MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

NEGYEDIK ÉVFOLYAM

I. FÜZET. 1895 JANUÁR

1917/95

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1895

TARTALOM

Lap

KÜRSCHÁK JÓZSEF: Hunyady Jenő egyik determináns-tételéről ... 1

FARKAS GYULA: A Carnot-Clausius-féle tétel levezetése ... 7

SUTÁK JÓZSEF: Algebrai vizsgálatok a függvénytanban ... 12

KLÚG LIPÓT: Észrevételek az «Egy helyzetgeometriai tétel a tetraéder éleiről» című czikkhez ... 21

Physikai Szemle. (A katód-sugarakról) ... 26

Irodalom. (Ostwald's Klassiker. — 40. *Lavoisier* und *Laplace*, Zwei Abhandl. üb. die Wärme. — 44. Das Ausdehnungsgesetz der Gase. Abhandl. von *Gay-Lussac*, *Dalton*, *Dulong* u. *Petit*, *Magnus*, *Regnault*. — *Blagden*, Die Gesetze der Ueberkaltung. — *Fahrenheit*, *Réaumur*, *Celsius*. Abhandl. über Thermometrie. — *Gauss*, Intensität der erdmagn. Kraft. — *Lambert*, Entwerfung der Land- und Himmelskarten. Ism. KÖVESLIGETHY.) ... 31

Feladatok. (A 21. feladat megoldása FREIKIND IGNÁCZ, CSILLAG VILMOS és BEKE MANÓ uraktól) ... 33

Physikai Laboratorium. (A nedvesség méréséről. — A kristályosodás vetítése. — A mágnesi állapot rögzítése — Dielektrin.) ... 47

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A negyedik társulati év 1895. január 1-én kezdődött. A *tagsági díj* az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) czímére — legczélszerűbben a jelen füzethez mellékelt posta-utalványnyal — beküldeni. *Hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéséért.*

Rendes ülések. A társulat üléseit minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja, a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3.), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czímére **(VI. Bulyovszky-u. 16.)** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár **(VII., Csengery-u. 1)**, a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a *reclamatiók* is. A reclamatiókat — költségkimélésből — mindenkor a legközelebb megjelenő füzettel egyidejűleg teljesítjük.

T. Munkatársainkhoz. Kérjük t. munkatársainkat, hogy közleményeiket az összehajtott irópapiros félívének csak egyik oldalára és ennek is csak egyik felére, — a képleteket mindig külön sorba — minél olvashatóbban irni szíveskedjenek. A közleményekhez való rajzok nem a szövegbe, hanem külön mellékletként rajzolandók, folyó számokkal látandók el s az ábrák helye a szövegben a folyó számnak mellé irásával jelölendő meg. Kérésünk szives teljesítésével a szerkesztőket fárasztó munkától, a társulatot pedig a korrekturákért járó tetemes kiadástól mentik fel.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

NEGYEDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1895

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

A M. KIR. FERENC JÓZSEF TUDOMÁNYEGYETEM
Könyvtár
Szeged

50255

A M. Kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem
KÖNYVTÁRA
SZEGED

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

NEGYEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

KÜRSCHÁK JÓZSEF: Hunyady Jenő egyik determináns tételéről 1; FARKAS GYULA: A Carnot-Clausius-féle tétel levezetése 7; SUTÁK JÓZSEF: Algebrai vizsgálatok a függvénytanban 12; KLUG LIPÓT: Észrevételek az «Egy helyzetgeometriai tétel a tetraéder éleiről» című czikkhez 21; *Physikai Szemle.* (A katód-sugarakról) 26; *Irodalom.* (Oswald's Klassiker. 40. LAVOISIER und LAPLACE, Zwei Abhandl. üb. die Wärme 44. Das Ausdehnungsgesetz der Gase. Abhandl. von GAY-LUSSAC, DALTON, DULONG u. PETIT, MAGNUS, REGNAULT. BLAGDEN, Die Gesetze der Ueberkaltung. — FAHRENHEIT, REAUMUR, CELSIUS, Abhandl. über Thermometrie. — GAUSS, Intensität der erdmagn. Kraft. — LAMBERT, Entwerfung der Land- und Himmelskarten. Ism. KÖVESLIGETHY) 31; *Feladatok.* (A 21. feladat megoldása FREIKIND IGNÁCZ, CSILLAG VILMOS és BEKE MANÓ uraktól) 33; *Physikai laboratorium.* (A nedvesség méréséről. — A kristályosodás vetítése. — A mágnesi állapot rögzítése. — Dielektrin.) 47.

Második füzet.

SZÉPRÉTHY BÉLA: A csavart oszlop saját árnyékhatárvonalának meghatározásáról (I. közl.) 49; SZIJÁRTÓ MIKLÓS: Elliptikus áram hatása a gyúpontjaiban levő mágnesi pólusra 56; SZIJÁRTÓ MIKLÓS: Egy sor, mely π értékéhez vezet 67; *Physikai Szemle.* (A Hertz-féle kisérletekről) 71; *Irodalom.* (CHRISTIANSEN, Elemente der theor. Physik. Ism. FARKAS GY.) 79; *Feladatok.* (A 21. feladat megoldásai MAKSAY ZSIGMOND, GRÜNWALD MIKSA, LÓKY BÉLA és SUTÁK JÓZSEF uraktól) 82; *Előadások.* (FRÖHLICH J. «Miért esik mindig a talpára a macska?») 89; *Társulati ügyek.* Határozat a M. Ph. T. harmadik közgyűlése tárgyában 95.

Harmadik füzet.

KLIMKÓ MIHÁLY: Adalék a primitiv gyökök elméletéhez 97; ifj. SZILY KÁLMÁN: A binomiális együtthatók nehány tulajdonsága 102; KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az invariánsok elméletének alaptételéről. (II. közl.) 107; *Irodalom.* (VOIGT,

*

Kompendium d. theor. Physik., ism. FARKAS GYULA) 121; *Feladatok.* (KLUG, KÜRSCHÁK, VÁLYI és SZÉPRÉTHY uraktól) 126; *Megoldott feladatok.* (A 22. feladat megoldása SZÉPRÉTHY BÉLA és KÜRSCHÁK JÓZSEF uraktól) 126; *Physikai laboratorium.* (A benzin-szaturátor. — A légkör felhajtó ereje. — Az elektroskop használatához.) 131; *Értesítő a Math. Phys. Társ. előadásairól.* (KÖVESLIGETHY R.: Az ephemeridék számításáról.) 134.

Negyedik füzet.

SZILY KÁLMÁN: A primitiv gyökök szakaszossága 145; RADOS GUSZTÁV: A cziklikus determinánsok elméletéhez 153; *Physikai Szemle.* (Az argonról.) 155; *Irodalom.* (A kinematikai geometria történeti fejlődése, HORNISCHEK HENRIKTŐL) 161; *Értesítő a Math. Phys. Társ. előadásairól.* (DISCHKA GYŐZŐ: Az ajaksípok hangtüneményei. BARTONIEK GÉZA: A víz és gázvezeték elektromos áramáról.) 169; *Társulati ügyek. Vegyesek.* (Arthur Cayley, KOPP LAJOSTÓL) 192.

Ötödik füzet.

PRIVORSZKY ALAJOS: A térbeli görbék elméletéhez 193; SZÉPRÉTHY BÉLA: A csavart oszlop saját árnyékhatárvonalának meghatározásáról 197; BEKE MANÓ: Egy tétel a homogén lineár differenciálegyenletek algebrai integráljairól 203; BREUER MÓR: Adalék a több változós függvények elméletéhez 207; *Physikai Szemle.* (A dörzsölési elektromosság eredete.) 212; *Irodalom.* (A M. T. Akadémia Lukács Krisztina-pályadíjáról. — WINKELMANN, Handb. d. Physik, ism. HELLER. — KAYSER, Physik, ism. K. J.) 221; *Megoldott föladatok.* (A 22. feladat megoldása BLAU ÁRMIN, CSILLAG VILMOS, SUTÁK JÓZSEF és STEINER LAJOS uraktól) 229; *Feladatok.* (31. feladat TŐTÖSSY BÉLA úrtól) 234; *Vegyesek.* (Bolygó rendszerünk határairól, KÖVESLIGETHY RADÓ.) 235.

Hatodik és hetedik füzet.

KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az analitikai függvények elméletéhez (I. közl.) 241; SZIJÁRTÓ MIKLÓS: A Wheatstone-féle híd ellenállása 256; SZÉPRÉTHY BÉLA: A ferde és egyenes körkúp sík metszeteinek gyújtópontjairól 264; KLUG LIPÓT: A harmonikus polusról 273; FUCHS KÁROLY: Adalék a Mars felületének elméletéhez 283; SZÉPRÉTHY BÉLA: A csavart oszlop saját árnyékhatárvonalának meghatározásáról 288; *Physikai Szemle.* (A szinek fotografálásáról. — A hidrogén folyósítása, kritikus hőmérsékletének és normális forrpontjának meghatározása. — A folyósított levegő tudományos alkalmazásai) 296; *Irodalom.* (KLEIN, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Ism. KÜRSCHÁK.) 303; *Megoldott feladatok.* (A 23. feladat megoldása SZÉPRÉTHY BÉLA, CSILLAG VILMOS, DOROGHY IGNÁCZ, FREIKIND IGNÁCZ, LÓKY BÉLA, KLUG LIPÓT, BREUER MÓR és MAKSAY ZSIGMOND uraktól. — A 24. feladat megoldása SZEPRÉTHY BÉLA és DOROGHY IGNÁCZ uraktól) 306; *Physikai la-*

boratorium. (Világító testek sötét képei. — Elektromos védőernyő átlátszó vezető anyagból. — Ezüstözés. — Az aluminium forrasztása.) 319.

Nyolczadik füzet.

SUTÁK JÓZSEF: Alaprendszerek egy változós algebrai függvényeknél (I. közl.) 321; BAUER MIHÁLY: Megjegyzés Dirichlet egyik tételéhez 331; *A Mathematikai és Physikai Társulat II. versenye* 337; *A Mathematikai és Physikai Társulat II. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok* 339; L. KOENIGSBERGER: Helmholtznak a mathematika és a mechanikai alapelveire vonatkozó vizsgálatai 345.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Ismertető és önálló dolgozatok.

Lap.

BAUER MIHÁLY: Megjegyzés Dirichlet egyik tételéhez ... 331
BEKE MANÓ: Egy tétel a homogén lineár differenciálegyenletek algebrai integráljairól ... 203
BREUER MÓR: Adalék a több változós függvények elméletéhez ... 207
FARKAS GYULA: A Carnot-Clasius-féle tétel levezetése ... 7
FUCHS KÁROLY: Adalék a Mars felületének elméletéhez ... 283
KLIMKÓ MIHÁLY: Adalék a primitiv gyökök elméletéhez ... 97
KLUG LIPÓT: Észrevételek az «Egy helyzetgeometriai tétel a tetraéder éleiről» czimű czikkhez ... 21
— A harmonikus polusról ... 273
KÜRSCHÁK JÓZSEF: Hunyady Jenő egyik determináns tételéről ... 1
— Az invariánsok elméletének alaptételéről (Második közl.) ... 107
— Az analitikai függvények elméletéhez (Első közl.) ... 241
PRIVORSZKY ALAJOS: A térbeli görbék elméletéhez ... 193
RADOS GUSZTÁV: A cziklikus determinánsok elméletéhez ... 153
SUTÁK JÓZSEF: Algebrai vizsgálatok a függvénytanban ... 12
— Alaprendszerek egy változós függvényeknél ... 321
SZÉPRÉTHY BÉLA: A csavart oszlop saját árnyékhatárvonalának meghatározásáról (Első közl.) ... 49
— A csavart oszlop saját árnyékhatárvonalának meghatározásáról (Második közl.) ... 197
— A ferde és egyenes körkúp sik metszeteinek gyujtópontjairól ... 264
— A csavart oszlop saját árnyékhatárvonalának meghatározásáról (Harmadik és befejező közl.) ... 288
SZIJÁRTÓ MIKLÓS: Elliptikus áram hatása a gyújtópontjaiban levő mágnesi polusra ... 56
— Egy sor, mely a π értékéhez vezet ... 67
— A WHEATSTONE-féle híd ellenállása ... 256

Lap

SZILY KÁLMÁN: A primitiv gyökök szakaszossága ... 145
Ifj. SZILY KÁLMÁN: A binomiális együtthatók nehány tulajdonsága ... 102

Physikai Szemle.

BARTONIEK GÉZA: A Hertz-féle kisérletekről (RIGHI után) ... 71
— A hidrogén folyósítása, kritikus hőmérsékletének és normalis forrpontjának meghatározása (MATHIAS után) ... 298
CSEMEZ JÓZSEF: A katódsugarakról (LÉNÁRD után) ... 26
— A dörzsölési elektromosság eredete (CHRISTIANSEN után) ... 212
MIKOLA SANDOR: Az argonról (RAVEAU után) ... 155
TANGL KÁROY: A színek fotografálásáról (WIENER után) ... 296
— A folyósitott levegő tudományos alkalmazásai (DEWAR után) ... 301

Irodalom.

BARTONIEK GÉZA: HELMHOLTZnak a mathematika és a mechanika alapelveire vonatkozó vizsgálatai (ford.) ... 345
FARKAS GYULA: CHRISTIANSEN, Elemente der theor. Physik ... 79
— VOIGT, Kompendium d. theor. Physik ... 121
HELLER ÁGOST: WINKELMANN, Handbuch d. Physik II. és III. köt. ... 224
HORNISCHEK HENRIK: A kinematikai geometria történeti fejlődése ... 161
KLUPATHY JENŐ: KAYSER, Lehrb. d. Physik ... 228
KÖVESLIGETHY RADÓ: Ostvald's Klassiker 40, 44, 53, 54, 56 és 57 füz. 31
KÜRSCHÁK JÓZSEF: KLEIN, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie ... 303

Ismertetett művek.

BLAGDEN: Die Gesetze der Ueberkaltung (ism. KÖVESLIGETHY) ... 31
CELSIUS l. FAHRENHEIT stb.
CHRISTIANSEN: Elemente der theoretischen Physik (ism. FARKAS) ... 79
DALTON l. GAY LUSSAC stb.
DULONG l. GAY LUSSAC stb.
FAHRENHEIT, RÉAUMUR, CELSIUS: Abhandlungen über die Thermometrie (ism. KÖVESLIGETHY) ... 31
GAY LUSSAC, DALTON, DULONG u. PETIT, RUDBERG, MAGNUS, REGNAULT (1802—1842): Das Ausdehnungsgesetz der Gase (ism. KÖVESLIGETHY) 31
GAUSS: Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt (ism. KÖVESLIGETHY) ... 31

Lap

KAYSER: Lehrbuch der Physik (ism. KLUPATHY) --- --- --- --- --- 228
KLEIN: Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie (ism. KÜRSCHÁK) --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- 303
KOENIGSBERGER: Herm. v. HELMHOLTZ' Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik u. Mechanik (ford. BARTONIEK) --- --- --- 345
LAMBERT: Entwerfung der Land u. Himmels Karten (ism. KÖVESLIGETHY) --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- 32
LAPLACE l. LAVOISIER.
LAVOISIER u. LAPLACE: Zwei Abhandlungen über die Wärme (ism. KÖVESLIGETHY) --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- 31
MAGNUS l. GAY LUSSAC stb.
RÉAUMUR l. FAHRENHEIT stb.
REGNAULT l. GAY LUSSAC.
RUDBERG l. GAY LUSSAC.
SUTÁK: A fény elektromágnességi elmélete (pályamunka, birálják FRÖHLICH, KŐNIG és RADOS) --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- 291
WINKELMANN: Handbuch der Physik II. és III. köt. (ism. HELLER Á.) 224

Kitűzött feladatok.

KLUG LIPÓT kitűzi a 27-dik feladatot --- --- --- --- --- --- --- 125
KÜRSCHÁK JÓZSEF « a 28-dik « --- --- --- --- --- --- 125
SZÉPRÉTHY BÉLA « a 30-dik « --- --- --- --- --- --- --- 125
TŐTÖSSY BÉLA « a 31-dik « --- --- --- --- --- --- 234
VÁLYI GYULA « a 29-dik « --- --- --- --- --- --- --- 125

Megoldott feladatok.

BEKE MANÓ megoldja a 21-dik feladatot --- --- --- --- --- --- 38
BLAU ÁRMIN « a 22-dik « --- --- --- --- --- --- 229
BREUER MÓR « a 22-dik « --- --- --- --- --- --- 313
CSILLAG VILMOS « a 21-dik « --- --- --- --- --- --- 36
— « a 22-dik « --- --- --- --- --- --- 230
— « a 23-dik « --- --- --- --- --- --- 307
DOROGHI IGNÁCZ « a 23-dik « --- --- --- --- --- --- 309
— « a 24-dik « --- --- --- --- --- --- 318
FREIKIND IGNÁCZ « a 21-dik « --- --- --- --- --- --- 33
— « a 23-dik « --- --- --- --- --- --- 313
GRÜNWALD MIKSA « a 21-dik « --- --- --- --- --- --- 84

			Lap
Klug Lipót	megoldja	a 23-dik feladatot	313
Kürschák József	«	a 22-dik «	127
Lóky Béla	«	a 21-dik «	86
—	«	a 23-dik «	312
Maksay Zsigmond	«	a 21-dik «	82
—	«	a 23-dik «	314
—	«	a 23-dik «	316
Pilczer Ignácz	«	a II. tanulóverseny tételeit	342
Riesz Emil	«	a « « «	339
Steiner Lajos	«	a 22-dik feladatot	231
Sutak józsef	«	a 21-dik «	88
—	«	a 22-dik «	230
Szépréthy Béla	«	a 22-dik «	126
—	«	a 23-dik «	306
—	«	a 24-dik «	317

Physikai Laboratorium.

Bartoniek Géza: A nedvesség méréséről ... 44
— A dielektrin ... 48
— A légkör felhajtó ereje ... 132
— Az elektroszkop használatához ... 133
— Világító testek sötét képei ... 319
— Aluminium forrasztás ... 320
Fényes Dezső: A mágnesállapot rögzítése a vasban ... 47
Grúber Nándor: A kristályosodás vetítése ... 47
— Benzin-szaturátor ... 131
Tangl Károly: Elektromos védőernyő átlátszó anyagból ... 319
— Ezüstözés ... 320

Előadások.

Bartoniek Géza: A víz- és gázvezeték elektromos áramáról (közölve a 183. l.) ... 169
Beke Manó: A casus irreducibilis a harmadfokú egyenleteknél ... 92
Dischka Győző: Az ajaksípok hangjelenségei (közölve a 168. l.) ... 134
Fröhlich Izidor: «Miért esik mindig talpára a macska?» ... 91
Fuchs Károly: Megjegyzések a felületi feszültségre vonatkozó elterjedtebb kisérletekre ... 90

Lap

GRÜBER NÁNDOR: A benzin-szaturátor mint a vetitő-készülék fényforrása (közölve a 131. l.) --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- 90

HORNISCHEK HENRIK: A kinematikai geometria egyik alaptételéről --- 91

KONKOLY MIKLÓS: A távcsövek optikai és mechanikai szerkezetéről --- 132

KÖVESLIGETHY RADÓ: Az efemeridák számításáról (közölve a 134. l.) --- 90

KÜRSCHÁK JÓZSEF: Maximum-minimum problemák elemi tárgyalása --- 90

RADOS IGNÁCZ: Az ívhosszak méréséről --- --- --- --- --- --- --- 90

SUTÁK JÓZSEF: Az algebrai függvényekre vonatkozó újabb kutatásokról 169

HUNYADY JENŐ
EGYIK DETERMINANS-TÉTELÉRŐL.

Jelentsék ξ_{ab}, η_{ab}, ζ_{ab} az

$$(abc) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

determinánsnak következő aldeterminánsait:

$$\xi_{ab} = y_a z_b - z_a y_b \quad \eta_{ab} = z_a x_b - x_a z_b \quad \zeta_{ab} = x_a y_b - y_a x_b .$$

A szóban forgó tétel szerint, mely HUNYADY-nak: «*A másodfokú görbék és felületek meghatározásáról*» szóló értekezésének * 12-ik lapján foglaltatik:

$$p = \begin{vmatrix} \xi_{bc}^2 & \eta_{bc}^2 & \zeta_{bc}^2 & \eta_{bc}\zeta_{bc} & \zeta_{bc}\xi_{bc} & \xi_{bc}\eta_{bc} \\ \xi_{ca}^2 & \eta_{ca}^2 & \zeta_{ca}^2 & \eta_{ca}\zeta_{ca} & \zeta_{ca}\xi_{ca} & \xi_{ca}\eta_{ca} \\ \xi_{ab}^2 & \eta_{ab}^2 & \zeta_{ab}^2 & \eta_{ab}\zeta_{ab} & \zeta_{ab}\xi_{ab} & \xi_{ab}\eta_{ab} \\ \xi_{ad}^2 & \eta_{ad}^2 & \zeta_{ad}^2 & \eta_{ad}\zeta_{ad} & \zeta_{ad}\xi_{ad} & \xi_{ad}\eta_{ad} \\ \xi_{bd}^2 & \eta_{bd}^2 & \zeta_{bd}^2 & \eta_{bd}\zeta_{bd} & \zeta_{bd}\xi_{bd} & \xi_{bd}\eta_{bd} \\ \xi_{cd}^2 & \eta_{cd}^2 & \zeta_{cd}^2 & \eta_{cd}\zeta_{cd} & \zeta_{cd}\xi_{cd} & \xi_{cd}\eta_{cd} \end{vmatrix}$$

determinánsnak értéke:

$$-(bcd)^2\,(cda)^2\,(dab)^2\,(abc)^2.$$

Czélom e tételnek új levezetését és egy egyszerű alkalmazását bemutatni.

---

* Értekezések a math. tudományok köréből. Kiadja a M. Tud. Akadémia, VII. köt., 18. szám, 1880.

1. Hogy p értékét kipuhatoljuk, képezzük a

$$q = \begin{vmatrix} x_a & 0 & 0 & 0 & z_a & y_a \\ 0 & y_b & 0 & z_b & 0 & x_b \\ 0 & 0 & z_c & y_c & x_c & 0 \\ x_d & 0 & 0 & 0 & z_d & y_d \\ 0 & y_d & 0 & z_d & 0 & x_d \\ 0 & 0 & z_d & y_d & x_d & 0 \end{vmatrix}$$

determinánssal való szorzatát. Ez:

$$\begin{vmatrix} . & . & . & \xi_{bc}(bcd) & \eta_{bc}(bcd) & \zeta_{bc}(bcd) \\ . & . & . & -\xi_{ca}(cda) & -\eta_{ca}(cda) & -\zeta_{ca}(cda) \\ . & . & . & \xi_{ab}(dab) & \eta_{ab}(dab) & \zeta_{ab}(dab) \\ 0 & -\eta_{ad}(dab) & -\zeta_{ad}(cda) & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{bd}(dab) & 0 & -\zeta_{cd}(bcd) & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{cd}(cda) & \eta_{cd}(bcd) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

vagyis

$$(bcd)(cda)(dab) \begin{vmatrix} \xi_{bc} & \eta_{bc} & \zeta_{bc} \\ \xi_{ca} & \eta_{ca} & \zeta_{ca} \\ \xi_{ab} & \eta_{ab} & \zeta_{ab} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -\eta_{ad}(dab) & -\zeta_{ad}(cda) \\ \xi_{bd}(dab) & 0 & -\zeta_{cd}(bcd) \\ \xi_{cd}(cda) & \eta_{cd}(bcd) & 0 \end{vmatrix}$$

Itt egy ismeretes tétel szerint:

$$\begin{vmatrix} \xi_{bc} & \eta_{bc} & \zeta_{bc} \\ \xi_{ca} & \eta_{ca} & \zeta_{ca} \\ \xi_{ab} & \eta_{ab} & \zeta_{ab} \end{vmatrix} = (abc)^2$$

Az utolsó tényezőként szerepelő

$$\begin{vmatrix} 0 & -\eta_{ad}(dab) & -\zeta_{ad}(cda) \\ \xi_{bd}(dab) & 0 & -\zeta_{cd}(bcd) \\ \xi_{cd}(cda) & \eta_{cd}(bcd) & 0 \end{vmatrix}$$

determináns pedig azzal egyszerűsíthető, hogy sorait rendre megszorozzuk

$$-(bcd), \quad -(cda), \quad -(dab)\cdot$$

vel, oszlopaiból pedig kiemeljük

$(cda)\,(dab)$, $(dab)\,(bcd)$, $(bcd)\,(cda)$-t.

Akkor végre:

$$pq = -(bcd)^2\,(cda)^2\,(dab)^2\,(abc)^2 \begin{vmatrix} 0 & \eta_{ad} & \zeta_{ad} \\ -\xi_{bd} & 0 & \zeta_{bd} \\ -\xi_{cd} & -\eta_{cd} & 0 \end{vmatrix}.$$

HUNYADY tételének igazolására tehát elég kimutatnunk, hogy

$$q = \begin{vmatrix} 0 & \eta_{ad} & \zeta_{ad} \\ -\xi_{bd} & 0 & \zeta_{bd} \\ -\xi_{cd} & -\eta_{cd} & 0 \end{vmatrix}$$

Eme czélból szorozzuk meg q eredeti alakjában a sorokat rendre

$$x_d,\quad -y_d,\quad z_d,\quad x_a,\quad -y_b.\quad z_c\text{-}$$

vel és oszszuk el az oszlopokat rendre

$$x_a x_d,\quad -y_b y_d,\quad z_c z_d,\quad 1,\quad -1,\quad 1\text{-}$$

gyel. Akkor

$$q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_a x_d & y_a x_d \\ 0 & 1 & 0 & -z_b y_d & 0 & -x_b y_d \\ 0 & 0 & 1 & y_c z_d & -x_c z_d & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -x_a z_d & x_a y_d \\ 0 & 1 & 0 & -y_b z_d & 0 & -y_b x_d \\ 0 & 0 & 1 & z_c y_d & -z_c x_d & 0 \end{vmatrix}.$$

Ha továbbá az első három sort rendre kivonjuk az utolsó háromból, akkor a következő hatodfokú determinánst nyerjük:

$$q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{ad} & \zeta_{ad} \\ 0 & 0 & 0 & -\xi_{bd} & 0 & \zeta_{bd} \\ 0 & 0 & 0 & -\xi_{cd} & -\eta_{cd} & 0 \end{vmatrix},$$

mely közvetlenül a kivánt harmadfokú determinánsra redukálható.

2. A p determináns számos más determinánsnak átalakitására használható. Legyen pl.

$$r = \begin{vmatrix} x_a x_{a'} & y_a y_{a'} & z_a z_{a'} & y_a z_{a'} + z_a y_{a'} & z_a x_{a'} + x_a z_{a'} & x_a y_{a'} + y_a x_{a'} \\ x_b x_{b'} & y_b y_{b'} & z_b z_{b'} & y_b z_{b'} + z_b y_{b'} & z_b x_{b'} + x_b z_{b'} & x_b y_{b'} + y_b x_{b'} \\ x_c x_{c'} & y_c y_{c'} & z_c z_{c'} & y_c z_{c'} + z_c y_{c'} & z_c x_{c'} + x_c z_{c'} & x_c y_{c'} + y_c x_{c'} \\ x_d x_{d'} & y_a y_{d'} & z_d z_{d'} & y_d z_{d'} + z_d y_{d'} & z_d x_{d'} + x_d z_{d'} & x_d y_{d'} + y_d x_{d'} \\ x_a x_c & y_a y_c & z_a z_c & y_a z_c + z_a y_c & z_a x_c + x_a z_c & x_a y_c + y_a x_c \\ x_b x_d & y_b y_d & z_b z_d & y_b z_d + z_b y_d & z_b x_d + x_b z_d & x_b y_d + y_b x_d \end{vmatrix}$$

mint (abc) és hasonló alakú determinánsok egész függvénye előállítandó.

A p és r determinánsok szorzata:

$$\begin{vmatrix} (abc)(a'bc) & 0 & 0 & (bcd)(bcd') & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & -(abc)(cda) \\ 0 & 0 & (abc)(abc') & (dab)(d'ab) & 0 & 0 \\ 0 & (dab)(dab') & (cda)(c'da) & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & -(bcd)(dab) & 0 \\ (cda)(cda') & (bcd)(b'cd) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

vagyis

$$-(bcd)(cda)(dab)(abc) \begin{vmatrix} (abc)(a'bc) & 0 & 0 & (bcd)(bcd') \\ 0 & 0 & (abc)(abc') & (dab)(d'ab) \\ 0 & (dab)(dab') & (cda)(c'da) & 0 \\ (cda)(cda') & (bcd)(b'cd) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ha itt az utolsó tényező gyanánt szerepelő negyedfokú determinánsnak oszlopait rendre megszorozzuk

$$(bcd),\quad (cda),\quad (dab),\quad (abc)\text{-}$$

vel, annak soraiból pedig rendre kiemeljük

$$(bcd)(abc),\quad (abc)(dab),\quad (dab)(cda),\quad (cda)(bcd)\text{-t},$$

akkor továbbá

$$pr = -(bcd)^2(cda)^2(dab)^2(abc)^2 \begin{vmatrix} (a'bc) & 0 & 0 & (bcd') \\ 0 & 0 & (abc') & (d'ab) \\ 0 & (dab') & (c'da) & 0 \\ (cda') & (b'cd) & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

Ámde

$$p=-(bcd)^2\,(cda)^2\,(dab)^2\,(abc)^2.$$

tehát

$$r=\begin{vmatrix} (a'bc) & 0 & 0 & (bcd') \\ 0 & 0 & (abc') & (d'ab) \\ 0 & (dab') & (c'da) & 0 \\ (cda') & (b'cd) & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

vagy kifejtve:

$$r=(cda')\,(dab')\,(abc')\,(bcd')-(a'bc)\,(b'cd)\,(c'da)\,(d'ab).$$

Az r determináns érték e szerint két igen egyszerű szerkezetű szorzatnak különbségével egyenlő.

3. Az r determinánsra vonatkozólag imént bebizonyított tétel számos ismeretes azonosságot, mint különös eseteket foglal magában.

Ha r-ben

$$a=3,\quad b=2,\quad c=3,\quad d=1$$
$$a'=2,\quad b'=2,\quad c'=1,\quad d'=1$$

és r első sorát folcseréljük a negyedikkel, harmadik sorát pedig az ötödikkel, úgy az

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & 2y_1z_1 & 2z_1x_1 & 2x_1y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & 2y_2z_2 & 2z_2x_2 & 2x_2y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & 2y_3z_3 & 2z_3x_3 & 2x_3y_3 \\ x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 & y_2z_3+z_2y_3 & z_2x_3+x_2z_3 & x_2y_3+y_2x_3 \\ x_3x_1 & y_3y_1 & z_3z_1 & y_3z_1+z_3y_1 & z_3x_1+x_3z_1 & x_3y_1+y_3x_1 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & y_1z_2+z_1y_2 & z_1x_2+x_1z_2 & x_1y_2+y_1x_2 \end{vmatrix} = (123)^4$$

azonosságot * nyerjük.

Legyen másrészt r-ben

$$a=4,\quad b=3,\quad c=2,\quad d=1$$
$$a'=3,\quad b'=2,\quad c'=1,\quad d'=4$$

---

* V. ö. Scholtz. A kúpszeleten fekvő hat pont és a hexagrammum mysticum tétele. Műegyetemi Lapok. II. köt. L. főleg a 67. lapot.

és cseréljük fel r-nek első, második és hatodik sorát, úgy hogy a második az elsőnek helyére jusson, a hatodik a második helyére, végre az utolsónak helyére az első. Akkor:

$$\begin{vmatrix} x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 & y_2z_3+z_2y_3 & z_2x_3+x_2z_3 & x_2y_3+y_2x_3 \\ x_3x_1 & y_3y_1 & z_3z_1 & y_3z_1+z_3y_1 & z_3x_1+x_3z_1 & x_3y_1+y_3x_1 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & y_1z_2+z_1y_2 & z_1x_2+x_1z_2 & x_1y_2+y_1x_2 \\ x_1x_4 & y_1y_4 & z_1z_4 & y_1z_4+z_1y_4 & z_1x_4+x_1z_4 & x_1y_4+y_1x_4 \\ x_2x_4 & y_2y_4 & z_2z_4 & y_2z_4+z_2y_4 & z_2x_4+x_2z_4 & x_2y_4+y_2x_4 \\ x_3x_4 & y_3y_4 & z_3z_4 & y_3z_4+z_3y_4 & z_3x_4+x_3z_4 & x_3y_4+y_3x_4 \end{vmatrix} = (234)(341)(412)(123).$$

Ezen azonosság bebizonyítását Hunyady a *Műegyetemi Lapok* II. kötetében feladatul tűzte ki. Scholtz Ágoston úr megoldása ugyanott a 310. lapon foglaltatik.

Legyen végre

$$a = 2, \quad b = 4, \quad c = 1, \quad d = 5$$
$$a' = 3, \quad b' = 6, \quad c' = 3, \quad d' = 6$$

úgy a sorok alkalmas felcserélése után a következő azonosságot nyerjük:

$$\begin{vmatrix} x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 & y_2z_3+z_2y_3 & z_2x_3+x_2z_3 & x_2y_3+y_2x_3 \\ x_3x_1 & y_3y_1 & z_3z_1 & y_3z_1+z_3y_1 & z_3x_1+x_3z_1 & x_3y_1+y_3x_1 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & y_1z_2+z_1y_2 & z_1x_2+x_1z_2 & x_1y_2+y_1x_2 \\ x_5x_6 & y_5y_6 & z_5z_6 & y_5z_6+z_5y_6 & z_5x_6+x_5z_6 & x_5y_6+y_5x_6 \\ x_6x_4 & y_5y_4 & z_6z_4 & y_6z_4+z_6y_4 & z_6x_4+x_6z_4 & x_6y_4+y_6x_4 \\ x_4x_5 & y_4y_5 & z_4z_5 & y_4z_5+z_4y_5 & z_4x_5+x_4z_5 & x_4y_5+y_4x_5 \end{vmatrix} = (135)(146)(234)(256) - (134)(156)(235)(246).$$

Ezt Hunyady a *Műegyetemi Lapok* idézett kötetében megjelent «*A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének egy különös alakjáról*» cz. értekezésében bizonyította be.

Kürschák József.

A CARNOT-CLAUSIUS-FÉLE TÉTEL EGYSZERŰSÍTETT LEVEZETÉSE.

Ma már szinte egészen általánossá vált a CLAUSIUS-féle tapasztalati postulatumra alapítani a CARNOT-CLAUSIUS-féle thermodynamikai tétel levezetését s a különböző szerzőktől használt levezetési módok úgyszólván csak mathematikai stylusban különböznek egymástól. Mindannyinak az eljárásában a következő művelet-csoport rejlik:

1. Kimutatják, hogy a CARNOT-féle körfolyamatban az egyik hőforrásról a rendszerbe bejutó s a másikon a rendszerből kijutó hőquantum hányadosa a két hőforrás hőfokának a rendszertől független functiója.

2. Kimutatják, hogy ez a functió az egyik hőfok functiójának és a másik hőfok ugyanazon alakú functiójának a hányadosa. Ezt vagy úgy eszközlik, hogy egy bizonyos testfajhoz, a gázokhoz folyamodnak (BERTRAND, CHRISTIANSEN stbk.), vagy ezen különleges segedelem nélkül állapítják meg (LIPPMANN, KIRCHHOFF stbk.).

3. Tetszőleges más körfolyamatot adiabatikus és isothermikus elemi componensekre bontva, kimutatják, hogy a rendszerbe jutó hő-elemeknek a hozzájuk tartozó hőfokok iménti functióival való osztatai eltűnő összeget alkotnak, a miből aztán következik, hogy ezen osztatok függvény-elemek.

Már a levezetés tervének e csupán öregéből vázolt képe is nagyon változatos; teljesen kitöltve, a részletek oly halmazatát mutatja, hogy a reductiójáról való gondoskodás megérdemelni látszik a fáradságot.

Egységesebb levezetést közöl W. VOIGT göttingai professzor,

épen most megjelent igen tartalmas munkájában.* De nem egészen szabatos a levezetése. Nevezetesen, mint magától értődő dolgot, előre felteszi, hogy egy test adiabatikus változásának a differentialis egyenlete csak egy integrálissal bír (502. és 503. l.) Azonban tudvalevőleg, mihelyt a változók száma kettőnél nagyobb, már arra, hogy csak egy integrális létezzék s a differentialis polynomium egytagúra legyen redukálható; mihelyt a változók száma négynél nagyobb, már arra is, hogy csak két integrális létezzék s a differentialis polynomium két tagúra legyen redukálható stb.; a polynomium coëfficiensei bizonyos megszorításoknak kötelesek eleget tenni, a melyeket már PFAFF meghatározott. Igy a jelzett előzetes feltevés nem lévén analytikai szükségesség, tapasztalati alappal kell birnia.

Tényleg a CLAUSIUS-féle postulatumra alapítható és pedig épen úgy egy egész testrendszerre nézve, mint egyetlen egyszerű testre nézve. Miután pedig már egyszer helyesnek elfogadtuk, belőle puszta analysis rendjén következik a CARNOT-CLAUSIUS-féle tétel. Ezeknek a megmutatásával foglalkozik az itt következő közlemény.

1. Definitiók.

Valamely folyamat-rendszerben határozzák meg egy test állapotát a test hőfoka ϑ, meg a, b, c, stb. paraméterek s legyenek a folyamatok megfordíthatók, minélfogva a testbe jutó hő elemi kifejezésének

$$dQ = \Theta d\vartheta + A da + B db + \cdots$$

a coëfficiensei Θ, A, B, . . . csupán az állapot-határozók ϑ, a, b, stb. functiói és ezek változási módjától teljesen függetlenek.

Az a, b, . . . paraméterek bizonyosan megválaszthatók úgy, még pedig végtelen sokféleképpen, hogy a Θ coëfficiens mindig positiv legyen. Pl. egy tengely körül forgható mágnes állapot-határozói gyanánt a hőfok, nyomás és forgató momentum használtatván, a

* W. VOIGT: Kompendium der theoretischen Physik. I. Band. Leipzig. Verlag von Veit & Comp. 1895.

megfelelő Θ negativ is lehet; ha azonban a forgató momentum helyett az elfordulás szögét vezetjük be, akkor a megfelelő Θ legalább a rendelkezésünkre álló viszonyok közt mindig pozitiv. *Úgy legyenek megválasztva minden testhez az a, b, stb. paraméterek, hogy a Θ mindig pozitiv legyen.*

2. Lemma.

Adiabatikusan, azaz puszta mechanikai műveletekkel egy test vagy testrendszer sem juttatható oly állapotba, a melybe puszta hőközléssel, azaz hőnek be- vagy kivezetése által pusztán a hőfok megváltozásával juthat.

Tegyük fel ugyanis az ellenkezőt. Akkor az állapot-határozók úgy volnának adiabatikusan változtathatók, hogy végül, csak a hőfok legyen más, mint a mi eleinte volt, a többi állapot-határozók pedig kezdeti értékeikbe tértek legyen vissza. Most az új állapotból hőközléssel, pusztán a hőfokot változtatva terelvén vissza a test-rendszert a maga kezdeti állapotába, minthogy a Θ értékek pozitivek, a folyamat irányulása szerint csupán kiadott volna, vagy csupán felvett volna pozitiv hőt a test-rendszer, a mely az első esetben egészen mechanikai erélyből keletkezett, a másodikban egészen mechanikai erélylyé alakult volna. Ez minden tapasztalással ellenkezik.

Ellenkezik a Clausius-féle postulatummal is: Oly módon eszközöljük a hő-közlést, hogy ennek a tartamára egy eddig külön tartott testet pl. gázt is csatolunk a rendszerhez s addig változtatjuk e gáz nyomását, míg a test-rendszerünk az ő régi fokához vissza nem tér. Ezután a gázt is visszatereljük kezdeti állapotába, még pedig egy adiabatikus és egy isothermás vonalon s most még egy Carnot-féle körfolyamatot is végeztetünk vele, olyant, hogy a mindössze létrejött mechanikai erély $= 0$ legyen. A folyamatok összeségének a végeredménye abból áll, hogy a járat irányulása szerint magasabb hőforrásról alacsonyabbra, vagy alacsonyabbról magasabbra jutott hő . . .

FERENC JÓZSEF TUDOMÁNYEGYETEM KÖNYVTÁRA SZEGED
Kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem KÖNYVTÁRA SZEGED

3. Corollarium.

Adiabatikus változásban a hőfok minden pillanatban teljesen meg van határozva a többi állapot-határozók időleges értékeivel és ezek változásának a módjától folyvást független.

Mert másként a többi állapot-határozók minden olyan adiabatikus változásában, melyben ezek kezdeti értékeikhez térnek vissza, a hőfok nem térne vissza az ő kezdeti értékéhez, a mi a lemmánkkal ellenkezik.

Ugyanez a corollarium így is fogalmazható: Egy test vagy testrendszer adiabatikus változásának a differentiális egyenletéhez u. m.

$$\Theta d\vartheta + Ada + Bdb + \cdots = 0,$$

illetőleg

$$\Sigma\Theta . d\vartheta + \Sigma (Ada + Bdb + \cdots) = 0$$

egyetlen integrális egyenlet tartozik, s=const., illetőleg S=const. (másként a hőfok a többi állapot-határozóknak nem csupán az értékeitől függene, hanem egymáshoz való functionális viszonyától is) és ekként mindig

$$\Theta d\vartheta + Ada + Bdb + \cdots = \varphi ds, \qquad 1)$$

illetőleg

$$\Sigma\Theta . d\vartheta + \Sigma(Ada + Bdb + \cdots) = \Sigma\varphi ds = \Phi dS, \qquad 2)$$

a hol a φ és s-féle mennyiségek csupán az illető test állapot-határozóinak az értékeitől függő functiók, Φ és S csupán a rendszerbéli testek állapot-határozóinak az értékeitől függő functiók.

4. Theorema.

Megfordítható folyamatokban a testektől befogadott hő elemeinek mindig vannak integrátiós osztóik és ezek egyike a hőfoknak minden testre nézve ugyanazon alakú functiója.

A tantétel első része 1)-ből közvetlenül kiolvasható. A mi a második részét illeti, ennek a symbolikus kifejezése, azzal a hozzáadással, hogy az f functió miuden testre nézve ugyanaz lehet:

$$\varphi = f(\vartheta)\,\psi(s).$$

Ez a 2)-ből következik. Ugyanis:

Két test változásában

$$\varphi_1 ds_1 + \varphi_2 ds_2 = \Phi dS. \qquad 3)$$

Ha az a_1 paraméter helyett s_1, az a_2 helyett s_2 vezettetnek be, úgy

$$dS = \frac{\partial S}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial S}{\partial s_2} ds_2 + \frac{\partial S}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial S}{\partial b_1} \partial b_1 + \frac{\partial S}{\partial b_2} \partial b_2 + \cdots$$

Összehasonlítva azt 3)-mal és megfontolva, hogy s_1, s_2, ϑ, b_1, b_2, stb. független változók, látjuk, hogy

$$\frac{\partial S}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_2} = 0, \ldots$$

tehát, hogy S csupán s_1 és s_2 functiója. Másfelől

$$\varphi_1 = \Phi \frac{\partial S}{\partial s_1}, \qquad \varphi_2 = \Phi \frac{\partial S}{\partial s_2}$$

tehát φ_1 és φ_2 hányadosa is csak s_1 és s_2 functiója. Igy, minthogy

$$\varphi_1 = \varphi_1 (s_1, \vartheta, b_1, c_1, \ldots),$$
$$\varphi_2 = \varphi_2 (s_2, \vartheta, b_2, c_2, \ldots),$$

kell, hogy tehető legyen

$$\varphi_1 = f(\vartheta)\, \psi_1 (s_1), \quad \varphi_2 = f(\vartheta)\, \psi_2 (s_2).$$

Farkas Gyula.

ALGEBRAI VIZSGÁLATOK A FÜGGVÉNYTANBAN.

(Második közlemény.)

II. Eisenstein tételének általánosítása.

Ha a

$$\mathfrak{P}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

raczionális együtthatókkal biró hatványsor nem tesz eleget az Eisenstein tételében kifejezett feltételnek, akkor az nem is lehet egé sz számú együtthatókkal biró algebrai egyenletnek gyöke. Ennek felismerése önkéntelenül feltámasztja bennünk azt a kérdést: vajjon nem határozhatók-e meg oly feltételek, a melyeknek nem teljesülése esetében kimondhatjuk, hogy raczionális együtthatókkal biró sorunk még egész számú együtthatókkal biró algebrai differenczialegyenletnek sem képezheti megoldását? Erre a kérdésre válaszképen kimutatom a következő tételt:

A

$$\mathfrak{P}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

raczionális együtthatókkal biró hatványsor csakis akkor tehet eleget az

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(i)})=0$$

egész számú együtthatókkal biró i-edrendű algebrai differenczialegyenletnek, ha x-nek van oly i-ed, vagy i-nél alacsonyabb fokú pl. (i—r)-edfokú egész függvénye, g(x), a melynek együtthatói $c_0, c_1, \ldots, c_{i-r}$*-nek egész számú együtthatókkal biró függvényei, és a*

$$g(n) \cdot c_n$$

raczionális szám nevezőjében csak oly törzsténye zők fordulhatnak elő, a melyek

$$c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$$

nevezőiben is előfordulnak.

Heine egyik értekezése alapján* megjegyzem, hogy ha a raczionális együtthatókkal biró hatványsorunk semmiféle egész számú együtthatókkal biró algebrai egyenletnek, vagy algebrai differencziál-egyenletnek nem tesz eleget, akkor irraczionális együtthatókkal biró egyenletnek sem tehet eleget. Ha ugyanis eleget tenne oly i-edrendű differencziálegyenletnek, a melyben

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

a természetes raczionálitási tartományban egymástól lineárisan független irraczionális számok fordulnak elő, akkor eleget kellene tennie egész számú együtthatókkal biró egyenletnek is. Rendezzük ugyanis azt az egyenletet, a melynek sorunk eleget tesz az irraczionális számok szerint, akkor annak általános alakja:

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n = 0, \qquad \alpha)$$

hol az f-ek

$$x, y, y', \ldots, y^{(i)}$$

különböző egész számú együtthatókkal biró függvényei.

Ha most raczionális együtthatókkal biró hatványsorunkat a fentebbi egyenletbe behelyettesítjük, mindegyik f számára egy-egy végtelen sort nyerünk, a melynek együtthatói raczionális számok; e végtelen sorok legyenek:

$$\begin{aligned} f_1 &= A_1 + B_1 x + C_1 x^2 + \cdots, \\ f_2 &= A_2 + B_2 x + C_2 x^2 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= A_n + B_n x + C_n x^2 + \cdots; \end{aligned}$$

úgy, hogy az α) alatti reláczióra való tekintettel, ehhez a relácziához jutunk

---

* Crelle Journal 48. köt. 1854.

$$(A_1\alpha_1+A_2\alpha_2+\cdots+A_n\alpha_n)+$$
$$+(B_1\alpha_1+B_2\alpha_2+\cdots+B_n\alpha_n)x+$$
$$+(C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\cdots+C_n\alpha_n)x^2+$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,$$

a mely x minden értékénél ki van elégítve; de minthogy az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ irraczionális számok a természetes raczionálitási tartományban lineárisan függetlenek az

$$A_1\alpha_1+A_2\alpha_2+\cdots+A_n\alpha_n=0$$
$$B_1\alpha_1+B_2\alpha_2+\cdots+B_n\alpha_n=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

egyenlőségek maguk után vonják az

$$A_1=0,\ B_1=0,\ C_1=0,\ \ldots$$
$$A_2=0,\ B_2=0,\ C_2=0,\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

egyenlőségeket, a miből következik, hogy sorunk az

$$f_1=0,\ f_2=0,\ \ldots,\ f_n=0$$

egész számú együtthatókkal biró egyenleteknek is eleget tesz, ennélfogva:

ha valamely raczionális együtthatókkal biró hatványsor nem tehet eleget egész számú együtthatókkal biró algebrai differencziálegyenletnek, akkor irraczionális együtthatókkal biró egyenletnek sem tehet eleget.

E megjegyzés után lássuk kimondott tételünk bebizonyítását.

i-edrendü differenczialegyenletünk ama tagjainak összegét, a melyek az

$$x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(i-s)}$$
$$(s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i)$$

változóktól függnek, jelöljük röviden Φ_{i-s}-el; míg azokét, a melyek csak x-től függnek, $\psi(x)$-el, akkor differenczialegyenletünk:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(i)}) \equiv \sum_{s=0}^{i}\Phi_{i-s}+\psi(x)=0. \qquad 12)$$

Rendezzük Φ_{i-s}-t x hatványai szerint és legyen:

$$\Phi_{i-s} \equiv x^{m_s}\varphi_{i-s,0}+x^{m_s+1}\varphi_{i-s,1}+\cdots+x^{m_s+n_s}\varphi_{i-s,n_s}, \qquad 13)$$

hol m_s x legalacsonyabb, m_s+n_s pedig legmagasabb hatványkitevője; a φ_{i-s}-ek pedig az értelmezés szerint

$$y, y', \ldots, y^{(i-s)}$$

függvényei. Az adott differenciálegyenlet részletes alakja tehát

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(i)}) \equiv \sum_{s=0}^{i}(x^{m_s}\varphi_{i-s,0}+x^{m_s+1}\varphi_{i-s,1}+\cdots+x^{m_s+n_s}\varphi_{i-s,n_s}) + \psi(x)=0. \qquad 14)$$

Ha ebbe az egyenletbe azt a raczionális együtthatókkal biró hatványsort, mely neki eleget tesz, behelyettesítem, azonosan zérust nyerek; tehát annak bármilyrendü differenciálhányadosa szintén zérus. Megvizsgálom egyenletünk többtagújának n-edrendü differenciálhányadosát az $x=0$ helyen.

Az I. közlemény kifejtései szerint Φ_{i-s}-nek $n!$-sal osztott n-edrendü differenciálhányadosa az $x=0$ helyen:

$$\left[\frac{d^n\Phi_{i-s}}{dx^n}\right]_{x=0} = \sum_{j=0}^{n-m_s}\frac{1}{(n-m_s-j)!}\cdot\left[\frac{d^{n-m_s-j}\varphi_{i-sj}}{dx^{n-m_s-j}}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{(n-m_s)!}\left[\frac{d^{n-m_s}\varphi_{i-s,0}}{dx^{n-m_s}}\right]_{x=0}+\sum_{j=1}^{n-m_s}\frac{1}{(n-m_r-j)!}\cdot\left[\frac{d^{n-m_s-j}\varphi_{i-sj}}{dx^{n-m_s-j}}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{(n-m_s)!}\left[y^{(i-s+n-m_s)}\cdot\frac{\partial\varphi_{i-s,0}}{\partial y^{(i-s)}}\right]_{x=0} + [b_s(y, y', \ldots, y^{(i-s+n-m_s-1)})]_{x=0}$$

$$=\frac{(i-s+n-m_s)!}{(n-m_s)!}C_{i-s+n-m_s}\left[\frac{\partial\varphi_{i-s,0}}{\partial y^{(i-s)}}\right]_{x=0} + B_s(C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{i-s+n-m_s-1}), \qquad 5)$$

hol

$$\left[\frac{\partial\varphi_{i-s.0}}{\partial y^{(i-s)}}\right]_{x=0}$$

$C_0, C_1, \ldots, C_{i-s}$-nek, B_s pedig $C_0, C_1, \ldots, C_{i-s+n-m_s-1}$-nek egész számú együtthatókkal biró raczionális egész függvényei.

Jelöljük $\psi(x)$-ben x^n egész számú együtthatóját d_n-nel, akkor

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n\psi(x)}{dx^n}\right]_{x=0}=d_n.$$

Tehát az i-edrendű differenciálegyenlet többtagújának $n!$-sal osztott n-edrendű differenciálhányadosa az $x=0$ helyen:

$$\sum_{s=0}^{i}\frac{(i-s+n-m_s)!}{(n-m_s)!}C_{i-s+n-m_s}\left[\frac{\partial\varphi_{i-s,0}}{\partial y^{(i-s)}}\right]_{x=0}+$$

$$\sum_{s=0}^{i}B_s(c_0, c_1, \ldots, c_{i-s+n-m_s-1})+d_n=0. \qquad 16)$$

Ha a következő jelöléseket hozzuk be:

$$\left[\frac{\partial\varphi_{i-s,0}}{\partial y^{(i-s)}}\right]_{x=0}=a_{i-s},$$

$$B_s(c_0, c_1, \ldots, c_{i-s+n-m_s-1})=\beta_{i-s+n-m_s-1},$$

$$\frac{(i-s+n-m_s)!}{(n-m_s)!}=(n-m_s+1)(n-m_s+2)\ldots(n-m_s+i-s)=\omega_{i-s}, \qquad 17)$$

egyenletünket a következő egyszerűbb alakban írhatjuk:

$$\sum_{s=0}^{i}\omega_{i-s}a_{i-s}c_{i-s+n-m_s}+\sum_{s=0}^{i}\beta_{i-s+n-m_s-1}+d_n=0. \qquad 18)$$

Az első összegből válaszszuk ki azokat a tagokat, a melyekben c indexe a legnagyobb.

Midőn $(i-s+n-m_s)$-ben s helyébe sorban

$$0, 1, 2, \ldots, i$$

helyettesítünk, a számoknak oly sorát nyerjük, a melyben pl. az $(r+1)$-ik legyen az első legnagyobb szám, az utána következők részint vele egyenlők, részint kisebbek, azaz

$$i-s+n-m_s<i-r+n-m_r,$$

ha

$$s<r;$$

továbbá

$$i-s+n-m_s\leqq i-r+n-m_r,$$

ha

$$s>r.$$

Miután az első summából azokat a tagokat, melyekben c indexe kisebb $(n-m_r+i-r)$-nél kiválasztottuk, jelöljük a

$$\sum_{s=0}^{i} \beta_{i-s+n-m_s-1}+d_n$$

kifejezéssel való összegüket röviden $a_{i-r+n-m_r-1}$-el, mely

$$c_0, c_1, \ldots, c_{i-r+n-m_r-1}$$

egész számú együtthatókkal biró függvénye. Ezek után:

$$\sum_{s=r}^{i} \omega_{i-s}\, a_{i-s}\, c_{i-s+n-m_s}+a_{i-r+n-m_r-1}=0,$$

hol annak az a-nak helyébe, a melyben c szorzójának indexe kisebb $(i-r+n-m_r)$-nél, zérus képzelendő, minthogy az ilyen tagokat már $a_{i-r+n-m_r-1}$-be foglaltuk össze. Emeljük most ki az összegből mint közös tényezőt $c_{i-r+n-m_r}$-t, akkor lesz:

$$c_{i-r+n-m_r} \sum_{s=r}^{i} \omega_{i-s}\, a_{i-s}+a_{i-r+n-m_r-1}=0.$$

Rövidség kedvéért legyen:

$$i-r+n-m_r=k,$$

akkor

$$\omega_{i-s}=k(k-1)\ldots[k-(i-s-1)]$$

tehát

$$\sum_{s=r}^{i} \omega_{i-s}\, a_{i-s}=\omega_{i-r}\, a_{i-r}+\omega_{i-r-1} a_{i-r-1}+\cdots+\omega_0 a_0$$

k-nak $(i-r)$-edfokú egész függvénye, a melynek együtthatói

$$c_0, c_1, \ldots, c_{i-r}$$

egész számú együtthatókkal biró függvényei, tehát:

$$\sum_{s=r}^{i} \omega_{i-s}\, a_{i-s}=a_0 k^{i-r}+a_1 k^{i-r-1}+\cdots+a_{i-r-1}k+a_{i-r}=g(k), \quad 19)$$

hol

$$a_0, a_1, \ldots, a_{i-s}$$

$c_0, c_1, \ldots, c_{i-s}$-nek egész számú együtthatókkal biró függvényei.

Az i-edrendű differenciálegyenlet többtagújának $n!$-sal osztott n-edrendű differenciálhányadosának végleges alakja az $x = 0$ helyen:

$$c_k g(k) + a_{k-1} = 0 \qquad 20)$$

kimondja, hogy

$$c_k g(k)$$

nevezőjében csak oly törzstényezők fordulhatnak elő, a melyek

$$c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$$

nevezőiben is előfordulnak; s ezzel fejezetünk elején kimondott tételünk igazolást nyert.

Ha

$$g(k) \equiv 0,$$

akkor a 20) alatti egyenletünket következőképen rendezem:

$$c_k g(k) + c_{k-1} g_1(k-1) + \cdots + c_{k-j} g_j(k-j) + \varphi(c_0, \ldots, c_{k-j-1}) = 0, \quad 21)$$

hol általánosan g_j $k-j$-nek i-nel alacsonyabb fokú raczionális függvénye, minthegy azokban a tagokban, melyekben c_{k-j} előfordul, az együttható általános alakja egy állandó faktortól eltekintve:

$$\frac{(i-s+n-m_s-j)!}{(n-m_s-j)!}$$
$$= (n-m_s-j+1)(n-m_s-j+2)\ldots(n-m_s-j+i-s)$$
$$= (k-j)(k-j-1)\ldots[k-j-(i-s-1)].$$
$$\left(\begin{matrix} k=i-s+n-m_s \\ i>s\geqq 0 \end{matrix}\right)$$

Mindegyik c együtthatója nem lehet zérus, mert ekkor a differenciálegyenlet maga is azonosan zérus lenne; legyen tehát c_{k-j} együtthatója az első, a mely zérustól különböző, ennélfogva

$$c_{k-j} g_j(k-j)$$

oly raczionális szám, a melynek nevezőjében nem fordulhatnak elő más törzstényezők, mint a melyek a $(k-j)$-nél alacsonyabb indexű c-k nevezőjében is előfordulnak.

A jelen közlemény bevezetésében kimondott tételünk tehát minden esetben érvényes.

III. Példák.

1. *Példa.* Az

$$y=1+\frac{\alpha\beta}{1\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{(n+1)!}\cdot\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}x^{n+1}+\ldots$$

hatványsor eleget tehet már egy másodrendű algebrai differenciál-egyenletnek, mert a jelen esetben a

$$g(k)=k(\gamma+k-1)=k^2+(\gamma-1)k$$

függvény másodfokú.

Miként ismeretes sorunk segítségével definiált függvényhez tartozó algebrai differenciál-egyenlet:

$$x(\ -x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{ax}-\alpha\beta y=0.$$

2. *Példa.* Az

$$y=1+\frac{\alpha\beta\gamma}{\vartheta\varepsilon}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\cdot\frac{\beta(\beta+\ )}{\vartheta(\vartheta+1)}\cdot\frac{\gamma(\gamma+1)}{\varepsilon(\varepsilon+1)}x^2+\cdots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{(n+1)!}\cdot\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{\vartheta(\vartheta+1)\ldots(\vartheta+n)}\cdot\frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}{\varepsilon(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+n)}x^{n+1}+\ldots$$

hatványsor harmadrendűnél alacsonyabb rendű differenciál-egyenletnek nem tehet eleget; mert a jelen esetben a

$$g(k)=k(k+\vartheta-1)(k+\varepsilon-1)=k^3+k^2(\vartheta+\varepsilon-2)+k(\vartheta-\ )(\varepsilon-1)$$

függvény harmadfokú.

Könnyű meggyőződni arról, hogy sorunk eleget tesz a következő harmadrendű differenciálegyenletnek:

$$(1-x)x^2\frac{d^2y}{dx^2}+[\vartheta+\varepsilon+1-(\alpha+\beta+\gamma+3)x]x\frac{d^2y}{dx^2}\cdot$$
$$+[\vartheta\varepsilon-x(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma+1)]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0.$$

3. *Példa. Az*

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^n}{(a+n)^n}$$

hatványsor semmiféle algebrai differenciálegyenletnek tehet eleget.

Megjegyzések. Gomes Texeira* és Hurwitz** szintén foglalkoztak Eisenstein tételének általánosításával, csakhogy míg az előbbi levezetésébe akaratlanul speczializálást csusztat be, addig az utóbbi eljut ugyan egy bizonyos $g(x)$ függvényhez, de annak sem fokáról nem számol be, sem alakjának változatlanságáról, mely abban áll, hogy $g(x)$ alakja x minden értéke mellett ugyanaz marad.

Suták József

---

* Annales de l'école normale T. IV.

** Annales de l'école normale. T. VI.

ÉSZREVÉTELEK AZ «EGY HELYZETGEOMETRIAI TÉTEL A TETRAÉDER ÉLEIRŐL» CZÍMŰ CZIKKHEZ.

E lapok 1894. évfolyamának 263. lapján SKOPÁL úr a következő tételt közölte:

«Ha valamely e egyenes az LMNP tetraéder egyik élét sem metszi, a tetraéder három kitérő élpárjára nézve az e egyenessel konjugált negyedik harmonikus egyenesek f, g, h az e egyenessel együtt egy ugyanazon hiperboloidnak ugyanazon rendszerbeli alkotói».

Legyen szabad e tételnek következő igen egyszerű bebizonyítását bemutatnom.

Ha az $f,\ g,\ h$

egyenesek az $LMNP$ tetraédernek

$$LM,\ NP; \qquad LN,\ MP; \qquad LP,\ MN$$

átellenes élpárjait az egyenestől harmonikusan választják el, akkor az e, f, g egyeneseken keresztül menő (efg) hiperboloidra vonatkozólag az

$$LM,\ NP; \qquad LN,\ MP$$

egyenespárok poláris vonatkozásban vannak. Ebből tüstént következik, hogy az $LMNP$ tetraéder mindegyik szögpontjának polársíkja, a tetraéder átellenes síkja, tehát az $LMNP$ tetraéder az (efg) hiperboloidnak egyik polártetráédere és az

$$LP,\ MN$$

tetraéderélek szintén (efg)-nek polárisai. De ha az $LP,\ MN$ egyenesek az (efg) hiperboloidnak polárisai, akkor az a h egyenes,

mely a hiperboloidon fekvő e egyenest LP, MN-től harmonikusan elválasztja, a hiperboloidnak oly alkotója, mely ugyanahhoz a rendszerhez tartozik, mint az e alkotó. Ezzel az idézett tétel be van bizonyitva, valamint következő kiegészítése is, hogy: az *LMNP tetraéder a hiperboloidra nézve polártetraéder.*

Az $LMNP$ tetraéder egyik lapja, pl. az LMN lap, az e, f, g, h egyeneseket négy pontban E, F, G, H-ban metszi, melyek oly helyzetűek, hogy az

$$E, F; \quad E, G; \quad E, H$$

pontpárok az LMN háromszög

$$L, \quad M, \quad N$$

szögpontjait az átellenes

$$MN, \quad NL, \quad LM$$

oldalaktól harmonikusan elválasztják. Ennélfogva az $EFGH$ négyszögnek átlós háromszöge LMN, tehát:

a tetraéder lapjai az e, f, g, h egyeneseket négy-négy pontban metszik, a mely négy négyszögnek szögpontjai; e négyszögek átlóshároms zögei, a tetraédert határoló háromszögek.

Ebből látható, hogy az F, G pontok az L szögpontot és MN oldalt is egymástól harmonikusan választják el.

Ha az $LMNP$ tetraéder MNP lapja az e, f, g, h egyeneseket az E', F', G', H' pontokban metszi, akkor $E'F'G'H'$ négyszögnek az MNP átlóshárom szöge és az F', G' pontok a P szögpont és az MN oldaltól szintén harmonikusan vannak elválasztva.

Minthogy az FG és $F'G'$ egyenesek az

$$f, \quad g, \quad LP, \quad MN$$

egyeneseknek metszői és az FG, $F'G'$-ön fekvő metszéspontok harmonikus négyes csoportot alkotnak, azért az f, g egyenesek a tetraéder LP, MN éleitől harmonikusan vannak elválasztva.

Ugyanezen az uton kimutatható, hogy az f, h egyenesek a tetraéder LN, MP éleitől harmonikusan vannak elválasztva.

E szerint az

$$e, \quad g, \quad h$$

egyenesek az $LMNP$ tetraéder

$$LM, NP; \quad LP, MN; \quad LN, MP$$

átellenes éleit f-től harmonikusan választják el, vagyis: az e, g, h egyenesek az $LMNP$ tetraéder és az f egyenes által ugyan oly módon vannak meghatározva, mint az f, g, h egyenesek az $LMNP$ tetraéder és az e egyenes által.

Az idézett tétel e szerint még következőkkel egészíthető ki:

1. *Az e, f, g, h egyenesek bármelyike a másik hármat ugyanazon a módon határozza meg az $LMNP$ tetraéderrel, mint az e egyenes az f, g, h-t.*

2. *Az $LMNP$ tetraéder az e, f, g, h egyeneseken keresztül menő hiperboloid polártetraédere.*

Nem kevésbbé érdekes, sőt ilynemű geometriai vizsgálatoknál el sem hagyható, azokat az *elfajulásokat* tekintetbe venni, a melyek akkor következnek be, ha az e egyenes a tetraéder éleket metszi. Az erre vonatkozó esetek a következők lehetnek:

Az e egyenes az $LMNP$ tetraédernek

1. *egyik élét metszi;*
2. *két átellenes élét metszi;*
3. *a tetraédernek egyik szögpontján megy keresztül;*
4. *a tetraéder egyik lapjában fekszik;*
5. *a tetraéder egyik szögpontján megy keresztül és annak egyik lapjában fekszik;*
6. *a tetraéder egyik élével egyesül.*

1. Ha az e egyenes a tetraédernek LP élét metszi egy U pontban és V az a pont, mely U-t az L és P pontoktól harmonikusan elválasztja, akkor az f, g egyenesek egymást V-ben az e, h egyenesek pedig U-ban metszik. Az e, f, g, h egyeneseknek E, F, G, H metszéspontjai az LMN síkkal szintén oly négyszögnek szögpontjai, a melynek átlós háromszöge LMN. E négyszög FG, EH oldalai az L ponton mennek keresztül és ezért az

$$f \equiv FV. \quad g \equiv GV, \quad e \equiv EU, \quad h \equiv HU$$

egyeneseken áthelyezett $[fg]$, $[eh]$ síkok egymást az $LP \equiv UV$ egyenesben metszik.

A hiperboloid ez esetben síkpárrá [fg], [eh] fajul el, a melyre vonatkozólag az LMNP tetraéder szintén polártetraéder, mert [*fg*], [*eh*], *LMP, NMP* síkok harmonikus négyescsoportot alkotnak.

2. Ha az *e* egyenes az *LMNP* tetraéder *LP* élét az *U* pontban, *MN* élét az U_1 pontban metszi és a *V*, V_1 pontokat

$$(LPUV)=(MMU_1V_1)=-1$$

relációkból határozzuk meg, akkor

$$f\equiv g\equiv VV_1, \qquad e\equiv h\equiv UU_1.$$

Az *e, f, g, h* egyeneseken átmenő hiperboloidok száma ez esetben ∞^3, melyek egy háromdimenziós lineáris rendszert alkotnak. Az *LMNP* tetraéder nem lesz mindezekre a hiperboloidokra vonatkozólag polártetraéder.

Ha az *LMNP* egy ily hiperboloidra vonatkozólag polártetraéder, tehát *LP, MN* egy poláris pár, mely a hiperboloidot az *U, V* és U_1, V_1 pontokban metszi, akkor a hiperboloid az UU_1VV_1 térbeli négyszög oldalain megy keresztül. S viszont az UU_1VV_1 térbeli négyszög oldalain keresztül menő ∞^1 hiperboloidra vonatkozólag — mely lineáris sort alkot, — az *LMNP* polártetraéder. Az UU_1VV_1 négy oldalai az *e, f, g, h* egyeneseknek is tekinthetők, mert az UV_1 és VU_1 egyenesek oly *h* egyenesek, a melyek az *e*-t a tetraéder *LP, MN* átellenes éleitől harmonikusan elválasztják.

E szerint: *ha az e egyenes az LMNP tetraéder egy átellenes élpárját metszi, akkor az e, f, g, h egyeneseken keresztül menő hiperboloidok, melyekre vonatkozólag a tetraéder polártetraéder felületsort alkotnak.*

3. Ha *e* az *LMNP* tetraédernek egyik szögpontján, pl. a *P*-n megy keresztül a nélkül, hogy az *e* egy tetraéder lapban feküdnék, akkor az *e, f, g, h* egyenesek *E, F, G, H* metszéspontjai az *LMN* tetraéderlappal oly négyszög szögpontjai, melynek átlóháromszöge *LMN*.

Az e, f, g, h egyeneseken átmenő hiperboloidok ekkor másodrendű kúppá fajulnak; e másodrendű kúpok oly sort alkotnak, a melynek LMNP polártetraédere.

4. A midőn az *e* egyenes az *LMN* síkban fekszik, a nélkül, hogy

az L, M, N pontok egyikén keresztül menne, az f, g, h egyenesek is abban a síkban maradnak és e-vel együtt egy oly négyoldalnak oldalait képezik, melynek átlósháromszöge LMN.

Az e, f, g, h egyeneseken keresztül menő hiperboloidok ekkor ∞^1 számú másodrendű sugársorrá fajulnak el, melyeknek polártetraédere $LMNP$.

5. Ha az e egyenes a P ponton megy át és az MNP síkban fekszik, és MN egyenest egy U_1 pontban metszi, akkor az e, f, g, h egyenesek a PU_1, PV_1 egyenesbe kerülnek, hol $(MNU_1V_1) = -1$.

A hiperboloidok ekkor elfajult másodrendű kúpokat, valamint elfajult másodrendű sugársorokat alkotnak, melyekre vonatkozólag $LMNP$ polártetraéder. A kúpok érintő síkjai a PU_1, PV_1 alkotók szerint LP egyenesen mennek keresztül; ellenben a másodrendű sugársorok érintéspontjai a PU_1, PV_1 sugarakon az U_1, V_1 pontok.

6. Ha végre e-t a tetraéder PN élében veszszük fel, akkor mindazon hiperboloidok, melyek az e-n átmennek és a melyekre nézve az $LMNP$ polártetraéder, ∞^1 síkpárrá fajulnak el. E síkpárok egy involucziós sort alkotnak, a melynek kettős síkjai a PN-en átmenő tetraéder síkok.

A talált eredményeket egybefoglalva ekkép fejezhetjük ki:

Egy tetraéder és egy egyenes vagy másodrendű felületet, vagy másodrendű felületsort határoznak meg, a melyre vonatkozólag az adott tetraéder polártetraéder és a mely az egyenesen keresztül megy.

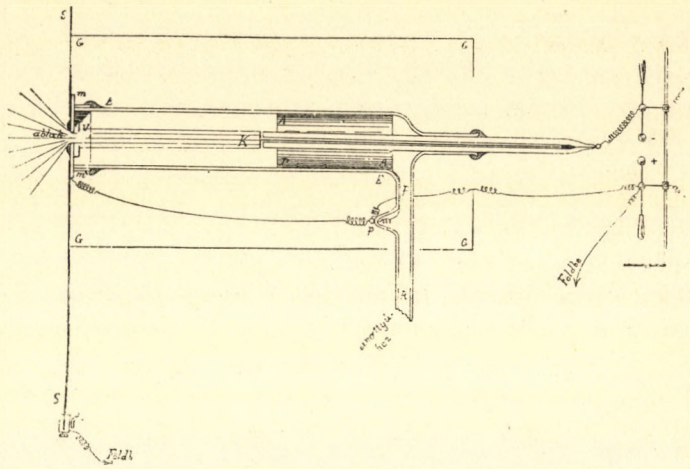
Ha az egyenes a tetraédernek egy élét sem metszi, vagy csak egy élét metszi, akkor felület származik, mely az első esetben hiperboloid, a másodikban pedig síkpár.

De ha az egyenes egynél több tetraéderélt átmetsz, akkor másodrendű felületsor származik, mely következő lehet: Ha az egyenes két átellenes tetraéderélt metsz át, akkor a felületsor hiperboloidokból áll; ha pedig három vagy négy tetraéderélt metsz át, kúpok vagy másodosztályú sugársorok sora származik, s végre ha az egyenes egy tetraéderéllel egyesül, akkor a másodrendű felületsor csupa síkpárból áll. *Klug Lipót.*

PHYSIKAI SZEMLE.

Katódsugarak. Ph. Lenard: Über Kathodenstrahlen in Gasen von atmosphärischem Druck und im äussersten Vacuum. *Ann. d. Phys.* LI. k. 225—268. l.

A Geissler-féle csöveken, melyek 1—2 *mm.* nyomású, ritkított gázt tartalmaznak, a Holtz-gépnek vagy Ruhmkorff-féle induktornak szikraáramá-



tól gerjesztett fénytünemények lényege tudvalevőleg abban áll, hogy a pozitiv elektródtól a negativig réteges fénynyalábok látszanak, melyek színe és világító képessége a ritkított gáz anyagától, a ritkítás fokától, a cső keresztmetszetétől és a szikraáram erejétől függ, míg a negativ elektródból sötétkék vagy ibolyaszinű fénypamat áramlik ki, melyet a réteges fénytől sötét köz választ el. A ritkítást folytatván, a pozitiv sarktól kiinduló réteges fény mindinkább hátrahuzódik, míg bizonyos nagyfokú ritkitásnál eltünik és a csövet a negativ sarktól kiinduló ú. n. katódsugarak töltik be, melyek egyenes irányban haladva, a cső végét foszforeszkálásra bírják,

közbetett fémlemezektől föltartóztatva árnyékot vetnek ; szóval a Crookes-féle csövekben észlelhető jelenségeket idézik elő. Maga Crookes a katódsugarak keletkezését abból magarázza, hogy a rendkívül ritkított gáz — szerinte «sugárzó anyag» — a katódtól eltaszítva nem talál már olyan akadályokra, a milyeneket a kevésbbé ritkított gáz molekulái gördítenek a tovasziguldó gázmolekulák útjába és ezeknek közepes úthossza a katódtól legalább is az anódig terjed. Ha a katódsugarak szilárd lemezre (fémre, üvegre) találnak, mechanikai mozgást, hőt, fényt idéznek elő, de a lemezeken át nem hatolhatnak.

Mióta Hertz kimutatta, hogy a rendkívül vékony lemezekké sajtolható fémek, melyek persze számtalan apró nyilással bírnak, katódsugarak átbocsátására alkalmasak, remélhető volt, hogy a katódsugarakra nézve valóban átbocsátó képességű lemezeket lehet majd találni, t. i. olyanokat, melyek nem nyílásaikon, hanem szilárd anyagukon bocsátják őket keresztül.

Ez irányban legújabban Lénárd Fülöp végzett Bonnban nagy gonddal keresztülvitt kisérleti kutatásokat ; lényegöket és igen érdekes eredményeiket a következőkben ismertetjük.

Katód gyanánt 12 *mm.* átmérőjű *K* aluminium-körlap szolgált, mely hosszú nyélre volt erősttve. Ezt vastagfalú, szűk üvegcső vette körül, mely a végén (*e*) be volt forrasztva.

Anód gyanánt *A* sárgarézcső szerepelt, mely tágabb üvegcsőbe szorult és a katódlemeztől 12 *mm.*-nyire volt hátrább (jobbra). Az anódot tartó tágabb cső a jobb oldal felé szűkül és fölveszi a katódcsövet. Balra tág marad ; végére kerek nyilású fémdoboz van légzáróan rá ragasztva.

A kicsi nyilást légzáróan felragasztott vékony aluminium lemezke zárja el. A tág csőhöz forrasztott *R* cső a higanylégszivattyúhoz vezet. A tágabb csövet Lénárd *kisülési csőnek* nevezi, az aluminiumlapot pedig, mely ezt a katóddal szemben zárja, *ablaknak*. Ez úgy van megválasztva, hogy a mikroskóppal lehetetlen benne apró nyilásokat találni ; tehát levegőre és fényre teljesen áthatatlannak vehető.

A kisülési csövet tágas bádogcső veszi körül, melyhez elül nagy bádogernyő csatlakozik ; ez csupán az «ablakot» hagyja szabadon és az észlelési hely felé, tehát az ablaktól balra, feketére van festve. Az ablakot tartó fémdoboz és az anód a földdel van van vezetőleg összekötve, azonkívül az anód és katód egy szikrainduktorral van platinadrót révén összekötve.

A kisérletek főképen három irányban történtek.

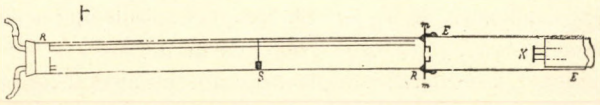
1. *Katódsugarak a szabad levegőben.* Ha az «ablak»-tól balra eső tér : az *észlelési hely*, szabad levegőt tartalmaz, akkor az ablakot kb. 5 cm. távolságnyira gyenge kékes fény környékezi, mely az ablaktól minden irányban terjed. Az ablak eleinte sötét, de hosszabb használat közben egyes helyein szintén gyenge fényt mutat. Az ablak közelébe tartott fosz-

foreszkáló tárgyak az őket jellemző szinü fénynyel világítanak. Az erősebb foszforeszkáló fény mellett a levegő világítása teljesen észrevehetetlen. A világító képesség azonban az ablaktól csak 6—8 *cm.*-nyire terjed; azon túl a tárgyak nem világítanak. Aluminiumoxid, mely katódokon képződött, gyenge kékes-zöldes fényt mutatott; a katódsugarak és az ozon által képezett oxidrétegnek tulajdonítható magának az ablaknak világítása is. Folyadékok a katódsugarak behatása alatt vagy éppen nem, vagy csak gyengén világítottak. Csupán a petróleum világított gyenge kék fénynyel; a kénsavas chinin élénk kék színben tünt fel. A foszforeszkálás jelenségei megszüntek, ha a kisülési csőhöz mágnes közeledik; ekkor az ablak és a levegő is sötét maradt, jeléül annak, hogy a mágnes a katódsugarakat eltéríttette. Jellemző a katódsugarakra nézve, hogy 0,5 *mm.* vastag, átlátszó kvarczlemez megszünteti a fénytüneményeket: útját állja a sugaraknak. Átlátszatlan fémlemezek azonban (arany, ezüst, aluminium), ha vastagságuk 0,5 *mm.*-nél kisebb, átbocsátják őket, a mit a mögöttük észrevehető fény tanusít. 0,5 *mm.*-nyi vastagságú fémlemezek szintén föltartóztatják őket. További kisérletek aztán kimutatták, hogy nemfémek is átbocsátják a katódsugarakat, ha csak elég vékonyak. Ilyenek pl. csillámpala, kollódium, bármily szinü selyempapir, üveglemezek, melyeken a NEWTON-féle színgyürük észlelhetők. Igy tehát a fémek és a dielektrikus testek között lényeges különbség nem mutatkozik. Hengerelt aluminium még átbocsátó, ha 0,027 *mm.* vastag. A fényre nézve valamely test átlátszatlan lehet, ha vastagsága a *mm* századrészét teszi is, más pedig méternyi vastagság mellett is átlátszó. Ily nagy különbségek nem léteznek a katódsugarak átbocsátását illetőleg. Magában a levegőben a sugarak szerte szóródnak. Érzékeny fotografiai lemezekre a katódsugarak vegyileg hatnak. Hogy e sugarak oly térbe hatolhatnak, mely fémileg teljesen el van zárva, azt éppen abból lehetett kétséget kizárólag megállapítani, hogy teljesen zárt bádogszekrénybe helyezett fotografiai papir az ablakkal szemben épp úgy megérezte a katódsugarak hatását, mintha közvetlenül érték volna. Kitünik tehát, hogy a katódsugarakat a szorosan vett elektromos erőktől teljesen külön lehet választani.

2. *Katódsugarak légüres térben.* Ha a kisülési cső a lehetőség határáig van kiszivattyúzva, az elektromos kisülés nem megy többé át: a teljes vacuumban tehát nem lehet katódsugarakat létrehozni. Ennélfogva azt sem lehet eldönteni, vajjon a sugarak továbbítására szükségesek-e anyagi részecskék, vagy sem. Ha azonban vacuum gyanánt a kisülési cső helyett az észlelési teret választjuk, a kérdés megoldható. Erre a czélra LÉNÁRD leírt készülékét kissé átalakította. Az *E* kisülési csőre, az *mm* ablak helyén *hh* fémfoglalvány segélyével *B* üvegcső van erősitve, mely majdnem teljesen légüressé tehető. E csőbe két elektród van forrasztva; az egyik a cső

végén van, az ablakkal szemben (kis aluminiumlemez), a másik az ablak közelében van; ez a csövet majdnem teljesen kitöltő aluminiumlap, közepén nyilással a katódsugarak átbocsátására. A míg a csőben oly ritkítás van, a milyen a Crookes-féle csövekben szokásos, a cső falának az ablak s a nyilásos *a* elektróda közé eső része igen élénk zöldes fényben foszforeszkál, de a cső belsejében semmiféle fény nem mutatkozik. Az üveg zöld foszforeszkálása az elektródán túl is átterjed egy kissé, valamint a szivattyúhoz vezető csőbe is. A cső legvégén zöld fénylő folt van, a két elektród közötti levegő pedig kékes fényű. A zöld folt mágnessel eltolható.

A szivattyúzást tovább folytatván, az elérhető ritkítás legvégső határán az észlelési csőben csak annyi változott, hogy a levegő kékes világossága megszünt, míg a cső végén levő zöld folt annál élesebben határolt és világító. A legvégső határig ritkított tér tehát nem akadályozza a kasódsugarak tovaterjedését, ha létrejöttüket nem is engedi meg. A kisérletet $1^1/_2$ méternyi hosszaságú csövel ismételvén, a napokon át folytatott szivattyúzás



után ismét ugyanazon tünemények állottak elő. E kisérletek azon következtetésre jogosítanak, hogy a katódsugarak az éterben végbemenő folyamatok.

3. *Katódsugarak különféle gázakban.* Különféle gázak a katódsugarakat nagyon különböző mértékben engedik át; az átbocsátási képesség lényegesen összefügg a gázak sűrűségével.

E kisérletekhez az észlelési csövet úgy kellett átalakítani, hogy különböző anyagú, tiszta gázakkal legyen megtölthető. A csőben mágnessel ideoda vezethető foszforeszkáló ernyő van, mely a gáz átbocsátási képessége szerint az ablaktól kisebb-nagyobb távolságban érte el azt a határt, a hol megszünt világítani. Az ablaktól mért ezen távolságok egyenlő körülmények között a gázak átbocsátási képességének mértékeül szolgálhattak. Ily módon kitünt, hogy oly gázak, melyek sűrűségei között csak csekély különbségek vannak, majdnem egyformán bocsátják át a katódsugarakat, hogy csekély sűrűségű gáz sokkal jobban bocsatja őket át, mint a nagyobb sűrűségű. Csekély különbségek azonban a megegyező sűrűségű gázoknál is vannak. A gázak épen úgy világítókká lesznek, mint a levegő. Ritkítás közben az átbocsátási képességek közötti különbségek mindjobban elenyésznek; a gázak annál jobban és annál egyformábban engedik át a katód-

sugarakat, mennél erősebben vannak ritk!tva, s egyúttal annál csekélyebb saját világító képességük.

Különböző gázak nagyon különböző mértékben mutatkoznak homályos közegeknek (trübe Medien); mennél jobb átbocsátó képességű a gáz, annál tisztább közeg. E körülmények tanulmányozása végett Lénárd a diafragmán keresztülbocsátott sugarakat foszforeszkáló ernyőn figyelte meg, mely a különböző anyagú és sűrűségű gázakban különböző távolságokra volt tolható. A homályos közegre jellemző, hogy a foszforeszkáló fényes folt erősebben világító magból és gyengébb fényű aureolából áll. Mennél távolabb van az ernyő, annál inkább gyengül a mag fénye, míg az aureoláé erősödik, míg végre az egész folt egyformának tünik fet. A hosszabb úton a homályos közeg mindig több és több sugarat terel ki az egyenes irányból, és mindig nagyobb mértékben. Ezen szétszóródás miatt aztán az ernyő világítása egyformává lesz. A gáz nyomásának csökkenésével a foltok keskenyebbekké, élesebben határoltakká és világosabbakká lesznek, jeléül annak, hogy a közeg tisztul. Hidrogéngázban a foltot környező aureola már 88 mm. nyomásnál eltűnt; más gázakban később. A hidrogéngáz általában a legtisztább közegnek bizonyult; a különböző gázak azonban anyagi minőségük szerint nem mutattak jellemző sajátságokat. Minden gáz egyformán viselkedik, ha ugyanazon fokig ritkított.

A különböző nyomású gázakban keletkezett katódsugarak nem egyformán szóródnak el a tovaterjedésnél. Kisebb mérvű ritkulásnak nagyobb szétszóródás felel meg.

Kisérleteiből Lénárd azt a következtetést vonja le, hogy a katódsugarak lényegökben éterbeli folyamatok, melyeknek olyan rendkivüli finomságuaknak kell lenniök, hogy az anyagi molekuláknak megfelelő dimenziók már tekintetbe jönnek. Az anyag még a legkisebb hullámhosszaságú fénynyel szemben is úgy viselkedik, mintha a tért hézag nélkül töltené be. A katódsugarakkal szemben még az elemi gázak molekulái is külön akadályokként viselkednek, melyek az étert mint közeget homályossá teszik és e tekintetben nem a gázak anyagi minősége, hanem csupán csak tömege, vagyis a térfogategységben foglalt molekulák összesége határoz.

Csemez.

IRODALOM.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften.

40. A. L. Lavoisier u. P. S. de Laplace, Zwei Abhandlungen über die Wärme. (Aus den Jahren 1780 und 1784.) Herausg. v. J. Rosenthal. — 74 l. Ára 1.40 márka.

44. Das Ausdehnungsgesetz der Gase. Abhandlungen von Gay-Lussac, Dalton, Dulong u. Petit, Rudberg, Magnus, Regnault (1802—1842). Herausg. v. W. Ostwald. — 213. l. Ára 3 márka.

56. Ch. Blagden, Die Gesetze d. Überkaltung und Gefrierpunktserniedrigung. 2 Abhandlungen (1788). Herausg. von A. J. v. Oettingen. — 49 l. Ára 0.80 márka.

57. Fahrenheit, Réaumur, Celsius. Abhandlungen üb. Thermometrie (1724, 1730—1733, 1742.) Herausg. von A. J. v. Oettingen. — 140 l. Ára 2.40 márka.

A hány név, annyi tapasztalati törvény, vagy physikai állandók halmaza, melyekből az értekezésekben átkarolt mintegy másfél évszázad alatt a hőtan kialakult. A ki a hőtannak csak elemi cursusát végezte el, már a nevekből és címekből tájékoztatva van a felsorolt munkák tartalmára nézve. A bennök foglalt értekezések igen különböző időkben, egymástól nagyon eltérő elméletek korában keletkeztek s tanulmányozásuk különösen érdekes ma, a mikor a hőjelenségekkel oly szoros kapcsolatban levő halmazállapotok kérdése igen sok kutatót foglalkoztat és mindgyakrabban új adatokkal bővíti ismereteinket.

53. C. F. Gauss, *Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt* 1832). — 62 lap. Ára 1 márka.

A földmágnesség vízszintes összetevőjének intenzitása Gauss ez értekezése előtt is meg volt mérhető ugyanazon, vízszintes síkban forgó, mágnestűnek két különböző helyen észlelt lengésideje összehasonlítása által. Egység gyanánt természetesen valamely helyen működő erő szolgált; s a mérés szükséges feltevése, hogy a két megfigyelés között sem a mágnes momentuma, sem pedig a horizontális összetevő nem változott. Világos

továbbá, hogy az erő időbeli változása, mely már a mágneses declinatió saecularis és periodikus változásából várható, ez összehasonlításokban teltesen elvész. Gauss ennéfogva az analytikai mechanikában rég használt három alapegységet a Coulomb-féle törvény kapcsán a mágnességre is kijerjesztette, egységül választván ama mágneses fluidum tömegét, mely a vele egyenlő tömegre a távolság egységében az erő egységével hat. Ily módon meghatározza lengésekből a mágnespálcza mágneses momentumának *(M)* és a földmágnesség horizontalis összetevőjének *(T)* szorzatát és ugyanezen pálcza okozta kitérések megfigyeléséből az $\frac{M}{T}$ osztatot. A kettő összefoglalva megadja a T és M mennyiségeket. A kitérítéseknél lényeges szerepet játszik a Coulomb-féle törvény, melyet Gauss az általánosabb $P=\frac{\mu\mu'}{r^n}$ alakban írva, külön meghatározza kisérleti úton az n értékét, melyet 2-nek talál. Számba veszi a szükséges javításokat: a mágneses momentumnak a hőmérséklettől való függését, a fonal csavarodásának befolyását a lengésekre és eltérésekre, a földmágnesség megváltozását a megfigyelési idő alatt. Kitűnő experimentális módszert ad a pálcza tehetetlenségi momentumának meghatározására, és az értekezésben ugyan erre ki nem terjeszkedve — a tükör-távcső leolvasás behozatalával e nemű megfigyeléseknek csillagászati pontosságot ad. Végül összeállít egynehány megfigyelt intenzitásértéket Göttinga számára, hangsúlyozza, hogy a meghatározás módja teljesen független a mágneses állapot felfogásától és levezeti a megmért mennyiségek méretszámait, melyek segítségével az egységek egyik rendszeréből a másik egységrendszerre mehetünk át.

54. J. H. Lambert, *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten* (1772). — 95 lap. Ára 1.40 márka.

A legnagyobb élvezettel és haszonnal olvasható értekezés, mely a conformis leképezés első kezdeteit adja elő és a mai nap is legsűrűbben használt térképvetítések törvényeit adja. Noha Lambert a leképezés általános elméletéig nem emelkedik, mégis tud kapcsolatot teremteni az egyes vetítések között, és levezeti nevezetesen a Lagrange-féle körös és a Gauss nevéhez fűződő conformis képvetületet. Az æquivalens (területtartó) vetítésekkel is foglalkozik, melyek közül különösen a Lambert-féte azimuthális és képvetület fontosak. Végül a sphæroidikus föld leképezésében szükséges módosításokat is vezeti le. Különösen igen vonzó a mód, melylyel Lambert a mathematika segédeszközeit kezeli. *Kövesligethy.*

MEGOLDOTT FELADATOK.

21. *Legyen*

$$F(u, v) = 0$$

valamely görbének egyenlete vonalkoordinátákban; bizonyittassék be, hogy az (u, v) *érintőnek érintéspontjában a görbületi mértéket a következő képlet adja:*

$$G = \frac{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}} =$$

$$= \frac{\left(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right]}$$

(KÜRSCHÁK.)

Második megoldás Freikind Ignácz műegyetemi hallgató úrtól.

Legyen a görbe egyenlete pontkoordinátákban

$$y = f(x); \qquad a)$$

akkor az áttérés a görbe vonalkoordinátákban való egyenletére a következőképen történik. Az érintő egyenlete az (x, y) pontban

$$\eta - y = y'(\xi - x);$$

vagy rendezve

$$\xi\frac{y'}{y - y'x} - \eta\frac{1}{y - y'x} + 1 = 0$$

és innen az érintő koordinátái:

$$u = \frac{y'}{y - y'x}, \quad v = -\frac{1}{y - y'x}. \qquad b)$$

A *b*) alattiakból x-et és y-t kifejezvén u- és v-ben és behelyettesítvén az *a*) egyenletbe az $y'=f'(x)$ egyenletek tekintetbe vételével az

$$F(u, v) = 0$$

egyenlethez jutunk.

A görbület kifejezése az (x, y) pontban

$$G = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad c)$$

A *b*) alattiakból

$$y' = -\frac{u}{v}$$

és

$$1+y'^2 = \frac{u^2+v^2}{v^2};$$

azután

$$y'' = \frac{dy'}{dz} = \frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{v^2} = \frac{\frac{du}{dx}\left(u\frac{dv}{du} - v\right)}{v^2}.$$

Ezeket az értékeket *c*)-ben helyettesítvén, lesz:

$$G = \frac{\frac{du}{dx}\left(u\frac{dv}{du} - v\right)}{v^2\frac{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}{v^3}}$$

vagy összevonás után

$$G = \frac{v\frac{du}{dx}\left(u\frac{dv}{du} - v\right)}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad d)$$

Még a $v\frac{du}{dz}$-et kell másképen kifejeznünk; e czélból képezzük a $\frac{du}{dy}$ differenciálhányadost. Minthogy e számításnál

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$$

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right) = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = -y'^2\frac{d^2x}{dy^2},$$

azért a keresett differenciálhányados így irható:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{yy'^2}{(y-y'x)^2}\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{yy'^2}{(y-y'x)^2}\frac{d}{du}\left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{du}{dy}.$$

Innen

$$1 = -\frac{yy'^2}{(y-y'x)^2}\frac{d}{du}\left(\frac{dx}{dy}\right)$$

vagy tekintetbe véve a *b*) alatti első egyenlőséget

$$1 = -yu^2\frac{d}{du}\left(\frac{dx}{dy}\right)$$

és ebből

$$y = -\frac{1}{u^2\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}.$$

De

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{v}{u}$$

továbbá

$$\frac{d}{du}\left(\frac{dx}{dg}\right) = -\frac{u\dfrac{dv}{du} - v}{u^2},$$

úgy hogy

$$y = \frac{1}{u\dfrac{dv}{du} - v}.$$

Végül a legutolsó egyenlőség mindkét oldalán differenciálván és $\frac{dy}{dz}$ helyett $-\frac{u}{v}$-t helyettesítvén, lesz:

$$-\frac{u}{v} = -\frac{1}{\left(u\dfrac{dv}{du} - v\right)^2} \cdot u\frac{d^2v}{du^2}\frac{du}{dx},$$

a miből

$$v\frac{du}{dx} = \frac{\left(u\dfrac{dv}{du} - v\right)^2}{\dfrac{d^2v}{du^2}}$$

ha ezt a *d*)-be helyettesítjük, a feladatot megoldottuk.

A görbület kifejezésének második alakja most már az $F(u, v) = 0$ egyenletből kétszeri differenciálás segítségével minden nehézség nélkül nyerhető.

*

Harmadik megoldás Csillag Vilmos, műegyetemi tanársegéd úrtól.

Ismeretes, hogy az

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

parameteres egyenletek meghatározta görbe görbületi mértéke

$$G = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad 1)$$

hol

$$x' = \frac{dx}{dt} \quad y' = \frac{dy}{dt}$$
$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$$

és

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}. \qquad 2)$$

Jelentsenek (u, v) vonalkoordinátákat és legyenek a görbe érintőinek koordinátái az

$$u = u(t)$$
$$v = v(t)$$

egyenletek segítségével megadva és használjuk ismét a következő jelölést:

$$\frac{du}{dt} = u' \quad \frac{dv}{dt} = v'$$
$$\frac{d^2u}{dt^2} = u'' \quad \frac{d^2v}{dt^2} = v''.$$

Az érintő egyenlete

$$ux + vy + 1 = 0; \qquad 3)$$

ebből az érintő irányhatározója

$$\text{tg. } \alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v}$$

ezt 2)-vel egybevetve a

$$ux' + vy' = 0 \qquad 4)$$

egyenlőséget nyerjük.

Hogy most már a görbületi mértéket vonalkoordinátákban kifejezhessük, a 3) és 4) egyenletek alapján meg kell határoznunk az

$$x',\ y',\ x'y'' - y'x'$$

mennyiségeket mint

$$u, v, u', v', u'', v''$$

függvényeit és be kell helyettesítenünk őket a görbület fönt írt képletébe.

E czélból képezzük a 3)-ból differenciálással az

$$u'x+v'y+ux'+vy'=0$$

egyenletet; tekintettel 4)-re

$$u'x+v'y=0 \qquad 3')$$

adódik úgy, hogy a — 3), 3') — egyenletpárból

$$x=-\frac{v'}{uv'-vu'} \qquad y=\frac{u'}{uv'-vu'}$$

és ezek differenciálhányadosai

$$y'=v\cdot\frac{u'v''-v'u''}{(uv'-vu')^2} \qquad y'=-u\cdot\frac{u'v''-v'u''}{(uv'-vu')^2}.$$

Írjuk rövidség kedveért

$$x'=vW \qquad y'=-uW,$$

akkor újból differenciálván a

$$x''=v'W+vW' \qquad y''=-u'W-uW',$$

kifejezéseket nyerjük.

Ha most már tekintettel a görbület 1) alatti képletére az

$$x'y''-y'x''=(uv'-vu')\ W^2=\frac{(u'v''-v'u'')^2}{(uv'-vu')^3},$$

és

$$\frac{1}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}W^3}=\frac{(uv'-vu')^6}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}(u'v''-v'u'')^3}$$

kifejezéseket képezzük, akkor a görbületi mérték számára a

$$G=\frac{(uv'-vu')^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}(u'v''-v'u'')}$$

kifejezést nyerjük, a mely a feladatban adottat mint speciális esetet magában foglalja.

Ha ugyanis

$$t=u \qquad v=v(u)$$

akkor

$$G=\frac{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{d^2v}{du^2}}$$

a feladatban közölt első alak. Ebből a másik alak úgy vezethető le, hogy

v-t mint u implicite megadott függvényét ismételten differenciáljuk és a nyerendő értéket a szóban forgó képletbe behelyettesítjük.

*

Negyedik megoldás dr. Beke Manó főreáliskolai tanár úrtól Budapesten.

Legyen az adott görbe vonal egyenlete pontkoordinátákban:

$$y = y(x) \qquad 1)$$

akkor egy tetszés szerinti $(x_0 y_0)$ pontjában az érintőnek egyenlete:

$$y - y'x - (y_0 - y'x_0) = 0, \qquad 2)$$

a hol y' a $\frac{dy}{dx}$ differenciálhányados értékét jelöli a felvett $(x_0 y_0)$ pontban.

Írjuk ez egyenletet röviden a következő alakban:

$$y - Xx - Y = 0, \qquad 3)$$

a hol

$$X = y', \qquad Y = y - y'x \qquad 4)$$

és rövidség kedveért elhagytuk a 0 indexet.

A 3) egyenletben az X és Y tekinthetők az érintő vonalkoordinátáinak addig, míg át nem térünk a közönségesen használatos u, v koordinátákra, a melyekkel X, Y a következő összefüggésben vannak:

$$X = -\frac{u}{v}, \qquad Y = -\frac{1}{v}. \qquad 5)$$

A 4) alatti egyenletek megállapítják az átmenetet a pontkoordinátákban megadott egyenlettől a vonalkoordinátákban felírható egyenlethez. Ezek a *transzformáczió* egyenletei. Épen ilyen módon állapíthatjuk meg az átmenetet a vonalkoordinátákban (X és Y-ban) adott egyenlettől a pontkoordinátákban felírhatóhoz. Ha ugyanis vonalkoordinátákban valamely görbe egyenlete:

$$Y = Y(X),$$

akkor a transzformáczió egyenletei:

$$x = -Y', \qquad y = Y - Y'X. \qquad 6)$$

Mellékesen megjegyezzük, hogy a 4) és 6) egyenletekből következik ez a differenciálreláczió:

$$Y - Y'dX = y - y'dx,$$

a mely azt mutatja, hogy itt egy igen egyszerű *érintkezési transzformáczióval* van dolgunk: egy oly transzformáczióval, a mely érintkező görbé-

ket ismét érintkező görbékbe visz át. Ha a görbületet vonalkoordinátákban (egyelőre X és Y-ban) ki akarjuk fejezni, akkor nem kell egyebet tennünk, mint ez érintkezési transzformációt ki kell bővítenünk az első és második differenciálhányadosokra is, vagyis ki kell fejeznünk y' és y'' differenciálhányadosokat az új változókban és ez értékeket a

$$\sigma = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad 7)$$

kifejezésbe kell behelyettesítenünk.

Ha a

$$dy' = y''dx, \qquad dY' = Y''dX$$

egyenletek közül a másodikba az 5) és 6) egyenletekből Y' és X értékeit behelyettesítjük és az így nyert egyenletet az elsővel egybevetjük, a következő egyszerű összefüggésre jutunk:

$$y'' = -\frac{1}{y''}. \qquad 8)$$

Ha tehát y' és y'' értéke a 4) és 8) egyenletekből a σ kifejezésébe helyettesítjük, ered:

$$\sigma = \frac{-1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}y''}. \qquad 9)$$

Most már nincs más hátra, mint hogy X és Y'' helyett u, v-ben és v differenciálhányadosaiban való kifejezéseit helyettesítsük.

Az 5) egyenletből ered; ha előbb dY, aztán dX és ebből $\frac{dY}{dX} = Y'$ kifejezését alkotjuk:

$$Y' = -\frac{v'}{-v+uv'},$$

a hol $v' = \frac{dv}{du}$ tettük.

Ebből ismét dY' és innen $\frac{dY'}{dX} = Y''$ képezhető:

$$Y'' = \frac{v^3 v''}{(-v+uv')^3}. \qquad 10)$$

Ha már most σ kifejezésébe X helyett az 5) egyenlet alapján $-\frac{u}{v}$ és Y'' helyett a 10) egyenletből vett értékét teszszük, akkor megkapjuk a görbületre a feladatban jelzett:

$$\frac{(uv'-v)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}v''}$$

kifejezést.

A görbület kifejezését még egy másik, a dolog lényegéből eredő analitikai módon is megalkothatjuk. Ez eljárásra a következő *csoportelméleti* meggondolások vezetnek:

A síkbeli idomok minden a saját síkjukban történő mozgása haladásból és a kezdőpont körüli forgásból állítható elő. A haladást 2 paraméter határozza meg: az X és Y tengelyek irányában való eltolódások, míg a forgás meghatározásához egy parameter: a forgás szöge szükséges. E szerint a síkbeli mozgásnak, az úgynevezett *euklidesi mozgásnak*, 3 parametere van. Ha valamely pont koordinátái a mozgás előtt: x, y akkor, ha az X irányában a és Y irányában b az eltolódás nagysága, továbbá a kezdőpont körüli forgás szöge α, akkor az új helyzetbe jutott pont koordinátái: x_1, y_1 a következők lesznek:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos. \alpha - y \sin. \alpha + a \\ y_1 &= x \sin. \alpha + y \cos. \alpha + b, \end{aligned} \qquad 1)$$

a melyek az ismeretes koordináta-transzformáczió képletek. Ezek a képletek nemcsak a görbe minden egyes pontját transzformálják egy meghatározott pontba, hanem transzformálják egyúttal a görbe minden egyes érintőjét is, vagyis az y' meghatározta irányt és éppen így az y'', y''', stb. differenciálhányadosokat is. Már most azt a kérdést vethetjük fel, hogy *az x, y, y', y''-nek minő függvényei azok, a melyek semmiféle euklidesi mozgásnál sem változnak meg, vagyis, melyek ez euklidesi mozgáscsoport invariáns függvényei?**

A csoportelméletben egyik alapvető fontosságú tétel, a mely különben a közönséges invariáns-elméletből is ismeretes, hogy az invariáns függvény annyi linearis parcziális differenczialegyenletből álló teljes rendszernek tartozik eleget tenni, a hány paramétere van a csoportnak. A jelen esetben a csoportnak 3 paramétere van (α, a, b), tehát az invariáns függvény 3 lineáris parcziális differenczialegyenletből álló teljes rendszernek tartozik eleget tenni. Másrészt a teljes rendszerek elméletéből ismeretes, hogy ha n változót tartalmazó m egyenletből álló teljes rendszerünk van, akkor található $n - m$ független megoldás és minden más megoldás ez $n - m$ megoldásnak tetszés szerinti függvénye. A jelen esetben a változók száma 4 (x, y, y', y'') a differenczialegyenletek száma 3, tehát általánosságban *egyetlen egy függvény létezik*, a mely az euklidesi csoportnál invariáns; minden más invariáns függvény ennek az egynek függvénye. A priori tudjuk, hogy a görbe görbülete semmiféle euklidesi mozgásnál sem változhatik meg; tehát a *görbület a csoport invariánsa*. A feladatot tehát úgy fogalmazzuk, hogy:

* Lie—Scheffer's Vorl. über contin. Gruppen, p. 111.

Határozzuk meg az x, y, y', y'' olyan függvényét, mely a sík önmagában haladó és forgó mozgásánál invariáns jellegű.

Ezzel egyúttal jelezve van a probléma, a mint azt a KÜRSCHÁK úr által adott feladatnak megfelelőleg felállítható:

Határozzuk meg az u, v, v', v'' olyan függvényét, mely a vonalkoordináták közönséges transzformációjánál invariáns.

Első dolgunk, hogy felállítsuk a vonalkoordináták transzformáczió-képleteit. Ezek igen egyszerűen adódnak ki az

$$ux+vy+1=0$$

relácziából, ha az x, y helyett az 1) alatti értékeket helyettesítjük. E szerint az uv, transzformáczió képletei lesznek:

$$u_1=\frac{u\cos.\,a+v\sin.\,a}{ua+vb+1};$$

$$v_1=\frac{u\sin.\,a+v\cos.\,a}{ua+vb+1}.$$

Most meg kell állapítanunk e csoport infinitezimális transzformácziói. Ezek megalkotása végett tekintetbe veszszük, hogy az identikus transzformáczió akkor áll elő, ha

$$a=0,\quad a=0,\quad b=0,$$

mert ekkor

$$u_1=u,\quad v_1=v,$$

tehát az identikus transzformácziótól végtelen kevéssel különböző transzformácziót — az infinitezimális transzformácziót — megkapjuk, ha

$$a=\delta a,\quad a=\delta a,\quad b=\delta b$$

teszszük. Így nyerjük; ha a nyert kifejezést hatványsorba fejtjük és a másodrendű végtelen kicsinyeket elhanyagoljuk:

$$\delta u=\quad v\delta a-u^2\delta a-uv\delta b$$
$$\delta v=-u\delta a-uv\delta a-v^2\delta b;$$

vagy ha

$$\delta a=A\delta t,\quad \delta a=B\delta t,\quad \delta b=C\delta t$$

teszszük, akkor az infinitezimális transzformáczió a következő schematikus módon írható:

$$(Av-Bu^2-Cuv)\,p+(-Au-Buv-Cv^2)\,q$$

a hol

$$p=\frac{\partial f}{\partial u},\qquad q=\frac{\partial f}{\partial v},$$

vagyis, minden infinitezimális transzformáczió e háromból alakítható lineárisan:

$$X_1 = vp - uq, \quad X_2 = u^2 p + uvq, \quad X_3 = uvp + v^2 q, \qquad 3)$$

a melyek, mint a csoportelmélet elemeiből ismeretes, specziális esetei a projektiv transzformáczionak.

Most ez infinitezimális transzformáczionkat *bővítenünk* kell arra az esetre, midőn az f függvényben nemcsak az u, v változók, hanem egyúttal $v' = \frac{du}{dv}$ és $v'' = \frac{d^2u}{dv^2}$ is előfordulnak.

A bővítésre szolgáló képletet egyszerűen nyerhetjük oly módon, a mint a variáczió számításban a differenczialhányadosok variácziőit szoktuk előállítani:

$$\delta v' = \delta \frac{dv}{du} = \frac{\delta dv \,.\, du - dv \,.\, \delta du}{du^2} = \frac{d\delta v}{du} - v' \frac{d\delta u}{du} \qquad 4)$$

és éppen így

$$\delta v'' = \frac{d\delta v'}{du} - v'' \frac{d\delta u}{du}.$$

Tekintetbe véve a 2) alatti variácziókat, e képletek szerint nyerjük a 3) alatti infinitezimális transzformácziók bővítéseül rendre:

X_1 bővítéseül: $\delta v' = -(1 + v'^2)\,\delta t$,
X_2 « $\delta v' = (v - uv')\,\delta t$,
X_3 « $\delta v' = v'\,(v - uv)\,\delta t$

és ismételten bővítve, rendre $\delta v''$ értékeül a következőket kapjuk:

1) $v'v''\delta t$, 2) $-3uv''\delta t$, 3) $-3uv'v''\delta t$.

A lineáris parcziális differenczialegyenletek, melyeknek az invariáns függvények eleget tartoznak tenni, most már a következőként nyerhetők: Hogy valamely f függvény, mely u, v, v', v''-t tartalmazza, valamely transzformácziónál változatlan legyen, ahhoz szükséges — és elégséges is — hogy ha a változókra az infinitezimális transzformácziót alkalmazzuk, a változás 0 legyen. E szerint a jelen esetben az f függvény a következő 3 lineáris parcziális differenczialegyenletnek tartozik eleget tenni:

$$\begin{aligned} v\frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v} - (1+v'^2)\frac{\partial f}{\partial v'} + v'v''\frac{\partial f}{\partial v''} &= 0, \\ u^2\frac{\partial f}{\partial u} + uv\frac{\partial f}{\partial v} + (v - uv')\frac{\partial f}{\partial v'} - 3uv''\frac{\partial f}{\partial v''} &= 0, \\ uv\frac{\partial f}{\partial u} + v^2\frac{\partial f}{\partial v} + v'(v - uv')\frac{\partial f}{\partial v'} - 3uv'v''\frac{\partial f}{\partial v''} &= 0. \end{aligned} \qquad 5)$$

A számítás meggyőz arról, hogy e három egyenlet teljes rendszert alkot, a mint különben a csoportelmélet általános tételeiből is következik.

Hogy ezt a rendszert megoldjuk, átalakítjuk előbb úgy, hogy a második egyenletet v-vel, s a harmadikat u-val szorozzuk és egymásból kivonjuk. Ekkor a következő egyenletet kapjuk :

$$(v-uv')\frac{\partial f}{\partial v'}-3uv''\frac{\partial f}{\partial v'}=0,$$

mely a következő közönséges differenciálegyenletnek felel meg :

$$\frac{dv'}{1}=-\frac{dv''}{\frac{3uv''}{v-uv'}}$$

és integrálja :

$$f=\frac{Cv''}{(v-uv')^3}, \qquad 6)$$

a hol C az u, v függvénye. Hogy minő függvénye az u, v nek, annak meghatározására az 5) alatti második és harmadik egyenletekből még egyet alkotunk olyként, hogy a második egyenletet v', a harmadikat 1-gyel szorozzuk és az így nyert egyenleteket egymásból kivonjuk. Akkor megint — a $v-uv'=0$ megoldástól, mely egyenes vonalat jelent, eltekintve — nyerjük a következő egyenletet :

$$u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}=0$$

és ebbe a 6) alatti kifejezést helyettesítvén, a C-re, megint az $uv'-v=0$-tól eltekintve, a következő parciális differenciálegyenletet kapjuk :

$$u\frac{\partial C}{\partial u}+v\frac{\partial C}{\partial v}-3C=0,$$

melynek megoldása

$$C=c\,(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}$$

úgy, hogy az 5) alatti 2) és 3) egyenletnek eleget tesz :

$$f=c\frac{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}v''}{(u-uv')^3} \qquad 7)$$

Egyszerű számítás meggyőz bennünket arról, hogy ez az első egyenletet is kielégíti ; tehát a 7) alatti kifejezésben *az u, v, v', v'' oly függvényét nyertük, mely az euklidesi csoportnál invariáns és ha $c=1$ teszszük, akkor minden más invariáns függvény ennek az*

$$\frac{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}v''}{(v-uv')^3}$$

nak függvénye. Ez a kifejezés megegyezik a KÜRSCHÁK úr által megadott görbületi sugárral.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

A nedvesség méréséről. Mintegy 10 évvel ezelőtt sokszor egymásután kellett a levegő abszolut nedvességét meghatároznom s e czélra EDELMANN készülékét használtam. Ez mintegy $^1/_2$ liter térfogatú öblös üveghenger, melybe egy vele közlekedő edényből kénsavat lehet befolyatni: ez elnyelvén a térben elzárt vízgőzöket, a nyomás alább száll. A nyomás csökkenését a hengerre szerelt kis higany manometer méri.

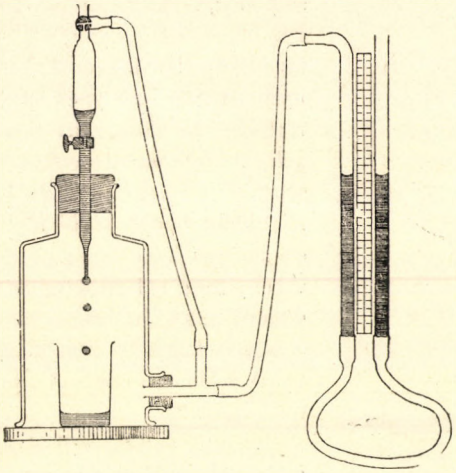
Ennek a készüléknek csak azt a baját éreztem, hogy a hengert minden egyes mérés után gondosan meg kell mosni és kiszárítani s ebből a czélból az egész készüléket szétszedni. Mindez a kisérlet gyors ismétlését — a mi pedig mindíg kivánatos — igen meghezíti.

A sok bajlódást akként törekedtem elhárítani, hogy az üveghengert túbusos légszivattyú-haranggal helyettesítettem s a kénsavat a harang alá zárt magas falú pohárba folyattam. Így csak a poharat kell egy másikkal helyettesíteni, s a kisérlet nyomban ismételhető.

Az ekként módosított készüléket a mellékelt ábra mutatja. A henger nyakába légzáróan illő kaucsuk dugó két csappal ellátott pipettát tart: az alsó túbus dugójában ⊤ alakú üvegcső van tolva. Ezen keresztül a harang belseje a pipetta felső terével, illetőleg a manometerrel, kaucsuk csövek révén közlekedésbe helyezhető.

A kisérlet lefolyása a következő. A harang alját gondosan megfaggyúzva, lecsiszolt üveglapra állítjuk. A tömény kénsavval megtöltött pipettát légzáróan beleillesztjük a harang nyakába, a felső csapot úgy fordítván, hogy a harang belseje a kénsavval telt tértől egyelőre elzárva legyen s a szabad levegővel, valamint a manometerrel közlekedjen. Ez a követelmény nyilván akkor van teljesítve, ha a csap a rajzban látható helyzetből 180°-kal van elfordítva. Most a felső csapot a rajzban feltüntetett állásba fordítván, az alsó csapot kissé elfordítjuk, hogy a kénsav a henger alatt álló pohárba lassan lecsepegjen; a manometer — melynek két ágában eddigelé egy szinten állott a folyadék — nyomban megmutatja a nyomás csökkenését és rövid idő alatt megállapodik. Ekkor az alsó csap elzárható. A leeső kénsavtól kiszorított levegő a felső csapon keresztül a kénsav helyére léphet s így a térfogat

változása csakis a vízgőz elnyeletéséből ered. A vízgőz elnyeletése hőfejlődéssel jár s ez a levegőnek kiterjedését vonja maga után; de a hőemelkedés oly csekély, hogy a nedvességméréseknél megkivánt pontosság mellett elhanyagolható. A manometerben felemelkedő folyadék tényleg kisebbíti a térfogatot; de ha folyadék a higany, úgy ez elenyésző csekély. Ha azonban az érzékenység fokozása kedveért — a mi kivánatos, ha a kisérletet előadás közben akarjuk végezni — vízmanométert használunk, akkor a folyadékoszlopot a hengerrel közlekedő szárban a kezdetben elfoglalt állására kell hozni, a mi az által történik, hogy a manometer másik ágát lefelé toljuk, mindaddig, míg a folyadék felszine az előbbi ágban eredeti helyére nem



jutott. A folyadékoszlopok álláskülönbsége megadja a keresett gőznyomást, mely higanynyomásra átszámítható.

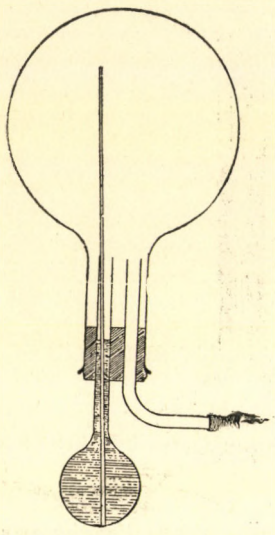
A kisérlet ismétlése végett csupán csak a harang alá helyezett poharat kell egy másikkal kicserélni, miközben a harangot a levegőben kissé felalá mozgatjuk, hogy a benne levő száraz levegőnek helyét a környezet nedves levegője foglalja el. A kénsav felfogására magas falú poharat kell venni, hogy a leeső higanycseppek a henger falára szét ne frecscsenjenek, a mi a harang új kimosását, vagy legalább is gondos kitörülgetését tenné szükségessé.

Természetes, hogy a harangot kisérlet közben felmelegíteni (pl. érintés utján) nem szabad: ez jelentékeny kisérleti hibát okozhatna.

A nedvesség meghatározása ennél jóval egyszerűbb berendezéssel, még a legszerényebb laboratóriumban is meglelhető eszközökkel is végre-

hajtható. Egy lombik, néhány darab üveg- és kaucsukcső és a lombikba légzáróan illő kétfuratú kaucsuk dugó — és természetesen egy kis kézi ügyesség — kell csak hozzá.

A kaucsuk dugó egyik lyukába néhány köbcentiméternyi üveggömböcske csövét — vagy egyszerűen egyik végén zárt üvegcső nyilt végét! — toljuk, a másikba pedig derékszögre meghajlított ugyanoly vastagságú üvegcsövet. Erre a vízmanométerhez vezető kaucsukcső jön, a gömböcske pedig tömény kénsavval töltetik meg. A lombikot már előre belefogjuk egy Bunsen-állvány fogójába, *nyilásával lefelé*, s most alulról beletoljuk a dugót. Ez által a lombikban levő levegő kissé összenyomatik s a manometerben a folyadékoszlopok egyensúlya megbomlik: ezt a manometercső csekély alátolásával nyomban helyre állítjuk s a lombikot felfordítjuk. A kénsav kifolyik, elnyeli a vízgőzt, melynek feszültségét a manometeren az előbb leirt módon meghatározzuk. A lombikot felfordításkor nem kell — sőt nem is szabad — kézbe fogni: csak a tartóját kell tengelye körül megfordítani. A kénsav befogadására való gömböcskébe még egy vékony üveg pálczikát tolhatunk: ez megindítja és lassítja a kénsav kifolyását; a kénsav a csövön folyik s ezzel nagyobbodik a gőznyelő felület s ennélfogva gyorsul az elnyeletés folyamata.



Rajzunk az összeállítást a lombik megfordítása előtti pillanatban mutatja.

Ha vízmanometert használunk, akkor a kiszárítandó tér levegőjét a manometer levegőjétől kis vatta-fojtással el kell különíteni. A vatta a nyomás kiegyenlítődését nem gátolja, ellenben a manometer gőzzel telített levegőjének átdiffundálását annyira késlelteti, hogy a kisérlet alig egy percznyi tartamában egyáltalában észrevehetetlen.

A gőz nyomása helyett a térfogatát is lehet meghatározni. Ezt kétféleképen lehet tenni. Ha az első rajzban látható manométerrel dolgozunk, a gőz elnyeletése után egy magasságra hozzuk a két ágban a manométer folyadékoszlopait: a folyadékoszlop emelkedése megadja a térfogat csökkenését, vagyis az elnyelt vízgőz térfogatát. Ehhez természetesen az szükséges, hogy a manometer illető ága kalibrálva legyen.

A második eljárás, mely főleg előadási czélokra ajánlatos, abban áll, hogy a kiszárítandó edényt festett vízcseppel elzárt, vízszintesen megerősí-

tett, mintegy 4—6 *mm* átmérőjü üvegcsővel kötjük össze. Meghatározván előre 1 *cm*-nyi hoszszának térfogatát, a gőztérfogatoknak aránylag igen pontos mérésekre alkalmas. A vízcsepp eltolódása, természetesen, annál nagyobb, mennél nedvesebb a levegő s mennél nagyobb a lombik. 1 literes edénynyel még a legszárazabb téli időben is 10—20 *cm*-rel tolódik el a vízcsepp. *B. G.*

*

A kristályosodás vetitése igen hálás mutatványa a vízszintes vetitő készüléknek. Alkénessavas nátront vagy eczetsavat kémlő csövecskében megömlesztvén, gyengén felmelegített tiszta üveglapra öntjük s ezt a vízszintes vetitő készülékre leteszszük. Kis kristály darabbal, melyet a még folyós anyagba vetünk, a kristályosodást megindítjuk, mely aztán rohamosan az egész anyagra átterjed. — Ennél az eljárásnál talán kényelmesebb és biztosabb, ha túlhűtott sók helyett oly oldatokat használunk, melyek oldófolyadéka gyorsan párolog. Így például a naftalin aetherben nagy mértékben oldódik; ha tehát készítünk telített oldatot s ebből keveset lehetőleg sik alappal bíró csészébe, vagy egyszerűen a vetitő készülékre *vízszintesen* elhelyezett sik üveglapra öntünk, az aether gyorsan elpárolog s a naftalin szép pikkelyekben kikristályosodik. Naftalin helyett pyrogallussavat is használhatunk, mely aetherben szintén nagy mértékben oldódik s igen szép csillagalaku kristályokban válik ki belőle. *Gruber N.*

*

A mágnesi állapot rögzitése a vasban. A lágyvasban indított szabad mágnesség tudvalevőleg nem enyészik el teljesen az indító hatás megszüntével s bizonyos körülmények között a remanens mágnesség elég jelentékeny.

E remanens szabad mágnesség mennyisége mindenesetre nagyon függ attól, hogy az indító hatás megszünte után a lágyvasat erősebb mechanikai behatások ne érjék, mert a remanens mágnesség mennyiségét a lágyvasrészecskék irányított helyzetének állandósága határozza meg.

Ismeretes, hogy próbacsőbe zárt és dugóval összenyomott lágyvaspor az indító hatás megszünte után is mutat némi szabad mágnességet mindaddig, míg a vasport a csőben össze nem rázzuk.

Ha tehát az irányított részecskék elmozdulását még mágnesezés közben valami módon állandóan megakadályozzuk, a porrészecskék ezen helyzetükből nem tudnak többé kifordulni és elhelyezkedésüktől függő szabad mágnességüket állandóan megtartják.

Az egyszer irányított lágyvas részecskék elmozdulásának állandó megakadályozása sikerül, ha a lágyvasport eleinte lágy, de később megkeményedő anyaggal keverjük össze.

Egyik módja a fékezésnek az lehet, hogy a lágyvasport próbacsőben

viaszszal olvasztjuk össze és mágneses térben a viaszt megkeményedni hagyjuk. Ily módon ezelőtt két évvel ezelőtt készített állandó mágnesem még ma is változatlan erősségű.

Kényelmesebben dolgozhatunk a lágyvaspor közé kevert finom gipszporral. Ez utóbbi eljárással a legbonyolultabb mágneses tereket könnyen állandósíthatjuk és többszörösen lemásolhatjuk, ha a gipsz-masszát megkeményedéseig hagyjuk a mágnestérben. Ily terekben a lágyvaspor-részecskék a mező erővonalainak megfelelő irányítást veszik fel s a mágneses mezőt, ha nem is eredeti intenzitásában, de mágnességének eloszlási viszonyaiban híven és állandóan lemásolják, mi által módot nyerünk arra is, hogy az eredeti mágneses térnek csak tetszésszerinti részleteit öntsük gipszbe s a másolatokat külön vizsgálhassuk.

Az ily parcziális mágneses terekhez közelített rövid mágnestűkkel kényelmesen elemezhetők a mágnességnek bennük mutatkozó eloszlása s ha a másolatok erős elektromágnesnek a terében készültek, rájuk hintett vasreszelék segítségével erővonalaikat is igen szépen lerajzolják.

Hogy e módon csakis a ragasztóanyag «coërcitiv ereje» jusson kifejezésre, chemiailag tiszta, igen finom vasporral végeztem kisérleteimet.

A vaspor azonban ily finom eloszlás és a keverésnél nyert nedvesség s alkalmasint a gipsznek kristályvize felvétele közben történő csekély megmelegedése mellett a gipszmasszában erősen oxydálódik és e közben jelentékeny égés meleget termel. Az ily tömeg valóságos fütőanyag számba megy; egy k. b. 300 grammnyi tömeg a keverés után mintegy félnap mulva kezdett felhevülni s hőmérővel flanellbe göngyölve öt óra hosszán keresztül 80°C hőmérséket mutatott, miközben teljesen átrozsdásodott.

Az oxydátió különben nincs hatással az ily tömeg szabad mágnességére; hiszen a természetes mágneseket is a vasnak oxydjai alkotják. *Fényes.*

*

Dielektrin néven Hurmuzescu egy új szigetelő anyagot ír le, melyet úgy állított elő, hogy olvadt paraffinba folytonos keverés közben kénvirágot hintett. A két anyag benső keveredéséből keletkező pép kihüléskor igen megkeményedik s ekkor igen jól megmunkálható, esztergályozható és simára csiszolható, mely tulajdonsága igen sokféleképen használhatóvá teszi. Felülete jóval keményebb mint a paraffiné s nehezebben olvad; továbbá kevésbbé higroszkópikus és törékeny, mint a kén. Tehát e két anyag jó tulajdonságait fogyatkozásaik nélkül egyesíti magában. A két anyag keverési aránya szerint változik a szigetelő keménysége és színe. Elektrofor és elektroszkóp készítésére a paraffinnál* alkalmasabbnak bizonyult. (Lumière Électrique. LI. k. 289 l.)

---

* L. *Math. Phys. Lapok* T. u. 304. l.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA és RADOS GUSZTÁV

NEGYEDIK ÉVFOLYAM

II. FÜZET. 1895 FEBRUÁR

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1895

TARTALOM

Lap

Szépréthy Béla: A csavart árnyékoszlop saját határvonalának meghatározásáról (Első közlemény) ... 49

Szijártó Miklós: Elliptitus áram hatása a gyúpontjaiban levő mágnesi pólusra 56

Szijártó Miklós: Egy sor mely a π értékéhez vezet ... 67

Physikai Szemle. (A Hertz-féle kisérletekről) ... 71

Irodalom. (*Christiansen*, Elemente der theor. Physik. Ism. Farkas Gy.) ... 79

Feladatok. (A 21. feladat megoldásai Maksay Zsigmond, Grünwald Miksa, Lóky Béla és Suták József uraktól) ... 82

Előadások. (*Fröhlich I.* «Miért esik mindig a talpára a macska?») ... 89

Társulati ügyek. Határozat a M. P. T. harmadik közgyűlése tárgyában ... 95

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A negyedik társulati év 1895. január 1-én kezdődött. A *tagsági díj* az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) címére — legczélszerűbben a jelen füzethez mellékelt posta-utalványnyal — beküldeni. *Hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéséért.*

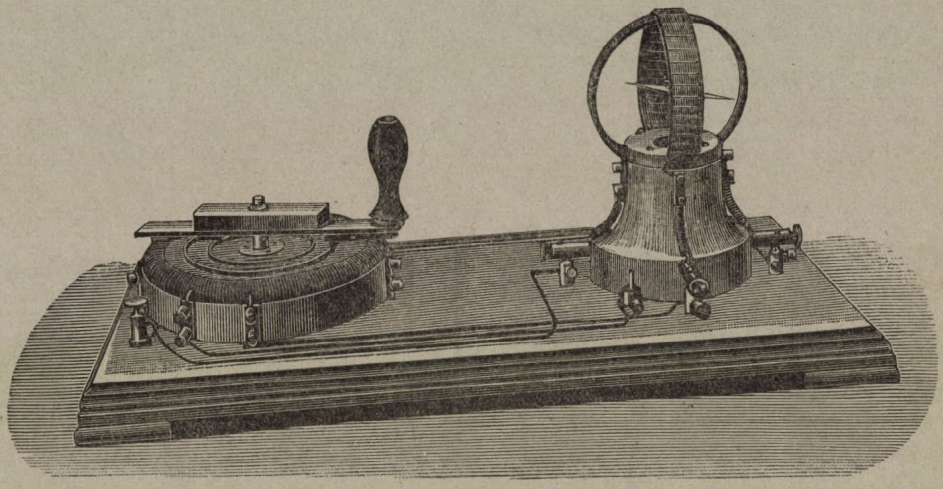
Rendes ülések. A társulat üléseit minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja, a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3.), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A társulat f. é. közgyülése Szombathelyen fog megtartatni.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czímére **(VI. Bulyovszky-u. 16.)** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár **(VII., Csengery-u. 1)**, a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a *reclamatiók* is. A reclamatiókat — költségkimélésből — mindenkor a legközelebb megjelenő füzettel egyidejűleg teljesítjük.

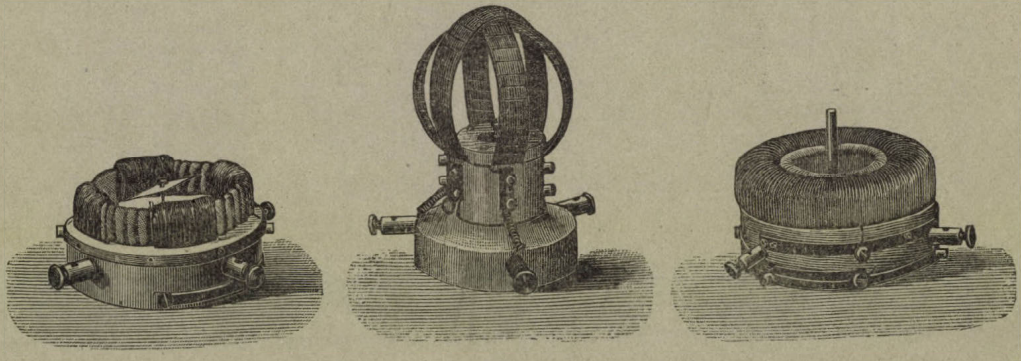
T. Munkatársainkhoz. Kérjük t. munkatársainkat, hogy közleményeiket az összehajtott irópapiros félívének csak egyik oldalára és ennek is csak egyik felére, — a képleteket mindig külön sorba — minél olvashatóbban irni szíveskedjenek. A közleményekhez való rajzok nem a szövegbe, hanem külön mellékletként rajzolandók, folyó számokkal látandók el s az ábrák helye a szövegben a folyó számnak mellé irásával jelölendő meg. Kérésünk szives teljesítésével a szerkesztőket fárasztó munkától, a társulatot pedig a korrekturákért járó tetemes kiadástól mentik fel.



WEINHOLD-féle készülék

FORGÓ MÁGNESES TÉR ELŐÁLLITÁSÁRA.

A II. kötet 275. stb. oldalain ismertetett készülékeket (3.,8., 9. és 11. ábra) minden hozzávaló mellékkészülékkel teljesen felszerelve igen ajánlhatjuk a t. cz. tanár urak becses figyelmébe.



A teljes készülék ára legfinomabb kivitelben ***60 forint*** *loco Budapest. A készülék egyes részei külön is kaphatók méltányos árakon.*

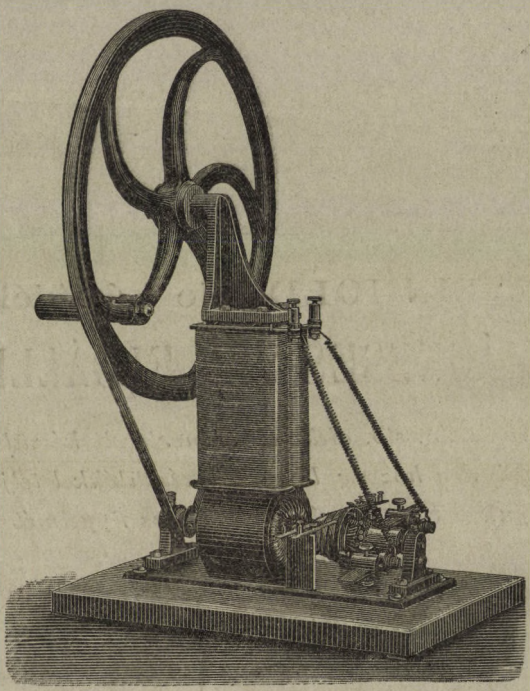
CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

DINAMO-ELEKTROMOS GÉP

Gramme-féle gyűrűvel ellátva

egyirányú, váltakozó és forgató (több fázisú) áram előállítására.

Az áram erőssége 4 Ampère, feszültsége 30 Volt.



Ezen géppel egyidejűleg meg lehet világítani például 3 izzólámpát egyirányú és 2—3—4 izzólámpát váltakozó vagy több fázisú forgató árammal. Használható egyenáramú, váltakozó áramú és több fázisú generátor vagy mótorként Szerkezete e lapok II. köt. V. füzetében ismertetve van.

A gép kizárólagosan iskolai czélokra készült és pedig nem csak a dynamogép stb. bemutatására, hanem mint állandó s erős villamos forrás; kézzel igen könnyen hajtható és árama minden iskolai kisérlethez teljesen elegendő.

Részletes utasítás minden géphez mellékeltetik.

A gép ára 100 forint.

CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

A CSAVART OSZLOP SAJÁT ÁRNYÉKHATÁRVONALANAK MEGHATÁROZÁSÁRÓL.

(Első közlemény.)

I.

A csavart oszlop vagy csavart körhengerfelület egy körnek önmagával parallel tovamozgatása alapján származtatható, ha a kör középpontja egy a sikjára merőleges tengelylyel bíró csavarvonalon végig halad.

A mozgó kör a felület alkotó köre lesz, az adott csavarvonal pedig középponti csavarvonala. Ha a kör mozgását oly módon szoritjuk meg, hogy minden átmérője mozgása közben eredeti irányát megtartsa, akkor minden pontja leir egy a középponti csavarvonallal kongruens csavarvonalat, a hozzá tartozó körérintő azonban egy hengerfelületet, a mely a felületünket a ponttól leirt csavarvonal hosszában érinti. Valamely alkotó kör hosszában szerkeszthető érintősíkok oly ferde körhengert burkolnak be, a melynek alkotó irányát a középponti csavarvonal amaz érintője adja meg, a mely ez alkotó kör középpontjához tartozik.

Az árnyékhatárvonal meghatározására alkalmazhatjuk a burkoló segédfelületek rendszerének általános módszerét. Ilyen rendszereknek kinálkoznak kiválóan a burkoló hengerfelületek az alkotó körök, valamint az alkotó csavarvonalak mentén, mivel ezek felhasználásával oly meghatározási módot nyerünk, a mely nemcsak árnyékhatárvonalunk tetszőleges pontossággal való meghatározására képesit, hanem azonfelül még nehány a keletkező görbe természetére vonatkozó tulajdonság felismerésére is vezet.

M. kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem KÖNYVTÁRA SZEGED

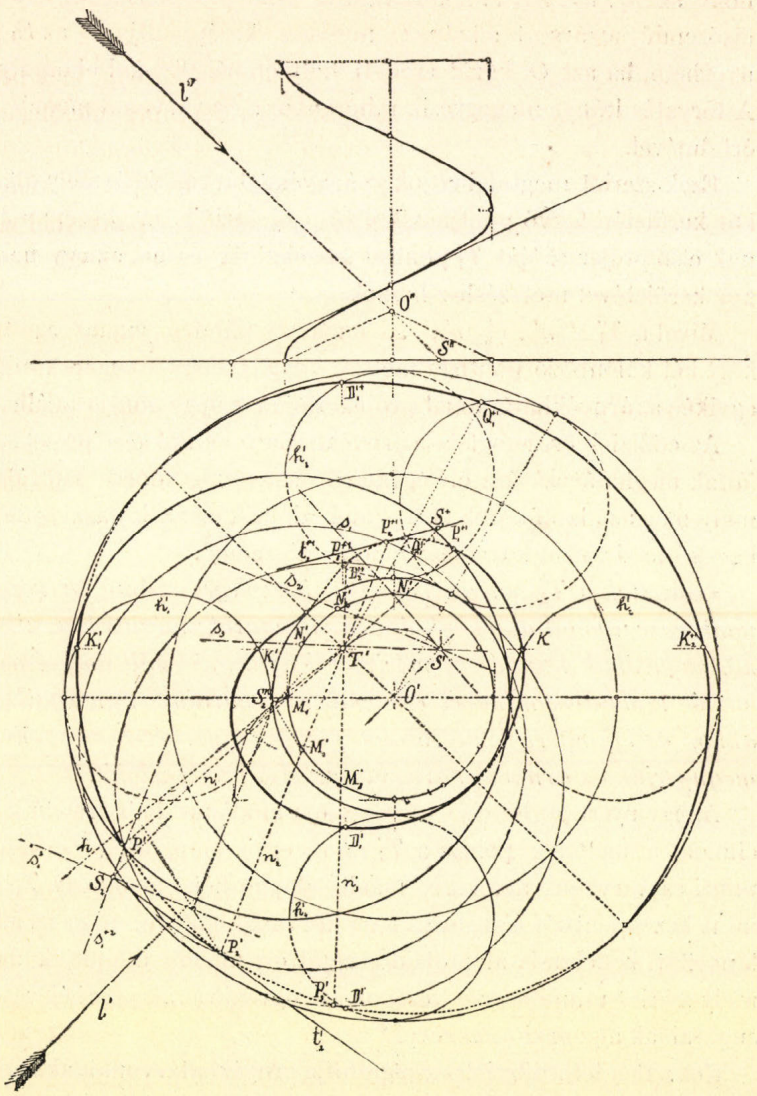
I. Szerkesztési mód.

Állítsuk elő felületünket orthogonális projekcióban, még pedig oly módon, hogy tengelye az első projekczió-lapra merőlegesen álljon. Jelöljük az alkotó körök sugarát ρ-val, a középponti csavarvonal alapkörének sugarát r-rel, és legyen $M_1'M_2'M_3' \ldots$ e csavarvonal első projekcziója, akkor az M_1', M_2', M_3', ... pontokból mint középpontokból ρ sugárral leírt körök lesznek a felület alkotó köreinek első projekcziói.

Közvetetlen projicziálás adja e körök második projekczióit, föltéve, hogy a középponti csavarvonal második projekcziója az ismeretesnek feltett menetmagasságából lett szerkesztettük. Szerkesszük továbbá a középponti csavarvonal iránykúpját oly módon, hogy alapkörét használjuk alapvonalul; akkor e kúp minden alkotójához a csavarvonal első menetének egy-egy pontja tartozik és így a felület egy-egy alkotó köre. A kúp-alkotó kijelöli egyszersmind annak a hengernek alkotóirányát, a mely a felületet e kör hosszában burkolja. Ábránk (l. 1. ábra) bármely k_i köre ($i=1, 2, 3, \ldots$) mutatja, hogy a hozzátartozó $|ON_i|$ kúpalkotó első projekcziója és a megfelelő $O'M_i'$ egyenesek egymáshoz képest egy negyedfordulással (90°-kal) vannak elforgatva.

Ha már most a fénysugarak irányát az l egyenes (l', l'') projekczióival ábrázoljuk, akkor árnyékhatárvonalunknak k_i körön fekvő pontjait megtaláljuk, ha annak a síknak nyomvonalát szerkesztjük, mely úgy a fénysugarak, valamint a megfelelő kúpalkotó irányát magán tartalmazza, és azután az e talált nyomvonallal parallel körérintők érintési pontjait megkeressük. Legczélszerűbb az iránykúp csucsán (O', O'') keresztül fénysugarat bocsátani, ennek első nyompontját S_i-ben megkeresni, ezt a megfelelő kúpalkotó nyompontjával N_i-vel összekötni és M_i-n keresztül az $N_iS_i \equiv s_i$ egyenesre merőleges körátmérőt n_i-t meghúzni, a melynek végpontjai P_i, P_i^*-ben a keresett pontpárt adják meg, mivel a körérintők ezen pontokban s_i-vel parallelek.

Figyelemmel kisérve az $s_i (i=1, 2, 3 \ldots)$ és hozzá tartozó $n_i' (i=1, 2, 3 \ldots)$ egyeneseket, azt látjuk, hogy az utóbbiak az



1. ábra.

előbbieknek 90°-kali elforgatása útján nyerhetők O' pontot véve forgási középpontnak. Mivel az s_1, s_2, s_3, ... egyenesek egy az S_1 középponttal biró elsőrendű sugársort alkotnak, következtetjük,

hogy az $n_1, n_2, n_3, \ldots$ körátmérők első projekcziói ugyancsak elsőrendű sugársort alkotnak, melynek középpontja T_1' az S_1-ből nyerhető, ha azt O' körül eredeti helyzetéből 90°-kal elforgatjuk. A forgatás iránya megegyezik mindenkor a csavarvonal menetének értelmével.

Ezek szerint megtalálhatjuk az árnyékhatárvonal bármely alkotó kör kerületén fekvő pontjainak első projekczióit, ha középpontjának első projekczióját T_1' ponttal összekötjük, és ezt az egyenest a kör kerületével metszéshez hozzuk.

Mivel a $T_1' \equiv | n_1', n_2', n_3', \ldots |$ sugársor minden sugara az alapkört két különböző pontban metszi, világos, hogy e sugarak mindegyikén az árnyékhatárvonal projekczijának négy pontja található.

Az eddigiek összefoglalása árnyékhatárvonalunk első projekczijának meghatározására oly egyszerű szerkesztési módot szolgáltat, mely még az alkotókörök első projekczióinak megrajzolását is fölöslegessé teszi; ez a következő módon végzendő:

»Húzzunk a T_1' ponton keresztül tetszőleges számú, a középponti csavarvonal alapkörét átmetsző sugarat; mérjük le az alkotó kör sugarának hosszát és mérjük rá az imént talált metszéspontokból kiindulva mindkét értelemben sugaraink mindegyikére: akkor az így nyert pontsorozatot folytonos görbével összekötvén, megnyerjük az árnyékhatárvonalnak első projekczióját.

Az így nyert görbe első projekczija általános hatodrendű konchoida, a melynek pólusa a T_1' pont, egyik alapgörbéje a középponti csavarvonal alapköre, másik alapgörbéje pedig egy T_1'-ből mint középpontból ρ sugárral leírt körvonal, föltéve, hogy az általánosított konchoida alaptulajdonságát oly módon állapítjuk meg, mely szerint minden pont vezérsugara egyenlő az alapgörbék vezérsugarainak algebrai összegével.*

Közvetlen felprojicziálás szolgáltatja árnyékhatárvonalunk második projekczióját is; ez azonban transzczendens görbe, mely a felület minden menetmagasságának megfelelően ismétlődő periodusokból áll.

---

* WIENER, Darst. Geometrie I. p. 182.

II. Szerkesztési mód.

Az árnyékhatárvonal új meghatározási módjára jutunk, ha a feladatunk megoldására a felület alkotó csavarvonalait veszszük igénybe.

Az alkotó csavarvonalak első projekcziói a középponti csavarvonal alapkörével egyenlő, r sugarú körök, melyek középpontjai egy O' középpontból ρ sugárral leírt kör kerületén feküsznek. Valamely alkotó csavarvonalon megtaláljuk az árnyékhatárvonal pontjait azokban a pontokban, a melyekben a burkoló hengerfelülethez szerkesztett érintősíkok a fénysugarakkal parallelek. A szerkesztés egyszerüsbítése czéljából előnyös azonnal figyelembe venni azt, hogy az alkotó csavarvonalak mindegyike a középponti csavarvonallal kongruens és hasonló fekvésü, s ennek következtében parallel eltolással ennek a helyére tolható; ennek az eltolásnak iránya mindenkor merőleges a burkoló hengerfelület alkotóira.

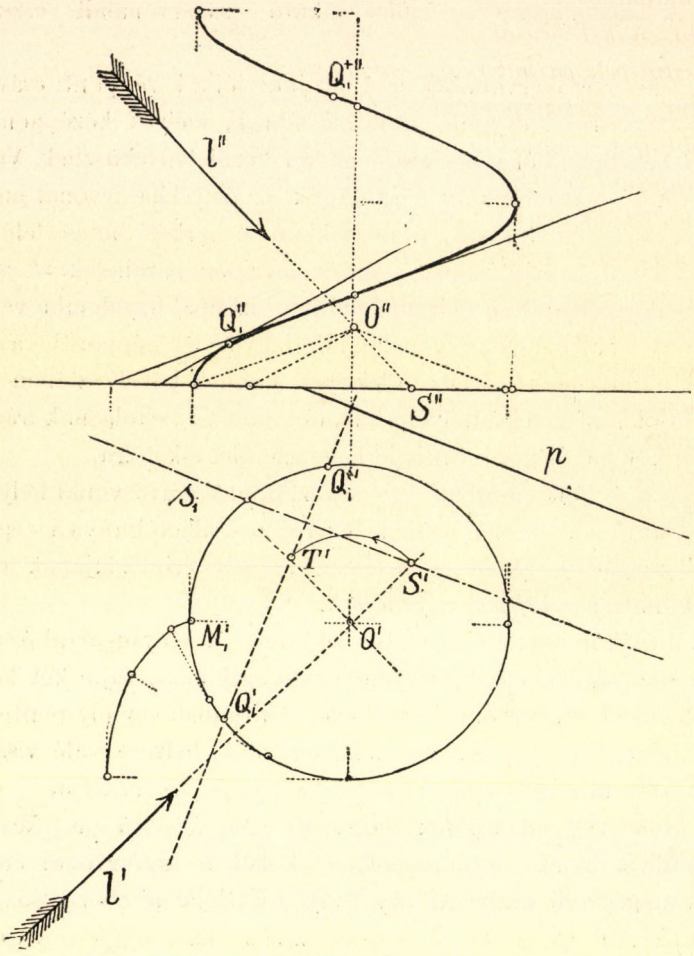
Legyen a 2-dik ábrában egy a középponti csavarvonal helyére eltolt alkotó csavarvonal burkoló hengerének alkotóiránya a g egyenessel megadva. Ekkor a henger bármely érintősíkjának első nyomvonala parallel a g egyenessel.

Az iránykúp csucsán keresztül fektetett, a fénysugárral és a g egyenessel parallel sík (első nyomvonala s_1) kimetsz rajta két kúpalkotót, és a csavarvonal megfelelő pontjaiban egy oly pontpárt állapit meg, a mely e csavarvonalnak eredeti helyére való visszatolása után árnyhatárvonalunk egy pontpárját szolgáltatja.

A kimetszett alkotóknak megfelelő pontpár első projekczióit megtaláljuk, ha az s_1 nyomvonalat O' körül, a csavarvonal értelmével megegyező irányban egy negyed fordulással elforgatjuk, és az alapkörrel Q_1' és $Q_1^{+'}$-ben átmetszszük. Ez a $Q_1'Q_1^{+'} \equiv n$ egyenes magán tartalmazza az S'-nek 90°-kal való elforgatását T'-et, merőleges a burkoló henger alkotóira, és változatlan marad, ha az alkotó csavarvonalat eredeti helyére visszatoljuk.

Az alkotó csavarvonal minden menetmagasságán általában találunk egy-egy ily pontpárt, és világos, hogy ennek valós vagy képzetes volta csakis a fénysugarak irányától függ.

Mivel adott felületünkön mindenkor két oly alkotó csavarvonal van, a melyekre nézve a burkoló henger alkotóiránya ugyanaz, világos, hogy projekczióikon, a T''-n keresztül húzott ugyanazon sugár fogja az árnyékhatárvonal pontjait megállapítani, és hogy e sugár mindenkor parallel a csavarvonalpár első projekczióinak középpontjait összekötő egyenessel. Árnyékhatárvonalunk első projek-



2. ábra.

cziójának e második szerkesztési módja megegyezik teljesen egy BURMESTER-től * egészen más indokolással adott eljárással, úgy, hogy végeredményünk is az övével teljesen egyezően következőképen kimondható:

Húzzunk T'-en át (l. 1. ábra) *egy tetszőleges n_i sugarat és O'-en keresztül vele párhuzamost, míg ez az O'-ből ρ sugárral leírt kör találja; e metszéspontokból írjunk r sugarú köröket; a hol ez utóbbiak n_1-t metszik, ott lesznek az árnyékhatárvonal első projekciójának pontjai.*

Felületünk második konturvonalainak első projekcióin — h_1' és h_2' körpáron — kimetszi a T'-en keresztül, a projekcció tengelylyel párhuzamosan húzott egyenes a K_1', K_2', K_1^{+1}, K_2^{+1} pontpárakban az árnyékhatárvonal második konturpontjainak első projekcióit.

Nevezetesek még a h_3' és h_4' projekciókkal biró alkotó csavarvonalak, mivel ezek második projekcziói a középponti csavarvonal második projekciójával összeesnek. A T'-en keresztül, a projekciótengelyre merőlegesen húzott egyenes kimetszi rajtuk $D_1'D_1'^{+}$, $D_2'D_2'^{+}$ pontokban az árnyékhatárvonal ama pontjainak első projekcziót, a melyeknek második projekcziói páronkint összeesnek, és így a második projekczió kettőspontjait szolgáltatják.

Szépréthy Béla.

---

* Theorie der Beleuchtung 347. l.

ELLIPTIKUS ÁRAM HATÁSA A GYÚPONTJAIBAN LÉVŐ MÁGNESI PÓLUSOKRA.

A sinus-galvanometer állandóját — elméleti úton — az áramkör sugarából (r) és a földmágnesség intensitásának horizontális alkotójából (H) a

$$C = \frac{rH}{2\pi}$$

ismeretes képlet határozza meg.

A fentebbi képlet azonban csak közelítő érvényességű, mivel egy a valóságban teljesen ki nem vihető feltételhez fűződik; ahhoz t. i., hogy a mágnestű pólusai az áramkör középpontjában foglalnak helyet. Törekedhetünk ugyan e feltételnek lehetőleg eleget tenni olyképen, hogy az áramkör sugarának hosszához viszonyítva rövid mágnestűt használunk, de a rövid mágnestű alkalmazása, a mint a következőkben ki fog tünni, leszállítja a készülék érzékenységét. Az érzékenységnek ily módon való csökkentését nem éppen a pólusokra ható elektromos erőpárok karjainak a rövidítése okozza; hisz a karok hoszszának a változásával arányosan fog változni úgy a mágneses erőpároknak, mint az áramkör elemeinek a hatásából integrálódó erőpároknak a forgató nyomatéka, hanem az, hogy az áramkör sugarának a fentemlített feltétel betöltéséhez megkivánt rövidsége határt szab az áram hatásából származó erőpár növesztése elé, s ily módon száll alább az elektromos erőpárok forgató nyomatéka, a mi egyetértelmű a készülék érzékenységének a csökkentésével.

A sinus-galvanometer állandójának használatos formulája tehát csak megközelítő, melynek érvényessége fokozható ugyan, de mindig a készülék érzékenységének a rovására.

E sorokban a sinus-galvanometer állandójának véges hosszúságú mágnestű esetére szóló szigorú képletét szándékozom levezetni, s ki fogom mutatni a nyert képletből, hogy a pólusok távolságának növelése — ugyanazon sugarú köráram esetén — fokozza a galvanometer érzékenységét.

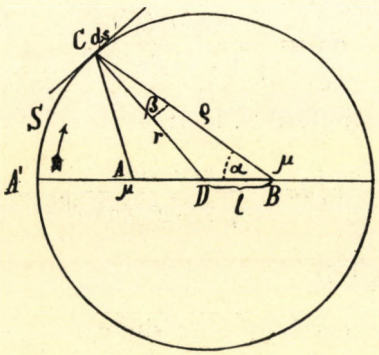
Végre ki fogom mutatni, hogy létezik oly alakú áram, a melyhez egy bizonyos meghatározott hosszaságú mágnestűt használva, a sinus-galvanometer constansának szigorú képlete igen egyszerű alakot ölt; sokkal egyszerűbbet mint a köráram esetében, s hogy ez akkor fog beállani, ha az áramnak, nem kör, hanem ellipszis alakot adunk s hozzá olyan hosszú mágnestűt használunk, melynél a magneses pólusok az ellipszis gyújtópontjaiba esnek.

Megjegyzem azonban, hogy a számításban azzal az egyszerűsítéssel élek, hogy a mágnest két ismert helyzetű pólussal helyettesitem.

I.

A köráramú sinus-galvanometer constansa.

Legyen az 1. ábrán O a köráram középpontja s egyszersmind a mágnestű középpontja is, A és B a tű polusai μ mágneses fluidummal, r a kör sugara, ρ egy ds elemi áramnak távolsága a B polustól, i a köráramnak intenzitása, p az erő, melylyel a ds elemi



1. ábra.

áram a B pólusban levő μ mágneses folyadékra hat, l a pólusok távolsága a középponttól és végre P az összes elemi áramoktól kifejtett erők integrálja.

AMPÈRE törvénye szerint ds áramelem hatása B pólusra

$$p = \frac{i\mu ds \sin(90° - \beta)}{\rho^2} = \frac{i\mu ds \cos\beta}{\rho^2}.$$

Ha az s körívet A' ponttól felül B' pont felé számítjuk:

$$s = r(\alpha + \beta),$$

mely egyenletben $\alpha\measuredangle$ a független változó, s egyszersmind $\beta\measuredangle$ is $\alpha\measuredangle$-nek függvénye. Ezen egyenletből

$$ds = r(d\alpha + d\beta).$$

A $d\beta$ meghatározására az $AOC\triangle$-ből

$$\sin\beta = \frac{l}{r}\sin\alpha$$

egyenlet áll rendelkezésünkre.

Ha $\frac{l}{r} = c$ rövidített jelzéssel élünk,

$$\sin\beta = c\sin\alpha,$$

honnan

$$\beta = \text{arc. sin}(c\sin\alpha),$$

s innen

$$d\beta = \frac{c\cos\alpha d\alpha}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\alpha}}.$$

Ezt ds értékébe helyettesítve, lesz:

$$ds = r\left(d\alpha + \frac{c\cos\alpha d\alpha}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\alpha}}\right).$$

Figyelembe véve, hogy

$$\cos\beta = \sqrt{1 - c^2\sin^2\alpha},$$

lesz az 1. egyenletből

$$p = \frac{i\mu r}{\rho^2}\,(\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}+c\cos\alpha)\,d\alpha.$$

Ugyancsak $AOC\triangle$-ből, tekintve hogy

$$\rho^2 = l^2+r^2+2lr\cos(\alpha+\beta),$$

lesz:

$$p = \frac{i\mu r\,(\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}+c\cos\alpha)\,d\alpha}{l^2+r^2+2lr(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)},$$

vagy $\sin\beta$ és $\cos\beta$ értékeit helyettesítve,

$$p = i\mu r\,\frac{(\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}+c\cos\alpha)\,d\alpha}{l^2+r^2+2lr\cos\alpha\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}-2l^2\sin^2\alpha},$$

és $c = \frac{l}{r}$ jelzés bevezetése után:

$$p = \frac{i\mu}{r}\cdot\frac{\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}+c\cos\alpha}{1+c^2+2c\cos\alpha\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}-2c^2\sin^2\alpha}.$$

Minthogy

$$c^2\sin^2\alpha = c^2-c^2\cos^2\alpha$$

lesz:

$$p = \frac{i\mu}{r}\cdot\frac{\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}+c\cos\alpha}{(1-c^2\sin^2\alpha)+2c\cos\alpha)\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}+c^2\cos^2\alpha}\,d\alpha =$$

$$= \frac{i\mu}{r}\cdot\frac{d\alpha}{\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}+c\cos\alpha} =$$

$$= \frac{i\mu}{r(1-c^2)}\cdot(\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}-c\cos\alpha)\,d\alpha.$$

Ez a differentiális egyenlet fejezi ki bármely $\alpha\measuredangle$-nek megfelelő ds áram-elemnek a hatását a B pontban levő μ mágneses fluidumra. Ha pedig A-tól B'-ig terjedő félkörbe eső összes elemeknek a hatását akarjuk megkapni, integrálnunk kell e kifejezést O és π határok között. Azaz

$$\frac{P}{2} = \frac{i\mu}{r(1-c^2)}\left[\int_0^\pi \sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}\,.\,d\alpha - c\int_0^\pi \cos\alpha d\alpha\right],$$

innen a μ fluidumra az egész köráram hatása

$$P=\frac{2i\mu}{r(1-c^2)}\left[\int_0^{\pi}\sqrt{1-c^2\sin^2 a}\,.\,da-c\int_0^{\pi}\cos a da\right].$$

Tekintve hogy:

$$\int_0^{\pi}\cos a da=0,$$

$$P=\frac{2i\mu}{r(1-c^2)}\int_0^{\pi}\sqrt{1-c^2\sin^2 a}\,.\,da.$$

E képletben előforduló határozott integrál egy teljes másodrendű elliptikus integrál, melynek I értékét sorbafejtés útján

$$I=\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{2^2}c^2-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}c^4-\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}c^6-\ldots\right]$$

végtelen sor adja meg.

Az I határozott integrál értéke tehát a c értékétől függ. Annyit azonban könnyen beláthatunk, akár az integrálandó függvénynek, akár a kifejtett végtelen sornak figyelmesebb megtekintéséből, hogy $c=0$ értékre

$$I_{c=0}=\frac{\pi}{2};$$

ezután c növekedésével az I értéke folytonosan kisebbedik, míg végre $c=1$ érték mellett lesz:

$$I_{c=1}=1.$$

Ez utóbbi esetből következik, hogy az I értékét meghatározó végtelen sor $c=1$ értékre, $\frac{2}{\pi}$ számértéket nyer, azaz:

$$\frac{2}{\pi}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}-\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}-\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}-\ldots$$

Az I értékének meghatározása után a μ mágneses fluidumra ható erő

$$P=\frac{4i\mu I}{r(1-c^2)}.$$

Ismeretes, hogy a sinusgalvanometernél, ha $\delta \measuredangle$ a mágnestű kitérését jelöli, az egyensúly esetén

$$H\mu \cos \delta = \frac{4i\mu I}{r(1-c^2)}$$

egyenlet áll, a melyből az áram intenzitása

$$i = \frac{Hr(1-c^2)}{4I} \cos \delta,$$

s innen a sinus-galvanometer constansa

$$C = \frac{Hr(1-c^2)}{4I}.$$

Könnyen belátható, hogy a constansnak ez a képlete — elenyésző hosszaságú mágnestű esetére, azaz ha $l=0$ és így $c=0$ és $I = \frac{\pi}{2}$ —, a

$$C = \frac{Hr}{2\pi}$$

ismeretes képletté változik.

Ezekből látható, hogy a sinus-galvanometer constansának szigorú képlete korántsem oly egyszerű mathematikai kifejezés, mint a melyet helyette használnak, mert az előbbihez még $1-c^2$ tényező járul és I-nek, egy teljes másodrendű integrálnak a reciprok értéke.

Hogy mily változást szenved a constans értéke a tű hosszabbítása által állandó sugár mellett, arra nézve maga a képlet szolgál felvilágosítással. Ha a tű hossza ugyanazon sugarú köráram mellett nő, az l és a $c = \frac{l}{r}$ szintén növekedni fog, míg az $1-c^2$ és az I, folytonosan kisebb értékekhez fognak jutni, a mi annyit jelent, hogy a tű hosszabbodásával a constans képletének úgy a számlálójában, mint a nevezőjében egy-egy tényező értéke csökken. Ennélfogva azt kell eldönteni, hogy az

$$\frac{1-c^2}{I}$$

függvény c-nek $c=0$-tól $c=1$-ig terjedő növekedésével csökken-e, vagy növekedik.

Mivel $1-c^2$, c-nek 0-tól 1-ig terjedő értékeire, 1-től kezdve folytonos fogyás mellett, 0 értékhez jut, míg az I integrál c-nek ugyancsak 0-tól 1-ig terjedő változása mellett $\frac{\pi}{2}$-ről folytonosan fogyva 1 értékhez jut, következik, hogy $1-c^2$ bármily c értékére kisebb lesz az I integrálnál, a mi annyit jelent, hogy c-nek 0-tól 1-ig terjedő összes értékeire

$$\frac{1-c^2}{I}<1,$$

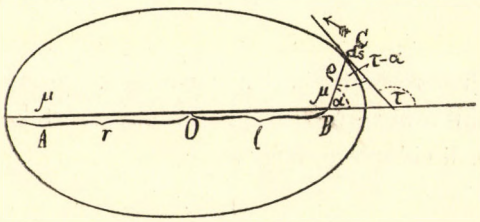
tehát a tű hosszának a növelése mellett kisebbedik a constans értéke.

Minél kisebb egy készülék constansa, annál kisebb áram szükséges arra, hogy a mágnestű egy bizonyos nagyságú szöggel térjen ki, n ás szóval annál érzékenyebb a műszer. Világos tehát, hogy ugyanazon köráramnál hosszabb tűt alkalmazva, kisebbíteni fogjuk a műszer constansát, de növeljük ugyanekkor az érzékenységet, a mi arra mutat, hogy előnyösebb, az elmélet szerint, az érzékenység szempontjából hosszabb mágnestűt alkalmazi.

II.

Az elliptikus áramú sinus-galvanometer constansa.

Legyen a 2. ábrán O az ellipsis középpontja, A és B az ellipszis két gyújtópontja, $2r$ a nagytengely hossza, l a gyújtópontok távola



2. ábra.

a középponttól és $c = \frac{l}{r}$ az ellipszis excentricitása, ds egy áramelem hossza, ρ a ds elemi áramhoz tartozó radius-vector, $a \measuredangle$ a második sark-coordináta, végre τ az a szög, melyet a ds elem vagyis a C ponthoz tartozó érintő a sark coordináta-rendszer tengelyével bezár. Könnyen belátható, hogy a radius-vector és az érintő közé fogott szög $\tau - a$. Ha a B pólusban a mágnesség mennyisége μ és az áram intenzitása i, a ds elemi áram hatása a pólusra

$$p = \frac{i\mu ds \sin(\tau - a)}{\rho^2} =$$

$$= \frac{i\mu ds}{\rho^2}(\sin\tau\cos a - \cos\tau\sin a)$$

$$= \frac{i\mu ds}{\rho^2}(\operatorname{tg}\tau\cos a - \sin a)\cos\tau$$

$$= \frac{i\mu ds}{\rho^2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\tau\cos a - \sin a}{[1+\operatorname{tg}^2\tau]^{\frac{1}{2}}}.$$

Mivel a sark-coordinátákkal meghatározott görbéknél

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{da}\operatorname{tg}a + 1}{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{da} - \operatorname{tg}a}$$

és

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{da}\right)^2},$$

s mivel az ellipszis egyenlete, ha $r(1-c^2) = \lambda$ rövidített jelzést használjuk:

$$\rho = \frac{\lambda}{1 + c\cos a},$$

azt fogjuk találni, hogy

$$\frac{d\rho}{da} = \frac{\lambda\sin a}{(1+c\cos a)^2}$$

és

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\frac{1+c\cos a}{\lambda}\cdot\frac{\lambda c\sin a}{(1+c\cos a)^2}\operatorname{tg}a + 1}{\frac{1+c\cos a}{\lambda}\cdot\frac{\lambda c\sin a}{(1+c\cos a)^2} - \operatorname{tg}a},$$

miből átalakitás után

$$= \frac{c\sin^2\alpha+\cos\alpha+c\cos^2\alpha}{c\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha-c\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= -\frac{c+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Ha az előbbi helyettesitéseket ds értékében is eszközöljük, lesz:

$$ds = \sqrt{\frac{\lambda}{(1+c\cos\alpha)^2}+\frac{\lambda^2c^2\sin^2\alpha}{(1+c\cos\alpha)^4}}\cdot d\alpha,$$

mely ismét

$$= \sqrt{1+c^2+2c\cos\alpha}\,.\,\frac{\lambda d\alpha}{(1+c\cos\alpha)^2}.$$

értékre vezet.

Mindezen értékek helyettesitése után

$$p=2\mu\frac{(1+c\cos\alpha)^2}{\lambda^2}\cdot\frac{\lambda\sqrt{1+c^2+2c\cos\alpha}}{(1+c\cos\alpha)^2}\times$$

$$\times\frac{-\dfrac{c+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha-\sin\alpha}{\left[1+\left(\dfrac{c+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}d\alpha$$

$$= \frac{i\mu}{\lambda}\sqrt{1+c^2+2c\cos\alpha}\,\frac{-c\cos\alpha-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\sin^2\alpha+c^2+2c\cos\alpha+\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}d\alpha$$

$$= -\frac{i\mu}{\lambda}(1+c\cos\alpha)\,d\alpha.$$

E differentiális egyenletből a fél elliptikus áramnak a pólusra ható ereje kiadódik, ha az integrálást O-tól π-ig terjedő határok közt végezzük.

Az egész ellipszis alakú áram hatása pedig az előbbinek kétszerese, úgy hogy

$$P = -\frac{2i\mu}{\lambda}\int_0^\pi(1+c\cos\alpha)\,d\alpha.$$

Mivel

$$\int_0^\pi(1+c\cos\alpha)\,d\alpha = \int_0^\pi d\alpha + c\int_0^\pi\cos\alpha d\alpha,$$

tekintettel arra, hogy

$$\int_0^{\pi} \cos a\,da = 0,$$

lesz:

$$\int_0^{\pi} (1 + c\cos a)\,da = \int_0^{\pi} da = \pi.$$

E határozott integrál és λ értékének helyettesítése után, eltekintve az előjeltől, a mi úgyis csak az integrálás határainak megválasztásától függ, lesz:

$$P = \frac{2\pi i\mu}{r(1-c^2)}.$$

Tekintve ismét arra, hogy sinus-galvanometernél egyensúly esetén

$$H\mu\cos\delta = \frac{2\pi i\mu}{r(1-c^2)},$$

az áram intenzitása:

$$i = \frac{Hr(1-c^2)}{2\pi}\cos\delta$$

a honnan az elliptikus áramú sinus-galvanometer constansa:

$$C = \frac{Hr(1-c^2)}{2\pi}$$

feltéve, hogy a pólusok az ellipszis gyújtópontjaiban vannak.

Mivel a kör oly ellipszisnek tekinthető, melynek az excentricitása $c=0$-al, ugyancsak ez az egyenlet, magában foglalja $c=0$ értékre, a körárammal és igen rövid mágnestűvel biró sinus-galvanometer constansát is.

Összehasonlítva már most egy rövid mágnestűvel és $2r$ átmérővel biró köráramú sinus-galvanometer

$$\frac{Hr}{2\pi}$$

constansát, egy a gyújtópontok egymástól való távolságának megfelelő hosszaságú mágnestűvel és $2r$ hosszú főtengelylyel biró elliptikus áramú sinus-galvanometer

$$\frac{Hr(1-c^2)}{2\pi}$$

constansával, azt találjuk, hogy az utóbbi $(1-c^2)$ tényezőben különbözik az előbbitől.

Mivel $c<1$, c^2-re is fentáll, hogy $c^2<1$ és így $1-c^2<1$, a mi annyit tesz, hogy az elliptikus árammal kisebb a constans értéke, mint a köráram esetén, és pedig annál inkább kisebbedik a köráramú galvanometer constansához képest, mennél nagyobbá tesszük a c értékét, az ellipszis excentricitását. Mondhatnók, mennél lapultabb ellipszissé nyomjuk össze a kört, annál inkább kisebbedik a constansának értéke, de e mellett mindinkább növekedik a készülék érzékenysége.

Összefoglalva tehát a fentebbi sorokból levonható tanulságot, arra az eredményre jutunk, hogy az áramkörnek ellipszissé lapítása által, feltéve, hogy a mágnestű hoszszát a gyújtópontok távolsága határozza meg, a sinus-galvanometer constansának szigorú érvényességgel biró képlete igen egyszerű mathematikai alakot ölt s az áram hatásának fokozásával egyszersmind a készülék érzékenysége is növekedik.

Szijártó Miklós.

EGY SOR, MELY A «π» ÉRTÉKÉHEZ VEZET.

A következő végtelen sorról:

$$1-\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv 1-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2.\,3^2\ldots(2n-3)^2\,(2n-1)}{2^2.\,4^2\ldots[2(n-1)]^2\,(2n)^2} =$$

$$= 1-\frac{1}{2^2}-\frac{1^2.\,3}{2^2.\,4^2}-\frac{1^2.\,3^2.\,5}{2^2.\,4^2.\,6^2}-\cdots$$

kimutatható, hogy határozott számértéket képvisel azaz összetartó, továbbá hogy az érték, a melyhez mindinkább közeledik, azaz az összege nem más mint $\frac{2}{\pi}$.

Ismeretes dolog, hogy

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

végtelen sor összetartó, s ez maga után vonja az

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots$$

sor összetartását is.

Ha a tárgyalt sor tagjaiban a tényezőket kellő módon szétválasztjuk, és az első tagot elhagyjuk, a sor a következő alakban lesz írható:

$$\frac{1}{2^2}-\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{1}{4^2}-\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{3.5}{4^2}\cdot\frac{1}{6^2}-\cdots$$

$$-\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{1}{4^2}\cdots\frac{(2n-3)\,(2n-1)}{(2n-2)^2}\cdot\frac{1}{(2n)^2}-$$

$$-\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{3.5}{4^2}\cdots\frac{(2n-3)\,(2n-1)}{(2n-2)^2}\cdot\frac{(2n-1)\,(2n+1)}{(2n)^2}\cdot\frac{1}{(2n+2)^2}-\cdots$$

Ha tekintetbe veszszük, hogy

$$\frac{(n-1)\,(n+1)}{n^2} < 1,$$

beláthatjuk, hogy e sor minden tagjában az utolsó tényező előtt álló tényezők valódi törtek; és így minden tagja kisebb, mint az

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$$

sor megfelelő tagja, a mi a fentebb említett sor összetartását igazolja.

A sor összegének meghatározására képezük az egymásutáni tagok összegét, s ekkor lesz:

$$a_0 + a_1 = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{1.3}{2^2} = \frac{1^2.\,3}{2^2},$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = \frac{1^2.\,3}{2^2} - \frac{1^2.\,3}{2^2.\,4^2} = \frac{1^2.\,3\,(4^2-1)}{2^2.\,4^2} = \frac{1^2.\,3^2.\,5}{2^2.\,4^2},$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1^2.\,3^1.\,5}{2^3.\,4^2} - \frac{1^2.\,3^2.\,5}{2^2.\,4^2.\,6^2} =$$

$$= \frac{1^2.\,3^2.\,5\,.\,(6^2-1)}{2^2.\,4^2.\,6^2} = \frac{1^2.\,3^2.\,5^2.\,7}{2^2.\,4^2.\,6^2}.$$

Az eddigi eredmények arra engednek következtetni, hogy

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1^2.\,3^2.\,5^2. \ldots (2n-1)^2\,(2n+1)}{2^2.\,4^2.\,6^2. \ldots [2(n-1)]^2\,(2n)^2}.$$

Hogy azonban ez az eredmény teljesen bebizonyíttassék, ki kell mutatnunk, hogy a talált törvényszerűség az $(n+1)$-sö tag hozzácsatolásával is érvényben marad, azaz, hogy

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} =$$

$$= \frac{1^2.\,3^2. \ldots (2n+1)^2\,(2n+3)}{2^2.\,4^2. \ldots (2n)^2\,(2n+2)^2}$$

egyenlet csakugyan fennáll.

Mivel

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}=$$

$$=\frac{1^2.\,3^2.\ldots(2n-3)^2\,(2n-1)^2\,(2n+1)}{2^2.\,4^2.\ldots\qquad\qquad(2n)^2}-$$

$$-\frac{1^2.\,3^2.\ldots(2n-3)^2\,(2n-1)^2\,(2n+1)}{2^2.\,4^2.\ldots\qquad\qquad(2n)^2\,(2n+2)^2}=$$

$$=\frac{1^2.\,3^2.\ldots(2n-3)^2\,(2n-1)^2\,(2n+1)\,[(2n+2)^2-1]}{2^2.\,4^2.\ldots\qquad\qquad(2n)^2.\,(2n+2)^2},$$

s tekintve, hogy

$$(2n+2)^2-1=(2n+1)\,(2n+3),$$

lesz:

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}=$$

$$=\frac{1^2.\,3^2.\ldots(2n+1)^2\,(2n+3)}{2^2.\,4^2.\ldots\qquad(2n)^2\,(2n+2)^2};$$

de ez határátmenet után a WALLIS-féle képletben szereplő kifejezés recziprok értékét adja, — a miből következik, hogy

$$1-\frac{1}{2^2}-\frac{1^2.\,3}{2^2.\,4^2}-\frac{1^2.\,3^2.\,5}{2^2.\,4^2.\,6^2}-\cdots=\frac{2}{\pi}.$$

Hogy ez a sor valóban $\frac{2}{\pi}$ értékkel bír, kimutatható még a következő úton is. Ismeretes hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi=1$$

A $\sqrt{1-\sin^2\varphi}$ integrandust sorba fejtvén, lesz:

$$\sqrt{1-\sin^2\varphi}=1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin^4\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\sin^6\varphi-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\sin^8\varphi-\cdots$$

és innen

$$1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin^4\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\sin^6\varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\sin^8\varphi - \ldots\right] d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi d\varphi -$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\varphi d\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\varphi d\varphi - \ldots$$

Az integrálások végzése után lesz:

$$1 = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1^2.3}{2^2.4^2} - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2} - \ldots\right]$$

a honnan

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1^2.3}{2^2.4^2} - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2} - \ldots$$

Ez pedig a czikk elején tárgyalt sor. Tehát e második bebizonyítást használván, mellékesen a WALLIS-féle formulának új bebizonyítására juthatunk.

Szíjártó Miklós.

PHYSIKAI SZEMLE.

A Hertz-féle kisérletekről.* Augusto Righi, Su alcune disposizioni sperimentali per la dimostrazione e lo studio delle ondulazioni elettriche di Hertz. *Nuovo Cimento.* T. 35. pag. 12. 1894.

Augusto Righi, Sulle oscillazioni elettriche a piccola lunghezza d'onda e sul loro impiego nella produzione di fenomeni analoghi al principali fenomeni dell'ottica. *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna.* Ser. V., t. IV.

Az elektromos rezgésekre vonatkozó nagy számú és terjedelmű közlemény közől Righi-nek a czímben idézett két dolgozata a legalkalmasabb arra, hogy a Hertz-féle kisérleteknek egyszerű és igen jó — talán a legjobb — elrendezésére utasítást, valamint a vizsgálatok főbb eredményeiről áttekinthető képet adjon.

A Hertz-féle kisérletek lényege tudvalevőleg a következő: Igen magas potentiálu elektromosságnak valamilyen forrása, a minő pl. a Ruhmborff-féle szikraindító vagy pedig a Holtz-féle gép, egy szimmetrikus kisütő két ágát elektromossággal tölti, mely rezgésszerűen kisülvén, a környezetben nagy sebességgel terjedő elektromos hullámokat gerjeszt. Ezek hatása alatt a vezetőkben szintén elektromos rezgések jönnek létre, melyek szikrában, vagy másféle módon is észrevehetőkké válnak, ha a vezető megfelelő alakkal bir. A kisütő capacitásától és öninductiójától függ a rezgésidő, mely a másodpercz ezermilliomodrészeinek rendjébe esik, sőt Righi kisérleteiben még ennél is jóval kisebb. Minthogy a kisütő a rezgéseket gerjeszti, *vibrator*-nak vagy *oscillator*-nak nevezik. Az a második vezető, mely a térben elterjedő elektromos hullámokat észrevehetőkké teszi, *resonator*-nak neveztetik.

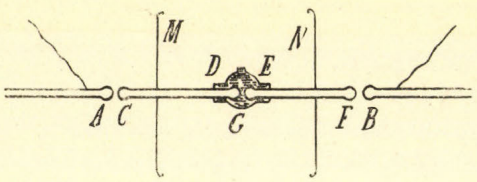
Righi alább leirandó kisérleteit 30 *cm* szikrát adó 2 forgó korongú Holtz-géppel végezte. Használható azonban a szikraindító is.

*Oscillator*át az 1. rajz mutatja: *A* és *B* 1 *cm* vastagságú rézcsövek, melyek 4 *cm* átmérőjű rézgolyókban végződnek, vastag rézdrótok révén a Holtz-

* L. Természettud. Közlöny 1889.

féle gép két sarkával közlekednek. Ezen golyók között foglal helyet a tulajdonképeni oscillator, *CF*. Ez két egyenlő rézcsőből áll, melyek végeire az előbbeniekkel egyenlő nagyságú golyók vannak szerelve. *CF* mintegy 3—4 *cm*-nyire vannak az *AB* golyóktól; *DE* golyók távolsága 3—5 *mm* között változik. Az oscillator egész hossza körülbelül 72 *cm*. — Ha a gép működik, *AC* és *FB*, továbbá *DE* közökben egyidejüleg szikrák ugranak át. A *DE*-ben létrejövő szikra az, melynek hatása alatt *CF* kisütőben elektromos rezgések jönnek létre; hatásuk a környezetre kiterjed és nagyobbnak mutatkozik, ha a két külső szikra hossza növekedik. De ez csak egy bizonyos határig van így; addig, míg a szikrák vakító fehérek és élesen csattogók.

Az oscillator capacitását *MN* 24,5 *cm* átmérőjű, gömbölyített szélű fémkorongok növelik, melyek a rézcsöveken gyenge surlódással ide-oda tolhatók. Egymástól való távolságuk rendesen 43 *cm*.



1. ábra.

DE szikraköz 11 *cm* átmérőjű, vastagfalú üvegedényben van; az edény szigetelő folyadékkal van megtöltve. Sarasin és De la Rive szerint e czélra legalkalmasabb a vazelin-olaj, melyben szilárd vazelin van feloldva; az oldat oly sűrű, hogy alig önthető. Ebben a szigetelőben a szikrák sokkal hatásosabbak, mint a levegőben s hozzá a berendezés még azzal az előnynyel jár, hogy a *DE* golyókat nem kell folyton tisztogatni. Mikor a golyók felülete a szikráktól okozott chemiai folyamatok folytán kéreggel vonódott be s az eleinte áttetsző szigetelő már tinta-feketévé vált: még akkor sem csökken a szikrák gerjesztő hatása.

Resonator gyanánt 2 *mm* vastagságú rézdrótból hajlított 57 *cm* átmérőjű kört használt. A drót nem alkotott teljes kört, a mennyiben két vége közé 10—15 *cm* hosszaságú Geissler-féle cső volt befogva. Ez a resonator az oscillatortól 3—4 *m* távolságban reagált az elektromos rezgésekre: a Geissler-cső világítása egész hallgatóság előtt tette a hatást láthatóvá. Ennek a resonatornak megfelelő hullámhossz 4,10 *m*.

A készülék az elektromos erő hullámainak visszaverődését is megmutatta. E végből az oscillatortól 5 *m*-nyire 4 m^2 területű czinklap volt felállítva, úgy, hogy síkja az oscillator tengelyén átmenő függélyes síkkal

párhuzamos legyen. A hullámok a lapon visszaverődvén, álló hullámok keletkeznek, melyek csomóit a GEISSLER-csöves resonator könnyen felkeresi. Ha a resonator síkja az oscillátoron átmenő függélyes síkkal párhuzamos s a GEISSLER-cső a kör legmagasabb, vagy legmélyebb pontján van, az elektromos erő hozza létre a hatást; ha ellenben a resonator az oscillátor tengelyén átmenő vízszintes síkban tolódik el s a GEISSLER-cső az oscillator tengelyével párhuzamos átmérő egyik vagy másik végén van, akkor a mágnesi erő hatása érvényesül.

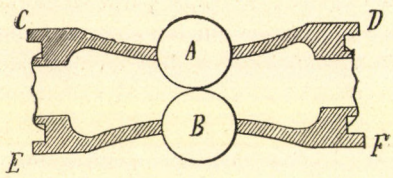
A drótokban az elektromos hullámok terjedését a következőleg mutatja meg. Szigetelő oszlopokon 6 *m* hosszú rézdrót van kifeszítve; egyik végéről 2 *m* hosszaságú drót vezet 100 cm^2 területű czinklemezhez, mely az oscillator egyik korongjának szomszédságában, síkjához párhuzamosan, van elhelyezve. A drót végén történő visszaverődés folytán e drótban álló hullámok jönnek létre, a melyekken a resonátornak a drót mentén való eltolásával az elektromos és a mágnesi erő egymástól elkülönítve mutatható ki. Ha a resonator síkja eltolás közben a dróton átmegy s a GEISSLER-cső a körnek a dróthoz legközelebb, vagy tőle legmesszebb levő pontján van: csak a mágnesi erő hatása érvényesül. Ha ellenben a resonator síkja a drótra merőleges, az elektromos erő hatása elkülönítve mutatható ki; kell azonban, hogy a GEISSLER-cső annak az átmérőnek egyik végén legyen, melynek meghosszabbítása a dróton megy át.

Míg az eddig leírt kisérletek főleg a nagy hallgatóságnak való bemutatás szempontjából vannak egybeállítva, s lényegökben nem is térnek el HERTZ eredeti kisérletei berendezésétől: addig a második értekezésben RIGHI inkább a további kutatás és részletes tanulmány czéljait tartja szemmel, s mint lényeges haladás kiemelendő, hogy aránylag igen rövid, 2,6 *cm* hosszaságú hullámokat állított elő; s ezzel oda jutott, hogy az elektromos kisérletekhez ugyanazokat a készülékeket használhatta, a melyekkel az optikában kisérletezünk.

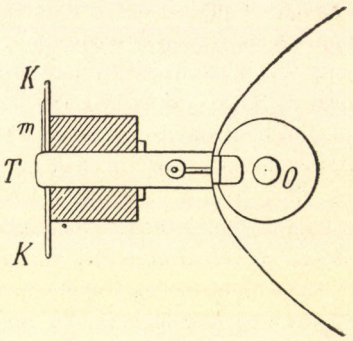
Oscillator gyanánt ezekben a kisérletekben csupán csak két golyó szolgál. Ezek a golyók (l. 2. ábra) *A* és *B*, könnyen tágítható skatulyának *CD*, illetőleg *EF* fedőlapjaiban ülnek; a fedőlapok ebonitból, üvegből, vagy paraffinnal telített fából vágott korongok, melyek bőr-, kaucsuk- vagy pergamentpapirszalaggal vannak skatulyává összekapcsolva. A skatulya a már leírt szigetelő keverékkel van megtöltve. Ez az oscillator — *O* — egy parabolás hengertükör gyújtóvonalában van, melylyel együtt *T* ebonittengelyre van erősítve, úgy, hogy körülötte forgatható legyen (3. ábra). Állását a szerkezet állványával szilárd kapcsolatban levő *K* körbeosztáson *m* mutató jelzi.

A parabolás tükör gyúponttávola 8 *cm*, magassága 40 *cm*, nyilása 50 *cm*; a golyótartó korongok átmérője mintegy 15 *cm*. (Ilyen parabolás

tükör könnyen készíthető: A megadott adatok szerint száraz fenyőfa deszkából 2 parabolát vágunk ki, a két egyenlő mintára $^1/_2$ *mm*-es czinkpléhet borítunk s reászögecseljük.) A 4. ábra az állványára szerelt tükröt mutatja. *IH* szigetelő rudak vastag rézdrótok végén levő két golyót tartanak — az alsó nem látszik! — melyek az oscillatort közre fogják. A távolságokra nézve irányadó, hogy akkor, ha a külső golyók s az oscillator golyói között a távolság 2 *cm*, a gerjesztő szikra 0,8 *mm* legyen.

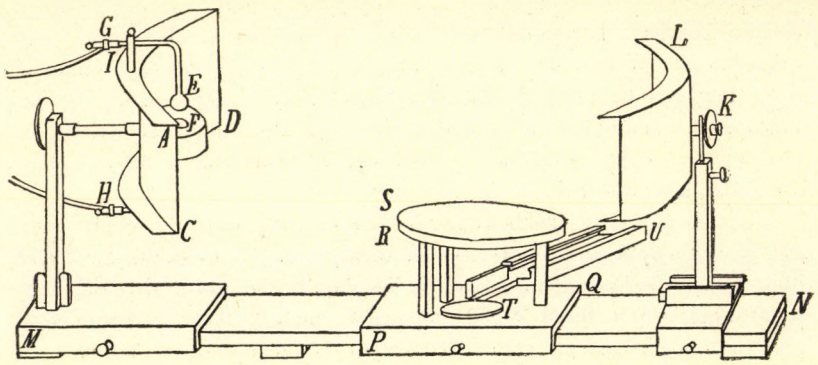


2. ábra.



3. ábra.

A resonatorokat Righi tükördarabokból készítette. Közönséges ezüstözött tükörből néhány *cm* hosszaságú keskeny szalagokat vágott ki, a tük-

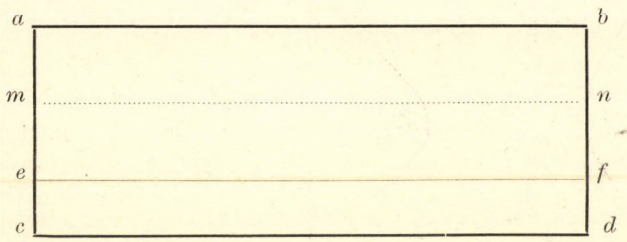


4. ábra.

röztető fémet középen lehetőleg keskeny vonalon lekarczolta s a karczolatra merőleges irányban keskeny darabokra fölszeletelte. Az ilyen üvegdarabban, ha a tükör tengelyével párhuzamos helyzetben tartotta, az ezüstbevonat megszakítása helyén élénk szikrák képződtek az oscillator szikráinak hatása alatt, melyek sötétben 1—2 méternyire is voltak megláthatók.

A resonator ily alakja azért oly kedvező, mert tapasztalásszerűleg ugyanazon potentialkülömbségre az üvegfelületen hosszabb szikrák keletkeznek, mint a szabad levegőben, s a szikrák az égésfolyamatok miatt élénkebbek is.

A resonatorok így készültek: *abcd* üvegszalagon *efcd* részen az ezüst eltávolíttatik, úgy, hogy $ae=bf$ a készítendő resonatorok hosszával legyen egyenlő. A tükör azután, a védő bevonat természete szerint, forró alkohol vagy terpentinszeszbe teendő, hol a máz leolvad s az ezüstözés szabaddá válik. Erre az ezüstözést *mn* vonal mentén finom gyémánt hegygyel lekarczolván, a szalag keskeny darabkákra felvágható. Egy-egy ilyen darab kész resonator, melynek ezüstmentes része kézbe fogható, vagy a resonator másnemű megerősítésére használható fel. A gyémánt, ha gyengén nyomják az ezüst lekarczolása közben, síma szélű, 1—2 ezredrész milliméternyi barázdát húz a bevonatban. Ez a barázda, minthogy a két vezető lemez



5. ábra.

között átütő szikrák az ezüstöt elégetik, lassan szélesedik, a mi a resonator érzékenységének csökkenését vonja maga után.

Az oscillator golyóinak s a hozzátartozó resonatoroknak méretei, valamint a megfelelő hullámhosszak a következők:

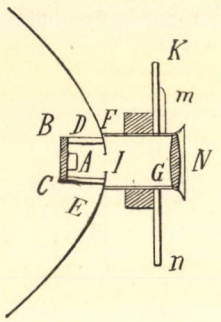
	Az oscillator golyóinak átmérői	A resonator méretei	Hullámhosszak
I.	0,8 *cm*	0,9×0,1 *cm*	2,6 *cm*
II.	3,75 «	4×0,2 »	10,6 «
III.	8,0 «	10×0,6 »	20,0 «

A III. alatt közölt készülékekkel az összes Hertz-féle kisérletek több hallgatónak mutathatók be. Az I. és II. készülékei ellenben egyéni megfigyelésekre vannak szánva. Érdemes megjegyezni, hogy a legkisebb resonator a 10 filléres felületén történő visszaverődést megmutatja.

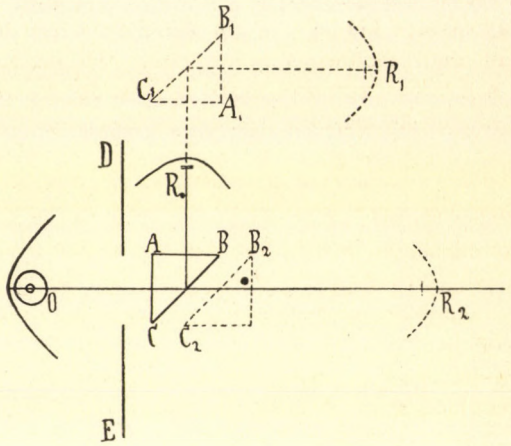
A tükör-resonatorokat Righi egy második, kisebb parabolás henger gyujtóvonalában erősítette meg (6. ábra). A tükör épen úgy készül, mint az oscillatoré s úgy is van állványra szerelve. Az eltérés csak annyi, hogy az

igen kicsi szikrák megfigyelése végett a tükör mögé N egyszerű nagyító van beilleszte, mely a czinklemezbe vágott I nyíláson keresztül BC resonator A szikraútjára beállítható. DE szigetelő rudacskák a resonator tartói.

A vibrator és resonator mintegy $2^1/_2$ m hosszaságú fatalpra vannak ideoda tolhatólag szerelve. A talpon PQ, vezetékkel biró deszka is csuszolható, mely R asztalkát hordja. T-ben U szánnak tengelye van, mely az alább közlendő kisérletekben a resonator tükör felvételére szolgál. Az így összeállított készülék tehát mintegy egyesítése az optikai padnak s a spektrálkészüléknek.



6. ábra.



7. ábra.

Kisérletek. — 1. *Egyenes vonalú terjedés.* Az oscillator tükrének tengelyében a resonator, ha nagy Holtz-féle gép hozza létre a gerjesztő szikrákat, 24 m távolságban szikrákat ad. A fémek, s általában a vezetőknek ismert anyagok a hullámok útját elvágják, ellenben a szigetelők — fa, falak és kőzetek is! — a hullámokat átbocsátják.

2. *Visszaverődés.* A tükör tengelyére merőlegesen álló fémtükör — sík fémlap vagy akár közönséges szobatükör — visszaveri az elektromos hullámokat, és pedig könnyen kimutathatólag a másféle hullámmozgások visszaverődési törvénye szerint. Mint már említve volt, parányi tükör hatása is kimutatható. A kisérletet külön tükör nélkül is lehet előidézni: egyszerűen a tenyerünket tartjuk a hullámok utjába. Ugyanis testünk, mint vezető, visszaveri az elektromos hullámokat. Ez a kisérlet egyúttal figyelmeztetőül szolgál az e fajta vizsgálatoknál szemmel tartandó zavaró körülményekre.

3. *Törés.* A dielektrumokból készült prizmák az elektromos hullámokat

megtörik s az elhajlításból, valamint a törőszögből meghatározható a törésmutató. Az ily módon meghatározott törésmutatók közel egyezők a fénysugarak töréséből nyert értékekkel. A kis hullámhosszak esetében a közönséges üvegprizma használható. — Righi egy derékszögű paraffinprizmával előidézte a *teljes visszaverődés* tüneményét s ennél a következő érdekes megfigyelést tette: Ha a prizma *CB* átfogói lapjához (7. ábra), a melyen a teljes visszaverődés létesült, egy második derékszögű prizma C_2B_2 átfogói lapját közelítette, a szikra gyengülni kezdett, mihelyt a két lap egymástól való távolsága a hullámhossz negyedrészénél kisebbé lett és pedig annál inkább, mennél közelebb jutott egymáshoz a két lap s a szikra teljesen eltűnt, mielőtt a lapok közvetlenül érintkezhettek volna. Ugyanakkor a második prizma mögé tartott R_2 resonatorban kezdtek szikrák mutatkozni. Ez azt mutatja, hogy a teljes visszaverődés megszüntetésére nem szükséges a két lap közvetlen (optikai) érintkezése : $\frac{\lambda}{4}$-nél vékonyabb levegőréteg a visszaverődés és törés tüneményében úgy viselkedik, mint maga a törő anyag. Ime a Fresnel-féle ismeretes hipotézisnek megfelelő analogon. *D E* fémlemezek a beeső hullámot határolják.

Lencséket — a legmegfelelőbbek a hengerlencsék! — igen könnyen lehet papir vagy famintába paraffinból, szurokból, kénből önteni. Terpentinnel, szénkéneggel, petróleummal vagy másféle szigetelő folyadékkal telt üveg kész hengerlencse, mely megfelelő méretek mellett az elektromos hullámok összegyűjtésére felhasználható.

4. *Álló fémhullámok.* Fém falról visszaverődő hullámoknak a beesőkkel való interferentiája már igen kis síktükrökkel sikerül. Az első csomókat a tenyerünkön történő reflexio is előidézi. A csomók egymástól való távolsága a hullámhossz ismeretére vezet.

5. *A Fresnel-féle tükörkisérlet.* Az oscillator tükréről visszaverődő hullám két, egymás meghosszabbításában levő síktükörről a resonator parabolás tükrére esik, melynek resonatora élénk szikrákat kezd mutatni. Az egyik tükröt a normális irányában eltolván, a resonator szikrái kimaradnak, valahányszor a tükrök síkjainak egymástól való távolsága $(2n+1)\frac{\lambda}{4}$.

A módszer a dielektrumok törésmutatójának mérésére is alkalmas. E végből az egyik tükörre az illető dielektrumból öntött lemezt kell fektetni s a másiknak eltolása által az egyenértékű levegőréteg vastagságát meghatározni.

Kénből vagy paraffinból öntött *biprizma* is használható e czélra.

6. «*Vékony lemezek*» *színeit* előidéző interferentia analog tüneménye, 1,5—4,2 *cm* vastagságú kén vagy paraffinlemezekkel idéztetett elő. A leme-

zek területe 24×50 cm^2 volt, vastagságuk pedig 1,5—4,2 cm között változott. Ha i a beesés szögét, d a lemez vastagságát, n a törésmutatót jelenti az első és második határlapon visszavert hullámok útkülömbsége itt is, épen úgy, mint a fényre nézve

$$\delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$

6—7 mm vastagságú üveglemezen volt észlelhető visszaverődés, ellenben ugyanolyan vastagságú kén- vagy paraffinlemezek a visszaverődésnek nyomát sem mutatták.

7. *Diffractio.* Az egyszerű és kettős résen átmenő hullámokban, valamint a különböző alakú vezetők árnyékában ugyanoly módon kimutatható a diffractio, mint a fényben. A HUYGENS-féle zónák a jelenségek magyarázatában épen úgy értékesülnek, mint az optikában.

8. *Polarisatio.* Az oscillator és resonator parabolás tükreiről az eddigi kisérletekben feltételeztük, hogy gyujtóvonalaik párhuzamosak. Ha most bármelyiköket a tükör tengelye körül való forgatás útján kimozdítjuk, szikrák gyengülnek; mikor a gyujtóvonalak egymásra merőlegesek, a szikrák teljesen kimaradnak. Ez tehát a keresztezett turmalinlemezek vagy Nicol-hasábok kisérletének analogonja. Totális reflexio útján az «egyenesen polarizált» rezgés átalakítható elliptikusan vagy circularisan polarizált rezgéssé, és pedig FRESNEL-nek az optikából ismert fogásai szerint, a mint ez a 7. ábra megtekintéséből nyomban kiviláglik.

Általában az analogiák köre igen tágnak bizonyult, de oly jelenségek is akadtak, melyeknek optikai analogonjuk nincsen.

Így pl. az egy és ugyanazon hullámfelületen levő két resonator hat egymásra. Távolságukat változtatván, a szikrázás élénksége mindkettőben periodikusan változott, ha érzékenységök egyforma volt; különben csak az érzékenyebbiken mutatkozott változás. A maximumnak $(m+1)\frac{\lambda}{2}$ távolságoknak feleltek meg. — Az ugyanazon sugáron levő resonatorok is hatottak egymásra, mely esetben a maximumok $(m+1)\frac{\lambda}{4}$ távolságokban mutatkoztak. *B.*

IRODALOM.

Dr. C. Christiansen: *Elemente der theoretischen Physik.* Deutsch herausgegeben von Dr. Joh. Müller. Mit einem Vorwort von Dr. E. Wiedemann. Leipzig, 1894., Joh. Ambr. Barth. Ára 10 m.

Az előszót író erlangeni professzor megörült koppenhágai szaktársa dán nyelven megjelent könyvének, mert mint mondja, akkorig az elméleti physikának csupa terjedelmes tárgyalásai léteztek, a melyek közől felemlíti F. Neumann-nak és Kirchhoff-nak az előadásait, V. von Lang munkáját s Poincaré-nak németre is átfordított előadásait; már pedig, hogy mily hasznos lehet egy rövid tankönyv, a mely képesítsen legalább a nem túlzóan specziális tartalmú eredeti közlemények megértésére, ezt ő Kirchhoff-nak 1870/71 telén tartott ily természetű collegiumán tapasztalta Heidelbergában. Gondoskodott tehát a német tanulók érdekében a dán könyv német kiadásáról, a melyet előbb részint maga a szerző, részint a fordító még átdolgozott, «hogy minden szükségletet kielégítsen».

A könyv 452 lapnyi terjedelméhez képest, első pillanatra meglepő az anyagbősége és pedig jóllehet, hogy sok oly régibb és újabb disciplina hiányzik belőle, a melyek legalább is annyira fontosak, mint azok, a melyek benne vannak. Tizennégy szakaszra van osztva, a következő czímiratokkal: 1. Általános mozgástan. 2. Rugalmasság elmélete. 3. Folyékony testek æquilibriuma. 4. Folyékony testek mozgása. 5. Belső surlódás. 6. Hajcsövesség. 7. Elektrostatika. 8. Mágnesség. 9. Elektromágnesség. 10. Inductio. 11. Elektromos rezgések. 12. Fénytörés izotrop és átlátszó hatókban. 13. Hőelmélet. 14. Hővezetés. — Már a szakaszok e czímsora is elárul nagy hézagokat. Igy pl. az elektromágnesség alapján tárgyalt fénytan már a reá vonatkozó 12. czímirat szerint is mostohán van kezelve; az elektromos áramlás elméletének nemcsak hogy nincs külön szakasza, de a 9. szakasz két lapnyi utolsó czikkébe van beszorítva az egész, s az Ohm és a Joule-féle törvénynek vonalas vezetőkre való megszerkesztéséből áll, az elektromos áramlás thermodynamikai tárgyalásának nyoma sincs a könyvben s azzal a kijelentéssel látszik elütni, hogy «Hier fehlt es in Wirk-

lichkeit auch in mancher Beziehung an Klarheit» (259. l.) stb. stb. Attekintve a 135 czikk czímiratát is, még aránylag mindig igen gazdagnak tarthatjuk a könyv foglalatát, sőt még akkor is, ha olvasva, a czímiratok alatt sokszor jóval kevesebbet találunk, mint a mennyi alájuk foglalható. Pedig levezetéseiben, bizonyításaiban nem mindig a legegyszerűbb módszerekkel él; pl. a rugalmasság tanában «Zur Auffindung des Zusammenhanges zwischen den Schiebungen und den Tangentialkräften» (102. l.) V. v. Lang nehézkes geometriai eljárását követi (Theor. Phys. 411. l.). Másrészt gyakran használ kétféle levezetési vagy bizonyítási módot; így pl. a sűrűség Poisson-féle egyenletét kétféle módon állapítja meg, a halmazállapotváltozások alapegyenleteit a szokásokhoz hasonló módon is, meg Planck egyszerűbb és teljesebb módszere szerint is származtatja stb. stb. Néha háromféle módon is megmutat valamit. Annál bámulatosabbnak látszhatik a kis munkába befoglalt anyagnak a hézagok daczára is szép gazdagsága.

Ennek azonban olyan oka van, a mely miatt a könyvnek nagyobb körökben való használhatósága nem várható. Ugyanis a tárgyalás átlagosan egészen szokatlanul szűkszavú és rövid szabású. Ennek a szokatlan rövidségnek van ugyan egy jó általános jellemvonása is, hogy t. i. az ábrák világosan látható jelentményeinek az értelmezésével nem fölöslegeskedik, s a szöveg közé nyomott 143 elég jó ábra nem csekély segítségül szolgál. Azonban néha az ábrára hivatkozás rövidsége is túlságos, a mennyiségtani következtetésekben pedig az egymásután következő affirmatiók összefüggésének a felismerése a szókímélés miatt nem ritkán kisebb-nagyobb mérvű inventiót követel, olyanokat, a minőknek a szüksége tankönyvekben, sőt kézikönyvekben sem szokott ily fokon előfordulni. Álljon itt erre is egy-két példa a sok elősorolható közől. A folyadékok Lagrange-féle mozgási egyenleteiről szóló 45. §.-ban a continuitás egyenletének a felállításához így fog hozzá: «Azok a folyadék-részecskék, a melyek eredetileg da, db, dc élű, derékszögű parallelepipedonban voltak, t idő mulva olyanban vannak, a melynek az éleihez tartozó vetületek» s itt azután következik a hat vetület kifejezése, ú. m. $\partial x/\partial a \,.\, da$ stb., de semmi útbaigazítás ennek a belátására nem adatik. Az inductiós coëfficiensek meghatározásával foglalkozó 86. §-ban erre a kifejezésre:

$$m=2\int_0^{\pi}\frac{r\cos\varepsilon d\varepsilon}{\sqrt{p^2+(q^2-p^2)\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}}$$

csupán ennyit mondván: «Ha α egy kis szög, a mely úgy van választva, hogy $q\alpha$ igen nagy a p-hez képest, akkor tehetjük»: írja:

$$m=2\int_0^{\alpha}\frac{rds}{\sqrt{p^2+q^2\frac{\varepsilon^2}{4}}}+2\int_0^{\pi}\frac{rd\varepsilon\left(1-2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right)}{q\sin\frac{\varepsilon}{2}}$$

Mindent megmondott ugyan, a mi a második kifejezésnek az elsőből való kiírásához okvetetlenül szükséges, de az összefüggésnek keresgélés nélkül való felismerésére olyszerű gyakorlottság, vagy találékonyság szükséges, a melyet a kezdők nagy többségétől nem lehet elvárni, s nagy részétől a szükségeltük keresgélés megejtése sem reményelhető bizonyossággal, hanem inkább gondolható, hogy néhány ily locustól megriasztva, félre teszik a könyvet. — Már pedig míg egy oly kényelmetlenség van a könyvben, a melynek részben rövidségét köszöni: a törteknek sormetsző vonalakkal jelzése, a melyek néha egész szálka-sorokba sereglenek. A munka első szakaszáról (általános mozgástan), a melyre nézve Lagrange s a mi vele összefügg, nem létezik, azt hiszem, hogy eltekintve a kis beléje iktatott potentiál-elmélettől, a Mécanique analitique megjelenése előtt is helyesebben meg lehetett volna szerkeszteni és írni. A többi részekben a felölelt anyag terjedelméhez képest általában eléggé figyelembe van véve a tudomány mai állása. A szövegezés, kivált a definitiók megfogalmazásában gyakran pongyola, de azért átlagával jóval szabatosabb, mint V. v. Lang munkájának a szövege.

Csak olyanoknak ajánlhatom a könyvet, a kik az alkalmazott mathesisben valamelyes jártassággal bírnak, csak némi előleges tájékozást akarnak a tudomány anyaga felől szerezni és elszánták magukat a könyvnek mindig mulasztásokból és sohasem a tárgy természetéből származó nehézségeit legyőzni, vagy azokon egyelőre átsíklani.

F. Gy.

MEGOLDOTT FELADATOK.

21. *Legyen*

$$F(u, v) = 0$$

valamely görbének egyenlete vonalkoordinátákban; bizonyíttassék be, hogy az (u, v) *érintőnek érintéspontjában a görbületi mértéket a következő képlet adja:*

$$G = \frac{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}} =$$

$$= \frac{\left(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right]}$$

(Kürschák.)

Ötödik megoldás Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.

A görbe egyenlete:

$$F(u, v) = 0.$$

A simuló kör középpontjának egyenlete:

$$au + bv + 1 = 0. \qquad 1)$$

E pontnak az (u, v) érintőtől mért merőleges távolsága:

$$\frac{au + bv + 1}{\sqrt{u^2+v^2}} = r; \qquad 2)$$

ez az egyenlet egyszersmind a simuló kör egyenlete vonalkoordinátákban.

Az érintkezés másodrendű lévén a 2) egyenlet kétszeri differenciálásából származott, a és b állandókban lineáris egyenletrendszerből a és b értékei kifejezhetők.

Ez egyenletek:

$$av\,(udv-vdu)-bu\,(udv-vdu)+udu+vdv=0 \qquad 3)$$

$$a\,(udv^2+uvd^2v-vdudv)+b\,(vdu^2-u^2d^2v-ududv)+ \\ +du^2+vd^2v+dv^2=0, \qquad 4)$$

melyekből:

$$a=\frac{-dv\,(udv-vdu)^2+u\,.\,du\,.\,d^2v\,(u^2+v^2)}{(udv-v\,.\,du)^3}$$

$$b=\frac{du\,(udv-v\,.\,du)^2+v\,.\,du\,.\,d^2v\,(u^2+v^2)}{(udv-vdu)^3}\,.$$

Ez értékeket 2)-be behelyettesítvén, lesz

$$r=\frac{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}du\,.\,d^2v}{(udv-vdu)^3}\,.$$

Ebből a görbület mértéke:

$$\frac{1}{r}=G=\frac{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}}\,. \qquad 2a)$$

A görbe egyenletéből:

$$\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}=0$$

és

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}\frac{dv}{du}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{d^2v}{du^2}=0,$$

melyekből:

$$\frac{dv}{du}=-\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^{-1}$$

és

$$\frac{d^2v}{du^2}=-\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2-2\frac{\partial^2 F}{\partial u\,.\,\partial v}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^{-3}\right].$$

Ez értékeket 2*a*)-ba téve végül:

$$G=\frac{\left(u\frac{\partial F}{\partial u}-v\cdot\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2-2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right]}$$

Hatodik megoldás Grünwald Miksa főgymnasiumi tanár úrtól Losonczon.

Legyen u, v a görbe egyik érintőjének koordinátái, akkor a szomszédos érintő koordinátái: $u+du$, $v+dv$. Ezek metszéspontja az u, v érintő érintési pontja. Legyenek ennek koordinátái x, y, akkor

$$ux+vy+1=0$$
$$(u+du)x+(v+dv)y+1=0$$

a miből, u-t független változónak, v-t pedig u függvényének tekintvén:

$$x=-\frac{\frac{dv}{du}}{u\frac{dv}{du}-v} \qquad y=\frac{1}{u\frac{dv}{du}-v}.$$

A görbe szomszédos pontjának, vagyis $u+du$, $v+dv$ érintési pontjának koordinátái: $x+dx$, $y+dy$. Most már

$$dx=-\frac{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)\frac{d^2v}{du^2}-\frac{dv}{du}\left(\frac{dv}{du}+u\frac{d^2v}{du^2}-\frac{dv}{du}\right)}{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2}du$$

vagy összevonván

$$dx=\frac{v\frac{d^2v}{du^2}}{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2}du$$

és hasonlóképen

$$dy=-\frac{u\frac{d^2v}{du^2}}{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2}du.$$

Az e szomszéd pontokat összekötő ds ívelemre nézve:

$$ds^2=dx^2+dy^2=\frac{(u^2+v^2)\left(\frac{d^2v}{du^2}\right)^2}{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^4}du^2$$

és

$$ds=\frac{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2v}{du^2}}{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2}du.$$

Rajzoljunk továbbá egy kört egységnyi sugárral a koordinátarendszer kezdőpontja körül, és huzzunk ugyanebből a pontból párhuzamosakat a föntebbi érintőkkel. Ezek között a körnek egy da íveleme fekszik, és a görbületi mérték az u, v érintő érintési pontjában nem egyéb, mint $\frac{da}{ds}$.

A da körívelem egyik végpontjának a ξ, η koordinátáit úgy kapjuk meg, mint az u, v érintővel párhuzamos

$$u\xi+v\eta=0$$

egyenes metszéspontját a

$$\xi^2+\eta^2=1$$

körrel. Tehát

$$\xi=\frac{v}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \eta=-\frac{u}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

A da másik végpontjának koordinátái: $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$, a hol

$$d\xi=\frac{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dv}{du}-v(u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\left(u+v\frac{dv}{du}\right)}{u^2+v^2}du$$

$$=\frac{u\left(u\frac{dv}{du}-v\right)}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}du$$

$$d\eta=-\frac{u^2+v^2-u(u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\left(u+v\frac{dv}{du}\right)}{u^2+v^2}du$$

$$=\frac{v\left(u\frac{dv}{du}-v\right)}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}du$$

tehát

$$da^2=d\xi^2+d\eta^2=\frac{(u^2+v^2)\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2du^2}{(u^2+v^2)^3}$$

$$=\frac{u\frac{dv}{du}-v}{u^2+v^2}du$$

és így

$$\frac{da}{ds}=\frac{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}}.$$

Hatodik megoldás Lóky Béla kegyesrendi tanár úrtól Sátoralja-Ujhely.

Az $y=y(x)$ görbe (x, y) pontjához tartozó érintőjének egyenlete

$$\eta-y=y'(x)(\xi-x)$$

avagy PLÜCKER-féle alakra hozva

$$-\frac{y'(x)}{xy'(x)-y}\xi+\frac{1}{xy'(x)-y}\eta+1=0.$$

Az érintő vonalkoordinátái tehát

$$u=-\frac{y'(x)}{xy'(x)-y}, \qquad v=\frac{1}{xy'(x)-y}.$$

Ezek szabják meg a görbe $F(u, v)=0$ egyenletét.

A görbületi mérték az (x, y) pontban tudvalevőleg

$$G=\frac{y''(x)}{[1+y'(x)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Meghatározandók y' és y''. Először is u és v felírt kifejezéseinek osztása adja

$$y'=-\frac{u}{v}.$$

Ha x szerint differenciálunk, ered

$$y''=-\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{du}}{v^2}.$$

De

$$\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{xy'-y}\right]=-\frac{(xy'-y)y''-y'(xy''+y'-y')}{(xy'-y)^2}$$

$$=\frac{yy''}{(xy'-y)^2}=v^2.yy''$$

tehát

$$y''=\frac{uv'-v}{v^2}\cdot v^2yy'',$$

azaz

$$1=(uv'-v)y.$$

Ezt x szerint differenciálva, ered

$$0=y'(uv'-v)+yuv''\frac{du}{dx}$$

$$=-\frac{u}{v}(uv'-v)+yuv''v^2yy''$$

$$=-\frac{u}{v}(uv'-v)+\frac{uv''v^2}{(uv'-v)^2}y'',$$

a honnan

$$y'' = \frac{(uv' - v)^3}{v^3 v''}$$

$$G = \pm \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}} \frac{d^2v}{du^2}}.$$

Minthogy pedig $F(u, v) = 0$ egyenlet esetében

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{du} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{du^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{dv}{du} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{d^2v}{du^2} = 0$$

azért

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\partial F}{\partial u} : \frac{\partial F}{\partial v}$$

és

$$\frac{d^2v}{du^2} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right\}.$$

Következésképp

$$G = \frac{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}}$$

$$= \frac{\left(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right]}.$$

$$= \frac{\left(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(m-1)^2\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}} H_{uvw}(F)};$$

ha m az F osztályszáma és H az F-nek u, v, w-re nézve formált Hesse-féle determinánsa, hol a differenciálás elvégzése után $w = 1$ teendő. (Erre nézve l. Baltzer Theorie und Anwendung der Determinanten. 5. kiadás, 166. lapját).

*

Hetedik megoldás dr. Sutál József kegyesrendi tanár úrtól Budapesten.

Ha a görbe valamely pontjában oszkuláló kör czentrumának koordinátáit a, b-vel jelöljük, akkor annak egyenlete vonalkoordinátákban:

$$(au+bv+1)^2-r^2(u^2+v^2)=0. \qquad 1)$$

Differenciáljuk ezt az egyenletet totalisan kétszer egymásután, ez által a

$$P=\frac{u+v\frac{dv}{du}}{u\frac{dv}{du}-v} \qquad 2)$$

jelölés alkalmazásával a következő két egyenlethez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} -av &+ bu = P \\ -a\frac{dv}{du} &+ b = \frac{dP}{du} \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Ezeknek az egyenleteknek, minthogy a kör simuló kör, eleget tesznek még

$$\frac{dv}{du}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}:\frac{\partial F}{\partial v}}{}$$

$$\frac{d^2v}{du^2}=-\frac{\frac{\partial^2 F}{du^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2-2\frac{d^2F}{\partial u\partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}+\left(\frac{d^2F}{\partial v^2}\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3} \qquad 4)$$

differenciálhányadosok is.

A 3) alatti egyenletből könnyen eljuthatunk a következőkhöz:

$$\left.\begin{aligned} \left(u\frac{dv}{du}-v\right)b &= \frac{dv}{du}P-v\frac{uP}{du} \\ \left(u\frac{dv}{du}-v\right)a &= P-u\frac{dP}{du} \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

innen pedig

$$\left(u\frac{dv}{du}-v\right)(au+bv+1)=\left(v\frac{dv}{du}+u\right)P-(u^2+v^2)\frac{dP}{du}+u\frac{dv}{du}+v. \qquad 6)$$

Ha P-nek és

$$\frac{dP}{du}=\frac{\left[1+\left(\frac{dv}{du}\right)^2+v\frac{d^2v}{du^2}\right]\left(u\frac{dv}{du}-v\right)-u\frac{d^2v}{du^2}\left(u+v\frac{dv}{du}\right)}{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2} \qquad 7)$$

értékét a 6) alatti levő egyenletbe behelyettesítjük s aztán a nyert egyenletet megszorozzuk $\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2$-tel, a következő eredményre jutunk:

$$\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^3(au+bv+1)$$

$$=\left\{\left(u+v\frac{dv}{du}\right)^2-(u^2+v^2)\left[1+\left(\frac{dv}{du}\right)^2+v\frac{d^2v}{du^2}\right]+\left(d\frac{dv}{du}-v\right)^2\right\}\left(u\frac{dv}{du}-v\right)$$

$$+(u^2+v^2)\,u\frac{d^2v}{du^2}\left(u+v\frac{dv}{du}\right)$$

$$=-(u^2+v^2)v\left(u\frac{dv}{du}-v\right)\frac{d^2v}{du^2}+(u^2+v^2)\,u\left(u+v\frac{dv}{du}\right)\frac{d^2v}{du^2}$$

$$=(u^2+v^2)^2\frac{d^2v}{du^2}.$$

Innen

$$au+bv+1=\frac{(u^2+v^2)^2}{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^3}\frac{d^2v}{du^2};$$

az 1) egyenletből pedig:

$$(au+bv+1)^2=r^2(u^2+v^2),$$

tehát

$$\frac{1}{r}=\frac{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}},$$

melybe, ha $\frac{dv}{du}$ és $\frac{d^2v}{du^2}$ értékeit a 4) alatt lévő egyenletekből behelyettesítjük, a kivánt eredményhez jutunk.

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1895. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

Január hó 10-én. Dr. BEKE MANÓ: A casus irreducibilis a harmadfokú egyenletnél.

FUCHS KÁROLY: Megjegyzések a felületi feszültségre vonatkozó elterjedtebb kísérletekre.

Január 24-én. Dr. KÜRSCHÁK JÓZSEF: Maximum-minimum problémák elemi tárgyalása.

GRUBER NÁNDOR: A benzin-szaturátor mint a vetítő-készülék fényforrása.

Február hó 7-én. HORNISCHEK HENRIK: A kinematikai geometria egyik alaptételéről.

Dr. FRÖHLICH IZIDOR: «Miért esik mindig talpára a macska?»

Február hó 21-én. RADOS IGNÁCZ: Az ívhosszak méréséről.

Dr. KÖVESLIGETHY RADÓ: Az efemeridák számításáról.

*

«Miért esik mindig talpára a macska?»

MARCEL DEPREZ ismert elektrikus hosszasan gondolkodott DELAUNAY könyvének** ama megjegyzéséről, mely szerint a szabadon elejtett és teljesen magára hagyott élő organizmus semmiféle körülmények között nem-

---

* *Comptes Rendus:* 1894 second semestre (1894 X/19 Séance.) — MAREY: Mécanique animale: Des mouvements que certaines animaux exécutent pour retomber sur leur pieds, lorsqu'ils sont précipités d'un lieu élevé. pp. 714—717. GUYON: Note relative à la communication de M. MAREY. pp. 717—718. — MAURICE LÉVY: Observations sur le principe des aires — pp. 718—721. *Comptes Rendus:* 1894 second semestre Nr. 19 (XI/5 Séance). PAUL APPEL: Sur le théorême des aires pp. 770—771. NATURE: 22 november 94 pg. 80—81. — Photographs of a tumbing cat.

** DELAUNAY: Mécanique rationelle. Negyedik kiadás 229 §. 412 lap 1866.

csak hogy súlypontjának mozgását nem képes megváltoztatni, hanem semmiféle forgó mozgást sem képes végezni. A M. Deprez idézte paragrafus Delaunay könyvében tényleg megvan, szóról-szóra tartalmazza ama sorokat, a melyeket Deprez idéz, de egyéb következtetések is vannak benne. Nemcsak azt mondja, hogy az élő organizmus a súlypont megtartása elvének felel meg, azaz hogy a súlypont mozgása nem változhatik, akármilyen mozgásokat végezzenek is testének egyes részei; de azt is mondja, hogy ennek a mozgásnak olyannak kell lenni, mely eleget tegyen a területek elvének, vagyis kell, hogy a pontok által leírt területek s a megfelelő pontok tömegének szorzataiból alakított összeg állandó tartozik lenni, ha kívülről származó hatások nem működnek, s hogy e szerint egy nyugvó állapotban elejtett szerves lény önerejénél fogva forgásokat nem végezhet.

M. Deprez elgondolkodván ezen a paragrafuson, feltünt neki, hogy a benne foglalt állítás egyenes ellentmondásban áll azzal a közmondással, mely szerint «a macska mindig a talpára esik». Ez a közmondás, mint minden más közmondás, nem akar más lenni, mint sűrített igazság, melyben a népnek hosszú időkre kiterjedő tapasztalata kifejezésre jut. — Ő a közönséges természettudományi eljárást akarta alkalmazni annak kideritésére, vajjon tényleg úgy van-e a dolog, a mint a közmondás mondja? Macskán, kutyán, tengeri nyúlon próbálta meg és azt tapasztalta: Bármiként ejti vagy dobja is el, minden esetben a talpára áll ez a három állat. A közmondás igazat mondott; tehát ellentétben áll vele az idézett paragrafus, és így jogosan merültek fel kételyek, hogy Delaunay értelmezése elfogadható-e vagy sem?

Hogy a területek elve kétségtelenül helyes, az tán további fejtegetésre nem szorul. De az értelmezése mégis nehezebb volt, mint látszik.

Delaunay után még számos mechanikai könyv és értekezés írója ugyanezen tévedésbe esett; azt gondolták, hogy egy magára hagyott test, ha külső erő nem hat reája, nem képes esés közben forgást végezni. — Már pedig, ha a macskát hátával lefelé eleresztjük, csak úgy eshetik a talpára, ha esés közben megfordul. Ő tehát a kísérletet úgy rendezte be, hogy az organizmust egész nyugodtan bocsátotta el, minden kezdetbeli mozgás nélkül; tehát a macska semmi kezdetbeli sebességgel nem birt, sem translatorius, sem rotatorius sebességgel és azt tapasztalta, hogy másfél méter magasságról ejtve le, csakugyan mindig a talpára állott. A mint mi is tapasztalhatjuk.

Önként következik, hogy ilyen jelenségek vizsgálatánál a tapasztalati kipuhatolás első sorban érdekelte M. Deprez-t, ki a kérdést felvetette. Abban a véleményben volt, hogy pillanatnyi fotografiák alapján ezen mozgásnak ismeretére jobban fog jutni, biztosabban, helyesebben, mintha tovább szövi az elméletet, s ez okból Marey, a nagyhirű franczia fiziologushoz fordult,

ki megalkotója és feje annak az intézetnek, melynek feladata az élő organizmusok mozgására vonatkozó vizsgálatok megejtése. MAREY tényleg lefotografálta a macskát 1·5 méterről való esésének 20 phasisában s a képeket a franczia akadémiának 1894. évi okt. 29-én tartott ülésén, nagy érdeklődés közben bemutatta. A képek a *Comptes Rendus*-ban megjelentek, honnét aztán átmentek számos illusztrált lapba. Ezek a pillanatnyi képek tényleg sokkal értékesebbek a mozgás tanulmányozásánál, mint maga a kísérlet, mert hiszen az esés ideje alig 0·6 másodpercz, a mely idő alatt a mozgásnak számos fazisát megvizsgálni teljes lehetetlen. A képeknek két sorozata jelent meg. Az egyik vonatkozik arra az esetre, a mikor az állatot oldalról, a második sorozatban pedig az állatot hosszirányában nézzük. Az állat olyan helyzetben van elbocsátva, hogy a háta lefelé és lábai felfelé legyenek fordítva. A képek jól mutatják, hogyan végez az állat hossztengelye körül egy fordulatot. Ha tekintetbe veszszük, hogy az esés idő nem sokkal több egy fél másodperczcnél, akkor a képekből arra is következtethetünk, hogy az állat végtagjainak igen heves mozgásban kell lenniök.

M. DEPREZ már most úgy vetette fel a kérdést, hogy valamely élő organizmus, mely magára van hagyatva, de a melynek egyes részei heves mozgásban lehetnek, végezhet-e forgást egy tengely körül csakis a saját, úgynevezett belső erők behatása alatt? Mindenekelőtt ki kellett mondania, hogy a DELAUNAY-féle következtetés nem helyes, mert hisz a tapasztalattal ellentétben van.

Mert igaz, hogy belső erők merülnek fel és ezekre áll az, hogy a hatás és visszahatás elvének teljesen megfelelnek, hogy általában véve a translatorius erők összege 0 és az erők forgató nyomatékainak összege szintén 0. Ha tehát a dolog így állana és így értelmeztetnék, akkor a forgás tényleg nem volna lehetséges.

Csakhamar kiderült, hol rejtőzik a tévedés DELAUNAY értelmezésében. Ez a tétel, így kimondva, merev testre alkalmazva, igenis érvényes. Merev test súlypontja csakugyan nem változtathatja mozgását s ha eredetileg nyugalomban van, forgás nem fog bekövetkezni.

De másként áll ez az organizmus vagy oly test esetében, melynek egyes részei egymáshoz képest relativ mozgást végezhetnek. Igaz, hogy belső erők vannak, a melyek az actio és reactio elvnek felelnek meg, de nincs kizárva, hogy daczára ennek, az egész test ilyen forgást végezhessen.

Én az előbb érintett tételnek közönséges alakját kivánom felírni és erre egy észrevételt tenni. Ha adva van egy m tömegű pont, a melyhez tartozó r vezető sugár mozgás közben (a mozgás akármilyen lehet) df területet ír le: akkor az előbb érintett tétel azt mondja, hogy a területsebesség állandó, vagyis hogy a terület, melyet a vezető sugár leír, arányos az idővel, tehát

$$\Sigma\left\{ m\, r^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right\} = constans$$

a hol az összegezés az egész testre kiterjed. Ezen összeg tehát abban az esetben, ha külső erők nem működnek, állandó. Ha úgy bocsátunk el valamely rendszert, hogy az elbocsátás pillanatában nyugalomban van, akkor semmiféle forgás nem fog történni és így az előbbeni kifejezés minden egyes tagja egyenlő zérussal, tehát ez esetben az előbb felírt összeg is egyenlő zérussal, vagy a mi ugyanaz:

$$\Sigma m \frac{df}{dt} = 0$$

Ebből az is következtethető, hogy ha egy bizonyos időpillanatban ezen egyenlet áll és külső erők nem működnek és akkor a területeknek is mindig állandóknak kell lenniök: akkor merev rendszerre a tétel úgy értelmezendő, hogy a merev rendszer mozdulatlanul esik le.

Azonban artikulált rendszerben, a melynek egyes részei egymáshoz képest mozgásokat végezhetnek, mint például az organizmus tagjai, nincs kizárva, hogy ezen összeg egyes tagjai közül némelyek positiv és némelyek negativ értékűek lesznek és azért összegük még mindig egyenlő lehet zérussal. Delaunay is úgy mondta és úgy következtette, hogy ha a test végtagjai mozgásban vannak, akkor, ha az egyik végtag az egyik irányban forog, akkor a másik végtagnak az ellentett irányban kell forognia. Deprez általánosította a kérdést a következő formulázásban:

«Lehetséges-e, hogy egy anyagi rendszer, a mely eleinte nyugalomban van és magára van hagyatva, a melynek egyes részei cziklusszerű mozgásokat végezhetnek, de úgy, hogy az eredeti helyzetbe, az eredeti configuratióba térnek vissza; lehetséges-e, hogy ilyen esetben az egész testhelyzet változást szenvedjen és tengelykörüli forgást végezzen?»

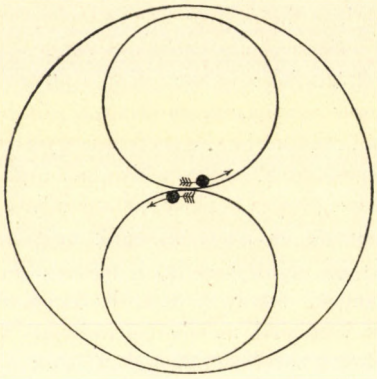
Deprez arra az eredményre jutott, hogy igen is lehetséges. Egy készüléket is készített,* a mely az ő következtetéseinek helyességét bebizonyítja, t. i. azt, hogy ha a rendszer teljes nyugalomban van és ha csak belső erők behatása alatt történnek mozgások és az egyes részek eredeti helyzetbe térnek vissza: akkor az egész rendszer forgást szenvedhet. A készülék lényegét a mellékelt ábra mutatja. Áll egy homogén körlapból, melybe két köralakú csatorna van kivésve. Ezen csatornákban két golyó gurulhat.

A lapot a középpontjában fonalra függesztve a golyók közé egy rugó van

---

* *Comptes rendus* 1894 XI/5 Séance, Second semestre. Marcel Deprez: Sur un appareil servant à mettre en evidence certaines conséquences du théorème des aires. pg. 767—769.

közbe fogva olyan módon, hogy össze legyen nyomva és a golyók egyenlő távolságban legyenek a középponttól, miáltal a súlypont a középpontban marad. A rugó összenyomása olyan módon van megcsinálva, hogy a mikor a lapot tartó fonalat elégetik, a rugó kényszere: az is megszünjék: az esés megkezdésének pillanatában tehát mindkét golyó egyenlő nagy, de ellenkező irányú lökést kap a felszabadult rugótól, úgy hogy a köralakú csatornákban egyenlő sebességgel fognak mozogni, miáltal az egész rendszer súlypontja ismét nem fog változást szenvedni, de a golyók sebességéből származó centrifugalis erő esés közben a körlapot függőleges tengely körül megforgatja.



A részletekbe azonban jelenleg bele menni nem akarok, valamint azt is épen csak említem, hogy némelyek a levegő ellenállásának és azon körülménynek is tulajdonítanak lényeges befolyást a szóban forgó jelenségre, hogy az állat, mely a fent érintett elbocsátás előtt szokatlan s reá nézve mindenesetre kellemetlen helyzetben van, fészkelődik s magát a tartó kezektől eltaszítani törekszik s így valószínüleg mégis bizonyos, habár csekély mérvű kezdeti forgás sebességgel bír.

Ha t. tagtársaim figyelmét ezen jelentéktelennek tetsző tárgyra irányítottam, főleg azért tettem, hogy példát mutassak, mekkora óvatosságra van szükség még az egészen biztosnak látszó alapból való következtetéseknél. S talán arra is adtam alkalmat felszólalásommal, hogy a tagtársak egyike vagy másika emez érdekes témára még visszatérjen. *F. J.*

TÁRSULATI ÜGYEK.

Határozat a M. P. T. harmadik rendes közgyűlése tárgyában. A választmány 1894 okt. 19-én megtartott rendes ülésén az ügyvivő titkár a szombathelyi tagtársaknak következő levelét mutatta be:

Tekintetes Választmány!

A tekintetes Választmánynak 1893. évi május hó 26-án tartott ülésén fölmerült a kérdés, valjon a közgyűlés helye állandóan Budapest legyen-e, vagy pedig fölváltva a fővárosban és vidéken tartassék meg?

A társulat Elnöke beszédében az utóbbit tartja kivánatosnak, még pedig oly czélzattal, hogy nagyobb városokban inkább a tudományos munka, kisebb helyeken pedig a tudományos törekvéseket hathatósan előmozdító társas szellem ápolása adná meg a közgyűlés színezetét.

Nagyméltóságú Elnökünk ezen kijelentése bátorít fel bennünket, midőn a tek. Választmányhoz azon tiszteletteljes kéréssel járulunk, hogy az első vidéki közgyűlés éveül az 1895-iki társulati évet, helyéül pedig Szombathely városát választani kegyeskedjék.

Engedje meg a tek. Választmány, hogy kérelmünk és meghívásunk támogatására felhozzuk a következőket:

1. Szombathely 7 irányú vasúti közlekedése folytán a Dunántúl egyik középpontja és — a budapesti tanintézeteket nem számítva, — 24 tanintézetre nézve 5—6 órán belül elérhető. Ezek tanárai közül mintegy ötvenen tagjai társulatunknak. Budapesttől való távolsága sem nagyobb.

2. Ujonnan épített főgymnasiumunk a közgyűlés czéljaira alkalmas helyiségekkel rendelkezik.

3. Tanulságos kirándulásul kinálkozik a 4 kilometer távolságban levő herényi astro-physikai intézet megtekintése.

4. Egy-egy félnapi kellemes és tanulságos kirándulásra adhat alkalmat a jaáki templom megtekintése, vagy Kőszeg városa.

5. Végül, a Math. és Phys. Társulatnak megjelenése Vasvármegye székhelyén hatalmasan előmozdítaná, hogy e határszéli megye és város lakosságának kulturális dolgok iránt meglevő helyes érzéke erősbödjék.

Tiszteletteljes kérelmünket és meghívásunkat megujítván, maradunk szíves üdvözlettel

Szombathelyen, 1894. évi október 8-án

a társulat hű tagjai:

Dr. Kunc Adolf, *Módly Krizsó,*
Gothard Jenő, *Dr. Edelmann Sebő.*

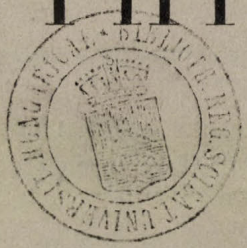
*

A választmány a szombathelyi tagtársak ezen szíves meghívását köszönettel és örömmel elfogadja és egyhangulag azt határozza, hogy *a Mathematikai és Physikai Társulat 1895. évi rendes közgyűlését Szombathelyen fogja megtartani.*

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK



A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

NEGYEDIK ÉVFOLYAM

III. FÜZET. 1895 MÁRCZIUS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1895

TARTALOM

Lap

KLIMKÓ MIHÁLY: Adalék a primitiv gyökök elméletéhez ... 97

Ifj. SZILY KÁLMÁN: A binomiális együtthatók néhány tulajdonsága ... 102

KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az invariánsok elméletének alaptételéről. (Második közl.) 107

Irodalom. (*Voigt*, Kompendium d. theor. Physik, ism. FARKAS GYULA.) ... 121

Feladatok. (KLUG, KÜRSCHÁK, VÁLYI és SZÉPRÉTHY uraktól) ... 125

Megoldott feladatok. (A 22. feladat megoldása, SZÉPRÉTHY BÉLA és KÜRSCHÁK JÓZSEF uraktól) ... 126

Physikai laboratorium. (A benzin-szaturátor. — A légkör felhajtó ereje. — Az elektroskop használatához) ... 131

Értesítő a Math. Phys. Társ. előadásairól. (KÖVESLIGETHY R.: Az ephemerisek számításáról ... 134

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A negyedik társulati év 1895. január 1-én kezdődött. A *tagsági díj* az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) címére — legczélszerűbben az 1. füzethez mellékelt posta-utalványnyal — beküldeni. *Hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéséért.*

A *Math. Phys. Lapok* I—III. évfolyamai teljes példányokban még kaphatók; az I. kötet ára 5 frt, a többieké 3—3 frt.

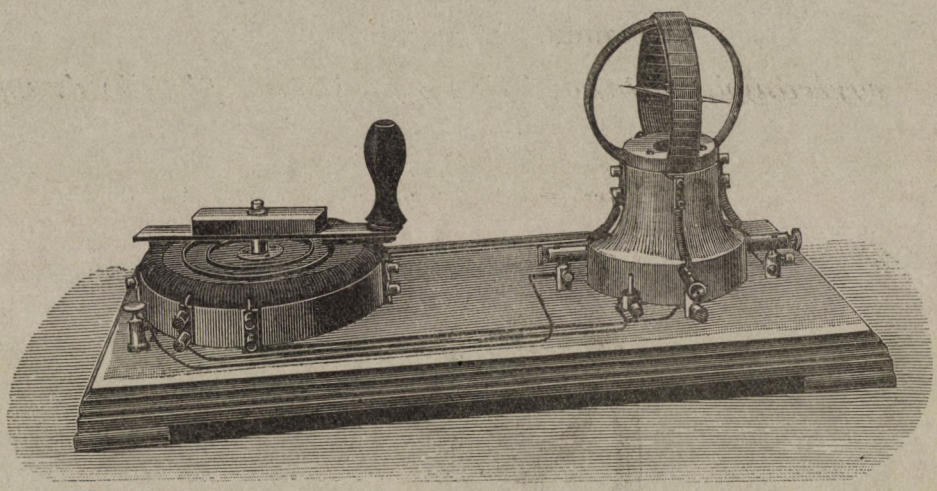
Rendes ülések. A társulat üléseit minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja, a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3.), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A társulat f. é. közgyülése Szombathelyen fog megtartatni. Idejéről a IV. füzet fog értesíteni.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czímére **(VI. Bulyovszky-u. 16.)** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár **(VII., Csengery-u. 1)**, a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a *reclamatiók* is. A reclamatiókat — költségkimélésből — mindenkor a legközelebb megjelenő füzettel egyidejűleg teljesitjük.

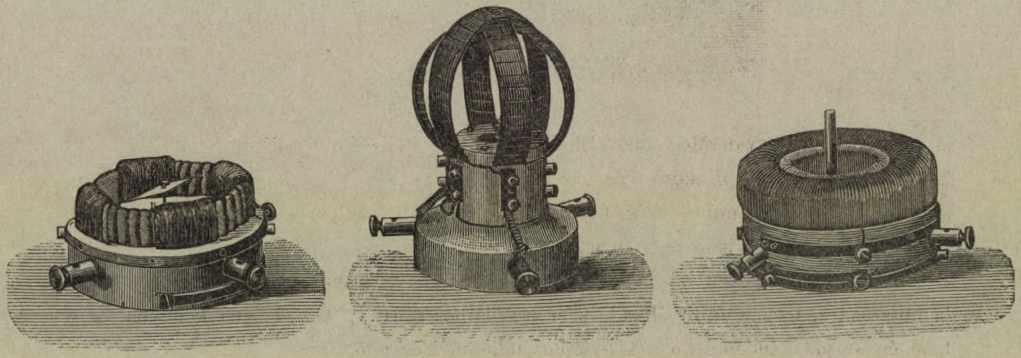
T. Munkatársainkhoz. Kérjük t. munkatársainkat, hogy közleményeiket az összehajtott irópapiros félívének csak egyik oldalára és ennek is csak egyik felére, — a képleteket mindig külön sorba — minél olvashatóbban irni szíveskedjenek. A közleményekhez való rajzok nem a szövegbe, hanem külön mellékletként rajzolandók, folyó számokkal látandók el s az ábrák helye a szövegben a folyó számnak mellé irásával jelölendő meg. Kérésünk szives teljesítésével a szerkesztőket fárasztó munkától, a társulatot pedig a korrekturákért járó tetemes kiadástól mentik fel.



WEINHOLD-féle készülék

FORGÓ MÁGNESES TÉR ELŐÁLLITÁSÁRA.

A II. kötet 275. stb. oldalain ismertetett készülékeket (3., 8., 9. és 11. ábra) minden hozzávaló mellékkészülékkel teljesen felszerelve igen ajánlhatjuk a t. cz. tanár urak becses figyelmébe.



A teljes készülék ára legfinomabb kivitelben **60 forint** *loco Budapest. A készülék egyes részei külön is kaphatók méltányos árakon.*

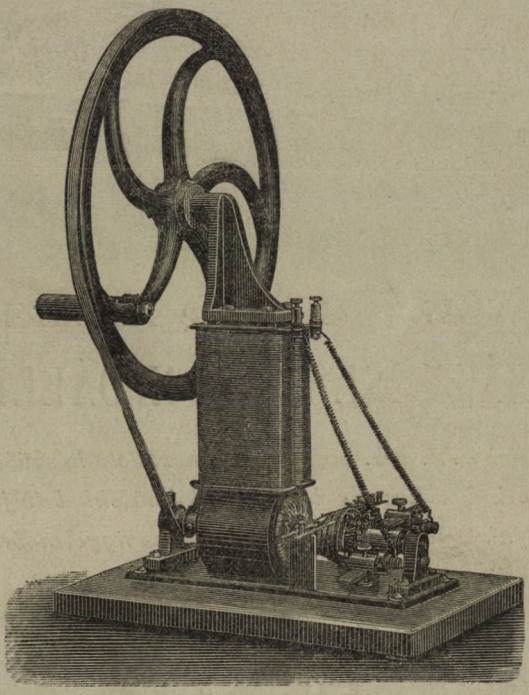
CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

DINAMO-ELEKTROMOS GÉP

Gramme-féle gyűrűvel ellátva

egyirányú, váltakozó és forgató (több fázisú) áram előállítására.

Az á:am erőssége 4 Ampère, feszültsége 30 Volt.



Ezen géppel egyidejűleg meg lehet világítani például 3 izzólámpát egyirányú és 2—3—4 izzólámpát váltakozó vagy több fázisú forgató árammal. Használható egyenáramú, váltakozó áramú és több fázisú generátor vagy mótorként Szerkezete e lapok II. köt. V. füzetében ismertetve van.

A gép kizárólagosan iskolai czélokra készült és pedig nem csak a dynamogép stb. bemutatására, hanem mint állandó s erős villamos forrás; kézzel igen könnyen hajtható és árama minden iskolai kisérlethez teljesen elegendő.

Részletes utasitás minden géphez mellékeltetik.

A gép ára 100 forint.

CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

ADALÉK A PRIMITÍV GYÖKÖK ELMÉLETÉHEZ.

I. Tétel. *Minden* $p=2^m+1$ $(m>0)$ *alakú törzsszámnak a*

$$3 \quad \text{és} \quad \frac{p+1}{3}$$

számok primitív gyökei.

Bebizonyítás. E tétel bebizonyítását több elemi tétel kimutatására vezettem vissza.

1. $p=2^m+1$ *csak akkor lehet törzsszám, ha* m *páros.* Ha m páratlan, akkor a

$$2\equiv -1 \pmod 3 \tag{1}$$

kongruenciából tüstént következik, hogy

$$2^m\equiv(-1)^m\equiv -1 \pmod 3,$$

tehát $p=2^m+1$ 3-mal osztható és így nem törzsszám. Ha tehát p törzsszám, akkor — miként be volt bizonyítandó — m páros.

2. *A* $p=2^m+1$ *törzsszám a* $12k+5$ *alakra hozható.* Ugyanis a

$$p=2^m+1=4\,(2^{m-2}-1)+5$$

egyenlőségben szereplő

$$2^{m-2}-1$$

kifejezés mindig 3-mal osztható egész szám. Egész szám azért, mert m páros lévén, $m-2$ negativ nem lehet; 3-mal pedig azért osztható, mert az 1) alatti azonos kongruenciából következik, hogy

$$2^{m-2}\equiv(-1)^{m-2}\equiv 1 \pmod 3,$$

mivel $m-2$ páros szám. Tehát

$$2^{m-2}-1=3k$$

és így

$$p=12k+5.$$

3. 3 *a p-nek quadratikus nem-maradéka.* A 3 maradékjellegének meghatározása végett számítsuk ki a $\left(\frac{3}{p}\right)$ LEGENDRE-féle jelet. Ha e kiszámítás közben a quadratikus maradékok elméletéből ismeretes reciproczitási tételt többször alkalmazzuk, a következőt nyerjük:

$$\left(\frac{3}{p}\right)=\left(\frac{3}{12k+5}\right)=\left(\frac{12k+5}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)=-1,$$

úgy hogy tehát 3 valóban p-nek quadratikus nem-maradéka.

4. *A $p=2^m+1$ törzsszámnak minden quadratikus nem-maradéka egyszersmind primitiv gyöke is.* A p-nek quadratikus maradéka nem lehet egyszersmind p-nek primitiv gyöke; mert minden quadratikus maradék az

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$$

kongruenciát elégítvén ki, a $(p-1)$-nél kisebb kitevőhöz tartozik. Primitiv gyök tehát csakis a quadratikus nem-maradékok sorában található. E nem-maradékok száma,

$$\frac{p-1}{2}=2^{m-1},$$

és a primitiv gyökök száma

$$\varphi(p-1)=2^{m-1}$$

egyenlő, tehát valóban minden quadratikus nem-maradék egyszersmind p-nek primitiv gyöke.

5. A megelőzők alapján most már kimutathatjuk a bevezetésben felállított tétel helyességét.

Hogy 3 p-nek primitiv gyöke az onnan következik, hogy miként 3-ban kimutattuk, p-nek quadratikus nem-maradéka és minden quadratikus nem-maradék egyszersmind p-nek primitiv gyöke (4.)

Hogy pedig $\frac{p+1}{3}$ is primitív gyöke p-nek, az a következőképen látható be. 3 primitív gyök, ennek következtében

$$3^{p-1} \equiv 3^{2^m} \equiv 1 \pmod{p};$$

de ez így is írható

$$3^{2^m} \equiv p+1 \pmod{p};$$

$p+1$ azonban osztható 3-mal, mert

$$p+1 = 12k+6 = 3(4k+2),$$

úgy hogy az utolsó kongruenczia mindkét oldalán 3-mal oszthatunk. Ha ezt megteszszük lesz

$$\frac{p+1}{3} \equiv 3^{2^m-1} \pmod{p},$$

de minthogy 3 primitív gyök és 2^m-1 a $p-1=2^m$-hez képest relatív törzsszám, azért innen már következik, hogy $\frac{p+1}{3}$ a p-nek primitív gyöke.

II. Tétel. *Ha* $p=8n+1$ *és* n *törzsszámok továbbá* $n > 5$, *akkor*

$$3 \quad \text{és} \quad \frac{p+1}{3}$$

a p*-nek primitív gyökei.*

Bebizonyítás. 1. *A* $p=8n+1$ *törzsszám az* n*-re vonatkozó feltétel teljesülése mellett a*

$$p=12k+5$$

alakra hozható. Az n törzsszám (mod. 3) a következő értékeket veheti fel:

$$0, \ 1, \ 2.$$

Ha azonban p törzsszám, akkor n (mod. 3) sem 0 sem 1 nem lehet. Az $n \equiv 0$ (mod. 3) eset lehetőségét kizárja az a körülmény, hogy n törzsszám. Az $n \equiv 1$ (mod. 3) kongruenczia pedig azért van kizárva, mert különben kellene, hogy p 3-mal osztható legyen, mert ekkor

$$p=8n+1=8(n-1)+9$$

kifejezésben

$$n-1\equiv 0 \pmod 3;$$

ha tehát p törzsszám, akkor az $n\equiv 1 \pmod 3$ kongruenczia fennállása ki van zárva.

Még csak egy lehetőség marad fenn, a melynek most már be is kell következnie, t. i. az hogy

$$n\equiv 2 \pmod 3,$$

de akkor

$$p=8n+1=8(3l+2)+1=24l+17$$
$$=12k+5,$$

a hol k és l egész számokat jelentenek. De ezzel a tétel ki van mutatva.

2. *3 a p-nek quadratikus nemmaradéka.* Ugyanis a reciprocitási tétel alapján

$$\left(\frac{3}{p}\right)=\left(\frac{3}{12k+5}\right)=\left(\frac{12k+5}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)=-1.$$

3. Az a kitevő, a melyhez 3 (mod. p) tartozik, minden esetre

$$p-1=8n$$

pozitiv osztója. De minthogy n törzsszám, $(p-1)$-nek összes osztói:

$$1, 2, 4, 8, n, 2n, 4n, 8n.$$

De mivel 3 a p-nek quadratikus nem-maradéka, az

$$1, 2, 4, n, 2n$$

kitévők ki vannak zárva mert

$$3^{\frac{p-1}{2}}\equiv 3^{4n}\equiv -1 \pmod p.$$

3 a 8 kitevőhöz sem tartozhat, mert

$$3^8-1\equiv(3^4-1)(3^4+1)\equiv$$
$$\equiv 80 . 82\equiv 2^5 . 5 . 41 \pmod p$$

és a $p=4n+1$ törzsszámban $n>5$ lévén,

$$2^5 . 5 . 41$$

és így a vele kongruens 3^8-1 sem osztható p-vel.

Minthogy 3 a 8 kitevőhöz sem tartozik, kell tehát, hogy a $p-1=8n$ kitevőhöz tartozzék, de ekkor primitiv gyöke is a p-nek.

4. $\frac{p+1}{3}$ *a p-nek primitív gyöke.* Minthogy 3 a p primitiv gyöke

$$3^{p-1} \equiv 3^{8n} \equiv 1 \pmod{p};$$

de ez így is írható

$$3^{8n} \equiv p+1 \pmod{p};$$

$p+1$ — a mint a

$$p+1=(12k+5)+1=3(4k+2)$$

egyenlőségből látható — 3-mal osztható, tehát az utolsó kongruenczia mindkét oldalát 3-mal oszthatjuk, a nélkül, hogy a moduluson változtatnunk kellene, mert ez 3-hoz képest relatív törzsszám. Ha ezt megteszszük, kapjuk, hogy

$$\frac{p+1}{3} \equiv 3^{8n-1} \pmod{p}$$

és minthogy 3 p-nek primitív gyöke $8n-$ pedig a $p-1=8n$-hez képest relatív törzsszám, ezzel ki van mutatva, hogy $\frac{p+1}{3}$ is p-nek primitív gyöke.

Klimkó Mihály.

A BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓK NEHÁNY ELEMI TULAJDONSÁGA.

1. A binomiális együtthatóknak néhány igen egyszerű tulajdonságára akarom felhívni a figyelmet, a mely eddig — tudtommal legalább — nem volt ismeretes. Általánosan ismert képlet az, a mely megadja két szám összegének binomiális együtthatóját kifejezve az egyes összeadandók binomiális együtthatóiban. Közelfekvő gondolat az, hogy ily képletet állítsunk fel azokra az esetekre is, midőn nem két, hanem három négy, ..., m összeadandóból áll az összeg.

Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható tudvalevőleg az n elemből képezhető k-ad osztályú kombinációk számát adja meg. Bontsuk fel az n elemet m számú $n_1, n_2, \ldots, n_m$ elemű csoportra, úgy hogy tehát

$$n_1+n_2+\ldots+n_m=n$$

legyen. Most az összes kombinációkat csoportokba osztjuk a szerint, hogy hány elemet tartalmaznak az $n_1, n_2, \ldots, n_m$ elemű csoportokból. Egy ily csoport például az, a melynél magából az n_1 elemből van k elem, és a többiből egy sincs, úgy hogy ez a csoport

$$\binom{n_1}{k}=\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{0}\cdots\binom{n_m}{0}$$

kombinációból áll. Ha az n_1 elemből van k—1, az n_2-ből 1 elem, és a többiből egy sincsen, akkor az ilyen kombinációk száma:

$$\binom{n_1}{k-1}\binom{n_2}{1}=\binom{n_1}{k-1}\binom{n_2}{1}\binom{n_3}{0}\cdots\binom{n_m}{0}$$

Egy harmadik csoportja a kombinációknak lehet olyan, hogy n_1 elemből $k-3$, n_2 elemből 2, n_3-ból 1, és a többiből 0 elem van, ez a csoport

$$\binom{n_1}{k-3}\binom{n_2}{2}\binom{n_3}{1}\binom{n_4}{0}\cdots\binom{n_m}{0}$$

kombinációt tartalmaz. Ezekből a példákból már látható, hogy egy csoport általános alakjában az n_1 elemű csoportból i_1, az n_2 eleműből i_2, ... és végre az n_m elemű csoportból i_m elem fordul elő, úgy hogy

$$i_1 \leqq n_1,\ i_2 \leqq n_2,\ \ldots,\ i_m \leqq n_m$$

és

$$i_1+i_2+\cdots+i_m=k.$$

Ez a csoport természetesen

$$\binom{n_1}{i_1}\binom{n_2}{i_2}\cdots\binom{n_m}{i_m}$$

kombinációból fog állani. Ha ily módon képezzük az összes különböző csoportokat, és az ezekben foglalt kombinációkat összeadjuk, akkor megkapjuk az n elemből képezhető összes k-adosztályú kombinációk számát, úgy hogy lesz:

$$\binom{n_1+n_2+\cdots+n_m}{k}=\sum\binom{n_1}{i_1}\binom{n_2}{i_2}\cdots\binom{n_m}{i_m}$$

a hol az összegezés az $i_1, i_2, \ldots, i_m$ indexek amaz értékeire kiterjesztendő, a melyek az

$$i_1 \leqq n_1,\ i_2 \leqq n_2,\ \ldots,\ i_m \leqq n_m$$

$$i_1+i_2+\cdots+i_m=k.$$

relációknak felelnek meg.

Ha most felveszszük, hogy

$$n_1=n_2=\cdots=n_m=a,$$

akkor a következő képletet nyerjük:

$$\binom{ma}{k}=\sum_{(i)}\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\cdots\binom{a}{i_m} \qquad (1)$$

a hol

$$i_1 \leqq a, \quad i_2 \leqq a, \ldots, i_m \leqq a$$
$$i_1+i_2+\cdots+i_m=k.$$

Minthogy a szorzatban a tényezők egészen egyenlő ranguak, felírhatjuk még azt is, hogy

$$\binom{ma}{k}=\sum_{(j)}\binom{m}{j_1}\binom{m}{j_2}\cdots\binom{m}{j_a}$$

a hol

$$j_1 \leqq m, \ j_2 \leqq m, \ldots, j_a=m$$
$$j_1+j_2+\cdots+j_a=k.$$

Ha ezt az (1) egyenlettel egybevetjük, akkor a következő azonosságot nyerjük:

$$\sum_{(i)}\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\cdots\binom{a}{i_m}=\sum_{(j)}\binom{m}{j_1}\binom{m}{j_2}\cdots\binom{m}{j_m} \qquad (2)$$

a hol

$$i_1+i_2+\cdots+i_m=j_1+j_2+\cdots+j_a=k \leqq ma$$

Vizsgáljuk most közelebbről a nyert képletünket; azt találtuk, hogy:

$$\binom{ma}{k}=\sum_{(i)}\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\cdots\binom{a}{i_m},$$

hol

$$i_1 \leqq a, \quad i_2 \leqq a, \ldots, i_m \leqq a$$
$$i_1+i_2+\cdots+i_m=k.$$

Minthogy az i indexeknek bárminő permutálása meg van engedve, azért közvetlenül világos az, hogy a $\sum_{(i)}\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\cdots\binom{a}{i_m}$ összegben ugyanaz a tag többször is elő fog fordulni; érdekes alakot nyerünk, ha megteszszük a lehetséges összevonásokat. Talált képletünk azt az utasítást adja, hogy a k számot fel kell bontanunk minden lehető módon és sorrendben annyi számnak az összegére, a hány egység foglaltatik az m-ben; ezen összeadandók általában nem mind különböző számok, hanem lesznek köztük egyenlők is; tegyük fel, hogy egy ilyen felbontásnál az m számú i

között az összes különbözők legyenek $j_1, j_2, \ldots, j_l$, továbbá j_1 forduljon elő ρ_1-szer, j_2 ρ_2-szer, ... és végre j_l ρ_l-szer, ekkor az $\binom{a}{j_1}^{\rho_1}\binom{a}{j_2}^{\rho_2}\cdots\binom{a}{j_l}^{\rho_l}$ tag könnyen beláthatólag $\frac{m!}{\rho_1!\,\rho_2!\ldots\rho_l!}$-szer fog előfordulni, minthogy m számú elem közül, a melyek között $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_l$ van egyenlő, ugyanennyi külömböző permutáczió képezhető. Ha ily módon összefoglaljuk az összes egyenlő tagokat, akkor végre azt kapjuk, hogy:

$$\binom{ma}{k}=\sum_{(j)}\frac{m!}{\rho_1!\,\rho_2!\ldots\rho_l!}\binom{a}{j_1}^{\rho_1}\binom{a}{j_1}^{\rho_2}\cdots\binom{a}{j_l}^{\rho_l} \qquad (3)$$

a hol a következő feltételi egyenletek állanak fenn:

$$j_1 \leqq a,\quad j_2 \leqq a, \ldots j_l \leqq a$$
$$\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_l=m$$
$$\rho_1 j_1+\rho_2 j_2+\cdots+\rho_l j_l=k$$

és a hol a j indexek permutálása többé már nincs megengedve.

Példaképen alkalmazzuk most a (3) alatti képletet egy numerikus esetre. Fejtsük ki $\binom{5a}{6}$ binomiális együtthatót. A fentiekben vázolt eljárás kivitele után azt kapjuk, hogy

$$\binom{5a}{6}=\frac{5!}{4!}\binom{a}{6}+\frac{5!}{3!}\binom{a}{5}\binom{a}{1}+\frac{5!}{3!}\binom{a}{4}\binom{a}{2}+$$
$$+\frac{5!}{2!\,2!}\binom{a}{4}\binom{a}{1}^2+\frac{5!}{2!\,3!}\binom{a}{3}^2+\frac{5!}{2!}\binom{a}{3}\binom{a}{2}\binom{a}{1}+$$
$$+\frac{5!}{3!}\binom{a}{3}\binom{a}{1}^3+\frac{5!}{3!\,2!}\binom{a}{2}^3+\frac{5!}{2!\,2!}\binom{a}{2}^2\binom{a}{1}^2+\frac{5!}{4!}\binom{a}{2}\binom{a}{1}^4$$

2. Vizsgálataimnak másik része az $\binom{ma}{a}$ alakú binomiális együtthatók oszthatósági viszonyaira vonatkozik. Ezen a téren a következő két eredményre jutottam:

$\binom{ma}{a}$ *mindig osztható* m*-el, és* $(m-1)\,a+1$*-el.*

A bebizonyítások rendkívül egyszerűek, csupa azonos átalakításon alapszanak.

$$\binom{ma}{a} = \frac{ma\,(ma-1)\,\ldots\,[(m-1)\,a+1]}{a!} =$$

$$= m\,\frac{(ma-1)\,\ldots\,[m-1)\,a+1]}{(a-1)!} = m\binom{ma-1}{a-1} \qquad (4)$$

A második oszthatósági tétel bebizonyítása meg a következő:

$$\binom{ma}{a} = \frac{ma\,(ma-1)\,\ldots\,[(m-1)\,a+1]}{a!}$$

$$\frac{\binom{ma}{a}}{(m-1)\,a+1} = \frac{ma\,(ma-1)\,\ldots\,[(m-1)\,a+2]}{a!} =$$

$$= \frac{(ma)!}{[(m-1)\,a+1]!\;a!} = \frac{[(m-1)\,a+1](ma)! - (m-1)\,a\,(ma)!}{[(m-1)\,a+1]!\;a!}$$

De minthogy:

$$\frac{[(m-1)\,a+1](ma)!}{[(m-1)\,a+1]!\;a!} = \frac{(ma)!}{[(m-1)\,a]!\;a!} = \binom{ma}{a}$$

$$\frac{(m-1)\,a\,(ma)!}{[(m-1)\,a+1]!\;a!} = (m-1)\,\frac{(ma)!}{[(m-1)\,a+1]!\,(a-1)!} =$$

$$= (m-1)\binom{ma}{a-1}$$

azért végre lesz:

$$\frac{\binom{ma}{a}}{(m-1)\,a+1} = \binom{ma}{a} - (m-1)\binom{ma}{a-1} \qquad (5)$$

Abban a speciális esetben, midőn $m=2$, azt kapjuk, hogy $\binom{2a}{a}$ mindig osztható 2-vel és $(a+1)$-el.

Ifj. Szily Kálmán.

AZ INVARIÁNSOK ELMÉLETÉNEK ALAPTÉTELÉRŐL.

(Második közlemény.)

II.

3. *Jelentse*

$$F_1, F_2, F_3, \ldots, F_s, \ldots$$

az

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

változók bizonyos adott homogén egész függvényeinek határtalan sorozatát, akkor mindig található oly m pozitiv egész szám, hogy bármely F_s ily alakban állítható elő

$$F_s = A_{1s}F_1 + A_{2s}F_2 + \cdots + A_{hs}F_h + \cdots + A_{ms}F_m,$$

hol az A_{hs}-k a független változóknak alkalmasan választott homogén egész függvényei.

Magától értetődik, hogy itt (és minden hasonló szerkezetű aggregatumban) minden egyes A_{hs} együttható (ha csak nem zérus) fokszámát úgy választjuk, hogy az $A_{hs}F_h$ szorzat foka megegyezzék F_s fokával. Ha ugyanis más szorzatok is fordulnának elő, ezek az összevonásnál egymást kölcsönösen megsemmisítenék, tehát kezdettől fogva zérusokkal pótolhatók.

A tétel abban a határesetben is bir értelemmel, midőn $n=0$, vagyis mikor az F_s-ek puszta számértékek s ekkor közvetetlenül belátható. Valóban, ha az F_s-ek közt van egy a zérustól különböző F_m, akkor minden F_s ily alakban állítható elő:

$$F_s = A_{1s}F_1 + A_{2s}F_2 + \cdots + A_{ms}F_m,$$

hol

$$A_{1s} = A_{2s} = \cdots = A_{m-1s} = 0$$

és A_{ms} az F_s-nek F_m-mel való hányadosa. Ha ellenben minden F_s zérus, akkor

$$F_s = F_1$$

tehát

$$m=1, \qquad A_{1s}=1.$$

Minden más esetre a tétel *teljes indukcióval* terjeszthető ki, vagyis ki fogjuk mutatni, hogy ha a tétel $(n-1)$ változós függvényekre helyes, akkor n változó esetében sem veszti el érvényességét.

Ennek igazolásánál jelentse f_s az F_s-nek x_n-től ment részét.

Ha az

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_s, \ldots$$

sorozat csupa zérusból áll, akkor legyen

$$F_s^{(1)} = F_s$$

Ellenkező esetben jelöljük az első f_s-t, mely nem zérus, f_α-val; a reá következő f_s-k közül legyen f_β az első, a mely nem állítható elő mint f_α-nak és az

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

valamely alkalmasan választott homogén egész függvényének szorzata; továbbá f_γ legyen az első f_s, mely nem állítható elő mint f_α és f_β *lineáris kombinációja*, azaz nem hozható az

$$a_{\alpha s} f_\alpha + a_{\beta s} f_s$$

alakra, hol

$$a_{\alpha s}, \quad a_{\beta s}$$

az

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

alkalmasan választott homogén egész függvényei; f_δ legyen az első f_s, mely nem állítható elő mint f_α, f_β és f_γ lineáris kombinációja; stb.

Ha tételünk $(n-1)$ változó esetére igaz, akkor az

$$f_\alpha, f_\beta, f_\gamma, f_\delta, \ldots$$

sorozat előbb utóbb egy bizonyos f_λ-val véget ér s bármely f_s mint

$$f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$$

lineáris kombinációja állítható elő.

Képletben

$$f_s = l_s(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda) \equiv a_{\alpha s} f_\alpha + a_{\beta s} f_\beta + \cdots + a_{\lambda s} f_\lambda,$$

hol

$$a_{\alpha s}, a_{\beta s}, \ldots, a_{\lambda s}$$

az

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

alkalmasan választott homogén egész függvényei. Ha most már

$$\begin{aligned} F_s^{(1)} &= F_s - l_s(F_\alpha, F_\beta, \ldots, F_\lambda) \\ &= F_s - (a_{\alpha s} F_\alpha + a_{\beta s} F_\beta + \cdots + a_{\lambda s} F_\lambda), \end{aligned}$$

akkor e különbség az

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

oly homogén egész függvénye, mely F_s-sel egyenlő fokú, de ennél annyiban egyszerűbb szerkezetű, hogy x_n-től ment tagokat nem tartalmaz.

Az

$$F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, F_3^{(1)}, \ldots, F_s^{(1)}, \ldots$$

sorozatról, most már oly

$$F_1^{(2)}, F_2^{(2)}, F_3^{(2)}, \ldots, F_s^{(2)}, \ldots$$

homogén függvényekre térünk át, a melyekben már x_n első hatványa sem fordul elő.

Ha már maguk az összes $F_s^{(1)}$-ek ilyenek volnának, akkor legyen

$$F_s^{(2)} = F_s^{(1)}.$$

Ha azonban az $F_s^{(1)}$-ek maguk még nem ilyenek, akkor jelöljük $x_n f_s^{(1)}$-gyel $F_s^{(1)}$-nek azt a részét, mely x_n-et épen az első hatványon tartalmazza, s vizsgáljuk meg az

$$f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_s^{(1)}, \ldots$$

sorozatot.

Lehetséges, hogy ennek minden egyes eleme az

$$f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$$

lineár kombinációja, azaz bármely $f_s^{(1)}$ ily alakban állítható elő:

$$f_s^{(1)} = l_s^{(1)}(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda) \equiv a_{\alpha s}^{(1)} f_\alpha + a_{\beta s}^{(1)} f_\beta + \cdots + a_{\lambda s}^{(1)} f_\lambda,$$

akkor legyen

$$F_s^{(2)} = F_s^{(1)} - l_s^{(1)}(x_n F_\alpha, x_n F_\beta, \ldots, x_n F_\lambda).$$

Az ellenkező esetben — midőn csak a tétel $(n-1)$ változó esetében helyes — lehet az $f_s^{(1)}$-ek közül egy oly véges

$$f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, \; f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \; f_{\gamma^{(1)}}^{(1)}, \; f_{\delta^{(1)}}^{(1)}, \; \ldots, \; f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}$$

sorozatot kiválasztani, hogy $f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}$ nem állítható elő mint

$$f_\alpha, \; f_\beta, \; \ldots, \; f_\lambda$$

lineár kombinációja, $f_{\beta^{(1)}}^{(1)}$ nem állítható elő mint

$$f_\alpha, \; f_\beta, \; \ldots, \; f_\lambda, \; f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}$$

lineár kombinációja, $f_{\gamma^{(1)}}^{(1)}$ nem állítható elő mint

$$f_\alpha, \; f_\beta, \; \ldots, \; f_\lambda, \; f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, \; f_{\beta^{(1)}}^{(1)}$$

lineár kombinációja, s i. t., de az

$$f_\alpha, \; f_\beta, \; \ldots, \; f_\lambda, \; f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, \; f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \; \ldots, \; f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}$$

függvényekből bármelyik $f_s^{(1)}$ az

$$f_s^{(1)} = l_s^{(1)}(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda^{(1)}}^{(1)})$$

alakban nyerhető, hol $l_s^{(1)}$ a benne felsorolt elemeknek oly homogén lineár kapcsolata, melyben az együtthatók

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; \ldots, \; x_n$$

alkalmasan választott homogén egész függvényei. Ebben az esetben legyen

$$F_s^{(2)} = F_s^{(1)} - l_s^{(1)}(x_n F_\alpha, x_n F_\beta, \ldots, x_n F_\lambda, F_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, F_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ldots, F_{\lambda^{(1)}}^{(1)}).$$

Mind a három esetben $F_s^{(1)}$ és $F_s^{(2)}$ egyenlő fokúak.

Egészen hasonlóan térünk most már át oly

$$F_1^{(3)},\ F_2^{(3)},\ F_3^{(3)},\ \ldots,\ F_s^{(3)},\ \ldots$$

függvényekre, a melyekben az x_n-nek négyzetét tartalmazó rész is hiányzik s csak x_n magasabb hatványai fordulnak elő.

Ha már maguk az $F_s^{(2)}$-k ilyenek, akkor legyen

$$F_s^{(3)}=F_s^{(2)}.$$

Ha azonban az $F_s^{(2)}$-k maguk még nem ilyenek, akkor jelöljük $x_n^2 f_s^{(2)}$-vel $F_s^{(2)}$-nek azt a részét, a mely x_n-t épen a második hatványon tartalmazza s vizsgáljuk meg az

$$f_1^{(2)},\ f_2^{(2)},\ f_3^{(2)},\ \ldots,\ f_s^{(2)},\ \ldots$$

sorozatot.

Abban az egyszerűbb esetben, midőn e sorozat minden egyes eleme az

$$f_\alpha,\ f_\beta,\ \ldots,\ f_\lambda,\ f_{\alpha^{(1)}}^{(1)},\ f_{\beta^{(1)}}^{(1)},\ \ldots,\ f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}$$

lineár kombinációja, azaz

$$f_s^{(2)}=l_s^{(2)}(f_\alpha,\ f_\beta,\ \ldots,\ f_\lambda,\ f_{\alpha^{(1)}}^{(1)},\ f_{\beta^{(1)}}^{(1)},\ \ldots,\ f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}),$$

legyen

$$F_s^{(3)}=F_s^{(2)}-l_s^{(1)}\,(x_n^2F_\alpha,\ x_n^2F_\beta,\ \ldots,\ x_n^2F_\lambda,\ x_nF_{\alpha^{(1)}}^{(1)},\ x_nF_{\beta^{(1)}}^{(1)},\ldots,x_nF_{\lambda^{(1)}}^{(1)}).$$

Abban az általánosabb esetben, mikor a $f_s^{(2)}$-k nem állíthatók elő mint

$$f_\alpha,\ f_\beta,\ \ldots,\ f_\lambda,\ f_{\alpha^{(1)}}^{(1)},\ f_{\beta^{(1)}}^{(1)},\ \ldots,\ f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}$$

lineár kombinációi, — feltéve, hogy a tétel $(n-1)$ változó esetében helyes — lehet az $f_s^{(2)}$-k közül egy oly véges

$$f_{\alpha^{(2)}}^{(2)},\ f_{\beta^{(2)}}^{(2)},\ f_{\gamma^{(2)}}^{(2)},\ \ldots,\ f_{\lambda^{(2)}}^{(2)}$$

sorozatot kiválasztani, hogy az

$$f_\alpha,\ f_\beta,\ \ldots,\ f_\lambda,\ f_{\alpha^{(1)}}^{(1)},\ f_{\alpha^{(1)}}^{(1)},\ \ldots,\ f_{\lambda^{(1)}}^{(1)},\ f_{\alpha^{(2)}}^{(2)},\ f_{\beta^{(2)}}^{(2)},\ \ldots,\ f_{\lambda^{(2)}}^{(2)}$$

sorozat egyik eleme sem fejezhető ki mint az őt megelőzőknek

lineár kombinációja, ellenben valamennyi $f_s^{(2)}$ ily alakban állítható elő

$$f_s^{(2)} = l_s^{(2)}(f_\alpha, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}, f_{\alpha^{(2)}}^{(2)}, \ldots, f_{\lambda^{(2)}}^{(2)})$$

hol $l_s^{(2)}$ a benne előforduló függvényeknek oly homogén lineár kapcsolata, melyben az együtthatók

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

homogén egész függvényei.

Ekkor legyen

$$F_s^{(3)} = F_s^{(2)} - l_s^{(2)}(x_n^2 F_\alpha, \ldots, x_n^2 F_\lambda, x_n F_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, \ldots, x_n F_{\lambda^{(1)}}^{(1)}, F_{\alpha^{(2)}}^{(2)}, \ldots, F_{\alpha^{(2)}}^{(2)}).$$

Mind a három esetben $F_s^{(2)}$ és $F_s^{(3)}$ egyenlő fokúak.

Ez az eljárás határtalanul folytatható, azaz bármely egész számot jelentse is r, a leírt módon r lépés után az F_s-ekből oly $F_s^{(r)}$-eket képezhetünk, melyekben x_n-nek már csak r-dik és magasabb hatványai fordulnak elő.

Minden egyes lépésnél ugyanazok az esetek különböztetendők meg, mint a kezdő lépéseknél, ámde — a mi különösen figyelemre méltó — *a legáltalánosabb eset nem ismétlődhetik határtalanúl.* Legyenek ugyanis a π-dik, a τ-dik stb. lépések azok, melyeknél a legáltalánosabb eset következik be. Ha ezeknek szorzata határtalan volna, akkor az

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

homogén egész függvényeinek oly

$$f_{\alpha^{(\pi)}}^{(\pi)}, f_{\beta^{(\pi)}}^{(\pi)}, \ldots, f_{\lambda^{(\pi)}}^{(\pi)}, f_{\alpha^{(\tau)}}^{(\tau)}, f_{\beta^{(\tau)}}^{(\tau)}, \ldots, f_{\lambda^{(\tau)}}^{(\tau)}, \ldots$$

határtalan sorozatát nyernők, melyben egy függvény sem fejezhető ki mint a megelőzőknek lineáris kombinációja. Ily sorozat azonban — ha a tétel $(n-1)$ változó esetében érvényes — nem lehetséges, tehát egy bizonyos w-dik lépés után a legáltalánosabb eset többé nem következhetik be.

Most már bármely F_s mint

$$\begin{aligned} &F^{(\pi)}_{\alpha^{(\pi)}},\ F^{(\pi)}_{\beta^{(\pi)}},\ \ldots,\ F^{(\pi)}_{\lambda^{(\pi)}},\\ &F^{(\tau)}_{\alpha^{(\tau)}},\ F^{(\tau)}_{\beta^{(\tau)}},\ \ldots,\ F^{(\tau)}_{\lambda^{(\tau)}},\\ &\qquad\ldots,\\ &F^{(w)}_{\alpha^{(w)}},\ F^{(w)}_{\beta^{(w)}},\ \ldots,\ F^{(w)}_{\lambda^{(w)}} \end{aligned} \qquad 7)$$

lineáris kombinációja állítható elő.

Jelentse ennek igazolásánál r az F_s-nek fokát. Az előbb leírt eljárás értelmében

$$\begin{aligned} F_s^{(r+1)} &= F_s^{(r)} - l_s^{(r)},\\ F_s^{(r)} &= F_s^{(r-1)} - l_s^{(r-1)},\\ &\ldots\\ F_s^{(1)} &= F_s - l_s, \end{aligned} \qquad 8)$$

hol az l-ek a (7) alatti függvényeknek x_n bizonyos hatványaival való szorzataiknak lineáris kombinációi, tehát maguknak a 7) alatti függvényeknek is lineáris kombinációi, a mennyiben x_n illető hatványai az együtthatókhoz csatolhatók.

Az $F_s^{(r+1)}$ függvény keletkezésének módjánál fogva osztható x_n^{r+1}-gyel, noha csak r-ed fokú.

Ez csak úgy lehetséges, hogy

$$F_s^{(r+1)} \equiv 0.$$

De akkor a (8) alatti egyenletek értelmében

$$F_s^{(r)},\ F_s^{(r-1)},\ \ldots,\ F_s^{(1)},$$

rendre mindannyian a 7) alatti függvényeknek lineáris kombinációi s végre maguk a F_s-ek is azok.

A 7) alatti függvények viszont a

$$\begin{aligned} &F_{\alpha^{(\pi)}},\ F_{\beta^{(\pi)}},\ \ldots,\ F_{\lambda^{(\pi)}},\\ &F_{\alpha^{(\tau)}},\ F_{\beta^{(\tau)}},\ \ldots,\ F_{\lambda^{(\tau)}},\\ &\qquad\ldots,\\ &F_{\alpha^{(w)}},\ F_{\beta^{(w)}},\ \ldots,\ F_{\lambda^{(w)}} \end{aligned} \qquad 9)$$

függvényekből lineáris kombinálás révén keletkeztek, ennélfogva *bármely F_s a 9) alatti függvények lineáris kombinációja.*

Ha tehát a szóban forgó tétel $(n-1)$ változó esetében helyes, akkor n változós függvényekre is érvényes. Még pedig

$$m=\lambda^{(w)}.$$

Amde a legegyszerűbb esetben, midőn a változók száma zérus, a tétel közvetlenül be volt látható, tehát rendre 1, 2, 3 s akárhány változó esetében is helyes.

Jegyzet. A bebizonyított tétel nem veszti el érvényességét, ha benne *homogén egész függvény* helyett mindenütt (tehát az A együtthatókra vonatkozólag is) a következő kitételek valamelyikét teszszük:

1) *egész számú együtthatókkal biró homogén egész függvény,*

2) *egész függvény,*

3) *egész számú együtthatókkal biró egész függvény.*

A mi az 1) módosítást illeti, úgy az csak az $n=0$ esetben szorul *új* bebizonyításra, az $(n-1)$-ről n-re való következtetés lépésről lépésre ismételhető.

A mi pedig a *homogén* jelző elhagyását illeti, úgy az

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

bármely F_s *egész* függvénye mint egy $\overline{F}_s$ $(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *homogén egész* függvénynek az $x=1$ helyettesítésnél kiadódó értéke fogható fel.

Ha most már az

$$\overline{F}_1, \quad \overline{F}_2, \quad \overline{F}_3, \quad \ldots$$

sorozathoz megkeressük a bebizonyított tételnek vagy az 1) módosításnak megfelelő

$$\overline{F}_1, \quad \overline{F}_2, \quad \ldots, \quad \overline{F}_m$$

függvényeket s itt x helyébe az egységet helyettesítjük, akkor belőlük megkapjuk a 2) illetve 3) módosításnak megfelelő

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_m$$

függvényeket.

Az 1) módosítás az $n=0$ esetben most már következőleg igazolható.

Az adott

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \ldots, \quad c_s, \quad \ldots$$

egész számok sorozatában legyen c_μ az első zérustól különböző szám; a reá következők közül $c_{\mu'}$ legyen az első, mely vele nem osztható; ez a $c_{\mu'}$ a következő alakra hozható

$$c_{\mu'}=q'c_{\mu}+r_{\mu'}$$

hol q' egész szám és $r_{\mu'}$ a c_{μ} felénél abszolut értékre nézve nem nagyobb egész szám; a $c_{\mu'}$ után következő számok közül legyen $c_{\mu''}$ az első, mely nem osztható $r_{\mu'}$-vel, hanem

$$c_{\mu''}=q''r_{\mu'}+r_{\mu''}$$

alakú, hol q' egész szám, továbbá $r_{\mu''}$ a $r_{\mu'}$ felénél abszolut értékre nézve nem nagyobb pozitiv vagy negativ egész szám; a sorozat további számai közül $c_{\mu'''}$ legyen az első, mely $r_{\mu''}$-vel nem osztható, hanem

$$c_{\mu'''}=q'''r_{\mu''}+r_{\mu'''}$$

alakú; stb.

Az így nyert

$$r_{\mu'},\ r_{\mu''},\ r_{\mu'''},\ \ldots$$

sorozat tagjai abszolut értékre nézve folyvást kisebbek és kisebbek, továbbá mindannyian a zérustól különböző egész számok. Ez csak úgy lehetséges, hogy e sorozat előbb utóbb egy oly $r_{\mu}^{(u)}$-val ér véget, mely a $c_{\mu}^{(u)}$ után következő valamennyi c_s-ben maradék nélkül foglaltatik.

Az

$$\begin{aligned} r_{\mu'} &= c_{\mu'} - q' c_{\mu} \\ r_{\mu''} &= c_{\mu''} - q'' r_{\mu'} \\ r_{\mu'''} &= c_{\mu'''} - q''' r_{\mu''} \\ &\ldots \\ r_{\mu}^{(u)} &= c_{\mu}^{(u)} - q^{(u)} r_{\mu}^{(u-1)} \end{aligned}$$

egyenletekből

$$r_{\mu}^{(u)}=c_{\mu}^{(u)}-q^{(u)}c_{\mu}^{(u-1)}+q^{(u)}q^{(u-1)}c_{\mu}^{(u-2)}+\ldots+(-1)^{u+1}q^{(u)}q^{(u-1)}\ldots q^{1}c_{\mu},$$

vagyis $r_{\mu}^{(u)}$ s vele a $c_{\mu}^{(u)}$ után következő c_s-ek

$$c_{\mu},\ c_{\mu'},\ \ldots,\ c_{\mu}^{(u)}$$

bizonyos egész többeseinek aggregatumai.

A tétel 1) módosítása e szerint az $n=0$ esetében, azaz egész számokból álló sorozatokra vonatkozólag, valóban érvényes. Még pedig

$$m=\mu^{(u)}.$$

4. *Ha adva van az*

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

változók bizonyos homogén egész függvényeinek valamely végtelen sokasága, akkor abban mindig található oly véges számú

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ \ldots,\ F_m$$

függvény, melyekből a sokaság bármely más függvénye az

$$F=A_1F_1+A_2F_2+A_3F_3+\cdots+A_hF_h+\cdots+A_mF_m$$

alakban fejezhető ki, hol az A_h együtthatók a független változóknak alkalmasan választott homogén egész függvényei.

A vizsgálandó sokaságot akként képzeljük megadva, hogy valamely törvény segitségével bármely függvényről eldönthető valjon a sokasághoz tartozik-e vagy sem. Ha a törvény olyan, hogy a sokaságba tartozó függvénynek *sorozatba* rendezhetők, akkor a tétel az imént bebizonyítottal azonos. Ha azonban a vizsgálandó sokaságban foglalt függvények nem rendezhetők sorozatba, a tétel még csak bebizonyítandó.

Tegyük tehát fel, hogy egy bizonyos sokaságból nem lehet oly véges számú függvényt kiválasztani, melyeknek a többiek lineáris kombinációi. Ekkor válaszszuk ki a sokaságból annak tetszőleges F_1 függvényét; továbbá legyen F_2 a sokaság egy oly függvénye, mely nem állítható elő az A_1F_1 alakban, hol A_1 az $x_1x_2\ldots x_n$ valamely homogén egész függvénye; F_3 legyen a sokaság egy oly függvénye, mely nem állítható elő az

$$A_1F_1+A_2F_2$$

alakban; F_4 legyen a sokaság egy oly függvénye, mely nem állítható elő az

$$A_1F_1+A_2F_2+A_3F_3$$

alakban; s i. t. Feltevésünk értelmében az

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ \ldots$$

sorozat határtalanul folytatható, noha egyetlen egy függvénye sem fejezhető ki mint az őt megelőzőknek lineáris kombinációja. De ez ellenkezik a 3) alatti tétellel. Tett feltevésünk tehát nincs megengedve, hanem a kimondott tétel minden sokaságra érvényes.

Az előbbi jegyzetben említett módosítások e tételnél is meg vannak engedve.

III.

5. Az invariáns-elméletben az adott

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(j)}, \ldots, f^{(k)}$$

alakrendszer együtthatói határozatlanoknak tekintetnek s az invariánsok e határozatlanoknak bizonyos homogén egész függvényei. A 4) alatti tétel értelmében tehát a rendszer invariánsai közt kell oly véges számú

$$i_1, i_2, \ldots, i_h, \ldots, i_m$$

invariánsnak léteznie, melyekből a többiek

$$i = A_1 i_1 + A_2 i_2 + \cdots + A_h i_h + \cdots + A_m i_m$$

alakban fejezhetők ki, hol az A_h-k az alakrendszer együtthatóinak homogén egész függvényei.

Sőt az A_h-k oly B_h-kal pótolhatók, melyek épúgy mint az invariánsok, az alakrendszer minden egyes alakjának együtthatóiban külön-külön homogének.

Ugyanis legyenek

$$i, i_1, i_2, \ldots, i_h, \ldots, i_m$$

pusztán mint $f^{(j)}$ együtthatóinak függvényei rendre

$$r, r_1, r_2, \ldots, r_h, \ldots, r_m$$

fokúak. Akkor bármelyik A_h az

$$A_h = a_h + \beta_h + \gamma_h$$

alakban írható, hol a_h az $f^{(j)}$ együtthatóiban r—r_h fokú tagok összege, β_h az ugyanazon mennyiségekben magasabb mint r—r_h fokú tagoknak összege, γ_h pedig az alacsonyabb fokú tagok összege. Ily módon

$$\begin{aligned} i = {} & a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_m i_m + \\ & + \beta_1 i_1 + \beta_2 i_2 + \cdots + \beta_m i_m + \\ & + \gamma_1 i_1 + \gamma_2 i_2 + \cdots + \gamma_m i_m . \end{aligned}$$

Az első sor tagjai $f^{(j)}$ együtthatóinak r-ed fokú homogén függ-

vényei, ellenben a második és harmadik sor tagjai e mennyiségekben mindannyian magasabb illetve alacsonyabb fokúak. Ennélfogva

$$i = a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_m i_m ,$$

s a második meg harmadik sor külön-külön eltünik.

Az A_h-kat ily módon sikerült oly a_h-kkal pótolni, melyek $f^{(j)}$ együtthatóiban a kivánt szerkezetűek.

Ha a leírt átalakítást először $f^{(1)}$ együtthatóira vonatkozólag, azután a nyert kifejezésben $f^{(2)}$ együtthatóira vonatkozólag, s i. t. rendre elvégezzük, utoljára oly

$$i = B_1 i_1 + B_2 i_2 + \cdots + B_h i_h + \cdots + B_m i_m \qquad 10)$$

előállításhoz jutunk, melyben a B_h-k minden egyes $f^{(j)}$ együtthatóiban külön-külön homogének.

De átalakításunkban még tovább is haladhatunk s a B_h-kat invariánsokkal pótolhatjuk a nélkül, hogy a képlet helyessége megszünnék.

Ugyanis helyettesítsük (10) alatt az adott

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(h)}$$

rendszer együtthatóit az

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinánsú helyettesítéssel transzformált

$$f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, \ldots, f_a^{(h)}$$

rendszer együtthatóival. Az eredeti rendszer i_h invariánsai helyébe akkor

$$a^{p_h} i_h$$

alakú szorzatok lépnek, hol p_h az i_h-nak úgynevezett *indexe.*

A 10) alatti képlet tehát a következőbe megy át

$$a^p i = a^{p_1} B_1(f_a)\, i_1 + a^{p_2} B_2(f_a)\, i_2 + \cdots + a^{p_m} B_m(f_a)\, i_m ,$$

hol

$$B_1(f_a), B_2(f_a), \ldots, B_m(f_a)$$

azokat a kifejezéseket jelentik, melyekbe

$$B_1, B_2, \ldots, B_m$$

a mondott helyettesítésnél átmennek.

Erre a képletre p-szer alkalmazván az I) alatt vizsgált Ω_a mű[2] veletet, leszen

$$\Omega_a^p\{a^p\}.i=\Omega_a^p\{a^{p_1}B_1(f_a)\}.i_1+\Omega_a^p\{a^{p_1}B_2(f_a)\}.i_2+\cdots+$$
$$+\Omega_a^p\{a^{p_m}B_m(f_a)\}.i_m$$

s ha még a zérustól különböző

$$N_p=\Omega_a^p\{a^p\}$$

számmal osztunk, akkor

$$i=I_1i_1+I_2i_2+\cdots+I_hi_h+\cdots+I_mi_m \qquad 11)$$

hol

$$I_p=\frac{1}{N_p}\Omega_a^p\{a^{p_h}B_h(f_a)\}$$

az 1) alatti tétel értelmében invariáns.

A 11) alatti képlet a 10) alattihoz teljesen hasonló, csakhogy benne a B_h-k helyett az I_h invariánsok szerepelnek együtthatókként úgy, mint az célunk volt.

Az I_h invariánsok mindegyike az i-hez hasonlóan mint

$$i_1, i_2, \ldots, i_m$$

oly lineáris kapcsolata fejezhető ki, melyben az együtthatók megint invariánsok, de alacsonyabb indexüek, mint I_h. Az eljárás ismétlésénél az együtthatók mindig alacsonyabb és alacsonyabb indexű invariánsok lesznek, míg végre 0 indexű invariánsokat kapunk együtthatóknak, azaz puszta számokat.

A nyert képleteket most visszafelé arra használhatjuk fel, hogy előbb rendre a fellépett együtthatókat, utoljára pedig magát i-t mint

$$i_1, i_2, \ldots, i_m$$

raczionális egész függvényét fejezzük ki.

Ezzel be van bizonyítva, hogy *bármely adott*

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$$

alakrendszer összes invariánsai mint bizonyos véges számú

$$i_1, i_2, \ldots, i_m$$

invariánsnak raczionális egész függvényei fejezhetők ki.

Ha az

$$i_1, i_2, \ldots, i_m \qquad 12)$$

invariánsok úgy vannak meghatározva, hogy közülök egyik sem fejezhető ki mint a többinek raczionális egész függvénye, akkor ú. n. *alaprendszert* képeznek. Akár alaprendszer a 12) alatti sorozat, akár nem, mindig *teljes invariáns-rendszernek* neveztetik.

*

Az I) alatti Ω_a művelet már CLEBSCH, GORDAN és MERTENS alaktani vizsgálataiban is szerepel. A II. alatti vizsgálatok DEDEKIND, KRONECKER és WEBER H. arithmetikai vizsgálatai által voltak előkészítve. A két disciplina módszereinek egybekapcsolása vezetett a teljes invariáns-rendszerek létezésének évtizedek óta hiába keresett általános bebizonyítására.

Kürschák József.

IRODALOM.

Dr. Woldemar Voigt: Kompendium der theoretischen Physik. In zwei Bänden. Erster Band: Mechanik starrer und nichtstarrer Körper, Wärmelehre. Leipzig, Veit u. Comp. 1895. I—X. és 1—610. l. Ára 14 márka.

A könyv írója, a göttingai tud. egyetemen a physika egyik ismert nevű tanára az előszóból kitetszőleg azzal a rendeltetéssel írta meg a könyvét, hogy azok, akik az elmélet néhány különleges részével már megismerkedtek, az egész elméletet felölelő áttekintést szerezhessenek belőle. Az evégből szükséges rövidséget azáltal vélte czélszerűen elérhetőnek, hogy az elméletnek részletes, kivált pedig különlegesen mathematikai természetű alkalmazásait mellőzze s behatóbban csak az általános physikai jelentőségű problemákat tárgyalja.

Ez az első kötet három fő részre van osztva, a következő czímekkel: merev testek mechanikája, nem-merev testek mechanikája, hőtan. Az első rész négy fejezetből áll: I. Egy anyagi pont mozgása. II. Anyagi pontok rendszerének mozgása. III. Merev testek mozgása. IV. A potentiál-függvények. A második rész öt fejezetre oszlik: I. Nem-merev testek nyugvásának és mozgásának alap-egyenletei. II. Hydrostatika. III. Ideális folyadékok dynamikája. IV. Rugalmasság és akustika. V. Belső surlódás és rugalmas utóhatás. A harmadik rész két fejezetet foglal magában: az első a hőnek és mechanikai erélynek, a második a hőnek és chemiai erélynek egymásba alakulásáról szól. (I. Thermisch-mechanische Umsetzungen. II. Thermisch-chemische Umsetzungen.)

Mindegyik rész után irodalmi szemelvény van csatolva: könyv-jegyzék és a szöveg közé jegyzett idéző számok alatt a forrás-művek czímeinek sorozata szerzőik nevével, megjelenésük helyével és közzétételük évszámával. Az első részhez 118 idéző szám alatt, a másodikhoz 111 alatt, a harmadikhoz 75 alatt van, egy-egy idéző szám alatt helyenkint több közlemény teljes megjelölése is csatolva.

A mechanikával foglalkozó két rész kiterjeszkedik amaz analogiák némelyeire is, a melyeket physikai jelenségek némi mechanikai értelmezé-

sére eddigelé felállítani sikerült. Ilyen tárgyúak a következő czikkelyek: Az első részben: § 8. Konservative Wechselwirkungen allgemeiner Art. Das W. Weber'sche Grundgesetz. § 9. Der Satz vom Virial; kinetische Theorie der Gase und Lösungen. § 10. Weitere Ausbildung der kinetischen Theorie; die mittlere Weglänge der Moleküle. Innere Reibung, adiabatische Erwärmung, Effusion, Diffusion. § 11. Weitere Ausbildung der kinetischen Theorie; das Gesetz der Verteilung der Geschwindigkeiten. § 12. Die Gleichungen von Hamilton und Lagrange. Cyklische Systeme. § 18. Cyklische Systeme, welche starre Körper enthalten. Maxwell's Theorie der Elektrodynamik. A második részben: § 8. Das Gleichgewicht der Elektricität in einem Leitersystem. § 12. Grundgleichungen für die Bewegung imponderabler Fluida innerhalb ponderabler Körper. Strömung von Wärme oder Elektricität in einem Leitersystem und verwandte Erscheinungen. § 13. Die Bewegung imponderabler Fluida innerhalb ponderabler Körper; allgemeine Sätze über den stationären Zustand. § 14. Die Bewegung imponderabler Fluida innerhalb ponderabler Körper; allgemeine Sätze über den veränderlichen Zustand. Diffusion. § 32. Ebene Wellen in einem unendlich elastischen und absorbirenden Medium. § 33. Beziehungen zur Theorie des Lichtes. § 34. Medien ohne innere Kräfte; mechanische Analogie zu den Gleichungen des elektro-magnetischen Feldes. Ez az utolsó újabb keletü (Wied. Ann. 1894.) és magatól a szerzőtől származik. A két mechanikai résznek mintegy ötöde van ezekben a tudomány költészetének szentelve. — A potentiál-függvényről szóló fejezet kiterjeszkedik a különböző elektromos és mágneses állapotokra is, ideértve az influált dielektromosságot és mágnességet, a pyro- és piezo-elektromosságot s az elektro-mágnességet is; továbbá a Mathieu-től második potentiál-függvénynek nevezett functioval is foglalkozik. Nem tekintve, hogy a munka a különleges természetü tárgyalásoktól előre kitüzött elvszerüséggel tartózkodik, tárgy tekintetében főkép ezek azok a területek, a melyekkel a két első rész más kisebb terjedelmü általános tartalmú mechanikai munkáktól különbözik, a mi a munka egészére nézve a tudomány anyagának újszerü rendszerbe foglalását és bizonyos újabb keletü részletek becsatolását jelenti.

Addig, míg a két mechanikai rész különböző physikai jelenségek tárgyalására is ki-kiterjeszkedik, addig a harmadik részből, a hőtanból, kimaradtak némely részletek, amelyek a thermo-dynamikai munkákban már-már szinte egészen otthonossá kezdtek válni, a milyen p. o. a mágneses inductionak s az elektromos áramlásnak thermo-dynamikai elmélete; talán a munka második kötetében fogunk velük találkozni. Ezek helyett azonban ott találjuk a rugalmas testek s a thermo-dynamikai hatások általános rendszerbe foglalt tárgyalását — § 6. Mechanische Wärmetheorie für elastische Körper.

§ 7. Thermische Dilatation. Adiabatische Deformation, — és a chemiai folyamatok beható általános jellegű thermo-dynamikai tárgyalását.

A mi a tárgyalások módjának közös jellem-vonását illeti, ez különösekben az általánosságok czélszerű fokozásában és az egyes részleteknek telhetőleg szoros egymáshoz rendelésében nyilvánul. Például a nem merev testek mechanikai egyenleteibe a test-partikulákra forgatólag ható szabad erőket is vezet be s később erre az általánosításra alapítja az elektromágnesi tér MAXWELL-HERTZ-féle egyenleteinek mechanikai analogonjait; a folyékony testek mechanikájában a nyomást nem kizárólag a sűrűség függvényeként jelöli meg, de tekintettel a hőfoknak esetleges térbeli variatiójára, a sűrűségen kívül is függni engedi a nyomást a coordinátáktól; a hőterjedés elméletét a rugalmas testekben nem megfordíthatóan végbemenő folyamatok általános elméletére alapítja stb. Itt megjegyzem, hogy annak is köszöni a könyv azt a rövidséget, a melyet az eléje tűzött és fent jelzett czél megkivánt, hogy a mathematikai megállapítások keresztülvitelében a lehetőségig kiaknázza azokat az összefüggéseket, a melyek a különböző részletek mathematikai tartalma közt jelentkeznek s eltekintve attól, hogy a rugalmasságnak egy kis molekuláris elméletét is előadja (a merev testek mechanikájában), minden disciplinának egyféleképen való tárgyalására szorítkozik, minélfogva módszer dolgában nem is compendium természetű a könyv és pedig annál kevésbbé, mert a szerző tudományos eredetisége nagy súlylyal érvényesül benne s nemcsak az ő irodalmi működésének specialis terén: a rugalmassági elméletekben, de egyebütt is, mint pl. a capilláris tünemények elméletében.

Ez az eredetiség azok közé tartozik, a melyek tárgyaik érdekességének, sőt belső értékének is az emelésére s tartalmuk fejlesztésére szolgálnak, jóllehet formális tévedésektől sem mentesek. Egy lapsusra, a mely ebben a munkában előfordul, más alkalommal már reá mutattam.*

Egy másik, amely szemembe ötlött, szabad felületű folyadékok mozgástanának a tárgyalásában (II. Th. III. Kap. § 15) esett meg; noha kisebb elentőségű, talán még sem lesz érdektelen, ha legalább a mibenlétére reá mutatok: a sebességi componenseknek a CLEBSCH-féle substitutiójából indul ki.**

$$u=\frac{\partial F}{\partial x}+H\frac{\partial G}{\partial x},\quad v=\frac{\partial F}{\partial y}+H\frac{\partial G}{\partial y},\quad w=\frac{\partial F}{\partial z}+H\frac{\partial G}{\partial z}.$$

---

* Math. Phys. Lapok IV. k. 7. l.

** CLEBSCH-nél F, G, H helyén φ, ψ, m áll. Crelle-Journal 56. kötet.

De az F, G, H functiók egyenleteit a CLEBSCH-étől különböző módon vezeti le, haszonra fordítván az örvény-vonalaknak (Wirbellienien) már előbb letárgyalt elméletét. Látszólag arra a következtetésre jut, hogy G és H constantokkal egyenlítve, az örvényvonalak t időponti egyenleteit szolgáltatják, minélfogva aztán $\frac{dG}{dt}$ és $\frac{dH}{dt}$ eltünni tartoznak, mert a folyadékrészecskék az örvényvonalakkal mozognak. Ennek azonban nem okvetetlenül kell így lennie. Mellőzve e helyen az általános discussiót, csupán egy igen egyszerű példára utalok. Mikor $u=\varepsilon y$, $v=-\varepsilon x$, $w=0$, a hol ε constanst jelent, beválnak $F=0$, $G=\text{arc tg } \frac{x}{y}$, $H=\varepsilon(x^2+y^2)$, és igaz, hogy $\frac{dH}{dt}=0$; de $\frac{dG}{dt}$-ről nem igaz, hogy $=0$. G iménti kifejezése helyett használható $G=\text{arc tg } \frac{x}{y}-\varepsilon t$ is; erről már áll, hogy $\frac{dG}{dt}=0$. Megfelelnek továbbá $F=0$, $G=\frac{x}{y}$, $H=\varepsilon y^2$, de sem e G, sem e H teljes időderivatuma nem tünik el stb. Szerzőnk tehát látszólag többet bizonyít, mint a mennyit kellene: azt kell kimutatni, hogy a beváló G és H függvények közt van olyan, mikép teljes változási sebességük folyvást eltünik, nem pedig azt, hogy e változási sebességek mindegyikének analytikai szükségességgel el kell tünnie. A következtetés az örvényvonalak segítségülhívása nélkül is igen egyszerű analysis rendjén ejthető meg . . .

A szövegezés szabatossága majdnem azon a színvonalon van, mint KIRCHHOFF előadásaiban és nem tekintve bizonyos kifejezések szinte megegyezésszerű pontatlanságát (pl. az energia növekedése időegységben vagy még rövidebben az energia növekedése e helyett: az idő-egységre számított energia-növekedés, vagy az energia változási sebessége), főkép némely alap-fogalmak difinitiója kifogásolható; felületesek pl. a tömeg, erő, hőfok definitiói.

Igen becses kiegészítői a munkának az irodalmi útmutatások, ámbár nem mindig egészen alaposak. Pl. a folyékony testek mozgás-tanában a sebességi potential fogalmának bevezetésénél, a thermo-dynamikában a szabad energia fogalmának a bevezetésénél csupán HELMHOLTZ-ra hivatkozik, holott e fogalmak mathematikai tartalma, az elsőé LAGRANGE-tól, a másodiké MASSIEU-től származik.

A munka megértéséhez aligha szükséges több készültség, mint KIRCHHOFF előadásainak a megértéséhez: a felhasznált mathematikai disciplinák alapjainak az ismerete; ezzel felszerelve mindenki jól eligazodhatik rajta, csak, ha még mathematikai physikával behatóbban nem foglalkozott, rendszeresen tanulmányozza, a mit megkívánnak azok a kapcsolatok, a melyek

a különböző fejezeteket egymáshoz rendelik. Akik már a tárgyhoz egyetemi cursusok rendjén hozzáférhettek, azok szerzett ismereteiknek esetleg más formákban való készletbentartására illetőleg, egy első fokon való kiegészítésére különösen jó sikerrel használhatják a könyvet, sőt némely benne foglalt általánosítások, módszertani és tárgybeli újszerűségek s a követett rendszer a képezett szakember érdeklődésére is számot tarthatnak.

F. Gy.

FELADATOK.

27. *Bizonyíttassék be a következő tétel:*

Ha valamely kúpszelet körülírt háromszög A, B, C szögpontjainak projekcziói a kúpszelet tetszőleges D pontjából a kúpszeletre A_1, B_1, C_1 *és a BC, CA, AB oldaloknak érintéspontjai A', B' C'; akkor*

$$(A_1\ B_1\ C_1\ D) \overline{\wedge} (A'\ B'\ C'\ D).$$

(Klug.)

*

28. *Adott derékszögü parallelepipedonba adott nagyságú szabályos oktaéder írandó be, azaz úgy helyezendő el, hogy mindegyik szögpontja a parallelepipedon egy-egy síkjában feküdjék. Megvizsgálandó, hogy e próblemának mikor van megoldása és hogy a megoldások száma tekintetében minő eshetőségek foroghatnak fenn.*

(Kürschák.)

*

29. *Az A, B, C, P, Q pontok megadatván, szerkesztessék három kupszelet úgy, hogy az első a B, C, P, Q-, a második a C, A, P, Q-, a harmadik az A, B, P, Q pontokon menjen át és egyszersmind kettenként érintsék egymást az A, B illetőleg C pontban.*

(Vályi.)

*

30. *Adva van valamely ellipszis és ennek egy tetszőleges hurja. Megszerkesztendők e hurt érintő körök közül azok, a melyek az ellipszist kettősen érintik.*

(Szépréthy.)

MEGOLDOTT FELADATOK.

22. *Bizonyíttassék be a következő tétel. Ha az* (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), (D, D_1) *pontpárok valamely kúpszeletre konjugált párok, akkor az* $[(AB, CD), (A_1D_1, B_1C_1)]$, $[(AD, BC), (A_1B_1, C_1D_1)]$ *pontpárok ugyane kúpszeletre nézve egy időben konjugált vagy nem konjugált párok.* (Ha $A \equiv C_1$, $B \equiv D_1$, $C \equiv A$, $D \equiv B_1$ akkor a két utolsó pár összeesik és Hesse egyik tétele alapján mindig konjugált lesz.) (Klug.)

Első megoldás Szépréthy Béla főreáliskolai tanár úrtól Brassón.

Jelöljük az A, B, C, D pontoknak az adott kúpszeletre vonatkoztatott polárisait rendre a, b, c, d-vel, és legyen rövidség kedveért:

$$\begin{array}{llll} (AB, CD) \equiv E & & (AD, BC) \equiv F & \\ (A_1D_1, B_1C_1) \equiv E_1 & & (A_1B_1, C_1D_1) \equiv F_1 & \\ (a, b) \equiv X & & (c, d) \equiv Y & \\ (a, d) \equiv Z & & (b, c) \equiv U, & \end{array}$$

akkor leszen

$$(X, Y) \equiv e, \quad (Z, U) \equiv f$$

az E, illetőleg F pontnak ugyane kúpszeletre vonatkoztatott polárisai.

Az A_1, B_1, C_1, D_1 pontok az $abcd$ négyoldal oldalain feküsznek és oly négyszöget alkotnak, a mely e négyoldalba be van írva.

Ha föltesszük, hogy az E és E_1 pontok konjugalt pólusok, vagyis, hogy E_1 az XY poláris egyik pontja, akkor ez az E_1 pont, mint az A_1D_1, B_1C_1 és XY egyenesek közös pontja, az A_1B_1X és D_1C_1Y háromszögek perspektiv czentrumának tekinthető, a $(Z, U) \equiv f$ egyenes pedig a megfelelő perspektiv tengelynek, a melyen — az F pont polárisán — az A_1B_1 és C_1D_1 megfelelő oldalpár F_1 metszéspontjának kell feküdnie, a miből nyilvánvaló, hogy az F és F_1 pontok ebben az esetben szintén konjugált pólusok.

Ha ellenben E és E_1 nem konjugált pólusok, és így az E_1 pont az e polárison kívül fekszik, az említett háromszögek nem perspektiv fekvésüek

és F_1 nem is fekhetik az f egyenesen, vagyis nem lehet F-nek konjugált pólusa, és ezzel annak a tételnek helyessége, hogy e pontok egyszerre konjugáltak vagy nem konjugáltak, ki van mutatva.

*

Második megoldás Kürschák műegyetemi magántanártól.

1. Legyen

$$a \equiv AB, \quad b \equiv CD, \quad c \equiv BC, \quad d \equiv DA,$$
$$a' \equiv C_1D_1, \quad b' \equiv A_1B_1, \quad c' \equiv D_1A_1, \quad d' \equiv B_1C_1,$$

akkor

$$A \equiv ad, \quad B \equiv ca, \quad C \equiv bc, \quad D \equiv bd,$$
$$A_1 \equiv b'c', \quad B_1 \equiv b'd', \quad C_1 \equiv a'd', \quad D_1 \equiv c'a',$$

a bebizonyítandó tétel pedig így fogalmazható:

Ha az

$$(ad, b'c'), \ (bc, a'd'), \ (bd, c'a'), \ (ca, b'd'), \ (cd, a'b'), \ (ab, c'd')$$

pontpárok közül négy valamely kúpszeletre nézve konjugált, akkor a többi kettő ugyanerre a kúpszeletre nézve egyszerre konjugált vagy nem konjugált.

2. E tétel analitikai levezetésénél a folyó homogen pontkoordinátákat

$$x_1, \ x_2, \ x_3$$

-mal jelöljük, a folyó homogen vonalkoordináták legyenek

$$u_1, \ u_2, \ u_3,$$

valamely adott i egyenes koordinátái pedig

$$i_1, \ i_2, \ i_3.$$

A három-három egyenes koordinátáiból alkotott

$$(ikl) \equiv \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix}$$

alakú determinánsok közt a következő kapcsolat ismeretes

$$(klm)\,(inp) + (lim)\,(knp) + (ikm)\,(lnp) = (ikl)\,(mnp). \qquad (1)$$

Ha ugyanis

$$\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

determináns első három oszlopát rendre

$$n_2 p_3 - n_3 p_2, \quad n_3 p_1 - n_1 p_3, \quad n_1 p_2 - n_2 p_1$$

-gyel megszorozva hozzáadjuk az utolsóhoz, akkor

$$\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & (inp) \\ k_1 & k_2 & k_3 & (knp) \\ l_1 & l_2 & l_3 & (lnp) \\ m_1 & m_2 & m_3 & (mnp) \end{vmatrix} = 0$$

képletet nyerjük. Ebből a szóban forgó azonosság úgy adódik ki, hogy baloldalt az utolsó oszlop elemei szerint kifejtünk s az utolsó tagot átviszszük a jobboldalra.

3. Valamely adott *abcd* teljes négy oldal szögpontjainak egyenletei a bevezetett jelzés értelmében

$$(adu)=0,\ (bdu)=0,\ (cdu)=0,\ (bcu)=0,\ (cau)=0,\ (abu)=0.$$

Az egy egyenesen levő három szögpont egyenletei között lineár kapcsolat áll fenn abban az értelemben, hogy az egyenletek baloldalainak bizonyos *állandó* tényezőkkel való szorzatainak összege azonosan eltűnik.

E lineáris kapcsolatokat az (1) alatti azonosságból úgy kaphatjuk meg, ha

$$i,\ k,\ l,\ m,\ n,\ p$$

helyébe rendre a következőket helyettesítjük

$$\begin{matrix} b, & c, & d, & a, & a, & u; \\ c, & a, & d, & b, & b, & u; \\ a, & b, & d, & c, & c, & u; \\ a, & b, & c, & d, & d, & u. \end{matrix}$$

Leszen

$$\begin{aligned} &(cad)\,(abu) - (abd)\,(cau) - (abc)\,(adu) = 0 \\ &(abd)\,(bcu) - (bcd)\,(abu) - (abc)\,(bdu) = 0 \\ &(bcd)\,(cau) - (cad)\,(bcu) - (abc)\,(cdu) = 0 \\ &(bcd)\,(adu) + (cad)\,(bdu) + (abd)\,(cdu) = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Egyébiránt az utolsó egyenlőség már az első háromnak következménye.

4. Ha két teljes négyoldal, *abcd* és *a'b'c'd'* van adva, akkor az

$(ad, b'c')$, $(bc, a'd')$, $(bd, c'a')$, $(ca, b'd')$, $(cd, a'b')$, $(ab, c'd')$

pontpárok egyenletei

$$\begin{array}{ll}(adu)(b'c'u)=0 & (bcu)(a'd'u)=0\\ (bdu)(c'a'u)=0 & (cau)(b'c'u)=0\\ (cdu)(a'b'u)=0 & (abu)(c'd'u)=0.\end{array} \tag{3}$$

E hat egyenlet közt lineár kapcsolat áll fenn az előbb megállapított értelemben.

Ha ugyanis a (2) alatti első három egyenletet rendre megszorozzuk

$$\begin{array}{llll}(bcd) & (c'a'd') & (a'b'd') & (b'c'u)\\ (cad) & (a'b'd') & (b'c'd') & (c'a'u)\\ (abd) & (b'c'd') & (c'a'd') & (a'b'u)\end{array}$$

-val és összeadunk, akkor :

$$\begin{aligned}&(bcd)(b'c'd')\{(abd)(c'a'd')(cau)(a'b'u)-(cad)(a'b'd')(abu)(c'a'u)\}+\\ &+(cad)(c'a'd')\{(bcd)(a'b'd')(abu)(b'c'u)-(abd)(b'c'd')(bcu)(a'b'u)\}+\\ &+(abd)(a'b'd')\{(cad)(b'c'd')(bcu)(c'a'u)-(bcd)(c'a'd')(cau)(b'c'u)\}-\\ &-(bcd)(abc)(c'a'd')(a'b'd')(adu)(b'c'u)-\\ &-(cad)(abc)(a'b'd')(b'c'd')(bdu)(c'a'u)-\\ &-(abd)(abc)(b'c'd')(c'a'd')(cdu)(a'b'u)=0.\end{aligned}$$

Egy hasonló második egyenlőséget nyerünk, ha $abcd$-t és $a'b'c'd'$-t egymással felcseréljük. A két egyenlőség összege már is a keresett lineár kapcsolatot adja meg, mely a következő :

$$\begin{aligned}&(bcd)(abc)(c'a'd')(a'b'd')(adu)(b'c'u)+\\ &+(cad)(abd)(b'c'd')(a'b'c')(bcu)(a'd'u)+\\ &+(cad)(abc)(a'b'd')(b'c'd')(bdu)(c'a'u)+\\ &+(abd)(bcd)(c'a'd')(a'b'c')(cau)(b'd'u)+\\ &+(abd)(abc)(b'c'd')(c'a'd')(cdu)(a'b'u)+\\ &+(bcd)(cad)(a'b'd')(a'b'c')(abu)(c'd'u)=0.\end{aligned} \tag{4}$$

5. Annak felteteli egyenlete, hogy egy pontpár valamely adott kúpszeletre nézve konjugált legyen, igen hasonlít magára e pontpár egyenletére. Hogy ugyanis a

$$p_1,\ p_2,\ p_3\ ;\qquad p_1',\ p_2',\ p_3'$$

pontok az

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2=0$$

kúpszeletre nézve konjugáltak legyenek, annak feltételi egyenlete

$$\{p, p'\} \equiv a_{11} p_1 p_1' + a_{12} p_2 p_2' + a_{33} p_3 p_3' + a_{23} (p_2 p_3' + p_3 p_2') + \\ + a_{31} (p_3 p_1' + p_1 p_3') + a_{12} (p_1 p_2' + p_2 p_1') = 0.$$

Magának a pontpárnak egyenlete pedig kifejtett alakban

$$p_1 p_1' u_1^2 + p_2 p_2' u_2^2 + p_3 p_3' u_3^2 + (p_2 p_3' + p_3 p_2') u_2 u_3 + \\ + (p_3 p_1' + p_1 p_3') u_3 u_1 + (p_1 p_2' + p_2 p_1') u_1 u_2 = 0.$$

A szóban forgó feltételi egyenlet tehát a pontpár egyenletének kifejtett alakjából egyszerűen úgy képezhető, hogy

$$u_1^2,\ u_2^2,\ u_3^2,\ u_2 u_3,\ u_3 u_1,\ u_1 u_2$$

helyébe rendre a kúpszelet egyenletének együtthatóit írjuk.

Ennélfogva, ha bizonyos

$$pp',\quad qq', \ldots$$

pontpárok egyenletei közt valamely lineár kapcsolat áll fenn, akkor e kapcsolat meglesz annak a feltételi egyenletek közt is, hogy e pontpárok valamely adott kúpszeletre nézve konjugáltak legyenek.

Ha e megfontolásokat az előbb vizsgált hat pontpárra alkalmazzuk, akkor az

$$\{ad, b'c'\} = 0,\quad \{bc, a'd'\} = 0,\quad \{bd, c'a'\} = 0,\quad \{ca, b'd'\} = 0, \\ \{cd, a'b'\} = 0,\quad \{ab, c'd'\} = 0$$

feltételi egyenletek közt a következő kapcsolatot találjuk:

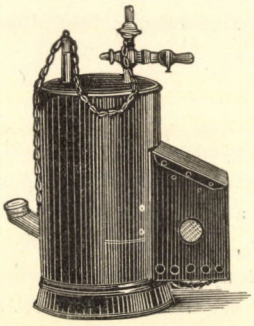
$$\begin{aligned} &(bcd)\,(abc)\,(c'a'd')\,(a'b'd')\,\{ad, b'c'\} + \\ &+ (cad)\,(abd)\,(b'c'd')\,(a'b'c')\,\{bc, a'd'\} + \\ &+ (cad)\,(abc)\,(a'b'd')\,(b'c'd')\,\{bd, c'a'\} + \\ &+ (abd)\,(bcd)\,(c'a'd')\,(a'b'c')\,\{ca, b'd'\} + \\ &+ (abd)\,(abc)\,(b'c'd')\,(c'a'd')\,\{cd, a'b'\} + \\ &+ (bcd)\,(cad)\,(a'b'd')\,(a'b'c')\,\{ab, c'd'\} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Ha tehát e feltételi egyenletek közül négy ki van elégítve, akkor a többi kettő egy időben lesz kielégítve vagy nem, mint az be volt bizonyítandó.

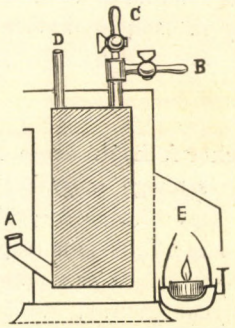
PHYSIKAI LABORATORIUM.

A benzin-szaturátor. A vetitő készülék mindjobban terjedvén, egy oly mellékkészüléket kivánok megismertetni, mely a vetités hatásosságát tetemesen fokozza s egyúttal az előkészítést is megkönnyiti. A villamos áram még kevés helyen áll rendelkezésre s így legtöbb helyen a mészfény vagy a petróleumlámpa a fényforrás. A petróleum-lámpa, akárhány belű legyen, kevés fényt ad, mely nem is elég fehér és minden körülmények között kellemetlen szagot terjeszt.

Marad tehát a mészfény, melynek nyugodtsága, nagy fényerőssége, szép fehér szine és könnyű szabályozhatósága könnyen feledtetik az elektromos ívlámpa nagy fényerejét. A hol világító gáz van, ott csak oxygent kell előállítani, a mi olcsó anyagból, vasretorta segítségével igen könnyen és gyor-



Benzin-szaturátor.



A szaturátor keresztmetszete.

san megy. De a hydrogén fejlesztése valóban komoly akadály. Egy órai világításra 60—80 liter kell belőle s előállítása drága és vesződséges.

Ezért is pótlására többféle éghető gőzöket fejlesztő készülékeket hoztak forgalomba. A legelterjedtebb tán a Scott-féle benzin szaturátor.* Ámde

* L. A vetitő készülékek leirása Gruber Nándor-tól. Calderoni és társa kiadása 1891.

ez a készülék határozottan veszedelmes, mert oxygén és benzingőz keverékével lévén telve, nyomban explodál, mihelyt a készüléket a lángtól elválasztó biztosító szelep felmondja a szolgálatot, a mi könnyen megeshetik. Ez oknál fogva jobb visszatérni az eredeti DRUMMOND-féle berendezésre: égő gáz gyanánt a hydrogént használni, de a fogyasztást lehetőleg csökkenteni. Erre a czélra aztán igen jól beválik a szaturátor és pedig a következő berendezésben:

A hydrogén gazométert összekötjük a szaturátor *D* csövével, a *C* csapot pedig a mészfény lámpa **H** csapjával, az oxygén gázométer csapját pedig a mészfény lámpa **O** csapjával. Ha most a hydrogént a szaturátorba bocsátjuk, áthalad rajta s benzin-gőzökkel telve jut a *C* csapon át a mészfény lámpába, a hol a fény előállítására szükséges lángot adja. Ezt a lángot főleg a gyorsan párolgó benzin gőzei táplálják, s a hydrogénnek jóformán csak az a rendeltetése, hogy a benzin-gőzöket a száturátorból kihajtsa. Ilyetén összeállítás esetében egy órai folytonos világításhoz legfölebb 20—25 liter hydrogén kell. A fogyasztott gáz mennyiségének meghatározása czéljából végzett kisérleteimben a lángzó egy óra alatt 24 liter hydrogént fogyasztott, mialatt a hydrogén és oxygén 6 cm. vízoszlop nyomása alatt állottak; a fény pedig 130 gyertya erősségű volt.

Ily összeállítás mellett tehát kettős czélt érünk el; egyrészt a hydrogén fogyasztás minimális, másrészt pedig a robbanás veszélye el van hárítva, minthogy az oxygénnek vagy levegőnek a szaturátorba való jutása ki van zárva.

Gruber.

*

A légkör felhajtó ereje. A mérlegen egyensúlyba hozott test légkörbeli súlyvesztesége megváltozik, ha térfogata növekedik vagy csökken, anélkül, hogy tömege megváltoznék. Ezt a tényt a következő két kisérlet mutatja meg: Erős falú csapos edényben, pl. a HERON-féle labdában a levegőt összesürítjük és a csap csövére vékony falú kaucsuk ballont, vagy állati hólyagot kötünk, melyből a levegőt előbb kinyomtuk. Az edényt a mérlegen egyensúlyba hozván, megnyitjuk a csapot: a levegő a hólyagot felfújja s az egyensúly nyomban felbomlik. Az edényre ható felhajtó erő nagyobbodott, tehát súlya kisebbedik. — A második kisérletben az edényből a levegőt kiszivattyúzzuk s a hólyagot felfújva kötjük a csapjára. A csap megnyittatván, a hólyag levegője az üres golyóba áramlik s a hólyag összehuzódik: ekkor látszólagos súlynövekedés következik be. Ehhez a kisérlethez bármiféle palaczkot lehet felhasználni, ha csak kivülről ható 1 légköri nyomást megbir. A nyakába átfurt dugót, ebbe pedig rövid üvegcsövet kell tolni, melyre kis darab kaucsukcső van húzva; a csövet szorító csappal (Quetschhahn) lehet elzárni s így feleslegessé válik a furatos csap.

Ha a levegő $^1/_2$ literes edényben 2—3 atmoszférányi nyomásu, s ha az utóbbi kisérletben 2—3 literes edényt használunk, igen könnyű 1 liternél nagyobb térfogatváltozást, tehát 1 grammnál jóval nagyobb súlykülömbözetet előállítani.

A második kisérlet SCHULLER-nek következő kisérletére emlékeztet: A mérleg egyik karján csapos üveggolyó függ úgy, hogy csövének nyilása a csészén levő lapos edény fenekéig leér; a lapos edényben víz van, a golyó pedig légüres. Az ekként terhelt mérleget egyensúlyba hozván, az egyensúly megbomlik, mihelyt a csapot megnyitjuk s a víz a golyóba felszökik.

B. G.

*

Az elektroskóp használatához. Az aranylemezes elektroskóp igen érzékeny a kicsi elektromos töltések irányában, de az elektromosság nemét csak akkor árulja el, ha ismert nemű elektromossággal van előlegesen megtöltve. ROBINSON a fémházu elektroskópot igen gyengén megelektromozott paraffinlepényre állítja, minek az a következménye, hogy a lemezkék gyenge pozitiv töltést vesznek fel s állandóan széthajlanak. A lemezkék jobban széthajlanak, avagy összeesnek, a szerint, amint pozitiv vagy negativ töltésü test közeledik az elektroskóp gombjához. — LODGE ugyanezt a czélt akként éri el, hogy az elektroskóp fémházát, mely mérés közben a födbe szokott levezettetni, vékony drót révén gyengén töltött leydeni palaczk belső fegyverzetével helyezi közlekedésbe.

Ha a lemezkék képe megfelelő alakú skálára van vetitve, az elektroskóp a potentiálok közelítő mérésére is használható.

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1895. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

Márczius hó 7-én: Dischka Győző: Az ajaksípok hangjelenségei.

Rados Ignácz: Az ívhosszak méréséről.

Márczius hó 21-én: Dr. Konkoly Miklós: A távcsövek optikai és mechanikai szerkezetéről.

Dr. Suták József: Az algebrai függvényekre vonatkozó újabb vizsgálatokról.

*

Az ephemerisek számításáról.*

Nem ritkán érdeklődik valamely égi testnek, különösen üstökösnek pontosabb helyzete iránt a nem csillagász is, a ki azonban nem mindig rendelkezik a feladat megoldásához szükséges segédeszközökkel s kiről nem mindig tételezhetjük fel, hogy érdeklődése kitartóbb, mint a meglehetős terjengős számítások keresztülvitelére szükséges kedv. Ezért tán sokan szivesen veszik, ha a következőkben valamely bolygónak vagy üstökösnek tisztán graphikai helymeghatározását adom, mely mechanikai modellben is előállítható, és ezért kiváltképen alkalmas, hogy a csillagászok komplikált képleteinek gondolatmenetét világossá tegye.

A szükséges formulák terjengőssége és bonyolódott volta különben könnyen érthető: hiszen a pályameghatározás kényelmes berendezése és a belőle levezetendő helyzetek biztos megfigyelése között számos lépés fekszik. Ama kedvező körülménynél fogva, hogy bolygórendszerünk legtöbb és legfontosabb tagjai, sőt az állandóan hozzánk tartozó üstökösök is az ekliptikához kevéssé hajlott pályákban mozognak, pályameghatározásokban kivétel nélkül az ekliptikára, mint alapsíkra támaszkodunk. Erre vonat-

---

* Előadatott f. é. február hó 17-ki rendes ülésen.

koznak természetesen a pályaelemek is, és a belőlük levezetett helymeghatározók. Ámde a megfigyelésre az ekliptika rendszere teljesen alkalmatlan, mert nem vagyunk képesek röviden, kényelmesen és elegendő pontossággal kijelölni e legnagyobb kört az égen, holott az æquator, a modern megfigyelések alapsíkja bármely csillagnak napi mozgása segítségével bármikor és pontosan kitüntethető. Az ekliptikára vonatkozó helyzeti adatok tehát első sorban az æquatorra alakítandók át. De még akkor is ez adatok a Nap középpontjára, mint koordináta kezdőpontra vonatkoznak, holott nekünk valamely égi testnek felkereséséhez saját megfigyelő helyünkre támaszkodó koordinátákra van szükségünk. A heliocentrikus helyzet tehát másodsorban geocentrikussá változtatandó át, míg végre a parallaxis tekintetbe vétele a helyzetet a Föld középpontjából a felszinén levő megfigyelési helyre redukálja. Ez utóbbi javítás a legtöbb esetben — különösen pedig a mi czéljainkra nézve — teljesen elhanyagolható, miért is ezt tekintetbe venni nem fogjuk.

Legyen az égi test pályája ellipszis — kör vagy parabola esetén a levezetendő graphikai eljárás még sokkal egyszerűbb, és minden nehézség nélkül módosítható — s a bolygó helyzete vonatkoztatva oly derékszögű rendszerre, melynek alapsíkja maga a pálya síkja, kezdőpontja a Nap középpontja, azaz az ellipszis fókusa s pozitiv x tengelyének iránya a perihélium, x_0, y_0, akkor

$$x_0 = r \cos. v\,; \quad y_0 = r \sin. v\,; \quad z_0 = 0,$$

ha r a heliocentrikus radius vectort, v pedig a valódi anomáliát, azaz a mozgás irányában vett poláris szögletet jelenti.

Az ellipszis egyenletéből következik továbbá, a-n értve az ellipszis fél nagy tengelyét

$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1+e \cos. v}.$$

Ha T az égi test keringési ideje, mely KEPPLER harmadik törvényéből a pálya fél nagy tengelye ismeretével mindig kiszámítható, t a megfigyelés, t_0 a perihéliumátmenet ideje, akkor

$$M = \frac{360^\circ}{T}(t-t_0)$$

kifejezés a csillagász nyelvén a közép anomália, melyből v az excentrikus anomália E segélyével származtatható. Legyen ugyanis e az ellipszis numerikus excentricitása, akkor KEPPLER problémája szerint

$$M = E - \frac{180^\circ}{\pi} e \sin. E,$$

mely egyenletben úgy E mint M fokokban fejezendő ki. Ez egyenletnek E szerint történt megoldása után, — melynek egyszerű, ugyancsak graphikai módjáról később lesz szó — a valódi anomáliát a

$$\text{tang.} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{tang.} \frac{E}{2}$$

egyenlet szolgáltatja, mint ez a két test problemájából elegendően ismeretes.

Az ekliptikára, mint alapsíkra megyünk át, ha a kezdőpont megváltoztatása nélkül a rendszert saját síkjában úgy forgatjuk, hogy a positiv x tengely a perihéliumból a pálya felszálló csomójába jusson. Ha a perihélium hosszúsága π — a hosszúságokat a tavaszi nap-éjegyenlőség pontjától az ekliptika mentén nyugotról délen át kelet felé olvasva, — a pálya és az ekliptika azon metszőpontjának hosszusága, melyben az égi test déli szélességből északi szélességbe jut, Ω akkor a mozgás irányába eső forgási szög $\omega = \pi - \Omega$. Megjegyzendő ugyanis, hogy csillagászati szokás szerint — elég különösen — a $\pi - \Omega$ szögletet a pályasík mentén a mozgás irányában olvassuk, az ekliptikában fekvő Ω szöglethez adjuk, és az összeget az ekliptikán vett perihélium hosszúságnak hívjuk. Az új derékszögű koordináták lesznek:

$$x_1 = x_0 \cos. \omega - y_0 \sin. \omega ; \quad y_1 = x_0 \sin. \omega + y_0 \cos. \omega ; \quad z_1 = 0.$$

Ha most az egészet az x tengely körül i szöglettel, a pályahajlás értékével forgatjuk, az új xy sík az ekliptikába esik, míg az x tengely positiv ága még mindig a Ω pont felé mutat. Ezen koordináták adva vannak:

$$x_2 = x_1 ; \quad y_2 = y_1 \cos. i ; \quad z_2 = y_1 \sin. i$$

egyenletek által. Ujabb, a z tengely körül Ω szöglettel való forgatás által az x tengely a Ω pontból a tavaszi nap-éjegyenlőség pontjába jut, mi a következő, mindjárt hosszuság és szélességbe átfordítható koordinátákat szolgáltatja:

$$x_3 = x_2 \cos. \Omega - y_2 \sin. \Omega ; \quad y_3 = x_2 \sin. \Omega + y_2 \cos. \Omega ; \quad z_3 = z_2,$$

és ezen helyhatározók végül æquatorkoordinátákba mennek át, ha a rendszert ismét az x tengely körül ε szöglettel, az ekliptika ferdeségével forgatjuk; e forgatás eredménye adja az égi test æquatori heliocentrikus koordinátáit:

$$x=x_3\,;\quad y=y_3\cos.\,\varepsilon-z_3\sin.\,\varepsilon\,;\quad z=y_3\sin.\,\varepsilon+z_3\cos.\,\varepsilon,$$

melyek lánczolatos helyettesítés utján a következő, Gauss-tól eredő adott egyszerű alakba önthetők:

$$x=ra\sin.\,(A+v)\,;\quad y=rb\sin.\,(B+v)\,;\quad z=rc\sin.\,(C+v),$$

hol a, b, c, A, B, C az ω, i, Ω és ε szögletektől függő segédmennyiségek, melyek értéke a helyettesítés eszközlése után magától adódik.

Ha most az égi test geocentrikus æquatorkoordinátáit ξ, η, ζ-val, a Nap geocentrikus æquatori koordinátáit X, Y, Z-vel jelöljük, akkor a

$$\xi=x+X\,;\quad \eta=y+Y\,;\quad \zeta=z+Z$$

egyenletek a koordináták kezdetét a Föld középpontjába helyezik át, és megadják poláros koordináták bevezetése által tüstént a geocentrikus radius vectort ρ, a rectascensiót α és a declinatiót δ:

$$\xi=\rho\cos.\,\alpha\cos.\,\delta\,;\quad \eta=\rho\sin.\,\alpha\cos.\,\delta\,;\quad \zeta=\rho\sin.\,\delta$$

egyenletek alapján. A laikusnak csak ritkán hozzáférhető ephemeris gyűjtemények adják közvetlenül X, Y, Z értékeit, rendesen a Nap radius vectora, R_1 hosszúsága, L és az 1″-et soha el nem érő szélessége, B segítségével számítandók. Az előbbi átalakítása egész hasonlóan most is

$$X=R\cos.\,L\cos.\,B\,;\quad Y=R\sin.\,L\cos.\,B\cos.\,\varepsilon-R\sin.\,B\sin\varepsilon\,;$$
$$z=R\sin.\,L\cos.\,B\sin.\,\varepsilon+R\sin.\,B\cos.\,\varepsilon,$$

vagy tekintettel B említett kicsinységére:

$$X=R\cos.\,L\,;\quad Y=R\sin.\,L\cos.\,\varepsilon-0{\cdot}000{,}00193\,B\,;$$
$$Z=R\sin.\,L\sin.\,\varepsilon+0{\cdot}000{,}00445\,B,$$

hol B ívmásodperczekben fejezendő ki, míg R a földpálya fél nagy tengelyének egységében van adva.

E formulák hosszadalmas volta kevéssé érezhető, ha hosszabb időközre terjedő egyenletesen haladó teljes ephemerist számítunk, de valóban elkedvtelenítő, ha csak egyes, talán nem is túlságos pontosságot kivánó helyek ismeretét óhajtjuk. Ez esetben a levezetett egyenletekből könnyen nyerjük a geocentrikus szélességet β és hosszúságot λ:

$$\rho \cos.(\lambda - \Omega) \cos.\beta = r \cos.(\pi - \Omega + v) + R \cos.(L - \Omega)$$
$$\rho \sin.(\lambda - \Omega) \cos.\beta = r \sin.(\pi - \Omega + v) \cos.i + R \sin.(L - \Omega)$$
$$\rho \sin.\beta = r \sin.(\pi - \Omega + v) \sin.i,$$

melyekben a Nap szélessége el van hanyagolva. Mivel minden szöglet két függvénynyel határozható meg, a quadransok választásában kétség nem merülhet fel. Téve ezután:

$$m \sin.M = \sin.\beta; \quad m \cos.M = \sin.\lambda \cos.\beta,$$

midőn is m mindig pozitivnek vehető, kapjuk az ekliptikai rendszernek æquatorivá való átváltoztatására a következő egyenleteket:

$$\sin.\alpha \cos.\delta = m \cos.(M + \varepsilon)$$
$$\cos.\alpha \cos.\delta = \cos.\lambda \cos.\beta$$
$$\sin.\delta = m \sin.(M + \varepsilon),$$

hol ε mint előbb is az ekliptika ferdeségét jelenti. Ez egyenletek nagyobb kényelmet biztosítanak, ha egyes helymeghatározásokat akarunk eszközölni.

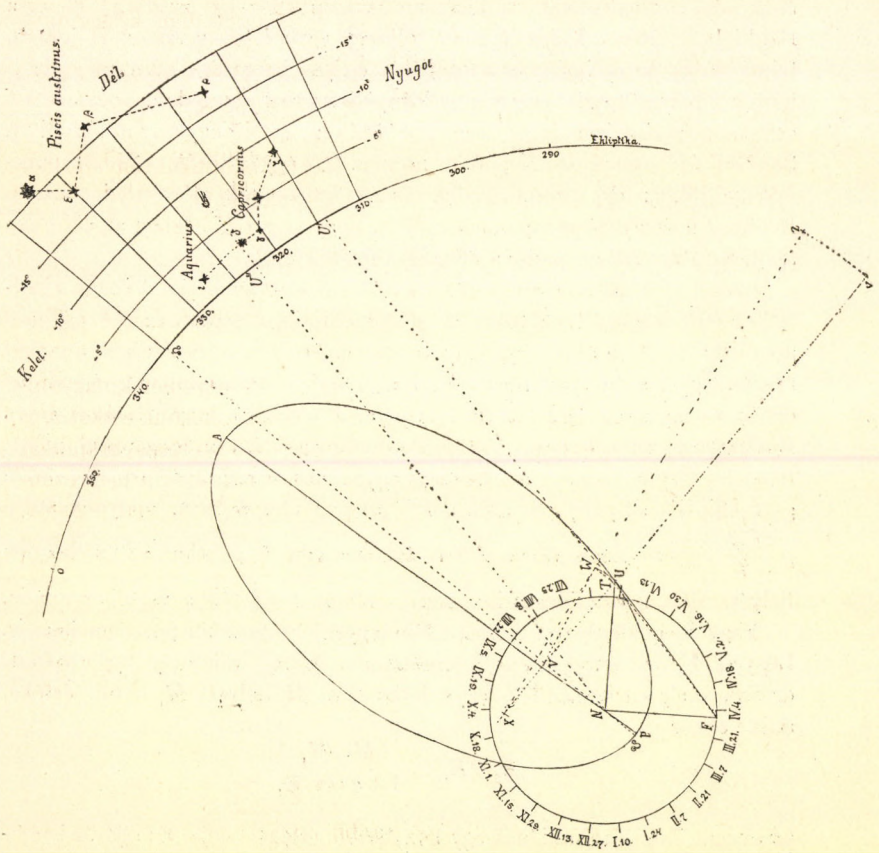
E képletek közlése után teljesen világos lesz a következő graphikai eljárás, melylyel a most visszatért Encke-féle üstökösnek helyét határozom meg, 1895 április 1-én éjfélkor. Newcomb-Engelmann's «Populaere Astronomie» (Leipzig, 1892) ez üstökös számára a következő elemrendszert adja:

$t_0 =$ 1888. juni $28{,}0^h$ K. párisi idő.
$\pi = 158°36'$
$\Omega = 334\ 39$
$i = 12\ 53$
$a = 2{\cdot}220$
$e = 0{\cdot}845$
$T =$ 3,308 juliusi év=1208,25 nap.
Mozgás: előrefutó.

A perihéliumátmenet megfelel budapesti középidőben kifejezve 1888. év 180,54 napnak, vagy két teljes keringést hozzáadva, s tekintetbe véve, hogy 1892 szökő év volt, 1895. év 39,29 napnak. Április 1-ének éjfele megfelel 1895. év 91·00 napnak, és ezért a közép anomália:

$$M = \frac{360°}{1208{,}25} \cdot 51{,}71 = 15°24{,}4'.$$

Legyen most (1-ső ábra) N a Nap középpontja, a körüle NF egységül vett tetszőleges sugárral leírt kör a Föld pályája, s a nagyobb, egész tetszés szerint választott sugarú concentrikus kör az ekliptikának vetülete az égen. Sem a földpálya excentricitása, sem sebességének változása ily méretű



1. ábra.

rajzban tekintetbe nem vehető. N pont egyszersmind fókusa az üstökös pálya ellipszisének, melynek fél nagy tengelye $a = \frac{AP}{2} = 2{\cdot}220\ NF$, és vonalos excentricitása $0{\cdot}845 \times 2{\cdot}220.NF$. A tavaszi nap-éjegyenlőség pontját az ekliptikában tetszőlegesen 0-ban veszszük fel, s e pontból kiindulólag balfelé 360°-ra oszszuk e legnagyobb kört. Az oN kellőképen meghosszabbí-

tott egyenes a Föld pályáját III. 21-ben, azaz a Földnek tavasz kezdetén elfoglalt helyzetében találja. E pontból kiindulva ugyancsak az óramutatóval ellentett irányban oszszuk a Föld pályáját 365,25 részre; ábránkban minden osztási köz 14 napnak felel meg. E beosztás mellőzhető különben, ha ismerjük minden napra a Nap hosszúságát és meggondoljuk, hogy a Nap képe az ekliptikán N pontban mindig 180°-nyi szögletet képez a Földdel. Ez úton a Földnek nem teljesen egyenletes mozgása is jobban fejezhető ki. Az ekliptika és a földpálya helyes beosztása után megrajzolhatjuk a pályaellipszist nagyság és irányítás szerint olymódon, hogy az NI egyenes a perihélium hosszúsága 158°36′ vagy az NA egyenes az aphélium 338°36′ felé mutasson. Meghúzva még az ΩN egyenest Ω=334°39′ pontból nyerjük az $\Omega\mathfrak{S}$ csomóvonalat, és az üstökösnek előrehaladó, azaz a Földével megegyező mozgásából tudjuk, hogy az $\mathfrak{S}U\Omega$ felében az ekliptika alatt, az $\Omega A\mathfrak{S}$ félben pedig a földpálya fölött kering.

Ezeket előkészítve meghatározzuk az üstökös anomáliáját. Tisztán kísérletileg eljárva megállapíthatjuk az UNP elliptikus sectort az NU egyenes alkalmas fektetése által úgy, hogy területe az ellipszis területének annyiad részét tegye, a hányad részét teszi a perihélium óta elfolyt $(t-t_0)$ idő az egész keringésnek (Keppler II. törvénye, a területek megtartásának elve). E számítás, azaz a Keppler-féle probléma megoldása mérlegeléssel pótolható, ha meghatározzuk a lehetőleg egyenletes vastagságú papirból kivágott ellipszis súlyát p, és azon a PN alapon álló sectort, melynek súlya $p\frac{t-t_0}{T}$ legyen. Ezen sector PN-re fektetve adja U pontban az üstökösnek helyét. $NU=r$ a heliocentrikus radius vector, $v=UNP$ a valódi anomália.

Vagy megoldhatjuk a Keppler-féle egyenletet pusztán próbálgatással is. Legyen E_1 az excentrikus anomáliának, E-nek valamely hypothetikus értéke, mely a Keppler-féle egyenletbe téve M helyett M_1 hamis értéket adja; ekkor

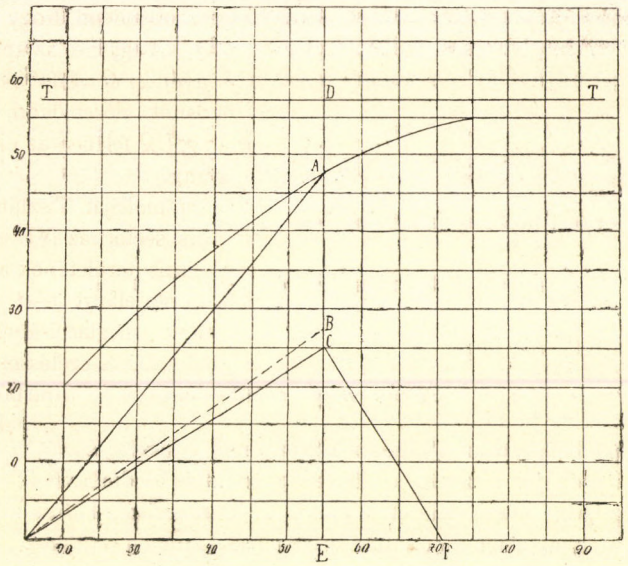
$$E_2=E_1+\frac{M-M_1}{1+e\cos. E_1}$$

az excentrikus anomáliának egy közelítőbb értékét adja. Ez eljárás ismétlendő, míg $M-M_n$ az n-ik helyettesítésnél a kivánt pontosságon belül marad. Ez eljárás ad a mi esetünkben M=15°24,4′ értékkel E=55°7,7′ és továbbá v=121°55,0′.

De tisztán graphikailag is járhatunk el.* Legyen MF (2-ik ábra) egyenes az $y=\frac{180°}{\pi}\sin. M$ görbe abscissájának egy darabja, melyre 0°-tól 180°-ig

* Klinkerfues, Theor. Astronomie. (Braunschweig 1871.)

fel vannak rakva az egyes fokok. A teljes ábrának, mely egyszer megrajzolva természetesen minden pályameghatározásnál használható, mi csak az itt szereplő részét adjuk. Legyen továbbá TT e görbének $M=90°$-ban húzott, az abscissától $\frac{180°}{\pi}$ távolságra fekvő érintője, és $M = 15°24{,}4'$ az üstökös pillanatnyi közép anomáliájának helye. Rakjuk fel M pontban MF rányhoz az FMA szögletet oly módon, hogy



2. ábra.

$$\text{cotang. } FMA = e, \quad FMA = 49°48{,}2'$$

és bocsássunk A metszési pontból merőlegest az abscissatengelyre. A merőleges talppontja E az excentrikus anomália helye, mert könnyű belátni, hogy

$$\overline{ME} = E - M = \frac{180°}{\pi} e \sin. E.$$

Messünk továbbá $MB = \frac{180°}{\pi} e$ sugárral AE egyenesbe, mi a B pontot szolgáltatja. Nyilván áll:

$$BE = \sqrt{\left(\frac{180}{\pi} e\right)^2 - \left(\frac{180}{\pi} e\right)^2 \sin.^2 E} = \frac{180}{\pi} e \cos. E$$

és ezért

$$DB = \frac{180}{\pi}(1 - e \cos. E).$$

Ha

$$e = \sin. \varphi,$$ tehát a mi esetünkben $\varphi = 57°40'.2$

az excentricitás szöglet, tegyük

$$FMC = 90° - \varphi$$

és messünk C pontból $CF = DB$ sugárral F pontban az abscissa vonalba. Ekkor CFE szöglet vagy mellékszöglete a valódi anomálja v, még pedig CFE maga, ha $E < 90° - \varphi$, mellékszöge, ha $E > 90° - \varphi$. Ugyanis:

$$\sin. CFE = \frac{EC}{CF} = \frac{\overline{ME} \cotg. \varphi}{DB} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \cdot \frac{e \sin. E}{1 - e \cos. E}.$$

De a két test problémája értelmében

$$\frac{r}{a} \sin. v = \sqrt{1-e^2} \sin. E \quad \text{és} \quad \frac{r}{a} = 1 - e \cos. E$$

a miből következik, hogy

$$CFE = v \text{ vagy } = 180° - v.$$

A mi példánkban az 1° hosszát 2 *mm*-nek választva $E = 55°.1$ és $v = 122°$, mi elég jól összevág a közvetlen számítás eredményével. Ez úton tehát még igen pontos számítás esetén E számára már kitünő közelítést kapunk, mely az előbb mondottak értelmében könnyen javítható.

Meg lévén immár állapítva az üstökös pályahelye U-ban, az FU egyenes megadná közvetlenül az üstökös helyét az égen is, ha a pálya tényleg az ekliptika síkjában feküdne. Hajlásának befolyását könnyen vehetjük tekintetbe. Világos ugyanis, hogy az ellipszisnek a $\Omega\delta$ csomóvonal körül való hajlításánál minden e vonallal párhuzamos mérete változatlan marad, míg az ezen vonalra merőleges méretek $1 : \cos. i$ arányában rövidülnek. Ha tehát U pontból $\Omega\delta$-ra merőlegest bocsátunk, az $UVW = i$ szögletet V pontban felrakjuk, $VW = VU$-nak veszszük és W pontból UV-re az WT merőlegest húzzuk, akkor T az üstökösnek az ekliptika síkjára való vetülete. Az FTU' vonal metszése az éggömbbel adja az üstökös helyét — feltéve, hogy az éggömb mérete a Föld pályájához képest végtelen nagy. E feltételnek ábránkban úgy felelünk meg, hogy a mondott egyeneshez N pontból az NU'' párhuzamos egyenest húzzuk, miáltal az üstökösnek geocentrikus hosszúságát nyerjük, mely nyilván U'' pont hosszúságával egyenlő.

Az üstökös szélességét is fáradság nélkül megszerkeszthetjük a már felírt

$$\rho \sin. \beta = r \sin. (\pi - \Omega + v) \sin. i$$

egyenlet alapján. Az üstökös szögtávolsága a felszálló csomótól, tehát $\pi - \Omega + v$ szöglet, a mozgás irányában számítva az ΩNU-nak megfelelő domború szöglet. Ennélfogva

$$VU = r \sin. (\pi - \Omega + v).$$

Ha tehát $XW = FU$ sugárral W pontból az UV egyenes folytatásába bemetszünk és WX-et meghúzzuk, akkor $XWVT$ kettős háromszögből:

$$WT = r \sin. (\pi - \Omega + v) \sin. i \text{ és } = \rho \sin. X,$$

a miből következik, hogy $X = \beta$, a bolygó szélességével egyenlő. És természetes, hogy e szöget mérő YZ ív, mely az $XZ = NU''$ sugarú körhez tartozik, közvetlenül a szélességnek ívmértéke. Ez déli lesz, ha az üstökös a mozgás irányában a γ és Ω pontok között van, északi, ha a Ω és γ között tartózkodik.

Nem szükséges az így levezetett ekliptikai koordinátákat æquatoriakra átszámítani, mert e művelet vagy ismét szerkesztés által, vagy az üstökösnek térképbe való rajzolása által pótolható. Első esetben keresendő graphikailag az U'' pont helye, ha az ekliptikát oN egyenes körül $23°27,2' = \varepsilon$ szög körül forgatjuk, még pedig úgy, hogy — most a papir síkját véve æquator sík gyanánt — az ekliptika téli felét ($180° - 270° - 360°$) lefelé hajlítjuk. A szerkesztés teljesen ugyanazos azzal, mely az U'' pontot és az YZ ívet szolgáltatta, és egyenesen az üstökös rectascensióját és declinatióját adja, mely azután vagy térképre rajzolható, vagy valamely parallaktikus távcső körei segítségével egyenesen beállítható.

Egyszerűbben úgy járunk el, hogy az ekliptika körét poláris ekliptikai æquidistáns térkép legnagyobb köre gyanánt tekintjük. Ekkor N az ekliptika pólusának képe, melyből a pólustávolsággal, mint sugárral közös középpontból æquidistáns köröket húzzunk és ezeket egyenlő szögtávolságú sugarakkal metszük. Ha az égi test szélessége északi, akkor N czélszerűen az északi, ha déli, akkor N az ekliptika déli pólusával azonosítható. Természetes, hogy ekkor $YZ = \beta$ szélesség közvetlenül NU'' látósugárra U'' pontból felrakva szolgáltatja 0 pontban az üstökös helyét a csillagok között. Megjegyzem, hogy az 1-sö ábrában a szerkesztés részleteinek kimélése szempontjából N gyanánt nem a déli, hanem az északi pólus van felvéve. Ennek folytán az ábrához függesztett térkép jobb és bal, azaz keleti és nyugoti oldala fel van cserélve. Az üstököst környező csillagok helyzete e térképbe könnyen berajzolható, ha valamelyik csillagtérképbe egyszersmindenkorra beszerkesztjük az ekliptika koordinátahálózatát is.

A számítás szerint az üstökösnek 1895. április 1-én éjfélkor elfoglalt helye $\lambda = 322°38'$, $\beta = -7°49'$, vagy $\alpha = 327°44'$, $\delta = -21°25'$, a mi a szerkesztéssel a rajzban egyáltalán elérhető pontosság keretén belül megegyezik. E szerint az üstökös a jelzett időben 33'-czel áll keletre és 5°14'-czel délre δ Capricorni csillagtól.

Ez az egész szerkesztés mechanikai modell alakjában is előállítható. Vágjuk ki kemény papirosból úgy az üstökös, mint a Föld pályáját, messük fel az előbbit γN, utóbbit $\Omega\gamma$ vonal mentén γ pontig és illeszszük össze úgy, hogy N pont mindkét pálya közös pontja legyen s az üstököspálya $PU\Omega$ fele a kör alá kerüljön. Készítsünk egy $180° - i = 167°7'$ élszöglettel biró prismát; tompa élét az $\Omega\gamma$ vonalba illesztve, erősítsük rá a két pályát ábrázoló lapot, és hajtsunk N ponton át egy tengelyt, mely a földpályához $90° - \varepsilon = 66°33'$ szöglettel hajlik, még pedig azon pont felé, melyet a Föld deczember 22-ikén foglal el. E tengely tehát a világtengely képe. Irányítsuk e tengelyt az egész készülékkel együtt észak felé és hajlítsuk a vízszinteshez a hely geographiai szélességének megfelelő szöglettel. Ha most az egész készüléket tengelye körül addig forgatjuk, míg az FN vonal a Nap irányába esik, akkor az FU vonalnak az égig húzott folytatása szolgáltatja tüstént az üstökös helyét. Abban a két helyzetben, melyben az FU látásvonal (melyet esetleg valamely piros szállal láthatóvá is lehet tenni) vízszintesen áll, az üstökös kel és nyugszik.

A Napra való beállítás is elkerülhető, ha a tengelyre merőlegesen erősített s vele együtt forgó 24 órára beosztott kört alkalmazunk, mely ugyanazon szerepet fogja játszani, mint a glóbus tengelyén lévő órakör. Ha az FN egyenest a meridiánba állítjuk, úgy, hogy N délen, F északon legyen, akkor az óralapnak, valamely a forgásban részt nem vevő mutatón déli 12 órát kell mutatnia. Ha most az egész készüléket a kivánt óráig forgatjuk az FN vonal mindig a Napra marad beállítva és viszont megállapítható az idő is, melyben az üstökös kel és nyugszik. Természetes különben, hogy ez a modell nem fogja megadhatni azt a pontosságot, melyet a szerkesztés biztosít, de mindenesetre élénkebb képét adja annak a folyamatnak, mely a csillagasz képleteiben kifejeződik.

Kövesligethy Radó.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

NEGYEDIK ÉVFOLYAM

IV. FÜZET. 1895 ÁPRILIS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1895

TARTALOM

Lap

Szily Kálmán: A primitiv gyökök szakaszossága ... 145

Rados Gusztáv: A cziklikus determinánsok elméletéhez ... 153

Physikai szemle. (Az argonról) ... 155

Irodalom. (A kinematikai geometria történeti fejlődése, Hornischek Henrik-től) 161

Értesítő a Math. Phys. Társ. előadásairól.

Dischka Győző: Az ajaksipok hangtüneményei. Bartoniek Géza: A víz- és gázvezeték elektromos áramáról ... 169

Társulati ügyek.

Vegyesek (Arthur Cayley, Kopp Lajostól) ... 192

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A negyedik társulati év 1895. január 1-én kezdődött. A *tagsági díj* az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) czímére — legczélszerűbben az 1. füzethez mellékelt posta-utalványnyal — beküldeni. *A mult évről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéséért.*

A *Math. Phys. Lapok* I—III. évfolyamai teljes példányokban még kaphatók; az I. kötet ára 5 frt, a többieké 3—3 frt.

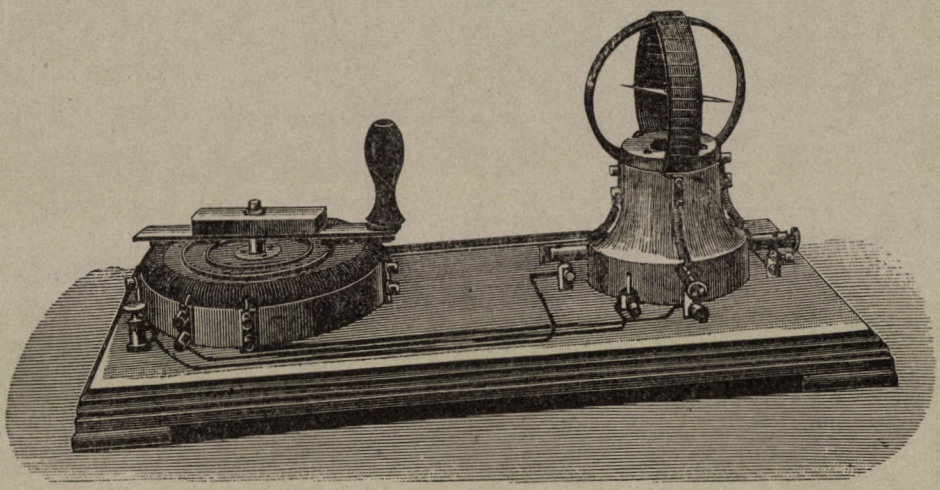
Rendes ülések. A társulat üléseit minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja, a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3.), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

Közgyülés. A társulat ez évi közgyülése Szombathelyen fog megtartatni, szeptember hó végén.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czímére **(VI. Bulyovszky-u. 16.)** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár **(VII., Csengery-u. 1)**, a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a *reclamatiók* is. A reclamatiókat — költségkimélésből — mindenkor a legközelebb megjelenő füzettel egyidejűleg teljesítjük.

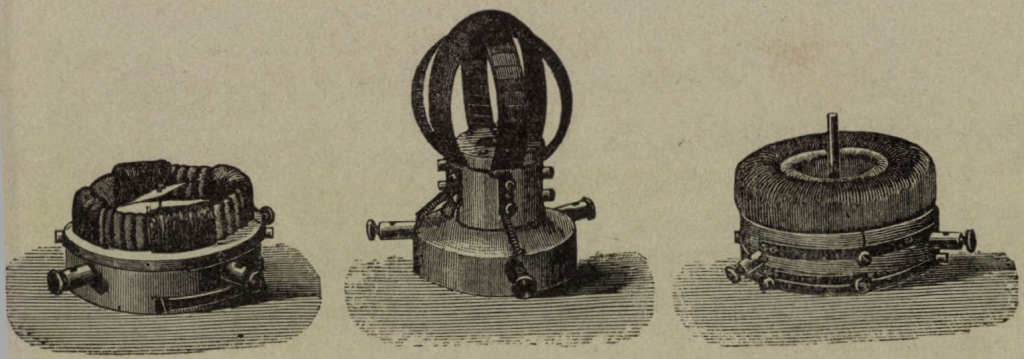
T. Munkatársainkhoz. Kérjük t. munkatársainkat, hogy közleményeiket az összehajtott irópapiros félívének csak egyik oldalára és ennek is csak egyik felére, — a képleteket mindig külön sorba — minél olvashatóbban irni szíveskedjenek. A közleményekhez való rajzok nem a szövegbe, hanem külön mellékletként rajzolandók, folyó számokkal látandók el s az ábrák helye a szövegben a folyó számnak mellé irásával jelölendő meg. Kérésünk szives teljesitésével a szerkesztőket fárasztó munkától, a társulatot pedig a korrekturákért járó tetemes kiadástól mentik fel.



WEINHOLD-féle készülék

FORGÓ MÁGNESES TÉR ELŐÁLLITÁSÁRA.

A II. kötet 275. stb. oldalain ismertetett készülékeket (3., 8., 9. és 11. ábra) minden hozzávaló mellékkészülékkel teljesen felszerelve igen ajánlhatjuk a t. cz. tanár urak becses figyelmébe.



A teljes készülék ára legfinomabb kivitelben ***60 forint*** *loco Budapest. A készülék egyes részei külön is kaphatók méltányos árakon.*

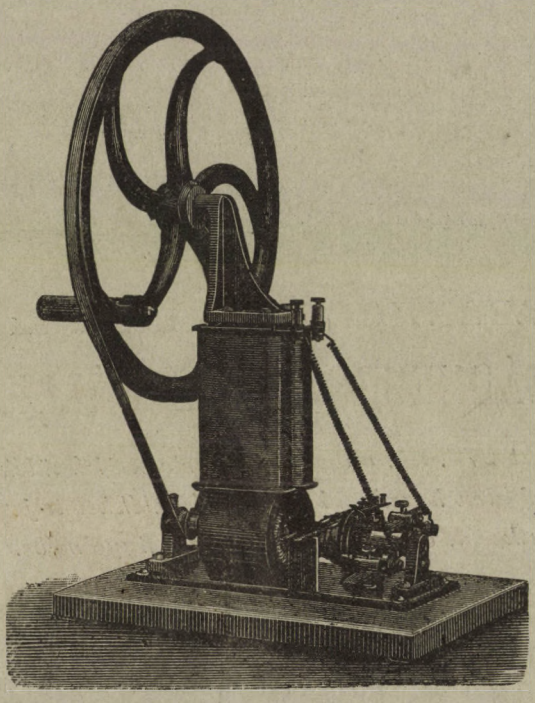
CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

DINAMO-ELEKTROMOS GÉP

Gramme-féle gyűrűvel ellátva

egyirányú, váltakozó és forgató (több fázisú) áram előállítására.

Az áram erőssége 4 Ampère, feszültsége 30 Volt.



Ezen géppel egyidejűleg meg lehet világítani például 3 izzólámpát egyirányú és 2—3—4 izzólámpát váltakozó vagy több fázisú forgató árammal. Használható egyenáramú, váltakozó áramú és több fázisú generátor vagy mótorként Szerkezete e lapok II. köt. V. füzetében ismertetve van.

A gép kizárólagosan iskolai czélokra készült és pedig nem csak a dynamogép stb. bemutatására, hanem mint állandó s erős villamos forrás; kézzel igen könnyen hajtható és árama minden iskolai kisérlethez teljesen elegendő.

Részletes utasitás minden géphez mellékeltetik.

A gép ára 100 forint.

CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

A PRIMITÍV-GYÖKÖK SZAKASZOSSÁGA.

A következő sorokban egy érdekes számelméleti tételt fogok bebizonyítani, a mely minden egyszerűsége mellett is eddigelé — ha nem csalódom — elkerülte a mathematikusok figyelmét.

Legyen p páratlan prímszám, a pedig (p-vel nem osztható) egész szám, és jelöljük a első, második, ..., i-dik hatványának p-vel való osztásából származó maradékokat rendre

$$a,\ a^2,\ \ldots,\ a^i$$

-vel, s a p és valamelyik maradéka közti különbséget rendre

$$-a,\ -a^2,\ \ldots,\ -a^i$$

jelképpel, akkor tételünk röviden így formulázható:

Ha $(-a^2)$ *primitív gyöke p-nek,* $(-a^4)$ *is az; ha ellenben* $(-a^2)$ *nem primitív gyöke p-nek, úgy* $(-a^4)$ *sem az.*

A tétel bizonyítását két részre osztom. Először azt veszem, hogy $p=4n+1$ alakú. Könnyű meggyőződni, hogy ez esetben $(-a^2)$ sohasem lehet primitív gyök; mert

$$(-a^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{2n} a^{p-1} \equiv 1 \,(\mathrm{mod.}\, p).$$

Föltéve ellenben, hogy $p=4n-1$ alakú, úgy $\frac{p-1}{2}$ páratlan szám és:

$$(-a^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \,(\mathrm{mod.}\, p).$$

Ebből azonban csak az következik, hogy $(-a^2)$ mindig quadratikus nem-maradéka p-nek; mert megtörténhetik, hogy a

$\frac{p-}{2}$-hatványnak már valamely egész számú hányadrészére, mondjuk $\frac{p-1}{2\delta}$-re is áll, hogy

$$(-a^2)^{\frac{p-1}{2\delta}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

De ekkor, minthogy $\frac{p-1}{2\delta}$ páratlan szám, szükségképen áll ez is:

$$(a^2)^{\frac{p-1}{2\delta}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

E két kongruenczia szorzatából következik, hogy

$$(-a^4)^{\frac{p-1}{2\delta}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

tehát: $(-a^4)$ *ugyanolyan rendű nem-maradék, mint a milyen* $(-a^2)$; vagyis ha $(-a^2)$ nem primitív gyök, úgy $(-a^4)$ sem az, ha ellenben $(-a^2)$ primitív gyök, úgy $(-a^4)$ is az.

A tétel utóbbi része önként következik a primitív gyököknek egy ismert sajátságából is. Ismeretes ugyanis, hogy a primitív gyöknek minden olyan hatványa, a melynél a hatványkitevő relativ prím $(p-1)$-hez képest, ugyancsak primitív gyök. Amde

$$-a^4 = -(-a^2)^2 = (-a^2)^{\frac{p-1}{2}+2}$$

itt pedig a hatványkitevő:

$$\frac{p-1}{2} + 2,$$

az esetben mikor $\frac{p-1}{2}$ páratlan szám, okvetetlenül relativ prím $(p-1)$-hez képest; ha tehát $(-a^2)$ primitív gyök, úgy $(-a^4)$ is az; és viszont.

*

Tételünkből folytatólag az is következik, hogy a szerint, a mint $(-a^2)$ primitív gyök vagy nem primitív gyök, nem csak $(-a^4)$, hanem $(-a^8)$, $(-a^{16})$ . . . is primitív gyök vagy nem primitív gyök. Vagyis e sorozatnak

$$-a^{2^1},\ -a^{2^2},\ -a^{2^3},\ \ldots,\ -a^{2^k},\ -a^{2^{k+1}}\ \ldots \qquad (1)$$

tagjai vagy mind primitív gyökök, vagy egyikök sem az. A primitív gyökök számossága: $\varphi(p)$ azonban, valamint a nem primitív gyököké is: $p-1-\varphi(p)$ véges szám. E sorozatnak tagjai tehát nem lehetnek egymástól mind különbözők, hanem kisebb-nagyobb intervallumokban, bizonyos szakaszokban ismétlődniök kell.

Határozzuk meg e szakaszok minőségét, tagszámát, dolgozatunk czímének megfelelőleg, először is arra az esetre, a mikor $p=4n-1$ alakú és $(-a^2)$ primitív gyök; vagyis kérdezzük, mikor lesz e sorozat $(i+1)$-dik és $(k+1)$-dik tagja kongruens, tehát:

$$a^{2^{i+1}} \equiv a^{2^{k+1}} (\text{mod.}\, p).$$

Minthogy a primitív gyök közönséges maradéksorozata $p-1$ tagból áll, nyilvánvaló, hogy akkor, a mikor

$$2^{i+1} \equiv 2^{k+1} (\text{mod.}\, p-1)$$

vagy pedig

$$2^i \equiv 2^k \left(\text{mod.}\, \frac{p-1}{2}\right),$$

s minthogy az utóbbi modulus páratlan

$$2^{k-i} \equiv 1 \left(\text{mod.}\, \frac{p-1}{2}\right) \qquad (2)$$

Föltevésünk szerint ez utóbbi modulus $R^r T^t S^s \ldots$ alakú, hol is $R, T, S, \ldots$ páratlan prímszámok, $r, t, s \ldots$ pedig tetszőleges pozitív egész számok.

Legyen már most $\rho, \tau, \sigma \ldots$ a legkisebb pozitív egész szám, a melyre nézve

$$2^\rho \equiv 1 \text{ mod. } R; \quad 2^\tau \equiv 1 \text{ mod. } T; \ldots$$

akkor, a mint ismeretes:

$$2^{\rho R^{r-1}} \equiv 1 \text{ (mod. } R^r); \quad 2^{\tau T^{t-1}} \equiv 1 \text{ (mod. } T^t); \ldots$$

A miből következik, hogy a 2. alatti kifejezésben előforduló $k-i$: legkisebb közös többszöröse lesz a

$$\rho \,.\, R^{r-1},\ \tau \,.\, T^{t-1},\ \sigma \,.\, S^{s-1} \ldots \qquad (3)$$

számoknak. E szerint $k-i$ csupán p-től függő állandó és teljesen független a k vagy i rendszám egyéni értékétől. Ha tehát a szakasz tagszámát λ-val, a föntebbi legkisebb közös többszöröst $\psi(p)$-vel jelöljük

$$\lambda=\psi(p)$$

és az (1) alatti sorozatban

$$-a^{2^{\lambda+1}}=-a^{2^1}$$
$$-a^{2^{\lambda+2}}=-a^{2^2}$$
$$\vdots$$
$$-a^{2^{\lambda+i}}=-a^{2^i}$$

vagyis a sorozat szakasza mindjárt az *első taggal kezdődik*, s a szakasz tagszáma egyenlő a 3. alatti számok legkisebb közös többszörösével.

Megjegyzendő, hogy e sorozat vissza felé is folytatható; gyökvonás útján azt találjuk ugyanis, hogy

$$-a^{2^\lambda}\equiv\pm a$$

Ha tehát $-a^2$ primitív gyök, úgy vagy $+a$, vagy $-a$ szintén az.

Hasonlítsuk össze a primitív gyökök szakaszának tagszámát, $\psi(p)$-t a primitív gyökök összes számával: $\varphi(p)$-vel. Minthogy az utóbbi, mint ismeretes,

$$\varphi(p)=R^{r-1}(R-1).T^{t-1}(T-1)\ldots$$

az előbbi pedig a (3) alatti számok *legkisebb* közös többszöröse, könnyű belátni, hogy $\psi(p)$ a legtöbb esetben egész számú hányadrésze $\varphi(p)$-nek és csak kivételesen lesz vele egyenlő. Csakis akkor lehet t. i. ez amazzal egyenlő, ha $(p-1)$ tényezőkre bontásában csak *egy* páratlan prímszám jő elő, ha tehát

$$p-1=2R^r$$

és azonfelül $\rho=R-1$, vagyis ha 2 primitív gyöke R-nek. 100-on alul csakis hat prímszám van, t. i. 3, 7, 11, 19, 23 és 59, a melyeknél a primitív gyökök egy szakasza valamennyi primitív gyököt magában foglal, a többieknél $\psi(p)$ mindig fele $\varphi(p)$-nek; 100-on

túl menve, péld. 127-nél a primitív gyökök száma: 36, holott a szakasz tagszáma: 6. Itt tehát a harminczhat primitív gyök hat csapatra, 211-nél a negyvennyolcz primitív gyök négy csapatra oszlik, míg 251-nél mind a száz egy csapatban vonul föl. A kiszámítás részleteit és egyes egyéneken való ellenőrzését az olvasóra bízzuk.

*

Teljesség okáért egészítsük ki e meghatározást — noha itt már a sorozat tagjai nem lesznek primitív gyökök, — arra az esetre is, a mikor $p=4n+1$ alakú.

Legyen a ismét primitív gyöke p-nek, és kérdezzük, mikor lesz az (1) alatti sorozat $(i+1)$-dik és $(k+1)$-dik tagja kongruens; nyilvánvaló, hogy ugyanúgy mint előbb, ha

$$2^{k+1} \equiv 2^{i+1} \pmod{p-1}.$$

Mostani föltevésünk szerint

$$p-1 = 2^{\mu+1} R^r T^t S^s \ldots,$$

hol is μ tetszőleges pozitív egész szám. Lesz tehát:

$$2^{k-\mu} = 2^{i-\mu} \left(\text{mod.} \frac{p-1}{2^{\mu+1}} \right).$$

Ebből látjuk, hogy most a szakasz a sorozatnak $(\mu+1)$-dik tagjánál kezdődik s a tagszáma $(k-i)$, ugyanúgy mint előbb, a (3) alatti számok legkisebb közös többszörösével egyenlő. Itt tehát a szakasz nem tiszta, vagyis nem kezdődik a sorozat első tagjával, épen úgy mint a páros számok reciprók értékének tizedes törtre való átváltoztatásakor. A szakaszban előforduló számok valamennyien olyan tulajdonságúak, hogy a nekik megfelelő közönséges maradéksorozat

$$\frac{p-1}{2^{\mu}}$$

tagból áll. A $\mu=0$ eset visszavezet a $p=4n-1$ alakú prímszám primitív gyökeiből keletkező szakaszra.

Szily Kálmán.

A CZIKLIKUS DETERMINÁNSOK ELMÉLETÉHEZ.

A következőkben a

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-i+1} & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n-i+2} & \dots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_i & a_{i+1} & \dots & a_n & \dots & a_{i-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-i} & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

determinánst, a melynek sorai az első sorból az

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

cziklikus helyettesítés ismételt alkalmazása alapján nyerhetők, röviden cziklikus determinánsnak fogom nevezni. E cziklikus determinánsnak az algebrában és számelméletben való gyakori szereplése eléggé megokolja azt, hogy vele önállóan is foglalkozzunk és különösen determinánselméleti szerkezetét tanulmányozzuk. Ez a körülmény indított engem arra, hogy e cziklikus determinánsokra vonatkozó két oly kisebb tételt tegyek közzé, a melyek e determináns szerkezetére vonatkoznak.

Az a_k határozatlan az A determinánsnak minden sorában mint elem szerepel; legyen az i-dik sorban előforduló a_k elemnek aldeterminánsa

$$A_k^{(i)}$$
$$(i, k = 1, 2, \dots, n).$$

E jelölés bevezetése után a szóban forgó két tételt a következőképen formulázhatom:

I. *Az A cziklikus determinánsnak legfeljebb n egymástól különböző $(n-1)$-edfokú aldeterminánsa lehet, ugyanis*

$$A_k^{(1)}=A_k^{(2)}=\cdots=A_k^{(n)}.$$
$$(k=1, 2, \ldots, n)$$

II. *Ha $A=0$, akkor A-nak összes $(n-1)$-edfokú aldeterminánsai egyenlők.*

*

I. Ha az A determináns i-dik sorához tartozó elemek aldeterminánsait rendre komponáljuk az

$$i, i+1, i+2, \ldots, n, 1, 2, \ldots, (i-1)\text{-}$$

dik sorokkal, az egyenlőségeknek következő rendszerét kapjuk:

$$\begin{array}{l} a_i A_i^{(i)} + \cdots + a_n A_n^{(i)} + a_1 A_1^{(i)} + \cdots + a_{i-1} A_{i-1}^{(i)} = A \\ a_{i+1} A_i^{(i)} + \cdots + a_1 A_n^{(i)} + a_2 A_1^{(i)} + \cdots + a_i A_{i-1}^{(i)} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i-1} A_i^{(i)} + \cdots + a_{n-1} A_n^{(i)} + a_n A_1^{(i)} + \cdots + a_{i-2} A_{i-1}^{(i)} = 0. \end{array} \quad (1)$$

Jelöljük ez egyenlőségek mindegyikében a baloldalon álló lineár kifejezések tagjait rendre:

$$t_1, t_2, \ldots, t_{n-i+1}, t_{n-i+2}, \ldots, t_n\text{-}$$

-nel. Ha most az (1) alatti egyenlőségek mindegyikére a

$$C=(t_1, t_2, \ldots, t_{n-i+1}, t_{n-i+2}, \ldots, t_n)$$

cziklikus helyettesítés $(n-i+1)$-dik hatványát, azaz a

$$C^{n-i+1}=\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \ldots, & t_{i-1}, & t_i, \ldots, & t_n \\ t_{n-i+2}, & t_{n-i+3}, & \ldots, & t_n, & t_1, \ldots, & t_{n-i+1} \end{pmatrix}$$

helyettesítést alkalmazzuk, az egyenlőségek következő rendszerei fognak kiadódni:

$$\begin{array}{l} a_1 A_1^{(i)} + \cdots + a_{i-1} A_{i-1}^{(i)} + a_i A_i^{(i)} + \cdots + a_n A_n^{(i)} = A \\ a_2 A_1^{(i)} + \cdots + a_i A_{i-1}^{(i)} + a_{i+1} A_i^{(i)} + \cdots + a_1 A_n^{(i)} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n A_1^{(i)} + \cdots + a_{i-2} A_{i-1}^{(i)} + a_{i-1} A_i^{(i)} + \cdots + a_{n-1} A_n^{(i)} = . \end{array}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

De ez azt jelenti, hogy az

$$A_1^{(i)},\ A_2^{(i)},\ \ldots,\ A_k^{(i)},\ \ldots,\ A_n^{(i)}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

értékrendszerek mindannyian az

$$\begin{aligned}
&a_1z_1+\cdots+a_{i-1}z_{i-1}+a_i\ \ z_i+\cdots+a_n\ \ z_n=A\\
&a_2z_1+\cdots+a_i\ \ z_{i-1}+a_i\ \ z_i+\cdots+a_1\ \ z_n=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_nz_1+\cdots+a_{i-2}z_{i-1}+a_{i-1}z_i+\cdots+a_{n-1}z_n=0
\end{aligned}$$

lineár egyenletrendszernek megoldásai; minthogy azonban az a_k-knak határozatlan választása mellett az egyenletrendszer determinánsa, a mely A-val egyenlő, nem azonosan zérus, ennek az egyenletrendszernek csak egyetlen egy megoldása lehet; de akkor kell, hogy

$$A_k^{(1)}=A_k^{(2)}=\cdots=A_k^{(n)} \qquad (2)$$
$$(k=1, 2, \ldots, n)$$

legyen; ha pedig a (2) alatti egyenlőségek az a_k határozatlanok mind amaz értékei mellett helyesek, a melyekre nézve $A\gtrless 0$, akkor azonos egyenlőségek, és így az a_k határozatlanok minden lehetséges értékei mellett is helyesek maradnak.

*

II. Ha

$$A=0,$$

akkor az A determináns két tetszőleges sorának megfelelő elemeihez tartozó aldeterminánsok proporczionálisak. Igy pl. az 1-ső és 2-dik sorhoz tartozó aldeterminánsok is proporczionálisak, ha ezt egyenletben fejezzük ki; a következőt kapjuk:

$$A_1^{(1)}=\rho A_2^{(2)},\ A_2^{(1)}=\rho A_3^{(2)},\ \ldots,\ A_n^{(1)}=\rho A_1^{(2)};$$

de I. tételénél fogva

$$A_2^{(2)}=A_2^{(1)},\ A_3^{(2)}=A_3^{(1)},\ \ldots,\ A_n^{(2)}=A_n^{(1)},$$

tehát

$$A_1^{(1)}=\rho A_2^{(1)},\ A_2^{(1)}=\rho A_3^{(1)},\ \ldots,\ A_n^{(1)}=\rho A_1^{(1)}. \qquad (3)$$

Ezeknek az egyenlőségeknek szorzása illetőleg összeadása a

$$A_1^{(1)} = \rho^n A_1^{(1)} \tag{4}$$

illetőleg

$$A_1^{(1)} + A_2^{(1)} + \cdots + A_n^{(1)} = \rho(A_1^{(1)} + A_2^{(1)} + \cdots + A_n^{(1)}) \tag{5}$$

egyenlőségre vezet.

Ha feltesszük, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ határozatlanoknak oly értékeik vannak, hogy

$$A_1^{(1)} \gtrless 0,$$

akkor az

$$A_1^{(1)2} = A_2^{(1)} A_2^{(1)}$$

egyenlőség következtében a

$$A_2^{(1)} \gtrless 0 \tag{6}$$

reláczió is érvényben lesz.

De az a_k határozatlanok ez értékrendszerei mellett (4)-ből következtethetjük, hogy

$$\rho^n = 1$$

és így a

$$\rho = \frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}},$$

a mely a határozatlanoknak tekintetbe jövő értékrendszerei mellett az a-knak folytonos függvénye, csak oly számértéket vehet fel, a mely a

$$\rho^n = 1$$

egyenletet kielégíti, a miből következik, hogy ρ állandó.

Minthogy továbbá

$$A_1^{(1)} + A_2^{(1)} + \cdots + A_n^{(1)}$$

nem azonosan zérus, midőn $A = 0$, (a mint azt számbeli példákon kimutathatjuk) (5)-ből következik, hogy

$$\rho = 1;$$

de akkor a (3) alatti relácziók az I. tétel figyelembe vétele mellett így írhatók:

$$A_1^{(i)}=A_2^{(i)}=\cdots=A_n^{(i)}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

s ezzel a második tétel is be van bizonyítva.

Ha $A_1^{(1)}=0$, akkor már a (3) alatti egyenlőségek mutatják, hogy az A determináns összes $(n-1)$-edfokú aldeterminánsai zérusok. Tételünk e speciális esetét KRONECKER bizonyította be legelőször «Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen» című értekezésében, a mely a Journal für die reine und angewandte Mathematik 99. kötetében jelent meg.

Végül legyen szabad a talált tételt számbeli példán is bemutatnom. Legyen.

$$A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

akkor

$$A=0,\quad A_1^{(i)}=A_2^{(i)}=A_3^{(i)}=A_5^{(i)}=-3.$$
$$(i=1, 2, 3.)$$

Rados Gusztáv.

PHYSIKAI SZEMLE.

Az argonról. C. RAVEAU: L'argon. *Journal de Physique.* 3a. sér. T. IV. pag. 101.

Folyó évi január 31-én Lord RAYLEIGH és RAMSAY a londoni Royal Society előtt egy értekezést olvastak fel, mely egy a légkörből nyert és *argon*-nak elnevezett új gázra vonatkozó kutatásaik eredményét foglalja magában.

Lord RAYLEIGH már régebbi munkálataiban * úgy találta, hogy a *légköri* eredetű nitrogén sűrűsége mindig nagyobb, mint a vegyi úton előállított nitrogéné. Ime ugyanazon sűrűségmérő üveggömbben lévő gáz tömege, grammokban kifejezve:

Nitrogén, nitrogéndioxidból	2,3001
« nitrogénoxidulból	2,2990
« amoniumnitrátból izzó állapotban tisztítva	2,2987
« ureumból	2,2985
« amoniumnitrátból, hidegen tisztítva	2,2987
Átlagos érték	2,2990

Ezen számadatokból a *chémiai* úton előállított nitrogén egy literének tömege

1,2505 gramm.

A légkörből nyert nitrogén ugyanazon feltételek mellett a következő számértékeket szolgáltatta:

Vörösen izzó rézzel előállítva (1892)	2,3103
« « vassal « (1893)	2,3100
Vashydráttal « (1894)	2,3102
Átlagos érték	2,3102

a miből végre egy liter tömege

1,2572 gramm.

---

* Lord RAYLEIGH: On an Anomaly encountered in Determinations of the Density of Nitrogén Gas. *Proc. Roy. Society vol.* LV. 1894. p. 340.

Az első érték a magnéziumnitrátból is nyerhető, ha a *légköri* nitrogént hevített magnéziumon vezetik keresztül. Ezt a nitrátot azután vízzel kezelik; a létre jövő amoniákot sósavban fogják fel és az előálló chlórhydrátot nátriumhypobromittel bontják szét. A végrehajtott kisérletek egyikében *légköri* nitrogént nyertek, a nélkül, hogy a vörösen ízzó rezet használatba vették volna; a *chémiai* nitrogén sűrűségeül mindazonáltal a rendes érték adódott.

A *chémiai* nitrogén relativ könnyűségét mindenek előtt tisztátalanságok jelenlétéből törekedtek kimagyarázni. Az első, a mire gondolni lehet, a hydrogén. Midőn azonban ezt a gázt szándékosan hozzákeverték és a keveréket vörösen izzó rézoxydon vezették keresztül, a sűrűség nem változott; ezt a föltevést tehát el kellett vetni. Majd arra gondoltak, hogy a *chémiai* nitrogénben szabad atómok lehetnek, melyek dissociált molekulákból származnának; de egyrészt a lassú elektromos kisülés átbocsátása nem változtatja meg a súlyokat, másrészt pedig egy próba mennyiségnek sűrűsége nyolcz hónap lefolyása alatt a változásnak semmiféle jelét nem mutatta: tehát időbeli változás kizártnak volt tekinthető.

Eszerint bebizonyítottnak látszik, hogy a nitrogén elnevezés alatt nyert két gáz valamelyike keverék; kevéssé valószinű, hogy ez a *chémiai* nitrogénre állna, mert hisz akkor két fajta nitrogénsav léteznék. A legegyszerűbb magyarázat abból áll, hogy a légkörben egy új elemet tételezzünk fel, bár eleve is valószinütlennek tünik fel, hogy egy a levegőben létező gáz olyan sokáig észrevétlenül maradhatott. Azonban már Cavendish felvetette a kérdést, vajjon tiszta gáz-e a légköri nitrogén, a midőn oxigén jelenlétében elektromos szikrák hatásának vetette alá és gáznemű maradékot nyert, a mely az eredeti térfogat $^1/_{120}$-ad részét tette ki; azonban a kérdés mélyébe nem hatolt be.*

Lord Rayleigh Cavendish kisérletét nagy méretekben ismételte. Középnagyságú Ruhmkorff-féle szikraindítót használt, a melyet öt Grove-elem táplált; a gáz egy kis próbacsőben volt elzárva, nagy mennyiségű alkalikus oldat felett. Legalkalmasabb volt az 5 mm hosszú szikra. Az elnyelés óránkénti sebessége 30 cm^3 volt. Miután az oxygént pyrogallussav és káliumhydroxid keverékében elnyelette; 100 cm^3 levegőből 0,76 cm^3 térfogatú gázmaradékot nyert. A kisérlet végén a hőmérséklet jelentékenyen felemelkedett, nem különben a vízgőz aránya is; azonban az eredmény jelentésére vonatkozó minden kétség eltünt, midőn megállapitották, hogy a maradék észrevehe-

---

* Cavendish: Experiments on air *Phil. Trans. vol.* LXXV., p. 372, 1783. Kisérletei különben igen lassuk voltak; az egy órában elnyelt gáz mennyisége körülbelől 1 cm^3 volt s ennek kétötöde nitrogén.

tően arányos az eredeti térfogattal, még abban az esetben is, a mikor az sokkal kisebb — 5 cm^3 — volt.

A levegő nitrogénjének elnyeletésére az oxygénen kívül még a következő anyagok használhatók: bór, silicium, titanium, lithium, strontium, barium, magnesium, aluminium, higany és hydrogén (elektromos szikrák hatása alatt) és végül bariumcarbonat és szén magas hőmérsékletű keveréke. A szalag alakú magnesium szolgáltatta a legjobb eredményeket. A légköri nitrogént újra meg újra átvezetve magnesiumon, lehetséges volt 10 nap alatt körülbelől 1500 cm^3 térfogatú gázt előállítani, melyet higany felett fogtak fel. Azután átvezették natronmészen, phosphoranhydriden, magnesiumon, rézoxidon és újra a két első nyelő anyagon át egy másik gazometerbe. Ez a második művelet a térfogatát körülbelől 200 cm^3-nyire szorította le és hydrogénre vonatkozó sűrűségül 16,1-et adott. Egy másodszori kezelés a sűrűséget 19,009-re emelte. Végre a térfogatot kisebbítették úgy is, hogy a gáz egy kis, oxygénnel kevert részét elektromos szikrák hatásának tették ki. Ebből a sűrűséget kiszámítva, 20-at nyertek. Színképe a nitrogén sávjain kívül egészen új vonalakat is mutatott.

Atmolytikus kisérletek, a melyek különben még tökéletlenek, megmutatták, hogy az a levegő, a mely likacsos falakon ment keresztül, nehezebb nitrogént tartalmaz, mint a közönséges.

Hátra volt még kimutatni, hogy a *chémiai* nitrogénben nincsen meg az a maradék-gáz, mely az előbbeni kisérletekben előkerült. S ez is sikerült oly módon, hogy a *chémiai* nitrogént oxygén jelenletében elektromos szikrák hatásának vetették alá; a maradék többrendbeli kisérletben összehasonlíthatatlanul kisebb volt, mint a *légköri* nitrogénből (egy esetben 3,5 cm^3 150 helyett) és ez is megmagyarázható a nagy mennyiségű gázokkal való műveletekhez szükséges vízből.

A nitrogént nagy mértékben magnesium segítségével állították elő, a már leírt módon. Oxygénnel, Méritens gépét használva, melynek áramát magas potentiálra transformálták, 3 liternyi óránkénti abszorbeáló sebességet értek el.

Az előállításnak ezen módja lehetővé tette a levegőbeli oxygén és a maradék-gáz, az *argon* viszonylagos térfogatának meghatározását. Ebből a viszonyból, továbbá a chémiai és a légköri nitrogénnek hydrogénre vonatkozó sűrűségéből kiszámították az argonnak hydrogénre vonatkozó sűrűségét, a mi 20,6-et adott. 400 cm^3-nyi oxygénnel kevert gázon végzett egyik kisérlet 19,7-et adott. Végre, a mint mondva volt, az első, magnesiummal előállított próba-anyag 20-ra vezetett. Eddig még nem lehetett szabatos mérést végezni elegendő mennyiségű tiszta gázon.

13° C. körül a víz 100 rész argonból 4-et old fel, a mi azt jelenti, hogy az argon oldhatósága 2,5-szer akkora, mint a nitrogéné. Lehetett tehát

arra következtetni, hogy az esővízből nyert nitrogéngázban nagyobb mennyiségű argont kell találni. Az esővízből nyert nitrogén sűrűségének meghatározása a gyanítást tényleg igazolta.

A két fajlagos hőnek viszonyát a hang sebességének meghatározásából (a levegőbeli sebességgel való összehasonlítás révén) állapították meg; a kisérlethez 2—8 mm átmérőjű csöveket használtak. A nyert számok 1,65 és 1,61 voltak. Igazoló kisérletek szénsav számára 1,276-t és hydrogén számára 1,391-t adtak. Előzőleg e két gáz számára nyert átlagos értékek pedig 1,288 illetve 1,402 voltak.

Ebből tehát következik, hogy az argon fajlagos hőinek viszonya nem igen különbözhetik 1,66-tól, a mi olyan gázoknál fordul el, melyeknek összes energiájuk translatorikus. Eddig csak a higanygőz mutatta ezt a tulajdonságot.

Az argon eddig chémiailag teljesen közömbösnek mutatkozott; Lord Rayleigh és Ramsay igen sok kisérletet végeztek abban az irányban, hogy valamely anyaggal vegyülésre birják, de minden siker nélkül.

Milyen természetű az argon? Láttuk, hogy a fajmelegek viszonyának mérése arra mutat, hogy monoatomikus; tehát vagy elem, vagy elemek keveréke. Atomsúlya, a mely egyenlő a molekulasúlylyal, 40 volna. Mendelejeff sorozatában nem találni számára helyet.

Ezen előterjesztés után Crookes bemutatta a társaságnak az argon színképére vonatkozó tanulmányának eredményét.*

Ha az elektromos kisülést Plücker-féle csövön vezetik keresztül, mely argont tartalmaz, akkor feltünnek a nitrogén vonalak; de kis idő mulva, az elpárolgott elektrodok platinája elnyeli ezt a gázt, és az argon vonalai egyedül jelennek meg.** A vonalak összessége két határozott csoportot alkot, az egyik 119, a másik 80 vonalat foglal magában, melyek közül 26 mindkét színképben látszik előfordulni. Az első nagy tekercscsel kapható, 6 volt pontentiálkülömbségű 3 amp. áramot használva; a cső fénye pirosas. A második nyerhető 3,84 ampéres és 11 voltos árammal, ha még kb. 320 cm^2 felületű leydeni palaczkot is becsatolunk. A két színképet egymásután is meg lehet kapni, ha a gáz nyomása változik; 8,84 ampères és 11 voltos árammal a pirosas fény 3 mm, a kékes fény pedig 0,25 mm nyomással idézhető elő. A gáz jellemzésére két vonal szolgálhat; pirosak, de kisebb törésüek, mint a hydrogén és lithium piros vonalai, és 696,56 és 705,64 hullámhosszúságnak felelnek. A színképek tanulmányozása semmi olyasféle eredményre sem vezetett, a mely ellentétben állana

---

* Crookes: On the Spectra of Argon. *Nature* t. 51.

** Crookes úgy is nyert argont, hogy a légköri nitrogénen elektromos kisülést bocsátott át, 8 órán keresztül.

a két elem hypothesisével, mert hisz sok egyszerű gáz színképe összetett és így az elemiség nyilt kérdésnek marad.

Olszewski az argont Ramsay felszólítására alacsony hőmérsékletek alatt tanulmányozta.* Cailletet készülékét használta; a rugós manométert előzetesen a higanymanométerrel hasonlította össze. Fagyasztáshoz az ethylent használta, mely már igen alacsony nyomásnál forr; az eszköznek üvegcsöve úgy volt elkészítve, hogy az ethylenbe merült része aránylag igen vékony falú — legfeljebb 1 mm — volt, azért, hogy a külső és belső hőmérséklet a lehető leggyorsabban egyenlővé váljon. A hőmérsékleteket hydrogén hőmérő mérte. Az argon könnyen folyósodik —128,6 C° hőmérséklet és 38 légköri nyomás alatt. Ha a hőmérséklet lassanként emelkedik, a meniscus határozatlanná lesz; 50,6 atmosphæra nyomás alatt —121° nál eltünik. (Hét mérés — 119° és —121,6° közé eső értékeket adott.) A gőz feszültsége 38 atmosphæra (—128,6°-nál) és 23,7 atmosphæra (—139,1°-nál) között változik.

Hogy még tovább mehessen, oxygént használt. Az argon az oxygén forrási hőmérsékleténél (—182,7°) a légköri nyomás alatt nem folyósodik; azonban —186,9°-nál a folyósodás sikerült, 740,5 mm nyomás alatt. A folyadék sűrűsége ekkor 1,5.

—191°-nál az argon a jéghez hasonló kristályos anyaggá szilárdul; még alacsonyabb hőmérséklet alatt fehér és átlátszatlanná válik; —189,6°-nál folyósodik.

Az argon, tekintve a folyósodás nehézségét, a szénoxid (—190°) és az oxygén (—182°7) között foglal helyet; közeledik az utóbbihoz, melynek kritikus hőmérséklete és nyomása —118,8° illetve 50 atmosphæra, de annyiban teljesen elüt tőle, hogy megszilárdul.

Alig hogy a londoni Chemical Society Lord Rayleigh-t, mint az argon nagynevű felfedezőjét, a *Faraday-Medal*lal kitüntette és őt mint «az utolsó tizedes jegyek győztesét» ünnepelte, midőn újabb és újabb vizsgálatok, melyeket a legnagyobb nevű chemikusok végeztek, új és meglepő eredményekre vezettek.

Lord Rayleigh társa, Ramsay két irányban folytatta a kisérleteket. Egyik czélja volt, kipuhatolni vajjon csakugyan lehetetlen-e az argont más anyagokkal vegyülésre bírni; a másik czélja az volt, hogy az argonnak a Mendelejeff-féle elem-sorozatban helyet találjon.

Az első czél elérése végett Berthelot-nak 37 cm^3 argont küldött, hogy vele kisérletezzék. Berthelot a franczia akadémia 1895 márczius 11 diki ülésén adta elő kisérleteinek eredményét. E szerint több sikertelen kisérlet után nagy feszültségű Ruhmkorff-féle inductorium elektromos kisülése

* Olszewski: The liquefaction and solidifaction of Argon. Nature t. 51.

alatt az eredeti argonnak 0,83 része a hozzákevert benzinnel egyesült és gyantanemű, szilárd, sárgás, szagos anyagot alkotott, mely az argont tartalmazó üvegcső falain lerakódott. A folyamat 10 óráig tartott. A kiválasztott anyag hő hatása alatt szétbomlott és szenes anyagot hagyott hátra.

Berthelot azonban egy más nem kevésbbé érdekes tüneményt is tapasztalt, melyre egy különös hypothesist alapított.* Azt tapasztalta ugyanis, hogy az argont tartalmazó cső bizonyos kisérleti feltételek mellett gyönyörű, sárgás, fluoreszkáló fényt mutatott, a melyet spectroscoppal megvizsgálván, arra a meglepő eredményre jutott, hogy a színképe teljesen olyan, mint a milyen az északi fény színképének egy része, melyet eddig még nem sikerült megmagyarázni.

Ebből Berthelot azt a közel fekvő hypothezist állítja fel, hogy az északi fény nem egyéb, mint a levegőben történő elektromos kisugárzás hatása alatt fluoreszkáló argon fénye.

Míg Berthelot az említett kisérletekkel foglalkozott, az alatt Ramsay a másik irányban folytatta kutatásait és nem kevésbbé fontos eredményekre jutott. Szerette volna eldönteni: elem-e az argon vagy pedig elemek keveréke és hol lesz helye a Mendelejeff-féle sorozatban? Maga Mendelejeff az orosz chémiai társaság márcz. 14. gyűlésén foglalkozott a kérdéssel és felállította a lehetőségeket, a nélkül, hogy döntő véleményt mondott volna. De Ramsay nem nyugodott. Tudomására jutott, hogy Nordenskjöld néhány évvel ezelőtt Norvégiában egy új ásványt fedezett fel, melyet *cléveit*-nek nevezett el, s a mely az *uraninitek* válfajához tartozik s ritka földnemeket és uraneumot tartalmaz. Erről ismeretes volt, hogy ha kénsavban forralják, egy gázt bocsát ki, a melyről eddig azt hitték, hogy nitrogén. Ramsay spectroscoppal megvizsgálta és azt tapasztalta, hogy nem nitrogén, hanem argon. Elküldte Crookes-nak is, ki pontosabban megvizsgálva arra az eredményre jutott, hogy az így nyert argon két gáz keveréke: az egyik egészen olyan színképet mutat, mint a minő a napon talált hypothetikus *hélium* színképe, mely anyagot eddig tudvalevőleg a földön felfödözni nem sikerült; a másik pedig a tulajdonképeni argon lenne.

A hélium egyik jellemző vonalának megfelelő hullámhossz ugyanis Angström szerint 587,49 és az argon társaságában előforduló gázé 587,45.

Közli: *Mikola Sándor.*

---

* C. R. CXX.

IRODALOM.

A kinematikai geometria történeti fejlődése.

Mint önálló disciplina a *kinematika* fiatal tudomány. — A *kinematikai geometria* pedig csak a XIX. századnak a vívmánya. Ha tehát a kinematika és vele együtt a kinematikai geometria történeti fejlődésére óhajtunk egy pillantást vetni, akkor nem kell messzebbre visszatekintenünk, mint a mult század végére é. p. *Franciaországra*, mely akkoriban minden reformmozgalomnak színhelye volt.

A kinematika fejlődése szigorúan összefügg a gépszerkezettan fejlődésével.

Régebben minden gépet önálló egésznek tekintettek és így is írtak le. A gép részeire, azaz részeinek csoportozataira pedig, az úgynevezett mechanizmusokra nem igen ügyeltek, nem törődvén azzal, hogy milyen fontos volna e mechanizmusokat külön megfigyelni, azaz tudományosabb alapon tárgyalni és nem kutatták egy és ugyanannak a mechanizmusnak sokféle alkalmazását. Egyszóval régebben nem voltak képesek a *specialison* az *általános* tulajdonságokat felismerni. És azért ha egy és ugyanaz a mechanizmus más-más gépen kissé más alakban fordult elő, mindannyiszor újból leírták, mert valóban új és a szóban forgó géptől elválaszthatatlan dolognak tekintették.

Különben általános hibája volt a régieknek, hogy általánosítás iránt nem igen volt érzékük.

Legjobban látjuk ezt a *geometriában* és azzal illusztrálhatjuk, ha csak futó pillanstát is vetünk a görögök geometriájára. Arra a geometriára, a mely THALES-, PYTHAGORAS-, ARCHIMEDES- és APPOLONIUS-tól ránk maradt, és a melyet EUKLIDES rendszerbe foglalt. Bármennyire bámuljuk is benne a fogalmak tisztaságát és következetességét, mégis, ha ezt a geometriát kissé közelebbről tekintjük, szembeötlő az a körülmény, hogy a görögök határozott előszeretettel csüngtek a részleten, általános elvekkel és módszerekkel nem törődtek* és főleg annak tulajdo-

* HANKEL, Projectivische Geometrie.

nítható az is, hogy, ha egy és ugyanazt a problémát más-más felvételben többféleképen oldották meg, mindannyiszor azt vélték, hogy ezzel új feladatot oldottak meg. (Appolonius egyik híres munkájában egy feladatot 80-féleképen oldott meg.) A görög tudós nem kutatta, hogy a látszólag különböző idomok között nincs-e általános összefüggés?

Kevés módosítással így maradt a dolog a geometriában, nemkülönben a mechanikában is körülbelül a XVII. század végéig. A XVIII. század eszméinek azonban nem felelhetett meg eme szűk látókör; nem felelhettek meg a régi hagyományok. Azok helyébe új elméletnek kellett lépnie, a mely eredményeit általános módszerekkel fejti ki. A geometriában, mely 2000 esztendeig jóformán bántatlanul hagyatott, megteremtették az általánosítás eszméjét, mely a modern analitikai és szinthetikai geométriában lelte megoldását; a mechanikában pedig ugyanez az általánosítás felé való törekvés abban nyilvánult, hogy a mozgási mechanizmusokra súlyt helyeztek. És valóban, az első műegyetem megalapításával (Páris 1794) már kétfelé vált az addigi gépleírástan és megoszlott a mechanizmusok tanára és az általános géptanra. Az utóbbi megmaradt ezután is a fizika mellett, hová kezdettől fogva tartozónak tekintették, a mozgási mechanizmusok tanát pedig az *ábrázoló geometriához* csatolták és annak alcsoportjául tekintették. Ez a szétválasztás Monge és Carnot nevéhez fűződik. Monge, a ki nagyszerű művével, a *Géométrie descriptive*-vel a tudományos alapon nyugvó rajzolásnak megalapítója, egyszersmind megteremtője az általánosítás eszméjének is, úgy a geometriában, mint a mechanikában.

Monge és Carnot nyomán még Hachette,[1] Lanz,[2] Bétancourt és mások dolgoztak az említett irányban és szellemben, de a mozgástan, mint önálló discziplina, az ábrázoló geometriából lassankint kivétetett és csak a legutolsó időben kezdik ismét a kinematikai tételeket az ábrázoló geometriával kapcsolatban tárgyalni.

A mechanizmusok tanának *tárgyalásmódjában* fontos fordulat állott be a jelen század harminczas éveiben, a mikor Ampère «*Essai sur la Philosophie des sciences*» czímű műve jelent meg, melyben ennek a discziplinának filozofiai alapvonalait veszi bonczolókés alá.

Ampère is sürgette a mozgástannak elválasztását az erő- és tömegtantól, és ő volt az, ki a mozgások tanát először *kinematikának* (Cinematique) nevezte, a görög *κινημα* = mozgás szó után.[3]

---

[1] Hachette, Traité élémentaire des machines. 1828. (4me édit.)

[2] Lauz et Bétancourt, Essai sur la composition des machines. 1808. 2me édit. 1819.

[3] Megjegyzendő, hogy, bár a *kinematika* szót Franczia országon kívül, a hol különben legelőször terjedt el, azóta Olaszországban (Cinematico), Angolország-

PONCELET-nek erélyes fellépése folytán a kinematikát már 1838-ban tanították a Sorbonne-ban.

Térjünk át ezekután a kinematikának *geometriai* terére és vegyük ezt kissé közelebbről szemügyre.

«*Geometrie u. Geomechanik*» című értekezésében FIEDLER[1] azt mondja: «Ha figyelemmel kisérjük a mechanika tudományos fejlődésének újabb irodalmát, akkor önkénytelenül is azt látjuk, hogy tárgyalásában egy idő óta új fordulat állott be. Tapasztalhatjuk ugyanis egyrészt azt az általános törekvést, mely a geometriai szempontok értékesítése felé irányul; másrészt pedig látjuk, hogy a mechanikának, illetőleg a kinematikának tulajdonképeni *geométriai részleteire* mindinkább nagyobb súlyt helyeznek.» A FIEDLER hangsúlyozta ez újításoknak első eszméi nehány kiváló tudós nevéhez fűződnek.

Már BERNOUILLI JÁNOS[2] kimutatta (1742-ben) a forgási középpontok létezését olyan mozgásoknál, melyek egy és ugyanazon síkban mennek végbe.

GIULIO MOZZI[3] pedig (1763-ban) ezeket a háromméretű térre alkalmazta.

EULER[4] végre volt az, a ki az egy pontban rögzített háromméretű rendszereknek mozgását egy bizonyos tengely körül való momentán forgásra vezette vissza.

Az EULER-féle tételeknek akkoriban, a mikor azokat hírdette, nem nagy fontosságot tulajdonítottak és a német tudósok azokat csakis érdekes theoretikai fejtegetéseknek tartották. E tételekkel később a francziák kezdtek

---

ban (Kinematics), Németországban (Kinematik) stb. is használják, mindamellett ez a szó filologiai szempontból nem mondható helyesnek és sokan kifogásolták is. Többek között REULEAUX azt mondja, hogy AMPÈRE jobban cselekedett volna, ha kinematika (Cinematique) helyett *kinetikát* (Cinetique) javasolt volna. Azonban a kinematika szó a tudományban már annyira meghonosodott, hogy kiküszöbölése most már nagyon bajos volna. Házi használatra REULEAUX különben a kinematikát «Getriebelehre»-nek mondja. Más tudósok, HERRMANN, KANT, WRONSKI stb. a *phoronomia* szót (φέρειν = hordani) ajánlják. SCHÖNFLIES pedig, és vele együtt a legujabb időben több német tudós, a *Geometrie der Bewegung* megnevezést használja, CEVÁ-nak *Geometria motus* után indulva.

[1] W. FIEDLER: «Geometrie u. Geomechanik». Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 21. Jahrg. 1876, 186—288.

[2] J. BERNOUILLI: De centro spontaneo rotationis. Opera, t. IV. 1742.

[3] G. MOZZI: Discorso matematico sopra il rotamento momentanei dei corpi. 1763.

[4] EULER: Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. 1765. («Mechanik u. Theorie der Bewegung der festen Körper» cz. német ford. Wolfers-től. 1848—53.)

foglalkozni és különösen CHASLES[1 2 3] és POINSOT[4 5 6] az EULER-féle tételeket valóban alapvető elvekké alakították át. — A forgási középpont (pólus) geometriai tulajdonságait először CHASLES fejtette ki ([8] alatt felemlített dolgozatában), megmutatván benne, hogy a merev rendszer általános mozgása csavarmozgásra vezethető vissza. Bővebben fejtegette ezeket a [2] és [3] alatt felsorolt dolgozataiban.

CHASLES-től ered továbbá az az eszme, hogy az eredeti mozgással egyúttal a megfordított mozgás is figyelembe veendő. Ugyanis a pont mozgása révén keletkező görbéknek bizonyos «dualizmusá»-ra figyelmeztetvén, megmutatta, hogy, ha a Σ rendszernek A pontja Σ'-ben az a' görbét írja le, akkor a mozgás megfordításánál a' görbe keresztül halad A ponton. Ezt bemutatta szemléletileg is.

Felemlítendők továbbá MÖBIUS-nak[7] fontos dolgozata; nemkülönben JONQUIÈRES,[8] BRESSE,[9] LAMARLE,[10 11] RESAL[12] stb. tudósoknak nevezetes értekezései és munkái.

E tudósok tekinthetők tehát a kinematikai geometria megalapítóinak.

A különböző szerzőktől származó és különböző forrásokban lelhető ered-

---

[1] CHASLES: Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entr'eux, et placés d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini, ou infiniment petit d'un corps solide libre; communiquée à la soc. philom. 1831. (Bulletin des sciences math. par Férussac 1830.)

[2] Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace: Comptes rend. de l'Academie des Sciènces de Paris. T. XVI. 1843.

[3] Propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure de forme invariable: Comptes rend. T. LI. 1860, továbbá T. LII. 1861.

[4] POINSOT: Théorie nouvelle de la rotation des corps. (Journ. des. Mathém. p. Liouville T. XVI.) Német fordításban Schellbachtól 1851.

[5] Theorie des cônes circulaires roulants.

[6] Élément de statique.

[7] MÖBIUS: Über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen. (Crelle Jour. XVIII. 1836.)

[8] JONQUIÈRES: Mélange de géométrie pure. 1856.

[9] BRESSE: A *térítő körök* (Wendekreise) feltalálója. Mémoire sur un théorème nouveau concernant les mouvements plans, et sur l'application de la cinématique à la détermination des rayons de courbure: Journal de l'Ecole politechnique 1853.

[10] LAMARLE: Théorie géométrique des rayons et centres de courbure: Bulletin de l'Academie royale des sciences etc. Belgique 1857—59. Ugyanott továbbá:

[11] Théorie des centres et axes instantanés de rotation.

[12] RESAL: Traité de cinématique pure. 1862.

ményeket azonban először ARONHOLD gyűjtötte össze és azokat egy következetes egészszé kikerekítve és saját kutatásaival bővítve előadta a berlini Gewerbeakademien. Híres előadásaiban fejtegette a mozgás megfordításának elvi fontosságát, melyről már CHASLES is szólt.

Ezen előadásoknak a síkban végbenmenő mozgásokat tárgyaló részét pedig «Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses in Preussen» című folyóiratban *Grundzüge der kinematischen Geometrie*[1] cím alatt ki is adta.

Ugyane folyóiratban F. REULEAUX közli a már előbb említett *Grundzüge der theoretischen Maschinen-Getriebelehre*[2] cz. dolgozatait, melynek elején — kapcsolatban az elméleti géptan történeti fejlődésének felemlítésével — a geometriai alapfogalmakat röviden összefoglalja.

ARONHOLD módszerét BUKA fejtette ki bővebben «*Das sphärische Kurbelgetriebe*» című értekezésében. *Göttingen* 1876-ban.

Ha az elméleti mechanika legújabb irodalmára tekintünk, azt a meggyőződést szerezhetjük, hogy már CHASLES dolgozatainak megjelenése óta a geometriai részletekre mindig nagyobb súlyt helyeznek. Ez a körülmény, melyre különben FIEDLER már 1876-ban figyelmeztet, fokozódott mértékben tapasztalható az utolsó két évtizedben, úgy hogy most már, néhány nagybecsű értekezés és munka megjelenése óta, a *kinematikai geometriának legfontosabb része*, t. i. az, mely a *merev rendszerek* mozgásának geometriáját tárgyalja, befejezést nyert és így bátran mondhatjuk, hogy a *kinematikai geometriában önálló discziplinát* is birunk.

Ennek igazolására szabad legyen még e discziplina irodalmának nehány devágó és fontos jelenségére hivatkoznom.

Első helyen SCHELL-nek[3] munkáját kell felemlítenem. A szerző ebben egy 100 lapra terjedő részt bocsát előre, a melyben a mozgás geometriáját egészen függetlenül tárgyalja, megmutatván benne, hogy a mozgások elmélete e geometriai rokonságok elméletével azonos, ha a mozgást létesítő okokat s a mozgó tárgyak anyagát nem tekintjük.

BURMESTER[4] nagyszabású könyvében szintén nagy súlyt helyez a geometriai álláspontra.

---

[1] 51. évfolyamban.

[2] 50. és 51. évfolyamban.

[3] SCHELL: «Theorie der Bewegung u. der Kräfte.»

[4] BURMESTER: Lehrbuch der Kinematik. I. Bd. Die ebene Bewegung. 1888. (Sajnos, hogy a második kötet mindeddig nem jelent meg, és — mint értesültünk — nem is fog megjelenni, a mi talán a kissé túlszigorú bírálatnak tulajdonítható, melylyel a szakkörök ezt a művet fogadták.)

Ugyanezen tudósnak a «Zeitschrift für Math. u. Phys.»[1 2 3 4] nemkülönben «Civilingenieur»[5 6 7] és a «Mathematische Annalen»[8] köteteiben megjelent dolgozatai pedig kiváló fontossággal biró geometriai kutatások.

Ide számítandók továbbá RITTERSHAUS-nak kitünő dolgozatai, melyeket szintén a «Civilingenieur»-ben közölt,[9 10 11 12 13 14] stb.

Mielőtt azonban az idevágó legjelesebb dolgozatok felsorolását folytatnám, kénytelen vagyok még egy másik fontos körülményre röviden figyelmeztetni.

Vannak tudósok, a kik a kinematika geometriai részeinek tárgyalásánál az analitikai módszert használják. Ezek kutatásaikban többnyire a sebesség és gyorsulás fogalmából indulnak ki. Mások különös előszeretettel a szinthetikai módszert használják, nevezetesen azok, a kik az analitikait mellőzik, mert abban nem lelik természetes kútforrását a tiszta geometriai eredményeknek.

Vannak végre olyanok is, a kik a kinematikai geometriai részleteket analitikailag tárgyalják ugyan, de a szinthetikai módszereket sem vetik meg, hanem azoknak is nagy fontosságot tulajdonítanak; szem előtt tartva, hogy csak mind a két módszernek együttes alkalmazása emelheti az elméleti mechanikát arra a színvonalra, melyen az mai nap áll.

---

[1] BURMESTER: Kinematisch-geometrische Untersuchung der Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme: Zeitschrift f. Math. u. Phys. 1874. 19. Bd.

[2] Ugyanott: Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung affin-veränderlicher u. collinear-veränderlicher ebener Systeme.

[3] Kinematisch-geometrische Untersuchung der Bewegung gesetzmässig veränderlicher Systeme. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 20. Bd.

[4] Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 23. Bd.

[5] Über die Geradführung durch das Kurbelgetriebe: Civilingenieur 22. Bd. 1876.

[6] Über den Beschleunigungszustand ähnlich-veränderlicher und starrer ebener Systeme: Civilingenieur 24. Bd.

[7] Über die momentane Bewegung ebener kinematischer Ketten. 26. Bd.

[8] Über das bifocal-veränderliche System: Mathem. Annalen 16. Bd.

[9] RITTERHAUS: Zur heutigen Schule der Kinematik 21. Bd.

[10] Die kinematische Kette 22. Bd.

[11] Das Kurbelgetriebe u. seine Anwendungen 24. Bd.

[12] Kinematisch-geometrische Theorie der Beschleunigung für die ebene Bewegung. 24. Bd.

[13] Construction der Beschleunigung am Kurbelgetriebe 25. Bd.

[14] Die Interferenzkurbelkette 26. Bd.

Könnyű belátni, hogy már az a körülmény is, hogy a problémák megoldásánál mind a két módszer alkalmazást talált, csak jótékony hatással lehetett a geometria fejlődésére. De különösen a modern szinthetikai geometria húzott belőle nagy hasznot, mert számos geometriai vonatkozás nagyon előnyösen tárgyalható kinematikai alapon és a dolgok ilyen tárgyalás mellett egészen új világításban tűnnek fel. — Erre vonatkozólag első sorban DARBOUX munkájára[1] kell hivatkoznom; nemkülönben MANNHEIM-nek kitűnő dolgozataira,[2 3 4] melyek közül csak nehányat sorolok fel. Ezek közül különös fontossággal bir a [4] alatt felsorolt dolgozat, melyben nagy alapossággal a végtelenül vékony sugárpontnak geometriai elméletét adja, t. i. a sugár-kongruenciát tárgyalja, a mely az egyenesnek egyszerűen végtelen határozatlan mozgásából származik.

Itt kell továbbá felemlítenem MANNHEIM-nek 1880-ban kiadott nagyobbszabású művét is, t. i. a *Géométrie descriptive*-jét.[5]

Ez a mű, mely egyrészt áttekintést nyújt az ábrázoló geometria anyagán, különös becscsel bir azon körülménynél fogva is, hogy a «Deuxième partie»-ban a «courbes et surfaces: Complément théorique et applications»-ban több helyütt a kinematika elemeit tárgyalja. Szerző ezeket azután a torzfelületekre, különösen pedig a torzcsavarfelületekre és a görbék és felületek görbületére alkalmazza. A 20e leçon-ban pedig a «Normalies. — Courbure des surfaces. (Appl. de Géométrie cinematique)»-ot tárgyalja. A hol a normál felületeket úgy keletkezteti, hogy egy felületnek a normálisa a felületen fekvő iránygörbén tova halad. Ezen «normalies»-eknek alkalmazását tetszésszerinti felületek görbületének meghatározásával mutatja be.

Azok a tudósok, a kik a fősúlyt a tiszta geometriai szempontra helyezik — mint említém — úgy okoskodnak, hogy a mozgás alapján keletkező térbeli alakzatoknak geometriai tulajdonságai nem függnek sem a mozgás sebességétől, sem pedig annak gyorsulásától, hanem pusztán csak attól, hogy a mozgó pont, vonal vagy szilárd rendszer milyen helyzeteket foglal el egymásután a térben; tehát első sorban a mozgás törvényétől. Ilyen szempont-

---

[1] DARBOUX: Leçons sur la theorie générale des surfaces 1887—89.

[2] MANNHEIM: Etude sur le déplacement d'une figure de forme invariable: Journ. de l'école polyt. 43.

[3] Sur les surfaces trajectoires stb.... Liouville Jour. de Math. III. I. kötet.

[4] Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces. Journ. de Mathém. t. XVII. 1872.

[5] A munkának teljes címe: «*Cours de Géométrie descriptive de l'école polytechnique, comprenant les éléments de la Géométrie cinematique,* par A. MANNHEIM.» Paris 1880.

ből a kinematikai geometriát összefüggő egészben A. SCHOENFLIES tárgyalja, a ki a szinthetikai kinematikai geometria keretébe vágó föntemlített irodalom felhasználásával és saját kutatásaival bővítve «*Geometrie der Bewegung*»* című művét adta ki. Minthogy a kinematikát a modern synthetikai geometria egyik ágának tekinti, azért azt tisztán geometriai alapra fekteti és segédeszközül a projektiv geometriának alapelveit használja. Művében pusztán csak merev rendszerek mozgására szorítkozik és mindenütt tekintettel van a testek kölcsönös vagyis relativ mozgására.

Ezekben jeleztem volna röviden, nehány halvány vonással a kinematika, nevezetesen pedig a kinematikai geometria történeti fejlődésének főbb és nevezetesebb mozzanatait.

Természetes, hogy az itt felsoroltak távolról sem merítik ki e disciplinának összes irodalmi forrásait, ezt bizonyítja az a körülmény is, hogy folyóíratokban *legújabban*, azaz *jelenleg* megjelenő termékekre nem terjeszkedtem ki és nem szóltam a legmodernebb geometriai kutatásoknak legujabban mívelt teréről, t. i. a *törvényszerűen-változó* rendszerek kinematikai geometriájáról.

Teljesebb lenne a kép, ha felsoroltam volna még BROCARD, MANNHEIM, SCHÖNEMANN, GROUARD, GEISENHEIMER, SCHUHMANN, MEHMKE, GREBE, HOSSARD, L'HUILIER, LEMOINE, TOUKER, STOLL stb. hírneves tudósoknak idetartozó fontos dolgozatait.

Mielőtt azonban czikkemet befejezném, kénytelen vagyok még csak egy munkáról megemlékezni, mely minket közelebbről érdekel. Értem ez alatt FRÖHLICH IZIDOR egyetemi tanárnak «Kinematikáját» — elméleti physikájának I. kötetét —, mely nagyszabású munka 1891-ben jelent meg. E mű megjelenése után most már bátran mondhatjuk, hogy nekünk is van kinematikánk, mely nemcsak hogy a tudomány színvonalán áll, hanem a legkitünőbb külföldi művek mellé is sorozható.

Hornischek Henrik.

---

* A munkának teljes czíme: «Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung von Dr. ARTHUR SCHOENFLIES. Teubner 1886.»

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1895. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

Április hó 4-én: Dr. SUTÁK JÓZSEF: Az algebrai függvényekre vonatkozó újabb kutatásokról.

BARTONIEK GÉZA: A víz és gázvezeték elektromos áramáról.

Április hó 18-án: Dr. SUTÁK JÓZSEF: Az algebrai függvényekre vonatkozó újabb kutatásokról.

*

Az ajaksípok hangtüneményei.*

Különös tekintettel a derékszögű keresztmetszetű sípokra.

Minthogy a sípok hangjelenségeinek magyarázatára jelenleg általán elfogadott elméleteket igen hiányos, sőt — nézetem szerint — téves alapra fektetve találtam: megkisérlettem önálló és beható kutatás utján tisztába jönni a dologgal. Azt hiszem, fáradságom nem vész kárba, és sikerül oly nézetet megállapítanom, melyből eme hangtünemények egységes, pontos és világos magyarázatát lehet adni.

Vizsgálódásaimat a sípok mindkét válfajára, t. i. az ajak- és a nyelvsípokra egyaránt, terjesztettem ki és sikerül elméletemmel nemcsak mindkét sípnem ismertebb, főbb jelenségeiről beszámolnom és azoknak közös alapon nyugvó magyarázatát adnom, hanem az abból folyó következtetések biztonsága az itt föllépő hangtünemények nem egy oly rejtélyéhez is szolgáltatja a kulcsot, melyek eddigelé a legkevésbbé kiderített esetek közé soroltattak.

Betartva az akusztikai szakirodalomban követett sorrendet, elsőben az ajaksípokat veszem tárgyalás alá, annál is inkább, mert elméletem a sorrendet bizonyos tekintetben még rendszerileg is helyesnek igazolja.

Hogy ha az ajaksípok hangjelenségeinek teljes magyarázatát akarjuk adni, figyelmünket a következő körülményekre kell irányítanunk: *a)* mi okozza a hang keletkezését a sípokban? *b)* mely alaphangban szólalhatnak meg? és *c)* erősebb befuvásra mely felhangok juthatnak bennök érvényre?

---

* Előadatott a f. évi márczius 7-én tartott rendes ülésen.

1. *A hangébresztés az ajaksípokban.* A hang keletkezését az ajaksípokban ez idő szerint kétféle nézetből magyarázzák; az egyik, a sokkal elterjedtebb nézet Helmholtz-tól, a másik pedig Sonreck-től származik. Helmholtz szerint a sípfejből kinyomuló vékony légszalag a felső ajak élébe ütközvén, ott megtörik, s ez gyengébb zúgást okoz, mely annál magasabb jelleget ölt, minél erősebb a befuvás; e zúgás pedig igen sok, magasságra nézve egymáshoz lehetőleg közel fekvő hangokból összetettnek képzelhető, mely hangok közül a síp levegőoszlopa resonantia utján azt a hangot erősíti legjobban, mely a síp levegő oszlopának saját hangja.

Nem tekintve azt a körülményt, hogy néhány levegőrészecskének rezgő mozgásában rejlő eleven erő egyátalán nem is hozhatja a megszólalt síp légoszlopát a tapasztalt, felette erős hangnak megfelelő erősségű rezgésbe, midőn pl. a jelentékenyen nagyobb tömegű és ugyanazon hangra hangolt hangvilla közeledtére annak rezgései jóval gyengébb hangban resonáltatnak, Helmholtz nézetének már az a körülmény is ellene mond, hogy a köbös sípok igen erős befuvásra mind mélyebb hangot adnak, mint ugyanoly hosszuságú vékonyabb síp jóval gyengébb megfuvásra, a midőn pedig Helmholtz szerint a köbös sípokba épen gyengébb, a vékonyabb sípokba pedig erősebb légáramot kellett volna vezetni, minthogy szerinte a mélyebb hangjellegű zúgás létesítésére mindenkor gyengébb, a magasabb jellegű zúgás előállítására pedig erősebb befuvást kell alkalmazni. Továbbá az a körülmény, hogy kellő mensura mellett egy és ugyanazon, mérsékelt erősségű befuvással az egész zenészeti hangterjedelemre szóló összes sípokat megszólaltathatom, szükségessé teszi Helmholtz nézetéből kifolyólag azt a föltevést is, hogy ama bizonyos gyengébb zúgást, melyet a sípfejből kivonuló légszalagnak a felső ajakba való ütközése okoz, nem sok, egymáshoz igen közel fekvő hangokból, hanem számtalan, az összes rezgésszámokat is magasságra nézve egymástól a lehető legtávolabb álló hangokból alakultnak tekintsük, a mit képtelenségnek tartok és véleményem szerint ez az egy föltevés már önmagában véve czáfolja Helmholtz említett nézetét, annál is inkább, mert teljes következetességgel felvethető utóbbi esetben a kérdés, hogy miért nem szólal meg akkor a síp valamennyi felső hangjaival egyidőben, és miért kell mégis előállításuk végett fokozatosabban erősebb és erősebb befuvást alkalmaznunk?

Sokkal szerencsésebbnek tünik fel előttem az az út, a melyen Sonreck halad, midőn a sípok megszólalását az ajaknyilás előtt elvonuló légszalagnak lökésekre való felbontásából magyarázza olyképen, hogy a légszalag szivóképességénél fogva a sípcső alsó részében légritkítást okozván, a külső légnyomástól a sípcsőbe irányíttatik, mely alkalommal egyszersmind kívülről ragadván magával levegőt, a létesített ritkítást csakhamar sűrűsítéssel váltja fel stb. E felfogás helyességét a felső ajakra erősített és az

alsó ajak felé irányított papirszeletkékkel igyekszik igazolni, melyek élénk keresztrezgésbe jutnak, valahányszor a síp megszólal. Ez a kisérlet azonban legkevésbbé hivatott SONRECK nézetének igazolására, a mennyiben az ily szeletkék nemcsak a sípok ajaknyilásai elé alkalmazva, hanem egyik végükkel bárhova is erősítve, a feléjük irányított légáram, illetőleg annak a szeletkének mindkét oldalára változó erősséggel ható dynamikai nyomása a legélénkebb keresztrezgésbe jutnak, a mint erről mindenki a legegyszerűbb kisérlet útján könnyen meggyőződhetik.

Ép oly kevéssé mérvadók e tekintetben BROCKMANN* stroboskopikus kisérletei, melyek a légáram váltakozó be- és kihatolásáról az ajaknyilás elé helyezett kis gázláng segélyével csak abban az esetben tesznek tanuságot, midőn a síp már megszólalt, nem vevén figyelembe, hogy a gázláng pislogását az ajaknyilás előtt rezgő légrétegek sűrűsítési és ritkulási változatai is előidézhetik. A mit pedig BROCKMANN a sípcső légoszlopának, valamint a külső levegőnek a légszalagtól okozott ki- és beszivásáról az említett értekezésben mond, nem új, a mennyiben 1880-ban «Természettudományi tanulmányok» című értekezésemben,** majd pedig két évvel később más helyütt *** e tüneményekről bőven beszámoltam.

Hogy csakugyan a légszalagnak kellő számú lökésekre való felbontása szólaltatja meg a sípot, azt a következő kisérlet igazolja. Egy SEEBECK-féle korongra fujtatóból erősebb légsugarat irányítunk és a korong fölé körülbelül ½ *cm*-nyi távolságra, egymásután különböző sípokat állítunk úgy, hogy a korong forgatása közben a nyilásain áttörő léglökések egyszersmind a sípfejbe és innét az ajaknyilás elé kerülhessenek. Csakhamar tapasztaljuk, hogy mindezen sípok csak akkor szólalnak meg alaphangjaikon, vagy pedig partiális hangjait egyikén, midőn hangjuk a korongtól előidézett hang magasságával teljesen megegyezik, *vagyis a mikor a lökések az ott ébreszthető álló léghullám rezgéseivel megegyező számban kerülnek a sipcsőbe;* a korongnak valamivel lassubb vagy gyorsabb forgatására pedig a sípok teljesen némák maradnak, holott HELMHOLTZ szerint most is elég ok forogna fönn megszólalásukra. Szükséges azonban, hogy e kisérletben a légszalagnak valamivel tágabb nyilása legyen a kiömlésre, nehogy a sűrűn egymásután tóduló légáramok a sípfejben a levegőt megsűrűsítvén, a síp állandó — habár gyengébb — megszólalását idézzék elő.

A mi már most a lökések számát illeti, melyekre a légáram a síp ajkai közt bizonyos idő alatt — pl. 1 mpercz alatt — felbomlik, könnyű belátni. hogy az csak két tényezőtől függ; u. m. *a)* a sebességtől, melylyel a lég-

---

* L. Poggendorfs Annalen XXXI. Bd. 1887.

** L. A pécsi főreáliskola értesítőjében, az 1880—81. tanévről.

*** L. Zeitschrift f. d. Realschulwesen 1882.

részecskék az ajaknyílás előtt elvonulnak, vagyis a befuvás erősségétől és *b)* az ajaknyílás területének a sípcső keresztmetszetéhez mért viszonyától.

a) Tudjuk ugyanis, hogy a légsugár bizonyos sebességet már elnyervén, dynamikai nyomása nagyobb arányban fogy, mint a minő arányban fokozódik sebessége; azaz a légsugár szivóképessége és ezzel együtt a sípcsőben létesített ritkítások nagyobb arányban növekednek, mint a hogyan növekszik a sebessége. Ennek természetes folyománya pedig, hogy a létesített nagyobb ritkítások mellett egyszersmind a lökések száma is szaporodik. Igy pl. ha valamely esetben azt találjuk, hogy a sebességet 3-szor akkorára fokozván, a légsugár a sípcső fenekén 6-szor akkora ritkítást okoz, akkor szem előtt tartva azt, hogy a 3-szor akkora sebességgel haladó részecskék félretolására minden bizonynyal 3-szor akkora erő is kivántatik, a légsugár a sípcső fenekén létesített 3-szor akkora ritkítási fok mellett, ugyanazon idő alatt kétszerannyi lökésre is fog felbontatni. Egy szóval tehát: *erősebb befuvás nemcsak hogy a légszalagot egymást sürübben követő lökésekre bontja fel, hanem egyszersmind a síp alsó részében mindinkább fokozódó ritkításokat és sürüsítéseket is előidéz.*

b) A lökések száma azonban az ajaknyílás területének (t) a sípcső keresztmetszetéhez (T) mért viszonyától, $\frac{t}{T}$-től is függ.

Képzeljük ugyanis, hogy egy szükebb és egy tágabb keresztmetszetű sípcső előtt ugyanoly szélességü és magasságú légszalag ugyanakkora sebességgel vonul el, akkor a szükebb csőből jóval rövidebb idő alatt szívja be a levegőt a ritkulás ugyanezen fokára, mint a terjedelmesebb keresztmetszetű sípcsőből, tehát maga a légszalag is hamarabb kerül az előbbi síp szárába, mint az utóbbiéba, illetőleg gyorsabban és több lökésre fog ugyanazon idő alatt fölbontatni, mint a tágasabb sípcsőben. Ebből azonban egyszersmind az is következik, hogy minél kisebbre szabjuk egy és ugyanazon síp ajaknyilását — az ajak nyilását részben elfödvén, — annál lassabban képződnek itt is a lökések, miután az ugyanazon mérvü ritkítás a keskenyebbre szabott légszalag segélyével most már csak később érhető el. Hogy pedig a lökéseknek ily módon való késleltetésére inkább csak az ajaknyilás szélességének (*b*) és nem egyszersmind magasságának (*a*) vagyis az ajkak egymástól való távolának kisebbítése hat, magától érthetővé teszi az a körülmény, hogy a légszalag szivóképessége majdnem kizárólag csak a tövénél jut érvényre.* Ha tehát valamely síp ajaknyilását szélessége irányában egyre kisebbítjük, a síp hangjának folyton mélyebbre kell szállania, míg az ajkak egymástól való távolságának csökkentése, a hang mélyedésére ilyen hatással nem lehet. Ha tehát a síp szélességét

* L. L. A. Zellner: Vorträge über Akustik I. Bd. pag. 283.

b_1-el, mélységét pedig d-vel jelöljük, akkor a lökések száma $\frac{b}{b_1 d}$ hányadossal jut függő viszonyba, és ha az ajaknyilás szélessége a síp szélességével egyezik, mely körülmény a derékszögű átmetszetű sípoknál majdnem kizárólag fennforog, akkor az előbbi hányados $\frac{1}{d}$ alakra vezethető vissza, azaz: a *lökések számára az előbbi pontban említett tényezőn kívül még a sípcső mélységének is van hatása, melynek arányát később fogjuk megállapítani.* A tapasztalat ezen következtetéseket a hang keletkezésének okáról mondottakkal a legszebb összhangzatba hozza.

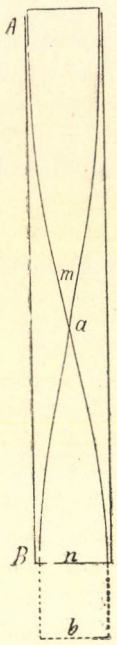
Megemlítjük még, hogy a lökések számára a légsugár irányának nincsen hatása, mert ha csak csekélylyel is elirányítjuk a légsugarat a felső ajaktól, sem erősebb, sem gyengébb befuvásra nem fogjuk többé a sípcsőbe vagy az elé irányíthatni, miután mindkét componens t. i. a sebesség és a tőle okozott oldalnyomás mindenkor egyenlő arányban változván, az új eredő iránya a régivel többé össze nem eshet, hanem vagy a felső ajakba fog ütközni, vagy pedig állandóan annak belső vagy külső oldala mellett vonul el és a lökésekre való fölbontása megszünt. Innét magyarázható meg, miért szükséges a felső ajkat élesebb ékalakra idomítani és miért maradt néma a síp a légsugár csekély elirányítása esetében is.

2. *Az alaphang megalakulása és a magassága.* Az ajkak előtt elvonuló légáram az előbbi pontban említett módon a lökések sűrű sorozatára bontatván föl, utóbbiak a sípcső légoszlopát álló rezgésre is indíthatják, minek pedig — nézetem szerint — első és legfőbb föltétele, hogy *a légáramtól a légoszlopban mechanikailag előidézett sűrűsítési és ritkulási állapotok az állóhullám sűrűsítési és ritkulási phasisaival teljesen egybeessenek. Minthogy pedig a légszalag előidézte ritkulásban a légrészecskék a sípcsőben mind lefelé tereltetnek, a sürűsítésben pedig fölfelé irányíttatnak, következik, hogy a sípcsőben csak oly hullám keletkezhetik, melyben — a fenéktől fölfelé haladva — legelőbb rezgési csomóval találkozunk, illetőleg a melyet a sípcső fenekén alul képzeleti rezgési maximum jellemez.*

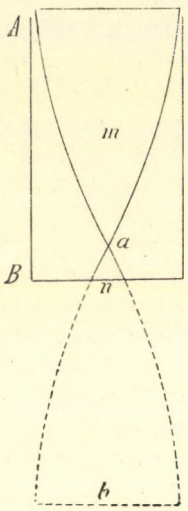
Hogy az álló hullámnak ily módon való keletkezéséről most elmondott nézetem helyes, illetőleg hogy ama föltevésem, mely szerint a síp csak akkor szólalhat meg, midőn az álló hullám rezgési phasisai a légáram okozta mechanikai hatásokkal (sűrűségváltozások és mozgásirány) teljesen egybevágnak, egy igen egyszerű kisérlet útján győződhetünk meg. Ugyanis ha egymásután különböző sípokat megszólaltatunk és kautsukcsövön keresztül a nyitott sípba felülről irányítva egy mérsékeltebb erősségű légsugarat fuvunk be, a legerősebben hangzó síp is azonnal elnémul, illetőleg a képződött álló hullám szerkezete rögtön megbontatik. Hasonló eset áll

elő akkor is, midőn a sípcső fenekét valamivel tágabb nyilással átfurjuk és így fujjuk meg a sípot.

Kutassuk már most a nyilt ajaksípokban ébredt alaphangok magasságát. Ha AB nyilt sípcsövet, melynek mértani középpontja m-ben van, meg akarjuk szólaltatni, a fennebbiek szerint a befuvás erősségét addig kell fokoznunk, míg a légszalag lökései oly álló hullám előteremtésére nem elégségesek, melynek csomója m középpont és a síp feneke közé esik. Nagyon természetes azonban, hogy magában m pontban a csomó sohasem jöhet létre, mert ugyanekkor n-ben rezgési maximumnak kellene alakulnia, a mi a légszalagtól e helyen okozott periodikus légritkulások és sűrűsítések miatt lehetetlen. Másrészt azonban be kell látni, hogy a csomó mindenesetre annál közelebb huzódik m-hez, vagyis a felső határponthoz, minél csekélyebb változásokat idéz elő a légszalag a síp légoszlopának természetes sűrűségében n helyen, és viszont minél erősebb a befúvás, annál közelebbre fog a csomó n-hez t. i. az alsó határponthoz esni, minthogy a fennebb mondottak szerint a légszalag erősebb befuvásra nemcsak hogy ugyanazon idő alatt nagyobbszámú lökésekre bomlik, hanem egyszersmind a síp fenekén jelentékenyebb sűrűsítési és ritkulási állapotok is fognak fejlődni. Minthogy pedig az igen vékony sípoknál az ajaknyilás előtt elvonuló légszalag részecskéi kisebb sebesség esetében is igen gyorsan képesek ritkítást előidézni, de meg a kisebb sebességű légrészecskék félretolására csak igen csekélymérvű ritkítás szükséges, következik, hogy az igen vékony sípoknál a képzeleti hullámrész hossza csak igen csekély lehet és így az álló hullám csomója majdnem a sípcső tengelyének középpontjába, t. i. m-be esik; ellenben az igen tág és rövid sípok — mint tudjuk — csak igen erős befuvásra szólamlanak meg és így ezen sípoknál a fentebb említett körülménynél fogva a csomó csakis n-hez közel fejlődhetik (2. ábra). Nézetemből tehát önként folyik a tapasztalattól igazolt azon nevezetes következtetés, hogy *bármely köbös síp az ugyanoly hosszuságú*



1. ábra.



2. ábra.

igen vékony síp alaphangjánál legfölebb egy oktávával, vagy ezen oktávánál igen csekélylyel mélyebb hangot képes kiadni, az álló hullámoknak a sípcső felső vége előtt terjedő, habár csekélyebb részeit is számításba vevén.

Hogy tehát valamely ajaksíp alaphangját meghatározhassuk, mindenekelőtt az álló hullám képzeleti részének hosszát (x) kell ismernünk. Azonban ezen képzeleti hullámrész hosszát számítás utján megállapítani teljes lehetetlen, miután oly tényezők ismeretét veszi igénybe, melyeknek habár szerepkörét az álló hullám alakulásában ismerjük ugyan, mindamellett azok mennyileges befolyását a léghullám képzeleti részének hosszára képletileg meg nem állapíthatjuk ; ezen tényezőket az előbbi fejezet *a* és *b* alatti pontjaiban tanultuk ismerni. A képzeleti hullámrész hosszát valamely ajaksípra nézve tehát csakis gyakorlati uton, közelítőleg határozhatjuk meg, mire WERTHEIM empirikus képlete

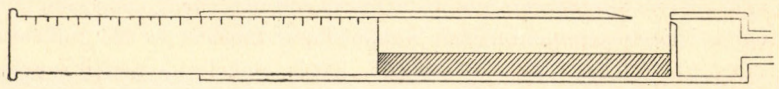
$$x = c\,(B+D)\left(1-\sqrt{\frac{s}{S}}+\sqrt{\frac{S}{s}}\right)$$

szolgálhat, mely kifejezésben B a síp szélességét, D a mélységét, s az ajaknyílás területét, S a síp keresztmetszetét és végre $c=0{\cdot}129$ állandó mennyiséget jelent.

Miután azonban a fentebb mondottak szerint az ajaknyilás magassága a síp hangjának magasságára semmi hatással nincsen, nemkülönben pedig a derékszögű átmetszetű sípoknál az ajaknyílás szélessége a sípcső szélességével mindenkor egyezni is szokott, iparkodtam e körülmények tekintetbevételével, önálló kutatással ezen képzeleti hullámrész, illetőleg tehát a síp kiigazított hosszára nézve magamnak tájékoztatást szerezni.

E czélból egy 40·5 *cm* hosszú, 3·5 *cm* mély és 3 *cm* széles sípot, egy e síp keresztmetszetével egyező és a sípcsőben ide-oda tolható, jól záró faoszloppal láttam el, melylyel mindenkor a síp hosszát, a sípcsőbe öntött higany segélyével pedig annak mélységét tetszőlegesen változtathattam. (3. ábra). E síp segélyével azután a hangok bizonyos sorát állítottam elő, a sípcső hosszát vagy mélységét az előbb említett módon addig változtatván míg ezen hangok igen pontosan hangolt egyéb sípok hangjaival teljesen meg nem egyeztek.* Ez az eljárás azután igen könnyen tette lehetővé a síp mélységének a hangmagasságra való befolyását megállapítani és pedig olyképen, hogy előbb az $n = \frac{c}{4(l+x)}$ képletből n, l és c ($34000\ cmsec^{-1}$) adott értékeiből x-et meghatároztam és azután utóbbit, hol a síp mélységé-

* E sípokat ANGSZTER J. jó hírnevű pécsi orgonaépítő műhelyéből szereztem be.



3. ábra.

hez, hol annak mensurájához stb. viszonyítottam. A következő táblázat a kisérleti sorozat eredményét mutatja be:

A hang neve	A rezgések száma	A sípcső hossza *(l)* *cm*-ben	A sípcső mélysége *(d)* *cm*-ben	A mensura nagysága	A kiszámított kiigazítás *x*	A kiszámított kiigazítás kifejezve *d* értékeiben	A síp mélységéből *(d)* és hosszából *(l)* kiszámított kiigazítás *x*
C♯	279·7	26	3·5	0·135	4·39	1·254 *d*	4·39
D	296·3	26	2·6	0·100	2·62	1·008 *d*	2·78
D♯	313·9	26	1·7	0·065	1·08	0·635 *d*	1·16
D	296·3	24	3·5	0·146	4·68	1·337 *d*	4·54
D♯	313·9	24	2·7	0·112	3·08	1·141 *d*	3·10
E	332·6	24	1·8	0·075	1·55	0·878 *d*	1·49
D♯	313·9	22·2	3·5	0·158	4·87	1·363 *d*	4·66
E	332·6	22·2	2·7	0·122	3·35	1·240 *d*	3·23
F	352·4	22·2	2	0·091	1·92	0·960 *d*	1·98
E	332·6	20·5	3·5	0·170	5·05	1·443 *d*	4·79
F	352·4	20·5	2·8	0·136	3·62	1·293 *d*	3·35
F♯	373·4	20·5	2·1	0·101	2·26	1·076 *d*	2·28
B	470·4	13	3·5	0·269	5·07	1·448 *d*	5·32
H	498·3	13	2·9	0·223	4·06	1·400 *d*	4·25
e	528	13	2·2	0·169	3·09	1·410 *d*	3·00

E táblázat 3-ik és 6-ik rovataiban foglalt számadatok egybehasonlításától kitünik, hogy az *n, l* és *c* adatokból kiszámított *x* hosszabb sípokra nézve nagyobb értékű, mint rövidebb sípokra nézve; a 4-ik és 6-ik rovat ily egybevetése pedig kimutatja, hogy ugyanazon hosszuság mellett a síp mélységének növekedtével a kiigazítás is növekszik. De figyelmetessé tesz ezen táblázat egyszersmind ama körülményre is, hogy *tévedés a kiigazítást kizárólag csak a síp mélységéhez vagy mensurájához viszonyítani;* mert míg pl. a 26 *cm* hosszú és 2·6 *cm* mély sípra nézve a kiigazítás 2·62, addig a 13 *cm* hosszú és csak 2·2 *cm* mély sípra nézve a correctura 3·09, vagy míg pl. a 0·1 mensuránák 2·62, addig a valamivel nagyobb 0·101 mensuránák csak 2·26 kiigazítás felel meg. A táblázat 7-ik rovata a kiszámított *x* kiigazítást a síp mélységéhez viszonyítja, a mint pl. Cavaillé-Coll tette, de az itt foglalt adatokat ép azon okból, mert a kiigazítás nemcsak a síp mélységétől, hanem annak hosszától is függ, megbizhatlanok és igen ingadozók. Sikerült azonban a fönnebbi táblázat

adatainak egybevetése nyomán x számára oly kifejezést megállapítanom, mely az eddigieknél jóval pontosabb eredményeket ad. Ugyanis ha $x=1{\cdot}79\,d-0{\cdot}0721\,l$ kifejezésbe d helyére a síp mélységének és l a síp hosszának megfelelő méretszámokat tesszük, oly értékeket nyerünk, melyek a rezgésszámból és síp hosszából kiszámított kiigazítás értékeitől csak igen keveset térnek el, mint arról a 6-ik és 8-ik rovatban foglalt adatok egybehasonlításából könnyen meggyőződhetünk. Különben, hogy mennyire pontos és megbízható eredményre vezet a fentebbi kifejezés, egy még feltünőbb példával akarom igazolni. Ugyanis határozzuk meg egyszer, hogy egy 228 *cm* hosszú és 12 *cm* mély síp, mely alap- és mely felhangokban szólalhat meg? Ha x fentebbi kifejezésében d helyébe 12-őt és l helyébe az előbb mondottak szerint mindenkor 228-annyiad részét tesszük, mint a hányadik felhangot keressük, majd pedig az x számára talált értékeket egymás után az $n=\frac{c}{4(l+x)}$ képletbe behelyettesítjük, az alábbi táblázat második rovatában foglalt számokkal kifejezett hangsort nyerjük.

A hang rendszáma	A kiszámított rezgésszám	A kisérletileg meghatározott rezgésszám
1	36·4	—
3	104·4	—
5	172·5	166
7	240·1	238
9	308·9	310
11	377·1	384
13	444·6	—
15	514·5	524
17	583·2	594

Ha már most ezen számokat KŐNIG-nek ugyanezen síppal előállított hangoknak * kisérletileg meghatározott és a táblázat 3-ik rovatában közölt rezgésszámaival összehasonlítjuk, oly csekély eltéréseket tapasztalunk a megfelelő számadatok között, hogy azokat kizárólag csak a kisérleti és megfigyelési hibák határain belől esőknek tekinthetjük. Ily pontos eredményekhez sem WERTHEIM ** empirikus képlete sem CAVAILLÉ-COLL gyakorlati szabálya nyomán még megközelítőleg sem jutunk. Megjegyzem még, hogy a 3-ik rovatban az alap, a 3-ik és 16-ik felhangra nézve a számadatok azért hiányoznak, mert KŐNIG-nek nem sikerült, a sípba vezetett lég-

* VIOLLE, Cours de Physique. Tome II. 1. 138.

** WÜLLNER, Lehrbuch der Exp. Physik. 3. Ausgabe I. Bd. pag. 610.

áram erősségének még oly óvatos szabályozása daczára sem, ezen partiális hangokat előállítania.

Az x kiigazítás számára talált fentebbi kifejezés még egy nevezetes körülményre tesz minket figyelmessé; arra t. i., hogy míg egyrészt a kiigazítás a $1{\cdot}79\,d$ maximumot soha sem érheti el, addig csak oly sípokra nézve tünik el a kiigazítás, melyekre nézve $1{\cdot}79\,d = 0{\cdot}0722\,l$, vagyis $l = 25{\cdot}1\,d$, más szóval: *csak az oly sípok hangmagasságának meghatározásánál maradhat el teljesen a mélységből eredő kiigazítás, melyek hossza legalább 25-ször fölülmulja a mélységöket.*

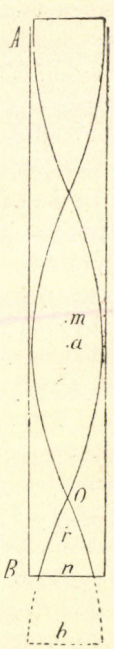
Ha a síp nyitott, akkor az alaphang magasságát $n = \frac{c}{2(l+x+y)}$ kifejezésből határozzuk meg, hol y a sípcső felső végére vonatkozó kiigazítást jelzi, melynek értékét mindenkor úgy határozzuk meg, hogy a sípot födötté tévén, a különbséget keressük a födött síp hangja és a nyitott síp hangjának legközelebbi mélyebb oktávája között. E czélra a 3. ábrában lerajzolt sípot pontosan hangolt sípok segélyével chromatikusan calibráltam és a megfelelő hangokat az ide-oda tolható faoszlopra rávezettem. Azután több födött és szintén igen pontosan hangolt síp hangját megfigyelvén, a födőlapot elfűrészeltem, s ezzel nyitottá tettem és újra meghatároztam a calibrált síp segélyével nyert új hang rezgésszámait. A két rezgésszámból könnyen volt meghatározható y értéke. Ugyanis míg a födött sípra $n_1 = \frac{c}{4(l+x)}$, addig a nyitottra nézve $n_2 = \frac{c}{2(l+x+y)}$, miből következik, hogy $2n_1(l+x) = n_2(l+x+y)$ és ebből $y = \frac{(2n_1 - n_2)}{n_2}(l+x)$.

Ha tehát y kifejezésében n_1 és n_2 helyébe a fentebb közölt eljárás nyomán megfigyelt értékeket tesszük, y számára mindig az $(l+x)$ kiigazított hosszúsággal kifejezhető értéket fogunk nyerni. Igy pl. egy $25{\cdot}2$ *cm* hosszú és $3{\cdot}9$ *cm* mély födött sípot megszólaltatván, a C♯ hangot $279{\cdot}9$ rezgéssel nyertem. A födő eltávolítása után a c-nél valamivel magasabb, t. i. 536 rezgésből álló hangon szólalt meg. Igy tehát ez esetben $\frac{2n_1 - n_2}{n_2} = 0{\cdot}0444$. Két más ily kisérlet alapján y cœfficiensét $0{\cdot}0381$ és $0{\cdot}040$-nek találtam; tehát y értéke általában $0{\cdot}041$ $(l+x)$-nek vehető. Igy pl. számítsuk ki, hogy egy 233 *cm* hosszú és 12 *cm* mély nyitott síp 5-ik felhangjának hány rezgés felel meg. Ez esetben $x = 1{\cdot}79 \times 12 - 0{\cdot}0721 \times 46{\cdot}6 = 18{\cdot}13$, tehát $l+x = 251{\cdot}13$ és $y = 0{\cdot}041 \times 251{\cdot}13 = 10{\cdot}29$; ha már most $n = 5\frac{c}{2(l+x+y)}$ képletbe ezen értékeket helyettesítjük, lesz $n = 5\frac{34000}{2 \times 261{\cdot}42} = 325{\cdot}15$, mely érték Kőnig-nek ugyanazon síppal előállított hang kisérletileg meghatározott rezgésszámától (328) csak $2{\cdot}85$ rezgéssel tér el.*

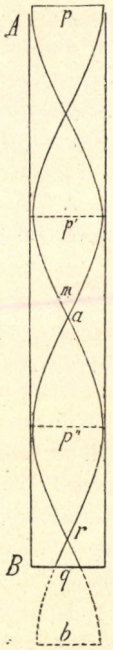
* Violle, Cours de Physique l. c.

3. *A felhangok magassága és száma.* A midőn az ajaksíp alaphangján már megszólalt és a befuvás erősségét még tovább is fokozzuk, a síp hangja egy ideig változatlan marad, vagy csak igen csekély mértékben — legfeljebb egy secunddal — magasabbra hajtható, miután a már létesített álló hullám, az ajaknyílás helyén váltakozó sűrűsítések és ritkulások révén, a légszalag lökéseire ép oly szabályozó hatással van, mint akár a lágy nyelvű sípokban rezgő légoszlop magára a nyelvre.

Mihelyt azonban a befuvás már akkora erősséget ért el, hogy a légszalag ugyanannyi idő alatt kétszer annyi lökésre bomolhat föl, a síp azonnal alaphangjának oktavájáu szólal meg. De miért épen az oktávában? Erre könnyű felelni, ha ismerjük az *a)* pont alatt mondottakat; t. i. hogy erősebb befuvásra nemcsak a lökések szaporodnak, hanem a sípcső alsó részében erősebb sűrítések és ritkulások is jönnek létre, mely körülmény egy ujabb és egyszersmind a sípcső fenekéhez közelebb eső csomó alakulását teszi lehetségessé és szükségessé.



4. ábra.



5. ábra.

Ha ugyanis a 4-ik ábrában lerajzolt és a síp alaphangjára vonatkozó álló hullámban a csomó *a*-ban létrejött, akkor ugyanazon síp csak azon egyetlenegy esetben szólalhat meg egyszersmind az oktávában is, hogy ha az ily hullám csomója *O*-ba, t. i. *ab* felezési pontjába esik, mert akár *O* fölé, akár *O* alá esnék az új csomó, mindig más hangot, még pedig az első esetben az oktávánál magasabb, az utóbbi esetben pedig mélyebb hangot nyernénk. Hogy ha pedig az oktáva csak úgy képződhetik, hogy a 2-ik csomó épen *O*-ba kerüljön, akkor az alaphangra legközelebb más új, magasabb zönge egyátalában nem is következhetik, mint épen az oktáva; ugyanis, ha a síp 2-ik hangnak, egy az oktávánál magasabb hangot mutatna be, akkor a 2-ik csomónak okvetlenül *O*-nál magasabbra is kellene jutnia és így a síp fenekén alakuló sűrűsítési és ritkulási phasisokat összehasonlítva, úgy vennők észre, hogy míg gyengébb megfuvásra az oktávánál magasabb hangot nyerünk, maga az oktáva csak ennél erősebb befuvásra jelennék meg, mi úgy a tapasztalattal, mint azon indokolt nézetemmel, homlokegyenest ellenkezik, hogy erősebb befuvásra jelentékenyebb ritkulási és sűrűsítési állapotok is jönnek létre az ajaknyilás közelében és ennek

megfelelőleg a csomóknak is kell, hogy közelebb vándoroljanak a síp fenekéhez. És ily módon bebizonyítható az is, hogy a sípban 2-ik hangnak az alaphang oktávájánál mélyebb hang sem jelentkezhetik.

Ha most még inkább fokozzuk a befuvás erősségét, illetőleg még nagyobb számú lökésekre bontjuk föl a légszalagot, az előbbihez egészen hasonló okoskodás szerint kimutatható, hogy az oktávát ismét csak oly hang követheti, melynek álló hullámában a síp alapjától számított legelső csomója *ab* (4. ábra) félhullámnak $^1/_3$ részébe, t. i. *r*-be esik, ezen hang pedig nem más, mint a síp alaphangjának duodecimja; ezt a hangot pedig még erősebb befuvás esetében az alaphang 2-ik oktávája fogja követni, stb. *Általában tehát minden nyilt ajaksípban folytonosan erősebben gyakorolt befuvásra a hangok olyan sorát csalhatjuk elő, melynek tagjai rezgésszámra nézve úgy állanak egymáshoz, mint a közönséges egész számok.* Hasonló módon bizonyíthatjuk, hogy a födött sípok csak a páratlan számok viszonyában álló hangokban szólalhatnak meg.

A felhangok képződésére vonatkozólag eddig előadott nézetemből négy nevezetes következtetés származtatható le:

a) Egy és ugyanazon síp minden hangjára nézve a képzeleti hullámrész hossza állandó mennyiség. Igaz ugyan, hogy az *x* kiigazítás számára talált kifejezés az állítást czáfolni látszik, a mennyiben a kiigazítást nemcsak a síp mélységétől, hanem a hosszától, illetőleg a felhangokra nézve a hullámhossznak megfelelő hányadrészétől függőnek jelzi, a mint ezt a többi közt a fennebb említett 2·28 *m* hosszú és 0·12 *m* mély sípban egymásután előállított felhangok sorozata is igazolja, mely hangok — habár csak igen csekély különbséggel — mind magasabbak a megfelelő harmonikus felhangoknál, úgy hogy a 7-ik felhang kb. már egy secunddal magasabb a síp 7-ik harmonikus felhangjánál, minek megfelelően valamennyi ezen felhangra nézve a képzeleti hullámrészt is csekélylyel rövidebbnek találjuk az alaphangra nézve meghatározott ezen hullámrésznél. De ha meggondoljuk, hogy az alaphangot igen könnyen sikerül kellő erősségű befuvásra egy secunddal magasabbra emelni (felhajszolni), míg a felhangokra nézve ezt keresztül nem vihetjük, a mennyiben csakhamar a legközelebbi felhangra átcsapnak, Kőnig sípjánál a 7-iknek megszólalt felhangot szintén csak a harmonikus felhangjával teljesen egybeesőnek mondhatjuk.

b) Különböző hosszúságú sípokra nézve is, melyeknek ajakberendezése és keresztmetszete teljesen megegyező, a képzeleti hullámrész hossza is teljesen ugyanaz. Ha pl. az 5. ábrában lerajzolt sípot, mely egyszersmind az alaphang duodecimáját kifejező rezgési állapotot is szemlélteti, *p'*-nél átmetszük, *p'q* sípot nyerjük, mely az abba rajzolt hullám képe szerint épen most alaphangjának oktávájában szólalt meg és mely hangra nézve a képzeleti hullámrész *qb* ugyanaz, mint az egész *pq* síp bármely hangjára

nézve; ha pedig a sípot p''-nél vágjuk el, $p''q$ sípot alaphangjában megszólamolva nyerjük ugyanazon qb képzeleti hullámrészszel. Ezen $p'q$, $p''q$ . . . stb. sípokat pedig akár alaphangjuk, akár pedig valamely felhangjukra vonatkozó hullámnak egyik rezgési maximumán átszelvén és új meg új sipokra bontván, ezekre is hasonló módon indokolhatjuk a képzeleti hullámrészeknek egymás közti egyenlőségét. Egyszerű magyarázatát sikerült tehát adnom ama tüneménynek, melyre nézve WERTHEIM már régebben kisérleti úton, de minden közelebbi megokolás nélkül számbeli értékeket megállapított, midőn ugyanazon sípfejre egymásután alkalmazott különböző hosszúságú, de ugyanazon átmérőjű sípcsövek mindegyikére nézve ugyanazon hosszuságú képzeleti hullámrészt számított ki.

c) Minden sípra nézve egyszersmind meg van határozva a felléphető felhangok száma is.

Ugyanis legyen l a síp hossza és x az ezen síphoz tartozó képzeleti hullámrész, akkor az alaphangnak megfelelő álló hullám hossza $\lambda = l+x$, és minden felhangra nézve $\frac{\lambda}{m} = \frac{l+x}{m}$, hol m bármely egész számot jelent. Miután pedig $\frac{\lambda}{2m}$-nek mindig nagyobbnak kell lennie x-nél, mert ellenkező esetben az álló hullámot nem képzeleti rezgési maximum, hanem képzeleti csomó jellemezné, következik, hogy $\frac{l+x}{2m} > x$-nél legyen, illetőleg m értékét csak úgy választhatjuk, hogy $m < \frac{l+x}{2x}$-nél legyen; miután pedig x minden sípra nézve annak mélységéből és hosszából meghatározható, evvel együtt a felhangok száma is meg van állapítva.

A fentebbi kifejezésből látjuk, hogy valamely sípban annál több felhangot lehet előállítani, minél kisebb mélységű, míg a mélyebb sípokban a felhangok száma nagyon is meg van szorítva. Igy pl. egy 30 *cm* hosszú és 4 *cm* mély síp csak legfölebb $m < \frac{30+1{\cdot}79\times4-0{\cdot}0721\times30}{2(1{\cdot}79\times4-0{\cdot}0721\times30)} = 3{\cdot}5$, azaz 3 felhangot adhat, míg ha ugyanazon hosszúsággal a síp mélysége csak 2 *cm*-nyi, már $m < \frac{30+1{\cdot}79\times2-0{\cdot}0721\times30}{2(1{\cdot}79\times2-0{\cdot}0721\times30)} = 11{\cdot}06$, azaz már 11 félhang is támadhat.

A köbös sípokra nézve pedig hasonló módon találjuk, hogy a felhangok száma $m < \frac{l+x}{x}$ kifejezéssel van meghatározva, hol m természetesen csak páratlan egész számot jelenthet.

d) Hogy egy köbös síp csak igen erős befuvásra szólalhat meg, és hogy az ezen hangnak megfelelő álló hullám rezgési csomója csak közel a sípcső fenekéhez foglalhat helyet, más szóval, hogy a köbös síp az ugyanoly hosz-

szúságú szűkebb sípnak még mélyebb oktávájában is megszólalhat, szintén az 5-ik ábrából nyerheti magyarázatát, a mennyiben t. i. a *pq* sípot *p''*-nél vagy egy még magasabb felhangjának a sípcső fenekéhez legközelebb álló rezgési maximumán képzelvén átszelve, a visszamaradt hullámrész közvetlenül szemlélteti az ekkép megrövidített (köbös) síp alaphangjának megfelelő hullámalakot.

Helmholtz a sípok hangtüneményeit a resonantiából iparkodik kimagyarázni. Én azonban a sípokban befuvás által előidézett hangjelenségek és ezen sípcsövek resonantia tüneményei közti összefüggést korán sem tartom oly szorosnak, mint azt Helmholtz fölveszi — még pedig két oknál fogva is:

Helmholtz a sípok befuvással ébresztett hangjait, vagyis a sípok sajátos hangjait legerősebben resonált hangoknak jelzi. Már pedig egy és ugyanazon sípcső a legkülönbözőbb hangokat ugyanazon erősséggel resonáltatja, miután a többi között a resonantia erőssége a hangvilla azon oldalfelületeinek terjedelmétől is függ, melylyel a sípcső nyilásához közelítünk. Különben, hogy egy és ugyanazon sípcsőben a legkülönbözőbb alaphangokat és nem kizárólag csak egy a sípcsövet illető sajátos hangot idézhetünk elő, már onnét is kitünik, hogy egy és ugyanazon lágy nyelvű sípban két — még pedig magasságra igen jelentékenyen eltérő — hangot állíthatunk elő a szerint, a mint azt fuvás vagy szívás által megszólaltatjuk. Mindkét esetben pedig a sípcsőben foglalt levegő álló rezgésbe kerül és egymástól teljesen elütő alaphangot szolgáltatott. Sőt ha egy és ugyanazon sípcsőre különböző lágy nyelveket alkalmazunk, a legkülönbözőbb hangoknak megfelelő hullámalakokra idomíthatjuk a sípcsőben foglalt légoszlopot is. Tehát mint látjuk, kizárólag csak egy, a légoszlop alakjától és terjedelmétől meghatározott hang nem létezik, hanem a síp mindannyiszor más és más alaphangot ad, valahányszor légtömege azt rezgésre indító más és más külső okkal egybevágó hullámzásba kerül; *a sípok befuvás által előidézett alaphangja csakis egy lehetséges ezen számtalan alaphangok közül.*

Helmholtz szerint csak a vékonyabb sípok felhangjai állanak harmonikus viszonyban az alaphanghoz, a terjedelmesebb keresztmetszetű sípok felhangjai pedig a harmonikus fehangoktól többé-kevésbbé elütnek; innét magyarázza aztán Helmholtz, hogy miért oly szegény a terjedelmesebb keresztmetszetű sípok hangjellege felhangokban. Erre nézve pedig észrevételem, hogy a fentebbiek nyomán nagyon könnyen érthető okokból marad az ily sípok hangjellege üres és nem szólalhatnak meg felhangjaikban, mert azok — mint sikerült kimutatnom — egyáltalán nem is léteznek. Oly sípokban pedig, melyek kisebb keresztmetszet mellett a felhangok bizonyos sorozatát adják, a kellő erősségű befuvásra előállított (felhajszolt) alaphang mellett a felhangok is megszólalnak, a mint ezt különben

HELMHOLTZ * maga is beismeri és a minek okáról a fönnebbi *a)* pontban kellően be is számoltam.

Dischka Győző.

*

A víz- és gázvezeték elektromos áramáról.**

MARÉCHAL, a párisi közvilágítás mérnöke a *La Nature* című népszerű folyóiratban a következő érdekes tapasztalatát adja elő: A gáz- és vízvezeték két csapja közé kapcsolt galvanometer áramot jelez. Az áram meglepően állandónak mutatkozott, a mennyiben a galvanometer kitérített tűjén 1 év leforgása alatt naponként alig 1—2 foknyi ingadozás volt észrevehető. A két vezeték között a potential-különbség 0,25 *volt.*

MARÉCHAL úgy vélekedett, hogy a két vezeték mintegy igen nagy felületű galvánelemet alkot, melynek pozitiv sarka a vízvezeték csőhálózata, negativ elektrom-indítója a gázvezeték, a talaj pedig az elem másodrendű vezetője. Az áram eredetét a két vezeték chemiailag különböző állapotából törekszik megmagyarázni.

A dolgot elég érdekesnek találtam arra, hogy magam is megvizsgáljam. A két vezeték között tényleg találtam áramot, mely MARÉCHAL tapasztalatával egyezőleg, elég állandó volt s a vízvezeték alkotta a pozitiv sarkot. Előzetes méréseim szerint a potentialkülömbség 0,077—0,081 *volt* között ingadozik s az elektromos forrás ellenállása igen közel 3 *ohm.* A különböző időben ismételt mérések alig $^1/_{100}$-résznyi eltéréseket árultak el.

Az áram márczius elején — hideg, száraz időben — igen állandónak mutatkozott; de később, a mikor az idő enyhére s nagyon esősre fordult, meglehetősen ingadozott. Esti 6—8 óra között mindig hullámzik az áram intenzitása olyannyira, hogy néha egy-egy pillanatra a kitérés majdnem 0-ra száll alá.

A méréseket majd ismert állandójú galvanometerrel, majd pedig az általánosan ismeretes compensatio-módszerekkel végeztem. Az ellenállás mérésére a MANCE módszerét alkalmaztam; eredményeit azonban mindenkor galvanometeres méréssel is ellenőriztem. A kétféle eredetű adatok igen jól egyeztek.

A vezetékek ezen árama számbamenő chemiai munka végzésére is felhasználható. Ólomacetat, rézgálicz és ezüst nitrát telített oldataiból — természetesen mindenkor az illető fémekből vett elektródok között — kiválasztottam e fémeket. Gyenge lévén az áram, a fémek szép kristályosan váltak ki; különösen az «ólomfa» igen szép, nagy levelű volt. — Márczius

---

* HELMHOLTZ, Tonempfindungen. 3-te Ausgabe, pag. 151.

** Előterjesztve a f. é. április hó 4-én tartott rendes ülésen

23-án 78 600 *mp* alatt 0,7721 *gr* ezüst vált ki a gázvezetékkel közlekedő platina tégely falán, mely tömegből az áram átlagos intenzitása $8{,}787.10^{-3}$ *ampère*-nek adódik ki.

Az elektromosság ezen különös forrása a legkedvezőbben kihasználva, azaz 3 *ohm*-nyi ellenállással zárva, 24 óra alatt mintegy 8,5 méterkilogramnyi munkát szállít.

Ha az áramzárás helyétől távolabb levő csapok között vezető összeköttetés állíttatott elő, a galvanometer az áram tetemes gyengülését jelzé; annál nagyobbat, mennél közelebb történt az elágaztatás és mennél kisebb volt a közbekapcsolt ellenállás. Hosszabb időn keresztül tartó rövid zárlat a polarisatio gyenge nyomaira utalt, mely azonban az elektrom-indító erőnek 0,01-részénél mindenesetre kisebb volt.

Mi már most ennek az áramnak az eredete? Legegyszerűbbnek tetszik Maréchal-lal azt feltételezni, hogy óriási felületű galvánelemmel van dolgunk, melynek áramát a vashálózat felületén végbemenő chemiai folyamatok szolgáltatják. Mindkét hálózat vasból van ugyan, de az egyik a benne áramló víznek, a másik pedig a világító gáznak hatása alatt, a mi elég ok arra, hogy chemiailag igen különbözőképen viselkedjenek. Ebben az irányban kísérletet kell tenni a vezetékből kivett kisebb csődarabokkal.

De addig is, míg ez a kisérlet megtétetnék, igen kivánatosnak tartottam, hogy ezt az áramot lehetőleg sok helyen megfigyeljék. Ez okból a társulat több tagjához fordultam azzal a kéréssel, hogy ennek az ingyen forrásnak áramát kutassák s ha van, meg is mérjék.

Élénk tudományos érdeklődésnek jele, hogy a kinek csak módjában volt, a legrövidebb idő alatt közlé velem kisérleteinek eredményeit.

Elsőnek Dohnányi Frigyes tagtárs úr, pozsonyi főgymn. tanár felelete érkezett, a felszólítás elküldése után negyednapra. Szives beleegyezésével közlöm levelének a tárgyra vonatkozó főbb részeit:

«... Valóban, igen érdekes tünemény! Gaugin-féle galvanometeremet bekapcsoltam a víz- és gázvezeték közé és meglepetésemre állandó áramot kaptam, mely a vízvezetékből a galvanometeren át a gázvezeték felé keringett. A galvanometer 2°-nyi eltérést mutatott. Minthogy a galvanometer állandóját 11 év előtt vízbontó készülék segítségével 16 észlelés alapján meghatároztam, tudtam, hogy ez a kitérés 0,016 *ampère*nyi áramot jelez. A busszola fél fokokra van felosztva, s $^1/_{10}$ fok becsléssel elég biztosan meghatározható. Az állandót jó lenne újra meghatározni, mert hisz a H megváltozhatott; de tájékoztató adatnak ez is elég megbizható.»

Ezután nagy gonddal végzett mérések végeredményeként azt közli, hogy a kisérletei helyén a vezetékek potential-különbsége 0,0478 *volt*, a belső ellenállás pedig 2,95 *ohm*.

Nyomban Dohnányi úr levele után Molnár József tagtárs úr értesítése

érkezett kezemhez. A győri főreáliskola épületében ugyanarra az eredményre jutott: áram van, iránya a vízvezetéktől a gázvezeték felé. Nem bizván meg eléggé galvanometerében, mely tényleg csak tükörleolvasással lenne ezekre a mérésekre alkalmas, réz-voltameterrel végzett méréseket. Az igen nagy körültekintéssel végzett kisérletsorozatok arra vallanak, hogy eredményei a két előbbitől alig térnek el.

Ugyanoly eredményekre jutott Ábrahám János tagtárs úr is, ki a győri Szt.-Benedek-rendi főgymnasium laboratoriumában kisérletezett.

Dischka Győző tagtárs úr a pécsi főreáliskola physikai laboratoriumában áramot nem talált, de a chemiai laboratoriumban igen; a vízvezeték pozitiv. A physikai szertárban a gázvezeték a vas-traverzekre van rá erősítve: ezt mint valószinű zavaró körülményt hozza fel t. tagtársunk, a mi csakugyan rövid zárlat lehetőségére utal.

Fiumében Dr Salcher Péter tagtárs úr a cs. és kir. tengerészeti akadémiában szintén konstatálta az áramot, vízvezetéktől a gázvezeték felé. Riegler Sándor tagtárs úrral együtt méréseket fognak tenni.

Igen érdekes eredményeket küldött Homor István tagtárs úr Szegedről Beküldött dolgozatának lényeges része a következő:

1. A reáliskola laboratoriumában végzett kisérletek.

Új épületben vagyunk és a vízvezetékünk ólomcsöveit e héten rakták le s hozták összeköttetésbe az u. n. kisebb vízvezetékkel, mely a város északkeleti részét látja el. Vezetékünk elkészült, de a viztartó gyakran megtagadja a szolgálatot s így a hónak több olyan napja van, melyben vezetékünk nem ád vizet, azonkívül a nap bizonyos óráiban szintén hasztalan várjuk a vizet. A gázcsövek lerakása most van folyamatban; a második és első emelet-, földszint- és pinczehelyiségben a csövek már a falba vannak rakva, de a földbe rakott csőhálózattal még nincsenek összeköttetésben; a földszinten elhelyezett vegytani helyiségek pedig az épület összes vezetékével még nincsenek összeköttetésben. Így állván a dolgok, kezdetben nem is mertem arra gondolni, hogy a kivánt kisérleteket az intézet helyiségében, nevezetesen a physikai laboratoriumban végrehajthassam és már arról tanakodtam, hogy mely épületek lennének a városban legalkalmasabbak a kisérletek megejtésére, midőn mégis a laboratoriumban levő vízvezetéki csapot a multiplicatornak egyik, a gázvezető csőbe illesztett bütykőt pedig a másik sarkával elszigetelt rézsodrony segélyével kötöttem össze s nagy meglepetésemre a tűnek oly rohamos kitérését észleltem, mely a selyemgubószálat majd elszakította, míg végre hosszas lengés után a tű nyugalomba tért s 70 (hetven) foknál megállapodott. Ez időben, márczius 28-án egész napon a vízvezeték csapja nyitva állott, de vizet nem adott; a gázvezetékben gáz még csak két hó mulva lesz, de csőhálózatunk még a földbe helyezett csövezettel nincs is összeköttetésben s így a tünemények lánczo-

lata, melyet elsorolandó vagyok, a Maréchal-féle s a titkár úr kisérletezéseitől annyiban eltérő, hogy azoknál működésben levő víz- és gázvezeték, nálam pedig még működésben nem lévő víz- és gázvezeték szolgál eszközül és alapul. Az áram a vízvezetékből megy a gázvezeték felé.

A rendelkezésre álló igen érzékeny multiplicator állandója nem levén pontosan meghatározva, az intenzitás megmérésére a szintén birtokban levő tangens-galvanometert kellett használnom, melynek állandóját durranó gáz-voltaméterrel 0,0919 C. G. S. értékünek találtam. Minthogy a galvanometer tűje 2°-nyi kitérést adott, a vezetékek áramának intezitása 0,034 *amp.*

A Hughes-féle mikrofont becsatoltam egy régi szerkezetű Siemens-féle telefonnal együtt az áramkörbe s a mikrofonba mint hangfelvevőbe; hegedűvel előidézett hangokat négy szobán keresztül huzott vezetéken épen úgy hallottam, mint akkor, midőn a mikrofon és telefon oly áramkörbe csatoltatott, mely tíz voltos lámpát izzásba hoz.

A vegytani teremben, hol a mondottak szerint, a négy szobában befalazott gázvezeték még nincs összeköttetésben az egész épület gázvezetékével, a már emlitett multiplicator tűje csak 25° kitérést mutatott.

Vegybontást is végeztem az árammal és pedig elektrodokul tiszta ólom lapokat, elektrolit gyanánt pedig ólomacetat vizes oldatát használtam s a negativ elektrod tíz óra alatt szabad szemmel látható váladékot mutatott.

A telegraf írókészülékét az áramkörbe iktatva, a patkókat gyengén mágnesítve találtam.

A kisérletek márcz. 28—31. napjain történtek s daczára annak, hogy 29-én az esti órákban Szeged fölött mennydörgés- és villámlással egybekötött zápor vonult át, a tű eltérésében változás nem mutatkozott.

2. A város különböző pontjain végrehajtott kisérletek.

a) A kir. tábla palotájának vezetékei között a tű semmi eltérést sem mutatott. Itt mindkét vezeték vascsövekből van lerakva.

b) Egy magánházban szintén nem volt eltérés; itt is mindkét vezeték csövezetének vas az anyaga.

c) A Tisza-szálló saját elkülönített vízvezetékkel bir, melyet az udvarban levő artézi kút táplál; csövezete ólom. A gázvezeték városi. Itt a multiplicator eltérése 36°. A vízvezeték csapja pozitiv.

d) A városházán kétfelé vízvezeték van, a mennyiben a városi vizvezetékből a pinczehelyiségben felállított viztartóba ólomcsövön gyűjtik a vizet. E helyről a padláson elhelyezett víztartóba nyomják fel s onnan jut el az épület összes ólomcsöveibe. Az utóbbi ólomcsövezet a nagy vízvezetékkel nincs összekötve.

A nagy vezetéken a vízvezetéket pozitivnek, a kitérést 70 foknak, szóval egészen olyannak találtam, mint a reáliskola csövezeténél, a mi azt bizonyítja, hogy az áramhoz a csőben levő víz- és gáznak semmi köze.

A kis vezetéken az elhajlás iránya ugyanaz, de a kitérés csak 5°.

e) A sváb-konviktusban az irány ismét ugyanaz, a kitérés pedig 6°, noha vezetéke a nagy vízvezetékhez közlekedik, de a csőhálózat csak kis részben ólom.

f) A távirdaépületben, értesülésem szerint, szintén tettek kisérletet s az eltérést 50 fokúnak találták — saját galvanometerükön.

A legtöbb helyre kiterjedő kisérletezésről dr. Károly Irén tagtárs úr küldött be értesítést Nagy-Váradról. Igen sok helyen tett mérései arra vallanak, hogy egy és ugyanazon a helyen a potential-különbség állandó, de helyről-helyre változik és pedig nemcsak értékére, hanem irányára nézve is. A gymnasiumban a gázvezeték pozitiv, a vele szemben levő utczák házaiban ellenben negativ. A gázgyárban a gázvezeték az egyik szobában pozitiv, a szomszéd szobában pedig állandóan negativ. Erről azonban utólag kiderítette t. tagtársunk, hogy vezetéke az előbbiétől elütő. Potentiált három helyen mért; az egyik helyen 0,434 *volt*, a másodikon 0,360 *volt*, a harmadikon pedig 0,25 *volt* a két vezeték potential-különbségének az értéke.

Dr. Pfeiffer Péter tagtárs úr Kolozsvárott tett megfigyeléseket, az egyetemi chemiai intézet vezetékén. Áramot talált, mely a vízvezetéktől a gázvezeték felé tart. A potential-különbség a mérés helyén 0,01 *volt*nál kisebbnek mutatkozott.* Az áramot a physikai intézetben is megtalálta, melynek vizvezetéke a nagy vezetékkel nincsen közlekedésben.

Aradról Fényes Dezső tagtárs úr küldött adatokat. Minthogy a város vízvezetéke még nem kész, az arad-csanádi vasút palotájának vízvezetékén s a városi gázvezetéken kisérletezett. Arra az eredményre jutott, hogy a vízvezeték a pozitiv sark; a potential-különbség 0,095 *volt*, a belső ellenállás 1,39 *ohm*.

Dr Szekeres Kálmán a soproni főreáliskola épületében nem talált vezetéki áramot. Más helyütt teendő méréseket helyez kilátásba.

Szontagh Gusztáv tagtárs úr, a ki Maréchal hivatkozott czikkére figyelmeztetni szives volt, még nem kisérletezhetett, mert a brassói főreáliskola szertárában, melynek ő az őre, a vízvezeték még nincsen bevezetve.

Végre még néhány adat Budapest különböző helyeiről. Dr Kovács János a budai Pædagogiumban igen gyenge potential-különbséget talál: a gázvezeték pozitiv. A budai főgymnasium épületében Mialovics Mór tagtárs úr körülbelől 0,02 *v.* potential-különbséget talált; a gázvezeték pozitiv.

A várbeli felsőbb leányiskola épületében Gruber Nándor áramot nem talált. A VI. ker. állami főreáliskolában Balogh Mór t. társ úr kisérletez;

---

* A forrás ellenállását a velem közölt adatokból 1—2 ohm közé esőnek becsülöm. *B. G.*

áram van a gázvezeték pozitiv. A földmivelési miniszterium palotájában Kalecsinszky Sándor t. társ úr gyenge áramot talált; iránya gáz-víz. Az egyetem physikai-intézetében nincsen áram.

Az összes itt közölt kisérletezésekre vonatkozólag megjegyzendő, hogy aránylag igen rövid időközben, kb. 10 napon belül, egy időben végeztettek s az összes megfigyelők — magamat is beleértve — méréseiket csak előleges tájékozódás czéljából végezték s adataikat csak közelítőknek tekintik.

Az esetek többségében az áram egyformán jelentkezik; iránya ugyanaz (t. i. a víz-gáz) s a forrás ellenállása egyrendű mennyiség; sőt a pozsonyi s a budapesti mérésekben szinte meglepően egyező. Tekintettel arra, hogy az elektrolitikusan vezető közegbe merülő elsőrendű vezetők között, ha felületök igen nagy, az ellenállás csupán csak a közeg ellenállásától függ, az utóbbi mérések eredményét csakugyan úgy lehetne tekinteni, mint a talaj vezetőképességét jellemző állandót, s az áramot Maréchal szerint a vezetékek alkotta elemnek tulajdonítani. Igaz ugyan, hogy a nagy hálózatok egy anyagból, t. i. vasból vannak, de az egyik a benne áramló víznek, a másik pedig a gáznak hatása alatt lévén; ezek az anyagok a csövezet falait meglehetősen áthatják, a mi elég ok chemiailag különböző viselkedésökre. Ámde a szegedi, az aradi és a kolozsvári észlelések tanusága szerint a nagy vezetékkel egyáltalában nem közlekedő, egyetlen egy épületre szorítkozó, tehát aránylag kis terjedelmű vízvezetékek is adnak a nagyobb kiterjedésű gázvezeték felé áramot, akkor is, ha vezetéki czélokra még nem is használtattak. Ez esetben tehát tartalmuknak imént feltételezett hatása még nem lehetett. De talán épen az ily körülmények között létrejövő áramok magyarázhatók meg a legkönnyebben. Hiszen a közösen befalazott két csőhálózat (kivált ha az egyik vas, a másik pedig ólom) igen jól tekinthető együtt oly galvánelemnek, melyben a csöveket beburkoló vakolat (lassanként átalakuló mészsók keveréke) a hálózatok felületén chemiai folyamatokat indít, melyek a galvánáramot létrehozzák. Sőt igen valószínűnek látszik, hogy a nagy vezetékek között észlelt áramok is így jönnek létre. Hiszen alig lehetséges, hogy az egymás mellett futó, gyakran kereszteződő csőrendszerek helyenként fémileg ne érintkezzenek; sok esetben az épületek vas bordáihoz kötik a kétféle vezetéket s így az áramok, melyeket mértünk, s melyekkel fémeket választottunk ki, a nagy vezetékeknek csak igen kis kiterjedésű részén végbemenő chemiai folyamatokból táplálkoznának.

A kérdés tisztázása végett talajba, vakolatba ágyazott csődarabokból összeállított elemekkel kell kisérletezni. Kivánatos továbbá, hogy a vezetéket, a melyből az áramot veszszük, a mennyire csak lehetséges, részletesen leírjuk. Ismervén a csövezet anyagát, kiterjedését, a burkolat minősé-

gét — különösen az áram elvezetésének közelében — könnyebben fogjuk megérthetni és magyarázhatni a lemért állandókat.

Reménylem, hogy az ezentúl is közösen, lehetőleg sok helyen tett észlelések biztos feleletet adnak a szóban forgó kérdésre, melyre nézve egyelőre csupán többé-kevésbbé valószínű gyanításokra vagyunk utalva.

Bartoniek Géza.

TÁRSULATI ÜGYEK.

Értesítő a választmány üléseiről.

Első ülés, április hó 4-én.

1. *A Math. Phys. Társ. harmadik közgyűlése.* Br. Eötvös L. elnök az ülést megnyitván, a f. é. közgyűlésre vonatkozólag tesz előterjesztést. Minthogy a választmánynak 1894 október hó 18-án tartott ülésén hozott határozata szerint a harmadik közgyűlés Szombathelyen lesz megtartandó, idejére nézve az ottani tagtársakkal értekezett. Előzetes megállapodás az, hogy a közgyűlés április hó 29- és 30-dik napján tartassék meg. Ezen terminus mellett az szól, hogy 28-ka vasárnapra esik, május 1-én pedig iskolai szünet van s így teljes 4 nap áll rendelkezésre. Ellene szól azonban az, hogy ez időben a tagtársak egy része — a M. T. Akadémia nagy gyűlését megelőző fontos ülések miatt — nem távozhat el Budapestről; május második felében pedig kezdetöket veszik az érettségi vizsgálatok, a mi a tagtársak még nagyobb számát köti helyhez. Másrészt arról értesül, hogy szombathelyi tagtársaink, kik a közgyűlés rendezésével járó nagy terhet magukra vették, igen szivesen vennék, ha a közgyűlés későbbre, esetleg őszre elhalasztatnék. Mindezeket megfontolva, azt ajánlja, hogy az április 28—29-ki terminust csak mint esetlegest vegyük kilátásba, végleges határozatot a legközelebb megtartandó ülésnek tartván fen. A javaslathoz a választmány egyhangúlag hozzájárul.

2. *A társulat első mathematikai tanuló-versenye.* Ügyvivő titkár hivatalos jelentést tesz az első mathematikai tanuló-verseny eredményéről. A választmány örvendetes tudomást vesz az eredményről s azt határozza, hogy az az elismerés, melylyel elnök a díjak kiosztásakor a verseny győzteseinek VIII. osztálybeli mathematika tanárairól megemlékezett, a választmány jegyzőkönyvében is megörökíttessék. E szerint a Math. Phys. Társulat választmánya Winter József losonczi áll. főgymn. tanárnak, társulatunk tagjának, továbbá Ellend József sárospataki ev. ref. főgymn. tanárnak sikeres működésökért elismerést és köszönetet szavaz, mely határozatról a

nevezett urak jegyzőkönyvi kivonattal értesítendők. A határozat meghozatala után elnök közli a választmánynyal, hogy egy emlékérmet rendelt meg, melyet úgy a verseny győzteseinek, mint VIII. osztálybeli mathematika tanáraiknak kiván kiadatni; az éremnek az legyen a rendeltetése, hogy a versenyen elért sikernek állandó emlékét megőrizze. Az érem metszésének és veretésének költségeit ő maga kívánja födözni s csak azt sajnálja, hogy az érem még nem készült el. A választmány legnagyobb örömmel és hálával fogadja az elnök ajánlatát.

A választmány felhatalmazza az ügyvivő titkárt a f. é. szeptember hó elején megtartandó *második mathematikai tanuló-verseny* előkészítésére.

3. Elnök bemutatja dr. Dobszay Antal pécsi kanonok és egyházmegyei főesperes úr, tagtársunk levelét, melynek kiséretében társulatunknak 100 arany-koronás értékpapirt, szelvényivével együtt küldött. Elnök indítványozza, hogy a választmány nagys. és ft. dr. Dobszay Antal kanonok úrnak, mélyen tisztelt tagtársunknak, ki áldozó papságának 50 éves fordulóját sokfelé kiterjedő jótékonysággal ünnepelte meg s életének ezen nagy napján társulatunkra is gondolt, a küldött nagylelkű adományért hálás köszönetet mondjon. Az indítvány éljenzéssel elfogadtatott. Az adomány az alaptőkéhez csatoltatik; kamatai a rendes bevételeket gyarapítják.

4. Schmidt Ágoston alelnök jelenti, hogy a nmélt. vallás- és közoktatásügyi miniszterium megbizásából a milléniumi kiállításra összeállítandó physikai normális gyűjtemény költségeire megajánlott összegnek első részleteül 2000 frt kiutalványoztatott. A pénztárnok utasíttatott az összeg átvételére. Felhasználásáról az elnök intézkedik.

5. Végül az új tagokul ajánlottak a Mathematikai és Physikai Társulat rendes tagjainak megválasztattak.

Második ülés, április 18-án.

Elnök felolvastatja a szombathelyi tagtársak egy átiratát, mely így hangzik:

Tekintetes Választmány!

A tek. választmány szives elhatározásának eredménye ama határozat, mely szerint a Math. Phys. Társulat ez évi közgyűlésének színhelye Szombathely legyen. Alulirottak, kiknek meghivására a tek. választmány e határozatát hozta, azon tiszteletteljes kéréssel járulunk a tek. választmány elé, hogy a rendes közgyűlés megtartásának idejét szeptember hó végére elhalasztani szíveskedjék. A mellett, hogy vidékünkön az őszi időjárás a legmegbízhatóbb, a főokot eme kérelmünk előterjesztésére az adja, hogy Szombathelyen, illetve Ikervárott egy nagyobb szabású elektromos mű

létesítése van folyamatban, melynek megtekintése a közgyűlés egyik igen érdekes pontja lehetne.

Tiszteletteljes kérésünket megújítva, vagyunk szives üdvözlettel

Szombathelyen, 1895 április 8.

a társulat hű tagjai

Dr. Kunc Adolf prælatus. *Dr. Edelmann Sebő.* *Módly Krizsó.*

A választmány több tagjának egyértelmű nyilatkozata szerint a szombathelyi tagtárs urak kívánságának teljesítése csak annyiban eshetnék kifogás alá, hogy az alapszabályok a közgyűlés idejéül husvét táját határozzák meg; ámde az alapszabályok emez intézkedését nem tartják oly lényegesnek, hogy e miatt a közgyűlést szeptemberre kitűzni nem lehetne. Hiszen az alapszabályok hivatkozott pontjának fogalmazásánál csak az az intentio volt irányadó, hogy a választmány keze a közgyűlés idejének meghatározásában tulságosan meg ne köttessék, s így lehetővé váljon annak az időpontnak megválasztása, melyben a legtöbb tagnak megjelenése remélhető. Ezt szemelőtt tartva a választmány elhatározza, hogy a harmadik rendes közgyűlés Szombathelyen f. é. szeptember hó végén fog megtartatni.

*

A Mathematikai és Physikai Társulat új tagjai.

A választmány 1895 április hó 4-én tartott ülésén a Mathematikai és Physikai Társulat új tagjaiúl a következőket választotta meg: *Pőschl Imre* műegyet. assistens Bpest (aj. *Bartoniek* és *Hoór*); *Dr Schwicker Alfréd* főreálisk. tanár Pozsonyban (aj. *Bozóky* és *Bartoniek*); *Pizzetti Rókus* áll. főgymn. tanár Fiume (aj. *Angheben* és *Riegler*); *Kalecsinszky Sándor* geol. int. vegyész Bpest (aj. *Klupathy* és *Bartoniek*); *Möller Árpád* prem. rendi tanár Jászó (*Fábry* és *Berkes*); Dr *Németh Antal* kir. főigazgató Győr (aj. *Edelmann* és *Bartoniek*); *Nagy Vazul Pál* Szt. Benedekrendi tanár (aj. *Tangl* és *Rados G.*); *Oszlaczky Szilárd* tanárjelölt Bpesten (aj. *Mikola* és *Karvázy*); *Privorszky Alajos, Péch Aladár, Bauer Mihály, Csajkás Mihály, Benda Jenő* és *Grosz Ferencz* tanárjelöltek Bpesten (aj. *Rados* és *Tőtössy*); *Váncza Mihály* ref. főgymn. tanár Mező-Túron (aj. *Fröhlich* és *Rados G.*); *Schenk Arthur* orv. növendék Bpesten (aj. *Klupathy* és *Tangl*); Dr *Steécz György* cz. kanonok és plébános Apatinban (aj. *Bartoniek* és *Rados*); *Dr Iszlay József* orvos Bpesten (aj. *b. Eötvös* és *Klupathy*); Ifj. *Szily Kálmán* tanárjelölt Bpesten (aj. *Szily K.* és *Rados G.*); *Schimanek Emil* műegyet. assistens Bpest (aj. *Rados* és *Réthy*).

VEGYESEK.

CAYLEY ARTHUR †

Cayley Arthur, a mathematikusok Nestora halt meg Cambridgeben 1895 jan. 26-án.

Cayley 1821 aug. 16-án született Richmondban. Már mint cambridgei tanuló nagy előszeretettel foglalkozott a mathematikával, mindazonáltal 1859-ben jogi pályára lépett és 1863-ig ügyvédeskedett. Ez évben a cambridgei egyetemen a mathematika tanára lett és ezen időtől haláláig híven megfelelt tanszéke kötelezettségeinek: «a tiszta mathematika szabályait magyarázni és tanítani és magát a tudomány fejlesztésének szentelni».

A milyen egyszerű, eseményekben szegény e tudós külső élete, oly gazdag tudományos működése. Egy könyvén kívül (*Elementary treatise on elliptic fonctions* 1878.) majdnem ezer értekezés jelent meg tőle különböző folyóiratokban: ezek mindazon kérdésekre vonatkoznak, a melyekkel egy felszázadon keresztül a mathematikusok foglalkoztak. Első mathematikai értekezése 1841-ben jelent meg a Cambridge Mathematical Journalban és már 1852-ben megválasztotta a Royal Society egy értekezése alapján tagjául.

A geometria, az algebra, a számelmélet, az integrálszámítás, az elliptikus függvények elmélete és az égi testek mehanikája egyaránt oly alapvető jelentőségű eredményeket köszönnek neki, a melyek örök emléket biztosítanak számára.

Sylvester-rel együtt ő alapította meg az algebrai alakok elméletét, kutatta az invariánsokat és kovariánsokat hosszadalmas, fárasztó számításokkal. Foglalkozott a magasabb rendű görbékkel, kettős érintőikkel és többszörös pontjaikkal, térbeli görbék és felületek elméletével.

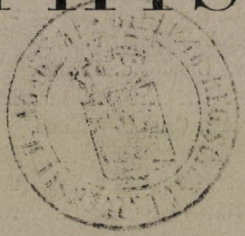
1889-ben indult meg Cayley összegyűjtött műveinek kiadása, melyből eddig hét kötet, több mint 2000 czikkel jelent meg. Remélhető, hogy a nagy mathematikus műveinek e jeles kiadása nem marad csonkán. Befejezve e munkák hirdetni fogják az angol mathematika Cayley-korszakának örök dicsőségét.

Kopp Lajos.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK



A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

NEGYEDIK ÉVFOLYAM

V. FÜZET. 1895 MÁJUS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1895

TARTALOM

Lap

PRIVORSZKY ALAJOS: A térbeli görbék elméletéhez ... 193

SZÉPRÉTHY BÉLA: A csavart oszlop saját árnyékhatárvonalának meghatározásáról 197

BEKE MANÓ: Egy tétel a homogén lineár differenciálegyenletek algebrai integráljairól ... 203

BREUER MÓR: Adalék a több változós függvények elméletéhez ... 207

Physikai szemle. (A dörzsölési elektromosság eredete) ... 212

Irodalom. (A M. T. Akademia Lukács Krisztina-pályadíjáról. — A M. T. Akademia új mathematikai jutalomtétele. — WINKELMANN, Handb. d. Physik, ism. HELLER. — KAYSER, Physik, ism. K. J.) ... 221

Megoldott feladatok. (A 22. feladat megoldása BLAU ÁRMIN, CSILLAG VILMOS, SUTÁK JÓZSEF és STEINER LAJOS uraktól) ... 229

Feladatok. (31. feladat TÖTÖSSY BÉLA úrtól) ... 234

Vegyesek. (Bolygórendszerünk határairól, KÖVESLIGETHY RADÓ) ... 235

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A negyedik társulati év 1895. január 1-én kezdődött. A *tagsági díj* az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) címére — legczélszerűbben az 1. füzethez mellékelt posta-utalvánnyal — beküldeni. *A mult évről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéséért.*

A *Math. Phys. Lapok* I—III. évfolyamai teljes példányokban még kaphatók; az I. kötet ára 5 frt, a többieké 3—3 frt.

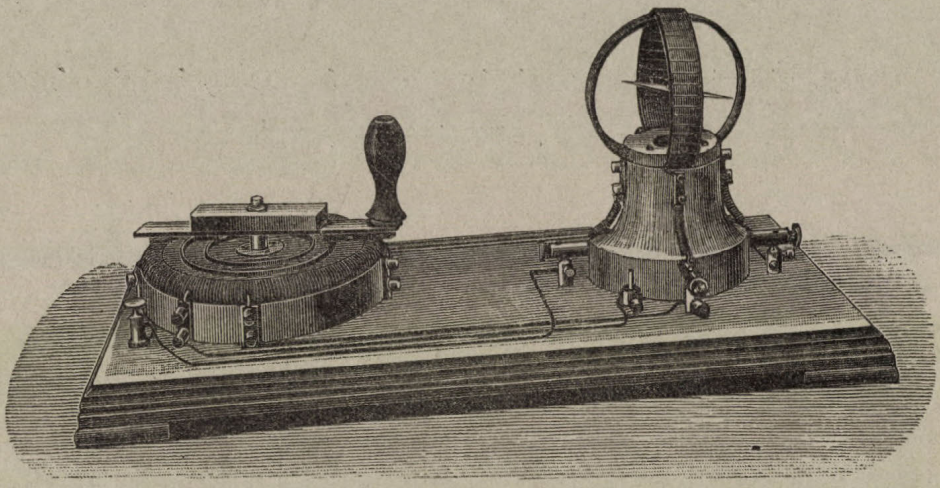
Rendes ülések. A társulat üléseit minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja, a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3.), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

Közgyülés. A társulat ez évi közgyülése Szombathelyen fog megtartatni, szeptember hó végén.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czímére **(VI. Bulyovszky-u. 16.)** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár **(VII., Csengery-u. 1)**, a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a *reclamatiók* is. A reclamatiókat — költségkimélésből — mindenkor a legközelebb megjelenő füzettel egyidejűleg teljesítjük.

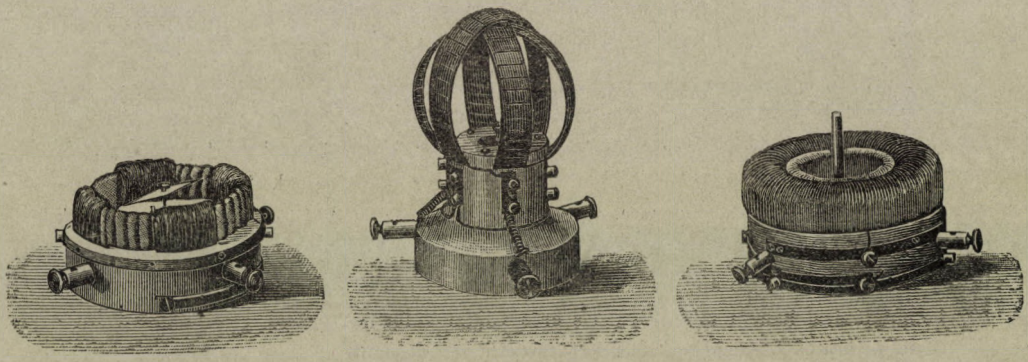
Értesítés. Számos kérdezősködésre értesítjük Társulatunk t. tagjait, hogy *Rõiti* két kötetes physikai kézikönyve, melynek kiadását a Kir. Magyar Természettudományi Társulat a könyvkiadó vállalatába Társulatunk ajánlatára fölvette, november hóban elhagyja a sajtót. A kilenczven ívre terjedő két kötet 880 rajzzal és három műlappal lesz díszítve. A fordítást bold. *Czógler Alajos*, a revisiót *Bartoniek Géza* végezte. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai e kiadványt külön is megszerezhetik és pedig lehető kedvezményes áron, a miről annak idején értesíteni fogjuk t. tagtársainkat. *Titk.*



WEINHOLD-féle készülék

FORGÓ MÁGNESES TÉR ELŐÁLLITÁSÁRA.

A II. kötet 275. stb. oldalain ismertetett készülékeket (3., 8., 9. és 11. ábra) minden hozzávaló mellékkészülékkel teljesen felszerelve igen ajánlhatjuk a t. cz. tanár urak becses figyelmébe.



A teljes készülék ára legfinomabb kivitelben ***60 forint*** *loco Budapest. A készülék egyes részei külön is kaphatók méltányos árakon.*

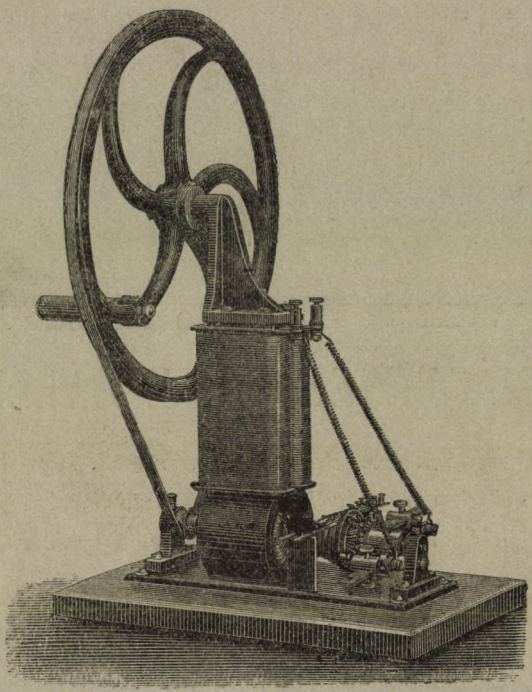
CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

DINAMO-ELEKTROMOS GÉP

Gramme-féle gyűrűvel ellátva

egyirányú, váltakozó és forgató (több fázisú) áram előállítására.

Az áram erőssége 4 Ampère, feszültsége 30 Volt.



Ezen géppel egyidejűleg meg lehet világítani például 3 izzólámpát egyirányú és 2—3—4 izzólámpát váltakozó vagy több fázisú forgató árammal. Használható egyenáramú, váltakozó áramú és több fázisú generátor vagy mótorként. Szerkezete e lapok II. köt. V. füzetében ismertetve van.

A gép kizárólagosan iskolai czélokra készült és pedig nem csak a dynamogép stb. bemutatására, hanem mint állandó s erős villamos forrás; kézzel igen könnyen hajtható és árama minden iskolai kisérlethez teljesen elegendő.

Részletes utasitás minden géphez mellékeltetik.

A gép ára 100 forint.

CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

A TÉRBELI GÖRBÉK ELMÉLETÉHEZ.*

A legegyszerűbb infinitezimális megfontolozások beláthatóvá teszik a következő tétel helyességét:

Valamely térbeli görbe simuló síkjaitól beburkolt kifejthető felületnek visszatérő éle maga a megadott térbeli görbe.

Minthogy azonban ily hozzávetőleges infinitezimális megfontolások gyakran a szükséges mathematikai szigorúságnak hiányában vannak, talán nem lesz felesleges e tétel pontos analitikai bebizonyítását is közölni.

Mielőtt erre áttérnék, a következőket bocsátom előre:

Ha a

$$\Phi(t) \equiv A(t)\,\xi + B(t)\,\eta + C(t)\,\zeta + D(t) = 0$$

egyenlet együtthatói a t parameter megadott függvényei, akkor a

$$\Phi(t) = 0$$

egyenlet a t minden egyes számértéke mellett egy-egy síkot határoz meg; az ekként keletkező síkok kifejthető felületet burkolnak be. E kifejthető felület visszatérő élének (arête de rebroussement) egyenleteit megkapjuk, ha a

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &\equiv A(t)\,\xi + B(t)\,\eta + C(t)\,\zeta + D(t) = 0^{**} \\
\Phi'(t) &\equiv A'(t)\,\xi + B'(t)\,\eta + C'(t)\,\zeta + D'(t) = 0 \\
\Phi''(t) &\equiv A''(t)\,\xi + B''(t)\,\eta + C''(t)\,\zeta + D''(t) = 0
\end{aligned}$$

---

* E czikkben foglalt bebizonyítás alapvonásait Rados Gusztáv tanár úr a műegyetemen tartott mathematikai gyakorlatokban közölte.

** A differenciálhányadosok jelölésére a Lagrange-féle jelzési módot használom, úgy, hogy pl.:

$$A''(t) = \frac{d^2 A(t)}{dt^2}.$$

lineár egyenletrendszert ξ, η, ζ szerint megoldjuk; a nyerendő megoldások:

$$\xi = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t)$$

szolgáltatják a visszatérő él parameteres egyenleteit.

Ezeknek alapján a fönt kimondott tétel minden nehézség nélkül bizonyítható be.

Legyenek

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

a megadott térbeli görbe parameteres egyenletei. Ha valódi térbeli görbéről (és nem síkgörbéről) van szó, akkor a

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

determináns nem lehet azonosan zérus. Az (x, y, z) ponthoz tartozó simuló sík egyenlete:

$$\Phi(t) \equiv A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0,$$

hol

$$A = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}.$$

E simuló síkoktól beburkolt kifejthető felület visszatérő élét a

$$\Phi(t) = 0, \quad \Phi'(t) = 0, \quad \Phi''(t) = 0$$

egyenletek határozzák meg. Irjuk ki ezeket az egyenleteket részletesen:

$$\Phi'(t) \equiv A'(\xi - x) + B'(\eta - y) + C'(\zeta - z) - (Ax' + By' + Cz') = 0;$$

de minthogy

$$Ax' + By' + Cz' = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \equiv 0,$$

$$\Phi'(t) \equiv A'(\xi - x) + B'(\eta - y) + C'(\zeta - z) = 0;$$

ennek alapján

$$\Phi''(t) \equiv A''(\xi - x) + B''(\eta - y) + C''(\zeta - z) - (A'x' + B'y' + C'z') = 0,$$

de mivel

$$A'x'+B'y'+C'z'=\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x' & y' & z' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \equiv 0,$$

$$\Phi''(t)\equiv A''(\xi-x)+B''(\eta-y)+C''(\zeta-z)=0.$$

Tehát a simuló síkoktól beburkolt kifejthető felület visszatérő élének egyenleteit megkapjuk, ha a

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\equiv A\ (\xi-x)+B\ (\eta-y)+C\ (\zeta-z)=0 \\ \Phi'(t) &\equiv A'\ (\xi-x)+B'\ (\eta-y)+C'\ (\zeta-z)=0 \\ \Phi''(t) &\equiv A''(\xi-x)+B''(\eta-y)+C''(\zeta-z)=0 \end{aligned} \qquad 1)$$

lineár egyenletrendszert ξ, η, ζ szerint megoldjuk. Ez az egyenletrendszer a

$$\xi-x, \quad \eta-y, \quad \zeta-z$$

ismeretlenekre nézve homogén. Ha determinánsáról, azaz a

$$D=\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

determinánsról sikerül kimutatni azt, hogy nem azonosan zérus, úgy hogy

$$\xi-x=0, \quad \eta-y=0, \quad \zeta-z=0$$

a homogén lineár egyenletrendszer egyetlen megoldása: akkor kimondhatjuk, hogy a visszatérő él egyenletei mások mint a

$$\xi=x=f_1(t), \quad \eta=y=f_2(t), \quad \zeta=z=f_3(t)$$

egyenletek nem lehetnek és így ezzel egyszersmind be lesz bizonyítva az is, hogy a simuló síkoktól beburkolt kifejthető felület visszatérő éle azonos a megadott térbeli görbével.

A további tárgyalás tehát a D determináns tüzetesebb vizsgálatát teszi szükségessé. Azért írjuk ki D elemeit részletesen:

$$\begin{aligned} A &= y'z''-y''z' & A' &= y'z'''-y'''z' \\ B &= z'x''-z''x' & B' &= z'x'''-z'''x' \\ C &= x'y''-x''y' & C' &= x'y'''-x'''y' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'' &= (y''z'''-y'''z'')+(y'z^{IV}-y^{IV}z') \\ B'' &= (z''x'''-z'''x'')+(z'x^{IV}-z^{IV}x') \\ C'' &= (x''y'''-x'''y'')+(x'y^{IV}-x^{IV}y'). \end{aligned}$$

A D felbontható két determináns összegére:

$$D=D_1+D_2, \qquad 2)$$

hol

$$D_1=\begin{vmatrix} y' z''-y'' z' & z' x''-z'' x' & x' y''-x'' y' \\ y' z'''-y''' z' & z' x'''-z''' x' & x' y'''-x''' y' \\ y'' z'''-y''' z'' & z'' x'''-z''' x'' & x'' y'''-x''' y'' \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} y'' z'''-y''' z'' & z'' x'''-z''' x'' & x'' y'''-x''' y'' \\ y''' z'-y' z''' & z''' x'-z' x''' & x''' y'-x' y''' \\ y' z''-y'' z' & z' x''-z'' x' & x' y''-x'' y' \end{vmatrix} = \Delta^2,$$

minthogy D_1 a Δ adjungált rendszerének determinánsa; továbbá

$$D_2=\begin{vmatrix} y'z''-y'' z' & z'x''-z'' x' & x'y''-x'' y' \\ y'z'''-y''' z' & z'x'''-z''' x' & x'y'''-x''' y' \\ y' z^{IV}-y^{IV} z' & z' x^{IV}-z^{IV} x' & x' y^{IV}-x^{IV} y' \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} y' & z' & 0 \\ -x' & 0 & z' \\ 0 & -x' & -y' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z'' & -y'' & x'' \\ z''' & -y''' & x''' \\ z^{IV} & -y^{IV} & y''' \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & z' & y' \\ -z' & 0 & x' \\ -y' & -x' & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z'' & -y'' & x'' \\ z''' & -y''' & x''' \\ z^{IV} & -y^{IV} & x^{IV} \end{vmatrix} \equiv 0$$

mert az utoljára talált szorzat első tényezője páratlan fokú ferdén szimmetrikus determináns. Ha D_1 és D_2 talált értékeit a 2) alatti képletbe helyettesítjük, lesz:

$$D=\Delta^2;$$

és minthogy Δ valódi térgörbe esetében nem tünhetik el azonosan, azért D sem lehet azonosan zérus és így az 1) alatti egyenletrendszerből valóban a

$$\xi=f_1(t), \quad \eta=f_2(t), \quad \zeta=f_3(t)$$

egyenleteket kapjuk a visszatérő él meghatározására. De ezzel a bevezetésben kimondott tétel teljesen be van bizonyítva.

Privorszky Alajos.

A CSAVART OSZLOP SAJÁT ÁRNYÉKHATÁRVONALÁNAK MEGHATÁROZÁSÁRÓL.

(Második közlemény.)

II.

Az imént tárgyalt meghatározási módok mindegyikénél szerepel a T' középponttal biró sugársor. E sugársornak mint projekciónak azonban megfelel egy határozott geometriai téralakzat, a melynek felismerésére legegyszerűbben rávezet az első szerkesztési mód.

Az ott kifejtettek szerint minden alkotó körön az árnyékhatárvonal pontjait oly körátmérő metszi ki, a melynek első projekciója a T' ponton halad át. Mivel e körátmérők parallel síkokban — az alkotó körök síkjaiban — feküsznek, és mindannyian a középponti csavarvonalat átmetszik, kimondhatjuk, hogy:

A T' középponttal biró sugársornak, mint projekciónak, a térben oly egyenes konoid felel meg, a melynek egyik vezérvonala felületünk középponti csavarvonala, második vezérvonala pedig egy ennek tengelyével parallel egyenes, T'-nek első projicziáló sugara; iránysíkja pedig egy erre az egyenesre merőleges sík, az első projekczió-lap.

A véges térben levő egyenes vezérvonal helyzete kizárólagosan a fénysugár irányától függ, a mely azt egyértelműen meghatározza. A középponti csavarvonal és ez egyenes között a következő reláczió áll fenn:

$$d=\mu \,.\, \text{tg.}\, \alpha,$$

hol d e vezérvonal távolságát a felület tengelyétől, α a fénysugár

hajlásszögét a tengelylyel, μ pedig a csavarvonal redukált menetmagasságát jelenti. Megjegyzendő még, hogy ama síkok, a melyeket egyrészt a fénysugár iránya másrészt pedig e vezérvonal a felület tengelyével alkotnak, egymásra merőlegesek.

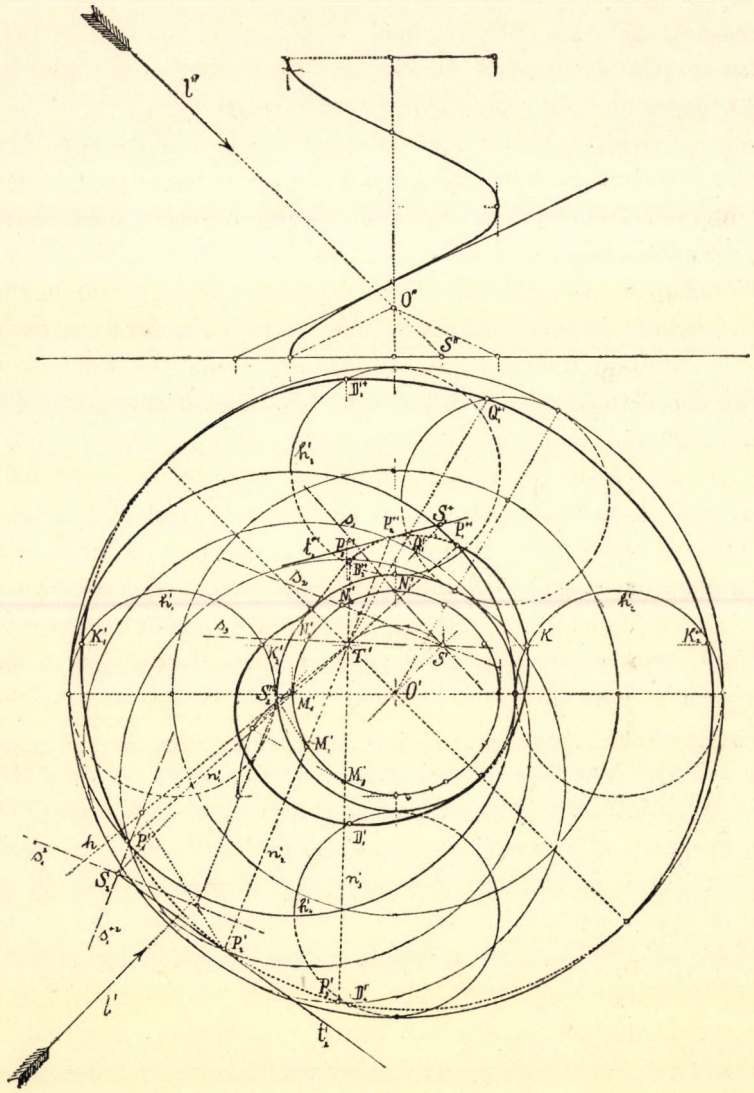
Ha rövidség kedveért a fénysugarat l-lel, adott felületünket F-fel, a szereplő konoid felületet pedig Φ-vel jelöljük, akkor a fénysugár irányához tartozó Φ felület F felületünkön az árnyékhatárvonalat metszi ki.

Ezzel a fénysugáriránynyal, — mondhatnám — konjugált Φ felület ugyanoly szerepet játszik F-re nézve, mint a milyen szerepe jutott a másodrendű felület hasonló problémájában a fénysugáriránnyal konjugált átmérősíknak. Változó fénysugárirány mellett a Φ felületek egy kétszeresen végtelen (két-dimenziós) felületsort alkotnak. E felületsorban az iránysík és az egyik vezérvonal, a csavarvonal állandó; változó ellenben a véges térben levő egyenes vezérvonal, mely utóbbi összes helyzeteiben egy az F felület tengelyével parallel sugárpontot alkot. Konoid felületsorunkban azonban csak egyszerűen végtelen sok egymástól alakra is eltérő felület foglaltatik, mert a többiek ezekből csavarmozgás utján származtathatók. Az összes eseteknek megfelelően a d távolság értéke 0 és ∞ határok között változik, a minek következtében e sorozat a d távolság határértékeinek megfelelően, ∞ sok hengerfelületet és egy lapos csavarfelületet tartalmaz, ha a változó vezérvonal a ∞-be távozik ($d=\infty$), illetőleg az F felület tengelyével összeesik ($d=0$).

Érintő szerkesztése.

Az árnyékhatárvonal szerkesztésének ily módon való interpretációja módot nyujt érintőjének szerkesztésére is tetszőlegesen megadott pontjában. Ugyanis az érintő nem más, mint a felületek amaz érintősíkjainak metszésvonala, a melyek választott pontunkhoz tartoznak.

Foglalkozzunk először is a csavart körhengerfelület érintősíkjával. Szerkeszszük (l. 1. ábra) pl. az érintősíkot felületünk P_i pontjában.



3. ábra.

Képzeljük e ponton keresztül az alkotó kört meghúzva, és legyen ennek középpontja M_i, akkor a keresett sík első nyomvonala merőleges P_iM_i sugárra, mivel ez, az alkotó kör P_i-hez tartozó érin-

tőjét magán tartalmazza. Felületünket ez alkotó kör hosszában burkoló elliptikus hengerfelület P_i pontján áthaladó alkotója szolgáltatja érintősíkunk egy másik egyenesét. Mivel ez az alkotó a középponti csavarvonal M_i-hez tartozó érintőjével parallel fekvésű, érintősíkunk első nyomvonalát abban az egyenesben nyerjük, a melyet az M_i', a középponti csavarvonal M_i-beni érintőjének első nyompontja S_i^M és a P_i' pontoktól megállapitott parallelogramma negyedik csúcspontjából $P_i'M_i'$ egyenesre merőlegesen húzunk.

A Φ konoidfelület érintősíkjának meghatározására legyenek a 3-dik ábrában, a meghatározására szükséges adatok két projekczióban megadva; legyen továbbá g a felület egy alkotója, P pedig a szerkesztendő érintősík érintési pontja.

Ha figyelembe vesszük, hogy az egy alkotón keresztül menő érintősíkok megállapította síksor, az érintési pontoktól képezett pontsorral projektív,* törekvésünk első sorban e projektív alakzatok három megfelelő elempárjának megszerkesztésére irányul.

Konoidfelületünk g alkotója a csavarvonalalakú vezérvonalat $M'M''$ pontban metszi, és e pontban lévő érintősíkját meghatározza e g alkotó és a vezérvonal M-hez tartozó érintője úgy, hogy első nyomvonala, s_1^I, az érintő első nyompontján S^M-en át g'-vel párhuzamosan meghúzható. A g alkotó és a t vezérvonal megállapitotta sík érintési pontját megadja a $T'T''$ pont, első nyomvonala s_1^{II} összeesik az alkotó első projekcziójával. Az alkotón keresztül az iránysíkkal (első projekczió lap) párhuzamosan fektetett sík a felületet az alkotó ∞-ben fekvő pontjában P_∞-ben érinti, első nyomvonala összeesik az első projekcziólap végtelenben fekvő egyenesével, s_∞-nel.

Az érintősikok és érintési pontok projektivitása most már a következő: föltéve, hogy az érintősíkok helyére azok első nyomvonalait tettük:

$$(M'T'P_\infty P\ldots)\barwedge(s_1^I s_1^{II} s_\infty s_1\ldots).$$

---

* Fieder, Darst. Geometrie, II. köt. p. 416.

A M. Kir. Ferenc József Tudomány Egyetem Könyvtára Szeged
A M. Kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem Könyvtára Szeged

A mint látható a nyomvonalak sora egy a g' egyenes irányával biró parallel sugársor.

Egyneműsítés czéljából czélszerű e sugársort egy vele perspektiv fekvésű pontsorral helyettesíteni. Metsző egyenesnek igen alkalmas, bármely T' ponton áthaladó egyenes, mivel rajta a nyomvonalsor egy az érintési pontok sorával nemcsak projektiv hasonló, hanem még perspektiv fekvésű pontsort is kimetsz. Legelőnyösebben használható e czélra a $T'S^M \equiv h$ egyenes; projektiv pontsoraink ekkor a következők:

$$(T'M'P_\infty P' \ldots) \overline{\wedge} (T'S^M H_\infty H \ldots),$$

ha H_∞-nel a h egyenes végtelenben fekvő pontját jelöljük.

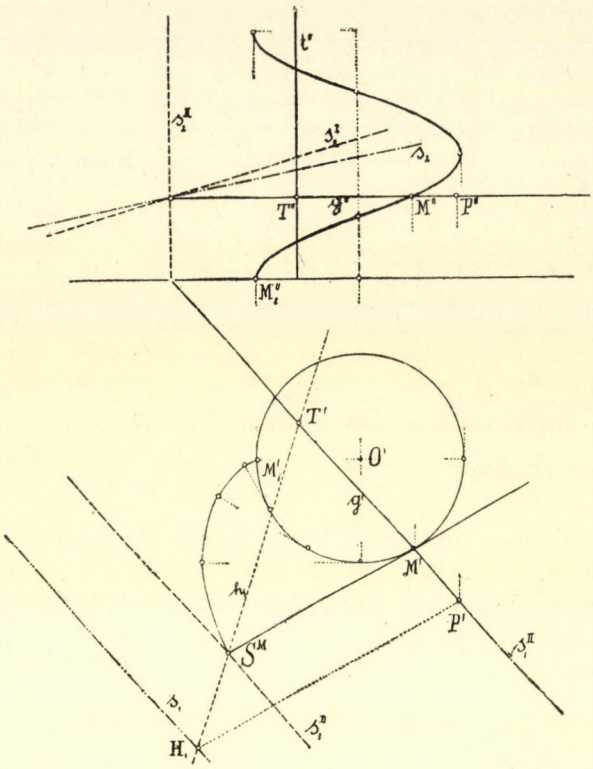
A pontsorok megfelelő pontpárjainak összeköttetései párhuzamosak $M'S^M$-mel, s igy megtalálhatjuk a Φ felület P pontjához tartozó érintősík első nyomvonalát s_1-et a síksor nyomvonalsorozatának ama sugarában, a mely a P'-nek megfelelő H ponton áthalad.

Az előbbiekben elmondottak figyelembe vételével történt az érintő megszerkesztése 1-sö ábránkban is. Az F és Φ felületekhez P_2 pontban szerkesztett érintősíkok első nyomvonalai s_1^2 és s_1^{+2} az S_2 pontban metszik egymást, úgy, hogy az érintő első projekcziója $S_2P_2' \equiv t_2'$-ben húzható meg.

E szerkesztés követhető általában az árnyékhatárvonal bármely pontjára nézve, és csak nehány igen kivételes eset fordulhat elő, midőn eredményre nem vezet, vagy egész terjedelmében alkalmazása fölösleges.

Az eljárás kétszeres alkalmazására válnék szükségessé, az árnyékhatárvonal oly pontjaira nézve, a melyek a felület ugyanazon parallelkörén feküsznek. Egy ily pontpár érintőinek helyzetére vonatkozó egyszerű meggondolás meg fogja mutatni, hogy az egyik pont érintőjének ismeretéből, a másik pont érintője az általános szerkesztés mellőzésével, azonnal megtalálható. Jelöljük az árnyékhatárvonal egy ily pontpárját P_i, P_i^+-vel, az alkotó kör középpontját M_i-vel és a középponti csavarvonal ehhez tartozó érintőjének első nyompontját S_i^M-mel, akkor egyrészt az F felület, másrészt pedig

a Φ felület e pontokhoz tartozó érintősíkjainak első nyomvonalai könnyen felismerhető okoknál fogva S_i^M-hez, mint középponthoz



1. ábra.

szimmetrikus fekvésüek lesznek. Következésképen szimmetrikusok egyszersmind a t_i és t_i^+ érintők első nyompontjai S_i és S_i^+ is, S_i^M pontot szimmetria középpontnak véve.

Szépréthy Béla.

EGY TÉTEL A HOMOGÉN LINEÁR DIFFERENCZIÁLEGYENLETEK ALGEBRAI INTEGRÁLJAIRÓL.

HEINE figyelmeztette SCHWARZ-ot* arra, hogy ha a

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy + 0 \qquad 1)$$

másodrendű homogén lineár differenciálegyenlet két partikuláris megoldásának, y_1 és y_2-nek hányadosa az x független változó algebrai függvénye és e mellett

$$e^{-\int p dx} \qquad 2)$$

is x-nek algebrai függvénye, akkor az 1) alatti differenciálegyenlet általános megoldása is az x algebrai függvénye lesz.

Ennek a tételnek egy közel fekvő általánosítását akarom közölni. Ez az általánosítás a következő:

Ha az

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0 \qquad 3)$$

homogén lineár differenciálegyenlet n független partikuláris megoldása

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \qquad 4)$$

és az

$$\frac{y_1}{y_n}, \frac{y_2}{y_n}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{y_n}, \qquad 5)$$

n—1 hányados az x független változónak algebrai függvényei, továbbá a

$$e^{-\int p_1 dx} \qquad 6)$$

* SCHWARZ: Über diejenigen Fälle in welchen die GAUSS'sche hypegeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt. Journ. f. r. ü. ang. Math. 75. kötet. v. Gesammelte Werke II. p. 218.

is x-nek algebrai függvénye, akkor a 3) alatti differenciálegyenlet általános megoldása is algebrai függvénye az x-nek.

A lineár differenciálegyenletek elméletéből ismeretes, hogy a 6) alatti kifejezés (egy állandó szorzótól eltekintve) nem más, mint a 4) alatti partikuláris integrálrendszer determinánsa, vagyis

$$e^{-\int p dx} = C \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad 7)$$

Legyen már most a feltételünk szerint:

$$\frac{y_1}{y_n} = f_1(x), \quad \frac{y_2}{y_n} = f_2(x), \dots \frac{y_{n-1}}{y_n} = f_{n-1}(x), \qquad 8)$$

a hol

$$f_1(x), \ f_2(x), \dots, f_{n-1}(x) \qquad 9)$$

az x független változó algebrai függvényei. A 7) alatti determinánsban a 8) alatti egyenletek alapján tegyük:

$$y_i^{(k)} = f_i^{(k)} y_n + \binom{k}{1} f_i^{(k-1)} y_n^{(1)} + \binom{k}{2} f_i^{(k-2)} y_n^{(2)} + \dots + f_i y_n^{(k)}. \qquad 10)$$

Ha most a 7) alatti determinánst átalakítjuk és az utolsó oszlopot rendre a (9) alatti kifejezésekkel megszorozva az egyes oszlopokból kivonjuk, akkor az a következő alakot ölti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & y_n \\ f_1' y_n & f_2' y_n & \dots & y_n' \\ f_1'' y_n + 2 f_1' y_n' & f_2'' y_n + 2 f_2' y_n' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} y_n + \dots & f_2^{(n-1)} y_n + \dots & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad 11)$$

az i-dik oszlop $(R+1)$-dik eleme részletesen kiírva a következő

$$f_i^{(k)} y_n + \binom{k}{1} f_i^{(k-1)} y_n' + \dots + \binom{k}{k-1} f_i' y_n^{k-1}$$

A 11) alatti determináns most már $(n-1)$-edrendű determinánsra redukálódik:

$$\Delta = y_n \Delta_1, \qquad 12)$$

a hol a Δ_1 determináns megint átalakítható úgy, hogy az első sorból y_n-et kiemeljük és azután az első sort $2y'_n$-al szorozva, a második sorból levonjuk. Ha most a második sorból kiemeljük az y_n-et és az első ort $3y''_n$-sel, a második sort $3y'_n$-sel szorozva a harmadik sorból kivonjuk és ez eljárást folytatva végre az egyes sorokat rendre

$$\binom{n-1}{n-2} y_n^{(n-2)}, \binom{n-1}{n-3} y_n^{n-3}, \ldots, \binom{n-1}{1} y'_n$$

szorozzuk és az utolsó sorból kivonjuk, akkor a Δ determináns a következőre redukálódik:

$$\Delta = y_n^n \cdot \begin{vmatrix} f'_n & f'_2 & \cdots & f'_{n-1} \\ f''_1 & f''_2 & \cdots & f''_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} = y_n^n \cdot D \qquad 13)$$

A D determinánsról tudjuk, hogy x algebrai függvénye, mert hiszen mindenik f algebrai függvény. A D nem lehet identikusan 0, mert ez esetben, miként az ilyen alakú determinánsokról ismeretes, az

$$f'_1, \quad f'_2, \ldots, f'_{n-1}$$

nem volnának egymástól lineárisan függetlenek, hanem fennállana közöttük egy

$$c_1 f'_1 + c_2 f'_2 + \cdots + c_{n-1} f'_{n-1} = 0 \qquad 14)$$

reláczió, a melyben a c együtthatók állandók. E relációból pedig következnék, hogy

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_{n-1} f_{n-1} = c_n$$

és ha az f függvények helyett a 8) alatti egyenletekből a 3) alatti egyenlet partikuláris megoldásait helyettesítjük, akkor a

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_{n-1} y_{n-1} = c_n y_n$$

reláczióra jutnánk, a mi ellenkezik azzal a föltevésünkkel, hogy a 4) alatti rendszer n egymástól független megoldást tartalmaz.

Ebből következik, hogy a 13) alatti egyenlet y_n szerint megoldható és így y_n és a 8) alatti relácziók alapján vele együtt az összes y_i-k *is algebrai függvényei az* x*-nek.* Ezzel a jelzett tétel be van bizonyítva; mert az általános integrál:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

is, az $y_1, y_2, \ldots y_n$-nel egyidejűleg algebrai függvénye az x-nek.

Beke Manó.

ADALÉK A TÖBB VÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉHEZ.*

Ha adva van az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ független változóknak valamely

$$z = f(x_1, \ldots, x_n)$$

n változós függvénye, fontos kérdés, hogy miképen transzformálódnak a z függvény differenciálhányadosai új, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ változórendszer behozatalánál. Ismeretes, hogy a z függvénynek a régi változók szerint képezett első-, második stb. differenciálhányadosai egy-egy lineár egyenletrendszerből számíthatók ki, ha már az alacsonyabbrendűek ismeretesek.

Ezeknek az egyenletrendszereknek megoldhatóságával akarok e sorokban foglalkozni. Mivel bennük a z függvény differenciálhányadosai mint tetszőleges mennyiségek szerepelnek, azért megoldhatóságuknak feltétele, hogy a mindenkori determinánsuk a zérustól különböző legyen.

Kérdés már most, hogyha a magasabbrendű differenciálhányadosokat egymásután akarjuk kiszámítani, a fellépő determinánsok el nem tünése mindig új meg új megszorításképen lép-e be a tárgyalásba? A kérdés pontosabb megvizsgálása mutatja, hogy ama feltételek valóban nem függetlennek egymástól és a döntő szerepet az elsőrendű differenciálhányadosok számításánál fellépő determináns vagyis a

---

* E dolgozatban tárgyalt tétel bebizonyítását Rados tanár úr a műegyetemen tartott mathematikai gyakorlatokban feladatul tűzte ki. Ugyancsak ő figyelmeztetett arra is, hogy e tétel az invariáns-elméletnek alább idézett tétele segítségével bizonyítható be. A tétel egyes egészen speczialis esetekben már tárgyaltatott (l. Scholtz Műegyetemi Lapok III. köt. 93. l.)

$$D_1 = D\left(\frac{x_1, \ldots, x_n}{y_1, \ldots, y_n}\right)$$

függvénydeterminánsjátssza.

Ki fogjuk ugyanis mutatni, hogy az m-edrendű differenciálhányadosok kiszámításánál fellépő D_m determináns mindig ennek a determinánsnak valamely hatványa, még pedig:

$$D_m = D_1^{\binom{n+m-1}{n}}$$

*

Egyelőre két független változó körében maradva, legyen

$$z = f(x_1, x_2)$$

az x_1, x_2 változóknak adott függvénye és hozzuk be az

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, y_2) \\ x_2 &= \varphi_2(y_1, y_2) \end{aligned} \tag{s}$$

transzformáczió-képletek segítségével az (y_1, y_2) független változórendszert, akkor az

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y_1} &= \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial z}{\partial y_1} &= \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{aligned} \tag{1}$$

egyenletrendszer megadja a régi $\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_1}\right)$ differenciálhányadosokat kifejezve az újak segítségével, ha az egyenletrendszer determinánsa

$$D_1 = D\left(\frac{x_1, x_2}{y_1, y_2}\right) = D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2}{y_1, y_2}\right) \gtrless 0$$

azaz a függvény-determinánsa zérustól különböző.

Az (1) egyenletek további differenciálása által a másodrendű differenciálhányadosokra vonatkozó egyenletrendszert nyerjük:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)^2 + Z_{20}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} + Z_{21} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x}{\partial y_2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x}\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right)^2 + Z_{22}$$

Itt a Z_{ik} mennyiségek az (x_1, x_2)-nek az (y_1, y_2) szerinti differenciálhányadosain kivül z-nek csak elsőrendű, már (1)-ből kiszámítható differenciálhányadosait tartalmazzák.

Hozzuk be

$$\frac{\partial x_1}{dy_1}, \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \frac{\partial x_1}{\partial y_2}, \frac{\partial x_2}{\partial y_2}$$

helyébe az

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \beta_1, \quad \beta_2$$

jeleket, akkor

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = (\alpha\beta),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & 2\alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \\ \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_1 \\ \beta_1^2 & 2\beta_1\beta_2 & \beta_2^2 \end{vmatrix} *$$

és nem fog nehézséggel járni a D_2 determinánsnak tényleges redukciója a D_1^3 alakra.

Ha ugyanis mindegyik sor utolsó elemét kiemeljük, akkor:

---

* A determináns második illetőleg harmadik sora az első sornak első illetőleg második polárja a β polus szerint; hogy D_m az általános esetben is ilyen természetű, azt nem nehéz kimutatni pl. teljes indukcióval, de a későbbiekből ez önként következni fog.

$$D_2 = \alpha_2^3 \beta_2^3 \begin{vmatrix} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 & 2\frac{\alpha_1}{\alpha_2} & 1 \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{\beta_1}{\beta_2} & \frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\beta_1}{\beta_2} & 1 \\ \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 & 2\frac{\beta_1}{\beta_2} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_2^3 \beta_2^3 \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{\beta_1}{\beta_2} - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 & \frac{\beta_1}{\beta_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \\ \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 & 2\left(\frac{\beta_1}{\beta_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_2^3 \beta_2^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} & 1 \\ \frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\alpha_2^3 \beta_2^3 \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^3 = (\alpha\beta)^3 = D_1^3$$

Ezzel (2) alatti egyenletrendszer determinánsát a D_2-t már kifejeztük a D_1 segítségével. E redukczió alapul szolgálhatna már a teljes indukczióra.* Az e czélra végzendő számítások egészen gépiesek és e mellett kevéssé áttekinthetők, úgy hogy több változó esetében ez az út alig vezet czélhoz.

A szóban forgó D_m determináns azonban az invariánselméletben is fellép és ez a körülmény a tételnek egyszerű, akárhány változóra érvényes és minden számítás nélküli bebizonyítására vezet.

Ha ugyanis a transzformáczionk homogén lineár transzformáczió, akkor az (α, β) mennyiségek állandók, úgy hogy a Z_{ik} kifejezések, a melyeknek minden egyes tagja az (α, β) elsőrendű differenczialhányadosainak valamelyikét szorzó gyanánt tartalmazza, kiesnek. Ha továbbá a z függvények m-edrendű algebrai alakok, akkor egészen az invariánselmélet körében vagyunk. Az m-edrendű differenczialhányadosok az m-edrendű algebrai alakoknak együtthatóivá lesznek; a differenczialhányadosok transzformálásának megfelel

* Az idevonatkozó számítást elvégeztem, bonyolódottságánál fogva azonban annak közlésétől e helyen eltekintek.

az együtthatók transzformálása és — mint látni fogjuk — az invariáns-elmélet kiinduló pontját képező egyik tételből, a czikk elején kimondott tétel helyessége azonnal következik.

Az idézendő tétel a következő:*

Ha valamely alakrendszer együtthatóinak és változóinak homogén racionális egész függvénye lineár transzformáczió következtében egy az alakrendszer együtthatóitól és változóitól független, állandó szorzóval változik meg, szóval ama függvény az alakrendszernek invariánsa, akkor e tényező nem lehet más, mint a transzformáczió determinánsának (modulusának) valamely hatványa.

A mint ennek a tételnek bebizonyítása, úgy a szóban forgó tételé is, mint ennek folyományáé, független a változók számától; mégis kényelmesebb lesz a kiírás, ha a binär alakok körében maradunk.

Legyen tehát f valamely m-edrendű algebrai alak:

$$f=a_0x_1^m+\binom{m}{1}a_1x_1^{m-1}x_2+\cdots+a_mx_2^m=a_x^m;\quad a_x=a_1x_1+a_2x_2$$

Ha ezen az

$$x_1=\alpha_1 y_1+\beta_1 y_1$$
$$x_2=\alpha_2 y_1+\beta_2 y_2$$

helyettesítést végezzük, akkor menjen át F-be, hol

$$F=A_0 y_1^m+\binom{m}{1}A_1 y_1^{m-1}y_2+\cdots+A_n y_2^m=(a_\alpha y_1+a_\beta y_2)^m.$$
$$=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}A_i\, y_1^{m-i}y_2^i=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}a_\alpha^{m-i}\,a_\beta^i\,y_1^{m-i}y_2^i$$

úgy hogy az (s) lineár transzformáczió az együtthatóknak (S) lineár transzformációját vonja maga után, a mely a következő:

---

* L. erre vonatkozólag pl. KOPP LAJOS úrnak a «Math. és Phys. Lapok» I. kötetében levő első közleményét: «Az invariánselmélet alapjairól» 1893. 69. l.

$$
\begin{aligned}
A_0 &= a_\alpha^m \quad = a_{00}a_0 + a_{01}a_1 + \cdots + a_{0m}a_m \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_i &= a_\alpha^{m-1}a_\beta^i = a_{i0}a_0 + a_{i1}a_1 + \cdots + a_{im}a_m \qquad (S) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_m &= a_\beta^m \quad = a_{m0}a_0 + a_{m1}a_1 + \cdots + a_{mm}a_m
\end{aligned}
$$

hol pl.

$$A_0 = a_\alpha^m \quad = a_1^m a_0 + \binom{m}{1} a_1^{m-1} a_2 a_1 + \cdots + a_2^m a_m$$

és azonnal látható hogy az (S)-nek determinánsa nem egyéb mint D_m.

Vegyük már most fel a szimultán alakoknak

$$(f) = (f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(j)}, \ldots, f^{(m)})$$

rendszerét, mely (s) folytán átmegy az

$$(F) = (F^{(0)}, F^{(1)}, \ldots, F^{(j)}, \ldots, F^{(m)})$$

alakrendszerbe, hol

$$f^{(j)} = a_0^{(j)}x_1^m + \binom{m}{1} a_1^{(j)} x_1^{m-1}x_2 + \cdots + \binom{m}{i} a_i^{(j)}x_1^{m-1}x_2^i + a_m^{(j)}x_2^m = a_x^{(j)m}$$

$$F^{(j)} = A_0^{(j)}y_1^m + \binom{m}{1} A_1^{(j)} y_1^{m-1} y_2 + \cdots + A_m^{(j)} y_2^n = A_y^{(j)m}$$

úgy hogy

$$
\begin{aligned}
(a^{(0)}) &= (a_0^{(0)}, \ a_1^{(0)}, \ldots, a_i^{(0)}, \ldots, a_m^{(0)}) \\
(a^{(1)}) &= (a_0^{(1)}, \ a_1^{(1)}, \ldots, a_i^{(1)}, \ldots, a_m^{(1)}) \\
(a^{(j)}) &= (a_0^{(j)}, \ a_1^{(j)}, \ldots, a_i^{(j)}, \ldots, a_m^{(j)}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(a^{(m)}) &= (a_0^{(m)}, \ a_1^{(m)}, \ldots, a_i^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)})
\end{aligned}
$$

a S helyettesítésre nézve kogrediens változórendszerek, akkor a determinánsok szorzási tételénél fogva:

$$|A_i^{(j)}| = |a_{ij}| \cdot |a_i^{(j)}|$$
$$(i, j = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

azaz az $|a_i^{(j)}|$ determináns, mely az (f) alakrendszer együtthatóinak homogén raczionális egész függvénye az (s) transformáczió folytán

az $|a_{ij}|$ állandó tényezővel változik meg. Mivel (*s*) determinánsa nem egyéb mint

$$D_1 = (\alpha_i \beta),$$

azért az idézett tételnél fogva, kell lenni oly μ számnak, hogy

$$D_m = |a_{ij}| = (\alpha_i \beta)^\mu = D^\mu.$$

μ értékét a két oldalon levő függvények fokszámainak összehasonlítása alapján kapjuk. Tekintetbe véve ugyanis, hogy az $|a_{ij}|$ $(m+1)$-edfokú determináns, és hogy elemei (α, β)-ban m-edfokúak, míg $(\alpha\beta)$ ugyanezen mennyiségekben másodfokú, kell, hogy:

$$2\mu = m(m+1);$$

tehát

$$D_m = D_1^{\frac{m(m+1)}{2}} = D_1^{\binom{m+1}{2}}$$

legyen. Tökéletesen ugyanily gondolatmenet alapján belátható, hogy n független változó esetében az

$$n\mu = m\binom{n+m-1}{m}$$

egyenletnek kell fennállani, tehát

$$\mu = \frac{m}{n}\binom{n+m-1}{m} = \frac{m}{n}\binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+m-1}{n},$$

és így valóban találjuk, hogy

$$D_m = D_1^{\binom{n+m-1}{n}}$$

Breuer Mór.

PHYSIKAI SZEMLE.

A dörzsölési elektromosság eredete. C. Christiansen, Experimentale Untersuchungen über den Ursprung der Reibungselectricität. *Ann. d. Phys.* LIII. k. 401. l.

A dörzsölési elektromosság eredete után fürkészvén, legtermészetesebb utra térünk, ha az ismeretes forrásokat veszszük szemügyre. Azt találjuk, hogy a thermo-elektromosság eredete nagyon homályos, az inductio a dörzsölési elektromossággal eredetre nézve alig hasonlítható össze, az ütés, ütközés a dörzsöléstől alig választhatók el s így külön forrásokul nem tekinthetők; csupán az érintési elektromosság áll közel a dörzsölésihez.

Ezen analogiából indult ki Helmholtz, midőn az elektromos kettős rétegekről (el. Doppelschicht) értekezett.

Ha t. i. két különböző test érintkezik, $V_1 - V_2$ potentiál-különbség keletkezik közöttük. Ha az elektromos rétegek töltései felületegységenként $+\sigma$ és $-\sigma$, egymástól való távolságuk pedig a, akkor

$$\sigma = \frac{V_1 - V_2}{4\pi a}.$$

Ha a testeket kisülés vagy kiegyenlítődés nélkül lehetne egymástól elválasztani, a felületeknek a töltéseket meg kellene tartaniok. Mivel azonban ez tényleg nem igen létesíthető, főleg pedig vezető testek esetében nem, a töltések csökkennek, de annál kisebb mértékben, mennél jobb szigetelők az egymástól eltávolított testek.

Christiansen ebből a felfogásból indult ki, midőn a dörzsölési elektromosság eredetét kutatva, nagyjelentőségű kisérleteit kigondolta. — Alapkisérlete a következő.

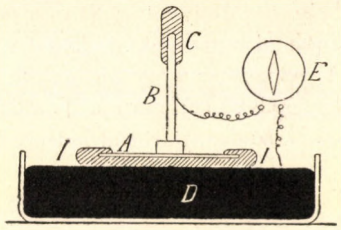
Legyen A (1. ábra) fémlemez, B fémpálcza és C szigetelő fogantyú. Az A fémlemez megömlesztett szurokba vagy gyantába mártva, JJ szigetelő réteggel vonódik be. D higanynyal megtöltött üvegtál, E galvanométer, melynek egyik sarka a higanynyal, másik sarka az (AB) fémtesttel van összekapcsolva. Ha a szurokfelület a higanynyal érintkezik, a galvanométeren nincs kiütés; mihelyt elválasztatnak, jelentékeny kiütés látható

még akkor is, ha az érintkező felületek csak néhány cm^2 nagyságúak. Az áram a higanytól a galvanométeren át a fémlemezhez tart.

A kisérlet HELMHOLTZ szerint következőleg értelmezhető.

Érintkezéskor a higany felülete V_1, a szuroké V_2 potenciált vesz fel. A galvanométeren át tehát elektromosság áramlik a fémlemez felé, mely ezáltal V_1 potenciált kap. Ha a szurok vastagsága a', dielektromos állandója k, akkor az A és JJ közötti érintkezési felület σ elektromos sűrűsége közelítőleg így fejezhető ki:

$$\sigma' = \frac{K(V_1 - V_2)}{4\pi a'}.$$



1. ábra.

Itt $V_1 - V_2$ bizonyára csekély értékű, a' véges mennyiség és így σ' jelentéktelen és a rendes mérőeszközökkel nem mutatható ki. Állíthatni tehát, hogy szigetelő és vezető érintkeztetésekor elektromos áram nem keletkezik.

Ha azonban a lemezt a higanyról leemeljük, a szurok negativ elektromossá lesz. A felületi sűrűség

$$\sigma = \frac{V_1 - V_2}{4\pi a}$$

volna, ha az ellentétes elektromosságok nem egyesülnének. Ez esetben az elektromosság bizonyos mennyisége áramlanék a higanytól a galvanométeren át a lemezhez és az érintkezési meg szétválasztási áramok úgy aránylanának, mint

$$\sigma' : \sigma,$$

vagy mint

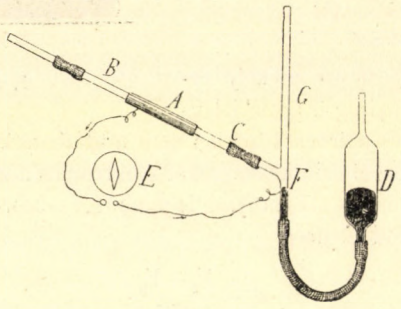
$$ka : a'.$$

Minthogy a valóságban némi kiegyenlítődés ki nem kerülhető, s az arány $\sigma' : \lambda\sigma$ alakban írható, hol λ igen kicsi szám.

Ha most a szurok ismét érintkezik a higanynyal, a galvanométer újra kitérül, az áram azonban sokkal gyengébb és az előbbivel ellenkező irányú. Ha ezt a csekély áramot zárási áramnak nevezzük, a lemez leemelésekor keletkezőt pedig nyitási áramnak, akkor az első zárási áram 0, az első nyitási pl. Q, a második zárási áram pl. Q' (hol $Q' < Q$ és ellenkező jelű). Ezentul az áramokat mindig Q, és Q'-val jelezzük. A zárási áram ismét zérussá lesz, ha a szurok borszeszláng fölött kissé melegíttetik. Ha a melegítés világító gázláng fölött történik, szénrészecskék rakódnak a szurokrétegre, mitől ez vezetővé lesz és áram ekkor egyáltalában nem mutatható ki.

Christiansen eleinte ilyen berendezést használt kisérleteihez, de mivel gyakran eltérő eredményekhez jutott, más berendezéshez folyamodott.

A készüléket a 2. ábra mutatja. *BC* 10—15 cm hosszú, 3—6 mm belső átmérőjű üvegcső. Belső falazatát a vizsgálandó szigetelővel vonta be. Chr. ezt úgy tette, hogy az anyagot megolvasztotta és így vonta be a cső belsejét vékony réteggel; vagy pedig úgy, hogy benzólban, szénkénegben oldotta föl az anyagot, az oldatot a csőbe fölszívta s az oldószert elpárologtatta. A cső közepét 4—6 cm hosszú ónlemez veszi körül (*A*). A csövet rövid kaucsukcső köti össze a ⊤ alaku *FG* csővel, míg ezt egy másik kaucsukcső a *D* higanytartóval helyezi közlekedésbe. *F*-ben platina-drót van be-



2. ábra.

forrasztva, mely az *E* galvanométer egyik sarkához vezet. A másik sarkot szintén drót köti össze az *A* ónlemezzel. Ha már most a *D* higanytartót emelik, a higany érintkezik a *BC* cső belső bevonatával, ha lejebb eresztik, az érintkezés megszünik. Látható, hogy ily módon a föntebb említett alapkisérlet különböző szigetelőkre nézve végezhető. Christiansen kisérleteit olyformán változtatta, hogy a *BC* csövön át, *FG*-n keresztül levegőt, hidrogént vagy szénsavat engedett áramlani. Az oxigéntől egyéb gázakat úgy szabadított meg, hogy azokat vörös izzó rézdróthálót tartalmazó csöveken bocsátotta keresztül s aztán még tömény kénsavval szárította. Kisérleteinek lényege és a belőlük vont következtetések röviden a következők.

1. *Kisérletek tiszta higanynyal és szigetelőkkel.*

Ha szurok, pecsétviasz, gyanta, selyem, kámfor, paraffin és egyéb éghető szigetelők légköri levegőben érintkeznek tiszta higanynyal, *negativ* elektromosaknak bizonyulnak. Oxigéntől teljesen mentes hidrogénban *pozitiv* elektromosak. Ha a dörzsölési elektromosságot Helmholtz szerint az érintésivel azonosnak tartjuk, az a körülmény, hogy valamely test egy másikkal dörzsölve, negativ is, meg pozitiv is lehet, abból volna magyarázható, hogy az oxigén a dörzsölésnél jelen volt-e, vagy sem. Ugyanerre az okra

vezethető vissza az is, hogy látszólag azonos testek ellenkező elektromos állapotot mutatnak a dörzsölésnél. CHRISTIANSEN azt hiszi, hogy itt az éghető szigetelők vegyi rokonsága az oxigénhez is van befolyással az eredményre, a mennyiben valószínű, hogy felületükön oxigén süríttetik meg. Szerinte a higanynak és valamely szigetelőnek érintkezésekor a levegőben csekély mennyiségű higany egyesül az oxigénnel HgO, vagy Hg_2O vegyületté. Az elektropozitiv Hg mint kation a higanyhoz csatlakozik, az elektronegativ O mint anion a szurokra tapad és így a szurok azért mutat negativ elektromosságot, mert oxigénnel van borítva, míg a higany pozitiv elektromossága a hozzácsatlakozó higanykationtól ered. Képletileg a vegyi folyamat ez volna: érintkezéskor (zárás)

$$higany\ \overset{+}{H}g\bar{O}\ szurok,$$

az érintkezés megszüntekor (nyitás) pedig

$$higany\ \overset{+}{H}g,\ \bar{O}\ szurok.$$

Szabad elektromosság itt épp úgy nincsen, mint más elektromosság-gerjesztésnél.

2. *Kisérletek czinkfoncsorral és szigetelőkkel.*

A dörzsölési elektromos gép bőrpárnáit czink- vagy ónfoncsorral vonják be s az ezekkel dörzsölt üvegkorong pozitiv elektromossá lesz. Ugyanazon elektromosságot kapják ily módon a kaucsuk és egyéb szigetelők is. Közelfekvő dolog volt tehát a föntebbi kisérleteket tiszta higany helyett czinkfoncsorral ismételni. A kisérletekhez elektrolitikai úton előállított, tiszta foncsor használtatott. A szurok és spanyolviasz a foncsorral való érintkezés következtében pozitiv elektromossá lett és pedig oxigénmentes hidrogénben éppen úgy, mint a tiszta higanynyal való érintkezéskor. Ha bármi csekély oxigén van jelen, a foncsorral érintkező szigetelő eleinte még erősebben lesz pozitivvá, mint a tiszta higany esetében, később azonban negativvá lesz.

CHRISTIANSEN ezt így magyarázza: A czinkfoncsor igen könnyen oxidálódik; ha kevés oxigén van jelen, akkor — az oxigén molekulát $\bar{O}\overset{+}{O}$ összetételűnek tekintvén — ilyen csoportosulás van:

$$czinkfoncsor\ \bar{Z}n\overset{+}{Z}n,\ \bar{O}\overset{+}{O},\ szurok.$$

Midőn nyitáskor a foncsor a szuroktól elválik, az oxigénmolekula szétválik és akkor ily csoportosulás keletkezik:

$$czinkfoncsor\ \bar{Z}n,\ \overset{+}{Z}n\bar{O},\ \overset{+}{O}\ szurok.$$

Az oxigénkation a szurkot pozitiv elektromossá teszi, a czinkanion pedig a foncsort negativvá. Ha már czinkoxid képződött, a folyamat ez lehet:

foncsor, $\overset{+}{Zn}\overset{-}{O}$, *szurok,*

nyitáskor pedig:

foncsor $\overset{+}{Zn}$, $\overset{-}{O}$ *szurok.*

A szurok ekkor ismét negativ elektromossá lesz.

3. *Kisérletek másféle foncsorokkal.*

Másféle foncsorokkal végzett kisérletek arról tanuskodtak, hogy a szigetelőket, ha az oxigén el van távolítva pozitiv elektromosakká teszik. Erős amalgamok azonban az elektromosság megváltoztatását eredményezték. Az oxigén jelenléte t. i. a szigetelőt negativvá teszi, ha tiszta higany van alkalmazva, ellenben pozitivvá, ha erős ólom- vagy ónamalgam szerepel. Rézamalgam esetében a szigetelők mindig negativokká lesznek, ha bármi csekély oxigén van jelen.

4. *A légnyomás hatása.*

Higanyfelülettől elválasztott szigetelő elektromos töltést tart meg, melynek nagysága főleg attól függ, mily könnyen egyesülhetnek az elektromos kettős rétegek. Várható volt tehát, hogy a nyomás csökkenése a kisülést elősegíti és a nyitási áramok gyengülnek. Az ez irányban végzett kisérletek ezt a föltevést igazolták; a galvanometer tűjének kitérülése kisebbé lett, midőn a csöveken átvezetett gázok nyomása körülbelül 10 mm-ig csökkent; a nyomásnak még további csökkentése esetében azonban a kitérések ismét nagyobbodtak, s így az ellenállásnak fokozódnia kell. Ez jól egyezik azzal, a mit az erősen ritkított gáz viselkedéséről tudunk, midőn elektromos áram halad rajtok keresztül.

5. *Galvan-combinatió.*

Annak kiderítése végett, hogy milyen összefüggés van a dörzsölési és érintési elektromosság között, Christiansen ezüst- vagy sárgarézcsövet használt, melybe két végén egy-egy üvegcső volt illesztve és spanyolviasszal megerősítve. Belül valami anyaggal vonattak be. A fölhasznált anyagok voltak: vízüveg, zselatin, halenyv; továbbá a kolofonium, a kollodium megszáradt étheres oldatai sat.

Ez anyagok többé-kevésbbé vezetők voltak a szerint, a mint rövidebb vagy hosszabb ideig száradtak. A cső belsejében tiszta higany vagy czinkamalgam volt. Midőn a cső pl. ezüstből való volt, belül zselatinnal bevonva s a cső belsejében czinkamalgam foglalt helyet, a galvanométer tűjének első kitérése erős áramot jelzett a foncsortól zselatinon át az ezüsthöz. A tű aztán megállapodik s ugyanoly irányú áramot jelez. Ha a czinkfoncsor a csőből kifolyik, ismét keletkezik ugyanoly irányú kiütés. Ez a nyi-

tási áram onnét van, hogy a zselatin czinkionokat vett fel, melyek a zselatinon át az ezüsthöz vándorolnak. A mint a zselatin szárad, a viszonyok ellenkezőre fordulnak: a kitérés ellenkező irányúvá lesz, az áram iránya tehát változott. Ilyenkor a nyitás alkalmával nagy feszültség is észlelhető, a mennyiben az ezüstcső elektroszkópon nagy kiütést idéz elő.

A kisérletek azt mutatják, hogy az elektromosság első *galvángerjesztése* az elektrolitek megszáradása után, vezetőképességök elvesztésével, a másodikba megy át.

6. *Kisérletek üvegcsövekkel.*

A kálioldattal, tömény kénsavval és desztillált vízzel megtisztított s melegítés által szárított üvegcsövek tiszta higanynyal érintkezve majdnem mindig negativ elektromosságot mutatnak, míg czinkfoncsorral pozitivot, ha az átvonuló hidrogén vagy széndioxidgáz nincs teljesen megszabadítva az oxigéntől. A tisztított és melegített cső negativ elektromossága kihülés után gyengült, de előbbi erősségét ismét eléri, ha a csövet alkohollángon melegítették. Ez akárhányszor ismételhető.

Christiansen azt hiszi, hogy a negativ elektromosságot az üvegből kiváló nátriumkationok a tiszta higanyhoz való vándorlása idézte elő s ezek számának csökkenése miatt gyengül az elektromosság is. Az üvegcső melegítése ismét helyreállítja az egyensúlyi állapotot.

Különböző üvegcsövek alkalmazása révén kiderült, hogy míg a tisztított és melegített üvegcsövek tiszta higanynyal érintkezve mindig negativ elektromosokká lesznek, a czinkamalgámmal érintkezők elektromossága egyéb körülményektől függ, melyek miatt az eredményt nem is lehet előre megmondani. Hatása van az üvegcső felületének és az oxigén jelenlétének is. Az első zárási áram gyengébb a jó vezető thüringiai üveg használatánál, de erős a rosszul vezető cseh üveg esetében.

Következtetések. A felsorolt kisérletek alapján Christiansen azt hiszi, hogy a dörzsölés egymagában még nem idéz elő elektromosságot. A dörzsölésnek tulajdonított hatások chemiai bomlásoktól erednek, melyek az érintkezéskor kezdődnek és a szétválasztáskor befejeztetnek. A Helmholtz föltételezte kettős rétegek képződése a kettős atómok vagy molekulák rendezkedésének tekintendő, a midőn is a kationok a pozitiv réteget alkotják, az anionok pedig negativot. A testek szétválasztásakor a kationok az egyik testen tapadva maradnak, az anionok a másikon; ez okozza a testek elektromos töltését. Az elektromosság tehát mindig az ionokkal karöltve jár. Ez a felfogás is Helmholtz-nak ama nézetére támaszkodik, mely szerint minden atómnak nagyságához mért töltése van, mely pozitiv vagy negativ a szerint, a mint kation vagy anion gyanánt szerepel. A kettőnek egyesülése adja az elektromosan közömbös molekulát. Azzal az ellenvetéssel szemben, hogy ez esetben az elektromos testnek, pl. az elektromos gép

pozitiv gyűjtőjének súlyban növekednie kellene, számítással kimutatható, hogy az ily növekedés (vagy veszteség) oly rendkivüli csekély, hogy jóformán sohasem lesz észlelhető.

Kiinduló pontul tehát most azt kellene venni, hogy az elektromosság sohasem létezhetik az atómokon kivül. Még a fémekben is csak az ionok közvetíthetik az elektromosság mozgását. Ily föltevés segélyével talán meg lehet majd magyarázni azt az összefüggést, meiy az elektromosság és a hő vezetése között van.

A statikai elektromosságra nézve szigetelőket, félvezetőket és vezetőket szokás megkülönböztetni. Az itt közölt felfogás szerint helyesebb volna négy csoportot felállítani. És pedig:

1. Szigetelőket vagy dielektromos testeket. Ezekben az ionok vagy mozdulatlanok vagy nyugalmi helyzetök körül rezgő mozgásban levők.

2. Fémeket, melyekben az ionok szabadon mozoghatnak, vagy töltéseiket kicserélhetik.

3. Elektroliteteket, melyekben az ionok kissebb-nagyobb surlódással mozoghatnak. (Itt főleg az üveg veendő figyelembe.)

4. Oly testeket, melyek a vízhez hasonlóan vagy csekély számú ionokat tartalmaznak, vagy azok híjával vannak, de az ionok mozgását nem akadályozzák (hidridek). A dörzsölésnél gummi és zselatin használhatók. A kisérletek tanusága szerint a fémek vagy foncsoraik a többi csoport testeit pozitiv elektromosokká teszik, ha az oxigén el van távolítva. Ellenben oxigénben, vagy pedig oxigéntartalmú gázakban a szigetelők a fémekkel való dörzsöléskor a körülmények szerint pozitiv vagy negativ elektromosságra tesznek szert. Az oxigén kiváló szerepe bizonyára összefügg azzal, hogy könnyen dissociálható; ezt tanusítja az ózon képződése is.

Az elektromosságnak vezetőkön való eloszlása is másképp értelmezendő, mint előbb, a mennyiben most az ionoknak véges számú, habár milliók szerint számítandó mennyiségével van dolgunk; ezek egyenlő töltéssel vannak ellátva s a felületen való elosztódásuk lesz megállapítandó. A valóságban a kérdés szokásos megoldása elegendő.

Christiansen a dörzsölési elektromosságról való felfogását nem is tekinti egészen újnak, a mennyiben Buff és Andrews kisérletei a folyadékok elektromozásáról, továbbá Lippmann, Ostwald, Nernst vizsgálatai az elektrolittel megtöltött leydeni palaczk elektromos töltésére vonatkozólag, Thomson kutatásai a cseppek elektromosságáról, végre Faraday régibb kisérletei a gőzelektromosságról ezt a felfogást már előkészítették.

Az itt ismertetett vizsgálatok és kisérletek mindenesetre nagyon érdekesek és fontosak. A kérdést Christiansen még nem tekinti megoldottnak és a kutatások tovább folytatását tartja szükségesnek.

Csemez.

IRODALOM.

A Magy. Tud. Akad. Lukács Krisztina-pályadíjáról.

A M. Tud. Akadémia az 1892-iki nagygyűlésen a Lukács Krisztina nevére, Lukács Móricz-tól tett alapítványból a következő pályakérdést tűzte ki:

«Kivántatik a mathematika, vagy mathematikai physika egy oly fejezetének monographia-jellegű tárgyalása, melynek az utolsó évtizedek fejlődésében fontosabb szerep jutott.»

«Az Akadémia új eredmények bemutatását nem kivánja, de súlyt helyez a tárgynak egységes szempontból való kimerítő és önálló becsű előadására.»

E pályakérdésre 1894 deczember hó 30-ig, a kitűzött határidő lejártáig három pályamunka érkezett be:

az 1. számú czíme: «*A fény elektromágnességi elmélete*»; jeligéje: «*A haladás a tapasztalást kiséri*»;

a 2. számú czíme: «*A két független változót tartalmazó partialis differential-egyenletek elmélete és alkalmazása*»; jeligéje: «*Nemcsak a fizikai erők, hanem a szellemi nyilvánulások sem veszhetnek és semmisülhetnek meg*»;

a 3. számú czíme: «*Vonalgeometria. A vonalkoordináták elmélete és alkalmazása*»; jeligéje: «*Küzdj és bízva bízzál!*»

E pályaművek elbirálására a Magyar Tud. Akadémia König Gyula és Fröhlich Izidor r. tagokból és Rados Gusztáv l. tagból álló bizottságot küldötte ki.

E bizottság jelentésének rövid kivonata a következő:

A 2. és 3. számú mathematikai tárgyú pályamunkák, a pályázat követelményeinek nem felelvén meg, jutalmazásra nem voltak ajánlhatók.

Az 1. számú pályamunkáról a bizottság a következőképen nyilatkozik:

«E pályamű egy oldalon írt sürű írású félíveken I—XIII. és 1—219 oldal terjedelmű bekötött kézirat.

I—VIII. oldalai az igen jó áttekintést nyujtó előszót, IX. oldala a műben használt jelölések táblázatát tüntetik elő, míg a X—XIII. oldalak a részletes tartalomjegyzéket foglalják magukban; ezen utóbbi szerint e mű XVI. fejezetbe sorozott 131 §-ból áll.

Tárgya a fényjelenségeknek elektromágnességi alapon való értelmezése azaz az összes optikai tüneményeknek, mint az általánosabb értelemben vett elektromágnesi jelenségek keretébe való besorozása és ezzel azon tudományos mechanismus tárgyalása, melynek segélyével a fényjelenségek az elektromágnességi felfogás alapján elméletileg megkonstruálhatók.

Szerző e tárgyával a kitűzött pályakérdés első követelményének megfelelt, a mennyiben ezzel az elméleti physikai disciplináknak egy tágas keretű, igen mélyre menő problemáját karolta fel, mely bár nem könnyű, de kétségkivül felette érdekes és következtetéseiben kisérleti szempontból is fontos, és lényeges része a modern physikai kutatás philosophiájának és speculativ segédeszközeinek. E problema, a fényjelenségek elektromágnesi felfogása, jelentékeny befolyást gyakorolt már eddig is a physika haladására.

De a pályamunka figyelmes átolvasása csakhamar azt a meggyőződést érleli, hogy ez a pályakérdés második főkövetelményének is eleget tesz.

A munka ugyanis alapos tanulmányozásra és az idetartozó irodalom teljes ismeretére vall. Hogy fejtegetéseinek alkalmas alapot teremthessen, kiinduló pontjául az oly fényelméleti és elektromossági tételeket és ismereteket veszi, melyek a magyar tudományos irodalomban már fel lévén dolgozva, közvetetlenül hozzáférhető anyagot nyujtottak.

Ezen az alapon épülő művét szerzője rendszeres, világos, rövid és szabatos tárgyalásban terjeszti elő; minden fejezet tárgyának lényeges része helyesen van kiszemelve és kidomborítva s e részek a kevésbbé fontos részletek elhagyásával oly egységesen és egymással szoros összefüggésben vannak tárgyalva, hogy szerző e művével az elektromágnességi fényelmélet jelen állásának áttekinthető egész képét adja.

De a szerző nem szorítkozik csupán az irodalomban fellelhető tudományos eredmények egységes egybeolvasztására, hanem több helyen figyelemreméltó újításokkal is fellép.

Így munkája egyöntetűsége czéljából több új fogalmat hozott be, alaposan igazolván szükséges voltukat és előnyüket a megfelelő régiek felett; továbbá több helyen kimutatja az eddig a nemzetközi irodalomban közzétett több rendbeli szerzőktől származó s e tárgyra vonatkozó fejtegetések egyes részeinek hiányosságát vagy helytelen voltát és maga több fejezetben részint új eredményeket nyújt, részint lényeges javításokat és bővítéseket közöl.

Említést érdemelnek ezen önálló lépései közül a következők:

A 12. §-ban (16. l.) a *mágnességi eltolódást*, a 21. §-ban (22. l.) a *mágnességi áramot* hozza be, melyekkel a mágnességi inductiót kiküszöböli s a mágnességi vonatkozásokat az elektromosokkal teljesen egyöntetűen tárgyalja; behozza továbbá az *elektromos erők ellipsoidját* és az *elektro-*

mosági eltolódások ellipsoidját (48. és 49. §., 71. és 73. l.) és ezeknek alapján új módszer segélyével találja a belső és a külső konikus refractiót.

A 27. §-ban igen egyszerűen és szigorúan származtatja POYNTING-nek az elektromágnességi energia terjedésére (sugárzására) vonatkozó nevezetes tételét (33—34. l. és 28. §. 35—36. l.); az V. fejezetben a fényhullámok terjedését általános kristályos közegekben vizsgálván meg, kimutatja, hogy a fény terjedési sebességére vonatkozó FRESNEL-féle képlet csak speciális esete a tőle találtnak; a VII. fejezetben a félvezető kristályos közegek elektromágnességi alapegyenleteit állapítja meg.

Az elektromossági és a mágnességi hullámok törését és visszaverődését tárgyalja: a homogén és isotrop közegek esetében az erre vonatkozó egyenletrendszereket eddig még sehol nem található teljességben állítja elő (IX. fejezet, 159—161. l.), még a kristályos közegek esetében az elméletet teljesen kifejti és az előző eredményeket mint ezen utóbbiak egyszerű eseteit találja (X. fejezet); ugyancsak a reflexiót és refractiót a félvezetőkre nézve tárgyalván, az ismert képlet-rendszert kiegészíti (XII. fejezet) és kimutatja, hogy ennek speciális esete az ú. n. WIENER-féle interferentia-jelenségek értelmezésére alkalmas.

A XVI. fejezetben a fény polározása síkjának a mágnességi erők által létesített elforgatását tárgyalja a HALL-féle jelenség segélyével; eredménye az eddigiek egyikével sem egyezik teljesen; végül egy eddig majdnem teljesen parlagon heverő vagy legalább eredménytelenül mivelt térre lép: megvizsgálja ugyanis a dielektromos és a félvezető közegek *mozgásának* befolyását a fény terjedési sebességére.

A pályaműben a mathematikai szempontok lépnek előtérbe és e tekintetben irálya szabatos és tömör; a physikai viszonyok és vonatkozások tárgyalása és értelmezése helyenként részletesebb lehetett volna, mely körülmény különösen a munka kiadása esetében lesz szem előtt tartandó.

Összefoglalva a fent kifejtetteket, a bizottság úgy találja, hogy a nevezett 1. számú, «*A fény elektromossági elmélete*» című, «*A haladás a tapasztalást kiséri*» jeligéjű pályamunka a pályázat minden lényeges feltételének megfelel s ennek alapján javasolja, hogy a pályadíj a nevezett pályamunka szerzőjének odaítéltessék és kiadassék.»

A bizottság javaslata elfogadtatvan, a felbontott jeligés levélből dr. SUTÁK JÓZSEF neve tünt elő.

*

Őszinte örömmel fogadtuk a hírt, hogy a megjutalmazott pályamunka szerzője dr. SUTÁK JÓZSEF, a ki — mióta irodalmi működését a Math. és Phys. Lapokban megkezdte — Társulatunk egyik legbuzgóbb és legmunkásabb tagja. Fogadja dr. SUTÁK az elért szép sikerhez legmelegebb üdvözletünket.

A szerkesztőség.

A Magy. Tud. Akad. uj mathematikai jutalomtétele.

Az algebra egyik fontos fejezete, mely már is önálló tudományágnak tekinthető, a lineár helyettesítések elméletéből kiindulva különösen a bilineár és négyzetes alakok vizsgálatával foglalkozik, és nagyjelentőségű alkalmazásokra talál nemcsak az egyenletek elméletében, hanem a mathematikának nem egy látszólag távolabb álló fejezetében.

Kivántatik egy oly munka megírása, mely 20—25 ívnyi terjedelemben az ide vonatkozó szakirodalom gondos és rendszeres fölhasználásával az algebra e részének jól áttekinthető kézikönyvét nyújtja.

Jutalma a Lukács Krisztina nevére Lukács Móricz által tett alapítványból 1000 frt.

Pályázni kivánók fölhivatnak, hogy a munka tervezetét és elkészítése határidejét 1895 szeptember 30-káig a főtitkári hivatalnál nyujtsák be.

*

Winkelmann, Handbuch der Physik. II. III. Band. Breslau, Trewendt 1893—1895. (II. köt. 855 old., III. köt. 1. rész 546, 2. rész 592 oldal.) Ára 25 és 32 márka.

A nagy terjedelmű mű, melynek második és harmadik kötete előttünk fekszik, első kötetéről e lapok első évfolyamában * értekeztünk. Jó nevű német physikusok, kiknek nagyobb része a tudomány előbbrevitelén tevékenyen vesz részt, egyesültek e kézikönyv szerkesztésére. A második kötet a fénytannak van szentelve. Jó benyomást tesz mindenekelőtt a tárgy összeállítása, mely nagyjából megtartja ugyan a határt a geometriai és a physikai optika között, a nélkül azonban hogy ezeket oly mereven felállítaná, a mint ezt más, hasonló irányú művekben találjuk, holott a határvonal e két fejezet között úgy sem vonható meg szigorúan, a mennyiben inkább didaktikai értékkel bir, s nem a dolog lényegében keresendő. A geometriai optikában mint hypothetikus elem szerepel a fénysugár, melynek itt hasonló szerepe jut, mint az Ampère-féle áramelemnek, hogy segítségével a hatás integrális törvénye megállapíttassék.

A geometriai optikai részt Czapski írta, a fény természetére vonatkozó részeket pedig Drude. A speciálisabb természetű fejezeteket, mint p. o. a színképelemzéről Kayser értekezik, mint ki ezen részszel különösen foglalkozik; a photometriát megírta Brodhun, a phosphorescentiát, a fény chemiai hatásáról szóló reszt az egész mű szerkesztője, Winkelmann, a fény sebességéről értekező igen kimerítő részt Auerbach; a törési viszonyok

* L. *Math. Phys. Lapok* I. 91.

meghatározásáról PULFRICH, a scintillatioról EXNER KÁROLY, az interferentiáról és a fény elhajlásáról pedig FEUSSNER ír.

A fény sebességének meghatározására czélzó, oly jól megegyező eredményeket szolgáltató módszerek után AUERBACH a fénynek különféte anyagokban való terjedéséről szól; továbbá vizsgálat alá fogja a fényforrás befolyását a fény terjedési sebességére. Ez a befolyás a fény intenzitására és színére, azaz a hullámhosszra vonatkozik. Mindkét irányban a vizsgálatok nem tarthatók befejezetteknek. Ugyanilyen állapotban van a kérdés a fényterjesztő közeg mozgását illetőleg, mely szintén nyílt kérdésnek tekintendő.

A geometriai optika bevezetésében CZAPSKI mindenekelőtt a disciplina határait iparkodik megállapítani. A következő négy, tapasztalatilag igazolt törvényre építi a geometriai optika egész rendszerét: 1. a fény egyenes terjedésére, 2. a fénynyaláb egyes részeinek egymástól való függetlenségére, 3. a rendes tükrözés és 4. a rendes fénytörés törvényére. Nem szabad azonban felednünk, hogy ez a négy törvény csak megközelítés, minthogy a tapasztalással szigorúan nem egyezik meg: a fénysugár difractiot szenved, a visszaverődő sugár a tükröző közegbe bizonyos mélységig behatol stb.

A visszaverődésről és a törésről szóló fejezetet a fény *legrövidebb útjáról* való tétel vezeti be, s ebből mint következtetés a MALUS-féle tétel folyik, mely szerint valamely felületre merőleges sugárrendszer tetszőleges számu visszaverődés és törés után merőleges marad ugyane felületre.

ABBE az optikai képek szerkesztését tisztán geometriai feladatként fogja fel, mely a physikai viszonyoktól voltaképen teljesen független. Alapjául csupán csak azok a mathematikai vonatkozások szolgálnak, melyek érvénybe lépnek, valahányszor két tér egymáshoz oly vonatkozásban van, hogy az egyikben létező képződmény a másikban képet alkot. Mint az optikai leképezés általános törvényei a következők szerepelnek: 1. a leképezés egyértelmű, 2. az egyenes vonalon levő pontok képei szintén egyenes vonalon fekszenek, 3. a tárgytérben levő sík képe a képtérben ismét sík.

Az optikai kép keletkezését vékony fénynyalábokkal a tengelyhez közel centrált gömbfelületeken vizsgálja, s evvel a lencsék és lencserendszerek alaptulajdonságait tárgyalja. A második eset az astigmatikus törés, azaz ferdén beeső fénynyalábok esete. A leképezés határainak mesterséges tágítása a gömbi eltérés és az aplanatismus elméletére vezet.

Ezek után a szerző a dioptrikai rendszerek chromatikus eltéréseit, az achromasia feltételeit és a sphaerikus aberratio függését a hullámhossztól tárgyalja.

Következik a fénysugár útja a prismában, a színkép, az optikai készülékek beható tárgyalása, különös tekintettel az optikai rendszerek nyilásától függő tulajdonságokra, minő p. o. a penetráló képesség stb.

Az optikai készülékeket a szerző két csoportra osztja: 1. vetítő rendszerek, minő a szem, vagy a photographiai kamara, 2. a látást támogató készülékek (nagyitó, mikroskóp, teleskóp).

A következő fejezetben STRAUBEL a folytonosan változó törésmutatójú közegek dioptrikáját tárgyalja, a midőn mindenekelőtt a fénytrajectoriának differentialegyenletét felállítja és alkalmazását mutatja a szem kristály lencséjén, továbbá a csillagászati és földi sugártörésen.

A fontosabb fejezetek között említendő ezek után a színképelemzés, a photometria, a fluorescentia és phosphorescentia fejezete. Az utóbbiban WIEDEMANN EILHARD nyomán photo-, elektro-, chemi-, thermo-, tribo- és krystalloluminiscentiát különböztet meg. A fejezet végén még ugyancsak WIEDEMANN kisérletei említtetnek, melyekkel sikerült neki a folyadékok fluorescentiáját phosphorescentiára átváltoztatni, az által, hogy a fluorescáló folyadékot zselatinnal megfagyasztotta, mi a moleculák szabad mozgékonyságát megakadályozta.

A fény chemiai hatásának tárgyalása után, melyben a szerző (WINKELMANN) kiemeli, hogy újabb vizsgálatok szerint az ezüsthalogen-vegyületekhez kevert sensibilisatorok (eosin, erithrosin stb.) az említett sók fényérzékenységét az egész színképre kiterjesztik, következnek a tulajdonképi theoretikai optikai fejezetek: interferentia, fényelhajlás (diffractio vagy inflexio); a fény természetére vonatkozó nézetek, kapcsolatban a polározott fény előállításával; a természetes és a részben polározott fény különbsége; a fénymozgás analytikai tárgyalása, a fényaether hypothetikus sűrűsége; a fény elmélete átlátszó testek számára és a ponderabilis testek befolyása a fénymozgásra; a különféle elméletek összehasonlítása az elektromagnetikus fényelmélet eredményeivel; az anomális dispersio elmélete, a kettős törés, rotatiopolározás, a fénymozgás törvényei absorbeáló közegek számára, az elhajlított fény polározása. Úgy mint az első kötetben itt is találunk analytikai tárgy- és névmutatót a könyv végén, csak hogy jóval alaposabbat, mint amaz volt.

A harmadik kötet két részből áll. Tárgya az elektromosság és a mágnesség. A legtöbb fejezet AUERBACH és GRAETZ tollából eredt. A kötet első részében az elektrostatika és az elektromos áramok foglaltatnak, a másodikban a mágnesség és az áramok külső hatásaiból folyó elektromagnetismus, elektrodynamika és inductio. Ebben a részben található még a pyro- és piezo-elektromosság tárgyalása, a melynek helye inkább az első részben lett volna. Az egész kötet befejezését az általános elektromossági elméletek alkotják.

A kötet első részét a potential elmélet nyitja meg. Az általános fogalommeghatározások után a Newton-féle térpotential tulajdonságai következnek,

s ezután mindjárt áttér a felületi potentialra és annak elektrostatikai alkalmazására.

Az elektrostatikában a következő fejezeteket találjuk: Tapasztalati tények, az elektromosság eloszlása a vezetőkön, munka és energia az elektromos térben, a sűrítők elmélete, accumulatorok és condensatorok, a capacitás mérése, elektromos kisütés, elektromozó gépek és hasonló készülékek (duplicator, replenisher stb.), elektroskópok és elektrometerek, a diëlektromos anyagok tulajdonságai, diëlektromos állandók meghatározása, elektrostrictio, Quincke, Duter és mások idevágó érdekes kisérleteivel, az elektromozott anyagok kettős törése.

Ezek után következik az *érintési elektromosság* a következő főbb szakaszokkal: feszültségi törvény, galván combinatiók; az elektromotoros erő meghatározása; vonalos felületi és térbeli áramok; árammérés a hozzávaló készülékekkel, u. m. tájolók, galvanometerek, elektrodynamometerek, voltameterek, elektromosság-számolók stb.; az ellenállás és vezetőképesség meghatározására szolgáló módszerek; az elektrolytikusan vezető testek vezetőképessége (oldatok, szilárd és ömlesztett sók), kristályok, gázok és lángok vezető képessége; kisütés és fényív; a fény befolyása elektromos tüneményekre; a Crookes- és Geissler-féle csövek tüneményei; thermoelektromosság; elektromos világítás; melegség és elektromos munka galvánláncokban; elektrolysis, ionok vándorlása; elektromos endosmosis és megfordítása, azaz úgynevezett áramlási áramok, melyek akkor keletkeznek, midőn folyadék likacsos falon áramolva, elektromos áramot hoz létre; Helmholtz elektrolytikus elmélete és Dorn rávonatkozó igazoló kisérleti vizsgálatai; végül a polarisatio és az accumulatorok.

A kötet második része a mágnesség tanával kezdődik. Az alaptünemények után következik a sarkok közötti hatás, a mágneses tér, az erővonalak, a mágnesek szerkezete, távolbaható erejük, inductio, állandó és változó mágnesezés, coërcitíverő, telítés, permeabilitás, ernyőhatás, diamagnesség; a mágneses mérésekre szolgáló készülékek leírása, u. m. az intensitas és irány meghatározására; mágneses terek, fajlagos mágnesség, tartó képesség mágnesezése; a földmágnesség helyi eloszlás és időbeli változás szerint; a földmágnesség elmélete, a különféle testek mágnessége, ferromagnesség (a vas, nikkel, kobalt, aczél és mágnesvaskő mágnessége), para- és diamagnesség és elméletei; a mágnességvonatkozása más tüneményekhez, különösen a rugalmassághoz (deformatiok, magnetostrictio), továbbá mechanikai befolyásokhoz, a melegséghez és fényhez (polarisatiosík forgatása, Kerr-féle tünemény).

Az elektromagnesség a rendes előadásban, hol a Hall-féle és a rokon tünemények terjedelmes tárgyalását kiemelhetjük. Következik az elektrodynamika és az inductio; elektromos rezgések, az elektromos erő terje-

dése, MAXWELL elektromossági és mágnességi elmélete, újabb kutatásokkal bővítve; a magnességi és elektromos mennyiségek u. n. absolut mértéke és a nemzetközi absolut mértékrendszer; az inductio technikai alkalmazásai (dynamoelektromos gépek, erőátvitel, telephonia); pyro- és piëzoelektromosság; az elektromosság és mágnesség tüneményeire felállított magyarázó hypothesisek (távolbahatás, mechanikai elméletek, modellek, hydrodynamikai és örvényelméletek stb.).

A mit az első kötet ismertetésekor mondottunk, azt a második és harmadik kötet megjelenése után nagyobb biztossággal lehet ismételni. Oly kézikönyv ez, mely a száz helyen szétszórt vizsgálatokról jól érthető módon számol be. Szerkezetében van ugyan oly organikus hiba, melyet minden igyekezet daczára jóvá tenni nem lehet. Encyclopaedikus művek sorába való és ekként a középutat akarja megtartani az encyclopaedia és a kézikönyv alakja között. Az encyclopaediai alak azt kivánná, hogy valamely kivánt tárgyat vagy fogalommagyarázatot könnyen lehessen fellelni. Elég jó ugyan a tárgymutató, de azért kívánatos lett volna, ha különböző szedés és könnyen áttekinthető, egyöntetű tárgyalás e czélt elősegítette volna. De habár az encyclopaedia és a kézikönyv közt ingadozó alakja a könyvnek kétségkívül nem lehet előnyére, és ha alapos megvizsgáláskor itt-ott kifogásokat is tehetnénk, azért jo oldalait tekintve, a művet ismételve ajánlhatjuk a szaktársak figyelmébe.

Heller Ágost.

*

Dr. H. Kayser, Lehrbuch der Physik für Studierende. Második kiadás. Enke, Stuttgart. 1894. X+564 l. — Ára 11 márka.

KAYSER könyvének második kiadása (mintegy 100 oldallal bővítve) egyike a legjobb kis kézikönyveknek. Rendkívül világos és könnyen érthető módon tárgyalja a physika minden fontosabb kérdését s a hol egy kérdés vagy elmélet részletesebb ismertetésére nincsen tere — igen helyesen — közli a forrásokat is, a hol az olvasó további tájékozást szerezhet. Az egész művön egységes s igazán physikai felfogás szelleme vonul át, és a munka kis terjedelme daczára a tapasztalati tények, az elmélet, a mérési módszerek és eredményeik: a számadatok — még pedig a legujabb vizsgálatok felhasználásával — olyan szerencsésen vannak összefoglalva, hogy azok, a kik nem részletes tanulmányt keresnek, a physika mai állásáról jó áttekintést szereznek belőle. A többnyire vázlatos ábrák igen átnézetesen vannak rajzolva s méltán csatlakoznak a szöveg rövid és világos magyarázataihoz, úgy hogy az érdemes művet vezérfonalúl melegen ajánlhatjuk.

K. J.

MEGOLDOTT FELADATOK.

22. *Bizonyíttassék be a következő tétel: Ha az* (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), (D, D_1) *pontpárok valamely kúpszeletre nézve konjugált párok, akkor az* $[(AB, CD), (A_1D_1, B_1C_1)]$, $[(AD, BC), (A_1B_1, C_1D_1)]$ *pontpárok ugyane kúpszeletre nézve egyidőben konjugált vagy nem konjugált párok.* (Ha $A \equiv C_1$, $B \equiv D_1$, $C \equiv A$, $D \equiv B_1$, akkor a két utolsó pár összeesik és Hesse egyik tétele alapján mindig konjugált lesz.) (Klug.)

Harmadik megoldás Blau Ármin tanárjelölt úrtól Budapesten.

Legyenek az a_1, b_1, c_1, d_1 egyenesek rendre az A_1, B_1, C_1, D_1 pontok polárisai. Ezek a feltétel értelmében rendre átmennek az A, B, C, D pontokon. Mivel az $|(a_1d_1), (b_1c_1)|$ egyenes az (A_1D_1, B_1C_1) pont polárisa, az a kijelentés, hogy $[(AB, CD), (A_1D_1, B_1C_1)]$ konjugált pontpárt alkotnak, így is fogalmazható, hogy az (AB, CD) pont az $|(a_1d_1), (b_1c_1)|$ egyenesen fekszik. Ugyancsak az, hogy $[(AD, BC), (A_1B_1, C_1D_1)]$ konjugált pólusok, kifejezhető ekképen is: az $|(a_1b_1), (c_1d_1)|$ egyenes átmegy az (AB, CD) ponton.

A feladat megoldása ezzel vissza van vezetve a következő geometriai tétel bebizonyítására:

Ha az a_1, b_1, c_1, d_1 *egyenesek rendre átmennek az* A, B, C, D *pontokon, ha továbbá az* (AB, CD), (a_1d_1), (b_1c_1) *pontok egy ugyanazon egyenesen vannak, akkor az* $|(a_1b_1), (c_1d_1)|$ *egyenes az* (AD, BC) *ponton megy át és megfordítva.*

Ennek bizonyítása pedig nagyon egyszerű. Tekintsük ugyanis AD (a_1d_1) és BC (b_1c_1) háromszögeket. Ezek perspektiv helyzetűek, ha (a_1b_1), (AD, BC) és (c_1d_1) egy egyenesen vannak. Ugyanekkor az $|(ad), (b_1c_1)|$ egyenes AB, CD egyenesek metszéspontján megy keresztül. Viszont, ha e három egyenes egy pontban találkozik, az előbbi három pontnak egy egyenesen kell feküdnie.

*

Negyedik megoldás Csillag Vilmos, műegyetemi tanársegéd úrtól.

Vegyünk föl a kúpszelet síkjában *négy* pontot: *A, B, C, D.* Ha e pontoknak a kúpszeletre vonatkozó polárisai rendre *a, b, c, d,* akkor az

$$(AB,\ CD),\quad (AD,\ BC)$$

pontok polárisai

$$(ab,\ cd),\quad (ad,\ bc).$$

Tűzzük ki most a feladatban említett konjugált pólusokat, t. i. *a*-n a A_1, *b*-n a B_1, *c*-n a C_1, *d*-n a D_1 pontot és írjuk még röviden

$$A_1D_1=u \qquad B_1C_1=v.$$

A keletkező

$$(adu) \quad \text{és} \quad (bcv)$$

két háromoldal akkor és csak akkor lesz *perspektiv* helyzetű, ha az

$$(u,\ v) \equiv (A_1D_1,\ B_1C_1)$$

megfelelő oldalpár az

$$(ab,\ dc)$$

tengelyben találkozik, vagyis, ha az $(A_1D_1,\ B_1C_1)$ pont az $(ab,\ cd)$ egyenesben, az $(AB,\ CD)$ pont polárisában fekszik. Ebben és csupán ebben az esetben fognak a megfelelő csúcspárok összeköttetései

$$(ad,\ bc),\quad A_1B_1,\quad C_1D_1$$

egy czentrumba futni, vagyis az $(A_1B_1,\ C_1D_1)$ pont az $(ad,\ bc)$ egyenesben, az $(AD,\ BC)$ pont polárisában feküdni.

Az előzők némi ismétlésével írhatjuk tehát, hogy az $(A_1B_1,\ C_1D_1)$ pont akkor és csak akkor fekszik az $(AD,\ BC)$ pont polárisában, ha egyszersmind az $(A_1D_1,\ B_1C_1)$ pont az $(AB,\ CD)$ pont polárisában van; más szóval az

$$[(AB,\ CD),\ (A_1D_1,\ B_1C_1)],\quad [(AD,\ BC),\ (A_1B_1,\ C_1D_1)]$$

pontpárok *egyidőben konjugált pólusok vagy nem.*

Természetesen a tételnek *duál* tétele is igaz; a bizonyításban csupán a nagy és kis betűk jelentését föl kell cserélni.

*

Ötödik megoldás dr. Suták József, kegyesrendi tanár úrtól Budapesten.

Az *A, B, C, D* pontokkal valamely kúpszeletre nézve konjugált pontok benne vannak megfelelően az *a, b, c, d* polárisaikban. Az $(AD,\ BC) \equiv E$

pont konjugáltjai benne vannak (a, d) $(b, c) \equiv e$ egyenesben; az $(AB, CD) \equiv F$ pont konjugáltjai pedig (a, b) $(c, d) \equiv f$ egyenesben.

Ha az A, B, C, D-hez konjugált pontokat A_1, B_1, C_1, D_1-et az a, b, c, d egyeneseken úgy választjuk meg, hogy $(A_1B_1, D_1C_1) \equiv E_1$ *pont az e egyenesen legyen, akkor kimutatom,* hogy $(A_1D_1, B_1C_1) \equiv F_1$ *pont az f egyenesben van:* azaz, *hogy* E, E_1 és F, F_1 *pontpárok egyszerre konjugáltak vagy nem.*

Messe ugyanis A_1B_1 az f egyenest X, a D_1C_1 pedig Y pontban; projiciáljuk azután a (c, d) czentrumból a D_1, Y, C_1, E_1 pontokat az e tengelyre s azután az e tengelyen nekik megfelelő pontokat az (a, b) czentrumból az A_1B_1 egyenesre, ez által a A_1, X, B_1, E_1 pontokhoz jutunk, tehát

$$(A_1XB_1E_1) = (D_1YC_1E_1),$$

azaz a két pontsor perspektiv helyzetű, miért is A_1D_1 és B_1C_1 csakugyan az e egyenesen találkoznak.

*

Hatodik megoldás dr. Steiner Lajos meteorologiai intézeti assistens úrtól Budapesten.

Legyen a kúpszelet egyenlete szimbolikus alakban írva:

$$a_x^2 = 0;$$

legyenek továbbá

A koordinátái x_1, x_2, x_3;		A_1 koordinátái y_1, y_2, y_3	
B «	x_1', x_2', x_3';	B_1 «	y_1', y_2', y_3'
C «	x_1'', x_2'', x_3'';	C_1 «	y_1'', y_2'', y_3''
D «	x_1''', x_2''', x_3''';	D_1 «	y_1''', y_2''', y_3'''

akkor a tétel præmissái értelmében

$$a_x a_y = 0, \quad a_{x'} a_{y'} = 0, \quad a_{x''} a_{y''} = 0, \quad a_{x'''} a_{y'''} = 0.$$

Az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ egyenesek egyenletei igy írhatók:

$$u_z \equiv u_1z_1 + u_2z_2 + u_3z_3 = 0, \quad v_z \equiv v_1z_1 + v_2z_2 + v_3z_3 = 0,$$

a hol

$$u_1 \equiv (xx')_1 \equiv x_2x_3' - x_3x_2'; \quad u_2 \equiv (xx')_2 \equiv x_3x_1' - x_1x_3'$$
$$u_3 \equiv (xx')_3 \equiv x_1x_2' - x_2x_1'$$
$$v_1 \equiv (x''x''')_1 \equiv x_2''x_3''' - x_3''x_2''', \quad v_2 \equiv (x''x''')_2 \equiv x_3''x_1''' - x_1''x_3'''$$
$$v_3 \equiv (x''x''')_3 \equiv x_1''x_2''' - x_2''x_1'''.$$

Az AB és DC egyenesek metszéspontjának E-nek koordinátái:

$z_1 \equiv (uv)_1 \equiv u_2v_3 - u_3v_2$, $z_2 \equiv (uv)_2 \equiv u_3v_1 - u_1v_3$, $z_3 \equiv (uv)_3 \equiv u_1v_2 - u_2v_1$;

hasonlóképen az A_1D_1 és B_1C_1 metszéspontjának, E_1-nek koordinátái:

$$z_1 \equiv (u'v')_1, \quad z_2 \equiv (u'v')_2, \quad z_3 \equiv (u'v')_3,$$

hol

$$u_1' \equiv (yy''')_1, \quad u_2' \equiv (yy''')_2, \quad u_3' \equiv (yy''')_3,$$
$$v_1' \equiv (y'y'')_1, \quad v_2' \equiv (y'y'')_2, \quad v_3' \equiv (y'y'')_3.$$

Az $\overline{AD}$ és $\overline{BC}$ metszéspontjának, F-nek koordinátái:

$$t_1 \equiv (mn)_1, \quad t_2 \equiv (mn)_2, \quad t_3 \equiv (mn)_3,$$

hol

$$m_1 \equiv (xx''')_1, \quad m_2 \equiv (xx''')_2, \quad m_3 \equiv (xx''')_3,$$
$$n_1 \equiv (x'x'')_1, \quad n_2 \equiv (x'x'')_2, \quad n_3 \equiv (x'x'')_3.$$

Végre $\overline{A_1B_1}$, $\overline{C_1D_1}$ F_1 metszéspontjának koordinátái:

$$t_1' = (m'n')_1, \quad t_2' = (m'n')_2, \quad t_3' = (m'n')_3,$$

hol

$$m_1' = (yy')_1, \quad m_2' = (yy')_2, \quad m_3' = (yy')_3,$$
$$n_1' = (y''y''')_1, \quad n_2' = (y''y''')_2, \quad n_3' = (y''y''')_3.$$

E és E_1 konjugált pontpárt képeznek, ha $(auv)\,(au'v') = 0$,
F « F_1 « « « « $(amn)\,(am'n') = 0$.*

Ha sikerül kimutatnunk, hogy:

$$(auv)\,(au'v') = k\,(amn)\,(am'n'),$$

hol k állandó mennyiség, akkor ezzel tételünk be van bizonyítva. Ennek az egyenletnek fennállását nem nehéz bebizonyítani. Az

$$a_1, a_2, a_3; \quad b_1, b_2, b_3; \quad c_1, c_2, c_3; \quad d_1, d_2, d_3$$

mennyiségek között mindig fennállnak a következő azonosságok:

$$\begin{aligned}(ab)_2\,(cd)_3 - (ab)_3\,(cd)_2 &= b_1\,(acd) - a_1\,(bcd)\\ (ab)_3\,(cd)_1 - (ab)_1\,(cd)_3 &= b_2\,(acd) - a_2\,(bcd)\\ (ab)_1\,(cd)_2 - (ab)_2\,(cd)_1 &= b_3\,(acd) - a_3\,(bcd)\end{aligned} \qquad 1)$$

hol $(ab)_2$, $(cd)_3$ etc. másodrendű, (acd), (bcd), harmadrendű determinánsokat jelentenek, a melyeknek képezési törvénye a fentebbiek után ismeretes.

---

* $a_x a_y = 0$ egyenlet mintájára; (auv), $(au'v')$ etc.

$$\begin{vmatrix} a_1 & u_1 & v_1 \\ a_2 & u_2 & v_2 \\ a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1' & u_1' & v_1' \\ a_2' & u_2' & v_2' \\ a_3' & u_3' & v_3' \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

determinánsokat jelentik.

Az 1) egyenlőségek segítségével könnyen nyerjük:

$(auv)=a_{x'}(xx''x''')-a_x(x'x''x''')$, $(au'v')=a_{y'''}(yy'y'')-a_y(y'y''y''')$;

(amn) és $(am'n')$ háromféleképen bontathatók fel:

$$\begin{aligned}
(amn) &= a_{x''}(xx'x''') - a_{x'}(xx''x'''),\\
(amn) &= a_{x'''}(xx'x'') - a_x(x'x''x'''),\\
(amn) &= a_{x''}(xx'x''') - a_{x'}(xx''x'''),\\
(am'n') &= a_{y''}(yy'y''') - a_{y'''}(yy'y''),\\
(am'n') &= a_{y''}(yy'y''') - a_{y'''}(yy'y'''),\\
(am'n') &= a_{y'}(yy''y''') - a_y(y'y''y''');
\end{aligned}$$

Az egy sorban lévő kifejezések szorzása után és az

$$a_xa_y=a_{x'}a_{y'}=a_{x''}a_{y''}=a_{x'''}a_{y'''}=0$$

egyenlőségek tekintetbe vételével — ered:

$$\begin{aligned}
(auv)(au'v') &= a_{x'}a_{y'''}(xx''x''')(yy'y'') - a_xa_{y'''}(x'x''x''')(yy'y'') -\\
&\quad -a_{x'}a_{y''}(xx''x''')(y'y''y'''),\\
(amn)(am'n') &= a_{x'}a_{y'''}(xx''x''')(yy'y'') - a_{x''}a_{y'''}(xx'x''')(yy'y''') -\\
&\quad -a_{x'}a_{y''}(xx''x''')(yy'y'''),\\
(amn)(am'n') &= a_{x'''}a_{y''}(xx''x''')(yy'y''') + a_xa_{y'''}(x'x''x''')(yy'y'') -\\
&\quad -a_xa_{y''}(x'x''x''')(yy'y'''),\\
(amn)(am'n') &= a_{x''}a_{y'}(xx'x''')(yy''y''') - a_{x''}a_y(xx''x''')(y'y''y''') -\\
&\quad -a_{x'}a_y(xx''x''')(y'y''y''').
\end{aligned}$$

Ha $(amn)(am'n')$ három utolsó alakjából

$$(amn)(am'n')-(amn)(am'n')-(amn)(am'n')=-(amn)(am'n')$$

kifejezést képezzük, lesz:

$$\begin{aligned}
-(amn)(am'n') &= a_{x'}a_{y'''}(xx''x''')(yy'y'') - a_xa_{y'''}(x'x''x''')(yy'y'') -\\
&\quad -a_{x'}a_y(xx''x''')(y'y''y''') - a_{x''}(xx'x''')[(yy'y'')a_{y'''} +\\
&\quad +(yy''y''')a_{y'} - (y'y''y''')a_y] - a_{y''}(yy'y''')[(xx''x''')a_{x'} +\\
&\quad +(xx'x'')a_{y'''} - (x'x''x''')a_x].
\end{aligned}$$

A [ ] közt levő kifejezések az:

$$(abc)d_x-(abd)c_x+(acd)b_x-(bcd)a_x=0^*$$

---

* d_x, c_x etc. $d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3$, $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$ etc. kifejezéseket jelentik.

azonosságban kifejezett tétel alapján

$$(yy'y''')\,a_{y''},\quad (xx'x''')\,a_{x''}$$

alakokkal helyettesíthetők; $-(amn)\,(am'n')$ nyert alakját összevetve $(auv)\,(au'v')$ alakjával, nyerjük:

$$-(amn)\,(am'n')=(auv)\,(au'v')-2a_{x''}a_{y''}\,(xx'x''')\,(yy'y'''),$$

és mivel

$$a_{x''}a_{y''}=0$$

azért

$$(auv)\,(au'v')=-(amn)\,(am'n').$$

Fennebbi k állandónk tehát -1-gyel egyenlő.

A nyert egyenletből a bebizonyítandó tétel egyszerűen leolvasható. Az

$$(auv)\,(au'v')+(amn)\,(am'n')=0$$

egyenlet alakjából egyszersmind kitűnik a bebizonyított tétel invariáns jellege, azaz, hogy a mértani alakok projekciója alkalmával is megtartja érvényességét, a mi különben előre látható volt.

*

Dr. Steiner Lajos úr e feladatot synthetikai úton is megoldotta. *Szerk.*

FELADATOK.

31. *Adva van az $A_1A_2A_3A_4$ tetraeder és a P pont. Az A_1P, A_2P, A_3P illetőleg A_4P metszéspontja az $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, illetőleg $A_1A_2A_3$ síkkal legyen B_1, B_2. B_3 illetőleg B_4. Megvizsgálandó ama P pontok geometriai helye, a melyekre nézve a $B_1B_2B_3B_4$ tetraeder köbtartalma állandó.* (Tőtössy.)

VEGYESEK.

Bolygórendszerünk határairól.

A távolság, mely a hozzánk legközelebb eső állócsillagot a Naptól elválasztja, 275 ezerszer nagyobb, mint a Napnak a Földtől való közepes távolsága, és ebben az óriási térben mai tudásunk szerint Neptunus a legszélső bolygó, mely e köznek csak első 9170-edében kering. Nem utasíthatjuk tehát mereven vissza a kérdést, valjon Neptunusban tényleg bolygórendszerünk határát ismerjük-e ? Ezt feltennünk nyomós ok épen nem késztet, mert az ekliptikai öv átkutatása sem biztosíthat arról, hogy az esetlegesen meglevő neptunusontúli bolygót már meg kellett volna lelni, mely okvetetlenül halványabb, mint a 8-adrendű kis csillag, melyet most határul tekintünk, s mely egy nap lefolyása alatt legfölebb 10″-nyi útat tehet meg az égen. Igy megfigyelte pl. hosszú idővel felfedeztetése előtt Flamsteed 1690-ben öt ízben, Lemonnier 1768—69-ben nyolcz ízben az Uranust, és Lalande 1795-ben kétszer a Neptunust, a nélkül, hogy bolygó természetét felismerte volna. De azt sem várhatjuk még most, hogy az esetleges új bolygó Neptunussal éreztetett perturbatióival árulja el létezését és helyét, mint tette Neptunus Uranussal szemben, mert e bolygó kitünő Newcomb-féle táblái daczára annak, hogy a most majd százados Lalande-féle megfigyelést is felölelte, még annyira pontosak, hogy a megfigyelések messzemenő pontosságán belül sem lehet zavaró külső bolygóra gondolni.

Másrészt egyenes bizonyítékunk van arra nézve, hogy Napunk hatásköre a Neptunus pályáján messze túl terjed, s hogy a szomszédos állócsillagokkal szemben elég hatalmas arra, hogy ily nagy távolságokban is bolygót állandó keringésben magához lánczoljon. Az Olbers-, Pons- és Halley-féle periodikus üstökösök nap-távoli pontja a Neptunus pályáján kívül esik, az augusztusi, szintén periodikus hullócsillagraj még ezeknél is messzebb hatol a világür mélyeibe és még inkább szól ez számos üstökösről, melyet a pályameghatározás biztosan elliptikusnak mond, ha eddig mindjárt csak egyetlenegy megjelenése képezte a megfigyelés tárgyát.

A kérdés tehát az, valjon mily módszer szerint keresendő az esetleges bolygó, miután létezését eleve eltagadnunk nem szabad ? Az előbb mondott okoknál fogva a puszta keresés előreláthatólag sikerre vezetni nem fog, mert valószínűséggel csak annyit várhatunk, hogy az új égi test az ekliptika síkjához közel mozog. De míg az újkor legnagyobb távcsöveiben sem várhatunk határozott korongot és a lassú napi mozgás ugyancsak megnehezíti a feltalálást. Az elmélet továbbá nem ad legcsekélyebb fel-

világosítást sem arra nézve, hogy az ekliptika mentén hol volna keresendő az új bolygó, mint tette ezt Neptunus esetében.

Míg tehát ez úton a kérdésnek csak valószínű eldöntése is teljesen a véletlenségre volna bizva, az újabb kor az üstökösök és hullócsillagokban meg ezek szoros összefüggésében módot nyújtott a döntésre, módot, melynek elméleti részét már Laplace tisztázta. Mindinkább valószínűvé válik ugyanis, hogy a csekély exentricitással biró, bolygórendszerünk állandó tagjaivá lett üstökösök azon parabolikus vagy csak évezredes periodusokkal biró üstökösök csoportjából kerülnek ki, melyek útja valamikor egy hatalmas bolygó szomszédságában vezetett el, úgy hogy legalább rövid időre ez tekinthető középponti test gyanánt, míg a Nap csak a háborgó test szerepét viszi, a mennyiben a bolygó hatása a Napét ez idő alatt messze túlszárnyalja. Ily esetnek legfrappánsabb példája az 1770-iki Lexell-féle üstökös, melynek első pályameghatározása közel $5^2/_3$ évnyi keringési időhez vezetett. Mivel addig ily erős ellipticitás üstökös pályánál nem mutatkozott, az eredmény sokkal feltünőbb volt, semhogy a számítások legszigorúbb ellenőrzése nélkül bizalommal el lehetett volna fogadni, s ezért Burckhardt a megfigyelések új diszkusszióját s a használt összehasonlítási csillagok helyzetének pontosabb meghatározása alapján ismételte a számítást, mely Lexell pályáját igazolta, a mennyiben a keringési idő 5 év 209,4 napnyinak adódott. Ugyanazon eredményhez jutott később Clausen és Leverrier, úgy hogy Lexell és Burckhardt eredménye kétséget kizáróan áll. De kételyeket okozott, valjon mért nem volt látható ezen számítás alapján az üstökös 1776 márcziusában, vagy 1781 októberében s í. t.? holott nála gyengébb égi testek nem kerülték el a figyelmet? A felelet e kérdésre teljesen váratlan volt: a helyzet kiszámítása mutatta, hogy az üstökös 1767 május 27-ikén oly közel került Jupiterhez, hogy ennek hatása egy időn át a Napét tetemesen felülmulta, és az addigi, a Lexellé-től teljesen elütő pályát a Lexell-Burckhardt-féle pályává módosította. E pályában 1770 junius 28-án tetemesen megközelítette a Földet, míg augustus 13-án 109 millió km. távolságban elérte peribéliumát; 1776 márcziusában tényleg visszatért ugyane pályában a Naphoz, csakhogy akkor a Föld pályájának átellenes pontjára állva 312 millió kmnyire került tőle, s a két égitest között állott a Nap, úgy hogy az üstökös ez időtájt sehogy sem volt látható. 1779 augusztus 23-ikán, miután az üstökös már 12 évig járta a Lexell-féle pályát, ismét nagyon közel került Jupiterhez, oly közel, hogy e bolygó s 4-dik holdja között átment. E távolságban Jupiter hatása a Napénál 24-szer erősebb volt, s a pálya újra megváltozott; mint az eredeti pálya, úgy ez is sokkal excentrikusabb lett.

Ez üstökössel, minden valószínűség szerint, még egyszer találkozunk, mert alig szenved kétséget, hogy az 1889-ik év V. vagy Brooks-féle üstö-

kössel azonos, melyre nézve CHANDLER kimutatta, hogy ugyancsak 1779-ben Jupiterhez közel járva, pályájának teljes átváltozását kellett elszenvednie.

Hogy miben áll tulajdonképen az üstökösök és hullócsillagok rokonsága, ma még teljes biztonsággal nem mondhatjuk; elég az hozzá, hogy az augusztusi (Perseidák), a november 13-diki (Leonidák) és a november 28-diki (Andromedidák) raj, illetve az 1862. III., az 1866. I. és a Biela-féle üstökös pályájában halad. Valószínű, hogy az üstököst alkotó «kosmikus felhőt» valamely bolygó közelsége miatt a belső összefüggését legyőző vonzáskülönbség szétbontja és rajjá alakítja, miként ez szétoszló üstökösök egy nehány esetében észlelhető is volt. Az előbb említett 1889-iki Brooks-féle üstökös 1886 májusában Jupiter tetemes közelsége miatt tényleg szenvedett ily oszlást. Azonkívül tudjuk, hogy több száz meteorraj van, melynek kisugárzási pontja üstökösök csomópontjaival összeesik, úgy hogy ezek számára is az üstökössel való pályaazonosság majdnem bizonyosságig emelkedik.

Ezen szoros, különben bármily más jelenségen alapuló kapocsnál fogva természetes, hogy a meteorrajok — melyek talán szaporaságuknál fogva e czélra még kényelmesebb segédeszközt is nyújthatnak — nagy bolygókhoz való közeledésük alkalmával hasonló pályaátalakulásokat szenvednek, mint az üstökösök, és ennek támogatásául nem érdektelen a megjegyzés, hogy LEVERRIER valószínűvé tudta tenni, hogy a nagy novemberi rajt — a leonidákat — 126-ban Kr. u. Uranus vonzása kényszerítette mai pályájába, mely a Földét évente metszi.

Most már eléggé érthető az eszmemenet, mely valamely üstökös vagy meteorraj jelenlegi pályájából következtet azokra a háborgásokra, melyeket a pálya valamely nagy bolygó közelsége folytán szenvedett, és ebből megfordítva megállapítani iparkodik, valjon ezen bolygó nem-e még valamely ismeretlen, Neptunuson túl keringő égi test? FORBES buvárkodik ez irányban, s bár kutatásainak eddig nincs meg még a gyakorlati eredményük, kétségtelen, hogy a vezérelv helyes. Ha valószínűnek fogadjuk el a gondolatot, hogy a rövid keringési idővel biró üstökösök és meteorrajok különösen a szélső bolygók vonzása folytán lettek állandó polgárai bolygórendszerünknek: akkor a Forbes-féle methodus a legkényelmesebb és bizonyára a siker kilátásával leginkább kecsegtető út a Neptunuson túli bolygó felfedezésére.

A módszer analytikai részét, mint említők, már LAPLACE szolgáltatta, ki a Mécanique céleste IX. könyvében az üstököspályák megváltozását kutatja, ha ezek valamely bolygó közel szomszédságában haladnak el. A megoldás egyszerű és teljes, de teljes sikerrel még sem használható a bennünket érdeklő problemánál, melynek kérdését inkább ez alakban tehetjük föl: Tekinthetjük-e valamely periodikus üstökös jelenlegi pályáját olyan-

nak, melyet valamely nagy bolygó közelsége egy eredetileg parabolás pályából alkotott? Az igaz, hogy ilyetén alakban nem gondolunk ama lehetőséggel, hogy az üstökös többszörös közelítéssel nyerte el jelenlegi pályaformáját.

A gondolatmenet, melyet LAPLACE nyomán TISSERAND * s ez után CALLANDREAU ** követ, velejében a következő: Ha valamely üstökös oly közel jut egy nagy bolygóhoz, hogy ennek következtében pályája egészen átalakul, a három test problemájának azon különleges esetével állunk szemben, melyben a háborgó bolygó befolyása egy bizonyos időn át a czentrális testét tetemesen felülmúlja. Mivel az e fajta számításoknál valami messzemenő pontosság úgy sem várható, úgy szokás eljárni, hogy a bolygót határtávolságával mint sugárral leírt gömbbel kerítjük be, melynek mérete azáltal van adva, hogy belsejében a bolygó perturbáló erejének viszonya a Nap közvetlen vonzásához mindenütt nagyobb legyen, mint a Nap perturbáló vonzásának viszonya a bolygó közvetlen határához. Azon rövid időn át, melyet az üstökös a határtávolságon belül tölt, azután a Nap háborgó befolyását teljesen el szokás hanyagolni.

A határtávolság tetszésszerinti irányban szigorúan nem is gömb, hanem a következő felülettel van adva:

$$\rho = r \sqrt[5]{\frac{m^2}{\sqrt{1+3\cos^2 v}}}$$

ha r a bolygó közepes pályasugarát, m a Naphoz viszonyított tömegét és v a bolygó és üstökös a Napnál képezett szögletét jelenti.

Az üstököspálya eredeti elemeivel meghatározhatjuk most a «határfelület» ama pontját, melyben az üstökös a nagy bolygó túlnyomó, sőt kizárólagosnak tekinthető vonzása körébe lép. E felületen belül, melyet csekély és itt számba sem jövő elhanyagolással gömbnek is szabad tekintenünk, az üstökös a két test problemája értelmében halad, miáltal a hatáskörből való kilépésének pontja és sebessége is adott, úgy hogy ezáltal az átalakított pálya állandói teljes meghatározást nyernek. Azután csak formális átirás dolga, hogy a végeredményben az új pálya elemei lehetőleg a nagy bolygó körüli pálya elemeinek kikerülésével az eredeti pálya állandóinak functiója gyanánt szerepeljenek.

A gondolatmenet mathematikai kivitele érdekesebb momentumokat alig nyujt, és ennélfogva inkább az eredmények rövid regisztrálására szorítkozhatunk. Mindössze talán azt kellene említeni, hogy mindkét idézett

---

* Sur la théorie de la capture des comètes périodiques. *Bull. astr.* 1889.

** Étude sur la théorie des comètes périodiques. *Ann. de l'Observatoire de Paris; Mém.* t. XX.

szerző JACOBI * egy integralját szerepelteti, mely egy szilárd s e körül egyenletes körmozgásban haladó czentrumtól vonzott szabad pont mozgására vonatkozik; jelen esetben az integrál azt a tényt fejezi ki, hogy az üstökösnek a nagy bolygó körüli sebessége a határgömb be- és kilépő pontján ugyanaz.

Eddig mindössze 25 periodikus üstököst ismerünk, melyek Jupiter behatása folytán a bolygórendszerünk állandó tagjaivá lettek; ezen csoport alkalmas anyagot szolgáltat arra, hogy az elméletet a valósággal összehasonlíthassuk, s ez okból a számbeli adatokat természetesen mind Jupiterre vonatkoztatjuk.

Ha az eredeti pályát parabolásnak tételezzük fel, mint ez a világűrből hozzánk jutó üstökös sebességének leginkább megfelel, akkor az átalakított pálya elliptikus fél nagy tengelye 2,60 és 6,28 szélső értékek között váltakozhatik oly módon, hogy leginkább 3,14 érték körül csoportosul. A mondott csoport több tagjának fél nagy tengelye ezen utóbbi értékhez feltünően közel áll, és az egész csoport pályaméretei szempontjából olyannak tekinthető, mely eredetileg parabolás pályán Jupiter vonzáskörébe hatolt. Csak az Encke-féle üstökös tesz még egyelőre kivételt, mert fél nagy tengelye 2,21 a talált alsó határon belül fekszik, míg a többi féltengely mind 2,85 és 4,28 között csoportosul. Ennek magyarázatánál nem szükséges éppen ellentálló közegre gondolnunk, mint ezt CALLANDREAU tette, mivel valamivel szigorúbb számítás az alsó határt már 2,31-re szorítja le. A tényleges excentricitások is elég közel állanak kiszámított alsó értékükhöz, különösen, ha még tekintetbe veszszük azt, hogy az üstökös pályája már jóval Jupiter vonzási körének elérése előtt eltérhet a parabolától. Igy a már egyszer említett 1889-ki Brooks-üstökös számára a jelenlegi fél nagy tengely és excentricitás 3,67 és 0,47, míg eredetileg parabolás pálya feltételezésével a számítás 0,54-et ad az excentricitás alsó határa gyanánt. Ha azonban az üstökös Jupiter közelében parabola helyett ellipszist ír le, melynek fél nagy tengelye 97, s mely ily távolságban a Naptól asztronomiailag a parabolától meg sem különböztethető, a számítás az excentricitás tényleges értékét szolgáltatja.

Érdekesek még a Jupiter hatása alatt létrejövő pályák is; a vonzáskörön belül az üstökös minden esetben hiperbolát ír le, úgy hogy üstökös semmikor sem válhatik Jupiter állandó holdjává. Az eredő pálya azután ellipszis direkt mozgással, ha az üstökös abszolut sebessége Jupiter hatásgömbjébe beléptekor a Jupiterpálya érintőjével egyenlő irányú (a Jupitermozgás apexe felé történik), vagy hiperbola (még egyéb mellékkörülményektől függő mozgásiránynyal), ha az üstökös abszolut sebessége ugyancsak Jupiterével

* *Vorlesungen über Dynamik*, ld. az 5. előadás végét.

párhuzamos, de ellentétes irányú (azaz a Jupitermozgás antiapexe felé történik), vagy végül retrograd értelmű ellipszis vagy direkt mozgású hiperbola, ha az üstökös abszolut mozgása a Nap felé tart, vagy tőle elirányult.

A hatásgömb mérete a bolygó tömegétől és a Naptól való távolságától függve általában a rendszer határa felé nő; így a közép naptávolság egységeiben kifejezve ez Merkur számára 0,001, Vénus, Föld, Mars, Jupiter, Saturnus, Uranus és Neptunus számára sorban 0,003; 0,005; 0,003; 0,280; 0,316; 0,296; 0,501. A belső bolygók tehát hatásgömbük méretei folytán üstökösfogásra kevésbbé alkalmasok ugyan, de viszont az üstökös-pályáknak a Nap közelében való halmozódása ezzel szemben némi kompenzációt nyújt. A külső nagy bolygók ellenben a feléjök közeledő üstökösöket legtöbb esetben még a hatáskörük elérése előtt nyujtott elliptikus pályákba kényszerítik, melyeknek perihéliumtávolsága az eredetinél kisebb, úgy hogy végre oly üstökös is belejuthat a bolygó vonzáskörébe, melynek perihéliuma eredetileg a bolygó pályáján kivül feküdt. Ennek némi támogatásául szolgál már az Olbers-től kifejezett valószínűség, hogy egy üstökös valamely bolygó vonzáskörébe bejut; ez Jupiter esetében $\frac{1}{400}$, azaz 400 üstökös közül, melynek perihéliumtávolsága a Jupiterpálya sugaránál kisebb, csak egy kerül e test hatáskörébe. Hogy ezen csekély valószínűséggel szemben már most is 25, a Jupitercsoporthoz tartozó üstököst ismerünk, nyilván a mellett szól, hogy a nagy bolygók a kivülök fekvő üstökös-pályákat is szűkíteni és a folytatólagos közelítésre hajtani iparkodnak. Miről különben az a tény is tanuskodik, hogy az említett csoport üstökösei-nek aphéliumjai közel feküsznek a legnagyobb Jupiterközelségek pontjaihoz. Az a körülmény, hogy Jupiter vonzása folytán hiperbolás pályájú üstökösök is keletkezhetnek, mi pedig valóságban ily égitesteket nem ismerünk, nem lehet döntő ellenvetés az elmélet ellen, mert ezen üstökösök kimutathatólag a Földről nem észlelhetők, mivel perihéliumtávolságuk vagy a Mars pályáján messze túl esik, vagy mivel a vonzáskörből való kilépésekor a perihéliumán már jóval túl van. Különben ily hiperbolás pálya létrejötte sokkal valószínűtlenebb is; mert valamint Jupiter a kivüle fekvő elliptikus pályák perihéliumtávolságát kisebbíti és így a kritikus közelítést előkészíti, ép úgy növeli a kivüle fekvő hiperbolás pályak legkisebb naptávolságát, úgy hogy ezek Jupiter vonzása alól mindinkább kikerülnek.

Az itt előadottak teljesen elegendők a Forbes féle feladat megoldására is; a gyakorlatba való átvitel már csak abból áll, hogy az eddig ismert üstökösök és meteorrajok jegyzékéből egy oly üstökös-csoport legyen kiválasztható, melynek elemei mind ugyanazon — eddig még ismeretlen, de létezése esetén a transneptumi bolygó nevét viselő — közös vonzási sphæ-rához vezessenek.

Kövesligethy R.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

NEGYEDIK ÉVFOLYAM

VI—VII. FÜZET. 1895 OKTÓBER—NOVEMBER

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1895

TARTALOM

Lap

KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az analitikai függvények elméletéhez (Első közlemény.) ... 241
SZIJÁRTÓ MIKLÓS: A Whaetstone-féle híd ellenállása ... 256
SZÉPRÉTHY BÉLA: A ferde és egyenes körkúp sík metszeteinek gyujtópontjairól 264
KLUG LIPÓT: A harmonikus pólusról ... 273
FUCHS KÁROLY: Adalék a Mars felületének elméletéhez ... 283
SZÉPRÉTHY BÉLA: A csavart oszlop saját árnyékhatárvonalának meghatározásáról 288
Physikai szemle. (A szinek fotografálásáról. — A hidrogén folyósítása, kritikus hőmérsékletének és normális forrpontjának meghatározása. — A folyósított levegő tudományos alkalmazásai.) ... 296
Irodalom. (KLEIN, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. — Ism. KÜRSCHÁK.) ... 303
Megoldott feladatok. (A 23. feladat megoldása SZÉPRÉTHY BÉLA, CSILLAG VILMOS, DOROGHY IGNÁCZ, FREIKIND IGNÁCZ, LÓKY BÉLA, KLUG LIPÓT, BREUER MÓR és MAKSAY ZSIGMOND uraktól. — A 24. feladat megold. SZÉPRÉTHY BÉLA és DOROGHY IGNÁCZ uraktól) ... 306
Physikai Laboratarium. (Világító testek sötétképei. — Elektromos védőernyő átlátszó vezető anyagból. — Ezüstözés. — Az aluminium forrasztása.) ... 319

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A negyedik társulati év 1895. január 1-én kezdődött. A *tagsági díj* az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) címére — legczélszerűbben az 1. füzethez mellékelt posta-utalványnyal — beküldeni. *A mult évekről hátralékban levőt. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. Phys. Lapok* I—III. évfolyamai teljes példányokban még kaphatók; az I. kötet ára 5 frt, a többieké 3—3 frt.

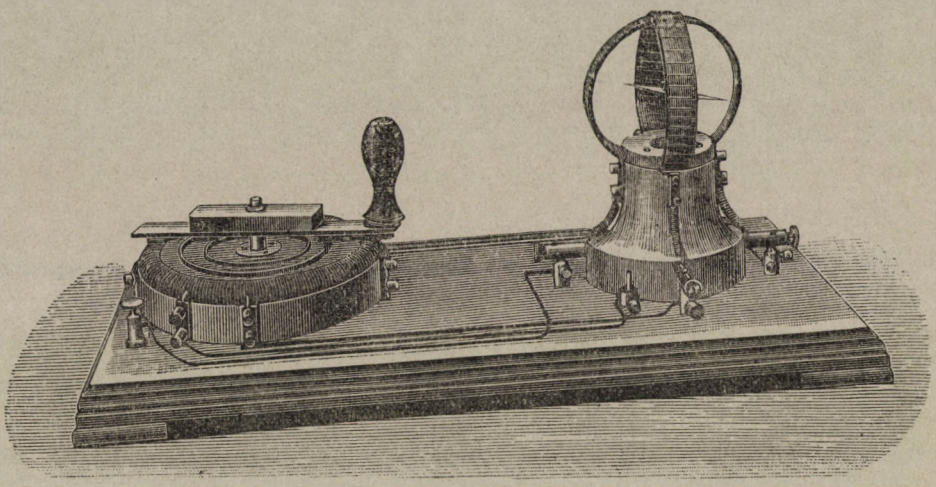
Rendes ülések. A társulat üléseit minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja, a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3.), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czímére **(IX. Csillag-utcza 8.)** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár **(VII., Csengery-u. 1)**, a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a *reclamatiók* is. A reclamatiókat — költségkimélésből — mindenkor a legközelebb megjelenő füzettel egyidejűleg teljesítjük.

Az ügyvivő titkár a társulat t. tagjainak szíves elnézését kéri a folyóirat megjelenésében beállott késedelemért. A IV. kötet befejező füzete a kötet tartalomjegyzékével rövid idő mulva fog megjelenni.

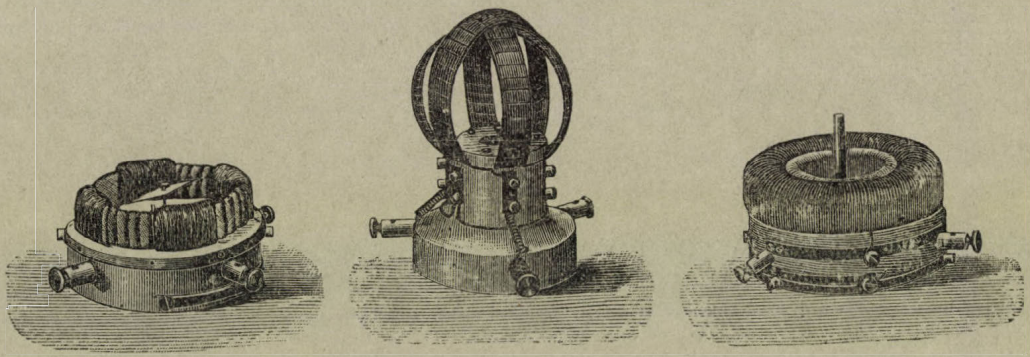
Értesítés. *Ròiti: A fizika elemei* című művének mindket kötete a K. M. Természettud. Társulat kiadásában megjelent. A 94 ív terjedelmű művet, melynek szövegét 881 rajz és három színes műlap magyarázza, társulatunk tagjai füzve 5 frt, kötve 6 frt kedvezményes áron szerezhetik meg. A megrendelés a füzetünkhöz mellékelt levelező lapon eszközölhető. A Természettudományi Társulat a művet január hóban küldi szét. A ki a mű árát postautalványon küldi a Term. Társulatnak, annak a művet *bérmentve* fogják megküldeni.



WEINHOLD-féle készülék

FORGÓ MÁGNESES TÉR ELŐÁLLITÁSÁRA.

A II. kötet 275. stb. oldalain ismertetett készülékeket (3., 8., 9. és 11. ábra) minden hozzávaló mellékkészülékkel teljesen felszerelve igen ajánlhatjuk a t. cz. tanár urak becses figyelmébe.



A teljes készülék ára legfinomabb kivitelben ***60 forint*** *loco Budapest. A készülék egyes részei külön is kaphatók méltányos árakon.*

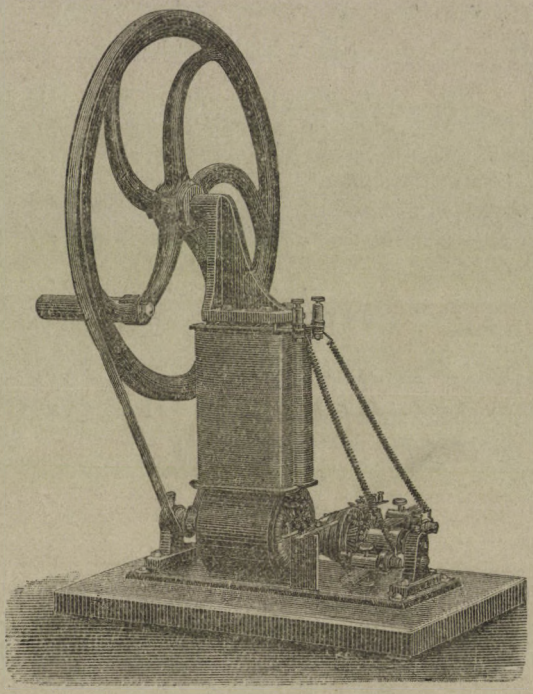
CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

DINAMO-ELEKTROMOS GÉP

Gramme-féle gyűrűvel ellátva

egyirányú, vállakozó és forgató (több fázisú) áram előállítására.

Az áram erőssége 4 Ampère, feszültsége 30 Volt.



Ezen géppel egyidejűleg meg lehet világítani például 3 izzólámpát egyirányú és 2—3—4 izzólámpát váltakozó vagy több fázisú forgató árammal. Használható egyenáramú, váltakozó áramú és több fázisú generátor vagy mótorként. Szerkezete e lapok II. köt. V. füzetében ismertetve van.

A gép kizárólagosan iskolai czélokra készült és pedig nem csak a dynamogép stb. bemutatására, hanem mint állandó s erős villamos forrás; kézzel igen könnyen hajtható és árama minden iskolai kisérlethez teljesen elegendő.

Részletes utasitás minden géphez mellékeltetik.

A gép ára 100 forint.

CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

AZ ANALITIKAI FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉHEZ.

(Első közlemény.)

1. Bármely

$$\mathfrak{P}(x|a)=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_m(x-a)^m+\cdots$$

hatványsor (ha csak összetartási körének ρ sugara nem egyenlő zérussal) a K_a összetartási körnek belsejében az x komplex változónak egyértékű, folytonos és bárhányszor differenciálható függvénye. Sőt a hatványsor azt is megszabja, hogy mi ennek a függvénynek — $f(x)$-nek — folytatása a K_a körön kívül. Ha ugyanis K_a belsejében felveszünk egy tetszőleges $x=b$ helyet, akkor az adott $\mathfrak{P}(x|a)$ hatványsorból levezetett

$$\mathfrak{P}(x|a,b)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{dx^m}\mathfrak{P}(x|a)\right]_{x=b}(x-b)^m$$

hatványsor K_b összetartási körének és az az eredeti sor K_a összetartási körének minden közös belső helyén

$$\mathfrak{P}(x|a,b)=\mathfrak{P}(x|a).$$

Ezért az oly esetekben, midőn K_b kinyúlik a K_a körön túl is, ebben a kinyuló részben $\mathfrak{P}(x|a,b)$-t tekintjük a $\mathfrak{P}(x|a)$ sor által értelmezett függvény folytatásának.

Bármely $\mathfrak{P}(x|a,b)$ folytatásból újabb $\mathfrak{P}(x|a,b,c)$ folytatás képezhető stb.

E folytatások összessége alkotja a $\mathfrak{P}(x|a)$ hatványsor értelmezte $f(x)$ analitikai függvényt, melynek $\mathfrak{P}(x|a)$, $\mathfrak{P}(x|a,b)$ stb. egyes elemei.

Az a helyből a tetszőleges $x=a$ helyhez számtalan $a\ b\ c\ \ldots\ a$

úton juthatunk. Ha valamennyi úton $f(a)$-ra ugyanazt az értéket nyerjük, akkor az analitikai függvény *egyértékű*, ellenkező esetben *többértékű*.

Ha valamely A számtartomány avval a tulajdonsággal bír, hogy legalább az azon belül választott $a, b, c, \ldots a$ útakon $f(a)$ számára egy ugyanazt az értéket nyerjük, akkor az ily megszorítással képezett folytatások az A tartományban $f(x)$-nek egy *egyértékű ágát* adják meg.

A következőkben többértékű függvények esetében mindig valamely egyértékű ág vizsgálatára szorítkozunk.

2. Ha adva van egy

$$a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m+\cdots$$

hatványsor (hol az előbb a-val jelölt értéket egyszerűség kedvéért zérusnak választottuk), akkor e sor vizsgálatánál *első kérdésünk* minden esetre a K összetartási kör ρ sugarának meghatározására fog vonatkozni.

E K körnek bármely a belső helye arra az $f(x)$ függvényre vonatkozólag, a melyet a hatványsor értelmez, *rendes* hely lesz, melynek környezetében $f(x)$ *szabályosan* viselkedik, azaz $(x-a)$-nak pozitiv egész kitevőjű hatványai szerint haladó sorba fejthető ki. Ellenben K kerületén létezik mindig legalább egy *szinguláris hely*, melynek környezetében $f(x)$ nem fejezhető ki ily hatványsor segitségével. A K meghatározása e szerint azonos feladat annak az $x=0$ középpont körül rajzolható *legnagyobb* körnek kijelölésével, melynek bármely belső helyének környezetében $f(x)$ szabályosan, más szóval *az egész függvények módjára* viselkedik.

E viselkedéshez legközelebb jár a *ráczionális függvények módjára* való viselkedés. Az $f(x)$-ről akkor mondjuk, hogy $x=a$ környezetében a ráczionális függvények módjára viselkedik, ha $f(x)$-re vonatkozólag $x=a$ vagy rendes hely, vagy *polus*. Az $x=a$ helyet μ-szeres polusnak pedig akkor mondjuk, ha $(x-a)^\mu f(x)$ az $x=a$ környezetében szabályosan viselkedik és az $x=a$ helyen a zérustól különböző értékkel bír.

A mondottak annak a kérdésnek, vajjon mekkora a hatványsor

K összetartási köre, most már legközelebbi általánosítására vezetnek. Míg K meghatározásánál $x=0$ körül a legnagyobb kört kerestük, a melyen belül $f(x)$ az *egész* függvények módjára viselkedik, addig ezen általánosításnál annak az $x=0$ körül rajzolt legnagyobb $\mathfrak{K}$ körnek meghatározását fogjuk kívánni, melyen belül $f(x)$ a *ráczionális* függvények módjára viselkedik.

Az így felvetett *második probléma* e szerint annak az $x=0$ középponttal biró $\mathfrak{K}$ körnek meghatározását követeli, a melyen belül $f(x)$-nek csak rendes helyei és polusai vannak, melynek kerületén azonban már másnemű szinguláritás is előfordul.

E $\mathfrak{K}$ kör sohasem lehet kisebb mint K, de nagyobb mint K is csak akkor lesz, ha K kerületén $f(x)$-nek csak bizonyos véges számú polusa van. $\mathfrak{K}$ meghatározására tehát mindenek előtt oly kriterium kívántatik, melylyel eldönthető: vajjon a K körön $f(x)$-nek csak polusai vannak-e, vagy más szingularitása is. Ha valamely esetben e kritérium segítségével felismertük, hogy a K kör kerületén levő szinguláritások nem lehetnek pusztán polusok, akkor $\mathfrak{K}$ azonos K-val. Ekkor tehát e kriterium mindjárt megadja $\mathfrak{K}$-t. További vizsgálat csak akkor szükséges, ha $\mathfrak{K}$ nagyobb mint K. E további vizsgálat a legszorosabb kapcsolatban van $f(x)$-nek a keresett $\mathfrak{K}$ körön belül levő polusainak meghatározásával. Sőt ha $f(x)$ mellett $\frac{1}{f(x)}$-et is vizsgálataink körébe vonjuk, akkor $\frac{1}{f(x)}$ polusainak vagyis $f(x)$ zérus-helyeinek meghatározására is nyerünk módszert.

Ha a $\mathfrak{K}$ kört sikerült meghatároznunk, természetesen az a kérdés is merül fel, miként lehetne oly analitikai kifejezést találni, mely $f(x)$-et az egész $\mathfrak{K}$ kör belsejében ábrázolja, mert az adott hatványsor ezt csak a K kör belsejében teszi meg.

Mindezeket a kérdéseket HADAMARD a *Journal de mathématiques* 4. sorozatának 8. kötetében «*Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*» cz. értekezésének első két részében behatóan tanulmányozta. A következő sorok czélja legalább leglényegesebb eredményeit részletesen ismertetni.

Az utolsó feladat megoldása, t. i. $f(x)$-nek a $\mathfrak{K}$ körben *egy* ana-

litikai kifejezéssel való ábrázolása, azok közé a függvénytani vizsgálatok közé tartozik, a melyekhez WEIERSTRASS «Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen» cz. értekezése adta meg az impulzust. Azért ennek legalább az egész függvényekre vonatkozó részét alkalmilag szintén ismertetem.

I.

3. A következőkben jelentékeny szerepet játszik a végtelen számsorozatok elméletének egyik alapfogalma, azért mindenek előtt ennek megállapítását kell előre bocsátanunk.

Ha adva van *valós* számoknak valamely

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m, \ldots \qquad (1)$$

sorozata, akkor segítségével az összes valós számokat két osztályba oszthatjuk: azon A számok osztályába, melyeknél nagyobb tagok (1) alatt vagy egyáltalában nem vagy legfeljebb *véges* számmal foglaltatnak, s azon B számok osztályába, melyekhez végtelenül sok náluknál nagyobb tag található (1) alatt. A számok csak akkor nem találhatók, ha *bármely* K pozitiv számhoz végtelenül sok nálánál nagyobb tag található (1) alatt. B számok pedig csak akkor nem léteznek, ha *bármely* $-K$ negativ számhoz található egy oly M egész szám, hogy

$$u_m < -K,$$

ha csak

$$m > M.$$

Ha e két kivételes eset egyikével sincs dolgunk, akkor mindig kimutatható egy oly l szám létezése, hogy a nálánál nagyobb számok mindannyian a magasabb A osztályba tartoznak, a nálánál kisebbek mind az alacsonyabb B osztályba, maga l pedig más-más sorozatoknál hol az egyik, hol a másik osztálynak lesz tagja.

Ugyanis az A és B osztályok úgy vannak megállapítva, hogy ha valamely szám az A osztályba tartozik, akkor minden nálánál na-

gyobb szám szintén oda való, ha pedig valamely szám a B osztályba tartozik, akkor minden nálánál kisebb szám szintén oda tartozik.

Ezt tudván, mindenek előtt kikeresünk két egész számot, g-t és h-t, melyek közül az egyik — g — a B osztályba tartozik, ellenben a másik — h — az A osztályba. Az egész számok sorában g-től h-ig legyen K_0 az utolsó, mely a B osztályba tartozik; úgy hogy K_0+1 már az A osztályba tartozik.

Azután egy tetszőleges 1-nél nagyobb számot X-et választva, a

$$\frac{K_0X}{X}, \quad \frac{K_0X+1}{X}, \quad \frac{K_0X+2}{X}, \ldots \frac{(K_0+1)X}{X}$$

számok sorából ismét kiválasztjuk az utolsót, mely még a B osztályba tartozik. Legyen ez $\frac{K_1}{X}$; úgy hogy $\frac{K_1}{X}$ még a B osztályba tartozik, de $\frac{K_1+1}{X}$ már az A osztályba.

Ismételjük ezt az eljárást a következő számokon:

$$\frac{K_1X}{X^2}, \quad \frac{K_1X+1}{X^2}, \quad \frac{K_1X+2}{X^2}, \ldots \frac{(K_1+1)X}{X^2}.$$

Ezek között megállapítjuk a $\frac{K_2}{X^2}$ számot, úgy hogy $\frac{K_2}{X^2}$ még a B osztályba tartozzék, ellenben $\frac{K_2+1}{X^2}$ már az A osztályba.

Ezt az eljárást újból és újból ismételve, két számsorozatot nyerünk:

$$K_0, \quad \frac{K_1}{X}, \quad \frac{K_2}{X^2}, \ldots, \frac{K_m}{X^m}, \ldots$$

és

$$K_0+1, \quad \frac{K_1+1}{X}, \quad \frac{K_2+1}{X^2}, \ldots, \frac{K_m+1}{X^m}, \ldots,$$

melyek közül az elsőnek tagjai mind a B osztályba tartoznak, míg a másodiknak tagjai mind az A osztályba tartoznak.

Az első sorozat számai folyvást növekednek vagy legalább soha nem kisebbednek és mindig kisebbek (K_0+1)-nél; a második so-

rozat számai folyvást kisebbednek vagy legalább soha nem nagyobbodnak és mindig nagyobbak K_0-nál; továbbá két megfelelő tagnak $\frac{1}{X^m}$ különbsége m növekedtével minden határon túl kisebbedik. A két sorozat tagjai tehát m növekedtével egy közös l határérték felé közelednek, még pedig az első sorozat tagjai alulról s a másodiknak tagjai felülről.

Ha most valamely b szám kisebb mint l, akkor m eléggé nagy értékénél $\frac{K_m}{X^m}$ jobban közelíti meg l-t semmint b s így

$$b < \frac{K_m}{X^m}.$$

Ennélfogva a $\frac{K_m}{X^m}$ törttel együtt b is a B osztályba tartozik.

Viszont ha valamely a szám nagyobb mint l, akkor m eléggé nagy értékénél

$$a > \frac{K_m+1}{X^m}$$

s így a az A osztályba tartozik.

Az imént meghatározott l szám tehát csakugyan avval a tulajdonsággal bír, hogy a nálánál nagyobb számok mind az A osztályba s a nálánál kisebb számok mind a B osztályba tartoznak.

Erről az l számról azt mondjuk, hogy az adott sorozatnak vagy röviden u_m-nek *felső határa* (limes superior) *végtelen nagy m-re vonatkozólag.** Képletben:

$$l = \lim_{m=\infty}. \sup. u_m.$$

E fogalom kiterjeszthető az előbb említett két kivételes esetre is; még pedig ekkor l értéke $+\infty$ ill. $-\infty$.

Különösen fontos az az eset, midőn úgy az

$$u_1, u_2, \ldots u_m, \ldots$$

* Ha nem kell félreértéstől tartani, akkor elhagyjuk azt a megjegyzést, hogy a felső határ *végtelenül nagy m-re vonatkozólag* értendő, noha röviden felső határnak mást szokás nevezni.

sorozatnak, mint a

$$-u_1, -u_2, \ldots, -u_m, \ldots$$

sorozatnak felső határai *véges* számértékek s a kettő egymástól csak előjelben különbözik. Ha ismét u_m felső határát l-lel, tehát $-u_m$ felső határát $-l$-lel jelöljük, akkor esetünkben bármily kis ε pozitiv számhoz található egy oly M pozitiv egész szám, hogy

$$u_m < l+\varepsilon \quad \text{és} \quad -u_m < -l+\varepsilon,$$

vagyis

$$l-\varepsilon < u_m < l+\varepsilon,$$

ha csak $m > M$. Ekkor tehát l az (1) alatti sorozatnak vagy röviden u_m-nek *határértéke* (limes). Képletben:

$$l = \lim_{m=\infty} u_m$$

vagy rövidebben

$$l = \lim u_m.$$

Ilyenkor az (1) alatti számsorozatról azt mondjuk, hogy tagjai *szabályosan közelednek l-hez.*

4. *Az*

$$a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m+\cdots$$

hatványsor összetartási körének ρ sugara az

$$l = \lim_{m=\infty} \sup. \left| \sqrt[m]{a_m} \right|$$

reciprok értékével egyenlő.

Valóban, ha

$$|x| > \frac{1}{l}$$

azaz

$$\frac{1}{|x|} < l,$$

akkor, minthogy $\frac{1}{|x|}$ a B osztályba tartozik, végtelenül sok a_mx^m tagra vonatkozólag lesz

$$\left| \sqrt[m]{a_m} \right| > \frac{1}{|x|}.$$

Ennélfogva az $\frac{1}{l}$-nél nagyobb abszolut értékű x esetében $|\sqrt[m]{a_m}x|$ és vele együtt $|a_m x^m|$ m-nek végtelenül sok értékénél lesz nagyobb az egységnél. A sor tehát ekkor az összetartásnak már azt az első feltételét sem elégíti ki, hogy általános tagjának határértéke zérus legyen.

Ha ellenben

$$|x| < \frac{1}{l},$$

akkor a hatványsor összetartása következőleg látható be. Legyen:

$$r = |x|,$$

továbbá jelentsen r' egy r és $\frac{1}{l}$ közé eső számértéket. Az $\frac{1}{r'}$-hez legfeljebb véges számmal található oly m, hogy

$$|\sqrt[m]{a_m}| > \frac{1}{r'}.$$

Mihelyt tehát m nagyobb egy bizonyos M egész számnál, a következő egyenlőtlenség áll fenn:

$$|\sqrt[m]{a_m}| \leqq \frac{1}{r'},$$

minélfogva

$$|a_m x^m| \leqq \left(\frac{r}{r'}\right)^m.$$

Ekkor tehát a hatványsorban egy bizonyos tagtól kezdve a tagoknak abszolut értékei rendre kisebbek vagy legalább nem nagyobbak, mint abban a geometriai haladványban, melynek hányadosa a $q = \frac{r}{r'}$ valódi tört. A hatványsor e szerint ekkor valóban feltétlenül összetartó.

5. Ha $l = +\infty$ akkor $\rho = 0$. Ekkor tehát a sor csak az $x = 0$ helyen összetartó s nem értelmez függvényt.

Viszont ha $l = 0$, akkor $\rho = +\infty$, vagyis a sor x minden véges értékénél feltétlenül összetart. Ez az eset akkor és csak akkor áll be, ha

$$\lim. \sqrt[m]{a_m} = 0.$$

Tehát *valamely hatványsor akkor és csak akkor tart össze x-nek minden véges értékénél, ha*

$$\lim. \sqrt[m]{a_m} = 0. \tag{2}$$

Ha ez úgy történik, hogy az a_m-ek egy bizonyos tagtól kezdve zérussal egyenlők, akkor végtelen sor helyett egy végesszámú tagból álló több tagúval van dolgunk, vagyis az x-nek *ráczionális egész függvényével.* Azért általában az egész számsíkban összetartó hatványsorok által értelmezett függvényeket *egész függvényeknek* mondjuk, még pedig abban az esetben, midőn nem ráczionálisak, *egyértékű transzczendens egész függvényeknek* nevezzük őket.

6. Ha pl. az imént mondottakat annak bebizonyítására akarjuk használni, hogy az

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \cdots$$

sor az x-nek minden értékénél összetartó, akkor csak azt kell kimutatnunk, hogy

$$\lim. \frac{1}{\sqrt[m]{m!}} = 0.$$

E végre abból indulhatunk ki, hogy

$$\frac{(m+1)^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{(m+1)^m}{m!} = \frac{m^m}{m!}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \frac{m^m}{m!} \lim._{m=\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

vagyis

$$\frac{(m+1)^{m+1}}{(m+1)!} < \frac{m^m}{m!} e.$$

E szerint

$$\frac{2^2}{2!} < \frac{1}{1!} e = e \quad \frac{3^3}{3!} < \frac{2^2}{2!} e < e^2, \ldots, \frac{m^m}{m!} < e^{m-1},$$

tehát

$$\frac{1}{m!} < \frac{e^{m-1}}{m^m}. \tag{3}$$

Innen

$$\frac{1}{m!} < \frac{e^m}{m^m}$$

és

$$\left|\frac{1}{\sqrt[m]{m!}}\right| < \frac{e}{m},$$

minél fogva csakugyan

$$\lim. \frac{1}{\sqrt[m]{m!}} = 0.$$

7. A ρ és $\lim. \sup._{m=\infty} \left|\sqrt[m]{a_m}\right|$ között talált kapcsolat nemcsak a hatványsorok elméletében találhat alkalmazást, hanem arra is alkalmas, hogy *határértékekre* és *felső határokra* vonatkozó tételek bebizonyítására használjuk. Ily módon pl. bármely

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$$

számsorozatról minden számítás nélkül bebizonyítható, hogy

$$\lim. \sup._{m=\infty} \left|\sqrt[m]{ca_m}\right| = \lim. \sup._{m=\infty} \left|\sqrt[m]{a_m}\right|, \tag{4}$$

bármily állandó s a zérustól különböző számértéket is jelentsen c.

Valóban a jobb oldalt álló felső határ az

$$a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots$$

sorra vonatkozólag adja meg az összetartási kör sugarának reciprok értékét, a bal oldalt álló felső határ pedig a

$$ca_1 x + \cdots + ca_m x^m + \cdots$$

sorra vonatkozólag. Ámde e két sor összetartási köre azonos.

Hasonlóképpen:

$$\lim. \sup._{m=\infty} \left|\sqrt[m]{a_{m+i}}\right| = \lim. \sup._{m=\infty} \left|\sqrt[m]{a_m}\right| \tag{5}$$

és

$$\lim. \left|\sqrt[m]{a_{m+i}}\right| = \lim. \left|\sqrt[m]{a_m}\right|, \tag{6}$$

hol i egy tetszőleges, de állandó pozitiv számot jelent.

Ugyanis $\lim. \sup. \left|\sqrt[m]{a_{m+i}}\right|$ az

$$a_i + a_{i+1} x + \cdots + a_{m+i} x^m + \cdots \tag{7}$$

sorra vonatkozólag adja meg az összetartási kör sugarának reciprok értékét. Amde e sor x^i tényezővel szorozván, az

$$a_1x+\cdots+a_ix^i+a_{i+1}x^{i+1}+\cdots+a_{m+i}x^{m+i}+\cdots \tag{8}$$

sornak

$$a_ix^i+a_{i+1}x^{i+1}+\cdots+a_{m+i}x^{m+i}+\cdots$$

maradék sorát adja meg. Tehát a (7) alatti sor összetartási köre megegyezik a (8) alatti sor összetartási körével, a melyre vonatkozólag a sugár reciprok értéke lim. sup. $\left|\sqrt[m]{a_m}\right|$.

E szerint az (5) alatti képlet valóban helyes.

Abban a különös esetben, midőn $\left|\sqrt[m]{a_m}\right|$ szabályosan közeledik egy zérustól különböző véges l határértékhez, — bármily kis pozitiv számot jelentsen is δ — az m-nek elegendő nagy értékeinél

$$l-\delta<\left|\sqrt[m]{a_m}\right|<l+\delta$$

s így

$$\frac{1}{l+\delta}<\left|\frac{1}{\sqrt[m]{a_m}}\right|<\frac{1}{l-\delta}$$

Ekkor tehát nemcsak

$$\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{a_m}\right|=\lim.\left|\sqrt[m]{a_m}\right|=l,$$

hanem egyszersmind

$$\lim_{m=\infty}\sup.\left|\frac{1}{\sqrt[m]{a_m}}\right|=\lim.\left|\frac{1}{\sqrt[m]{a_m}}\right|=\frac{1}{l}.$$

Ennélfogva továbbá

$$\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{a_{m+i}}\right|=l$$

és

$$\lim_{m=\infty}\sup.\left|\frac{1}{\sqrt[m]{a_{m+i}}}\right|=\frac{1}{l}.$$

Tehát bárminő kis pozitiv számot jelentsen is ε, az m elegendő nagy értékeinél

$$\left|\sqrt[m]{a_{m+i}}\right| < l+\varepsilon \quad \text{és} \quad \frac{1}{\left|\sqrt[m]{a_{m+i}}\right|} < \frac{1}{l-\varepsilon},$$

vagyis

$$l-\varepsilon < \left|\sqrt[m]{a_{m+i}}\right| < l+\varepsilon,$$

mint azt a (6) alatti egyenlőség kívánja.

Ennek az egyenlőségnek imént végzett bebizonyítása csak akkor nem alkalmazható, ha lim. $\sqrt[m]{a_m}$ értéke zérus vagy végtelen.

Ámde az első esetben a szóban forgó egyenlőség egyszerűen azt mondja, hogy ha az

$$a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m+\cdots$$

és

$$a_i+a_{i+1}x+\cdots+a_{m+i}x^m+\cdots$$

sorok egyike az egész síkban összetartó, akkor a másik is olyan.

A második kivételes eset pedig az elsőre vezethető vissza, ha a reciprok értékekre térünk át.

II.

8. Ha az

$$a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m+\cdots \tag{9}$$

hatványsor értelmezte $f(x)$ függvénynek a ρ sugaru K összetartási kör kerületén nincsen más szinguláritása, mint hogy

$$x_1, x_2, \ldots, x_r$$

rendre

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$$

szeres polusok, akkor az adott hatványsornak az

$$\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^{\mu_1}\left(1-\frac{x}{x_2}\right)^{\mu_2}\cdots\left(1-\frac{x}{x_r}\right)^{\mu_r} \tag{10}$$

egész függvénynyel való

$$b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m+\cdots \tag{11}$$

szorzata nemcsak K belsejében, hanem egyszersmind K kerületének összes helyeinek környezetében szabályosan viselkedik, tehát ezen új sor K' összetartási körének ρ' sugara nagyobb mint ρ.

Legyen most már rövidség kedvéért

$$p=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r, \tag{12}$$

s vizsgáljuk meg a következő $(p+1)$-ső fokú szimmetrikus determinánsnak

$$D_{m,p}=\begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_{m+p+1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m+p} & a_{m+p+1} & \ldots & a_{m+2p} \end{vmatrix} \tag{13}$$

m-dik gyökének felső határát végtelen nagy m-re vonatkozólag. E determinánsban minden egyes a_{m+i} elemre vonatkozólag

$$\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{a_{m+i}}\right|=\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{a_m}\right|=\frac{1}{\rho}.$$

Ha tehát m-et eléggé nagynak választjuk, akkor

$$|a_{m+i}|<\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho}\right)^m,$$

hol ε egy tetszőlegesen kicsinynek választott pozitiv szám. Ennélfogva (m eléggé nagy értékei mellett) a determináns minden egyes tagjának abszolut értéke kisebb

$$\frac{(1+\varepsilon)^{p+1}}{\rho^{p+1}}$$

m-dik hatványánál. Továbbá

$$|D_{m,p}|<(p+1)!\,\frac{(1+\varepsilon)^{(p+1)m}}{\rho^{(p+1)m}},$$

tehát

$$\left|\sqrt[m]{\frac{D_{m,p}}{(p+1)!}}\right|<\frac{(1+\varepsilon)^{p+1}}{\rho^{p+1}}<\frac{1+\varepsilon'}{\rho^{p+1}},$$

hol ε' az ε-nál együtt tetszőlegesen kicsiny pozitiv számot jelent.

Innen

$$\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{D_{mp}}\right|=\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{\frac{D_{mp}}{(p+1)!}}\right|\leq\frac{1}{\rho^{p+1}}. \tag{14}$$

Még pedig a jelen esetben

$$\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{D_{mp}}\right|<\frac{1}{\rho^{p+1}}.$$

Ha ugyanis a (10) alatti szorzatnak kifejtett alakja

$$P_p(x)=1+A^{(1)}x+\cdots+A^{(p)}x^p, \tag{15}$$

akkor a (11) alatti sorban

$$b_{m+p}=a_{m+p}+A^{(1)}a_{m+p-1}+\cdots+A^{(p)}a_m, \tag{16}$$

minélfogva D_{mp} következőleg is írható:

$$D_{mp}=\begin{vmatrix} a_m & \ldots & a_{m+p-1} & b_{m+p} \\ a_{m+1} & \ldots & a_{m+p} & b_{m+p-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m+p} & \ldots & a_{m+2p-1} & b_{m+2p} \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Itt az utolsó oszlopban bármely b_{m+i} elemre vonatkozólag

$$\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{b_{m+i}}\right|=\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{b_m}\right|=\frac{1}{\rho'}.$$

Ha tehát m-et eléggé nagynak választjuk, akkor

$$|b_{m+i}|<\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho'}\right)^m,$$

továbbá D_{mp}-nek (17) alatti alakjának kifejtésénél az egyes tagok abszolut értéke kisebb mint

$$\frac{(1+\varepsilon)^{p+1}}{\rho^p\rho'}$$

m-dik hatványa. Ennélfogva

$$\left|\sqrt[m]{\frac{D_{mp}}{(p+1)!}}\right|<\frac{(1+\varepsilon)^{p+1}}{\rho^p\rho'}<\frac{1+\varepsilon'}{\rho^p\rho'}$$

és

$$\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{D_{mp}}\right|\leqq\frac{1}{\rho^p\rho'}<\frac{1}{\rho^{p+1}}. \tag{18}$$

Az imént végzett megfontolások eredménye következőleg foglalható össze:

Akármilyen legyen a hatvány sor által értelmezett függvény magaviselete az összetartási körön, a p-nek bármely tetszőleges de állandó pozitiv értékénél

$$\lim_{m=\infty} \sup. \left| \sqrt[m]{D_{mp}} \right| \leqq \frac{1}{\rho^{p+1}} .$$

Ha pedig az összetartási körön nincs más szinguláris hely, mint összesen p polus (hol a többszörös polusok többszörösségük foka szerint vannak számolva), *akkor*

$$\lim_{m=\infty} \sup. \left| \sqrt[m]{D_{mp}} \right| < \frac{1}{\rho^{p+1}} .$$

Ha tehát a

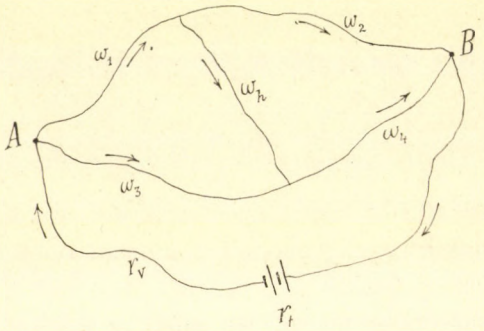
$$\lim_{m=\infty} \sup. \left| \sqrt[m]{a_m} \right|, \quad \lim_{m=\infty} \sup. \left| \sqrt[m]{D_{m1}} \right|, \ldots, \lim_{m=\infty} \sup. \left| \sqrt[m]{D_{mP}} \right|, \ldots$$

sorozat tagjai rendre megegyeznek $\frac{1}{\rho}$ első, második, stb. általában $(P+1)$-ső hatványaival, akkor az összetartási kör kerületén más szinguláris helynek is kell lennie mint pusztán polusoknak. E szerint ekkor az az $x=0$ körül rajzolható legnagyobb $\mathfrak{K}$ kör, melyen belül $f(x)$ a ráczionális függvények módjára viselkedik, megegyezik a K összetartási körrel.

Kürschák József.

A WHEATSTONE-FÉLE HÍD ELLENÁLLÁSA.

Ha egy áramkörbe A és B pontok közé oly ellenállás csoportot iktatunk, melynek elrendezése a WHEATSTONE-féle híd schemájával egyezik meg; akkor az ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 és ω_h ellenállásokból alakult



rendszer egy bizonyos R nagyságú ellenállásként fog szerepelni az eredeti áramkörben.

Ennek az R ellenállásnak a kiszámítása, mint ismeretes, a KIRCHHOFF-féle törvényekből folyó elsőfokú egyenlet rendszerből és az OHM-féle törvény egyenletéből történik.

E sorokban előállítom R-et mint az ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 és ω_h ellenállások függvényét, hogy kiderüljön az a törvény, a mely szerint alkotják ezek az ellenállások a belőlök származó eredő ellenállást, R-et.

Ezzel kapcsolatban kimutatom azt, hogy miként vezethető le az R számára talált függvénynek megfelelő értelmezéséből a párhuzamos elágazások ellenállásának törvénye s a tulajdonképpeni

Wheatstone-hídnál fellépő arányosság az egyes ellenállások között arra az esetre, amidőn t. i. a hídban az áram intenzitása 0.

Az ábrán jelzett esetben mint adatok szerepelnek r_v és r_t vezetéki illetve telepbeli ellenállások, továbbá ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 és ω_h ellenállások s végre E a külső áramkörben levő elektromindító erő. E nyolcz adatból számíthatók ki a külső áramkör i és az egyes ágak i_1, i_2, i_3, i_4 és i_h áram intenzitásai és az R ellenállás.

E 7 ismeretlen meghatározására szolgálhat a következő 7 egyenlet:

$$iR + ir_v + ir_t = E \tag{1}$$

$$i_1\omega_1 + i_h\omega_h - i_h\omega_h = 0 \tag{2}$$

$$i_2\omega_2 - i_4\omega_4 - i_h\omega_h = 0 \tag{3}$$

$$i(r_v + r_t) + i_3\omega_3 + i_4\omega_4 = E \tag{4}$$

$$i = i_1 + i_3 \tag{5}$$

$$i_1 = i_2 + i_h \tag{6}$$

$$i_4 = i_2 + i_h \tag{7}$$

mely egyenletek közül az első Ohm törvényéből következik, a többi pedig a KIRCHHOFF-féle törvények folyománya az ábrán használt jelzéseknek megfelelőleg.

KIRCHHOFF törvényei alapján még több egyenlet is volna felírható, mint pl.:

$$i = i_2 + i_4,$$

vagy

$$i(r_v + r_t) + i_1\omega_1 + i_2\omega_2 = E,$$

de ezek az egyenletek már fölösleges egyenletek volnának a feladat megoldásához, mert az első az 5., 6. és 7., a második pedig a 2., 3. és 4. egyenletnek következménye.

Ama célunkat, hogy t. i. R értékét meghatározzuk, legegyszerűbben úgy érhetjük el, hogy a (2)—(7), összesen tehát 6 egyenletből, melyek csak a hat i-féle ismeretlent tartalmazzák, kiszámítjuk az i értékét, a mely értéket azután az (1) egyenletbe helyettesítvén, oly egyenlethez jutunk, mely egyedül csak az R ismeretlent tartalmazza.

A (2)—(7) egyenletek rendszere következőleg írható fel:

$$\begin{aligned}
0\,.\,i+\omega_1\,i_1+0\,.\,i_2-\omega_3\,i_3+0\,.\,i_4+\omega_h\,i_h&=0\\
0\,.\,i+0\,.\,i_1+\omega_2\,i_2+0\,.\,i_3-\omega_4\,i_4-\omega_h\,i_h&=0\\
(r_v+r_t)\,i+0\,.\,i_1+0\,.\,i_2+\omega_3\,i_3+\omega_4\,i_4+0\,.\,i_h&=E\\
1\,.\,i-1\,.\,i_1+0\,.\,i_2-1\,.\,i_3+0\,.\,i_4+0\,.\,i_h&=0\\
0\,.\,i+1\,.\,i_1-1\,.\,i_2+0\,.\,i_3+0\,.\,i_4-1\,.\,i_h&=0\\
0\,.\,i+0\,.\,i_1+0\,.\,i_2-1\,.\,i_3+1\,.\,i_4-1\,.\,i_h&=0
\end{aligned}$$

Ha ez egyenletrendszer determinánsát D-vel jelöljük, lesz:

$$D=\begin{vmatrix}
0 & \omega_1 & 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_h\\
0 & 0 & \omega_2 & 0 & -\omega_4 & -\omega_h\\
(r_t+r_v) & 0 & 0 & \omega_3 & \omega_4 & 0\\
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1
\end{vmatrix}=$$

$$=(r_v+r_t)\begin{vmatrix}
\omega_1 & 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_h\\
0 & \omega_2 & 0 & -\omega_4 & -\omega_h\\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & -1 & 1 & -1
\end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix}
\omega_1 & 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_h\\
0 & \omega_2 & 0 & -\omega_4 & -\omega_h\\
0 & 0 & \omega_3 & \omega_4 & 0\\
1 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & -1 & 1 & -1
\end{vmatrix}$$

Rövidség kedvéért hozzuk be a következő jelzéseket:

$$a=\begin{vmatrix}
\omega_1 & 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_h\\
0 & \omega_2 & 0 & -\omega_4 & -\omega_h\\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
1 & -0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & -1 & 1 & -1
\end{vmatrix}=$$

$$=\omega_1\omega_2+\omega_2\omega_3+\omega_3\omega_4+\omega_4\omega_1+(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)\,\omega_h$$

és

$$\beta = \begin{vmatrix} \omega_1 & 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_h \\ 0 & \omega_2 & 0 & -\omega_4 & -\omega_h \\ 0 & 0 & \omega_3 & \omega_4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_2\omega_3\omega_4 + \omega_3\omega_4\omega_1 + \omega_4\omega_1\omega_2 + (\omega_1+\omega_2)\,(\omega_3+\omega_4)\,\omega_h,$$

ekkor az egyenlet-rendszer determinánsa lesz:

$$D = (r_t+r_v)\,\alpha - \beta,$$

ami egyszersmind az i törtalakú értékének nevezője; míg a számláló a következő determináns lesz:

$$\begin{vmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_h \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 & -\omega_4 & -\omega_h \\ E & 0 & 0 & \omega_3 & \omega_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

E determináns értéke pedig nem más mint

$$E\alpha,$$

úgy hogy az i értéke ezek szerint:

$$i = \frac{E\alpha}{(r_t+r_v)\,\alpha - \beta}.$$

Helyettesítve i-nek ez értékét az 1. egyenletbe, lesz:

$$\frac{E\alpha}{(r_t+r_v)\,\alpha - \beta}\,(R+r_t+r_v) = E,$$

a honnan

$$R = -\frac{\beta}{\alpha},$$

vagy az α és β értékeinek figyelembe vétele mellett

$$R = \frac{w_1w_2w_3 + w_2w_3w_4 + w_3w_4w_1 + w_4w_1w_2 + (w_1+w_2)\,(w_3+w_4)\,w_h}{w_1w_2 + w_3w_4 + w_1w_4 + w_2w_3 + (w_1+w_2+w_3+w_4)\,w_h}.$$

Ez a képlet azt mondja, hogy az R értéke független az E, r_v és r_t adatoktól vagyis az elektromotoros erőnek s a vezetéki és a telepbeli ellenállásnak nagyságától, mint azt előre is lehetett gondolni, és egyedül csak az ω-féle ellenállásoktól függ és pedig oly módon hogy az értékét egy tört fejezi ki, melyben *a számláló az ágakban lévő ellenállásokból alkotott ternók összege, hozzá adva ehhez az egyes ágak és a híd ellenállásának a szorzatát, a nevező pedig az ugyanazon ágon fekvő és a keresztben fekvő ellenállások szorzatainak összege, hozzáadva ehhez az ágakban lévő ellenállások összegének és a híd ellenállásának szorzatát.*

Hozzuk be rövidség kedveért a következő jelzéseket:

$$S_3=\omega_1\omega_2\omega_3+\omega_2\omega_3\omega_4+\omega_3\omega_4\omega_1+\omega_4\omega_1\omega_2,$$

és

$$S_2=\omega_1\omega_2+\omega_2\omega_3+\omega_3\omega_4+\omega_4\omega_1,$$

akkor R értéke lesz:

$$R=\frac{S_3+(\omega_1+\omega_2)\,(\omega_3+\omega_4)\,\omega_h}{S_2+(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)\,\omega_h}$$

Az R számára nyert eme kifejezés megadja az eredő ellenállás értékét arra az esetre is, ha megszüntetjük az ágaknak híd által való összeköttetését, azaz a rendszer redukálódik két ágból álló párhuzamos elágazásra.

A hídnak hiánya ugyanis egyértelmű egy szigetelő anyagból álló, tehát végtelen nagy ellenállással biró hídnak alkalmazásával és így az R értékét meghatározó kifejezésnek $\omega_h=\infty$ esetre vonatkozó határértéke fejezi ki az ellenállást abban az esetben, ha csak az ágak $\omega_1+\omega_2$ és $\omega_3+\omega_4$ szerepelnek mint párhuzamos elágazások. Erre az esetre tehát

$$R=\lim.\left[\frac{S_3+(\omega_1+\omega_2)\,(\omega_3+\omega_4)\,\omega_h}{S_2+(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)\,\omega_h}\right]_{\omega_h=\infty}=$$

$$=\lim.\left[\frac{\dfrac{S_3}{\omega_h}+(\omega_1+\omega_2)\,(\omega_3+\omega_4)}{\dfrac{S_2}{\omega_h}+(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}\right]_{\omega_h=\infty}=\frac{(\omega_1+\omega_2)\,(\omega_3+\omega_4)}{(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}$$

ami nem más, mint két párhuzamos ág ellenállásának ismert képlete, a midőn az egyik ágnak $(\omega_1+\omega_2)$, a másik ágnak pedig $(\omega_3+\omega_4)$ az ellenállása.

Végre ugyancsak az R értékét meghatározó kifejezésből felelhetünk arra a kérdére is, hogy lehetnek-e oly ω_1, ω_2, ω_3 és ω_4 ellenállások, a melyek mellett az R értéke függetlenné válik az ω_h értékétől, s ha igen, ω_1, ω_2, ω_3 és ω_4-re nézve mi lesz az a feltétel, a mely mellett ez az eset bekövetkezik.

Hogy erre a kérdésre felelhessünk, meg kell vizsgálni az R értékét meghatározó kifejezést. Ha R-nek a fenti képletében

$$S = (\omega_1+\omega_2)\ (\omega_2+\omega_4)$$

és

$$S_1=\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4$$

rövidítésekkel élünk, akkor az R értékét a következő egyszerű alakban állíthatjuk elő:

$$R = \frac{S_3+S\omega_h}{S_2+S_1\omega_h},$$

hol S_3, S_2, S_1 és S mint ω_1, ω_2, ω_3 és ω_4 függvényei határozott értéket nyernek, mihelyest eme ω-féle mennyiségek értékei meg vannak adva. A kérdés ezekután tisztán mathematikai feladattá válik, amennyiben csak azt kell eldönteni, hogy R-nek ily alakú tört függvénye lehet-e függetlenné bizonyos esetben ω_h-nak az értékétől.

Könnyen belátható, hogy ez az eset bekövetkezik akkor, a midőn fennáll a következő relatio:

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{S}{S_1},$$

mert ez annyit jelent, hogy található ekkor egy bizonyos k szám, a melyre nézve

$$S_3=kS$$

és

$$S_2=kS_1,$$

minek következtében erre az esetre

$$R = \frac{kS+S\omega_h}{kS_1+S_1\omega_h} = \frac{S(k+\omega_h)}{S_1(k+\omega_h)} = \frac{S}{S_1} = \frac{(\omega_1+\omega_2)\ (\omega_3+\omega_4)}{(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)},$$

tehát az R értéke függetlenné vált az ω_h értékétől.

Ez az eredmény összehasonlítva a fentebbiekkel, azt mondja, hogy a midőn ω_h értéke nincs befolyással az egész rendszer ellenállására, akkor az R eredő ellenállás éppen akkorává válik, mint amekkora volt az esetben, midőn végtelen nagy ellenállással biró híd használtatott, vagyis a midőn a rendszer átalakult két párhuzamos ágból álló rendszerré, melyben a híd hiányzik, tehát nincs áramlás egyik ágból a másikba.

Könnyen belátható az is, hogy a jelen esetben, amidőn t. i. az ω_h értéke nincs befolyással az R értékére, az eredő ellenállásra, az áramintenzitásnak a hídban 0-nak kell lenni, azaz a hídban nem folyhatik áram.

Ha ugyanis feltételezzük azt, hogy áram kering a hídban is, a híd ellenállásának ω_h-nak változtatásával meg kellene változni az ω_h ellenálláson átfolyó áram intenzitásának s ezzel együtt az ágakban s következőleg a főáramkörben haladó áram intenzitásának is; mivel azonban jelenleg az ω_h változásával az áramkör ellenállásában semmiféle változás sem áll be, nem változhat a főáram intenzitása sem és így, az a feltétel, hogy t. i. a hídban áram folyik, nem állhat fenn.

Erre az eredményre vezet a következő gondolatmenet is: ha bármely ω_h mellett ugyanaz az eredő ellenállás, akkor ugyanaz lesz a főáramkörben, az egyes ágakban s ha egyáltalán létezik, a hídban haladó áram intenzitása is bármiféle ω_h értékre, tehát $\omega_h = \infty$-re is, ugyanakkora intenzitásu áramnak kell lenni a hídban. Végtelen nagy ellenállású vezetőben azonban véges értékű elektromotoros erő 0 intenzitású áramot hoz létre, ami annyit tesz, hogy áram a hídban nem folyik.

Hátra van még az ω_1, ω_2, ω_3 és ω_4 között fentálló amaz összefüggésnek előállítása, a melyhez jelen esetünk fűződik.

Fentebb kimutattuk, hogy az R értéke az esetben lesz független az ω_h értékétől, ha fentáll a következő egyenlet:

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{S}{S_1}.$$

Ha ezen egyenletben helyettesítjük az S-féle mennyiségeket az ω-féle mennyiségek ama függvényeivel, a melyeket azok képviselnek, az egyenlet a végezhető egyszerűsítések után a következő alakot ölti:

$$2\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4 = \omega_1^2\omega_4^2 + \omega_2^2\omega_3^2,$$

azaz

$$\omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_3 = 0.$$

Ez tehát az a relatio az ω_1, ω_2, ω_3 és ω_4 között, amelynek fenn kell állania, hogy az ω_h értékétől függetlenné legyen az eredő ellenállás értéke, s amely esetben, mint fentebb kimutattuk, a hídban áram nem folyik.

Az előbbi relatio még így is írható:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_3}{\omega_4},$$

ami nem más, mint a Wheatstone-féle híd négy ellenállása közt fentálló összefüggés, a midőn a hídban az áram intenzitása 0, és így magának a hídnak az ellenállása semmiféle befolyással sincs az egész rendszerre.

Szijártó Miklós.

A FERDE ÉS EGYENES KÖRKÚP SÍKMETSZETEINEK GYUJTÓPONTJAIRÓL.

Míg az egyenes körkúp síkmetszeteinek gyujtópontjai QUETELET tételének segítségével közvetlenül igen egyszerű módon megszerkeszthetők, addig a ferde körkúp síkmetszéseire nézve ily egyszerű módszerek mindeddig ismeretlenek. Csak CHASLES ad (az «*Aperçu historique*»* című művében) minden bebizonyítás mellőzésével szerkesztést oly metszések gyujtópontjainak meghatározására, a melyeknek síkjai a ferde körkúp tengelymetszetére merőlegesen állanak.

Mivel e szerkesztés önmagában is érdekes, az egyenes körkúpra való alkalmazásában pedig igen egyszerű, de úgy látszik kevésbbé ismert eljárásra vezet, talán nem lesz felesleges a következőkben e szerkesztésnek egyszerű bebizonyítását közölni, és a megfelelő vizsgálatokat, függetlenül az általános esettől, az egyenes körkúpra nézve is elvégezni.

Ha ASB (1-sö ábra) valamely ferde körkúpnak a rajzlap síkjában fekvő tengelymetszete és AB a kúp alapjának átmérője, akkor CD — föltéve, hogy $SAB\sphericalangle = SBC\sphericalangle = \alpha$ — annak az alappal antiparallel körmetszetnek átmérőjét jelöli, a melyet B ponton át vezethetünk. Az antiparallel körmetszetek M_1 és M_2 középpontjainak összeköttetése $M_1M_2 \parallel AD$-vel.

$$AS=2n,\ BS=2m,\ BM_1=r \text{ és } BM_2=\rho$$

jelölést használva, a

$$BHM_1\triangle \sim BHM_2\triangle$$

* Lásd e mű német fordítását: Geschichte der Geometrie, übersetzt von Dr. L. A. Sohnke, Halle 1839, p. 288.

hasonlóságot tekintetbe véve, a következő egyenletekre jutunk:

$$BM_1 : BM_2 = M_1H : BH,$$

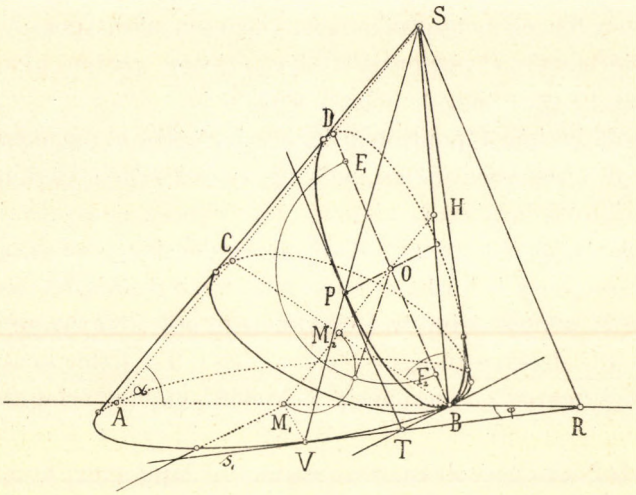
vagy

$$r : \rho = n : m;$$

tehát

$$\rho = \frac{mr}{n}; \qquad 1)$$

$$M_1H : BH = BH : M_2H,$$



1. ábra.

vagy

$$n : m = m : M_2H,$$

$$M_2H = \frac{m^2}{n}, \qquad 2)$$

ennélfogva

$$M_1M_2 = M_1H - M_2H = n - \frac{m^2}{n}$$

végre:

$$M_1M_2 = \frac{n^2 - m^2}{n}.$$

A $BHM_1\triangle$-ből következik, hogy:

$$\overline{BH}^2 = \overline{BM_1}^2 + \overline{M_1H}^2 - 2.\overline{BM_1}.\overline{M_1H}.\cos\alpha,$$

vagy

$$m^2=r^2+n^2-2rn\cos\alpha;$$

a miből

$$\cos\alpha=\frac{r^2+n^2-m^2}{2rn}. \qquad 4)$$

Ha a B ponton át egy a tengelymetszet síkjára merőlegesen álló metsző síkot vezetünk, akkor a fennálló szimmetriánál fogva a BD egyenes a kimetszett görbének egyik tengelyét szolgáltatja; a másik tengely abban az egyenesben adódik ki, a melyet az O középpontban a tengelymetszet síkjára merőlegesen állíthatunk. A görbe ez utóbbi tengely P végpontjában lévő érintője párhuzamos a BD tengelylyel s így a tengelymetszet síkjával is.

A ferde körkúp P pontjában lévő érintősíkja a tengelymetszet síkját SR egyenesben metszi, mely ugyancsak DB-vel párhuzamos. Ez az érintősík továbbá az alapkör síkját egy, az alapkört érintő és az előbb talált R ponton áthaladó egyenesben metszi, a mely $s_1\equiv RV$-ben meg is húzható. Mivel a kimetszett görbe fél tengelyei, a B és P pontok érintőivel egyetemben, egy a rajzlapra merőlegesen álló derékszögű négyszöget — $BOPT$-t határoznak meg, a melynek negyedik csúcspontja T az előbb említett érintő és alapsík metszésvonalához is tartozik, világos, hogy a B pontban lévő érintő BT-ben egy olyan vonaldarabot állapit meg, a melynek hosszasága a tengelymetszetre merőlegesen álló tengely félhosszuságával egyenlő. Ha

$$OB=a,\quad BT=b,\quad OM_1=x,\quad OM_2=y,\quad BR=k,$$

akkor az

$$M_1OB\triangle\sim ASR\triangle$$

hasonlóságból következik, hogy

$$OM_1 : AS=BM_1 : AR,$$

vagy

$$x : 2n=r : (2r+k)$$

$$x(2r+k)=2rn$$

$$k=\frac{2rn}{x}-2r=2r\frac{n-x}{x}; \qquad 5)$$

továbbá

$$RM_1 = k + r$$

$$RM_1 = \frac{2rn}{x} - 2r + r = r\,\frac{2n-x}{x}. \qquad 6)$$

Az $R_1MV\triangle$-ből folyó összefüggések a következők : ha

$$M_1RV\sphericalangle = \varphi$$

akkor

$$\sin\varphi = \frac{r}{r\,.\,\dfrac{2n-x}{x}} = \frac{x}{2n-x}$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi} = \frac{\dfrac{x^2}{(2n-x)^2}}{1-\dfrac{x^2}{(2n-x)^2}}$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{x^2}{4u\,(n-x)} \qquad 7)$$

Az 5) és 7) alatti képletek figyelembe vételével a $BRT\triangle$-ből nyert

$$b^2 = k^2\,.\,\operatorname{tg}^2\varphi$$

reláczió a következő egyenletre vezet :

$$b^2 = \left(2r\,.\,\frac{n-x}{x}\right)\frac{x^2}{4n(n-x)} = \frac{r^2\,(n-x)}{n} \qquad I)$$

Carnot tételének az $OBM_1\triangle$-re való alkalmazása, végül az

$$\overline{OB}^2 = \overline{OM_1}^2 + \overline{BM_1}^2 - 2\,.\,\overline{OM_1}\,.\,\overline{BM_1}\,.\cos\alpha$$

vagy

$$a^2 = x^2 + r^2 - 2xr\cos\alpha$$

egyenletet szolgáltatja, a mely 4)-re való tekintettel következőképen írható :

$$a^2 = x^2 + r^2 - \frac{x(r^2+n^2-m^2)}{n}. \qquad II)$$

Mivel $e^2 = a^2 - b^2$, a II) és I) egyenleteknek egymásból való kivonása révén a következő értéket nyerjük :

$$e^2=x^2+r^2-\frac{x(r^2+n^2-m^2)}{n}-\frac{r^2(n-x)}{n}$$

vagy

$$e^2=\frac{x(nx-n^2+m^2)}{n}=x\left(x-\frac{n^2-m^2}{n}\right).$$

Ebből a 3) alatti reláczió figyelembevételével

$$e^2=x(OM_1-M_1M_2),$$

vagy

$$e^2=xy, \qquad \text{III)}$$

mely eredményt CHASLES a következő tételben fejezi ki:

A lineáris excentricitás ama körök sugarainak geometriai középarányosa, a melyeket a görbe középpontja, a tengelymetszet síkjában fekvő csúcspontok bármelyikén keresztül vezethető körmetszetek középpontjaival megállapít.

A talált egyenletekből látható, hogy a a görbe főtengelyét b pedig melléktengelyét jelöli, a míg az $x.y$ szorzat az x és y egyenlő előjelénél fogva pozitiv, azaz, míg az O középpont az M_1M_2 vonaldarabon kívül fekszik.

Ha $n<x$ (lásd az I alatti egyenletet) a melléktengely képzetes és a kimetszett görbe oly hiperbola, a melynek középpontja az $N\infty$ vonaldarabon van.

Az xy szorzat negativ volta mellett b a főtengelyt a pedig a melléktengelyt jelenti a metszet oly ellipszis, a melynek középpontja az M_1M_2 vonaldarabon van.

A határesetképen fellépő parabolikus metszet gyujtópontját az M_1M_3 vonaldarabnak, a tengelymetszet síkjában fekvő szimmetrálisa határozza meg.

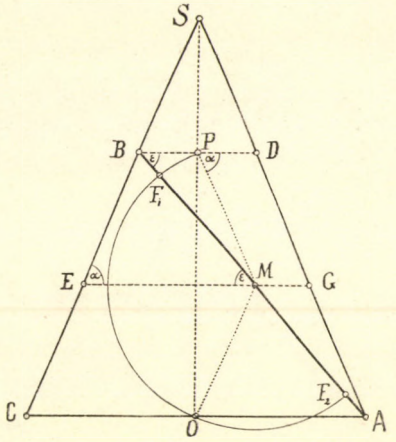
Lényegesen egyszerübb a vizsgálat az egyenes körkúpra nézve, az eredmény azonban azonos avval, a melyre jutunk, ha föltételezzük, hogy az előbb levezetett egyenletekben $m=n$.

Ha az elliptikus metszet esetében SAC (2-dik ábra) azt a tengelymetszetet jelöli, mely a metszősikra merőlegesen áll, ha továbbá AB a tengelymetszet és metszősík átmetszési vonala, akkor AB a kimetszett görbe főtengelye, felezőpontja pedig annak középpontja.

Legyen BD és EG az AC-vel párhuzamos, és legyenek $EM=u$ és $MG=v$ azon vonaldarabok, a melyeket M az EG-n megállapít, továbbá $EB=x$, akkor $BP=v$ és $MP=x$.

Jelölje a, illetőleg ε, a kúpalkotóknak, illetőleg a metszősíknak a kúp alapsíkjával való hajlásszögét, a és b pedig a kimetszett ellipszis féltengelyeit.

Mollweide reláczióinak az BEM és BPM háromszögekre való alkalmazása most a következő egyenletekre vezet:



2. ábra.

$$\frac{a-x}{u}=\frac{\sin\frac{a-\varepsilon}{2}}{\sin\frac{a+\varepsilon}{2}},$$

$$\frac{a+x}{v}=\frac{\cos\frac{\pi-(a+\varepsilon)}{2}}{\cos\frac{\pi-(a-\varepsilon)}{2}}=\frac{\sin\frac{a+\varepsilon}{2}}{\sin\frac{a-\varepsilon}{2}},$$

a melyeknek szorzata a

$$\frac{(a-x)\ (a+x)}{uv}=1$$

vagy a

$$a^2-x^2=uv$$

relácziót adja. Mivel u és v geometriai középarányosa szükségképen a görbe fél melléktengelyével egyenlő, lesz:

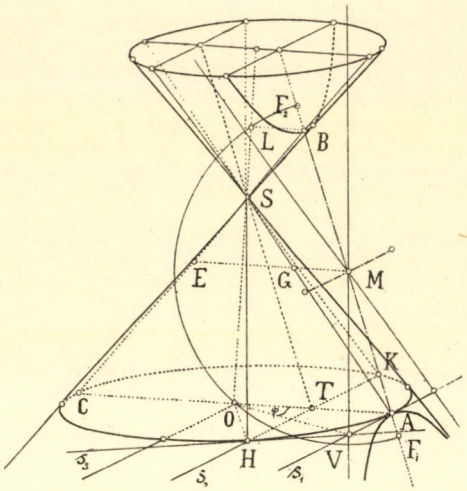
$$a^2 - x^2 = b^2,$$

a miből látható, hogy

$$x = e$$

a lineáris excentricitás.

Ebből következik, *hogy a lineáris excentricitás azzal az oldalvonallal párhuzamos vonaldarabbal egyenlő, a melyet a tengelymetszet síkjában, a középpontból a kúp tengelyéig húzhatunk.*



3. ábra.

Az egész levezetés érvényes a hiperbolikus metszetre is, ha ki tudjuk mutatni, hogy a melléktengely félhossza ugyancsak u és v-nek geometriai középarányosa.

Ha az előbbi feltevések fenntartása mellett, (3-dik ábra) a kúp csúcsán át, a metszősíkkal párhuzamos iránysíkot fektetünk, akkor e két sík a kúp alapsíkját két, a tengelymetszetre merőleges egyenesben metszi, a melyek egyike (s_1) az alapkört A-ban érinti, a másik (s_2) pedig vele két helyen találkozik, H és K-ban a metszősíkkal párhuzamos kúpalkotóknak, az alapkör síkjában fekvő pontjait állapítván meg.

A kúpnak SH alkotóban lévő érintősíkja az alapsíkját H pont s_3 érintőjében metszi és meghatározza az

$$(s_1, s_3) \equiv v$$

pontot, a mely a hiperbolának, az SH egyenessel párhuzamos fekvésű aszimptotájához tartozik.

Mivel s_3 a hiperbola csúcspontjában lévő érintője, az

$$AV = b$$

vonaldarab — a hiperbola egy elemi tulajdonságánál fogva — a melléktengely félhosszaságát is adja.

Legyen $OT=k$ és $TH=z$, és vegyük figyelembe, hogy $OC=u$ és $BL=v$, akkor SOC és SLB háromszögekből a következő értékeket nyerjük:

$$u=SC\cos\alpha \quad v=SB\,.\cos\alpha.$$

Tekintettel arra, hogy

$$BAC\triangle \sim STC\triangle,$$

lesz

$$BC : SC=AC : TC,$$

vagy

$$(CS+SB) : SC=AC : (TO+OC),$$

$$\left(\frac{u}{\cos\alpha}+\frac{v}{\cos\alpha}\right) : \frac{u}{\cos\alpha} = 2u : (k+u),$$

innen pedig

$$(u+v)\ (k+u)=2u^2$$

és

$$k = \frac{u(u-v)}{u+v}.$$

Ennek az értéknek felhasználásával a

$$\overline{TH}^2 = \overline{CT}\,.\,\overline{TA}.$$

reláczió a következő egyenletre vezet:

$$z^2 = \left[u+\frac{u(u-v)}{u+v}\right]\cdot\left[u-\frac{u(u-v)}{u+v}\right],$$

a melyből

$$z = \frac{2u\sqrt{uv}}{u+v}.$$

Mivel az $AOH\sphericalangle = \varphi$ jelölés mellett,

$$\sin 2\varphi = \frac{z}{u} = \frac{2\sqrt{uv}}{u+v}$$

és

$$\cos 2\varphi = \frac{k}{u} = \frac{u-v}{u+v},$$

tehát

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{1+\cos 2\varphi} = \frac{\sqrt{uv}}{u}$$

végre lesz:

$$AV = b = u\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{uv}$$

és így

$$b^2 = uv,$$

a mivel az emlitett tulajdonság be van bizonyitva.

A parabolikus metszetre vonatkozó szerkesztés egyaránt vagy a talált szerkesztés határesetének, vagy pedig a QUETELET-féle tétel folyományának tekinthető, a mely tételből az egyenes kúpra talált eredményünk könnyű szerrel közvetlenül is levezethető.

Szépréthy Béla.

A HARMONIKUS PÓLUSRÓL.

(Első közlemény.)

I. *Ha valamely egyenesen a* P_1, P_2, ... P_n, M *pontokat veszszük fel és a*

$$P_{12}, P_{123}, \ldots P_{12\ldots n-1}, P_{12\ldots n}$$

pontokat akként határozzuk meg, hogy ezek a

$$(P_2P_1P_{12}M) = -1^*$$
$$(P_3P_{12}P_{123}M) = -2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(P_nP_{12\ldots n-1}P_{12\ldots n}M) = -(n-1)$$

egyenletrendszert kielégítsék, akkor:

1. *A* $P_{12\ldots n} \equiv Q_{n+1}$ *pont független a* $P_1P_2 \ldots P_n$ *pontok sorrendjétől.*

2. *A* Q_{n+1} *pont kielégíti a*

$$(P_{k+1\ldots n}P_{12\ldots k}Q_{n+1}M) = -\frac{k}{n-k}$$

egyenletet.

3. *Ha a* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *pontcsoport mindegyik pontját a rajtuk keresztülmenő egyenes egy és ugyanavval a* P_{n+1} *pontjával felcseréljük,* n *számú új pontcsoportot nyerünk. Ha a* $P_1 \ldots P_{k-1} P_{n+1}P_{k+1} \ldots P_n$ *csoporthoz a* Q_k *pontot akként határozzuk meg, miként a* Q_{n+1} *pont keletkezett a* $P_1P_2 \ldots P_n$ *csoportból, akkor a P és Q pontcsoportok közt a következő összefüggés áll fenn:*

$$(P_1P_2 \ldots P_nP_{n+1}M) \barwedge (Q_1Q_2 \ldots Q_nQ_{n+1}M).$$

---

* Az $(ABCD)$ szimbolum az ismeretes $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ kettős viszonyt jelenti.

E projektiv pontsorok karakterisztikája egyenlő —n-nel, vagyis

$$(P_k Q_k NM) = -n,$$

a hol N a projektiv pontsorok második kettőspontját jelenti.

4. *A Q pontok csoportjából egy R pontcsoportot, ebből egy S pontcsoportot, és így tovább ugyanazon az úton származtathatunk le, mint a mely úton a Q keletkezett a P pontcsoportból.*

Mindezek a pontcsoportok projektivek, vagyis

$$(P_1 \ldots P_{n+1}\, M) \barwedge (Q_1 \ldots Q_{n+1} M) \barwedge (R_1 \ldots R_{n+1} M)$$

és kettőspontjaik M, N közösek. Az új pontcsoportok mindinkább közelednek az N kettősponthoz, a melylyel egy végtelen sokszor végzendő szerkesztés után a határon egyesülnek.

5. *Az N pont M-nek harmonikus pólusa a P, Q, R, . . . pontcsoportokra vonatkozólag.*

II. *E tételek akkor is maradnak érvényben, ha a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokat nem egy egyenesen, hanem egy síkban vagy a térben vesszük fel tetszőlegesen és M ama síknak tetszés szerinti egyenese, vagy a térnek egyik síkja; ekkor azonban a P és Q pontcsoportok oly kollineár rendszert alkotnak, a melynek kollineáczió-középpontja és tengelye N illetve M; karakterisztikája pedig —n.*

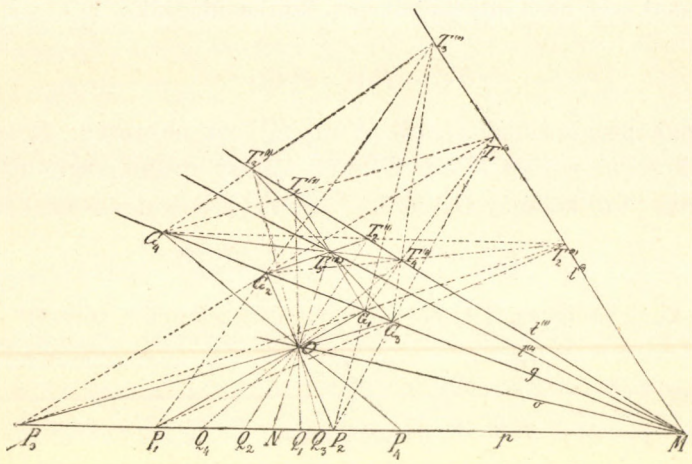
III. *Ha $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n+1}$, M tetszőleges térbeli egyenesek, akkor az előbbi tételek szintén érvényesek maradnak, csakhogy $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n+1}$, N szintén egyenesek lesznek, és a P_k, Q_k egyenesek M és N-re vonatkozólag egy axiális-kollineár rendszert képeznek, a melynek karakterisztikája —n.*

Bebizonyítás.

1. A p egyenesen vegyünk fel n pontot, $P_1, P_2, \ldots, P_n$-et és egy M pontot; az nP pontot projicziáljuk egy tetszés szerinti O pontból (1. ábra) egy az M ponton keresztül menő g egyenesre; legyenek a talált projekcziók: $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Nevezzük továbbá azt az egyenest, mely o-t ($o \equiv MO$) p, g-től harmonikusan elválasztja $t^{(0)}$-nak, és fektessük az M ponton át a $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(n-1)}$ egyeneseket úgy, hogy a

$$
\begin{aligned}
(gpt^{(0)}o) &= -1\\
(gt^{(0)}t^{(1)}p) &= -1\\
(gt^{(1)}t^{(2)}t^{(0)}) &= -1\\
&\cdots\cdots\cdots\\
(gt^{(n-3)}t^{(n-2)}t^{(n-4)}) &= -1\\
(gt^{(n-2)}t^{(n-1)}t^{(n-3)}) &= -1
\end{aligned}
\qquad \text{(I)}
$$

egyenletrendszert kielégitsék.



1. ábra.

Ebből az egyenletrendszerből következő új egyenletrendszer származtatható le:

$$
\begin{aligned}
(gpt^{(0)}o) &= -1\\
(gt^{(0)}t^{(1)}o) &= -2\\
(gt^{(1)}t^{(2)}o) &= -3\\
&\cdots\cdots\cdots\\
(gt^{(n-3)}t^{(n-2)}o) &= -(n-1)\\
(gt^{(n-2)}t^{(n-1)}o) &= -n.
\end{aligned}
\qquad \text{(II)}
$$

Ha ugyanis felteszszük azt, hogy

$$(gt^{(k-2)}t^{(k-1)}o) = -k,$$

tehát

$$(gt^{(k-1)}t^{(k-2)}o) = k+1,$$

és ennek az egyenletnek baloldalát $(gt^{(k-1)}t^{(k)}t^{(k-2)})$-vel, a jobboldalt az (I) szerint vele egyenlő értékű —1-gyel szorozzuk, akkor $(gt^{(k-1)}t^{(k)}o)=(gt^{(k-1)}t^{(k)}t^{(k-2)})\,(gt^{(k-1)}t^{(k-2)}o)=-1.(k+1)=-(k+1)$ egyenletet kapjuk, a melyből a (II) egyenletrendszer helyessége evidenciába lép.

A

$$P_{12},\ P_{123},\ \ldots,\ P_{12\ldots n-1}\,Q_{n+1}$$

pontokat ezek után következőképen szerkeszthetjük:

A

$$T_3^{(0)}=(P_1G_2,\ P_2G_1)$$

pontnak projekcióját G_3-ból $t^{(1)}$-re, $T_4^{(1)}$-nek nevezvén, $T_4^{(1)}$-nek projekcióját G_4-ből $t^{(2)}$-re, $T_5^{(2)}$-nek, és így tovább, végre $T_n^{(n-3)}$ pontnak projekcióját G_n-ből $t^{(n-2)}$-re $T_{n+1}^{(n-2)}$-nek nevezvén, a

$$T_3^{(0)},\ T_4^{(1)},\ \ldots,\ T_n^{(n-3)},\ T_{n+1}^{(n-2)}$$

pontoknak projekcióí O-ból a p egyenesre lesznek a keresett

$$P_{12},\ P_{123},\ \ldots,\ P_{12\ldots n-1},\ Q_{n+1}$$

pontok.

Ha ugyanis p, g, $t^{(k-3)}$, o sugarak és

$$\left|\,G_k\,T_{k+1}^{(k-2)}\,\right|_{(k=2,3,\ldots,n)}$$

egyenesnek metszéspontjait O pontból p egyenesre projicziáljuk, akkor (II) következtében

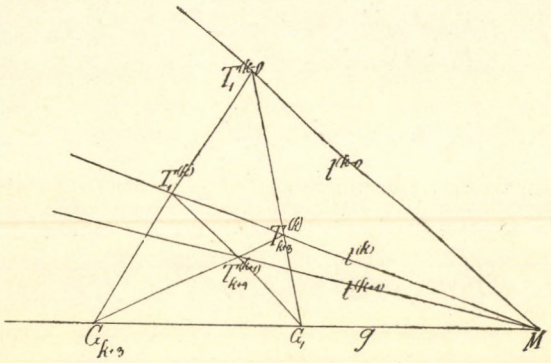
$$\begin{aligned}
&(P_2P_1P_{12}M) &&=-1\\
&(P_3P_{12}P_{123}M) &&=-2\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&\qquad\text{(III)}\\
&(P_{n-1}P_{12\ldots n-2}P_{12\ldots n-1}M) &&=-(n-2)\\
&(P_n\ P_{12\ldots n-1}Q_{n+1}M) &&=-(n-1)
\end{aligned}$$

egyenletrendszerhez vezettetünk, a mely a szerkesztés helyes voltát igazolja.

Ezután kimutatjuk, hogy ha a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontok közül két tetszőlegest egymással fölcserélünk Q_{n+1} helyzete változatlan marad.

A $t^{(0)}$ egyenesen fekvő $T_1^{(0)} = (P_2G_3, P_3G_2)$ pont projekcióját G_4-ből $t^{(1)}$-re $T_1^{(1)}$-nek nevezvén; $T_1^{(1)}$-nek projekcióját G_5-ből $t^{(2)}$-re $T_1^{(2)}$-nek, és így tovább, $T_1^{(k)}$-nak projekcióját G_{k+4} pontból $t^{(k+1)}$-re $T_1^{(k+1)}$-nek nevezvén (2. ábra): az I) egyenletrendszer és $T_1^{(k)} T_{k+3}^{(k)} G_1 G_{k+3}$ négyszög harmonikus tulajdonságai következtében, $G_1 T_1^{(k)}$ egyenes a $T_{k+4}^{(k+1)}$ ponton megy át.

Mert föltételezvén, hogy a $T_1^{(k-1)} T_{k+2}^{(k-1)} G_1 G_{k+2}$ négyszög $G_1 T^{(k-1)}$ oldala a $T_{k+3}^{(k)}$ ponton megy át (a mi abban az esetben fog bekövetkezni, midőn $k=1$), a $T_1^{(k)} T_{k+3}^{(k)} G_1 G_{k+3}$ négyszögnek $G_{k+3} T_1^{(k)}$, $G_1 T_{k+3}^{(k)}$ oldalai egymást $T_1^{(k-1)}$ pontban; $(G_1 G_{k+3}, T_1^{(k)} T_{k+3}^{(k)} =$



2. ábra.

$(g, t^{(k)})$ oldalai egymást az M pontban metszik, és így a harmadik oldalpár $G_1 T_1^{(k)}$, $G_{k+3} T_{k+3}^{(k)}$ metszéspontja azon a $t^{(k+1)}$ egyenesen fekszik, a mely a $T_1^{(k-1)}$ pontot, vagy a mi ugyanaz, a $t^{(k-1)}$ egyenest, t^k és g-től harmonikusan választja el. Ámde a $t^{(k+1)}$ és $G_{k+3} T_{k+3}^{(k)}$ egyeneseknek metszéspontja $T_{k+4}^{(k+1)}$, és ezért $G_1 T_1^{(k)}$ is ezen a ponton megy keresztül.

Vegyük most fel, hogy csak két pont P_1, P_2 és M volna adva, könnyen látható, hogy akkor a

$$(P_2 P_1 P_{12} M) = -1, \quad (P_1 P_2 P_{21} M) = -1$$

egyenletekből meghatározott P_{12}, P_{21} pontok egybeesnek, vagyis

$$P_{ij} \equiv P_{ji}.$$

Ha három pontot veszünk fel, P_1, P_2, P_3-at, akkor a

$$(P_2P_3P_{32}M)=-1, \quad (P_1P_{32}P_{321}M)=-2$$

egyenletekből meghatározott P_{321} pont, minthogy $T_4^{(1)}$-nek projekciója O-ból p-re, P_{123}-mal esik egybe, vagyis $P_{ijk}\equiv P_{kji}$, s minthogy az első két mutató szintén felcserélhető, azért bármely két mutatót is fel lehet cserélni.

Tegyük fel, hogy az 1) alatti tétel $(n-1)$ pontra, $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$-re már be van bizonyítva; vegyünk most fel n pontot:

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$$

et, akkor a

$$\begin{aligned}
&(P_3P_2P_{23}M) &&=-1\\
&(P_4P_{23}P_{234}M) &&=-2\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(P_nP_{23\ldots n-1}P_{23\ldots n}M) &&=-(n-2)
\end{aligned}$$

egyenletrendszerből meghatározott $P_{23\ldots n}$ pont a föltétel szerint $P_{n23\ldots n-1}$ ponttal és a

$$(P_1P_{n,\,2\ldots n-1}P_{n,\,2\ldots n-1,\,1}M)=-(n-1)$$

pont $P_{12\ldots n}$ ponttal összeesik, mert mindakettő ugyanegy pontnak a $T_{n+1}^{(n-2)}$-nek projekciója p-re az O-ból. Ezzel az 1) tétel be van bizonyítva.

2. A (II) egyenletrendszer $(k+2)$-dik egyenlete:

$$(gt^{(k)}t^{(k+1)}o) \quad =-(k+2),$$

ebből

$$\begin{aligned}
&(got^{(k)}t^{(k+1)}) &&=\frac{k+3}{k+2}\\
&(got^{(k+1)}t^{(k-2)}) &&=\frac{k+4}{k+2}\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(got^{(k+l-2)}t^{(k+l-1)}) &&=\frac{k+l+1}{k+l}\\
&(got^{(k+l-1)}t^{(k+l)}) &&=\frac{k+l+2}{k+l+1}.
\end{aligned}$$

Ha ezeknek az egyenleteknek bal- és jobboldalát egymással szorozzuk, akkor a

$$(got^{(k)}\, t^{(k+l)}) =$$

$$= (got^{(k)}\, t^{(k+1)}) \cdot (got^{(k+1)}\, t^{(k+2)}) \ldots (got^{(k+l-1)}\, t^{(k+l)}) = \frac{k+l+2}{k+2}$$

egyenletet nyerjük, a melyből

$$(gt^{(k)}\, t^{(k+l)}\, o) = -\frac{k+2}{l}.$$

Helyezzünk ez egyenletbe $k+1$ helyett s-et, akkor az egyenlet ily alakú lesz

$$(gt^{(k)}\, t^{(s)}\, o) = -\frac{k+2}{s+k} \qquad \text{(IV)}$$

és ennek alapján

$$(gt^{(k-2)}\, t^{(n-2)}\, o) = -\frac{k}{n-k}. \qquad \text{(IV}_1\text{)}$$

Az (I) egyenletrendszer utolsó egyenlete előtt levő $(n-k-2)$ egyenletből

$$(gt^{(k-1)}\, t^{(k)}\, t^{(k-2)}) = -1$$
$$(gt^{(k)}\, t^{(k+1)}\, t^{(k-1)}) = -1$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$(gt^{(n-3)}\, t^{(n-2)}\, t^{(n-4)}) = -1$$

hasonló úton, mint a mikép I)-ből a II) keletkezett, következő egyenletrendszer vezethető le:

$$(gt^{(k-1)}\, t^{(k)}\, t^{(k-2)}) = -1$$
$$(gt^{(k)}\, t^{(k+1)}\, t^{(k-2)}) = -2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(gt^{(n-3)}\, t^{(n-2)}\, t^{(k-2)}) = -(n-k-1).$$

Ezen előzmények után térjünk át a 2) tétel bebizonyítására.

Tudjuk, hogy a $P_{12\ldots k}$ pont $T_{k+1}^{(k-2)}$ pontnak projekciója O-ból p-re, most meg akarjuk mutatni, hogy mikép lehet a $P_{k+1\ldots n}$ pontot a már meglevő T pontok segítségével megszerkeszteni.

E végből a (l. 3. ábra)

$$T_{k+3}^{(k)},\ T_{k+4}^{(k+1)},\ \ldots,\ T_{n-1}^{(n-2)}$$

pontok projekczióit a $T_{k+1}^{(k-2)}$ pontból g egyenesre

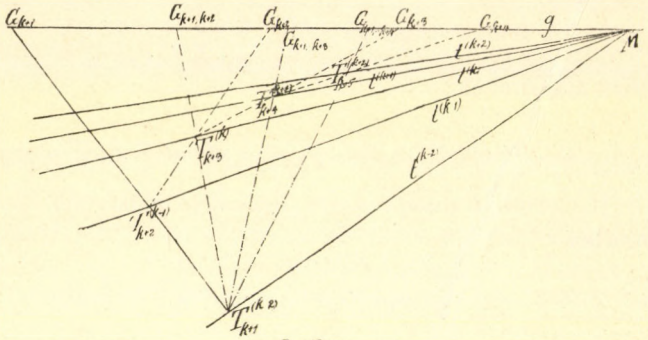
$$G_{k+1,\,k+1},\ G_{k+1,\,k+2},\ G_{k+1,\,k+2,\,k+3},\ \ldots,\ G_{k+1,\,k+2,\ldots n}$$

betükkel jelöljük, és a

$$g,\ t^{k-1},\ t^{(k)},\ t^{(k-2)};\ g,\ t^{(k)},\ t^{(k+1)},\ t^{(k-2)},\ \ldots,\ g,\ t^{(n-3)},\ t^{(n-2)},\ t^{(k-2)}$$

sugaraknak metszéspontjait a

$$\left|\, G_{k+2}\, T_{k+2}^{(k-1)}\, T_{k+3}^{(k)} \,\right|;\ \left|\, G_{k+3}\, T_{k+3}^{(k)}\, T_{k+4}^{(k+1)} \,\right|;\ \ldots\ \left|\, G_n\, T_n^{(n-3)}\, T_{n+1}^{(n-2)} \,\right|$$



3. ábra.

egyenesekkel a $T_{k+1}^{(k-2)}$ pontból g-re projicziáljuk. E pontok projekcziói mint (V)-ből látható, a következő egyenleteket állapítják meg:

$$(G_{k+2}\, G_{k+1}\, G_{k+1,\,k+2}\, M) = -1$$
$$(G_{k+3}\, G_{k+1,\,k+2}\, G_{k+1,\,k+2,\,k+3}\, M) = -2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(G_n\, G_{k+1,\,k+2,\ldots,\,n-1}\, G_{k+1,\,k+2\ldots n}\, M) = -(n-k-1).$$

Ez egyenletek baloldalán álló kifejezésekben a pontokat O-ból p-re projicziálván és azok jelentését tekintetbe véve a

$$(P_{k+2}\, P_{k+1}\, P_{k+1,\,k+2}\, M) = -1$$
$$(P_{k+3}\, P_{k+1,\,k+2}\, P_{k+1,\,k+2,\,k+3}\, M) = -1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(P_n\, P_{k+1,\,k+2\ldots n-1}\, P_{k+1,\,k+2\ldots n}\, M) = -(n-k-1)$$

egyenleteket kapjuk, a melyeknek alapján a $P_{k+1\,k+2\ldots n}$ pont, mint $G_{k+1\,k+2\ldots n}$-nek projekciója van meghatározva.

Ámde a $G_{k+1,\,k+2\ldots n}$, $T_{k+1}^{(k-2)}$, $T_{n+1}^{(n-2)}$ pontok ugyanegy egyenesben fekszenek, melynek ha metszéspontjait g, $t^{(k-2)}$, $t^{(n-2)}$, o sugarakkal O-ból p-re projicziáljuk, a (IV_1) egyenlet következtében a

$$(P_{k+1,\,k+2,\ldots n}\,P_{12\ldots k}\,Q_{n+1}\,M) = -\frac{k}{n-k}$$

egyenletet nyerjük, a mely a 2)-dik tétel helyességét igazolja.

3. Hogy a 3)-dik tételben kifejezett Q_1, Q_2, ... Q_n, pontokat megtaláljuk, nevezzük a P_{n+1} pontnak projekcióját O-ból g-re G_{n+1}-nek; továbbá a

$$T_1=(P_2G_3,\ P_3G_2),\quad T_2=(P_3G_1,\ P_1G_3),\quad T_3=(P_1G_2,\ P_2G_1)$$

pontoknak projekcióit G_4-ből $t^{(1)}$-re: $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$, $T_3^{(1)}$-nek; e pontoknak és $T_4^{(1)}$-nek projekcióit G_5-ből $t^{(2)}$-re: $T_1^{(2)}$, $T_2^{(2)}$, $T_3^{(2)}$, $T_4^{(2)}$-nek, és így tovább; a $T_1^{(n-4)}$, $T_2^{(n-4)}$, ... $T_{n-1}^{(n-4)}$ pontoknak projekcióit G_n-ből $t^{(n-3)}$-ra: $T_1^{(n-3)}$, $T_2^{(n-3)}$, ... $T_{n-1}^{(n-3)}$; végre ezeknek a pontoknak és $T_n^{(n-3)}$-nak projekcióit G_{n+1}-ből $t^{(n-2)}$-re: $T_1^{(n-2)}$, $T_2^{(n-2)}$, ... $T_n^{(n-2)}$-nek. Az első tétel bebizonyításából látható, hogy ez utóbbi pontoknak projekcziói O-ból p-re a kivánt Q_1, Q_2, ... Q_n pontok.

$T_k^{(n-2)}\,T_{n+1}^{(n-2)}\,G_k\,G_{n+1}$ négyszög harmonikus tulajdonságai folytán $T_k^{n-1)}\,G_k$, $T_{n+1}^{(n-2)}\,G_{n+1}$ oldalak $T_{n+2}^{(n-1)}$ metszéspontja azon a $t^{(n-1)}$ egyenesen fekszik, mely a

$$(g\,t^{(n-2)}\,t^{(n-1)}\,t^{(n-3)}) = -1$$

egyenletből van meghatározva, mert $T_k^{(n-2)}$, $T_{n+1}^{(n-2)}$ pontok $t^{(n-2)}$-ön, G_k, G_{n+1} pontok g-n és a $T_k^{(n-3)}=(T_k^{(n-2)}\,G_{n+1},\ G_k\,T_{n+1}^{(n-2)})$ metszés pont $t^{(n-3)}$ egyenesen fekszik.

Ebből folyólag az összes

$$\underset{(k=1,\,2,\ldots,\,n+1)}{|\,G_k\,G_k^{(n-2)}\,|}$$

egyenesek a $T_{n+2}^{(n-1)}$ ponton mennek át.

Minthogy a $G_1, G_2, \ldots, G_{n+1}, M$; $T_1^{(n-2)}, T_2^{(n-2)}, \ldots T_{n+1}^{(n-2)}$, M pontsorok a $T_{n+2}^{(n-1)}$ pontra vonatkozólag perspektivek, azért nemcsak e pontsorok projekciója O-ból p-re projektiv, hanem még az $OT_{n+2}^{(n-1)}$ egyenesnek N metszéspontja p-vel egyik kettőspontja ama soroknak, vagyis:

$$(P_1 P_2 \ldots P_{n+1} NM) \barwedge (Q_1 Q_2 \ldots Q_{n+1} NM).$$

Tekintve még, hogy a $G_k T_k^{(n-2)} T_{n+2}^{(n+1)}$ egyenes és g, $t^{(n-2)}$, $t^{(n-1)}$, O sugarak metszéspontjainak projekcziói O-ból p-re; P_k, Q_k, N, M pontok, tekintve továbbá a (II) egyenletrendszer utolsó egyenletét következik:

$$(P_k Q_k NM) = -n. \qquad \text{(VI.)}$$

Klug Lipót.

ADALÉK A MARS FELÜLETÉNEK ELMÉLETÉHEZ.

Schiaparelli észleletei alapján tudjuk, hogy a Mars egyenlítője táján világos szinű öv mutatkozik, melyben sötét csatornák képződnek és eltünnek. A legfeltünőbb tünemény azonban e csatornák megkettőződése.

Eddig a földön még nem észleltetett oly tünemény, mely a Mars övének változásaihoz hasonló volna, úgy hogy e változásokra mai napig még nincsen magyarázatunk.

Véletlenül a párolgó viz felszinén bizonyos tüneményeket észleltem, melyek annyira hasonlók a Mars úgy nevezett continenseinek változásaihoz, hogy gyakran nehéz volna a két tárgy rajzai közt külömbségeket találni. Hogyha e két tünemény tényleg analog, akkor a Marsnak úgy nevezett continensei felhők.

Tapasztalataim a következők:

Ha valamely csészét közel szinig megtöltünk forró (azaz közel 100 C fokú) tiszta vizzel és azt kihűlni hagyjuk oly helyen, hol nincsen léghuzat, akkor nem látunk feltünőt. Ha azonban a vizet sötétre festjük anilin festékkel, vagy ha tiszta viz helyett sötét theát veszünk, akkor a megbeszélendő tünemény közönséges szobahőmérséklet mellett (20° C) fejlődni kezdődik, mikor a viz hőfoka 70° C alá száll; 60° C-nál a tünemény legteljesebben mutatkozik, és 50° C-nál már tünőben van.

Mig a forró viz még erősen gőzölög, a benyomás az, hogy a felső hideg levegő buborékok alakjában folyton lecsap a viz felszinéig, és a köd a buborékok közt oszlopok és lemezek alakjában felszáll. A magasban a ködlemezek és ködoszlopok sodródnak. A lemezek és oszlopok alja a viz felszinén folyton mozgó, tág öltésü hálót képez. A hol egy légbuborék lecsap, ott a hirtelen képződő köd a viz felszinén vízszintesen kitér, sepri a viz felszinét és a nevezett

alakokban felszáll. A benyomás körülbelül az, mintha a víz tükre felett folyton explosiók történnének.

E tüneményeket oka egyszerű. A vízből felszálló meleg láthatatlan gőz, mely könnyebb a levegőnél, a víz felett vízszintes gőzréteget képez, mely labilis egyensúlyban van a környező levegővel szemben. A mint az egyensúly megzavarodik, gyorsulások merülnek fel, és a levegő és gőz helycseréje úgyszólván explosiószerűen történik.

Az eddig leírt tünemények csak bevezetők. A mi történik, mikor a víz hőfoka 70° C alá száll, és a mit ezennel be akarok mutatni, annak több részletét úgy hiszem csak rövidlátó szem láthatja tisztán, és az is csak úgy, hogy lassan hozzászokik a látványhoz, mert az első kísérleteknél rendesen csak chaotikus ködáramlásokat látunk. Nehéz továbbá a kellő megvilágítást találni. Én legjobban látom a leirandó tüneményeket, ha a víz felszinén egy ablak tükröződik. Az ablakkereszt sötét képében legjobban látom a tüneményeket.

Mikor a víz körülbelül 70° C-ra hült le, a felszálló ködben számos a láthatóság határán álló vízcseppecskét látunk nagy gyorsasággal felszállni. Később e vízcseppecskéket már a víz felszíne felett is látjuk a légáram irányában nagy sebességgel elsietni, és akkor LEIDENFROST-féle végtelen kicsiny cseppekre emlékeztetnek. Végre a légáram e cseppecskéknek és a ködnek egy részét már nem bírja felemelni, és ekkor a visszamaradó cseppecskék és a visszamaradó köd a víznek külömben tiszta felszinén hosszabb-rövidebb, szélesebb-keskenyebb, egyenes nagy görbe csíkokat és ködfoltokat képeznek, melyek oly szorosan simulnak a víz felszínéhez, hogy vastagságuk alig látható.

E csíkok kevés másodpercz alatt eltünnek megint úgy, hogy a szélök elmaródik, elrágódik.

E ködfoltokat az ember kezdetben habnak nézi, a milyen forró vizen képződni szokott. Ámde nem ritkán látjuk, hogy a légáram egy meglevő ködfoltot a víz felett elsöpör és oly görbében felsodorja és elviszi, mint a szél a port. A ködnek egy része azonban ilyenkor megint le szokott szállni, mint a felvert por a levegőben,

néha 1 cm magasságból, és ekkor a köd a víz felszinén új csikot képez. A habot azonban a légáram sem nem sepri, sem nem emeli.

A mint a víznek hőfoka leszáll, a csikok mindig szélesebbek lesznek az elmosódott szélükön, azaz azon irányban terjednek, a honnan a légáram jön, és végre a vizen fehéres ködtáblák úsznak, melyeknek vastagsága úgy látszik egy milliméternek csak egy kis részét képezi. E ködtáblák szemölcsözőknek látszanak, mint a tejút. Ezeken mutatkoznak a leirandó tünemények.

Ha egy ködtábla felett légáram megy el, akkor sokszor úgy látszik, mintha az áram a táblának egy felső rétegét fátyol alakjában magával vinné. A táblának hypothelikus alsóbb rétege mozdulatlanúl megmarad a helyén, míg a fentebbi fátylot a légáram elviszi, összesöpri, felemeli és megint elejti, úgy hogy a fátyol új ködcsikot ád a víz felszinén. E tüneményt különben úgy is lehetne megmagyarázni, hogy a köd nagyon külömböző nagyságú cseppecskékből áll. A légáram csak a legkönnyebbeket viszi magával, míg a nehezebbek oly mély rétegbe merülnek, mely a gőz vagy levegő belső surlódása következtében az áramlásban már nem vesz részt hanem úgyszólván a vízhez tapad.

A ködtáblákon a következő tünemény mutatkozik, mely a jelen közleménynek főtárgyát képezi. A tábla hirtelen repedezik, és éles határú göröngyökre bomlik fel, mint a hogyan pl. a teljesen átázott agyagos felület szokott száradáskor szétrepedezni, melyek közt a víz felszine tökéletesen tiszta. E repedések úgy látszik egészen függetlenek a ködcsikoktól, melyeket a légáramok a ködtáblákon összesepernek, és összevissza keresztezik azokat.

A repedések néha minden mozgalom nélkül képződnek, mintha a csatornák a táblákban kioldódnának vagy kivágódnának. Többször azonban, mikor egy repedés vagy repedési háló képződik, e pillanatban a táblák mintegy szétugranak, mintha explosio történt volna, vagy mintha centrifugalis légáram szétszakítaná őket.

Kérdés, mely physikai viszonyok jellemzik a repedések helyét? Meglehet, hogy a repedések helyén a víz felszine hidegebb. Ugyanis ha a csésze széléről hidegebb légáram száll a ködtáblára, akkor az áram a ködtáblának egy részét (rétegét) elsepri, a megmaradó

ködréteg pedig igen gyorsan eltünik. Úgy látszik a hideg légáram lehűtötte a víznek legfelsőbb rétegét, ez kevesebb gőzt fejleszt, a lassabban felszálló gőz nem képes már a ködtábla cseppjeit lebegve tartani, és azok a vízbe sülyednek, és a víz felszíne tiszta lesz. Ha a hideg légáram megszünik, akkor egy kis idő múlva a ködtábla megint képződik, a melegebb levegőben. Ugy látszik a víznek legfelsőbb rétege hővezetés által megint felmelegedett. A priori az ellenkezőt várnák, hogy tudniillik a hideg légáram a ködtáblát sűrűbbé tegye.

A következő kisérlet is a mellett szól, hogy a repedések helyén a víz felszíne hidegebb. Ha ugyanis hideg tárgyat, pl. hideg késnek hegyét nagyon közel tartunk a víz felszinéhez, akkor alatta a ködtábla nem lesz sűrűbb, hanem ellenkezőleg tiszta, ködmentes folt képződik a hideg tárgy alatt. Meglehet, hogy a hideg tárgyon az alatta felszálló gőz igen hamar lecsapódik, az elpárolgás gyorsítva lesz, a víz felszíne ennek következtében kihül, és az elpárolgás oly lassúvá lesz, hogy köd nem képződik többé. A víz lehűlése következtében talán nem is elég nagy már a hőfokkülömbség, hogy köd képződhetnék.

A repedések egy pár másodpercz alatt megint eltünnek, de kevésbé azáltal, hogy a két szélük elmosódnék, mint inkább azáltal, hogy a légáramok, melyeknek iránya úgy látszik egészen független e repedések irányától, a kép fölé új ködfátylot sepernek. A régi, alsóbb rétegek eltünnek, talán a vízbe merülnek vagy elpárolognak, a régi kép is ennek következtében elhalványul, eltünik, és a hol repedések voltak, már csak meglehetős homogén ködtábla mutatkozik.

Ha egy repedési háló egy kis ideig, talán egy ötöd vagy egy fél másodperczig mozdulatlanúl állott, hirtelen új háló képződik, mely általában függetlennek látszik a régi hálótól és azt sokféleképen keresztezi. Feltünő azonban, hogy egyes új repedések, még pedig hosszú repedések, párhuzamosak régiekhez. Ismételve láttam, hogy egymás után négy párhuzamos repedés képződött. Néha úgylátszik, mintha az új hálónak egy része nem volna egyéb, mint a régi háló egy részének ismétlése, egy kis eltolódással. Az sem nagyon ritka

eset, hogy egy repedés kiszélesedik, azután egy fehér ködgerincz képződik a közepében, úgy hogy az egyszerű csatornából kettős csatorna lesz. Ritka eset, hogy egy új csatorna lassan képződnék. Ekkor az előrehatoló vége rágottnak látszik. A tábla nem tolódik szét, hanem a csatorna úgyszólván oldás által terjed, épen úgy mint a tiszta, ködmentes folt a kés hideg hegye alatt. Néha a csatornának egyik szélén sűrűbb lesz a köd. Ez akkor történik, mikor a légáram keresztezi a csatornát és a tábla felől a csatorna partjához söpri a ködöt.

A kép, melyet a 60 fokú víz felszíne mutat, alig különböztethető meg a legjobb Marsrajzoktól, csakhogy a kép oly gyorsan változik, hogy azt lerajzolni lehetetlenség.

Hogyha a párolgó víz és a Mars felülete közt tényleg áll a hasonlóság, akkor a Marsról a következőket mondhatjuk. A Marsnak talán egész felülete víz. A sarkokon, ha ott sincs szárazföld, a vizet jég borítja. A Marson passzatszelek vannak, melyek a mérsekelt övön úgy tüntetik el a ködöt, mint a hideg légáramok a csésze meleg vizén. A felhőréteg tehát csak a meleg égövön van.

A Mars atmosphærája sokkal gyengébb a föld légkörénél. Ámde gyér levegőben a surlódás nem kisebb, mint sűrű levegőben. Ha tehát a Mars atmosphærájában légáramok vannak, akkor a Marson a surlódás a mozgó lég tömegéhez mérten sokkal nagyobb, mint a földön. Annak az a következménye, hogy a Marson a légkör áramlásai nem lehetnek oly rohamosak és bonyodalmasak, mint a földön. A felhők alakváltozásai azért a Marson sokkal lasabban és egyszerűbben fognak történi, mint a földön.

A Marsnak csatornái nyilások a felhőrétegben, melyeknek rejtélyes oka hasonló azon okhoz, mely a meleg víznek felette vékony felhőrétegében hasonló csatornákat teremt.

A Mars felületén ismételve észleltek elmosódásokat, melyeknek helyén, miután megszüntek, fehéres folt mutatkozott. E fehéres foltot eddig friss hónak tartották. Ámde a meleg vizen is látjuk, hogy a mozdulatlan ködtábla felett a légáram magasabb rétegekben ködöt sodor, mely végre leszáll, és a változatlanúl megmaradt ködtáblára mint fehéres folt rakodik le. *Fuchs Károly.*

A CSAVART OSZLOP SAJÁT ÁRNYÉKHATÁRVONALANAK MEGHATÁROZÁSÁRÓL.

(Harmadik és befejező közlemény.)

Az árnyékhatárvonal különböző alakjairól.

Az árnyékhatárvonal első projekciója egy általános 6-odrendű konchoida, melynek orthogonalis szimmetrálisa a T' polusnak az alapkör középpontjával O'-sel való összeköttetése.

Lényeges befolyást gyakorol a keletkező görbe alakjára a T' pont fekvése; e pont projicziáló sugara — a Φ felület egyik vezérvonala — ugyanis az F felületet az árnyékhatárvonalhoz tartozó pontokban metszi. Mivel ez a projicziáló sugár a felület minden menetét általában két különböző pontban metszi, T' a projekczió kettőspontja lesz. Ha e metszéspontok valósak és különbözők, ez a pont közönséges kettőspont; ha valósak és összeesők — T' az első konturvonalon van — akkor visszatérő pont a szimmetrálissal, mint érintővel; ha végre képzetesek, a projicziáló sugár egy képzetes pontpár összeköttetése és T' a projekczió izolált pontja. Mivel a T' fekvése bizonyos felületre nézve csakis a fénysugár hajlásától függ, a fénysugár irányának változtatása segítségével ez alakok mindegyikére akadunk és természetes, hogy a visszatérő pont átmenetképen szerepel a kettős és izolált pont között.

Ha a Φ konoidfelület amaz alkotóit keressük, a melyek a T' projicziáló sugarának az F felülettel való metszéspontjain haladnak át, akkor ez alkotók projekczióiban a kettőspont érintőit is megtaláljuk, mivel a Φ felület ama metszéspontokhoz tartozó érintősíkjai projicziáló síkok. A T'-ból, mint középpontból ρ sugár-

ral leírt kör fogja a középponti csavarvonal alapkörét a keresett érintőkhöz tartozó pontokban metszeni.

Lehet a görbe első projekciójának még két valós kettőspontja. A T' ponton keresztül menő sugársor sugarai ugyanis a középponti csavarvonal alapkörén egy húrrendszert állapítanak meg, a melyben 2ρ hosszaságú húrok is foglaltatnak. E húrok felező pontjai lesznek a keresett kettőspontok. Általában két ily húr szerkeszthető, de ezek valósságának első föltétele

$$\rho < r,$$

mivel a húrok felső határa $2r$. Ha az ily követelményeknek megfelelő húr egyik végpontjának a T' pólustól való távolságát x-el, a pólusnak az alapkörre vonatkoztatott hatványát pedig k-val jelöljuk, akkor az

$$x(x-2\rho) = \pm k^2$$

egyenlet adja meg az e mennyiségek között fennálló relációt, a miből

$$x = \rho \pm \sqrt{\rho^2 \pm k^2}.$$

Ha T' az alapkörön kívül van, vagyis k^2 pozitív, x valós, és a föntebbi föltétel kielégítése mellett a kettőspontok is valósak.

Ha ellenben T' az alapkörön belül van, vagyis k^2 negativ, x csak addig valós, a míg $\rho > k$, és a kettőspontok valósak, ha a következő egyenlőtlenség áll fenn:

$$r > \rho > k.$$

A görbe projekciójának T' pontja kiválik azonban a görbe többi kettőspontjai közül. A T' sugársor minden sugara a görbét még két pontpárban metszi, a melyek páronkint az alapkörön megállapított metszéspontokhoz szimmetrikus fekvésüek. Az alapkört érintő sugarakon e pontpárok összeesnek; a sugarak a görbét két különböző pontban érintik és ennek kettős érintői lesznek. Eltekintve azok valós vagy képzetes voltától, mondhatjuk:

Az alapkör konjugált polárisaitól a T' pólusban meghatározott sugárinvoluczió kettőssugarai görbénk kettősérintői.

Uj és eddig nem tárgyalt némileg egyszerűbb görbealakokra jutunk, ha a fénysugarak hajlása egyenlő a középponti csavarvonal érintőinek hajlásával. Ez esetben a felület minden menetmagasságán olyan alkotó kör található, a melynek mentén a felület érintősíkjai a fénysugarakkal parallelek. Ez alkotó körök képezik árnyékhatárvonalunk egy részét, úgy hogy a hátramaradt rész első projicziáló hengere, e körök projicziáló hengerének különválása következtében már nem 6-od, hanem csakis 4-edrendű. Az árnyékhatárvonal első projekcziója ilyenkor egy körből és egy negyedrendű görbéből áll, a mely utóbbi LIMAÇON vagy PASCAL-féle csiga név alatt ismeretes. A T' pont, a LIMAÇON pólusa rajta fekszik a középponti csavarvonal első projekcziján. A görbe alakja ebben az esetben az alkotó körök sugarától függ, és változik a szerint, a mint az nagyobb, egyenlő, vagy kisebb $2r$-nél. A T'-ben megállapított parabolikus sugárnivoluczió kettőssugara nem érinti többé a görbe projekcziját, ő reá esnek azonban az árnyékhatárvonal kettőspontjainak első projekcziói.

III.

Az általánosított konchoida érintőiről.

Az eddig elmondottak könnyü szerrel alkalmazhatók az általános konchoida érintőinek szerkesztésére. Az alapgörbék megadott ρ és r sugarú körök, a pólus T' pedig az egyik pl. ρ sugárral biró kör középpontja. Az ezektől meghatározott konchoida mindig képviselheti egy oly csavart-körhengerfelület saját árnyékának első projekcziját, a melynek középponti csavarvonala az r sugarú kört birja alapkörül, alkotó körei pedig ρ sugaruak. Ha a T'-ből kiinduló és a kört M'-ben metsző sugár P_1' pontjában $M'P_1'=\rho$ érintő szerkesztendő, szükségünk van először a középponti csavarvonal M'-hez tartozó érintőjére, illetőleg annak első nyompontjára. Ennek az érintőnek bármely pontja választható nyompontul, mivel a nyompontnak az érintőn való változtatása csakis a projekczió-lap párhuzamos eltolásának felel meg, mely változtatás az érintőre befolyással nincsen.

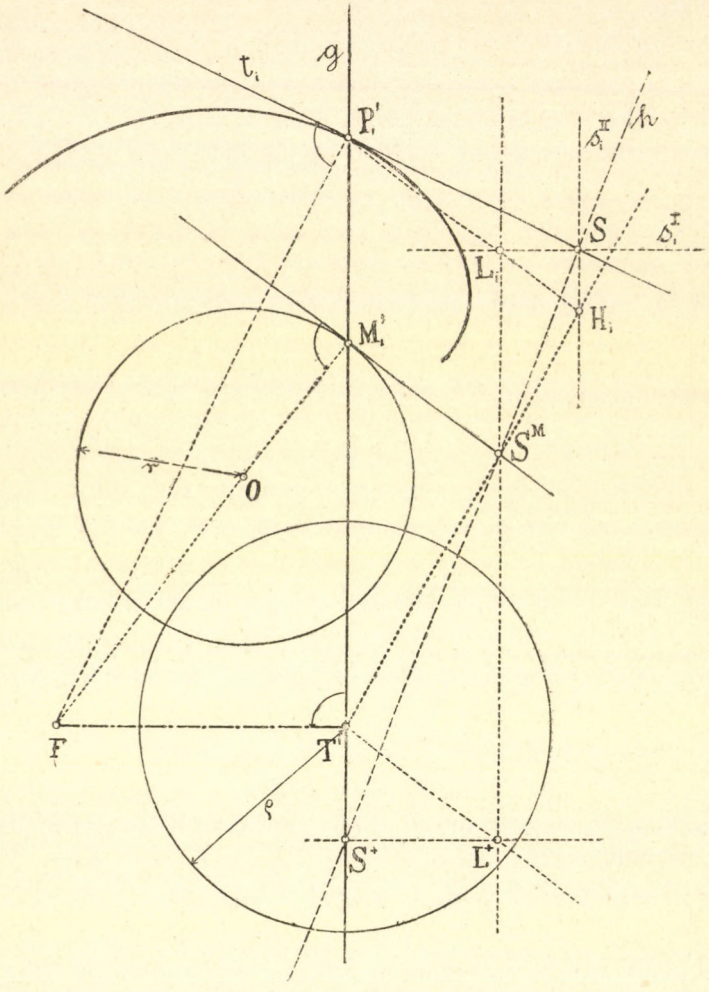
Ha tehát az M' ponthoz tartozó érintő S^M pontját választjuk nyompontul, s_1^I és s_1^{II} egyenesek metszéspontjában S_1-ben a keresett érintő egyik pontját nyerjük, minélfogva az S_1P_1'-ben meghúzható.

Az ezekben adott szerkesztés azonban hosszadalmas és egyes, kivételes pontokra nem is alkalmazható; törekedni fogunk tehát ezt lehetőleg előnyös átalakításnak alávetni.

Tekintsük ugyanis az r sugarú alapkört és a T' pólust állandónak, a ρ sugarú kör sugarát ellenben változónak, akkor ρ értékeinek megfelelően egy egész konchoida sorozatot nyerünk, és ennek megfelelően a térben a csavart-körhenger-felületek sorozatát, a melyre nézve azonban a fénysugáriránynyal konjugált konoidfelület közös. A konoidfelület minden alkotója kimetsz rajtuk egy-egy pontsort, és e pontok mindegyikében az árnyékhatárvonal érintőjét meghatározza az illető felület ebben való érintősíkjának a konoidfelület megfelelő érintősíkjával való metszésvonalában. Egy alkotótól kimetszett pontsort szemügyre véve, látjuk, hogy a felületsor érintősíkjai e pontsorral perspektív fekvésű parallelsíksort alkotnak, és hogy a konoidfelület érintősíkjaitól képezett síksor ezzel projektív. Tekintettel arra, hogy két projektív síksor megfelelő elemeitől meghatározott egyenesek — ebben az esetben az árnyékhatárvonalak érintői — általában hiperboloidon, a mostani esetben hiperbolikus paraboloidon fekűsznek, mondhatjuk, hogy ezek első projekcziói parabolát burkolnak be.

Ugyanarra az eredményre vezet megadott síkszerkesztésünk is. Jelöljük ugyanis a szereplő $M'S^MP_1'$ pontoktól (4. ábra) megállapított parallelogramm negyedik csúcspontját L_1-gyel, és az $T'S^M$ tartón megállapított pontot H_1-gyel; akkor S_1 oly derékszögű háromszög harmadik csúcspontja, a melynek átfogója L_1H_1, befogói pedig $H_1S_1 \parallel T'P_1'$-gyel és $L_1S_1 \perp T'P_1'$-re. Változó P_1' pont mellett a háromszögeknek egy egész sorozatát nyerjük, de ezek mindannyian hasonlók és hasonló fekvésűek az S^M hasonlósági pontra nézve. Ebből következik, hogy az S pontok egyenes pontsort alkotnak, a mely a P' érintési pontok sorával projektiv. E projektiv pontsorokban a ∞-ben fekvő pontok meg-

felelő pontpárt alkotnak, és a többi megfelelő pontpárok összeköttetései nem parallelek; a pontsorok projektiv hasonlók és egy-



4. ábra.

máshoz képest ferde fekvésben vannak. Ennek közvetetlen folyománya az, *hogy a konchoidasorozathoz egy vezetősugár mentén szerkesztett érintők parabolát burkolnak be.*

Az M' és S^M pontok pontsoraink megfelelő pontjai; az $M'S^M$ egyenes, tehát a parabola érintője. A hasonló háromszögek sorozatában a $T'L^+S^+$ háromszög is foglaltatik; ebből következik, hogy T' és S^+ egymásnak megfelelő pontok, és hogy továbbá T' az egyik pontsor tartójának — g-nek — burkolt parabolánkkal való érintési pontja, mivel S^+ a származtató pontsorok közös eleme. A parabola tengelyiránya is könnyen megszerkeszthető. Jelöljük ugyanis az alapkör M'-ben levő érintőjét a'-vel, az S pontok tartóját c-vel, a vezérsugarat a-val, érintési pontját, mint a és b' végtelen közel fekvő érintők metszéspontját (ab')-vel, a sík végtelenben fekvő egyenesét b-vel, végre keresett érintési pontját, mint b és c' végtelen közeli érintők metszéspontját (bc')-vel, akkor $abc\,a'b'c'$-ben Brianchon-féle hatoldalt nyerünk, a melynek Brianchon-féle pontja L^+, mivel benne az ab', $a'b$ és ac', $a'c$ egyenesek találkoznak. Ezen áthalad

$$(bc',\ b'c) \equiv S^+L^+$$

egyenes is, mely parabolánk tengelyirányát adja. Mivel

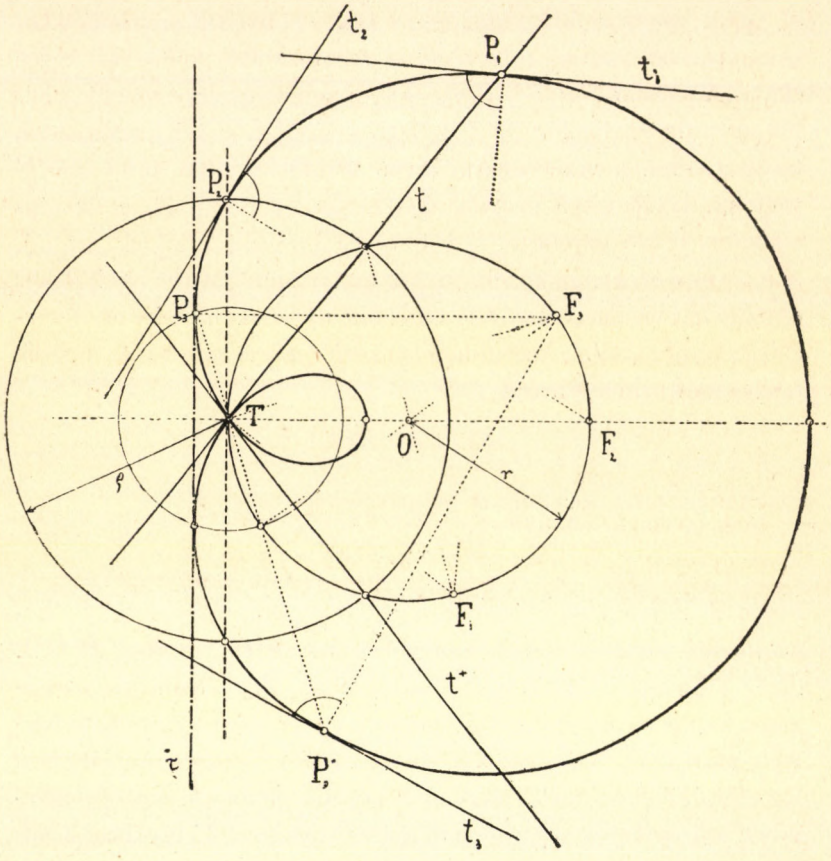
$$S^+L^+ \perp T'M'$$

leszen T' a parabola csúcspontja, és az e ponton keresztül S^+L^+-vel huzott parallela ennek főtengelye. Az $M'O'$ egyenes $M'O' \perp M'S^M$ kimetszi a főtengelyen — a parabola egy elemi tulajdonságánál fogva — F-ben a gyujtópontot, és ennek a vezérsugár bármely pontjával való összeköttetése az illető érintőre merőlegesen fog állani. Nyilvánvaló, hogy az F ponton keresztül huzott egyenesek a konchoidasereg normálisai, és ezek az FT' távolság közös voltánál fogva közös szubnormálisuk van.

Mivel minden vezérsugárban a konoidfelület két alkotójának projekciója egyesül, rajta tulajdonképen két pontsor keletkezik, és a konchoidasorozat e pontokban lévő érintői két parabolát burkolnak be, a melyek közös főtengelylyel birnak.

Minden vezérsugár az alapkört két pontban metszi, e metszéspontok normálisai a főtengelyen a burkolt parabolák gyujtópontjait határozzák meg. A vezérsugár bármely pontja megállapít e

metszéspontokkal két közt; ha a változó alapkör ρ sugarát egyenlővé teszszük e közök egyikével, a konchoidasor egy oly eleme származik, a mely választott pontunkon át halad és melyre nézve



5. ábra.

a szubnormálist az illető köz végpontjának szubnormálisával megnyerjük.

Megemlítendő még, hogy a vezérsugár változtatása mellett a burkolt parabolák gyujtópontjai is változnak, és hogy ezek geometriai helye oly negyedrendű görbe, melyben a pólus és az alapkör középpontja mint kettőspontok szerepelnek. E görbe zártvonal,

ha a pólus az alapkörön belül van, ellenben két végtelen ággal bír, ha ezen kívül fekszik.

Ha a pólus az alapkör kerületén van, az általános konchoida-sorozat degenerál egy konczentrikus körsor különválása következtében, egy PASCAL-féle csigasorrá; az érintőktől beburkolt parabolák gyujtópontjai — a szubnormálisok végpontjai — az adott alapkör kerületén feküsznek, mely az előbb szereplő negyedrendű görbe elfajulásának tekinthető.

Ha tekintetbe veszszük, hogy a ρ sugarú kör bármely pontjának szubnormálisa nulla, kimondható az előbbiek folyományaképen, hogy «*a konchoida szubnormálisa egyenlő az alapgörbék szubnormálisainak algebrai összegével*», a mely alakban a tétel általánosan is helyes marad, függetlenül az alapgörbék alakjától és számától, a mint azt más módszer segélyével könnyen ki lehet mutatni.*

Az 5-dik ábra érintő-szerkesztésünk alkalmazását mutatja egy PASCAL-féle csiga különböző pontjaira. A pólusból $\frac{\rho}{2}$ sugárral leírt kör az r sugarú alapkört két pontban metszi, melyeken keresztül vezérsugarak húzhatók. Görbénknek e sugarakon levő pontjai közül van két olyan is, a melyekre nézve a normálisok a szimmetrálissal parallelek; ezek a görbe τ kettősérintőjének érintési pontjai.

Szépréthy Béla.

---

* WIENER Darst. Geometrie, II. p 182.

PHYSIKAI SZEMLE.

A szinek fotografálásáról O. Wiener. Farbenphotographie durch Körperfarben und mechanische Farbenanpassung in der Natur. *Ann. der Phys.* LV. k. 225—281. l.

1891-ben Lippmann a színek fotografálásának problemáját hatalmas lépéssel előbbre vitte. Előállította a teljes napspektrum színes fotografiáját, öntudatosan felhasználván az alló fényhullámok jelenségét.* Sikerült a színkép fotografiáját állandósítania is szemben a régebbi eljárásokkal, a melyek képei a fény behatásának csak rövid időre voltak képesek ellentállani. Wiener feladatául tűzte ki magának: a régibb eljárásokkal készült fotografia színes voltának okát kideríteni.

A régibb eljárások röviden a következők: Seebeck (1810) sötétben készített ezüstchloridport két üveglap közé foglalt. Az így készült lemez színérzékenynyé vált, miután ibolyaszínű, azután fehér fény behatása alatt a por sötét ibolya színt vett fel. Becquerel (1848) ezüstözött réz, czink vagy tiszta ezüst csiszolt lapot használt. A lemezeket mint pozitiv elektrodot higított sósavba mártotta, mi közben a lemez vékony ezüstchloridréteggel vonódott be. Ez a lemez színérzékeny. Poitevin (1865) eljárása, a mint azt Zenker és Krone tökéletesítették a következő: Papirost áztatunk 2 perczig 10%-os konyhasóoldatban, azután 1 perczig 8% salétromsavas ezüstoldatban tartjuk. A jól leöblített papirost ezután czinnchlorüroldatban (5 gr. czinnchlorür 100 cm^3 vízben) fénybehatásnak tesszük ki, míg megbarnul; ezután 1 rész telített kaliumbichromat és 2 rész telített rézgálicz oldat keverékébe mártjuk, végre itatópapir között megszárítjuk. Mindeme eljárásoknál a színek az expoziczio alatt előtűnnek úgy, hogy a fotografiát előhíni nem kell. Zenker már 1868-ban a színek keletkezését az álló fényhullámok jelenségére vezette vissza, a nélkül hogy állítását igazolhatta volna. Hogy mennyiben volt igaza, kitűnik Wiener kisérleteiből.

Mindenek előtt azt kellett eldönteni, valjon a kép színeződése fény interferenczia avagy abszorpczio útján jön-e létre mint pl. a testek színei.

---

* L. Math. Phys. Lapok. I. 28.

Ha interferenczia jelenséggel, «vékony lemezek» színeivel van dolgunk, akkor a színnek a beeső fény irányával változnia kell, ha abszorpczio-jelenség, akkor az iránytól független. Különben már eleve igen csekély a valószínűség, hogy SEEBECK s POITEVIN eljárásánál interferentia jelenséggel állunk szemben: hiányzik a szabályos visszaverő felület. BECQUEREL eljárásánál ellenben megvan erre a lehetőség. Igaz, hogy mindeddig nem volt kimutatható, hogy BECQUEREL színei a fény beesési szögétől függnek. Ennek oka azonban az lehet, hogy a fényérzékeny réteg törésmutatója igen nagy, kettőnél nagyobb érték; tehát magában a rétegben a fény iránya csak keveset változik, ha a fény a levegőben különféle irányokban esik be. Azért WIENER úgy járt el, hogy vett egy nagy törésmutatójú (1,75) derékszögű egyenszárú üveghasábot, melyet átfogó lapjával a színkép fotografiájára fektetett. A hasáb éle a színkép hosszirányával párhuzamosan állott úgy, hogy a hasáb a színkép felét födte csak el, a másik fele pedig szabadon maradt. A színkép egyik felét közvetlenül levegőn át, másik felét a hasáb egyik befogó lapján át nézhette, a hasábon át 45° alatt beeső fényben. A hasáb törésmutatója nagy lévén, a lemezben a fény keveset törik s sokkal ferdébben halad át rajta, mint a levegőn át ráesett fény. BECQUEREL fotografiáin a színkép színei a prizmán át nézve, jól észrevehető eltolodást szenvedtek a levegőn át nézett színekhez képest, SEEBECK és POITEVIN fotografiáin ellenben nem. Ezzel kimutatta, hogy BECQUEREL képein a színeződés fényinterferentia útján jő létre, eljárása tehát ugyanazon jelenségen alapszik mint LIPPMANNÉ; SEEBECK és POITEVIN módszerében ellenben a színek abszorpczio-színek, ugyanolyan természetűek, mint egyéb testi saját színek.

A fény behatása alatt tehát a lemezben olyan változások állanak elő, melyek folytán a lemez az expoziczio után is csak olyan színű sugarakat képes visszaverni, a milyennel megvilágították, a többit pedig elnyeli. Eme változások közelebbi jellemzésére WIENER, GUNTZ és CAREY-LEA kisérleteire támaszkodik. GUNTZ ugyanis kimutatta, hogy az ezüstchlorid fény behatása alatt ezüstchlorürré változik át. A SEEBECK és POITEVIN-féle lemezek præparalása közben is a rétegben ezüstchlorür keletkezik. CAREY-LEA pedig az előzetesen fénybehatásnak kitett ezüstchloridon a színes sugarak által előidézett különböző festőanyagokat tisztán chemiai úton sötétben is előállította. Szerinte ezek ezüstchlorid és ezüstchlorür vegyületek, melyek azonban nem fejezhetők ki meghatározott vegyarány számokkal; CAREY-LEA photochloridnak nevezi. SEEBECK és POITEVIN lemezein tehát megvan a lehetőség különböző színű photochlorid keletkezésére.

Miért keletkezik pl. vörös fény behatása alatt vörös photochlorid? WIENER következőképen okoskodik: a vörösszínű vegyületnek a többi felett az az előnye, hogy a vörösszínű sugarakat jobban visszaveri mint a

többi vegyület, a vörös sugarakat el nem nyeli, a vörös fény tehát nem is hozhat benne létre vegyi átalakulást, a mihez a fényelnyelés szükséges. Az összes keletkezhető vegyületek közt tehát csak a vörösszínű vegyület az, mely további vörös világításnál változatlan chemiai egyensúlyban maradhat. Az újabb chemiai elméletek alapján fel kell tennünk, hogy pl. a vörös fény behatása alatt időnkint az összes keletkeztethető vegyületek képződnek egyes molekulacsoportok között, ezek között azonban csak vörös vegyületek maradnak állandóan változatlanok, míg a többiek a vörös fényt elnyelvén újra, meg újra átalakulnak; csak a vörös vegyület van stabilis egyensúlyban. Ebből következik, hogy míg a vörös vegyület vörös fény behatása alatt változatlan marad, más színű fény alatt el kell változnia.

Tényleg Carey-Lea rózsaszínű photochloridra spektrumot vetített, a photochlorid az összes színekben átalakult, csak a vörösben nem. Wiener ugyanazt a lemezt egymásután egymást 90° alatt keresztező spektrum behatásának tette ki, miközben csak azon színek nem változtak, melyek a két spektrumban egybeestek.

Ezek alapján meg van állapítva a színek fotografálásának lehetősége a fényelnyelés alapján, az u. n. testek színei révén. Ha van olyan test, mely az összes színeket elnyeli — tehát fekete test, mely az összes színekre fényérzékeny, fénybehatása alatt képes a fehéren kívül legalább három eléggé különböző színű vegyületté átalakulni, melyek szintén fényérzékenyek, akkor könnyen beláthatólag ezen anyag a megvilágítás színét hiven visszaadja. A mennyiben a felsorolt kellékeknek csak részben felel meg, mint a Seebeck s Poitevin lemezei, a színeket is csak többé-kevésbbé tökéletesen adja vissza. *Tangl.*

*

A hidrogén folyósítása, kritikus hőmérsékletének és normális forrpontjának meghatározása. Mathias: La liquéfaction de l'hydrogène. *Rév. gén. des Sciences.* VI. évf. 617—619. l.

A mi már csak idő kérdésének látszott, t. i. a hidrogén folyósítása, az Olszewski és Natanson egyesült törekvésének végre sikerült. A krakói akademián előterjesztett jelentésök alapján dolgozatukat Mathias ekként ismerteti:

Leirandó vizsgálataik az állandóknak nevezett gázok folyósításának problémájából indulnak ki, melyet Cailletet akkor oldott volt meg, a midőn megmutatta, hogy az erősen összenyomott gázok hirtelen tágulás révén folyósíthatók. Bizonyos nyomástól kezdve az összes száraz gázok, ha hirtelen kitágulni engedjük, ködd é alakulnak, a mi a folyósodás biztos jelének tekinthető. A hidrogén esetében ez a köd rendkivül gyenge és alig észrevehető, miért is egész különös megvilágítást kellett alkalmazni, hogy meg-

jelenéséről kétséget kizárólag meggyőződést lehessen szerezni. Wroblewski és Olszewski, eleinte együttesen, később külön-külön dolgozva, Cailletet munkáját folytatták és befejezéshez közel hozták, a mennyiben az u. n. állandó gázokat valóságos folyós halmazállapotban, vagyis szűk csövekben meniszkuszszal határolva előállították. A hidrogénnel azonban mindeddig nem birtak boldogulni. Még akkor sem, a mikor 15 mm higanyoszlop nyomása alatt —210 C-fokon forró oxigénnel hűtötték: bármekkora nyomás alatt összenyomhatatlannak mutatkozott, a miből arra lehetett következtetni, hogy kritikus hőfoka —210°-nál mélyebben fekszik. Ilyenkor azonban, hirtelen tágulászkor, apró cseppecskékben az edény falain meggyülemlett, de el is párolgott, mielőtt meniszkuszszal határolt tömegbe gyült volna össze. A feladat tehát az volt, hogy a folyósodás körülményei, vagyis a kritikus nyomás és hőmérséklet szabatosan megállapíttassanak.

Olszewski és Natanson mindenekelőtt a hidrogén kritikus nyomását törekedtek megállapítani. Olszewski kb. 20 atmoszférára becsüli. Ugyanis, ha a vacuumban forró oxigén segítségével —210°-ra lehütötte, a hidrogén tágulás közben mindenkor 20 légköri nyomás alatt forrott fel és pedig tekintet nélkül arra, hogy a kezdeti nyomás 80, 100, 120 vagy 140 atmoszféra volt. De ha a kezdeti nyomás 80 atmoszféránál kisebb volt, a forrás a kritikus hőfoknál alacsonyabb hőmérsékleten következett be, s a nyomás, a mely alatt a forrás megindult, 18, 16 ill. 14 atmoszférára szállott alá, a midőn a kezdeti nyomás 70, 60 ill. 50 atm. volt.

Ha a dolog tényleg így van, akkor a hidrogén $t_0 = -210°$ kezdeti hőmérsékletről és $p_0 = 80$ atm. kezdeti nyomásról *adiabatikus tágulás* révén $p_1 = 20$ atmoszféra nyomás alatt ismeretlen t_1 kritikus hőfokára emelkedik.

Ha a hőmérsékleti fokokat ezentúl az abszolut hőmérsékleti skála hőfokaiban fejezzük ki, azaz ha $T_0 = 273 + t_0$ és $T_1 = 273 + t_1$ tételtik, s ha γ a hidrogén kétféle fajhevének a viszonyszáma, melynek értéke kb. 1,40, áll a következő ismeretes összefüggés:

$$\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\gamma} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\gamma - 1},$$

a honnét

$$t_1 = T_1 - 273 = -231° \text{ C}.$$

A hidrogén kritikus hőfoka ezen okoskodás szerint tehát —231° C. Ugyanez az érték még a Van der Waals-tól eredő *megfelelő állapotok törvénye* felhasználásával is kiszámítható.

A tökéletes gázok ismeretes $pv = RT$ egyenlete még

$$pv = \frac{c}{M} T$$

alakba is hozható, ha M a gáz molekulasúlyát, c pedig egy a gáz természetétől független állandót jelent; T az abszolut hőmérséklet. Ha p, v és T értékek p_c, v_c és T_c kritikus állandókkal fejeztetnek ki, akkor VAN DER WAALS szerint áll a következő kifejezés:

$$T_c A M p_c v_c,$$

a hol A uj állandó, mely minden testre nézve ugyanaz.

NATANSON, a kitől ezen elméleti okoskodások erednek, meggyőződött róla, hogy A 6 olyan testre, melynek kritikus állandói ismeretesek, kielégítő módon egyező értékű. E szerint ismeretes lévén A középértéke, nemkülömben M és p_c, a képlet megadja T_c-t, ha v_c is adva van. Ámde megjegyzendő, hogy $p(v-b)=RT$ egyenlet, mely AMAGAT vizsgálatai szerint a hidrogén összenyomhatását tág határok között igen jól kifejezi, a VAN DER WAALS-féle képletnek különös esete, s hogy ennélfogva $v_c=3b$. AMAGAT kisérleteiből ismeretes b értéke s így kiszámítható v_c s aztán T_c. Ezen az uton NATANSON T_c értéke gyanánt —232 C°-ot talál, mely az előbb adott értékkel igen szépen egyez.

Már most hátra volt ezen elméleti fejtegetések kisérleti igazolása, a mi OLSZEWSKI nek tényleg sikerült.

Meghatározandó tehát a hidrogén kritikus hőmérséklete és a légköri nyomásnak megfelelő forrpontja. E végből a hidrogént először a kritikus nyomáson, azután pedig a légköri nyomás alatt kellett forrásba hozni s mindkét esetben hirtelen, lehetőleg pontosan meghatározni a csak rövid időre állandó forrási hőmérsékleteket. A hidrogén üres térben forró oxigénnel —211°-ra lehüttetvén, a tágulása, melynek a további hőmérséklet-csökkenést kellett előidéznie, úgy szabályoztatott, hogy a forrás 20-, illetőleg 1 atmoszférával egyenlő végleges nyomás alatt menjen végbe; a forrás mindössze nehány pillanatig tartott s az alatt kellett a hidrogén hőmérsékletét lemérni. A gázhőmérő, természetesen, ki volt zárva. A thermoelektromos oszlop sem látszott ezen mély hőmérsékletek alatt megbizhatónak, a mennyiben akkor már nem elég érzékeny, s az idő nem elegendő arra, hogy a forrasztáshely a környező gáz hőmérsékletét felvegye. Az elektromos ellenállás változása azonban, különösen CAILLETET és COLARDEAU kisérleteiben kidolgozott tökéletesítéssel, sikerrel kecsegtetett. Rendkivül vékony platina-drót szigetelő keretre volt sok menetben feltekergetve, úgy hogy az egész mintegy üres tokot alkotott, mely a hidrogént tartó edényben volt elhelyezve. A drót a Wheatstone-féle hídban volt bekapcsolva s ellenállásának változása az ismeretes módon méretett meg. Minthogy a folyósodó hidrogén a drótot minden oldalról körülvette, a hőmérsékletét azonnal át is adhatta. Egy nehézséget azonban nem szabad szem elől téveszteni: a mérendő hőmérséklet az eddig mérteknél mélyebb volt

s azért az ellenállás változásának törvényét csak *extrapolatio* utján lehetett alkalmazni. S ez mindenesetre komoly kétséget támaszthat. De ha tekintetbe vétetik, hogy az ellenállás változásának törvénye az alkalmazásba vett platina-spirálisra igen nagy közelítéssel lineáris; hogy az extrapolatióval meghatározott hőmérséklet a drót ellenállásának kikémlelésénél alkalmazott legmélyebb hőmérséklettől (—208,5° C.) nincsen nagyon távol; s hogy az extrapolatiónál a —208°-nak megfelelő együttható használtatott, a kétség nagyon könnyen eloszlatható.

Olszewski ezzel a módszerrel azt találta, hogy a hidrogén kritikus hőmérséklete —234,5°, a normális forrpont pedig —243,5° C.

A kisérleti uton talált kritikus hőfok e szerint igen szépen egyezik Natanson elméleti uton szerzett adatával; ellenben a normális forrpontok értéke között tetemes eltérés mutatkozik. *B.*

*

A folyósított levegő tudományos alkalmazásai. J. Dewar. *Chemical News* 71. 192—198. l. *Zeitschr. f. Instr.* 15. 375—377. l.

Szerző leirja ama kisérleteit, melyeknél a folyósított levegőt használta fel igen alacsony hőmérséklet előállítására. Kisérletei a fizika minden ágára kiterjedtek, melyekből a szerző legelőször is azt következteti, hogy az abszolut nullpontnál a fémek tökéletes elektromos vezetőkké válnak: a Joule-féle hő zérus, a Peltier-féle jelenség pedig megszűnik.

A folyékony levegő törésmutatója a D vonalra 1,2062.

Szerző továbbá közli tapasztalatait a folyékony gázoknak hősugárzástól való megvédésére vonatkozólag. E czélból a folyósított gázokat kettős falu edényben szokták tartani, melynek két fala között vacuumot létesítenek; az edényt pedig kivül és belül beezüstözik. Dewar a vacuumba kevés higanyt tesz. Az edénynek levegővel való megtöltésekor a nagy lehülés következtében a falakon finom higanytükör képződik. A hőveszteség ily edényben csak 4%-a annak, mely nem higanyozott edényben bekövetkezik. Ezzel kapcsolatban a szerző megmutatja, hogy higanynyal előállított vacuumban a higanygőzök rögtön lecsapódnak, ha az edényt folyós levegővel itatott szivacscsal érintjük. Az érintés helyén az egész fém összegyül, a mi onnan látszik, hogy a kisérletet ismételve uj higanytükör nem keletkezik. Más alakban is sikerül a kisérlet: Erősen kiszivattyúzott foszforeszkáló csövet kapcsolt párhuzamosan egy szikraközhöz, melynek ellenállása valamivel nagyobb mint a csőé, úgy hogy a kisülés a csövön át történik; a mint a szivacs a csövet érinti, a kisülés a szikraközön át megy végbe.

A folyós levegő feletti csendes légkör kiválóan alkalmas törékeny tárgyak lehütésére. Igy pl. szappanbuborékokat és hártyákat igen könnyen lehet benne megfagyasztani.

A szerző ezután leir egy készüléket mely arra szolgál, hogy vele a folyós levegő elpárolgását megakadályozza. Két, folyós levegővel telt edényt egymásba tesz. A külsőben szabadon párologtatja a folyós levegőt, miáltal a belsőben a párolgás el van hárítva. Ugyanezen eszköz szilárd levegő előállítására is szolgál. E czélból a külső edényt erősen kiszivattyúzza, azután a belső teret kissé ritkítva, a benne lévő folyékony levegő megfagy.

Megvizsgálta továbbá a molekuláris erők változását, miközben valamely testet nagyon alacsony hőmérsékletre hozunk. Különböző anyagú drótokat folyékony levegővel egészen körül vett s tapasztalta, hogy azok szilárdsága czink, aluminium és antimon kivételével tetemesen megnövekedik; a vasé például kétszer akkora, a Wood-féle fémé majdnem négyszer akkora lesz.

A következő két táblázat mutatja a külömböző hőmérsékleteknek megfelelő abszolut erősségeket, kilogrammokban kifejezve.

2,49 mm. átmérő esetében:

	+15 C°	—182 C°
Lágy aczél	191	318
Vas	145	304
Réz	91	136
Sárgaréz	141	200
Ujezüst	213	272
Arany	116	154
Ezüst	150	191

5,1 mm. átmérő esetében:

Czinn	91	177
Ólom	35	77
Czink	16	12
Higany	0	14
Bizmut	27	14
Antimon	28	14
Wood-féle fém	64	204

Igen feltünően mutatkozik a mágnesi állapot változása, a mennyiben az aczélmágnes nyomatéka, ha —182 C°-ra lehüttetik, az eredeti érték 30—50%-ával emelkedik. A felmelegedés az eredeti állapotot állítja vissza.

Tangl.

IRODALOM.

F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. *Bearbeitet v.* F. Tägert. *Festschrift zu der Pfingsten 1895 in Göttingen stattfindenden dritten Versammlung des Vereins zur Förderung des Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterrichts.* Leipzig. B. G. Teubner. 1895. 8°, V+66. l. Ára 2 márka.

Kevés mathematikus fáradozik hasonló buzgalommal azon, hogy tudománya jelenlegi mozgalmai és törekvései iránt minél szélesebb körben mentől intenzivebb érdeklődést keltsen, mint a híres göttingai tanár, a kinek előadásai után e füzet készült. A modern mathematikai vizsgálatok legnehezebb részeiről tartott egyetemi felolvasásait már évek óta autografált füzetekben teszi közzé, hogy hatásuk ne szorítkozzék hallgatóinak szűk körére.[1] Midőn a chicagói kiállítás alkalmából Amerikába utazott, nem mulasztotta el colloquiumain az új világot megismertetni azzal, hogy mivel és mily sikerrel foglalkoznak az ó világ mathematikusai.[2] Az idén pedig a Göttingában egybegyült tanférfiak előtt nemcsak figyelemre méltó beszédjében[3] fejtette ki, hogy az egyetem, a szorosabb értelemben vett

---

[1] A füzetek Klein, volt asszisztensénél, dr. Schilling úrnál rendelhetők meg, ki jelenleg az aacheni műegyetemen az ábrázoló geometria tanára. Eddig a következők jelentek meg:

Nicht Euklidische Geometrie. (1889—90.)

Lineare Differentialgleichungen. (1890—91.)

Riemann'sche Flächen. (1891—92.)

Höhere Geometrie. (1892—93.)

Die hypergeometrische Function. (1893—94 telén.)

Lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. (1894 nyarán.)

Tartalmukat maga Klein a *Math. Annalen* 45. és 46. kötetében ismertette.

[2] *The Evanston colloquium.* Lectures on mathematics, delivered from aug. 28 to sept. 9, 1893 at Northwestern University Evanston. Ill. by F. Klein, reported by *A. Ziwet.* New-York 1894. Macmillan 8°, 109. l.

[3] Megjelent a Hoffmann-féle Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht 26. kötetében, 382—88. l.

szaktudósnak e nevelő-iskolája, a leendő középiskolai tanárok igényeit sem téveszti szem elől: hanem a jelen voltakat az itt ismertetendő füzettel is iparkodott arról meggyőzni, hogy a tudomány sokszor oly messzefekvőeknek és szertelenül elvontaknak látszó fogalmai mily szoros kapcsolatban vannak a középiskolai tananyaggal.

Az elemi geometriának csupa közvetetlenül kínálkozó s azért már az ó-korban általános érdeklődést keltett kérdéseiről van itt szó, melyekre a feleletet azonban csak a legújabb korban adta meg az algebra és analizis. Különösen három probléma lép előtérbe: 1. a delosi probléma, a mely a koczka megkettőzését követeli, 2. a szögnek három egyenlő részre való felosztása, 3. a kör quadraturája vagyis a π szám megszerkesztése. Körzővel és vonalzóval mind a három megoldhatatlan, s ennek kimutatása e művecske főtárgya. De az első két probléma megoldhatóvá válik, mihelyt oly algebrai görbéket tudunk rajzolni, a melyeknek egyenleteiben az együtthatók egész számok vagy legalább rajzban adott távolságoknak egész függvényei. Ellenben a kör quadraturája még így sem sikerülhet, hanem csak transzczendens görbék segítségével. Innen van, hogy ezen előadásokban is két rész van megkülömböztetve: egy az algebrai mennyiségek szerkeszthetőségéről s egy másik a transzczendens számokról és a kör quadraturájáról szól.

Az első rész annak bebizonyításával kezdődik, hogy valamely vonaldarab csak akkor lehet körzővel és vonalzóval megszerkeszthető, ha mérő száma oly irreduktibilis algebrai egyenletnek tesz eleget, a melynek foka a 2 valamely hatványa. Az irreduktibilitás úgy értendő, hogy az illető egyenlet nem bontható fel oly tényezőkre, a melyeknek együtthatói az adottaknak tekintett vonaldarabok (ráczionális numerikus együtthatókkal biró) ráczionális függvényei. Hogy a delosi probléma és a szög háromm áosztása körzővel és vonalzóval lehetetlen, az most már onnan következik, hogy irreduktibilis harmadfokú egyenletek gyökeinek szerkesztését követelik. Ellenben az előbbi probléma egy cissoisnak, az utóbbi egy konchoisnak segítségével könnyen megoldható. Mindkét szerkesztés le van írva, de az utóbbinak helyessége nincsen bebizonyítva. Ugyanez a rész a körosztás elméletének első elemeit is tartalmazza, köztük a szabályos 17-szög Staudt-féle szerkesztését.

A második rész első fejezete a transzczendes számok létezésének Cantor-tól eredő bebizonyításnak rendkívül egyszerű és világos előadását tartalmazza. Ezt a körmérés elméletének igen rövid története követi, a mely csak a főmomentumokra szorítkozik, de ezeket élesen jellemzi. Végre e részt az e transzczendens voltának, valamint a kitevős függvény arithmetikai természetére vonatkozólag Lindemann-tól talált tételeknek bebizonyítása zárja be. E bebizonyítás Gordan nyomán halad. Gordan ugyan e mellett csak a π számra szorítkozik, de bebizonyításainak általánosítása csak egy

kivételes esetben okoz nehézséget. E kivételes eset (midőn t. i. az 54. lap első egyenletében $C_0=0$) e füzetben agyon van hallgatva. Ezáltal e rész ugyan látszólag nagyon nyert egyszerűségben, de elvesztette szigorúságát.

A π-re vonatkozólag nyert eredményből persze csak az következik, hogy ez a szám nem szerkeszthető algebrai gőrbék segítségével. Transzczendens görbével ez a feladat sem lehetetlen. A könyv függeléke az integráfról szól és egy vele rajzolható görbéről, a melynek segítségével π nyerhető.

A mű igénytelen, könnyed modorban van írva. A szigorúságot csak a LINDEMANN-féle tételeknél találtam az egyszerűségnek feláldozva, de annál többször vannak fárasztóbb részletek irodalmi utalásokkal elkerülve. A művecske főczélja így könnyebben volt elérhető; avval, hogy a problémákba csak betekintést nyujt, sokkal inkább kelt irántuk s az egész modern mathematika iránt érdeklődést, mintha a könnyedséget a teljességnek kedvéért feláldozta volna. Jelen alakjukban ezen előadások nem csak maguk nyujtanak kellemes, mondhatnám szórakoztató olvasmányt, hanem bizonyára nem egy olvasót a bennük említett művek olvasására is fogják serkenteni. Megértésükhöz csupán a kongruenciák, az egyenletek és az elemi függvények elméleteinek kezdetei kellenek.

Kürschák József.

MEGOLDOTT FELADATOK.

23. *Az ABCD egyszerű négyszög AC és BD átlói álljanak egymásra merőlegesen és messék át egymást O-ban. Jelentsék továbbá P_1, P_2, P_3, P_4 rendre az AB, BC, CD, DA oldalak metszéspontjait az O-ból a CD, DA, AB, BC oldalokra bocsátott merőlegesekkel. Bebizonyítandó, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög derékszögű.* (KÜRSCHÁK.)

Első megoldás Szépréthy Béla főreáliskolai tanár úrtól, Brassón.

Fentebbi tétel helyessége be lesz bizonyítva, ha ki tudjuk mutatni, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög oldalai páronkint az adott $ABCD$ négyszög átlóival párhuzamosak.

Ha

$$AB \equiv g, \quad AD \equiv d_2, \quad AC \equiv x,$$
$$CB \equiv h, \quad CD \equiv d_1, \quad BD \equiv y,$$

ha továbbá M az ABC háromszög magassági pontja és

$$AM \equiv m_2 \quad CM \equiv m;$$

ha végre g, h, y egyenesek végtelenben fekvő pontjai rendre G_∞, H_∞, Y_∞ és

$$AY_\infty \equiv y_2 \quad CY_\infty \equiv y;$$

akkor a D, Y_∞, M és O pontokból álló pontcsoportot C-ből és A-ból projicziálván, C és A-ban négy megfelelő sugárpárt nyerünk, a melyek a

$$(C \cdot DY_\infty MO) = (A \cdot DY_\infty MO)$$

vagy

$$(d_1 y_1 m_1 x_1) = (d_2 y_2 m_2 x)$$

egyenletnél fogva két projektív sugársor megfelelő sugárpárjainak tekinthetők.

---

* $(AC, BD) \equiv 0$.

Eme sugarakra O-ból bocsátott merőlegesek

$$d_1^+ \perp d_1, \quad d_2^+ \perp d_2, \quad m_1^+ \perp m_1, \quad m_2^+ \perp m_2$$

újra négy sugárpárt adnak, a melyek

$$(d_1^+ x m_1^+ y) = (d_2^+ x m_2^+ y)$$

egyenleteknél fogva ugyancsak két projektív sugársor megfelelő sugárpárjainak tekinthetők.

Az e sugárcsoportokból g illetőleg h egyenesektől kimetszett pontcsoportok

$$(g \cdot d_1^+ x m_1^+ y) = (h \cdot d_2^+ x m_2^+ y)$$

vagy

$$(P_1 A G_\infty B) \quad = (P_2 C H_\infty B)$$

a g és h pontsorsorozókon fekvő projektív pontsorok megfelelő pontpárjaiból állnak.

Mivel e pontsorsorozók közös pontjában — B-ben — egy megfelelő pontpár egyesült, a végtelenben fekvő G_∞ és H_∞ pontok pedig egymásnak megfelelnek, a sorok perspektív fekvésüek, egy a végtelenben fekvő pontra, mint perspektív czentrumra nézve. E perspektív czentrumon keresztül haladnak a P_1, P_2 és A, C megfelelő pontpárokat összekötő egyenesek is, a mi más szóval annyit jelent, hogy $P_1P_2 \parallel AC$-vel. AB és D pontoknak egymással való felcserélése után ugyanazon levezetés a P_3P_4 és AC egyenesek párhuzamosságát is mutatja.

*

Második megoldás Csillag Vilmos műegyetemi tanársegéd úrtól.

Alapföltevés, hogy

$$AC \perp BD;$$

a tétel be lesz bizonyítva, ha megmutatjuk, hogy

$$P_1P_2 \parallel AC \parallel P_3P_4$$

és

$$P_2P_3 \parallel BD \parallel P_4P_1.$$

A feladatban leírt módon szerkeszszük meg a $P_1P_2P_3P_4$ négyszöget. (L. az ábrát.) Azután O-ból vetítsük át a P_i pontok mindegyikét az $ABCD$ négyszög azon oldalaira, a melyek a P_i-t tartalmazó oldallal szomszédosak; azaz legyen

$(OP_1, DA)=E_1$ $(OP_2, CD)=E_2$ $(OP_3, BC)=E_3$ $(OP_4, AB)=E_4$
$(OP_1, BC)=F_1$ $(OP_2, AB)=F_2$ $(OP_3, DA)=F_3$ $(OP_4, CD)=F_4$.

Mindenekelőtt kiemeljük, hogy az

$$(E_1E_2D) \quad \text{és} \quad (E_3E_4B),$$

valamint az

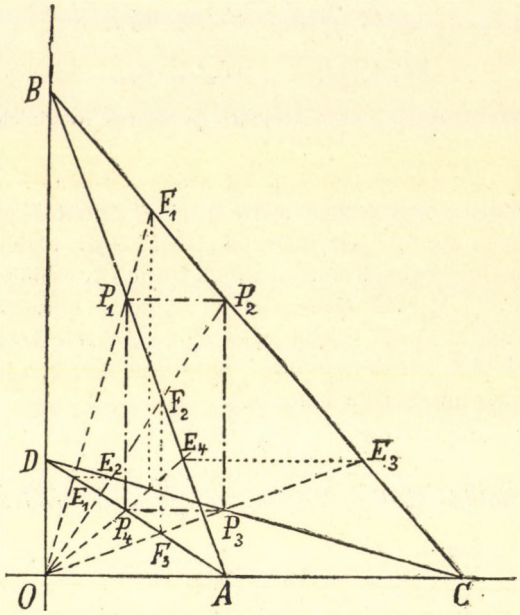
$$(F_2F_3A) \quad \text{és} \quad (F_4F_1C)$$

háromszögeknek is O a magasságpontja. Ennek következtében

$$E_1E_2 \perp OD, \quad E_3E_4 \perp OB,$$

valamint

$$F_2F_3 \perp OA, \quad F_4F_1 \perp OC;$$



vagy, miután alapföltételünk az, hogy

$$BD \perp AC,$$

írhatjuk:

$$E_1E_2 \parallel AC \parallel E_3E_4$$

és

$$F_2F_3 \parallel BD \parallel F_4F_1. \tag{1}$$

Továbbá látni, hogy O-centrumra nézve, egyrészről

P_1P_1B háromszög perspektív helyzetű az E_1E_2D háromszöggel

és

P_3P_4D « « « « E_3E_4B «

az AC közös tengelyre vonatkozólag; másrészről

P_2P_3C háromszög perspektív helyzetű F_2F_3A háromszöggel

és

P_4P_1A « « « F_4F_1C «

a BD közös tengelyre vonatkozólag.

De ezekből következik, hogy először

P_1P_2 az E_1E_2-vel

és

P_3P_4 az E_3E_4-gyel

AC-n találkozik; ámde (I) szerint

$$E_1E_2 \parallel AC \parallel E_3E_4,$$

tehát egyszersmind

$$P_1P_2 \parallel AC \parallel P_3P_4.$$

Épenúgy másodszor

P_2P_3 az F_2F_3-mal

és

P_4P_1 az F_4F_1-gyel

BD-n találkozik; ámde ismét (I)-ből

$$F_2F_3 \parallel BD \parallel F_4F_1$$

lévén, egyúttal

$$P_2P_3 \parallel BD \parallel P_4P_1.$$

*

Harmadik megoldás Doroghy Ignácz főreáliskolai tanár úrtól, Temesvárott.

Vegyük az egymásra merőleges átlókat koordinata-tengelyekül, úgy, hogy AC az abscissa-tengely, BD pedig az ordináta-tengely legyen; legyenek továbbá az átlók szeletei $OC=a_1$, $OA=a_2$, $OD=b_1$, $OB=b_2$, akkor a CD, DA, AB és BC négyszög-oldalok egyenletei rendre lesznek:

$$\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}=1$$

$$\frac{x}{a_2}+\frac{y}{b_1}=1$$

$$\frac{x}{a_2}+\frac{y}{b_2}=1$$

$$\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_2}=1;$$

az OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 merőlegesek egyenletei pedig:

$$\frac{x}{b_1}-\frac{y}{a_1}=0;$$
$$\frac{x}{b_1}-\frac{y}{a_2}=0;$$
$$\frac{x}{b_2}-\frac{y}{a_2}=0;$$
$$\frac{x}{b_2}-\frac{y}{a_1}=0.$$

Minthogy a P_1P_2 egyenes átmegy AB és OP_1, továbbá BC és OP_2 metszéspontjain, ennélfogva egyenlete a következő:

$$\left(\frac{x}{a_2}+\frac{y}{b_2}-1\right)\begin{vmatrix} -\frac{1}{b_1} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{b_1} \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{b_2} & -\frac{1}{a_2} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} -$$
$$-\left(\frac{x}{b_1}-\frac{y}{a_1}\right)\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{b_1} & \frac{1}{a_2} \\ \frac{1}{b_2} & -\frac{1}{a_2} & \frac{1}{b_2} \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$$

ebből kifejtés és $\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)$ kifejezéssel való rövidítés után lesz:

$$\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{b_1b_2}\right)y-\frac{1}{b_1}=0 \qquad (1)$$

ez az egyenes parallel az x-tengelylyel.

P_2P_3 egyenes átmegy BC és OP_2, továbbá CD és OP_3 egyenesek metszéspontjain, tehát az ő egyenlete:

$$\left(\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_2}-1\right)\begin{vmatrix} \frac{1}{b_1} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{b_2} \\ -\frac{1}{a_2} & \frac{1}{b_1} & -\frac{1}{a_1} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} -$$
$$-\left(\frac{x}{b_1}-\frac{y}{a_2}\right)\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{b_2} & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{b_1} & -\frac{1}{a_2} & \frac{1}{b_2} \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$$

a miből kellő rövidítés után lesz:

$$\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{b_1b_2}\right)x-\frac{1}{a_2}=0 \qquad (2)$$

ez az egyenes párhuzamos az y-tengelylyel, tehát merőleges a P_1P_2 egyenesre.

P_3P_4 és P_4P_1 egyenesek egyenletei:

$$\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{b_1b_2}\right)y-\frac{1}{b_2}=0; \quad \left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{b_1b_2}\right)x-\frac{1}{a_1}=0$$

tehát az $P_1P_2P_3P_4$ négyszögnek két oldala AC átlóval és a másik két oldala BD átlóval parallel.

*

Negyedik megoldás Freikind Ignácz műegyetemi hallgató úrtól Budapesten.

Az ábrát megtekintve rögtön látjuk, hogy a tétel bebizonyítására elég kimutatni azt, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög bármelyik oldala az AC és BD átlók egyikével párhuzamos. Vegyük például a P_2P_3 oldalt; erről be fogjuk bizonyítani, hogy párhuzamos BD-vel. Legyen

$$BAC\sphericalangle=\alpha; \quad CAD\sphericalangle=\beta;$$
$$BDC\sphericalangle=\gamma; \quad CBD\sphericalangle=\delta;$$

akkor, minthogy $OP_2 \perp AD$ és $OP_3 \perp AB$,

$$P_3OD\sphericalangle=\alpha, \quad P_2OB\sphericalangle=\beta.$$

Alkalmazzuk a BOP_2 és DOP_3 háromszögekre a sinus-tételt:

$$\frac{BO}{BP_2}=\frac{\sin(\beta+\delta)}{\sin\beta}$$
$$\frac{DO}{DP_3}=\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha};$$

továbbá

$$\sin\alpha=\frac{BO}{AB}; \quad \cos\alpha=\frac{AO}{AB}$$
$$\sin\beta=\frac{DO}{AD}; \quad \cos\beta=\frac{AO}{AD}$$
$$\sin\gamma=\frac{CO}{CD}; \quad \cos\gamma=\frac{DO}{CD}$$

$$\sin\delta = \frac{CO}{BC}; \quad \cos\delta = \frac{BO}{BC};$$

ha ezeket az értékeket behelyettesítjük lesz

$$\frac{BO}{BP_2} = \frac{BO \cdot DO + AO \cdot CO}{BC \cdot DO}$$
$$\frac{DO}{DP_3} = \frac{BO \cdot DO + AO \cdot CO}{BO \cdot CD}.$$

E két egyenletet egymással elosztván, lesz:

$$\frac{DP_3}{CD} = \frac{BP_2}{BC},$$

a mi analitikai kifejezése annak, hogy a P_2P_3 párhuzamos BD-vel.

*

Ötödik megoldás dr. Lóky Béla kegyesrendi tanár úrtól Kolozsvárott.

Válaszszuk a feladatban szereplő OA és OB egyeneseket x illetőleg y tengelyül, akkor csak azt kell kimutatnunk, hogy P_1 és P_4-nek ugyanaz az x-sze, P_2 és P_3-nak szintén egyez az x-sze és P_1, P_2-nek ugyanaz az y-ja, P_3, P_4-nek szintén egyez az y-ja. Ha a szögpontok koordinátáinak a következő jelelésével élünk

$$A(x_1|0), \quad B(0|y_2), \quad C(-x_3|0), \quad D(0|-y_4),$$

akkor

AB egyenlete: $y_2x + x_1y = x_1y_2$
BC « $-y_2x + x_3y = x_3y_2$
CD « $y_4x + x_3y = -x_3y_4$
DA « $y_4x - x_1y = x_1y_4$.

A P_1, P_2, P_3, P_4 pontok, mint a kezdőponton átmenő s az oldalokra merőleges egyeneseknek azon oldalakkal való metszéspontjai adódnak ki, a melyek az egyszerű négyszögben velük szemben vannak. Pl. P_1 a CD oldalra merőleges és a kezdőponton átmenő egyenesnek az AB oldallal való metszéspontja. A CD oldalra merőleges, és a kezdőponton átmenő egyenes egyenletét

$$a_1x + a_2y = 0$$
$$y_4x + x_3y = -x_3y_4$$

ből az a-kra szabott

$$a_1y_4 + a_2x_3 = 0$$

egyenlőség révén

$$-x_3x+y_4y=0$$

adja.

Így P_1 koordinátái a

$$\begin{aligned} -x_3x+y_4y&=0\\ y_2x+x_1y&=x_1y_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai, P_2-nek az

$$\begin{aligned} x_1x+y_4y&=0\\ -y_1x+x_3y&=x_3y_2, \end{aligned}$$

P_3-nak az

$$\begin{aligned} x_1x+y_4y&=0\\ -y_2x+x_3y&=x_3y_2, \end{aligned}$$

P_4-nek az

$$\begin{aligned} x_3x+y_2y&=0\\ y_4x-x_1y&=x_1y_4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai a koordinátái. Ez egyenletek puszta megtekintése már tanuskodik a kimutatandónak jelzett igazság mellett.

*

Hatodik megoldás dr. Klug Lipót egyetemi magántanár úr részéről.

Az ADC háromszögnek magasságpontja E, a BD egyenesen fekszik, mert $BD \perp AC$. Ebből következik, hogy az AEC, P_1OP_2 háromszögek perspektivek a B projicziáló pontra vonatkozólag, mert a BAP_1, BEO, BCP_2 egyenesek egymást a B pontban metszik; de minthogy

$$AE \parallel P_1O, \quad CE \parallel P_2O,$$

azért

$$AC \parallel P_1P_2,$$

vagyis

$$P_1P_3 \perp BD.$$

Hasonló úton kimutatható, hogy $P_3P_4 \perp BD$, $P_2P_3 \perp AC$, $P_1P_4 \perp AC$ s mert a föltétel szerint $AC \perp BD$, azért $P_1P_2P_3P_4$ négyszög, derékszögű.

*

Hetedik megoldás Breuer Mór tanárjelölt úr részéről.

Ha az ABD háromszögnek B és D szögpontjaiból kiinduló magasságait meghuzzuk, akkor ezek e háromszög harmadik magassági vonalával az AC-vel egyazon M pontban találkoznak. De minthogy

$$OP_2 \parallel MB, \quad OP_3 \parallel MD,$$

azért

$$CP_2 : BC = CO : CM = CP_3 : CD,$$

vagy

$$CP_2 : CP_3 = BC : CD,$$

és így

$$P_2P_2 \parallel BD.$$

Ugyanezen a módon kimutatható, hogy $P_3P_4 \parallel AC$, $P_4P_1 \parallel BD$, $P_1P_2 \parallel AC$.

*

Nyolczadik megoldás Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.

A feladatban használt jelöléseket megtartva, legyenek még:

E az OP_3 merőlegesnek talppontja az $\overline{AB}$ oldalon,
F « OP_4 « « « $\overline{BC}$ «
G « OP_1 « « « $\overline{CD}$ «
H « OP_2 « « « $\overline{DA}$ «

Az EP_1GP_3 pontok egy ugyanazon kör kerületén vannak, mert P_1P_3 közös átfogó a P_1EP_3 és P_3GP_1 derékszögű háromszögekben.

Az FP_2HP_4 pontok pedig a $\overline{P_2P_4}$ átfogó fölött írható kör kerületén feküsznek.

Mindenekelőtt kimutatom, hogy e két kör azonos, tehát $\overline{P_1P_3} = \overline{P_2P_4}$. Az $EFGH$ négyszög körbeírt négyszög, mert benne a szemben fekvő szögek összege egyenlő π-vel. Ha

$$CAD\sphericalangle = \varphi,$$

akkor

$$HEP_2 = \varphi, \quad EHP_2 = A - \varphi,$$

mint az $\overline{AO}$ átmérő fölött szerkeszthető körnek egyenlő ivein nyugvó kerületi szögei; továbbá

$$GHP_2 = D + \varphi - \frac{\pi}{2}, \quad HGP_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

mint az $\overline{OD}$ átmérő fölött írható körben egyenlő íveken álló kerület szögek.

$$FGP_1 = C + D + \varphi - \pi, \quad GFP_4 = \pi - (D + \varphi)$$

mint a CO átmérőjű kör egyenlő ivein álló kerületi szögek.

$$EFP_4 = \frac{\pi}{2} - (A - \varphi), \quad FEP_3 = B + (A - \varphi) - \frac{\pi}{2}$$

mint a $\overline{BO}$ átmérőjű kör egyenlő ivein álló kerületi szögek.

Ezek alapján:

$$E+G=HEP_3+FEP_3+FGP_1+HGP_1=\pi=F+H.$$

De az F pont az EP_1GP_3 kör kerületén van, mert FGP_3E szintén körbeírt négyszög, azaz:

$$F+GP_3E=\pi$$

mert

$$F=GFP_4+P_4FE=\pi-(D+\varphi)+R-(A-\varphi)=\frac{3\pi}{2}-(A+D)$$

$$GP_2E=\frac{3\pi}{2}-(B+C);$$

tehát a H pont szintén az EP_1GP_3 körön van, s így EP_1GP_3 kör azonos $EFGH$ körrel, melynek egyik átmérője $\overline{P_1P_3}$.

Minthogy az $EFGH$ pontok egy ugyanazon körön feküsznek, egészen úgy mutatható ki, hogy E és G pontok rajta vannak az FP_2HP_4 körön, vagyis hogy e két kör azonos, melynek egy átmérője $\overline{P_2P_4}$.

Mindezekből következik, hogy:

$$EP_1GP_3\equiv FP_2HP_4, \quad \overline{P_1P_3}=\overline{P_2P_4},$$

melyek a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög átlói; de oly négyszög, melynek átlói egyenlők, vagy derékszögű parallelogramma, vagy egyenlő szárú trapéz. A kérdéses négyszög azonban csak az előbbi lehet, mert átlói egyszersmind a körülírt kör átmérői.

Még kell még mutatnunk, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ parallelogramma oldalai páranként párhuzamosak az $ABCD$ négyszög átlóival.

$P_3P_4D=HEP_3=\varphi$, mint a hat ponton átmenő körnek $\overline{HP_3}$ húrján álló kerületi szögei. De a $P_3P_4D=\varphi$ egyenletből következik, hogy P_3P_4 parallel az AC átlóval s így P_1P_2 is.

De a parallelogramma derékszögű s így:

$$P_1P_4 \parallel BD \parallel P_2P_2$$

A speciális négyszögei közt a deltoid, rhombos és a négyzet azok, melyeknek átlói egymásra merőlegesek. Az elsőnek egyik átlóját felezi a másik, a második és harmadiknál O egyszersmind az átlók felező pontja. Az idomban keletkezett hasonló háromszögekből következik, hogy a felező átló átmegy $P_1P_2P_3P_4$ parallelogramma, tehát a körülírt kör középpontján is s így ez az utóbbiaknál az átlók felező pontja. A két utolsó négyszög parallelogramma lévén, a $P_1P_2P_3P_4$ összeesik $EFGH$-val, tehát a kör ez esetben az oldalakat érinti.

Kilenczedik megoldás Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.

Legyenek a BD és AC átlók egy derékszögű rendszer tengelyei; továbbá A, B, C, D koordinátai rendre

$$A(0, b_1),\quad B(-a_1, 0),\quad C(0, -b_2),\quad D(a_2, 0)$$

és

$$\begin{aligned} a &\equiv AB \equiv b_1x - a_1y + a_1b_1 = 0, & m_c &\equiv a_2x + b_2y = 0 \\ b &\equiv BC \equiv b_2x + a_1y + a_1b_2 = 0, & m_d &\equiv a_2x - b_1y = 0 \\ c &\equiv CD \equiv b_2x - a_2y - a_2b_2 = 0, & m_a &\equiv a_1x + b_1y = 0 \\ d &\equiv DA \equiv b_1x + a_2y - a_2b_1 = 0, & m_b &\equiv a_1x - b_2y = 0. \end{aligned}$$

Ha

$$\frac{a_1a_2}{a_1a_2 + b_1b_2} = m, \qquad \frac{b_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2} = n,$$

akkor

$$m + n = 1,$$

és a P_1, P_2, P_3, P_4 pontok koordinátái rendre:

$$\begin{aligned} P_1(-a_1n,\ \ b_1m), &\qquad P_2(-a_1n,\ -b_2m) \\ P_3(\ \ a_2n,\ -b_2m), &\qquad P_4(\ \ a_2n,\ \ b_1m), \end{aligned}$$

a honnan azonnal látható, hogy P_1 és P_2, valamint P_3, P_4 az

$$\begin{aligned} x + a_1n &= 0 \\ x - a_2n &= 0 \end{aligned}$$

egyenletekkel biró és így az AC átlóval párhuzamos egyeneseken feküsznek továbbá, hogy P_1 és P_4 valamint P_2 és P_3 resp. az

$$\begin{aligned} y - b_1m &= 0 \\ y + b_2m &= 0 \end{aligned}$$

egyeneseken feküsznek, a melyek a BD átlóval parallelek, tehát hogy a $P_1P_2P_3P_4$ idom derékszögű parallegramma.

---

24. Ha a tetraéder szemben fekvő élei egymásra merőlegesek, bebizonyítandó, hogy akkor az élek középpontjai és a szemben fekvő élek legkisebb távolságú pontjai oly gömbön feküsznek, melynek középpontja a tetraéder súlypontjában van. (Vályi.)

Első megoldás Szépréthy Béla főreáliskolai tanár úrtól Brassón.

Ha az adott tetraéder csúcspontjait A_i-vel ($i=1, 2, 3, 4$), lapjait a_i-vel ($i=1, 2, 3, 4$), éleit pedig a_{ik}-val ($i, k=1, 2, 3, 4$) jelöljük, akkor a szemben fekvő élek merőlegességének

$$a_{ik} \perp a_{lm}$$

tekintetbe vételével minden a_{lm} élen keresztül a szemben fekvő a_{ik} élre merőleges síkot fektethetünk; legyen ennek metszéspontja az a_{ik} éllel M_{ik}. Így a tetraéder élein három pontpárt nyerünk és ezek a szemben fekvő élek legrövidebb távolságainak végpontjai. Mivel az említett merőleges síkok a tetraéder lapjaival, a határoló háromszögek magasságaiban találkoznak, a legrövidebb távolságok végpontjai egyszersmind az oldallapokon húzható magassági vonalak talppontjai lesznek, és az oldalélek felezési pontjaival egyetemben egy-egy FEUERBACH-kör kerületén feküsznek.

Ha bármely a_i oldallap magassági pontját M_i-vel, súlypontját S_i-vel, FEUERBACH-körének középpontját O_i-val jelöljük, és a szemben fekvő A_i tetraéder-csúcsot M_i és S_i-vel, az O_i-t pedig a tetraéder S súlypontjával kötjük össze, akkor egyrészt M_i, O_i és S_i pontok egy egyenesen az EULER-féle egyenesen feküsznek, másrészt az

$$\overline{O_iM_i} = 3 \cdot \overline{O_iS_i}, \qquad \overline{SA_i} = 3 \cdot \overline{SS_i}$$

relációk figyelembe vételével az $S_iA_iM_i$ és S_iSO_i hasonló és hasonló fekvésű háromszögek, melyekből

$$A_iM_i \parallel SO_i$$

és ennek alapján

$$SO_i \perp a_i.$$

«*Az oldallap Feuerbach-körének tengelye magán tartalmazza a tetraéder súlypontját is*».

Mivel valamely kör tengelye a körön át haladó gömbök középpontjainak geometriai helye, mivel továbbá a tetraéder oldallapjain fekvő Feuerbach-köröknek páronkint egy-egy közös pontpárjuk van, nyilvánvaló hogy ezek oly gömblapon feküsznek, a mely a tetraéder éleivel a feladatban megjelölt pontokban találkozik, és a melynek középpontja a súlypontban van.

Az elmondottak alapján tetraéderünk ama tulajdonságára juthatunk, hogy a magassági pontnak, a körülírt gömb középpontjával való összeköttetését a súlypont felezi.

*

Második megoldás Doroghi Ignácz főreáliskolai tanár úrtól Temesvárott.

Legyen $ABCD$ a tetraéder, melynek oldallapjait római számokkal jelöljük, úgy hogy $ABC \equiv$ IV, $ABD \equiv$ III, $ACD \equiv$ II és $BCD \equiv$ I.

A feltétel szerint az átellenes élek egymásra merőlegesek; ebből következik, hogy az AD élnek IV. lapon való vetülete $AA' \perp BC$, hasonlóképen BD élnek vetülete $BB' \perp AC$ és CD-nek vetülete $CC' \perp AB$, s így az $ABC\Delta$-nek magassági pontja M_4 a tetraéder D csúcsának projekciója.

Ha most a IV. lapnak Feuerbach-körét megszerkesztjük, akkor az ismeretesen átmegy az $ABC\Delta$ oldalainak felező pontjain és a magassági vonalaknak A', B', C' talppontjain. E körnek középpontja K_4, ha S a háromszög súlypontja, ez az S_4M_4 vonalon van, még pedig — a mint a Feuerbach tételéből következik — S_4-től számítva az S_4M_4 vonaldarab negyed részében.

Ha a K_4 pontban a IV. lapra merőlegest emelünk, akkor ez geometriai helye mindazon gömb-középpontoknak, a mely gömbök ugyanazon a hat ponton mennek át, mint az imént említett Feuerbach-kör.

Egyúttal könnyű belátni, hogy S_4M_4 a tetraéder S_4D súlyvonalának, és K_4 középpont a tetraéder S súlypontjának IV. lapon való vetülete.

E megjegyzések érvényesek a többi három lapra is, ha ezeknek Feuerbach-köreit megszerkesztjük; tehát e lapok K pontjaiban emelt merőlegesek szintén 6—6 ponton átmenő gömbök középpontjainak geometriai helyeit adják. Mivel pedig a kérdéses tetraédernél a négy magasság *egy* pontban találkozik, azért az oldallapoknak SM egyenesei nem egyebek, mint a tetraéder magassági pontját és súlypontját összekötő egyeneseknek projekcziói.

Ebből következik, hogy az oldallapok Feuerbach-köreinek középpontjaiban az illető lapokra emelt merőlegeseknek egy ugyanazon pontban kell találkozniok; ez nem lehet más, mint a tetraéder súlypontja. Ez tehát középpontja lesz egyszersmind ama gömbnek, a mely az élek felező pontjain és az egyes oldalháromszögek magassági vonalainak talppontjain átmegy.

Közvetetlenül világos, hogy a tetraéderlapok magasságvonalainak talppontjai, megadják az éleken ama pontokat, a melyekben két-két élt azoknak merőleges transversalisa átmetsz és így ezek egyszersmind a legrövidebb távolságokat állapítják meg.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

Világító testek sötét képei. Thomas Escriche barcelonai tanár a következő kisérletet írja le: Tiszta üveglapra kis tuss vagy tintacseppet ejtünk, hogy körülbelül 1—2 mm. átmérőjü foltocska keletkezzen rajta. Ha ezt az üveglapot gyertya vagy lámpa lángja és egy fehér ernyő közé tartjuk, a megvilágított ernyőn a lángnak sötét képe jelenik meg. A kisérlet nyilván a *camera obscura* kisérletének megfordítása s az egyenes vonalu terjedésből könnyen magyarázható. A két kisérlet különben egyidejüleg is megejthető, a következő módon: Az üveglap egyik felét szük nyilással átfurt stanniol lappal borítsuk, a másik felén pedig a foltocskát idézzük elő; akkor az ernyő sötétebb részén a láng világos fordított képe, a világos részen pedig sötét képe tünik fel. Több szabályosan elosztott nyilás és foltocska többszörös képeket adnak. A kisérlet különösen ez alakban csinos és tanulságos. *B.*

*

Elektromos védőernyő átlátszó vezető anyagból. Ismeretes, hogy az elektrosztatikai mérő készülékeket vezető védőernyővel kell körülvennünk, hogy megbízható adatokat szolgáltassanak. Elektromágneses áram vagy feszültségmérőknél, manometereknél t. i. a fedő üveglapnak a mutatóra gyakorolt elektromos vonzása meghamisíthatja a leolvasást. A fémernyőknek megvan az a hátránya, hogy átlátszatlanok.

Átlátszó ernyőt lehetne készíteni két üveglap közé zárt átlátszó vezető folyadékkal, praktikus szempontból ez azonban igen körülményes volna.

Ayrton és Mallernek sok probálgatás után sikerült átlátszó anyagot előállitani, mely eléggé vezető, s melylyel üveglemezek stb. mint valami lakkal könnyen bevonhatók, s pedig a következő módon:

1. eljárás: 1 rész tiszta zselatint 4 rész jégeczetben feloldunk, az egészet 100°-os vízfürdőbe helyezve. Ezen oldathoz fél térfogat higított kénsavat töltünk (1 rész tömény kénsav 8 rész deszillált vízben). A keveréket melegen a jól megtisztított üveglapra öntjük. Miután a réteg megkeményedett, saválló lakkal bevonjuk.

2. eljárás. Az előbb említett híg zselatin oldathoz eczetsavat töltünk

(2 térf. eczetsav, 1 térf. oldatba) és ráöntjük az üveglapra. Az üveglapot melegítjük, mikor a feles eczetsav elpárolog, az üveget lehűtjük; erre az eljárást még kétszer ismételjük. Végre az egészet ætherrel higított saválló lakkal vonjuk be.

A réteg elkészítése némi gyakorlatot kiván. Megesik, hogy a hártya zavarossá lesz, vagy nem eléggé vezető.

Aranyfüstös elekroszkop üvegedényét ilyen módon bevonva az a külső behatások ellen tényleg védve volt. Az elekroszkophoz elektromos testet közelítve, semmi változást sem mutatott, ha az elektroszkop gombja pl. fémharanggal lefödve, a megosztó hatástól védve volt.

The Electrician 32. k. 693. l. *T.*

*

Ezüstözés. 100 cm^3 10% ezüstnitrat oldathoz csöppenként annyi ammoniakot töltünk, míg a barna csapadék épen hogy eltűnik. Fölös ammoniak kerülendő. Azután deszillált vizet töltünk hozzá, míg az egész térfogat 1 liter lesz. (*A* oldat).

A kereskedésben kapható 40% formaldchyd oldathoz annyi desztillált vizet töltünk, a míg 1% oldatot kapunk. (*B* oldat). Az ezüstözendő üveglap jól megtisztítandó. Közvetlenül az ezüstözés előtt az *A* és *B* oldatból egyenlő térfogatokat gyorsan összekeverünk s az üveglapra ráöntjük. 5—10 percz mulva az oldatból az összes ezüst rárakodott az üveglapra.

A mellett, hogy igen egyszerű, az eljárásnak az az előnye is megvan, hogy a folyadékban lévő ezüstmennyiség tulnyomó része lerakodik az ezüstözendő üveglapra.

A. és L. Lumière *Journ. d. Phys.* (3. sér.) 4. k. 29. l. *T.*

*

Az aluminium forrasztása. Az aluminium aluminiumhoz vagy más fémhez, Delécluse szerint, a következő forrasztó ötvénynyel forrasztható: 48 s. r. ón, 24 s. r. czink, 24 s. r. ólom, 3,5 s. r. aluminium és 0,5 s. r. chróm. — Jean Bies-Albert a következő módon összeállított forrasztót ajánl: 56 s. r. czink, 28 s. r. ón, 9 s. r. aluminium és 7 s. r. ezüst vagy nikel. A forrasztó vas hőmérséklete 350—400° C. Az összeforrasztandó aluminiumfelületek finom ráspolylyal jól megtisztítva, mintegy 400° hőmérsékleten a forrasztószerrel bevonatnak s azután egymáshoz szoríttatnak. — Ha az aluminium más fémmel forrasztandó össze, a letisztított felületeket még hig sósavval vagy királyvízzel kell megnedvesíteni s a forrasztás megkezdése előtt ez utóbbit hirtelen feltörülni. — Az eljáráshoz a közönséges bádogos forrasztó-vas használható, melynek azonban igen tisztának kell lennie. A forrasztott felületek, Delécluse szerint, 1 mm^2-ként 20 kg. terhelés alatt nem váltak szét.

La Nature. 23. évf. 26. l. *B.*

KOLOZSVÁRI M. KIR. EGYETEM KÖNYVTÁRA

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

NEGYEDIK ÉVFOLYAM

VIII. FÜZET. 1895 DECZEMBER

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1895

TARTALOM

Lap

SUTÁK JÓZSEF: Alaprendszerek egy változós algebr. függvényeknél ... 321

BAUER MIHÁLY: Megjegyzés Dirichlet egyik tételére ... 331

Jelentés a Math. Phys. Társulat II. tanulóversenyéről ... 337

A Math. Phys. Társulat II. tanulóversenyein jutalmazott dolgozatok (RIESZ EMIL és PILCZER IGNÁCZ dolgozatai) ... 339

L. KOENIGSBERGER: *Helmholtz*-nak a mathematika és mechanika alapelveire vonatkozó vizsgálatai. (Fordítás) ... 345

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 5 forint. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A negyedik társulati év 1895. deczember 31-én végződött. A *tagsági díj* az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Mandák Dezső* egyetemi quæstor úr (IV., szerb-u. 10.) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéséért.*

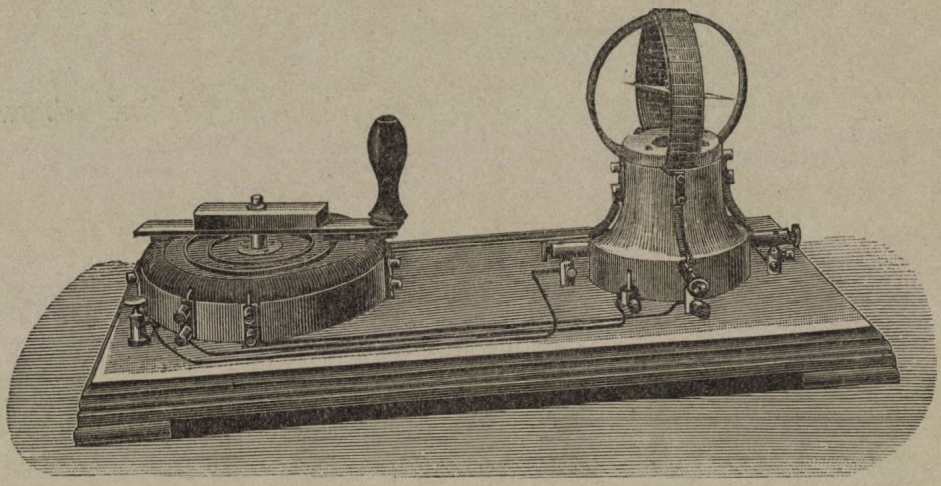
A *Math. Phys. Lapok* I—IV. évfolyamai teljes példányokban még kaphatók; az I. kötet ára 5 frt, a többieké 3—3 frt.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja, a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Esterházy-u. 3.), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Bartoniek Géza* ügyvivő titkár czímére **(IX. Csillag-utcza 8.)** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv* műegyet. tanár **(VII., Csengery-u. 1)**, a physikai tárgyúak pedig *Bartoniek Géza* czíme alatt. Ez utóbbihoz küldendők a *reclamatiók* is. A reclamatiókat — költségkimélésből — mindenkor a legközelebb megjelenő füzettel egyidejűleg teljesítjük.

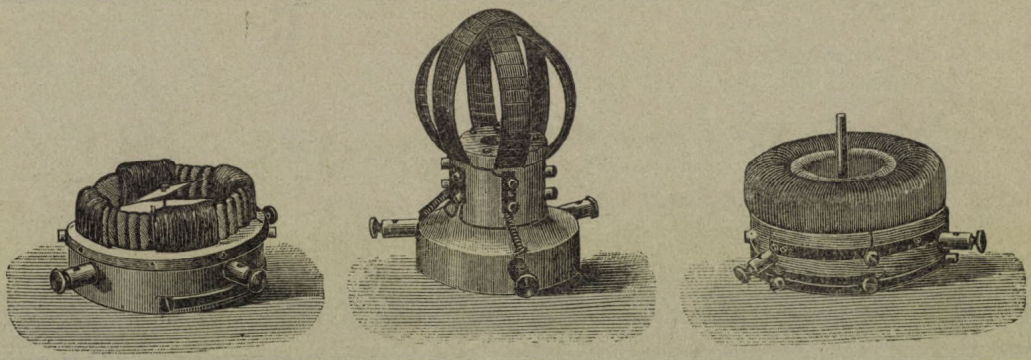
Értesítés. *Röiti: A fizika elemei* című művének mindkét kötete a K. M. Természettud. Társulat kiadásában megjelent. A 94 ív terjedelmű művet, melynek szövegét 881 rajz és három színes műlap magyarázza, társulatunk tagjai füzve 5 frt, kötve 6 frt kedvezményes áron szerezhetik meg. A megrendelés a VI—VII. füzethez mellékelt levelező lapon eszközölhető. A Természettudományi Társulat a művet január hóban küldi szét. A ki a mű árát postautalványon küldi a Term. Társulatnak, annak a művet *bérmentve* fogják megküldeni.



WEINHOLD-féle készülék

FORGÓ MÁGNESES TÉR ELŐÁLLITÁSÁRA.

A II. kötet 275. stb. oldalain ismertetett készülékeket (3., 8., 9. és 11. ábra) minden hozzávaló mellékkészülékkel teljesen felszerelve igen ajánlhatjuk a t. cz. tanár urak becses figyelmébe.



A teljes készülék ára legfinomabb kivitelben ***60 forint*** *loco Budapest. A készülék egyes részei külön is kaphatók méltányos árakon.*

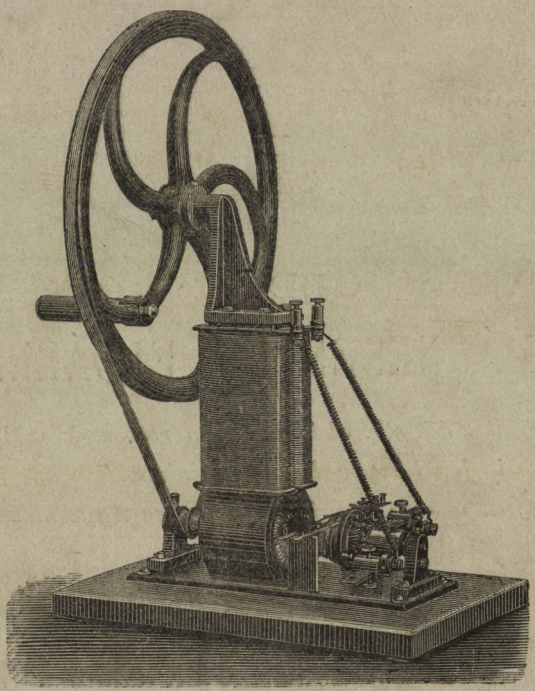
CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

DINAMO-ELEKTROMOS GÉP

Gramme-féle gyűrűvel ellátva

egyirányú, váltakozó és forgató (több fázisú) áram előállítására.

Az áram erőssége 4 Ampère, feszültsége 30 Volt.



Ezen géppel egyidejűleg meg lehet világítani például 3 izzólámpát egyirányú és 2—3—4 izzólámpát váltakozó vagy több fázisú forgató árammal. Használható egyenáramú, váltakozó áramú és több fázisú generátor vagy mótorként. Szerkezete e lapok II. köt. V. füzetében ismertetve van.

A gép kizárólagosan iskolai czélokra készült és pedig nem csak a dynamogép stb. bemutatására, hanem mint állandó s erős villamos forrás; kézzel igen könnyen hajtható és árama minden iskolai kisérlethez teljesen elegendő.

Részletes utasitás minden géphez mellékeltetik.

A gép ára 100 forint.

CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

ALAPRENDSZEREK EGY VÁLTOZÓS ALGEBRAI FÜGGVÉNYEKNÉL.

(Első közlemény.)

Az algebrai függvényekre vonatkozó újabb kutatásokban nem egy helyen oly fogalmakkal találkozunk, a melyeknek körébe tartozó alakzatok — noha létezésük logikailag kétségtelen — a kiszámításukra vonatkozó ismeretek hiján aktuálisan még sincsenek meghatározva és így ideális természetűeknek tünnek fel. Ilyen az algebrai egész függvények körében az *alaprendszerek* fogalma, a melyeknek fontosságát mi sem mutatja jobban, mint az az előkelő szerep, a melylyel újabb eredmények felkutatásában bírnak; ebben rejlik tehát az oka, hogy miért tartották az alaprendszerek létezésének kimutatását s a meghatározásukra vonatkozó módszer megállapítását alapjelentőségű dolognak. Érdekes, hogy ennek a fontos kérdésnek eldöntésére vonatkozó kutatások meddősége következtében mindig jobban érezhetővé vált nagy ür, nem csak hogy egyszerre eltünt, hanem annak eltünéséből egyúttal oly módszer fakadt, a mely az algebrai függvények elméletében fontos egyszerüsítéseket vont maga után.

Ugyanis Hensel «Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale»* czimű értekezésében kimutatja, hogy *minden algebrai függvény oly két egyenlő dimenziójú homogén egész algebrai alak hányadosaként állítható elő, a melynek a számlálójához tartozó zérus-helyek között vannak a függvény zérus-helyei, a nevezőjéhez tartozó zérus-helyek között pedig a függvény végtelen helyei;* evvel a kutatásokat a ho-

* Crelle Journ. 109. k. 1. l.

mogén algebrai egész alakok tanulmányozására vezette vissza. Előtte tehát az elmélet alapjelentésű kérdése az összes homogén algebrai egész alakok meghatározásában jelent meg. *Vizsgálódásaiban ő is eljutott az alaprendszerek fogalmához, a melyeknek nemcsak létezését mutatta ki, hanem a meghatározásukra vonatkozó módszert is megállapítja.* HENSEL-nek ezt a fontos értekezését M. G. BRINGARD az Acta Math. 18. kötetében «Theorie des fonctions algebriques d'une variable» czim alatt lefordította; fordítását azonban inkább átdolgozásnak lehet tekinteni, a mennyiben a kérdés megoldásánál egyszerűbb segédeszközöket használ. Hasonló egyszerűségben mutatom be én is az algebrai függvények elméletének szilárd megalapozására vonatkozó munkálatokat.

1. Egy változóval biró raczionális függvények transzformácziója zerus-dimenziójú homogén-függvényekké.

Ha $f(x)$ állandó együtthatókkal biró egy változójú n-ed fokú raczionális egész függvény zérus-helyeit $a_1, a_2, \ldots, a_n$-nel, x legmagasabb hatványához tartozó együtthatóját a_0-sal jelöljük, akkor $f(x)$ a következő analitikai alakban jelenik meg:

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - a_i);$$

az $(x - a_i)$-ket $f(x)$ lineáris tényezőinek nevezzük, ezek mindegyikének van egy-egy zérus-helye: az $x = a$; és egy végtelen helye: az $x = \infty$.

Két egész függvény hányadosát raczionális függvénynek nevezzük; ha tehát a hányados számlálója m-ed, a nevezője pedig n-ed fokú; továbbá a számláló zérus-helyeit α-kal, a nevező zérus-helyeit β-kal, a legmagasabb kitevőjű ismeretlen együtthatóját a számlálóban a_0-sal, a nevezőben b_0-sal jelöljük, akkor az y raczionális függvény jellemzésére a következő analitikai alakzatot irhatjuk fel:

$$y = \frac{a_0 \prod_{i=1}^{m} (x - a_i)}{b_0 \prod_{i=1}^{n} (x - \beta_i)},$$

hol az α-kat és β-kat különbözőknek tételezzük fel, minthogy az egyenlőket elhagyhatjuk, a nélkül, hogy evvel a függvény természetét megváltoztatnók. A felírt formulából egyszerre következik: hogy a számláló zérus-helyei a függvénynek is zérus-helyei, a nevező zérus-helyei pedig a függvény végtelen helyei; ezenkívül az $x = \infty$, ha $m > n$, a függvénynek annyiszoros végtelen helye, a hány egység van $(m-n)$-ben, ha pedig $m < n$, akkor annyiszoros zérus-helye, a hány egység van $(n-m)$-ben. Következőleg *minden raczionális függvény zérus-helyeinek száma megegyezik végtelen helyeinek számával.*

Olyan egy változós raczionális függvények tehát, a melyeknek csakis zérus-helyeik vannak, nincsenek. Mindazonáltal feladatul tűzzük ki: *minden raczionális függvényt olyan raczionális homogén egész függvények hányadosaként előállítani, melyeknek csakis zérus-helyeik vannak.*

Célunkat legegyszerűbben úgy érjük el, hogy a függvények egyszeresen végtelen sokaságát egyszerre tesszük vizsgálódásunk tárgyává. A kifejezés könnyebbsége kedvéért *nevezzük el a függvényeknek r-szeresen végtelen sokaságát r-dimenziós függvénycsoportnak;* mert az egyes függvényeket az r-dimenziós tér pontjaiként foghatjuk fel. Tegyük tehát vizsgálódásunk tárgyává a következő *egy*-dimenziójú függvény-csoportot:

$$x_1 = \frac{x}{x - u},$$

hol u határozatlan parameter; ebben a függvény-csoportban van egy határozott zérus-hely az $x = 0$, míg a végtelen helyek teljesen határozatlanok; és x minden értékéhez lehet a határozatlan parameter számára olyan értéket megállapítani, hogy a függvény értéke véges legyen. Hasonló természetű a következő *egy*-dimenziójú függvény-csoport is:

$$x_2 = \frac{1}{x-u},$$

csakhogy ebben a határozott zérus-hely: az $x=\infty$. Hasonló tulajdonságú az x_1 és x_2 minden lineár függvénye: $\alpha x_1+\beta x_2$, és ebben a határozott zérus-hely az $x=-\beta\alpha^{-1}$.

x_1 és x_2 egymáshoz való viszonya a következő identitáshoz vezet:

$$x = \frac{x_1}{x_2}.$$

Minthogy x értéke teljesen független u-tól, azért annak, mint határozatlan parameternek, mindig adhatunk oly értéket, hogy az x-t definiáló törtnek sem a számlálója, sem a nevezője ne legyen végtelen; ámde x maga is, mint x raczionális egész függvénye fogható fel, ennélfogva megállapítottnak tekinthetjük a következő tételt:

x-nek oly első fokú raczionális egész függvényét, a melynek zérus-helye az $x=0$, két oly egyenlő dimenziójú homogén egész függvény hányadosaként állíthatjuk elő, melynek számlálójának és nevezőjének nincs végteten helye.

Ezt a tételt már most könnyű általánosítani. Ugyanis, ha az általános raczionális függvényt definiáló képletben x helyébe $x_1x_2^{-1}$-t irunk, s azután a számlálót és nevezőt — ha n e raczionális függvény fokszáma — x_2^n-el megszorozzuk, akkor az y-t definiáló analitikai alak számlálója és nevezője x_1, x_2 n-edfokú homogén egész függvényévé lesz. Jelöljük a számláló és nevező egy-egy lineár tényezőjét rendre: $(a_i'x_1-a_i'x_2)$- és $(\beta_i'x_1-\beta_i''x_2)$-vel; ha még az $\frac{a_0}{b_0}$-t az egyik, vagy több lineáris tényezőbe beolvasztjuk, akkor raczionális függvényünk a következő alakban jelenik meg:

$$y = \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i'x_1-a_i''x_2}{\beta_i'x_1-\beta_i''x_2}.$$

Mivel x következőleg y is független u-tól, azért annak tetszőleges értéket adhatunk: adjunk tehát neki mindig olyan értéket,

hogy törtünk számlálójának és nevezőjének egyik lineáris tényezője se legyen végtelenné; más szóval: hogy sem a nevezőnek sem a számlálónak ne legyenek végtelen helyei, mivel pedig az

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_i''}{a_i'} \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

a számláló, az

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\beta_i''}{\beta_i'} \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

pedig a nevező zérus-helyeit képviselik, ennélfogva kimondhatjuk a következő tételt:

Minden raczionális függvényt elő lehet állítani, mint oly két egyenlő dimenziójú, homogén két változóval biró egész függvény hányadosát, a melyben a számlálónak és nevezőnek nincs végtelen helye és számlálójának zérus-helyei a függvénynek összes zérus-helyei, nevezőjének zérus-helyei pedig a függvény összes végtelen helyei. Ezzel a raczionális függvények tárgyalását visszavezettük oly homogén egész algebrai alakok tárgyalására, a melyeknek nincs végtelen helyük; tehát a végtelen helyeket kikerülhetjük.

Ha általánosan az

$$F(x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)}$$

függvénynek az a tulajdonsága, hogy

$$F(tx_1, tx_2) = t^m F(x_1, x_2),$$

akkor x_1, x_2 m-dimenziójú homogén függvényének nevezzük. Ha $m=0$, akkor $F(x_1, x_2)$ raczionális függvény; mert ha t helyébe $\frac{1}{x_2}$·t irunk, akkor

$$F\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right) = F(x_1, 1) = F(x_1, x_2)$$

egyenlethez jutunk, tehát $F(x_1, x_2)$ csakugyan független az x_1 és x_2 nevezőiben fellépő határozatlan parametertől.

2. Az egyváltozós algebrai függvények átalakítása homogén függvényekké.

Ha az $A_i(x)$-ek alatt ($i=1, 2, \ldots, n$) x-nek raczionális függvényeit értjük, akkor az

$$f(x,y)=y^n+A_1(x)\,y^{n-1}+\ldots+A_{n-1}(x)\,y+A_n(x)=0 \qquad 1)$$

n-ed fokú egyenlet y-t mint x *algebrai függvényét* definiálja. Ebből azután következik, hogy y x minden oly értéke mellett végtelen, mely az őt definiáló egyenlet együtthatóinak végtelen helye; ennélfogva az $x=\infty$ mellett y csak akkor végtelen, ha valamelyik $A(x)$ is az.

Riemann *x és y minden raczionális függvényét — föltéve, hogy y-t egy s ugyanazon algebrai egyenlet definiálja — az algebrai függvények egy osztályába sorozza;* Kronecker *pedig az ilyen algebrai függvényeket ugyanazon mesterséges tartományhoz tartozó (Gattungsbereich) algebrai függvényeknek nevezi.* Ha tehát φ és ψ az x és y-nak olyan raczionális egész függvényei, amelyek egyikének sem tényezője $f(x, y)$, akkor az egy osztályba tartozó algebrai függvények általános alakja:

$$z=\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}.$$

Jelöljük az egy osztályba tartozó algebrai függvényeket általánosan $G(x,y)$-al s nevezzük őket ezután röviden $G(x,y)$ függvényeknek.

Kimutatjuk: *hogy a $G(x,y)$ függvények, minden eleme, tehát a fölírt z is eleget tesz egy n, vagy n-nél alacsonyabb fokú irreduktibilis algebrai egyenletnek.*

Tekintettel az 1) alatt felírt egyenletre, z-t, ha u_i-k alatt x raczionális függvényeit értjük, következő alakba írhatjuk:

$$z=u_0+u_1 y+\ldots+u_{n-1}y^{n-1}. \qquad 2)$$

Szorozzuk meg z-t y^{i-1}-ikénnel, akkor — u_{ik}-k alatt x megfelelő raczionális függvényeit értve — zy^{i-1} az 1) egyenlet segítségével következő alakba írható:

$$zy^{i-1}=\sum_{k=1}^{n} u_{ik}\, y^{k-1}.$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

Ha ebből az $y^0, y, y^2, \ldots, y^{n-1}$ változókra nézve lineáris homogén egyenletrendszerből, a változókat kiküszöböljük a:

$$\begin{vmatrix} u_{11}-z, & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22}-z & \ldots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn}-z \end{vmatrix} = 0,$$

egyenletet kapjuk, a mely z-re nézve n-edfokú egyenlet. Azonban ez az egyenlet nem szükségképen irreduktibilis.

Reduktibilitás esetében legyen egyik irreduktibilis tényező fokszáma m ($m \leqq n$ a részletes kifejtés mutatja, hogy m az n-nek osztója); ha továbbá e tényező együtthatóinak közös nevezőjét $B_0(x)$-el jelöljük, s vele megszorozzuk az egész egyenletet, akkor a z-t *definiáló egyenlet általános alakja következőképen jelenik meg:*

$$B_0(x)\, z^m + B_1(x)\, z^{m-1} + \ldots + B_m(x) = 0, \qquad 3')$$
$$(m \leqq n)$$

hol a $B(x)$ együtthatók x raczionális egész függvényei; következőleg x véges értékei mellett z végtelen helyeit a

$$B_0(x) = 0$$

egyenlet gyökei határozzák meg. Szorozzuk meg a 3') egyenlet gyökeit $B_0(x)$-el, más szóval: alkalmazzuk a következő helyettesítést:

$$z = \frac{z_1}{B_0(x)},$$

akkor a transzformált egyenlet:

$$z_1^n + B_1(x)\, z^{n-1} + B_2(x)\, B_0(x)\, z^{n-2} + \ldots + B_n(x)\, B_0^{n-1}(x) = 0,$$

és ebből világosan látható, hogy z_1-nek x véges értékei mellett nincsenek végtelen helyei; azaz a z-t *meghatározó tört számlálója és nevezője x véges értékei mellett véges marad.*

Ezekkel a segédeszközökkel tehát nem állíthatjuk elő z-t, mint két olyan függvény hányadosát, a melg x minden értéke mellett végesek maradnak. Ámde, ha az előbbi fejezetben alkalmazott helyettesítést alkalmazzuk, akkor z csakugyan olyan két homogén egész függvény hányadosaként jelenik meg, a melyeknek végtelen helyei nincsenek.

Az 1) alatt felírt egyenletben írjunk x helyébe $\frac{x_1}{x_2}$-t; ezáltal y együtthatói, az előbbi fejezet fejtegetései alapján x_1 és x_2 *zérus*-dimenziójú homogén függvényeivé válnak; jelöljük ezek nevezőinek legkisebb többszörösét $C_0(x_1, x_2)$-vel s szorozzuk meg vele az egész egyenletet, s azután jelöljük általánosan az y^{n-i} együtthatóját $C_i(x_1, x_2)$-vel; minthogy valamennyi $C_i(x_1, x_2)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ egyenlő dimenziójú homogén függvénye x_1, x_2-nek, azért jelöljük fokszámukat közös betűvel m-mel. A mondottak után az 1) egyenlet új alakja:

$$\sum_{i=0}^{n} C_i(x_1, x_2)\, y^{n-i} = 0,$$

a melyben $C_i(x_1, x_2)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ *m-ed dimenziójú homogén függvények.*

Minthogy y értéke az x_1, x_2-ben fellépő határozatlan parametertől független, *azért $C_0(x_1, x_2)$-nek csakis a határozott zérushelyei határoznak meg y számára végtelen helyeket.* Alkalmazzuk ezek után a következő helyettesítést:

$$y = \frac{\eta}{A_0(x_1 x_2)}.$$

Mindenek előtt kimutatjuk, *hogy η (x_1, x_2)-nek m-edfokú homogén függvénye.* Ugyanis y értéke, miként az 1') egyenletből látható, nem változik, ha x_1 és x_2 helyébe tx_1, tx_2-t helyettesítünk;

a mi a 4) alapján csak úgy lehetséges, ha η annyiad fokú homogén függvénye (x_1, x_2)-nek, mint $A_0(x_1, x_2)$.

A helyettesítés végrehajtása után a

$$B_i(x_1, x_2) = C_i(x_1, x_2)\, C_0^{i-1}(x_1, x_2)$$

jelölést használva, az 1') alatt levő egyenletünk a következő alakot veszi fel:

$$\eta^n + B_1(x_1, x_2)\eta^{n-1} + \ldots + B_{n-1}(x_1, x_2)\eta + B_n(x_1, x_2) = 0. \quad \text{I.}$$

Minthogy $B_i(x_1, x_2)$ im-ed dimenziójú homogén függvénye x_1, x_2-nek, és η nem függ az x_1 és x_2 értékeiben fellépő határozatlan parametertől, azért annak mindig oly értéket adhatunk, hogy valamennyi $B_i(x_1, x_2)$ x minden értéke mellett véges maradjon; más szóval *η-nak nincsenek végtelen helyei;* de ugyanezt mondottuk az imént $C_0(x_1, x_2)$-ről is; *tehát y-t előállítottuk, mint két oly homogén egyenlő dimenziójú függvény hányadosát, a melyeknek végtelen helyei nincsenek, de a melyeknek zérus-helyei a szerint, a mint a számlálóhoz, vagy nevezőhöz tartoznak, a függvény zérus- vagy végtelen helyeit képezik.*

Ez a tétel azonban érvényes a $G(x_1 y)$ függvények mindegyikére, ugyanis

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad y = \frac{\eta}{C_0(x_1, x_2)}$$

helyettesítés alkalmazásával

$$G(x, y) = G\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{\eta}{C_0(x_1, x_2)}\right) = F(x_1, x_2, \eta);$$

tehát

$$F(tx_1, tx_2, t^m\eta) = F(x_1, x_2, \eta),$$

és így F az x_1, x_2, η változókra nézve bizonyos tekintetben még homogénnek mondható, a miből következik, *hogy minden algebrai függvény, x_1, x_2, η változókban egyenlő dimenziójú oly homogén egész függvények hányadosaként jelenik meg, melyeknek végtelenjei nincsenek, de zérus-helyeik, a függvény zérus- vagy végtelen*

helyeit képezik, a szerint, a mint a számlálóhoz, vagy nevezőhöz tartoznak.

Az algebrai függvények tárgyalását tehát x_1, x_2, η homogén függvényeinek tárgyalására vezettük vissza, a melyek közül, ha az egyenlő dimenziójúakat egy osztályba sorozzuk, akkor a következő tételt mondhatjuk ki: x_1, x_2, η*-ban két egy osztályba tartozó homogén függvény hányadosa algebrai függvény.*

Sutáh József.

MEGJEGYZÉS DIRICHLET EGYIK TÉTELÉRE.

E közlemény czélja elemi uton kimutatni, *hogy az $ax-1$ általános taggal biró számtani haladvány végtelen sok törzsszámot tartalmaz.* Egyszerűség kedvéért azonban azokra az esetekre szorítkozom, midőn *a páratlan törzsszám hatványa.* A tárgyalásnak kiinduló pontja magának DIRICHLET-nek * egyik tétele, a melyet czéljainknak megfelelően általánosítani fogunk. Ez az általánosított eredmény már LUCAS-nál ** is előfordul, a ki DIRICHLET speciálisabb tételét, úgy látszik, nem ismerte, LUCAS bebizonyítása azonban igen komplikált.

*

DIRICHLET említett tétele, czéljainkra alkalmas jelzéssel, a következő:

Ha p pozitiv páratlan törzsszám, b nem négyzet, t a

$$V_p = \frac{(y+\sqrt{b})^p-(y-\sqrt{b})^p}{2\sqrt{b}} = \binom{p}{1}y^{p-1}+\binom{p}{3}y^{p-3}+\cdots+\binom{p}{p}b^{\frac{p-1}{2}}$$

alaknak páratlan törzsosztója és

$$\left(\frac{b}{t}\right) = -1,$$

akkor

$$t \equiv -1 \,(\mathrm{mod.}\, p).$$

---

* De formis linearibus in quibus continentur etc. (L. Összes munkái.)

** Théorie des fonctions numériques simplement périodiques. (American Journal of Math. I.)

A tétel általánosítása a következő. *Ha a pozitiv egész szám, b nem négyzet és t a*

$$V_a = \frac{(y+\sqrt{b})^a-(y-\sqrt{b})^a}{2\sqrt{b}} = \binom{a}{1} y^{a-1} + \binom{a}{3} y^{a-3} b + \cdots \quad \text{II)}$$

alaknak oly páratlan törzsosztója, mely kielégíti a

$$\left(\frac{b}{t}\right) = -1$$

feltételt; ha továbbá a-nak tetszőleges valódi osztóját d-vel jelöljük és t az y-nak ugyanazon számértéke mellett a

$$V_d = \frac{(y+\sqrt{b})^d-(y-\sqrt{b})^d}{2\sqrt{b}}$$

alakok egyikének sem osztója, akkor

$$t \equiv -1 \pmod{a}.$$

Ha az

$$\begin{aligned}(y+\sqrt{b})^a &= U_a + V_a\sqrt{b} \\ (y-\sqrt{b})^a &= U_a - V_a\sqrt{b}\end{aligned} \qquad \text{III)}$$

egyenletek segítségével V_a mellé behozzuk U_a-t, akkor

$$U_a = \frac{(y+\sqrt{b})^a+(y-\sqrt{b})^a}{2}, \qquad V_a = \frac{(y+\sqrt{b})^a-(y-\sqrt{b})^a}{2\sqrt{b}}.$$

Miként említettük a V_a-alaknak csak oly t törzsosztóira fordítjuk figyelmünket, a melyekre nézve

$$\left(\frac{b}{t}\right) = -1$$

Könnyen belátható, hogy ilyen t y-nak ugyanazon értéke mellett U_a-nak nem lehet osztója. Ha ugyanis osztaná U_a-t, akkor a III) alatti kifejezéseknek is tényezője volna és így kellene, hogy

$$(y+\sqrt{b})^a (y-\sqrt{b})^a = (y^2-b)^a \equiv 0 \pmod{t}$$

legyen, a miből

$$y^2 \equiv b \pmod{t}$$

következnék, de ez ellenkezik feltételünkkel.

Vizsgáljuk meg most V_a és V_d kölcsönös viszonyát. Hozzuk be az

$$\frac{a}{d} = a'$$

egész számot, akkor

$$(y+\sqrt{b})^a = U_a + V_a\sqrt{b} = (U_d + V_d\sqrt{b})^{a'}$$

és ebből

$$V_a = V_d\left\{\binom{a'}{1} U_d^{a'-1} + \binom{a'}{1} U_d^{a'-3} V_d^2 b + \cdots\right\}$$

Ebből az identitásból először is kitünik, hogy V_a osztható V_d-vel; másodszor, hogy a $\frac{V_a}{V_d}$ kifejezésnek csak akkor lehet oly törzsosztója, mely V_d-t is osztja, ha ez egyszersmind osztja U_d-t, feltéve, hogy a osztóit kizártuk. Ha tehát t $\frac{V_a}{V_d}$-nek oly páratlan törzstényezője, a mely a-hoz képest relativ prim és a melyre nézve

$$\left(\frac{b}{t}\right) = -1,$$

akkor y ugyanazon értéke mellett nem osztja V_d-t, mert különben U_d-nek is osztója lenne, de ezt az előző tétele kizárja.

Ez észrevételek után áttérhetünk tételünk bebizonyítására. Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy

$$V_{t+1} \equiv 0 \pmod{t}.$$

Ugyanis

$$V_{t+1} = \binom{t+1}{1} y^t + \binom{t+1}{3} y^{t-2} b + \cdots + \binom{t+1}{t} y b^{\frac{t-1}{2}};$$

de mivel t törzsszám

$$V_{t+1} \equiv (t+1)\,(y^t + y b^{\frac{t-1}{2}}) \pmod{t};$$

ha Fermat tételét felhasználjuk, ezt így is írhatjuk

$$V_{t+1} \equiv y\,(1 + b^{\frac{t-1}{2}}) \pmod{t},$$

de minthogy

$$\left(\frac{b}{t}\right) = -1$$

csakugyan következik, hogy

$$V_{t+1} \equiv 0 \pmod{t}$$

Tételünk be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy

$$t+1 \equiv 0 \pmod{a}.$$

Ha ez a kongruenczia nem állana fenn, akkor $t+1$-nek és a-nak legnagyobb közös osztója d a-nak egy valódi osztója lenne és így lehetne oly g, h pozitív egész számokat találni, melyek eleget tennének a

$$g(t+1) - ha = d \qquad \text{V)}$$

egyenlőségnek. Lehetséges-e ez a t-re vonatkozó feltételek mellett? Láttuk, hogy

$$V_{t+1} \equiv 0 \pmod{t}$$

s így az eddigiek szerint

$$V_{g(t+1)} \equiv 0 \pmod{t},$$

azonban az

$$U_{g(t+1)} \equiv 0 \pmod{t}$$

kongruenczia nincsen kielégítve. Hasonlókép

$$V_{ha} \equiv 0 \pmod{t}$$

azonban nem áll, hogy

$$U_{ha} \equiv 0 \bmod t).$$

Az V) alatti egyenlőségből

$$d + ha = g(t+1),$$

és így

$$(U_d + V_d \sqrt{b})\ (U_{ha} + V_{ha} \sqrt{b}) = U_{g(t+1)} + V_{g(t+1)} \sqrt{b}$$

a miből

$$V_{g(t+1)} = U_d V_{ha} + V_d U_{ha} \qquad \text{VI)}$$

Ez azonban absurdum. Ugyanis

$$V_{g(t+1)} \equiv 0 \pmod{t}, \quad U_d V_{ha} \equiv 0 \pmod{t}$$

és így kellene, hogy legyen

$$V_d\, U_{ha} \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, t), \quad V_d \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, t)$$

ezt azonban feltételeink kizárják. Tételünk így be van bizonyítva.

Térjünk most át az $ax-1$ általános tagú haladványra. Specziális esetünkben legyen $a=p^k$ páratlan törzsszámhatvány.

Ekkor

$$V_{p^k} = \binom{p^k}{1} y^{p^k-1} + \binom{p^k}{3} y^{p^k-3} b + \cdots + \binom{p^k}{p^k} b^{\frac{p^k-1}{2}}. \qquad \text{VII)}$$

tehát

$$V_{p^k} \equiv p^k y^{p^k-1} \,(\mathrm{mod.}\, b).$$

Egyszersmind

$$V_{p^{k-1}} = \binom{p^{k-1}}{1} y^{p^{k-1}-1} + \binom{p^{k-1}}{3} y^{p^{k-1}-3} b + \cdots + \binom{p^{k-1}}{p^{k-1}} b^{\frac{p^{k-1}-1}{2}},$$

a miből

$$V_{p^{k-1}} \equiv p^{k-1} y^{p^{k-1}-1} \,(\mathrm{mod.}\, b).$$

Tudjuk, hogy V_{p^k} osztható $V_{p^{k-1}}$-nel. Ha tehát b-t relativ prímnek választjuk py-hoz, akkor

$$\frac{V_{p^k}}{V_{p^{k-1}}} \equiv p y^{p^k-p^{k-1}} \,(\mathrm{mod.}\, b).$$

Tegyük

$$\frac{V_{p^k}}{V_{p^{k-1}}} = V, \; p^k - p^{k-1} = 2c,$$

akkor

$$V \equiv p y^{2c} \,(\mathrm{mod.}\, b). \qquad \text{IX)}$$

Azonban b a mellett, hogy py-hoz relativ prím, mint tudjuk,* úgy is választható, hogy

$$b \equiv 1 \,(\mathrm{mod.}\, y)$$

és

$$\left(\frac{p}{b}\right) = -1$$

legyen. Határozatlanúl hagytuk még y-értékét. Ha y-t párosnak és b-hez relativ prímnek választjuk, akkor V_{p^k} és így V is páratlan és b-hez relativ prím. Ennélfogva IX) alapján

---

* Dirichlet-Dedekind: Vorlesungen über Zahlentheorie § 52.

$$\left(\frac{b}{v}\right) = \left(\frac{V}{b}\right) = \left(\frac{p}{b}\right) = -1 \qquad \text{X)}$$

Ha ezenkívül y p-vel osztható, akkor V relativ prím p-hez.

X)-ből következik, hogy V-nek és így V_{p^k}-nek is van oly p-től különböző t törzsosztója, melyre, nézve

$$\left(\frac{b}{t}\right) = -1 \qquad \text{XI)}$$

A bevezetésben felsoroltak alapján t nem osztója $V_{p^{k-1}}$-nek, tehát

$$t \equiv -1 \pmod{p^k}, \qquad \text{XII)}$$

vagyis a $p^k x - 1$ tagú számtani haladvány tartalmaz törzsszámot.

Hogy végtelen sok törzsszámot tartalmaz, az onnan világos, hogy k bármely egész pozitiv szám lehet.

Bauer Mihály.

A Mathematikai és Physikai Társulat II. tanulóversenye.

A Math. Phys. Társulat választmánya f. é. áprilishó 4-én tartott ülésén megbízta az ügyvivő titkárt a II. tanulóverseny előkészítésével. A versenyre szóló felhivás szétküldetvén, összesen 57 középiskolai érettségi vizsgálatot tett tanuló jelentkezett a versenyre.

A verseny október 22-én tartatott meg, és pedig egyidőben Budapesten és Kolozsvárott. Budapesten 44-en, Kolozsvárott pedig 5-en jelentek meg.

A verseny zárt helyen, a társulat tagjainak felügyelete alatt ment végbe. A verseny alatt szabálytalanság nem fordult elő, a miről a helyszinén felvett jegyzőkönyv tanuskodik. A versenyző dolgozatok elkészítésére engedett 4 óra elteltéig Budapesten 22, Kolozsvárott pedig 2 dolgozat adatott át az ellenőrző bizottságnak. A dolgozatok az ellenőrző tagok aláirásával ellátva lepecsételtettek.

Az elnökség a dolgozatok megbirálására bizottságot küldött ki, mely a birálattal elkészülvén, azt a választmány deczember 12-én tartott ülésén bemutatta. A választmány a biráló bizottság jelentését tudomásul vevén, a díjak kiadására vonatkozó javaslatot elfogadta s azt határozta, hogy e javaslat a rendes ülésen felolvastassék s a díjak kiadassanak.

A jelentés, mely az ugyanaz nap tartott rendes ülésen felolvastatott, a következő :

A Math. Phys. Társulat a választmánynak 1894. évi június 22-ikén tartott ülésének határozata értelmében ez évben is, még pedig október 9-dikén mathematikai tanulóversenyt rendezett. E versenyen készült dolgozatok megbirálására az elnökség az alulírt tagokból álló bizottságot küldötte ki, melynek jelentését a következőben szerencsénk van előterjeszteni.

A bizottság a hozzáérkezett dolgozatok áttekintése és beható bírálata után sajnálattal konstatálja, hogy az idei verseny eredménye a hozzáfűzött reményeknek kevésbbé felelt meg; mert daczára annak, hogy a mult verseny eredményének tekintetbe vételével a megoldásra kitűzött problémák nehézségei némileg le voltak szállítva, az ez évben készült dolgozatok úgy külső kiállítás és fogalmazás, mint belértékök tekintetében a tavalyiaknak színvonalán alúl maradtak.

A megoldásra kitűzött tételek a következők voltak :

1. *Bizonyíttassék be, hogy n különböző kártya két személy között* $2(2^{n-1}-1)$*-féleképen osztható szét.*

2. *Adva van az ABC derékszögű háromszög ; szerkesztessék e háromszögön belül az N pont úgy, hogy az NAB, NBC, NCA szögek egymással egyenlők legyenek.*

3. *Egy háromszögre adva van : a körülírt kör sugara, egy oldal és a másik két oldal viszonya ; mekkorák e háromszög oldalai és szögei ?*

A versenyen 22 dolgozatot adtak be ; ezek közt 16-ban a versenyző legfeljebb *egy* és 3-ban két feladatot tudott megoldani ; ez a 19 dolgozat a jutalmazásnál nem jött tekintetbe. A fönnmaradó három dolgozat készítői : Meitner Elemér, Pilczer Ignácz és Riesz Emil urak.

Riesz úr dolgozatában a harmadik tétel kidolgozása nemcsak stiláris hanem mathematikai tartalmának tekintetében is fogyatékos, a mennyiben egy íráshiba következményei végig vonúlnak rajta ; a bizottság mindazonáltal neki ítéli oda az első díjat, mert dolgozata, a mellett hogy alapos mathematikai tudást árul el, kifejtéseinek logikai voltával és aránylag tiszta fogalmazásával versenytársait felülmulja.

Riesz úr dolgozatához legközelebb áll Pilczer Ignácz uré, a kinek dolgozata szintén mind a három tételnek megoldását tartalmazza, de többkevesebb kisebb hibával és fogyatékosabb fogalmazással. A biráló bizottság ennélfogva Pilczer Ignácz úrnak a második díjat ítéli oda.

Meitner Elemér úr dolgozata mathematikai tartalma tekintetében Riesz úréval egyenlő rangú, de fogalmazványa nyelvi, stilus és kiállítás tekintetében annyira kifogás alá esik, hogy jutalmazásra nem volt ajánlható.

A bizottság végül Kiss Jenő urat, ki készültség tekintetében — úgy látszik — nem áll azon a fokon, mint a megjutalmazásra ajánlott versenytársai, de dolgozatában két tételnek helyes kifejtésével világos gondolkodásának tanújelét adta, megdicsérésre ajánlja.

Eberling József, *Kőnig Gyula,*
Bartoniek Géza, *Beke Manó,*
Rados Gusztáv, *Schmidt Ágoston.*

*

A jelentés felolvastatván, a társulat elnöke, B. Eötvös Loránd kijelenti, hogy a társulat első díját Riesz Emil, a második díját pedig Pilczer Ignácz nyerte el. Az előbbi a budapesti V. ker. állami főreáliskolán, az utóbbi pedig a kaposvári állami főgymnásiumban végezte középiskolai tanulmányait.

Egyúttal a társulat elismerését és köszönetét fejezi ki a versenyben győztes tanulók tanárainak, Dr. Beke Manó és Baló Gyula tanár uraknak és tisztelt tagtársainknak.

Végül kijelenti, hogy Kiss Jenő dolgozata dicséretben részesül.

A Mathematikai és Physikai Társulat II. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

1. Riesz Emil dolgozata.

1. *Bizonyíttassék be, hogy n különböző kártya 2 személy közt* $2(2^{n-1}-1)$*-féleképen osztható fel.*

«A» kapja majd 1) az egyes kártyákat

ilyet kap n-szer

« « « 2) a kettős « $\binom{n}{2}$ «

« « « 3) a hármas « $\binom{n}{3}$ «

« « « 4) $\frac{n}{2}$ « $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ «

most

«B» kapja az egyes kártyákat; ez alkalommal ugyanannyi osztás történik.

Az osztások száma tehát:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\cdots\cdots\binom{n}{n-1}=2^n-2 \text{ mert}$$

$$(1+1)^n=\overbrace{\binom{n}{0}}^{1}+\binom{n}{1}+\cdots\cdots\binom{n}{n-1}+\overbrace{\binom{n}{n}}^{1}$$

tehát

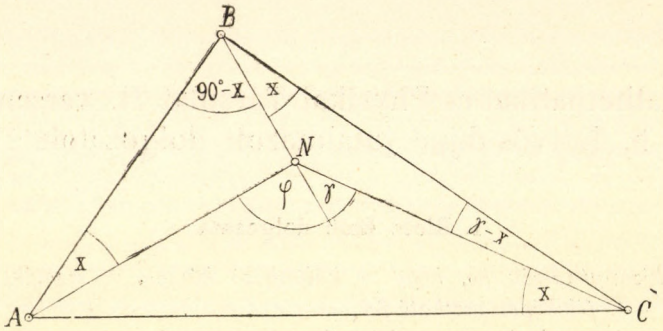
$$2^n-2=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\cdots+\binom{n}{n-1}.$$

Azért használandók a combinatiók, mert itt n elemből az egyes csoportokat kiválasztjuk, de nem vagyunk tekintettel a sorrendre.

---

* A dolgozatok minden változtatás és javítás nélkül vannak közölve . *Szerk.*

2) *Adva egy derékszögű háromszög ABC; ebben úgy szerkesztendő meg egy N pont, hogy NAB, NBC és NCA szögek egymással egyenlők legyenek*



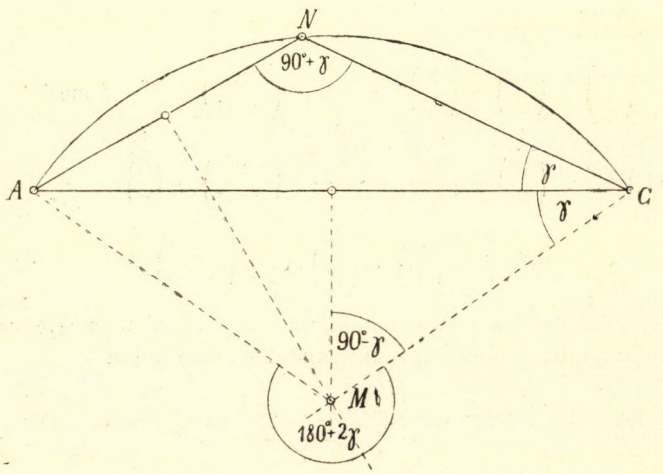
$$\varphi = 90 - x + x = 90°$$

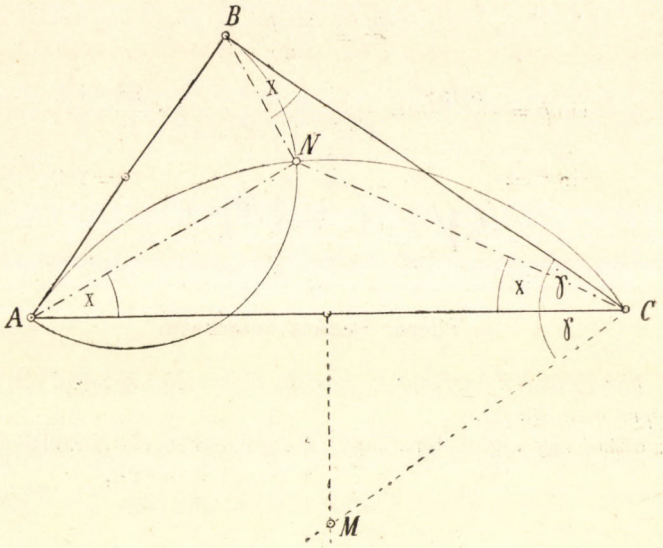
φ derékszög az N pont mértani helye lesz tehát azon kör, mely AB-n, mint *átlón* nyugszik. A φ melletti szög γ lesz; az N pont tehát egy újabb körön fekszik, mely ANC $\triangle$ köré írható.

Ezen ANC kör középpontja fekszik az AC felén emelt merőlegesen és azon az egyenesen, mely AC oldalra fektetett γ szög egyik szára.

Az M pont tehát meghatározható, akkor a kör MC sugárral meghatározva az N pontot nyerjük, a hol a 2 kör metszi egymást.

A szerkesztés lesz:





3) *Egy háromszögből adva a körülírt kör sugara egy oldal és a másik két oldal viszonya. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?*

Adva:

$$R,\ c,\ \frac{a}{b}=n \qquad R=\frac{2c}{\sin\gamma} \qquad \sin\gamma=\frac{2c}{R}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \qquad \cos\gamma=\sqrt{1-\sin^2\gamma}$$

$$a=bn \qquad \cos\gamma=\frac{\sqrt{R^2-4c^2}}{R}$$

$$c^2=b^2n^2+b^2-2b^2n\cos\gamma$$

$$c^2=b^2(n^2+1-2n\cos\gamma)$$

$$b=\frac{c}{\sqrt{n^2+1-2n\dfrac{\sqrt{R^2-4c^2}}{R}}}$$

$$a=\frac{nc}{\sqrt{n^2+1-2n\dfrac{\sqrt{R^2-4c^2}}{R}}}$$

A 3 oldal meg van sinus tétellel meghatározhatjuk a szögeket.

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$\sin\beta=\frac{b\sin\gamma}{c}=\frac{c}{\sqrt{n^2+1-2n\cos\gamma}}\cdot\frac{2c}{R}\cdot\frac{1}{c}$$

$$\sin\beta=\frac{2c}{R\sqrt{n^2+1-2n\dfrac{\sqrt{R^2-4c^2}}{R}}}\qquad \alpha=180-\beta-\gamma$$

2. Pilczer Ignácz dolgozata.

1) *Bizonyitassék be, hogy n kártya 2 személy között* $2(2^{n-1}-1)$-*féleképen osztható fel.*

Az osztást úgy végezhetjük, hogy A kap 1-t B $n-1$-t továbbá
A « 2-t B $n-2$-t,
A « k B $n-k$-t

Elsőképeni osztás $\binom{n}{1}$-szer lehet egy személynél.

A második « $\binom{n}{2}$ « lehet egy személynél és így

tovább az n-edik $\binom{n}{n}$ « egy személynél,

tehát egy személynél az osztás lehet

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\cdot\binom{3}{}+\cdots+\binom{n}{n}\text{-szer}$$

Ez azonban nem egyéb, mint $(1+1)^n-2=2^n-2$ minthogy két személy van, osztás $2\cdot2^{n-1}$ lehetne; ámde az nem képez osztást, ha az egyik mind az n kártyát megkapja, vagyis ebből $2\cdot1=2$ kettőt meg le kell vonni; tehát az osztás $S=2\cdot2^{n-1}-2=2(2^{n-1}-1)$-szer lehet.

2) *Adva van ABC derékszögű háromszög szerkeszszük meg a háromszögön belül az N pontot úgy, hogy NAB, NBC és NCA szögek egyenlők legyenek.*

$$NCA=NAB=NBC=\alpha$$

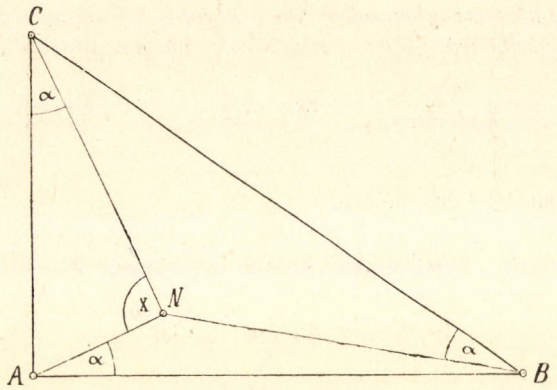
Legyen

$$NAC=y \quad \text{és} \quad CNA=x$$

$$\alpha+x+y=180^\circ \quad \text{ámde} \quad y=90^\circ-\alpha$$

$$\alpha+x+90^\circ-\alpha=180^\circ$$

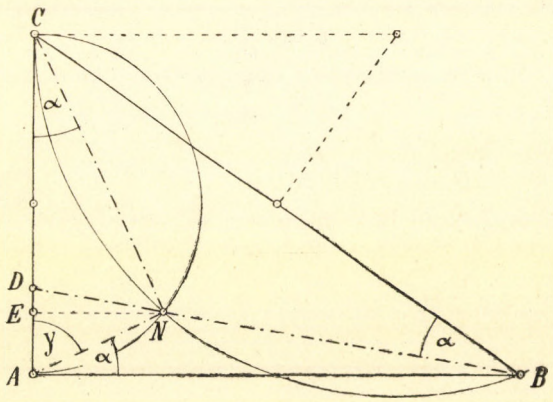
$$x=90^\circ$$



Tehát $AN \perp CN$. Szerkesztünk ACn egy félkört $\frac{AC}{2}$ sugárral, továbbá

$$CNB+\alpha+BCA-\alpha=180°$$
$$CNB+BCA=180°=2R$$

CNB mellékszöge BCA-nak; most szerkesztünk egy oly kört, melynek húrszöge $180°-BCA$ és ismeretes az egy húr. Ezt úgy szerkesztjük, hogy a CB húrt felezzük, a felezési pontban rá merőlegest állítunk és az egyik oldalára a merőlegesnek rávisszük a $180°-BCA$-t, s hol a két kör egymást metszi, ott lesz az N pont.



3) *Egy háromszögben adva van a körülírt kör sugara* (d), *egy oldal* c *és másik kettő aránya* $a : b$; *mekkorák a háromszög oldalai és szögei?*

$$r = \frac{abc}{4\,ab\,\frac{\sin\gamma}{2}} \qquad 2r = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad \sin\gamma = \frac{c}{2r}$$

A tangens-tétel értelmében, a

$$(a+b) : (a-b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(a+b) : (a-b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

hol

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180°-\gamma}{2}$$

minthogy a föntebbi tételből $\frac{\alpha-\beta}{2}$ kiszámítható ; tehát

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180-\gamma}{2} \text{ és}$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{a+b}$$

egyenletekből ismeretes az α és β.

Az a és b oldalakat a sinus-tétel segítségével számítjuk ki $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Helmholtz-nak a mathematika és a mechanika alapelveire vonatkozó vizsgálatai.*

Dr. Koenigsberger Leo a heidelbergi egyetem 1895 nov. 22. díszülésén mondott beszéde.

Aki azt tűzi ki feladatául, hogy Helmholtz-nak a mathematikai tudomány körül szerzett érdemeit jelentőségüknek megfelelően előtüntesse, nem teheti ezt a nélkül, hogy minden egyes, összesen két-három száz, részben nem éppen könnyen megérthető dolgozatáról tudomást ne vegyen, minthogy ezek mindegyike, ha nincsen is a mathematika nyelvén előadva, a logikai gondolkodásnak kiváló élességével a mathematikus érdeklődését a legnagyobb mértékben felkelti; ámde viszont éppen ez teszi nehézzé a feladatnak teljes megoldását, mert a természettudományok összes mezőire kiható összehasonlíthatatlan működésének méltatója kell, hogy egyszerre physiológus és physikus, mathematikus, philosophus és æsthetikus is legyen, hogy az olyan nagy gondolkodót, aminő Helmholtz, ne csak csodálni és megbámulni tudja, hanem méltányolhassa és meg is érthesse. Ugyanis nem olyan természetű volt az ő szelleme, hogy mathematikai fejtegetésekbe önmaguk kedveért bocsátkozott volna csupán azért, hogy teljesen abstract igazságok levezetésében gyönyörködjék, melyek aztán az exact természettudományokban esetleg alkalmazásba jöhetnek; ő inkább közvetlenül a természet szemléletéből merítette mathematikai problémáit s ez bizonyára az egyetlen helyes, de csakis az oly nagy mestert sikerrel kecsegtető út, abból a felfogásból indúlván ki, hogy annak a tudománynak, mely a természet megértését tűzi ki czéljául, fel is kell azt tételeznie, hogy a természet valóban megérthető. És megérthetőnek lenni — legna-

* Midőn Koenigsberger ezen nagyszabású a heidelbergi egyetem kiadásában megjelent beszédét egész terjedelmében közöljük, felhívjuk t. tagtársaink figyelmét Helmholtz tudományos dolgozatainak kiadására, mely *Wissenschaftliche Abhandlungen von* Hermann v. Helmholtz (Leipzig, Joh. Ambr. Barth 1882—1895) czím alatt három kötetben megjelent. Mindazok a dolgozatok, melyeket Koenigsberger beszédjében fejteget, a gyűjteményben bennfoglaltatnak. *Szerk.*

gyobb tanítványának, HEINRICH HERTZnek szavaival kifejezve — előtte nem jelentett mást, mint azt, hogy a külső tárgyak belső képeinek gondolkodáskövetelte következményei a leképelt tárgyak természetszerű következményeivel összhangzásba hozassanak, vagyis, hogy a természet problémái mathematikailag fogalmaztassanak. Így aztán valamennyi dolgozatában tisztán mathematikai szempontból érdekes eredmények végtelen sokasága lelhető, mely eredmények azonban nyomban mechanikai-physikai értelmezésben is részesülnek s akkor mélyen rejtőző, összefoglaló természettörvényeket fejtenek fel, melyek mathematikai burkolatukból kiszabadítva, nemcsak a természettudományi, hanem bízvást mondhatjuk, az egész művelt világban a természeti tünemények lényegesen új felfogásának útját törték. Csupán akkor érdekelték önmagukban a mathematikai vizsgálódások is, a midőn a mathematikai disciplinák alapjainak és axiomáinak fölkutatása forgott szóban ; tett is fontos kutatásokat a mathematikai három nagy mezején, a geometriában, az arithmetikában és a tiszta mechanikában, melyek az ismeretelmélet, valamint a mathematikai physika egész fejlődésére nézve úttörők voltak, melyeknek ösvényét azonban — és pedig némi ellentétben más kitünő mathematikusok hasonló vagy egészen egy irányú vizsgálataival — mindenkor a megfigyelés és a tapasztalás egész biztosan megjelölték előtte, mely ösvényeken a legelvontabb mathematikai igazságokhoz eljutott.

A mathematikának az ő egész terjedelmében, a mint itt tekintetbe venni kívánom, három egymástól teljesen független alapképzettel van dolga ; ezek a tér, az idő és a tömeg. A térbeli alakzatokkal foglalkozik a geometria, az időbeliekkel az arithmetika, a tömegnek a tér és időhöz való vonatkozásaival pedig a mathematikai physika. A tér és idő jóformán az összes mathematikusok és philosophusok felfogása szerint KANT-tól felállított nézet értelmében transcendens szemléleti alakulatok voltak, melyeket az ismeretes axiomák közelebbről meghatároznak, és pedig mindaddig, míg HELMHOLTZ vizsgálódásainak körébe nem vonta be őket, amidőn t. i. amaz axiomák a priori létezését kétségbe kezdte vonni és pedig nem elvont mathematikai megfontolások alapján, amint ezt részben GAUSS és RIEMANN megkisérlették, hanem physiologiai-optikai vizsgálatai indították arra, hogy az általános térszemlélet eredetéről egyáltalában gondolkozzék és csakhamar arra a meggyőződésre vezették, hogy csakis a térviszonyok szemlélhetősége tételezteti fel velünk magától értetődőnek azt, ami voltaképen a mi külső világunk egy különös sajátsága és mi ekként a geometria axiomáit transcendens szemlélettől adott tételeknek tartjuk. Már az 1852. évben Königsbergben tartott habilitáló előadásában * a tárgyaknak s a

* Ueber die Natur der menschlichen Sinnesempfindungen.

nekik megfelelő érzéki észrevételeknek mélyreható physiologiai-physikai szembeállítása révén arra a nézetre jutott, hogy a fény- és színérzetek csupán csak jelképei (symbolumai) a valóságnak és így rátalált az útra, mely az érzéki észrevételek természetének mélyebbre ható megismerésében a további haladást lehetővé tette. Ellentétben a térszemlélet nativistikus elméletével, mely feltételezi, hogy az ideghártya érzi a saját térbeli kiterjedését, és hogy a határozott térbeli képzetek valamilyen velünkszületett mechanismus folytán jönnek létre, vagyis, hogy minden egyes érzetnek külön localisatiója is a közvetlen szemlélettel van megadva, Helmholtz az empiristikus elmélet igazi alapítójává lett, mely szerint az érzéki észrevételek a mi tudatunkra nézve csak a külső tárgyak és folyamatok jelei, melyek jelentését megérteni értelmünknek a feladata s így nem is látszik szükségesnek, hogy pl. a helyzetbeli különbségek észrevevésekor látó érzékünknek helyzeti jelei és a nekik megfelelő külső térviszonyok között bármiféle megegyezés létezzen, vagyis hogy a gondolkodás és az elképzelés törvényei s a külső világ törvényei előre megállapított összhangzásban legyenek.

Ezen physiologiai-philosophiai elmélkedéseit a *horopterről* * szóló, tisztán mathematikai szempontból is érdekes értekezésében biztosabb alapra helyezte. A horoptert úgy definiálván, mint geometriai helyét mindazon külső térbeli pontoknak, melyek az ideghártya megfelelő pontjain képelődnek le s ennélfogva egyszerűen látszanak, azt találja, hogy ez általában valamilyen harmadrendű görbe ; és ha vonalhoropternek azt a felületet nevezi, amelyen határozott irányú egyenes vonalaknak feküdniök kell, hogy folytonos congruens eltolódás közben a képek mindig egész egyenesekben födjék egymást és pedig anélkül, hogy a képek pontjainak megfelelőknek kellene lenniök, a függőleges és vízszintes horopter (Vertical- und Horizontalhoropter), vagyis azon vonalak számára, melyek mindkét látómezőben az ideghártya-horizonokra merőlegesek vagy velök párhuzamosak, másodrendű felületeket nyert. Ezeket a «Physiologische Optik»-ban szigorúan mathematikai alakban tárgyalja, és pedig úgy, hogy az ideghártyákat asymetrikusaknak tekinti s identikus helyeik definitióját is némileg módosítja. Így meg nem cáfolható mathematikai-physikai okoskodások alapján az a meggyőződés érlelődik benne, hogy miután a látás aktusában két különböző érzet, anélkül, hogy egymással összeolvadna, egyidejűleg tudatunkba jut és ekként a testek világának egyszerű szemléleti képévé csakis a tudatnak a tapasztalaton alapuló ténykedése folytán olvad össze: egyáltalában lehetetlen szemléleteink ama részét, mely a közvetlen érzéshez tartozik, elkülöníteni attól, mely csak tapasztalás útján

* Ueber den Horopter. 1862—1864.

szerezteteit és hogy csakis a tér és idő, s ennélfogva a belőlük leszármaztatott számviszonyok, vagyis tisztán csak a mathematikai vonatkozás lehet közös a külső és a belső világ között és így csakis ebben lehet a képzetek s az elképzelt dolgok között teljes megegyezésre törekedni. És most már egész természetszerüen az a kérdés állott eléje, melyre az 1868-ban «Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen» czím alatt megjelent dolgozataiban törekszik megfelelni, az t. i., hogy mi az voltaképen, ami a tér- és időbeli képzeteknek a leképelt dolgokkal való megegyezését lehetővé teszi; mi az a prioristikus ezen képzetekben, mi a tapasztalat folyománya, s mi egyáltalában az eredete az egyetemes térszemléletnek ?

Helmholtz tiltakozik az ellen, mintha a Kant felfogásával szemben, a ki a tért a szemlélet transcendentalis formájának tekinti, állást foglalna: de az érzéki észrevételek terén tisztába jött avval, hogy pl. a szemünk szerkezetének a következménye, hogy mindazt, amit látunk, csak a színek térbeli eloszlásának tekintsük, és pedig a nélkül, hogy ezen látásbeli észrevétel a színeknek bármiféle idő- vagy térbeli egymásutánját feltételezné és itt már közelről illette őt az a kérdés, vajjon a térszemlélet ezen transcendentális formája szükségképen maga után vonja-e azt a feltevést, hogy határozott térbeli észrevételek mellett vagy után másféle határozott feltevésnek kell-e föllépnie; vagy más szavakkal, hogy nem jár-e ezzel együtt bizonyos axiomák felvétele is. Ama törekvésében, hogy külön válaszsza a geometriában a fogalomfejlődést a tapasztalat eredményeitől, melyek látszólag a gondolkodás követelményeiként lépnek fel, az Euklides-féle geometria összes bizonyításainak alapját a térbeli idomok congruentiájának a bebizonyításában leli meg és ezzel postulatum gyanánt azt a képzetet, hogy ezen alakzatok anélkül, hogy alakjuk és méreteik megváltoznának, egymás irányában eltolhatók, és így szükségképen azon kérdéssel kerül szembe, vajjon a szabad mozoghatóság felvétele, melyet legzsengébb ifjuságunktól kezdve tapasztaltunk, nem rejt-e magában valamilyen, logikailag nem igazolt feltevést, amint ez a kérdésbe való mélyebb behatolása közben mind nagyobb bizonyossággal kiderül.

Vizsgálódásait azzal kezdi Helmholtz, hogy vazlatot készít magának arról a geometriáról, amelyet csak két dimensiót ismerő értelemmel biró lények alkothatnának; olyan lények, melyek valamilyen szilárd test felületén élve, semminemű képességgel nem birnának arra, hogy ezen a felületen kívül bármit is észrevehetnének; itt abból a feltevésből indúl ki, hogy mi, mint három dimensiójú térnek lakói képesek vagyunk magunknak szemlélhetővé tenni azt, hogy milyen mindenféle módon alakíthatnák ki a felületlakó lények az ő térbeli képzeteiket és megrajzolhatjuk magunknak érzéki észrevételeiket is, míg ellenben több mint három kiter-

jedésű terekről szemléletünk nincsen, minthogy érzéki észrevevésünk összes eszközei csakis a három dimensiójú térre vonatkoznak. Mi lesz a mi geometriánk amaz axiomáiból, hogy két pont között csakis egy legrövidebb: az *egyenes* vonal lehetséges; hogy három, nem egyenesben fekvő ponton keresztül oly felület fektethető, melynek bármelyik két pontját összekötő egyenes egészen bele esik a felületbe, mely felület síknak neveztetik; hogy végül két egyenes, ha egyazon síkban van és soha sem metszi egymást, párhuzamosnak vétetik s hogy az egyenesen kívül fekvő ponton keresztül az egyeneshez csak egy párhuzamos húzható; és mivé lesznek mindazok az axiomák, melyek a geometriai alakzatok folytonosságára stb. vonatkoznak?

Ama felületlakó lények általában szintén húzhatnak két pont között legrövidebb vonalakat, melyek azonban nem lennének szükségképen egyenesek; Helmholtz *legrövidebb vonalak*nak nevezi őket. De már a legegyszerűbb esetben, t. i. a gömbfelület esetében két-két pólus között számtalan legrövidebb vonal lenne huzható, párhuzamos legrövidebb egyenesek pedig egyáltalában nem lennének szerkeszthetők és a háromszög szögeinek összege mindig különböznék két derékszögtől. Azok a lények a tért szintén határtalannak, de véges kiterjedésünek találnák és geometriájuk felépítésénél más geometriai axiomáik lennének, mint nekünk, téralakzataikat azonban eltolhatnák a gömbön, anélkül, hogy a méreteik megváltoznának. Minden más test felületén azonban ez a tulajdonság is általában veszendőbe megy, minthogy az olyanféle eltolódás csakis azokon a felületeken lehetséges, amelyek minden pontján a görbület állandóan ugyanaz. Ezek közül az állandó positiv görbületűek hajlítás által, de nyújtás és szakítás nélkül gömbfölületre lefejthetők és sphærikus felületeknek neveztetnek, az állandó negativ görbületűek pedig pseudosphærikusoknak. Ez utóbbi fajtájú görbék analytikai vizsgálatából kiderül, hogy a legrövidebb egyenesek végtelenül meghosszabbíthatók, a nélkül, hogy önmagukba visszafutnának, mint a gömbön és hogy két pont között, épen úgy mint a síkon, csak egy legrövidebb egyenes lehetséges; a párhuzamosak axiomája azonban nem érvényes, minthogy a legrövidebb egyenesen kívül eső ponton keresztül végtelen sok olyan vonal húzható, mely végtelenig meghosszabbítva az előbbit nem metszi és így a fent idézett három axioma szükséges és elegendő, hogy az a felület, a melyre az Euklides-féle geometria vonatkozik, ellentétben minden más két dimensiójú téralakzattal, síknak jellemeztessék.

Lépjünk most a három dimensiójú térbe és hasonlítsuk össze ezt, mint olyan sokaságok tartományát, a melyben minden egyes pont helyzete három méréssel határozható meg, másféle, szintén három kiterjedésű sokaságokkal — a mire példa gyanánt a színek rendszerének térbeli ábrá-

zolása hozható fel — hogy megvizsgáljuk, vajjon megilletik-e még különös ellemző tulajdonságok is a mi terünket?

Tényleg kiderül, hogy bizonyos követelmények még benfoglaltatnak, melyeket a változatlan alakú merev testek teljesen szabad, minden helyre való eltolhatósága és a görbület különös mértéke föltételez. Ez t. i. a tényleg szóban levő térre zérusnak veendő — épen úgy mint az összes felületek közül csupán a síkra és reája lefejthető felületekre nézve zérus értékű — hogy a legrövidebb vonal egyértékűségének és a párhuzamosak Euklides-féle axiomáit kielégíthesse. Ha ugyanis a görbület mértéke a zérustól különböznék, a nagy területű háromszögek szögösszege más volna, mint a kicsinyeké; ámde a geometriai és astronomiai mérések eredménye, mely a háromszög szögeinek összegéül csak közelítőleg, de sohasem egészen pontosan adhat két derékszöget, arra jogosít, hogy terünk görbületének mértékét igen kicsinek tételezzük fel. Azt, hogy a valóságban tényleg elenyésző, nem bírjuk bebizonyítani: ez axioma marad.

Helmholtz azonban tovább megy; megmutatja, hogy a sphærikus, a pseudosphærikus világ szemléletét, fogalmilag az imént jellemzett felületek analogiája szerint kifejtve, minden tekintetben lefesthetjük magunknak; hogy tehát a mi geometriánk axiomái egyáltalában nem gyökerezhetnek a mi szemlélőképességünk adott formájában, sőt leképelések szemléltetése révén plausibilissé teszi, hogy — szemünket megfelelő szemüveggel felfegyverezve — a pseudosphærikus világ nem is tűnnék fel előttünk nagyon is idegenszerűnek és hogy csakis az első időben lennénk a messze fekvő tárgyak nagyságának és távolságának lemérésénél csalódásoknak alávetve.

Ezek a vizsgálatok Helmholtznak 1868-ban Heidelbergben tartott előadásaiban bennfoglaltattak és 20 évvel később «Kürzeste Linien im Farbensystem» című dolgozatában ismét visszatér az ő saját, valamint Riemann eredményeire, melyek szerint a mi terünk különös esetének összes tulajdonságai abból vezethetők le, hogy egy merev test két szomszédos pontjának távolsága a coordinátáknak hozzátartozó növekedésével kifejezhető és hogy ekként a merev test két pontjának egymástól való távolsága annak a követelménynek van alávetve, hogy két végpontjának fekvésével tökéletesen megadva legyen s a test bármilyen eltolása és elfordítása közben ugyanaz maradjon. Kiindulva abból, hogy minden külön szín három kellőleg megválasztott alapszín megfelelően lemért mennyiségeinek egyesítése révén előállítható, mely színek a coordinátákat helyettesítik, a két közelálló szín megkülönböztethetőségének fokában két térbeli pont egymástól való távolságának megfelelő mennyiséget lát, és egy analytikailag igen egyszerűen szerkesztett kifejezést állít fel, melyről azt reményli, hogy a színérzetek terén ugyanarra a szerepre jut, mint a minő a vonalelem hoszszának a formulájáé a geometriában. Ez a kifejezés az élesség fokát

engedi felismerni az olyan két szomszédos szín megkülömböztetésében, mely egyidejüleg mind a három alapszín mennyiségeiben külömböző, melyek tehát a világosság és qualitás tekintetében is külömböznek ; és egészen a térbeli legrövidebb vonalak analógiája szerint két adott, külömböző qualitású es quantitású határszín közé eső *legrövidebb színsorozat* gyanánt az átmeneti színek azon sorait definiálja, melyekre nézve az észrevehető külömbségek összege minimum. A színérzetek világának ilyen felfogása «Die erweiterte Anwendung des FECHNER'schen Gesetzes im Farbensystem» czimü dolgozatában oda vezeti, hogy ezt a törvényt, mely állandónak vevén a fény keverékét, csakis a fényerősség változását veszi tekintetbe, több mint egyméretü sokaságokra is kiterjeszti és a világosság változása mellett a színezet és a telítettség még megkülömböztethető fokozatainak nagyságát is számba veszi. Végre még egyik legutolsó dolgozatában («Ueber den Ursprung der richtigen Deutung unserer Sinneseindrücke») ismét visszatérvén a térszemlélet kérdésére, igen szellemes és jelentős philosophiai elmélkedésbe bocsátkozik.

Valamely test stereometriai formájának elképzelése előtte az érzéki szemléleti képek egész nagy sorából összetett fogalomnak szerepét játszsza, melyet egész függetlenül a geometriai definitiótól csupán csak annak a törvénynek eleven elképzelése tart ébren, a mely szerint a test perspectivikus képei egymásután következnek ; és ebből a nézetből kiindulólag emlékezetünk öntudatlan működésében mindazon fogalomszövődéseknek indító okát látja, melyek eredményei a tudatos gondolkodáséival lényegileg megegyeznek. De akkor az inductio szerinte nem is más, mint az a várakozás, hogy a kezdődésében megfigyelt jelenség eddigi észleleteinknek megfelelő módon fog tovább lefolyni, a hamis inductiók pedig azonosak az érzékcsolódásainkkal ; így aztán a mi tudásunk csakis a tárgy ismeretét foglalja szavakba, a melyről velünk született szervezetünknél fogva emlékezetünk öntudatlan működésén alapuló inductio segítségével szemléleti képet nyertünk.

Csak sok idő múlva a geometria axiomáira vonatkozó dolgozatainak közlése után, mindig újra meg újra megragadva attól a ténytől, hogy a mathematika és mechanika szinte végtelen terjedelmök mellett oly kevés és olyannyira szembeszökő axiomára szorúlnak, 1887-ben E. ZELLERhez — 50 éves doctori jubileuma alkalmából — intézett iratában a *számlálás és mérés** ismeretelméleti vizsgálatába bocsátkozik. És itt ismét szembeszáll KANT nézetével, mely szerint az arithmetika axiomái a priori adott tételek lennének, melyek az időnek transcendentális szemléletét közelebbről meg-

* Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet. *Wiss. Abh.* III. 356. l.

határozzák, ugyanoly értelemben mint a geometria axiomái a térét és fölveti maga előtt a kérdést, hogy mi voltaképen a jelentősége és jogosultsága az elvont számokkal való számolásnak, s mi adja a lehetőséget arra, hogy ezek physikai mennyiségekre is alkalmaztassanak. Miután a számlálást abból származtatta le, hogy képesek vagyunk a sorrendet, a melyben tudatunk actusai az időben egymásután bekövetkeztek, emlékezetünkben megtartani, a tiszta számokról szóló tan előtte egyszerűen psychologiai tényeken épülő módszerré válik; módszerré egy határtalan kiterjedésű és végnélkül finomítható jelrendszernek, ezen jeleknek különféle, de mindenkor ugyanazon végeredményhez vezető kapcsolási módjainak következetes alkalmazására. Miután ezen nézetéből a positiv egész számok törvényszerű sorozatának definitióját kifejtette és azt, hogy sorrendjük csak egyféleképen értelmezhető, megállapította a tiszta számok összeadásának fogalmát. Egyúttal megmutatja, hogy két számnak egy harmadikkal való egyenlőségére vonatkozó arithmetikai axioma, az összeadás associatio-törvénye s a commutativ elv csak úgy bizonyítható be, ha az eredmények külső, számlálható tárgyakon tényleg elvégzett számlálásból eredőkkel megegyeznek. Hogy azonban a tárgyak számlálhatók legyenek, bizonyos feltételeknek teljesítve kell lenniök; léteznek-e ilyen feltételek, vagy nem, azt csak a tapasztalat döntheti el. Ha már most azon tárgyak, melyek bizonyos tekintetben egymással egyenlők és számláltatnak, a számlálás *egység*eül vétetnek; ha továbbá azok *számossága* (Anzahl) megnevezett szám; az egységek különös faja pedig, melyeket összefoglal, a szám megnevezése: akkor egynevezetű számok két csoportja közötti egyenlőségnek fogalmát ugyanaz a számosság fejezi ki. Ha már most oly tárgyakat, vagy tárgyak attributumait, melyek hozzájuk hasonlókkal egybevetve a fölmerülő különbség *nagyobb, egyenlő* vagy *kisebb* szavakkal kifejezhető — mire nézve csakis a hasonlókkal való találkozáskor vagy együttműködéskor tapasztalható physikai viselkedés bizonyos részleteinek empirikus ismerete dönthet — *mennyiség*eknek nevezünk, és ha ezt a mennyiséget *megnevezett szám*mal kifejezhetjük, úgy ezt a számot a mennyiség *érték*ének mondjuk, s az eljárást, a melylyel ezt a megnevezett számot megtaláltuk, *mérés*nek. Így mérjük pl. az *erőt* az erőt kifejtő rendszer tömegével és mozgásával; vagy pedig a dynamikai mérés esetében annak a rendszernek a tömegével és mozgásaival, a melyre hat; vagy végül az erő statikai mérésekor azáltal, hogy az erőt ismert erőkkel egyensúlyba hozzuk.

Most már csak arra a kérdésre kell megfelelni, mikor fejezhetünk ki mennyiségeket megnevezett számokkal, és mit érünk el vele a tényleges tudás terén? És ebből a czélból a physikára nézve olyannyira érdekes és fontos, a physikai egyenlőségre s a physikai kapcsolatok commutativ- és associativ törvényére vonatkozó megfontolásokba bocsátkozik, miközben

az összeadás egynemű mennyiségek között végzendő műveletként van definiálva, olyannak, melynek eredménye az egyes elemeknek egymás között, vagy pedig más egynemű, egyenlő nagyságú mennyiséggel való felcserélése által nem változik. Az irrationális viszonylatok bevezetésénél HELMHOLTZ a physikus álláspontjára helyezkedik, melyhez mint később látni fogjuk, a mechanika és a mathematikai physika elveinek fejtegetése közben mindig ragaszkodik, kijelentvén, hogy a geometriában és a physikában még nem akadtunk olyan nem folytonos függvényekre, melyek kiszámítására azoknak az eléggé szűk határoknak az ismerete, melyek közé az irrationalis értékek esnek, nem lenne elegendő; annyi bizonyos, hogy a mathematikus másnemű függvényeket is ismer, és BOLTZMANN legújabb vizsgálatai arra látszanak utalni, hogy az ilyen analytikai alakzatok még a physikában is létezhetnek.

Midőn most feladatunknak jóval nehezebb részére térünk át, t. i. HELMHOLTZnak az analytikai mechanika terén szerzett érdemeinek elősorolására, hogy feltüntessük, miként alakította át néhány legfényesebb dolgozatával ennek principiumait, szigorúbban kell majd azokat az útakat követnünk, melyek őt bámulatos mathematikai-physikai vizsgálatainak és messze kiható physikai felfedezéseinek fényes során keresztül — melyeket hydrodynamikai, aerodynamikai és elektromossági dolgozatok nagy csoportjaiba fogunk osztályozni — végül a mechanika axiomáinak vizsgálatához elvezették.

Mindenekelőtt itéletet kivánt magának alkotni sok akkori physiologusnak a mechanikai természettudományokkal homlokegyenest ellenkező ama feltevéséről, mely szerint az ú. n. életerő természeti erőket végnélkül létrehozhat. Hogy ezt tehesse, abból a mechanikai törvényekkel beigazolt feltevésből indulva ki, hogy a mozdító erőnek megmért mennyisége bármilyen bonyolult szerkezet esetében is mindenkor csak ugyanazt a mozgásmennyiséget hozhatja létre, «Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen» című dolgozatában az életfolyamatok elméleti felfogására nézve olyannyira fontos kérdéssel: az állati hő eredetével kezd foglalkozni. Ezen vizsgálat, valamint ezzel majdnem egyidejűleg az izommunka közben fejlődő hőre vonatkozó búvárkodásai («Wärmeentwicklung bei der Muskelaction») az erő megmaradásának nagy törvényét erősítették meg előtte, a mint azt a berlini physikai társulat előtt egy 1847-ben tartott előadásban ki is fejtette. Bizonyára érdekes momentuma volt a tudomány történetének, a midőn mintegy 30 évvel ezelőtt századunk egyik legkitünőbb physikusa, KIRCHHOFF, ugyanerről a helyről * szép, világos beszédében («Ueber das Ziel der Naturwissenschaften») HELMHOLTZ jelenlétében ennek

* A heidelbergi egyetem rectori székéből.

a törvénynek felismerését a legfontosabb vívmánynak mondotta, melyet ez az évszázad a természettudományok terén egyáltalában felmutathat; és még ma, 50 év után is mondja HERTZ «Die Principien der Mechanik» című hátrahagyott munkájában, hogy a physika évszázadunk végén egészen új gondolkodásmódhoz hajlik, és HELMHOLTZnak a physikai energia összegének állandóságára vonatkozó nagy felfedezésének kényszerítő hatása alatt nagy előszeretettel végső czéljául azt kezdi megjelölni, hogy a jelenségeket az energia átalakulásainak törvényeire visszavezesse.

Hogy HELMHOLTZ eme nagy felfedezésének, valamint a mechanika alapelveire vonatkozó későbbi alapvető dolgozatainak megértését elősegítsem, az elméleti mechanikának fejlődésére kell rövid visszapillantást vetnem.

Az emeltyű, a csiga és a lejtő törvényeire vonatkozó első vizsgálatokból csakhamar kifejlődtek azok az általános nézetek, melyek az egyensúly tanának alapjait megvetették. És megállapíttatván az a definitio, hogy a *munka* az erő nagyságának és az anyagi pontnak az erő irányában mért végtelen kicsi eltolódásából alkotott szorzat, az egész statika alapja gyanánt a *virtuális sebességek elve* tűnt fel. Ezen elv szerint valamely rendszer akkor, és csakis akkor van egyensúlyi állapotban, ha minden *virtuális*, vagyis pontjainak kapcsolatával összeférő végtelen kicsi elmozdulása közben az egész rendszer munkája zérussal egyenlő. Miután GALILEI a *tömegek tehetetlenségét* felismerte és NEWTON a *távolbaható erők* fogalmát bevezette, a mechanika a három híres NEWTON-féle törvény alapján fejlődött. E törvények tudvalevőleg a következők: minden test nyugvó vagy pedig egyenes vonalú egyenletes mozgásának állapotában mindaddig megmarad, míg valami külső erő ezt az állapotát meg nem változtatja; az anyagi pont sebességváltozása a pontra ható erő irányában történik, s a gyorsulás a ható erővel egyenesen, a tömeggel fordítva arányos; végül: két testnek egymásra való hatása mindenkor egyenlő, és ellenkező irányú. Ezen az úton — a rendszer anyagi pontjai között szilárd kapcsolatot tételezve fel — legalább a NEWTON-féle erőkre vonatkozólag az egész dynamikában uralkodó D'ALEMBERT-féle elvhez jutottak. Nyert erőnek azt nevezvén, melyet a rendszer minden egyes pontjára ható erőhöz hozzá kellene adni, hogy elszigetelt állapotban éppen úgy mozogjon, mint ahogy tényleg mozog, úgy D'ALEMBERT elve azt mondja, hogy az összes nyert erők egymást egyensúlyban tartják. És ha meg vannak adva a coordináták analytikailag kifejezhető egyenleteivel a megszorítások, a melyeknek a rendszer pontjainak mozgása alá van vetve, valamint a reájuk ható erők, nemkülömben valamely pillanatra minden egyes pontnak a helyzete és sebessége is: akkor ez az elv módot nyújt a mathematikusnak arra, hogy a pontok helyét bármely időre kiszámítsa.

A mechanikának ezen irányban való továbbfejlődése megkövetelné

tehát a természet összes erőinek, vagyis az anyag minden tulajdonságainak fürkészését, mert hiszen az anyagnak előttünk más ismertető jelei nincsenek, mint azok az erők, melyekkel részeik egymásra hatnak. Felismertetvén az egyensúly és a mozgás tanának ezen két alapelve, az volt a törekvés, hogy a mozgás általános törvényei és tulajdonságai földeríttessenek. Egyike a legfontosabb és következményeiben legtermékenyebb felfedezéseknek volt *az eleven erő megmaradásának* levezetése, melynek érdemében Huygens, továbbá a két Bernoulli (János és Dávid) osztoznak. Ha ugyanis egy anyagi pont tömegének sebessége négyzetével való félszorzatát a pont *eleven erejének* nevezzük, és tetszőleges számú pontból álló anyagi rendszer eleven erejének, vagy pedig a *rendszer kinetikai energiájának* az egyes pontok eleven erejének összegét, megjegyezvén, hogy az egyes pontok szabad mozgásukban korlátozva lehetnek : úgy a d'Alembert-féle elvnek alávetett rendszer eleven erejének növekedése a közben, mialatt egy helyzetből egy másikba átmegy, pontosan egyenlő az erőknek e közben elvégzett munkájával. Ha már most a mozgásközben végzett munka csupán csak a kezdet- és véghelyzettől függ, ebből az következik, hogy ha valamely rendszer mozgása közben eredeti helyzetébe visszatér, kinetikai energiájának értéke is ugyanaz lesz. Ezt a törvényt a kinetikai energia megtartása tételének nevezik s a rendszereket, a melyekre érvényes, conservativ rendszereknek. Ezen tétel egyszerű átalakítása messzemenő következtetésekre vezet ; t. i. az a tény, hogy a test egy helyzetből egy másikba való mozgása közben meghatározott mennyiségű munkát végez, semmi egyebet nem fejez ki, mint azt, hogy munkaképessége vagy pedig *potentialis energiája* a kezdeti helyzetében a végzett munkával nagyobb, mint a véghelyzetbeli, úgy hogy a conservativ rendszerekre fent kimondott tétel (a kinetikai energia tétele) az *energia állandóságának törvényébe* megy át, melynek értelmében a conservativ rendszer mozgása közben a *potentiális és a kinetikai energiának összege állandó,* ámde csak azon lényeges kikötés mellett, hogy a mozgásközben végzett munka egészen független a leírt úttól és csupán csak a kezdet- és véghelyzettől függ.

A Newton-féle erőkre és rendszerekre, a melyekre nézve ez a tétel érvényes, a törvény érvényessége nyilván nem mond ki egyebet, mint a perpetuum mobile lehetetlenségét, vagyis azt, hogy a természeti testek semmiféle combinatiójával sem lehetséges mozgató erőt állandóan semmiből teremteni azáltal, hogy az egyik úton nyert munkával szemben egy másik úton, melyen a szerkezetet eredeti állapotába visszavezetnők, végnélküli mechanikai erőt tudnánk létrehozni. Igaz ugyan, hogy ennek a lehetetlenségét — s ezzel együtt az energia állandóságának törvényét is — az akkor ismert erőkre nézve már rég belátták volt, ámde úgy tetszett,

mintha a természetnek nem összes erői lennének ilyen tulajdonságuak s így a mondott törvénynek nem is lennének alávetve. Ha egy rendszer egy pályán először surlódással, s azután surlódás nélkül mozog, úgy az előbbi esetben a kinetikai energia a sebesség csökkenése folytán kisebb lesz, miért is ha az energia állandóságának törvényét egész általánosságban fentartani kivánjuk, a potentiális energia fogalmát, mely eddig a helyzeti energia volt, az energia azon fajára is kell kiterjesztenünk, mely hő vagy más természeti erők alakjában mutatkozik s ennélfogva az itt például felhozott esetben a kinetikai energiában szenvedett veszteséget a surlódás révén keletkezett egyenértékű hőmennyiséggel kell helyettesítenünk. Így R. Mayer, kiindúlva abból a feltevésből, hogy erőt teremteni vagy megsemmisíteni az emberi cselekvésnek és gondolkodásnak nem áll hatalmában, a hő és a mechanikai munka æquivalentiáját a természeti tünemények alaptörvényének mondta. Helmholtz a nélkül, hogy Mayer vizsgálatairól tudomása lett volna, elejétől fogva az összes természeti erőket elmélkedései körébe vonta és érvényesnek véve az energia állandóságának törvényét — melynek helyességét külömben kisérletileg is vizsgálhatta és a physikai tünemények hosszú során kimutathatta — a perpetuum mobile lehetetlenségére következtetett még azokban az esetekben is, a mikor hő, fény, elektromosság és chemiai folyamatok is közreműködnek hatók gyanánt. Vagy pedig következtetett egy másik, ezzel teljesen æquivalens tételre, mely szerint bármiféle természeti erők munkája, mialatt támadáspontjaik bizonyos kezdeti állapotból egy bizonyos végállapotba mennek át, csakis ettől a két állapottól függ, nem pedig az átmenet módjától. És midőn ebből még arra következtetett, hogy minden zárt rendszerben az energia növekedésének egyenlő energia fogyasztásnak kell megfelelnie, ahhoz a nagy, egyetemes érvényű igazsághoz jutott, hogy a világ munkaképessége állandó.

Az ő bámulatos szerénységével kiemeli, hogy szándéka nem volt más, mint lehetőleg tökéletesen kiemelni a physikusok előtt az energia állandóságát kifejező törvények elméleti, gyakorlati és heuristikus fontosságát. Véleménye szerint a legközelebbi időben a physikának alkalmasint az lesz a legfőbb feladata, hogy ennek a törvénynek teljes beigazolására törekedjék. És hogy újra meg újra utaljunk Helmholtz természetphilosophiai nézeteire, emeljük ki azt, hogy ellentétben a metaphysikai speculatio hiveivel, a kik az erő megmaradásának törvényét a prioristikusnak törekedtek feltüntetni, azt állítja, hogy ezt a törvényt, éppen úgy mint a való világ jelenségeire vonatkozó ösmereteinket, inductio révén találtuk meg; és ez az inductio nem volt más, mint hogy számos meddő kisérlet után végre is beláttuk, hogy perpetuum mobilet szerkeszteni nem birunk. Azonban ez a nagy törvény, mely az átalakulásoknál szükségképen fenforgó quantitativ viszonyokat szabályozza, eldöntetlenül hagyta azt, vajjon a munka

határtalanul alakítható-e át hőbeli energiává és megfordítva; és nem döntötte el azt, hogy mint áll a dolog a fény, az elektromosság és más természeti erők esetében. Mind oly kérdések, melyekre a feleletet később az energia fogalomnak a mathematikai physikában előtérbe lépő mély és egyetemes jelentőségénél fogva kell majd megadnia.

Miután HELMHOLTZ a mechanika ezen alapelvét physikai szempontból igen sokfelől átvizsgálta, physiologiai vizsgálatok mellett, miként már a «Theorie der Akustik»-re vonatkozó jelentéseiben is említi, igen általános mechanikai problémákhoz, nevezetesen hydrodynamikai vizsgálatokhoz fordul és «Ueber die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen» című híres dolgozatában a folyadékok mozgására vonatkozólag egy egészen új felfogásnak veti meg az alapjait, mely később W. THOMSON-nak az örvénylő mozgásokra vonatkozó elméletében, valamint más physikusok dolgozataiban a természettudományok legkülömbözőbb ágaiban termékenynek bizonyult. Azon feltevés mellett, hogy a nyomás az *ideális*, vagyis surlódásmentes folyadékban minden irányban egyenletesen terjed, már EULER-nek és LAGRANGE-nak is sikerült a folyadék sűrűsége és a benne levő nyomás, az idő, egy részecskéjének coordinatái, és egyrészt annak sebességi componensei, másrészt pedig ugyanezen részecskének a mozgás kezdetekor elfoglalt helyzete között analytikai összefüggéseket felállítaniok és még az u. n. continuitási egyenletre következtetniök, mely azt mondja ki, hogy a folyadék egy bizonyos anyagi részecskéjének a tömege az idővel nem változik, hogy tehát a folyadék felületének mindenkor ugyanazon részecskékből összetettnek kell lennie. Mindezek az egyenletek az ideális folyadékok mozgásában a fentebb említett D'ALEMBERT-féle elvnek analogonját adják és a változó mennyiségek meghatározását tiszta mathematikai problémára vezetik vissza, melynek megoldása — KIRCHHOFF szavai szerint kifejezve — a mozgást leírja. Ez a feladat egyes esetekre nézve tényleg megoldatott, a melyekben t. i. minden egyes folyadékrészecske sebességi componensei egy függvénynek az illető irány szerint vett első differentiálquotienseivel egyenlőkké tehetők, mely függvényt HELMHOLTZ *sebességi potentiál*nak nevez, s mely a continuitási egyenlet révén az összenyomhatatlan folyadékokra nézve ugyanolyan tulajdonságokkal bír, mint a gravitáló tömegek potentiálja a tömegen kívül fekvő pontokban. Csakhogy az ilyen sebességi potential nem mindig létezik, és azért HELMHOLTZ a folyadékbeli mozgások igen nehéz problémáját egész általánosságban ragadta meg.

Mindenekelőtt felismeri, hogy a változás, melyet a végtelen kicsi folyadéktérfogat végtelen kicsi időben szenved, három különböző mozgásból tevődik össze: a részecske térbeli eltolódásából, annak három egymásra merőleges iránybeli kiterjedéséből vagy összehuzódásából, és végül egy

időleges tengely körül való elfordulásból; megjegyzendő azonban, hogy az esetre, ha sebességi potential létezik, forgó mozgások ki vannak zárva. Azokat a mozgásokat, melyeknél sebességi potential nem fordul elő, HELMHOLTZ *örvénylő mozgás*oknak nevezi. Arra törekedvén, hogy a forgássebességnek mozgásközbeni változását meghatározza, azt találta, hogy azok a folyadékrészecskék, melyeknek forgó mozgásuk még nem volt, azontúl sem tesznek szert forgó mozgásokra. Ha *örvénylő vonal*nak az a vonal neveztetik, melynek iránya mindenütt az ott levő részecske pillanatnyi forgástengelyének irányával egybeesik, az a nevezetes tétel adódik ki, hogy minden egyes örvénylő vonal állandóan ugyanazon részecskékből tevődik össze és a részecskékkel együtt a folyadékban tovább uszik és hogy egy adott folyadékrészecskében az eredő forgássebesség nagysága ugyanolyan arányban változik, mint a részecske távolsága az örvénylő vonalbeli szomszédjaitól. Ha továbbá a folyadéknak örvényvonalakból álló végtelen vékony csőszerű felületével bezárt része *örvényfonál*nak neveztetik, úgy a forgássebességből s a fonál keresztmetszetéből alkotott szorzat a fonál egész hosszán keresztül, még annak továbbmozgása közben is állandó marad, úgy, hogy az örvényfonálnak az egész folyadékban sehol sem szabad megszünnie, hanem vagy gyűrűszerűen önmagába visszatér a folyadékon belül, vagy pedig annak a határáig terjed. És midőn HELMHOLTZ még annak a feladatnak a megoldásába fogott, hogy az örvénylés sebességéből a mozgássebességeket kiszámítsa, ezekkel a mathematikai szempontból is érdekes vizsgálatokkal a mozgási alakok sorának legalább az elképzelését tette lehetővé, bár a problémák analytikai kifejtése csakis a legegyszerűbb esetekre volt lehetséges. A környezetre és a folyadék természetére vonatkozó némely föltevések mellett az örvényfonalak és örvénylő gyűrűk állandóan ugyanazt a folyadéktömeget tartalmazzák, és elpusztíthatatlanok; két gyűrű, melyeknek közös a tengelyök és forgásuk iránya ugyanaz, egy és ugyanazon irányban haladnak tovább, és pedig úgy, hogy az elül haladó tágul és lassabban halad, a nyomában haladó pedig összehuzódik és gyorsabban halad előre; ha a terjedés-sebességek bizonyos határok közé esnek, megesik végre az, hogy a második gyűrű az elsőt utóléri, átbujik rajta, mire aztán a két gyűrű szerepet cserél. De ne téveszszük szem elől, hogy az örvénylő mozgások ezen jelensége a valóságban a surlódás hatása alatt csakhamar máskép alakul.

Az örvénylő mozgások törvényszerűsége és relativ állandósága W. THOMSON-t arra az érdekes hypothesisre vezette, hogy az atomoknak örvénylő gyűrűk alakját tulajdonította. Ennél az a törekvés vezette, hogy az anyag folytonosságának elméletét az atómelmélettel egy nézetben egyesítse. De a mi még fontosabbá vált, arra is indította, hogy az örvénylő mozgások elméletének eredményeit a szilárd testeknek folyadékokban

való mozgásával kapcsolatba hozza s ezzel együtt előkészítse azokat a fontos vizsgálatokat is, melyek czélja a távolba ható erőket a physikából kiküszöbölni s a melyekre HELMHOLTZ későbbi dolgozatainál még visszatérek.

Azonban HELMHOLTZ eddig tett hydrodynamikai vizsgálatai csakhamar hiányosaknak bizonyultak; a physiologiai optikáról írt, annyira híressé vált kézikönyvének kidolgozása közben arra a meggyőződésre jutott, hogy ha a cseppfolyós testek mozgására vonatkozólag az elmélet és a kisérlet eredményei között csak némileg kielégítő megegyezést akar elérni, a folyadékrészeknek egymáshoz, valamint az edény falaihoz való surlódását figyelmen kívül hagyni nem szabad. Amint mások, BESSEL kisérleteitől indíttatva, már régebben foglalkoztak a folyadékban lengő ingának (fonálon függő gömbnek) mozgásával, ő is — szintén a BESSEL-féle kisérletekből kiindulva — surlódásnak alávetett cseppfolyós tömeg belsejében végbemenő mozgásokra vonatkozó, akkor már ismeretes mozgási egyenletek segítségével egy olyan gömbnek a mozgását kezdte tanulmányozni, mely surlódó folyadékkal van megtöltve és egyik átmérője körül forgó lengéseket végez. Sikerült is neki a problémát mathematikailag kifejtenie, a folyadék hullámzó mozgását a surlódás, számbavételével jellemeznie, és ez úton a surlódási együtthatók kisérleti úton nyert értékeit elméleti számítással ellenőriznie.

Még két, az elmélet s a gyakorlat szempontjából egyaránt fontos tételt állított fel. Az első arra az esetre vonatkozik, a midőn surlódásnak alávetett folyadék állandó áramlás esetében, több hengeres csövön keresztül halad s azt mondja, hogy a folyadék az áram egyes ágai között úgy oszlik el, hogy a surlódástól okozott eleven erőbeli veszteség minimum legyen. A második tétel pedig azt mondja, hogy lassú állandó áramlásban levő folyadékban uszó testen egyensúlykor a surlódás a legkisebb értéket veszi fel. Ezt a két tételt felállítván s miután még az elektromos megosztás problémáira vonatkozó általános transformatio módszere őt a mathematikailag olyannyira fontos leképelési problémákra vezette, az 1868-ban közzétett (Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen), rendkívül érdekes függvénytani dolgozatában mélyebben hatol be a folyadékok kiáramlásának és a szabad sugarak képződésének tanába és tárgyalja az örvénylések mozgásának és keletkezésének erre vonatkozólag igen jellemző discontinuitási jelenségeit. HELMHOLTZ abból a megfontolásból indul ki, hogy maga a probléma, mely a szabad folyadéksugarak keletkezésének leírását követeli, olyan természetű, hogy a disconuitást egyenesen feltételezi s ennélfogva kell, hogy a hydrodynamikai alapegyenletek a bennök előforduló mennyiségek disconuitásának lehetőségét megengedjék. Tényleg kiderült, hogy valamely mozgó összenyomhatatlan folyadékban a nyomás, melynek csökkenése a mozgó folyadékrészecskék eleven erejével egyene-

sen arányos, mihelyt ez utóbbi bizonyos nagyságot meghalad, negativvá lesz és a folyadéknak el kell szakadnia ; és bebizonyult, hogy minden geometriailag tökéletesen éles ék, a mely mellett a folyadék elfolyik, még a folyadéknak legmérsékeltebb sebessége esetében is elszakítja a folyadékot és válaszfelületet létesít és hogy legömbölyített élű éken ez csak nagyobb sebesség esetében fog bekövetkezni. Ezután a függvénytan módszereinek segítségével a szabad sugár alakjának igen nehéz problémája kerül tárgyalás alá, azzal a feltevéssel, hogy a surlódás elhanyagoltatik, hogy külső erők nem hatnak, hogy a mozgás állandó s a sebességi potential csupán csak két coordinatától függ és az edény s a kifolyató nyilás még egész különleges megszorításoknak vannak alávetve. Végül még azt mutatja ki HELMHOLTZ, hogy az örvénylésekre előbb nyert eredmények még a sugárbeli folyadékrészecskék saját mozgásának leírásában is sikerrel alkalmazhatók.

Hydrodynamikai kutatásaival egy időben — már a kezdetén heidelbergi tartózkodásának — fejlődtek az ő akustikai és aërodynamikai vizsgálatai. A combinatio-hangokról,* továbbá a hangzók hangszínezetéről** szóló dolgozataiban újra visszatér már néhány régebbi, kisebb dolgozatban is kifejtett, más physikusokéval is egyező nézetre, mely szerint minden hang — szabatosabban hangérzet — a melyet valamely rezgő testből kiinduló levegőrezgés ébreszt, több egyszerű hangérzetből tevődik össze ; olyan hangérzetekből, melyeket a levegőnek egyszerű (ingaszerű) rezgő mozgása hoz létre, és ezt a hypothesist mathematikailag akként formulázza, hogy kiindulva minden időszakos mozgásnak, mint sinusmozgások összegének FOURIER-féle előállításából, valamely hangnak a magassága gyanánt a benne előforduló legmélyebb hang : az *alaphang* magasságát veszi, a többieket pedig *felhangok*nak nevezi. Tüzetesebb kisérleti vizsgálat arra az eredményre vezeti, hogy a zenei hangszínezet csupán csak a hangban előforduló felhangok számától és relativ erősségétől függ, de teljesen független a phasiskülömbségeiktől ; hogy a hallásunkra ható hangtömegek egyszerű alkotó elemeikre felbonthatók s ezekből ismét összetehetők, és hogy a hangzók a hangszerekkel adható egyéb hangoktól csak annyiban különböznek, hogy felhangjaik erőssége ezek rendszámától független, de függ az absolut magasságuktól. És itt ismét felismerhető az a törekvése, hogy az érzéki észrevevés minden esetében megállapítsa a lényeges különbséget az érzetek és az észrevételek között, a mennyiben az érzetek csak testünk, illetőleg idegkészülékeink állapotaként jutnak tudomásunkra (mint pl. a felhangok), az észrevételek révén pedig képzeteket alkotunk

* Ueber Combinationstöne.

** Ueber die Klangfarbe der Vocale.

magunknak a külső tárgyakról, a minő pl. a partialis hangokból összetevődő hang.

Ámde az akustikának minden eddigi tárgyalása azt az igen általános hypothesist tette, hogy a levegőnek és más rugalmas testeknek rezgő mozgásai, melyeket több egyidejűleg ható hangforrás létesít, mindenkor pontosan egyenlők az egyes hangforrásoktól okozott mozgások összegével. Midőn HELMHOLTZ felismerte, hogy ez a törvény egész szigorusággal csakis akkor érvényes, ha a rezgések végtelen kicsinyek, azaz, ha a sűrűségbeli különbségek az egész sűrűséghez képest elenyészők és éppen úgy a rezgő részecskék eltolódásai is elenyésző kicsinyek magukhoz a tömegekhez képest, megtalálta a *combinatio*-hangok magyarázatát. Ezek t. i. akkor jönnek létre, a mikor az említett törvény nem alkalmazható s egyúttal kimutatta, hogy a combinatio-hangok, függetlenül az emberi fültől, objective léteznek; és megkülömbözteti ezektől a combinatio-hangoktól, melyekben a rezgéseknek a külső térben vagy pedig a fül belsejében történő összegezódése zavart szenved, a *lüktetések*et, a melyek esetében a mozgások a felhozott törvényt követik, de az *érzet*ek összegeződése nem történik zavartalanul.

Csakhamar azonban mélyebben belebocsátkozik az akustika elméletébe és az analysis legfinomabb segédeszközeivel vizsgálja a levegőoszlopok mozgását,* és pedig hydrodynamikai vizsgálatainak megfelelő módon, a mennyiben felveti azt a kérdést, hogy mily módon viselkednek egy cső belsejében gerjesztett egyszerű hangnak megfelelő hanghullámok a szabad térbe való átmenetnél, hogy megállapíthassa azt a rezgésalakot, mely véglegesen létrejön, ha a rezgéseket gerjesztő ok állandóan tovább működik. Miután a potentialfüggvényre vonatkozó legfontosabb általános tételeit a hanghullámokról szóló tanra alkalmazhatókká tette, és a további vizsgálatok alapjául azt az érdekes tételt felállította, hogy ha levegővel telt tér egy pontjában hanghullámok gerjesztetnek, ezeknek sebességi potentiálja valamely más pontban ugyanakkora, mint a mekkora az elsőben lenne, ha ez utóbbiban ugyanolyan intenzitású hullámok ébresztetnének, a mivel együtt jár az is, hogy a phasis-különbség a két esetben ugyanaz: sikerült neki — némi megszorításnak vetvén alá a nyilás méreteit — a cső belsejében támasztott sík és a szabad térben szétterjedő félgömbalakú hullámok között bizonyos összefüggést levezetnie, és ezzel a cső nyilt végének a hatását a cső belsejében létrejövő síkhullámokra megvilágítania. A további vizsgálat a rezgési maximumok és minimumok helyeit s ezzel a legerősebb ráhangzású hangoknak tőle függő magasságát adják. Továbbá tárgyalja azt a nehéz kérdést, hogy milyen alakú csövekre lehetséges a nagy hul-

* Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden (1859).

lámhosszaságú hanghullámoknak nyilásbeli levegőmozgását jellemezni; egy későbbi dolgozatában megmutatta, hogy a számítás eredményei jobban egyeznek a kisérletekkel, ha még a levegő belső surlódása is figyelembe vétetik.

Akustikai vizsgálatainak mindezen eredményei, melyek közől előadásom czéljának megfelelőleg csak a mathematikailag kiválóan érdekeseket hozom fel, az ő híres «Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik» munkájában összefüggően vannak előadva. A műben nagy bősége van a zene történetére és lényegére vonatkozó fontos eredményeknek, melyek közől még csak azt az egy általános érdekűt kivánom kiemelni, hogy ő megmutatta, mi módon kell a zenében egész szabatos mathematikai úton a melódiát, mint a zene alapját különválasztani a harmoniától, mely csak a melódia erősítésére szolgál; és hogy annak a rég ismeretes ténynek, hogy harmonikus hatás csakis az oly hangokkal érhető el, melyek rezgésszámai egyszerű számok szerint viszonylanak egymáshoz, mathematikai magyarázatát is megtalálta, bebizonyítván, hogy az alaphangot kisérő partiális hangok a fülre kellemetlen hatást tesznek, ha az alaphangok rezgésszámainak a viszonya nem fejezhető ki kis számokkal.

Mielőtt Helmholtz-nak jóval későbbi keletű ærodynamikai dolgozatainak rövid megbeszélésébe bocsátkoznék, a mennyiben azok a mathematikus érdeklődését lekötik, egy 1873-ból eredő, a hydrodynamika és az ærodynamika határterületén mozgó dolgozatot * kivánok említeni, melyben a hydrodynamikai egyenleteket arra használja fel, hogy egy folyadékon és bizonyos nagyságú és sebességű készüléken nyert észleleti eredmények egy más folyadéknak geometriailag hasonló tömegére, továbbá más nagyságú és más sebességű készülékre átvitetnek. A cseppfolyós összenyomhatatlan folyadékokra nyert eredményeknek kiterjesztése a gázneműekre az érdekes alkalmazások egész sorára vezet; így Helmholtz többi között azt találja, hogy a madarak nagyságának határa van, ha az izmok abban az irányban tovább nem fejleszthetők, hogy ugyanazon tömeg mellett még több munkát végezhessenek, mint jelenleg és hogy ennélfogva a természet a nagy kondorral valószínűleg már elérte azt a határt, melyet egy olyan teremtmény nagysága elérhet, mely szárnyakon felemelkedni és hosszabb időn keresztül a levegőben magát fentartani képes, s így az embernek alig van kilátása arra, hogy még a legügyesebb, szárnyszerű mechanismussal, melyet saját izomerejével kell mozgatnia, saját sulyát fölemelhesse és hosszabb időn keresztül a magasban lebegve tartsa.

* Ueber ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem Luftballons zu lenken.

A fent említett összehasonlítási elvét a léggömbre és a hajóra alkalmazván, ahhoz az érdekes eredményhez jut, hogy ha a ballon mintegy másfélszer annyit nyom, mint a vele emelkedő, dolgozó emberek, a munkaerő és a súly viszonya ugyanaz volna, minőt a hadigőzösön találunk.

Csak jóval később, 1888—90-ben terjeszti ki HELMHOLTZ a folyadékok mozgására vonatkozó vizsgálatait, a melyekben a belső surlódást is tekintetbe vette, a légköri légtömegek mozgására * és megmutatja, hogy állandó erők hatása alatt a levegő tömegében is képződhetnek discontinuitási felületek. Miután a problémának szigorú mathematikai tárgyalásából felismerte, hogy a föld felületén végbemenő surlódásnak a hatása magasabb légrétegekre egész jelentéktelen, hogy eleven erő voltaképen csakis a talajon történő surlódás és az örvénylő mozgásoknál előforduló válaszfelületeken semmisül meg; hogy továbbá hőkicserélődés csakis a földfelülettel érintkező határfelületen, valamint belső discontinuitási felületeken kívül csakis sugárzás és meleg levegőrészek tovavitele folytán mehet végbe, azt a kérdést veti fel maga előtt, vajjon honnét van az, hogy légkörünk keringése nem okoz az ismerteknél jóval hevesebb szeleket? Az okot abban találja, hogy az örvénylések, melyek discontinuitási felületeknek felgombolyodása folytán keletkeznek, a különbözőképen mozgó levegőrétegeket összekeverik, és az eredetileg különvált rétegeket belsejökben mindig számosabb és vékonyabb lapokban egymás körül csavarják; az így óriási módon megnövekedett válaszfelületen keresztül aztán a hőmérsékletök gyorsabban kiegyenlítődik, mozgásuk pedig a surlódás következtében csillapodik. Ámde a surlódás és a hővezetés hatásait jóval fokozottabb mértékben előidézik a légrétegekben előforduló egyensúlybomlások és keveredések, melyeket a hullámtorlaszoknak a légkörben való szabályos tovaterjedése előidéz, melyek épen úgy mint a vízfelületen, két különböző fajsúlyú rétegnek egymásra helyezkedése folytán keletkeznek. Az ilyen hullámrendszerek a különböző sűrűségű levegőrétegek válaszfelületén csak akkor válnak láthatókká, ha az alsó réteg annyira van telítve vízgőzökkel, hogy a hullámhegyek, a melyekben a nyomás kisebb, ködöt kezdenek alkotni és akkor tűnnek elő a sávos, párhuzamos felhővonulatok, melyek az égboltozat széles mezőin, szabályosan ismétlődve, elterülhetnek. HELMHOLTZ azért is nagyon fontosnak tartja, hogy a két folyadék válaszfelületén keletkező hullámok elmélete megoldassék, de a nagy mathematikai nehézségek miatt egyelőre csakis a legegyszerűbb esetre, t. i. egyenesvonalú hullámvonulatokra szorítkozik, a melyek két különböző sűrűségű, végtelen kiterjedésű folyadék sík elválasztó felületén változatlan alakban.

* «Ueber atmosphaerische Bewegungen» és «Die Energie der Wogen und des Windes».

állandó sebességgel tovaterjednek. A mint a sík vízfelület, mely fölött egyenletes szél vonul el, labilis egyensúlyban van és ennek következtében vízhullámok keletkeznek rajta, épen úgy ismétlődik ugyanez a folyamat a különböző nehézségű s egymáson tovacsuszamló légrétegek határfelületén, csakhogy sokkal nagyobb méretekben s ez arra indítja HELMHOLTZOT, hogy az energiabeli viszonyokat s annak megoszlását a víz és a levegő között behatóan tanulmányozza, a mi őt aztán egészen általános mechanikai okoskodások alapján, melyeknek fejtegetésével fogjuk ismertetésünket befejezni, nagyon érdekes, de egyúttal igen nehéz elmélkedésekre vezeti, melyek fonalán a stationarius mozgásban levő tömegek stabilis és labilis egyensúlya közötti különbséget hasonló módon állapítja meg, mint már régen megtalálták volt, hogy a nyugalomban levő testekre a potentiális energia minimuma adja meg az egyensúly feltételét, s közben többi között az is kiderül, hogy a stationarius hullámok esetében állandó értéken tartott sebességi potential mellett az egyensúly szintén az energia minimumának felel meg.

S most mathematikai-physikai dolgozatainak utolsó nagy kategoriájának vázolásához fogok, melyek őt végül a mechanika elveinek olyannyira jelentős kialakításához vezették: az ő elektromosságról szóló dolgozataihoz, melyek lényegökben 1870. évvel vették kezdetöket s majdnem tíz éven keresztül folytatódtak. Főleg «Ueber die Bewegungserscheinungen der Elektricität für ruhende leitende Körper» (1870); «Ueber die Theorie der Elektrodynamik» (1870—74); és «Vergleich des AMPÈRE'schen und NEUMANN'schen Gesetzes für die elektrodynamischen Kräfte» (1873) czímek alatt megjelent közleményeiben vannak lefektetve.

Az elektrodynamika törvényeit annak idején Németországban a legtöbb physikus WEBER hypothesiséből vezette le, ki az elektromos tömegpontok kölcsönös hatástörvényének felállításában, kiindulva NEWTON-nak a tömegek vonzására és COULOMB-nak statikai elektromosság vonzására vonatkozó törvényeiből, az erő intenzitását — mely a térben végtelen sebességgel terjed — az egymásra ható elektromos mennyiségek távolságának négyzetével fordítva arányosnak, a két mennyiség szorzatával pedig egyenesen arányosnak vette, és pedig taszítónak az egynemű elektromosságok között, vonzónak a különböző nemüek között; azonban COULOMB-tól eltér annyiban, hogy a ható elektromosságok mennyiségén és távolságán kívül még azokat a sebességeket és gyorsulásokat is beveszi a törvénybe, a melyekkel az elektromos mennyiségek egymáshoz közelednek vagy egymástól távolódnak. Az olyan erők felvétele, melyek nem csak a helyzettől, hanem a hatók relativ mozgásától is függenének, látszólag nem igen egyezett HELMHOLTZ nézeteivel, a ki már jóval előbb, az erő megmaradásának törvényére vonatkozó vizsgálataiban ahhoz a tételhez jutott, hogy az olyan

erők, melyek távolságoktól és sebességektől is függnének, az energia megmaradásáról szóló általános természeti törvénybe ütköznének, mely pedig az elektrodynamikai jelenségek terén is helyesnek bizonyult; de akkor ő WEBER bonyolultabb törvényét, melyben az erők még a gyorsulásoktól is függenek, nem vette tekintetbe és tényleg ki lehetett mutatni, hogy a WEBER-féle törvény nem enged meg egy olyanféle körfolyamatot, mely semmiből munkát teremtene. Ezen WEBER-féle hypothesis mellett egy másik régebbi állott fenn, az a mely E. NEUMANN-tól ered. Ez nem a tömegpont hatását adja egy másik tömegpontra, hanem linearis áramelemnek egy másikra való hatását; ezt pedig HELMHOLTZ a legszerencsésebb és legtermékenyebb gondolatnak tartotta, a melyet az új mathematikai physika egyáltalában felmutathat. Ámde a két áramelem egymásra való hatásának a WEBER-féle hypothesisből leszármaztatott törvénye a NEUMANN-féle potential-törvénytől különbözött és HELMHOLTZ vizsgálódásai közben egyszerre csak azon kérdés előtt látja magát, vajjon WEBER hypothesise egyáltalában megfelel-e a valóságnak és hogy miféle vonatkozásban van a NEUMANN- és a WEBER-féle törvény a később említendő MAXWELL-féle törvényhez?

Felismervén azt, hogy ezen törvények különböző alakjai egy közös formára visszavezethetők, a melyből mindegyikök csupán csak a benne foglalt állandóknak különböző értékeivel kiadódik; és felismervén, hogy az összes jelenségek, melyeket önmagukba visszafutó fémi vezetőkörökben keringő teljesen zárt áramok előidéznek, a különböző hypothesisekből egyformán jól leszármaztathatók, nem teljesen zárt vezetők esetében ellenben lényegesen különböző következtetésekre vezetnek: a kérdést eldöntendő, az inductiónak tőle általánosított törvényéből levezeti az elektromosság mozgástörvényeit a testes (testi kiterjedésű) vezetőkben. Azt találta, hogy határozatlanúl hagyott állandóknak negativ értéke, a minőt a WEBER-féle felfogás megkövetel, az elektromosság labilis egyensúlyának felel meg és hogy ennélfogva olynemű áramlások támadhatnának, melyek végtelen intenzitásokra és végtelen elektromos sűrűségekre vezetnének; ha ellenben a constans értéke MAXWELL nézetének megfelelőleg zérus, vagy pedig NEUMANN szerint positiv, ez a nehézség nem fog fölmerülni. Ámde ezeket a fejtegetéseket igen sokfelől megtámadták; az ellenfelek elméleti és kisérleti úton be akarták bizonyítani, hogy az E. NEUMANN-től felállított és HELMHOLTZ-tól kibővített alaptörvénye az elektrodynamikus jelenségeknek a kisérleti tapasztalatokkal nem egyeztethető össze. Tényleg van különbség az E. NEUMANN-tól zárt áramokra vonatkozólag felállított potentialtörvény, ha nem zárt áramok esetére alkalmazásba jő és az inductio törvényének ama formája között, melyet ő már régebben levezetett volt, amennyiben a potentialtörvény csakis a vezetőkben áramló elektromosságnak tulajdonít elektrodynamikus hatásokat és távolba hatásokat, nem

pedig az elektromosan töltött testek mozgása révén mozgó elektromosságnak, holott a kisérletek azt bizonyítják, hogy ez a feltevés a tényekkel ellentmondásban áll.

Csodálatosan éles eszével HELMHOLTZ előre átlátta, hogy mindezen kérdésekben csakis a nem zárt áramokkal teendő, nem éppen könnyű kisérletek fognak dönthetni, bár nem előre gyaníthatta, hogy ez a kérdés voltaképen abban fogja megoldását találni, hogy nem zárt áramok egyáltalában nincsenek, a mennyiben magában a szigetelőben, mely az áram vezetékét megszakítja, az elektromosság megosztást szenved, s ezzel az elektromosságnak látszólag megszakított mozgása zárttá válik.

FARADAY, ki a távolbaható erők hypothesisével nem tudott megbarátkozni, mert elképzelhetetlennek tartotta, hogy két, egymástól egészen elkülönített test között bármiféle hatás lehetséges legyen, a nélkül, hogy a közbeeső közegekben valamilyen változás történnék, mindenekelőtt az elektromos és mágneses testek közé eső mediumokban keresett ilyen változásokat. És tényleg sikerült is neki jóformán az összes testekben mágnességet vagy diamágnességet találnia, úgyszintén a szigetelő testekben az elektromos erők hatása alatt változásokat észrevennie, melyeket ő a szigetelők polarisatiójának nevezett el. Ha már most FARADAY és MAXWELL szerint, a ki ezeket a hypothesiseket mathematikai alakba öntötte, felteszszük azt, hogy a szigetelőkben is támadhatnak elektrodynamikus hatású elektromos mozgások, melyek folytán a szigetelők dielektromosan polarisáltatnak, úgy a teljes elmélet a potentialtörvénynek módosításából fog kiadódni.

Részben régibb keletűek, részben pedig az itt említett, az elektrodynamikára nézve nagy fontosságú dolgozatokkal egy időből valók azok a vizsgálatok, melyek az elektromos áramoknak a vezető anyagból álló testekben való eloszlásának törvényeire s az elektromos határrétegekre vonatkoznak. Ezekben az egy felületnek elektromossággal való beborításáról szóló ismeretes theorema az elektromótoros erőkre vonatkozólag oly értelemben bővíttetik ki, hogy valamely vezető felületén mindenkor megadható az elektromindító erőknek olyan eloszlása, mely minden más hozzáillesztett vezetőben ugyanazokat az elvezetett áramokat adná, mint a vezető belsejében tetszólegesen elosztott elektromindító erők; és kimutatja továbbá azt is, hogy az eddigi feltevés, mely szerint az elektromosság, ha egy vagy több testen egyensúlyba helyezkedik, a testek belsejét teljesen elhagyja és csakis a felületükön alkot végtelen vékony réteget, csak addig engedhető meg, a míg oly vezetőnek egyszerű határfelületével van dolgunk, mely a szomszédos vezetőket vagy szigetelőket érinti, a nélkül, hogy a potentialfüggvény értékében ugrás volna; az olyan esetekben ellenben, a mikor két test határfelületén a potentialfüggvény értékében ugrás van, ha tehát két vezető a köztük működő galvanikus erőnek hatása alatt érint-

kezik, a határfelület mentén kettős elektromos réteg képződik; HELMHOLTZ kifejti ennek a jelentőségét azon jelenségek szempontjából, melyek nedvesítő folyadékoknak szilárd fal mentén való folyásakor bekövetkeznek.

Közben azonban MAXWELL nézetei, ki — mint már említettük — FARADAY-hoz csatlakozva a távolbahatást a közbeeső médium hatásával helyettesítette, döntő hatásuakká lettek HELMHOLTZ dolgozataira; az 1881-ben «Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte» cím alatt megjelent vizsgálatában bebizonyítja, hogy mellőzve minden hypothesist a mágnesileg vagy elektromosan polarisált testek belsejére vonatkozólag, lehetséges azokat a tömegmozdító (ponderomotorikus) erőket megtalálni, melyek az ilyen testek belső részeire hatnak. A kérdés analytikai tárgyalása oly kifejezésekhez juttatja, melyekből a távolbaható erők teljesen eltűnnek és a polarisált közegnek reactiójával vannak helyettesítve; s ezzel a FARADAY-MAXWELL-féle nézetekhez jutott, a kik az æthert a súlyos anyagoktól üres térben is feszültségeket tovaszármaztató közegként tekintik s a vezetőkben végbemenő elektromos mozgásokban nem látnak egyebet, mint a szigetelők polarisatiójának keletkezését és megszünését. Még szorosabban csatlakozik HELMHOLTZ ezekhez a nézetekhez az 1882-ben megjelent «Ueber absolute Maassysteme für elektrische und magnetische Grössen« dolgozatában; ebben a FARADAY-MAXWELL-féle elméletet egész határozottan minden olyan elektrodynamikus elmélet fölé emeli, mely közvetetlen távolbahatást föltételez, mely hatásnak iránya és nagysága két-két elektromos mennyiségnek absolut vagy relativ mozgásától függ, mert ez az elmélet sem az energia végességének és állandóságának elvébe, sem pedig a hatás és visszahatás egyenlőségének elvébe nem ütközik — és hogy az elméletet csak a conservativ folyamatokra felépítse — eleinte kizárja azokat a jelenségeket, melyekben — úgy mint a surlódásnál — hő fejlődik, és elektromos vagy mágnesi energia eltűnik.

Ez a dolgozat, a melyben őt a FARADAY-tól talált tények arra a kérdésre csábitják, vajjon egyáltalában léteznek-e a távolbaható erők s kell-e őket figyelembe venni, már utal a gondolatoknak azon az egészen új lánczolatára, mely a csakhamar következő, a mechanika alapelveire nézve oly nagy jelentőségű felfedezéseit benne már előkészítette. Ámde előbb a legkülömbözőbb részletek további átkutatása volt szükséges, hogy a mechanika alapelveinek tárgyalása legyen kifejthető, mely aztán a természet összes jelenségeinek törvényeit magában foglalja s azért is HELMHOLTZ 1882-ben «Ueber die Thermodynamik chemischer Vorgänge» czímű értekezésében az elméleti chemia felé fordul, a midőn a mechanikai hőelmélet alaptételeit a chemiai folyamatokra alkalmazza és máris határozottan engedi

felismerni a mechanikai alapelvek általánosított felfogását, mely itt még teljesen physikai mezben jelenik meg.

Minthogy a surlódásnál elvesző mechanikai energiából hő keletkezik, és a mechanikai energia gyarapodása hőveszteséggel jár; minthogy továbbá az elveszett és nyert energiának a mennyisége arányos a nyert, ill. elveszett hő mennyiségével, a hő az energia egy nemének volt tekinthető, mi aztán ahhoz a feltevéshez vezetett, hogy a meleg test minden egyes részecskéje állandóan és pedig folyvást változó irányban mozog, oly gyorsan, hogy a testben elfoglalt helye csak kevéssé, vagy egyáltalában nem változik. De ha tényleg így áll a dolog, akkor a meleg test energiájának egy része szükségképen a kinetikai energia alakjával bír, és így az energia, minthogy annak minden faja hővé alakítható át, hő alakjában lesz mérhető. Ámde az energia megmaradásának elve nem nyújt felvilágosítást arra nézve, vajjon a munka határ nélkül alakítható-e át hővé és ez utóbbi határ nélkül munkává, és hogy mint áll a dolog a többi tömérdek természeti erő esetében. Mindenekelőtt erre a gyakorlati és elméleti tekintetben egyaránt fontos pontra fordította figyelmét Helmholtz, midőn megvizsgálja, hogy a galvánelemekben végbemenő chemiai folyamatokból fejlődő hőnek hányadrésze adódik vissza áram munkája alakjában, és különböző rangfokozatokba rendezi az energia formáit, a szerint, a mint többé vagy kevésbbé tökéletesen alakíthatók át mechanikai munkává. A chemiai folyamatok munkaértékére vonatkozó eddigi vizsgálatok jóformán kizárólag csakis a vegyületek keletkezése és oldása közben fejlődő vagy eltünő hőmennyiségekre vonatkoztak, holott a legtöbb chemiai átalakulás a testek halmazállapotának és sürüségének változásával jár, és ez utóbbiak is vagy hő, vagy pedig másféle munka alakjában energiát fogyasztanak. Minthogy pedig a legtöbb chemiai folyamat közben az olvadás, párolgás vagy más ilyenféle változás révén a környezettel hőkicserélődés megy végbe, úgy az ezeknek megfelelő munkaegyenérték után is kell fürkészni; és ha továbbá még azt is meggondoljuk, hogy a chemiai erők nemcsak hőt, hanem az energiának más fajait is létrehozhatják, anélkül hogy a hatásban résztvevő testek hőmérsékletében a teljesítmény nagyságának megfelelő változásnak kellene mutatkoznia, szükségesnek látszik, hogy a chemiai folyamatok esetében is meg kell különböztetni a vegyrokonsági erők azon részét, mely a munka más formáivá szabadon átváltozhat attól, mely csakis hővé alakulhat át. Az energiának ezt a két részét Helmholtz szabad és kötött energiának nevével jelöli meg és azt találja, hogy a rendszernek nyugvó állapotában, állandóan egyenletesen tartott hőmérséklet mellett önmaguktól meginduló és külső munkaerő segítsége nélkül továbbhaladó chemiai folyamatok csak oly irányban mehetnek végbe, hogy a szabad energia fogyjon, hogy tehát — feltéve, hogy a mechanikai hőelmélet

tételei korlátlanul érvényesek — a szabad energiának értékei döntenek a felett, hogy mely irányban léphet működésbe a chemiai rokonság, a minél ennek kiszámítása szabály szerint csakis az olyan változásoknál eszközölhető, a melyek a thermodynamika értelmében tökéletesen megfordíthatók. Az a kérdés, hogy a vízbontásnál keletkező gázok lappangó hőjének van-e, s ha van, mily körülmények között van hatása a galvánelemek elektromindító erejére, HELMHOLTZ-ot a szabad chemiai energia fogalmához vezeti; de hogy ezt a fogalmat értékesíthesse, mindenekelőtt a thermodynamikai alaptételek analytikai átalakítására volt szüksége. A potentiális energia fogalmának eddigi alkalmazásában a hőmérsékletnek változása rendszerint nem vétetett tekintetbe, mert vagy az erők, a melyeknek munkaértéke számíttatott, a hőmérséklettől egyáltalában nem függenek, mint pl. a gravitatio; vagy pedig mivel a hőmérséklet a vizsgálat alá vont folyamatok közben állandónak, vagy bizonyos mechanikai változások függvényeként volt tekinthető, a mint pl. a hangterjedés a gáz sűrűségének függvénye gyanánt vehető. De ha pl. az utóbbi esetben a sűrűség függvénye ugyan a hőmérsékletnek, úgy mégis mindegyik potential értékében előforduló tetszőleges állandó minden egyes hőmérsékletre nézve külön meg volt határozandó és az egyik hőmérsékletről a másikra való átmenet nem volt eszközölhető.

HELMHOLTZ már most megmutatta, hogy a thermodynamikai egyenletek előállításához csakis a hőmérséklet függvényeként teljesen meghatározott u. n. *ergal*nak differentialhányadosai szükségek, mely mennyiség — t. i. az ergal — minden állandó hőmérséklet alatt végbemenő átalakulásoknál a potentiális energiának értékét adja, s a melyet ő szabad energiaként jelöl meg, úgy hogy ha az összes energia és az ergal közötti különbség kötött energiának neveztetik, ez utóbbit a hőfokkal osztván, a már előbb bevezetett entropiát nyerjük. Hogy aztán azt, a mit a mechanika eddig eleven erőnek vagy actualis energiának nevezett, világosan megkülömböztesse a hőnek munkaegyenértékeitől — a hőt szintén eleven erő, és pedig a molekulák láthatatlan mozgásának eleven ereje gyanánt fogva fel — az elsőt *rendezett mozgás eleven erejé*nek mondja, rendezett mozgás alatt olyat értvén, melynél a mozgó tömeg sebességi összetevői a térbeli coordinaták differentiálható függvényeinek vehetők; a *nem rendezett mozgás* ellenben olyan, a melynél minden egyes részecske mozgásának (mint pl. a hőbeli mozgásnál) nem kell hasonlónak lennie a szomszédok mozgásához, mely tehát a rendelkezésünkre álló aránylag durva segédeszközökkel a munkának más formájává szabadon át nem alakítható, úgy hogy HELMHOLTZ ez értelemben az entropiának a nagyságát a rendetlenség mértékeül veheti. Ezek a megkülömböztetések HELMHOLTZ további dolgozataira nézve alapvető fontosságuak. Ha már most az állandó entropia

mellett végbemenő állapotváltozás adiabatikusnak neveztetik, úgy az entropia az adiabatikus folyamatnál a szabad energia rovására keletkező hőre vonatkozólag capacitásnak tekinthető; minden olyan állapotváltozásnál, a mely alatt a hőfok állandó, munka csakis a szabad energia rovására végeztetik, a kötött pedig ez alatt a ki- vagy belépő hő rovására változik. Ezen eredmények összefoglalásából kitetszik, hogy minden külső munka a szabad energia rovására végeztetik, minden hőkiadás a kötött rovására, és végül minden hőmérsékletemelkedésnél a rendszerben a szabad energia adott mennyisége kötött energiába megy át és ebből HELMHOLTZ az energiának a vegyületek keletkezésével és bomlásával járó fejlesztésére és kötésére vonatkozólag oly eredményeket vezetett le, melyeket a galván elemeken tett megfigyelések megerősítenek.

Életének utolsó tíz évében, 1884—1894-ben, HELMHOLTZ a mechanikának alapelveire vonatkozó nagy dolgozataihoz fordul; ezekben értékesíti mindazokat az elméleti következtetéseket, a melyeket a physika és a physiologia minden részeire kiterjedő kutatásainak hosszú, fáradalmas útján összegyűjtött.

A mechanika principiumai, a D'ALEMBERT-féle elv, a súlypont mozgásának a törvénye, a felületek elve, az eleven erő megmaradásának elve és a legkisebb hatás elve mind a NEWTON-féle erők és szilárd kapcsolatok feltételezése mellett bebizonyíttattak. Ámde a megfigyelés később megmutatta azt, hogy az így leszármaztatott tételeknek a természetben jóval általánosabb érvényesség tulajdonítható, mint az a bizonyításból következett, s ez gyanítani engedte azt, hogy a NEWTON-féle conservativ vonzóerők bizonyos általános tulajdonságai az összes természeti erőket megilletik, másrészt azonban kétségessé vált, hogy pl. a hatás- és visszahatás egyenlőségének elve általánosan jogosult-e, s az olyan megfontolások, a minőkre rámutattunk, ahhoz a feltevéshez vezettek, hogy a távolbahatás egy láthatatlan mediumban folytonosan eloszlott dynamikus hatásoknak tulajdoníttassék, és így egy olyan hatásmód tételeztessék fel, a minőnek analogonját az erőnek rúgó, vagy pedig kötél révén való átvitelében látjuk. De mivel a physikának az a feladata, hogy a természet jelenségeit a mechanika egyszerű törvényeire visszavezesse, mindenekelőtt az a fontos kérdés támadt, hogy mi módon épül maga a mechanika a legegyszerűbben, és melyek — HERTZ szavai szerint — az ő végső és legegyszerűbb törvényei, melyeknek minden természetes mozgás hódol, mely kizár minden olyan mozgást, mely a mai tapasztalatunk álláspontjából tekintve a természetben nem fordulhat elő, és a melyekből, mint a mechanika tulajdonképeni principiumaiból — minden további hivatkozás nélkül a tapasztalatra — az egész mechanika tisztán deductiv úton kifejthető.

HELMHOLTZnak az energia megmaradására vonatkozó úttörő vizsgálatáig,

a mechanika, mint már kiemeltük volt, Galileinek a tömegek tétlenségére vonatkozó nézete s Newton három mozgási törvénye alapján fejlődött; ámde a mikor megkisérlették azt, hogy a mechanikának egész épületét ezen az alapon rendszeresen és szigorúan felépítsék, csakhamar észrevették, hogy a mechanikai fogalmak definitióban homályos pontok vannak, hogy a statika elemi törvényeinek — pl. az erő-parallelogramm tételének, a virtuális sebességek elvének stb. — bizonyítása nem szigorú, nem is említve azt, hogy a távolbaható erők, a molekuláris erők, a chemiai, a mágnes, az elektromos erők egészen kiesnek a közvetlen tapasztalat köréből.

Az energia megmaradásáról szóló elvnek megtalálása lehetővé tette az elméleti mechanika egységes felépítését; az erő fogalma háttérbe szorult, a tömeg és az energia pedig mint adott, megsemmisíthetetlen mennyiségek léptek fel. A létező energia két részből összetettnek mutatkozott, a melyek közől az egyik, a kinetikai energia, minden esetben teljesen egyformán függ a mozgó tömegek sebességeitől; a második, t. i. potentiális energia a tömegek viszonylagos helyzetével van meghatározva, de minden egyes esetben azok különös természetéből külön meghatározandó. Az energia különböző alakjainak, valamint azoknak a föltételeknek a vizsgálása, melyek között egyik formájából a másikba átmegy, az egész physika és chemia tartalmát kitöltötte. Hogy már most a jelenségek lefolyását az idő függvényeként megállapítsa, Helmholtz nem a mozgási egyenleteket veszi alapul, hogy a mechanika általános elveit belőlük levezesse, mint a hogyan eddig tették, mert e végből a ható erőkre s a probléma megszorító feltételeire nézve bizonyos feltevéseket kell tenni, melyek az alapelvekkel előtüntetett mozgásoknak nagy és sokat átölelő kategoriáit kirekesztenék; ellenkezőleg, az alapelvek egyikéből indul ki, s ez lehetővé teszi a lehetséges erők minden fajtája között a vonatkozások egész sorának a levezetését, melyek az előbbi föltételek mellett hianyoztak, holott a természetben megvannak. Ez az elv a *legkisebb hatás elve.*

Ez a tárgy tartalma azoknak a dolgozatoknak, melyeket Helmholtz «Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung» és «Zur Geschichte des Princips der kleinsten Action» czímek alatt 1886. és 1887. években közzétett, és a melyek Hertz véleménye szerint mostanában a physika legnagyobb haladását tüntetik elő.

Ha Leibnitz szerint a mozgó tömeg tétlenségéből folyó hatásnak quantitativ mértékét úgy definiáljuk, mint a tömeg, az úthossz és a sebesség szorzatát, vagy pedig mint az eleven erőből s az időből alkotott szorzatot: úgy a legkisebb hatás elve azt követeli, hogy az összes hatás adott kezdeti helyzetből adott véghelyzetbe való átmenetelre nézve határérték legyen, miközben a variatio az által jön létre, hogy a testrendszernek az átmenet-

közben elfoglalt egyes helyzeteinek coordinatáit, de ezzel egyidejűleg az időt is variáljuk, és pedig úgy, hogy a rendszer energiájának meglevő összege változást ne szenvedjen. Ez az utóbbi követelmény vagy akként teljesíthető, hogy megköveteljük, hogy az energiának csupán csak a nem variált mozgásban meglevő összege ne változzon, a nélkül, hogy ennek az összegnek nagysága elő volna írva, mely esetleg a normális mozgás folyamán egyébként változást szenvedhet — LAGRANGE és HAMILTON így tárgyalták a problemát —; vagy pedig ha megköveteltetik — a mint ezt JACOBI tette, a ki feltételezte, hogy a potentiális energia az időtől független — hogy az energiának összege egy megszabott értéket megtartson, mely esetben az a vonatkozás felhasználható arra, hogy az idő incrementuma a hatásból kiküszöböltessék. JACOBI megszorító feltétele egy teljesen ismert és magába zárt testrendszerre physikailag mindenkor érvényesnek vehető, míg a LAGRANGE-HAMILTON-féle alak a mozgási egyenletek letárgyalását a nem teljesen zárt rendszerekre nézve is megengedi, a melyekre változó, de a mozgó rendszer visszahatásától függetleneknek tekinthető, külső befolyások hatnak.

HAMILTON, megtartva a LAGRANGE-féle feltételeket, a legkisebb hatás elvének még egy más alakot is adott, a melyet HAMILTON-féle elvnek szokás nevezni; ha ugyanis a HAMILTON-féle alapfüggvényt mint a rendszer potentiális energiájának és eleven erejének különbségét definiáljuk, úgy a HAMILTON-féle elv azt mondja, hogy az alapfüggvénynek egyenlő időelemekre kiszámított negativ középértéke a véghelyzetek közötti normális mozgásnál határértékké válik.

De LAGRANGE, HAMILTON és JACOBI a MAUPERTUIS-től (1744) eredő, de tőle semmiképen meg nem okolt elvet eleinte csak a NEWTON-féle törvények physikai feltételezése mellett bizonyították be és leszármaztatták belőle egy anyagi rendszer pontjainak mozgását, mely rendszerre nézve megszorító feltétel gyanánt csak a pontjainak szilárd kapcsolata vétetett fel, és pedig avval a határozott kikötéssel, hogy az energia állandóságának elve érvényes. Miután azonban HELMHOLTZ azt találta, hogy az energia állandóságának elve általános érvényű, ez utóbbi kikötés már nem volt további megszorítás, ha csak a vizsgálat alá vett folyamatra nézve ismeretesek mindazok az alakok, a melyekben az energia egyenértékei fellépnek. Így most már csak az a kérdés volt még eldöntendő, vajjon másféle physikai folyamatok, a melyeket nem lehet egyszerűen a mérlegelhető tömegek mozgására és a NEWTON-féle törvényekre visszavezetni, de a melyekben energia-mennyiségek mégis érvényesülnek, szintén a legkisebb hatás elve alá vonhatók-e, vagy pedig nem.

A mint előbb a hőbeli erőket a közvetlenül észlelhető anyagok rejtett mozgásaira visszavezették, és amint MAXWELL az elektrodynamikus erők-

ben rejtett tömegek mozgásának a hatását felismerte, éppen úgy kívánta HELMHOLTZ az ilyen rejtett tömegek mozgását és energiáját a physikai problémák tárgyalásába általánosan bevezetni, mert a dolgok mögött rejtőző láthatatlan valamiben ismét csak tömeget és mozgást látott, a melyekről csupán csak a mi érzékeink korlátolt volta miatt nem birunk közvetlenül tudomást szerezni. És így az összes mozgás előállítására a HAMILTON-féle elvet választotta, mely megengedi, hogy arra a mechanikai rendszerre, melynek belső erői a rendszer látható coordinatáinak erőfüggvényéből képezett, az időtől független differentialhányadosaival előtüntethetők, még külső, az időtől függő erők is hassanak, melyeknek munkája külön kiszámítható, melyek tehát nem tartoznak a conservativ mozgató erőkhöz, hanem másféle physikai folyamatoktól függnek.

Minthogy pedig a mozgó rendszernek kifelé irányuló erői, mint már LAGRANGE megmutatta, az alapfüggvénynyel kifejezhetők, HELMHOLTZ *kinetikai potentiál*nak nevezi és ekként a legkisebb hatás elvével a minden egyes physikai jelenség lefolyására egyformán érvényes általános tulajdonságot mondatja ki, hogy a kinetikai potentiálnak egyenlő időközökre kiszámított negativ középértéke a rendszer tényleges mozgásának az útján minimum, vagy nagyobb úthosszakra nézve minden más szomszédos úttal összehasonlítva, mely egyenlő idő alatt vezet át a kezdeti helyzetből a véghelyzetbe, mindenesetre határérték. A kinetikai potential a nyugalom esetében a potentiális energia értékébe megy át, és ekkor a HAMILTON-elv azt mutatja, hogy az egyensúly esetére a potentiális energia minimum. A mérlegelhető anyagú rendszerekre nézve ismeretes volt már, hogy az esetben, ha egyes coordináták csak a differentiálhányadosaik révén jutnak az alapfüggvény értékébe, és ha a megfelelő erők zérussal egyenlők, a LAGRANGE-féle kifejezés a többi coordinatákon működő erőkre analytikailag, éppen úgy mint az általános esetben egy transformált alapfüggvény ugyanazon függvényeként tűnik elő, mely a coordináták deriváltjait nem úgy, mint előbb, csak a második dimensióban, hanem az elsőben tartalmazza, úgy tehát, hogy a kinetikai potentialnak olyan alakjai is jelentkezhetnek, a melyekben az energia két formájának különválása nem ismerhető fel, sőt inkább a kinetikai potential az általános coordináták és a megfelelő sebességek valamilyen függvénye lehet. Ez vezette HELMHOLTZ-ot arra a kérdésre, hogy milyen alakot szabad a potentialfüggvénynek felvennie, hogy a LAGRANGE-féle alak a külső erőkre nézve változatlan maradjon; s mindenekelőtt azt találta, hogy ez a követelmény teljesítve van, mihelyt ezt az alapfüggvényt a coordinatákból s az ezek irányában ható, az idő függvényeiként adott külső erőkből képezett szorzatok összegével nagyobbítjuk, minthogy az ilyen alakban kibővített minimum-tétel a variatio alatt az erőkre ismét a LAGRANGE-féle kifejezést adja.

A mozgási egyenletek LAGRANGE-tól eredő alakjának azt a fontos tulajdonságát, hogy azokra az esetekre is alkalmazható, a hol a mérlegelhető tömegek potentialis és actualis energiája mellett még a thermikus, az elektrodynamikus és elektromagnetikus munkaegyenértékek is tekintetbe jönnek, HELMHOLTZ már azzal bizonyította be, hogy a megfordítható hőfolyamatok törvényeit a LAGRANGE-féle mozgási egyenletek, tehát a kinetikai potential minimumtétele alakjában is kifejezte, mely azonban a hőfokot, mint a hőbeli mozgások intenzitásának mértékét nem csak quadratikus alakban tartalmazza, a hogyan a mérlegelhető rendszerek eleven ereje a sebességeket. Ha tehát a legkisebb hatás elvének hódoló rendszerek általános tulajdonságait ismerni akarjuk, úgy azt a feltevést, hogy a sebességek csakis az eleven erő értékében, és pedig másodfokú homogen függvény alakjában fordulnak elő, el kell ejteni és az elvet azzal a feltevésekkel kell fejtegetni, hogy az alapfüggvény a coordináták és a sebességek tetszőleges functiója. Ezekre az általános elmélkedésekre az indító okot a kinetikai potential amaz alakjának megvizsgálása adta HELMHOLTZ-nak, melyet MAXWELL elektrodynamikai elmélete megkövetel és a melyben az elektromosság sebességei egy másodfokú függvényben fordulnak elő, melynek együtthatói nem lesznek állandók, mint pl. a tömegek a mérlegelhető anyagú rendszerek eleven erejének értékében; azonkívül még a sebességek lineáris függvényei is hozzájárulnak, mihelyt permanens mágnesek lépnek működésbe.

Minthogy pedig lényegökben a fény jelenségei is megmagyarázhatók avval a hypothesissel, hogy az æther a rugalmas, szilárd, súlyos anyagokéhoz hasonló tulajdonságokkal felruházott közeg, és minthogy ezzel együtt a legkisebb hatás elve a fénymozgásra nézve is mindenesetre érvényesnek tekintendő, HELMHOLTZ a legkisebb hatás elvének érvényességi körét már most is messze a súlyos anyagok mechanikájának határán túl kiterjesztve látja és nagyon is valószínűnek tartja, hogy ez az összes megfordítható természeti folyamatok általános törvénye, a mi mellett azonban megfontolandó, hogy az irreversibilitás nem a dolog lényege, hanem azon segédeszközeinek korlátoltságán alapszik, melyek nem teszik nekünk lehetségessé azt, hogy rendezetlen atom-mozgásokat ismét rendezhessünk, hogy pl. az összes, hőmozgásban levő atómok mozgását pontosan visszafelé fordítsuk.

Ámde a legkisebb hatás elvének általános érvényessége lényeges segédeszközt szolgáltat arra, hogy a jelenségek új osztályainak a törvényeit formulázhassuk, a mennyiben az összes, ezekre a jelenségekre nézve lényeges feltételeket egyetlenegy mathematikai kifejezésben összefoglalja; a physikai folyamatok mindazon eseteit, a melyekben a kinetikai potential a sebességekben lineáris tagokat tartalmaz, HELMHOLTZ a rejtett mozgás-

eseteinek nevezi. Mindenekelőtt kimutatja, hogy a legkisebb hatás elve a fentebb adott általános alakban az energia állandóságának elvét mindenkor magában foglalja és a kinetikai potential értékéből az energia értékét kiszámítja; minthogy azonban megfordítva nem minden esetben érvényesül a legkisebb hatás elve, a mikor az energia állandósága még megvan, úgy a legkisebb hatás elve többet fejez ki, mint az energia állandóságának elve és a szemügyre vett természeti erőknek még valamilyen különleges tulajdonságait is fogja kifejezni, melyet az ő conservativ erő-jellegök még nem ad meg. A kinetikai potential értékének az energia értékéből való leszármaztatása önkényes mennyiségeket hoz be, melyek a sebességeknek első fokú homogen függvényei, és azért bír jelentőséggel, mert ha teljesen ismeretes az energia függése a coordinatáktól és a sebességektől, most már lehetségessé válik a kinetikai potentiált, és vele a rendszer mozgástörvényeit is megtalálni, és sikerül megtalálni a sebességre nézve lineáris tagokat, melyek a rejtett mozgásoknak felelnek meg.

Helmholtz, kifejtvén néhány általános kölcsönös vonatkozást a rendszernek egyidejűleg több irány felé ható erői, gyorsulásai és sebességei között, a melyek pl. azt a thermodynamikai törvényt szolgáltatják, hogy ha a hőmérséklet emelése valamennyi rendszer nyomását emeli, az összenyomás a hőmérséklet emelkedését vonja maga után — legalább korlátolt számú coordinatáról bebizonyítja, hogy megfordítva a legkisebb hatás elve is mindenkor érvényes, valahányszor az erők között ugyanezen kölcsönös vonatkozások fennállanak. Végül még a Hamilton-féle mozgási egyenleteknek teljes és részletes differentiálhányadosai vezettetnek le a kinetikai potential általánosított alakja részére s ebből ismét egy sorozata a következtetéseknek a rendszer megfordítható mozgásaira, vagyis olyan mozgásokra nézve, a melyekben a helyzeteknek azon sora, mely az előre tartó mozgásoknál befuttatott, a visszafelé tartó mozgásban ugyanaz marad, anélkül, hogy idegen erőknek kellene beavatkozniok és az egyenlő helyek minden párjára nézve az időköz szintén változatlan.

A legkisebb hatás elve Helmholtz-féle általánosításának további alkalmazásaira azonnal rátérünk, és csak azt kívánom megjegyezni, hogy Hertz ezt az elvet egy más, általánosan érvényes törvényre kívánja alapítani, mely minden rendszer mozgását közvetlenül leírja, és a mely azt mondja, hogy ha a rendszer összekötő kapcsolatai egy pillanatra megbonthatók lennének, akkor tömegei egyenes vonalú, egyenletes mozgásokkal szétszóródnának, de minthogy az ilyen felbomlás lehetetlen, ehhez a mozgáshoz, melyre mintegy törekednek, legalább olyan közel maradnak, a mennyire csak lehetséges.

A mozgások tulajdonságainak a legkisebb hatás elvéből való leszármaztatása nagy mathematikai és physikai nehézségekkel járt és «Studien zur

Statik monocyclischer Systeme» (1884), valamint «Principien der Statik monocyclischer Systeme» (1884) értekezéseiben lefektetett vizsgálataihoz vezette. Ezek a vizsgálatok a mechanikai és physikai problemák tárgyalása terén lényeges haladást jelentenek és BOLTZMANN kezei között az elméleti physikában dominálo helyzetre emelkedtek.

Ha a testek valamely rendszerében mozgás megy végbe, rendszerint megváltozik ezen testek helyzete, vagy még az állapota is; de hogy ez nem éppen szükséges, kiderül abból, hogy pl. ha drótokon keresztül hosszú időn keresztül teljesen állandó elektromos áram halad át, úgy ez esetben a közelben levő vastömegek helyzete, hőmérséklete, mágnesi állapota a tér minden egyes pontjában változatlan marad s ennélfogva annak a mozgásnak, melyben mi mindezen jelenségek szülő okát keressük, tökéletesen állandónak (stationär) kell lennie, oly módon, hogy valahányszor egy részecske helyét elhagyja, mindenkor elenyésző kicsi idő alatt egy másik, tökéletesen ugyanolyan alkotású részecskének kell ugyanakkora és megegyező irányú sebességgel a helyére lépnie, úgy, hogy bár a mozgás folytonos, a tér egyetlenegy pontjában sem vehető észre változás. HELMHOLTZ az ilyen mozgást, a minő pl. a forgó pörgettyűnek a mozgása, vagy surlódásmentes folyadéknak az áramlása gyűrűalakú csatornában, *cyclusos*nak nevezi; a cyclusos mozgások gyakran rejtett mozgások lesznek, mert ha csak ilyenek vannak jelen, a tömegeloszlásban változást észrevenni nem lehet; és megfordítva, a rejtett mozgások majdnem mindenkor cyclusos mozgások. Valamely coordinata akkor cyclusos, ha változása közben a rendszer egész állapota nem változik, ha tehát a benne rejlő eleven erő sem szenved változást, és ennélfogva nem függvénye ennek a coordinatának, hanem általában az ő differentialhányadosáé, minthogy az eleven erő általában annál nagyobbá lesz, mennél szaporább a cyclusos mozgás. A cyclusos coordinatákon kívül még másfélék is meghatározhatják a rendszer állapotát, melyeket HELMHOLTZ lassan változó coordinatáknak, vagy parametereknek nevez s a melyeknek oly lassan kell változniok, hogy idő szerint vett differentialhányadosaik elhanyagolhatók; tehát az eleven erő magában foglalja a parametereket, de differentialhányadosaikat nem. Ha a parameterek hosszabb időre állandóknak tekinthetők, úgy a mozgás ez alatt cyclusos lesz, és a rendszer a cyclusos coordináták száma szerint monocyclusos stb., általánosságban polycyclusos rendszernek neveztetik.

Cyclusos rendszer támadásának feltétele teljesítve lehet a megközelítés tetszőleges fokával, mihelyt a rendszernek egyáltalában vannak cyclusos coordinatái, ha az energiának ama részei, a melyek a parameterek változásának sebességeit tartalmazzák, elenyészők azon részekhez képest, a melyek a cyclusos intensitásoktól függnek; vagyis ha a parameterek változásának sebességei elegendő kicsinyeknek, vagy pedig a cyclusos coor-

dinatáké eléggé nagynak vehető. Valamely cyclusos rendszer erői a parameterek irányában a cyclusos rendszer feltevése folytán függetlenek ezen parameterek változásának a sebességétől, a mint ez a LAGRANGE-féle egyenletekből a kinetikai energia révén kiadódik, és épen úgy következik, hogy az esetben, ha a cyclusos rendszer cyclusos coordinatáira semmiféle erők nem hatnak, a rendszernek összes cyclusos, a tömegnek s a sebességnek szorzatával meghatározott momentumai az időben állandók, mely esetben a mozgás adiabatikusnak neveztetik. A HELMHOLTZ-tól jellemzett mozgások tehát lényegökben azzal vannak definiálva, hogy a rendszer potentialis és actualis energiájának függetlennek kell lennie a coordinaták bizonyos számától, melyek arra szükségesek, hogy a rendszer részeinek helyzete tökéletesen meghatároztassék, de ezek csakis az idő szerint vett differentialhányadosaikkal lépnek be az energia értékeibe, a mi még nem szigorúan maradó (stationarius) állapot esetében is bekövetkezik, ha a rendszer állapotában a változásokat oly lassan engedjük végbebenni, hogy a rendszer sohasem mozdul ki észrevehetőleg azokból az állapotokból, a melyekben állandóan kitarthatna. Így a hőmozgás szigorúan véve nem monocyclusos, mert minden atóm valószínűleg folyvást változtatja mozgása módját, és a monocyclusos mozgás mechanikai jellege csakis abból eredhet, hogy az atómok rengeteg sokaságában állandóan a mozgásnak minden lehető stadiuma képviselve van.

HELMHOLTZ már most azt a kérdést veti fel, hogy milyen legáltalánosabb feltételek alatt fordulhatnak elő a mozgások más ismeretes osztályaiban a hőbeli mozgás ismeretes physikai sajátszerűségei, és különösen, hogy lehet-e a mechanikailag megérthető mozgások olyan osztályát felmutatni, a melyben a munkaegyenértékek átalakulása ugyanolyan megszorító feltételeknek lenne alávetve, mint a minők a hőelmélet második főtételénél előfordulnak. A monocyclusos rendszer definitióját akként kibővítve, hogy csak egyetlenegy cyclicus coordinata fordul elő benne, vagy ha több van, akkor valamennyi egyetlenegy másféle mennyiségnek függvényei, mindenekelőtt kiemeli azt a különösen fontos és érdekes esetet, a melyben két monocyclusos rendszer között a végből, hogy a sebességek között szilárd viszonyok létesíttessenek, bizonyos mechanikai kapcsolatok vezettetnek be, a melyeknek semmi befolyásuk nincsen mindaddig, míg a mozgás már magában is úgy megy végbe, a mint az nekik megfelel, de hogy mihelyt eltérések kezdenének támadni, oly erőket állítsanak velők szemben, melyek az eltéréseket meggátolják. HELMHOLTZ az így keletkező rendszert, a minőt pl. két pörgetyű alkot, melyek tengelyei úgy vannak összekötve, hogy megegyező fordulati sebességekre kényszeríttessenek, *összecsatolt rendszer*nek, az állapotot pedig a rendszer *csatolás*ának nevezi és ebben látja az egyetlen eszközt arra, hogy adott monocyclusos rendszer belső mozgá-

sára hatni lehessen, a mint az atómok hőbeli mozgásánál a rendelkezésünkre álló módszerek korlátoltságánál fogva szintén nincsen más lehetőségünk arra, hogy egyes elszigetelt atómokra külön tudjunk hatni, hanem szükségképen valamennyi, közös térbe zárt atómot egyszerre, együttesen és egyformán kell megtámadnunk. Ha már most két, eredetileg egymástól független monocyclusos rendszer a külső erők megfelelő szabályozása révén olyan állapotba helyeztetik, mely a szilárd kapcsolat bizonyos fajával járó feltételeknek van alávetve, úgy ilyen szilárd kapcsolatot tényleg létesíthetünk közöttük, a nélkül, hogy ezzel a meglévő mozgást megzavarnók, s ezentúl — a szilárd kapcsolatot tovább is fentartva — tovább engedhetjük őket mozogni, úgy a mint pl. két egyenlő hőmérsékleten levő test belső mozgásuk megzavarása nélkül vezető érintkezésbe helyezhető, úgy hogy eléggé lassú hőmérsékleti változások alatt egyazon hőmérsékleten maradnak, a mi még nem zárja ki azt, hogy a két rendszer abban a helyzetben, melybe csatolás czéljából hozattak, nyomás, vagy pedig távolba ható erők révén egymásra hassanak.

A hőelméletbeliekkel egészen analog mathematikai elmélkedések segítségével most már egész általánosan megmutatja Helmholtz, hogy ha a monocyclusos rendszerek csakis olyanféle kapcsolatokat engednek meg egymásközt, hogy minden egyes rendszer külső erői csakis a rendszer pillanatnyi állapotától, nem pedig a más rendszerekkel kezdődő vagy megszünő kapcsolatoktól függenek, hogy tehát a csatolás tiszta mozgásbeli csatolás és új monocyclusos rendszert nemz ; ha továbbá attól a pillanattól, a melyben a belső mozgások kicserélődésének feltételei két vagy több rendszer között bekövetkeznek, belső mozgásaik egyensúlya attól függ, hogy mindegyikök parametereinek határozott függvénye — a hőtanban a hőmérséklet — ugyanazon értékű, mint a másik rendszer megfelelő függvényeié, akkor a hőnek harmadik, Carnot-féle törvényben kifejezett lényeges tulajdonsága, t. i. a korlátolt átalakuló képesség is érvényes reájuk.

Helmholtz-nak a legkisebb hatás elvével, valamint a monocyclusos rendszerekkel foglalkozó s a mechanika alapelveire vonatkozólag alapvető ezen vizsgálataihoz, részben kiegészítőleg, részben helyreigazítólag három utolsó dolgozata sorakozik, melyek már egészen a Faraday, Maxwell és Hertz alkotta nézetek alapjára helyezkednek, a melyek szerint az elektromos oscillatiók a világteret betöltő ætherben végbemenő fény- és hőrezgésekkel terjedés sebességökben, transversalis rezgés természetökben s az ezzel összefüggő polarizálhatóságban, a törés és visszaverődésben teljesen megegyeznek, és hogy a látszólagos távolba ható erők a hatásnak a közbeeső medium egyik rétegéről [a rákövetkezőre való átvitele révén terjednek tova.

«Das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik» (1892) című dolgozatában HELMHOLTZ azt vizsgálja, vajjon az elektrodynamikának tapasztalati úton talált tételei, a mint azok MAXWELL egyenleteiben ki vannak fejezve, nem hozhatók-e minimum-tétel alakjába; megfontolások alapján, a minőket előbb megbeszéltünk, kiadódott, hogy az általánosított HAMILTON-féle elvből a tömegmozdító erők a MAXWELL-féle elmélettel tökéletesen megegyezőleg leszármaztathatók, mi közben az energia két részből tevődik össze, melyek egymással szemben ugyanazt a szerepet játszszák, mint a mérlegelhető tömegekre vonatkozó problemákban a potentiális és az actuális energia; az elektromos energia itt a nyugvó tömegek potentiális energiájaként jelenik meg — a mennyiben momentumok nem változnak, vagy elektromos áramok nem hatnak közre — a mágnesi energia pedig mint eleven erő.

Most aztán a fény elektromágnesi elméletébe mélyed, és kiindulva abból, a hogy a fény dispersiója mindig csak olyan terek határán jelentkezik, a melyeket az ætheren kívül még mérlegelhető anyagot is tartalmaznak, egy 1892. évben megjelent dolgozatában a színszórást ezen elmélet segítségével, és pedig tekintettel az ætherbe beágyazott tömegekre törekszik megmagyarázni. Ám MAXWELL mathematikai elmélete bebizonyítja, hogy az æther azon részeiben, a melyeken elektromos oscillatiók vonulnak át, ponderomótoros erőknek is kell működésbe lépniök, mely erők nehéz atómokat, a melyek az ætherben fekszenek, mozgásba hozhatnának; HELMHOLTZ megmutatja, hogy akkor a mérlegelhető részecskéknek valóságos elektromos töltéseket is kell tartalmazniok, úgy, hogy a képezendő mozgási egyenletekben az elektromos momentumok (melyeket eme tartók valódi elektromosságai létrehoznának, minthogy változó nagyságúak és irányúak, és nem elektromos erők, tétlenség, surlódás, stb. is megtámadhatják) külön választandók a szabad æther momentumaiból, és a hullámzó mozgás külön megvizsgálandó a szabad ætherre s külön a mozogható molekulákkal telt térben, a miből aztán a színszórás törvényei is kipuhatolhatók.

Nagy érdekűek végül az ő általános következtetései MAXWELL-nek a tiszta æther mozgására vonatkozó elméletéből*, mely az æthernek mozgékonyságot tulajdonít s a mérlegelhető anyagtól áthatoltnak képzeli, mely vele együtt mozog; az ilyen keveredések tényleg minden anyagban előfordulnak, mely a vacuummal szemben vagy vezető, vagy pedig fénytörő, avagy dielektrikus és magnetikus állandóknak a vacuuméitől eltérő értékével bír, és a mérlegelhető részek mozgásából az æthernek velök

* Folgerungen aus MAXWELL's Theorie über die Bewegungen des reinen Aethers (1893).

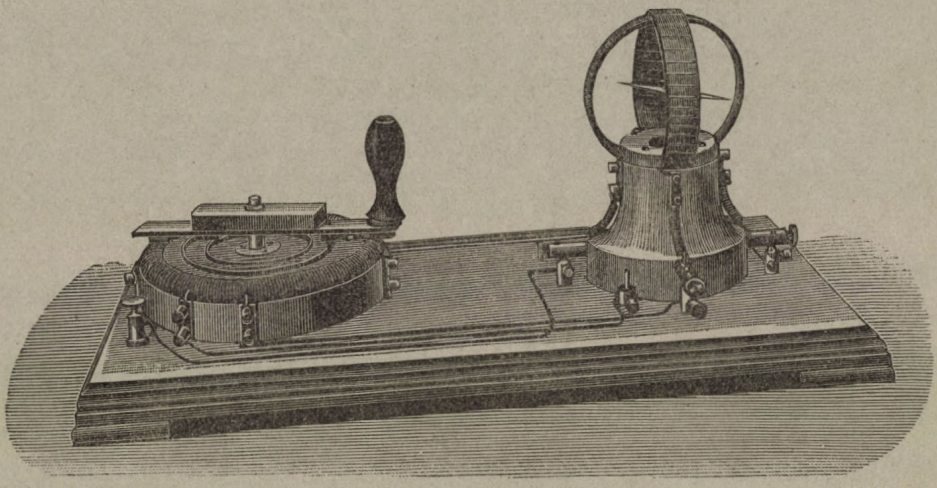
egyező mozgásaira lehet következtetni. Ha azonban a terekben mérlegelhető anyagok nincsenek és csakis ætherrel vannak megtöltve, úgy az a kérdés támad, vajjon a szabad æther teljesen tétlenségmentes állapotban egyáltalában létezhetik-e, vajjon ki kell-e térnie a benne tovamozduló testek előtt, vagy hogy keresztül hatol-e rajtok s e közben nyugalomban marad, vagy pedig hogy részben velük mozog s részben kitér előlük. Ama feltevés mellett, hogy az æther mechanikai szempontból surlódásmentes, összenyomhatatlan folyadék tulajdonságaival van felruházva, de e mellett tétlensége egyáltalában nincsen, Helmholtz azt találja, hogy a Maxwell-től felállított, Hertz-től pedig kiegészített törvények tényleg alkalmasak arra, hogy az ætherben végbemenő változásokról és mozgásokról teljes felvilágosítást adjanak, és pedig úgy, hogy az elektrodynamika törvényeinek a legkisebb hatás elve alá való összefoglalásához, úgy mint Helmholtz már előbb megadta volt, már csak az összenyomhatatlanság hypothesisének bevezetésére van még szükség, a mi úgy történhetik, hogy az elektrokinetikai potentiál az összenyomhatatlanság meghatározó egyenletének bal oldalával kiegészíttetik, a miből aztán a nyugvó és a mozgó ætherben támadó és elmuló ponderomótoros erőkre fontos következtetések vonhatók.

A befejezetlen «Nachtrag zu dem Aufsatze: Ueber das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik» (1894) czímű értekezésben Helmholtz még egyszer visszatér a Maxwell-Hertz-féle elektrodynamikai törvényeknek a legkisebb hatás elvének általánosított alakja alá való összefoglalására, hogy eldöntse, vajjon az elektromágnesi folyamatok összes energiájának ismeretes értéke megköveteli-e még egy, a sebességekre nézve lineáris függvénynek hozzáadását, és ha igen, a ponderomótoros erőknek ezen elvből áttekinthető alakban való leszármaztatását veszi tervbe.

S ezzel véget ér a felülmulhatatlan kutató fényes mathematikai és mathematikai-physikai dolgozatainak hosszú sorozata, a mely dolgozatok tartalmáról és jelentőségéről, a mennyire ez az ő mathematikai analysisének finomságaiba való mélyebb behatolás nélkül egyáltalában lehetséges, képet adni törekedtem. Megengedem, hogy a kép tökéletlen. Hogy mi lett volna az 1895-iki bécsi Naturforscher-Versammlung alkalmára «Ueber dauernde Bewegungsformen und scheinbare Substanzen» czímen hirdetett előadásának a tartalma, melyből a tudós hagyatékában mindössze néhány irott oldalt találtak, minden időre rejtve marad előttünk; de bizonyára nem alap nélkül gyanítani lehet, hogy azoknak a nagy kutatásoknak philosophiai magvát fejtette volna ki a természettudományi világ előtt, melyeket életének utolsó éveiben a mechanika és a physika alapjainak és elveinek felderítése czéljából végzett.

Ford. *B.*

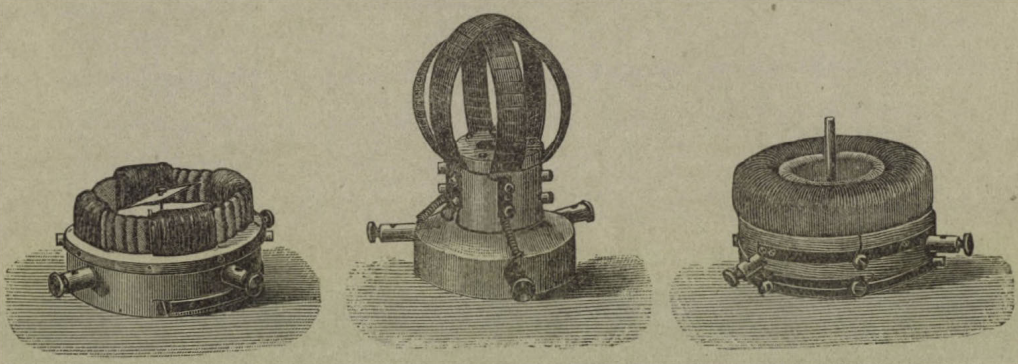
A M. Kir. Horthy Miklós-Tudományegyetem KÖNYVTÁRA SZEGED
FOLYÓIRAT
25/26 251
EGYETEMI KÖNYVTÁR SZEGED
KOLOZSVÁRI M. KIR. EGYETEM KÖNYVTÁRA



WEINHOLD-féle készülék

FORGÓ MÁGNESES TÉR ELŐÁLLITÁSÁRA.

A II. kötet 275. stb. oldalain ismertetett készülékeket (3., 8., 9. és 11. ábra) minden hozzávaló mellékkészülékkel teljesen felszerelve igen ajánlhatjuk a t. cz. tanár urak becses figyelmébe.



A teljes készülék ára legfinomabb kivitelben **60 forint** *loco Budapest. A készülék egyes részei külön is kaphatók méltányos árakon.*

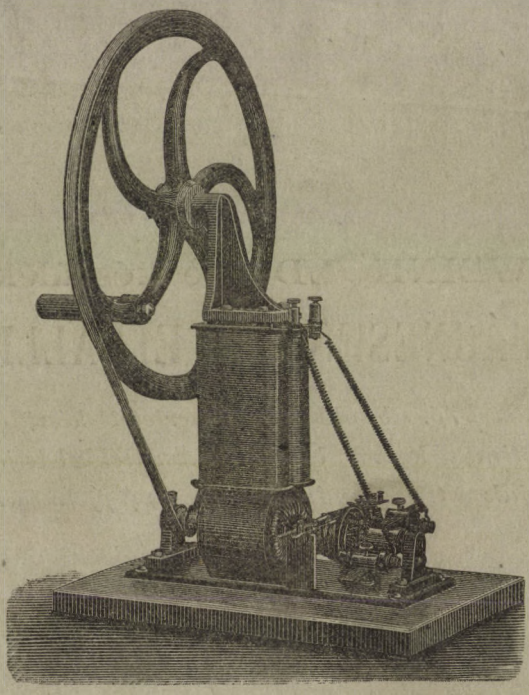
CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

DINAMO-ELEKTROMOS GÉP

Gramme-féle gyűrűvel ellátva

egyirányú, váltakozó és forgató (több fázisú) áram előállítására.

Az áram erőssége 4 Ampère, feszültsége 30 Volt.



Ezen géppel egyidejűleg meg lehet világítani például 3 izzólámpát egyirányú és 2—3—4 izzólámpát váltakozó vagy több fázisú forgató árammal. Használható egyenáramú, váltakozó áramú és több fázisú generátor vagy mótorként Szerkezete e lapok II. köt. V. füzetében ismertetve van.

A gép kizárólagosan iskolai czélokra készült és pedig nem csak a dynamogép stb. bemutatására, hanem mint állandó s erős villamos forrás; kézzel igen könnyen hajtható és árama minden iskolai kisérlethez teljesen elegendő.

Részletes utasitás minden géphez mellékeltetik.

A gép ára 100 forint.

CALDERONI és Társa, Budapest, IV, kis hid-utcza 8. szám.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.