata érdekel.

E szorzatnak az R sugarú $\mathfrak{K}$ kör belsejében levő bármely x-re vonatkozólag a tényezők sorrendjétől független véges és meghatározott értéke van.

Ha ugyanis ismét $|x| \leq \rho < \rho' < R$, továbbá n oly nagynak van választva, hogy $|a_\nu| > \rho'$, ha csak $\nu > n$: úgy ν-nek az n-nél nagyobb értékeire vonatkozólag

$$E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)=\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)^{\sum\limits_{\nu=1}^{m_\nu}\frac{1}{r}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^r}$$

első tényezőjének logaritmusa a

$$\lg.\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)=-\left\{\frac{x}{a_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m_\nu+r}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+r}+\cdots\right\}$$

sorba fejthető ki. Ennélfogva

$$E\left(\frac{x}{a_\nu},m_\nu\right)=e^{-\sum\limits_{r=1}^{\infty}\frac{1}{m_\nu+r}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+r}}$$

és

$$\prod_{\nu=n+1}^{\infty}E\left(\frac{x}{a_\nu},m_\nu\right)=e^{-\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\sum\limits_{r=1}^{\infty}\frac{1}{m_\nu+r}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+r}}. \qquad 39)$$

Itt jobb oldalt a kitevőben álló sor tagjainak abszolut értékeiből képezett sor összege kisebb mint

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+r}=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{1-\left|\frac{x}{a_\nu}\right|}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1}.$$

Itt ismét

$$\frac{1}{1-\left|\frac{x}{a_\nu}\right|}<\frac{1}{1-\frac{\rho}{\rho'}}=\frac{\rho}{\rho^{-1}-\rho'^{-1}}$$

és

$$\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1}<\rho\left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{\rho}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right|.$$

Tehát

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{m_\nu+r}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+r}<\frac{1}{\rho^{-1}-\rho'^{-1}}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{\rho}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right|. \qquad 40)$$

Minthogy itt a jobb oldalt álló sornak véges összege van, ugyanez áll a bal oldalon levő sorról. E szerint a

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{m_\nu+r}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+r} \qquad 41)$$

sornak a tagok sorrendjétől független véges és meghatározott értéke van. Tehát egyszersmind a 39) alatti szorzat is feltétlenül összetart; továbbá vele együtt valóban a 38) alatti szorzatnak is, mely tőle csak véges számú tényezőben külömbözik, a tényezők sorrendjétől független, véges és meghatározott értéke van.

Minthogy a 41) alatti sor *feltétlenül* összetartó, szabad benne az

x ugyanazon hatványait tartalmazó tagokat összevonni s ily módon e sor összegét egy $\mathfrak{P}_{n+1}(x)$ hatványsor alakjába kifejezni.

E szerint x mindazon értékeinél, melyekre vonatkozólag $|x|$ kisebb egy zérus és R között tetszőlegesen választott ρ számnál:

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) = \prod_{\nu=1}^{n} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) \prod_{\nu=n+1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) =$$

$$= \left\{\prod_{\nu=1}^{n} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)\right\} e^{-\mathfrak{P}_{n+1}(x)}.$$

A vizsgált szorzat ezen alakjából közvetlenül világos, hogy annak értéke a ρ-nál kisebb abszolut értékű x-ekre vonatkozólag egy

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_m x^m + \cdots$$

hatványsor alakjában fejezhető ki.

Sőt a

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m + \cdots \tag{42}$$

képletnek érvényessége kiterjed az egész $\mathfrak{K}$ kör belsejére.

Ha ugyanis $|x|$ nagyobb az előbb felvett ρ értéknél, de kisebb R-nél, akkor ρ_1, ρ_1' és n_1 úgy választható, hogy most

$$|x| < \rho_1 < \rho_1' < R$$

és $|a_\nu| > \rho_1'$, ha csak $\nu > n_1$. Továbbá a ρ_1 sugarú kör belsejében levő x-ekre vonatkozólag:

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) = \prod_{\nu=1}^{n_1} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) \prod_{\nu=n_1+1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

$$= \left\{\prod_{\nu=1}^{n_1} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)\right\} e^{-\mathfrak{P}_{n_1+1}(x)}.$$

Ennélfogva a vizsgált szorzat a ρ_1 sugarú körnek egész belsejére érvényes hatványsorba fejthető ki, s minthogy e hatványsornak értéke az $x=0$ környezetében megegyezik az előbb nyert

$$A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m + \cdots$$

sor értékével, azért evvel tagról-tagra meg kell egyeznie. Vagyis a

42) alatti képlet nem csak a ρ sugarú körben, hanem a $\mathfrak{K}$ kör belsejében felvett bármely x-re egyaránt érvényes.

Már most a nyert $f(x)$ hatványsor a $\mathfrak{K}$ belsejében felvett valamely $x=a$ helyre vonatkozólag csak akkor tünhetik el, ha a az

$$a_1, a_2, \ldots$$

értékek egyikével egyenlő. Ez az

$$f(x)=\left\{\prod_{\nu=1}^{n} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)\right\} e^{-\mathfrak{P}_{n+1}(x)}$$

képletből közvetlenül világos, ha abban n-et oly nagynak választjuk, hogy

$$|a_\nu| > a,$$

ha csak $\nu > n$, továbbá tekintetbe veszszük, hogy a kitevős függvény a kitevőnek semmiféle véges értékére el nem tűnik.

Viszont az is világos, hogy ha a az a-k között előfordul, akkor $f(x)$ az

$$f(x)=(x-a)^\mu \bar{f}(x)$$

alakban írható, hol μ azt az egész számot jelenti, a hányszor a az a-k sorozatában előfordul, $\bar{f}(x)$-nek pedig az $x=a$ helyen a zérustól külömböző meghatározott véges értéke van.

Arra az esetre tehát, midőn az előre megadott

$$a_1, a_2, \ldots$$

zérus-helyek között az $x=0$ nem szerepel, az

$$f(x)=\prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

szorzatnak hatványsor alakja tényleg oly sort ad, a milyennek létezését a 15. alatt kimondott és felhasznált alaptétel állítja.

Ha pedig az előre megadott zérus-helyek között a zérustól külömböző

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$$

helyeken kívül még λ-szor szerepel az $x=0$ hely is, akkor

$$x^\lambda \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

lesz a kivánt tulajdonságokkal biró sor.

17. Ha $R=\infty$, akkor az imént bebizonyított tétel WEIERSTRASS-nak következő tételébe megy át:

Ha valamely

$$a_1 \; a_2 \ldots a_\nu \ldots$$

végtelen sorozatban

$$\lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = \infty,$$

akkor mindig képezhető egy oly egyértékű transzczendens egész függvény, melyre vonatkozólag a zérus-helyek sorozata megegyezik az adott sorozattal.

WEIERSTRASS e tételt lényegében a 16. alatt kifejtett módon bizonyitotta be s a következő nem kevésbbé fontos észrevételeket fűzte hozzá.

Valamely *adott* $G(x)$ egész függvény zérus-helyeit illetőleg a következő eshetőségek lehetségesek: 1. $G(x)$-nek egyáltalában nincs zérus-helye, 2. véges számú zérus-helye van, 3. a zérus-helyek végtelen sorozatot alkotnak.

Ha az első esetben $G_0(x)$ alatt az egységet, a második esetben pedig azt a

$$G_0(x)=x^\lambda \prod_{\nu=1}^{m}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)$$

ráczionális egész függvényt értjük, melynek zérus-helyei megegyeznek $G(x)$ zérus-helyeivel, akkor a 15. alatt mondottak értelmében

$$G(x)=G_0(x)\, e^{\overline{G}(x)},$$

hol $\overline{G}(x)$ megint egész függvény.

A harmadik esetben legyen az $x=0$ hely λ-szoros zérus-hely (hol $\lambda=0$ is lehet), a zérustól külömböző zérus-helyek sorozata pedig legyen

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu \ldots$$

A 16. alatt kifejtett módon képezett

$$G_0(x)=x^\lambda \prod_{\nu=0}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

egész függvény zérus-helyei megegyezvén $G(x)$ zérus-helyeivel, most már e harmadik esetben is $G(x)$ ily alakban írható:

$$G(x)=G_0(x)\, e^{\overline{G}(x)}.$$

A kitevőként szereplö $\overline{G}(x)$ függvény mind a három esetben egész függvény lévén, számtalan módon fejthető ki az x minden értékénél feltétlenül összetartó oly

$$G(0)+\sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{g}_\nu(x)$$

sorba, melyben a $\overline{g}_\nu(x)$-ek oly ráczionális egész függvények, melyek az $x=0$ helyen eltűnnek.

Ha már most a harmadik esetben

$$g_\nu(x)=\overline{g}_\nu(x)+\sum_{r=0}^{m_\nu} \frac{1}{r}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu},$$

akkor ez esetben $G(x)$ az x minden értékénél feltétlenül összetartó

$$G(x)=Cx^\lambda \prod_{\nu=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{g_\nu(x)}\right\}$$

szorzat alakjában fejezhető ki, hol C állandó számértéket jelent.

Az első két esetben hasonlóképpen

$$G(x)=C\prod_{\nu=1}^{\infty} e^{\overline{g}_\nu(x)}$$

ill.

$$G(x)=Cx^\lambda \prod_{\nu=1}^{m}\left\{\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\overline{g}_\nu(x)}\right\}\prod_{\nu=m+1}^{\infty} e^{g_\nu(x)}.$$

Vagyis:

Az x-nek bármely egyértékű egész függvénye mint

$$(kx+l)\, e^{g(x)}$$

alakú ***törzsfüggvények*** *feltétlenül összetartó szorzata állítható elő.* Itt $g_\nu(x)$ az $x=0$ helyen eltűnő ráczionális egész függvényt jelent, k és l pedig állandók. Természetesen úgy $g_\nu(x)$, valamint k és l bármelyike zérus is lehet.

Még pedig ez a tényezőkre bontás mindig úgy történhetik, hogy a szorzat az $x=0$ körül ρ sugárral leírt kör belsejében és kerületén *egyenletesen* összetartó legyen, ρ alatt egy szabadon választott pozitiv számot értvén.

Minthogy a $\bar{g}_\nu(x)$-ek mindig úgy választhatók, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{g}_\nu(x)$$

a mondott körben egyenletesen összetartó legyen, elég lesz

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

egyenletes összetartását bebizonyítani.

Ez a 39) és 40) alatti képletek segítségével történhetik. Az első szerint n eléggé nagy értékénél

$$\prod_{\nu=n+1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) = e^{-\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\sum\limits_{r=1}^{\infty}\frac{1}{m_\nu+r}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+r}},$$

míg a második szerint jobb oldalt a kitevő abszolut értéke kisebb, mint az x-től független

$$\frac{1}{\rho^{-1}-\rho'^{-1}} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{\rho}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right|$$

összeg. Ámde ez az összeg a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{\rho}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right|$$

sor összetartása miatt tetszőlegesen kicsinynyé tehető, ha n-et alkalmasan választjuk.

E szerint tehát ρ-hoz s egy tetszőlegesen választott kis ε pozitiv számhoz tényleg mindig található egy *x értékétől független n* egész szám úgy, hogy a

$$\prod_{\nu=n+1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

maradék-sorozat az egységtől kevesebbet különbözzék semmint ε-nal. Ámde éppen ezt értjük *egyenletes* összetartás alatt.

18. A 15. és 16. alatt mondottak után most már a bevezetésben kitűzött utolsó feladat is könnyen oldható meg.

A feladat az volt, miként lehetne egy adott hatványsor által értelmezett $f(x)$ függvény számára, ha az a $\mathfrak{K}$ kör belsejében a ráczionális függvények módjára viselkedik, oly analitikai kifejezést találni, mely $f(x)$-et az egész $\mathfrak{K}$ kör belsejében ábrázolja.

E végből képezzünk a 16. alatt leírt módon egy oly $F(x)$ hatványsort, melynek összetartási tartománya kiterjed az egész $\mathfrak{K}$ körre s melynek zérus-helyei megegyeznek $f(x)$-nek e körbe eső polusaival.

Akkor

$$\Phi(x) = F(x)\, f(x)$$

szintén az egész $\mathfrak{K}$ körben összetartó hatványsor lesz, maga $f(x)$ pedig a $\Phi(x)$ és $F(x)$ hatványsorok hányadosa.

Ha tehát valamely $f(x)$ analitikai függvény egy $\mathfrak{K}$ kör belsejében a ráczionális függvények módjára viselkedik, akkor e körben mint két hatványsor hányadosa fejezhető ki.

Kürschák József.

ALAPRENDSZEREK EGY VÁLTOZÓS ALGEBRAI FÜGGVÉNYEKNÉL.

(Második közlemény.)

III. Az alaprendszerek definicziója.

Az előbbi fejezetben a $G(x, y)$ függvények tanulmányozását visszavezettük x_1, x_2, η homogén függvényeinek tanulmányozására, hol η-t az

$$\eta^n + B_1(x_1, x_2)\eta^{n-1} + \cdots + B_n(x_1, x_2) = 0 \qquad \text{I.}$$

egyenlet definiálja, a mely általánosságban irreduktibilis, ha az előbbi fejezet 1) alatt levő egyenlete, melyből leszármaztattuk is ilyen. Az x_1, x_2, η ily módon definiált homogén függvényei szintén osztályt alkotnak, s ezeket az egy osztályba tartozókat $G(x_1, x_2, \eta)$ függvényeknek fogjuk nevezni. Az osztály általános tagja a már ismert okok következtében a következő alakban jelenik meg:

$$W = u_0 + u_1 y + \cdots + u_{n-1}\eta^{n-1} \qquad 5)$$

hol az u-k x_1 és x_2 raczionális homogén függvényei.

Minthogy az I. alatt levő egyenlet irreduktibilis, azért nincsenek x_1 és x_2-nek olyan a zérustól különböző raczionális homogén a függvényei, a melyekre nézve

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \eta^i \equiv 0$$

identitás teljesülne, miért is az $\eta^0, \eta, \eta^2, \ldots, \eta^{n-1}$ *függvényeket egymástól lineárisan független függvényeknek nevezzük, s az* *mondjuk róluk, hogy a* $G(x_1, x_2, \eta)$ *függvények osztályában rendszert alkotnak;* az 5) alatt levő egyenlet következtében tehát *az egy osztályba tartozó függvények valamennyiét ki tudjuk fejezni.*

Azonban az $\eta^0, \eta, ..., \eta^{n-1}$ rendszert helyettesitheti az $\eta_1, \eta_2, ... \eta_n$ rendszer is, ha

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \eta^{k-1},$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

hol az u_{ik}-k x_1, x_2 raczionális homogén függvényei és

$$|u_{ik}| \gtrless 0,$$

mert ebben az esetben $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ szintén lineárisan függetlenek.

Az egy rendszert alkotó függvények fokszámainak összegét a rendszer totál fokszámának nevezzük.

Pl. az $\eta^0, \eta^1, \ldots, \eta^{n-1}$ rendszer totál fokszáma

$$0+m+2m+\cdots+(n-1)m = \frac{mn(n-1)}{2}.$$

Az előbbi fejezet fejtegetéseihez hasonlóan itt is ki lehet mutatni, hogy a $G(x_1, x_2, \eta)$ függvények mindegyike eleget tesz egy n-, vagy n-nél alacsonyabb fokú irreduktibilis egyenletnek. Igy ha a W-hez tartozó irreduktibilis egyenlet fokszámát m-nek, együtthatóit $A_i(x_1, x_2)$-knek nevezzük, akkor a W-hez tartozó irreduktibilis algebrai egyenlet általános alakja:

$$W^m + A_1(x_1, x_2) W^{m-1} + \cdots + A_m x(x_1, x_2) = 0.$$

Ez az algebrai egyenlet az x_1 és x_2-ben fellépő határozatlan parameter minden különös értéke mellé egy-egy algebrai függvényt rendel, a melynek képviselője egy-egy algebrai görbe; ezek az algebrai görbék valamennyien átmennek W függvény meghatározott zérus- és végtelen helyein. *Azokat a W-ket, a melyeknek határozott végtelenjei nincsenek, egész függvényeknek* nevezzük; tehát az őket definiáló egyenlet együtthatói szintén homogén egész függvények. Pl. az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ rendszert egész függvények alkotják, ha az u_{ik}-k valamennyien homogén raczionális egész függvények; mert η az őt definiáló I. egyenlet alapján szintén egész függvény.

Általánosan az u_{ik}-k homogén tört függvények; következőleg, ha a rendszer egyik tetszőleges tagját W-nek nevezzük s az u_{ik}-k nevezőinek legkisebb közös többszörösét pedig $N(x_1, x_2)$-nek, akkor W-nek, mely egyszersmind a $G(x_1, x_2, \eta)$ függvények általános tagja, következő alakot adhatjuk:

$$W=\frac{u_0+u_1\eta+\cdots+u_{n-1}\eta^{n-1}}{N(x_1, x_2)}$$

hol az u-k homogén egész függvények és $N(x_1, x_2)$ szintén homogén egész függvénynyel közös osztójuk nincs. Tehát W zérushelyei a számláló, — végtelen-helyei pedig a nevező zérus-helyei között vannak.

Azonban a $G(x_1, x_2, \eta)$ függvényeknek ily módon való reprezentálása még mindig hiányos; amennyiben nem mutattuk ki, hogy a számláló csakis W függvény zérus-helyei, — a nevező pedig W végtelen-helyei mellett tünik el; ezt a hiányt következőképen pótoljuk:

Minthogy $N(x_1, x_2)$ lineár tényezőkre bontható, azért elég lesz a vizsgálódást egyik tényezőjére kiterjeszteni; válaszszuk ilyenül a

$$\xi=a_1x_1-a_2x_2$$

tényezőt; ez föltételünknél fogva az u-nak nem közös osztója, mindazonáltal megtörténhetik, hogy az

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{a_2}{a_1}$$

a W függvénynek nem végtelen helye, más szóval, hogy a

$$\overline{W}=\frac{u_0+u_1\eta+\cdots+u_{n-1}\eta^{n-1}}{\xi}$$

függvény egész függvény. Ebben az esetben, miként a következő fejezetben kimutatjuk, a $\eta^0, \eta, \ldots, \eta^{n-1}$ rendszert helyettesíthetjük olyannal, a melynek totális fokszáma egy egységgel kisebb lesz:

s ha ebben az új rendszerben is valamely egész függvény tört alakjában jelennék meg, akkor azt ismét helyettesíthetjük olyannal, melynek totál fokszáma még kisebb lesz s í. t., míg végre oly rendszerhez jutunk, melyben már egyetlen egy egész függvény sem jelenik meg tört alakban, ezt a rendszert *alaprendszer*nek nevezzük, ennélfogva:

A $G(x_1, x_2, \eta)$ függvények alaprendszere alatt az egymástól független egész függvények olyan sorozatát értjük, melylyel a $G(x_1, x_2, \eta)$ osztály összes egész függvényeit egész függvények alakjában fejezhetjük ki.

IV. Az alaprendszerek létezésének kimutatása.

Ha $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ egymástól független egész függvények nem alkotnak alaprendszert, akkor van oly egész függvény, mely ebben a rendszerben tört alakjában jelenik meg; legyen egy ilyen W, tehát

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i \eta_i}{a_1 x_1 - a_2 x_2}, \tag{6}$$

hol az u-k x_1, x_2 raczionalis homogen egész függvényei és a nevező nem közös osztójuk. Tételezzük fel, hogy az η-kat oly sorrendben írtuk fel, hogy egyiknek a fokszáma se legyen kisebb, mint akármelyik előtte levőé, ha tehát η fokszámát $[\eta]$-val jelöljük, akkor

$$[\eta_k] \leqq [\eta_i] \qquad (i > k). \tag{7}$$

Alkalmazzuk ezután a következő helyettesítést:

$$\xi_1 = a_1 x_1 - a_2 x_2, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$
$$\xi_2 = \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2,$$

ezáltal W a következő alakot veszi fel

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{u_i(\xi_1, \xi_2)\eta_i}}{\xi_1}$$

Irjuk ezután u_i-t a következő alakban:

$$u_i(\xi_1, \xi_2)=\xi_1 u_i'(\xi_1, \xi_2)+c_i\xi_2^{\lambda_i},$$

hol c_i állandó szám, és az η-knak 7) alatt kifejezett törvény szerint való elrendezésénél fogva:

$$\lambda_k \geqq \lambda_i \qquad (i>k)$$

ha még c_i-k közül c_s $(s \leqq n)$ az utolsó, mely nem zérus, akkor

$$W=\sum_{=1}^{n} u_i'(\xi_1, \xi_2)\overline{\eta_i}+\frac{\xi_2^{\lambda_s}\sum\limits_{i=1}^{s} c_i\xi_2^{\lambda_i-\lambda_s}\overline{\eta_i}}{\xi_1}. \tag{6'}$$

Minthogy

$$\overline{\eta_s'}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{s} c_i\xi_2^{\lambda_i-\lambda_s}\overline{\eta_i}}{\xi_1}$$

egész függvény és fokszáma egy egységgel kisebb, mint $\overline{\eta}_s$-é, azért, ha rendszerünkben $\overline{\eta}_s$ helyett $\overline{\eta}_s'$-t teszünk, akkor az új rendszer totál fokszáma egy egységgel kisebb lesz s W ebben a rendszerben már-már egész függvény alakjában jelenik meg, amennyiben a 6') első szummájában fellépő $\overline{\eta}_s$-t is a következő egész függvénynyel helyettesítjük:

$$\overline{\eta}_s=\frac{\xi_1\overline{\eta}_s'-(c_1\xi_2^{\lambda_1-\lambda_s}\overline{\eta}_1+c_2\xi_2^{\lambda_2-\lambda_s}\overline{\eta}_2+\cdots+c_{s-1}\xi_2^{\lambda_{s-1}-\lambda_s})}{c_s}$$

Ha már most visszatérünk a régi változókra, akkor fejtegetéseink eredményét a következőkben foglalhatjuk össze:

Ha $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ *nem alaprendszer, akkor mindig van oly egész függvény, mely ebben a rendszerben tört alakjában jelenik meg; de ekkor mindig megállapíthatunk egy olyan* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{s-1}, \eta_s', \eta_{s+1}, \ldots, \eta_n$ *rendszert, melynek totál fokszáma az előbbinél kisebb, s melyben W egész függvény alakjában jelenik.* Evvel egyszersmind kimutattuk az alaprendszerek létezését; mert látható, hogy evvel az eljárással el kell jutnunk oly rendszerhez, melynek totál fokszáma már nem kisebbíthető, s ez lesz az alaprendszer.

Ámde evvel még nem adtunk módszert az alaprendszerek meghatározására nézve; a mennyiben még nem tudjuk, hogyan kell azon W egész függvényeket meghatározni, a melyek valamely nem alaprendszerben tört alakjában jelennek meg. Mielőtt azonban ennek a problemának megoldására térnénk, megállapítjuk a fundamentális rendszerek alaptulajdonságait.

V. Az alaprendszerek alaptulajdonságai.

Az előbbi fejezetben megállapitott jelölés alapján az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ alaprendszer totál fókszáma:

$$N = [\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n].$$

Kimutatjuk, hogy *az összes rendszerek között az alaprendszer totál fokszáma a legkisebb.* Mert ha volna egy olyan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ elemekből álló rendszer, melynek totál fokszáma kisebb N-nél, akkor könnyű kimutatni, hogy ennek a rendszernek elemei egymástól nem függetlenek. Rendezzük ugyanis az η-kat és ξ-kat úgy, hogy

$$\begin{aligned} [\eta_i] &\leqq [\eta_k], \\ [\xi_i] &\leqq [\xi_k]. \end{aligned} \qquad k \geqq i \qquad 7')$$

legyen. A feltételnél fogva kell egy olyan első ξ_i-nek létezni, melyre nézve

$$[\xi_i] < [\eta_i],$$

ennélfogva $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i$-t ki lehet fejezni $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$-el; azaz általában:

$$\xi_k = \sum_{r=1}^{i-1} u_{kr} \eta_r;$$
$$(k=1, 2, \ldots, i)$$

ez az egyenletrendszer pedig azt mondja ki, hogy $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i$ között lineár relaczió létezik, ami kimondott tételünk helyességét igazolja.

Ha $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ és $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_n$ két alaprendszer, melyeknek elemei a 7')-ben kifejezett törvény szerint, következnek egymásra, akkor

$$[\eta_i] = [\eta'_i].$$

Mert ha volna olyan első η'_i, melyre nézve

$$[\eta_i] > [\eta'_i],$$

akkor $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_i$-t ki lehetne fejezni $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{i-1}$-el, amiből következnék, hogy az $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_i$ között lineár reláczió létezik; ami pedig föltevésünkkel ellenkezik.

Lássuk ezek után mily összefüggés van két alaprendszer között? Minthogy az alaprendszerekkel bármily más függvényt ki lehet fejezni, azért felírhatjuk a következő relácziókat:

$$\eta'_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \eta_k, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

$$\eta_k = \sum_{r=1}^{n} a'_{kr} \eta'_r; \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

következőleg:

$$\eta'_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} a_{ik} a'_{kr} \eta'_r. \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

Ha tehát

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a'_{kr} = \delta_{ir},$$

akkor

$$\delta_{ii} = 1, \quad \delta_{ir} = 0, \quad r \lesseqgtr r.$$

minek következtében

$$|\delta_{ik}| = |a_{ik}| \; |a'_{ik}| = 1.$$

Minthogy az a_{ik} és a'_{ik}-ok homogén egész függvények, azért a legutóbbi reláczió alapján, úgy $|a_{ik}|$, mint $|a'_{ik}|$ konstansok, tehát: *egyik alaprendszerből a többit olyan helyettesítésekkel nyerjük, melyeknek determinánsa állandó.*

A totális fokszámra nézve megállapitjuk a következő törvényt: *Az alaprendszer totál fokszáma legalább $n-1$.*

Ugyanis a rendszer egyik tagja okvetetlenül konstans, mert különben a konstansokat, nem lehetne a rendszer elemeivel kifejezni;

a rendszer többi tagja pedig legalább elsőfokú függvény; mert ha lenne még egy konstans, akkor lineár relácziót lehetne közöttük felállítani, *tehát a totál fokszám minimuma* $n-1$; azonban $n-1$-nél általában p-vel nagyobb, azaz:

$$N=n-1+p,$$

honnan

$$p=N-n+1\geqq 0.$$

Minthogy N *a* $G(x_1, x_2, \eta)$ *függvényekre nézve előbbi fejtegetéseink alapján invarians, azért* p *is az és ezt a számot nevezi Weierstrass az algebrai görbék-, vagy* (x_1, x_2, η) *osztály rangjának.* (Clebsch «Geschlecht»-nek nevezi.)

Suták József.

A BINOMIÁLIS EGYÜTTHATOK OSZTHATOSÁGÁRÓL.

Ha p tetszőleges törzsszám, akkor a

$$\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \ldots, \binom{p}{p-1}$$

binomiális együtthatók egyszerre oszthatók p-vel. A következőkben ki fogjuk mutatni, hogy *összetett modulus esetében az*

$$\binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \ldots, \binom{m}{m-1}$$

együtthatók sohasem lehetnek egyszerre oszthatók m-mel; utóbbi tételnek az elsőt mindenesetre tartalmaznia kell s ezért bizonyítását úgy végezzük, hogy abból az első tétel is közvetetlenül kitűnjék.

I. *Ha k relatív prím m-hez képest, akkor $\binom{m}{k}$ osztható m-mel.*

Ugyanis

$$\binom{m}{k} = \frac{m}{k}\binom{m-1}{k-1}$$

egyenletből — mivel $\binom{m-1}{k-1}$ egész szám, — következik, hogy

$$k\binom{m}{k} \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, m),$$

s mivel k m-hez képest relatív prím, azért

$$\binom{m}{k} \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, m).$$

II. *Ha m összetettszám és p a benne foglalt legkisebb törzsszám, akkor $\binom{m}{p}$ nem osztható m-mel.*

Ugyanis

$$\binom{m}{p}=\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,p}$$

számlálójában m-en kívül nincsen tényező, a mely p-vel osztható volna; hiszen a számlálóban levő

$$m-1, m-2, \ldots, m-p+1$$

tényezők mod. p a

$$p-1, p-2, \ldots, 2, 1$$

számokkal kongruensek.

Ha $\binom{m}{p}$-et az

$$\binom{m}{p}=\frac{m}{p}\binom{m-1}{p-1}=\frac{m}{p}\,.\,M$$

alakban írjuk, akkor M a p-vel nem osztható egész szám, és így látjuk, hogy $\binom{m}{p}$ nem lehet osztható m-mel. Mivel pedig

$$1, 2, \ldots, p-1$$

számok mindannyian m-hez képest relatív prímek, az I. alatt levezetett tételből következik, hogy az

$$\binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \ldots, \binom{m}{p-1}$$

együtthatók mindannyian oszthatók m-mel.

Ha tehát m összetett szám és p a benne foglalt legkisebb törzsszám, akkor az

$$\binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \ldots, \binom{m}{m-1}$$

együtthatók sorában $\binom{m}{p}$ az első, mely m-mel nem osztható.

Ha $m=p$, akkor ezen tétel összeesik a bevezetésben említettel.

Az itt tárgyalt tétel más szavakkal tulajdonképen azt jelenti, hogy

$$(x+y)^m \equiv x^m+y^m \pmod{m}$$

csakis akkor azonos kongruenczia, ha m törzsszám.

Grúber Nándor.

PHYSIKAI SZEMLE.

Új vizsgálatok az X-sugarak sajátságaira és eredetére nézve.

(ROENTGEN közleménye a *Revue gén. des Sciences pures et appliqués* VII. k. 499. lap.)

Első vizsgálataim közzététele óta, melyeket néhány hétre félbe kellett szakítanom, néhány új eredményt találtam s ezúttal a következőket ismertetem.

I.

Első közleményeim közzétételekor tudtam, hogy az X-sugarak képesek elektromos testeket kisütni és hogy a távolabbi elektromos testekre gyakorolt hatás, melyet LÉNÁRD észlelt, az X-sugaraknak tulajdonítandó, nem pedig a katód-sugaraknak, melyek LÉNÁRD készülékének aluminium-ablakán változás nélkül hatoltak át. Vizsgálataim közlésével vártam, hogy megczáfolhatatlan eredményeket tehessek közzé.

Ezen eredményeket csak úgy lehet elérni, ha az észleléseket olyan térben végezzük, mely teljesen védve van nemcsak a légüres csőből kiinduló elektrosztatikai tér, a vezető zsinórok s az indukczió-tekercs hatásai ellen, hanem a levegő ellenében is, mely a kisütési készülék szomszédságából ered.

Hogy ezen föltételeket megvalósítsam, egymásra forrasztott czinklemezekből kamarát készítettem, melynek méretei elegendők személyem és a szükséges eszközök befogadására és a mely czinkajtóval elzárt nyilás kivételével légmentesen zárt. Az ajtóval szemben levő fal felületének nagy része ólommal van fedve; azon hely szomszédságában, a melyen kívül az indukczióstekercs van elhelyezve, a czinkfalat az azt borító ólommal együtt 4 czentiméter hosszban eltávolíttattam s a nyilást vékony aluminiumlemezzel zárattam el légmentesen. Az X-sugarak ezen ablakon át hatolhatnak kamara belsejébe.

Íme a tények, melyeket megállapítottam.

1. A levegőben levő, pozitiv vagy negativ elektromossággal ellátott testek

az X-sugarak hatásának kitéve, kisüttetnek és pedig annál rohamosabban, mennél intenzivebbek a sugarak. A sugarak intenzitását fluoreszkáló ernyőre vagy fotografiai lemezre gyakorolt hatásuk szerint becsültem meg. Általában véve egyre megy, vajjon az elektromossá tett testek szigetelők-e vagy vezetők. A kisülés gyorsaságának szempontjából eddigelé a különböző testek viselkedésében semmiféle fajlagos különbséget nem találtam; az elektromosság jelének sincs látható befolyása, de nem bizonyos, nincsen-e mégis némi különbség.

2. Midőn az elektromozott testet nem levegő veszi körül, hanem valamely szilárd szigetelő, például paraffin, a sugarak hatása ugyanaz, mint valamely a föld felé levezetett lángé, mely a szigetelő alzatot nyalja.

3. Ha a szigetelő alzat szorosan körülzáró vezetővel volt borítva, mely a földdel vezetőleg van összekötve, a rendelkezésemre álló eszközökkel az X-sugaraknak semmiféle hatását sem birtam kimutatni, még akkor sem, midőn a második vezető és szigetelő elég vékonyak voltak arra, hogy az X-sugarakra nézve átlátszók legyenek.

4. Az 1., 2., 3. pontokban fölsorolt észleletek azt bizonyítják, hogy az X-sugaraknak kitett levegő fölvette azt a sajátságot, melynél fogva a vele érintkező tárgyak kisülését eszközli.

5. Ha a dolog csakugyan így áll, és ha a levegő ezen sajátságát azonfelül egy ideig megtartja, miután az X-sugarak hatása alatt állott, az olyan elektromozott tárgyak kisütésének is lehetségesnek kell lennie, melyek maguk nem is voltak az X-sugaraknak kitéve, ha olyan levegőt bocsátunk rájok, mely a sugarak hatása alatt állott. Hogy ezen következtetés igazolt, arról többféle módon lehet meggyőződni. Íme egy eljárás, mely a kísérlet elrendezésére nem éppen a legegyszerűbb. 3 cm átmérőjű, 45 cm hosszú sárgarézcsövet használtam; néhány czentiméternyire az egyik végtől a falnak egy részét eltávolítottam s helyére vékony aluminiumlemezt tettem; a másik végen, mely légmentesen zárt, sárgarézgömb van megerősítve, melyet a cső falaitól elszigetelt fémpálczika tart. A gömb és a cső elzárt vége közé aspirátorral összekötött oldalcső van forrasztva. Sziváskor a sárgarézgömböt légáram borítja, mely a cső hosszirányát követve, az aluminiumablak előtt haladt el. Az ablak távola a gömbtől körülbelül 20 cm. Ez a cső a horgany-kamarában volt elhelyezve és pedig olyformán, hogy az X-sugarak az aluminiumablakon keresztül hatolhattak a csőbe, merőlegesen annak hossztengelyére; a szigetelt gömb a sugarak áthatolta téren kívül esett, mintegy az árnyékba. A cső és a horgany-kamara vezetőleg voltak összekapcsolva; a gömb összeköttetésben állott egy Hankel-féle elektroszkoppal.

Megállapítottam, hogy a gömbbel közölt pozitiv vagy negativ töltésre az X-sugarak mindaddig nem hatnak módosítólag, míg a cső levegője nyugalomban van ; a töltés azonban rohamosan csökken, mihelyt erélyes szivás a gömbre tereli a sugaraknak kitett levegőt. Ha a gömböt akkumulátorokkal kötöttem össze, hogy potencziálját állandó értéken tartsam és a szivást állandóan folytattam, elektromos áram keletkezését észlelhettem, olyformán, mintha a gömböt a cső falával rosszul vezető test kötné össze.

6. Itt fölmerül a kérdés: Hogyan vesztheti el a levegő azt a sajátságot, melyet az X-sugaraktól kapott? Magától veszti-e el idővel, vagyis a nélkül, hogy más testekkel érintkeznék? A felelet még kétséges. Annyi bizonyos, hogy nagy felületű testtel való rövid érintkezés hatástalanná teszi a levegőt; nem szükséges, hogy a test elektromos legyen. Ha a csőbe például elég vastag vattatömböt dugunk és pedig oly mélyen, hogy a sugaraknak kitett levegő kénytelen legyen rajta keresztülhatolni, mielőtt az elektromos gömbhöz érne, akkor a gömb töltése változatlan marad a szivás tartama alatt. Ha a tömb az aluminiumablakon innen van, az eredmény ugyanaz, mint ha nem is volna ott; ez bizonyítéka annak, hogy nem porszemek okozzák az észlelt kisülést.

Fémszövetek úgy hatnak, mint a vatta; csakhogy a szövetnek nagyon finomnak kell lennie és több szövetet kell egymásra helyezni, hogy az áthatoló levegő hatástalanná váljék. Ha a szöveteket nem a földdel kötöttem össze, mint eddig föltételeztem, hanem állandó potencziálú elektromosságforrással, a kísérlet mindig megerősített föltevésemben; de ezen vizsgálatok még nincsenek befejezve.

7. Ha az elektromos testeket levegő helyett száraz hidrogénnel vesszük körül, az X-sugarak épp úgy kisütik őket. A hidrogénben való kisülés kissé lassúbbnak tünt föl nekem ; a dolog különben még bizonytalan, mert nagyon nehéz két egymást követő kísérlet alkalmával ugyanolyan intenzitású sugarakat kapni.

A mód, mely szerint a készülék hidrogénnel megtöltetett, azt látszik bizonyítani, hogy a testeket már eredetileg is borító sűrített levegőrétegnek a kisülésnél nincs lényeges szerepe.

8. Eléggé ritkított levegőjű térben az X-sugaraktól közvetlenül ért test kisülése sokkal lassabban megy végbe, — egy esetben pl. 70-szer oly lassan — mint midőn a levegő vagy hidrogén ugyanazon csőben a légköri nyomás alatt áll.

9. Kísérletek, melyek az X-sugaraknak klór és hidrogén keverékére való hatását fogják kimutatni, folyamatban vannak.

10. Végre azt óhajtom jelezni, hogy az X-sugarak okozta kisülésekre vonatkozó kísérletek eredményei, melyeknél a körülvevő gáz befolyására nem voltunk tekintettel, csak vigyázattal vehetők számításba.

II.

Sok esetben előnyös a kisülési készülék: az X-sugarak létrehozója és a Rhumkorff-féle tekercs közé Tesla-féle készüléket csatolni (sürítőt és transformatort). Ez az elrendezés a következő előnyöket nyujtja: először is a kisülési csövek kevésbbé vannak kitéve az áttörés veszélyének és kevésbbé is melegednek föl; továbbá a ritkítás tovább marad meg, legalább azon készülékekben, melyeket magam készítettem elő; végre sok készülék intenzivebb X-sugarakat hoz létre. Az olyan készülékek, melyekben a ritkítás nem elegendő, vagy pedig túlságos nagy arra, hogy csupán a Rhumkorff-féle tekercscsel működhessenek, Tesla-féle transformatorral eredménynyel használhatók.

Egy kérdés, mely önként kinálkozik s a melyet fölvetni bátorkodom a nélkül, hogy ez idő szerint megoldásához hozzájárulhatnék, az, hogy vajjon folytonos kisülés, melynél a potencziál állandó, képes-e X-sugarakat előidézni, vagy ellenkezőleg a potencziálérték hullámzásai föltétlenül szükségesek-e létrehozásukhoz?

Első közleményemben azt jeleztem, hogy az X-sugarak nemcsak az üvegen, hanem még az aluminiumon is létrejöhetnek. Ezen szempontból folytatván vizsgálataimat, egy szilárd testet sem találtam, mely katódsugaraknak kitéve, ne volna képes X-sugarak előidézésére. Éppen úgy nem találtam semmi olyan tényt, mely azt hitetné el velem, hogy a folyadékok és gázak másként viselkednek.

Ellenkezőleg, különböző testeknél észleltem eltéréseket az eredmény mennyiségét tekintve. Ha pl. katód-sugarak esnek olyan lemezre, melynek fele 0,3 mm. vastag platinalemezből áll, másik 1 mm. vastag aluminiumlemezből, akkor sötét kamrában a lemez fotografiai képét állítván elő, az derül ki, hogy a platinalemez mellső felületéről, mely a katód-sugaraknak van kitéve, sokkal több X-sugarat bocsát ki, mint az aluminiumlemez ugyanazon oldalról. A másik oldalon ellenkezőleg az X-sugarak intenzitása a platinalemezen úgyszólván semmi, míg az aluminiumból igen sok indul ki. Ez utóbbi sugarak az aluminiumlemez mellső rétegein keletkeztek és ezeken áthatoltak.

Ezen eredményeket könnyen lehetne megmagyarázni, de jó volna előbb az X-sugarak sajátságait tovább tanulmányozni. Megjegyzendő, hogy az előbb említett tényeknek nagy gyakorlati fontosságuk van. Eddig végzett kísérleteim szerint a platina azon anyag, mely a legintenzivebb X-sugarakat hozza létre.

Több hete nagy sikerrel használok olyan kisülési csövet, melyben a katód homorú tükör és az anód platinalemez, mely a tükör görbületi középpontjában van, 45°-nyira a tengelyhez megerősítve. Az X-sugarak ezen csőben az anódból indulnak ki. Különböző alakú csövekkel végzett kísérletekből arra lehet következtetnem, hogy az X-sugarak intenzitása szempontjából közömbös, vajjon a test, melyen keletkeznek, anód-e vagy sem.

Hogy különösen a Tesla-féle transformátor váltakozó áramaival végezhessek kísérleteket, e czélra kisülési csövet készíttettem, melyben a két elektród aluminiumból való homorú-tükör, melyeknek tengelyei egymásra merőlegesek; a közös görbületi középpontban platinalemez van megerősítve, mely a katód-sugaraknak van kitéve. Hogy miképen működött ezen készülék, arról később fogok beszámolni. Ford. *Cs. J.*

*

Láthatatlan sugarak.

Mióta Röntgen a Crookes-cső segítségével láthatatlan sugarait az ismert módon előállította, nagy mértékben foglalkoztatja a fizikusokat ama kérdés, valjon ugyanezen vagy hasonló sugarak más módon előállíthatók-e avagy nem? Erre vonatkozólag legújabban H. Becqurel igen érdekes eredményekre jutott. Ch. Henry (*Comptes rendus* CXXII. 312—314. l.), azt találta, hogy a czinkszulfid foszforeszkálás közben olyan sugarakat bocsát ki, melyek a közönséges fényre átlátszatlan testeken áthatolnak s fotografiai hatást fejtenek ki. Niewenglowski ugyanezt tapasztalta a kalcziumszulfidra vonatkozólag. H. Becquerel kiderítette, hogy sok más foszforeszkáló anyag is, különösen azonban az uránsók mutatják az említett sajátságokat.

H. Becquerel* különösen az uranil és kalium kénsavas kettős só-jából [SO_4 (UO) K+H_2 O] kiinduló sötét sugarak természetét részletesen megvizsgálta. Brómezüstlemezt vastag fekete papirosba csavart, úgy hogy a nap sugarainak 15—16 óráig kitéve, a chemiai hatásnak semmi nyoma sem mutatkozott. Ha a burkolatra kívülről foszforeszkáló réteget helyezett s így tette ki a napra néhány óráig, akkor a lemez a foszforeszkáló réteg alatt megfeketedett. A foszforeszkáló testből tehát sötét sugarak indulnak ki, melyek papiroson áthaladnak. Azt találta továbbá, hogy áthatolnak aluminiumon is, míg egyéb fémek elnyelik őket. H. Becquerel kisérletei közben szerencsés véletlen által az uranil-só ama érdekes sajátságára bukkant, hogy láthatatlan sugarakat bocsát ki akkor is, miután a látható foszforeszczenczia már megszünt. Előzetesen megvilágított uranil-sót helyezve az előbb leirt módon fotografiai lemezre, az 5 óra után teljesen sötét helyiségben is az uranil-só alatt megfeketedett; még 160 óra után sem mutatkozott gyengülés a láthatatlan sugárzásban.

---

* H. Becquerel, *Comptes rendus* CXXII., 501—503., 559—564., 689—694., 762—767.

Eme körülmény megnehezíti az előzetes megvilágítás befolyásának tanulmányozását. Annyi megállapítható, hogy megvilágítás magnézium fénynyel vagy Röntgen-sugarakkal — utóbbiakra az uranil-só átlátszatlan — nem növeli a láthatatlan sugárzást; ellenben az elektromos ívfény, erős elektromos szikra láthatólag erősíti a sugárzást. Szerző a jelenséget láthatatlan foszforeszkálásnak tartja, mely a láthatóval nincs benső kapcsolatban. Ezzel megegyezésben van ama tapasztalata is, hogy egyes uransóknál, pl. az uranszulfátnál csak láthatatlan foszforeszczenczia lép fel.

Mint a Röntgen-sugarak, úgy ezek is elektromos kisütő hatással birnak. Szerző ennek kimutatására aranylemezes elektroszkopot használt, mely külső elektromos behatások ellen vékony aluminium-tokkal volt megvédve. Az elektroszkop töltését hónapokig megtartotta. Az aluminium burkon kívül elhelyezett uranil-só hatása alatt 18°-os kitérés 3 óra alatt eltünt. Benn a szekrényben 3 czentiméterrel az arany lemezek alá helyezve a sót, 12°-os kitérés 48 percz alatt eltünt.

Megvizsgálta Becquerel a különböző testek átbocsátó képességét, felhasználva sugairainak részint fotografáló, részint elektromos kisütő hatását. Az abszorbeáló réteg vastagságát 2 mm.-nek választotta, 2 milliméteres levegőréteg hatása már észrevehető; víz nagyon átlátszó; oldatok, még fémes oldatok is jól átbocsátják a sugarakat, üveg kevésbbé, aluminium ilyen vastagságban sokat elnyel; 0,1 mm. vövösréz nagyon átlátszó, platina hasonlóképen, ólom majdnem átlátszatlan. Általában eme sötét sugarak könnyebben hatolnak át a különböző anyagokon, mint a Röntgen-sugarak, kvarcz pl. körülbelül 4-szer kevesebbet abszorbeál Becquerel sugaraiból, mint a Röntgen-félékből.

Eme új sötét sugarak eltérnek a Röntgen-sugaraktól abban is, hogy visszaverődést és törést szenvedhetnek. Fotografikus lemezre, úgy mint előbb, uranil-só réteget helyezett; annak felét aczél tükörrel födte el. 55 óra után erős képet nyert éles határokkal, melyek a tükörrel el nem födött résznek feleltek meg; a másik fél kép határai elmosódtak, mintha egy másik lemeznek, az első tükör képének hatása az eredetiéhez hozzáadódott volna. A törést Becquerel prizma segítségével észlelte. Fotografikus lemezre crown-prizmát fektetett egyik lapjával; a prizma másik lapjára 1 mm. átmérőjü üvegcsövet, belsejében uranil-sóval, mely keskeny fényforrást képezett; a cső párhuzamos volt a prizma éléhez. 3 napi hatás után a prizma alatt diffus behatás mutatkozott, mely a prizma élének helyétől fehér sávval volt elválasztva.

Hogy a most leirt sugarak a Röntgen-sugaraktól eltérnek, a következő kisérletből is kitűnik. Bequerel 2, a tengelylyel párhuzamosan metszett 0,5 mm. vastagságú turmalin lemezt egymás mellé helyezett, keresztező tengelyekkel. Tetejébe egy második turmalin lemezt helyezett, mely mind-kettőt elfödte. Röntgen-sugaraknak kitéve a szerkezetet, a fotografikus lemez a két turmalin alatt egyformán sötétedett el, Becquerel-sugarak alatt azonban a két fél különböző sötétségű volt, ennek jeléül, hogy eme új sugarakra nézve a turmalin dichroistikus, azaz különböző irányokban különféle mértékben nyeli el őket. *Tangl.*

*

A nátrium és káliumgőz fluorescenciája és ennek jelentősége az astrophysikára nézve. Wiedemann und Schmiedt: Fluorescenz des Kalium- und Natriumdampfes, und die Bedeutung dieser Thatsache für die Astrophysik. *Ann. d. Phys.* 57. köt. 447 l.

A dolgozat a szerzőknek e tárgyra vonatkozó kisérleteit és azok eredményét ismerteti, mely abban áll, hogy a *nátrium- és káliumgőz fényesen fluoreszkálnak, még pedig a nátriumgőz zöld, a kálium intenziv vörös szinben.* Az ívlámpa fényében is szépen fluoreszkálnak ezek a gözök. A nátriumgőz spektruma a 665-ik vonaltól a 496-ig terjed és 3 részből áll:

1. a vörösben megszakítások nélküli sávoly-,
2. a zöldben szaggatott sávoly- és
3. a sárgában a fényes nátriumvonalból;

ez utóbbi sem a kisérletnél használt melegítő lángtól, sem vegyi folyamatoktól nem ered. A káliumgőz spektrumában 695 és 615 közt intenziv vörös sávoly van; a világos káliumvonalak hiányát szerzők esetleg a beeső fény gyengeségének tulajdonítják.

Szerzők megkisérlették a nátrium és káliumgőzre is annak kimutatását, hogy a fotoluminiscentiával karöltve jár az elektroluminiscentia; az eredmény az volt, hogy a nátriumnál 535—480 fellépő sávolyban a fluoreskálástól eltérőleg rétegződés nincs, a káliumnál pedig 665—625 közt lép fel, úgy mint a fluoreszkálásnál rétegződés nélküli sávoly; az elektroluminiscentiánál a sávolyok helyzete tehát körülbelül megfelel a fluoreszkálás sávolyainak.

A Stokes-féle szabály, t. i. hogy a felidézett fény kevésbbé törékeny, mint az előidéző fény, nagyjában a fémek gőzeinél is fennáll; a nátriumgőznél zöldeskék sugarak okozták a zöld, sárga és vörös sugarak a vörös fényt; a káliumgőznél vörös fény sötétvörös sugárzást vont maga után.

Szerzők ezen eredményről, hogy t. i. fémgőzök fluoreskálnak, már most így nyilatkoznak:

«Tudjuk, hogy a Nap atmoszférájában a legkülönbözőbb fémek gőzei fordulnak elő, ezeket a Nap megvilágítja, fluoreskálniok kell tehát, még pedig igen fényesen. Nem szabad e mellett elfelejtenünk, hogy a Nap közelében az előidéző fény intenzitása sokkal nagyobb, mint a Föld felületén, tehát a fluoreszkáló fény is intenzivebb. Ez a fluoreszkálás nem tehet eleget a Kirchhoff törvényének.»

«A kibocsátott fluoreszkáló fénynek folytonos és szaggatott sávolyokból és egyes fényes vonalakból kell állania. Sok fém keverékében az elsők folytonos spektrummá egyesülnek, a különböző anyagok finom, gyakran csak nehezen felismerhető rétegződései egymásra helyezkednek és eltünnek. Az éles vonalak ellenben egyenkint láthatók maradnak; így lehetne aztán pl. a corona spektrumát megmagyarázni; ez folytonos spektrumból és egyes fényes vonalakból áll, melyekhez még egészen gyengén több Fraunhofer féle vonal csatlakozik. Ez utóbbiakat a coronában szétszórtan visszavert fény okozza. Ezek szerint nem szükséges feltenni, hogy elektromos rezgések idézik elő folytonosan és folytatólagosan a fényt; ily rezgések különben sok esetben fontos szerepet játszanak. Közelfekvő dolog, hogy az eredményeket a chromosphæra elméletére a protuberantiák bizonyos alakjaira alkalmazzuk.»

«Minden astrophyskai és más fénytüneménynél külön megvitatás tárgyává teendő nemcsak az, hogy a fénynek mely része ered kizárólag hőemelkedésből és mely része luminiscentiából, hanem külön megállapítandó az is, mikor van fotoluminiscentia, tehát fluoreszkálás. Ez esetben a viszonyok aránylag egyszerüek és a kisérletnek legkönnyebben alávethetők.»

L. F. dr.

VEGYESEK.

Franz Ernst Neumann.

Mult év május 23-án hunyt el Königsbergben a német physikusok Nestora, az öreg NEUMANN, miután számos tanítványát sírba szállani látta. NEUMANN neve a tudomány történetében iskolát jelent, melyből a tudósoknak egész nemzedéke került ki. Csak néhányat említünk fel azok sorából: ROSENHAIN, königsbergi mathematikus; JOAHIMSTHAL, boroszlói mathematikus, LUTHER, Königsbergben csillagász, BORCHARDT, mathematikus Berlinben; GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF, legnagyobb tanítványa; DURÈGE, mathematikus Prágában; LIPSCHITZ, bonni mathematikus; CARL NEUMANN, mathematikus Lipcsében, a mester fia; CLEBSCH, göttingai mathematikus; QUINKE, heidelbergi physikus; PAUL DU BOIS REYMOND, volt heidelbergi, később berlini mathematikus; PAPE, königsbergi physikus; AUWERS, csillagász; VONDERMÜHLL, a physika tanára Baselben; WANGERIN, mathematikus Halleban; báró EÖTVÖS LORÁND, és számos más, kinek neve a tudományos világban jó hangzású.

NEUMANN FERENCZ ERNŐ 1798 szeptember 11-én született Joachimsthalban, az Uckermarkban. A gymnasiumot a berlini Werder-féle gymnasiumban végezte. Alig 17 éves korában mint önkéntes vadász részt vett a német szabadságharczban 1815-ben. A Ligny melletti csatában nehezen sebesült meg fején. Egyik barátja a golyózáporból egy száraz árokig hurczolta a nehéz sebesültet, ki csak 14 nap után jutott rendes ápolás alá! Már hat hét mulva, miután sebe csak alig hegedt be, visszatért a hadsereghez és résztvett Givet ostromában.

A béke helyreállta után NEUMANN egyetemi tanulmányait folytatta. A jenai és berlini — akkoriban nagyon gyarló — egyetemeken csak hézagos kiképeztetést nyerhetett, melyet később saját öntevékenységével kellett kiegészíteni. Hathatós buzdítást csak egyik tanára részéről nyert: WEISZ KERESZTÉLY SÁMUEL-től, ki 1810-től a berlini egyetemen a mineralogia tanára volt. Az ő emlékét NEUMANN egész életén keresztül hálával őrizte meg.

NEUMANN első tudományos dolgozata a kristallographiával foglalkozott és

1823-ban jelent meg, *Krystallonomische Beiträge* czím alatt. Második dolgozata a tudori dissertatio, melyet *De lege zonarum principio evolutionis systematum crystallinorum* czím alatt Berlinben adott ki 1826-ban. Midőn Neumann a königsbergi egyetemen magát habilitálta, az egyetemi tanács minden formalitás alól felmentette. Már 1828-ban a königsbergi egyetemen a physikából és mineralogiából rendkívüli, s egy évvel később rendes tanárrá nevezték ki.

A fiatal tanár nagyon vágyódott lakásával közlekedő laboratorium után, mely a kutatásnak és a tanításnak egyaránt szolgáljon. Ez a jogosult kívánsága azonban teljesülésbe soha sem ment. Már 1834-ben belátták egy új egyetemi épület szükségét. A physika czéljaira az egyetem terjedelmes helyiséget tervezett a gyüjtemény és a laboratorium számára, mely helyiséghez közvetetlenül csatlakozott volna a physika tanárának a lakása; mert a mint az egyetemi szenatusnak a miniszteriumhoz beadott emlékiratában foglaltatik: «In der Wissenschaft arbeitet man nicht, wie in einem Geschäfte, zu bestimmten Stunden, wo man nach dem Arbeitslocal hingehen kann: man muss darin wohnen». És miután a miniszter a tanári lakásnak az egyetem épületében helyet adni nem akart, a szenátus ismételve adta elő kivánságát a physika tanárának hivatalos lakását illetőleg, azt mondván: «Wenn der Staat die Intention hat, dem wissenschaftlichen Betrieb in dem gedachten Unterrichtszweige sich fördersam zu erweisen, kann er eine Trennung des Lehrers von seinem Handwerkszeuge nicht anordnen. Die Gedanken, welche der Gelehrte reifen lassen soll, sind an keine bestimmte Zeit gebunden; er kann sie nicht auf gewisse Stunden des Tages fixiren, in welchen er sich nach dem Arbeitslocale begiebt, und in andern sie von sich weisen. Wie ihn seine Gedanken nie verlassen, und wie es seine Untersuchungen erfordern, muss er seine Hülfsmittel in der Nähe haben«. Maga a király, midőn 1840-ben Königsbergben tartózkodott, az egyetemnek ezen kivánságát teljesen indokoltnak és teljesítendőnek találta, a mi azonban nem akadályozta meg, hogy a physikai laboratorium 1884-től 1886-ig tanári lakás nélkül épült, élénk bizonyítékául korlátolt belátású bureaukratikus felfogásnak, melyaz oktatás és a tudományos kutatás szükségletei iránt érzékkel nem biró adminisztráló közegeknek és forumoknak, fájdalom, gyakori tulajdonsága.

Mire a physikai intézet épülete elkészült, Neumann mint 90 éves aggastyán már rég nyugalomba vonult.

Neumann tudományos pályájának kezdetén főleg a kristályok geometriai viszonyaival foglalkozott. Ezen irányba esik doctori dissertatiója: *De lege zonarum* (1826), valamint nagy dolgozata az *Albit és rokon ásványok kristályrendszeréről*, melyet 1830-ban tett közzé. Neumann a kristallographia oldaláról közelítette meg a physika problemáit. A materia problemáját mintegy kristallographiai alapon tárgyalta, midőn a rugalmasság, fényterjedés és hővezetés szerint egyenlőtlen szerkezetű anyagról, mint külön esetre az isotrop anyagra tért át.

NEUMANN elméleti physikai vizsgálatai között kiváló helyet foglalnak el az ő optikai dolgozatai. A század elején különösen FRESNEL optikai vizsgálatai következtében a physikának ez a része új irányba terelődött. FRESNEL az ismeretes fényjelenségek magyarázatára legalkalmasabb feltevésnek találta a transversalis ætherrezgések elméletét, miután már előtte Angliában THOMAS YOUNG a fény hullámelméletét hirdette.

FRESNEL elmélete a harántrezgésű hullámokról sokáig nagy ellenzésre talált a tudományos világban. Maga ARAGO, ki az első volt, aki FRESNEL valódi értékét felismerte és ki őt vizsgálataiban mindenképen támogatta és segítette, elfordult ama nézetétől, mely szerint harántrezgések még a folyadékokban és a gáznemű anyagokban is lehetségesek.

FRESNEL helyzete annál nehezebb volt, minthogy a rugalmasság tana még igen kezdetleges állapotban volt; NAVIER, POISSON, CAUCHY és mások csak későbben dolgozták ki a rugalmasság elméletét.

NEUMANN 1832 óta szintén foglalkozott a rugalmasság elméletével és belőle a FRESNEL kísérleteiből a fényterjedés sebességére vonatkozó törvényeket leszármaztatta. Azonban egyben eltért NEUMANN nézete a FRESNEL-étől. Míg az utóbbi feltételezte, hogy a fényrezgés a polarisatio-síkra merőleges síkban történik, addig NEUMANN ép a rugalmassági elméletből azt következtette, hogy a fényrezgés magában a polarisatio-síkban történik.

Habár a fény elektromágnesi elmélete inkább FRESNEL-nek ad igazat, azért mégis be kell ismernünk, hogy a rugalmassági fényelmélet szempontjából NEUMANN-nak volt igaza, minthogy ezen elméletből kiindulva, a rezgésnek tényleg a polarisatio-síkjában kellett végbe mennie.

NEUMANN 1835-ben a berlini akadémia értekezéseiben egy nagyszabású dolgozatot tett közzé: «*Theoretische Untersuchungen der Gesetze, nach welchen das Licht an der Grenze zweier vollkommen durchsichtiger Medien reflectirt und gebrochen wird*». Ezen vizsgálatban NEUMANN találkozott az irlandi MAC CULLAGH hasonló irányú kutatásaival, mely ugyanazon eredményhez jutott, mint ő, de teljesen más utakon.

A fémeken végbemenő reflexio- és a teljes reflexiora vonatkozó dolgozatai után 1841-ben a berlini akadémia kiadványaiban egy nagy értekezést adott ki «*Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichtes in comprimirten oder ungleich erwärmten unkrystallinischen Körpern*» cz. alatt. Ezen értekezésben megmutatja kísérletekkel támogatott elmélet alapján, hogy az egyenletesen széttágított vagy összenyomott testben a fénysugár kettősen törik, úgy a mint ez a kristályokban történik. A dolgozatban kimutatta, hogy a polarisatio vagy kettős törés a test részeinek változtatott elhelyezkedése folytán jön létre, a mennyiben a nyomásnak vagy feszítésnek alávetett testeken átmenő fény ugyanazon symmetria-viszonyokat mutatja, mint maga az anyag.

Ezen nagy dolgozata után Neumann felhagy fénytani kutatásaival és az indukált galvánáramokkal kezd foglalkozni. A berlini akadémia értekezéseiben két nagy dolgozat jelent meg e tárgyra vonatkozólag: «*Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme*» (1845) és «*Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme*» (1847).

Neumann ezen dolgozataiban a Faraday-tól a harminczas években felfedezett inductio-áramok törvényét vezette le mathematikai alakban. Kiindul az Ampère-féle elektro-dynamikai elemi hatásból, ki a hatást áramelemek hatására vezette vissza. Ily módon talált törvényt Neumann úgy az elektrodynamikai, mint az elektromagnetikai inductio számára, mely a tapasztalati tényeknek elég jól megfelelt.

Neumann törvényének levezetésében alapgondolatnak vette mindig az Ampère-féle áramelemeket, holott a mai nézetek szerint ez inkább csak mathematikai, azaz számítási segédeszköz, egy hasznavehető hypothesis, mely a tényekkel magukkal alkalmasint nincs is vonatkozásban. Az első dolgozat az inductiónak azon eseteit tárgyalja, midőn az áramvezetőknek csakis helyzete változik, de alakjuk nem; a második dolgozat azt az esetet is veszi tekintetbe, hogy nem csak helyzete, hanem alakja is változik a vezetőnek.

Neumann ezen két dolgozatával a galvanáramok elméletének hatalmas lendületet adott, s azért azok e tárgy irodalmában mindenkorra kiváló helyet foglalnak el.

Neumann tudományos tevékenysége a physikának majdnem mindegyik részében érvényesült. Miután Dulong és Petit a chemiai elemekre nézve azok faj-, meleg- és atomsúlya között fenálló törvényt megtalálták, Neumann e törvényt az összetett testekre kiterjesztette.

A kristályok rugalmasságával már 1832-ben foglalkozott és még negyven évvel később is a rugalmasság-elmélet e fontos problemáját kutatta.

Azonkívül foglalkozott Neumann a hajcsövességgel, a testek hővezető képességével és a kifolyó folyadéksugarak belső surlódásával. Dolgozás közben számos mérőeszközt gondolt ki, vagy a már meglevőket czélszerűen és javítva átváltoztatta. Ide tartozik a differential-galvanometer, a Neumann-tól javított Weber-féle földinductor, a tangenstájoló javítása stb.

Neumann a lelkes és lelkiismeretes tanár mintaképe volt. Idejének nagyobb részét az előadásokra és a physikai seminarium vezetésére szükséges készülődésekre fordította, oly annyira, hogy saját munkálkodására leginkább csak a szünidő maradt. De azért nincs is physikus, kinek annyi, a tudományt az ő értelmében fejlesztő tanítványa lett volna, mint Neumann. Legnagyobb tanítványa volt mindenesetre Kirchhoff, ki már tanuló korában, mint a physikai seminarium tagja az áramelágazás törvényeit felfedezte.*

Neumann dolgozatainak sora 1823-ban kezdődik «*Beiträge zur Krystallonomie*« cz. dolgozatával; utolsó műve, mely napvilágot látott, 1878-ban jelent meg: «*Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen*» cz. alatt.

Előadásainak kézirati jegyzeteit tanítványai adták ki. Megjelent eddig 1881-ben «*Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus*» (herausgegeben von Carl Neumann, az öreg Neumann fiától); 1883-ban «*Einleitung in die theoret. Physik*» (kiadta Pape); 1884-ben «*Vorlesungen über elektrische Ströme*» (kiadta Vondermühll); 1885-ben «*Vorlesungen über theoretische Optik*» (kiadta Dorn); 1885-ben «*Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers*» (kiadta Mayer); 1887-ben «*Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen*» (kiadta C. Neumann); 1894-ben «*Vorlesungen über die Theorie der Capillarität*» (kiadta Wangerin).

A felsorolt művek, melyek mind egy-egy előadási cycluson alapszanak, majdnem az egész physikának birodalmát ölelik fel. A hiányzó részek még az előkészítés stádiumában vannak, de van remény, hogy nem sokára meg fognak jelenni.

Neumann e század elméleti physikusai között kétségkívül előkelő helyet foglal el, még pedig nem csak a mi a tudomány előbbrevitelét illeti, a miben szintén kiváló helyet biztosított magának a tudomány történetében, hanem különösen a mi a tanítási és ösztönzési képességet illeti. Neumann tanítványai egy nemzedéken keresztül Németország számos tanszékén ültek és még jelenleg ülnek. A vidéki városban székelő egyetemről, melyben száz évvel ezelőtt egy világra szóló philosophiai rendszer vette kiindulását, hol Neumann nagy barátja Bessel alapvető csillagászati és földphysikai vizsgálatait végezte, ott volt egy hosszú ember életén keresztül a mathematikai physika székhelye.

Heller Ágost.

---

* Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine Kreisförmige. *Pogg. Ann.* 64. Band. S. 497—514. 1845. és Nachtrag zu dem Aufsatz: Ueber den Durchgang etc. *Pogg. Ann.* 67. Band S. 344—349. 1846.

AZ ELEKTROMOSSÁG SŰRŰSÉGE AZ ELLIPSOID FELÜLETÉN.

Már POISSON meghatározta, hogy milyen törvény szerint helyezkedik el a Q elektromos töltés egy ellipsoid alakú vezetőnek a felületén, abban az esetben, ha más ható elektromosság nincs a vezető közelében, és ha egy más vezető sem találtatik a környezetében, mely a kölcsönösen fellépő megosztás révén az ellipsoid felületén az elektromosság elosztódását megváltoztatná.

POISSON szerint a $2a$, $2b$, $2c$ hosszaságú főtengelyekkel biró ellipsoidon a Q elektromos töltés úgy oszlik el, hogy a felület minden egyes pontjában a következő egyenlet:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

határozza meg az elektromos sűrűséget, ha x, y és z a felület szóban lévő pontjának derékszögű összrendezőit jelöli, abban az esetben, a midőn a coordinátarendszer kezdőpontja az ellipsoid középpontjában van, s az XX', YY' és ZZ' tengelyek összeesnek az ellipsoid $2a$, $2b$ és $2c$ főtengelyeivel.

Az a körülmény, hogy egyenlő potentiálra töltött gömbalakú vezetőkön az elektromosság felületi sűrűsége fordított arányban van az illető gömböknek a sugarával és így egyenes arányban a sugarak reciprok értékével, vagyis a görbület mértékével: arra a gondolatra enged következtetni, hogy az elektromosság egyensúly esetén, a midőn a potentiál értéke a vezetőn állandó, oly módon fog szétosztódni a vezető felületén, hogy az elektromosság felületi sürűsége általában véve azokon a pontokon lesz nagyobb, a mely pontokban nagyobb a görbültség és viszont fordítva; szóval, hogy az elektromos töltés elosztását az egyes pontokban uralkodó görbültségek szabályozzák.

E sorokkal éppen azt akarom kimutatni, hogy a POISSON-féle sürűséget meghatározó képlet, a benne előforduló egyik tényezőnek kellő geometriai értelmezése által, teljes összhangzásba jön a fentebb említett következtetéssel.

Ki fogom ugyanis mutatni, hogy *ugyanazon elektromos töltés mellett, az ellipsoid külömböző pontjaiban a felületi sürűség egyedül csak az illető pontok görbületi sugarától függ és pedig úgy, hogy egyenes arányban változik a görbületi sugár reciprok értékének a négyzetgyökével, tehát magának a görbültségnek a négyzetgyökével.* Kiemelem, hogy ez a tétel csak úgy áll, ha az ellipsoid egyes pontjaiban uralkodó görbület sugaraként az illető ponthoz tartozó minimális (R_1) és maximális (R_2) görbületi sugárnak a geometriai közepesét (R_k) fogadjuk el, a görbület mértéke gyanánt pedig ennek a reciprok értékét (ρ_k) tekintjük, úgy hogy $\rho_k = \frac{1}{R_k} = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}$. A görbületi sugárnak ily módon való értelmezését annyival is inkább rationálisnak tekinthetjük, mert a minimális és maximális görbületi sugárnak ez a geometriai közepese nem más, mint az illető ponthoz tartozó végtelen sok külömböző értékkel biró görbületi sugárnak az arithmetikai közepese.*

Mivel ez a már tulajdonképen ismeretes geometriai tétel** teszi lehetővé a POISSON-féle képlet geometriai értelmezését, azért

---

* Megjegyzendő, hogy a görbültségnek ez az értelmezése nem egyezik a GAUSS-tól eredő értelmezéssel, a mennyiben GAUSS szerint az $\frac{1}{R_1 R_2}$ érték szabja meg a görbültséget, a mely érték épen a négyzete az itt bevezetett értelmezésnek. Ez a külömbség nyilván igen természetes, ha meggondoljuk, hogy GAUSS a felületi görbültség definitiójának a megállapításánál felületeknek és nem hosszmennyiségeknek a viszonyából indult ki.

** G. SALMON hivatkozik erre a tételre az «Analytische Geometrie des Raumes» cz. mű II. kötetéhez csatolt irodalmi útmutatóban.

is indokoltnak tartom, hogy ennek a tételnek a levezetéséből induljak ki.

Ismeretes, hogy az ellipsoid egyes pontjaihoz tartozó görbületi sugaraknak értékét a következő EULER-féle egyenlet adja meg:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi},$$

hol R_1 és R_2 a minimális, illetve maximális görbületi sugarak, melyek a felület illető pontjának a normálisán átvonuló két, egymásra merőlegesen álló síkmetszethez tartoznak; φ pedig az R görbületi sugarat meghatározó, a normálison átvonuló síknak az R_1 minimális görbületi sugárhoz tartozó síkkal képezett szögét jelenti.

Ez a képlet mutatja, hogy R más és más értéket nyer, a midőn φ a 0-tól π-ig terjedő értékeken megy át; továbbá hogy R a $\varphi = 0$ és $\varphi = \frac{\pi}{2}$ értékek mellett az R_1 és R_2 minimális, illetőleg maximális értékeket veszi fel.

Könnyen belátható a határozott integrálnak grafikus értelmezéséből, hogy a görbületi sugár végtelen sok külömböző értékének a számtani közepesét, annak a határozott integrálnak a π-ed része fejezi ki, a melyben az integrálandó az R functio, s melynél az integrálás 0 és π határok között történik, azaz a görbületi sugarak arithmetikai közepese:

$$R_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{R_1 R_2 d\varphi}{R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi} =$$

$$= \frac{R_1 R_2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi} + \frac{R_1 R_2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi}.$$

Az itt előforduló két határozott integrálról kimutatható, hogy egyenlő értékűek, azaz hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi}.$$

Ezt az egyenlőséget könnyen beláthatjuk, ha a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi}$$

határozott integrálban $\varphi = \psi + \pi$ helyettesítést eszközöljük, s ha ennek következtében $d\varphi$ helyébe $d\psi$-t teszünk, s az integrálást $\psi = -\frac{\pi}{2}$-től $\psi = 0$-ig terjedő intervallumra végezzük, úgy hogy lesz:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d\psi}{R_1 \sin^2 \psi + R_2 \cos^2 \psi} =$$

$$= -\int_{0}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{R_1 \sin^2 \psi + R_2 \cos^2 \psi}.$$

Ha ez utóbbi integrálban ismét $\psi = -x$ helyettesítést teszszük, akkor $d\psi = -dx$ és az integrálás terjedni fog $x = 0$-tól egészen $x = \frac{\pi}{2}$-ig, azaz

$$-\int_{0}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \psi} = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-dx}{R_1 \sin^2 \psi + R_2 \cos^2 \psi} =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{R_1 \sin^2 x + R_2 \cos^2 x} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi}.$$

Ennek a két határozott integrálnak az egyenlősége igen egyszerűen belátható az integrálandó functiónak az ábrázolása útján is. Ugyanis ennek az integrálandónak a 0-tól ... $\frac{\pi}{2}$-ig terjedő része teljesen symmetricus a $\frac{\pi}{2}$-től ... π-ig eső részével, mivel

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$$

és úgyszintén

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$$

Ezek után tehát

$$R_k = \frac{2R_1R_2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi}.$$

Ha az

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{R_2 + R_1\operatorname{tg}^2\varphi}$$

határozott integrálban feltesszük, hogy $\operatorname{tg}\varphi = x$, akkor a $\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$ helyébe dx s a 0-tól . . . $\frac{\pi}{2}$-ig menő határok helyébe pedig 0 és ∞ veendő, azaz:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\phi} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{R_2 + R_1x^2} =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\operatorname{arct} x\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{R_1R_2}}$$

a honnan azután

$$R_k = \frac{2R_1R_2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{R_1R_2}} = \sqrt{R_1R_2},$$

mely egyenlet azt az ismeretes igazságot fejezi ki, hogy *az ellipsoid bármely pontjában, a végtelen sok külömböző értékű görbületi sugárnak az arithmetikai közepese egyenlő a két főgörbületi sugár geometriai közepesével.*

Ha további fejtegetésünkbe a következő rövidítéseket hozzuk be:

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = a$$

$$\frac{(b^2+c^2)x^2}{a^2} + \frac{(c^2+a^2)y^2}{b^2} + \frac{(a^2+b^2)z^2}{c^2} = \beta$$

és

$$\frac{b^2c^2x^2}{a^2} + \frac{c^2a^2y^2}{b^2} + \frac{a^2b^2z^2}{c^2} = \gamma,$$

akkor az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

egyenlet által képviselt ellipsoid valamely (x, y, z) pontjához tartozó minimális- és maximális görbületi sugarak a következő egyenletekkel vannak meghatározva:

$$R_1=\tfrac{1}{2}\sqrt{a}[\beta-\sqrt{\beta^2-4\gamma}]$$
$$R_2=\tfrac{1}{2}\sqrt{a}[\beta+\sqrt{\beta^2-4\gamma}].$$

Innen R_1R_2 lesz:

$$R_1R_2=\tfrac{1}{4}a\,.\,4\gamma=a\gamma.$$

Helyettesítve most már az a és γ értékeit és a szorzatot a legegyszerűbb alakra hozva, lesz:

$$R_1R_2=\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\left(\frac{b^2c^2x^2}{a^2}+\frac{c^2a^2y^2}{b^2}+\frac{a^2b^2z^2}{c^2}\right)=$$
$$=a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2.$$

Innen pedig az (x, y, z) pont görbületi sugarainak a számtani középese

$$R_k=\sqrt{R_1R_2}=abc\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right),$$

a honnan azután:

$$\sqrt{R_k}=\sqrt{abc}\,.\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}.$$

Ezen egyenletből pedig a Poisson képletében előforduló egyik tényező értéke

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}=\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{R_k}},$$

úgy, hogy maga a Poisson-féle egyenlet a következő alakot fogja felvenni:

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi abc}\cdot\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{R_k}}=\frac{Q}{4\pi\sqrt{abc}}\cdot\frac{1}{\sqrt{R_k}}.$$

Ez a kifejezés világosan mutatja, hogy egy bizonyos Q töltés esetén az *elektromosság úgy helyezkedik el az ellipsoid felületén, hogy a felület egyes pontjaiban fellépő felületi sűrűség egyenes arányban lesz az illető pontot jellemző közepes értékű görbületi sugár recziprok értékének a négyzetgyökével.*

Ez a képlet magában foglalja mint speciális esetet a gömbfelületre vonatkozó sűrűség képletét is.

A midőn ugyanis az ellipsoid gömbbé fajul, akkor $a=b=c=R$, továbbá mivel a gömb minden pontjára nézve $R_1=R$ és $R_2=R$, úgy hogy $R_k=\sqrt{R_1 R_2}=R$, a gömbre nézve lesz:

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi\sqrt{R^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{R}}=\frac{Q}{4\pi R^2},$$

a mi nem más, mint az az ismeretes kifejezés, mely a Q elektromossággal töltött R sugarú gömbre nézve határozza meg a felületi sürűséget.

A Poisson-féle egyenlet még egyszerűbb alakot vesz fel, ha a $4\pi\sqrt{abc}$ kifejezésnek a recziprok értékét C-vel jelöljük. Mivel ez az érték kizárólag csak az ellipsoid méreteitől függ, egy és ugyanazon vezetőre nézve ez a C mint jellemző constans szerepel. Hozzuk be továbbá R_k közepes görbületi sugár helyett ennek a recziprok értékét, azaz *a közepes görbületi sugárnak megfelelő görbültséget,* ρ_k-t. Ez esetben a Poisson-féle egyenlet a következő igen egyszerű alakba jut:

$$\sigma=C\,.\,Q\sqrt{\rho_k},$$

mely kifejezés már szembetűnően elárulja, hogy az elektromossággal töltött ellipsoid bármely pontjában három mennyiséggel áll egyenes arányban az elektromosság felületi sűrűsége, ú. m. egy a vezető méreteiből alkotott s a *vezetőre nézve jellemző constanssal, az elektromos töltés mennyiségével,* továbbá egy az illető pont *görbültségét jellemző adattal, a mi nem más, mint a közepes görbületi sugárhoz tartozó görbültség négyzetgyöke.*

Szijártó Miklós.

AZ EGYÉRTÉKŰ EGÉSZ FÜGGVÉNYEK NEMÉRŐL.

(Első közlemény.)

I. A törzstényezőkre való felbontásról.

1. Ha valamely

$$a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m+\cdots$$

hatványsor x-nek minden véges értékére vonatkozólag összetartó, akkor az általa értelmezett függvényt *egyértékű egész függvénynek* mondjuk. A legegyszerűbb ily függvények a *ráczionális egész függvények*. Minden más egyértékű egész függvényt *transzczendensnek* mondunk.

A

$$(kx+l)\,e^{g(x)}$$

alakú egyértékű egész függvényeket *törzsfüggvényeknek* nevezzük. Itt k és l állandókat jelentenek, $g(x)$ pedig az x-nek oly *ráczionális* egész függvényét, mely az $x=0$ helyen eltűnik.

A legegyszerűbb törzsfüggvények azok, melyekben $g(x)$ azonosan eltűnik, vagyis a

$$kx+l$$

alakú *lineáris* függvények.

A *nem* fogalmának megalkotására az egész függvényeknek abból a szempontból való osztályozása vezetett, hogy azok hogyan viselkednek, midőn mint törzsfüggvények szorzatait állítjuk elő. A jelen bevezető fejezet e felbontásra vonatkozó általános tételeket s a nem fogalmának értelmezését tartalmazza. A többi fejezet arról fog szólani, hogy egy hatványsor-alakban adott egész függvénynek neme hogyan határozható meg.

2. Az *algebra alaptétele* szerint minden ráczionális egész függvény mint *lineáris* függvények szorzata állítható elő.

E tételt WEIERSTRASS * tetszőleges egyértékű egész függvényekre következőleg általánosította :

A) *Az x-nek bármely egyértékű egész függvénye vagy mint véges számú törzsfüggvénynek szorzata állítható elő, vagy mint törzsfüggvényeknek oly végtelen szorzata, mely*

1. *az x-nek minden értékénél* ***feltétlenül*** *összetartó,*

2. *minden véges tartományban* ***egyenletesen*** *összetartó.*

Az ily szorzatot az illető függvény *törzstényezőkre bontott alakjának* fogjuk nevezni. Ha ellenben valamely függvény ugyan mint törzsfüggvények szorzata van előállítva, de ezen előállításnál az 1. és 2. alatti követelések nincsenek kielégitve, akkor e szorzatot nem tekintjük törzstényezőkre bontott alaknak. Sőt az ily szorzatokat tárgyalásainkból egyáltalában kizárjuk.

3. Míg a ráczionális függvények a lineáris tényezőkre való felbontásnál egészen úgy viselkednek, mint a *közönséges egész számok* a törzsszámokra való felbontásnál, már a transzczendens függvények törzstényezőkre való felbontásánál ez nincsen így.

Pl. míg közönséges törzsszámot nem lehet más közönséges törzsszámok szorzatára felbontani, addig bármely törzsfüggvényt számtalan módon lehet mint más törzsfüggvények szorzatát előállitani. Valóban, ha

$$f(x)=(kx+l)\,e^{g(x)}$$

egy adott törzsfüggvény, $h(x)$ pedig egy tetszés szerint választott ráczionális egész függvény, akkor $f(x)$ mint az

$$f_1(x)=e^{h(x)}$$
$$f_2(x)=(kx+l)\,e^{g(x)-h(x)}$$

törzsfüggvények szorzata írható.

---

* WEIERSTRASS *A)* alatt és alább *B)* alatt összefoglalt tételeinek bebizonyítását e lapok IV. és V. kötetében megjelent «*Az analytikai függvények elméletéhez*» cz. értekezésem negyedik közleményében ismertettem.

Ennek folytán minden egész függvény nem csak egy módon bontható fel törzstényezőkre, hanem annak bármelyik felbontásából számtalan más nyerhető úgy, hogy az egyik vagy másik törzstényezőt ismét több tényező szorzatára bontjuk fel.

4. Bizonyos tekintetben azonban a törzsfüggvények mégis csak felbonthatatlanok.

Ha ugyanis a

$$(kx+l)\,e^{g(x)}$$

törzsfüggvényben a $g(x)$ *kitevő* μ*-ed fokú, akkor e törzsfüggvény nem bontható fel csupa oly törzsfüggvények szorzatára, melyekben a kitevők* μ*-nél alacsonyabb fokú függvények.*

A $g(x)$ kitevőnek μ foka tehát a törzsfüggvényre vonatkozólag egy különösen jellemző számérték. E számot

$$(kx+l)\,e^{g(x)}$$

neménék nevezzük.

Pl.
$$E(x,0)=1-x$$
$$E(x,1)=(1-x)\,e^{x}$$
$$E(x,2)=(1-x)\,e^{x+\frac{x^2}{2}}$$
$$\cdots$$
$$E(x,\mu)=(1-x)\,e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^\mu}{\mu}}$$

rendre 0, 1, 2, . . . μ nemű törzsfüggvények.

A legalacsonyabb nemű törzsfüggvények a *zérus* neműek, vagyis a *lineáris* függvények.

5. A *nem* fogalma a törzsfüggvényekről kiterjeszthető tetszőleges egész függvényekre.

Ha valamely $f(x)$ *egész függvény úgy bontható fel törzstényezőkre, hogy minden tényező legfeljebb* μ*-ed nemű, de már nem bontható fel úgy, hogy minden tényező legfeljebb* $(\mu-1)$*-ed nemű, akkor magát* $f(x)$*-et is* μ*-ed neműnek mondjuk.*

Nem minden egész függvénynek van *véges* μ neme. Pl. bárhogyan bontjuk fel az

$$e^{e^x}$$

függvényt, törzstényezői között mindig lesznek bármely szabadon választott μ egész számnál magasabb neműek is. (Más példát láss a 7. czikkelyhez csatolt jegyzetben.) Az ily függvényt *végtelen neműnek* mondjuk.

Ellenben minden oly függvény, mely mint véges számú törzsfüggvény szorzata állitható elő, nyilván véges nemű.

Vannak azonban oly véges nemű függvények is, melyek nem állíthatók elő mint véges számú törzsfüggvény szorzatai.

Ugyanis Weierstrass szerint:

B) *Ha a zérustól külömböző*

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$$

számok sorozatához található egy oly μ egész szám, hogy a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\mu+1}}$$

sor feltétlenül összetartó, akkor a

$$\varphi(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, \mu\right) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{\frac{x}{a_\nu} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a_\nu^2} + \cdots + \frac{1}{\mu}\frac{x^\mu}{a_\nu^\mu}}\right\}$$

szorzat

1. *x minden értékénél feltétlenül összetartó,*
2. *minden véges tartományban egyenletesen összetartó,*
3. *$\varphi(x)$ az egész számsíkban összetartó hatványsorba fejthető ki, vagyis a $\varphi(x)$ függvény egész függvény,*
4. *e függvény zérushelyeinek sorozata megegyezik az a_ν-k adott sorozatával.*

E $\varphi(x)$ függvény nyilván nem állítható elő mint véges számú törzsfüggvénynek szorzata, mert akkor nem lehetne végtelenül sok zérushelye. Ennek daczára $\varphi(x)$ véges nemű, még pedig legfeljebb μ-ed nemű, mint az a $\varphi(x)$-et értelmező szorzatnak alakjából közvetlenül világos.

6. Minden μ-ed nemű $f(x)$ függvény *számtalan* módon bontható fel legfeljebb μ-ed nemű törzstényezőkre. Hogy lehetőleg *egyszerű* és *jellemző* felbontást nyerjünk, induljunk ki $f(x)$-nek egy tetsző-

leges — de legfeljebb μ-ed nemű tényezőkre való — felbontásából és egyszerűsítsük azt következőleg.

Mindenek előtt minden oly

$$(kx+l)\,e^{g(x)}$$

törzstényezőből, melyben $l=0$, emeljük ki x-et. Ily tényező annyi lesz, a hányszoros zérus helye $f(x)$-nek az $x=0$ hely. Jelöljük számukat λ-val.

A nyert új felbontásban szorozzuk össze mindazokat a tényezőket, melyeknek nincs zérus helyük vagyis azokat, melyekben $k=0$. Szorzatuk egy legfeljebb μ-ed nemű

$$Ce^{g_0(x)}$$

törzsfüggvény lesz.

Ezek után az átalakítások után

$$f(x)=Cx^{\lambda}e^{g_0(x)}\Pi\left\{(k_\nu x+l_\nu)\,e^{g_\nu(x)}\right\},$$

hol a Π szorzatjel már csak oly tényezőkre vonatkozik, melyekben k_ν és l_ν egyike sem zérus.

Itt a
$$\Pi\left\{(k_\nu x+l_\nu)\,e^{g_\nu(x)}\right\}$$

szorzat x minden értékénél feltétlenül összetartó lévén, ilyen marad az $x=0$ behelyettesítés után is. Tehát az

$$l_1 l_2 l_3 l_4 \ldots l_\nu \ldots$$

szorzat szintén feltétlenül összetartó. Ennélfogva $f(x)$ imént nyert alakjának szabad az egyes l_ν-ket kiemelni és a C állandóba foglalni. Leszen:

$$f(x)=Cx^{\lambda}e^{g_0(x)}\Pi\left\{\left(1+\frac{k_\nu x}{l_\nu}\right)e^{g_\nu(x)}\right\};$$

vagy ha rövidség kedvéért $\frac{k_\nu}{l_\nu}$ helyett $\left(-\frac{1}{a_\nu}\right)$-t irunk, úgy

$$f(x)=Cx^{\lambda}e^{g_0(x)}\Pi\left\{\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{g_\nu(x)}\right\}. \qquad 1)$$

Itt az a_ν-k nyilván nem egyebek, mint $f(x)$-nek az $x=0$ helytől külömböző zérushelyei.

Mielőtt a nyert szorzatot még tovább egyszerűsítenők, már $f(x)$-nek 1) alatti alakjából fontos következtetést vonhatunk e függvény zérushelyeire vonatkozólag, mint ezt rögtön látni fogjuk.

7. *Ha valamely μ-ed nemű egész függvénynek az $x=0$ helytől külömböző zérushelyeinek sorozata:*

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots,$$

akkor az

$$\frac{1}{a_1^{\mu+1}}+\frac{1}{a_2^{\mu+1}}+\cdots+\frac{1}{a_\nu^{\mu+1}}+\cdots$$

sornak a tagok sorrendjétől független véges értéke van.

E tétel, mely Weierstrass *B)* alatti tételének — persze igen triviális — megfordításának tekinthető, közvetlenül világos, ha $f(x)$ zérushelyeinek sorozata véges. Végtelenül sok zérushely esetében a következő bebizonyítás alkalmazható.

Esetünkben 1) alatt a Π szorzatjel végtelenül sok tényezőre fog vonatkozni. Ezeknek

$$\psi(x)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{g_\nu(x)}\right\}$$

szorzata megállapodásaink szerint x minden értékénél *feltétlenül* összetartó, továbbá bármely véges tartományban *egyenletesen* összetartó.

Ha tehát az $x=0$ középpont körül rajzolt oly kis körre szorítkozunk, hogy annak sem belsejében sem kerületén $\psi(x)$ sehol sem tűnik el, akkor a kör belsejében vagy kerületén felvett bármely x helyre vonatkozólag a

$$\log\psi(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{g_\nu(x)+\log\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)\right\} \tag{2}$$

sor *feltétlenül* összetartó, továbbá e kör belsejében és kerületén *egyenletesen* összetartó.

Ennélfogva az $x=0$ hely mondott környezetében szabad $\log\psi(x)$-et oly módon hatványsorbafejteni, hogy a 2) alatti egyenlőség jobb oldalán az egyes tagokat kifejtjük és azután az x ugyanazon hatványait tartalmazó tagokat tetszés szerinti rendben összevonjuk.

Ha különösen x-nek $(\mu+1)$-ső hatványát tekintjük, úgy ennek együtthatói a

$$g_1(x)+\log\left(1-\frac{x}{a_1}\right)$$
$$g_2(x)+\log\left(1-\frac{x}{a_2}\right)$$
$$\cdots$$

függvények hatványsoraiban rendre

$$-\frac{1}{a_1^{\mu+1}},\quad -\frac{1}{a_2^{\mu+1}},\ \ldots$$

lesznek, összegük pedig — a mondottak szerint — *sorrendjüktől függetlenül* $\log\psi(x)$ hatványsorának $(\mu+1)$-ső együtthatóját adja.

A
$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^{\mu+1}}$$

sornak tehát csakugyan a tagok sorrendjétől független véges öszszege van, még pedig összege nem egyéb, mint $\log\psi(x)$ MAC-LAURIN-sorának $(\mu+1)$-ső együtthatója ellenkező előjellel.

Jegyzet. E tétel alapján némely egész függvényről már pusztán a zérushelyek sorozatából felismerhetjük, hogy *végtelen nemű.*

Ha pl. valamely egész függvény zérushelyei:

$$\log 1,\ \log 2,\ \ldots,\ \log\nu,\ \ldots$$

akkor az

$$\frac{1}{(\log 2)^{\mu+1}}+\frac{1}{(\log 3)^{\mu+1}}+\ldots+\frac{1}{(\log\nu)^{\mu+1}}+\ldots$$

sor μ-nek minden pozitiv egész számú értékénél széttartó, tehát az illető függvény nem lehet véges μ nemű, hanem végtelen nemű.

Valóban a vizsgálandó sor első $(\nu-1)$ tagjának összege:

$$S_\nu=\frac{1}{(\log 2)^{\mu+1}}+\frac{1}{(\log 3)^{\mu+1}}+\ldots+\frac{1}{(\log\nu)^{\mu+1}}$$
$$>\frac{\nu-1}{(\log\nu)^{\mu+1}}.$$

Itt

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\nu}{(\log \nu)^{\mu+1}} = \infty, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{(\log \nu)^{\mu+1}} = 0,$$

tehát

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\nu-1}{(\log \nu)^{\mu+1}} = \infty$$

s egyszersmind

$$\lim_{\nu=\infty} S_\nu = \infty.$$

Azaz a vizsgált sor valóban széttartó.

8. Most már folytassuk a 6. alatt megkezdett egyszerűsítést.

Minthogy az $f(x)$ μ-ed nemű egész függvény a_ν zérushelyeire vonatkozólag képezett

$$\Sigma \frac{1}{a_\nu^{\mu+1}}$$

sornak a tagok sorrendjétől független véges összege van, azért WEIERSTRASS-nak *B)* alatti tétele értelmében a

$$\varphi(x) = \Pi E\left(\frac{x}{a_\nu}, \mu\right) = \Pi \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{\sum\limits_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^r} \right\}$$

szorzat szintén egy egyértékű egész függvény törzstényezőkre bontott alakja lesz. Ha evvel elosztjuk $f(x)$-nek 1) alatti alakját, úgy

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = Cx^\lambda e^{g_0(x)} \Pi e^{g_\nu(x) - \sum\limits_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^r}.$$

Ha továbbá a jobb oldalon kijelölt szorzást tényleg elvégezzük, úgy

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = Cx^\lambda e^{G(x)},$$

hol

$$G(x) = g_0(x) + \Sigma \left\{ g_\nu(x) - \sum_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^r \right\}$$

az x-nek oly legfeljebb μ-ed fokú egész függvénye, mely az $x=0$ helyen eltünik.

Végre $$f(x) = Cx^\lambda e^{G(x)} \Pi E\left(\frac{x}{a_\nu}, \mu\right), \tag{3}$$

hol a Π szorzatban a_ν helyébe $f(x)$-nek összes az $x=0$ helytől külömböző zérushelyei teendők. E szorzat tehát véges lesz, ha $f(x)$-nek véges számú zérushelye van, ellenben végtelenül sok tényezőből fog állani, ha $f(x)$-nek végtelenül sok zérushelye van.

A következőkben az $f(x)$ μ-ed nemű egész függvény tényezőkre való felbontását mindig e 3) alatti képletnek megfelelőleg gondoljuk elvégezve.

9. A *nem* fogalmának bevezetése közvetetlenül arra a kérdésre vezet, hogy valjon miként lehet valamely egyértékű egész függvénynek

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m+\cdots$$

hatványsor alakjából $f(x)$ nemét felismerni.

E kérdés megoldását POINCARÉ kezdte meg egy figyelemre méltó tétel bebizonyitásával * és HADAMARD ** fejezte be e tételnek jóval nehezebb megforditásával.

E dolgozat czélja a két franczia tudósnak e vizsgálatait ismertetni.

II. Az $E(x, \mu)$ törzsfüggvényről.

10. *Legyen $f(x)$ az x-nek oly μ-ed nemű egész függvénye, melynek csak p számú zérushelye van. H jelentsen egy tetszés szerint felvett pozitiv számot, τ pedig az μ-nél nagyobb pozitiv számot. Akkor*

$$\lim_{x=\infty} e^{-H|x|^\tau} f(x)=0. \qquad 4)$$

Esetünkben $f(x)$ mint *véges számú* μ-ed nemű törzsfüggvények szorzata állitható elő. Ha e törzsfüggvényeket összeszorozzuk, úgy

---

* *Sur les fonctions entières*, Bulletin de la Société mathématique de France, t. XI.

** *Étude sur les propriétés de fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4e série, t. IX.

Ezen értekezés egyik részének lényeges egyszerűsitését tartalmazza HADAMARD következő czikke:

Sur les fonctions entières, Bulletin etc., t. XXIV.

$$f(x) = G(x)\, e^{g(x)},$$

hol $G(x)$ az x-nek p-ed fokú, $g(x)$ pedig x-nek μ-ed fokú ráczionális egész függvénye.

Már most

$$e^{H|x|^\tau} |e^{g(x)}|^{-1} \geqq e^{H|x|^\tau} e^{-|g(x)|} = e^{|x|^\tau \left(H - \left|\frac{g(x)}{x^\tau}\right|\right)}.$$

Itt x eléggé nagy értékeinél

$$H - \left| \frac{g(x)}{x^\tau} \right|$$

a H-tól tetszőlegesen keveset külömbözik; tehát bármely H-nál kisebb K pozitiv számhoz található egy R pozitiv szám úgy, hogy

$$H - \left| \frac{g(x)}{x^\tau} \right| > K,$$

ha csak $|x| > R$. Vagyis az $|x|$ igen nagy értékeire vonatkozólag

$$e^{H|x|^\tau} |e^{-g(x)}| > e^{K|x|^\tau}.$$

Itt a jobb oldal a kitevős sor segítségével következőleg fejezhető ki:

$$e^{K|x|^\tau} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K^m |x|^{m\tau}}{m!}.$$

E sor pozitiv tagú lévén, összege nagyobb értékű, mint bármelyik tagja egymagában. Ennélfogva m bármely pozitiv egész számú értékénél:

$$e^{H|x|^\tau} |e^{g(x)}|^{-1} > \frac{K^m}{m!} |x|^{m\tau},$$

ha csak $|x| > R$.

Innen

$$e^{-H|x|^\tau} |e^{g(x)}| < \frac{m!}{K^m} |x|^{-m\tau}$$

és

$$e^{-H|x|^\tau} |x^{p+1} e^{g(x)}| < \frac{m!}{K^m} |x|^{p+1-m\tau}. \qquad 5)$$

Ha itt m-et oly nagynak választjuk, hogy

$$m\tau > p+1,$$

akkor az 5) alatti egyenlőtlenség jobb oldala x-nek minden határon túl való növekedtével minden határon túl a zérushoz közeledik. Ennélfogva a bal oldal limese is zérus lesz.

Képletben:

$$\lim_{x=\infty} \left\{ e^{-H|x|^{\tau}} |x^{p+1} e^{g(x)}| \right\} = 0. \qquad 6)$$

Ha e képletet még megszorozzuk a

$$\lim_{x=\infty} \left| \frac{G(x)}{x^{p+1}} \right| = 0$$

egyenlőséggel, úgy végre valóban:

$$\lim_{x=\infty} \left\{ e^{-H|x|^{\tau}} G(x)\, e^{g(x)} \right\} = 0.$$

Ha a mondottakat az

$$E(x, \mu) = (1-x)\, e^{x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{\mu}}{\mu}} \qquad 7)$$

μ-ed nemű törzsfüggvényre alkalmazzuk és τ helyébe $(\mu+1)$-et helyettesítünk, úgy *H bármely pozitiv értékénél*

$$\lim_{x=\infty} e^{-H|x|^{\mu+1}} E(x, \mu) = 0. \qquad 8)$$

11. *Ha a H pozitiv számot eléggé nagynak választjuk, akkor x bármely értéke mellett*

$$e^{-H|x|^{\mu+1}} |E(x, \mu)| \leqq 1. \qquad 9)$$

A bebizonyítandó egyenlőtlenség még következőleg is írható:

$$-H|x|^{\mu+1} + \log|E(x, \mu)| \leqq 0,$$

vagy még így is:

$$\frac{\log|E(x, \mu)|}{|x|^{\mu+1}} \leqq H. \qquad 10)$$

Itt a bal oldalon az $x=0, 1, \infty$ helyek kivételével a számlálónak, valamint a nevezőnek *véges, meghatározott és a zérustól külömböző értéke van.* A három kivételes hely környezetében pedig a viszonyok a következők.

Az $x=0$ hely környezetében

$$-\frac{\log E(x,\mu)}{x^{\mu+1}}=\frac{1}{\mu+1}+\frac{x}{\mu+2}+\frac{x^2}{\mu+3}+\cdots$$

Ennélfogva

$$\lim_{x=0}\left|\frac{\log E(x,\mu)}{x^{\mu+1}}\right|=\frac{1}{\mu+1}.$$

Ha tehát $x=0$ elegendő kis környezetére szorítkozunk, akkor abban

$$\frac{|\log E(x,\mu)|}{|x|^{\mu+1}}<2,$$

tehát még inkább

$$\frac{\log|E(x,\mu)|}{|x|^{\mu+1}}<2.$$

Az $x=1$ helyen $E(x,\mu)$ eltünik, tehát

$$\lim_{x=1}\{\log|E(x,\mu)|-|x|^{\mu+1}\}=-\infty.$$

E helynek tehát mindig kijelölhetjük egy oly környezetét, melyen belül

$$\log|E(x,\mu)|-|x|^{\mu+1}<0,$$

vagyis

$$\frac{\log|E(x,\mu)|}{|x|^{\mu+1}}<1.$$

Végre az $x=\infty$ helyen a 8) alatti egyenlőség értelmében

$$\lim_{x=\infty} e^{-|x|^{\mu+1}}|E(x,\mu)|=0,$$

tehát

$$\lim_{x=\infty}\{\log|E(x,\mu)|-|x|^{\mu+1}\}=-\infty.$$

Ennélfogva az $x=\infty$ helynek is kijelölhetjük egy oly környezetét, melyen belül

$$\frac{\log|E(x,\mu)|}{|x|^{\mu+1}}<1.$$

Azon x helyek pedig, melyek nem esnek a $0, 1$ és ∞ helyek kijelölt környezetébe, oly számtartományt alkotnak, melynek minden belső és határhelyén a

$$\frac{\log |E(x,\mu)|}{|x|^{\mu+1}}$$

függvény folytonos. E tartományra vonatkozólag tehát e függvénynek lesz egy ω felső határa.

Ha most H-t nagyobbnak választjuk 2-nél és ω-nál, akkor a 10) alatti egyenlőtlenség a $0, 1, \infty$ helyek környezetében, meg azonkívül is, egy szóval mindenütt érvényes lesz.

Ezzel be van bizonyítva az $E(x, \mu)$ függvénynek a 9) alatti egyenletlenségben kimondott tulajdonsága.

III. Poincaré tétele.

12. *Ha $f(x)$ az x-nek μ-ed nemű egész függvénye, akkor*

$$\lim_{x=\infty} e^{-H|x|^{\mu+1}} f(x) = 0, \tag{1}$$

hol H egy tetszés szerinti positiv számot jelent.

Arra az esetre, midőn $f(x)$-nek csak véges számú zérushelye van, a tételt már 10. alatt bebizonyítottuk.

Végtelenül sok zérushely esetében hozzuk $f(x)$-et a következő alakra

$$f(x) = Cx^{\lambda} e^{G(x)} \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, \mu\right).$$

Továbbá határozzuk meg a K pozitiv számot úgy, hogy x minden értékénél

$$e^{-K|x|^{\mu+1}} |E(x,\mu)| \leqq 1,$$

a mi a II. alatt mondottak szerint mindig lehetséges. Ekkor ν minden pozitiv egész számú értékénél

$$e^{-h_\nu |x|^{\mu+1}} \left| E\left(\frac{x}{a_\nu}, \mu\right) \right| \leqq 1,$$

ha csak h_ν-t úgy választottuk, hogy

$$h_\nu = \frac{K}{|a_\nu|^{\mu+1}}.$$

Eme h_ν-ből képezett

$$h_1 + h_2 + \cdots h_\nu + \cdots$$

sor csak a K tényezőben külömbözik a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|^{\mu+1}}$$

összetartó sortól, tehát szintén összetartó. Ennélfogva bármely H pozitiv számhoz található egy N egész szám úgy, hogy a

$$h_{N+1}+h_{N+2}+h_{N+3}+\cdots$$

sor összege kisebb legyen H-nál, vagyis hogy a

$$H-\sum_{\nu=N+1}^{\infty} h_\nu$$

külömbség valamely pozitiv h_0 értékkel birjon.

Ha most a vizsgálandó

$$e^{-H|x|^{\mu+1}} f(x)$$

kifejezést a következő két tényezőre bontjuk fel

$$f_1(x)=\left\{Cx^\lambda e^{G(x)} \prod_{\nu=1}^{N} E\left(\frac{x}{a_\nu},\mu\right)\right\} e^{-h_0|x|^{\mu+1}}$$

és

$$f_2(x)=\prod_{\nu=N+1}^{\infty}\left\{e^{-h_\nu|x|^{\mu+1}} E\left(\frac{x}{a_\nu},\mu\right)\right\},$$

akkor egyrészt

$$\lim_{x=\infty} f_1(x)=0,$$

másrészt x minden értékénél

$$|f_2(x)|\leqq 1.$$

Tehát valóban

$$\lim_{x=\infty} e^{-H|x|^{\mu+1}} f(x)=\lim_{x=\infty} f_1(x)\, f_2(x)=0.$$

A bebizonyított tétel következőleg is fogalmazható:

Ha az $f(x)$ egész függvény μ-ed nemű, akkor δ és H bármely pozitiv értékeihez található egy oly R pozitiv szám, hogy

$$e^{-H|x|^{\mu+1}}|f(x)|<\delta,$$

vagyis

$$|f(x)|<\delta e^{H|x|^{\mu+1}}, \qquad 12)$$

ha csak $|x|>R$.

13. A függvénytanból ismeretes, hogy az $f(x)$ egész függvénynek

$$a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m+\cdots$$

hatványsorában

$$a_m=\frac{1}{2i\pi}\int_c\frac{f(x)\,dx}{x^{m+1}}, \qquad 13)$$

hol az integrálás a kezdőpont körül mint középpont körül leirt tetszőleges R sugarú C körre vonatkozik.

Ha $f(x)$ az integrálás útjául választott körön abszolut értékére vonatkozólag folyvást kisebb marad egy bizonyos M pozitiv számnál, akkor e szerint

$$|a_m|<\frac{M}{R^m}. \qquad 14)$$

Ha a mondottakat a μ-ed nemű egész függvényekre alkalmazzuk, akkor az imént bebizonyitott tétel értelmében bármely H pozitiv számhoz található egy R_0 pozitiv szám úgy, hogy a C körön

$$|f(x)|<e^{HR^{\mu+1}},$$

ha csak e körnek R sugara nagyobb mint R_0. Tehát

$$|a_m|<\frac{e^{HR^{\mu+1}}}{R^m}, \qquad 15)$$

ha csak $R>R_0$.

Ha most m-t oly nagynak választjuk, hogy nagyobb mint $HR_0^{\mu+1}$ egész számú része, melyet m'-sal akarunk jelölni, akkor szabad R-et úgy választani, hogy

$$HR^{\mu+1}=m.$$

Leszen

$$R=H^{-\frac{1}{\mu+1}}m^{\frac{1}{\mu+1}}$$

és

$$|a_m|<\left(\frac{H^{\frac{1}{\mu+1}}e}{m^{\frac{1}{\mu+1}}}\right)^m.$$

Tehát

$$\left|\sqrt[m]{a_m}\right|<\frac{H^{\frac{1}{\mu+1}}e}{m^{\frac{1}{\mu+1}}},$$

vagyis

$$\left|\sqrt[m]{a_m}\right| m^{\frac{1}{\mu+1}} < H^{\frac{1}{\mu+1}} e.$$

Itt H-val együtt $H^{\frac{1}{\mu+1}} e$ is egy tetszés szerint választható pozitiv számot jelentvén, a mondottak következőleg foglalhatók össze:

Ha az

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots$$

hatványsor μ-ed nemű egész függvényt ábrázol, akkor bármely ε pozitiv számhoz található egy oly m' pozitiv egész szám, hogy

$$\left|\sqrt[m]{a_m}\right| m^{\frac{1}{\mu+1}} < \varepsilon, \tag{16}$$

ha csak

$$m > m'.$$

Más szóval:

Az ily hatványsorra vonatkozólag

$$\lim_{m=\infty} \left\{\sqrt[m]{a_m} m^{\frac{1}{\mu+1}}\right\} = 0. \tag{17}$$

14. Ha $m > m'$, akkor a 16) alatti egyenlőtlenség értelmében

$$\left|a_m\right| (m^m)^{\frac{1}{\mu+1}} < \varepsilon^m,$$

s még inkább

$$\left|a_m\right| (m\,!)^{\frac{1}{\mu+1}} < \varepsilon^m.$$

Ha itt $\varepsilon < 1$, m pedig minden határon túl növekedik, akkor ε^m minden határon túl kisebbedik. Tehát a bal oldalon álló kifejezés limese is zérus lesz.

Szóval:

Az $\quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots$

hatványsor csak akkor ábrázolhat μ-ed nemű egész függvényt, ha

$$\lim_{m=\infty} a_m (m\,!)^{\frac{1}{\mu+1}} = 0. \tag{18}$$

Ez Poincaré ama tétele, mely megadja annak egyik *szükséges* feltételét, hogy $f(x)$ μ-ed nemű lehessen.

A 11) alatti képlet, melyből e feltétel következett, valamint annak fenti bebizonyítása lényegében szintén Poincaré-tól való. Megjegyzendő azonban, hogy ő egészen más uton nyerte e képletből a 18) alatti feltételt, mint a melyet mi követtünk. Az itt választott egyszerűbb út HADAMARD-tól való.

15. POINCARÉ tételének értelmében bármely μ-ed nemü egész függvényre vonatkozólag

$$\lim_{m=\infty} a_m (m!)^{\frac{1}{\tau}} = 0,$$

ha csak $\tau \geqq \mu + 1$.

Ha e tételt meg akarjuk fordítani, úgy azt kell megvizsgálnunk, hogy viszont mily következtetéseket vonhatunk valamely egész függvényre vonatkozólag, ha azt és csak azt tudjuk róla, hogy τ egy bizonyos adott értékére vonatkozólag

$$\lim_{m=\infty} a_m (m!)^{\frac{1}{\tau}} = 0.$$

E kérdést HADAMARD oldotta meg. Vizsgálatait a következő fejezetekben ismertetjük.

IV. Segédtétel az egész számsíkban összetartó hatványsorok együtthatóiról.

15. Ismeretes,* *hogy valamely hatványsor akkor és csak akkor tart össze x-nek minden véges értékénél, ha*

$$\lim_{m=\infty} \sqrt[m]{a_m} = 0$$

azaz

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{|a_m|^{\frac{1}{m}}} = +\infty.$$

Legyen most már adva egy x minden értékénél összetartó

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + \cdots$$

---

* V. ö. *Az analitikai függvények elméletéhez* cz. értekezésem 5. czikkelyét. (E lapok IV. kötetének 248. lapján.)

hatványsor, u pedig jelentsen egy valós változót, mely felvesz minden *pozitiv* értéket. Akkor az idézett tétel alapján bebizonyítható, hogy *mindig képezhető u-nak egy oly $\varphi(u)$ folytonos függvénye, hogy*

α) az u bármely m pozitiv egész számú értékénél

$$\varphi(m) \leqq \frac{1}{|a_m|^{\frac{1}{m}}}$$

β) hogy

$$(u+1)\log\varphi(u+1) - u\log\varphi(u)$$

u-nak soha nem csökkenő függvénye,

γ) hogy

$$\log\varphi(u) + \frac{k}{u}$$

a k állandó bármely pozitiv értéke mellett az u igen nagy értékeire vonatkozólag u-nak folyvást növekedő függvénye,

δ) $\varphi(u)$ az u-nak oly folyvást növekedő függvénye, melyre vonatkozólag

$$\lim_{u=+0} \varphi(u) = 0, \quad \lim_{u=+\infty} \varphi(u) = +\infty.$$

Különösen egyszerű e $\varphi(u)$ meghatározása, ha az adott hatványsorra vonatkozólag, ha

$$\lim_{m=\infty} a_m (m!)^{\frac{1}{\tau}} = 0,$$

hol τ egy állandó pozitiv számot jelent.

Ekkor ugyanis mindig található egy oly A pozitiv áltört, hogy m minden értékénél

$$|a_m|(m!)^{\frac{1}{\tau}} < A$$

vagyis

$$|a_m| < \frac{A}{(m!)^{\frac{1}{\tau}}}.$$

Ámde ismeretes,* hogy

---

* V. ö. *Az analitikai függvények elméletéhez,* első közleményének 6. cikkelyét. (E lapok IV. kötetének 249. oldalán.)

$$\frac{1}{m!} < \frac{e^m}{m^m},$$

továbbá

$$A < A^m,$$

tehát

$$|a_m| < \left(\frac{A^\tau e}{m}\right)^{\frac{m}{\tau}}.$$

Ha még rövidség kedvéért

$$H = A^\tau e$$

úgy végre

$$|a_m| < \left(\frac{H}{m}\right)^{\frac{m}{\tau}}$$

és

$$\frac{1}{|a_m|^{\frac{1}{m}}} > \left(\frac{m}{H}\right)^{\frac{1}{\tau}}.$$

E szerint a

$$\varphi(u) = \left(\frac{u}{H}\right)^{\frac{1}{\tau}}$$

függvény m minden értékénél eleget tesz az α) alatt követelt egyenlőtlenségnek.

Továbbá

$$\frac{d}{du}\{(u+1)\log\varphi(u+1) - u\log\varphi(u)\} =$$

$$= \frac{1}{\tau}\frac{d}{du}\{(u+1)\log(u+1) - u\log u\} = \frac{1}{\tau}\{\log(u+1) - \log u\}$$

mindig pozitiv és

$$\frac{d}{du}\left\{\log\varphi(u) + \frac{k}{u}\right\} = \frac{d}{du}\left\{\frac{1}{\tau}(\log u - \log H) + \frac{k}{u}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\tau u} - \frac{k}{u^2} = \frac{u - \tau k}{\tau u^2}$$

az u igen nagy értékeinél pozitiv. Tehát $\varphi(u)$ a β) és γ) alatti követeléseknek szintén eleget tesz, s mint könnyen belátható a δ) alattiaknak is.

17. Tetszőlegesen adott egész függvény esetében $\varphi(u)$ következőleg képezhető.

Legyen az adott hatványsor együtthatói közül a_{m_0} az első el nem tűnő. Ha ekkor az adott

$$a_{m_0}x^{m_0}+a_{m_0+1}x^{m_0+1}+a_{m_0+2}x^{m_0+2}+\cdots+a_m x^m+\cdots$$

sort elosztjuk első tagjával, úgy a nyert

$$1+\frac{a_{m_0+1}}{a_{m_0}}x+\frac{a_{m_0+2}}{a_{m_0}}x^2+\cdots+\frac{a_m}{a_{m_0}}x^{m-m_0}+\cdots$$

sor is folyvást összetartó. Tehát e fejezet elején idézett tétel értelmében

$$\lim_{m=\infty}\left|\frac{a_{m_0}}{a_m}\right|^{\frac{1}{m-m_0}}=+\infty.$$

Ennélfogva az

$$\left|\frac{a_{m_0}}{a_{m_0+1}}\right|,\quad \left|\frac{a_{m_0}}{a_{m_0+2}}\right|^{\frac{1}{2}},\ldots,\left|\frac{a_{m_0}}{a_m}\right|^{\frac{1}{m-m_0}},\ldots$$

sorozat tagjai között kell egy *legkisebbnek* lennie abban az értelemben, hogy e tag kisebb minden későbbinél, az előtte levők közül pedig legalább egyiknél sem nagyobb. Legyen e tagra vonatkozólag $m=m_1$.

Most már az adott hatványsorral együtt annak

$$a_{m_1}x^{m_1}+a_{m_1+1}x^{m_1+1}+a_{m_1+2}x^{m_1+2}+\cdots+a_m x^m+\cdots$$

maradék-sora is folyvást összetartó és vele együtt az

$$1+\frac{a_{m_1+1}}{a_{m_1}}x+\frac{a_{m_1+2}}{a_{m_1}}x^2+\cdots+\frac{a_m}{a_{m_1}}x^{m-m_1}+\cdots$$

sor is. Tehát

$$\lim_{m=\infty}\left|\frac{a_{m_1}}{a_m}\right|^{\frac{1}{m-m_1}}=+\infty.$$

Ennélfogva az

$$\left|\frac{a_{m_1}}{a_{m_1+1}}\right|,\quad \left|\frac{a_{m_1}}{a_{m_1+2}}\right|^{\frac{1}{2}},\ldots,\left|\frac{a_{m_1}}{a_m}\right|^{\frac{1}{m-m_1}},\ldots$$

sorozatban is kell egy legkisebb tagnak lennie az előbb megállapított értelemben. Legyen erre vonatkozólag $m = m_2$.

Hasonlóképen az m_2-nél nagyobb m számok közt lesz egy m_3, melyre vonatkozólag

$$\left|\frac{a_{m_2}}{a_m}\right|^{\frac{1}{m-m_2}}$$

a legkisebb. Stb.

Most már $\varphi(u)$-t az $m_0 \cdots +\infty$ intervallumban következőleg állapítjuk meg:

1. *Az*
$$m_0, m_1, m_2, \ldots, m_i, m_{i+1}, \ldots \tag{19}$$
helyeken
$$\varphi(m_i) = \frac{1}{|a_{m_i}|^{\frac{1}{m_i}}}.$$

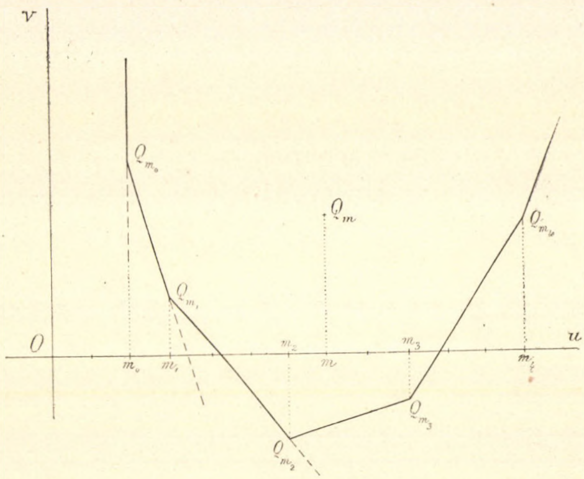
2. *Az egyes*
$$\begin{matrix} m_0 \ldots m_1 \\ m_1 \ldots m_2 \\ m_2 \ldots m_3 \\ \ldots \end{matrix}$$
intervallumokban legyen
$$v = u \log \varphi(u)$$
az u-nak lineáris függvénye.

Az így megállapitott függvény vagy már maga eleget tesz az α)—δ) alatti követeléseknek vagy könnyen módosítható úgy, hogy e követeléseknek megfeleljen. Ennek bebizonyítása előtt azonban czélszerű lesz $\varphi(u)$ meghatározását geometriailag is szemléletessé tenni.

18. Értsünk u és v alatt derékszögű pontkoordinátákat és rajzoljuk meg a
$$v = u \log \varphi(u)$$
vonalat. (1. ábra.)

E végből határozzuk meg mindenek előtt a
$$Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_m, \ldots \tag{20}$$
pontrendszert úgy, hogy Q_m koordinátái:
$$u_m = m, \quad v_m = \log \frac{1}{|a_m|}.$$

E pontok részben a végtelenben is lehetnek. Közülök az első, mely nem esik a végtelenbe, Q_{m_0} lesz, hol m_0 az előbbi czikkelyben meghatározott 19) alatti egész számok elseje. Fektessünk e ponton keresztül függőleges egyenest s forgassuk annak alsó részét Q_{m_0} körül (az óramutató mozgásával ellentett értelemben) mindaddig, míg először megy a Q_m pontok közül még egyen vagy többen



1. ábra.

keresztül. A forgó egyenes azt a Q_m-t fogja először elérni, melyre vonatkozólag

$$\frac{v_m - v_{m_0}}{m - m_0} = \frac{1}{m - m_0}\left(\log\frac{1}{|a_m|} - \log\frac{1}{|a_{m_0}|}\right) = \log\left|\frac{a_{m_0}}{a_m}\right|^{\frac{1}{m-m_0}}$$

a legkisebb. Ez a pont Q_{m_1}; vagy ha több van, úgy Q_{m_1} a Q_{m_0}-tól legtávolabb fekvő. Itt m_1 ugyanazt az egész számot jelenti, mint 19) alatt.

Minthogy $$v = u \log \varphi(u)$$

értéke az $u = m_0$ és $u = m_1$ helyeken Q_{m_0} illetőleg Q_{m_1} ordinátájával egyenlő, közben pedig v az u-nak lineáris függvénye, azért az $m_0 \ldots m_1$ intervallumban e függvényt a $Q_{m_0}Q_{m_1}$ egyenes vonaldarab ábrázolja.

A mondottak szerint a

$$Q_{m_0},\ Q_{m_0+1},\ \ldots,\ Q_{m_1}$$

pontok egyike sincs a $Q_{m_0}Q_{m_1}$ egyenes alatt, a

$$Q_{m_1+1},\ Q_{m_1+2},\ \ldots$$

pontok pedig mindannyian e fölött az egyenes fölött vannak.

Forgassuk most már a $Q_{m_0}Q_{m_1}$ egyenesek Q_{m_1}-től jobbra eső részét e pont körül mindaddig, míg először megy a $Q_{m_0}Q_{m_1}$ fölött levő

$$Q_{m_1+1},\ Q_{m_1+2},\ \ldots$$

pontok közül egyen vagy többön keresztül. Ez akkor fog bekövetkezni, mikor a forgó egyenes a $Q_{m_1}Q_{m_2}$ helyzetbe jő, mert

$$\frac{v-v_{m_1}}{m-m_1}=\log\left|\frac{a_{m_1}}{a_m}\right|^{\frac{1}{m-m_1}}$$

akkor legkisebb, mikor $m=m_2$. Az így nyert egyenesnek Q_{m_1} és Q_{m_2} köző eső darabja fogja a

$$v=u\log\varphi(u)$$

függvényt az $m_1\ldots m_2$ intervallumban ábrázolni.

A mondottak szerint

$$Q_{m_1},\ Q_{m_1+1},\ \ldots,\ Q_{m_2}$$

pontok közül egyik sincs a $Q_{m_1}Q_{m_2}$ egyenes alatt, a

$$Q_{m_2+1},\ Q_{m_2+2},\ \ldots$$

pontok pedig mindannyian ezen egyenes fölött vannak.

Most már forgassuk a $Q_{m_1}Q_{m_2}$ egyenesnek Q_{m_2}-től jobbra eső részét e pont körül mindaddig, míg először megy a

$$Q_{m_2+1},\ Q_{m_2+2},\ \ldots$$

pontok közül egyen vagy többön keresztül. Az így nyert $Q_{m_2}Q_{m_3}$ egyenesnek Q_{m_2} és Q_{m_3} közé eső darabja ábrázolja a

$$v = u \log \varphi(u)$$

függvényt az $m_2 \ldots m_3$ intervallumban. Stb.

Ha ezt az eljárást folytatjuk, akkor

$$v = u \log \varphi(u)$$

ábrázolására a

$$Q_{m_0} Q_{m_1} Q_{m_2} Q_{m_3} \ldots Q_{m_i} Q_{m_{i+1}} \ldots$$

törött vonalat nyerjük. Ha ehhez még hozzászámítjuk a Q_{m_0}-n keresztül menő függőleges egyenesnek e pont fölötti részét, akkor a nyert P poligon alulról konvex és a 20) alatti pontrendszerhez képest úgy van elhelyezve, hogy annak egyik pontja sincs P konvex oldalán, hanem mind P-n vagy P konkáv oldalán.

Minthogy P szerkesztése némileg az algebrai függvények elméletéből ismeretes NEWTON-*féle poligon* szerkesztésére emlékeztet, P-t a 20) alatti pontrendszerhez tartozó NEWTON-*féle poligonnak* mondjuk.

Minthogy e poligon egyes egyenes részei az ordináták tengelyének negativ részével rendre nagyobb-nagyobb szöget zárnak be és ennélfogva meghosszabbításaiknak az ordináták tengelyével való metszéspontjai rendre mélyebben és mélyebben vannak: azért az $u \log \varphi(u)$ menetét két szomszédos

$$m \ldots m+1$$

egész szám között ábrázoló

$$u \log \varphi(u) = A_m u - B_m \tag{21}$$

lineáris kifejezésben az A_m és B_m együtthatók m növekedtével *folyvást növekednek*, vagy legalább soha nem csökkennek.

Továbbá

$$\lim_{m=\infty} B_m = \infty.$$

Ugyanis a 21) alatti képlet értelmében

$$m \log \varphi(m) = A_m m - B_m$$

$$(m+1) \log \varphi(m+1) = A_m (m+1) - B_m,$$

s ha innen A_m-t elimináljuk, úgy

$$\log\varphi(m+1)-\log\varphi(m)=B_m\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right).$$

Ha tehát B_m az m minden értékénél kisebb maradna egy bizonyos K pozitiv számnál, akkor

$$\log\varphi(m+1)-\log\varphi(m)<K\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right).$$

Ha itt m helyébe rendre az

$$m_0,\ m_0+1,\ \ldots,\ m_i-1$$

egész számokat helyettesítjük s összaadunk, akkor

$$\log\varphi(m_i)-\log\varphi(m_0)<K\left(\frac{1}{m_0}-\frac{1}{m_i}\right),$$

s innen

$$\log\varphi(m_i)-\log\varphi(m_0)<\frac{K}{m_0}.$$

Ámde ez lehetetlen, mert

$$\lim_{i=\infty}\varphi(m_i)=\lim_{i=\infty}\frac{1}{|a_{m_i}|^{\frac{1}{m_i}}}=+\infty.$$

Ily módon az a feltevés, hogy B_m folyvást kisebb maradna egy bizonyos K számnál, ellenmondásra vezetvén, a B_m-ek sorozatának valóban minden határon túl növekedőnek kell lennie.

19. Minthogy a Q_m pontok egyike sincs a P poligon alatt, azért m minden (m_0-nál nem kisebb) egész számú értékénél

$$v_m\geqq m\log\varphi(m)$$

azaz

$$\log\frac{1}{|a_m|}\geqq m\log\varphi(m).$$

Innen

$$\log\varphi(m)\leqq\frac{1}{m}\log\frac{1}{|a_m|}$$

és

$$\varphi(m) \leqq \frac{1}{|a_m|^{\frac{1}{m}}},$$

mint azt α) alatt követeltük.

Továbbá két szomszédos m és $m+1$ egész szám között

$$u \log \varphi(u)$$

$$(u+1) \log \varphi(u+1)$$

s ezekkel együtt

$$(u+1) \log \varphi(u+1) - u \log \varphi(u)$$

lineáris függvények. Közöttük az utolsónak értéke az $u=m$ helyen A_m, az $u=m+1$ helyen pedig A_{m+1}. Minthogy e két érték közül az utóbbi soha sem lehet kisebb az előbbinél, azért az

$$(u+1) \log \varphi(u+1) - u \log \varphi(u)$$

lineáris függvény az egész intervallumban u-nak növekedő függvénye vagy állandó, de sohasem lehet u-nak csökkenő függvénye.

Minthogy ez így van az

$$\begin{array}{l} m_0 \quad \ldots m_0+1 \\ m_0+1 \ldots m_0+2 \\ m_0+2 \ldots m_0+3 \\ \quad \ldots \end{array}$$

intervallumok mindegyikében, azért $\varphi(u)$ az egész

$$m_0 \cdots + \infty.$$

intervallumban mindenütt kielégíti a β) alatti követelést.

A mi pedig a γ) alatti követelést illeti, úgy az $m \ldots (m+1)$ intervallumban a 21) alatti képletből

$$\log \varphi(u) = A_m - \frac{B_m}{u}$$

és

$$\log \varphi(u) + \frac{k}{u} = A_m - \frac{B_m - k}{u}. \qquad 22)$$

Itt $\lim B_m = \infty$. Tehát mindig található egy oly m' egész szám, hogy

$$B_m > k,$$

ha csak $m \geqq m'$. Ezen m'-nél nagyobb u értékekre vonatkozólag

$$\log \varphi(u) + \frac{k}{u}$$

a 22) alatti képlet értelmében az u-nak folyvást növekedő függvénye.

Végre abban az esetben, midőn

$$|a_0| > 1,$$

$\varphi(u)$ értelmezése kiterjed az egész

$$0 \cdots + \infty.$$

intervallumra és $\varphi(u)$ eleget tesz a δ) alatti követeléseknek is.

Ugyanis ebben az esetben $m_0 = 0$, tehát $\varphi(u)$ értelmezési tartománya már az $u = 0$ helyen kezdődik. Továbbá e helyen

$$[u \log \varphi(u)]_{k=0} = -B_0 = \log \frac{1}{|a_0|},$$

tehát

$$B_0 = \log |a_0| > 0,$$

B_0-sal együtt pedig minden B_m pozitiv.

Ekkor tehát a

$$\log \varphi(u) = A_m - \frac{B_m}{u}$$

függvény s vele együtt $\varphi(u)$ is az u-nak folyton növekedő függvénye. Míg u felvesz minden értéket 0-tól $+\infty$-ig ugyanaz történik $\varphi(u)$-val, mert

$$\lim_{u=+0} \log \varphi(u) = \lim_{u=+0} \left(A_0 - \frac{B_0}{u}\right) = -\infty$$

s így

$$\lim_{u=+0} \varphi(u) = 0,$$

másrészt pedig

$$\lim_{u=\infty} \varphi(u) = \lim_{i=\infty} \varphi(m_i) = \lim_{i=\infty} \frac{1}{|a_{m_i}|^{\frac{1}{m_i}}} = \infty.$$

20. Ha az adott

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + \cdots$$

sorban $|a_0| \leqq 1$, akkor alkalmazzuk a mondottakat az

$$\bar{f}(x) = \bar{a}_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + \cdots$$

sorra, hol $|\bar{a}_0| > 1$. Az erre vonatkozólag képezett $\varphi(u)$ függvény azután $f(x)$-re vonatkozólag is kielégiti az $a)$—$\delta)$ alatti követeléseket.

A RELATIV PRIMSZÁMOK SZIMETRIKUS FÜGGVÉNYEIRŐL.

Ismeretes hogy törzsszám modulus esetében x bármely egész számú értékére

$$\Pi(x-r) \equiv x^{p-1}-1 \pmod{p},$$

hol a baloldalon álló szorzat kiterjed a relativ primszámok egy teljes sorozatára mod p. Ha $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$ jelölik a relativ primszámok elemi szimmetrikus függvényeit, tehát

$$\Pi(x-r) = x^{p-1} - c_1 x^{p-2} + \cdots + c_{p-1},$$

úgy az előbbi kongruenczia azt mondja, hogy az utolsó kivételével minden c együttható osztható p-vel.

A következőkben meg fogjuk vizsgálni, hogy vannak-e összetett modulusok, a melyekre nézve az említett szimmetrikus függvények ugyanoly tulajdonsággal bírnak s ha vannak, melyek azok.

A kérdés eldöntésére induljunk ki Newton ismeretes identitásaiból

$$c_1 - s_1 = 0$$
$$2c_2 - c_1 s_1 + s_2 = 0$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$kc_k - c_{k-1}s_1 + \cdots + (-1)^k s_k = 0,$$

a melyekben s_k a relativ primszámok k-dik hatványainak összegeit jelentik. Tegyük föl, hogy s_k az első, mely m-mel nem osztható, vagyis

$$s_1 \equiv s_2 \equiv \cdots \equiv s_{k-1} \equiv 0 \pmod{p},$$

akkor a fölírt egyenletrendszer utolsó egyenletéből következik, hogy

$$kc_k + (-1)^k s_k \equiv 0 \pmod{m}$$

s így c_k sem lehet osztható m-mel. A

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{2n-1} \tag{1}$$

együtthatók — hol $2n = \varphi(m)$ — tehát csak úgy oszthatók egyszerre m-mel, ha az

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{2n-1} \tag{2}$$

hatványösszegek is vele egyszerre oszthatók. Hogy e szükséges föltétel nem elegendő, azt az egyenletrendszer is mutatja, mert

$$kc_k \equiv 0 \bmod m$$

kongruencziából még nem következtethetünk c_k oszthatóságára, ha k-nak és m-nek közös osztója van.

A föltett kérdést ezzel visszavezettük azon modulusok meghatározására, a melyekre a 2) alatt levő hatványösszegek egyszerre oszthatók m-mel. Az oszthatóság föltételeinek megállapitására ezen összegeket a számelméletből ismeretes

$$\sum_r V(r) = \sum_d \sum_{k=1}^{\frac{m}{d}} \varepsilon_d V(kd) \tag{3}$$

egyenlet segitségével tényleg megfogjuk határozni. Ebben $V(r)$ tetszőleges függvénye r-nek; a baloldalon álló összeg pedig kiterjesztendő minden mod. m relativ primmaradékra *; a jobb oldalon álló első összeg vonatkozik m minden osztójára, a második minden k egész számra, melyre $kd \leq m$; ε_d pedig következő föltételek alapján van meghatározva:

$$\varepsilon_d = 0,$$

ha d négyzet számot tartalmaz;

$$\varepsilon_d = \pm 1$$

---

* Az, hogy a relativ primszámok egy tetszőleges, de teljes sorozatát fölcseréltük a relativ primmaradékok teljes sorozatával, az eredményre nincsen befolyással.

a szerint, a mint d páros vagy páratlan számú törzstényezőből áll; továbbá

$$\varepsilon_1=1 \qquad \sum_d \varepsilon_d=0.$$

Legyen

$$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_\nu^{\alpha_\nu}$$

és

$$\varphi_i(m)=\prod_{k=1}^{\nu}(1-p_k^i),$$

akkor

$$\sum_d \varepsilon_d d^i=\varphi_i(m)$$

és ha $\varphi(m)$ a relativ primszámok száma

$$\sum_d \varepsilon_d \frac{m}{d}=\varphi(m)=m\varphi_{-1}(m).$$

Tegyünk most 3)-ban $V(r)$ helyébe r^{2a}, akkor az

$$s_{2a}=\sum_r r^{2a}=\sum_d \varepsilon_d d^{2a}\sum_{k=1}^{\frac{m}{d}} k^{2a}$$

egyenlet jobb oldalán levő második összeg nem más, mint az egymásra következő egész számok hatványainak összege s így

$$s_{2a}=\sum_d \varepsilon_d d^{2a}\left[\frac{1}{2a+1}\left(\frac{m}{d}\right)^{2a+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{d}\right)^{2a}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}B_1\binom{2a}{1}\left(\frac{m}{d}\right)^{2a-1}+\cdots+(-1)^{a-1}B_a\frac{m}{d}\right],$$

hol

$$B_1, B_2, \ldots, B_a$$

a Bernoulli-számokat jelentik. Ha az összegezést minden tagon külön végezzük, akkor

$$s_{2a}=\frac{m^{2a}}{2a+1}\sum_d \varepsilon_d \frac{m}{d}-\frac{1}{2}m^{2a}\sum_d \varepsilon_d+$$
$$+\frac{1}{2}B_1\binom{2a}{1}m^{2a-1}\sum \varepsilon_d d+\cdots+(-1)^{a-1}B_a m\sum_d \varepsilon_d d^{2a-1},$$

a $\varphi_i(m)$ függvények felhasználásával pedig

$$s_{2a}=\frac{m^{2a}}{2a+1}\varphi(m)+\sum_{k=1}^{a}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k}\binom{2a}{2k-1}B_k m^{2(a-k)+1}\varphi_{2k-1}(m). \quad (4)$$

Hasonló módon nyerjük 3)-ból, ha $V(r)=r^{2a+1}$, hogy

$$s_{2a+1}=\frac{m^{2a+1}}{2a+2}\varphi(m)+\sum_{k=1}^{a}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k}\binom{2a+1}{2k-1}B_k m^{2(a-k)+2}\varphi_{2k-1}(m) \quad (5)$$

E két alapképlet segítségével a relativ primmaradékok bármely szimetrikus függvénye kifejezhető m és $\varphi_i(m)$ függvényeként. Lássunk nehány különös esetet. Ha 4)-ben $a=0$, akkor $s_0=\varphi(m)$; ha 5)-ben $a=0$, akkor

$$s_1=\frac{1}{2}m\varphi(m)$$

ismeretes képletre akadunk. Utóbbi egyszersmind azt is mutatja, hogy s_1 mindenkor osztható m-mel, mert $\varphi(m)$ páros, ha $m>2$.

Ha $a=1$, akkor 4)-ből

$$s_2=\Sigma r^2=\frac{m^2}{3}\varphi(m)+\frac{m}{6}\varphi_1(m).$$

Első sorban határozzuk meg, hogy a hatványösszegek mily maradékot adnak mod. m, mert ezekkel együtt az oszthatóság föltételeit is megkapjuk. Ha m relativ prim s_{2a} nevezőjéhez képest, úgy $s_{2a}\equiv 0$ (mod. m) Irjuk a 4) alatt levő egyenletet

$$s_{2a}=m\left[\frac{m^{2a}}{2a+1}\varphi(m)+\sum_{k=1}^{a-1}\frac{(-1)^{k-1}B_k}{2(a-k)+1}\binom{2a}{2k}m^{2(a-k)+1}\varphi_{2k-1}(m)\right]+$$
$$+(-1)^{a-1}B_a m\varphi_{2a-1}(m)$$

alakban s tegyük föl, hogy m osztható a nevezőben előforduló π törzsszám első hatványával, azaz $m=\pi m_1$. Legyen továbbá

$$2(a-k)+1=\beta\pi^i$$

hol $\pi\geq 3$, mert k legnagyobb értéke $a-1$, akkor π e tag nevezőjében legfölebb az $(i+1)$-dik hatványon fordulhat elő t. i. azon esetben, midőn π ezen taghoz tartozó Bernoulli-féle szám nevezőjében is előfordul, mert hiszen a Staudt tétele szerint a Bernoulli-féle számok nevezőiben a törzsszámok csak első hatványon fordulnak elő. A π kitevője,

$$2(a-k)-(i+1)=\beta\pi^i-(i+2),$$

mint látjuk mindig pozitiv vagy legfeljebb zérus, ha t. i. $\beta=1$, $\pi=3$, $i=1$. Ha tehát a zárójelben m helyébe πm_1-et írunk, a törtek rövidítése után π minden tag nevezőjéből — melyben előfordult — kiesik. Rövidítés után a törteket közös nevezőre hozva, az egyenlet

$$s_{2a}=m\frac{M}{N}+(-1)^{a-1}B_a m\varphi_{2a-1}(m)$$

alakot ölt, melyben N az m-hez képest relativ prim. Szorozzuk az egyenletet N-nel, akkor

$$Ns_{2a}\equiv(-1)^{a-1}NB_a m\varphi_{2a-1}(m)\,(\text{mod. } m)$$

vagy mivel N relativ prim m-hez

$$s_{2a}\equiv(-1)^{a-1}B_a m\varphi_{2a-1}(m)\text{ mod. }(m) \qquad 6)$$

E kongruencziában $a\geqq 1$ veendő, mert $a=0$-ra B_0 nincsen definiálva.

Hasonló módon nyerjük, hogy

$$s_{2a+1}\equiv(-1)^{a-1}B_a\frac{2a+1}{2}m^2\varphi_{2a-1}(m)\,(\text{mod.} m^2) \qquad 7)$$

Utóbbi kongruenczia mutatja, hogy s_{2a+1} mindenkor osztható m-mel. Ha m relativ prim B_a nevezőjéhez képest, a tétel közvetetlenül világos, ha pedig B_a nevezőjében előforduló páratlan törzsszámok egyikével osztható,

$$B_a\frac{2a+1}{2}m\varphi_{2a-1}(m) \qquad 8)$$

nevezőjéből kirövidül, miáltal ez oly törtté válik, melynek nevezője m-hez relativ prim. Jelöljük számlálóját μ-vel, nevezőjét ν-vel, akkor

$$s_{2a+1}\equiv\frac{\mu}{\nu}m\,(\text{mod. } m^2),$$

vagy

$$\nu s_{2a+1}\equiv 0\,(\text{mod. } m)$$

s mivel ν relativ prim m-hez

$$s_{2a+1} \equiv 0 \pmod{m}.$$

Ha m páros, de 4)-gyel nem osztható szám, a 8) alatt levő tört nevezőjéből a négy — mert B_a nevezője mindig páros — rövidítés folytán mégis kiesik, mert $\varphi_{2a-1}(m)$ is páros, ha $m > 2$ és 4-gyel nem osztható páros szám.

Hogy s_{2a+1} mindig osztható m-mel, ha $m > 2$, azt következő egyszerű módon is mutathatjuk ki. He r relativ prim m-hez képest, akkor az r számok sorában $-r$ is előfordul s így a két szám páratlan hatványainak összege $\equiv 0$ mod m. Vagyis s_{2a+1} tagjai az előbb jelzett módon kettesével úgy csoportosithatók, hogy minden egyes csoport külön-külön osztható m-mel. Sőt azt is igen egyszerüen be lehet bizonyitani, hogy összetett modulus esetében a páratlan mutatóval biró c együtthatók is kivétel nélkül m-mel oszthatók.

Ha m ismét relativ prim B_a nevezőjéhez képest, úgy a 6) alatt levő kongruencziából következik, hogy $s_{2a} \equiv 0 \pmod{m}$. Ha pedig m tartalmaz B_a nevezőjében előforduló π törzsszámot, s_{2a} mindazonáltal osztható lehet m-mel, ha $\varphi_{2a-1}(m)$-ben π maradék nélkül találtatik. De

$$\varphi_{2a-1}(m) = \prod_{k=1}^{\nu}(1 - p_k^{2a-1})$$

szorzat csak úgy osztható π-vel, ha legalább egy tényezője $\equiv 0 \pmod{\pi}$, azaz

$$1 \equiv p^{2a-1} \pmod{\pi}$$

vagy

$$p \equiv p^{2a} \pmod{\pi}.$$

Azonban Staudt tétele szerint $2a$ többbese $(\pi - 1)$-nek, tehát

$$p \equiv 1 \pmod{\pi}$$

s így $\varphi_{2a-1}(m)$ csak úgy osztható π-vel, ha

$$\varphi_1(m) \equiv \prod_{k=1}^{\nu}(1 - p_k) \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Ezek alapján mondhatjuk, hogy s_{2a} *csak akkor osztható m-mel, ha m és B_a nevezőjenek legnagyobb közös osztója $\varphi_1(m)$-ben találtatik.*

Ha $m=2^i$, akkor $\varphi_1(m)=1$ nem osztható a BERNOULLI-féle számok nevezőjében mindig előforduló kettessel s így s_{2a} sohasem osztható 2^i-nel, de

$$s_{2a}\equiv 0 \pmod{2^{i-1}}.$$

Ha $2a=2n=\varphi(m)$, akkor B_n nevezője az m-ben foglalt összes törzsszámokat tartalmazza. Mert hiszen B_n nevezőjét megkapjuk, ha $\varphi(m)$ összes

$$d_1, d_2, d_3, \ldots$$

osztóiból képezett

$$d_1+1, d_2+1, d_3+1, \ldots$$

számok közül kiválasztjuk a törzsszámokat s őket összeszorozzuk. Ebben az esetben az osztók között szerepelnek p_1-1, $p_2-1, \ldots, p_\nu-1$, tehát a $d+1$ számok között megvannak a $p_1, p_2 \ldots, p_\nu$ törzsszámok is; m tehát nem lévén relativ prim B_n nevezőjéhez, s_{2n} csak úgy osztható m-mel, ha ennek összes törzstényezői $\varphi_1(m)$-ben találtatnak. De az m-ben foglalt legnagyobb törzsszám p_ν nem találtatik $\varphi_1(m)$-ben, mert p_ν-nél kisebb törzsszámokból van alkotva s így s_{2n} sem lehet osztható m által.

Ha $\varphi(m)=2$, azaz $m=4$ vagy 6 ($m=3$ mint törzsszám nem jő tekintetbe, mert törzsszámokra a tétel amúgy is fönnáll) akkor c_2 az utolsó együttható, tehát nem osztható m-mel. Mivel pedig $c_1=s_1$ mindenkor osztható, következik, hogy

$$\pi(x-r)=(x-1)(x-3)\equiv x^2-1 \pmod{4},$$

$$\pi(x-r)=(x-1)(x-5)\equiv x^2-1 \pmod{6}.$$

A legegyszerűbb két esetet ily módon letárgyalva, a következőkben fölteszszük, hogy $\varphi(m)\geq$ H vagyis hogy az 1) és 2) alatt levő mennyiségek sora legalább három tagból áll.

Ezek után áttérhetünk a fölvetett kérdés további tárgyalására. A levezetett tételek alapján az

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{2n-1}$$

hatványösszegek csak úgy lehetnek egyszerre oszthatók m-mel, ha m relativ prim

$$B_1, B_2, B_3, \ldots B_{n-1}$$

számok nevezőiben előforduló törzsszámokhoz képest. De ezek a $\varphi(m)$ alatt levő összes törzsszámok. Mert a fölirt BERNOULLI-féle számok nevezőiben előforduló törzsszámokat megkapjuk, ha

$$2, 4, 6, \ldots 2n-2$$

számoknak összes $d_1, d_2, d_3, \ldots$ osztóiból képezett d_1+1, d_2+1, $d_3+1, \ldots$ mennyiségek sorából kiválasztjuk a különböző törzsszámokat. Ezek sorában első helyen áll a kettő, mert egy az osztók sorában előfordul. Ha továbbá p páratlan, de $\varphi(m)$-nél kisebb törzsszám, akkor $p-1$ úgy a páros számok valamint az osztók sorában előfordul s ennélfogva p a $d+1$ számok között is megvan. Mondhatjuk tehát, hogy az említett hatványmennyiségek csak akkor oszthatók egyszerre m-mel, ha m relativ prim a $\varphi(m)$ alatt levő összes törzsszámokhoz képest. De ezek között m minden törzstényezője előfordul, mert

$$\varphi(m) p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \ldots p_\nu^{\alpha_\nu-1}(p_1-1)\ldots(p_\nu-1)$$

nagyobb p_ν-nél, az m-ben foglalt legnagyobb törzsszámnál kivéve azt az esetet, mikor

$$\varphi(m)=p \quad \text{vagy} \quad p-1$$

s így a 2) alatt levő hatványmennyiségek csak úgy oszthatók egyszerre m-mel, ha $\varphi_1(m)$ osztható m összes törzstényezőivel. Már előbb megjegyeztük, hogy p_ν nem foglaltatik $\varphi_1(m)$-ben, mert nagyobb $\varphi_1(m)$ bármely törzstényezőjénél, tehát a kérdéses hatványösszegek sem lehetnek egyszerre oszthatók m-mel.

Hátra van még a kivételes esetek megvizsgálása. Mivel $\varphi(m)=p$ csak akkor lehetséges, ha $p-1=1$, következik, hogy $p=2$ és $m=4$. Ezt az esetet már targyaltuk.

Ha $\varphi(m)=p-1$, akkor $m=p$ vagy $2p$. E két eset közül az első vizsgálatunk tárgyát nem képezi, mert m törzsszám. A második esetben a modulus relativ prim $\varphi(m)$ alatt levő minden törzsszámhoz, a kettő kivételével; de $\varphi_1(2p)=1-p$ osztható kettővel s így

$$s_1\equiv s_2\equiv\cdots\equiv s_{p-2}\equiv 0 \pmod{2p}.$$

Az összetett modulusak között tehát az $m=2p$ alakuak az egyedüliek, melyekre a 2) alatt levő hatványösszegek egyszerre oszthatók m-mel.

Most még hátra van a $2p$ alakú modulusok közül azoknak kiválasztása, a melyekre nemcsak a hatványösszegek, hanem az 1) alatt levő elementáris szimetrikus függvények is egyszerre oszthatók m-mel.

Ha fölírjuk az összes relátiv primmaradékokat mod $2p$

$$1, 3, 5, \ldots p-2, p+2, \ldots, 2p-1,$$

azt veszszük észre, hogy ezek mod p, tekintve szintén a relátiv primmaradékoknak egy teljes sorozatát képezik, tehát

$$\prod_{2p}(x-r)\equiv\prod_{p}(x-r) \pmod{p}.$$

De

$$\prod_{p}(x-r)\equiv x^{p-1}-1 \pmod{p}$$

s így

$$\prod_{2p}(x-r)=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k c_k x^{p-k-1}\equiv x^{p-1}-1 \pmod{p}.$$

hol $c_0=1$, a többi együttható pedig a mod. $2p$-re vonatkozó relátiv primmaradékoknak elementáris szimetrikus függvényei. Utóbbi kongruencziából következik, hogy

$$c_1\equiv c_2\equiv\cdots\equiv c_{p-2}\equiv 0 \pmod{p}$$

$$c_{p-1}\equiv -1 \pmod{p},$$

vagyis az utolsó kivételével minden c együttható osztható p-vel; $2p$-vel csak azok lesznek oszthatók, melyek egyszersmind párosak. De mivel az összes relativ primmaradékok páratlanok, következik, hogy

$$\prod_{2p}(x-r)\equiv(x-1)^{p-1} \pmod{2}$$

s ha $p-1=2^i l$, hol l páratlan, akkor

$$\prod_{2p}(x-r)\equiv[(x-1)^{2^i}]^l \text{ (mod. 2.)}$$

A jobb oldalon levő

$$(x-1)^{2^i}$$

hatvány kifejtésénél azt veszszük észre, hogy az utolsó kivételével minden binomiális együttható páros. Mert hiszen

$$u\binom{2^i}{u}=2^i\binom{2^i-1}{u-1}$$

s ha $u=2^{i_1}u_1$, hol u_1 páratlan, akkor

$$u_1\binom{2^i}{u}=2^{i-i_1}\binom{2^i-1}{u-1},$$

s mivel $i>i_1$ a míg $u<2^i$-nél, következik, hogy

$$\binom{2^i}{u}\equiv 0 \text{ (mod. 2)}$$

és

$$(x-1)^{2^i}\equiv x^{2^i}+1 \text{ (mod. 2.)}$$

Az előbbi kongruenczia tehát

$$\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k c_k x^{p-k-1}\equiv(x^{2^i}+1)^l \text{ (mod. 2)}$$

alakban írva, mutatja, hogy

$$c_1\equiv c_2\equiv\cdots\equiv c_{2^i-1}\equiv 0 \text{ (mod. 2)}$$

és

$$c_{2^i}\equiv\binom{l}{1}\equiv 1 \text{ (mod. 2,)}$$

mert l páratlan szám; c_{2^i} tehát nem lehet osztható $2p$-vel s így ebben az esetben is vannak inkongruens elementáris szimetrikus függvények, kivéve azt esetet, midőn $l=1$, mert akkor az első nem osztható együtthaió egyszersmind az utolsó vagyis

$$\underset{2p}{\Pi}(x-r) \equiv x^{2^i}-1 \bmod 2p,$$

ha $p-1=2^i$.

Vizsgálataink eredménye tehát a következő: *az összetett modulusok között $m=4$ és a $2(2^i+1)$ alakuak — hol 2^i+1 törzsszám — az egyedüliek, a melyekre*

$$\Pi(x-r) \equiv x^{\varphi(m)}-1 \ (\mathrm{mod.}\ m),$$

x bármely egész számú értékére.

Az itt oly kiváló tulajdonsággal biró 2^i+1 alakú törzsszámok — mint ismeretes — a közosztás elméletében is fontos szerepet játszanak.

Grúber Nándor.

AZ ELSŐRENDŰ ALGEBRAI DIFFERENCZIÁLEGYENLETEK SZINGULÁRIS INTEGRÁLJAIRÓL.

Ismeretes, hogy a síkra vonatkoztatva egy pontkoordinátákban általános algebrai egyenlet oly görbét képvisel, melynek kettős pontjai általában nincsenek, de kettős érintői és stationárius tangensei vannak; ellenben egy vonalkoordinátákban általános algebrai egyenlet oly görbének analitikai képviselője, melynek kettős érintői és stationárius érintői általában vannak, de kettős pontjai nincsenek. Már most világos, hogy ha egy s ugyanazon algebrai görbét majd pontkoordinátákban, majd vonalkoordinátákban adott egyenlettel tanulmányozunk, akkor kettős pontjainak és kettős érintőinek létezésére nézve két egymásnak ellentmondó tételt nyerünk.

Hasonló jelenséggel találkozunk a differencziálegyenletek tanában is. Ugyanis az

$$f(x, y, y')=0$$

elsőrendű algebrai differencziálegyenletnek y'-ra vonatkozó diszkriminansa

$$\Delta(x, y)=0,$$

miként tudjuk — általában nem képezi differencziálegyenletünknek szinguláris megoldását, ebből azután az következik, *hogy differencziálegyenletünknek szinguláris megoldása általában nincs.*

De ha Lagrange-al differencziálegyenletünk általános megoldásából

$$F(x, y, c)=0$$

egyenletből indulunk ki, akkor ennek c szerint vett diszkriminansa

$$D(x, y)=0$$

differencziálegyenletünknek általában szinguláris megoldása: *tehát algebrai differencziálegyenletünknek általában van szinguláris megoldása.*

Az algebrai differencziálegyenletek szinguláris integráljainak létezésére nézve tehát két egymásnak ellentmondó tételt nyertünk. Érdekes, hogy míg a kettős pontok és kettős érintők létezésének kérdése feltünést sem kelt, addig a szinguláris integrálok létezésére vonatkozó egymásnak ellentmondó tételek a kutatásoknak egész sorát vonják maguk után, a melyek közül különösen CAYLEY és DARBOUX munkálatai emelkednek ki, jóllehet ők sem mutatnak fel a kérdés tisztázására nézve pozitiv eredményt, hanem inkább a differencziálegyenletek megoldásainak geometriai jelentésére derítenek teljes fényt. De hogy a mondott tételekben rejlő ellentmondás csak látszólagos, az egészen természetesnek tünt fel; mert hiszen egy geometriai alakzatra vonatkozó valamely tulajdonság csakis az alakzat természetétől függhet; ellenben az a körülmény, hogy valamely tulajdonságnak majd a létezése, majd a nem létezése jelenik meg általánosabb alakban, már függhet attól az analitikai alaktól is, melylyel alakzatunkat képviseljük. Mindazonáltal, ha egy s ugyanazon alakzatnak különböző analitikai alakjaira vonatkozó kutatásokat bizonyos közös vonás révén össze tudjuk kapcsolni, akkor az esetleg ellentmondásban levő tételeket is összeegyeztethetjük. Ezen az úton sikerült HAMBURGERnek* a szinguláris integrálok létezésére vonatkozó homályt eloszlatni. Az a közös elem, melylyel a különböző irányban eszközölt kutatásokat összekötötte s az ellentmondást megszüntette, az integráloknak FUCHS-féle** sorba fejtése volt. A mely sorok azután a szinguláris integrálok létezésére nézve mindkét irányban eszközölt kutatások alkalmával ugyanazokat a kriteriumokat szolgáltatják.

---

* Crell. Journ. 112. Bd.

** Berl. Ber. 1884. XXXII. S. 701—703.

Munkájának vázlata következő: A

$$\Delta(x, y)=0$$

egyenlet egyik lineáris tényezőjét $y-\eta$-val jelöli s azután y'-t $y-\eta$ hatványai szerint menő sorban fejti; az integráczió elvégzése s a sor megfordítása után $y-\eta$ számára egy $x-c$ hatványai szerint haladó sort kap, melyben ha $x-c$ legkisebb kitevője $s \overline{\gtrless} 1$, akkor η nem szinguláris megoldás, ellenben, ha $s>1$, akkor η szinguláris megoldás s végül, ha $y-\eta=0$, akkor η partikuláris integrál, de szinguláris integrál is lehet.

Kutatásainak második részében előbb az integrálegyenlet általános

$$F(x, y, c)=0$$

alakját állapítja meg s azután kimutatja, hogy

$$D(x, y)=0$$

az $F(x, y, c)$-ből leszármaztatható differencziálegyenletet mindig kielégíti, mindazonáltal az csak akkor szinguláris integrál, ha $D(x, y)=0$ egyenlettel egy bizonyos az y'-tól független tényező nem tűnik el; ezzel azután megkapja a feltételt arra nézve, hogy $F(x, y, c)=0$-nak mikor van enveloppe-ja. Ezután következik $D(x, y)=0$ lineáris tényezőinek sorba fejtése $x-c$ hatványai szerint; a nyert sorok alapján megállapított kriteriumok tökéletesen megegyeznek a föntebb elmondottakkal. Lássuk ezek után a részletes tárgyalást.

I.

Legyen

$$f(x, y, y') \equiv A_0 y'^n + A_1 y'^{n-1} + \cdots + A_n = 0 \qquad 1)$$

y'-ra nézve n-ed fokú irreduktibilis algebrai egyenlet, hol A_1, $A_2, \ldots, A_n$ az x, y-nak közös osztóval nem biró raczionális egész függvényei és y'-ra vett diszkriminansa:

$$\Delta(x, y)=0. \qquad 2)$$

Jelöljük ennek az egyenletnek egyik lineáris tényezőjét $y-\eta$-val és tételezzük fel, hogy $y=\eta$ mellett

A) $$A_0 \neq 0.$$

Ebben az esetben η az oly $x=a$ hely körül levő konvergencziaterületén, hol η $x-a$ pozitiv egész kitevőjű hatványai szerint menő sorba fejthető, az

$$f(x, \eta, y')=0 \tag{3}$$

y'-ra nézve n-ed fokú algebrai egyenlet oly n függvényt definiál, melyek egyike sem lehet η konvergenczia-területén azonosan végtelen, azonban közülök néhány össze is eshetik. Legyen általában $y'=\zeta$ p-szeres gyöke a 3) egyenletnek. Ha tehát az 1) egyenlet értelmében y'-t y oly algebrai függvényeként fogjuk fel, melyben az együtthatók x parametertől is függnek, akkor az imént mondottak alapján az 1) egyenlet segítségével meghatározhatunk p oly y' füpgvényt, melyek mindegyike az $y=\eta$ helyen ζ-val lesz egyenlő, hol ζ csak az x parameter függvénye.

Az algebrai függvények tanából ismeretes, hogy ezek a függvények az $y=\eta$ helyen összefüggő ágakból álló cziklusokra oszlanak s hogy egy ily $a \leqq p$ ágú cziklus analitikai alakja

$$y'-\zeta=\sum_{n=0}^{\infty} g_n (y-\eta)^{\frac{\varkappa+n}{\alpha}}, \tag{4}$$

hol a $\varkappa$ és α zérustól különböző pozitiv egész számok; a g-k pedig $(x-a)$ pozitiv egész kitevőjű hatványai szerint menő sorok, melyek közül g_0-t zérustól különbözőnek tételezzük fel.

Írjuk a 4) alatt levő egyenletet a következő alakba:

$$\frac{d(y-\eta)}{dx}=\zeta-\frac{d\eta}{dx}+\sum_{n=0}^{\infty} g_n (y-\eta)^{\frac{\varkappa+n}{\alpha}},$$

melyből az

$$y-\eta=u^{\alpha}$$

szubstituczió alkalmazásával

$$\alpha u^{\alpha-1}\frac{du}{dx}=\zeta-\frac{d\eta}{dx}+\sum_{n=0}^{\infty} g_n u^{\varkappa+n}$$

egyenlethez jutunk, honnan:

$$\frac{dx}{du}=\frac{au^{\alpha-1}}{\zeta-\frac{d\eta}{dx}+\sum_{n=0}^{\infty}g_n u^{\varkappa+n}}. \qquad 5)$$

Integráljuk már most ezt a differencziálegyenletet először azzal a feltevéssel, hogy η az adott differencziálegyenletnek nem megoldása, azaz:

$$\zeta\neq\frac{d\eta}{dx}.$$

Ebben az esetben η konvergenczia-tartományán belül mindig találunk oly $x=c$ helyet, melyre nézve

$$\left(\zeta-\frac{d\eta}{dx}\right)_{x-c}\neq 0. \qquad 6)$$

Ha tehát 5) alatt levő differencziálegyenletünk értelmében x-t u olyan függvényeként fogjuk fel, mely $u=0$ mellett $x=c$ értéket vesz fel, akkor a 6) feltétel alapján $x-c$ u-nak pozitiv egész kitevőjű hatványai szerint menő sorba fejthető; minthogy az 5) alapján

$$\left(\frac{dx}{du}\right)_{x=c}=\left(\frac{d^2x}{du^2}\right)_{x=c}=\cdots=\left(\frac{d^{\alpha-1}x}{du^{\alpha-1}}\right)_{x=c}=0$$

$$\left(\frac{d^{\alpha}x}{du^{\alpha}}\right)_{x=c}=\alpha!\frac{1}{\left(\zeta-\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c}}, \quad \text{s i. t.}$$

azért

$$x-c=\frac{1}{\left(\zeta-\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c}}u^{\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n u^{\alpha+\varkappa+n},$$

hol a b-k az 5) alapján könnyen meghatározhat konstansok. Sorunk megfordításából

$$u=(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(\zeta-\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c}(x-c)^{\frac{1}{\alpha}}+\sum_{n=2}^{\infty}\beta_n(x-c)^{\frac{n}{\alpha}}$$

sorhoz jutunk, honnan:

$$y-\eta=\left(\zeta-\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c}^{\alpha}(x-c)+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(x-c)^{1+\frac{n}{\alpha}}. \qquad \text{I.}$$

Ez a sor differencziálegyenletünk definiálta y függvénynek az $x=c$ elágazási pontjában az α ágú cziklusát jellemzi; ezek az ágak az $x=c$ pontban valamennyien az

$$y=\eta(c)$$

értéket veszik fel s valamennyi ágnak közös érintője

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=c}=\zeta(c) \qquad \text{(4) alapján)}$$

tehát az $x=c$ pont az integrálgörbének α ágú önérintkezési pontja. Minthogy pedig feltevésünk értelmében

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c}\neq\zeta(c),$$

azért az $y=\eta(x)$ görbe, jóllehet az integrálgörbe $x=c$ pontján átmegy, mindazonáltal azt nem érinti, ennélfogva nem is lehet annak enveloppe-ja. Ha már most c-t a 6) alatt levő feltételnek megfelelően változtatjuk, megnyerjük mindazokat az α ágúlag érintkező integrálgörbéket, melyeknek önérintési pontjain az $y=\eta(x)$ görbe áthúzódik, a nélkül azonban, hogy az integrálgörbék egyikét is érintené. Ezzel azután teljes képet nyertünk nemcsak az integrál analitikai alakjára, hanem geometriai jelentésére nézve is.

Tárgyaljuk ezek után azt az esetet, midőn $y=\eta$ differencziálegyenletünknek megoldását képezi, azaz:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\eta}{dx}=\zeta.$$

Ebben az esetben az 5) alatt levő egyenletünk a következő alakot veszi fel:

$$\frac{dx}{du}=\frac{\alpha u^{\alpha-1-\varkappa}}{\sum_{n=0}^{\infty}g_n u^n}. \qquad 7)$$

Itt két esetet kell megkülönböztetni, a szerint a mint

$$\alpha-1-\varkappa\geqq 0, \qquad a)$$

vagy

$$\alpha-1-\varkappa<0. \qquad b)$$

Az első esetben a már előbb kifejtettek alapján a 7) egyenlet integrálját a következő kifejezés szolgáltatja

$$x-c=\left[\frac{\alpha}{(\alpha-\varkappa)g_0}\right]_{x=c} u^{\alpha-\varkappa}+\sum_{n=1}^{\infty} b_n u^{\alpha-\varkappa+n},$$

honnan

$$u=(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\sqrt[\alpha-\varkappa]{\frac{(\alpha-\varkappa)g_0}{\alpha}}\right)_{x=c}(x-c)^{\frac{1}{\alpha-\varkappa}}+\sum_{n=2}^{\infty}\beta_n(x-c)^{\frac{n}{\alpha-\varkappa}},$$

ebből pedig:

$$y-\eta=\left(\sqrt[\alpha-\varkappa]{\frac{(\alpha-\varkappa)g_0}{\alpha}}\right)^{\alpha}_{x=c}(x-c)^{\frac{\alpha}{\alpha-\varkappa}}+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(x-c)^{\frac{\alpha+n}{\alpha-\varkappa}}. \qquad \text{II.}$$

Minthogy föltevésünknél fogva

$$\alpha-\varkappa>0, \quad \text{tehát} \quad \frac{\alpha}{\alpha-\varkappa}>1;$$

ennélfogva, ha az $\frac{\alpha}{\alpha-\varkappa}$-ban λ a legnagyobb egész szám, akkor az $x=c$ helyen

$$y=\eta, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d\eta}{dx}, \dots, \frac{d^\lambda y}{dx^\lambda}=\frac{d^\lambda \eta}{dx^\lambda}. \qquad 8)$$

Ezek után már könnyű lesz megállapítani a II. geometriai jelentését; alakjából látható, hogy az differencziálegyenletünnkek $\alpha-\varkappa$ ágú cziklusát képviseli, melyek a 8) alapján $x=c$ pontban λ-szorosan érintkeznek; de ugyancsak a 8)-ból következik, hogy ezen a ponton az $y=\eta(x)$ görbe nemcsak átmegy, hanem ebben a pontban az integrálgörbével még λ-szoros érintkezésbe is lép, ennélfogva az $y=\eta(x)$ *görbe az integrálgörbének enveloppe-ja, tehát differencziálegyenletünknek szinguláris integrálgörbéje.*

Lássuk most a második esetet, azaz midőn

$$\alpha-1-\varkappa<1,$$

Irjuk most 7) alatt levő egyenletünket a következő alakba:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{a}u^{\varkappa-\alpha+1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}g_n u^n\right).$$

Ennek az egyenletnek

$$u=0$$

megoldását képezi, már pedig a Briot-Bonquet-féle tétel értelmében csak egy oly $(x-c)$ hatványai szerint menő sor van, mely egy differencziálegyenletnek eleget tesz, tehát $u=0$-on kívül más megoldás nincs, ennek pedig más alakja:

$$y=\eta,$$

azaz η összeesik differencziálegyenletünk egyik partikuláris integráljával, azonban lehetséges az is, hogy az integrálgörbék egy másik csoportjának szintén enveloppe-ját képezheti.

B) Tárgyaljuk végül azt az esetet, midőn $y=\eta$ mellett

$$A_0=0.$$

Ekkor az y' α ágú cziklusa az $y=\eta$ helyen azonos végtelen, tehát analitikai alakja

$$y'=(y-\eta)^{-\frac{\varkappa}{\alpha}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}g_n(y-\eta)^{\frac{n}{\alpha}}\right) \tag{9}$$

hol a g-k, $\varkappa$ és α számoknak olyan tulajdonságaik vannak, mint az *A)* alatt levő fejtegetésekben az ugyanilyen jelekkel megjelölt számoknak.

Az

$$y=\eta+u^{\alpha}$$

szubstituczió alkalmazásával

$$\frac{dx}{du}=\frac{\alpha u^{\varkappa+\alpha-1}}{g_0-u^{\varkappa}\dfrac{d\eta}{dx}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n u^n}$$

egyenlethez jutunk, melynek integrálja az oly $x=c$ helyen, melyre nézve:

$$(g_0)_{x=0}=0,$$

a következő alakban jelenik meg:

$$x-c=\left[\frac{\alpha}{(\alpha+\varkappa)g_0}\right]_{x=c}u^{\alpha+\varkappa}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n u^{\alpha+\varkappa+n},$$

honnan a már többször alkalmazott módszerrel

$$y-\eta=\sqrt[\alpha+\varkappa]{\left(\frac{\alpha+\varkappa}{\alpha}g_0\right)^{\alpha}}(x-c)^{\frac{\alpha}{\alpha+\varkappa}}+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(x-c)^{\frac{\alpha+n}{\alpha+\varkappa}} \qquad \text{IV.}$$

egyenlethez jutunk, mely az integrálfüggvénynek oly $\alpha+\varkappa$ ágát jeleníti meg, melynek elágazási pontja $x=c$-ben van, a hol azután minden ágra nézve

$$y=\eta(c),\quad y'=\infty,$$

tehát az integrálgörbe $x=c$-ben $\alpha+\varkappa$ ágú önérintkezésbe lép. Minthogy $x=c$ pont η függvény konvergenczia-területén van, azért reá nézve ebben a pontban

$$y=\eta(c),\quad y'=\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c}=\infty,$$

tehát az $y=\eta$ görbe, jóllehet az integrálgörbe $x=c$ pontján átmegyen, de azt nem érinti, ennélfogva nem is lehet annak enveloppe-ja s így differencziálegyenletünknek sem lehet szinguláris integrálja.

Minthogy ezzel a kutatások első részét befejezzük, lássuk az elért eredmények összefoglalását.

Összefoglalás:

Ha az

$$f(x,y,y')=0$$

algebrai differencziálegyenletnek y' szerint vett

$$\Delta(x,y)=0$$

diszkriminánsának egyik lineáris tényezője $y-\eta$ és differencziálegyenletünk megoldása

$$y=\eta+\mathfrak{P}(x-c)$$

alakban jelenik meg, akkor ha

1. $(x-c)$ legkisebb kitevője $s \leqq 1$, $y=\eta$ nem szinguláris integrál,

2. ha $(x-c)$ legkisebb kitevője $s>1$, $y=\eta$ szinguláris integrál,

3. ha pedig $\mathfrak{P}(x-c)\equiv 0$, akkor $y=\eta$ vagy szinguláris, vagy partikuláris integrál.

Suták József.

EGY IGEN EGYSZERŰ MECHANIKAI IGAZSÁGNAK MATHEMATIKAI TÁRGYALÁSA.

Ismeretes dolog, hogy ha egy pontra ható erőnek a componensei X, Y és Z, akkor az említett pontra ható erőnek a componense P, abban az irányban, melyre nézve az irányszögek cosinusai l, m és n, lesz:

$$P = lX + mY + nZ. \tag{1}$$

Kimutatandó tisztán mathematikai uton, hogy ez a P erő maga az eredő erő lesz, mihelyest az eredő erőnek a P erő irányát merőlegesen álló két irányba (l_1, m_1, n_1) és (l_2, m_2, n_2) eső componense 0.

Hogy az illető pontra ható erőnek az (l_1, m_1, n_1) és (l_2, m_2, n_2) irányokba eső componenseinek értéke 0, azt a következő két egyenlet fejezi ki:

$$l_1X + m_1Y + n_1Z = 0 \tag{2}$$

$$l_2X + m_2Y + n_2Z = 0, \tag{3}$$

hogy pedig ez a két irány merőlegesen áll a P irányára ennek a feltételnek az

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0 \tag{4}$$

$$ll_2 + mm_2 + nn_2 = 0 \tag{5}$$

egyenletek a mathematikai kifejezői.

Ezen egyenletek mellett az irányszögek között fennáló ismeretes összefüggés figyelembe vételével fen fog állani még a következő három egyenlet is:

$$l^2+m^2+n^2=1 \tag{6}$$

$$l_1^2+m_1^2+n_1^2=1 \tag{7}$$

$$l_2^2+m_2^2+n_2^2=1. \tag{8}$$

Ezekből az egyenletekből mint következménynek kell folynia az

$$X=l\,.\,P$$
$$Y=m\,.\,P$$
$$Z=n\,.\,P$$

egyenleteknek és az ezekből származó

$$P^2=X^2+Y^2+Z^2$$

egyenletnek, melyek éppen azt fejezik ki, hogy a P erő az X, Y és Z componenseknek a resultánsa.

Lássuk tehát, hogy miképen hozható le e négy utóbbi egyenlet az 1., 2. és 8. egyenletből.

Az 1. és 6., továbbá a 4. és 5. egyenlet a következő egyenletrendszert szolgáltatja.

$$\frac{X}{P}l+\frac{Y}{P}m+\frac{Z}{P}n=l^2+m^2+n^2$$
$$l_1l+m_1m+n_1n=0$$
$$l_2l+m_2m+n_2n=0$$

vagy

$$\left(\frac{X}{P}-l\right)l+\left(\frac{Y}{P}-m\right)m+\left(\frac{Z}{P}-n\right)n=0$$
$$l_1l+m_1m+n_1n=0$$
$$l_2l+m_2m+n_2n=0,$$

Ez egyenletrendszer fennállása a következő 3. fokú determináns eltünéséhez fűződik;

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{X}{P}-l\right) & \left(\frac{Y}{P}-m\right) & \left(\frac{Z}{P}-n\right) \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0,$$

a mi egyértelmű a következő egyenlettel:

$$\left(\frac{X}{P} - l\right)(m_1n_2 - m_2n_1) + \left(\frac{Y}{P} - m\right)(n_1l_2 - n_2l_1) +$$
$$+ \left(\frac{Z}{P} - n\right)(l_1m_2 - l_2m_1) = 0.$$

Ha a 2-ik egyenletet P-vel osztjuk és levonjuk ebből a 4-iket, továbbá ha a 3-ik egyenletet is elosztjuk P-vel és azután levonjuk belőle az 5-iket, akkor a következő két egyenlethez jutunk:

$$\left(\frac{X}{P} - l\right)l_1 + \left(\frac{Y}{P} - m\right)m_1 + \left(\frac{Z}{P} - n\right)n_1 = 0$$
$$\left(\frac{X}{P} - l\right)l_2 + \left(\frac{Y}{P} - m\right)m_2 + \left(\frac{Z}{P} - n\right)n_2 = 0.$$

Fen fog állani tehát a következő három egyenletből álló egyenletrendszer:

$$(m_1n_2 - m_2n_1)\left(\frac{X}{P} - l\right) + (n_1l_2 - n_2l_1)\left(\frac{Y}{P} - m\right) +$$
$$+ (l_1m_2 - l_2m_1)\left(\frac{Z}{P} - n\right) = 0$$
$$l_1\left(\frac{X}{P} - l\right) + m_1\left(\frac{Y}{P} - m\right) + n_1\left(\frac{Z}{P} - n\right) = 0$$
$$l_2\left(\frac{X}{P} - l\right) + m_0\left(\frac{Y}{P} - m\right) + n_2\left(\frac{Z}{P} - n\right) = 0.$$

Ez egyenletrendszer fennállása ismét egy harmadik fokú determináns eltünésétől függ. Ha pedig ez a harmadik fokú determináns nem lehet 0, akkor az egyenletrendszer csakis úgy állhat fenn, ha az $\left(\frac{X}{P} - l\right)$, $\left(\frac{Y}{P} - m\right)$ és $\left(\frac{Z}{P} - l\right)$-féle kifejezések értéke 0.

Az egyenletrendszer determinánsa

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1n_2 - m_2n_1 & n_1l_2 - n_2l_1 & l_1m_2 - l_2m_1 \\ l_1 & m_1 & n_2 \\ l_2 & m_2 & n_1 \end{vmatrix} =$$
$$= (m_1n_2 - m_2n_1)^2 - (n_1l_2 - n_2l_1)(l_1n_2 - l_2n_1) + l_1m_2 - l_2m_1)^2 =$$
$$= (m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2 + (l_1m_2 - l_2m_1)^2.$$

Ennek a kifejezésnek az értéke azonban csak úgy lehet 0, ha

$$m_1 n_2 - m_2 n_1 = 0$$
$$n_1 l_2 - n_2 l_1 = 0$$
$$l_1 m_2 - l_2 n_1 = 0,$$

azaz ha

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

vagy a mi ezzel egyértelmű, ha ezen viszonyoknak a négyzetei ugyanazon k értékkel birnak, a mi:

$$\frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{m_1^2}{m_2^2} = \frac{n_1^2}{n_2^2} = k.$$

Ezen feltétel szerint pedig:

$$l_1^2 = l_2^2 k$$
$$m_1^2 = m_2^2 k$$
$$n_1^2 = n_2^2 k,$$

és innen e három egyenlet összegezéséből kell hogy az

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = k\,(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)$$

egyenlet álljon fenn. Minthogy azonban

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$$

az előbbi egyenlet csak úgy állhat fenn, ha $k=1$, következőleg ha

$$l_1 = l_2, \quad m_1 = m_2, \quad n_1 = n_2.$$

Más szóval a fentebbi egyenletrendszer determinansa csakis abban az esetben lehet 0, ha az (l_1, m_1, n_1) és (l_2, m_2, n_2) által meghatározott irányok összeesnek, a mi azonban a jelen esetben ki van zárva, és így az egyenletrendszer fentállása, mivel jelenleg az egyenletrendszer determinánsa nem 0, ahhoz a feltételhez van kötve, hogy

$$\frac{X}{P} - l = 0$$
$$\frac{Y}{P} - m = 0$$
$$\frac{Z}{P} - n = 0,$$

azaz hogy

$$\frac{X}{P} = l$$
$$\frac{Y}{P} = m$$
$$\frac{Z}{P} = n$$

és a honnan azután következik hogy

$$P^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

azaz hogy a P erő valóban resultánsa az X, Y és Z componens erőknek.

Szijártó Miklós.

TÉTELEK A HÁROMÉLRŐL.

E czikk tárgya: *egy háromél élein keresztül menő négy forgáskúp negyedik metszőegyeneseinek, továbbá a háromél lapjait érintő négy forgáskúp negyedik érintősíkjainak, végre más ezekkel kapcsolatos sugaraknak és síkoknak helyzeti viszonyát megvizsgálni.*

E végből a következőket bocsátjuk előre:

Egy $T_1T_2T_3$ háromszög T_iT_j oldalának végtelen távol fekvő pontját E_k-nak, a háromszög magasságpontját T_0-nak, a T_0T_i magasság talppontját $\mathfrak{A}_i$-nek nevezzük. E magasságokon három pontot $D_1D_2D_3$-mat szerkesztünk a következő reláczióból

$$\mathfrak{A}_iT_0 \,.\, T_0D_i = \rho^2,$$

hol ρ egy tetszésszerinti vonaldarab.

A $D_1D_2D_3$ pontokon keresztül párhuzamosakat vonunk a T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 egyenesekkel, melyek egymást az $A_1A_2A_3$ pontokban metszik; ezeken keresztül ismét párhuzamosakat vonunk az előbbi egyenesekkel, melyek egymást az $S_1S_2S_3$ pontokban metszik.

A $T_1T_2T_3$, $D_1D_2D_3$ és $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$, $A_1A_2A_3$ háromszögek a T_0 középpont és a ρ^2 hatványra vonatkozólag reczíprok-polár háromszögek és ezért az $|\mathfrak{A}_iA_i|$ egyenesek egy M ponton mennek keresztül és az $|A_iA_j|$, $|\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_j|$ egyenesek egymást egy m_1 egyenesben metszik.

A

$$T_1T_2T_3, \quad D_1D_2D_3, \quad A_1A_2A_3, \quad S_1S_2S_3$$

háromszögek, mert oldalai a végtelen távol fekvő $E_1E_2E_3$ pontokon mennek keresztül, perspektivek; az első perspektiv a második, harmadik és negyedikkel a T_0, L_0, N pontra vonatkozólag; a három utolsó háromszög perspektiv a közös S_0 súlypontjukra vonatkozólag. Ennélfogva a T_0, L_0, N, S_0 pontok egy ugyanazon egyenesben fekszenek. A T_0 pont a második háromszögnek magasságpontja és a harmadik háromszög körül irható körnek középpontja. A $D_iA_iS_iS_0$ pontok, és így ezeknek $T_0L_0NS_0$ projekcziója a T_i pontról, harmonikus négyes csoportot alkotnak, vagyis

$$(D_iA_iS_iS_0)=(T_0L_0NS_0)=-1.$$

Minthogy az L_0 pont projekcziója a D_i-ből, és a T_0 pont projekcziója az A_i-ből a $|T_iNS_i|$ egyenesre, az N, S_i pontokat a T_i-től harmonikusan választja el, ezért e két projekczió nem egyéb, mint a $|D_iL_0|$, $|A_iT_0|$ egyeneseknek L_i metszéspontja. Ebből következik, hogy a $T_iL_iNS_i$ pontok egy egyenesben fekszenek, továbbá, hogy

$$(T_iL_iNS_i)=-1,$$

végre, hogy az $L_1L_2L_3$ háromszög oldalai is keresztül mennek a végtelen távol fekvő $E_1E_2E_3$ pontokon.

Ha a $T_iL_iNS_i$ és $T_jN_jNS_j$ harmonikus négyes csoportokat a T_j, illetve T_i pontokból az $|S_iS_j|$ egyenesre projicziáljuk, azt látjuk, hogy az L_i pont projekcziója a T_j-ből és az L_j pont projekcziója a T_i-ből, az E_k pontot S_i, S_j-től harmonikusan választja el. Ennélfogva az $|L_iT_j|$, $|L_jT_i|$ egyenesek egymást az A_k pontban metszik.

Ez utóbbi tulajdonság ekkép fejezhető ki:

«*Az $A_1A_2A_3$ háromszög szögpontjait a $T_0T_1T_2T_3$ (vagy az $L_0L_1L_2L_3$) pontokkal összekötő egyenesek egymást hármasával az $L_0L_1L_2L_3$ (illetve $T_0T_1T_2T_3$) pontokban metszik*».

Az $A_iA_jL_iL_j$, $A_iA_jT_iT_j$ négyszögeknek átlósháromszögei a $T_0T_kE_k$, $L_0L_kE_k$; ennélfogva a $|T_0T_k|$-nak D_k, Q_k metszőpontja $|A_iA_j|$, $|L_iL_j|$-vel, és az $|L_0L_k|$-nak D_k, P_k metszőpontja $|A_iA_j|$, $|T_iT_j|$-vel harmonikusan vannak elválasztva a T_0, T_k, illetve L_0, L_k-tól, vagyis

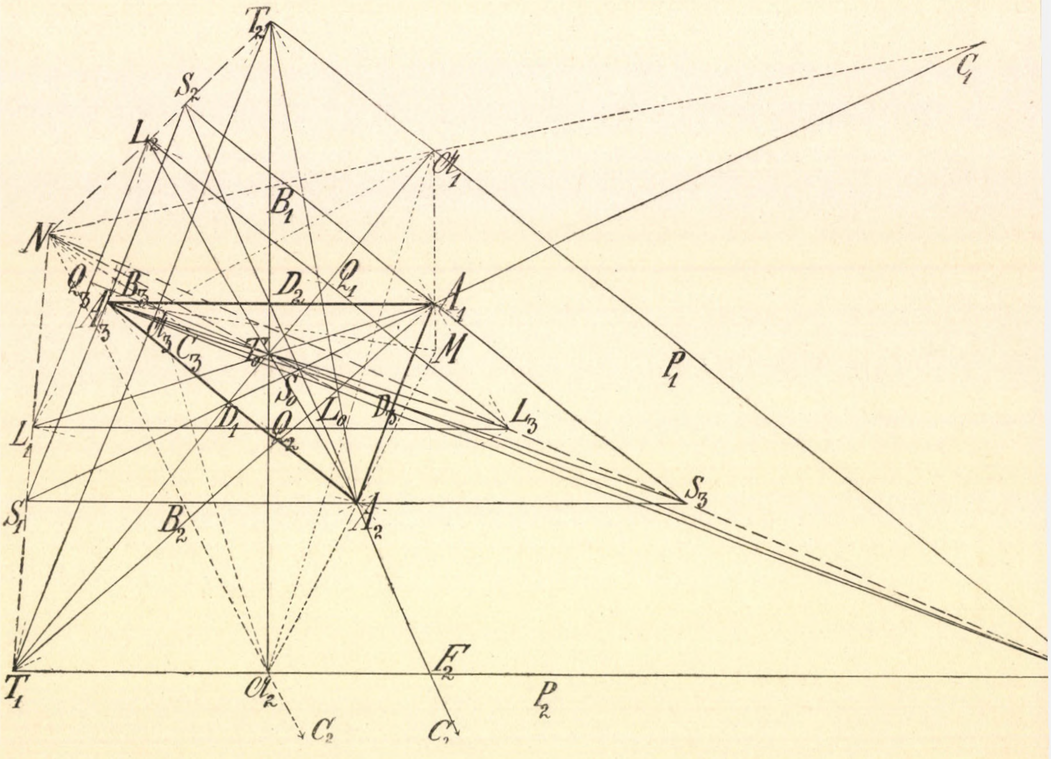
$$(D_kQ_kT_0T_k)=(D_kP_kL_0L_k)=-1.$$

A P_k, Q_k, A_k pontok, mint a $T_1T_2T_3$, $L_1L_2L_3$, $S_1S_2S_3$ háromszögek oldalainak felezőpontjai az N-nel egy egyenesben fekszenek;

$$(P_k Q_k A_k N) = -1,$$

és az $L_1L_2L_3$ háromszög körülírható körnek középpontja a T_0 pont.

Minthogy a $T_1T_2T_3$, $S_1S_2S_3$ háromszögek a végtelen távol fekvő $|E_1E_2E_3|$ egyenesre és az N pontra vonatkozólag perspektivek, azért e háromszögek magasságainak talppontjaitól meghatározott



$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$, $B_1B_2B_3$ háromszögek szintén perspektivek az $|E_1E_2E_3|$ egyenesre és az N pontra vonatkozólag.

Az $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ pontok az $S_1S_2S_3$ háromszög Feuerbach körén feküsznek, mert az első három pont a háromszög oldalainak felezőpontja, az utóbbi három pedig a háromszög magasságainak talpa.

Az $|\mathfrak{A}_iA_iM|$, $|\mathfrak{A}_iB_iN|$ sugarak az $|\mathfrak{A}_iT_0T_i|$, $|\mathfrak{A}_iT_jT_k|$-tól, tehát az M, N pont a $T_0T_1T_2T_3$ négyszög átellenes oldalaitól, harmonikusan van elválasztva, vagyis az M, N pontpár konjugált a négyszög szögpontjain keresztül menő kúpszeletekre vonatkozólag. A fönnebbi négy harmonikus sugárnak $|\mathfrak{A}_i A_i M|$, $|\mathfrak{A}_i B_i N|$, $|\mathfrak{A}_i T_0 T_i|$, $|\mathfrak{A}_i T_j T_k|$-nak, metszőpontja A_i, C_i, D_i, F_i az $|A_i D_i|$ egyenessel, szintén harmonikus négyes csoportot alkot, tehát:

$$(A_i C_i D_i F_i) = -1.$$

*

Emeljünk az imént tárgyalt idom T_0 pontjában annak síkjára egy t_0 merőlegest és rakjunk erre T_0-tól mérve egy ρ vonaldarabot O-ig, úgy, hogy

$$T_0 O = \rho.$$

Kössük össze az O pontot az idom összes pontjaival és jelöljük ezeknek az összekötő sugaraknak azt a végtelen hosszú részét (félsugarat), a melyen az A_i, B_i, C_i, ... pontok feküsznek a_i, b_i, c_i, ...-vel, a másik részt a_i', b_i', c_i' ...-vel.

Ekképen következő négy csúcsháromélet nyerünk

$$\begin{array}{ll} O(a_1\ a_1\ a_3) & O(a_1'\ a_2'\ a_3') \\ O(a_1'\ a_2\ a_3) & O(a_1\ a_2'\ a_3') \\ O(a_1\ a_2'\ a_3) & O(a_1'\ a_2\ a_3') \\ O(a_1\ a_2\ a_3') & O(a_1'\ a_2'\ a_3). \end{array}$$

A háromélek élszögeit felező sugarak

$$\begin{array}{ll} d_1\ d_2\ d_3 & d_1'\ d_2'\ d_3' \\ d_1\ e_2'\ e_3' & d_1'\ e_2\ e_3 \\ e_1'\ d_2\ e_3' & e_1\ d_2'\ e_3 \\ e_1'\ e_2'\ d_3 & e_1\ e_2\ d_3'\,; \end{array}$$

a háromélek lapjaira az O pontban emelt merőlegesek

$$|\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_i'|$$
$$(i=1, 2, 3).$$

Az $|a_i a_i'|$ élet az átellenes lap élszögeinek felező egyeneseivel $|d_i d_i'|$, $|e_i e_i'|$-vel összekötő hat sík egymást a háromélek négy súlyvonalában

$$|s_i s_i'| \quad (i=0, 1, 2, 3, 4),$$

az $|\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_i'|$ egyenest a $|d_i d_i'|$, $|e_i e_i'|$-vel összekötő hat sík (az élszögek felezősíkjai) egymást a háromélek körülírható négy k_i forgáskúpnak

$$|t_i t_i'| \quad (i=0, 1, 2, 3)$$

tengelyeiben, végre az $|a_i a_i'|$ éleket a négy forgáskúp tengelyével összekötő tizenkét sík egymást négy egyenesben az

$$|l_i l_i'| \quad (i=0, 1, 2, 3)$$

ben metszik.

Az

$$O(s_0 s_1 s_2 s_3), \quad O(t_0 t_1 t_2 t_3), \quad O(l_0 l_1 l_2 l_3)$$

négyélek lapjai az

$$O(d_1 d_2 d_3 e_1 e_2 e_3)$$

négylap élein mennek keresztül, míg a három négyél tizenkét éle négy síkban

$$[s_i t_i l_i] \quad (i=0, 1, 2, 3)$$

ben fekszik, melyek egymást egy n egyenesben metszik, a mely n egyenes az s_i-t a t_i, l_i-től harmonikusan választja el.

Az $O(l_1 l_2 l_3)$ és $O(l_0' l_i l_j)$ háromél körülírható forgáskúp tengelye t_0, illetve t_k, mert az $(l_i l_j)$, $(l_0' l_i)$ élszögek felezősíkja $[q_k t_0]$, $[p_k t_k t_j]$.

Az $O(a_1 a_2 a_3)$, $O(a_1' a_2 a_3)$ . . . háromélek magasságvonala m, mely az

$$[a_i\, \mathfrak{a}_i] \quad (i=1, 2, 3)$$

síkoknak metszésvonala, a fönnebbi n egyenest az $O(t_0 t_1 t_2 t_3)$ négyél átellenes lapjaitól harmonikusan választja el.

A

$$k_0 k_1, \quad k_0 k_2, \quad k_0 k_3, \quad k_2 k_3, \quad k_3 k_1. \quad k_1 k_2$$

forgáskúpok egymást az a_i egyeneseken kívül még a

$$b_1 b_2 b_3 c_1 c_2 c_3$$

egyenesekben metszik, melyeket a forgáskúpok negyedik metszőegyeneseinek nevezünk. A b_i, c_i egyenesek az a_i-nek tükörképei az $O(t_0t_1t_2t_3)$ négyél $[t_0t_i]$, $[t_jt_k]$ lapjaira vonatkozólag.

Mindegyik k_i forgáskúpon, a hat negyedik metszőegyenes közül három fekszik, még pedig:

a	k_0-on	a	$b_1\ b_2\ b_3$
«	k_1 «	«	$b_1\ c_2\ c_3$
«	k_2 «	«	$c_1\ b_2\ c_3$
«	k_3 «	«	$c_1\ c_2\ b_3$;

és a k_0k_i, k_jk_k forgáskúpok negyedik metszőegyeneseit a b_i, c_i-t összekötő $[b_ic_i]$ síkok az n egyenesen mennek keresztül.

Ezek után a tárgyalás alá vett feladat megoldását következő tételbe foglalhatjuk össze:

Három, egy ugyanazon O ponton keresztül menő, de nem ugyanegy síkban fekvő egyenes $a_1a_2a_3$, négy csúcsháromélnek képezi éleit.

A háromélek élein keresztül menő és a szemben fekvő lapokra merőleges három sík egymást a háromélek m magasságvonalában, az élszögek felező egyeneseit a szemben fekvő éllel összekötő hat sík egymást hármasával a háromélek négy súlyvonalában s_i-ben metszi.

A háromélek éleire az O pontban merőlegesen álló három sík, az élekkel szemben fekvő lapokat a háromélek μ magassíkjában metszi, míg a lapszögeket felező síkoknak hat metszőegyenesre a szemben fekvő lapokkal, a háromélek négy súlysíkjában σ_i-ben feküsznek.

A háromélek élein keresztül menő négy k_i forgáskúpnak t_i tengelyei egy $O(t_0t_1t_2t_3)$ négyélnek élei, melynek hat lapja átmegy az élszögek felező egyenesein és merőleges e felezőket tartalmazó hároméllapokra.

A háromélek lapjait érintő négy H_i forgáskúpnak tengelyeire azoknak O pontjában merőlegesen álló τ_i síkok, egy $O(\tau_0\tau_1\tau_2\tau_3)$ négylapnak lapjai, melynek hat éle, a lapszögeket felező síkoknak és az O pontban a lapszögek éleire merőlegesen álló síkoknak, metszőegyenese.

A háromélek éleit a t_i tengelyekkel összekötő tizenkét sík egymást hármasával négy l_i egyenesben metszi.

Az $O(t_0t_1t_2t_3)$, $O(l_0l_1l_2l_3)$

$O(s_0s_1s_2s_3)$

négyélek lapjai a háromélek élszögeinek felezőin mennek keresztül és élei négy, egymást egy n egyenesben metsző $[t_il_is_in]$ síkban fekszenek; végre a $t_il_is_in$ sugarak harmonikus négyes csoportot alkotnak.

A k_i forgáskúpok közül kettő-kettő egymást az $O(a_1a_2a_3)$ háromél élein kívül még egy negyedik egyenesben metszi; egészben véve hat ily negyedik metszőegyenes van; mindegyik forgáskúpon fekszik három.

A négy forgáskúp közül kettőnek és a másik kettőnek negyedik metszőegyenesét összekötő sík, a fönnebbi n egyenesen megy keresztül, mely n egyenes, az m magasságvonalat, az $O(t_0t_1t_2t_3)$ négyél átellenes lapjaitól harmonikusan választja el.

Végre a k_i forgáskúpok negyedik metszőegyenesei, a háromél súlyvonalaitól meghatározott négyél egyes lapjaiban fekszenek.

A háromélek lapjainak tizenkét metszőegyenese a τ_i síkokkal, hármasával négy λ_i síkban fekszenek.

Az $O(\tau_0\tau_1\tau_2\tau_3)$, $O(\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$

$O(\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$

négylapok élei a háromélek lapszögeinek felezősíkjaiban fekszenek, és lapjai egymást, négy egy ν síkban fekvő $|\tau_i\lambda_i\sigma_i\nu|$ egyenesben metszik; végre a $\tau_i\lambda_i\sigma_i\nu$ síkok harmonikus négyes csoportot alkotnak.

A H_i forgáskúpok közül kettő-kettőnek, a háromélek lapjain kívül még egy negyedik közös érintősíkja van; e negyedik érintősíkok száma hat; mindegyik forgáskúphoz tartozik három.

A négy forgáskúp közül kettőnek és a másik kettőnek negyedik érintősíkja egymást a fönnebi ν síkban metszi, mely ν sík a μ magasságsíkot az $O(\tau_0\tau_1\tau_2\tau_3)$ négylap átellenes éleitől harmonikusan választja el.

Végre a H_i forgáskúpok negyedik érintősíkjai a súlysíkoktól meghatározott négylap élein mennek keresztül.

Klug Lipót.

SZÁMELMÉLETI TÉTELEK.

(Második és befejező közlemény).

Az előbb vizsgált

$$ku_i+l \,(\mathrm{mod.}\, m)$$
$$(i=1, 2, \ldots, \varphi(m))$$

sorozatban oly számok is vannak, a melyek m-hez képest nem relativ primek. Ezekre is állíthatunk fel egy tételt a ψ függvény segítségével.

3*b*. *tétel. Ha* $(k, m)=1$, $(l, m)=1$, *akkor a*

$$ku_i+l \,(\mathrm{mod.}\, m)$$
$$(i=1, 2, \ldots, \varphi(m))$$

sorozatban $\dfrac{\psi(m)}{\psi(p_1 p_2 \ldots p_r)}$ *oly szám van, mely az* m *törzstényezői közül csak a*

$$p_1, p_2, \ldots, p_r$$

tényezőkkel osztható.

A szóban forgó sorozat (mod. m) különböző számai, mint már láttuk, a (IV.*) alatti számok

$$kv_1+l+xm', \; kv_2+l+xm', \ldots, \; kv_{\varphi(m')}+l+xm' \qquad \text{(IV.*)}$$
$$\left(x=1, 2, \ldots, \frac{m}{m'}\right)$$

a hol

$$m'=p_1 p_2 \ldots p_s$$

és a v_i számok az m'-hez relativ prim számok legkisebb maradékai (mod. m'). Ha valamely szám m törzstényezői közül csak a

$$p_1, p_2, \ldots, p_r$$

tényezőkkel osztható, akkor legnagyobb közös osztója m'-vel

$$d'=p_1p_2\ldots p_r.$$

Mi most a (IV.*) alatti számok közül azokat keressük, a melyek e tulajdonsággal bírnak. Jelöljük e számok számát átmenetileg $\psi'_{d'}$-vel. Minthogy

$$(kv_i+l,\, m')=d' \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,\varphi(m'))}$$

relációból következik a

$$(kv_i+l+xm',\, m')=d' \quad {\scriptstyle \left(x=1,2,\ldots,\frac{m}{m'}\right)} \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,\varphi(m'))}$$

reláczió és fordítva, tehát $\psi'_{d'}:\frac{m}{m'}$ annyi, mint a

$$kv_1+l,\; kv_2+l,\;\ldots,\; kv_{\varphi(m')}+l$$

sorozatban lévő ama számok száma, melyeknek legnagyobb közös osztójuk m'-vel d'. De ezen sorozat $1b$. értelmében a következőképen írható:

$$k\left(v_{d'_1}+x\frac{m'}{d'}\right)+l,\; k\left(v_{d'_2}+x\frac{m'}{d'}\right)+l,\ldots,\, k\left(v_{d'\varphi\left(\frac{m'}{d'}\right)}+x\frac{m'}{d'}\right)+l \qquad (d)$$

a hol $v_{d'_i}$ az $\frac{m'}{d'}$-hez relativ prim számok legkisebb maradékait jelenti $\left(\text{mod.}\frac{m'}{d}\right)$ és $x(\text{mod.}\, d')$ mindazon értékeket veszi fel, a melyek mellett

$$\left(v_{d'i}+x\frac{m'}{d'},\, m'\right)=1 \quad {\scriptstyle \left(i=1,2,\ldots,\varphi\left(\frac{m'}{d'}\right)\right)}.$$

Mivel m' törzstényezői egyszerűek, a keresett számok következőkép jellemezhetők: relativ primek $\frac{m'}{d'}$-hez és oszthatók d'-vel. Ragadjunk ki a (d) alatti számokból egy csoportot

$$k\left(v_{d'i}+x\frac{m'}{d'}\right)+l.$$

E csoport összes számai akkor és csak akkor relativ primek $\frac{m'}{d'}$-hez, ha

$$\left(kv_{d'i}+l, \frac{m'}{d'}\right)=1.$$

Mivel továbbá

$$\left(k\frac{m'}{d'}, d'\right)=1,$$

a

$$kv_{d'i}+l+k\frac{m'}{d'}x\equiv 0 \pmod{d'}$$

kongruenczia kielégíthető az

$$x\equiv a_j \pmod{d'}$$

értékkel és minthogy

$$(l, d')=1$$

egyszersmind

$$\left(kv_{d'i}+k\frac{m'}{d'}a_j, d'\right)=1$$

azaz

$$\left(v_{d'i}+\frac{m'}{d'}a_j, d'\right)=1$$

és minthogy

$$\left(v_{d'i}+\frac{m'}{d'}a_j, \frac{m'}{d'}\right)=1,$$

lesz

$$\left(v_{d'i}+\frac{m'}{d'}a_j, m'\right)=1.$$

Ha tehát

$$(kv_{d'i}+l, m')=1$$

akkor a megfelelő csoportban van egy szám, a melynek legnagyobb közös osztója m'-vel d'; más esetekben pedig az egész csoportban ily szám nincsen. Ezek szerint $\psi'_{d'}:\frac{m}{m'}$ annyi, mint a

$$kv_{d'i}+l \left(\text{mod.}\ \frac{m'}{d'}\right)$$

$$\left(i=1, 2, \ldots, \varphi\left(\frac{m'}{d'}\right)\right)$$

sorozatban foglalt $\frac{m'}{d'}$-hez relativ prim számok száma. És így

$$\psi'_{d'}=\frac{m}{m'}\psi\left(\frac{m'}{d'}\right);$$

azonban

$$\psi(m')=\psi(d')\,\psi\left(\frac{m'}{d'}\right)$$

és így

$$\psi'_{d'}=\frac{m}{m'}\frac{\psi(m')}{\psi(d)}=\frac{\psi(m)}{\psi(d')}=\frac{\psi(m)}{\psi(p_1p_2\ldots p_r)}.$$

Eddig a

$$\underset{(i=1,2,\ldots,\varphi(m))}{ku_i+l\,(\text{mod.}\,m)}$$

sorozatot azon esetekben vizsgáltuk, midőn

$$(k,m)=1,\quad (l,m)=1,$$

térjünk most át a többi esetre.

4. *tétel. Ha* $(k,m)=d$, $(l,m)=1$, *akkor a*

$$\underset{(i=1,2,\ldots,\varphi(m))}{ku_i+l\,(\text{mod.}\,m)}$$

sorozatban

$$\frac{\psi(m)}{\psi(d)}\cdot\frac{\varphi(d)}{\varphi(m)}\cdot\varphi\left(\frac{m}{d}\right)$$

oly szám van, a mely m-hez képest relativ prim.

Ha u_{d_i}-vel jelöljük az $\frac{m}{d}$-hez relatív prim számokat, akkor az 1 *b.* tétel értelmében a szóban forgó sorozat számai nem mások, mint a

$$k\left(u_{d_i}+x\frac{m}{d}\right)+l\,(\text{mod.}\,m)$$
$$(x=1,2,\ldots,(\text{mod.}\,m))$$
$$\left(i=1,2,\ldots,\varphi\left(\tfrac{m}{d}\right)\right)$$

sorozat ama számai, a melyekben

$$\left(u_{di}+x\frac{m}{d},m\right)=1.$$

Azonban $(k,m)=d$ lévén, az ugyanazon i-hez tartozó csoport számai

$$k\left(u_{di}+x\frac{m}{d}\right)+l=ku_{di}+l+kx\frac{m}{d}$$

kongruensek (mod. m) és így az eredeti sorozat nem más, mint

$$ku_{di}+l\,(\text{mod. } m)$$
$$\left(i=1,2,\ldots,\varphi\left(\frac{m}{d}\right)\right)$$

sorozat.

E számok között, mivel ismét $(k, m)=d$, a (mod. m) különböző számok a következők:

$$ku_{d_1}+l, \quad ku_{d_2}+l, \ldots, ku_{d\varphi\left(\frac{m}{d}\right)}+l. \tag{e}$$

Az (e) alatti számok mind relativ primek d-hez, minthogy

$$(k, m)=d, \quad (l, d)=1\,;$$

közülök tehát azok és csak azok relativ primek m-hez, a melyek relativ primek

$$d'=p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}\ldots p_s^{\alpha_s}$$

-hez, hiszen előbbi jelölésünk szerint

$$m=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}\ldots p_s^{\alpha_s}$$
$$d=p_1^{\beta_1}\ldots p_r^{\beta_r}.$$

Az (e) alatti sorozatban szereplő u_{d_i} számok helyett már most az ismert módon a d'-hez relativ prim számokat hozhatjuk be. Legyenek e számok legkisebb maradékai (mod. d'):

$$u_1', u_2', \ldots, u_{\varphi(d')}',$$

akkor, mivel

$$\left(\frac{m}{d}, d'\right)=d',$$

minden

$$u_i'+xd'$$
$$\left(x=1,2,\ldots,\frac{m}{dd'}\right)$$
$$(i=1,2,\ldots,\varphi(d'))$$

sorozatban $\dfrac{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)}{\varphi(d')}$ számú u_{d_i}-szám van. Minthogy továbbá a

$$k(u_i'+xd')+l=ku_i'+l+kxd'$$

csoport számai egyidejűleg relativ primek d'-hez, vagy pedig nem azok, tehát az (e) számok között $\dfrac{\varphi\left(\dfrac{m}{d}\right)}{\varphi(d')}$-szer annyi az m-hez relativ prim, mint a mennyi a

$$ku'_1+l,\quad ku'_2+l, \ldots, ku'_{\varphi(d')}+l \qquad (e^*)$$

számok között a d'-hez relativ prim. De $(k, d')=1$ lévén, e számok a

$$\underset{(i=1,2,\ldots,\varphi(d'))}{ku'_i+l\,(\mathrm{mod.}\ d')}$$

sorozat különböző számai. Továbbá $(l, d')=1$ és így az (e^*) alatt $\psi(d')$ oly szám van, mely d'-hez relativ prim. Ennélfogva az eredeti sorozatban az m-hez relativ prim számok száma

$$\frac{\varphi\left(\dfrac{m}{d}\right)}{\varphi(d')}\cdot\psi(d').$$

Azonban

$$\psi(m)=\psi(d').p_1^{\alpha_1-1}\ldots p_r^{\alpha_r-1}\psi(p_1p_2\ldots p_r)=$$
$$=\varphi(d')\psi(d)p_1^{\alpha_1-\beta_1}\ldots p_r^{\alpha_r-\beta_r},$$

tehát

$$\psi(d')=\frac{\psi(m)}{p_1^{\alpha_1-\beta_1}\ldots p_r^{\alpha_r-\beta_r}\psi(d)};$$

épen így

$$\varphi(d')=\frac{\varphi(m)}{p_1^{\alpha_1-\beta_1}\ldots p_r^{\alpha_r-\beta_r}\varphi(d)}$$

és ennélfogva

$$\frac{\varphi\left(\dfrac{m}{d}\right)}{\varphi(d')}\psi(d')=\frac{\psi(m)}{\psi(d)}\frac{\varphi(d)}{\varphi(m)}\varphi\left(\frac{m}{d}\right).$$

5. *tétel. Ha* $(k, m)=1$, $(l, m)=d$, *akkor a*

$$\underset{(i=1,2,\ldots,\varphi(m))}{ku_i+l\,(\mathrm{mod.}\ m)}$$

sorozatban $\dfrac{\psi(m)}{\psi(d)}\varphi(d)$ *oly szám van, mely m-hez relativ prim.*

Mivel $(k, m)=1$, sorozatunk a (mod. m) különböző számok:

$$ku_1+l, \quad ku_2+l, \ldots, ku_{\varphi(m)}+l. \qquad (f)$$

E számok mind relativ primek d-hez, hiszen

$$(ku_i, d)=1$$
$$(i=1, 2, \ldots, \varphi(m))$$

tehát közülök azok és csak is azok relativ primek m-hez, a melyek relativ primek $\frac{m}{d}$-hez. Az u_i számok helyett ismét behozhatjuk az u_{di} számokat és mivel minden

$$k\left(u_{di}+x\frac{m}{d}\right)+l=ku_{di}+l+kx\frac{m}{d}$$

csoport számai egyidejűleg relativ primek $\frac{m}{d}$-hez, vagy pedig nem azok, az (f) számok között $\frac{\varphi(m)}{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)}$-szer annyi az $\frac{m}{d}$-hez relativ primek száma, mint a mennyi a

$$ku_{d_1}+l, \quad ku_{d_2}+l, \ldots, ku_{d\varphi\left(\frac{m}{d}\right)}+l \qquad (f^*)$$

számok között. Az (f^*) sorozatban szereplő u_{di}-számokról áttérünk az u'_i számokra. Ismét az (f^*) számok mind relativ primek lévén d-hez, közülök azok és csak azok relativ primek m-hez, a melyek relativ primek d'-hez. Másrészt minden

$$k(u'_i+xd')+l=ku'_i+l+kxd'$$

csoport számai egyidőben relativ primek d'-hez, vagy pedig nem azok; ennélfogva (f^*) alatt $\frac{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)}{\varphi(d')}$-szer annyi $\frac{m}{d}$-hez relativ prim szám van, mint a hány d'-hez relativ prim szám a

$$ku'_1+l, \quad ku'_2+l, \ldots, ku'_{\varphi(d')}+l$$

számok között. De

$$(k, d')=1, \quad (l, d')=1$$

lévén, a d'-hez relativ primek száma $\psi(d')$. E szerint az eredeti sorozatban az m-hez relativ prim számok száma

$$\frac{\varphi(m)}{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)} \frac{\varphi\left(\frac{m}{d}\right)}{\varphi(d')} \psi(d') = \frac{\varphi(m)}{\varphi(d')} \psi(d').$$

Ha e kifejezést úgy alakítjuk át mint előbb, lesz:

$$\frac{\varphi(m)}{\varphi(d')} \psi(d') = \frac{\psi(m)}{\psi(d)} \varphi(d).$$

Hátra van még a legáltalánosabb eset, midőn sem k, sem l nem relativ primek m-hez. A 3. és 4. alatti tétel tárgyalása világosan kijelöli a követendő utat s azért felesleges ismétléseket kikerülve, csak az eredményt közöljük, mely egyszersmind az előbbieket magában foglalja.

5. *tétel. Ha*

$$(k, m) = d_1, \quad (l, m) = d_2, \quad (d_1 d_2) = 1$$

akkor a

$$k u_i + l \,(\text{mod.}\, m)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \varphi(m))$$

sorozatban

$$\frac{\psi(m)}{\psi(d_1 d_2)} \cdot \frac{\varphi(d_1 d_2)}{\varphi(m)} \cdot \varphi\left(\frac{m}{d_1}\right)$$

olyan szám van, a mely m-hez képest relativ prim. Az $u_i\,(\text{mod.}\, m)$ *számok az m-hez relativ prim számok,* ψ *pedig a 3. tételben bevezetett számelméleti függvény.*

Bauer Mihály.

AZ ÍVMÉRÉS ELMÉLETE.

(Harmadik és befejező közlemény.)

8. Hogy ha az $f(x)$ függvény az $(x_0 x')$ számközön belül nem folytonos, az $y = f(x)$ egyenletnek megfelelő görbe amaz ívének kiszámítását, a mely az (x_0, y_0), (x', y') pontok között kiterjed, bizonyos $\bar{y} = \bar{f}(x)$ görbe megfelelő ívének kiszámítására vezethetjük vissza, a hol a $\bar{f}(x)$ egy az $(x_0 x')$ számközön belül folytonos függvényt jelent.

Legyenek ugyanis az $f(x)$ függvénynek szakadópontjai az $(x_0 x')$ számközön belül

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, (\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 \ldots)$$

és legyen

$$s_r = f(\xi_r + 0) - f(\xi_r - 0).$$

Jelentse továbbá, hogy ha x nem szakadópontja $f(x)$-nek, $\sum\limits_{x_0}^{x} s$ mindamaz s_r-eknek összegét, a melyekre nézve $\xi_r < x$, hogy ha pedig x szakadópontja $f(x)$-nek, $\sum\limits_{x_0}^{x} s$ képviselje azt az összeget, a mely az előbbiből az $f(x) - f(x-0)$ tag hozzácsatolása révén származik, akkor az $(x_0 x')$ közben a

$$\varphi(x) = \sum_{x_0}^{x} s$$

függvénynek szakadópontjai azonosak lesznek az $f(x)$ függvényéivel. Két szakadópont között a $\varphi(x)$ függvény értéke állandó és minden egyes szakadópontjára nézve lesz:

$$\varphi(\xi_r + 0) - \varphi(\xi_r - 0) = f(\xi_r + 0) - f(\xi_r - 0).$$

Ezek alapján belátható, hogy az $(x_0 x')$ közön belül az

$$\bar{f}(x) = f(x) - \varphi(x)$$

függvény mindenütt folytonos.

Most már a következő tétel bizonyítható be: *az $y = f(x)$ görbének az x_0 és x' abszczisszák között megfelel bizonyos ívhosszúság vagy nem, a szerint a mint az $\bar{y} = \bar{f}(x)$ görbének ugyanazon abszczisszák közt van ívhosszúsága, vagy pedig nincsen. Hogy ha az $\bar{y} = \bar{f}(x)$ görbének ívhosszúsága az x_0 és x' abszczisszák között $\bar{L}$, akkor lesz:*

$$L = \bar{L} + \sum_{x_0}^{x'} |s|.$$

Tegyük fel, hogy a

$$\varphi(x') = \sum_{x_0}^{x'} s$$

összegben előforduló s_r-ek abszolut értékeik fogyó nagysága szerint elrendezve a következők:

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$$

és legyen

$$\varphi_p(x') = \sum_{(r=p+1, p+2, \ldots)} \sigma_r$$

Szorozzuk már mostan a $\varphi(x)$-ben előforduló s-eket két csoportba oly módon, hogy az egyik mindazokat az s-eket tartalmazza, a melyek $\varphi_p(x')$ tagjai között is előfordulnak, a másik pedig a többieket és nevezzük az első csoportba tartozó s-ek összegét $\varphi_p(x)$-szel, végre pedig jelentse $\psi(x)$ a $\varphi(x)$-ben és $\psi_p(x)$ a $\varphi_p(x)$-ben előforduló tagok abszolut értékeinek összegét.

Ha már most az

$$y^{(p)} = f(x) - [\varphi(x) - \varphi_p(x)]$$

függvényt alkotjuk meg, könnyen belátható, hogy e függvények csak oly szakadópontjai lesznek, a melyek egyikében sem nagyobb a függvény ugrása $|\sigma_{p+1}|$-nél. Hogy ha az 5. czikkben értelmezett L_n összegeket az $\bar{y} = f(x) - \varphi(x)$ és $y^{(p)} = f(x) - [\varphi(x) - \varphi_p(x)]$ görbéknek megfelelőleg $\bar{L}_n$-nel ill. $L_n^{(p)}$-nel jelöljük, e számértékek közt a következő módon állapithatunk meg összefüggést:

Legyen A, B és C három pont, a melyeknek koordinátai rendre:

$$x_{nr},\ \bar{y}_{nr};\quad x_{n,r+1},\ \bar{y}_{nr}+y^{(p)}_{n,r+1}-y^{(p)}_{nr};\quad x_{n,r+1},\ y_{n,r+1},$$

akkor

$$AB-BC\leqq AC\leqq AB+BC.$$

Hogy ha ebbe az AB, BC és AC közök mérőszámait a koordinátákban kifejezve helyettesitjük, nyerjük, hogy

$$\left|\sqrt{(x_{n,r+1}-x_{nr})^2+(y^{(p)}_{n,r+1}-y^{(p)}_{nr})^2}\right|-\left|\varphi_p(x_{n,r+1})-\varphi_p(x_{nr})\right|\leqq$$
$$\leqq\left|\sqrt{(x_{n,r+1}-x_{nr})^2+(\bar{y}_{n,r+1}-\bar{y}_{nr})^2}\right|\leqq$$
$$\leqq\left|\sqrt{(x_{n,r+1}-x_{nr})^2+(y^{(p)}_{n,r+1}-y^{(p)}_{nr})^2}\right|+\left|\varphi_p(x_{n,r+1})-\varphi_p(x_{nr})\right|.$$

Ámde, hogy ha $x_{n,r+1}>x_{nr}$, akkor

$$\left|\varphi_p(x_{n,r+1})-\varphi_p(x_{nr})\right|\leqq\psi_p(x_{n,r+1})-\psi_p(x_{nr})$$

és így

$$\left|\sqrt{(x_{n,r+1}-x_{nr})^2+(y^{(p)}_{n,r+1}-y^{(p)}_{nr})^2}\right|-\left[\psi_p(x_{n,r+1})-\psi_p(x_{nr})\right]\leqq$$
$$\leqq\left|\sqrt{(x_{n,r+1}-x_{nr})^2+(\bar{y}_{n,r+1}-\bar{y}_{nr})^2}\right|\leqq$$
$$\leqq\left|\sqrt{(x_{n,r+1}-x_{nr})^2+(y^{(p)}_{n,r+1}-y^{(p)}_{nr})^2}\right|+\left[\psi_p(x_{n,r+1})-\psi_p(x_{n,r})\right].$$

Hogy ha itt r helyébe az $1, 2, \ldots, m_n$ értékeket helyettesítjük és összegezűnk, lesz:

$$L^{(p)}_n-\psi_p(x')\leqq\bar{L}_n\leqq L^{(p)}_n+\psi(x). \qquad 1)$$

Ha ebben a képletben $p=0$-t helyettesitünk, $y^{(p)}$ átmegy y-ba, $\psi_p(x')$ pedig $\psi(x')$-be, $L^{(p)}_n$ L_n-be. Igy nyerjük, hogy

$$L_n\leqq\bar{L}_n+\psi(x')$$

A 7. §. tételei szerint ez mutatja, hogy L_n-nek akkor van az (x_0x') köz fölosztásának módjától független L határértéke, hogy ha $\bar{L}_n$-nek van bizonyos $\bar{L}$ határértéke. Hogy e határérték

$$L=\bar{L}+\psi(x')=\bar{L}+\sum_{x_0}^{x'}|s|,$$

következőképen láthatjuk be:

Minthogy $\sum\limits_{i+1,2}\sigma_i$ véges érték, bármely pozitiv δ értéknek megfelelőleg p_1-et oly módon választhatjuk, hogy minden p_1-nél nagyobb

p mellett $\psi_p(x') < \delta$ legyen. Az (1) alatti egyenlőtlenségből tehát következik, hogy p úgy valasztható, hogy

$$L^{(p)} - L < \delta$$

legyen. Másrészt azonban könnyen belátható, hogy

$$L = L^{(p)} + \sum_{r=1}^{p} |\sigma_r| = L^{(p)} + \psi(x') - \psi_p(x'),$$

mert az $y^{(p)} = f(x) - [\varphi(x) - \varphi_p(x)]$ görbét oly módon számaztathatjuk az $y = f(x)$ görbéből, hogy ennek ama darabjait toljuk össze, a melyeknek végpontjai a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ ugrásoknak megfelelő szakadópontok. Ebből azonban következik, hogy a p-nek fentebbi választása mellett lesz:

$$L^{(p)} - [L - \psi(x')] < \delta,$$

úgy hogy

$$L - (\overline{L} + \psi(x')) < 2\delta.$$

Amde δ minden határon túl kicsinynek választható és azért lesz:

$$L = \overline{L} + \psi(x') = \overline{L} + \sum_{x_0}^{x'} |s|.$$

E tétel alkalmazásaképen a következő példát tárgyaljuk:

Legyen

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$$

a valós számoknak valamely megszámlálható végtelen sokasága,*

* P. o. a valós algebrai számok sokasága.

a melynek megfelelőleg megadjuk a pozitiv számoknak oly

$$s_1, s_2, s_3, \ldots$$

sokaságát, a melyeknek összege valamely véges S értékkel egyenlő, akkor

$$y = \sum_{-\infty}^{x} s_r,$$

a hol az összegezés mindazokra az r értékekre kiterjesztendő, a melyekre nézve $\omega_r < x$, oly függvénye x-nek, a melynek szakadópontjai $\omega_1, \omega_2, \ldots$

Hogy ha tehát meg akarnók határozni az $y=\sum_{-\infty}^{x} s_r$ egyenletnek megfelelő görbének azt az ívét, a melyet az x_0, y_0; x', y' pontok határolnak, csak tekintetbe kell vennünk, hogy itt

$$\overline{y}=\sum_{-\infty}^{x} s_r-\sum_{x_0}^{x'} s_r=y_0$$

és így

$$\overline{L}=x'-x_0.$$

Minthogy továbbá

$$\psi(x')=y'-y_0$$

lesz:

$$L=x'-x_0+y'-y_0.$$

9. Ismeretes, hogy ha differencziálható függvények esetében a függvény differencziálhányadosát bizonyos tartományon belül ismerjük, hogy akkor a differencziálhányados értékeiből és értékeinek változásából fontos következtetéseket tudunk levonni magának a függvénynek e tartományon belül való magatartására. A *nem differencziálható függvényeknek* megfelelőleg szintén képesek vagyunk oly függvényeket alkotni, a melyek bizonyos tekintetben a differencziálhányados általánosításának tekinthetők és a melyeknek bizonyos tartományon belül való viselkedéséből — épúgy mint a differencziálható függvények esetében a differencziálhányados viselkedéséből — képesek vagyunk az eredeti függvénynek e tartományon belül magatartására következtetni.

Hogy $f(x)$ az x valós változónak valamely tetszésszerinti valós függvénye és h valamely tetszésszerinti pozitiv számérték, az

$$\frac{f(x+h')-f(x)}{h'}$$

kifejezésnek h'-nak a 0 és h között fekvő értékei mellett felső és alsó határa lesz, a melyek közül akár az első, akár pedig mind a kettő végtelen nagy is lehet. Nevezzük ezt a felső határt $D^h f(x)$-nek, az alsót pedig $D_h f(x)$-nek, akkor világos, hogy ha $h_1<h$, hogy

$$D^{h_1} f(x \leqq D^h f(x), \quad D_{h_1} f(x) \geqq D_h f(x).$$

Ebből következik, hogy $D^h f(x)$ vagy mindig $+\infty$, vagy pedig

h-nak a 0-hoz való közeledtével bizonyos véges határértékhez közeledik.

A következőkben ezeket a jelöléseket fogjuk használni:

$$\lim_{h=0} D^h f(x) = D^+ f(x), \quad \lim_{h=0} D_h f(x) = D_+ f(x)$$

és a $D^+f(x)$ és $D_+f(x)$ értékeket, az x pontban az $f(x)$ függvényhez tartozó *deriváltak határainak* fogjuk nevezni; még pedig $D^+f(x)$-et *a növekedő változónak megfelelő derivált felső határának* és $D_+f(x)$-et *a növekedő változónak megfelelő derivált alsó határának*.

Egészen hasonló módon alkothatunk az

$$\frac{f(x-h')-f(x)}{h'}$$

kifejezés vizsgálatából kiindulva két ilyen határértéket, a melyet $D^-f(x)$-szel, illetőleg $D_-f(x)$-szel fogunk jelölni. $D^-f(x)$ lesz *a fogyó változónak megfelelő deriváltnak felső határa és* $D_-f(x)$ *a fogyó változónak megfelelő deriváltnak alsó határa.*

Hogy ha $D^+f(x) = D_+f(x)$, akkor $f(x)$ az x pontban a növekedő változónak megfelelőleg differencziálható, hogy ha pedig $D^-f(x) = D_-f(x)$, akkor az x pontban a fogyó változónak megfelelőleg differencziálható. Hogy ha $D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) = D_-f(x)$, akkor a differencziálhatóság tekintetében $f(x)$ az x pontban egészen szabályos.

Hogy ha $f(x)$ az $(x_6 x')$ közön belül differencziálható, egy a differencziálszámolásból ismeretes tétel szerint bármely az $(x_0 x')$ közön belül fekvő x és x_1 értékek mellett

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = f'(\xi),$$

a hol ξ bizonyos az x és x_1 között fekvő számértéket jelent.* Hogy ha tehát az $f'(x)$ függvény értéke az $(x_0 x')$ közben mindenütt bizonyos véges G értéken alul marad, akkor e közön felül lesz:

---

* L. KŐNIG: Analizis I. 547. l.

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} < G.$$

E tétel általánositása a következő:

Hogy ha az $(x_0 x')$ *számközön belül valamely tetszés szerinti* $f(x)$ *függvényre nézve úgy a növekedő mint a fogyó változónak megfelelő deriváltnak határai mind egy bizonyos* G *értéken alul maradnak, akkor e közön belül eső bármely* x *és* x_1 *értékek mellett*

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leqq G.$$

Hogy e tételt bebizonyithassuk, alkossuk a

$$\varphi(x)=(G+\delta)x-f(x)$$

függvényt, hol δ valamely tetszés szerinti pozitiv állandó. E függvényről közvetetlenül belátható, hogy az $(x_0 x')$ közön belül minden pontban deriváltjainak mind a négy határa pozitiv számértékek. Kimutatható továbbá róla, hogy ha x és x_1 két az $(x_0 x')$ közön belül fekvő érték és $x_1 > x$, hogy akkor

$$\varphi(x_1)-\varphi(x) \geqq 0.$$

Hogy ha ugyanis $\varphi(x_1)-\varphi(x)<0$ lenne az x és x_1 között levő x értékeknek, a melyekre $\varphi(x_1)-\varphi(x) \leqq 0$, bizonyos ξ felső határuk lenne és akkor volna, vagy

$$\varphi(x_1)-\varphi(\xi)<0,$$

vagy pedig

$$\varphi(x_1)-\varphi(\xi) \geqq 0.$$

Az első esetben szükséges volna, hogy $\xi < x_1$ legyen és akkor, hogy ha $h < x_1 - \xi$,

$$\varphi(\xi+h)-\varphi(\xi)=\varphi(x_1)-\varphi(\xi)-[\varphi(x_1)-\varphi(\xi+h)]$$

negativ volna, a miből következnék, hogy a $\varphi(x)$ függvényre nézve a ξ pontban a növekedő változónak megfelelő deriváltak határai a feltevés ellenére negativok. A második esetben h-nak pozitiv értékei mellett

$$\varphi(\xi)-\varphi(\xi-h)=\varphi(x_1)-\varphi(\xi-h)-[\varphi(x_1)-\varphi(\xi)]$$

negativ volna, a miből a $\varphi(x)$-re vonatkozó feltevés ellenére következnék, hogy a fogyó változónak megfelelő deriváltjainak határai negativok.

Hogy ha tehát a

$$\varphi(x_1)-\varphi(x) \geqq 0$$

relláczióba a $\varphi(x)$ részletes alakját behelyettesítjük, lesz:

$$(G+\delta)(x_1-x)-[f(x_1)-f(x)] \geqq 0,$$

a miből következik, hogy

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leqq G+\delta.$$

Minthogy azonban δ-t tetszőlegesen kicsinynek választhatjuk, ezzel a bebizonyítandó reláczió helyessége világossá válik.

Egészen hasonlóan bizonyítható be az a tétel is, *hogy ha az* (x_0x') *köz minden pontjában az* $f(x)$ *függvény deriváltjainak határai bizonyos* G' *értéknél nagyobbak, akkor minden e közön belül fekvő* x *és* x_1 *érték mellett tesz:*

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \geqq G'.$$

E tétel bebizonyítása végett épúgy mint előbb, a $\varphi(x)$ függvény vizsgálatából indultunk ki, most a

$$\psi(x)=(G-\delta)x-f(x)$$

függvényt kellene megvizsgálnunk, a hol a δ jelentése is a fennebbi.

Egész hasonló módon volna még bebizonyítható a következő tétel is:

Hogy ha az $f(x)$ *függvény az* (x_0x') *közön belül folytonos és a növekedő (vagy fogyó) változónak megfelelő deriváltnak mindkét határa mindenütt a* G *és* G' $(G>G')$ *értékek között fekszik, a melyek közül legalább az egyik véges, akkor minden az* (x_0x') *közön belül fekvő* x *és* x_1 *értékek mellett lesz:*

$$G \geqq \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \geqq G'.$$

10. Az előbbi §-nak a valós változók valós függvényeire vonatkozó tételei alapján az ívhosszúságra vonatkozó következő tételt vezethetjük le:

Hogy ha $f(x)$ az (x_0x') közön belül folytonos és e köz minden pontjában a növekedő (vagy fogyó) változónak megfelelő deriváltjainak határai két G és G' érték között feküsznek, a melyek közül legalább az egyik véges, akkor az $y=f(x)$ görbe amaz ívének, a melyet az x_0, y_0; x', y' pontok határolnak, van bizonyos meghatározott L hosszúsága.

Hogy ha $\overline{G}$ valamely tetszésszerinti pozitiv számot jelent, a melynek csak akkor, hogy ha G és G' ellenkező előjelűek, nagyobbnak kell lennie mint a $|G|$ és $|G'|$ értékek közül a nagyobbnak, akkor:

$$L \leqq 2\left|\sqrt{1+\overline{G}^2}\right|(x'-x_0)+\left|\sqrt{\frac{1}{\overline{G}^2}+1}\right||y_1-y_0|;$$

hogy ha pedig $\overline{G}$ úgy $|G|$-nél mint $|G'|$-nél nagyobb, akkor:

$$L<\left|\sqrt{1+\overline{G}^2}\right|(x'-x_0)$$

és végre, hogy ha G és G' egyenlő előjelűek és $\overline{G}$ úgy a $|G|$-nél mint a $|G'|$-nél kisebb, akkor:

$$L<\left|\sqrt{\frac{1}{\overline{G}^2}+1}\right||y_1-y_0|.$$

Hogy ha ugyanis az

$$L_n=\sum_{r=0}^{m_n}\left|\sqrt{(x_{n,r+1}-x_{nr})^2+(y_{n,r+1}-y_{nr})^2}\right|$$

kifejezést a következő alakra hozzuk:

$$L_n=\sum_{r=0}^{m_n}(x_{n,r+1}-x_{nr})\left|\sqrt{1+\left(\frac{y_{n,r+1}-y_{nr}}{x_{n,r+1}-x_{nr}}\right)^2}\right|,$$

akkor ennek az összegnek tagjait két csoportba szedhetjük a következő módon. Az elsőbe sorozzuk azokat a tagokat, a melyekben

$$\left|\frac{y_{n,r+1}-y_{nr}}{x_{n,r+1}-x_{nr}}\right|\leqq\overline{G},$$

a másodikba pedig a többieket. Jelöljük az első csoportba tartozó tagok összegét L'_n-nel és a második csoportba tartozókét L''_n-nel. Közvetetlenül világos, hogy

$$L'_n \leq (x'-x_0)\left|\sqrt{1+\overline{G}^2}\right|$$

és hogy

$$-\overline{G}(x'-x_0) \leq \Sigma'(y_{n,r+1}-y_{nr}) \leq \overline{G}(x'-x_0),$$

a hol a Σ' jel alatt az összegezés az első csoport tagjaira kiterjesztendő.

A mi a L''_n összeget illeti, ez a következő alakban írható fel:

$$L''_n = \Sigma'' \left|(y_{n,r+1}-y_{nr})\sqrt{\left(\frac{x_{n,r+1}-x_{nr}}{y_{n,r+1}-y_{nr}}\right)^2+1}\right|,$$

a hol a Σ'' jel alatt az összegezés a második csoport tagjaira kiterjesztendő. Minthogy azonban e csoport tagjaira nézve

$$\left|\frac{y_{n,r+1}-y_{nr}}{x_{n,r+1}-x_{nr}}\right| > \overline{G},$$

lesz:

$$L''_n \leq \left|\sqrt{\frac{1}{\overline{G}^2}+1}\right| \Sigma'' \left|y_{n,r+1}-y_{nr}\right|.$$

Ámde

$$\Sigma''(y_{n,r+1}-y_{nr}) = \sum_{r=0}^{m_n}(y_{n,r+1}-y_{nr}) - \Sigma'(y_{n,r+1}-y_{nr}) =$$

$$= y'-y_0-\Sigma'(y_{n,r+1}-y_{nr})$$

és a $\overline{G}$-re vonatkozó feltételek szerint a $\Sigma''(y_{n,r+1}-y_{nr})$ összeg tagjai mind egyenlő előjelűek, a miből következik, hogy

$$\Sigma''\left|y_{n,r+1}-y_{nr}\right| \leq \left|y'-y_0\right| + \overline{G}(x'-x_0).$$

Ennek tekintetbe vételével a fennebb nyert L''_n-re vonatkozó egyenlőtlenség átmegy a következőbe:

$$L''_n \leq \left\{\left|y'-y_0\right| + \overline{G}(x'-x_0)\right\}\left|\sqrt{\frac{1}{\overline{G}^2}+1}\right|.$$

Minthogy

$$L_n = L'_n + L''_n$$

az előbbiekből következik, hogy

$$L_n \leq 2 \left| \sqrt{1+\overline{G}^2} \right| (x'-x_0) + \left| \sqrt{\frac{1}{\overline{G}^2}+1} \right| \left| y_1-y_0 \right|.$$

Ez mutatja, hogy az L_n értékek mindig bizonyos véges értéken alúl maradnak, a miből az előbbiek szerint következik, hogy x_0, y_0; x', y' pontok között elterjedő ívnek bizonyos L mérőszám felel meg, a mely természetesen ugyanazon az értéken alul marad, mint L_n. Ezzel tehát tételünk első része be van bizonyítva.

Hogy ha G és G' végesek és $\overline{G}$ nem kisebb mint $|G|$ és $|G'|$ közül a nagyobbik, akkor ama csoportok közül, a melyekbe az L_n tagjait besoroztuk, az, a melynek tagjai összegül L''_n-t adtak, egyetlenegy tagot sem tartalmaz és így lesz:

$$L_n = L'_n \quad \text{és} \quad L \leq (x'-x_0) \left| \sqrt{1+\overline{G}^2} \right| ;$$

hogy ha pedig G és G' egyenlő előjelűek és $\overline{G}$ kisebb mint a $|G|$ és $|G|$ értékek közül a kisebbik, akkor lesz:

$$L_n = L''_n \quad \text{és} \quad L \leq |y'-y_0| \left| \sqrt{1+\frac{1}{\overline{G}^2}} \right| .$$

E tétel alapján bebizonyítható, hogy az $y=f(x)$ egyenletnek megfelelő görbének bármely $(x_0 x')$ közön belül van ívhosszúsága, hogy ha az $f(x)$ függvényt a következő módon értelmezzük:

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r (x-\omega_r)^{\frac{1}{3}},$$

a hol

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r, \ldots$$

a magasságuk sorrendje szerint elrendezett raczionális számokat jelentik * és

---

* Hogy ha az ω_r raczionális szám legegyszerűbb alakja $\frac{p_r}{q_r}$, akkor $|p_r| + |q_r|$ e raczionális szám *magassága*. (L. Kőnig: Analizis I. 166. l.)

Az n magassághoz tartozó raczionális számok általános alakja:

$$\pm \frac{k}{n-k},$$

a hol $k<n$ és k és n viszonylagos törzsszámok. Minthogy az n-nél kisebb

$$c_r = \frac{1}{(p_r+q_r)^3},$$

ha

$$\omega_r = \pm \frac{p_r}{q_r}.$$

Hogy e végtelen sor az $(x_0 x')$ közön belül valóban függvényt értelmez, úgy bizonyítjuk majd be, hogy e sorról kimutatjuk, hogy e közön belül egyenletesen összetartó.

Legyenek ugyanis

$$\omega_\alpha,\ \omega_{\alpha+1},\ \ldots,\ \omega_{\alpha+\nu-1}$$

az $n+1$ magassághoz tartozó raczionális számok, akkor

$$|\omega_\alpha| \leq n \quad \text{és} \quad \nu \leq 2n.$$

Hogy ha tehát ω_r egyike az $n+1$ magassághoz tartozó raczionális számoknak, lesz:

$$c_r(x-n)^{\frac{1}{3}} \leq c_r(x-\omega_r)^{\frac{1}{3}} \leq c_r(x+n)^{\frac{1}{3}},$$

vagyis

$$-c_r n^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \leq c_r(x-\omega_r)^{\frac{1}{3}} \leq c_r n^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Legyen az $\left|\frac{x_0}{n}\right|$ és $\left|\frac{x'}{n}\right|$ értékek közül a nagyobbik u_n-nel egyenlő, akkor az egyenlőtlenségből a következő származik:

$$-c_r n^{\frac{1}{3}}(1+u_n)^{\frac{1}{3}} \leq c_r(x-\omega_r)^{\frac{1}{3}} \leq c_r n^{\frac{1}{3}}(1+u_n)^{\frac{1}{3}}.$$

Ámde, minthogy ω_r magassága $n+1$,

$$c_r = \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3},$$

és ennek tekintetbe vételével nyerjük, hogy

---

számok között legfeljebb $n-1$ van, a mely n-hez viszonylagos törzsszám, az n magassághoz tartozó raczionális számok száma nem lehet nagyobb $2(n-1)$-nél.

Az összes raczionális számokat magasságuk szerint úgy rendezhetjük el, hogy a kisebb magasságuakat elébe teszszük a nagyobb magasságúaknak, az egyenlő magasságúakat pedig növekedő abszolut értékek szerint rendezzük el és két egyenlő abszolut értékű közül a pozitivot a negativ elébe teszszük.

$$-\frac{1}{n^{\frac{8}{3}}}(1+u_n)^{\frac{1}{3}} < c_r(x-\omega_r)^{\frac{1}{3}} < \frac{1}{n^{\frac{8}{3}}}(1+u_n)^{\frac{1}{3}}.$$

Ha ebbe $r=a$, $a+1, \ldots, a+r-1$-t helyettesítünk és összegezünk, lesz:

$$-\frac{2}{n^{\frac{5}{3}}}(1+u_n)^{\frac{1}{3}} < \sum_{r=a}^{a+r-1} c_r(x-\omega_r)^{\frac{1}{3}} < \frac{2}{n^{\frac{5}{3}}}(1+u_n)^{\frac{1}{3}}$$

és minthogy

$$u_n > u_{n+1} > u_{n+2} > \ldots,$$

végre lesz:

$$-2(1+u_n)^{\frac{1}{3}} S_n < \sum_{r=a}^{\infty} c_r(x-\omega_r)^{\frac{1}{3}} < 2(1+u_n)^{\frac{1}{3}} S_n,$$

a hol

$$S_n = \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{(n+1)^{\frac{5}{3}}} + \cdots$$

Ismeretes, hogy bármely kicsiny pozitiv δ számnak megfelelőleg oly m szám állapitható meg, hogy minden $n > m$ mellett $S_n < \delta$ legyen. Hogy ha azonkívül m-et oly nagynak is választjuk, $u_m < \varepsilon$ legyen, a hol ε szintén valamely tetszés szerint kicsinynek választott pozitiv számot jelent, akkor a fennebbiekből következik, hogy minden $n > m$ mellett

$$\left|\sum_{r=a}^{\infty} c_r(x-\omega_r)^{\frac{1}{3}}\right| < 2(1+\varepsilon)\delta,$$

a mi nem egyéb, mint annak feltétele, hogy a

$$\sum_{r=d}^{\infty} c_r(x-\omega_r)^{\frac{1}{3}}$$

sor az $(x_0 x')$ tartományban egyenletesen konvergens legyen.

Igy tehát az $y=f(x)$ görbe egyenletében az $f(x)$ függvényt a fennebbi módon értelmezve, azt látjuk, hogy $f(x)$ az $(x_0 x')$ közön folytonos függvény, a mely x-szel együtt folytonosan nő (monoton függvény). Ebből következik, hogy e közön belül a $D^+f(x)$ és $D_+f(x)$ értékeknek mindenütt pozitivoknak kell lenniök és így ez a folytonos $f(x)$ függvény olyan, a mely tételünk ama követelését kielégíti, hogy a növekedő változónak megfelelő deriváltnak határai az egész közön belül két oly érték között fekszenek, a melyek közül az egyik véges (0 és $+\infty$).

Hogy az ily módon értelmezett $f(x)$ függvény mellett a közönséges módszerek segítségével nem lett volna kideríthető, hogy az $y=f(x)$ görbe ívhosszúsága meghatározható-e, kitünik abból, hogy itt az

$$\int_{x_0}^{x'} dx \left| \sqrt{1+[f'(x)]^2} \right|$$

integrál elveszti értelmét, mert $f'(x)$ minden $x=\omega_r$ érték mellett a $+\infty$ értéket veszi fel és az ω_r értékek száma bármely kicsiny közön belül végtelen nagy.

11. Épúgy mint az előbbi §-ban tárgyalt tételben bizonyos a folytonos $f(x)$ függvényre vonatkozó elégséges feltételeket soroltunk fel, a melyeknek kielégitése mellett $y=f(x)$ görbének az x_0, y_0; x', y' pontok határolta íve kiszámitható, egy másik tételben az ivhosszúság létezésére vonatkozó elégséges feltételeket fogunk felsorolni arra az esetre, hogy ha az $f(x)$ függvény az (x_0x') közön belül nem folytonos többé. E tétel a következő:

Az $y=f(x)$ görbe (x_0, y_0); (x', y') pontjaitól határolt ívének hosszúsága, L kiszámítható, hogy ha $|f(x)|$ az (x_0x') közön belül mindenütt kisebb bizonyos véges pozitiv g számnál és hogy ha minden az (x_0x') közön belül fekvő x pontban a $D^+f(x)$, $D_+f(x)$, $D^-f(x)$, $D_-f(x)$ értékek két G és G' érték között feküsznek, a melyek közül legalább az egyik véges.

Hogy ha azonfelül $f(x)$ az x_0 és x' pontokban folytonos, L az előbbi tételben megjelölt határokon alul marad.

Az $f(x)$-re vonatkozó feltevésekből ugyanis a 9. §. szerint következik, hogy az (x_0x') közön belül, feltéve, hogy $G>G'$,

$$G' \leqq \frac{f(x_{n,r+1})-f(x_{n,r})}{x_{n,r+1}-x_{nr}} \leqq G.$$

Hogy ha $f(x)$ az x_0 és x' pontokban folytonos e reláczió még akkor is érvényes, hogy ha az $x_{n,r+1}$, x_{nr} értékek közül az egyik x_0 vagy x'. Ebben az esetben tehát a felállitott tétel bebizonyitása teljesen azonos módon elvégezhető mint az előbbi §-ban tárgyalt tételé.

Hogy ha $f(x)$ az x_0 és x' pontokban nem folytonos, $f(x)$-et oly

$f^{(1)}(x)$ függvénynyel helyettesítjük majd, mely az (x_0x') közön belül mindenütt ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint $f(x)$ és csak az x_0 és x' pontokban

$$f^{(1)}(x_0)=f(x_0+0),\quad f^{(1)}(x')=f(x'-0).$$

Ámde akkor a bebizonyítandó tétel érvényes az $f^{(1)}(x)$ függvényre nézve és így a 7. § szerint érvényes az $f(x)$ függvényre nézve is.

E tételre érdekes példát szolgáltat az úgynevezett RIEMANN-féle függvény:

$$f(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(rx)}{r^3},$$

a melyben, hogyha az n egész szám és

$$n\leq x\leq n+1,$$

a szerint, a mint

$$x-n \lesseqgtr (n+1)-x$$

az (x) jel a következő módon értelmezendő:

$$(x)=\begin{cases} x-n \\ 0 \\ x-(n+1) \end{cases}$$

E függvényről RIEMANN vizsgálatai * alapján ismeretes, hogy bármely tetszőleges kicsinynek választott közben sem monoton és hogy bármely tetszés szerinti kicsiny közben végtelen sok szakadópontja van. Ezért az $f(x)$ mostani értelmezése mellett a közönséges módszerek segítségével semmiképen sem dönthetnők el, vajjon az $y=f(x)$ görbe bizonyos x_0, y_0; x', y' pontok határolta ívének hosszúsága létezik-e vagy nem. E czikk tételéből azonban következik, hogy e görbe bármely két pontja között elterjedő ívének meghatározott mérőszám felel meg.

Ugyanis, minthogy $x_1<x$ mellett

$$(rx_1)-(rx)\leq r\,(x_1-x)$$

---

* RIEMANN: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch trigonometrische Reihe* (Gesamm. Werke p. 228).

lesz:

$$\frac{(rx_1)-(rx)}{r^3} \leqq \frac{x_1-x}{r^2},$$

a miből következik, hogy

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leqq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2}.$$

Igy tehát látjuk, hogy a $D^+f(x)$, $D_+f(x)$, $D^-f(x)$, $D_-f(x)$ értékek minden pontban $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2}$-nél kisebbek maradnak és ezért itt vehetjük G-nek $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2}$-et és G'-nek $-\infty$-t.

E görbének ívhosszúsága két x_0, y_0; x', y' pont között a 8. §. tétele alapján ki is számítható. Ugyanis, hogy ha

$$\frac{2k-1}{2r} < x < \frac{2k+1}{2r}$$

lesz:

$$k-\tfrac{1}{2} < rx < k+\tfrac{1}{2}$$

és ezért:

$$\frac{(rx)}{r^3} = \frac{x}{r^2} - \frac{k}{r^3}.$$

Ha tehát a 8. §. szerint az

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(rx)}{r^3}$$

függvénynek megfelelő $\overline{f}(x)$ függvényt elöállítjuk, nyerjük, hogy

$$\overline{f}(x) = x\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2},$$

a miből következik, hogy

$$\overline{L} = (x'-x_0)\left|\sqrt{1+\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\right)^2}\right|.$$

Hogy ha abban az esetben, a melyben a $2rx_0$ és $2rx'$ számok közül egyik sem páratlan, $\lambda(r)$ jelöli a $2rx_0$ és $2rx'$ között fekvő páratlan számok számát, abban az esetben pedig, midőn a $2rx_0$ és $2rx'$ közül az egyik, illetőleg mind a kettő páratlan $\lambda(r)$ jelöli, a $2rx_0$ és $2rx'$ között fekvő páratlan számoknak $\frac{1}{2}$-del, illetőleg 1-gyel nagyobbított számát, akkor a 8. §-ban $\sum_{x_0}^{x'} |s|$-sel jelölt összeg a mi függvényünknek megfelelőleg lesz:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda(r)}{r^3}.$$

Igy tehát nyerjük, hogy

$$L=(x'-x_0)\left| \sqrt{1+\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\right)^2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\lambda(r)}{r^3} \right|.$$

Rados Ignácz.

PHYSIKAI SZEMLE.

A levegő folyósítása. LINDE: Erzielung niedrigster Temperaturen. Gasverflüssigung. *Ann. d. Phys.* LVII. 328. l.

A nehezen folyósítható gázok folyékony állapotban való előállítására szükséges alacsony hőmérsékleteket eddig úgy állították elő, hogy az erősen összenyomott gázt közönséges módon a kritikus hőmérséklete alá hűtötték és azután kiáramlani engedték, miközben átmenetileg köd- vagy folyadéksugarak képződtek.

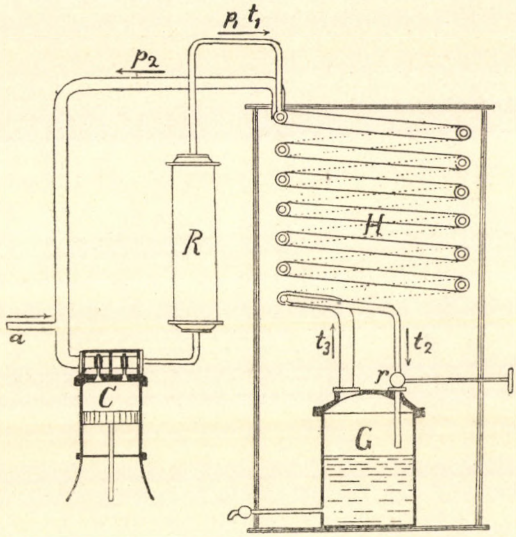
LINDE müncheni tanár egy új készüléket szerkesztett, az úgynevezett «ellenáramkészüléket», melyben a gázok folyósításához kizárólagosan azt a lehűtést használja fel, a mely ugyanazon gáz kiömlésénél felmerül. Minthogy pedig egyszeri kiömlésnél csak aránylag kicsiny, s a nehezen folyósítható gázok folyósításához még nagy nyomáskülönbségek alkalmazása esetében sem elegendő hőmérséklet csökkenés érhető el, azért ezen készüléknél a tetszés szerinti számú kiömlések hatása oly módon van egyesítve, hogy minden megelőző kiömlés a rákövetkező kiömlésben szereplő gáz előleges lehűtésére szolgál.

Az erre szolgáló készülék keresztmetszetét az 1. ábra mutatja. *C* a sürítő, melyben a folyósítandó gáz nyomása p_2-ről p_1-re emeltetik; a gáz azután átmegy az *R* hűtőbe (közönséges kútvíz), a hol t_1 hőmérsékletet vesz fel. Innét az ellenáramkészülékbe (*H*) jut.

Az ellenáramkészülék lényegében két egymásban fekvő spirálisan megcsavart csőből áll, a melyek kifelé rossz hővezetőkkel jól el vannak szigetelve. Az összenyomott és t_1 hőmérsékletű gáz a belső kigyóalakú csőben fut végig, a melyben tovább még t_2 hőmérsékletre hűl le és *r*-nél *G* gyüjtőedénybe ömlik, mialatt a kitágulás folytán hőmérséklete t_3-ra száll le. Innét a levegő a két cső közötti gyűrűszerű téren keresztül visszatér a sürítőbe, mialatt a belső csőben vele szemben áramló melegebb levegőt közelítőleg a saját hőmérsékletére hűti le.

Világos, hogy a kölcsönös hatás következtében t_2 és t_3 hőmérsékletek mind tovább és tovább sülyednek, míg a készülékben végre a kívülről való melegedés s a tágulás okozta lehülés között hőmérsékleti *egyensúlyi* *állapot* fog létesülni. Ez azonban szabály szerint csak akkor fog beállani, ha a készülékben uralkodó nyomás mellett t_3 olyan mélyre szállt alá, hogy a levegő folyósodása megkezdődik.

Azon idő, mely a készülék megindításától az egyensúlyi állapot beálltáig eltelik, természetesen első sorban az ellenáramkészülék méreteitől függ. Ezen készülék az első példányon két, egyenkint 100 m hosszú és 3 cm illetőleg 6 cm átmérőjű csövekből állott s összesen 1300 kg volt a súlya; p_2 nyomás 22 atm. és p_1 65 atm. volt. A sűrítő közelítőleg 20 m³ levegőt



1. ábra.

nyomott át óránként. Az egyensúlyi állapot csak 15 óra mulva következett be; a készülék óránként 3 liter folyó levegőt szolgáltatott.

Egy második készülék, mely két, egyenként 80 m hosszú és 1,9 cm, illetőleg 4,0 cm átmérőjű csőből állott s 500 kg volt a súlya, már csak 5 órát vett igénybe a legalacsonyabb hőmérséklet felléptéig és óránként 1 liter folyó levegőt adott. Végre egy harmadik 60 kg súlyú készüléknél a legalacsonyabb hőmérséklet már 2 óra mulva, sőt ha az *R* hűtőben közönséges kútvíz helyett folyékony szénsavat használtak, 1 óránál kisebb idő alatt volt elérhető.

A Linde-féle kisérleteknek egyik érdekes eredménye az, hogy a *T* hőmérséklettel $(p_2 - p_1)$ nyomáskülömbség hatása alatt kiáramló levegő δ lehűlését kifejező Thomson-Joule-féle képlet

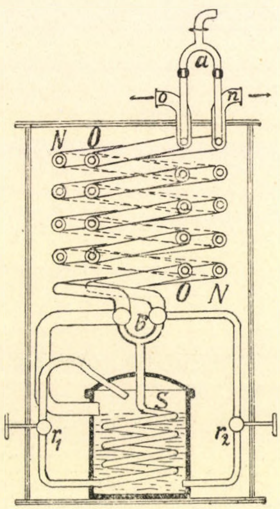
$$\delta = 0{,}276\,(p_2 - p_1)\left(\frac{273}{T}\right)^2$$

igen tág határok érvényesnek bizonyul.

A munkaviszonyokat LINDE nagyon előnyösöknek mondja. A létrehozott hőelvétel Q ugyanis a $(p_2 - p_1)$ nyomáskülönbséggel arányos, a felhasznált munka L pedig $p_1 : p_2$ hányadostól függ. Ezek a nyomások úgy választhatók, hogy a $Q : L$ viszony azon értékhez közeledjen, mely az igen alacsony hőmérsékleteknél Q hőmennyiség elvonására a Carnot-féle cyklusnak, tehát annak a legkedvezőbb esetnek felel meg, a melyben bizonyos hőelvonás a legkisebb munkával érhető el.

LINDE ezen eszközzel kisérletileg bebizonyította THOMSON és JOULE azon elméleti következtetését, hogy a levegő állandó nyomás melletti fajheve c_1 a nyomással nő és pedig annál inkább, minél alacsonyabb a hőmérséklete.

A készülék kissé módosítva lehetővé teszi a gázkeverékekből az egyes gázok, például a levegőből az oxigén és nitrogén különválasztását, és így az oxigénnek nagyban való előállítására alkalmas. Ez az eljárás elvileg azon a tapasztalati tényen alapszik, hogy az egymással kevert gázok egy időben folyósodnak ugyan, de az elpárolgásnál az illékonyabb tér át előbb a légnemű állapotba. Hogy azonban erre okszerű eljárást lehessen alapítani, azt kell elérnünk, hogy a gázok a folyósításukra felhasznált hideget a készülékben visszahagyják, azaz, hogy a készüléket lehetőleg mint közönséges hőmérsékletű gázok hagyják el.



2. ábra.

Ezen czélból, mint azt a 2. ábra mutatja, a hűtőből jövő levegőt a-nál két külön ellenáramkészülékbe N-be és O-ba terelik, melyeknek belső kigyói b-nél újra egyesülnek, úgy hogy az egész levegőáram a gyűjtőedényben újra egy hűtőkigyón, S-en fut végig és azután r_1 segítségével magába a gyűjtőedénybe ereszthető.

Az S hűtő csötől származó hő elpárologtatja a gyűjtő edényben lévő folyadékból a nitrogént, mely N-nek külső gyűrűszerű terében felemelkedik és miután a belső csőben vele szemben áramló levegőt lehűtötte, n-nél elhagyja a készüléket. Igy a gyűjtőedényben levő folyadék oxigénben dúsabb lett, s felemelkedik O-nak külső gyűrűszerű terében, a hol elpárolog és miután a belső csőben vele szemben folyó levegőt szintén hűtötte, o-nál mint többé-kevésbbé tiszta oxigén hagyja el az edényt. Hogy milyen mértékben lesz tiszta ez az oxigén, az első sorban attól függ, hogy az r_2 csap mennyire légzáró.

A véghezvitt kisérletek azt bizonyítják, hogy ilyen módon egy órában egy lóerő felhasználása mellett 5 m^3 levegőt lehet oxigénre és nitrogénre szétválasztani. *Mikola S.*

*

A szentjánosbogár fénye és a Röntgen-sugarak. Muraoka: Das Johanniskäferlicht. *Ann. d. Phys.* LIX. k. 773. l.

Muraoka, japáni physikus érdekes kisérleteket végzett a szentjánosbogárral, melynek fénye bizonyos tekintetben úgy hat, mint a Röntgen-sugarak. Már Becquerel felfedezte, hogy bizonyos fluoreszkáló testek sugarakat bocsatanak ki, melyek hasonló természetűek mint a Röntgen-sugarak. A szentjános bogár fénye pedig analog a fluoreszkáló testekével. Ezen analogia vitte rá Muraokát arra, hogy ez irányban kisérleteket tegyen. Kisérleteit következőképen rendezte be: A fotografáló lemezre különböző alakú kivágásokkal ellátott kartonlapokat rakott s erre fémlemezeket (czink, réz, sárga réz, aluminium stb.); az egészet háromszor-négyszer fekete papirossal körülcsavarva, egy kis ládika fenekére helyezte, a melybe körülbelől 300 szentjánosbogarat eresztett. Hogy a bogarak meg ne szökjenek, a ládikát hálóval letakarta. Igy hagyta két napig.

Czélja volt megtudni, vajjon a fekete papiroson megszűrt szentjános bogár-sugarak áthatolnak-e a fémlemezen s hatnak-e azután az érzékeny lemezre. Azt várta, hogy ha ez tényleg megtörténik, akkor a kartonlapokon lévő kivágások az áthaladás fokát is mutatni fogják. — Azonban egészen mást kapott, mint a mit várt.

Nem a kartonlapok kivágásainak megfelelő helyeken, hanem éppen ott a hol a karton az érzékeny lemezzel érintkezett, volt ez legjobban megtámadva, azaz egészen fekete; ellenben a kivágásoknak megfelelő helyek egészen érintetlenek maradtak.

Ezt a különös jelenséget «szivási jelenségnek» nevezte el s mindenek előtt megvizsgálta, hogy a fémlemez és a kartonlap érintkezése helyén esetleg fellépő potentiál-külömbség a bogársugarak hatása alatt nem hat-e fotografiailag.

E végből felváltva Cu || Zn és Zn || Cu lemezeket, továbbá két 15 lemezpáros Zamboni-féle oszlopot tett az érzékeny lemezre és épúgy kitette a bogársugarak hatásának, mint az előző fém- és kartonlapokat. Azt tapasztalta, hogy mindezek többé-kevésbbé átbocsátják a sugarakat, de a meg-feketedés korántsem oly intenziv, mint a szivási jelenségnél. Tehát az érintkezési elektromosság nem hozhatja létre a szivási jelenséget.

Mikor csak a kivágásokkal ellátott kartonlapot tette a fotografáló lemezre, azt látta, hogy a kivágásoknak megfelelő helyek egészen feketék voltak, a kartonlappal közvetlenül érintkező helyek pedig meg sem voltak támadva, tehát épen fordítva, mint a szivási jelenségnél. Viszont ha a fémlemezt látta el kivágásokkal és a kartonlapot nem, akkor semmi hatás sem mutatkozott, de ha a fotografáló lemezzel a fémlapot hozta érintkezésbe és erre a kivágásos kartonlapot, akkor az egész egyformán megfeketedett.

Mindezekből az tűnik ki, hogy a jelenség létrejövetelének feltétele az, hogy a kivágásos kartonlap közvetlenül érintkezzék a fotografáló lemezzel és föléje fém- vagy más kartonlap legyen téve, a mely a fekete papiroson már megszűrt sugarakat még egyszer megszűri.

Ez a jelenség tehát azt a benyomást kelti, mint a vas permeabilitása a mágnesi erővonalak számára. Talán a kartonpapiros oly sugarak számára, a melyek többszörös papiros rétegeken való szűrés útján jöttek létre, nem annyira permeabilis, mint azok számára, a melyek fém- vagy kartonlapokon még egyszer megszűrődtek.

Azért is nevezte el szivási jelenségnek.

Azután megvizsgálta a különböző anyagok átbocsátó képességét és azt találta, hogy ezen sugarak is épúgy mint a Röntgen-félék, bizonyos összefüggést mutatnak az átbocsátóképesség és a fajsúly között.

A kisérletek folyamán mindinkább meggyőződött arról, hogy a szentjánosbogár sugarainak tulajdonságai lényegesen függnek a szűrő anyagoktól.

E végből nem szűrt sugarakkal is végzett kisérleteket és azt találta, hogy a nem szűrt sugarak egészen úgy viselkednek, mint a közönséges fénysugarak. Oly anyagok, melyek a közönséges fényt nem bocsátják át, a nem szűrt sugarakat sem bocsatják át.

Törést, visszaverődést, polarisatiót épúgy mutatnak, mint a közönséges fénysugarak. Azonban a szűrt sugaraknál nem sikerült sem interferentiát sem polarisatiót, sem törést kimutatnia.

Az a tény, hogy a természetes bogársugarak úgy viselkednek, mint a közönséges fénysugarak, ellenben a szűrt sugarak fémeken, sőt 3 mm vastagságú mészpáton is áthaladnak, Muraokat arra a feltevésre készteti, hogy az ilyen sugarak épen a szűrésnél jönnek létre.

Véleménye szerint analog lehet a Röntgen-sugarak keletkezése is. Azoknak forrása sem keresendő a kathódon vagy az anódon, hanem épen a kathód vagy talán az anód sugaraknak az üvegfalon való megszűrődése hoz létre bizonyos fajta sugarakat; és ha az így nyert sugarakat még továbbá fán, papiroson, aluminiumon stb. újra megszűrjük, akkor mindig más és más természetű sugarak jönnek létre, a melyek valószinüleg homogenebbek is lesznek.

Ha így áll a dolog, akkor a szűrésben egy mód áll rendelkezésünkre arra, hogy a Röntgen-sugarakat homogénekké tegyük. És ha eléggé homogén minőségben állíthatjuk elő, úgy nem volna lehetetlen a visszaverődést, interferentiát és polarisatiót még világosabban kimutatni, mint a hogy eddig történt. A szűrt szentjánosbogár-sugarak inkább hasonlítanak a Becquerel-féle fluoreszkáló sugarakhoz, mint a Röntgen-félékhez, úgy hogy valószinüleg az ibolyántúli és a Röntgen-sugarak közt foglalnak helyet. És így a Röntgen-sugarak is transversálisak volnának, a mint azt már J. J. THOMSON az analogia után vélte. *Mikola S.*

*

Állandó elektromos térben végbemenő forgásokról. G. QUINCKE, Über Rotationen im constanten electrischen Felde. *Ann. de Phys.* N. F. LIX. k. 417. l.

Állandó elektromos térnek nevezi a szerző valamely sűrítő lemezei között lévő teret; a kisérleteiben használt sürítő levegőbe, vagy más szigetelő folyadékba merül, lemezei pedig vagy egy leydeni telep fegyverzetével, vagy pedig egy galvántelep sarkaival (400—1200 kis akkumulátorból álló teleppel) közlekednek, s így állandó potentiál különbségen maradnak.

Ha a sűrítő lemezei egy indító tekercs másodlagos vezetékével közlekednének, váltakozó intenzítású elektromos tér létesül a lemezek között.

Ha váltakozó intenzítású térbe selyemszálakra függesztett, szigetelő anyagból készült pálczikák, lemezek, gömbök vagy hengerek vannak elhelyezve, ezek hosszukkal, vagy átmérőjükkel az elektromos erő irányával párhuzamosan vagy reája merőlegesen helyezkednek el.

Állandó térben ellenben e testek, ha a sűrítő szigetelő folyadékba merül, forogni kezdenek.

A szerző használta készülék a körülmények szerint különböző; tipusa azonban mindig ugyanaz és igen egyszerű eszközökkel előállítható. Egy kis palaczkon, közel a nyakához egymással szemben két nyilást furunk; igen alkalmas e czélra az Eau d'Cologne üvege, ha fenekét lerepesztjük s ezután síkra csiszoljuk. A nyilásokba parafadugók segítségével két sárga rézdrótot illesztünk be; a drótok végére, az üvegharangon belül, mintegy 35 mm. átmérőjű korongocskákat erősítünk és meg van a kisérletekhez szükséges sűrítő. A lemezek közé függesztendő szigetelő testecskét egy kifúrt üveglap hordja, melynek furatába — szintén parafabéléssel — egy üvegcsövecske van beillesztve: ezen függ a selyemszálra kötött testecske. Az üveget nyakával lefelé fordítva állványba fogjuk és nyakát bedugaszoljuk. Harang helyett a szerző üvegfalú koczkaalakú ládikát is használt. Az üvegharangon vagy palaczkon nyugvó lemezt ide-oda csusztatva s a testecskék felfüggesztésére szolgáló üvegcsövecskét fel-alá tolva, a testek helyzetét a sűrítő korongjai között szabályozhatjuk, úgy a hogy az legalkalmasabbnak mutatkozik.

A sűrítő töltésére szolgáló telep 8 leydeni palaczkból állott; capacitásuk összevéve 0,016 mikrofarad volt; potentiálját Righi-féle tükrös elektrométer mérte.

Az 1200 elemből álló akkumulátor edényei kis kémlőcsövecskék voltak, elektródok pedig *U*-alakra görbített rovátkolt felületű ólomlemezkék; a szárak rovátkái kénsav-minimum, ill. kénsav-ólomglétból gyúrt tésztával voltak kitömve. A lemezke szárai két szomszédos csövecskébe merültek s az egy csőbe merülő lemezkék közé keskeny üveglemez volt helyezve. A csövekbe higított, 1,158 sűrűségű kénsav volt töltve; a savat néhány csepp paraffin-olaj borította, a mi a párolgást megszüntette s a szigetelést tökéletesebbé tette. A csövecskék negyvenesével voltak csoportosítva, úgy, hogy az egyes csoportok a töltésnél nagylapúlag, kisérletek közben pedig lánczolatosan voltak kapcsolhatók.

Különféle igen egyszerű és elmés elrendezések lehetővé tették, hogy a tanulmányozott testek az üvegharang alatt egymással gyorsan felcserélhetők legyenek; a testek, midőn használaton kívül voltak, a por ellen gondosan meg voltak védve.

Egy könnyű kvarczkristály (5×2 mm.) a tiszta éterrel megtöltött üvegharangba, a sűrítő korongjai közé helyezve, éspedig olymódon, hogy kristálytengelye vízszinteslegyen addig, míg a leydeni palaczkokkal közlekedő korongok alacsony potentiálon voltak, tengelyével az erővonalakkal párhuzamosan helyezkedett el. Ha pedig a korongok potentiálját, a leydeni palaczkokat egy Holtz-féle géppel jobban-jobban megtöltve, lassan emelték, a kristály a nyugalmi helyzet körül lengéseket végzett folyton növekvő tágassággal; igen nagy potentiálok esetében 24 óra alatt 5 fél forgást végzett jobbra, azután balra s í. t.

Fölcserélve a korongok töltését, a kristály néhány pillanatig veszteg maradt, s azután újra kezdte forgásait.

Hasonló forgások figyelhetők meg sok más kristályon is, még ha koronggvagy gömbalakúak is, s ha éter helyett még oly nyúlós szigetelő folyadékokba merültek is. Levegőben ellenben sohasem voltak észlelhetők.

A végzett mérésekből kitűnik, hogy az elektromos erő növekedtével a lengési idő lassan növekedik, ellenben sokkal gyorsabban nő a tágasság. Üres golyók is ugyanilyen tüneményeket mutattak; a benzolban a forgások meglehetősen szabálytalanok, szénkénegben ellenben ugyanazon középsebességgel forogtak üres és telt golyók.

Egy kvarczgömb, s több flint üvegből készült henger nem forogtak többé a sürítő korongjai között, ha a MARTIN-féle eljárás szerint ezüstréteggelboríttattak be. Ezüst helyett ezüstjodürt használva, a forgás újra megindult a szénkénegben, a benzolban azonban nem.

A két korong között lévő teret bifilarelektrométerrel összekötött platina elektróddal megvizsgálván, a szerző meghatározta az egypotentiálú felületek alakját s azt találta, hogy a gömbök és hengerek forgása az elektromos erővonalakat elmozdította.

Az elektromos erők nagysága s a forgás tartama és iránya szerint, a sürítő korongjai közé helyezett két gömb vonzza vagy taszítja egymást; hasonló vonzások és taszítások mutatkoztak akkor is, ha két gömböt mechanikailag forgattak ugyanazon folyadékban, vagy csak egy gömböt egy fal közelében: ez utóbbi esetben a hatást a forgó gömbnek a falon keletkező elektromos képe okozta. Ugyanaz történt az elektromos erők előidézte forgásoknál.

A szerző azonkívül megfigyelte azt is, hogy szigetelő folyadékba merülő sürítőnek vízszintes fegyverzetei közé helyezett légbuborék alakját változtatja. Ha a sürítő nincs megtöltve, a légbuborék a fölső fegyverzethez tapadó részének kivételével gömbalakú; amint a két fegyverzet között fönnálló potentiálkülönbség növekszik, a buborék, mindjobban megnyulva, előbbi alakját elveszti. Ezen alakváltozást a szerző azon elektromos nyomáskülönbséggel magyarázza, mely az elektromos erővonalakra merőlegesen a levegő s a folyadék válaszfelületén létesül.

Efféle légbuborékok, az éterbe vagy szénkéregbe merített sürítő függélyes korongjai közé téve, élénken mozognak s felületükön forgásokat mutatnak.

A forgások oka tehát azon elektromos hatásokban keresendő, melynek a megfigyelt testek felületét borító levegőréteg van alávetve; ugyanis eltávolítván a felületi levegőréteget, a testek elvesztik az elektrosztatikus térben való forgásokra való képességöket, de több napon át üvegharang alatt levegőre kitétetvén, ismét visszanyerik.

Ámde ez a különös forgás mutatkozik még az olyan testeken is, melyek felületéről a levegő el van távolítva, mint pl. petróleumba mártott kéngolyókon, ha másnemű folyadékban vettetnek alá az elektromos tér hatásának. A petróleum, minthogy feloldja aként, a golyó felületéről mindenesetre eltávolítja a levegőt, de e helyett folyadékréteggel vonja be: a testek forgását tehát a különböző folyadékrétegeknek kell tulajdonítani.

A forgást nem lehet azokkal az elektromozott portestecskékkel magyarázni, melyeket a test magától elhajít; minthogy az ily forgások hónapokig is eltartanak: a miért is ez a tünemény a szerző véleménye szerint nem származhatik mástól, mint azon torzulástól, melyet a levegőréteg az elektrosztatikus térben szenved; ezen torzulás által ugyanis a tér elektromos erővonalaival párhuzamosan megnyúlik s rá merőlegesen összenyomódik. Az erővonalakkal párhuzamos tengely körül történő forgások a testek fölületén lévő gázréteg vagy heterogén folyadék egyenlőtlen eloszlásából magyarázódnak meg. Megjegyzendő még, a mint más megfontolásokból is következik, hogy egy igen vékony levegő, vagy más szilárd testekhez tapadó folyadékréteg dielektromos állandója különbözhetik a véges vastagságú rétegekétől.

Zemplén.

IRODALOM.

G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik. II. Bd. *Mathematische Optik.*

A fénytünemények megfejtése, miként ismeretes, kétféle elmélet, az emissio és undulatio elméletek segítségével történt. Amannak felállítója Newton, jól lehet már előtte Descartes is hasonló véleményen volt, emezé pedig Huygens, ámbár előtte már Hooke is a fény rezgési theoriáját vallotta.

Thomas Young és Fresnel munkái, elméleti úton felfedezett számos korszakos felfedezései az undulatio elmélet számára biztosítják a győzelmet. A másik elmélet védőinek buzgalma, eltekintve attól, hogy a mindig jobban megismert és újonnan felfedezett fénytünemények értelmezésére folyton bonyolultabb, sokszor érthetetlen feltevésekhez kellett fordulniok, a legsúlyosabb csapást akkor szenvedte, a mikor elméletük egyik szükségképeni következményét, azt t. i., hogy a fény a vízben gyorsabban terjed, Foucault és Fizeau kisérleti úton megdöntötték.

Kirchhoff szintén az undulatio elmélet híve ; tárgyalásában a mechanikájában felállított rugalmassági egyenletekből indul ki. A tapasztalat arra utal, hogy a fény transversális rezgésből áll; ehhez csatlakozik még az a *feltevés, hogy az aether a fénymozgásra nézve úgy viselkedik, mint szilárd test s hogy a rugalmasságból eredő feszültségen* kívül más erők nem működnek ; az ezeket kifejező

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \Delta v,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \Delta w,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

egyenletek alkotják az elmélet alapját, hol a a terjedési sebesség, u, v, w

pedig a végtelen kis kimozdulás összetevői, melyeknek CLEBSCH-féle megoldásai:

$$u=\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z},$$
$$v=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x},$$
$$w=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y},$$

hol U, V, W függvények eleget tesznek a

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a^2\Delta\varphi$$

egyenletnek.

Ezen egyenletek alapján tárgyalja az első előadásban a fényinterferentia tüneményeinek elméletét. Nevezetes, hogy a síkhullámok okozta fényintenzitás nagysága csak az interferáló sugarak amplitudójától és phásis-különbségétől függ; míg az általános gömbhullámok esetében, valamely pontban levő fényintenzítást meghatározó egyenletekben még a fényforrástól való távolság négyzete s e távolság iránycosinusai is fellépnek.

Az egész munka koronája a második felolvasás, melyben az ismeretes GREEN-féle tétel felhasználásával az általánosított HUYGENS-féle elvet vezeti le, annak a következő analytikai alakot adván

$$4\pi\varphi_0=\int_{(s)}\Omega ds,$$

hol φ_0 a fent nevezett U, V, W függvények egyikének értékét képviseli azon (x_0, y_0, z_0) pontban, mely nincs rajta az s felületen, Ω pedig oly fénymozgást jelent, melynek centrumai az s felületen vannak; egyenletünk ama különös esetben, hogy (x_0, y_0, z_0) pont s felületen belül van az általánosított HUYGENS-féle elv kifejezője. Fentebbi integrálunk megvitatása ad alkalmat az árnyék, a reflexio, a törés és a fényelhajlás tüneményeinek értelmezésére. Míg a FRAUENHOFER-féle elhajlási tüneményeknél

$$c=\iint\cos(px+qy)\,dxdy,\quad s=-\iint\sin(px+qy)\,dxdy,$$

addig a FRESNEL-féléknél

$$\int_0^u\cos\xi^2d\xi,\quad \int_0^u\sin\xi^2d\xi$$

integrálok négyzeteinek összege szolgál a fényintenzitás meghatározására.

A FRAUENHOFER-féle elhajlási tüneményekkel kapcsolatban tárgyalja a

TALBOT-féle vonalak elméletét s kimutatja, hogy e tünemény csakis az elhajlási tüneményekre való tekintettel fejthető meg helyesen. Újabb időben H. F. WEBER kimutatta, hogy a FRESNEL-féle tükör-kisérletek szintén az elhajlási tünemények közé sorolandók. Az eddig mondottak teszik a hét első előadás anyagát. Az elért eredmények felhasználásával tárgyalja ezután a visszaverődés és törésnél fellépő polarisatio-tüneményeket, még pedig oly módon, hogy meghatározza a visszavert s az átmenő fény intenzítását. Az általános elmélet a szerint, a mint különböző közegekben az æthernek vagy rugalmassági együtthatóját, vagy pedig a sűrűségét tételezzük fel állandónak, a FRESNEL- a vagy NEUMANN-féle theoriához vezet; amaz szerint a rezgések a polarisatió síkjára merőlegesen, emez szerint pedig a polarisatió síkjában történnek. KIRCHHOFF a NEUMANN-féle föltevést fogadja el s álláspontját avval indokolja, hogy a FRESNEL-féle föltevés ellenkezik az ætherre vonatkozó alapföltevésünkkel; már pedig ha ez a kristályos testekre is érvényes, akkor az ezekre vonatkozó fényjelenségek csakis azon feltevéssel fejthetők meg, mely szerint a rugalmassági együttható különböző irányokban különböző; ha pedig az æther rugalmassági együtthatóját egy s ugyanazon közeg különböző irányaiban különbözőnek tételezzük fel, hogyan lehetne állandó különböző közegekben?

A polarisált fénysugarak visszaverődése és törése elméletének befejezésével a párhuzamos síklapokon visszavert és megtört fénysugarak elméletével ismertet meg bennünket. A NEWTON-féle színgyűrűk szintén ezen elméletben nyerik megfejtésüket, jól lehet a lencsék görbülete szintén számot tesz a tünemény létrejöttében, miként ez WANGERIN* és FEUSSNER** kutatásaiból ismeretes.

A tizedik előadásban a fényelnyelés tüneményeit tárgyalja a HELMHOLTZ-féle föltevések alapján. Az eredmény: ha az elnyelés együtthatója elég nagy, akkor a SNELLIUS-féle törési törvény nem érvényes; mert ekkor a törésmutató a beesési szögtől is függ. A fémfelületeken történő visszaverődésnek szigorú elméletét nem tudja adni, mert még kielégítő határfeltételeket nem ismer. Azon feltevéssel, hogy a fémeknél is érvényesek a linearis határfeltételek, mint az átlátszó közegeknél, eljut CAUCHY formuláihoz, melyeket EISENLOHR*** vezetett le először s melyeket QUINCKE a tapasztalattal eléggé összeegyeztethetőknek találta.

A következő négy előadásban a kristályos közegekben való fénymozgással ismerkedünk meg. $l_1 m_1 n_1$-gyel jelölvén a síkhullámok normalisát, minden irányú hullámrendszerre létezik oly három egymásra merőleges

* *Pogg. Ann.* CXXXI.

** *Wied. Ann.* N. F. XIV.

*** *Pogg. Ann.* CIV. k.

irány, az $l_1 m_1 n_1$-től függő ellipsoid főtengelyeihez tartozók, melyekben kimozdulás jöhet létre. Az ellipsoid féltengelyeinek recziprokja a megfelelő irányhoz tartozó tovaterjedés sebességét adja.

Alkalmas feltevések bevezetésével a három fényhullám közül az egyiknek rezgési iránya összeesik $l_1 m_1 n_1$-gyel, a másik kettőé pedig a nevezett irányra transversális; az első nem ad fénymozgást, a két utóbbi igen s tovaterjedési sebességüket az

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 1$$

ellipsoidból a középpontján átmenő $l_1 m_1 n_1$ irányra merőleges sík által kimetszett ellipsis fél főtengelyeinek recziprokjai adják.

Felírt egyenletünkben a_{ir} együtthatók a közeg rugalmasságának állandói. A hullámfelületek az $l_1 m_1 n_1$ irányhoz tartozó sugarak meghatározására legalkalmasabbak; azért azok elméletével is foglalkozik.

Az utolsó előadás a kristályokon átmenő fénysugarak phasis-változásaiból eredő fénytüneményekkel s a színes csíkok alakjaival ismertet meg bennünket.

Az összefüggő egészet képező előadások tökéletesen világos képet nyujtanak a fény rugalmassági theoriájának jelen állásáról: előnyeiről, fogyatkozásairól. *Suták József.*

*

Dr. Ludwig Boltzmann, Vorlesungen über Maxvell's Theorie der Elektricität und des Lichtes. Leipzig, *Ambr. Barth.* 1891. Ára 5 márka.

Ezen előadásokban a Helmholtz-féle ciklikus mozgások képezik a Maxwell-féle egyenletek levezetésének alapját. Szellemére jellemző, hogy a szerző a theoriákat nem tekinti hypothesiseknek, hanem mechanismusoknak, melyeknek müködése a természet tüneményeinek játékával egyik másik jelenség tekintetében nagy analógiát mutat; minél nagyobb ezen analogia, annál használhatóbb a mechanismusunk, melynek tökéletesítése, vagy újakkal való pótlása a tudomány feladata. Ez a magyarázata, miért nem vesztik el a régibb elméletek jelentőségüket. Szerzőnk egy, az elmélet megvilágítására szolgáló modellt be is mutat, melyen az inductió-együtthatók független változóként lépnek fel, jóllehet azoknak eleget kell tenni azon feltételeknek, melyek nem teljesülése esetében, azon quadratikus alak, melynek együtthatói negativ értéket is vehetne fel, a minek azonban nem szabad megtörténni.

Az elmélet tárgyalásánál a rendszer állapotát Helmholtz példájára ciklikus és lassan változó coordinatáktól teszi függővé, melyeknek Maxwellnél az integrál áram (idő szerinti deriváltja az intenzitás) és a rendszer helyzetének meghatározására szolgáló coordináták felelnek meg.

A LAGRANGE-féle egyenletek szimbolikusan már magukban foglalják a MAXWELL-féléket, de szerzőnk az azok révén kikerülő erőkhöz, még azokat is hozzáfüggeszti, melyeknek működniök kell, hogy a vezetői ellenállás s az esetleg bekapcsolt condensatorok okozta ellenállás legyőzhető legyen s ez által az áram cziklikus maradjon. Ezen úton pl. két vezetőre, ha L_1, L_2 a cziklikus l_1, l_2—, K pedig a lassan változó k_1, k_2 coordinatákát megnagyobbítani törekvő erők; A, B az önínductio, C a kölcsönös inductió együtthatója (melyek csak k-tól függnek), W_1, W_2 a vezetői ellenállasok, $\frac{1}{\vartheta_1}$, $\frac{1}{\vartheta_2}$ a bekapcsolt sűrítők capacitásai, l_1', l_2' pedig l_1 és l_2-nek időszerinti deriváltjai:

$$L_1 = \frac{d}{dt}(Al_1' + Cl_2') + w_1 l_1' + \vartheta_1 l_1$$

$$L_2 = \frac{d}{dt}(Cl_1' + Bl_2') + w_2 l_2' + \vartheta_2 l_2$$

$$K = -\frac{l_1'^2}{2}\frac{\partial A}{\partial k} - \frac{l_2'^2}{2}\frac{\partial B}{\partial k} - l_1' l_2' \frac{\partial C}{\partial k}$$

képezik a mozgási egyenleteket.

A 7. előadásban áttér a policziklikus mozgások tárgyalására. l' legyen a főáram intenzitása, az áram elektrokinetikus energiája T, akkor

$$T = \frac{A}{2} l'^2 + l' I(s) + N$$

$I(s)$ a főáram momentuma az adott térben; tulajdonságai:

$$I(-s) = -I(s), \quad I(s) = \int I(ds)$$

$$I(ds) = Fdx + Gdy + Hdz$$

$d\varkappa$ felület-elemnek a coordinata síkokra való vetületeit $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$-vel jelölvén, STOKES tételének alkalmazásával

$$I(s) = I(d\varkappa) = \int (Fdx + Gdy + Hdz) = ad\lambda + bd\mu + cd\nu$$

hol

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \quad b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

a, b, c a mágneses inductio együtthatói. A tárgyalás eddigi menete lényegében a MAXWELL-éval azonos, de a következőkben már van eltérés, a menynyiben szerzőnk még a látszatát is kerülni akarja annak, hogy a mágnesség, mint az elektromosságtól különböző agens tűnjék fel.

A solenoid definitiójából következik, hogy ha éjszaki sarkának intenzítását m-mel jelöljük, annak révén x, y, z pontban az erőhatás összetevői

$$X = -m\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad Y = -m\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad Z = -m\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\varphi = \int (adx + bdy + cdz).$$

Végtelen sok solenoid vonal egymás mellé helyezett rendszerében képzeljünk egy solenoid polust végtelen kis $d\varkappa$ síkfelület kerületén végig menni; a BIOT-SAVART-féle tapasztalati törvény felhasználásával a végzett munka számára a következő analytikai alakot nyerjük:

$$A = 4\pi\mu m d\varkappa\,[\mu\cos(nx) + v\cos(ny) + w\cos(nz)]$$

másrészt

$$A = m\int (adx + bdy + cdz) = md\varkappa\left[\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right)\cos(mx) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right)\cos(ny) + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)\cos(nz)\right]$$

e két kifejezés összehasonlításából erednek

$$4\pi\mu u = \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z},$$

stb. ismeretes egyenletek.

A mozgás akadályok ellenében működő erők bevezetésével teljes összefüggésben kerülnek ki a testes vezetők áramlásánál előforduló összes menynyiségek. A MAXWELL-féle egyenletek összeállítása után a COULOMB-féle törvényt, a KIRCHHOFF-féle mozgási egyenleteket, a BIOT-SAVART-, a NEUMANN-féle inductio- és az AMPÈRE-féle törvényeket mutatja be mint egyenleteinek következményét. Azután az elektromos rezgések theoriájára tér át; minthogy a kifejtés alapjául szolgáló egyenletek a rugalmassági theoriából eredőkkel megegyeznek, azért a tárgyalásra a KIRCHHOFF-féle módszer alkalmazható. Az alkalmazás legbecsesebb része bizonyára az elektrostatika alaptörvényeinek a levezetése. A mágnesek tárgyalásával az előadások véget érnek.

Végül megjegyzem, hogy szerzőnk csakis a homogen isotrop közegekben végbemenő mozgások tárgyalására szorítkozik; de az áttérés a már ismert MAXWELL-féle módon az általánosabb egyenletekre igen könnyű, s eredményül, eltekintve a jelölésben levő különbségektől, a MAXWELL-féle egyenletek HERTZ v. HEAVISIDE-féle alakjait nyerjük.

Suták József.

A Mathematikai és Physikai Társulat III. tanulóversenye.

A Math. és Phys. Társulat választmánya f. é. május hó 30-án tartott ülésén megbizta az ügyvivő titkárt a III. tanulóverseny előkészítésével.

A verseny október 24-én tartatott meg. A verseny lefolyásáról és eredményéről a kiküldött bizottság következő jelentése ad számot.

Tisztelt választmány!

Az alulirott bizottság elé terjesztett jegyzőkönyvekből kiderül, hogy a társulat III. mathematikai tanulóversenye f. é. október hó 24-én megtartatott. A kitüzött időben Budapesten 88, Kolozsvárott pedig 10 középiskolát végzett ifju jelent meg a társulat tagjaiból alakított versenybizottság előtt. Az igazolások megtörténte után kihirdettettek az elnök pecsétjével lezárt versenytételek, melyek a következők:

1. Bizonyíttassék be, hogy az n egész szám logarithmusa nagyobb vagy egyenlő, mint k-szor log 2, a hol k az n külömböző törzsszámosztóinak a száma.

2. Bizonyíttassék be, hogy ha valamely xy értékpárra vonatkozólag $x^2-3xy+2y^2+x-y=0$ és $x^2-2xy+y^2-5x+7y=0$, akkor ugyanarra az értékpárra nézve egyszersmind $xy-12x+15y=0$.

3. Adva vannak valamely háromszög magassági vonalainak talppontjai; szerkesztessék meg e háromszög. Vagy, adva vannak a talpponti háromszög oldalai, kiszámítandók az eredeti háromszög alkotó részei.

A jegyzőkönyvek tanusága szerint a verseny mindkét helyen szabályszerűen folyt le. A dolgozásra engedett idő leteltéig Budapesten 50, Kolozsvárott pedig 6 dolgozat adatott be.

A dolgozatokat az elnökség által kiküldött biráló bizottság megvizsgálván, örömmel látta, hogy a verseny szép sikerre vezetett, mert a beadott dolgozatoknak nemcsak nagy száma, hanem a megoldások minősége is megelégedéssel töltötte el a bizottság tagjait. Többen mind a három tételt, számosan pedig legalább kettőt oldottak meg, sokszor elmés módszerek segítségével.

A dolgozatok gondos egybehasonlítása után a bizottság egyhangúlag a következő megállapodásra jutott:

Az összes dolgozatok közül úgy a megoldások ügyessége és pontossága, valamint fejlett mathematikai gondolkodásra valló szabatos fogalmazása tekintetében nagyon kiemelkedik *Visnya Aladár* b. h. dolgozata.

Legközelebb áll hozzá az a dolgozat, melylyel *Zemplén Győző* b. h. vett részt a versenyben.

Ez okból a 100 aranykoronás Eötvös-díj *Visnya Aladárnak,* az 50 aranykoronás Eötvös-díj pedig *Zemplén Győzőnek* itéltetett meg.

Az első díj nyertese a pécsi állami főreáliskolán Maksay Zsigmond megboldogult érdemes tagtársunk vezetése alatt tanult, a második díj nyerője pedig a fiumei állami főgymnasiumon Pizzetti Rókus tagtársunk tanítványa volt.

A jutalomra méltónak itélt dolgozatokon kívül még öt oly dolgozatot talált a bizottság, mely készítőiknek becsületére válik. Ezeket dicsérettel kivánja kitüntetni. Készítőik a következők:

Blazsevatz Antal, a zombori áll. fögymnasium,
Klein Arthur, a budapesti V. ker. áll. főreáliskola,
Mayer Miksa, a budapesti II. ker. kir. egyet. főgymnasium,
Suschnik József, a kecskeméti áll. főreáliskola és
Szabó Imre, a kolozsvári ev. ref. főgymn. volt tanulója.

Budapest, 1896 november hó 25-én.

Eberling József, *Rátz László,*
Beke Manó, *Kürschák József,*
Grúber Nándor, *Rados Gusztáv,*
Bartoniek Géza,
a biráló bizottság tagjai.

A Mathematikai és Physikai Társulat III. versenyén B. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

1. Visnya Aladár dolgozata.

1. *Tétel.* Bizonyíttassék be, hogy n egész szám logarithmusa

$$\log n \geqq k \,.\, \log 2,$$

hol k az n törzsszám-tényezőinek száma.

Irjuk a követelményt transcendens alak helyett exponentiális alakba

$$x^n \geqq x^{2k}$$

a hol x a logarithmus rendszer alapja. Mivel x, mint ilyen, nem lehet valódi tört, azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$n \geqq 2^k.$$

Legyenek már most n primtényezői $p_1, p_2 \ldots p_k$, úgy ezek mindegyike nagyobb vagy legalább egyenlő kettővel és így ha helyükbe 2-t teszünk, n-nél kisebb, v. vele legfeljebb egyenlő számot kapunk

$$n = p_1 p_2 \ldots p_k \geqq \overset{1}{\underline{2}} \,.\, \overset{2}{\underline{2}} \,.\, \overset{3}{\underline{2}} \ldots \overset{k}{\underline{2}},$$

a honnan

$$n \geqq 2^k$$

Q. e. d.

2. *Tétel.* Bizonyíttassék be, hogy ha $x\ y$ értékpárra vonatkozólag

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0$$

és

$$x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0,$$

akkor ugyanarra az értékpárra nézve egyszersmind

$$xy - 12x + 15y = 0.$$

A tétel be lesz bizonyítva, ha sikerül az első két egyenletből a harmadikat előállítani.

Előbb azonban egyszerűsíthetjük az elsőt:

---

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül vannak közölve. *Szerk.*

$$x^2-3xy+2y^2+x-y=x^2-2xy+y^2-xy+y^2+x-y=$$
$$=(x-y)^2-y(x-y)+x-y=(x-y)(x-2y+1)$$

$x=y=v$ értékpár azonban a második egyenletet csak azon esetben elégíti ki, ha x és y egyenlők zérussal, a mikor azonban a tétel helyessége közvetlenül belátható, mert mind a három egyenlet minden tagja tartalmaz ismeretlent. Ha azon x és y zérustól külömböző de egyenlő értékek (v), úgy a második egyenletet sohasem elégíthetik ki, mert

$$v^2-2v^2+v^2-5v+7v=2v$$

és nem zérus. Szabad tehát az első egyenletből $(x-y)$ tényezőt elhagyni.

Feladatunk tehát

$$x^2-2xy+y^2-5x+7y=0 \qquad 1)$$

és

$$xy-2y+1=0 \qquad 2)$$

egyenletekből

$$xy-12x+15y=0$$

egyenletet előállitani.

Vonjuk le a 2) alatti egyenlet x-szeresét az elsőből:

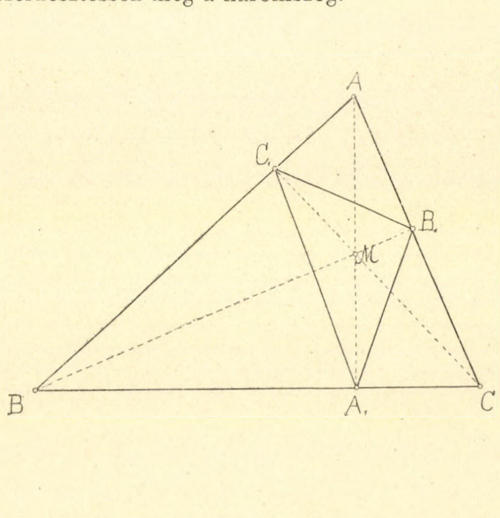
$$y^2-6x+7y=0.$$

Szorozzuk meg ezt kettővel és adjuk a 2) alatti egyenlet y-szorosához:

$$\begin{array}{r} 2y^2-12x+14y=0 \\ xy-2y^2+y=0 \\ \hline xy-12x+15y=0 \end{array}$$

a mivel a tétel be van bizonyítva.

3. *Tétel. a)* Adva vannak valamely háromszög magasságvonalainak talppontjai, szerkesztessék meg a háromszög.



A szerkesztést azon tétel alapján eszközölhetjük legegyszerűbben, hogy a háromszög magasságai a talpponti háromszög szögfelező egyenesei.

Bizonyítsuk ezt be. Legyen ABC háromszögben $A_1B_1C_1$ a talpponti háromszög és M a magassági pont.

MB_1CA_1 négyszög köré kör írható, mert két szemben fekvő szöge derékszög. Akkor

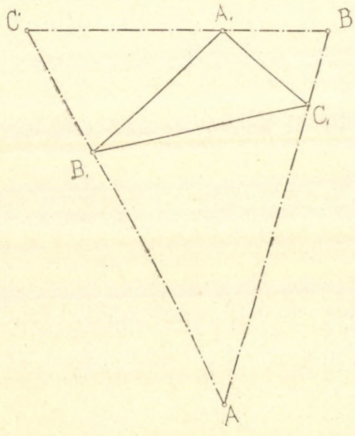
$$MA_1B_1 \sphericalangle = MCB_1 \sphericalangle = 90° - CAC_1 \sphericalangle = 90° - \alpha.$$

Hasonlókép kört lehet írni az MC_1BA_1 köré, és ekkor

$$MA_1C_1 \sphericalangle = MBC_1 \sphericalangle = 90° - BAB_1 \sphericalangle = 90° - \alpha.$$

A mint ezt bizonyítottuk A_1 szögre úgy lehet a többire is.

A szerkesztés ennek alapján úgy történik, hogy meghúzzuk a 3 pont által adott háromszögben a külső szögeket felező egyeneseket és ezek lesznek mindjárt a kérdéses háromszög oldalai.



b) Számíttassanak ki az eredeti háromszög szögei.

Itt is legczélszerűbb a fentebb bizonyított tételből kiindulni, a mikor is rögtön kapjuk a szögeket. Bebizonyítottuk u. i.

$$A_1 = 2 . (90° - \alpha)$$

$$\frac{A_1}{2} = 90° - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \frac{A_1}{2} = \sqrt{\frac{(s_1 - c_1)(s_1 - b_1)}{s_1(s_1 - a_1)}} = \operatorname{ctg} \alpha,$$

hol a_1, b_1, c_1, a talpponti háromszög oldalai és s_1 ezek összege fele. Hasonlókép

$$\operatorname{ctg}\beta=\sqrt{\frac{(s_1-a_1)(s_1-c_1)}{s_1(s_1-b_1)}}$$

$$\operatorname{ctg}\gamma=\sqrt{\frac{(s_1-a_1)(s_1-b_1)}{s_1(s_1-c_1)}}.$$

Ugyancsak ebből a tételből következik, hogy a maradék háromszögek az eredetihez hasonlók pl. $B_1CA_1\triangle\sim BCA$.

Mert

$$A_1B_1C\sphericalangle=90°-MB_1A_1\sphericalangle=90°-(90°-\beta)=\beta$$

és C szög közös.

Tehát
$$A_1B_1:B_1C=c:BC$$

$$c=A_1B_1\frac{BC}{B_1C}.$$

De

$$A_1B_1=c_1 \quad \text{és} \quad \frac{B_1C}{BC}=\cos\gamma,$$

tehát

$$c=\frac{c_1}{\cos\gamma}.$$

Egészen így nyerhető, hogy

$$a=\frac{a_1}{\cos\alpha}$$

$$b=\frac{b_1}{\cos\beta}.$$

2. Zemplén Győző dolgozata.

II. *Tétel.* Bebizonyítandó, hogy ha valamely x, y értékpárra nézve

$$x^2-3xy+2y^2+x-y=0 \tag{1}$$

és

$$x^2-2xy+y^2-5x+7y=0, \tag{2}$$

akkor ugyanarra az értékpárra nézve:

$$xy-12x+15y=0. \tag{3}$$

Ha az 1)-ből a 2)-t kivonjuk:

$$-xy+y^2+6x-8y=0$$

$$y(x-y)=6x-8y. \tag{4}$$

Ha a 2)-ből az 1)-et kivonjuk 2)-vel szorozva:

$$x^2-xy-11x+15y=0$$

$$x(x-y)=11x-15y. \tag{5}$$

Osszuk el a 4)-et és 5)-öt egymással:

$$x : y = (11x - 15y) : (6x - 8y)$$

$$6x^2 - 8xy = 11xy - 15y^2$$

$$19xy - 15y^2 - 6x^2 = 0$$

$$y^2 - \tfrac{19}{15}xy + \tfrac{6}{15}x^2 = 0.$$

Fejtsük meg ezen egyenletet y-ra nézve

$$y = \tfrac{19}{30}x \pm \sqrt{\frac{19^2x^2 - 60.6x^2}{30^2}} = \tfrac{19}{30}x \pm \tfrac{1}{30}x.$$

$$y = \tfrac{2}{3}x, \quad \tfrac{9}{15}x = \tfrac{3}{5}x.$$

Ha

$$y = \tfrac{2}{3}x.$$

akkor a 4) egyenletből

$$\tfrac{2}{3}x\,(x - \tfrac{2}{3}x) = 6x - \tfrac{16}{3}x \qquad 6)$$

innen

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

és

Ha pedig

$$y = \tfrac{3}{5}x,$$

akkor az 5) egyenletből

$$x\,(x - \tfrac{3}{5}x) = 11x - 9x \qquad 7)$$

innen:

$$\left.\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 3 \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

Az I. értékpárt a 3) egyenletbe helyettesítve

$$6 - 36 + 30 = 0.$$

Tehát x, y ezen értékpárjára nézve a fentebbi egyenletek közül a harmadik tényleg $=0$.

A II. értékpárt a 3) egyenletbe helyettesítve

$$15 - 60 + 45 = 0.$$

Tehát ezen értékpárra nézve is egyenlő zérussal a harmadik egyenlet.

Megjegyzés. A 6) egyenlet kifejtésénél találjuk: $\frac{x^2}{3} = x$, tehát

$$x = 0$$
$$y = 0.$$

Ezen értékpárra nézve is 0 a harmadik egyenlet.

A 7) egyenlet kifejtésénél is azt találjuk, hogy $x=0$, $y=0$.

II. *Tétel.* Bizonyíttassék be, hogy az n egész szám logaritmusa

$$\log n \geqq k \log 2,$$

a hol k az n különböző törzsosztóinak a száma.

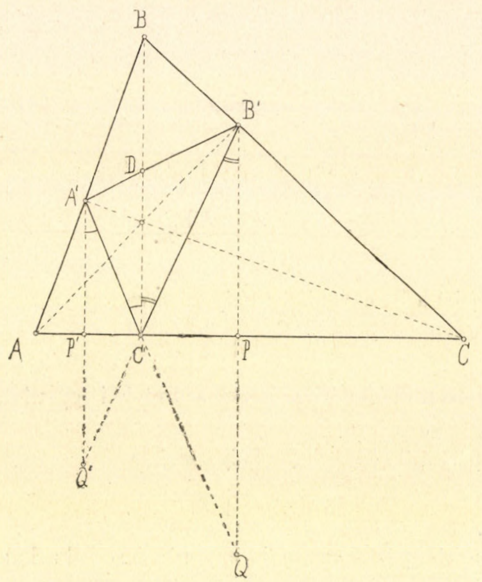
Ha n törzsosztói $a, b, c \ldots \log n = \log a + \log b + \log c \ldots$

A törzsosztók szorzata egyenlő a számmal n-nel; a törzsosztók között azonban a legkisebb a 2. Ha mind az osztók 2-k volnának, akkor $\log n = k \log 2$, de minthogy $\log n$-nek nagyobb törzsosztói is lehetnek, mint 2, tehát $\log n \geqq k \log 2$.

Megjegyzés. Ha $n=1$ akkor a tétel nem áll.

Ha $n=2$, akkor $\log n = k \log 2$. Ezen utolsó esetben az egyet nem számítom a törzsosztók közé.

III. *Tétel.* Adva vannak valamely háromszög magassági vonalainak talppontjai; szerkeszszük meg a háromszöget.



Ha a magassági vonalakat vizsgáljuk, látni fogjuk, hogy azok a talppont-háromszögnek szögfelezői:

Bebizonyítás:

Szerkeszszük: $B'P \perp AC \parallel BC'$

és

$$A'P' \perp AC \parallel BC' \parallel B'P$$

akkor

$$QB' : DC' = A'B' : A'D \; (A'DC'\triangle \sim A'B'Q\triangle)$$

és

$$A'Q' : DC' = A'B' : B'D \; (A'B'Q\triangle \sim B'DC'\triangle)$$

$$QB' : A'B' = DC' : A'D$$

$$Q'A' : A'B' = DC' : B'D$$

$$A'B'Q'\triangle \sim A'B'Q\triangle$$

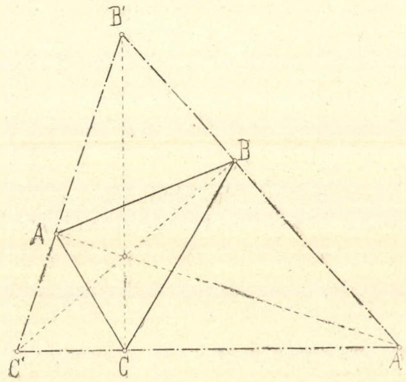
tehát

$$\sphericalangle A'B'Q = \sphericalangle A'B'Q'$$

ezért:

$$\sphericalangle A'C'D = \sphericalangle B'C'D$$

tehát BC' magassági vonal szögfelezője $A'B'C'\triangle$-nek; ugyanez áll a másik két magassági vonalról is.



Szerkesztés.

Ha tehát meg vannak adva a talppontok, össze kell azokat kötnünk, s az így nyert háromszögnek meghúzva szögfelezőit, azokra A, B, C pontokban merőlegeseket vezetünk s megkapjuk az $A'B'C'$ háromszöget.

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT ELŐADÁSAIRÓL.

1895.

November hó 28-án. Dr. Kürschák József : Az analitikai függvények pólusai. (I. rész). — Dr. Klupáthy Jenő : Kisérletek Töpler 20 lemezű megosztó gépével.

Deczember hó 12-én. Jelentés a Math. Phys. Társulat II. tanulóversenyények eredményéről s a díjak kiosztása. — Kalecsinszky Sándor : Berthelot kaloriméteré és kalorimetrikus bombája. — Dr. Kürschák József : Az analitikai függvények pólusai (II. rész).

1896.

Január hó 16-án. Dr. Klupathy Jenő : Röntgen fotografiáiról. — Dr. Beke Manó : Egész függvények irreduktibilitása.

Január hó 30-án. Dr. Beke Manó : Egész függvények irreduktibilitása (I. rész). — Dr. Klupathy Jenő : Röntgen fotografiáiról (2-dik előadás).

Február hó 13-án. Dr. Beke Manó : Egész függvények irreduktibilitása (II. rész).

Február hó 27-én. Dr. Suták József : Az elsőrendű differentiálegyenletek singularis integráljairól (I. rész). — Dr. Klupathy Jenő : Egy új elektromos vetitő lámpa.

Márczius hó 12-én. Dr. Suták József : Az elsőrendű differentiálegyenletek singuláris integráljairól (II. rész). — Dr. Kiss Károly : Egy új szerkezetű fotografáló lámpa, Röntgen-féle fotografiák készítéséhez.

Márczius hó 26-án. Hornischek Henrik : Törvényszerűen változó rendszerek mozgásáról. — Dr. Hoór Mór : A mágnesi körök, különös tekintettel állandó mágnesek készítésére.

Április hó 9-én. Gruber Nándor : A Fermat-féle congruentia-tétel elméletéhez. — Wittmann Ferencz : A váltakozó áramok jelenségeiről.

Április hó 23-án. Gruber Nándor : A Fermat-féle congruentia-tétel elméletéhez. — Dr. Iszlay József : 1. Egy laboratoriumi transformator közepes feszültségű áramokra, új szerkezetű megszakitóval. 2. Javítás a kis méretű rheostatokon. 3. Amerikai elektromos olvasztókályha, magas hőmérsékletekre.

November hó 26-án. A III. mathematikai tanulóverseny eredményének kihirdetése és a díjak kiosztása. — Dr. Suták József: Az algebrai függvények osztóiról.

Deczember hó 10-én. Dr. Fröhlich Izidor: Lord Kelvin tiszteletére Glasgowban rendezett ünnepélyekről. — Rados Gusztáv: Analitikai függvények arithmetikai tulajdonságairól. — Dr. Iszlay József: A testrészek átvilágítása Röntgen-sugarakkal.

*

Az 1896. évi junius hó 15., 16., 17. napján Glasgowban Lord Kelvin (Sir William Thomson) tiszteletére rendezett ünnepélyről.*

Tisztelt Mathematikai és Physikai Társulat!

Oly tudományos ünnepélyről bátorkodom röviden megemlékezni, mely a maga nemében a legnagyobb ritkaságok közé tartozik; oly férfiúnak megtiszteléséről, kinek ünneplése csak elismerése a tudomány és alkalmazása terén szerzett, világszerte ismert érdemeinek.

Bár ez ünnepélyről néhány héttel ezelőtt más helyen tettem rövid jelentést, engedje meg a tisztelt Társulat, hogy itt más formában, módosított, részletesebb tartalommal, fesztelenül szóljak felőle; de előre is kijelentem, hogy hosszasabban beszélni nem kivánok. Mint volt résztvevője ezen ünnepségnek, néha kénytelen leszek magamról is beszélni, a miért elnézésöket kérem.

A jelen év őszén épen ötven éve, hogy Lord Kelvin, előbb Sir William Thomson, mely utóbbi eredeti neve alatt szerzette volt meg tudományos hírneve javarészét, huszonkét éves korában neveztetett ki a glasgow-i nagy skót-egyetem egyik legfontosabb, a physika tanszékéhez tanárnak.

E korai kinevezést, milyenben egyébként más időben és más helyen több, később elsőrangúvá fejlődött fiatal tudós, mint pl. Lagrange Turinban, Liebig Giessenben részesült, első sorban már a legzsengébb korban mutatkozó kiváló mathematikai és physikai tehetségének köszönhette.

Nem lehet szándékom a tisztelt Társulat figyelmét Lord Kelvin életrajzával vagy tudományos működésének körvonalozásával igénybe venni; ez nem volna hozzá a kellő alkalom, de legyen szabad néhány idetartozó jellemző körülményt felemlítenem.

Az akkori nagybritanniai egyetemek szervezete alapján, 1834-ben William Thomson tíz éves korában lépett be mint tanuló a glasgowi egye-

* Előadatott a f. évi decz. hó 10-én tartott rendes ülésén.

tembe, melyen atyja James Thomson 1832 óta mint a mathematika tanára működött. 1835-ben, tizenegy éves korában, két osztályérmet nyert és a mathematikában, physikában, astronomiában *facile princeps* lett, bár testileg a sokkal idősebb és nagyobb tanulótársai között majdnem teljesen eltünt.

Tanulmányait a nevezett egyetemen befejezve, tizenhét éves korában Anglia egyik leghíresebb egyetemére Cambridge-be ment, hol a St. Peter-College-ben töltött négy évet, ideje legnagyobb részét teste edzésén kivül a mathematikai physika fontos problémái megfejtésére fordítván s kevesebbet foglalkozván a «Bachelor of Arts» *(Baccalaureus artium)* fok elnyerésére előírt rendszeres tanulmányokkal.

Ez időbe esik, hogy az odavaló tanulók egy evező versenyén győztes lett; továbbá, hogy a nevezett college-ben a felette való felügyelettel megbizott u. n. «tutor» (őrző) Thomson atyját levél utján kérte, intené meg fiát, hogy az előírt vizsgálati tárgyak tanulmányozására több gondot fordítson, mint kedvencz problémái kutatására; de atyja, ki fia szellemét már felismerte volt, nem volt hajlandó ennek tanulmányait befolyásolni.

Így történhetett, hogy a tanulmányi idő befejeztével az angol egyetemeken megtartatni szokott mathematikai verseny-vizsga («mathematical triposexamination») alkalmával Thomson a második helyre jutott, Parkinsen, később «tutor» a cambridge-i St.-Johns-College-ben lévén az első, kinek tudományos működése főleg mechanikai és optikai tankönyvek kiadásából állott.

De csakhamar megváltozott a helyzet ezen első nyertes és a fiatal Thomson között, mikor az utóbbi rövid idő mulva a cambridge-i nagy Smith-díjat nyerte el és tudományos buvárlatai közzétett eredményével szélesebb szakkörökben méltó feltünést keltett. Tudományos fokának elnyerése után 1845-ben Párisba ment, hogy Biot és Regnault vezetése alatt a kisérleti módszerekkel megismerkedjék.

De nem maradhatott soká Párisban.

1846-ban a glasgowi egyetemen a physika tanszéke megüresedvén, ezt különösen G. Stokes ajánlatára csakhamar a már 17-ik évétől kezdve közleményei folytán is ismeretessé lett William Thomson-nal töltötték be, ki így atyjával együtt ugyanezen egyetemen egyszerre működhetett, de az utóbbi már három évvel később, 1849-ben, meghalt.

William Thomson tanári működésének azóta lefolyt ötven éve a tudomány és gyakorlati alkalmazása körül szerzett érdemeinek és elért sikereinek szakadatlan lánczolata; s akár az elektromosság és mágnesség, akár a mechanikai hőtan s a hővezetés, akár a föld alakja s a dagály és apály kérdéseinek elméleti megvizsgálását vagy ezek tényleges viszonyainak szabatos kipuhatolására és lemérésére kigondolt és megszerkesztett készülékeit tekintjük: mindenütt önálló, mathematikailag kitünően fegyelmezett, rendkívül termékeny szellem jelentkezik, mely a mennyiségtan elvont, gyakran legmélyebb igazságait bámulatos ügyességgel és biztossággal tudja felhasználni a természet jelenségeinek kifürkészésére, új elméleti és kisérleti vizsgálati módszerek megállapítására és ezekre alkalmas segédeszközök feltalálására.

De talán legnevezetesebb sajátsága Thomson-nak ama, a legritkább esetekben nyilvánuló képességében nyilvánult, melylyel tudományos buvárlatainak vívmányait közvetetlenül a gyakorlati élet, egyenesen a *közjólét* szolgálatába tudta helyezni, miként ezt a tengerentúli telegrafozásra szolgáló gépei, az elektrotechnikában majdnem világszerte alkalmazott nagyszámú gyakorlati mérő-eszközei, a tenger mélységét jelző készüléke, hajóiránytűje, árapálymérője és jóslója, valamint az összetett hullámokat alkatrészeire szétbontó harmonikus analysátora épen oly fényesen, mint sokoldalúan bizonyítják.

Fontos szolgálatot tett az elméleti mechanikának és physikának, mikor e tanok helyét a mathematikai és a természettudományok csoportjában szabatosan kijelölni s azokat, főleg pedig a mechanika alapigazságait túlnyomóan tapasztalati alapokra fektetni törekedett; tette ezt az ő híres «Treatise on Natural Philosophy» czímű, a tudomány legmagasabb színvonalán álló nagy kézikönyvével, melynek tervezete, gondolatmenete és iránya tőle származik, s melyet Tait edinburgh-i egyetemi tanár közreműködésével 1867-ben adott ki először. E mű, bár befejezése nagy szabásánál fogva már az egyedül maradt első kötete megjelenésével sem volt várható, mégis igen kiható, s az utána megjelent hasonló tárgyú művekben és közleményekben jellemzően visszatükröző befolyást gyakorolt a mechanikai disciplinák tudományos felfogására és tárgyalására, valamint a föld alakjára vonatkozó ismereteinkre.

Ily ténykedése által Thomson a kinevezéséhez fűzött várakozásoknak fényesen felelt meg; s míg a tudomány emberei már korán ismerték el őt egyik vezérjüknek, addig az 1858—1866-ig a transatlantikus kábeltelegrafozás körül végzett egyszerűen megbecsülhetetlen szolgálatai világhírűvé tették. Az angol kormány ezeket a nagy érdemeket a «Sir» (Baronet) czím adományozásával ismerte el.

A legtöbb angol, continentális és amerikai tudományos akadémia és társaság külső vagy tiszteleti tagjává választotta és számos egyetem tüntette ki a tiszteleti doktor czímével. Hat évvel ezelőtt a legnagyobb megtiszteltetésben részesült, mely Britanniában tudóst érhet: a brit tudományos akadémia, a Royal Society elnökének választotta s így e minőségében Newton egyik utóda volt. Ezen tisztségtől a mult évben megvált. Végre 1892-ben az angol kormány «*Baron Kelvin of Largs*» czímmel a birodalom peer-jei közé emelte, a KELVIN nevet azon kis folyótól véve, mely a glasgowi egyetem főépületét vivő *Gillmore* halom alját körülfolyja, míg *Largs* kis helység Glasgow közelében, Lord KELVIN nyaralóhelye.

Hazánk illetékes körei sem késtek elismerésük kifejezésével; a M. T. Akadémia 1873-ban választotta külső tagnak, s a jelen év elején a budapesti egyetem, ezredéves ünnepélye alkalmából a tiszteletbeli bölcsészettudori czímmel tüntette ki.

Ily rendkívüli, a tudományok történetében a nagy ritkaságok közé tartozó tevékenység és siker után csak természetes volt, hogy azon egyetem, melynek kebelében megszakítás nélkül ötven esztendeig működött és az a város, melyben ugyanannyi ideig élt, tanári működésének ötvenedik évfordulóját az alkalomnak és az egyéniségnek megfelelő ünnepélylyel kivánta megülni. Az ilyennek rendezésére egyesült a glasgowi városi hatóság és az ottani egyetem és az ekként megalakúlt ünnepi bizottság nagyszámú tudományos testületet szólított fel a részvételre, első sorban azokat, melyek WILLIAM THOMSON iránti nagyrabecsülésüknek taggá választás által adtak volt már kifejezést.

Meghivó a M. T. Akadémiához is érkezett s miután az ünnepélyen résztvenni hajlandónak nyilatkoztam, elnökileg az Akadémia képviseletével bizattam meg s személyre szóló meghivó kieszközlése czéljából nevem a rendező-bizottsággal közöltetett, továbbá a budapesti egyetem rektora részéről a tiszteleti doktor czímadományozás bejelentésére kérettem fel, az oklevél nem készülhetvén el idejében.

Maguk az ünnepélyek Glasgow-ban, Skócia legnagyobb, háromnegyed millió lakósságú, rendkívül fejlődött technikai iparral bíró városában folyó évi június hó 15., 16. és 17. napjain tartattak meg s a maguk nemében úgy nagyszerűségük, mint eredetiségük és kitűnő rendezésük révén még Britanniában is esemény számba mentek, miről nemcsak az egyidejű angol napi sajtó és képes lapok részletes közleményei, hanem az ottani legfelsőbb körök élénk érdeklődése is tanuskodott.

Összegyűltek a szó szoros értelmében a világ minden tájékáról az ünnepeltnek tisztelői; Európa majdnem minden mívelt államából, Amerikából, Fokföldből, Kelet-Indiából, Ausztráliából jelentek meg résztvevők, számra nézve körülbelül 250-en s már ezen külsejükre nézve is oly különböző férfiak találkozása és érintkezése rendkívül érdekes volt; hiszen bennszülött indiai egyetemi tanárt is láttunk!

A kivülről jött vendégek nagyobb része és magam is a glasgowi egyetemi tanárok és más érdeklődő körök vendégszeretetét élveztük, s mikor az ünnepélyeket megelőző nap délutánján házi gazdámmal, a pathologia tanárával, felkerestük Lord KELVIN-t, ki egy, az egyetem tulajdonát tevő házban lakik, ez hetvenkét éve daczára azonnal emlékezett, hogy az 1882.

és 1884. évi, Párisban tartott nemzetközi elektromos kongresszuson jelen voltam. A «five o' clock tea»-n a társalgás egyik tárgya természetesen a Röntgen-sugarak voltak.

Az ünnepély első részét, mintegy előestélyét egy június 15-én, hétfőn, a glasgowi egyetem e czélra átalakított nagy termeiben rendezett fényes fogadó estély (conversazione) képezte, melyen körülbelől kétezer meghívott hölgy és úr jelent meg; belépésüknél egyfelől a glasgowi egyetem tanácsa, másfelől a glasgowi városi hatóság fejei fogadták. A vendégek előhaladásuk közben a kis emelvényen álló jubilárissal és nejével kezet szorítottak és nemcsak a díszes termekben, a brit egyetemek jelenlévő nagyszámú graduáltjai színes díszöltözeteiben, hanem az eredeti skót felvidéki katonaság (highlanders) zenekarának és sípos karának sajátszerű zenedarabjaiban gyönyörködtek, melyeket e karok az ottani egyetem egyik nagy udvarában hallattak, mialatt a közönség az enyhe nyári estén az udvar körül sétált.

De ezen estély legérdekesebb látványosságát az ünnepelttől feltalált eredeti készülékek és gépek gyűjteménye nyujtotta, mely a nagy könyvtári teremben három hosszú és széles asztalon szép elrendezésben elhelyezve, hatásos módon hirdette egyrészt feltalálójuk és szerkesztőjük gyakorlati képességét, másrészt azon technikai ipar nagy fejlettségét, melynek előállításukat köszönhetik. Legyen szabad itt csak mellesleg érintenem, hogy THOMSON-KELVIN gyakorlati készülékeit és gépeit kezdettől fogva a glasgowi JAMES WHITE czég készíti, mely egészen igénytelen kezdetből szellemi tanácsadójával együtt rendkívüli módon gyarapodott s habár csakis a KELVIN-féle normál (standard) apparátusokat készíti, jelenleg a maga nemében egyike a legnagyobb ily *gyáraknak és Glasgow egyik ipari látványossága,* melynek megtekintésével e nap délelőttjét töltöttem volt.

Ugyancsak ezen asztalokon voltak kirakva Lord KELVIN összes nyomtatásban megjelent közleményei és művei; továbbá az asztalok hossza mentén, közepük felett felállított fa-falakon összes tiszteleti oklevelei és tudományos társulatok tagsági okmányai; közöttük nagy örömmel vettem észre a M. T. Akadémiának 1873-ban kelt tagsági oklevelét a kisérő levéllel együtt, mely félhasábosan magyar és angol nyelven van írva és gróf LÓNYAY MENYHÉRT elnök és ARANY JÁNOS főtitkár aláírásával van ellátva.

Legnagyobb mértékben vonzotta azonban a nagyszámú vendégek zömét a széles asztalokon elhelyezett három, közel egyforma, csodálatosan működő távírógép, KELVIN-nek ú. n. *syphon-recorder*-ei, melyeket három nagy tengeralatti kábel-társaság, ugyanis az Anglo-American-, az Eastern- és a Commercial-Cable-Company ezen estély tartamára vonalaival kapcsolatba hozatott és így lehetővé tette, hogy a világ legtávolabb helyeiről is távirati értesítések érkezhessenek közvetlenül az ünnepély színhelyére. Sőt, e kábelek és bizonyos szárazföldi vezetékek alkalmas egybekapcsolásával az egész földet körülfogó vonal létesült és az egyik asztalon lévő géptől a szomszédos asztalon lévő géphez az egész földkörüli vezetéken is lehetett telegrafozni, az üzenet *hét*, a felelet *négy* perczet vett igénybe.

Bámulattal tekintett mindenki e sajátszerű, folytonosan zümmögő gépekre, a technikai ipar valóságos kis csodáira, melyek titokzatos finom *kék hullámírással* szakadatlanul írták le a legombolyodó papirszalagokra a világ minden tájékáról, Amerikából, Indiából, Japánból stb. szünet nélkül érkező száz meg száz üdvözlő táviratot, melyeket a távíróhivatalnokok alig győztek közönséges, mindenkinek olvasható irásba áttenni. Mindezeket az ünnepelt rögtön ugyanily úton köszönte meg; bizonyára a kiérdemlett megelégedés érzete tölthette meg keblét annak a tudatában, hogy a közlekedési mód nagymérvű tökéletesítéséhez ő is igen lényegesen hozzájárulhatott.

Mulasztást követnék el, ha fel nem említeném, hogy a kiállított tárgyak között derültséget okozott egy tengerész tréfa tárgya, ugyanis egy rémséges borotva-forma szerszám, melynek fűrészmódra fogazott pengéje körülbelül $^2/_3$-ad méter hosszú volt, s mely felirata szerint az a borotva, melylyel Neptunus apó megborotválta Lord Kelvin-t és kiséretét, mikor 1873. július 27-én a *Hooper* nevű kábel-hajón az egyenlítőn áthaladtak.

A főünnepély azonban a következő napra, keddre, június 16-ára esett. Délelőtt tíz órakor gyűltek össze a jubilans férfiú üdvözlésére megjelent küldöttségek és egyes delegatusok és testületileg vonultak a meghitt előkelő közönséggel a földszint és karzaton szorongásig megtelt egyetemi nagy díszterembe, az ú. n. *Bute-Hall*-ba, lelkesen üdvözöltetve a körülbelül 2000 jelenlevő által. Államaik nevei szerinti alfabetikus sorrendben foglaltak helyet az első padokban, szemben a rendező-bizottsággal és Lord Kelvin-nel, kik egy emelvényen, az utóbbi külön asztal mellett foglaltak volt helyet, az ünnepeltet már belépésénél zajos üdvkiáltások és orgonaszó fogadta.

Rövid bevezető ima és beszéd után felolvasták és állva hallgatták meg az angol királynő üdvözlő üzenetét, azután a wales-i herczegét, ki még sajnálkozását is kifejezte, hogy közbejött akadályok miatt az ünnepélyen személyesen nem vehet részt; ezután következtek az idegen (t. i. a nem brit) delegatusok üdvözletei az említett sorrendben, melyben Austro-Hungary volt az első állam.

Minthogy az Ausztria részéről bejelentett képviselő megjelenésében akadályozva volt, Magyarország részéről pedig csak magam jelentem meg: azon szerencsében részesültem, hogy az összes jelen volt képviselők közül mint első üdvözölhettem Lord KELVIN-t. Tekintve a delegatiók nagy számát, mely szerint, ha mindegyik csak egy-egy perczig is szól, ez két óránál több időt veszen igénybe, üdvözletem csak igen rövid lehetett és következőképpen hangzott:

Lord KELVIN!

I come in the name of the Hungarian Academy of Sciences and of the Royal Hungarian University of Budapest to greet You on this great occasion.

The Hungarian Academy of Sciences enrolled Your name in the brilliant list of her foreign members as long as twenty five years ago, and I am charged by the University of Budapest to announce tou You, that in connection with the millennial celebrations now being held at Budapest, the University has elected You an Honorary Doctor of Philosophy and that His Majesty Francis Joseph I. has confirmed this election.

I find this one of the happiest hours of my life.

I can personally assert before this splendid assembly, that the lecture-rooms of Natural Science in Hungary resound with Your Lordships name, that our physical laboratories contain the scientific apparatus, invented by Your Lordship and applied according to the methods, established by Your Genius, and lastly, that our scientific research and literature is largely inspired by the brilliant scientific conceptions, which Your Lordship has given to the world.

In the name of my countrymen I join in the congratulations which will reach You to day from every quarter of the world.

Ezen üdvözlet magyarra fordított szövege a következő:

«Lord KELVIN!

A Magyar Tudományos Akadémia és a budapesti m. kir. tudományegyetem nevében jöttem, hogy üdvözöljem Önt e nevezetes alkalomból.

A Magyar Tudományos Akadémia már 23 évvel ezelőtt sorozta Önt külső tagjai fényes sorába és a budapesti egyetem részéről annak a bejelentésével vagyok megbízva, hogy a jelenleg Budapesten megtartott ezredéves ünnepségek kapcsán ezen egyetem Önt tiszteleti bölcsészetdoktornak választotta és hogy Ő Felsége I. Ferencz József e választást helyben hagyta.

Életemnek ez egyik legboldogabb órája.

Személyes meggyőződésből állíthatom e fényes gyűlekezet előtt, hogy a természettan előadó termei Magyarországon visszhangoznak Lordságod nevétől, hogy physikai laboratoriumainkban megvannak az Ön által feltalált tudományos készülékek, melyeket Lordságod lángelméjével megállapított módszerek szerint alkalmazunk, és végre, hogy tudományos buvárkodásunk és irodalmunk nagy mértékben azon fényes tudományos eszmék behatása alatt áll, melyeket a világ Lordságodnak köszönhet.

Honfitársaim nevében csatlakozom azon szerencsekivánatokhoz, melyek Önt a mai napon a világ minden részéből érik.

Ugy látszik, hogy elmondott üdvözletem a jelenlevők helyeslésével találkozott, mert a földszinti közönség tetszésnyilvánulása hallatszott, mely a karzatokat megtöltött egyetemi ifjúságnál majdnem viharos visszhangra talált.

Utánam sorban mondták el üdvözleteiket a többi küldöttségek angol vagy kivételesen franczia nyelven.

Legyen szabad e helyen csak azon megható jelenetről megemlékeznem, mikor a közel nyolczvan éves Stokes, az ünnepeltnek egykori tanára, és a Royal Society elnökségében elődе a cambridge-i egyetem küldöttségének élén előlépett és a jubilánssal néma, de annál többet mondó kézszorítást váltott.

Az utolsók között jött a glasgowi egyetemi ifjúság küldöttsége, mely kedves tanára iránt érzett tiszteletének, hálájának és ragaszkodásának adott kifejezést.

A glasgowi egyetem igazgató-tanácsa s végre ezen egyetemnek ú. n. «senatus academicus»-a zárta be az üdvözlők sorát.

Ezután következett egy másik ünnepélyes actus, nevezetesen a glasgowi egyetem részéről tiszteleti doktorok kreálása és az így megtisztelteknek felavatása.

Először is magát Lord Kelvin-t tisztelték meg ily módon: mert ő, bár sok más egyetem tiszteleti doktora, eddig saját egyeteme részéről ily kitüntetésben még nem részesült; és mihelyt a jelenlevők tetszésvihara között orgona-szó kiséretével felavatták, ő, mint rangra nézve legidősebb tanár, azonnal elfoglalta a szószékhez hasonló felavató emelvényt, és ő lett a többiek felavatója.

Ugyanis Lord Kelvin e minőségében kiemelte, hogy ily számos és nagyhírű tudományos képviselő megjelenése a glasgowi egyetemnek is nagy megtisztelése s hogy ezen egyetem, e nap megörökítésére, a nem brit képviselők közül többeket tiszteleti doktorokká kíván kreálni és felkérte az egyetemi tanácsot, hogy az illetőket a szokásos módon felavassa.

Ez akként történt meg, hogy a kiszemelt tizennégy külföldi delegatusra már az ünnepély elején, a nagy terembe lépés előtt hosszú fekete talárszerű felöltőt (*gown*-t) adtak s karjukra biborvörös selyemből készült, a váll körüli viselésre alkalmas, a nyaknál keskeny, hátrafelé szélesedő, barát-csuklya-szerű ruhadarabot (*hood*-t) tettek. Üdvözlésük elmondása után őket az emelvényre ültették: most nevük alfabetikus sorrendje szerint egyenként felszólították s néhány mondatban tudományos működésüket jellemezték. Erre az illető elölépett, a felavató emelvénye alatt álló bársonyzsámolyra féltérddel leereszkedett; ekkor az egyetemi főpedellus az illetőnek karjáról levette a bíbor-csuklyát és válla körül tette s utána végre Lord Kelvin, a felavató a lapos, kék bársonyú kerek doktori kalapot tette fejére e szavakkal: «*creo te doctorem*», mire a gyülekezet őt élénken üdvözölte.

Ekként tizennégy delegatus, közöttük e sorok írója is, abban a szerencsében részesült, hogy az élő physikusok legjelentékenyebbjének kezéből fogadhathatta a «*doctor juris utriusque honoris causa*» fokát.

Nevükben, valamint saját nevében maga Lord Kelvin köszönte meg egy hosszabb beszédben a megtiszteltetést és ezzel az ünnepély ezen része dél körül véget ért.

Ünnepi, illetve díszöltözetben kivonulva az egyetemi termekből, főkapuja előtti szabad terén Lord Kelvin körül fesztelen csoportot alkottunk és így fotografáltattunk; e kép mását több angol képes lap hozta.

Az ünnepeltnek meghivására körülbelől tizenketten gyűltünk össze az ő házánál a fél kettőkor szokásos «luncheon»-ra (második reggelire), mely azonban valóságos ebéddé nőtt s melyen Lord Kelvin szeretetreméltóságát újra tapasztalhattuk.

Ugyanezen nap este Glasgow város közönsége az ünnepeltnek és a küldöttségek tiszteletére az ottani St. Andrews-Hall-ban fényes bankettet rendezett, melyen körülbelül négyszáz férfi-vendég vett részt s mely alkalommal az idegen képviselők nagy előzékenységet tapasztalhattak; később a bankett vége felé a már előzetesen és pedig elég korlátolt számban megállapított felköszöntők meghallgatására *hölgyközönség* foglalta el az addig üres, tágas karzatokat.

Előbb az angol királynő új üzenetét olvasta fel a főpolgármester, melyben a királynő az ünnepélynek szép lefolyása feletti örömét fejezte ki; azután következtek a szónokok felköszöntői és ezekre a köszönetnyilvánítások; a megállapított köszöntők száma csak egyetlen egygyel lett megtoldva, azzal ugyanis, melyet a karzaton jelen lévő Lady Kelvin-re mondtak. Az este azzal végződött, hogy az egész közönség felállt és kiki két szomszédjával állandóan kezet fogva, zenekar kiséretével unisono énekelték az angol nemzeti hymnust.

Az ünnepélyek harmadik napjára a glasgowi egyetem tanári kara a vendégek tiszteletére egy igen érdekes kirándulást rendezett; a résztvevők ugyanis két különvonattal mentek a Glasgowtól körülbelől harminczöt kilométerre lévő Greenock kikötő-városig, hol a jubiláris és neje társaságában a Glasgow and South-Western-Railway-Company «Glen-Sannox» nevezetű, fényes berendezésű személyszállító hajójára szálltak, mely őket a nyugati skót tengerpart egy érdekes szigetcsoportja körül és néhány hosszú nyulványú tengerbevágás mentén volt viendő.

Igazi skót időjárást élveztünk: verőfényes nap és kék ég, borulat, köd, szivárványos eső többszörös egymásutánban következett s csak emelte a hegyvidékes, haragos-zöld növényzettel borított szigetek és tengerpartok természeti szépségeit. Útközben a folytonosan hangzó zenekar dallamainál, a mennyire ezt az időjárás engedte, a társaság egy része, közöttük a jubilárisnak matronakorban lévő neje is, az oly jellemző skót tánczokra perdült.

A glasgowi egyetemi ifjuság sem akart hátramaradni; ők már június 15-én késő este a jubiláris, de különösen idegen tanuló-vendégeik tiszteletére ú. n. «*Gaudeamus*»-t rendeztek volt. Ezen alkalommal pedig külön hajón követték a kirándulókat s mikor egy fordulónál a két hajó egymás mellett elhaladt, kitörő «cheer»-vel üdvözölték a hajó fedélzetén lévő Lord Kelvin-t, szeretve tisztelt tanárukat.

Délután hat órakor ismét Glasgowban voltunk és ezzel az ünnepélyek véget értek.

A kik ezen lélekemelő tudományos jubilæumon részt vehettek, életüknek egyik legkedvesebb és legmaradandóbb emlékével távoztak; magára az egész ünnepélyre nézve pedig legjellemzőbb az a szó, melyet a hivatalos banketten elmondott pohárköszöntőjében használt Ferrero tábornok, Olaszország londoni nagykövete, ugyanis, hogy *ezen jubilæum a tudomány apotheosisa volt.*

Dr. *Fröhlich J.*

PHYSIKAI LABORATORIUM.

Az elektromosság elhelyezkedése a vezetők felületén. Annak megmutatására, hogy a vezető felületén elhelyezkedett elektromosság kifelé taszítást szenved, KOSZTOLÁNYI ÁRPÁD tagtársunk a következő egyszerű kisérletet közli: A Winter-féle gép gyűjtőgömbjének furatába, melybe rendesen a fagyűrű tartóját szokás illeszteni, tegyünk be egy parafahengert, úgy hogy vége kissé kiálljon. A mint a gépet megindítjuk, a henger hevesen kilökődik s nagy ívben messze röpül. Ha a kisérletet valamivel rövidebb parafahengerrel ismételjük, mely nem ér ki a lyukból, bármenynyire működtessük a gépet, a henger nem dobatik ki, bár kisebb a tömege, mint az előbbi esetben.

*

A réz befuttatása. Rézből készült tárgyak felületét barnára, sőt egész feketére a következő eljárással lehet befuttatni: Egy s. r. réznitrátot 2 s. r. 0,96 sűrűségű ammoniakban feloldunk s a tárgyat, miután felületét jól lecsiszoltuk, az oldatba mártjuk. A rézfelület annál sötétebbé lesz, mennél hosszabb ideig van az oldat hatásának alávetve; hogy egészen megfeketüljön, több órán keresztül kell az oldatnak hatnia. Ha a felület kelleténél feketébb lesz, higított sósavval földeríthető; ez utóbbi művelet azonban óvatosan, fokozatosan alkalmazandó. A felület viaszk vagy vazelin segítségével egész fényesre csiszolható. Az ammoniákos oldat állandóan hidegen tartandó.

*

Vízhatlan és saválló faedények. Bármely ép, tehát hézagtalan és repedésmentes faedény folyadékok, sőt savak eltartására is alkalmassá tehető a következő igen egyszerű művelet révén. Az edény belsejét mindenekelőtt zselatinréteggel kell bevonni; a rétegnek teljesen folytonosnak és egyenletesnek kell lennie, a mi zselatinoldattal való öblögetés útján könnyen elérhető. Erre a réteget kaliumbichromáttal kell megitatni; e végett kevés bichromátoldattal öblögetjük az edényt, és pedig több ízben arra ügyelvén, hogy az egész felület jól át legyen itatva. A fenmaradó folyadékot kiöntvén, a bevonatot a fény hatásának teszszük ki. Ismeretes, hogy a zselatin rétegben levő bichromát a fény hatása alatt megbarnul és oldhatatlanná válik, s ezzel a czél el van érve.

MEGOLDOTT FELADATOK.

25. *Ha az ABC háromszög magasságpontja M és a BCM, CAM, ABM háromszögek körül írt körök középpontjai A_1, B_1, C_1, bizonyíttassék be, hogy az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek kongruensek.*

(VALYI.)

Első megoldás Csillag Vilmos műegyetemi tanársegéd úrtól.

Az

$$AM,\ BM,\ CM$$

vonaldarabok két-két a feladatban említett körnek közös húrja. Ha e magasságdarabok felező pontjai rendre:

$$A',\ B',\ C',$$

akkor az $A_1B_1C_1$ háromszög e pontokon át

$$BC,\ CA,\ AB\text{-}$$

vel vont párhuzamosakból keletkezik.

A történt felezés következtében

$$B'C' \parallel BC, \quad C'A' \parallel CA, \quad A'B' \parallel AB,$$

és

$$B'C' = \tfrac{1}{2}BC, \quad C'A' = \tfrac{1}{2}CA, \quad A'B' = \tfrac{1}{2}AB.$$

A föllépő

$$B'C'A'C_1, \quad C'A'B'A_1, \quad A'B'C'A_1$$

parallelogrammokból pedig látni, hogy

$$B_1A' = B'C' = A'C_1 = \tfrac{1}{2}BC$$
$$C_1B' = C'A' = B'A_1 = \tfrac{1}{2}CA$$
$$A_1C' = A'B' = C'B_1 = \tfrac{1}{2}AB,$$

tehát

$$B_1C_1 = BC$$
$$C_1A_1 = CA$$
$$A_1B_1 = AB$$

bizonyítékául annak, hogy az $A_1B_1C_1$ és ABC háromszögek kongruensek. Egyszersmind világos, hogy az ABC háromszög magasságpontja, M, az $A_1B_1C_1$ háromszög körül írt kör középpontja és viszont.

*

Második megoldás Doroghi Ignácz főreáliskolai tanár úrtól Temesvárott.

A BCM háromszög körül írt körnek középpontja abban az egyenesben lesz, a mely merőlegesen felezi CM-et; ugyanebben a merőlegesben lesz az ACM háromszög középpontja is, minélfogva $A_1B_1 \perp CM$, s így $A_1B_1 \parallel AB$; épen így mutathatjuk ki, hogy $B_1C_1 \parallel BC$ és $C_1A_1 \parallel CA$; tehát az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek megfelelő oldalai egymáshoz párhuzamosak.

Ha most a BC oldal felező pontjában merőlegest emelünk, akkor ez egyrészt átmegy a K ponton mint az ABC háromszög középpontján, másrészt pedig A_1 ponton mint az MBC háromszög középpontján, tehát $A_1K \perp BC$ és az ezzel párhuzamos B_1C_1-re is, azaz A_1K egyik magassága az $A_1B_1C_1$ háromszögnek. Épen így mutatható ki, hogy B_1K a második és C_1K a harmadik magassága, K pedig magassági pontja.

Ismeretes, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög perspektív helyzetben van az ABC háromszöggel olyformán, hogy ez utóbbi háromszög FEUERBACH-körének középpontja K_f a kollineáczió czentrumát* képezi. Minthogy K_f — miként szintén ismeretes — felezi az MK távolságot, és kimutattuk, hogy $A_1K \parallel AM$, következik hogy

$$AMK_f\triangle \cong A_1K_fK\triangle,$$

tehát

$$AK_f = K_fA_1;$$

épen így

$$BK_f = K_fB_1$$

és

$$CK_f = K_fC_1.$$

Ebbből következik, hogy

$$CK_fA\triangle \cong A_1K_fC_1\triangle,$$

tehát

$$A_1C_1 = AC,$$

* HOFFMANN'S «Zeitschrift für math. und phys. Unterricht» 20. évf. 1889, 430. lap.

hasonlóképen

$$B_1C_1 = BC, \quad C_1A_1 = CA,$$

mivel a kitűzött tétel be van bizonyítva.

A mondottakból kitünik, hogy a K pont az $A_1B_1C_1$ háromszögben ugyanazt a szerepet játszsza, mint az M pont az ABC háromszögben, és viszont; tehát M az $A_1B_1C_1$ háromszög körűl írt körnek középpontja. A K_f pontra nézve az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek két szimmetrikus rendszert alkotnak; mindkét háromszögnek közös FEUERBACH-köre van, mely e szerint 6—6, azaz 12 ismert ponton megy keresztül.