MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

HUSZONHETEDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és MIKOLA SÁNDOR

BUDAPEST 1918

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HUSZONHETEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első—Második füzet.

Harmadik—Ötödik füzet.

Hatodik—Hetedik füzet.

(Báró Eötvös Loránd füzet.)

Nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ

A HUSZONHETEDIK KÖTETHEZ.

Önálló és ismertető czikkek.

Physikai Laboratorium.

Társulati ügyek. Tanulóversenyek, stb.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három ívnyi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K
A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai a folyóiratot tagsági díjuk fejében kapják.

27. évfolyam. 1918. jan.—febr. 1—2. füzet.

A KOHERER MŰKÖDÉSE.[1]

Mindnyájunk emlékezetében van még az a nagy érdeklődés, melylyel az egész kulturális világ a drótnélküli telegráfozás nagy sikeréről szóló londoni híreket fogadta. Marconi találmányának nagy sikere különösen abban leli magyarázatát, hogy Angolországban és Amerikában éveken át folytattak meddő kisérleteket drótnélküli táviratozással oly czélból, hogy a parttól néhány kilométernyire lévő világítóhajók vagy tornyok és a part között viharos időben is megbizható távirati közlekedést biztositsanak.

Mikor Marconi találmányának közhírré tétele után a drótnélküli telegráfozás csakhamar igen nagy távolságokra sikerült, a kutatók érdeklődése a jelfogó állomás legérzékenyebb eszköze, a koherer felé fordult.

A koherer, Lodge-tól használt formájában, üvegcsőbe zárt két rézelektród közé hintett fémreszelékből áll. Ennek a lazán összefüggő fémforgácsokból álló és kellően beállított anyagi rendszernek igen nagy ellenállása elekromos hullámok hatása alatt lesülyed néhány *ohm*-ra.

Titokzatos működése többféle módon magyarázható s minden egyes magyarázatnak van bizonyos valószínűsége, mert megfigyelt tüneményeken alapszik. Azonban közvetetlenül a kohererrel nem végeztek olyan kisérleteket, a melyek eldöntötték

[1] Ez az értekezés az 1898—1907 időközben végezett és a czímben foglalt tárgyra vonatkozó kisérleteimet tartalmazza.

volna, hogy a magyarázatok közül melyik felel meg legjobban a valóságnak.

Még Lodge kisérletezésének és a drótnélküli távírás feltalálásának idejéből származnak a koherer működésére vonatkozó következő magyarázatok.

1. Az elektromos hullámok vezetővé teszik a médiumot, melyben a reszelék van.

2. Az elektromos hullámok behatása folytán a forgácsok akár elektromos, akár mágneses állapotuk révén irányíttatnak.

3. Az elektromos hullámok a forgácsok között szikrákat létesítenek, melyek az egyes forgácsokról anyagszemeket tépnek le és löknek át a szemben lévő forgácsokra. Az anyagszemek összeforradása által a forgácsok között áthidalások keletkeznek.

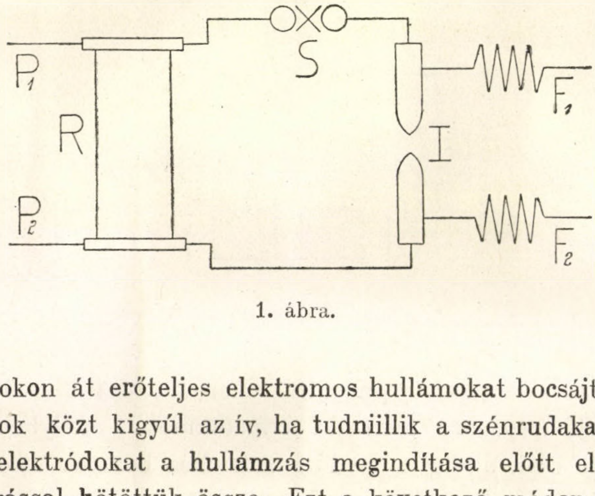
4. Az egymással összefüggő forgácsok érintkező élein a nagy ellenállás következtében nagy az áram hőhatása. A nagy hő összeforrasztja a forgácsokat.

5. Az elektromos hullámok az adott elektromos töltések révén deformálják a forgácsokat, miáltal az érintkezés bensőbb lesz és az ellenállás csökken.

I. Az első magyarázat az elektromos ív keletkezése módját veszi alapul. Ha ugyanis valamely elég erős árramforrással összekötött két szén- vagy fémelektródot összeérintünk s az érintkezés után kissé széthúzunk, a két elektród között elektromos ív keletkezik. Mérésekből tudjuk, hogy a használatban levő ívlámpáknál a két szénrúd között keletkezett ívnek ellenállása négy-öt *ohm*. Míg tehát az érintkezés előtt a levegő nagy ellenállása miatt az elektródok egy-két mm távolsága mellett sem keletkezett elektromos kiegyenlítődés, addig az érintkezés pillanatában megindult áramlás az érintkezés megszüntetése után is fönnmarad. Az elektromos kisülés vezetővé tette az elektródokat szétválasztó médiumot.

Warren de la Rue 1000 elemből álló telepének sarkaiba légritkított csövet kapcsolt, melynek két elektródját összekötötte egy kondenzátor két fegyverzetével. Valahányszor a kondenzátort bekapcsolta, mindannyiszor rétegződött a fény a csőben, jeléül annak, hogy a kondenzátor nagy frekvencziájú kisülései áthatoltak a csövön. DUDDELT ebből az érdekes megfigyelésből kiindulva, kondenzátort és önindukcziót kapcsolt az ívlámpa két elektródjához s az ív zúgásából megállapította, hogy a kondenzátor kisülései átjárják az ívet. Az ív tehát elektromos hullámzásoknak jó vezetője, még pedig nemcsak kis, hanem — mint azt POULSEN kisérleteiből tudjuk — nagy frekvencziájú hullámok számára egyaránt.

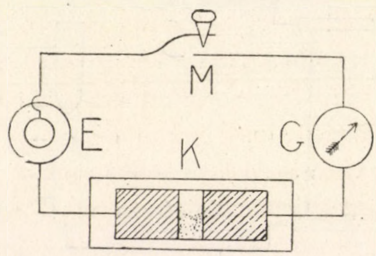
De nemcsak egyirányú áramlások, hanem gyorsan váltakozó hullámzások is vezetővé teszik a médiumot. Ha ugyanis egymástól 2—3 mm-nyire elálló széncsúcsokon vagy más anyagú



1. ábra.

elektródokon át erőteljes elektromos hullámokat bocsájtunk, az elektródok közt kigyúl az ív, ha tudniillik a szénrudakat, illetőleg az elektródokat a hullámzás megindítása előtt elég erős áramforrással kötöttük össze. Ezt a következő módon demonstrálhatjuk.

Az R induktor (1. ábra) primer áramkörébe (P_1P_2) iktassunk áramforrást és interruptort. Az ábrában az áramforrás és a megszakító nincsen feltüntetve. Szekunder áramkörébe pedig iktassunk zinkelektródokkal ellátott szikraközt (S) és ívlámpát (I). Az ívlámpa 110 *volt*-os áramforrással van összekötve, melybe ellenállás és két fojtó orsó (F_1F_2) van kapcsolva. Az ábrában a fojtó orsók mögött az ellenállás nincs feltüntetve. Az áramfékezőt úgy állítjuk, hogy két-három mm hosszúságú fényív mellett az áram intenzitása 10—12 *amper* legyen. A kis ellenállású és tetemes önindukczióval biró fojtó orsók a nagy frekvencziájú szikra-áramot nem bocsátják át magukon, hanem az ívlámpa felé terelik. Ha az interruptoron keresztül az áramot zárjuk, a szikraközben, továbbá az ívlámpának egymástól 2—3 mm-nyire álló széncsúcsai között élénk szikrázás támad s nyomban rá kigyúl az ív. De nemcsak levegőben vagy más gázban, hanem például vazelinolajban is sikerül szikrával ívet gyújtani, de csak kisebb közben és erős fojtó orsók alkalmazásával. Ha az ívet fönntartó áramot nem a szikrázás előtt vagy az alatt kapcsoljuk a lámpába, hanem utána, az ív nem gyúl ki.



2. ábra.

A kisülés — akár konvektiv, akár diszruptiv — általánosságban jó vezetővé teszi azt a médiumot, a melyben végbemegy, de csak addig, a meddig a kisülés tart.

Alkalmazzuk ezeket a megfigyeléseket a kohererjelenség magyarázatára. Kapcsoljuk a koherert (*K*) elemmel (*E*), megszakítóval (*M*) és galvanométerrel (*G*) egy áramkörbe (2. ábra). Az itt leírt kisérleteknél használt koherer 10 cm hosszú és 1 cm átmérőjű üvegcső, melybe 1 cm hosszúságú vörösrézhengerek vannak illesztve elektródok gyanánt. A rézhengerek oly pontosan illenek az üvegcsőbe, hogy az elektródok közt lévő sárgarézforgácsok nem juthatnak az elektródok mögé. A rézhengerekhez erősített 2 mm vastag és 10 cm hosszú vezetődrótok az üvegcső végébe szorított parafadugókon át jutnak a szabadba. Az elektródok rendes távolsága 1 cm és a közöttük fönnmaradó résben az üvegcső egyharmadáig hever a fémforgács.

A koherer megkopogtatásával rázzuk össze a forgácsokat nagy ellenállású vezetővé és zárjuk *M*-nél az áramkört. Ha elektromos hullámok érik a koherert, ez azonnal vezetővé válik s mint a galvanométer tűjének tartós kitérése mutatja, jó vezetőképességét a hullámok behatása után is megőrzi. Ezt a tulajdonságot az ív szikragyújtásával megmagyarázhatjuk és pedig a következő módon. Az elektromos hullámok a forgácsok között levő hézagokban kisüléseket létesítenek, melyek vezetővé teszik a médiumot és megindul az elemből a staczioner áramlás, a mely a vezetőképességet fönntartja. De a következő jelenségeket már nem lehet megmagyarázni a médium tulajdonságaival. Szakítsuk meg *M*-nél az áramkört egy-két percz multán zárjuk újra, a tű ismét kitér. A koherer tehát vezetőképességét még akkor is megtartotta, mikor a médium azt már elvesztette. Vagy tegyük ki a nagy ellenállású koherert előbb a hullámok hatásának és csak ezután zárjuk *M*-nél az áramkört. A koherer jó vezető lett és az is maradt pedig a staczioner áramlás meg sem indulhatott, mert hiszen az áramkör meg volt szakítva.

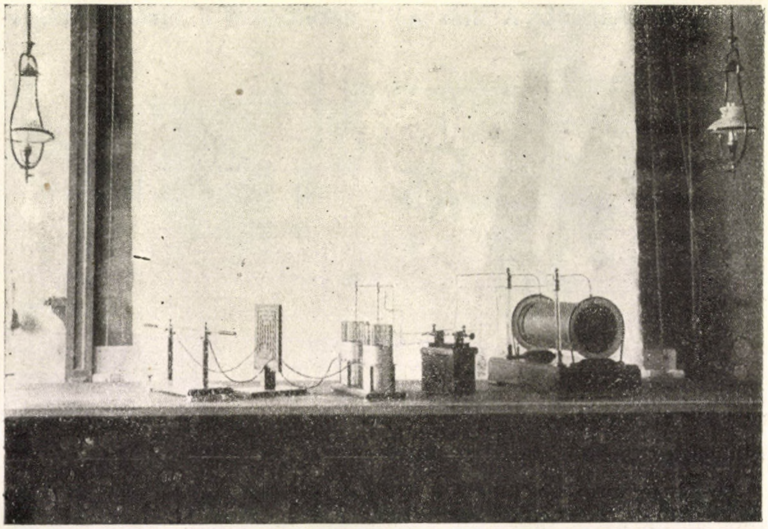
Ezeknek a megfigyeléseknek alapján mondhatjuk, hogy a koherer tartós vezetővé válásának nem a médium vezetőképességének a növekedése az oka.

II. A koherer működése második magyarázatának tarthatatlanságára már Branly — a kohererjelenség fölfedezője — figyelmeztetett. Arons mikroszkóp alatt megfigyelte ugyan a fémreszelék mozgását, de ez még nem bizonyíték a fölfogás helyessége mellett. A kohererben indukált elektromos oszczillacziók a fémforgácsok hézagait kitöltő rosszul vezető médiumban elementáris diszruptiv kisüléseket, apró szikrákat idéznek elő s a levegőnek vagy a fémgőzöknek a szikrák hőhatása révén nyert expanziója dobálja a partikulumokat. A kohererben végbemenő szikrázás és a forgácsok ide s tova dobálásának megfigyeléséhez különben nem is kell mikroszkóp, mert ez a jelenség szabad szemmel is megfigyelhető. Ha nikkel- és ezüstforgácsokkal és igen kevés higanynyal töltött kohererbe 2—3 LECLANCHÉ-elemet kapcsolunk és azután kiteszszük elektromos hullámok hatásának, akkor elsötétített szobában a staczioner áramlás okozta szikrázást és a forgácsok élénk mozgását szabad szemmel is kényelmesen megfigyelhetjük. Ugyanezt a jelenséget látjuk, ha elemek bekapcsolása nélkül a koherert hoszszabb időn át kiteszszük erősebb elektromos hullámok hatásának.

A forgácsok mozgása a szikrázás következménye, de nem oka a vezetővé válásnak, mert hiszen forgácsokat nem is tartalmazó, egyszerűen két szembeállított és igen közel hozott fém- vagy széncsúcsból álló koherer, melynél a megerősített elektródok irányításáról szó sem lehet, is vezetővé válik.

Irányíthatóság bizonyos határok között mozgathatóságot követel. De mivel szabad mozgásukban megakadályozott forgácsokból alkotott koherer is vezetővé válik, világos, hogy az ellenálláscsökkenés nem lehet irányításnak következménye.

Ennek kimutatására ismét a 2. ábrában lerajzolt összeállítást használjuk azzal a változtatással, hogy a rendes koherer helyébe paraffinnal töltött koherert teszünk. Ezt úgy készítjük, hogy jól záró parafadugókkal biró rendes koherer egyik elektródját kiveszszük és az üvegcsövet olvasztott paraffinnal megtöltjük. Miután az esetleges levegőbuborékokat kihajtottuk s a másik elektródot visszahelyeztük, az üvegcsövet dugóval légmentesen lezárjuk. A koherert most időnkint melegítjük, hogy a paraffin folyós maradjon és ezalatt érzékenyre beállítjuk. A folyós paraffinnal töltött koherer ugyanis elég érzékeny elektromos hullámok iránt. A paraffin megdermedése alatt a vezetőképesség többször hirtelenül megnövekszik, mert a paraffin összehúzódik és a forgácsokat egymáshoz szorítja. Azonban a koherer gyenge melegitése után a galvanométer tűje csakhamar visszatér zérus helyzetébe. Mivel a megdermedés és a teljes kihűlés után az ellenállás csak erőteljesebb hullámok hatása alatt csökken, azért érintsük most gyengén töltött kis leydeni palaczk golyójával az egyik elektródot. Az érintkezés előtt átpattanó kis szikra a koherert forgácsainak kimozdíthatatlansága mellett is azonnal és állandóan vezetővé teszi, mint azt a galvanométer tűjének tartós kitérése mutatja. Az üvegcső megkopogtatása vagy rázása nem növeli az ellenállást, nem állítja vissza eredeti állapotába a koherert. De — koherenssé most már csak úgy tehetjük, hogy ismét gyengén melegítjük mindaddig, míg a galvanométer tűje zérus helyze-



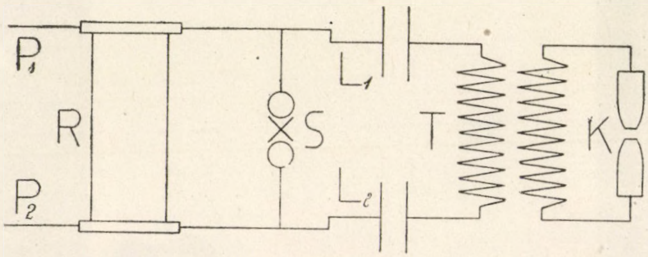
3. ábra.

tébe vissza nem tér. Legtöbbnyire elegendő, ha egy kis borszeszlámpa lángjával egy-kétszer hozzáérünk a paraffinkoherernek a két elektród közötti részéhez.

Míg tehát ez a koherer nehezen válik vezetővé elektromos hullámok hatása alatt, addig már gyenge hőhatások mellett is visszanyeri nagy ellenállását.

III. A koherer működésének harmadik magyarázata szintén egy az ívlámpán megfigyelt jelenségen alapszik. Az ív keletkezése után az áram a pozitiv szénről letépett apró szénszemeket átlöki a negativ szénre. Váltakozó áram hatása alatt a szemecskék vándorlása kölcsönös. Ennek alapján a koherer-jelenség magyarázata a következő. A nagy frekvencziájú áram az elektródokról — melyek között a kisülés végbemegy — szintén letép szén- illetőleg fémrészeket, a melyeket azután átlök a másik elektródra, hol egymáshoz tapadva vagy a hőhatás következtében összeforradva egymásra halmozódnak és áthidalják a forgácsok között levő kis hézagokat.

A magyarázat helyességének beigazolására többféle összeállítást használtam. Mindegyikkel sikerült, de megbízhatóan csak az itt leírttal. A használt eszközöket a kisérlet végre-



4. ábra.

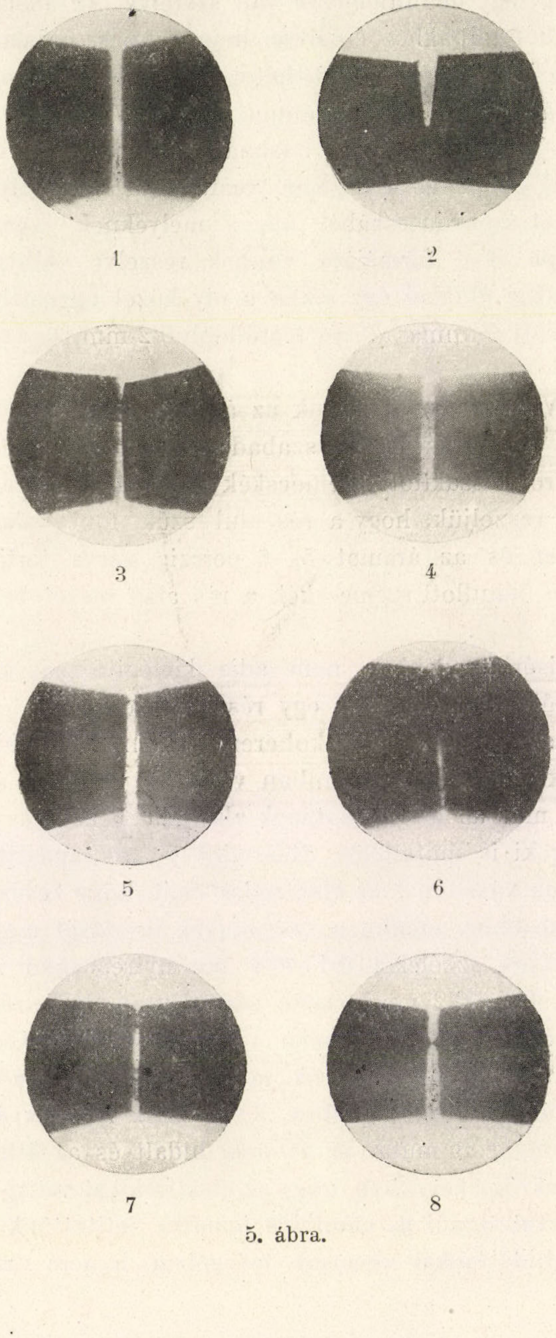
hajtására szánt összeállításban a 3-ik, az egyes eszközök kapcsolásmódját a 4-ik ábra mutatja.

A Wehnelt megszakítón át lüktetővé változtatott áram indukcziója révén az R induktor szekunder orsójában nagy feszültségű váltakozó áram keletkezik, a mely a zinkelektródokkal ellátott S szikraközben nagy frekvencziájú áram alakjában kiegyenlítődik. A kiegyenlítődés alatt az L_1 és L_2 leydeni palaczkok (Thomson-féle oszczillátor) belső fegyverzetei gyors egymásutánban ellenkező töltéseket kapnak, a melyek megosztó hatása által a külső fegyverzetekből a T transzformátor primer orsóján át gyorsan váltakozó áram indul. Az utóbbitól a T transzformátor szekunder orsójában indukált áram halad át a kohereren. Az itt transzformátornak használt készülék az ismert és a szikraindukczió bemutatására használt taneszköz. Úgy a primer, mint a szekunder csak néhány menetből álló vezetéke egy-egy ebonitlemezre van szerelve. Az ebonitlemezek úgy vannak fatalpakhoz erősítve, hogy csupasz oldalaikkal egymáshoz az érintkezésig közelíthetők legyenek. A két orsó távolságának változtatásával kényelmesen szabályozhatjuk a kohereren áthaladó áramot. Az itt használt koherer most csupán két elektródból és pedig 4—5 mm vastagságú, valamely kisütőre erősített két szénrudacskából áll, a melyeknek szemben álló végei tompa véső formájára vannak reszelve. Állítsuk a két szénrudacskát élükkel egy síkba s oly közel egymáshoz, hogy az élek között fönnmaradt rés legföllebb 0·2 mm legyen (5. ábra, 1. kép).

Ha a Wehnelt-en át zárjuk az áramot, akkor a résben előálló élénk szikrázás között szabad szemmel is kivehetjük az elektródokról leszakított szemecskék porzását. Sőt ha a pálczikákat úgy reszeljük, hogy a rés alul szűk, fönt valamivel tágabb legyen és az áramot 5—6 perczig zárva tartjuk, a kiszakított és lehullott szemecskék a rés alsó részét be is tömik (5. ábra, 2. kép).

Ez a kisérlet azonban nem adja kielégítő magyarázatát a koherer működésének, mert egy rés betöltéséhez mégis bizonyos idő szükséges, míg a koherer nagyon rövid ideig tartó kis szikrák hatása alatt nyomban vezetővé válik. Az áthidalásnak tehát már az első behatások alatt kell bekövetkeznie s ez kisérletileg ki is mutatható. Reszeljük léczre ragasztott finom korundporos vászonnal az elektródok éleit, hogy kevés szénpor tapadjon azokhoz, miáltal a szemecskék leválását megkönnyítjük. Közelítsük az éleket 0·1—0·2 mm-nyire, akkor az áram igen rövid, 0·1—0·2 mp-ig tartó zárása után, ha a rés mindenütt egyforma széles volt, néha a rés egész hosszában finom fonálszerű áthidalásokat látunk, melyek annál jobban vezetnek, mennél szűkebb a rés (5. ábra, 3—8. kép). Az 5-ik ábra fotográfiai fölvételeket mutat az át nem hidalt és az áthidalt résről. A képek úgy készültek, hogy az elektródokat vetítő mikroszkóppal közvetetlenül az emulziós lemezre vetítettünk.

Ilyen áthidalásokat nemcsak levegőben, hanem vazelinolaj-



1 2

3 4

5 6

7 8

5. ábra.

ban és nemcsak szén-, hanem fémelektródok között is létesíthetünk, de csak igen szűk közök mellett.

Ezekkel az áthidalásokkal meglehet fejteni azokat a kohererjelenségeket, melyek úgy az I., mint a II. alatt bemutatott kisérleteknél még nem kaptak magyarázatot. Ha a 2. ábrában bemutatott összeállítással úgy végzünk kisérletet, hogy nyitott áramkör mellett teszszük ki a koherert az elektromos hullámok hatásának, akkor a médium az egyes forgácsok között ugyan vezetővé válik, de a staczioneráramlás nem indul meg, mert az áramkör *M*-nél meg van szakitva. De ha a hullámok behatása után zárjuk az áramkört, a galvanométer tűje azonnal kitér annak jeléül, hogy a koherer jó vezetőképességét megtartotta akkor is, mikor a médium vezetőképességét már elvesztette. A kohererneк ezt a magatartását a forgácsok közötti áthidalások teljesen megmagyarázzák, valamint azt is, hogy megkopogtatás által a koherer jóvezető képességét elveszti. A megkopogtatás a keletkezett áthidalásokat összeomlasztja.

A paraffinkohererben a hullámok hatása alatt a forgácsok között diszruptiv kisülések keletkeznek, a melyek a paraffinréteget átütik és áthidalást létesitenek. A vezetővé vált paraffinkoherer azonban megkopogtatás által nem veszti el jó vezetőképességét, mert az áthidalások a paraffinba vannak ágyazva. Az emlitett gyenge melegités hatása alatt a paraffin kiterjed és az áthidalásokat összerombolja.

IV. A negyedik magyarázat szerint az elektromos hullámoktól indukált áram hőhatása tenné vezetővé a koherert. A forgácsok lazán érintkező éleit a nagy ellenállás nyomán föllépő erős fölmelegedés összeforrasztja, miáltal fokozódik a koherer vezetőképessége. Ennek a magyarázatnak alapján kapta a koherer a német «fritter» elnevezést. A kohászatban «fritten» alatt oly eljárást értenek, melynek segitségével fémhulladékokat összetartó tömeggé forrasztanak azáltal, hogy azokat tégelyben addig melegitik, mig felületükön olvadni kezdenek. Az olvadás megindulása után a melegitést beszüntetik, miáltal a kihülő fémhulladékok összeforradnak.

A koherer fémforgácsainak összeforradását a hullámok hatása alatt kisérletileg szintén ki lehet mutatni, de csak igen jó vezető kohereren. A 4. ábrában lerajzolt összeállítást módosítsuk olyképen, hogy a szénelektródok és a transzformátor elhagyásával közvetetlenül a leydeni palaczkok szekunder áramkörébe kapcsolunk egy sárgarézforgácsokkal töltött kohert. Ha a koherer két elektródjának közelítésével a fémforgácsokat kissé összenyomjuk és a RHUMKORFF-ot működésbe hozzuk, akkor a forgácsok között élénk szikrázás támad és a forgácsok összeforradnak. Ha a szikrázás megszüntetése után a koherert kikapcsoljuk az áramkörből és az elektródokat eltávolítjuk, akkor a hengeralakú forgácshalmazt, mint összefüggő tömeget csúsztathatjuk ki az üvegcsőből az asztalra. Gyenge hullámokkal egy nagy ellenállású koherer fémforgácsainak összeforrasztása a leírt módon nem sikerült. Ennél a kísérletnél azt is megfigyelhetjük, hogy a kohererben végbemenő szikrázás által a fémforgácsok mind eltávolodtak a rézelektrodtól.

V. Az ötödik magyarázat szerint a hullámok hatása alatt a fémforgácsok deformálódnak, miáltal az érintkezés bensőbb lesz- és az ellenállás csökken. Mielőtt az egyes deformácziók fejtegetésére áttérnénk, kiemeljük, hogy a forgácsok szabálytalan alakja és elhelyezkedése folytán a deformácziókból ugyanannyi joggal lehetne a koherer ellenállásának növekedésére, mint csökkenésére következtetni.

A hullámoktól a kohererben indukált áram hatásainak megfelelően háromféle deformácziót különböztetünk meg. Az áram hőhatása, vagyis a JOULE-féle hatás megnöveszti a test térfogatát, esetleg meg is változtatja alakját. Az áram elektromágneses hatása következtében keletkezett mágneses erővonalak egymásra gyakorolt taszító hatása deformálja a testet. Az áramlás előidézte elektrostatikai töltés a test felületére gyakorolt nyomás által változtatja meg a vezető alakját.

A hőhatástól származó deformáczió az említettek között a legjelentékenyebb és ezért ennek behatóbb vizsgálatával kezdjük fejtegetéseinket. A test térfogatnövekedésére közömbös, hogy az erre szükséges meleget az elektromos energia átalakulása révén, vagy pedig a környezetből kapja. Ha tehát a koherer áram okozta fölmelegedése megváltoztatja az ellenállást, akkor ugyanolyan irányú változást kell előidézniök a hőhullámoknak. Vizsgáljuk meg tehát a hőhullámok hatását a koherer ellenállására.

A megelőzőkben (II) láttuk, hogy az elektromos hullámoktól vezetővé vált paraffinkoherer melegítés által visszanyerte nagy ellenállását. A hősugaraknak az elektromos hullámokétól eltérő hatásának részletesebb kikutatására a 2. ábrában bemutatott összeállítást használhatjuk. Azoknál a kisérleteknél, a melyeknél a koherer ellenállása részben növekszik, részben csökken, czélszerű a koherert mérendő ellenállás gyanánt WHEATSTONE-féle hidba kapcsolni. A nagy ellenállású koherert tegyük elektromos hullámok segitségével jó vezetővé és közelítsünk a kohererhez egy kis borszeszlámpa lángjával. A galvanométer tűje azonnal visszatér zérusra, jeléül annak, hogy a sugárzó meleg az elektromos hullámoktól létesített áthidalásokat lerombolta. Ha a rosszvezető koherert tartósan melegítjük, akkor ezalatt ellenállása nagy marad. A melegités után következő kihűlés alatt az ellenállása hol csökken, hol növekszik. Az ellenállás változását legkényelmesebben a galvanométertű mozgásának leírásával jellemezhetjük. A galvanométer tűje a melegítés után 0°-ról kitér pl. 60°-ra, visszamegy 40°-ra, ismét előremegy 50°-ra, visszatér 30—35°-ra és így tovább, míg végre visszamegy zérusra. Míg az elektromos hullámok hatása alatt a koherer ellenállása hirtelen változik, addig a hősugarak hatása alatt a változás lassú, a mit a galvanométer tűjének lomha mozgása árul el. Ha a kohererhez, a kihűlés alatt, akkor mikor a tű növekedő kitérésben van, újra közelítünk a borszeszlámpa lángjával, a tű azonnal megfordul és közeledik a zérushoz.

Ha a jóvezető koherert (0·2—0·3 Ω) elektromos hullámok érik, még jobb vezetővé válik. Ha ellenben a jóvezető koherert melegítjük, ellenállása növekszik és a galvanométer tűje visszatér 0-ra. A melegités megszünte után a koherer igen gyakran jobb vezetővé válik, mint a milyen volt a melegités előtt.

De a másik két deformáczió sem adja meg magyarázatát a kohererjelenségnek. A koherer az elektromos hullámok behatása után is vezető marad. Ha tehát a deformácziók okoznák a forgácsok bensőbb érintkezését, akkor koerczitív erőket kellene föltételeznünk, melyek a testet eredeti alakjának és térfogatának visszanyerésében akadályozzák. Ilyen erők föltételezése azonban ellenkezik a rugalmas erők ismert tulajdonságaival és nehezen is volna elképzelhető, hogy ezek a koerczitív erők éppen csak akkor szűnnének meg működni, a mikor a koherert megkopogtatjuk.

A leirt kisérletek eredményeinek összefoglalásaként kimondhatjuk, hogy az áthidalások teljesen megmagyarázzák a koherer működését. A vezetőképesség hirtelen növekedése arra enged következtetni, hogy a forgácsok összeforradása nem játszhatik lényeges szerepet a koherer működésében, mert az összeforradás csak hosszabb idő multán következik be és mert a koherer akkor is vezetővé válik elektromos hullámok hatása alatt, mikor a részecskék összeforradása ki van zárva. Ha a koherer valamely telep áramkörébe van kapcsolva, akkor a médium vezetővé válása szintén hozzájárulhat a vezetőképesség növeléséhez.

A hanghullámok hatása. A koherer vezetőképességét a hanghullámok is módosítják. A jelenség behatóbb tanulmányozására használjuk ismét a 2. ábrában lerajzolt összeállítást.

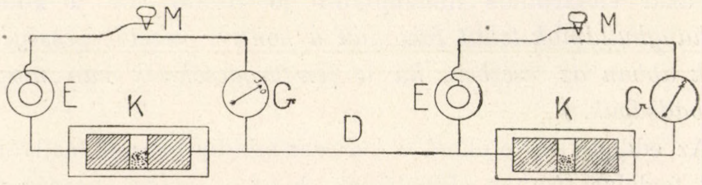
Ha zárt áramkör mellett elektromos hullámokkal jó vezetővé teszszük a koherert és ennek közelében dobot szólaltatunk meg, akkor a galvanométer tűje azonnal visszatér 0-ra. A dobból kiinduló nagy csillapodású hanghullám hatása alatt valószínűleg összeomlanak az áthidalások és a koherer elveszti vezetőképességét. Ha most az elektromos hullámoktól jó vezetővé tett koherer közelében sípot szólaltatunk meg, a vezetőképesség hol növekszik, hol csökken. Ezekből a kisérletekből kiderül, hogy a harmonikus hanghullámok másféle módon hatnak a koherer vezetőképességére, mint az elektromos hullámok.

További kisérletekből kiderült, hogy nemcsak zárt, hanem nyitott áramkör mellett is a sip megszólaltatása mindég növelte a vezetőképességet, akár rossz, akár jó vezető volt a koherer. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy az utóbbi esetben a koherer a jó vezetőképességet nem elektromos hullámoktól, hanem az elektródok kellő beállításától kapta. Ugyanazt tapasztaljuk, hogy az előbb már leírt, vazelinnal töltött vagy pedig a légritkított Marconi-koherert teszszük ki hanghullámok hatásának. Ellenben a paraffin-koherer vezetőképességét a hanghullámok módositani nem tudták, akár rossz, akár eredettől fogva jó, akár elektromos hullámoktól jó vezető volt a koherer. *A hanghullámok tehát fokozzák a koherer vezetőképességét, de csak abban az esetben, ha a fémforgácsoknak van mozgási szabadságuk.*

Az eddigi kisérleteknél a koherer mindig könnyű faállványba volt foglalva. Annak eldöntésére, hogy a vezetőképesség megnövekedésében mennyi része van az üvegcső mozgathatóságának, a koherert a nehéz vasállványba foglaltuk. Akár nyitva, akár zárva volt az áramkör a sip megszólaltatása nem változtatta meg a koherer vezetőképességét. Úgylátszik tehát, hogy az előbbi esetben a hanghullámok először mozgásba hozták a könnyű faállványt, ez az üvegcsövet, az üvegcső pedig összerázta a forgácsokat.

Ez a megfigyelés a hanghullámok hatásának módjára nézve kétféle magyarázatot enged. Az egyik az, hogy a mozgásba jutott fémforgácsok surlódnak az üveg falához és az üvegével ellentett elektromos töltést kapnak. Az elektromos töltések kiegyenlítődésénél keletkezett elektromos hullámok teszik vezetővé a koherert. A másik magyarázat szerint a fémforgácsok kisebb térfogatra rázódnak, sűrűbben helyezkednek el egymás mellett miáltal a vezetőképesség növekszik.

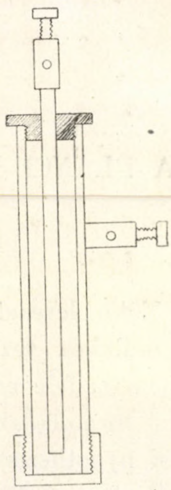
Annak eldöntésére, hogy a két eshetőség közül melyik felel meg a valóságnak, végezzük el a következő kisérletet. Két teljesen egyforma koherer közül az egyiket erősitsük könnyű fa-, a másikat nehéz vasállványba. Mindegyik koherert galvanométerrel, elemmel és megszakitóval külön egy-egy áramkörbe kapcsoljük (6. ábra). A két koherert csupasz rézdrót (*D*) köti össze. A síp megszólaltatásakor a faállványba foglalt koherer mindig és tartósan vezetővé vált a hanghullámok behatása alatt, akár zárva, akár nyitva volt az áramkör. A vasállványba foglalt koherer ellenállása a kisérlet alatt változatlan maradt. Ha tehát a forgácsok surlódása által keletkezett elektromos töltések kisülése okozta volna a vezetőképesség növekedését, akkor a vasállványba foglalt kohererneк annál is inkább veze-



6. ábra.

tővé kellett volna válnia, mivel a két koherer rézdróttal össze volt kötve.

Az ebből a kisérletből vont következtetéssel szemben azt az ellenvetést lehetne tenni, hogy a vezetővé vált kohererben netalán keletkezett elektromos hullámok oly gyengék voltak, hogy a másik koherer vezetőképességét módositani nem tudták. Ezt az ellenvetést megdönthetjük a következő kisérlettel, a melynél a surlódás okozta elektromos töltések keletkezése ki van zárva. Az ennél a kisérletnél használt koherer 10 cm hosszú és 15 mm belső átmérővel biró sárgarézcső (7. ábra), a melynek egyik vége csavarra járó sárgaréz-alappal, másik vége szintén csavarra járó ebonitfödővel van elzárva. Az ebonitfödélen át szorosan jár egy 5 mm vastag sárgarézrúd, a melynek külső végén drótszoritó van. A sárgarézcső külső oldalához szintén drótszoritó van forrasztva. Ha a cső fenekére 1 cm vastag rétegben sárgarézforgácsokat hintünk és a rézrudat leszorítjuk, míg a forgácsokba mélyed, össze van állítva a kisérlethez szükséges koherer, a melynek egyik elektródja a sárgarézcső, másika a rézrúd. Ha ezt a kohe-rert könnyű faállványba erősítjük és megszólaltatjuk közelében a sípot, az ellenállás azonnal csökken, akár zárva, akár nyitva volt az áramkör. Mivel a forgácsoknak és a csőnek anyaga ugyanaz, a surlódásnál elektromos töltések nem keletkezhetnek és így ki van zárva annak a lehetősége, hogy az elektromos hullámok közvetítésével növekedett volna a vezetőképesség. A hanghullámok hatása alatt a koherer vezetőképessége tehát csakis a forgácsok sűrűbbre rázása által növekedhetik.



7. ábra.

Ha szitálással nyert közel egyenlő nagyságú szemekből álló sárgarézreszelékkel töltjük meg a koherert, akkor ezt már csak igen ritkán sikerül hanghullámokkal vezetővé tenni, mert a hanghullámok okozta megrázkódás a reszeléket nem tudja sűrűbbre rázni. Ez a megfigyelés az előbb adott magyarázatot megerősíti.

Gruber Nándor.

A PLANCK-FÉLE SUGÁRZÁSI FORMULÁNAK EGY ÚJABB LEVEZETÉSE.

Több levezetés ismeretes, melyek a PLANCK-féle sugárzási formulához vezetnek. Célunk még egyet előállítani,[1] mely a MAXWELL-féle energiaeloszlási törvényen nyugszik, mint a sugárzási formulának NERNST-féle előállítása,[2] de mi a diszkontinuitási hypothezist *csak az emisszióra* nézve tartjuk fenn, vagyis a II. PLANCK-féle elmélet alapján állunk. Ennek megfelelőleg átalakítjuk a MAXWELL-féle formulát s e transzformált formula segélyével nyerjük egy oszcillátor középenergiájának kifejezését, majd ugyancsak ennek felhasználásával megállapítjuk az emisszió valószinűségének (η-nak) értékét s egy oszcillátor középenergiájának az η-tól való függését, mely eredmények a PLANCK-féle formulához vezetnek, s végül kiszámítjuk a szereplő oszcillátorrendszer entropiáját.

1. A Maxwell-féle energiaeloszlási törvény átalakítása.

Mindenekelőtt a bevezetendő hypothezisek alapján a MAXWELL-féle energiaeloszlási formula átalakítását végezzük. Ez a formula egyatomos gázra nézve thermodynamikus egyensúly esetén kimondja, hogy azoknak az atomoknak száma, melyek-

---

[1] Egy ilyen levezetés lehetőségét megemlíti K. JELLINEK is «Phys. Chemie der Gasreactionen» cz. könyvében. 379. o.

[2] NERNST: Zeitschr. f. Elektrochemie 1913. 423. o.

nek energiája két szabadsági fokra vonatkoztatva E és $E+dE$ határok között van:

$$dN = NAe^{-\frac{E}{E_0}}dE,^{1} \tag{1}$$

hol A és E_0 konstansok; E_0 jelenti egy gázatom középenergiáját két szabadsági fokra vonatkozólag és

$$A = \frac{1}{E_0},$$

N pedig jelenti az atomok számát.

Ha egy chemiailag homogén *szilárd* test, melynek atomjai hat szabadsági fokkal bírnak (a kinetikus és potenciális energia miatt) a fentebbi gázzal thermodynamikus egyensúlyban áll, akkor — ha az abszorpció és emisszió kontinuusan történnék — a különböző atomok összeütközése miatt *a szilárd testre is a fentebbi energiaeloszlási törvény lenne érvényes.* Azonban az újabb feltevések szerint az emisszio quantumszerűleg folyik le, tehát a fentebbi energiaeloszlási törvény nem bírhat általános érvénynyel, hanem olyan átalakítást kell szenvednie, hogy az új formula csak határesetekben menjen át az (1) formulába. Tehát *az* (1) *konstansait a quantumhypothezis alapján kell meghatároznunk.*

A hypothezisek, melyekre támaszkodni fogunk, a következők:

1. Az abszorpció folytonosan és az idővel arányosan történik.

2. Az egyes sugárzóforrások csak akkor emittálhatnak, ha energiájuk az $\varepsilon = h\nu$ energiaquantumnak, hol h konstans és ν a rezgésszám, egészszámú többszöröse. Ez esetben azonban nem föltétlenül kell emittálniok, de ha valamelyik emittál, *összes energiáját ki kell adnia.*

E hypothezisek mellett az atomok bármilyen energiabeli állapotban lehetnek, vagyis egy atom energiája általában

$$n\varepsilon + \varrho, \quad \text{hol} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\text{és} \quad 0 \leq \varrho \leq \varepsilon,$$

[1] NERNST: Loc. cit.

Az atomok eloszlása thermodynamikus egyensúly esetén bármelyik ε nagyságú energiaintervallumban egyenletes, vagyis az $n\varepsilon+\varrho-d\varrho$ és $n\varepsilon+\varrho$ elemi intervallumban lévő atomok száma egyenlő az $n\varepsilon+\varrho$ és $n\varepsilon+\varrho+d\varrho$ határok között levőkével. Ugyanis azok az atomok, melyek dt idő alatt — ha dt szükséges a $d\varrho$ energiaváltozáshoz — az utóbbi intervallumba jutnak, a t időpontban az előbbiben voltak, mert egy atom, mely $n\varepsilon+\varrho-d\varrho$ energiánál kevesebbel rendelkezik, dt idő alatt nem képes annyit abszorbeálni, hogy az utóbbi intervallumba jusson; egy olyan atom pedig, mely $(n+k)\,\varepsilon$ energiával bír, hol $k\geq 1$, csak összes energiáját adhatja ki s így szintén nem juthat a fenti intervallumba.

Ha tehát az n-ik ε nagyságú energiaintervallumot tetszésszerinti számú, de egyenlő nagyságú $(d\varrho)$ elemi intervallumokra osztjuk, az atomok száma, melyeknek energiája két szabadsági fokra vonatkozólag egy-egy $d\varrho$ nagyságú elemi intervallumba esik:

$$dN_n = NAe^{-\frac{n\varepsilon}{E_0}}d\varrho, \tag{2}$$

hol azonban A és E_0 új konstansokat jelentenek, melyek határesetben (gázok) az (1) formula konstansaival megegyeznek. Ezeket fogjuk most meghatározni.

Az egész n-ik ε nagyságú intervallumban lévő atomok száma:

$$N_n = \int_{\varrho=0}^{\varepsilon} dN_n = NA\int_{\varrho=0}^{\varepsilon} e^{-\frac{n\varepsilon}{E_0}}d\varrho = NAe^{-\frac{n\varepsilon}{E_0}}\varepsilon.$$

Az összes ν rezgésszámú atomok száma:

$$N=\sum_{n=0}^{\infty} N_n = NA\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\varepsilon}{E_0}} = NA\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{\varepsilon}{E_0}}},$$

melyből

$$A=\frac{1}{\varepsilon}\left(1-e^{-\frac{\varepsilon}{E_0}}\right)\cdot \tag{3}$$

Az E_0 értéke ama követelmény alapján határozható meg, hogy gázok esetében az

$$A=\frac{1}{kT}$$

egyenlőségnek kell fennállnia, hol k az ismert gázállandó, T pedig az abszolut hőmérséklet; másrészről ekkor $\varepsilon=h\nu\sim 0$ s így

$$\lim_{\varepsilon=0} A=\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\varepsilon}\left(1-e^{-\frac{\varepsilon}{E_0}}\right)=\frac{1}{E_0}.$$

Tehát

$$E_0=kT, \tag{4}$$

vagyis ismételten egy gázatom középenergiáját jelenti két szabadsági fokra vonatkozólag.

Behelyettesítve a (3) és (4) alatti értékeket a (2)-be, nyerjük, hogy a quantumhypothezis alapján chemiailag homogén szilárd testek esetében az (1) alatti MAXWELL-féle energiaeloszlási törvény helyébe lép a következő:

$$dN_n=\frac{N}{\varepsilon}\left(1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right)e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}d\varrho, \tag{5}$$

mely jelenti azoknak az atomoknak a számát, melyeknek energiája két szabadsági fokra vonatkozólag $n\varepsilon$ és $n\varepsilon+d\varrho$ közé (vagy bármelyik n-ik $d\varrho$ nagyságú elemi intervallumba) esik. Ez a formula gázok esetében az (1) formulába megy át, tehát annak az általánositása. Ha most az atomok helyett oszcillátorokat vezetünk be, akkor az (5) formula előállítja az oszcillátorok eloszlását az energiatartományokban.

2. A Planck-féle formula előállítása.

A MAXWELL-féle energiaeloszlási törvénynek e transzformációja után egyszerűen előállíthatjuk a PLANCK-féle sugárzási formulát.

Legyen egy zárt ürben, melyben fekete sugárzás uralkodik, N számú ν rezgésszámmal biró oszcillátor jelen, melyek a fekete sugárzással thermodynamikai egyensúlyban állanak s melyeknek működésére nézve az 1. és 2. hypothezis érvényes. Csak két szabadsági fokra szorítkozunk.

a) Kifejezzük egy oszcillátor középenergiáját, mint a hőmérséklet és rezgésszám függvényét. Az n-ik ε intervallum egyik $d\varrho$ nagyságú elemi részébe eső oszcillátorok energiája:

$$dU_n = \frac{N}{\varepsilon}(1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}})\, e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}(n\varepsilon+\varrho)\, d\varrho,$$

vagyis egy oszcillátor energiája szorozva az oszcillátorok számával.

Az egész n-ik intervallumra nézve a 0 és ε határok közti integrációval nyerjük az energiát.

A ν rezgésszámú oszcillátorok összes energiája:

$$U = \frac{N}{\varepsilon}(1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}})\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}} \int_{\varrho=0}^{\varepsilon}(n\varepsilon+\varrho)\, d\varrho.$$

Az integrácio elvégzése és a kifejezések rendezése után:

$$U = N\varepsilon(1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}})\sum_{n=0}^{\infty}\left(ne^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}\right).$$

Az összegezés céljából ismeretes, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2},$$

hol

$$x < 1.$$

Ha $e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = x$, hol szintén $x < 1$, akkor

$$U = N\varepsilon(1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}})\left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{(1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}})^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}\right].$$

A szorzás elvégzése után:

$$U = N\varepsilon\left(\frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}+\frac{1}{2}\right). \qquad (6a)$$

Ebből egy oszcillátor középenergiája:

$$\overline{U} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6b}$$

a mely a II. Planck-féle sugárzási elmélet eredményével teljesen megegyezik.

b) Hogy a sugárzás *sűrűségével* (u_ν-vel) kapcsolatot teremtsünk, vezessük be az emisszióvalószinűséget (η-t), mely Planck szerint a sugárzás sűrűségével evidens módon függ össze és állítsuk elő egy oszcillátor középenergiáját mint η függvényét.

Ha η jelenti az emisszió valószinűségét, mikor az oszcillátorok a kritikus állapotban vannak, vagyis mikor energiájukat épen emittálhatják, akkor $1-\eta$ a valószinűsége annak, hogy az adott viszonyok között emisszió nem történik; tehát azoknak az oszcillátoroknak a száma, melyek a t időpontban $n\varepsilon - d\varrho$ és $n\varepsilon$ között vannak és dt idő alatt az $n\varepsilon$ és $n\varepsilon + d\varrho$ intervallumba jutnak:

$$dN_n = \frac{N}{\varepsilon}\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right) e^{-\frac{(n-1)\varepsilon}{kT}} (1-\eta)\, d\varrho.$$

Ez a szám másrészről egyenlő az (5) eloszlási törvény szerint a jelzett intervallumban lévő oszcillátorok számával:

$$dN_n = \frac{N}{\varepsilon}\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right) e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}\, d\varrho.$$

E két utóbbi egyenlőségből:

$$e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}} = e^{-\frac{(n-1)\varepsilon}{kT}} (1-\eta).$$

Tehát

$$e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}} = (1-\eta)^n.$$

Ha $n = 1$, akkor

$$e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = 1-\eta \quad \text{és} \quad \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} = \frac{1-\eta}{\eta}.$$

Behelyettesítve ez utóbbit a (6*b*) egyenletbe:

$$\bar{U} = \frac{\varepsilon(1-\eta)}{\eta} + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (7)$$

Az itt követett út, mely $\bar{U}$-nak η függvénye gyanánt való előállítására vezetett, egyszerűbb, mint az eredeti Planck-féle s az (5) formulának egyik következménye.

Másrészről Planck szerint[1]

$$\frac{1-\eta}{\eta} = p \cdot u_\nu, \qquad (8)$$

hol p egy arányossági tényező és u_ν a sugárzás sürűsége. Ugyanis nyilvánvaló, hogy a sugárzás sűrűségével arányosan emelkedik egy-egy oszcillátor középenergiája, ezzel pedig arányosnak tekinthető a baloldali hányados.

Behelyettesítve a (8)-at a (7)-be

$$\bar{U} = \varepsilon p u_\nu + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (9)$$

c) A (6*b*) és (9) egyenletekből:

$$u_\nu = \frac{1}{p} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}. \qquad (10)$$

Tekintettel arra, hogy igen magas hőmérséklet esetén u_ν-nek át kell mennie a Rayleigh-féle formula által megkivánt energiasűrűségi kifejezésbe:

$$p = \frac{c^3}{8\pi h\nu^3},$$

hol c a fény terjedési sebessége vakuumban.

Tehát

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \qquad (11)$$

---

[1] Planck: Loc. cit. II. 159. o.

vagy ismert összefüggések[1] alapján a specifikus sugárzási intenzitás:

$$E_\lambda = \frac{c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1}, \tag{12}$$

ez pedig a PLANCK-féle sugárzási formula.

3. Az oszcillátor-rendszer entropiája.

Az (5) alatti energiaeloszlási törvény és az oszcillátorok energia-kifejezésének (6*a*) birtokában lévén kétféle módon is kiszámíthatjuk a rendszer entropiáját.

a) Az első mód a rendszer energiája és entropiája közti ismert összefüggésen[2] alapszik:

$$dS = \frac{C_p}{T} dT,$$

hol S az entropiát, C_p pedig az állandó nyomás melleti fajhőt jelenti. Tehát T hőmérséklet mellett a rendszer entropiája:

$$S_T = \int_0^T dS = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT.$$

Azonban a (6*a*)-ból:

$$C_v = \frac{dU}{dT} = Nk \frac{\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}{\left(e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1\right)^2},$$

tehát az entropia (mivel itt nem magas hőmérséklet esetén $C_p \sim C_v$):

$$S_T = Nk \int_0^T \frac{\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}{T\left(e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1\right)^2} dT.$$

[1] PLANCK: Wärmestrahlung, II. kiadás, 18. o.

[2] K. JELLINEK: Loc. cit. 152. o.

Az integráció elvégzése czéljából legyen [1]

$$e^{\frac{\varepsilon}{kT}} = x, \quad \text{akkor} \quad \frac{\varepsilon}{kT^2}\, e^{\frac{\varepsilon}{kT}} = -\, dx,$$

így a fenti határozatlan integrál:

$$-\int \frac{\log x dx}{(x-1)^2} = \frac{\log x}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)\, x},$$

ha az integrációt parciálisan végezzük.

Kiszámítva a jobboldali integrált:

$$-\int \frac{\log x dx}{(x-1)^2} = \frac{\log x}{x-1} - \log \frac{x-1}{x}.$$

Behelyettesítve x értékét:

$$\begin{aligned} S_T &= Nk \left\{ \frac{\log e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1} - \log \frac{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}} \right\} \\ &= Nk \left\{ \frac{\frac{\varepsilon}{kT}}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1} - \log \left(1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right) \right\}, \end{aligned} \tag{13}$$

ami Planck eredményével teljesen megegyezik.[2] Planck azonban az entropia ismeretén keresztül jut az energiához, itt pedig fordítva jártunk el; persze a Maxwell-féle energiaeloszlási törvénynek, melyen az egész tárgyalás nyugszik, a Boltzmann-féle etropia-elv adja meg igazi súlyát.

b) A második út, melyen az entropiához juthatunk, az (5) eloszlási törvénynek ismeretén alapszik, melyet felhasználunk a Boltzmann-féle entropia-kifejezésben szereplő eloszlási sűrűségek kiszámítására. Az említett elv szerint egy rendszer entropiája: [3]

---

[1] K. Jellinek: Loc. cit. 451. o.

[2] Planck: Loc. cit. II. 141. o.

[3] Planck: Loc. cit. II. 123. o.

$$S = -Nk \sum_{n=0}^{\infty} V_n \log V_n, \tag{14}$$

hol N a szereplő atomok vagy oszcillátorok száma, V_n a pontosan meghatározott és egyenlő nagyságú valószinűségi tartományokban (h) az eloszlási sűrűség:

$$V_n = \frac{N_n}{N},$$

mely tulajdonképen annak a valószinűségét jelenti, hogy egy tetszésszerinti oszcillátor az n-ik valószinűségi tartományba esik. Első feladatunk ennek az explicit meghatározása. Egy dE nagyságú energiaintervallumban lévő oszcillátorok számát az (5) alatti formula fejezi ki. Mivel azonban az egyes h nagyságú valószinűségi tartományok határán elhelyezett oszcillátorok energiabeli különbsége rendre ε,[1] az n-ik h tartományba annyi oszcillátor esik, mint az $n\varepsilon - (n+1)\varepsilon$ energiatartományba. De az (5) alapján az ebben lévő oszcillátorok száma:

$$N_n = \int_0^{\varepsilon} dN_n = \frac{N}{\varepsilon}\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right) e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}} \int_0^{\varepsilon} d\varrho = N\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right) e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}.$$

És így

$$V_n = \frac{N_n}{N} = \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right) e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}.$$

Behelyettesítve ezt a (14) alatti entropia-kifejezésbe:

$$S_T = -Nk \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right) e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}} \log\left[\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right) e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}\right].$$

Rendezve a jobboldali kifejezést:

$$S_T = -Nk\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right)\left\{\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{n\varepsilon}{kT} e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}} + \log\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}\right\},$$

melyből az összegezés elvégzése után

[1] PLANCK: Loc. cit. II. 137. o.

$$S_T = Nk\left\{\frac{\frac{\varepsilon}{kT}}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1} - \log\left(1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right)\right\},$$

ami Planck eredményével szintén teljesen megegyezik.

Az utóbbi egyenletből azonnal nyerhetjük az entropiát, mint az oszcillátorok összes energiájának (U) függvényét. Ugyanis a ($6a$) alatti egyenletből:

$$\frac{\frac{\varepsilon}{kT}}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1} = \left(\frac{U}{N\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{U}{N\varepsilon}+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{U}{N\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{U}{N\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)$$

és

$$\log\left(1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right) = \log\frac{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}} = -\log\left(\frac{U}{N\varepsilon}+\frac{1}{2}\right).$$

Behelyettesítve ezeket a legutóbb nyert entropiakifejezésbe:

$$S_T = Nk\left\{\left(\frac{U}{N\varepsilon}+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{U}{N\varepsilon}+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{U}{N\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{U}{N\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)\right\}, \tag{15}$$

ami szintén megegyezik Planck eredményével.[1]

Az (5) alatti formula előnye tehát abban rejlik, hogy általa egyszerűen és gyorsan juthatunk el a II. Planck-féle sugárzási elmélet eredményeihez.

A leghálásabb köszönetemet fejezem ki dr. Fröhlich Izidor egyetemi tanár úrnak, a ki dolgozatomat átolvasni és értékes tanácsaival támogatni kegyes volt.

Császár Elemér.

[1] Planck: Loc. cit. II. 139. o.

MEGJEGYZÉS A KONVEKCIÓS ÁRAMNAK A MÁGNESEZÉSI ELEKTRONOKTÓL EREDŐ RÉSZÉHEZ.

A mint ismeretes az elektronelmélet alapjait az üres térre vonatkozó MAXWELL-féle egyenletek képezik, melyekben az elektromos áramlás fajai közül egyedül a mozgó töltések konvekciós áramlása és az indukciós áramlás («Verschiebungsstrom») fordul elő.

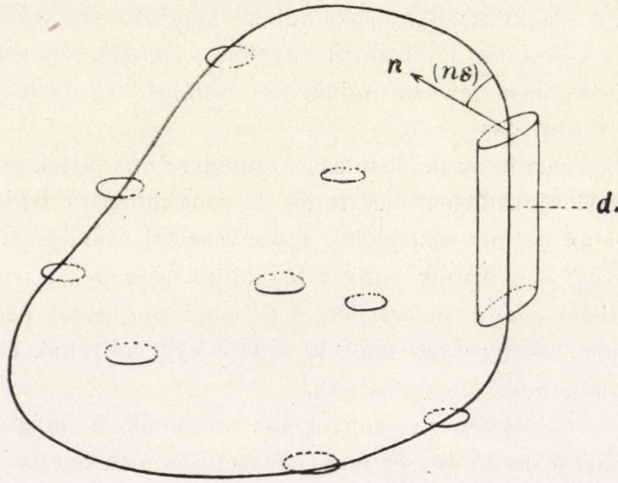
Az alapegyenletek módosulásáról ponderabilis testek esetében a testben levő töltések, elektronok és azok mozgása tekintetbevételével ad számot az elmélet. Így a vezetési áramlást a szabadon mozgó elektronok konvekciós áramlására vezeti vissza, a testek dielektromos polarizációját és mágneseződését pedig oly elektronok befolyására, melyek a test egy helyének csak kis környezetén belül mozoghatnak.

A következőkben a konvekciós áramnak a mágnesezési elektronoktól eredő részét igen egyszerű és szemléletes módon veszszük figyelembe, a mely eljárás főkép előadási czélokra előnynyel birhat abstraktabb eljárásokkal szemben, főkép mivel a módszer jobb betekintést nyújt a fenforgó viszonyokba.

Mágnesezési elektronoknak[1] a molekulák oly elektronrendszereit nevezik, melyeknek úgy összes töltése, mint az elektromos momentumok összege is eltűnik. A második feltételt azon követelményre redukálják gyakran, hogy az elektromos momentumok középértéke bármely «fizikailag végtelen kicsiny» időközben eltűnjék, mert az észlelhető polarizációs momentum

[1] M. ABRAHAM: Theorie d. Elektricität. II. kötet, 3. kiadás 239—241. oldal. H. A. LORENTZ: Encycl. d. Math. Wissenschaften V. 2. Elektronentheorie 181., 205., 207. oldal.

szempontjából akkor sem jönnek ily elektronok számba. Ily mágnesezési elektron-rendszereket képez egy nagy tömegű positiv mag körül keringő vele egyenlő töltésű negativ elektron, hol az elektromos momentum irányát folyton változtatva középértékben eltűnik vagy egy $+2e$ töltésű mag, mely körül két tőle egyenlő távolban és ellentett irányban levő egyenkint $-e$ töltésű elektron kering, hol az elektromos momentum minden időpillanatban eltűnik. Általában mágnesezési elektronrendszerek-



1. ábra.

nél, ha $e_1\ e_2 \dots e_n$ az egyes elektronok töltése, $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \dots \mathfrak{r}_n$ az egyes elektronok távola irány és nagyság szerint a molekula egy pontjától, fennáll

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 0$$

és legalább középértékben:

$$e_1\mathfrak{r}_1 + e_2\mathfrak{r}_2 + \cdots + e_n\mathfrak{r}_n = 0.$$

Határozzuk meg a konvekciós áram intenzitását, a mely a mágnesezési elektronok jelenléte folytán a testben levő meghatározott fekvésű C zárt görbe által határolt felületen átmegy. Vegyük ezért a legegyszerűbb esetet tekintetbe, melyre a komplikáltabb esetek is könnyen viszavezethetők, midőn csak egy e töltésű elektron mozog egy nyugvó ellentett töltésű mag körül. Felteszszük, hogy e töltés kis sík pályán mozog, mely pálya középértékben helyzetét és méreteit a testben csak folytonosan változtatja.

A felületen áthaladó konvekciós áramhoz nem járulnak hozzá azon elektronok, melyek pályái nem metszik a felületet, épúgy azok sem, melyek pályái a felületet kétszer metszik. Ezek ugynis dt fizikailag végtelen kis időtartamban, mely nagy az egyes elektronok körülfutási idejéhez képest, ugyanazon töltést ugyanannyiszor viszik át az egyik, mint az ellenkező irányban és így nem járulnak hozzá az összáramláshoz.

Ellenben hozzájárulnak a felületen áthaladó összáramláshoz mindazon elektronok, melyek pályái úgy feküsznek, hogy a felület szélét egyszer körülfutják. A feladat ezen elektrónok számának meghatározása, a mire a következő egyszerű meggondolás vezet. A kerület egy ds fizikailag végtelen kis vonalelemét annyi elektron kerüli meg, a hány azon ferde hengerben van, melynek alkotói ds-el párhuzamosak, alapja pedig egy elektron pályája által bezárt terület. Meggondolásunknál felhasználtuk azt, hogy a fizikailag végtelen kis területen belül sem a pálya alakja, sem fekvése lényegesen nem változott.

A henger alapjának területe:

$$T = \frac{1}{2}\int [\mathfrak{r}d\mathfrak{r}] = \frac{1}{2}\int_t^{t+\tau}\left[\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]dt = \frac{1}{2}\int_t^{t+\tau}[\mathfrak{r}\mathfrak{v}]\,dt,$$

hol [ ] vektori szorzatot, τ egy elektron körülforgási idejét, $\mathfrak{v}$ a sebességet, $\mathfrak{r}$ a nyugvó töltéstől a mozgó töltésig vont radiusvektort jelenti.

Mivel $\frac{1}{2}[\mathfrak{r}\mathfrak{v}]\,dt$ a dt idő alatt surolt terület az időben nem változik, ha csak centralis erők működnek, úgy

$$\mathfrak{m} = \frac{e}{2c}[\mathfrak{r}\mathfrak{v}],$$

hol c a fénysebesség, állandója egy elektronpályának. $\mathfrak{m}$-et az elektron mágneses momentumának nevezzük. Segélyével a terület így fejezhető ki:

$$T = \frac{c}{e} |\mathfrak{m}| . \tau.$$

A henger térfogata:

$$dV = T.ds \cos (ns) = \frac{c}{e} \tau \mathfrak{m}_s ds.$$

hol $\mathfrak{m}_s$ a mágneses momentumnak a kerület érintője irányába eső összetevője.

Ha N a térfogat egységben levő mágnesezési elektronok száma, akkor a ds vonaldarabot $N.dV$ elektron futja körül, mely az időegységben

$$N.dV \frac{e}{\tau} = N \cdot \frac{c}{e} \tau \mathfrak{m}_s ds \frac{e}{\tau} = cN\mathfrak{m}_s ds$$

töltést visz át, tekintetbe véve, hogy egy elektron az időegységben $\frac{e}{\tau}$ töltést visz át.

Bevezetve a térfogategységben levő összes elektronok mágneses momentumának összegét, a térfogategység mágneses momentumát:

$$\mathfrak{M} = N\mathfrak{m}.$$

az egész felületen az időegységben áthaladó töltés, azaz a rajta áthaladó áram intensitása lesz:

$$\int \mathfrak{i}_n df = c \int \mathfrak{M}_s ds.$$

Alkalmazva a Stokes-féle tételt:

$$\int \mathfrak{i}_n df = c \int (\operatorname{rot} \mathfrak{M})_n \, df,$$

hol az n index azt jelenti, hogy a vektornak a felületre normális komponense veendő.

Áttérve a felületelemre, nyerjük:

$$\mathfrak{i} = c . \operatorname{rot} \mathfrak{M},$$

a mi a konvekciós áramlás sűrűségének a mágnesezési elektronoktól eredő része.

Tekintetbe véve, hogyha a vezetési elektronoktól eredő áramsűrűség $\mathfrak{i}$, a polarizációs erektronoktól eredő áramsűrűség $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}$, hol $\mathfrak{P}$ a térfogategység polarizációs momentuma, az első Maxwell-féle egyenlet középértéke számára kapjuk a szokásos módon:

$$\operatorname{rot}(\bar{\mathfrak{h}} - \mathfrak{M}) = \frac{1}{c}\frac{\partial(\bar{\mathfrak{e}} + \mathfrak{P})}{\partial t} + \frac{\mathfrak{i}}{c},$$

ha $\bar{\mathfrak{h}}$ és $\bar{\mathfrak{e}}$ a mágneses, illetőleg elektromos térintezitás középértéke. Ezen egyenlet átmegy a ponderabilis testekre használatos alakba, ha bevezetjük az elektromos indukciót

$$\mathfrak{D} = \bar{\mathfrak{e}} + \mathfrak{P}$$

és a mágneses térintenzitást:

$$\mathfrak{H} = \bar{\mathfrak{h}} - \mathfrak{M}$$

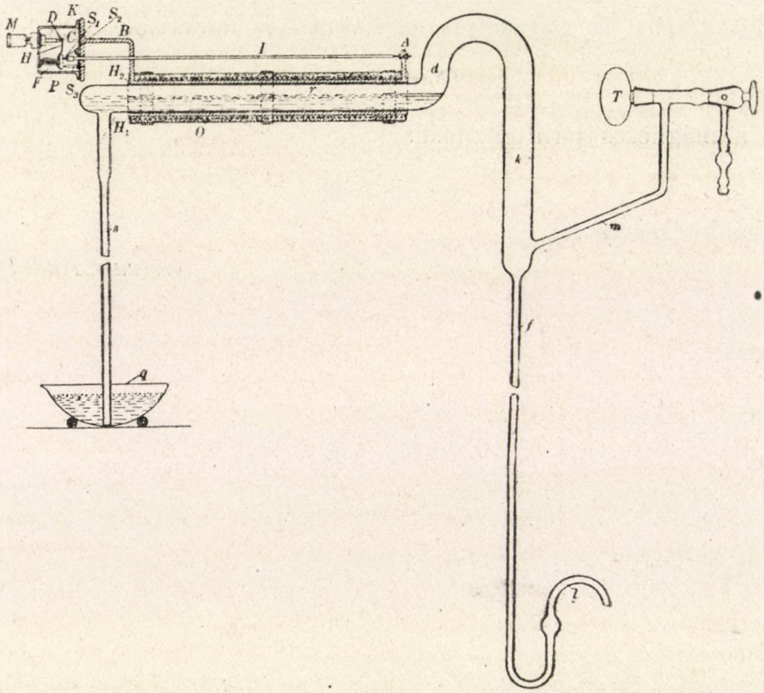
egyenlet segélyével.

Ortvay Rudolf.

LABORATORIUM.

Ujabb laboratoriumi eszközök.

Higanydesztilláló. Rohn a higany tisztítására az eddigieknél czélszerűbb desztillálót szerkesztett. Az eddig ismeretes eszközöknél a melegítést gázláng végzi, amely az üveget gyakran megrepeszti,

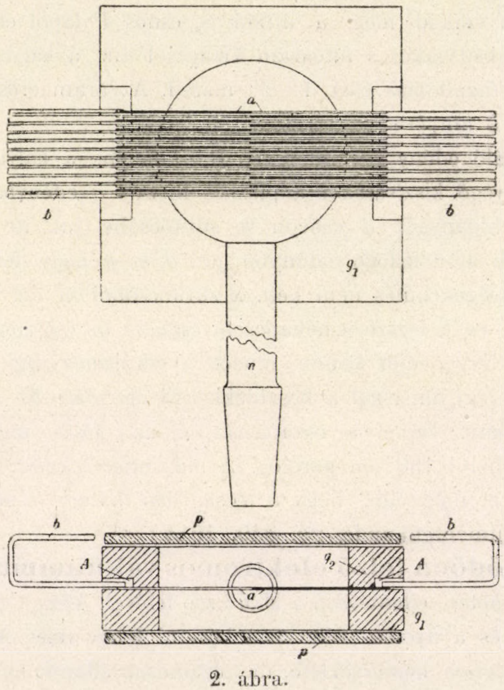


1. ábra.

továbbá nehéz a hőmérsékletet állandóan tartani, pedig a desztillált higany tisztasága jórészt ettől függ. Rohn a melegítésre elektromos kályhát (1. ábra, *O*) használ, amely két vas-félhengerből (H_1 és H_2) áll. A felső félhenger két végén merőleges kar (*A* és *B*) van. Invár-aczélpálcza (*I*) egyik vége *A* karhoz van erősítve. A pálcza a *B* karon szabadon áthalad, a K dobozba nyúlik és itt kettős csúcsban (S_1 és S_2) végződik. Az S_3 csúcs B-vel függ össze. F rúgó a P lapot a csúcsokhoz szorítja. P lap a H kart hordja, ezen pedig C kontaktus van, amely az M mikrometercsavar D csúcsával érintkezik. A melegítésnél a vas-félhenger kitágul, az invárpálcza változatlan marad, tehát H kar S_1S_2 körül forog és így a C—D érintkezés megszakad. Ha a mikrometercsavar kezdetben úgy volt beállítva, hogy S_1 és S_2 csúcsok érintkeztek P lappal, ellenben S_3 nem, akkor C—D érintkezés csak abban a pillanatban szakad meg, a mikor S_3 csúcs P lapot eléri. Az érintkezés megszakadásakor a fűtőáram kikapcsolódik, a kályha lehül. Így a hőmérséklet ingadozása csak 1—2° marad. Az áram erőssége 110 voltnál mintegy 5 ampère.

A desztilláló edény vízszintes cső (r), amelybe a kályhán kívül s cső nyúlik. A levegő kiszívásakor a piszkos higany q edényből s csövön át r-be jut. A higanygőz d csövön k sűrítőcsőbe jut, itt lecsapódik és f—l csöveken át a felfogó edénybe jut. d és k nagy felületűek, ezért külön mesterséges hűtés nem kell. k sűrítőcsőből m cső vezet a szárítóedényhez (T) és a légszívót bekapcsoló csőhöz. m cső elég hosszú, hogy a higanygőz lecsapódjék benne, mielőtt a szárítóhoz vagy a légszívóhoz érne. 1 mm légnyomásnál a készülékkel 24 óra alatt 20—25 kg higanyt lehet desztillálni. Ennél a nyomásnál és az előbbi megterhelésnél a higany körülbelül 180°-on párolog. A mikrometercsavar helyes beállítását abból lehet megitélni, hogy a lecsapódás határa k-nál van. (Zeitschr. f. Instrumentenkunde, *24.* 349. 1914.)

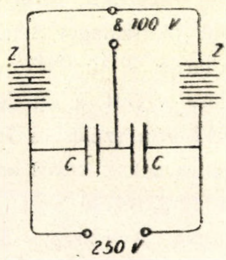
Önműködően jelző elektromos vakuummeter. A Rohn-féle vakuummeter, ellentétben a Mac Leod-félével, közvetlenül mutatja a kis nyomást és a nyomás változását követni lehet vele. Azon alapszik, hogy a termoelem hőmérséklete, ha folytonosan állandó energiát közlünk az elemmel, a környező gáz hővezetésétől, tehát nyomásától függ. Az érzékenység növelése végett a hősugárzást és vezetést lehetőleg csökkenteni kell. Két tükörüveglappal (2. ábra, g_1 és g_2) elzárt edényben 20, nikkelötvényekből készített termoelem (a) van. Az elemek az edény falainak mélyedéseiben (A) nyugszanak. 1° hőmérsékletkülönbség 0·06 millivolt feszültséget kelt. Az áramot rézszalagok (b) vezetik. Az üveglapok nyilásait pp üveglapok fedik. Az edényt csiszolt nyakú cső (n) köti össze avval a térrel, a melyben a nyomást mérni akarjuk. Az üvegedény fényesen nikkelezett és ablakkal ellátott fémtokban van. Az ablakkal szemben hőforrás gyanánt 10 Hefner-egységnyi erősségű, 10 voltos fémszálas eltolható lámpa van, amelyet csak 8·5 voltos áramforrással kell táplálni. A hőáram feszültségét millivoltmeteren kell leolvasni. A lámpa távolságát úgy kell megválasztani, hogy 10 és 100 mm *Hg* nyomás között a hőelem feszültsége 2·3 millivolt legyen. Ebben a közben a feszültség a nyomástól független. A nyomásnak és a feszültségnek összefüggését tapasztalati úton készült görbe mutatja. Csak 0·5 mm *Hg* nyomáson alul lehet a feszültségből a nyomásra következtetni. 0·07 és



2. ábra.

0·001 mm *Hg* között a feszültség a nyomás csökkenésekor igen gyorsan növekszik. 10^{-5} mm-ig lehet a mérést folytatni. A mérés határa tehát ugyanaz, mint a Mac Leod-féle manometernél. (Zeitschr. f. Instrumentenkunde, *35*. 114. 1915.)

Magas feszültségű telep. Greinacher berendezésének lényegét 1914-ben adta meg, most pedig fejlesztette. Váltakozó áramforrásból egyenirányú állandó feszültséget állít elő. A 3. ábra mutatja a telep vázlatát. *ZZ* négy-négy Graetz-féle czella, *CC* két mikrofarad kapaczitás. Ezzel az eszközzel eddig csak 250 volt egyirányú feszültséget lehetett kapni, ha a bekapcsolt váltakozó feszültség 100 volt. Most már ugyanennek az elvnek alapján 6000 voltig menő állandó feszültséget lehet nyerni és így a magas feszültségű akkumulátor-telepeket evvel a berendezéssel helyettesíteni lehet. Egy GRAETZ-féle czella csak 25 volt feszültségig egyenirányít, azért két 70—70 czellából álló telep kerül ZZ helyére. Mindegyik czella kis üveghenger, melybe vas- és aluminiumdrót nyúlik be mint elektrod. Az elektrolit tömény $NaHCO_3$, amely a henger $^2/_3$ részét tölti meg. A henger többi részét az elpárolgás és az elektrolit felkúszásának megakadályozása végett parafinolaj tölti meg. Szigetelés végett a czellák parafinba vannak ágyazva. A CC helyen 4—4 kondenzátor van, mindegyik 2 mikrofarad és legalább 2000 voltot bir el, tehát mindkét telep 8000 volt feszültségre tölthető meg. A váltakozó áramot, amelyet a felső kapcsokon kell bevezetni, induktorral nyerjük. A kapcsolók közé tehát az induktor szekunder tekercsét iktatjuk. A primer



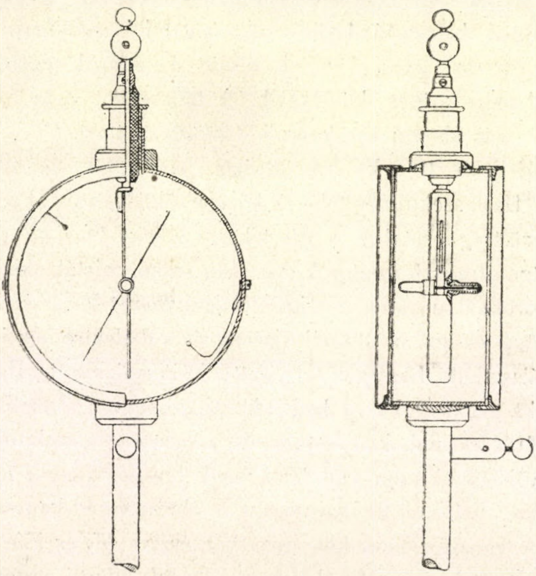
3. ábra.

áram szabályozásával tetszésszerinti váltakozó feszültséget lehet nyerni és így az állandó feszültség is változhat. Aránylag kis induktor kell, mert a váltakozó feszültségnek csak körülbelül fele akkorának kell lennie, mint a kivánt állandó feszültség. A «telep» vizsgálata arra az eredményre vezetett, hogy az akkumulátor-teleppel szemben következő előnyei vannak: 1. Rendkívül olcsó és fenntartása nem okoz költséget. 2. Nem kell tölteni és gondozni, mindig használatra kész. 3. Kényelmesen lehet a kivánt feszültségre beállítani. 4. Rövidzárlattal szemben érzéketlen. 5. Használatlan állapotban egyáltalán nem veszélyes. 6. Kevés helyet foglal el. Hátrányai: 1. A feszültség állandóságát befolyásolja az átalakított áram ingadozása, azonkívül körülbelül 1‰ váltakozó áram marad meg. 2. Az állandó feszültség beálltáig néhány percz telik el, sőt ha az eszköz sokáig használatlan volt, még tovább is várni kell. 3. A telepet nem lehet megosztani. (Phys. Zeitschr., XVII. 343. 1916.)

A többszörös Braun-féle elektrometer. Békefy I. úgy növelte a Braun-féle elektrometer érzékenységét, hogy több, közös tengely körül forgó tűt szerelt fel. Leolvasni csak a szélső tű kitérését kell. Ez a kitérés n tű esetében n^3-ször nagyobb, mint egyetlen tű kitérése lenne. Az érzékenységet úgy lehet változtatni, hogy a tűk eltolhatók és így a forgó tűk száma változik. Ezt az elvet elektroszkopokra is lehet alkalmazni úgy, hogy a pálczára több, közös pont körül forgó szeletet ragasztunk. (Zeitschr. f. Instrumentenkunde, *27.* 151. 1917.)

Elektroszkop előadási vetítésekre. Haga olyan közepes érzékenységű elektroszkopot szerkesztett, amely a sűrűn használt Kolbe-féle elektroszkop kellemetlen tulajdonságait elkerüli. Tulajdonképen a Braun-féle elektrometert alakította át vetíthető alakra. Ha egyegyszerűen kisebb alakban készítette a Braun-féle elektrometert, akkor a tengely nagy súrlódása miatt az eszköz használhatatlan volt. Ezért tengely gyanánt vízszintesen kifeszített, aranynyal bevont ezüstszalagot használt. A szilárd helyzetű fémszalagot 3 mm vastag, 4·5 cm hosszú elszigetelt sárgarézpálczika tartja. A tű 0·05 mm vastag aluminiumlapból készült. A stabilitas növelése végett a tű hosszában gyenge barázda van. A 27 mm hosszú, 0·17 mm széles és 7 μ vastag ezüstszalag sellakkal a tűhöz van erősítve, a sellak kevés aranybronccal van bevonva. A szalagot legnagyobbrészt sárgarézcső veszi körül, a szalag ennek a csőnek végéhez van forrasztva. A túlságos kitérés elkerülése végett a tűt üvegcsővel körülvett rugós fémdrót akasztja meg. A tű tehát akkor sem veszti el töltését, ha ehhez az akadályhoz ér. A skálát lehet a szokásos módon csillámlemezből a falra tapasztani, vagy pedig czélszerűbb a vetítőernyőre erősíteni. Az érzékenységet úgy lehet változtatni, hogy a súlypontot a tengelyhez közelítjük, vagy tőle távolítjuk azáltal, hogy a tűből keveset levágunk, vagy a barázdába némi broncport öntünk. Az eszközt (4. ábra) a Kipp és Zonen czég Delftben készíti. (Phys. Zeitschr. *18.* 1917. 275. l.)

Nagy elektromágnes. Olyan mágneses vizsgálatoknál, amikor állandó hőmérséklet kell, a mágneses térnek kiterjedtnek kell lennie, hogy a termosztátot el lehessen helyezni. The Svedberg szerkesztett ilyen elektromágnest az eddigieknél többszörte kisebb költséggel, mikor az anizotrop folyadékok viselkedését mágneses térben vizsgálta. A mágneses kör két hengeralakú, 147 mm átmérőjű és 235 mm hosszú magból és derékszögű vaskeretből áll. A magok a keret vízszintes középvonala irányában egymással szembe néznek. Az alap a kerettel mereven összefüggő öntött vaslap. A szimmetria folytán a mágnest függőlegesen is lehet szerelni. A keret is lehet vízszintes helyzetű. Ez akkor kivánatos, ha a mágneses tér felett szabad tér kell. A mágneses tér erősségét nemcsak az áramerősséggel lehet változtatni, hanem 5 különféle alakú polussaruval is. A tekercsek külső átmérője 385 mm, hossza 225 mm. Az egész vezeték ellenállása hideg állapotban 20 Ω, felmelegedés után 22 Ω. A vezeték 2 mm vastag, elszigetelt drót, a menetek száma 4500. A normális megterhelés 85,000 ampèremenet, tehát 19 *A*-nél áll elő. Mind-



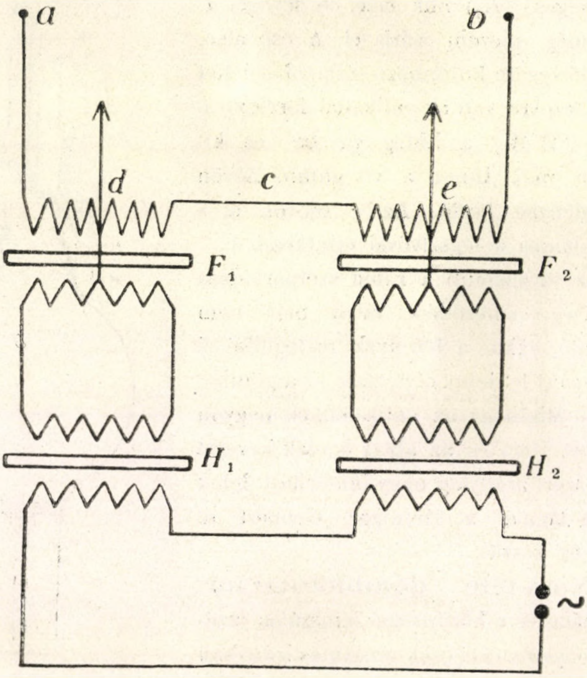
4. ábra.

egyik tekercs 6 közös tengelyű, egymásba tolt tekercsből áll. Minden egyes tekercsben négy vezetékréteg van, egy-egy rétegben 93 menettel. A tekercsek kettős falú sárgarézhengerre vannak szerelve. A falak között hűtés végett víz áramlik. Kívül is hűtő köpeny veszi körül a tekercset. A megterhelés határa a szokás szerint az, mikor az ellenállás 25%-kal növekszik. Ez körülbelül 27 *A*-nél áll elő. Alacsony feszültségnél a tekercseket párhuzamosan kell kapcsolni, magas feszültségnél egymásután. 20·5 *A* áramerősségnél, ha az interferrikum hossza 2 mm, átmérője 30 mm, a tér erőssége 21,500 gauss. Az eszközt az I. L. Rose r. t. gyártja Upsalában. (Ann. d. Phys., 52. 657. 1917.)

Új Röntgentranszformátor. Kétféle czél vezette DESSAUERT új rendszerű transzformátor szerkesztésénél. Egyrészt igen kemény X-sugarakat akart előállítani, ehhez pedig 300 kilovolt szükséges. Másrészt a Röntgen-terápia számára kell magas feszültségű induktor, amely a huzamos ideig tartó megterhelést az átütés veszedelme nélkül elbirja. Az eddigi transzformátoroknál a legtöbb átütés a tekercsek végén fordult elő. Ezért a szigetelést főleg a tekercsek végén javították, a vezeték keresztmetszetét különösen a külső menetekben növelték. De mégsem tudták a tekercsek csövében az elszenesedést elkerülni. A legtöbb átütés oka a vezetékből kiáramló kisülés. A szigetelő ennélfogva erősen átmelegszik, utóbb az egyes menetek között keletkezik egyre növekedő kisülés, majd teljes átütés következik. A tapasztalat arra vezette DESSAUER-t, hogy más alapon szerkesszen transzformátort.

Eddig legfeljebb 100 kV feszültséget használtak, de ezt most már növelni kell. Ha a szekunder-tekercs közepe földelve van, akkor a 100 kV szekunderfeszültség esetében a két tekercs között $^{100}/_2$ kV a feszültség. Ezt a Röntgen-transzformátorok tartósan nem birták ki. Az eddigi transzformátoroknál ugyanis a szigetelő igénybevétele a szekunder feszültségtől függ és így az áttételi viszony és a dielektromos igénybevétel nem volt elválasztható. DESSAUER ezt a kettőt különválasztotta. Ha pl. a 120 V primer feszültséget 100 kV-ra kell fokozni, akkor az áttételi viszonynak ugyan 120 : 100,000-nak kell lennie, de a primer és szekunder tekercs között a feszültségnek nem kell 50 kV-nak lennie, hanem lehet esetleg ennek csak fele. Ezt a czélt DESSAUER az 5. ábrán vázolt kapcsolással valósította meg. A transzformátor két részre van osztva (F_1 és F_2), mindegyiknek a kivánt áttétele van. Mindkét magas feszültségű transzformátor előtt egy-egy segédtranszformátor (H_1 és H_2) van. Ezeknek áttétele egység lehet, mert ezek nem transzformálásra valók, hanem csak a felosztásra szolgálnak. Az F_1 és F_2 transzformátorok szekunder tekercsét összekötő vezeték c pontban a földdel érintkezik. Ekkor a-nál és b-nél mindig ellentetten egyenlő feszültség keletkezik és pedig a földfeszültséggel szemben 50 kV. d és e a két szekunder tekercs közepe. A feszültség itt a földhöz képest 25 kV. d és e össze vannak kötve a primer tekercsek hozzátartozó pontjaival. Ezáltal a szigetelők csak 25 kV-ig vannak igénybe véve. A segédtranszformátoroknak ezt a feszültséget kell kibirniok. A kisebb igénybevétel folytán az előállítás költsége csökken, a megtakarított összegből a segédtranszformátorokat elő lehet állítani. Az energiaveszteség növekszik ugyan a kétféle transzformálás folytán, de az üzem igen magas feszültségnél is biztos. DESSAUER megmutatja azt az utat is, hogyan lehet ezt a rendszert fejleszteni. 127 kV effektiv feszültségnél (kb. 175 kV maximális feszültség) még nem mutatkozott veszteség a dielektromos megterhelés folytán. Egyik tekercsben sem volt látható vagy hallható kisülés.

A szekunder feszültséget az új transzformátorral 308 kV-ig lehetett emelni. Ekkor a Coolidge-cső wolfram-antikatódjának X-sugárzásában

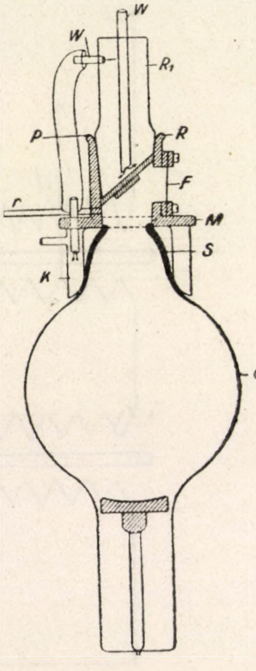


5. ábra.

kisebb hullámhosszat ($1{\cdot}42.10^{-9}$ cm-t) lehetett kelteni, mint az eddig ismert legkisebb X-hullámhossz ($1{\cdot}72.10^{-9}$ cm). (Verh. d. Deutsch. Phys. Ges., *19.* 155. 1917.)

Röntgen-lámpa fizikai czélokra. Az orvosi czélokra készített Röntgen-lámpák olyan vizsgálatoknál, amelyeknél a sugárzást hoszszabb ideig állandóan fenn kell tartani, hamar elpusztulnak. RAUSCH von TRAUBENBERG olyan lámpát szerkesztett, amelynek egyes részeit könnyen ki lehet cserélni, nagy intenzitású és változó keménységű sugarakat lehet vele kelteni és az antikatód anyaga kicserélhető. Ez főleg azért fontos, mert így ugyanavval a csővel különböző fémek karakterisztikus X-sugárzását lehet vizsgálni.

A *G* üveggömbnek (6. ábra) fémnyaka (*M*) van, amely *S* helyen pecsétviasszal van felerősítve. A nyak *R* sárgarézcsőből áll, oldalán körülbelül $^1/_{20}$ mm vastag aluminium-ablakkal (*F*). A cső alsó része (*K*) kettős falú, hideg víz áramlik benne, hogy a ragasztott helyek fel ne melegedjenek. Az *R* fémcső felső végébe kúpos és csiszolt nyakú üvegcső (R_1) illik bele. A levegőt *P* helyen még piczein zárja el. A cső alsó, ferdén álló végére különböző rézlapokat lehet illeszteni, ezekre van az antikatód forrasztva. Két cső (*WW*) a hideg víz be- és kivezetésére való. Innen a víz gummicsövön át *K* edénybe kerül. Az *r* csövön át a Röntgen-lámpa a légszívóval érintkezik.



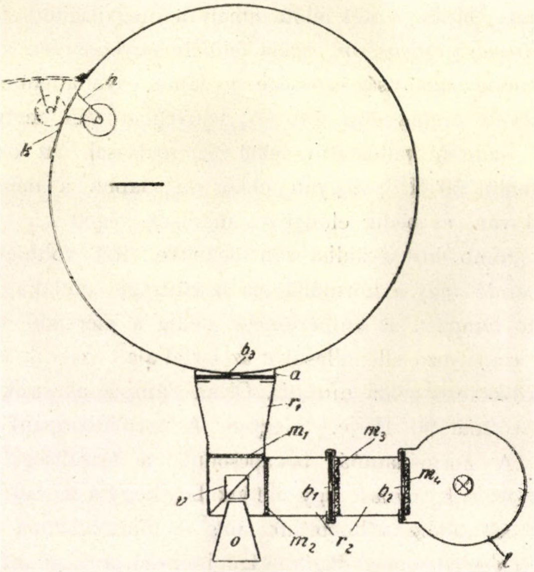
6. ábra.

Ha az üveggömb a katód szétporlódása és az üveg szineződése miatt már nem használható, akkor a fémnyak melegítésével a pecsétviaszt fel lehet olvasztani és a gömböt kicserélni. Minthogy az antikatódhoz nagyon közel lehet férni és az ablak is csak keveset nyel el, azért aránylag nagy intenzitást lehet elérni. A lámpát a Reiniger, Gebbert u. Schall czég készíti.

A Voss-féle gömbfotometer.

A szénszálas és a közönséges fémszálas izzólámpák fényerősségét csak vízszintes irányban szokták mérni. Ebben az irányban a lámpák fényerőssége legnagyobb. Az ívfénynél ellenben a közepes térbeli fényerősséget szokták megadni. Néhány év óta a gáztartalmú lámpák egyre inkább kiszorítják a kevésbbé gazdaságos ívlámpákat. Ezek a lámpák tehát a közepes térbeli fényerősség mérését teszik szükségessé. Már azelőtt is voltak erre a czélra eszközeink (*Ulbricht*-féle gömb), de a gyakorlatban olyan fotometer kell, a melylyel a mérést gyorsan és biztosan lehet végrehajtani. Voss a Siemens és Halske czég megbizásából készített ilyen fotometert az Ulbricht-féle gömbfotometer elvének megtartásával. Ennél az eszköznél egyetlen leolvasás elég a közepes térbeli fényerősség meghatározására.

A gömb czinkből készül, mert ezt könnyen lehet gömbalakra préselni. Az 1 m átmérőjű gömb két félgömbből van összetéve. Olyan lámpákat lehet benne elhelyezni, melyeknek burka legfeljebb 13 cm átmérőjű. A 300 wattos, vagyis 500 Hefner-egységnyi közepes térbeli fényerősségű (500 H. e.$_{\bigcirc}$) lámpák burkának átmérője 12 cm, tehát eddig a határig lehet az eszközzel mérni. Nagyobb lámpák számára 1·5 m átmérőjű gömböt készítenek. A belső bevonat olyan, mint az Ulbricht-



7. ábra.

féle fotometernél. Utzinger hosszabb kisérletezés után azt találta, hogy legczélszerűbb festék a czinkfehér alkalmas alapra kenve.

Uj a berendezés a lámpák elhelyezésére. A gömbön oldalt ajtó (k) van, melynek belső oldalára kell a lámpát szerelni, ennek foglalatát h rugó tartja. A k ajtóval közös vízszintes síkban köralakú nyílás van, ebből r_1 cső indul ki végén m_1 tejüveglappal elzárva. A normállámpát a mérendő lámpa helyére kell állítani. Ha az I_n intenzitású normállámpa E_n megvilágítást idéz elő, az I_x fényerősségű lámpa pedig E_x megvilágítást, akkor $I_x = I_n \frac{E_x}{E_n}$.

Ha a fény közvetlenül világítaná meg a lapot, akkor túlságosan erős lenne a megvilágítás. r_1 cső a fényt annyira gyengíti, hogy az m_1 lapot

o nyiláson át közvetlenül nézhetjük, vagy megvilágítottságát a Lummer-Brodhun-féle fotometer (v) segítségével összehasonlíthatjuk az m_2 tejüveglap megvilágítottságával. m_2 lapot az l «lámpásban» levő összehasonlító lámpa világítja meg r_2 csövön át. A mérés abban áll, hogy m_1 és m_2 lapok megvilágítottságát egyenlővé tesszük. E végett r_2-ben m_3 tejüveglap van, amely az összehasonlító lámpától kapja fényét és közli m_2-vel. Az m_3 lap megvilágított felületét ékalakú nyilással (b_1) változtatni lehet. Az éket kívülről csavarral ide-oda lehet mozgatni. Az ékkel együtt mozog egy mutató olyan lépték előtt, amely a megvilágított felület nagyságával egyenesen arányos. m_3 egész felülete egyenletesen van megvilágítva, azért a megvilágítottság erőssége m_2 lapon evvel a felülettel arányos. Az összehasonlító lámpa előtt még m_4 tejüveglap van, melynek átvilágított részét szintén változtatni lehet b_2 nyilással. Az összehasonlító lámpa körülbelül 50 H. e. legyen, ekkor m_2 lapon a megvilágítottság 35 lux körül van, ez pedig előnyös a mérések végett.

Az egész gömb erős asztalba van beépítve. Két voltmeter közül az egyik a mérendő vagy a normállámpa feszültségét mutatja, a másik az összehasonlító lámpáét, az ampèremeter pedig a mérendő lámpa körében van. A szabályozó ellenállásokat az asztal alatt szerelik fel. A mérés eljárását a következő példa mutatja. Olyan lámpát akarunk ellenőrizni, a mely 110 voltnál 90 H. e.$_{\bigcirc}$ legyen. A normállámpánk 108 voltnál 80 H. e.$_{\bigcirc}$. A normállámpát bekapcsoljuk, a feszültséget 108 voltra szabályozzuk és a b_1 nyilást úgy állítjuk be, hogy a mutató 80-ra álljon. A másik nyilást addig változtatjuk, míg a normállámpa és az összehasonlító lámpa egyenlő megvilágítottságot idéz elő. A tulajdonképeni mérés abban áll, hogy a normállámpát a mérendő lámpával kicseréljük, a feszültséget 110 voltra állítjuk be és a b_1 nyilást addig változtatjuk, míg a megvilágítottság újra egyenlő. Ekkor a fényerősséget H. e.$_{\bigcirc}$-ben a léptéken leolvashatjuk.

Ilyen módon 50—150 H. e.$_{\bigcirc}$ lámpák fényerősségét lehet mérni. A mérés határának kibővítése végett a gömbben kicserélhető köralakú nyílás (b_3) van a tokba illesztve. Különböző nagyságú nyílással különböző határok között lehet mérni. (E. T. Z., 1917. 188. l.)

Mende Jenő.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három ívnyi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai a folyóiratot tagsági díjuk fejében kapják.

27. évfolyam. 1918. márc.—május. 3—5. füzet.

AZ EGYENOLDALÚ TETRAÉDER.

A háromszögnek térbeli analogonja a tetraéder. A háromszög oldalai egyenlők lehetnek: a midőn azt egyenoldalúnak avagy szabályosnak nevezzük. A tetraédernek is egyenlők lehetnek oldalai, azaz lapjai. Ez az egyenlőség kétfélekép lehetséges: vagy mind a négy lap szabályos háromszög, vagy mind a négy lap csupán egyenlő területű háromszög. A lapok területének egyenlőségével, mint látni fogjuk, együtt jár azoknak kongruencziája. E szempontból tehát két különös tetraédert külömböztethetünk meg: a szabályos tetraédert, a melynek minden lapja szabályos háromszög és az egyenoldalú tetraédert, a melynek lapjai kongruensek, de különben általános háromszögek. Az egyenoldalú tetraéder tehát az általános és a szabályos tetraéder között, mint közbeeső alakzat foglal helyet; a szabályosnak nem minden tulajdonsága található fel az egyenoldalúban, ellenben ennek minden tulajdonsága a szabályosra is érvényes.

Két szempontból érdemes e közbeeső alakzattal foglalkozni. Először lehetnek tulajdonságok, a melyek az általános tetraéderre nem, de a szabályos tetraéderre nézve érvényesek. Ha e tulajdonságokat az egyenoldalú tetraéderen is felismertük, úgy azokat általánosítottuk, a mi haladást jelent e tudományban. A másik szempont, hogy bizonyos tulajdonságok könnyen feltűnhetnek kutatás közben az egyenoldalú tetraéderen, a melyeket nem sejtettünk az általános tetraéderen. E szerint módot nyújt arra nézve, mily irányban intézzük vizsgálatainkat az általános tetraéderre vonatkozólag.

A következőkben szándékom az egyenoldalú tetraédernek bizonyos tulajdonságait, a mint azokat találtam, bemutatni. Vizsgálatom közben rájöttem, hogy mikép lehet elég egyszerűen a háromszög kilenczpontos körén (a Feuerbach-körön) egy új pontot szerkeszteni (15. p.); továbbá az egyenoldalú tetraéderrel kapcsolatosan egy a háromszög kilenczpontos körére emlékeztető gömböt találni, a mely az egyenoldalú tetraéder által könnyen meghatározott tizenkét ponton megy keresztül (7. p.).

*

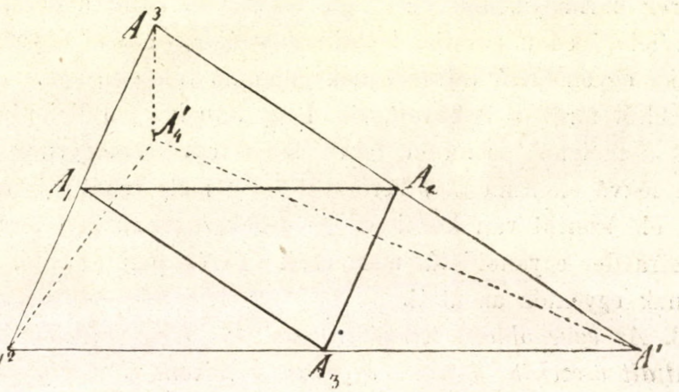
1. Oly egyenoldalú tetraédert akarunk szerkeszteni, a melynek lapja egy megadott $A_1A_2A_3$ háromszög.

E végből a háromszög egyes csúcsaiból a szemben fekvő oldalakkal, mint sugarakkal, gömböket írunk le; e gömbök egymást a háromszög síkjára szimmetrikus két pontban az A_4 és $\bar{A}_4$-ben metszik — és az $A_1A_2A_3A_4$, és $A_1A_2A_3\bar{A}_4$ szimmetrikus tetraéderek már a keresettek.

A leírt három gömb csak akkor metszi egymást két valós pontban, ha az $A_1A_2A_3$ háromszög hegyesszögű, ellenben nem metszi egymást valós pontban, ha a háromszög tompaszögű; végre a gömbök magában a háromszög síkjában találkoznak, ha a háromszög derékszögű. Egy derékszögű négyszögnek oldalai és átlói egy ilyen elkorcsosult egyenoldalú tetraédernek élei; a tetraédernek lapjai: az egyik átló által ketté osztott négyszög két derékszögű háromszöge és a másik átló által ketté osztott négyszög két derékszögű háromszöge.

Máskép is fogalmat szerezhetünk az $A_1A_2A_3$ háromszög fölé szerkeszthető egyenoldalú tetraéderről (1. ábra). E háromszög körül írjuk az oldalakkal parallel oldalú $A^1A^2A^3$ háromszöget. Ezután az $A^1A_2A_3$, $A_1A^2A_3$ és $A_1A_2A^3$ háromszöget az A_2A_3, A_3A_1 és A_1A_2 oldalak körül addig forgatjuk, míg az A^1, A^2 és A^3 csúcs nem egyesül a sík fölött és alatt az A_4, illetve az $\bar{A}_4$ pontban, a keresett tetraéder negyedik csúcsában. Az A_4 és $\bar{A}_4$ pontnak derékszögű projekcziója a háromszög síkjára az $A^1A^2A^3$ háromszögnek magasságpontja A'_4. — A forgatott három háromszögnek forgó csúcsai csak akkor egyesülhetnek, ha az $A^1A^2A^3$ háromszög nem tompaszögű; akkor egyesülnek magában a háromszög síkjában, például az A^3 pontban, ha az $A_1A_2A_3$ háromszögnek A_3 szöge derékszög.

Külömben az egyenoldalú tetraédernek az előbbi gömbökkel és a mostani háromszögekkel való leszármaztatása alig különbözik egymástól. A forgatandó háromszögek mozgó csúcsai azokat a köröket írják le, a melyekben a gömbök egymást páronként metszik és melyeknek síkja az $A_1A_2A_3$ háromszög olda-



1. ábra.

laira merőleges és a szilárd A^1, A^2 és A^3 pontokon megy keresztül. Így tényleg az $A^1A^2A^3$ háromszög magasságpontjában annak síkjára merőlegesen álló egyenesen metszik egymást ama gömbök az A_4, $\overline{A}_4$ pontokban.

Mint e második leszármaztatási eljárásból közvetlen látható, az $A_1A_2A_3A_4$ és az $A_1A_2A_3\overline{A}_4$ egyenoldalú tetraéder élszögei az egyes csúcsoknál egyenlők és összegük két derékszög. A triéderek élszögeinek egyenlőségéből a lapszögek egyenlősége is következik bármelyik két csúcsban, de sem a két tetraéder nem kongruens, sem két különböző tetraéderhez tartozó triéder nem az, hanem csupán szimmetrikus, míg az ugyanegy tetraéderhez tartozó triéderek mindegyik csúcsban kongruensek. Összefoglalva végre az eddigieket mondhatjuk: *az egyenoldalú tetraédernek élei, élszögei és lapszögei csak háromféle méretben fordulnak elő, mert a szemben fekvő élek, valamint a lapszögek egyenlők.*

2. Egy szimmetrikus egyenoldalú tetraéderpár még a következő módon is leszármaztatható: Egy derékszögű parallelepipedon egyik lapjának átlója legyen A_1A_2 és B_1B_2; a vele szemben fekvő lapon az ezekkel parallel átló legyen B_3B_4 és A_3A_4. Az $A_1A_2A_3A_4$ és $B_1B_2B_3B_4$ pontok már csúcsai két egyoldalú szimmetrikus tetraédernek, A-nak és B-nek. Ugyanis e tetraéderek bármelyikének szemben fekvő élei, mint a derékszögű parallelepipedon parallel lapjainak átlói egymással egyenlők, a mi az egyenoldalú tetraédernek jellemző tulajdonsága.

Ebből fordítva is következik, hogy annak a parallelepipedonnak, a melynek szemben fekvő lapjai egy tetraédernek szemben fekvő élein mennek keresztül — a mely tehát a tetraédernek éle szerint van körülírva — derékszögűnek kell lenni, ha a tetraéder egyenoldalú, mert csak a derékszögű parallelogrammának egyenlők az átlói.

3. *Az egyenoldalú tetraéder szemben fekvő éleinek felezőpontjait összekötő három egyenes, a három éltengely, páronként merőleges egymásra.*

Ez abból következik, hogy az éltengelyek nem egyebek, mint a tetraéder élei szerint körülírt derékszögű parallelepipedon szemben fekvő lapjai átlóinak metszőpontjait, a lapok középpontjait, összekötő egyenesek. Ezek az egyenesek a parallelepipedon éleivel parallelek lévén, egymásra páronként merőlegesek és egymást a parallelepipedonnak középpontjában metszik. Az éltengelyek metszőpontját az egyenoldalú tetraéder középpontjának fogjuk nevezni.

4. *Az a tetraéder, a melynek két szemben fekvő éle egyenlő és a hozzá tartozó éltengelyre merőleges — egyenoldalú.*

Úgyanis a tetraéder többi négy élének derékszögű projekcziója az egyenlő élpárakkal parallel síkra oly négyszög, a melynek átlói, mint az egyenlő élek projekciói egymást felezik és egymással egyenlők; tehát a négyszög derékszögű. E tetraéder éle szerint körülírt parallelepipedon tehát szintén derékszögű és így a tetraéder egyenoldalú.

5. Az egyenoldalú tetraéder két szemben fekvő élénél a lapszögek derékszögűek is lehetnek; de e kettőnél több derékszögű lapszöge nem lehet az egyenoldalú tetraédernek.

Ha egy derékszögű parallelepipedon egyik lapján két szemben fekvő csúcs e lap átlójától oly távolságra van, mint a milyen e lapra merőleges élének a hossza, akkor ez a parallelepipedon egy oly egyenoldalú tetraédernek van éle szerint körülírva, a melynek két szemben fekvő élnél lévő lapszöge derékszög. Minthogy a derékszöget képező két tetraéderlap az élen átmenő parallelepipedonlaphoz 45° szög alatt hajlik s derékszögű projekcziója erre a lapra derékszögű háromszög, azért a tetraéderlapnak az élhez tartozó magassága annak derékszögű projekciójához úgy viszonylik, mint $\sqrt{2} : 1$. Ehhez képest az ily egyenoldalú tetraéder lapját megkapjuk, ha bármilyen derékszögű háromszöget akkép alakítunk át, hogy átfogójához tartozó magassága az $1 : \sqrt{2}$ viszony szerint nagyobbodjék. Ugyanezt még így is kifejezhetjük: ha egy ellipszis fő- és melléktengelye négyzetének viszonya $2 : 1$, akkor az ebbe beírt bármely háromszög, a melynek szögpontja a melléktengelynek két végpontja, oly egyenoldalú tetraédernek a lapja, a melynek két, egymással szemben fekvő lapszöge derékszög.

Ha egy tetraéder egyik triéderének két lapszöge derékszögű volna, akkor e csúcsban az egyik él merőleges a szemben fekvő lapra, tehát a tetraédernek oly lapjai volnának, a melyek derékszögű háromszögek. De az egyenoldalú tetraédernek minden lapja, ha nem korcsosult el, hegyesszögű háromszög, tehát nem lehet az egyenoldalú tetraédernek egy csúcsánál két derékszögű lapszöge és így egészben véve kettőnél több derékszögű lapszöge.

6. *Az egyenoldalú tetraéder éltengelyeinek metszőpontja a tetraéder körül írható gömb középpontja. E metszőpont egyszersmind a nyolcz beírható gömb egyikének középpontja;*

további négy beírható gömb középpontja a körülírható gömbön van, végre a hátralevő három beírható gömbnek középpontja az éltengelyeknek végtelen távoli pontja.

Ugyanis az egyenoldalú tetraéder éltengelyeinek metszése az élek szerint körülírt parallelepipedonnák középpontja és így az e parallelepipedon körül írható gömbnek középpontja egyszersmind a középpontja a tetraéder körül írható gömbnek is.

Továbbá: a tetraéder belső lapszögeit felező hat sík, a parallelepipedon hat átlóssíkja, míg a külső lapszögeit felező hat sík, mely ezekre merőleges, a parallelepipedonnak hat lapja. A belső szögfelező síkok egymást a parallelepipedon középpontjában metszik, a mely pont tehát a beirt gömbök egyikének középpontja.

A parallelepipedonnak abban a négy csúcsában, a mely nem tetraédercsúcs, három-három lap és három-három átlóssík találkozik; ez a négy csúcs tehát a tetraéderbe írható más négy gömbnek középpontja.

Végre a parallelepipedon egyik lappárjára merőlegesen álló négy lapnak és két átlóssíknak közös pontja, azaz a kiszemelt lappárban levő tetraéderélek éltengelyének végtelen távoli pontja, szintén középpontja a tetraéderbe írható gömbnek.

A talált eredménynek egy részét csak másképen fejezzük ki, ha azt mondjuk, hogy a derékszögű parallelepipedonba beírható két szimmetrikus egyenoldalú tetraéder közül bármelyiknek csúcsa a másikba írható négy gömbnek középpontja.

7. *Az egyenoldalú tetraéder négy magassága egyenlő; az egyik beírható gömbnek sugara a magasságnak negyede, a másik négy gömbnek sugara pedig e magasságnak fele.*

Az egyenoldalú tetraéder négy magassága azért egyenlő, mert lapjai egyenlő területüek. Vagy: mert mindegyik lapon a csúcstriéderek kongruensek egy másik lap csúcstriédereivel, tehát a tetraéder kongruens önmagával bármelyik két lapot tekintsük alapnak.

Mivel minden tetraéder éltengelyeinek metszőpontja, mely egyszersmind annak súlypontja, az egyes lapoktól egynegyed oly távolságra van, mint az illető laphoz tartozó magasság: az egyenoldalú tetraéder éltengelyeinek metszése C, azaz a be- és körülírható gömb középpontja, mert a magasságok (h) egyenlők, a lapoktól $\frac{1}{4}h$ távolságra van.

Vezessünk most az egyenoldalú tetraéder C középpontján keresztül egyik lapjához, α_1-hez parallel síkot σ-át. Az e lappal szemben fekvő A_1 csúcsnak távolsága a σ-tól $\frac{3}{4}h$; az A_1-gyel diametrális pontnak, B_1-nek, távolsága a tetraéder körül írt gömbön a σ síktól szintén $\frac{3}{4}h$, tehát az α_1 síktól $\frac{1}{2}h$. De a B_1 az egyik beírható gömbnek középpontja, tehát az egyenoldalú tetraéderbe beírható négy gömbnek sugara tényleg fele a tetraéder magasságának.

8. Szerezzünk fogalmat arról az öt pontról, a melyben az egyenoldalú tetraéderbe írható öt gömb annak egyik lapját érinti, továbbá e laphoz tartozó magasság talppontjáról!

Mert az egyik beírt gömb konczentrikus a körülírt gömbbel, azért érintőpontja valamelyik tetraéderlappal a középpontnak derékszögű projekcziója a lapháromszög síkjára, azaz e lapháromszög köré írt körnek középpontja.

A többi négy középpont a körülírt gömbön a tetraédercsúcsoknak diametrális pontja (6). E pontoknak derékszögű projekcziója a lapháromszög síkjára e gömböknek érintőpontja az illető lapháromszöggel. E projekcziók közül három a lapháromszög csúcsainak diametrális pontja a körülírt kört illetőleg; egy pedig a lapháromszög magasságpontja, mint a lapháromszög oldalain keresztülmenő három páronkint egymásra merőleges sík metszőpontjának derékszögű projekcziója az illető síkra.

Ebből látható még, hogy e magasságpontnak szimmetrikus pontja a háromszög körül írt kör középpontjára vonatkozólag: a háromszög síkján kívül levő tetraédercsúcsnak derékszögű projekcziója. És mert a háromszög magasságpontjának távolsága annak egyik csúcsától kétakkora, mint a körülírt kör középpontjának távolsága a szemben fekvő oldaltól, azért a háromszögoldalakkal szemben fekvő tetraéder éleknek projekcziója a háromszög síkjára parallel azokkal az egyenesekkel, a melyek az oldalak felezőpontját a magasságponttal összekötik. E szerint mondhatjuk:

Az egyenoldalú tetraéderbe írható öt gömbnek érintőpontja a tetraéder egyik lapháromszögével: 1. a háromszög köré írt körnek középpontja; 2. a háromszög magasságpontja; 3. a háromszög három csúcsának diametrális pontja a háromszög körül írt körön.

Az egyenoldalú tetraéder bármelyik csúcsának derékszögű projekcziója a szemben fekvő háromszög síkjára, e háromszög magasságpontjának szimmetrális pontja a háromszög köré írható kör középpontját illetőleg.

Minthogy az egyenoldalú tetraéder középpontjának távolsága a lapháromszög magasságpontjától és a lapháromszöghöz tartozó tetraédermagasság talppontjától, egymással egyenlő, bármelyik lapot is vegyük tekintetbe: azért az egyenoldalú tetraéder lapjainak magasságpontjai és a tetraédermagasságok talppontjai ugyanegy gömbön vannak, a mely gömb, mint könnyen látható, az egyes magasságokat felezi a (második) metszőpontban. E szerint:

Az egyenoldalú tetraéder lapjainak négy magasságpontja, a magasságainak négy talppontja és négy felezőpontja, a körülírt gömbbel konczentrikus gömbön van.

Ez a gömb bizonyos tekintetben analogus a háromszög kilenczpontos (FEUERBACH) körével és ezért az egyenoldalú tetraéder t i z e n k é t p o n t o s g ö m b j é n e k nevezhető.

8. *Az oly tetraéder, a mely két konczentrikus gömb egyikébe beírható és a másik körül írható — egyenoldalú.*

Messe a belső gömbnek két érintősíkja a külső gömböt két körben, k_3 és k_4-ben és ezeknek két metszőpontja legyen az A_1 és A_2. E pontokból a belső gömbhöz érintősíkokat vezetünk, a melyek a k_3 körnek $XYZ\ldots$ pontján mennek keresztül. E síkok a k_4 kört az $XYZ\ldots$-vel és így egymással is projektív $X_1Y_1Z_1\ldots$ és $X_2Y_2Z_2\ldots$ pontsorban metszik, mert változó érintősíkjai egy forgáskúpnak, a melynek a k_3 és k_4-nek síkja is egy-egy érintősíkja.

Ha az X és Y pont szimmetrikus arra a σ síkra, a mely a gömbök középpontjából az A_1A_2 húrra merőlegesen állítható, akkor az X_1X_2 pontpár is szimmetrikus lesz az Y_2Y_1 pontpárral a σ síkra, mert az XA_1X_1, YA_2Y_2 és az YA_1X_2, XA_2Y_1 síkok szimmetrikusak a σ síkra. A k_4 körön levő $X_1Y_1\ldots$, $X_2Y_2\ldots$ projektiv pontsorok projektivitási tengelye (az X_1Y_2, X_2Y_1 egyenespárok metszéseinek geometriai helye), merőleges a σ síkra, tehát a két kettőspont A_3, A'_3 mint a projektivitási tengely metszése a k_4-gyel szintén szimmetrikus a σ-ra, valamint az azoknak megfelelő A_4 és A'_4 pont a k_3 körön.

Az $A_1A_2A_3A_4$ és $A_1A_2A'_3A'_4$ tetraéderek már származtatásuknál fogva az egyik gömbbe be vannak írva és a másik körül vannak írva s most még csak azt kell eldönteni, hogy azok egyenoldalúak-e vagy nem?

A két talált tetraéderhez szimmetrikus két tetraéder arra síkra vonatkozólag, a mely az A_1A_2 élet a gömbök középpontjával összeköti, szintén körül- és be van írva az illető gömbökbe. E szerint még két tetraéder léteznék az A_1A_2 közös éllel, a mely az adott gömbök egyikébe be volna írva és a másik körül volna írva. Ámde ebből fordítva az következik, hogy a két projektiv pontsornak, $X_1Y_1\ldots$, $X_2Y_2\ldots$-nek, a k_4 körön négy kettőspontja volna, a mi lehetetlen. Az $A_1A_2A_3A_4$ és $A_1A_2A'_3A'_4$ tetraéderekhez szimmetrikus tetraéderek tehát nem újak, hanem ugyanezek, azaz egyik a másikhoz szimmetrikus a jelzett síkra vonatkozólag és ezért az $A_3A'_3$ pontok a k_4 körön, az $A_4A'_4$ pontok pedig a k_3 körön az A_1A_2 egyenestől egyenlő távolságra vannak. Ebből folytatólag következik, hogy az A_1A_2 éltől eltekintve, úgy az egyik, mint a másik tetraédernek az A_1 és az A_2 csúcsból kiinduló szemben fekvő élei egyenlők. De minthogy a tetraéderek lapháromszögei körül írt körök szintén egyenlők és pl. az $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$ háromszögekben a közös oldalon kivül az A_2A_3, A_1A_4 oldalak egyenlők, és így a harmadik oldalpárnak, A_1A_2, A_3A_4-nek, is egyenlőnek kell lenni:

az $A_1A_2A_3A_4$ tetraédernek mind a három szemben fekvö élpárja egyenlő, tehát úgy ez, mint a vele szimmetrikus $A_1A_2A'_3A'_4$ tetraéder is — egyenoldalú.

A tárgyalásban előforduló $X_1Y_1\ldots$, $X_2Y_2\ldots$ projektiv pontsorok projektivitási-tengelye a k_4 kört valós vagy képzetes pontpárban metszi, vagy érinti. Ennek megfelelően az A_1A_2 éllel biró és az adott gömbökbe be-, illetve körülírható tetraéder valós, képzetes, illetve egybeeső. A két egybeeső tetraédernek lapjai, mert két szimmetrikus tetraéder egyesüléséből származik, egyenszárú háromszögek, ezért a felvett A_1A_2 élen és a szemben fekvőn kívül a többi négy él mind egyenlő.

9. Ha valamely gömb A_1 pontján át három páronként egymásra merőleges egyenest vezetünk, mely a gömböt a B_2, B_3 és B_4 pontban metszi és az A_1-nek diametrális B_1 pontján keresztül az előbbiekhez parallel egyenest húzunk, mely a gömböt az A_2, A_3 és A_4 pontban találja, akkor az $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ tetraéderek egyenoldalúak és szimmetrikusak.

Ugyanis nemcsak az A_1, B_1 pontok, hanem az A_i, B_i pontok is diametrálisak, tehát az A_iB_k, B_iA_k húrok is diametrálisak. Az $A_1B_2B_3$ sik, mely merőleges az A_4B_1 húrra, merőleges a vele párhuzamos és diametrális A_1B_4 húrra az A_4 pontban, tehát az $A_1A_4B_2B_3$ pontok, valamint más ily csoportosítású pontok $A_iA_jB_kB_l$ ugyanegy sikban vannak és egy derékszögű négyszögnek csúcsai. Ebből kitünik, hogy az $A_1A_2\ldots B_4$ pontok egy derékszögű parallelepipedonnak csúcsai, tehát az $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ tetraéderek egyenoldalúak és szimmetrikusak.

E tárgyalásból, de közvetlen is könnyen látható: ha egy gömbnek valamelyik B_1 pontján keresztül három páronként merőleges egyenest vezetünk, mely a gömböt az A_1, A_2, A_3 pontban metszi, úgy ezeknek sikja a gömb középpontjától fél oly távolságra van, mint a B_1 ponttól.

10. Azoknak az egyenoldalú tetraédereknek a száma, a melyek két konczentrikus gömb egyikébe be vannak írva, a másik körül vannak írva ∞^4, ∞^3 vagy o, a szerint, a mint a kisebb

gömb sugara kisebb, egyenlő vagy nagyobb a másik gömb sugarának egyharmadánál.

Jelöljük a gömbök közös középpontját C-vel, a gömböket γ és $\varkappa$-val, a γ egyik érintősikjának, α_1-nek, metszését a $\varkappa$ gömbbel k_1-gyel.

Tételezzük föl az első esetet, a melyben a γ gömb sugara a $\varkappa$ sugarának egyharmadánál kisebb és messe az a sik, a mely az α_1-gyel parallel és a C középponttól háromszor oly távolságra van, mint a γ gömb sugara s végre a mely az α_1 sik által a C-től el van választva, a $\varkappa$ gömböt a b_1 körben.

A k_1 körnek egyik pontját A_2-t, a b_1 körnek valamely B_1 pontjával összekötő egyenesre a B_1 pontban merőleges sikot állitunk. Ez a sik a k_1 kört oly két pontban A_3, A_4-ben metszi, hogy a $B_1(A_2A_3A_4)$ triédernek élei páronkint egymásra merőlegesek s így ha a B_1 pontnak diametrális pontja az A_1, akkor az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder egyenoldalú (9).

Minthogy az A_2 pont a k_1 körön, a B_1 pont a b_1 körön ∞^1-félekép vehető fel, azért ∞^2 egyenoldalú tetraéder írható a $\varkappa$ gömbbe és a γ gömb körül, a melynek egyik oldallapja az α_1 sik. Ebből következik, mert az α_1-nek ∞^2 helyzete lehetséges, hogy ∞^4 egyenoldalú tetraéder írható a $\varkappa$-ba és γ körül.

Ha másodszor a γ gömb sugara egyharmada a $\varkappa$ gömb sugarának, akkor az előbbi b_1 kör egy pontba zsugorodik össze és ekkor az $A_2A_3A_4$ háromszögek szabályosak. A k_1 körbe ∞^1 ily szabályos háromszög írható és így a most leszármaztatott $A_1A_2A_3A_4$ tetraéderek maguk is szabályosak és számuk ∞^3.

Ha végre harmadszor a γ gömb sugara a $\varkappa$ gömb sugarának egyharmadánál nagyobb, úgy a b_1 kör sikja nem metszi a $\varkappa$ gömböt, a b_1 kör tehát képzetes s akkor nincsen olyan tetraéder, a mely a γ gömb körül és a $\varkappa$ gömbbe be volna írva.

J e g y z e t. 1. Ha az első esetben a k_1 körön az A_2 pontot szilárdan megtartjuk, a B_1 pontot pedig a b_1 körön változtatjuk, úgy alakilag más és más tetraédert nyerünk. Ezért a ∞^4 egyenoldalú tetraéder közül az a l a k i l a g különböző tetraéderek száma ∞^1; ezek között van e g y egyenszárú lapháromszögekkel, mely akkor származik, ha az A_2B_1 egyenes merőleges a k_1 érintőjére az A_2 pontban.

2. Ha úgy a $\varkappa$, mint a γ gömb sugarát változtatjuk, megkapjuk az összes alakilag különböző tetraédereket; ezeknek száma tehát ∞^3. Ez különben abból is következik, hogy az alakilag különböző háromszögek száma ∞^3.

E tárgyaláshoz csatlakozik még a következő feladat: Két konczentrikus gömb lévén adva, az egyik körül és a másikba oly tetraédert akarunk írni, a melynek lapja egy megadott háromszöghöz hasonló.

Messük a kisebb gömb egyik érintősíkjával a másik gömböt a k_1 körben és írjunk be ebbe az adotthoz hasonló háromszöget $A_2A_3A_4$-et. E háromszög oldalain keresztűl három páronként egymásra merőleges síkot vezetünk és azoknak metszését B_1-et és B'_1-et határozzuk meg, a mely mind ismeretes szerkesztés. Ha e metszőpontok egyike a nagyobb gömbön van és annak diametrális pontja az A_1, akkor az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder a keresett. De ha ama B_1 és B'_1 metszőpontok egyike sincs az illető gömbön, akkor a feladatnak nincs megoldása.

11. Az egyenoldalú tetraédernek mind a négy magassága egyenlő lévén, a magasságon kívül még két adat szükséges annak meghatározásához. Ezért: ∞^2 *alakilag különböző egyenoldalú tetraeder van, melynek magassága egy megadott vonaldarabbal egyenlő.* Hogyan nyerünk áttekintést ezekről? és hogyan szerkesztünk ily tetraédereket?

Az adott A_1H_1 magasságot 3 : 1 viszony szerint osztjuk és a H_1-hez közelebbi osztóponton, valamint magán a H_1-en át az A_1H_1 egyenesre merőleges σ, illetve α_1 síkot állítunk. A σ síknak tetszésszerinti C pontjából az adott A_1 ponton keresztül leírjuk a $\varkappa$ gömböt, a melyet az α_1 sík a k_1 körben metsz. ∞^1 háromszöget írhatunk a k_1 körbe (10), a mely egyik lapját képezi a keresett egyenoldalú tetraédernek, a melynek tehát magassága az A_1H_1. (Csak a H_1-nek szimmetrális pontját a k_1 kör középpontjára egy a k_1 körbe írandó háromszög magasságpontjának kell tekinteni, a háromszög egyik csúcsát a k_1-en tetszésszerint felvenni és ekkor a FEUERBACH-kör segélyével a háromszög hiányzó két szögpontja szerkeszthető.)

Ha még a C pontot azon egyenesen változtatjuk, a melyben az A_1H_1C sík a σ síkot metszi, akkor megkapjuk mindazokat az alakilag különböző egyenoldalú tetraédereket, számra ∞^2-t, a melynek magassága az A_1H_1 vonaldarab.

12. *Ha valamely tetraédernek mind a négy magassága egyenlő, akkor az egyenoldalú.*

Minden tetraéder körül él szerint egy parallelepipedon írható. Ha az $A_1A_2A_3A_4$ a felvett tetraéder, akkor a körülírt parallelepipedonnak e csúcsokkal szemben fekvő csúcsait jelöljük $B_1B_2B_3B_4$-gyel.

Tekintve a parallelepipedont, az A_3 és az A_4 csúcs távolsága a szemben fekvő tetraéderlaptól kétakkora, mint a B_3, illetve B_4 távolsága ugyanettől a laptól. De az A_3 és A_4 távolsága az illető tetraéderlaptól a föltevés szerint egyenlő: ezért a B_3 és B_4 pont is egyenlő távolságra van az $A_1A_2A_4$, illetve az $A_1A_2A_3$ tetraéderlaptól. Azonban a B_3, B_4 pontoknak távolsága az A_1A_2 éltől, a melylyel ugyanegy parallelepipedonlapban vannak, egyenlő, ezért az $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ tetraéderlapok az $A_1A_2B_3B_4$ parallelepipedonlaphoz egyenlő szög alatt hajlanak.

Ugyanúgy kimutatható, mert az A_1 és A_2 csúcsból kiinduló tetraédermagasságok egyenlők, hogy az $A_3A_4A_1$, $A_3A_4A_2$ tetraéderlapok is egyenlő szögek alatt hajlanak az $A_3A_4B_1B_2$ parallelepipedonlaphoz, vagy a mi ugyanaz, a A_1A_2, A_3A_4 élpárral parallel síkhoz.

Ha tehát az n egyenes az A_1A_2, A_3A_4 élpárnak merőleges metszője, úgy az $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ tetraéderlapok, valamint az $A_3A_4A_1$, $A_3A_4A_2$ tetraéderlapok az n egyeneshez is egyenlő szögek alatt hajlanak és ezért az n egyenes az A_1A_2, A_3A_4 élpárt felezi a metszőpontokban. Ebből pedig az következik, hogy az A_1A_3, A_2A_4 valamint az A_1A_4, A_2A_3 szemben fekvő élek egyenlők, mert az n körül $180°$ alatt elforgatva az egyik él a szemben fekvőbe jut.

Vizsgálódásunk eddigi eredménye így fejezhető ki: Ha az

$A_1A_2A_3A_4$ tetraédernek az A_1, A_2 csúcsokból húzható magasságai egyenlők és az A_3, A_4 csúcsokból kiinduló magasságai szintén egyenlők (bár az előbbiektől különbözők is lehetnek), akkor az A_1A_2, A_3A_4 élpártól eltekintve a másik két szemben fekvő élpár külön-külön egyenlő.

Ha most végre feltételezzük, hogy a tetraédernek bármely két magassága egyenlő, akkor bármely két szemben fekvő élpár is egyenlő, tehát a tetraéder egyenoldalú.

13. Az előbbi tételt még a következőképen is bebizonyíthatjuk.

Minthogy a tetraéder magasságai egyenlők, azért lapjainak területei is egyenlők s mert két-két lapnak közös oldala van, azért két-két tetraéderlapnak, mint háromszögnek, a közös élhez tartozó magassága is egyenlő.

Ha tehát az egyenlő magassággal biró tetraédernek egyik lapháromszöge az $A_1A_2A_3$, akkor az A_4 csúcs annak a három forgáshengernek egyik metszőpontja, a melynek tengelye az $A_1A_2A_3$ háromszög egy-egy oldala és melynek felületén rajta van az illető háromszögoldallal szemben fekvő csúcs.

Két-két ily forgáshenger egymást egy negyedrendű térgörbében metszi, a mely szimmetrikus a háromszög síkjára s így derékszögű képe e síkon oly egyenoldalú hiperbola, a mely az 1. ábrában az $A^1A^2A^3$ háromszög szögpontjain megy keresztül. De a háromszög körül írt egyenoldalú hiperbola, mint ismeretes, a háromszög magasságpontján is átmegy, tehát a három hiperbola, mely az előbbi hengerpárok metszésének derékszögű képe az $A_1A_2A_3$ síkjára: az $A^1A^2A^3$ háromszögnek magasságpontján A'_4-en megy keresztül. Ez az A'_4 pont tehát derékszögű képe a keresett tetraéder negyedik csúcsának, A_4-nek (vagy $\bar{A}_4$-nek), a mely az $A_1A_2A_3$ háromszög fölé (vagy alá) állítható akképen, hogy a négy magassága egyenlő.

Ismervén az A_4 derékszögű képét, az $A_1A_2A_4$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_1A_4$ oldallapokat az $A_1A_2A_3$ síkjába boríthatjuk, mert tudjuk, hogy a kifelé borított háromszögnek A_4 csúcsa, az A'_4 pontból az $A_1A_2A_3$ háromszög oldalaira bocsátott merőlegesekben lesz, oly távolságra az oldalaktól, mint annak magasságai. Az A_4 csúcs tehát a leborításban az A^1, A^2, A^3 pontokba jut, a mi azt mutatja, hogy a tetraéder lapjai kongruensek.

14. *Az egyenoldalú tetraéder magasságai minden éltengelyhez egyenlő szög alatt hajlanak és a tetraéder középpontjától egyenlő távolságra vannak.*

Az egyenoldalú tetraéder bármelyik lapja valamelyik éltengely körül egy másik lapba forgatható. A két lappal együtt a hozzájuk tartozó, tehát homolog pontokban reájuk merőlegesen álló két magasság is ugyan a körül a tengely körül egymásba forgatható. E szerint bármelyik két magasság bármelyik tengelyhez egyenlő szög alatt hajlik és a tengelyen levő tetraéderközépponttól egyenlő távolságra van s ezért a középpont mind a négy magasságtól egyenlő távolságra lesz.

A szögekre vonatkozó e viszonylatból következik, hogy ha az egyenoldalú tetraéder középpontján keresztül a tetraéder magasságaihoz paralleleket vezetünk, akkor ezek bármelyikének tükörképe az éltengelyek triéderének lapjaira (vagy éleire) vonatkozólag, a másik hárommal parallel lesz.

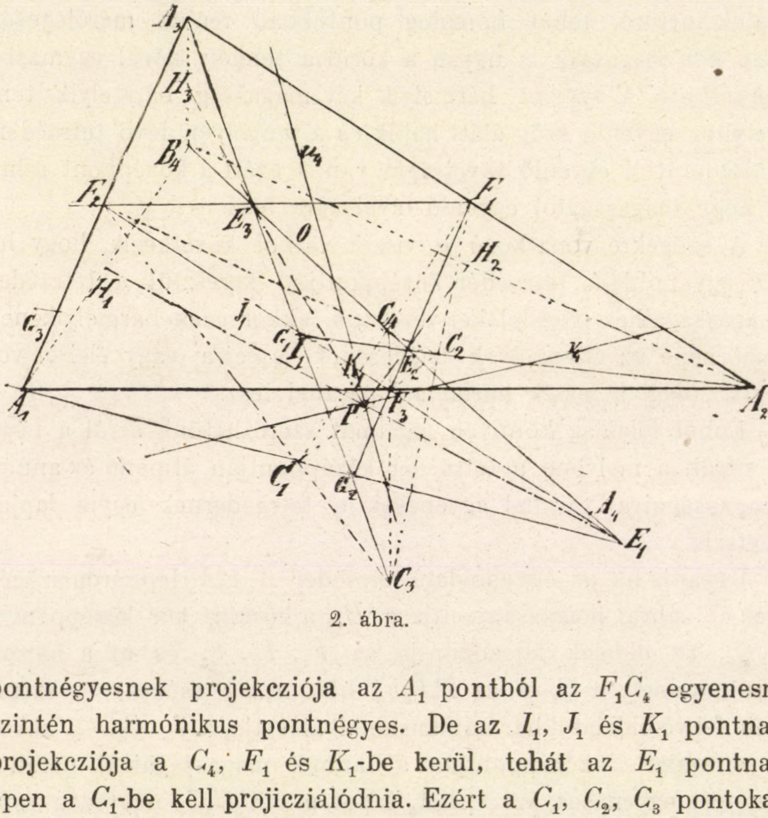
Ebből folyólag könnyen fogalmat szerezhetünk arról a négy pontról, a melyben a tetraéder középpontján átmenö és annak magasságaival parallel egyenesek a tetraédernek egyik lapját metszik.

Ugyanis ha az egyenoldalú tetraéder $A_1A_2A_3$ lapháromszögének (2. ábra) magasságpontja a B'_4, a körülírt kör középpontja a C_4, az oldalak felezőpontja az F_1, F_2, F_3 és az a három pont, a mely a C_4-et az $F_1F_2F_3$ háromszög csúcsa- és szemben fekvő oldalától harmónikusan elválasztja, a C_1, C_2, C_3, akkor a tetraéder C középpontján át annak magasságaival parallel vezetett egyenesek az $A_1A_2A_3$ lapot a $C_1C_2C_3C_4$ négyszög csúcsaiban metszik, mert a $C\,(C_1C_2C_3C_4)$ négyélnek átlósharomélе a triéder éltengelyeinek triédere $C\,(F_1F_2F_3)$, és annak CC_4 éle az $A_1A_2A_3$ laphoz tartozó magassággal parallel.

Lássuk, hogyan szerkeszthetők a C_1, C_2, C_3 pontok egyszerűen az $A_1A_2A_3$ háromszögből!

Legyen a H_1, H_2, H_3 pont az $A_1A_2A_3$ háromszöghöz tartozó magasságok fölső részeinek, $A_1B'_4$, $A_2B'_4$, $A_3B'_4$-nek felezőpontja; az E_1, E_2, E_3 az a három pont, a melyben a B'_4C_4 egyenes az $F_1F_2F_3$ háromszög oldalait metszi, végre R_∞ az $A_1H_1B'_4$ magasságnak végtelen távoli pontja.

Minthogy az $A_1H_1B'_4R_\infty$ pontnégyes harmónikus, annak projekcziója $I_1J_1E_1K_1$ a C_4 pontból az F_2F_3 egyenesre és az utóbbi



2. ábra.

pontnégyesnek projekcziója az A_1 pontból az F_1C_4 egyenesre szintén harmónikus pontnégyes. De az I_1, J_1 és K_1 pontnak projekcziója a C_4, F_1 és K_1-be kerül, tehát az E_1 pontnak épen a C_1-be kell projicziálódnia. Ezért a C_1, C_2, C_3 pontokat az $F_1F_2F_3$ háromszög F_1C_4, F_2C_4, F_3C_4 magasságain megkapjuk, ha az A_1, A_2, A_3 pontokat megfelelőleg az E_1, E_2, E_3 pontokból azokra projicziáljuk. A nyert pontok a C_4-gyel együtt a $C_1C_2C_3C_4$ négyszögnek szögpontjai, a melynek átlósháromszöge az $F_1F_2F_3$.

Minthogy a $C_4F_1C_1K_1$ pontnégyes harmónikus, annak projekcziója $E_2F_1G_2F_3$ az E_1 pontból az $F_1F_2F_3$ háromszög F_1F_3 oldalára szintén harmónikus. Az $A_1C_1E_1$, $A_2C_2E_2$, $A_3C_3E_3$ egyenesek tehát párosával az $F_1F_2F_3$ háromszög oldalainak azokban a G_1, G_2, G_3 pontjaiban találkoznak, a melyek az E_1, E_2, E_3 pontokat a csúcsoktól harmónikusan elválasztják. Azaz az $F_1F_2F_3$ háromszögbe beirt és a $C_1C_2C_3$ háromszög körül írt $G_1G_2G_3$ háromoldal az $E_1E_2E_3$ egyenest egy úgy a $C_1C_2C_3C_4$ négyszög, mint az $A_1A_2A_3B'_4$ négyszög körül írt négyoldallá $G_1G_2G_3E_1E_2E_3$ egészíti ki, a melynek átlósháromszöge az $F_1F_2F_3$.

15. Az $E_1E_2E_3$ pontoknak még egy tulajdonságát akarjuk itt kimutatni, a mely az $A_1A_2A_3$ háromszög kilenczpontos körével kapcsolatos.

A H_1F_1, H_2F_2, H_3F_3 egyenesek az $A_1A_2A_3$ háromszög kilenczpontos körének átmérői s így annak O középpontján mennek keresztül, a mely, mint tudjuk, a $B'_4C_4E_1E_2E_3$ egyenesen van.

Ha most a H_1E_1, H_2E_2 egyenesek metszését P-vel jelöljük, akkor ez a P pont, mert a $H_1F_1F_3F_2H_2P$ hatszögnek szemben fekvő oldalai egymást az OE_2E_1 pontokban metszik, ama hatszög öt szögpontján átmenő körön, tehát az $A_1A_2A_3$ háromszög kilenczpontos körén van. Ugyanúgy a H_2E_2, H_3E_3 egyenespárnak metszése a H_2E_2-nek második metszése e körrel, tudniillik a P pont, azaz H_1E_1, H_2E_2, H_3E_3 egyenesek a kilenczpontos körön találkoznak. A talált eredményt, mint a háromszög kilenczpontos körének tulajdonságát, a következő tételbe foglaljuk össze, a melyben a háromszögmagasság felső része alatt, a magasságnak a csúcs és magasságponttól határolt vonaldarabját értjük:

A háromszög oldalainak felezőpontjai egy új háromszögnek csúcsait képezik; mindkét háromszög magasságpontján átmenő egyenes ez utóbbi háromszögnek oldalait három pontban metszi. Ha az egyes oldalakon levő metszőpontokat az eredeti háromszögnek ez oldalakra merőlegesen álló magasságai felső részének felezőpontjával összekötjük, úgy a három összekötő egyenes az eredeti háromszög kilenczpontos körének egy tizedik pontján megy keresztül.

Ha az alakzatban előforduló pontokat betűkkel jelöljük, akkor a tételt ekkép fejezhetjük ki (l. a. 2. ábrát):

Ha az $A_1A_2A_3$ háromszög oldalainak felezőpontjai az $F_1F_2F_3$ háromszögnek csúcsai; a két háromszögnek magasságpontja rendre B'_4 és C_4; a B'_4C_4 egyenesnek metszése az utóbbi háromszög F_2F_3, F_3F_1 és F_1F_2 oldalával az E_1, E_2 és E_3 pont; az $A_1B'_4$, $A_2B'_4$ és $A_3B'_4$ magasságrésznek felezőpontja a H_1, H_2 és H_3 pont, akkor az E_1H_1, E_2H_2 és E_3H_3 egyenes egymást egy P pontban metszi, a mely az $A_1A_2A_3$ háromszög kilenczpontos körének $F_1F_2F_3H_1H_2H_3$...-nak egy új pontja.

Ezt az új pontot *a háromszög kilenczpontos köre tizedik pontjának* lehet nevezni.

16. *Az egyenoldalú tetraéder magasságai egy oly hiperboloidon vannak, a melynek főtengelyei a tetraédernek éltengelyei.*

Már az általános tetraédernek magasságai is egy hiperboloidon vannak, azaz hiperboloidikus fekvésűek, így tehát a tételnek csak a második részét kell igazolnunk.

Az egyenoldalú tetraéder magasságai, valamint a lapháromszögek magasságpontjaiban a lapokra emelt merőlegesek, tehát a magasságokkal parallelek, nemcsak egyenlő távolságra vannak a tetraéder középpontjától és egyenlő szögek alatt hajlanak annak éltengelyeihez, hanem mindegyik magasság és a vele parallel egyenes még a tetraéder középpontjával egy síkban is van, a miből a tétel második része igazolva van.

Ugyancsak belátható az, ha a tetraédert az élei szerint körülírt derékszögű parallelepipedonnal hozzuk kapcsolatba és az átlók egyik végpontjából a tetraéder magasságokat, a másikból a vele parallel egyeneseket elképzeljük, a melyek tehát az egyes tetraéderlapokhoz, aztán a tetraéder éltengelyeihez egyenlő szögek alatt hajlanak és a középponttól egyenlő távolságra vannak.

17. *A tetraéder magasságain átmenő hiperboloid (a magasságok hiperboloidja) egyenoldalú.*

Egyenoldalú a hiperboloid akkor, ha egyik alkotójára merőlegesen álló két alkotó egymásra is merőleges.

A tetraéder magasságainak hiperboloidja a tetraéder lapháromszögét oly kúpszeletben metszi, a mely ennek csúcsain és magasságpontján megy keresztül, tehát egyenoldalú hiperbola. Ennek végtelen távoli pontjain keresztül alkotók vezethetők a hiperboloidon, a melyek e laphoz tartozó magasságra és egymásra is merőlegesek, tehát a hiperboloid egyenoldalú. E tulajdonság nemcsak az egyenoldalú, hanem az általános tetraéderre is érvényes.

18. *Az egyenoldalú tetraéder magasságainak hiperboloidja a tetraéder egyes lapháromszögét oly egyenoldalú hiperbolában metszi, a melynek középpontja a lapháromszög kilenczpontos körének tizedik pontja.*

Tekintsük a 2. ábrában az $A_1A_2A_3$ háromszöget az egyenoldalú tetraéder egyik lapjának. A magasságok hiperboloidjának metszése e lappal az $A_1A_2A_3A'_4B'_4$ pontokon átmenő egyenoldalú hiperbola. A hiperboloid aszimptótikus kúpja az $A_1A_2A_3$ lapot e hiperbolával közös aszimptótával biró hiperbolában metszi, a mely a $C_1C_2C_3C_4$ négyszög körül van írva, mert a $C(C_1C_2C_3C_4)$ négyélnek élei parallelek a tetraéder magasságaival (14). Az ily két hiperbola konjugált átmérőinek rendszere közös lévén, az első hiperbola $A_1B'_4$ húrja felezőpontjának, H_1-nek, összekötő egyenese a második hiperbola ezzel parallel C_1C_4 húrja felezőpontjával: a H_1E_1 egyenes a két hiperbola közös átmérője.

Ugyanígy a H_2E_2 és H_3E_3 egyenes is átmérője a két hiperbolának, tehát ezeknek P metszőpontja, a mely (15) az $A_1A_2A_3$ háromszög kilenczpontos körének tizedik pontja, a két hiperbola közös középpontja. Könnyen belátható, hogy a $C_1C_2C_3C_4$ négyszög körül írt hiperbola érintői e négyszög csúcsaiban, az $E_1E_2E_3G_1G_2G_3$ négyoldalnak oldalai.

19. *Az egyenoldalú tetraéder magasságainak hiperboloidja a tetraéder lapjait négy egyenoldalú hiperbolában metszi, a a melynek aszimptótái egy új hiperboloidon vannak; a két hiperboloidnak aszimptótikus kúpja közös.*

A tetraéder magasságainak hiperboloidja, H, a tetraéderlapokat kongruens hiperbolában metszi. Az $A_1A_2A_3$ lapban fekvő

h_4 hiperbola $u_4 v_4$ aszimptótái az $A_1A_2A_3$ háromszög oldalait oly pontpárokban metszik, a melyeknek távolsága az oldalak felezőpontjától akkora, mint a hiperbola P középpontjának távolsága az illető felezőpontoktól (2. ábra).

Egy másik tetraéderlapban, pl. az $A_2A_3A_4$-ben levő h_1 hiperbola v_1, u_1 aszimptótái a közös A_2A_3 élet szintén abban a pontpárban metszik, mint az u_4, illetve v_4

E szerint az u_4 aszimptótát a másik három tetraéderlapban fekvő hiperboláknak egy-egy aszimptótája v_1, v_2 és v_3 az $A_1A_2A_3$ háromszög A_2A_3, A_3A_1 és A_1A_2 oldalain, a v_4 aszimptóta pedig a P középpontban metszi. A négy hiperbolának nyolcz aszimptótája, $u_1 \ldots v_4$, tehát oly helyzetű, hogy oly négynek, mely páronként nem metszi egymást, a másik négy a szelője, azaz a nyolcz aszimptóta egy hiperboloidon, K-n, van.

Minthogy az $u_1 \ldots v_4$ aszimptóták a H hiperboloid alkotóival parallelek, a K és H hiperboloidnak aszimptótikus kúpja kongruens. S végre, mert úgy az u_i, mint a v_i aszimptóták, a tetraéder C középpontjától egyenlő távolságra vannak: a C pont a K hiperboloidnak is középpontja, tehát a két hiperboloidnak aszimptótikus kúpja közös.

A tetraéder élei szerint körülírható $A_1 \ldots B_4$ parallelepipedonra tekintve szintén belátható, hogy a C a K hiperboloidnak középpontja. Ugyanis a C középpontra szimmetrikus $A_1A_2A_3A_4$ és $B_1B_2B_3B_4$ tetraédernek magasságai a H hiperboloidon vannak. Ez a tetraéderlapokat nyolcz egyenoldalú hiperbolában metszi, a melynek tizenhat aszimptótája páronként parallel, a C-re vonatkozólag szimmetrikus és úgy az első, mint a második tetraéder lapjain levő hiperbolák aszimptótái ugyanegy K hiperboloidon vannak, a melynek középpontja a C pont.

Ha végre az $A_1A_2A_3A_4$ tetraédernek minden lapjára merőlegeseket állítunk azokban a pontokban, a melyekben az $u_i v_i$ aszimptóták a $C_4B'_4$ egyenest metszik, egy új, az $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ tetraéderpárral hasonló és a C pontra hasonló fekvésű tetraéderpárnak magasságait nyerjük, a melyre nézve a magasságok hiperboloidja a talált K hiperboloid.

20. Vissza akarunk térni még egyszer az 5. pontban említett egyoldalú tetraéderhez, a melynek két szemben fekvő élnél levő lapszöge derékszög s melyet ezért *derékszögű* egyenoldalú tetraédernek nevezhetünk. Azt láttuk ott, hogy az ily tetraédernek lapját a derékszögű háromszögből akkép származtatjuk, hogy az átfogóhoz tartozó magasságot az $1 : \sqrt{2}$ viszony szerint nagyobbítjuk. Az ilyen háromszögnek magasságpontja mindig felezi a megnagyobbított magasságot.

Ugyanis, ha ABC az a háromszög és az AB volt átfogóhoz tartozó magasságnak talppontja a D, magasságpontja a H, akkor a származtatásnál fogva egyrészt $2AD.DB = DC^2$, másrészt, mint minden háromszögnél, $2AD.DB = 2DH.DC$; tehát $DC = 2DH$, azaz a H pont felezi a CD magasságot. Így tehát: *a derékszögű egyenoldalú tetraéder minden lapjának magasságpontja felezi a derékszögnél levő élhez tartozó magasságot.*

Erre állapítva is könnyen szerkeszthető az ily tetraédernek lapja. Ha a CD vonaldarabnak felezőpontja a H, és a C ponton keresztül egy tetszésszerinti egyenest, a H potból pedig erre merőlegest egyenest bocsátunk, úgy a CD-re a D pontban merőlegesen álló egyenes az előbbi kettőt oly A és B pontban metszi, hogy ABC a kívánt háromszög.

Olyan ABC háromszöget, a melynek magasságpontja az egyik oldalhoz (AB-hez) tartozó magasságot felezi, ez oldalon fekvő egyik szögből, A vagy B-ből, valamint az oldallal szemben fekvő szögből, C-ből, szintén szerkeszthetünk.

Ugyanis, ha az adott tetszésszerinti A hegyesszög egyik szárának valamelyik C pontjából a másik szárra bocsátott merőlegesnek talppontja a D, a CD-nek felezőpontja a H, akkor az AH egyenesre a C pontból bocsátott merőleges az A szögnek másik szárát, AD-t, a B pontban úgy metszi, hogy ABC már a kívánt háromszög.

Ha másrészt C az adott szög, akkor a háromszöget ekkép kell szerkesztenünk: a szög egyik szárának valamelyik pontjából a C-n keresztül kört írunk le, mely ezt a szárat az A pontban, a másikat az E pontban vágja; ugyane kör az AE-vel parallel és a C pontnak az AE-re vonatkozó tükörképén átmenő egyenest a D és D_1 pontban találja; végre az AD és AD_1 egyenes a CE-t a B és B_1 pontban úgy metszi, hogy az ABC és AB_1C háromszög már a keresett.

Ugyanis az ABC háromszögnek magasságpontja, mint a CD és az AE magasságok metszése, felezi a CD magasságot. Ugyanily tulajdonsága van az AB_1C háromszögnek is. De a talált két háromszög hasonló, mert a $CAB\sphericalangle$ és a $CAB_1\sphericalangle$ együtt a C szöget két derékszöggé egészíti ki s ezért a C szög is, mikép az A vagy B szög, csak egy megoldását adja az ABC háromszögnek, azaz a derékszögű egyenoldalú tetraéder lapjának, azzal a külömbséggel, hogy míg az A vagy B szög határértékei $0°$ és $90°$, addig a C szögnek olyannak kell lenni, hogy $\operatorname{tg} C = 2\sqrt{2}$ az alsó és $90°$ fölső határ.

Tekintve, hogy a derékszögű egyenoldalú tetraéder minden csúcsánál lévő triéder derékszögű és oldalainak összege két derékszög: a tetraéderrel az ily triéder is meg van határozva. Más szóval: *Ha egy derékszögű triéder oldalainak összege két derékszög, akkor annak bármelyik oldalából, az átfogóból vagy a befogóból, a másik két oldal egyszerűen meghatározható.* E végből oly háromszöget kell szerkesztenünk, melynek egyik szöge az adott triéderoldal és melynek magasságpontja a háromszög egyik magasságát felezi; a háromszögnek másik két szöge a triédernek másik oldala. És pedig: ha az adott triéderoldal befogó, akkor a háromszög magasságpontjának az adott szöget alkotó oldalak egyikéhez tartozó magasságot kell feleznie, ha ellenben az adott triéderoldal átfogó, a magasságpontnak a szög csúcsából kiinduló magasságot kell feleznie.

Klug Lipót.

FOLYTONOS ÉS KORLÁTOS INGADOZÁSÚ FÜGGVÉNY FOURIER-FÉLE EGYÜTTHATÓIRÓL.

A $(0, 2\pi)$ közben értelmezett, korlátos ingadozású $f(x)$ függvény a_n, b_n Fourier-féle együtthatóiról tudvalevő, hogy

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

vagy másképpen kifejezve, hogy az na_n és nb_n értékek összességükben korlátosak. Másrészt azonban nem áll okvetlenül, hogy

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

vagyis az

$$na_n \to 0, \quad nb_n \to 0$$

egyenletek nem mindig érvényesek.

Néhány ismert példa:

1. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$; $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$.

2. $f(x) = \pm \frac{\pi}{4}$ a szerint, a mint $x \lesseqgtr \pi$; $a_n = 0$, $b_{2k} = 0$, $b_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$.

3. $f(x) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$, ha $x < \frac{\pi}{4}$ vagy $> \frac{5\pi}{4}$, és $f(x) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$, ha $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$; $na_n = 0, 1, 0, 1, 0, -1, 0, -1$; $nb_n = 0, -1, 0, 1, 0, 1, 0, -1$ a szerint, a mint $n \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \pmod 8$.

A szakadási helyeken a függvényérték tetszés szerint választható. Az 1. és 2. alatti esetekben $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$, a 3. alattiban $a_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$. Pontosabban, az $\{na_n\}$ és $\{nb_n\}$ sorozatok torlódási értékei a következők: 1) 0, illetőleg 1; 2) 0, illetőleg 0 és 1; 3) mindkettőé -1, 0 és 1.

Mind a három függvény szakadásos, az első mindenesetre csak abban az értelemben, hogy $f^+(0) \neq f^-(2\pi)$, vagyis $f(x)$ nem egészíthető ki folytonos, 2π szerint periodusos függvénnyé. Közelfekvő az a föltevés, hogy az $a_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$ egyenlőtlenségeket a szakadási helyek okozzák. Annál is inkább, mert minden korlátos ingadozású függvénynek majdnem mindenütt, t. i. legfeljebb egy Lebesgue szerint 0 mértékű halmaz kivételével, véges differencziálhányadosa van, mely, mint az x változó függvénye, Lebesgue szerint integrálható és Fourier-féle együtthatói 0 felé tartanak, a miből a differencziálhányados bármely integrálfüggvényének Fourier-féle együtthatóira az $o\left(\frac{1}{n}\right)$ nagysági rend adódik. Ezzel szemben viszont megfontolandó, hogy a korlátos ingadozású függvény, még ha folytonos is, differencziálhányadosának nem mindig integrálfüggvénye; léteznek ugyanis olyan korlátos ingadozású, folytonos és *nem állandó* függvények, melyeknek differencziálhányadosa csaknem mindenütt 0.

Az alábbiakban egyszerű példával *czáfolom meg azt a föltevést, mely szerint minden a* $(0, 2\pi)$ *közben értelmezett, korlátos ingadozású és folytonos* $f(x)$ *függvényre nézve, melyre még* $f(0) = f(2\pi)$, *a* Fourier-*féle együtthatók nagysági rendje* $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Annak daczára, hogy a tárgyalt kérdést, melyre figyelmemet más irányú vizsgálataim terelték, régen elintézettnek gondoltam, nem sikerült az irodalomban idevágó példára bukkannom.

Az $f(x)$ függvényt így értelmezem:

$$f(x) = -x + \lim_{m\to\infty} \int_0^x (1+\cos x)(1+\cos 4x)\ldots(1+\cos 4^{m-1}x)\,dx.$$

A jobboldalon álló határérték létezése a következő meggondolásból adódik. Az integráljel alatt álló $\tau_m(x)$ nem-negativ koszinuszpolinom rendszáma $1+4+\cdots+4^{m-1} = \frac{4^m-1}{3}$; τ_m minden együtthatója $\geqq 0$ és $\leqq 1$. A τ_m-ről τ_{m+1}-re való átmenetnél az első új, el nem tűnő tag indexe

$$4^m - (1+4+\cdots+4^{m-1}) = \frac{2.4^m+1}{3} > \frac{4^m-1}{3},$$

azaz magasabb $\tau_m(x)$ rendszámánál; τ_m tagjai tehát τ_{m+1}-ben változatlanul megmaradnak, vagy más szóval $\tau_m(x)$ részletösszege $\tau_{m+1}(x)$-nek. Továbbá azt állítom, hogy az új, el nem tűnő tagok száma 3^m. Jelöljük ugyanis τ_m el nem tűnő tagjainak számát a_m-mel; mivel az új tagok $\tau_m(x) = 1+\cdots$-nek $\cos 4^m x$-szel való szorzásából keletkeznek és $1.\cos 4^m x$ egy új tagot, a többi szorzat pedig két-két tagot szolgáltat, azért az új tagok száma $2a_m - 1$. Azaz

$$a_{m+1} = 3a_m - 1,$$

tehát

$$a_{m+1} - a_m = 3(a_m - a_{m-1}),$$

és mivel még $a_2 - a_1 = 3$, azért általánosan az új tagok száma

$$a_{m+1} - a_m = 3^m,$$

miként azt állítottam.

Integráczió után az új tagok szinuszpolinomot szolgáltatnak, melynek együtthatói >0 és $\leqq$ az illető index recziprok értékénél, tehát még inkább $\leqq$ mint a legkisebb index recziprok értéke, azaz mint

$$\frac{3}{2.4^m+1} < \frac{3}{2.4^m}.$$

Ennélfogva

$$\left|\int_0^x \tau_{m+k}(x)\,dx - \int_0^x \tau_m(x)\,dx\right| < \frac{3^{m+1}}{2.4^m}\left(1+\frac{3}{4}+\cdots\right) = 6\left(\frac{3}{4}\right)^m \to 0,$$

vagyis az

$$\int_0^x \tau_m(x)\,dx \quad (m=1,2,\ldots)$$

függvények sorozata egy határfüggvény felé tart és pedig egyenletesen. A határfüggvény és ezzel együtt $f(x)$ is az egyenletes összetartás folytán mindenütt folytonos. Minthogy továbbá minden m-re

$$\int_x^{x+2\pi} \tau_m(x)\,dx = \int_x^{x+2\pi} (1+\cdots)\,dx = 2\pi,$$

azért $f(x) = f(x+2\pi)$, azaz $f(x)$ 2π szerint periodusos. Végül $\tau_m(x)$ nem-negativ, tehát a

$$\int_0^x \tau_m(x)\,dx$$

függvény m minden értékénél monoton; monoton ennélfogva határfüggvénye is és így $f(x)$ mint két monoton függvény öszszege bármely véges közben korlátos ingadozású.

Összefoglalva: *$f(x)$ mindenütt folytonos, 2π szerint periodusos és minden véges közben, tehát a* (0, 2π) *közben is korlátos ingadozású.*

A mi már most $f(x)$ Fourier-sorát illeti, abból a körülményből, hogy $\tau_m(x)$ a $\tau_{m+1}(x)$-nek részletösszege és az $f(x)$-et értelmező határátmenet egyenletes összetartásából következik, hogy a

$$-x + \int_0^x \tau_m(x)\,dx$$

közelitő szinuszpolinomok a Fourier-féle sornak is részletösszegei. Minthogy továbbá $n = 4^m$-re a $\tau_{m+1}(x)$ polinomban $\cos nx$ együtthatója 1, ennélfogva integráczió után, azaz a Fourier-féle sorban n ezen speciális értékénél $\sin nx$ együtthatója $\frac{1}{n}$. *Azaz 4-nek minden hatványára $nb_n = 1$, tehát semmi esetre sem lehet $nb_n \to 0$.* Ezzel a fenti föltevést megczáfoltuk.

Megemlítem még, hogy példánkban az $\{nb_n\}$ sorozat összestorlódási értékeit az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ mértani sorozat elemei és annak 0 határértéke szolgáltatják, mint azt a τ_m polinomok együtthatóinak alaposabb megszemlélése mutatja. Minthogy továbbá FOURIER-sorunk szinuszsor, azért minden n-re $na_n=0$ és így $na_n \rightarrow 0$. Olyan példát, melyben koszinusos tagok is föllépnek és a melyben sem $na_n \rightarrow 0$, sem $nb_n \rightarrow 0$, többek közt előző példánkból nyerhetünk azáltal, hogy az integráljel alatt álló szorzat minden második tényezőjében $\cos 4^k x$ helyébe $\sin 4^k x$-et teszünk. Ha pedig

$$f(x) = -x + \lim_{m \to \infty} \int_0^x (1 + a_0 \cos x)(1 + a_1 \cos 4x) \ldots (1 + a_{m-1} \cos 4^{m-1} x)\, dx,$$

a hol az a-k a $(-1, 1)$ közben mindenütt sűrűen feküsznek, akkor ugyanezen közben ugyancsak mindenütt sűrűen feküsznek az nb_n értékek is; ha még a szorzatban a koszinuszt és szinuszt váltakoztatjuk és ha úgy a páros, mint a páratlan rendű a-k mindenütt sűrűen oszlanak meg a $(-1, 1)$ közben, akkor ugyanez áll úgy az na_n, mint az nb_n értékekre. Világos, hogy példánk még sokféleképpen változtatható; az $1, 4, \ldots, 4^{m-1}, \ldots$ sorozat alkalmazása sem lényeges; helyette bármely más olyan pozitiv egész számokból álló $\{\lambda_m\}$ sorozat felhasználható, melyben λ_m az előző tagok összegéhez viszonyítva elég gyorsan nő, például nagyobb, mint az összeg 3-szorosa.

Végül még fölvetem a következő két kérdést, melyek már nehezebben hozzáférhetőnek látszanak: Létezik-e olyan folytonos, 2π szerint periodusos, korlátos ingadozású függvény, melyre az $\{na_n\}$ és $\{nb_n\}$ sorozatok összetartók és a két határérték közül legalább az egyik nem 0? Létezik-e olyan korlátos ingadozású, de nem folytonos függvény, melyre $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$? A két kérdés egymással szorosan összefügg.

Riesz Frigyes.

ADOTT NULLAPONTOKKAL ÉS PÓLUSOKKAL BIRÓ FÜGGVÉNYEKRŐL.

Legyen $f(z)$ a z komplex változónak a $|z| = r$ körön belül oly meromorph függvénye, a mely a kör kerületén reguláris, a kör középpontjában nullától különböző A értéket vesz föl, a kör belsejében az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pontokban elsőrendűen eltűnik, másutt el nem tűnik, a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ pontokban elsőrendűen végtelenné válik és ezen az m ponton kívül a $|z| = r$ kör belsejében mindenütt véges marad

$$\left(|a_i| < r \ (i = 1, 2, \ldots, n), \quad |\beta_j| < r \ (j = 1, 2, \ldots, m)\right);$$

jelöljük továbbá az

$$R = |f(re^{i\varphi})| = F(\varphi) \tag{1}$$

polárkoordinátákban megadott görbét G-vel, az

$$R = R_0 = |A| \, r^{n-m} \frac{|\beta_1 . \beta_2 \ldots \beta_m|}{|a_1 . a_2 \ldots a_n|} \tag{2}$$

kört K-val, akkor a következő tételeket mondhatjuk ki:

1. A G görbének nem lehetnek az összes pontjai a K körön belül, sem pedig azon kívül.

2. A G görbe kerülete nem lehet kisebb, mint a K kör kerülete.

3. A G görbe által bezárt terület nem lehet kisebb, mint a K kör területe.

4. A G görbének csak akkor nincs a K körön kívül vagy azon belül pontja, kerülete csak akkor egyenlő a K kör kerületével és területe csak akkor egyenlő a K kör területével, ha a G görbe a K körrel összeesik. Ez az eset akkor és csakis akkor állhat elő, ha

$$f(z) = f_0(z) = A . r^{2n-2m} . \frac{|\beta_1 . \beta_2 \ldots \beta_m|^2}{|a_1 . a_2 \ldots a_n|^2} . \frac{z - a_1}{z - \bar{a}_1} . \frac{z - a_2}{z - \bar{a}_2} \ldots \frac{z - a_n}{z - \bar{a}_n} .$$

$$. \frac{z - \bar{\beta}_1}{z - \beta_1} . \frac{z - \bar{\beta}_2}{z - \beta_2} \ldots \frac{z - \bar{\beta}_m}{z - \beta_m}, \tag{3}$$

a hol az $\bar{a}_i$, ill. a $\bar{\beta}_j$ az a_i, ill. a β_j pontnak a $|z|=r$ körre vonatkozó tükörképét jelenti, azaz

$$\bar{a}_i = \frac{r^2 a_i}{|a_i|^2},\quad \bar{\beta}_j = \frac{r^2 \beta_j}{|\beta_j|^2} \quad (i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,m). \tag{4}$$

A három első tételt analytikailag a következő három egyenlőtlenség fejezi ki:

$$\max.|f(re^{i\varphi})| \geqq |A|\cdot r^{n-m}\cdot \frac{|\beta_1.\beta_2\dots\beta_m|}{|a_1.a_2\dots a_n|} = R_0 \geqq \min|f(re^{i\varphi})|, \tag{5}$$

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2+R'^2}\,d\varphi \geqq \int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi \geqq 2\pi R_0, \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi}|^2\,d\varphi \geqq \pi R_0^2. \tag{7}$$

A negyedik tétel pedig azt fejezi ki, hogy e három reláció egyikében akkor és csakis akkor lép föl egyenlőség, ha az $f(z)$ függvény a (3) alatti $f_0(z)$-vel egyezik, ilyenkor azonban a másik két reláció is egyenlőségi jellel érvényes.

A kimondott tételek akkor is érvényesek, ha az a nullapontok vagy a β póluspontok nem mind különbözők, de akkor egy nullapont vagy egy póluspont annyiszor számítandó, mint a mekkora a multiplicitása, továbbá érvényesek a kimondott tételek akkor is, ha $f(z)$ függvénynek a $|z|=r$ kör belsejében csak nullapontjai, vagy csak póluspontjai vannak, de ilyenkor a (2) és a (3) alatti kifejezésben azok a tényezők, a melyekben β, ill. a melyekben a fordul elő, elhagyandók. Ez pl. bekövetkezik akkor, ha

$$|\beta_1| = |\beta_2| = \dots = |\beta_m| = r, \text{ ill. } |a_1| = |a_2| = \dots = |a_n| = r$$

tesszük.

Az első tétel, ill. az (5) egyenlőtlenség JENSEN-nek egy ismeretes tételéből lehozható.[1] Ezt a tételt arra az esetre, a mikor

---

[1] I. L. W. V. JENSEN: Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions, Acta math. 22. köt. (1899), 359—365. old.

az $f(z)$ függvénynek a $|z|=r$ kör belsejében nincs pólusa, CARATHÉODORY és FEJÉR egy közös dolgozatban [1] rendkívül egyszerű módon igazolták. Az ő módszerüket fogjuk felhasználni a kimondott tételek igazolására.

Az $f_0(z)$ függvényről könnyű megállapitani, hogy föltételeinknek eleget tesz, a mennyiben a $|z|=r$ sugarú körön belül csak az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pontokban tűnik el és csak a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ pontokban válik végtelenné és $f_0(0)=A$, azonkivül azzal a tulajdonsággal bir az $f_0(z)$ függvény, hogy absolut értéke a $|z|=r$ kör kerületén állandó és pedig

$$|f_0(re^{i\varphi})| = |A| r^{2n-2m} \frac{|\beta_1\beta_2\ldots\beta_m|^2}{|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n|^2} \frac{|\alpha_1.\alpha_2\ldots\alpha_n|}{r^n} \cdot \frac{r^m}{|\beta_1\beta_2\ldots\beta_m|} = R_0. \quad (8)$$

Minden más, föltételeinknek eleget tevő $f(z)$ függvény

$$f(z) = f_0(z).f_1(z) \quad (9)$$

alakban irható, a hol $f_1(z)$ a $|z|=r$ körben a z komplex változónak sehol el nem tűnő holomorph függvénye, a mely a $z=0$ pontban 1 értéket vesz föl.

Ebből következik, hogy

$$\max|f(re^{i\varphi})| = |f_0(re^{i\varphi})|.\max|f_1(re^{i\varphi})| = R_0.\max|f_1(re^{i\varphi})| \geqq R_0,$$

és

$$\min|f(re^{i\varphi})| = R_0 \cdot \min|f_1(re^{i\varphi})| \leqq R_0,$$

a mivel az 1. tétel igazolva van.

Minthogy

$$2\pi|f_1(0)| = \left|\int_0^{2\pi} f_1(re^{i\varphi})\,d\varphi\right| \leqq \int_0^{2\pi} |f_1(re^{i\varphi})|\,d\varphi,$$

azért

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = R_0 \int_0^{2\pi} |f_1(re^{i\varphi})|\,d\varphi \geqq 2\pi R_0 |f_1(0)| = 2\pi.R_0.$$

---

[1] C. CARATHÉODORY és L. FEJÉR: Remarques sur le théorème de M. JENSEN, Comptes Rendus (Paris), 145. köt. (1907), 163—165. old.

Ezzel a 2. tétel is igazolva van. Hasonlókép igazolható a 3. is, u. i.

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2\, d\varphi = \frac{R_0^2}{2}\int_0^{2\pi} |f_1(re^{i\varphi})|^2\, d\varphi \geqq \pi R_0^2 |f_1(0)|^2 = \pi . R_0^2.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből egyszersmind következik a 4. tétel is, mert ezek bármelyikében csak akkor léphet föl az egyenlőségi jel, ha a $|z| = r$ kör kerületén mindenütt

$$|f_1(re^{i\varphi})| = f_1(0) = 1,$$

a miből pedig következik, hogy $f_1(z) = \text{const} = 1$. Ekkor azonban $R = R_0 = \text{const}$. lévén, $R' = 0$ és így a (6) alatti első reláció is egyenlőségi jellel teljesül.

Végül meg akarjuk jegyezni, hogy *ha az $f(z)$ függvény kikötéseinknek eleget tesz, akkor az*

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^k\, d\varphi \geqq 2\pi . R_0^k \tag{10}$$

reláció k-nak bármely nullától különböző pozitív értéke mellett fönnáll és egyenlőségi jellel csak akkor teljesül, ha $f(z) = f_0(z)$. Ennek a tételnek, a mely a kimondott négy tételt magában foglalja, igazolása az előbbiekhez hasonló módon történhetik.

Sz. Nagy Gyula.

KÖBÖS MARADÉKOK ISMERTETŐ JELE.

A négyzetes maradékok reciprocitási törvénye könnyen kezelhető formulát szolgáltat oly ismertető jelek felállítására, a melyekből világosan lehet látni, hogy adott modulus esetén mely számok tartoznak a négyzetes maradékok közé és melyek nem. Közelfekvő a gondolat, hogy hasonló eset áll elő a köbös maradékok reciprocitása alapján is; minthogy azonban a köbös maradékok reciprocitása részben képzetes számokkal nyer kifejezést, azt tapasztaljuk, hogy hasonló ismertető jelek felállítása valós számokra vonatkozólag nem eszközölhető oly egyszerűséggel, mint a négyzetes maradékoknál. Waring tétele azonban lényegesen megkönnyíti ezen utóbbi feladat taglalását is. Szükséges azonban, hogy ezt megelőzőleg külön állapítsuk meg 2-nek és 3-nak köbös jellegét.

Ha p törzsszám $3n+1$ alakú, akkor, mint eléggé ismeretes, p négyszerese csak egy módon állítható elő a következő alakban:

$$4p = A^2 + 27\beta^2.$$

Ha még p törzsszám modulusnak primitív gyökét g-vel jelöljük, r pedig $\sqrt[p]{-1}$-nek jelzi a primitív értékét, akkor 2 köbös jellegét a következő szabály tünteti fel:

Ha 2 köbös maradék, akkor $\beta \equiv 0 \pmod 2$.

Tételünk bizonyitása végett állapitsuk meg η_0 periodusnak négyzetét:

$$\eta_0^2 = (r^{g^0} + r^{g^3} + \cdots + r^{g^{p-4}})^2;$$

ámde, ha 2 köbös maradék, akkor

$$\eta_0^2 = \eta_0 + 2(h + h_0\eta_0 + h_1\eta_1 + h_2\eta_2),$$

másrészt a periodusok szorzása alapján:[1]

$$\eta_0^2 = n + m_0^0\eta_0 + m_1^0\eta_1 + m_2^0\eta_2;$$

ezen két eredmény összetevéséből kitűnik, hogy $m_1^0 - m_2^0 = \beta$ páros szám.

Ezen okoskodásunk elég világosan utal arra is, hogy ha 2 köbös nemmaradék, akkor β páratlan szám.

Ha 3 köbös maradék, akkor $\beta \equiv 0$ (mod 3).

Ezen utóbbi tétel η_0 köbéből adódik; ha 3 köbös maradék, akkor

$$\eta_0^3 = \eta_0 + 3\,(k + k_0\eta_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2);$$

a periodusok szorzása értelmében pedig η_0^3 értéke még így is írható:

$$\eta_0^3 = m_0^0 . n + b_0\eta_0 + b_1\eta_1 + b_2\eta_2,$$

a hol b_0, b_1, b_2 a következő értékeket jelentik:

$$b_0 = n + (m_0^0)^2 + (m_1^0)^2 + (m_2^0)^2,$$

$$b_1 = m_0^0 m_1^0 + m_1^0 m_2^0 + m_2^0 m_0^0 + m_2^0,$$

$$b_2 = m_0^0 m_1^0 + m_1^0 m_2^0 + m_2^0 m_0^0 + m_1^0.$$

η_0^3 két alakja nyilván mutatja, hogy

$$b_2 - b_1 = m_1^0 - m_2^0 = \beta \equiv 0 \quad \text{(mod. 3)}.$$

Némi meggondolás rávezet bennünket arra is, hogy ha 3 köbös nemmaradék, akkor β nem osztható 3-mal.

A továbbiakban általánosabb alapon vizsgáljuk meg valamely törzsszám köbös jellegét; e czélból a következő jelölésekkel dolgozunk:

$$T_1 = \eta_0 + \varrho\eta_1 + \varrho^2\eta_2,$$

$$T_2 = \eta_0 + \varrho^2\eta_1 + \varrho\eta_2;$$

itt ϱ köbös egységgyököt jelent.

[1] P. Bachmann: Die Lehre von der Kreistheilung. 1872. 201. l.

1. Ha q törzsszám $3m+2$ alakú, akkor

$$T_1^{q+1} \equiv p\varrho^{\operatorname{ind} q \pmod p} \pmod q,$$ [1]

$$T_2^{q+1} \equiv p\varrho^{2 \operatorname{ind} q \pmod p} \pmod q;$$

e két kongruencziából, ha q köbös maradék, következik, hogy

$$T_1^{q+1} - T_2^{q+1} \equiv 0 \pmod q,$$

vagy a mi ezzel egyenértékű:

$$(a+b\varrho)^{\frac{q+1}{3}} - (a+b\varrho^2)^{\frac{q+1}{3}} \equiv 0 \pmod q. \quad \text{(I)}$$

Meg kell jegyeznünk, hogy az itt szereplő két konjugált komplex szám p-nek törzsényezőit jelzi. Az (I) formula Waring tételével módot nyújt arra, hogy a $3m+2$ alakú törzsszámok köbös jellegét megállapíthassuk; természetesen tudnunk kell, hogy

$$(a+b\varrho)+(a+b\varrho^2) = 2a-b = A,$$

$$(a+b\varrho)-(a+b\varrho^2) = b(\varrho-\varrho^2) = bi\sqrt{3}.$$

A mondottak alapján könnyű kimutatni, hogy 5 csak akkor lehet köbös maradék, ha a következő két kongruenczia valamelyike fennáll:

$$A \equiv 0 \pmod 5, \quad b \equiv 0 \pmod 5;$$

11-re vonatkozólag három kongruencziális feltétel között választhatunk:

$$A \equiv 0 \pmod{11}, \quad b \equiv 0 \pmod{11}, \quad A^2-2p \equiv 0 \pmod{11};$$

17-nél pedig már négy kongruenczia áll rendelkezésünkre a köbös jelleg megvizsgálására:

$$A \equiv 0 \pmod{17}, \quad A^2-3p \equiv 0 \pmod{17},$$

$$b \equiv 0 \pmod{17}, \quad b^2-p \equiv 0 \pmod{17}.$$

[1] P. Bachmann i. m. 196. és 197. l.

2. Némiképen megváltozik az alapvető formula, ha q törzsszám $3m+1$ alakú; ebben az esetben

$$T_1^{q-1} \equiv \varrho^{-\operatorname{ind} q \,(\mathrm{mod}\, p)} \pmod{q},$$
$$T_2^{q-1} \equiv \varrho^{-2 \operatorname{ind} q \,(\mathrm{mod}\, p)} \pmod{q};$$

ha ismét feltesszük q-ról, hogy köbös maradéka p modulusnak, a fenti két kongruencziából következik, hogy

$$T_1^{q-1} - T_2^{q-1} \equiv 0 \pmod{q},$$

vagyis

$$(a+b\varrho)^{\frac{q-1}{3}} - (a+b\varrho^2)^{\frac{q-1}{3}} \equiv 0 \pmod{q}. \tag{II}$$

A (II) formula Waring tételének felhasználásával a $3m+1$ alakú törzsszámok köbös jellegét világítja meg; e formula szerint 7 csak akkor köbös maradéka p modulusnak, ha

$$\text{vagy } A \equiv 0 \pmod{7},$$
$$\text{vagy } b \equiv 0 \pmod{7}.$$

Ugyanígy nyerjük, hogy 13 köbös jellege megköveteli az alább következő kongruencziák valamelyikének fennállását:

$$A \equiv 0 \pmod{13}, \quad b \equiv 0 \pmod{13}, \quad A^2 - 2p \equiv 0 \pmod{13}.$$

Mennél nagyobb törzsszám jellegét vizsgáljuk meg, annál több és összetettebb feltételeket nyerünk; így pl. 19 köbös jellege a következő kongruencziák valamelyikéhez van kötve:

$$A \equiv 0 \pmod{19}, \quad A^2 - 3p \equiv 0 \pmod{19},$$
$$b \equiv 0 \pmod{19}, \quad b^2 - p \equiv 0 \pmod{19}.$$

Ha jobban szemügyre vesszük a megvizsgált törzsszámokat, azt látjuk, hogy 5-nél a köbös jelleget éppen olyan kongruencziák döntik el, mint 7-nél; éppen így áll az eset 11-nél és 13-nál, valamint 17-nél és 19-nél. Alaposabb tekintetet vetve az (I) és (II) formulákra, teljesen világossá lesz előttünk, hogy két törzsszám köbös jellegét azonos kongruencziákból lehet megítélni, ha a két törzsszám különbsége 2.

Tihanyi Miklós.

ÉSZREVÉTELEK A KETTŐ NÉGYZETES CHARAKTERÉRE VONATKOZÓLAG.

E kis czikkünkben a *kettőnek* egy páratlan természetes p törzsszámra vett négyzetes maradék-jellegét illetően teszünk néhány egyszerű észrevételt.

Észrevételeink I. része a jól ismert:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(p^2-1)}$$

kritérium egy új levezetését tartalmazza. Ez a levezetés a p teljes maradéksorában fellépő amaz a, s illetve e számok bizonyos előállításait használja, a mely a, s illetve e számokra nézve:[1]

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a+1}{p}\right),$$

s illetőleg:

$$\left(\frac{e}{p}\right) = -\left(\frac{e+1}{p}\right).$$

A II. részben viszont a $p = 4n+1$ feltevés mellett, az

$$x^2 \equiv -1 \qquad (\text{mod } p)$$

congruentia gyökeinek egy új előállításából kiindulva, származtatjuk a 2 *négyzetes*, s corrolláriumként a -1 *negyedfokú*,

---

[1] $\left(\frac{a}{p}\right)$ a Legendre-symbolum, míg, ha m a p-vel osztható, akkor $\left(\frac{m}{p}\right) = 0$.

továbbá, $8n+1$ alakú p mellett, a -1 *nyolczadfokú* maradék voltára vonatkozó feltételeket.

I.

Legyen p páratlan természetes primszám és r a p-nek négyzet-maradéka, a mely $\not\equiv 1 \bmod p$. Tekintsük az

$$a(r) \equiv \frac{1}{r-1} \pmod{p} \tag{1}$$

számosztályt. Mivel:

$$a(r)+1 \equiv \frac{r}{r-1} \pmod{p},$$

azért világos, hogy

$$\left(\frac{a(r)}{p}\right) = \left(\frac{a(r)+1}{p}\right). \tag{2}$$

De viszont is: (2)-ből:

$$\frac{a+1}{a} \equiv 1 + \frac{1}{a} \equiv r \not\equiv 1 \pmod{p},$$

azaz a-nak az (1) alatti alakja van. Végül megjegyezve, hogy $r \not\equiv r' \pmod{p}$ mellett $a(r) \not\equiv a(r') \pmod{p}$, evidens, hogy a (2)-t kielégitő $a(r)$ számok általános alakja $\frac{1}{r-1} \pmod{p}$ és ilyen, mod p különböző $a(r)$ szám van $\frac{1}{2}(p-3)$ számú. Az 1-től különböző r-ek:

$$2^2,\ 3^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \pmod{p};$$

úgy hogy irhatjuk:

$$a(r) \equiv a(\tau^2) \equiv \frac{1}{\tau^2-1} \pmod{p} \tag{3}$$

$$\left(\tau \equiv 2, 3, \ldots, \tfrac{1}{2}(p-1) \pmod{p}\right).$$

Nevezzük ezeket az $a(\tau^2)$ számokat: *legalább másodfokú* számoknak modulo p.

Az $a(\tau^2)$ számoktól különböző számai az $1, 2, \ldots, p-1$ sorozatnak, *elsőfokúak*, vagyis, ha egy ilyen szám e, akkor erre nézve:

$$\left(\frac{e}{p}\right) \neq \left(\frac{e+1}{p}\right).$$

Az ilyen e-k száma nyilván: $p-1-\frac{1}{2}(p-3)=\frac{1}{2}(p+1)$, és, $\left(\frac{-1}{p}\right) \neq \left(\frac{p}{p}\right)=0$ miatt, bizton ezek között van a $p-1$ is. Ha azonban csupán az $1, 2, \ldots, p-2$ sorozatban foglalt e-számokat tekintjük, akkor ezek száma $\frac{1}{2}(p-1)$, és *explicite* adva vannak az:

$$e(n) \equiv \frac{1}{n-1} \quad (\bmod p); \quad \left(\frac{n}{p}\right)=-1$$

kifejezéssel, a hol n helyett rendre p-nek $\frac{1}{2}(p-1)$ számú négyzetes *nem-maradékai* teendők. Valóban, evidens, hogy:

$$\left.\begin{array}{r} n(n-1) \not\equiv 0, \\ e(n)\left(e(n)+1\right) \not\equiv 0 \end{array}\right\} (\bmod p),$$

míg

$$e(n) \not\equiv e(n') \quad (\bmod p),$$

hacsak

$$n \not\equiv n' \quad (\bmod p;$$

továbbá:

$$e(e+1) \equiv \frac{n}{(n-1)^2} \quad (\bmod p),$$

vagyis

$$\left(\frac{e}{p}\right)+\left(\frac{e+1}{p}\right)=0;$$

szóval $e(n)$ *elsőfokú.*

Az $a(\tau^2)$ és $e(n)$ számoknak így nyert előállításai egészen természetes és egyszerű bizonyítását adják az ismert

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{1}{8}(p^2-1)} \tag{I}$$

relátiónak, tehát a 2 *quadr. charakterét* meghatározó összefüggésnek.

Tegyük e végből:

$$\left.\begin{array}{l}\prod\limits_{\tau=2}^{\frac{1}{2}(p-1)} a(\tau^2) \equiv A,\\ \prod\limits_{\left(\frac{n}{p}\right)=-1} e(n) \equiv E\end{array}\right\}\pmod p,$$

és számítsuk ki e szorzatokat. Ha a

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{k=0}^{\frac{1}{2}(p-3)} x^k \equiv \prod\limits_{\tau=2}^{\frac{1}{2}(p-1)}(x-\tau^2),\\ x^{\frac{1}{2}(p-1)}+1 \equiv \prod\limits_{\left(\frac{n}{p}\right)=-1}(x-n)\end{array}\right\}\pmod p$$

identikus congruentiákban $x\equiv 1$-et teszünk, akkor kapjuk:[1]

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{-1}{p}\right)\cdot\frac{1}{2} \equiv \prod\limits_{\tau=2}^{\frac{1}{2}(p-1)}(\tau^2-1) \equiv \frac{1}{A},\\ \left(\frac{-1}{p}\right)\cdot 2 \equiv \prod\limits_{\left(\frac{n}{p}\right)=-1}(n-1) \equiv \frac{1}{E}\end{array}\right\}\pmod p,$$

azaz:

$$\left.\begin{array}{l}A \equiv 2\cdot\left(\frac{-1}{p}\right),\\ E \equiv \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{p}\right)\end{array}\right\}\pmod p. \qquad \text{(II)}$$

Ha már most:

a) $p\equiv 3 \pmod 4$, akkor bizonyos, hogy

$$\left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)}{p}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}(p+1)}{p}\right)=0,$$

s így $a(\tau^2)\equiv -a(\tau^2)-1 \pmod p$ nem lehetséges. A-ban tehát összefoglalhatjuk a $\frac{p}{2}$-nél kisebb $a(\tau^2)$-t a $\frac{p}{2}$-nél nagyobb $(p-1-a(\iota^2))$-tel, mint a mely utóbbi nyilván szintén $a(\tau^2)$-szám. Ezáltal lesz:

$$A \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-3)}\cdot\prod_{a(\tau^2)<p/2} a(a+1) \pmod p,$$

[1] Az A és E szorzatok értelmezéséből világos, hogy A is E is, mod p zérustól különböznek.

és végül (II)-ből:

$$\prod_{a(r^2)<p/2} a(a+1) \equiv (-1)^{\frac{1}{4}(p+1)}.2 \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

azaz, mivel a baloldal quadr. maradék:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{1}{4}(p+1)} = (-1)^{\frac{1}{8}(p^2-1)}.$$

Ha viszont:

β) $p \equiv 1$ (mod 4), akkor $\frac{1}{2}(p-1)$ biztosan nem $e(n)$-szám és tehát a jellemzett összefoglalást az E-szorzatban végezvén, (II)-ből kapjuk:

$$\prod_{e(n)<p/2} e(e+1) \equiv (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}.\tfrac{1}{2} \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

azaz:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \prod_{e(n)<p/2}\left(\frac{e(e+1)}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)} = (-1)^{\frac{1}{8}(p^2-1)},$$

a mennyiben $e(e+1)$ quadr. nem-maradék; — qu. e. d.[1]

Megjegyzés. — Analóg alapgondolaton nyugszik Stieltjes e tárgyra vonatkozó egy bizonyítása, a melynél azonban föntebb adott levezetésünk annyiban talán egyszerűbb, hogy a Stieltjes-nél szereplő meggondolások java-részét — épen az a és e számok *explicit* alakjának bevezetése révén — fölöslegessé teszi. Talán nem érdektelen, ha röviden reprodukáljuk e helyütt Stieltjes gondolatmenetét; (v. ö.: nevezett szerzőtől *Sur le caractère du nombre 2 comme résidu ou non résidu quadratique;* Bulletin d. Sciences Math. et Astr., 2e série, t. VIII., Paris 1884, p. 175—176).

---

[1] Megjegyezzük, hogy a $p \equiv 1$ (mod 4) esetben:

$$\prod_{1+a<p/2} a(a+1) \equiv (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}.4 \quad (\mathrm{mod}\ p),$$

míg $p \equiv 3$ (mod 4) esetében:

$$\prod_{1+e<p/2} e(e+1) \equiv (-1)^{\frac{1}{4}(p-3)} \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

és e relátiók egyike sem alkalmas arra, hogy belőle a **2** quadr. karakterére direkt következtetést vonjunk.

p páratlan primszám; ha $1 \leq k \leq p-2$ és $\left(\frac{k(k+1)}{p}\right) = -1$, akkor:

$$x(k) \equiv \frac{k+1}{k} \quad (\text{mod } p)$$

nem-maradék és viszont; az $(1, p-1)$ közben tehát annyi *charakter-váltás* van, ahány nem-maradék az $x(k)$, $(1 \leq k \leq p-2)$ sorozatban. De $x(k) \not\equiv x(h)$, hacsak $k \not\equiv h$; továbbá $x(k) \not\equiv 1$, vagyis az $x(k)$ értéksor æquivalens a $2, 3, \ldots, p-1$ összeséggel, a melyben a nem-maradékok száma: $\frac{p-1}{2}$.

Ha már most $p \equiv 1$ (mod 4), úgy —

$$\left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)}{p}\right) = \left(\frac{\frac{1}{2}(p+1)}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right), \quad \left(\frac{k(k+1)}{p}\right) = \left(\frac{p-k-1}{p}\right)\left(\frac{p-k}{p}\right)$$

miatt —, 1-től $\frac{1}{2}(p-1)$-ig ugyanannyi a charakter-váltás, mint $\frac{1}{2}(p-1)$-től $(p-1)$-ig, azaz $\frac{1}{4}(p-1)$. Az 1 mindig maradék s így $\frac{1}{2}(p-1)$-be érkezünk a $(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}$ charakterrel, szóval: $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}$. Azonos módon találjuk, hogy $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p+1}{4}}$, ha $p \equiv -1$ (mod 4); qu. e. d.

II.

Ha p rationális positiv páratlan primszám, akkor a Wilson-tételből következik, hogy

$$\left(\frac{p-1}{2}!\right)^2 \equiv -\left(\frac{-1}{p}\right) \quad (\text{mod } p).$$

továbbá, ha $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$, akkor

$$\frac{p-1}{2}! \equiv (-1)^\beta \quad (\text{mod } p),$$

a hol β az $\left(1, \frac{p-1}{2}\right)$ számközben foglalt mod p négyzetes nem-maradékok száma; míg, ha $\left(\frac{-1}{p}\right) = +1$, azaz: p $4n+1$ alakú, akkor $\pm \frac{p-1}{2}!$ az

$$x^2 \equiv -1 \quad (\text{mod } p) \qquad (1)$$

congruentiának megoldásait adja. Ehhez az utóbbi esethez — *a midőn tehát* $p\equiv 1 \pmod 4$ — akarunk e helyütt néhány, *teljesen elementáris jellegű* megjegyzést fűzni.

És pedig: legyen R a $\frac{p}{2}$-nél kisebb positiv négyzet-maradékok, N pedig a $\frac{p}{2}$-nél kisebb positiv nem-maradékok *szorzata*; akkor azt állítjuk, hogy:[1]

$$\left.\begin{aligned} R^2 &\equiv -(-1)^{\frac{p-1}{4}} \\ N^2 &\equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \end{aligned}\right\} \pmod p. \tag{I}$$

Ebből a tényből nyomban következik, hogy a

$$\pm\frac{1}{2}\cdot\left\{R+N+\left(\frac{2}{p}\right)(R-N)\right\} \pmod p$$

kifejezés az (1)-nek megoldásait adja; s ugyancsak triviális, hogy a megoldás ezen alakjára jutunk, bárhogyan is lássuk el, egymástól függetlenül, az R, N értékeket $+$ avagy $-$ előjellel.

Az (I)-ből könnyen leolvassuk még a *jól ismert* összefüggést:

$$\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\left(\frac{-1}{p}\right)\right)=(-1)^{\frac{p-1}{4}}, \tag{II}$$

a melyben $\left(\left(\frac{-1}{p}\right)\right)$ alatt $+1$, avagy -1 értendő, a szerint, a mint az

$$x^4\equiv -1 \pmod p$$

congruentia rat. egész számokban megoldható, avagy sem.

Bizonyítás. — Az (I) congruentiák egyszerűen adódnak a

$$\sum_{k=0}^{q} x^k \equiv \prod_{i=1}^{q}(x-r_i) \pmod p \tag{2}$$

identikus congruentiából, a melyben $q=\frac{p-3}{2}$ és az r-ek az összes, 1-től különböző négyzet-maradékai p-nek. Ugyanis, $x\equiv 0$ értékkel, kapjuk (2)-ből

$$\prod_{i=1}^{q} r_i \equiv (-1)^q \pmod p;$$

[1] V. ö. Archiv d. Math. u. Phys., Bd. 21. (1913), p. 363.; 455. Aufgabe.

és ha ebben a congruentiában a $\frac{p}{2}$-nél nagyobb r-ek helyett — a melyek száma $\frac{p-1}{4}$ —, $(p-(p-r))$-et teszünk és tekintetbe vesszük, hogy ezek a $(p-r)$-ek az összes $\frac{p}{2}$-nél kisebb maradékok, nyerjük az 1 hozzácsatolásával, hogy:

$$R^2 = \Big(\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{4}} \varrho_i\Big)^2 \equiv (-1)^{q-\frac{p-1}{4}} = -(-1)^{\frac{p-1}{4}} \quad (\mathrm{mod}\ p),$$

hacsak $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ a $\frac{p}{2}$-nél kisebb maradékokat jelentik; s innen végül,

$$\left(\frac{p-1}{2}!\right)^2 = (N.R)^2 \equiv -1 \quad (\mathrm{mod}\ p)$$

alapján:

$$N^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \quad (\mathrm{mod}\ p),$$

q. e. d.

A (II) corrolariumot ekként kaphatjuk.

(I)-ből jön:

$$R^2 + N^2 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ p),$$

vagyis tehát, ha

$$f^2 \equiv -1 \quad (\mathrm{mod}\ p,$$

akkor innen

$$(N+fR)(N-fR) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ p),$$

s így:

$$N \equiv \varepsilon f R \quad (\mathrm{mod}\ p), \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

E legutóbbi összefüggés mutatja, hogy:

$$\left(\frac{f}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}},$$

s ez az egyenlet már — mint közvetetlenül látható — (II)-nek a $\left(\left(\frac{-1}{p}\right)\right)$-re vonatkozó részével æquivalens.

Ha végül az

$$\left.\begin{aligned} R^2 + N^2 &\equiv 0 \\ 2RN &\equiv 2\cdot\left(\frac{p-1}{2}\right)! \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{mod}\ p)$$

relátiókat összegezzük, nyerjük:

$$(R+N)^2 \equiv 2 \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)! \quad (\mathrm{mod}\ p),$$

s innen, tekintve, hogy

$$\frac{p-1}{2}! \equiv \varepsilon f \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

következik, hogy:

$$\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{f}{p}\right) = 1,$$

a mi által — a megelőzőek alapján — (II) teljes tartalma beigazolást nyert.

*

Megjegyezhetjük még ez alkalommal, hogy a fönti észrevételekből nyomban találjuk, miszerint — $8s+1$ alakú p mellett — a «-1» 8-adfokú maradék-charactere felett az $s = \frac{p-1}{8}$ paritása dönt. Úgy hogy, ha ez a symbolum $\left\{\frac{-1}{p}\right\}$, akkor:

$$\left\{\frac{-1}{p}\right\} = (-1)^{\frac{p-1}{8}}. \tag{III}$$

Ugyanis, a $p \equiv 1$ (mod 8) feltétel szerint $\left(\frac{f}{p}\right) = +1$, s így a p inkongruens négyzet-maradékait s illetve nem-maradékait, mint könnyű meggyőződni, az:

$$r,\ fr,\ -r,\ -fr \quad \text{s illetve} \quad n,\ fn,\ -n,\ -fn$$

typusú quartettekbe sorakoztathatjuk. Nyilvánvaló továbbá, hogy az $(r, -r)$ és $(fr, -fr)$ párok mindegyikében az egyik elem bizonyosan $\frac{p}{2}$-nél kisebb positiv maradékú mod p, s ugyanígy az $(n, -n)$, $(nf, -nf)$ párokra nézve. Igy tehát írhatjuk, hogy az:

$$r_1,\ r_2, \ldots,\ r_s;\ f\varepsilon_1 r_1,\ f\varepsilon_2 r_2, \ldots,\ f\varepsilon_s r_s$$

sorozat, — a hol r_1, $r_2, \ldots$ alkalmasan választott $\frac{p}{2}$-nél kisebb maradékok és $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ olyan $\pm$ előjelek, hogy az összes $f\varepsilon r$-ek legkisebb positiv maradéka $\frac{p}{2}$-nél kisebb legyen — mod p megegyezik az R-ben foglalt r-ek sorozatával. Ugyanígy az N-ben foglalt n-ek összesége az:

$$n_1, n_2, \ldots, n_s; \quad f\eta_1 n_1, f\eta_2 n_2, \ldots, f\eta_s n_s$$

alakra hozható, a hol megint az η-k ± 1-et jelentenek.

Mindezekből látható, hogy:

$$\left.\begin{aligned} N &\equiv \Big(\prod_{i=1}^{s} n_i\Big)^2 . \prod_{i=1}^{s} \eta_i . f^s \\ R &\equiv \Big(\prod_{i=1}^{s} r_i\Big)^2 . \prod_{i=1}^{s} \varepsilon_i . f^s \end{aligned}\right\} \pmod{p},$$

s így négyzetre emeléssel és összegezéssel (I) szerint

$$N_s^4 + R_s^4 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p.),$$

hacsak itt

$$N_s \equiv \prod_{i=1}^{s} n_i, \quad R_s \equiv \prod_{i=1}^{s} r_i \quad (\text{mod. } p).$$

Innen következik, $\varphi^2 \equiv f$, $\varphi^4 \equiv -1$ mellett, hogy:

$$(N_s + \varphi R_s)\,(N_s - \varphi R_s)\,(N_s + f\varphi R_s)\,(N_s - f\varphi R_s) \equiv 0 \pmod{p},$$

azaz

$$N_s \equiv a\varphi R_s \pmod{p},$$

a hol a az 1, f, -1, $-f$ értékek valamelyike; szóval végül:

$$\left(\frac{\varphi}{p}\right) = \left(\frac{N_s}{p}\right) = (-1)^s = (-1)^{\frac{p-1}{8}},$$

a honnan már (III) ismeretes módon adódik.

*

Álljon itt még a következő kis észrevétel. Ha $p \equiv 1 \pmod{4}$, akkor van olyan f, hogy:

$$f^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Innen következik, hogy

$$(f+1)^2 \equiv f^2+1+2f \equiv 2f \pmod{p},$$

s továbbá

$$(f+1)^4 \equiv -4 \equiv -2^2 \pmod{p},$$

azaz:

$$(f+1)^{4 \cdot \frac{p-1}{4}} \equiv 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \cdot 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \cdot \left(\frac{2}{p}\right) \pmod{p}.$$

Azt gondoljuk, hogy a $p \equiv 1 \pmod{4}$ esetben a:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}} = (-1)^{\frac{1}{8}(p^2-1)}$$

egyenletnek ennél egyszerűbb igazolása alig képzelhető.

Grosschmid Lajos.

SZÁMELMÉLETI TÉTELEK.

I.

$\binom{2p}{p} \equiv 2 \text{ mod. } p^3$.

A legegyszerűbb okoskodással meggyőződhetünk róla, hogy a számelméleti vizsgálatokban — pl. STIELTJES és OLTRAMARE kutatásaiban — gyakran szereplő $\binom{2n}{n}$ binomiális együttható kielégíti a

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \text{ mod. } p$$

kongruencziát, ha p valamely tetszésszerinti prímszámot jelent. ALLARDICE [1] egy tételéből kitűnik, hogy ez a kongruenczia mod. p^2 is fennáll. A mint tüstént látni fogjuk, a

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \text{ mod. } p^3$$

kongruenczia is igaz, ha p bármely 3-nál nagyobb prímszám.

Ismeretes, hogy

$$\binom{2p}{p} = \sum_{s=0}^{p} \binom{p}{s}^2,$$

[1] ALLARDICE: *Proceedings of the Math. Soc. of Edinburg* 8, p. 16. ALLARDICE tétele szerint a

$$(2p-1)(2p-2)\cdots(p+1) - (p-1)(p-2)\cdots 1$$

különbség osztható p^2-tel, a miből a szövegben említett tétel tüstént következik. ALLARDICE dolgozatát csupán a *Jahrb. ü. d. Fortschr. d. Math.* 22, (1890), p. 202 referatumából ismerem.

a miből ALLARDICE tétele puszta rátekintéssel minden számítás nélkül azonnal kiadódik. Minthogy

$$\sum_{s=0}^{p}\binom{p}{s}^2 = 2 + 2\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}}\binom{p}{s}^2 =$$

$$= 2 + 2p^2 \sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-s+1)}{1.2\ldots(s-1)s}\right)^2,$$

azért az összeg mindenik tagja

$$\equiv \frac{1}{s^2} \text{ mod. } p,$$

ha, mint szokás, $\frac{1}{s^2}$-tel jelöljük s^2 «*socius*»-át. Az

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots \frac{1}{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$$

számsorozat azonban mod. p azonos az

$$1, 2^2, 3^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

számsorozattal, a melytől legfeljebb sorrendben különbözik. Ugyanis

$$\frac{1}{s^2} \equiv s^{p-3} \equiv \left(s^{\frac{p-3}{2}}\right)^2 \text{ mod. } p,$$

tehát szintén quadratikus maradék. De az $\frac{1}{s^2}$ számok ki is merítik a maradékok sorozatát. Mert, ha volna közöttük két kongruens szám, pl.

$$\frac{1}{s_2^2} \equiv \frac{1}{s_1^2},$$

abból

$$s_2 \equiv \pm s_1$$

következnék. Tehát

$$\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{s^2} \equiv \sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}} s^2 = \frac{(p-1)\,p\,(p+1)}{24} \equiv 0 \text{ mod. } p,$$

ha $p > 3$.

Ezzel a

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \quad \text{mod. } p^3$$

és a

$$\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{s^2} \equiv 0 \quad \text{mod. } p \qquad \sum_{s=\frac{p-1}{2}}^{p-1} \frac{1}{s^2} \equiv 0 \quad \text{mod. } p$$

kongruencziák bizonyitását nyértük. Ez utóbbi kettő persze úgy is értelmezhető, hogy a törtek számlálói oszthatók p-vel. Összetett modulusokra Bauer Mihály úr bizonyított be egy hasonló tételt,[1] mely szerint, ha $a+1$ prímtényezős felbontása

$$a+1 = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_m^{\pi_m},$$

akkor

$$\sum_{s=0}^{a} \binom{a}{s}^{2k} \equiv 0 \text{ mod. } p_1 p_2 \ldots p_m.$$

II.

Theisinger úr nemrég bebizonyitotta, hogy a harmonikus sor egyetlen részletösszege sem lehet egész szám.[2] Módszerével fogjuk a következő egyszerű tételt is bebizonyítani.

A

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \qquad (n \geqq 2)$$

összeg sohasem lehet egész szám, ha mindenik számláló relativ prím a nevezőjéhez.

---

[1] Bauer M.: *Mathematikai és Physikai Lapok* III, (1894), p. 328.

[2] Theisinger: *Monatshefte f. Mathematik u. Physik.* 26, p. 132, (1915).

CSEBICSEFF egyik híres és sokszor alkalmazott tétele szerint $\frac{n}{2}$ és n között mindig van legalább egy prímszám, a melyet p-vel jelölünk. (Esetleg $p = n$.) A

$$p+1,\ p+2, \ldots,\ n$$

számok egyike sem osztható p-vel. Az

$$\begin{aligned} & 1.2.3\ldots(p-1)(p+1)\cdots n\sigma_n = \\ & = a_1.1.2\ldots(p-1)(p+1)\cdots n + \\ & + a_2 \frac{1.2\ldots(p-1)(p+1)\cdots n}{2} + \\ & + a_3 \frac{1.2\ldots(p-1)(p+1)\cdots n}{3} + \\ & - - - - - - - - \\ & + a_p \frac{1.2\ldots(p-1)(p+1)\cdots n}{p} + \\ & - - - - - - - - \\ & + a_n \frac{1.2\ldots(p-1)(p+1)\cdots n}{n} \end{aligned}$$

összegben tehát az

$$\frac{a_p 1.2\ldots(p-1)(p+1)\cdots n}{p}$$

tört nem rövidíthető, holott valamennyi többi törtnek egész számú értéke van. σ_n tehát nem lehet egész szám. Q. e. d.

Tételünk tulajdonképen a következő tétel alkalmazása:

Irreducibilis törtek összege nem lehet egész szám, ha legalább egy nevezőnek van oly primtényezője, a mellyel egyetlen más nevező sem osztható.

Bizonyitása az előzmények után magától értetődik.

Obláth Richárd.

A Mathematikai és Physikai Társulat XXV. rendes közgyűlése.

A Mathematikai és Physikai Társulat XXV. rendes közgyűlését 1918 május hó 16-án tartotta meg a következő napirenddel:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1918-ra.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. Tisztikar és választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

Jelen voltak: Arató Frigyes, Bak Elza, Bálint Elemér, Balog Mór, Bauer Mihály, Bláthy Ottó Titus, Bogyó Samu, Bolláné Csengery Piroska, Brody Imre, Császár Elemér, Dávid Lajos, br. Eötvös Loránd, Farkas Gyula, Fejér Lipót, Fekete Mihály, Frank János, Fraunhoffer Lajos, Fröhlich Izidor, Gruber Nándor, Hanauer Jenő, br. Harkányi Béla, Koschowitz Gyula, Kőnig Dénes, ifj. Kövesligethy Radó, Kürschák József, Lukács Ferencz, Mattyasóvszky Kasszián, Milakovszky László, Nagy Sarolta, Obláth Richárd, Pekár Dezső, Privorszky Alajos, Rados Gusztáv, Rados Ignácz, Réthy Mór, Róna Zsigmond, Rucsinszki Lajos, Selényi Pál, Sidon Simon, Szegő Gábor, Szűcs Adolf, Tass Antal, Wodetzky József.

I. Elnöki megnyitó.

Báró Eötvös Loránd elnök a közgyűlést a következő szavakkal nyitotta meg:

Ennek az évnek, mely a mult közgyűlés óta lefolyt, megvoltak a maga szomorúságai és megvoltak a maga örömei. Ezekről a titkár úr részletesen fog beszámolni. Nagy örömünk volt, hogy társulatunk anyagi viszonyai ennek az évnek a folyamán megszilárdultak, nagy részben olyan adományok által, melyeknek a megszerzésében elnöktársamnak különös érdemei vannak és a mely megszilárdulásban egyszersmind megnyilatkozik a társulatunk iránti bizalom is.

Leginkább örvendünk a szép alapítványnak, a melyet Kőnig György és Dénes tettek. Ez a 10,000 koronás alapítvány, amely mathematikai tanulmányokra való buzdításul fog szolgálni, a fiúknak atyjukat, a mathematikusoknak mesterüket hozza majd emlékezetükbe. A haladás, mely hazánkban a mathematikusok kiképzésében a mult század utolsó évtizedeiben és a jelen században észlelhető volt, az, hogy úgy mondjam mathematikai iskola fejlődött, Kőnig Gyulának köszönhető és bízom, hogy ez a jövőben sem fog megállani. Ebben a reményben nyitom meg az ülést és a jegyzőkönyv hitelesítésére Bak Elza és Császár Elemér tagtársakat kérem fel. Felszólítom a titkár urat, hogy terjeszsze elő jelentését.

II. Titkári jelentés Fejér Lipóttól.

Tisztelt Közgyűlés!

Ha tekintjük a Mathematikai és Physikai Társulat működését az 1917. évben, a negyedik háborús esztendőben, legelőbb is örömmel állapíthatjuk meg, hogy feladatait, melyekre alapítása óta olyan lelkesen vállalkozott, e nehéz esztendőben is teljesítette. Igaz, hogy folyóiratunk terjedelme, az előadó-ülések száma felére csökkent; de mégis megtettünk annyit, a mennyit a mai körülmények között megtennünk lehetséges volt. Keskeny híd az, melyet most, a háború viszontagságai között építgetünk és a melyről hisszük, hogy mégis csak át fogja vezetni Társulatunkat egy újabb békés fejlődés boldogabb korszakába. Midőn ma, szeretett Elnökünk vezetése alatt, 25-ik rendes közgyűlésünkre összejöttünk (már egy negyed-század az, melyre visszatekinthetünk), abban a szerencsés helyzetben vagyok, hogy titkári jelentésemben számos olyan új erkölcsi és anyagi gyarapodásról számolhatok be, melyek a Társulat jövőjébe vetett és amúgy sem gyengült bizodalmat még jobban megerősíthetik.

A «Mathematikai és Physikai Lapok» huszonhatodik évfolyama megjelent 12 ívnyi terjedelemben. E kötet 13 önálló és ismertető czikket, melyek közül 8 mathematikai és 5 physikai tárgyú, továbbá egyéb rovatokat tartalmaz. Itt jegyzem meg, hogy anyagi helyzetünk talán lehetővé fogja tenni, hogy a következő, 27-ik évfolyamnak nagyobb terjedelmet adhassunk.

Társulatunk az 1917. évben 5 rendes előadó-ülést tartott, melyeken 7 előadást hallottunk. Ezek között 3 mathematikai, 4 physikai tárgyú volt.

A XXIV. mathematikai tanulóversenyen 40 versenyző vett részt. Az első «br. Eötvös Loránd-díj»-at *Pomázi Z. Czelesztin*, a másodikat *Sárospataky József* nyerte el.

A II. physikai tanulóversenyen 16 versenyző vett részt. Az első «Károly Irén-díj»-at *Sztrókay Pál*, a másodikat *Náray Szabó István* nyerte el.

A Math. és Phys. Társulatnak 450 tagja van. Ezek közül 220 budapesti, 230 vidéki. Az előfizetők száma 106.

Alapító tagokul beléptek: *Pekár Dezső* és a *Ganz és Társa-Danubius gép- és hajógyár részvénytársaság,* 200—200 koronával. Midőn ezt örömmel jelentem, egyben meleg köszönettel említem, hogy *Gruber Nándor* alapító tagunk 200 koronás alapító tagdíját, 800 korona hozzáadásával, 1000 koronára emelte. Az alapító tagok száma ez idő szerint 23.

A *Magyar Tudományos Akadémia,* illetőleg annak *Mathematikai és Természettudományi Bizottsága* ezidén, mint eddig is évről-évre, 2000 koronát utalt Társulatunknak, bár maga is érzi a háború okozta anyagi nehézségeket. Annál hálásabban köszöni Társulatunk az Akadémia állandó és hathatós támogatását.

Örömmel jelentem továbbá, hogy a Vallás- és Közoktatásügyi Miniszter Úr Ő Excellenciája 42,830—1918 szám, III—*B* jelzésű leiratában, a Mathematikai és Physikai Társulat tudományos munkájának támogatására négyezerötszáz (4500) korona *rendkívüli államsegélyt* engedélyezett az 1918. évre. E rendkívüli államsegélyért, mely előreláthatólag lehetővé fogja tenni, hogy folyóiratunk terjedelmét az 1918. évben növelhessük, legmélyebb köszönetünket fejezzük ki a magas Kormány előtt.

A *Magyar Általános Hitelbank,* Igazgatósága útján, értesít bennünket arról, hogy az Intézet 50 éves fennállása alkalmával tartott jubiláris közgyűlésén, a részben általános kulturális czélokra fordítandó összegből 2000 korona adományt szavazott meg a Mathematikai és Physikai Társulatnak. A Társulat hálás köszönettel fogadja ez adományt és benső megelégedéssel tapasztalja az ország e kimagasló pénzintézetének spontán megnyilatkozó áldozatkészségét, Társulatunk tisztán tudományos törekvései érdekében.

Nagy köszönettel tartozunk továbbá az *Első Magyar Általános Biztosító Társaság*nak, mely 250 koronát és a *Ganz-féle Villamossági Részvénytársaság*nak, mely 200 koronát volt szíves czéljainkra adományozni. Végül *Magi Ferencz* 132 koronát adott át a Társulatnak, melyért szintén köszönetünket fejezzük ki.

Szomorúan kell jelentenem, a tisztelt Közgyűlésnek, hogy a harcztéren elesett *Petrogalli Géza* tagtársunk és hogy elvesztettük *Belláagh Kálmán, Bielek Miksa, Fényes Dezső, Frank István, Hubatsek Alajos, Javorik János, Kurländer Ignácz, Pap János, Petry Gyula* és *Tolnay Lajos* tagtársainkat. Mélyen fájlaljuk ez érdemes társaink elhunytát.

Előterjesztésem végén legyen szabad beszámolnom a mult társulati évnek egy fölötte örvendetes eseményéről. *Dr. Kőnig György* miniszteri s.-titkár és *dr. Kőnig Dénes* műegyetemi magántanár a Mathematikai és Physikai Társulatnál (6%-os hadikölcsön kötvényekben) 10,000 koronás alapítványt tettek atyjuk, *Kőnig Gyula* nevére, kinek a magyar mathematika fejlesztésében szerzett történeti jelentőségű érdemeit bizonyára nem kell méltatnom e Társulatban. Az alapítvány kamatai, az alapítók óhaja szerint, röviden kifejezve, a következő két czélt vannak hivatva szolgálni: kiváló, fiatalabb magyar mathematikai kutatók működésének időközönkénti jutalmazása és a magyar mathematikai irodalomról időszakonként szerkesztendő referátum létesítése. A Választmány a «Kőnig Gyula-alapítvány» ügyrendi szabályzatának elkészítésére bizottságot küldött ki, mely, *Rados Gusztáv* elnöklete alatt, *Kőnig Dénes* és *Fejér Lipót* tagokból állott. Az alapítók óhajának szemmel tartásával, gondos mérlegelések után, a bizottság 1918 április 10-én tartott ülésén a szabályzat tervezetén megállapodott. E tervezetet a választmányi ülés elfogadta. Titkári jelentésem kapcsán bátor leszek a tisztelt Közgyűlésnek a Kőnig Gyula-alapítvány szabályzatát egész terjedelmében bemutatni és továbbá azt a Mathematikai és Physikai Lapokban közzétenni.

A mathematikai és physikai tanulóversenyeink azt a czélt szolgálják, hogy segítsenek ráterelni a figyelmet és buzdítást nyújtsanak azoknak a mathematikai és physikai tanulóknak, a kik e tudományok művelésére különösen hivatottaknak látszanak. A «Kőnig Gyula-alapítvány» most már lehetővé teszi azt, hogy a Mathematikai és Physikai Társulat «Kőnig Gyula-jutalom»-mal kitüntesse azokat a fiatal magyar tudósokat, a kik teljes értékű tiszta mathematikai munkával válnak ki az irodalomból. Így tehát ez alapítványnak köszönhetjük, hogy régebbi verseny-intézményünket, mely oly kitűnően bevált, most lényegesen továbbfejleszthettük.

Az alapítvány másik része életre hívja a «Kőnig Gyula referátum»-okat, melyek bizonyára szintén nagy hasznára lesznek a magyar mathematika ügyének.

Azt hiszem, hogy egész Társulatunk érzelmeinek adok kifejezést, midőn e helyen is hálás köszönetet mondok a nagylelkű alapítóknak.

Midőn még szorosabb munkatársaimnak meleg köszönetet mondok a szíves támogatásért, melylyel titkári működésemet megkönnyítették, kérem a tisztelt Közgyűlést, szíveskedjék titkári jelentésemet tudomásul venni.

Budapest, 1918 május 16.

Fejér Lipót,
a Math. és Phys. Társulat titkára.

*

Rados Gusztáv alelnök szivélyes szavakkal üdvözli *Fejér Lipót* titkárt abból az alkalomból, hogy a M. Tudományos Akadémia 1918. évi nagyjutalmát neki itélte oda.

III. Pénztárnok jelentése, költségelőirányzat 1918-ra és a pénztárvizsgáló bizottság jelentése.

Pénztárnok előterjeszti a mellékelt számadást és vagyonmérleget 1917-ről; az elnök pedig bemutatja a pénztárvizsgáló bizottság jelentését, mely szerint a pénzkezelés kifogástalan volt.

A közgyűlés ennek alapján a pénztárnoknak a felmentvényt megadja és a pénztárvizsgálóknak fáradozásukért köszönetet mond, felkérvén Balog Mór és Bogyó Samu rendes tagokat, hogy a pénztárvizsgálói tisztet a következő évre is vállalják el.

Pénztárnok előterjeszti a költségelőirányzatot az 1918. évre, melyet a közgyűlés elfogad a választmány ama javaslatával együtt, hogy az államsegély és a többi adományok, melyekkel a társulat szabadon rendelkezhetik, a Mathematikai és Physikai Lapok céljaira fordítandók.

IV. Tisztikar és választmányi tagok választása.

A közgyűlés újra megválasztja a tisztikart és *Bartoniek Géza, Farkas Gyula, Kövesligethy Radó, Szily Kálmán* választmányi tagokat. Szavazatszedő bizottság: Mende Jenő, Selényi Pál, Szűcs Adolf.

E szerint:

Tisztikar: Elnök: br. Eötvös Loránd, alelnökök: Károly Irén és Rados Gusztáv, titkárok: Fejér Lipót és Mikola Sándor, jegyzők: Kopp Lajos és Kürschák József, pénztárnok: Privorszky Alajos.

Választmányi tagok: Bartoniek Géza, Beke Manó, Farkas Gyula, Fröhlich Izidor, Gruber Nándor, br. Harkányi Béla, Klupathy Jenő, Kövesligethy Radó, Rátz László, Réthy Mór, Szily Kálmán, Tőtössy Béla.

BEVÉTELEK	Előirányzat Kor.	fill.	Eredmény Kor.	fill.
1916. évi zárószámadási maradvány	807	71	807	71
Folyó és köv. évi tagdijak	1200	—	1254	—
Hátralékos tagdijak	1200	—	870	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Alapító tagdijak	—	—	732	—
Kőnig Gyula alapítvány	—	—	10000	—
Hirdetési dijak	100	—	200	—
Előfizetési dijak	1000	—	835	50
Nyomtatványokból	100	—	20	—
Kamatok	880	—	884	41
	7287	71	17603	62

Vagyon

VAGYON	1916. év végén Kor.	fill.	1917. év végén Kor.	fill.
Alaptőke:				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján:				
a) Készpénz	45	—	577	—
b) 2600 K névért. főv. kölcsönkötv.	2600	—	2600	—
c) 300 « « koronajáradék-kötv.	100	—	300	—
d) 3500 « « hadikölcsönkötv.	3500	—	3500	—
Első hazai takarékpénztári betét	108	—	108	—
Majthényi Ottó-féle hagyaték	10000	—	10000	—
Károly Irén-alapítvány:				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján:				
2500 kor. hadikölcsönkötv.	2500	—	2500	—
Kőnig Gyula alapítvány:				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján:				
10000 kor. névért. hadikölcsönkötv.	—	—	10000	—
Forgó tőke:				
Készpénz	397	14	516	78
M. kir. postatakarékpénztárban	126	57	134	64
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján	284	—	218	—
Tagdijhátralékok	5000	—	5200	—
Föl nem vett hirdetési dijak	50	—	200	—
Nyomtatványokban	700	—	700	—
	25410	71	36554	42

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk.

Balog Mór s. k. *Bogyó Samu s. k.*

a közgyűlés részéről.

1918. évi költség-

BEVÉTELEK	1917. évi előirányzat Kor.	fill.	1918. évi előirányzat Kor.	fill.
Zárószámadási maradvány	807	71	869	42
Folyó és köv. évi tagdijak	1200	—	1200	—
Hátralékos tagdijak	1200	—	1200	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	100	—	400	—
Előfizetési dijak	1000	—	1000	—
Nyomtatványokból	100	—	100	—
Kamatok	880	—	1480	—
	7287	71	8249	42

rószámadások.

KIADÁSOK	Előirányzat		Eredmény	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Nyomdai költség	4000	—	3400	—
Irói tiszteletdijak	2000	—	1484	80
Expeditió- és irodai költségek	800	—	801	40
Középiskolai tanulóversenyek	316	—	316	—
Az alaptőkéhez csatoltatott	—	—	732	—
A Kőnig Gyula-alapítványhoz csatoltatott	—	—	10000	—
Pénztári maradvány *a)* készpénzben	171	71	516	78
b) takarékp. betétben	—	—	352	64
	7287	71	17603	62

érleg.

TEHER	1916. év végén		1917. év végén	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	5062	74	5522	72
Irói tiszteletdijak	362	25	403	85
Tiszta vagyon mint egyenleg	19985	72	30627	85
	25410	71	36554	42

Kelt Budapesten, 1918. május 8-án.

jér Lipót s. k. titkár. *Beke Manó s. k.* *Rátz László s. k.* a választmány részéről.

őirányzat.

KIADÁSOK	1917. évi		1918. évi	
	előirányzat			
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Nyomdai költség	4000	—	4500	—
Irói tiszteletdijak	2000	—	2000	—
Expeditió- és irodai költségek	800	—	800	—
Középisk. tanulóverseny	316	—	316	—
Pénztári maradvány az 1919. évre	171	71	633	42
	7287	71	8249	42

A KŐNIG GYULA ALAPÍTVÁNY ÜGYRENDI SZABÁLYZATA.

I. Kőnig Gyula jutalom.

1. A Kőnig György és Kőnig Dénes által atyjuk emlékére létesített, 10,000 korona névértékű 6%-os hadikölcsönkötvényekből álló Kőnig Gyula alapitvány első rendeltetése, hogy annak kamataiból először 1920-ban és azután kétévenként egy magyar mathematikus 1000 (egyezer) koronás «Kőnig Gyula jutalom»-mal tűntettessék ki, a pályázati forma mellőzésével.

2. Főiskolák működő és nyugalmazott nyilv. rendes és nyilv. rendkívüli tanárai (a mennyiben nemcsak czímük vagy jellegük van) a jutalmazásból kizáratnak. A jutalom lehetőleg olyannak itélendő oda, a ki abban még nem részesült.

3. A jutalmazandó személyének megválasztásánál anyagi szempont nem veendő figyelembe, csupán az illetőnek a jutalmazást megelőző két naptári évbe (l. azonban 4.) eső bármily nyelvű tiszta mathematikai publikácziójában található eredetiség és tisztán tudományos érték. Különösen az első Kőnig Gyula jutalmak odaitélésénél azonban figyelembe vehető a korábbi tudományos működés is.

4. Ha idővel az alapítvány kamatja nem fedezné kétévenként az ezer koronás Kőnig Gyula jutalmat és négyévenként a II. értelmében kiadandó Kőnig Gyula referátumoknak 300 koronás tiszteletdíját, akkor a jutalom olyan teljes évekre kikerekített legrövidebb időközökben adandó ki, a melyekben az alapítvány kamatai a kifizetésre elegendő fedezetet nyújtanak.

5. Javaslattételre a Társulat választmánya mathematikusokból (nem szükségképen csupa választmányi tagból) álló bizottságot küld ki, melyet a jutalmazást megelőző naptári évi közgyűléssel kapcsolatos ülésén választ meg.

6. A bizottság előadója a Math. és Phys. Lapokban közzéteendő jelentést szerkeszt, melyben ismerteti és méltatja a jutalmazandónak idetartozó működését. Nem feladata azonban a jelentésnek, hogy a jutalmazandó mű érdemét a többi megitélés alá eső művekével kritikailag összehasonlítsa.

7. A bizottság jelentése alapján a jutalmat a választmány itéli oda.

8. A Társulat Kőnig Gyula halálának évfordulója, április 8.-a körül nyilvános ülést tart, a melynek napirendjére a döntés és a bizottsági jelentés felveendő.

II. Kőnig Gyula referátum.

1. A Kőnig Gyula alapitványnak második rendeltetése, hogy kamatainak a jutalmon felül fennmaradó összegéből időszakonként 300 (háromszáz) korona «Kőnig Gyula referátum»-ok szerzőinek dijazására fordittassék. E referátumok feladata a magyar mathematikusok tudományos működésének ismertetése.

2. E referátumok minden második Kőnig Gyula jutalomról jelentést tevő ülésen (l. I. 8. pont) terjesztendők a Társulat elé és felölelik e jutalomnak, valamint a megelőzőnek időciklusában megjelent müveket.

3. A referátumba felveendők minden magyar mathematikusnak (beleértve a referenst magát) a tiszta mathematika körébe vágó mindazon munkái, melyeknek tudományos becsük van.

4. A referens feladata a szóbajövő munkák tartalmának objektiv ismertetése, mellőzvén az értéküket összehasonlitó és az elitélő kritikát.

5. Az első (második, harmadik, stb.) Kőnig Gyula referátum referensét az első (harmadik, ötödik, stb.) Kőnig Gyula jutalmat

odaitélő választmányi ülés jelöli ki, nem szükségképen saját kebeléből.

6. A referátum a Math. és Phys. Lapokban és lehetőleg külföldi folyóiratokban is közzéteendő.

7. A II. 2. pontban megállapitott évkörök végén mutatkozó kamat-maradékok vagy az alapitványi tőkéhez csatolandók, vagy pedig az alapitvány szellemének megfelelő egyéb czélra forditandók.

Előadásainkról.

A Mathematikai és Physikai Társulat előadó-ülésein a következő elő-adásokat hallottuk:

1916 deczember 7. Egerváry Jenő: Nevezetes polynomok geometriai értelmezése.

1917 márczius 8. Rados Gusztáv: Kummernek a periodus-congruentiákra vonatkozó tételeinek bebizonyítása. Dienes Pál: Az elektromágneses jelenségek rugalmasságtani elméletéről.

1917 márczius 22. Szász Ottó: Trigonometrikus többtaguakról.

1917 április 19. Kőnig Dénes: Euler polyedertétele egyoldalu felületekre. Brody Imre: Ideális gáz entropiájának absolut értéke.

1917 május 10. Báró Eötvös Loránd: A nehézségről a földön mozgó szerkezetekben.

1917 deczember 20. Szijártó Miklós: Hangmérés a háborúban. (1. rész.)

1918 márczius 7. Szász Ottó: Trigonometrikus többtagúakról.

1918 márczius 21. Szijártó Miklós: Hangmérés a háborúban (2. rész.)

1918 április 18. Kőnig Dénes: Absolut és relativ tulajdonságok az analysis situsban. Selényi Pál: Tükrözés negativ görbületű felületen. (Bemutatással.)

1918 május 16. Császár Elemér: Újabb sugárzási elméletek és alkalmazásuk.

Utalványczím: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás

az 1917. évben befolyt díjakról.

A Kőnig Gyula-alapítványra adományozott:

Kőnig György és Kőnig Dénes 10,000 kor. (hadikölcsön kötvény). Összesen … … … … … … … … … … … 10,000 K.

Az alaptőke gyarapítására adományozott:

Magi Ferencz 132 kor. Összesen … … … … … … … 132 K.

Alapító tagsági díjat fizetett:

Ganz és Társa-Danubius gép-, waggon- és hajógyár részvénytársaság 200 kor., Pekár Dezső 200 kor. (4%-os m. koronajáradék), Rátz László 200 kor. Összesen … … … … … 600 K.

Rendes tagsági díjat fizetett:

Az 1907. évre: Dózsa Jakab 6 kor. Összesen … … 6 K.

Az 1908. évre: Dózsa Jakab 4 kor. Összesen … … 4 K.

Az 1909. évre: Juvancz Irén 10 kor., Szokol Pál 6 kor. Összesen … … … … … … … … … … … … … … 16 K.

Az 1910. évre: Égly Sándor 6 kor., Juvancz Irén 10 kor., Szokol Pál 6 kor. Összesen … … … … … … … 22 K.

Az 1911. évre: Égly Sándor 10 kor., Juvancz Irén 10 kor. Összesen … … … … … … … … … … … … 20 K.

Az 1912. évre: Egerváry Jenő 4 kor., Égly Sándor 4 kor. Összesen … … … … … … … … … … … … 8 K.

Az 1913. évre: Riesz Frigyes 6 kor., Zettner Ede 10 kor. Összesen … … … … … … … … … … … … 16 K.

Az 1914. évre: Bóka István 6 kor., Deutsch Lajos 10 kor., Frank János 10 kor., Molnár Szaniszló 6 kor., Neményi Anna 10 kor., Riesz Frigyes 6 kor., Romsauer Lajos 10 kor., Szarvassy Imre 10 kor., Zettner Ede 10 kor. Összesen … … 78 K.

Az 1915. évre: Balog Mór 10 kor., Bóka István 6 kor., Csemez József 10 kor., Deutsch Lajos 10 kor. Emszt Kálmán 10 kor., Fejér Lipót 10 kor., Finkey József 6 kor., ifj. Füzy Rezső 10 kor., Frank János 10 kor., Jurány Henrik 10 kor., Kopp Lajos 10 kor., Magi Ferencz 6 kor., Neményi Anna 10 kor., Nagy Sarolta 6 kor., Pekár Dezső 10 kor., Riesz Frigyes 6 kor., Romsauer Lajos 10 kor., Róna Zsigmond 10 kor., Steiner Miklós 6 kor., Szász Ottó 6 kor., Szarvassy Imre 10 kor., Tolnay Lajos 10 kor., Zettner Ede 10 kor. Összesen ... 202 K.

Az 1916. évre: Balog Mór 10 kor., Bartoniek Géza 10 kor., Bláthy Ottó Titusz 10 kor., Bodola László 6 kor., Bóka István 6 kor., Bacsó Vilmos 6 kor., Csemez József 10 kor., Czakó Adolf 10 kor., Csefó Sándor 6 kor., Csengery Piroska 10 kor., Demeczky Mihály 10 kor., Deutsch Lajos 10 kor., Emszt Kálmán 10. kor., Fejér Lipót 10 kor., Finkey József 6 kor., if. Füzy Rezső 10 kor., Frank János 10 kor., Hang Dániel 6 kor., Hatvani Ede 10 kor., Hauszmann Alajos 10 kor., Havas Miksa 10 kor., Haich Sarolta 10 kor., Juckel Gyula 10 kor., Jurány Henrik 10 kor., Kherndl Antal 10 kor., Kopp Lajos 10 kor., Kovács Ernő 10 kor., Litán Gergely 6 kor., Mátray Rudolf 6 kor., Magi Ferencz 6 kor., Milakovszky László 6 kor., Sz. Nagy Gyula 6 kor., Neustadt Lipót 10 kor., Neményi Anna 10 kor., Pecz Samu 10 kor., Pék János 6 kor., Purpringer István 6 kor., Rejtő Sándor 10 kor., Riesz Frigyes 6 kor., Rigó Ferencz 10 kor., Romsauer Lajos 10 kor., Róna Zsigmond 10 kor., Sós Ernő 10 kor., Straub Sándor 10 kor., Strauss Hermann 10 kor., Szabó József 6 kor., Szász Ottó 6 kor., Szekeres Kálmán 10 kor., Székely István 10 kor., Szuppán Vilmos 10 kor., Szarvassy Imre 10 kor., Tasch Antal 6 kor., Tolnay Lajos 10 kor., Ujj Gyula 10 kor., Weber Márton 6 kor., Závodszky Adolf 10 kor., Zettner Ede 10 kor. Összesen ... 498 K.

Az 1917. évre: Ábrahám István 10 kor., Anderkó Aurél 10 kor., Arany Dániel 10 kor., Baranyi Balázs 6 kor., Bauer Mihály 10 kor., Bartoniek Géza 10 kor., Bertram Brunó 6 kor., Bláthy Ottó Titusz 10 kor., Bodola Lajos 10 kor., Bodócs István 6 kor., Bogyó Samu 10 kor., Borosay Dávid 6 kor., Bozóky Endre 10 kor., Bricht Lipót 10 kor., Bresztovszky Béla 10 kor., Bak Elza 10 kor., Ballenegger Andor 10 kor., Bacsó Vilmos 6 kor., Blau Ilona 6 kor., Biró Dezső 10 kor., Baján János 10 kor., Csizhegyi Lajos 6 kor., Csopey László 10 kor., Czakó Adolf 10 kor., Czekeliusz Aurél 10 kor., Csősz László 6 kor., Demeczky Mihály 10 kor., Deutsch Lajos 10 kor., Dombay Nárczisz 6 kor., Domonkos Kálmán 6 kor., Éber József 10 kor., Ellend József 6 kor., Emszt Kálmán 10 kor., Farkas Gyula 10 kor., Félegyházi Antal 6 kor., Finkey József 6 kor., Fraunhoffer Lajos 10 kor., ifj. Füzi Rezső 10 kor., Frank János 10. kor., Fenyvesi Andor 10 kor., Goldziher Károly 10 kor., Hanauer Jenő 10 kor., Hatvani Ede 10 kor., Hauszmann Alajos 10 kor., Havas Miksa 10 kor., Heller Richárd 6 kor., Heuer Ede 10 kor., Hirschmann Nándor 6 kor., Hortobágyi Zsigmond 6 kor., Hercz Szidónia 6 kor., Hajós Géza 6 kor., Hoffmann Ernő 10 kor., Jánosi Imre 10 kor., Javorik János 6 kor., Juckel Gyula 10 kor., Jurány Henrik 10 kor., Karai Sándor 6 kor., Kherndl Antal 10 kor., Kirchknopf András 6 kor., Király László 6 kor., Klug Lipót 6 kor., Kopp Lajos 10 kor., Koren Dénes 10 kor., Koschowitz Gyula 10 kor., Kovács Ferencz 6 kor., Kőnig Dénes 10 kor., Kuzaila Péter 6 kor., Kilczer Gyula 10 kor., Kovács Ernő 10 kor., Lendvai Hugó 6 kor., Lévay Ede 10 kor., Luckhaub Gyula 6 kor., Lupán Vazul 6 kor., Magdics Gáspár 6 kor., Marczell György 10 kor., Mihalovits Alajos 6 kor., Mikola Sándor 10 kor., Magi Ferencz 6 kor., Mende Jenő 10 kor., Magyar Márta 6 kor., Nagy Balázs 6 kor., Sz. Nagy Gyula 6 kor., Neumann Jenő 6 kor., Nyáry Béla 6 kor., Nyirő Jolán 6 kor., Neményi Anna 10 kor., Oszlaczky Szilárd 10 kor., Oltay Károly 10 kor., Palatin Gergely 6 kor., Pécsi Albert 10 kor., Pecz Samu 10 kor., Privorszky Alajos 10 kor., Purpriger István 6 kor., Pogátsa János 6 kor., Pogány Iduna 10 kor., Rados Gusztáv 10 kor., Rados Ignácz 10 kor., Rátz László 10 kor., Richter Rezső 10 kor., Romsauer Lajos 10 kor., Rucsinszki Lajos 10 kor., Rhorer László 10 kor., Renner János 6 kor., Schuller Alajos 10 kor., Sinkó József 6 kor., Sós Ernő 10 kor., Straub Sándor 10 kor., Strauss Hermann 10 kor., Schrott István 10 kor., Sasvári Géza 10 kor., Szász Ottó 6 kor., Székely Károly 6 kor., Szekeres Kálmán 10 kor., Székely István 10 kor., Szuppán Vilmos 10 kor., Szabó Jenő 6 kor., Szarvassy Imre 10 kor., Széll Kálmán 6 kor., Tass Antal 6 kor., Tolnay Lajos 10 kor., Tersztyánszky Sándor 6 kor., Tőtössy Béla 10 kor., Tillinger Istvánka 10 kor., Vajnóczky István 10 kor., Woyciechowsky József 10 kor., Závodszky Adolf 10 kor., Zemplén Géza 10 kor., Zipernovszky Károly 10 kor. Összesen ... 1088 K.

Az 1918. évre: Baitoniek Géza 10 kor., Bauer Mihály 10 kor., Bacsó Vilmos 6 kor., Biró Dezső 10 kor., Grosschmid Lajos 10 kor., Király László 6 kor., Klug Lipót 6 kor., Kőnig Dénes 10 kor., Kovács Ernő 10 kor., Lévay Ede 10 kor., Mende Jenő 10 kor., Magyar Márta 6 kor., Sz. Nagy Gyula 6 kor. Nyirő Jolán 6 kor., Neuhold Özséb 6 kor., Pogány Béla 6 kor., Selényi Pál 10 kor., Szőke Béla 10 kor., Széll Kálmán 6 kor. Összesen ... 154 K.

Az 1919. és 1920. évre: Walek Károly 12 kor. Összesen ... 12 K.

Előfizetési díjat fizetett:

Az 1913. évre: Késmárki ág. h. ev. lyceum 6 kor., Kolozsvári egyetemi mathematikai seminarium 10 kor., Összesen ... 16 K.

Az 1914. évre: Beregszászi áll. főgimnázium 10 kor., Kolozsvári egyetemi mathematikai seminarium 10 kor., Székelyudvarhelyi ref. főgimnázium 6 kor. Összesen ... 26 K.

Az 1915. évre: Budapesti br. Eötvös József kollégium 10 kor., Kolozsvári egyetemi mathematikai seminarium 10 kor., Podolini kegyesr. főgimnázium 10 kor. Összesen ... 30 K.

Az 1916. évre: Brádi áll. polg. fiúiskola 6 kor., Brassói áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti V. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. felső leányiskola és leánygimnázium 10 kor., Budapesti tanárképző-intézeti gyakorló főgimnázium 10 kor., Dési áll. főgimnázium 6 kor., Dévai áll. főreáliskola 10 kor., Fiumei áll. főgimnázium 6 kor., Gyergyószentmiklósi áll. főgimnázium 4 kor., Jászberényi áll. főgimnázium 6 kor., Ipolysági áll. főgimnázium 10 kor., Kaposvári áll. főgimnázium 10 kor., Kézdivásárhelyi r. kath. főgimnázium 10 kor., Kisújszállási ref. főgimnázium 10 kor., Körmöczbányai áll. főreáliskola 10 kor., Kolozsvári egyetemi mathematikai seminarium 10 kor., Krbek Ferencz 10 kor., Lugosi áll. főgimnázium 8 kor., Marosvásárhelyi r. kath. főgimnázium 4 kor., Nagyváradi áll. főreáliskola 10 kor., Nagyszebeni áll. főgimnázium 10 kor., Privigyei kegyesr. főgimnázium 10 kor., Sepsiszentgyörgyi ref. főgimnázium 10 kor., Szakolczai kir. kath. főgimnázium 6 kor., Ujházy László 5 kor., Ujvidéki kir. kath. főgimnázium 10 kor. Összesen ... 221 K.

Az 1917. évre: Brassói áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti V. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti VIII. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti X. ker. (kőbányai) áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti Norbertinum főkormányzósága 10 kor., Budapesti ciszt. r. tanárképző intézet 10 kor., Budapesti m. kir. tudományegyetem könyvtár 10 kor., Budapesti áll. Erzsébet-Nőiskola 10 kor., Byff Imre 10 kor., Debreczeni áll. főreáliskola 10 kor., Debreczeni ref. főgimnázium 10 kor., Dévai áll. főreáliskola 10 kor., Dombovári kir. kath. főgimnázium 6 kor., Erzsébetvárosi áll. főgimnázium 10 kor., Egri áll. főreáliskola 10 kor., Fogarasi áll. főgimnázium 10 kor., Győri áll. főreáliskola 10 kor., Gyulai róm. kath. főgimnázium 10 kor., Gyulafehérvári róm. kath. főgimnázium 10 kor., Gyergyószentmiklósi áll. főgimnázium 8 kor., Gold Béla 10 kor., Günsberger Lajos 10 kor., Hajdúnánási ref. főgimnázium 6 kor., Jászói prépostság könyvtára 10 kor., Jászapáti kir. kath. főgimnázium 10 kor., Kecskeméti áll. főreáliskola 10 kor., Kecskeméti ref. főgimnázium 10 kor., Kolozsvári egyetemi ábrázoló mértani intézet 10 kor., Kolozsvári egyetemi mathematikai seminarium 10 kor., Kegyes tanítórend főnöksége 10 kor., Krbek Ferencz 10 kor., Lőcsei áll. főreáliskola 10 kor., Lugosi áll. főgimnázium 2 kor., Makói áll. főgimnázium 10 kor., Malaczkai zárdafőnökség 10 kor., Marosvásárhelyi róm. kath. főgimnázium 6 kor., Nagykállói áll. főgimnázium 10 kor., Nagyváradi r. k. tanítónőképző intézet 10 kor., Pannonhalmi főapátsági könyvtár 10 kor., Soproni ág. h. ev. lyceum 10 kor., Soproni áll. főreáliskola 10 kor., Szabadkai városi főgimnázium 10 kor., Szarvasi ág. h. ev. főgimnázium 10 kor., Szekszárdi áll. főgimnázium 10 kor. Székelyudvarhelyi r. k. főgimnázium 10 kor., Szentesi áll. főgimnázium 10 kor., Szászvárosi ref. Kún-kollégium 10 kor., Szekér József 2·50 kor. Temesvári áll. főgimnázium 10 kor., Temesvári áll. főreáliskola 10 kor., Temesvári felső kereskedelmi iskola 10 kor., Ujházi László 1 kor, Összesen ... 501·50 K

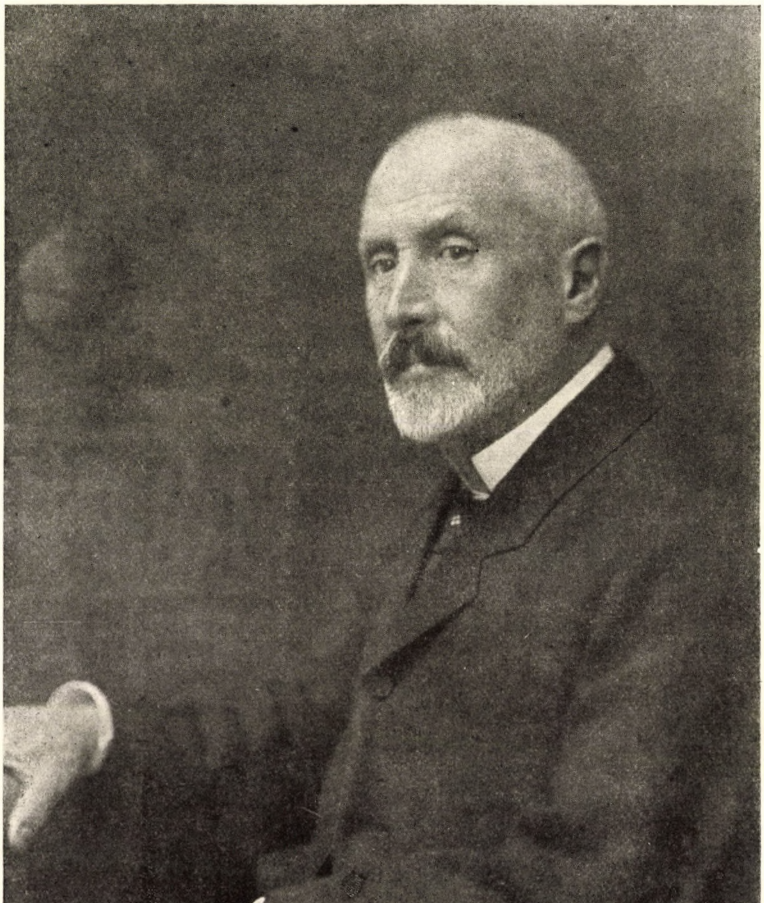
Az 1918. évre: Budapesti Norbertinum főkormányzósága 10 kor., Byff Imre 5 kor., Jászói prépostság könyvtára 10 kor., Kolozsvári egyetemi ábrázoló mértani intézet 10 kor., Ungvári kir. gör. kath. képezde 6 kor. Összesen ... 41 K.

Összesen befolyt:

Kőnig Gyula alapítványra:	10,000·— K.
Alapító tagsági díjakból	732·— «
Hátralékos tagdíjakból	870·— «
Folyó és jövő évi tagdíjakból	1,254·— «
Előfizetési díjakból	835·50 «
Összesen:	13,691·50 K.

Budapesten, 1917. évi deczember hó 31.-én.

Privorszky Alajos
pénztárnok.



Eötvös Loránd

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK BÁRÓ EÖTVÖS LORÁND-FÜZETE.

A Mathematikai és Physikai Társulat jelen ünnepi számával hódolatát óhajtja kifejezni nagynevű elnöke és alapítója iránt, a ki az isteni gondviselés jóvoltából az idei nyár folyamán munkakedvének teljességében és sikereinek magaslatán lépte át a patriarkakor küszöbét. Kérjük mélyen tisztelt elnök urunkat, hogy fogadja ragaszkodásunk és hálánk e csekély jelét oly kegyesen, a milyen meleg szeretettel azt neki fölajánljuk.

E füzet mesterünk eddigi, tanulságokban oly gazdag pályafutásának és a fizika fejlődésére oly jelentékenyen befolyt kutatásainak vázlatát adja elő. Boldogok lennénk, ha vele e nagyfontosságu kutatások módszereit és messze kiható eredményeit hozzáférhetőbbé tettük volna és a kinálkozó gyakorlati alkalmazásokhoz közelebb hoztuk volna.

E kutatások a világegyetem mechanismusán uralkodó vonzó erők vizsgálatára vonatkoznak és a míg egyrészt a régi mechanika zárókövének tekinthetők, másrészt a világegyetem uj fölfogását szolgáló relativitási elméletnek egyik legfontosabb kiinduló pontjául szolgáltak. A gravitácio mérésére szolgáló uj módszernek tökéletessége és a vele elért eredmények nagy jelentősége e kutatásoknak a természettudományok kincses házában örök helyet biztosítanak.

De tanuságot tesznek ezek mesterünknek ideális és nemes törekvéséről is, aki a tudományt mindíg célnak és sohasem eszköznek tekintette. Talán épen ezért adatott meg neki, hogy kutatásait nyomban követték a fontosabbnál fontosabb gyakorlati alkalmazások, úgy hogy a tiszta igazság fölismerésére irányuló ideális vágya ily módon az egész emberiség haladásának eszköze lett, melynek nemcsak szellemi emelkedésére, hanem anyagi jólétének fokozására is vezetett.

Mélyen tisztelt elnökünk lelkében az elmebeli erő, az akarat céltudatossága az érzés melegével és az életfölfogás nemes emelkedettségével szivet és lelket örvendeztető összhangban egyesülnek. De ép ily harmonikus élete folyása is. Az élet mosolygó, boldog tavaszát, az erős, férfias munkával teli nyár követte és most az ősz beálltával beköszöntött a dús termés aratásának ideje. Isten áldása legyen rajta és lelkünkből kivánjuk, hogy a jóságos gondviselés engedje meg szeretett elnökünknek, hogy e bő termésnek még sokáig örvendhessen!

Rados Gusztáv
alelnök.

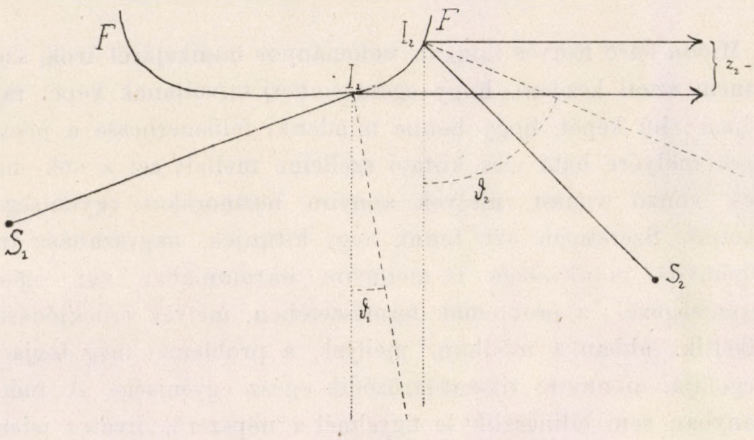
BÁRÓ EÖTVÖS LORÁND ÉLETE ÉS TUDOMÁNYOS MŰKÖDÉSE.

I. VIZSGÁLATOK A KAPILLARITÁSRÓL.

Midőn báró Eötvös Loránd tudományos munkájáról írok, szeretném azzal kezdeni, hogy egész emberi mivoltának képét rajzoljam; hű képét, hogy benne mindenki felismerhesse a jelenségek mélyére ható éles kutató szelleme mellett azt a sok nemes, vonzó vonást, melyek annyira harmonikus egyéniségét alkotják. Szeretném ezt tenni, hogy kitünjék, nagyszabásu tudományos munkássága is mennyire harmoniában van egész egyéniségével; a problémák természetében, melyek érdeklődését felkeltik, abban a módban, mellyel a problémát meg fogja s megoldja, mennyire vitszatükröződik egész egyénisége. A tudományban sem bilincselik le figyelmét a népszerű, divatos jelenségek, azok, melyeket a távolabb álló is érdekeseknek tart, melyekkel zajos sikereket lehet elérni, hanem inkább azok, melyek folyton szemünk előtt vannak s melyeket épen mindennapos voltuknál fogva annyira megszoktunk, hogy titokzatos voltuk csak a mélyen járó gondolkozót izgatja. Hogy a pohárban a víz a pohár falán felhuzódik, hogy a szabadon ejtett test a föld felé esik, annyira köznapi jelenségek, hogy egyszerű tudomásvétellel könnyen elsikiunk afelett, hogy e jelenségekben a legtitokzatosabb erők nyilvánulnak meg; pedig eme igényteleneknek látszó jelenségek beható kisérleti tanulmányozásától várhatjuk csak, hogy a bennök megnyilatkozó ú. n. molekuláris erőkről s gravitációról tudásvágyunkat kielégítő megismeréshez jussunk.

A kapillaris jelenségek még egyetemi hallgató korában felkeltették báró Eötvös Loránd érdeklődését. Fr. Neumann königsbergi tanár, a német fizikusok egyik legjelesebbjének szemináriumában ismertette a felületi feszültség mérésére szolgáló módszerét, a miért Fr. Neumannn meg is dicsérte.

E módszer leírása 1876-ben jelent meg, mint az akkor megindított — sajnos, nagyon rövid életű — Műegyetemi Lapok első számának első értekezése.[22] A módszer abban áll, hogy a folyadékfelület két ismert hajlású elemének egymástól való függ-



1. ábra.

gélyes távolságát mérjük meg. F F legyen a folyadék szabadfelületének átmetszete egy függélyes síkkal. (1. ábra). S_1 és S_2 két egyenesvonalú, az előbbi függélyes síkra merőleges fényforrás; ezek minden egyes pontjából kiinduló sugárkúp FF-ről visszaverődik s újra egy-egy sugárkupot szolgáltat, melyeket egy kathetometer vízszintes távcsövében fogunk fel. A távcsőben két fényes csík jelenik meg mint az S_1 és S_2 képe, melyek a kapillaris felület ama I_1 és I_2 pontjait jelölik meg, melyek az S_1 és S_2-ből beeső fénysugarakat vízszintes irányban verik vissza. Ismerve az S_1 és S_2 helyét, kiszámíthatjuk, $S_1\,I_1$ és $S_2\,I_2$ szögét a vízszintessel s ebből azt a ϑ_1 ill. ϑ_2 szöget, melyet a felület normálisa képez I_1 és I_2-ben a függélyessel. A kathetometerrel közvetlenül lemérhető az I_1 és I_2 pontok magasságkülömbsége. Ez adatokból kiszámítható a felületi feszültség a felületnek az elmélet adta egyenletéből.

Gondoljuk pl. hogy vizet töltünk egy nagyobb tiszta üvegedénybe, melyet sík falak határoljanak. A víz az edény fala mentén felemelkedik. A szabad vízfelület az edény sarkaitól távol hengerfelület lesz, melynek alkotói vízszintes egyenesek. E felület egyenletét az elmélet a következő alakban adja meg:

$$z = a\sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2},$$

hol z a felület valamely pontjának a felület vízszintes, tehát az edény falától távol eső részétől függélyesen felfelé számított ordinátája, ϑ a felület normalisának szöge a függélyessel, a pedig az ú. n. kapillaris állandó, mely a felületi feszültséggel α-val a következőkép függ össze

$$a^2 = \frac{2\alpha}{sg}$$

(s a folyadék sűrűsége, g a nehézség gyorsulása). Mint ismeretes a hosszúság jellegű mennyiség s értéke megadja azt a magasságot, melyre a folyadék egy vertikális végtelen síklap mentén felemelkedik, ha azt nedvesíti; α pedig az a feszitő erő, mely a felületben fekvő egységnyi hosszúságu egyenes darabra működik, egyuttal annak a munkának értéke, melyet végeznünk kell, ha a felületet a területegységgel megnagyobbitjuk. Ha már most ϑ_1 és ϑ_2, z_1 és z_2 az I_1 ill. I_2 ponthoz tartozó értékek, akkor

$$a = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{2}\left(\sin\frac{\vartheta_2}{2} - \sin\frac{\vartheta_1}{2}\right)}.$$

Ugyanígy alkalmazható a módszer, ha a folyadék szabad felülete forgásfelület, a melyet kapunk, pl. ha függélyes üvegcsőbe zárjuk a folyadékot. Ez esetben azonban a folyadékfelület egyenletét z és ϑ-ben kifejezve, az elmélet csak bizonyos közelítéssel àdja meg; ezért a cső átmérőjét úgy kell választani, hogy a közelítés legalább olyan pontos legyen, mint magok a mérések. Így a víz állandójának meghatározására báró EÖTVÖS LORÁND a vizet egy kereken 80 mm. átmérőjü DUMAS-féle gömbbe zárta (a milyent gőzsűrűség mérésekhez használnak), melyet a víz a közepéig töltött meg. Az edény falához közel eső rész egyenlete jó megközelítéssel

$$z = a\sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\left\{1 + \frac{a}{3\sqrt{2}.u}\,\frac{1-\cos^3\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\right\},$$

hol u a gömb sugara. A kapillaris állandó hasonlóan adódik, mint előbb. z_2—z_1, ϑ_1 és ϑ_2-ből.

Kisebb, 10—20 mm átmérőjü csövekbe zárt folyadék felületének alakját a fenti formula nem állítja elő elegendő pontossággal. Ilyenkor báró EÖTVÖS LORÁND a kapillaris forgásfelületek hasonlóságának elvét használta oly módon, hogy az ismeretlen kapillaris állandót egy ismert állandóval mérte össze. Ugyanis az elmélet a kapilláris forgásfelület differenciál-egyenletét a következő alakban adja meg

$$z = \frac{a^2}{2r}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{r\,\frac{dz}{dr}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2}}\right).$$

Ebben z jelentése ugyanaz, mint előbb, r a felület valamely pontjának távolsága a forgástengelytől. Ha írjuk

$$\frac{z}{a} = \zeta \quad \frac{r}{a} = \varrho,$$

egyenletünk így alakul

$$\zeta = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\varrho}\,\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\varrho\,\frac{d\zeta}{d\varrho}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\zeta}{d\varrho}\right)^2}}\right).$$

Amint látható, a folyadék anyagi minőségét jellemző a állandó egészen eltünt, vagyis mindenféle folyadék felületének differenciál egyenlete ugyanaz lesz, ugyanazokkal az állandókkal, ha minden hosszat a kapillaris állandóval a-val mérünk. Gondoljuk az egyenletet megoldva: $\zeta = F(\varrho, C_1, C_2)$, két tetszőleges C_1 és C_2 állandóval, melyeket a határfeltételekkel határozhatunk meg. Zárjuk a folyadékot üvegcsőbe, melyet a folyadék nedvesít, a cső sugara legyen R. A hol a folyadék a cső falát éri, az érintkezési szög zérus, tehát ha $\zeta = \frac{R}{a}$, akkor $\frac{d\zeta}{d\varrho} = \infty$; a meniszkus legmélyebb pontjában, hol $\varrho = 0$, ζ-nak maximuma van, tehát $\frac{d\zeta}{d\varrho} = 0$. E két feltételből C_1 és C_2 kiszámítható, mint $\frac{R}{a}$ függvénye. Írhatjuk tehát $\frac{z}{a} = \Phi\left(\frac{r}{a}, \frac{R}{a}\right)$, hol Φ minden folyadékra ugyanaz. Ebből következik: ha két folyadékot veszünk a és a' állandókkal s olyan csövekbe zárjuk, hogy $\frac{R}{a} = \frac{R'}{a'}$, akkor mindama pontokban, melyekben $\frac{r}{a} = \frac{r'}{a'}$ egyszersmind $\frac{z}{a} = \frac{z'}{a'}$ és $\frac{dz}{dr} = \frac{dz'}{dr'}$ azaz a felület hajlása is ugyanaz. A két felület hasonló lesz. Ha tehát a két felületre ugyanazon szögekkel ejtjük az $S_1 I_1$ és $S_2 I_2$ sugarakat (l. 1. ábra), akkor $\frac{z_2 - z_1}{a} = \frac{z_2' - z_1'}{a'}$, $a' = \frac{z_2' - z_1'}{z_2 - z_1} a$ és egyuttal $\frac{z_2 - z_1}{R} = \frac{z_2' - z_1'}{R'}$. Ebből a mérési eljárás önként adódik: Vízzel telt különböző sugarú csövek sorozatát készítjük, melyeken $\frac{z_2 - z_1}{R}$ értékét mindig ugyanazt a beesési szöget használva, lemérjük. A vizsgálandó a' állandójú folyadékon is lemérjük $\frac{z_2' - z_1'}{R'}$-t ugyanazon beesési szögekkel s a vizes csövek sorozatából kikeressük azt, melyre $\frac{z_2 - z_1}{R} = \frac{z_2' - z_1'}{R'}$, ekkor $\frac{R}{a} = \frac{R'}{a'}$ vagy $\frac{z_2 - z_1}{a} = \frac{z_2' - z_1'}{a}$, a miből a' kiszámítható.

E módszerrel felfegyverkezve fogott báró Eötvös Loránd kapillaris vizsgálataihoz, melyeknek első czélja az volt, hogy az elmélet alapjait ellenőrizze. Mert sokan foglalkoztak ugyan a kapilláris állandó meghatározásával, «azonban a sok mérés sokféle eredményt adott». Úgy, hogy kétségessé vált vajon a kapilláris jelenségek leírására elegendő-e egy a folyadékfelület minden pontjában állandó, változatlan felületi feszültség felvétele. Különösen a vízzel végzett mérések azt mutatták, hogy a kapilláris állandó értéke nagyon változik az idővel: friss felületé jóval nagyobb, mint azé, mely szabad levegőn hosszabb ideig állott, a miért QUINCKE felvette, hogy a folyadékfelületen a rugalmas utóhatáshoz hasonló jelenség lép fel. Báró EÖTVÖS LORÁND vizsgálatainak első nevezetes eredménye az volt, hogy ilyen rugalmas utóhatás nincs; a felületi feszültség időbeli változása nem a folyadék természetében rejlik, hanem a levegőből a felületre került piszok hatása. A vizet légmentesen egy beforrasztott DUMAS-féle edénybe zárta s akkor a felületi feszültség éveken át változatlan maradt, eltekintve a hőmérséklet okozta változástól. A vízre vonatkozó így nyert adatok «meglepő pontossággal igazolják azon kapilláris csövekben eszközölt méréseket, melyeknél a felület tisztántartására kellő gond volt fordítva. Ilyenek különösen mindazon mérések, melyeknél a hőmérséklettel való összefüggés megállapítása képezte a vizsgálat czélját, a melyeknél a capilláris cső a melegítő térben a levegőtől jól elzárva volt.»

A vázolt ú. n. reflexiós módszer előnyei:

1.) Független minden arra vonatkozó feltevéstől, hogy milyen szöggel érintkezik a folyadék a szilárd fallal.

2.) A folyadékot beforrasztott üvegedényben vagy csőben lehet vizsgálni s így attól minden szennyezést távol tartva a felületi feszültség biztos értékéhez lehet jutni.

3.) A folyadékokat forrpontjuknál magasabb hőmérsékleten lehet vizsgálni a kritikus hőmérsékletig.

További vizsgálatai során báró EÖTVÖS LORÁND a kapillaritás tanának, a felület alakjának meghatározására irányuló inkább geometriai feladatát nevezetes fizikai szemponttal bővítette: kereste az anyagi minőség befolyását a felületi feszültségre, a molekulasúly és felületi feszültség összefüggését. Több éven át folytatott fáradságos mérései meglepően egyszerű, alapvető törvényszerűségre vezettek s minden időkre klasszikus példája annak, miképen kell, hogy irányítsa a kisérletet az elméleti kép, melyet magunknak a jelenségről alkottunk. Épen ezért közöljük azt a gondolatmenetet, melyen báró Eötvös Loránd nevezetes törvényéhez jutott.[33], [34], [35]

Ha különböző anyagok viselkedését akarjuk egymással összehasonlítani, az első kérdés mindig az: milyen hőmérsékleten történjék az összehasonlítás? Van der Waals megadta rá a feleletet; egyszerű törvényszerűségekhez juthatunk, ha az anyagokat nem ugyanazon, hanem olyan abszolut hőmérsékleteken hasonlítjuk össze, melyek az illető anyagok abszolut kritikus hőmérsékletének ugyanazon tört részei s olyan nyomásokon, melyek a kritikus nyomásnak ugyanazon tört részei. Ezeket az állapotokat Van der Waals megfelelő állapotoknak nevezi. Különböző folyadékok felületi feszültségét is megfelelő állapotokban, tehát hőmérsékleteken kell összehasonlítani. Csakhogy akkor, mikor báró Eötvös Loránd vizsgálatait végezte, a kritikus hőmérsékletre elég pontos adatok nem álltak rendelkezésre, azonfelül az sincs kizárva, hogy a test ezen a magas hőmérsékleten disszociál. Ezért báró Eötvös Loránd a megfelelő állapotok más értelmezéséből indul ki.

«Részben folyós, részben telitett gőzállapotban lévő vegyileg homogén testet egyenlő tömegű molekulákból álló rendszernek tekintve, ennek állapota molekuláinak térbeli elosztásmódjával jellemezhető. Jelöljük tehát v-vel a folyadék molekulár-térfogatát, vagyis annak a térnek átlagos nagyságát, melyet a molekula a folyadékban elfoglal, u-val ugyanazt az adatot a gőzre vonatkozólag; ekkor a $\frac{v}{u}$ viszony a test állapotának jellemzésére alapul szolgálhat. Ha már most ez a viszony két testre nézve a megfelelő T_1 és T_2 hőmérsékletek mellett ugyanazon értékű, akkor a testek molekuláikból hasonló módon vannak összetéve. A hasonló összetétel ilyen állapotában a két testre

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \tag{1}$$

egyenlet érvényes s mivel a gáz térfogatokra vonatkozó tételek szerint

$$\frac{p_1 u_1}{T_1} = \frac{p_2 u_2}{T_2},$$

egyszersmind

$$\frac{p_1 v_1}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{T_2},$$

hol p_1 és p_2 a két test telített gőzeinek nyomását jelentik a T_1 és T_2 hőmérsékleteken. Mivel a hasonló összetétel állapotára jellemző 1) egyenlet Van der Waals értelmében megfelelő állapotokra is érvényes, «kitetszik, hogy a T_1 és T_2 hőmérsékleteken a két test a Van der Waals-féle definició értelmében is megfelelő állapotban van.»

Eötvös báró már mostan megkisérelte «egy bizonyos feltevésből következtetéseket vonni: abból a feltevésből t. i., hogy a megfelelő állapotban, tehát a hasonló összetétel állapotában levő lestek mechanikai értelemben is, azaz a megfelelő részeik között működő erőket és energiájukat illetőleg is hasonlók.»

«Ugyanis valamely folyadék felületének oly részét véve tekintetbe, melyet n mulekula borit, a gőztől reá gyakorolt nyomóerő: $np_1 v_1^{2/3}$.» Ugyanis $v_1^{2/3}$ annak a felületnek átlagos értéke, melyet 1 molekula borít. Ezt beláthatjuk a következőképen: Ha λ egy olyan kockának az éle a folyadék belsejében, melyben átlag 1 molekula foglal helyet, akkor $v_1 = \lambda^3$. E kocka bármely határlapja olyan felület lesz, melyet átlag 1 molekula borít; annak nagysága pedig $\lambda^2 = v^{2/3}$. Ugyanígy a koczka éle olyan egyenes, melyen átlag 1 molekula sorakozik, tehát «a felületi feszültségnek megfelelő erő egy olyan vonal mentén, melyben m molekula sorakozik: $mv_1^{1/3} \alpha_1$, mely kifejezésben α_1 a felületi feszültséget jelenti. Képezzük ugyanezeket a kifejezéseket egy másik testnek ugyanazon számú molekulából alkotott megfelelő részeire, ezek nyilván $np_2 v_2^{2/3}$ és $m\, v_2^{1/3} \alpha_2$.

Feltevésünkből az következik, hogy megfelelő állapotokra vonatkozólag

$$\frac{mv_1^{1/3}a_1}{np_1v_1^{2/3}} = \frac{mv_2^{1/3}a_2}{np_2v_2^{2/3}},$$

miből

$$\frac{a_1}{p_1v_1^{1/3}} = \frac{a_2}{p_2v_2^{1/3}}.$$

E tétel levezetésében feltételeztük, hogy a folyadék és a gáz molekulái egyenlő tömegüek. «Azokat a folyadékokat, melyekre ez csakugyan áll, röviden egyszerűen összetetteknek fogom nevezni». Ezt az elnevezést bevezetve az előbb nyert tétel következőleg fejezhető ki:

Ha bármely két egyszerűen összetett folyadékra T_1 és T_2 abszolut hőmérsékleteik mellett a

$$\frac{p_1v_1}{T_1} = \frac{p_2v_2}{T_2} \tag{2}$$

egyenlet áll, akkor ugyanazon hőmérsékleteken még az

$$\frac{a_1}{p_1v_1^{1/3}} = \frac{a_2}{p_2v_2^{1/3}} \tag{3}$$

egyenlet is érvényes; továbbá (2) és (3)-ből

$$\frac{a_1v_1^{2/3}}{T_1} = \frac{a_2v_2^{2/3}}{T_2}. \tag{4}$$

Van der Waals okoskodása szerint két test, mely T_1 és T_2 abszolut hőmérsékletek alatt megegyező állapotban van, ugyancsak megegyező állapotba jut, ha hőmérsékletük változása T_1 illetőleg T_2-vel arányos». Tehát (4) fenn áll akkor is, ha T_1-ből T_1+dt_1 és T_2-ből T_2+dt_2 lesz, feltéve, hogy $\frac{dt_1}{T_1}=\frac{dt_2}{T_2}$; akkor $\frac{av^{2/3}}{T}$ mindkét anyagra ugyanannyival változik meg, azaz

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a_1v^{2/3}}{T_1}\right)dt_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{a_2v^{2/3}}{T_2}\right)dt_2,$$

vagy

$$T_1\frac{d}{dt}\left(\frac{a_1v_1^{2/3}}{T_1}\right) = T_2\frac{d}{dt}\left(\frac{a_2v_2^{2/3}}{T_2}\right)$$

s ebből

$$\frac{d}{dt}(a_1 v_1^{2/3}) = \frac{d}{dt}(a_2 v_2^{2/3}). \qquad (5)$$

Ez elméleti okoskodás tehát arra vezet, hogy megfelelő hőmérsékleteken a $\frac{d}{dt}(av^{2/3})$ hányados értéke minden folyadékra ugyanaz; értéke még függhet a hőmérséklettől; hogy tényleg függ-e és hogyan függ, arról a fenn vázolt okoskodás nem mond semmit.

A mint az elméleti eredmény meg volt, lázas laboratóriumi munka indult meg az (5) alatti törvény kisérleti igazolására. A régi egyetemi fizikai intézet ablakai sokszor bizony éjjel is világosak voltak. A mérések nagy meglepetéssel szolgáltak: nem csak hogy igazolták a várt eredményt, hanem annál jóval többet mondó törvényszerűségre vezettek: nem csak hogy $\frac{d}{dt}(av^{2/3})$ megfelelő hőmérsékleten minden folyadékra ugyanaz, hanem értéke egyáltalában független a hőmérséklettől, tehát a következő tételhez jutunk: «A $\frac{d}{dt}(av^{2/3})$ hányados valamennyi egyszerűen összetett folyadékra állandó értékkel bír, mely a hőmérséklettől független».

Ez képezi az Eötvös-féle törvény tartalmát. Az $av^{2/3}$ mennyiségnek egyszerű fizikai értelmet adhatunk. Láttuk a számértéke egyezik ama munka értékével, melyet végeztünk a kapilláris erőkkel szemben, ha a folyadék felületét az egységgel megnagyobbítjuk, $av^{2/3}$ tehát a munka értéke, ha a felületet $v^{2/3}$-val, azaz akkora darabbal nagyobbítjuk meg, mint a mekkorát épen 1 molekula borít; ezt a felületet nevezhetjük molekuláris felületnek, $av^{2/3}$-ot pedig molekuláris felületi energiának. Eötvös törvénye tehát azt mondja: valamennyi egyszerűen összetett folyadék molekuláris felületi energiája 1° hőfokemelkedésre ugyanannyit változik.

Az állandó értéke gyanánt 0·227 adódott, ha a molekuláris térfogat értékéül a molekulasúly és sűrűség hányadosát használjuk, α-t pedig $\frac{\text{milligr. súly}}{\text{mm.}}$ egységekben fejezzük ki. Az állandót Eötvös-féle állandónak nevezik. Mivel ezek alapján

$$\frac{d}{dt}(av^{2/3}) = 0{\cdot}227$$

írhatjuk egyszersmind

$$av^{2/3} = 0{\cdot}227\,(T_0 - T),$$

hol T_0 az a hőmérséklet, melyen $\alpha = 0$ volna, ha a fenti formula egészen a kritikus hőmérsékletig érvényes volna. Eötvös báró megjegyzi, hogy a megfigyelések arra látszanak mutatni, hogy T_0 a kritikus hőmérséklettel megegyezik, vagy legalább nem messze esik tőle. A legtöbb szerző az utóbbi alakban fejezî ki az Eötvös-féle törvényt. E nevezetes törvényt báró Eötvös Loránd 1885-ben ismertette a Magy. Tud. Akadémiában.

Ha a felületi feszültséget $\frac{\text{din}}{\text{cm}}$ egységekben mérjük, akkor az állandó értéke 2·25 lesz.

Hogy a molekuláris felületi energia hőmérsékleti koefficiense a mérések tanusága szerint mennyire állandó báró Eötvös Loránd alapvető értekezéséből vett következő számadatokon látható :

Aethylæther	6°-tól	62° C-ig	$\frac{d}{dt}(av^{2/3})$	= 0·228
«	62° «	120° «	«	= 0·226
«	120° «	190° «	«	= 0·221
Aethylenbromid ...	20° «	99° «	«	= 0·227
«	99° «	213° «	«	= 0·232
Chloroform	20° «	60° «	«	= 0·230
Higanymethyl ...	20° «	99° «	«	= 0.228
Szénoxychlorid ...	3° «	63° «	«	= 0·231
Széndioxid	3° «	31° «	«	= 0·228
Szénkéneg	22° «	78° «	«	= 0·237
Kénessav	2° «	60° «	«	= 0·230

A víz, alkoholok, zsírsavak eltérően viselkednek. A víz állandója feltűnően kicsiny. 0° *C* és 20° *C* között kereken 0·10 ; a hőmérséklet növekedtével nő, de még 150° körül is csak 0·14-ra emelkedik. Az æthylalkohol állandója 21° C-től 38° C-ig 0·104 199° C-től 236° C-ig már 0,226. Az ecetsavé 21° C-től 160° C-ig 0·132, 160° C-től 230° C-ig 0·138. Ez eltérő viselkedést a törvényhez vezető okoskodás alapján egyszerűen lehet értelmezni, a mivel egyszersmind értékes felvilágosítást kapunk az illető folyadékok szerkezetéről. A törvény levezetésében feltételeztük, hogy a folyadék «egyszerűen összetett», hogy ugyanolyan tömegü molekulákból áll, mint a telített gőz. Ez anyagok eltérését az általános törvénytől tehát úgy értelmezzük, hogy folyós állapotban az anyagok molekuláinak tömege más, mint gőzállapotban s pedig, mivel a gőzállapothoz tartozó molekulasúlylyal számított hányados kisebb a normálisnál, azt mondjuk a molekulasúlyt túl kicsinynek vettük, a folyadék állapotban tehát a molekulák átlagos tömege nagyobb, mint gőzállapotban: a folyadékmolekulák asszociáltak. Ha a folyékony viz molekulasúlyát nem H_2O-nak, hanem H_4O_2-nek vesszük, akkor a hányados értéke 100° C és 210° közt 0·228 lesz, tehát arra az eredményre jutunk, hogy eme hőmérsékleti közben a folyós víz molekulái a gőz kettős molekuláival egyenlők, alacsonyabb hőmérsékleten átlag még nagyobbak.

Hogy az Eötvös-féle törvény szépsége s fontossága jobban kitünjék, külön reámutatok arra, hogy a folyadékok olyan tulajdonságát fejezi ki, mely független az anyagi minőségtől s e szempontból analogiája a gázok egyszerű állapotegyenletével szembeszökő. Utóbbi, mint ismeretes, azt mondja, hogy a gáz nyomásának és molekuláris térfogatának szorzata arányos az abszolut hőmérséklettel $pv = RT$, hol R független a gáz anyagi minőségétől, tehát minden gázra ugyanaz. Az Eötvös-féle törvény szerint a folyadék felületi feszültségének s molekuláris felületének szorzata arányos a kritikustól számított abszolut hőmérséklettel s az arányossági faktor minden folyadékra ugyanaz. Az analogia még szembeötlőbb, ha a gázegyenletet így írjuk: $\frac{d(pv)}{dt} = R$, Eötvös törvényét pedig: $\frac{d(av^{2/3})}{dt} = E$; R és E minden anyagra annak minőségétől független két állandó. E két egyenlet baloldalán ugyanazon jellegü mennyiség all: pv és $av^{2/3}$ is munka; pv megadja azt a munkát, melyet a gáz végez, ha térfogata állandó nyomáson a molekuláris térfogattal nő; $av^{2/3}$ az a munka, melyet a folyadék végez, ha felülete a molekuláris felülettel fogy. Az Eötvös-féle tőrvény a folyadékokra ugyanolyan jelentőségű, mint a gázok egyszerű állapotegyenlete a gázokra.

Mint a vízre, alkoholokra, zsírsavakra vonatkozó adatokból látható, az Eötvös-féle törvény kitünő módszert szolgáltat annak megvizsgálására, hogy valamely folyadékot egyszerű vagy összetett molekulákból állónak kell-e gondolnunk vagy nem. A fenn felsorolt anyagokra már Eötvös báró maga eldöntötte a kérdést; azóta sok más anyagra is kiterjesztették módszerét s megállapították többek közt, hogy a folyékony chlort, az olvasztott sókat és fémeket asszociált molekulákból állóknak kell mondanunk.

Azok közül, kik ebből a szempontból végeztek méréseket, különösen kiemelem Ramsay angol chémikust, ki 1893. megjelent értekezésében[86] egy módszert ismertet, mely felvilágosítást ad a folyadék molekularis állapotáról, nevezetesen arról, hogy a molekulái asszociáltak-e vagy nem. Dolgozatában elmondja, hogy a chémia ez idő szerint nem rendelkezik oly módszerrel, mely a folyadék molekulasúlyának ismeretéhez vezetne. Vizsgálatai ilyen módszerre vezették s ez az új módszer semmi egyéb, mint az Eötvös-féle törvény! Pedig Ramsay ismerte báró Eötvös Loránd vizsgálatait, hiszen hosszasan foglalkozik azzal az elméleti okoskodással, mely a törvényhez vezetett, közli Eötvös báró mérési eredményeit, kiemeli, hogy teljesen egyeznek az ő eredményeivel mégis lényeges külömbséget lát báró Eötvös Loránd $av^{2/3}=0{,}227\,(T_0-T)$ egyenlete s az ő egyenlete közt, melyet ilyen alakban ir: $\gamma\,(Mv)^{2/3} = K(\tau-d)$. Ebben γ a felületi feszültség, M a molekulasúly, v a fajlagos térfogat, τ a kritikustól számított hőmérséklet, d pedig egy állandó, melynek értéke 6° körül ingadozik. Az egész külömbség az, hogy Ramsay a d állandót vezeti be, a mi egyértelmű azzal, hogy az Eötvös-féle formulában T_0 nem jelenti pontosan a kritikus hőmérsékletet, hanem annál valamivel alacsonyabbat. De hiszen már Eötvös báró is kiemeli, hogy a megfigyelések arra látszanak utalni, hogy T_0 a kritikus hőmérséklettel megegyezik vagy legalább nem esik messze tőle. Szó sincs róla, hogy az Eötvös-féle és Ramsay-féle formula közt lényeges külömbség volna, sőt a kettő teljesen ugyanaz. Ramsay vizsgálatai más új eredményt nem tartalmaznak, mint azt, hogy T_0 nem pontosan a kritikus hőmérséklet, hanem annál valamivel alacsonyabb, továbbá, hogy a kritikus hőmérséklet közvetlen közelében $av^{2/3}$ már nem változik linearisan a hőmérséklettel, ott tehát az Eötvös-féle formula nem érvényes; végre, hogy az Eötvös-féle törvényt több más folyadékon igazolta, mint Eötvös báró. Sajnos Ramsay erősen kifogásolandó beállítása azt eredményezte, hogy az irodalomban némelyek, örvendetes módon a kisebbség, az Eötvös—Ramsay-féle törvényről beszélnek.

Keverékekkel és oldatokkal Pekár Dezső és Zemplén Géza végeztek méréseket s igazolták, a mit báró Eötvös Loránd maga is megállapitott æther és szénkéneg keverékére, hogy t. i. ezekre is fennáll az Eötvös-féle törvény.[88, 92]

Az Eötvös-féle törvény elméleti megokolásával többen foglalkoztak. Első sorban említem Van der Waals-t.[87, 103] A kapilláris jelenségeket azon az alapon tárgyalja, hogy az átmenet a folyadékból a gőzbe nem ugrásszerű, hanem folytonos; van egy véges vastagságu réteg a felület mentén, melyen belül az anyag sűrűsége folytonosan megy át a folyadék sűrűségéből a gőzébe. Ez elmélet azt adja, hogy

$$\frac{d\,(av^{2/3})}{dt} = \varphi\left(\frac{T}{T_k}\right),$$

hol T_k a kritikus hőmérséklet s φ minden anyagra ugyanaz a függvény; nem vezet tehát tovább, mint Eötvös báró egyszerű elméleti megfontolása. Lényegesen többet nyujt Madelung[99] s különösen Born és Courant[100] elmélete. Utóbbiak ugyanazt a módszert alkalmazzák, melylyel Debye a szilárd anyagok fajhőjét sikeresen vizsgálta quantum-elméleti felfogásra támaszkodva. Ez elmélet szerint $av^{2/3}=K(T'-T)$, hol T' közel a kritikus hőmérséklet; K, az EÖTVÖS-féle állandó pedig ily alakban adódik:

$$K=0{\cdot}240\left(1-\frac{\oplus}{3T}\right).$$

Itt $\oplus$ a DEBYE-féle elméletben is szereplő ú. n. karakterisztikus hőmérséklet, mely a hang terjedési sebességéből a folyadékban, c-ből s a molekuláris térfogatból V_0-ból kiszámítható:

$$\oplus=3{\cdot}6521.10^{-3}\frac{c}{\sqrt[3]{V_0}}.$$

Közepes hőmérsékleten $\frac{\oplus}{3T}$ átlag $1/10$ s a hőmérséklettel kevéset változik. E szerint K nem pontosan állandó, hanem kis mértékben függ az anyagi minőségtől és hőmérséklettől, a mi a tapasztalással megegyezik. Ez elmélet az Eötvös-féle törvényt helyesen adja, az állandónak a tapasztalással megegyező számmértékével együtt.

Tangl Károly.

II. VIZSGÁLATOK A GRAVITÁCIÓRÓL.

A folyadékok részei között működő s csak kicsiny távolságra számottevő erők vizsgálatát báró Eötvös Loránd a róla elnevezett nevezetes törvény felállításával fejezte be. Ezután csak elvétve foglalkozott a kapilláris jelenségekkel, mert érdeklődését majdnem kizárólag egy másik erő kötötte le, mely az égi testek között lévő óriási távolságokban ép úgy érezteti hatását, mint a földi tárgyak között. A gravitációra vonatkozó vizsgálatai folyamán báró Eötvös Loránd eszközeinek érzékenységét és biztonságát annyira fokozta, annyi új módszert gondolt ki ez erő mérésére, hogy a földi tárgyak között működő eme kicsiny erő szinte kézzelfogható lett és e tökéletesített eszközökkel és módszerekkel olyan feladatok megoldására vállalkozhatott, melyek addig megközelíthetetleneknek látszottak. 30 év szakadatlan munkájának eredménye egyrészt alapvető a gravitációs erő felfogására nézve, másrészt a Föld szerkezetére vonatkozó kutatásoknak egészen új irányt és évszázadokra szóló feladatokat jelölt ki, melyeknek keresztülvitelére ő maga hazánk területének rendszeres átkutatásával klasszikus példát adott. E vizsgálatok most is folynak; alig hogy a nyár és ősz folyamán végzett mérések feldolgoztattak, alig hogy kitavaszodik, megindul az új expedició szervezése hazánk egy új, érdekesnek igérkező területének gravitációs és mágneses átkutatására, nyár elején aztán elindulnak báró Eötvös Loránd munkatársai, hogy késő őszig bejárva a kijelölt területet, gyüjtsék az adatokat. E mérések gazdag anyagáról s eredményeiről egy másik cikk fog beszámolni; itt csak a módszerről s a gravitációra vonatkozó általános természetű vizsgálatokról lesz szó.

A kapillaritásra vonatkozó méréseit báró Eötvös Loránd egy új, kifogástalan biztos módszer felállításával inditotta meg; a gravitációs kutatásaiban is mindenek előtt arra törekedett, hogy a mérési módszert tökéletesítse, a mérést pontosabbá és biztosabbá tegye s a mérőeszköz érzékenységét növelje. A gravitációs erők mérésére elég érzékeny eszköz meg volt adva: a Coulomb-féle mérleg. A gravitáció állandó meghatározására eddig is többnyire ezt az eszközt használták, azonban nem volt elég állandó; a mérleg egyensúlyi helyzete egyelőre indokolatlan, kiszámíthatatlan ingadozásokat mutatott, minek folytán az egy- és ugyanazon eszközzel végzett egyes mérések közt jelentékeny eltérések mutatkoztak.

E zavarok eredetét báró Eötvös Loránd a mérleget magába záró szekrényben fellépő levegőáramokban kereste, melyeket apró hőmérséklet-külömbségek hoznak létre. Hogy e zavaró hőmérséklet-külömbségeket lehetőleg csökkentse, többféle próbálgatás után a Coulomb-féle mérleget kettős, sőt hármasfalu fémszekrénybe zárta; hogy pedig a szekrényben foglalt levegő mennyiségét leszállítsa, a rudat körülvevő fémszekrénynek lapos hengeralakot, vagy a mikor nagy lengésekre nem volt szükség lapos parallelepiped vagy hengeres cső alakot adott.[57] Ezzel az egyszerű fogással tényleg sikerült az eszközt annyira állandóvá tenni, hogy nemcsak kedvező hőmérsékleti viszonyok között jól védett laboratóriumi helyiségekben lehetett vele biztosan mérni, hanem künn a szabadban, egyszerű vászonsátorban is.

Zavart okoz továbbá a felfüggesztő drótban fellépő rugalmas utóhatás is. Báró Eötvös Loránd finom, kereken 0·04 mm. átmérőjű platina-drótra függesztette a mérleg rúdját. Ez a drót feltekercselve jő forgalomba; mikor aztán a Coulomb-féle mérleg rúdját reá felfüggesztjük, nagyon hosszú időn át folyton egyirányban változtatja egyensúlyi helyzetét: a drót lassan kicsavarodik. Ezen a bajon úgy lehetett segiteni, hogy az eszközbe csak olyan drót került, mely előzőleg már hónapokon keresztül a mérleg rúdjával egyforma súlylyal volt megterhelve s így elég ideje volt a kicsavarodásra. Ezt a kicsavarodási folyamatot még gyorsitani lehetett azzal, hogy a dróton időnkint elektromos áram ment át, mely azt gyenge izzásig melegitette. Az így kezelt drót igen jónak bizonyult, úgy, hogy egyensúlyi helyzete már csak a hőmérséklettel változik.

A gravitáció állandójának meghatározása képezte 1888 óta az egyetemi fizikai intézetben folyó vizsgálatoknak egyik célját. Már 1888-ban sikerült báró Eötvös Lorándnak a tömegvonzás jelenségét egy népszerű előadáson nagyobb számú hallgatóságnak bemutatni.[38] Ez az eszköz azóta hazai középiskolák szertárában is otthonos lett. A fémszekrényben jól védett Coulombféle mérleg alatt quadransokra osztott hengeres vasedény volt elhelyezve, melynek szemben álló quadranspárjait felváltva higanynyal lehetett megtölteni. A higany vonzása elterítette a mérleg rúdját, a mit a mérlegre erősített tükörről visszavert fénysugár tett láthatóvá. «Az eszköz már 3—4 percznyi lengésidővel is elegendő érzékenységet s e mellett a kivilágitott és fűtött tanteremben is kellő állandóságot tanusitott». Később báró Eötvös Loránd előadásaiban a tömegvonzást más eszközzel szokta bemutatni. Ebben a mérleg rúdját kivül 4 cm. átmérőjű kettős falú fémhenger zárta körül úgy, hogy az eszköz szekrénye ⊥ alakú hengeres tok alakját nyerte. A rúd két végén levő golyókkal szemben ezekkel egy magasságban egy-egy 50 kg.-os ólomgolyót helyez el forgatható asztalon; utóbbival az ólomgolyókat úgy lehet elforgatni, hogy mindegyik a mérlegrúd másik végén levő golyóval jut szembe, s a rudat az ellenkező irányban téríti ki, mint az előbbi állásában.

A mérő-kisérletek hosszú sora Cavendish-éhez hasonló berendezésű volt, mégis azzal a jellemző különbséggel, hogy a vonzó tömegek többnyire a mérlegrúddal nem egy magasságban, hanem az alatt foglaltak helyet forgatható asztallapon, úgy, hogy a rúdon levő golyó középpontját a vonzó golyó középpontjával összekötő egyenes a rúdra merőlegesen állván, a vizszintessel 55°-nyi szöget képezett. E helyzetben ugyanis a vonzó erő forgató momentuma maximum lesz a vonzó golyóknak a vízszintes síkban történő eltolására nézve. Ennek az az előnye, hogy a vonzó erő forgató momentuma a rúd kitérített helyzetében elhanyagolható keveset tér el attól, mely a ki nem térítettre hat; továbbá a tömegek viszonyos helyzetének meghatározásában csak a függélyes távolságok lemérésére kell nagyobb gondot fordítani, mert a vízszintes távolság mérésében elkövetett hiba, a maximum helyzet miatt, csak mint másodrendű kicsiny mennyiség változtatja az eredményt. A kitérítés lemérése skálaleolvasással történik, azonban fotográfiai eljárás is használatban volt oly módon, hogy a rúdra erősitett tükörről visszavert fénysugár érzékeny fotográfiai papirosra esett, mely óraművel hajtott vízszintes hengerre volt felcsavarva.

E sztatikai módszernél sokkal érzékenyebb báró Eötvös Loránd sajátos ú. n. dinamikai módszere, mely nem a mérlegrúd kitérését méri, hanem azt, hogy mennyire változik meg a lengésideje a vonzó tömegek hatása folytán.[57] Hogy e módszert átértsük, a következő eszményi berendezésből induljunk ki: Gondoljunk egy véges vastagságú, két irányban végtelen kiterjedésü homogén vertikális falat; vastagsága h, sűrűsége σ. E fal vonzása egy kívüle fekvő A pontban lévő tömegegységre független A-nak a faltól számított távolságától és egyenlő $2\pi f\sigma h$-val, hol f a gravitáció állandója. E végtelen fal közepébe gondoljuk helyezve a Coulomb-féle mérleget, először a fal irányával párhuzamosan — longitudinális állás —, azután arra merőlegesen — transzverzális állás. Nyilván mindkét állásban a falnak a rúdra gyakorolt forgató momentuma zérus s a rudat ki nem téríti. Ha azonban a rúd bármelyik állásból ϑ szöggel kitér, a forgató momentum már nem lesz zérus. Nézzük, mekkora lesz a forgató momentum a longitudinális állásban. A rúd valamely A pontja a kitérés folytán A'-be jut (2. ábra). A rudat végtelen vékonynak vesszük majd számításunkban. Hogy az A'-ban lévő dm tömegelemre gyakorolt vonzó erőt számíthassuk, a falat egy, az oldallapokkal párhuzamos S síkkal két részre bontjuk úgy, hogy az A' pont az egyik résznek — az 1. ábrában a nem sraffozott rész — épen a közepébe essék. Az eme részből származó vonzó erők eredője zérus s így csak a sraffozott rész vonzása marad hátra, mely merőleges a fal irányára. A sraffozott rész vastagsága könnyen beláthatóan $2l \sin\vartheta$, hol l az A s egyúttal az A' pont távolsága a forgástengelytől; a dm-re gyakorolt vonzó erő az előbbiek szerint $4\pi f\sigma l \sin\vartheta dm$, a forgató momentum pedig

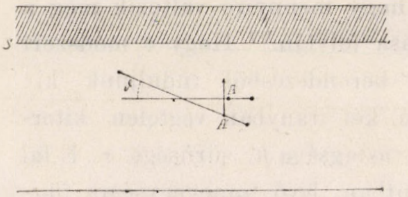
$$-4\pi f\sigma\, l^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\, dm, \quad = -2\pi f\sigma\, l^2 \sin 2\vartheta\, dm$$

mivel az erő karja $= l \cos\vartheta$.

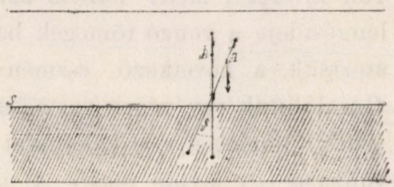
Az egész rúdra gyakorolt forgató momentum lesz:

$$-2\pi f\sigma \sin 2\vartheta \int l^2 dm,$$

hol az integráció kiterjesztendő az egész rúdra. De $\int l^2 dm = K$ nem egyéb, mint a rúd tehetetlenségi momentuma a felfüg-



2. ábra.



3. ábra.

gesztő drótra, mint forgástengelyre vonatkoztatva. Tehát, ha a rúd a longitudinális állásból kitér ϑ szöggel, a reáható gravitációs forgató momentum $= -2\pi f\sigma K \sin 2\vartheta$.

Ha a rúd a transzverzális állásból tér ki ϑ szöggel (3. ábra), a falat úgy, mint előbb, megint két részre bontjuk; a nem sraffozott rész közepén lévén az A' pont, annak vonzó ereje zérus. A sraffozott rész vastagsága most $2l \cos\vartheta$; vonzása merőleges a falra s értéke $4\pi f\sigma l \cos\vartheta\, dm$; forgató momentuma: $+4\pi f\sigma l^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\, dm = +2\pi f\sigma l^2 \sin 2\vartheta\, dm$, az egész rudra tehát; $+2\pi f\sigma K \sin 2\vartheta$, ugyanakkora, mint előbb, csak ellenkező előjelü, a miben az nyer kifejezést, hogy a longitudinális állásból kitérve a fal vonzása vissza akarja vinni a rudat kiinduló állásába, ϑ-t tehát kisebbíteni akarja, a transzverzális állásból kitérve pedig kiindulási állásából távolítani, ϑ-t tehát nagyobbítani akarja. Végtelen kis kitérésekre szorítkozva a két forgató momentum $\mp 4\pi f\sigma K\vartheta$ alakban írható, hol a felső jel a longitudinális, az alsó a transzverzális állásra vonatkozik.

Ha a rúd lengése közben az egyensúlyi helyzetéből kitér, hat reá még a felfüggesztő drót megcsavarásából származó forgató momentum is, mely mindkét állásban $=-\tau\vartheta$, ha a τ a drót csavarási együtthatója. A rúdra ható összes forgató momentum, ezek alapján $= -(\tau \pm 4\pi f\sigma K)\vartheta$. Jelöljék T_1, ill. T_2 a lengésidőt a longitudinális, ill. transzverzális állás körül végtelen kis amplitudó esetére, akkor, a mint a mechanika elemeiből ismeretes

$$T_1^2 = \pi^2 \frac{K}{\tau + 4\pi f\sigma K}, \qquad T_2^2 = \pi^2 \frac{K}{\tau - 4\pi f\sigma K}$$

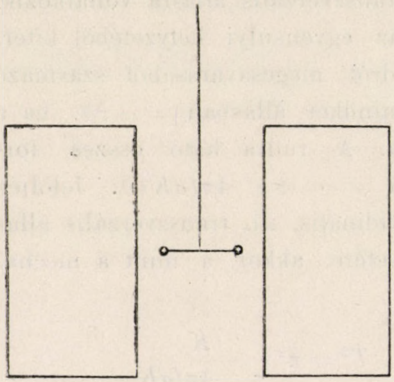
és ezekből

$$\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} = \frac{8\pi f\sigma}{\pi^2}. \tag{1}$$

Természetesen az itt tárgyalt eszményi eset meg nem valósítható; azonban az 1) egyenlet változatlanul érvényben marad akkor is, ha a végtelen falból kivágunk egy négyzetes alapú függélyes oszlopot s az így nyert szabad tér közepébe helyezzük a Coulomb-féle mérleget. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a kihasított négyzetes oszlop forgató momentuma, akár a longitudinális, akár a transzverzális állásból tér ki a rúd ϑ szöggel, ugyanakkora lesz és ilyen alakú: $F\vartheta$; ha ezt a forgató momentumot a teljes fal forgató momentumából levonjuk, megkapjuk a kihasítás után maradt két fal hatását: $F\vartheta \mp 4\pi f\sigma K\vartheta$. A rúdra ható összes forgató momentum tehát $= -(\tau - F \pm 4\pi f\sigma K)$. Az egész különbség az előző eszményi esethez képest az, hogy τ helyett $\tau - F$ lép be s így, ha T'_1 T'_2 a megfelelő lengésidők, ezekre is áll az 1) egyenlet, azaz

$$\frac{1}{T_1'^2} - \frac{1}{T_2'^2} = \frac{8\pi f\sigma}{\pi^2}.$$

Persze ez az egyenlet is eszményi esetre vonatkozik még, mert végtelen fallal nem dolgozhatunk. Ez eszményi esetnek megfelelően báró Eötvös Loránd a Coulomb-féle mérleget két négyzetes alapú, ólomtéglákból összerakott oszlop közé állította (4. ábra), úgy, hogy az oszlopok közt ugyancsak négyzetes alapon szabad tér maradt. Az oszlopok alapja közel 30×30 cm., magassága közel 60 cm. volt. Ez esetben az 1) formula csak annyiban szenved változást, hogy 8π helyébe 13·427 lép, a mint ezt a részletes számítás mutatja, s hozzájön még egy $1-\varepsilon$ faktor, melyben azonban ε 1%-nál kisebb a rúd méreteitől függő korrekció tagot jelent. Erre az esetre tehát



4. ábra.

$$\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} = \frac{13\cdot427}{\pi^2}(1-\varepsilon).$$

A mérésekre használt eszköz kétféle lengésideje közt jelentékeny különbség volt, a mennyiben T_1 észlelt szélső értékei 640·97 és 641·28 mp, T_2-éi pedig 859·29 és 860·32 voltak, a mi tulnyomó részben az oszlop vonzó hatásából származik. Az oszlopok eltávolítása után maradt még különbség a két lengésidő között: $T_1 = 742\cdot82$ és $T_2 = 759\cdot07$ lett, mely különbség az észlelés helyét környező falak és földtömegek vonzásának eredménye.

A gravitáció állandójának végleges értékét báró Eötvös Loránd még nem vezette le, egyrészt mert a rúd lengése közben magával hurczolt levegő hatását a megkívánt pontossággal kikutatni még nem volt alkalma, másrészt az ólomtéglák homogén volta sem elég megbizható. Az eddigi megfigyelések alapján «az állandó értéke az

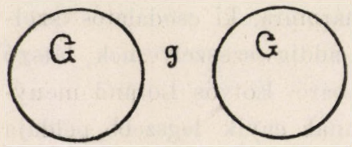
$$f = 0\cdot0000000665$$

értéktől aligha tér el többet, mint annak $\frac{1}{500}$ részével».

E módszer nagy előnye abban áll, hogy a rúd méretei csak a korrekcziótagban szerepelnek. A módszer érzékenységét mutatja az a körülmény, hogy az ólomtömegek vonzását a két álláshoz tartozó lengésidők 203 mp.-nyi különbsége jelzi!

Abban a szerencsés helyzetben voltam, hogy e mérésekben még hallgató koromban részt vehettem; ennek immár 27 éve, de most is újra meg újra átérzem azt az áhitatos, mélységes örömet, mely lelkemet megragadta, mikor a titokzatos gravitációs erő eme hatalmas megnyilvánulását láttam. Milyen lelkesedéssel s csodálattal tekintettem fel tanáromra, ki csodálatos szellemi fölénnyel megfékezte azt az addig szeszélyesnek látszó erőt s szolgálatába hajtotta. Hogy báró Eötvös Loránd menynyire ura a gravitációs erőnek, annak egyik legszebb példája az az eszköz, melyet gravitácziós kompenzátornak nevezett, melyben magát a gravitációt használta fel arra, hogy a Coulomb-féle mérleg érzékenységét szinte a végtelenségig fokozza. Ismeretes, hogy a galvanometer érzékenységét növelhetjük egy ú. n. kompenzáló mágnessel: a galvanometer közelében egy fix mágnest helyezünk el úgy, hogy a galvanometer tűjének egyensúlyi helyzete ne változzék, hanem csak a földi mágneses tér erősségét csökkentjük a tű helyén, vagyis kisebbítjük azt az erőt, mely az áram kitérítette tűt előbbi nyugalmi helyzetébe hajtja vissza. A földi mágneses teret kompenzáltuk a külső mágnessel. A Coulomb-féle mérleget a drót megcsavarásából származó erő akarja visszavinni eredeti nyugalmi helyzetébe: ezt az erőt kompenzálta báró Eötvös Loránd külső fix tömegek vonzásával.

Hogy ez eszköz lényegét megértsük, gondoljuk, hogy a Coulomb-féle mérleg g golyójával szemben, vele egy magasságban kétoldalt egy-egy G G ólomgolyót helyezünk el, g-től egyforma távolságra (5. ábra). A vonzó erők eredője zérus lévén, a Coulomb-féle mérleg egyensúlyi helyzete ezzel nem változik meg. Ha azonban lengés közben kitér s mondjuk g a jobboldali G golyóhoz közeledik, utóbbi vonzása nagyobb lesz, mint a baloldalié, az eredő vonzás tehát még jobban el akarja távolítani g-t egyensúlyi helyzetétől, ahová a drót vissza akarja vinni. A G golyók odahelyezésével elértük tehát, hogy kisebb erő viszi vissza a mérleget egyensúlyi helyzetébe : a mérleg érzékenyebb lett, mint volt a G golyók nélkül. Golyók helyett Eötvös báró alkalmasabb henger-quadransokat használt, melyeket a mérleg-rúd mint tengely körül forgatni lehetett. A mérleg rúdját, a fonalat s a quadransokat megfelelően méretezve, elérte, hogy a quadransokat külömböző állásokba hozva, az érzékenység egészen a labilitásig tetszőlegesen fokozható volt. Az érzékenységgel együtt természetesen a lengésidő is növekszik, a míg a levegő ellenállása folytán a mérleg aperiodikus lesz, tehát lengéseket nem is végez, hanem folyton egyirányú lassú mozgással jut új egyensúlyi helyzetébe. Így sikerült a pinczében felállított eszköztől öt méter távolságban elhelyezett 300 kilogramm tömegnek hatását kimutatni.



5. ábra.

1890-ben és 1909-ben végezte báró Eötvös Loránd ama nagyfontosságú alapvető méréseit, melyekre támaszkodva Einstein gravitáció-elméletét felépítette. E vizsgálatok azzal a fontos kérdéssel foglalkoztak, vajjon a Föld vonzása független-e a testek anyagi minőségétől vagy a mi egyértelmű ezzel, vajjon a különböző anyagok ugyanazzal a gyorsulással esnek-e. E mérésekről lejebb Pekár Dezső és Fekete Jenő közös czikkében bővebben lesz szó s így elegendő, ha itt a mérés elvét vázolom. Eötvös báró módszere lényegesen más, mint Besselé és meglepően egyszerű : a zseniális módszerek közös vonása.

A nehézség két erő eredője : a Föld vonzásához hozzájárul mint tehetetlenségi erő a centrifugalis erő, a Föld forgása folytán. E kettő általánosságban bizonyos szöget zár be egymással, mely közel egyenlő a földrajzi szélesség pótszögével ($180°—\varphi$). Az eredő iránya függ az összetevőktől ; a centrifugális erő, mint tehetetlenségi erő egyenlő tömegű testekre ugyanakkora, függetlenül az anyagi minőségtől; ha tehát a vonzó erő függne az anyagi minőségtől, akkor a külömböző anyagokra gyakorolt eredő erőnek, a nehézségnek iránya különböző volna. Míg Bessel azt kereste, vajjon a különböző anyagok nehézségének értéke különböző-e, addig báró Eötvös Loránd az esetleg fellépő iránykülönbségeket kereste, melyeket a Coulomb-féle mérleggel igen érzékenyen lehet felderíteni.

Vegyük mindenekelőtt számba, hogy a nehézségi erő igen közel a csillagászati délkör síkjába esik; ez igaz maradna akkor is, ha iránya függne az anyagi minőségtől. Állítsuk a Coulomb-féle mérleget úgy, hogy rúdja keletnyugoti irányban álljon; erősítsünk a két végére két különböző anyagi minőségű testet, pl. egyik végére rézgolyót, a másik végére üveggolyót. Ha most a két nehézségnek különböző az iránya, mindegyik erőnek lesz összetevője a rúd forgási síkjában s pedig a rúdra merőlegesen. Ezek az összetevők forgató momentumot adnak s elcsavarják a fonalat. Ezt az elcsavarást ugyan egy állásban való észleléssel nem vehetjük észre, azonban ha a fonál, mint forgástengely körül az egész eszközt szekrényestől 180°-kal elforgatjuk, úgy, hogy a golyók helyet cserélnek, a forgató momentum ellenkező irányú lesz s a drót is ellenkező irányban csavarodik el. Az egész eszköz 180°-os elforgatásának tehát az lesz a következménye, hogy a rúd állása a szekrényhez képest megváltozik, vagyis a rúd nem követi teljesen a szekrény elforgását, hanem vagy többel, vagy kevesebbel forog el mint 180°. A rúd eme viszonylagos elforgását azonban igen érzékenyen tudjuk lemérni, ha a szekrényre is meg a rúdra is erősítünk egy-egy tükört s egy skálának két képét figyeljük meg ugyanazzal a távcsővel. A báró Eötvös Loránd használta eszköz úgy volt méretezve, hogy ha a rúd két végén levő testekre ható nehézségi erő csak egy húszmilliomod résszel különbözött volna, a rúd viszonylagos állásában 1 perczny különbségnek kellett volna mutatkoznia. Nem mutatkozott észrevehető különbség, tehát a különbség a vonzó erőben egy húszmilliomodnál kisebb. Báró Eötvös Loránd eme kísérleteit 1909-ben

Pekár Dezső s Fekete Jenő közreműködésével megismételte és eredményeit egy pályamunkába foglalta össze, melyet a göttingeni tudós társaság a Benecke-dijjal jutalmazott.[79] Sajnos e pályamunka nyomtatásban nem jelent meg. E mérésekben az észlelés pontosságát annyira lehetett fokozni, hogy báró Eötvös Loránd kimondhatta: a különböző szilárd anyagok nehézsége annak $\frac{1}{200,000,000}$ részéig ugyanaz. A nehézségi erő egyformasága ezzel ugyanolyan rendű pontossággal van biztosítva, mint a milyennel tömegek egyformaságát tudjuk megállapitani; más fizikai mennyiség mérésben ekkora pontosságot nem tudunk elérni. Báró Eötvös Loránd eme méréseit P. Zeemann híres hollandi fizikus 1917-ben megismételte, az eredmény ugyanaz.[133]

Báró Eötvös Loránd gravitációs vizsgálatainak talán legfényesebb fejezetéről kell még szólanom: azokról a mérésekről, melyek a földi nehézség erőterének olyan pontos és részletes ismeretéhez vezettek, mely elérhetetlennek látszott. E cikkben csak a mérési módszerről lesz szó.

E vizsgálatok czélja: meghatározni a nehézség térbeli változását. A közönséges inga megadja a nehézségi gyorsulás értékét az észlelés helyén: a nehézség térbeli változásának mérésére úgy használható, hogy különböző helyeken határozzuk meg ugyanazon inga lengésidejét. Az inga azonban nem elég érzékeny arra, hogy különbséget mutasson két közel fekvő hely nehézségi gyorsulása közt. Érzékenyebb eszköz a közönséges mérleg, mellyel Jolly nyomán lemérhetjük, mennyit változik a nehézségi gyorsulás a magassággal. Báró Eötvös módszere lehetővé teszi a térbeli változások lemérését nehány deciméternyi távolságokban és különböző irányokban.

Mint ismeretes a nehézségi erőnek van potenciálja, melynek differenciál hányadosai a koordináták szerint a nehézségi erőnek megfelelő összetevőit adják. Fektessük a koordinátarendszert úgy, hogy z tengelye függélyesen lefelé, azaz a koordinátarendszer kezdőpontjában működő nehézség irányába mutasson, x és y tengelye pedig vízszintes legyen. Ha most X, Y g a nehézség három összetevője, akkor

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=0,\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y}=0,\quad g=\frac{\partial U}{\partial z},$$

ha U a potenciál. A nehézség térbeli változásainak jellemzésére szolgálnak X Y g-nek a koordináták szerinti differenciál hányadosai, összesen 9 mennyiség. Ezeknek fizikai értelme egyszerű: pl. $\frac{\partial g}{\partial x}$ megadja, mennyit változik a nehézségi gyorsulás, ha az x tengely irányában 1 cm.-rel tovább haladunk. E kilencz mennyiség azonban nem független egymástól, mert hisz pl.

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)=\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Három ilyen összefüggést írhatunk fel; továbbá Laplace-Poisson egyenlete szerint

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=2\omega^2,$$

hol ω a Föld forgásának szögsebessége. Mindössze tehát 5 független hányados marad a térbeli változás teljes jellemzésére; ezek könnyen kifejezhetők a potenciál második differenciál hányadosaival. Az 5 független hányados közül Eötvös báró módszere négyet közvetlenül szolgáltat; és pedig ezeket:

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z};\quad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z};\quad \frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y},$$

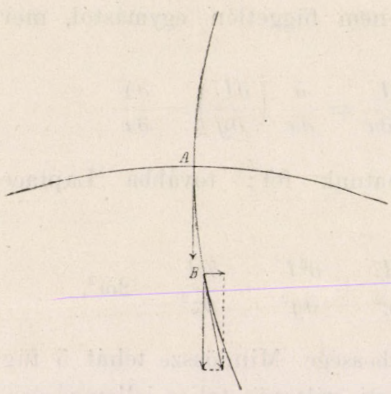
és

$$\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

E hányadosok nagyon szorosan összefüggnek a nivófelületek és erővonalak görbületi viszonyaival. A nivófelületen, mint tudjuk a potenciál állandó s az erővonalak reá merőlegesek. A koordinatarendszerünk kezdőpontján áthaladó nivófelület normálisa a z tengely; fektessük most az x y tengelyeket a nivófelület főgörbületi irányaiba; ϱ_1 és ϱ_2 legyen a két főgörbületi sugár, tehát az xz ill. yz síkok és a nivófelület metszési görbéinek görbületi sugarai. Akkor a felületek elméletéből következik, hogy

$$\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) \text{ és } \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}=0.$$

A $\frac{\partial g}{\partial x}$ és $\frac{\partial g}{\partial y}$ hányadosok az erővonalakkal hozhatók kapcsolatba. A koordináta rendszer kezdőpontján átmenő erővonal mentén A-ból B-be 1 cm.-rel pl. lefelé haladva a nehézség iránya megváltozik, mert hisz az erővonal érintőjének iránya más a B pontban, mint A-ban (6. ábra). Úgy foghatjuk fel a dolgot, hogy B-ben az A-hoz tartozó nehézséghez még egy horizontális összetevő járult, mely épen ezt az irányváltozást hozta létre s mely az x tengelylyel egy bizonyos α szöget zár be. Ez a hozzájáruló vízszintes összetevő legyen H; ennek velütete az x tengelyre $H\cos\alpha$, az y tengelyre pedig $H\sin\alpha$. A nehézségi erő differenciálhányadosainak értelmezéséből könnyen beláthatjuk, hogy



6. ábra.

$$H\cos\alpha=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}=\frac{\partial g}{\partial x}$$

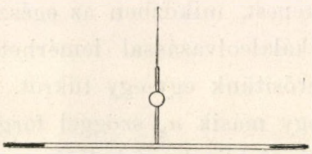
és ugyanígy

$$H\sin\alpha=\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Az a szög, melyet a B-hez tartozó nehézség az A-hoz tartozóval bezár

$$=\frac{1}{g}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

E hányadosok lemérése Eötvös báró a Coulomb-féle mérleget használta és pedig kétféle alakban. Az első alak egy könnyű vízszintes rúd, két végén golyó vagy hengeralakú súlyokkal (7. ábra). A mérleget kettős falú lapos hengeres vagy hosszúkás parallelepiped alakú kettősfalú fémszekrény veszi körül. Ezzel a berendezéssel lemérhető a főgörbületek iránya és $\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}$, vagyis $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ és $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, amit a következő megfontolással láthatunk be; a mérlegrúd középpontján A-n fektessük át a nivófelületet; ez görbe felület lévén, A-ból a rúd mentén tovább haladva, a nehézségi erő iránya változik, a rúd két végén levő tömegekre ható nehézségi erő G_1 és G_2 tehát különböző irányú lesz. Ha a rúd valamelyik főmetszetben fekszik, G_1 és G_2 azon síkban fekszenek, melyet a rúdon és az A-ban húzott normálison — a felfüggesztő dróton át fektethetünk. A rúd minden másféle irányítása esetén, a mikor a legkisebb görbület $\frac{1}{\varrho_1}$ irányával ϑ szöget zár be, G_1 és G_2 kilépnek e síkból, lesz tehát összetevőjük e síkra és a rúdra merőlegesen. Ez összetevők forgató momentumot adnak, mely a ϑ szöget kisebbíteni igyekszik. Részletes számítás azt mutatja, hogy e forgató momentum



7. ábra.

$$= \frac{K}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x}\right)\sin 2\vartheta$$

K nagy megközelítéssel a rúd tehetetlenségi momentuma, az x tengely pedig az $\frac{1}{\varrho_1}$ irányában fekszik; e forgató momentum a drótot megcsavarja, a rudat elforgatja oly φ szöggel, melyre áll

$$\tau\varphi = \frac{K}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\sin 2\vartheta,$$

ha τ a drót csavarási együtthatója.

A φ szöget a rúd egyetlen állásából nem olvashatjuk le, mert nem ismerjük a meg nem csavart dróthoz tartozó állást; ha azonban a mérleg szekrényét torziofejével együtt függélyes tengely körül α_1 szöggel elforgatjuk, akkor ϱ_1 irányával a rúd most $\vartheta+\alpha_1$ szöget zár be, a fonál most más, φ_1 szöggel csavarodik el, melyre áll

$$\tau\varphi_1=\frac{K}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\sin 2(\vartheta+\alpha_1),$$

$\varphi_1-\varphi$ nem egyéb, mint a rúd relativ elforgása a szekrényhez képest, miközben az egész eszközt α_1 szöggel elforgattuk s így skálaleolvasással lemérhető, ha a szekrényre, meg a rúdra is erősitünk egy-egy tükröt. Ha az egész eszközt eredeti állásából egy másik α_2 szöggel forgatjuk el, az ehhez tartozó $\varphi_2-\varphi$ elforgást is lemérhetjük s ezzel két egyenlethez jutunk, melyekből ϑ és $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ kiszámíthatók. Ne feledjük, hogy ϑ az a szög, melyet a rúd a kiinduló állásban az egyik főgörbületi iránynyal bezárt; ha tehát ezt ismerjük, kijelölhetjük a nivófelület főgörbületi irányait is. Ez eszközzel tehát végeredményben meg tudjuk határozni a nivófelület főgörbületi irányait s a két főgörbület különbségét: $g\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)$-t. Ezt az eszközt Eötvös báró görbületi variométernek nevezte.

A horizontális variométerrel $\frac{\partial g}{\partial x}$ és $\frac{\partial g}{\partial y}$ mérhető meg. Berendezése az előbbitől annyiban különbözik (8. ábra), hogy az egyik tömeg, m_2 a mérlegrúd alatt foglalt helyet: a rúd végéhez erősített fonálon lóg.

Azt láttuk, hogy az erővonal görbülete folytán m_1-re más irányban hat a nehézség, mint m_2-re, a mit úgy értelmezhetünk, hogy m_2 nehézsége m_1-étől egy vízszintes összetevőben különbözik. Ennek a vízszintes erőnek vetülete az x tengelyre az előbbiek szerint $\frac{\partial g}{\partial x}h$, az y tengelyre $\frac{\partial g}{\partial y}h$, ha h az m_1 és m_2 súlyok magasságkülönbsége. Feküdjék a mérleg rúdja az x

tengelyben, akkor $\frac{\partial g}{\partial y} h$ merőleges a rúdra, ad tehát forgató momentumot s a rudat elforgatja olyan φ szöggel, melyre áll

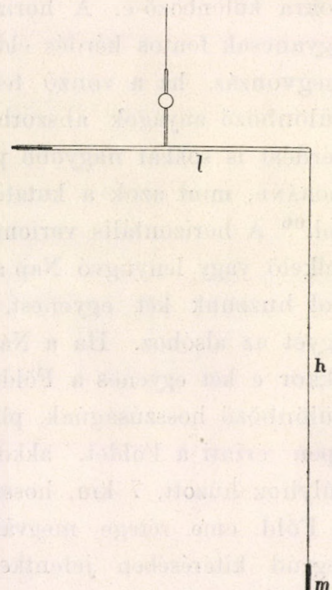
$$\tau\varphi_x = 2\frac{\partial g}{\partial y} hl,$$

ha l a mérlegrúd fél hossza. Ha az egész eszközt szekrényestől a felső felfüggesztő drót körül 180°-kal elforgatjuk, a forgató momentum ugyanakkora csak ellentett előjelü lesz, vagyis a rúd az ellenkező irányban fordul el ugyanolyan ϑ szöggel, vagyis, ha az eszközt szekrényestől 180°-kal elforgatjuk a rúd a szekrényhez képest

$$2\varphi_x = \frac{\partial g}{\partial y}\frac{hl}{\tau}$$

szöggel fordul el, a mi ép úgy mérhető, mint előbb. Állítsuk most a rudat az y tengely irányába s ebből az állásból forgassuk el az eszközt 180°-kal. Akkor a rúd relatív elforgása a szekrényhez képest

$$2\varphi_y = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{hl}{\tau}.$$



8. ábra.

A mint látjuk az Eötvös-féle variométerekkel a nehézség erőterének teljes jellemzésére szükséges öt differenciálhányados közül 4-et egy helyen történő észleléssel meg lehet határozni. Nem kapunk felvilágosítást $\frac{\partial g}{\partial z}$-ről, arról, hogy hogyan változik a nehézségi gyorsulás nagysága a magassággal; e szempontból továbbra is a közönséges mérlegre vagyunk utalva, Jolly eljárása szerint. Az elmélet ugyan megadja annak a lehetőségét, hogy a közönséges nehézségi ingával ezen mennyiség is egy helyben történő észleléssel meghatározható legyen, annak megvalósitása azonban eddig nem sikerült, mert vízszintes forgási tengelyt csak tökéletlenül tudunk előállítani.

A módszer tényleges kiviteléről, valamint az elért fontos eredményekről más cikkben lesz szó.

Láttuk, a görbületi variométert báró Eötvös Loránd felhasználta annak eldöntésére, vajon a Föld vonzása különböző anyagokra különböző-e. A horizontális variométernek is jutott egy ugyancsak fontos kérdés eldöntése, annak t. i. változik-e a tömegvonzás, ha a vonzó testek közé tömegeket helyezünk; a különböző anyagok abszorbeálnak-e a tömegvonzásból? Ezt a kérdést is sokkal nagyobb pontossággal döntötte el báró Eötvös Loránd, mint azok a kutatók, kik előtte foglalkoztak e kérdéssel.[66] A horizontális variométer rúdját állítsuk merőlegesen a felkelő vagy lenyugvó Nap azimutjára. A Nap valamely pontjából huzzunk két egyenest, egyet a mérlegrúd felső súlyához, egyet az alsóhoz. Ha a Nap közel van a horizonthoz ez alatt, akkor e két egyenes a Földön áthalad s a Földbe eső darabjai különböző hosszúságúak, pl. ha a felső súlyhoz húzott egyenes épen érinti a Földet, akkor az 1 méterrel lejebb lévő alsó súlyhoz húzott, 7 km. hosszú darabon halad át a Földön. Ha a Föld eme rétege megváltoztatná a Nap vonzását, ez a mérlegrúd kitérésében jelentkeznék. Az eszköz napkeltekor vagy napnyugtakor semmiféle biztos kitérést nem mutatott. Számbavéve az eszköz érzékenységét, kimondhatta báró Eötvös Loránd, hogy a Föld 1 km. vastag rétege a Nap vonzását annak legfeljebb egy százmilliomod részénél kisebb értékkel változtatja meg. Erről a kérdésről Pekár Dezső és Fekete Jenő lejebb következő czikkében szintén bővebben van szó.

Tangl Károly.

III. GRAVITÁCIÓS MÉRÉSEK.

Eötvös Loránd báró immár három évtizede foglalkozik a gravitácio tanulmányozásával. E vizsgálatokban teljesen új vezérgondolata az, hogy a nehézség térbeli változásainak tanulmányozására a torziós mérleget használja fel. Ez alapon felépült sajátos vizsgálati módszerét két biztos pillérre fektette. Az egyik az eljárás szigorú fizikai elméletének kifejtése, a másik az e célra alkalmas, szinte hihetetlen érzékenységű eszköz tényleges megszerkesztése. Ily módon kezében a fizikusok lomtárában heverő műszer, a torziós mérleg csodákat mívelt. Eddig hozzáférhetetlen fizikai feladatok megoldását tette lehetővé a tudományban, legújabb alkalmazásában pedig biztos varázsvesszőként nyújt felvilágositást a gyakorlati geologusnak a Föld mélyének felkutatásában.

*

Mielőtt a módszerrel, az eszközzel, a mérések módjával, azok feldolgozásával, eredményeivel és jelentőségével foglalkoznék, a vizsgálatok történelmi adatait s ezzel kapcsolatban a mérések statisztikáját állitom röviden egybe.

Első méréseit Eötvös természetesen *a laboratoriumban* végezte. Az egyetemi fizikai intézeten kívül először a *Gellérthegy tövében*,[39] a Rudas fürdő igazgatósági épületének földszintjén, majd pedig *Szent-Lőrincen* már szabadban felállitott vászonsátorban figyelte meg eszközeinek viselkedését. Ezen előzmények után lehetségesnek mutatkozott a nehézség változásainak a szabadban való megvizsgálása. 1891 nyarán a Celldömölk mellett emelkedő *Ság hegyen*[66, 67] végzett nehány mérést, a mely már is azon meglepő eredményre vezetett, hogy az e helyen STERNECK ingaméréseivel megállapitott nagyobb gravitációs zavar ez úton nem igazolódott be. EÖTVÖS ezen első tanulmányaiban főleg KÖVESLIGETHY RADÓ és TANGL KÁROLY segédkezett, a sághegyi mérésekben pedig BODOLA LAJOS is részt vett.

Ezután a laboratoriumi vizsgálatok tovább folytak, ezen kívül *Budapest területén*, valamint *környékének egyes helyein* történtek megfigyelések, a melyekben 1895 óta nekem is szerencsém volt részt vehetni.

1901-ben LÓCZY LAJOSnak a Balaton-bizottság lelkes vezérének kérésére EÖTVÖS a *Balaton jegén* végzett megfigyeléseket,[68, 77] a melynek síma háta első részletes próbára nagyon alkalmasnak kinálkozott, mert figyelmen kívül hagyhattuk azon zavaró hatásokat, a melyek a környezet egyenetlenségeiből és szabálytalanságaiból származnak. Ez alkalommal EÖTVÖS LORÁND, LÓCZY LAJOS, CHOLNOKY JENŐ, KÖVESLIGETHY RADÓ és báró HARKÁNYI BÉLA összesen 28 állomáson határozták meg a nehézség változásait, mely megfigyelések a Balaton tengelyével párhuzamosan húzódó tektonikai vonal jelenléte mellett tanúskodnak.

Már e mérések azon gyakorlati tanúságra vezettek, hogy azok nagyobb mederben csak megfelelő expediciós felszereléssel végezhetők. Erre kért támogatást EÖTVÖS 1901-ben a Magyar Tudományos Akadémia ünnepi közülésén tartott elnöki megnyitó beszédében.[69] Tényleg a Magyar Tudományos Akadémia és különösen SEMSEY ANDOR bőkezű támogatása ezt lehetővé is tette. Elkészült az első expediciós kocsink és szerény felszerelésünk, a melyből azután a későbbi tökéletesebb kifejlődött. Prefesszorom bizalma engem tisztelt meg azzal a mind e mai napig is tartó feladattal, hogy e szabadban való méréseket, ez expediciókat vezessem.

1902-ben a *Fruska Gora hegységtől északra* 20 állomáson észleltünk, a melyekben kívülem, mint állandó megfigyelő STEINER LAJOS vett részt. Ezután pár éven keresztül mi ketten voltunk az expedicio észlelői.

1903-ban a *Balaton*[77] *jegén* 12, a *Fruska Gora* és *Szabadka között* 19 és *Arad környékén* 19 állomáson észleltünk.

1904-ben 72 állomással az egész *Fruska Gora hegységet* körüljártuk.

1905-ben *Aradtól Versecen át Oravicáig* s azután *Versectől Alibunár* felé összesen 78 állomáson mértünk, mely alkalommal azután Steinert Fekete Jenő váltotta fel, a ki ez időtől kezdve, mint állandó észlelő, mind e mai napig részt vesz a megfigyelésekben.

1906-ban az *Arad körüli* méréseket a hegyek aljáig kiterjesztettük 84 állomással.[76, 78] Ez évben az *Internationale Erdmessung* XV. általános értekezletét Budapesten tartotta, a mely alkalommal Eötvös Loránd báró gravitációs méréseiről kiváló érdeklődéssel fogadott előadást tartott. A bizottság tagjai közül többen az Arad körül működő expediciót is felkeresték. Az értekezlet a magyar kormánynál hivatalosan azon óhaját fejezte ki, hogy kivánatosnak találná e geodéziai szempontból nagy fontosságú mérések támogatását, hogy ilyetén módon az adatok nagyobb mennyisége álljon a bizottság rendelkezésére. A magyar kormány nem zárkózott el e kérés elől s a méréseket ez időtől kezdve tekintélyes állami támogatásban részesíti.

1907-ben ugyancsak *Arad vidékén* állomásainkat 82 újabbal szaporitottuk.[78] Az államsegélyből újabb eszközök, újabb kocsik s egyéb expediciós felszerelési tárgyak készültek. Továbbá az abszolut adatok meghatározása céljából relativ ingamérésekre és sarkmagasság meghatározásokra is berendezkedtünk, hogy a torziós inga adatait ezekkel egybevethessük; illetve ezekkel kiegészithessük, a mint azt a későbbiekben részletezni fogjuk. A porosz kir. geodéziai intézetben használatos eszközöket szereztünk be és Oltay Károly, a ki e mérések végzésére vállalkozott, ott Potsdamban sajátította el az ő mesterien kidolgozott eljárásukat s az ő útmutatásuk szerint határozta meg eszközeink állandóit.

1908-ban zeg-zugos vonalban haladtunk *Aradtól Szegeden át Szabadka felé* és 55 állomással Aradtól körülbelül 150 kilométer távolságra, majdnem Szabadkáig jutottunk. A megfigyelésekben, mint harmadik észlelő RYBÁR ISTVÁN segédkezett.

1909-ben *Szeged, Szabadka, Baja* és *Zombor* között körülbelül 160 kilométer hosszú vonalon 85 állomáson mértünk, a mikor is RYBÁRt GARCSÁR SÁNDOR váltotta fel.

1910-ben *Tirolban Cimabanche mellett,* a Monte Cristallo és Croda Rossa közötti völgyben [80] ketten FEKETÉvel 40 állomáson mértünk. Ezután visszatérve, még őszszel RYBÁR ISTVÁNnal hárman a titeli platón és környékén 76 állomáson végeztünk megfigyeléseket.

1911-ben a július 8-iki földrengés Kecskemétre terelte figyelmünket. Az előző évi résztvevőkkel *Szegedről indulva,* zegzugos vonalban Kecskemétig haladtunk s összesen 130 állomással *Kecskemét környékét* részletesen behálóztuk.[80]

1912-ben már két gravitációs expedició működött. A *Maros völgyében Nagy Enyedtől Marosvásárhelyig* haladva, összesen 157 állomáson észleltünk, mely alkalommal hármunkon kívül RENNER JÁNOS, POGÁNY BÉLA és FRÖHLICH PÁL működtek közre.

1913-ban ugyancsak két expedicio működött, de egyike csupán földmágnességi megfigyeléseket végzett. Ez alkalommal *Torda környékén* kezdtük gravitációs méréseinket és azután az előző évi megfigyeléseket kiegészítve *Marosvásárhelytől Szászrégenen át Görgényig* folytattuk, összesen 126 állomáson. A gravitációs mérésekben kívülem POGÁNY BÉLA és RENNER JÁNOS vett részt s utóbbit később KOVÁCS GYÖRGY váltotta fel.

1914-ben hasonló módon két expedicio indult útnak. *Szatmár-Németi* és *Nagybánya között* végeztünk gravitációs megfigyeléseket. A háború félbeszakította működésünket s igy csak 23 állomáson észlelhettünk és a nagy zűrzavarban tengelyen kellett összes kocsijainkkal innen Budapestre hajtatnunk. Ez alkalommal munkatársaim RENNER JÁNOS és CSER IMRE voltak.

A háború 1915-ös zavaros évében észlelők és munkások híjján EÖTVÖS-féle gravitációs méréseket nem végezhettünk. Csupán STEINER LAJOSsal együtt a *Kis Kárpátok és a Morvamező környékén* öt állomáson relativ ingaméréssel a nehézségi erő abszolut értékét a g-t, határoztuk meg, mely adatok a jövő évi tervbe vett mérésekhez szolgáltak alapul. Időközben ugyanis Böckh Hugó miniszteri tanácsos messze kiható ajánlatára a m. kir. pénzügyminisztérium tervbe vette, hogy bányakutatási célzattal torziós inga-méréseket fog végeztetni. A háborús viszonyok miatt egyelőre e mérésekre külön nem rendezkedhetett be s igy Eötvös bárót kérte fel, hogy az ő kivánságaikat is szives figyelemre méltatva, végezze kutatásait. Ez idő óta méréseink a pénzügyminiszterium hathatós erkölcsi és anyagi támogatásában részesülnek s ez tette lehetővé azt, hogy azokat most a háború alatt is zavartalanul folytathatjuk.

1916-ban a *Morva mezőn*, az egbelli olajfúrások környékén 92 állomáson mértünk.[124] Állandó munkatársaim Fekete Jenő és Wagner Lajos voltak s egy ideig kivülök Steiner Lajos, Renner János és Walek Károly selmeczbányai főiskolai tanár is részt vett a megfigyelésekben.

1917-ben földgázkutatási czélzattal a *Hortobágy és környékén* 135 állomáson észleltünk, előző évi állandó munkatársaimmal és Walek Károlylyal együtt.

Jelenleg 1918-ban *Ujvidék és Titel környékén* dolgoztunk és megfigyeléseinket 102 új állomással gyarapitottuk. Munkatársaim Fekete Jenő, Szecsődy Miklós és Kerékjártó Béla voltak.

Az előzők szerint a torziós mérleggel eddig közel *másfélezer állomáson* végeztünk megfigyeléseket, nem számitva azt, hogy ellenőrzés céljából időközönkint több állomást megismételtünk. A részletes felsorolásból láthatjuk, hogy e mérések nem rendszeres, országos felvételek, hanem egyes, a gravitációs zavarok szempontjából érdekesnek igérkező területek feldolgozásai.

A gravitációs állomásokon mindenkor a földmágneses elemeket is meghatároztuk s ezenkívül is még sok mágneses mérést végeztünk. E tekintetben utalok az ezt követő e tárgyú értekezésre.

A torziós ingával átkutatott területek egyes pontjain Oltay Károly vezetése alatt *relativ ingamérések* történtek.[78, 121] Mindenekelőtt szükséges volt Budapesten a nehézségi erő gyorsulásának a g értékének pontos meghatározása. E célból 1908-ban OLTAY relatív ingamérésekkel a műegyetem geodéziai intézetét a potsdami geodéziai intézettel kötötte össze, mely meghatározását 1915-ben még gondosabban megismételte.[123] A további mérésekben azután a kiinduló és a záró állomás mindenkor Budapest volt. Ily módon eddig a g abszolut értékét 40 állomáson határoztuk meg. A *függőőneltérések* megállapitása céljából OLTAY eddig összesen 12 állomáson végzett sarkmagasságmérést, 3 állomáson pedig azimutmeghatározást. Mindezekben a mérésekben fősegítőtársa SZECSŐDY MIKLÓS volt.

Az előzők tanúsága szerint évek hosszú során elég gazdag és értékes észlelési anyagot sikerült összegyűjteni! Az adatok részletes feldolgozása most van folyamatban, az eddigi közleményekben csupán egyes részleteknek rövid összefoglaló ismertetése jelent meg.

* * *

EÖTVÖS LORÁND báró gravitációs módszerét legelőször 1896-ban a Mathematikai és Természettudományi Értesítőben,[57] valamint a Wiedemann Annalen-ben[58] tette közzé, melyekben annak részletes elméletével és e tárgyra vonatkozó sok oldalú vizsgálataival foglalkozik. Később 1900-ban a párisi fizikai kongreszszus elé terjesztett jelentésében,[66] mely a Math. és Phys. Lapok hasábjain is megjelent,[67] már a laboratoriumon kívül végzett mérésekről is beszámol. Az Internationale Erdmessung kiadványaiban megjelent későbbi értekezéseiben a módszer elméletét különösen a szabadban végzendő mérések szempontjából[76] tárgyalja és a tényleges mérésekkel részletesebben foglalkozik s főbb vonásokban azok eredményeit is közli.[78, 80]. A Balatonbizottság kiadványában megjelent értekezése a Balatonon végzett méréseket tartalmazza, egyszersmind a módszer elméletét elemi úton tárgyalja.[77]

Tekintve, hogy az ezt megelőző cikk a módszer általános elméletét részletesen ismerteti, csupán annak a mérések szempontjából fontos részleteire terjeszkedem ki.

Eötvös gravitációs méréseiben általában kétféle alakú torziós ingát használt, melyeket az előző cikk 7. és 8. ábrája tüntet fel. Az *első alak:* vízszintes rúd, melynek mindkét végére platinasúly van erősítve, szóval a rúd végein lévő nagyobb tömegek egyenlő magasságban vannak. A *második alak:* vízszintes rúd, melynek egyik végére ugyancsak platinasúly van erősítve, másik végén pedig vékony drótra függesztve platinahenger lóg alá, szóval a rúd végein levő tömegek különböző magasságban vannak. A szabadban végzett mérésekre csaknem kizárólag a második alakú torziós ingát használjuk.

A nehézség térbeli változásainak hatására a torziós inga általában elcsavarodik. Ha az erőt a térben lineárisan változónak tételezzük fel, a mi az eszköz aránylag kis terében elegendő szigorúsággal felvehető, akkor ez az elcsavarodás a *második alakú* ingára vonatkozólag a következő módon fejezhető ki. Legyen U a nehézségi erő potenciál függvénye egy derékszögű xyz koordinátarendszerre vonatkoztatva, a melynek kezdőpontja a lengőszerkezet súlypontjában van s a melynek z tengelye függélyesen lefelé, x tengelye észak, y tengelye pedig kelet felé van irányítva. Jelentse továbbá K a lengőszerkezet tehetetlenségi nyomatékát, h a mélyebben lógó m tömeg súlypontjának függőleges távolságát a felsőtől, l annak forgási karját s végül α a rúd tengelyének az x tengelylyel képezett szögletét, akkor a forgató nyomaték F következőképen fejezhető ki:

$$F = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) K \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} K \cos 2\alpha -$$

$$- \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} mhl \sin \alpha + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} mhl \cos \alpha$$

Egyensúly esetén ez a drót megcsavarodásából származó forgató nyomatékkal egyenlő, vagyis

$$F = \tau \vartheta$$

hol ϑ a torziós szögletet, a fonál megcsavarodását, τ pedig a felfüggesztő drót torziós állandóját jelenti. E két egyenletből:

$$\vartheta = \frac{1}{2}\frac{K}{\tau}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\sin 2\alpha + \frac{K}{\tau}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cos 2\alpha -$$

$$-\frac{mhl}{\tau}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\sin\alpha + \frac{mhl}{\tau}\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\cos\alpha$$

Ha tehát az egész eszközt függélyes tengely körül elforgatva, más és más állásba hozzuk, a létrejövő elcsavarodásokat különböző azimutokban, α-kban meghatározhatjuk. Tekintve, hogy egyenletünkben négy meghatározandó adat foglaltatik, azonkívül pedig a rúd elcsavaratlan helyzetét nem ismerjük, legalább öt állásban kell észlelnünk s ebből azután a

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$$

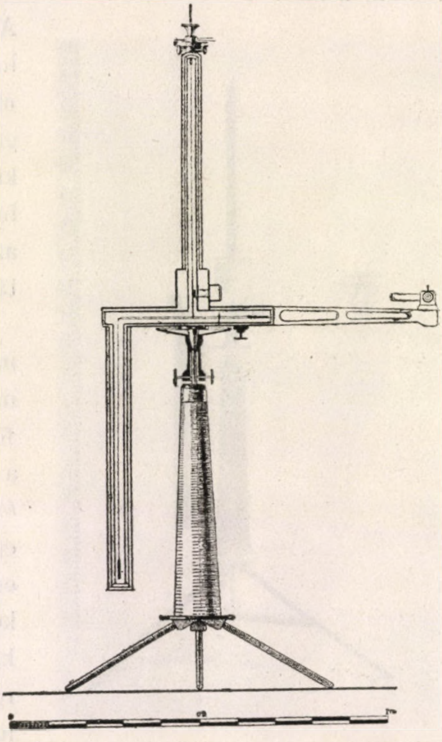
értékeit kiszámíthatjuk.

Teljesség kedvéért csupán felemlitem, hogy az *első alakú* torziós inga formuláiban a jobb oldal csak a két első tagból áll s így ez a meghatározandó négy adat közül csupán az első kettőt adja meg. Kevesebb adatot nyújt a nehézség térbeli változásaiból s ezért kevésbé használatos. Igaz, hogy e két adat az első alakú torziós ingával pontosabban és biztosabban meghatározható, de a szabadban való méréseknél, tekintettel egyébb zavaró körülményekre, a második alakú ingával elérhető pontosság teljesen elegendő.

* * *

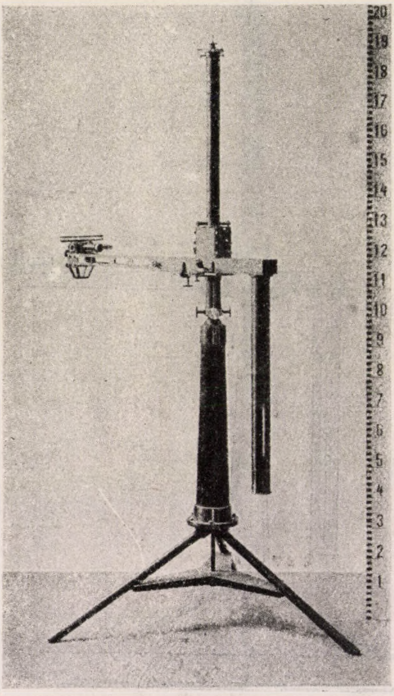
Magának az eszköznek megszerkesztésében elsősorban azt kellett szem előtt tartani, hogy annak *igen érzékenynek kell lennie*, mert vele *1.10^{-9} CGS rendű értékeket* kell meghatároznunk, a miért is az ingák egyszerű lengésidejének legalább 10 percznél nagyobbnak kell lennie. Ezért az aránylag nagy tehetetlenségi nyomatékú ingákat lehetőleg kis torziójú, vékony drótokra függesztjük. Szükséges továbbá, hogy a lengőszerkezetet a külső zavaró hatásoktól kellően megóvjuk, hogy az a nagy érzékenység mellett is biztos adatokat nyújtson.

A *torziós drót* az eszköz lelke, mert tulajdonképen annak rugalmas erejével mérünk. Feltétlenül szükséges tehát, hogy annak torziós állandója és csavarodottsági állapota *állandó legyen.* E célra többnyire 0·04 mm átmérőjű platina-irridium drótokat használunk, a melyeket különböző előzetes műveletekkel állandósítunk, mert azok közvetlenül az egyensúlyi helyzetnek nagymérvű és szabálytalan eltolódása folytán nem használhatóak. Eötvös e czélból Heraeus-nál külön oly drótokat rendelt, hogy azok húzás közben lehetőleg ne legyenek megcsavarva. A kellő hosszúságban rézlapocskákhoz forrasztott s így elkészitett drótokat régebben hosszabb ideig tartó megterheléssel, később célszerű gázkályhában való ismételt felmelegités- és lehütéssel, legújabban pedig elektromos úton gyenge vörös izzásig való hevitéssel állandósitjuk. Az így elkészült drótokat még külön e czélra szerkesztett úgynevezett próbaeszközben megvizsgáljuk s közülök a kicsi és állandó hőmérsékleti együtthatóval birókat kiválasztjuk. Ily módon szinte hihetetlen állandóságú drótokat sikerült előállitanunk. Quarc fonalakkal is kisérleteztünk, de ezek e célra nem váltak be.



9. ábra.

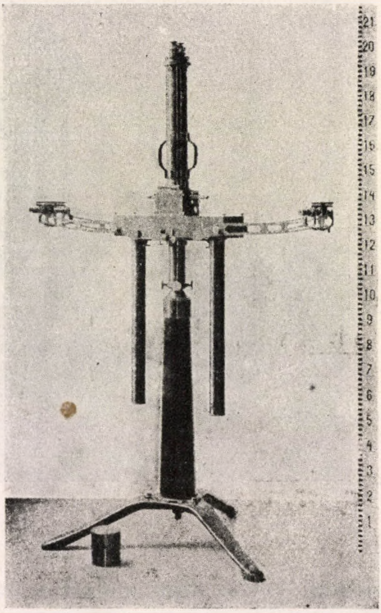
Maga a *lengő szerkezet* aluminiumból készült 40 cm hosszú vizszintes rúd, melynek egyik végére platinalapocska van erősitve, másik végén pedig körülbelül 30 grammos platinahenger lóg le. A rúd függélyes toldalékrészére kis tükör van erősitve s az elcsavarodásokat a szokásos módon távcsöves tükör leolvasással észleljük. Az eszközt természetesen védenünk kell a külső zavaró hatásoktól : légáramlásoktól, sugárzásoktól, gyors hőmérsékletváltozásoktól stb. Ezért maga a lengő szerkezet 3—5 mm vastag rézlemezekből és csövekből készült hármas fémtokba van bezárva. Az eszköz massziv oszlopra van helyezve és pedig akként, hogy függélyes tengely körül forgatható s így különböző azimutokba állítható. Magukat az azimutokat az oszlopra erősített kőrosztályzaton olvassuk le.



10. ábra.

A 9. ábrán az «*egyszerű nehézségi variometer*» keresztmetszetét, a 10. ábrán pedig fotografiáját látjuk. A 11. ábra a «*kettős nehézségi variometer*». Ez tulajdonképen két egymástól teljesen független eszköz, melyek egymáshoz képest 180°-kal elforgatva, közös állványra vannak szerelve. Ez esetben tehát egyidejűleg mindenkor két eszközzel észlelünk s így a kivánt adatok meghatározására már három állásban való észlelés elegendő. Újabban általában az ilyen kettős eszközöket használjuk. A régebbi műszereket szállításnál több darabra kellett szétszedni (12. ábra), a mi a velök való bánást nehézkessé és hosszadalmassá tette, sőt az eszközöknek folytonos kinyitogatása a szabadban egyenesen célszerűtlennek bizonyult. Éppen ezért az újabbaknál maga a tulajdonképeni eszköz egy darabból áll, a melyet szállításkor nem szedünk szét. Csupán a háromlábat és az oszlopot szállitjuk még külön darabban, a melyre azután az eszközt egyszerűen reáhelyezzük. Ez esetben természetesen megfelelő berendezésről kellett gondoskodni, hogy a lengő szerkezet szállitás előtt kivülről arretálható legyen. Továbbá megfelelő kocsikat kellett készíttetnünk, hogy azokba az aránylag nagy és nehéz eszközöket kényelmesen behelyezhessük (13. és 14. ábra).

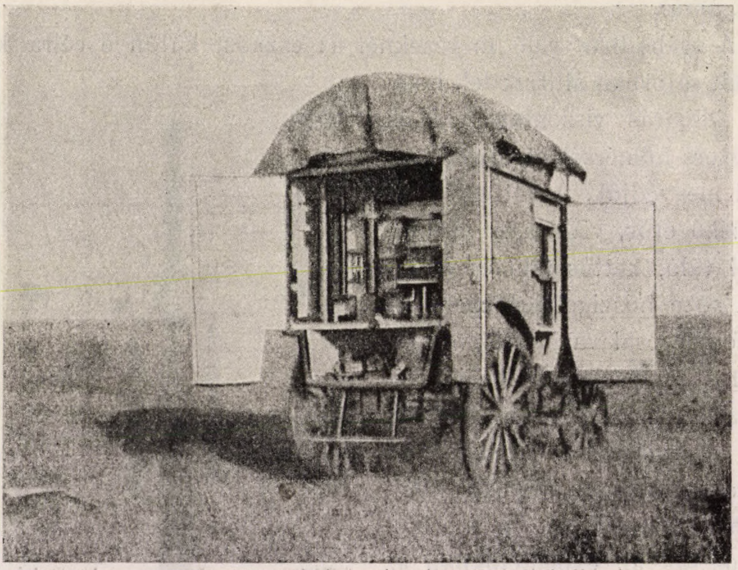
A szabadban való méréseknél az eszközt külön e célra készült sátorban állitjuk fel, hogy az időjárás viszontagságai és a gyors hőmérsékletváltozásoktól megvédjük. A sátor, illetve házikó erős, vízhatlan vászonból való, kettős falú és a két fal köze hőszigetelés céljából faforgácscsal van kitöltve (14. ábra). Az észleléseket éjjel végezzük, a mikor is az eszközök az egyenletesebb hőmérséklet miatt pontosabb adatokat nyújtanak. Egyébként ez az időbeosztás az expediciókban az idő kihasználása szempontjából is előnyös. A hurcolkodás, a sátrak és eszközök felállitása s egyéb munkálatok a nappalt elfoglalják, éjjel az észleléseket végezzük el s igy egy-egy állomással egy nap alatt elkészülünk. Maga az észlelés a megnyugodott rudak egyensúlyi helyzetének és a hőmérsékleteknek óránkinti leolvasásából áll, a mikor is azután az eszközt egy-egy újabb állásba forgatjuk át. Régebbi eszközeinkben a lengő szerkezetek csak 1 óra 45 perc alatt nyugodtak meg s igy egy éj folyamán a szükséges leolvasásokat kellő számban nem ismételhettük meg. Éppen ezért újabban a rudat körülvevő szekrény magas-



11. ábra.

ságát kellően beszabályozzuk: a magasságnak megfelelő csökkentésével ugyanis a csillapodást annyira fokozhatjuk, hogy a lengő szerkezet egy óra alatt teljes biztonsággal nyugalomba jön.

Az eddig tárgyalt eszközökön kívül Eötvös báró még két más

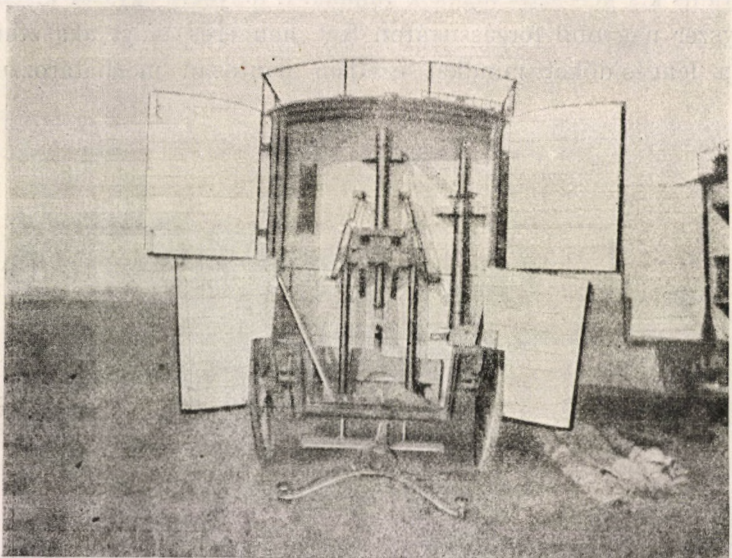


12. ábra.

méretű kettős variometert is szerkesztett és lehető gondossággal elkészíttetett, egyet 10 cm és egyet 20 cm hosszú rudakkal. Ezek közül az első nem vált be, a második jól használható, bár érzékenysége kisebb a rendes nagyobb méretű eszköznél.

Végül teljesség kedvéért felemlítem, hogy Eötvös báró lelógó súlyok nélküli rudakkal is készíttetett egy a szabadban való mérésekre szánt eszközt, a melyben tehát a rúd két végén egyenlő magasságban vannak a platinasúlyok felerősítve. E műszer tulajdonképen három különálló, de közös állványra szerelt eszközből áll, a melyek egymással 120—120°-ot képeznek.

E *«hármas variométer»*-rel az 1910. évi expedicio folyamán *Titel környékén* rendszeresen észleltünk. Az eszköz teljesen bevált, de tekintettel arra, hogy a nehézségi erő változásainak csupán két adatát adja meg, az eszközt további méréseinkben nem használtuk.



13. ábra.

Összes műszereinket kiváló gonddal és finomsággal SÜSS NÁNDOR precizio-mechanikus készítette.

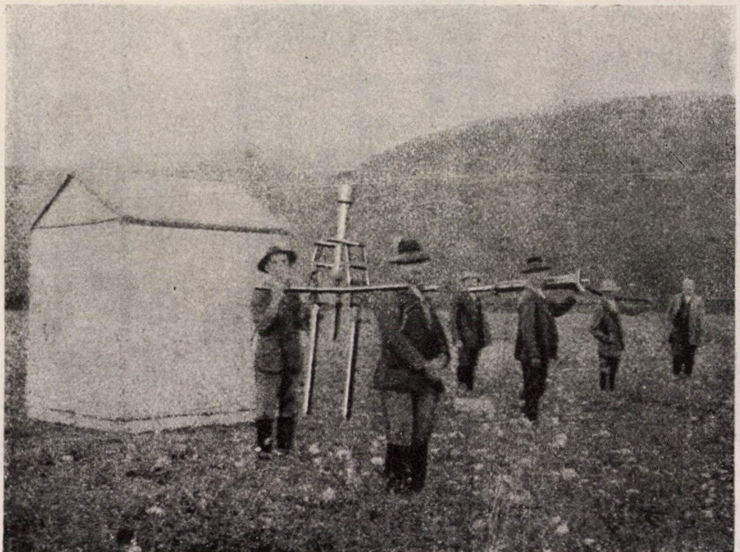
*

Hogy az észlelésekből a meghatározandó adatokat kiszámíthassuk, mindenekelőtt szükséges, hogy a formulában szereplő

$$\frac{K}{\tau} \quad \text{és} \quad \frac{mhl}{\tau}$$

mennyiségeket, vagyis az *eszköz állandóit* ismerjük. Ezek közül az m, h és l mérlegeléssel, illetve hosszméréssel közvetlenül lemérhető.

A K-t, a lengő szerkezet *tehetetlenségi nyomatékát* az eszközön kívül határozzuk meg. E czélból a rudat megfelelő vastagabb drótra függesztjük és a lelógó súlyt rövidre fogjuk, hogy ingásaival az egész szerkezet lengéseit ne zavarja. Maga a meghatározás az egyébként is szokásos módon történik. A rúdon ugyanis kis keresztbevágások vannak. E helyekre egyszer kisebb, egyszer nagyobb forgássugáron két hengeres súlyt akasztunk s a lengésidőket mindkét esetben pontosan meghatározzuk.



14. ábra.

Ismerve a lengésidőket, a segédsúlyok tömegét és átmérőjét, valamint forgássugarait, ez adatokból a tehetetlenségi nyomatékot könnyen kiszámíthatjuk.

A *torziós állandó*, a τ meghatározása czéljából egy körülbelül 10 kgros ólomgolyót a lelógó súly közelében, felváltva hol az egyik, hol a másik oldalra helyezünk és a létrehozott kitéréseket megfigyeljük. Ebből a tömegek, a távolságok és a lelógó súly hosszának ismerete mellett a τ-t egyszerű módon kiszámíthatjuk.

Az észlelés, a mint azt már emlitettük, tükörleolvasással történik és pedig, hogy lehetőleg kis sátorban elférjünk, megtört, prizmás távcső segélyével. Ha n a skálaleolvasást, n_0 a megcsavaratlan rúd helyzetének skálaértékét, D pedig a skálatávolt jelenti, akkor törött távcső esetén:

$$\vartheta = \frac{n_0 - n}{2D}$$

Ezt a ϑ képletébe helyettesitvén, az eszköz formuláját a következő alakban nyerjük:

$$n_c - n = D\frac{K}{\tau}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\sin 2\alpha + 2D\frac{K}{\tau}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cos 2\alpha -$$
$$-2D\frac{mhl}{\tau}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\sin\alpha + 2D\frac{mhl}{\tau}\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\cos\alpha$$

Az egyszerű nehézségi variometernél 5 azimutban és pedig legcélszerűbben a mágneses meridiánból kiindulva 0°, 72°, 144°, 216° és 288°-os állásokban észleljük le a megnyugodott rúd skálaértékeit az n_1, n_2, n_3, n_4 és n_5-öt. Ha az imént felírt formulába az állandók, valamint az azimutok trigonometrikus függvényeinek számértékeit behelyettesítjük s az öt egyenletből az n_0-át kiküszöböljük, a számításra alkalmas egyszerű formulákhoz jutunk.

Példaképen felirom a «Balatoni eszköz»-nek nevezett egyszerű variometerünk 1903. évi formuláit:

$$10^9\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = -2{\cdot}1061\,(n_5 - n_2) - 1{\cdot}3017\,(n_4 - n_3)$$

$$10^9\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = +1{\cdot}7916\,(n_4 + n_3 - 2n_1) - 0{\cdot}6843\,(n_5 + n_2 - 2n_1)$$

$$10^9\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) = +4{\cdot}1413\,(n_5 - n_2) - 6{\cdot}7008\,(n_4 - n_3)$$

$$10^9\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -1{\cdot}0886\,(n_4 + n_3 - 2n_1) + 2{\cdot}8499\,(n_5 + n_2 - 2n_1)$$

Lényegében hasonló módon határozzuk meg a kettős nehézségi variometer formuláit, a melynél az észlelés csupán a 0°, 120° és 240°-os azimutokban történik. További részletekbe e rövid ismertetés keretében nem bocsátkozhatom.

Az észleléseket egyszerűség kedvéért mindenkor a mágneses meridiánból kiindulólag végezzük s ebből azután a csillagászati délkörre vonatkoztatott értékeket utólag kiszámitjuk.

* * *

Megfigyeléseinkből az észlelési helyeken a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

tényleges értékeit, a «*teljes értékeket*» nyerjük.

Ezek így közvetlenül további számításokra és következtetésekre nem alkalmasak. Ez adatokban ugyanis benne van első sorban a közvetlen környezet látható egyenetlenségeiből származó hatás, a mely teljesen a véletlentől függ. E «*terrénhatást*» mindenkor tekintetbe kell vennünk és meg kell határoznunk. Nem túlságosan egyenetlen területen elegendő ezt 100 méter távolságig kiterjeszteni. Az eljárás lényege a következő. Közvetlenül az eszköz alatt előzőleg egy körülbelül 3 méter sugarú kört sikra egyengetünk, «kiplanirozunk». Ennek lejtését a mágneses észak-dél, illetve kelet-nyugat irányban alkalmas módon libellával mérjük. A mágneses meridiánból kiindulólag 8 irányban az 5, 20, 50 és 100 méter távolságban lévő pontok átlagos magasságát nivelláló eszközzel meghatározzuk. Ez adatokból, az ugyancsak külön megmért földsűrűség tekintetbe vételével a terrénhatást kiszámitjuk. Az e czélra levezetett formulákat és a számítás menetét nem részletezhetem. Természetesen mindenesetre szükséges, hogy a számításban felhasznált pontok a terepre jellemzőek legyenek, éppen ezért ennek megfelelően kell az állomásokat kitűznünk, a mit kis gyakorlattal könnyen elérhetünk. Közelben lévő árkok, töltések stb. hatását külön kiszámithatjuk, ha azokat az állomás eltolásával el nem kerülhetjük. Külön e czélra végzett vizsgálatokkal meggyőződhettünk arról, hogy a terrénhatás meghatározása reális eredményekre vezet.

E terrénhatást a teljes értékekből mindenkor le kell vonnunk s így kapjuk a *«topografikus értékeket»*.

A Föld nem teljesen gömb alakja miatt a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \text{ és } \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\text{-nak}$$

számottevő *«normális értékei»* vannak. Ezeket a BESSEL-féle ellipszoid és a HELMERT-féle formula segélyével a különböző szélességű helyekre kiszámíthatjuk. Budapesten pl.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 8{\cdot}1.10^{-9} CGS \text{ és } \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) = 4{\cdot}7.10\ {}^9 CGS.$$

Ha e normális értékeket a topografikus értékekből levonjuk, kapjuk a gravitációs zavar jellemzőit, a *«topografikus rendellenességeket»*.

Ha a geologusok kivánságainak megfelelőleg a földalatti láthatatlan tömegekre akarunk következtetni, akkor a földfeletti látható tömegek és különösen a hegyek hatását is tekintetbe kell vennünk. E *«kartografikus hatást»* alkalmas módon a térképek rétegvonalai alapján elegendő közelítéssel kiszámíthatjuk. A kartografikus hatást a topografikus értékekből levonva jutunk a *«szubterrán rendellenességekhez»*, a melyek a földalatti tömegek hatásából származnak. Síkságon, nagy távolságra a hegységektől a kartografikus hatás zérus, illetve elhanyagolhatóan kicsiny, a miért is itt a kétféle rendellenesség összeesik.

*

Ezek után lássuk, mit jelentenek a torziós mérleg nyújtotta adatok s hogy azokból folytatólagosan mi mindent számolhatunk ki.

Az *első két adat* a $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ és $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ egy nivófelületben a nehézségi erő gyorsulásának a g-nek változásait határozza meg. Tudvalevőleg ugyanis

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

vagyis ezek *a nehézségi erő gradienseinek összetevői* és magát az eredőt, a *teljes gradienst* és annak irányát, illetve az x tengelylyel képezett szögletét az α-t, a következő kifejezések adják:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right)^2} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}}{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}}$$

A gradienseket térképeinken megfelelő irányú és hosszúságú nyilakkal ábrázoljuk.

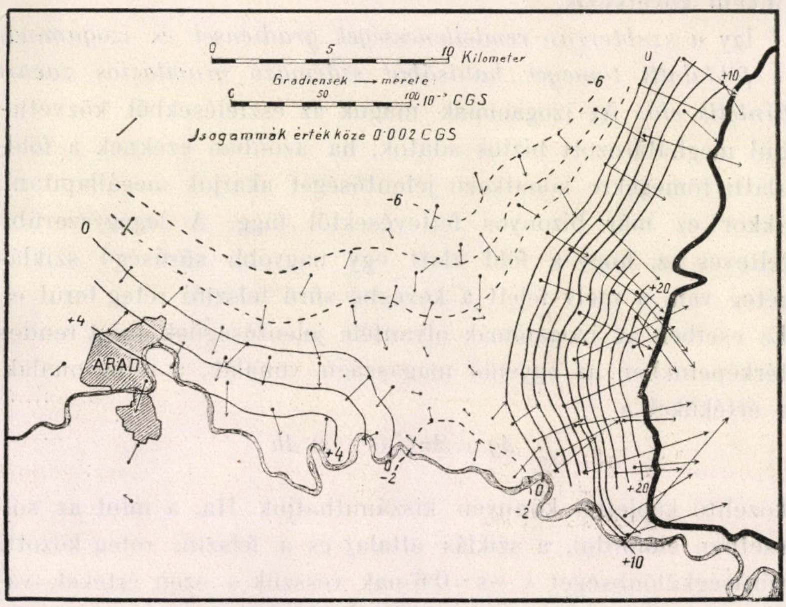
Ha a nivófelület minden pontjában ismernők a gradienseket, akkor a nehézségi erő véges változásait a Δg-ket integrálás útján pontosan kiszámíthatnók. A valóságban ezt teljesen elegendő közelítéssel megkaphatjuk, ha az állomásoknak elég sűrű hálózata áll rendelkezésünkre, úgy hogy két szomszédos állomás között a változást lineárisnak vehetjük, a mikor is az x és y menti gradiensösszetevők középértékeivel mehetünk egyik állomásból a másikba. Ez eljárás megengedhetőségét bizonyítja az, hogy egy zárt vonalon körülhaladva, az ily módon számított

$$\int \frac{dg}{ds} ds = 0$$

a mint ez különböző méréseinkkor ismételten beigazolódott.

Ha a *nehézségi erő gyorsulásának abszolut értékeit* akarjuk kiszámitani, szükséges, hogy azt legalább is az észlelési hálózat egy pontján *ingaméréssel* meghatározzuk. Czélszerű azonban, ha több ponton végzünk ingamérést, mert ekkor a torziós mérleg eredményeit az ingamérés adataival ellenőrizhetjük. Ismételten alkalmunk volt meggyőződni arról, hogy elegendő sűrűségű hálózat esetén, hosszú vonalakon keresztül a gradiensekből levezetett adatok az inga adataival megegyeznek, illetve az eltérések az ingamérések pontosságát nem igen haladják meg. Ily módon a két eszköz egymást ellenőrzi és szervesen kiegészíti. Az inga egyes pontokon abszolut értékeket ad s ezek között a torziós mérleg a nehézségi erő változásának menetét adja meg és pedig oly részletességgel, a melyet ingával meg nem határozhatunk.

Csak egyes esetekben tapasztaltunk nagyobb eltéréseket a kétféle mérés között. Igy Eötvös sághegyi mérései és Sterneck ingamérései között aránylag nagy különbség mutatkozott,[66, 67]



15. ábra.

a mint azt már az előzőkben emlitettük. Hasonló eset fordult elő balatoni méréseinkkor. Sterneck adatai szerint a nehézség rendellenességének különbsége Boglár és Fonyód között 0·051 *CGS*, holott a torziós mérleg szerint ezt csak 0·002 *CGS*-nek találtuk.[77] Az eltérés oka az ingamérésben elkövetett hibában rejlik.

Az imént részletezett módon tehát a torziós ingával átkutatott terület minden pontjára a nehézségi erő értékét meghatározhatjuk s igy térképeinkbe *az egyenlő nehézségű görbé-*

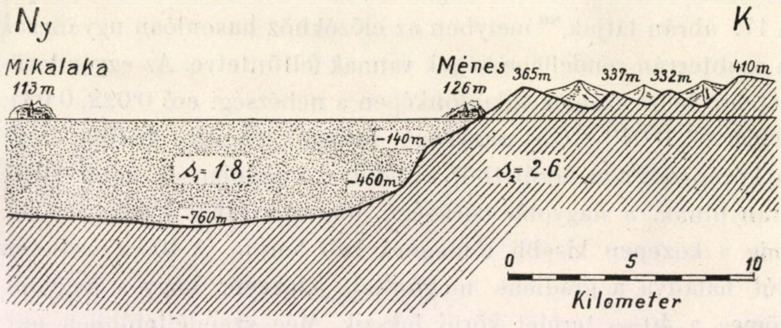
ket, az izogammákat is minden további nélkül berajzolhatjuk. Már a gradiensek a nehézség változásainak elég szemléltető képét nyújtják, még közvetlenebb azonban az izogammák nyújtotta kép. Természetesen térképeinkbe ily módon akár a topografikus értékeket, akár a topografikus rendellenességeket, akár pedig a szubterrán rendellenességeket ábrázolhatjuk s e szerint azok jelentése más és más, a mi e fogalmak értelmezéséből önként következik.

Így *a szubterrán rendellenességek gradiensei és izogammái a földalatti tömegek hatásából származó gravitációs zavart tűntetik elő.* Az izogammák maguk az észlelésekből közvetlenül meghatározott biztos adatok, ha azonban ezeknek a földalatti tömegekre vonatkozó jelentőségét akarjuk megállapitani, akkor ez már bizonyos feltevésektől függ. A legegyszerűbb feltevés az, hogy a föld alatt egy nagyobb sűrűségű sziklás réteg van, a mely felett a kevésbé sűrű felszíni réteg terül el. Ez esetben az izogammák olyanféle jelentőségűek, mint rendes térképeinkben az egyenlő magasságú vonalak, a rétegvonalak, s értéküket a

$$\Delta g = 2\pi G\,(s'-s)\,\Delta h$$

közelítő képlettel könnyen kiszámithatjuk. Ha, a mint az sok esetben előfordul, a sziklás altalaj és a felszíni réteg közötti sűrűségkülönbséget $s'-s=0{\cdot}6$-nak vesszük s ezen értéket, valamint a gravitációs állandó $G=66.10^{-9}$ értékét képletünkbe helyettesitjük, akkor $\Delta g=0{\cdot}001.CGS$ nehézségkülönbségnek $\Delta h=4019$ cm, szóval kereken *40 méter* magasságkülönbség felel meg. Ez esetben tehát az egymástól 0·001 *CGS*-nyire lévő izogammák a sűrűbb, sziklás altalaj felületének 40 méteres rétegvonalait adják. Hangsúlyozni kivánom, hogy ez csak az említett feltevés esetén érvényes, más feltevések más és más eredményre vezetnek. Tekintve, hogy a földalatti viszonyok általában nem olyan egyszerűek, következtetéseinkben óvatosaknak és körültekintőeknek kell lennünk.

Méréseink nagy tömegéből csupán pár példát óhajtok kissé közelebbről tárgyalni. A 15. ábrán az *Arad vidékén* végzett méréseink egy részlete alapján,[76] a szubterrán rendellenességek, a földalatti tömegek gravitációs hatásának vázlatos térképét állitottuk egybe. A térkép szélén a vastag vonal a síkság határát, az aradi hegyalja szélét tűnteti fel, a mely hegységnek hatása a mondottak szerint a rajzban feltüntetett adatokból már le van vonva. Az egyes pontok az észlelési állomások, a melyek közül nehányat kihagytunk, mert néhol nagyon sűrűen vannak elhelyezve s így a kicsinyitett rajzban az áttekinthetőséget zavarnák. A nyilak a gradiensek, a berajzolt görbék az izogammák. Látjuk, hogy a hegy közelében a gradiensek a hegy



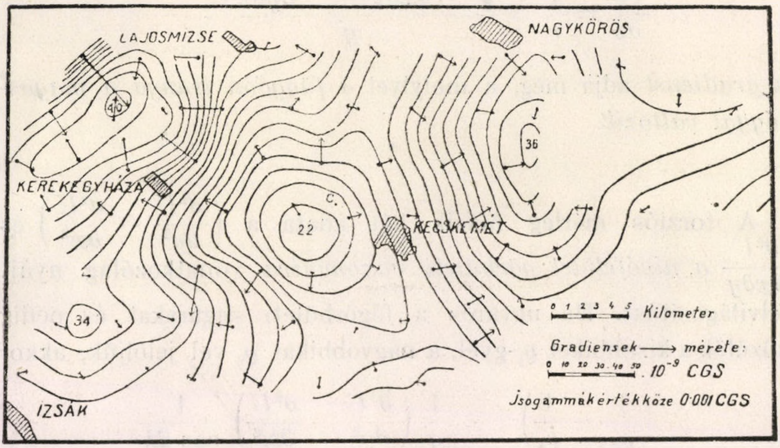
16. ábra.

felé mutatnak, jelezvén, hogy ez irányban a föld alatt nagyobb tömegek vannak, vagyis a hegy sziklarétege a föld alatt lefelé folytatódik. Arad felé haladva a gradiensek bizonyos fokig megfordulnak, jelezvén, hogy a sűrűbb altalaj ismét kissé feljebb emelkedik. Még szembeötlőbben mutatják e viszonyokat a gravitációs zavar izogammái, a melyek közül a negativokat, vagyis a normálisnál kisebb értékűeket szaggatott vonallal ábrázoltuk; a mellėjük irott néhány szám tulajdonképen a $+0{\cdot}004$, $+0{\cdot}010$, $+0{\cdot}020$ stb. *CGS* értékü izogammákat jelzi. E térképnek megfelelőleg készitettük el a *Ménes* hegyaljai falu szélességi körén kelet-nyugot irányban képzelt keresztmetszetet (16. ábra) és pedig $s_1 = 1{\cdot}8$ és $s_2 = 2{\cdot}6$ sűrűségek feltételezésével.[78] A rajzban a hegyek földalatti folytatását képező sziklás altalaj képét látjuk, a régi tengerfeneket, a melyre azután az Alföld lazább felületes rétege reá rakódott.

Hasonló viszonyokat tüntetnek fel *Budapest környékén* végzett méréseink. Itt is a budai hegységek a föld alatt folytatódnak és meglehetős gyors lejtéssel terjednek tovább az Alföld felületes, lazább talaja alatt. Méréseink ugyanazon lejtést adják meg, mint a melyet a fúrások alapján megállapitottak. A budai oldalon a melegvizforrások közel vannak a felszinhez, a margitszigeti fúrólyuk már 118 méter, a városligeti pedig 970 méter mélységű. Ily mértékben lejt maga a sziklás altalaj is.

A *Kecskemét vidékén* végzett méréseink vázlatos eredményét a 17. ábrán látjuk,[80] melyben az előzőkhöz hasonlóan ugyancsak a szubterrán rendellenességek vannak feltüntetve. Az egyes területekre beírt számok tulajdonképen a nehézségi erő 0·022, 0·034, 0·036 és 0·040 *CGS* nagyságú zavarát jelentik. Látjuk, hogy a középső 22-es területből kiindulva a gradiensek mind kifelé irányulnak, a nagyobb sűrűségű tömegek tehát kifelé vannak, míg a középen kisebb tömegnek kell lennie. A 40-es területen túl haladva a gradiens megfordul, jelezvén, hogy a nagyobb tömeg a 40-es terület körül fekszik. Még szemléltetőbben mutatják e viszonyokat az izogammák. A középen a legelső izogamma a 0·022 *CGS* értékű, innen kiindulva az izogammák a szélek felé nőnek, északnyugat irányban például egészen 0·040 *CGS*-ig s azután megint csökkennek. Ha ismét csupán két, egy alsó sűrű és egy felső lazább réteget tételezünk fel, akkor az izogammák a földalatti alsó réteg felszinének rétegvonalait adják és pedig 0·6 sűrűségkülönbséget feltételezve 40 méteres közökben. A sűrűbb altalajban tehát a középen egy mélyedés van, innen a szélek felé haladva a sürűbb tömeg emelkedik, majd ismét leesik. Szóval egy kráterszerű alakulattal van dolgunk, illetve helyesebben szólva, egy oly fajta «körhegységgel», mint a milyenek a holdkráterek. A körhegység ugyanis aránylag széles, körülbelül 30 kilométer átmérőjű s szélein egyes csúcsok emelkednek ki. Ez a különös alakulat kétségtelenül összefügg a kecskeméti földrengésekkel. E kérdést nem részletezem, csupán felemlítem, hogy pl. az 1911 július 8-iki rengés epicentruma, vagyis a földfelületnek a rengés középpontja felett fekvő helye, térképünkön a C pontba esik, szóval kráterünk közepébe. A rajzunkban fel nem tűntetett rengési görbék ugyancsak össze esnek ezzel az alakulattal.

Ismételten kiemelem azonban, hogy e következtetés csak az említett feltevés esetén állja meg a helyét. Más, a környezet-



17. ábra.

nél kisebb sűrűségű földalatti tömegeket feltételezve, másfajta alakulat is eredményezheti az észlelt gravitációs zavart. Így a középen lévő minimumot nagyobb sótest jelenléte is okozhatja, a mint ezt Böckh Hugó geológiailag valószinűnek is tartja.[124] Egyébként e kérdésre, nevezetesen hogy a torziós mérleg adataiból a föld alatti tömegekre micsoda következtetéseket vonhatunk, még a következőkben visszatérünk.

*

A torziós mérleg első két adata, a $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ és $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ az eddig tárgyaltakon kivül még a nehézség erővonalának görbületére és a nehézségnek a függélyes mentén való irányváltozására ad felvilágosítást. Ugyanis az

$$r=\frac{g}{\sqrt{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right)^2}}$$

alapján *a nehézség erővonalának görbületi sugarát* számithatjuk ki. Továbbá a

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}=\frac{1}{r}=\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right)^2}}{g}$$

a gradienst adja meg, a melylyel *a függőön iránya a magassággal változik.*

*

A torziós mérleg másik két adata a $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ és $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ *a nivófelület görbületi viszonyaira* vonatkozólag nyújt felvilágosítást. Ha ugyanis a főgörbületi sugarakat és pedig közülök a kisebbiket ϱ_1-gyel, a nagyobbikat ϱ_2-vel jelöljük, akkor

$$\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)=-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\frac{1}{\cos 2\lambda}$$

a hol λ azt a szögletet jelenti, a melyet a nagyobbik görbületi sugarú normálmetszet az xz sikkal bezár s magát a λ-át pedig a

$$\operatorname{tg} 2\lambda=-\frac{2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)}$$

összefüggés határozza meg. Szóval e két adat *a nivófelület görbületének a gömbfelülettől való eltérését és a főgörbületek irányát* határozza meg.

Vezessük be az R mennyiséget a következő összefüggés alapján

$$R=g\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)$$

Minthogy ϱ_1-gyel a kisebbik, ϱ_2-vel pedig a nagyobbik görbületi sugarat jeleztük az R mindenkor pozitiv mennyiséget jelent, melyre vonatkozólag:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -R \cos 2\lambda \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} R \sin 2\lambda$$

Az egyszerű, *első alakú* torziós rúdra ható erők azt mindenkor a nagyobb görbületi sugarú fősíkba igyekeznek forgatni, s

18. ábra.

a forgató nyomaték, mely ezt az irányitást létesiti, ugyanazon rúdra ugyanazon szögkitérés mellett, ezen R mennyiséggel arányos, a miért is azt *horizontális irányító képességnek* nevezzük. Ezen R mennyiségeket grafikusan az észlelési állomásokon keresztül fektetett vonaldarabkákkal tüntethetjük elő, a melyek hossza az R értékével arányos, irányát pedig a λ, a nagyobbik görbületi sugarú fősik iránya adja meg.

A 18. ábrán az *Arad vidékén* végzett méréseink alapján az

R értékei vannak feltüntetve.[79] Az R irányában mutatkozó nagy szabályosság miatt a főgörbületi vonalakat is berajzolhattuk térképünkbe. Először azt a csoportot, a melyek az R vonalkákat érintik, a melyek tehát a nagyobb görbületi sugarú fősikok irányában haladnak, másodszor az ezekre merőlegeseket. A kép a görbületi viszonyokat elég szemléltetően tünteti elő.

Egy másik érdekes példát is említek. *Tirolban Cimabanche* mellett a völgyben végeztünk méréseket,[80] mely a 3000 métert meghaladó *Monte Cristallo* és *Croda Rossa* között 1520 méter tengerszín feletti magasságban fekszik, úgy hogy az aránylag szűk völgy viszonylagos mélysége 1500 méternél nagyobb. E hatalmas kiemelkedő tömegek gravitációs hatása abban nyilvánul, hogy a völgyben a nivófelület a normálisnál jóval kevésbbé görbült. A völgy hosszirányában a görbületet körülbelül normálisnak vehetjük fel s így a meghatározott R értékből a völgy irányára merőleges görbületi sugarat kiszámíthatjuk. E görbületi sugarat a völgy déli szélén, illetve közepén:

$$\varrho = 206\,685.10^5 \text{ cm}, \quad \text{illetve} \quad \varrho = 12\,267.10^5 \text{ cm}$$

-nek találtuk. Szóval a völgy szélén a görbületi sugár a normális értéknek harmincszorosa és a völgy közepén még mindig majdnem kétszerese.

*

Egyike a legérdekesebbeknek Eötvös bárónak az az eljárása, a melylyel a $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ és $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ értékeiből *a nivófelület alakját jellemző adatokat* s így *magát a nivófelületet* levezeti. E célból ugyanis a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

értékeit kellene meghatároznunk, a mely mennyiségek között még a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2\omega^2$$

összefüggés áll fenn, a melyben ω a földforgás szögsebességét jelenti. Közvetlenül láthatjuk, hogy a torziós mérleg említett két adata a teljes meghatározásra nem elegendő. Ezen adatokon kívül még a $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ ismeretére volna szükségünk. Sajnos, ennek meghatározására mindez ideig nincsen jobb fizikai eljárásunk a Jolly-féle mérlegelésnél. E meghatározás pedig a torziós mérleghez viszonyítva, annyira durva és kevéssé pontos, hogy ezt a torziós mérleg adatainak kiegészítésére egyáltalán fel nem használhatjuk.

Eötvös eljárása szerint, *ha az észlelési hálózat két pontján, a függőóneltérések északi összetevőit asztronomiai-geodéziai mérésekkel meghatározzuk, akkor ezen adat elegendő arra, hogy az egész terület minden pontjára a függőóneltéréseket és a görbületeket kiszámíthassuk.* A megoldást többféle módon végezhetjük, ezek közül csak a használatosabbat ismertetem.

E czélból mindenekelőtt az egész területre egységes $\xi\eta\zeta$ derékszögű koordináta rendszert vezetünk be, melynek kezdőpontja a területen belül valamelyik pontban van s a $\xi\eta$ sík e pont xy síkjával összeesik. Hálózatunkat orthogonálisan a $\xi\eta$ síkra vetítjük s e síkban végezzük további számításainkat. Mindenekelőtt kimutathatjuk, hogy ha a nivófelületnek egy kisebb darabját akarjuk meghatározni, a melynek szélességi és hosszúsági kiterjedése nem nagyobb egy fél foknál, akkor az állomások vetületi pontjaiban a

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right) \text{ és } \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \text{ helyett a } \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) \text{ és } \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

értékeket használhatjuk, melyeknek egymástóli eltérése ez esetben $1 . 10^{-9}$ CGS egységen alul marad s így ezt az elérendő pontosság szem előtt tartásával megengedhetjük.

Számításunkban az állomások hálózatában zeg-zugos vonalban, illetve ennek megfelelő háromszögekben haladunk tovább s jelöljük a zeg-zugos vonal egymást követő állomásait 1, 2, 3, 4 stb. folyószámmal s egyelőre közülök hármat általánosságban a, b, c-vel. Vegyünk fel átmenetileg a $\xi\eta$ síkban egy sn derékszögű sík koordináta rendszert, melynek s tengelye a-tól b felé van irányítva. Ez esetben

$$\int_a^b \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}\, ds = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_a.$$

Ha az állomások hálózata elég sűrű ahhoz, hogy két-két szomszédos között a változást lineárisnak vehessük, akkor

$$\int_a^b \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}\, ds = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}\right)_a + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}\right)_b\right\} s_{ab}$$

Ha továbbá az ab irány és ξ tengely képezte szöget α_{ab}-vel jelöljük, akkor

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} \sin \alpha_{ab} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cos \alpha_{ab}$$

s így

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}\right)_a + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}\right)_b\right\} s_{ab} = -\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_a\right\} \sin \alpha_{ab} +$$
$$+\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_a\right\} \cos \alpha_{ab}$$

Egyszerűség kedvéért jelöljük:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}\right)_a + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}\right)_b\right\} s_{ab} = T_{ab}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_a = \xi_{ab} \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_a = \eta_{ab}$$

Ez esetben egy egész háromszögre, azaz a, b, c pontokra a következő egyenleteket kapjuk:

$$T_{ab} = -\xi_{ab} \sin \alpha_{ab} + \eta_{ab} \cos \alpha_{ab}$$
$$T_{bc} = -\xi_{bc} \sin \alpha_{bc} + \eta_{bc} \cos \alpha_{bc}$$
$$T_{ca} = -\xi_{ca} \sin \alpha_{ca} + \eta_{ca} \cos \alpha_{ca}$$
$$\xi_{ca} = -\xi_{ab} - \xi_{bc} \quad \text{és} \quad \eta_{ca} = -\eta_{ab} - \eta_{bc}$$

Az ezen öt egyenletben előforduló hat ismeretlent nem számíthatjuk ki. Egyelőre azonban a legelső 1, 2, 3 háromszögben a ξ_{12}-őt ismeretlennek hagyjuk és a-val jelöljük. Ez esetben egyenleteinkből a többi ismeretlent kiszámíthatjuk:

$$\xi_{12} = a \quad \text{és} \quad \eta_{12} = \frac{T_{12} + a \sin \alpha_{12}}{\cos \alpha_{12}}$$

folytatólag pedig a ξ_{23} és η_{23} egyenletei általános alakban a következők:

$$\xi_{bc} = \frac{T_{bc} \cos \alpha_{ca} + (T_{ca} - \xi_{ab} \sin \alpha_{ca} + \eta_{ab} \cos \alpha_{ca}) \cos \alpha_{bc}}{\sin (\alpha_{ca} - \alpha_{bc})}$$

$$\eta_{bc} = \frac{T_{bc} \sin \alpha_{ca} + (T_{ca} - \xi_{ab} \sin \alpha_{ca} + \eta_{ab} \cos \alpha_{ca}) \sin \alpha_{bc}}{\sin (\alpha_{ca} - \alpha_{bc})}$$

melyek, ha az $a=1$, $b=2$, $c=3$ indexeket helyettesítjük a ξ_{23} és η_{23}-at adják, ha pedig folytatólag az $a=2$, $b=3$, $c=4$ indexeket helyettesítjük, a ξ_{34} és η_{34}-et kapjuk, s így tovább. Így tehát fokozatosan tovább haladva tetszésszerinti hosszú vonalra az értékeket, nevezetesen a

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)' - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)' - \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)$$

különbségeket kiszámíthatjuk, a melyek azonban az egyelőre ismeretlen $\xi_{12}=a$ mennyiséget tartalmazzák, a mely adatot a függőón eltérések alapján a következő módon határozhatjuk meg.

Ha ugyanis egy pontban a függőón eltérését az északi irányban $\Delta\mu$-vel és keleti irányban $\Delta\lambda$-val jelöljük, akkor ezt a topografikus rendellenességekből a következő kifejezések adják:

$$\Delta\mu = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) \quad \text{és} \quad \Delta\lambda = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)$$

Ebből pedig két állomás között a relativ függőóneltérések:

$$\Delta\mu' - \Delta\mu = \frac{1}{g}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)' - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)\right]$$

$$\Delta\lambda' - \Delta\lambda = \frac{1}{g}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)' - \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\right]$$

Ezen egyenletek közül csupán az elsőt felhasználva, az asztronomiai-geodeziai úton lemért északi függőóneltérésből a $\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)' - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)\right]$ értékét kiszámithatjuk. Ezt a torziós ingával meghatározott adattal egyenlővé téve, az abban foglalt $\xi_{12} = a$ értékét kiszámithatjuk. Az a értékét számitásainkba behelyetesitvén, összes állomásainkra a $\frac{\partial U}{\partial \xi}$ és $\frac{\partial U}{\partial \eta}$ értékeit s velük a függőóneltéréseket megkapjuk. Szóval a feladatot teljesen megoldottuk.

Teljesség kedvéért csupán felemlitem, hogy a feladat második egyenlet felhasználásával is megoldható, ha ugyanis a keleti relativ függőóneltérés ismeretes. Az északi függőóneltérések meghatározása tudvalevőleg egyszerűbb és pontosabb, e czélból ugyanis a geodéziai távolságmérésen kivül csupán sarkmagasság meghatározásokat kell végeznünk. Éppen ezért célszerűbb, ha számitásainkban ezen adatokra támaszkodunk.

Ily módon tehát összes állomásainkra a $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ értékeit megkapjuk s ebből a függőóneltéréseket közvetlenül kiszámithatjuk. Továbbá ugyancsak ezen adatokból számitás útján egyrészt a $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ értékeit, másrészt a potenciált, az U értékeit is megkapjuk, szóval *a nivófelületet teljesen megismerjük.*

A számitás helyességének és megbizhatóságának többszörös ellenőrzéseül kinálkozik, hogy az észlelési hálózatban egy-egy zárt vonalon körülhaladva az adatoknak a

$$\sum \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_a \right\} = 0$$

vagy

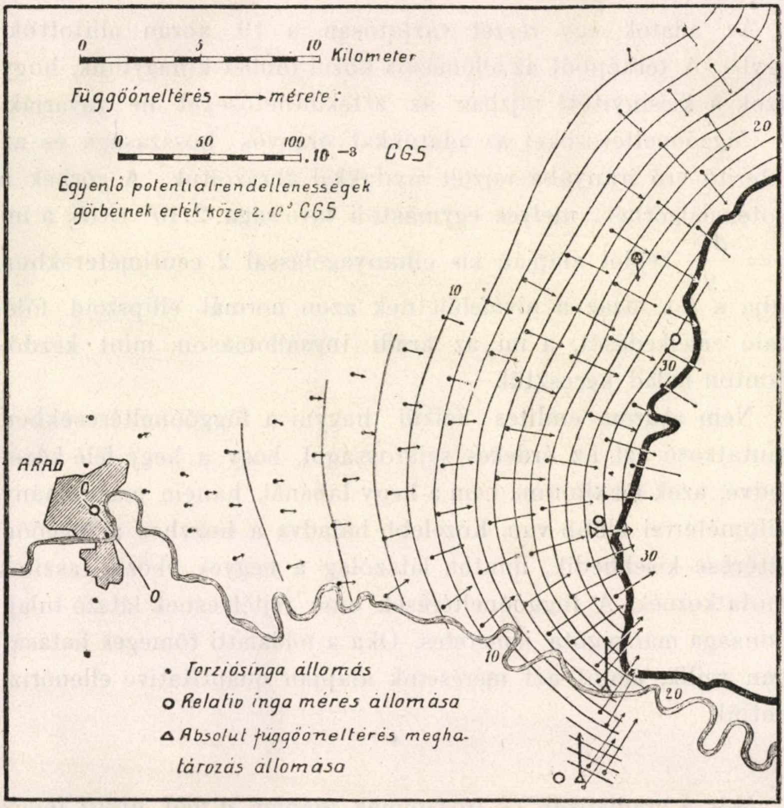
$$\sum \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_a \right\} = 0$$

vagy

$$\int \frac{\partial U}{\partial s} \, ds = 0$$

feltételeknek eleget kell tenniök. Végzett méréseinkkor ez ismételten beigazolódott.

Példaképen röviden az *Arad vidékén* végzett mérések ez irányú feldolgozását ismertetem.[78] E területen 188 torziós inga



19. ábra.

állomásunk van, ezenkívül asztronomiai-geodeziai mérésekkel a függőón északi eltérése 7 állomáson, keleti eltérése pedig 2 állomáson van meghatározva. E meghatározások elsősorban a torziós mérleg adataiból levezetett értékek ellenőrzésére alkalmasak. Ugyanis az északi függőóneltérések közül kettőt arra használtunk fel, hogy segitségükkel a torziós mérleg adataiból a függőóneltéréseket kiszámíthassuk. Ily módon azután a többi közvetlenül meghatározott relativ függőóneltérést a torziós inga adataiból is kiszámíthattuk. Az értékek kitünően megegyeznek, illetve az eltérések a szokásos függőón meghatározások pontosságán alul maradnak.

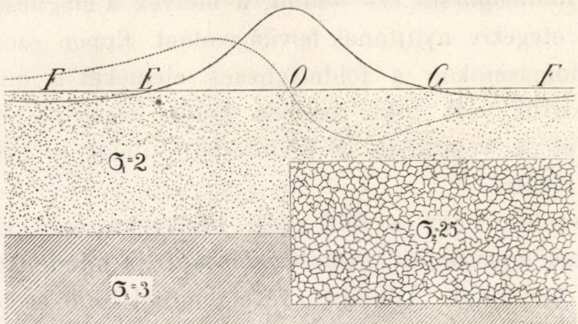
Az adatok egy részét vázlatosan a 19. ábrán állítottuk egybe. A térképből az állomások közül többet kihagytunk, hogy azok a kicsinyített rajzban az áttekinthetőséget ne zavarják. A függőóneltéréseket az adatokkal arányos hosszaságú és az eltérítő erő irányába rajzolt nyilakkal ábrázoltuk. A görbék a potenciálgörbék, melyek egymástóli távolsága 2.10^3 *CGS*, a mi $h = \frac{\Delta U}{g}$ képlet alapján kis elhanyagolással 2 centiméterekben adja a h-t, azaz a nivófelületnek azon normál ellipszoid fölé való emelkedését, a mi az aradi ingaállomáson, mint kezdőponton halad keresztül.

Nem akarom említés nélkül hagyni a függőóneltérésekben mutatkozó azt az érdekes sajátosságot, hogy a hegy felé közeledve, azok maximuma nem a hegy lábánál, hanem már nehány kilométerrel előbb van. Közelebb haladva a hegyhez a függőón eltérése kisebbedik, mintha látszólag a hegyek okozta taszítás mutatkoznék. A függőóneltérések eme rejtélyesnek látszó tulajdonsága már régóta ismeretes. Oka a földalatti tömegek hatásában rejlik, amint azt méréseink alapján quantitative ellenőrizhetjük.

*

Már a gradiensek és izogammák alapján *a föld alatti tömegekre* bizonyos következtetéseket vonhatunk. E következtetések bővülnek és tökéletesednek akkor, ha a görbületi adatokat és a függőóneltéréseket is szem előtt tartjuk. Bizonyos alakulatok ugyanis majd az egyik, majd a másik féle hatásban nyilvánulnak jobban. Igy egy földalatti lejtő a gradiensekben mutatkozik, míg a görbületi adatokra hatástalan. Egy földalatti kiemelkedés oldalai felett nagy gradienseket, teteje felett pedig nagy görbületi adatokat kapunk. Következtetéseinket tehát lényegesen elősegíti az, ha a gravitációs zavarnak a föld felületén való lefolyását mindkét adatban figyelembe vesszük.

Aránylag egyszerű számitásokkal megállapithatjuk, hogy bizonyos szabályos alakulatok hatása adatainkban miként nyilvánul. Így egy földalatti lépcső fölött a középen nagy gradienst kapunk, innen jobbra vagy balra távolodva a gradiensek egyaránt csökkennek. A torziós mérleg tehát a lépcső kikeresésére kiválóan alkalmas. Maga az inga távolabb a lépcsőtől az egyik oldalon nagyobb, a másik oldalon kisebb értéket ad



20. ábra.

ugyan, de a különbség aránylag csekély. A határvonal kikeresésére az inga meg egyáltalában nem használható.

Különös figyelmet érdemelnek az *izosztatikus alakulatok,* a melyekben a kisebb sűrűségű rétegek az alsó nagyobb sűrűségűben akként helyezkednek el, mintha folyadékban úsznának. Egy ilyen képzelt szabályos esetet tüntettünk fel a 20. ábrán. Alul a 3 sűrűségű réteg van, a mely felett izosztatikusan helyezkedik el a 2·5 sűrűségű tömb és a 2 sűrűségű felületi réteg. A kihúzott görbe a gradiensek lefutását adja. Az *O* pont feletti maximum miatt a torziós inga a határvonal kikeresésére kiválóan alkalmas. Magának a nehézségi erőnek a *g*-nek értéke nagyobb távolságra az *O* ponttól jobbra és balra egyenlő. Az *O*-tól nem nagy távolságban kis különbségek mutatkoznak ugyan és *G* pontban legnagyobb, *E* pontban pedig legkisebb az érték; az eltérés, Δg azonban a geologiailag valószínű méretek esetén nagyon csekély. A 2·5 sűrűségű tömb 1 kilometer vastagsága esetén $\Delta g = 0{\cdot}001$ *CGS* és 10 kilometer vastagság esetén még mindig csak $\Delta g = 0{\cdot}010$ *CGS*. Ilyen alakulatot tehát ingával nem igen mutathatunk ki. A szaggatott vonal a görbületi értékek lefutását adja, mely adatok a határvonal felkeresésére ugyancsak alkalmasak. A torziós ingát egyébként is az izosztázia kérdésének tanulmányozására célszerűen felhasználhatjuk.

Következtetéseink szempontjából elsőrendű fontosságúak továbbá *a földmágneses erő adatai,* a melyek a mágneses tulajdonságú rétegekre nyújtanak felvilágosítást. Éppen ezért gravitációs állomásainkon a földmágneses elemeket is mindenkor meghatároztuk, sőt több esetben külön részletes mágneses felvételeket is végeztünk. E tekintetben utalok az ezt követő e tárgyú cikkre.

Természetes, hogy a föld alatti tömegekre való következtetéseinknél *a geologiai megállapításokat* is mindenkor szem előtt kell tartanunk. Általában véve mennél több esetünk lesz arra, hogy bizonyos gravitációs zavar geologiailag miként értelmezendő, annál biztosabbak lesznek későbbi következtetéseink.

E geologiai jellegű következtetések nem egyszer gyakorlati jelentőségűek. Hasznosítható rétegeket találhatunk fel e módon, mint ahogy *Erdély*ben méréseink a sótesteket kitünően kimutatják. Ezenkívül oly anyagokat is felfedezhetünk, a melyek ugyan gravitációs szempontból közvetlenül nem nyilvánulnak, de bizonyos, már gravitációsan kimutatható, rétegalakulattal függnek össze. Igy adott esetekben vízre, olajra, földgázra is következtethetünk. Igy *Budapest* környékén a melegvízforrások lejtése összeesik a dolomitréteg lejtésével, melyet eszközeinkkel lemérhetünk. Tehát Eötvös módszerével előre megmondhattuk volna, hogy a városligeti artézikútnál valószínüleg 900—1000 méter mélységben érik el a vizet. *Egbell* környékén, ahol olajok után kutattak, méréseinkkel teljesen olyan alakulatot állapítottunk meg, mint amelyet a geológusok is meghatároztak.[124] *Erdélyben* végzett méréseinkkel a rétegvonulatok legmagasabb és legmélyebb helyeit az antiklinálisokat és szinklinálisokat határozhatjuk meg, amelyek ismerete a földgáztúrások telepitése szempontjából elsőrendű fontosságu, miután tapasztalatszerűleg a bő földgázforrások mindig csak az antiklinálisokon vannak.

Különösen megbecsülhetetlen értékűek a torziós inga adatai az Alföldön. A hegyes vidéken ugyanis még a geologus magában is boldogul. Itt ugyanis a rétegek kibúvási helyein módjában van azok dőlését meghatározni s igy azok menetét a föld alatt hozzávetőleg követni. Az Alföldön azonban csak költséges fúrások révén szerezhet támpontokat. Itt már az is nagy jelentőségű, hogy a próbafúrásokat ne teljesen vaktában, hanem alkalmas helyeken eszközöljük. Erre pedig a torziós mérleg biztos feleletet ad. Igy *Kecskemét vidékén* teljesen elegendő, ha a terepen biztosan megjelölhető gravitációs minimumot és azt körülvevő maximumok közül kettőt, melyek egyike egyszersmind mágneses tulajdonságú, megfúrunk, ezzel ugyanis a földalatti alakulatba teljes bepillantást nyerünk. Lehet, hogy e fúrásokból értékesithető anyagok is kerülnek felszínre, de ha ez nem is következik be, akkor is még mindig nem csak tudományos, hanem gyakorlati szempontból is hasznos a torziós inga útmutatása, mert ezzel felesleges fúrásokat takaritottunk meg.

Igy 1917-ben a *Hortobágyon és környékén* földgázkutatási célzattal mértünk. Egy gravitációs maximumot és egy minimumot találtunk. A szerint, hogy a mélyben nagyobb, avagy kisebb sűrűségű anyagokat tételezünk fel, az egyik vagy a másik jelenti az antiklinálist. Ha tehát e két helyet megfúrjuk, egyiken meg kell kapnunk a földgázt, ha az e környéken nagyobb mennyiségben egyáltalán előfordul. Negativ eredmény esetén e vidéken bővebb földgáz-forrást nem várhatunk, s igy ezzel ismét felesleges fúrások költségeit takarítjuk meg. A gravitációs mérések hijján ugyanis esetleg a fúrások egész sorát végezhetjük, a nélkül hogy az antiklinálist eltalálnók. A

Hortobágyon megállapitott gravitációs minimum és a maximum helyén a fúrások jelenleg már folyamatban vannak.

Nem egy esetben érdekesek lehetnek azok a következtetések, a melyeket méréseinkből földrengéses vidékeken vonhatunk. Legveszedelmesebbek ugyanis a földrengések ott, ahol a földnek ki nem egyensúlyozott vonalai, bizonyos törésvonalai, tektonikai vonalai vannak. Ha ily vidéken megrázkódik a föld, akkor igen nagy elmozdulások, rétegcsuszamlások jöhetnek létre. Eszközeinkkel éppen az ilyen, a földrengések szempontjából veszedelmes alakulatokat kereshetjük ki. Utalok *Kecskemét* vidékére, ahol a földalatti geológiai alakulat a földrengésekkel kétségtelenül összefügg. Ha valamely nagyobb földrengés előtt és után végzett mérések ugyanazon a területen rendelkezésünkre állanának, minden valószínüség szerint ezekből a nagyobb földalatti tömegelmozdulásokra következtethetnénk. Talán ily módon a vulkánikus tömegeltolódásokat is észlelhetnők.[75] Mintegy hasonlatképen felemlítem, hogy pl. a *Duna* partjától 100 méter távolságban megfelelő érzékenységű eszköz útján a víz szintváltozása annak gravitacionális hatása alapján jól észlelhető volt.[66,67]

*

Eötvös Loránd báró a gravitációs kutatásokat egy egészen új nagy jelentőségű módszerrel gazdagitotta. Az új eljárás a régieket nem teszi feleslegessé, hanem azokat kiegészítve, a nehézségi erő még részletesebb megismerését teszi lehetővé. E megismerés úgy tudományos fizikai, valamint geodeziai és geofizikai szempontból kiváló fontosságú, sőt a mint azt az előzőkben láthattuk, belőle nem egyszer szeizmologiai, geologiai és bányakutatási szempontból érdekes és hasznos következtetéseket vonhatunk.

* * *

Talán nem lesz érdektelen, ha röviden azt is érintem, hogy miként végezzük szabadban való méréseinket. Mint azt már említettük, gravitációs eszközeink nagyok, úgy hogy szállításukra külön kocsik szükségesek. Az egyéb műszereket, sátrakat, felszerelési tárgyakat ugyancsak külön kocsikon szállítjuk (21. ábra.). A gravitációs észlelések, a gyors hőmérsékletváltozások zavaró hatásának elkerülése céljából, éjjel történnek. A megfigyeléseket a szükséges pontokon igen gyakran a lakott helyektől, községektől távol végezzük. Mind e körülmények szükségessé teszik, hogy valóságos expediciós felszereléssel lássuk el magunkat, hogy így

21. ábra.

a lakott helyektől függetlenül, tekintet nélkül az idő viszontagságaira, teljesen szabadban tartózkodhassunk. Célszerü lakásról, lakósátrakról (22. ábra), azok megfelelő berendezéséről, világításáról, konyhafelszerelésről stb. kellett gondoskodnunk. Tekintve, hogy naponkint egy-egy új állomásra hurczolkodunk, mindezen berendezkedések megszerkesztésénél a főszempont az volt, hogy azok gyorsan és könnyen egybeállíthatóak és lebonthatóak legyenek. Saját tapasztalatainkon okulva e berendezések egyre jobban tökéletesednek.

Sokszor kedvezőtlen terepeken, süppedékes árvizes területeken végeztük méréseinket s igy arról is kellett gondoskodni, hogy az elénkbe gördülő akadályokat leküzdhessük. Repülő hid, kocsiemelők és pallók segélyével nem egyszer sikerült ily kritikus helyeken átjutnunk. Természetesen felszerelési tárgyaink szaporodásával együtt járt, hogy kocsiparkunk is megnövekedett. A háború előtti években már két csoportban dolgozva, összesen 6 észlelő és 15 munkásember, illetve kocsis vett részt a mérésekben. Összesen 13 kocsi állott rendelkezésünkre, köztük a külön szerkesztett műszerkocsik, lakáskocsik, teherkocsik, és személyszállító utazókocsik. Ezeket takarékosságból csupán 9 pár állandó lóval vontattuk. Most a háború alatt is folytatjuk méréseinket, de lényegesen megszűkitett mederben. Kivételes esetekben, egész különleges körülmények között, megfelelő különleges felszereléssel is végeztünk méréseket, így a Balaton jegén, a Bega-csatorna mentén stb. Méréseink kapcsán természetesen nem egyszer balesetekben, különböző kalandokban is volt részünk.

* * *

Végül röviden érinteni kivánom, hogy a külföld mily mértékben karolta fel e vizsgálatokat. Tulajdonképen Eötvös Lóránd bárónak az Internationale Erdmessung 1906-évi budapesti értekezletén tartott előadása irányította e mérésekre a geodéták figyelmét.[76]

Az elsők között *a németek*, a porosz kir. geodéziai intézet rendezkedett be az Eötvös-féle mérésekre. Eszközüket lényegében a mieink szerint saját intézeti mechanikusokkal készíttették. A torziós drótokat mi bocsátottuk rendelkezésükre. Ezen eszközzel jó ideig csak a geodéziai intézetben kisérleteztek, legujabban a szabadban Schweydar mér vele.[127] Később Hecker O. a strassburgi szeizmologiai intézet részére ugyancsak Potsdamban egy második eszközt készíttetett, s ezzel mostanában Koenigsberger J. freiburgi egyetemi tanár társaságában, a ki a méréseket nálunk hosszabb ideig tanulmányozta, Hamburg környékén végez megfigyeléseket. E célra Eötvös báró még külön egy eszközét is rendelkezésükre bocsátotta.

A *franciák* közül Brillouin végzett méréseket a Simplon alagútban az *Eötvös*-féle eszközzel, melyet bizonyos módosításokkal maga készíttetett.[106, 110]

Az *olaszok* közül a palermói egyetemen Venturi professzor elméletileg[109], a padovai egyetemen pedig Soler gyakorlatilag fog-

22. ábra.

lalkozott az Eötvös-féle módszerrel.[117] Soler professzor a mérések tanulmányozására nálunk is járt és Nagykőrös körül azokban részt is vett. Eszközüket Süss Nándor budapesti preciziómechanikusnál rendelték meg, a ki a mi műszereinket is készitette. Padova környékén már a szabadban méréseket is végeztek.[120]

Az *orosz* katonai földrajzi intézettel ugyancsak tárgyalások folytak ily eszközök megrendelésére, amelyek azonban abbamaradtak.

Az *angolok* a londoni *The Science Museum* részére Süssnél Eötvös-féle eszközt készittettek, mely azonban a háború miatt itt rekedt.

Az elsők között a *japánok* szintén Süss mechanikusnál rendelték meg eszközüket, amellyel Sinjo egyetemi tanár, a ki a mérési módszert nálunk gyakorlatilag is tanulmányozta, Tokio körül végez megfigyeléseket.

Nálunk, kivülünk Gorjanovich Kramberger *horvát* geológus irányítása mellett Gavazzi tanár végzett Horvátországban és Szlavoniában méréseket.[118] Eszközüket ugyancsak Süssnél csináltatták. Tekintve, hogy a hosszas tapasztalatok alapján a műszerek gyakorlati aprólékos titkait jól ismerjük, az összes Budapesten készült eszközöket véglegesen mi hoztuk rendbe. Ugyancsak mi határoztuk meg mindenkor az eszközök állandóit is.

Legújabban Schumann R. bécsi műegyetemi tanár hosszabb ideig tanulmányozta itt nálunk úgy a laboratóriumban, mint a szabadban e méréseket, és Süssnél már eszközöket is rendelt.

Smolenski J. krakói egyetemi tanár ugyancsak felkereste expediciónkat; az Eötvös-féle mérésekre ők is be akarnak rendezkedni.

A külföld és közöttük a németek eleintén hidegen fogadták e vizsgálatokat. Nem hitték, hogy szabadban észlelve a szükséges nagy pontosságot és biztosságot tényleg elérhetjük. Miután azonban nagyobb észlelési sorozatok és az azokban mutatkozó rendszeresség kapcsán módjukban volt a mérések realitásáról meggyőződést szerezni, a módszer legbuzgóbb pártolóivá lettek. Igy maga Helmert, a nem rég elhúnyt berlini egyetemi tanár, a porosz kir. geodéziai intézet igazgatója, az Internationale Erdmessung elnöke, eleintén nem igen bízott e mérésekben, később pedig a legnagyobb elragadtatással nyilatkozott róluk. Igy mikor 1915-ben ingamérések végzése céljából Potsdamban jártam, ismételten volt alkalmam Helmert-tel e mérésekről beszélgetni, amikor is ő többek között a következőket mondotta:

a felső geodézia két legcsudálatosabb eszközének tartja a libellát és az Eötvös-féle eszközt, mert mind a kettő lényegében olyannyira egyszerű és mégis okkal-móddal használva, általuk a Föld alakjára és felszinének szerkezetére vonatkozólag oly fontos és messzemenő következtetéseket vonhatunk.

A mi elismerésünknél csak örömünk lehet nagyobb, hogy az igazi tudós szerénységével működő báró Eötvös Loránd messze túl az ország határán, az egész művelt világ előtt elismerést, hirt és dicsőséget szerzett a magyarnak!

Pekár Dezső.

IV. A GRAVITÁCIÓ ÉS TEHETETLENSÉG ARÁNYOSSÁGÁRÓL.

Newton vonzási törvénye tulajdonképen oly tételeket foglal magában, a melyeket általános érvényűeknek ismertek el a nélkül, hogy azoknak szigorú kísérleti bizonyítását adták volna. Ilyenek a következők:

1. A testek vonzása független az anyagi minőségtől s csak a tömegtől, vagy máskép kifejezve a tehetetlenségtől függ és pedig oly módon, hogy ezzel arányos. Ezt a tételt tehát úgy is fejezhetjük ki, hogy a gravitáció és tehetetlenség viszonya minden anyagra nézve ugyanazon értékű állandó, azaz a gravitáció és tehetetlenség egymással arányos.

2. Két test kölcsönös vonzását a környező, illetve köztük fekvő anyagok nem módositják.

3. A vonzás végtelen nagy sebességgel terjed, mert csakis igy lehetséges, hogy a vonzóerő a testek mozgási állapotától független legyen.

E tételek közül az elsőnek kísérleti bizonyítását már Newton igyekezett megadni. Vizsgálatait különböző anyagokkal, arany, ezüst, ólom, üveg, homok, konyhasó, víz, gabona és fával megterhelt egyenlő hosszúságú ingákkal végezte, a melyeknek lengésidejét lehetőleg pontosan meghatározta. Newtonnak e kísérletei szerint ugyanazon tömegű, de különböző anyagú testek nehézségei legfeljebb értéküknek $^1/_{1000}$-ed részével különbözhetnek egymástól. Később Bessel-nek híres ingakísérleteivel sikerült kimutatni, hogy a különböző testek nehézségének gyorsulásában nagyobb eltérés nem lehet, mint legfeljebb annak $^1/_{60\,000}$-ed része. Vizsgálatait arany, ezüst, ólom, vas, cink, réz, márvány, agyag, kvarc és meteorit-anyagú testekkel végezte.

Báró Eötvös Lóránd-nak hasonló irányú vizsgálatai, a melyeket még a mult század nyolcvanas éveinek végén végzett, pontosságban messze felülmulják Newton és Bessel kísérleteit. Eötvös az általa már akkor egyébként is használt torziós ingával kimutatta, hogy ha ugyanazon tömegű, de különböző anyagú testek nehézségében egyáltalában eltérés volna, úgy ezen eltérésnek kisebbnek kell lennie, mint annak $^1/_{20\,000\,000}$-od része. Üveget, antimont és parafát rézzel hasonlította össze; továbbá levegőt és rezet, mely utóbbi esetben azonban a levegő aránytalanul kis sűrűsége miatt az esetleges eltérés felső határát az egész erő $^1/_{100\,000}$-ed részének találta.[42], [43] Kísérleti módszeréről később bővebben szólunk.

Az előbb említett három tétel jelentőségében erősen nyert, másrészről azonban minden kétségen felül álló általános érvényessége nagyon megrendült azon eredmények miatt, a melyeket az elméleti elektrodinamikában ujabban megállapitottak. Az elektromos és mágneses erőknél ugyanis, a melyeknek első leírása a vonzáséhoz hasonló alakban történt, azt tapasztalták, hogy ezek a fény tovaterjedési sebességével haladnak, s kölcsönhatásuk a közbülső mediumtól lényegesen függ, azaz az elektromos és mágneses erőkre a 2. és 3. tétel nem érvényes. Még nagyobb jelentőséget nyert az 1. tétel azzal, hogy a testek mechanikai értelemben vett tehetetlensége és az azokban foglalt elektromos részecskék töltése között bizonyos összefüggést sikerült kimutatni. Igy azután a gravitáció, arányos lévén a tehetetlenséggel, az elektrodinamikával jutott összefüggésbe és tág tere nyílott a gravitáció mibenlétére vonatkozó elméleti vizsgálatoknak. Mindinkább előtérbe nyomult tehát a fenti három s azok között is elsősorban az 1. tétel érvényességének kérdése.

Ez inditotta a *göttingeni egyetem filozófiai fakultását* arra, hogy 1906-ban a Benecke-féle díjra a következő pályakérdést tűzte ki: «Eötvös igen érzékeny módszert közölt az anyag gravitációjának és tehetetlenségének összehasonlítására. Tekintettel erre és utalva az elektrodinamika ujabb haladására és a radioaktiv anyagok felfedezésére, vizsgáltassék meg részletesen a

NEWTON-féle törvény a gravitáció és tehetetlenség arányosságáról.» E kérdésre egyetlen pályamű érkezett be, a melynek szerzői Báró EÖTVÖS LÓRÁND és *e sorok írói* 1909-ben a BENECKE-féle első díjat nyerték el.[79]

A pályamunka első része azon kérdéssel foglalkozik, hogy a vonzás a testek anyagi minőségétől független-e; a második rész a vonzásnál esetleg fellépő abszorpció jelenséget tárgyalja; a harmadik rész a radioaktiv anyagokkal végzett kísérleteket tartalmazza; végül pedig az eredmények vannak rendszeresen egybeállítva. Ismertetésünkben mi is e sorrendhez ragaszkodunk.

* * *

EÖTVÖS-nek módszere, a melyet már előző vizsgálataiban is alkalmazott, azon alapszik, hogy *ha a Föld vonzása a különböző anyagokra egymástól eltérő volna, akkor a nehézségi erő irányának is különbözőnek kellene lennie.* A nehézség ugyanis két különböző nagyságú és irányú erőnek eredője, melyek közül az egyik a tömegvonzásból, a másik a Föld forgásából és a testek tehetetlenségéből eredő középpont futó erőből származik. Önként érthető, hogy az egyik összetevőnek a vonzóerőnek változása magának az eredőnek, a nehézségnek irányát is megváltoztatja, ez irányeltérés pedig a torziós ingával könnyen kimutatható.

A 23. ábrán látjuk, hogy a $\overrightarrow{PG}$ vonzóerő a $\overrightarrow{Pg}$ nehézségerő irányától az északi félgömbön észak felé tér el. Legyen az eltérés szöge ε. Feltéve, hogy a vonzás különböző anyagokra különböző, a $\overrightarrow{PG'}$ és $\overrightarrow{Pg'}$ egy másik anyagra nézve a vonzó, illetve a nehézségi erőt tünteti fel, a melyek egymástól ε' szöggel térnek el. Ezek a szögek a rajzban megjelölt φ, φ' és ψ szögekkel fejezhetők ki:

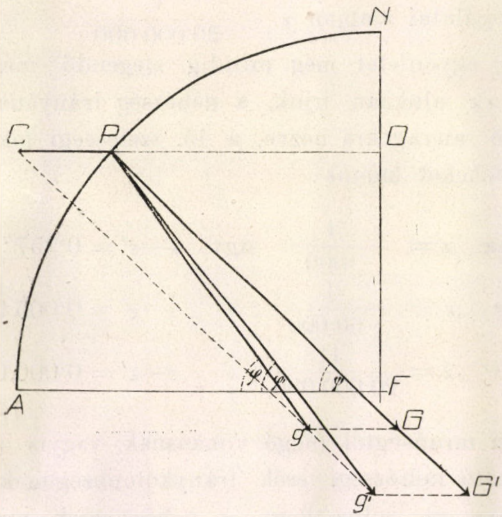
$$\varepsilon = \varphi - \psi \quad \text{és} \quad \varepsilon' = \varphi' - \psi$$

melyek feltevésünk értelmében egymástól különböznek s az anyagi minőségen kívül azonban a geografiai szélességtől is függenek. Az ε az egyenlítőn és a sarkokon 0, s legnagyobb értéke a 45. szélességi fokon: 357″.

A különböző anyagok közül válasszuk a *vizet normálanyagul.* Erre és egy más anyagra nézve a nehézségerő irányának különbségét $(\varepsilon'-\varepsilon)$-t nagy megközelítéssel következőképen írhatjuk

$$\varepsilon'-\varepsilon = -\frac{G'-G}{g}\sin\varepsilon$$

a hol G és G' a vonzóerőt, g pedig a nehézségerőt jelenti.



23. ábra.

Az egyes anyagok vonzását a G'-et a vizével, a G-vel, mint normálanyagéval a következőképen fejezhetjük ki

$$G' = G\,(1+\varkappa)$$

a hol $\varkappa$ *az illető anyagra jellemző specifikus vonzási együttható.* Ezt bevezetve a nehézség iránykülönbsége:

$$\varepsilon'-\varepsilon = -\varkappa\,\frac{G}{g}\sin\varepsilon \tag{1}$$

Newton általános vonzási törvénye szerint, továbbá

$$\frac{G'}{G} = \frac{f'}{f}$$

s így

$$f' = f\,(1+\varkappa) \tag{2}$$

a hol f' és f a különböző anyagokra vonatkozó gravitációs állandót jelenti.

Newton ingakisérletei ezek szerint azt mondják, hogy bármely anyagra $\varkappa < \frac{1}{1000}$, Bessel szerint $\varkappa < \frac{1}{60\,000}$ és Eötvös régebbi vizsgálatai alapján $\varkappa < \frac{1}{20\,000\,000}$.

Ha az (1) egyenletet még mindig elegendő megközelitéssel $\varepsilon' - \varepsilon = -\varkappa\varepsilon$ alakban írjuk, a nehézség irányának eltérésére a különböző anyagokra nézve, a 45. szélességi fokon a következő szögértékeket kapjuk:

$$\begin{array}{llll} \text{ha} & \varkappa = \frac{1}{1000} & \text{úgy} & \varepsilon - \varepsilon' = 0{\cdot}357'' \\ « & \varkappa = \frac{1}{60\,000} & « & \varepsilon - \varepsilon' = 0{\cdot}005\,95'' \\ « & \varkappa = \frac{1}{20\,000\,000} & « & \varepsilon - \varepsilon' = 0{\cdot}000\,018'' \end{array}$$

Az anyagi minőségtől függő vonzásnak, vagyis a különböző anyagokra ható nehézségi erők iránykülönbségének egy másik következménye az volna, hogy a nehézségnek minden egyes anyagra nézve más és más volna a nivófelülete. A nivófelület pedig — a mint tudjuk — meghatározza a Föld alakját, a geoidot. Ha e különböző geoidok az egyenlítőn egymást érintik, akkor a sarkokon azok legnagyobb eltérése z a következő volna:

$$\begin{array}{llll} \varkappa = \frac{1}{1000} & \text{esetében} & z = - & 1380 \text{ cm} \\ \varkappa = \frac{1}{60\,000} & « & z = - & 23 \text{ cm} \\ \varkappa = \frac{1}{20\,000\,000} & « & z = - & 0{\cdot}069 \text{ cm} \end{array}$$

A különböző anyagok nehézségében esetleg fellépő előbb említett kicsiny irányváltozásokat a függőónnal és libellával már egyáltalán ki nem mutathatjuk, Eötvös torziós ingájával azonban még mindig jól lemérhetjük. E torziós inga részletes ismertetését a gravitációs mérésekről szóló cikkben találjuk.

Ezek után lássuk, miként mérhetjük le a meghatározandó adatokat. Válasszunk e célból egy derékszögű koordinatarendszert úgy, hogy annak Z tengelye az eszköz forgási tengelyével essék egybe, tehát függélyesen lefelé, az X tengely pedig észak és az Y tengely kelet felé irányított legyen. Jelentse továbbá m_k a torziós inga egy tömegelemét, g_k az arra ható nehézségerőt, η_k azt a szöget, a melyet g_k a víz nehézségének irányával képez, E pedig azt a szöget, a melyet a mérődrót által képviselt forgási tengely iránya a víz nehézségének irányával alkot. Ha a torziós inga rúdja kelet-nyugot helyzetben van, a vizszintes forgási síkban minden m_k tömegelemre a nehézségnek egy észak felé irányuló komponense hat, a melynek nagysága

$$m_k \, g_k \, (\eta_k - E)$$

s az ebből származó forgatónyomaték

$$D = -\Sigma \, m_k \, g_k \, y_k \, (\eta_k - E) = -\Sigma \, m_k \, g_k \, y_k \, \eta_k$$

Jelentse továbbá M_a és M_b a torziós inga rúdjának két végén elhelyezett tömegeket, a melyekre nézve $\varkappa_a$ és $\varkappa_b$ feltételeink szerint különbözők, l_a és l_b az M_a és M_b tömegek súlypontjának a forgási tengelytől való távolságát s α a torziós inga rúdjának azimutját, akkor tekintetbe véve az (1) egyenletet, elegendő közelítéssel írhatjuk

$$D = M_a l_a \, (\varkappa_b - \varkappa_a) \, G \sin \varepsilon \sin \alpha \tag{3}$$

E forgásmomentum nagyságára és Eötvös torziós ingájának érzékenységére csak azt említjük fel, hogy ha $\varkappa_b - \varkappa_a = 1.10^{-6}$ lenne, úgy az eszköz még mindig több mint 10 osztályrész kitérést mutatna.

A (3) alatti forgató nyomaték mellett a torziós inga rúdjára azonban még a nehézség térbeli változásaiból eredő forgásmomentum F is hat, úgy hogy a földi nehézség okozta összes forgatónyomaték:

$$\mathrm{F} = F + D = \frac{1}{2} K \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + K \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha -$$
$$- M_a h l_a \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \sin \alpha + M_a h l_a \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cos \alpha + \qquad (4)$$
$$+ M_a l_a (\varkappa_b - \varkappa_a)\, G \sin \varepsilon \sin \alpha$$

hol a többi már ismert mennyiség mellett K a lengőszerkezet tehetetlenségi nyomatékát, U a nehézség potenciálfüggvényét, h a lelógó súly súlypontjának távolságát a rúdtól jelenti. E forgatónyomatékkal tart egyensúlyt a mérődrót megcsavarodásából származó forgató nyomaték $\tau\,\vartheta$, hol τ a drót torziós állandóját, ϑ a megcsavarodás szögét jelenti. E szöget, tekintve hogy a torziós eszközön az észlelések távcsöves tükörleolvasással és pedig megtört prizmás távcsővel történnek, a skálatávollal az L-el, az egyensúlyhelyzetnek megfelelő skálaleolvasással az n-el és a megcsavaratlan rúd skálaértékével az n_0-val fejezzük ki. Mindezek alapján a közvetlenül észlelt megcsavarodásra a következő kifejezést nyerjük:

$$n_0 - n = \frac{L}{\tau} K \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + \frac{2L}{\tau} K \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha -$$
$$- \frac{2L}{\tau} M_a h l_a \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \sin \alpha + \frac{2L}{\tau} M_a h l_a \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cos \alpha + \qquad (5)$$
$$+ \frac{2L}{\tau} M_a l_a G \sin \varepsilon\, (\varkappa_b - \varkappa_a) \sin \alpha$$

melynek felhasználásával, a mint azt az alábbiakban részletezzük, az alkalmas módon végzett kisérleti megfigyelésekből a specifikus vonzási együtthatók különbségét a $(\varkappa_b - \varkappa_a)$-t kiszámíthatjuk.

*

A megvizsgálandó kérdést kísérletileg még egy más úton is megoldhatjuk és pedig *a Nap vonzásának felhasználásával.* A Nap és a Hold vonzása Földünkön elég szembeötlőleg nyilvánul, hiszen ez okozza a jól megfigyelhető tengerjárás jelenséget. A Hold vonzása a Napéhoz képest aránytalanul kicsi, s gy ezt vizsgálatainkban elhanyagolhatjuk. Magát a kisérleti megfigyelést következő módon végezzük. Állítsuk torziós eszközünket úgy, hogy rúdja, melynek végein az összehasonlítandó anyagok vannak, észak-dél irányban legyen és hagyjuk az eszközt a kísérlet egész tartama alatt változatlanul ebben az állásban. Ez esetben a rúdra a Föld vonzásából származó (4) alatti forgatónyomatékon kívül, mely a mérődrót állandó megcsavarodását okozza, a Nap vonzásából eredő forgatónyomaték is hat, mely a Nap és a rúd kölcsönös helyzetének megfelelően naponkint periodikusan változik. Ha a Nap vonzására nézve $(\varkappa_a - \varkappa_b)$ a nullától különböző és pozitiv volna, ha tehát a rúd északi végén lévő M_a tömeget a Nap erősebben vonzza, mint a déli végén lévő M_b-t, úgy a torziós inga rúdja nyugalmi helyzetét az időben akként változtatja, hogy napkeltekor a rúd északi vége kelet felé, napnyugtakor pedig nyugat felé fog kitérni. E kitérés nagysága torziós eszközünkön $\varkappa_a - \varkappa_b = 1.10^{-6}$ esetében 3·5 osztályrész lenne.

Ezt az előző eljárás hasonló adatával egybevetve látjuk, hogy e második meghatározás érzékenysége az előzőnek kbl. csak harmadrésze. Mind a mellett e megfigyelési módszertől szép eredményeket várhatunk, ha e célra nem az egyszerű torziós ingát, hanem Eötvös *gravitációs kompenzátorát* használjuk fel.[57] Ezen eszköz érzékenysége ugyanis tetszés szerint fokozható; gyakorlatilag azonban a fokozásnak határt szab az a körülmény, hogy az érzékenység növekedésével a zavaró hatások is növekednek s így ezek kizárásáról kell lehetőségig gondoskodnunk, a mit elég jelentékeny mértékben el is érhetünk.

*

Ezen elméleti tárgyalások után lássuk, miként végeztük magukat a kísérleteket. A torziós inga rúdjának egyik végén az oda betolt platinasúlyt állandóan meghagytuk, míg a másik végén a lelógó platinasúlyt a megvizsgálandó anyagokkal helyettesítettük, ügyelvén arra, hogy azok tömege a platináéval közel egyenlő legyen és súlypontjuknak távolsága a rúdtól is mindig ugyanaz maradjon.

Az eszköz nagy érzékenysége és a lemérendő erők kicsiny volta miatt lehetőleg ki kell küszöbölnünk minden olyan zavaró hatást, mely a variometer rúdjának nyugalmi helyzetét megváltoztathatja.

Igy zavarólag hathat *a földmágneses erő*, ha a lelógó súly akármi kis mértékben is, de remanensen mágneses. Ezt a hatást azonban a földmágneses erőt kompenzáló, az eszköztől elég távol elhelyezett mágnesrúddal vagy elektromágnessel tetszésszerint kicsinynyé tehetjük.

Ugyancsak zavarólag hathatnak az *elektrosztatikus hatások*, a melyek a lelógó súly vagy a rúd s az azokat körülvevő fémfalak között jöhetnek létre. Ezeket jórészt elkerülhetjük, ha a belső felületeket lehetőleg homogénné tesszük azzal, hogy finom koromréteggel vonjuk be.

A *különböző sugárzásokkal* szemben már maga az eszköz elég jó védelmet nyujt, mert külső burka hármasfalú fémszekrényből áll. E hatásokat még jobban csökkentettük azzal, hogy az eszközt jól védett helyiségben s ott is az egyébként szabadban használatos kettős vászonfalú sátorban állítottuk fel.

A *hőmérsékletváltozásból eredő hatásokat* a mérődrót előre meghatározott hőmérsékleti együtthatójával már részben számításba vesszük, másrészről meg azzal kisebbíthetjük, hogy a kellő helyen felállított eszközzel a megfigyeléseket éjjel végezzük.

A *talaj rázkódásai* is okozhatnak ugyan a rúd nyugalmi helyzetében zavarokat, ezek azonban csak kivételes esetekben, pl. földrengésekkor lesznek jelentékenyek.

Az eszközt körülvevő *tömegek eloszlásában történő változások* csak annyiban jönnek számításba, a mennyiben azzal a nehézség térbeli eloszlása is számottevően megváltozik.

Eötvös a $(\varkappa_b - \varkappa_a)$ különbség meghatározására háromféle, mindig tökéletesebb és tökéletesebb kisérleti eljárást alkalmazott.

Az elsőnél feltételezi, hogy úgy a mérődrót torziós állandója, a τ, vagyis az eszköz érzékenysége, valamint a nehézség térbeli változásai és pedig elsősorban a $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ és $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ differenciálhányadosok a kísérlet egész tartama alatt, tehát körülbelül egy hétig állandók maradnak. A másodiknál megtartja ugyan az előbbi differenciálhányadosok állandóságát, de nem zárja ki annak a lehetőségét, hogy τ az időben változik; míg a harmadik kísérleti eljárásnál azután úgy a $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ és $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$, mint a τ változók lehetnek.

Az első eljárásnál az *egyszerű nehézségi variometert* használtuk. Az eszközt, a melyben először a rúd mindkét végén platina ($\varkappa_a$) volt, hosszú, napokig tartó kísérleti sorozatban az $\alpha = \frac{\pi}{2}$ és $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ azimutokban, azaz a rúd kelet-nyugoti állásában észleltük, majd rövidebb sorozatban az $\alpha = 0$ és $\alpha = \pi$ azimutokban, vagyis a rúd észak-déli állásában történtek leolvasások. Az azimutoknak megfelelő indexekkel jelölt leolvasásokból az n_0 és n_π illetve $n_{\frac{\pi}{2}}$ és $n_{\frac{3\pi}{2}}$-ből a következő különbségeket képeztük:

$$m = n_0 - n_\pi \quad \text{és} \quad v = n_{\frac{\pi}{2}} - n_{\frac{3\pi}{2}}.$$

Azután a lelógó platinasúly helyett a megvizsgálandó anyagot ($\varkappa_a'$) függesztve fel, szintén hosszú sorozatokban az m' és v' különbségeket meghatároztuk.

Az (5) egyenletnek a megfelelő azimutokban való részletes kifejtése után kapjuk, hogy

$$\varkappa_a - \varkappa_a' = A\,(v - v') + \left[m\,(\varDelta\alpha - \varDelta\alpha') - v\,\frac{h - h'}{h} \right] A$$

a hol $\varDelta\alpha$ és $\varDelta\alpha'$ a torziós inga rúdjának eltéréseit az északi iránytól az $\alpha = 0$ azimutban jelentik, továbbá

$$A = \frac{\tau}{4 L M_a l_a G \sin\varepsilon}$$

Ily módon *magnalium* és *platina*, továbbá *fa* és *platina* között történtek összehasonlítások.

A második kísérleti eljárásnál, a melynél ismét az *egyszerű nehézségi variometert* használtuk, az eszközt egymásután az $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ azimutokba hozva, észleltünk. Az $n_0, n_{\frac{\pi}{2}}, n_\pi, n_{\frac{3\pi}{2}}$ leolvasásokból úgy mint előbb az m és v-t kiszámítottuk, majd a lelógó platinasúlyt ($\varkappa_a$) megint a megvizsgálandó anyaggal ($\varkappa'_a$) cserélve fel, az m' és v' különbségeket határoztuk meg, úgy azonban, hogy az m és v, illetve az m' és v' páronkint mindig ugyanazon időpontra vonatkozzanak. Ez esetben

$$\varkappa_\alpha - \varkappa'_\alpha = mA\left(\frac{v}{m} - \frac{v'}{m'}\right) + mA\left(1 - \frac{v^2}{m^2}\right)(\varDelta a - \varDelta a').$$

Ezzel az eljárással hasonlítottuk össze *a rezet* a *platinával.* Azonkívül e módszerrel vizsgáltuk meg a LANDOLT-féle *ezüstszulfát-ferroszulfát* reakciót. LANDOLT ugyanis teljesen zárt ∩ alakú csövekben chemiai reakciókat végzett. Az egymásra ható anyagokat a cső száraiba helyezvén, azt leforrasztotta és súlyát pontosan megmérte. Ezután a csövet megbillentvén, a reakció végbement. Most a cső súlyát ismét megmérte, a mikor is több esetben változást észlelt. Kisérletei szerint különösen nagy volt a súlyváltozás az említett reakciónál, a miért is éppen ezt vizsgáltuk meg. E célból előbb alkalmas módon egymástól elválasztva a reakció előtti anyagokat, azután a reakció utániakat függesztettük fel a torziós rúdra a platinasúly helyébe és mindkét esetben hosszú megfigyelés sorozatot végeztünk.

A harmadik kísérleti eljárásnál *a kettős nehézségi variometert*[76] használtuk, a melyben két egyszerű variometer egymással párhuzamosan, de lelógó súlyaikkal ellentetten van egymás mellé helyezve.

A rudak végeibe betolt platinasúlyok állandóan megmaradtak, míg a lelógó platinsúlyok helyébe a variometer mindkét eszközébe egy-egy összehasonlítandó anyagot függesztettünk fel ($\varkappa_a$ és $\varkappa'_a$), azután a négy főállásban az $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ azimutokban hosszú észlelési sorozatot végeztünk az m_1, v_1 és m_2, v_2 meghatározására. Majd egy második sorozatban a megvizsgálandó anyagokat a variometer két eszközében felcseréltük s az m_1', v_1' és m_2', v_2' különbségeket határoztuk meg. Ekkor:

$$\varkappa_a - \varkappa_a' = \frac{mA}{2}\left[\left(\frac{v_1}{m_1} - \frac{v_2'}{m_2'}\right) + \left(\frac{v_2}{m_2} - \frac{v_1'}{m_1'}\right)\right] +$$
$$+ \frac{mA}{2}\left(1 - \frac{v^2}{m^2}\right)[(\varDelta a_{1\mathrm{I}} - \varDelta a_{1\mathrm{II}}) - (\varDelta a_{2\mathrm{I}} - \varDelta a_{2\mathrm{II}})],$$

hol m, v és A számára azok középértékei veendők s a $\varDelta a$ szögek a rudak eltéréseit az északi iránytól jelentik az 1. és 2. eszközben az I. és II. kísérleti sorozatban.

Ilyen módon történtek összehasonlítások *viz* és *réz*, *azbeszt* és *réz*, *faggyú* és *réz* között, továbbá *kristályos rézszulfát* és *réz*, *rézszulfát-oldat* és *réz* között. Ez utóbbi kisérletet olyan töménységű rézszulfát oldattal végeztük, mint a milyennel HEYDWEILLER kísérletezett. Ő ugyanis a LANDOLT-éhoz teljesen hasonló eljárással többek között a rézszulfát vizben való oldását vizsgálta meg, a mikor is jelentékeny súlyváltozást észlelt. Igy e megfigyeléseink egyúttal HEYDWEILLER kísérleteit ellenőrzik.

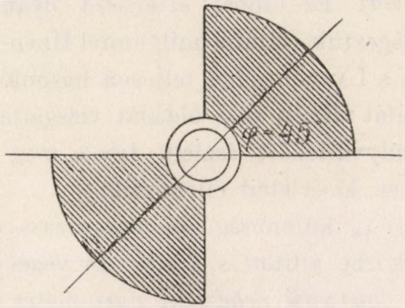
A Nap vonzására nézve a $\varkappa_b - \varkappa_a$ különbség meghatározását, mint azt már említettük, a délkörbe állított s a rúd két végén különböző anyaggal megterhelt *egyszerű nehézségi variometer*rel végeztük. Hogy azokat a zavaró hatásokat számításba vehessük, a melyek a rúd egyensúlyhelyzetének igen kicsiny, de mégis észrevehető periodikus ingadozásait okozzák s a melyeket az eszköz messzemenő védelme mellett sem sikerült teljesen kizárni, a délkörbe állított eszközzel két észlelési sorozatot végeztünk. Az egyik sorozatban a rúd mindkét végén platina volt, a másikban a lelógó platinasúly helyébe magnaliumot függesztettünk. Mindkét észlelési sorozatban napokon keresztül óránkénti leolvasásokat végezve, ezekből a nap minden órájának megfelelő középértékeket képeztük s a két I illetve II-vel jelölt észlelési sorozatban a különböző óráknak megfelelő különbségeket a $(n'-n)_\mathrm{I}$ és $(n'-n)_\mathrm{II}$-öt állítottuk elő. Ekkor

$$\varkappa_b - \varkappa_a = 0{\cdot}6863 . 10^{-6}\,\frac{(n'-n)_\mathrm{II} - (n'-n)_\mathrm{I}}{\sin\xi' \sin A' - \sin\xi \sin A}$$

a hol ζ a Nap zenittávolságát s A az azimutját jelenti az n' illetve n észlelésének idejében. A tényleges számításban, mint legelőnyösebbet a napkelte és napnyugta körüli értékeket használtuk fel, mert ekkor az esetleg mutatkozó különbségeknek legnagyobbaknak kell lenniök.

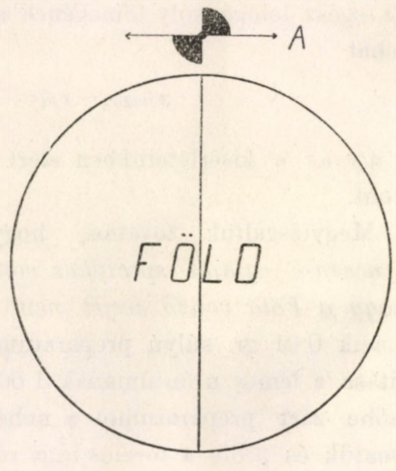
* * *

Eötvös vizsgálatainak második csoportja arra a kérdésre vonatkozik, hogy két tömeg egymásra gyakorolt vonzása függ-e a köztük lévő anyagtól, azaz *van-e a testeknek a vonzással szemben abszorpcióképességük.* Az abszorpciónak önként érthetődőleg érdekes következménye volna, hogy ez esetben a vonzóerő a testek alakjától és nagyságától, sőt kölcsönös helyzetüktől is függne. Austin L. W. és Thwing C. B. ez irányú, éppen nem célszerűen végzett kísérletei szerint a vonzást a két vonzó test közé helyezett pár cm vastag lemezalakú anyagok nem változtatják meg többel, mint annak $1/500$-ad részével.



24. ábra.

Eötvös-nek a gravitáció abszorpciójára vonatkozó vizsgálatai, bár nem befejezettek, e pontosságot mégis messze felülmulják. E czélra *gravitációs kompenzátorát* használta,[57] a mely lényegében szintén egyszerű torziós inga, rúdjának mindkét végén 30 gr-os sárgarézgömbökkel. A rudat kettős falú hengeres cső veszi körül, hogy a külön állványon nyugvó kompenzáló ólomtömegeket a rúd közelében forgathatólag elhelyezhessük. A kompenzáló tömegeknek hengerquadrans alakjuk van, mint azt a 24. ábrán feltüntetett keresztmetszet mutatja. A hengerquadransok mindkét végén nyitott sárgarézcsövekre vannak erősítve s így az eszköz csövére rátolhatók akként, hogy a sárgarézgömböcskék mindkét oldalon egy-egy quadranspár közepében lengjenek. Eötvös e kísérleteinél a quadranspárok tengelyeit egymásután $\varphi = 45,^\circ$ $135,^\circ$ $225,^\circ$ 315°-ra állította be. Tegyük fel, hogy a Földnek a sárgarézgolyóra gyakorolt vonzását az egyik oldalon a közben fekvő kompenzáló quadrans ólomtömege abszorbeálja. Ekkor a vizszintes síkban a quadranspárok hatásából származó forgatónyomatékhoz még egy másik is járul, a mely a két fél földgömb vonzásának különbségéből származik s azon *A* oldal felé irányul, a melyik oldalon az abszorpció kisebb (25. ábra). A gravitációs kompenzátor rúdjának kitéréseit a quadranspárok fentebb megadott különböző helyzete mellett megfigyelve, eme kitérésekből az ólomquadransok okozta abszorpciót kiszámíthatjuk.



25. ábra.

Hecker O. az árkeltő erők megfigyelésére horizontális ingákkal végzett hosszas kisérleteket. Eötvös egyrészt e vizsgálatok eredményeiből, másrészt az apály és dagály jelenségének rendszeres megfigyelési adataiból alkalmas módon, a melynek részletezésébe itt nem bocsátkozunk, a vonzás abszorpciójára vont következtetést és azt ily módon a saját kisérleteivel megállapított értéknél jóval kisebbnek találta.

* * *

Végül *a radioaktiv anyagokra* vonatkozólag végeztünk néhány kísérletet.

Elsősorban azt vizsgáltuk meg, hogy *a radioaktiv anyagok a gravitáció és a tehetetlenség arányossága szempontjából miként viselkednek.* A kísérleti eljárás teljesen ugyanaz volt, mint a melyet a többi anyag vizsgálatánál alkalmaztunk. E czélra kis üvegcsőbe zárt 0·2 gr. súlyú radiumpreparatumot használtunk, mely 0·1 gr. tiszta $Ra\ Br_2$-öt tartalmazott, s a melynek aktivitása 1 500 000-szerese volt a fémuránium énak. E preparatumot külön e célra készült rézcsőbe zártuk s így függesztettük a lelógó platina súly helyett az egyszerű nehézségi variometerbe. A megfigyelések a $\varkappa_a - \varkappa_{Pt}$ különbség meghatározására az első eljárással történtek. Tekintettel arra, hogy a radiumpreparatum az egész lelógó súly tömegének az M_a-nak csak $^1/_{250}$ része volt, tehát

$$\varkappa_{RaBr_2} - \varkappa_{Pt} = \frac{1}{250}(\varkappa_a - \varkappa_{Pt})$$

s így az e kísérleteinkben elért pontosság ily arányban csökkent.

Megvizsgáltuk továbbá, hogy *a radioaktiv anyagoknak nincsen-e valami specifikus vonzó, avagy taszító hatásuk, és hogy a Föld vonzó erejét nem abszorbeálják-e?* E célra egy másik 0·01 gr. súlyú preparatumot használtunk, melynek aktivitása a fémes urániumának 1 000 000-szorosa volt. A kis üvegcsőbe zárt preparatumot a nehézségi variometer belsejébe helyeztük és pedig a torziós inga rúdjába betolt platinasúly mellé. Kísérleteinkben a kis csövecske helyzetét különbözőképen változtattuk: a rúddal párhuzamosan, annak majd az egyik, majd a másik oldalán állott, egyszer alacsonyabban, máskor meg magasabban, mint a lengő rúd.

E kísérleteket többször ismételve a lengő rúdnak nem nagy, de biztos kitéréseit észlelhettük és ezek szerint a preparatum a rúdhoz viszonyított helyzetétől függően vonzó, illetve taszító hatást gyakorolt a rúdra. E jelenséget a radiumpreparatum specifikus vonzó hatásával magyarázhatnók, ha egyszersmind azt tételezzük fel, hogy az a Föld vonzó erejét részben abszorbeálja. Kísérleti tapasztalatainkat még megerősítette az a tény, hogy a preparatum helyett üres üvegcsövecskét helyezvén az eszközbe, az semmiféle hatást nem mutatott. Ellenőrző kísérletképen ezután az eszközbe a preparatuméhoz hasonló méretű üvegcsövecskét helyeztünk, a melybe vékony platinadrót volt beforrasztva, a melyet kívülről hozzávezetett elektromos árammal oly fokban melegítettünk, hogy a percenkint kisugárzott hőmennyiség a radiumpreparatuméval egyenlő legyen. Ez esetben quantitative teljesen ugyanazon eredményeket kaptuk, mint a melyeket a radiumpraeparatumra vonatkozólag észleltünk. A variometeren megfigyelt kitérések tehát hőhatások következményei voltak.

* * *

Az előzőkben úgy a kísérleti módszert, valamint a végzett kísérleteket részletesen ismertettük. Ezek után lássuk vizsgálataink eredményeit.

1. Nagy gonddal végrehajtott, hosszú sorozatos megfigyeléseket végeztünk *a specifikus vonzási együttható, a* $\varkappa$ meghatározására. Különbözö összetételű, különböző fajsúlyú, molekulasúlyú, molekulatérfogatú és különböző halmazállapotú, valamint különböző szerkezetű anyagokat vizsgáltunk meg e szempontból. Ha adatainkat a platinára vonatkoztatjuk, vagyis a platina gravitációs állandóját normálisnak vesszük, azaz feltételezzük, hogy $f_{Pt} = f_0$ és így $\varkappa_{Pt} = 0$, akkor vizsgálataink eredményeit a következő táblázatban állíthatjuk egybe:

	$\varkappa - \varkappa_{Pt}$
magnalium	$+0{\cdot}004.10^{-6} \pm 0{\cdot}001.10^{-6}$
kigyófa	$-0{\cdot}001.10^{-6} \pm 0{\cdot}002.10^{-6}$
réz	$+0{\cdot}004.10^{-6} \pm 0{\cdot}002.10^{-6}$
víz	$-0{\cdot}006.10^{-6} \pm 0{\cdot}003.10^{-6}$
kristályos rézszulfát ...	$+0{\cdot}001.10^{-6} \pm 0{\cdot}003.10^{-6}$
rézszulfát-oldat ...	$-0{\cdot}003.10^{-6} \pm 0{\cdot}003.10^{-6}$
azbeszt	$+0{\cdot}001.10^{-6} \pm 0{\cdot}003.10^{-6}$
faggyú	$-0{\cdot}002.10^{-6} \pm 0{\cdot}003{\cdot}10^{-6}$

Mindezen anyagokra nézve tehát a *Föld vonzását illetőleg* $\varkappa < 0{\cdot}005.10^{-6}$, azaz kisebb, mint annak $^1/_{200\,000\,000}$ része.

A Landolt-féle ezüstszulfát-ferroszulfát reakcióra nézve a reakció előtti $\varkappa$ és utáni $\varkappa'$ közötti különbség meghatározásunk szerint:

$$\varkappa - \varkappa' = 0{\cdot}001.10^{-6} \pm 0{\cdot}002.10^{-6}$$

A kristályos rézszulfát vizben való oldásakor HEYDWEILLER szerinti töménységben, ugyanezen különbség:

$$\varkappa - \varkappa' = -0{\cdot}001.10^{-6} \pm 0{\cdot}002.10^{-6}$$

Méréseink pontossága LANDOLT és HEYDWEILLER vizsgálatainak pontosságát messze felülmulta s eltérést még sem tapasztaltunk. Ők a mérleg érzékenységének határán lévő igen kényes méréseket rendszeres körülmények között végezték s így kisérleteikbe rendszeres hibák jutottak, a melyeket egyezésüknél fogva reális eredménynek minősítettek.

2. A délkörben történt észleléseknél *a Nap vonzásának különbsége* magnalium és platinára

$$\varkappa_{\text{magnalium}} - \varkappa_{Pt} = +0{\cdot}006.10^{-6}$$

3. A *vonzás abszorpciójára* vonatkozólag gravitációs kompenzátorral végzett kísérletek szerint egy 5 cm vastag ólomlap abszorpciója kisebb, mint $0{\cdot}000\,02.10^{-6}$, azaz mint az egész vonzóerőnek ötvenezermilliomod része. Ezen eredmény átszámításával az egész Földnek abszorpciójára nézve egyik átmérője mentén kapjuk, hogy az kisebb, mint a Föld vonzó erejének $^1/_{800}$-ad része.

Az apály és dagály jelenségéből és HECKER megfigyeléseiből pedig azt következtethetjük, hogy a Föld abszorpciója egyik átmérője mentén kisebb, mint a Nap vonzásának $^1/_{10\,000}$-ed része.

4. A *radioaktiv anyagokra* vonatkozólag megállapítottuk, hogy

$$\varkappa_{Ra\,Br_2} - \varkappa_{Pt} = -0{\cdot}25.10^{-6} \pm 0{\cdot}50.10^{-6}$$

továbbá, hogy azok esetleges specifikus vonzása avagy taszitása mindenesetre kisebb egy olyan erőnél, a melynek nagyságrendje

1.10^{-6}; végül hogy azok a Föld vonzásával szemben észrevehető abszorpciót nem gyakorolnak.

Vizsgálataink végeredményét röviden a következő szavakban foglalhatjuk össze: *hosszú észlelési sorozatokat végeztünk, a melyeknek pontossága minden előzőt felülmúl, de egyetlen egy esetben sem állapíthattunk meg észrevehető eltérést a gravitáció és tehetetlenség arányosságának törvényétől.*

Ujabban e törvény és annak szigorú kisérleti igazolása jelentőségében nagyon emelkedett EINSTEIN általános relativitási elmélete [131] folytán, a melynek egyik sarkalatos alapját képezi.

Pekár Dezső és *Fekete Jenő.*

V. A FÖLDMÁGNESSÉGRE VONATKOZO VIZSGÁLATOKRÓL.

Báró Eötvös Loránd az előző dolgozatokban ismertetett vizsgálatai mellett, a melyek őt a nehézség térbeli eloszlásának igen részletes és pontos megismeréséhez vezették, azokkal egyidőben megfigyeléseit a másik földi erőre, a földmágnességre is kiterjesztette. Ennek erőssége a nehézségénél sokszorta kisebb, ($\frac{1}{1400}$—$\frac{1}{3400}$ része annak), de térbeli változásai viszont az egész erőhöz viszonyitva jóval nagyobbak amazénál. Jellemző különbség még közöttük, hogy a földmágneses erő az időben is jelentékenyen változik, a mit a nehézségről eddig biztosan nem mondhatunk.

A földmágneses erőtér ismeretéhez, kétféle változásának megfelelően, a Föld különböző helyeire elosztott és ugyanazon helyeken különböző időben tett megfigyelésekre van szükségünk. Az utóbbi az állandó obszervatoriumok feladata, mig a térbeli eloszláshoz az adatokat ama mágneses felvételek szolgáltatják, a melyeket ez ideig a Föld különböző pontjain végeztek. — Ezek azonban nemcsak a messzebb fekvö földrészeken és oceánokon, hanem még azokban az országokban is meglehetős hiányosak, melyek különben földmágneses felvételekben első helyen állanak. Rendszerint elégségesnek tartották a megfigyelések helyeit egyenletesen ugyan, de egymástól nagyobb közökben megválasztani, mivel úgy találták, hogy 2—3 ivfokon belül a földmágneses elemek mint a földrajzi szélesség és hosszúságkülönbségek lineáris függvényei állíthatók elő s a szekuláris időbeli változást is e területen belül nagy megközelítéssel lineárisan lehet kifejezni.

A földmágnességnek ez az egyszerű, normális eloszlása azonban nem mindenütt mutatkozik; egyes helyeken az eltérések ettől az egész erőnek $^1/_{20}$—$^1/_{10}$ vagy még annál nagyobb részét is teszik s hasonló rendű változásokat találtak az erő irányában is (Moszkva és Páris környéke, Kursk kormányzóság Oroszországban). Igy megkülönböztetnek mágnesesen normális és zavart területeket s ez utóbbiakban ismét kis kiterjedésű lokális és nagyobb terjedelmű regionális zavarokat.

Eötvös módszere a nehézség térbeli változásainak lemérésére megkivánja, hogy a szomszédos meghatározások helyei csak oly messze legyenek egymástól, a meddig köztük előre megállapitott hibahatáron belül a nehézség változása líneárisnak vehető, a tényleg végrehajtott megfigyelések pedig megmutatták, hogy a nehézség térbeli eloszlása a valóságban sehol sem normális oly értelemben, mint az a Helmert-fél formulából adódik. Eötvös földmágneses mérései, a melyeket nemcsak a torziós ingával végzett megfigyelések összes helyein, hanem azonkivül még sok száz más helyen is végzett, hasonlóképen azt mutatták, hogy a földmágnesség normális térbeli eloszlását sem igen találjuk, hanem attól kisebb-nagyobb eltérések, zavarok majd mindenütt fellépnek. Ennek szigorú megismeréséhez a megfigyeléseknek sűrű hálózatára van szükségünk, a mit azután még részletesebbé kell tennünk ott, a hol hirtelen és nagy zavarok a lineáris interpolációt kétségessé teszik. Azonkivül a nehézségnek és a földmágneses erőnek ugyanazon a területen való részletes ismerete tette lehetővé, hogy Eötvös ezen erők rendellenességei között összefüggéseket tudott találni és pedig egészen más értelmezésben, mint azt előtte többen megkisérlették.

A következőkben rövid áttekintést kivánok adni Eötvösnek földmágneses méréseiről, továbbá azok feldolgozásának módjáról és eredményeiről.

A földmágneses erőt egy helyen és egy időpontban három elemével határozzák meg, ezek: vizszintes erőssége H, (horizontális intenzitás), a vízszintes sikban a csillagászati délkörtől való elhajlása D, (deklináció) és a vízszintes siktól való lehajlása I, (inklináció). Ezen elemek lemérésére Eötvös is a szokásos módszereket használja, bár mint később látni fogjuk, ő a földmágnesség térbeli változásainak meghatározására egy a torziós ingához hasonló mágneses variometert, ugynevezett mágneses transzlatometert is szerkesztett.

A horizontális intenzitás meghatározására a Gauss-féle eljárást használjuk, úgy mint azt Lamont módosította. Az e célra szolgáló mágneses teodolitok a deklináció abszolut meghatározására is szolgálnak. Azt a gazdag tapasztalatot, a melyet Eötvös a gravitációs torziós ingában oly fontos szerepet játszó mérődrótokra vonatkozólag szerzett, a mágneses teodolitokban is jól értékesíthette. Ezek legnagyobb részében ugyanis a rendesen használni szokott kokonszálat igen vékony de nagy teherbírású foszforbronzdróttal helyettesítette, a melyeknek előzetes preparálása a platina drótokéhoz hasonló módon történik. — Az ilyen drótok az időben igen kicsiny vagy épen semmi megcsavarodást sem mutatnak, a mi azután főleg az abszolut deklinációmeghatározások megbizhatóságát erősen emeli. A mágneses teodolitok állandóinak ellenőrzésére bizonyos időközökben az ógyallai földmágneses obszervatóriumban az ottani műszerekkel összehasonlításokat végzünk. A csillagászati délkör irányának kitűzése, azaz egy tetszőleges mira azimutjának a meghatározása külön teodolittal történik, a mely egyúttal időmeghatározásra is szolgál, hogy a mágnesek lengésidejének megfigyeléséhez szükséges kronometerek járását ellenőrizhessük. Az inklináció lemérésére, mellőzve az úgynevezett tűs inklinatoriumokat, a földinduktort használjuk oly alakban, mint az Lamont és Wild óta szokásos; ennél a földmágnesség erőtere a tengelyével a mágneses meridiánba beállított és forgatott többmenetű tekercsben csak akkor nem indukál áramot, ha a tekercs tengelye az erővonalak irányába esik, vagyis ha a horizontális síktól az inklínáció szögével tér el.

Az abszolut meghatározások pontossága nem sokkal marad az állandó obszervatoriumokban végzettekké mögött s mint hibákat a horizontális intenzitásnál $\pm 5\gamma$-t, a deklinációban $\pm 1'$-t s az inklinációban $\pm 0{\cdot}1'$-t állapithatunk meg.

Eme úgynevezett abszolut meghatározásokon kivül nem kevésbé fontosak a hor. intenzitás és deklináció relativ mérései sem; az előbbi a Kohlrausch-féle helyi variometerrel történik, míg a deklinációnak két hely között való változásának a lemérésére két teljesen egyforma, külön e célra szerkesztett mágneses teodolit szolgál. A Kohlrausch-féle helyi variometer oly formában, mint az rendesen ismeretes, a szabadban való mérésekhez a gyors hőmérsékleti változásból eredő hibák és a szállítás körülményes volta miatt alig használható. Eötvös azonban azzal, hogy egy kettős falu fémhengerbe zárja azt, a melynél az eszközzel való valamennyi művelet (a tükörmágnes beállítása a mágneses délkörbe, a kitérítő mágnesek forgatása, arretálás és kioldás) s a leolvasások is kivülről történhetnek, e variometernek oly használhatósági teret nyitott, a mivel a horizontális intenzitás értéke bármely helyen $\pm 10\gamma$ pontosságig pár perc alatt meghatározható. Ehhez azonban szükséges a kitérítő mágnesek momentumainak nagy állandósága s annak folytonos ellenőrzése, a mi az abszolut meghatározásokkal egyidejüleg végzett Kohlrausch variometer megfigyelésekkel történik. Eötvös a deklinációnak két hely A és B között való változását két teljesen egyforma mágneses teodolittal a következőkép méri. Két észlelő egyidejüleg megállapítja A és B pontokon a mágneses délkör irányát M és M'-t, azután a másik pontnak az irányát; akkor a $BAM + ABM'$ szögösszeg eltérése a $180°$-tól adja A és B pontok között a deklinációváltozást, tekintetbe véve a két helyen a csillagászati délkörök összehajlását és az eszközök instrumentális hibáit.

Az eszközöket, a melyek ládákba csomagolva könnyen és biztosan szállithatók, a mérések alatt gyorsan felállitható és könnyen hordozható sátrak védik az időjárás ellen. A használt berendezések célszerű volta teszi lehetővé, hogy egy nap alatt rendesen egy, de esetleg két állomáson is meghatározhatjuk a már megadott pontosságig a földmágnesség mindhárom elemét; az említett relativ mérésekkel pedig a horizontális intenzitást vagy a deklináció változásait egy nap alatt az állomások egész során 20 vagy 30-on mérhetjük le.

Az abszolut meghatározások rendesen ugyanott történnek, a hol a gravitációs mérések, gondosan ügyelvén mindig arra, hogy külső zavaró hatások, mint például ház, vashid, estleg villamos vezeték, kerítés stb. azok eredményét ne befolyásolják.

Az állomások elhelyezésére nézve, mint Eötvös földmágneses és gravitációs méréseire jellemzőt csak azt kivánom felemliteni, hogy az abszolut meghatározások helyei egymástól 5 kilométernél messzebb sehol sincsenek (az első évek egyes kivételeitől eltekintve), mig a relativ mérések sűrűségét a mágneses térbeli zavarok mindenkori menete határozza meg.

Évek hosszú során át más és más észlelők, de mindig egységes módszer mellett az ország legkülönbözőbb részeiről a földmágneses elemeknek gazdag gyűjteményét hordták egybe. Helyén valónak tartom felemliteni mindazokat, a kik Eötvösnek az adatgyűjtés e munkájában segítségére voltak. A mágneses abszolut meghatározásokat kezdetben Dr. Steiner Lajos majd 1905-től kezdve azok legnagyobb részét *e sorok írója*, továbbá dr. Pogány Béla, dr. Fröhlich Pál és kisebb számban Nes Tivadar és Cser Imre végezték, relativ mágneses méréseknél pedig rajtuk kivül azok legnagyobb részében dr. Pekár Dezső, továbbá dr. Zemplén Győző, dr. Rybár István, Renner János, Garcsár Sándor, Wágner Lajos és dr. Walek Károly működtek közre.

A felvételek a gravitációs mérésekkel kapcsolatban, de azoktól függetlenül is az ország különböző vidékeire kiterjedtek. A *Balaton* vidékén és a jég hátán, különösen pedig *Fonyód* és *Boglár* közelében az 1902. és 1903. években történtek megfigyelések. 1902-1903-1904-ben a *Fruska Gora* volt Eötvös gravitációs, de méginkább földmágneses vizsgálatainak a szintere. E területet, a melynél érdekesebbet a földmágnesség szempontjából nálunk alig találunk, az állomások sűrű vonalai fedik. A hegynek körülbelül kelet-nyugat irányú vonulatával párhuzamosan a *Duna* mindkét oldalán halad egy-egy fő észlelési vonal sűrűn megrakva abszolut meghatározásokkal; ugyanilyen vonal veszi körül az egész hegytömböt is. Az abszolut meghatározásoknak, mint alapbázisnak közeit azután a relativ megfigyelések százai töltik ki, a mely vonalak legnagyobb része a hegyet hosztengelyére merőlegesen észak-dél irányban metszi. Ezeknek kiegészitő részei az 1910. évben *Titel* vidékén végzett és az idei megfigyelések, a melyek az *Ujvidék* és *Titel* között lévő részletesen még meg nem vizsgált területen folynak. 1905-ben *Arad-Temesvár-Versec* vonalon, majd *Oravicabánya* környékén voltak mérések. *Arad* vidékének részletes felvétele 1906 és 1907-ben történt; majd 1908 és 1909-ben elég sűrűn elhelyezett állomásokkal haladtunk *Aradtól Szegeden* és *Szabadkán* át *Bajáig* és *Zomborig* azután még *Szabadkán* át összeköttetést létesitettünk a *Fruska-Gora* vidékén levő felvételekkel.

Kecskemét vidékén *Szegedről* indulva ki 1911-ben végeztük megfigyeléseinket. A következő évek (1912 és 1913) *Erdély* földmágneses viszonyaival ismertettek meg bennünket. Míg a gravitációs mérésekkel kapcsolatban *Nagyenyedtől Szászrégenig* s még azon túl is a *Maros* mentén sűrűn elhelyezett abszolut meghatározások történtek, addig másrészről *Aradról* kiindulva *Tövisen, Marosvásárhelyen* s *Szovátán* át *Gyergyószentmiklósig* húzódó körülbelül nyugat-kelet irányú, majd azzal párhuzamosan *Csikszeredától Tövisig* húzódó vonalakon mindenütt abszolut meghatározásokon kivül még relativ mérések is folytak. A délről észak felé, a határtól *Segesváron, Marosvásárhelyen, Sármáson* át *Bethlenig*, továbbá a határtól *Nagyszebenen* át *Medgyesig* vonuló Kohlrausch variometer észlelések egészítik ki *Erdély* felvételét. Az 1914 év programmja lett volna az országot nyugat-keleti irányban átmetsző, *Nagykőröstől Debrecenen* és *Szatmárnémetin* át *Besztercéig* húzódó vonalnak a kidolgozása, a mely azonban a háború kitörése miatt csak részben történhetett meg.

Még a *Morvamezőnek* 1916-ban és a *Hortobágynak* 1917-ben történt részletes felvételei teszik teljessé az észlelési területek felsorolását. Ezeken kívül kisebb, inkább előzetes tájékozódásra vagy kiegészítésre szolgáló felvételek is vannak. Igy a *Bakonyban Veszprém* vidékén, azután *Pécs, Zimony, Tokaj, Gyöngyös, Eger, Selmecbánya, Munkács, Beregszász, Csongrád* és *Szentes* vidékén is történtek leginkább relativ meghatározások. Összeköttetést tesz teljessé az a vonal, a mely a *Béga* csatorna mellett *Temesvártól Titelig* húzódik.

A megfigyelések összes száma: abszolut meghatározás (mindhárom elem) körülbelül 1600 állomáson és relativ meghatározás (horizontális intenzitás és deklináció vagy csak az egyik) közel 3500 állomáson.

Előzőleg Magyarországon földmágneses felvételeket, leszámitva egyes régebbi megfigyeléseket Kreil, Schenzl, Liznar, Kurländer és a Balaton környékén Steiner végeztek összesen 270 állomáson.*

A külföldre vonatkozólag összehasonlitásul csak annyit, hogy Amerikában L. A. Bauer vezetése alatt a *Carnegie Institut* által végzett nagyszabású földmágneses felvételek eredménye 1914-ig 1000 tengeri és 2500 szárazföldi állomás volt.

Hogy a különböző időben végzett mérések a térbeli eloszlás szempontjából összehasonlíthatók legyenek, azokat egy meghatározott időpontra, epochára kell redukálnunk. Összes földmágneses felvételünk redukciója a *pólai* illetve ujabban

---

* Dr. Karl Kreil: Magnetische und geographische Ortsbestimmungen im österreichischen Kaiserstaate etc.

Dr. Schenzl Guido: Adalékok a Magyar koronához tartozó országok földmágnességi viszonyainak ismeretéhez. Budapest 1881.

I. Liznar: Die Verteilung der erdmagnetischhen Kraft in Österreich-Ungarn. Wien 1895.

Kurländer Ignác: Földmágnességi mérések a magyar korona országaiban. Budapest 1896.

Dr. Steiner Lajos: A Balaton vidékén az 1901 év nyarán végzett földmágnességi mérések eredményei. Budapest 1902.

az *ógyallai* obszervatoriumok adatai alapján 1903. 1. illetve az 1906. évi középértékekre történik. Az obszervatoriumok nagyobb távolsága a mérések helyeitől a redukciók egyik jelentős hibaforrása, azért ezek szigorúbb keresztülvitelére szükséges volna a földmágneses felvételek alkalmával az illető vidéken, alkalmas helyen, ideiglenes obszervatoriumot felállitani, a mely a mérések tartalma alatt regisztrálná a földmágneses elemeknek az illető vidékre szigorúan érvényes időbeli változásait.

A mérésekből nyert s ugyanazon epochára redukált földmágneses elemek $H_é$, $D_é$, $I_é$ helyett rendesen az egész földmágneses erő $T_é$ derékszögű összetevőit $X_é$, $Y_é$, $Z_é$-t használjuk a következőkben, megjegyezvén, hogy ezek oly derékszögű koordinata rendszerre vonatkoznak, melynek pozitiv X tengelye észak, Y tengelye kelet s a Z tengelye lefelé irányul.

A földmágneses elemek térbeli eloszlásának szemléltetésére szolgáló szokásos mágneses térképek, a melyek az izogonokat, izoklinokat vagy a különféle izodinamokat ($H_é$, $X_é$, $Y_é$, $Z_é$ vagy $T_é$-t) tüntetik fel s a melyek rendesen kevés számú megfigyelésből készültek, csak nagy megközelitéssel adnak felvilágositást az illető terület földmágneses viszonyairól s annál kevésbé fedik a valóságot, minél zavartabb az. Hogy mennyire hibásak voltak az eddigi ilyen térképek, jellemző, hogy a *Carnegie Institut* által végzett felvételek egyes helyeken a kézen forgó mágneses térképek adataitól a deklinációban egész fok eltéréseket mutattak s a horizontális intenzitásban pedig már a második tizedest is bizonytalannak találták.

A földmágneses elemek térbeli eloszlásának ilyen előállitása helyett Eötvös minden helyen a *mágneses anomáliát* határozza meg s az ezekből számitott egyenlő potenciálértékeket összekötő vonalakat, a mágneses anomália aequipotenciális görbéit adja, mint az illető vidékre jellemző mágneses térbeli eloszlást.

Már Gauss megmutatta, miként lehet a földmágneses erőt a

Föld minden pontjában az illető pont földrajzi koordinátáival gömbfüggvények segítségével előállítani; kisebb területen belül ez az eloszlás, a melyet normálisnak nevezünk, sokkal egyszerűbb, a mennyiben, mint már említettük, a földmágneses elemek mint a földrajzi koordináták (φ és λ) lineáris függvényei állíthatók elő. A normális mágneses mező fölé helyezkedik azután — a sokféle időbeli változástól eltekintve — az a szabálytalan rész, a melynek okát minden valószínűség szerint, a Földben kell keresnünk, származzék az akár a földkérget alkotó tömegek mágneses hatásából, akár földi áramoktól. Ez a szabálytalan mágneses mező, vagyis az észlelt és normális érték között lévő különbség a mágneses anomália.

A mágneses anomáliának ép úgy, mint az egész földmágneses erőnek, talán annak egy kis részétől eltekintve van potenciálja, a mit

$$V = \int \frac{\partial V}{\partial s} ds$$

alakban állíthatunk elő.

Legyenek a horizontális sikban két, egymástól nem messze fekvő $x_1\ y_1$ és $x_2\ y_2$ pontban a mágneses anomáliának komponensei X_1, Y_1 illetve $X_2\ Y_2$, úgy az anomália potenciáljának a különbsége e két pont között első közelítésben

$$V_2 - V_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}(x_2 - x_1) + \frac{Y_1 + Y_2}{2}(y_2 - y_1),$$

ha feltesszük, hogy az X és Y komponensek változása a két pont között lineáris.

Hasonlóképen mint az egész földmágneses erőre, áll az anomáliára is, hogy a Föld felületén levő zárt vonal mentén integrálva

$$V = \int \frac{\partial V}{\partial s} ds = 0,$$

a mi egyszersmind a mérések ellenőrzésére is szolgál; az igy adódó hiba azután egy vonal mentén lineárisan, vagy egy egész észlelési hálózatra Gauss kiegyenlítési módszerével eloszható.

A mágneses anomáliák ugyanazon potenciálértékeit összekötő vonalak, a melyek az anomáliákra mindenütt merőlegesek, nemcsak a zavarok térbeli eloszlását szemléltetik közvetlen módon, hanem az igy készült térképekből, ismerve a normális térbeli eloszlást, a mágneses elemek is kivehetők.

Az ilyen előállításra nézve azonban lényeges feltétel a normális érték helyes ismerete. Eötvös a normális érték meghatározására kisebb területen, a melyen a földmágneses elemek eloszlása az eddigi tapasztalatok szerint közel normálisnak tekinthető, azaz a hol nagyobb zavarok nincsenek, a megfigyelések egész sorát veszi, több ily területet (legalább hármat) összekapcsol és e nagyszámú értékből kiegyenlítéssel határozza meg a normális értéket előállító formula állandóit. Az észlelési adatok gyarapodásával e formulák is változásokon mentek át a szerint, a mint mindig újabb és újabb területeket vontunk megfigyeléseink körébe vagy az észlelt értékek nagyobb számát használtuk fel. A legutolsó és legteljesebb ilyen formula, a mely *Arad, Zombor* és *Kecskemét* között fekvő területen és a *Nagykőrös—Debrecen—Érmihályfalva* vonalon lévő észlelési adatokból készült, a következő:

$$H_n = 0{\cdot}21986 - 0{\cdot}000077107\,(\varphi - \varphi_0) + 0{\cdot}000007833\,(\lambda - \lambda_0)$$

$$D_n = 6^\circ\ 26{\cdot}7' - 0{\cdot}05409\,(\varphi - \varphi_0) + 0{\cdot}44741\,(\lambda - \lambda_0)$$

a hol $\varphi_0 = 46^\circ\ 0'$ és $\lambda_0 = 37^\circ\ 0'$, a φ és λ ivpercekben veendők és az értékek 1906. évi középértékre vonatkoznak. Az inklináció normális értékére vonatkozó formulát az inklináció időbeli redukciójának bizonytalansága miatt ujabban nem készitettünk. Az így előállított formulák azonban szigorúan mindig csak a számításban felhasznált területeken belül érvényesek.

Eötvös a mágneses anomáliáknak egy egészen más és ujszerű előállítását is adja,[80] a mely első sorban oly helyeken alkalmazható, a hol azok meglehetős kicsinyek. Az eljárás egészen analog azzal, a hogyan a nehézség nivófelületének főgörbületeire jellemző R-t s annak irányát λ t kiszámítja.[79] Legyen X és Y a két mágneses erőkomponens az xy pontban, úgy mindenekelőtt az

$$\frac{\partial X}{\partial x};\ \frac{\partial Y}{\partial y}\ \text{ és }\ \frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}$$

differenciálhányadosokat kell képeznünk. Vonjuk le ezekből a megfelelő s az egész vidékre jellemző normális változásokat, úgy kapjuk a

$$\frac{\partial X'}{\partial x},\ \frac{\partial Y'}{\partial y}\ \text{ és }\ \frac{\partial X'}{\partial y}=\frac{\partial Y'}{\partial x}$$

differenciálhányadosokat, a melyekből azután az előbb említett R és λ-hoz analog módon az

$$A=\sqrt{\left(\frac{\partial Y'}{\partial y}-\frac{\partial X'}{\partial x}\right)^2+4\left(\frac{\partial Y'}{\partial x}\right)^2}\quad\text{és}\quad \sin 2\lambda=\frac{2\dfrac{\partial Y'}{\partial x}}{A}$$

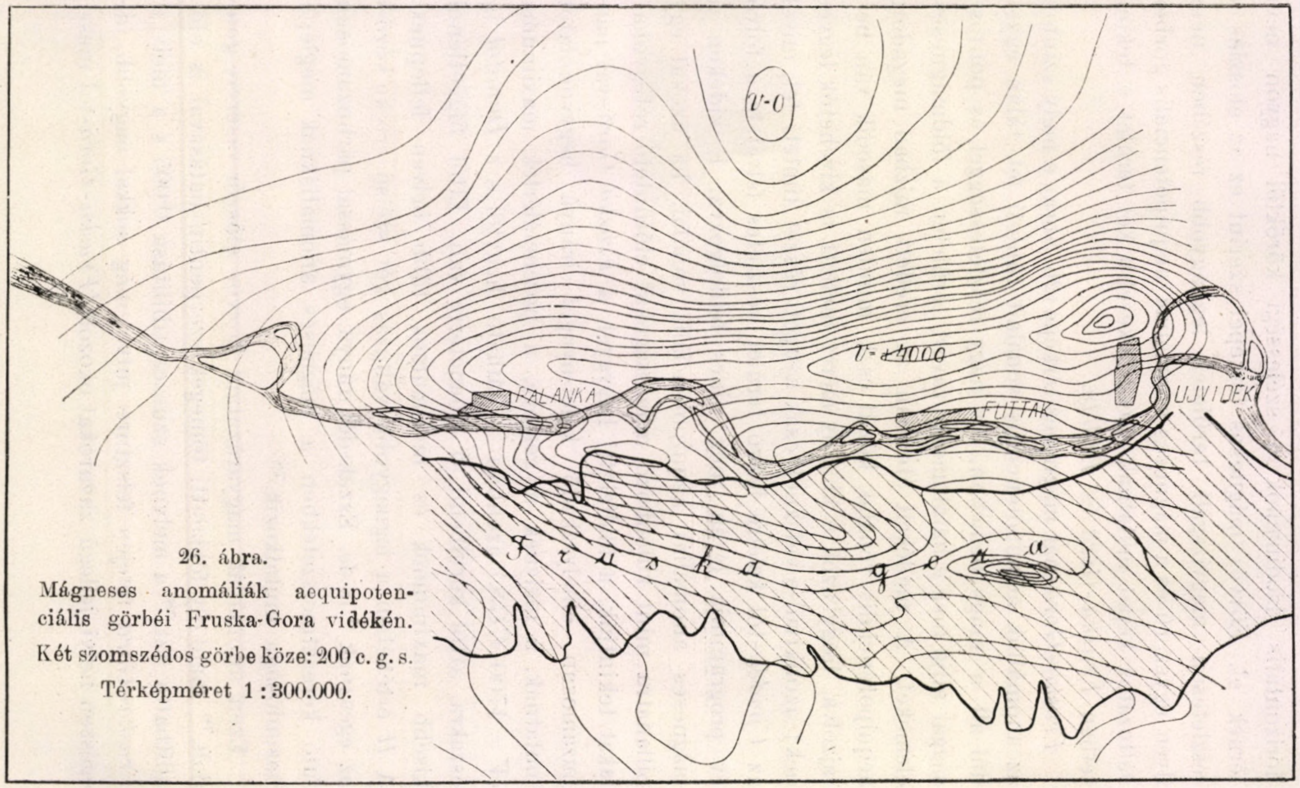
kiszámitható. Az A mennyiség a mágneses anomália nagyságára, s λ annak irányára jellemző adat. Mint később látni fogjuk, az itt szereplő differenciálhányadosokat Eötvös mágneses variométereivel direkt le is tudja mérni. Ilyen módon először *Kecskemét* vidékére számitotta ki Eötvös a mágneses anomáliákat,[80] azután Rücker és Thorpe észlelései alapján *Anglia* egy részére, majd Tanakadate *japáni* felvételeire s végül Ad. Schmidt táblázata szerint* 0° és 60° szélességi körök között az egész északi félgömbre.

Az itt vázolt számitási eljárások szerint feldolgozott mérések eredményeinek vázlatos és rövid ismertetése volna még a következő sorok feladata.

Magyarország területén Kreil, Schenzl és Kurländer térképei szerint a földmágneses elemek térbeli eloszlása jórészben

---

* Ad. Schmidt: Das magnetische Zustand der Erde zur Epoche 1885 Hamburg, 1898.

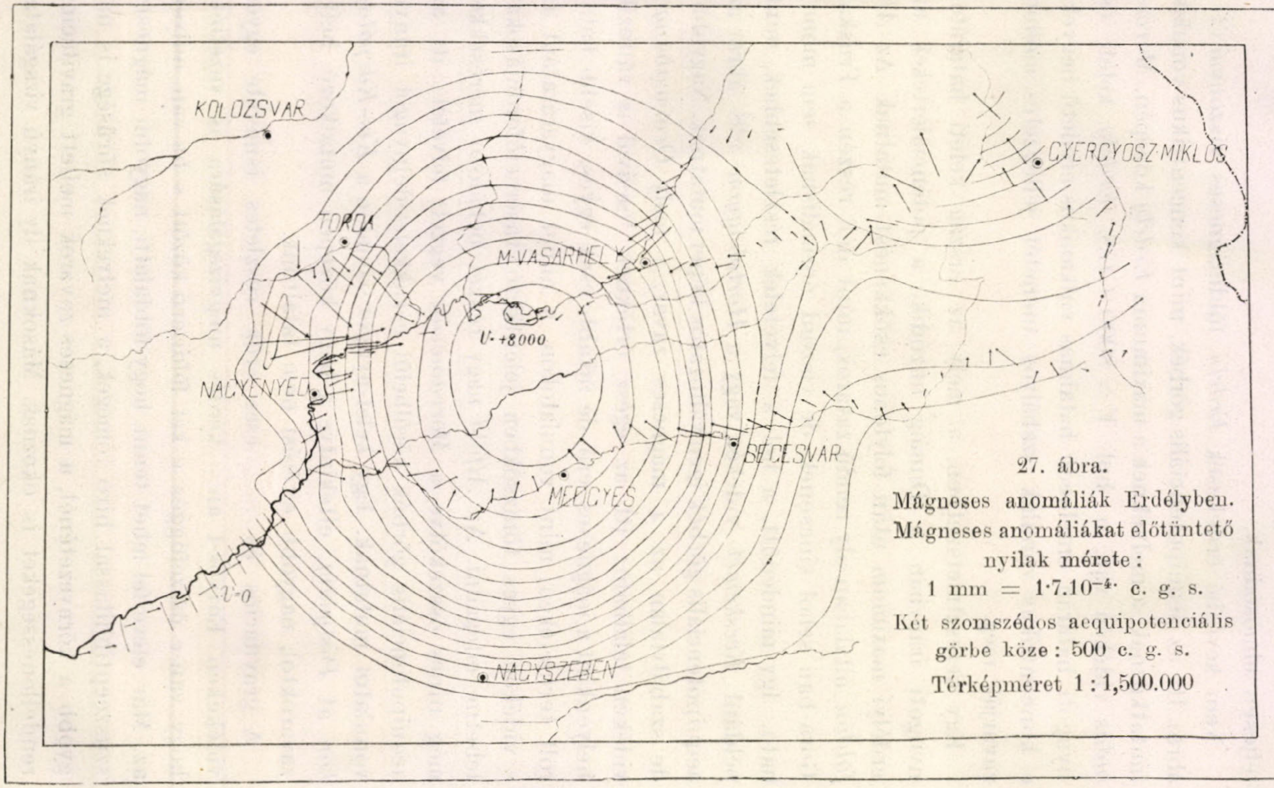


26. ábra.
Mágneses anomáliák aequipotenciális görbéi Fruska-Gora vidékén.
Két szomszédos görbe köze: 200 c. g. s.
Térképméret 1 : 300.000.

normális, azaz az izogonok a meridiánoktól s az izoklinok és horizontális isodinamok a szélességi köröktől nagyon nem térnek el. Eötvös mágneses térképei szerint ez az eloszlás a részletesen megvizsgált területek legnagyobb részében nem ilyen egyszerű és a mágneses anomáliak aequipotenciális görbéi változatos képet mutatnak. Legérdekesebb két terület e tekintetben *Fruska-Gora* és *Erdély*.

Fruska-Gorá-nak mágneses térképe (26. ábra), a mely szintén az anomáliák aequipotencialis vonalait tünteti fel, talán egyedül áll a maga nemében, oly nagy részletességgel és pontossággal adja meg e hatalmasan zavart területen a földmágneses elemeket. A mellékelt ábrában az eredeti rajzban megadott aequipotenciális vonalak közül csak minden második van berajzolva, hogy azok e kicsiny méret mellett is kivehetők legyenek; azonkívül e vidéknek csak nyugoti részét tünteti fel, mivel az *Ujvidék*-től keletre fekvő terület részletes felvétele a folyó év programmja lévén, még nincs feldolgozva. E vidéken a mágneses anomáliák aequipotenciális vonalai, ha azokat egy pillanatra mint különböző magasságokat előtüntető rétegvonalakat tekintjük, a földfeletti hegygyel, a *Fruska Gorá*-val párhuzamosan elhelyezkedő kelet-nyugot irányú hegyvonulatot mutatnak, a melynek a gerince, a potenciálérték maximuma ($V = 4700$ $CGS.$) azonban a látható hegytől s a *Dunától* is északra, attól körülbelül 5 kilométerre van. Ettől függetlenül kisebb maximumok és minimumok több helyen fellépnek. A H értékében a legnagyobb változás két szélső értéke között az egésznek $^1/_{15}$-de. Észak-dél irányú, egymással párhuzamosan futó keresztmetszetekben a mágneses anomáliáknak meglepő hasonlósága mutatkozik.[78]

Ezen anomáliák magyarázatául Eötvös először vasércre gondolt,[76] majd oly földalatti tömegek (szerpentin) hatásával is előállíthatta azt,[78] a melynek szuszceptibilitása 0·005 s a mely a *Fruska-Gora* tetején felszínre jutva még sokkal nagyobb, de egészen helyi jellegű zavarokat okozott. *Fruska-Gorá*-tól mesz-



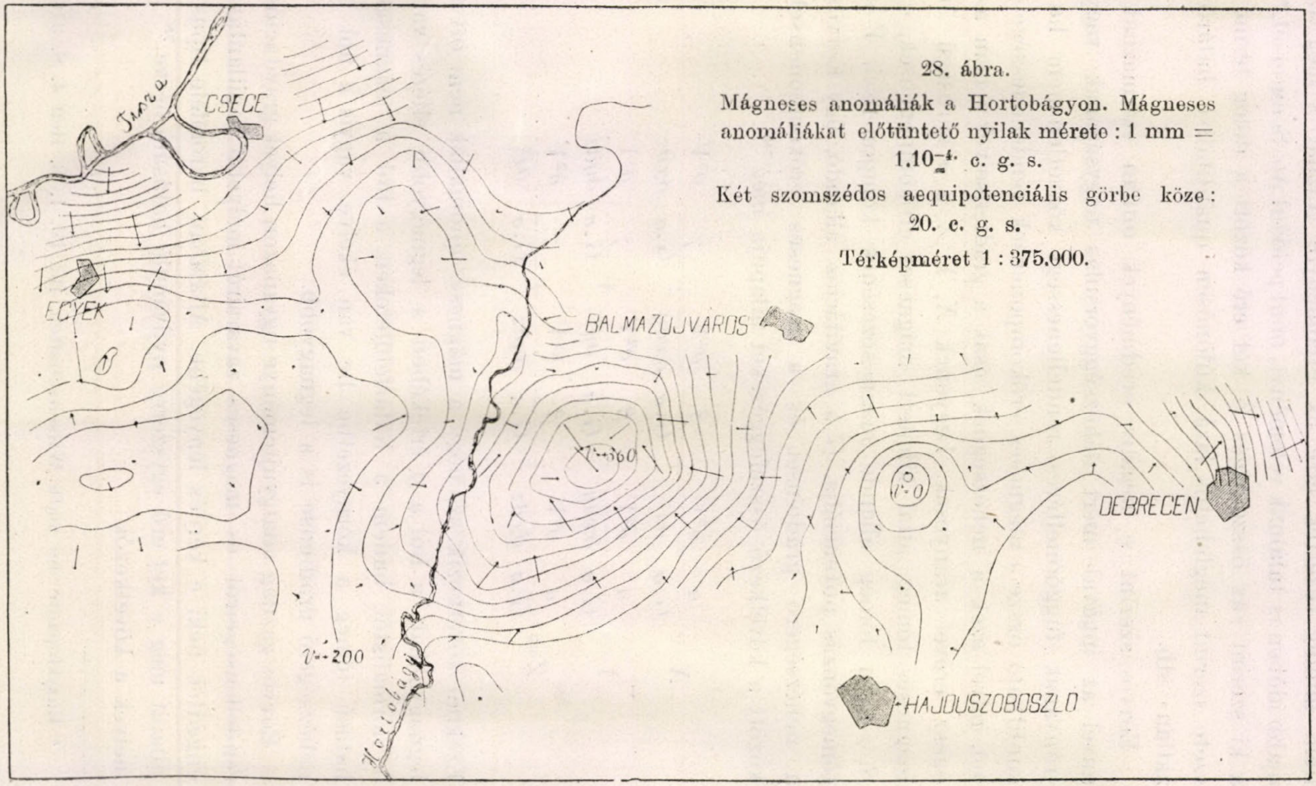
27. ábra.
Mágneses anomáliák Erdélyben.
Mágneses anomáliákat előtüntető nyilak mérete:
1 mm = $1{\cdot}7.10^{-4}$ c. g. s.
Két szomszédos aequipotenciális görbe köze: 500 c. g. s.
Térképméret 1 : 1,500.000

szebb északra, *Szabadka* alatt ezek az anomáliák azután már teljesen elmosódnak.

Nem kevésbé érdekesek *Erdély* földmágneses viszonyai (27. ábra). Itt az aequipotenciális görbék, mint koncentrikus vonalak mutatkoznak, a melyeknek a maximuma *Erdély* közepén, *Marosludas* vidékén van, a hol $V = 8000$ *CGS*. *Erdély* keleti és nyugoti határán emelkedő hatalmas vulkanikus eredetű hegyek, e koncentrikus vonalak szabályos menetét jellegzetes módon zavarják meg.

Egy keresztmetszetben, a mely az ország keleti határától nyugoti irányban a Dunáig húzódik, a potenciálértékek az erdélyi maximum után folytonos csökkenést mutatnak. Az *Alföldön* általában oly rendű zavarok, mint déli részén a Fruska-Gorá-ban sehol sincsenek, de viszont normálisnak sem mondható. Igy mindenütt, a hol a felvételek részletesebbek, mint például *Kecskemét* vidékén vagy a *Hortobágyon* (28. ábra) az aequipotenciális görbék igen változatos képet mutatnak. Nagyobb, de szabálytalan az a mágneses zavar, a mely *Oravicabánya* vidékén található; itt az egész értéknek $^1/_{30}$-ával is változik helyenkint a mágneses erő, de inkább csak egyes, kisebb határolt területeken, mint vonulatokon, a minek magyarázatául az e vidéken egyes tömzsökben jelentkező vasércelőfordulásokat lehetne elfogadni. Az *Alföld* nagy részét behálózó mérésekkel még nincs összekötve a *Morvamezőn* végzett felvétel; itt az aequipotenciális görbék körülbelül északkelet-délnyugot irányú vonulatot mutatnak. Egy kelet-nyugot vonalon a *Kis-Kárpátokon* át *Pőstyénig*, eltekintve a hegy közepén mutatkozó helyi zavaroktól, nagyobb eltérést nem találtunk.

A gravitációs és mágneses erők részletes ismerete egyes vidékeken Eötvös-t ama kérdés megvizsgálására is vezették, hogy van-e összefüggés e két földi erő között s ha van, milyen az. Már eleve fel lehet tenni, hogy földalatti, nagyobb mágneses szuszceptibilitással bíró tömegek, a melyeknek sűrűsége is nagyobb a környezeténél, a mágneses zavarok mellett gravitációs rendellenességeket is okoznak. Másoknak ily irányú vizsgálatai



28. ábra.

Mágneses anomáliák a Hortobágyon. Mágneses anomáliákat előtüntető nyilak mérete : 1 mm = 1.10^{-4} c. g. s.

Két szomszédos aequipotenciális görbe köze : 20. c. g. s.

Térképméret 1 : 375.000.

nem mindig vezettek erre az eredményre (Liznar) s még az újabb időben is találunk véleményt, mint például AD. SCHMIDT-ét,* a ki szerint «az összefüggés e két erő között a dolog természete szerint meglehetős laza, különösen quantitative határozatlan» stb.

EÖTVÖS szerint e negativ eredmények onnan származnak, mivel az ingával mért nehézséggyorsulás nagyságának, vagy irányának (függőóneltérés) rendellenessége közvetlen nem hasonlitható össze a mágneses erőkomponensek rendellenességeivel, mivel ezek a nehézségnek csak a gradienseivel s nem az egész erővel arányosak. Legyenek X, Y, Z a σ sűrűségű M mágneses tömeg által kifejtett mágneses erőkomponensek, α, β, γ ezen tömeg állandó mágnesezésének komponensei, V a tömegvonzás potenciálja, G a gravitációs állandó, úgy EÖTVÖS a nehézségerő gradiensei és a mágneses erőkomponensek között a következő összefüggéseket állapítja meg[76]

$$X = \frac{\alpha}{G.\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\beta}{G.\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\gamma}{G.\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z},$$
$$Y = \frac{\alpha}{G.\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\beta}{G.\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\gamma}{G.\sigma} \frac{\partial^1 V}{\partial y \partial z},$$
$$Z = \frac{\alpha}{G.\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \frac{\beta}{G.\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \frac{\gamma}{G.\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Ezekből következik az, hogy a mágneses anomáliák nem ott a legnagyobbak, a hol a g értékében a legnagyobb eltérés van a normálistól, hanem a határfelületeken, a hol a mágneses hatású tömeg a környezetbe be van ékelve, vagyis a hol a nehézségerő gradiense is a legnagyobb.

EÖTVÖS gazdag adatgyüjteménye ugyanazon helyek gravitációs rendellenségeiről és mágneses zavarairól mélyebb bepillantást engedtek neki e kérdés lényegébe. Általában háromféle típust állapit meg e két erő egyszerre nyilvánuló hatására nézve,[78] a melyek a következők:

---

* Enzyklopädie der math. Wissenschaften. Bd. IV. 1. B. Heft 4. S. 376.

1. A horizontális mágneses anomáliák a nehézségerő gradienseinek rendellenességeivel parallelek és egyenlő irányúak.

2. Parallelek, de ellentett irányúak.

3. Parallelek, de irányuk egymástól független és a mágneses anomáliák egy mágneses gerinc felé irányitottak.

Az 1. esetre példa *Szeged* és *Makó* között egy földalatti hegyhát, a mely körülbelül délkelet-északnyugot irányban húzódik s a melynek hatása a nehézségerő gradienseinek rendellenességeiben 20.10^{-9} *CGS.* nagyságban mutatkozik s a mellett azok mindkét oldalon a gerinc felé irányitottak. A mágneses anomáliák is e tömegeloszlásnak megfelelők, a mennyiben e gerinctől keletre nagyobb s attól nyugotra kisebb deklináció értékek mutatkoznak, vagyis a normális eloszlással épen ellentettek. E területre alkalmazva az előbbi összefüggéseket Eötvös a feltételezett tömeg mágneses szuszceptibilitását 0·0035-nek találta.

A 2. esethez hasonlót *Aradtól* keletre *Paulis* környékén találunk, a hol a nehézségerő gradiensei mind a hegy felé irányitottak megfelelően a hegy folytatólagos lejtőjének a föld alatt, a mágneses anomáliák pedig a hegytől el felé irányitottak s helyi jellegűek.

A 3. eset a Fruska-Gorában fordul elő, a hol mint már emlitettük a talált nagy és egész lefolyásában oly szabályos mágneses anomáliákat a hegytől északra azzal párhuzamosan haladó tömegek (szerpentin) idézik elő, a melyek azonban, mivel sűrűségük a környezetétől csak kevéssé tér el, a nehézség gradienseiben különös rendellenességeket nem igen okoznak.

Más vidékeken is összehasonlitva a nehézség izogammáit (ugyanazon *g* rendellenességeket összekötő vonalakat) a mágneses anomáliák aequipotenciális görbéivel, e típusok valamelyikével találkozunk.

* * *

A földmágneses elemek lemérésére közönségesen használt módszereknél az a körülmény könnyiti meg a feladatot, hogy a mágneses mező az eszköz kis terében messze az észlelési határokon belül homogénnek vehető s így a mágnesre gyakorolt ponderomotorikus hatás egy forgásmomentumra redukálódik. Sőt még nagyobb terek is homogénnek vehetők az elemek szokásos módon való meghatározásánál.

Eötvös módszere, a melylyel a nehézség térbeli változásait a nagy érzékenységű torziós ingával, az eszköz által elfoglalt kis térben is le tudta mérni, útmutatás volt arra nézve, miként lehet a földi mágneses erő változásait is ily kis terekben meghatározni.

A feladat megoldása itt is a következő hat adat meghatározásában áll [57]

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}; \qquad \frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\partial^2 V}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z};$$

a melyek között a ható mágneses testeken kívül fekvő pontokra vonatkozólag a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

összefüggés áll fenn. A fenti hat adat közül tehát csak ötöt kell lemérnünk.

Ezen differenciálhányadosok meghatározása a mágnesre ható transzlatórius erő lemérésével történik, a mi azonban a lemérésre szolgáló eszköznek csak olyan nagy érzékenysége mellett lehetséges, midőn a mágneses mező inhomogenitását már az eszköz által elfoglalt térben ki tudjuk mutatni.

Az M momentumu mágnesre ható transzlatórius erő összetévőit P_x, P_y, P_z-vel, az M momentum vetületeit M_x, M_y, M_z-vel jelezve, ezek és a mágneses mező intenzitásának térbeli változásai között a következő összefüggések állanak fenn:

$$
\begin{aligned}
P_x &= M_x \frac{\partial X}{\partial x} + M_y \frac{\partial X}{\partial y} + M_z \frac{\partial X}{\partial z} \\
P_y &= M_x \frac{\partial Y}{\partial x} + M_y \frac{\partial Y}{\partial y} + M_z \frac{\partial Y}{\partial z} \qquad (1) \\
P_z &= M_x \frac{\partial Z}{\partial x} + M_y \frac{\partial Z}{\partial y} + M_z \frac{\partial Z}{\partial z}
\end{aligned}
$$

Ha a mágnes tengelye a mágneses meridiánnal csak kicsiny ε szöget zár be, s a transzlatórius erőnek csak P_x, P_y vízszintes összetevőit tekintjük, úgy írhatjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
P_x &= M_h \frac{\partial X}{\partial x} + M_h \frac{\partial X}{\partial y} + M_v \frac{\partial X}{\partial z} \\
P_y &= M_h \frac{\partial Y}{\partial x} + M_h \frac{\partial Y}{\partial y} + M_v \frac{\partial Y}{\partial z} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

M_h-val jelezve az M momentum vizszintes és M_v-vel a függélyes összetevőjét.

E P_x és P_y, illetve a (2) alatti egyenlet jobboldalán szereplő differenciálhányadosok lemérésére Eötvös a *mágneses transzlatometert* használja, a mely külső formájában az egyszerű nehézségi variometerhez hasonló. Lényeges különbség a kettő között az, hogy a nehézségi variometerben levő lelógó platinasúly helyett a transzlatometernél 30—35 gramm súlyú mágnes van, melynek momentuma közel 1000 *CGS*. Ennek hajlását a vízszintes síkhoz tetszésszerint lehet változtatni. Továbbá a transzlatometernél a forgatás nem a mérő drót, mint tengely körül történik, hanem a lógó mágnest bezáró cső körül. A mérődrót itt is igen vékony platinadrót s az eszköz védelme s a rúd elcsavarodásának észlelése is teljesen úgy történik, mint a nehézségi variometernél.

A transzlatorius erő lemérése céljából állitsuk be az eszköz rudját a mágneses meridiánra merőlegesen úgy, hogy a lelógó mágnes tengelye a mágneses meridiánnal kicsiny ε szöget zárjon be. Ezt a mérődrót torziófejének kellő állításával mindig elérhetjük.

Ha τ-val jeleljük a mérődrót torziókoefficiensét s ϑ-val annak elcsavarodását, úgy egyensúly esetében

$$\tau\vartheta = lM_h \frac{\partial X}{\partial x} + lM_h \frac{\partial X}{\partial y}\varepsilon + lM_v \frac{\partial X}{\partial z} - M_h H\varepsilon = lP_x - M_h H\varepsilon,$$

mivel a mérődrótot ekkor két erő csavarja meg, az egyik az l rúd karon működő P_x transzlatorius erő, a másik a mágnes forgató ereje a vízszintes síkban.

Forgassuk most az eszközt felülről nézve az óramutató járásával ellentett irányban és 180°-kal s a mérődrót torziófejének megcsavarásával hozzuk a rudat az előbbi állás irányába; ekkor a függő mágnes tengelyének eltérése a mágneses meridiántól $\varepsilon - \alpha$ lesz, a hol α annál kisebb, minél finomabb a mágnest hordó drót. Ebben az esetben

$$\tau\vartheta'_1 = -lP_x + lM_h\alpha \frac{\partial X}{\partial y} - M_h H(\varepsilon - \alpha)$$

Végül forgassuk az eszközt felülről nézve az óramutatóval egyező irányban 360°-kal körül s hozzuk a rudat a torziófej segítségével az előbbi állásába vissza, akkor

$$\tau\vartheta'_2 = -lP_x - lM_h\alpha \frac{\partial X}{\partial y} - M_h H(\varepsilon + \alpha)$$

E három utóbbi egyenletből

$$P_x = \frac{\tau}{4l}[(\vartheta - \vartheta'_1) + (\vartheta - \vartheta'_2)]$$

Ha a rúd pontos beállítása a torziófej segítségével nehézségekkel járna, úgy a távcsőleolvasással az eltérések mindig kijavíthatók.

Az eszköznek a mágneses meridiánba való beállításával, de az előbbihez teljesen analog módon határozhatjuk meg a P_y-t.

A nehézség térbeli változásaiból eredő hatást, a mely a mágneses erőkkel egyidőben hat, könnyen kiküszöbölhetjük úgy, hogy előbb ugyanazon helyen a nehézség gradienseit határozzuk meg, a mi akár a mágneses transzlatometerrel is történhetik, ha a lelógó mágnes helyett ugyanolyan súlyú nem mágneses tömeget függesztünk fel.

A keresett differenciálhányadosokat úgy kapjuk meg, hogy méréseinket előbb a vizszintes siktól i szöggel lefelé, azután ugyanannyival felfelé hajló mágnessel végezzük. Ekkor az első esetben

$$M_h = M \cos i \text{ és } M_v = M \sin i$$

és a második esetben

$$M_h = M \cos i \text{ és } M'_v = - M \sin i$$

s ha elegendő megközelítéssel $\varepsilon = 0$-t irunk, úgy a (2) egyenlet alapján a következő összefüggéseket nyerjük

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{P'_x + P_x}{2M \cos i}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{P_x - P'_x}{2M \sin i}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{P_y + P'_y}{2M \cos i}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{P_y - P'_y}{2M \sin i}$$

a hol P_x és P_y, illetve P'_x s P'_y a transzlatórius erő vizszintes összetevőit jelentik az első, illetve a második esetben.

Az ötödik $\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)$ differenciálhányados lemérésére Eötvös az *asztatikus variometert* használja, a melyben finom dróton aluminium kereszt lóg, végein egymást lehetőleg asztatizáló kis mágnesekkel.[57]

A feladat megoldása itt is az eszköz négy állásában a mérődrót elcsavarodásának lemérésével történik.

Mint Eötvös fenti értekezésében maga is említi, e módszere inkább helyi jellegű, nagyobb változások kimutatására alkalmas, mint nagyobb területek rendszeres felvételére. Épen azért ilyen irányban egyes szabadban való méréstől eltekintve inkább laboratoriumi vizsgálatainál használta azt. Jól értékesíthetők e mágneses variometerek a földi áramok kimutatására. Ha ugyanis valamely helyen a transzlatometerrel a mágneses erő térbeli változásait meghatároztuk s azután az eszköz alatt árkot ásunk, úgy ez által a földi áramok eloszlásában létesített változás a mágneses erő térbeli változásait is módosítja, a mi azután szintén lemérhető. Hasonló megfigyeléseket végzett Eötvös a *Balaton* mellett *Bogláron* és *Tirolban*, az ottani gravitációs mérésekkel kapcsolatban.

A mágneses erő térbeli eloszlásának időbeli változásait is ki lehet mutatni a mágneses variometerekkel, mint azt a budapesti I. sz. fizikai intézetben régebben hosszú időn át végzett fotografikus regisztrálások mutatták.[57]

Kis mágneses erők és mágneses momentumok lemérésére is használhatjuk még a transzlatometert. Nagy érzékenységénél fogva Eötvös ezzel végezte kőzetek és más gyengén mágneses testek momentumainak a meghatározását. Ha a földmágneses felvételeknél talált anomáliákat földalatti tömegek mágneses hatásának tulajdonítjuk, úgy ezen összefüggések megállapítására mindig szükségünk van az illető helyeken található kőzetek mágneses viselkedésének ismeretére. Eötvös sohasem mulasztotta el ezeknek rendszeres megvizsgálását; e célra még egy egyszerű mágneses tájolót is szerkesztett, a melynek segítségével a kőzetdarab a laboratoriumban ugyanazon helyzetbe hozható, a mint az eredeti lelőhelyén feküdt. Az így beállított kőzetnek a hatását három egymásra merőleges helyzetben méri le azután a transzlatometerrel. Ez a hatás két részből áll, az egyik a kőzet állandó mágnesezéséből származó momentum M_x a hatás irányában, a másik pedig a földi mágneses erő által indukált mágnesezés $k\,v\,X$, hol k a kőzet szuszceptibilitását, v a térfogatát s X a földmágnesség komponensét jelenti. Ha a kőzetet 180°-kal átforgatjuk úgy $-M_x + kvX$ erő fog a transzlatometerre hatni; a nyert két adatból a kőzetnek úgy a remanens, mint influált mágnesezése kiszámítható. A másik két tengely mentén ható M_y és M_z momentumoknak hasonló módon való meghatározása után az egész momentumot

M-et irány és nagyság szerint megkaphatjuk, a miből azután, ismerve a kőzetnek eredeti fekvését, a mágnesező erő irányára és nagyságára is következtethetünk.

Hasonlók voltak Eötvös-nek vizsgálatai régi téglákra és edényekre vonatkozólag. A több évszázados téglák és edények égetésük alatt az akkor uralkodó földmágneses erő irányát mint remanens mágnességet tartották meg. Mivel a tégláknak az oldala és az edényeknek az alapja, a melyen azok kiégetésüknél a kemencében feküdtek, felismerhető volt, elég biztossággal lehetett azokat ugyanoly helyzetben felállitani. Meghatározván mágneses momentumaikat a transzlatometerrel, a készitésük idejére vonatkozó földmágneses erő irányára és pedig az inklinációra lehetett érdekes felvilágositást nyerni e mérésekből.

* * *

E rövid ismertetés korántsem tarthat arra számot, hogy Báró Eötvös Lóránd-nak a földmágnességre vonatkozó vizsgálatait mind kimerítette volna. Az említetteken kívül legkülömbözőbb promlémákat vonta ő még vizsgálatai körébe, de ezeknek mint nem befejezetteknek a tárgyalása nem lehet ez ismertetés feladata.

Fekete Jenő.

VI. VIZSGÁLATOK A FÖLDÖN MOZGÓ SZERKEZETEK NEHÉZSÉGÉRŐL.

Eötvös Loránd báró nehézségi vizsgálatait az utóbbi években a Földön mozgó szerkezetek nehézségeire is kiterjesztette. E vizsgálatokra azok a nehézségi megfigyelések indították, a melyeket O. Hecker egészen más czélból, a földi tömegeknek eloszlására vonatkozó u. n. *izosztazia* törvényének a tengereken való megvizsgálása céljából 1901—1905. években az *Indiai* és *Csendes* Oceánokon végzett.[111]

E terjedelmes, nagy gonddal és körültekintéssel készült munka tanulmányozása közben Eötvös észrevette, hogy a megfigyeléseknél és az eredmények egybeállításánál egy lényeges tényezőt figyelmen kívül hagytak: a hajó mozgását, a szerint, a mint az kelet felé vagy nyugat felé mozgott. Ennek a körülménynek ugyanis befolyással kell lennie a mozgó szerkezet nehézségére.

Hogy annak tényleg így kell lennie, könnyen beláthatjuk, ha az u. n. klasszikus mechanika értelmében a nehézséget a Föld tömegvonzásának és a Föld tengelykörüli forgásából származó középpontfutó erő eredőjének tekintjük. A testre működő vonzó erő a földi tömegeknek a test körüli eloszlásától függ, a középpontfutó erő pedig a test sebességének négyzetével egyenes és a forgási sugárral fordított arányban van. Mivel a Föld tömegeloszlása változatlan és a Földnek tengelykörüli forgása egyenletes, ezért a Földhöz képest nyugalomban lévő test nehézsége a Földnek ugyanazon helyén egy állandó meghatározott érték. Ha azonban a test a Földön mozgásban van, akkor a testnek a Földhöz viszonyított relatív sebessége a Föld forgásából származó sebességhez irány és nagyság szerint hozzáadódik, minek folytán a test (pl. a hajó) mozgása növeli a Föld forgásából származó középpontfutó erőt, ha mozgása a Föld mozgása irányában azaz kelet felé történik, ellenben kisebbíti azt, ha nyugatra mozog. Így tehát a nehézség, mely a Föld vonzóerejének és a középpontfutó erő egy összetevőjének különbsége, kisebbedik, ha a szerkezet kelet felé mozog, s nagyobbodik, ha mozgása nyugat felé történik. Ez a változás pedig mérhető mennyiség, mert nagysága a HECKER-féle megfigyelések pontosságát messze fölülmulja.

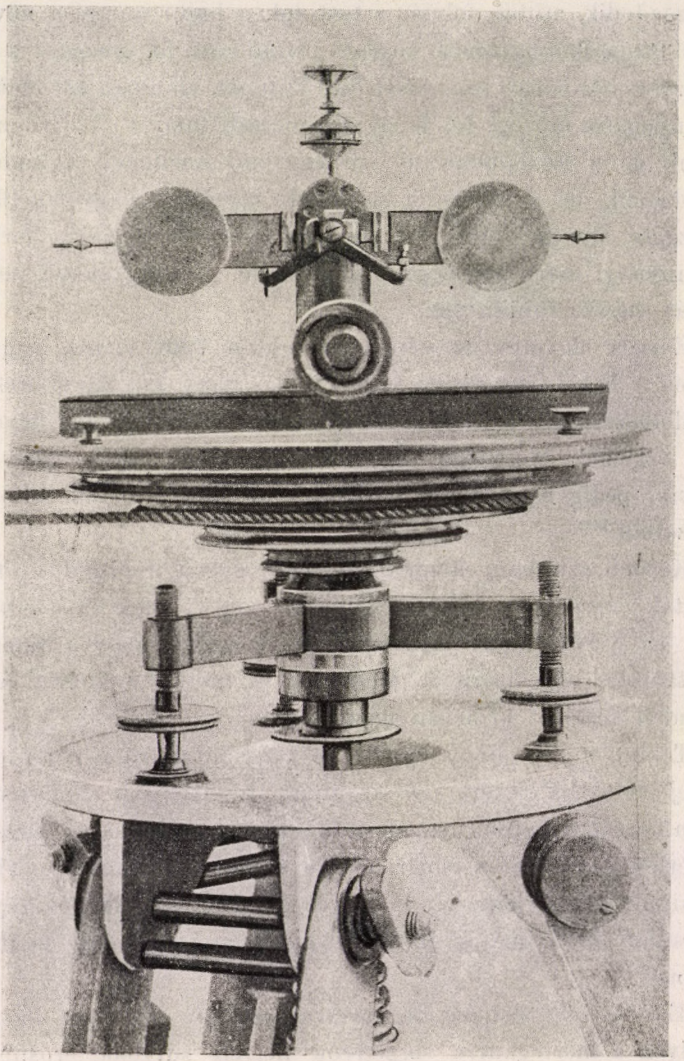
EÖTVÖS figyelmeztetésére e méréseket 1909. évben megismételték a Fekete-tengeren. Az orosz kormány két hajót bocsátott rendelkezésükre, a melyeken egyidőben nehézségi megfigyeléseket végeztek mégpedig úgy, hogy a hajók egyike kelet felé, másika pedig nyugat felé haladt. A mérések EÖTVÖS felfogását igazolták.[112]

Később azonban, mikor e vizsgálatokat a relativitás elvével hozták kapcsolatba, többen kétségbe vonták ez állítás helyességét. Ez a körülmény arra inditotta EÖTVÖST, hogy a hatás kimutatására oly kisérletet gondoljon ki, mely azt közvetlenül és minden kétséget kizáróan igazolja.

Tekintve azt, hogy EÖTVÖS e vizsgálatait még nem tekinti befejezetteknek, ezért kutatásainak részletesebb ismertetésébe nem bocsátkozhatom, hanem csakis ama igen fontos és nevezetes kisérletének vázlatos ismertetésére szoritkozom, mely e vizsgálatainak alapját képezi, s a melyet ő a Mathematikai és Physikai Társulat 1917 május 10-iki közgyülésén ismertetett és bemutatott.[83]

EÖTVÖS felfogásának igazolására érzékeny mérleget használt, melyen a mérlegkarra serpenyők helyett súlyokat erősített. A mérleget függélyes tengely körül forogható állványra állította, s azt óraművel, hajtó zsineg közvetítésével lassan és egyenletesen forgatta. (29. ábra.)

A forgás közben a mérlegrúd karjai felváltva kelet felé, illetve nyugat felé mozognak, minek folytán az előzőek értelmében a kelet felé mozgó kar könnyebb, a nyugat felé mozgó pedig



29. ábra.

nehezebb lesz. A mérlegrúdra tehát impulzus-szerű hatások hatnak. E hatások bár kicsinyek, de számítások szerint mégis oly nagyok, hogy azok mérleggel kimutathatók. A kimutatás nehézsége csak abban van, hogy e hatást a mérleg keringése közben kell megfigyelnünk. Eötvös e kis hatás kimutatására a rezonancia elvét alkalmazza. E célból a mérleget az óraművel akkora szögsebességgel forgatja, hogy keringési ideje a mérlegrúdnak (a forgáskor érvényes) teljes lengésidejével egyenlő legyen. Ekkor ugyanis a mérleg karjaira ható, előbb említett, impulzus-szerű hatások oly időközökben váltakoznak, hogy azok a mérlegrudat mindig nagyobb és nagyobb lengésbe hozzák. Az amplitudó szakadatlan növekedésének határt szabnak az élnél fellépő súrlódás és a levegő ellenállása, egy szóval az u. n. csillapító erők. Ily módon Eötvös e hatás multiplikálásával egy maximális amplitudót nyert, mely kényelmesen megfigyelhető és alkalmas vetítő berendezéssel nagy hallgatóság előtt bemutatható volt.

A maximális amplitudó kisérleti meghatározása lehetővé teszi a szóban forgó hatás nagyságának megállapítását is. Mivel azonban a kisérleti meghatározás kissé körülményes, ezért Eötvös e hatást oly módon határozta meg, hogy azt mesterségesen alkalmazott ismeretes nagyságú erő hatásával kompenzálta. — Ily kényelmesen alkalmazható erő a tekercsben keringő elektromos áram mágneses erőtere.

Eötvös a kompenzálás céljából a mérlegrúdra kicsiny, vertikális mágnestűket erősített, a földmágneses erőtér vízszintes összetevőjét alkalmasan elhelyezett mágnesrudakkal kompenzálta, s a tekercset a csillagászati észak-déli irányban úgy helyezte el, hogy mágneses erőtere vízszintes irányú legyen. E tekercs mágneses erőterében forgatta a mérleget, s a tekercsben keringő áram erősségét addig változtatta meg, míg a forgó mérleg lengései teljesen megszüntek, a mikor is a mágneses erő hatása a Föld forgásából származó hatást teljesen lerontotta.

Az áram erősségének, a tekercs méreteinek és a tekercs mérlegtől való távolságának ismerete segítségével a mágneses erőtér intenzitását, ennek segítségével a mérlegrúdon lévő kis mágnesek momentumainak ismeretével a keresett hatást meghatározhatta, a miből az észlelőhely geografiai szélességének ismeretével a Föld forgássebességét is kiszámíthatta.

Eötvösnek e nevezetes kisérlete tehát teljes diadalra juttatta felfogását: minden kétséget kizáróan igazolta e hatás jelenlételét. Maga a kisérlet a Föld forgásának egy újabb, fényes bizonyitéka, mely a Föld forgássebességének meghatározását is lehetővé teszi. De e kisérletnek ezek mellett még egyéb előre meg nem mondható és kiszámithatatlan óriási jelentősége is van. Miután e kisérlet az első oly kisérlet, mely a nehézséget a mozgással hozza kapcsolatba, s a mozgó szerkezetek nehézségeire ad felvilágositást, ezért ez szoros vonatkozásba jut a relativitás elvével, s az ez alapon felépitett Einstein-féle gravitációs elmélettel, s igy mindazokkal a kérdésekkel, melyek a világrendszer szerkezetének megoldását célozzák.

E kisérletnek ez irányban való alkalmazása, s a belőle vonható következtetések megállapitása a további vizsgálatok feladata.

Rybár István.

VII. ELŐADÁSAIRÓL ÉS EREDETI ELŐADÁSI KÍSÉRLETEIRŐL.

Eötvös kisérleti fizikai előadásai a természethez símulnak. Nem ideális, a természetben elő nem forduló ú. n. egyszerű, nem is speciális esetek alkotják előadásainak tárgyát, hanem maga a természet. A jelenségeket úgy állítja hallgatói elé, miként azok tényleg előállnak. A jelenségeket leírja, azokból a jelenségek törvényszerűségeit, mégpedig általános törvényekben megállapitja, s végül a jelenségeket okaikra vezeti vissza. Hallgatóit a bemutatott jelenségből egyszerű, világos következtetésekkel vezeti a természeti törvényekhez. Előadása egységes következtetéseknek és okoskodásoknak szakadatlan láncolata. Vezérfonalát az energia megmaradásának elve képezi. Szigorú kritikai észjárással rámutat a leírás tökéletes vagy tökéletlen voltára és hallgatóiban állandóan gondolatokat kelt. Előadásait talán azzal jellemezhetem legjobban, ha azt mondom, hogy előadásaiban helyes fizikai gondolkodásra tanítja hallgatóit.

Számos fizikai fogalmat és ismeretet, melyek manapság teljesen közismertek, Eötvös előadásai terjesztettek hazánkban. A nehézség szabatos meghatározása tőle származik. Még híre sem volt a relativitás elvének, s már egyetemi előadásaiban a nehézségnek oly definicióját adta, mely lényegében a nehézségnek a relativitás elvéből folyó modern definiciójával egyezik.

A hőjelenségek ismertetésénél egységes alapgondolat vezeti. Abból a tapasztalatból kiindulva, hogy a természetben egy jelenség önmagában sohasem történik, hanem minden jelenséget egy vagy több más jelenség kisér, a hőjelenségeket két csoportba úgy sorozza, hogy e csoportok valamilyen hőjelenséget kisérő jelenségekről azonnal felvilágositást nyujtsanak. — Később e két csoportot más természeti jelenségekkel, mint a mechanikai energia nagyobbodásával, a mechanikai energia kisebbedésével, a chémiai szétválasztással, a chémiai egyesüléssel, az elektromos kisüléssel egésziti ki. A természeti jelenségeknek eme csoportositásával a természeti jelenségek közötti kapcsolatról áttekintő képet nyujt.

Az elektrosztatika és elektrodinamika között tátongó nagy ürt hazánkban Eötvös hidalta át. A régi kor hallgatói előtt az elektrosztatika és elektrodinamika két külön fejezete volt a fizikának, úgy tanitották ezeket, mintha közöttük semminemű kapcsolat sem állana fenn. Eötvös előadásaiban az elektrosztatikai és elektrodinamikai jelenségek között oly szoros a kapcsolat, hogy hallgatói nem is ismerik e megkülönböztetést. Az elektrosztatikus és elektrodinamikus jelenségek között csak azt a különbséget látják, hogy az elektromosság az egyik esetben nyugalomban, a másikban mozgásban van, azonkivül, hogy az előbbiek energiája rendesen aránytalanul kisebbek az utóbbiak energiájánál.

Miként előadásának szellemét, úgy annak kivitelét is, előadási kisérleteit is eredetiség jellemzi. A továbbiakban eredeti előadási kisérleteit ismertetem.

Egy ily Eötvöstől származó előadási kisérlet az esés tanulmányozására, még pedig az első másodperc alatti esés meghatározására vonatkozik. E kisérlet az általa e célra szerkesztett ingával egyszerűsége, világossága és könnyed érthetősége folytán a fizika legjobb kisérletei közé tartozik.

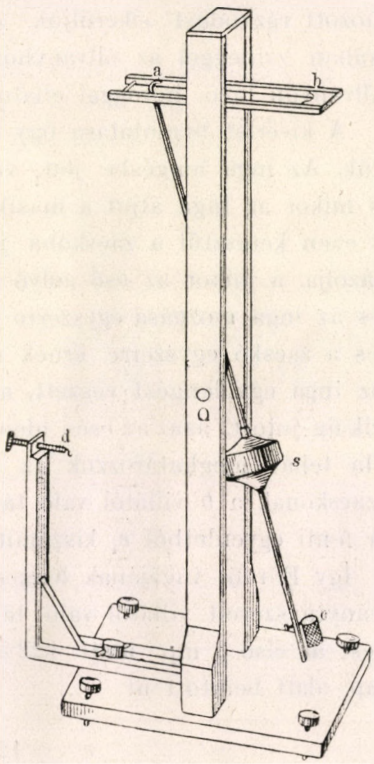
Hogy e kisérlet célját, fontosságát és előadásában való szerepét megértethessem, szükséges, hogy megelőzőleg azokról a kisérletekről és meggondolásokról szóljak, a melyekhez e kisérlet kapcsolódik.

Az esést, mint minden mozgást akkor ismerjük, ha tudjuk, hogy a mozgó test minden időpillanatban hol van? E célból mindenekelőtt az esés pályáját és az esés törvényszerűségét kell megállapitanunk.

Eötvös a légüres térben aláejtett testekkel kimutatja, hogy minden test a légüres térben egyszerre esik, s hogy az esés pályája függélyes egyenes. Az esés törvényszerűségét pedig a *Morin*-féle készülékkel állapitja meg, mint ismeretes úgy, hogy magával az eső testtel az esés irányára merőlegesen, egyenletesen mozgó papirlapra leiratja mozgását. Az eső test által leirt görbéből az a törvényszerűség olvasható ki, hogy az esés az esés idejének négyzetével arányos, azaz t idő alatti esés

$$e = e_1\, t^2$$

hol e_1 az első mp. alatti esést jelenti.



30. ábra.

E törvényszerűség önmagában még nem irja le a mozgást. Az esés tökéletesen ismeretes csak akkor lesz, ha e_1 kisérletileg meg van állapitva. Ennek az e_1-nek, azaz az első mp. alatti esésnek egyszerű és nagy hallgatóság előtt feltűnő módon bemutatható kisérleti meghatározása történik az ú. n. Eötvös-féle ingával.

E készülék (30. ábra) kb. 130 cm. hosszú, O tengely körül forgó rúdalakú inga, melyen ólomsúly s van rögzitve. A rúd felső végén félkarika alakú villa a van, mely az állványra erősitett félkarika alakú villát b-t, teljesen zárt karikává egészit ki. Az inga alsó végére egy nagyobb karika *c*, s erre zacskó van szerelve.

A kisérlet kivitele úgy történik, hogy az ingát egyensúlyi helyzetéből annyira térítjük ki, míg az *a* villa a *b* villát zárja. Ebbe, az így bezárt karikába helyezzük a testet, a súlyos golyót, melynek esését óhajtjuk vizsgálni. Hogy kezünkkel létrehozott rázkódást elkerüljük, célszerű az ingát ebben az állásában zsineggel az állványhoz kikötni. Erre a célra való az állványon lévő, horoggal ellátott, állítható *d* csavar.

A kisérlet bemutatása úgy történik, hogy a zsineget elégetjük. Az inga lengésbe jön, vele egyszerre a golyó esni kezd, s mikor az inga átjut a másik oldalra, a golyó a *c* karikához s ezen keresztül a zacskóba jut. Az ábra azt a pillanatot ábrázolja, a mikor az eső golyó a *c* karikához jut. A golyó esése és az inga mozgása egyszerre kezdődnek, továbbá az eső golyó és a zacskó egyszerre érnek ugyanarra a helyre. A míg tehát az inga egy lengést végzett, az eső golyó a *b* villától a *c* karikáig jutott, azaz az esés ideje az inga lengésidejével egyenlő. Ha tehát meghatározzuk az inga lengésidejét, s lemérjük a zacskónak a *b* villától való távolságát, mikor alatta van, akkor a fenti egyenletből e_1 kiszámítható.

Így Eötvös ingájának lengésideje $\frac{1}{2}$ mp., a zacskónak az állványra szerelt villától való távolsága 122·5 cm. Tehát az eső test az első $\frac{1}{2}$ mp. alatt 122·5 cm. utat fut be, s így az első mp. alatt befutott út

$$e_1 = \frac{e}{t^2} = \frac{122{\cdot}5}{(\frac{1}{2})^2} = 490 \text{ cm.}$$

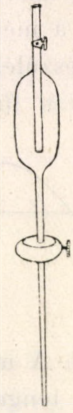
E kísérleti adat felhasználásával nyerjük, hogy

$$e = 490\, t^2 \qquad (1)$$

Ez egyenlet most már lehetővé teszi, hogy az eső test helyzetét minden időpillanatban megállapitsuk. E célból az esés idejét mp.-ben adjuk meg, mikor is ez egyenletből az esés nagyságát cm.-ben nyerjük. Tehát az (1) alatti egyenlet az esést tökéletesen leirja.

Eötvös az inga mozgását is eredeti, grafikus eljárással szemlélteti, mégpedig úgy, hogy az ingával az inga lengésére merőlegesen, egyenletesen mozgó papirlapra irat. E célból az ingából festőszert folyat, s lengése közben síneken mozgó kocsit egyenletesen tól el alatta.

Az általa használt inga, csappal ellátott pipetta alakú üvegcső, melyen eltolható és rögzíthető súly van (31. ábra). A csövet anilinnel megfestett folyadékkal töltjük meg, s állványra szereljük úgy, hogy vízszintes tengely körül lengéseket végezhessen. A kocsi sinjeit az inga alatt, az inga lengéssikjára merőlegesen helyezzük el, s a kocsira két rajzszöggel vízszintesen papirt, lehetőleg vastag itatóspapirt szögezünk.



31. ábra.

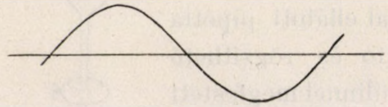
A kisérlet kivitele abban áll, hogy az alkalmas lengésidőre beállított ingából a festett folyadékot a csap megnyitásával egyenletesen folyatjuk, az ingát lengésbe hozzuk, s a kocsit egyenletesen toljuk el alatta. Ezután az ingát nyugalomba hozzuk, s a kocsit ismét eltoljuk alatta. Az inga lengése közben a rajzlapra görbe vonalat, nyugalmi állapotában pedig egyenes vonalat rajzol (32. ábra). A görbe vonal az inga mozgását tünteti elő, mely az inga kis kilengésekor olyan, mint a minőt a hangvilla rezgésére merőlegesen, egyenletesen mozgó, kormozott üveglapra rajzol. E görbéből (sinusvonalból) lehet a rezgő mozgás törvényszerűségét leolvasni.

Eötvös előadásaiban különös nagy gonddal és részletességgel foglalkozik a testek tömegének meghatározásával, a fizika ez egyik legfontosabb kérdésével. Eme fejtegetéseiben két eredeti készüléket alkalmaz.

Az egyik teljesen szabálytalan alakú mérleg, mely annak kimutatására szolgál, hogy a mérlegelés (az ú. n. abszolut, taával való mérlegelés) a mérlegrúd alakjától, méreteitől teljesen független.

A másik készülék a mérleg érzékenységére vonatkozik.

A mérleg érzékenységén azt a szögkitérést értjük, a melyet a mérlegrúd egy bizonyos (pl. 1 gr.) túlterheléssel mutat. A készülék annak demonstrálására való, hogy az érzékenység hogyan függ a mérlegkar hosszától, a mérlegrúd súlypontjának a forgási tengelytől mért távolságától és a mérlegrúd tömegétől?

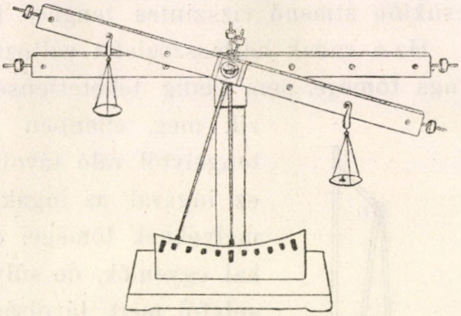


32. ábra.

A készülék két teljesen egyforma, egymástól teljesen független mérlegrúdból áll (33. ábra). A mérlegrúdon a kar változtatására egymástól és a forgási tengelytől (az éltől) egyenlő távolságra akasztók vannak, melyekbe a serpenyők függeszthetők; a súlypont helyzetének változtatására pedig a mérlegrudakon a tengely fölött egy-egy eltolható súly van.

A kisérlet bemutatásánál először csakis az egyik mérlegrudat használjuk. A serpenyőket az élhez legközelebbi akasztóra függesztjük, s megnézzük a mérleg egyensúlyi helyzetét. Az egyensúlyi helyzet megállapítása céljából a mérlegkarra vízszintes drótot erősitünk s ennek képét lencsével függélyes skálára vetitjük. Az egyensúlyi helyzetnek e skálán történt megállapitása után a túlsúlyt (pl. 1 gr.-ot) a mérleg egyik serpenyőjébe tesszük s leolvassuk az egyensúlyi helyzetnek az előbbitől való eltérését osztályrészekben. Ezután a serpenyőket a forgási tengelytől kétszeres távolságra lévő akasztókra helyezzük át s az előző módon megállapitjuk az 1 gr. túlsúly okozta kitérést. E kitérést az előző kétszeresének találjuk. Ép így háromszoros kitérést nyerünk, ha az érzékenységet a forgási tengelytől háromszoros távolságra lévő akasztókra függesztett serpenyőkkel s túlsúllyal határozzuk meg. Tehát a mérleg érzékenysége különben azonos körülmények között a kar hosszával arányos.

A súlypont helyzetének a mérleg érzékenységére való befolyása kimutatható, ha az érzékenységet az eltolható súly legmélyebb és legmagasabb helyzetében állapitjuk meg. Azt találjuk, hogy minél közelebb van a mérlegrúd súlypontja a forgási tengelyhez, különben azonos körülmények között, a mérleg annál érzékenyebb.



33. ábra.

Végül a mérlegrúd tömegétől való függésnek kimutatására mindkét, egyforma mérlegrudat használjuk úgy, hogy a serpenyőket mindkét mérlegrúd egymás mellett lévő akasztóira függesztjük fel, s a mérleg érzékenységét az így kétszeres tömegű mérlegrúddal határozzuk meg. Meggyőződünk arról, hogy a nagyobb tömegű mérlegrúd érzékenysége kisebb.

Ismeretes, hogy kis kilengések esetében

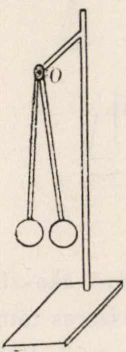
$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Mgs}}$$

formula az inga lengés ideje T, a forgási tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka K, tömege M, súlypontjának a forgási tengelytől való távolsága s, és a nehézségi gyorsulás g közötti összefüggést fejezi ki.

E formula értelmében az inga lengésideje különben azonos körülmények között a súlypontnak a forgási tengelytől mért távolságának, s-nek négyzetgyökével fordítva arányos. Azaz azon ingák közül, melyeknek tömegei, tehetetlenségi nyomatékai egyenlők, annak az ingának lengésideje nagyobb, melynek súlypontja a forgási tengelyhez közelebb van.

Ennek kimutatására Eötvös a 34. ábrában előtüntetett ingát használja.

Az inga két rúdból és a rudak végén gömbalakú súlyokból áll. A rudak O-nál lévő csuklóban egymáshoz képest tetszés szerinti szöglettel hajlíthatók. A surlódás a csuklóban oly nagy, hogy a rudak minden hajlásszögletre beállíthatók. Az inga a csuklón átmenő vízszintes tengely körül lengéseket végezhet. Ha a rudak hajlásszögletét változtatjuk, akkor ezzel sem az inga tömege, sem pedig tehetetlenségi nyomatéka nem változik meg, ellenben súlypontjának a forgási tengelytől való távolsága igen. Ennek folytán ez ingával az ingák oly sorát állithatjuk elő, melyeknek tömegei és tehetetlenségi nyomatékai egyenlők, de súlypontjaiknak a forgási tengelytől mért távolságai különbözők. Tehát ez ingával az inga lengésidejének T-nek az s-től való függése megvizsgálható.



34. ábra.

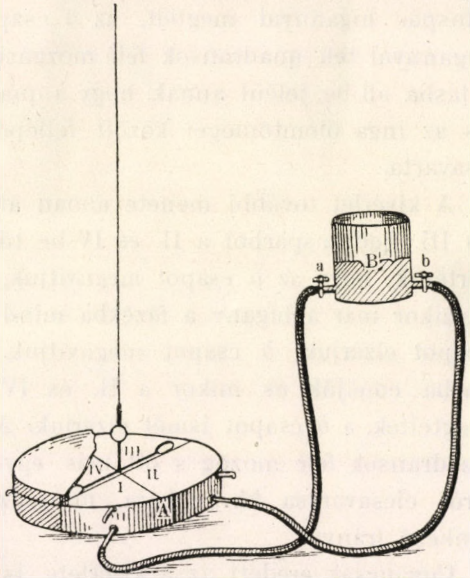
Ha a gömbalakú súlyok egymást érintik, azaz az inga súlypontja a forgási tengelytől legtávolabb van, akkor az inga szaporán leng, lengésideje kicsiny; ha azonban az inga rúdjai egymással közel 180°-ot képeznek, azaz ha a súlypont a forgási tengelyhez közel van, akkor az inga rendkivül lassan leng, lengésideje igen nagy.

A tömegvonzás rendkivül kényes jelenségét az Eötvös-féle torziós ingával játszi könnyedséggel és teljes biztonsággal lehet kimutatni. E célból egy nyilás képét, a fénynek a torziós inga tükrén való visszaverődése után, vízszintes skálán állítjuk elő. Az inga egyensúlyi helyzetét e skálán olvassuk le. Azután a kitérítő súlyt, kb. 13 kg.-os ólomsúlyt, a torziós készülék mellé, az inga platinasúlyával egyenlő magasságban, a súlyhoz lehetőleg közel helyezzük el, mire a nyilás képe a skálán lassan a kitérítő súly oldala felé mozgásba jön, s más egyensúlyi helyzetbe áll be, jeléül annak, hogy a vonzó erő a torziós ingát elcsavarta.

A tömegvonzás eme bemutatásához a költséges torziós inga szükséges. Eötvös e jelenséget régebben másként mutatta be.

A használt készülék jelentékenyen olcsóbb a torziós ingánál úgy, hogy azt rendes viszonyok között bármelyik középiskola is beszerezhette.

A készülék lényeges alkotó része szintén torziós inga, a melyen azonban platinasúlyok helyett lapos, korongalakú súlyok vannak (35. ábra). Az inga a torziós szekrényben körhenger alakú teljesen bezárt edény, *A* felett, annak felső lapjához igen közel lenghet. Az edény belseje egymásra merőleges két fallal négy, I., II., III. és IV. quadransra van beosztva. E quadransok közül a szemben lévők egymással közlekednek, igy I. a III-kal, és II. a IV-kel. Mindenik quadransból cső vezet kifelé, melyeknek nyitott végei lefelé görbülnek. Az egymással közlekedő quadransok egyikéből ezenkivül alul még egy-egy cső vezet kifelé. E csöveket különkülön vastagfalú kaucsukcső köt össze a *B* vasfazékkal. A fazékból kivezető csövek az *a* és *b* csappal zárhatók el.



35. ábra.

A torziós inga a torziófejjel (mely az ábrában nincs előtüntetve) úgy állitandó be, hogy az inga egyensúlyi helyzete a quadransokat elválasztó egyik fallal parallel legyen (az ábra az ingát ebben a helyzetben ábrázolja). Az inga egyensúlyi helyzetét az előző kisérletnél ismertetett módon vetitve skálán olvassuk le.

A kisérlet bemutatása következőkép történik. Leolvassuk az inga egyensúlyi állását. Ezután a kitérítő tömeget, higanyt az egyik quadranspárba töltjük. Erre szolgál a gummicsővel öszszekapcsolt *B* fazék. A fazék csapjait elzárjuk, s a fazékba higanyt töltünk. Ezután az egyik csapot, pl. az *a* csapot megnyitjuk és a fazekat magasba emeljük, miáltal a higany a fazékból az I. és III. quadransba ömlik. Mikor a higany a quadransokból felül kivezető csövön kifolyik, azaz mikor a quadranspár higannyal megtelt, az *a* csapot elzárjuk. Az inga a higannyal telt quadransok felé mozgásba jön s más egyensúlyi állásba áll be, jeléül annak, hogy a quadransokban lévő higany és az inga ólomtömegei között fellépő vonzóerő a drótot elcsavarta.

A kisérlet további menete abban áll, hogy a higanyt az I. és III. qadranspárból a II. és IV-be töltjük át. Ez oly módon történik, hogy az *a* csapot megnyitjuk, a fazekat lesülyesztjük, s mikor már a higany a fazékba mind visszafolyt, akkor az *a* csapot elzárjuk, *b* csapot megnyitjuk, a fazekat ismét a magasba emeljük és mikor a II. és IV. quadransok higannyal megteltek, a *b* csapot ismét elzárjuk. A torziós inga a II. és IV. quadransok felé mozog s ott más egyensúlyi állásba beáll. A drót elcsavarása kb. akkora, mint az előbbi esetben, de ellenkező irányú.

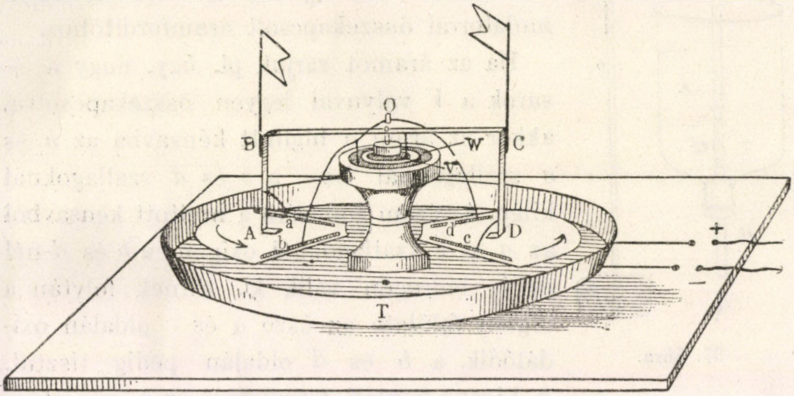
Ugyancsak eredeti az a kisérlete is, a mellyel a rugalmas alakváltozást bemutatja és Hooke törvényének érvényességét igazolja.

Vízszintesen kifeszített vörösrézdrót képét függélyes skálára vetíti, s a drótot közepén súlyokkal terheli meg. A skálán leolvasható kitérésekből megállapitható, hogy 1-ször rugalmas alakváltozás esetén az alakváltozás az erő megszünte után megszünik és hogy az alakváltozás arányos az alakváltozást létesitő erővel (Hooke törvénye); 2-szor hogy rugalmatlan alakváltozás esetén az erő maradandó alakváltozást létesit.

Továbbá rendkivül tanulságos az a kisérlet, mellyel a folyadékok felületi feszültségének jelenlételét mutatja ki.

A folyadék felületén úszó test minden oldalról a felületi feszültségből származó ugyanakkora erőnek van alávetve, miért is a test a folyadék felületén nyugalomban van. Ha azonban a test egyik oldalán a felületi feszültséget megváltoztatjuk, akkor a test a nagyobb felületi feszültség felé mozog.

Öntsünk tálban lévő tiszta higanyfelületre annyi higitott kénsavat, hogy az a higany felületét teljesen befedje. Helyezzünk a higanyfelületre üveglapot. Az üveglap a felületen nyugalomban marad. Ha azonban a higany felületét az üveglap egyik oldalán odadobott chromsavas kálium darabkával oxi-

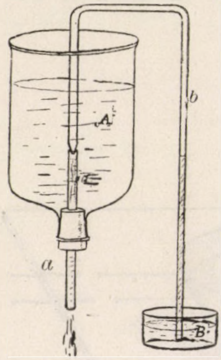


36. ábra.

dáljuk, az üveglap azonnal a tiszta higanyfelület felé mozgásba jön, mert a higany felületi feszültségét az üveglap egyik oldalán az oxidálással lekisebbitettük.

Az üveglap mozgását folytonos mozgássá alakíthatjuk át, ha a higanyfelületet az üveglap egyik oldalán állandóan oxidáljuk, a másikon pedig hidrogénizálással kijavitjuk azt. Eötvös e műveletet az elektromos áram chémiai hatásával létesíti az ú. n. kapilláris forgó készülékénél.[31]

E készülék szerkezetét a 36. ábra ábrázolja. Az úszó, két egymással szemben lévő körsektor alakú üveglap, melyeket egymással az *A B C D* fémhid mereven köt össze. Az úszó szerkezet az *O* csúcs körül foroghat és a *T* tálban levő higanyfelületen e felületre öntött higitott kénsavban úszik. Az úszók felső lapján igen közel a szélekhez (de nem teljesen ott) platinaszalagok vannak spanyolviasszal ragasztva. Az egymással szemben lévő *a* és *c* szallagot platinadrót kapcsolja vezetőleg a fémhíddal össze. A hídról platinadrót ér a higannyal telt *V* vályuba. A *b* és *d* szallagokat összekötő platinadrót a hídtól elszigetelve egy másik *W* vályuba vezet, mely szintén higanyt tartalmaz. Vagyis a *a* és *b* szallagok a *V*, a *c* és *d* szallagok pedig a *W* vályuban lévő higannyal vannak vezetőleg összekapcsolva. A *V* és *W* vályuból drótok vezetnek két egymásután kapcsolt akkumulatorral összekapcsolt áramfordítóhoz.



37. ábra.

Ha az áramot zárjuk pl. úgy, hogy a + sarok a *V* vályuval legyen összekapcsolva, akkor az áram a higított kénsavba az *a* és *c* szallagoknál be-, a *c* és *d* szallagoknál kilép. Az áram hatására a higított kénsavból az *a* és *c* szallagoknál oxigén, a *b* és *d*-nél pedig hidrogén válik ki. Ennek folytán a higany felülete az úszó *a* és *c* oldalán oxidálódik, a *b* és *d* oldalán pedig tisztul. A higany felületi feszültsége az *a* és *c* oldalon kisebb lesz, mint a *b* és *d* oldalon, minek folytán az úszó a nyíl irányában gyors forgásba jön. Ha az áramfordítóval az áram irányát megfordítjuk, akkor az úszó az ellenkező irányban forog.

Eötvös a 37. ábrában ábrázolt készülékkel azt igazolja, hogy áramlásban lévő folyadék belsejében a nyomás a nagy keresztmetszetnél nagy, kis keresztmetszetnél kicsiny.

Nagyobb, fenéknélküli, *A* üvegedény dugóval elzárt nyakán üvegcső *a* vezet keresztül. E csőbe a *b* csőnek kihuzott vége torkolik. Ez által az *a* csőnek az *A* edénnyel közlekedő vége tetszésszerinti kis keresztmetszetüvé tehető. A *b* cső másik vége festett folyadékot tartalmazó *B* edény fenekéig ér.

Ha az *A* edényt vízzel megtöltjük, akkor a víz az *a* és *b* csövek falai közötti kis keresztmetszeten áramlik keresztül ; a

B edényben lévő festett folyadék a *b* csőben felemelkedik és a *b* és *a* csövön keresztül kifolyik.

Ugyanis az áramló víz sebessége az *a* és *b* közötti kis keresztmetszeten megnövekedik, a sebességnövekedés pedig nyomáskisebbedést létesít. Ennek folytán a *B* edényben levő folyadék külső felületére ható légnyomás és a *b* csőben uralkodó lekisebbedett nyomás különbsége a folyadékot a csőben felemeli.

A fagyást kísérő melegedés kimutatására használatos kísérletek előadási célokra nem igen alkalmasak, mert vagy nagyon körülményesek, vagy csak szubjektive figyelhetők meg. Eötvös e jelenséget hallgatói előtt meggyőző, egyszerű kísérlettel mutatja be alkénessavas nátriummal.

Ismeretes, hogy az alkénessavas nátrium, melynek olvadáspontja 47 C°, a szoba hőmérsékletén szilárd és cseppfolyós állapotban is lehetséges.

Ha lombikban alkénessavas nátriumot megolvasztunk, s nyugodtan kihűlni hagyjuk, akkor az folyékony állapotban megmarad. Ha azonban a folyékony alkénessavas nátriumba szilárd alkénessavas nátriumdarabkát dobunk, azonnal fagyni kezd, s hőmérséklete az olvadási hőmérsékletre 47 C°-ra emelkedik, miközben a környezetet felmelegíti. Eötvös e melegedést oly módon mutatja be, hogy a lombikba a fagyó alkénessavas nátriumra æthyl-æthert önt, s a lombikot oly dugóval zárja el, melyen keresztül egy kihúzott végű üvegcső vezet. Az æther hevesen forr és az æthergőz a csövön erős gőzsugárban áramlik ki. A kiáramló æthergőz meggyujtva nagy lánggal ég.

A földmágneses erőnek influáló hatását Eötvös szerint következőkép mutathatjuk be.

Vizen, úszó mágnesezett varrótű képét vertikális projekcióval ernyőre vetítjük. A tű (mágnestű) a földmágneses meridiánba helyezkedik el, egyik vége észak felé, másik vége dél felé mutat. Közelítsünk e mágnestűhöz 1 cm. átmérőjű és kb. 80 cm. hosszú, izzítással *teljesen* lággyá tett vasrudat s tartsuk azt úgy, hogy a földi mágneses erőre merőleges legyen. A rúdnak a mágnestűhez közelített vége a mágnestűnek úgy az északi, mint a déli végét vonza, jeléül annak, hogy a lágyvasrúd nem mágneses. Ha azonban a rudat a földi mágneses erővel párhuzamosan állítjuk s úgy közelítjük a tűhöz, akkor a lágyvasrúdnak észak felé mutató vége a tű déli végét vonza, de az északit taszítja. Azaz a lágyvasrúd e vége északi mágneses vég. Ugyanazt tapasztaljuk akkor is, ha a rudat megfordítva a másik végét közelítjük a tűhöz: a rúd vége a tű déli végét húzza, az északit taszítja. Ugyanily módon a lágyvasrúdnak dél felé néző végét közelítve a tűhöz, meggyőződünk arról, hogy ez a vég a tű északi végét vonza, a délit taszítja, azaz e vég déli mágneses vég. Tehát a lágyvasrúd, mely a földi mágneses erőre merőleges helyzetében nem mágneses, mágneses sajátosságot mutat, mágnesrúd lesz, ha azt a földi mágneses erővel párhuzamosan állítjuk. És pedig a rúd észak felé néző vége mindig az északi mágneses vége, a dél felé néző vége pedig mindig a déli mágneses vége a rúdnak. A lágyvas e mágnességét a földi mágneses erő influálja.

Didaktikai szempontból igen fontos Eötvös előadásának az a része, a melyben az elektromos kisülést kisérő változásokról szól.

Abból a gondolatból kiindulva, hogy a természetben egy jelenség teljesen magában sohasem jöhet létre, hanem azt mindig más jelenségek kísérik, kimutatja, hogy az elektromos kisülés melegedést, chémiai szétbontást, mechanikai energianagyobbodást, mágneses hatást létesít.

A melegedést akként mutatja be, hogy szikrával az æthert meggyujtja. A chémiai hatás kimutatása céljából nagy, többlemezes Holtz-féle géppel előállított elektromosságot kénsavval savanyított vizen keresztül egyenlíti ki, mikor is a platinaelektródokon igen apró buborékok keletkeznek. A mechanikai energia nagyobbodását két Holtz-féle géppel mutatja be, melyek egy-egy konduktorát vezető drót köti egymással össze, másik, szabad konduktora pedig a földbe van vezetve. Ha az egyik Holtz-féle gépet működésbe hozzuk, a konduktorokat széjjelhúzzuk és a másik Holtz-féle gép üvegkorongját elektromossággal való megtöltés céljából a papirnyelvek irányában egyszer körülforgatjuk, akkor az utóbbi gép gyors forgásba jön. Az elektromos kiegyenlítődés mágneses hatását azzal demonstrálja, hogy nemmágneses acél kötőtű mágneses lesz, ha az elektromos kiegyenlítődés annak közelében megy végbe; továbbá, hogy ha a kiegyenlítődés sok menetű tekercsen át történik, akkor a tekercs a közelében lévő mágnestűt kitériti. E kísérletek alkalmasak annak kimutatására is, hogy az elektromos kisülések energiája rendkivül csekély. Az æther nehezen, sokszor csak többszöri próbálgatás után gyujtható meg; a kénsavval savanyított vízből igen apró buborékok keletkeznek, a melyek vetítve is csak hosszú ideig tartó kisüléssel és csakis a platinadrótok megvastagodásában vehetők észre; a mechanikai munka nagyobbodása is igen csekély; az acéltű gyenge mágnes lesz, a tekercs is a mágnestűt észrevehetően csak akkor téríti ki, ha a földmágneses erőt kompenzálással lehetőleg lekisebbíttettük. Mindezekből a tapasztalatokból az következik, hogy az elektromos kiegyenlítődés energiája rendkivül csekély ahhoz a munkához képest, a mellyel ezen elektromos energiát előállítottuk, azaz a melyet a többlemezes Holtz-féle gép forgatásánál végeznünk kell. Oka ennek az, hogy az elektromosság itt rossz vezetők, szigetelők között egyenlítődik ki. Eötvös már itt felemlíti hallgatóinak, hogy később oly módszerekkel ismerkednek meg, melyeknél az elektromosság kiegyenlítődése csupa vezetők között jön létre. Ezek az elektromos kiegyenlítődések nem adnak fényes, csattanós szikrát, de sokkal nagyobb hő, chémiai, mechanikai, mágneses hatásokat létesítenek, azaz energiáik aránytalanul nagyobbak. A csattogó szikrák tehát nem árulnak el nagy energiát.

A tudományos vizsgálatokra használatos quadranselektrometerek fémfalakkal vannak a külső zavaró hatásoktól védve. Ezért a hallgatóság a tulajdonképeni quadranselektrometerből nem lát semmit. Eötvös üvegből készült torziós szekrényt használ. Ebbe helyezi el az elektrometert, melynek lényeges alkotórészeit oly módon szerkesztette meg, és állította össze, hogy az elektrometer részei az üvegszekrényen keresztül távolról is igen jól megkülönböztethetők.

Ezzel a készülékkel mutatja be, hogy mindennemű mechanikai változás, mint mindennemű dörzsölés, kristályos testekre kifejtett nyomás stb. elektromosságot létesít, mégpedig az egyik test pozitív, a másik negatív elektromossá lesz. Ugyancsak elektromos állapotot mutatnak a kristályos testek a melegedéskor és a hűléskor. Így bemutatja, hogy ha turmalin kristályt felmelegítünk, s azután kihűlni hagyunk, akkor a kihűléskor az egyik vége pozitív, a másik negativ elektromos állapotú. A quadranselektrometerrel bemutatott kisérletei közül még csak egyről óhajtok megemlékezni, arról, a mellyel bemutatja, hogy a folyadék és szilárd fal közötti surlódáskor, az ú. n. száraz surlódáskor, mikor is a folyadék az edény falát nem nedvesíti, szintén elektromosság keletkezik. Magas platinatégelyt szigetelt fémállványra állítunk, s a fémállványt az elektrometer egyik quadranspárjával kapcsoljuk össze. Az elektrometer másik quadranspárja állandóan a földdel van összekötve. A tégelyt Bunsen-féle lámpával kiizzítjuk, s azután kénsavval savanyított vizet cseppentünk belé. A csepp az izzó platinatégelyben megmarad (Leidenfrost-féle jelenség), mert a víz a fejlődő gőzök miatt, melyek rossz hővezetők, az izzó falhoz nem ér. A víz és az izzó platina között a rossz hővezető gőz réteg van. Ha azonban a tégelyt hűlni hagyjuk, egyszerre sercegést hallunk, a tégelyben kis robbanás történik s az elektrometer egyensúlyi helyzetéből kitér. Ugyanis a robbanáskor hirtelen fejlődő és a tégelyből kiáramló gőzök a platinacsésze falához dörzsölődnek s azt elektromossá teszik.

Eötvös az elektromos árammal létesített polározást általános alapgondolattal ismerteti.

Valahányszor azt tapasztaljuk, hogy a vezetőben keringő elektromos áram a vezetőben oly változást létesit, mely az áram irányától függ, azaz mely jelenségnél bizonyos irány vagy irányok kitüntettek, mely jelenség mint mondani szokás, poláros, akkor e változás a vezetőben a változást keltő áram elektromótoros erejével ellenkező irányú elektromótoros erőt kelt.

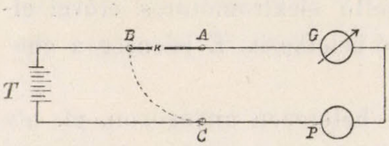
Így, ha az elektromos áramot elektroliten, pl. higított kénsavon vezetjük keresztül, akkor az egyik elektrodon oxigén, a másikon hidrogén válik ki. E jelenség az áram irányától függ, mert ha az áram irányát megfordítjuk, akkor azon az elektrodon, melyen előbb az oxigén fejlődött, most a hidrogén válik ki, a másikon pedig az oxigén. A jelenség tehát poláros. Ennek folytán, ha az áramot higított kénsavon vezetjük át, a higított kénsavban a változást keltő elektromótoros erővel ellentett irányú elektromótoros erő keletkezik. E jelenség a chémiai polározás.

Hasonlóképpen, ha az áramot heterogén anyagokon, pl. oly láncon vezetjük keresztül, a melyben egymáshoz forrasztott antimon- és bizmutdrótok váltakozva következnek egymás után (thermooszlop), akkor azon a válaszfelületen, melynél az áram az antimonból a bizmutba lép, felmelegedés, ott pedig, a hol az áram a bizmutból az antimonba megy, lehűlés jön létre. Ha az áram irányát megfordítjuk, akkor az a válaszfelület, mely előbb felmelegedett, most az áram hatására lehűl (mert az áram most ennél a határfelületnél megy át a bizmutból az antimontba), az pedig, mely előbb lehült, most felmelegszik. E jelenség poláros, mert az áram irányától függ. Ennek folytán e jelenség a vezetőben az eredeti áram elektromótoros erejével ellentett irányú elektromótoros erőt létesít. E jelenség a thermikus polározás.

Ugyancsak ha az áramot elektromótoron, pl. Gramme-féle gépen vezetjük át, a gép forgásba jön. És ha az áramot megfordítjuk, a forgás ellentett irányban történik. E jelenség ismét az áram irányától függ, a jelenség poláros. A forgás közben tehát a forgást létesítő áram elektromótoros erejével ellentett irányú elektromótoros erő keletkezik. E jelenség az indukció, melyet akár elektromágneses polározásnak nevezhetnénk.

Mindezeket a jelenségeket Eötvös lényegében ugyanazzal a kisérlettel mutatja be. A kisérletnél alkalmazott kapcsolást a 38. ábra tünteti elő. A rajzban T az akkumulátortelepet, P a polározó készüléket (vagy a higított kénsavat tartalmazó edényt, melybe ólomlap-elektrodok vezetnek, vagy a thermooszlopot, vagy pedig a Gramme-féle gépet) ábrázolja; G áramjelző készülék, K pedig az A körül forgatható kapcsolórúd.

Kössük össze a K kapcsolóval P-t és G-t az akkumulátorteleppel: az áramjelző készülék áramot jelez. Miután az áramot egy ideig P-n átvezettük, kapcsoljuk ki a T telepet és zárjuk P-t és G-t egy zárt vezetőkörré, mit könnyen elérünk az által, ha a K kapcsolórudat az AB helyzetéből az AC helyzetébe visszük át: az áramjelző készülék ismét kitér, de az előbbivel ellenkező irányban, mely kitérés folyton kisebbedik, végre zérus lesz. A vezető körben tehát áram halad, mely az előbbivel ellentett irányú, s mely folyton kisebbedik s végre megszünik. Hogy pedig ezt az áramot az előbbi áram által a P-ben létrehozott változás okozza, azt a thermooszlop vagy a Gramme-féle gép esetén könnyen bemutathatjuk az által, ha e változást mesterségesen hozzuk létre a thermooszlop egyik felületének melegítése által, vagy a Gramme-féle gép forgatása által.



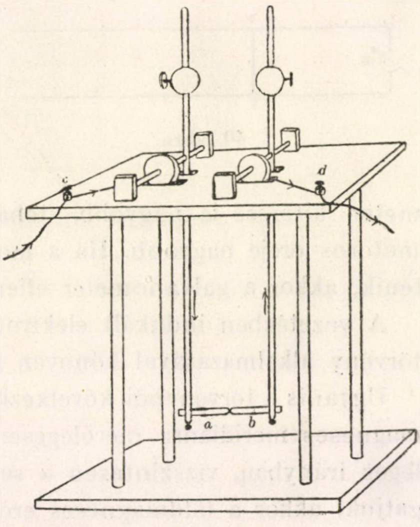
38. ábra.

Tehát az áram által P-ben létrehozott változás e változást keltő áram elektromótoros erejével ellentett irányú elektromótoros erőt létesit.

A 39. ábrában ábrázolt önszabályozó ívlámpa egyrészt az áram és a mágnes kölcsönös dinamikus hatásának, másrészt az elektromos ívlámpa egy egyszerű önszabályozásának szemléltetésére szolgál.

A készülék két egyforma, egy és ugyanazon síkban mozgó, rúdalakú fémingából áll. Az ingák szorító csavarokba fogott vízszintes és egymással érintkező a és b szénrudakban végződnek. A *c* és *d* csavarok, melyek az ingák egyikével, illetve másikával higanykontaktussal vezetőleg vannak összekapcsolva, az elektromos áram be-, illetve kivezetésére valók.

Vezessünk az ingákon keresztül pl. a rajzban ábrázolt irányban erős elektromos áramot. A szénrudak egymással érintkező végei izzásba jönnek, de közöttük ívfény nem jön létre. Ha azonban az ingák közé erős mágnesrudat hozunk és azt úgy tartjuk, hogy tengelye az ingákon átfektetett síkra merőlegesen álljon és északi vége hátul, déli vége elől legyen, akkor az áram és a mágnes kölcsönös hatása folytán az ingák s velük a széncsúcsok egymástól távolodnak (Ampère-féle szabály) és közöttük ívfény áll elő. Ha a mágnesrudat eltávolítjuk, akkor az ingák ismét összeesnek, az ívfény megszünik.



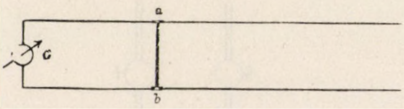
39. ábra.

A széncsúcsok egymástóli távolodása vetítve mutatható be.

Eötvös az elektromos indukciót számos kísérlettel demonstrálja. Egyik a következő:

Ismeretes, hogy ha homogén mágneses erőtérben, pl. a földmágnesség homogén terében vezetőt mozgatunk, abban elektromos áram indukálódik, kivéve ha a vezetőt önmagával párhuzamosan toljuk el, vagy ha azt a mágneses erővel párhuzamos tengely körül forgatjuk. Nem így áll a dolog azonban akkor, ha nem az egész vezetőt, hanem annak csak egy részét mozgatjuk. Ily esetben tanszlációval is indukálódik elektromos áram. E tényt Eötvös alábbi tanulságos kísérlettel igazolja, melyen a LENZ-féle szabály és a NEUMANN-féle törvény alkalmazását is bemutatja.

Két hosszú egymással párhuzamosan és vízszintesen kifeszített dróton (síneken), melyeknek az egyik oldalon lévő végei érzékeny galvanometerrel vannak összekapcsolva, fémkerekeken mozgó fémrúd *ab* (40. ábra) tolható el. Ha a fémrudat, azaz a zárt vezető egy részét önmagával párhuzamosan a síneken mozgatjuk, akkor a galvanometer tűje kitér, jeléül annak, hogy a vezetőben áram kering. Az áramot a földmágneses erő indukálja. Ha a mozgás gyorsabb, akkor a galvanometer kitérése is nagyobb, tehát az indukált áram elektromótoros ereje nagyobb. Ha a mozgás ellenkező irányban történik, akkor a galvanometer ellenkező irányú áramot jelez.



40. ábra.

A vezetékben indukált elektromótoros erőt a NEUMANN-féle törvény alkalmazásával könnyen kiszámíthatjuk.

Ugyanis a törvényből következik, hogy ha az l hosszuságú, a mágneses meridiánra merőlegesen álló rudat, önmagára merőleges irányban, vízszintesen u sebességgel egyenletesen mozgatjuk, akkor a földmágneses erő által a vezetékben indukált elektromótoros erő elektromágneses egységben kifejezve

$$E = Vlu$$

a hol V a földmágneses erőnek a rúdra és a mozgás irányára merőleges, tehát vertikális összetevőjét jelenti.

Így pl. ha a mágneses meridiánra merőleges rúd hossza $l = 2\ m. = 200\ cm.$, s azt lassú lépésben $u = 1\ m.\ sec^{-1} = 100\ cm.\ sec^{-1}$ állandó sebességgel, vizszintesen, a rúdra merőleges irányban mozgatjuk oly mágneses erőtérben, a melynek vertikális összetevője $V = 0{\cdot}4\ cm^{-\frac{1}{2}}\ g^{\frac{1}{2}}\ sec^{-1}$, a mi körülbelül a nálunk érvényes adatoknak megfelel, akkor az indukált elektromótoros erő

$$E = 0{\cdot}4.200.100 = 8000\ cm^{\frac{3}{2}}\ g^{\frac{1}{2}}\ sec^{-2} = 8000$$

elektromágneses egység.

Vagy mivel

$$1 \text{ elektromágneses egység} = \frac{1}{10^8} \text{ Volt}$$

$$E = \frac{8000}{10^8} = 80.\ 10^{-6} \text{ Volt} = 80 \text{ Mikrovolt}$$

Tehát az ily módon indukált elektromótoros erő rendkívül csekély. — Ily rendü elektromótoros erő indukálódik a mozgó vasuti kocsi tengelyében is, de ez a rendkivül kicsiny értéke miatt gyakorlati célokra nem hasznosítható.

Eötvös a rezonancia lényegét a következő kísérlettel mutatja be.

A tanteremben kifeszitett hosszú dróton a végektől kb. $\frac{1}{4}$ dróthossz távolságra egy-egy teljesen egyforma inga, kb. 2 m. hosszú żsinegre függesztett súly, a drót közepe táján pedig kb. 1 m.-es inga lóg. Nevezzük a 2 m.-es ingák egyikét A ingának, másikát A' ingának, az 1 m.-est pedig B ingának. Az A és A' inga lengésideje egyenlő, a B ingáé ellenben más.

Ha az ingát a drótra merőleges síkban lengésbe hozzuk, akkor az A' inga is lassan lengésbe jön és mindig nagyobb és nagyobb amplitudóval leng, ellenben a drót közepén, tehát az A ingához közelebb lévő B inga nyugalomban marad vagy legfeljebb teljesen szabálytalanul igen kis mozgást végez.

Ugyanis a lengő A inga az inga lengésidejével egyenlő időközökben impulzusokat ad a drótnak, melyek a drótban tovaterjedve az A inga lengésidejével egyenlő időközökben az A' és B ingákra hatnak. Mivel az A' inga lengésideje az A inga lengésidejével, tehát az impulzusok váltakozásának idejével egyenlő, ezért az impulzusok az A' ingát mindig nagyobb és nagyobb lengésbe hozzák. Az amplitudok szakadatlan növekedésének a surlódás és a levegő ellenállása szab határt. Ellenben a B inga lengésideje az impulzusok váltakozásának idejétől különbözik, az impulzusok majd növelik, majd kisebbítik a B inga mozgását, amiért is ez inga csak ide-oda történő kis kilökéseket szenved. Az A' inga az impulzusokra rezonál, a B inga nem rezonál.

Az ismertetett kísérletek Eötvös főbb eredeti előadási kísérletei. Ezeken kivül előadásaiban elejétől végig számos oly kísérletet mutat be, a melyeknél eredeti gondolattal másoktól származó kísérleteket előadási célokra tökéletesített. Ha e kísérleteit, főleg pedig, ha azokat a gondolatokat és következtetéseket, melyeket kisérleteihez kapcsol s melyek előadásait rendkivül értékessé teszik, közölni óhajtanám, akkor kísérleti fizikai előadásait terjedelmes tankönyv formájában kellene ismertetnem.

Rybár István.

VIII. ÉLETRAJZ.

I.

Báró Eötvös Loránd, báró Eötvös Józsefnek és Rosty Ágnesnek fia 1848-ban jul. 27-én született Budán. Eleinte otthon nevelkedett a szülei háznál, sőt gimnáziumi tanulmányainak első részét is ilyen úton végezte; szülei Keleti Gusztávot, majd Vécsey Tamást bizták meg, hogy tanulmányait vezesse. 1860-ban a piaristák pesti gimnáziumának negyedik osztályában már nyilvános tanuló lett; ebben az iskolában is fejezte be gimnáziumi pályáját.

Egyetemi tanulmányait a pesti egyetemen mint a jog- és államtudományok hallgatója kezdte meg 1865-ben, azonban mathematikai és természettudományi tárgyakat is hallgatott, sőt Petzval Ottotól magán úton is tanult mathematikát. A természettudományokba apja megbizásából Krenner József, a későbbi egyetemi tanár vezette be. Buzgón dolgozott Than Károly chemiai laboratoriumában és pedig oly sikerrel, hogy professzora egyik, az akadémia elé terjesztett dolgozatában meg is említi nevét.[136]

1867-ben a heidelbergi egyetemre ment, a hol már csak mathematikát, fizikát és chémiát hallgatott és laboratoriumokban dolgozott. Abban az időben Kirchhoff, Helmholtz és Bunsen tanítottak ott. Érthető, ha e fényes elmék egész életre kiható mély hatást tettek rá. Heidelbergből rövidebb időre Königsbergbe ment, a hová Franz Neumannnak, az akkori idők egyik legnevesebb elméleti fizikusának híre vonzotta. Heidelbergben nyerte el a bölcsészeti doktorátust, melyet később a pesti egyetem nosztrifikált és doktori disszertációját magántanári habilitációs iratnak is elfogadta.

Főiskolai tanulmányainak szünetei alatt régi nevelőivel és barátaival, részben az egyetemekről magával hozott társaival beutazta Magyarország szebb vidékeit. Egyik erdélyi utjának eredménye a szkarisorai jégbarlangról irott cikke, első nyomtatásban megjelent munkája.[1]

Egyetemi tanulmányait befejezvén 1870-ben hazajött s a pesti egyetemen 1871-ben a fizika magántanárává habilitáltatta magát. Majd 1872-ben az elméleti fizika rendes tanárává neveztetett ki, 1875-ben pedig a kisérleti fizika tanszékét vette át. 1876-ban nőül vette Horváth Boldizsárnak, igazságügyi miniszternek leányát, Gizellát.

1894-ben a király vallás- és közoktatásügyi miniszternek nevezte ki. Ugyanakkor a körmendi kerület országgyűlési képviselőjévé választotta. De csak rövid ideig volt miniszter. A második Wekerle-minisztérium távozásával, rövid 8 havi szolgálat után, ő is megvált a miniszteri tárcától és 1896-ban ujból elfoglalta tanári székét az egyetemen, ezen is működik mind e mai napig.

A magyar tudományos akadémia 1873-ban levelező- 1883-ban rendes tagjává, 1889-ben pedig elnökévé választotta. Ez utóbbi tisztségről 1905-ben lemondott. 1891 óta elnöke a Mathematikai és Phisikai Társulatnak, melyet ő alapított; tiszteletbeli elnöke az Uránia magyar tudományos társaságnak, alelnöke a Természettudományi Társulatnak és elnöke a Magyar Írók Segélyegyesületének.

A magyar tudományos akadémia 1897-ben a nagy jutalommal, a Természettudományi Társulat 1911-ben a Szily-éremmel tüntette ki, a berlini tudományos akadémia kültagjává választotta, a krakkói és kristianiai egyetemek tiszteletbeli doktorrá avatták. 1881-ben a francia becsületrend lovagjává lett. Ferenc József kriály 1904-ben belső titkos tanácsosává nevezte ki, 1907-ben pedig a Tudományért és Művészetért díszjelvénynyel tüntette ki.

II.

A külsőségeknél jóval gazdagabb és tanulságosabb belső életének fejlődése. Apja látván a természettudományok nagy jövőjét [138] és megutálván az alacsony rendű szempontokat, melyekkel a politikusnak folyton harcolnia kell, KRENNER JÓZSEFet kérte meg, hogy kedveltesse meg vele a természettudományokat, mert — ugymond — nem szeretné, ha fiának a politika annyi bánatot okozna, a mennyit neki okozott. Az apa folytonos figyelemmel is kiséri fiának előrehaladását a természettudományokban és örül kezdetbeli sikereinek. Buzdító leveleket ír neki Heidelbergbe, kérve őt, hogy választott szakjában haladjon bátran előre, mert a tudomány körében a legnagyobb erőfeszítés eléri jutalmát, a mennyiben magában a tudományban találja azt meg s nem kell — miként a politikusnak — az emberektől várnia. Sőt még halálos ágyán is azt az intést hagyja fiának, hogy boldog lehet, ha tudós marad, csak a politikába ne avatkozzék. [143], [144]

De abban, hogy fizikussá lett, bizonyára része volt saját hajlamának is, annak a kikutathatatlan, misztikus erőnek, mely az embert hajtja sorsa intézésében. Bizonyára az ő lelkében is élt valami sejtelem, homályos vágy, alakot nem öltött tudás, a mely hajtotta a fizika felé. A ki azt írja, hogy «lelkesedéssel választotta pályáját, mert az volt a meggyőződése, hogy nincs állás, melyben hazájának javáért többet tehetne,» a kit «kecsegtettek a babérok, melyek e pálya mentén elég magasan teremnek arra, hogy azokat csak az igazán erős szakíthassa le;» a ki «soha sem tudta feledni a percet, mikor a vonat, melyen ült, a Neckar völgyének mentén a heidelbergi pályaházba berobogott,» s a ki «boldog volt már azért is, mert ugyanazt a levegőt szívhatta, mint azon tudós férfiak, a kiknek híre oda vezérelte» : az bizonyosan igen erős hajlamot érzett azon pálya iránt, melyet választott. [36]

Azt a hatást, melyet a szülei ház irányításának és a benső hajlamnak szerencsés összetalálkozása létrehozott, még növelték a kiváló tanárok. Eötvös Loránd oly fényes szellemek vezetése mellett alapozhatta meg tudományos előképzettségét, a minők voltak Than, Helmholtz, Kirchhoff, Bunsen és Franz Neumann. Különösen Heidelbergben az úgynevezett szemináriumi gyakorlatok alatt látta meg, hogyan kell valamely tudományos problémát megfogni és alkalmas módszerekkel megoldani. Kirchhoff rendesen csak 12 hallgatót vett fel szemináriumába, kiknek hetenként egyszer előadást tartott a megoldandó problémáról és a véghezviendő számítások módszeréről. Ez előadás alapján minden hallgató maga rendezte el és állította be az eszközöket, de Kirchhoff minden héten legalább egyszer külön-külön behatóan foglalkozott minden egyes hallgatójával. Megnézte a kisérleti naplót, megbeszélte a hibákat és keresztkérdéseivel eloszlatta a homályt. Kirchhoff igen nagy súlyt helyezett a pontosságra és Eötvös Lorándnak későbbi utolérhetetlen pontosságú mérései bizonyára Kirchhoff szellemét tükröztetik vissza. Még többet foglalkozott hallgatóival Helmholtz, a ki mindennap megtette körutját a dolgozók között, a mikor az egyesekkel külön-külön foglalkozott. A pontosságra kisebb figyelmet fordított mint Kirchhoff és az intuitiv hatású qualitativ kisérleteket sem zárta ki egészen. Bizonyára ő nála látta meg Eötvös a problemaállítás módját. Viszont Königsbergben Franz Neumanntól nyerte elméleti fizikai, különösen pedig mélyreható potenciálelméleti ismereteit.

Apjának szelleme nemcsak a pályaválasztásnál, hanem hivatásának felfogásában is irányítólag hatott rá. Eötvös Loránd már kora ifjúságában oly szempontból láthatta a magasra törő férfi hivatását és kötelességét, a mire mások, kiknek nem volt módjukban egy magas szempontú és mélyen látó szellemmel benső kapcsolatban lenni, csak később vagy sohasem juthatnak rá. Az apa egyenesen meg is írja fiához Heidelbergbe intézett levelében, hogy ő egész életén át oly dallamokat énekelt, melyeket húsz évvel később minden susztergyerek fütyül, de melyeket akkor senki sem akart megérteni. Irja továbbá, hogy a legfőbb élvezet e földön azon érzet, ha magasabb álláspontot értünk el s hogy az emberek alacsony vállaikon legjobb akarattal sem emelhetnek senkit magasra, azt mindenki csak saját erejével teheti. [144]

A közönséges felfogás a származás jótékony hatását félreérti és éppen visszájáról értékeli. Azt nézi, hogy ez a körülmény mennyire megkönnyíti az ember előrehaladását és teljesen figyelmen kivül hagyja, hogy az igazán erős szellem az önmagától kínálkozó protekciót inkább nyügnek tekinti, mint felemelő és szárnyat adó öntudatnak. Bizonyára Eötvös Loránd is érezte azt, hogy a mikor hazajöttekor egyetem, akadémia, tudományos társulatok sietve fogadták maguk közé, hogy a mikor «előtte minden ajtó mintegy varázsszóra megnyilt, mindenütt baráti karokra talált, melyek első lépésének támogatására ajánlkoztak,» akkor ez nem is annyira az ő személyének és érdemeinek, hanem inkább a nagy Eötvös fiának szólott. De ő érezte azt is «hogy e név, melyet legnagyobb öröklött kincsének tekint, folyton arra inti őt, hogy reá munka által érdemessé váljék.» [26]

Pályáját valóban széleskörü és nagyon intenziv munkássággal kezdi meg. Egyetemi előadásain kivül nagy buzgalommal vesz részt tudományos mozgalmainkban. Trefort miniszter megbizásából Párisba megy az oktatásügyi viszonyok tanulmányozására. Ir népszerű ismeretterjesztő cikkeket a Természettudományi Közlönybe, a hol a fizikai rovat vezetőségét is elvállalja. E nemű közleményei ma is mintaképei a tiszta, világos és sallangnélküli okfejtésekkel meggyőző tudományos stilusnak. Tart előadásokat ugyane társulat szakülésein és népszerű természettudományi estélyein. [2–4], [7–16] A könyvkiadó vállalat részére pedig Jendrassik Jenővel együtt leforditja Helmholtz népszerű természettudományi előadásait. [17] Inditványt tesz arra vonatkozólag, hogyan lehetne hazánkban a természettudományi kutatásokat a legsikeresebben előmozditani. [5] Önálló buvárlatokkal is foglalkozik, melyekről az akadémiának számol be és külföldi folyóiratban is közli, mi közben Kettelerrel vitába is keveredik. [18], [19], [20], [137] Az akadémia ünnepélyes közgyűlésén felolvasást tart a távolba hatás kérdéséről.[25] Részt vesz 1881-ben a párisi nemzetközi elektromos kongresszuson.

Ebből a szempontból pályájának kezdete hasonlít más tettvágyó és alkotásra törekvő fiatal tudósok pályájához. Ebben a korban az ember nem számol erejével, idejével, életcéljával és munkaképességének korlátoltságával; szinte azt képzeli, hogy végtelen hosszú élet és végtelen nagy munkaképesség áll rendelkezésére.

Eőtvős Loránd azonban csakhamar szűkebbre vonja munkásságának határait, a népszerű cikkek elmaradnak, népszerű ismeretterjesztő előadásra is csak kivételes alkalommal vehető rá, kezdi kerülni a nyilvánosságot, laboratóriumába temetkezik s évek során át csak keveset lehet róla hallani. Igy jut lassanként a maga témáihoz a felületi feszültség, a nehézség és a mágnesség titokzatos erőinek kikutatásához. Ha most lép a nyilvánosság elé, már oly dolgokat ád elő, melyekkel még senki más nem foglalkozott és oly igazságokat bocsát közre, melyeket ő látott meg először.

A folytonos magasabbra törekvés azonban még itt is megnyilvánul. Még ezeket az egészen új dolgokat sem nyomatja ki; mint klasszicizmusra törekvő szellem vár mindaddig, a míg kutatásainak eredményeit végső tökéletes alakban nyujthatja.

Ha a tudomány előbbrevitelét illető kérdésekben most megszólal, szava irányt jelez, programmot tűz ki. A tudósok kezdik vezérüknek tekinteni, a mi forma szerint is bekövetkezett 1889-ben, a mikor az akadémia elnökévé választotta. A mikor minden tényező, amely tudományos és kulturális kérdésekben számot tett, Eötvös Lorándban látta a hivatott vezért, érthető, hogy vallás- és közoktatásügyi miniszterré való kinevezése, Magyarországon szinte szokatlan, egyértelmü lelkesedést váltott ki. Az Eötvös-kollégium megalapítása mutatja, hogy e téren sem indult divatos jelszavak után, hanem saját útjain járt; mélyen néző, analizáló szeme itt is meglátta a haladásnak igazi rugóit. Ha hosszabb ideig maradt volna miniszter, bizonyára sok kiváló tudományos és kulturális intézménynyel gazdagodott volna Magyarország. Ő azonban magasabb szempontból nézte a maga hivatását s a politikai és közéleti szereplésnek végkép bucsut mondva vizszatért a maga tudományos problémáihoz. Sőt ugyanebből az okból még az akadémia elnökségéről is lemondott. Nagyon jellemző lemondó levele így szól:

«Múlnak az évek, s bár munkaerőmet lankadni még nem érzem, mégis minden lenyugvó nap arra int, hogy a Mindenhatótól nekem kiszabott munkaidő előbb-utóbb végére jár. Addig, a míg erőm tart, addig, a míg erőm van munkára, első, mert csak általam teljesíthető feladatomnak kell tartanom azt, hogy kiegészítsem és feldolgozzam azt a tudományos anyagot, melyet évtizedek alatt nagy fáradsággal és részben éppen Akadémiánknak támogatásával összehordtam. A meddig élek, ennek kell, hogy éljek. Mielőtt késő volna, erre kell összegyűjtenem erőmet, megválva azon állásaimtól, melyek annak további szétforgácsolását okoznák.» [74]

A mint látjuk, életének belső fejlődési menete ez: működésének területét folyton szűkebbre és szűkebbre vonta, végre egyetlen problémára, a nehézség kikutatására központosította, a minek megfelelően az igazság kikutatásában mindig mélyebbre és mélyebbre hatolt. Tudományos igazságainak értékét és mélységét egy merészen fölfelé haladó egyenes vonal jelképezheti, a melyen sehol sincs sülyedés, mintegy tiltakozásként W. Ostwald azon közismert — de azért még sem igaz — elvével szemben, hogy az értékes dolgokat az emberek fiatal korukban csinálhatják csak meg.

III.

Nézzük már most működését részletesen és pedig először is egyetemi tanári működését. A mikor Jedlik Ányostól a kisérleti fizika tanszékét átvette, bizonyára nem találta meg azt az alapot, a melyre a maga munkásságát támaszthatta volna. Jedlik Anyos nagyon érdemes fizikus volt, maga Eötvös állította neki a legszebb emléket akadémiai emlékbeszédében,[59] de talán nem sértjük meg emlékezetét, ha azt mondjuk, hogy előadásai nélkülözték a magasabb szempontokat. Képességei és hajlamai a kisérleti aprólékosságokkal való foglalkozásra csábították, de nem tudta kellően kidomborítani a nagy fizikai igazságokat. Még az előbbi századok bámulatos alkotását, a Galilei-Newton-féle mechanika mesteri felépítését, szigorú logikai rendjét, fogalmainak világosságát és exaktságát sem tudta kellően értékelni. Még kevésbbé fogta fel a mult század közepének nagyszerű fizikai evolucióját, az energia megmaradása elvének minden jelenségre kiterjedő érvényességét a hőtan logikus felépítésének rendjét és az elektromosság- és mágnességtannak Faradaytól származó, nem esetlegességeken, de szigorú összefüggéseken alapuló hatalmas fejlődését, ámbár ezen a téren éppen ő maga is nagyszerű felfedezést tett, de azt is — hogy úgy mondjuk — nem egészen tudatosan.

Eötvösnek lényegében véve mindent újra kellett kezdenie és bizonyára sok munkájába került, míg tanszékét úgy el tudta látni, a hogyan azt a fizika akkori igényei és az ő magasabb szempontjai követelték. Új fizikai intézetet kellett szerveznie és berendeznie, a mi fényesen sikerült is neki.

Jedlikkel szemben Eötvös a nagy igazságok embere. Ezeket nem mint készeket nyujtja, hanem a jelenségekből hüvelyezi ki. Előadásait a mélyreható analizáló szellem hatja át. A természeti tüneményeket a bennük megnyilatkozó hatók elemeire bontja szét és azon igyekezik, hogy tanítványait a fogalmaknak, gondolatoknak és törvényeknek legutolsó, többé már nem elemezhető részeihez vezesse el, oda, a honnan a formáktól, sablonoktól mentes tudás ere fakad. Nem ismerünk a fizikai irodalomban művet, a melyre az analizáló szellem annyira rányomta volna bélyegét, mint az ő előadásaira. Itélete elfogulatlan, gondolatmenetének minden állítását igyekszik valódi értékben feltüntetni és megmutatni, hogy törvényeink mennyire közelítik meg az igazságot. Valamely kedves hipotézis, vagy a rendszer vagy a pedagógiai hatás kedvéért soha sem enged az igazságból egy szemernyit sem.

Saját tanszékén kivül Eötvös általában a főiskolai oktatás ügyeire is kiterjesztette figyelmét. Kari és tanácsi üléseken sokszor emelte fel szavát abban az irányban, hogy főiskolai oktatásunkat igazi tudományos szellem lengje át, a mely nem ismer semmi más szempontot, csak azt, melyet a tudomány és hazánk kulturális haladásának érdeke ír elő. Felszólalt irodalmilag is. A Budapesti Szemlében nyilt levelet intézett az akkori közoktatásügyi miniszterhez, TREFORT ÁGOSTONhoz, nyiltan feltárva az észlelt bajokat és megjelölve az elhárításukra szükséges intézkedéseket. Ebben az iratában arra az eredményre jut, hogy a főiskolai oktatás sikeres lesz: 1., ha a tanulók az egyetemre a tudományért való lelkesedéssel jönnek s tanáraikat tisztelik, 2., ha a tanulók zöme művelt családok sarjadéka s eléggé vagyonos arra, hogy tanulmányainak tartama alatt anyagi gondoktól menten, egész idejét a tanulásra fordíthassa, 3., ha a tanulók eléggé érettek arra, hogy az előadásokat jól megválasztva azokra eljárjanak s az azokban hallottakat későbbi használatra feljegyezni tudják és akarják. Felszólalása több más embert is felszólalásra késztetett s a kifejlődött vitának meg is volt a hatása, mert üdvös intézkedéseket vont maga után. [36]

Úgy látszik később EÖTVÖS maga is észrevette, hogy felállított tételei még nem merítik ki az egyetemi oktatás sikerének feltételeit sőt, hogy félreértésekre is adhatnak alkalmat. Mert igaz ugyan, hogy a művelt és vagyonos szülők gyermekei általában kedvezőbb kilátások között indulhatnak neki a tudományos pályáknak, viszont azonban a műveltség és vagyon előnyös hatásával szemben áll az alsóbb osztályok fiainak nagyobb szívóssága, kitartása és munkabirása. Azonkivül a létező viszonyokkal mindig számolni kell, ha célt akarunk érni. Kulturánknak éppen az a legnagyobb hiánya, hogy társadalmi és gazdasági viszonyaink fejletlensége miatt nincs elegendő művelt és vagyonos családunk; létérdekünk tehát, hogy az alsóbb osztályok fiaiból lehetőleg sokan menjenek a főiskolára. Viszont azonban főiskolai oktatásunknak kardinális hibája volt és részben ma is az, hogy az alsóbb osztályokból kikerülő — sokszor igen tehetséges, szorgalmas és ambiciozus — fiatal embereknek sokasága a főiskolán magára van hagyatva, az anyagi gondokkal való küzködésen kivül nincs a ki ösztökélje, irányítsa, képességeikre figyelmeztesse, és a főváros romlasztó életétől elvonja őket, szertelenségeiket pedig megnyirbálja.

Eötvös fölismerte e bajt, mert 1894-ben, miniszterségének rövid ideje alatt, felállította az apjáról elnevezett Eötvös-kollegiumot, melyben tehetséges fiatal emberek minden szükségessel jól ellátva, jó tanárok vezetése mellett, nagy könyvtár birtokában, gondnélkül élhetnek tanulmányaiknak. Ennek az intézetnek kezdettől fogva ő a kurátora. Szívéhez tudományos kutatásain kivül semmi sem áll közelebb, mint e kollegium. Féltő gonddal kiséri figyelemmel minden egyes növendékének fejlődését és igaz örömmel veszi tudomásul sikereiket. Az Eötvöskollégium meg is érdemli megalkotójának érdeklődését, mert fennálása óta nagyot lendített tudományos képzésünkön. Sokak véleménye szerint ez ötvenéves alkotmányos életünknek egyik legnevezetesebb tudományos oktató intézete. Bár követték volna Eötvös utódai a miniszteri széken e példát és alapítottak volna más hasonló intézeteket, a melyek a nemzetünk gerincét alkotó alsóbb osztályok fiait nagyobb számban vonták volna be a művelődés és a tudomány szolgálatába.

Még egy egyetemi intézmény fűződik Eötvös nevéhez. A nagyszívü Semsey segítségével ő alapította meg angol mintára a fellowság intézményét, a melyből kiváló egyetemet végzett fiatal tudósok évek során át megfelelő évi járadékot kapnak, hogy gond nélkül, hivatal nélkül élhessenek tanulmányaiknak.

A föntebb emlitett Budapesti Szemle-beli értekezéséből és két rektori beszédéből [48], [50] megállapíthatjuk, miben látja Eötvös minden oktatásügyi kérdésnek a velejét. Szerinte a koronként fel-fel bukkanó reformgondolatok magukban véve még nem biztosítják a sikert, mert a fődolog mindig az: tudósok tanítanak-e vagy tudatlanok. Tudós pedig nem az, a ki sokat tud, hanem, a ki tudományát előbbre vinni képes, a ki saját tudományágának területén belül valamely részben kutatni tud. Mert a ki ilyen úton megtanult önállóan tudományosan gondolkodni, az el tud igazodni más fajta kérdésekben is, ha azoknak utána jár, és pedig jobban mint az olyan, a ki egyebet sem tett mint folyton tanulta a tudományt. Mások eszméit is csak az képes helyesen hirdetni, a kinek magának is vannak eredeti eszméi. Csak az ilyen tanár tudja tanítványait gondolkodásbeli önállóságra szoktatni, a mi pedig a legszükségesebb tudósnak és a gyakorlat emberének egyaránt.

A tudósképzés szempontjából Eötvösnek legnevezetesebb alkotása a Mathematikai és Physikai Társulat, mely az ő kezdeményezésére 1891-ben alakult meg. Az volt a czélja, hogy e társulat mintegy önképzőkőre és továbbképző iskolája legyen azon tudósoknak, a kik a tudomány művelése terén a nemzetközi nagystilü tudományos kutatásokig akarnak emelkedni.

Mint akadémiai elnököt is tudományosságunk előbbre vitelének kérdései foglalkoztatták folytonosan. Elnöki működése alatt legfőbb törekvése az volt, hogy a tudományok művelését a magasabb szempontok felé irányítsa s a nagystilü tudományos munkálkodást meghonosítsa. Akadémiai beszédeiben az ő egyszerü és mégis poetikus nyelvén a legkülönbözőbb kérdésekről szól, előbb említett alapgondolatára azonban ujból és ujból visszatér. Folyton hangoztatja, hogy a tudósnak maradandó becsű dolgot kell alkotnia, hogy nem a mára, hanem a jövőre kell függesztenie tekintetét, hogy csak az az igazi tudomány a mely világra szól s azért ha igazi tudósok és — a mi kell — jó magyarok akarunk lenni, úgy a tudomány zászlaját oly magasra kell emelnünk, hogy azt hazánk határán túl is megláthassák és megadhassák neki az illő tiszteletet. [72] Fáj neki, hogy nem tudunk példát mutatni arra, hogy hazánknak egy fia tisztán tudománya által igazán híres és hatalmas lett volna. — Látja azt is, hogy nemzetünk ambiciozus, hogy szeretne az európai kulturállamok között számot tevő szerepet vinni. Épp azért szeretnők már egyszer hallani a diadalmi harsonát, mely a magyar tudomány dicsőségét hirdetve világra szólana. «Igazán diadalünnep akkor lesz, a mikor a magyar tudomány haladását meg fogja látni és gazdagodásnak fogja tekinteni az egész világ.»[56]

EÖTVÖS vágya teljesedett. A diadalmi harsonák ugyan nem szólottak, diadalmi ünnep sem volt, de maga a tény bekövetkezett. Nem egyszerre, váratlan felfedezés gyanánt, hanem apránként és lassan, a mint az az igazán nagy és mélyreható dolgokkal történni szokott. A magyar tudomány haladását meglátta és gazdagodásnak tekinti az egész világ; az a tudós pedig, a ki ezt először megcsinálta, maga EÖTVÖS LORÁND volt. Első sorban neki köszönhető, hogy a nemzetközi tudományban ma már értékelt helyet foglalunk el.

IV.

EÖTVÖS legfontosabb eredeti tudományos kutatásairól a megelőző közlemények szólanak, a melyekben el van mondva e kutatások célja, elve, módszere sőt története is. A következő soroknak összefoglalás a céljuk, a melyekben e vizsgálatok fejlődési menetéről és a korabeli fizikához való viszonyáról lesz szó.

Mi volt a fizika állapota, mik voltak főbb problémái abban a korban, a mikor EÖTVÖS egyetemi tanulmányait végezte? A megelőző husz év uralkodó problémái az energia fogalma körül csoportosultak. Ez az fogalom a fizika legkülönzözőbb ágainak összekapcsolását tette lehetővé és első nagy sikerét a hőtan és a dinamika összekapcsolásával érte el. A thermodinamika első alaptétele, a mely szerint a keletkezett vagy eltűnt hő arányos az eltünt vagy keletkezett munkával a tudományos gondolkodásmódot teljesen átjárta és sok dolgozatnak vált a kiinduló pontjává. Nem egészen így állt a dolog a thermodinamika második alaptételével, a mely azokat a feltételeket adja, a melyek mellett a hő mechanikai munkává alakul át. Elismerte ugyan igazságát mindenki, kinek szava döntő sulyú volt, azonban a törvény nem volt termékeny, kivéve talán a hőgépekre való alkalmazását. Sok dolgozat jelent ugyan meg, a mely vele foglalkozott, de valami nagy sikert egyik sem tudott felmutatni. A kinetikus gázelmélet kérdései is sok kutatót vonzottak, de a dolgozatok jelentékeny része nem tartalmazott egyebet mint a tudatlanságnak mathematikai formulákba való bujtatását.

Az elektromosság tanában sem állt másképp a helyzet. Sokan a fizikának ezen ágában nem láttak mást, mint az alkalmazott mathematikának egyik részét és a fizikai jelentéssel nem sokat törődtek. Az elektromosságról szóló tan legfőbb kérdései elektrosztatikai eszközök, indukcio-együtthatók, az áramelemek hatásának törvényei és a WEBER-féle törvény körül forogtak. Maxwell irányt jelző és új felfogást tartalmazó nagy munkája: A Dinamical Theory of the Electromagnetic Field ugyan már 1864-ben megjelent, de még semmi hatást sem tett.

A fénytanban a rugalmas szilárd éther hipotézise uralkodott és különösen STOKES-nak a rezgések tovaterjedésére vonatkozó kutatásai állottak az előtérben. A kérdések a fényrezgések iránya körül forogtak, vajjon a polározás sikjában vagy arra merőlegesen folynak-e le. A kisérleti eredmények között a színképelemzés és Fizeaunak a fénysebesség meghatározására vonatkozó kutatásai tettek nagyobb hatást, különösen azok, a melyekből kitünt, hogy mozgó közegben más a fénysebesség mint a nyugvóban. Ebben az időben vetődött fel az a kérdés is, vajjon a Föld a fényrezgéseket közvetitő éthert magával viszi-e vagy sem s ha igen egészben-e vagy csak részben.

EÖTVÖS első tudományos dolgozatai még kapcsolatban vannak a korabeli fizikának divatos kérdéseivel, nevezetesen az akadémia elé terjesztett első két dolgozata a Fizeau-féle problémához és a WEBER-féle alaptörvényhez kapcsolódik. Azt keresi ugyanis, hogy a rezgési hatás miképen módosul, ha a rezgést kibocsátó és felvevő testek mozognak, sőt speciálisan is fölveti a kérdést, hogyan módosulnak az égi testekről hozzánk érkező fénymozgások a Föld és az égi testek mozgása következtében, a mely probléma — miként ismeretes — később a relativitás elvének felállításához vezetett. EÖTVÖS elmélkedéseinek eredményeképen a rezgési intenzitás részére egy általánositott képletet vezet le, a melyben a mozgó testek sebességei is szerepelnek. Ezenkivül a vonzó testek vonzása számára is ád egy általánosított képletet, a melyben szintén szerepelnek a mozgó testek sebességei. [6, 18, 19] Szóbeli közlések alapján megállapítható, hogy Eötvös doktori disszertációja és magántanári habilitációs irata, a mely nyomtatásban nem jelent meg, lényegében ugyanezt tartalmazta.

A korabeli fizika kérdéseivel még két dolgozata függ össze: «Adatok az elektrosztatika elméletéhez» (akadémiai székfoglaló értekezés) és «Az elektromos sűritő egy új módjáról, a sűrítő gyűrűről», a melyek nyomtatásban sehol sem jelentek meg.

Ezek a dolgozatai, melyeket úgy tekinthetünk, mint tapogatódzásokat a helyes út irányában, még abban a tekintetben is magukon viselik koruk jellegét, hogy tisztán elméleti érdeküek. Ezentul egész életén át kizárólag három problémának, a felületi feszültség, a nehézség és a mágnesség kisérleti kutatásának szenteli idejét. Hiába jönnek az új nagyszerü fölfedezések, az elektromos hullámok, az elektromos sugárzások, a radioaktivitás, hiába keletkeznek új nagyszerű kilátó pontokat nyujtó elméletek, az elektromágneses fényelmélet, a sugárzás új elmélete, az elektronelmélet, a quantumelmélet, a relativitás elve: ő még elvétve sem fordul feléjük. Pedig bizonyára voltak és vannak rájuk vonatkozó eredeti gondolatai. Szuverén magánosságban megmarad három problémájánál, az anyag részecskéire müködő e három titokzatos erő viszonyainak kikutatásánál. Ezek izgatják képzeletét és ezek serkentik munkára.

A felületi feszültséggel már 1869-ben Königsbergben, Franz Neumann szemináriumában kezdett foglalkozni. Itt gondolta ki új módszerét annak meghatározására, a miért professzora igen megdicsérte. Azután 1873-ban a Természettudományi Társulat szakülésén foglalkozott még a kapillaritás elméletével, 1876-ban pedig az akadémia elé terjesztette módszerének leirását és a vele nyert eredményeket. Dolgozata az ugyanakkor meginduló Műegyetemi Lapok első számában mint első cikk jelent meg.[22]

Háromszor megy még az Akadémia elé ugyane tárgyra vonatkozó dolgozataival, a melyek nyomtatásban sajnos sehol sem jelentek meg, míg végre 1885-ben ugyancsak az Akadémia elé terjesztett dolgozatában megjelenik e téren végzett vizsgálatainak legszebb eredménye, az Eötvös-féle törvény, melyet a következő évben módosított végleges alakjában szövegez meg.[33], [34], [35] Milyen okoskodások révén jutott rá, az elolvasható e füzet elején Tangl Károly közleményében. Itt csak annyit jegyzünk meg, hogy e törvény gyönyörű eredménye az analogián alapuló intuiciónak és a szellem analizáló képességének, melylyel a véges kiterjedésű anyagon tapasztalt igazságot, az anyag legkisebb részecskéiben is meg tudja látni.

Az Eötvös-féle törvényt a korabeli tudomány eleinte figyelmen kívül hagyta, míg Ramsay és Schields 1893-ban némi formai — de különben egészen lényegtelen — módosítást nem végzett rajta.[84], [85], [86]. Azóta e törvény a fizikai chemiának egyik alaptörvényévé vált, a mely a kritikus hőmérséklet és főleg a molekulasúly meghatározása céljából számos kutatót foglalkoztatott. De tisztán elméleti szempontból is nagy jelentőségü e törvény, mert a folyadékok jellemző örök tulajdonságát adja, a mely független az anyagi minőségtől. Ebből a szempontból méltán állítható a közismert gáztörvénynyel egy sorba, a melyhez különben is hasonló. Nagy elméleti jelentőségét mutatja az is, hogy sokan próbálták más elvekből levezetni, így Van der Waals, Einstein, Born és Courant, továbbá Madelung[94], [87], [99], [100], [103]

1886 óta mind e mai napig Eötvös Loránd kizárólag a nehézségi erő és a földi mágnesség kutatásának szenteli egyéb foglalkozásaiból fennmaradt szabad idejét. Hogyan alakultak ki erre vonatkozó gondolatai, arra nézve hiányoznak az adatok. Miként már egyszer említve volt, Eötvös irodalmi közléseiben klasszicizmusra törekszik és csak akkor nyomtatja ki dolgozatát, a mikor kész és tökéletes dolgot tud nyujtani. Lehetséges, hogy az első impulzust a Természettudományi Társulat adta meg 1881-ben, a mikor megbízta, hogy határozza meg a nehézségi gyorsulást Budapesten, a Kárpátokban és az Alföldön. Lehetséges, hogy a kérdést hosszú ideig forgatta elméjében és így jutott rá módszereire.

Az Akadémiának először 1888-ban tesz jelentést munkájáról: «Vizsgálatok a gravitáció jelenségeinek körében» címen. Ezt követi a következő évben «Gellérthegy vonzó erejére vonatkozó vizsgálatok» című, ugyanoda beterjesztett jelentése. E két jelentés azonban nyomtatásban sehol sem jelent meg. 1890-ben két előterjesztést tesz az Akadémiának, az egyiket «A föld vonzása különböző anyagokra», a másikat «Nagy lengésidők méréséről» címen, a melyek már legalább bő kivonatban és azoknak német fordításában megjelentek, azonban az eszközök és a módszer részletes leírását nem tartalmazzák.[42–45]

Az első idevonatkozó részletes dolgozata 1896-ban jelent meg. «Vizsgálatok a gravitácio és a mágnesség köréből» címen, mely rövid, nem is egészen három ívnyi terjedelemben az új dolgoknak sokaságát foglalja magában.[57], [58] Alig van a fizikai irodalomban még egy értekezés, a mely ilyen kis terjedelemben ilyen sokat tartalmazna. Igaza van az akadémiai jelentésnek, a mikor az 1897-ik évi nagyjutalom odaítélésekor azt mondja, hogy ritkán nyerte ernyedetlenebb buzgalom a megérdemelt jutalmat, mint a jelen esetben s hogy az korszakot alkot, mert lehetővé teszi a foglalkozást oly feladatokkal, a melyek eddig úgyszólván hozzáférhetetlenek voltak.

Eötvös méréseinek véghezvitelére később valóságos expediciókat szervezett, melyekhez a költségeket eleinte az Akadémia, illetőleg Semsey, később az állam adta. Ezek az expediciók bejárták a Sághegyet, a Balatont, a Nagyalföldet, Fruska Gorát, Erdélyt, a Morva völgyét és sok helyen meghatározták a nehézségi erő és a földi mágneses erő elemeit.

A külföld figyelme először 1900-ban fordult Eötvös ezen vizsgálatai felé, a mikor Eötvös a párisi fizikai kongresszuson jelentést tett róluk.[66] Az itt-ott jelentkező szkepsis azonban valóságos lelkesedéssé változott 1906-ban a nemzetközi földmérők budapesti kongresszusán, a hol Eötvös bemutatta méréseinek addigi eredményeit.[76] Még kétszer ment a nemzetközi földmérők kongresszusa elé méréseinek eredményeivel.[78, 80] Ez idő óta e kutatásokat látják, értékelik és a tudomány gazdagodásának tekintik mindenütt, a hol a tudomány alapvető kérdései érdeket keltenek.

Eötvös Loránd 1917-ben a Mathematikai és Physikai Társulat ülésén ismét egy, a nehézségre vonatkozó egészen új törvényt mutatott be, melyet még sehol sem publikált. Kimutatta ugyanis, hogy a Föld felületén mozgó testek nehézsége nem marad állandó, hanem változik, még pedig a nyugatra mozgóké nagyobbszik, a keletre mozgóké pedig kisebbszik. A megokolás igen egyszerű. Ha ugyanis a Föld felületén valamely test nyugat felé mozog, akkor — minthogy a Föld nyugatról keletre forog — az illető testnek az állócsillagokra vonatkoztatott sebessége csökken és így a Föld forgása folytán fellépő középpontfutó erő is csökken, tehát a nehézségi erőnek nagyobbodnia kell. Ellenkezőleg történik a kelet felé mozgó testekkel.

Az alkalmat e tétel felállítására Heckernek a nehézségi erő változásaira vonatkozó mérései adták. Hecker ugyanis több éven át mérte a nehézségi erő változását a nagy oceánokon; méréseit mozgó hajókon végezte. Az eredmények átszámításánál nem vette tekintetbe a hajó mozgási állapotát.[111] Eötvös figyelmeztetésére megismételte méréseit a Fekete-tengeren, miközben Eötvös következtetéseinek helyes voltáról meggyőződött.[112]

A fentebb kimondott igazság demonstrálására és a nehézség csökkenésének vagy nagyobbodásának lemérésére Eötvös egy forgó mérleget is szerkesztett.

Eötvös fölsorolt méréseinek elvei, módszerei, eszközei és céljai le vannak írva Tangl Károly, Pekár Dezső, Fekete Jenő és Rybár István föntebbi közleményeiben. Az ott előadottakhoz még néhány szempontot fűzünk hozzá, a melyek e mérések jelentőségére és a tudományban való szerepére vonatkoznak.

Eötvös e mérései öt csoportba sorozhatók, melyek a következők:

1. a földi nehézségi erő térbeli változásai,
2. a földi mágneses erő térbeli változásai,

3. a gravitációra vonatkozó általános vizsgálatok,
4. a gravitáció és a tétlenség arányosságának kimutatása,
5. a mozgó testek nehézségének a sebességtől függő változása.

Az 1. csoportba tartozó mérések a legterjedelmesebbek, tudományos és gyakorlati szempontból legfontosabbak és legnagyobb jelentőségűek. Először is azért, mert a Föld alakja, a geoid számára új megközelítési fokozatot adnak. E mérések alapján lehetséges lesz a geoid egészen részletes felmérése, a mi az ellipszoidhoz képest éppen akkora előrehaladást jelent, a mekkora volt az ellipszoid a gömbalakhoz képest. Másodszor legnagyobb jelentőségüek e mérések azért, mert következtetéseket engednek meg a földalatti tömegek elhelyezésére és minőségére. E mérések alapján a tudomány biztosabb alapokra fektetheti a Föld felépítésének, architekturájának tanát, a mit a geofizika, a geologia és a földrengések tana kellően felhasználhat gyakorlati célokra és új, eddig nem is sejtett törvényszerűségek felállítására. Harmadszor nevezetesek e mérések azért is, mert oly tudományos programmot tűznek ki, a melyen előreláthatólag hosszú évtizedeken, sőt évszázadokon át fog dolgozni a tudomány. A mi saját külön magyar szempontunkból tekintve pedig örökké nevezetesek e mérések, mert ez az első eset, a mikor egy nagyszabású, világra szóló tudományos problema magyar agyból fakadva, itt kigondolt és elkészitett eredeti eszközökkel, tisztán hazai szellemi és műszaki erők által, hazánk kerületén oldatott meg először.

A 2. csoportbeli mérések is tartalmaznak elvi szempontból új dolgot, a mennyiben a földi mágnesség térbeli változásainak feltüntetésére alkalmazott eddigi módszerek elégtelen voltát mutatják. Ezenkívül a nehézségi mérések szükséges kiegészítését alkotják s mint ilyeneknek is nagy jelentőségük van; lehetséges továbbá, hogy idővel a földi mágnesség eloszlására vonatkozó új törvényszerűségekhez vezetnek. Új dolog a mágneses transzlatometer is, a mely a testek mágneses állapotára vonatkozó mérések pontosságát igen nagy mértékben fokozza.

A 3. csoportbeli mérések között mindenekelőtt új dolog a gravitációs állandó meghatározására szolgáló dinamikus módszer, a mellyel akkora pontosságot lehet elérni, mint semmi féle más módszerrel. Egészen újak továbbá azok a vizsgálatok, melyeket Eötvös a gravitációs erő abszorpciójára vonatkozólag végzett. Újak végül a gravitációs kompenzatornak és multiplikatornak nevezett eszközök, a melyek szinte határtalanul érzékenyek.

Fizikafilozófiai szempontból igen nagy benyomást keltettek Eötvösnek 4. csoportbeli mérései, mert Einstein az általános relativitás elvét és a tömegvonzásnak új elméletét Eötvös e méréseinek eredményeire alapította.[131] Eötvös e méréseivel megmutatta, hogy a Föld nehézségi erőterében a különböző tulajdonságú testek gravitációs tömege arányos tétlen tömegével.[42, 79] A mechanikában a test tétlen tömegének egészen általános jelentése van, mert ez határozza meg a test mozgásbeli viselkedését bármilyen eredetű erővel szemben. Ezzel szemben a test gravitációs tömege mindezideig speciális jelentésű volt, mert a test viselkedését egy egészen speciális erőtérben, tudniillik a gravitációs erőtérben határozza meg. A két fajta tömeg meghatározása is egészen különböző, a tétlen tömeget Newton második törvénye, a gravitációs tömeget pedig Newton gravitációs törvénye adja. Már most fizikafilozófiai szempontból egészen sajátságos és érthetetlen tünemény, hogy e kétféleképpen meghatározott tömeg minden testnél ugyanaz. Ezt az érthetetlenséget el lehet tüntetni, ha föltesszük, hogy a tömegvonzás nem speciális erő, a milyen a mágneses vagy elektromos erő, hanem a testek egészen általános tulajdonsága, olyan, a minő a tétlenség vagy egyik megnyilvánulása, a középpontfutó erő. Einstein gravitációs elméletének ebben fekszik a lényege. Érdekes már most az, hogy Eötvös Loránd már régóta a tömegvonzásnak ezt a többi erőtől elütő szerepét fölfogta és érezte, mert előadásaiban olyan definiciót szokott neki adni, a mely lényegét tekintve Einstein elméletével egyezik.

Hasonlóképen előrelátható, hogy Eötvös 5. csoportbeli eredményeinek is nagy szerepük lesz a tudományos elmélkedésekben, ha általánosan ismertesekké válnak. Eötvös forgó-mérleg kisérlete méltán állítható FOUCAULT klasszikus ingakisérletével egy sorba. Jelentősége azonban ennél is nagyobb, mert FOUCAULT ingakisérlete csak a Föld forgási sebességét és a testek tétlenségét kapcsolja össze, holott EÖTVÖS kisérlete ugyanazokhoz a nehézséget is hozzáfűzi.

Értékeljük most EÖTVÖS munkásságát ismeretelméleti szempontból. Abban a korban, melyben EÖTVÖS egyetemi tanulmányait folytatta, általában azt a benyomást lehetett nyerni, hogy tudományos hírnevet elsősorban elméleti munkával lehet szerezni, kisérleti úton pedig csak úgy, ha sikerül valamely mérést úgy tökéletesíteni, hogy valamely fizikai állandó az eddigieknél nagyobb pontossággal legyen meghatározható. Maga KIRCHHOF, bár tudta értékelni a tisztán kisérleti vizsgálatokat, abban a meggyőződésben volt, hogy azok nem hozhatnak napfényre oly dolgokat, melyek miatt az akkori elméleti felfogásokat meg kellene változtatni. A fiatal fizikus általában azt a meggyőződést szerezte, hogy a természet nagy törvényei immár ismeretesek, hogy a nagy felfedezések kora lejárt és hogy a kisérletező legfölebb azt érheti el, hogy egymással versenyző elméletek között dönthet vagy hogy sikerül valamely maradékjelenséget találnia, amelylyel az elméletet kisebb-nagyobb mértékben kiegészítheti.

Ez a kor tehát a tudós legmagasabb képességét az analizáló szellemben látta, a mely ki tudja látni a jelenségből az ismert törvényszerűséget vagy az ismert törvényszerűségből ki tudja hüvelyezni a speciális esetet, a mely a természetben előfordulhat.

E korszak után a mult század utolsó két évtizedében és a jelen század első évtizedében jöttek az új nagy fizikai felfedezések, melyek legtöbbje az intuiciónak köszöni létrejöttét, a minek hatása alatt a felfedezések ismeretelméleti értékelése megváltozott. Az analizáló képesség elvesztette elsőrendű helyét és kénytelen volt azt átengedni az intuiciónak.

E viszonyok hatása alatt az elméleti munkálkodás is egészen új irányt vett fel. A régi elméletek hitelüket vesztették és hivatott és hivatlan gyártotta az új elméleteket. Az elméleti fizikában tehát a szinthetikus vagy konstruktiv szellem foglalta el a tért. Új nagy elméletek állítódtak fel, melyek nem a jelenségek és törvényeik analiziséből születtek meg, hanem analógiák alapján gondoltattak ki.*

Ebben a nagy evolucióban Eötvös ismét megmaradt szuverén módon úgyszólván egyedül. Ő maga is klasszikus képviselője a Kirchhoff-Helmholtz-Neumann-W. Thomson-féle analizáló szellemnek. Intuicióval is dolgozott, a minthogy azok is dolgoztak, hiszen különben nem hozott volna létre egészen új dolgokat, azonban minden munkáját, úgy a hogy az végső formájában a világ előtt megjelent, a tökéletes analizáló szellem jellemzi. Nincs nála sehol konstrukcio, nincsenek feltevések, melyeket bizonyos jelenség-complexum észbeli előállítására kigondolt volna. Mindenütt szétbontja a jelenséget vagy törvényét és azok között állapítja meg az igazságot. Hatalmas analizáló szelleme meglátta a homogénnek képzelt nehézségi erőtér apró egyenetlenségeit és a legmerészebb gondolat volt: lehetségesnek tartani oly finom méréseket, milyeneket ember még nem végzett. Ugyanez az analizáló szellem meg tudta látni az összefüggéseket a torziós inga adatai és a nehézségi erőtér térbeli változásának jellemző adatai közt. Igazán érdekes és említésre méltó körülmény, hogy a konstruktív szellemnek modern képviselője, Einstein ismételten Eötvösre, az analitikusra támaszkodik. Ez mutatja, hogy jó utat jelez mindegyik irány, csak tudósnak kell rajta járnia és az igazságot kell keresnie.

Az igazság után való kutatásainkban szükség van úgy a merész konstrukciókra, mint a mély analizisre. Csak bizonyos konsrtukciókra támaszkodva hüvelyezheti ki az analizáló szellem a maga igazságait. Viszont ezek az igazságok örökéletüek, míg a konstrukciók idővel össze szoktak omolni. Eötvös Lorándnak a

---

*Hogy a modern fizikából mennyire kiveszett az analizáló szellem, mutatja Hecker esete, ki bár életét a nehézségi erőnek szentelte, még sem látta meg, hogy a mozgó testek nehézsége megváltozik. Sőt Eötvös figyelmeztetése után is előbb híres fizikusok elé terjesztette a problemát megoldás végett.

nehézségi erőre és a felületi feszültségre vonatkozó igazságai ezer év mulva ép oly igazak és értékesek maradnak, mint amilyenek ma, még abban az esetben is, ha akkorára a tömegvonzásra és az anyag legkisebb részeire vonatkozó mai fogalmaink egészen meg is szünnek. Ellenben lehetséges, sőt nagyon is valószínű, hogy ezer év mulva a fizika nem fogja ismerni a quantumelméletet, az elektront, a molekulát, az éthert és annak elektromágneses rezgéseit, a relativitás elvét.

V.

Eötvös az igazság után való kutatásban mindig magasabbra és magasabbra jut. Az igazságot nemcsak a saját szűkebb kutatási területén belől látja meg, hanem mély analizáló látása a tudomány és az élet nagy problemáinak mélységeibe is behatol. Dolgozatai, különösen pedig akadémiai beszédei mély-értelmű gondolatokat tartalmaznak. Ezek között különösképen azok érdekelhetnek bennünket, a melyek a tudósokra és a tudományra vonatkoznak.

Miként analizáló képességben méltó társa Henri Poincaré, ő is az igazság kutatásában látja a célt, melyért érdemes küzdeni. «A tudományban haladni csak az tud, a ki az igazságot magáért az igazságért és nem mellékérdekből keresi.»[46] A látszattudományt, az alakoskodást, a stréberkedést lelke mélyéből utálja. Elfordul azoktól is, a kik tiszta formalizmussal csalják önmagukat és a világot. «Az emberiség fenkölt törekvéseinek nagy titkát — írja, — furfanggal ne keressük.»[46]

Miként föntebb láttuk kutatásaiban, analitikus szellemének megfelelően tényleges összefüggések megvizsgálására és megállapítására törekszik, tehát a józan empirizmus híve, a tudományra és az emberi életre vonatkozó felfogásait pedig a legnemesebb ideálizmus hatja át. «Nemes érzés és eszményi felfogás nélkül nem létesült még semmi a földön.» «Az ember eszményi törekvéseinek szelleme szüli a tudományt» Az észnek magában nincsen teremtő ereje, csak a szív adhatja azt neki. «A tudományos törekvések meg nem becsülése nemcsak az emberiség legmagasabb eszményét rontaná le, hanem meddővé tenné magát a gyakorlatot is.»[46]

Látja azt is, hogy tudományos és költői igazságok tulajdonképen ugyanabból a forrásból fakadnak. «A titkok honában többre megy a költő mint a természettudós.»[46] «A tudomány emberének érzelmi világa a költőétől alig különbözik egyébben, mint abban, hogy eszményeit versekben kifejezésre juttatni nem tudja.»[64] «A természettudósnak erőt inkább a gondolkodásnak az a józan szabadsága ád, mely nem akadályozhatja haladását, még ugrásait, repüléseit sem, de a mely maga kérlelhetetlen elfogulatlansággal hívja fel az itélet szigorát arra, hogy eredményeinek értékét megállapitsa. A fellegekben jár néha úgy mint a költő, de meg tudja mondani mindig, milyen magasra emelkedett.»[50]

«Miért mind e fáradozás? Miért nem elégszik meg a tudós avval a néki adott leírhatatlan gyönyörűséggel, melyet minden, még a legcsekélyebb igazságnak felfedezése is nyujt?» — veti fel tovább a kérdést. Feleletet a következőképen ád. «Mulékony természetünkben arra törekszünk, hogy valami maradandót alkossunk. Enyészet vesz körül minden oldalról, alig van időnk arra, hogy a virág megnyilásában gyönyörködhessünk s azt már fonnyadni látjuk, hogyne kecsegtetne ebben a mulékony világban az örökzöld babér? Akár a költő és a művész, ki képzeletének sugallatára alkotja műveit, akár a higgadtabb és gondolkodásának fegyelmezettségére büszke tudós is egyaránt ilyent vár jutalmul, a mikor szellemi munkájának eredményeit közzé téve, a maga alkotását s azzal a maga nevét az enyészettől megóvni törekszik. Nemcsak a jövő órának, nem is csak a jövő évnek, vagy egy jövő századnak ir, biztatja őt a hit, hogy műve fennmaradhat addig, míg e földön emberek élnek. E hit nélkül talán nem is volna tudomány s az emberiség haladása csak azon ügyességek fejlesztésében nyilatkoznék meg, melyekkel a pillanat szükségleteit ki tudja elégíteni».[71]

A ki így látja a tudomány, a költészet, a művészet és általában az osztatlan egy emberi szellem különböző megnyilvánulásainak viszonyát, az nem lesz elfogult a saját tudományával szemben. Őszinte lelkesedéssel bámulja GALLILEI mechanikájának és NEWTON gravitációs elméletének grandiozus épületét. «A természettudományoknak nincs más ilyen fényes lapjuk; vannak ugyan meglepőbb kisérleti eredményei, vakmerőbb következtetései és pontosabb mérései, de nem jött még el mester, ki azokból olyan egészet tudott volna alkotni, mint a milyen naprendszerünk mechanikája».[50] Látja azt is, hogy ennek a mechanikának egyenes örököse a fizika, mely a földi jelenségek változatos sokaságában a legegyszerűbbeket tartotta fenn magának. Állítja, hogy a fizika a természettudományokban az útmutató szerepére van hivatva, úgy hogy bizonyos mértékben minden természettudósnak fizikusnak kell lennie. Azonban látja egyszersmind a tudománynak korlátolt emberi voltát. «Bármenynyire fejlődnek is fizikai elméleteink, mégis mindig oly feltevésekre fognak támaszkodni, melyek tovább nem bizonyíthatók.»[25] «A tudomány sohasem fogja megtalálni azt a formulát, mellyel, annak szükséges voltát bizonyítani tudná. Sőt talán megszünnék a tudomány, ha a rejtély kulcsát megtalálnók.»[46] Különösen elitéli azokat, kik az emberi szellem minden nagy problemáját a tételes tudomány által vélik elintézettnek. «A jelenkor egyik legcsodálatosabb tévedésének kell tekintenünk, hogy annyian hallgatnak azon álpróféták szavára, kik a vallás dogmái helyett természettudományi dogmákat kinálgatnak középkori türelmetlenséggel, de történeti jogosultság nélkül. Az igazi természettudós az ilyen önámítástól távol áll, tudja, hogy osztályrészül a természet végokaival szemben a lemondás jut, de azért nem csügged el mint Faust, ki véges munkáért végtelen jutalmat követelt, hanem ernyedetlenül halad előbbre az elérhetetlen cél felé s örömöt talál magában a kutatásban s azon eredményekben, melyeket az emberiség jólétének előmozdítására értékesít».[25]

A fölsorolt szemelvények nemcsak a magas szempontú filozófusnak, hanem a költői léleknek is a megnyilatkozásai. Más irataiban is sok költőiséget találunk. A mikor 1901. évi akadémiai megnyitó beszédében a Föld alakjának kérdését fejtegeti, igazi költői szárnyalású szavakban ad számot a saját kutatásairól. «A középkor előítéleteinek és csodaszereinek lomtárából előkerestem a varázsvesszőt s azt nem imádsággal, nem is ördöngősséggel, hanem a vesszőhöz, melyről a varázs az idők folyamán amúgy is lekopott, jobban illő mechanikai érvelésekkel arra bírtam, hogy feleletet adjon. Az igaz, hogy nem arra kértem, hogy rejtett kincseket mutasson; arra sem, hogy ellenségeimet, ha vannak, megjelölje; csak azt kivántam tőle: engedjen bepillantani annak az erőnek rejtélyeibe, a mely e földön mindent mozgat, mindennek kijelöli helyét.» Majd később, mikor leírja torziós ingáját: «Egyszerű mint Hamlet fuvolája, csak játszani kell tudni rajta, s úgy mint abból a zenész gyönyörködtető változatokat tud kicsalni, úgy ebből a fizikus a maga nem kisebb gyönyörűségére, kiolvashatja a nehézségnek legfinomabb változásait». Majd később: «Azzal a kiváncsisággal, melylyel az utazó ismeretlen vidékekre jutván, annak hegyeit és völgyeit kutatja, jártam én is a Balatonon. Az én ismeretlen vidékem ott feküdt mélyen a jég tükre alatt, nem láttam s nem is fogom látni soha, csak eszközöm érezte meg és mégis milyen nehezen váltam el tőle . . . A mikor onnét eljöttem s különösen a mikor megfigyeléseim adatait rendezve az ilynemű kutatások helyességéről meggyőződtem, akkor egy új és nagyobb vállalkozás terve érlelődött meg agyamban. Itt lábaink alatt terjed el, hegyek koszorújával övezve, az Alföld rónasága. A nehézség azt lesimitván, kedve szerint formálta felületét. Vajjon milyen alakot adott neki? Micsoda hegyeket temetett el és mélységeket töltött ki lazább anyaggal a míg létrejött ez az aranykalászokat termő, magyar nemzetet éltető róna? A míg rajta járok, a míg kenyerét eszem, erre szeretnék még megfelelni.»[69]

Ez utóbbi idézet azt sejteti velünk, hogy hazánk földje talán nem egészen véletlenül került bele a tudomány történetébe és mutatja, hogy az elvont kérdésekkel foglalkozó fizikusnak gondolatvilága mennyire összenőtt a hazai földdel, melyen él. A hazaszeretet EÖTVÖS LÓRÁNDnál apai örökség s bár talán sohasem hallott senki az ő szájából hazafias frázist, ma már világos lehet mindenki előtt, hogy hazájáért dolgozott és dolgozik.

Apai örökség nála a költői hajlam is. Fiatal korában verseket is írt, a melyeket GYULAI PÁL magasra értékelt. De ettől eltekintve is, az igazi tudósok mindig poétalelkek, kikben van «látóképesség». Látóképessége olyan dolgoknak, melyeket közönséges szem észre nem vesz. Ebből a szempontból az igazi tudós munkájában több költészetet találunk, mint akárhány költőében, viszont az igazi költő sokszor több és mélyebb igazságot hirdet, mint akárhány tudós. Mert nemcsak a mértékre szabott sorok adják a poézist, hanem valami más sokkal magasabb és elvontabb dolog. Talán így lehetne kifejezni: az eszmék és gondolatok harmoniája a világgal. «A harmonia az egyetlen objektív valóság, az egyetlen igazság és minden szépnek forrása», mondja Poincaré.

E gazdag harmonia EÖTVÖSnek nemcsak tudományában és filozófiai felfogásában, hanem egész életében is megtalálható. Testét gyermekkorától kezdve mindenféle sporttal, különösen pedig hegymászással fejlesztette és tartotta frissen, származásának tradicióit a művelődésért, emberiségért és igazságért való őszinte rajongással kapcsolta össze, mélyen látó értelme melegen érző szívvel párosul. Mindezekből élte mint tökéletes harmonia szövődik egybe.

Mi most a világháborúnak rettenetes zűrzavaraiban élünk, melyet az ő látóképessége a világ folyásának menetéből kisejtett. 1903-ban tartott akadémiai megnyitó beszédében ugyanis ezt mondja: «A gyűlölség ember és ember között, nemzet és nemzet között, ez a koronkint szunnyadó, de újra meg újra egész nyerseségében kitörve, romboló erő sokkal inkább veszélyezteti a tudományos erősséget, mint a Krakatoa vagy a Mont Pelée. A multak keserű tapasztalataiból vonva következtetést a jövőre, bizony alig remélhetjük, hogy az emberiség minden megszakadás nélküli folytonosságban haladhasson művelődésének közös céljai felé.»[71]

A világháborúnak e rettenetes zűrzavarai között EÖTVÖS tudományos eredményei megadják nekünk azt a megnyugtató öntudatot, hogy e földet, melyen élünk, a szellem erejével igyekeztünk meghódítani, harmoniákban gazdag élete pedig erőt, hitet ébreszt és reményt nyujt arra, hogy eljő majd a kor, a mely nem azt fogja tekinteni a közélet emberének, a ki vezérszerepet igyekszik szerezni a közvélemények küzdelmében, hanem meg fogja becsülni és követni fogja azokat, a kik a tudományos munkásság nehéz feladatát teljesítik.

Mikola Sándor.

IRODALOM.*

BÁRÓ EÖTVÖS LORÁND DOLGOZATAI.

1. A szkarisorai jégbarlang. Vasárnapi Ujság, 1869, 49. sz. (leírás).

2. Doppler elve s alkalmazása a hang- és fénytanban. Term. tud. Közl. 3. k. 1871, 1—11. o. (ismertetés).

3. Az északi fény színképéről. U. o. 250—253. o. (ismertetés).

4. A fluorescentia tanának egy törvényéről. U. o. 261—263. o. (ismertetés).

5. Indítvány országos érdekű kutatások eszközlésére vonatkozólag. U. o. 470—471. o.

6. A rezgési elméletből következő távolbani hatás törvényéről. Az akadémia elé terjesztett tanulmányának kivonata. A m. tud. akad. Értes. V. k. 1871, 207—212. o.

7. A Nap physikai alkatáról. Term. tud. Közl. 4 k. 1872, 241—253. o. (ismertetés).

8. Van-e a Holdnak befolyása az időjárásra? U. o. 35. o. (ismertetés).

9. Újabb Bunsen-féle galván elemek. U. o. 120. o. (ismertetés).

---

* Ebbe az összeállításba Eötvös dolgozatai közé fölvettük nemcsak a nyomtatásban tényleg megjelent dolgozatait, hanem lehetőleg minden előadásának és akadémiai előterjesztésének cimét, melyek eredeti kutatásokon alapuló, sokszor igen nevezetes tudományos eredményeket tartalmaztak, ha azok nincsenek is meg sehol nyomtatásban. Fölvettük továbbá azokat a népszerű ismertető cikkeket is, melyeket Eötvös pályájának elején a Term. Tud. Közlönybe irt. A Term. Tud. Közl. tárgy- és címjegyzéke az itt felsoroltakon kívül még néhány cikket közöl báró Eötvös Loránd neve alatt, minthogy azonban e cikkek alól hiányzik Eötvös neve, e fölsorolásból kihagytuk. Az Eötvösre vonatkozó irodalom természetszerűleg nem teljes, de felvettünk mindent, a miről tudomásunk volt.

10. A vízi növények életéből. A Term. tud. Társulat szakülésén tartott előadás. Rövid kivonat. U. o. 160. o.

11. A víz színéről. A Term. tud. Társulat szakülésén tartott előadás. U. o. 190. o.

12. A chlorophyll természettani szempontból. U. o. 192. o. (ismertetés).

13. A Jungfrau megmászása. U. o. 383—385. o. Tyndall: Hours of exercise in the Alpes című munka egy részének fordítása.

14. A fény kettős töréséről. A Term. tud. Társ. szakülésén tartott előadás. Rövid kivonat. Term. tud. Közl. 5. k., 1873, 39. o.

15. Az égi testek látszólagos alakjáról. Ugyanaz ugyanott, 39. o.

16. A capillaritas elméletéről. Ugyanaz ugyanott, 245. o.

17. Helmholtz: Népszerű tudományos előadások. Fordították Eötvös Loránd és Jendrásik Jenő. Előszó báró Eötvös Lorándtól. A Term. tud. Társ. Könyvkiadó Vállalata. VI. k. 1874.

18. A rezgések intensitása tekintettel a rezgési forrásnak és az észlelőnek mozgására. Az akadémia elé terjesztett dolgozat. Ért. a math. tud. köréből III. k. 1875, 1—23. o. Ugyanennek kivonata A m. tud. akad. Értes. VIII. k. 1874, 147—150. o.

19. Über die Intensität der wahrgenommenen Schwingungen bei Bewegung der Schwingungsquelle und des Beobachters. Pogg. Ann. d. Phys. 152. k. 1874, 513—535. o. (a megelőzővel tartalomban egyezik).

20. Válasz Ketteler néhány észrevételére az észlelt rezgések intensitása felett. A m. tud. ak. Értes. IX. k. 1875, 157—162. o.

21. A surlódásról. Népszerű természettudományi előadás. Megemlítve Term. tud. Közl. 7. k. 1875. 212. o.

22. Új módszer a capillaritasi tüneméyek tanulmányozására. Az akadémia elé terjesztett dolgozat. Műegyetemi Lapok I. k. 1876, 2—10. o.

23. Könyvismertetések. U. o. 56—57, és III. k. 1878, 124—126. o.

24. Fizikai feladatok. U. o. 95. o., 288. o. és II. k. 1877, 96. o.

25. A távolbahatás kérdéséről. Fölolvasás az akadémia ünnepélyes közgyűlésén. A m. tud. akad. Évkönyvei. XVI, k. 1877, 57—68. o.

26. Adatok az elektro-statika elméletéhez. Akadémiai székfoglaló értekezése. Rövid kivonatban A m. tud. akad. Értes. XIV. k. 1880, 4—5. o.

27. Az elektromos sűrítő egy új módjáról a sűrítő gyűrűről. Az

akadémia elé terjesztett tanulmányának rövid kivonata A m. tud. akad. Értes. XIV. k. 1880, 157—160. o.

28. A cseppekről. Népszerű természettudományi előadás. Rövid kivonata Term. tud. Közl. 13. k. 1881, 394. o.

29. Jelentés a Bugát-féle alapítványból kitűzött physikai pályázat eredményéről (Czógler és Heller a physika történetéről szóló munkáinak bírálata), Schuller Alajossal együtt. Term. tud. Közl. 13. k. 1881. 91—92. o.

30. Kutatások a kapillaritas terén. Az akadémia elé terjesztett dolgozatának rövid kivonata A m. tud. akad. Értes. XVI. k. 1882, 48. o.

31. Egy új electro-kapillár mozgatóról. Az akadémia elé terjesztett dolgozatának rövid kivonata. U. o. 106—107. o.

32. Tanulmányok a folyadékhártyák feszültségéről. Az akadémia elé terjesztett dolgozata. Kivonatban sincs meg. Címe A m. tud. akad. Értes. XVI. k. 1882, 225. o.

33. A folyadékok felületi feszültségének összefüggése a kritikai hőmérséklettel. Az akadémia elé terjesztett dolgozat. Math. és Term. tud. Ért. III. k. 1885, 54—73. o.

34. A folyadékok felületi feszültsége és vegyi alkata közt fennálló kapcsolatról. Math. és Term. tud. Ért. IV. k. 1886, 34—41. o.

35. Über den Zusammenhang der Oberflächenspannung der Flüssigkeiten mit ihrem Molecularvolumen. Ann. d. Phys. u. Chem. Neue Folge XXVII. k. 1886, 448—459. o. (a megelőzővel tartalomban egyezik). U. a. röviden Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn IV. k. 1886, 33—44. o.

36. Néhány szó az egyetemi tanítás kérdéséhez. (Nyilt levél Trefort Ágoston vall. és közokt. miniszter úrhoz). Budapesti Szemle 50. k. 1887, 307—321. o.

37. Vizsgálatok a gravitatio jelenségeinek körében. Az akadémia elé terjesztett dolgozata. Rövid kivonata Term. Tud. Közl. 20. k. 1888, 477. o.

38. A fizika jelenlegi állásáról és búvárlati módszereiről. 10. előadás a Term. tud. Társ.-ban 1888-ban. Megemlítve Term. Tud. Közl. 21. k. 1889, 66. o.

39. A Szt. Gellérthegy vonzó erejére vonatkozó vizsgálatok. Az akadémia elé terjesztett dolgozata. Rövid kivonata Term. Tud. Közl. 21. k. 1889, 198. o.

40. Elnöki megnyitó beszéd. A m. tud. akad. Értes. XXIII. k. 1889, 145—149. o.

41. Jelentés a fizikai kísérletek pályázatára beérkezett munkáról (Antolik Károly munkája). Schuller Alajossal együtt. Term. tud. Közl. 22. k. 1890, 100—102. o.

42. A Föld vonzása különböző anyagokra. Az akadémia elé terjesztett dolgozatának kivonata. Akad. Értes. I. k. 1890, 108—110. o.

43. Über die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen. Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn. VIII. k. 1890, 65—68. o. (a megelőzővel tartalomban egyezik).

44. Nagy lengésidők méréséről. Az akadémia elé terjesztett dolgozatának kivonata. Akad. Értes. I. k. 1890, 274. o.

45. Messung von langen Schwingungsdauern, Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn VIII. k. 1891, 450—451. o. (a megelőzővel tartalomban egyezik).

46. Elnöki megnyitó beszéd. Akad. Értes. I. 1890, 325—335. o.

47. Elnöki megnyitó beszéd. Akad. Értes. II. 1891, 321—325. o.

48. Az egyetem feladatáról. Rektori beszéd. Term. tud. Közl. 23. k. 1891, 506—514. o.

49. A folyadékhártyák feszültségének megmérése. A Math. és Phys. Társ. ülésén tartott előadás. Rövid kivonata Term. tud. Közl. 24. k. 1892, 211. o.

50. A fizika tanításáról az egyetemen. Az egyetem ujjáalakításának évfordulója ünnepén felolvasott rektori beszéd. Term. tud. Közl. 24. k. 1892, 296—301. o.

51. Elnöki megnyitó beszéd. Akad. Ért. III. k. 1892, 301—303. o.

52. Elnöki megnyitó beszéd a Széchenyi ünnepen. Akad. Értes. IV. k. 1893, 57—62. o.

53. A tömegvonzás állandójának meghatározása. A Math. és Phys. Társ.-ban tartott előadás, megemlítve Math. és Phys. Lapok II. k. 1893, 398. o.

54. Elnöki megnyitó beszéd. Akad. Értes. IV. k. 1893, 315—316. o.

55. Kísérletek az elektromos erő és az elektromos ellenállás absolut meghatározására és a földi tárgyak tömegvonzásának kimutatására. A Math. és Phys. Társ.-ban tartott előadás. Rövid ismertetése Term. tud. Közl. 25. k. 1893, 267. o.

56. Elnöki megnyitó beszéd. Akad. Értes. VI. k. 1895, 321—325. o.

57. Vizsgálatok a gravitatio és a mágnesség köréből. Az akadémia elé terjesztett dolgozat. Math. és Term. tud. Ért. XIV. k. 1896, 221—266. o.

58. Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus. Ann. d. Phys. u. Chem. Neue Folge, 59. k. 1896, 354—400. o. (a megelőzővel tartalomban egyezik).

59. Jedlik Ányos emlékezete. Emlékbeszéd az akadémiában. Akad. Ért. X. k. 1897, 273—289. o. és Term. tud. Közl. 29. k. 1897, 387—402. o.

60. Elnöki megnyitó beszéd. Akad. Értes. IX. k. 1898, 269—272. o.

61. A mágneses haladtató erőről. A Math. és Phys. Társ.-ban tartott előadás. Rövid ismertetése Term. tud. Közl. 31. k. 1899, 304. o.

62. A mágnesrudak polusainak meghatározásáról. A Math. és Phys. Társ.-ban tartott előadás. Megemlítve Math. és Phys. Lapok VIII. k. 1899, 420. o.

63. Elnöki megnyitó beszéd. Akad. Értes. X. k. 1899, 265—270. o. Ugyanez megjelent A tudományos akadémiák létjoga címen Term. tud. Közl. 31. k. 1899, 321—326. o.

64. Elnöki megnyitó beszéd. Akad. Értes. XI. k. 1900, 289—292. o.

65. A mágnesi inklináczióról a mult időben. A Math. és Phys. Társ.-ban tartott előadás. Kivonata Term. tud. Közl. 32. k. 1900, 246. o.

66. Étude sur les surfaces de niveau et la variation de la pesanteur et de la force magnétique. Rapports présentés au congrès international de Physique réuni à Paris en 1900, III. k.

67. A nehézség és a mágneses erő nivófelületeinek és változásainak meghatározásáról. Math. és Phys. Lapok. IX. k. 1900, 361—385. o. (a megelőzővel tartalomban egyezik).

68. Megfigyelések a Balaton jegén. A Math. és Phys. Társ.-ban tartott előadás. Rövid ismertetése Math. és Phys. Lapok X. k. 1901, 256. o.

69. Elnöki megnyitó beszéd. Akad. Értes. XII. k. 1901, 261—269. o. Ugyanaz megjelent A Föld alakjának kérdése címén Term. tud. Közl, 1901, 321—328. o. továbbá kivonatban német nyelven a Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn XIX. k. 1901, 430—440. o.

70. A nehézségről és a földi mágneses erőről. A Term. tud. Társ.-

ban tartott 6 előadás. Megemlítve Term. tud. Közl. 35. k. 1903, 355. o.

71. Elnöki megnyitó beszéd. Akad. Értes. XIV. k. 1903, 313—319. o. Ugyanaz megjelent Változatlan mértékegységek címen Term. tud. Közl. 35. k. 1903, 369—374. o.

72. Beszéd a kolozsvári Bolyai-emlékünnepen. Akad. Értes. XIV. k. 1903, 110. o.

73. Elnöki megnyitó beszéd. Akad. Értes. XV. k. 1904, 253—254. o.

74. Akadémiai elnökségről lemondó levele. Akad. Értes. XVI. k. 1905, 514—515. o.

75. Programme des recherches gravimétrique dans les régions vésuviennes. Comptes rendus des séances de la première reunion de la commission permanente de l'Association international de Sismologie réuni à Rome. 1906, 177—179. o.

76. Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hilfe der Drehwage. Verhandl. d. XV. allg. Konferenz der internat. Erdmessung in Budapest. 1906. A módszer szigorú matematikai elméletét és gyakorlati alkalmazásának módját a legrészletesebben ezen értekezésben találjuk.

77. A Balaton nivófelülete s azon a nehézség változásai. A Balaton tudományos tanulmányozásának eredményei. I. k. 1. rész Geophysikai függelék. 1908. Németül is megjelent. E dolgozat bevezetésében Eötvös a módszer elméletét elemi úton tárgyalja.

78. Bericht über geodätische Arbeiten in Ungarn, besonders über Beobachtungen mit der Drehwage. Verhandl. d. XVI. allg. Konferenz der internat. Erdmessung in London und Cambridge 1909. Franciául is megjelent: Sur les travaux géodèsiques exécutés en Hongrie spécialement a l'aide de la balance de torsion címen.

79. Beiträge zum Gesetz der Proportionalität von Trägheit und Gravität. Pekár Dezsővel és Fekete Jenővel együtt. Még kiadatlan munka, mellyel a göttingeni pályadíjat megnyerték. Ismertetése Nachr. d. Königl. Gesellsch. d. Wissensch. in Göttingen. Geschäftl. Mitt. 1909, 1. füz.

80. Bericht über Arbeiten mit der Drehwage ausgeführt im Auftrage der kön. ung. Regierung in den Jahren 1909—1911. Verhandl. d. XVII. allg. Konferenz der internat. Erdmessung in Hamburg. 1912.

81. Geofizikai kutatások Kecskemét vidékén. A pozsonyi Népszerű Főiskolai Tanfolyamon tartott előadás. Rövid ismertetése Uránia 1913, 36. o.

82. Geofizikai kutatásaim céljáról, módjáról és némely eredményéről. A Term. tud. Társ.-ban tartott népszerű 2. előadás 1913 ápr. 4. és 11-én. (Az első előadást Pekár Dezső tartotta). Ugyanerről Aradon is tartott előadást 1914 jan.-ban.

83. A nehézségről a Földön mozgó szerkezetekben. A Math. és Phys. Társ.-ban tartott előadás. Ismertetése Uránia 1918, 199—201. o.

BÁRÓ EÖTVÖS LORÁNDRA VONATKOZÓ IRODALOM.

I. Az Eötvös-törvény.

84. W. Ramsay and J. Schields: On the variation of surface-energy with temperature. Proc. of the Roy. Soc. of Lond. 1892, Vol. 52. 150–156. o.

85. W. Ramsay and J. Schields: The variation of molecular surface-energy with temperature. Phil. Trans. 1893, Vol. 184, 647—673. o.

86. W. Ramsay und J. Schields: Über die Moleculargewichte der Flüssigkeiten. Zeitschr. f. phys. Chem. 1893, 12. k. 433—475. o.

87. Van der Waals: Thermodynamische Theorie der Capillarität unter Voraussetzung stetiger Dichteänderung. Ztschr. f. phys. Chem. 1894, 13. k. 657—726. o.

88. Pekár Dezső: Oldatok molekuláris felületi energiájáról. Math. és Term. tud. Értes. 1901.

89. D. Pekár: Über die molekulare Oberflächenenergie der Lösungen. Zeitschr. f. phys. Chem., 1902, 39. k. (a megelőzőnek fordítása).

90. W. Grabowsky: Beiträge zur Feststellung der wahren Oberflächenspannung wässeriger Chloridlösungen und zu ihrer physikalisch-chemischen Verwertung. Diss. Königsberg 1904.

91. L. Grunmach: Experimentelle Bestimmung der Oberflächenspannung und des Molekulargewichtes von verflüssigtem Stickstoffoxydul. Ann. d. Phys. u. Chem. 15, 401—406. 1904.

92. Géza Zemplén: Über die Oberflächenspannung wässeriger Lösungen. Ann. d. Phys. u. Chem. [4], 22, 391—396. o. 1907.

93. Livingston, R. Morgan, R. Stevenson: Das Gewicht eines fallenden Tropfens und die Gesetze von Tate. Die Bestimmung der Molekulargewichte und kritischen Temperaturen von Flüssigkeiten mit Hilfe von Tropfengewichten. J. Amer. chem. soc. 30, 360—376. o. továbbá 1055—1068. o. 1908. Zeitschr. f. phys. Chem 62, 151—170. o. és 64, 170—186. o. 1908.

94. Einstein: Bemerkung zu dem Gesetz von Eötvös. Ann. d. Phys. u. Chem. [4], 34, 165—169. o. 1911.

95. P. Walden u. R. Swinne: Beiträge zur Kenntnis der Kapillaritätskonstanten von flüssigen Estern. Ztschr. f. phys. Chem. 79. k. 1912, 700. o. (számos irodalmi utalással).

96. Petru Bogdan: Bemerkung über die Berechnungsweise der Kapillaritätskonstanten. Die Regel von Eötvös-Ramsay, Der Kompressibilitätskoeffizient der Flüssigkeiten. Zeitschr. f. phys. Chem. 82. k., 1913, 93. o.

97. P. Walden u. R. Swinne: Über die Temperatur-Koeffizienten der molaren Oberflächenenergie und molaren Kohäsion. Ztschr. f. phys. Chem. 82. k. 1913, 271. o. (számos irodalmi utalással).

98. R. Cenac: Influence de la température sur la tension superficielle du mercure dans le vide. Ann. chim. phys. (8) 28, 298—312, 1913.

99. E. Madelung: Kinetische Theorie des Gesetzes von Eötvös. Phys. Zeitschr. XIV. 1913, 729. o.

100. M. Born u. R. Courant: Zur Theorie des Eötvös'schen Gesetzes. Phys. Zeitschr. XIV. 1913, 731. o.

101. Maurice Prud'homme: Quelques conséquences de la loi d'Eötvös-Ramsay. Journ. chim. phys. 14, 285—290. 1916.

102. A. P. Mathews: The relation of molecular cohesion to surface tension and gravitation; with a method of determining «a» of Van der Waals' equation without assumption; and the explanation of the meaning of the constants in the surface tension law of Eötvös and the latent heat formulas of Dieterici and Mills. Journ. phys. chem. 20, 554—596, 1916.

103. Van der Waals-Kohnstamm: Lehrbuch der Thermodynamik I. k.

104. F. M. Jäger: Über die Temperaturabhängigkeit der mole-

kularen freien Oberflächenenergie von Flüssigkeiten im Temperaturbereich von—80° bis 1650°C. Zeitschr. f. anorg: Chem. 101. k. 1—215. 1917.

105. A fizika és chemia kézikönyvei közül még a következőket soroljuk fel. Chwolson: Lehrbuch der Physik I. k. 609. o. Nernst: Theoretische Chemie 4. k. 1903, 272—274 o., Ostwald-Luther: Hand u. Hilfsbuch zur Ausführung Physiko-Chemischer Messungen, 3. k. 1910, 543. o., Walker-Steinwehr: Einführung in die Phys. Chemie, 1904, 241. o.

II. Eötvös gravitációs eszközei és a földi nehézségre vonatkozó mérései.

106. Brillouin: Notice sur les travaux scientifique. Paris. Gautier-Villars.

107. Klupathy Jenő: Báró Eötvös Loránd Föld-kutatásai. Uránia. 7. k. 1906, 421—432. o.

108. Brillouin: Les courbures du géoïde dans le tunnel du Simplon. Compt. Rend. 1906, I. k. 916—918. o. és II. k. 405—407. o.

109. A. Venturi: Teoria della bilancia di torsione di Eötvös. Presentata all' Accademia di Scienze, Lettere et Arti. Palermo. 1908.

110. Brillouin: Mémoire sur l'ellipticité du géoïde dans le tunnel du Simplon. Mem. près. par divers savants à l'acad. de scien. de l'inst. de France. 33, 3. sz. 1908.

111. O. Hecker: Bestimmung der Schwerkraft auf dem Indischen und Grossen Ocean und an deren Küsten sowie erdmagnetische Messungen. Veröff. d. Zentralbl. d. internal. Erdmessung. I. Nr 16. 1908.

112. O. Hecker: Bestimmung der Schwerkraft auf dem Schwarzen Meere und an dessen Küste, sowie neue Ausgleichung der Schwerkraftmessungen auf dem Atlantischen, Indischen und Grossen Ozean, Veröff. Nr 20 d. Zentralb. d. intern. Erdmessung.

113. W. Branca: Ziele vulkanologischer Forschung. Sitzungsber. der kön. preuss. Akad. d. Wiss. 38. k. 810—856. o.

114. Oltay Károly: Nehézség gyorsulás-mérések Budapesten. Math. és Term. tud. Értes. 29. k. 1911, 229. o.

115. Oltay Károly: Ingákkal való relatív gravitácio mérések pontossága. Math. és Term. tud. Értes. 30. k. 1912. 843. o.

116. O. Eggert: Theorie und Anwendung der Drehwage von Eötvös. Ztschr. f. Vermessungswesen 42. k. 1913, 474–483. és 505–517. o.

117. E. Soler: Primi experimenti con la bilancia di Eötvös. Venezia. C. Ferrari, 1913.

118. A. Gavazzi: O. Teži u. Hrvatskoj i Slavoniji. Zagrebu, 1913.

119. G. Silva: Relazione delle osservazioni gravimetriche compiute nell' estate 1913, con il bipendolo Mioni. Venezia. 1914.

120. E. Soler: Prima Campagna con la bilancia di Eötvös nei dintorni di Padova. R. Comissione Geodetica Italiana. Venezia, C. Ferrari, 1914.

121. Oltay Károly: A Nagy Magyar Alföldön, a Mezőségen és a gyergyói fensíkon végzett nehézség gyorsulás-méréseim eredményei. Math. és. Phys. Lapok. 23. k. 1914, 82–102. o.

122. Pekár Dezső: Kísérleti tanulmányok az Eötvös-féle gravitatiós csavarási mérleg zavarairól. Math. és Term. tud. Értes. 33. k. 1915.

123. Oltay Károly: A nehézséggyorsulás budapesti értékének meghatározása. Budapest, 1917.

124. Böckh Hugó: Brachyantiklinálisok és dómok kimutatása torziós mérleggel végzett nehézségi mérések adatai alapján. Bányászati és Kohászati Lapok, 1917, 9. sz.

125. Pekár Dezső: A báró Eötvös-féle geofizikai mérésekről. Bányászati és Kohászati Lapok. 1917, 14. sz.

126. Pekár Dezső: Báró Eötvös Lorand geofizikai mérései és jelentőségük. Pótfüz. a Term. tud. Közl.-höz 1917 (lényegében egyezik a megelőzővel).

127. W. Schweydar: Die Drehwage und ihre Bedeutung für die Auffindung von Bodenschätzen. Előadás a Königl. Geodät. Inst. zu Potsdam ülésén 1917. Kivonata: Die Naturwissenschaften 1918, 160–165. o.

128. Mikola Sándor: Báró Eötvös Loránd nehézségi kutatásainak jelentőségéről. Uránia. 19. k. 1918, 204–208. o.

129. A fizika könyvei közül a következőket soroljuk fel: Chwolson: Lehrbuch der Physik I. k. 393. és 402. o., Bouasse: Cours de Mécanique expérimentale 279–280. o., Helmert: Encyclopädie der math. Wissenschaften VI1., B. k. 2. f. 166–172. o., Messerschmitt: Die

Schwerebestimmung an der Erdoberfläche (Die Wissenschaft) 1908, 142—144. o., Zenneck: Encyclopädie der math. Wissenschaften V1., k. 29. és 39. o.

III. Eötvösnek a nehézség és tétlenség arányosságára vonatkozó mérései.

130. Zemplén Győző: A tömeg állandósága chemiai átalakulásoknál. Term. tud. Közl. 38. k. 1906, 80—93. o.

131. A. Einstein: Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems. Phys. Ztschr. 14. k. 1913, 1249—1266. o.

132. E. Freundlich: Die Grundlagen der Einstein'schen Gravitationstheorie. Berlin, 1917, 320. és 67—69. o.

133. P. Zeemann: Experimentelles zur Gravitation. Die träge und die schwere Masse von Kristallen und radioaktiven Stoffen. Versl. K. Ak. van Wet 26, 1917, 451. o. Beiblätter 42. k. 1918.

134. H. Weyl: Raum, Zeit, Materie. Berlin, 1918. 180. o.

135. M. B. Weinstein: Kräfte und Spannungen. Das Gravitations- und Strahlenfeld (Sammlung Vieweg, 8. f.) 1914. 47—49. o.

IV. Vegyesek.

136. Than Károly: A szénélegkénegről. Ért. a Term. tud. köréből. I. k. 1867, 12. o.

137. Ketteler: Erwiderung auf einige Bemerkungen des Herrn Baron Eötvös. Pogg. Ann. d. Phys. u. Chem. 154. k., 260—271. o.

138. Báró Eötvös József és a természettudományok. Közli Szily Kálmán. Term. tud. Közl. 3. k. 1871, 161—166. o.

139. Szily Kálmán: Természettudományi mozgalmaink az utolsó évtizedben. Budapesti Szemle 15. k. 1877, 151. o.

140. Klupathy Jenő: A folyadékok közötti válaszfelületek feszültségéről. Math. és Term.-tud. Ért. III. k. 1885, 94—108. o.

141. Tangl Károly: Nagy kitérésű vizszintes lengések a földnehézség erőterében. Math. és Term. tud. Ért. XIII. k. 1895, 125—151. o.

142. Dr. Steiner Lajos: A Balaton vidékén az 1901 év nyarán végzett földmágnességi mérések eredményei. Budapest. 1902.

143. Ferenczi Zoltán: Báró Eötvös József. Budapest. 1903, 280—292. o.

144. Báró Eötvös József összes munkái. XX. k. Levelek fiához 54—69. o. Életrajz Voinovich Gézától.

145. A Szily-emlékérem odaitélésére kiküldött bizottság jelentése. Term. tud. Közl. 44. k. 1912, 227—230. o.

146. Illustrierte Zeitung 1918 aug. 22, 3921. sz. közli Eötvös arcképét.

147. Megemlékezés báró Eötvös Lorándról. Neues Pester Journal 1918, jun. 26-iki szám.

148. Alexander Bernát: Báró Eötvös Loránd. Pester Loyd 1918, jun. 27. sz. és Uránia 19. k. 1918, 201—204. o.

149. Mikola Sándor: Báró Eötvös Loránd élete és tudományos müködése. Uránia 19. k. 1918, 227—229. o.

150. K. Tangl: Baron Roland v. Eötvös zum 70. Geburtstage. Seine Untersuchungen über die Gravitation. Die Naturwissenschaften. 6. k. 1918, 445—447. o.

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT VÁLASZTMÁNYA mély fájdalommal tudatja, hogy

EÖTVÖS LORÁND

a budapesti Egyetemen a természettan ny. r. tanára, a Magyar Tud. Akadémia volt elnöke, a berlini Tud. Akadémia levelező tagja stb., Társulatunknak alapítása óta elnöke

folyó évi április hó 9-én, életének 71-ik évében, Budapesten elhunyt.

A nagy physikus halálát a magyar tudományos körök és velük együtt az egész világ tudósai mélyen fájlalják. De talán legmélyebben a Mathematikai és Physikai Társulat, melynek kezdettől fogva vezére és büszkesége volt. Nemes, mindenkit túlszárnyaló egyéniségéből a fölemelő szeretet meleg sugarai áradtak mindegyikünk felé.

Nagy példája eszményként fog lebegni előttünk és a későbbi nemzedékek előtt.

A HARMONIKUS SORRÓL.

1. A harmonikus sor maradékösszegeinek itt bebizonyitandó számelméleti tulajdonsága a következő segédtételnek egyszerű folyománya:

Két vagy több egymás után következő természetes szám között mindig van egy legnagyobb párosságú, vagyis olyan, mely 2-nek magasabb hatványával osztható, mint bármelyik másik.

E segédtétel bebizonyitásánál jelentse 2^λ a 2-nek legmagasabb hatványát, melylyel az

$$n+1,\ n+2,\ldots,\ n+k \qquad (1)$$

számok között legalább egy osztható. Bebizonyitandó, hogy (1) alatt *csak egy* szám osztható 2^λ-val.

Ha (1) alatt legalább két szám volna 2^λ-val osztható, akkor ezeknek $A2^\lambda$ és $B2^\lambda$ alakúaknak kellene lenniök, hol A és B $(B>A)$ páratlan számok. Ha most már $2M$ oly páros szám, hogy $A<2M<B$, akkor $2M.2^\lambda$ is tagja volna az (1) alatti sorozatnak. De ez lehetetlen, mert (1) alatt egy szám sem osztható 2-nek magasabb, mint λ-dik hatványával.

2. *Bárhogyan választjuk az n és k természetes számokat, a harmonikus sornak*

$$R_{nk}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+k}$$

maradékösszege nem lehet egész szám.[1]

---

[1] Erre a tételre engem a következő dolgozat II. részének olvasása vezetett: OBLÁTH: *Számelméleti tételek,* Mathematikai és Physikai Lapok, 27. évf. (1918). A II. rész a 93—94. lapon van.

Legyen ugyanis (ha $k>1$) az

$$n+1,\ n+2,\ldots,\ n+k$$

nevezők között a legnagyobb párosságú $N=2^\lambda u$, hol u páratlan szám. Ha R_{nk} tagjai közül kihagyjuk $\frac{1}{N}$-et, akkor bármely megmaradt tag nevezője a 2-nek legfeljebb $(\lambda-1)$-dik hatványával osztható. Tehát a megmaradt tagok összege ily alakban állítható elő:

$$R'_{nk}=\frac{w}{2^\mu v},$$

hol $\mu<\lambda$ és v páratlan szám. De akkor

$$R_{nk}=\frac{1}{N}+R'_{nk}=\frac{v+2^{\lambda-\mu}wu}{2^\lambda uv}.$$

Itt a $v+2^{\lambda-\mu}wu$ számláló páratlan szám, a $2^\lambda uv$ nevező páros szám. Tehát R_{nk} nem lehet egész szám.

Kürschák József.

KORLÁTOS INGADOZÁSÚ FÜGGVÉNYEK FOURIER-FÉLE ÁLLANDÓIRÓL.

Bevezetés.

A $(0, 2\pi)$ közben értelmezett, korlátos és integrálható, 2π szerint periodikus, valós $f(x)$ függvény FOURIER-féle állandói legyenek

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (1)$$

$$n=0, 1, 2, \ldots$$

Ha $f(x)$-nek a $(0, 2\pi)$ közben véges számú hely kivételével differencziálhányadosa van és ez eleget tesz a DIRICHLET-féle feltételeknek, akkor, mint ezt FEJÉR bebizonyította,[1]

$$\pi \lim_{n=\infty} \frac{b_1+2b_2+\cdots+nb_n}{n} = f(+0)-f(-0). \qquad (2)$$

E formula baloldala megadja az $f(x)$ függvény szakadásának nagyságát a 0 helyen.

Ki fogjuk mutatni, hogy a (2) formula igaz abban az általánosabb esetben is, a mikor $f(x)$-ről csak azt tételezzük fel, hogy a $(0, 2\pi)$ közben korlátos ingadozású.

E tény megvilágítására a következőket bocsátjuk előre:

A $(0, 2\pi)$ köz belsejében folytonos differencziálhányadossal biró és 2π szerint periodikus $f(x)$ függvénynél már $\pi \lim\limits_{n=\infty} nb_n$ létezik és megadja a függvény szakadását az $x=0$ helyen.

RIESZ FRIGYES nemrég megmutatta,[2] hogy a most idézett

---

[1] FEJÉR: «Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe». Journal für die r. u. angew. Math. Bd. **142.** (1913). 165—188. o.

[2] RIESZ FRIGYES: «Folytonos és korlátos ingadozású függvény FOURIER-együtthatóiról.» Math. és Phys. Lapok (26. k.) 1918.

tény nem áll abban az általánosabb esetben, mikor $f(x)$ a $(0, 2\pi)$ közben csupán folytonos és korlátos ingadozású.

Kimutatta ezt, még pedig abban a formában, hogy szerkesztett olyan 2π szerint periodikus, folytonos és korlátos ingadozású függvényt, a melynél $\pi . nb_n$ nem tart n növekedtével zérus felé.

Ebből a tényből világossá válik, hogy szükség van arra, hogy az $f(x)$ szakadásának meghatározásánál a $\pi n . b_n$ nem létező limesze helyett πnb_n aritmetikai középének limeszét vegyük ((2) formula).

Ez azért érdekes, mert az aritmetikai közepek képzését a FOURIER-sorok elméletében legtöbbször akkor használták, a mikor a FOURIER-sor divergens volt. Most olyan esetben használhatjuk — és hozzá tesszük: kell használnunk — a mikor a sor konvergens.

Tételünk megfelelője a «cosinus»-együtthatókra a

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} = 0 \qquad (3)$$

egyenlőség.

Ez egyszerű következménye annak, hogy a korlátos ingadozású függvény FOURIER-sora a zérus helyen, vagyis az

$$\frac{a_0}{2} + a_1+a_2+a_3+\cdots \quad \text{in inf.}$$

sor: konvergens.

Tételünk és a (3) egyenlőség elintéz két kérdést, melyeket RIESZ FRIGYES idézett czikkében vet fel. Az első:

Tarthat-e folytonos és korlátos ingadozású 2π szerint periodikus függvénynél na_n vagy nb_n zérustól különböző limesz felé?

A felelet tagadó. T. i. ha pd. nb_n zérustól különböző határérték felé tartana, úgy az $\{nb_n\}$ sorozat aritmetikai közepeinek sorozata:

$$\left\{ \frac{b_1+2b_2+\cdots+nb_n}{n} \right\}.$$

nem tarthatna zérus felé.

A második kérdés: Tarthat-e nem folytonos függvénynél na_n és nb_n együttesen zérushoz?

Ez sem lehetséges. Bizonyitás: a (2) formulát az $f(x_0+x)$ függvényre alkalmazva, a

$$\pi \lim_{n=\infty} \frac{b_1 \cos x_0 - a_1 \sin x_0 + \cdots + n(b_n \cos nx_0 - a_n \sin nx_0)}{n} =$$
$$= f(x_0+0) - f(x_0-0)$$

egyenlőséget nyerjük. Ha már most $nb_n \to 0$ és $na_n \to 0$, a mikor $n \to \infty$, úgy

$$f(x_0+0) = f(x_0-0)$$

bármi is az x_0, vagyis a függvény mindenütt folytonos.

Mielőtt tételünk bizonyítására reátérnénk, még megemlítjük, hogy a későbbiekben még egy alkalmazását adjuk tételünknek az általános FOURIER-sor együtthatóira.

1. §. A $\pi \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{b_1+2b_2+\cdots+nb_n}{n} = f(+0) - f(-0)$ egyenlőség bizonyítása.

Ha $f(x)$ korlátosan változó, úgy két monoton függvény különbségére bontható.

Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük tehát, hogy $f(x)$ monoton a $(0, 2\pi)$ közben.

Egyszerű számolás útján belátható, hogy

$$I_n = \pi \frac{b_1 + 2b_2 + \cdots + nb_n}{n} =$$
$$= \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\sin x + 2 \sin 2x + \cdots + n \sin nx}{n} dx =$$
$$= -\int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{n} \frac{d\left[\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx\right]}{dx} dx = \tag{4}$$
$$= -\int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{n} \frac{d\left[\dfrac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}\right]}{dx} dx.$$

Az I_n integrált így osztjuk fel:

$$I_n = -\int_0^{\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} - \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} = I_{n,1} + I_{n,2} + I_{n,3}, \quad (0<\varepsilon<\pi) \tag{5}$$

ahol az integrandus mindenütt a (4) utolsó sorában szereplő integrandus.

$$I_{n,2} = -\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{f(x)}{n} \frac{\frac{2n+1}{2}\cos\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{f(x)\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos nx dx + \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} f(x)\sin nx dx +$$

$$+ \frac{1}{4n}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{f(x)}{\sin^2\frac{x}{2}}\sin nx dx.$$

Ha ε fix szám, úgy ez integrálok RIEMANN egy ismert lemmája alapján zérus felé tartanak; tehát

$$I_{n,2} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Másrészt, ha

$$\psi_n(x) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}, \tag{7}$$

úgy a második középértéktétel alkalmazásával:

$$\begin{aligned} I_{n,1} &= -\frac{f(+0)}{n}\int_0^{\xi_1}\frac{d\psi_n(x)}{dx}dx - \frac{f(\varepsilon)}{n}\int_{\xi_1}^{\varepsilon}\frac{d\psi_n(x)}{dx}dx = \\ &= \frac{f(+0)\psi_n(0) - f(\varepsilon)\psi_n(\varepsilon)}{n} - \big(f(+0) - f(\varepsilon)\big)\frac{\psi_n(\xi_1)}{n} \end{aligned} \tag{8}$$

$$0 \leq \xi_1 \leq \varepsilon$$

és hasonló módon

$$I_{n,3} = \frac{f(2\pi-\varepsilon)\,\psi_n(2\pi-\varepsilon) - f(2\pi-0)\,\psi_n(2\pi)}{n} - \\ - \frac{\psi_n(\xi_2)}{n}\,[f(2\pi-\varepsilon) - f(2\pi-0)]\,; \qquad 2\pi-\varepsilon \leq \xi_2 \leq 2\pi. \tag{9}$$

A (7) formulából következik, hogy

$$\frac{\psi_n(0)}{n} = \frac{\psi_n(2\pi)}{n} = 1 + \frac{1}{2n}\,;$$

ezenkívül

$$\lim_{n=\infty} \frac{\psi_n(\varepsilon)}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{\psi_n(2\pi-\varepsilon)}{n} = 0$$

és végül

$$\left|\frac{\psi_n(\xi)}{n}\right| < 2 \qquad 0 \leq \xi \leq 2\pi.$$

E relácziókat az (5), (6), (8) és (9) egyenletekkel összevetve, nyerjük, hogy

$$I_n = [f(+0) - f(2\pi-0)]\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \eta(n) + \\ + [f(\varepsilon) - f(+0)]\,a_1(n) + [f(2\pi-0) - f(2\pi-\varepsilon)]\,a_2(n), \tag{10}$$

a hol $\eta(n)$ az $\frac{1}{n}$-nel együtt zérussá válik, $a_1(n)$ és $a_2(n)$ pedig absolut értékre 2-nél kisebbek.

A (10) formulából rögtön látható, hogy

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\,|I_n - [f(+0) - f(2\pi-0)]| \leq 2\,|f(\varepsilon) - f(+0)| + \\ + 2\,|f(2\pi-0) - f(2\pi-\varepsilon)|,$$

vagyis

$$\lim_{n=\infty} I_n = f(+0) - f(-0).$$

Ezt akartuk bebizonyítani.

2. §. Az általában folytonos függvény szakadásának meghatározása.

A (2) érvényes, mint a bizonyításból látható, akkor is, ha $f(x)$ a $(0, 2\pi)$ közben absolut integrálható és a 0 helynek csak egy kis környezetében korlátos változású.

Nem áll fenn azonban a (2) mindenütt folytonos függvényre. Lukács Ferencz, kivel az előző fejezetben bebizonyított eredményt közöltem, megmutatta,[1] hogy minden, a $(0, 2\pi)$ belsejében integrálható, 2π periodusú függvényre, a melynek a zérus helyen elsőfajú szakadása van, igaz, hogy:

$$\pi \lim_{n=\infty} \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{\log n} = f(+0)-f(-0). \tag{11}$$

Ennek az eredménynek a felhasználásával bebizonyítjuk a következő tételt:

Ha $f(x)$ a $(0, 2\pi)$ köz belsejében integrálható, 2π szerint periodikus és a zérus helyen elsőfajú szakadása van, akkor a

$$c_n = \pi \frac{b_1+2b_2+\cdots+nb_n}{n} \qquad n=1, 2, \ldots$$

számsorozatból kiválasztható egy, a függvény zérus helyen levő ugrásához konvergáló számsorozat.

A bizonyítás egyszerű.

Ugyanis

$$c_n - c_{n-1} = \pi b_n - \pi \frac{b_1+2b_2+\cdots+(n-1)b_{n-1}}{n(n-1)},$$

vagyis

$$\lim_{n=\infty} (c_n - c_{n-1}) = 0.$$

Ebből Fejér egy tétele alapján[2] következik, hogy a c_n szám-

---

[1] Lukács Ferencz czikke a «Crelle-Journal»-ban sajtó alatt van.

[2] Fejér: «A Fourier-féle sorról». Math. és Természettud. Értesítő, 1906. 292—297. o.

sorozatnak minden olyan szám sűrűsödési helye, a mely e sorozat limesz superiorja és limesz inferiorja közé esik. Ámde $f(+0)-f(-0)$ ilyen szám, a mit a (11) formulából és az egyszerűen igazolható általános érvényű

$$\underline{\lim}_{n=\infty} \frac{b_1+2b_2+\cdots+nb_n}{n} \leq \lim_{n=\infty} \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{\log n} \leq$$

$$\leq \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{b_1+2b_2+\cdots+nb_n}{n}$$

egyenlőtlenségekből láthatunk.

3. §. Nem-absolut integrálható függvények Fourier-együtthatóiról.

Legyen $f(x)$ folytonos, ha $0<x\leq 2\pi$, és létezzék a

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{2\pi} f(x)\, dx$$

határérték.

Ebben az esetben, mint Fejér kimutatta,[1]

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n} = 0; \quad \left(a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx\right).$$

Azt állítom, hogy a

$$d_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

számsorozatnak a zérus sűrűsödő helye. Ez annál inkább figyelemre méltó, mert, mint Riemann egy példája mutatja, az $\{a_n\}$ sorozat nemcsak hogy nem tart szükségkép 0-hoz, hanem még korlátosnak sem kell lennie.

Állításunk bizonyításául megjegyezzük, hogy egyrészt a

$$\varphi(x) = \int_0^x f(x)\, dx, \quad 0\leq x<2\pi; \quad \varphi(x+2\pi) = \varphi(x)$$

[1] Fejér: «Vizsgálatok a Fourier-féle sorok köréből.» Math. és Phys. Lapok, 1902. 49—68. o.

relácziókkal definiált $\psi(x)$ függvény az x-nek mindenütt folytonos függvénye, kivéve esetleg a 0 helyet és a vele homolog helyeket, a hol elsőfajú szakadása lehet; másrészt

$$\pi a_k = \int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx = \psi(-0) + k\int_0^{2\pi}\psi(x)\sin kx dx,$$

vagy, ha k helyébe $1, 2, \ldots, n$-et teszünk és összegezünk:

$$\pi\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \psi(-0) + \frac{\sum_{k=1}^{n} k\int_0^{2\pi}\psi(x)\sin kx dx}{n}.$$

Az egyenlet jobboldalán álló összegre a 2. §. tételét alkalmazva, tételünket igazoltuk.

Csillag Pál.

A FÜGGVÉNY UGRÁSÁNAK MEGHATÁROZÁSA A FÜGGVÉNY FOURIER-FÉLE SORÁBÓL.

1. Csillag Pál bebizonyította,[1] hogy ha az

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

függvény a $(0, 2\pi)$ közben *korlátosan változó*, úgy e köznek bármely x_0 helyén

$$\pi \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\,(b_k \cos kx_0 - a_k \sin kx_0)}{n} = f(x_0+0) - f(x_0-0). \tag{2}$$

Ha a 2π szerint periodikus, a $(0, 2\pi)$ közben korlátosan változó $f(x)$ függvény *mindenütt folytonos, úgy a* (2) *formula baloldalán szereplő limesz a* $(0, 2\pi)$ *közben egyenletesen zérushoz tart.*

Ez következik Fejérnek egy tételéből,[2] mely szerint, ha egy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

trigonometrikus sor *egyenletesen* konvergens a $(0, 2\pi)$ közben, akkor ugyanitt

---

[1] Csillag: «Korlátos ingadozású függvények Fourier-féle állandóiról». Math. és Phys. Lapok ugyanezen számában.

[2] Fejér: «Über konjugierte trigonometrische Reihen». Journal f. die r. u. angew. Math. 144. köt. (1914) 48—56. o.

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(b_k \cos kx - a_k \sin kx)}{n}$$

n növekedtével x-ben egyenletesen tart zérushoz.

Ha az $f(x)$ nem folytonos, de korlátosan változó a $(0, 2\pi)$ közben, úgy csak a megszámlálható sok

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k, \ldots$$

helyen lehet elsőfajú szakadása; legyenek e szakadási helyekhez tartozó ugrások számértékei rendre:

$$d_1,\ d_2, \ldots\ d_k, \ldots;$$

akkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_k| \cdot$$

sor konvergens.

Az

$$f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{d_k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,(x - x_k)}{n} \right]$$

korlátosan változó, mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvényre alkalmazva a mindenütt folytonos, korlátosan változó függvényre érvényes tételt, új úton nyerjük a (2) formulát.

2. Ha a mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus (most *nem* tételezünk fel egyebet) $f(x)$ függvény FOURIER-sorának n-ik arithmetikai közepe $S_n(x)$, úgy x-ben és n-ben egyenletesen

$$\lim_{m=\infty} \left(S_n(x) - S_m(x) \right) = 0, \qquad (n > m).$$

A FEJÉR-féle dolgozatban felhasznált BERNSTEIN-féle tétel szerint tehát x-ben és n-ben egyenletesen

$$\lim_{m=\infty} \frac{S'_n(x) - S'_m(x)}{n} = 0, \qquad (n > m).$$

Ebből következik, hogy x-ben egyenletesen

$$\lim_{n=\infty} \frac{S'_n(x)}{n} = 0.$$

Ha $x = 0$, úgy innen

$$\lim_{n=\infty} \frac{nb_1 + (n-1).2b_2 + (n-2).3b_3 + \cdots + 1.nb_n}{n^2} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{\varrho=1}^{k} \varrho b_\varrho}{n^2} = 0.$$

A baloldalon álló limesz a $\{\varrho b_\varrho\}$ sorozat másodrendű CESÀRO-közepének fele, *a mely tehát szintén zérus.*

A véges variatiójú függvénynél már $\{\varrho b_\varrho\}$ elsőrendű arithmetikai közepe zérus.

Sidon Simon.

A Mathematikai és Physikai Társulat tanulóversenyei.

I.

A XXV. mathematikai tanulóverseny.

A folyó évi november hó 23-án tartott XXV. mathematikai tanulóversenyre Budapesten 39, Kolozsvárt 2 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen egyidejüleg zárt helyiségben, a társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett, szabályszerűen folyt le. A verseny lefolyásáról mindkét helyen fölvett jegyzőkönyv szerint a tételek kidolgozására engedett négy órai idő alatt Budapesten 22, Kolozsvárt 1 dolgozat adatott be. A mult évben volt 40 versenyző és 28 dolgozat; ebben az évben volt 41 versenyző és 23 dolgozat.

A kitűzött tételek a következők voltak:

1. Az $ABCD$ parallelogrammának legyen AC a hosszabb átlója. Bocsássunk a C pontból az AB, illetőleg AD egyenesre merőlegeseket és legyen ezeknek talppontja E, illetőleg F. Bebizonyítandó, hogy akkor

$$\overline{AB}\,.\,\overline{AE}+\overline{AD}\,.\,\overline{AF}=\overline{AC}^2.$$

2. Jelentsen x, y, z növekedő sorrendben három oly egymástól különböző pozitiv egész számot, melyek reciprok értékeinek az összege egész szám. Meghatározandók x, y, z.

3. Legyen minden valós x-re

$$ax^2+2bx+c\geqq 0,$$

$$px^2+2qx+r\geqq 0,$$

hol a, b, c; p, q, r valós számok. Bebizonyítandó, hogy akkor minden valós x-re

$$apx^2+2bqx+cr\geqq 0.$$

A versenydolgozatokat Kőnig Dénes volt szíves előzetesen áttekinteni. A teljes bírálóbizottság határozatáról az alábbi jegyzőkönyv számol be.

Jegyzőkönyv

a XXV. mathematikai tanulóversenyen beadott dolgozatok elbírálása ügyében 1918 deczember 7-én tartott bizottsági ülésről.

Jelen vannak: Rados Gusztáv elnök, Beke Manó, Éber József, Fejér Lipót, Kopp Lajos, Kürschák József, Rátz László és Kőnig Dénes előadó.

Kőnig Dénes előadó jelentésének meghallgatása és a dolgozatok áttekintése után a bizottság a következő egyhangú határozatot hozta:

Mind a három feladatot két versenyző oldotta meg: *Reuss Endre,* ki a budapesti II. ker. főreáliskolában Jeanplong Győző tanítványa volt és *Rédei László,* a budapesti X. ker. kőbányai főgimnázium és Kunfalvi Rezső tanítványa.

Reuss Endre dolgozata különösen a 2. feladat megoldásával tűnik ki, melyben figyelemre méltó számelméleti képességeiről tesz tanuságot Ezért a bizottság az I. br. Eötvös Loránd-díjra őt javasolja, és a II. díjjal *Rédei László* szép dolgozatát kívánja kitüntetni.

Kiemelendő még *Krausz Gyula* dolgozata, melyet a bizottság az első két feladat szép és szabatos megoldásáért dícséretre ajánl.

A folyó évi deczember hó 12-én tartott választmányi ülés a bizottság e javaslatát határozattá emelte.

II.

A III. physikai tanulóverseny.

A III. fizikai versenyt 1918 nov. 30-án tartottuk meg Budapesten és Kolozsvárott. Budapesten a versenyen részt vett 9, Kolozsvárott 1 főiskolai hallgató. Beadatott összesen 8 dolgozat.

A bírálóbizottság (br. Eötvös Loránd, Bartoniek Géza és Mikola Sándor) a dolgozatok átnézése után arra a meggyőződésre jutott, hogy a beadott dolgozatok egyike sem üti meg a megkívánható mértéket és azért azt a javaslatot terjeszti a Választmány elé, hogy a Károlyi Irén-díjakat az idén ne adja ki. — A Választmány e javaslatot elfogadja.

A kitűzött feladatok a következők voltak:

1. Hogyan változik a nyomás egy épület gáz és vízvezetékében? (A nyomás szó alatt itt a hatásos nyomás vagyis a csapon belül és kívül uralkodó nyomások különbsége értendő.)

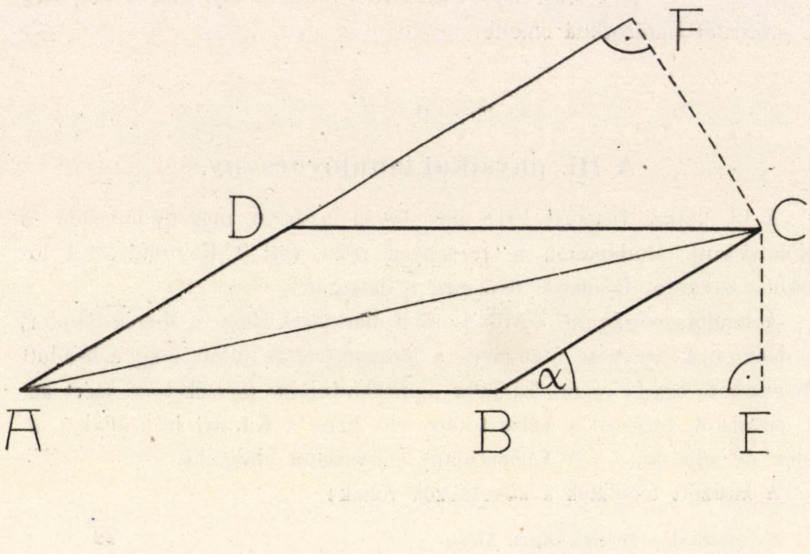
2. Kelt-e az óra járása indukált elektromótoros erőt?

*

Az 1918. évi deczember hó 12.-iki előadó-ülését Társulatunk nagynevű elnökének és alapítójának, *br. Eötvös Lorándnak* szentelte, szerény kifejezést akarván adni ama hódoló tiszteletnek, melyet a nagy physikus személye és műve iránt érez. *Rados Gusztáv* alelnök megnyitójában jelzi, hogy szeretett Elnökünk az 1918. évben töltötte be 70-ik életévét, és hogy tiszteletére a «Mathematikai és Physikai Lapok» br. Eötvös Lorándfüzetet adott ki. Ezen az ülésen óhajtottuk neki átadni ünnepi füzetünket, ámde, mély sajnálatunkra, betegsége folytán ma körünkben meg nem jelenhetett. Így hát *Fröhlich Izidor* tagtársunk fogja őt betegágyánál fölkeresni, és, átadván Eötvös-füzetünk egy példányát, egyúttal tolmácsolni fogja a Társulat szeretetét és hódoló tiszteletét.

Reuss Endre dolgozata.

(1. br. Eötvös Loránd díjjal jutalmazott dolgozat.)



1.

$$\overline{BE} = \overline{AD} \cos \alpha$$
$$\overline{DF} = \overline{AB} \cos \alpha$$
$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{AD} \cos \alpha$$
$$\overline{AF} = \overline{AD} + \overline{AB} \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}\overline{AB}.\overline{AE} + \overline{AD}.\overline{AF} &= \overline{AB}^2 + \overline{AB}.\overline{AD} \cos \alpha + \overline{AD}^2 + \overline{AB}.\overline{AD} \cos \alpha \\ &= \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + 2\overline{AB}.\overline{AD} \cos \alpha \\ &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}.\overline{BC} \cos (180^\circ - \alpha) \\ &= \overline{AC}^2.\end{aligned}$$

2.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz+xz+xy}{xyz}$$

csak úgy lehet egyenlő egy egész számmal, hogy

$$kx = yz$$
$$ly = xz$$
$$mz = xy,$$

ahol k, l, m egész számok és $m<l<k$. Szorozzuk az első két egyenletet m-mel, akkor a 3. egyenlet figyelembe vételével lesz:

$$x^2 = ml$$
$$y^2 = mk$$

és a 3. egyenletbe helyettesítve

$$z^2 = kl.$$

Legyen már most $m=a^2d$, hol d-nek nincs oly tényezője, a mely teljes négyzet. Ugyanígy $l=b^2d_1$. Ezekből

$$x^2 = a^2b^2dd_1,$$

a mi csak úgy lehet teljes négyzet, hogy $d=d_1$. Analog módon

$$k = c^2d.$$

Mindebből

$$x = abd$$
$$y = acd$$
$$z = bcd$$
$$a < b < c$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{abd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{bcd} = \frac{a+b+c}{abcd}.$$

A számláló osztható c-vel és így:

$$a+b=cp,$$
$$c+c=2c>cp,$$
$$p=1,$$
$$c=a+b,$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2(a+b)}{(a+b)\,abd}=\frac{2}{abd}.$$

Ez csak úgy felelhet meg a követelményeknek, hogy

$$b=2$$
$$a=1$$

és végül

$$d=1$$
$$c=3.$$

Eredményül kapjuk

$$x=abd=2$$
$$y=acd=3$$
$$z=bcd=6.$$

Próba.

$$\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{6}+\tfrac{2}{6}+\tfrac{3}{6}=1.$$

3. Ha

$$ax^2+2bx+c\geqq 0$$

és

$$px^2+2qx+r\geqq 0,$$

hol a, b, c; p, q, r valós számok az x minden valós értékére nézve, az

$$y=ax^2+2bx+c$$
$$y=px^2+2qx+r$$

másodfokú függvények nem metszik az abscissa-tengelyt és így

$$D_1=b^2-ac\leqq 0$$
$$D_2=q^2-pr\leqq 0.$$

A bal oldalon álló negativ számok szorzata pozitiv

$$b^2q^2-b^2pr-q^2ac+acpr\geqq 0$$
$$b^2q^2-acpr-b^2(q^2-pr)-q^2(b^2-ac)\leqq 0$$
$$b^2q^2-acpr\leqq b^2D_2+q^2D_1.$$

A jobb oldalon b^2, q^2 pozitiv, D_1 és D_2 negativ és így

$$b^2q^2 - acpr \leqq 0,$$

a mi az

$$apx^2 + 2bqx + cr = 0$$

egyenlet discriminansa.

A két feltételből következik, hogy

$$a \geqq 0$$

$$p \geqq 0$$

és így

$$ap \geqq 0,$$

a mivel a tétel teljesen be van bizonyítva.

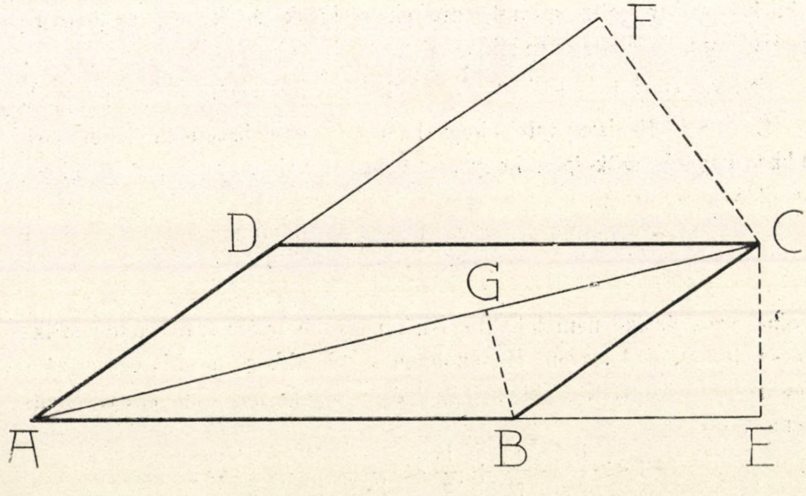
Rédei László dolgozata.

(2. br. Eötvös Loránd-díjjal jutalmazott dolgozat.)

I. Az $ABCD$ parallelogrammának legyen AC a hosszabb átlója. Bocsássunk a C pontból az AB, illetőleg AD egyenesre merőlegeseket és ezeknek talppontja legyen E, illetőleg F. Bebizonyítandó, hogy akkor

$$\overline{AB}.\overline{AE} + \overline{AD}.\overline{AF} = \overline{AC}.^2$$

Bizonyítás:



Feltétel: $BG \perp AC$.

Az

$$AG + GC = AC$$

azonosságba

$$AG = \overline{AB}.\cos(BAG\sphericalangle) \quad \text{és} \quad GC = \overline{BC}.\cos(BCG\sphericalangle)$$

értékeket behelyettesítve:

$$\overline{AB}.\cos(BAG\sphericalangle) + \overline{BC}.\cos(BCG\sphericalangle) = AC$$

s ez egyenletet mindkét oldalon $\overline{AC}$-vel beszorozva:

$$\overline{AB}.\overline{AC}.\cos(BAG\sphericalangle) + \overline{BC}.\overline{AC}.\cos(BCG\sphericalangle) = \overline{AC}^2$$

egyenletet nyerjük. De

$$\overline{BC} = \overline{AD} \quad \text{és} \quad BCG\sphericalangle = CAD\sphericalangle$$

tehát

$$\overline{AB}.\overline{AC}.\cos(BAG\sphericalangle) + \overline{AD}.\overline{AC}.\cos(CAD\sphericalangle) = \overline{AC}^2.$$

Ha itt

$$AC.\cos(BAG\sphericalangle) = AE \quad \text{és} \quad AC.\cos(CAD\sphericalangle) = AF$$

tesszük:

$$\overline{AB}.\overline{AE} + \overline{AD}.\overline{AF} = \overline{AC}^2,$$

a mi bebizonyítandó volt.

II. Jelentsen x, y, z növekedő sorrendben három oly egymástól különböző positiv egész számot, melyek reciprok értékeinek az összege egész szám. Meghatározandók x, y, z.

Feltevés szerint $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a$, hol «$a$» egészszám $a > 1$ vagy $a = 1$.

1. $a > 1$. Bebizonyítjuk, hogy ha $a > 1$, megoldás nem lehetséges. Ekkor ugyanis szükséges, hogy $x < 2$ legyen. Ha ugyanis $x \geqq 2$, akkor $y > 2$ és $z > 2$ és így

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

volna, azaz értéke nem lehetne 1-nél nagyobb egész szám, tehát szükséges, hogy $x < 2$ legyen. Ha azonban $x < 2$, akkor, (positiv egész szám lévén) $x = 1$ volna. De akkor $y \geqq 2$ és $z > 2$ lenne, a mi annyit jelentene, hogy

$$1 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

vagyis jelen kifejezés, ha $x=1$, nem lehet egész szám. (Erre később hivatkozunk.) Mindezeket egybevetve láthatjuk, hogy $a>1$ nem lehetséges.

2. $a=1$. Ha $a=1$, akkor szükséges, hogy $x<3$ legyen. Ha ugyanis $x\geqq 3$, akkor $y>3$ és $z>3$, azaz

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1,$$

vagyis jelen kifejezés nem volna egész szám; tehát $x<3$. Ekkor $x=1$, vagy $x=2$. $x=1$ azonban, miként elébb bebizonyítottuk, nem lehet. Ha $x=2$, akkor szükséges, hogy $y<4$ legyen. Mert ha $y\geqq 4$ és így $z>4$, akkor

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1,$$

vagyis jelen kifejezés nem volna egész szám; tehát $y<4$. Ez, mivel $y>x=2$ csak úgy lehet, ha $y=3$. Egyenletünkbe $x=2$ és $y=3$ értékeket behelyettesítve

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{z}=1$$

z-re nézve egyetlen megoldást, a $z=6$ gyököt kapjuk. Tehát a feladat egyedüli megoldása: $x=2$, $y=3$, $z=6$.

III. Legyen minden valós x-re: $ax^2+2bx+c\geqq 0$, $px^2+2qx+r\geqq 0$, hol a, b, c; p, q, r valós számok. Bebizonyítandó, hogy akkor minden valós x-re:

$$apx^2+2bqx+cr\geqq 0.$$

Segédtétel: Ha $ax^2+2bx+c>0$ minden valós x-re, akkor szükséges, hogy $a\geqq 0$, $c\geqq 0$ és $ac-b^2\geqq 0$ legyen.

A kifejezés ugyanis így írható:

$$ax^2+2bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a^2}\right].$$

Ha ebben $a<0$ lenne, akkor elég nagy x-re kifejezésünk negativ értéket is felvehetne; tehát szükséges, hogy $a\geqq 0$ legyen. Ha $ac-b^2<0$ lenne, akkor szintén lennének x-nek oly értékei, melyekre nézve a kifejezés ismét negativ értékeket venne fel; tehát $ac-b^2\geqq 0$. De akkor $ac\geqq 0$, s mivel $a\geqq 0$, ebből következik, hogy $c\geqq 0$. Evvel segédtételünk érvényességét bebizonyítottuk.

Feltétel szerint

$$a \geqq 0, \; c \geqq 0, \; ac - b^2 \geqq 0$$

valamint

$$p \geqq 0, \; r \geqq 0, \; pr - q^2 \geqq 0$$

s bizonyítani kell, hogy: $ap \geqq 0$, $cr \geqq 0$, $(ap).(cr) - (bq)^2 \geqq 0$.

A három egyenlőtlenség közül az első kettő evidens. A harmadikra nézve:

$$(ap).(cr) - (bq)^2 = acpr - b^2q^2 = acpr - acq^2 + acq^2 - b^2q^2 =$$
$$= ac.(pr - q^2) + q^2(ac - b^2) \geqq 0,$$

mivel a kifejezés minden egyes tagja $\geqq 0$. A mi bizonyítandó volt.