MATHEMATIKAI
ÉS
PHYSIKAI LAPOK

MÁSODIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

92. szám

BUDAPEST, 1893

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

MÁSODIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

Második füzet.

Harmadik füzet.

*

Negyedik füzet.

Ötödik füzet.

Hatodik füzet.

Hetedik füzet.

Nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ

Ismertető és önálló dolgozatok.

Physikai Szemle.

Irodalom.

Ismertetett művek.

Kitüzött feladatok.

Megoldott feladatok.

Physikai laboratorium.

Előadások.

Vegyesek.

Társulati ügyek.

Sajtóhibák.

167. l. a legalsó determináns szorzója

$$\prod_{r=2}^{n}(\alpha_r-\alpha_1)^3 \quad \text{helyett} \quad \prod_{k=2}^{n}(\alpha_k-\alpha_1)^3$$

178. l. alulról 9-dik sorban

$$s=t\frac{\partial q}{\partial x}-t\frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{helyett} \quad s=\frac{\partial q}{\partial x}-t\frac{\partial y}{\partial x}$$

201. l. $1a$. képlet bal oldala elé — jel teendő.
201. l. utolsó sorban l_1 helyett C_1.
203. l. 5. sorban

$$\frac{a\sin\gamma}{\sqrt{1+2kt}} \quad \text{helyett} \quad \frac{a\sin\gamma}{r\sqrt{1+2kt}}$$

269. l. alulról 6-dik sorban kS helyett $k:S$
311. l. felülről 7-dik sorban PQ helyett PO
311. « « 13 « « PQ « PO
312. « « 10 « « Q « O
315. « « 8 « « S « s

VÉGSZERŰEN EGYENLŐ TERÜLETEK.*

(Első közlemény.)

Valamely mennyiség mérésére szolgáló elvek és módszerek megállapitásában első és gyakran épen nem könnyű feladat tisztába jönni az iránt, hogy mikor nevezzünk két vele egynemű mennyiséget egyenlőnek, mikor pedig különbözőnek. Lássuk e feladat megoldását abban az esetben, midőn területmérésről van szó, a mikor a kérdés abban áll, hogy *mi a szükséges és elegendő föltétel arra nézve, hogy két területet egyenlőnek nevezhessünk?*

A közvetetlen szemlélet arra indít, hogy területeket *mindenesetre* egyenlőknek mondjunk a következő esetekben:

1. ha a területek egybevágók;

2. ha nem egybevágók ugyan, de véges számú kölcsönösen egybevágó darabokra oszthatók;

3. ha egybevágó területekből véges számú kölcsönösen egybevágó darabok kihasítása után maradnak fenn.

De hogy ezzel a területegyenlőség összes esetei kimeritve legyenek, az a darabok kikötött véges számánál fogva már előre sem látszik valószínűnek; erre nézve elegendő az egyenlő területű kör és négyzet összehasonlítására utalnunk. Mi legyen tehát a területegyenlőség általános definicziója? Ismeretes, hogy erre a kérdésre csak ama tétel bebizonyítása után adhatjuk meg a választ, mely szerint két (egyenes oldalú) sokszög akkor és csakis akkor egyenlő területű, ha reájuk nézve a fent részletezett szemléltető esetek egyike kimutatható; azaz ha vagy egybevágók, vagy egybevágó darabokból állnak, vagy pedig ha egybevágó területekből kölcsönösen egybevágó részek kihasítása révén származtathatók. A válasz pedig abban

---

* Előadva a Math. és Phys. Társ. 1892. deczember hó 15-én tartott rendes ülésén.

áll, hogy két (görbe vonalaktól is határolt) területet a fent részletezett eseteken kívül csakis akkor nevezünk egyenlőnek, ha bármelyiküket *tetszés szerinti* mértékben megközelítvén beírt (vagy körülírt) sokszög segítségével, a másik is megközelíthető egy ezzel egyenlő területű beírt (illetve körűlírt) sokszöggel.

Ha ezeken kívül még meggondoljuk azt is, hogy minden szabatos definiczióra nézve megköveteljük, hogy tárgyának *valamennyi* egymástól *független* tulajdonságait leírja és csakis azokat, akkor ezek után kimondhatjuk, hogy a területegyenlőség definiczióját kétféle vizsgálatnak kell megelőznie: Ugyanis

a) be kell bizonyítanunk a sokszögek egyenlőségére vonatkozó épen kimondott tételt;

b) meg kell vizsgálnunk, vajon a területegyenlőségnek 2. és 3. alatt részletezett esetei *lényegesen* különbözők-e? és ha nem, miképen vihető vissza a 3. eset az előző egyszerűbbre?

Ezeknek az előzetes vizsgálatoknak a megejtése képezi a «Végszerűen egyenlő területek» czímén a magy. Tud. Akad. Értesitőjében megjelent dolgozatom tárgyát és feladatát. A vizsgálatok ez oknál fogva olyan síkterületekre vonatkoznak, melyeknek határvonalai *önönmagukat sehol sem metszik,* és melyeket eltolván, előbbi helyzetükkel való metszéspontjaik száma *véges;* úgy a területek maguk, mint részeik, mindig *pozitiv* értelemben veendők.

Bólyai Farkas szerint két terület *végszerűen egyenlő,* ha *véges számú* kölcsönösen egybevágó darabokra osztható. Evvel az elnevezéssel élvén, a következőkben foglalhatom össze a vizsgálatok eredményét:

a) *Két egyenlő területű, egyenes vonalakkal határolt sokszög mindig végszerűen egyenlő.*

b) *Két végszerűen egyenlő területből végszerűen egyenlő részeket levágva, a fenmaradó területek is végszerűen egyenlők.* (E szerint tehát a területegyenlőségnek fent leirt 3. esete lényegében már benne foglaltatik a 2.-ben).

Ennek a tételnek egyik speciális esete azt mondja, hogy «két egymást részben fedő egybevágó sik-területből kivágva az egymást fedő részeket, a fenmaradó területek végszerűen egyenlők»; vagyis rövidebben «*két egymást részben fedő egybevágó terület szabad darabjai végszerűen egyenlők*».

c) *Két egyenlő területű síkidom végszerű egyenlőségére nézve elegendő és szükséges, hogy nem egyenes vonalú kerületi íveik részint kölcsönösen egybevágó darabokból álljanak, melyek görbületi értelme a terület belsejéhez viszonyítva pontról pontra megegyező, részint olyan ívekből, melyek ugyanazon síkidom kerületén ugyanannyiszor fordulnak elő pozitiv mint negativ görbületi értelemmel.*

Magától értetődik, hogy a *b)* alatti tétel ebből mint speczialis alkalmazás foly.

A dolgozat keletkezésére nézve kötelességem kiemelni, hogy az *a)* alatti tételt Bólyai Farkas bizonyította be legelőször fönt idézett munkájában, és hogy a *b)* alatti tételnek ott említett speczialis esetét is megkisérlette bebizonyitani, de több tekintetben hiányos módon. Épen ennek a bebizonyitásnak hiányos volta és Kőnig Gyula tanár úrral váltott eszmecserék inditották és buzdították szerzőt a kérdés tüzetes megvizsgálására.

Van szerencsém a dolgozatot némi változtatással itt is közölni.

*

I. A végszerű egyenlőség kritériumai.

Definiczió. Két vonal, terület, térfogat végszerűen egyenlő, ha véges számú kölcsönösen egybevágó (pozitiv) darabokból áll. A végszerű egyenlőség jelképe legyen: * $A \doteq B$.

1. E definiczióból foly, hogy *két végszerűen egyenlő idomot* A-t *és* B-t *bármiképen földarabolván, az* A *darabjainak összessége végszerűen egyenlő a* B *darabjainak összességével.*

Legyen ugyanis $A_i \cong B_i$ és legyenek a földarabolás után az A_i darabjai $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{im}$ és a B_i darabjai $B_{i1}, B_{i2}, \ldots, B_{in}$. Legyenek pl. az A_i és B_i területek. Födésbe hozom a $B_{i1}, \ldots, B_{in}$ darabokból álló B_i területet az $A_{i1}, \ldots, A_{im}$ darabokból álló A_i területtel és átrajzolom az A_i idomon levő osztó vonalakat a B_i idomra

* Bólyai, Tentamen, Tom. I. p. 21.

és fordítva; e vonalak véges számú pontban metszvén egymást, felosztják az $A_{i1}, \ldots, A_{im}$, illetve $B_{i1}, \ldots, B_{in}$ területeket véges számú területekre, melyek kölcsönösen épen födik egymást. Ennélfogva

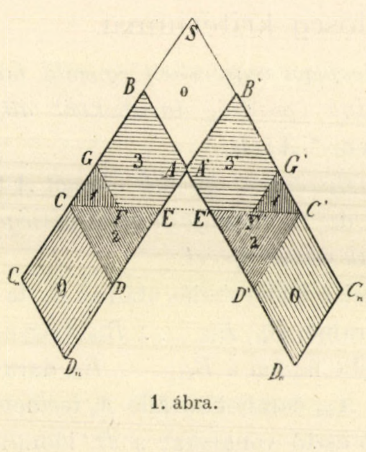
$$(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{im}) \doteq (B_{i1}, B_{i2}, \ldots, B_{in}).$$

Ha már mostan $A \doteq B$, akkor a definicziónál fogva ez annyit tesz, hogy A és B véges számú A_i, illetőleg B_i részekből áll ($i=1, 2, \ldots, p$), melyek kölcsönösen egybevágók. Minélfogva két végszerűen egyenlő terület bárminemű földarabolások után is végszerűen egyenlő marad.

Hasonlóképen bizonyítható be a tétel akkor is, ha az idomok vonalak avagy térfogatok; ezekben az esetekben az osztó vonalak helyett osztó pontok, illetve felületek szerepelnek.

2. A végszerű egyenlőség fogalmából e tétel alapján közvetetlenül foly még a következő tétel is:

*Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n$ idomok sorában $A_i \doteq A_{i+1}$, ($i=1, 2, \ldots, n-1$), akkor a sorban helyet foglaló n idom közül bármely kettő végszerűen egyenlő egymással.**



1. ábra.

3. *Egyenlő szögű egyenközények területei vagy végszerűen egyenlők, vagy nem egyenlők.* (1. ábra.)

Szerkesztés. Mellőzve azt az esetet, a midőn az egyik egyenközény *mindkét* oldala nagyobb a másikénál, valamint az oldalok összemérhetőségének könnyen elintézhető esetét is, legyenek ABC_nD_n és $A'B'C'_nD'_n$ az adott egyenközények, melyekben A és A' csúcsszögek, és

* BÓLYAI, Tentamen, Tom. I. pag. 56.

$$AB' < AD_n, \quad AB < A'D'_n,$$

a mi mindig elérhető. Ha már mostan

$$AD_n > 2 \,.\, A'B', \; A'D'_n > 2AB$$

volna, akkor az adott egyenközényekből a C_nD_n illetve $C'_nD'_n$ végtől számítva levágnék az $A'B'SB$ egyenközénynyel egybevágó egyenközényeket annyiszor, a míg az AD és $A'D'$ maradékokra nézve áll, hogy

$$A'B' < AD < 2A'B', \; AB < A'D' < 2AB.$$

Most kimondhatom, hogy az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ egyenközények mindegyike nagyobb az $A'B'SB$ egyenközénynél, de kisebb ennek kétszeresénél. Ha tehát eddigelé már többször vagy kevesebbszer kellett levágnom a nevezett egyenközényt az ABC_nD_n mint az $A'B'C'_nD'_n$ egyenközényből, akkor már kimondhatom, hogy e két egyenközény területe nem egyenlő. Ha ellenben épannyiszor kellett levágnom az egyikből mint a másikból, akkor a kérdés eldöntésére a fentnevezett maradékokat következőleg bontom fel:

Húzzuk meg a CC' egyenest, és legyen $EE' = CF = F'C'$ fölrakva és $FG \parallel AB$, $F'G' \parallel A'B'$ meghúzva. A két egyenközény ezzel be van osztva, 1, 2, 3 és 1', 2', 3' darabokra.* Az $1 \cong 1'$; továbbá vagy egyidejűleg

$$2 \cong 2', \; 3 \cong 3',$$

vagy pedig egyidejűleg

$$2 \gtrless 2', \; 3 \gtrless 3'.$$

Bebizonyítás. A szerkesztésnél fogva az 1, 2, 3 idomok hasonlók az 1', 2', 3' idomokhoz. Az 1 háromszög alapja azon kívül egyenlő lévén az 1' alapjával, áll hogy $1 \cong 1' \cong EE'A$. Ebből folyólag GAG' egyenes $\parallel CC'$-hoz és

$$AG = EC, \; A'G' = E'C'.$$

---

* Erre és a következő ábrákra nézve megjegyezzük, hogy egybevágó területek lehetőleg *egyenlő sürün* és két területnek födésben levő (közös) részei *keresztezetben* vannak sraffozva. Továbbá a szövegben a jobb oldali idom részei jelzett számokkal jelöltetnek, míg az ábrákban a jelzés több helyen hiányzik.

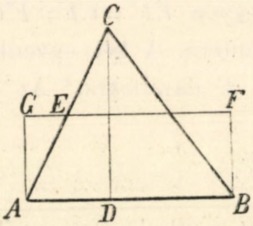
Két eset gondolható. Vagy $AG = A'G'$ vagy $AG \gtrless A'G'$. Az első esetben tehát $EC = E'C'$, a másodikban volna $EC \gtrless E'C'$. Továbbá az első esetben a 2 és 3 idomokat elcsúsztatván annyira, hogy CE födje $E'C'$ oldalt, illetve GA födje $A'G'$ átlót, az idomok oldalai teljesen födik a 2' illetve 3' idomok oldalait.

Ellenben a második esetben ilyen eltolás, — mely azt mutatja, hogy AG és EC tartalmazzák az $A'G'$ illetve $E'C'$ vonaldarabot vagy fordítva, — arról győz meg, hogy e második esetben a 2 és 3 számokkal jelölt idomok *mind a ketten* nagyobbak, vagy *mind a ketten* kisebbek a 2' illetve 3' számokkal jelölt idomoknál.

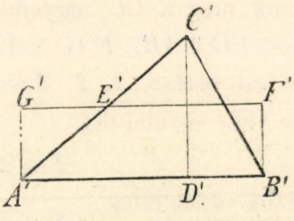
Az első esetben tehát a két maradék-egyenközény végszerűen egyenlő; a másodikban egyáltalában nem egyenlő.

4. *Egyenlő területű egyenes oldalú sokszögek végszerűen egyenlők.*

Bebizonyítom előbb, hogy két egyenlő területű háromszög ABC és $A'B'C'$ végszerűen egyenlő (2*a*. és 2*b*. ábra). Legyenek



2*a*. ábra.



2*b*. ábra.

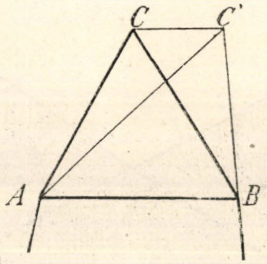
ugyanis C és C'-nál a háromszög tompa szögei, ha esetleg a háromszögöknek volnának tompa szögei, legyenek továbbá

$$CD \perp AB \text{ és } C'D' \perp A'B';$$

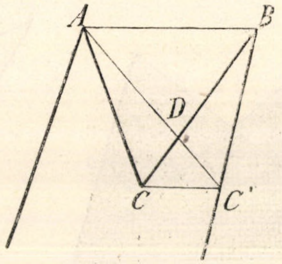
akkor D és D' az AB illetve $A'B'$ vonaldarabon feküsznek (és nem azoknak a meghosszabbításán). Ha tehát E és E' felezési pontjai az AC illetve $A'C'$ oldaloknak és az E illetve E' pontokon át párhuzamosokat vonok az AB illetve $A'B'$ alapokhoz és ezekre függélyeseket állítok az A és B, illetve A' és B' pontokból, akkor a keletkező $ABFG$ és $A'B'F'G'$ derékszögű négyszögek végszerűen egyenlők az ABC illetve $A'B'C'$ háromszögekkel. Ámde az előző tétel értelmében $ABFG \mp A'B'F'G'$. Ennélfogva a 2. tétel folytán

$$ABC \mp A'B'C'.$$

A 4. alatt kimondott tételt már mostan n-ről $(n+1)$-re való következtetéssel bebizonyithatom az ismert szerkesztés segélyével, mely az $n+1$ csúcsú sokszöget n csúcsúvá alakítja át. Ha ugyanis az $n+1$-dik csúcsnál C-nél a sokszögnek $180°$-nál kisebb szöge fekszik, akkor e szerkesztés az ABC háromszög helyébe (3. ábra) a vele egyenlő területű, tehát — miként az imént bebizonyítottuk —



3. ábra.



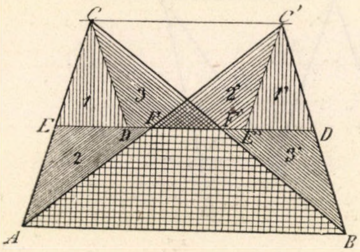
4. ábra.

végszerűen egyenlő ABC' háromszöget teszi. Ha pedig C-nél $180°$-nál nagyobb szöge fekszik az $n+1$ csúcsú sokszögnek (4. ábra), akkor BC és AC' egyenesek a D pontban metszik egymást és ACD háromszög egyenlő területű BDC'-sel; a szóban levő szerkesztés pedig a BDC' háromszög helyébe az n-csúcsú sokszög ACD pozitiv darabját teszi. Az $n+1$ csúcsú sokszögek tehát mindkét esetben végszerűen egyenlők a szerkesztés alapján nyert n csúcsúakkal. De föltevés szerint az n csúcsú sokszög végszerűen egyenlő a vele egyenlő területű n csúcsú sokszöggel; a 2. tétel erejénél fogva tehát az $n+1$ csúcsúakkal is végszerűen egyenlő.

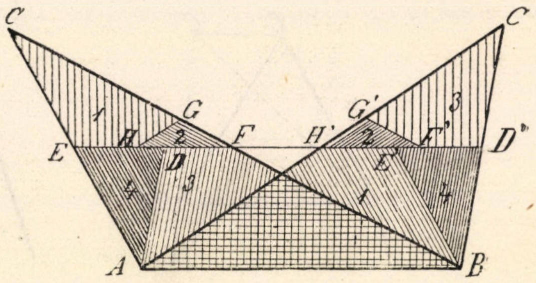
Szolgáljon például két egyenlő alapú és magasságú háromszög ABC és ABC' fölosztása kölcsönösen egybevágó részekre (5. és 6. ábra). A kivitel szembetünő. Az ED' egyenközű az AB-hez és felezi a háromszögek magasságát. Az 5. ábrában $CD \parallel C'D$ és $C'E' \parallel CE$. A 6. ábrában $AD \parallel BD'$ és $BE' \parallel AE$, továbbá $GH \parallel AC'$ és $G'F' \parallel BC$; végül $FH = FH' = F'H'$. Az egyenlő számokkal jelölt területek egybevágók.

Hasonló módon végezhető a szerkesztés akkor is, ha a C és C' csúcsok (változatlan alap és magasság mellett) közelebb feküsznek; ekkor esetleg a CD és $C'E'$ egyenesek bele nyulván a közös területbe, a AB-hez több egyenközűnek megvonása fog megkivántatni.

Még egyszerűbb módon eszközölhető két egyenlő alapú és magasságú egyenközény fölosztása (l. a második közleményben).



5. ábra.

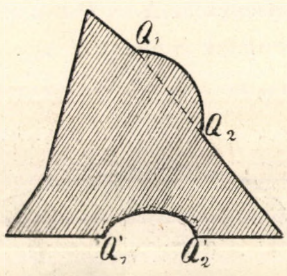


6. ábra.

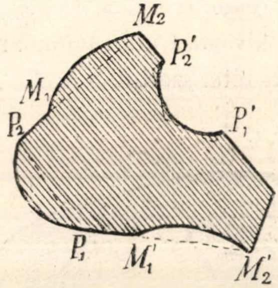
5. *Két egyenlő területű síkidom végszerű egyenlőségére nézve elegendő feltétel, hogy nem egyenes vonalú kerületi íveik vagy kölcsönösen egybevágó darabokból legyenek összetéve és hogy a kongruens íveknek görbülete* (a két síkidom belsejéhez viszonyitva), *egyenlő értelmű legyen; vagy pedig, ha fordul elő az egyiknek kerületén olyan ív is, mely a másikén ugyanazon görbületi értelemben hiányzik, akkor az ív darabjai jelen legyenek ugyanannyiszor pozitiv mint negativ értelmű görbülettel* (7*a*. és 7*b*. ábra).

Hogy a föltételek elegendők a végszerű egyenlőségre, nyilvánvaló. Mert legyen az M_1M_2 ív görbülete viszonyitva az A területhez pozitiv és az M_1M_2-vel egybevágó $M_1'M_2'$ ív forduljon elő ugyancsak az A kerületén negativ görbülettel; levágva az A területből az M_1M_2 húr segitségével az M_1M_2 ív felé eső darabját és ezt áttéve az $M_1'M_2'$ ív mellé, az A terület egy vele végszerűen egyenlő területté alakult, melynek kerületén a szóban lévő ívek helyett húrjaik szerepelnek. Ugyanennek az eljárásnak ismétlésével szerkeszthetek tehát véges számú lépés után egy az A-val végszerűen egyenlő A' területet, melynek kerületén két egybevágó ellenkező görbületű ív nem fordul elő. Ugyanígy áttérek B-ről egy vele végszerűen egyenlő B' ilyen területre.

Legyen továbbá P_1P_2 ($P_1'P_2'$) az A terület olyan íve, melylyel a B terület Q_1Q_2 ($Q_1'Q_2'$) íve egybevágó s e mellett görbületük egyenlő értelmű; akkor ezek az ívek az A' és B' kerületein is ugyanazon értelmű görbülettel fordulnak elő. Két eset lehetséges;



7*a*. ábra.

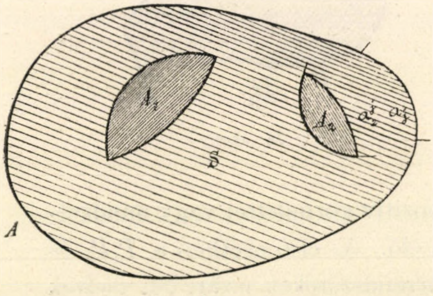


7*b*. ábra.

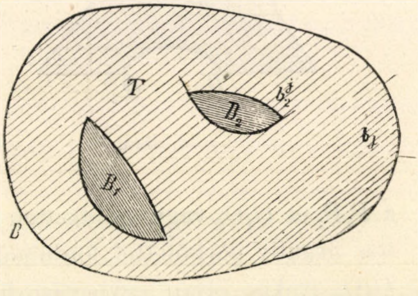
a P_1P_2 és Q_1Q_2 vagy mindketten pozitiv görbülettel vagy mindketten negativ görbülettel fordulnak elő. Az első esetben a P_1P_2 és Q_1Q_2 ívekbe olyan egybevágó húrrendszereket írván be, melyek teljesen az A' illetve B' területek belsejében feküsznek, felosztom e területeket két-két részre: az egyik részt alkotják a P_1P_2 ív, illetve Q_1Q_2 ív és a húrrendszer közötti területek, melyek kölcsönösen egybevágók lévén, az A'-ból és B'-ból ezek levonása után fennmaradó részek egyenlő területűek. A második esetben pedig, a midőn a $P_1'P_2'$ és $Q_1'Q_2'$ ívek negativ görbületű ívek, e területeket két-két osztom fel oly körülök írt egybevágó húrrendszer segitségével, melyek az A' illetve B' területek határvonalait sehol sem metszik; a húrrendszerek és a $P_1'P_2'$ illetve $Q_1'Q_2'$ ívek közötti területek kölcsönösen egybevágók lévén, az ezek levonásával fennmaradó részek területre egyenlők. E lépéseket annyiszor ismételvén, a hány egybevágó ívdarab a két idom kerületén előfordul, végül fennmarad az A' és B' területből az ívek és a húr- illetve érintő-rendszerek közötti kölcsönösen egybevágó darabok levágása után két egyenesoldalú sokszög, melyek egyenlő területűek lévén, az előző tételnél fogva végszerűen egyenlők. Ennélfogva az A' és B' idomok végszerűen egyenlők lévén, a velük végszerűen egyenlő A és B adott idomok is azok.

6. *Két egybevágó területből egybevágó részeket vágván ki, a fennmaradó területek végszerűen egyenlők.* (8*a*, 8*b* és 8*c* ábra).

Legyen $A \cong B$ és A területből vágassanak ki A_i részei és B-ből $B_i \cong A_i$ részei ($i = 1, 2, \ldots, n$); jelöltessenek az A és B-ből az A_i-k és B_i-k kivágása után fennmaradó területek S illetve T-vel. A kimondott tétel szerint $S = T$.



8*a*. ábra.

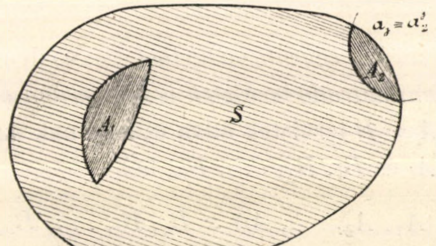


8*b*. ábra.

Ha ugyanis a kivágott A_i és B_i területeknek nincsenek az A illetve B területeivel közös határvonalai, akkor az S kerülete össze van téve az A és az A_i-k határvonalainak összességéből, — és hasonlóképpen a T kerülete a B és a B_i-k határvonalainak összességéből. Az $A \cong B$ és $A_i \cong B_i$ ($i = 1, \ldots, n$) folytán ennélfogva az S kerülete végszerűen egyenlő a T kerületével, — és tekintettel arra, hogy az A_i-k és B_i-k az A illetve B terület belsejében feküsznek, az egybevágó ívek görbületi értelme a bezárt S illetve T területekre vonatkozólag ugyanaz. Az S és T végszerű egyenlősége tehát ez esetben az előző tétel szükségszerű folyománya.

Egy ide tartozó speczialis eset kiemelendő, a midőn az A és A_i-k kerületein, — és ennélfogva a B és B_i-kén is, előfordulnak egybevágó ívek még pedig az S, — illetve a T, — területekhez képest ellenkező görbületi értelemmel. Legyenek a^j és a_i^j, illetve b^j és b_i^j $(j=1, 2, \ldots m)$ ilyen kerületi ívei az A és A_i illetve B és B_i területeknek, úgy hogy tehát $a^j \cong a_i^j \cong b^j \cong b_i^j$ és pedig az A' és B' területekre vonatkozólag ellenkező értelmű görbületekkel. Az $S = T$ ekkor természetesen változatlanul fennáll.

És már mostan térjünk át arra a határesetre, a midőn valamelyik a^j összeesik a vele egybevágó a_i^j ívvel, minél fogva ezek az ívek az S kerületén nem fordulnak elő (8c. ábra). Akkor két eset lehetséges: vagy

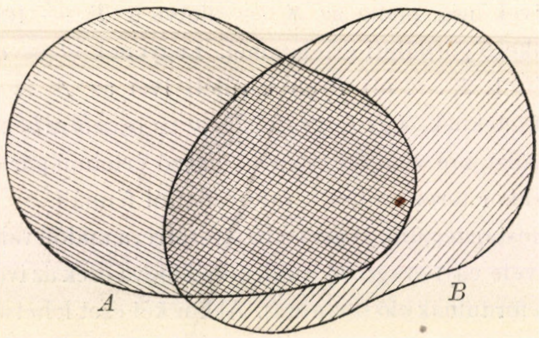


8c. ábra.

a velük egybevágó b^j és b_i^j ívek is összeesők vagy pedig nem összeesők. Az első eset, mint magától értetődik, nem alterálhatja az S és T végszerű egyenlőségét. A második eset, tekintettel arra, hogy a b^j és b_i^j ívek a melyekkel egybevágó az S kerületén nem fordul elő, egymással egybevágók és pedig a T területre vonatkozólag ellenkező értelmű görbülettel, az 5. alatti tétel értelmében szintén megfelel az $S = T$ elegendő feltételének. Ugyanaz mondható végre abban az esetben, midőn valamelyik b^h összeesik a vele egybevágó b_i^h ívvel $(h=1, 2, \ldots, m)$, valamint akkor is, ha egyidejűleg akárkány ilyen ívpár összeesik.

A tétel tehát egészen általánosan be van bizonyitva.

Folyomány. Két egybevágó terület csak részben födvén egymást, a közös területek kivágása után fennmaradó *nem közös részeik végszerűen egyenlők.* (9. ábra.)



9. ábra

7. *Két végszerűen egyenlő területből végszerűen egyenlő részeket kivágván, a fennmaradó területek is végszerűen egyenlők.*

Legyenek $A \doteq B$ területek adva és legyenek kivágandó részeik $A_1, A_2, \ldots, A_l$ és $B_1, B_2, \ldots, B_m$, hol

$$(A_1, A_2, \ldots, A_l) \doteq B_1, B_2, \ldots, B_m);$$

ha a kivágásuk után fennmaradó rendszereket S illetve T-vel jelöljük, a tétel szerint $S \doteq T$.

A végszerű egyenlőség definicziójából folyólag ugyanis az A és B területek feldarabolhatók kölcsönösen egybevágó részekre; földarabolásuk után hozzuk e részeket olyan kölcsönös helyzetbe, hogy az A összes részeiből alkotott A' rendszer egybevágó legyen a B összes részeiből alkotott B' rendszerrel. E folyamat alatt esetleg a kivágandó területek is földaraboltatnak, de az összes részeikből alkotott rendszerek kölcsönösen végszerűen egyenlők maradnak. — Osszuk föl második lépésben e kivágandó területrendszereket is kölcsönösen egybevágó A'_j illetve B'_j darabokra, hol

$$A'_j \cong B'_j, \ (j=1, 2, \ldots, n).$$

Tegyük föl, hogy az A' és B' egybevágó területrendszerekből kivágván az $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{i-1}$, illetve $B'_1, B'_2, \ldots, B'_{i-1}$, kölcsönösen egybevágó területekből álló rendszereket, az így eredő S'_{i-1} illetve T'_{i-1} rendszerek kerületei még bírnak az 5. tételben felsorolt tulajdonságokkal. Akkor a 6. alatt részletezett okoknál fogva e tulajdonságok változatlanul állanak fenn, ha az S'_{i-1}-ból kivágatik A'_i és egyúttal a T'_{i-1}-ból a $B'_i \cong A'_i$ terület. Ez okból az 5. tétel következményeképen $S_i = T'_i$.*

Az i-ről $i+1$-re való következtetéssel kimondhatjuk tehát, hogy az összes A'_j és B'_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ területek kivágása után fennmaradó S'_n és T'_n területrendszerek kölcsönösen végszerűen egyenlők.

Ámde az S'_n területet az S-nak áthelyezett összes részei alkotván $S'_n = S'$ és hasonlóképen $T'_n = T$; minélfogva $S'_n = T'_n$-ból következik, hogy $S = T$.

1. *Folyomány. Két végszerűen egyenlő területrendszert* egymásra helyezve oly módon, hogy közös és *nem közös részeik* legyenek, az utóbbiakból alkotott rendszerek *kölcsönösen végszerűen egyenlők.*

2. Folyomány. *A sík-területek végszerű egyenlőségének szokásos definicziója, mely véges számú kölcsönösen egybevágó negativ részeket is megenged, az egyszerűbb Bólyai-félével cserélendő fel.*

Ugyanis az utóbbi definiczió tárgyköre teljesen azonos az előbbinek tárgykörével.

8. *Két egyenlő területű síkidom végszerű egyenlőségére nézve az 5. alatt részletezett elegendő feltétel egyúttal szükséges is.*

Az A és B egyenlő területű síkidomok kerületein netalán előforduló kölcsönösen egybevágó, egyenlő értelmű görbülettel ellátott ívek az 5. alatt előadott módon *eltávolítván,* valamint az ugyanazon síkidom kerületén pozitiv *és* negativ görbülettel egyenlő számban előforduló íveket a szomszédos ott részletesen leírt területekkel

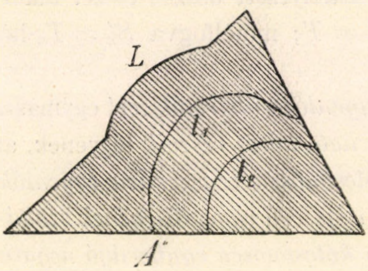
* Akad. Ertesítőben megjelent dolgozatomban ezen alinea (184. l.) helyén tévedés csúszott be, a mit már a német fordításban is kiigazítottam volt Math. u. phys. Berichte aus Ungarn 1890, továbbá Mathematische Annalen 38. k.

együttesen *áthelyezvén*, — nevezzük az igy nyert területet A'' illetve B''-nek és az eltávolitott darabok összeségét A' illetve B'-nak. Akkor

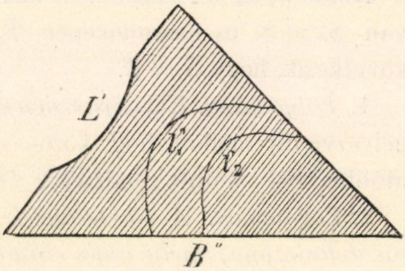
$$A = A' + A'' \quad \text{és} \quad B = B' + B''$$

lévén egyrészről, és $A' = B'$ másrészről, a 7. alatti tételből folyólag az $A = B$ föltevésből az következik, hogy $A'' = B''$. Csak azt kell tehát megmutatnom, hogy A'' és B'' idomok kerületeit *csakis* egyenes vonalak alkothatják.

Mert tegyük föl, hogy *van* az A'' kerületén görbe vonal is (10*a*. ábra). Megmutatom, hogy e vonaldarab körív nem lehet. Mert forduljon elő az A'' idom kerületén egy meghatározott g görbületű



10*a*. ábra.



10*b*. ábra.

körív összesen véve L hosszaságban. Gondoljuk az A'' idomot bármiképpen felosztva, és forduljon elő a felosztó vonalak között g görbületi körív összesen véve l hosszaságban. A felosztó vonalak mentén haladó keresztmetszésekkel feldarabolván az A'' idomot, az így feldarabolt idom kerületén a $+g$ görbületű körívek hossza $= L + l$ és a $-g$ görbületűeké $= l$.

Áttérve a B'' idomra (10*b*. ábra), melynek kerületén $+g$ görbületű körív már nem fordulhat elő (definicziójánál fogva), legyen a kerületén előforduló $-g$ görbületű körívek hossza $= L'$; akkor az idomot felosztó vonalak közül a g görbületű körívek hosszát l'-sal jelölvén, ezen osztó vonalak mentén eszközölt keresztmetszések feldarabolják a B''-öt egy idomra, melynek kerületén a $+g$ görbületi körívek hossza l' és a $-g$ görbületű köríveké $L' + l'$.

Hogy tehát az A'' és B'' földarabolásuk után egyátalában egymással födésbe hozhatók legyenek, mindenek előtt szükséges volna az

$$L+l=l'$$
$$L'+l'=l$$

egyenletek együttes fennállása.

De a belőlük folyó $L+L'=0$ egyenlet az L és L' pozitiv szám voltánál fogva benső ellenmondást tartalmaz, ha csak nem $L=L'=0$. Tehát az A'' és B'' idomok kerületén *köriv* nem fordulhat elő.

Tegyük föl már mostan, hogy I-szer fordul elő az A'' kerületén egy P_1P_2 görbe vonal, mely nem köriv, természetesen mindig ugyanavval a görbületi értelemmel; mindig választhatok oly kicsiny P_1P_2-t, hogy részei között egybevágó darabok ne legyenek. Az A'' idomot bármiképpen felosztván, tegyük föl, hogy a P_1P_2-vel végszerűen egyenlő ívek előfordulnak a felosztó vonalak között i-szer. Akkor feldarabolván az A'' idomot a felosztó vonalak mentén haladó keresztmetszésekkel, a feldarabolt idom kerületén előfordulnak a P_1P_2 összes darabjai $(I+i)$-szer eredeti görbületi értelmükkel és i-szer az ellenkező értelemmel.

Áttérve a B'' idomra, melynek kerületén a P_1P_2 avagy ennek P_1P_2 darabja csak *ellenkező* görbületi értelemmel fordulhat elő, legyenek a kerületen P_1P_2-vel végszerűen egyenlő ívek találhatók I' számban, míg a B'' idomot felosztó vonalakon i' számban. Akkor a felosztó vonalak mentén vezetett keresztmetszésekkel feldarabolt idom kerületén a P_1P_2 eredeti görbületi értelmével előfordult i'-szer, az ellenkezővel pedig $(I'+i')$-szor.

Hogy tehát létezzék olyan feldarabolás, mely mellett az A'' összes darabjai födhessék a B'' darabjait, mindenek előtt szükséges volna az

$$I+i=i'$$
$$I'+i=i$$

egyenletek együttes fennállása, a mi $I+I'=0$ egyenletet kivánná meg, mely az I és I' jelentésénél fogva belső ellenmondást tartalmaz.

Be van tehát bizonyítva, hogy az A'' és B'' kerületein görbe vonal nem fordulhat elő.

E tétel alkalmazása gyanánt kiemelem, hogy e szerint oly terület, mely egyenes vonalokon kívül mindenütt pozitiv vagy mindenütt negativ görbületű vonalaktól van szegélyezve, nem osztható fel semmikép se *véges* számú darabokra, melyek átrakhatók volnának egy vele egyenlő területü egyenes oldalú sokszögbe; in specie kör- vagy parabola-szelet sohasem lehet végszerűen egyenlő négyzettel.

Réthy Mór.

ADALÉK A VÉGSZERŰEN EGYENLŐ TERÜLETEK ELMÉLETÉHEZ.*

Réthy úr a math. és természettudományi Értesitőben megjelent egyik értekezésében a Bólyai-tól megállapitott végszerűen egyenlő területek elméletével foglalkozik. Bólyai szerint két sikterület végszerűen egyenlő, ha a két terület véges számú, kölcsönösen egyenlő pozitiv részre földarabolható. Ez értelmezés alapján két végszerűen egyenlő terület mindig egyenlő területű is. Ennek megforditása azonban általánosságban nincsen megengedve és csakis bizonyos speciális idomoknál vezet helyes eredményre, mint pl. egyenesvonalú sikidomoknál. Ezekre nézve áll a következő tétel:

Két egyenesvonalú, egyenlő területű síkbeli sokszög mindig egyszersmind végszerűen egyenlő.

Megjegyzésünk azonban nem vonatkozik erre a tételre, hanem ennek egyik segédtételére, mely magában véve is eléggé érdekes és különben a főtétel velejét képezi. E tétel ekként hangzik:

Egyenlő területű egyenközények, melyeknek szögei kölcsönösen egyenlők, végszerűen egyenlők.

A tétel be lesz bizonyitva, ha sikerül két ilyen egyenközényt véges számú, kölcsönösen egybevágó részre földarabolni. Réthy úr

---

* Spiegl ur megjegyzése Réthy úrnak a mathematikai és természettudományi Értesítő VIII. kötetében megjelent «*Végszerűen egyenlő területek*» czímű dolgozatára vonatkozik. Réthy urnak a jelen dolgozatot megelőző értekezésében közölt szerkesztése még egyszerűbb, mint Spiegl úré, a mennyiben R. a maradék-területet három-három egybevágó részre osztja, míg Spiegl úr négy-négyre; Spiegl úr szerkesztéséből tényleg kijő Réthy-nek itt közölt felosztása, ha belőle az $A_{n-1}B_n$ illetve $A'_{n-1}B'_n$ osztási vonalakat elhagyjuk. Egyébiránt Spiegl úr szerkesztése régibb mint Réthy úré. *Szerk.*

a két adott egyenközény földarabolását visszavezeti bizonyos igen egyszerű szerkesztések segítségével két maradék (szintén egyenközény) földarabolására. E két maradék-egyenközényt Réthy úr *hat* részre darabolja föl.

Czélunk kimutatni, hogy a feldarabolás *négy* lépésben is elvégezhető, a mivel nemcsak a szerkesztés, hanem a bebizonyítás is tetemesen egyszerűsbödik.

Szerkesztés. Legyenek $ABCD$ és $A'B'C'D'$ az adott (Ia és Ib) egyenközények, melyeknek rövidebb oldalai AB illetve $A'B'$. A föltevés szerint a szögek B-nél és B'-nél egymással egyenlők. Az $A'B'$ (illetve AB) vonaldarab az A (illetve A') pontból addig rakandó fel AD (illetve $A'D'$)-re, míg ezen oly A_nD (illetve A'_nD') vonaldarab marad hátra, mely kisebb mint $A'B'$ (illetve AB).

Az osztó pontok az AD és $A'D'$ vonalokon a következők :

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$$
$$A'_1, A'_2, A'_3, \ldots, A'_{n-1}, A'_n.$$

Ezeken át párhuzamosokat vonván AB (illetve $A'B'$-hez) megszerkesztettük a

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}, B_n$$
$$B'_1, B'_2, B'_3, \ldots, B'_{n-1}, B'_n$$

pontokat. Az adott területek ezen a réven kölcsönösen egybevágó egyenközényekre és az A_nB_nCD és $A'_nB'_nC'D'$ egyenlő területű parallelogrammokra oszlanak föl. Még az utóbbi két egyenközény volna feldarabolandó, de Réthy úr szerkesztésében épen az a *jellemző*, hogy az $A_{n-1}B_{n-1}CD$ és $A'_{n-1}B'_{n-1}C'D'$ tekintetnek maradékoknak és így ezeknek feldarabolása eszközlendő még. (IIa és IIb). Ez most már következőképen történik:

B_n-et összekötjük A_{n-1}-gyel, C-n át evvel párhuzamost vonunk E-ig, B_n-t összekötjük A_n-el, de ennek csak a B_nF részét húzzuk ki.

Hasonlóképen az $A'_{n-1}B'_{n-1}C'D'$ egyenközényben. Ezzel a kívánt feldarabolás meg is történt, még pedig

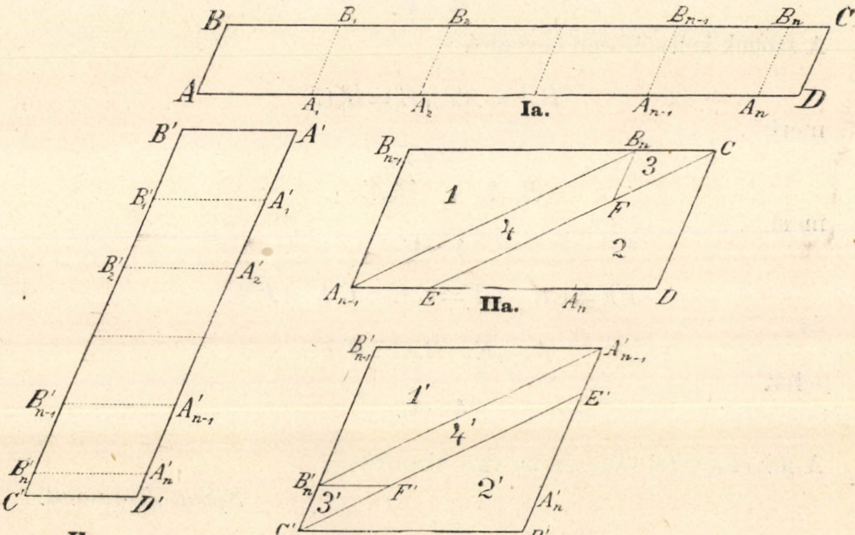
$$A_{n-1}B_nB_{n-1} \cong A'_{n-1}B'_nB'_{n-1}$$
$$ECD \cong E'C'D'$$
$$B_nCF \cong B'_nF'C'$$

és

$$B_nFEA_{n-1} \cong A'_{n-1}E'F'B'_n .$$

Az idomokba beirt számokat felhasználván, e kongruencziákat igy irhatjuk

$$1 \cong 1' \cong 2 \cong 2'$$
$$3 \cong 3'$$
$$4 \cong 4'.$$



Ib. IIb.

Bebizonyítás:

$$1 \cong 1',$$

mert a szögek kölcsönösen egyenlők és

$$B_{n-1}B_n = B'_{n-1}A'_{n-1};$$

ép igy

$$1' \cong 2$$

és

$$2 \cong 2'.$$

Az $A_{n-1}ECB$ és $A'_{n-1}E'C'B'_n$ egyenközények ennélfogva egyenlő területűek, hiszen az $A_{n-1}B_{n-1}CD$ és $A'_{n-1}B'_{n-1}C'D'$ egyenlő területekből úgy keletkeznek, ha ezekből az $1+2$ ill. $1'+2'$ területeket kivágjuk. De e két egyenközénynek alapjai egymással egyenlők (mert $1 \cong 1'$), ennélfogva magasságaik is egyenlők.

E magasságok a 3 és 3' háromszögeknek hasonló fekvésű magasságai és minthogy e két háromszög megfelelő szögei egyenlők

$$3 \cong 3'.$$

Most már könnyű bebizonyitani, hogy

$$4 \cong 4'.$$

A szögek kölcsönösen egyenlők;

$$B_nF = A'_{n-1}E' = B'_nC',$$

mert

$$3 \cong 3',$$

$$B_nA_{n-1} = B'_nA'_{n-1},$$

mert

$$1 \cong 1'.$$

$$FE = CE - CF = C'E' - C'F' = F'E'$$

és

$$A_{n-1}E = B_nC = B'_nF',$$

tehát

$$4 \cong 4'.$$

A mivel a tétel teljesen be van bizonyítva.

Spiegl Zsigmond.

A TANÁRI ÉS TANÍTÓI NYUGDÍJSZÁMÍTÁS MATHEMATIKAI ALAPJÁRÓL. *

A tanároknál és a tanítóknál a nyugdíj-igény feltételei a következők:

1. Rokkantsági díjra csak akkor tarthatnak igényt, ha a rokkantság a 10-dik szolgálati év betöltése után áll be.

2. Ha a rokkantság a 10-dik szolgálati év után, de a 11-dik év betöltése előtt következik be, akkor a rokkantsági díj a fizetésnek 40%-a; minden további szolgálati évnek megfelelően emelkedik a rokkantsági díjra való igény, a tanároknál három-három százalékkal, a tanítóknál két-két százalékkal, mindaddig míg eléri a 100%-t.

3. A tanárok a 30., a tanítók 40, évi szolgálat után igényelhetik nyugdíjképpen teljes fizetésüket, még akkor is, ha nem rokkantak.

Hogy meghatározhassuk amaz összeg nagyságát, melyet ma vagy évenként bizonyos kamatláb mellett kell elhelyeznünk, hogy a föntebb felsorolt igények fedezve legyenek, meg kell határoznunk:

1. *Az n évre elhalasztott c%-nak, vagy — 100 forint fizetést véve alapul — c frtnak rokkantsági járadékát.*

2. *Az $n+1$ évre elhalasztott, d frttal kezdődő, minden szolgálati évvel (de legfeljebb k-szor) d frttal növekedő rokkantsági díjat.*

3. *Az $n+k$ évre elhalasztott aktivjáradék mai értéket.*

Nagyon természetes, hogy épúgy, mint a halandósági és a rokkantsági valószinűség, maguk a halandósági és rokkantsági táblázatok is megfigyelések alapján készülnek, úgy hogy az egyének

* Előadva a Math. és Phys. Társ. 1892. évi deczember hó 17-én tartott rendes ülésén.

bármekkora nagy száma is szolgáljon a megfigyelés alapjául, az ezekből nyert számítási eredmények csak megközelítő jellemüek lesznek.

Jelöljük valamely x éves egyén n évre elhalasztott 1 frtnyi rokkantsági igényének mai értékét $P_x^{(n)}$-vel; az n évre elhalasztott 1 frttal kezdődő és k éven át, évről-évre, egy-egy frttal növekedő rokkantsági díj igényének mai értékét $Q_x^{(n,k)}$-val, továbbá az $n+k$ évre elhalasztott aktiv járadék mai értékét $\mathfrak{R}_x^{(+k)}$-val; akkor a föntebb felsorolt igényeknek mai értéke, ha ezt E_x-szel jelöljük lesz:

$$E_x = (c-d)P_x^{(n)} + dQ_x^{(n,k)} + (c+kd)\mathfrak{R}_x^{(n+k)}. \tag{1}$$

Hogy a $P_x^{(n)}$, $Q_x^{(n,k)}$ és $\mathfrak{R}_x^{(n+k)}$ értékeket meghatározhassuk, tegyük fel, hogy megfigyelések alapján találjuk, hogy

$$A_x,\ A_{x+1},\ A_{x+2},\ A_{x+3},\ \ldots$$

ama személyek száma, kik az x éves A_x számú aktiv személy közül az $(x+1)$-ső, $(x+2)$-dik, . . . életkorban még aktivek maradtak, továbbá ugyan-e megfigyeléseken azt tapasztaljuk, hogy ama személyek száma, kik évről-évre az év folyama alatt rokkanttá váltak, de az év végén még élnek,

$$I_x,\ I_{x+1},\ I_{x+2},\ \ldots$$

Ha mindazok, kik rokkanttá váltak, hálálukig évenként 1 frtnyi rokkantsági díjat élveznek, akkor az $(x+m)$-dik életkorban rokkanttá váltak igényeinek fedezésére $R_{x+m} I_{x+m}$ frt szükséges, ha t. i. egy $x+m$ éves rokkant egyénnek élvezendő 1 frtnyi életjáradék értéke R_{x+m}. $R_{x+m} I_{x+m}$-nek mai értéke, ha q jelenti a kamatozási tényezőt,

$$\frac{R_{x+m}\, I_{x+m}}{q^{m+1}};$$

vagy mivel ilyen alakú kifejezések

$$\frac{I_k}{q^{k+1}} = i_k$$

k-nak minden előfordulható értékeire különböző kamatláb mellett táblázatban vannak összeállitva, az $(x+m)$-dik életkorban rokkanttá vált összes egyének igényeinek fedezésére szükséges összeg mai értékét a következőképen fejezhetjük ki :

$$q^x R_{x+m} i_{x+m}. \tag{2}$$

Ha e kifejezésbe ($m = 0, 1, 2, \ldots, l - x$) teszszük, hol l az elérhető legmagasabb életkort jelenti, és azután összegezzünk, kapjuk az összes A_x aktiv személynél felmerülő 1 frtnyi rokkantsági díjak mai értékét, vagyis

$$A_x P_x = q^x \sum_{m=0}^{l-x} R_{x+m} i_{x+m}. \tag{3}$$

Ebből az egyenletből P_x, vagyis 1 frtnyi rokkantsági díjnak mai értéke, tekintve azt, hogy

$$\frac{A_x}{q^x} = a_x$$

x-nek minden értékére táblázatban össze van állítva :

$$P_x = \frac{\sum_{m=0}^{l-x} R_{x+m} i_{x+m}}{a_x}. \tag{4}$$

A

$$\sum_{m=0}^{l-x} R_{x+m} i_{x+m}$$

kifejezés szintén x-nek minden értékére táblázatból található meg.

A 4) alatti egyenletből következik, hogy

$$P_x^{(n)} = \frac{\sum_{m=n}^{l-x} R_{x+m} i_{x+m}}{a_x}. \tag{5}$$

A mi $Q_x^{(n)}$ értékét illeti ez — tekintettel arra, hogy minden egyes 1 frtnyi növekedés tulajdonképpen nem más, mint egy-egy évre elhalasztott rokkantsági díj-igény — lesz :

$$Q_x^{(n)} = P_x^{(n)} + P_x^{(n+1)} + \ldots P_x^{(l)} \tag{6}$$

és

$$Q_x^{(n,k)} = P_x^{(n)} + P_x^{(n+1)} + \ldots + P_x^{(n+k)} \tag{7}$$

vagy mivel az 5) alatti egyenlet értelmében

$$P_x^{(n+h)} = \frac{\sum_{m=n+h}^{l-x} R_{x+m}\, i_{x+m}}{a_x},$$

lesz

$$Q_x^{(n,k)} = \frac{1}{a_x} \sum_{h=0}^{l} \sum_{m=n+h}^{l-x} R_{x+m}\, i_{x+m}\,; \tag{8}$$

vagy mivel

$$\sum_{h=n}^{l-x} \sum_{m=n}^{l-x} R_{x+h+m}\, i_{x+h+m}$$

x minden előfordulható értékére ki van számítva és táblázatban összeállítva, lesz

$$Q_x^{(n,k)} = \frac{1}{a_x}\left[\sum_{h=0}^{l} \sum_{m=n+h}^{l-x} R_{x+m}\, i_{x+m} - \sum_{h=k+1}^{l} \sum_{m=n+h}^{l-x} R_{x+m} i_{x+m}\right]. \tag{9}$$

A mi az $\Re^{(n+k)}$ értékét illeti, ezt megkapjuk, ha figyelembe veszszük, hogy az $(x+n+k)$ éves korból az A_x számú személyből aktiv marad évről évre

$$A_{x+n+k},\ A_{x+n+k+1},\ \ldots;$$

tehát a várható kiadás, mai értéke, ha minden egyes aktiv személy évenként egy-egy frtot kap

$$\frac{A_{x+n+k}}{q^{n+k}} + \frac{A_{x+n+k+1}}{q^{n+k+1}} + \ldots;$$

tehát

$$A_x \Re_x^{(n+k)} = \frac{A_{x+n+k}}{q^{n+k}} + \frac{A_{x+n+k+1}}{q^{n+k+1}} + \ldots \tag{10}$$

vagy tekintetbe véve azt, hogy

$$\frac{A_m}{q^m} = a_m$$

alakú kifejezések m minden értékére ki vannak számítva, a 10) alatti egyenletből, ha az egyenlet mindegyik oldalát q^x-szel osztjuk, következik, hogy

$$a_x \Re_x^{(n+k)} = a_{x+n+k} + a_{x+n+k+1} + \ldots + a_l$$

az-az

$$\mathfrak{R}_x^{(n+k)} = \frac{1}{a_x} \sum_{m=n+k}^{l-x} a_{x+m} \,. \tag{11)}$$

Ha a

$$P_x^{(n)}, \; Q_x^{(n,k)}, \; \mathfrak{R}_x^{(n+k)}$$

értékeket az 1) alatti egyenletbe behelyettesitjük, kapjuk, hogy

$$E_x = \frac{1}{a_x}\Bigg[(c-d)\sum_{m=n}^{l-x} R_{x+m}\, i_{x+m} + d\Bigg\{\sum_{h=0}^{l}\sum_{m=n+h}^{l=x} R_{x+m}\, i_{x+m} - \\ - \sum_{h=k+1}^{l}\sum_{m=n+h}^{l-x} R_{x+m}\, i_{x+m}\Bigg\} + (c+kd)\sum_{m=n+k}^{l-x} a_{x+m}\Bigg]. \tag{12)}$$

Az x éves személy részéről egyszerre befizetendő E_x összeg helyett évenkint fizetendő e_x nagyságú díj értékét megkapom, ha figyelembe veszem, hogy az e_x évi díjat csak az aktiv személyek fizetik, tehát az egyszerre befolyó A_xE_x összeg helyett az évi bevétel

$$A_xE_x = e_x\left[A_x + \frac{A_{x+1}}{q} + \frac{A_{x+2}}{q^2} + \ldots + \frac{A_{x+n+k-1}}{q^{n+k-1}}\right];$$

vagy az egyenlet mindegyik oldalát q^x-szel osztván:

$$a_xE_x = e_x\left[a_x + a_{x+1} + \ldots + a_{x+n+k-1}\right]$$

vagy mivel

$$a_x + a_{x+1} + \ldots + a_{x+n+k-1} = \sum_{m=0}^{l-x} a_{x+m} - \sum_{m=n+k}^{l-x} a_{x+m}$$

lesz

$$e_x = \frac{E_x a_x}{\sum\limits_{m=0}^{l-x} a_{x+m} - \sum\limits_{m=n+k}^{l-x} a_{x+m}}. \tag{13)}$$

Ha valamely létesitendő vagy már meglevő oly nyugdíjszövetkezetnél akarjuk a felmerülő évi kiadásokat megállapitani, mint pl. a tanítóknál vagy a tanároknál, hol minden egyes elhalt vagy nyugdíjba ment egyén helyébe egy-egy új tag lép be, akkor, ha minden egyes tag egyenlő korú és minden egyes tag csak most kezdi a szolgálatát, az évi kiadás a fizetésnek e_x%-a, mindig állandó, a mennyiben az elhalt, vagy nyugdíjba ment egyén helyébe ismét egy-egy, szolgálattal még egyáltalában nem biró x éves egyén jön és ennél szintén fizetésének e_x%-a szükséges a nyugdíjigényének fedezésére. Ha azonban, a mint a valóságban leggyakrabban van, a szövetkezet tagjai különböző korúak és különböző ideig is szolgáltak már, akkor mindennekelőtt meg kell állapitanunk, hogy körülbelül milyen idős lehet az az egyén, ki az elhalt, vagy nyugdíjba ment egyén helyébe jön. A tanítóknál figyelmen kívül hagyható azoknak az eseteknek száma, hol a tanító 21 éves koránál később lép szolgálatba; a szolgálati éveket pedig, a törvény értelmében, csakis e kortól számitják, tehát a helyébe lépő egyén korát 21 évvel vehetjük számitásba. A tanároknál a helyébe lépők korát 25—30 évre tehetjük.

Ha a helyébe lépők korát megállapitottuk, akkor mindennekelőtt csoportositjuk a tagokat kor és szolgálati évek szerint. Tegyük fel, hogy egy ilyen csoportban, megállapitottuk, hogy

a tagok kora	$x+m$
a szolgálati évek száma	m,
a fizetés összege 100 frtokban kifejezve	N_1,
egy egyén igényének fedezésére kell évenként	e_{x+m} %,
a csoport « « « «	$N_1 e_{x+m}$.

Egy egyénre szükséges e_{x+m} %-nyi évi kiadás azonban csak addig szükséges, a míg az $x+m$ korú m szolgálati évvel biró egyén szolgálatban van; mihelyt egy ilyen egyén helyébe egy x éves semmi szolgálati évvel nem biró egyén jő, az évi kiadás e_x%, hol minden esetre

$$e_x < e_{x+m}.$$

E szerint a szövetkezet évi kiadása erre a csoportra:

míg a mostani tagok működnek	$N_1 e_{x+m}$,
ezentúl	$N_1 e_x$;

vagy pedig mondhatom, hogy a szövetkezetnek évi kiadása e csoportra mától fogva $N_1 e_x$ és azonkívül gondoskodnia kell olyan tőkéről, mely fedezze azt az $N_1 e_{x+m} - N_1 e_x$ többletet, mely évenkint szükséges mindaddig, míg a mostani tagok szolgálatban vannak.

Egy $x+m$ éves m szolgálati évvel bíró egyéntől élvezendő egy forintnyi aktivitási járadék értéket az előbbiek szerint határozhatom meg; jelöljük azt $R^{(k)}_{x+m}$-val, akkor az $N_1\,(e_{x+m}-e_x)$ évi többlet mai értéke

$$S_{x+m}=R^{(k)}_{x+m_1}N_1\,(e_{x+m}-e_x). \qquad 14)$$

E szerint a szövetkezet évi kiadása az $x+m$, csoporthoz tartozó egyéneknél

$$N_1 e_x+pS_{x+m_1}, \qquad 15)$$

ha p jelenti a számítás alapjául szolgáló egytőli kamatlábat.

Bogyó Samu.

PHYSIKAI SZEMLE.

A testek eséséről és a légellenállásról. L. CAILLETET et COLARDEAU, Recherches expérimentales sur la chute des corps et sur la résistence de l'air à leur mouvement, expériences exécutées à la tour Eiffel. *C. R.* T. CXV. p. 13—49.

A szabad esésre vonatkozólag mindeddig nagyon kevés oly kisérlet történt, melynél a levegő ellenállása figyelembe vétetett volna. Pedig e kérdés tanulmányozása nemcsak érdekes, de sok gyakorlati esetben hasznos is volna a mennyiben sok, lépten-nyomon felmerülő nehézség elhárítására vezethetne. Ilyenek pl. a levegő ellenállása a vasuti vonatok s a hajók mozgásánál, a léghajók kormányzásánál, a szélnek mozgató erő gyanánt való felhasználásánál stb. A légellenállásra vonatkozó eddigi kisérletekben nagyobbára körpályán való mozgás szerepelt, de a tovaragadt levegő, a centrifugális erő s egyéb körülmények miatt megbízható eredmény nem igen volt várható, az elérhető sebesség pedig aránylag csekély maradt.

CAILLETET és COLARDEAU az Eiffel-féle tornyot szemelték ki esési kisérleteikhez és megfigyelő állomásukat 120 méternyi magasságban rendezték be.

Hogy a levegőben eső test mozgási törvényét meg lehessen állapítani, minden pillanatban ismerni kell térbeli helyzetét.

E végre a kisérletezők az eső testet igen vékony, könnyü fonál végére erősítették, mely az eső testet igen könnyen és nagyon csekély ellenállás kifejtésével követheti. A fonál 20 m.-nyi szakaszokra van osztva. Minden szakasz egy-egy függélyesen megerősített, csúcsával lefelé álló fakúp felületére van csigavonalban fölcsavarva. Az így felcsavart fonál az eső test húzásának jóformán minden súrlódás nélkül enged.

Az egyik kúptól a másikhoz a fonál két függélyes fémlemez között halad, melyek egy-egy drótszorítóhoz vannak erősítve. A lemezek felső részökön ebonit darabkával vannak egymástól szigetelve, míg alsó részükön két igen vékony és hajlékony platina-lemezke érintkezése köti őket össze vezetőleg.

A mint az eső súly a fonalból 20 métert legombolyít, a fonalnak a két fémlemez között haladó része egy pillanatra a platina-lemezkék közé jut, s ekként a fémi érintkezést megszünteti. E pillanatban megszakad a drótszorítóktól egy regisztráló időjelzőhöz haladó elektromos áram, s ennek forgó hengerén látható nyom keletkezik. (A regisztráló időjelző óraművel hajtott fémhenger, melynek kormozott felületére elektromos uton hajtott hangvilla rájegyzi rezgéseit.) A fonál ezután a második kúpról gombolyodik le s azután ujra áramot szakít és nyomot idéz elő a chronográf hengerén s így tovább. Az időjelzőn létre jött nyomok e szerint a 20, 40, 60 stb. méternyi utaknak megfelelő időket mérik.

A vékony fonál legombolyítása és a platina-lemezkék szétválasztása rendkivül csekély mértékben hátráltatják az eső súlyt. Az esetleges lassítás meghatározása czéljából teljesen szabadon eső testek esésének idejét is meghatározták a kisérletezők, lejegyeztetvén a regisztráló készülékkel az elindulás és a megérkezés pillanatát. Midőn 2080 gr. sulyú rézhengert engedtek először fonállal s aztán fonál nélkül esni, 5 másodperczényi teljes esési idő mellett 0·04 mp.-nyi különbség mutatkozott s így a fonál okozta késleltetés $^1/_{100}$-nál is csekélyebb. Máskor hosszúkás fanyíl volt az eső test, mely végén vékony hegyben végződő fémtömeggel volt megterhelve. Az ilyen nyíl esésének ideje az üres térre kiszámított időtől értékének $^{20}/_{1000}$ részével különbözött.

A módszernek és az eszközöknek ilyforma kipróbálása után következtek a tulajdonképeni kisérletek. Ezek során kiderült, hogy sík lapokra nézve a levegő ellenállása a lapok alakjától nem függ. Így a négyzetes, köralakú, szabályos háromszögalakú lemezekre nézve az esési idők csak lényegtelen külömbséget mutattak.

Annak kipuhatolására, arányos-e a levegő ellenállása a nyomott felülettel, két négyzetes lemezzel kisérleteztek, melyek felületei úgy aránylottak, mint 1 : 2. A lemezek megterhelése ugyanazon arányban történt. Az esés ideje 6·92 és 6·96 mp. volt, s így az arányosságra lehet következtetni.

Igen könnyű az efféle kisérletből a mozgó felület egységére ható légellenállást kilogrammokban kiszámítani. Az eső test sebessége t. i. folyton növekedvén, a levegő ellenállása végre is annyira megnövekedik, hogy a nyomó erő a test súlyával lesz egyenlővé. Ezentul az eső test mozgása egyenletessé lesz és súlya a megterheléssel együtt az illető sebességnek megfelelő légellenállást adja meg, kilogrammokban.

A szóban levő kisérletekben a megterhelést úgy szabályozták, hogy a mozgás már 60—100 méternyi esés után egyenletessé vált. A megterhelés változtatásával a levegő ellenállását mint az esési sebesség függvényét lehet tanulmányozni.

Általában azt szokták fölvenni, hogy a levegő ellenállása nem túlságos nagy sebességek esetében a sebességek négyzetével arányos. Ha tehát a levegő ellenállását m²-re számítva kilogrammokban P-vel, a sebességet V-vel $\left(\frac{mp}{m}\text{-ekben}\right)$ fejezzük ki, míg R valamely állandó, akkor az említett föltevést $P=RV^2$ képlet fejezi ki. R értékének nem szabad változnia, ha ez a képlet a tényállást valóban kifejezi. Az Eiffeltornyon végzett kisérletek azt mutatták, hogy R-nek a sebességgel növekednie kell, tehát maga a levegő ellenállása gyorsabban növekednék, mint a sebesség négyzete.

Erre vonatkozólag Cailletet még további vizsgálatokat vett tervbe. 25 m.-nyi sebesség esetében R értéke gyanánt 0·71 találtatott.

Csemez József.

*

A légellenállásról s a mechanikai repülés lehetőségéről. Langley a *Smithsonian contributions to Knowledge* 801. számában (1891.) a levegő ellenállására s a mechanikus röpülésre vonatkozó nagyszabású kisérleteket ír le, melyeket az 1888. és 1889. évek folyamán a Alleghany-Observatoriumon (Pensylvania) végrehajtott volt. A repülő gépeket mindekkoráig igen kevés tudományos megfontolással tervezgették s általánosnak látszik a nézet, hogy «gépekkel repülni» nem lehet. Langley az ellenkező következtetésre jut; kisérleteiből bebizonyítottnak tekinti, hogy a mai gőzgéppel hajtott szerkezet jókora sebességgel repülni képes. Ugyanis az ezidőszerint készíthető gőzgép effektusa jóval nagyobb annál, mely a géppel egyenlő súlyú tömeg repülésének fentartására szükséges. Eredményei szerint a gőzgép, ha alkalmasan berendezett szilárd lapokat forgat, saját súlyán kívül még jókora terhet képes lebegésben tartani, sőt nagy vízszintes sebességgel tovaszállítani. A kérdés gyakorlati részével nem foglalkozott; nem vizsgálta, milyen a «szárnyak» legkedvezőbb alakja, hogyan lehet a repülő gépet kormányozni, az emelkedést biztosan szabályozni, ütközés nélkül leszállítani stb., mindezeket olyan másodrendű nehézségeknek tekintvén, melyek legyőzése a keletkezőben levő új mesterségre: az ærodromikára vár.

L. kisérleteinek a physikust legjobban érdeklő része a levegőnél nagyobb sürűségű testek (szilárd lemezek) repülésére vonatkozik. Készüléke 18·3 m. hosszuságú igen erős farúd, mely tömegközéppontján átmenő vastengelyen vízszintes síkban nagy sebességgel forgatható. Ezt a szerkezetet — nevezzük *körhintának* — szíj-átvitel közvetítésével 10 lóerejű gőzgép hajtotta. A forgó rúd egyik végén függélyesen álló karokba egy vasráma van a tömeg középpontján átmenő vízszintes tengelyen beillesztve; a rámában 30 cm. oldalú 900 gr. súlyú négyzetes sárgaréz lemez van mérő rugóra felfüggesztve. A lemez a rámában frictiós kerekeken igen könnyen, jóformán surlódás nélkül fel-alá mozoghat. Ha a szerkezet nyugalomban van, a lemez súlyát a rúgó viszi és megnyúlásával méri. A körhintát elindítván, a körpályán futó lemezt a lég nyomása meghajlítja s a nyomó erő függélyes összetevője emeli. A rúgó megrövidüléséből a röpülés folytán beállott súlyveszteség volt mérhető. Ezt, továbbá a lemez hajlásszögét s a körhinta forgássebességét — tehát a lemez vízszintes irányú sebességét is — elektromos regisztráló készülékek jegyezték fel.

A kisérletek első czélja a légellenállás törvényének vizsgálata volt. Mindenekelőtt az ismeretes $P=KV^2$ képlet — mely szerint a légellenállás a sebesség négyzetével aranyos — helyesnek bizonyult; a K állandó értékére a legkülömbözőbb körülmények között 4,48—11,2 $\frac{m}{mp}$ közötti sebességekkel tett kisérletek 0,7—0,9 közé eső számokat adtak.

Egy második kísérleti sorozat czélja volt megmutatni, hogy a szabadon eső test, ha esése közben vízszintes irányban nagy sebességgel tovább mozdíttatik, annál lassabban esik, mennél nagyobb a vele közölt vízszintes sebesség. Az eső test aluminiumból készült csőalakú futó súly volt, mely igen finoman csíszolt sárgaréz cső mentén ebonitkerekeken fel-alá mozgott; mozgása lehetőleg kis surlódással történt, úgy, hogy az esés közelítőleg «szabad»-nak volt tekinthető. A futó súlyhoz mindenféle hajlással könnyű, vékony falemezek voltak erősíthetők. Felületük körülbelül 900 cm^2 volt. Az eső test vezetékeül szolgáló cső az alább említett körhinta végére volt erősítve. Az esés magassága 1,22 m. volt.

A kísérletek azt mutatták, hogy a vízszintes fekvésű falemezekkel fölszerelt futósúlyok esés ideje annál nagyobb, mennél nagyobb a vizszintes irányú sebesség. Az esés ideje nagyobb arányban növekedik, mint a vízszintes sebesség. Továbbá, az esés ideje annál jobban növekedik, mennél nagyobb a vízszintes eltolódásra merőleges oldalnak viszonya az eltolódással egyirányú oldal hosszához.

A kísérletek lehetővé tették meghatározni azt a vízsszintes sebességet, melyre nézve a légellenállásnak függélyes összetevője épen egyenlő a lemez súlyával; ez a *lebegés sebessége.* Legyen V a vízszintes sebesség R pedig a nyomásnak vízszintes összetevője, mely a lebegés esetére a lemez súlyának s a hajlásszög tangensének szorzatával egyenlőnek vehető; akkor a vízszintes irányú repülés fentartására szükséges effektus VR. Így pl. egy $45{,}7\times12{,}2$ *cm* területű és 464 *gr* súlyú lemez esetében a kísérletek a következő adatokat szolgáltatták:

Hajlásszög	A lebegés sebessége	R	VR
9°	$14 \frac{m}{mp}$	73,3 *gr*	$1{,}03$ kgr. $\times \frac{m}{mp}$
5°	$17{,}2 \frac{m}{mp}$	46,6 *gr*	$0{,}91$ kgr. $\times \frac{m}{mp}$.

A nagyobbik sebességnek tehát kisebb effektus felel meg.

Ha nagyobb méretű lemezek épen úgy viselkednek, a kisérletek eredményei szerint 1 lóerőnél kisebb erő képes volna 50 *kgr* súlyt lebegtetni és vízszintes irányban 60 $\frac{km}{óra}$ sebességgel tovaszállítani.

További kísérletekből még az is kiderült, hogy az egymás fölött levő párhuzamos lemezek esése együttvéve ép annyi késleltetést szenved, mintha külön esnének, feltéve, hogy egymástól való függélyes távolságuk nem kisebb a mozgás irányába eső oldaluknál.

A legáltalánosabb eredmény pedig az, hogy a vízszinteshez hajló lapokkal való röpülésre szükséges effektus annál kisebb, minél nagyobb a sebesség s hogy a repülés 20 $\frac{m}{mp}$ sebességgel a mostani mozgató gépekkel tényleg lehetséges. Vannak gőzgépeink, melyek lóerőnkint 5 kgr.-nál kisebb súlyuak és tudunk oly szilárd lemezeket előállítani, melyek a légnyomást teljesen birják és súlyuk a gépével együtt a kisérletek szerint megengedhető súlynak csak mintegy $^1/_{10}$ részét érik el. *B. G.*

*

A hőegység mechanikai egyenértékének újabb meghatározása.
C. Miculescu: Sur la détermination de l'équivalent mécanique de la calorie. *Ann. de chim. et de Phys.* T. XXVI. p. 202—239.

Joule híres kisérleteiben, melyeket a hő mechanikai egyenértékének meghatározása végett végrehajtott, a működő erők munkája igen csekély volt és így csekély volt a fejlesztett hő mennyisége is. Hogy ez utóbbit a hőmérővel mégis pontosan lehessen megállapítani, a mozgató súlyoknak 20-szor kellett esniök a mi a kisérlet tartamát 35 perczre nyújtotta. Természetes, hogy ily körülmények közt nagy fontosságú volt az idővel arányos lehülésnek pontos észlelése. M. ezt a nagy nehézséget — lényegökben Joule-éval egyező kisérleteiben — úgy kerüli ki, hogy lehetőleg nagy erő és érzékeny műszerek felhasználásával oly kalorimétrikus módszert alkalmaz, mely ilynemű correctiókra nem szorúl, mert a mérő kisérlet tartama néhány perczre leszállítható.

A kaloriméter négy concentrikus hengerből áll, melyek közűl a két külső sárgarézből a két belső vörösrézből való. A legkülső henger nemezburkolattal van körűlvéve, a többi hengereket ebonit rudacskák választják el egymástól. A legbelső hengerben 2850 gr. viz van. Ezt a vizet a hajócsavarhoz hasonló csavarlapátok heves mozgásban tartják. A lapátokat a hengereken végigfutó tengely hordja. Az egymásra következő csavarlapátokat a tengelyre merőleges rekesz-falak választják el: ezek a viz tengelymenti áramlását akadályozzák. A víz forgó mozgását a henger belsejében a tengely irányában futó lemezek hátráltatják s így a kaloriméter vizének súrlódása rendkívül fokozódik.

A gyűrűs téren át, mely a legbelső és az őt körülvevő második henger között van, hideg vízáram kering, és pedig abból a czélból, hogy a csavarlapátokkal való surlódástól felmelegedő kalorimétrikus víz állandó hőmérsékleten legyen tartható. A következő gyűrűs teret a helyiség levegője járta át, míg a legutolsó gyűrűs térben ismét víz van. A sugárzás útján való hőveszteség tehát jóformán lehetetlenné van téve.

Ha már most a hideg víz árama akként van szabályozva, hogy a belső henger kalorimétrikus vize állandó hőfokon marad, nyilvánvaló, hogy a belépő és kilépő víz hőmérsékleti különbségéből és az átáramlott víz mennyiségéből könnyen meghatározható a súrlódás folytán fejlődő s a hideg víz által felvett hő mennyisége. A hőkülönbség mérésére thermoelem szolgált.

A kaloriméter csavarlapátjait egy 43 kg. súlyú Gramme-féle mótor forgatta, mely 40 akkumulátor áramával hajtva, perczenként 1200 fordulatot tett. A keletkezett munka 1 lóerőnyi. A mótor aczéléleken lengő tölgyfakeretbe volt erősítve. Az élek ágyai erős kőoszlopokon nyugodtak.

Ha az akkumulátorok árama a Gramme-gép fegyverzetét forgásba hozta s ez a forgás a tengely közvetítésével a kaloriméter csavar rendszerét is gyorsan forgatta, a víz ellenállása *fékező* gyanánt hatott, s ha a fegyverzet pl. az óramutatóval egy irányban forgott, a víz fékező ereje az egész lengő mótort ellenkező irányban, tehát az óramutató járásával ellentétes irányban térítette ki. A mótort hordó keretre vízszintes irányban egy beosztott sárgarézrúd volt erősítve, abból a czélból, hogy a keret a rúdon eltolható súly (futó súly) segélyével függélyes helyzetbe legyen visszahozható. A *rúdon működő forgató nyomaték a fékező munka mértékeül* szolgált. Ha l hosszúságú karon ható P súly a keretet egyensúlyi állásba visszahozza, a mialatt a fegyverzet a csavarlapáttal együtt n fordulást végzett, a fékező munka nagysága $T = n \,.\, 2\pi \,.\, l \,.\, P$. A mótor tehát a saját dinamométere. Az n szám meghatározására Marey-féle regisztráló készülékkel egybekötött forgásszámláló szolgált, a mótor nyugalmi helyzete pedig tükörleolvasással volt meghatározható.

A mérő kisérlet lefolyása a következő: A lengő mótor és dinamométer nyugalmi helyzetét megállapítván, a mótor megindíttatik. A csavarlapátok a kaloriméter vizének fékező hatása folytán a lengő szerkezetet kimozdítják, mely súlyokkal nyugalmi helyzetbe viszatéríttetvén, ugyanekkor a kaloriméter körűl keringő víz áramlását úgy szabályozzák, hogy a kaloriméternek a súrlódástól felmelegedő vize állandó hőfokon maradjon. A mint ez az állapot bekövetkezett, működésbe lép a forgásszámoló és a kaloriméter hőmérsékletét állandósító vizet felfogják. A kisérlet 4—11 perczig tart; befejezésekor megállítják a forgásszámolót s egyidejüleg beszüntetik az áramló víz felfogását. Ha a felfogott víz tömege p a belépő és kilépő víz hőmérsékleti különbsége δ, a használt víz fajmelege c, akkor a súrlódás által fejlesztett melegmennyiség $Q = p\delta c$, s így $Jp\delta c = 2\pi nlP$, miből a hő mechanikai egyenértéke

$$J = \frac{2\pi nlP}{p\delta c}$$

Miculescu értekezésében 31 kisérlet értékét állítja össze. Ezek középértéke gyanánt a hő mechanikai egyenértéke

$$J = 426{,}84.$$

Joule-nak észleléseit és számításait Párizsra redukálván, az általa talált egyenérték-szám $J = 426{,}5$-re változik, mely a legujabb meghatározásokkal jól egyezik.

Dolgozatával kapcsolatban *M.* a hő mechanikai egyenértékeinek chronologiai összeállítását közli, mely érdekes táblázatot egész terjedelmében közöljük.

Évszám	Észlelő	Módszer	A hő mech. egyenért.
		I. Közvetlen módszerek.	
1843.	Joule	Víz surlódása csövekben...	424·6
«	Joule	Mágneselektromos áramokkal való melegités.	460
«	Joule	A hő csökkenése a galván oszlopban, ha árama munkát végez	442·2
1845.	Joule	A levegő összenyomása	443·8
«	Joule	A levegő kitágulása	437·8
«	Joule	Víz surlódása kaloriméterben ...	488·3
1847.	Joule	« « «	428·9
1850.	Joule	« « « ...	423·9
«	Joule	Higany surlódása kaloriméterben ...	424·7
«	Joule	Vaskorongok surlódása kalorimtrben	425·2
1857.	Favre	A hő csökkenése a galván oszlopban, ha az áram munkát végez	426—464
«	Hirn	Fémek surlódása	371·6
1858.	Hirn	« «	400—450
«	Favre ...	Fémek surlódása higany-kalorimtrben	413·2
«	Hirn	Fémek fúrása	425
1860/61.	Hirn	Víz a surlódási mérlegben	432
«	Hirn	Folyadékok kifolyása nagy nyomás alatt	433

Évszám	Észlelő	Módszer	A hő mech. egyenért.
1860/61.	Hirn	Ólom ütközése	425
«	Hirn	Víz surlódása két henger között	432
«	Hirn	A levegő kitágulása	440
«	Hirn	Gőzgépek	420—432
1865.	Edlund	Fémek kiterjedése és összehuzódása	428·3—443·6
1870.	Violle	Korong melegedése mágnes sarkai között	435
1875.	Puluj	Fémek surlódása	425·2—426·2
1878.	Joule	Víz surlódása kaloriméterben	439·9
1879.	Rowland	« « «	429·7—425·8
1891.	D'Arsonval	Henger melegedése mágneses mezőben	421—427
		II. Közvetett módszerek.	
1842.	Mayer	$J=\frac{p_0 v_0 \alpha}{C-c}$ egyenletből	365
1857.	Quintus Icilius	Ismert ellenállású drótban való melegfejlesztés	399·7
«	W. Thomson	Elektromindító erő (A víz elektrochemiai egyenértéke 0,009376)	432·1
«	Favre és Silbermann	Hőfejlesztés czinknek SO_4 Cu-ra való hatása által	432·1
«	Bosscha	A Daniell-féle elemnek elektromindító ereje az absolut mértékrendszerben	432·1
1859.	Joule	Hőfejlődés a Daniell-elemben	419·5
«	Bosscha	A Daniell-elem elektromindító ereje	419·5
«	Lenz-Weber	Ismert absolut ellenállású drót megmelegedése	396·4—478·2
1867.	Joule	Ismert absolut ellenállású drót megmelegedése	429·5
1878.	Weber	Ismert absolut ellenállású drót megmelegedése	428·15
1888.	Perot	$L=\frac{T}{E}(u'-u)\frac{dp}{dt}$ egyenlet alapján	424·63
1888.	Dieterici	Joule-féle hő	432·5

Csemez József.

A fémek törés-mutatójáról. A. Kundt : Ueber die Brechungsexponenten der Metalle. *Ann. d. Ph.* XXXIV. köt. 469—489. l.

A testeket optikai tekintetben legjobban jellemző adatok egyike a törés mutató. Átlátszó testekre nézve a prizmában való törésen alapuló módszerek — a prizma törő szögének és a beeső fény iránybeli eltérítésének meghatározása utján — a törésmutatónak igen pontos értékét szolgáltatják. A fényt erősen absorbeáló anyagoknál, pl. fémeknél ezen módszerek alkalmazása tetemes nehézségekkel jár, mely egy részt a kis törő szögü átlátszó fém-prizmák készítésében, más részt pedig abban rejlik, hogy a lemérendő szögek: a törőszög és az irányváltozás, igen kicsinyek. Tényleg csak legujabb időben sikerült a fémek törésmutatójának ily módon való meghatározása.

Azelőtt a fémek egy nevezetes optikai tulajdonságából vontak következtetést a törésmutató értékére. Mig ugyanis a linearisan polározott beeső fény az átlátszó testeken történő a visszaverődés után is megtartja ezen természetét, addig a fém felületre eső linearisan polározott fény a visszaverődés után általánosságban elliptikusan polározottá változik. Ezt a tüneményt az elméleti optika nyelvén így írjuk le: A tetszőleges azimuth alatt palározott fényben a rezgések felbonthatók a beeső síkkal párhuzamos és arra merőleges rezgésre. Reflexio előtt a két rezgés közötti phasiskülönbség — linearisan polározott fénynyel lévén dolgunk — 0 vagy π; a nem fémeknél, a minők pl. az üveg, víz, a reflectált fényben a phasiskülömbség általánosságban ugyanaz marad; fémeknél azonban a reflexió alkalmával a két rezgés phasisban eltolódik, úgy hogy a visszavert fény többé nem linearisan polározott, hanem ellipszisben polározottá változik. A két egymásra merőleges rezgés közötti phasiskülönbség alkalmas eszközökkel pl. a Babinet-féle kompenzátorral lemérhető. Ezen phasiskülönbségből elméleti okoskodások alapján következtetést lehet vonni a visszaverő fém törésmutatójára. Ez volt az első út, melyen a fémek törésmutatóját iparkodtak meghatározni. A számítások több különös eredményt adtak, így pl. azt, hogy az ezüst törésmutatója az egységnél kisebb, hogy továbbá a fémek törésmutatója a beesés szögével változik, azaz hogy a $\frac{\sin i}{\sin r}$ viszony nem állandó mint pl. az üvegnél, hanem az i szöggel változik.

Ezen eredmények magokban is kivánatossá tették a fémek törésmutatójának közvetlen meghatározását, függetlenül minden elméleti föltevéstől.

Quincke volt az első, ki ily kisérlettel határozta meg néhány fém törésmutatóját a Jamin-féle interferential-refractorhoz hasonló műszer segítségével. Ha ugyanis az interferáló fénysugarak csak egy része haladt át egy vékony átlátszó fémlemezen, akkor az interferentia-csíkok eltolódnak ama helyzetükből, melyet elfoglalnak, midőn a vékony fémlemezt elveszszük.

A kisérlet eredményei a reflexióból számított értékekkel nagyjában egyeztek; egyszersmind igazolták azt is, hogy a törésmutató a beesési szöggel változik. Hogy miképen változik, azt eldöntetlenül hagyták.

A kérdéssel legujabban KUNDT foglalkozott behatóan, ki prizmatikus módszerrel határozta meg több fémnek törésmutatóját. A fő nehézség alkalmas fémprizmák előállításában rejlett. A fémek ugyanis csak igen vékony rétegekben átlátszók; QUINCKE becslése szerint a fény a hullámhossz $^3/_4$-ére hatol be a fémbe. Hogy tehát a prizma elég nagy része átlátszó legyen, törőszöge 25″—30″-nél nagyobb alig lehetett, a határfelületeknek azonkivűl teljesen síkoknak kellett lenniök, mert a törőszög kicsiny változása már jelentékenyen befoly az eredményre. Nem csoda tehát, ha 100 elkészített prizma közt csak 1—2 használható akadt.

KUNDT elekrolitikus úton állította őket elő oly módon, hogy vett egy platinával bevont sík üveglemezt, a lemez fölé, arra merőlegesen ugyanolyan széles elektródot helyezett a kiválasztandó fémből. Az üveg és az elektrod képezte szögbe az elektrolit egy capillaris rétegét hozta, melyet árammal elektrolizált. Ily módon azután a kiválasztott fém az üvegre biprizma alakjában rakódott le, melynek legnagyobb vastagsága közvetlenül az elektród alatt volt. A sík felületü prizmák segítségével azután a törésmutatót a törőszög és a beeső fény irányeltérítéséből az ismert módon határozta meg. A mérések rendkívűl kényesek, a lemérendő szögek kicsiny volta miatt; hiszen, a mint már kiemeltük, a törőszög a legjobb esetben 20″—25″, az irányeltérités pedig legföljebb 50″. Ez megmagyarázza azután azt is, hogy pl. az ezüstnél, melynek törésmutatója a legkisebb, egyes meghatározások között mutatkozó eltérések az egész érték $^1/_3$-részét is elérik. A mérések eredményét — a törésmutatókat — a következő táblázat tünteti elő:

	Vörös	Sárga	Kék		Vörös	Sárga	Kék
Ezüst	—	0,27	—	Vas	1,81	1,73	1,52
Arany ...	0,38	0,58	1,00	Nikkel ...	2,17	2,01	1,85
Réz	0,45	0,65	0,95	Bizmut ...	2,61	2,26	2,13
Platina ...	1,76	1,64	1,44				

Feltünő az ezüst törésmutatójának kis értéke, melyből következik, hogy ezüstben a fényterjedés sebessége közel négyszer akkora, mint az üres térben. A mint az észlelések mutatják, az aranynak s a réznek a dispersiója tetemes, míg a többi fémnél anomal dispersió mutatkozik.

A törésmutatók viszonyának reciprok értéke egyenlő lévén a fénysebességek viszonyával, az előbb felsorolt értékek egyszersmind a fénysebességek viszonyát is szolgáltatják. A fény terjedés sebességét az ezüstben 100-nak vevé, a többi fémben a vörös fény sebességét a következő számok fejezik ki:

Ezüst	Arany	Réz	Platina	Vas	Nikkel	Bizmut
100	71	60	15,3	14,9	12,4	10,3

Ezen értékeket az elektromos, ill. hő vezető képességek viszonyával összehasonlítván, rögtön szembe tünik a két értékcsoport közeli egyezése. Ha ugyanis az ezüst elektromos vezető képessége 100, akkor a többi fémre a következő értékeket nyerjük:

Ezüst	Arany	Réz	Platina	Vas	Nikkel	Bizmut
100	69	93	11	11	—	0,1

Ez eltérés a két érték között csak a réz és bizmutnál jelentékeny. Kundt azonban megjegyzi, hogy a réz prizma esetleg oxydult tartalmazott, a mi — idevágó kisérletek alapján — a törésmutatót megnagyobbítja; a bizmut vezető képességét pedig kristályos rudakon határozták meg, mig a bizmut prizma semmiféle kristályos tulajdonságot nem mutatott, a mi a törésmutatót esetleg megváltoztatja. Daczára ezen eltéréseknek a most ismertetett kisérletek igen valószínűvé teszik, hogy a fémekben a fény terjedési sebessége arányos az elektromos és a hővezető képességgel. Természetesen nem beszélhetünk egyszerűen «fénysebességről a fémekben», mert hisz az — a mint a törésmutatók értékei mutatják — a fény nemével, tehát a hullám hosszal jelentékenyen változik. Nagyon valószínű azonban, hogy a fény sebessége a fémekben — épen úgy, mint a pl. az üvegben vagy más fénytörő anyagokban — bizonyos határértékhez közeledik az esetben, ha a hullámhossz minden határon túl nagyobbodik. Ezen határértékhez legközelebb esik a vörös fény sebessége s épen ez utóbbinak egyezése a vezető képességgel a legnagyobb; valószínű tehát, hogy az előbb említett határérték az, mely arányos a vezető képességgel.

*

A. Kundt: Ueber die Aenderung der Lichtgeschwindigkeit in den Metallen mit der Temperatur. *Ann. d. Ph.* XXXVI. 825—833 l.

Ha a fényterjedés sebessége s a hővezető képesség közötti arányosság tényleg fennáll, akkor a fénysebességnek és elektromos vezető képességnek a hőmérséklettel egyformán kell változnia. Kundt ezen kérdés eldöntése végett is végzett kisérleteket, ugyanazon módszerrel, melyet előbb ismertettünk. A megvizsgálandó prizmákat oly szekrénybe helyezte el, melyben a hőmérséklet tetszés szerint változtatható volt.

Első közelítésben felvehető, hogy a törésmutató a hőmérséklettel arányosan változik; vagyis ha t_0 hőmérsékleten a törésmutató n_0 akkor t hőmérséklet alatt

$$n = n_0 \, [1 + \beta \, (t - t_0)]$$

Ha két hőmérsékletre nézve ismeretes az n értéke, akkor ezekből β, a *hőmérsékleti együttható* kiszámítható. Kundt meghatározta a törésmutatót a szoba hőmérsékletnél és körülbelül 100° C. foknál.

Ezen meghatározásokból β-ra a következő értékek adódtak:

		β			β
Arany	fehér f.	0,0035	Platina	fehér f.	0,0027
Arany	vörös f.	0,0051	Nikkel	vörös f.	0,0026
Ezüst	fehér f.	0,0064	Vas	vörös f.	0,0040

Ezen adatokból az átlagos értéket kiszámítván, a hőmérsékleti együttható *0,0036*; e szerint a fémek a törésmutatója a hőmérsékletnek 1°-kal való emelkedésére az egész érték 0·0036-ével növekszik, tehát a fénysebesség 0·0036-del kisebbedik. Az elektromos vezető képesség pedig ugyanazon fémeknél 1°-ra az egész érték 0,0036-dével kisebbedik. A két érték teljes egyezése természetesen csak véletlen, mert β értéke körülbelől csak $^1/_3$-ig pontos. Annyit azonban mondhatunk, hogy az észlelés határain belül a fémekben a fénysebesség és az elektromos vezetőképesség a hőmérséklettel egyformán fogy.

Kundt-nak mérései mind csak azon esetre szorítkoznak, melyben a prizma felületére beeső fény arra merőleges; igazolatlanul hagyják tehát a a theoriának egy nevezetes következtetését, azt, hogy a fényt erősen absorbeáló közegekben a törésmutató a beesési szöggel változik.

*

D. Shea: Zur Brechung und Dispersion des Lichtes durch Metallprismen. *Ann. d. Ph.* XLVII. 177—202.

A fémek fénytörő és szinszóró képességének a beesés szögétől való függését Shea vizsgalta meg s méréseivel az elmélet következtetését igazolta még pedig oly módon, hogy a fémprizma felületére ismert szög alatt beeső fénynek a prizma létesitette irányeltérítését mérte. A platina prizma kivételével a többit az előbb leírt módon elektrolitikus uton állította elő. A platina prizmákat a következő eljárással készítette: sík üveglemez fölé, reá merőlegesen 4 mm. széles 0,02 mm. vastag platina lemezt helyezett, körülbelül 0,5 mm. távolságban. Az utóbbin 20 ampernyi áramot vezetve, a lemez lassan szétporlik és az alatta levő üveglemezen biprizma alakjában lerakódik.

Méréseinek eredményét a következő táblázatba foglalhatjuk össze:

Beesési szög	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
	n (vörös fényre)									
Arany	0,26	0,34	0,43	0,56	0,69	0,80	0,90	0,97	1,01	1,03
Ezüst	0,35	0,39	0,48	0,60	0,72	0,83	0,92	0,99	1,03	1,05
Réz	0,48	—	0,59	0,69	0,80	0,90	0,98	1 05	1,09	1,10
Platina	1,99	—	—	2,05	2,08	2,11	2,14	2,16	2,18	2,19
Nikkel	2,01	—	—	2,06	2,09	2,12	2,15	2,18	2,19	2,20
Vas	3,03	—	—	3,07	3,09	3,10	3,12	3,14	3,15	3,15
Kobalt	3,16	—	—	3,19	3,21	3,22	3,25	3,27	3,28	3,28

Tekintetbe vévén a közeg absorptióját, akkor az elmélet is arra vezet, hogy a törésmutató a beesési szöggel változik és bizonyos összefüggést állapít meg a beesési szög, a közeg absorptiója és a törésmutató között. SHEA kisérleteinek eredményeit az elmélet követelte értékekkel összehasonlította és az észlelés határain belül teljes egyezést talált.

A mint a táblázatból látható az arany, ezüst és réznél a törésmutató tetemesen változik a beesési szöggel; innen magyarázható az is, hogy daczára a törésmutató kis értékének a merőleges incidentiánál, totális reflexio ezen fémeken nem észleltetett. *Tangl Károly.*

IRODALOM.

Adalék a parallelák elméletének történetéhez. A szerint, a mint két párhuzamos egyenesnek két valós, két képzetes vagy egy valós metszéspontot tulajdonítunk, háromféle — a maga körében ellentmondást kizáró — geometriát építhetünk föl: a Lobatschewki-Bolyai-félét, a Riemann-félét és az Euclides-félét. Sokáig ez utóbbi volt az egyedül uralkodó; alapját a következő három posztulatum képezi:

a) *A derékszögek egymás közt egyenlők.*

b) *Ha két egyenest átmetszünk egy harmadikkal, s a metsző ugyanazon oldalán fekvő belső szögek összege kisebb két derékszögnél, akkor a határtalanul meghosszabbított két egyenes a sík azon felén találkozik, a melyen az említett szögek feküsznek.*

c) *Két egyenes nem kerít be síkrészt.*

Számos sikertelen kisérlet e posztulatumokból tételeket akart csinálni; Gauss 1792-ben belátta e törekvések hiábavalóságát, s az ő védőszárnyai alatt egymástól függetlenül állítottak föl Lobatschewski 1829-ben, Bólyai János 1832-ben egy-egy új geometriát, olyant, melyben a *b*) posztulatum nincsen teljesítve. 1854-ben Riemann egy harmadik geometria lehetőségét látta be, olyanét, melyben a *c*) posztulatum érvénytelen, s ennek alapelveit 1867-ben közölte is. E történelmi adatok ujabban — úgy látszik — módosítást szenvedtek. E. Beltrami 1889. márcz. 17-én egy a római *Academia dei Lincei*-ben fölolvasott értekezésében (Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewski) kimutatta, hogy Saccheri Jeromos jezsuita már 1733-ban a Riemann- és Lobatschewski-féle geometriák elemeivel tisztában volt, s hogy őt azok további kifejtésében csupán az infinitezimál számítás akkori kezdetleges állapota akadályozta meg. Művének czíme: *Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus, quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia, — Auctore* Hyeronimo Saccherio *Societatis Jesu, in* Ticinensi *universitate matheseos professore.* Opusculum exmo Senatui Mediolanensi ab auctore dicatum. Mediolani MDCCXXXIII. Ex typographia Pauli Antonii Montani, superiorum permissu. Negyedrét, XVI. — 142. 6 táblán 55 ábrával.

A munka, bár felületes ismertetése az Acta Eruditorum-ban annak idején (1736) megjelent, s miután MURHARD: Bibliotheca mathematica-jában csillaggal jelöltetett, tehát 1800 táján a göttingai könyvtárban is meg volt, GAUSST és munkatársait aligha befolyásolhatta. Bővebb ismertetést közöl róla P. MANSION: «Notes sur la géométrie Euclidienne, et sur la géométrie non Euclidienne» czímen. (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1890—91. t. XV. I. Part. pp. 8—11.) *Bozóky Endre.*

*

Dr. W. J. van Bebber. Lehrbuch der Meteorologie für Studierende und zum Gebrauche in der Praxis. Stuttgart. Verlag von Ferdinand Enke, 1890, 120 fametszet, 5 tábla, VIII + 391 lap. Ára 10 márka.

A német birodalmi Seewarte III. (meteorologiai) osztályának érdemes vezetője e művében szerencsésen oldotta meg ama feladatot, hogy középúton haladva a tisztán elméleti és népszerű meteorológia között, ezen tudomány összes ismereteit modern álláspontom tankönyvben foglalja össze. A physika, jelesen a mechanika és a mechanikai hőelmélet alkalmazása meteorologiai vizsgálódásokra; továbbá a meteorologiai statisztika, mely a tökéletesbedő műszerek használata és a mindinkább terjedő észlelési hálózatok által úgy minőségben mint mennyiségben megnövekedett, megteremtették az alapját a meteorologia haladásának is. S jóllehet e haladás újabb keletű, mégis terjedelmes irodalommal dicsekedhetik már. E műnek becse épen abban rejlik, hogy a szakbeli irodalmat teljesen felöleli. A mi az utolsó évtizedek folyamán értekezésekben, folyóiratokban vagy egyéb munkákban elszórtan megjelent, azt a szerző gondosan felhasználván, átvette belőlük a physika idevágó újabb eredményeit, nemkülönben a megszaporodott klimatológiai anyagot is, miáltal sikerült neki a jelenkori meteorologiáról jól áttekinthető és teljes képet adni.

Hasznát veszi e műnek a szakember megbizható adatok keresésénél; de jó szolgálatot tesz a tanárnak és tankönyvíróknak, mert a meteorologiai elemekről és azoknak kölcsönös hatásáról a legujabb nézeteket és ismereteket találják meg benne. A 13 fejezet közül különösen a hőmérséklet és a csapadékokról szólók részesültek körültekintő és beható tárgyalásban. A gyakorlati meteorologia és a meteorologiai elemek cserehatásairól szóló fejezetek szerző egy másik nagyobb művének, az «Ausübende Witterungskunde» rövid kivonatát képezik. A barometrikus maximumok és minimumok jelentőségéről és viselkedéséről, a depressziók útjairól, valamint a typikus időjárási helyzetekről írt czikkekben BEBBER sokévi tapasztalásainak eredményeit rakta le, melyek elérésénél sok tekintetben őt az úttörő érdeme illeti meg. *Róna Zsigmond.*

*

Dr. W. J. van Bebber. Die Wettervorhersage. Eine praktische Anleitung zur Wettervorhersage auf Grundlage der Zeitungswetterkarten und Zeitungswetterberichte für alle Berufsarten, im Auftrage der Direktion der Deutschen Seewarte. Stuttgart. Verlag von Ferd. Enke. 1891, XII+171 lap, ára 4 márka.

E művel a szerzőnek az a szándéka, hogy a gyakorlati irányú meteorologia iránt felköltse a művelt közönség érdeklődését, és hogy az időjárásról széltében elterjedt sok téves és elavult nézeteket ujabb, helyesebb és a tapasztalás igazolta nézetek váltsák fel. Az egész mintegy a gyakorlati meteorologia népszerüsítése. Ehhez képest közel 200 szinoptikus térképen magyarázza az összefüggést az uralkodó időjárás és a meteorologiai elemek eloszlása között, valamint az egyes helyzetek átalakulásait. Vezérfonalként használja a depressziók útjait, melyeknek 5 főirányát ismerteti és ezen az alapon, a meleg és hideg évszakokat elkülönítve, típusokba sorozza az időjárási helyzeteket. S mivel majdnem minden helyzethez megfelelő példát találhatni e műben, valóságos időjárási atlasz gyanánt használható. Főleg a németországi viszonyokat tartja szem előtt, miért is az északeurópai depressziókat tárgyalja tüzetesebben. A hazánk időjárási viszonyaira nagy mértékben ható déli depressziók, melyek a földközi tengerben keletkeznek, vagy rajta átvonulnak, miután tanulmányozásuk a szerző czéljától távolabb esnek, nem részesültek kellő méltatásban. Mindamellett a magyar olvasó is hasznát veszi a műnek, ha a meteorologiai prognózisok gyakorlatával behatóbban megismerkedni kiván. *Róna Zsigmond.*

MEGOLDOTT FELADATOK.

9. *Legyenek*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

az

$$u_1, u_2, \ldots, u_m,$$
$$(m < n)$$

változók differencziálható függvényei; jelöljük továbbá rövidség okáért a

$$D\left(\frac{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}}{u_1, u_2, \ldots, u_m}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_1} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_2} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial u_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_m} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial u_m} & \cdots & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

függvénydeterminánst, melyben $i = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ az 1, 2, 3, ..., n *elemek tetszőleges m-edfokú kombinácziója,* D_i*-vel; bebizonyitandó, hogy minden az* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *változókra alkalmazott orthogonális helyettesítés ugyanily helyettesítést létesít a* D_i*-k között.* (Rados.)

*

Első megoldás Suták József főgymnasiumi tanár úrtól Budapesten.

Legyen az alkalmazandó orthogonális helyettesítés;

$$x_i = \alpha_{i1} y_1 + \alpha_{i2} y_2 + \ldots + \alpha_{in} y_n;$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

jelöljük továbbá a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial u_1} & \frac{\partial y_{j_2}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial y_{j_m}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial y_{j_1}}{\partial u_2} & \frac{\partial y_{j_2}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial y_{j_m}}{\partial u_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_{j_1}}{\partial u_m} & \frac{\partial y_{j_2}}{\partial u_m} & \cdots & \frac{\partial y_{j_m}}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

determinánst Δ_j-vel és jelöljük végül rövidség okáért az

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_m} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_mj_1} & a_{i_mj_1} & \dots & a_{i_mj_m} \end{vmatrix}$$

aldeterminánst a_{ij}-vel, hol $j=(j_1, j_2, \dots, j_m)$ az $1, 2, \dots, n$ elemek, tetszőleges m-edosztályu kombinácziója. Az orthogonális helyettesítés alkalmazása után

$$D_i = \sum_{j=1}^{\mu} a_{ij} \Delta_i \qquad \left[\mu = \binom{m}{n}\right].$$

Ha α-val jelölöm az orthogonális helyettesítés determinánsát, b_{ij}-vel a_{ij} adjungált aldeterminánsát, akkor ismeretes hogy

$$\sum_{j=1}^{\mu} a_{ij} b_{ij} = \alpha;$$

minthogy pedig a jelen esetben

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \tag{1}$$

következik, hogy

$$\sum_{j=1}^{\mu} a_{ij}^2 = 1; \tag{2}$$

i helyett s-t írván, jelöljük a_{sj} adjungáltját b_{sj}-vel, szintén ismeretes, hogy

$$\sum_{1}^{\mu} {}^j a_{ij} b_{sj} = 0$$

a jelen esetben az 1) relácziónál fogva

$$\sum_{1}^{\mu} {}^j a_{ij} a_{sj} = 0 \tag{3}$$

A 2) és 3) alatti relácziók a kimondott tételnek igazolói.

*

Második megoldás dr. Kürschák József műegyetemi m. tanár úrtól.

Legyen az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változókra alkalmazott orthogonális helyettesítés

$$x_h = C_{h1}\xi_1 + C_{h2}\xi_2 + \dots + C_{hn}\xi_n$$
$$(h=1, 2, \dots, n)$$

s értsük C_{ij} alatt, hogyha $i=(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ és $j=(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ az 1, 2, 3, ..., n elemek bizonyos m-edosztályú kombináczióit jelentik, a következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} C_{i_1 j_1} & C_{i_1 j_2} & \ldots & C_{i_1 j_m} \\ C_{i_2 j_1} & C_{i_2 j_2} & \ldots & C_{i_2 j_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ C_{i_m j_1} & C_{i_m j_2} & \ldots & C_{i_m j_m} \end{vmatrix},$$

akkor a következő

$$\mu = \binom{n}{m}$$

számmal lévő egyenletből álló rendszer

$$(1) \qquad y_i = C_{i1}\eta_1 + C_{i2}\eta_2 + \ldots + C_{i\mu}\eta_\mu \qquad (i=1, 2, \ldots, \mu)$$

megint orthogonális helyettesítést fejez ki.*

Ezt előre bocsátva, a kitüzött feladatot következőképpen oldhatjuk meg. Tudván azt, hogy pl.

$$\frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_1} = C_{i_1 1}\frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} + C_{i_1 2}\frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} + \ldots + C_{i_1 n}\frac{\partial \xi_n}{\partial u_1},$$

a D_i determinánst ebből a két matrixból

$$\begin{Vmatrix} C_{i_1 1} & C_{i_1 2} & \ldots & C_{i_1 n} \\ C_{i_2 1} & C_{i_2 2} & \ldots & C_{i_2 n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ C_{i_m 1} & C_{i_m 2} & \ldots & C_{i_m n} \end{Vmatrix}$$

és

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial \xi_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial \xi_n}{\partial u_2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial u_m} & \frac{\partial \xi_2}{\partial u_m} & \ldots & \frac{\partial \xi_n}{\partial u_m} \end{Vmatrix}$$

soraik komponálásával képezhetjük. De akkor a determinánsok szorzási tételének Binet és Cauchy-tól eredő általánosítása értelmében

$$D_i = C_{i1}\Delta_1 + C_{i2}\Delta_2 + \ldots C_{i\mu}\Delta_\mu,$$

* L. Rados. Az orthogonális helyettesítések elméletéről. (Mathematikai és term. értesítő X. köt.)

hol

$$\varDelta_i = D\left(\frac{\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_m}}{u_1, u_2, \ldots, u_m}\right).$$

Tehát a D_i és $\varDelta_i$ determinánsok között ugyanaz a kapcsolat áll fenn, mint (1) alatt az y_i és η_i között, a miből a bebizonyítandó tétel helyessége következik.

Ha $n = 3$, $m = 1, 2$, akkor e tétel a következőképpen értelmezhető:

$$\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] dt$$

és

$$\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right] du.dv$$

kifejezések, melyek az ívelemet illetve a felületelemet határozzák meg, változatlanul maradnak minden az x, y, z változókra gyakorolt orthogonális helyettesítésnél. Az n-dimenziós térben minden más eset hasonlóan értelmezhető.

Az alkalmazott módszerrel még a következő tételt találtam:

Legyenek

$$u_1, u_2, \ldots, u_m$$

az

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \quad (n > m)$$

változók differencziálható függvényei; jelöljük továbbá rövidség okáért a

$$D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots, u_m}{u_{j_1}, u_{j_1}, \ldots, u_{j_m}}\right)$$

determinánst D_j-vel, akkor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változókra alkalmazott orthogonális helyettesítés ugyanily helyettesítést létesít a D_j-k közt.

Ugyanis a

$$\varDelta_j = D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots, u_m}{\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \ldots, \xi_{j_m}}\right)$$

determináns a

$$\begin{Vmatrix} C_{1j_1} & C_{2j_1} & \ldots & C_{nj_1} \\ C_{1j_2} & C_{2j_2} & \ldots & C_{nj_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{1j_m} & C_{2j_m} & \ldots & C_{nj_m} \end{Vmatrix}$$

és

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{Vmatrix}$$

matrixokból a sorok komponálásával képezhető s ennélfogva

$$\Delta_j = C_{1j} D_1 + \ldots + C_{\mu j} D_\mu$$
$$(\gamma = 1, 2, \ldots, \mu).$$

E helyettesítés együtthatói ugyanazok, mint a melyek (1) alatt szerepelnek, csakhogy a sorok és oszlopok szerepet cseréltek. Helyettesítésük tehát a D_j-k között is orthogonalis helyettesítést létesít.

Legyen pl. $m = 2$, $n = 3$, akkor a bebizonyított tétel értelmében

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

nem változik, ha x, y, z változókra valamely orthogonális substituicziót alkalmazunk.

Dr. Beke Manó főreáliskolai tanár úrtól beküldött megoldásban a bebizonyitás menete ugyanaz; Kürschák úr kiegészitő megjegyzései azonban nem tartalmaztatnak benne. Szerk.

*

Harmadik megoldás Csillag Vilmos műegyetemi hallgató úrtól.

Legyen az alkalmazandó orthogonális helyettesítés

$$x_i = c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \ldots + c_{in} y_n \cdot \qquad S)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ismeretes, hogy ennek megfordítása

$$y_i = c_{1i} x_1 + c_{2i} x_2 + \ldots + c_{ni} x_n \qquad S^{-1})$$

szintén orthogonális helyettesítés.

Jelöljük azt a kifejezést, mely D_i-ből S-nek alkalmazása után keletkezik $\overline{D}_i$-vel, úgy hogy

$$SD_i = \overline{D}_i$$

tehát

$$D_i = S^{-1} \overline{D}_i .$$

Ha a $|c_{ik}|$ determináns

$$\begin{vmatrix} c_{i_1k_1} & c_{i_1k_2} & \ldots & c_{i_1k_m} \\ c_{i_2k_1} & c_{i_2k_2} & \ldots & c_{i_2k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{i_mk_1} & c_{i_mk_2} & \ldots & c_{i_mk_m} \end{vmatrix}$$

aldeterminánsát C_{ik}-val jelöljük, hol i és k az $1, 2, \ldots, n$ elemek $i_1, i_2, \ldots, i_m$ illetve $k_1, k_2, \ldots, k_m$ m-edosztályú kombináczióinak rövidített jelölései, akkor a determinánsok ismeretes általánosított szorzási tételéből tüstént következik, hogy

$$\overline{D}_i = C_{i1}D_1 + C_{i2}D_2 + \ldots + C_{i\mu}D_\mu \qquad \mathrm{I}$$
$$\left(i=1, 2, \ldots, \mu;\ \mu = \binom{n}{m}\right)$$

Ha azonban figyelembe vesszük S^{-1}-nek fönt részletezett alakját továbbá írhatjuk

$$D_i = C_{1i}\overline{D}_1 + C_{2i}\overline{D}_2 + \ldots + C_{\mu i}\overline{D}_\mu\,. \qquad \mathrm{II}$$
$$\left(i=1, 2, \ldots, \mu;\ \mu = \binom{n}{m}\right)$$

I. és II. egybevetése azonban tüstént a

$$C_{i1}C_{k1} + C_{i2}C_{k2} + \ldots + C_{i\mu}C_{k\mu} = \delta_{ik} \qquad \mathrm{III}$$
$$(i, k=1, 2, \ldots, \mu)$$

relácziókra vezet, melyben δ_{ik} 0-t vagy 1-et jelent a szerint a mint $i \gtrless k$ vagy $i = k$.

A III alatti reláczió azonban már az I alatt foglalt helyettesítés orthogonális jellemét kétségtelenné teszi.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

Kisérletek kézi hajtásu dinamogépekkel.* Gyakori a panasz, hogy az iskolai czélokra készült dinamogépekkel a kísérletek nem úgy sikerülnek, mint a voltok és amperek igért száma után várható. A kísérletek nem sikerültének oka rendszerint annak a körülménynek félreismerése, hogy a dinamogép elektromindító ereje a gyűrűnek állandó forgássebessége mellett a gép elektromágnesének mágnességétől, a mágnesség az indított áram erősségétől, ez pedig az áramkör ellenállásától függ. Állandó ellenállásu áramkörben az elektromindító erő a forgássebességgel növekedik.

A kísérletnél első sorban a gép szerkezete veendő tekintetbe. A régibb dinamoelektromos gépek elektromágnese a gyűrűvel egy áramkört alkot, az újabbakban az elektromágnes tekercsei az áramkör elágazásában vannak. Az egy áramkörű gép mindannyiszor nehezen indúl meg, ha a külső áramvezetékben nagy ellenállást, vagy elektromindító erőt kell legyőznie; azért, mert árama nem elég erős arra, hogy az elektromágnest eléggé felgerjeszsze s azután a forgásszámnak megfelelő áramerősséget indítsa. Az ilyen gép rövid ideig tartó mellék-zárlattal, mint e lapok I. kötetének 176. lapján közöltem volt, könnyen megindítható. Az ott előadottaknak mintegy kiegészítéseül leírom egy-két tapasztalatomat, régibb szerkezetű, nem mellékzárzatú dinamogépet tartván szem előtt.

1. *Izzólámpák felgyujtása.* — Kétféle izzólámpám van: egy kisebb *A* és egy nagyobb *B* lámpa. — Az *A* lámpát a dinamogép áramkörébe kapcsolom. A gépet fölötte gyorsan kell hajtani, hogy a lámpa fehérizzóvá legyen: «kigyúljon», de ha már felgyúlt, lassított hajtással is tovább világít. — Azután meghagyva a lámpát az áramkörben, mellék-zárlatot állítok elő, a gép drótszorítói közé mintegy 1 ohm ellenállást kapcsolván; A lámpa most igen könnyen felgyujtható. — Az *A* lámpa helyett a *B* lámpát kapcsolom az áramkörbe. A lampa a leggyorsabb hajtással sem hozható izzásba: a gép oly könnyen forog, mintha áram nélkül, üresen járna. A *B* lámpa még akkor sem gyúl ki, ha mellékágba csatolom. —

* Feleletül több beérkezett kérdésre. *Szerk.*

Végül két rézdrótot feszítek ki egyközűen ; az egyiket a dinamogép egyik sarkával, a másikat a gép másik sarkával kötöm össze. A két drót közé 6 darab *A* lámpát akasztván, a gépet megindítom. A lámpák könnyen kigyúlnak, de a munka, mit ekkor kell végezni, érezhetően nagyobb, mint a mely egy lámpa esetében volt végzendő. — A *B* lámpákkal czélt ezen a módon sem érek. Azért nem, mert az izzólámpák szénszálának ellenállása nagy. A kísérlet alatt álló *A* lámpáé hideg állapotában 20 ohm, a *B* lámpáé 60 ohm. A gép drótjának ellenállása 1,5 ohm, a vezetők ellenállása elhanyagolható csekély volt. Az osztatlan áramkör ellenállása tehát *A* lámpa bekapcsolása mellett 21,5 ohm, a *B* lámpával pedig 61,5 ohm, Ekkora ellenálláson át a gép remanens mágnessége kezdetben igen csekély áramot indít; csak igen gyors hajtással sikerül az elektromótoros erőt 8 voltra emelni, mely az *A* lámpa izzítására szükséges 0,4 amper áramot termelve, a lámpát fel is gyújtja. A fehéren izzó szénszál ellenállása a hideg állapotabeli ellenállásának közel felére apad le ; a megkisebbedett ellenálláson át erősebb áram indul meg ; minthogy azonban az *A* lámpa táplálására 0,4 amper áram elégségés, érthető, hogy a már izzólámpa izzásban tartására lassított hajtással is beérhetjük. Hogy a mellékágba kapcsolt lámpa könnyebben gyújtható fel, annak az a magyarázata, hogy a mellék-zárlat az összes áramkör ellenállását leszállította és a megkisebbedett ellenállású áramkörben csekélyebb elektromindító erő hatása alatt is megindul az áram, mely az elektromágnest felgerjesztvén, csakhamar 0,4 am. erősségre emelkedik. A 60 ohm ellenállású *B* lámpát pedig azért nem lehet felgyújtani a mi gépünkkel, mert azt a 80 voltnyi elektromotóros erőt, mely a lámpában a felgyujtásához szükséges 1 am-nyi áramot termelné, a gépnek leggyorsabb hajtásával sem hozhatom létre. Hogy az elektromótoros erő a megkivánt magasságra emelkedhessék, az inductio gyűrűnek vékonyabb drótból kellene készítve lennie.

Az egyközüen kapcsolt 6 *A* izzólámpában könnyen indul meg az áram ; mert a 6 lámpa az áramkör külső részének ellenállását a 6-odára szállítja le. A 6 lámpát tápláló áram erőssége ekkor 6 × 0,4 lesz, melynek termelésére természetesen nagyobb munkát is kell végezni, mi a gép hajtásán feltünően megérzik.

Ha a 6 *A* izzólámpát egymásután kapcsolom, akkor az áramkör vezetékének ellenállása 36-szor akkora lesz, mint az egymásmellé kapcsolás esetében. Ekkor nincs rá mód, melylyel a lámpákat a kézi dinamogéppel felgyujthatnám.

Kaptam három kis izzólámpát. Külsejükre egészen egyenlőknek látszanak. Egymásmellé kapcsolom az áramkörbe. Az első fehéren izzik, a második ez alatt csak vörös izzóvá lesz, a harmadik sötét marad. Ennek oka az, hogy a lámpák belső szerkezete nem azonos, a szénszálak nem egyenlők. Az izzólámpáknak nemcsak vezetőképességükre kell egyenlőknek lenniök, hanem a szénszálak dimenzióinak és szerkezetüknek is azonosnak kell lennie, hogy parallel kapcsolással egyformán világítsanak.

Az izzólámpákon végzett kísérletekből a következő tanulságot vonhatjuk. Az izzólámpákat mindig parallel kell kapcsolni az áramkörbe. A gyakorlati világításra készült lámpák, melyek ellenállása 60—120 ohm és a felgyujtásukra szükséges áramerősség 0,8—1,5 am közt változik, a kézi dinamogéppel fel nem gyújthatók; mert habár e lámpáknak nagy ellenállását többnek parallel kapcsolásával kellőképen alá is lehet szállítani, a lámpák táplálására szükséges áramot emberérővel termelni nem lehet, de azon felül a kézi dinamónak dimenziói sem engednek meg akkora áramtermelést. A kézi dinamók számára külön e czélra készült kis izzólámpák valók, és ezeknek teljesen egyneműeknek kell lenniök. További megfontolás annak belátására is vezet, hogy az izzólámpák adott száma mellett, a lámpák dimenziójának a gép szerkezetéhez kell alkalmazva lennie, hogy a felgyújtásuknál végzett munka sikere, mint világosság, a legczélszerűbb maximumban lépjen föl. Megjegyzem még, hogy a gépnek, továbbá a lámpák és a vezetéknek ellenállása közt a tapasztalat szerint 3 : 7 a legkedvezőbb viszony.

2. *Az akkumulátor és a dinamogép.* — Akkumulátort tölteni a kézi dinamogéppel, emberérővel — azt hiszem — senki sem akar. Még a legkisebb akkumulátor megtöltése végett is órákon át kellene a dinamogépet egyenletes gyorsasággal — *megállás nélkül!* — hajtani; már pedig néhány perczig tartó hajtás is teljesen kimeríti az embert. Vegyük hozzá még azt, hogy az akkumulator töltésére a gépbe fektetett energiának a legjobb esetben legfölebb 80%-át kaphatjuk ismét vissza elektromos áram alakjában. Az energia-átalakulás bemutatására mégis czélszerű a kisütött akkumulatort a gép áramkörébe kapcsolni. Egy-két perczig tartó hajtás után már képes lesz az akkumulátor vékony drótot izzítani, esetleg egy picziny, csekély ellenállású borsószem-izzólámpát rövid időre megvilágítani. (Alig szükséges tán megjegyezni, hogy az akkumulátor a dinamo drótján keresztül kisül, ha a gép megáll; azért a gép megállása *előtt* kell a vezetékből kikapcsolni.)

Az energia átalakulása feltünően szemléltethető így is: Miután az akkumulátort egy-két perczig töltöttük, — a gép és az akkumulátor kapcsolásán mit sem változtatva — dobjuk le a gép hajtószíját; a gép gyűrűje ekkor rövid ideig visszafelé fog forogni.

3. *Ruhmkorff szikraindítóját* a kézi dinamogéppel csakis mellékzárlattal lehet sikeresen működtetni. A szikraindító áramszakítója ugyanis nem rezeg elég gyors egymásutánban; az áramszakadás- és zárás közt lefolyt idő alatt a dinamogép mágnese visszamaradó mágnességének nagy

részét elveszti, az áramzárás pedig oly rövid ideig tart, hogy alatta az áram és vele az elektromágnes elégséges intenzitásra nem juthat. A másik áramág ekkor változó intenzitású ugyan, de folytonos és a szikraindító működtetésére elégséges. A mellékág ellenállásának nagysága a szikraindító ellenállásának mekkoraságától függ és kísérlettel könnyen meghatározható. Kisebb inductio-készülékeket a főáramba is lehet kapcsolni; mert ezeknek áramszakítója elég gyorsan rezeg és egy-egy rezgés időtartama alatt a visszamaradó mágnesség elegendő intenzitást tart meg. Mellékágba kapcsolni azonban az ilyen kis inductorokat is azért czélszerű, mert a főáram könnyen tulságos erőre kap, mi a készülék kárára lehet.

4. *A dinamogép mint mótor.* A gépbe állandó galvántelep áramát vezetvén, az a gép gyűrűjét ellenkező irányban forgatja azzal a forgásiránynyal, melyben kézzel hajtva, a bevezetett árammal szemben mozgó áramot termelne. A dinamogép ekkor elektromos mótorrá lett, vele az elektromos erőátvitel mutatható be.

Igen tanulságos a mótorrá alakított gép mozgását az *influentia* gépre átvinni. E czélból a dinamo- és influentia-gép hajtó-szíjait eltávolítván, a dinamogép gyűrűjének és az influentia-gép forgó korongjának tengelyére erősített csigakerekeket kell hajtó-zsinórral összekötni. A 4—5 Bunsen-elemből álló telep áramkörébe egy rheostatot iktatván, az áramerősség s evvel a mótor forgássebessége módosítható. Ekként a két gép mozgásában könnyen előállítható olyan *érzékeny egyensúlyi* állapot, melyen az energia átalakulása föltűnővé válik. E berendezés mellett lejátszódó érdekes tünemények a következők. Addig, a meddig az influentia-gép üresen szalad, a gépek forgása igen gyors. A mint azonban az influentia-gépet megtöltjük, a mozgás meglassudik, de még mindig elég gyors, ha az elektródák össze vannak tolva. A megtöltött influentia-gépnek elektródjait fokonkint széjjel húzván, a gépek forgása abban a mértékben lassúdik, a mely mértékben az elektródok sarktávolsága növekszik. Az influentia-gép elektródjai közt átpattogó szikrák egymásutánja gyors vagy lassú, a mint az elektródok végeinek egymástól való távolsága kicsiny vagy nagyobb; de állandó sarktávolság mellett pontosan egyenlő időközökben képződnek a szikrák. Kisebb (2—4 cm) elektródtávolság mellett a gépek járása egyenletes. Amint azonban az elektródok 10—15 cm-re vannak egymástól, a gépek járása egyenlőtlenné válik. Nevezetesen: a gépek járása fokozatosan lassuló addig, mig az elektródokon felhalmozódó elektromosságok potentiálja a szikraképződésre szükséges magasságra nem emelkedik; a szikra átcsapása után a gépek járása hirtelen gyorsuló, de utána csakhamar ismét lassudó.

5. *Az elektromos energia átalakulása* csinosan mutatható be a következő kísérlettel is. Valamely elektromos lánczczal, melynek árama néhány centiméternyi vékony vasdrótot izzítani képes, áramkört állítunk elő.

Az áramkörbe beleiktatjuk a dinamogépet, mint mótort, az ampermetert (v. galvanometert), egy darabka vékony vas vagy platinadrótot és — ha az áram igen erős — egy rheostatot. A mint az áramkör záródik, a mótor megindúl, a drót azonban nem melegszik fel igen észrevehetően. Fékezzük most a dinamogép forgó gyűrűjét. A mint a gyűrű megáll, a vékony drót izzóvá lesz. Hagyjuk a gyűrűt forogni, a drót izzani megszűnik. Itt az áram energiája egyszer mechanikai munkává, másszor meleggé és fénynyé alakúl át. A galvanometer kisebb áramerősséget mutat, mikor a mótor jár, mint a mikor áll. Egy kísérletem alkalmával például az áram erőssége, a mótor járása alatt 4 amp., ha pedig a mótort fékeztem, 7 amp. volt.

E tünemény magyarázata az, hogy a gép gyűrűjének forgatására használt áramenergia mechanikai munkává változik; ez a hajtóárammal ellentett irányú áramot indít, s így a vezetékben e két áram külömbsége marad meg. A forgó gyűrűt megállítván, az indított áram megszünik s a gyűrű csak mint közönséges ellenállás érvényesűl, tehát az áram megnagyobbodik s a megerősödött áram energiájának egy része a vékony drótban ismét meleggé és fénynyé alakúl át. — Általában: valamely áramkörben az áram ott végzi a legnagyobb munkát — az áram energiája ott alakúl át meleggé, fénynyé, chemiai vagy mechanikai munkává — hol az ellenállás a legnagyobb. Ugyanezért a leírt kísérletben az áramkörbe iktatott vékony drót dimenzióit e törvény követelményei szerint kell megválogatni. Mert ha a beiktatott drót ellenállása kelleténél nagyobb, akkor a mótor nem forog, hanem a drót izzik és olvad; ha ellenben csekély a drót ellenállása, akkor a mótor fékezése után sem lesz a drót izzóvá. *Székely Károly.*

*

A Gülcher-féle hőelektromos oszlop. Ez év tavaszán intézetünk számára egy 66 elemes Gülcher-féle thermooszlopot szereztem be, mely eddig sok tekintetben igen praktikusnak bizonyult.

A nikkelfémből készült positiv elektrodok csőalakúak és megannyi kis Bunsenlámpa gyanánt szolgálnak; a negativ elektrodok valamely ötvényből állanak, mely az «Elektrotechnische Zeitschrift» 1890-ki évfolyamának 188. lapján található leírás szerint antimont tartalmaz; mindegyik a hozzátartozó lámpácskának kéményét képezi, miáltal Gülcher a gázlángok melegének telhető ökonomikus kihasználását s a fentidézett czikk szerint rövidebb elektrodok — tehát kisebb belső ellenállás — mellett nagyobb elektromindító erőt ér el.

Az egész készülék compendiosus alakú, könnyen kezelhető. A gázvezetékkel összekapcsolva s egy égő gyujtót a kis kémények fölött elvezetve, pillanat alatt az összes lángocskák meggyulnak, s az elektromindító erő legfölebb tíz percz alatt maximumát éri el.

Hogy praktikus használhatóságának terjedelméről meggyőződést szerezzek, ismételten egy HARTMANN és BRAUN-féle ampermérővel és egyidejűleg mellékkörben egy voltmérővel kapcsoltam össze, a főkörbe pedig ellenállási szekrényt igtattam. Ezen csak praktikus czélból s a használt mérő eszközök megbízhatóságának feltevésével történt megfigyelések eredményét a következő táblázat tünteti fel :

Beigtatott ellenállás ohmokban	Áramerő amperekben	Sarkfeszültség voltokban
0	4·03	1·45
0·1	3·70	1·70
0·2	3·36	1·85
0·3	3·09	2·02
0·4	2·87	2·10
0·5	2·64	2 20
0·6	2·45	2·35
0·7	2·29	2·45
0·8	2·18	2·55
0·9	2·08	2·60
1·0	1·97	2·65
1·5	1·57	2·90
2·0	1·24	3·05
3·0	0·92	3·25
4·0	0·70	3·35
5·0	0·52	3·50
∞	0·00	3·95

Miután a voltmérő első két fokozata nincsen kisebb részekre beosztva, a táblázat ezen része aránylag a legkevesebb pontosságra tarthat igényt.

Az ampermérő ellenállását tangensgalvanometer segítségével körülbelől 0·35 ohmnak találtam ; ha pedig magának a thermooszlopnak belső ellenállására nézve a készítők adatát, azaz 0·65 ohmot elfogadjuk, akkor a megfigyelések ezen adatokkal összehasonlítva, 0-tól 1·5 ohmig elég jól egyeznek. Így pl. ha 0·6 ohm be van igtatva, akkor az egész külső ellenállás (az ampermérővel együtt) 0·95 ohm; a megfigyelt áramerő 2·45 amper, tehát a sarkfeszültség kiszámítva $0{\cdot}95 \times 2{\cdot}45 = 2{\cdot}33$ volttal egyenlő megfigyelve pedig 2·35 volt. A telep elektromindító ereje pedig, miután belső és külső ellenállás ez esetben együttvéve 1·6 ohmot tesz, kiszámítva $1{\cdot}6 \times 2{\cdot}45 = 3{\cdot}92$ voltot, megfigyelve pedig — végtelen ellenállásu, vagyis megszakított főáramkörben — 3·95 voltot, kerek számban 4 voltot tesz.

Ha az összes effectust $\frac{V^2}{\Omega}$ kifejezés szerint a táblázat adataival kiszámítjuk és ebből az oszlopon kívül nyert részét a külső és az összes ellenállás közötti arány szerint meghatározzuk, azt találjuk, hogy az effectusnak oszlopon kívül eső része maximumát abban az esetben éri el, ha a beigtatott ellenállás 0·3 ohmnyi. Akkor tényleg az összes külső ellenállás (0·3+0·35 ohm) egyenlő az oszlopnak ellenállásával.

Az oszlop áramereje ezen legnagyobb külső effectus mellett 3 amper, az oszlop sarkfeszültsége 2 volt; az oszlop tehát körülbelül oly áramerővel dolgozik, mint két oszlopszerűen kapcsolt Bunsen-elem s ennélfogva mindazon esetekben használható, a melyekben ez utóbbi megfelel.

Igen czélszerűen felhasználható az akkumulatorok töltésére. Az akkumulatorokat töltés idejére, természetesen, egymásmellé kell kapcsolni s oszlopszerű kapcsolatban kisütni. *Mialovich Mór.*

*

A szinkép szineinek fotografálása. Ismeretes a káliumbichromat oldatában áztatott s azután megszárított albumin- és zselatin lemezeknek ama tulajdonsága, hogy kevésbbé hygroskopikusakká lesznek, ha fény hatott reájuk. Ezen tulajdonságukon alapul rendkívüli elterjedettségük a fotochemiai sokszorosító iparban.

Lippmann megmutatta, hogy ezek a lemezek ép úgy alkalmasak a szinkép szineinek rögzítésére, mint az ezüstsókkal készülő száraz lemezek. A bichromáttal elkészített albumin vagy zselatin tiszta üveglemezre öntendő s ha megszáradt, higanytükrön* a fotografáló kamarában exponálandó. A megtörtént felvétel után a lemezt vizbe mártván, a szinek megjelennek rajta. (A káliumbichromát tudvalevőleg oldhatatlanná lesz azokon a helyeken, a hol a fény érte.) Ez a fürdő a káliumbichromátot a fénytől nem ért helyeken kioldja és ezáltal a képet előidézi és állandósítja is. Ha a lemez megszárad, a szinek eltünnek: de megnedvesítéssel mindenkor újra előidézhetők. A szinek igen élénkek s minden szög alatt mutatkoznak; átmenő fényben a complementär szinek jelennek meg. A szinkép előidézhető még úgy is, hogy a száraz lemezt csupán csak ráleheléssel nedvesítjük meg; de ekkor az egyes szinek eltolódnak.

A kísérlet könnyen megmagyarázható. A lemezen átmenő s a tükörről visszaverődő fényben álló hullámok támadnak, melyek maximumaiban érvényesül csak a fény chemiai hatása; ezek helyén a bichromátos zselatinréteg oldhatatlanná lesz, a miért is az áztatás mintegy leveles szerkezetűvé teszi. Ha a lemez megszárad, a réteg homogénné válik a kép elenyészik. De mihelyt a a fénytől nem ért rétegekbe nedvesség jut, ezek felduzzadnak s a réteg újra leveles szerkezetűvé lesz, melyben a fény a vékony lemezek szineit mutatja. (*C. R.* 115. köt. 575. l. 1892.)

---

* L. *Math. Phys. L.* I. köt. 28. l.

A légtűzszerszámmal a kísérlet jóval szembetűnőbbé tehető azáltal, hogy az üveghengert oxigénnel megtöltjük. A tapló erős fénynyel s oly hevesen ég el, hogy az elégesből fejlődő gázok a dugattyút rendesen ki is lökik. *B.*

*

Reszelők és ráspolyok élesítése elektromos úton. Az élesítendő ráspolyt mindenek előtt nátron luggal, azután meleg szóda oldattal jól megtisztítjuk. Ennek megtörténte után egy galván elemet készítünk, melynek folyadéka 6 rész salétromsavból, 3 rész kénsavból és 100 rész vízből áll; az elem egyik sarka az élesítendő reszelő, másik sarka elembe való szénrúd. A reszelőt a szénrúddal vezetőleg összekötvén, az elem zárva van s az áram kiválasztotta hidrogén a ráspoly éleihez és csúcsaihoz tapad és így megvédi a kiválasztott oxigén oxidáló és a savak maró hatása ellenében, mig a vágások az utóbbi hatásoknak ki vannak téve. A vágásokban keletkező vasoxid eltávolítása czéljából e ráspoly körülbelől 5 percznyi időközökben a fürdőből kiveendő és vízzel leöblítendő. Az eljárás addig folytatandó, míg a reszelő eléggé élessé nem lett.

*

Olcsó platinozás. Vastárgyakat könnyű szerrel a következő módon vonhatunk be platinaréteggel: a bevonandó tárgyat először is bórsavas ólom, rézoxid és terpentinszesz keverékével kell bemázolni s azután 250—330 fokig fölmelegíteni; a máz megolvad és a felületet egyenletes réteggel bevonja. Ezt a réteget hasonló módon bevonjuk bórsavas ólom, rézoxid és lavendula olajból álló keverékkel, bemázoljuk ætherben feloldott platinachlorürrel, s a bevonatot 200 foknál alacsonyabb hőmérsékleten elpárologtatjuk. A bevonandó tárgyon ekkor fényes platinaréteg jelenik meg, mely rajta erősen tart. A platinaréteg már az első mázra is rávihető s elpárologtatás utján rögzíthető, de ekkor a felület kevésbbé fényes. A vasnak ilyen módon való platinozása olcsóbb és tartósabb, mint a nikkelezés. *(Zeitschr. f. Instrumentenkunde.)* *Tangl.*

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1892—93. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

1892. november 17. Dr. Klug Lipót : A Pascal-féle hatszög configuratiójának egyik különös esetéről. (Közölni fogjuk.)

Dr. Hoor Mór : A Holtz-féle influentia-gép szerkezetén tett javításaim.

1892. deczember 1. A Ganz-gyár elektrotechnikai osztályának megtekintése.

Dr. Hoor Mór magyarázó ismertetése a gyár kiválóbb alkotásairól. (Egyenes és váltakozó áramú gépek, transzformátorok stb.)

Kisérletek bemutatása.

1892. deczember 15. Dr. Réthy Mór : A végszerűen egyenlő területek elméletéről.

Gruber Nándor : A Ferraris-féle forgó mágnesi tér bemutatására szolgáló taneszköz. (Közölni fogjuk.)

1893. január 5. Wittmann Ferencz : Nagy feszültségű, továbbá nagy feszültségű és nagy szaporaságú áramokról. (Közölni fogjuk.)

Rados Gusztáv : Egy minimum-probléma elemi tárgyalása. (Közölni fogjuk.)

1893. január 19. Dr. Farkas Gyula : Galileiről s a paduai Galilei-ünneplésről. (Közölni fogjuk.)

*

Az elektromos megosztó gép szerkezetében tett ujításokról. (Dr. Hoor Mór 1892. nov. 17-én tartott előadásából.)

A bemutatott gép főalkatrészeinek elrendezésében hasonlít a Borchardt hannoveri mechanikus gépeihez.

A gép szerkezetében az előadótól eredő újítások a relativ méretek okszerű megállapítására, a korongok, szívócsúcsok anyagának kiválasztására, továbbá a tengely, az álló korong tartóinak s a forgató készülék szerkezetére terjednek.

A korongokkal párhuzamos és vízszintes kisütő rudak, valamint a szívó szerkezetet tartó ebonit oszlopok szokatlan nagy távolságban állnak a korongoktól minek következtében a kisütők közelében esetleg felállított készülékek vagy más tárgyak nem zavarják a gép korongjain végbemenő indukczió folyamatokat.

Az álló korong átmérője (560 mm.) tetemesen nagyobb a forgó korong átmérőjénél (500 mm.), az álló korongba vágott ovális nyilásoknak, továbbá a papírlemezeknek megfelelő központi szögek a szokottnál szintén jóval nagyobbak; az ovális nyilások központi szöge körülbelől 40°, a papír szektorok középponti szöge körülbelől 80°, mely előnyösen gészen 90°-ig növelhető. E nagy szektorok azt eredményezik, hogy a gép könnyen s már igen lassú forgatásnál fölgerjed.

A fölgerjedés könnyűségére, továbbá a gép hatásfokára szintén igen kedvező hatásúak a papírszektorokkal vezető összeköttetésben lévő szívó csúcsok megválasztott méretei; ezek is a szokottnál hosszabbaknak vannak készítve.

Az itt felsorolt részek relativ méretei elméleti okok alapján vannak megválasztva s az eredmény igazolta a theoriát.

Tény, hogy a bemutatott gép erősen páratartalmú helyiségekben, poros állapotban, igen kicsiny fordulatszámmal (például perczenkinti 20—30 fordulattal) mindenkor fölgerjed, «megindúl».

A korongok nem tükörüvegből, hanem a sokkal olcsóbb belga szolinüvegből készültek; számos kisérlet alapján ez bizonyúlt a legalkalmasabbnak. — Az álló korong vastagsága 3 mm., a forgó korongé 2 mm.

Az álló korong fénymázzal van bevonva. E fénymáznak keménynek kell lennie s nem szabad repedeznie. Lágy fénymázt azért nem szabad venni, mert a korongra rakodó porszemecskék a legcsekélyebb nyomás következtében, pl. törlés alkalmával, a fénymázba nyomódnak s idővel vezetővé teszik a korongot, a mikor is a gép felmondja a szolgálatot.

Számos fénymáz közől az Ascher-féle «Brillant-Lack» bizonyúlt legjobbnak. Ez ugyanis megfelelő *keménységű*, de mind a mellett ruganyos, *nem repedező* bevonatot ad. Ez a lakk fényes, teljesen átlátszó, s fehér sellak, mastyx és Kanada-balzsam alkohol-oldatainak keveréke.

A korongot a fénymázzal való bevonás előtt körülbelől 70° C.-ra kell hevítenünk; a szárításnak pormentes helyen (legczélszerűbben 40—50° C. hőmérsékletű szárító kemenczében) kell történnie.

A forgó korong Poggendorff eljárása szerint 40—50° C.-ra való melegítés után tiszta faggyúval vagy vazelinnal van bevonva s ezután fényesre tisztítva.

A papírszektorok Antollk eljárása szerint glicerinnel vannak bevonva.

A papírszektorokkal összekötött szívó csúcsok nem kartonból — mint szokás — hanem körülbelől 0·2 mm. vastag csillámlemezekből vannak kivágva s orosz enyvvel az üveglemezhez ragasztva.

A szívó csúcsok hátsó felülete papírral van bevonva, melyet ugyancsak papírhid köt össze a szektorokkal.

Ezen csillámlemezekből való szívócsúcsok igen ruganyosak és a elektrosztatikai vonzás, valamint nedvesség következtében nem görbülnek meg; e tekintetben tehát előnyösen külömböznek a karton szívócsúcsoktól.

Az álló korong három helyen van megtámasztva. Az előre, hátra, vagy oldalt való dűlést kicsiny kettős ebonit tárcsák akadályozzák meg. E tárcsák ebonit csavarokra vannak szerelve, melyek a korong síkjára merőleges rézrudakon megerősített gömbökön járnak s így a korong távolságának szabályozására szolgálnak. A korongnak harmadik támasztó készülékét a géptengelyre szimmetrikusan szerelt ebonitszán alkotja, mely a korong befogadására barázdával van ellátva, s az alaplapon a korongsíkra merőleges irányban mozgatható.

A forgó korong üres henger alakú ebonit tengelyre van erősítve. Az ebonit henger *golyós csapágyakkal* ellátott réztokra van szerelve; a golyós csapágyak aczélkúpjait tartó aczélrúdat mahagoni-fa oszlop tartja. A szerelés hasonlít a veloczipéd hajtókáinak szereléséhez.

E golyós csapágyak igen csekély mérvű kenést kivánnak meg s ezért az ily módon szerelt gép hosszú időig állandóan nagy sebességgel járatható, a nélkül, hogy a korongokat a csapágyakból kifröcscsent olaj bepiszkítaná. Azonfelül a surlódás a minimumra van leszállítva.

A golyós csapágyak teljesen megakadályozzák a tengely és a korong csellengését, előre hátra mozgását s ezért a két korong távolságát igen kicsinyre szabhatjuk.

A gép elektromótorral vagy kézzel hajtható. Kézi hajtás nincsen a gép állványára szerelve, hanem külön kis állványon, mely szorítócsavar segélyével az asztalhoz erősíthető és pedig a géptől tetszésszerinti távolságban. A kézi hajtás ilyen elrendezése olcsóbb a szokásosnál s lehetővé teszi, hogy a gép nagyobb távolságból is hajtható.

A bemutatott gép előadó rajzai szerint s az ő felügyelete alatt a Ganz és Tsa részvénytársaság elektrotechnikai osztályában készült.

Maximalis fordulatszáma perczenkint 250; poros állapotban kis leydeni palaczkokkal e gép 23 cm. hosszú szikrákat adott.

A gépet a Math. és Phys. Társulat előtt bemutatván, bebizonyította, hogy magyar gyárakban is tudnak tetszetős külsejű, jól működő megosztó gépeket készíteni, melyek a külföldi gyártmányokat minőségben fölülmulják, s hozzá jelentékenyen olcsóbbak.

*

A Ganz és Társa elektrotechnikai laboratoriumában bemutatott kisérletek. 1. *Hegesztés elektromos árammal.* Az első kisérletben két 30 mm. átmérőjű vasrúd hegesztetett össze. Az összehegesztendő vasrúdak alkalmas befogó készülékek segélyével 10000 watt munkaképességű váltakozó áramú transzformátor szekundär áramkörébe vannak iktatva. Az egyik rúd befogó készüléke szilárd összeköttetésben van a készülék állványával, a másik egy vízszintes és egy függélyes csavar segélyével vízszintes és függélyes síkban mozgatható.

A hegesztő eljárás a következő: A vasrudakat befogván, a szánon mozgatható fogó készüléket a vízszintes csavar segélyével addig előretolják, míg a két összehegesztendő felület (keresztmetszet) könnyed érintkezésbe jut. A két rúd tengelye az előbb említett függőleges csavar segélyével hozható egy egyenesbe.

Ezek után kezdődik a tulajdonképeni hegesztő folyamat.

A transzformátor primär tekercsét tápláló váltakozó áramú (2000—3000 voltos) gépet mágnesezvén, a primär feszültséget 2000—2500 voltig fokozzák, miközben a két rúdat erősen egymáshoz kell szorítani.

A bemutatott transzformátor szekundär körében létesített és a hegesztendő felületeken áthaladó áram erőssége 5000 és 6000 amper között ingadozik. Ez áram hatása folytán az összehegesztendő végek gyorsan felhevülnek, meglágyúlnak s csakhamar beáll a hegesztéshez szükséges fehér izzó állapot. Mert bármily simára legyenek is a vasrudak összeérő lapjai csiszolva, érintkezésök mégsem tökéletes; ennélfogva e helyen az ellenállás nagyobb, tehát az áram okozta felhevülés is nagyobb. Ámde a felmelegedés az elektromos ellenállást tovább fokozza s ekként a felhevülést mintegy lokalizálja. A vízszintes csavar segélyével kifejtett folytonos nyomás alatt a két vég összeheged. Az egész folyamat mintegy 2 perczig tart.

Hegesztés közben óvakodnunk kell a vasdarabok túlhevítésétől: a primär áramot idejekorán kell megszüntetni. A rúdhevítés különösen aczélrúdak hegesztésénél veszedelmes, mert az aczél sziporkázva elég s a hegesztés nem sikerül.

Hasonló eljárás segélyével vasrudak vastagíthatók, vagy pedig formákba préselhetők.

Amerikában ez eljárást lánczszemek készítésére, vastartók, pánczéllapok szögecselésére, illetőleg a szögecsek megkötésére használják.

Ez utóbbi alkalmazás azért nevezetes, mert lehetővé teszi a szögecsnek és a szögecselt lemezek összehegesztését. Ekként nemcsak az összeillesztés erőssége fokozódik, de a szögecsek s a lemez között mindig megmaradó hézagban előbb-utóbb meginduló rozsdásodásnak eleje vétetik.

2. *Állandó lemezes mágnesek készitése.* A bemutatott készüléket a gyár a BLÁTHY-féle áram órákban alkalmazott permanens mágnesek előállitására használja.

Mintegy 64 mm² keresztmetszetű rézrudakból készült tekercsen 1400 amper erősségű áram halad keresztül. A mágnesező folyamat rövid ideig, 10—20 mperczig tart.

Az ily módon létesített lemezes mágnesek különös szerkezetű rázókészülékbe kerülnek, melyben 20 órai rázással ideiglenes mágnességöktől megfosztatván, a mágnes levegő-résében még 2000 *CGS* egységnyi inductió észlelhető.

3. *10000 voltos transzformátor.* A transzformátor paraffin kondenzátorral volt összekötve. A sötétben észlelhető fénytünemények nagyban hasonlítanak az elektrostatikai megosztógépekkel összekötött kondenzátorokon mutatkozó tüneményekhez, csakhogy sokkal zajosabbak, feltünőbbek. A kondenzátor lemezeit violaszinü fényes sáv övezi s a lemezek fénylő réteg felett lebegni látszanak. Érdekesek a koncentrikus szigetelt ónlemez gyűrük között fellépő statikai kisülések.

4. *Új szerkezetű villámhárító készülék.* A gyakorlati elektromos munkaátvitel berendezésében szereplő villámhárító kellékei ismeretesek. Lehetővé kell tennie azt, hogy a villám a vezetékről a földbe jusson s ne veszélyeztesse a kezdő és a végállomás fölszerelését és ne zavarja működését.

Az első feltétel tudvalevőleg igen könnyen teljesíthető. Az ily villámhárítók lényeges alkatrészét két alkalmasan szerelt, egymáshoz közel álló elektróda képezi. Az egyik a vezetékkel, a másik a földdel áll vezető összeköttetésben. A villám a vezetékről a földdel összekötött elektródába csap, s evvel a villámhárító első kötelességének megfelelt.

Ámde a villám pillanatnyi vezető hidat létesít a két elektroda között. Ily módon az egyik, söt gyakran mindkét fővezeték egyidejüleg a földdel, illetőleg egymással vezető összeköttetésbe jut. Magas feszültséggel működő munkaátvitelnél a villám létesítette híd nyomán voltaív keletkezik, mely tartós rövid zárlat gyanánt szerepel és az üzemet többé-kevésbbé tetemes időig zavarja. A bemutatott kisérlet e tényt szembeszökően szemléltette.

Az összes idevágó szerkezetek az így keletkező voltaívek rögtönös önműködő megszakítását, az elektrodák önműködő gyors széttávolítását s a megszakítás után önmüködő beállítását czélozzák. A legtöbb szerkezet 2000 voltnyi feszültségig czéljának megfelel, de ezentúl bizonytalanúl működik.

Természetes, hogy a villámhárítónak ideálja minden körülmények között az olyan szerkezet, mely gépezetszerü berendezéstől, mozgó alkatrészektől ment. A nehéznek látszó próblémát a gyár mérnökei bámulatosan egyszerű úton oldották meg.

A tapasztalás azt mutatja, hogy egymástól 2 mm távolságban levő czink elektrodák között létrejövő vezető hidak nyomán keletkező ívek rögtön megszünnek, és hogy 3000—4000 voltnyi s magasabb feszültségekkel ily vezetők között lehetetlen tartós ívet létesíteni. A gyár villámhárítója egymástól két-két mm távolságban párhuzamosan szerelt 20—30 mm átmérőjű czinkhengerből áll.

A bemutatott kisérlet a villámhárító biztos működéséről tett tanuságot. Az alkalmazott hengerek számát ama legnagyobb levegőréteg vastagsága határozza meg, melyet az üzemfeszültség még áttörni képes.

A határ 4000 voltnál 4 mm-re tehető; megfelelő biztonság elérésére tehát 3 vagy 4 hengerből szerkesztett villámhárítót kell a 4000 voltos vezeték és a föld elektróda közé iktatni.

KÉRDÉSEK.

1. Miben áll a legujabban sokat hirdetett száraz galvánelemek szerkezete s hasznavehetők-e az iskolai kisérletezésben? S. G.

2. A bolometert oly műszernek írják le, mely a hősugárzásra vonatkozó kisérletekben igen czélszerűen helyettesíti a thermoelektromos oszlopot. Hol szerezhető be, milyen áron? K. L.

VEGYESEK.

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT LÁTOGATÁSA A GANZ-GYÁR ELEKTROTECHNIKAI OSZTÁLYÁBAN.

A gyár igazgatóságának meghívása folytán a társulat tagjai 1892. deczember hó 1-én nagy számban gyültek össze a Ganz és Társa elektrotechnikai laboratóriumában. Tudtuk valamennyien, hogy nem olyanféle gyárat látogatunk meg, mely általánosan ismeretes minták utánozása és gyártása révén küzdötte ki hírnevét; tudtuk, hogy valóban elsőrendű elektrotechnikai laboratóriumba léptünk, mely az elektromosság gyakorlati alkalmazásának terén új alkotásokkal büszkélkedik és sok esetben kezdeményező volt. A dinamogépeknek e műhelyből kikerült tipusait mindenütt a legjobbak között említik; minek legelfogulatlanabb bizonyítéka az a tény, hogy a gépek még a kisebb kézikönyvekben is, az ott említett kevés között, helyet foglalnak. A Zipernovszky-Déry-Bláthy-féle transzformátor meg épen elmaradhatatlan.

A gyár igazgatója, Mechwart András úr, személyesen volt szíves a társulat tagjait fogadni és a gyár külömböző osztályain keresztül kalauzolni. Kivüle még Bláthy O., Herzog J., Dr. Hoór M., Neustadt L. és Scherber J. mérnök urak szives magyarázatai tették látogatásunkat tanulságossá. Bajos, sőt lehetetlen e helyen a látottakról számot adni. Annyi bizonyos, hogy végig menvén a gyár egyes osztályain, a minők pl. a galvanoplasztikai, a lámpakészítő, a világító és mozgató elektromos gépeket s ezek összes alkotó részeit előállító osztályok, melyeknek összes gépeit a földszint elhelyezett áramtermelő gépekből jövő áram mozgatja: nem fojthattuk el csodálkozásunkat a gyár sokoldalusága és alkotásainak eredetisége felett.

Erre a gyár egyik mérnökének: Dr. Hoor Mór úrnak nagyszabásu mutatványokkal kapcsolatos előadása következett, melyről a megelőző lapok számolnak be.

Legyen szabad a gyár igazgatóságának s az említett mérnök uraknak e helyen köszönetet mondanunk lekötelező szivességökért.

GALILEIRŐL S A PÁDUAI GALILEI-ÜNNEPLÉSRŐL.*

A mult hó hetedikén harmadszor lőn ünnepelve Galilei neve ez évszázunk második felében. (V. ö. Omaggi a Galileo Galilei per il terzo centenario della inaugurazine del su insegnamento nel bò, publicati per cura della R. Accademia di Padova. III. A. Conti «Tre glorificazioni di Galileo».) Először születése helyén Pízában, 1864 február 18-án, születésének háromszázadik évfordulóján; másodszor Flórenczben, amidőn új Itália a Santa Maria del Fiore-n emléket állított neki. A harmadik ünneplés, amelynek hangzanak még az ékhói, a közel mult év deczemberének hetedikén, s az azt megelőző és követő napon folyt le, amidőn a páduai tudomány-egyetem és vele együtt az egész tudományos világ Galilei ottani tanszék-foglalásának háromszázados emlékezetét ülte meg. Nagyszámú olasz tudományos intézeteken kivül személyileg képviselve valának betűsor szerint amerikai, angol, franczia, magyar, német, orosz, svéd, sveiczi tudományos intézetek és igen sok jelentette okmányilag, ékes pergamumi levélen vagy legalább a táviró levelén részt-vevését. Magyarországból — mint a budapesti tudomány-egyetem küldöttje — LÁNCZY GYULA

* Előadva a Math. Phys. Társulat 1893. január 19-én tartott rendes ülésén.

hisztorikusunk, — mint a kolozsvári tudomány-egyetem küldöttje pedig e sorok irója — ki itt most az ünnepély egyik ékhója lenni törekszem, — voltunk jelen.

Más nem-olaszországi jelen volt képviselők az *országnevek betűrendje* szerint:

G. H. Darwin, astronomus (University of Cambridge).

Sir. J. Fryrer, hon. Physician to the Queen (Royal College of Physicians-London).

S. L. Mond, chemikus (Chemical Society and British Association).

E. J. Stone, astronomus (University of Oxford).

Gariel, physikus (Académie de Paris).

J. Molk, mathematikus (Facultés de Nancy).

F. Tisserand, a párizsi astr. observatorium igazgatója.

W. Blasius, zoologus és botanikus, a Braunschweigi műegyetem rectora.

W. Foerster, a berlini astr. observatorium igazgatója. (Universität zu Berlin).

K. Keller, a karlsruhei műegyetem rectora, s gépszerkezettani tanára.

E. Lampe, mathematikus, a berlini műegyetem rectora.

C. Lemcke, a stuttgarti műegyetem rectora és műtörténelem tanára.

L. Sohncke, physikus (Technische Hochschule zu München).

W. Voigt, physikus (Universität zu Göttingen).

K. A. V. Holmgreen, physikus (Universitet i Lund).

Ezek többé-kevésbé mind természet-tudósok. Nem természettudós idegenországi jelen-voltak:

J. de Crozals (Faculté des Lettres de Grenoble).

G. Favey, a Lausannei tudomány-egyetem rectora.

W. James (Harvard University of Cambridge-Massachusetts).

F. W. Kelsey (University of Michigan).

G. Pizzo (Polytechn. Schule Zürich).

E. Schmurlo (Universität zu Dorpat).

Többekkel tanulók is érkeztek.

Ha még a jelenvolt olaszországi tudósok és irók névjegyzékét is végig tekintem, megállapithatom, hogy igen csalódtunk, akik néhányan physikusok azt hivők, hogy főként physikusok gyülekezési helyévé fog válni ez alkalommal Pádua. A tapasztalás másra tanitott.

De megfontolva, hogy Galilei nemcsak megalapitója lett a statika mai alapelvének, nemcsak első kifürkészője volt kisérletek, számitások, éles logika és elemekre bontó nagy képessége rendjén mozgási tüneményeknek, nemcsak felfedezője astronomiai jelenségeknek és számos új nyomós érv felkutatásával úttörője a kopernikuszi rendszer általános elismerésének, hanem azonkivül gépfeltaláló, aki egy vizemelő gépre szabadalmat nyer a velenczei köztársaságtól (V. ö. A. FAVARO, «Galileo a Padova» Commemorazione letta nell'aula magna della università addi VII dicembre MDCCCXCII; V. rész), igen ügyes mechanikus, aki egyik páduai lakóházában, — tanitványai kivánságára — mathematikai eszközökre műhelyt állit, amelynek gondos felügyelője és szorgalmas módositó, átalakitó, tökélyetesitő kéz-munkása (V. ö. A. FAVARO, l. c. V.), éles látású szépirodalmi műismertető, műbiráló és műforditó, egy igen egyszerü, sokra használható számoló gépnek a «Compasso geometrico e militare» feltalálója stb. stb. Ezeken felül páratlan tanitó művész, akinek a munkáiból a legjobban lehet megtanulni a tanitás mesterségét; akinek a munkáiból, kivált két főmunkájából, a két Dialago-ból szinte szólton-szól hozzánk az a hatalmas oktatói talentum, amelyről oly lelkesedéssel emlékeznek meg úgy baráti, mint ellenes tanitványai. (L. A. FAVARO, l. c. III.) — Mindezeket megfontolva és még azt a világra szóló örök népszerűségét is fontolóra véve, amelyet a szabad kutatás és szabad gondolat nyilvánitásért tűrt szenvedései szereztek emlékének; nagy megelégedéssel tapasztalhattuk, hogy szakválogatás nélkül hódolt emlékezetének a hálás utókor.

*

Az európai időjárás akkortáji fenyegető voltának róható csak fel, hogy nem voltunk jelen nagyobb számmal és hogy az előre bejelentettek sem jelentek meg mindnyájan. Én 5-én reggel sürü hideg esőben érkeztem meg Páduába, ahol délfelé már az egyremásra érkező tanulók éljenző serege hemzsegett, festői deák-sapkákban. Az eső egész nap esett. De, mintha csak a természet is ünnepet akart volna ülni az ő nagy fürkészőjének a tiszteletére: este felé, mikor már jobbára mindnyájan együtt voltunk és a Casino Pedrocchi-ban ismerkedő találkozásra gyülekeztünk, kiderült az ég, és ezen túl már ünneplésünk mind három napján csak a forgó Föld födögette el a Napot, azután meg csillagos ég, Kopernikus-Galilei csillagos ege ragyogott.

Másnap délelőtt az egyetem kisebbik aulájában gyülekeztek a tudományos intézetek küldöttei és azon kivül olasz hatósági képviselők. Ez volt a hivatalos jelentkezés, amelyen C. F. Ferraris egyetemi rector, Giusti gróf Pádua-városi «sindaco», továbbá Píza városának a «sindaco»-ja tartottak rövid, lelkes, Galilei nevétől ékes beszédeket, amelyek után a bemutatások következtek s a rector magnificus egy csomó meghivót és belépti jegyet kézbesitett nekünk s egy-egy szép kötésű vaskos «Guida di Padova»-t.

Dél volt, mire az aulát elhagytuk. Künt hosszú kocsisor várt reánk, díszes magánfogatok hosszú sora, amely Pádua látni valóinak megtekintésére vitt bennünket. A rector magnificus fővezetése alatt módunkban volt hozzávetőlegesen néhány óra alatt megismerkedni Pádua műkincseivel és egyéb nevezetességeivel.

Estére az «Il Salone» rengeteg teremben (14,93 m. magas, 27,16 m. széles, 81,52 m. hosszú) nagy népies látványosságot rendeztek a tanulók. A középen magas oszlopon Galilei alakja áll, óriási szoborrá formálva; tekintete a végtelenségbe mélyed, jobb kezét ég-tekén nyugtatja, lecsüngő balkezében kinyujtott messzelátót tart. Az oszlop lábánál géniusz kiterjesztett szárnyakkal, teste körül csavart oldalra lebegő köpenyben, egyik lábával az oszlop lépcsőzetének felső fokán, a másikkal az alsóbbon állva, magasra tartott balkezében a tudomány fáklyáját lobogtatja, félig előre tartott jobbjában eltépett lánczot lóggat, amelynek másik darabja az oszlop tövébe vasalt gyűrűn csüng. A géniusz lábainál szétzilált könyvek hevernek, ami a Galilei-től megtört régi iskola pusztulását jelképezi. (V. ö. A Galileo Galilei gli studenti di Padova.) Ezt az allegorikus csoportot két tanuló, Da Rin testvérek (Enrico és Ettore) formálták. — Köröskörül a terem tömérdek falzata mentén itt egy vízesés, ott egy bohó-szinház, amelyből jó izű tréfák özönlenek a közönség közé, egyebütt meg szinpadias részletek a régi Páduából, közöttük egy bormérő bódé, amelyben deákok szolgálnak tüzes olasz borokkal. S nem jut-e most még az aranyos nedvű csapok közelében is eszünkbe Galilei, amint kemény szellemi munkától pihentében szőllő-tőkéket nyeseget? (V. ö. a posteriori, A. Favaro l. c. III. utolsó szakaszával.) A terem legét hatalmas zene hangjai rengetik és tanulók, kettenkint összefogódzva, hévvel keringőznek....

Az éjjeli órákban fényes bál volt a Casino Pedrocchiban, a minőhöz foghatót, mint hallottam, régen nem látott Pádua városa. Négyszáz belépti-jegy volt kiosztva, és tíz órakor már tömérdek előkelő sokaság ékesítette a termeket. Éjfélen innen félórával nagy kísérettől követve belépett az olasz közoktatási miniszter, Martini, a ki mint az ünnepek főpártfogójának, az olasz királyi felségnek képviselője, kevéssel azelőtt érkezett Paduába. Harsogó «applauso»-val fogadta a bál közönsége. A rector magnificus már ez alkalommal bemutatott minket ő exczellencziájának.

*

A következő napnak, deczember hetedikének delére volt kitüzve a főünneplés.

A délelőttet két német physikus, Voigt és Sohncke professorokkal a páduai egyetem physikai intézetének megszemlélésére szántuk. Ez az intézet az egyetem régi, középponti palotájában a második emeleten van; a dóriai oszlopokkal szegélyezett első emeleti «loggiá»-ról Rosetti szép márvány mell-szobránál indul meg a hozzá vezető lépcsőzet. — Mikor más tan-szakú társaktól is követve, az intézetbe léptünk, várt már reánk az igazgató-tanár Batelli és közetlen elődé, Righi, most bolognai tanár, valamint néhány más olasz physikus is. — Az iró-szobából könyvtár-szobán és egy kis zárt folyosón keresztül tágas dolgozó-termekbe jutottunk, a melyek egyikében elektrolitikus vizsgálatokra volt felállítva egy készülék.

Ezen a tanársegéd tesz kutatásokat. Egy másik munka-teremben szerkezetet láttunk a gőzök thermikus tulajdonságainak tanulmányozására, a mivel már hosszabb idő óta az igazgató-tanár, Batelli foglalkozik (Lásd: «Mem. d. R. Acc. d. Sc. Torino XLI.» Továbbá kivonatosan: Beibl. XIV. és XV. «Ueber die thermischen Eigenschaften der Dämpfe») és legújabban is, mint előadásából kitetszett, érdekes kritikus-hőfoki sajátosságokat állapitott meg. A szer-gyűjtemény terjedelmes és gazdag helyiségeibe lépve, az első, a mit mutattak, egy különösség volt: valóságos hadserege az elektromosság-sürítő palaczkoknak, az élén egy hatalmas Holtz-féle géppel. Még Righi konstruálta ezt a batteriát, a ki nagy capacitású leideni palaczkok segedelmével igen szép szikra-kisérleteket tett. (Lásd: «Ist. delle Sc. di Bologna 25. Jan. 1891». Ismertetve: Beibl., XV. «Ueber eine Art Funken, bei denen sich das Leuchten allmählich von einer Electrode zur anderen verbreitet»). Azután nagyszámú demonstráló apparátusokon kivül sok szép és értékes mérő-eszközt láttunk. Végre valóságos hisztorikumát a két utolsó évszáz physikai eszközeinek. A physikai intézetet 1738-ban alapította a velenczei főhatóság. Noha második emeleten van az intézet, a szaktanár biztositása szerint mégis oly szilárdan áll, hogy igen finom mérések végrehajtására is beválik, holott pedig a dinamo-gép is a második emeleten van elhelyezve. Ennek az alzata azonban az intézet falaitól el van különítve és külön-álló oszlopokon hever, a melyek egészen lentről, a földszintből nyúlnak fel a második emeletig.

*

Délben volt az ünnepi ülés kezdete. A tudományos testületek küldöttei csaknem kivétel nélkül jellemzetes disz-köpenyeket viseltek. Ki-ki ékes kiállitású okmányt tartogatott a kezében, a testületek «epistola gratulatoria»-it. Kevés várakozásra megjelent az olasz királyi felséget képviselő közoktatási miniszter, a kit követve, hosszú sorban az egyetem «aula magna»-jába vonultunk. Az óriási terem már jóformán telve volt és riadó «evvivá»-kkal fogadta a belépő minisztert, s az «applauso» mindaddig lankadatlanul tartott, míg csak mindnyájan el nem helyezkedtünk. Mikor magyar díszruhás

Lánczy társammal helyeinkhez érkeztünk, «delegati ungheri»-féle kiáltások is elegyedtek az «evvivá»-k közé.

Az «aula magna»-ban voltunk tehát, ugyanabban a teremben, a melyben háromszáz esztendővel azelőtt először hangzott Galilei tan-árasztó szava, mikor megnyitó előadását tartotta és «Exordium erat splendidum in magnâ auditorum frequentiâ» (V. ö. A. Favaro l. c. III.).

Figyelmes csend lett, midőn az egyetem rectora, Ferraris az emelvényre lépett és megkezdte ünnepi beszédét . . . Mögötte a nagy szószék, az olasz királyi felség arczképével, jobbján az a zászló, amelyet ez alkalomból páduai hölgyek ajándékoztak az egyetemnek. Ebbe Galilei czimerének társaságában ez a felirat: «Gymnasium omnium disciplinarum», mint az egyetem eredeti czíme, továbbá az egykori páduai köztársaság czimere és a Da Carrara, egykor páduai uralkodó család czímere, a három első egyetemi fakultás czimerei, az egykori velenczei köztársaságnak és a jelenlegi Olaszországnak a czimere vannak behimezve, azonkivül köröskörül azoknak a nemzeteknek a neveik, amelyek régente tanulókat szolgáltattak az egyetemnek; végre alul két évszám, az egyetem alapittatásának évszáma 1222 és a mai évszám. (V. ö. Galileo Galilei gli studenti di Padova). Az emelvény előadói asztala előtt, lent a földszinen, termetes másik asztal van, amelyet az idegenből küldött üdvözlő okmányok boritanak, köztük a budapesti műegyetemé, mely tartalmával és ékes olasz nyelvezetével nagy tetszést aratott. Feszült érdeklődéssel követi a hallgatóság a rector szónoklatát. Jobbjáról a zászló-ajándékozó hölgyek, balja felől az olasz és külországi képviselők, előtte a miniszter és olasz hatósági képviselők, hátrább az egyetemi tanács, e mögött az oldal-bejáratánál a meghivott vendégek, ezek átellenében, valamint a hát-térben a főbejáratnál a tanulók. A rector a miniszterhez, főként mint az olasz királyi felség reprezentansához intézte beszéde első részét; azután azokról a lelkes hölgyekről emlékezett meg, akik a zászlót ajándékozták, majd a zászló himzeteinek nyomról-nyomra való követésével Galilei nevén kezdve és végezve művészi vonásokkal tárja kevés percz alatt szemeink elé az egyetem fejlődési történetének főbb momentumait. A legközelebbi szavak azoknak az olasz- és külországi tudományos testületeknek szánvák, a melyek részint delegátusokat küldöttek, részint másként fejezték ki résztvevésüket. Végül köszönetet mond a páduai municipiumnak azért a bronzkoszorúért, a melyet ez Galileinek az «aula magna»-ban lévő mellszobrára készíttetett és felszólítja Antonio Favaro-t, páduai tanártársát, hogy lépjen a kathedrára megtartani emlékbeszédét. (V. ö. Onoranze centenarie a Galileo Galilei. Discorso del Rettore Magnifico)...

A rector beszédének elhangzását követő viharos tetszésnyilvánítások mindaddig tartottak, míg Favaro, a híres Galilei-búvár fel nem ment a szószékre. Neki jutott a főfeladat. — A bekezdésben, amelyben a királyhoz emelte szavát, ezt a czímet adta beszédjének: «Galileo in Padova».

Hat természetes részre oszlik a beszéd. Az első rész Galilei Paduába-jutásának előzményeiről szól: Már tanuló korában ellenkezésbe jutott Galilei az aristotelesi tanokkal és abból a hajlamából, hogy a jelenségeket magukat ismergesse, származott legendaszerű pízai inga-észlelete. Miután Guido Ubaldo del Monte segítségével három évre magában Pízában, szülővárosában tanár lett, mindegyre maga ellen lázította az aristotelesi iskolát. Galileinek a pízai ferde tornyon tett esési kísérleteiről szólva, azt mondja Favaro, hogy «ennek a toronynak a magasságából kapta a peripatetikus filozófia azt a döfést, amelyből aztán nem épült fel többé». Galilei tanainak hatását és az ifjú mester sorsára való visszahatását ecsetelve tér a szónok beszédének II. részére. Ebben Páduába jutásának körülményeit ismerteti és bemutatja kinevezési okmányának a szövegét. A III. rész Galilei tanszék-foglalásáról, azután tanári működéséről szól: Eleinte ad libitum tartott előadásokat, utóbb váltakozva ptolomeusi astronomiát, euklidesi mathézist, aristotelesi mechanikát tanít, de a maga eredeti felfogása szerint s bámulatos tanítói művészettel. Állandóan voltak magántanítványai, sőt kosztos és lakó deákjai is. A IV. rész Galilei személyes ismeretségei- és összeköttetéseiről szól, gyakori velenczei útjairól és Marina Gambá-val való viszonyáról. Az V. rész Galilei páduai tudományos és irodalmi tevékenységét vázolja, amelyek rendjén Páduában tette legnagyobb felfedezéseit és vetette meg alapját későbbi munkáinak. A VI. rész Galilei Páduából távozásának körülményeivel foglalkozik: ennek inditó okaként folytonos hazájába — Toscanába — vágyódását sejteti. Végül, miután már Róma haragjáról, és késői megengesztelődéséről is megemlékezett a szónok, így zárja szavait:

«Gloria a Galileo, gloria per tutti i secoli al sommo Mæstro, del quale si ricorderà sempre appresso di noi con venerazione e con orgoglio che nella Università nostra egli ha affilate le armi più poderose per la conquista della più grande, della più preziosa, di quella che è ormai divenuta la più intangibile delle libertà: la liberta del pensiero!»

Érdekesnél érdekesebb részletek vannak a beszédben és huszonöt eredeti okmány támogatja.

Helyenkint meg-megeredtek a tetszésnyilvánítások és a végén mindaddig tartott a tomboló tetszés-vihar, míg a rector magnificus a kül-országi képviselők rövid «discorso»-inak sorát meg nem nyitotta. Az előző napon megejtett sorshuzás döntötte el a sorrendet. Ennek értelmében következtek egymásután a rector egyenkénti felszólítására két angolországi, egy sveiczi, egy magyarországi (Lánczy Gy. társam), az oroszországi, egy francziaországi, a hét németországi és a svédországi képviselő rövid előadása, a melyek mindannyiát zajos «evvivá»-k követték. Ez ovácziókkal kapcsolatban nyujtottuk át rendre a rector magnificusnak az epistola gratulatoriákat.

Most Martini miniszter emelkedett fel helyéből s a professorok, studensek és külföldi reprezentansokhoz intézve szavát, igen szép szónoki beszédet mondott, amelyben a kifejezések előkelősége nagy hatással domborította ki a gondolatok nyomósságát. Mikor a királyi felség üdvözletét jelentette; valamint mikor aztán ilyképen szólt: «Az Önök jelenléte, amelylyel ma ez egyetemet megtisztelték, kiválóan kedves a király és kormánya előtt annyiban is, hogy szimboluma annak az egyetértésnek, amelylyel a művelt népek az emberi haladás biztosan vezető útját keresik, — a mely egyetértés legerősebb támasza a békének, az olasz nemzet e hő kivánságának», stb. Továbbá, mikor így szólott: «Vigyék meg Önök Athenæumaiknak a király ez üdvözletét és azt a nép szavában gyökeredző biztosítását, hogy Itália, immár a maga politikai újjászületésének biztonságában, szeretettel csüng tudománykultuszának fellendülésén és nem kivánkozik más csaták mint szellemi csaták után». E passzusok, valamint beszédének majdnem minden egyes mondata a jelenlévők nagy enthuziazmusával találkoztak.

Most még olaszországi delegátusok mondtak rövid beszédeket. Ezután az egyetemi tanács lépett elő. A rector, az emelvényre lépett; a többi tanácstagok, ők is teljes ornatusban, jobb és baloldalon a földszinten sorakoztak. A rector, bevezető beszéde után, MARTINI minisztert a tanács nevében honoris causa doctorrá avatta, felolvasván az előadói asztalon készen heverő diplomát. Azután ugyanabban a megtiszteltetésben részesültek e nap emlékezetére a külországi delegátusok és néhány olaszországi delegátus. In absentia SCHIAPARELLI (Olaszorsz.), BREDICHIN (Oroszorsz.), GYLDÉN (Skand.), v. HELMHOLTZ (Németorsz.), W. THOMSON (Angolorsz.), NEWCOMB (Észak-Am.) részesültek ebben a kitüntetésben.

A nagy aula falait szinte teljesen elfödi czimerek, fali szobrok, képek, felirat-vésetek sokasága. A bejáratos oldalfal középtáján négyszögletes márványoszlopon, embernyi magasságban Galilei márvány-mellszobra emelkedik. Ezt 1861-ben a gyászos emlékű Miksa császár rendeletére FERRARI nevű szobrász készitette.

Az oszlop 1866 óta ezt a feliratot viseli:

Galilæi de Galilæis Effigiem | Heic Ubi Docuit | Patavinum Archigymnasium Colit. |

E szobor fölé a falra most egy emléktábla van helyezve a következő fölirással:

Anno Trecentesimo A Die Quo | Galilæus Galilæus | In Hac Ipsa Aula Docendi Initium Fecit | Universitas Patavina | Humberto I. Rege Favente | Sæculares Ferias Sollemniter Agens | Tanti Diei Ac Decoris Memoriam | Lapide Posteritati Traditam Voluit. | VII. ID. DEC. MDCCCXCII. |

Ennek az emlék-kőnek a leleplezése fejezte be az ünnepet.

*

Délutáni hat órakor a Stella d'Oro-ban ünnepi ebéd volt, a melyet a páduai egyetem rectora és tanárai adtak a miniszter és a külországi delegatusok tiszteletére. Ennek végeztével a Teatro Verdiben Thomas «Amletto»-jának gála-előadása várt reánk.

Másnap délben ünnepi menetet tartottunk, ki a Vittorio Emanuele piazza-ra — más használatos néven piazza delle Statue — a melyet régebben Prato della Valle-nak neveztek. A menet czélja az volt, hogy megkoszorúzza Galileinek a szobrát, a mely a sziget-képző csatorna két partján, magas fák árnyában sorakozó mintegy nyolczvan szobortárs közt a külső parton emelkedik. Ez a szobor Galileit álló helyzetben ábrázolja, a mint lecsüngő balkezében félig kibontott papir-tekercset tart, jobb kezét pedig a szeme elé emelve, a Napnak irányozza tekintetét. Lábánál quadrans, körző és könyvek. 1780-ban, ausztriai Lipót, Toscanai nagyherczeg rendeletére emelték e szép szobrot. Pietro Danieletti készitette. A városnak szőnyegekkel diszitett utczasorait elejétől a végéig majdnem egyidejűleg árasztotta el a minden oldalról áramló ünnepi menet, a melyen a város összes tanintézetei, városi és állami hatóságok, társulatok és egyesületek és nagy vendég-közönség is vettek részt. Ezzel az alkalommal először szerepelt az új egyetemi zászló. Mikor már a Galilei-szobor körül csoportosuló menet megtöltötte a temérdek piazza-t, és elhallgattak a zenekarok, lelkes beszédek kiséretében felrakták a szobor emeletére a számos koszorút.

Este a Pádua-városi hatóság adott ünnepi ebédet. A kereskedelmi kaszinó asztalait ez alkalommal csupa Galilei-re emlékeztető diszitmények ékesitették. Ez az ebéd búcsúzó lakoma is volt egyszersmind.

*

Közben a corteo után az egyetem kis aulájában a fáradhatatlan rector magnificus a lefolyt ünnepek emlékezetére fényképeket és nyomtatványokat kézbesitett, a mely utóbbiak jegyzéke:

1. Discorso pronunziato il di 7 Dicembre 1892 nell' Aula Magna della R. Università di Padova dal Rettore magnifico. Az új egyetemi zászló képével (C. F. Ferraris).

2. Galileo a Padova. Commemorazione letta nell' Aula Magna

della Università addi VII. Dicembre 1892. Huszonöt okmány-utánzattal, díszkötés. (A. Favaro.).

3. Omaggi a Galileo Galilei per il terzo centenario della inaugurazione del suo insegnamento nel bò publicati per cura della R. Accademia di Padova. (Favaro; B. de Haan, M. Cantor, A. Conti, M. Curtze, J. del Lungo, G. Eneström, S. Günther, G. Loria, P. Riccardi, W. C. L. von Schaïk, A. Stevart. Ph. T. de Larroque, P. Tannery, E. Wohlwill, R. Wolf, A. Wolynski.)

4. L'Osservatorio e l'Abitazione di Galileo Galilei in Padova. Két táblával.

5. Rotulus et Matricula D. D. Juristorum et Artistorum Gymnasii Patavini. A. MDXCII—III. p. Ch. n. (B. Brugi prof. et G. L. Andrich stud.)

6. Gli Studenti di Padova a Galileo Galilei, Galilei relikviák érdekes képeivel.*

Ezenkívül a páduai egyetem 1891—92 tanévéről szóló értesitőket kaptunk.

*

Köszönet érzetével küldőink iránt s köszönet érzetével a páduai egyetem iránt, amely nemcsak a legszivélyesebben látott bennünket, de a melynek majdnem a szó szoros értelme szerinti vendégei valánk, hagyogattuk el mi idegenek a várost, a melyben oly lélekemelő ünnepek tanui és részt-tevői valánk! . . . Megvallom, hozzávetőleges és hézagos képet festhettem csak róla; a tanulók külön ünnepléseinek nagy részét, idő szükéből, nem láthattam és külömben is nem egy mozzanattól vonták el figyelmemet az egyidejű többiek.

Haza felé utaztamban el-eltünődtem azon, hogy miért hagyta el Galilei Páduát; azért-e, hogy mint maga mondta légyen, ne kelljen többé bárki elébe kerülőt tanitania (V. ö. Omaggi stb. XIV. E. Wohlwill levelével); vagy inkább azért, — mint Wohlwill

---

* Galilei-nek a czikk élén látható képe ebből a munkából van véve. Szerk.

ezzel szemben véli (l. c.), — hogy egyetemi kötelességektől menten dolgozhassa fel a 18 év alatt felhalmozódott anyagot; avagy mindenek fölött szükebb hazája Toscana utáni vágyódásból (v. ö. Favaro l. c. VI.) hagyta-e el azt a helyet, a melyben egy szeretett barátnő emlékezete, nagyrabecsülő kartársak és rajongó tanítványok ismételt kérései, s meczenások nagy kegyelései marasztották (v. ö. Favaro l. c. VI.) és a melyről utolsó napjaiban is mint arról a helyről emlékezett meg, a melyben életének legszebb tizennyolcz évét töltötte (V. ö. Favaro l. c. IV.)? . . .

Vagy nem-e gondviselésszerű ismeretlen belső intelmet követett, hogy Róma villámainak tüzében Kopernikus egéről le a földre szállva, utolsó munkájával, a legjelentékenyebbel, annál bizonyosabban megajándékozza a világot?!

Farkas Gyula.

A VIRTUÁLIS SEBESSÉGEK ELVE GALILEINÉL.*

Összeállítani és részint kivonatosan ismertetni, részint magyar fordításban szó szerint idézni szándékozom Galilei munkáinak e czímirat alá tartozó részeit. Puszta időrendi egymásután sorozása az illető passzusoknak elégséges arra, hogy világos képét lássuk, miként bontakozott ki a virtuális sebességek elve Galilei természet-philosophiájában. S már csak ezért is, a magam részéről csak néhány helyen töröm meg a hallgatást.

Négy munkának kell tekintetbe jönnie. Ezek, megiratásuk időrendjében rövidebb czímeiken a következők:

1. *Della Scienza Meccanica,*
2. *Discorso intorno i Galleggianti,*
3. *Dialogo dei Massimi Sistemi,*
4. *Dialoghi delle Nuove Scienze.*

Az 1842-től 1856-ig terjedő időközben Flórenczben megjelent (Albèri-féle) kiadást használtam és a két utolsó munkával párhuzamosan azok mostanság megjelent német fordítását: «Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme stb.» Emil Strauss fordításában (Leipzig, B. G. Teubner, 1892) és «Unterredungen und mathematische Demonstrationen stb.» Arthur von Oettingen fordításában (Ostwald's Klassiker Nr. 11. 1890., Nr. 24. 1891., Nr. 25. 1891).

1. «*Della Scienza Meccanica e delle utilità che si traggono dagl' instrumenti di quella con un frammento sopra la Forza della Percossa.*»

Ezt, amint a fent negyedik helyen említett munka egy passzusából is kitetszik, Páduában tanítványai használatára írta Galilei. Először franczia nyelven jelent meg Párisban 1634-ben Mersenne kiadásában és csak 1649-ben jelent meg olasz nyelven először és pedig Ravennában. Mint Galilei egyik híres tanítványa, Viviani írja, ezenkívül több más értekezést is irt ő Páduában tanítványai számára, amelyek ezzel együtt számos leiratban voltak elterjedve Olasz, Német, Franczia, Angol és egyéb országokban. (Le Opere di Galileo Galilei, Firenze, 1854. Tomo XI. 81—136. old.)

Mindjárt a munka elején utal Galilei azoknak a mechanikusoknak a

---

* Előadva a Math. Phys. Társulat 1893. jan. 19-én tartott rendes ülésén.

tévedésére, akik azt hiszik, hogy kis erővel nagy terhet tudván emelni, mintegy rászedhetik a természetet s reményli, hogy világosan ki fogja mutatni az előadandókban e hiedelem hamisságát. Nemsokára, (86. old.) arra figyelmeztet, hogy ha egy terhet annyi részre osztunk, hogy egyik rész sulya se legyen nagyobb a rendelkezésre álló erőnél, ezek a részek egyenkint emelhetők az adott magasságba az adott erővel, csakhogy eközben az erő többször teszi meg azt az utat, amelyet a teher összesége csak egyszer. «Ebből kitünik, — mondja, — hogy az erő sebessége felülmulni köteles a teher sebességét, annyiszorta, ahányszorta a teher nagyobb az erőnél; mert mialatt az erő sokszor mérte végig a mozgás határainak az intervallumát, az alatt a teher csak egyszer, stb.» Később így szól: «De előfordulhat, hogy a terhet részekre osztás nélkül kell szállítani, s ekkor szükséges lesz a gép, hogy a szállítás megtörténhessék, azonban az erő útja nem lesz egyenlő a teherével, hanem annyiszorta nagyobb, ahányszorta nagyobb a teher az erőnél.» Erre a gépek egyéb előnyeinek a fejtegetése következik.

«Definizioni» czím alatt a nehézség (gravità) *törekvés természetszerüen lefelé mozogni.* A momentum (momento) *törekvés lefelé jutni,* amelyet nem annyira maga a nehézség okoz, mint egyszersmind a súlyos testek közti dispositio, melynél fogva kevésbé súlyos test gyakran ellensúlyoz súlyosabb testet, úgy, hogy «a momentum bizonyos lefelé jutási impetus (impeto), amely nehézségből, helyzetből és más egyébből van összetéve, amelyből a test törekvésének a módja származhatik.» A jelzett Definizioni czím alatt most még a tömegcentrum meghatározásáról van szó.

«Supposizioni» czím alatt, a nehézség irányáról szól és a két karú emeltyű viselkedéséről. Azután «*Alcuni avvertimenti circa le cose dette*» czím alatt, az emeltyűről mondottakra hivatkozás után így szól: «Nem tartok hallgatással mellőzhetőnek egy más megegyezőséget és valószinűlegességet sem (congruenza e probabilità), amely észszerűen (ragionevolmente) erősítheti meg ezt az igazságot.» És most összeméri a kétkarú egyenes emeltyű erő- és teher-pontjának kibillenés-okozta egyidejű útját s mozgási sebességét az emeltyűkarokkal és a súlyokkal s így folytatja fejtegetését: «Ebből arra a megismerésre juthatunk, hogy a mozgás sebessége a mozgó momentumát növelni képes, és pedig abban az arányban, a melyben a mozgó sebessége növeltetik» (96. old.).

E czikk után sorra veszi a római mérleget és emeltyűt, a vízszitnes és függélyes hengerkereket, a csigákat, s végre a csavart, a melynek a tárgyalását a lejtőével vezeti be.

A gyorsmérleg és emeltyűről beszéltében, miután ismertette őket és viselkedésüket, így kezd szóllani: «Megjegyzendő (és ez a maga helyén egyebütt is figyelembe veendő), hogy a mechanikai készülékekből húzható haszon nem abban áll, amiben állani a közönséges mechanikusok hiszik, hogy t. i. az emeltyű segítségével kicsike erővel igen nagy ellenállást győzvén le, felülmulják és rászedik a természetet; mert megfogjuk mutatni, hogy az emeltyűkar hosszúságának a segítsége nélkül is, ugyanazzal az erővel, ugyanaz alatt az idő alatt, ugyanaz az effectus érhető el.» Most a tehernek egyenlő karú emeltyűvel részenkint való szállítását discutálja, összehasonlítván azt az egyenlőtlen karú emeltyű összetes műveletével. Igy végez:

«Röviden, az emeltyű erő-karának hosszúságából háramló előny nem áll másból, mint abból, hogy a maga egészében mozdítható el az a teher, amely az emeltyű jóvolta nélkül ugyanazzal az erővel, ugyanaz alatt az idő alatt, s egyenlő mozgással csak darabokban volna elszállítható.» (98., 99. old.)

A hengerkereket közvetlenűl az emeltyűtől függőnek jelentvén ki, ebből a szempontból tárgyalja a viselkedését. Megjegyzendő azonban, hogy ez alkalomból a ferde irányú erőhatás effectusát a merőleges irányúnak az effectusára és a támadási pontnak az erőirány mentén való elhelyezhetőségére, tehát két egyszerűbb tapasztalati elem superpositumára redukálja (101. old.). Miután már ismertette a kétféle állású (vízszintes és függőleges) hengerkereket, így indítja meg a befejezést: «Mindkét instrumentumra nézve legyen megjegyezve, hogy a belőlük húzható haszon nem olyan, amilyennek a mechanikusok népsége hinni szokta, hogy ugyanis majd a természet kijátszásával győzhetik le kicsinyke erővel annak még oly nagy ellenkezését, mert nyilvánvalóvá fogjuk tenni, hogy ugyanaz az erő, ugyanaz alatt az idő alatt, ugyanazzal a mozgással, ugyanazt a súlyt ugyanabba a távolságba, minden gép nélkül is elemelheti.» Azután megmutatja, hogy a teher részenként való szállítása megtörténhetik a felsorolt azonosságok rendjén. (102., 103. old.)

A csigák tárgyalására térve, a mozgó csigáról szóló tárgyalást így folytatja: «Nem mellőzhetjük annak a számba vételét (amit más instrumentumok esetében is tevénk és még a következőkében is tenni fogunk), hogy itt az erő útja a teher-út kétszerese. Ugyanis stb.» (107. old.) Ezután a csiga-összetételekről beszél s két álló csigának két mozgóval való összetételére azt a megjegyzést teszi: «Jegyezzük meg itt, hogy a teher emelése végett négy kötélrésznek kell elhuzódnia, minélfogva a mozgatás pontjának négy kötél-hossznyit kell utaznia, míg a teher nem mozdul nagyobbat, mint egy kötél-hossznyit: és már most annak a kiemelésére és megerősítésére, a miről többször volt már szó, legyen megemlítve, hogy amily arányban kisebbedik a mozgató erőlködése, oly mértekben növedik útjának a hossza.» Mikor pedig a hármas arány szerinti összetételt fejtegette, hozzá teszi: «hanem az erő útja háromszorosa a teher útjának, mivel az erőútnak három kötél-hossznyira kell kiterjeszkednie, míg a teher útját csak egy kötél-hossz méri.»

A csavart a legszebb, leghasznosabb találmányként jelenti be. Tárgyalását ezzel az általánossággal indítja meg: «Nincs kétség benne, — mondja, — olyan a természet szerkezete a súlyos testek mozgását illetőleg, hogy bármely súlyos test, szabadján a centrum felé mozogni törekszik és pedig nem csupán függélyes egyenes mentén, de (ha másként nem teheti) bármely más vonal mentén is, ha csak van némi hajlása.» Példaként a víz folyására utal s erről a szilárd testekre tér át, amelyekkel szintén így kell lennie a dolognak, hacsak a mozgásukat alakjuknál fogva esetleges külső akadályok meg nem akasztják. Példa erre tükör felületen sima, egészen gömbölyű golyó, a mely a felület legkisebb hajlása esetén is legurul, stb. «Kétségtelen axióma gyanánt fogadhatjuk el, — mondja, — hogy ha minden esetleges külső akadály el van távolítva, horizontális síkon bármi kis erővel megmozdíthatók a súlyos testek, de ha emelkedő síkon kell őket fölmozdítani, elkezdenek ellenkezni. Hajlamuk lévén az ellentétes mozgásra, nagyobb erőfeszítést fognak kivánni s annál nagyobbat, mennél erősebb a sík hajlása», stb. Előadja a lejtő egyensúlyi törvényét, aztán figyelmeztet, hogy a majd most következő «spekulácziót» Pappus Alexandrinus is megkisérlette, csakhogy mint ő (Galilei) véli, nem érte el czélját; nevezetesen szerinte a horizontális síkon való mozdításhoz adott erő szükséges. Oly módon iparkodik pedig Galilei a priori elfogadhatóvá tenni a lejtő egyensúlyi törvényét, hogy emeltyűkart a maga horizontális állásából körben lefelé forgatva, figyelmeztet a súlyhatás e közben való fogyásának a törvényére, azután arra, hogy akár az emeltyű karon legyen a súly s általa legyen a forgás centrumához rendelve, akár az emelyűkartól mentesen, a kör periferiája maga legyen az alzata, az mindegy, mert mindkét esetben ugyanaz az út van eléje szabva. Majd érintőt vonván az iménti körpályához, mivel az érintés pontjában a kör és az érintő hajlása ugyanaz, a mozgót rajta lefelé hajtó momentumnak is ugyanazonos voltára következtet. Ezt az okoskodását Dühring (Gesch. der allgem. Prinz. der Mechanik 1877. 46 és 47. továbbá 64. 94. old.) kifogásolja, de úgy látszik, Lagrange egyet értett vele, mert azt írta róla Mécanique Analitique-jében (Édit. 1811. T. I. 10. old.), hogy «On peut dire que c'est là la première démonstration directe qu'on ait eue de l'équilibre sur un plan incliné» (Azt mondhatni, hogy a lejtőn való æquilibriumnak ez az első közetlen demonstratiója). A statikai lejtő-törvényt ily módon megállapítván, azután a lejtőt hengerre göngyölvén, miután már ennek a speciális statikai törvényét is megállapította, így folytatja előadását: «Végre nem mellőzendő hallgatással bizonyos megfontolás, amelyről principiumként kell megemlékeznünk minden mechanikai instrumentumnál, hogy t. i.

amennyit ezeken erő dolgában meggazdálkodunk, épen annyit veszítünk időben és sebességben» stb. Azután megmutatja, hogy mikor a lejtőn lévő súlyt csigán átvetett fonállal lejtőmenti irányban húzza egy függélyesen mozogható súly, akkor az első súly függélyes emelkedése, úgy aránylik a második mélyedéséhez, mint ennek a súlynagysága amazéhoz. Úgy látszik, hogy a csigasorok és a csavar iránt GALILEI idejében sem tápláltak túlságos véleményt a mechanikusok, mert e két gép ötletéből nem apostrophálja őket. Ami azonban itt különösen figyelemre méltó, ez az, hogy a mechanikusoknak szóló passusok magukban foglalják a mechanikai munkának kezdetleges fogalmát, és hogy ez nem domborodott ki jobban GALILEI természet-philosophiájában, talán főleg annak a magában véve igen kisszerű körülménynek róható fel, hogy GALILEI korának számvetése az aránylatok rögéhez volt kötve. Eszük ágában sem volt, hogy súlyt és hosszúságot összeszorozzanak.

Most GALILEI hydrostatikai munkáján van a sor.

2. *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'Acqua o che in quella si muovono.*»

Ezt II. Cosimo nagyherczeg unszolására írta, aki GALILEI érdeméből állandóan érdeklődvén a physikai tudományok iránt, részt vett tudományos összejöveteleken. Egy ilyenben 1611 végén a szilárd testek vizen maradása lemerüléséről volt szó, és itt ARISTOTELES tanait pártolván, GALILEI-nek Archimedes-i tanaival ellenkezőket vitattak; így pl. azt, hogy a testek vizen maradása vagy elmerülése az ő alakjukkal függ össze. Az Archimedes-i tanok védelmére készült ez az irat, és az Archimedes-inél meggyőzőbb tárgyalásokra törekszik. Már 1612-ben jelent meg Florenczben (és pedig ez alatt a czím alatt: «Operetta intorno al galleggiare de' corpi solidi, all' illustrissimo ed eccellentissimo Principe D. Francesco Medici stb.») Edit. Albèri, T. XII. 9—102. old.

Előzményes definitiok stb. után, azt mondja, hogy két principiumot vesz fel a mechanika tudományában (14. old.) Az első ez: «Absolute egyenlő súlyok egyenlő sebességekkel mozogva egyenlő erejűek és momentumúak az ő működésükben.» — Nyomban hozzá teszi: «Momentum névvel hatályosságot, erőt, erélyességet (virtu, forza, efficacia) jelölünk, melylyel a mótor mozgat és a mozgó (mobile) ellenáll, a mely hatályosság nem csupán az egyszerű nehézségtől függ, hanem a mozgó sebességétől és azoknak a tereknek a külömböző hajlásaitól is, a melyekben a mozgás végbe megy, mert egy nagyon lejtős térben nagyobb impetust tanusít egy lefelé szalló súly, mint egy kevésbé lejtősben; általában, bármi legyen is a hatályosság (virtu) oka, a maga teljes egésze (ella tottativa) kapja a momentum nevet.» A kimondott principiumra példaként felhozza az egyenlő karú mérleget, amelyen lengetéskor a súlyok azonos időkben egyenlő utakat tesznek meg, vagyis egyenlő sebességekkel mozognak, minélfogva nincs ok rá, hogy egyik a másikat felnyomja, sit. — 2. (15. old.) «A második principium az, hogy a momentum s a nehézség ereje a mozgás sebességével nagyobbodóan jelenkezik, úgy, hogy absolute egyenlő, de külömböző sebességekkel egymáshoz rendelt súlyok külömböző erejűek, nyomatékúak és hatályosságúak (forza, momento e virtu) és a gyorsabb — és pedig az ő sebességének a másikéhoz való arányában — hatásképesebb (piu potente).

Példaként folhozza az egyenlőtlen karú emeltyűt, a melyről beszéltében elmondja, hogy mozgáskor «az egyik súlynak a mozgása lassú, a másiké gyors, és olyan az az erő és hatályosság, amely a gyorsaságból a mozgóra háramlik, hogy éppen teljesen compensálhatja azt a nyomást, a mely a másik késedelmezőbb mozgótól származik.» Alább így folytatja (16. old.): «A nehézség- és sebességnek ez a vonatkozása (raggnagliamento) minden mechanikai instrumentumban fellelhető és Aristoteles-től az ő mechanikai kérdéseiben principiumként lőn elfogadva; s ennélfogva is mint teljesen igaz állítást fogadhatjuk el, hogy absolute egyenlőtlen súlyok ellensúlyozni fogják egymást és egyenlő momentumúak fognak lenni, valahányszor nehézségeik fordított arányban vannak kimozdulási sebességeikkel (velocità de' loro moti)».

Erre általánosságok következnek a testek uszása és elmerüléséről. Ilyen ez (17. old.): «Ha a szilárd test teljes elmerülése előtt, a víz (felnyomatás elleni) ellenállásának a momentuma kiegyenlődött a szilárd test (lenyomulási) momentumával, akkor kétségen kívül æquilibrium fog beállani: de ha a szilárd testnek a momentuma folyvást felülmulja azokat a momentumokat, a melyekkel a víz a maga felnyomatásának successive ellenáll, nem csak egészen a víz alá fog merülni a test, de sőt le fog szállni a fenékre.» Majd arra utal, hogy a víztartó vizének a felemelt része mindig kisebb térfogatú, mint a szilárd testnek víz alá merült része, úgy, hogy (18. old.) a legkisebb mennyiségű víz a legnagyobb térfogatú szilárd testet felemelheti; pl. 1000 fontnyi súlyt nem több, mint 50 fontnyi víz felemelhet, ami meg fog történni, midőn a víz momentuma elégségig kiegészítődött az ő mozgásbeli sebességével. — Ezután geometriailag kimutatja (18. és 19. old.), hogy a vízbe mártott test valóban nem szorít ki annyi vizet a helyéből, a mely a testnek a vízalatti térfogatába fér, hanem csak annyit, a mennyi a testnek a régi vízszint alatti térfogatába fér bele.

Most a megfelelő geometriai előzmények után ez áll: (20. old.) «Nem lesz nehéz megérteni már most — mondja — igaz okán azt, hogy egyenes prizma vagy henger, a mely kisebb fajsúlyú mint a víz, éppen szinültig függélyesen vízfenéken állván («úgy, hogy a víz éppen egész magassága szerint körülvegye»), nem marad lent, hanem emelkedik, legyen bár a környező víz igen csekély és tetszőlegesen kisebb teljes (assoluta) súlyú, mint az a prizma.» Aztán arányok egyenlőtlenségi és egyenlőségi lánczán keresztül arra a megismerésre vezet, hogy (21. old.) felemeltetvén a prizma, az összes jelen lévő víz teljes (assoluta) súlyának a prizma teljes súlyához való aránya nagyobb, mint a prizma emelkedésének a vízszint mélyedéséhez való aránya. «Igy a víznek a momentuma, a mely az ő teljes súlyából és az ő mélyedésének a sebességéből van összetéve, és a melylyel nyomva kitolni és felemelni erőlködik (fa forza) a szilárd testet, nagyobb, mint a prizma momentuma, a mely ennek a teljes súlyából és emelkedési sebességéből van összetéve, és a mely momentummal ez a víz szorongatásának (scacciamento) és üldöző erejének (forza fatagli) ellen áll: felemelkedik tehát a prizma.»

Erre a továbbiak előzményeként azt mutatja meg (21., 22. old.), hogy a teljes súlyok (i pesi assoluti) a fajsúlyok és térfogatok összetett arányában viszonylanak. Azután annak a geometriai demonstrálása következik (22., 23. old.), hogy hacsak annyi víz környezi a prizmát, miszerint a prizma magassága úgy aránylik a víz magasságához, amint a víz fajsúlya a prizma fajsúlyához : akkor «a víz momentuma, a mely a víz teljes súlyából és lenyomulási sebességéből származik és a melylyel a prizmát kihajtani és felemelni törekszik, egyenlő azzal a momentummal, a mely a prizma teljes súlyából és abból a mozgási sebességből származik, a melylyel a prizma felemeltetvén, emelkednék, s a mely momentummal a felemelésnek ellenszegül. Minthogy már most ezek a momentumok egyenlők, a víz és a szilárd test közt æquilibrium fog uralkodni; s világos, hogy csak kis vizet téve is a többihez, ennek a súlya és momentuma növekedni fog; minélfogva a prizma le fog győzetni és fel fog emeltetni, úgy, hogy csak az eddig is elmerült része marad víz alatt: és ez az, amit be kellett bizonyítani.» Most az Archimidesi elvnek ebből való következését mutatja meg . . .

Mulasztás fordul elő a tárgyalások rendjén. A vízszin leszállása az egész figurative megmozdult víz quantum leszállásával csak az alatt a feltétel alatt confundálható, hogy a felemelt prizma alá tóduló víz quantuma a prizma alapsíkja fölötti összes víz quantuma mellett nem tesz számot. De míg egyfelől nem egy oly mozzanatot lehet megjelölni Galilei előterjesztésének több részében, a mely igen világosan elárulja, hogy ő így értette a dolgot, addig másfelől lehetetlen is feltenni róla, hogy észre ne vette volna, miként a prizma felemelése alatt nem száll az összes megmozdultnak tekintendő víz oly mélyre, mint a víz színe. Igy mulasztása csupán előadási mulasztás lehet, (a melyet talán azért követett el, hogy ne bonyolítsa meggyőzendő olvasóinak horizónján túlnan a tárgyat).

Ugyanez alá a szempont alá esik a közlekedő edény tárgyalása, a mely így végződik (26. old.): «de úgy lévén, hogy egy mozgóban a momentum sebességgel compensálja egy másiknak a súlyosságát, csoda-e, ha a (vékonyabb edényszárban lévő) csekély víz igen gyors emelkedése ellen áll (a tágabb edényszárban lévő) sok víz igen lomha esésének.» Nyomban, így folytatja: «Ime ebben az operatioban hajszálnyira ugyanaz ismétlődik, ami a római mérleg esetében» stb. «Igy elcsitítók azt a hamis véleményt, a mely szerint igen nagy mennyiségű víz inkább és könnyedébben fenntart egy hajót, mint kisebb mennyiségű (ezt hitte ugyanis Aristoteles az ő Problemáinak 23. szakaszában a 2. Problémában), épen ellenkező lévén az igaz, hogy t. i. egy hajó épen olyan jól úszik tíz hordónyi vízben, mint az oczeánon.»

A mai hydromechanika megalapítójává ugyan nem lett Galilei a «galleggianti»-ával, de meglendítette vele a virtuális sebességek elvének általános-szerű kibontakozását. (V. ö. Dühring l. c. 89—91. old.)

Ezzel áttérek a fent, harmadik helyen említett munkára.

3. *Dialogo* | *di* | *Galileo Galilei Linceo* | *Matematico sopraordinario* | *dello Studio di Pisa.* | *E Filosofo, e Matematico primario del* | *Serenissimo* | *Gr. Duca di Toscana.* | *Doue ne i congressi di quattro giornate fi discorre* | *sopra i due* | *Massimi Sistemi del Mondo* | *Tolemaico, e Copernicano;* | *Proponendo indeterminatamente le ragioni Filosofiche, e Naturali tanto per l'una, quanto per l'altra parte.* | *Con privilegi* | *In Fiorenza. Per Gio: Batista Landini MDCXXXII.* | *Con Licenza de' Superiori.*

A tulsó oldalon: Imprimatur si videbitur Reverendiss. P. Magistro Sacri Palatij Apostolici. A. Episcopus Bellicastensis Vicesgerens. | Imprimatur. Fr. Nicolaus Riccardius Sacrí Palatij Apostolici Magister. | Imprimatur Florentine ordinibus consvetis servatis. 11. Septembris 1630. Petrus Nicolinus Vic. Gener. Florentiæ. | Imprimatur die 11. Semptembris 1630. Fr. Clemens Egidius Inqu. Gener. Florentiæ. | Stampisi adi 12. di Settembre 1630. Nicolo dell' Altella.

Hiában fogadta be a munka a Sacri Palatii Magisternek: Riccardinak meghagyására Raffaelo Visconti dominikanus-pater korrekturáit; hiában volt az óvatoskodó bevezetés és befejezés; hiában viselte az előszó Riccardi utasításait; hiában törölték a munka czíméből az árapály- és árdagály felemlítését és tették bele, hogy «Proponendo indeterminatamente» (V. ö. E. Strauss fordításának az előszavával LXII. old.): a hatás az volt, hogy mozog a föld. (V. ö. u. a. LXVII. old.).

Hiában volt meg aztán a sok «imprimatur», a pör megindult és az Arcetri-i agg napok keserűségei jelölik szigorát.

Ahol most ezt a munkát felütöm, ott a centrifugális erőről kezd folyni Salviati, Sagredo és Simplicio beszélgetése. Ebben egy fontos Ptolomeusi ellenvetésnek a megczáfolására törekszik Galilei. Ugyanis annak a kimutatását czélozza, hogy noha a forgónak feltételezett föld felületi pontjai igen nagy sebességgel mozognak, azért mégis csekély erő képes a testeket a tangentiális elrohanásban megakadályozni. — Amint előre lapozok, miután már egy hosszabb geometriai kitérésen is túl jutottam, oly helyhez érkezem, a mely virtuális sebességekkel foglalkozik.

Előbb egy kis tapasztalásról volt szó, a melyet így mond el Salviati: «Egy rőfnyi pálczával ki tudunk röpíteni egy követ, a melyet hat rőfnyi pálczával még akkor sem tudunk kiröpíteni, hogy ha a hosszú pálcza végének, tehát a bele csiptetett kőnek a mozgása még egyszer oly gyors, mint a rövidebb pálcza hegyének a mozgása, a mire csak az szükséges, hogy a nagyobbik pálcza egyszeri körülforgása alatt a kisebbik hármat csináljon». Ezután a Galilei értelmében való momentum fogalom explicatiójára terelődik a beszélgetés. Salviati így végzi egyik hozzászólását: «Ha a mozgás elleni ellenállás csupán a súlyban székel, hogyan képes akkor a római súly az ő kis négy fontnyi súlyával egy bálnyi gyapotnak vagy selyemnek, a mely nyolczszáz vagy ezer fontot is nyom, ellenállani; sőt még le is győzni és felemelni azt az ő momentumával? Hiában, kénytelen az ember azt mondani Sagredo úr, hogy itt bizony más ellenállás és más erő is van a dologban, mint csak maga az egyszerű nehézség.» Sagredo: «Igy kell neki lenni: mondaná meg hát, mi legyen az a másik ható (virtu)?

Salviati: «Olyasmi, a mi az egyenlő karú mérlegtől hiányzik; vegyék észre, mely ujdonság van a római mérlegen; és szükségképpen ebben rejlik az új effectus oka.»

Sagredo: «Azt hiszem az ön puhatolása ötlethez segített. Mindkét műszerben súlylyal és mozgással van dolgunk; az egyenlő karú mérlegen egyenlők a mozdulások, minélfogva, hogy az egyik súly megmozdíthassa a másikat, felül kell azt mulnia; a római mérlegen sem mozdítja meg a kisebb súly a nagyobbat, hacsak emennek a kimozdulása nem kicsiny, mert kisebb távolban van felfüggesztve, amazé pedig nem nagy, mert nagyobb távolságban csüng: azt kell tehát mondanunk, hogy a kisebb súly az által mulja felül a nagyobbnak az ellenállását, hogy nagyot mozdul, míg ez kicsit.»

Salviati: «Ez annyit jelent, hogy a kevésbé súlyos mozgónak (mobile) sebessége compensálja a súlyosabb, de kevésbé gyors mozgónak a súlyát.» Sagredo-nak egy erre következő kérdésére válaszoltában Salviati bőven beszél a római mérlegről, és így végzi fejtegetését:

«Jól véssétek tehát elmétekbe mint való igaz és notorius alapelvet, hogy a mozgás sebességéből származó ellenállás compensálja azt, ami egy másik testnek a súlyától származik; ilyeténképpen pl. egy egy fontnyi mozgó, a mely száz foknyi sebességgel mozog, annyira áll ellent a megfékezésnek, mint egy száz fontnyi mozgó, a melynek a sebessége egy foknyi. És aztán, két egyenlő test egyenlően áll ellen a mozdításnak, ha egyenlő sebességgel kell mozdíttatniok ; ha azonban az egyiknek gyorsabban kell mozdíttatnia, mint a másiknak, ez a vele közlendő nagyobb sebesség mértékében nagyobb ellenállást fog tanusítani. Ezeket megállapítván, fogjunk már most problémánk explicatiójához . . .» Most annak a pusztán rajzbeli kimutatása következik, hogy ha egy pont adott sebességgel körmozgást végez, akkor egy kis adott hosszúságú pályadarabon annál nagyobbat mulaszt a tangentiális iránytól, minél kisebb a körpályájának a sugara. Természetesen, két concentrikus körre vonatkozó összehasonlítás kapcsán halad a szemlélődés. Kis hosszúságú pályadarabot említettem. Ez a fejtegetés rendjén kifejezetten nincs előtüntetve, azonban nemcsak az egész tárgyalás belső charaktere mutat arra, hogy kis, sőt hogy végtelen kis pályadarabra kell gondolnunk, de egy vagylagosság is utasít erre. Nevezetesen a mozgó pontnak az érintői iránytól való visszatartásának az útja gyanánt vagylagosan van megjelölve a radiális és az érintőre merőleges távolság. Itt ugyanaffele előadásbeli mulasztás van elkövetve, mint a «galleggianti»-ban, és itt annál is inkább készakaratosnak vélhető, hogy ebben a munkában, a mely kiváltképpen a nagy közönségnek lőn szánva, a mennyiségtani tárgyalások szintje észrevehetőleg mindig mesterségesen alacsonyan van tartva.

Ha elfogadjuk ezt az interpretatiót és ennek az értelmében analitikailag fogalmazzuk Galilei gondolatát, oly kifejezést találunk, a mely a mi fogalmazásunk szerinti centrifugális erő igen ismert kifejezésével nem ellenkezik. Még pedig attól a megszorítástól el is tekintve, hogy a két körön egyenlő teljes sebességgel történjék a mozgás, könnyű szerrel találhatjuk, hogy ha az egyik kör sugara r, a másiké ρ, és ha ugyan egy idő alatt az elsőn α, a másodikon α végtelen kis szög alatt haladt előre a mozgó pont, akkor Galilei értelmében a tangentiális pályától visszatartó erők aránya $r\alpha^2 : \rho\alpha^2$. Egy pillanat alatt át lehet látni, hogy azonos tömegű pontokra nézve a mi radius-vectori erőfogalmunk is ezt az arányt szolgáltatja. Már pedig Galilei is egyenlő tömegekre gondol; nevezetesen a geometriai fejtegetését megelőző kijelentésében, a mely egész okoskodásának az alzata, két «egyenlő test» ellenállását hasonlítja össze.

Igaz ugyan, a számítást nemcsak hogy nem közli Galilei, de maga sem vitte keresztül. Erre utal a következő passus: Sagredo, miután velősen összefoglalja a Salviati-tól hallottakat, így folytatja: «Most már nemcsak belátom, hogy tévedtek azok, a kik azt hitték, hogy a röpítő erő abban az arányban nől, a melyben a keringés sebessége, de még tovább is mehetek. Ha már egyszer egyenlő sebesség esetén a kerék nagyobbodtával a röpítő erő kisebbedik, akkor talán beválik a következő állítás: hogy a nagy kerék ugyanakkora röpitő erőt tanusítson, mint a kicsiny, oly mértékben kell nagyobb sebességgel bírnia, a mily mértékben nagyobb az átmérője». Aztán összezavarja tangentiális sebességet a szögsebességgel, mint következik: «és így feltehető, hogy a föld forgása sem képes jobban kisodorni egy követ, mint egy bármi kis kerék, ha csak oly lomhán karikáz ez, hogy huszonnégy óra alatt egyetlen körülforgást végez». E téves, egyébiránt is csak találomra mondott vélemény alkalmából azonnal fontolóra kell vennünk, hogy a három beszélgetőnek az egész munkán keresztül, valamint a két új tudományról szóló későbbi munkán keresztül is, határozott tudományos előképzettsége, feltaláló képessége és következetesen eszményített gondolkodási és gondolat-nyilvánítási temperamentuma, karaktere van, a miben nem kis segítségére lehetett GALILEI-nek, hogy legalább a szereplők ketteje, SAGREDO (GIOVAN FRANCESCO SAGREDO) és SALVIATI (FILIPPO SALVIATI) GALILEI-nek két, tőle igen nagyra becsült baráti tanítványa (v. ö. pl. az éppen szóban levő munkában «Galileo Galilei al Lettore») az élet valóságából jutottak be GALILEI két utolsó munkájának a halhatatlanságába. SAGREDO a maga önálló ítéleteiben, — noha mindig igen elmésen, — folyvást többé-kevésbé hirtelenkedő, lelkes tudomány-barát. Hcgy már most a fent idézett véleményt SAGREDO ajkára adta GALILEI, ezzel magával is eléggé kifejezést adott annak, hogy csak egy épen nem meggyőződés-szerű ideát akart megpendíteni. Ehhez járul, hogy SAGREDO is csak tartózkodva mondja ki azt, és végre, hogy teljes legyen a philosophiai kép, SALVIATI a társaság tudós tanító tagja, így kezd szólani: «Egyelőre nem kivánom bővebben feszegetni ezt a dolgot; elég az hozzá, elég bőségesen megmutattuk (ha nem csalódom), hogy mily jelentéktelen az az érv, a mely első pillanatra oly fölötte meggyőzőnek látszik és a melyet ilyennek tartottak a legnagyobb emberek . . .»

Ebben a megvilágításban merem csak felemlíteni, hogy a mechanikai vivmányok fejlődéstani méltatói a virtuális sebességek elvéről szóltukban erről a GALILEI-passusról nem szoktak, — a mennyire tudom, — megemlékezni, és hogy a Dialogo németre fordítója STRAUSS EMIL, a ki sok becses megjegyzést csatolt az ő kiadványához, erre a tárgyra ezt az észrevételt teszi (l. c. 532. old.): «A következőkben meg van kisérelve az ú. n. virtuális sebességek elvét a centrifugális erő elméletének a megalapítására értékesíteni. A mily szerencsésen operált ezzel az elvvel GALILEI más alkalommal, nevezetesen a korán megírt, de csak halála után publikált Della scienza meccanica iratában, annál kevésbé tekinthető sikerültnek ez itteni kisérlete».

Végre áttérek a virtuális sebességek elvének ama szerepléseire, a melyek GALILEI utolsó munkájában fordulnak elő, ebben a kiválóan nagy jelentőségű munkában:

4. «*Discorsi e Dimonstrationi Matematiche intorno a due nuove Scienze attenenti alla Meccanica ed ai Movimenti Locali*», másként «*Dialoghi delle nuove Scienze*», a mely olyan időben jelent meg, a mikor már nem lett volna szabad semmi GALILEI-től eredő iratnak napvilágot látnia, és ezt szinte tudta nélkül adták ki. NOAILLES gróf tette, 1638-ban.

A virtuális sebességek elvének első alkalmazása ebben a munkában harmadik napon a lejtőn esés híres GALILEI-kisérletének a leírásához csatlakozik. Természetesen a lejtőre való alkalmazása. Hadd kezdjem a híres kisérletnek a teljes leírásával.

SALVIATI folytatólag (l. c. 172.): «12 rőfnyi hosszú és félrőfnyi széles, három újjnyi vastag falap vékonyába mintegy hüvelyknyi széles igen egyenes csatorna volt bevájva és ebbe igen sima és tiszta pergamen volt beragasztva; ebben igen kemény, teljesen gömbölyű és simára csiszolt sárgaréz golyót futtattunk. A falap egyik végét felemeltük majd egy, majd két rőf magasságba; azután a csatornában esni engedtük a golyót és a végig futás idejét alább elmondandó módon feljegyezgettük: sokszor ismételtük az egyes kisérleteket, hogy az esési idő pontosan fel legyen kutatva, és nem találtunk egy tized érverésnyi különbségeket sem. Azután a pálya negyedrészén engedtük csak végig futni a golyót, és az előbbi esési időnek mindig pontosan a felét találtuk. Azután más pályarészeken végezve a kisérleteket és összehasonlítva az egész lejtő-hosszúságon való esés időtartamát a fél, $^2/_3$, $^3/_4$ és más résznyi hosszúságokon való esés időtartamával, jó százszor ismételt kisérletek rendjén mindig azt találtuk, hogy a beszaladt pályahosszak azokban az arányokban vannak egymás közt, mint az idők négyzetei: még pedig a lejtő, vagyis a csatorna-út minden hajlásánál így volt. Egyszersmind azt is észleltük, hogy a külömböző lejtőhajlásokhoz tartozó idők épen úgy aránylottak egymáshoz, a mint azt alább az «Autore»-tól (GALILEI-től) kijelentve és bebizonyítva találandjuk. A mi az idő meghatározását illeti, e végre egy vízzel telt nagy mérőnyi edény volt felállítva, a melyből, a fenekébe illesztett vékony csövön vékony sugárban víz folydogált, és ezt az alatt az idő alatt, hogy a golyó a csatornán avagy annak egyes részein végig ment kis serlegbe eresztettük: az ilyképen gyűjtött vizet mindannyiszor igen pontos mérlegen megmérve, a súlyaik különbségei és arányai kiadták az idők külömbségeit és arányait; még pedig oly szabatossággal, hogy a számtalanszor ismételt müveletek számot tévő mértékben nem tértek el egymástól».

SIMPLICIO: «Mily szivesen lettem volna jelen ezeknél a kisérleteknél, azonban megbízva az ön előadásának gondosságában és hűségében, megnyugszom és mint teljesen pontosat és igazat fogadom azt el».

SALVIATI: «Igy hát ismét hozzá foghatunk olvasmányunkhoz és tovább haladhatunk».

Erre egy rövid corollarium és egy igen rövid scholium következik az

«Autore»-ból, és pedig ennek a Dialogusnak a berendezése szerint deák nyelven. Ezek az esési utak, sebességek és idők viszonyára vonatkoznak. Azután ekként folytatja SALVIATI:

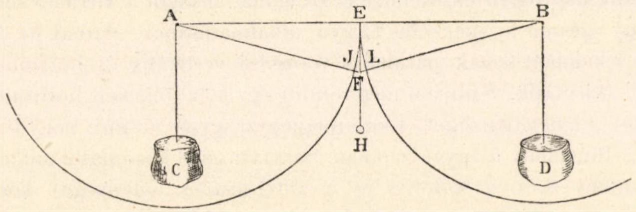
«Most SAGREDO úr, habár tán SIMPLICIO úr nagy unalmára, szeretném egy kissé félre tenni a jelen olvasmányt, hogy kifejthessem, a mit az eddig demonstráltakra és egyszersmind akadémikusunk (GALILEI) némely mechanikai következtetéseinek ismeretére támaszkodva, az eddigiekhez emlékezetből hozzá fűzhetek ama principium igazságának teljesebb megerősítésére, a melyet fentebb megfontolgatások és kisérletek rendjén fürkésztünk, mert, hogy geometriai következtetést vonhassunk, e végből előbb egy, az impetusok tanába vágó lemmát kell demonstrálnunk». Itt következik aztán a virtualis momentumok elvszerű használata arra a czélra, hogy lejtőn levő test nehézségének lejtő-menti componense kiválasztódjék. A test lejtő-menti lefelé törekvésének mérésére egy másik test teljes súlyát használja, a mely szabadon csüng azon a fonálon, a mely csigán átvetve a lejtő terhébe fogódzik. Mivel a lejtőn lévő test a lejtős felfelé mozgás alatt csak függélyes emelkedésének megfelelő ellenállást győz le, tehát nem az ő teljes útjának megfelelőt, míg ellenben a szabadon csüngő test a maga teljes útjának megfelelő ellenállást győz le, ennélfogva nyugalom-tartás végett kell, hogy az emelkedések a súlyokkal fordított arányban legyenek, a mint ez minden mechanikai mozgás esetére ki van mutatva stb. Megjegyzendő, hogy előzőleg az előadó SALVIATI utalt az akadémikusnak a mechanikájára, a melyet ez még Páduában csupán tanítványainak a használatára írt.

Különös észrevételünkre kell itt méltatnunk, hogy (úgy mint mechanikájában is) GALILEI a lejtőn levő testnek nem a mozgásirányi súlycomponensét és a teljes mozgási útját viszi aránylatba, hanem a test teljes súlyát és útjának függélyes vetületét. Igy kellett cselekednie; mert épen az volt a czélja, hogy a nehézség ferde irányú hatásának a törvényét demonstrálja. Szükségképen azon a módon formulázta tehát GALILEI a dolgot, a mely mód ellen DÜHRING mint mai nap divatos formulázási mód ellen is kikel (l. c. 84. old.), és különösen a lejtő esetére is kiterjeszkedve bizonyítgatja, miszerint «tiszta látszat, hogy a virtuális sebességek elve a maga szigorú és speczialis értelmében arra szolgálhat, hogy a lejtő-törvényt igazolja. Ha pedig a ma szokásos fogalmazás mértékadása szerint fogjuk fel az elvet, mely fogalmazás szerint a virtuális momentumok az erőirányokra való reductió értelmében számítandók, a lejtő magyarázata akkor is csak látszat fog lenni» (l. c. 86. old.). Úgy gondolom senkire sem fogja igazi bebizonyítás hatását tenni a GALILEI-féle eljárás és talán hosszabb logikai okfűzés nélkül is mindenki fel fogja ismerni, hogy az erő-szétbontás szabálya külön principiumot képez. Azonban ez a külön principium abban a statu nascendijében, a melyben GALILEI-nél jelentkezik, alkalmasabb a még parlagon lévő emberi gondolkodás-formák közé való beilleszkedésre, azaz GALILEI-féle bevezetése a szó szorosabb értelme szerinti demonstratio ad hominem.

A virtuális sebességek egy másik alkalmazásával a negyedik napon találkozunk, azon a napon, a mely majdnem egészen a kidobott testek mozgásának van szánva, és a melyet épúgy, mint az előző napot terjedelem szerint legnagyobb részben elmés geometriai bizonyítások és levezetések rendjén majd problema, majd theorema-szerűleg fogalmazott nagyszámú érdekesnél-érdekesebb propositiók tárgyalása tölti be, a melyek olvasása még ma is, a mai sokoldalu nagy irodalom özönében is, legalább az alsóbb fokú oktatás szolgálatába a legmelegebben ajánlható és hogy a német fordító OETTINGEN a maga fordítmányához csatolt «Anmerkungen»-ben algebrailag is formulázta azokat, szinte fáradság nélkül közelíthetők meg.

A negyedik nap végén eszmetársítás szolgáltat anyagot a virtuális sebességeknek egy egészen új speczіális tárgyú alkalmazásához. Annak az ötletéből, hogy a kidobott testek parabolás mozgása vertikális és horizontális impulsusból származik, SAGREDO megpendíti egy kötél teljesen horizontális kifeszítésének a lehetetlenségét. Előre megjegyzi egyszersmind, hogy birtokában van a tünemény magyarázatának. SALVIATI némi hasonlatot tud tenni a két tünemény (t. i. a kidobás és a kötél-feszítés jelensége) között. «A kidobott test pályájának a görbülése két erőtől származik, a melyek egyike (nevezetesen a löveg impulsusa) horizontálisan hat, míg a másik (a nehézség) függélyesen lefelé üzi; a kötél kifeszítése is két erővel jár, egyik a horizontális feszítő erő, a másik a kötél súlya, a mely amarra merőlegesen lefelé hat. . .» Majd a kötél görbülésének megközelítőleges parabola alakjáról beszél, a mely lehetővé teszi, hogy kötél segedelmével könnyen és gyorsan lehessen parabolaszerű vonalakat rajzolni. Fogyatékos ugyan a hasonlat, de nincs is teljesen beválóként tárgyalva. Következik annak a bebizonyítása, hogy teljesen horizontálisra nem lehet kifeszíteni a kötelet. SAGREDO: «Reménylem, hogy emlékszem még a bebizonyításra. De megértése végett előbb el kell ismernie önnek SIMPLICIO úr, mint nemcsak a tapasztalás, de még elméleti bizonyítások rendjén is érvényes állítást, hogy egy testnek a sebessége, ha még oly kicsi volna is az, le tud győzni még oly nagy ellenállást, ha csak az ellenállónak oly lassan kell mozdíttatnia, hogy a mozgatónak a sebessége az ellenállónak a sebességével nagyobb proportiót képez, mint a mozdítónak az ellenállása a mozgatónak az erejével». SIMPLICIO: «Ezt igen jól tudom, bebizonyította ARISTOTELES az ő mechanikai kérdéseiben és az emeltyűn s a római mérlegen nyilvánvaló, a melyen a mérő súly, noha nem nyom többet 4 fontnál, 400 fontot képes felemelni, ha csak a mérősúlynak a mérlegcentrumtól való távolsága a nagy súly távolságának százszorosát fölülhaladja: ez onnan van, hogy a mérősúly leszálltában nagyobb utat tesz meg mint annak a százszorosa, melyen ugyanaz alatt az idő alatt a nagy súly felemelődik. Ez pedig annyit tesz, hogy a kis mérősúly százszorosnál nagyobb sebességgel mozdul, mint a nagy súly.»

Sagredo: «Egészen helyesen beszélt ön, és mint látom, legkevésbé sem habozik megengedni, hogy bármi kicsiny legyen a mozdító test ereje, bármi nagy ellenállást le fog győzni, valahányszor .csak azt, a miben erő és nehézség hiján szükölködik, sebességben kipótolja. Térjünk át már most a kötél esetére. Egy kis ábrát rajzolván, az A és B ponton vessünk át egy vonalat, a melynek a két végén, im lássátok, két tömérdek nagy, egymással egyenlő súly, C és D csüngjön, a melyek igen nagy erővel feszítvén a vonalat, azt valóságos horizontális egyenessé húzzák ki, minthogy minden nehézség nélkül való puszta vonal. Már



most hozzá teszem és állítom, hogy, ha önök ennek a közepére E-re bármi kis súlyt függesztenek, a melyet H jelöljön, az AB vonal engedni fog és F pont felé le fog szögelleni, és ily módon meghosszabbodva, a két igen súlyos C és D terhet felszállásra fogja kényszeríteni: ezt a következőképen bizonyítom be». Sagredo megszerkeszti ezután az A és B pontból, mint centrumokból leírt körivek segedelmével az AF és BF vonalokon az AE és BE hosszúságok megnagyobbodásait JF és LF vonal-darabok képében, a melyeknek a hosszúságai egyszersmind a C és D «igen nagy» súlyok emelkedéseit jelentik. Azután azt mondja, a kis középső súly felfüggesztési pontja E csak úgy szállhatott le F-be, «hogy az EF vonal, vagyis a H súly mélyedésének a mekkorasága a JF vonalhoz, vagyis a C és D súlyok emelkedésének a mekkoraságához nagyobb arányban viszonylik, mint e két teher súlya a H-nak a súlyához. De ez szükségképen be fog következni, — mondja, — bármi nagy legyen is a C és D teher súlya és bármi kicsiny a H nehezéké. Ugyanis a C és D súlynak a H súlyon felüli túlsága nem lehet oly nagy, hogy az EF érintőnek a szelő JF részén felüli túlsága nagyobb ne lehessen». Most külön ábrán, ez utóbbi, geometriai állítás bebizonyítása következik. Simplicio kijelenti, hogy teljesen meg van nyugtatva.

Salviati nem szól semmit Sagredo fejtegetéseihez, azt mondja, hogy már későre jár az idő és a továbbiakat halaszszák alkalmasabb időre.

Galilei-nek legalább is kellett nehézségeket tapasztalnia számvetésének megtételekor, másként Salviati-val mondatta volna ezt a «bizonyítást» és nem bizta volna Sagredo-ra, a ki egyszer a hatodik napon (az eleje felé) Salviati egy kérdésére csak unszolva, noha határozottan válaszol és mintegy a saját maga jellemzésére, válaszához hozzáteszi: «azonban már nagyon-nagyon gyakran tapasztaltam, hogy mily könnyen el lehet valamit véteni, s azért nem vagyok már többé oly merész és csupa félelemből tartózkodom». Nem sokára e mondása után kisül, hogy ekkori válasza is téves volt. A tárgyra térve, Sagredo egyenlőtlenségét hasonlítsuk össze azzal, a melyet a mi virtuális-sebességi elvünk szolgáltat, és eltérést találunk, a melyet csak subtilis reductio rendjén lehet elsimítani.

A H súly mélyedésének, az EF útnak a hosszát jelölje z, a C és D súly emelkedésének az út hosszát, tehát az IF vagy a vele egyenlő LF hosszaságot jelölje ς. A H nehezék súlya p, a C és D terhek összes súlya π legyen. Sagredo szerint a p-nyi nehezék lefelé mozgásának, tehát a π-nyi terhek felfelé mozgásának a feltétele

$$\frac{z}{\varsigma} > \frac{\pi}{p}.$$

Szerintünk

$$p\delta z > \pi\delta\varsigma,$$

a hol a két variatio eleget tenni tartozik a z és ς coordináták relatiojának. Ha az $AE = BE$ hosszúságot a, az $AF = BF$ hosszúságot pedig r jelöli, úgy ezt a relátiot a következő két egyenlet fejezi ki:

$$a^2 + z^2 = r^2, \quad a + \varsigma = r.$$

Ezek szerint

$$z\delta z = r\delta r, \quad \delta\varsigma = \delta r.$$

Általuk a mi egyenlőtlenségünk ebbe az alakba fordul:

$$\frac{r}{z} > \frac{\pi}{p}.$$

Ez a mozgási feltétel Sagredo mozgási feltételével nem egyezik meg. Úgy sem egyezik meg, ha a z és vele együtt a ς végtelen kicsinyt jelent. És pedig ekkor a Sagredo feltételének a baloldala még egyszer akkora, mint a miénknek a baloldala, mert

$$\frac{z}{\varsigma} = \frac{r+a}{z}.$$

Miben gyökeredzik a felmerült eltérés, holott mindegyik fél hibátlanul végzi a maga kis kalkulusát? Abban, hogy az E pont, a melynek a tájékára Sagredo úr számítása vonatkozik, kényes pontja a kalkulusnak.

Az ügyállás részletes kikerekítése végett ne resteljünk egy kis elementáris fáradságot és vessünk egy pillantást a mi z-re szóló variálásunk genetikus menetére. Ebből:

$$a^2 + (z+\delta z)^2 = (r+\delta r)^2$$

az eredeti $a^2+z^2=r^2$ egyenletre való tekintettel egészen pontosan ez következik:

$$2z\delta z + \delta z^2 = 2r\delta r + \delta r^2.$$

Ebből, addig, a míg z és r véges, mindig

$$z\delta z = r\delta r.$$

Hogyha azonban csak r véges, és z végtelen kicsiny, úgy csak az alatt a föltétel alatt helyes ez a következtetés, hogy a δz magasabb rendű végtelen kicsiny, mint a z. De a míg csak z nem zérus, addig a δz mindig választható a z-hez képest számot nem tévő kicsinynek. A mechanikai rendszerünknek, vagyis az $ABCD$ stb. rendszernek a maga nyugalmi helyzetéből való kibillentése azonban a legkisebb kitéréseken keresztül fokozatosan juthat csak oly δz értékekhez, a melyek nem magasabb rendűek, mint a z, tehát a Galilei értelmében való ellenállási momentum a z-nél magasabb rendű végtelen kis δz változásoknak megfelelően köteles érvényesülni, és így mi Galilei értelmében is helyesen végezzük kalkulusunkat, midőn végtelen kis z esetére a δz variatiót amannál magasabb rendűnek definiáljuk. De hátha a z zérus? Ekkor bármi kicsiny legyen δz, pontos számítás szerint

$$\delta z^2 = 2r\delta r, \quad \text{vagyis} \quad \delta z = 2r\frac{\delta r}{\delta z}$$

az eredmény! Ezt bevezetvén δz helyett a mi fentebbi variatiós egyenlőtlenségünkbe, a hova $\delta\varsigma$ helyébe most is csak δr jár, akkor

$$\frac{2r}{\delta z} > \frac{\pi}{p}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az itteni δz és a Sagredo-féle kifejezésben lévő z ugyanazt jelentik, tehát a két kifejezés födözködik. Mivel δz bármi kicsiny lehet, az egyenlőtlenség legerősebb állítása, a mely a többit is magában foglalja az, hogy bármi kis, zérustól külömböző értéke legyen a p súlynak, az AB szálnak szögellődnie kell. (A mi egyenletünk, vagyis az $r:z>\pi:p$ egyenlet a $z=0$ határértékre ugyanazt a következtetést rójja).

Még egy helyen szerepel a virtuális kimozdítások elve Galilei e munkájában, és pedig a hatodik nap vége felé. Itt azonban már régi tárgyra, a lejtőre vonatkozik, s abból az alkalomból merül fel újra, hogy az ütközésről szóló tárgyalásában a lejtő-törvénynek is jut feladata.

*

Az előadottak tartalmának, a tudomány-fejlődés tekintetében való érdemét, habár csak egyoldalúlag és csak hozzávetőleges öreg vonással jelzendő, megemlítem a következő esetet:

Lagrange azt mondja (l. c. I. 20. old.): «Pour peu qu'on examine les conditions de l'équilibre dans le levier et dans les autres machines, il est facile de reconnaître cette loi, que le poids et la puissance sont toujours en raison inverse des espaces que l'un et l'autre peuvent parcourir en même temps; cependant il ne paraît pas que les Anciens en aient eu connaissance. Guido Ubaldi est peut-être le premier * qui l'ait aperçue dans le levier et dans les poulies mobiles ou moufles. Galilée l'a reconnue ensuite dans les plans inclinés et dans les machines qui en dépendent, et il l'a regardée comme une propriété générale de l'équilibre des machines».

Az előadottak során Guido Ubaldi nevével nem találkoztunk. Nem az összeállításom mulasztása: Galilei a virtuális sebességek elvével kapcsolatban sehol sem említi e nevet. Hogyan van az, hogy nagy jóltevőjét, a kit más helyen kora legnagyobb mathematikusának nevez: «illustrissimo Sig. Marchese Guid' Ubaldo del Monte, grandissimo matematico de' suoi tempi», (Dial. d. n. Sc. negyedik nap végén). Hogyan van az, hogy erről a férfiúról az oly elevenen kinálkozó alkalmak adtán meg nem emlékezik; Aristoteles-t ellenben két helyen is említi (lásd a 83. és 91. oldalon). — Úgy van ez, hogy a mit Lagrange oly könnyűnek mond, annak erős nyoma van Aristoteles-nél, t. i. az emeltyü útak és a súlynagyságok közti viszony felismerésének. Ebben az Aristoteles-kiadásban: «*Aristotelis Opera. III. Aristoteles latine Interpretibus variis. Edidit Academia Regia Borussica. Berolini 1831.*» a 409. oldalon kezdődnek a «Quæstiones Mechanicæ. Nicolao Leoniceno Interprete». Harminczöt kérdés. Nem egyben van összehasonlítva, habár csak nagyjából az emeltyűszerű vagy ilyennek vélt eszközökön a súlyok nagysága az ő kimozdulási útjaik hosszúságaival: A mi Guido Ubaldi-nál van, az, ha nem is oly kifejezetten, meg van Aristoteles-nél is. Galilei-nek a virtualis sebességek dolgában szerzett érdemét nem azzal az időkülömbséggel kell mérni, a mi Guido Ubaldi fellépése és az ő fellépése közt van, hanem azzal a rengeteg időkülömbözettel, a mely Aristoteles-től valasztja el őt.

Farkas Gyula.

---

* E szavak tanusága szerint sem Galilei-nek, sem Lagrange-nak nem volt tudomása Stevinus 1608-ban *Hypomnemata mathematica* czimen megjelent művéről, melyben a szóban forgó elv a következőkép van kifejezve: «Ut spatium agentis ad spatium patientis, sic potentia patientis ad potentiam agentis». (T. IV., lib. 3. p. 172). *Szerk.*

GALILEO GALILEI MŰVEINEK ÚJ «NEMZETI» KIADÁSA.

Galilei művei több kiadásban jelentek meg, mindegyik kiadás teljesebb az előzőnél, de ezért még mindig akadnak kiadatlan értekezések, levelek vagy Galilei-re vonatkozó fontosabb okmányok.

Midőn 1642 január 8-ikán az Arcetri villában fogva tartott rég megvakult Galilei szemeit örökre lehúnyta, hagyatéka — s ekként iratai is — gyermekeire maradtak. Galilei-nek Marina Gamba-tól, a velenczei nőtől, kivel morganatikus házasságban élt, három gyermeke volt; két leánya és egy fia, Vincenzio.

A római curia a meghalt és eltemetett Galilei-től még jobban félt, mint az élőtől. Az utóbbit fogva lehetett tartani, de az őt túlélő tanokat és gondolatokat, melyek mindinkább szétterjedtek, nem lehetett már elnyomni, daczára annak, hogy a «Dialogo intorno ai due massimi sistemi del mondo» 1835-ig ott díszlett az «index librorum prohibitorum» czímű híres, a tiltott könyvek czimeit tartalmazó jegyzékben négy más, a Coppernicus-féle világrendszerre vonatkozó könyv társaságában.* Azért nem csodálkozhatunk, ha azt olvassuk, hogy Galilei iratait mindjárt halála után üldözőbe vették, és hogy egyik részök ez üldözésnek tényleg áldozatul esett. Galilei fia, Vincenzio nem volt ez iratoknak valami gondos és lelkiismeretes őrzője; de valódi, veszedelmes ellenségök Vincenzio-nak Cosimo nevű fiában támadt, ki ily eretnek felfogású iratok pusztításával Istennek tetsző dolgot vélt művelni.

Ekként az iratok egy része mindenesetre el is pusztult; de ez mégis csak csekély rész volt. A zöme Vincencio Viviani kezébe jött, ki büszkeséggel «il discepolo ultimo di Galilei» jelzővel látta el magát. Ez, ki saját flórenczi házának homlokzatát oly formán alakította át, hogy ez mesteré-

---

* Ezen tiltott könyvek a következők: *Coppernicus.* De revolutionibus Orbium coelestium. — *Diego de Stunica* «In Job». — *P. Foscarini.* «Lettera sopra l'opinione de i Pittagorici e del Copernico della mobilità della Terra e Stabilità del Sole, e il nuovo Pittagorico Sistema del Mondo» és *Keppler* «Epitome astronomiæ Copernicanae.»

nek emlékeül szolgáljon, a művek kiadását vette tervbe. Ez a terv azonban akkor nem valósulhatott, minthogy a római curia hatalma ezt megakadályozta. Az iratok tehát ismét rejtve maradtak, egészen 1737-ig, a mikor is NELLI, miután egyik részöket már makulaturának elhasználták volt, a fenmaradtakat megvette. Ez úton végre a nagyherczegi könyvtárba jutottak.

Az első kiadás Bolognában jelent meg, két kötetben 1655 és 1656-ban, CARLO MANOLESSI összeállításában: «Opere di GALILEO GALILEI Linceo ecc. In questa nuova edizione insieme raccolte, e di varij Trattati dell' istesso Autore, non più stampati accresciute. Al Serenissimo Ferdinando II. Gran Duca di Toscana. In Bologna per gli HH. det Dozza MDCLV—LVI. Volumi due in 4.» czím alatt. Ez a kiadás még nagyon tökéletlen volt; hiszen még a főművét: «Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo» és sok mást, ki kellett hagyni, csak hogy a régi ellenségek haragja ujolag fel ne keltessék. A mit VIVIANI néhány évvel korábban tervezett, az egy sokkal nagyobbszerű vállalat lett volna. 1661 május 6-áról keltezett levelében THEVENOT-nak írja, hogy Leopoldo herczeget megnyerte a tervnek, hogy GALILEI művei kéthasábosan eredeti toskanai nyelven és latin fordításban jelenjenek meg. De a dolog akkor nem volt keresztülvihető.

A második kiadás, mely Viviani halála után látott napvilágot, a flórenczi; ezt GUIDO GRANDI és BENEDETTO BRESCIANI rendezték sajtó alá. Czíme: Opere di GAL. GALILEO ecc. Nuova edizione coll' aggiunta di varj Trattati dell' istesso Autore non più dati alle stampe. In Firenze, nella Stamperia di S. A. R. per Gio. Tartini e Santi Franchi. MDCCXVIII Tomi tre in 4. Ez a második kiadás minden esetre teljesebb, mint az első, de az egyházi censurától kifogásolt művek ebből a kiadásból is hiányoznak, más művek pedig csonkított alakban nyomattak le, és az egész kiadásban hiányzik az egységes gondolat, mely a műveket bizonyos rendszer szerint csoportosította volna.

Harmadik kiadás gyanánt a *paduai* jelent meg, 1744-ben, melyet TOALDO apát rendezett sajtó alá. Czíme a következő: Opere di GALILEO GALILEI divise in quattro tomi, in questa nuova edizione accresciute di molte cose inedite. In Padova, nella Stamperia de Seminario appresso Gio. Manfré, MDCCXLIV. Tomi quattro in 4°. Ezen kiadásban jelenik meg először a többi művek sorában GALILEI főműve, a «Dialogo sopra i due massimi sistemi.»

A negyedik GALILEI kiadást a «Classici Italiani» kiadói rendezték, a jelen század elején, melynek czíme: «Opere di GALILEO GALILEI nobile Fiorentino. Milano, dalla Società tipografica dei Classici italiani, 1808—1811. Tomi tredici in 8°». Ez a kiadás azonban tizenkét első kötetében nem egyéb, mint a paduai kiadás egyszerű utánnyomása. A tizenharmadik kötet oly dolgokat foglal magába, melyek a paduai kiadásban elő nem fordulnak; azonban ezek közt sincs semmi olyan, a mi teljesen kiadatlan lett volna.

Még kevesebb gonddal készült GALILEI műveinek ama két kötete, mely mint második *milanói* GALILEI-kiadás 1832-ben jelent meg: «Opere di GAL. GALILEI. Milano, per Niccolo BETTONI Vol. due in 8 gr.» cz. alatt. A milanói kiadások úgy beosztásra, mint egész berendezésre nézve igen tökéletlenek és következetlenek voltak; különös fogyatkozásuk az volt, hogy a magyarázatra alig nélkülözhető ábrák teljesen hiányzottak.

VIVIANI örököse PANZANINI apát volt, kinek 1737-ben bekövetkezett halála után GALILEI iratai CARLO és ANGELO nevű unokaöcscsére maradtak. Ezek egyáltalában nem viselték gondjukat, s így történt, hogy a nagybecsű iratok valami lomtárba kerültek, s onnan csomagonként szatócsokhoz vándoroltak — csomagoló papirosnak! . . . Ott akadt rájok CLEMENTE DE' NELLI, midőn nehány mortadella-szeletet vett és azt GALILEI-nek egyik levelébe csomagolva kapta. Midőn ez iratok után kutatott, rájöttek, hogy egy inas nyalábonként adogatja el a boltosoknak. NELLI a még meglevőket 88 scudiért megszerezte. Ezek nyomán jelent meg 1820-ban hamis évszám alatt a következő czímű mű: «Vita e commercio di GALILEO GALILEI ecc. scritta da Gio. Battista Clemente de' Nelli. Losanna 1793. Vol. due in 4°».

Körülbelül ugyanebben az időben még VENTURI műve jelent meg: «Memorie e lettere inedite finora o disperse di GALILEO GALILEI ordinate ed illustrate con annotazioni del cavalier Giambatista Venturi. Opera destinata per servire di supplemento alle principale Collezioni fin qui stampate degli scritti di quell' insigne Filosofo. Modena MDCCCXVIII. Parti due in 4°.

Végre 1820-ban szerezte meg III. Ferdinand toscanai nagyherczeg GALILEI-nek meglevő iratait, úgy hogy ezek valahára megszüntek magánbirtoknak lenni, és biztos őrizet alá kerültek.

Az 1841-ben Flórenczben tartott harmadik olasz tudós congressus alkalmából felmerült az a terv, hogy GALILEI-nek összes művei, az ő hatalmas személyiségére vonatkozó összes levelezéssel és egyéb iratokkal együtt kiadassanak. A «Società editrice fiorentina» igazgatója EUGENIO ALBÈRI 1841 szeptember első napjaiban II. Lipót nagyherczeghez nyujtott be ez ügyben folyamodványt, melyre már szeptember 8-án kedvező választ kapott; még ugyane hónapban küldték szét az új kiadás hirdetéseit és 1842-ben már megjelenhetett az új kiadás első kötete. A kiadás czíme: «Le opere di GALILEO GALILEI prima edizione completa condotta sugli autentici manoscritti palatini e dedicata a S. A. J. e R. Leopoldo II. Granduca di Toscana. Firenze, Società editrice fiorentina 1842—1856.

Ezen kiadás a GALILEI-féle műveket és iratokat öt osztályba sorozza: 1. csillagászati, 2. physico-mathematikai, 3. irodalmi és polemiai művek, 4. tudományos, 5. magánérdekű és családi levelezés.

A kötetek tartalma a következő: *Tomo I.* Dialogo intorno ai due massimi sistemi del mondo. — *Tomo II.* Lettere di GALILEO intorno al sistema Copernicano. Discorso di Gal. a Monsig. Orsino intorno il flusso e reflusso. Postille ecc. — *Tomo III.* Trattato della Sfera. Sydereus nuncius. Lettere intorno le apparenze della Luna. De Phænomenis in orbe Lunæ, et de Luce et Lumine disputatio J. C. La Galla. Postille di Gal. al discorso del La Galla. Lettere intorno alle macchie solari. — *Tomo IV.* De tribus Cometis. Discorso delle Comete di Mario Guiducci, Libra Astronomica ac Philosophica, a Loth. Sarsio Sigensano. Postille di GALILEO alla Libra Astronomica. Il Saggiatore ecc. *Tomo V.* Tavole dei moti medj. Osservazioni e calcoli ed effemeridi. *Tomo VI—X.* Carteggio. GALILEI-től írt és hozzá intézett levelek. — *Tomo XI.* De motu gravium. Della scienza meccanica. Trattato di Fortificazione. Le Operazioni del Compasso Geometrico e Militare. Difesa di Gal. GALILEI contro il Capra. *Tomo XII.* Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua és tudományos levelezés. *Tomo XIII.* Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. *Tomo XIV.* Kisebb értekezések ú. m.: Illustrazioni del Viviani e del Grandi ai dialoghi delle nuove scienze. — Componimenti minori e frammenti diversi in materie scientifiche: La bilancetta, parere sopra una macchina per alzare acqua, lettere intorno la stima di un cavallo, parere intorno all' angolo del contatto, considerazione sopra il giuoco dei dadi, risposta al problema del sembrar l'acqua prima fredda indi calda, pareze su di una macchina da pestare, pensieri sulla confricazione, avvertenza intorno il camminare del cavallo, theorica speculi concavi sphærici, problemi varj, pensieri varj. *Tomo XV.* Szépirodalmi értekezések. — «Vita di GALILEO» Vivianitól. *Tom XVI.* Supplemento. Az inquisitio-pörre vonatkozó okmányok, továbbá «Dell' Orologio a Pendolo di GALILEO GALILEI.»

A mint ezen tartalomjegyzékből kiviláglik, az ALBÈRI-féle kiadás se a tartalomnak se a chronologiai sorrendnek megfelelő rendszert nem követ és az első kötet előszavában kifejtett rendszert épenséggel nem követi. Legsúlyosabb hibája azonban, hogy a művek és iratok eredeti irodalmi formáját nem tartja meg, hanem a helyesírást a kiadás idejében divatozó írásmód szerint átidomítja.

Az ALBÈRÍ-féle kiadás hiányai és fogyatkozásai azt a gondolatot érlelték meg GALILEI hazájában, hogy végre is oly kiadást kellene rendezni, mely valósággal mindent magába foglaljon, a mi ezen kiváló szellem földi pályafutására vonatkozólag nemcsak hazájában, hanem Európaszerte a különféle levéltárakban és könyvtárakban elszórva található. Ilyenek p. o. a Marsigli család levéltára, melyben GALILEI levelezése Cesare Marsiglivel és Bonaventura Cavalierivel őriztetik, a híres Ashburnhami gyűjtemény, hol GALILEI levelezése Torricellivel, Vivianival, Cavalierivel, Mersennevel, a pá-

pával, az inquisitorokkal stb., továbbá Castelli, Stenone és Cavalieri levelei találtatnak, ide tartozik Peireson levelezése, továbbá a Pulkovában őrizett KEPPLER-féle iratok, melyek közűl GALILEIRE vonatkozó levelek találtatnak stb.

Korunk leghivatottabb GALILEI-ismerője, *Antonio Favaro*, paduai egyetemi tanár «GALILEO GALILEI e lo studio di Padova» (Firenze 1883) czímű két kötetes művének második kötetében egy új teljes GALILEI-kiadás tervezetét adja elő. E szerint feltéve, hogy az új kiadás nyolczadrétű, körülbelül 500 oldalra terjedő kötetekben jelennék meg, összesen 20 kötetre volna szükség, hogy az összes anyagot magába foglalná. A tárgyak felosztására a következő tervezetet adja elő: Physiko-mathematikai művek 4 kötet, csillagászati művek 5 kötet; szépirodalmi, GALILEI-re vonatkozó biographiai iratok 1 kötet; levelezés 8 kötet; GALILEI életére és munkáira vonatkozó különféle iratok, a GALILEI-féle kéziratok leirása és a GALILEI-re vonatkozó bibliographia 1 kötet; analytikai tartalomjegyzék szerzők és tárgyak szerint 1 kötet. Ezen 20 kötethez, mint kiegészítő jönne még egy, mely GALILEI életrajzát foglalná magába. A kiadás megjelenése FAVARO véleménye szerint körülbelül 10 évet venne igénybe.

Az utolsó években az ige testté lett. «*Sotto gli auspicii di sua Maestà il re d'Italia*» jelenik meg 1890 óta az «*edizione nazionale*»: GALILEI műveinek nemzeti kiadása, melyből eddig két kötet látott napvilágot. A kiadást az olasz közoktatásügyi miniszterium rendezi. A szerkesztőség igazgatója ANTONIO FAVARO, kinek oldalán mint coadjutore letterario ISIDORO DEL LUNGO; mint consultori V. CERRUTI, G. GOVI és G. V. SCHIAPARELLI működnek. A negyedrétben megjelenő kiadás első kötete 423 oldalra terjed, tárgyát alkotják a fiatalkori iratok. A kötet tartalma a következő: 1. «Juvenilia.» Csak a ki ARISTOTELES műveit oly behatóan s a legcsekélyebb részletekig alaposan ismerte, lehetett képes a peripatetikus philosophiát oly sikerrel megtámadni és megczáfolni. Ezen töredékben, a végén megcsonkított alakban reánk maradt fiatalkori megjegyzések foglaltatnak, melyek ARISTOTELES «*Περὶ οὐρανοῦ*» czímű művéből kiindulva a görög philosophusok és a scholastikus tudósok nézeteivel a világ mibenlétéről és összetételéről foglalkoznak. Ugyane csoportba tartozik a «Tractatus de elementis» és «de primis qualitatibus» czímű értekezések, melyekben GALILEI még teljesen a scholastikus philosophia ösvényein jár. — Következik ezután: «Theoremata circa centrum gravitatis solidorum»; — «La bilancetta» (egy GALILEI-től feltalált hydrostatikai mérleg leirása); — «Tavola delle proporzioni delle gravità in specie de i metalli e delle gioie pesate in aria ed in aqqua»; — «Postille ai libri de sphæra et cylindro di Archimede» és «de motu» czímű értekézések.

Alig egy évvel az első kötet megjelenése után már a második, az elsőnél jóval nagyobb kötet látott napvilágot.* Ez a kötet sem hozza még Galilei-nek hírnevesebb műveit, hanem leginkább azokat, melyek a velenczei főiskolán, Paduában oly annyira látogatott előadásainak tárgyát tették. A kötet elején vannak azok az akadémiai felolvasások, melyeket Galilei az erődítés tanából és a hadászati építészetből tartott. Ezeket a tantárgyakat a jelen század elejéig az alkalmazott mathematika körébe valónak számították. Galilei ezen füzeteket maga nem adta ki, hanem csakis előadási füzeteknek használta. Találjuk bennök a polygonalerődítés elveinek biztos alkalmazását. — A hadászati értekezéseket követi az a dolgozata, melyet Galilei, a tizenhatodik század utolsó évtizedének vége felé írt, és mely csak hét évvel a szerző halála után jelent meg eredetiben, Ravennában (1649) és 1664-ben Mersenne franczia fordításában «Le Mechaniques de Galilei Mathématicien et Ingenieur du Duc de Florence eti. Paris 1664» cz. alatt. Az értekezés az erők egyensúlyának feltételeivel foglalkozik az egyes egyszerű mechanikai potentiákon. Végén áll egy töredék: «Della forza della percossa» czím alatt, melyben Galilei az ütközés problemáját első ízben tárgyalja, ugyanazt a tárgyat, melyre sokkal későbben a «Discorsi»-ban ismét reátért.

Harmadik fejezete e második kötetnek galilei-nek Jacopo Mazzoni-hoz, volt tanárához, 1597. márcz. 30-án intézett levele, melyben utóbbinak «De comparatione Aristotelis et Platonis» cz. ép akkor megjelent művéről véleményt mond. Ez a mű a Coppernicus-féle világrendszer ellen foglal állást és galilei udvarias, de azért határozott hangon támadja meg Mazzoni egyik bizonyítgatásának meggyőző voltát.

Az ezután következő «Trattato della sfera» egy kis kosmographia, melyet tanításának első idejében, mint látszik, előadási füzetnek használt. Ezen előadásokban még teljesen követi a peripatetikus csillagászat ösvényeit. — Az utána következő értekezés, melyben az egyenletesen gyorsuló mozgással foglalkozik, mintegy folytatása a «de motu» cz. dolgozatnak, mely az első kötetben megvan.

Az 1604-dik évi új csillag felvillanása alkalmából tanítványai gyakran fordultak galilei-hez, magyarázná meg nekik e feltünő égi jelenséget. Ezen alkalomból keletkezett az a kis értekezés, melyet a művek második kötetében találunk. *Gr. Baldassare Capra* csillagászati ily czimű értekezését: «Considerazione astronomica sopra la nuovo stella de 1604 (Padova 1605)» Favaro szintén lenyomatta, minthogy azt galilei megjegyzéseivel kisérte.

A kötet utotsó fejezetét képezi a galilei-től feltalált proportionális körzőre vonatkozó terjedelmes irodalom. Midőn ugyanis «De uusu et fabrica

---

* Le Opere di Gal. Galilei, Volume II. Firenze, Tipografia G. Barbèra, 1891. 613. pag.

circini cujusdam proportionis» cz. alatt *Capra* 1607-ben egy értekezést tett közzé, melyben az új eszköz feltalálását maga számára akarta igénybe venni, GALILEI «Difese contra alle calumnie e imposture di Bald. Capra» (Venezia 1607) cz. alatt erélyesen védelmezte szellemi tulajdonát. Mindezek az értekezések foglaltatnak a GALILEI-féle művek második kötetében.

Kivánjuk, hogy a nagy olasz tudós, «a sommo filosofo» — mint Favaro nevezi — műveinek oly szépen megindult új kiadása tényleg beváltsa mind azokat az igéreteket, melyeket szerkesztője kilátásba helyezett, hogy t. i. könnyen hozzáférhető helyen megtalálhatók legyenek mindazok az iratok, melyek a nagy férfi tudományos tevékenységére és egész életére vonatkoznak.

Heller Ágost.

GALILEI DIALOGUSA.

Ama rendkívüli szolgálatok között, melyeket Galilei a természettudományoknak tett, nem áll ugyan első helyen az a könyve, mely a *Dialogo* czímét viseli, de az ehhez a műhöz fűződő több rendbeli érdek révén e mű mégis méltán sorakozik eme lángésznek minden időkre nézve maradandó becsű alkotásai közé. Az a körülmény, hogy e műnek Strauss Emil Mm. frankfurti reáliskolai tanártól rendezett német kiadása * megjelent, tehát nyelvi viszonyaink között tágasabb olvasókör számára hozzáférhetővé vált, alkalomszerűvé teszi, hogy a tudománytörténelmi művekben már oly sokszor méltatott eme műről, különös tekintettel a német kiadásra, e helyen is megemlékezünk.

Galilei-nek a fizikára nézve legfontosabb műve, s általában főmunkája a *Discorsi e dimostrazioni matematiche,*** míg a csillagászat terén elért eredményeit első sorban a *Nuncius sydereus* tartalmazza, minélfogva, ha pusztán a feldolgozott tárgyat tekintjük, a *Dialogo* még Galilei csillagászati főmunkájának sem nevezhető. És mégis ez a munkája keltette annak idején a legnagyobb feltünést, ez a munka volt Galilei szomorú sorsának okozója, ez a munka emelte szerzőjét hírneve legmagasabb fokára.

A *Dialogo* tulajdonképeni tárgya a kopernikusi rendszernek a ptolemäusival szemben való védelme, czélja a kopernikusi világnézletnek minél tágasabb körben való terjesztése, külső alakja pedig «tudományos dráma», melyben a szerzőt, az időviszonyok által kellőképen megokolt rejtett formában, flórenczi barátja Salviati, képviseli, míg a szerzőnek szintén benső barátja, a velenczei Sagredo, a művelt laikus szerepét játszsza ; a peripatetikus tanok rendületlen védőjeként pedig egy Simplicio álnévvel felruházott peripatetikus bölcselő szerepel. A párbeszédek *négy napra* vannak

---

* *Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische,* von Galileo Galilei. Aus dem italienischen übersetzt und erläutert von Emil Strauss, ord. Lehrer an der Realschule «Philanthropin» in Frankfurt a. M. Leipzig (Teubner) 1891. (8°, LXXIX, 586. l.)

** Ismertetését l. Math. és Phys. Lapok, I. k., 453. l. Ára 16 márka.

osztva. Az első nap tárgya annak az aristotelesi nézetnek a czáfolása, mely szerint a Föld és az égitestek merőben különböző természetűek, és előterjesztése azon argumentumoknak, melyekből a Föld és az égitestek rokonsága következik. A második nap az aristotelesi mozgástannak beható kritikájával kapcsolatban azon igazság kiderítésének van szentelve, hogy a Földön végbemenő mindennapi mozgásjelenségek a Föld tengelyforgásával jól megegyeztethetők. A Földnek a Nap körül való keringéséből származó tünemények teszik tárgyát a harmadik napnak, mely különben, az 1572-ben a Cassiopejában újonnan feltűnt csillagot illető, Chiaramonti ellen való terjedelmes polémiát is foglal magában. A negyedik nap végre azzal foglalkozik, hogy a Föld mozgásával miként magyarázható meg az ár-apály jelensége.

Már e rövid tartalomjegyzékből is kitünik, hogy a *Dialogo* egyáltalában nem csillagászati tankönyv, nem rendszeres előterjesztése az új világnézletnek. A mai kor szemüvegén át tekintve a munkát, Galileit, a fizikust látjuk előtérbe lépni, mert valóban csaknem az egész könyvön végig mindenütt a jelenségeknek fizikai szempontból való felfogásán és magyarázatán alapszik a kopernikusi tanok védelme. A fény, a nehézség, a tehetetlenség hatásai sokkal inkább előtérben állanak, mint a kinematikai viszonyok; a Kepler-féle törvényeket, melyeknek akkoriban pusztán csak kinematikai jelentősége volt, a *Dialogo* még csak meg sem említi; azzal a hatalmas fegyverrel, melyet e törvények nyújtottak, Galilei nem élt. A második szempont, mely e munkában oly hatalmasan érvényesül, szintén nem csillagászati; a tudományos búvárkodás szabadságának kivívása, a puszta tekintély hatalmának megdöntése: ez az a czél és törekvés, mely már Galilei korában is sokkal nagyobb forrongásba hozta a szellemeket, mint ezt a hipotézis álláspontján akkoriban még teljesen felül nem emelkedő kopernikusi tan egymagában tehette volna. Valóban, Galilei egyik művében sem jut oly nyiltan, határozottan és öntudatosan kifejezésre az ő reformátori szelleme, mint épen a *Dialogo*-ban; a szellemi átalakulásnak oly hatalmas példáját nyújtja e könyv, mely ennek kiváló kulturtörténelmi jelentőségét minden időkre biztosítja.

Galilei maga mondja, hogy nagyon előnyösnek vélte, hogy gondolatait párbeszéd-alakban fejtse ki, «mert ez nincs a mathematikai törvények szigorú szemmeltartásához kötve, és itt-ott kitérésekre ad alkalmat, melyek nem kevésbbé érdekesek a főtárgynál.» Es ezekben a kitérésekben valóban igen fontos, és pedig ismét nem annyira a csillagászatra, mint inkább a fizikára és a filozófiára nézve fontos részletekre találunk, melyek Galilei eredményeinek és ezek jelentőségének teljes átértésére csaknem nélkülözhetetlenek. Eme kitérésekben vette Galilei magának a legjobb alkalmat, hogy a régi filozófiára a legsúlyosabb csapásokat mérje. Az akkori iskola hány hívének kellett feljajdulnia, midőn nemcsak tudományos, hanem még erkölcsi, sőt sok tekintetben még anyagi létének alapjait ily hatalmasan megingattatni látta, és Dühring bizonyára a leghelyesebb nyomon jár, midőn a még most is túlnyomólag uralkodó felfogással szemben úgy a Galilei elleni viharoknak, mint tragikus sorsának főintézőiben nem a szoros értelemben vett egyháziakat, azaz a theologusokat, hanem a tudósokat és professzorokat keresi, kiknek bosszúságát és irigységét Galilei fellépése a legnagyobb mértékben felkeltette.

A *Dialogo* német fordítása az editio princeps szövege szerint készült, és a fordító a *teljes* mű fordítását nyújtja, bár egynémely tárgynak a szerkezet egyenetlenségéből származó ismételt fejtegetése tetemes rövidítéseket engedhettek volna meg. Fordító megtartotta az editio princeps marginális tartalommutatóit, az úgynevezett postillákat is, és pedig, szemben az olasz kiadásokkal, mindegyiket a maga igazi helyére tette. Eme tartalommutatók a könyv használhatóságát nagy mértékben fokozzák. Lefordította továbbá, Favaro publikácziója alapján, Galilei-nek a műhöz való toldalékait, melyeket Galilei a *Dialogo*-nak a páduai szemináriumi könyvtárban őrzött példányához készített. A fordító nagyszámú jegyzetet, összesen 376-ot, csatolt a műhöz, melyek míg egyrészt a fordító rendkívüli buzgalmáról és szorgalmáról tesznek tanúságot, addig másrészt didaktikai szempontból a könyv értékét tetemesen emelik, mert e jegyzetek túlnyomólag a nehezen érthető helyeket világosítják fel, és Galilei-nek bizony még meglehetős számban meglevő tévedéseit és e tévedéseknek a helyesebb felfogáshoz való viszonyát tárgyalják, s így tudomány-történelmi szempontból is tájékoztatnak. A művet betűrendes név- és tárgymutató fejezi be.

Utoljára hagytuk, hogy annál nagyobb elismeréssel szólhassunk róla, a fájdalom, oly korán elhunyt fordítónak * 89 lapra terjedő Bevezetését. Ez magában foglalja Galilei-nek meglehetősen kimerítő életrajzát, de egészen tüzetesen foglalkozik a *Dialogo*-val, mit különben már magában az életrajz-irói szempont is igazol, minthogy ez az a mű, mely Galilei életének utolsó szakaszára oly szomorú nevezetességű befolyással volt. Fordító e műnek nem csupán a keletkezésével foglalkozik, hanem tárgyilag is behatóan méltatja, és merem mondani, hogy e Bevezetés elolvasása után mindenki sokkal jobban meg fogja érteni a mű czélját és szellemét, és alaposabban fogja méltatni annak kulturtörténelmi jelentőségét. Mindazonáltal nem hagyhatom említés nélkül a fordítónak néhány megjegyzését, melyek nagyon alkalmasak arra, hogy ne csupán Galilei-nek Kepler-hez való viszonyát, hanem magát

* Meghalt 1892. febr. 6-án 33 éves korában.

Galilei-t is furcsa színben tüntessék fel. A harmadik naphoz való 41-dik jegyzetében nagyon szépen megjelöli azt a helyet, a melyen Galilei-nek alkalma volt volna Kepler rendkívüli érdemeit méltatni, és azt a mindenesetre nagyon kellemetlen hézagot kitölteni, mely a *Dialogo*-ban az által marad fenn, hogy a nap- és bolygómozgások egyenlőtlenségeit teljesen elhallgatja. A fordító ugyanitt megjegyzi, hogy Kepler törvényeinek mellőzése a *Dialogo* legfeltünőbb furcsasága, a Bevezetésben pedig a többi között azt a nézetét fejezi ki, hogy Galilei valószínűleg sohasem olvasta a tőle különben mindig tisztelettel említett német csillagásznak főműveit, mert nem csak a *Dialogo*-ban, de egyebütt sem említi Kepler-nek már 1609 és 1619-ben közzétett fáradalmas és nagyszabású eredményeit. Ez utóbbi állítás helyes, de azért nézetem szerint képtelenség volna Galilei-ről feltenni, hogy ő, ki Kepler-rel élénknek mondható szellemi összeköttetésben volt, ki Kepler-nek annyi másodrendű megjegyzését teljes figyelmére méltatta, Kepler-nek épen a főműveit ne olvasta volna, tehát legszebb eredményeiről nem vett volna tudomást, vagy ha vett volna is, nem lett volna érzéke ily fontos haladást előtüntető törvények iránt. Különben magának a fordítónak egyik (a 483. laphoz tett) megjegyzéséből is következik, hogy Galilei Kepler-nek *Astronomia nová*-ját bizonyára elolvasta.

De ha így áll a dolog, miként magyarázható meg Kepler mellőztetése? A felelet nem könnyű, de úgy hiszem, hogy egyrészt a tudomány történelmi fejlődésének, másrészt az olasz és a német tudós sajátlagos szellemi irányzatának szempontjából mégis megadható. Kepler csillagász, Galilei pedig fizikus volt, s mint ilyen kevesebb súlyt fektetett a csillagászat olyatén vívmányaira, melyeket fizikai módszere körébe nem vonhatott; maga a fordító is hangsúlyozza, hogy Galilei a *Dialogo*-val nem akart csillagászati tankönyvet írni, nem akart a bolygó-pályák kiszámítására utasításokat adni. Kepler törvényeinek taglalása messze túlhaladta volna a nagyobb közönség számára, tehát a népszerű modorban írt *Dialogo* keretét. Másrészt a bolygómozgások azon egyenlőtlenségei, melyek oka Kepler törvényeiből derült ki, ép oly nehézséget okoztak a ptolemäusi rendszerben, mint a kopernikusiban, s így, mivel nem lehetett helye a támadásnak, nem lehetett helye a megfelelő védelemnek sem. Galilei különben más kortársainak érveit sem használta fel. Igy nem hivatkozott a Simon Marius által felismert és 1614-ben közzétett arra az igen fontos körülményre sem, hogy valamely Jupiterholdnak Jupitertől a Nap felé húzott egyenestől számított keringésidei egymással egyenlők, míg a Jupitertől a Föld felé irányított egyenestől számítottak már nem egyenlők. Ez pedig nyilván arról tanúskodik, hogy Jupiter nem a Föld, hanem a Nap körül kering. A *Dialogo* tehát Kepler mellőztetésére nézve nem irányadó. Hogy pedig Galilei egyebütt sem foglalkozik Kepler törvényeivel, ennek oka bizonyára Galilei tudományának fizikai jellemében keresendő. Mit is kezdett volna Galilei, a fizikus, az ellipszis-pályákkal, az idővel arányosan súrolt területekkel stb., miként bánhatott volna el ezekkel dinamikai szempontból, a mikor a dinamika első eredményeit is még neki magának kellett kivívnia! Igy eshetett meg, hogy Kepler törvényei őt hidegen hagyták. E törvények jelentősége csak egy későbbi kornak, egy Newton-nak munkásságában nyilvánulhatott.

Czógler Alajos.

Társulatunk Galilei-ülése.

Társulatunk f. é. január hó 19-én tartott ülésén egyetlen egy tárgygyal: Galilei emlékével foglalkozott. Farkas Gyula tagtársunk a füzet legnagyobb részét betöltő két dolgozatának előadásával kötötte le figyelmünket, emlékünkbe idézvén a legnagyobb tudósok, a legnagyobb tanító művészek egyikének emlékét.

Ennek a kis *Galilei-ünnep*-nek emléke jelen füzetünk. Czélja az, hogy tagtársaink figyelmét nyomatékosabban irányítsa azokra a művekre, melyek tartalmuk miatt a tudomány történetének legnevezetesebb és legfontosabb alkotásai közé tartoznak, s egyúttal a legtanulságosabb s legélvezetesebb olvasmányt nyújtják.

Tanuljunk a legnagyobb mestertől, hogy szaktárgyainkat mennél jobban, mennél sikeresebben taníthassuk. *Szerk.*

A Mathematikai és Physikai Társulat uj tagjai.

A választmány 1892. május 27-én tartott ülésén az ügyvivő titkár a következőket jelenti:

1. Lévay Imre, a Magyar Kegyes Tanitórend főnöke, a rend nevében 100 frttal a Társulat pártoló tagjai közé lépett.

2. Dr. Fröhlich Izidor r. tag 100 frtnyi, dr. Kürschák József és dr. Vályi Gyula r. tagok pedig 60—60 frtnyi alapitványnyal tagsági dijukat örökitették.

3. Tagsági nyilatkozatukat az alakuló közgyűlés után beküldötték: Klatt Virgil főreáliskolai tanár Pozsonyban; Koschowitz Gyula m. kir. honvédfőhadnagy, a Ludovika Akadémia tanára Budapesten; Lóky Béla főgymn. tanár Mármaros-Szigeten; Nagy Géza m. kir. honvédhuszár százados, a Ludovika Akadémia tanára Budapesten; Pap Lajos főgymn. tanár Sepsi-Szt.-Györgyön; dr. Steiner Simon polg. isk. tanár Makón, kiknek nyilatkozata tudomásul vétetvén, a Math. és Phys. Társulat rendes tagjai közé felvétettek.

4. Rendes tagokul ajánltattak: Bretz Berta polg. isk. tanitónő Szarvason; dr. Dobszay Antal kanonok Pécsett; Keresztély Lajos keresk. akad. tanár Kolozsvárt; Kiss Gábor főigazg. tollnok és tanár Pozsonyban; dr. Muraközy Károly műegyet. m. tanár Budapesten; Nesnera Aladár főreálisk. tanár Aradon; Novotny Endre kegyesr. tanár Kolozsvárt; Schuller János keresk. akad. tanár Brassón; Vörös Cyrill kegyesr. tanár Kolozsvárt, kik mind egyhangulag a társulat rendes tagjainak megválasztattak. Az itt felsorolt tagok névsora a társulat 1892. nov. 17-én tartott rendes ülésén felolvastatott.

*

A választmány f. é. márczius 2-án tartott ülésén az ügyvivő titkár jelentése szerint:

1. Fehér Ipoly pannonhalmi főapát 100 frttal a társulat pártoló tagjai közé lépett.

2. Rombauer Emil r. tag tagsági díját 60 frtnyi alapitványnyal örökitette.

3. Rendes tagokul ajánltattak: Arató Frigyes fels. leányisk. tanár Szegeden; Bláthy Ottó Titusz gépészmérnök Budapesten; Ficsór József polg. isk. tanár Makón; Jaszencsák Sándor főreáliskolai tanár Debreczenben; Kerntler Ferencz, a budai alagut igazgatója; Kiss Tamás tanár Budapesten; Magdics Gábor főgymn. tanár Pécsett; Neustadt Lipót gépészmérnök Budapesten; Nicolits Lázár tanár Budapesten; Dr. Rauchbauer József főgymn. tanár Váczott; Zipernowsky Károly, a Ganz-gyár elektrotechnikai osztályának igazgatója; végre a kolozsvári Ferencz-József egyetem mathematikai-physikai seminariumának következő hallgatói: Demeter István, Eberhardt Béla, Gazelli Árpád, Gebe Mihály, Kacsoh Pongrácz, Lengyel Imre, Makai István, Pap József, Szabó Ádám, Tanco Miklós, Tatár Balázs és Zalányi János (aj. Farkas Gy. és Vályi Gy.), kik valamennyien egyhangulag rendes tagokul megválasztatván, neveik a társulat márcz. 2-án tartott rendes ülésén felolvastattak.

EGY MINIMUM-PROBLÉMA ELEMI TÁRGYALÁSA.*

A geometria köréből vett maximum-minimum-problémák megoldásában rendesen úgy szoktunk eljárni, hogy mindenek előtt a problémát analitikai módon fogalmazzuk, s ha ez megtörtént — a további fejtegetésekben az adott geometriai alakzatot teljesen mellőzve — a tárgyalást a vele adaequat analitikai kifejezésen folytatjuk tovább. Az analitikai fogalmazás adott esetben mindig bizonyos függvény szélső értékeinek meghatározásához vezet és e meghatározás az analízis általános módszereinek majdnem minden speciális esetre kiható erejénél fogva, rendesen kész szabályok útjain eszközölhető. Ez az analitikai eljárás azonban, noha eredményt minden esetben szolgáltat, mégis több rendbeli fogyatkozásban leledzik. Fogyatkozása mindenek előtt, hogy számos esetben a probléma egyszerűsége mellett megokolatlan hosszadalmasságokkal van összekapcsolva; de főfogyatkozása abban van, hogy a tárgyalás folyamában a probléma voltaképeni szubsztrátuma, a megadott geometriai alakzat, teljesen háttérbe szorulván, ettől mind jobban eltávozunk és így természetesen megnehezítjük a hozzá való visszatérést is, t. i. *a talált analitikai eredmények geometriai értelmezését.*

Ezzel szemben az ilynemű problémák szintétikai tárgyalása, ámbár ez korántsem alkalmazható oly általánosan mint az analitikai tárgyalás, (mivel rendesen csak egyes problémákra vagy egyes problémák csoportjaira vonatkozhatik) mégis más tekintetben számos egyéb előnyével kárpótol. Itt ugyanis a tárgyalás közvetetlenűl magához a geometriai alakzathoz fűződvén, az alkalmazandó fejtegetések sokkal természetesebbek és így a probléma velejébe is

* Előadva a Math. és Phys. Társulat 1893 január hó 5-én tartott rendes ülésén.

mélyebb betekintést nyújtanak, annyira, hogy az esetlegesen bekövetkező maximum vagy minimum geometriai okát is fel tudjuk ismerni. Minthogy e módszer mindig a problémák csak egyes csoportjaira vonatkozik, ezeknek természetéhez jobban is fog alkalmazkodhatni, a mivel a föntemlített megokolatlan hosszadalmasságokat is elkerülhetjük. Végül e módszer révén gyakran több ilyen minimum-probléma között közvetetlenül adódnak ki oly kapcsolatok, a melyekre az analitikai tárgyalás csak közvetve vezetne.

Czélom a következő sorokban egy minimum-probléma ily szintétikai tárgyalását ismertetni. E probléma egészen elemi jellegű és a megoldására választott módszer is mindvégig megtartja elemi jellegét. E mellett talán sikerült a tárgyalt problémával egyszersmind az elemi geometria tanításának anyagát is egy kis adalékkal kibővíteni.

*

1. A probléma felállítása és segédtételek.

A megoldandó probléma a következő:

Adva lévén az ABC síkháromszög, határoztassék meg a beírt háromszögek közül az, melynek kerülete a többiek kerületéhez képest minimum; továbbá ha ily minimális kerületű beírt háromszög nincsen, határoztassék meg az összes beírt háromszögek kerületeinek alsó határa.*

Legyenek az $ABC\triangle$ magasságai $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ és ezeknek talppontjai az BC, CA, AB oldalokon rendre α, β, γ (l. az 1. ábrát); e talppontok alkotta $\alpha\beta\gamma$ háromszöget a következőkben az $ABC\triangle$ *talpponti háromszögének* fogom nevezni. E terminologia bevezetése után a felvetett probléma megoldását a következő tételek fejezik ki:

a) *Ha az $ABC\triangle$ hegyesszögű, akkor az $\alpha\beta\gamma$ talpponti háromszög kerülete az összes beírt háromszögek kerületéhez képest minimum.*

b) *Ha az $ABC\triangle$ derékszögű, akkor legkisebb kerületű beírt*

* E probléma tárgyalásánál *beírt háromszög* alatt kizárólagosan csakis oly háromszög értendő, a melynek a szögpontjai az ABC háromszög oldalain és nem ezeknek megnyújtásain feküsznek.

háromszög nincsen; de e mellett az összes beírt háromszögek kerületeinek mégis van a zérustól különböző alsó határuk és ez nem más, mint az átfogóra bocsátott magasság kétszerese.

c) *Ha az $ABC\triangle$ tompaszögű, akkor a beírt háromszögek kerületeinek alsó határa ismét a legnagyobb oldalra bocsátott magasság kétszerese.*

Mielőtt e tételek bebizonyítására áttérnék, előbb összeállítok néhány segédtételt, a melyekre e bebizonyításokban hivatkozás történik.

1. **Segédtétel.** *Az $ABC\triangle$ magasságai az $\alpha\beta\gamma$ talpponti háromszög belszögeit felezik.*

Legyen az $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ magasságok közös pontja M; $MC\alpha$ és $MC\beta$ derékszögű háromszögek MC átfogója közös lévén, az M, α, C, β pontok oly kör kerületén feküsznek, a melynek MC egyik átmérője; erre a körre nézve az $M\beta\alpha$ és $MC\alpha$ szögek ugyanazon $M\alpha$ ív felett álló kerületi szögek lévén

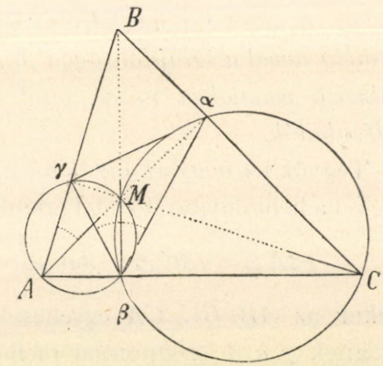
$$M\beta\alpha\sphericalangle = MC\alpha\sphericalangle = \frac{\pi}{2} - B;$$

hasonlóképen mutatható ki, hogy

$$M\beta\gamma\sphericalangle = MA\gamma\sphericalangle = \frac{\pi}{2} - B$$

úgy hogy

$$M\beta\alpha\sphericalangle = M\beta\gamma\sphericalangle = \frac{\pi}{2} - B,$$



1. ábra.

tehát $M\beta = B\beta$ magasság a talpponti háromszög β szögpontja mellett lévő belszögét felezi. Tökéletesen ugyan úgy mutatható ki a $C\gamma$ és $A\alpha$ magasságok felező tulajdonság is.

1. *Megjegyzés.* Abban az esetben, midőn az $ABC\triangle$ hegyes-szögű, az imént bebizonyított tétel a következő fizikai értelmezést engedi. Tekintsük az $ABC\triangle$ oldalait tükröző vonaloknak és $\gamma\beta$-át

beeső fénysugárnak, akkor $\beta\alpha$ lesz a visszavert sugár, minthogy a $B\beta$ magasság a beesés normálisa és továbbá, a $\gamma\beta B\sphericalangle$ beesési szög egyenlő $B\beta\alpha\sphericalangle$ visszaverődési szöggel. Egészen hasonlóan mutatható ki, hogy a BC oldal α pontjában beeső $\beta\alpha$ sugár az $\alpha\gamma$-ban verődik vissza és végül a AB oldal γ pontjában beeső $\alpha\gamma$ sugár mint $\gamma\beta$ fog visszaverődni. Ebből tehát a következő tétel foly:

Ha valamely fénysugár az ABC hegyesszögű háromszögtükör $B\beta$ magasságának β talppontjában $\frac{\pi}{2} - B$ szöggel esik be, akkor egyszeri körülreflektálás után eredeti irányával ismét β-ba fog visszaérkezni.

2. *Megjegyzés.* Ha az ABC háromszöget AB oldala körül leforgatjuk (l. a 2. ábrán), úgy hogy az $ABC_1\triangle$-be megy át és e körülforgatásban az $\alpha\beta\gamma$ talpponti háromszöget is részesítjük, akkor ez $\alpha_1\beta_1\gamma\triangle$-be fog átmenni oly módon, hogy a $\beta_1\gamma$ az $\alpha\gamma$-nak és az $\alpha_1\gamma$ pedig $\beta\gamma$-nak megnyújtásába esik.

2. **Segédtétel.** *Ha adva van az ABC hegyesszögű háromszög, akkor az $\alpha\beta\gamma$ talpponti háromszög az* egyetlen *beírt háromszög, a mely avval a tulajdonsággal bír, hogy oldalai az AB, BC, CA tükröző vonalokra nézve, mint beeső és visszavert fénysugarak felfoghatók.*

Tegyük fel, hogy az $\alpha\beta\gamma\triangle$ bír azokkal a tulajdonságokkal, a melyeket a bebizonyítandó tétel præmissáiban tőle követelünk, hogy t. i.

$$\gamma\beta A\sphericalangle = \alpha\beta C\sphericalangle, \quad \beta\alpha C\sphericalangle = \gamma\alpha B\sphericalangle, \quad \alpha\gamma B\sphericalangle = \beta\gamma A\sphericalangle,$$

akkor az AB, BC, CA egyenesek rendre felezik az $\alpha\beta\gamma$ háromszögnek γ, α, β szögpontjai melletti külszögeket; tehát A, B, C ama három kör középpontja, mely a háromszög mindhárom oldalát érinti, de ezek közül kettő-kettőt csak a megnyújtásukban. Ha most már ez érintő körök középpontjait, A, B, C-t rendre összekötjük az α, β, γ szögpontokkal, akkor — mint ismeretes a nyerendő $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ egyenesek az $\alpha\beta\gamma$ háromszög α, β, γ melletti belszögeit rendre felezik. Igy tehát a míg $A\alpha$ az α melletti belszöget, addig BC ennek mellékszögét felezi, úgy hogy

$$A\alpha \perp BC,$$

azaz $A\alpha$ az A csúcsból kiinduló magasság és α ennek talppontja. Tökéletesen ugyan így bizonyul be, hogy β a B-hez, γ a C-hez tartozó magasságok talppontjai és így az $\alpha\beta\gamma$ háromszög — miként azt ki kellett mutatnunk — az $ABC\triangle$ talpponti háromszöge.

2. A probléma megoldása.

a) Az ABC háromszög hegyesszögű. A megelőző fejezetben tárgyalt tétel ama fizikai értelmezése, mely szerint a talpponti háromszög kerülete egy körülreflektált fénysugár útjának vehető — ismervén a természeti törvények gyakori teleologiai irányzatát — közel helyezi azt a gondolatot, hogy itt minimum-tulajdonsággal van dolgunk. E várakozásban valóban nem is csalatkozunk; sikerül ugyanis a következő tétel bizonyítása:

a) *Az ABC hegyesszögű háromszögbe írható háromszögek között a talpponti háromszög az, a melynek kerülete a legkisebb.*

Legyen* az adott hegyesszögű háromszög ABC (l. 2. ábra), ennek talpponti háromszöge $\alpha\beta\gamma$ és végül egy tetszés szerint beírt háromszög abc.

Ha

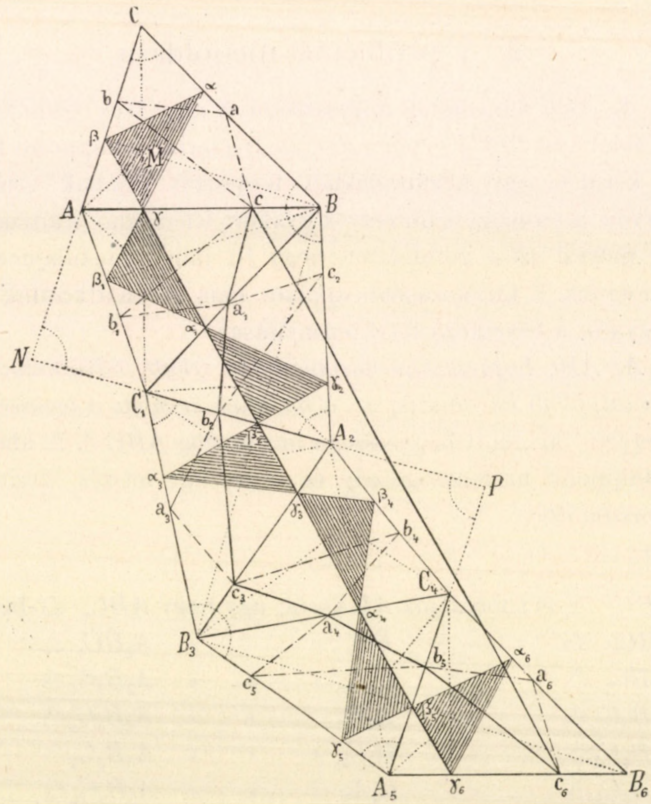
az	ABC	△-et leforgatjuk	AB	körül,	úgy	hogy	ABC_1 △-be jusson
«	ABC_1 △	«	BC_1	«	«	«	A_2BC_1 △ «
«	A_2BC_1 △	«	C_1A_2	«	«	«	$A_2B_3C_1$ △ «
«	$A_2B_3C_1$ △	«	A_2B_3	«	«	«	$A_2B_3C_4$ △ «
«	$A_2B_3C_4$ △	«	B_3C_4	«	«	«	$A_5B_3C_4$ △ «
«	$A_5B_3C_4$ △	«	C_4A_5	«	«	«	$A_5B_6C_4$ △ « ,

---

* V. ö. SCHWARZ H. A. Gesammelte mathematische Abhandlungen II. k. 345. l. továbbá STEINER Gesammelte Werke II. k. 728. és 729. lapokon. E tétel BALTZER R. Elemente der Mathematik czímű jeles kézi könyvében is előfordul (3. kiadás 2. kötet 43. l.) de az ott adott bebizonyítás csodálatos módon teljesen hamis, a mint az — hogy mást ne említsek — már onnan is következik, hogy Baltzer bebizonyítása tompaszögű háromszögre is helyesnek adja ki a szövegben bebizonyított tételt, holott ez ottan helytelen.

akkor mindenek előtt kimutathatjuk, hogy a 6. leforgatás után nyert $A_5B_6C_4\triangle$ *az eredetivel hasonló fekvésű*, azaz homolog oldalaik párhuzamosak. Ugyanis, ha az $NCBA_2$ négyszög szögeinek összegét kifejezzük, találjuk, hogy

$$N\sphericalangle + C\sphericalangle + 3 . B\sphericalangle + A\sphericalangle = 2\pi;$$



2. ábra.

ha a $PC_1A_3B_5$ négyszögre vonatkozólag ugyanazt tesszük, találjuk, hogy

$$P\sphericalangle + C\sphericalangle + 3 . B\sphericalangle + A\sphericalangle = 2\pi;$$

e két reláczió egybevetéséből következik, hogy

$$N\sphericalangle = P\sphericalangle,$$

tehát

$$A_5C_4 \parallel AC$$

és így egyszersmind az $A_5B_6C_4\triangle$ minden oldala párhuzamos a vele egyenlő értelemben egybevágó $ABC\triangle$ homolog oldalával.

Ha a fönt felsorolt hat leforgatásban az $\alpha\beta\gamma$ talpponti háromszöget is részesítjük, úgy hogy ez egymásután az

$$\alpha_1\beta_1\gamma,\ \alpha_1\gamma_2\beta_2,\ \alpha_3\beta_2\gamma_3,\ \alpha_4\beta_5\gamma_5,\ \alpha_6\beta_5\gamma_6$$

helyzeteket felveszi, akkor a megelőző fejezet 1. segédtételéhez csatolt 2. megjegyzés alapján tüstént belátható, hogy a

$$\gamma\alpha_1,\ \alpha_1\beta_2,\ \beta_2\gamma_3,\ \gamma_3\alpha_4,\ \alpha_4\gamma_5,\ \beta_5\gamma_6$$

oldalok mind megannyian ugyanabba az egyenesbe. a $\beta\gamma$ megnyújtásába t. i. a $\gamma\gamma_6$ egyenesbe esnek és az idézett fejezet 2. megjegyzéséből és 2. segédtételéből egyszersmind világos az is, hogy az $\alpha\beta\gamma$ talpponti háromszög az egyetlen beírt háromszög, a melynél ez bekövetkezik. Az egymásután alkalmazott leforgatások alkalmával tekát a $\gamma\gamma_6$ egyenes felszed a talpponti háromszögből mindig egy-egy oldalt, úgy hogy

$$\begin{aligned}\gamma\gamma_6 &= \gamma\alpha_1 + \alpha_1\beta_2 + \beta_2\gamma_3 + \gamma_3\alpha_4 + \alpha_4\beta_5 + \beta_5\gamma_6 = \\ &= 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 2\varkappa,\end{aligned}$$

a hol $\varkappa$ a talpponti háromszög kerületét jelenti.

Ha a leforgatásokban a tetszés szerint beírt $abc\triangle$-et is részesítjük, akkor ez egymásután felveszi az

$$a_1b_1c,\ a_1b_2c_2,\ a_3b_2c_3,\ a_4b_5c_5,\ a_6b_5c_6$$

helyzeteket és a

$$ca_1b_2c_3a_4b_5c_6$$

törtvonal hossza

$$\begin{aligned}ca_1 + a_1b_2 + b_2c_3 + c_3a_4 + a_4b_5 + b_5c_6 &= \\ = 2(ab + bc + ca) &= 2k\end{aligned}$$

a hol k az $abc\triangle$ kerületét jelenti.

A bevezetésben formulázott tétel bebizonyítása, az eddigiek után annak a kimutatására van visszavezetve, hogy

$$k > \varkappa.$$

De ez az eddigi előkészités után igen egyszerűen mutatható ki; ugyanis

$$2\varkappa = \gamma\gamma_6 = cc_6,$$

mivel

$$AB \parallel A_5B_6, \quad \gamma c = \gamma_6 c_6;$$

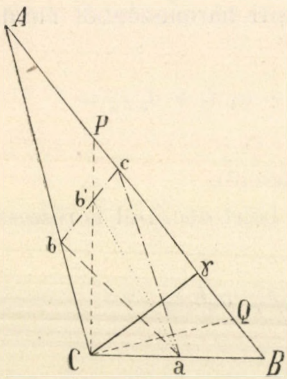
a míg tehát $cc_6 = 2\varkappa$ a c és c_6 pontok egyenesvonalú összeköttetésének hossza, addig $2k$ egyenlő ugyane két pont törtvonalu $ca_1b_2c_3a_4b_5c_6$ összeköttetésének hosszával és igy az elemekből jól ismert tétel alapján következik, hogy

$$2k > 2\varkappa$$

és igy, miként be kellett bizonyitanunk, egyszersmind

$$k > \varkappa.$$

b)* *Az ABC△ derékszögű.* Legyen a $C\measuredangle$ derékszög, akkor a talpponti háromszög γ és a szögpontjai az eredeti háromszög C szögpontjában esnek össze, a minek következtében a talpponti háromszög a kétszer számitandó $C\gamma$ hipotenuza-magassággá elfajul. Hogy $2 . C\gamma$ ebben az esetben a beírt háromszögek kerületeinek alsó határa, az tökéletesen úgy bizonyitható be, mint az *a)* alatt tárgyalt tétel. Ebben az esetben tehát a minimum-probléma megoldása a kétszer számitandó $C\gamma$ vonaldarabbá elfajult háromszög.



3. ábra.

c) *Az ABC△ tompaszögű.* Legyen a tompa szög ismét a C szög pont mellett. (L. 3. ábrát.) Itt is kimutathatjuk, hogy a kétszer számitott $C\gamma$ vonaldarab hossza azaz $2C\gamma$ a beírt háromszögek kerületének alsó határát képezi.

* A b) és c) alatti tárgyalásokat v. e. STURM R. «Bemerkungen und Zusätze zu STEINER's Aufsätzen über das Minimum und Maximum» czimű értekezésével Crelle-Journal 96. k. 64. l.

Ennek kimutatása könnyen vezethető vissza a b) alatt tárgyalt esetre. Huzzuk meg a CP és CQ segédvonalakat úgy, hogy ezek CB-re illetve AB-re merőlegesen álljanak, legyen továbbá CP-nek és CQ-nak metszéspontjai AB-vel P illetve Q. E segédvonalak révén két derékszögű háromszöget nyertünk: BCP-t és ACQ-t. Legyen most már a tetszés szerint beirt háromszög abc, akkor a nyert derékszögű háromszögek közül legalább az egyiknek átfogója tartalmazza a c szögpontot. Hogy a további tárgyalásainkat konkrét esethez fűzhessük, tegyük fel, hogy a $BCP\triangle$ van felruházva az említett tulajdonsággal, (ha csak az ACQ derékszögű háromszög birna e tulajdonsággal, a tárgyalás tökéletesen analog módon folyna tovább). Legyen most már a bc-nek metszéspontja a CP-vel b', akkor mindenek előtt kimutatható, hogy

α) $\quad abc\triangle$ kerülete $< ab'c\triangle$ kerülete;

ugyanis

$$ab + bb' > b'a$$

és ha ennek az egyenlőtlenségnek mind a két oldalához hozzáadjuk $(b'c + ca)$-t lesz:

$$ab + (bb' + b'c) + ca > b'a + ac + cb'$$

de ez összevont alakban már az α) alatti egyenlőtlenséget adja.

A b) alatti tárgyalásaink értelmében

β) $\quad ab'c\triangle$ kerülete $< 2 \,.\, C\gamma$.

Ha most az α) és β) relácziókat egybevetjük, helyesnek találjuk végül, hogy

$$abc\triangle \text{ kerülete } < 2 \,.\, C\gamma$$

és ez a reláczió volt az, a melyet be kellett bizonyitanunk.

Rados Gusztáv.

VÉGSZERŰEN EGYENLŐ TERÜLETEK.

(Második közlemény.)

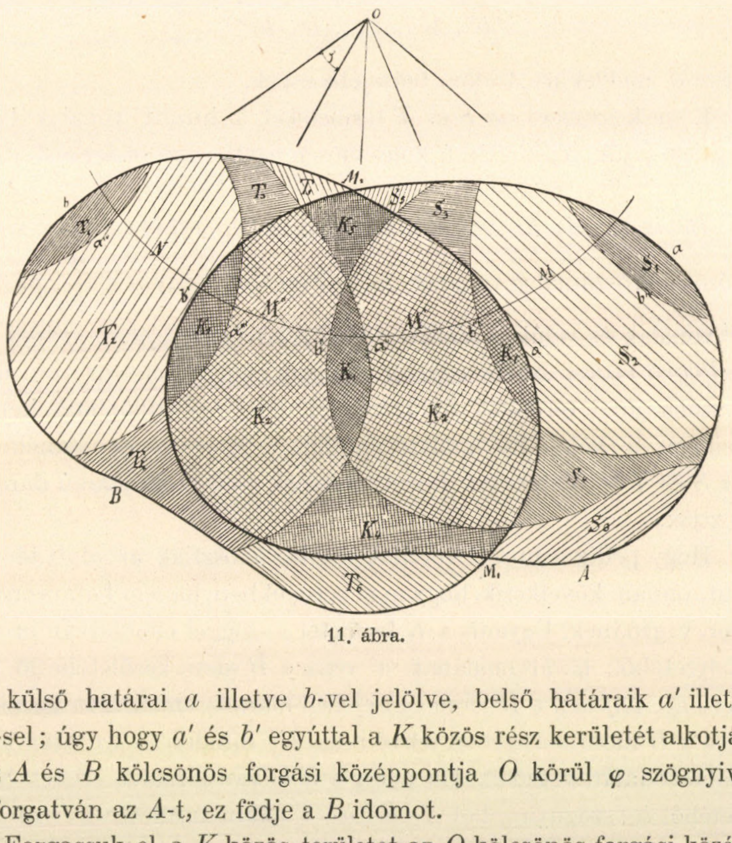
II. A végszerű egyenlőség kimutatása a transzpoziczió módszerével.

A bevezetésben kimondott tételeket teljesen bebizonyítottuk és a bebizonyítás menetéből láthatók azok a szerkesztések is, melyeknek alkalmazásával a végszerűen egyenlő területnek egybevágó alkatrészeikre feloszthatók. Ámde ezek a szerkesztések kivitele többnyire hosszadalmas lévén, a következőkben bemutatom a Bólyai szellemében végzett szerkesztéseimet, melyek elvileg is nevezetesek, a mennyiben kivitelük az alapul fekvő idomok által megadott bizonyos transzpozicziók és ezekből raczionális módon összetetteken kívül legfölebb csak bizonyos az O pontból leírt konczentrikus köröket igényel. Ez alkalommal csak a 6. tétel folyományát fogom ily eszközökkel szerkesztve bebizonyítani.

Két egybevágó sikidom vagy egyenlő vagy ellenkező értelemben egybevágó; az első esetben van a síkjukon olyan O pont, — a két idom kölcsönös forgási középpontja, — mely körül egy meghatározott φ szöggel forgatván az egyiket ez a másikat födi, (e pont speczialis esetben a végtelenben feküdhetik, a midőn azután a forgás helyébe parallel-eltolás lép); a második esetben van síkjukon olyan egyenes, — a két idom kölcsönös forgási tengelye, — mely körül való átforgatás után az egyik idomot egy meghatározott t darabbal eltolván, ez a másikat födi.

1. *Adva van két egymást részben fedő, egyenlő értelemben egybevágó egyszerűen összefüggő síkidom, a melyeknek kölcsönös forgási középpontja nem fekszik területük belsejében, és melyeknek közös területe egyszerűen összefüggő. Nem közös területeik véges számú kölcsönösen egybevágó részekre osztandók.* (11. ábra).

Szerkesztés. Legyen a két adott egybevágó terület A és B, közös részük K, nem közös részeik pedig S, illetve T. Legyenek az S és



11. ábra.

T külső határai a illetve b-vel jelölve, belső határaik a' illetve b'-sel; úgy hogy a' és b' egyúttal a K közös rész kerületét alkotják Az A és B kölcsönös forgási középpontja O körül φ szögnyivel elforgatván az A-t, ez födje a B idomot.

Forgassuk el a K közös területet az O kölcsönös forgási középpont körül egymásután φ, 2φ, ..., $n\varphi$ szögnyire, hol n pozitiv egész szám, és rajzoljuk bele a B területbe mindegyik elforgatás után a forgó K terület határvonalának a B idom belsejébe eső részeit, melyek sorban

$$a'', a''', \ldots, a^n, a^{n+1}$$

legyenek; az n szám legyen pontosan avval jellemezve, hogy a^{n+1} merev vonalat φ szögnyire elforgatván az O pont körül, ez már teljesen kívül essék a B területen.

Hasonlókép forgassuk el a K területet az O pont körül $-\varphi$, $-2\varphi, \ldots, -n\varphi$ szöggel és rajzoljuk fel mindegyik lépés után a forgó terület határvonalának ama

$$b'', b''', \ldots, b^n, b^{n+1}$$

részeit, melyek az A idom belsejébe esnek.

E szerkesztéssel az S és T területeket a huzott vonalak tényleg felosztják véges számú kölcsönösen egybevágó részekre.*

Bebizonyítás. Az A és B idomoknak az O pontból való látó szögei közös mérőszámát Φ-vel jelölvén, nyilvánvaló, hogy $n \overline{\overline{<}} \dfrac{\Phi}{\varphi}$; az a^i és b^i vonalak és velük *a szerkesztésnél feltételezett lépések száma ennélfogva véges.* Ámde egyszer és mindenkorra föltettük volt, hogy a szóba jövő területek határvonalait eltolván, különböző helyzeteikben a kölcsönös metszéspontjaik száma véges; ennélfogva az S és T területeket a huzott vonalak csak *véges* számú darabra osztják.

Hogy pedig a huzott vonalak tényleg felosztják az adott idomokat, onnan következik, hogy nem belsejükben, hanem határvonalaikon végződnek. Ugyanis a K területet φ szöggel elforgatván eredeti helyzetéből, határvonalának a' része a B idom kerületébe jő, míg területe teljesen a B idom belsejében marad; ennélfogva kerületének a B idom belsejében fekvő része b'' minden esetre ezen idom határvonalán végződik. Ha pedig a K el van forgatva eredeti helyzetéből $i\varphi$ szögnyire, hol $1 < i < n+1$, akkor területének csak egy *része* feküdvén a B idomon kívül, kerületének az idom belsejében fekvő része b^{i+1} annál kevésbbé végződhetik másutt, mint ezen B

* A szerkesztés végezhető a 2. §. 3. alatt leírandó eljárással is, mely különben lényegileg ennek általánosítása.

idom határvonalán. Ugyanez áll az a'', a''', . . ., a^n, a^{n+1} osztó vonalakról is.

Az S területet eme vonalak darabokra osztják; jelöltessék bármelyik ilyen darabja S_l-lel; az S_l *belsejében* fölvévén egy tetszőleges M pontot és ezen át vonván egy kört az O mint középpont körül, szerkesszünk a körön M', M'', . . ., M^k, N pontokat, úgy hogy

$$+\varphi = MOM' = M'OM'' = \ldots = M^{k-1}OM^k = M^kON$$

legyen, k pedig akkora, hogy M^k az utolsó még az A területre eső pont, minélfogva az M', M'', . . ., M^k pontok a K terület pontjai és az N pont már a T területre esik. Nyilvánvaló hogy eme pontok nem eshetnek az a^i avagy b^i vonalakra; ugyanis bármelyik a^i vonalat $\pm\varphi$ szögnyivel elforgatván az O pont körül, a rajztéren maradó része födi az a^{i+1} illetve a^{i-1} vonalat, és hasonló áll a b^i vonalakról; ennélfogva, ha valamelyik M^i avagy az N pont egy a^i vagy b^i vonalon feküdnék, akkor az M pontnak is a vagy b vonalon kellene feküdnie, a mi ellenkezésben van ama felvételünkkel, hogy az M pont az S_l *belsejében* tehát nem határvonalán fekszik.

Ha ellenben az M pontot az S_l *határvonalán* vesszük föl és ugyanazt a szerkesztést végezzük, akkor ugyanezen megokolásnál fogva az M', M'', . . ., M^k, N pontok is határvonalakra t. i. a avagy b vonalakba jutnak, a szerint a mint az M pont a vagy b vonalon vétetett föl.

De ebből tüstént következik, hogy ama S_l, K', K'', . . ., K^{k-1}, K^k, T_l területek, melyeknek belsejében az M, M', M'', . . ., M^{k-1}, M^k, N pontok feküsznek, egymással egybevágók. Ugyanis az

$$S_l,\ K',\ K'',\ldots,\ K^{k-1},\ K^k,\ T_l$$

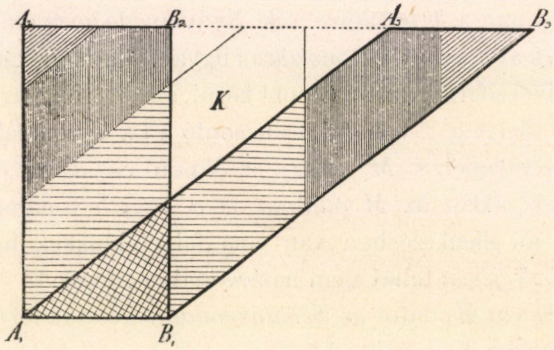
területeket az O középpont körül az utolsó kivételével $+\varphi$ szögnyivel elforgatván, bármelyikük belső (illetőleg határ-) pontjai a következőnek belső (illetőleg határ-) pontjaivá lesznek. Igy tehát $S_l \cong T_l$.

Jegyezzük meg végül, hogy az M, M'', . . ., M^k, N pontok szerkesztésénél fogva mindegyik S_l-hez egyetlen egy vele egybevágó T_l, és hogy ép így fordítva is mindenik T_l-hez csak egy S_l soroltatik. Az S és T idomoknak kölcsönösen egybevágó részekre való felosztása ezzel teljesen be van bizonyítva.

Alkalmazások:

a) Szolgáljon e tétel alkalmazására például két közös alapon álló egyenlő magasságú egyenközény fölbontása kölcsönösen egybevágó részekre.*

Az $A_1B_1B_2A_2$ és $A_1B_1B_3A_3$ egyenközények közös alapja A_1B_1; az idomból (11*a* ábra) látható, hogy $A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ — mondjuk A és B — háromszögök nem közös részeiből kiadódnak a kettősen



11*a*. ábra.

sraffolt Δ háromszög hozzáadásával. De az A és B háromszögök egymáshoz képest el vannak tolva $A_1B_1 = a$ darabnyival; nem közös részeik ennélfogva kölcsönösen egybevágó részekre osztatnak az imént előadott eljárással, csak a φ szöggel való *forgatások* helyébe most a darabnyival való *eltolások* lépnek.

Ez a felosztás *elvileg* abban különbözik az 1. §-ban leirottaktól, hogy ott bizonyos látszólagosan önkényszerű vagy körzővel meghatározott segédvonalak voltak szükségesek; itt minden az *adott* idomoknak *adott* eltolásából és az idomoknak határaiból adódik ki.

b) Folytatólagos alkalmazásul szolgáljon két egyenlő alapú és

---

* V. ö. Bólyai Tentamen pag. XXXVII. — A szerkesztés még egyszerűbb mint a Bólyai-é.

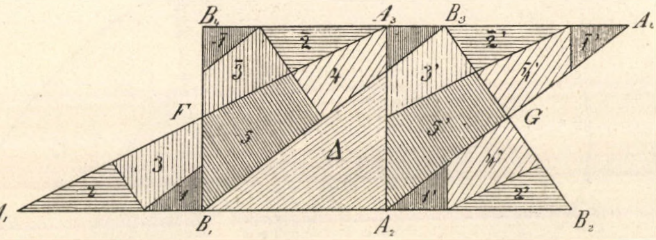
magasságú $A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ háromszögnek kölcsönösen egybevágó háromszögekre való fölbontása.

A fölbontás módját a 11*b*. ábra mutatja. A föladatnak az előzőre való visszavezetése czéljából az egyenlő alapokat úgy toljuk össze, hogy közös részük B_1A_2 az alapok fele legyen, tehát

$$A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2.$$

Azután B_1 és A_2 pontokból paralleleket vonván A_2A_3 illetve B_1B_3 oldalakhoz, továbbá A_3B_3 egyenest meghúzván, két egyenközényt nyerünk t. i. a

$$B_1A_2A_3B_4, \quad B_1A_2A_4B_3$$

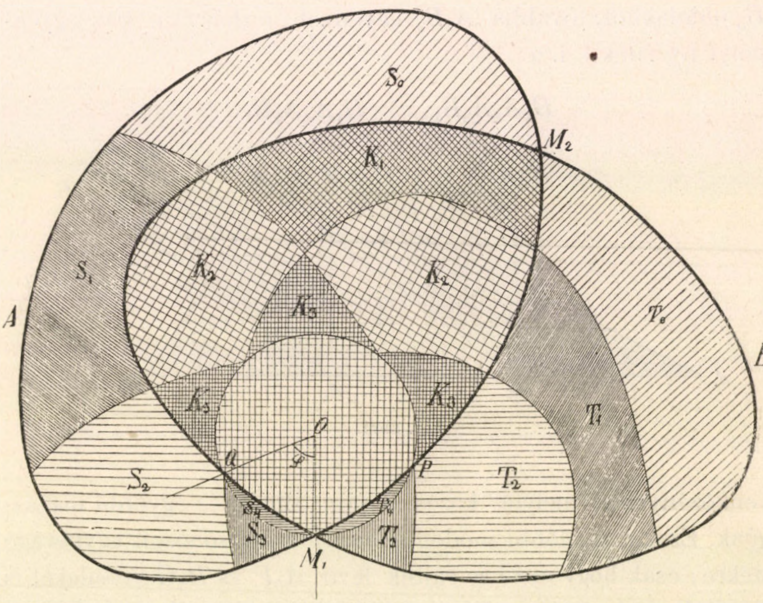


11*b*. ábra.

egyenközényeket, melyek közös alapon állnak és egyenlő magasságúak. Ezeket az előbbi módon felbontjuk kölcsönösen egybevágó részekre; csak hogy most a rajtuk levő A_3F és B_3G vonalakat is tologatjuk. Igy a közös Δ háromszögön kívül nyerjük az $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, 4, 5 és $\bar{1}'$, $\bar{2}'$, $\bar{3}'$, $4'$, $5'$ kölcsönösen egybevágó ($i \cong i'$) részeket. Végül az A_3B_4F illetve B_3A_4G háromszögöt átrajzoljuk a velök kongruens A_1B_1F illetve B_2A_2G háromszögökbe.

2. *Adva vannak A és B egyenlő értelemben egybevágó egyszerűen összefüggő területek, melyek kölcsönös forgásközéppontja belsejükben fekszik és a melyeknek közös része is egyszerűen összefüggő; szabad részeik kölcsönösen egybevágó darabokra osztandók.* (12. ábra.)

Az *A* és *B* kerületeinek két metszéspontja közül az M_1 pont feküdjék közelebb az O forgás-középponthoz. Az OM_1 sugárral az O pontból kört írván le, e vonal mentén vezetett metszéssel két részre osztom az A és B területeket: az A és B-nek a körön kívül eső részei legyenek A_1, illetve B_1, — a körön belül eső részei pedig A_2 illetve B_2. Az A_1 és B_1 területekre nézve a kölcsönös forgásközéppontjuk külső pont lévén, nem közös részeik az 1. alatt leírt módszerrel oszthatók fel véges számú kölcsönösen egybevágó



12. ábra.

részekre; — e részek jelen esetben S_0, S_1, S_2, S_3, illetve T_0, T_1, T_2, T_3. Más részről az A_2 és B_2 területek nem közös részei S_4 és T_4 már is egybevágók. Ha ugyanis φ az a szög, melylyel az A-t elforgatván az O körül, ez a B idomot födi, akkor az S_4 és T_4-nek a látó szöge az O-ból $M_1OQ = POM_1 = \varphi$; továbbá M_1P és QM_1 az A és B idomok kerületeinek homolog ívei lévén, — még ha esetleg több darabból állnának is, — egybevágók; ezek folytán a T_4 elforgatva φ szögnyivel kerületének úgy ezen PM_1 részei valamint a körív részei is födik az S_4 idom kerületének imént nevezett M_1Q részeit illetőleg körívrészeit; az S_4 terület összes kerülete így a T_4 terület kerületét födvén, a két terület egybevágó.

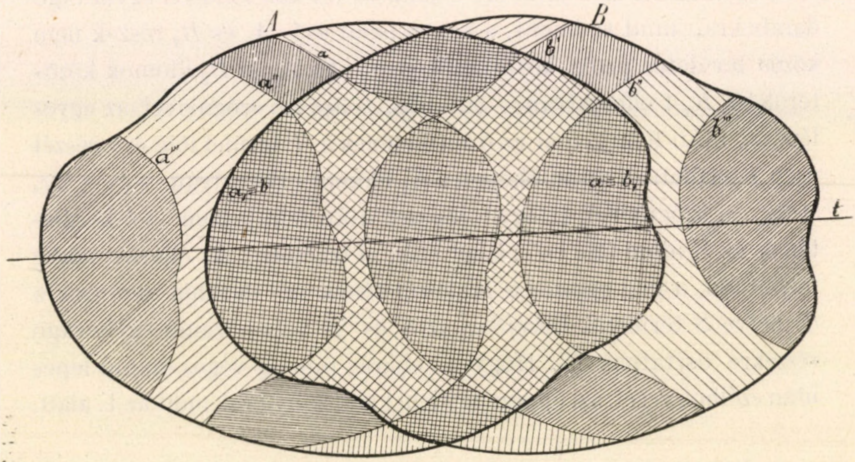
Ha a körmetszés sugara kisebb OM_1-nél, de a kör átvágja az A idom kerületét, akkor a szerkesztés teljesen ugyanazzal az eljárással végezhető; azonban kevésbbé egyszerű az eredmény, a mennyiben a nyert darabok száma nagyobb lesz. Ha a körmetszés sugara nagyobb mint OM_1, és a körvonal az M_1 pontot elválasztja az A és B idomok karimáinak többi metszéspontjaitól — ábránkban az M_2-től, — akkor a körön kívül eső A_1 és B_1 részek nem közös területei ugyanavval az eljárással oszthatók fel kölcsönösen egybevágó darabokra, mint az imént, a körön belül eső A_2 és B_2 részek nem közös területei pedig következőképen: Az A_2 és B_2 idomok közös területét K_2-t elforgatván $-\varphi$, -2φ, $-3\varphi, \ldots$ szögnyivel, az egyes lépések után felrajzolom az ő kerületének a T terület fölé eső részét ezen T területre; hasonlóképen a K_2 idomot elforgatván $+\varphi$, $+2\varphi$, $+3\varphi, \ldots$ szögnyivel, az egyes lépések után felrajzolom az ő kerületének az S idom fölé eső részét ezen S területre. Az eljárást addig folytatván, a míg egyszer a K_2 kerületének egy darabja sem esik a T illetve S területek *belsejébe*, az S és T véges számú egybevágó részekre osztatnak fel. Hogy az eljárás mindig véges számú lépés után czélhoz vezet, azt éppen úgy lehet bebizonyitani, mint az 1. alatt.

3. *Legyen adva két ellenkező értelemben egybevágó síkidom A és B, melyeknek van közös területük; nem közös részeik kölcsönösen egybevágó darabokra osztandók.* (13. ábra.)

Abban az esetben, ha $t = 0$ (pag. 1.), a nem közös részek máris egybevágók. Ha t nem 0, legyenek az A illetve B közös K részének az A illetve B idomok belsejében fekvő határvonalai a_1, illetve b_1. Az A és B területeket a rájuk rajzolt a_1, illetőleg b_1 vonalakkal együtt külön lapokon (a leírás könnyítése czéljából átlátszó papirlapokon) rajzoltaknak gondolva, hozzuk őket egymással födésbe; rajzoljuk át e födés helyzetében a b_1 vonalat az A lapra és az a_1-t a B lapra; az így nyert vonalakat jelöljük a' illetőleg b'-sal. Két eset lehetséges: vagy nem fekszik ezen a' és b' vonalaknak egy része sem a K területeken, vagy fekszik rajtuk.

Az első esetben az a' és b' már felosztják az A és B idomok nem közös területeit kölcsönösen egybevágó részekre.

A második esetben hozzuk az A és B lapokat eredeti kölcsönös helyzetükbe, melyben az A lapon levő K idom födi a B lapon levő K idomot; rajzoljuk át a b', illetve a' vonalakat az A, illetve B lapra; és jelöljük a most nyert vonalakat a_2, illetve b_2-vel. Ismét a födés helyzetébe hozva az A és B idomokat átrajzoljuk ezen b_2 és a_2 vonalakat az A illetve B lapra; és jelöljük a nyert vonalakat a'',



13. ábra.

illetőleg b''-vel. Megint két eset lehetséges: vagy nem fekszik ezen a'' és b'' vonalak egy része sem a K területeken, vagy fekszik rajtuk.

Az első esetben az a', a'' és b', b'' már felosztják az A és B idomok nem közös területeit kölcsönösen egybevágó részekre.

A második esetben ismételten eredeti kölcsönös helyzetükbe hozván az A és B idomokat, folytassuk a leírt eljárást. Véges n számú lépés után be kell következni, hogy az A és B lapokra utoljára rajzolt a^n és b^n vonalaknak már egy része sem hasítja át az idomok K területeit, és ekkor az $a', a'', \ldots, a^{(n-1)}, a^{(n)}$ illetve $b', b'', \ldots,$

$b^{(n-1)}$, $b^{(n)}$ vonalak az A és B idomok nem közös részeit kölcsönösen egybevágó területekre osztják fel.

Bebizonyítás. A két adott idom közös K területének összes határait alkotják az A lapon a_1 és a, a B lapon pedig b_1 és b; az eredeti kölcsönös fekvésben

$$a_1 \equiv b \quad \text{és} \quad b_1 \equiv a.$$

A szerkesztés értelmében az *átforgatott* b_1 egybevágó az a'-sal; tehát az a, mely az eredeti fekvésű b_1-gyel egyenlő értelemben egybevágó, az a'-sal ellenkező értelemben egybevágó. — Ép úgy a b ellenkező értelemben egybevágó a b'-sal.

Második lépésben az eredeti kölcsönös helyzetben rajzolt b_2 egybevágó a a' vonal egy bizonyos részével; az *átforgatott* b_2 pedig egybevágó a''-vel; minélfogva a'' ellenkező értelemben egybevágó az a'-nak ama bizonyos részével. Ámde ez az a', miként kimutattuk, az a vonallal ellenkező értelemben egybevágó. *Következésképen az a'' vonal egyenlő értelemben egybevágó az a vonal egy bizonyos darabjával.* — Ép így a b'' vonal egyenlő értelemben egybevágó az a vonal egy bizonyos darabjával.

Minthogy pedig az a'' (illetve b'') létrejött az a (illetve b) vonal e darabjának kétszer való átforgatása *és* eltolása révén, tehát az a'' (b'') *el van tolva* az a (b) ama darabjához képest $2t$-vel.

Hasonlóképen mondhatjuk általánosan hogy az

$$\begin{array}{l} a^{2n}\ , a^{2n-2}, \ldots, a^{\text{IV}}, a'', a \\ b^{2n}\ , b^{2n-2}, \ldots, b^{\text{IV}}, b'', b \\ a^{2n-1}, a^{2n-3}, \ldots, a''', a' \\ b^{2n-1}, b^{2n-3}, \ldots, b''', b' \end{array}$$

vonaldarabok közül mindegyik a sorjában mindjárt utána következőhöz képest $2t$-vel el van tolva.

De ebből következik, hogy a sorok tagjainak száma csak véges lehet; mert hiszen $2t$ nagyságú parallel-eltolást ismételten alkalmazván az a, a' avagy b, b' vonalakra, véges számú lépés után a vonal elhagyja az A, illetőleg B rajzlapot. Más szóval a szerkesztés *véges* számú lépés után befejeződik.

Legyen már mostan az a, illetőleg b vonalakkal felosztott A és B idomok közös területének egy ilyen osztályrésze A_{j_1}, illetve B_{j_2}; a nem közös területek részei pedig jelöltessenek S_{j_1}, illetve T_{j_2}-vel. A a és b vonalak szerkesztésnél fogva födik egymást úgy *az eredeti*, mint a *födés* helyzetében. Ennélfogva mindenik S_j-hez van vagy egy B_{j_2}, vagy egy T_j, mely a födés helyzetében vele összeesik. Második esetben

$$S_j \cong T_j.$$

Első esetben kell lenni egy A_{j_1} idomnak, mely a B_{j_1}-gyel összeeső az eredeti kölcsönös helyzetben. Már most ez az A_{j_1} a födés helyzetében vagy egy T_j idomot föd vagy egy B_{j_2}-t. Az első esetben $T_j \cong S_j$; a második esetben a következtetést ismételvén, nyilvánvaló, hogy mindegyik S_j-hez egyetlen egy T_j tartozik, mely vele egybevágó.

Mert legyenek

$$A_{j_1}, A_{j_2}, A_{j_3}, \ldots, A_{j_n}$$
$$B_{j_2}, B_{j_2}, B_{j_3}, \ldots, B_{j_n}$$

az A, illetve B lap K területein fekvő amaz *összes* idomok, melyek közül A_{ji} összeesik a B_{ji}-vel az eredeti kölcsönös helyzetben és a B_{ji+1}-gyel a födés helyzetében. A sorokban helyet foglaló tagoknak véges számban kell lenniök, minthogy a K terület egy meghatározott darabja ugyanabban a sorban csak *egyszer* fordul elő, a darabok száma pedig véges.

Ámde a födés helyzetében

$$A_{j_1} \equiv B_{j_2}, \; A_{j_2} \equiv B_{j_3}, \ldots, \; A_{j_{n-1}} \equiv B_{j_n}$$

és S_j födi a B_{j_1}-et; ennek folytán az A_{j_n}, mely nem födi a

$$B_{j_1}, B_{j_2}, B_{j_3}, \ldots, B_{j_n}$$

területek egyikét sem, vagy egy T_j területet föd vagy egy $B_{j_{n+1}}$-et. De az utóbbi eset lehetetlen, minthogy akkor léteznie kellene egy A_{n+1} területnek is, mely az eredeti kölcsönös helyzetben födi a B_{n+1}-et, a mi ellenkezik avval a feltevéssel, hogy az

$$A_{j_1}, A_{j_2}, A_{j_3}, \ldots, A_{j_n}$$
$$B_{j_1}, B_{j_2}, B_{j_3}, \ldots, B_{j_n}$$

az *összes* e helyzetben összeeső idomok. Marad tehát, hogy $S_j \cong T_j$ vagyis mindegyik S_j-hez tartozik *egyetlen egy* vele egybevágó darabja a T területnek. Minthogy megforditva mindeník T_j-hez is csak egy darabja tartozik a T területnek, a szerkesztés helyessége véglegesen be van bizonyitva.

Réthy Mór.

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS A QUADRATIKUS ALAKOK ELMÉLETÉHEZ.

A több változót tartalmazó függvények szélső értékeinek meghatározására vonatkozó probléma ama feltételek vizsgálatára vezet, melyeknek teljesülése mellett valamely quadratikus alak definitté lesz. E föltételek azonban a közkézen forgó jobb tankönyvekben sincsenek kifejtve sem a kellő világossággal, sem pedig a közvetetlen alkalmazhatóságra szükséges teljességgel. Igaz ugyan, hogy elvileg a Lagrange-tól eredő levezetés a lehető legegyszerűbb, de fogyatkozása, hogy az eredményeket nem adja oly alakban, mely már kész és könnyen kezelhető kriteriumra vezetne. Sőt a definit tulajdonságnak a kézi könyvekben foglalt meghatározása rendesen felesleges adatot is tartalmaz, olyat, mely e fogalom egyéb jegyeinek már következménye.

Czélszerű munkát vélek azért teljesíteni, midőn az alábbiakban, e hiányok pótlása végett a következő két feladat megoldását közlöm: *

1. *magát a definit alak definezióját szabatosabban fogalmazni;*

2. *a definit tulajdonság kriteriumait elvileg egyszerű módon megállapítani s könnyen alkalmazható alakban kifejezni.*

I.

Mindenekelőtt meg kell jegyeznem, hogy a következőkben kezdőpont alatt az n változónak azt az értékrendszerét akarom érteni, melyben minden egyes elem zérus.

---

* Rados Gusztáv műegyetemi tanár úrnak az Analizis II. folyamában tartott előadásai nyomán.

S most a definit quadratikus alakot a következőképen definiálhatjuk:

Ha valamely quadratikus alak

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

csak a kezdőpontban lesz zérussá, akkor ezt definit alaknak mondjuk.

E definiczióból már következik az a tulajdonság, melyet rendesen felesleges módon magához a definiczióhoz csatolnak, hogy t. i. *a definit alak előjele az n változó bármely értékrendszerénél* (az n-dimenziós síksokaság bármely helyén) *ugyanaz.*

Világos, hogy ez a tétel be lesz bizonyítva, ha ki lehet mutatni, hogy az alak meghatározta függvény két tetszőlegesen választott helyen ugyanavval az előjellel bír.

Legyen két tetszőleges értékrendszer:

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n);$$

ezek mindegyike megállapít az n-szeres sík-sokaságban egy-egy helyet, mondjuk az y és z helyeket. Hogy e két helyen az alak előjelét egyszerűbben összehasonlíthassuk, állapítsunk meg lineár átmenetet — összekötő egyenes darabot az n dimenziós térben — y és z pont között, ez alatt ugyanis mindazon $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ értékrendszerek vagy helyek összességét értjük, melyet az

$$x_i = y_i + (z_i - y_i)\, t$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

képlet szolgáltat midőn, t a $t = (0\ 1)$ számköz minden értékét felveszi.

Most, míg t 0-tól 1-ig változik, az x és y pontot összekötő egyenesdarab vagy tartalmazza a kezdőpontot vagy nem.

Utóbbi esetben közvetlenűl belátható, hogy az alak a két pontban különböző előjellel nem bírhat, minthogy folytonos és az összekötő egyenesen zérussá sehol sem lett.*

Külön megfontolást csak a második eset igényel.

Ha az összekötő egyenes a kezdőponton átmegy, akkor kell oly speczialis, valós t értéknek léteznie, melyre nézve

$$0=y_i+(z_i-y_i)t$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

a miből következik:

$$-\frac{1}{t}=\frac{z_i-y_i}{y_i},$$

ebből

$$\frac{z_i}{y_i}=1-\frac{1}{t}\equiv\varrho,$$

tehát

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n)=f(\varrho y_1, \varrho y_2, \ldots, \varrho y_n)=\varrho^2 f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

és így

$$\frac{f(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{f(y_1, y_2, \ldots, y_n)}=\varrho^2,$$

a miből következik, hogy $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ és $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ismét megegyező előjelűek.

Tehát valóban a definit quadratikus alak adott meghatározásából az előjel állandóságának tulajdonsága már következik.

II.

1. *Ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definit, akkor*

$$|a_{ik}|\gtrless 0,$$
$$(i, k=1, 2, \ldots, n)$$

hol $|a_{ik}|$ a quadratikus alak együtthatóiból képezett determinánst jelenti.

Írjuk fel ugyanis $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-et részletesen

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n)x_i$$

---

* V. e. KŐNIG Analizis I. kötet 2-dik rész 48. pont.

Ez alakban előforduló lineár kifejezések együtthatóiból képezett következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ik}| = D_n$$

a quadratikus alak diszkriminansának nevezzük.

Arra, hogy a quadratikus alak definit legyen, szükséges, hogy

$$D_n \gtrless 0$$

legyen, mert feltéve, hogy $D_n = 0$, a következő homogén lineár egyenletrendszernek

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0$$
$$(i=1, 2, \dots, n)$$

lesznek oly megoldásai (és pedig végtelen számmal), melyekben nem minden ismeretlen zérus; legyen egy ilyen pl.

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$$

De akkor volna olyan, a kezdőponttól különböző hely, melyen a quadratikus alak eltünik, t. i.

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$$

tehát $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nem volna definit. Kell tehát, hogy $D_n \gtrless 0$ legyen.

2. *Ha valamely quadratikus alak* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *definit, akkor*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i, 0, 0, \dots, 0) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_i)$$
$$(i=1, 2, \dots, n-1)$$

is ilyen, melyet belőle úgy nyerünk, hogy egy vagy több változója helyett zérust teszünk, és így

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} = D_i \gtrless 0$$

Feltéve ugyanis, hogy $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ nem definit, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sem lehet az; mert ekkor van oly értékrendszer, melynek nem minden eleme zérus, pl.

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$$

és e mellett

$$f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i) = 0;$$

de akkor az eredeti alakra nézve is van ilyen értékrendszer, mert hisz épen

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, 0, \ldots, 0) = f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i) = 0$$

a mi pedig ki van zárva, mert $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definit.

Ebből az is következik, hogy $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ *diszkriminánsa, D_i, zérussal egyenlő nem lehet.*

3. *Ha a quadratikus alak olyan, hogy a D_i determinánsok közűl egyik sem zérus, akkor azt mint n négyzetnek aggregatumát állíthatjuk elő.*

Ez az előállítás a definit tulajdonság kriteriumainak közvetlen felismerésére fog vezetni. Ugyanis könnyű belátni, hogy valamely quadratikus alak, mely a változóknak csak tiszta négyzeteit tartalmazza, lényegesen pozitiv, ha minden együtthatója pozitiv; lényegesen negativ, ha minden együtthatója negativ, más esetben indefinit. Az első két esetben ugyanis csak a kezdőpontban lehet zérus, míg utóbbiban attól különböző helyen is. A jelzett transzformáczió lineár helyettesités alkalmazásával lesz eszközölhető. Jelölje ugyanis

$$A_{ni} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

a D_n utolsó sorának elemeihez tartozó aldeterminánsokat. — Alkalmazzuk most a quadratikus alakra a következő helyettesitést: *

---

* E helyettesités analogonja annak, melylyel a kúpszelet vagy másodrendű felület egyenletét a középpontra mint kezdőpontra transzformáljuk. V. ö. GUNDELFINGER «Zur Theorie der quadratischen Formen» CRELLE-féle Journal 91. k. 222. l.

$$x_k = x'_k + \frac{A_{nk}}{A_{nn}} x'_n, \qquad x_n = \frac{A_{nn}}{A_{nn}} x'_n$$
$$(k=1, 2, \ldots, n-1)$$

Hogy e helyettesítést lehető egyszerűen végezhessük, czélszerű az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-nek részletesen felírt alakját használni. — Képezzük először is a benne fellépő lineár kifejezéseket, s miután ezeket x_k-val szoroztuk, összegezzük őket. Lesz:

$$a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_n = a_{k1}x'_1+\ldots+a_{k\,n-1}x'_{n-1} + \frac{(a_{k1}A_{n1}+\ldots+a_{kn}A_{nn})}{A_{nn}} x'_n$$
$$(k=1, 2, \ldots, n-1)$$

Mint azonnal látni, ebben x'_n szorzója mindig zérus, mert k sohasem egyenlő n-el és $A_{nn} \lesseqgtr 0$ állandóan, mert hiszen $A_{nn} = D_{n-1}$. Tehát:

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n = a_{k1}x'_1+a_{k2}x'_2+\ldots+a_{kn-1}x'_{n-1}$$
$$(k=1, 2, \ldots n-1)$$

továbbá

$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n =$$
$$= a_{n1}x'_1+a_{n2}x'_2+\ldots+a_{nn-1}x'_{n-1} + \frac{D_n}{A_{nn}} x'_n$$

Ha most ezeknek az egyenlőségeknek bal és jobb oldalait x_k, illetve $\left(x'_k + \frac{A_{nk}}{A_{nn}} x'_n\right)$-nel szorozzuk, kivéve az utolsó sort, melyet x_n illetve $\frac{A_{nn}}{A_{nn}} x'_n$-nel s a talált szorzatokat összegezzük, nyerjük:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k1}x'_1+\ldots+a_{kn-1}x'_{n-1})\left(x'_k + \frac{A_{nk}}{A_{nn}} x'_n\right) +$$
$$+ (a_{n1}x'_1+\ldots+a_{nn-1}x'_{n-1}) \frac{A_{nn}}{A_{nn}} x'_n + \frac{D_n}{A_{nn}} x'^2_n$$

E kifejezésben már x'_n csak mint tiszta négyzet lép fel tényleg, egyebütt csak látszólagosan, mert a rendezésnél kiesik. — Lesz ugyanis továbbá

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k1}x'_1 + \ldots + a_{kn-1}x'_{n-1})\, x'_k +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k1}x'_1 + \ldots + a_{kn-1}x'_{n-1}) \frac{A_{nn}}{A_{nn}} x'_n +$$
$$+ (a_{n1}x'_1 + \ldots + a_{nn}x'_n) \frac{A_{nn}}{A_{nn}} x'_n + \frac{D_n}{A_{nn}} x'^2_n$$

E kifejezésben a második és harmadik tag együtt azonosan ád zérust, úgy hogy lesz

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k1}x'_1 + \ldots + a_{kn-1}x'_{n-1})\, x'_k + \frac{D_n}{A_{nn}} x'^2_n =$$
$$= f(x'_1, x'_2, \ldots x'_{n-1}, 0) + \frac{D_n}{A_{nn}} x'^2_n$$

Elértük tehát, hogy egy változó az alakban csak tisztán négyzeten fordul elő, s azon kívül nyertünk egy $n-1$ változós alakot, mely az eredetiből kiváló egyszerű módon nyerhetünk ugyanis az $x_n = 0$ helyettesitéssel. — Ha most erre az előbbihez hasonló helyettesitést alkalmazunk s ezt ismételjük, összesen n lépés után a következő alakot fogjuk nyerni:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_{11} x_1^{(n)^2} + \frac{D_2}{D_1} x_2^{(n-1)^2} + \ldots + \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}} x''^2_{n-1} + \frac{D_n}{D_{n-1}} x'^2_n,$$

a hol

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k+1)} + \frac{A^{(k)}_{n-k\, i}}{A^{(k)}_{n-k,\, n-k}} x^{(k+1)}_{n-k}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-k+1;\ k = 1, 2, \ldots n)$$

és

$$x^{(k)}_{n-k} = \frac{A^{(k)}_{n-k,\, n-k}}{A^{(k)}_{n-k,\, n-k}} x^{(k+1)}_{n-k}$$

$A^{(k)}_{n-k\, i}$ pedig a D_i determináns $a_{n-k\, i}$ elemének aldeterminánsát jelenti.

Ha tehát a D_i-k közűl egyik sem zérus, akkor a quadratikus alak mindig így állítható elő s ez alakból a feltételek, melyek mellett az alak definit lesz, rögtön leolvashatók.

Erre ugyanis szükséges és elégséges, hogy az összes együtthatók egyenlő előjelűek legyenek. És pedig:

a) definit pozitiv lesz a quadratikus alak, ha minden együtthatója pozitiv; tehát

$$a_{11} = D_1 > 0, \frac{D_2}{D_1} > 0, \ldots, \frac{D_n}{D_{n-1}} > 0$$

a mi, nyilvánvaló azt jelenti, hogy a D determináns és ú. n. főaldeterminánsai mind megannyian pozitiv előjelűek.

b) definit negativ lesz az alak, ha az összes együtthatói negativok. Tehát

$$D_1 < 0, \frac{D_2}{D_1} < 0, \ldots, \frac{D_n}{D_{n-1}} < 0$$

a miből következik, hogy a D_i determinánsok előjeleinek váltakozva kell egymásra következniök; még pedig D_1 szükségképen negativ lévén, kell, hogy D_i előjelét $(-1)^i$ adja meg.

*

Összefoglalva az eredményeket azt találtuk, hogy valamely quadratikus alak definit és pedig

a) *definit pozitiv, ha az összes*

$$D_i \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

determinánsok pozitivok,

b) *definit negativ, ha D_i előjelét $(-1)^i$ adja meg.*

Pallagi Gyula.

PHYSIKAI SZEMLE.

Az energetikáról. W. Ostwald: «Studien zur Energetik» és «Grundlinien der allgemeinen Energetik». (*Berichte über die Verhandlungen d. kgl. sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Leipzig* 1891 és *Zeitschrift für physikalische Chemie,* 1892.)

Azt a követelést, hogy az egész természettan és vegytan a tudományos okszerűsítés szempontjából a mechanikára vezetendő vissza, már annyiszor és oly jelentékeny férfiak hangoztatták, hogy szinte csodálatos, aránylag mily kevés eredményt vagyunk képesek ezen irányban felmutatni, bár a követelés jogosultságát általánosan elismerik és teljesítésén számos jelentékeny búvár fáradozik. Míg például a thermodynamika az ő saját fogalomkörén belül hőmérséklettel, entropiával stb. dolgozva, a legfontosabb eredményekre hivatkozhatik, azok a kísérletek, melyek a thermikus jelenségeknek a kinetikai hypothesis segítségével megadható magyarázatára törekszenek, oly kevés sikerre vezettek, hogy például még a hőmérsékletnek kifogástalan mechanikai értelmezését is lehetetlen megadni.

Evvel a körülménynyel még egy másik, hasonló természetü dolog játszik közre. Gauss nyomán, ki a mágnesség mechanikai hatását az idő, tér és tömeg tényezői segítségével fejezte ki, lassankint egy «absolut» mértékrendszer fejlődött ki, melynek czélja — az ő mostani képviselőinek sokszor bevallott szándéka szerint — minden physikai mennyiségnek a három alapegységre való visszavezetésében áll.

Ez a kísérlet sem vezetett azonban az óhajtott eredményre, a mennyiben például megint a hőmérsékletnek mechanikai «dimensióját» feltalálni kivihetetlennek látszik. Még azon a téren, a melyen az absolut mértékrendszer ujabb időben absolut uralomra vergődött, t. i. az elektromosság tanában sem lehet a kérdéses mennyiségeknek mechanikai meghatározását egyértelműnek mondani. Van elektrostatikai és elektromágneses «absolut rendszerünk», melyeknek egységei, bár mindannyian mechanikaiak, mégis teljesen külömbözők; ezeken kívül pedig, mint Hertz megmutatta, még más két rendszer is lehetséges, melyek, ép oly jogosan tekinthetők absolutaknak, mint a ma használatosak. Ha tehát pl. az elektromótoros erőnek négy egymástól külömböző egyenjogú egysége van, ez annak a jele, hogy az egyértelmű mechanikai meghatározás lehetetlennek bizonyult.

A természeti tünemények mechanikára való visszavezetésének kisérlete még egy másik irányban is szükségtelen hypothesiseket látszik követelni. Miután az eleven erők elvének alapján belátták, hogy a mozgási és helyzeti energiák összege zárt rendszerben állandó és ez utóbbinak eleme gyanánt az *f.dl* kifejezést vették számításba (hol *dl* a távolság változását és *f* az erőt jelentik), ebből az következett, hogy az erő a két szóban forgó pontot összekötő egyenesben «tartozik működni». Miután e szerint a térbeli energiának ezen alakjában centrális erők jelentkeznek s megszoktuk már, hogy a térbeli energia másféle alakjaival ne is törődjünk: általánossá vált az a felfogás, hogy *minden* térbeli energia centrális erők alakjában tartozik működni s így minden olyan energia, a mely nem kinetikai, erre az alakra vezethető vissza. Ez a felfogás, mely a dolgot nyilvánvalólag nem meríti ki, rendkívül el van terjedve és mindenütt alkalmazást talál a nélkül, hogy elfogadhatóságát minden egyes esetben külön megvizsgálni szükségesnek tartanók. A «molekuláris erők» a mai physikának és chemiának nélkülözhetetlen szerelvényei közé tartoznak, a nélkül, hogy ezt a különös kedvezést megfelelő eredmények jutalmazták volna meg.

Ezek az általánosan elismert követelmény és a kielégítésére czélzó kísérlet eredményei között fennálló ellenmondások azt sejtetik, hogy a követelmény megvalósítását eddig hamis úton keresték. Azoknak az imposans eredményeknek hatása alatt, a melyeket a mechanikai fogalmak a legáltalánosabb kosmikus viszonyok magyarázatában elérhetőkké tettek, eme fogalmak uralmát az egész physikára ki akarták terjeszteni s ebben kudarczot vallottak. Ha tehát nem látszik lehetségesnek a physika eme legfejlettebb részének specialis fogalmait az egész tudományra kiterjeszteni, mert minden egyes rész külön fogalmak megállapítását követeli, szükséges lesz visszatérnünk egy általánosabb kiinduló pontra; vagyis fel kell keresnünk és megalkotnunk a physikának egyébb részeiben is azokat a fogalmakat, a melyek a legfontosabb mechanikai fogalmaknak megfelelnek és azokat a formákat felkeresnünk, a melyeket a mechanikában érvényes általános elvek felvenni tartoznak, hogy minden physikai fogalom összességére alkalmazhatók legyenek.

Olyan legterjedelmesebb és legfontosabb általános fogalomnak, mely először is a mechanikában fejlődött ki és az általános physikára való alkalmazásában ennek Galilei és Newton óta legnagyobb elvi haladásait tette lehetővé, az *energiát* kell tekintenünk. Általánosan el van ismerve, hogy az energia megmaradásának tétele alapjául kell hogy szolgáljon az egész physikának, beleértve a chemiát is. S valóban az egyes részletekben eme tétel legváltozatosabb alkalmazására akadunk. Jóllehet azonban az energia elve mind jobban és jobban hatja át az egész physikát, mindamellett egy *energetikának*, az energiáról szóló tannak még alig a kezdetén vagyunk. Pedig alig szenved kétséget, hogy a mérőtudományok legfontosabb feladatát mostanában az energia fogalomnak mindenoldalú feldolgozása képezi. Mert a tér és idő általános szemléleti formáin kívűl *az energia az egyetlen olyan mennyiség, a mely minden tüneményfajtában közös.* A különböző energiaformák kölcsönös átalakulása az egyetlen kapocs, mely a hőtant és elektromosságtant, a chemiát és a mechanikát összeköti; e nélkűl mindannyian kapcsolat nélkül és egymástól függetlenűl állanak egymás mellett.

Közel fekszik tehát a gondolat, mint azt már régebben J. R. Mayer, 1885-ben pedig Tait is kimondották, hogy az energiát nem csak mathematikai abstractiónak tekintsük, de reális létet tulajdonítsunk neki. Ebből a szempontból *az anyag csupán csak energiatényezők complexumának tünik fel,* mely tényezőknek az a sajátságuk, hogy egymással arányosak. És tényleg, az anyagnak hagyományszerű alaptulajdonságai nem egyebek mint az energiának faktorai, vagy ha úgy tetszik, kifejezésbeli alakjai. A tömeg a kinetikai, a súly a térbeli, az áthatatlanság vagyis a térfogat a térfogatbeli energiára vonatkozó capacitások. Ily módon a behatóbb vizsgálat előtt az anyag mindjobban eltűnik az energia mellett és ez az utóbbi a saját alárendelt vagy legföllebb egyenjogú régebbi helyzetét ellenállhatatlanul cseréli fel a legföltétlenebb vezérszereppel. Szerző külömben megjegyzi, hogy chemiai vizsgálatai is rávezették őt ezen legáltalánosabb kérdések tanulmányozására.

A mi az absolut mértékrendszert illeti, ennek jelenleg használt egységeit az idő, tér és tömeg adják. A két elsőt teljesen jogosultnak kell elfogadnunk, mert a mérő tudományoknak minden természetes tárgya a tér és idő mérhető alakjaiban jelenik meg előttünk. De ez a két fogalom nem elégséges minden tünemény kifejezésére; még másokat is szükséges hozzájuk kapcsolnunk, ilyenek gyanánt pedig első sorban a tömeg és az energia kinálkoznak. Eddigelé az elsőt használták, daczára annak, hogy pl. az elektromos és mágneses tünemények a tömeggel épen nem arányosak; másrészről azonban az energia mint mértékegység azt az előnyt nyujtja, hogy minden fajtájú tünemény az ő sajátságos energia-alakjaival válik jellemezhetővé, azonkívűl az energia megmaradásának «törvénye» szigorú számbeli kapcsolatot tüntet fel ezen külömböző tüneménycsoportok között. Ostwald ennélfogva az absolut mértékrendszer harmadik alapegysége gyanánt az energiát vezeti be és részletesen fejtegeti ennek az ujitásnak jogosultságát és jelentékeny előnyeit. Mint már említve volt, ezen felfogás szerint a tömeggel valamely testnek a mozgási energiára való capacitása van meghatározva.

Jelölje t az időt, l a hosszat, m a tömeget és e az energiát; akkor a régi kifejezésmódnak $[m]$ egysége helyett a tömeg az uj eljárás szerint $[el^{-2}t^{-2}]$ egységgel fejezendő ki és a mozgásmennyiség, erő, felületi feszültség, nyomás, munka megfelelő egységei azonnal egyszerűbb alakokat öltenek. Ennek az új felfogásnak legnagyobb előnye akkor ötlik szembe, ha a mechanikai tüneményekről más tüneménycsoportokra térünk át, például az elektromosság és a hő tüneményeire. Ezeknél az ő sajátságos energia-alakjuk következtében még egy negyedik alapegységet is kell bevezetni, mely azonban az energia megmaradásának «törvényénél» fogva határozott viszonyban van e-vel és ezen tényező segélyével kényelmesen kifejezhető.

Azok a fogalmak tehát, a melyek a mérő tudományok egész birodalmában egyaránt alkalmazhatók, a tér, az idő és az energia. Az időt föltétlenül folyónak, a tért föltétlenül nyugvónak tekintjük, míg az energia mind a két állapotban előfordulhat; bármily esemény pedig nem egyéb, mint az energiának valamilyen változása.

Az energetikának *első fő tétele,* a melyet 50 év előtt Róbert Mayer fedezett fel, tudvalevőleg így hangzik: *Az energiának összes mennyisége állandó.* Ha valamely helyen energia tünik el, ugyanakkor számbelileg egyenértékű gyarapodásnak kell más helyen bekövetkeznie, bár nem szükséges, hogy az eltünt energia ismét ugyanabban az alakban tünjék fel, mert átalakulhatott az energiának egy másik nemébe, de úgy, hogy első alakjával egyenértékű maradt. Ha tehát két energia-mennyiség külön-külön egyenlő egy harmadikkal, akkor egymás között is egyenlőek. Oly szerkezet, melyben energia állandóan, más energiának megfelelő felhasználása nélkül volna előállítható, vagyis úgynevezett «első fajta» perpetuum mobile lehetetlen.

Azokkal az okokkal, melyek az egyik fajta energia átalakulásának bekövetkezését eszközlik vagy azt megakadályozzák, az energetikának *második fő tétele* foglalkozik. Ha csak egyetlenegy fajta energiát tételezünk fel, akkor mindannyiszor, mikor egyik helyen bizonyos mennyiségű energia eltűnik, az első főtétel értelmében más helyen ugyanannyi tartozik föllépni. A tapasztalat már most azt tanítja, hogy bizonyos esetekben az energiának ilyen átmenetei csakugyan bekövetkeznek, más esetekben pedig nem. Hogy ezeket a viszonyokat kifejezhessük, az energiának bizonyos sajátságot, az *intenzitást* kell tulajdonítanunk; és pedig mellőzve egyéb külön előleges feltevéseket, az energiának intenzitását azonosnak tekintjük ha átmenet nem történik, míg ha ilyesmi történik, az energiának azon a helyen, a melyen megfogyatkozik, magasabb, azon a helyen pedig a hol felszaporodik, alacsonyabb intenzitást kell tulajdonítanunk. Ha pedig két hely között nincs energia-átmenet, akkor ezek közt az energia egyensulyban van. Egy legáltalánosabb tapasztalati törvény pedig azt tanítja, hogy két szerkezet egyensúlyban van egymással, ha külön-külön egy harmadikkal is egyensúlyban vannak; vagy: két intenzitás, melyek egy harmadikkal különkülön egyenlők, egymás között is egyenlők. Ha ez a tétel nem volna érvényben, ha két hely egy harmadikkal energia-egyensúlyban lehetne a nélkül, hogy egymás között is egyensúlyban volnának, akkor közöttük energia-átmenetnek kellene végbemennie és ennek folytán az ő egyensúlyuk a harmadikkal szemben megzavartatnék. Ilyen szerkezet, melyben az energia külső ok nélkül jönne mozgásba és mozgásban maradna, egy «második fajta» perpetuum mobile és így a tapasztalat szerint lehetetlen volna. Ez a második főtétel nemcsak az energiának egyik helyről a másikra való átmenetére érvényes, hanem fennáll a külömböző fajtáknak egymásba való átmenetelére nézve is; mindamellett e tétel kijelentése általánosabb szempontokból néhány vizsgálatot és fogalom-meghatározást feltételez, melyekről az alábbiakban lesz szó.

Az intenzitás fennebbi definitiója értelmében, mely szerint oly helyen, mely energiát veszít, az intenzitás megcsökken, olyanban pedig, a melyben az energia felszaporodik, az intenzitás is nagyobb lesz: képesek vagyunk az intenzitásnak magasabb, alacsonyabb vagy azonos értékeit megkülömböztetni. Minthogy két oly intenzitás, melyek mindegyike egy harmadikkal egyenlő, egymással is egyenlő, az adott energiának fokosztályzata általános érvényű tartozik lenni s az egyes fokozatokat úgy kell meghatároznunk, hogy az energia egyenlő növekedésének vagy fogyásának bizonyos szerkezetben az intenzitás egyenlő szaporodása vagy csökkenése feleljen meg. Ekkor az energia (E) arányos az ő intenzitásával (i) vagyis $E=ci$. A c arányossági tényező ekkor oly energiamennyiségnek lesz a mértéke, mely bizonyos szerkezetben jelen van és ezért találóan nevezhető az illető szerkezet *energiabeli capacitási tényezőjének* vagy röviden *capacitásának*. Az intenzitási és capacitásbeli tényezőkre való felbonthatóságot szintén az energia általános sajátságának tekinthetjük és az energia minden fajtájának vizsgálatánál előre feltételezhetjük.

Minden energia-alak rendszeres táblázatát akkor lehet megszerkeszteni, ha előbb ezeknek s az ő factoraiknak jellemző külömbségeit megvizsgáltuk és megállapítottuk. Hogy a következő fejtegetésekre alkalmas áttekinthető anyaggal rendelkezzünk, Ostwald egyelőre következő előzetes táblázatát adja az energia-alakoknak.

Energia.	Capacitás.	Intenzitás.
A) *Mozgási energia*	*Tömeg*	*Sebesség négyzet.*
B) *Térenergia*		
a) *Távolsági energia*	*Hossz*	*Erő.*
b) *Felületi energia*	*Felület*	*Felületi feszültség.*
c) *Térfogati energia*	*Térfogat*	*Nyomás.*
C) *Hő energia*	*Hőfoghatóság* vagy *Entropia*	*Hőmérséklet.*
D) *Elektromos energia*	*Elektromosság mennyisége*	*Potentiál.*
E) *Mágneses energia*	*Mágnesség mennyisége*	*Mágneses potential.*
F) *Chemiai energia*	*Vegysúly*	*Chemiai potential* vagy *vegyrokonság.*
G) *Sugárzó energia*	*Az absorptió* vagy *emissió mennyisége*	*A sugárzás intenzitása.*

A fennebbi táblázathoz felvilágosításúl még a következőket jegyezzük meg. Az $m\frac{v^2}{2}$ mozgási energia célszerűbben tömegre és sebességnégyzetre bontható fel, mint az egymástól nem független *mv* mozgásmennyiségre és sebességre. A tér-energiát három alosztályra kell felbontanunk, a mire eddig, szerző szerint, a tudomány kárára, nem fordítottak figyelmet. A hőenergiának capacitási tényezőjét hőfoghatóságnak nevezzük olyankor, ha az energia szaporodásával a hőmérsék változik; olyankor ha ez nem történik, az entropia név használatos. A chemiai energiának capacitási tényezője, épen úgy mint a melegé, a tömeggel és a súlylyal arányos, de sem az egyik, sem a másik nem változik, hanem változik az, a mit az anyag természetének szoktunk nevezni. Egyébként a chemiai energia intenzitása számára ép oly kevéssé lehet az idő, hossz és tömeg szokásos egységeiben dimensiót szerkeszteni, mint általában az öt utolsó energia-alak intenzitásaira. Végre a sugárzó energia annyiban foglal el egészen különös helyet, a mennyiben nincs az anyaghoz kötve és ezért a különböző energia-alakok tényezői között fennálló változatlan vonatkozásoknak, melyek a mint még látni fogjuk, az anyag fogalomkörét alkotják, nincs alávetve. A sugárzó energiát gyakran sugárzó melegnek nevezik; ez tévedésekre vezethet, mert sugárzó energia más energia-alakokból is származhatik, habár meleg testek igen könnyen veszítenek energiát sugárzó energia alakjában és ez felette könnyen, de nem kizárólagosan alakúlhat át meleggé. A sugárzó energia különben lényegesen periodikus, még pedig többnyire igen rövid időszakokkal.

Az energia két tényezője közül az intenzitás ismerhető fel legkönnyebben, mert tőle függ az energia nyugvása vagy mozgása. Ha valamely szerkezetünk egy energia-fajtának tetszőleges mennyiségeit tartalmazhatja, és az energia adott mennyisége mérhető változást idéz elő benne, akkor az intenzitásnak mérőeszközével rendelkezünk benne, melylyel a capacitásokat számokban határozhatjuk meg. Ekkor alkalmas módon megszerezhetjük a capacitásnak és intenzitásnak skáláit s így c és i absolut értékeire is rábukkanhatunk, vagyis képesek vagyunk meghatározni a két skála kezdőpontjait.

A fennebbiekben azt tételeztük fel, hogy az intenzitások és capacitások tetszés szerint változtathatók, a mi azonban nem mindig így áll. Vannak energia-alakok, melyeknél csak a capacitásnak, mások, melyeknél csak az intenzitásnak megváltoztatása lehetséges; vannak végre olyanok is, melyeknél bár mind a kettő változtatható, de csak egyidejűleg és bizonyos meghatározott módon. Igy például a mozgási energia capacitási tényezője, a tömeg az energiának nagyobbítása vagy csökkentése révén meg nem változik, miért is a $\frac{v^2}{2}$ intenzitási tényező absolut meghatározása lehetetlen. Fordítva, a gravitatio-energiánál az intenzitást nem lehet megváltoztatni és így a capacitás absolut értéke marad megmérhetetlen.

Az előttünk ismeretes különböző energia-alakok egymással olyan összefüggésben vannak, hogy bizonyos energia-fajták tényezőit nem lehet megváltoztatni a nélkül, hogy egyidejűleg más alakok tényezői is meg ne változzanak; még pedig ezek az energia-tényezők a legtöbb esetben arányosak egymással. Különösen a mozgási energia capacitási tényezője, a tömeg olyan mennyiség, a mely sok mással arányos, és a melylyel sok más arányos; *innen van, hogy ezen mennyiségnek egész hibásan általános jelentőséget tulajdonitottak sőt hogy őt a harmadik alapegység gyanánt látták jónak bevezetni.*

Minthogy az egymással arányos energia-tényezők, mint tömeg, súly. térfogat, hőfoghatóság, chemiai energia iránti capacitás, térbelileg mindig elválaszthatatlanok gyanánt tünnek fel, szokássá vált mindnyájukat az energiának mintegy székhelyébe, edénybe összefoglalni, a melynek az «anyag» nevét adták. Tényleg nem ismerhetünk meg egyebet az úgynevezett anyag felől, mint csak az említett energia-mennyiségeket. És ha meggondoljuk, hogy ezek térbelileg mindig elválhatatlanul jelennek meg, akkor az a tartalom, a melyet a hypothesis az energia olyan székhelyének, a mi valami az energiától különböző volna, tulajdonít, ki van merítve és feleslegesnek látszik ily egyszerű tény számára külön hypothesist felállítanunk, sőt az ilyesmi félreismerhetetlenul gátolja az energia lényegét illető tiszta nézetek megalkotását.

Az «anyag» ennélfogva nem egyéb, mint energiamennyiségeknek térbelileg megkülömböztethető, összefüggő kapcsolata (complexuma).

Ezen energiáknak épen egymással és a tömeggel arányos tényezőit szoktuk az anyag alapsajátságainak nevezni; ezek sorában is előnyt szoktunk adni a mechanikaiaknak (tömeg, súly, «áthatatlanság» vagy térfogat), jóllehet pl. a chemiai átalakulásra való képesség nem kevésbé sajátsága minden előttünk ismert anyagnak, mint az előbb említettek. A többi energiatényezők, melyek amazokkal tapasztalat szerint nem arányosak, a minő a sebesség, a hőmérséklet, az elektromos potentiál stb., az anyag múló sajátságainak vagy állapotainak szokás nevezni.

*

Az energiatényezők ezen állandó kapcsolatán, az anyagon kívül vannak még esetlegesek: a *gépek*. Ezeknek a lényege abban áll, hogy általuk lehetségessé válik két egymástól kölcsönösen függő energiatényező arányossági tényezőit bizonyos határokon belül tetszőlegesen megváltoztatni. Az energiatényezők ezen szükségképeni és tetszőleges kölcsönös vonatkozásainak nagy jelentősége abban áll, hogy okát és szükségképeni feltételét képezik az energia-alakok kölcsönös átalakulásának. Mert ha bármilyen energiamennyiséget megváltoztatunk s vele együtt a tényezőit is: ez által a többi tényezőknek egyidejű változása s evvel egyúttal az a szükségszerűség áll be, hogy a másik fajta energiának mennyisége is változást szenvedjen és pedig oly módon, hogy az első főtétel értelmében a változások összege egyenlő legyen a semmivel.

Egyetlen fajta energiával biró rendszerben akkor van egyensúly, ha ezen energiának intenzitása mindenütt egyenlő. Ez azonban csak végtelen kiterjedésű rendszerben lehetséges; véges rendszer nem felelhet meg ennek a feltételnek, mert határain, a hol más rendszerek más energiákkal vannak jelen, az első energiának intenzitása általában más értékű. Minthogy pedig tapasztalat szerint léteznek véges rendszerek nyugvásban levő energiával, a meglevő intenzitásbeli különbségeknek hatástalanokká váltaknak, vagy kompenzáltaknak kell lenniök és pedig az energiatényezők összekapcsolódása, egy más energiának egy tényezője következtében. Ha ez utóbbi az első energiával oly módon van összekapcsolva, hogy az energia tetszésszerinti változtatásával a másik energia tényezőjének megfelelő változása tartozik bekövetkezni, akkor a szerkezet azon esetben van energiaegyensúlyban, ha a feltételek olyanok, hogy a kölcsönösen megfelelő tényezők virtuális megváltozásánál egyrészről épen annyi A-fajta energia tünik el, a mennyi B-fajtának másrészről a feltételezett összefüggés értelmében keletkeznie kell és fordítva.

Ha ez a feltétel nincs egészen kielégítve, hanem az A-ból eltünő mennyiség valamennyivel nagyobb mint a B-ből keletkező, akkor A átváltozik B-be és fordítva. E szerint tehát végtelen kis változások segítségével a gép járásának értelme megfordítható és egyensúly akkor áll be az egymással határos A és B között, ha változásaik összege semmi; e változások nagysága e mellett a kérdéses energiatényezőknek a gép által meghatározott átszámítási tényezőinek tartozik megfelelni.

Míg az első főtétel minden körülmények között azt kívánja, hogy az eltűnő és keletkező energiamennyiségek egymással egyenlők legyenek, az épen kifejtett egyensúlyi törvény azt az egyenlőséget csakis az egymással a gépegyenlet által összekapcsolt energiafajtákra nézve követeli. Ha az utóbbi feltétel nincsen teljesítve, mozgás áll be és az eltűnő A energiának a keletkező B energiához képest meglévő többlete egy harmadik C energia alakjában tartozik fellépni, mely tisztán mechanikai szerkezeteknél mindig mozgási energia; általános szerkezeteknél a többlet végeredményben meleg alakjában jelentkezik.

Könnyü dolog ezt a megfontolást több energiaalak egyensúlyának esetére is kiterjeszteni, melyek gépegyenletek révén vannak egymással összekapcsolva.

A gépegyenlet, melylyel az energiának különböző fajtái változásaikban egymástól függőkké vannak téve, tapasztalat szerint (a mennyire a szerző vizsgálatai terjednek) csakis a capacitási tényezőre vonatkozik. Ebből a capacitás és intenzitás szoros kapcsolatánál fogva az következik az utóbbira vonatkozólag, hogy *két energia között akkor van egyensúly, ha az egyiknek intenzitása a másiknak a géptényezővel szorzott redukált intenzitásával ellenkező értelemben egyenlő.*

A hőre nézve, mint szerző kimutatja, adott rendszereken való könnyű hozzá- és elvezethetőségénél fogva, lehetséges a capacitás és intenzitás értékeit tökéletesen meghatározni. Kitűnik, hogy a gázhőmérőnek 273°-kal kiterjesztett Celsius-fokozású skálája egyszersmind az absolut vagy energetikus hőmérsékleti skála is és hogy ekkor az absolut hőmérsék segítségével a capacitás egyszerűen fejezhető ki.

Képzeljünk több különböző fajtájú energiából álló rendszert, melyben az energiák egyensúlyban vannak egymással. Ha most ehhez a rendszerhez A-fajta energiát vezetünk, az egyensúly megzavarodik; A nagyobb lesz és beáll a B-be való átváltozás, melylyel pedig azelőtt A egyensúlyban volt. Ha a szerkezet úgy rendezhető be, hogy az igénybe vett részek ne szenvedjenek maradandó változást (a mennyiben időszakonkint megint kezdethelyzetükbe kerülnek vissza vagyis körfolyamot végeznek), akkor ez a gép A energia formának B-re való átalakítására alkalmas; és pedig a hozzávezetett A energia mennyisége teljesen egyenlő lesz a származott B mennyiséggel.

A keletkező B energia nagyobb intenzitást nyer mint az, a mely előbb A-val egyensúlyban volt, tehát tökéletesen visszaalakítható lesz A-ba, ha az *A* energia intenzítása állandóan a kezdetértéken tartatik meg. Épen így változhatnék át, ha *B*-nek egy része egy harmadik *C* energiával van egyensúlyban, az ujonnan keletkezett *B* tökéletesen *C*-vé és ez ismét *D*-vé vagy akár az első fajta energia-alakká, és pedig mindig az összes érték megváltozása nélkül. Az előbb egyensúlyban volt szerkezethez hozzáadott energiamennyiség mindig alkalmas marad az átalakításra. Ha tehát egy egyensúlyban *nem* levő szerkezetben először azokat a maximalis energiamennyiségeket különítjük el, a melyek egymással egyensúlyt tartanak, akkor a megmaradt energiát rendelkezésére álló, vagyis *mozgékony energiának* tekinthetjük, melyre nézve áll ez a tétel: *Isolált rendszerben a mozgékony energia mennyisége állandó.*

E megfontolások azonban csak oly fajtájú energiákra vonatkoznak, a melyek kölcsönösen egyensúlyban tudják egymást tartani, mert gépegyenletek által vannak egymással kapcsolatban. A sugárzó energiára azonban ez a föltevés nem érvényes; ez nem hódol semmiféle gépegyenletnek és intensitásbeli különbsége nem compensálhatók más fajta energiákéival; a sugárzó energia minden körülmények között *az intensitás különbségei kiegyenlítéseinek* törvényét követi. Épen ezért nincs az energia, mihelyt sugárzó alakjában jelenik meg, anyaghoz kötve. Mert anyag alatt nem értünk egyebet, mint térbelileg megegyező és kölcsönös függésben levő feltünését különböző fajtájú energiáknak. Mihelyt az energia elhagyja az anyagot, szabaddá válik más fajta energiáktól való kapcsolatától és akadálytalanúl követi az általános intenzitástörvényt.

A mozgékony energiának előbb említett állandósága tehát csak addig érvényes, a míg sugárzó energiáról nincs szó. Mindazon esetekben, melyekben másfajtú energiák sugárzó energiává alakulnak át, a mozgékony energiának egy része sugárzó, át nem alakítható és használhatatlanná váló energiává alakul át.

Ezeket a tüneményeket az energia «elértéktelenedésének», «szétszóródásának», az entropia felhalmozódásának, a «nem kompenzált átalakulások túlsúlyának» s t. e. nevezik. Jelentőségük abban áll, hogy módot nyujtanak a legtöbb természeti folyamatnak a mozgékony energia csökkentésére. Fontos tény az, hogy a sugárzó energia, melynek sajátságain a dissipátiótünemények alapszanak, egyszersmind az az alak is, a melynek segítségével a föld felülete a Napból folytonos kárpótlást nyer mozgékony energiájának elkerülhetetlen elvesztéseért. *Fényes Dezső.*

*

A folyós oxygen és folyós levegő tulajdonságairól. A londoni Royal Society egyik felolvasó ülésében Dewar a folyós oxygen tulajdonságait figyelemreméltó kisérletekkel mutatta be. A felolvasó-asztalon literes üveg állott, telve folyós oxygennel; ebből kémlelő csőbe töltetvén, a folyadék tejszínűre vált, míg papirszűrőn keresztül tisztán ömlött a kémlelő csőbe. A folyadéknak ernyőre vetett képe halvány-kék színben mutatkozott; a levegő hőmérsékénél heves sistergéssel felforrott, sűrű fehér füstöt fejlesztve, mely a környező levegő fagyott nedvességéből származott; forró-pontja, thermo-elektrikus módon meghatározva, —180°.

A folyós oxgen az elektromosságot nem vezeti; egy inductor, mely hosszú szikrákat adott a levegőben, oxygénben még 0·1 mm.-es szikrát sem adott; a folyós oxygen tehát jó szigetelő.

Fénynyaláb útjába helyeztetvén, absorptio spektruma tisztán mutatta az *A* és *B* vonalakat, melyek a Nap színképében, mint eddig is tudva volt, a körlégbeli oxygentől származnak.

A folyós oxygen párolgasát a nyomás csökkentésével siettetvén, Dewar nyilt kémlelő csőben közönséges levegőt folyadékká sürített. A folyós levegő átlátszóbb, tisztább volt a folyós oxygennél s kevésbbé is füstölgött, csendesebben is forrott. A közönséges levegő sokkal alacsonyabb hőmérsékleten folyósodik, mint az oxygén, s mind a két alkotó része együtt és egyszerre cseppesül; de párologva a nitrogen az oxygen előtt illanik el. 60—90 gramm folyós levegőt kémlelő csőbe töltvén, a cső felső részébe tartott parázs nem égett, de körülbelül öt percz mulva hevesen lángra lobbant, a mikor t. i. a nitrogen teljesen elillant. Aztán egy boros poharat megtöltött folyós levegővel s azt az elnöklő Lord Kelvinnek nyujtotta azzal a figyelmeztetéssel, hogy a poharat jó alul, csak a nyelén fogja. A bemutatott gázok ugyanis heves parolgásuk folytán állandóan a forrpontjukkal közel egyező mély hőmérsékleten vannak.

A folyós oxygén mágnesi természetét úgy mutatta be Dewar, hogy az oxygent kősócsészikébe töltötte, hol sphæroidális állapotba jutott, s az egészet Faraday hatalmas elektromágnessének sarkai közé helyezte, melynek segélyével Faraday többi között az oxygen mágnesi természetét felismerte volt. Az áram zártával az oxygen a csészéből kiemelkedett s a sarkokra huzódva, ezeket egymással összekapcsolta. Itt aztán — hol az egyik, hol a másik sarkon erősebben — elgőzölgött s visszaesett a csészébe, mihelyt az elektromos áram megszakadt. Erős mágnessarkkal az oxygent a csőből vas módjára ki lehetett húzni. A folyós oxygen mágnessége körülbelül ezredrésze a vas mágnességének. A folyós levegő szintén közelít a mágnes sarkaihoz a nélkül, hogy alkatrészei különválnának; az elektromossággal szemben ugyanaz az elszigetelő ereje, mint a folyékony oxygennek.

A folyós oxygen a belé ejtett phosphort meg nem támadja, de száraz photograph-lemez —200° hőmérsékletű folyós oxygenben a fény iránt érzékenynek mutatkozott. Ez a megfigyelés D. szerint arra látszik utalni, hogy az ily alacsony kőmérsékletek alatt a chemiai hatások megszűnnek, azaz bekövetkezik az az állapot, melyet «az anyag halála» névvel lehetne jellemezni.

Összehasonlítás végett Dewar a következő forró-pontokat közli:

	760 mm.	5—10. mm.
	higanyoszlop nyomása alatt.	
Széndioxid	— 80°	—116°
Nitrogenoxidul	— 90	—125
Ethylen	—103	—142
Oxygen	—184	—211
Nitrogen	—198·1	—225 (szilárd)
Levegő	—192·2	—207 (szilárd)
Szénoxid	—193	—211
Nitrogendioxid	—153	—176
Mocsárgáz	—164	—201 (szilárd)

Dewar kisérleteit a Royal Institution laboratoriumában végezte, részben azokkal a készülékekkel, melyeket Faraday annak idején a gázok megsűrítésére vonatkozó vizsgálatai közben használt. Az oxygén megsűrítésére szükséges nagy mennyiségű ethylent nitrogenoxidul gyorsított párologtatása révén folyósította, mely utóbbi anyag Angliában folyós állapotban erős vaspalaczkokba zárva kereskedelmi czikket képez.

Az ethylen rendkívüli hütő hatását úgy mútatta be, hogy folyadékából keveset vízre öntött: az ethyilen hevesen elforrot, s a víz felületén jégkérget fagyasztott. Nyilt edényben csak úgy volt folyós állapotban megtartható, hogy edényét forrásban levő szénsavval vette körül.

A folyósított anyagok törésmutatói a következők:

Oxygén	1,2236
Ethylen	1,3632
Nitrogenoxidul	1,3305

The Engineer 73. köt. 515. l. és 75. köt. 88. l. *S. Á.*

*

A világosság diffusiójáról. Dr. W. E. Sumpner a londoni Physical Society 1892. decz. 9-iki ülésén tanulmányt közölt, melynek tartalma rövid kivonatban a következő:

A diffusio hatása zárt helyiségek és nyilt terek megvilágítására előadó véleménye szerint még nincs kellőképen méltányolva. Meggyőződése a tárgy kiváló fontosságáról arra indította, hogy a diffundáló (szétszóró) felületek reflexiója, absorptioja és transmissioja tényezőit meghatározza. Az idevágó, néha bizony határozatlan fogalmak szabatosítása végett néhány javaslatot teszen. A *visszaverő képesség* (reflecting power) legyen a felszínről visszavetett világosság aránya az összes világossághoz, mely a fölületre esett; a felület *megvilágítása* (illumination) a felületegységre eső világosság mennyisége; a világosság *mennyiségének egysége* (unit quantity) az egységnyi sugarú gömb közepén elhelyezett egységnyi fényforrásból a gömbfölület területegységén át sugárzó világosság; a *fényesség* (brightness) a megvilágított felület egységnyi területére merőlegesen eső világosságnak gyertyaerőkben kifejezett mennyisége. Mindezeket sorjában η, J, Q és B betűkkel jelölve s a diffusio cosinus törvényéből — t. i. hogy a bármely irányban terjedő világosság gyertyaerőinek száma arányos amaz irány s a felület megfelelő pontjára vont merőleges közti szög cosinusával — kiindulva megmutatta, hogy

$$\pi B = \eta J,$$

s hogy valamely szoba falainak megvilágítási átlaga (J') a fényforrásokból közvetlenül eredő megvilágításhoz (J) ebben a vonatkozásban áll:

$$J' = \frac{J}{1-\eta}.$$

Ha a falak visszaverő képessége 50% vagyis $\eta = \frac{1}{2}$, akkor $J' = 2J$; míg ha $\eta = 0 \cdot 8$, mely szám fehér falakra nézve közelítőleg érvényes, akkor $J' = 5J$.

E szerint a falak okozta megvilágítás jóval fontosabb a közvetlen jövő sugaraktól eredő megvilágításnál. Ha a visszaverő felület részekből áll, melyeknek visszaverő képessége különböző, akkor a felület *átlagos* visszaverő képessége:

$$\eta = \frac{\eta_1 A_1 + \eta_2 A_2 + \ldots + \eta_n A_n}{A};$$

hol A az egész felület, $A_1\ A_2 \ldots A_n$ egyes részeinek területe, melyeknek visszaverő képességök: $\eta_1\ \eta_2 \ldots \eta_n$. Ez a törvény gömbszerű határfölületekre teljesen beválik. A visszaverő képesség megmérése végett a kérdéses felület nagy fekete bársony-ernyőre erősíttetett, mely egy három méteres photometer-padhoz függélyesen volt elhelyezve. Két fényforrás jött használatba: egy Methven-féle 2-gyertyás, a photometer-padnak a visszaverő felülettől távolabb eső végén, s egy 20-gyertyás izzólámpa, a Lummer-Brodhun-féle photometer szánjára erősítve. Az izzó lámpa a visszaverő felület megvilágítására szolgált, de közvetlen sugaraitól a photometer meg volt védve. A megfigyelések eredményei az értekezésben közlött képletekbe és táblákba vannak összefoglalva. Az elnyelő képességet (absorbing power) úgy mérte meg az értekező, hogy először a födetlen izzó lámpa fényerejét határozta meg, azután úgy, hogy a vizsgálat alatti anyagból készült hengerrel borította. Nagyfontosságúnak bizonyult a látszatos és valóságos absorptio megkülönböztetése, mert a hengerek felszineiről való visszaverődés a belső tér megvilágítását fokozza. A valóságos absorptio coefficiensét (a) a következő vonatkozás adja:

$$a=(1-\eta)\frac{k_0-k_1}{k_0},$$

hol η a visszaverő képesség, k_0 és k_1 a gyertyában kifejezett fényerő burok nélkül és a vizsgálat alá vett anyagból készült burokkal. Az átbocsátó képesség meghatározására a fölület egyik oldalára a METHVEN-fényforrás, a másikára az izzó-lámpa állíttatott. Némi nehézség mutatkozott abban a körülményben, hogy bizonyos anyagok, mint pl. a rajzpapiros — az átlátszó testek módjára — a világosság egy részét közvetlenül áteresztik, míg a másik része a cosinus-törvény szerint diffundálódik. A kétféle rész megkülönböztető mérésére — mind a reflexio, mind a transmissio szempontjából — különféle kisérleti módszerek alkalmaztattak, melyek mind szépen megegyező eredményekre vezettek. Ezt a megegyezést az értekezéshez csatolt táblák és görbék minden kétséget kizárólag bizonyítják. A táblákból ime egy kis kivonat:

Anyag	A visszaverő képesség %-os értéke η.	Az absorptio %-os értéke α.	Az átbocsátás %-os értéke τ.	$\eta+\alpha+\tau$.
Itatós papiros	82	13·8	9·2	105·0
Doboz papiros	80	12·2	11·2	103·0
Rajz-vászon	35	15·0	54·4	104·4
Rajz-papiros	22	7·0	76·0	105·0
Közönséges tükör	82			
Közönséges szövetpapir (egyszerü vastagság)	40			
Közönséges szövetpapir (kettős vastagság)	55			
Sárga kárpit-papiros	40			
Kék papiros	25			
Sösétbarna papiros	13			
Sárgára festett fal	20			
Fekete vászon	12			
Fekete bársony	0·4			
Ivlámpa-gömbök:				
Világos opál	—	15		
Sürű opál	—	39		
Étetett üveg	—	42		

Elméletileg véve a visszaverő, elnyelő és átbocsátó képességek összegének az egységgel kell egyenlőnek lennie, holott a fönebbi táblán a 100%-ot meghaladja oly értékkel, mely a kisérleti hiba határán jóval túlmegyen; ezt az eltérést az előadó annak tulajdonítja, hogy «a cosinus-törvény nincsen teljes szabatossággal érvényesítve». — Az erre megindult eszmecserében A. P. Trotter kijelenti, hogy a különféle anyagok visszaverő képességének a szobák megvilágításában kiváló jelentősége van; egy esetben ő is, mint Dr. Sumpner, úgy találta, hogy a teljes megvilágítás két-harmada a falaktól származik. Trotter szerint a visszaverő képesség megmérése nagyon is egyszerűsödnék, ha bizonyos anyagot mértékül lehetne venni; a cosinus-törvényt a maga részéről helyesnek találja, kivéve: a 90°-hoz közel eső szögekre nézve. Jelentékeny teljes visszaverődés eseteiben a látszólagos fényesség (brightness) a normalis irányban, vagy ehhez igen közeli irányokban a többi iránybelit tetemesen fölülmulja. Trotter azt is vizsgálta, hogy milyen természetűnek kell az érdes vagy barázdált fölületnek lenni, hogy a diffusio cosinus-törvénye érvényesüljön. Úgy látszik, hogy a redőzés, vagy más egyszerűbb geometriai alakváltozás nem felel meg a kivánt föltételeknek.

Dr. Hoffert a némely anyagok visszaverő képességét kifejező nagy számokat nagyon érdekeseknek találja; megjegyzi, hogy ugyanazon mintázatú, de színökben csak kevéssé is különböző kárpit-papirok a világítás fokozását illetőleg nagyon is különböző hatást tesznek, utal arra a hatásra is, mit egy közönséges szoba asztalára terített hófehér abrosz idéz elő.

Blakseley fényösszegnek a 100%-ot meghaladó értékét annak tulajdonítja, hogy a falak, fény- és hősugarakat vetvén vissza, a hőmérséknek és ezzel a sugárzás hatásképességének is fokozódnia kell.

Addenbrooke kijelenti, hogy neki a tárgy fontossága már akkor tűnt föl, midőn látta, mily hanyag kezelés uralkodik az elektromos világítás körül. Alkalmas visszaverő felületek használatával a szobák világítását 50%-kal lehetne javítani s az elfogyasztott elektromosság költségét felényire leszállítani.

Dr. Sumpner végül kijelenti, hogy a visszaverő képesség mértékeül használt fehér itatóspapirt s azt e czélra igen alkalmasnak találta. Gondos méréseit nem színes, hanem fehéres felületeken végezte. Ha a szobában valamely szín, pl. a vörös tulnyomó, ekkor az átlagos világosság sokkal vörösebb, mint a mit a fényforrás kibocsát, minthogy a többi színek sugarai elnyeletnek; különben a szem alkatára, s a látás physiologai tényezőire is kell tekintettel lenni, hisz a szemrés erős fényhatásra tudvalevőleg összehuzódik, gyengére pedig kitágul. Ide vonatkozó tanulmányait remélhetőleg egy későbbi értekezésében fogja ismertetni. (Nature. Vol. 47. 190. l.)

S. Á.

IRODALOM.

Giuseppe Veronese, *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unita rettilinee esposti in forma elementare.* (A több dimenziós geometria alapvonalai különböző fajú egyenes vonalú egységek felvétele mellett, elemi tárgyalásban). Padova 1891, nyolczadrét. XLVIII+630. l.

Az elemi geometria a methematikának amaz ága, mely legelőször részesült rendszeres tárgyalásban. Mindjárt az első rendszeres kézikönyv, az Euklides elemei megadták ennek az egész tudományágnak sajátságos jellemét, a melyet jórészt mai napig megtartott. De az elemi geometria tárgyalásában Euklides-nek nemcsak módszere lőn hagyományossá, hanem azonfelül egészen a jelen század elejéig híven ragaszkodtak axiomáihoz is, melyeknek axioma-jellemét eladdig sohasem vonták kétségbe, sőt Kant azokat egyenesen a belső szemlélet apriorisztikus formáinak tekintette. Egyedül Euklides XI. axiomája az, melyet egyesek már az ó-korban is sokkal összetettebb igazságnak tartottak, sem hogy axiomának fogadhatták volna el és — noha siker nélkül — mégis ezt mint a többi axioma logikai következményét iparkodtak feltüntetni. Gauss volt az első, a ki 1816-ban a «Göttinger gelehrte Anzeigen»-ben megjelent egyik közleményében, melyben több a XI. axioma bebizonyítására törekvő kisérletet megbirál, annak a véleményének adott kifejezést, hogy ilyen bebizonyítás egyáltalában lehetetlen. Később Lobatschewsky és Bólyai megmutatták, hogy oly ellenmondás nélküli geometria is lehetséges, mely egy a XI. axiomával ellenkező feltevésből indul ki. Noha e geometrák e kérdés tárgyalásán sokat lendítettek, azt mégsem tisztázták teljesen. Munkáik alapján ugyanis azt kell hinnünk, hogy nem vették észre, hogy a tőlük felállított s a párhuzamosokra vonatkozó hipotézis nem az egyedüli lehetséges, a mely az Euklides XI. axiomájában foglalttól eltér. Később azután megindult a vizsgálatoknak egész sorozata, melyek a geometria alapfeltevéseire vonatkoznak és a melyekkel kapcsolatban, habár nem is legelőször, felmerül a háromnál több dimenziós terek fogalma is. Ámde e vizsgálatok mind analitikai természetűek és oly fogalmakat visznek be az Euklides-féle axiomák helyettesítésére szolgáló alapfeltevésekbe, melyek egy részt nem képezik a közvetetlen szemlélet tárgyát, más részt pedig sokkal bonyolódottabbak, sem hogy oly feltevésekben szerepelhetnének, melyekből a geometria elemei kiindulhatnának, végül pedig analitikai és kinematikai eredetüknél fogva a tiszta geometriában idegenek.

A jelen munka szerzője abból a felfogásból indul ki, hogy a geometria elemeinek leginkább oly elemi módszer felel meg, melynek alapját a térbeli szemlélet konstruktiv folyamata képezi. Mint maga az előszóban fejtegeti, főleg amaz élénk vita birta őt munkájának megirására, mely a háromnál több dimenziós geometria körül egy részt mathematikusok közt, más részt pedig mathematikusok és filozofusok közt fejlődött ki és az ő nézete szerint főleg arra a körülményre vezethető vissza, hogy az e terek tanulmányozásában eddig alkalmazott analitikai módszer okozta a félreértést s hogy sokan nem különböztették meg e tereket kellőleg az absztrakt numerikus sokaságoktól és így csak analitikai jogosultságukat akarták elismerni. Feladatul tűzte ki tehát magának, a több-dimenziós terek tulajdonságait oly geometriai módszerek segítségével kifejteni, a melyek a sík és a három-dimenziós tér elemi geometriájában alkalmazott módszerekkel analogok; tette ezt pedig egyrészt a végből, hogy az eddigi véleményekkel szemben e terek tiszta geometriai jogosultságát kimutassa, más részt pedig azért, mert e módszert a tárgy természetéhez leginkább illőnek találja. Mindamellett azonban, hogy a mű czélja a többdimenziós terek geometriájának szintétikai módszerrel való tárgyalása, szükségesnek tartja a szerző, hogy visszamenjen a geometriai fogalmak eredetére és hogy az egyenes, a sík és a három-dimenziós tér geometriáját fokozatosan ezen az alapon építse fel. Teszi ezt pedig két okból. Először azért, hogy a háromdimenziós tér geometriájától az elvek fentartásával térhessen át a magasabb dimenziós terek geometriájára. Az elemi geometria szokásos tárgyalásaiban ugyanis a három dimenzió feltevéséből szoktak kiindulni; de ez a feltevés a geometria tudományos kifejtése czéljából fölösleges, minthogy azok az általános szempontok, a melyekből szerző kiindul, lehetségessé teszik úgy a három-, mint az n-dimenziós tér törvényeinek a tőle felállított általános tér törvényeiből való kifejtését. A második oka pedig az, hogy elejét vegye mindamaz előitéleteknek, melyek a háromnál több dimenziós terek geometriája iránt kifejlődtek; ezt pedig legczélszerűbben azzal vélte elérhetni, ha megmutatja, hogy e geometria kifejtése minden a geometriába nem tartozó előismeret nélkül is lehetséges.

És épen ez a körülmény, hogy e munka nem csak a magasabb dimenziós terek geometriáját öleli fel, hanem egyszersmind a geometriai alapfogalmak elemzéséből kiindul és e mellett a szokásos geometriát is beleolvasztja tárgyalásaiba, mert mint már fennebb említettük, az elemi geometria tárgyalásának módja Euklides óta alig haladt valamelyest és eddig a modernebb kézikönyvek sem töltötték be rendszeresen ama hézagokat, melyeket EUKLIDES-ben találunk; sőt egy részükről azt mondhatjuk, hogy a fogalmak világos kifejtése és a szabatosság szempontjából még utól sem érik a kitünő mintát.

A mi a munka felosztását illeti, az egy bevezetésből, két részből és egy függelékből áll. De a munka megbeszélésénél az előszót sem hagyhatjuk figyelmen kívül; mert ez nem csak a szokásos, a munka keletkezésére és beosztására vonatkozó megjegyzéseket tartalmazza, hanem bár a könyv szövege ettől függetlenül is olvasható, annak igen becses kiegészítését képezi, mely a geometria alapfeltevéseire és módszerére vonatkozó fontos fejtegetéseket tartalmaz.

Az előszóban szerző első sorban megállapítja a geometria helyét a tudományok sorában. A tudományok a dolgok természete szerint, melyek vizsgálati tárgyukat képezi, részint *formálisok*, részint pedig *tapasztalatiak*. A formális tudományok megvizsgálják a gondolkodás ama tárgyait, melyeknek a külvilágban nem felel meg szükségképen valami kép, az úgynevezett formákat. Ide tartozik a logika és a tiszta mathematika. *A formális tudományok* alapjait princzipiumok, logikai operácziók, definicziók és hipotézisek képezik; bizonyításaik a gondolkodás különböző cselekvéseinek csoportosításából alakulnak a nélkül, hogy a gondolkodás teréről más térre kellene átlépnünk. Ezzel szemben azok a tudományok, a melyek a gondolkodáson kívül valóságosan létező tárgyak vissgálatával foglalkoznak, a *tapasztalati tudományok*. E tudományokban az igazság amaz összhangzásban nyilatkozik, mely a gondolkodás és a kívüle létező tárgyak közt fennáll és ezért alapjaikat oly egymásból le nem vezethető igazságok képezik, a melyek a külső tárgyak szemléletéből származnak. Ezek az igazságok az *axiomák*. A geometriában azonban míg egy részt vannak olyan axiomák, melyek a külső tárgyak észleléséből származnak és oly tárgyakra kiterjednek, a melyeket valóságosan létezőknek kell tekintenünk, addig más részt vannak olyanok is, a melyek csupán csak oly tárgyakra vonatkoznak, a melyeket az észlelés körén kívül csak abstracte létezőknek tekintünk. Ez utóbbi axiomákat, melyeket a tapasztalás ugyan nem igazolhat, de a közvetetlen tapasztalás tárgyát képező törvényekkel nincsenek ellenkezésben, mint alapigazságokat fogadjuk el és minthogy nem birnak avval a közvetetlen evidencziával, mint az előbbiek, inkább *postulátumok*-nak vagy *hipotezisek*-nek nevezzük. A geometria tehát a tudományok fennebb felsorolt két osztályának egyikébe sem sorolható be tisztán és így az a vegyes tudománynak jellemével bir. A geometriában ugyanis ép úgy, mint a tapasztalati tudományokban az axiomák megállapításában mellőzhetetlen a külső tárgyak észlelése; de az ész csakhamar a külső tárgyakat elvont formákkal helyettesíti, a melyeknek segítségével az igazságot a külvilágtól függetlenül vezetheti le és ez az, a miben a geometria a formális tudományokkal megegyez, a miért is a geometriát a tiszta mathematikához szokták számítani.

A mi a geometria axiomáit és hipotéziseit illeti, az ezekre vonatkozó követelményeket szerző a következő hat pontban foglalja össze:

I. «*Hogy a geometria axiomái el legyenek különítve amaz igazságoktól, a melyek a logikai axiomákból logikai operácziók révén levezethetők.*»

II. «*Hogy a tulajdonképeni axiomák a legegyszerűbb és a legkönnyebben szemlélhető igazságokat fejezzék ki anélkül, hogy oly fogalmakat tartalmaznának, melyeket csak később kifejtünk; ezekből az axiomákból továbbá az összes többi tulajdonságoknak kell következniök úgy, hogy ne kelljen valamely új tulajdonságot a tárgyalásba hallgatagon becsempésznünk és végre az axiomák már eleve úgy legyenek megállapítva, hogy helyt adjanak a geometria különböző lehetséges rendszereinek.*»

III. «*Hogy a geometriában szükséges axiomák el legyenek választva azoktól, a melyek csak annak gyakorlati alkalmazásaiban szükségesek.*»

IV. «*Hogy az axiomák függetlenek legyenek egymástól még sorrendjükre való tekintetben is és hogy továbbá ne legyenek egymással ellenmondásban.*»

V. «*Hogy a tárgyalás módszere elemi legyen és a térbeli szemlélet konstruktiv folyamatára legyen alapitható.*»

VI. «*Hogy az axiomák, tételek és bebizonyítások már eleve se tartalmazzanak semmi határozatlan szemléleti elemet úgy, hogy ha a szemlélettől eltekintünk, a geometria rendszeréből az igazságoknak egy tisztán elvont rendszere maradjon meg, melyben az axiomák a jól meghatározott absztrakt definicziók és hipotézisek helyét foglalják el.*»

E követelmények közül az V. egyszersmind a geometria módszerére vonatkozó megállapítást foglal magában. És valóban, minthogy a geometriának a térbeli szemléletből kell kiindulnia, mely a legegyszerűbb geometriai tárgyakat állítja elénk, valamint azoknak bebizonyíthatatlan tulajdonságait: a geometriának leginkább megfelelő módszer az, a mely az idomokat mint ilyeneket vizsgálja és kizárólagosan csakis ezeknek elemeivel operál. Minden más módszert, úgy az analitikait is, szerző mesterségesnek tart és e módszereknek meglehetnek és meg is vannak a maguk előnyei, de még sem olyanok, hogy a legjobban vezetnének czélhoz. Ép e körülménynek tulajdonítja szerző, hogy ama kitünő mathematikusoktól származó mély értelmű, a geometria hipotéziseire vonatkozó analitikai vizsgálatok, a voltaképpeni elemi geometriát mivel sem vitték előbbre, míg az úgynevezett modern geometria, melynek módszere szintétikus, e század folyamában oly nagy haladást mutat.

A 205 oldalra terjedő bevezetésnek, mely magában is egy önálló egészet képez, czélja ama logikai princzipiumokat és operácziókat megvizsgálni, a melyekre a tiszta mathematika és a geometria támaszkodik és így többet is tartalmaz, mint a mennyi a geometriában alkalmazást talál. A szerző ebben a tiszta mathematikát mint fogalmaknak és nem mint konvenczionális jeleknek tudományát állapítja meg. Ha e bevezetésnek csak ama részeit tekintjük, melyek a geometriára vonatkoznak, ezek képezik azt az absztrakt rendszert, melynek a fennebb az axiomákra vonatkozólag felsorolt követelmények utolsója értelmében a geometriából elő kell állania, ha a szemlélettől eltekintünk.

A munka I. részének tárgyát az egyenes, sík és a három-dimenziós tér geometriája képezi, még pedig az általános térben. A kiindulópontot itt annak tapasztalati magyarázata képezi, hogy mit kell szemléleti *üres tér* és mit *pont* alatt értenünk. Az érzékeink révén észrevett kívülünk létező testek megjelenésével kapcsolatban áll annak gondolata, a mi azokat tartalmazza és a mit *külső környezetünknek* vagy *szemléleti térnek* nevezünk. Ebben mindegyik test egy bizonyos meghatározott helyet foglal el. Ha valamely észlelt testet eltolunk és gondolatunkban fixirozzuk azt a helyet, melyet az elébb elfoglalt, elképzelhetjük, hogy e hely magában, a testtől függetlenül is létezik; sőt valamely mozdulatlan test esetében is eltekinthetünk magától a testtől és gondolhatunk arra a helyre, a melyet az elfoglal. E hely látszólag *üres*, a mi azt jelenti, hogy nem látjuk, vagy nem képzeljük más testek által betöltve, a miből azonban még nem következik, hogy ily üres tér tényleg létezik is. Az üres vagy szemléleti tér gondolatával együtt jár *mozdíthatatlanságának* gondolata is. *A geometria alapelemének, a pont* gondolatát szintén kívülünk létező tárgyak vagy még inkább az azoktól elfoglalt hely gondolata ébreszti bennünk. A szerzőtől felállított I. axioma az, hogy *vannak különböző pontok és az összes pontok egymással azonosak.*

Minden formát, melynek alapelemét a pont képezi, szerzö *geometriai idomnak* nevez. Az idom fogalmának alapján lehetségessé válik egy új fogalom az általános tér fogalmának megállapítása, melynek logikai lehetősége a bevezetésből tűnik ki és ez, noha a tárgyalások legnagyobb részében nélkülözhető, mégis biztosítja a szerkesztések nagyobb szabadságát. *Az általános tér a pontok oly rendszere, melyben legalább még egy pont van, mely egy tetszőlegesen megadott vagy megszerkesztett idomon kívül fekszik. Bebizonyíthatatlan tulajdonságai a külső észlelet vagy pedig oly absztrakt hipotézisek segítségével állapittatnak meg, melyek az előbbivel nincsenek ellenmondásban és idomaira mindaddig,* *míg a pont eredeti értelmezését megtartja, a térbeli szemlélet alkalmazható. Az a tudomány, melynek tárgyát az általános tér és a benne foglalt idomok tanulmányozása képezi, a geometria.* E definicziókhoz még hozzájárul a következő: Az elemek oly egy-dimenziós rendszerét, a melyben az alapelem a pont, *egy-dimenziós idomnak* nevezzük.

Az utóbbi definiczió arra a feltevésre támaszkodik, hogy léteznek olyan idomok, a melyekre e definiczió vonatkozhatik, míg eddig nem áll rendelkezésünkre semmi oly principium, melynek alapján e feltevés igazságáról meggyőződhetnénk. Egyáltalában a priori sem dönthető el, vajjon vannak-e folytonos egy-dimenziós idomok és ha vannak, melyik az közöttük, melyet lehetőleg kevés pont határoz meg és mekkora e meghatározó pontok száma. E kérdést bizonyos tapasztalati tények helyezik világosságba. Egy rajz, melylyel valamely egyenes véges darabját szokás ábrázolni és melyet szerző egyenes vonalú tárgynak nevez, vagy valamely kifeszített fonál stb. reávezetnek a két pont határolta *egyenes vonalú köz* fogalmára. E közre vonatkozólag az ismételt tapasztalat arra az eredményre vezet, hogy ez mindig részét képezi egy másik egyenes vonalú köznek. Igy tehát hajlandók leszünk annak az elvont hipotézisnek felállítására, hogy az egyenes vonalú köz részét képezi a pontok egy egy-dimenziós, mindkét irányban határolatlan rendszerének, az *egyenes vonalú rendszernek,* mely részeinek elhelyezésében identikus.

Ha AB és CD két oly köz, a mely az észlelésnek hozzáférhető és

$$AB < CD,$$

akkor mindig van egy oly pozitiv egész szám m, a melyre nézve

$$(AB)m > CD;$$

azaz az észlelésnek alávetett közök — mint szerző mondja — mindig *egymás között végesek.* Az egységet, melyekre ily közök vonatkoztatnak és a mely maga is ilyen az észlelésnek hozzáférhető köz, szerző az *észlelésnek hozzáférhető egyenes vonalú egységnek* (unità rettilinea sensibile all' osservazione) nevezi.

Erre az egységre vonatkozólag az egyenes vonalú rendszer folytonos.

Abból ismét, hogy az egyenes vonalú rendszer egy egy-dimenzios, részeinek elhelyezésében identikus folytonos rendszer, magában véve még nem következik, hogy hány pont szükséges annak meghatározására. A tapasztalat mutatja, hogy az egyenes vonalú tárgy által elfoglalt helyet két végpontja határozza meg és minthogy az egyenes vonalú köz ismét az egész egyenes vonalú rendszert határozza meg, ennek meghatározására is két pont elégséges. Igy tehát látjuk, hogy két tetszésszerinti különböző pont, a mely egy az észlelésünk körébe eső egyenes vonalú tárgy végpontjainak felel meg, az egyenes vonalú rendszert már meghatározza. De minthogy a tapasztalat segítségével nem dönthető el, vajjon az egyenes vonalú-rendszer két oly pontja, mely közül legalább az egyik észlelésünk körén kívül fekszik, szintén alkalmas annak meghatározására, továbbá hogy az ú. n. szferikus geometria ki ne legyen zárva, czélszerűnek bizonyul kiindulni abból a feltevésből, hogy az egyenes vonalú rendszert meghatározó pontpár nem tetszésszerinti; sőt egyelőre elégséges megengednünk csak azt, hogy e rendszert *egyik* pontpárja határozza meg; e feltevés minden esetre egyszerűbb tényt fejez ki, mint az, hogy az egyenest minden tetszésszerinti pontpárja meghatározza. Mindezeknek összefoglalását a II. axioma első része tartalmazza:

IIa. «*Létezik a pontoknak oly egy-dimenziós és részeinek elhelyezésében identikus, folytonos rendszere (az egyenes vonal), a melyet két pontja meghatároz*».

Ezt kiegészíti az axioma második része:

IIb. «*Vannak az egyenesen kívül fekvő pontok is és mindegyik pont, mely nem tartozik az egyeneshez, az egyenes minden pontjával együtt egy másik egyenest határoz meg.*»

Megjegyzendő, hogy ez az axioma eldöntetlenül hagyja azt a kérdést, vajjon az egyenes nyilt vagy zárt vonal-e.

A III. axiomát, mely arra szolgál, hogy két egyenes identikus voltát kimutassuk, szerző így fogalmazza:

III. «*Ha két egyenesnek van egy közös pontja A, akkor az egyik egyenes egy bizonyos (AB) közének megfelelőleg van a másikon egy (AB') köz, mely vele identikus.*

A pontok egy csoportjának határpontjára (limes) és a közök egy sorának határát képező közre vonatkozó tételek megallapításában szerző a IV. axiomára támaszkodik, mely szerint *valamely háromszögben, melynek egyik oldala minden határon túl kisebbedik, a másik két oldal különbsége is minden határon túl kisebbedik*. Az általánosabb tételekből, a melyek emez axiomából következnek, igen fontos következtetések vonhatók le ama pontpárokra vonatkozólag, melyek az egyenest esetleg meg nem határozhatják. E következtetésekből végeredményképen az a tétel foly, *hogy az egyenest, ha nyilt, mindegyik pontpárja határozza meg, míg ha zárt, csakis oly pontpárjai nem határozzák meg, melyek ellentett pontokból (punti opposti), azaz oly pontokból állanak, a melyek az egész egyenest két egyenlő részre osztják fel.*

Az idomok identitásának vagy egyenlőségének fogalmát (mely rendesen a kongruenczia neve alatt szerepel) szerző hasonló elvekkel állapítja meg, mint a bevezetésben a formák identitását. Minthogy azonban a priori azt sem döntheti el, vajjon az egyeneseken kívül még más identikus idomok is léteznek-e, szerző az V. axiomát állítja fel. Ennek értelmében *két sugárpár (sugár alatt értve az egyenest egyik irányában befutva) AB, AC és A'B', A'C' identikus, hogy ha ezekben két pontpár, B, C és B', C' oly módon választható, hogy a midőn*

$$(BA)\equiv(A'B'),\quad (AC)=(A'C'),$$

egyszersmind

$$(BC)\equiv(B'C').$$

Ez az axioma, mely egyenlő értékű avval a geometria közönséges tárgyalásában előforduló tétellel, hogy két háromszög kongruens, ha mind a három oldala egyenlő, itt azért szerepel mint bebizonyíthatatlan tétel, mert szerző az idomok kongruencziájának megállapításában csakis a logika identitási elvére támaszkodik, míg mások abból a szerző által a geometria elméleti tárgyalásában teljesen mellőzött hipotézisből indulnak ki, *hogy a szemléleti térben minden idom alakváltozás nélkül változtathatja helyét.*

Rados Ignácz.

(Befejezése következik.)

MEGOLDOTT FELADATOK.

10. *Legyenek*

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

a

$$g(x) = 0$$

n-edfokú egyenlet gyökei; bebizonyitandó, hogy az

$$\begin{vmatrix}
1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^{2n-1} \\
0 & 1 & 2a_1 & 3a_1^2 & \ldots & (2n-1)\,a_1^{2n-2} \\
1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & \ldots & a_2^{2n-1} \\
0 & 1 & 2a_2 & 2a_2^2 & \ldots & (2n-1)\,a_2^{2n-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & \ldots & a_n^{2n-1} \\
0 & 1 & 2a_n & 3a_n^2 & \ldots & (2n-1)\,a_n^{2n-1}
\end{vmatrix}$$

determináns egyenlő a $g(x) = 0$ *egyenlet diszkriminánsának négyzetével.* RADOS G.

*

Első megoldás Grünwald Miksa főreáliskolai tanár úrtól Nagy-Kállón.

Jelöljük az adott determinánst Δ-val, akkor elemeinek képezési törvényét az

$$A_{2k-1\,l} = a_k^{l-1}, \quad A_{2k\,l} = (l-1)\,a_k^{l-2} \qquad 1$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ l = 1, 2, \ldots, n)$$

egyenletek fejezik ki.

Ha Δ_1 az a determináns, a melyet a

$$\frac{g(x)}{x - a_1} = 0$$

egyenlet gyökeiből ugyanazon törvény alapján nyerjük, mint Δ-t a $g(x)=0$ gyökeiből, akkor mindenek előtt kimutatható, hogy Δ osztható Δ_1-gyel. Ennek bebizonyítására írjuk a valójában csak $(2n-2)$-odfokú Δ_1-et $2n$-edfokú determináns alakjában még pedig a következőképpen:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 & \ldots & a_2^{2n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & (2n-3)\,a_2^{2n-4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & a_n & \ldots & a_n^{2n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & (2n-3)\,a_n^{2n-4} \end{vmatrix}$$

és keressük most a $\frac{\Delta}{\Delta_1} = D$ hányadost. E hányadost $2n$-edfokú determináns alakjában nyerhetjük. Legyenek ennek elemei

$$a_{ik} \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n)$$

Ezeknek meghatározása a szorzási tétel alapján a

$$\sum_{\varrho=1}^{2n} B_{p\varrho} a_{q\varrho} = A_{pq} \qquad (p, q=1, 2, \ldots, 2n) \tag{2}$$

$(2n)^2$ számmal lévő egyenletből álló lineár egyenletrendszer áll rendelkezésre, a melyben rövidség okáért a Δ_1 elemeit $B_{p\varrho}$-val jelöltük. Ennek az egyenletrendszernek megoldásával kell most foglalkoznunk.

Minthogy Δ_1 1. és 2. sora a többi sortól alkatában lényegesen különbözik, meg van okolva, ha a $p=1$, 2 eseteket külön tárgyaljuk. Minthogy

$$B_{11}=1 \quad B_{1\varrho}=0, \quad (\varrho>1) \qquad B_{22}=1 \quad B_{2\varrho}=0, \quad (\varrho \gtrless 2)$$

következik, hogy

$$Bx_{q1}=A_{1q} \quad a_{q2}=A_{2q} \qquad (q=1, 2, \ldots, 2n)$$

azaz D első és második oszlopa rendre megegyezik Δ-nak első és második sorával.

A p többi értékeire nézve, minthogy

$$B_{p1}=B_{p2}=0, \quad B_{2k-1\,\varrho}=a_k^{\varrho-3}, \quad B_{2k\,\varrho}=(\rho-3)\,a_k^{\varrho-4}, \qquad (k=2, 3, \ldots, n) \tag{3}$$

2-ből a következő egyenletrendszer adódik ki:

$$\sum_{\varrho=3}^{2n} a_k^{\varrho-3} a_{q\varrho} = a_k^{q-1}, \quad \sum_{\varrho=3}^{2n} (\rho-3)\, a_k^{\varrho-4} a_{q\varrho} = (q-1)\, a_k^{q-2}, \tag{4}$$
$$(k=2, 3, \ldots, n, \; q=1, 2, \ldots, 2n)$$

melyben a második csoport egyenletei az első csoportból differencziálás révén nyerhetők, ha ezekben az a-kat változóknak tekintjük. Ha tehát a

$$\varphi(x) \equiv x^{q-1} - \sum_{\varrho=3}^{2n} a_{q\varrho} x^{\varrho-3} = 0 \tag{5}$$

egyenletet képezzük, ennek

$$a_2, \; a_3, \; \ldots, \; a_n \tag{6}$$

kétszeres gyökei.

Legyen 1) $q < 2n-1$. Ebben az esetben a $\psi(x)$ fokszáma kisebb mint gyöktényezői multiplicitásának összege és ennek következtében az x fogyó hatványai szerint rendezett egyenletben minden egyes együttható egyenlő zérussal. Innen következik, hogy

$$a_{q\,q+2} = 1 \quad a_{q\varrho} = 0$$
$$(q < 2n-1; \; \varrho \gtrless q+2).$$

Legyen 2) $q = 2n-1$, akkor az 5 egyenlet evvel az alakkal bír:

$$f(x) \equiv x^{2n-2} - \sum_{\varrho=3}^{2n} a_{2n-1\,\varrho} x^{\varrho-3} = 0$$

és mivel ez az egyenlet $(2n-2)$-odfokú

$$f(x) \equiv (x-a_2)^2 (x-a_3)^2 \ldots (x-a_n)^2$$

és így az

$$a_{2n-1\,3}, \; a_{2n-1\,4}, \; \ldots, \; a_{2n-1\,2n}$$

elemek mint az a-k elemi szimmetrikus függvényei adódnak ki.

Legyen végre 3) $q = 2n$, ekkor 5-ből lesz

$$\varphi(x) \equiv x^{2n-1} - \sum_{\varrho=3}^{2n} a_{2n\varrho} x^{\varrho-3} = 0,$$

a melynek a 6 sorozatban tartalmazott kétszeres gyökein kívül még egy gyöke van, a mely azon megjegyzés alapján nyerhető, hogy ez egyenlet összes gyökeinek összege egyenlő zérussal. Ha ez a gyök $-s$, akkor

$$\varphi(x) \equiv (x-a_2)^2 (x-a_3)^2 \ldots (x-a_n)^2 (x+s).$$

és így végül megnyerjük az

$$a_{2n\,3},\quad a_{2n\,4},\quad \ldots,\quad a_{2n\,2n}$$

ismeretlenek kifejezéseit az a-kban.

A keresett D determináns tehát a következő:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ a_1^2 & 2a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1^3 & 3a_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ a_1^{2n-3} & (2n-3)\,a_1^{2n-4} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_1^{2n-1} & (2n-2)\,a_1^{2n-3} & a_{2n-13} & a_{2n-14} & \ldots & a_{2n-12n} \\ a_1^{2n-1} & (2n-1)\,a_1^{2n-2} & a_{2n3} & a_{2n4} & \ldots & a_{2n2n} \end{vmatrix};$$

de ez tekintettel a 4 alatti rendszer megoldásaira — átalakítható úgy, hogy első oszlopában az utolsó két elemen, $f(a_1)$-en és $\varphi(a_1)$-en, kívül csakis zérusuk második oszlopában pedig az utolsó két elemen, $f'(a_1)$-en és $\varphi'(a_1)$-en, kívül ismét csakis zérusuk tartalmaztassanak. Az ekként egyszerűsített determináns kiszámítása a következő egyenletre vezet:

$$\begin{aligned} D &= f(a_1)\,\varphi'(a_1)-\varphi(a_1)\,f'(a_1)=[f(a_1)]^2\,\frac{d}{da_1}\left[\frac{\varphi(a_1)}{f(a_1)}\right] \\ &= [f(a_1)]\,\frac{d}{da_1}\,(a_1+s)=[f(a_1)]^2 \\ &= [(a_1-a_2)^2\,(a_1-a_3)^2\ldots(a_1-a_n)^2]^2. \end{aligned}$$

Ezzel a tétel velejében már be van bizonyítva, mert ezzel $\varDelta$-nak kiszámítására rekurziv eljárást nyertünk, a melynek alapján $\varDelta$ csakugyan mint a $g(x)=0$ egyenlet dekriminánsának négyzete adódik ki.

*

Második megoldás dr. Beke Manó főreáliskolai tanár úrtól Budapesten.

Legyen az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gyökökkel biró egyenlet részletesen kiírva:

$$g(x)\equiv x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$$

Szorozzuk meg a feladatban foglalt determinánst egy oly $2n$-edfokú determinánssal, a melynek minden diagonális eleme: 1 és melynek első n

sorában a még le nem foglalt helyeken 0 áll, következő n sorában pedig a diagonális elem előtt rendre a következő elemek állanak:

$$a_n, \quad a_{n-1}, \quad a_{n-2}, \ldots, \quad a,$$

míg a többi helyek ismét 0-okkal vannak kitöltve. Ez a determináns kiírva a következő:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & . \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

E determináns értéke, mint könnyen belátható: 1.

A két determináns szorzását úgy végezzük, hogy a szorzat i-dik sorának k-dik elemét a feladatban foglalt determináns i-dik sorából és ez utóbbi determináns k-dik sorából komponáljuk.

A szorzatban az első sor a következő lesz:

$$1, \; a_1, \; a_1^2, \ldots, \; a_1^{n-1}, \; g(a_1), \; a_1 g(a_1) \ldots a_1^{n-1} g(a_1)$$

vagy, tekintetbe véve, hogy a_1 gyöke a $g(x) = 0$ egyenletnek, e sor:

$$1, \; a_1, \; a_1^2, \ldots, \; a_1^{n-1}, \; 0, \; 0, \ldots, 0.$$

A szorzat második sorában az első n elem lesz:

$$0, \; 1, \; 2a_1, \ldots, \; (n-1)\, a_1^{n-1}$$

a következő elem részletesen kiírva:

$$a_{n-1} + 2a_{n-2}a_1 + 3a_{n-3}a_1^2 + \ldots \, na_1^{n-1}.$$

Ez pedig nem más, mint: $g'(a_1)$. A következő, vagyis $(n+2)$-ik elem részletes alakja:

$$a_n + 2a_{n-1}a_1 + 3a_{n-2}a_1^2 + \ldots + (n+1)\, a_1^n$$

Ez pedig nem más, mint:

$$\left\{\frac{d\,[xg(x)]}{dx}\right\}_{x=a_1}$$

vagy a differencziálást elvégezvén, lesz:

$$[g(x) + xg'(x)]_{x=a_1} = a_1 g'(a_1).$$

A második sor $(n+3)$-ik eleméről ugyanezen az uton mutathatjuk meg, hogy az $a_1^2 g'(a_1)$; s általában az $(n+i+1)$-ik eleme: $a_1^i g'(a_1)$ s így a második sor:

$$0,\ 1,\ 2a_1, \ldots, (n-1)\,a_1^{n-1},\ g(a_1),\ a_1 g'(a_1),\ a_1^2 g'(a_1), \ldots, a_1^{n-1} g'(a_1).$$

Általában a szorzat $(2k-1)$-ik sora lesz:

$$1,\ a_k,\ a_k^2, \ldots, a_k^{n-1},\ 0,\ 0, \ldots, 0$$

és $2k$-dik sora:

$$0,\ 1,\ 2a_k, \ldots, (n-1)\,a_k^{n-2},\ g'(a_k),\ a_k g'(a_k), \ldots, a_k^{n-1} g'(a_k).$$

Ha már most a determináns sorait úgy cseréljük fel, hogy az első után jőjjön a harmadik, ez után az ötödik stb., a mostani $2n$-ik után a második, ez után a negyedik és í. t., akkor a determináns, mely e felcserélés közben a jelét nem változtatja, a következő alakot ölti:

$$\begin{vmatrix}
1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
. & . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & . \\
1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & 2a_1 & \ldots & (n-1)\,a_1^{n-2} & g'(a_1) & a_1 g'(a_1) & \ldots & a_1^{n-1} g'(a_1) \\
0 & 1 & 2a_2 & \ldots & (n-1)\,a_2^{n-2} & g'(a_2) & a_2 g'(a_2) & \ldots & a_2^{n-1} g'(a_2) \\
. & . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & . \\
0 & 1 & 2a_n & \ldots & (n-1)\,a_n^{n-1} & g'(a_n) & a_n g'(a_n) & \ldots & a_n^{n-1} g'(a_n)
\end{vmatrix}.$$

Ha e determinánst Laplace tétele szerint fejtjük ki, akkor ezt két determináns szorzata gyanánt állíthatjuk elő ez alakban:

$$\begin{vmatrix}
1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\
1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-1} \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & \ldots & . \\
1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1}
\end{vmatrix} \cdot
\begin{vmatrix}
g'(a_1) & a_1 g'(a_1) & \ldots & a_1^{n-1} g'(a_1) \\
g'(a_2) & a_2 g'(a_2) & \ldots & a_2^{n-1} g'(a_2) \\
 & & & \\
 & & & \\
g'(a_n) & a_n g'(a_n) & \ldots & a_n^{n-1} g'(a_n)
\end{vmatrix}.$$

A második tényező első sorából kiemelhetjük $g'(a_1)$-t, második sorából $g'(a_2)$-t stb.; a szorzat akkor lesz:

$$g'(a_1)\,g'(a_2)\dots g'(a_n)\begin{vmatrix}1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1}\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}^2 = [g'(a_1)\,g'(a_2)\dots g'(a_n)]^2,$$

de ez a $g(x)=0$ egyenlet diszkriminánsának négyzete és így ezzel a feladatban tartalmazott tétel teljesen be van bizonyítva.

*

Harmadik megoldás Klimkó Mihály felsőbb leányiskolai tanár úrtól Lőcsén.

Vonjuk ki az adott determináns első sorát a páratlan rendszámú sorokból, a második sorát a páros rendszámú sorokból, akkor a $(2k-1)$-ik és $2k$-ik ($k=2, 3, \dots, n$) sorokból az (a_k-a_1) tényezők szabaddá válnak, ha ezeket kiemeljük az adott $\varDelta$ determináns lesz:

$$\varDelta=\begin{vmatrix}1 & 2a_1 & 3a_1^2 & \dots & ia^{i-1} & \dots\\ 1 & a_2+a_1 & a_2^2+a_2a_1+a_1^2 & \dots & a_2^{i-1}+a_2^{i-2}a_1+\dots+a_1^{i-1} & \dots\\ 0 & 2 & 3(a_2+a_1) & \dots & i(a_2^{i-2}+a_2^{i-3}a_1+\dots+a_1^{i-2})\dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & a_k+a_1 & a_k^2+a_ka_1+a_1^2 & \dots & a_k^{i-1}+a_k^{i-2}a_1+\dots+a_1^{i-1} & \dots\\ 0 & 2 & 3(a_k+a_1) & \dots & i(a_k^{i-2}+a_k^{i-3}a_1+\dots+a_1^{i-2})\dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{vmatrix}\prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)^2.$$

Ebben az új determinánsban az első sort vonjuk ki a páros helyen álló sorok mindegyikéből és emeljük ki újból a szabaddá vált (a_k-a_1) ($k=2, 3, \dots, n$) tényezőket, akkor $\varDelta$ a következő alakot ölti fel:

$$=\begin{vmatrix}1 & a_2+2a_1 & a_2^2+2a_2a_1+3a_1^2 & \dots & a_2^{i-2}+2a_2^{i-3}a_1+\dots+(i-1)a_1^{i-2} & \dots\\ 2 & 3(a_2+a_1) & 4(a_2+a_2a_1+a_1^2) & \dots & i(a_2^{i-2}+a_2^{i-3}a_1+\dots+a_1^{i-2}) & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & a_k+2a_1 & a_k^2+2a_ka_1+3a_1^2 & \dots & a_k^{i-2}+2a_k^{i-3}a_1+\dots+(i-1)a_1^{i-2} & \dots\\ 2 & 3(a_k+a_1) & 4(a_k^2+a_ka_1+a_1^2) & \dots & i(a_k^{i-2}+a_k^{i-3}a_1+\dots+a_1^{i-2}) & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{vmatrix}\prod_{r=2}^{n}(a_r-a_1)^3.$$

Ha a most nyert determinánsban az első sor 2-szeresét kivonjuk a páros helyen álló sorokból és ezután az $(a_k - a_1)$-et $(k = 2, 3, \ldots, n)$ tényezőket újból kiemeljük, oly determinánshoz jutunk, melyben, ha az első oszlopot megszorozzuk, rendre a

$$2a_1,\ 3a_1^2,\ 4a_1^3,\ \ldots,\ (i-1)\,a_1^{i-2},\ \ldots$$

tényezőkkel és rendre a 2., 3., ..., $(i-1)$-ik ... oszlopból kivonjuk, továbbá a most nyert determináns második oszlopának $2a_1, 3a_1^2, \ldots, (i-2)\,a_1^{i-3}$-szorosát ... rendre a 3., 4., ... $(i-1)$-ik ... oszlopból kivonjuk etc. a következő eredményre jutunk:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{2n-3} \\ 0 & 1 & 2a_2 & \ldots & (2n-3)\,a_2^{2n-4} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{2n-3} \\ 0 & 1 & 2a_3 & \ldots & (2n-3)\,a_3^{2n-4} \\ . & . & . & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{2n-3} \\ 0 & 1 & 2a_n & \ldots & (2n-3)\,a_n^{2n-4} \end{vmatrix} \cdot \prod_{k=2}^{n} (a_k - a_1)^4\,;$$

de ezzel Δ meghatározására oly rekurziv képlet birtokába jutottunk, a melynek ismételt alkalmazása révén a feladatban tartalmazott tétel helyessége közvetetlenül lép evidencziába.

Egészen hasonló megoldást beküldött még dr. SUTÁK JÓZSEF főgymnásiumi tanár úr is. *Szerk.*

*

Negyedik megoldás Szabó Péter okl. tanárjelölt úrtól Berlinben.

A feladat megoldására első sorban, oly lineár egyenletrendszert írunk föl, a melyhez a meghatározandó determináns, mint a rendszer determinánsa tartozzék.

Irjuk a $g(x) = 0$ egyenletet a

$$g(x) \equiv x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1x + a_0 = 0$$

alakban; ha ugyanis x^n együtthatója az egységtől különböző volna, osszunk vele előzetesen. Négyzetre emelvén $g(x)$-et, jelöljük:

$$(g(x))^2 \equiv F(x)$$

és legyen

$$F(x) \equiv x^{2n} + c_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + c_1x + c_0,$$

hol $c_{2n-1}, c_{2n-2}, \ldots, c_0$ az $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ együtthatóknak másodfokú egész függvényei. Ezeknek részletes alakja könnyen felírható, azonban a továbbiakban nincsen reájuk szükségünk.

Mivel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ az $F(x)=0$ egyenletnek kettős gyökei, ezek egyidejüleg kielégítik az

$$F(x)=0, \quad F'(x)=0$$

egyenleteket, hol F' mint rendesen F első deriváltját jelöli. Irjunk ezekbe egyenletekbe egymásután x helyére $x=a_1, a_2, \ldots, a_n$, és vigyük át a legmagasabb hatványt az egyenlet jobb oldalára, akkor a következő rendszert nyerjük:

$$\begin{aligned}
&1.c_0+a_1c_1+a_1^2c_2+\ldots+a_1^{2n-1}c_{2n-1}=-a_1^{2n}\\
&0.c_0+1.c_1+2a_1c_2+\ldots+(2n-1)\,a_1^{2n-2}c_{2n-1}=-2na_1^{2n-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&1.c_0+a_kc_1+a_k^2c_2+\ldots+a_k^{2n-1}c_{2n-1}=-a_k^{2n}\\
&0.c_0+1.c_1+2a_kc_2+\ldots+(2n-1)\,a_k^{2n-2}c_{2n-1}=-2na_k^{2n-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&1.c_0+a_nc_1+a_n^2c_2+\ldots+a_n^{2n-1}c_{2n-1}=-a_n^{2n}\\
&0.c_0+1.c_1+2a_nc_2+\ldots+(2n-1)\,a_n^{2n-2}c_{2n-1}=-2na_n^{2n-1}
\end{aligned} \tag{1}$$

Ez az egyenletrendszer a c_i együtthatókban lineár. Mivel ezeknek száma, $2n$, az egyenletek számával megegyezik, kiszámíthatók mint az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ függvényei, ha a rendszer determinánsa

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_n)=\begin{vmatrix}
1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^{2n-1}\\
0 & 1 & 2a_1 & 3a_1^2 & \ldots & (2n-1)a_1^{2n-2}\\
\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \ldots\ldots\\
1 & a_k & a_k^2 & a_k^3 & \ldots & a_k^{2n-1}\\
0 & 1 & 2a_k & 3a_k^2 & \ldots & (2n-1)a_k^{2n-2}\\
\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \ldots\ldots\\
1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & \ldots & a_n^{2n-1}\\
0 & 1 & 2a_n & 3a_n^2 & \ldots & (2n-1)a_n^{2n-2}
\end{vmatrix} \tag{2}$$

nem zérus. A míg a $2n$ egyenlet egymástól független $D \gtreqless 0$; de a mint az (1) rendszer alakjából következik, áll ez az eset mindaddig, a míg az a_k-k között egyenlők nincsenek. Tehát D *akkor és csakis akkor zérus, ha az* *a-k között egyenlők fordulnak elő.* D-nak további sajátsága, hogy az *a-kban szimmetrikus.* Ez onnan következik, hogy ha a_i helyére a_k lép mindig két-két sor helyet cserél, a mi végeredményben a sorok páros számú felcserélésére vezet, úgy hogy D az a_k-k tetszőleges felcserélésénél sem előjelét, sem értékét nem változtatja.

A D fokszáma az a-kban összesen:

$$4[0+1+2+\ldots+(n-1)]=2n(n-1),$$

a mit nyerünk, ha az átlói tag dimenzióját meghatározzuk. Minden egyes a-ban a dimenzió $4(n-1)$, és D minden egyes a-nak egész függvénye. E tulajdonságokból fontos következtetéseket vonhatunk le, a melyek megengedik a D értékének meghatározását.

Tekintsük D-t egy pillanatra mint a_n függvényét;

$$D=0$$

lesz, ha

$$a_n=a_{n-1},\ a_n=a_{n-2},\ \ldots,\ a_n=a,$$

és pedig csakis ezek lesznek a különböző zérus-helyek a_n-ra vonatkoztatva. Azonban D a_n-ben $4(n-1)$-ső fokú egész függvény, tehát az algebra alaptétele szerint van $4(n-1)$ zérushelye. De a különböző zérushelyek száma $n-1$, tehát a zérushelyek között okvetetlenül vannak többszörösök; azonkívül D az $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$-nek is szimmetrikus függvénye lévén, ha az egyik zérus-hely λ-szoros, a többi is az; tehát

$$\lambda(n-1)=4(n-1),$$

honnan $\lambda=4$. Ennélfogja D írható:

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_n)=\{(a_1-a_n)(a_2-a_n)\ldots(a_{n-1}-a_n)\}^4 D' \qquad 3$$

alakban. Azonban D' a_n-től független, mert az első szorzó a jobb oldalon a_n-ben $4(n-1)$-sőfokú. Mivel e kifejezés identitás, kell hogy $a_n^{4(n-1)}$ szorzója a jobb és baloldalon ugyanaz legyen. De a (2)-ből kiolvasható, ha D-t a LAPLACE-féle tétel szerint $2n-2$ és 2-odrendű adjungált determinánsok szorzatainak összegeként állítjuk elő, hogy

$$D'=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{2n-3} \\ 0 & 1 & 2a_1 & \ldots & (2n-3)a_1^{2n-4} \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{2n-3} \\ 0 & 1 & 2a_{n-1} & \ldots & (2n-3)a_1^{2n-4} \end{vmatrix};$$

vagy a (2) alatti jelöléssel:

$$D' = D(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}). \qquad 4$$

hol D hasonló módon alakított determináns mint (2) csakhogy most $n-1$ gyökkel. De $D(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$-re a 3 formula újra alkalmazható, ha a_n helyére a_{n-1}-et írunk, és azután tovább egészen $D(a_1)$-ig, úgy hogy a következő rekurrens képletsort nyerjük:

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_n)^4 . \; D(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$$

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-2} (a_i - a_{n-1})^4 . \, D(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$$

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \prod_{i=1}^{n-k} (a_i - a_{n-1})^4 . \, D(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D(a_1, a_2) = (a_2 - a_1)^4 . \; D(a_1).$$

Azonban $D(a_1) = 1$ és az egyenletek összeszorzása és röviditése a következő egyenletet adja:

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{i,k=1}^{n} (a_i - a_k)^4 \qquad (i < k)$$

de az egyenlet diszkriminánsa:

$$R = \prod_{i,k=1}^{n} (a_i - a_k)^2 \qquad (i < k)$$

úgy hogy valóban:

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_n) = R^2 \qquad 4$$

a mi bizonyítandó volt.

*

Ötödik megoldás Bauer Mihály műegyetemi hallgató úrtól.

Vegyük tekintetbe a következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{2n-1} \\ 1 & a_1+h & (a_1+h)^2 & \ldots & (a_1+h)^{2n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{2n-1} \\ 1 & a_2+h & (a_2+h)^2 & \ldots & (a_2+h)^{2n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{2n-1} \\ 1 & a_n+h & (a_n+h)^2 & \ldots & (a_n+h)^{2n-1} \end{vmatrix} = D'. \qquad \text{I.}$$

Ez a determináns, mint ismeretes, még a következőképen fejezhető ki.

$$D' = h^n \prod_{i,k} (a_i - a_k)^2 \prod_{i,k} [(a_i - a_k)^2 - h^2] \qquad \text{II}$$
$$(i > k;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

Azonban a D' még másképen is írható. Ha erre nézve tekintetbe veszszük, hogy a determináns értéke nem változik, ha két sorának elemeit egymásból rendre levonjuk, akkor D' ekként alakítható át:

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{2n-1} \\ 0 & h & (a_1+h)^2 - a_1^2 & \ldots & (a_1+h)^{2n-1} - a_1^{2n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{2n-1} \\ 0 & h & (a_n+h)^2 - a_n^2 & \ldots & (a_n+h)^{2n-1} - a_n^{2n-1} \end{vmatrix} \qquad \text{III.}$$

A II. és III. alatti egyenletek egybevetéséből ered:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{2n-1} \\ 0 & 1 & \frac{(a_1+h)^2 - a_1^2}{h} & \ldots & \frac{(a_1+h)^{2n-1} - a_1^{2n-1}}{h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{2n-1} \\ 0 & 1 & \frac{(a_n+h)^2 - a_n^2}{h} & \ldots & \frac{(a_n+h)^{2n-1} - a_n^{2n-1}}{h} \end{vmatrix} = \prod_{i,k} (a_i - a_k)^2 \prod_{i,k} [(a_i - a_k)^2 - h^2] \qquad \text{IV.}$$
$$(i > k;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

A IV. alatti egyenlőség fennáll h-nak tetszésszerinti értékeinél. Fenn fog állani tehát akkor is, ha h helyébe egymásután a

$$h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n,\ \ldots,\ \lim h_n = 0$$

sorozat elemeit teszszük s ha végre a határra áttérünk.

De mivel determináns határértéke az elemek határértékének determinánsával és szorzat határértéke a tényezők határértékének szorzatával egyenlő, a határon a IV.-ből lesz :*

* E határátmenet nem okvetetlenül szükséges ; ha ugyanis a determináns elemeiben kijelölt osztást a h-val tényleg elvégezzük, akkor a nyert hányadosban már a $h = 0$ helyettesítés tisztán algebrai úton vezet a kivánt eredményre.
Szerk.

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{2n-1} \\ 0 & 1 & 2a_1 & \ldots & (2n+1)\, a_1^{2n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = \prod_{i,k} (a_i - a_k)^4 \quad \text{V.}$$

$$(i > k;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Azonban az algebra elemeiből ismeretes, hogy

$$\prod_{i,k} (a_i - a_k)^2 = D$$

$$(i > k;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

Ha ezt az értéket V. egyenletbe betesszük, megvan a tétel keresett bebizonyítása.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

A középponti mozgás igen egyszerű kisérlete. Ha forgó mozgásban levő valamely testnek tebetetlenségi nyomatéka bármely oknál fogva kisebbedik, a test nagyobb szögsebességű forgásnak indul. E tétel kimutatására szolgálhat a következő igen egyszerű kisérlet. Egy czérnaszál közepére akármilyen kicsiny súlyos testet, például egy fémgombot kötünk; a szál két végét egy-egy kezünk ujjai között tartva a ki nem feszített szálat addig lóbáljuk, míg a gomb lassú és egyenletes körülforgásokat végez. A mint most kezeinket, a szál további lóbálása nélkül, egymástól távolabb visszük, úgy hogy a szál forgása közben leirt kettős kúp mindinkább hegyes szögű legyen, a gomb forgási sebessége szemlátomást növekszik, és pedig mindaddig növekszik, míg a szál torziójának ellenkező hatása túlnyomóvá nem válik. *Czógler.*

*

A lövegek lengő mozgása. A porosz tüzérség cummersdorfi lövőterén NEESEN-től eredő igen érdekes módszerrel vizsgálták a kilőtt ágyúlövegek lengő mozgását. A löveg belsejében, a tengelyre merőleges irányban photographáló lemez volt megerősítve; a löveg csúcsán 0·5 mm. átmérőjű nyilás volt. Az ágyú egyenesen a napnak irányoztatott s így a kis nyiláson behatoló fénysugarak a lemezen a napnak kis képét rajzolták le. A löveg tehát valóságos repülő camera obscura volt. Az ágyú elsüttetvén, a nap kis képe ellipsziseket írt le a lemezkén, melyek pontjainak a kép közepétől való eltéréséből s a lemeznek a nyilástól mért távolságából kiszámítható a löveg tengelye s a napsuparak által bezárt szög. A löveg 15 cm.

hosszú és 39·5 kgr. súlyú volt; a kezdő sebesség 200 $\frac{m}{mp}$. — A kis nyiláson keresztül behatoló diffus napfény a rajzokat nem rontotta, pedig gyakran megtörtént, hogy egy-egy golyó hosszú ideig hevert a földön. Az egyik lemezen a környező erdőnek egy részlete rajzolódott le, a löveg mozgása közben leírt görbékkel behálózva. — A lövegek repülésére vonatkozó következtetéseknél a physikus előtt érdekesebb maga az alkalmazott *módszer*, mely igen hasznavehetőnek igérkezik a relativ mozgások rögzítésében.

(*Verhandl. d. phys. Ges. zu Berlin 11. Jahrg. 781. lap. Ann. d. Phys.* XLVIII. kötetének mellékletén.)

*

Capillaris úszó. Az úszó bádogkúpból áll; a kúp alapkörének átmérője 9 cm., magassága 4 cm. A kúp csúcsához erősített drót vagy fonál nehezéket hord. A kúpot — csúcsával lefelé — nagyobb edényben, pl. dézsában levő víz felületére helyezvén, úgy terhelendő, hogy lehetőleg az alapkörig alámerüljön. Ekkor a víz felhajtó ereje a kúp súlyával és a kúp oldalfelületén felhuzódó víz felületi feszültségével egyensúlyt tart. Kevés szappanvizet, alkoholt, æthert, olajat vagy meleg vizet öntvén a felületre, az uszó 1—3 cmnyivel kiemelkedik, szembetünően mutatván ezzel a felületi feszültségnek csökkenését.

(*V. d. Mennsbrughe, Ann. Soc. Sc. de Bruxelles,* 16 köt.)

*

A felületi feszültség kisebbedését a következő egyszerű kisérlet is megmutatja. Selyemszálból hurkot kötünk s vízfelületre vetjük. Ha a huroktól befogott vízfelületet meleg vízbe, olajba, ætherbe, szappanvízbe stb. megmártott pálczikával érintjük, a hurok nyomban körré huzódik szét. Nyilvánvaló, hogy a hurkon kívül álló tiszta vízfelület nagyobb felületi feszültsége húzta széjjel.

*

Az elektromos áram æquipotentialis vonalainak feltüntetése. Az áramgörbékre merőlegesen vonuló æquipotentialis vonalak tudvalevőleg az áramhoz tartozó mágnesi erővonalakkal egybeesnek. Lommel erős áramot vezet sima felületű sík lemezeken keresztül, behinti vas reszelékkel, mely az æquipotentialis vonalak mentén szép rajzba rendezkedik. — A lemezt mágnesi térbe helyezvén, a mágnesi görbék helyzetöket megváltoztatják s velök a reájuk merőleges áramgörbék is. Ez volna Lommel szerint a Hall-féle tüneménynek legegyszerűbb szemléltetése és magyarázata.

Ann. d. Phys. XLVII. 766. l.

TÁRSULATI ÜGYEK.

A választmány f. é. márczius hó 2-án tartott ülésén dr. Fröhlich Izidor v. tag egy indítványát fogadta el, mely megokolásával együtt a következő:

Ezennel indítványozom, hogy a Math. és Phys. Társulat választmánya tegye meg a kezdeményező lépéseket és intézkedéseket arra nézve, hogy a *mathematikai és physikai tudományok régebbi, 1850-ig terjedő hungaricumai a Társulat számára beszereztessenek s igy a Társulat kebelében felállitandó ily hungaricumok gyűjteményének alapja vettessék.*

I. Jól tudom, hogy a M. N. Múzeum, a M. T. Akadémia, a hazai egyetemi könyvtárak-, a K. M. Természettudományi Társulat könyvtára s í. t. egyes osztályaiban az összes tudományok, vagy legalább nagyszámú tudomány-ág hungaricumait őrzik; s ha ennek daczára indítványomat a választmány elé terjeszteni bátorkodom: erre többek között a következő okok indítanak.

1. Indítványom elfogadásával a Társulat egyrészt kifejezést ad annak a kegyeletnek és tiszteletnek, melylyel ez országban vagy ezen kívül e terén fáradott, többnyire kedvezőtlen sőt ellenséges viszonyok között működött honfitársaink sorából kikerült szakelődeink iránt viseltetünk. Elegendő, ha itt Fröhlich Dávid, Segner András, Hell Miksa, Dugonics András, Horvát János B., Varga Márton, Pasquich János, Bólyai Farkas, Tarczy Lajos, Vállas Antal, Győry Sándor, Kerekes Ferencz neveit említem.

2. Másrészt evvel erkölcsi kötelességet teljesítünk magunk és a fiatalabb tudományos nemzedék iránt, mert hiszen minden tudományos szaktársulat egyik főfeladata a *saját körébe tartozó hazai irodalom folytonossága* tudatának ébrentartásában áll, a mit a régebbi hazai irodalmi szaktermékek gyűjtése, megőrzése, de kivált könynyen hozzáférhetővé tevésével és ismertetésével érhet el; hogy a múltból nemcsak bizalmat meríthessünk a jövő tudományos működés iránt, hanem hogy evvel a tudomány-ágaknak magyarországi története egykori megírására a talajt előkészítsük, sőt hogy a régi műszavak tekintetbe vételével a jelenleg még ingadozó math. physikai műnyelvünknek talán még használjunk.

3. Indítványom a Társulat alapszabályaiba nem ütközik, sőt ezek 3. §-a

c) és *d)* pontjaival megegyezik, melyek ugyanis a Társulat eszközei között könyvtárt és gyűjteményeket sorolnak fel.

II. Ha a választmány indítványomat tárgyalásra méltatná: ennek foganatosítására nézve legyen szabad megjegyeznem, hogy miután csak *kezdeményező* lépések megtevéséről van szó: ezeket semmiféle költséggel nem járóknak és a következőkből állóknak gondolnám:

1. Intézzen a Math. Phys. Társulat átiratot a M. N. Múzeumhoz, a M. T. Akadémiához, a hazai egyetemi könyvtárakhoz, az Erdélyi Múzeumegylethez, a kir. m. Természettudományi Társulathoz s í. t. megkérvén a nevezett országos intézeteket és Társulatokat, hogy a birtokukban lévő 1850-ig terjedő math. physikai hungaricumaik kettős vagy többszörös példányai egyikét, illetve kiadványaik egy-egy példányát Társulatunknak engedjék át, a mit ezen testületek, tekintettel a tudományos czélra, bizonyára nem fognak megtagadni.

2. Tegyen közzé a Társulat pl. a Math.-Phys. Lapokban Tagtársainkhoz intézett ily tárgyú felszólítást és kérelmet: kétségtelen, hogy Tagtársaink kipróbált ügybuzgósága sok érdekes hungaricum birtokába fogja juttatni Társulatunkat.

*

Midőn az indítványt ezennel közzéteszszük, kérjük t. Tagtársainkat, hogy minket az indítvány intentiónak valósításában tapasztalt buzgalmukkal támogatni szíveskedjenek.

A
$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$
PÁRCZIÁLIS DIFFERENCZIÁLEGYENLET INTEGRÁLÁSA AMPÈRE SZERINT.

A két független változót tartalmazó másodrendű párcziális differencziálegyenletekre vonatkozó vizsgálatok még egy negyed század előtt majdnem kizárólagosan az r, s, t és $(rt-s^2)$-ban lineár egyenletekre szorítkoztak. E régibb búvárlatok közűl különösen Ampère-éi * nevezetesek; jelentősségüket az újabb, immár tetszőleges alakú egyenletekre vonatkozó irodalom csak növelte, a mennyiben Darboux-nak ** e téren úttörő értekezése épen Ampère gondolatainak természetszerű általánositását tartalmazza. Érdemes munkára vélünk tehát vállalkozni annak ismertetésével, miként hozza Ampère kapcsolatba a mondott alakú párcziális differencziálegyenlet megoldását a totál differencziálegyenletek egy oly rendszerével, melyben az ismeretlen függvények száma nagyobb mint az adott egyenleteké.

1. Az integrálandó

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0 \tag{1}$$

másodrendű párcziális differencziálegyenletben a H, K, L, M és N együtthatók az x, y független változókat, a z meghatározandó függvényt, végre a p és q elsőrendű differencziálhányadosokat tar-

---

* Journal de l'École polytechnique, t. X, XI; 1815, 1820.

** Annales scientifiques de l'École normal sup., t. VII; 1870. Német fordításban megjelent mint Mansion a párcz. diff. egyenletekről irt művének III. függeléke (Berlin, Springer, 1892). U. o. a II. függelék a tárgyunkra vonatkozó régibb vizsgálatokat tartalmazza Imschenetsky feldolgozásában.

talmazó kifejezések; továbbá r, s és t a másodrendű differencziálhányadosok.

Ha most x és y helyett x és y_0-t választjuk új független változóknak, hol y_0 az x és y valamely függvényét jelenti, akkor a régi független változók szerint és az újak szerint képezett differencziálhányadosok közt a következő egyenletek állanak fenn:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial y_0}=q\frac{\partial y}{\partial y_0} &&\frac{\partial p}{\partial y_0}=s\frac{\partial y}{\partial y_0} &&\frac{\partial q}{\partial y_0}=t\frac{\partial y}{\partial y_0}\\
&\frac{\partial z}{\partial x}=p+q\frac{\partial y}{\partial x} &&\frac{\partial p}{\partial x}=r+s\frac{\partial y}{\partial x} &&\frac{\partial q}{\partial x}=s+t\frac{\partial y}{\partial x}
\end{aligned}
$$

Az utolsó egyenletből

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2&=s^2+2st\frac{\partial y}{\partial x}+t^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\\
&=t\left(r+2s\frac{\partial y}{\partial x}+t\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)-(rt-s^2),
\end{aligned}
$$

a honnan

$$
rt-s^2=\left(r+2s\frac{\partial y}{\partial x}+t\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)-\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2.
$$

Továbbá (2) alatti utolsó két egyenlet értelmében

$$
s=t\frac{\partial q}{\partial x}-t\frac{\partial y}{\partial x}
$$

$$
r=\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}+t\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2
$$

Ezek szerint az adott (1) egyenlet így írható:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&t\left[(H+Nt)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2(K-Ns)\frac{\partial y}{\partial x}+L+Nr\right]+\\
&+H\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)+2K\frac{\partial q}{\partial x}+M-N\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2=0.
\end{aligned}
$$

Tehát az x, y és y_0 közötti kapcsolatot bárhogyan állapitsuk is meg, az (1) alatti egyenlet integrálása azonos feladat azzal, hogy p, q, r, s és t a (2) és (3) alatti egyenleteknek megfelelően mint x és y_0 függvényei meghatározandók. Valóban a két integráczió-probléma bármelyikét megoldván, csak a független változókat kell megváltoztatnunk, hogy a másik feladat is meg legyen oldva.

2. Az x, y és y_0 közötti kapcsolat általában, azaz kivételes eseteket mellőzve, úgy választható, hogy a (3) alatti egyenlet első része elmaradjon.* Ugyanis (1)-nek bármely megoldását téve 2 helyébe, a

$$(H+Nt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2(K-Ns)\frac{dy}{dx}+L+Nr=0$$

egyenlet (feltéve, hogy $H+Nt$ nem zérus) másodfokú totál differencziálegyenlet. Ezt integrálván s bármelyik

$$F(x, y)=C$$

integráljában C helyébe y_0-t irván, az igy nyert

$$F(x, y)=y_0$$

egyenlet valóban oly kapcsolatot állapit meg x, y és y_0 között, hogy (1)-nek szóban forgó megoldására vonatkozólag

$$(4)\qquad (H+Nt)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2(K-Ns)\frac{\partial y}{\partial x}+L+Nr=0.$$

Ez az egyenlet még a következő alakban is írható

$$\left[(H+Nt)\frac{\partial y}{\partial x}-(K-Ns)\right]^2-(K^2-HL+MN)=0,$$

ha t. i. (4)-t $(H+Nt)$-vel szorozzuk s azután (1)-nek N-szeresét kivonjuk. Ha még tényezőkre bontunk, akkor

$$(5)\qquad (H+Nt)\frac{\partial y}{\partial x}-(K-Ns)-\sqrt{G}=0$$

és

$$(5^*)\qquad (H+Nt)\frac{\partial y}{\partial x}-(K-Ns)+\sqrt{G}=0$$

egyenletek szorzatát nyerjük, hol

$$G=K^2-HL+MN.$$

* Csakhogy e kapcsolat (1) minden megoldására általában más és más.

Az (1) alatti egyenlet integrálását tehát még a következő feladattal pótolhatjuk:

y, z, p, q, r, s és t a (2), (3) és az (5) vagy (5*) egyenleteknek megfelelőleg mint az x és y_0 változók függvényei meghatározandók.

3. A felsorolt egyenletekből álló rendszer most még rendezhető. A (2) alatti második egyenletből s-t az utolsó egyenlet segítségével, a nyert egyenletből pedig t-t

$$\frac{\partial q}{\partial y_0} = t\frac{\partial y}{\partial y_0}$$

segítségével eliminálhatjuk. Leszen

$$\frac{\partial p}{\partial y_0} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y_0}.$$

Ez az egyenlet pótolhatja a (2) alatti második egyenletet.

Továbbá (5) illetve (5*) egyenlet a (2) alatti utolsó egyenlet értelmében így írható:

$$H\frac{\partial y}{\partial x} + N\frac{\partial q}{\partial x} - K \mp \sqrt{G} = 0.$$

Végre (3) az x, y és y_0 között megállapított kapcsolat folytán a következőre redukálódik:

$$H\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right) + 2K\frac{\partial q}{\partial x} + M - N\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

vagy (5) illetve (5*) új alakját $\frac{\partial q}{\partial x}$-szel szorozva és hozzáadva.

$$H\frac{\partial p}{\partial x} + (K \mp \sqrt{G})\frac{\partial q}{\partial x} + M = 0$$

Ezek szerint az y_0, x, y, z, p, q, r, s és t kapcsolatát a következő egyenletek állapítják meg:

$$\text{(I).}\qquad \begin{aligned} &H\frac{\partial y}{\partial x} + N\frac{\partial q}{\partial x} - K \mp \sqrt{G} = 0 \\ &H\frac{\partial p}{\partial x} + (K \mp \sqrt{G})\frac{\partial q}{\partial x} + M = 0 \\ &\frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x} \end{aligned}$$

továbbá

(II.)
$$\frac{\partial z}{\partial y_0} = q\frac{\partial y}{\partial y_0}$$
$$\frac{\partial p}{\partial y_0} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial q}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x}$$

és végre

(III.)
$$\frac{\partial q}{\partial y_0} = t\frac{\partial y}{\partial y_0}$$
$$\frac{\partial q}{\partial x} = s + t\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial p}{\partial x} = r + s\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Feladatunk ezzel három lépésre van visszavezetve.

1) (I) alatt, kivéve ha $\sqrt{G} = 0$, két külömböző egyenletrendszer áll a szerint, a mint $\sqrt{G}$ a felső vagy alsó előjellel vétetik. E rendszerek mindegyike *totális* differencziálegyenletnek tekinthető, melyben x a független változó és y, z, p, q az ismeretlen függvények. Ugyanis e rendszerben maga y_0, valamint y_0 szerint képezett differencziálhányados nem fordul elő. Az első lépés e totális differencziálegyenlet-rendszerek egyikének integrálását kivánja. Az y_0 változó itt csak az integrálásnál fellépő határozatlan mennyiségekben szerepel, még pedig egyelőre egészen tetszésünk szerint.

2) Most már az előbb nyert integrálegyenletekben határozatlan elemeket úgy kell mint y_0 függvényeit megszabni, hogy a (II) rendszer is ki legyen elégítve.

3) A t, s, r mennyiségek meghatározására a (III) alatti egyenletek szolgálnak.

4. Az utolsó lépés elemi műveletekkel tehető meg, sőt egészen el is maradhat, hisz r, s és t nem is érdekel bennünket.

Annál nehezebb a megmaradt első két probléma. Már maga a legelső követelés — az (I.) alatti *három* totális egyenletből *négy* függvénynek egymással s az x független változóval való kapcsolatát meghatározni — oly feladat megoldását kivánja, melyre csak a legegyszerűbb esetekben van módszerünk.

5. Maga Ampère az (I.) alatti rendszer felirásánál sajátságos jelö-

lést használ. Az általunk y_0-nak nevezett változót α-val illetőleg β-val jelöli a szerint, a mint x és y-nal való kapcsolata az (5) vagy az (5*) egyenletnek felel meg. Valamely u mennyiség x szerint képezett párcziális differencziál hányadosának jele most már

$$\frac{\partial u}{\partial x(\alpha} \text{ vagy } \frac{\partial u}{\partial x(\beta},$$

a mint x mellett α vagy β a másik független változó. Tehát az (I.)-ben összefoglalt két egyenletrendszert Ampère jelölésével következőleg kell írni:

$$(A)\quad \begin{aligned} &H\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}+N\frac{\partial q}{\partial x(\alpha}-K-\sqrt{G}=0\\ &H\frac{\partial p}{\partial x(\alpha}+(K-\sqrt{G})\frac{\partial q}{\partial x(\alpha}+M=0\\ &\frac{\partial z}{\partial x(\alpha}=p+q\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}\end{aligned}$$

illetve

$$(B)\quad \begin{aligned} &H\frac{\partial y}{\partial x(\beta}+N\frac{\partial q}{\partial x(\beta}-K+\sqrt{G}=0\\ &H\frac{\partial p}{\partial x(\beta}+(K+\sqrt{G})\frac{\partial q}{\partial x(\beta}+M=0\\ &\frac{\partial z}{\partial x(\beta}=p+q\frac{\partial y}{\partial x(\beta}.\end{aligned}$$

6. Vizsgálódásainkból ki vannak zárva (1) ama *különös* megoldásai, melyekre nézve egyszersmind

$$H+Nt=0;$$

ezeknek meghatározására e helyen nem is akarunk kiterjeszkedni. Ha azonban H és N azonosan zérus, akkor (1) összes megoldásaira nézve áll be e körülmény, s az ily egyenletre nézve összes megfontolásaink tárgytalanokká lesznek. Ámde az ily kivételes egyenlet könnyen hozható a tárgyalt általános alakra. Ha r nem fordul elő a differencziálegyenletben, de t igen, akkor e czélra elég lesz az x és y független változók elnevezését felcserélni. Igy tehát csak az

$$s-\psi(x, y, z, p, q)=0$$

alakú egyenletek maradnak még. Ezek az

$$x_1 = x + y$$
$$y_1 = x - y$$

helyettesités után az

$$r_1 - t_1 - \psi\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_1 - y_1}{2}, z, p_1 + q_1, p_1 - q_1\right) = 0$$

alakot veszik fel, melyben már tudjuk tárgyalni.

6. Az (I.), (II), (III.) egyenleteket nem csak úgy értékesíthetjük, hogy szorosan ragaszkodunk a felsorolt lépésekhez. Különösen czélszerű a helyett, hogy az egyik (I.) rendszerre szorítkoznánk, inkább mind a kettőt, úgy (A)-t valamint (B)-t, egyaránt lehetőleg kihasználni. Lássuk ezt a következő példán:

$$qr + (p + x)s + yt + q + y(rt - s^2) = 0.$$

Itt $HL - MN$ értéke zérus lévén, G egyenlő K négyzetével és

$$\sqrt{G} = K.$$

Tehát:

$$(A) \quad \begin{aligned} & q\frac{\partial y}{\partial x(\alpha} + y\frac{\partial q}{\partial x(\alpha} - (p + x) = 0 \\ & \frac{\partial p}{\partial x(\alpha} + 1 = 0 \\ & \frac{\partial z}{\partial x(\alpha} = p + q\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}, \end{aligned}$$

és

$$(B) \quad \begin{aligned} & q\frac{\partial y}{\partial x(\beta} + y\frac{\partial q}{\partial x(\beta} = 0 \\ & q\frac{\partial p}{\partial x(\beta} + (p + x)\frac{\partial q}{\partial x(\beta} + q = 0 \\ & \frac{\partial z}{\partial x(\beta} = p + q\frac{\partial y}{\partial x(\beta}. \end{aligned}$$

Az (A) alatti második egyenlet értelmében

$$\frac{\partial(p + x)}{\partial x(\alpha} = 0.$$

Tehát $(p + x)$ az (A) egyik integráljának bal oldala, míg a jobb oldalra integrálási állandó helyett α valamely tetszőleges függvénye teendő, mely helyett azonban egyszerűen α-t írunk. Ezt szabad tennünk, hiszen α helyett annak bármely függvényét vezetve be x

mellé második független változónak s immár ezt nevezve α-nak, az előbbi meggondolásaink semmiben sem változnak.

Tehát

$$p + x = \alpha$$

az (A) rendszer egyik első integrálja.

Ennek folytán ugyanott az első egyenlet így írható

$$q \frac{\partial y}{\partial x (\alpha} + y \frac{\partial q}{\partial x (\alpha} - \alpha = 0,$$

a honnan

$$qy - \alpha x = \varphi(\alpha).$$

Hasonlóan egyszerű (B) első két egyenletének integrálása. Az elsőből

$$qy = \beta.$$

Mindkettőből q-nak differencziálhányadosát kiküszöbölvén, leszen:

$$(p + x) \frac{\partial y}{\partial x (\beta} - y \left(\frac{\partial p}{\partial x (\beta} + 1 \right) = 0$$

s integrálva

$$\frac{p + x}{y} = f(\beta).$$

Az adott (6) egyenlet bármely megoldására nézve y, p és q (mint x s egy alkalmasan választott α függvényei) egy

$$(7) \qquad \begin{aligned} p + x &= \alpha \\ qy - \alpha x &= \varphi(\alpha) \end{aligned}$$

alakú egyenletrendszernek, másrészt (x és egy másik β változóban kifejezve) egyszersmind egy

$$(8) \qquad \begin{aligned} qy &= \beta \\ p + x &= y f(\beta) \end{aligned}$$

egyenletrendszernek tesznek eleget.

7. E négy egyenletből eleminálás és differencziálással még számos más adódik. Igy a (7) alatti alsó és a (8) alatti felső egyenlet egybevetéséből x, α és β között a következő kapcsolat derül ki:

$$\beta = \alpha x + \varphi(\alpha).$$

A másik két egyenletből viszont.

$$y f(\beta) = a.$$

Ezen egyenletből, x-et és a-t tekintvén független változóknak, differencziálás útján még a következőket találjuk:

$$y f'(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial x(a} + f(\beta) \frac{\partial y}{\partial x(a} = 0$$

$$y f'(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial a(x} + f(\beta) \frac{\partial y}{\partial a(x} = 1,$$

hol az $(x$ jel arra figyelmeztet, hogy a mellett mi a másik független változó. Innen továbbá

$$\frac{\partial y}{\partial x(a} = - \frac{y f'(\beta)}{f(\beta)} \frac{\partial \beta}{\partial x(a},$$

$$\frac{\partial y}{\partial a(x} = \frac{1}{f(\beta)} - \frac{y f'(\beta)}{f(\beta)} \frac{\partial \beta}{\partial a(x} =$$

$$= \frac{y}{a} - \frac{y f'(\beta)}{f(\beta)} \frac{\partial \beta}{\partial a(x}.$$

Ha még q-val szorzunk és tekintetbe veszszük a (8) alatti első egyenletet, akkor végre

$$q \frac{\partial y}{\partial x(a} = - \frac{\beta f'(\beta)}{f(\beta)} \frac{\partial \beta}{\partial x(a}$$

$$q \frac{\partial y}{\partial a(x} = \frac{\beta}{a} - \frac{\beta f'(\beta)}{f(\beta)} \frac{\partial \beta}{\partial a(x}.$$

Még csak azt említjük meg, hogy a (7) alatti első egyenletből

$$p = a - x.$$

8. Ezeket az egyenleteket az (A) és (B) rendszerek ismeretes integráljainak egyidejű felhasználásával nyertük. Az által, hogy ily módon (A) mellett (B)-t is értékesítettük, immár a hátralevő integrálások igen egyszerűekké váltak. Nevezetesen (A)-nak eddig tekintetbe nem vett harmadik egyenlete most így írható:

$$\frac{\partial z}{\partial x(a} = a - x - \frac{\beta f'(\beta)}{f(\beta)} \frac{\partial \beta}{\partial x(a},$$

melynek integrálja:

$$z = ax - \frac{x^2}{2} - \beta \log f(\beta) + \int \log f(\beta)\, d\beta + \vartheta(a).$$

Az $f(\beta)$-vel együtt

$$\omega(\beta) = \int \log f(\beta)\, d\beta$$

szintén β-nak határozatlan függvénye.

Ezt bevezetvén, ezentúl

$$f(\beta) = e^{\omega'(\beta)},$$

a z-re nyert kifejezés pedig igy írható:

$$z = ax - \frac{x^2}{2} - \beta\omega'(\beta) + \omega(\beta) + \vartheta(a). \tag{9}$$

9. Fordítsuk most már figyelmünket a (II.) alatti rendszerre. Ha y_0-nak a-t választjuk, a mondott rendszer első egyenlete:

$$\frac{\partial z}{\partial a (x} = q \frac{\partial y}{\partial a (x}.$$

Ámde

$$q \frac{\partial y}{\partial a (x} = \frac{\beta}{a} - \beta\omega''(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial a (x}$$

és (9)-ből

$$\frac{\partial z}{\partial a (x} = x + \vartheta'(a) - \beta\omega''(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial a (x},$$

vagy mert

$$x = \frac{\beta}{a} - \frac{\varphi(a)}{a},$$

azért még

$$\frac{\partial z}{\partial a (x} = \frac{\beta}{a} - \frac{\varphi(a)}{a} + \vartheta'(a) - \beta\omega''(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial a (x},$$

A kérdéses egyenlet tehát a következő alakban írható fel:

$$\vartheta'(a) - \frac{\varphi(a)}{a} = 0.$$

Ily módon a (II.) alatti első egyenlet φ és ϑ között a következő kapcsolatot állapítja meg:

$$\varphi(a) = a\vartheta'(a).$$

10. A (7), (8) és (9) alatti egyenletek, ha f-t és φ-t is ω és ϑ-val fejezzük ki, a következők:

$$\begin{aligned}
&p + x = a \\
&qy - ax = a\vartheta'(a) \\
&qy = \beta \\
&p + x = ye^{\omega'(\beta)} \\
z = ax - \frac{x^2}{2} - &\beta\omega'(\beta) + \omega(\beta) + \vartheta(a).
\end{aligned}$$

A (II.) alatti második egyenlet az x, y, z, p és q valamint az a és β segédmennyiségek között fennálló ezen öt egyenlet következtében azonossággá lesz, úgy hogy egyenleteink teljesen kifejezik a mondott mennyiségek közötti kapcsolatot.

A második és harmadik egyenletből

$$x = \frac{\beta}{a} - \vartheta'(a),$$

az első és negyedikből

$$y = ae^{-\omega'(\beta)}$$

végre z értéke így írható:

$$z = \beta - a\vartheta'(a) - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{a} - \vartheta'(a)\right)^2 - \beta\omega'(\beta) + \omega(\beta) + \vartheta(a).$$

A nyert

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\beta}{a} - \vartheta'(a) \\
y &= a\,e^{-\omega'(\beta)} \\
z &= \vartheta(a) - a\vartheta'(a) + \beta + \omega(\beta) - \beta\omega'(\beta) - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{a} - \vartheta'(a)\right)^2
\end{aligned}$$

egyenletrendszer a (6) alatt adott differencziálegyenlet *általános megoldása.*

Itt még az a és β eliminálandók, ha az x, y és z közötti kapcsolatot egy egyenlettel akarjuk jellemezni. De ez igazság szerint fölösleges, mert e kapcsolat az a és β parameterek közvetitésével így is teljesen meg van határozva.

Bod Lajos.

IRODALOM.

Fröhlich Izidor. Kinematika. (A mozgás tana.) Különös tekintettel a kezdők igényeire. A szöveg közötti háromszázöt ábrával. Budapest. Kiadja a Magyar Tudom. Akadémia. 1892. XXXVI és 645 lap. 371 §. Ára 6 frt.*

Első kötete az elméleti physika ama kézikönyvének, a melyet szerzőnk a M. T. Akadémia megbizásából készít. A lehető legnagyobb, — sajnos, így is kis, — hazai közönségnek van szánva, mert «tekintettel a kezdők igényeire» iratott. Én is tekintettel a kezdők igényeire szándékozom itt egyet-mást elmondani azok közül, a mik lapozása közben elém ötlöttek és a melyek közlése részint jól esik hazafiui érzületemnek, részint pedig a mennyiben talán némely észrevételem helyesbítés számba mehet, esetleg némi hasznára is válhatik a nagy munka folytatásának.

*

Bármennyire járatos legyen is valaki idegen nyelvekben, nagy külömbséget teszen az tanulmányai eredményében, hogy anyanyelvén irott munkákból vagy idegen nyelveken irottakból szerzi-e ismereteit. Mikor idegen nyelvű munka tanulmányozásába mélyed valaki, könnyen rajt-kaphatja magát azon, hogy a tanulmánya folyamán lelkében ébredő és szállongó gondolatok képződési formái ama nyelv kifejezési alakzatait követik. Nevezetesen, ha olvasmánya közben jegyzetek papirra vetésére szánja magát, tapasztalhatja, hogy olvasmánya nyelvén tolakodnak tollára a gondolatok. De a szabály az, hogy az idegen nyelv kifejezési alakzatai nem állanak oly bőségben rendelkezésünkre, mint anyanyelvünkéi és nem is minden számot tévő mellékes munkába kerülés nélkül adódnak hatalmunkba, míg anyanyelvünkéi szinte öntudatunk minden igénybe vétele nélkül szolgálják szellemi tevékenységünket, szinte mint szívverésünk érkeringésünket.

Anyanyelvünkön szabadabb, majdnem korlátozatlan és tetemesen könnyebb gondolat-csoportosulás szegődik lelki munkánk szolgálatába, minélfogva igen kivánatos, hogy tanulmányainkat anyanyelvünkön írt munkákból merítsük s ne idegen nyelven irtakból, a melyek vagy teljesen elvonnak az anyanyelvünk formái közt való, tehát eredményesebb gondolkodástól,

* Tagtársaink, ha Szily Kálmán akad. főtitkár urtól levélben kérik, a művet kedvezménykép 4 frton kapják meg.

vagy a mennyiben kényszerüségből talán mégis ehhez folyamodunk, azt a hátráltató szellemi munkát is okozzák, a mely a kétféle nyelvi alakzatrendszer váltogatásával szükségkép együtt jár.

Kivált nagy mértékben van így ez a dolog a kezdőkre nézve. Ekként már tudományosságunk kihatóbb fellendülésének az óhajtása is sürgősen követeli szinvonalszerű tudományt nyújtó munkáknak magyar nyelven való irását. Természetesen olyanoknak az irását, a melyek tudománynyújtásra valóban alkalmasak is, a melyek úgy vannak megirva, hogy nem valamelyes idegen gondolatformáknak magyar szavakkal kiaggatott raktáraik, hanem a magyar nyelv természetében gyökeredző alkotások, elannyira, hogy még didaktikai elrendezésük is a magyar észjárás sajátosságaihoz illeszkedik.

Tudományszakában szerzett nagy készültség rendjén, és — bizonyosan egyetemi tanári pályáján szerzett — nagy diadaktikai otthonosság rendjén ilyen munkát alkotott Fröhlich I. Pedig sok nehézséggel kellett megküzdenie; sokkalta többel, mintha a tárgyat úgy, a mint az ő tudományos egyéniségének megmunkáló műhelyében kiformálódott, valamely idegen nyelven irta volna meg a helyett, hogy magyar nyelven irta meg, a mely nyelv ennek a tudománynak a számára eddigelé az irodalomban csak nagyon töredékesen, majdnem hogy éppenséggel nem létezett. Ezenkivül a végből, hogy a kitárandó ismeret-kincshez hozzáférhessen az az egész közönség, a melynek szánta, hogy ne elértéktelenedve a be nem fogadhatás végzetétől, özönöljék az az ismeret-kincs a tiro elméjének, ügyelnie kellett, hogy a viszonyaink közt feltételezhető előismeretekből növeszsze ki és ezekből kinövesztve terelgesse minden irányban betetőzéséhez a tárgyát. Ezek oly módon sikerültek neki, hogy nem tudok idegen nyelven írt e tárgyú munkát, a melytől akár mely nemzet hazájában több eredményt lehetne várni, mint nálunk az ő munkájától. Hogy a kezdő helyzete meg legyen könynyítve, még azt is megtette, hogy a munkának egy részét, a mely mintegy 125 §-t tartalmaz, magánvaló egészszé kerekítette ki. Ez a rész a tanok oly rendszerét öleli fel, a melynek előzetes birtokában bizonyára jóval könnyebben és kevesebb fáradsággal sajátítható el a többi rész, mint folyamatos tanulmányozás rendjén; így ez az intézkedés lényeges kiegészítője az arra irányult törekvés megvalósításának, hogy bármely kezdő különösebb fáradság nélkül fordíthassa hasznára a munkát. Ebben az első tanulmánynak szánt részben a geometriai szemléltető módszer az uralkodó, míg a többi részben annál inkább előtérbe jut az analytikus módszer. Itt-ott ugyanaz a tárgy mindkét módszer szerint van előadva. Részemről igen tudom méltányolni azt, hogy az első ismeretek szemléltető geometriai módszer szerint nyújtassanak, minthogy ez a módszer általában közvetlenebb betekintést enged a mennyiségi fogalom-vonatkozások mechanismusába; azt hiszem azonban, hogy legalább párhuzamosan kissé több analysis kivánatos már csak azért is, mert az első indítás nagy kihatással szokott lenni elannyira, hogy az egyik módszernek kezdetben való túlságos előnyösítése szabály szerint elzsibbasztja vagy legalább ellankítja a másik módszer irányában a gondolkodást, a mely aztán csak nagy nehezen lábbad ki egyoldaluságából és még ennek utána is legalább igen soká számot tevően inkább hajlik az első megszokás felé. Igaz, hogy e tekintetben a tanulók tehetségei is mértékadók, de ez csak egy okkal több arra, hogy mindjárt kezdetben kellő arányt tartson, a két módszer nehogy az éppen túlnyomóan használt módszer elmarasztalja a neki nem hajlamos tanulót és a másik módszertől még inkább elmarasztalja az emennek nem hajlamos tanulót.

A munka igen sok részlete vagyon oly módon tárgyalva, a mily módon tárgyalva más szerzőknél nem láttam. Úgy értem, hogy e részletek tárgyalásai nem csak abban különböznek más szerzőknél található tárgyalásoktól, a mit az assimilálásra következő szabad előterjesztésen a szerző egyénniessége múlhatatlanul bevisz, hanem más kiindulási helyzetektől feltételezett egészen más eljárási módok által is különböznek Az ilyszerű újítások, ha nem absolute előnyösek, vagy ha nem legalább is annak a munkának a rendszeréből tekintve előnyösek, a melybe beillesztvék, akkor ritkán van valamelyes jogosultságuk.

Az ellenkező esetben azonban nagyban növelik egy munka becsét, még a kész tudósra nézve is értékessé téve azt. Az előttünk fekvő munkából részint teljesen új-szerűekül, részint teljesen új formában vagy tetemesen átdolgozott formában jelentkezőkül említhetem a következő §-okat vagy azok egyes részeit: 36, 56_2, 61, 89_a, 97, 105_2, 108_4, 110, 113, 115, 117—120, 125, 129_{46}, 131—134, 137_1, 147_2, 157, 159—161, 163, 164, 179, 195, 197, 206, 211, 212, 215, 216, 222, 223, 226—229, 237, 258, 259, 270—272, 281—284, 289, 301, 319, 330, 330_a, 330_b, 332, 333, 335—337, 340, 343, 348—353, 355—358. A hányat másféle tárgyalásokkal összehasonlítottam, mindannyinál azt találtam, hogy legalább is rendszertani szempontból teljes jogczímmel tölti be helyét. Itt abból a szempontból, a mely a kezdő igényeire néz, különösen említem a következőket: 1. A 89_a §, a mely folytatólag a pont kényszermozgásáról szólva, ezt a czimet viseli: «A feltételi gyorsulás mindig merőleges a pályára». Igen csinos tárgyalás, a mely az előirt felületen vagy görbén surlódás nélkül való mozgásnak abból a definitiójából indul ki, hogy «a feltétel jelenléte a sebességnek csak irányát, de nem értékét változtatja meg». Én a magam részéről azonban hiányolom itt, hogy nincs utasítás a két esetnek (előirt felület, előirt görbe) megfelelő feltételi sebesedés egyszerű módon való kiszámítására és csak a 130. §-ban van a feltételi egyenletet, illetőleg egyenleteket kiegészítő egyenletek még-egyike illetőleg egyenlet megszerkesztve; holott pedig a hiányoltam utasítás is igen egyszerűen kifejthető. Úgy látszik a szerzőnek egy megjegyzéséből, hogy ezt a dynamikának tartotta fenn. 2. Megemlítem külön a kezdők igényeinek tekintetéből az igen szép tárgyalású 134, 137, 157, 159—161, 206, 216, 226, 227, 270, 271, 272, 281, 358. §-okat, a melyek a merev rendszerek mozgására vonatkoznak. Azonban nem mellőzhetem megjegyzés nélkül, hogy a 157. § tárgyalását hiányosnak kell tartanom. E § czime: «A rendszer véges elmozdulásának sorrendje lényeges az elmozdulások eredményére nézve. A sorrend megfordításánál a fellépő különbség translatio». Csak arra utal, hogy az «eredő forgás szöge itt $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$ ugyanaz mindkét esetben». Ezt ugyan a kezdő is könnyen belátja, csakhogy ennek a belátása nem elég a czélra. A kezdő a két J centrum s az $J_1\, J_2$ egyenes kölcsönös helyzetének a viszonyára nézve is felvilágosítást vár. E dologban a már nem első tanulmánynak szánt (szintén a fentebbi lisztán lévő) 163. §-ban foglalt analytikai tárgyalás nyújt teljes felvilágosítást. 3. Ezeken kívül külön felemlítem a (részben nem első tanulmánynak szánt) 348, 349, 350, 351, 352, 353, 355, 356, 357. §-okat, a melyek forgó gömbfelülethez viszonyított mozgásra, «Lelapult sphäroid gravitationális (attractionális) vonzásának gyorsulására», «A forgó föld-ellipsoid felületéhez viszonyított» mozgásra, «Valamely szabad pontnak a föld felületéhez viszonyított mozgására» vonatkoznak. — Ezekre a §-okra mint néhány közönségesebb érdekű tárgyat illető újszerű előterjesztésekre utaltam különösebben.

Nagy előnye a munkának a benne található számos példa és feladat. A feladatok közül, a melyek mindegyikének a szerzője, vagy a melyek vulgáris volta mindegyikhez oda van jegyezve, 82 származik magától a munka szerzőjétől, és pedig 28 a pont egyenes vonalú mozgására, 18 a pont görbevonalú mozgására, 5 a pont centrális mozgására, 12 a merev rendszerek síkbeli mozgására, 4 a merev rendszerek gömbi mozgására, 15 a merev rendszerek általános mozgására. — Néhány új ábra is van a munkában, ugymint a 117., 160., 181., 182., 193. ábra, a melyek rendre Watt parallelogrammját, epicycloidális fogazást, rajzot pont körüli véges forgásoknak az Euler-féle szögekkel való kifejezéséhez, rajzot Rodrigues coordinátái és véges elmozdulás jellemzői közti összefüggések kifejezéséhez, végre rajzot Cardano csuklójának (Hooke kulcsának) elméletéhez tartalmaznak és úgy, mint a többi ábrák az előadás befogadásának könnyítésére szolgálnak. — Egy igen helyén való magyar szót is vezetett be a szerző (a 9. §-ban) a dimensio szó általános physikai jelentményének számára, a «jelleg» szót.

Még egyszer utalva a munka nagy szakjelentőségére és kitünő voltára, utalok azonban arra is, hogy vannak a munkában kisebb-nagyobb vétségek a didaktikai szabatosság ellen, a melyek nekem olvasás közben annál is inkább feltüntek, mert a szabatosság a munka egyik becses jó tulajdonsága, Ezek a vétségek a tanuló haladásában többé-kevésbé akadályozók lehetnek, vagy legalább nem tiszta logikai felfogások ápolására szolgálhatnak és ha a nagy munkában folytatódnának, mivel a hátralévő részekben még rés kinálkozik a bejutásukra, a munkának számot tevő hátrányára lehetnének. Egy egész kis gyűjteménye ötlött elém ezeknek a kisebb-nagyobb vétségeknek. Legtöbbnyire oly kisszerűek, hogy egyszerű lapsusoknak tekinthetők és nem érdemesek még csak az általánosságban való felemlítésre sem. Van azonban néhány, a mely az elvszerűség látszatával jelentkezik s ezekről meg kell emlékeznem. Többnyire a definitiók körül fordulnak elő. Az erő és tömeg szónak a 6. és 7. §-ban előforduló, ugyan számos munkában otthonos, de igazában semmit mondó értelmezését itt érintetlenül hagyom, mert e fogalmak majd csak a dynamikában fognak életre kapni és ott majd bizonyosan találkozni fogunk helyes definitióikkal. 1. Sehogy sem tudom helyeselni szerzőnek némely vector-mennyiségek definitiójában követett eljárását és az olvasó confundálására szolgálhatónak tartom. Élőszóval való előadás keretébe, hiszem, hogy körülményes megvitatás rendjén jó sikerrel beleilleszthette a szerző, de a munka átlagos tárgyalása módján a kezdőnek nem való. Én legalább így tartom. Az a véleményem, és igen kiváló szerzők munkáiból úgy vagyok meggyőződve, hogy őket is ez a vélemény vezette, hogy bármiféle vector-mennyiségek úgy definiálandók, hogy a definitiójukból azonnal kitünjék, hogy vector-mennyiségek azok és hogy nemcsak nagyságuk, de irányuk alatt is mi értendő. Ezzel ellentétben állanak a szerzőnek az elmozdulás nyomatékáról, sebesség nyomatékáról, sebesedés nyomatékáról, az elemi forgásról a szögsebességről szóló tárgyalásai, a melyekben definiálásának a módjánál fogva annak a szükségét látja és kell is, hogy lássa szerző, hogy a definiálta fogalmak vector-voltát a definitióból még csak dedukálja, illetőleg, hogy azt bebizonyítsa (24; 53, 54; 55; 230—232 237 ; 238. §). A deductiói, a melyek a vector-természet kimutatására szolgálnak, e mellett más czélra is szolgálnak, a melytől azonban a tanuló figyelme az előbbi szolgálat által elterelődhetik, kivált ahol az utóbbi nincs elég élesen feltüntetve; könnyen megeshetik például, hogy Varignon-nak az 54. §-ban közölt tételét kizárólagosan a sebességi nyomaték vector-voltának kimutatására szolgálóként fogja fel, holott ez a tétel a szerző munkájában is annak a kiderítésére való, hogy a vetületi mozgás sebességi nyomatékaival mint componensekkel meghatározott vector-mennyiség összevág azzal a vector-mennyiséggel, a mely *ilyenül* a térbeli mozgás sebességi vectoraként definiáltatik. 2. A 26. §. szerint a sebesség definitiója: «az elmozdulás változásának mérve». Úgy, de bármiféle mennyiség változásának a mérve alatt, e szó előleges definitiójának hiányában inkább lehet hajlandó bárki oly hányadost érteni, a mely a mennyiség változásának a nagyságából mint osztandóból és magának a mennyiségnek a nagyságából mint osztóból van összetéve. Abban az értelemben, a melyben a szerző használja (a gyorsulás definitiójára is a 40. §-ban, de már a magasabb rendű gyorsulásokéra nem), jó lett volna előre definiálni a változás mérvét. Ennek az elmulasztása szavak közéleti tág értelmei után való kapkodásban gyámolítja a tanulót, a helyett, hogy attól elszoktatná. 3. A 31. § az összes præmissák tekintetbe vétele daczára is téves egyenlőtlenséget tartalmaz. Azt mondja, hogy a középsebesség (ν_m) mindenesetre eleget tesz a következő kettős egyenlőtlenségnek:

$$\nu < \nu_m < \nu + \Delta\nu.$$

Még ha hallgatagon feltételezzük is, hogy $\Delta\nu$ lehet oly véges kicsiny, miszerint a $\Delta\varsigma$ pályaíven (az A ponttól a B pontig) folyvást egy értelemben változik a v (de voltaképpen még ennyit sem szabadna hallgatagon feltételezni), még sem helyes, mert nem kizárólagos az az egyenlőtlenség. (Ebben a kifejezésben toll-hiba, vagy a correctio mulasztása lehet az ellenkező egyenlőtlenségek bejegyzésének a mellőzése). De azt a bizonyos feltevést a ν egyértelmű változasáról nem szabad hallgatagon tenni, ezt kifejezetten kell tenni, mert hiszen a tárgyalandó összes mozgások általános fogalomkörének a definitionális megszabását tartalmazza. 4. A 79. §-ban, mely a pont relativ mozgásáról szól, arra, hogy mit kelljen érteni «a térben nyugvó (szilárd, mozdulatlan) pont vagy coordináta-rendszer» alatt? erre semmi utasítás sincs, pedig ugyancsak reá szorul az utasításra! 5. A 84. §-ban («Állandó helyzetű két tengelyrendszerre vonatkozólag a sebességek és bármily rendű gyorsulások ugyanazok») foglalt conclusio eredete iránt az (1) alatti egyenletek után következő, s a conclusiót ezektől elválasztó rész tévedésbe ejtheti a tanulót; annak a conclusionak nyomban az (1) alatti egyenletek után volna a helye. A (3) alattiaknak az (1) alattiakból való következtetése pedig ép úgy megtörténhetett volna a «Mathematikai repertoriumra» való egyszerű utalással, mint a hogy megtörtént a (2) alatti azonosságok felsorolása. 6. A 88. §. («A pont kinematikájának általános problémája visszavezetve mathematikai problémára») azt a nézetet keltheti a tanulóban, hogy a pont mozgási problémái mindig olyanokul jelentkeznek, hogy tartalmaik bővítése nélkül vezethetők a (2) alatti kifejezésekre, vagyis hogy közvetlen egyenleteik mindig infinitesimális műveletek nélkül juttathatók a sebesedési componenseknek a többi szereplő változók által való kifejezéseikhez. 7. A 233. §-ban («Elemi forgások szétbontása és összetevése egymásra merőleges három tengely szerint») kivánatos leendett kifejezetten, a szöveg szavaival utalni arra, hogy a három tengelyből álló rendszer tetszőleges. Csak így látja be az átlagos előkészültségű kezdő tudatosan a forgások összetevésének analytikai jelentőségét. 8. A 271. §-ban («Az általános elmozdulás rotatórius (forgató) componense minden pontra * nézve ugyanaz») a 2. pont *a*) és *b*) tételei nem a szövegbeli okfűzéssel, hanem attól függetlenül következnek (szövegezési hiba).

A 3. pont pedig, a benne jelzett megegyeztethetőség kellő beláttatása végett, tekintettel a kezdők igényeire, még egy kis megjegyzéssel megtoldandó lett volna, mi ugyan igen elementáris dologra vonatkozik, de maga ez a dolog elkerülheti a kezdő figyelmét. 9. A 360. § 1. pontja a szerző «Figyelmeztetésében» (XXXII) még az első tanulmánynak van szánva, azonban két olyan tételre való hivatkozás (308. és 301. §.) fordul elő szükségszerűen benne, a mely nincs az első tanulmánynak szánva ! ?

*

Egyébiránt összes ellenes észrevételeimnek számra nézve igen csekély és súlyra nézve sem okvetetlenül lényegesen számon-járó foglalatai nem éppen alanyias természetű véleményeimmel szemben is oly elenyészőek a munka átlagosan kétségtelenül szerfölött ügyes conceptiójának bő keretében, hogy általában minden tekintetben csak igen elismerően üdvözölhetni a munkát és szerzőjének hazafias lelkesedéssel köszönhetni azt a nagy szolgálatot, a melyet az alkotásában kifejtett fáradságával hazai tudományosságunknak megtenni élve a M. T. Akademia megbizásával el nem mulasztotta, jóllehet kiváló ismeret-bőségének, képességeinek és munkabirásának a tudományos kutatás mezején sokkalta csábítóbb terei kinálkoznak.

Farkas Gyula.

*

Legyen szabad a t. szerkesztőség engedelmével a megelőző ismertetés előttem lényegesebbnek látszó észrevételeire néhány rövid megjegyzést tennem.

Először is kellemesen érintett t. biráló úrnak a nálunk nagyobbára dívó szokástól eltérő amaz eljárása, hogy egyoldalú magasztalástól és elitéléstől egyaránt távol, véleményének és meggyőződésének nyiltan adott kifejezést; köszönettel tartozom ezért neki, mert ez a haladásnak s a tökéletesedésnek egyik igazi előfeltétele, miként ezt Trefort is akademiai megnyitó beszédei egyikében találóan kifejezte, hogy t. i. minden magyar irodalmi terméket szeretettel, de gyengéinek elfogulatlan kritikájával kell fogadni. Megjegyzéseim a következők:

1. A t. biráló úrtól a 89a. §-ban hiánylott utasításra maga a §. egyenesen utal, t. i. a 130. §-ra.

---

* mint centumra!

2. A 157. §. végén a 136. §-ra való utalás előttem a megérthetésre elegendőnek látszik; egyébként a 120. ábra két rajza félreérthetetlenül beszél.

3. A néhány vectormennyiség kifogásolt tárgyalására nézve a t. biráló úrétól különböző álláspontot foglalok el, melyre tanítási gyakorlatom vezetett. Az elmozdulás-, a sebesség-, a gyorsulás stb. nyomatékai tulajdonképen vectoroknak vectorjellegű függvényei, melyeket egyenesen vectoroknak lehet definiálni ugyan, de ez dogmatikus s a középtanodából hozott ebbeli fogalmak alkotásától eltérő s ezekkel nem kapcsolatos eljárásnak látszik, s ugyanez utóbbi megjegyzések állanak a merev rendszerek minden rendű forgás- és szögsebességeire nézve is.

Azért könyvemben az iskolából hozott elemi fogalmakból kiindulván, *kimutatom* a nevezett mennyiségek vectorjellegét; tapasztaltam, hogy ez a kezdőnek nehézséget nem okoz, míg a közvetlen vector-definitió idegenszerű benyomást tesz és mást látszik jelenteni, mint az ugyane nevek alatt előtte ismeretes elemi fogalmak.

4. A t. biráló úrnak a 271. §. czímére nézve tett észrevétele helyes; továbbá ha 2. szakasza utolsó pontja helyébe: «Az 1-ből következik» iratik, többi e §-ra vonatkozó észrevételeinek megfeleltünk.

5. A «Figyelmeztetés»-ben felsorolt 360. §. a lajstromból egyszerűen elhagyandó.

F. I.

MEGOLDOTT FELADATOK.

11. *Két test összeütközvén, az érintkezés pillanatában merev összeköttetésbe lép; adva lévén a két test haladó és forgó mozgása összeköttetésük előtt, határoztassék meg együttes mozgásuk ezután; a részletes számítás arra az esetre eszközlendő, melyben a testek homogén gömbök.*

(RÉTHY.)

*

Megoldás Fuchs Károly főgimnáziumi tanár úrtól Pancsován.

A megoldás a következő egyszerű megjegyzésen alapul. Az összeütközés következtében nem változik meg a rendszerben a súlypont sebessége; azon kívül még változatlanul fennmarad a területi sebesség is úgy irányára valamint nagyságára nézve; egyszerűen azért, mert az összeütközés tartama alatt csakis belső erők működnek.

1. A két gömb legyen G és G'; sugaraik legyenek r és r'; sűrűségeik ρ és ρ'; tömegeik következőleg $m=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$ és $m'=\frac{4}{3}\pi r'^3\rho'$; tehetetlenségi momentumaik, a súlyponton átmenő tengelyre viszonyítva,

$$T=\frac{2}{5}mr^2, \qquad T'=\frac{2}{5}m'r'^2.$$

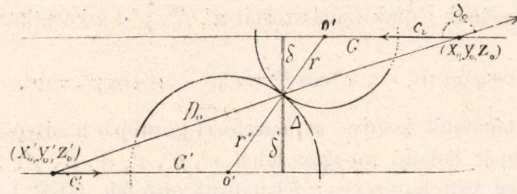
Rövidség kedvéért írjuk:

$$\mu=\frac{m}{m+m'}, \quad \mu'=\frac{m'}{m+m'}, \quad \mu+\mu'=1.$$

Ha a két gömb összeforrt, akkor a középpontjait összekötő vonaldarabot R-rel jelöljük; tehát

$$R=r+r'.$$

E vonalat G-ből G' felé huzzuk. Az összeforrt gömbpár súlypontjának távolságai a két gömbközépponttól — $R\mu'$ (G-nek távolsága) és $+R\mu$ (G'-nek távolsága). A gömbpár tehetetlenségi momentuma, a súlyponton átmenő és R-re merőleges tengelyre viszonyítva, lesz:



$$T_1 = \frac{2}{5} mr^2 + \frac{2}{5} m'r'^2 + mR^2\mu'^2 + m'R^2\mu^2,$$

azaz

$$T_1 = \frac{2}{5} mr^2 + \frac{2}{5} m'r'^2 + (m+m')\,\mu\mu' R^2.$$

A két gömb sebességei legyenek c illetve c'. E mozgások irányvonalai legyenek l_c és l_c', ez irányvonalaknak hajlásszögei pedig egy orthogonális koordinátarendszerben legyenek α, β, γ és α_1, β_1, γ_1. A sebességek orthogonális komponensei legyenek u, v, w és u', v', w'.

Mindegyik gömb egy tengely körül forog. E tengelyek jelei l_φ és l_φ'. A tengelyek hajlásait az α_φ, β_φ, γ_φ és α_φ', β_φ', γ_φ' szögek adják. A szögsebességek φ és φ'; a forgások síkjai E_φ és E_φ'.

2. A két gömbközéppont O és O' koordinátái $t=0$ időben legyenek x_0, y_0, z_0 és x_0', y_0', z_0'; a koordináták a t időben az összeütközés előtt tehát

$$x = x_0 + ut, \qquad x' = x_0' + u't,$$
$$y = y_0 + vt, \qquad y' = y_0' + v't,$$
$$z = z_0 + wt, \qquad z' = z_0' + w't.$$

A súlypontnak koordinatái tudvalevőleg

$$x^0 = x\mu + x'\mu', \qquad y^0 = y\mu + y'\mu', \qquad z^0 = z\mu + z'\mu'.$$

Ha a gömbök középpontjainak koordinátáit behelyettesítjük, akkor lesz:

$$x^0 = (x_0\mu + x_0'\mu') + (u\mu + u'\mu')\,t = x_0^0 + u^0 t,$$
$$y^0 = (y_0\mu + y_0'\mu') + (v\mu + v'\mu')\,t = y_0^0 + v^0 t,$$
$$z^0 = (z_0\mu + z_0'\mu') + (w\mu + w'\mu')\,t = z_0^0 + w^0 t.$$

A t idő együtthatóiból, azaz a súlypont sebességének, c^0-nak, vetületeiből megtaláljuk (ismeretes módon) a súlypont sebességét:

$$c^0 = (c^2\mu^2 + c'^2\mu'^2 + 2cc'\mu\mu' \cos(cc'))^{\frac{1}{2}}.$$

Itt (c, c') az a szög, melyet l_c és l_c' egymással képez; ugyanis

$$\cos(c, c') = \frac{uu' + vv' + ww'}{cc'}.$$

A súlypont pályájának l^0-nak hajlásszögeit α^0, β^0, γ^0-t a következő képletek adják:

$$c^0 \cos \alpha^0 = u^0, \qquad c^0 \cos \beta^0 = v^0, \qquad c^0 \cos \gamma^0 = w^0.$$

A találkozás pillanatától kezdve az összeforrt gömbpár a súlypont pályáját követi. A gömbpár haladó mozgása tehát x^0, y^0, z^0, α^0, β^0, γ^0, valamint c^0 által teljesen meg van határozva; feladatunk első fele tehát teljesen meg van fejtve; áttérünk a forgásokra.

3. Gömbrendszerünknek kettős mozgása van: külső mozgása, mely a súlypont mozgásában nyilvánul; és belső mozgása, mely maga is két részből áll: a gömb-középpontok *relativ* mozgásából a súlyponthoz képest és az egyes gömb*testek* forgásából. A gömbök középpontjainak koordinatáit a súlypontból kiinduló parallel fektetett koordinata-rendszerben x_i, y_i, z_i és x'_i, y'_i, z'_i-sal jelölvén, lészen

$$\begin{aligned}
x_i &= (x_0 - x'_0)\mu' + (u - u')\mu' t \\
y_i &= (y_0 - y'_0)\mu' + (v - v')\mu' t \\
z_i &= (z_0 - z'_0)\mu' + (w - w')\mu' t \\
x'_i &= -(x_0 - x'_0)\mu - (u - u')\mu t \\
y'_i &= -(y_0 - y'_0)\mu - (u - u')\mu t \\
z'_i &= -(z_0 - z'_0)\mu - (w - w')\mu t.
\end{aligned}$$

Ezek az egyenletek határozzák meg a gömbközéppontok *belső* mozgását. A belső mozgást azért kell tárgyalnunk, mert a belső mozgásban bizonyos F^0_a területsebesség rejlik, melyet ismernünk kell.

Ennek az F^0 területi sebességnek egyik komponense:

$$\begin{aligned}
F^0_x &= \frac{1}{2} m \left[(y - y^0)(w - w^0) - (z - z^0)(v - v^0)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2} m' \left[(y' - y^0)(w' - w^0) - (z' - z^0)(v' - v^0)\right] \\
&= \frac{1}{2}(m\mu'^2 + m'\mu^2)\left[(y - y')(w - w') - (z - z')(v - v')\right] \\
&= \frac{1}{2}(m + m')\mu\mu' \left[(y - y')(w - w') - (z - z')(v - v')\right]
\end{aligned}$$

Továbbá

$$F^0_y = \frac{1}{2}(m + m')\mu\mu' \left[(z - z')(u - u') - (x - x')(w - w')\right]$$

$$F^0_z = \frac{1}{2}(m + m')\mu\mu' \left[(x - x')(v - v') - (y - y')(u - u')\right]$$

Innen

$$F^{0^2} = F_x^{0^2} + F_y^{0^2} + F_z^{0^2} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}(m + m')\,\mu\mu'\right]^2 \cdot \begin{vmatrix} \Sigma(x-x')^2 & \Sigma(x-x')(u-u') \\ \Sigma(x-x')(u-u') & \Sigma(x-x')^2 \end{vmatrix}$$

a hol

$$\Sigma(x-x')^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

$$\Sigma(x-x')(u-u' = (x-x')(u-u') + (y-y')(v-v') + (z-z')(w-w');$$

tehát az ütközés pillanatában

$$F^0 = \frac{1}{2}(m+m')\,\mu\mu'\,RC\sin\delta$$

hol R a két gömb középpontjainak távolsága, C a G gömbnek G'-re vonatkoztatott sebessége, δ pedig e két mennyiség hajlásszöge.

A F^0 komponenseire vonatkozó képletekből továbbá világos, hogy e területi sebességnek l_1^0 tengelye merőleges R-re és C-re, vagyis hogy hajlásszögei α_n, β_n, γ_n a következő egyenleteknek tesznek eleget:

$$(u - u')\cos\alpha_n + (v - v')\cos\beta_n + (\omega - \omega')\cos\gamma_n = 0$$

$$(x - x')\cos\alpha_n + (y - y')\cos\beta_n + (z - z')\cos\gamma_n = 0.$$

Valamely szabadon forgó gömbnek területsebessége nem más, mint a tehetetlenségi momentumnak és a szögsebességnek fél szorzata.

Az egyes forgó G és G' gömböknek a területsebességei tehát

$$\overline{F} = \frac{1}{2}\varphi T, \qquad F' = \frac{1}{2}\varphi' T'.$$

A rendszerben van ezek szerint három területsebesség: $\overline{F}$, F' és F^0; mindegyiknek ismerjük a hajlásszögeit. Hogy *a rendszer teljes területsebességét* megkapjuk, ama három sebességet felbontjuk orthogonális komponenseire. A projekcziók összege a három tengelyen, t. i.

$$F_x = \overline{F}_x + F'_x + F^0_x \quad F_y = \overline{F}_y + F'_y + F^0_y \quad F_z = \overline{F}_z + F'_z + F^0_z$$

lesznek a teljes területsebesség F komponensei; és most ismeretes módon meghatározhatjuk az F-et magát, valamint az F tengelyének, azaz L_f-nek hajlásszögeit α_f, β_f, γ_f. Ugyanis

$$\cos\alpha_f = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\beta_f = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\gamma_f = \frac{F_z}{F},$$

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2.$$

4. Ekkép meghatároztuk rendszerünk területsebességének nagyságát F-t és e mozgás tengelyének L_f-nek hajlásszögeit α_f, β_f, γ_f. Most könynyen találjuk a szögsebességnek nagyságát W és tengelyének L_W-nek hajlásszögeit α_W, β_W, γ_W az összeütközés utáni első pillanatban.

Ugyanis E (DF) síkot fektetünk az L_D és L_f tengelyeken át. E síkban a rendszer súlypontján keresztül merőlegest L_d-t emelünk D-re. Akkor L_D és L_d a rendszernek két tehetetlenségi főtengelye, és a megfelelő tehetetlenségi momentumok lesznek T_D és T_d, hol (1.)

$$T_D = T_1, \qquad T_d = T_2 = T + T'.$$

Az F területsebességet most két komponensre bontjuk fel L_D és L_d szerint, melyeknek jelei F_1 és F_2, úgy hogy

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2$$

Mindegyik komponensnek megfelel egy szögsebesség-komponens W_1, W_2, és áll a két egyenlet:

$$F_1 = \frac{1}{2} W_1 T_1, \qquad F_2 = \frac{1}{2} W_2 T_2.$$

E két sebességi-komponenst összeadván lesz

$$W^2 = W_1^2 + W_2^2$$
$$= 4\left(\frac{F_1}{T_1}\right)^2 + 4\left(\frac{F_2}{T_2}\right)^2.$$

E szögsebesség tengelye az $E(D, F)$ síkban fekszik, és a D, d mértani tengelyekkel (W, W_1), (W, W_2) szögeket zár be, melyekre nézve áll:

$$\cos(WW_1) = \frac{W_1}{W} = \frac{F_1 T_2}{\sqrt{F_1^2 T_2^2 + F_2^2 T_1^2}},$$
$$\cos(WW_2) = \frac{W_2}{W} = \frac{F_2 T_1}{\sqrt{F_1^2 T_2^2 + F_2^2 T_1^2}}.$$

Végül ezekből ismert módon megnyerjük ama α_w, β_w, γ_w szögeket, melyeket a talált szögsebesség tengelye az alapul fekvő koordináta-tengelyekkel bezár.

---

12. *Leírandó egy súlyos anyagi pont mozgása vertikális tengelyű körhenger belső felületén a surlódás tekintetbe vételével, ha a pont kezdeti helye és sebessége valamint ennek iránya adva vannak.* (Réthy).

*

Első megoldás Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.

A mozgást meghatározó egyenletek a feladat esetében:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda\left(x+hr\frac{dx}{dt}\right),\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\lambda\left(y+hr\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-g+\lambda hr\frac{dz}{dt},$$

hol h-t állandónak veszem. A feltételi egyenlet pedig:

$$x^2+y^2=r^2.$$

A koordinátarendszer kezdőpontja a henger alapkörének a középpontja, pozitiv z tengely a henger tengelye, az x és y az alapkör két egymásra merőleges átmérője.

A két első egyenletből a mechanika ismeretes elvei alapján nyerjük:

$$d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]=2\lambda hr\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right].dt \qquad 1.$$

és

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}=\lambda r^2 \qquad 2.$$

egyenletet. A feltételi egyenletből pedig

$$xdx+ydy=0$$

és

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}=-\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right],$$

mely utóbbi értéket 2-be behelyettesítvén

$$\lambda r^2=-\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]. \qquad 2a.$$

eredményre jutunk.

λ értékét $2a$-ból az 1. egyenletbe téve,

$$\frac{d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^2}=\frac{2h}{r}dt \qquad 1a.$$

származik, melynek integrálja:

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\frac{2h}{r}t+l_1.$$

Ha felteszszük, hogy a mozgó pont a $t=0$ időpillanatban a sebességgel és α, β, γ iránynyal bír azaz:

$$\frac{dx}{dt}=a\cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt}=a\cos\beta, \qquad \frac{dz}{dt}=-a\cos\gamma$$

a kezdeti sebesség komponensei, akkor $t=0$-kor:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=a^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)=a^2\sin^2\gamma,$$

mert

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Ezek szerint a C_1 állandó értéke:

$$C_1=\frac{1}{a^2\sin^2\gamma}$$

és az előbbi egyenlet:

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\frac{2h.t}{r}+\frac{1}{a^2\sin^2\gamma}. \qquad 3.$$

Ez az egyenlet ily alakra hozható:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{ra^2\sin^2\gamma}{r+2a^2h\sin^2\gamma t}. \qquad 3a.$$

Egyszerűség kedveért legyen ezután:

$$\frac{a^2h\sin^2\gamma}{r}=k.$$

A $3a$ egyenletnek $2a$-val való egybevetéséből:

$$\lambda=-\frac{a^2\sin^2\gamma}{r^2(1+2kt)}.$$

Ezek alapján a mozgó pont x és y koordinátái már meghatározhatók az idő függvényeiként. Ha e czélra polárkoordinátákat vezetünk be, azaz a következő helyettesítést alkalmazzuk:

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi,$$

hol φ az x-tengely pozitiv iránya és a mindenkori rádiusvektornak az (xy) síkra eső képe alkotta szög, (a pozitiv fordulás irányát mechanikai értelemben véve), akkor

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

a miből azonnal látható, hogy:

$$\lambda = -\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

azaz: λ *az egység távolságában működő czentrifugális erő.* Ha ebbe az egyenletbe λ értékét behelyettesítjük és gyököt vonunk:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{a \sin\gamma}{\sqrt{1+2kt}}.$$

Integrálván:

$$\varphi = \frac{\sqrt{1+2kt}}{ah\sin\gamma} + C.$$

Egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy a mozgás az (xz)-síkban kezdődik és a φ szög az idővel nő, akkor $t=0$ mellett $\varphi = 0$ és:

$$C = -\frac{1}{ah\sin\gamma},$$

tehát

$$\varphi = \frac{\sqrt{1+2kt}-1}{ah\sin\gamma},$$

a honnan

$$x = r\cos\frac{\sqrt{1+2kt}-1}{ah\sin\gamma}. \qquad 4.$$

$$y = r\sin\frac{\sqrt{1+2kt}-1}{ah\sin\gamma}$$

mint a mozgó pont elmozdulásának x és y tengelymenti komponensei, melyekből a sebességek megfelelő összetevői egyszerű differencziáls utján erednek:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a\sin\gamma}{\sqrt{(1+2kt)}}\sin\frac{\sqrt{1+2kt}-1}{ah\sin\gamma},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a\sin\gamma}{\sqrt{(1+2kt)}}\cos\frac{\sqrt{1+2kt}-1}{ah\sin\gamma}.$$

Ha λ fennebb talált értékét az alapegyenletek közül a harmadikba behelyettesítjük,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{k}{1+2kt}\frac{dz}{dt}$$

származik, mely kissé átalakítva és rendezve, ily alakot ölt:

$$(1+2kt)\frac{d^2z}{dt^2} + 2k\frac{dz}{dt} - k\frac{dz}{dt} = -g(1+2kt),$$

azaz:

$$\frac{d}{dt}\left[(1+2kt)\frac{dz}{dt}-kz\right]=-g\,(1+2kt).$$

Ezt tehát integrálván, nyerjük:

$$(1+2kt)\frac{dz}{dt}-kz=-g(1+kt)t+C_2. \qquad 5.$$

Az állandó meghatározására szolgál, hogy a $t=0$ időpillanatban a feltétel szerint:

$$\frac{dz}{dt}=-a\cos\gamma,$$

másfelől

$$z=m$$

legyen. Ezek alapján:

$$C_2=-a\cos\gamma-km,$$

és így

$$(1+2kt)\frac{dz}{dt}+a\cos\gamma-k(z-m)+g(1+kt)t=0. \qquad 5a.$$

Ez egyenletből a mozgó pont vertikális irányú sebességi komponense:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{k(z-m)-a\cos\gamma-g(t+kt^2)}{1+2kt}.$$

Az integráczió czéljából írjuk az egyenletet így:

$$dz+\left[\frac{-k(z-m)+a\cos\gamma}{1+2kt}+\frac{g(t+kt^2)}{1+2kt}\right]dt=0.$$

Még e helyettezést teszszük:

$$k(z-m)-a\cos\gamma=kz',$$

a mivel az egyenlet ilyen lesz:

$$dz'+\left[-\frac{kz'}{1+2kt}+\frac{g(t+kt^2)}{1+2kt}\right]dt=0.$$

Az integrál pedig e formula szerint nyerhető:

$$z'=e^{-\int\varphi(t)\,dt}\left[C_3-\int dt.\psi(t)\,e^{\int\varphi(t)\,dt}\right],$$

vagy részletesen kiszámítva:

$$z'=\sqrt{1+2kt}\left[C_3-g\,\frac{1+kt+k^2t^2}{3k^2\sqrt{1+2kt}}\right].$$

Ha $t=0$, $z'=-\frac{a\cos\gamma}{k}$, és így

$$C_3=\frac{g-3ak\cos\gamma}{3k^2}.$$

E szerint:

$$z=m+\frac{g-3ak\cos\gamma}{3k^2}(\sqrt{1+2kt}-1)-\frac{gt}{3k}(1+kt),$$

a mozgó pont magassága a henger alapja fölött bármely időben. A sebesség

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

A pálya csavarvonalszerű; a csavarvonal képei az alapsíkokon a koordináták megfelelő értékeiből, nyerhetők; ezeknek tárgyalásába azonban nem bocsátkozom.

A Mathematikai és Physikai Társulat első rendes közgyűlése.

ELŐZMÉNYEK.

A társulat választmánya f. é. márczius hó 2-án tartott ülésén a közgyűlés előkészítésével foglalkozván, az ügyvivő titkárt az itt következő felszólítás kibocsátásával bízta meg.

Igen tisztelt Tagtárs Ur! A Mathematikai és Physikai Társulat alapszabályainak 24. §-a szerint «közgyűlést a társulat évenként rendesen egyet tart, még pedig husvét táján». A közgyűlés idejének megválasztásánál az a kivánságunk döntött, hogy oly időt találjunk, melyben mennél számosabban gyűlhessünk össze. Hisz társulatunk megalakításánál egyik főczél gyanánt az lebegett szemünk előtt, hogy az egy szakon működő szakembereket egymáshoz közelebb hozzuk, működésöket valamennyink haladásának előmozdítására egyesítsük.

Ezekre való tekintetből a legközelebb megtartandó közgyűlésünk tárgysorát úgy kivánjuk megállapítani, hogy az nem csupán a szorosan vett társulati ügyvitellel foglalkozzon, mely leszámol a multról s kitűzi a jövőnek teendőit. Közgyűlésünket tárgyi tekintetben is tanulságossá kivánjuk tenni azzal, hogy előadások egész sorával kötjük össze. Első sorban az eddigi rendes ülések előadásait kivánjuk mintegy reprodukálni, újra bemutatván a kisérleteket s így a folyóiratunkban közlötteket azoknak is szemléltetjük, a kik az előadásokon jelen nem lehettek. Azonkívül más fontosabb, csak gazdag fölszerelésű laboratoriumokban végezhető kisérleteket, új készülékeket, szemléltető modelleket és tanszereket kivánunk bemutatni s ezzel különösen vidéki tagtársainknak hasznos szolgálatot tenni. Teszszük ezt abban a reményben, hogy ők is — talán már a mostani közgyülésünkön — megismertetnek munkásságuk eredményeivel. A kedvező alkalmat felhasználjuk arra is, hogy az egyetemek laboratoriumait, a fővárosi középiskolák physikai szertárait, a technologiai muzeumot, a Ganz-gyár elektrochnikai osztályát s esetleg más érdekes intézeteket is megszemlélünk.

A közgyűlés részletes tárgysorának megállapítása csak akkor lesz lehetséges, ha a felránduló Tagtársaink számát legalább megközelítőleg ismerjük. Azért is kérjük tisztelt Tagtársainkat, hogy ebbeli szándékukat az ügyvivő titkárral mennél előbb — lehetőleg még e hó 15-ike előtt — tudassák.

A legnagyobb nehézséget a közgyűlés idejének megállapítása okozta. Tudjuk, hogy vidéki Tagtársaink különösen a Nagyhét első napjaiban szokták nagyobb számban fölkeresni a fővárost s ekként ez az idő látszott a legalkalmatosabbnak. Nem is haboztunk volna a közgyűlést ez időre kitűzni, ha csak az ügyvitellel foglalkozó közgyűlést kivántunk volna tartani. Az előadásokkal kapcsolatos közgyűlés, sajnálatunkra, erre az időre nem készíthető elő. Az előadók tanítással lévén elfoglalva, nem rendelkeznek az előkészítésre szükséges idővel, a főiskolák laboratoriumai pedig fölszerelésökkel és személyzetökkel tanítási czéljuknak állandóan le vannak foglalva, s így rendelkezésünkre nem állhatnak. Tehát csakis a néhány husvéti szüneti nap marad fen az előkészítésre: ezeket kivánjuk arra fordítani, hogy felránduló t. Tagtársainkat a bemutatandókkal az utazás fáradalmaiért kárpótoljuk.

Mindezek alapos megfontolása után a közgyűlést a husvéti ünnepeket közvetlenül követő napokon — április 4., 5. s esetleg 6-án — gondoljuk legkönnyebben megtarthatónak. Reméljük, hogy az utazásra szükséges, alig egy-két napi szabadságot t. Tagtársaink könnyen megkaphatják: hiszen közgyűlésünk is a tanítás érdekének kiván szolgálatot tenni.

Az előadások sor- és időrendjét úgy fogjuk megállapítani, hogy a közgyűlés tagjai nagyobb fáradság nélkül mind végig hallgathassák s a részletekre vonatkozólag felvilágosítást szerezhessenek maguknak.

A meghivót, a részletezett tárgysorral és időbeosztással együtt, e hó 20-ika táján megjelenő III. füzetünk mellékleteként fogjuk szétküldeni.

Avval a kivánsággal zárjuk be felszólításunkat, hogy a közgyűlésre mentül több tagtársunkhoz legyen szerencsénk.

Részünkről mindent el fogunk követni, hogy t. Tagtársaink a Mathematikai és Physikai Társulat most tartandó első közgyűléséről hasznosan és kellemesen eltöltött napok emlékével távozzanak.

Ennek talán az lesz az eredménye, hogy a Mathematikai és Physikai Társulat közgyűlése hazánk mathematikusainak és physikusainak állandó találkozó napjává lesz, mely közelebb hozván egymáshoz a személyeket, hathatósabbá, eredményesebbé fogja tehetni munkásságukat is. — A Mathematikai és Physikai Társulat választmánya megbízásából *Bartoniek Géza.*

*

A tagokhoz intézett ezen felszólításnak nagy sikere volt, a mennyiben a vidéki tagtársak tömegesen jelentkeztek a közgyűlésen való megjelenésre. Tekintettel erre a körülményre, a közgyűlés napirendje a következőkép állapíttatott meg:

Első nap, április 4.

I. D. e. 9 órakor: Wittmann Ferencz műegyetemi tanár kisérletei. Elektroinductiv taszítás. — Nagy feszültségű váltakozó áramokkal előidézett fény-ív. — Nagy feszültségű és nagy szaporaságú váltakozó áramok jelenségei. (Tesla-féle kisérletek.)

II. D. e. 11 órakor: Schuller Alajos műegyetemi tanár kisérletei. Gázok folyósítása. — Előadási kisérletek, physikai készülékek bemutatása. A műegyetem physikai laboratoriumának megtekintése.

III. D. u. 5 órakor: A Mathematikai és Physikai Társulat közgyűlése.

A közgyűlés tárgysora:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. A pénztárvizsgáló bizottság jelentése.
4. A második társulati év költség előirányzata.
5. Választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

IV. Dr. Kőnig Gyula alelnök előadása: Mérés és összeadás.

V. Vetítések a tud. egyetem mineralogiai intézetében. Gothard Jenő és Dr. Konkoly Miklós csillagászati képei. — Dr. Kemény X. Ferencz (hazai tájak) és Dr. Petrik Lajos (Magas Tátra) felvételei.

Közös vacsora.

*

Második nap, április 5.

VI. D. e. 9 órakor: Antolik Károly bemutatja uj akusztikai por-alakjait. Dr. Edelmann Sebő, Gothard Jenő, Palatin J. Gergely r. tag urak előterjesztései.

VII. D. e. 11 órakor: b. Eötvös Loránd elnök kisérletei. Tömegvonzás. — A kritikus hőmérsékletre vonatkozó kisérletek. — Előadási kisérletek. — Bartoniek Géza titkár kisérletei. — Hertz-féle kisérletek. — Mozgások leirására szolgáló készülékek.

VIII. D. u. 5 órakor: A Ganz-gyár elektrotechnikai osztályának megtekintése.

Megjegyzések.

1. Az itt közölt tárgysorozat változhat annyiban, hogy itt meg nem nevezett és ezentúl jelentkező tagtárs urak előterjesztései is sorra kerülhetnek, miről a közgyűlés alkalmával szétosztandó uj napirend fog értesíteni.
2. A közgyűlés tartama alatt megtekinthető lesz a műegyetem ábrázoló mértani modell-gyűjteménye, úgyszintén több fővárosi tanintézet (II. és VII. ker. főgymnasiumok és II. és IV. ker. főreáliskolák) physikai szertára.
3. A physikai intézetben több tagtársunk és hazai tanszerkészítőink készülékei lesznek kiállítva.

Ezek egy részét Grúber Nándor tagtársunk lesz szives bemutatni. Nevezetesen egy iskolai vetítő készülékkel, továbbá a Ferraris-féle forgó mágnesi tért szemléltető készülékekkel fog kisérletezni.

Ugyanitt Dr. Hoor Mór tagtársunk bemutatja javított Holtz-féle gépét, Strauss Ármin tagtársunk pedig száraz elemekkel fog néhány iskolai kisérletet bemutatni.

A KÖZGYŰLÉS LEFOLYÁSA.

Első nap.

A napirendben kitüzött időben: április 4-én délelőtt 9 órakor a Math. és Phys. Társulat tagjai a műegyetem műszaki physikai tantermében összejövén, b. Eötvös Loránd elnök a nagy számban egybegyűlteket a következő szavakkal üdvözölte: Tisztelt Uraim! Évi közgyűlésünk első ízben hoz most bennünket össze, s azért engedjék meg budapesti tagtársaim, hogy az ő nevükben is a legszivélyesebben üdvözöljem vidéki tagtársainkat, kik hivó szavunknak engedve, sokan igen messziről oly nagy számban jelentek meg közöttünk. Nem zárt ülésre jöttünk össze, nem arra, hogy sokat tanácskozzunk és tanakodjunk: tanulni akarunk egymástól s egymást tanítani. Ez okból, mielőtt tulajdonképeni közgyűlésünket megtartanók, időnket tudományos előadásokkal és kisérletekkel fogjuk eltölteni. Szétküldött napirendünket bizonyára ismerik s mi reméljük, hogy pontos betartásával tetszésöket fogjuk kinyerni. De hogy a programmon belül mindenki a hely- és időre nézve könnyebben tájékozódhasson, két collegánkat, Dr. Bozóky Endre és Dr. Demeczky Mihály urakat felkértem arra, hogy a netán szükséges felvilágosításokat megadni sziveskedjenek. — Most pedig kezdjük meg nem tanácskozásainkat, de előadásainkat, demonstratióinkat s azért is felkérem Wittmann Ferencz tagtárs urat arra, hogy előadását megkezdeni sziveskedjék.

Mielőtt azonban előadását elkezdené, még egy *istenhozottat* vidéki tagtársainknak, éljenek!

I.

Wittmann F. a periodikus áramok görbéinek bemutatására szolgáló oscillometerekről szólott és a mérőtelefonnal a váltakozó áram sinusgörbéjét objective állította elő.

Ezután bemutatta Elihu Thomson-nak az elektroinduktiv taszításra vonatkozó kisérleteit.

Ezek után a váltakozó árammal táplált nagy transzformator szekundär tekercsében húszezer Volt-nál nagyobb feszültségű áramot állítván elő, a kisütő ágait egymástól százötven millimeternyire távolította; eközben az áram magasan fellobogó láng alakjában egyenlítődött ki a kisütő sarkai között.

Kondenzátor batteria közbeigtatásával a váltakozások rendkivüli szaporítása által a hatás jelentékenyen fokozható; előadó ily módon 25 egymásután kapcsolt izzólámpát hozzott izzásba és kimutatta, hogy az indukczió oly nagy mértékű, hogy egynehány menettel bíró tekercshez közelített s két-három drótmenettel kapcsolatos izzólámpa működésbe hozható.

Előadó kisérletileg bemutatta Tesla Miklós ama kisérleteit, melyek méltán a váltakozó áram csodáinak nevezhetők. Olajba merülő transzformator sarkvégei között hatalmas csattanással valóságos villámok ütnek át. Ha a készüléket két nagy ónlemezzel szereljük fel, az elektromos erőtérben Geissler-féle csövek, melyeket egyszerűen kézben tartunk, gyönyörűen világítanak, a nélkül, hogy az áramfejlesztő készülékkel kapcsolatba hozattak volna. Tesla szerint ez volna a világítás ideális módja.

II.

Ezután Schuller A. műegyetemi tanár kisérletei kerültek sorra. Bemutatta czentrifugál mozgás törvényeinek szabatos beigazolására szolgáló készülékeit, továbbá a chemiai harmonika lángjának rezgéseit a sztroborzkóppal szemléltető kisérletét. Ez után harmonikus mozgások összetételét hangvillákra és rövid ingákra erősített tükrökkel vetette falra. Végül a műegyetem physikai szertárában és laboratoriumában kalauzolta a közgyűlés tagjait.

III.

1. Elnöki megnyitó.

B. Eötvös L. a közgyűlést a következő szavakkal nyitja meg:

Tisztelt Tagtársaim!

A Mathematikai és Physikai Társulat első közgyűlésére gyűltünk ma össze.

Hosszas tanácskozásoknak, heves vitáknak nem megyünk elébe s nekem, kit az elnöki székbe ültetni kegyeskedtek, könnyű és különösen kedves feladat jutott. Könnyű, mert egyszerű, de egészséges viszonyaink között egyszerű és kevés az a társulati ügy is, mely ma annak formája szerint elintézésre vár; kedves, mert szavaimat nemcsak a főváros, de az egész ország mathematikusaihoz és physikusaihoz intézhetem, a kik közül sokan messze földről jöttek ide leginkább azért, hogy azt a szellemi szövetséget, melyet társulatunk egy évvel ezelőtt összefűzött, élő szavakkal s baráti kézszorításukkal megerősítsék.

Alakuló ülésünkön megfogadtuk, hogy segíteni fogjuk egymást mindenben, a miben akár a tudományművelés, akár a tanítás terén társ a társat segítheti; megfogadtuk, hogy a tudományos életet, melyre hazánk közművelődésének és iskolájának egyaránt szüksége van, szerény körünkben ébren fogjuk tartani. Hogy már eddig is segítettük egymást, azt nem vonhatja kétségbe az, a ki társulatunk előadó üléseiből és folyóiratunk hasábjaiból ismereteket merített; hogy élünk és pedig tudományosan élünk, arról fényesen tanúskodik ez a mai összejövetelünk és tanúskodik az a tény, hogy társulatunknak immár közel négyszáz tagja van; hogy vagyunk négyszázan e hazában, a kik magunkat mathematikusoknak és physikusoknak valljuk.

Büszkén tekinthetünk végig tagjaink névsorán. Megtaláljuk benne iskoláink tanárainak javát, megtaláljuk technikai iparunk kitünőségeit, s még a hadsereg képviselői és a magántudósok sem hiányoznak körünkből.

Életpályáink a tevékenység külömböző mezőire vezethetnek, az egyiknek kis terület és szerény eszközök, a másiknak nagy munkakör és gazdag felszerelés juthatnak osztályrészül; de azért egyformán arra törekszünk valamennyien, hogy tudósokká váljunk és tudósok maradjunk, mert erős meggyőződésünk az, hogy az iskola, melynek életünket szenteltük, csak abban az arányban javulhat, a technikai ipar, melynek meghonosításan fáradozunk, csak abban az arányban fejlődhetik, a melyben tudományosságunk színvonalát magasabbra emelni bírjuk.

Szép és örvendetes jelenség az, hogy e tudományos zászló alatt ily sokan egyesülni tudtunk. Erősebbeknek érezzük magunkat azóta, s tényleg erősebbek is lettünk. Igaz ugyan, hogy a tudományok előbbrevitele nem társulatok, hanem csak egyesek munkájának eredménye lehet, s testületileg vagy bizottságilag felfedezéseket csinálni nem lehet; de nemcsak kutatásból áll a tudományos élet, s hivatását mint tudós mégis csak az töltheti be igazán, a ki felkeresi társait, tanul tőlük, s őket szóval vagy irással tanítani tudja.

Sokan vagyunk s meg vagyok győződve arról, hogy sokat tanulhatunk még mi is egymástól; a mit az egyik kérdez, arra a másik talán megfelel, azért ne zárkózzunk el társainktól, hanem buzdítva és segítve egymást, fejleszszük erőnket oly magas fokra, hogy a maga tudományos feladatát mindenikünk teljesíteni bírja, hogy a mathematikusok és physikusok körében pezsdüljön fel az a tudományos élet, melyre a mi meggyőződésünk szerint hazánknak oly nagy szüksége van.

Mint ennek az ébredező életnek első hirnökeit üdvözlöm az itt egybegyülteket! A Mathematikai és Physikai Társulat első rendes közgyűlését ezennel megnyitottnak nyilvánítom.

A közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítésére Jedlik Ányos és Farkas Gyula tagtárs urakat kérem fel.

2. Titkári jelentés, Bartoniek Gézától.

Társulatunk alapszabályai az ügyvivő titkár kötelességévé teszik, hogy az évi közgyűlésen a Társulat működéséről jelentést tegyen. Nyilván abból a czélból, hogy a Társulat egybegyűlt tagjai a hallottakon megítélhessék, mennyire felelt meg a Társulat az eléje tűzött feladatnak; helyesen, a czélnak megfelelően választották-e meg az eszközöket azok, kiket a Társulat ügyeinek vezetésével megbizott s megállapítható legyen, milyen tanulság vonható le a lefolyt év tapasztalataiból a jövőben követendő irányra nézve.

A Társulat czéljának elérésére szolgáló legfőbb eszközökül a rendes ülések, a tudományos folyóirat s időhöz nem kötött kiadványok vannak megjelölve. — Rendes ülést a Társulat az *első* évben — hozzászámítván az alakulást közvetlenül megelőző üléseket — összesen 24-et tartott. Ezek közül 12-ben egy mathematikai és egy physikai tárgyú előadás tartatott; 5 ülésen csupán csak mathematikai, 7 ülésen pedig csak physikai tárgyú előadás volt.

Az előadások nagy részét a folyóiratban közzétettük, vagy pedig közölni szándékozunk.

Az előadások czímeiből látható, hogy tárgyuk vagy az előadó önálló munkásságának eredményeiből van véve, vagy pedig az illető tudományszak egy-egy részében tett haladásra vonatkozik. Több előadásunk tisztán szaktárgyaink tanítását tartja szem előtt, ujabb készülékeket, vagy pedig tagtársaink előadási kisérleteit ismertetvén. Külön ki kell emelnünk a f. é. jan. hó 19-én tartott ülést, mely egészen Galilei emlékének és műveinek volt szentelve. Ez ülésünket Dr. Farkas Gyula tagtársunk, ki a legnagyobb hideg idején utazásra elszánta magát, tette lehetővé; ez áldozatkészsége a Társulat háláját biztosítja neki. Hiszszük, hogy előadásaink tárgyuknál fogva egészben véve megfeleltek a kitűzött czélnak, amennyiben szaktárgyaink haladásán kivül azok tanításával, a tanítás methodikai részével is foglalkoztak. Másrészt azonban nem tagadható annak a kivánságnak a jogosultsága, mely előadásainkban több változatosságot ohajt; ezt a változatosságot főleg rövid physikai tárgyú előadások, egyes kisérletek, uj készülékek bemutatása adná meg előadásainknak s valóban sajnálandó, hogy épen ezekben szükölködünk. Ennek oka különben eléggé ismeretes és nem más, mint a physikai laboratoriumok hiánya. A középfokú iskolák physikai szertárai — s ebben a tekintetben a főváros és a vidék között külömbség nincsen — gyengén vannak dotálva. A legtöbb esetben már maga az alapfelszerelés hiányos és az évi átalány nagy részét a folyó költségek, a szertár jó karban tartása, a javítások nyelik el s csak kis rész marad a szertár kiegészítésére. Mi sem bizonyítja jobban ez állítás alaposságát, mint az, hogy a jobban fölszerelt és dotált intézetek tanárai az irodalom terén is működnek, miről a Math. és Physikai Lapok hasábjai is tanuskodhatnak.

Igen örvendetes tapasztalat, hogy előadásaink igen élénken látogatottak. Tanu rá minden rendes ülésünk, a melyeken átlag 50 tagtárs szokott találkozni, s még hangosabb tanu a jelen közgyűlés. Semmi mást nem láthatunk ebben az érdeklődésben, mint annak az erős elhatározásnak megnyilatkozását, hogy a tagtársak a Társulat ügyét hogy úgy mondjam, személyes ügyöknek tekintik, hogy a Társulat minden tagja szakbeli önképzés utján előre kiván haladni.

Folyóiratunk, a Math. és Phys. Lapok I. kötete az igért 24—30 ív helyett 32 íven jelent meg. Tartalmát tisztelt tagtársaink ismerik, meg van róla a saját véleményök. Semmi jogom és okom nincsen erre a véleményökre hatni akarni; csak azt akarom kiemelni, a mi szerény véleményem szerint — mely alig fog ellenzőre akadni — Társulatunkra, tehát valamenynyinkre nézve a legörvendetesebb, a mi Társulatunk rövid működésének legszebb eredményeül tekinthető. Az I. kötet munkatársai között oly neveket találunk, melyek eddig a szakirodalomban ismeretlenek voltak. Ezzel távolról sem akarom őket kisebbíteni, vagy pedig a mi folyóiratunknak azt az érdemét vitatni, mintha ez hozta volna őket létre: egyszerűen tért nyitott tényleg meglevő erők szellemi productiójának, munkásságra serkentette őket, mi nélkül nem egy czikkünk mi ránk nézve veszendőbe ment egyéni reflexió maradt volna, vagy pedig kedvezőbb esetben a külföld számos szakfolyóiratainak valamelyikébe vette volna utját, meghagyván nekünk a meddő reclamatio jogát; de a magyar irodalom minden esetre a veszteség számlájára irhatná.

Különösen a feladatok s megoldások rovatán meglátszik, mily kiváló szakképzettségű szakemberekkel dicsekszenek középfokú iskoláink; a megoldások oly talpraesettek s oly szép számmal érkeznek a szerkesztők kezéhez, hogy a közlendők kiszemelése nem csekély nehézséggel van öszszekötve. Sajnos, hogy folyóiratunk terjedelme már is szűknek bizonyul, úgy hogy a feladatok kitűzésében valamivel óvatosabban kell majd eljárnunk.

A kötet figyelmes szemlélőjének még egy tünhet fel. A *kérdések* és *feleletek* rovatán nem mutatkozik az az élénkség, mely várható lett volna. Csak elvétve fordul egy-egy tagtársunk konkrét kérdéssel a folyóirathoz, pedig ez volna a hely, a melyen egyes apróságokban egymástól legkönnyebben s legegyszerűbben tanulhatnánk. Remélhetőleg, a kezdeti nehézségek legyőzése után ebben is kedvező fordulat fog bekövetkezni.

Az első év tapasztalatai tehát igazolták a reményt, hogy van már elegendő munkatárs a folyóirat fentartására; s most már javarészben a szerkesztőkön áll, a munkakedvet állandóan ébren tartani, ha kell fokozottabb munkára serkenteni s legfőképen arra törekedni, hogy a munkatársak köre mentül jobban kiterjesztessék. *Mennél több kéz írja a kötetet, annál változatosabb, annál jobban van védve az egyoldalúság veszedelme ellenében s annál nagyobb mértékben felel meg a Társulat czéljainak is.* Minden megirott és megjelent sor egy-egy gyökérhajtás, mely táplál és szilárdít. Egyébként valamenyinket az a tudat serkentsen a buzgó munkásságra, hogy a Math. és Phys. Lapok II. kötetének legujabb füzetét 405 példányban hordta szét a posta. Oly szám ez, melyre az első füzet szétküldésekor a legvérmesebbek sem számítottak.

Végül meg kell említenem e helyen azt is, hogy Társulatunk a Pallas kiadásában megjelenő Nagy Lexikon astronomiai, mathematikai és physikai részének kidolgozásában tevékeny részt vesz. A választmány több ülésen foglalkozott az ügygyel s megállapodásainak végrehajtására 8 tagból álló bizottságot küldött ki, mely a munkatársakat kiszemelvén, a munkát közöttük felosztotta s a beérkező kéziratok felülvizsgálásával Czógler Alajos, Heller Ágost és Kürschák József tagtárs urakat bizta meg. A Lexikon szerkesztősége ezek kezéből veszi át a közleményeket s így a tárgyi megbízhatóság eléggé biztosítottnak tekinthető. Társulatunk kötelességének tekintette a munka elvállalását, hogy ezen nagyszabású munkában a mi szaktárgyaink lehetőleg megbízható formában legyenek előadva.

A Társulat mult és jövőbeli működésének megitélésénél mint igen fontos tényező a rendelkezésre álló anyagi erő jön tekintetbe. — Midőn a Társulat alakítása s a folyóirat kiadása felett első izben folyt az eszmecsere, három bevételi forrásra számítottunk: szaktársaink évi járulékaira, a M. T. Akadémia segélyezésére s végül a közoktatási kormány támogatására.

Szaktársaink sokkal nagyobb számban csatlakoztak hozzánk, mint eleinte reméltük; mindjárt első felszólításunkra 300-nál többen jelentkeztek belépésre, ma pedig 378 rendes és 6 pártoló tagja van Társulatunknak. Tagtársaink buzgalmára s a Társulat ügyéhez való hűségre enged következtetni az, hogy tagdíjaikat — igen kis kivétellel — pontosan befizetik; ez a Társulatnak legalább 1300 forint évi bevételt biztosít.

A M. T. Akadémia évi 1000 forinttal segélyezi társulatunkat a folyóirat kiadásában; ez összegért, valamint a segélyzés megadásában rejlő erkölcsi támogatásért hálával adózunk az Akadémiának.

Kis számvetés megmutatja, hogy a Társulat ezekből a bevételekből a költséges szedésű és kiállítású folyóiratot legföllebb az igért minimális terjedelemben, t. i. 24 nyomtatott íven adhatja ki. A nyomdai költségek, az irói díjak s az expeditio kellő takarékosság mellett fedezhetők lennének. Csakhogy tagtársaink már az első évben is oly élénk irodalmi munkásságot fejtettek ki, hogy erre a minimumra szorítkozni lehetetlen volt s a beérkező dolgozatok számából és qualitásából itélve, a jövőben sem lesz lehetséges. Ez a választmányt arra indította, hogy a mikor az I. kötetnek nagyobb része megjelent volt, erre, mint törekvéseink komolyságának tanujára hivatkozva, kérvénynyel forduljon a nmélt. m. kir. vallás- és közoktatásügyi Miniszter urhoz, melyben a folyóirat rendes segélyezéseért folyamodott. Kérelmünk, sajnálatunkra, nem teljesült. Abban a tudatban, hogy Társulatunk folyóiratával s általában egész működésével a tanítás szolgálatában áll, nem mondunk le a reményről, hogy a méltánylás a közoktatásügyi kormány részéről elmaradni nem fog.

Az első társulati év — főleg az alakulás (különféle nyomtatványok, oklevelek) költségei miatt — mintegy 600 forintnyi hiánynyal záródott le. Ezt oly módon akarjuk eltüntetni, hogy a nyomdai tartozásból három éven keresztül évenkint 200 forintot törlesztünk. Nem tagadható, hogy ez is a folyóirat terjedelmének megszorítására int és késztet; mindamellett reméljük, hogy bevételeink az előirányzott összegnél többre fognak emelkedni s füzeteinknek számát, terjedelmét nem leszünk kénytelenek leszállítani.

Feltünő, hogy az egyetlen magyar nyelvű mathematikai és physikai folyóiratnak a hazai tanintézetek között mindössze 25 előfizetője van. Kérjük összes tagtársainkat, tekintsék Társulatunk ügyét saját ügyöknek és legyenek szivesek a Math. Phys. Lapokat az igazgató urak figyelmébe ajánlani; reméljük, hogy fáradozásuk nem lesz sikertelen és pénztárunk mérlege a tömeges megrendelések folytán kedvezőbben alakul.

Jövedelmeink fokozását még tán más uton, pl. belépti díjért tartandó szakszerű kurzusok rendezésével is fogjuk elérhetni. A választmány fontolóra vette a tervet, mely a Társulat némi anyagi hasznán fölül még az irodalomnak is hajthat hasznot, s ha csak leküzdhetetlen akadályokba nem ütközik, végre is fogja hajtani.

*

Ime, ezekben törekedtem Társulatunk első évének eseményeiről beszámolni.

A kép, melyet Társulatunk eddigi működése feltüntet, élénken meginduló munkásságot, elevenséget árul el. Nagy eredményekkel, sikerekkel még nem dicsekedhetünk. Egyetlen igazi eredménynek, sikernek egyelőre csak azt tekintsük, hogy ennyien összeállottunk s bebizonyítottuk, hogy dolgozni akarunk.

Ha pedig dolgozni akarunk, sikerülni fog bebizonyítanunk azt is, hogy dolgozni tudunk. Ámde ehhez idő, kitartás kell, mert csakis az állandóság emelheti a magukban véve örvendetes eredményeket a siker magaslatára. Erre az állandóságra pedig biztos kilátásunk van, ha nem lankad a buzgalom és önzetlen ügyszeretet, a melynek t. Tagtársaink eddig oly számos tanujelét adták.

Engedje meg végül a t. közgyűlés a titkároknak, hogy köszönetet mondjanak buzgó munkatársaiknak, kiknek soraiból a Mathematikai és Physikai Lapok I. kötetét összeállítani szerencsések voltak. A feladat megoldása nem volt mindenkor könnyű ; de t. Tagtársainknak oly sokszor és sokféleképen nyilványuló buzgalma minket is hasonló buzgalomra intett. Fogadják hálás köszönetünket buzdításukért s fejezzék ki irányunkban bizalmukat azzal, hogy becses támogatásukban a jövőben is részesítenek.

3. A pénztárvizsgáló bizottság jelentése.

T. közgyűlés! Alulirottak a f. évi márczius 2-án tartott választmányi ülésben a társulat pénztárának megvizsgálásával megbizatván, a vizsgálatot márczius 24-én tényleg megejtettük és eljárásunkról a márczius 30-án tartott választmányi ülésben irásban beszámoltunk. Szerencsénk van e helyen is ismételni, hogy úgy a bevételek, mint a kiadások minden egyes tételét megvizsgáltuk ; a kiadások minden tételét okmányokkal igazolva s általában az egész számadást egészen rendben találtuk, minek folytán a választmány részéről a pénztárnoknak a felmentvény megadását kértük. Budapesten, 1893. április 4-én. *Mauritz Rezső, Wagner Alajos.*

*

Az 1891. év költség kimutatása.

Bevétel	616 frt 74 kr.
Kiadás	543 « 09 «
Pénzmaradék	73 frt 65 kr.

Az 1892. év költség kimutatása.

Bevétel	2810 frt 23 kr.
Kiadás	2770 « 03 «
Marad	40 frt 20 kr.

Tőkésített pártoló és örökítő tagsági díjak összege 1892. évi deczember 31-én 630 frt.

A közgyűlés a jelentést tudomásul veszi és saját kebeléből a pénztár megvizsgálására Balog Mór, Bogyó Samu és Müller József tagtárs urakat kéri fel.

4. A Mathematikai és Physikai Társulat költségelőirányzata az 1893. évre.

Bevételek.

1. Tagsági díjakból	1300 forint
2. Előfizetési díjakból	150 «
3. A folyóirat I. kötetének eladásából	50 «
4. Hirdetésért	80 «
5. Befolyó hátralékokból	60 «
6. Kamatok	25 «
7. A M. T. Akadémia segélye	1000 «
	2665 forint

Kiadások.

1. A Math. Phys. Lapok kiadása	2159 forint
2. Expeditio	92 «
3. Előadások költsége	72 «
4. Postaköltség	36 «
5. Irodai költség	10 «
6. Oklevélirás	6 «
7. A pénztárnok tiszteletdíja	50 «
8. A nyomdai tartozás törlesztésére	200 «
9. Szolgálatokért	40 «
	2665 forint

*

Elnök a költségelőirányzathoz megjegyzi, hogy az előirányzott összegből a folyóirat második kötete csak 24 ívnyi lehet. De a választmány törekedni fog a jövedelmeket szaporítani, és terjedelmesebb kötet megjelenését lehetővé tenni.

5. Választmányi tagok választása.

Következvén a választmányi tagok választása, elnök a szavazatok beszedésére Tőtössy Béla és Balog Mór urakat kéri föl.

Az alapszabályok 12. §-ának rendelkezése szerint a következő tagok lépnek ki a választmányból: Scholtz Ágost, Szily Kálmán, Than Károly és Wagner Alajos.

A beadott érvényes szavazatok száma 87. Megválasztattak Scholtz Ágost (67 szav.), Szily Kálmán (81 szav.), Than Károly (85 szav.) és Wagner Alajos (84 szav). Szavazatot kaptak még: Bein Károly, Berecz Antal, Demeczky Mihály, Farbaky István, Farkas Gyula, Klamarik János, Kovács János, Kürschák József, Palatin Gergely és Schuller Alajos.

6. Indítványok.

Az elnök kérdést intézvén a közgyűléshez, van-e valakinek indítványa, Hlatky Miklós indítványozza: Kéressék fel a vallás- és közoktatásügyi miniszterium, hogy a Mathematikai és Physikai Lapokat a tanintézeteknek előfizetésre ajánlja; továbbá

Képessy Imre indítványozza: Emeltessék fel 4, illetőleg 6 forintra a tagsági díj, hogy a folyóiratra előirányzott összeg emelhető legyen.

Mindkét indítvány a választmányhoz tétetik át.

A közgyűlés végül Fuchs Károly indítványára a titkároknak, és Bodola Lajos indítványára a pénztárnoknak működésökért köszönetet szavaz.

*

IV.

Erre Kőnig Gyula alelnök «*Mérés és összeadás*» czimű előadása következett.

*

Előadásának* bevezetésében előadó kiemeli, hogy a midőn a Társulat ügyvezetői részéről felszólítást nyert arra, hogy a közgyűlés alkalmával előadást tartson, nem csak örömmel vállalkozott e feladatra, hanem büszkeséget is helyezett abba, hogy első közgyűlésünk alkalmával foglalkozásunk elméleti részének mintegy képviselője lehet. Annál nagyobb gonddal — mondja előadó — próbálta előadásának legalább tárgyát megkeresni és lemondott arról, a mi legközelebb fekvő lett volna, hogy a mathematika egyik nagyobb fejezetéről referatumot tartson és hogy ezzel is a közgyűlé-

* Minthogy ezt az előadást később egész terjedelmében fogjuk közölni, a jelen alkalommal az itt adott kivonatra szorítkozunk.

sen Társulatunk e tudománygyűjtő czélja kifejezést nyert volna; lemondott erről, mert a mathematika testvértudományának, a physikának, köréből, annyi mindenféle referatum állott rendelkezésre, hogy a mathematikában talán másra lehetett a fősúlyt fektetni és hogy talán czélszerűbb volt arról beszélni, a mi a mathematika és physika szoros testvériességét állapítja meg. Mert való, bármennyire is különböző a foglalkozás, egyrészt a laboratoriumban, másrészt az iróasztal mellett, mégis bizonyos tekintetben mind a kettő egy tudomány, mert, *úgy a mathematika, mint a physika a mérés tudománya.* A mérés az az alapfogalom, a melyből mind a kettő kiindul, és melynek mind a kettő exakt jellegét köszöni. Ez indokolja azt, hogy a mathematikusok és physikusok mindig együtt működtek és ez az együttműködés e tudományok főképviselőinél is abban nyilatkozik, hogy egyszerre mathematikusok és physikusok voltak.

Előadó a továbbiakban kifejti nézeteit arra nézve, hogy a mérés mikép lesz a mathematikának mintegy philosophiai bevezetése; megállapítja és ismeretelméleti módon elemezi a mérés és kompozicziό fogalomalkotásait és végül behatóan foglalkozik avval a kérdéssel, hogy miképen állapítható meg a mérőszám fogalma úgy, hogy a kompozicziό mathematikai tárgyalása lehetőleg kényelmes legyen, azaz hogy a kompoziczióról áttérhessünk a szó szorosabb értelmében vett összeadásra. E kérdés megoldása a

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi[f(x, y)]$$

függvény-egyenlet megoldásával nyerhető, a melyet a legitim függvények körében az

$$f(x, y) = \psi[\varphi(x) + \varphi(y)] \quad (\varphi \text{ és } \psi \text{ tetszőleges függvények})$$

képletből eredő függvénysokaság szolgáltatja.

V.

Ezen előadás után a közgyűlés tagjai a tud. egyetem mineralogiai intézetébe mentek át.

Az intézet igazgatója, Dr. Szabó József egyetemi tanár ur szives volt nagy elektromos vetítő készülékét a Társulat rendelkezésére bocsátani.

Harkányi Béla tagtársunk Gothard Jenő csillagászati photographiáinak (csillagképek, ködök, holdképek) egész sorozatát s azután különféle elektromos szikrarajzait mutatta be. A vetített képek rendkívüli szépsége és érdekessége általános meglepetést okozott.

Ezután Petrik Lajos tanár ur a Magas Tátrában tett felvételeit volt szives bemutatni.

A bemutatott képsorozat mintául szolgálhat arra, mi módon kell a tájak szépségeit valódi nagyságukban megismertetni; nem egyes hatásos képeket szakít ki a környezetből, de a képek lánczolatával lehetően hűen, a maga valójában törekszik a tájat szem elé varázsolni. Kivánatos volna, hogy a szép képek a tanítás czéljaira megszerezhetők legyenek.

*

Az első napot, melynek tárgysorát a Társulat tagjai reggeli 9 óráról esti 9 óráig lankadatlan figyelemmel kisérték, közös vacsora fejezte be.

Második nap.

VI.

Az előadások második sorát Antolik Károly nyitotta meg, d. e. 9 órakor. Az egyetemi physikai intézet előadó termében tömegesen megjelent tagtársak nagy figyelemmel kisérték az előadónak rendkívül érdekes kisérleteit, melyek rövid ismertetését alább közöljük.

Ez után Palatin Gergely, Edelmann Sebő és Fényes Dezső közleményei kerültek sorra, melyeket füzetünk egész terjedelmökben közöl.

VII.

Az előadások sorát b. Eötvös Loránd zárta be. A Társulat egyik főfeladatául az előadási kisérletek egybeállítását jelöli meg s az ilyenekkel való foglalkozást a jövő közgyülések első teendői közzé sorozza. Ez alkalommal az idő rövidsége és a kezdet nehézségei folytán ezek nem foglalhatták el az őket megillető teret. Ezúttal ő is csak két ilyen kisérletet kiván bemutatni, a melyeket azonban azon igazságok fontossága miatt, melyeknek felvilágosítására szolgálnak, fontosaknak tart.

Az egyik az inductió kimutatása, a mely egy egyenes vezetőben keletkezik akkor, a midőn ez a földi mágneses térben mozog. Ennek elektromindító ereje elemi úton kiszámítható s értéke $l.u.V$, ha l a vezető hossza, u a mozgás sebessége, V pedig a földmágnesség verticalis componense. A bemutatott kisérletben $l = 200$, $V = 0{,}3$, u pedig 100, mely adatokból $E = 200 \, . \, 100 \, . \, 0{,}3 = 6000 \; CGS$ vagyis mintegy $\frac{6}{100{,}000}$ Volt. A vezető egymástól 2 méternyi közben kifeszített dróton volt mozgatható s az eközben indított áram a galvanomotéren 5—10 foknyi kitérést okozott, melynek iránya a mozgás irányától függ. — A másik kisérlet a tömegvonzás bemutatása volt.

Erre a közgyűlésen megjelenteket a szertárban kalauzolta. A kiállított tárgyak közöl JEDLIK lánczolatosan kisüthető battériáit, csöves sürítőit említjük; úgyszintén b. EÖTVÖS ejtő ingáját, előadási piezometerét, a hőegyenérték meghatározására való készülékét stb.

A physikai intézet földszinti, mérésekre berendezett helyiségeiben a tömegvonzás s a földi gravitatió észlelésére szolgáló készülékei, közöttük a multiplicáló tömegvonzó készüléke, a lengések photographálására használt hengerek stb., az intézet tornyában függő nagy Foucault-féle inga kötötték le a látógatók figyelmét.

*

A physikai intézet kis előadó termében a közgyűlés egész tartama alatt látható volt DISCHKA GYŐZŐ igen érdekes szökőkútja;* dr. HOOR MÓR influentia-gépe;** SZATHMÁRI ÁKOS kolozsvári tanár készüléke az Archimedesi elv igen szabatos és tanulságos szemléltetésére, mely készüléknek kiállítása a vezetése alatt álló mechanikai műhelynek becsületére válik; a Ganz-féle gyár lábbal hajtható iskolai dynamogépe, végül a Calderoni-féle czég számos iskolai készüléke. Ez a gyüjtemény majdnem kivétel nélkül hazai tanszerkészítőink kezéből került ki, egyformán dicsérvén a tanszerkészítők ügyességét s a kiállító czég nagy buzgalmát és sikereit ezen iparág fejlesztése körül.

A szükséges magyarázatot GRUBER NÁNDOR és JURÁNYI HENRIK tagtársaink voltak szivesek megadni. Csak azt kell sajnálnunk, hogy az iskolai készülékeket az idő rövidsége miatt működésökben bemutatni nem volt lehetséges. Ezt annyival inkább sajnálhatjuk, mert a kiállított tárgyak között volt egy teljes felszerelésü iskolai vetítő készülék, a forgó mágnesi tér szemléltetésére való készülékek, kézi dynamogép, mely egyenes, váltakozó és több phasisú forgó áram fejlesztésére használható stb., tehát mind oly készülékek, melyek működésével és kezelésével nem egy tagtársunk kivánt volna megismerkedni.

K. KISS JÓZSEF tagtársunk, a debreczeni ref. collegium tanára a Tesla-féle mótornak iskolai modelljét volt szives a közgyűlésre magával hozni s azt az érdeklődőknek bemutatni.

VIII.

A közgyűlést a Ganz-féle gyár elektrotechnikai osztályának megtekintése fejezte be, méltón zárva be a bemutatások hosszúra nyúlt sorozatát. ZIPERNOVSZKY KÁROLY igazgató ur, továbbá BLÁTHY O. TITUSZ, NEUSTADT LIPÓT és dr. HOOR MÓR mérnök urak, mindannyian tagtársaink, voltak

* Legközelebb bővebben ismertetjük.

** L. Math. Phys. Lapok. II. köt. 58 l.

szivesek a közgyűlés tagjait a gyárban kalauzolni. Hálával tartozunk a gyár igazgatóságának, mely — úgy mint már előbb a budapesti tagoknak — ez alkalommal vidéki tagtársainknak is adott alkalmat a minden tekintetben nevezetes telep megszemlélésére.

*

Ezzel a Mathematikai és Physikai Társulat első rendes közgyűlésének utolsó pontja is elintéztetett. A megjelentek egybehangzó vallomása szerint a közgyűlés igen érdekes, de igen fárasztó is volt. Hiszen a két nap legnagyobb része előadások meghallgatásában, mutatványok szemléléseben, ülésezésben telt el, a mi nem csekély testi-lelki megerőltetéssel járt. Ha a figyelem egészen az utolsó pillanatig is éber maradt, az csak annak volt jele, hogy valóban azért gyűltünk össze, hogy «egymástól tanuljunk, egymást tanítsuk».

Jó példával járt legelől a társulat első rendes tagja, Jedlik Ányos, az érdemes öreg tudós. Bámulatos éberséggel meghallgatott mindent és jól megnézett mindent, nem tartózkodván attól sem, hogy olykor közbeszólva, bővebb magyarázatot ne kérjen az előadótól. Találón nevezte volt őt Antolik tagtársunk a közös vacsorán mondott pohárköszöntőjében magyar Chevreul-nek, ki nemes büszkeséggel legöregebb tanulónak vallotta magát.

A Társulat tagjai a következő szavakkal vettek bucsút egymástól: A viszontlátásra, *a jövő közgyűlésen !*

A közgyűlésről adott ezen rövid értesítőnk hiányos volna, ha megfeledkeznénk arról, a miről vidékről felrándult t. Tagtársaink nyilatkozataiból értesültünk. Közgyűlésünk sikerét kétségkívül annak kell köszönünk, hogy vidéki tagtársaink oly szép számmal jelentek volt meg. Ezt az igazgató urak s a felutazók helyettesítésére vállalkozó t. Collega urak áldozatkészsége tette lehetővé. Midőn ezt itt kötelességszerűen örömmel elismerjük, hálás köszönetet mondunk nekik azért, hogy közgyűlésünk sikerét ily módon közvetve ők is támogatták.

A Mathematikai és Physikai Társulat első rendes közgyűlésén jelen voltak:*

Ábel János, Alszeghy Alajos, Antolik Károly, Arany Dániel, Asbóth Emil, Balog Mór, Bartus Adolf, Bein Károly, Beke József, Dr. Beke Manó, Benkó Imre, Bláthy O. Titusz, Bodola Lajos, Bogyó Samu, Bohuss Teofil, Boros Sándor, Dr. Bozóky Ádám, Dr. Bozóky Endre, Csemez József, Csepreghy Endre, Csillag Vilmos, Csopey László, Czógler Alajos, Dr. Demeczky Mihály, Dr. Edelmann Sebő, b. Eötvös Loránd, Erdődy Imre, Farbaky István, Dr. Farkas Gyula, Fényes Dezső, Fölser István, Fraunhoffer Lajos, Dr. Fröhlich Izidor, Fuchs Károly, Gruber Nándor, Grünwald István, Hann Alajos, Harkányi Béla, Héjas Endre, Held Károly, Heller Ágost, Heller Richárd, Hlatky Miklós, Dr. Hoor Mór, Hornischek Henrik, Dr. Horváth József, Edvi Illés Aladár, Dr. Jedlik Ányos, Károlyi Lajos, Dr. Kemény X. Ferencz, Képessy Imre, K. Kiss József, Dr. Kiss Károly, Kiss Tamás, Dr. Klamarik János, Dr. Klug Lipót, Dr. Kőnig Gyula, Kont Gyula, Dr. Kopp Lajos, Kovács Ferencz, Dr. Kövesligethy Radó, Kövi Imre, Krüger Viktor, Dr. Kürschák József, Dr. Lakits Ferencz, Lengyel István, Luncz Alajos, Mandák Dezső, Mauritz Rezső, Molnár József, Müller József, Dr. Muraközy Károly, Nesnera Aladár, Neustadt Lipót, Nicolits Lázár, Osztrogonácz János, Palatin Gergely, Pap Lajos, Dr. Pfeifer Péter, Prokes Ignácz, Rados Gusztáv, Rados Ignácz, Rejtő Sandor Dr. Réthy Mór, Róna Zsigmond, Rucsinszky Lajos, Sarlay János, Dr. Schenek István, Schey Lipót, Schmidt Ferencz, Schuller Alajos, Simon Ferencz, Sinkó József, Stauber József, Stephani Ervin, Dr. Suták József, Szabó József (Budapest), Szabó József (Vácz), Szavkay Ede, Székely Károly, Dr. Szekeres Kálmán, Széky István, Szerényi Géza, Szily Kálmán, Szuppán Vilmos, Tangl Károly, Tőtössy Béla, Dr. Wagner Alajos, Waldapfel János, Weinhardt Ferencz, Winter József, Wittmann Ferencz, Dr. Wohlrab Flóris, Závodszky Adolf, Zipernovszky Károly.

* A névsor a közgyűlésen köröztetett íven talált néválaírásokból van összeállítva. A kimaradt nevek bejelentését köszönettel veszszük. *Szerk.*

A közgyűlésen tartott előadások.

A rezgő hártyák hangidomairól.

Chladni, Marx, Savart és Faraday sokat foglalkoztak úgy a szilárd lemezek, valamint a kifeszített hártyák rezgéseivel, de ez utóbbiakat saját bevallásuk szerint, nekik nem sikerült eléggé szabályos rezgésbe hozniok. A régibb kisérletezők közül különösen Savart-ot kell kiemelnem, mivel ő a hártyákat az által tudta rezgésbe hozni, hogy homokkal behintett felületük fölött erősen hangzó hangvillákat vagy sipokat tartott: a hártyák nyilván ráhangzás folytán jöttek rezgésbe. A nyert idomokat összeállítva találjuk a Müller-Pouillet-féle kézikönyvben.[1] Hogy Savart hangidomai nem felelnek meg egészen a valóságnak, leginkább annak tulajdonítható, hogy ő az igazi interferentia-vonalakat a rezgési középvonalaktól és az indifferens területektől még nem tudta megkülömböztetni. Savart óta a hártyákkal eredményesen ugyszólván senki sem foglalkozott, mert ha Müller kisérleteit[2] meg is említjük, mindezek nem a hártyák rezgési törvényeinek kutatása, hanem az emberi hangszálak tanulmányozása czéljából végeztettek s így csak kevés ujat találunk bennök. Elsas kisérletei[3] szintén csak említésre méltók, mert ezek, a kezdet nehézségeivel küzdve, csak igen homályos képet nyujtanak a szóban levő tárgyról. Különben Melde, ki a hártyákról az «Akustik» czimű munkájában egész lelkesedéssel ir s úgyszólván az egész idevágó anyagot összegyűjtötte, még csak tíz évvel ezelőtt igy végzi a hártyákról szóló fejezetet: .... «*doch liegt das Experimentelle noch sehr darnieder.*»[4]

A hártyák rezgés törvényeinek elméletével a következő nagy hirű buvárok foglalkoztak: Poisson, Riccati, Oersted, Strehlke, Biot, Seebeck, Bernard, Bourget, Lamé és Mathieu.

---

[1] Müller-Pouillet-Pfaundler: 1886. Bd 1. pg. 792.

[2] C. Müller: «Untersuchungen über einseitig frei schwingende Membranen und deren Beziehung zum menschlichen Stimmorgan». Cassel 1877.

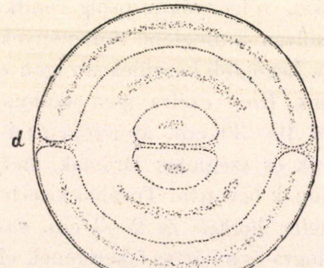
[3] A. Elsas: «Über erzwungene Membranschwingungen». Marburg 1882.

[4] Melde: Akustik 1883. pg. 103—133.

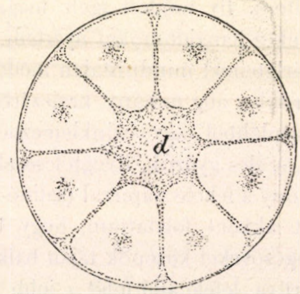
Ezek előrebocsátása után áttérhetek saját kisérleteimre. Kutatásaimat 1888-ik év végén kezdtem meg. Mindjárt az első kisérleteknél a kifeszített hártyák kereteire 3—5 milliméter magas, parafadugóból kivágott félkör-alakú lemezkéket ragasztottam s ez utóbbiakat vizes üvegrudacskákkal dörzsöltem. Ily módon igen magas hangokat, a hártyákon pedig rendkivül érdekes hangidomokat nyertem. Fellelkesülvén a meglepő tüneményeken, kisérleteimet minduntalan módosítgattam. Legújabb készülékeim igen egyszerűek s alig néhány krajczárba kerülnek. Ezen czélra igen alkalmasak a vaspléhből vagy czinklemezből kivágott 10—30 cm. átmérőjű és 4—5 cm. széles gyűrűk, üvegtölcsérek, fagyűrűk és szegletes farámák, melyek vékony s fekete papirral (satiné-papir) vannak bevonva. További kisérleteimet akként folytattam, hogy 1—1·5 méter hosszú és 2—3 cm. vastag üvegcsöveket közepök táján balkezembe fogva és a hártya fakeretének élére szorítva, lefelé álló felét a jobb kezemben levő vizes flanellel dörzsöltem. Ezen könnyű és kielégítő eredményű kisérletek után a húrokhoz fordultam, a végett, hogy rezgéseiket a hártyákra átvihessem. E czélra a monochord alkalmas készüléknek látszott; de meg kell vallanom, hogy itt váratlan nehezségekkel kellett küzdenem. Sok kisérletezés után végre rájöttem, hogy legczélszerűbb eljárás az, ha a monochordnak lehetőleg megrövidített és erősen kifeszített húrja aljára igen kicsike (3—4 mm. hosszú és 1—2 mm. széles alappal biró) parafából készült kupocskát enyvvel odaragasztok, ez alá a hártyát és a hártya alá két széles faéket helyezek és ha ez utóbbiakat addig tolom egymás felé, míg a parafa-dugócska a hártya felületét érinti. Most tompa fatű segítségével a kupocska csúcsát és a hártyát beenyvezem s addig várok, míg az enyv megszárad s a csúcs a hártyával összeragad. Ekkor a hártyát behintvén a kellő porokkal, a húrt igen keskeny hegedűvonóval lehetőleg gyöngén dörzsölöm. A hártyán levő porokat minden kisérlet után le kell fujni, vagy puha ecsettel megigazitani. Ily módon sikerült számtalan hangidomot nyernem és ezekből a következő törvényt kisérletileg megalapítanom: *A hártyákon mutatkozó interferentia-vonalak mindig két egymásra merőlegesen álló főirányban igyekszenek kilejlődni, legyen a hártya kör-, négyzet-, vagy bárminemű alakú is.* A transversális rezgésekből eredő s teljesen kifejlődött idomok a köralakú hártyákon concentrikus körök, vagy concentrikus körszeletek, illetőleg gömbölyített körszeletrészek, míg a négyszegletes hártyákon a teljes kifejlődésnél négyzet alakokra emlékeztető hangidomok fejlődnek. (1., 2., 3., 4. és 5. ábra.)

Az így keletkezett s teljesen kifejlődött hangidomok már most bizonyos rendszer szerint könnyen osztályozhatók. Ezt a rendszert egyszerűen «*Oszlási rendszer*»-nek nevezem.

Ha pl. valamely hártya szélén csak egyetlenegy interferentia-kör képződik, akkor az idom az *«Elsőrendű null-oszlású»* osztályba tartozik. Rövid megjelölése pedig: 1. O. o. Ha a hártyán két concentrikus kör mutatkozik, akkor az elnevezés: *«Másodrendű null-oszlás»* (2. O. o.). Ha

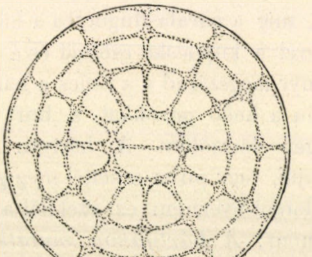


1. ábra.

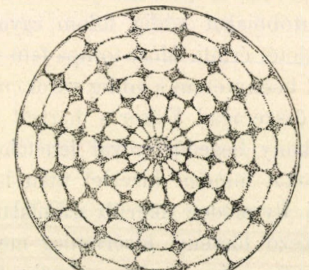


2. ábra.

három concentrikus kört látunk, akkor *«Harmadrendű null-oszlás»*-sal van dolgunk (3. O. o.) stb. Ha a hártyaidom két egyszerű félkörre oszlik, akkor az idom: *«Elsőrendű kettős-oszlási»* osztályba tartozik (1. II. o.); ha pedig két, három, négy stb. ilyen félkör egymásban lép fel, akkor:



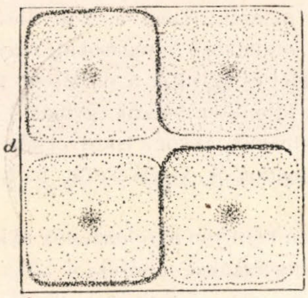
3. ábra.



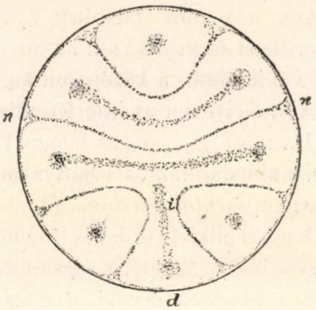
4. ábra.

«Másod-, harmad-, negyed-, stb. rendű kettős oszlási osztálylyal van dolgunk. (1. ábra = 3. II. o.) *«Hármas-oszlás»* és egyáltalában *páratlan számú oszlások nem léteznek.* Ha ilyesmit látunk, ez csak annak a jele, hogy az idom nem fejlődött ki tökéletesen és hogy némely — többnyire minden második — interferentia-vonal kimaradt, vagy hogy az egyes interferentia-vonalak szabályellenes ugrásokat tettek, pl. 6-ik ábrán az *nn'* interferentia-vonal.

Most következnek az «Első-, Másod-, Harmad-, Negyed-, stb.-rendű «négyes-, hatos-, nyolczas-, tizes-, stb.-oszlások». Pl. (3. IV. o.), (5. VIII. o.), (6. X. o.), (5. XII. o.), stb. Az ide mellékelt 1-ső—5-ik ábra teljes képet



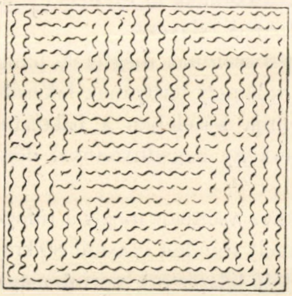
5. ábra.



6. ábra.

nyujtanak nekünk az egész «*Oszlási rendszer*»-ről. Osztályozásuk: 3. II. o.; 1. VIII. o.; 4. XII. o.; 6. XVI. o.; 1. IV. o.

Előfordulnak ugyan szabálytalan idomok is, pl. 6-ik ábra, de ha ezeken



7. ábra.

a rezgési középpontokat szem előtt tartjuk, akkor a keletkezett idomok a kellő oszlási osztályba többnyire könnyű módon beilleszthetők. Így pl. az ide mellékelt 6-ik ábra az 1. VIII. o.-t mutat; itt az *nn'* interferentia-vonal szabályellenes vonalugrást tett s minden második in terferentia-vonal kimaradt.

Rezgési középpontok alatt értjük ama köralaku foltocskákat (2-ik ábra), melyek a megfelelő területek közepén nem homokból, hanem a homok közé kevert lycopodiumból képződnek. Ezek tulajdonképen a Savart-féle «secundär-idomok». Ha a rezgési középpontok hosszabb vonalakká fejlődnek ki, akkor «*rezgési középvonalak*»-nak neveztetnek. (1. és 6-ik ábra.) Az indifferens területek alatt értjük azokat a részleteket, melyek az interferentia-vonalak között, a rezgőterületeken kívül, keletkeznek s a melyeken a homok látszólag nyugvásban maradt. (Lásd a 2-ik ábrának *d* területét és ugyanazon idomnak szélén mutatkozó bevágásokat, vagy pedig a 5-ik ábrán a középpont körüli területet és egyuttal azon kisebb területeket, melyeken az interferentia-vonalak *látszólag* metszik egymást.) Ha most igen magas hangokkal kisérletezünk, akkor a transversális rezgések kimaradnak és a hártyákon oly hangidomok keletkeznek, melyek a *hosszrezgésekből* erednek. (7. ábra.)

Ezen rendkívül érdekes tünemények igen könnyen létrehozhatók akként, hogy a hártya keretére ragasztott parafadugócskákat, melyekről különben már a bevezető sorokban megemlékeztem, vizes üvegcsővel dörzsöljük; vagy még biztosabban, ha valamely hártya keretére fél cm. vékony és 25—30 cm. hosszú üvegrudacskát vagy üvegcsövet helyezünk s annak lefelé álló végét vizes flanellel dörzsöljük. Ily módon valamely 400 mm. oldalhoszszal biró, négyzetalakú hártyán, 50—60 egymással párhuzamosan futó interferentia-vonalat könnyen előállíthatunk és ekkor az alkalmazott porok, — lycopodium, elefántcsontpor vagy homok, — oly éles vonalakban s oly szabályossággal helyezkednek el egymás mellé, mintha a hártya fekete felületére aczéltollal volnának odavésve.

De 40—60,000 rezgési számnak megfelelő hangidomokat még biztosabban állíthatunk elő, ha valamely hártyának fakeretébe varrótűt függélyesen szúrunk és azt középpontja közelében a balkezünkben levő ollóba szorítván, a tű alsó részét keskeny hegedűvonóval dörzsöljük. Az ollóval a tű rezgését szabályozzuk.

Ezekhez a kisérletekhez azonban mégis a tűfogó (Stielklöbchen) a legalkalmasabb készülék, mely minden órásnál 80 krajczárért kapható s melyben valamely vékony kötőtű tetszésünk szerinti magasságban beilleszthető — tehát hangolható — s aztán balkezünkkel egyszerűen a hártya keretére szorítandó és a hegedűvonóval dörzsölendő.* Csak kis gyakorlat kell ahhoz, hogy a tűfogó segítségével oly idomokat idézhessünk elő, *melyeknél semmiféle hangot nem hallunk* s a melyeknek megfelelő interferentia-vonalak 2—3 mm. távolságban — *félhullámhossznyira* — helyezkednek el egymás mellé.

Feltéve már most, hogy a papirban a hangterjedés sebessége egyenlő a

* Lásd: Zeitschrift für den phys. u. chem. Unterricht. Berlin, 1891. pag. 243. Fig. 58.

levegőbelivel (ámbár nagyobbnak veszik), akkor $n = c : \lambda$ képlet szerint, $n = 340{,}000$ mm. : 6 mm. $= 56{,}666$ rezgési számmal van dolgunk.

Hogy itt csakugyan *hossz-* és *nem keresztrezgések* szerepelnek, már onnan is következtethető, hogy ezen hangidomoknál sem a hártya feszültsége, sem súlya, sem alakja, sem pedig annak megterheltetése nem jön tekintetbe; sőt a kisérleteket minden előkészítés nélkül akképen is megtehetjük, hogy egy ív papirt egyszerűen az asztalra teszünk, — ha épen akarjuk, tetszés szerinti súlyokkal megterheltetjük, vagy bármely részén kilyukaszthatjuk, — és aztán a szabad felületét igen finom homokkal behintjük és a tűfogót a papir bármely pontjára függélyesen állítva, annak kötőtűjét hegedűvonóval dörzsöljük. A hangidom abban a pillanatban előáll és a papir egész felületén terjed el.

Ha itt transversális és nem longitudinális rezgéseket tételezünk fel, akkor kisérleteink minden eddigi hártya-elméletnek ellentmondanak és az azokra vonatkozó törvényekkel homlokegyenest ellenkeznek.

A leírt módon nagyobb kartonokon is igen csinos hangidomok idézhetők elő, sőt kis ügyességgel az üveg- és fémlemezeket is sikerűl hosszrezgésbe hozni, ha a tűfogóban levő (vastagabb) kötőtűt az illető szilárd lemez széléhez szorítjuk, aztán pedig hegedűvonóval rezgésbe hozzuk. Az utóbbiaknak megfelelő igen érdekes és eddig még nagyon ismeretlen hangidomok kényelmesen tanulmányozhatók, mivel a szilárd lemezekben a hangterjedés sebessége nem változik meg úgy, mint a hygroskopikus hártyáké.*

Antolik Károly.

Jedlik osztógépéről.

T. Tagtársaim! Még a szabadságharcz idejében történt, hogy az akkor már a népfölkelők sorába tartozó veterán tudósunk, dr. Jedlik Ányos, nappal részt vesz az ország fővárosát, az akkor még ifju Pestet védő sánczok fölépítésében, éjjel pedig laboratoriumába visszavonulva folytatja félbeszakított kedvencz művét — nevezetes osztógépét s nem sokára be is fejezi.

---

* Az eredmények bővebb leirása a szerző következő közleményeiben található:

«Értekezések a természettudományok köréből. Kiadja a M. Tud. Akadémia.» Budapest, 1890. Ára 30 kr.

«Ueber Klangfiguren, die auf gespannten Membranen und auf Glasplatten mittelst Tonübertragung hervorgerufen werden.» Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. VIII. pag. 286. Friedrich Kilian. Budapest, 1890.

«Zeitschrift für d. phys. u. chem. Unterricht.» Berlin, 1891. pag. 187.

A felsorolt munkákban 22—58 ábra van mellékelve és az észlelt tünemények, valamint előidézésök módjai kimeritően vannak tárgyalva. *Szerk.*

Hogy az a gép nem utánzása valami meglevőnek, hanem eredeti s önálló találmány, legjobban bizonyítja az a körülmény, hogy manapság is — tudtommal csak három hasonló gép van a világon s ezekről is csak azt tudjuk: mire képesek, de nem azt, hogy milyen a berendezésük.

Ezzel korántsem akarom azt vitatni, hogy Jedlik gépe a maga nemében egyszersmind a legelső is. Hisz Fraunhofer és Nobert már jóval előbb készítettek és pedig kitünő rácsokat, úgy hogy e tekintetben veterán tudósunkat fölül is mulják.

De úgy látszik az ő czélja eleinte nem annyira a beosztás finomsága, mint inkább a fölosztás élénksége és mélysége vala; innét van az, hogy az ő rácsainak szinjátéka majdnem páratlan a maga nemében.

Nagy baj volt veterán tudósunkra az, hogy a gép javítását és tökéletesítését nem maga végezhette, hanem másokra kellett azt rábiznia; ilyformán eshetett meg rajta az, hogy a 60-as évek elején, egyik vakáczióban, mielőtt útra kelt volna, a gép javítását s tisztítását valami vándor mechanikusra bízván, ez a gépet ugyan szétszedte, de aztán többé nem foglalkozott vele, hanem inkább megkárosítva a laboratoriumot, megszökött.

Ez az eset annyira elkeserítette veterán tudósunkat, hogy a szétszedett masinát úgy a mint volt — darabonkint egy ládába hányta s többé nem foglalkozott vele.

Ily állapotban került 1879-ben az osztógép Győrre és később 1884-ben sokszori kérésem-könyörgésem után Pannonhalmára.

A mikor én a majdnem 20 éven át romokban heverő gépet ládájából kiemeltem, fogalmam sem volt, hogy milyen lesz az alakja teljesen összeállított állapotában; de ismeretes volt előttem annak czélja s rendeltetése s így az összeállítása végre még is csak sikerült.

Maga az osztógép körülbelül 1 méter hosszú és $^1/_2$ méter széles; főbb alkotó részei öt esztergályozott falábakon nyugvó sárgaréz asztalra vannak erősítve.

A főbb alkatrészek a következők:

1. két külön sínpárokon csuszó szán;
2. a gyémántot fölemelő és leeresztő készülék;
3. a csavart forgató szerkezet.

A T betü alakban elhelyezett sínpárok egyikén mozog egyenes irányban a karczoló készüléket tartó szán; a másik sinpáron pedig egy második szán csuszik ide-oda, melyre a karczolandó üveg erősíthető. A mellékrészek az üvegtartó szánnal együtt a gép főkerekétől nyerik mozgásukat s az egész gép müködés alkalmával oly benyomást tesz oldalról nézve, mint valami a század elejéből való Watt-féle gőzgép.

Minden osztógépnek legfőbb kelléke az, hogy hibátlan legyen a csavarja. Az úgyszólván a lelke az egésznek; a csavar jóságától függ mindenesetre a rácsok tökéletessége. S aligha tévedek, ha azt állítom, hogy még manapság is azért találunk oly kevés rácsosztógépet az optikusok és mechanikusok műhelyeiben; mert igen kevesen tudnak hozzá való mikrometercsavart készíteni.

«A ki ismeri mindama nehézségeket, melyekkel egy jó mikrometercsavar előállítása jár, mondja FRAUNHOFER egyik értekezésében, nem fogja lehetségesnek tartani, hogy valaki még finomabb csavart készítsen, mint a minő az, melyet osztógépemhez csináltam.» Pedig FRAUNHOFER nemcsak tudós optikus, hanem kitünő mechanikus is volt; az ő rácsain pedig egy millimeteren 300-nál több vonás nincsen.

Nem akarom a t. közgyülést a csavarkészítés módjainak leírásával fárasztani; csak annyit akarok a dologra nézve fölemlíteni, hogy két híres berlini mechanikus, WANSCHAFF és BAMBERG a többi közül szintén állítottak össze mikrometer-csavart metsző gépeket. Időközben fordultam is hozzájuk s az egyik azt felelé nekem, hogy oly hosszú csavart, mint a milyen a JEDLIK-féle géphez szükséges, nem tud előállítani, a másik készített ugyan egyet számomra, de ez nem bizonyult jónak. Hiába vesződtem e csavarral két hónapon keresztül, jó rácsot nem tudtam vele előállítani.

Az a két csavar, mely eredetileg az osztógéphez tartozott, nagyon durva. Mindkettőnél a csavarmenetek magassága 1$^1/_8$ mill. A csavarokhoz illő dob — helyesebben a dob szerepét játszó fogaskerék szintén nem elég finom.

Az egyik keréknek csak 100, a másiknak 200 foga van; úgy hogy evvel a berendezéssel egy-egy milliméterre 80, ill. 160 vonásnál többet karczoltatni nem birtam.

Időközben, hogy a géppel mindinkább megismerkedtem s az üvegkarczolásban némi eredményre jutottam, megpróbáltam magam egyszerű csavarmetszővel finom csavart készíteni; hogy ez először nem sikerült nem tagadom, de ma mégis abban a helyzetben vagyok, hogy két jó csavart tudok fölmutatni; ezek közül az egyik $^1/_8$ mill., a másik csak $^1/_4$ mill. magas menetekkel bir. Eleinte nem akartam elhinni azt, hogy a magam készítette mikrometercsavar valóban jó, azért fordultam időközben az említettem berlini mechanikusokhoz, azt gondoltam, hogy egy mechanikus mégis csak jobb csavart tud csinálni, mint csekélységem; azonban manap, hogy az összehasonlítás megtörtént, más nézeten vagyok.

A legutóbb készült csavarom, mint említém, csak $^1/_4$ mill. menetekkel bír s ha erre alkalmazom a 200-as fogaskereket, az osztógép önműködőleg 800 karczolatot húz egy-egy millimeterre.

Miután sikerült jó csavart előállítanom, megpróbáltam készíteni finomabb fogaskereket is; a legutolsó magam készítette fogaskeréknek nem kevesebb mint 524 foga van, ha ezt használom az $^1/_4$ millimeteres mikrometer-csavarral együtt, a gép még mindig maga magát igazítva, 2000 karczolatot ejt egy-egy millimeterre.

Igy készült ez a fillér nagyságu körös rács, melyben a beosztott mező szabad szemmel jól kivehető, de szinkép rajta keresztül nézve nem látható.

De ez még nem a legvégső határ, melyet el tudok érni.

Ugyanis a dob szerepét játszó fogaskerék fogaiba egy végetlen csavar kapaszkodik; valahányszor ez egy körülforgást végez, a dob mindannyiszor egy-egy foggal megy odább, de könnyü szerrel megtehetem azt, hogy azt a végetlen csavart kézzel csak $^1/_{25}$ részszel forgatom el, ez által az előbb elért 2000-ed részt míg 25 részre bontom s így ez úton a millimeterre nem kevesebb mint 50000 karczolatot ejthetnék; ha t. i. a gép második főtényezője: a gyémánt azt kibirná.

Scheiner a Zeitschrift für Instrumentenkunde czímű folyóirat XII. évfolyamának novemberi füzetében Rowland és Brashear híres concav rácsairól szólva, a többi között azt mondja: «Egy pár hónapba kerül, míg egy tökéletes mikrometer csavar elkészül s igen könnyen megesik, hogy eltelik egy év is, míg az ember egy jó gyémánt csúcsra akad s ha minden rendjén van, még akkor is legalább öt napig kell a gépnek szakadatlanul járnia, hogy összesen 30,000 karczolatot végezzen», és sokban igaza van.

A gép már azért sem járhat gyorsan, mert a gyémántot minden huzás végén föl kell emelnie s a rákövetkező huzás elején ismét letennie és pedig nagyon óvatosan, hogy a finom csúcs az ütés következtében csorbát ne szenvedjen.

De maga a huzás sem mehet gyorsan, mert akkor az éles gyémánt ugrándozva halad el az üveg fölületén s a huzás maga nem lenne szabályos.

Én rendesen úgy járatom a gépet, hogy egy-egy huzásra szánt idő 13—15 mp. között váltakozik.

Schroeder az előbb említett folyóiratban a gyémántról értekezvén azt mondja Nobert-ról, hogy ez próbaüvegeinek finom beosztására kitünő élü sárga brasiliai gyémántot használt.

A karczoló gyémánton úgy iparkodott finom élt előteremteni, hogy keresett a gyémánton olyan hasadási fölületet, mely valamelyik köszörült fölülettel derék vagy ennél valamivel nagyobb szöget képezett.

Megengedem azt, hogy ilyen gyémánttal ejtett karczolatok szabályosak, de kétségbe vonom azt, a mint Schroeder állítja, hogy az ilyen gyémántél oly rendkivül — majdnem a kimeríthetetlenségig tartós volna.

Tudtommal Nobert rácsai 6000-nél több karczolattal nem birnak, de próbált volna vele Nobert egyhuzamban 20—30 ezeret üvegre karczoltatni, bizonyára tapasztalta volna ő is, hogy még a gyémánt is kopik.

Én a magam részéről Fraunhofer és Rowland eljárását követem, mely abban áll, hogy az apró töredékek közül kiválasztom nagyító segítségével a leghosszabbat s egyszersmind a leghegyesebbet, ügygyel-bajjal beleillesztem az arra való foglalványba s próbálok vele egy-egy huzást tenni. A karczolatokat megvizsgálom mikroskop alatt s ha jóknak bizonyulnak, befogom a gyémántot a munkára; ha a huzások nem felelnek meg, akkor folytatom a keresést, míg csak jóra nem akadok.

Hogy aztán ez a keresés esetleg egy hétig vagy tovább is eltarthat, arra el lehetek készülve; de nem ez az egyedüli kellemetlenség, mely a gyémántcsúcshoz füződik. Igen gyakran megesik az is, hogy a gyémánt eleinte egy darabig igen szépen karczol, de aztán egyszerre csak mintha megváltoznék az éle, a vonalozás egész máskép sikerül, mint eddig történt.

Nézetem szerint ennek oka azokban az apró mikroskopikus hólyagocskákban keresendő, melyek még a legfinomabb üvegben is föltalálhatók. Ha ugyanis a gyémánt olyan hólyagocska fölé kerül, melynek falazata rendkívül finom, könnyen megtörténik, hogy az éles csúcs azt a falazatot először csak megrepeszti, később többször haladva el fölötte, magába a gödröcskébe bele is szakad; hogy aztán a csúcs ilyenkor törést vagy csorbát szenvedhet, az több mint valószinű.

Azért okulva a tapasztaltakon, nem is hiszek mindjárt a gyémáncsúcsnak; igazi munkába csak akkor fogom, ha a próbaüvegen nehány száz karczolást minden változás nélkül végzek.

A gyémántnak az excentrikus korong segélyével való fölemelését és letevését, továbbá a karczolandó fölületnek a gyémánt alatt való elhuzását, úgyszintén a gyémánttartó szánnak a megfelelő mértékben való elcsusztatását az osztógép főkereke végzi. Ezt a főkereket a pannonhalmi physikai szertár tulajdonát képező eredeti Gramme-féle mágnes-elektromos motor hajtja, a motort pedig két czélszerűen berendezett nagyobb fajtáju Daniel-féle elem forgatja.

Kezdetben igen sok bajom volt ezekkel az elemekkel. Az elektromos áram nem tartott sokáig, a rézgálicz is igen hamar kivirágzott a diaphragma felső részén, de a legveszedelmesebb az volt, hogy a diaphragma fenekére és oldalára tiszta fém réz rakódott le.

Mindezeken a bajokon úgy segítettem, hogy a porczellán diaphragma fenekét és fölső peremét beitattam gyantamázzal, továbbá nem engedtem meg azt, hogy a diaphragma a czinkhengerrel együtt a külső üvegedény fenekéig érjen.

Ugyanis a czinkhengerről egy-két napi müködés után szürkés-fekete salak válik le, ez a salak a fenékre szállván, előidézi egyrészt a telep belső zárlatát, másrészt a tisza réznek a diaphragma falára való lerakódását.

A diaphragmában elhelyezett rézhengert oly magasnak veszem, mint a minő magas a külső edényben lévő folyadék fölszine, a rézhengerre kautschuk fogantyuval ellátott kerek üveglemezt helyezek, ilyformán ez a lemez a diaphragmának bemázolt felső peremével együtt a rézgálicz jegőczök tartója gyanánt szolgál.

E berendezés mellett a telep már másfél hétnél is tovább eltartott.

Palatin.

Akkumulátorok az iskolai használatban.

T. Tagtársaim! Engedjék meg, hogy midőn a középiskolai czélokra szerkesztett akkumulátoromat bemutatom, röviden vázoljam a czélt, melyet szerkesztésével elérni óhajtottam. Szükségesnek tartom ezt már csak azért is, mert az akkumulátor alkalmazása energia átalakítással s így szükségkép energia veszteséggel jár. Erősen megfontolandó tehát, hogy az előny, melyet akkumulátorok alkalmazása kényelem és kezelés tekintetében nyújt, felülmulja-e vagy legalább equivalens-e az előbb említett energia veszteséggel?

Lássuk e végből, mi az energia veszteség, és melyek azon előnyök, a miket az akkumulátorok alkalmazása nyújt?

A középiskolai kisérletezésre legalkalmasabb s tényleg legelterjedtebb elemek a (diaphragmás) chrómsavas elemek. Különböző hatályosságú depolarizáló folyadékkal összeállított ilyen elemek kisütésének eredményét a Társulat folyóiratának mult évfolyamában közöltem.* E közleményből kitünik, hogy ha — a legjobb esetet tekintvén — a kisütés 3 *A.* átlagos intenzitásu árammal történik, akkor 12 óra lefolyása alatt 1·36 *V.* átlagos feszültség mellett mintegy 42 *HA.*-t nyerünk és 10 *HW.* elektromos energia 5 kr.-ba kerül. E közben a sarkfeszültség 1·63 *V.*-ról 1·18 *V.*-ra száll alá. A kisütést még 12 óráig folytatván, a feszültség csakhamar 1 *V.* alá száll és esik egész 0·6 *V.*-ig. Az áramintenzitás is gyengül s 24 órai kisütés eredménye 2·9 *A.* átlagos intenzitás és 1·16 *V.* átlagos feszültség mellett mintegy 70 *HA.* leend, 10 *HW.* elektromos energia ára pedig 3 kr.-ra csökken.

Minél nagyobb intenzitásu árammal történik a kisütés, annál rohamosabb a feszültség esése, annál kedvezőtlenebb egyszersmind a nyert energia értéke. Még kedvezőtlenebb az eredmény akkor, ha a kisütés huzamosabb megszakításokkal történik, vagy épen ha az elem egy-két órai használat után szétszedetik s egy-két nap mulva újra összeállíttatik. Az ilyen nagyobb időközökben eszközölt kisütésnél — nem tekintve a szétszedés és újra összeállítás nem éppen kellemes munkáját — az energia értékében 25—40%-ot veszítünk és 10 *HW.* ára 7—9 kr.-ra emelkedik.

Az eddig mondottakból az a tanulság, hogy ha helyesen és gazdaságosan

* Math. Phys. Lapok I. köt. 428. l.

akarjuk elemeinket felhasználni, akkor arra kell törekednünk, hogy a kisütés 2—3 *A*. intenzitásu árammal egyfolytában, megszakítás nélkül menjen végbe.

Igy a nyert energia ára 40—50%-al is olcsóbb lesz, mint ha a kisütés nagyon erős áramokkal és megszakításokkal történik. Ámde a középiskolai kisérletezésnél ez egyszerűen lehetetlen. Mert az órabeosztás miatt csak megszakításokkal eszközölhető s minden alkalommal legföllebb 1 óra hosszáig tarthat. Ehhez járul, hogy a kisérleteknél szükséges áramfeszültség és intenzitás nagyon ingadozó, úgy hogy itt a legkedvezőtlenebb kisütési viszonyokkal állunk szemben.

Kivánatos tehát, hogy két-három chrómsavas elem energiáját 20—24 óra lefolyása alatt olyan készülékbe szűrjük át, a mely alkalmas arra, hogy a belefektetett energiát huzamosabb ideig megőrizze, s a megőrzött energiát *különböző intenzitásu árammal, lehetőleg változtatható feszültség mellett, többszörös és huzamosabb (egy-két sőt több nap) megszakítások mellett csekély veszteséggel visszaadja.*

E körülmények megfontolása indított arra, hogy a középiskolai physika tanítás kisérleteihez egy megfelelő méretű és elég kényelmes kezelésű akkumulátor telepet állítsak össze. Az akkumulátor szerkesztésében arra törekedtem, hogy 1) capacitása az általam lemért chrómsavas elemek elektromos energia-készletével összhangban álljon; 2) hogy az akkumulátor telep sarkfeszültsége 2 *V*.-tól 12 *V*.-ig változtatható legyen; 3) hogy a szerkezet maga egyszerű, könnyen kezelhető és áttekinthető, az elektrodák egyenkint kicserélhetők és tartós szerkezetűek legyenek.

Azt hiszem e hármas czélt sikerült elérnem avval az akkumulátor-typussal, melyet itt bemutatni szerencsém van.* A 2 positiv és 2 negativ elektrodából álló akkumulátor capacitása 8 *HA*. (10% potential esésig.) Hat darab akkumulátor alkot egy telepet, a mely telep alkalmas pachytroppal ellátva 4 féleképen csatolható, t. i. egy, két, három és hat elemmé; a sarkfeszültség tehát 2, 4, 6 és 12 *Volt* lehet. Az elektrodák keretei kör alakú ólomrácsok, az egyik sugár irányában 10 mm. szélességben felhasítva és úgy szerkesztve, hogy az aktiv massa összefüggő egészet alkot. Az elektrodák felhasított részükkel paraffinban főzött fanyergen ülnek, egymástól 8 mm. távolságban. Maga a rács lágy ólomból, a kivezető szár és fej pedig kemény ólomból (24% antimon) készül. Ugyancsak kemény ólomból vannak készítve a fejek közé illesztendő koczkák is, melyek az egynevű elektrodák összekötésére szolgálnak. A fejek és koczkák fúrásán át egy-egy mindkét végén csavarmenettel ellátott rézpálcza vonul s két anyacsavarral szoros érintkezésbe hozhatók. A nyereg magassága úgy van

---

* Leírását később kivánom a folyóirat lapjain közzétenni.

megválasztva, hogy az elektrodák az üvegedény fenekétől mintegy 15 mm. távolságban legyenek.

E telep megtöltésére *három chrómsavas elem elégséges.* S mivel két chrómsavaselem elektromotoros ereje közel 4 *Volt*, egy akkumulatoré pedig a töltés kezdetén 2—2·1 *Volt*, tehát kezdetben két *egymásután* kapcsolt chrómsavas elemmel töltjük az *egy* elemmé kapcsolt akkumulator telepet. Rheostat közbeiktatásával az áramot 3 *A.*-ra szabályozzuk s arra törekszünk, hogy a töltő áram intenzitása lehetőleg állandó legyen. Ha már az egész rheostat kiakasztásával sem lehet az áramintenzitást állandósítani, bekapcsoljuk a harmadik elemet is.

A megtöltött akkumulátor telepben 2 *V.* sark feszültség mellett 48—50 *HA.* elektromosság áll rendelkezésünkre, a melyet 12 *Voltig* változtatható feszültséggel és 18—20 *A.* intenzitásu árammal vehetünk vissza; sőt ha csak perczekig tartó hatásról van szó, az intenzitást 30—40 *A.*-ra emelhetjük. Míg a befektetett energia készlet el nem fogyott, a telep a nap bármely órájában a hét bármely napján működésre készen áll s nem álterálja az eredményt az, hogy egyfolytában történik-e a kisütés vagy napokig terjedő intervallumokban. *Edelmann.*

Mágneses erővonalak rögzítése photographiai úton.

Nemcsak a mágneses erővonalak, hanem síklapokon előállítható bármiféle poralakok (Chladni- és Antolik-féle hártya-hangidomok, Lichtenberg- és Antolik-féle elektromos alakok, elektromos erővonalak s ezek módosulásai a mágneses mezőben s t. e.) igen kényelmesen és tökéletes természethűséggel rögzíthetők az érzékeny photographiai lemezek vagy papirlapok segélyével.

A mágneses görbék ilyféle előállításának az eddig szokásos eljárások (enyvezett papirosra való felragasztás vagy viaszrétegbe való beolvasztás) fölött az az előnye van, hogy rögzítés közben nem változik meg a vasreszelék elhelyezkedése és így a görbéknek, különösen a sarkok közelében látható szálkás szerkezete egészen természethíven rajzoltatható meg, mert a lemez megvilágítása közben a mágnest a lemeztől eltávolítani nem kell.

Ha a rajzot, különösen sokszorosítás vagy vetítés czéljából üveglapon akarjuk előállítani, a vörös fény mellett beporozott negativ lemezeket egy fölöttük meggyújtott gyufa fejének elégetésével exponáljuk; az Edwards-féle chlórezüstös lemezek megvilágítására 1—1,5 cm. hosszú magnézium szalagot kell előzetesen meggyújtott borszeszláng segélyével elégetnünk. A megvilágításnál arra kell ügyelni, hogy a fényforrás helyzete lehetőleg állandó maradjon, nehogy a felfelé álló szálkák több irányú árnyékot vessenek. Az exponált lemezek képei erőteljesen fejleszthetők, mert a vasreszelék teljesen elfödte a lemeznek beszórt részeit és túlságos erős fejlesztéstől tartani nem kell. Az így nyert negativokról tetszőleges számú másolat készíthető papirra, vagy vetítés czéljából Edwards-féle lemezekre.

Az igen érzékeny positiv-papirosokon (Fry, Eastmann vagy Just-féle papirosok) teljesen hasonló módon készíthetünk, persze csak negativ de azért csak oly jellemző rajzokat; kevésbé érzékeny papirokkal (Aristopapir, albumin, celloidin, Cyanotyp-papir stb.) pedig úgy dolgozunk, hogy a mágnesi görbék rajzát erősen megvilágított helyen idézzük elő s nyugton hagyjuk mindaddig míg a vasportól nem födött részek kellően nem sötétednek. Különösen a cyanotyp (ferroprussiat) papiros ajánlható, mert nem tekintve igen olcsó voltát, a vele való bánásmód is a képzelhető legegyszerűbb. Ugyanis, mire a papir eléggé elsötétült, vízbe kell vetni: a világosságtól nem ért helyeken a cyanvas kiolvad s a rajz kék alapon szép fehér vonalakban marad meg.

Több mágneses pólusnak egymásra hatását vagy a lágyvason történő mágneses inductiót az ily rajzok egész sorozatán állandóan előállítva, fel vagyunk mentve e változatos kisérleteknek előadás közben való ismétlése alól s a tanulságos rajzokat mégis teljes hűséggel lehet bemutatnunk.

A mágneses görbék pendantjai gyanánt lehetne tekinteni a «diamágneses» görbéket, amelyeket diamágneses anyagok porával készíthetnénk erős mágneses térben. Báró Eötvös Loránd úr szivességéből volt alkalmam igen erős mágneses térben kisérletezni chemiailag tiszta és achát csészében porrá tört bismuth-tal, azonban az igen csekély hatásnál fogva a pólusok nem taszítják a tőlök pár milliméternyinél távolabb eső bismuthrészecskéket s így *erővonalak* egész rendszerének lerajzolásáról nem is lehet szó. Csakis a polusok közvetetlen közelében mutatkozik jellemző elhelyezkedés, amenynyiben itt a bismuth a legnagyobb mágneses feszültséggel biró csúcsoktól és élektől erősen eltaszitódik, mi által az élek körrajza a bismuth-tal behintett felületen pormentes vonalak révén tisztán előtünik, holott a mágneses anyagok pora épen ezeken a helyeken halmozódik fel leginkább. Ha a polusokra lágyvas drótból készült síkidomokat (háromszög, hatszög, kereszt stb.) fektetünk a papirlapra szórt bismuth-por ezeknek rajzát igen világosan mutatja, sőt igen tökéletesen reszelt szögleteknél az élek találkozási pontján taszítási eredők nyomai ismerhetők fel.

Magától érthető, hogy ezek a diamágneses rajzok a fennebb említett módon szintén rögzíthetők és sokszorozhatók.

Fényes Dezső.

*

A József-műegyetem ábrázoló geometriai gyűjteménye.

A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai az 1893. évi április 4-én tartott közgyűlés tartama alatt megtekintették a kir. József műegyetem ábrázoló geometriai gyüjteményét is, hol a szükséges felvilágosításokat Fölser István műegyetemi ny. r. tanár úr volt szíves megadni.

A gyüjtemény három főcsoportra oszlik:

I. Gypsmodellek a felületek főbb typusainak szemléltetésére, a Muret-féle gyüjteményből.

1. Modellek a *síkfelületű alakzatoknak* és a *görbe felületek főbb nemeinek* [kifejthető felületek, másodrendű felületek, torzfelületek, forgásfelületek, burokfelületek, spirálfelületek] szemléltetésére.

2. *Szétszedhető modellek* a föntebbi felületeknek úgy a térelemekre, valamint egymásra való vonatkozásaiknak tanulmányozására.

II. Másodrendű felületek fonálmodelljei, a Brill-féle gyüjteményből.

1. *Egyszerű hyperboloid*, a két rendszerbeli felületalkotókkal és asymptotikus kúppal.

2. *Egyszerű hyperboloid* mozogható alaplapokkal; az egyik határhelyzetben henger, a másikban kúp. A modell az alaplapok forgatásánál, a henger és a kúp közötti összes hyperboloidokat szemlélteti.

3. *Egyszerű hyperboloid* mozogható alaplapokkal; mindkét határhelyzetben kúp. A két rendszerbeli fonálok egy középső helyzetben, egy forgási hyperboloidnak alkotóit ábrázolják; az alaplapok forgatásánál azonban két különböző hyperboloidhoz tartoznak.

4. *Hyperbolikus paraboloid,* mindkét rendszerbeli felületalkotókkal.

5. *Mozogható hyperbolikus paraboloid,* torznégyszögbe írva, egyik határhelyzetben vízszintes —, a másikban *függélyes* sík. A négyszögnek vízszintes tengely körüli forgatásánál, a fonalak, a határhelyzet közötti összes paraboloidok felületalkotóit szemléltetik.

III. Reliefperspectiv modellek gypsből, Burmester L. tanár utasításai szerint készítve.

1. *Typikus geometriai testek reliefperspectiv modelljei.*
2. *Oszlopcsarnok reliefperspectiv modellje.*
3. *Román basilika perspectiv modellje.*

Ezen reliefmodellek mindegyike egy relief-perspectiv szekrényben van elhelyezve, mely elől 500 mm. széles és 340 mm. magas. A nézőpont 590 mm. távolban van a relief képsíkjától, a szekrénybe rajzolt vonalak által meghatározott vízszintes és függélyes síkok metszetében.

A föntebbi reliefek homorú kézen át alkalmas helyről megtekintve, a relief által ábrázolt tárgynak helyes képzeletét idézte elő szemben.

*

A József-műegyetem modell-műhelye.

A műegyetemi *konstruktiv rajzi szertár* főnöke, Tőtössy Béla, modell-műhelyét mutatta be. Tőtössy, szövetkezve Balog Mór reáliskolai tanár, ügyes szobrászszal, a mathematikai modell-készítést hazánkban is meg akarja honosítani.

Első modellnek készül egy csúcsponttal biró negyedrendű térgörbe, mely mint egy gömb és egyenes körkúp speczialis metszése állítható elő. Készül egy gipsz-modell, mely a görbét mint a két felület metszésvonalát tünteti fel, azonkívül a görbéhez tartozó síkbafejthető felület fonálmintája, mely a Brill kiadásában megjelent Wiener-féle modell-sorozat szükséges kiegészítése leend.

A konstruktiv rajzi szertár csak nehány nappal a közgyűlés előtt fejezhette be modell-műhelyének legelső és legszükségesebb berendezését, melyben a főszerep egy a műegyetem gépműhelyében készült speczialis szerkezetű gépnek jutott, a mely forgási felületek gipszmintáinak előállítására szolgál. E gép kiváló használhatóságát bizonyítja a már készen bemutatott, az említett készülő gipszmodellben szereplő gömb és egyenes körkúp, melyet Balog úr a konstruktiv rajzi szertár helyiségében a szóban forgó géppel készített.

Ezután Tőtössy tanár úr, rövid magyarázat kiséretében bemutatta még a műegyetem mathematikai szertárának tulajdonát képező Wiener-féle fonálmintákat, melyek az elsőfajú negyedrendű térgörbének, illetőleg a hozzá tartozó síkbafejthető felület különböző eseteit ábrázolják.

A Mathematikai és Physikai Társulat új tagjai.

A választmány f. é. márczius hó 28-án tartott ülésén az ügyvivő titkár jelentése szerint tagokul szabályszerűen ajánltattak: *Bélteky Albert* tanár Budapesten; *Dr. Fabinyi Rudolf* egyetemi tanár Kolozsvárott; *Kovács Ferencz* képezdei tanár Nagy-Kőrösön és *Kápolnai Pauer István* ny. honvédezredes és tud. akadémiai tag Budapesten, kik valamennyien egyhangúlag rendes tagokul megválasztatván, neveik kihirdetésével az ügyvivő titkár megbizatott.

*

A f. é. április hó 4-én tartott rendes közgyűlés megkezdése előtt elnök rendkivüli ülés tartására szólitja fel a választmány jelenlevő tagjait. Az ülés egyetlen tárgya a szabályszerűen ajánlott új tagok választása volt.

Rendes tagokul ajánltattak: *Hann Alajos* mérnök Aradon; *Dr. Horváth József* akad. tanár Pápán; *Károlyi Lajos* az állami mértékhitelesitő hivatal főnöke Budapesten; *Keller Arnold* mérnök Budapesten; *Dr. Kiss Károly* az üvegtechnikai intézet igazgatója és tanár Budapesten; *Krüger Viktor* főreáliskolai tanár Nagyváradon; *Luncz Alajos* főgymn. tanár Sopronban; *Dr. Pfeifer Péter* egyetemi m. tanár és assistens Kolozsvárott; *Schenek Gyula* akad. tanár Selmeczbányán és *Stephani Ervin* mérnök Budapesten, kik valamennyien egyhangulag rendes tagokul megválasztván, neveik a közgyűlésre egybegyűltek előtt felolvastattak.

VÉGSZERŰEN EGYENLŐ TERÜLETEK.

(Harmadik és befejező közlemény.)

4. Közleményeim sorát a következő két tétel bebizonyitásával fejezem be:

α) Két egyenlő értelemben egybevágó, egymást részben fedő, síkterület szabad darabjainak kölcsönösen egybevágó részekre való fölosztása «tisztán csak áthelyezésekkel» eszközölhető, ha az adott területeknek karimáját alkotó zárt vonalak között vagy «egy sincs» olyan, mely a kölcsönös forgási középpontot O-t «bezárja»; vagy pedig «ha vannak» olyanok, azok csak a «kölcsönös forgási» középpontból leírt «körvonalak».

β) Ha ellenben a két adott síkidom egyenlő értelemben egybevágó ugyan, de az imént kimondott föltételnek nem felelvén meg, van egy-egynek kerületén összesen m számú az O pontot bekerítő zárt vonal

$$g_1, g_2, \ldots, g_i, \ldots, g_m,$$

a melyek azonban nem a kölcsönös forgási középpontból leírt körök (19. ábra): *akkor a szabad területeknek kölcsönösen egybevágó területekre való darabolása, tisztán csak áthelyezésekkel véges számú lépésben, nem mindig eszközölhető. De leírván a forgási középpontból a*

$$k_1, k_2, \ldots, k_j, \ldots, k_n$$

*köröket, melyek az összes g_i vonalakat átvágják, a két terület ezekkel feloszolván az α) föltételnek mindenesetre megfelelő részekre, a feldarabolás feladata eme $k_1, \ldots, k_n$ körök adjunkcziója után mindig tisztán csak áthelyezésekkel eszközölhető.**

* V. ö. «Bemerkungen von H. Dobriner» és válaszomat. Mathematische Annalen 1893. Bd. 42.

A tételek bebizonyitására szolgáló szerkesztések csak több lapú és a kölcsönös forgási centrumban O-ban összefüggő Riemann-felületen lévén világosan végezhetők, meglehetősen bonyolódottak; de átlátszóvá lesznek, ha az ábrázolásban a gyürü-területről parallelszalagra való leképezés módszerét alkalmazom. Igy a forgatás helyébe a parallelszalag határa mentén való eltolás lép, és minden *egyszerü* lapon végezhető. Egyszerűsitem az ábrázolást azzal is, hogy az idomok határául tört egyeneseket rajzolok; azonban a szerkesztések különben függetlenek maradnak attól, hogy a határok milyenek, úgy hogy rendesen görbéknek fogom azokat mondani. Maguk a parallelszalagok határai is az O középpontból leirt köröket ábrázolnak. A szerkesztésnél ezekhez képest paralleleltolást fogok mondani, de az átvitel az adott tényleges viszonyokra könnyű, mert egyenlő eltolások helyett egyenlő forgásokat kell csak tenni az O pont, mint középpont körül.

Ennek az ábrázolásnak természetszerűsége szembeötlő, ha az A és a vele egybevágó B területet körhengeren adottaknak veszem fel olyan kölcsönös helyzetben, hogy az A-t φ szögnyivel elforgatván a henger tengelye körül, az a B-t födi. Ezeknek a hengeren levő egybevágó A és B területeknek ugyanis épúgy végszerüen egyenlők a nem közös részeik, mint a síkon fekvőké; sőt minden szerkesztésre nézve is dualitási elv áll fönn, úgy hogy a tengely körüli forgás helyébe pont körüli lép, stb. Ha már mostan az A és B területek között csak *egy* egyszerűen összefüggő közös darabjukban hagyván meg az összeköttetést, egy sikra teritem ki a henger köpenyfelületét a rajta levő A és B idomokkal és ezek valamennyi eredetileg közös részeinek kontúrjaival együtt, akkor a kifejtett idomok egymáshoz képest el vannak tolva *parallel eltolással;* és ha ezen a síkon az A és B mostani és volt közös részeit kivágván, a maradékokat kölcsönösen egybevágó darabokra osztom fel, akkor ezek szerint egyszerű átvitellel az adott probléma is meg lesz oldva. Ámde az utóbbi ábrázolás nem más mint a szóban levő parallelszalagon való ábrázolás.

5. Az $\bar{A}$ terület határai legyenek (II. tábla, 14*a* ábra) egy kör k az O középponttal, és egy görbe vonal g', mely az O pontot *bezárja* és melynek a körhatárral van *egy* közös pontja $\bar{M}$. A $\bar{B}$ területet az $\bar{A}$-ból úgy nyerem, hogy az $\bar{A}$-t φ szögnyivel elforgatom; a $\bar{B}$ határai tehát ugyanaz a k kör és g'' görbe vonal, melyeknek közös pontjuk $\bar{N}$. Tegyük föl egyelőre, hogy g' és g'' vonalaknak csak két metszéspontjuk van.

Ezen $\bar{A}$ és $\bar{B}$-nek közös területe két részből áll, $\bar{K}$ és $\bar{K}_1$-ből, a melyeknek az $\bar{M}$ és $\bar{N}$ pontok közös határpontjai.

A parallelszalagon való ábrázolásban (I. tábla, 14. ábra) az $\bar{A}$ területet egy A háromszög jelöli, melynek a szalag ll szegélyén nyugvó alapja a k kört, másik két oldala együtt a g' görbe vonalat ábrázolja; az $\bar{M}$ pontot ábrázolják az M és M' csúcspontok. A $\bar{B}$ területet ábrázoló B háromszög az A-hoz képest MN darabnyival el van tolva. A $\bar{K}$ területet a két háromszög közös K területe ábrázolja; a $\bar{K}_1$ területet ábrázolják a $K_1 \cong K_2$ háromszögek, melyek a K-val N és M' pontokban érintkeznek. Végül az $\bar{A}$ és $\bar{B}$ területeknek egybevágó darabokra felosztandó szabad részeit az S és T egyenközények ábrázolják.

Szerkesztés. Jelöltessék a K alapjának NM'-nak a hossza a-val, az elforgatást ábrázoló MN eltolás nagysága pedig b-vel. Tekintettel arra, hogy φ és $2\pi-\varphi$ elforgatások a mi szempontunkból ekvivalensek, minden megszorítás nélkül föltehetem, hogy $a > b$.

Eltolom az A területet ismételten b-nyivel addig, a míg csak van közös része a K területtel. Utolsó helyében jelölje az A' háromszög a B területtel közös részét; e szerint ez az A' három részből áll: a K_2 részből, a K_1' háromszögből, melynek alapja $r' < b$, és áll azonkívül egy egyenközényből.

Hasonlóképen eltolom a B területet ismételten $-b$-nyivel, a míg csak van közös része a K területtel. Utolsó helyében jelölje a $\bar{B}'$ háromszög azt a részét, mely közös az A-val is; e szerint a $\bar{B}'$ is három részből áll: a K_1 és $\bar{K}_1'$-ból és azonkívül egy egyenközényből.

E szerkesztéssel, melyet úgy végzek, hogy a mozgó A (illetve B) idom kerületét minden lépésnél rárajzolom a nyugvó B (illetve A)

idom területére, az S és T területekből kiválnak sorban kölcsönösen egybevágó részek; (lásd idézett helyen pag. 188, 11. ábra) és ugyanezen alapon nyilvánvaló, hogy az A' és B' is egybevágók, valamint, hogy ezek részei közül $K_1 \cong \overline{K}_2$ és $K_1' \cong \overline{K}_1'$. Ellenben az $A'-K_2-K_1'$ egyenközény általában véve nem egybevágó a $B'-K_1-\overline{K}_1$ egyenközénynyel. A kitűzött feladat tehát e két maradék végszerűen egyenlő felosztására van visszavezetve.

Ennek eszközlésére eltolva a $\overline{B}'$ területet $(a+b)$-nyivel a B' helyre viszem át a rajta levő $\overline{K}_1'$ és K_1 területekkel együtt. E helyzetben K_1 födi a K_2-őt és a K_1' a $\overline{K}_2'$ idom helyére jövén, nyert eredményünket úgy fogalmazhatom, hogy a kitűzött probléma arra van visszavive, hogy az $A' \cong B'$ területekből kivágván K_2 közös részükön kívül a $K_1' \cong K_2'$ területeket, a maradékok kölcsönösen egybevágó részekre feldaraboltassanak.

De ez a feladat az eredetileg adottól csakis abban különbözik, hogy a most szóba jövő területek az eredetileg adottaknak csak részei, és hogy az A' és B' területek egymáshoz képest r'-nyira vannak eltolva, míg közös részüknek K_2-nek az alapja $M'N'=b$; és jegyezzük meg, hogy r' keletkezésénél fogva az $a:b$ osztásnak a maradéka.

Ezekből következik, hogy ismételvén a leirt eljárást, oly módon, hogy

$$A, B, a, b$$

helyébe

$$A', B', b, r'$$

lépjenek, az A'', B'' területekre jutunk, melyek egymáshoz képest el vannak tolva r''-nyira, mely r'' nem egyéb min a $b:r$ osztás maradéka. Nyilván való, hogy az eljárást folytatva csak akkor ér véget, ha az a és b vonalak kommenzurabilisek, míg ellenkező esetben az eljárás soha véget nem ér. Valójában az egész eljárás, ha csak az ll alapvonalon végbemenő dolgokra vagyunk tekintettel, ugyanaz, mint a mikor a és b hosszak közös mértékét keressük. Ha tehát a és b bírván közös mértékkel az n-edik maradék $r^{(n)}=0$, akkor tekintettel, hogy az $A^{(i+1)}$ és $B^{(i+1)}$ területeknek közös része mindig $r^{(i)}$ hosszaságú alapon nyugszik, kimondhatjuk, hogy az $A^{(n+1)}$ és $B^{(n+1)}$ területeknek már csak egy közös *pontjuk* van az ll vonalon; más szóval az eljárás véget ért és a probléma meg van oldva. Ép úgy fordítva, ha az eljárás véget ér, valamelyik $A^{(n+1)}$ és $B^{(n+1)}$ területeknek már csak egy közös pontjuk van, és akkor az a és b bírnak közös mértékkel.

Ezek után kimondhatjuk, hogy abban az általánosabb esetben, a midőn az a és b között nem létezik közös mérték, az S *és* T *területeknek kölcsönösen egybevágó részekre való felosztását lehetetlen «bevégezni» a leírt úton-módon, azaz puszta áthelyezések ismétlésével.*

6. Húzzuk meg a 14. idomban a K_1 és K_2-őt is átvágó pp egyenest, mely egyenközű az ll-hez, (mely tehát az ábrázolt eredeti idomban az ll eredetijével konczentrikus kör). Ezen pp elvág az S és T területekből két (0-sal jelölt) kölcsönösen egybevágó területet, melyek alatta feküsznek. Ugyanez a pp az

$$A, A', A'', \ldots, A^{(n)}, \ldots$$
$$B, B', B'', \ldots, B^{(n)}, \ldots$$

végtelen sorából csak véges számú tagot vág át és az utolsó még átvágottakat $A^{(n)}$, $B^{(n)}$-nel jelölvén, ezen $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ területeknek a pp fölötti része legfölebb csak egy közös *ponttal* bír.

Ebből következik, hogy az (5)-ben leírt eljárással a felosztás az idomnak a pp vonal fölött eső részében az $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ területeknél véget érvén, az S és T-nek kölcsönösen egybevágó részekre való felosztása elvben eszközölve van; és a tényleges fölosztásra nézve csak a lépésenként nyert kölcsönösen egybevágó darabokat, ellenkező irányban végzett lépésekkel vissza kell vinni az S és T területekbe.

Ezek után visszatérve az eredeti $\overline{A}$ és $\overline{B}$ területekre, kimondhatjuk:

Az 5. pont elején leírt $\overline{A}$ és $\overline{B}$ területeket átvágván egy az O-ból leírt oly pp körrel, mely a közös területeket is átvágja, a pp és ll közötti szabad területek egybevágók; míg a pp kör és a g' illetve g'' határgörbék között fekvő szabad területek a megadott területeknek egymásba való ismételt puszta áthelyezésével kölcsönösen egybevágó darabokra oszthatók.

Megjegyzés. A pp keresztmetszet akárhol lévén húzható, összekötheti pl. a K_1 és K_2 háromszögek csúcsait. Igy választva a keresztmetszetet, nyerjük két egyenlő területű és egyenlő szögű egyenközények legegyszerűbb felosztását kölcsönösen egybevágó darabokra. (15. ábra. V. ö. első közleményem 1. ábrájával és SPIEGL úr szerkesztésével.)

7. Gondoljunk a 14. ábrában a pp keresztmetszet fölött az A terület belsejében egy önönmagát nem metsző g_1 zárt görbe vonalat húzva; azután az A területet födésbe hozván a B területtel és átrajzolván a g_1 görbét a B területre, akkor a g_2 görbét nyerjük.

Nevezzük az A illetve B területeknek ettől a g_1 illetve g_2 vonaltól bezárt részét $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$-nek; továbbá ezeknek az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ területeknek közös részét $\mathfrak{K}$-nak; végül az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ területek ama részeit, melyek födésbe jönnek, ha K_1 födésbe hozatik K_2-vel, jelöljük $\mathfrak{K}_1$ illetve $\mathfrak{K}_2$-vel.

Föladatúl tűzzük ki magunknak az $\mathfrak{A}-\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_1=\mathfrak{S}$ és $\mathfrak{B}-\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_2\dot{=}\mathfrak{T}$ maradékterületeket véges számú eltolásokkal kölcsönösen egybevágó részekre osztani.

Végezzük újból az 5. alatti szerkesztéseket avval a különbséggel, hogy az

$$A, B; A', B'; A'', B''; \ldots$$

területeknek csak ama részeiben húzzuk meg az osztásvonalakat, melyek az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, illetve az előírt átvitelek folytán és a g_1, g_2 vonalak átrajzolásával keletkező

$$\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'; \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}''; \mathfrak{A}''', \mathfrak{B}'''; \ldots$$

területek belsejébe esnek.

Nyilvánvaló, ennek az eljárásnak folyamata véget ér, ha előbb nem, akkor $A^{(n+1)}$, $B^{(n+1)}$-nél, a midőn a szerkesztések már a pp egyenes alá húzódnak. És ha egyszer végét érte, a nyert részeknek ellenkező sorrendben és irányban végzett különben ugyanazon lépésekkel való visszavitele, t. i. $\mathfrak{B}^{(n-1)}$-ről $\mathfrak{A}^{(n-1)}$-re, $\mathfrak{A}^{(n-1)}$-ről $\mathfrak{B}^{(n-2)}$-re, . . .,

$\mathfrak{B}'$-ről $\mathfrak{A}'$-ra, erről $\mathfrak{B}$-re és végül erről $\mathfrak{A}$-ra, az $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ területeknek követelt beosztását befejezi, a nélkül, hogy körző vagy vonalzó igényeltetett volna.

8. Az imént megoldott feladat a parallelszalag-képsíkról átvive az 5. pont elején szerkesztett eredeti síkra a következő tétel kimondására jogosít fel:

Ha az $\overline{A}$ *terület egyszerűen összefüggő és a kerületét képező vonal nem zárja be az* $\overline{A}$ *és a vele egybevágó* $\overline{B}$ *területnek kölcsönös forgási középpontját, akkor az* $\overline{A}$ *és* $\overline{B}$*-nek szabad területei mindig körző és vonalzó segítségül vétele nélkül oszthatók fel kölcsönösen egybevágó részekre.*

Keletkezzék már mostan egy $\overline{A}$ terület (19*a*. ábra) oly módon, hogy egy körgyűrűből akármilyen B területet kivágunk avval az egy megszorítással, hogy a B karimáján levő vonalak egyike se zárja be az O pontot; ezt az $\overline{A}$ területet φ szögnyire forgatván az O körül, egy $\overline{B}$ terület keletkezik, melynek lyuka $A \cong B$ területtel.

Az a megjegyzés, hogy az $\overline{A}$ és $\overline{B}$ területek *szabad* részei azonosak az A, B lyuk területek nem közös részeivel, az imént kimondott tétel általánosítására jogosít fel, mihelyt az A, B még egyösszefüggők is.

9. Az 5. elején leirt $\overline{A}$ és $\overline{B}$ területekből többszörösen összefüggő $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ egybevágó területeket készítek $\overline{U}$ és $\overline{V}$ területek kivágásával. Feladatunk az 5. és 6.-ban megoldott problémát e többszörösen szerűen összefüggő területek esetében is megoldani.

Az ábrázolást a parallelszalag-képsíkon következőleg nyerem:

A 14. ábrabeli A területből kivágván U területrendszert (16. ábra), nyerünk egy többszörösen összefüggő $\mathfrak{A}$ területet; az így nyert idomot b-nyire eltolván, az A, V, $\mathfrak{A}$ födésbe jő a B, V, $\mathfrak{B}$ területekkel.

Azután a K_1-et (lásd 14. ábrát) a rajta levő U lyukrészlettel együtt átvivén és födésbe hozván a K_2-vel, a K_1 és K_2-őn levő lyukrészleteket kölcsönösen átrajzolom; legyenek e lyukrészek most nyert másolatai u, v (a mi esetünkben a K_2 és K_1 területeknek 8 és 4 helyen sávval bekerített részei az u, illetve v; a 8-nak nincs közös része a V-vel, a 4-nek nincs az U-val, de általánosan lehet az u-nak és v-nek közös része a V illetve U-val).

Az eredeti $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ idomok szabad részeit ábrázolják az imént szerkesztett $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ szabad területeinek a K_1 és K_2-ön nem fekvő részein kívül még az u és v területeknek *nem* lyukrészletei, mely utóbbiakat ebből az okból rövidség kedvéért szintén az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ szabad területei közé fogjuk számítani.

Az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ e szabad területeit a következő szerkesztéssel fogjuk kölcsönösen egybevágó részekre osztani:

Szerkesztés. Elébb csak a pp fölötti részek felosztását akarván végezni, ismétlem az 5. és 6. alatti eljárást a pp keresztmetszet fölött avval az egyetlen különbséggel, hogy most az U, V, u, v határait is a területekkel tovavivén, lépésről-lépésre őket és másolataikat is átrajzolgatom.

A területek így nyert sorának

$$A', B'; A'', B''; A''', B'''; \ldots; A^{(n)}, B^{(n)}$$

most is határt szab a pp keresztmetszet; az utolsó még a pp fölött is kiterjedő területpárt most is $A^{(n)}$, $B^{(n)}$-nel jelölöm.

Ha már most az előbbi lépéseket fordított sorrendben végezvén minden lépésnél átrajzolom az $A^{(i)}$-n levő összes vonalakat a $B^{(i-1)}$-re és azután az összes ezen levő vonalakat az $A^{(i-1)}$-re, a míg végül utolsó lépésben az összes B-re került vonalakat ráviszem az A-ra, akkor a kitűzött feladat a pp fölötti részben el van végezve.

(A rajzban valóban csak a $p'p'$ fölötti vonalon van elvégezve a leírt szerkesztés, nehogy a fölötte sok vonal áttekinthetetlenné tegye a dolgot; a szabad területek kölcsönösen egybevágó párjai ugyanazzal a számmal jelölvék itt épúgy, mint az előbbi idomokban.)

Bebizonyítás. Nevezzük az A és B területeknek a szerkesztés alapján nyert összes részeit, tekintet nélkül arra, hogy a pp fölötti *lyuk*-területen feküsznek-e vagy sem

$$A_1, A_2, \ldots, A_\mu; A_{\mu+1}, A_{\mu+2}, \ldots, A_m,$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_\mu; B_{\mu+1}, B_{\mu+2}, \ldots, B_m$$

-nek, hol $A_i \cong B_i$ és pedig valamennyi A_i, B_i épen födi egymást, a midőn A födi B-t. Ezt a megállapítást tehetem, miután a szerkesztést avval fejeztem volt be, hogy a B *összes* vonalait átrajzoltam az A-ra.

E sorokban az első μ tagok, azaz

$$A_1, A_2, \ldots, A_\mu,$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_\mu$$

jelöljék épen az U illetve V területek *összes* darabjait; a többiek pedig t. i.

$$A_{\mu+1}, A_{\mu+2}, \ldots, A_m,$$
$$B_{\mu+1}, B_{\mu+2}, \ldots, B_m$$

jelöljék a többszörösen összefüggő $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ területek *összes* darabjait. E szerint az utóbbiak már páronkint egybevágók, hiszen $A_i \cong B_i$. Már mostan egy-egy összetartozó ilyen A_i, B_i pár

$$i = \mu + 1, \mu + 2, \ldots, m$$

vagy mindakettő az illető szabad területen fekszik, vagy egyik sem, vagy végül az egyik igen, a másik nem.

Az első esetben a keresett felosztásban már is párok.

A második esetben az *adott* helyzetben a *közös* területen valamelyik B_{j1}, A_{j1} pár fedi őket, t. i. az mely tőlük az A és B födési helyzetében épen b távolságnyira voltak. Ennélfogva tekinteten kívül maradnak.

A harmadik esetben legyen pl. A_i az $\mathfrak{A}$-nak szabad területdarabja, míg a B_i, mely a $\mathfrak{B}$-nek kötött területén fekszik, legyen megkötve A_{j1}-től ($A_{j1} \cong B_i$). Akkor ettől az A_{j1}-től $+b$ távolságnyira fekvő B_{j1} vagy szabad területen fekszik, vagy nem. Az első esetben ez a B_{j1} lészen az A_i szabad darabnak párja a keresett felosztásban. A második esetben födi A_{j2}, melytől megint $+b$ távolságnyira kell feküdnie az ő B_{j2} párjának. Ha ez nem feküdnék a szabad területen, tovább következtetve, a $\mathfrak{B}$ terület véges voltánál fogva véges számú lépés után mégis csak rá kell jönnöm egy olyan $B_{j2} \cong A_i$ területre, mely már a $\mathfrak{B}$-nek szabad területén fekszik. Kell tehát mindegyik *szabad* A_i-hez egy tőle $+\lambda b$ távolságban fekvő *szabad* B_λ területnek feküdni, mely vele egybevágó. Miután fordítva minden szabad B_i-hez is kell tartoznia egy tőle $-\lambda_1 b$ távolságban fekvő $A_{\lambda 1}$ területnek, (hol λ_1, épúgy mint előbb λ, egész szám), a leírt szerkesztés ezzel igazolva van.

10. Mielőtt a pp alatti rész felosztására térnénk át, ismételjük a 7. pontbeli szerkesztést és a következtetéseket, a g_1 és g_2 görbéket itt ép úgy húzván, mint ottan. Minden szóról-szóra ismételhető lévén, kimondhatjuk a következő tételt:

Ha az n*-szeresen összefüggő* A *terület határát alkotó vonalak között egy sincs olyan, mely az* A $\cong$ B *területek kölcsönös forgási czentrumát bezárja, akkor az* A *és* B *szabad területei körző és vonalzó igénybe vétele nélkül kölcsönösen egybevágó darabokra oszthatók.*

Tekintettel továbbá a 8. pont végén álló megjegyzésre, kiterjeszthetjük e tétel érvényességét lyuggatott gyűrűterületre is, mely a két határoló körön kivül más, az O pontot bezáró görbét nem számlál az ő kerületéhez.

11. Áttérve a (16. ábrán) pp alatti rész felosztására, a következő eseteket különböztejük meg:

a) az adott lyukterületek legmélyebb pontjai P, Q az ll fölött feküsznek (16. ábra);

b) az ll-en rajta feküsznek, de számuk véges (17. ábra);

c) a lyukterületeket az ll vonalnak egyes darabjai is határolják. (18. ábra.)

Az első esetben a pp alatti szabad területek máris egybevágók.

A második esetben olyan mélyen húzhatom a pp egyenest, hogy a lyukterületek határai alatt már nincsenek metszéspontjai.

A harmadik esetben a pp egyenest úgy húzom, hogy átvágja az ll határig lenyúló valamennyi lyukterületet.

Mind a második, mind a harmadik esetben helyettesitvén a pp és ll közötti adott területet a kiegészítő lyukterülettel (l. 8. pont végén álló megjegyzést), a kivánt felosztást az imént előadott módszerrel eszközlöm, sőt a második esetben a 17. ábrából láthatólag igen egyszerű eltolásokkal.

Egyébként további részletezés helyett áttérek a legáltalánosabb idevágó feladat végleges megoldására.

12. Legyen az A terület (19. ábra) n-szeresen összefüggő és legyenek

$$g_1, g_2, \ldots, g_j, \ldots, g_{2m}$$

az ő kerületének ama vonalai, melyek mindegyike külön egymagában bezárja az A és az evvel egybevágó B területek kölcsönös forgási középpontját O-t, — a nélkül azonban, hogy e g-k bármelyike épen az *O középpontból* leirt kör legyen. Az indexeket továbbá úgy választom, hogy mindegyik g vonal körülzárja valamennyi kisebb indexxel birókat.

Nevezzük itt az egész végtelen siknak azt a részét, mely az A területhez nem tartozik, az A lyukterületének, és jelöljük B'-sel. Hasonló értelemben véve a B lyukterületét, jelöljük ezt A'-sel.

A 19. ábrán az O pont a lyukterületen feküdvén, a g vonalak száma páros; ha O pont a közös területen feküdnék, a g vonalak száma páratlan volna; de ha ez esetben g_1 az O pont körül vég nélkül összehúzódó vonalnak tekintetik, akkor ez az eset is benne foglaltatik a 19. idomon alapuló általános tárgyalásban.

Az A és B szabad területeinek kivánt felosztása czéljából húzom az O középpontból a

$$k_1, k_2, \ldots, k_j, \ldots, k_{2m}$$

köröket oly módon, hogy a k_j legalább a g_j vonalat messe.

E körök legyenek növekedő sugarúak, úgy hogy

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_j < \ldots < r_{2m}.$$

Értsünk k_0 és k_{2m+1} alatt olyan (O közepű) köröket, melyek sugarai sor szerint

$$r_o < r_1, \; r_{2m+1} > r_{2m}$$

annyira, hogy k_0 még, k_{2m} már nem metszi az A és B területet.

Nevezzük ($i=1, 2, \ldots, m, m+1$),

a k_{2i-2}	és k_{2i-1}	közötti	A	területet	A_i-nek	
«	«	«	B	«	B_i	«
a k_{2i-1}	és k_{2i}	«	B'	«	B'_i	«
«	«	«	A'	«	A'_i	«

A nevezett A_i, B_i, A'_i, B'_i területek egyikét se határolja olyan vonal, mely az O pontot körülzárná. Ennélfogva az A_i, B_i, valamint az A'_i, B'_i szabad részeit is feloszthatjuk kölcsönösen egybevágó darabokra körző és vonalzó segítsége nélkül.

Másrészről az A_i, B_i-knek $(i=1, 2, \ldots, m, m+1)$ szabad részei egyik alkotó tagjai az A és B szabad részeinek; és valamennyi többi alkotó tagjai az 5. pontbeli megjegyzés értelmében nem egyebek, mint a B'_i, A'_i, területek kölcsönös szabad részei

$$(i=1, 2, \ldots, m).$$

Ezeknél fogva a húzott k_i körök íveit adjungálván az adott g_i vonalakhoz, lehetségessé válik a 6. pontban előadott módszer útján a szabad részek felosztása kölcsönösen egybevágó részekre körző és vonalzó használata nélkül.

Jegyezzük még meg, hogy csak a legáltalánosabb, a legkedvezőtlenebb esetben válik szükségessé, hogy mindegyik g_j vonalat külön k_j körrel átmessünk. Ha speczialis esetben egy körvonal már egynél több g vonalat metsz át, és csak annyi körvonalat húzunk, a mennyi épen elegendő arra nézve, hogy mindegyik g vonal át legyen metszve, akkor is állani fog a k_i és k_{i+1} körök közötti gyűrűterületekre nézve a következő: vagy ezen a gyűrűterületen fekvő A területrészek *maguk* vagy ha nem maguk, akkor lyukrészleteik olyanok, hogy karimáikon nincsen egyetlen egy olyan (kör és más vonalívekből összetett) zárt vonal, mely az O pontot is bezárná.

Ennélfogva bármelyik gyűrűterületen vagy az A_i, B_i vagy pedig a B'_i, A'_i területpár szabad részei feloszthatók a 9. pontban előadott módszerrel.

*

Zárszó.

Első közleményemben felállítottam azokat a kritériumokat, melyekről mindig megismerszik, hogy két síkterület végszerűen egyenlő-e vagy sem. Ismert dualitási elv alapján a kritériumok könnyen átvihetők egyenlő sugarú gömbökön fekvő területekre, és általánosan két-dimenziós homogén terekre.

Nyilt kérdés azonban, hogy ama kritériumoknak a három méretű térben való analogonja igaz-e vagy sem? és *hogy egyátalában két egyenlő térfogatú poliéder mindig végszerűen egyenlő-e?*

Második és harmadik közleményemben két adott egybevágó egymást csak részben fedő terület szabad részei kölcsönösen egybevágó részekre osztatnak «lehetőleg» csak transzpozicziókkal. Ezzel meg van oldva az a probléma is, hogy két egybevágó területből kölcsönösen egybevágó részeket kivágván, a maradékterületek «lehetőleg» csak transzpozicziókkal kölcsönösen egybevágó részekre felosztassanak. (Lásd Akad. Értesítő VIII. kötet.) *De nincsen elintézve az a kérdés, hogy a körző és vonalzó használása mikor és menynyiben kerülhető el abban az esetben, ha a két adott terület nem egybevágó, hanem maga is csak végszerűen egyenlő.* Ez még *nyilt kérdés.*

Magától értetődik, hogy a II. és III. közleménybeli eredmények is átvihetők más két-dimenziós homogén terekre is. De itt is külön vizsgálatot kiván meg az analóg feladatnak a három-méretű homogén terekben való megoldása, — a több méretűeket nem is említve.

Nagyon örülnék, ha közleményeimmel sikerült volna, ezen, a mi Bólyainktól megalapított, disciplina számára új munkaerőket megnyernem.

Réthy Mór.

KIRCHHOFF SÚRLÓDÁSI EGYENLETEINEK PHYSIKAI ÉRTELMEZÉSE.*

1. KIRCHHOFF az előirt felületen súrlódással történő pontmozgás differentiálegyenleteit Mechanikájának 17. lapján következőleg írja [i. h. (7) formulái]:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda h\Phi\frac{dx}{dt}\text{; s i. t.;} \tag{1}$$

hol x, y, z az m coordinátái, X, Y, Z az m-re ható, a feltételtől független P erő (vis impressa) componensei, λ a közönséges LAGRANGE-féle (meghatározandó) együttható, t a folyó idő, φ az itt egyszerűség kedveért változatlan alakúnak és helyzetűnek tekintett előírt felület egyenlete:

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.},$$

továbbá

$$\Phi^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2, \tag{2}$$

végre h állandót vagy a sebesség tetszőleges adott függvényét jelenti.

KIRCHHOFF az (1)-ről csak azt mondja, hogy súrlódással végbemenő mozgások leírására alkalmas s azután a nélkül, hogy h-t physikailag értelmezné, teljesen elhagyja e rendszert.

2. Legyenek a, b, c a $\varphi = \text{const.}$ felület azon oldalához tartozó normálisnak iránycosinusai, a melyen az m mozog; az m pont v sebességének iránycosinusai pedig α, β, γ lévén,

$$a = \frac{1}{\Phi}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ b = \cdot\cdot,\ c = \cdot\cdot; \tag{3}$$

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{1}{v}\frac{dx}{dt};\ \beta = \cdot\cdot;\ \gamma = \cdot\cdot \tag{3a}$$

E két irány egymásra mindig merőleges lévén:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0. \tag{4}$$

---

* E sorok közlésére a 12. feladatnak e Lapok második évfolyama 201-oldalán közzé tett, MAKSAY ZSIGMOND úrtól eredő megfejtése indít.

Az (1) jobb oldalán fellépő második tagok viszonya a (3) szerint:

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}:\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}:\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}=a:b:c, \tag{5}$$

azaz, ezek a φ normálisa menti feltételi erőnek (az *ellennyomásnak*),* derékszögű componensei, mely erő e componensek $\lambda\Phi$ eredője.

A harmadik tagok viszonya a ($3a$) szerint:

$$\lambda h\Phi\frac{dx}{dt}:\lambda h\Phi\frac{dy}{dt}:\lambda h\Phi\frac{dz}{dt}=\alpha:\beta:\gamma; \tag{6}$$

azaz, ezek az s pálya érintője menti feltételi erőnek (a súrlódásnak) derékszögű összetevői, mely erő e componensek $\lambda\Phi h\,.\,v$ eredője.

Az (1)-alakban e szerint a *súrlódásbeli erő a normális ellennyomásnak, $\lambda\Phi$-nek a $h\,.\,v$-szerese.*

Ha a h-t *állandónak* veszszük, akkor a *surlódást a súrlódó felület- s a mozgó pont közötti nyomás* és *a sebesség szorzatával arányosnak tekintjük;* ** de a tapasztalás szerint a *súrlódás a nyomással egyszerűen arányos,**** úgy hogy a kisérleti tényekkel igen közel megegyezik, ha felveszszük, hogy $h=k:v$, azaz hogy a súrlódás $\lambda\Phi\,.\,k$-val egyenlő, hol k a súrlódó testek természetétől függő *állandó* (surlódási együttható).

3. Jeleljék az m pontnak a φ-felületen fekvő pályájának, s-nek görbületi sugarát ρ; ennek iránycosinusait λ_1, μ_1, γ_1; a ρ s a φ normálisa közötti szöget ε; akkor

$$\lambda_1=\rho\frac{d^2x}{ds^2},\qquad \mu_1=\rho\frac{d^2y}{ds^2},\qquad \nu_1=\rho\frac{d^2z}{ds^2} \tag{7}$$

$$\cos\varepsilon=a\lambda_1+b\mu_1+c\nu_1 \tag{8}$$

Az (1) gyorsító erőcomponenseit a (3) és a ($3a$) jelölésével irhajtuk:

* Ugyanis, az m a *görbe* felület mentén haladva, sebességénél fogva bír e felületre merőleges erőcomponenssel s ezenkívül az m-re ható független P erőnek is van a φ-re normális componense; e két öszszetevő eredője az m-et a felülethez nyomja, de ennek anyagi fala áthatatlan lévén, ezen nyomás ellenében evvel ellentetten egyenlő *ellennyomást* fejt ki. E három erő számítását a 3. pont adja.

** Ezt a surlódási törvényt, habár nem mondja ki, veszi alapul MAKSAY Zs. úr a 12. feladat megfejtésében.

*** JELLETT könyve (Treatise on the Theory of Friction, Dublin 1872, német fordításban LÜROTH és SCHEPP-től: Theorie der Reibung, Leipzig 1890) kizárólag ezen törvényen alapszik.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + a\lambda\Phi + a\lambda\Phi . hv; \text{ s i. t.} \tag{9}$$

A (9) egyenleteit rendre a-, b-, c-vel megszorozván, öszszegük ezen erőnek a felület normálisa menti öszszetevőjét adja, mely a (4) tekintetbe vételével:

$$m\left(a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2z}{dt^2}\right) = aX + bY + cZ + \lambda\Phi. \tag{10}$$

Ámde x-, y-, z-t s-től, s-t t-től függőnek tekintvén s a (7)-et és (3)-at felhasználván

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} \text{ s i. t.;}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = \lambda_1\frac{v^2}{\rho} + a\frac{d^2s}{dt^2} \text{ s i. t.} \tag{11}$$

Ez értékeket a (10) bal oldalába helyettesitvén s a (4) és (8) alatti egyenleteket is tekintvén

$$m\frac{v^2}{\rho}\cos\varepsilon = aX + bY + cZ + \lambda\Phi.$$

A ρ a ds pályaelem görbületi sugara; ha a ds-en keresztül menő, a felületre merőleges síkkal metszszük a felületet, e sík ρ-val ε szöget képez s e normális metszetnek ρ_n görbületi sugarára nézve (mely a felület normálisába esik) MEUSNIER tétele szerint $\rho_n \cos\varepsilon = \rho$, mi által végre:

$$\lambda\Phi = m\frac{v^2}{\rho_n} - (aX + bY + cZ). \tag{12}$$

A jobboldali első tag az ú. n. centrifugális erő, mely a ρ_n mentén — a felület normálisa mentén — hat. Ez az m-et a felülethez nyomja, ha m ennek homorú oldalán mozog; ellenben ettől eltávolitani törekszik, ha a domború oldalon halad. A második rész a P független erőnek a $-a$, $-b$, $-c$ cosinusú irányra való, tehát normálisan a felület *felé* irányitott componense, mely lehet positiv vagy negativ. Mindaddig, míg e két erő eredője m-et a felülethez nyomja, ez a felületen marad s e nyomás és ellennyomás nagysága $\lambda\Phi$; az ellennyomás iránya a felület azon oldalából induló normálisával egyezik, mely oldalon m mozog.

Az így meghatározott és értelmezett $\lambda\Phi$ az (1) vagy a (9) rendszerbe helyettesitendő, mely azután alkalmas eljárással tárgyalandó.

Fröhlich I.

IRODALOM.

Giuseppe Veronese, *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare.* (A több dimenziós geometria alapvonalai különböző fajú egyenes vonalú egységek felvétele mellett, elemi tárgyalásban). Padova 1891, nyolczadrét, XLVIII+630 l. (Második és befejező közlemény.)

Az eddig felállított axiomák a geometria igazi axiomái; ezeknek alapját az észlelés képezi és minthogy az összes közök, melyek az észlelés alá eshetnek, egymás közt végesek, az egység is, melyre az eddigi vizsgálatok vonatkoznak, az észlelésnek hozzáférhető egység. Szerző a római számokkal megjelölt jegyzetekben, melyekkel az I. rész szövegét kiséri, meg is mutatja, hogy ha a geometriai vizsgálatokat csakis arra a körre szorítjuk, mely az észlelésnek hozzáférhető, akkor ezek az axiomák, ha még az ú. n. *párhuzamosok posztulatumát* hozzájuk csatoljuk, teljesen elégségesek a geometria kifejtésére. Hogy azonban az egyenest különböző fajú egységekre vonatkozólag is megvizsgálhassa, a szerző még bizonyos absztrakt hipotéziseket vezet be a geometriába, a melyek nincsenek ellenmondásban sem az eddigi axiomákkal, sem pedig egymás közt. Igy azután a geometriának abszolut, az Archimedes-féle axiomától független rendszerére jut, a melyből a geometriának Euklides- és Riemann-féle rendszerei mint speczialis esetek adódnak ki.

Az eddig felsorolt axiomák eldöntetlenül hagyták azt a kérdést, vajjon az egyenes akár valamely adott egységre vonatkozólag, akár pedig abszolut értelemben nyilt-e vagy zárt. E kérdés vizsgálatára első sorban megkisérlendő, vajjon az észlelés nem segítheti-e elő megoldását, mert ellenkező esetben absztrakte úgy az egyik, mint a másik feltevés alapján folytatható a geometria tárgyalása.

Ha észleléseinket az egyenes vonalú tárgyra szorítjuk, első pillanatra úgy látszik, mintha az egyenes nyilt volna, azaz ha valamely pont rajta egy bizonyos kezdeti helyzetből kiindulva egy bizonyos irányban előrehaladna, úgy tűnik fel nekünk, mintha eredeti helyzetébe nem térhetne vissza soha. Habár e tulajdonság valóban meg is felel az egyenes észlelésünk körébe eső részének, ez még nem vonja maga után azt, hogy e tulajdonság az *egész egyenesre* is fennálljon. Feltehetjük ugyanis, hogy valamely egyszerű zárt görbének megfelelő tárgy olyan, hogy az észlelő annak pusztán egy bizonyos részére terjesztheti ki észleléseit; akkor világos, ha valaki pusztán csak tapasztalataira szorítkozik, majd azt hiszi, hogy az adott tárgy ábrázolta vonal nyilt, míg a valóságban zárt. És ha ez a meggyőződése és egységül egy az ő észlelésének mezejére vonatkozólag véges közt választ a nélkül, hogy a végtelen nagy létezését is megengedné, magát a tárgyat is végesnek fogja tekinteni.

A bevezetés tárgyalásai azonban megmutatták, hogy tiszta gondolkodás útján absztrakt módon megállapíthatjuk a végtelen nagy létezését a nélkül, hogy szükségkép fel kellene tennünk, hogy annak a külvilágban valóban meg is felel valami. Igy tehát megengedhető az az ellenmondás nélküli feltevés, hogy az a tárgy, mely az adott vonalnak észlelésünk körén belül megfelel, az észlelés alá eső mezőben nyilt, míg az absztrakt, a tárgynak megfelelő vonal zárt, mely esetben az észlelő egysége az egész vonalra vonatkozólag végtelen kicsiny. Ez alkalmazható az egyenes esetében is. Feltételezhetjük ugyanis a nélkül, hogy az észlelés eredményeivel ellentétbe jutnánk, hogy az egyenes zárt és az észlelés körébe eső mezeje az egész egyenesre vonatkozólag pl. elsőrendű végtelen kicsiny. Ebben az esetben az egész egyenes az észlelésnek hozzáférhető egységre vonatkozólag végtelen nagy és csak egy határpontja lesz a végtelenben. Ha azonban az észlelésnek hozzáférhető egység az egész egyenesre vonatkozólag magasabbrendű végtelen kicsiny, az egyenes két irányának megfelelőleg az elsőrendű végtelen nagyban két határponttal bír.

Minthogy valamely rajzban nem tudjuk exakt módon előállítani azokat az egyeneseket, melyek egy adott ponton keresztülmennek és egy adott egyenessel párhuzamosak, azt a kérdést sem tudjuk puszta észlelés révén tisztázni, vajjon az adott ponton keresztülmenő s az adott egyenes egyik irányának megfelelő párhuzamos a másik iránynak megfelelővel egybe esik-e vagy nem; sőt még azt sem tudjuk eldönteni, vajjon egyáltalában párhuzamosak léteznek-e, mert ha az egyenes egy az észlelés körén belül zárt vonal lenne, párhuzamosokról egyáltalában szó sem lehetne. Minthogy e hipotézisek mindegyike olyan, hogy az észlelés mezején belül a tapasztalásnak ellent nem mond, mind a három geometriailag lehetséges és így mindegyik a további fejtegetés alapjául elfogadható. *A szerző az elsőt, mely szerint a véges mező valamely adott pontján keresztül egy ugyanabban a mezőben megadott egyenes két irányának megfelelőleg két párhuzamos sugár vonható, mely egy és ugyanahhoz az egyeneshez tartozik,* Euklides-*féle hipotézisnek, a másodikat, mely szerint e két sugár különböző egyenesekhez tartozik,* Lobatschewsky-*féle hipotézisnek* *és végre a harmadikat, mely szerint az egyenes zárt és így a párhuzamosak egyáltalában hiányoznak,* RIEMANN-*féle hipotézisnek nevezi; a geometria különböző rendszereit pedig, melyek a hipotézisek és az I—V. axiomák alapján felépíthetők, megfelelőleg* EUKLIDES-, *illetve* LOBATSCHEWSKY- *és* RIEMANN-*féle rendszernek.*

E három hipotézis közül a szerzőtől a geometria abszolut rendszerének megállapítása czéljából bevezetett I—IV. hipotézisek fenntartása mellett a LOBATSCHEWSKY-féle rendszer sem valamely egységhez tartozó véges mezőben sem pedig abszolut értelemben nem lehetséges; csak akkor, ha e hipotéziseket — mint az egy későbbi fejezetben meg van mutatva — részben módosítjuk, bizonyos mezőben a LOBATSCHEWSKY-féle rendszer is válik lehetségessé. A további út, melyet már mostan a szerző követ, nem olyan, hogy az EUKLIDES- és RIEMANN-féle hipotézis közt választana, hanem egy új hipotézis segítségével megállapítja, *hogy az egyenes zárt vonal;* ez pedig úgy az EUKLIDES-féle, mint a RIEMANN-féle hipotézist engedi meg. Abszolute ugyanis a zárt egyenes esetében valamely adott pontból egy adott egyeneshez párhuzamost egyáltalában nem húzhatunk és azért a szerző az e feltevésből származó rendszert *abszolut* RIEMANN-*féle rendszernek* nevezi; ha azonban egységül oly közt választunk, mely az egész egyenesre vonatkozólag elsőrendű végtelen kicsiny, akkor valamely ponton keresztül egy e ponthoz tartozó, a választott egységre vonatkozólag véges mezőben fekvő egyeneshez csak egy párhuzamost húzhatunk, a mi az EUKLIDES-féle hipotézisnek felel meg. Igy tehát látjuk, *hogy a zárt egyenes feltevése mellett az* EUKLIDES-*féle hipotézis valamely ponthoz tartozó véges mezőben érvényes, ha alapegységül egy az egész egyenesre vonatkozólag elsőrendű végtelen kicsiny közt választunk,* míg az *abszolut* EUKLIDES-féle rendszer esetében azt kellene feltennünk, hogy az egyenes nyilt vonal.

Egy másik kérdés az, vajjon a RIEMANN-féle vagy pedig az EUKLIDES-féle rendszer felel-e meg észlelésünk körének. E kérdéssel együtt egyszersmind azt is dönthetjük el, vajjon a zárt egyenes feltevése mellett az észlelésnek hozzáférhető egység az egész egyenesre vonatkozólag véges-e vagy pedig végtelen kicsiny. A mint láttuk, a geometria elméleti kifejtése szempontjából e kérdés eldöntése nem lényeges; de minthogy a geometria egyik főczélja, hogy őt a testek tanulmányozásában alkalmazhassuk, e kérdést szerző a következő axiomával dönti el, a melyet praktikusnak nevez azért, mert a geometria elmélete szempontjából nélkülözhető: *Tényleges észlelésünk mezején belül a legnagyobb megközelítéssel igazolható, hogy egy adott ponton keresztül egy adott egyeneshez egy és csakis egy párhuzamos huzható.*

Minthogy így a zárt egyenes feltevése mellett, ha alapegységül egy az egész egyenesre vonatkozólag elsőrendű végtelen kicsiny közt választunk, minden pont véges mezejére vonatkozólag a tapasztalattal igazolható eredményeket nyerünk: czélszerű szerzőnek az az eljárása, hogy a nyilt egyenes hipotézisét mellőzi és a következő tárgyalásokban alapegységül egy az egész egyenesre vonatkozólag elsőrendű végtelen kicsiny közt vesz fel, melyet Euklides-féle *egységnek* nevez, míg a végtelen nagy mező egységét, mely az egész egyenesre vonatkozólag véges, Riemann-féle *egységnek* nevezi. Ennek megfelelően egy ponthoz tartozó véges mezőt Euklides-féle *mezőnek* és a végtelen nagy mezőt Riemann-féle *mezőnek* nevezi. Minthogy továbbá e feltevések mellett az egyenesnek csak egy része eshetik az Euklides-féle mezőbe, e részszel szemben az egész egyenest *teljes egyenesnek* (retta completa) nevezi.

A zárt egyenesre vonatkozólag az eddigi axiomák és hipotézisek eldöntetlenül hagyták, vajjon két ellentett pont meghatározza-e az ilyen egyenest vagy nem. Ez a kérdés is kétféleképen dönthető el; de bármiképen is történjék e döntés, az az Euklides-féle mezőben a geometria tárgyalására befolyással nincsen. Szerző a további tárgyalás alapjául azt a hipotézist választja, *hogy az egyenesen vannak pontpárok, a melyek azt meg nem határozzák* és így azt a geometriai rendszert fogadja el, melyet Klein *kettősen elliptikusnak* nevez, míg az a feltevés, hogy az egyenest az ellentett pontpárok is meghatározzák a Klein-től *egyszerűen elliptikus*-nak nevezett rendszerre vezet.

Igen fontosak a változatlan idomok folytonos rendszereire vonatkozó fejtegetések. Az ilyen rendszer értelmezését szerző a következő definicziókkal adja:

Ha adva van több vonal vagy vonalrész:

$$(A) \equiv \ldots AA_1 \ldots A_m \ldots, \qquad (B) \equiv \ldots BB_1 \ldots B_m \ldots,$$
$$(C) \equiv \ldots CC_1 \ldots C_m \ldots, \ldots, \qquad (X) \equiv \ldots XX_1 \ldots X_m \ldots$$

oly módon, hogy az azokon levő pontsorok pontjai egymásnak egyértelműen és ugyanazon sorrendben megfeleljenek, a mi azonban nem zárja ki azt az esetet, hogy az egyikben vagy egynéhányban e pontsorok közül egynehány vagy az összes pontok egy pontba essenek össze és hogy egy vagy több e pontsorok közül egy és ugyanazt a vonalat vagy vonalrészt többszörösen fedje, akkor az idomoknak

$$\ldots ABCD \ldots X \ldots, \qquad \ldots A_1B_1C_1D_1 \ldots X_1 \ldots \quad \text{stb.}$$

rendszerét *az egy dimenziós idomok folytonos rendszerének* nevezzük.

$$\ldots ABCD \ldots X \ldots \quad \text{és} \quad \ldots A_1B_1C_1D_1 \ldots X_1 \ldots$$

e rendszerben *egymásra következő* idomok, ha (AA_1), (BB_1) stb. az adott (A), (B) stb. vonaloknak minden határon túl kisebbedő részei. Az adott vonalok a folytonos rendszer idomaiban az *egymásnak megfelelő pontok vonalai* (linee dei punti corrispondenti delle figure del sistema). *Ha a megfelelést a folytonos rendszer bármely két idoma közt az azonosság szabja meg, a rendszert a változatlan idomok egy dimenziós folytonos rendszerének nevezzük.*

Hogy már mostan valamely egyenes vonalú tárgyon vagy akár több egymástól különböző egyenes vonalú tárgyon egyenlő közöket állíthassunk elő, valami praktikus eszközre van szükségünk, mert az eddigi axiomák és hipotézisek csak a geometria elméleti kifejtésében elégségesek, de nem annak praktikus alkalmazásaiban. Ha ismét a tapasztalathoz térünk vissza, azt fogjuk látni, hogy valamely homogen fizikai közegben mozgó test az egyik helyzetében egy valamely másik helyzetében elfoglalt helylyel egyenlő helyet foglal el oly módon, hogy a test ugyanazon részeitől a két különböző helyzetben elfoglalt helyek is egyenlők egymással. Ezt röviden úgy szoktuk kifejezni, hogy a test a szemléleti térben alakváltozás nélkül mozoghat. Tekintettel tehát a geometria praktikus alkalmazásaira, szerző ezt a praktikus axiomát fogadja el, *hogy minden test alakváltozás nélkül mozoghat.*

Hogy ez az axioma a geometria elméleti kifejtésében fölösleges, az az előbbi fejtegetésekből világos. Ez az axioma voltaképen azt a követelést foglalja magában, hogy a szemléleti térnek megfelelő absztrakt formában a változatlan idomok folytonos rendszerei létezzenek, a mit szerző e rendszerek absztrakt szerkesztésével már amúgy is bebizonyított.

A következő fejtegetések tárgyát az EUKLIDES- és RIEMANN-féle vagy teljes sík és az EUKLIDES-féle és RIEMANN-féle vagy teljes tér tulajdonságainak kifejtése képezi. Bár e fejtegetések eléggé érdekesek és igen sokban eredetiek is, részletes megbeszélésüket térszűke miatt mégis mellőzzük és áttérünk a munka második részének ismertetésére, melynek tárgya a *négy és n-dimenziós terek geometriája az általános térben.*

Az általános tér definicziójából következik, hogy minden e térhez tartozó idomon kívül létezik még egy pont. *Ha tehát az általános térben adva van egy három-dimenziós tér S_3, minden esetre képzelhetünk egy kívüle fekvő S_0 pontot. Azt az idomot, melyet az S_0-t az S_3 összes pontjaival összekötő egyenesek meghatároznak, szerző másodfajú sugárcsomónak nevezi, mely tekintettel sugaraira, három-dimenziós, ha pedig e sugárcsomóban a pontot veszszük alapelemül, egy négy-dimenziós idomot nyerünk, a melyet szerző négy-dimenziós térnek nevez.*

Hogy ezeket az értelmezéseket világosabbá tegye a nélkül, hogy evvel a négy-dimenziós vagy pedig az általános tér *materiális* létezését be akarná bizonyítani, szerző a következő példát hozza fel, melyhez hasonlót BELTRAMI és HELMHOLTZ is használnak :

«Képzeljük, hogy a síkban létezik egy két-dimenziós eszes lény, melynek világa nem terjed a síkon túl és tapasztalata révén a sík csak egy részének létezését tudja igazolni, a melyben észleléseit végezheti. Hogy e hipotetikus lényt jobban elképzelhessük, képzeljük árnyékunkat valamely síkban; minden mozdulatunknak meg fog felelni ennek egy-egy mozdulata és ha saját személyünktől eltekintünk, ez az árnyék élő lénynek fog látszani, a mely a síkban mozoghat.

Tegyük fel azonfelül, hogy ez az árnyék érvényeseknek ismeri el azokat az általános igazságokat, melyeket a bevezetés első fejezetében kifejtettünk és lássuk még el oly érzékekkel is, a melyekkel síkjának csak egy részét teheti észleletei tárgyává; akkor ezzel meg van a feltételezett lény.

Az ily természetű lény észleléseivel nem tudja igazolni, hogy síkjának lehet közös pontja egy egyenessel a nélkül, hogy ez abban teljesen benne nem feküdnék. Azt látja, hogy síkjának valamely egyenesére ennek egyik pontjában oly merőlegest állíthat, a mely teljesen benne fekszik e síkban, de nem tudja észlelés útján kimutatni, hogy a mi terünkben az egyenes felvett pontjában végtelen sok az egyenesre merőleges egyenest állíthatunk, a melyek egy az egyenesre merőleges síkban feküsznek stb.

Okoskodás útján azonban származtathatja a maga síkját és ha egy a bevezetésben megbeszélt principiumot érvényesnek ismer el, az általunk követett móddal azonos módon, analogia útján elképzelheti, hogy síkján kívül létezik egy pont. Ezt feltételezvén és alávetvén az összes pontokat a tőlünk felsorolt axiomáknak, a melyeket e lényre nézve is érvényeseknek tételezünk fel, az a három-dimenziós tér ugyanarra az előállítására fog jutni, a melyre mi. Reá nézve a három-dimenziós geometria csak ideális, de mathematikailag igaz. Ez a lény a mi terünk idomainak tulajdonságait majd felhasználhatja az ő síkjában fekvő oly idomok tulajdonságainak levezetésére, a melyek tárgyalása tisztán a síkban fekvő elemek felhasználása mellett kevésbbé egyszerű, a mint azt gyakran mi is szoktuk tenni.

Azonban ettől függetlenül is erre a lényre nézve a három-dimenziós geometria ugyanavval a logikai jogosultsággal bir, mint saját síkjának geometriája.

Helyezzük már most magunkat e lény helyébe tekintettel a mi észlelésünk alá eső környezetre. Logikailag feltételezhetjük, hogy a mi terünkön kívül létezik még egy pont a nélkül, hogy e hipotézis magában véve már reávezetne a négy-dimenziós térre; ha azonban e pontot is a bevezetett axiomáknak vetjük alá, rögtön a négy-dimenziós tér ideális létezését nyerjük, a mely ép úgy magában foglalja a három-dimenziós teret, a mint az említett lény síkja bennfoglaltatik a közönséges térben.»

A négy-dimenziós tér definicziójából folyó közvetetlen alaptételek közül kiemeljük azt, hogy a négy-dimenziós tér meghatározására öt, nem egy három-dimenziós térhez tartozó pont szolgálhat.

A térelemek közös pontjaira vonatkozó fontosabb tételek ezek: A négy-dimenziós tér valamely egyenese és síkja nem metszik egymást okvetetlenül és ha metszik egymást, ugyanahhoz a három-dimenziós térhez tartoznak. A négy-dimenziós tér egy három-dimenziós tere és egy egyenese, mely nem tartozik e három-dimenziós térhez, egy pontban, egy három-dimenziós tere és egy ehhez nem tartozó síkja egy egyenesben és végre két három-dimenziós tere egy síkban metszi egymást. Ha három három-dimenziós tér nem tartalmaz egy közös síkot, akkor közös bennük egy egyenes és négy három-dimenziós térben általánosságban egy pont közös. Két sík általánosságban csak egy pontban találkozik és csak akkor, ha ugyanahhoz a három-dimenziós térhez tartozik, közös benne egy egyenes.

A három-dimenziós térben előforduló az elemekre vonatkozólag egy-dimenziós alapalakzaton kívül a négy-dimenziós térben még létezik a *tér-sor* is. Ezt amaz összes három-dimenziós terek képezik, melyeket egy sík egy vele nem ugyanabban a három-dimenziós térben fekvő egyenes pontjaival meghatároz. Egy új két-dimenziós alapalakzatot, melynek elemei síkok, azok a síkok alkotnak, melyeket egy adott egyenes valamely azt nem metsző sík pontjaival meghatároz.

Hasonló módon, mint a megfelelő tételt a három-dimenziós térben, itt is bebizonyítja szerző, *hogy a négy-dimenziós térnek az Euklides-féle egységre vonatkozólag a végtelenben fekvő mezeje teljes három-dimenziós térnek tekinthető* és azután a párhuzamosságra és a merőlegességre vonatkozó különböző eseteket itt is a végtelenben fekvő elemek segítségével értelmezi.

Kiemeljük itt a négy-dimenziós tér egy új alakzatát, melyet két három-dimenziós tér meghatároz.

Egy térsor a négy-dimenziós térnek a végtelenben fekvő $\pi_{3\infty}$ három dimenziós terét egy síksorban metszi, melynek sorozója $a_{1\infty}$, a térsor sorozó síkjának a végtelenben fekvő egyenese. A térsor féltereinek megfelelnek az $a_{1\infty}$ sorozóhoz tartozó síksor félsíkjai és így e síksor $a_{2\infty}$ és $b_{2\infty}$ félsíkjai által meghatározott két lapszögnek (diedro) meg fog felelni az α_3 és β_3 félterek által meghatározott térsor két része. A térsor e részeit szerző szintén *diédereknek* nevezi és mértéküket képezi, a nekik a végtelenben megfelelő közönséges diéderek mértéke.

A négy-dimenziós térben fellépő további új alakok közül első sorban felemlítendő *a másodfajú triéder.* Igy nevezi szerző azt az idomot, melyet három ugyanazon egyenestől határolt félsík határoz meg. A közös egyenes *a másodfajú triéder tengelye,* a félsíkok annak *síkoldalai,* az e félsíkok meghatározta diéderek pedig *három-dimenziós oldalai* és végre az e diéderek alkotta négy-dimenziós diéderek *a másodfajú triéder diéderjei.*

Még egy nevezetes új alak *az m-él* vagy *a négy-dimenziós m-oldalú szöglet,* melyet m egy P_0 pontból kiinduló sugár meghatároz. Az m sugár képezi az *m-él éleit* és a P_0 pont *csúcsát.* Az élek képezte szögek *az m-él síkoldalai,* a három-három él által képezett közönséges triéderek *három-dimenziós oldalai,* az ezek által képezett négy-dimenziós diéderek *diederjei* és végre ama másodfajú triéderek, melyeknek tengelyei az élek, *másodfajú triéderjei.*

Ide tartozik továbbá a *pentaéder,* melyet a négy-dimenziós tér öt nem ugyanahhoz a három-dimenziós térhez tartozó pontja határoz meg. Az adott pontok a pentaéder *csúcsai,* az általuk meghatározott közök, háromszögek, tetraéderek annak élei, ill. sík és harom-dimenziós oldalai stb.

Bővebben foglalkozik még a szerző avval az idommal, melyet *másodfajú kúpnak* nevez. Ezt meghatározzák azok a síkok, a melyek valamely P_0 pontot egy a végtelenben fekvő C_∞ henger alkotóival összekötik. A P_0 pont *a másodfajú kúp csúcsa* és ha $a_{1\infty}$ és $a'_{1\infty}$ a végtelenben fekvő henger tengelyei (ilyen kettő van, mert a végtelenben fekvő tér teljes), a $P_0a_{1\infty}$ és $P_0a'_{1\infty}$ síkok *a másodfajú kúp tengelysíkjai vagy egyszerűen tengelyei.*

A négy-dimenziós teljes tér tárgyalása teljesen analóg a három-dimenziós teljes tér tárgyalásával.

Az n-dimenziós térre vonatkozó vizsgálatokban, ép úgy, mint a négy-dimenziósra vonatkozókban a szemlélet össze van fűzve az absztrakczióval. A bebizonyítások itt általánosabbak és a legtöbb esetben a szerző *a teljes indukcziónak* nevezett bebizonyítási módot alkalmazza. Az n-dimenziós tér szerkesztése, hol n egy tetszés szerinti pozitiv, de véges egész számot jelent, ugyanazon elvek szerint megy végbe, mint a síké és a három- és négy-dimenziós téré és különösen a négy-dimenziós tér tárgyalásában alkalmazott módszerek szolgálhatnak vezérfonálul a négynél több dimenziós terek tanulmányozásában is. *Az öt-dimenziós tér előállitható egy négy-dimenziós térből és egy kívüle fekvő pontból, a hat-dimenziós tér egy öt-dimenziós térből és egy kívüle fekvő pontból és általánosságban az n-dimenziós tér, melyet szerző* S_n*-nel jelöl, egy* $(n-1)$*-dimenziós térből és egy kívüle fekvő pontból.*

Az általános térhez tartozó tereket a szerző egymástól *függetleneknek* nevezi, ha az azok meghatarozására szolgáló pontok egymástól függetlenek; *egy n-dimenziós térhez tartozó r pont pedig, hol* $r < n$, *akkor független egymástól, hogy ha nem tartoznak egy és ugyanahhoz az* $(r-2)$*-dimenziós térhez.* Kiemelendö az a tétel, hogy *valamely tér meghatározására* $n+1$ *egymástól független pont szolgálhat.*

Az n-dimenziós térhez tartozó alacsonyabb dimenziós terek metszésére vonatkozó kérdések sokkal bonyolódottabbak, mint az eddigi esetekben. Az ide tartozó alaptétel szerint két tér, S_m és $S_m^{(1)}$, melyben $a+1$ pont (és így az ezek meghatározta S_a tér is) közös, egy és ugyanazon $S_{m+m^{(1)}-a}$ térhez tartozik.

Az S_n-hez tartozó alacsonyabb dimenziós terek metszésére vonatkozó tételekből következik, hogy valamely S_n térhez tartozó alacsonyabb dimenziós tér meghatározására több $(n-1)$-dimenziós tér is szolgálhat. A szerző az S_n-hez tartozó két tért akkor nevez *dualisnak*, ha az egyiknek meghatározására ugyanannyi pont szükséges, mint a hány $(n-1)$-dimenziós tér meghatározza a másikat. *Az S_n-hez tartozó két duális tér dimenzióinak összege mindig $n-1$* és ha $n=2m+1$, akkor S_m magamagával duális.

Hasonlóképen, mint a három- és négy-dimenziós tér esetében, a szerző itt is az Euklides-féle n-dimenziós tér tárgyalásában az $(n-1)$-dimenziós teljes tér tulajdonságaira támaszkodik. Ezért előbb az $(n-1)$-dimenziós teljes tér tulajdonságait fejtegeti és azután áttér a párhuzamosság és merőlegesség definiczióira és tárgyalja az idetartozó tételeket. Figyelemre méltó az n-él, az n-dimenziós tér fundamentális piramisának és bizonyos kettőnél több dimenziós idomok vizsgálata, melyek a közönséges tér gömbfelületének és kúpfelületének felelnek meg.

Kiemeljük még ama vizsgálatoknak eredményeit, melyek az általános és az n-dimenziós tér folytonos vonal- és felületrendszereire vonatkoznak. Ha az általános térben adva van a vonaloknak egy egy-dimenziós rendszere oly módon, hogy az egyik vonal minden pontjának megfelel a reá következő vonal egy-egy pontja és viszont akkor, ha a megfelelő pontok rendszerei folytonosak, azaz vonalok, akkor a szerző az adott rendszert tekintettel a pontra mint alapelemre *két-dimenziós folytonos rendszernek* vagy *két-dimenziós* felületnek nevezi; ha pedig adva van a *két*-dimenziós felületeknek egy *egy*-dimenziós rendszere és e felületrendszer pontjai közt oly vonatkozás áll fenn, mint az előbbi vonalrendszer pontjai közt, ez, ha a pontot vesszük alapelemnek, három-dimenziós folytonos rendszer lesz és ezt a szerző *három-dimenziós felületnek* nevezi. Ugyanily módon származik az $(m-1)$-dimenziós felületből az *m-dimenziós felület.* A rendszerhez tartozó vonalak vagy felületek megfelelő pontjait tartalmazó vonalokat *az m-dimenziós felület vezérvonalainak* és a rendszer vonalait, ill. felületeit *az m-dimenziós felület alkotóinak* nevezi.

Az ezekre vonatkozó tételekből következik, hogy a sík, a *3*-, *4*-, ..., n-dimenziós tér is folytonos rendszerek. Ez azt jelenti, hogy ezek is, mint az általános tér, *2*-, *3*-, ..., n-dimenziós felületei foghatók fel; minthogy azonban tulajdonságaik speciálisak, a szerző azokat *lineáris* felületeknek nevezi. Mind a mellett nem tartja czélszerűnek, hogy minden más folytonos rendszert is térnek nevezzünk, mert így elveszne e szó eredeti értelme, mely oly formákra vonatkozik, melyeknek tulajdonságai nem pusztán absztrakt definicziók révén, hanem részben az axiomákban foglalt tapasztalati adatok alapján is megállapíttatnak.

Irreduczibilisnek nevezve az S_n tér oly p-dimenziós rendszerét, melyet ugyane tér valamely S_{n-p} tere legföljebb a pontoknak egy nem folytonos csoportjában metsz, bebizonyítja a szerző, hogy az S_n tér valamely p-dimenziós irreduczibilis rendszere egy ugyane térhez tartozó S_r teret nem metszhet egy $(p+r-n)$-nél több dimenziós rendszerben.

A vonalak és felületek rendszámát, az n-dimenziós térben a szerző következőképen definiálja: m-edrendű *az S_n oly vonala, melyet minden S_{n-1} tér legföljebb m pontban metsz át: továbbá m-edrendű oly p-dimenziós felület, melyet minden S_{n-p} tér legföljebb m pontban metsz át.*

E definicziókból és a megelőző tételekből következik, hogy az S_n tér valamely p-dimenziós m-edrendű felületét egy ugyane térhez tartozó S_r tér legföljebb $(p+r-n)$-dimenziós m-edrendű folytonos rendszerben metsz át, továbbá hogy valamely p-dimenziós m-edrendű felület (vonal esetében $p=1$) nem tartozhatik valamely $(p+m)$-dimenziós térhez a nélkül, hogy valamely kevesebb dimenziós térben tartalmaztatnék.

Az n-dimenziós térhez tartozó változatlan idomok folytonos rendszereinek vizsgálata után, mely analog e rendszerek vizsgálatával a síkban és a három-dimenziós térben, a szerző áttér a projicziálás és metszés műveleteinek tárgyalására. Valamely S_n tér pontjainak, egyeneseinek, síkjainak, ..., S_r tereinek *projicziálisa valamely S_m térből,* hol

$$m < n-1, \quad r \leqq n-m-2,$$

abban áll, hogy e pontokat, egyeneseket, síkokat, tereket S_m-mel kötjük össze. *Valamely S_r teret metszeni egy S_m térrel,* azt jelenti, hogy meghatározzuk azt az S_a teret, melyet S_r és S_m közösen tartalmaznak. Hogy ilyen közös tér létezhessék, szükséges, hogy

$$r+m-n \geqq 0$$

legyen. A projicziálás és metszés műveleteit szerző *duálisoknak* nevezi, mert ama térnek, mely S_r-et projicziálja S_m-ből, duálisan megfelel az S_r-rel duális S_{n-r-1} tér metszése az S_{n-m-1} térrel, mely az S_m-mel duális tér.

S_m-ből valamely S_r teret projicziálni $S_{m'}$-re, azt jelenti, hogy meghatározzuk az S_r-t projicziáló S_{m+r+1} tér S_a metszését $S_{m'}$-mel. Itt S_m-et *czentrumnak,* S_a-t *projekcziónak* és $S_{m'}$-et *a projekcziók terének* nevezzük. Minthogy e művelet egy projicziális és egy metszés egymásutánjából áll, világos, hogy duális művelete egy metszés és projicziálás egy-

másutánjából fog állani. Egy térből egy másik térre való projicziálásnak legegyszerűbb esete az ú. n. *egyértelmű projicziálás,* melynél a projekcziók tere S_{n-m-1} duális a czentrummal S_m-mel és így *minden pontnak mint projekczió ismét egy és csakis egy pont felel meg.*

A projicziálás és metszés módszereit, melyek *az ábrázoló geometriában használt módszereknek általánosítását képezik,* felhasználja a szerző az általános térhez tartozó perspektiv idomok alaptulajdonságainak tanulmányozásában és azután megmutatja, hogy miképen lehet a nyert eredményeket a sík és a három-dimenziós tér geometriájában felhasználni.

Befejezésül a szerző tárgyalja az analitikai geometria alapelveit az n-dimenziós térben.

Az S_n térben a DESCARTES-féle *koordináta-rendszert* meghatározza n egymástól független, egy ponton keresztülmenő egyenes; ha ezek kettenként egymásra merőlegesek, a mi az n-dimenziós térben is lehetséges, a koordinátarendszer derékszögű. Hogy valamely pontot meghatározhassunk, e ponton keresztül mindegyik tengelyhez egy-egy párhuzamos egyenest fektetünk és ezzel átmetszszük a többi tengelyek meghatározta $(n-1)$-dimenziós teret; a közök, melyeket a meghatározandó pont e metszéspontokkal együtt meghatároz, jellemzik a pont helyzetét. E közök mérőszámai a kellő előjelekkel ellátva a szerint, a mint a meghatározandó pont az említett $(n-1)$-dimenziós terek egyik vagy másik oldalán fekszik, *a pont koordinátái* és ezeket x_1, x_2, ..., x_n-nel szoktuk jelölni.

Könnyen bebizonyítható, hogy derékszögű koordinátarendszer esetében két pont távolságát, melynek koordinátái x_i, ill. x'_i e képlet szolgáltatja:

$$\delta = \sqrt{\Sigma(x_i - x'_i)^2}$$

és hogy ha α_1, α_2, ..., α_n ama szögek, melyeket valamely a kezdőpontból kiinduló sugár a tengelyekkel képez

$$\Sigma \cos^2 \alpha_i = 1.$$

A koordináták transzformácziója segítségével bebizonyítja szerző, hogy minden $(n-1)$-dimenziós tér egyenlete elsőfokú, továbbá megmutatja, hogy miképen lehet az n-dimenziós térben a PLÜCKER-féle *koordinátákat* (melyek itt *térkoordináták* lesznek) és a *homogén koordinátákat* értelmezni és végül bebizonyítja, hogy *két pontsor projektiv rokonsága* az ARCHIMEDES-féle axiomától függetlenül állapítható meg.

A megbeszélt munka igen fontos és tanulságos kiegészítő részét képezi a függelék első fejezete, melyben a szerző a geometria principiumaira vonatkozó irodalmat kritikailag ismerteti.* A függelék további fejezetei,

* E függelékre még visszatérünk. *Szerk.*

melyben a szerző könyvének tárgyát képező némely kérdést bővebben világít meg, névszerint a következők: Az n-dimenziós tér definiczióiról, az alakváltozás nélküli mozgásról, a két egy-közös ponttal biró sugár vagy egyenes alkotta szög definiczióiról, megjegyzések egynéhány az aktuális végtelen nagy és végtelen kicsiny létezése ellen irányuló bizonyításra.

A kimerítő ismertetés után, melyre e munkát méltattuk, bátran kijelenthetjük, hogy a szerzőnek teljesen sikerült azokat az általános szempontokat kiemelni, a melyek az elemi geometria tárgyalásában dominálók és ezzel oly szigorú rendszert megállapítani, mely az axiomák lehetőleg kicsiny száma mellett, a geometria összes lehetséges rendszereit magában foglalja. Az ú. n. sík axiomája fölöslegesnek bizonyul és mint kiváló fontos és új eredmény kiemelendő, hogy az alakváltozás nélküli mozgás és a tér három dimenziójának feltételezése a geometria elméleti kifejtésében nélkülözhető és hogy a több dimenziós terek geometriája minden analitikai segédeszköz mellőzésével analog módszerek segítségével tárgyalható, mint a sík és a három-dimenziós tér geometriája. A mi a tárgyalás módját illeti, az világos és habár a szigorúan és következetesen alkalmazott szintétikai módszer mellett, a mely az egész rendszert mint definicziók, axiomák, hipotézisek és tételek egymásutánját állítja elénk, első pillanatra hajlandók volnánk hinni, hogy a munka olvasása fárasztó, csakhamar meggyőződünk arról, hogy a sok közbeszúrt megjegyzés, mely a különböző definicziókat, tételeket egymással összefűzi, elég nyugvó pontot nyujt és elenyészti azt a szárazságot, a mely az ilyen szintétikai tárgyalásokat rendesen jellemezni szokta. Hisszük tehát, hogy e könyv elég tanulságos és élvezetes olvasmányt nyujt majd azoknak, a kik a geometria alapvető elvei iránt érdeklődnek.

Rados Ignácz.

MEGOLDOTT FELADATOK.

12. *Leirandó egy súlyos anyagi pont mozgása vertikális tengelyü körhenger belső felületén a surlódás tekintetbe vételével, ha a pont kezdeti helye és sebessége valamint ennek iránya adva vannak.* (Réthy.)

*

Második megoldás dr. Réthy Mór műegyetemi tanár úrtól.

A surlódás számításba vételénél azt a tapasztalatokkal megegyező törvényt fogadom el alapul, hogy bármely görbe felületen a surlódás ereje nagyságra arányos a felületre gyakorolt normális nyomás abszolút értékével, N-nel, irányára nézve pedig a mozgáséval épen ellenkező.

A jelen esetben r-rel jelölvén a henger alapkörének sugarát, S, u, v-vel a mozgó anyagi pont sebességét és ennek horizontális s vertikális komponenseit, a normális nyomás egyenlő az $\frac{u^2}{r}$ czentrifugál erővel; minélfogva a surlódás és az ő komponensei a horizontális síkon és a függélyen rendre a következők:

$$k.\frac{u^2}{r}, \quad -k\frac{u^2}{r}.\frac{u}{S}, \quad -k\frac{u^2}{r}.\frac{v}{S},$$

hol k a surlódási koefficziens. Ugyanerre az eredményre jövünk, ha a Kirchhoff Mechanikájában (pag. 17.) előforduló erőtörvényt használván, h alatt, eltérőleg Maksay úrtól, nem állandót hanem kS-et értünk.

Ezek után fölírhatjuk a mozgás differencziálegyenleteit ebben az alakban:

$$1) \qquad \frac{du}{dt} = -\frac{k}{r}\,\frac{u^2 u}{S}$$

$$2) \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{r}\,\frac{u^2 v}{S} - g,$$

hol g a nehézségi gyorsulás.

A k eliminácziója a két egyenletből a következőre vezet:

$$v\frac{du}{dt} - u\frac{dv}{dt} = gu,$$

mely egyenlet

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{v}{u} = \frac{g}{u}$$

alakban írható.

Ha még tekintetbe vesszük, hogy a sebesség hajlásszögét a horizontális síkhoz ϑ-val jelölvén,

3) $$u = S\cos\vartheta,\ v = S\sin\vartheta,\ \frac{v}{u} = \operatorname{tg}\vartheta,$$

akkor az imént talált egyenlet egyszerű átalakítások után így írható:

4) $$\frac{g}{S} = \frac{1}{\cos\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d}{dt}\ \mathrm{l.}\ \left[\mathrm{ctg.}\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Irjuk már mostan ép ilyen alakban az 1) egyenletet is; lészen

5) $$\frac{k}{2rS} = \frac{d}{dt}\frac{1}{u^2}.$$

Ebből a két egyenletből az S eliminálásával ered $h = \frac{2k}{r}$ jelölés mellett

$$g\frac{d}{dt}\frac{1}{u^2} = h\frac{d}{dt}\ \mathrm{l.}\ \left[\mathrm{ctg.}\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

melyből integrálással lesz:

$$\frac{1}{u^2} = \frac{h}{g}\ \mathrm{l.}\ \left[a\,\mathrm{cotg}\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

hol a integrál-állandót jelent, és értéke a kezdeti sebességből adódik ki.

Hozzuk be rövidítésül

6) $$\Theta = \mathrm{l.}\ a\,\mathrm{ctg.}\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

jelölést; akkor az integrál így írható:

7) $$u = \sqrt{\frac{g}{h}}\ \frac{1}{\sqrt{\Theta}}$$

Most a 7)-ből folyólag nyerjük

8) $$\frac{1}{S} = \sqrt{\frac{h}{g}}\ \sqrt{\Theta}\cos\vartheta$$

egyenletet, és ennek fölhasználásával a 4)-ből a

$$9)\qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{gh}\,\sqrt{\Theta}\cos^2\vartheta$$

egyenletet, mely közvetetlenül integrálható, és adja az idő és a ϑ szög között a

$$9a)\qquad \sqrt{gh}\,t = \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\Theta}\cos^2\vartheta}$$

vonatkozást, hol ϑ_0 az érintő hajlásának értéke a $t = 0$ időpontban.

Ezzel a feladat meg van oldva. A mozgó pont czilinderkoordinátái, a φ szög és a z magasság, — mint a ϑ függvényei ugyanis kiadódnak

$$u = r\frac{d\varphi}{dt}, \qquad v = \frac{dz}{dt}$$

egyenletekből, úgy hogy a 3), 7), 9a) egyenletek folytán

$$9b)\qquad \varphi = \frac{1}{2k}\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\Theta\cos^2\vartheta},$$

$$9c)\qquad z = \frac{1}{2k}\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\Theta\cos^3\vartheta}.$$

A pont pályájának legmagasabb pontjában $\frac{dz}{d\varphi}$ tehát $\frac{v}{u}$ is $= 0$, a mi $\vartheta = 0$-nál következvén be, a 9c) képlet $\vartheta = 0$ helyettesítéssel megadja a legnagyobb emelkedést. Tekintettel ugyancsak a 9) egyenletekre a vonal aszimptotája vertikális és φ ívhosszban mérve végtelen távolságban fekszik; más szóval a pálya a hengeren *végtelen sokszor* csavarodván körül érintője a vertikális irányhoz vég nélkül közeledik.

Ugyanis a 9) egyenletekben

$$\cos\vartheta = y$$

helyettesítést eszközölven, $y\frac{dt}{dy}$, $y\frac{d\varphi}{dy}$ és $y\frac{dz}{dy}$ számára olyan értékeket nyerünk, melyek határértékei $y = 0$-nál végtelen nagyok; minélfogva $y = 0$ azaz $|\vartheta| = \frac{\pi}{2}$ értéknél maguk az integrálok is végtelen nagyok. Tényleg pl. (9b) és 6)-ből)

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta}=-\frac{1}{2k}\cdot\frac{1}{\theta y^2\sqrt{1-y^2}},$$

$$\theta=\mathrm{l}.\, a+\frac{1}{2}\mathrm{l}.\,(1-\sqrt{1-y^2})-\frac{1}{2}\mathrm{l}.\,(1+\sqrt{1-y^2}),$$

minélfogva

$$\lim_{y=0} y\frac{d\varphi}{dy}=\lim_{y=0}\frac{-2}{y\,\mathrm{l}.\,(1-\sqrt{1-y^2})}=\infty.$$

---

13. *Adva van valamely ellipszisen a P pont. Szerkesztessék az adott ellipszisbe beirt ama háromszög, melynek egyik szögpontja P és magassági pontja az ellipszis középpontja.* (KLUG LIPÓT.)

*

Első megoldás dr. Kürschák József műegyetemi m. tanártól.

A feladat analitikai tárgyalásánál czélszerű oly derékszögű koordinátarendszert választanunk, melynek kezdőpontja az ellipszisnek középpontja, s melynél a poz. x tengely átmegy a P ponton. A meghatározandó háromszögnek P-vel átellenes ismeretlen P_1P_2 oldala a feladat értelmében merőleges az x tengelyre, tehát teljesen meg van határozva, ha sikerül az x tengelylyel való

$$(u,\ 0)$$

metszéspontját felkeresnünk.

Az ellipszis egyenlete

$$ax^2+2bxy+cy^2-1=0$$

alakú. Ha r_1 és r_2 a P-n átmenő átmérőnek s a reá merőleges átmérőnek fél hosszát jelentik, akkor

$$a=\frac{1}{r_1^2},\qquad c=\frac{1}{r_2^2}.$$

P koordinátái

$$(r_1,\ 0),$$

P_1 és P_2 pontokéi pedig

$$(u,\ y_1),\quad (u,\ y_2),$$

hol y_1 és y_2 az u-ból a

$$cy^2+2buy+au^2-1=0$$

egyenlet segítségével adódnak ki.

A PP_1 és PP_2 egyenesek egyenletei most már:

$$xy_1+y(r_1-u)-ry_1=0$$
$$xy_2+y(r_1-u)-ry_2=0$$

és a PP_1P_2 háromszögnek a P_2 illetve P_1 szögpontján átmenő magassági vonalai:

$$(r_1-u)(x-u)-y_1(y-y_2)=0$$
$$(r_1-u)(x-u)-y_2(y-y_1)=0.$$

E két egyenletnek ugyanaz az állandó tagjuk, t. i.

$$u(u-r_1)+y_1y_2,$$

vagy tekintetbe véve y_1 és y_2 értékeit

$$u(u-r_1)+\frac{au^2-1}{c}=r_2^2\left[\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)u^2-\frac{r_1}{r_2^2}u-1\right]=$$
$$=r_2^2(u-r_1)\left[\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)u+\frac{1}{r_1}\right].$$

Feladatunk azt kivánja, hogy az imént meghatározott két magassági vonal átmenjen a kezdőponton, vagyis hogy e vonalak egyenletében az állandó tag eltünjék. Ez csak úgy történhetik, hogyha

$$u=\frac{-\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}}.$$

Ugyanis az az eset, melyben a mondott tag akként tünik el, hogy $u=r_1$, feladatunk természeténél fogva kizárandó, mert ekkor a P, P_1, P_2 pontok nem adnának háromszöget.

Az u-ra imént nyert érték azonos a

$$-\frac{x}{r_1}+\frac{y}{r_1}-1=0$$

egyenes s a kezdőpontból reá merőlegesen emelt

$$r_1x+r_2y=0$$

egyenes metszéspontjának abszczisszájával.

Valóban a kérdéses metszéspont koordinátái:

$$u=\frac{-\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2^2}}\qquad v=\frac{\frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}}$$

Feladatunk konstruktiv megoldása tehát a következő módon végzendő: *Határozzuk meg az ellipszisnek a P-vel átellenes P' pontját s a PP'-re merőleges QQ' átmérőjét. Vonjuk meg továbbá PQ'-t s reá merőlegesen OR-t, hol O az ellipszisz középpontja. Az OR merőlegesnek R talppontján át QQ'-vel párhuzamosan vont egyenes fogja az ellipszist ama* P_1 *és* P_2 *pontokban metszeni, melyek P-vel együtt a keresett* PP_1P_2 *háromszöget alkotják.*

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1893. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

1893. február 9. CZÓGLER ALAJOS: Adalékok az entropia fogalmának megállapításához. (Közölni fogjuk.)

Dr. KÜRSCHÁK JÓZSEF: A harmonikus pontok szerkesztésének térbeli analogonja. (Közölni fogjuk.)

1893. február 21. TŐTÖSSY BÉLA: A negyedrendű térgörbékről, fonálmodellek bemutatásával.

1893. márczius 2. Dr. KOPP LAJOS: A pontsokaságok elméletének egyik nevezetes tételéről. (Ismertetjük.)

1893. márczius 16. Dr. SUTÁK JÓZSEF: Adalékok az algebrai függvények elméletéhez. (Közölni fogjuk.)

Dr. KÖVESLIGETHY RADÓ: A vertikális légáramlásokról. (Közölni fogjuk.)

1893. április 20. Dr. SUTÁK JÓZSEF: Uj tétel az algebrai differencziálegyenletek elméletéből. (Közölni fogjuk.)

*

A forgó mágneses tér előállítására szolgáló készülékek.*

Az 1891-ki frankfurti kiállításon nagy feltűnést keltettek a több fázisú mótorok, melyekről nemcsak a technikusok, hanem elsőrangú szakférfiak is nagy elismeréssel nyilatkoztak. És méltán, mert e kiállítás nevezetessége — a Lauffen-Frankfurt-i erőátvitel — ezeknek köszönte nagy sikerét. A tíz évvel ezelőtt Münchenben bemutatott energia-átvitel alig 50%-ot kitevő munkasikere nem volt biztató újabb ily kisérletek megtevésére. Akkorában az egyenes áramú dinamogépeknek tulajdonították a silány eredményt, pedig az akkori gépek nem sokkal álltak a mai gépek mögött s nem is

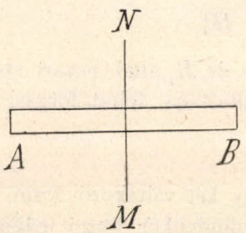
* GRUBER NÁNDOR 1892. decz. 15. tartott előadásából.

ezeken múlt, hogy a munkasiker nem volt nagyobb. A feladat egyszerű megfontolása arról győz meg, hogy ez csak akkor lehet nagy, ha az *energia nagy feszültségű és kis intenzitású áram alakjában vitetik át.*

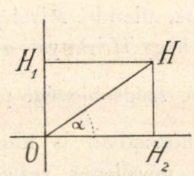
Ez állítás helyességét egyszerű számítás feltünteti. Tegyük föl, hogy 1000 *watt* munkát kellene egy helyről egy másikra átvinni, akkor ez 1000 *volt* potentiálkülömbséggel 1 *amper*, vagy pedig 100 *volt* potentiálkülömbségű 10 *amper*-nyi árammal eszközölhető. Ámde az utóbbi esetben a vezeték fölmelegítésére felhasznált, tehát tisztára kárbaveszett energia a Joule-féle törvény értelmében épen 100-szor akkora, mint az első esetben. Mindkét esetben ugyanazon energiát küldjük a vezetékbe és ennek daczára a vezeték végén még sem kapjuk ugyanazt a munkát. Az egyenes áramú dinamók szerkezetüknél fogva nem alkalmasak nagy feszültségű áramok előállítására, mert legfontosabb részük, a kollektor egyszersmind legkényesebb részük, a mennyiben nagy feszültségű áram a kollektor egyes lemezeit szigetelő rétegeken könnyen átüt, míg ellenben váltakozó áramú gépek segítségével 2000 volt feszültségű áram előállítása semmiféle nehézséggel nem jár s azonfölül a váltakozó áramok transzformátorok révén még nagyobb feszültségű áramokká is átalakíthatók. Ezen átalakításon alapuló váltakozó áramú transzformátoros rendszer csakhamar alkalmazásba is jutott különösen oly helyeken, hol az energiát nagyobb távolságokra kellett kielégítő munkasikerrel átvinni. De ez a rendszer sem volt tökéletes. Ha ugyanis az átvitt energiát nem csupán világításra, hanem mechanikai munkavégzésre is akarjuk használni, megbízható elektromótorral kell bírnunk, mely az áramot munkává alakítja át. Ilyennel pedig ez a rendszer nem rendelkezett, mert a régi váltakozó áramú mótorok megterhelés mellett nem indulnak el, csekély túlterhelés esetében hirtelen megállnak. Az elektrotechnikusok hiába fáradoztak javításukon, kisérleteik meddők maradtak mindaddig, míg csak Ferraris a forgó mágneses tér feltalálásával a több fázisú mótorok eszméjét meg nem adta.

A forgó mágneses tér tulajdonképen már Arago ama kisérletében szerepel, melynél a forgó rézkorong mágnestűt hoz forgásba. Ennek az ismeretes kisérletnek fordítottja azonnal a forgó mágneses térre vezet. Ha ugyanis egy mágnesrudat a czentrifugális gépre erősítünk s gyorsan forgatjuk, akkor a föléje függesztett vas- vagy rézkorong, melynek síkja párhuzamos a mágnes forgási síkjával, a mágnessel egyirányú forgásba jön. Ez esetben a mágnesrúd erővonalai képezik a forgó mágneses teret. A külömbség ezen és Ferraris kisérlete között csak az, hogy utóbbinál a forgó mágneses terret nem forgó mágnessel, hanem fázisukban eltolt váltakozó áramok állítják elő.

Hogy a forgó mágneses tér keletkezését könnyen átértsük, lássuk először azt az egyszerű esetet, melyben egy köralakú vezetéken át váltakozó irányú áram halad. Ha a vezeték AB (1. ábra), akkor az ezen áthaladó áram oly mágneses mezőt létesít, melynek erővonalai a kör síkjára merőlegesen állnak s intenzitása arányos az áram erősségével. Ha az áram M-ből tekintve az óramutató irányát követi, akkor a mágneses erővonalak iránya MN s a köralakú áram középpontjában elhelyezett mágnestű is ezek irányában helyezkedik el, ha a földmágnesség hatását nem tekintjük. Az áram irányát megváltoztatván, az erővonalak és ezekkel együtt a mágnestű iránya is ellenkezőre változik. Ha az áram irányváltozásait kellő időközökben ismételjük, a mágnestű forgásba is hozható, de forgása azonnal megszűnik, mihelyt a váltakozások rendetlenül történnek, sőt, ha időközeik a mágnestű lengésidejéhez képest nagyon kicsinyek, a tű nyugalomba is jöhet. Ezekből látjuk, hogy egyetlen egy váltakozó áram oly mágneses teret létesít, melynek erővonalai irányukat ugrásszerűleg változtatják.



1. ábra.



2. ábra.

Vegyünk most két váltakozó áramot, melyek két egymásra merőleges köralakú vezetőn haladnak át; akkor a tőlük létrehozott mágnesi terek egymásra szintén merőlegesek (2. ábra) s ha a két tér intenzitása bizonyos pillanatban OH_1 és OH_2, hol O pont a két köráram közös középpontjában van, ezek épen úgy összetevődnek, mint más erők; tehát az eredő mágnesi tér intenzitása OH. Ha az összetevők egymásra következő pillanatokban változtatják értéköket, az eredő nemcsak nagyságát, hanem irányát is változtatja, mialatt H pont egy görbét ír le, melynek alakja az összetevők értékváltozásától függ. Ha ez a görbe zárt vonal, mely az O pontot bezárja, akkor forgó mágneses mező jön létre, melynek intenzitása és forgási sebessége általánosságban változó. Abban az esetben, ha a vezetékekben egyenlő periodussal s ugyanazon maximális intenzitással biró oly váltakozó áramok haladnak, melyeknek intenzitása a sinus függvény szerint változik és fázisban 90°-kal vannak eltolva, a forgó mágneses tér intenzitása és forgási sebessége állandó. Ily áramokkal állította elő Ferraris legelőször a forgó mágneses teret.

Ugyanis, ha a két váltakozó áram

$$I_1 = I_0 \sin \frac{2\pi t}{T}, \quad I_2 = I_0 \sin \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{T}{4}\right)$$

vagy

$$\frac{2\pi t}{T} = 2\pi n t$$

értékét α-val jelölvén,

$$I_1 = I_0 \sin \alpha, \quad I_2 = I_0 \cos \alpha,$$

hol I_0 az intenzitás maximális értéke, T a periodus, n a váltakozások száma vagyis a frequentia és α a phasis, akkor az ezek által létesített mágneses terek szintén periodikusak s értéköket következő egyenletek adják:

$$H_1 = H_0 \sin \alpha, \quad H_2 = H_0 \cos \alpha,$$

hol H_0 a tér maximális intenzitása. A két mező eredője

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2}$$

mint látjuk, állandó. Mivel pedig az eredő és H_1 által bezárt szög α, következik, hogy H irányát α-val együtt változtatja, tehát forgási sebessége is állandó, szögsebessége pedig $\frac{2\pi}{T}$.

Általánosságban is kimutatható, hogy két váltakozó áram, mely két egymásra merőleges vezetőben halad, mindenkor forgó mágneses teret létesít, valahányszor egyenlő periodussal bírnak s fázisban 90°-kal vannak eltolva. Legyen

$$I_1 = I_0 f(\alpha), \quad I_2 = I_0' f\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

hol $f(\alpha)$-ról csak azt tételezzük fel, hogy periodikus, azaz

$$f(\alpha + 2\pi) = f(\alpha),$$

hogy alternáló, azaz jelét változtatja s például 0 és π között positiv, π és 2π között negativ, végre, hogy

$$f(k\alpha) = 0,$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

akkor I_1 és I_2 áramoktól létesített

$$H_1 = H_0 f(\alpha), \quad H_2 = H_0 f\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

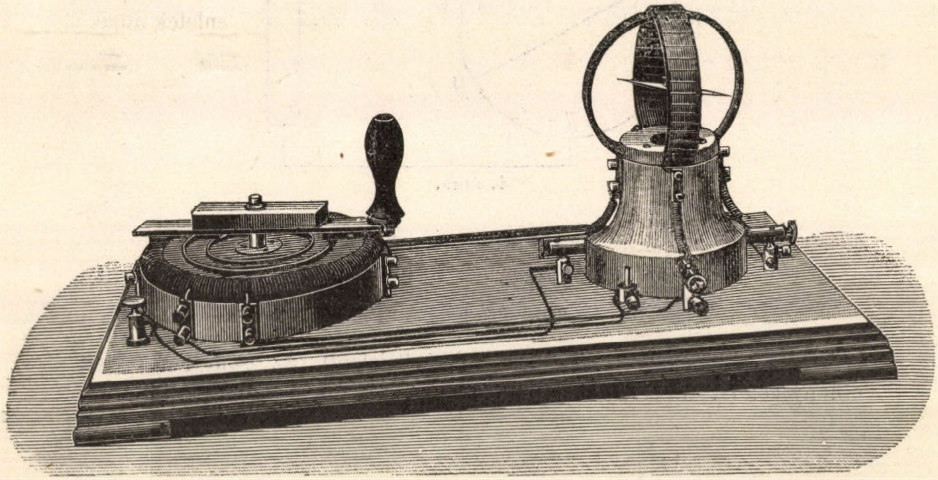
mágneses terek szintén merőlegesek egymásra s eredőjük

$$H = \sqrt{H_0^2 f^2(\alpha) + H_0 f\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Ez a kifejezés mutatja, hogy H értéke változó ugyan, de sohasem zérus, mert $f(\alpha)$ és $f\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ nem vehetik föl egyszerre ezt az értéket. Az eredő és H_1 közé fogott szöget meghatározó

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{H_1}{H_2}=\frac{f(\alpha)}{f\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$$

egyenletből pedig következik, hogy β 0°-tól 360°-ig növekszik, ha α ugyanazon határok között változtatja értékét.



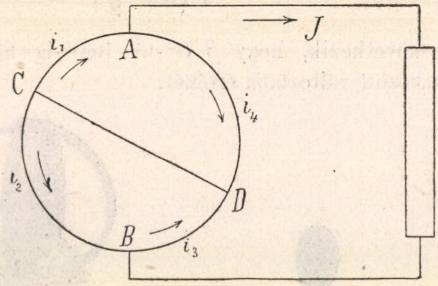
3. ábra.

Forgó mágneses tér előállítása laboratóriumban annyiban jár nehézséggel, a mennyiben több váltakozó áramot adó géppel nem igen rendelkezünk. Ezt pótolandó, WEINHOLD * egy kommutátort szerkesztett, melynek segítségével egy irányú áramból egy vagy több váltakozó áram állítható elő. A kommutátor (3-ik ábra) lényeges része egy új-ezüstből készített önmagába zárt spirális, mely forgatható fémrúddal át van hidalva. A rúd végei nemcsak a rúgón, hanem azon fölül még egy-egy rézgyűrűn is csúsznak abból a czélból, hogy a gyűrűkkel összekapcsolt lehetőleg csekély ellenállásu elem vagy akkumulátor áramát a kommutátorba vezessék. A rugó egymástól 90°-nyira fekvő négy pontjából drótok vezetnek a FERRARIS-féle tekercsekhez.

Vizsgáljuk először azt az egyszerű esetet, melyben a rugón csak két

* L. Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterricht. 1892.

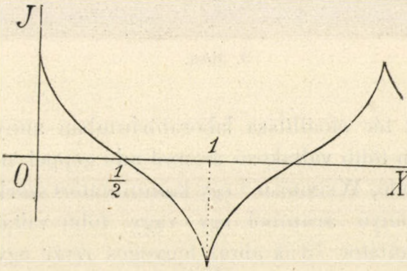
elágazás van (4-dik ábra) s az ezeken haladó áramot vezessük keresztül egy tekercsen. Ha utóbbinak ellenállása a hozzávezetéssel együtt R, a benne keringő áram intenzitása I, továbbá a félkör valamely törtrésze x, ellenállása r s C ponttól számított körívekben az áram intenzitásai i_1, i_4, i_3, i_2, akkor a Kirchhoff-féle törvények szerint



4. ábra.

$$i_1 = I + i_4, \qquad i_3 = I + i_2$$
$$i_1 r x + i_4 (1-x) r = E, \qquad i_2 (1-x) r + i_3 r x = E$$
$$i_1 w x + I R + i_3 r x = E,$$

hol E a C és D pontok potentiálkülönbségét jelenti. Az elem ellenállását elhanyagoltuk. Minket különösen a tekercsben keringő áram intenzitásának



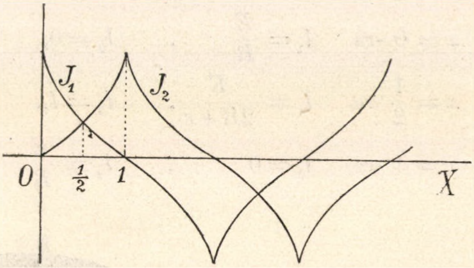
5. ábra.

változása érdekel, melyre vonatkozólag az egyenletek a következő megoldást adják:

$$I = \frac{E}{R} \cdot \frac{1-x}{1 + 2x(1-x)\frac{r}{R}}$$

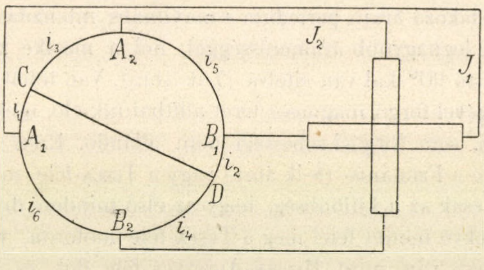
Ha egy derékszögű összrendezői rendszer egyik tengelyére rávisszük x, másikára I értékeit, akkor az így eredő görbe (5-ik ábra) mutatja, hogy a kommutátor A, B pontjaiból kiinduló elágazáson keresztül váltakozó áram halad, melynek intenzitása akkor éri el legnagyobb értékét, ha a CD forgató AB irányába esik ($x=0$).

Ha két fázisú vagy fázisukban 90°-kal eltolt két váltakozó áramot akarunk előállítani, akkor a kommutátor egymástól 90°-nyira levő pontjain alkalmazunk elágazást s az ezekben keletkező áramokat átvezetjük a Ferraris-féle mótor két tekercsén. A berendezést a 6-ik ábra tünteti fel.



6. abra.

Ha most a körnegyed ellenállását r-rel, törtrészét x-el, A_1-től C irányában az egymásra következő ívekben az áram intenzitását i_1, i_3, i_5, i_2, i_4 és i_6-tal, egy-egy tekercs ellenállását R-rel s az ezekben keringő áramok intenzitását I_1 illetőleg I_2-vel jelöljük, akkor



7. ábra.

$$i_1=I+i_6,\quad i_2=I_1+i_5,\quad i_3=I_2+i_5,\quad i_4=I_2+i_6$$
$$i_1rx+I_1R+i_2xr=E,\qquad i_3(1-x)\,r+i_5r+i_2xr=E$$
$$i_3(1-x)\,r+I_2R+i_4(1-x)\,r=E,\qquad i_1xr+i_6r+i_4(1-x)\,r=E$$

egyenletekből I_1 és I_2-re nézve

$$I_1 = \frac{E}{R} \cdot \frac{1-x}{1 + \frac{2r}{R} x(1-x)}$$

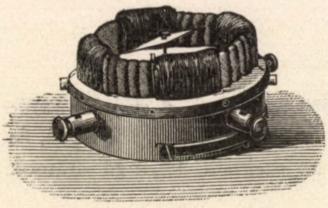
$$I_2 = \frac{E}{R} \cdot \frac{x}{1 + \frac{2r}{R} x(1-x)}$$

értékeket kapjuk, melyekben E ugyanazt jelenti, mint előbb. Ezekből következik, hogy

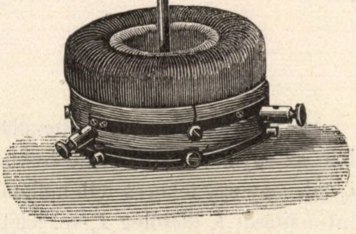
$$x = 0\text{-ra} \quad I_1 = \frac{E}{R}, \quad I_2 = 0,$$

$$x = \frac{1}{2}\text{-re} \quad I_1 = \frac{E}{2R+r}, \quad I_2 = I_1,$$

$$x = 1\text{-re} \quad I_1 = 0, \quad I_2 = \frac{E}{R},$$



8. ábra.



9. ábra.

vagyis a két váltakozó áram periodusa s maximális intenzitása egyenlő, de az egyik ott bír legnagyobb áramerősséggel, hol a másiké zérus, tehát a két áram fázisban 90°-kal van eltolva (7-ik ábra). Van tehát két áramunk, melyek segítségével forgó mágneses teret állíthatunk elő, melynek azonban sem intenzitása, sem forgási sebessége nem állandó. Ezen áramok segítségével hajtható a Ferraris- (8-ik ábra) vagy a Tesla-féle mótor (9. ábra), melyek között csak az a különbség, hogy az első minden drót menetének két szemközt fekvő menet felel meg a Tesla-féle mótoron, vagyis a kettő ép oly viszonyban van, mint Hefner-Alteneck-féle dob és a Gramme-féle gyűrű között.

A kommutátoron a kétfázisú mótorok számára négy vezeték van, melyek száma azonban háromra is redukálható az által, hogy a két áram visszavezetésére közös drótot használunk. Az ebben haladó

$$I = I_1 + I_2 = I_0 \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

áram, mint látjuk szintén váltakozó, de I_1-hez viszonyítva fázisban 45°-kal van eltolva és maximális intenzitása $\sqrt{2}$-ször nagyobb I_1 és I_2-énél. Hogy tehát a közös vezetékben a feszültségbeli veszteség ugyanaz legyen, mint a másik kettőben, ellenállását $\sqrt{2}$-ször kisebbítenünk, tehát keresztmetszetét ugyanannyiszor nagyobbítanunk kell.

Forgó mágneses tér nemcsak két, hanem több váltakozó áram segítségével is előállítható. Igy például ha fázisban 120°-kal eltolt egyenlő periodussal biró három váltakozó áram oly vezetőkön halad át, melyek egymással 120°-nyi szöget képeznek, szintén forgó mágneses tér keletkezik. A bebizonyítást mellőzhetjük, mert azt az előbbiek alapján könynyen megkapjuk, ha az

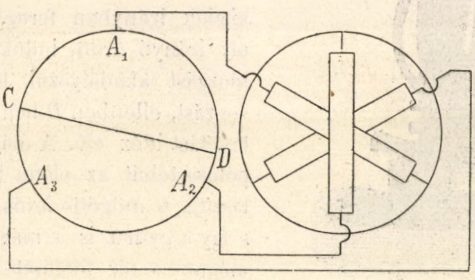
$$I_1 = I_0 \sin \alpha, \quad I_2 = I_0 \sin(\alpha + 120°), \quad I_3 = I_0 \sin(\alpha + 240°)$$

áramokkal létesített

$$H_1 = H_0 \sin \alpha, \quad H_2 = H_0 \sin(\alpha + 120°), \quad H_3 = H_0 \sin(\alpha + 240)$$

mágneses tereket összeteszszük. Ez esetben a három áram számára hat vezeték kellene; de mivel

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$



10. ábra.

visszavezetésre nincs szükségünk, ha a mótorból kijövő áramokat egy közös gyűrűbe vezetjük, melyben egymást megsemmisíthetik. Vagy mivel

$$I_1 + I_2 = -I_3,$$

azt is mondhatjuk, hogy épen úgy mint a két fázisú áramoknál, a harmadik vezeték közös visszavezetése a másik két áramnak, de keresztmetszete ugyanaz, mind a másik kettőé.

Ily váltakozó áramok előállítására a kommutátor szintén alkalmas a mennyiben ezen czélra a rúgó három egymástól 120°-nyira fekvő pontjain van elágazás. A berendezés sémáját feltünteti a 9-ik ábra. Ha a kommutátor harmad részének ellenállását r-rel s törtrészét x-el jelöljük, akkor előbbi módon eljárva az áramok intenzitásául

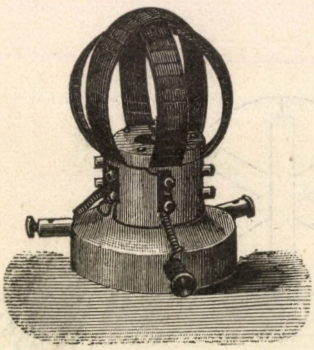
$$I_1 = \frac{4E(x-1)}{9R+r+4rx(1-2x)},$$

$$I_2 = \frac{2E(1-4x)}{9R+r+4rx(1-2x)},$$

$$I_3 = \frac{2E(1+2x)}{9R+r+4rx(1-2x)},$$

értékeket nyerjük, melyek összege szintén zérus, tehát a kommutátorból jövő áramok sem igényelnek visszavezetést. A 11-ik ábra feltünteti az ezen áramokkal hajtható mótor mintáját.

Ezen mótorok mágneses terébe a mágnestű helyébe achátkalappal ellátott vaslemez vagy egy önmagába zárt gyűrűalakú tekercs helyezhető, melyek mindegyike forgásba jön. Hogy miért forog a mágnestű ebben a térben, közvetlenűl világos; hiszen a mágnestű mindig a mágneses mező erővonalainak irányában helyezkedik el s mivel ezek forognak, a tű is követi forgásukat. A tekercs forgása is könnyen megmagyarázható, ha a forgó mágneses tért forgó mágnessel helyettesítve képzeljük. A 12-dik ábrában a gyűrű meneteiből csak kettő van rajzolva. Ha a mágnes a kijelölt irányban forog, akkor A-ban oly irányú áram indukáltatik, mely a mozgást akadályozni törekszik, tehát vonzást, ellenben B-ben oly áram, mely taszítást idéz elő. A mágnes bármelyik pólusa tehát az előtte levő meneteket taszítja, a mögötte levőket pedig vonzza s így a gyűrű is a mágnes illetőleg a mágneses tér forgását követi. A mágnesestérbe helyezett vaskorongnál nagyjában ugyanaz történik, avval a különbséggel, hogy ennél a molekuláris áramok hatása idézi elő a forgást. A mágneses tér erővonalai és forgásuk igen szépen szembetűnővé tehetők, ha a mótort üveglappal lefödjük s vasreszeléket hintünk rája.



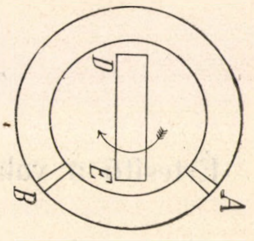
11. ábra.

Végül egy iskolai czélokra készült dinamogépet kivánok bemutatni, mely nemcsak egyirányú áramot, hanem több fázisú váltakozó áramot is ad. A gép az egyenes áramú dinamoktól csak abban különbözík, hogy a dob tengelyén a kollektoron kívül még négy rézgyűrű van, melyek mindegyike egy-egy söprűvel érintkezik. Ez a kis változtatás a gépet úgyszólván univerzális dinamóvá teszi, mert nemcsak egyenes, hanem váltakozó áramú, továbbá két- vagy három fázisú generátor- vagy mótorként is használható; söt ha egyenesáram áll rendelkezésünkre, ezt a gép segítségével több fázisú árammá transzformálhatjuk. Ezt a változatosságot pedig a gyűrűk és a kollektor különböző módon való összekapcsolása útján érjük el. Erre a czélra a kollektor 24 lemeze közűl a 6-, 8-, 12-, 16-, 18- és a 24-ik valamint a négy gyűrű szorító csavarral van ellátva.

Ily berendezés mellett a gép:

1. Egyenes áramú generátor vagy mótor, ha az áramot csak a kollektorból vezetjük el.

2. Öngerjesztő váltakozó áramú generátor vagy mótor. Ez esetben a kollektor 12- és 24-ik lemezét egy-egy gyűrűvel kötjük össze.



12. ábra.

3. Kétfázisú generátor vagy mótor. A 6, 18, 12. és 24. számú csavarokat összekötjük a rézgyűrűkkel. Akkor a gépet forgatva a 6. és 18., valamint a 12. és 24. számú csavarokkal összekötött gyűrűk áramköreiben oly váltakozó áramok haladnak, melyek fázisukban 90°-al vannak egymás irányában eltolva. Ha pedig két ily áram áll rendelkezésünkre s a gyűrűkön át bevezetjük a dobba, az forgásba jön.

4. Háromfázisú generátor vagy mótor. Ha a kollektor a 8. 16., és 24. számú csavarát összekötjük egy-egy gyűrűvel, akkor ezekből három, egymás iránt 120°-al eltolt váltakozó áramot kapunk.

5. Egyenes áramtranszformátor. Ha a rendelkezésünkre álló egyenes áramot a kollektoron át a gépbe vezetjük, ez forgásba jön s a kapcsolásnak megfelelőleg a gyűrűből egyszerű vagy több fázisú váltakozó áramot vezethetünk el.

A 2-, 3- és 4-ik esetben a gépből nemcsak váltakozó áramot, hanem ugyanazon időben egyenes áramot is vezethetünk el, mely azonban erősen lüktető s így a gép mágneses terének intenzitása is változó. Ha azt akarjuk, hogy a váltakozó áramok intenzitásbeli változása az egyszerű harmonikus mozgás törvényét kövesse s megbízható telepünk van, czélszerű a gép mágnesezését ezzel végeztetnünk, mely esetben a kollektorból az elektromágnesekbe vezető elágazás kikapcsolandó. Evvel egyszersmind elérjük azt is, hogy a gerjesztett áram tisztán a külső áramkörben végzendő munkára fordíttatik.

A váltakozó áramok transzformátiója is igen egyszerűen bemutatható oly módon, hogy egy indukcziós készülék belső tekercsébe vezetjük a gépből jövő váltakozó áramot; akkor a külső tekercsben szintén váltakozó áram indukáltatik, mely ezen készülék rendes készítési módja mellett nagyobb feszültséggel bír, mint a primär áram s ha másképp nem, erős fiziologiai hatásával könnyen kimutatható. *Grúber N.*

TÁRSULATI ÜGYEK.

Értesítő a választmány május hó 26-án tartott üléséről.

1. *A választmány köszönete.* — F. évi május hó 26-án tartott ülésén a választmány b. Eötvös L. elnök indítványára köszönetet mond mindazoknak, kik az április elején lefolyt közgyűlés előkészítésében és sikerén közreműködtek. Köszönetet mond dr. Szabó József egyetemi tanár úrnak, ki az egyetem mineralogiai előadó termét és vetitő készülékét előadás tartására átengedni szives volt; a Ganz-gyár igazgatóságának, Fölser István és Tőtössy Béla műegyetemi tanár uraknak szives meghívásukért és kalauzolásukért; Dischka Győző, dr. Edelmann Sebő, dr. Hoor Mór, dr. Kiss Károly, K. Kiss József és Szathmári Ákos uraknak, továbbá Calderoni és Társa, valamint Siemens és Halske czégek vezetőinek, kik a közgyűlést taneszközeik kiállításával és bemutatásával érdekessé tették; végre Antolik Károly, Edelmann Sebő, Fényes Dezső, Gothard Jenő, Harkányi Béla, König Gyula, Palatin J. Gergely, Petrik Lajos, Schuller Alajos és Wittmann Ferencz tagtárs uraknak, kik tanulságos előadásaikkal kötötték le a közgyűlés figyelmét.

2. *A jövő közgyűlés.* — Ennek kapcsán felmerült a kérdés, vajjon a közgyűlés mostani alakjában megtartandó-e a jövőben is? — Ámbár a kérdés felvetését korainak tartja, elnök már csak tanulság kedveért is első sorban konstatálni kívánja, hogy a közgyűlésen részt vettek egybehangzó ítélete szerint — a mennyire az tudomására juthatott — a közgyűlés jelen alakjában a tagok tetszésével találkozott. Kétségtelen azonban, hogy a közgyűlés alakja tökéletesebbé lenne, ha az ülések kevésbbé sűrűn következnének egymásután és több idő maradhatna intézetek és időleges kiállítások tanulmányozására. Erre jó módnak mutatkozik, hogy a közgyűlésre jövők mindjárt megérkezésökkor 10—15 tagból álló csoportokra oszoljanak, mert ily berendezés esetén a tanulmányozás behatóbban eszközölhető. De a lehető legjobb megoldás természetesen az, — mint ez a közgyűlés alkalmával is megpendíttetett — ha a tagtársak több napra, pl. egy hétre terjedő

szabadságot kaphatnának. Ekkor nemcsak az előadások meghallgatása, az intézetek és kiállítások megtekintése lenne tanulságosabban elintézhető, hanem vidéki tagtársaink közül nem egy igen hasznos dolgot, pl. kevés üvegfuvást, egyes laboratoriumi és műhelyi fogásokat is megtanulhatna, a mi experimentáló képességét nagyban fokozná. A szakelőadásokat ez esetben sem volna szabad bizonyos határon túl terjeszteni és naponként két előadás körülbelül elegendő is volna. Ez előadásokon különös súly fektetendő az iskolák czéljaira, az előadási kísérletekre. Ez a berendezés többi között kellő tért nyitna vidéki tagtársaink munkásságának bemutatására. Külömben concret határozatot ez idő szerint hozni még nem lehet, de nem is szükséges, mert a kérdés a társulati év folyamán mindenesetre még többször előtérbe lép, esetleg oly módon is, hogy folyóiratunk különös feladatok megoldását vagy alkalmas előadási kísérletek bemutatását kéri.

Elnök végül kívánatosnak tartja, hogy a közgyűlés felváltva a fővárosban és vidéken tartassék meg, még pedig oly czélzattal, hogy a nagyobb városokban inkább a tudományos munka, kisebb helyeken pedig a tudományos törekvéseket hathatósan előmozdító társas szellem ápolása adja meg a közgyűlés színezetét.

Arra a kérdésre, nem lenne-e czélszerű az előadásokkal kapcsolatos közgyűlést kétévenként megtartani, a választmány az évenként tartandó közgyűlés mellett nyilatkozott, mely az elnöktől kifejtett intentióknak megfelelőleg, ezután felváltva Budapesten és vidéken lenne megtartandó.

3. *A Mathematikai és Physikai Társulat a milleniumi kiállításon.* Bemutattatván az 1896-ban tartandó kiállítás elnökségétől a társulathoz intézett felszólítás, elnök a következőket fejté ki: Nem lévén közöttünk nézeteltérés arra nézve, hogy a kiállításon résztvenni kívánunk, csak az irányban kell ezúttal — bár csak egész általánosságban — megállapodunk, mily módon jelenjen meg a társulat a kiállításon. A részvétel módját tán úgy találjuk meg a leghelyesebben, ha társulatunk czéljának szemmeltartásával keressük. A társulat legfőbb czélja lévén a tudományt a tanítás szolgálatába vinni, szempontunkból legczélszerűbbnek s a kiállítás igényeinek is a legmegfelelőbbnek mutatkozik, hogy a középiskola teljes physikai — s esetleg mathematikai — felszerelésével jelenjünk meg a kiállításon. Mindannyian tudjuk, mennyire fontos tényezője az eredményes tanításnak a jó felszerelés s azt is, hogy iskoláink physikai készülékeinek gyűjteménye általában sem a tanítás, sem a tudomány követelményeinek nem felel meg. Az iskolai gyűjteményekben található készülékek, kevés kivétellel, igen gyarlók, mert inkább a tanszerkészítők és a tanszerkereskedők utasításait és ízlését tükröztetik vissza, mint a tudós tanítóét. A legkülömbözőbb időkben keletkezvén, a legkülömbözőbb elvek szerint készültek és igen sok úgy a tudomány, mint a tanítás szempontjából feleslegessé vált. A felszerelés kérdését

nem is lehet másként sikeresen megoldani, mint úgy, hogy a tudomány s a tanítás követelményeit egyformán kielégítő elvek szerint újra összeállítjuk. Természetes, hogy a gyűjtemény jó része nem kész, könnyen összevásárolható készülékekből kerül ki, de olyanokból, melyek a megállapított elveknek megfelelően újra lesznek készítendők. Ez azonban nem fogja a társulat pénztárát terhelni, a mennyiben elnök hajlandó a gyűjteményt a tud. egyetemi physikai intézet költségén összeállítani. A gyűjteményben, hogy czéljának teljesen megfeleljen, a főbb mérések végzésére szükséges pontos mérő készülékeknek is kell lenniök s ezekkel együtt a mostani fölszerelés beszerzési árából, mely több vál. tag véleménye szerint 3—4000 frt, kiállítható.

Az eszme általános helyesléssel találkozván, elnök javaslatára egyelőre csak a következőkben állapodik meg. A terv a társulat folyóiratában közöltetvén, alkalom adatik a társulat összes tagjainak, hogy a munkában részt vegyenek. Bizonyos, hogy a terv több rendes ülésen kerül tárgyalás alá, mely legczélszerűbben úgy lesz megindítható, hogy a munkának egy része kész terv alakjában tárgyalásra kitűzetik. Elnök hajlandó a munkálatot saját propositióival a legközelebbi üléseken folyamatba hozni. S ha már a munka megindult s ismeretesekké válnak a tagok, kiknek buzgó közreműködésétől az eszme sikeres valósítása várható, szűkebb végrehajtó-bizottság lesz belőlük alakítható.

4. *A Math. és Phys. Társulat új tagjai.* Az alapszabályoknak megfelelően rendes tagokul ajánltattak: Széky István, a zombori áll. főgymn. tanára és dr. Szokol Pál, a felsőbányai kir. bányaiskola igazgatója, kik egyhangulag tagokul megválasztattak.

5. *A közgyűlésen tett indítványok.* Ügyvivő titkár bemutatja a közgyűlés részéről a választmányhoz intézett indítványokat.

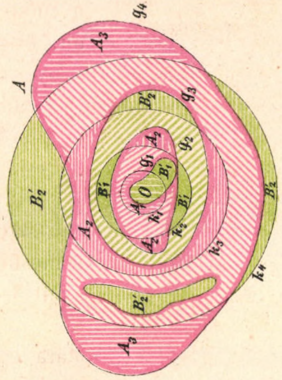
Hlatky Miklós indítványa szerint a vallás- és közoktatásügyi ministerium felkérendő, hogy a Mathematikai és Physikai Lapokat a tanintézeteknek előfizetésre ajánlja.

Képessy Imre indítványozza, hogy a tagsági díj 4, illetőleg 6 frtra emeltessék, hogy a folyóirat kiadására előirányzott összeg emelhető legyen.

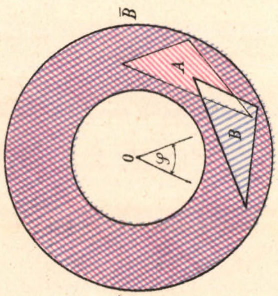
A választmány teljesen méltányolja az indítványt tevő t. tagtárs urak intentióit, de a körülményeknek beható megfontolása után azt határozza, hogy az indítványok elfogadását a közgyűlésnek nem ajánlja.

Math.és Phys.Lapok II.köt. I. Tábla. Réthy, Végszerűen egyenlő területek.

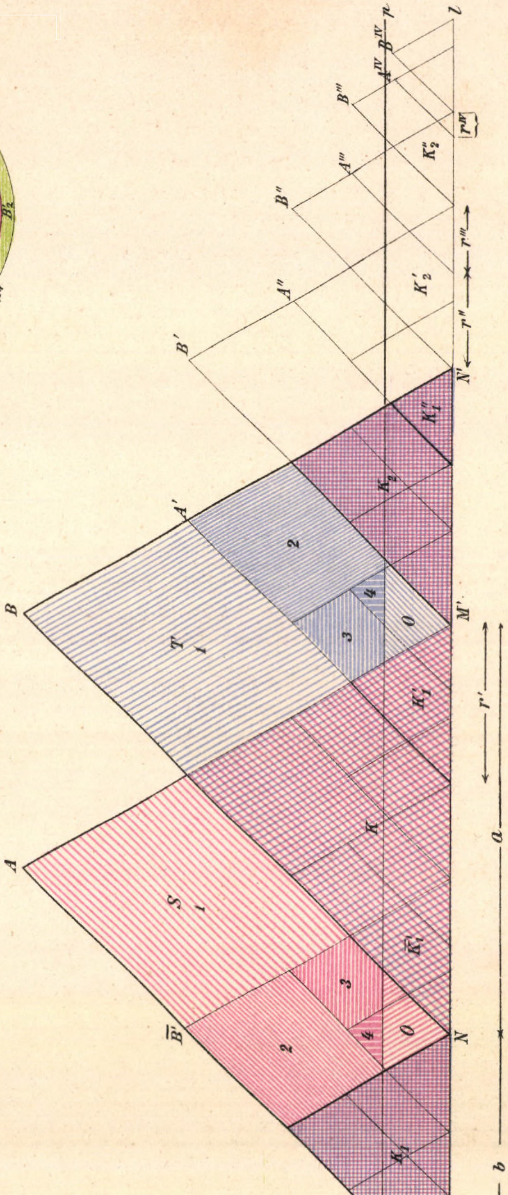
18.



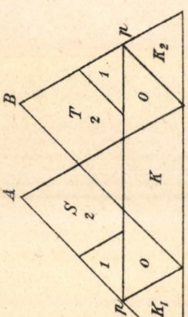
18a.



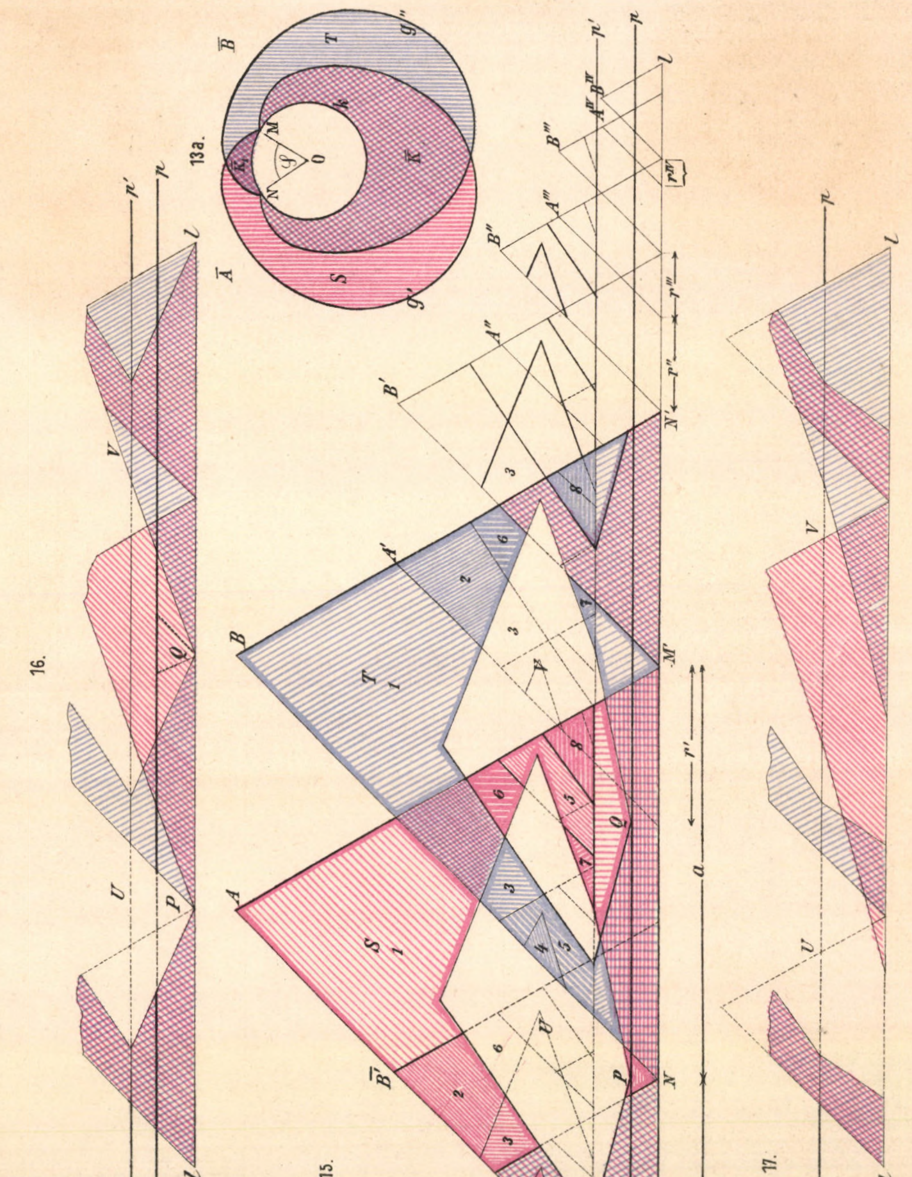
13.



14.



Auct. del. Nyom. Grund V. utódai, Budapest.



13a. 15. 16. 17.

Auct. del. Nyom. Grund V. utódai, Budapest.

A BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓK NÉGYZETÉNEK ÖSSZEGÉRŐL.*

A binomiális együtthatók, mint a legnevezetesebb sorba fejtések jellemző helyhatározói, nagy szerepet játszanak az egész analizisben; másfelől a négyzetösszegek nagy szerepet játszanak a geometriában, mechanikában s az analizis több részében.

E szerint már eleve is valószinünek látszik, hogy az egyazon számhoz tartozó binomiális együtthatók négyzetének összege sem lehet minden jelentőség nélkül.

E kérdés, tudtommal, eddig még nem volt fölvetve, s ez okból a következő feladatot tűztem magam elé:

«Az a pozitiv egész számnak k szerint vett binomiális együtthatóit (hol is k minden egész számot jelöl 0-tól a-ig) külön-külön négyzetre emelve és összeadva, vizsgáljuk meg az így származó összegnek,

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^2=\binom{a}{0}^2+\binom{a}{1}^2+\dots\binom{a}{k}^2+\dots+\binom{a}{a}^2,$$

tulajdonságait.»

I.

A binomiális együtthatók négyzetéből alakított összeg maga is binomiális együttható, t. i. egyenlő az illető szám kétszeresének legnagyobb binomiális együtthatójával, vagyis

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^2=\binom{2a}{a}$$

---

* Bemutattatott a M. Tud. Akadémia 1893. máj. 29-én tartott ülésén.

E tételt bebizonyitandó, a négyzetösszeg helyett egy általánosabb szorzatösszegből indulok ki, olyanból, a mely amazt mint speczialis esetet magában foglalja.

Vegyük a

$$\sum_{k=0}^{b}\binom{a}{k}\binom{b}{k}=\binom{a}{0}\binom{b}{0}+\binom{a}{1}\binom{b}{1}+\ldots+\binom{a}{b}\binom{b}{b}$$

szorzatösszeget (hol b is pozitiv egész szám és $b \leqq a$) és alakitsuk át a következő módon:

Szorozzuk meg és osszuk el ez összeget

$$b! = 1.2\ldots b$$

szorzattal; ekkor lesz:

$$\sum_{k=0}^{b}\binom{a}{k}\binom{b}{k}=\frac{1}{b!}\sum_{k=0}^{b}\binom{a}{k}\binom{b}{k}b! =$$

$$=\frac{1}{b!}\sum_{k=0}^{b}\left[\binom{b}{k}.a(a-1)\ldots(a-k+1).b(b-1)\ldots(k+1)\right]$$

vagy ugyanez, ha kifejtve irom:

$$\sum_{k=0}^{b}\binom{a}{k}\binom{b}{k}=\frac{1}{b!}\Bigg[1.2\ldots b+\binom{b}{1}.a.2.3\ldots b+$$

$$+\binom{b}{2}.a(a-1).3.4\ldots b+\ldots+$$

$$+\binom{b}{b-1}.a(a-1)\ldots(a-b+2).b+\binom{b}{b}.a(a-1)\ldots(a-b+1)\Bigg]$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy a [ ] zárjelben álló összeg nem egyéb, mint az

$$(a+b)\,(a+b-1)\ldots(a+b-(b-1))$$

szorzat kifejtése, úgy hogy

$$\sum_{k=0}^{b}\binom{a}{k}\binom{b}{k}=\frac{1}{b!}(a+b)\,(a+b-1)\ldots(a+1)$$

vagy még:

$$\sum_{k=0}^{b}\binom{a}{k}\binom{b}{k}=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}=\binom{a+b}{a}=\binom{a+b}{b} \qquad 1.$$

Az 1. alatti azonosság arról győz meg bennünket, hogy *bármely két pozitiv egész szám egyrendű binomiális együtthatóinak szorzatából alakított összeg nem egyéb, mint a két szám összegének az egyik szám szerint vett binomiális együtthatója.* (Megjegyzendő, hogy az 1. alatti összeg, miként a közbülső faktoriális viszonyból látható, az ú. n. beta-függvénynek reciprok értéke).

Legyen már most $a=b$, úgy

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}^2 = \binom{2a}{a}. \qquad 2.$$

II.

A szóban forgó négyzet-összeg osztható minden primszámmal, a mi a

$$\frac{2a}{2n+2} \cdots\cdots \frac{2a}{2a+1}$$

intervallumokba esik, hol is n minden pozitiv egész számot jelöl 0-tól $(a-1)$-ig.

A számelméletből t. i. ismeretes, hogy az $m!$ szorzat a p primszámot annyiadik hatványon foglalja magában, a mennyit

$$E\left(\frac{m}{p}\right) + E\left(\frac{m}{p^2}\right) + \cdots$$

egész számok összege tesz.

Ha tehát

$$\frac{2a}{2n+2} < p < \frac{2a}{2n+1}$$

úgy

$$2n+1 < \frac{2a}{p} < 2n+2$$

valamint

$$\frac{2n+1}{2} < \frac{a}{p} < n+1$$

és igy

$$E\left(\frac{2a}{p}\right) = 2n+1$$

és

$$E\left(\frac{a}{p}\right) = n$$

úgy hogy a

$$\frac{2a!}{a!\,a!}$$

szorzatviszony p-t legalább is a

$$2n+1-n-n$$

vagyis első hatványon magában foglalja, más szóval a négyzetösszeg p-nek legalább is első hatványával osztható.

III.

A szóban forgó négyzetösszeg a

$$\frac{2a}{2n+3} \cdots\cdots \frac{2a}{2n+2}$$

határok közti prímszámok közűl csakis azokkal osztható (a jobb felőli határ, ha prímszám, inkluzíve számíttatván), a melynek négyzete vagy valamelyik magasabb hatványa a és 2a közé esik.

Mivel

$$\frac{2a}{2n+3} < p < \frac{2a}{2n+2}$$

következik, hogy

$$2n+2 < \frac{2a}{p} < 2n+3,$$

valamint

$$n+1 < \frac{a}{p} < \frac{2n+3}{2};$$

és így

$$E\left(\frac{2a}{p}\right) = 2n+2$$

$$E\left(\frac{a}{p}\right) = n+1,$$

úgy hogy a

$$\frac{2a}{a!\,a!}$$

szorzatviszony p-t a

$$2n+2-(n+1)-(n+1),$$

vagyis zérus hatványon foglalja magában (tehát p-vel nem osztható), kivéve azt az esetet, a mikor

$$E\left(\frac{2a}{p^2}\right) \quad \text{vagy} \quad E\left(\frac{2a}{p^3}\right) \text{ stb.}$$

nagyobb mint

$$2 \,.\, E\left(\frac{a}{p^2}\right) \quad \text{vagy} \quad 2 \,.\, E\left(\frac{a}{p^3}\right) \text{ stb.}$$

s ez az eset csak akkor következhetik be, ha p^2 vagy p^3 stb. az a és $2a$ határok közé esik.

Hogy a szóban forgó négyzetösszeg $2a$-nál nagyobb prímszámokkal sohasem osztható, nem szorul bizonyításra; mert ez a $(2a)!$ szorzat alkatából önként következik.

IV.

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}^2 = \sum_{k=0}^{m} 2^{a-2k} \binom{a}{k} \binom{a-k}{k}$$

hol is m az a felezéséből származó egész számot jelenti.

E tételt bebizonyítandó, fejtsük ki a következő szorzatot:

$$2a(2a-1)\ldots(2a-n+1)$$

összeggé s így nyomról-nyomról találjuk, hogy ez

$$= 2^n \,.\, a(a-1)\ldots(a-n+1) + n(n-1) \,.\, 2^{n-2} a \ldots (a-n+2) +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-3)}{2} \,.\, 2^{n-4} a \ldots (a-n+3) + \ldots$$

Ha már most $n=a$, úgy

$$2a(2a-1)\ldots(a+1) = a!\left[2^a + a(a-1)2^{a-2} + \frac{a\ldots(a-3)}{2^2} 2^{a-4} + \right.$$

$$\left. + \frac{a\ldots(a-5)}{2^2 \,.\, 3^2} 2^{a-6} + \ldots\right]$$

s innen

$$\binom{2a}{a} = 2^a + \binom{a}{1}\binom{a-1}{1} 2^{a-2} + \binom{a}{2}\binom{a-2}{2} 2^{a-4} +$$
$$+ \binom{a}{3}\binom{a-3}{3} . 2^{a-6} + \dots$$

végre

$$\binom{2a}{a} = \sum_{k=0}^{m} 2^{a-2k} \binom{a}{k}\binom{a-k}{k}.$$

V.

$$\frac{\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}^2 . \sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k}^2}{\sum_{k=0}^{b} \binom{a}{k}\binom{b}{k}} = \sum_{k=-b}^{b} (-1)^k . \binom{2a}{a-k}\binom{2b}{b-k}$$

E tétel kiegészitése azon számelméleti tételnek, a melyet CATALAN 1873-ban az elliptikus függvények segitségével bizonyitott be, s a mely így hangzik:

A

$$\frac{(2a)!\,(2b)!}{a!\,(a+b)!\,b!}$$

hányados mindenkor egész szám.

A föntirt tétel bebizonyitása végett, az úgynevezett beta-függvényt sorba fejtem, a részlettörteknek egy sajátságos alakjából indulván ki.

Vessük fel a kérdést, vajjon lehet-e az

$$\frac{a!\,b!}{(a+b)!} = \frac{1 . 2 \dots b}{(a+1)\,(a+2) \dots (a+b)}$$

szorzat-viszonyt részlettörtekre bontani a következő módon:

$$A + B . \frac{a}{a+1} + C . \frac{a\,(a-1)}{(a+1)\,(a+2)} + \dots +$$
$$+ Z . \frac{a\,(a-1) \dots (a-b+1)}{(a+1)\,(a+2) \dots (a+b)}.$$

A, B, ..., Z függetlenek levén a-tól.

Minthogy azonban

$$\frac{1 \cdot 2 \ldots b}{(a+1) \ldots (a+b)} = \frac{1 \cdot 2 \ldots a}{(b+1) \ldots (b+a)}$$

látnivaló, hogy e szorzatviszonyokban a és b egymással fölcserélhetők és így e részlettörtek, ha a szétbontás csakugyan sikerül, okvetetlenül ily alakban fognak megjelenni:

$$A'+B' \cdot \frac{b}{b+1} \cdot \frac{a}{a+1} + C' \cdot \frac{b(b-1)}{(b+1)(b+2)} \cdot \frac{a(a-1)}{(a+1)(a+2)} + \ldots\ldots$$

hol is most már A', B', C' függetlenek lesznek mind a-tól, mind b-től.

Könnyű meggyőződni indukczió útján, hogy az ilyen szétbontás mindenkor lehetséges, és hogy

$$A'=1\,;\ B'=-2\,;\ C'=2\,;\ D'=-2\,;\ \text{stb.}$$

vagyis hogy az első tag $=1$; a többiek számbeli együtthatói pedig váltakozva: ∓ 2.

E szerint lesz:

$$\frac{a!\,b!}{(a+b)!} = 1+2\sum_{k=1}^{b}(-1)^k \cdot \frac{b\ldots(b-k+1)}{(b+1)\ldots(b+k)} \cdot \frac{a\ldots(a-k+1)}{(a+1)\ldots(a+k)}$$

úgyde

$$\frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+k)} = \binom{2a}{a-k} : \binom{2a}{a}$$

és

$$\frac{b(b-1)\ldots(b-k+1)}{(b+1)(b+2)\ldots(b+k)} = \binom{2b}{b-k} : \binom{2b}{b}$$

s így

$$\frac{\binom{2a}{a} \cdot \binom{2b}{b} \cdot a!\,b!}{(a+b)!} = \binom{2a}{a}\binom{2b}{b} + 2\sum_{k=1}^{b}(-1)^k \binom{2a}{a-k}\binom{2b}{b-k}$$

vagy a mi még így is irható:

$$\frac{\binom{2a}{a}\binom{2b}{b}}{\binom{a+b}{a}} = \sum_{k=-b}^{b} (-1)^k \binom{2a}{a-k}\binom{2b}{b-k}$$

s ezzel a CATALAN-féle tétel be van bizonyitva, és a szóban forgó egész szám, csupa egész számok algebrai összege alakjában, ki is van fejezve.

Ha $b=a$, úgy

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}^2 = \sum_{k=-a}^{a} (-1)^k \binom{2a}{a-k}^2.$$

De minthogy itt a jobb oldal így is írható:

$$(-1)^a \sum_{k=0}^{2a} (-1)^k \binom{2a}{k}^2.$$

a binomiális együtthatók négyzetének összegére még egy nevezetes azonosságot kapunk, ú. m.

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}^2 = (-1)^a \sum_{k=0}^{2a} (-1)^k \binom{2a}{k}^2.$$

Szily Kálmán.

A KÖRMÉRÉS TÖRTÉNETE ÉS ELMÉLETE.

(Negyedik közlemény.)

V. A ludolfi számnak és négyzetének irráczionális voltáról.

Arra, hogy valamely szám természetét vagyis számelméleti jellegét felismerhessük, e számnak nem minden analitikai kifejezése egyformán alkalmas. Ha a számnak csak ráczionális vagy irráczionális volta döntendő el, akkor arra a láncztört alak különösen alkalmas. Ugyanis *az ú. n. szabályos vagy közönséges láncztört ráczionális vagy irráczionális számot értelmez a szerint, a mint véges vagy végtelen.*

Hogy mindjárt történetileg nevezetes láncztörtre hivatkozzam, pl. az e szám irráczionális volta legegyszerűbben EULER következő képletéből olvasható ki:

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\ldots}}}}}$$

E képlet azért oly fontos, mert tartalma így is fejezhető ki:

$$\frac{e-1}{e+1}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ldots}}}}$$

ezt a láncztörtet pedig LAMBERT JÁNOS HENRIK (szül. 1728. Mülhausenban, megh. 1777. Berlinben) úgy általánositotta, hogy az

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}, \quad \text{tg.}\, x = \frac{1}{i}\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}$$

függvényekre analog kifejezéseket nyert; ezekből azután nevezetes következtetéseket vont le. A mi különösen az utóbbi függvényt illeti, erre vonatkozólag a következő tételt állította fel:

x és tg. x egyszerre nem lehetnek ráczionális számok, kivéve a

$$\text{tg.}\, 0 = 0$$

esetet.

E tételből a *ludolfi számnak irráczionális volta* közvetlenül nyilvánvaló, ha tekintetbe veszszük, hogy

$$\text{tg.}\, \frac{\pi}{4} = 1.$$

LAMBERT tételét arra alapitotta, hogy tg. x számára oly *végtelen láncztörtet* nyert, melyben az egyes nevezők és számlálók egész számok, valahányszor x helyébe ráczionális számot teszünk. Ámde e láncztört nem volt ú. n. *közönséges* láncztört, tehát még kérdéses maradt, valjon annak *végtelen* voltából szabad-e a vele kifejezett szám irráczionális voltára következtetni. E hézagot LEGENDRE (sz. Toulouse-ban 1752., mh. Párisban 1833.) pótolta ki oly segédtételek felállításával és igazolásával, melyek LAMBERT bebizonyitásának szigorúságot és meggyőző erőt kölcsönöznek. A nagy franczia tudós azonfelül a π egy új tulajdonságát is fedezte fel, t. i. azt hogy π nemcsak maga, hanem *négyzete sem ráczionális*, más szóval, hogy π *nem tehet eleget egész együtthatókkal biró tiszta másodfokú egyenletnek.*

A tg. x láncztört alakját és π^2 irráczionális voltát elődjeitől egészen eltérő módon újból igazolta HERMITE GORDAN-hoz és BORCHARDT-hoz intézett leveleiben. Ezeknek tartalma különösen azért érdemel kiváló figyelmet, mert kiinduló pontja a π természetére vonatkozó legáltalánosabb vizsgálatoknak. Ugyanis LEGENDRE tételéből az a kérdés ered, hogy *létezik-e egyáltalában oly algebrai egyen-*

let, melynek együtthatói egész számok s egyik gyöke egyenlő π-vel. Ugyanez a probléma rövidebben így fejezhető ki: *π algebrai vagy transzczendens szám-e.* T. i. KRONECKER az egész számú együtthatókkal biró algebrai egyenletek gyökeit *algebrai számok*-nak nevezte el, minden más számot pedig *transzczendens*-nek. HERMITE-nek még nem sikerült a ludolfi szám természetére vonatkozó ismereteinket a *π transzczendens voltának* kimutatásával betetőzni; de ama módszernek, melylyel utóbb ez is el volt érhető, csirája a π^2 irráczionális voltának új bebizonyításában keresendő.

LAMBERT felfedezését két értekezésben írta meg. Az egyik 1766. a nagy közönségnek készült. Ez «*Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen*» czímmel a «*Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*» II. kötetében jelent meg. A másik értekezés néhány hónappal később keletkezett. Ez a *berlini akademia mémoire*-jai közt jelent meg ily czímmel: «*Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendents circulaires et logarithmiques*» s evvel a megjegyzéssel: «*lu* 1767». Az akadémiai kiadványok azonban akkor czímlapjukon nem ritkán merőben hamis évszámmal jelentek meg; így az a kötet, mely LAMBERT franczia értekezését tartalmazza 1761-ről van keltezve. Ez arra a téves nézetre szolgáltatott alkalmat, hogy LAMBERT felfedezései már ez időből származnának.

LEGENDRE LAMBERT-nek felfedezését saját vizsgálataival kiegészítve, geometriájának IV. *note*-jában dolgozta ki. HERMITE levelei a Crelle-Journal 76. kötetében olvashatók.

E fejezetben LEGENDRE note-ját és HERMITE vizsgálatait ismertetjük. Hogy a *π transzczendens* volta miként függ össze a *kör-quadratura* lehetetlenségével és ez hogyan bizonyítható be, arról a következő fejezetekben lesz szó.

1. *A* tg. *x láncztört kifejtése.* Induljunk ki a következő végtelen sorból

$$\varphi(z)=1+\frac{a}{z}+\frac{1}{1\,.\,2}\,\frac{a^2}{z(z+1)}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{a^2}{z(z+1)(z+2)}+\ldots$$
$$+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}\,\frac{a^k}{z(z+1)\ldots(z+k-1)}+\ldots$$

mely egyrészt

$$a=-\frac{x^2}{4},\quad z=\frac{1}{2}$$

helyettesitésnél cos. x-et adja, másrészt

$$a=-\frac{x^2}{4},\quad z=1+\frac{1}{2}$$

helyettesitésnél $\frac{\sin.x}{x}$-be megy át. A $\varphi(z)$ sorban két egymás után következő tag hányadosának határértéke

$$\lim_{k=\infty}.\frac{a}{k(z+k)}=0,$$

tehát a sor a és z bármely választásánál összetartó, kivévén természetesen a z negativ egész értékeit.

Már most $\varphi(z)$ egy bizonyos helyettesitési értékéből kiindulván, képezzük a

$$\varphi(z),\quad \varphi(z+1),\quad \varphi(z+2),\quad \ldots,\quad \varphi(z+n),\quad \ldots$$

számsorozatot. *Ennek határértéke a pozitiv egység.* Válaszszuk ugyanis n-et oly nagynak, hogy a

$$z+n+1,\quad z+n+2,\quad z+n+3,\quad \ldots$$

sorozat tagjainak abszolut értékei mindannyian nagyobbak mint $|a|$, akkor a

$$\varphi(z+n)-1=\frac{a}{z+n}+\frac{1}{1\,.\,2}\,\frac{a^2}{(z+n)(z+n+1)}+$$
$$+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{a^3}{(z+n)(z+n+1)(z+n+2)}+\ldots$$

sorban a tagok abszolut értékei rendre kisebbek a következő sor tagjainál:

$$\frac{2|a|}{|z+n|}=\frac{|a|}{|z+n|}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right).$$

Ennélfogva

$$|\varphi(z+n)-1|<\frac{2|a|}{|z+n|}$$

és

$$\lim_{n}.\varphi(z+n)=1.$$

A φ-k sorozatának szomszédos tagjai között egyszerű kapcsolat áll fenn. Ha pl. a $\varphi(z)$ és $\varphi(z+n+1)$ sorok megfelelő tagjait egymástól kivonjuk, akkor különbségeik:

$$\frac{a}{z}-\frac{a}{z+1}=\frac{a}{z(z+1)}$$

$$\frac{a^2}{1.2}\left(\frac{1}{z(z+1)}-\frac{1}{(z+1)(z+2)}\right)=\frac{a}{z(z+1)}\frac{a}{z+2}$$

$$\frac{a^3}{1.2.3}\left(\frac{1}{z(z+1)(z+2)}-\frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)}\right)=$$

$$=\frac{a}{z(z+1)}\frac{1}{1.2}\frac{a^2}{(z+2)(z+3)}$$

. . . .

$$\frac{a^k}{1.2.3\ldots k}\left(\frac{1}{z(z+1)\ldots(z+k-1)}-\frac{1}{(z+1)(z+2)\ldots(z+k)}\right)=$$

$$=\frac{a}{z(z+1)}\frac{1}{1.2.3\ldots(k-1)}\frac{a^{k-1}}{(z+2)(z+3)\ldots(z+k)}$$

. . . .

Ezek pedig rendre a $\varphi(z+2)$ sornak tagjai szorozva még az

$$\frac{a}{z(z+1)}$$

tényezővel. Tehát

$$\varphi(z)-\varphi(z+1)=\frac{a}{z(z+1)}\varphi(z+2)$$

és általában sorozatunk három egymás után következő tagjára nézve:

$$\varphi(z+n)-\varphi(z+n+1)=\frac{a}{(z+n)(z+n+1)}\varphi(z+n+2).$$

E függvény-egyenletből egyszersmind világos, hogy $\varphi(z)$ és $\varphi(z+1)$ nem tünhetnek el egyszerre, mihelyt az $a=0$ esetet vizsgálatainkból kizárjuk. Ugyanis akkor a

$$\varphi(z), \quad \varphi(z+1), \quad \varphi(z+2), \quad \ldots, \quad \varphi(z+n), \quad \ldots$$

sorozat tagjai rendre mind eltünnének, a mi ellenkezik avval, hogy

$$\lim_{n} \varphi(z+n)=1.$$

Bennünket nem annyira a φ-knek sorozata érdekel, mint inkább a

$$\psi(z+n)=\frac{a}{z+n}\,\frac{\varphi(z+n+1)}{\varphi(z+n)}$$

alakú hányadosoké.

A

$$\psi(z), \quad \psi(z+1), \quad \ldots, \quad \psi(z+n), \quad \ldots$$

sorozatban, hol

$$\lim_{n} \psi(z+n)=0,$$

az egymás után következő tagok közt még egyszerűbb összefüggés létezik, mint a φ-k sorozatában. Ugyanis a

$$\varphi(z+n)-\varphi(z+n+1)=\frac{a}{(z+n)(z+n+1)}\,\varphi(z+n+2)$$

egyenletet

$$\frac{z+n}{\varphi(z+n+1)}$$

tényezővel szorozván, leszen

$$\frac{(z+n)\,\varphi(z+n)}{\varphi(z+n+1)}-(z+n)=\frac{a\varphi(z+n+2)}{(z+n+1)\,\varphi(z+n+1)},$$

vagyis

$$\psi(z+n+1)=\frac{a}{\psi(z+n)}-(z+n).$$

Ha itt n helyébe zérust teszünk és $\psi(z)$ szerint megoldunk

$$\psi(z)=\frac{a}{z+\psi(z+1)}.$$

Hasonlóképen

$$\psi(z+1)=\frac{a}{z+1+\psi(z+2)},$$

$$\psi(z+2)=\frac{a}{z+2+\psi(z+3)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi(z+n-1)=\frac{a}{z+n-1+\psi(z+n)}.$$

Ha most már nem csak két szomszédos ψ, hanem $\psi(z)$ és $\psi(z+n)$ közt keresünk kapcsolatot, akkor ez a következő lánctörttel fejezhető ki:

$$\psi(z)=\cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\cfrac{a}{z+3+\ddots+\cfrac{a}{z+n-1+\psi(z+n)}}}}}.$$

Ha ebben n minden határon túl növekedik, akkor $\psi(z+n)$ mindinkább elhanyagolható. E határátmenet részletes vizsgálata révén végre egészen szigorúan bebizonyítható, hogy $\psi(z)$ egyenlő a következő végtelen lánctörttel:

$$\cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\cfrac{a}{z+3+\ddots+\cfrac{a}{z+m-1+\cfrac{a}{z+m+\ddots}}}}}}$$

Végezzük itt a következő helyettesítést

$$z=\frac{1}{2} \qquad a=\frac{x^2}{4}$$

akkor

$$\varphi(z)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \varphi(z+1)=\frac{e^x-e^{-x}}{2x},$$

úgy hogy

$$\frac{x(e^x-e^{-x})}{2(e^x+e^{-x})}=\cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{1}{2}+\cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{3}{2}+\cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{5}{2}+.\,.\,.}}}$$

vagyis

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\cfrac{x^2}{7+.\,.\,.}}}}$$

Végre x helyébe ix-et téve:

$$\operatorname{tg.} x=\frac{1}{i}\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-.\,.\,.}}}}$$

2. *Láncztörtek összetartásáról.* Hogy az a határátmenet, melylyel $\psi(z)$ láncztört alakját nyertük, meg legyen engedve, arra mindenek előtt szükséges, hogy a nyert végtelen láncztört meghatározott értékkel bírjon. Továbbá ekkor is még részletesebben indokolandó, hogy e meghatározott érték valóban $\psi(z)$. E finomabb kérdés tárgyalásába LEGENDRE nem bocsátkozik, mi azonban ezt nem mellőzhetjük.

Egyszerűség kedvéért szorítkozzunk eleinte z oly értékeire, a melyekre nézve a

$$z,\quad z+1,\quad z+2,\quad \ldots,\quad z+m,\quad \ldots$$

sorozat tagjainak abszolut értéke nagyobb mint

$$1+|a|.$$

A vizsgálandó

$$\cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\cfrac{a}{z+3+\cdots+\cfrac{a}{z+m+\cdots}}}}}$$

végtelen láncztört m-dik közeledő törtjének számlálóját S_m-mel, nevezőjét N_m-mel jelölvén, ismeretes, hogy

$$S_1 = a, \quad S_2 = a(z+1)$$
$$N_1 = z, \quad N_2 = z(z+1)+a$$

a többi számláló és nevező pedig a következő rekurrens képletek szerint adódik ki:

$$S_{m+1} = S_m(z+m) + S_{m-1}a,$$
$$N_{m+1} = N_m(z+m) + N_{m-1}a.$$

A mi különösen a nevezőket illeti:

$$\frac{N_2}{N_1} = z+1+\frac{a}{z}$$

egyenletből

$$\left|\frac{N_2}{N_1}\right| \geqq |z+1| - \left|\frac{a}{z}\right| > |z+1| - |a| > 1.$$

Tehát

$$|N_2| > |N_1|.$$

Egyáltalában az

$$N_1, \; N_2, \; \ldots, \; N_m, \; N_{m+1}, \; \ldots$$

számok abszolut értékei folyvást növekedő sorozatot alkotnak.

Ugyanezt tudjuk már a sorozat legelejéről. A tétel igazolására tehát elég, ha kimutatjuk, hogy

$$|N_{m+1}| > |N_m|$$

ha

$$|N_m| > |N_{m-1}|.$$

Most már az

$$\frac{N_{m+1}}{N_m} = z + m + \frac{N_{m-1}}{N_m} a$$

egyenletből következik, hogy

$$\left|\frac{N_{m+1}}{N_m}\right| \geqq |z+m| - \left|\frac{N_{m-1}}{N_m}\right| |a| > |z+m| - |a| > 1,$$

tehát N_{m+1} abszolut értéke valóban nagyobb, mint a megelőző nevezőé.

A nevezők abszolut értékeinek összehasonlításáról térjünk most már át a közelítő törtek abszolut értékének megbecsülésére.

Az első közelítő tört

$$\frac{S_1}{N_1} = \frac{a}{z}.$$

Ennek nevezője abszolut értékre nézve nagyobb mint a számláló, ennélfogva

$$\left|\frac{S_1}{N_1}\right| < 1.$$

Épen úgy

$$\left|\frac{a}{z+1}\right| < 1,$$

tehát

$$z + \frac{a}{z+1}$$

abszolut értéke nagyobb mint $|z|-1$, mely külömbség viszont nagyobb mint $|a|$. Ennélfogva

$$\frac{S_2}{N_2} = \frac{a}{z + \frac{a}{z+1}}$$

abszolut értéke kisebb az egységnél.

Ha z helyébe $(z+1)$-et írunk

$$\frac{a}{z+1+\frac{a}{z+2}}$$

megint az egységnél kisebb abszolut értékkel bír, tehát

$$z+\cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2}}$$

abszolut értéke nagyobb mint $|z|-1$, s még inkább mint $|a|$. Ennélfogva

$$\left|\frac{S_3}{N_3}\right|<1.$$

E következtetések sorozata határtalanul folytatható s arra az eredményre vezet, hogy *az*

$$\frac{S_1}{N_1},\ \frac{S_2}{N_2},\ \frac{S_3}{N_3},\ \dots\ \frac{S_m}{N_m},\ \dots$$

sorozat tagjainak abszolut értékei mindannyian kisebbek az egységnél.

E bebizonyítás eddigi menete és eredménye természetesen érvényes minden más

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\ddots+\cfrac{m^{(k)}}{n^{(k)}+\ddots}}}}$$

láncztörtre is, ha

$$|n|>|m|+1,\quad |n'|>|m'|+1,\quad \dots;$$

a továbbiakban azonban már szükségünk lesz közeledő törteinknek a $\psi(z)$-vel való kapcsolatát tekintetbe vennünk.

A

$$\psi(z)=\cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\ddots+\cfrac{a}{z+n+\psi(z+n)}}}$$

egyenlet értelmében

$$\psi(z) = \frac{S_{n-1}(z+n-1)+S_{n-2}a+S_{n-1}\psi(z+n)}{N_{n-1}(z+n-1)+N_{n-2}a+N_{n-1}\psi(z+n)} =$$

$$= \frac{S_n+S_{n-1}\psi(z+n)}{N_n+N_{n-1}\psi(z+n)}$$

s innen

$$\psi(z)-\frac{S_n}{N_n} = \frac{\psi(z+n)(S_{n-1}N_n-S_nN_{n-1})}{N_n(N_n+N_{n-1}\psi(z+n))} =$$

$$= \frac{\frac{N_{n-1}}{N_n}\psi(z+n)}{1+\frac{N_{n-1}}{N_n}\psi(z+n)}\left(\frac{S_{n-1}}{N_{n-1}}-\frac{S_n}{N_n}\right).$$

Itt

$$\left|\frac{S_{n-1}}{N_{n-1}}-\frac{S_n}{N_n}\right| < \left|\frac{S_{n-1}}{N_{n-1}}\right| + \left|\frac{S_n}{N_n}\right| < 2.$$

Másrészt

$$\left|\frac{N_{n-1}}{N_n}\right| < 1$$

és

$$\lim_{n}.\ \psi(z+n) = 0,$$

tehát

$$\lim_{n=0}.\ \frac{\frac{N_{n-1}}{N_n}\psi(z+n)}{1+\frac{N_{n-1}}{N_n}\psi(z+n)} = 0.$$

Ezeknél fogva

$$\lim_{n}.\left(\psi(z)-\frac{S_n}{N_n}\right) = 0,$$

vagyis végtelen láncztörtünk összetartó s értéke valóban $\psi(z)$.

Ha z értéke olyan, hogy a

$$z,\quad z+1,\quad z+2,\quad \ldots,\quad z+m,\quad \ldots$$

sorozat elején egy vagy több elem abszolut értéke kisebb mint $1+|a|$, akkor n eléggé nagy választása mellett legalább $\psi(z+n)$-ről tudjuk, hogy

$$\psi(z+n) = \cfrac{a}{z+n+\cfrac{a}{z+n+1+\cfrac{a}{z+n+2+\cdots}}}$$

Jelöljük e láncztört m-dik közelítő törtjét $R_{n,m}$-mel. Most már

$$R_{n-1,\,m+1} = \frac{a}{z+n-1+R_{n,m}}$$

s innen

$$\lim_{m}.\, R_{n-1,\,m+1} = \frac{a}{z+n-1+\lim R_{n,m}} =$$

$$= \frac{a}{z+n-1+\psi(z+n)} = \psi(z+n-1).$$

Tehát ekkor

$$\psi(z+n-1) = \cfrac{a}{z+n-1+\cfrac{a}{z+n+\cdots}}$$

s láncztört-alakunk nemcsak $\psi(z+n)$, hanem egyszersmind

$$\psi(z+n-1)\text{-re}$$

is érvényes.

Hasonló módon igazolható kifejtésünk helyessége rendre a

$$\psi(z+n-2), \ldots, \psi(z+k+1), \psi(z+k), \ldots, \psi(z)$$

sorozat minden egyes tagjára.

A jelzett következtetések sorozatában csak akkor történhetik fennakadás, ha pl. a $\psi(z+k+1)$-ről $\psi(z+k)$-ra vonandó következtetésnél

$$z+k+\lim R_{k+1,\,m} = 0$$

vagyis, ha

$$\psi(z+k+1) = -(z+k).$$

Ebben az esetben

$$\lim.\, R_{k,\,m+1} = \infty$$

és

$$\lim.\, R_{k-1,\,m+1} = 0,$$

vagyis ekkor

$$\infty = \cfrac{a}{z+k+\cfrac{a}{z+k+1+.}}$$

és

$$0 = \cfrac{a}{z+k-1+\cfrac{a}{z+k+.}}$$

De könnyen igazolható, hogy

$$\psi(z+k), \quad \psi(z+k-1)$$

értékei ugyanazok. Ekkor ugyanis a

$$\psi(z+k+1) = -(z+k)$$

egyenletből

$$\varphi(z+k+1) = -\frac{a}{(z+k)(z+k+1)}\varphi(z+k+2),$$

tehát a

$$\varphi(z+k) - \varphi(z+k+1) = \frac{a}{(z+k)(z+k+1)}\varphi(z+k+2)$$

képlet értelmében

$$\varphi(z+k) = 0.$$

Minthogy pedig ekkor

$$\varphi(z+k+1), \quad \varphi(z+k-1)$$

— mint tudjuk — a zérustól különböző számértékek, azért a ψ-k értelmezése $\psi(z+k+1)$ és $\psi(z+k)$ számára épen a mondott értékeket szolgáltatja. Lánczlört-kifejtésünk tehát még ekkor is érvényes.

Miután e kitéréssel tg. x lánczlört kifejtését kifogásolhatatlanná tettük, térjünk most már át azokra a segédtételekre, melyek a Lambert lánczlörtjéből vonandó következtetések szilárd alapját szolgáltatják.

Kürschák József.

MEGOLDOTT FELADATOK.

13. *Adva van valamely ellipszisen a P pont. Szerkesztessék az adott ellipszisbe beirt ama háromszög, melynek egyik szögpontja P és magassági pontja az ellipszis középpontja.* (KLUG LIPÓT.)

*

Második megoldás Szépréthy Béla főreáliskolai tanár úrtól Brassón.

Az adott P ponton átmenő PQ átmérő a keresett háromszög egyik magassága. Az e ponttal szemben fekvő oldal az előbbi átmérőre merőleges húrrendszerhez tartozik. E húrrendszernek azt a QR húrját keressük, melyre nézve $OQ \perp PR$-re és $RO \perp PQ$-ra. A húrrendszer tetszőleges húrja Q_1R_1 a követelésnek nem tesz eleget, mert Q_1O illetve R_1O általánosságban nem lesznek merőlegesek az R_1P illetve Q_1P-re. Minden PQ-re merőleges húr megállapít P-vel egy-egy háromszöget, s így a húr változtatása mellett a háromszögek egész sorozatát nyerjük, a melyben a keresett háromszögünk is bennfoglaltatik. Ha a húrrendszerhez tartozó átmérőt g-vel ($g \perp PO$), a vele konjugált átmérőt $XY \equiv h$-val jelöljük, akkor minden húr végpontpárja, Q_1R_1, a középponttal egy-egy egyenespárt állapít meg:

$$OQ_1 \equiv b_2, \quad OR_1 \equiv c_2,$$

mely a g és h átmérőket harmonikusan választja el egymástól. — Hasonlóképen megállapít minden ily végpontpár P-vel egy-egy egyenespárt:

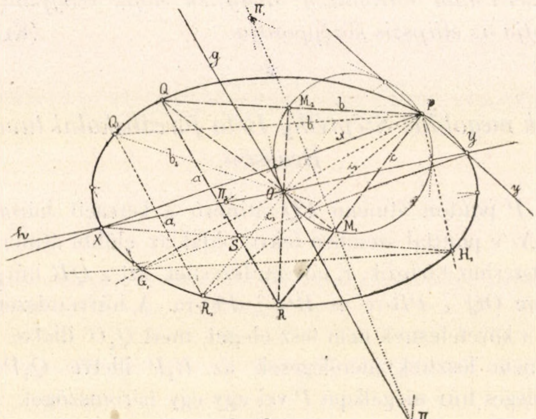
$$Q_1P \equiv b_1 \quad R_1P \equiv c_1,$$

mely a

$$PX \equiv x \quad \text{és} \quad PY \equiv y$$

egyenespárral harmonikusan konjugált.

Ha még tekintetbe veszszük, hogy a keresett háromszög P-ből kiinduló oldalpárja ugyanakkora szöget zár be, mint a hozzátartozó magasságok: nyilvánvaló, hogy a (g, h) és (x, y) egyenespárokból mint kettős sugaraikből megállapított sugárinvolucziókban oly konjugált sugárpárakat kell keresnünk, melyek egyenlő szögeket zárnak be. Minthogy e keresett sugárpárok az egyik involucziónak 90°-kal való elforgatása után parallel helyzetbe jutnak, és ennek az involuczióknak parallel eltolása által egy középpont körül való egyesítés után közös sugárpárt adnak, világos, hogy kitűzött szerkesztésünk két egyesített involuczió közös elempárjának szerkesztésére van visszavezetve. Két egyesített sugár-involucziónak azonban csak *egy* közös elempárja lehet, a minek következménye, hogy *csak egy olyan az ellipszisbe beirt háromszög szerkeszthető, melynek adott szögpontja P, magassági pontja pedig Q.*



1. ábra.

A tényleges szerkesztés elvégezhető a mondottak alapján. Különösen előnyös az involucziókat a P pontban egyesíteni, mivel ezek ez esetben az adott kúpszeletre közvetetlenül átvihetők. Az elforgatott és a P pontba eltolt involuczió kettős sugarai PG_1 és PH_1, a melyek g illetve h-ra merőlegesek. A K kúpszeletre átvitt egyik involuczió polárisa, XY, találkozik a másik involuczió polárisával, G_1H_1-gyel, a

$$(XY, G_1H_1) \equiv T,$$

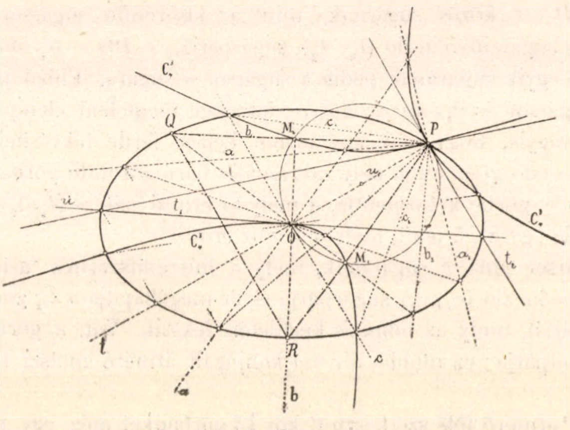
pontban, melynek az adott kúpszeletre vonatkoztatott polárisa Q és R-ben a közös pontpárt és így P, Q, R-ben a keresett háromszög csúcspontjait állapítja meg.

Az

$$(XH_1, YG_1) \equiv S$$

pont a kúpszeletek polár-tulajdonságainál fogva, szintén a QR egyenesen fekszik és egyrészt a pontos szerkesztés egyik ellenőrzési módját nyújtja, másrészt biztosítja a kivihetőséget akkor is, ha az involucziók polárisainak metszéspontja hozzá nem férhető.

Lehet azonban keresett háromszögünk P-ből kiinduló oldalpárját és a hozzátartozó magasságokat közvetlenül is meghatározni, ha az O és P-ben fellépő sugár-involucziókat arra a körre viszszük át, a melynek OP egyik átmérője. Ha a P-ben fellépő és a körre átvitt involuczió polusát Π_1-gyel, az O-ban fellépőét pedig Π_2-vel jelöljük, akkor a $\Pi_1\Pi_2$ egyenes a segítségül vett körünkön kimetsz egy oly (M_1, M_2) pontpárt, melynek a P és O pontokkal



2. ábra.

való összeköttetései involuczióink oly kapcsolt sugárpárjai, melyek egyenlő szögeket zárnak be, és így keresett háromszögünk egy oldalpárját a hozzátartozó magasságokkal szolgáltatják.

Az eddigiekben adott szerkesztés megoldja feladatunkat az ellipszis minden pontjára nézve, kivéve a tengelyek végpontjai alkotta pontpárt. Törekednünk kell tehát oly eljárás megállapítására, mely éppen ezekre a pontokra előnyösen alkalmazható.

E czél elérésére kiindulunk újból az OP átmérőre merőleges húrrendszerből. Kössük össze a húrrendszer bármely Q_1R_1 húrjának egyik végpontját P-vel, másik végpontját pedig O-val, akkor az ekként nyert egyenespár megállapít egy pontot: (Q_1P, R_1O), és a húr változtatása mellett egy pontsort, melynek geometriai helye egy bizonyos raczionális harmadrendű görbe vonal: C_4^3.

Hogy ezt kimutassuk, válaszszuk a húrrendszer két O-ra nézve szimmetrikus fekvésű húrját, Q_1R_1-et és Q_2R_2-őt és kössük össze az egyik szimmetrikus fekvésű végpontpárt P-vel:

$$PQ_1 \equiv a_1, \quad PQ_2 \equiv a_2;$$

a másikat O-val:

$$OR_1 \equiv OR_2 \equiv a;$$

akkor ez utóbbi összeköttetések összeesnek egy sugárban, úgy hogy az O ponton áthaladó a sugárnak, a P-ből kiinduló (a_1, a_2) sugárpár felel meg. A húr változtatása mellett az a sugár leír egy elsőrendű sugársort, a neki megfelelő sugárpár (a_1, a_2) pedig egy vele projektiv sugár-involucziót, melynek az adott ellipszisre vonatkoztatott pólusa az O középpont.

Az $OP \equiv t$ közös sugárnak, mint az elsőrendű sugársor elemének megfelel a sugár-involuczió (t_1, t_2) sugárpárja, a $PO \equiv u_1$-nek mint az involuczió egyik sugarának pedig a sugársor u sugara. Ebből nyilvánvaló, hogy a sugársor és involuczió közös elemében megfelelő elempár nincsen egyesítve vagyis, hogy ezek egymáshoz képest ferde fekvésüek, és hogy a belőlük eredő geometriai hely raczionális harmadrendű görbe vonal, C_4^3. P lesz e görbe kettőspontja, a mely az érintő pár a (t_1, t_2) sugárpárral O pedig egyszerű pont, melyben u az érintő.

A sugársor ama c sugarának, mely a húrrendszerhez tartozik, megfelel az involuczió (c_1, c_2) sugárpárja és ez megállapítja a C_4^3 görbének egy oly pontpárját, mely az ellipszis kerületén fekszik. Van a görbének még egy ily pontpárja; ez utóbbit a c-vel konjugált átmérő metszi ki az ellipszisből.

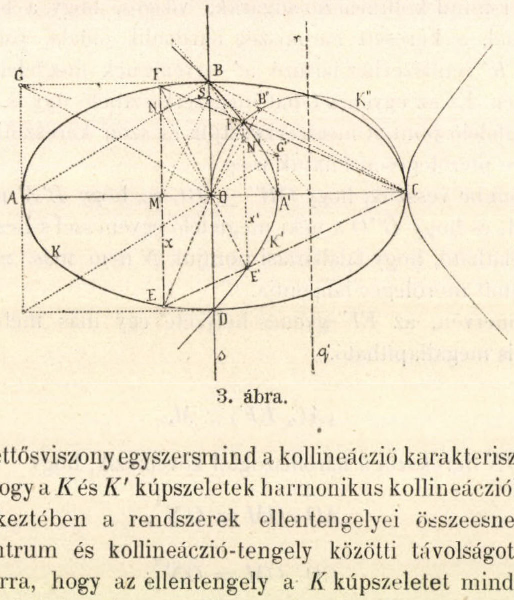
Az OP átmérő fölé szerkesztett kör C_4^3 görbénket még egy pontpárban metszi; ugyanis *hat* metszéspontja közűl *három* a P-ben egyesült, mert könnyen belátható, hogy a P kettőspont egyik érintője merőlegesen áll az OP egyenesre.

Az így nyert metszéspontpár M_1 és M_2 szolgáltatja az előbbi megoldásban kifejtettekkel egyezően nyert háromszögünket.

Ha e szerkesztésünk az ellipszis főtengelyének egyik végpontjára alkalmazandó, akkor a C_4^3 geometriai hely megszerkesztése czéljából, megvizsgáljuk először, hogy e speczialis felvétel következtében mily változás áll be a szereplő involuczió és a vele projektiv sugársor egymáshoz való helyzetében.

Erre nézve most is irányadó az alakzatok közös sugara. Ha a közös sugarat, AC-t, az elsőrendű sugársorhoz tartozónak tekintjük, akkor az involuczió oly sugárpárja felel meg neki, melynek egyik sugara CA-val összeesik, másik sugara pedig AC-re merőleges. Az alakzatok közös sugarában tehát egyesült egy megfelelő elempár. Ezek nincsenek többé ferde fekvésben, hanem úgynevezett félig perspektiv vagy redukált fekvésben vannak és a belőlük származtatott geometriai hely voltaképen csak másodrendű görbe, minthogy a közös elemben egyesült sugárpár a keletkező alakzat egyik levált részének tekintendő. A C_4^2 görbe degenerál és felbomlik egy egyenes vonalra, az AC tengelyre, és egy kúpszeletre, egy hiperbolára, a K'-re, mely utóbbi az adott K ellipszissel C-ben érintkezik és azonkívül ezt a melléktengelyt végpontjai-ban, D és B-ben, metszi át. E kúpszeletek perspektiv fekvésű kollineár alakok a C érintkezési pontra mint kollineáczió-czentrumra és a $BD \equiv S$ közös húrra, mint kollineáczió-tengelyre nézve. Az AC tengelyhez szimmetrikus fekvésű OG, OG' egyenespár a kollineáczióban egy megfelelő párt alkot és az ellipszis tengelyeivel oly sugárcsoportot ád, melynek kettős viszonyai:

$$(O \cdot GG'BC) = -1.$$



3. ábra.

Minthogy e kettősviszony egyszersmind a kollineáczió karakterisztikájának értéke, látjuk, hogy a K és K' kúpszeletek harmonikus kollineáczióban vannak; ennek következtében a rendszerek ellentengelyei összeesnek és a kollineáczió-czentrum és kollineáczió-tengely közötti távolságot megfelezik. Tekintettel arra, hogy az ellentengely a K kúpszeletet mindig két valós pontban metszi, beigazolt az az állítás, miszerint K' *hiperbola.*

E hiperbola főtengelye összeesik az adott ellipszis főtengelyével; egyik csúcspontja C, másik csúcspontját kimetszi az AG-nek megfelelő $A'G'$ egyenes A'-ben.

A CO átmérő fölé rajzolt K'' kör kimetszi a K' hiperbolából azt az E', F' pontpárt, melynek segítségével a keresett háromszögünk azonnal megszerkeszthető.

A K' hiperbola és a K'' kör közös pontpárja igen egyszerűen nyerhető, ha azokat a C czentrumra nézve perspektiv kollineár idomoknak tekintjük.

E kollineáczió tengelye, $E'F' \equiv x'$, kimetszi a keresett pontpárt a K'' kör kerületén. A K' és K''-nél fellépő közös szimmetria-viszonyoknál fogva nyilvánvaló, hogy a keresett kollineáczió-tengely AC-re merőleges, ez tehát meghúzható, mihelyt még egy pontja ismeretes. A CA és CO kollineáczió-sugarak megállapítanak B, B'' és A', O-ban két megfelelő pontpárt és BA', $B''O$-ban egy megfelelő egyenespárt, mely utóbbinak metszéspontja

$$(BA', B''O) \equiv N',$$

a kollineáczió-tengely egy pontja, úgy hogy x' az N' ponton át OC-re merőlegesen meghúzható.

Minthogy a P-pontnak az E' és F' pontokkal való összeköttetései nemcsak a keresett háromszögünk oldalai, hanem a K és K' kúpszeletekre nézve egyszersmind kollineáczió-sugarak, világos, hogy a tőlük megállapított EF oldal, a keresett háromszög harmadik oldala, voltaképen nem más, mint a K' rendszerhez tartozó x' egyenesnek megfelelő egyenese a K rendszerben. Ez az egyenes tehát megszerkeszthető úgy is, hogy az N' pontnak megfelelő pontját megszerkesztjük és azon keresztül a háromszög oldalát OC-re merőlegesen húzzuk meg.

Ha figyelembe vesszük, hogy $OB'' \perp BC$-re, hogy $B'A'$-nek megfelelő egyenese BA, és hogy $B''O$ a neki megfelelő egyenessel s-hez képest szimmetrikus, belátható, hogy találkozási pontjuk N nem más, mint az O-ból BA-ra bocsátott merőleges lábpontja.

Ezeket ismervén, az EF egyenes helyzete egy más metrikus relácziő segítségével is megállapítható.

Ha

$$(AC, EF) \equiv M,$$

akkor az AON derékszögű háromszögtől következik, hogy

$$AO \,.\, OM = \overline{ON}^2,$$

és ebből:

$$CO \,.\, OM = \overline{ON}^2;$$

vagy, ha

$$ON = OS$$

akkor

$$CO \,.\, OM = \overline{OS}^2.$$

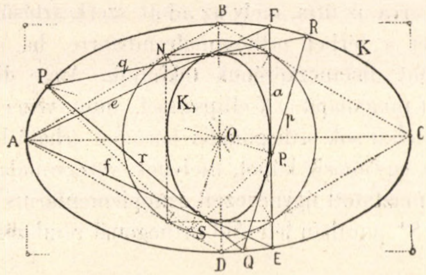
Minthogy e reláczió a keresett háromszög minden magasságára nézve áll fenn, kimondhatjuk a következő tételt:

A magassági pont a háromszög magasságait oly módon osztja fel, hogy a részek közötti középarányos egyenlő az adott ellipszis tengelyei meghatározta rhombusba érintőileg beírt kör sugarával.

Ez természetesen mindeddig csak azokra a háromszögekre nézve érvényes, melyekre nézve az adott szögpont a tengely végpontja. Törekedni fogunk végre annak általános érvényességét is kimutatni.

E végből kiindulunk az AEF háromszögből, melyben A a tengely egyik végpontja. E háromszög, mint polárháromszög, megállapít a K kúpszelet síkjában egy orthogonális polárrendszert,* melynek az O magassági pont a főpontja és direktrix kúpszelete az O középponttal biró H képzetes kör.

Az adott K ellipszisnek megfelelő reciprok poláris idom oly K_1 ellipszis lesz, mely az AEF háromszögbe be van írva.



4. ábra.

Az ellipszis kerületén tetszés szerint választott P pontnak megfelel a K_1 kúpszeletnek p érintője, mely a K ellipszist még egy pontpárban átmetszi. Jelöljük ezek egyikét Q-val, és feleljen meg neki a K_1 kúpszelet q érintője, akkor természetes, hogy ez keresztülhalad a P ponton, mert a P és Q pontok konjugált pólusok a H direktrix-kúpszeletre nézve.

A $PQ \equiv r$ összeköttetésének megfelelő pont nem lehet más, mint a p és q egyenesek metszéspontja R.

Az ily módon szerkesztett PQR háromszög szintén polárháromszög a H direktrixre nézve. Minthogy ugyanarra a kúpszeletre vonatkoztatott két polárháromszög szögpontjai mindig egy kúpszeleten feküsznek, oldalai pedig egy kúpszeletet burkolnak be **; minthogy továbbá a hat szögpont közül öt már az adott K ellipszisen van, a hat érintő közül pedig öt már a K_1 kúpszeletet burkolja; végül pedig öt elem a kúpszeletet már teljesen meghatározza: világos, hogy a hatodik szögpont R a K ellipszisen van, a hatodik oldal r pedig a K_1 ellipszist érinti.

Minthogy továbbá a PQR háromszög, mint a szereplő orthogonális

* L. Fiedler, Darst. Geometrie I. 114. l. III. 507. l.

** Steiner-Schröter, Theorie der Kegelschnitte p. 154.

polárrendszer egyik polárháromszöge, az O pontot bírja magassági pontul, kimondhatjuk:

A K ellipszisbe beírt mindazon háromszögek, melyeknek közös magassági pontja az ellipszis középpontja, egy másik K_1 ellipszist burkolnak be, mely nem egyéb, mint a K reciprok polár alakja egy oly orthogonális polárrendszerben, melynek főpontja az O pont, hatványa pedig a K tengelyei meghatározta rhombusba beírt kör sugara.

Közvetve beigazoltuk ezzel az említett metrikus reláczió érvényességét, bármely K ellipszisbe írt háromszögre, melynek magassági pontja az ellipszis középpontja.

Végül még nehány szóval, de minden bővebbi fejtegetés mellőzésével rá akarunk utalni arra az útra, mely az adott szerkesztésünkből kiindulva közvetlenül rávezet a térbeli orthogonálrendszerre, ha a rhombusba írt kört egy térbeli pont distánczkörének tekintjük. Az e distánczkör meghatározta S^+ pont megállapít a K ellipszissel, mint vezérvonallal egy oly kúpot, melybe végtelen sok orthogonális háromél írható be. E háromélek lapjai beburkolnak egy másik kúpot, melynek vezérvonala a K_1 ellipszis. Az ekként származtatott úgynevezett szupplementárius kúpok reciprok poláris alakok, az S^+ pontban létesülő orthogonál rendszerben.

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT ELŐADÁSAIRÓL.

Adalékok az entropia fogalmának meghatározásához.*

(Első közlemény.)

1. Az entropia fogalmának fejlődése.

Clausius az ő hőelméleti értekezéseinek egyikében azt mondja, hogy «a mechanikai hőelmélet második főtétele, és minden, a mi vele összefügg, sokkal nehezebben érthető meg, mint az első főtétel».[1] A második főtétellel pedig mi sem függ szorosabban össze az entropia fogalmánál, söt újabban némely szerző annyira megy, hogy az entropia fogalmából leszármaztatható elvet, az *entropia-elv*et, vagy mint szintén nevezik, az *entropia gyarapodásának elvét*, egyenest a második főtétel kifejezőjének tekinti. A nehézség már úgy a második főtételnek, mint az entropia fogalmának kifejezés-módjából is szembeötlik, és már e kifejezés-módokból is észrevehető, hogy a nehézség, melyre Clausius ezelőtt csaknem harmincz évvel czélzott, a hőelmélet fejlődésével egyáltalában nem szünt meg.

Történelmi szempontból a második főtétel első alakja a Sadi Carnot által kifejezett azon *tapasztalati elv*, hogy «mindenütt, hol mérsékletkülönbség van, mozgató erő létesítésének lehet helye», és a következő általános tétel: «a hő mozgató ereje független azon ágenstől, melyet létesítésére felhasználunk, s mennyiségét egyes-egyedül azon testek mérséklete határozza meg, melyek között a hőanyag átvitele utolsó sorban végbemegy».[2] Hasonlóképen, csakhogy már a hő és munka egyenértékűségének elvét

---

* Előadatott a Math. és Phys. Társ. 1893. febr. 9-én tartott rendes ülésén.

[1] Clausius: *Abhandlungen über die mech. Wärmetheorie,* I, 1864, 320.

[2] S. Carnot: *Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers*, übers. v. Ostwald, Leipzig, 1892, 11, 23. — A «hő mozgató ereje» Carnot szerint azon (munkával mérhető) *hasznosítható hatás*, melyet valamely mótor létesíthet.

szem előtt tartva, fejezte ki CLAUSIUS ezt az elvet 1854-ben.[1] Későbbi kifejezés-módjai, valamint más szerzők kifejezés-módja és a CARNOT-féle tételnek egy másként értelmezett második főtételtől való különválasztására tett kisérlete között bizonyos összefüggés megállapítható ugyan, de egyúttal szembeötlik az egyöntetűségnek az a teljes hiánya, mely egy *fizikai alaptétel* esetében a legnagyobb mértékben zavarólag hat.[2]

Az entropia fogalma tulajdonképen olyan régi, mint maga a hőelmélet második főtétele; hiszen a CARNOT-féle mérséklet-függvény révén a második főtételben már benne lappangott. A fogalom természetesen csak akkor kezdett testet ölteni, midőn CLAUSIUS a mérseklet-függvény alakját 1850-ben tényleg meghatározta. CLAUSIUS később (1865) a főtételek egyenleteinek különböző alakokat adván, az $\int(dQ)/T$ kifejezést a test «Verwandlungsinhalt»-jának, mesterszóval *entropiá*-nak nevezte.[3] Ugyanekkor azt mondja, hogy az entropia fizikai jelentményét régebben (értekezései gyüjteményének VI. értekezésében) már bővebben kifejtette. Azonban e bővebb kifejtésre sehogysem tudtam rátalálni, mert az entropia analitikai kifejezése az illető értekezésben előfordul ugyan, de maga a fogalom csakis analitikailag, mint puszta függvény szerepel, csakhogy itt a szintén homályos «Verwandlungswerth» kifejezéssel van megjelölve. CLAUSIUS azután, hőelméleti rendszeres munkájában az entropia fogalmának fizikai fejtegetését mindjárt kezdetben, mikor is az adiabatikus vonalakat isentropikusoknak nevezi, megigéri,[4] de a fejtegetést ebben a munkában is hiába kerestem.

A fogalom fizikai jelentményének kifejtésére csak az angol szerzők műveiben találtam rá. MAXWELL az entropiát az adiabatikus vonalak jellemzőjének nevezi, és így határozza meg: engedjük, hogy a test hőkicserélődés nélkül kiterjedjen vagy összehúzódjék mindaddig, míg elérte a normális mérsékletet. Ezután tartsuk meg ezen a mérsékleten és hozzuk a normális nyomásra; ha az ekkor kibocsájtott hőegységek számát (ω) elosztjuk a thermodinamikai mérték szerint vett normális hőmérséklettel (T), megkapjuk a testnek kezdetbeli állapotában való entropiáját ($\varphi = \omega/T$).[5] Ebből a

---

[1] CLAUSIUS: i. m. 133.

[2] A szóban forgó eltérésekre vonatkozólag a következő helyeket idézzük: CLAUSIUS: i. m. 134, 135, 145. — VERDET: *Théorie mécanique de la chaleur*, I, Paris, 1868, 151. — MAXWELL: *Theorie der Wärme*, übers. v. AUERBACH, Breslau, 1877, 152, 154; übers. v. NEESEN, Braunschweig, 1878, 173, 175. TAIT: *Wärmelehre*, übers. v. LECHER, Wien, 1885, 55. — BRIOT-MASCART: *Théorie méc. de la chaleur*, Paris, 1883, 67. — C. NEUMANN: *Beiblätter*, **16**, 1892, 187.

[3] CLAUSIUS: i. m. II, 34.

[4] CLAUSIUS: *Die mech. Wärmetheorie*, Braunschweig, 1876. I, 71, 111.

[5] MAXWELL: *Theorie der Wärme*, übers. v. AUERBACH, 164; übers. v. NEESEN, 186.

definiczióból, mely az *entropia értékének kiszámítása* szempontjából igen szabatos, épen nem tünik ki, hogy miként jellemzi az entropia az adiabatikus vonalakat, s mindazok a tételek, melyeket MAXWELL az entropiáról még felsorol, egészen dogmatikusak.

TAIT is azt mondja, hogy az entropia az adiabatikus vonalaknak épen olyan jellemzője, mint a milyen a mérséklet az isothermális vonalakra nézve, és támaszkodva a

$$\frac{Q}{T}=\frac{Q_1}{T_1}=\frac{Q_2}{T_2}=\dots$$

egyenlő viszonyokra, melyekben $Q, Q_1, Q_2, \dots T, T_1, T_2, \dots$ a CARNOT-féle körfolyamokban az isothermális vonalak mentén fellépő hőmennyiség-változásokat és az ezen vonalaknak megfelelő abszolut mérsékleteket jelentik, azt mondja, hogy e viszonyok egyenlő értékei egyszerűen úgy *definiálhatók*, mint az az érték, melylyel az adiabatikus vonalak jellemzője vonalról-vonalra változik.[1]

TAIT e definicziója az entropia fizikai jelentményét már felismerhetővé teszi, de nem tekintve, hogy a második főtételnek, vagy mondjuk inkább a CARNOT-féle tételnek ismeretére támaszkodik, van benne bizonyos határozatlanság; hiszen e definiczió nem zárja ki, hogy az adiabatikus vonalaknak még más jellemzője is lehessen, valamint lehetséges volna, sőt tényleg lehetséges is, hogy e viszonyok egyenlősége az adiabatikus vonalakon kivül más vonalakat is jellemezzen.[2]

Az entropia-függvény, mint ilyen, a régibb thermodinamikai munkákban, péld. VERDET-ben, még névleg sem szerepel; később e függvény tárgyalása a thermodinamikának mintegy függelékévé vált, jelenleg azonban, épen úgy mint a térfogat, nyomás és hőmérséklet, már eleitől kezdve szerepel. Így a BRIOT-MASCART-féle munkában az entropia legelőször is mint az adiabatikus vonalakat jellemző állandó lép fel, melynek differencziális értéke egyenlő a térfogat és a nyomástól független differencziális hőmennyiségnek e hőmennyiség integráló együtthatójához való viszonyával; magára entropia fogalmára akként jut, hogy emez együttható értékét, a CARNOT-féle tétel fejtegetését előrebocsátjva, az abszolut mérséklettel egyenlőnek határozza meg. Ezen eljárásban az entropia fizikai jelentménye egészen elvész, mi annál kellemetlenebb akkor, midőn a thermodinamika összes tételeinek fejtegetésében az entropia előljáró fogalomként szerepel.

Miután CLAUSIUS-nak ama híressé vált tétele, mely szerint a világegyetem entropiája maximumra törekszik, mindinkább tért hódított, a fizika új elv-

---

[1] TAIT: i. m. 283.

[2] L. alább 6. alatt.

vel, az *entropia gyarapodás elvével*, vagy rövidebben az *entropia-elvvel* gazdagodott, mely elvnek messzire menő alkalmazásaiban különösen PLANCK, GIBBS és DUHEM tünnek ki. Ez a körülmény még inkább kivánatossá teszi az entropia fogalmának és tulajdonságainak szabatos felismerését, mire nézve azonban alig történt valami. Így PLANCK, ki az entropia-elvet egyenest a hőelmélet második főtételének tekinti és eme tétel *legkitünőbb kifejezőjének* mondja,[1] a második főtételről írt külön munkájában[2] az entropiát ekként világosítja meg: «a testek valamelyes rendszerének minden adott állapotára nézve meghatározott, az ezt az állapotot meghatározó mennyiségektől függő függvény van, melynek értéke mértékeül szolgál azon különös szeretetnek (Vorliebe), melylyel a természet ezen állapot iránt viseltetik». Ennek megértésére tudni kell, hogy PLANCK az összes folyamatokat két csoportba osztja: *semleges folyamatokra*, melyeknek kezdeti és végállapota iránt a természet egyenlő szeretettel viseltetik, és *természetes folyamatokra*, melyeknek végállapota iránt a természet nagyobb szeretettel viseltetik mint a kezdeti állapota iránt. Ugyancsak PLANCK egy későbbi értekezésében[3] az entropia elvét így írja körül: «Az a tapasztalás, hogy a természetnek, legalább a szervetlennek, minden folyamatában bizonyos haladás jut kifejezésre, úgy hogy a világnak teljes visszatérése valamely állapotba, melyben azelőtt egyszer már benne volt, lehetetlen, a következő tételre vezetett: van a világnak mindenkori állapotától függő függvény, melynek értékét a természetben lefolyó változások folyvást nagyobbítják... Ha ezt a függvényt entropiának nevezzük, úgy egyúttal eme fogalomnak ismereteink jelenlegi állásában egyedül lehetséges definiczióját legáltalánosabb jelentőségében kifejeztük». Ugyanezt az elvet W. WIEN így fejezi ki:[4] «az energia, sűrűségének egyenlőtlen elosztásakor, mindig úgy mozog, hogy a sűrűség-különbségek megszűnjenek», továbbá «az energiának az a törekvése, hogy nagyobb intezitású helyekről kisebb intenzitásúakra menjen át». Annyi bizonyos, hogy ismereteink jelenlegi állásában ez a definiczió legalább is ép oly lehetséges mint a PLANCK-féle.[5]

---

[1] *Wied. Ann.* 1892, 162.

[2] M. PLANCK: *Über den zweiten Hauptsatz der mech. Wärmetheorie*, München, 1879.

[3] *Über das Princip der Vermehrung der Entropie*, 4. Abh., Wied. Ann. 64, 1891, 386.

[4] *Wied. Ann.* 1892, 724.

[5] Hogy az entropia fogalma mily nehezen közelíthető meg, erre nézve külső bizonyítékul felhozom, hogy MOUTIER-nek kitünő hőelméleti művében (La Thermodynamique, Paris, 1885), mely a hőelmélet vívmányait népszerű modorban fejtegeti, az entropiának még neve sem fordul elő.

Mindazonáltal az egész entropia-elv ellen a legújabban komoly támadásokat intéztek. J. BERTRAND, ezelőtt hat évvel, már ki merte mondani, hogy a második főtétel, a mennyiben vissza nem fordítható körfolyamokra vonatkozik, nem csak bizonyítás-módjait, hanem még kifejezés-módjait is tekintve, szigorúság és szabatosság híjján van, és hogy az ilyen körfolyamokban az entropia megszünik határozott fogalom lenni;[1] TH. GROSS pedig már a különböző bizonyítás-módokban (ide számítva első sorban a CLAUSIUS-ét is) rejlő hibákat is feltüntette.[2]

2. Az entropia fogalmának megállapítása.

Ily körülmények között az entropia fogalmának szabatos meghatározása első sorban való kivánalom. Azon voltam, hogy e fogalmat *a második főtételtől és körfolyamoktól egészen függetlenül,* de azért tisztán fizikai szempontból határozzam meg. A legjobb módot erre nézve, TAIT példáját követve, az adiabatikus vonalak jellemzőjének felkeresésében találtam.

Mint analógiát előre bocsájtom egy igen jól ismert egyszerűbb esetnek hasonló módon való fejtegetését.

Az isothermális vonalaknak, mint nevük is mutatja, jellemzője a hőmérsékletnek egyazon vonal mentén való állandósága. Ha ez a körülmény még ismeretlen volna, kipuhatolására ekként járhatnánk el.

Valamely gáznak egyazon isothermálisára nézve

$$pv = p_1 v_1 = \ldots = c,$$

és ha a c állandót akként határozzuk meg, hogy az együvé tartozó p (nyomás) és v (térfogat) állapotjelzőket kifejezzük a normális p_0 és v_0 (vagy akár tetszés szerinti adott) állapotjelzőkkel, azonnal felismerhetjük, hogy mely tényezőt kell állandónak tekintenünk, hogy a $pv = c$ egyenlet egy bizonyos isothermálisnak egyenlete legyen. Röviden szólva, le kell vezetni *az isothermális vonalak seregének egyenletét.*

Legyen DA (1. ábra) a t hőfokra, CB pedig a 0°-ra vonatkozó isothermális, továbbá a DA vonalon fekvő tetszészszerinti A indikátor-pontnak feleljen meg p és v, C pontnak pedig p_0 és v_0. Először is szorítsuk össze, állandó mérséklet mellett, a tömegegységű gázt A-tól D-ig; ekkor MARIOTTE törvénye szerint

$$pv = p'v_0,$$

hol p' a D pontnak megfelelő nyomás. Ezután a gázt állandó térfogat mel-

[1] J. BERTRAND: *Thermodynamique*, Paris, 1887, 265.

[2] *Wied. Ann.* 1892, 339, 517; 1893, [773].

lett hűtsük mindaddig, míg nyomása a C pontnak megfelelő p_0-ra száll le, mikor is Gay-Lussac törvénye szerint

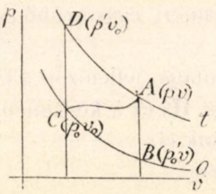
$$p' = p_0 (1 + at);$$

e kifejezést a fentebbivel egybevetve, lészen

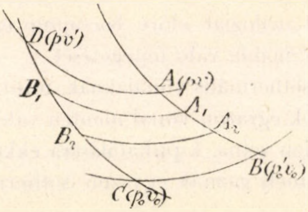
$$pv = p_0 v_0 (1 + at).$$

Miután p_0, v_0 és a állandók, ez egyenletből, mely az isothermális vonalak seregének egyenlete, azonnal szembeötlik, hogy egyazon isothermálisra pv csak akkor lehet állandó, ha ugyanezen vonalra t is állandó.[1]

Ezek után térjünk át az adiabatikus vonalakra. Itt is csak a gázakra fogunk szorítkozni, mint a melyeknél az adiabatikus állapotváltozás törvényét eleve ismerjük. Hogy mi légyen az adiabatikus vonalak jellemzője, ezt megint ezen vonalak serege egyenletének levezetése révén tudhatjuk meg.



1. ábra.



2. ábra.

Egyazon AB adiabatikus vonalra (2. ábra) nézve

$$pv^k = h,$$

hol k az állandó nyomás melletti fajhőnek (C) az állandó térfogat melletti fajhőhöz (c) való viszonya, h pedig az illető vonal állandója. Hogy ennek

[1] Ugyanezen eredményre jutunk, ha a gázt először A-ból B-be hozzuk, vagyis állandó térfogat mellett t-ről o^0-rat hűtjük, hogy nyomása p_0-ra apadjon, ezután isothermálisan B-ből C-be szorítjuk. De ugyanezen eredményre jutunk egy tetszés szerinti AC (egyenes vagy görbe) vonal mentén is, mert ezen útnak elemeit szétbonthatjuk a megfelelő isothermális és isometrikus vonalak (egyenlő térfogati vonalak) elemeire, és az illető állapotváltoztatásokat ezen elemek mentén sorban haladva hajthatjuk végre. És így szemlélhető módon ki van mutatva, azon igen fontos tétel, hogy valamely tökéletes gáznak összes energiája (tulajdonképen csak összes energiájának változása), melyet pv tüntet elő, csakis a hőmérséklettől (mérséklet-változástól) függ, és független az úttól, melyen át az állapot-változás létrejött.

általános, minden vonalra egyaránt vonatkozó értékét meghatározhassuk, ismét azon leszünk, hogy DA vonal tetszésszerinti A pontjának megfelelő p és v állapotjelzőket kifejezzük a normális állapotot meghatározó C pontnak állapotjelzőivel.

E végből meghúzzuk A ponton át az ezen pont t hőmérsékletének megfelelő DA isothermális, és a C ponton átmenő CD (normális) adiabatikus vonalat. A tömegegységű gázat először isothermálisan A-ból D-be szorítjuk; az ekkor elvezetendő hő (mechanikai egységekben) egy jól ismert képlet szerint

$$Q = p'v' \log \frac{v}{v'},$$

honnét

$$v' = \frac{v}{e^{\frac{Q}{p'v'}}} \qquad 1)$$

Ezután a gázat adiabatikus módon D-ből C-be hozzuk, mire nézve a

$$p'v'^k = p_0 v_0^k$$

egyenlet áll, mely így is írható:

$$p'v'v'^{k-1} = p_0 v_0^k. \qquad 2)$$

1)-ből

$$v'^{k-1} = \frac{v^{k-1}}{e^{\frac{Q(k-1)}{p'v'}}},$$

és mivel (ha a gáztörvény állandóját R-rel és a t-nek megfelelő abszolut mérsékletet T-vel jelöljük)

$$\frac{k-1}{p'v'} = \frac{C-c}{cRT} = \frac{R}{cRT} = \frac{1}{cT},$$

lészen

$$v'^{k-1} = \frac{v^{k-1}}{e^{\frac{Q}{cT}}},$$

mely értéket a 2) alattiba téve

$$p'v' \frac{v^{k-1}}{e^{\frac{Q}{cT}}} = p_0 v_0^k;$$

ez egyenletben, mivel D és A egyazon isothermálison feküsznek, $p'v'$ helyett pv tehető, s ezután az egyenlet a

$$pv^k = p_0 v_0^k \, e^{\frac{Q}{cT}} \qquad \text{I}a)$$

vagy szintén a

$$p^c v^C = p_0^c v_0^C e^{\frac{Q}{T}} \qquad Ib)$$

alakra hozható.

Ezek az egyenletek az adiabatikus vonalak seregének egyenletei. Mivel p_0, v_0, c és C állandók, nyilvánvaló, hogy egyazon adiabatikus vonalra nézve pv^k (illetőleg $p^c v^C$) csak úgy lehet állandó, ha ugyanezen vonalra nézve Q/T állandó; a Q/T viszony tehát nem egyéb az adiabatikus vonalak keresett charakteristikumánál. Mivel pedig valamely vonal egyenlete a vonal természetét meghatározó állandókon kivül — nem számítva a kezdőpont fekvésétől függő állandókat — más állandót nem tartalmazhat, a Q/T viszony az adiabatikus vonalak egyedüli általános jellemzője.

Ha tehát AB vonalon A pont helyett más A_1, A_2, ... pontokat választunk, az illető T_1, T_2, ... mérsékleteknek megfelelő A_1B_1, A_2B_2, ... isothermálisokon elvezetendő Q_1/Q_2, ... hőmennyiségek is megváltoznak, de a Q_1/T_1, Q_2/T_2, ... viszonyok egymással egyenlők maradnak.

Ugyanezen eredményre jutunk akkor is, ha az átmenet A-ból C-be az ABC úton át történik, vagy ha a feladatot akként tűzzük ki, hogy a DC vonalnak $p_0 v_0^k$ állandója kifejezendő az AB vonal bármely A pontjának p és v állapotjelzőivel; ez utóbbi esetben Q_1, Q_2, ... a gázzal *közlendő* hőmennyiségeket jelentenek.

Ha mármost a Q/T viszonyt entropiának nevezzük, e fogalomra a következőképen jutunk: *húzzuk meg a gáz adott állapotának és normális állapotának megfelelő adiabatikus vonalakat; az ezek közé zárt bármely isothermális vonalrészen kicserélendő hőnek az illető isothermális abszolut mérsékletéhez való állandó viszonya a gáznak az adott állapotában való entropiája.*

Ez a meghatározás magában foglalja az említett MAXWELL-féle meghatározást, mert érvényes lévén az isothermálisok bármelyikére, érvényes a normális isothermálisra is. Ha pedig származása módját tekintjük, a TAIT-féle meghatározással szemben az a jó oldala van, hogy független a hőelmélet második főtételétől és körfolyamoktól, s nem hagy fen kétséget az iránt, hogy az adiabatikus vonalaknak az entropián kivül más általános jellemzőjük nincs.

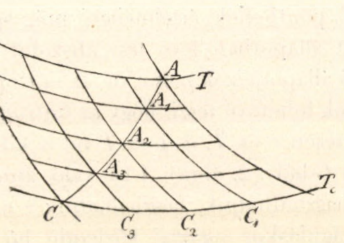
3. Az entropia tulajdonságai.

Az eddigiek alapján az entropia néhány fontos tulajdonságát közvetetlenül felismerhetjük.

Először is nyilvánvaló, hogy a már a normális állapotban levő gáz entropiája zérus. Minthogy azonban elvégre bármely állapot normálisnak vehető, választhatunk oly uj állapotot normálisnak, melynek az a tulajdonsága, hogy a régiből az ujba való átmenetkor a testtől hőt kell elvonni, vagy választhatunk olyant, hogy a régiből az ujba való átmenetkor a testtel hőt kell közölni. Az első esetben a régi normális állapotnak az ujhoz képest bizonyos pozitiv, a másodikban pedig bizonyos negativ entropiája van. A 2. ábrában például A pont is normális pontul vehető, s ekkor A-nak C-re vonatkozólag pozitiv entropiája van, mely abszolut érték szerint egyenlő C-nek A-ra vonatkozó negativ entropiájával.

Az igazi normális állapot az volna, melyben a testnek már semmi melege nincs, minek az abszolut zéruspontnál volna helye. Gyakorlatilag azonban normális állapotul a közönséges zéruspontnak megfelelőt vehetjük, mert nem az entropia abszolut értékével, hanem csak változásaival van dolgunk.

Ha tehát a gáz entropiája valamely adott állapotban negativ, úgy ez csak azt fejezi ki, hogy a gáznak a normálisnak vett állapotban mennyivel nagyobb az entropiája mint az adottban.



3. ábra.

A hőmennyiség függ az úttól, melyen át a gáz a normális állapotból az adottba (vagy fordítva) kerül, *az entropia pedig ez úttól merőben független.* Ennek igazsága a 2. pontban fejtegetett átmenetekre nézve, azaz midőn az átmenet részben *egy* isothermális, részben egy vagy két adiabatikus vonalon (vonalrészen) történik, az ottan mondottakból önként következik; csak azt kell még kimutatni, hogy az entropiának ugyanazt az értékét nyerjük akkor is, ha az átmenet tetszésszerinti úton történik.

E végből jelezze a test adott állapotát A pont (3. ábra), normális állapotát C, a tetszésszerinti útat pedig AC. Vegyünk fel ezen bizonyos számú A_1, A_2, . . . pontot, s húzzuk meg a rajtuk átmenő isothermális és adiabatikus vonalakat. A már mondottak szerint e pontok mindegyike normális pontnak vehető.

Ha a testet először is az $AB_1A_1B_2A_2$ . . . C töredezett úton át viszszük C-be, a 3. pontbeli megállapítások szerint A entropiája A_1-re nézve épen akkora, mint B_1-é A_1-re, vagy C_1-é C_2-re nézve; legyen ez utóbbi q_0/T_0.

Hasonlóképen A_1 entropiája A_2-re nézve épen akkora, mint B_2-é A_2-re, vagy C_2-é C_3-ra nézve; ez legyen q_0'/T_0. És így tovább. Ennélfogva A entropiája C-re a mondott töredezett úton

$$\frac{q_0}{T_0}+\frac{q_0'}{T_0}+\frac{q_0''}{T_0}+\ldots$$

Ezen összeg értéke pedig bármily sűrűn, tehát akár folytonos sorban vegyük is fel AC vonalon a pontokat, mindig ugyanaz marad, vagyis marad C_1 entropiája C-re nézve, mi egyúttal A entropiája C-re nézve.

4. Az entropia értékének kifejezése különböző állapotjelzőkkel.

Az 1*b*) képletből (2. pont) az entropia értéke

$$\varphi=\frac{Q}{T}=c\log\frac{p}{p_0}+C\log\frac{v}{v_0}, \qquad \text{I)}$$

mely értékhez (a 3. pontbeliek értelmében) még egy határozatlan állandó, a normálisnak vett állapotban levő test abszolut entropiája járulna. Itt a függetlenül változó állapotjelzők p és v, de az entropiának meghatározására követett módszerünk lehetővé teszi, hogy az entropia értékét más két állapotjelzővel, nevezetesen v és T, és p és T-vel is kifejezzük.

Mivel ugyanis a C-ből (2. ábra) A-ba való átmenetkor bármelyik isothermális vonalat használhatjuk, használhatjuk a normális mérsékletűt is. A C-től B-ig való táguláskor a gázzal közlendő hő mechanikai egységekben:

$$Q_0=p_0v_0\log\frac{v_0'}{v_0},$$

tehát B-nek C-re, vagy a mi egyre megy, A-nak C-re vonatkozó entropiája

$$\varphi=\frac{Q_0}{T_0}=\frac{p_0v_0}{T_0}\log\frac{v_0'}{v_0}=R\log\frac{v_0'}{v_0} \qquad 1)$$

hol még csak v_0' fejezendő ki A-nak v és T állapotjelzőivel. Erre nézve a Laplace-Poisson-féle egyenletek szerint

$$v_0'=v\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

tehát

$$\frac{v_0'}{v_0}=\frac{v}{v_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

mely értéket 1)-be téve, lészen

$$\varphi = R \log \frac{v}{v_0} + \frac{R}{k-1} \log \frac{T}{T_0},$$

vagy mivel $R/(k-1) = Rc/(C-c) = c$, lészen:

$$\varphi = c \log \frac{T}{T_0} + R \log \frac{v}{v_0} \qquad \text{II)}$$

Mivel továbbá B és C pontok egyazon isothermálison feküsznek, 1)-ben v'_0/v_0 helyett, Mariotte törvénye szerint, p_0/p'_0 irható. De ugyancsak a Laplace-Poisson-féle egyenletek szerint

$$p'_0 = p \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{1-k}},$$

tehát

$$\frac{p_0}{p'_0} = \frac{p_0}{p} \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{1-k}},$$

mely értéket v'_0/v helyett 1)-be téve és $kR/(1-k)$ helyett $-C$-t irva:

$$\varphi = C \log \frac{T}{T_0} - R \log \frac{p}{p_0} \qquad \text{III)}$$

Az I), II) és III) alatti értékek teljesen megegyeznek a Clausius és másoktól thermodinamikai elvek segítségével levezetett értékekkel.

Czógler Alajos.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

Mechanikai problémák. Mindenki, a ki physikával foglalkozott, tisztában van az erő és munka fogalmával; ismeri a képletet is, a mely ezen két mennyiséget összeköti, de nem mindenki tud a képletek s a minduntalan észlelhető tünemények között létező benső kapcsolatról számot adni. Néhány, főleg didaktikai értékű példát kivánunk közölni, melynek fejtegetésében követett gondolatmenet más hasonló esetben is eredményre vezet.

Ha kis kalapácscsal rézlemezre ütünk, a nélkül, hogy erőlködni kellene, benyomást idézünk elő a lemezen; ha ellenben a kalapács fejét a lemezre szorítjuk, nem fog sikerülni állandó nyomot létrehozni rajta. A magyarázat nem okoz nehézséget.

Tegyük fel, hogy a kalapács súlya 100 gr. s hogy 30 cm. magasságról esik a lemezre. Elhanyagolván a sebességet, a melyet a kéz a kalapácsnak kölcsönöz, ez utóbbinak eleven ereje az ütközés pillanatában 3000 gr.-cm. lesz. Ha a kalapács nem ugrik vissza, egész munkaképessége az ütközésben veszett el s feltéve, hogy a kalapács 0·1 mm.-nyire hatolt be a lemezbe $\frac{3000}{0 \cdot 1} = 30{,}000$ grammnyi erőre van szükség, hogy a kalapács behatolása megakadályoztassék. 30 kgr. erővel kellene tehát a kalapács fejét a lemezre szorítani, hogy ép úgy mint az ütésnél 0·1 mm.-nyire hatoljon a lemezbe.

Helyezzünk a mérleg egyik csészéjébe 1 kgr. súlyt s dobjunk a másik csészébe egy 800—900 gr. súlyú fadarabot; a mérleg karja lehajlik s ha a fadarab levétetnek, még mielőtt az egyensúly létrejött volna, felületes gondolkodó a fadarabot 1 kgr.-nál nehezebbnek mondhatná.

A tünemény magyarázata végett képzeljünk magunknak egy ideális mérleget, melynek nincsen súlya. Helyezzünk az egyik oldalra 1 kgr.-nyi súlyt s engedjünk a másik oldalra 1 gr.-nyi súlyt 10 méter magasságról leesni. A kis súly eleven ereje 1000 gramm-centiméter, a mi egyenértékű 1 kilogramm-centiméter munkával; a mérleg másik karja ennélfogva a kilogrammot 1 cm.-nyire felemeli s azután visszatér eredeti helyzetébe. A közönséges mérlegen az elmozdulás kétség kívül sokkal kisebb, mert az eső súly munkájának legnagyobb része a nehéz mérlegkar elhajlásán semmisül meg.

Létezik e téren egy tény, a mely nagyon paradoxnak tünik fel, de igen egyszerű okoskodással könnyen értelmezhető. Szabadon függő drótnak alsó végére, keresztirányban, lemezt erősítünk meg. Ha kellő magasságból súlyos gyűrűt ejtünk ama lemezre, a drót elszakad. De ha a kisérletet úgy rendezzük be, hogy a dróton megerősített lemezt a gyűrű ráejtése előtt megterheljük, a leeső súlyos gyűrű a drótot nem szakítja el.

Minden képlet nélkül könnyen számot adhatunk eme tüneményről. Az eső súly eleven ereje a drótban a meghosszabodás folytán fellépő rugalmassági erőn semmisül meg. Ha a sodrony előzetesen meg van terhelve, statikai meghosszabbodást szenved s ha a gyűrű leesik, a két súly együttesen oly sebességre tesz szert, a mely az eső tömeg s a két tömeg összegének arányában kisebb mint az első esetben. Az eleven erő ugyanazon mértékben kisebb s az így létrejövő meghosszabbodás a kezdetben már meglevő statikai meghosszabbodással együtt kisebb lehet mint az, a melyet az eső súly a meg nem terhelt sodronyon előidéz.

Igen tanulságos kisérlet még a következő: közös állványra megerősítünk egyik végével két egyforma aczéldrótot s két ép ily hosszu, egyforma kaucsukfonalat; ha az egyik aczéldrótot és az egyik kaucsukfonalat fokozatosan s egyformán megterheljük, a kaucsukfonál végre is el fog szakadni. Azután a másik aczélsodrony- illetőleg kaucsukfonálra ugyanazon magasságból egyforma súlyokat ejtünk. Ha az esési magasságot fokozatosan nagyobbítjuk, azt fogjuk tapasztalni, hogy nem a kaucsukfonál, hanem az aczélsodrony fog elszakadni.

Az épségben maradt sodronynyal és kaucsukfonállal folytathatjuk a kisérletezést; megterhelhetjük az aczéldrótot s a kaucsukfonál végére ejthetjük a terhet, a midőn azt fogjuk tapasztalni, hogy mindegyiknél jóval túl lehet lépni ama határokat, a melyeknél az előbbi sodronyok harczképtelenekké lettek.

L. *Guillaumin* közleményét La Nature XXI. (1892.) köt. 59. lapján.

Sz. G.

*

Előadási kisérlet a hővezetésre. Hogy a különböző fémek hővezető képessége nem egyforma, azt rendesen az Ingenhouss-tól származó kisérlettel szokás megmutatni oly formán, hogy a különböző fémekből való rudakra viaszszal vagy paraffinnal sörétszemeket ragasztanak. A rudak egyforma melegítésénél azután a hőt jobban vezető rúdról a sörétszemek előbb esnek le, mint a kevésbbé jól vezető rudakról. Hesehus eme kisérletet nagyobb hallgatóság előtti bemutatásra következőkép módosította: A különböző fémű rudak egyik végét kampóformára meggörbítette, egyenes részöket pedig vékony paraffin réteggel vonta be. Az így előkészített rudakat egy nagyobb edény oldalához támasztotta úgy, hogy a kampó az edénybe nyúlt, másik végök pedig az asztalhoz támaszkodott oly formán, hogy a rudak hajlása egyenlő legyen. Az edénybe forró vizet vagy olajat öntvén, a rudakra egyenlő magasságban elhelyezett paraffines talpu jelek különböző sebességgel csusznak le és a hőmérsékleti egyensúly beállta után a melegített végtől különböző távolságban állanak meg. Eme távolságok négyzetei úgy aránylanak, mint a hővezetési együtthatók. *T.*

*

Javított zsirfoltos photometer. Hesehus a Bunsen-féle photometer érzékenységét némi módosítással jelentékenyen növelte. Bunsen photometerében a zsirfoltos ernyő a fényforrásokat összekötő egyenesre merőleges; Hesehus az ernyőt az összekötő egyenesre 45°-nyi szög alatt helyezi el és egy zsirfolt helyett három, egy vízszintesben levő foltot használ. Eme foltok a fényforrástól különböző távolságra lévén, fényességük külömböző. A fényerősségek összehasonlításánál a fényforrásokat olyan távolságra kell elhelyezni, hogy a középső folt eltünjék, a szélsők egyike világos, másika sötét legyen. Különböző szinű fényforrásoknál a középső folt nem tünik ugyan el, hanem könnyen található oly helyzet, a melyben az egyik szélső folt világosabb, a másik sötétebb mint a középső. Bunsen photometerének beállítása körülbelül 14 százalékig, Hesehus-é ellenben 4 százalékig biztos. *T.*

*

Vastag üvegcsövek repesztése elektromos áram segítségével. Vastagabb üvegcsövek repesztése repesztő szénnel vagy izzó üvegpálczával csak igen gyakorlott kéznek sikerül kifogástalanul. Könnyebben boldogulhatunk kis hegyes gázlánggal, melyet derékszög alatt meghajlított üvegcsőből készített gázégető segítségével nyerhetünk. Vastagabb falu csöveknél azonban sem ez az eljárás, sem a zsineggel való dörzsölés nem vezet czélhoz. Ez utóbbi eljárás nehézkes, meg kényelmetlen is s a repedés azért nem szabályos, mert a dörzsölés okozta megmelegedés is szabálytalan. Szabályos s a kellő helyhez kötött melegítés vékony vas- vagy platindróttal idézhető elő, ha ezt elektromos árammal izzásba hozzuk. A vékony drót, mely valamivel hosszabb legyen a repesztendő üvegcső kerületénél, oly módon csavarandó a cső köré, hogy jól hozzásimulhasson, a mi könnyen elérhető, ha a battéria sarkaival való összeköttetéshez hajlékony vezetődrótokat használunk. Ily eljárás mellett az üvegcső csak ott melegszik meg erősebben, a hol az izzó dróttal érintkezett; erre a megmelegített helyre néhány csepp hideg vizet ejtvén, a cső szabályosan elreped. A falvastagság itt nem akadály; sőt tapasztalat szerint az üvegcső annál szebben reped körül, minél vastagabb a fala. *Sz. G.*

CZÓGLER ALAJOS.

A Math. és Physikai Társulat f. é. november hó 30-ikán tartott ülését b. Eötvös Loránd elnök a következő szavakkal nyitotta meg:

A mi kedves társunk Czógler Alajos, társulatunk alapitó és rendes tagja, soha többé nem fog megjelenni körünkben. Ne kivánják tőlem uraim! hogy most, mikor még alig választ el nehány nap halálának órájától, már is higgadtan mérlegelve soroljam fel az érdemeket, melyeket ő magának a magyar tudományos irodalomban és a tanügy terén szerzett; de engedjék meg, hogy mindnyájunk nevében kimondjam, hogy nekünk fáj, nagyon fáj az a seb, melyet szivünkben az ő halála okozott.

Mi szerettük őt, mert mindannyiunknak személyes barátja volt, és szerettük azért is, mert híven ragaszkodott társulatunk eszményeihez. Megmutatta ő egész életével, egész tevékenységével, hogy a jó tanár, a milyen ő volt, akkor tanít igazán sikerrel, a mikor maga is tanul, és megmutatta, hogy a tanári teendők lelkiismeretes teljesítésére nagyobb biztosítékot nem nyújthat semmi más, mint a tudománynak önzetlen szeretete.

A mikor koszorút tettünk ravatalára, akkor is megfogadtuk, hogy őt elfeledni s eszményeitől elpártolni soha sem fogunk!

Aldott legyen emlékezete!

Czógler Alajos szül. Mohácson, 1853-ban. Középiskolai tanulmányait a pécsi s a budai főreáliskolákon elvégezvén, a József-műegyetemen s a középiskolai tanárképző intézetben tanárrá képezte ki magát. Tanári pályáját a szegedi főreáliskolán, 1874-ben kezdte meg, honnét 1891-ben a budapesti VI. ker. állami főreáliskolához helyeztetett át. Ezzel régi vágya teljesült. Azt remélte, hogy a fővárosban több tere nyílik majd munkásságának s több alkalom ismereteinek bővítésére. Nagy kedvvel és szorgalommal látott a munkához, melynek becses eredményei szinte meglepő mértékben szaporodtak. Társulatunk megalakításában s munkájában tevékenyen részt vett, miről folyóiratunknak nemcsak addig megjelent füzetei tanuskodnak, hanem a még ez után megjelenendők is nyomatékosan fognak emlékeztetni a minket ért csapásra.

Ez idő alatt szerkesztette társulatunk megbízásából a Pallas-féle Lexikon physikai részét s elkészítette Ròiti (olasz) physikai kézi könyvének mintegy 60 nyomtatott ívre terjedő fordítását. Fájdalom, nem érhette meg hő vágyának teljesülését, hogy ezt a munkát kinyomatva lássa!

Társulatunknak f. é. február ius hó 9-én tartott ülésén az entropiáról szóló előadását már félbetegen tartotta meg. Hosszabb idő óta fokozatosan fejlődő szívbaja súlyosabb alakot kezdett ölteni, életerejét mindjobban aláásni. De munkakedve soká daczolt a súlyos bajjal s csak kimondhatatlan szenvedések bírták a tollat kezéből kicsavarni. Életének utolsó hónapjait valóságos mártiriomban élte át s a nov. hó 22-én bekövetkezett halála megváltás volt társulatunk egyik leglelkesebb tagjára.

Cz. fontosabb művei és dolgozatai, időrendben: *A 20. sz. feladat megfejtése.* Műegyet. Lapok. 1877. — *Fourier hővezetési tételének elemi tárgyalása.* T. Egyl. K. 1879. — *A fizika története életrajzokban,* 2 kötet. A Természett. Társ. kiadv. 1882. — *Guillemin mágnesség és elektromosság* cz. munkája 2. részének fordítása 1885. — *A fizikai oktatás sikerességének legfőbb akadályai.* 1885. T. Egyl. K. — *Természettan,* a középisk. fels. oszt. számára. Budapest 1887. — *Asztronómiai kirándulások.* T. Egyl. K. 1888. — *Dimensionen und absolute Maasse.* Leipzig, 1889. — Houzeau: *A csillagászat történeti jellemvonásai* (fordítás) 1889. — *A méteres mértékrendszer évszázados jubileuma.* T. T. Közl. 1891. — *Fizikai egységek.* Természettud. T. kiadv. 1891. — *Számok és eredmények.* Emlékkönyv a T. tud. Társ. jubileumára. 1892. — Heller *A fizika története* cz. művének ismertetése. Bp. Szemle. 1892. — Azonkívül számos más közlemény a Math. és Phys. Lapok, a T. T. Közl., a T. Egyl. K. hasábjain.

DESARGUES EGYIK TÉTELÉRŐL.

Ismeretes DESARGUES-nak következő tétele:

Valamely kúpszeletsor elemei tetszés szerinti egyenest involúcziós pontsorban metszik.

E tételt abban az esetben, midőn a kúpszeletsor A, B, C, D alappontjai valósak, a következőképen szokás bebizonyítani:

Tetszés szerinti g egyenes metszéspontjait az $ABCD$ négyszög

$$|AB|, \; |CD|; \quad |AD|, \; |BC|$$

átellenes oldalaival, és a kúpszeletsor egyik k elemével megfelelően E, E_1, F, F_1, X, X_1-nek nevezvén,

$$A(XX_1BD) \barwedge C(XX_1BD)$$

és innen

$$(XX_1EF) \barwedge (XX_1F_1E_1) \barwedge (X_1XE_1F_1);$$

a miből látható, hogy E, E_1; F, F_1; X, X_1, egy involúcziós pontsornak kapcsolt pontpárjai, és minthogy ez már az első két pontpárból meg van határozva, k változásával a kúpszeletsorban, az X, X_1 pontpárok involúcziós pontsort írnak le.

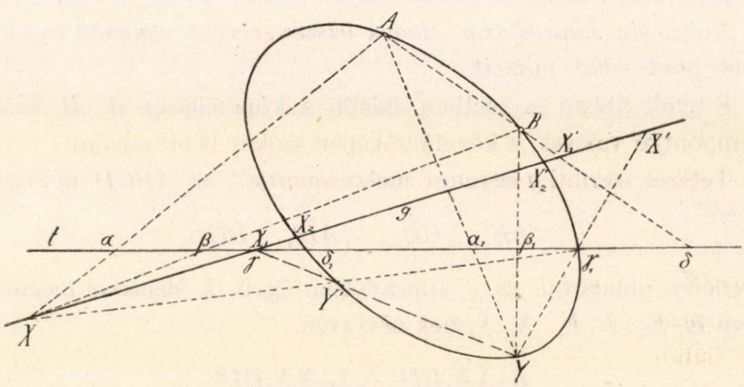
E sorok czélja a tételt azokra az esetekre is bebizonyítani, a midőn I.) az alappontok közűl kettő valós, a másik kettő pedig kapcsolt-képzetes; II.) a négy alappont két kapcsolt-képzetes pontpárból áll.

I.) Nevezzük (1. ábra) a kúpszeletsor két valós alappontját A, B-nek; annak az elliptikus involúcziós pontsornak sorozóját, melynek képzetes aszimptotái a másik két alappontot képezik, t-nek; végül a kúpszeletsort metsző egyenest g-nek.

A kúpszeletsornak a g egyenes tetszés szerinti X pontján átmenő k kúpszeletét a következőképen szerkeszthetjük meg:

$$|AX|, \; |BX|$$

egyenesek t-t az α, β pontokban metszi; ezekhez kapcsolt pontok az involucziós pontsorban: α_1, β_1. Ha $|A\alpha_1|$, $|B\beta_1|$ egyenespárnak metszéspontját Y-nak nevezzük, akkor a k kúpszelet képződménye annak a két projektív sugársornak, mely közűl az egyiknek sugarai az adott involúcziós pontsornak összes pontjait X-szel, a másiknak sugarai az előbbihez kapcsolt pontokat Y-nal kapcsolják. t-nek pólusa a k kúpszeletre vonatkozólag, mint ismeretes, az $|XY|$ egyenesen fekszik.



1. ábra.

A g egyenes és k kúpszelet második metszéspontját X'-et megtaláljuk, ha g és t metszéspontjához $(g, t) = \gamma$-hoz a kapcsolt γ_1 pontot Y-ból g-re vetítjük.

A $|\gamma Y|$ és $|\gamma_1 X|$ egyeneseknek Y' metszéspontja, tekintve, hogy γ, γ_1 az adott involúcziós sornak kapcsolt pontpárja, szintén pontja k-nak; ennélfogva t-nek a k-ra vonatkozó pólusa az $|XY|$, $|X'Y'|$ egyeneseknek metszéspontja, minthogy az $XX'YY'$ négyszög a k kúpszeletbe be van írva és $|\gamma\gamma_1|$ e négyszögnek egyik átlója. Ebből látható, hogy a k kúpszelet egyszersmind képződménye ama két projektív sugársornak is, melynek megfelelő sugarai, az adott involúcziós pontsor kapcsolt pontpárjait X', Y'-vel kapcsolják.

Az Y, Y' pontokról kimutatható, hogy ezek, mialatt X, X' pont a g-n változik, vagyis k kúpszelet a sor többi elemeinek helyzetét foglalja el, a γ_1 ponton átmenő $\varkappa$ kúpszeletet írnak le; a miből már következni fog — tekintettel lévén arra, hogy az $|YY'|$ egyenes az állandó γ ponton átmegy —, hogy az Y, Y' pontpárak $\varkappa$-án, és így ezeknek X, X' vetületei γ_1-ből g-re, involucziós pontsort alkotnak.

Ha ugyanis X pont a g-n mozog, az $|A\alpha|$ és $|B\beta|$ sugarak, melyek X-ben találkoznak, két projektív sugársort írnak le, és így az $|A\alpha_1|$ és $|B\beta_1|$ sugarak szintén két projektív sugársort fognak leírni; ez utóbbi sugársorok megfelelő sugarainak metszéspontjai pedig az Y pontok.

A midőn az X, γ-ba kerül, a hozzá tartozó Y, a γ_1 pont; tehát γ_1 a $\varkappa$ kúpszeleten fekszik, a mivel az az állításunk, hogy az X, X' pontok, mint a változó k kúpszeletnek metszéspontjai a g-vel involúcziós pontsort képeznek, — be van bizonyítva.

A midőn az X pont, a t egyenes γ pontjába jut, a k kúpszelet elfajul t és $|AB|$ egyenessé, tehát e két egyenesnek X_1, X_1' metszéspontja g-vel a g-n kimetszett involucziós pontsornak szintén kapcsolt pontpárja lesz.

Jegyzet. 1. Ha a g egyenes, az $|AB|$ és t egyenes δ metszéspontjához kapcsolt δ_1 ponton megy át, akkor a $\varkappa$ kúpszelet *egyenespárrá* fajul el, mert az $|A\alpha_1|$, $|B\beta_1|$ sugarak által leírt sugársorok perspektív helyzetűek lesznek; ez egyenesek közül az egyik $|AB|$ a δ ponton, a másik a δ_1 ponton megy át. Minden X ponthoz tartozik egy másik metszéspont X', és ehhez egy Y' pont; az Y és Y' pontoknak vetülete δ-ból g-re: X, illetve X'.

Az X és Y pontok g-, illetve $\varkappa$-án projektív pontsorokat írnak le, és minthogy Y-nak vetülete δ-ból a g-re X', az $(X, \ldots)$ és $(X', \ldots)$ pontsorok is projektívek. De ezek azon kívül involúcziós helyzetűek is, mert X-nek megfelel a második sorban X', és X'-nek megfelel a második sorban (Y' közvetitésével) az X pont.

2. $\varkappa$ kúpszelet X_2, X_2' metszéspontja g-vel szintén kapcsolt pontjai az X, X' pontpáraktól leírt involúcziós sornak, és mint könnyen látható: közös kapcsolt pontpárja amaz involúcziós pontsoroknak, melyek az adott $(\alpha, \alpha_1; \beta, \beta_1; \ldots)$ involúcziós pontsornak vetületei A és B-ből g egyenesre.

II.) Ezután bebizonyítjuk DESARGUES tételét arra az esetre, a midőn a kúpszeletsor alappontjai az a, b sorozókon fekvő elliptikus involúcziós pontsorok képzetes aszimptotái.

Nevezzük e végből az a és b-n adott involúcziós pontsorok kapcsolt pontpárjait általánosan: A_i, A'_i-nek, illetve B_i, B'_i-nek; a, b metszéspontját $A \equiv B$-nek; az evvel kapcsolt pontot a-n, valamint b-n: A', B'-nek; végre $|A'B'|$ egyenest röviden c-nek.

Először kimutatjuk, hogy *«ha a és b sorozókon adott involúcziós pontsor tetszőleges A_i, A'_i; B_i, B'_i kapcsolt pontpárjain át kúpszeletet fektetünk, e kúpszeletek, bármint válasszuk is az A_i, A'_i; B_i, B'_i kapcsolt pontpárakat, c-t egy és ugyanazon involucziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban, C_i, C'_i-ben, metszik, melynek egyik kapcsolt pontpárja A', B'»*.

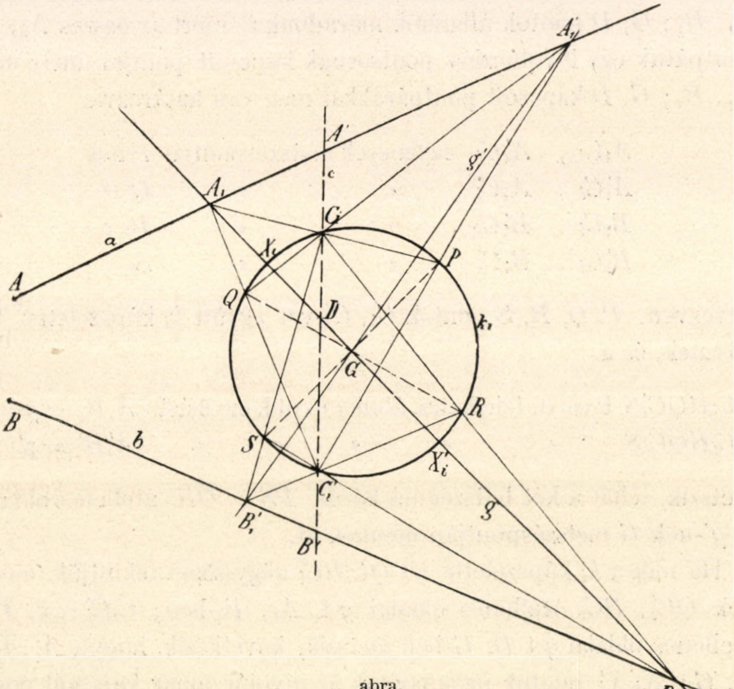
Ha A_i, A'_i; A_j, A'_j az a-n, B_i, B'_i; B_j, B'_j a b-n fekvő involúcziós pontsornak két kapcsolt pontpárja, és az A_i, A'_i, B_i, B'_i, valamint az A_j, A'_j, B_j, B'_j pontokon átmenő tetszőleges kúpszelet metszőpontja c-vel C_i, C'_i, illetve C_j, C'_j — akkor kimutatandó, hogy A', B'; C_i, C'_i; C_j, C' egy involúcziós pontsornak kapcsolt pontpárjai lesznek.

Az A_i, A'_i, C_i, C'_i, B_j, B'_j pontok ugyanazon kúpszeleten feküsznek, mert a négy első ponton átmenő kúpszelet b-t oly két pontban metszi, mely B, B'; B_i, B'_i-vel involúcziót képez; ha tehát a kúpszelet átmegy B_j-n, akkor át fog menni B'_j-n is.

A C_i, C'_i, B_j, B'_j, A_j, A'_j pontok szintén kúpszeleten feküsznek, mert a négy első ponton átmenő összes kúpszeletek a-t oly pontpárakban metszik, melyek A, A'; A_i, A'_i pontpárakkal együtt involúcziót alkotnak; végre B_j, B'_j, A_j, A'_j, C_j, C'_j pontokon átmenő kúpszelet c-t oly pontpárban C_j, C'_j-ben metszi, mely A', B'; C_i, C'_i kapcsolt pontpárak meghatározta involúcziónak egyik kapcsolt pontpárja.

Mint e tulajdonságnak különös esete következik, ha a sík összes pontjain át azokat az egyenes párakat meghúzzuk, melyek az a, b egyeneseket a rajtuk adott involúcziós pontsorok kapcsolt pontpárjaiban metszik, hogy akkor az összes ily tulajdonságú egyeneseket (a, b) ponthoz kapcsolt A', B' pontok összekötő c egyenesét, egy és ugyanazon involúcziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban metszik, — mert ezek az egyenespárak elfajult kúpszeleteknek tekinthetők.

Ha C_i, C_i' a c-n fekvő és az adott $(A_i, A_i'; \ldots)$, $(B_i, B_i'; \ldots)$ involucziós pontsorokkal meghatározott involucziós pontsornak egyik elempárja, akkor a kúpszeletsor bizonyos k_i kúpszelete képződménye annak a két projektiv sugársornak, melynek megfelelő



2. ábra.

sugarai az a-n (vagy b-n) adott involucziós pontsorok kapcsolt elemeit a C_i, C_i' pontokból vetítik.

E változó k_i kúpszeletekről már most be fogjuk bizonyítani, hogy ezek egy tetszőleges g egyenest involúcziós pontsorban metszik, — ez lévén Desargues tétele.

Nevezzük (2. ábra) a g egyenes metszéspontját a-val és b-vel: A_1, B_1-nek; az ezekkel kapcsolt pontokat A_1', B_1'-nek; az $|A_1'B_1'|$ egyenest g'-nek; a g és g' metszéspontját G-nek; g és c metszéspontját D-nek; a k_i kúpszelet és a g egyenes metszéspontjait X_i, X'_i-nek. E szerint

$$|A_1B_1| \equiv g, \ |A'_1B'_1| \equiv g', \ (g, g') \equiv G, \ (g, c) = D, \ (g, k_i) \equiv X_iX'_i.$$

Ha kimutatjuk, hogy az A_1, B_1; G, D; X_i, X_i pontok involúczióban vannak, akkor a tételben kifejezett tulajdonság be van bizonyitva, mert C_i, C''_i pontok változásával k_i, és így X_i, X'_i is változik, de az A_1, B_1; G, D pontok állandók maradnak és ezért az összes X_i, X'_i pontpárak egy involúcziós pontsornak kapcsolt pontjai, mely már A_1, B_1; G, D kapcsolt pontpárakkal meg van határozva.

$\lvert A_1C_i \rvert$, $\lvert A'_1C'_i \rvert$	egyenesek	metszéspontját	P-nek	
$\lvert A'_1C_i \rvert$, $\lvert A_1C'_i \rvert$	«	«	Q-	«
$\lvert B_1C_i \rvert$, $\lvert B'_1C'_i \rvert$	«	«	R-	«
$\lvert B'_1C_i \rvert$, $\lvert B_1C'_i \rvert$	«	«	S-	«

nevezvén, P, Q, R, S pontok C_i, C'_i-vel együtt k_i kúpszeleten feküsznek, és a

$PC_iRQC'_iS$	PASCAL-féle	hatsz.	átellenes	old.	egymást	$\lvert A_1B_1 \rvert \equiv g$-ben
PC'_iRQC_iS	«	«	«	«	«	$\lvert A'_1B' \rvert = g'$- «

metszik, tehát a két hatszögnek közös $|PS|$, $|QR|$ átellenes oldalai g, g'-nek G metszéspontján mennek át.

Ha még a k_i kúpszeletbe írt $QC_iRC'_i$ négyszöget tekintjük, melynek QC'_i, RC_i átellenes oldalai g-t A_1, B_1-ben; $C_iC'_i \equiv c$, RQ átellenes oldalai g-t D, G-ben metszik, következik, hogy a A_1, B_1; D, G; $X_i\,X'_i$ pontok ugyanannak az involúcziónak kapcsolt pontpárjai, — a mivel a tételben kifejezett tulajdonság be van bizonyitva.

Klug Lipót.

A KÖRMÉRÉS TÖRTÉNETE ÉS ELMÉLETE.

(Ötödik közlemény.)

3. *Legendre segédtételei. I. Legyenek az*

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\cdots}}}$$

végtelen láncztörtben $m, n, m', n', \ldots$ *mindannyian pozitiv vagy negativ egész számok, továbbá legyen*

$$\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \ldots$$

csupa valódi tört: akkor a végtelen láncztört értéke általában (azaz könnyen felismerhető kivételektől eltekintve) nem lehet ráczionális szám.

II. *Az előbbi tétel megtartja érvényességét, ha az*

$$\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \ldots$$

sorozat elején áltörtek is fordulnak elő, hacsak egy bizonyos helytől kezdve csupa valódi tört következik.

E tételek bebizonyításánál feltehető, hogy az

$$n, n', n'', \ldots$$

nevezők mindannyian pozitiv előjelüek, mert a negativ nevezők előjelét igen egyszerű átalakítással lehet pozitivra változtatnunk. Ha pl. n' negativ, akkor csak m', n' és m'' előjelét kell megváltoztatnunk, hogy a láncztört értéke ugyanaz maradjon, de n' helyébe pozitiv nevezőt nyerjünk.

A mi most már különösen az első tételben említett esetet illeti, ekkor — mint tudjuk — a közelítő törtek mindannyian valódi törtek s ugyanaz áll

$$\cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \cdots}}$$

közelítő törtjeiről. Az adott láncztört értékére vonatkozólag tehát a következő határok léteznek:

$$\frac{m}{n+1}, \quad \frac{m}{n-1}.$$

Ennélfogva a láncztört értéke mindig a zérustól különböző, m-mel megegyező előjelű valódi tört s csak akkor lehet egyenlő a pozitiv vagy negativ egységgel, ha

$$n-1=|m|$$

továbbá

$$\cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \cdots}}$$

értéke -1.

Ezt tudván, vizsgáljuk meg részletesen, hogy minő alakkal kell láncztörtünknek bírnia, hogy értéke $+1$ vagy -1 legyen, továbbá, hogy mikor lehet értéke valamely $\frac{B}{A}$ ráczionális (valódi) törttel egyenlő.

Ha láncztörtünk értéke akár a pozitiv, akár a negativ egységgel egyenlő, mindkét esetben

$$\cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \cdots}}$$

értéke -1. De e láncztört egészen hasonló szerkezetű, mint az eredeti, tehát értéke csak akkor lehet -1, ha m' negativ szám, mondjuk $-p'$, továbbá

$$n'-1=|m'|$$

vagyis

$$n'=p'+1$$

és

$$\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\ddots}}$$

értéke -1.

Ez utóbbi követelés megint feltételezi, hogy

$$m''=-p''$$
$$n''=\;p''+1$$

és

$$\cfrac{m'''}{n'''+\cfrac{m^{\mathrm{IV}}}{n^{\mathrm{IV}}+\ddots}}$$

értéke -1.

E gondolat-menet akárhányszor ismételhető. Tehát láncztörtünk csak akkor lehet egyenlővé a pozitiv vagy negativ egységgel, ha ily alakú:

$$\pm\cfrac{p}{p+1-\cfrac{p'}{p'+1-\cfrac{p''}{p''+1-\ddots}}} \tag{a}$$

Tegyük most már fel, hogy láncztörtünk értékét az A és B egész számokból képezett $\frac{B}{A}$ hányados fejezze ki. Ekkor az

$$A, B, C, D, E, \ldots$$

sorozat úgy határozható meg, hogy nemcsak

$$\frac{B}{A}=\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\cdots}}}$$

hanem egyszersmind

$$\frac{C}{B}=\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\cdots}}}$$

$$\frac{D}{C}=\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\cdots}}$$

stb. Még pedig itt nem csak A és B, hanem $C, D, E, \ldots$ is egész számok. Ugyanis a

$$\frac{B}{A}=\frac{m}{n+\frac{C}{B}},$$

$$\frac{C}{B}=\frac{m'}{n'+\frac{D}{C}},$$

$$\frac{D}{C}=\frac{m''}{n''+\frac{E}{D}},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

egyenletekből

$$\begin{aligned}C&=m\ A-n\ B,\\ D&=m'\ B-n'\ C,\\ E&=m''C-n''D,\\ &\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

A szóban forgó számok tehát A-ból, B-ből, továbbá az

$$m,\ m',\ m'',\ \ldots$$
$$n,\ n',\ n'',\ \ldots$$

egész számokból egész műveletekkel adódnak ki s így maguk is egész számok.

Ha még áttérünk az abszolut értékekre, akkor

$$|A|, |B|, |C|, \ldots, |K|, |L|, \ldots$$

soha nem növekedő pozitiv egész számok sorozata. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha egy bizonyos helyen beáll az a körülmény, hogy két egymás után következő szám egymással egyenlő. Pl.

$$|K| = |L|.$$

De akkor a

$$\frac{L}{K} = \cfrac{m^{(k)}}{n^{(k)} + \cfrac{m^{(k+1)}}{n^{(k+1)} + \ldots}}$$

láncztört (α) alakú lesz. *Az első tételben említett láncztört tehát csakis akkor lehet ráczionális értékű, ha vagy maga vagy elejének elhagyása után valamelyik maradékláncztört (α) alakú.*

Áttérendő az I. tételnek II. alatti általánosítására, tegyük fel, hogy az

$$\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \frac{m'''}{n'''}, \ldots$$

sorozatban pl. $\frac{m'''}{n'''}$-től kezdve valódi törtek fordulnak elő, odáig azonban áltörtek is vannak. Ekkor

$$\omega''' = \cfrac{m'''}{n''' + \cfrac{m^{\text{IV}}}{n^{\text{IV}} + \ldots}}$$

az I. tétel értelmében csak akkor lehet ráczionális szám, ha vagy maga vagy valamelyik maradéka (α) alakú. Ha tehát ezt az esetet kizárjuk, ω''' irráczionális szám és

$$\omega'' = \frac{m''}{n'' + \omega'''}, \quad \omega' = \frac{m'}{n' + \omega''}, \quad \omega = \frac{m}{n + \omega},$$

szintén olyanok. De ω épen az adott láncztört értéke.

4. *Lambert tétele.* Legyen x az m és n egész számok hányadosa. Az

$$x = \frac{m}{n}$$

értékét a tg. x előbb levezetett alakjába betévén, leszen:

$$\operatorname{tg.}\frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - .}}}}$$

Itt

$$\frac{m^2}{3n},\ \frac{m^2}{5n},\ \frac{m^2}{7n},\ \ldots$$

fogyó számoknak sorozata, melynek határértéke zérus. Láncztörtünkre ennélfogva alkalmazhatók LEGENDRE segédtételei s ezek értelmében tg. $\frac{m}{n}$ nem lehet ráczionális szám. Tehát *ráczionális számnak tangense nem lehet maga is ráczionális szám.* Kivételt egyedül $x = 0$ tesz, melyet összes vizsgálatainkból kizártunk.

5. *π és π^2 irráczionális volta.* Ha $x = \frac{\pi}{4}$, akkor tg $x = 1$. Ha tehát π-ről feltesszük, hogy ráczionális szám, akkor ellenmondásba keveredünk LAMBERT imént igazolt tételével. Ennélfogva π irráczionális szám.

Sőt LEGENDRE kimutatta, hogy π^2 sem lehet ráczionális szám. Ha ugyanis $x = \pi$, akkor tg. $x = 0$, vagyis ez esetben

$$1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - .}}}$$

értéke ∞, a mi csak úgy lehet, hogy ekkor

$$3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{x^2}{9-\ddots}}}$$

értéke zérus. Más szóval

$$3=\cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\cfrac{\pi^2}{9-\ddots}}}$$

Ha most

$$\pi^2=\frac{m}{n}$$

volna, akkor a következő egyenletet nyernők:

$$3=\cfrac{\frac{m}{n}}{5-\cfrac{\frac{m}{n}}{7-\cfrac{\frac{m}{n}}{9-\ddots}}}$$

vagyis

$$3=\cfrac{m}{5n-\cfrac{m}{7-\cfrac{m}{9n-\cfrac{m}{11-\ddots}}}}$$

De ez megint lehetetlen, mert ellenkezik LEGENDRE segédtételeivel.

6. HERMITE-*nek* GORDAN-*hoz intézett leveléről.* Az élő franczia mathematikusok nestorát a tg. x és a π-vel való foglalkozásra az

$$U\sin x+V\cos x+W$$

alakú kifejezések vizsgálata vezette, hol U, V és W raczionális egész függvényeket jelentenek. Gordan-hoz írt levele főleg azt a kérdést fejtegeti, miként választandók az U, V, W együtthatók, hogy (fokszámuk összegéhez képest)

$$U \sin x + V \cos x + W$$

hatványsora x-nek lehetőleg magas hatványával kezdődjék.

Az

$$U \sin x + V \cos x$$

alakú megoldások az összesek közül a legegyszerűbb osztályt képezik s elemzésük a tg. x láncztört alakjára egészen természetszerűen rávezet.

E vizsgálatokra itt persze nem terjeszkedünk, és tg. x láncztört alakjának Hermite-től eredő levezetését a széles keretből mintegy csak kiszakítva ismertetjük.

Kiinduló pontul szolgáljon a következő két figyelemre méltó függvénysorozat

$$A = \sin x, A_1 = \int_0^x xA\,dx, \quad A_2 = \int_0^x xA_1 dx, \ldots, A_{n+1} = \int_0^x xA_{n+1}\,dx, \ldots$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\sin x}{x}, \quad \mathfrak{A}_1 = -\frac{1}{x}\frac{d\mathfrak{A}}{dx}, \quad \mathfrak{A}_2 = -\frac{1}{x}\frac{d\mathfrak{A}}{dx}, \ldots, \mathfrak{A}_{n+1} = -\frac{1}{x}\frac{d\mathfrak{A}_n}{dx}, \ldots$$

melyekről könnyen igazolható, hogy itt

$$A_n = x^{2n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1.2.3\ldots 2k} \frac{x^{2k}}{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2n+1)}$$

és

$$\mathfrak{A}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1.2.3\ldots 2k} \frac{x^{2k}}{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2n+1)}.$$

Tehát

$$\mathfrak{A}_n = \frac{A_n}{x^{2n+1}},$$

honnan $\mathfrak{A}_{n+1}$ értelmezése szerint

$$\frac{A_{n+1}}{x^{2n+3}} = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{A_n}{x^{2n+1}}\right)$$

azaz

$$A_{n+1} = (2n+1)\,A_n - \frac{dA_n}{dx}\,x;$$

ámde

$$\frac{dA_n}{dx} = A_{n-1}\,x,$$

ennélfogva az első sorozatnak három szomszédos tagja közt a következő kapcsolat áll fenn:

$$A_{n+1} = (2n+1)\,A_n - A_{n-1}\,x^2.$$

E képlet segítségével mindenek előtt igen egyszerűen kimutatható, hogy A_n ily alakban fejezhető ki:

$$A_n = U\sin x + V\cos x,$$

hol U az x-nek *páros*, V pedig *páratlan* egész függvénye, még pedig egyik sem magasabb fokú mint n.

Valóban a legegyszerűbb esetekben

$$A = \sin x \qquad A_1 = \sin x - x\cos x$$

s innen az állítás általános érvényessége n-ről $(n+1)$-re történő következtetéssel igazolható.

A mi pedig Lambert láncztörtjét illeti, az az A_n-ek sorozatának szomszédos tagjai között talált kapcsolatból oly könnyen vezethető le, hogy Hermite további részletekbe nem is bocsátkozik.

Ugyanis

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin x} = 1 - x\operatorname{cotg} x$$

s innen

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1 - \frac{A_1}{A}}{x}$$

tehát

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - \frac{A_1}{A}}.$$

Továbbá az

$$A_{n+1} = (2n+1)\,A_n - A_{n-1}\,x^2$$

képletből

$$A_{n-1} = \frac{(2n+1)A_n - A_{n+1}}{x^2}$$

s

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{x^2}{2n+1 - \frac{A_{n+1}}{A_n}}.$$

Tehát

$$\frac{A_1}{A} = \frac{x^2}{3 - \frac{A_2}{A_1}},$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{x^2}{5 - \frac{A_3}{A_2}},$$

stb.

E képletsorozatból valóban

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \dots}}}$$

Itt persze mindazok a szigorúsági kérdések ismétlődnek, melyekkel a $\psi(z)$ láncztört alakjának levezetésénél találkoztunk. De megoldásuk is ugyanolyan s azért e helyen mellőzhető.

7. *Az A_n-ek általánosítása.* Míg egyrészt a megelőző vizsgálatok természetes keretének ismertetését nem nyújthatjuk, addig másrészt lehetetlen két kiegészítő megjegyzést elhallgatni. Az első annak feltüntetésére való, hogy az A_n-ek sorozata mennyiben tekintendő a π *transzczendens* voltára vonatkozó vizsgálatok csirájának. A másik megjegyzés csak π^2 irráczionális voltának bebizonyítására fog előkészíteni.

Az

$$A = \sin x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cos x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} dx$$

függvényből az

$$A_n = \int_0^x x A_{n-1}\, dx$$

rekurrens képlet szerint képezett sorozatot teljesen jellemzi az a tulajdonsága, hogy *csupa*

$$U \sin x + V \cos x = \overline{U} e^{ix} + \overline{V} e^{-ix}$$

alakú kifejezésből áll s hogy A *illetve* A_n *a*

$$\frac{dA}{dx} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\frac{dA_n}{dx} = x A_{n-1}$$

differencziálegyenletek megoldásai.

Most már könnyű a képezés e törvényét a következő követelésekké általánosítani:

Induljunk ki a

$$h_1 e^{\alpha_1 x} + h_1 e^{\alpha_2 x} + \ldots + h_m e^{\alpha_m x}$$

függvényből, hol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ a zérustól külömböző adott számértékek, a $h_1, h_2, \ldots, h_m$ együtthatók pedig x-nek adott *raczionális egész függvényei.* Legyen továbbá adva egy $f(x)$ *raczionális egész függvény.* Az

$$A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

sorozat úgy határozandó meg, hogy csupa

$$H_1 e^{\alpha_1 x} + H_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + H_m e^{\alpha_m x}$$

alakú tagból álljon, hol a kitevős függvények együtthatói *raczionális egész függvények* tartoznak lenni s úgy választandók, hogy a

$$\frac{dA}{dx} = h_1 e^{\alpha_1 x} + h_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + h_m e^{\alpha_m x}$$

$$\frac{dA_n}{dx} = f'(x)\, A_{n-1}$$

differencziálegyenleteknek eleget tegyenek.

Nincs okunk, hogy annak igazolásába bocsátkozzunk, miszerint e követelések ellenmondástól mentek s az A_n-eket egyértelműleg határozzák meg. Elég, ha felemlítjük, hogy HERMITE sorozata az

$$m = 2, \quad a_1 = -a_2 = i, \quad h_1 = h_2 = \frac{1}{2},$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - a)$$

esetnek felel meg. Az $f(x)$ e speciális választása részben oka annak, hogy HERMITE-nek — a BORCHARDT-hoz intézett levélben — csak a π^2 *irráczionális* voltát sikerült igazolni. A π *transzczendens* voltának bebizonyításánál más A_n-ek sorozatából fogunk kiindulni. Csak egy a lesz, s ez nem az

$$a^2 + 1 = 0$$

hanem csak az

$$a + 1 = 0$$

egyenletnek lesz gyöke, ellenben h és f választása tetszőleges lesz. De azért mégis csak HERMITE sorozata képezi e másik sorozatnak is mintáját.

8. *Az $\mathfrak{A}_n$-ek új kifejezése.* Az A_n-ek mellett szerepelt $\mathfrak{A}_n$-ek szintén igen figyelemre méltó függvények. Ezekkel akarunk most foglalkozni s bebizonyítani, hogy

$$\mathfrak{A}_n = \frac{1}{2.4\ldots 2n}\int_0^1 (1-z^2)^n \cos xz dz.$$

A legegyszerűbb esetben

$$\int_0^1 \cos xz dz = \left[\frac{\sin xz}{x}\right]_{z=0}^1 = \frac{\sin x}{x}$$

tehát ekkor valóban

$$\mathfrak{A} = \int_0^1 \cos xz dz.$$

Továbbá x szerint differencziálván, azután pedig párcziálisan integrálván, leszen:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dx} = -\int_0^1 z \sin xzdz = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin xz \,.\, d(1-z^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(1-z^2)\sin xz\Big]_{z=0}^{1} - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-z^2)\cos xzdz.$$

Tehát az $n=1$ esetben is igaz, hogy

$$\mathfrak{A}_1 = -\frac{1}{x}\,\frac{d\mathfrak{A}}{dx} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z^2)\cos xzdz.$$

Tegyük most fel, hogy tételünk egy bizonyos n-ig be van bizonyítva, s igazoljuk érvényességét $(n+1)$-re. Akkor

$$\frac{d\mathfrak{A}_n}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2.4\ldots 2n}\int_0^1 (1-z^2)^n \cos xzdz\right) =$$

$$= -\frac{1}{2.4\ldots 2n}\int_0^1 (1-z^2)^n z \sin xz\, dz =$$

$$= \frac{1}{2.4\ldots 2n\,(2n+2)}\int_0^1 \sin xz\; d\,(1-z^2)^{n+1}$$

s ha még párcziálisan integrálunk

$$\frac{d\mathfrak{A}_n}{dx} = -\frac{x}{2.4\ldots 2n\,(2n+2)}\int_0^1 (1-z^2)^{n+1}\cos xzdz$$

vagyis valóban

$$\mathfrak{A}_{n+1} = -\frac{1}{x}\,\frac{d\mathfrak{A}_n}{dx} = \frac{1}{2.4\ldots 2n\,(2n+2)}\int_0^1 (1-z^2)^{n+1}\cos xz\, dz.$$

A legegyszerűbb esetekben a tétel igazolva van, tehát rendre helyes az $n=2, 3, \ldots$ esetekben is.

A levezetett integrál-képlet az A_n-nek is egy új kifejezését adja, hogy t. i.:

$$A_n = \frac{x^{2n+1}}{2.4\ldots 2n} \int_0^1 (1-z^2)^n \cos xz \,.\, dz.$$

Ezt megjegyezvén, az ismertetendő levelek közül a másodikra térhetünk át.

9. HERMITE-*nek* BORCHARDT-*hoz intézett levele.* Ennek bennünket érdeklő része hű fordításban következőleg hangzik:

«Épenséggel nem fogom megkoczkáztatni, hogy a π szám transzczendens voltának bebizonyítását keressem. Ha mások meg merik azt próbálni, magam fogok legjobban örülni sikerüknek, ámde higyje el, kedves barátom, az nem csekély erőlködésükbe fog kerülni. Részemről mindössze azt tudom ismételni, mit már LAMBERT* megtett, csakhogy más módon, a következő egyenlőtlenséggel:

$$A_n = U\sin x + V\cos x = \frac{x^{2n+1}}{2.4\ldots 2n} \int_0^1 (1-z^2)^n \cos xz \,.\, dz,$$

hol A_n, U és V jelentése ugyanaz, mint GORDAN úrhoz intézett levelemben. Ön tudja, hogy U az x^2-nak egész számú együtthatókkal biró egész függvénye, még pedig $\frac{n}{2}$ vagy $\frac{n-1}{2}$-ed fokú a szerint, a mint n páros vagy páratlan. Ha pl. az első esetben $x = \frac{\pi}{2}$ helyettesítést végezzük s felteszszük, hogy $\frac{\pi^2}{4}$ a $\frac{b}{a}$ raczionális számmal egyenlő, akkor

$$U = \frac{N}{a^{\frac{1}{2}n}},$$

hol N egész szám, és a fennebbi reláczió értelmében

* Igazság szerint csak LEGENDRE.

$$\frac{N}{a^{\frac{1}{2}n}}=\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{a}\right)^{n}}{2\,.\,4\ldots 2n}\int_{0}^{1}(1-z^{2})^{n}\cos\frac{\pi z}{2}\,dz,$$

vagyis

$$N=\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)}{2\,.\,4\ldots 2n}\int_{0}^{1}(1-z^{2})^{n}\cos\frac{\pi z}{2}\,dz.$$

Amde ez nyilvánvaló lehetetlen, mert a jobb oldal anélkül, hogy valaha elenyésznék, n növekedtével minden határon túl kisebbedik, míg a bal oldalon egész szám áll.»

Kürschák József.

PHYSIKAI SZEMLE.

A levegő s más gázok ellenállása a bennök történő mozgások ellenében. — L. Cailletet et E. Colardeau, Expériences sur la résistence de l'air et de divers gaz au mouvement des corps. *C. R.* CXVII. köt. 145. l.

Az Eiffel-féle tornyon végzett szabad esési kisérletek * eredményeinek kiegészítése végett Cailletet és Colardeau a kisérletek uj sorozatát végezték abból a czélból, hogy megállapíttassék a gázok sűrűségének s nyomásának hatása a bennök történő mozgásokra.

Mozgó test gyanánt egy könnyű lemez szolgált, mely jól egyensúlyozva, tengelyen (szélkerék módjára) forgott. A forgatást egy súly eszközölte, mely fonálon függött s fonala a lemez tengelyén levő hengerre volt felcsavarva.

A forgó szerkezet erős falú, 300 liter térfogatú fémszekrényben volt elhelyezve. A szekrény úgy készült, hogy 8—10 atmoszféra nyomású gázzal legyen megtölthető. — A mozgás megindítása úgy történt, hogy az üres hengeralakú, felül nyitott súlyba egy mellékszelenczéből, melyben a nyomás ugyanaz volt, egy csap megfordításával több-kevesebb sörét-szemet ejtettek. A súly esése a forgó lemezre ható ellenállás miatt csakhamar egyenletessé vált, akkor t. i., a mikor a nehézség munkája az ellenálló erők munkájával egyenlővé lett. A forgásokat villamos csengő számlálta, s így meg volt határozható a sebesség. A súly kulcs segítségével kivülről felhúzható s a kisérlet ismételhető.

Az első kisérleti sorozatból kiderül, hogy a gáz ellenállása a benne mozgó lapok ellenében a sebesség négyzetével arányos.

C. berendezésében, ha *M* a hajtó súly tömegét jelenti

$$\frac{V^2}{M}=0{,}128.$$

A második kisérleti sorozatban külömböző nyomású levegővel volt a fémszekrény megtöltve. Kiderült, hogy a sebesség, melylyel a mozgás

---

* Lásd ezen kötet 28. l.

egyenletessé vált, arányos a nyomás második hatványával. E szerint a gázok ellenállása a bennök mozgó lapok ellenében a nyomással arányos.

Végül külömböző gázokkal tett kisérletek azt bizonyították, hogy az egyenletes mozgás bekövetkezése után a

levegőben ... ... $t_l^2=0{,}0616P$
szénsavban ... ... $t_s^2=0{,}0912P$
világító gázban ... ... $t_v^2=0{,}0274P$

hol t_l, t_s, t_v az illető gázra vonatkozó fordulati időt, P pedig a szekrényben uralkodó nyomást jelentik. A kisérletek 1—8 atm. nyomásu gázokban történtek. Ez adatokból az olvasható ki, hogy *a gáz ellenállása a benne történő mozgások ellenében a nyomással s a gáz sűrűségével arányos.*

Az itt közölt számadatok, t. i. 0,01616, 0,0912 és 0,0274 viszonyba állításából eredő értékek:

$$\frac{t_s}{t_l} = 1{,}48 \quad \frac{t_v}{t_l} = 0{,}44$$

elég jól egyeztek a kisérletekhez használt, kereskedésből vett s így nem egészen tiszta gázok közvetlenül lemért sűrűségeivel.

A gázoknak kisérletileg megállapított ellenállását Cailletet a következő képletben foglalja össze:

$$R=K.\,SDPV^2$$

hol S a mozgás irányára merőleges felület, D a gáz sűrűsége, P a nyomás, V pedig a sebesség. K a kisérlet állandója.

*

A tömegvonzás állandójának s a föld sűrűségének meghatározása. Alph. Berget, Détermination expérimentale de la constante de l'attraction universelle, ainsi que de la masse et de la densité de la Terre. *C. R.* CXVI. k. 1501 l.

A Newton-féle tömegvonzási törvényből következik, hogy végtelen kiterjedésű, ρ sűrűségű és e vastagságu sík tömegrétegnek vonzása a rajta kívül levő m tömegre, ha f a gravitatio állandóját jelöli:

$$f.\,2\pi e\rho m$$

Ennek a képletnek kisérleti feltételeit Berget Habay la Neuveben (Luxenburg) találta meg, hol de Curel földbirtokos az ő 32 hektárnyi tavát a kisérlet kedvéért lecsapolta s azután újra megtöltötte.

A mérés hydrogénes gravimeterrel történt. Ez a készülék a közönséges barométertől annyiban különbözik, hogy edénye zárva, beforrasztva van.

A zárt tér levegő helyett hydrogénnel van töltve, hogy a higanyfelület ne oxydálódhasson. A higanyoszlopot ez esetben az elzárt gáz feszitő ereje tartja s ha a hőmérséklet állandó, az egyensúlyozott oszlop magassága a nehézségerő gyorsulásától függ s ennek változásait megmutathatja; a higanyoszlop emelkedése nyilván a g értékének kisebbedését, alábbszállása pedig a g növekedését jelzi. — A módszer gyenge oldalai szembetünők: kevéssé érzékeny a g változásai iránt, ellenben nagyon érzékeny a hőmérséklet változásaival szemben, annyira, hogy a hőmérsékletnek $\frac{1}{1000}$-rész hőfokkal való változása a nehézség $\frac{1}{1000000}$-részénél nagyobb hatású. Ez okból csakis a legnagyobb óvatossággal birták Boussingault és Mascart a nehézségbeli változások megfigyelésére felhasználni.

B. a higanyoszlop ingadozásait a Fizeau-féle interentia-csíkok megfigyelésével mérte. Jól megvédvén készülékét a hőmérséklet változásai ellenében, a tó vizét lefolyatta, két ízben egymásután 50 cm.-rel; tehat összesen 1 m. vastagságu réteget folyatott le. A gravimeter higanyoszlopa $1{,}26.10^{-6}$ cm.-rel emelkedett. Ezután a tavat két — épen áradásban levő — folyóból 10 óra alatt előbbi szintjére ujra feltöltötte, a mikor a higanyoszlop eredeti hosszára visszaszállott.

Ezekből az adatokból a gravitatio állandójának értéke $6{,}80.10^{-8}$, a föld sűrűsége pedig 5,41.

*

Ez a kisérlet több szempontból érdekes. Először is érdekes, mert aligha mozgattak valaha ekkora tömeget — 320,000 tonnát — egyetlen physikai kisérlet kedveért.

Mi reánk nézve pedig külön azért érdekes, mert a kisérlet a M. P. L. I. köt. 98. lapján b. Eötvös L. elnökünktől kitűzött, a 233. s következő lapokon Gruber N. és Tangl K. tagtársainktól megoldott feladatnak nagyszabású végrehajtása.

Az adatok külömben a más módszerekkel, pl. csavarási mérleggel nyert adatokat pontosságra nézve még csak meg sem közelítik.

*

Az elektromosság terjedéssebességének új meghatározása. R. Blondlot, Détermination de la vitesse de propagation d'une perturbation électrique le long d'un fil de cuivre, à l'aide d'une méthode indépendente de toute théorie. *C. R.* CXVII. k. 543. l.

B. módszere, lényegében véve az általánosan ismeretes Wheatstone-féle eljárásnak egyszerüsítése és tökéletesítése. A kisérlethez szükséges két condensator hengeralakú lámpaüvegből készült, oly módon, hogy a lámpaüveg belső és külső fala stanniol-lemezzel vonatott be. A külső fegyverzeten 6—8 mm. szélességű gyűrű van lefejtve, miáltal a fegyverzet két egyenlőtlen, egymástól szigetelt gyűrű-alakú részre oszlott. A belső fegyverzetek egy Ruhmkorff-féle szikraindító sarkaival s azonfelül két fémgolyóval közlekednek; a golyókat 6—8 mm.-nyi köz választja el. A külső fegyverzetek keskenyebbik gyűrűihez rövid, vastag rézdrótok vannak kapcsolva; a drótok csúcsokban végződnek s a csúcsok — egymástól mintegy $^1/_2$ mm.-nyire — szemben állanak. Ugyanezen csúcsok a külső fegyverzet széles gyűrűpárjával is közlekednek vezetőleg, de úgy, hogy mindegyik csúcs és fegyverzetrész közé a nyilvános telefon-hálózatnak 1029 m., egy második kisérlet sorozatban pedig 1821,4 m. hosszaságú, 3 mm^2 keresztmetszetű rézdrótja van bekapcsolva. A két külső fegyverzet egyenlő nagyságú gyűrűit még egy-egy rövid, nedves zsineg köti össze egymással vezetőleg.

A Ruhmkorff-készülék megindíttatván, a condensatorok megtöltetnek; abban a pillanatban, melyben a belső fegyverzetekkel összekötött golyók között a szikra átcsap, a külső fegyverzeteken lekötött elektromosságok felszabadulnak s a csúcsok között szikrában kisülnek. Világos, hogy a kisülés *két* szikrában történik: az elsőben a keskeny gyűrűk töltése sül ki, a másodikban pedig a szélesebbik gyűrűpár elektromossága. Ez a szikra annyi idővel később csap át, a mennyi az elektromosságnak a közbeiktatott drót mentén való elterjedésre szükséges.

A szikrákat gyorsan forgó homorú tükörben nézvén, — ha a tengely a szikrával egyirányú, — a két szikra képe egymástól elválik, és pedig annál nagyobb közzel, mennél gyorsabb a tükör forgása. B. a tükröt 28 bichromátos elemmel hajtott Gramme-féle géppel forgatta úgy, hogy a tükör másodperczenként 233—309-szer megfordult. A fordulatok számát minden egyes kisérletben szabatosan működő számláló készülék adta meg.

A szikrák képét B., úgy mint Federsen, sötét kamarába rejtett fényérzékeny lemezekre vetette. Ha a szikraindító készülék folytonosan működik, néhány percz lefolyása alatt mindig több szikra-pár képe ráesett a lemezre. A képeket előidézvén, osztógép segítségével megmérte egymástól való távolságukat. Ez adatból s a forgások mp.-kénti számából ismeretessé vált az idő, mely két összetartozó szikra átütése között elmúlt.

A kisérletek eredményei a következők. Az 1029 méteres dróton a terj. sebesség 296,4 $\frac{km}{mp}$, az 1821,4 m. hosszúságú dróton pedig 298,0 $\frac{km}{mp}$. Mindegyik adat számos, egymásközt jól egyező adat átlagos értéke.

Az eredmények az eddig más utakon szerzett adatokkal jól egyeznek s a külömbözö hosszaságú drótokon végzett kisérletek adatainak teljes megegyezéséből az elekromosság egyenletes terjedésére lehet következtetni.

MEGOLDOTT FELADATOK.

13. *Adva van valamely ellipszisen a P pont. Szerkesztessék az adott ellipszisbe beírt ama háromszög, melynek egyik szögpontja P és magassági pontja az ellipszis középpontja.* (KLUG LIPÓT.)

*

Harmadik megoldás Csillag Vilmos műegyetemi tanársegéd úrtól.

A feladat megoldottnak tekinthető, ha a keresett háromszög P-vel átellenes s oldalának egyik pontja meg van határozva; hiszen s merőleges lesz az ellipszis P-n keresztülmenő átmérőjére. A most közlendő eljárás szintén az s egyenes egy bizonyos, jellemző pontját adja; azonban a szerkesztés az ellipszis bármely pontjára csak egy a föladat általánosításából nyerendő tétel alapján lesz használható. Magát a szerkesztést, valamint annak később történő általánosítását közvetlenül levezettem egy e folyóirat I. évf. 464—469. lapjain tárgyalt, a háromszög magassági pontjára vonatkozó tételből, illetőleg az ott található ábrából és az általam hozzáfűzött kiegészítő megjegyzésből.

Talán legczélszerűbb lesz azon kezdeni, hogy megmagyarázom a mellékelt rajz keletkezését. (L. az ábrát.) *

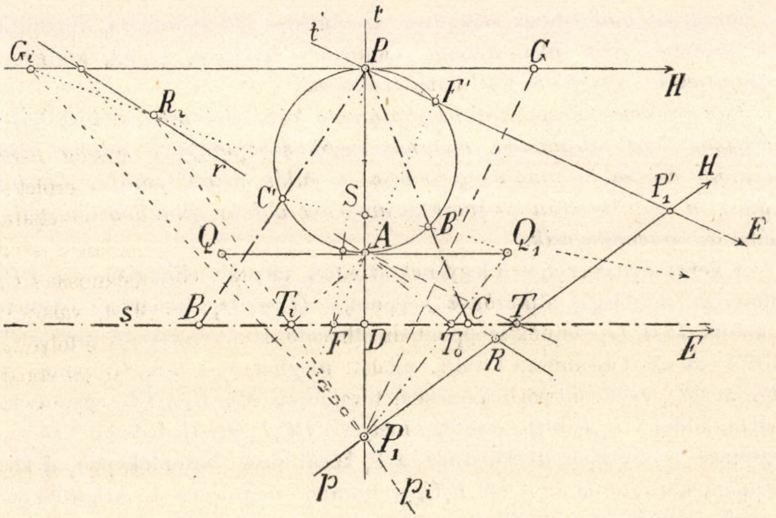
A szerkesztés rövidítése szempontjából, czélszerűnek bizonyúl az ellipszist a következő adatokból meghatározni: A középpontjából, P kerületi pontjából, ennek P_1 diametrálpontjából, az utóbbiban vont p érintőből és a P-n keresztül az $AP=t$ átmérőre húzott merőleges második metszéspontjából, G-ből. Hogy az így meghatározott kúpszelet ellipszis legyen, a G pontot a P és P_1 pontokhoz tartozó párhuzamos érintők között kell választanunk, minthogy minden ellipszis egész kiterjedésében két párhuzamos érintő között fekszik.

Nyilvánvaló, hogy GP és GP_1 az ellipszis konjugált irányai. Legyen

---

* Rajzunk betűzése a szövegben említett régibb ábráéval (I. évf. 465. lap) teljes összhangzásba jut, ha az utóbbiban az A és P betüket fölcseréljük.

most a P_1-ből GP-re vont merőleges t', akkor a t pontjai a nekik t'-n megfelelő konjugált polusokkal perspektiv helyzetűek úgy, hogy a t'-vel A középpontból vont párhuzamosnak a p érintővel való metszése T a perspektivczentrum. A T-ből AP-re bocsátott merőleges s máris háromszögünk P-vel átellenes oldala. Kiemeljük, hogy s midőn az adott kúpszelet ellipszis, ezt mindig valós pontokban metszi, mert $(s, t) = D$ pontja okvetlenül az ellipszis belsejében van. Ugyanis G a P és P_1 pontbeli párhuzamos érintők között fekszik; tehát könnyű látni, hogy $(t', p)=P_1'$ és vele a P_1P_1' felező pontja, T_1 szintén P_1 és $(PG, p) = H$ közé esik, minek következtében T-nek t-re orthogonál vetülete D szintén P_1, és a H projekcziója, P közé kerül.



Most határozzuk meg a konjugált póluspárok involuczióját az s egyenesen; ennek kettőspontjai az ellipszissel való metszéspontok lesznek. E czélra húzzuk meg az s irányával konjugált átmérőt párhuzamosan GP_1-hez, míg s-sel F-ben találkozik; azonkívül legyen $(s, t)=D$ és $(s, t')=E$. Ezzel az s egyenesen lévő konjugált pólusok hiperbolikus involucziója már meg van állapítva, mert F a középpontja, (D, E) pedig egyik pontpárja. Ha most involucziónkat az AP átmérővel bíró körre, jelesen annak P (vagy A) pontjából átvetítjük és észreveszszük, hogy FA a reá merőleges $PE=t'$-vel a segédkörön (F'-ben) találkozik, akkor a körön származó involucziónak pólusa az F pont. Ennélfogva, ha F-ből a körhöz vont érintők érintési pontjai B' és C', akkor végre $(PC', s)=B$, $(PB', s)=C$ lesznek a feladatban kivánt háromszög hiányzó csúcspontjai, mert az imént szerkesztett involuczióból világos, hogy

$$BF = FC$$

és

$$(BCDE) = -1\,;$$

de ekkor a bevezetésben idézett tétel (I. évf. 464. lap) alapján BCP és EFP háromszögeknek egy és ugyanazon magassági pontjuk van, mely itt az ellipszis középpontja A, mert hiszen

$$PA \perp EF$$

és

$$FA \perp EP.$$

Szerkesztésünk eddigi alakjában az ellipszis csúcspontjaira, valamint kör esetében nem alkalmazható. Azonban e kivételes esetek könnyen elintézhetők a következő tétel felhasználásával:

Egy rombus csúcspontjai meghatározta kúpszeletsor bármelyik kúpszeletébe beírt háromszög, melynek egyik szögpontja a rombus egy bizonyos csúcsa és magassági pontja az átlók metszéspontja, mindig valós; a mozdulatlan szögponttal átellenes oldala állandóan ugyanabba az egyenesbe esik.

A bebizonyítás czéljából legyenek az eddig tárgyalt ellipszisben a PP_1 átmérőre merőleges átmérőnek végpontjai Q és Q_1, tehát az említett rombus PQP_1Q_1; ennek szögpontjain áthaladó, konczentrikus kúpszeletek közül egy-egy folytonosan kiválik, mialatt meghatározó 5-ik G_i pontja a P-n át QQ_1-gyel vont párhuzamosban tovamozog. Míg G_i a PG_i egyenesen halad, addig a P_1 pont p_i érintője, melyet a $PP_1P_1QQ_1G_i$ hatszög Pascal-egyenese (r) nyomán szerkesztünk, a P_1 körűl forog; hasonlóképen A középpont körűl forog az A-ból P_1G_i-re huzandó merőleges is. A föntiekből tudjuk, hogy épen e merőleges metszése a p_i érintővel, T_i, ama jellemző pont, melyen a követelt háromszög P-vel átellenes oldala keresztülmegy. Ábránkból világos, hogy

$$(A^{\cdot}\ldots T_i\ldots)\ \overline{\underline{\wedge}}\ (P_1^{\cdot}\ldots G_i\ldots)\ \overline{\overline{\wedge}}\ (Q_1^{\cdot}\ldots G_i\ldots)\ \overline{\overline{\wedge}}\ (\ldots R_i\ldots)\ \overline{\overline{\wedge}}\ (P_1^{\cdot}\ldots T_i\ldots)$$

vagyis

$$(A^{\cdot}\ldots T_i\ldots)\ \overline{\wedge}\ (P_1^{\cdot}\ldots T_i\ldots), \tag{I}$$

sőt e két sugársor perspektív fekvésű; mert az AP_1 közös sugár önmagának felel meg. Az s perspektivtengely, a T_i pontok sorozója, pedig valóban merőleges PA-ra, minthogy a $G_i \equiv P$ helyzetben (P ekkor ellipszis csúcspontja) a P_1T_∞ érintő és a neki (I) szerint megfelelő AT_∞ sugár, mindketten merőlegesek PA-ra.

Ezzel a tétel be van bizonyítva és látjuk, hogy a rombus köré írható kúpszelet változásához képest, a rombus egy valamely csúcsának a tétel értelmében megfelelő, invariáns egyenes (s) mint két perspektiv sugársor átmetszése képződik.

Ha az általánosított szerkesztést a rombus oldalpárjaira, mint a sor elfajult kúpszeleteire alkalmazzuk, legott rájutunk az első megoldás analitikai úton nyert konstrukcziójára (II. évf. 274. lap), melyet immár nemcsak legegyszerűbbnek ismerünk föl, hanem projektiv geometriai indokolását is megadtuk.

Azonfelül ez utóbbi, az első megoldásával azonos szerkesztés mutatja legtisztábban, hogy a tételben szereplő háromszög mindig valós, mert az A középpontból pl. P_1Q_1-re ejtett merőleges talppontja T_0 kétségkívül a tárgyalt kúpszeletsor összes ellipsziseinek belsejében fekszik; a sor hiperboláit illetőleg pedig az s egyenes, a QQ_1 közös és valósan metsző átmérővel párhuzamos lévén, szintén valós szelője a hiperboláknak. Az s egyenest érintő (valós) kúpszelet e sorban nincsen.

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT ELŐADÁSAIRÓL.

Adalékok az entropia fogalmának meghatározásához.*

(Második és befejező közlemény.)

5. A Carnot-féle tétel.

Az $ABCD$ görbevonalú négyszög (2. ábra) minden további feltétel vagy megszorítás nélkül a Carnot-féle visszafordítható hőgép diagrammjának tekinthető. A 2. pontban az entropia meghatározására követett eljárás eredménye pedig közvetlenül a Carnot-féle tételt szolgáltatja; ha ugyanis a BC úton való isothermális összenyomásnál (illetőleg a CB-n való tágulásnál) elvezetendő (illetőleg közlendő) hő mennyisége Q_0, az isothermálisnak mérséklete T_0, és az ugyane nembeli mennyiségek az AD isothermálisra nézve Q és T, úgy az entropia meghatározása szerint

$$\frac{Q}{T}=\frac{Q_0}{T_0} \text{ vagy szintén } \frac{Q-Q_0}{Q}=\frac{T-T_0}{T},$$

mi nem egyéb a Carnot-Clausius-féle tétel kifejezőjénél, mely tétel tehát az entropia fogalmának közvetetlen folyományaként tünik elő, és e fogalom levezetésében használt eljárás természeténél fogva csupán a hőelmélet első főtételéből származik. A 2. pontban ugyanis csak a Laplace-Poisson-féle képletekre és a $C-c=R$ egyenlőségre támaszkodtunk, mely képletek levezetésére az első főtétel elegendő, sőt, mint tudva van, ez a levezetés a mechanikai hőelméletet meg is előzte.

Különben jól ismert dolog, hogy a Carnot-Clausius-féle tétel *gázakra nézve* a második főtételtől egészen függetlenül más módon is, a körfolyamban szereplő hőmennyiségek közvetlen meghatározása révén vezethető le s tetszés szerinti visszafordítható körfolyamokra általánosítható;** ez azon-

---

* Előadatott a Math. és Phys. Társ. 1893. febr. 9-én tartott rendes ülésén.

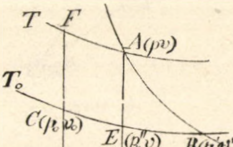
** L. például Verdet: i. m. I, 117—128; Bertrand: i. m. 27—31.

ban szintén csak annak köszönhető, hogy gázakra nézve eleve ismerjük az adiabatikus állapotváltozás törvényét. Úgy látszik tehát, hogy ha e törvényt minden más testre nézve is előzetesen ismernők, a CARNOT-CLAUSIUS-féle tétel is bármely testre közvetlenül le volna vezethető, s nem szorulnánk a perpetuális mozgásnak lehetetlenségére támaszkodó, vagy pedig a magasabb mérsékletek felé magától való hőáramlásnak lehetetlenségére támaszkodó közvetett bizonyításokra.

6. Az entropia vonatkozása némely körfolyamra.

Az előbbeni pont szerint az adiabatikus vonalak isentropikus tulajdonságából szükségképen folyik a CARNOT-CLAUSIUS-féle tétel. Ez azonban nem áll megfordítva is; azaz, ha két isothermális és két más vonaltól meghatározott körfolyamra nézve a CARNOT-CLAUSIUS-féle tétel áll, nem következik, hogy ez a más két vonal isentropikus. Kimutatható ugyanis, hogy ha két isothermális körfolyamot alkot oly két más vonallal, melyek általános egyenletei $v=f(H)$ illetőleg $v=Kf(H)$, hol $H=ap_0v_0T$ és K állandó, úgy e körfolyam a maximális ökonomikus együtthatóval jár,* de azért e vonalak nem isentropikusak. Míg tehát a CARNOT-CLAUSIUS-féle tétel gázakra nézve az entropia fogalmából önként következik, addig fordítva e tételből az entropia fogalma feltétlenül nem származtatható le (v. ö. 1. p.).

A következőkben előtüntetendő vonatkozások miatt csak két különös esetet fogunk figyelembe venni. Tekintsük először is azt az esetet, midőn a körfolyamot két isothermális (FA és CE, 4. ábra) és két isometrikus vonal (FC és AE) alkotja. Ez utóbbiakra nézve egyszerűen áll, hogy $v=f(H)=$ const. Ha a T és T_0 hőmérsékleteknél az FA és CE útakon kicserélt hőmennyiségek q illetőleg q_0, úgy $q/T=q_0/T_0$, mely viszonyok azonban nem fejezik ki A-nak C-re vonatkozó entropiáját. Ez, ha az AB adiabatikus vonalat húzzuk, a 3. pont szerint két entropia összegének tekinthető, melyek egyike E-nek C-re vonatkozó q_0/T_0 entropiája, a másik pedig B-nek E-re vonatkozó q_0'/T_0 entropiája.



4. ábra.

Mivel $q_0=p_0v_0\log(v/v_0)$ és $q_0'=p_0''v\log(v_0'/v)$, lészen a gáz entropiája:

$$\varphi=\frac{q_0}{T_0}+\frac{q_0'}{T_0}=R\log\frac{v}{v_0}+R\log\frac{v_0'}{v}.$$

* L. VERDET: i. m. I, 136.

Itt azonban a Laplace-Poisson-féle egyenletek szerint

$$\frac{v_0'}{v} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

tehát

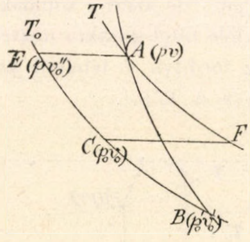
$$R \log \frac{v_0'}{v} = \frac{R}{k-1} \log \frac{T}{T_0} = c \log \frac{T}{T_0},$$

és ennélfogva

$$\varphi = R \log \frac{v}{v_0} + c \log \frac{T}{T_0},$$

mely érték megegyezik a II) alattival (4. p.). Azonban az összeg második tagját úgy is nyerhetjük, hogy az EA (vagy CF) úton át állandó térfogat mellett T_0-ról T-re való hevítésnél közölt cdT elemi hőmennyiségeknek azon mérsékletekhez való viszonyait összegezzük, a melyeknél a hőközlés történt, mert

$$c \log \frac{T}{T_0} = \int_{T_0}^{T} \frac{cdT}{T}.$$



5. ábra.

Tekintsük másodszor azt a különös esetet, midőn a körfolyamot két isothermális, AF és CE (5. ábra), és két isopiestikus (egyenlő nyomású) vonal, EA és FC alkotja. Az utóbbiak a fentemlített görbék azon különös esetei, melyekre nézve $v = f(H) = \text{const} \times H$. Ha e körfolyamba a T és T_0-nál az AF és CE útakon kicserélendő hőmennyiségek q és q_0, úgy $q/T = q_0/T_0$, mely egyenlő viszonyok azonban ismét nem fejezik ki az A-nak C-re vonatkozó entropiáját. Ez, ha az AB adiabatikus vonalat húzzuk. a 3. p. szerint egyenlőnek vehető A-nak (vagy B-nek) E-re vonatkozó entropiája és C-nek E-re vonatkozó entropiája különbségével. A-nak (vagy B-nek) E-re vonatkozó entropiája azonban

$$\frac{pv_0''}{T_0} \log \frac{v_0'}{v_0''};$$

C-nek E-re vonatkozó entropiája pedig

$$\frac{pv_0''}{T_0} \log \frac{v_0}{v_0''},$$

tehát A-nak entropiája C-re:

$$\varphi = \frac{pv_0''}{T_0} \log \frac{v_0'}{v_0''} - \frac{pv_0''}{T_0} \log \frac{v_0}{v_0''},$$

vagy, ha GAY-LUSSAC és MARIOTTE törvényeit alkalmazzuk:

$$\varphi = R \log \frac{p}{p_0'} - R \log \frac{p}{p_0}.$$

De p és p_0' egyazon adiabatikus vonalon fekvő pontokhoz tartoznak, tehát a LAPLACE-POISSON-féle egyenletek szerint

$$\frac{p}{p_0'} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{1-k}},$$

tehát

$$R \log \frac{p}{p_0'} = \frac{kR}{1-k} \log \frac{T_0}{T} = C \log \frac{T}{T_0},$$

és ennélfogva

$$\varphi = C \log \frac{T}{T_0} - R \log \frac{p}{p_0},$$

mely érték ismét megegyezik a III) alattival (4. pont). Azonban a jobboldalon levő különbség első tagját úgy is nyerhetjük, hogy az EA (vagy CF) úton át állandó nyomás mellett T_0-ról T-re való hevítésnél közölt CdT elemi hőmennyiségeknek azon mérsékletekhez való viszonyait összegezzük, a melyeknél a hőközlés történt, mert

$$C \log \frac{T}{T_0} = \int_{T_0}^{T} \frac{CdT}{T}.$$

E két esetből látjuk tehát, hogy a normális állapotból az adottba való átmenetnél az adiabatikus vonalak más vonalakkal (tehát péld. isometrikus és isopiestikus vonalakkal) helyettesíthetők, de ekkor az isothermális hőközlésen kivül az adiabatikusokat helyettesítő vonalakon is van hőközlés. Az entropiának azt a részét, mely az utóbbi hőközlésből származik, úgy nyerjük, hogy a közölt hő egyes elemeinek azokhoz a mérsékletekhez való viszonyait képezzük, melyeknél az elemi hőmennyiség közlése történt, és ezeket a viszonyokat összegezzük.

Látjuk továbbá, hogy az entropiának az isometrikus vonalra eső része $c \log (T/T_0)$, az isopiestikus vonalra eső része pedig $C \log (T/T_0)$. Ha tehát az átmenet A és C (6. ábra) között részben isometrikus úton (AK), részben isopiestikus úton (KC) történik, az entropia

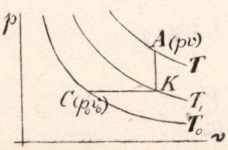
$$\varphi = c \log \frac{T}{T_1} + C \log \frac{T_1}{T_0},$$

és mivel állandó térfogat mellett $T/T_1 = p/p_0$, és állandó nyomás mellett $T_1/T_0 = v/v_0$, lészen

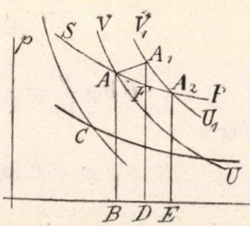
$$\varphi = c \log \frac{p}{p_0} + C \log \frac{v}{v_0},$$

mely képlet megegyezik az I) alattival (4. p.). Ezek szerint az I), II) és III) képletek, melyek az entropiának egyazon értékét fejezik ki, az átmenet tárgyalt három módjának felelnek meg.

A mondottak alapján megállapíthatjuk azt a fontos összefüggést is, mely az entropia változását tünteti elő abban az esetben, midőn a gáz, melynek állapotát A pont (7. ábra) jelezze, és környezete között hőkicserélődés történik.



6. ábra.



7. ábra.

Ez esetben A elmozdul, és a hőkicserélés és mérsékletváltozás mineműségétől függ, hogy A a rajta átmenő SP isothermális és VU adiabatikus vonal által alkotott négy mező melyikébe mozdul el.* Tegyük fel, hogy A_1 pontba mozdul el. Ez által a V_1U_1 adiabatikus vonalba jutott, a C normális pontra vonatkozó Q/T entropiája tehát A_1-nek A-ra vonatkozó entropiájával változott, és pedig a felvett esetben nagyobbodott. A változást az AA_2 isothermális vonalrészen kicserélt q hőnek e vonal hőmérsékletéhez való q/T viszonya fejezi ki. De mivel ez a hőmennyiség korántsem egyenlő a testtel közölt (esetleg tőle elvont) hővel, következik, hogy az entropia a testtel közölt vagy tőle elvont hővel *nem arányosan* változik; az arányosságnak épen csak akkor van helye, ha a hőkicserélés isothermalis módon történik.

Lássuk most azt az esetet, midőn a tetszés szerinti hőkicserélésben a kicserélt hőmennyiség végtelen kicsiny, mondjuk dQ. Ez esetben a dQ-nak megfelelő AA_1 elmozdulás is végtelen kicsiny, és a tőle előtüntetett állapotváltozás az AFA_1 úton való állapotváltozással helyettesíthető, mert a kezdeti és a végső állapot a két esetben ugyanaz, a gáztól az első állapotváltozásban végzett AA_1DB munka pedig a másodikban végzett $AFDB$ munkánál pedig csak az AFA_1 munkával nagyobb, de az AFA_1 terület a jelen esetben másodrendű végtelen kicsiny.

Mármost A_1 entropiája A-ra vonatkozólag egyenlő A_2-nek A-ra vonatkozó entropiájával; ez utóbbi pedig, ha az AF és FA_2 útakon isothermálisan kicserélt hőmennyiségek dQ' és dQ'', lészen $(dQ'+dQ'')/T$. De az

* Bertrand: i. m. 34.

imént mondottak szerint dQ' egy másodrendű végtelen kicsiny hőmennyiség híjján egyenlőnek vehető a dQ hőmennyiségnek munkára fordított részével, dQ''-re nézve pedig az isometrikus és isothermális vonalak által alkotott körfolyamra vonatkozó fejtegetéseink eredménye szerint áll hogy

$$\frac{dQ''}{T} = \frac{cdT}{T},$$

tehát szintén $dQ'' = cdT$ hol cdT egyenlő az FA_1 úton a gázzal közölt és a mérséklet és nyomás emelésére fordított hővel. E szerint $dQ' + dQ' = dQ$, az entropia változása tehát

$$\frac{dQ' + dQ''}{T} = \frac{dQ}{T},$$

honnét kitünik, hogy *tetszés szerinti, de végtelen kicsiny hőkicserélés esetében a test kezdetbeli entropiája a kicserélt végtelen kicsiny hőmennyiséggel arányosan változik.*

Kitünik továbbá, hogy míg dQ általában nem teljes differencziál, addig $(dQ)/T$ teljes differencziál, mi az $1/T$ együtthatónak (a Carnot-féle függvénynek) fontos tulajdonságát fejezi ki.

Kitünik még az a körülmény is, hogy valamint az isothermális vonalak fekvése a mérséklettől függ, úgy az adiabatikusoké a hőmennyiségtől függ; míg azonban az előbbenieket a mérséklet egymagában teljesen jellemzi, addig az utóbbiak jellemzője nem maga a hőmennyiség, hanem épen az entropia.

Végre, ha az entropia változására vonatkozó, imént levezetett eredményt az entropiának a 3. pont végén kifejezett tulajdonságával egybevetjük, az entropiára nézve a következő meghatározásra jutunk: *bármely úton kerüljön is valamely gáz egy adott állapotból valamely végállapotba, az utóbbiban meglevő és az előbbenire vonatkoztatott entropiáját nyerjük, ha az egyes útelemeken közölt (elvont) hőelemeknek azon mérsékletekhez való viszonyait összegezzük, a melyeknél a hőközlés (hőelvonás) történt.*

7. Az entropia méretei és egységei.

Az eddigiekben az entropiát mindig egységnyi tömegű testre vonatkoztattuk. Ha azonban a test tömege nem egyenlő az egységgel, a Q/T viszonyban Q értéke a test adott tömegére (m) vonatkozik, és az, a mit egyszerűen entropiának szokás nevezni, nem egyéb az általános entropiának az illető test tömegéhez való viszonyánál, mely viszony, ha külön elnevezésnek szüksége fenforogna, *fajlagos entropiának* volna nevezhető.

Ilyen szükség a thermodinamikai fejtegetésekben nem forog fen, miután a képletek mindvégig a tömegegységre vannak vonatkoztatva, de már fenforog az egységek és méretek szabatos meghatározásában.

A hőtani mennyiségek méretei és egységeinek meghatározása három rendszerben történhetik: 1) a kaloriméteres abszolut mértékrendszerben, 2) a nem kaloriméteres abszolut mértékrendszerben, 3) a közönséges mértékrendszerben.* Az általános entropia mérete mind a három rendszerben

$$\frac{\text{hőmennyiség}}{\text{mérséklet}},$$

minélfogva ugyancsak mind a három rendszerben

$$\text{fajlagos entropia} = \frac{\text{hőmennyiség}}{\text{tömeg} \times \text{mérséklet}};$$

a fajlagos entropia mérete tehát mind a három rendszerben megegyezik a fajhő méretével.

I. ÁLTALÁNOS ENTROPIA.

a) A kaloriméteres abszolut mértékrendszerben a hőmennyiség mérete, vagyis L^2MT^{-2}, megegyezik az energiáéval; a mérséklet mérete pedig L^2T^{-2}, tehát az általános entropia mérete egyszerűen M. Egysége ennélfogva a C. G. S.-rendszerben 1 g.

Ha azonban az *egységek nevezetét* keressük, nem elég, hogy a méreteknek puszta mathematikai formáját tekintsük, hanem figyelembe kell vennünk fizikai alapjukat is. Ennélfogva itt az 1 g egységhez még egy faji jelzőt, a «víz»-jelzőt kell kapcsolnunk.

Mivel ugyanis a kaloriméteres abszolut mértékrendszerben a hőmérséklet egysége *1 erg per gramm víz*, az ált. entropia egységének nevezete:

$$\frac{\text{erg}}{\text{erg : gramm víz}} = \text{gramm víz.}$$

Az általános entropiának tehát, mivel értéke bizonyos számú gramm vízzel van kifejezve, *vízérték* jellege van. Innét közvetetlenül folyik az a fontos, de azért korántsem magától érteni való tétel, melyet a hőelméleti művek minden megokolás nélkül szoktak kifejezni: *különböző állapotban levő több testből álló rendszer entropiája egyenlő az egyes testek entropiájának összegével.* Ugyanis minden egyes test entropiáját valamely vízérték fejezi ki, és e vízértékek, miként a kalorimétriában, minden további megszorítás vagy feltétel nélkül összegezhetők.

Megjegyezzük azonban, hogy a víznek, vagy általában valamely folyadéknak $\varphi = c \log (T/T_0)$ entropiája** (c a víz állandónak vett fajheve) csak

* V. ö. CZÓGLER: *Fizikai Egységek*, Budapest, 1891, VI. fejezet.
** BERTRAND: i. m. 90.

közelítőleg egyeztethető össze a gázak entropiájával;[1] a vízérték tehát itt azt jelenti, hogy ha a víz entropiája pontosan ugyanazon törvény alá esnék mint a gázaké (vagy más testeké), az illető test bizonyos számú gramm vízzel helyettesíthető volna.[2]

Ha azonban az ált. entropia egységének eredeti teljes nevezetét (1 erg per absz. hőfok) megtartjuk, a következő meghatározásra jutunk: az ált. entropia egységével az a test rendelkezik, mely az adott állapotabeli adiabatikus vonalról a normális állapotbeli adiabatikus vonalig az 1 absz. hőfokú isothermális mentén összeszoríttatván, 1 erggel egyenértékű hőt bocsát el magától; vagy tetszés szerinti absz. hőfokú isothermális mentén összeszoríttatván, annyi erggel egyenértékű hőt bocsát el magától, mint a hány fokú volt az illető isothermális. Ha tehát az összeszorítás $0 C^0$-ú vonalon történik, úgy (mivel $1 C^0 = 4{\cdot}2 \times 10^7$ absz. hőfok, és mivel az absz. zérusponttól számítva a víz fagyáspontja $= 273\ C^0$) a testnek $273 \times 4{\cdot}2 \times 10^7$ erggel egyenértékű hőt kell kiadnia, hogy entropiája az egység legyen.

b) A nem kaloriméteres abszolut mértékrendszerben valamely hőmennyiség mérete L^2MT^{-2}, a mérsékleté, mint puszta számé, 1; tehát az általános entropia mérete L^2MT^{-2}, egysége pedig a C. G. S. rendszerben *1 erg per C^0*. Az entropia egységével tehát az a test rendelkezik, mely az adott állapotbeli adiabatikus vonalról a normális adiabatikus vonalig a $0 C^0$-ú isothermálison összeszoríttatván, 273 erggel egyenértékű hőt bocsát el magától.

c) A közönséges mértékrendszerben az entropia egysége 1 gramm-kaloria per C^0; ennélfogva az általános entropia egységével az a test rendelkezik, mely az adott állapotbeli adiabatikus vonaltól a normális adiatikus vonalig a $0 C^0$-ú isothermálison összeszoríttatván, 273 gramm-kaloriát bocsát el magától.

Mivel 1 gramm-kal. $= 4{\cdot}2 \times 10^7$ erg, másrészt $1\ C^0 = 4{\cdot}2 \times 10^7$ erg per gramm víz, következik, hogy a közönséges mértékrendszerben kifejezett entropia számértékére nézve teljesen megegyezik a kaloriméteres absz. mértékrendszerben kifejezettel.

II. FAJLAGOS ENTROPIA.

Ennek mérete, miként fentebb már megjegyeztük, mind a három rendszerben megegyezik a fajhő méretével, mi az I), II) és III) alatti képletekből

---

[1] Az idézett képlet megegyezik a gázak entropiájának III) képletével (4. p.), ha a nyomásváltozások befolyását nem tekintjük, tehát $p = p_0$ és $c = C$ tétetik.

[2] A vízérték a kalorimétriában is csak annyiban helyettesítheti az illető testeket, a mennyiben felteszszük, hogy a víz a hevítéskor a helyettesítendő testekkel egyazon törvényt (a hőmérsékletnek a közölt hővel való arányossága) követ.

is következik. Ezekben ugyanis a logritmusok puszta számok, együtthatóik pedig c, C és R, R pedig $= C - c$.

Maxwell a munka és a hő differencziális kifejezéseinek ($dW = pdv$, $dQ = Td\varphi$) egybevetése alapján azt az analogiát állította fel, hogy a mérséklet a nyomásnak, az entropia pedig a térfogatnak felel meg.[1] A fajlagos entropia mérete azonban feljogosít, hogy a fajlagos entropiát a fajhővel analog fogalomnak tekintsük. Míg azonban a hevítés egy adott módjára nézve a fajhő egészben véve állandó együttható, a mérséklet pedig változó tényező ($dQ = cdT$), addig az isothermális hőközlésben az entropia a változó, a mérséklet pedig az állandó tényező.

Analogiánál tovább azonban itt sem mehetünk, vagyis az entropiát nem tekinthetjük az isothermális hőközlés fajhevének. A *fajhő* fogalom együttjár a *hevítés* fogalmával, *isothermális hevítés* pedig paradox fogalom volna. A fajhő általános meghatározása szerint $c = dQ/dT$: az isothermális hőkicserélésben $dT = 0$, dQ nem $= 0$, tehát $c = \infty$. A $dQ = Td\varphi$ meghatározásból csak az következik, hogy az isothermális hőkicserélésben az entropiával arányos hőt kell a testtel közölni, vagy ettől elvonni, hogy a mérséklet állandó maradjon.

a) A kaloriméteres absz. mértékrendszerben a fajlagos entropia, mérete szerint, puszta szám, egységének nevezete pedig a C. G. S.-rendszerben *gramm víz per gramm*, mi a fentebb *a)* alatt mondottak szerint *vizérték per tömegegység*.[2]

β) A nem kaloriméteres absz. mértékrendszerben a fajlagos entropia mérete L^2T^{-2}, C. G. S.-egysége pedig

$$1 \frac{\text{erg}}{\text{gramm} \times C^0}.$$

γ) A közönséges mértékrendszerben a fajl. entropia egysége

$$1 \frac{\text{gramm-kaloria}}{\text{gramm} \times C^0},$$

számértéke pedig megegyezik az absz. kaloriméteres mértékrendszerbelivel.

Mindezen egységek definicziói megegyeznek az *a)*, *b)* és *c)* alattiakkal, ha ottan *test* helyett *tömegegységnyi test* (1 gramm) tétetik.

Czógler Alajos.

[1] Maxwell: i. m. Auerbach ford. 197, Neesen ford. 221.

[2] *Fizikai Egységek* czímű munkámban a fajhőnek a kaloriméteres abszolut mértékrendszerbeli nevezete nincs meghatározva, de azért az ottani (71. l.) fejtegetésektől kitűnik, hogy a fajhő szabatos nevezete szintén *gramm-víz per gramm*, vagyis a fajhő sem egyéb tömegegységenkénti vízértéknél. Ha péld. azt mondjuk, hogy a higany fajheve 0·0335, ez tényleg annyit mond, hogy 1 gramm higany vízértéke 0·0335 gramm víz.

A KÖRMÉRÉS ELMÉLETE ÉS TÖRTÉNETE.

(Hatodik közlemény.)

VI. Az algebrai és a transzczendens számokról.

A π számnak valamint négyzetének irráczionális volta csak anynyit bizonyít, hogy a kör kiegyenesítése és quadraturája nem tartoznak a legegyszerűbb szerkesztési problémák közé, de nem dönti el azt, valjon nem követelnek-e egyáltalában lehetetlent. Azonban LAMBERT abban az akadémiai értekezésében, melyben a π számelméleti jellegéről először nyújtott a tudós világnak némi biztos ismeretet, ugyanott egyszersmind a mathematikusokat egy oly tétel bebizonyítására szólította fel, melylyel a kör quadraturájának évezredes kérdése teljesen elintézhető. A tétel úgy hangzik, *hogy a π szám nem tehet eleget oly algebrai egyenletnek, melyben az együtthatók raczionális egész számok.*

Hogy a körquadratura lehetetlensége e tételnek már csak egyszerű következménye, az könnyen igazolható. Annál több szó fért magához a tétel helyességéhez. Oly kiváló tekintélyek, mint EULER, LEGENDRE ugyan szintén úgy nyilatkoztak, hogy π alighanem — mint ma mondjuk — *transzczendens* szám, de ennek bebizonyítására jóval később még HERMITE sem vállalkozott. Mi több, a jelen század közepéig még az sem volt eldöntve, hogy a *raczionális egész együtthatókkal biró algebrai egyenletek megoldásain kívül léteznek-e más számok.* Az első lépés LAMBERT feladatának megoldásához tehát akkor történt, mikor LIOUVILLE-nek 1844-ben sikerült, egyes számokról kimutatnia azt a tulajdonságot, melyet LAMBERT a π-ről tűzött ki bebizonyítandónak. E vizsgálatok a Comptes rendus 18. kötetében jelentek meg először, 1851-ben pedig LIOUVILLE azokat saját journaljának 41. kötetében számos kiegészitéssel bővítve újból adta ki ily czímen: *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques.*

Addig a tránszczendens számok létezése már csak azért is igen kétes volt, mert nemcsak hogy *a négy alapművelet algebrai számokra alkalmazva megint algebrai számokat ad*, hanem *az algebrai számok körét akkor sem hagyjuk el, ha bárminő oly algebrai egyenletet oldunk meg, melynek együtthatói algebrai számok.*

A jelen fejezetet az imént mondottaknak igazolásával kezdjük meg, a mivel egyszersmind azt is kimutatjuk, hogy *az egységből megszerkeszthető vonaldarabok mérőszámai csak algebrai számok lehetnek.* Azután LIOUVILLE kutatásait ismertetjük.

1. *Az algebrai számok felosztása.* Ama műveleteknél, melyek algebrai számokat adnak, *néha* még egy igen figyelemre méltó körülmény fog fellépni, hogy t. az illető művelet algebrai *egész* számokból megint *egészeket* ad. Ugyanis az algebrai számokat is felosztjuk egészekre és törtekre.

E felosztás megértésére fogalmazzuk az algebrai számok definiczióját következőképen: *Valamely szám algebrai szám, ha oly*

$$(*)\qquad x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0$$

alakú egyenletnek tesz eleget, melyben az együtthatók raczionális számok.

Hogy e definiczió megegyezik avval, mely az algebrai számokat mint az $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a^{n-1}x+a^n=0$ raczionális *egész* együtthatókkal biró algebrai egyenletek gyökeit értelmezi, nem szorul magyarázatra.

Ha most már *valamely algebrai szám egésznek* mondatik, annak (KRONECKER terminologiája szerint) az a jelentése, hogy *oly* (*) *alakú egyenletnek tesz eleget, melynek együtthatói ráczionális egész számok.*

Pl. az ú. n. aranymetszésnél fellépő

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

algebrai *egész* szám, mert az

$$x^2+x-1=0$$

egyenletnek tesz eleget. Ellenben a raczionális

$$-\frac{1}{2}$$

és az irráczionális

$$\frac{\sqrt{5}}{2}$$

egyaránt törtek, mert ezeket az

$$x+\frac{1}{2}=0, \qquad x^2-\frac{5}{4}=0$$

egyenletek definiálják, melyekben tört együtthatók is vannak. Igaz, hogy a nevezők eltávolíthatók, de az így nyert

$$2x+1=0, \qquad 4x^2-5=0$$

egyenletekben a legmagasabb tag együtthatója nem az egység.

2. *Az algebrai számok egész kapcsolatai.* A legegyszerűbb műveletek, melyek algebrai számokból megint algebraiakat adnak, még pedig *egészekből* újra *egészeket:* az összevonás és a szorzás, tehát az ú. n. *egész műveletek.* Az α és β algebrai számok összege és szorzata helyett azonban mindjárt azoknak bármely oly

$$G(\alpha, \beta)$$

ráczionális egész függvényét vizsgálhatjuk, melyben az együtthatók ráczionális egész számok.

Az α szám tegyen eleget az

$$f(x) \equiv x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

egyenletnek, a β szám pedig ennek:

$$g(x) \equiv x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n = 0.$$

Mindkét egyenletben az együtthatók ráczionális számok, sőt ha α és β algebrai egész számok, akkor egyenleteink együtthatói ráczionális egész számok.

Továbbá jelöljük a következő $p=mn$ értéket

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{m-1} \\ \beta & \alpha\beta & \alpha^2\beta & \dots & \alpha^{m-1}\beta \\ \beta^2 & \alpha\beta^2 & \alpha^2\beta^2 & \dots & \alpha^{m-1}\beta^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta^{n-1} & \alpha\beta^{n-1} & \alpha^2\beta^{n-1} & \dots & \alpha^{m-1}\beta^{n-1} \end{array}$$

bármely rendben

$$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \dots \quad \omega_p$$

-vel s a vizsgálandó

$$G(\alpha, \beta)$$

függvény értékét ω-val.

Ekkor

$$\omega = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_p\omega_p$$

hol a $k_1, k_2, \dots$ együtthatók *ráczionális* számok, még pedig *egészek*, ha α és β *egész* algebrai számok. Ez világos, ha G-ben α-nak legfeljebb $(m-1)$-ső β-nak legfeljebb $(n-1)$-ső hatványa szerepel. Ha azonban magasabb hatványok is fordulnak elő, akkor ezeket előbb G-ből el kell távolítani, a mi következőleg lehetséges.

Legyen pl. G-ben α^{m+k} az α-nak legmagasabb előforduló hatványa; akkor írjuk helyébe a következő kifejezést:

$$-(a_1\alpha^{m+k-1} + a_2\alpha^{m+k-2} + \dots + a_m\alpha^k).$$

Ez meg van engedve, mert az

$$\alpha^k f(\alpha) = 0$$

egyenlet értelmében

$$\alpha^{m+k} = -(a_1\alpha^{m+k-1} + \dots + a_m\alpha^k).$$

Most már csak legfeljebb α^{m+k-1} fordul elő. A redukczió addig ismételhető, míg α-nak már csak legfeljebb $(m-1)$-ső hatványa marad meg. A mi β-t illeti, erre nézve hasonló redukcziónak van helye.

Ugyanily módon az

$$\omega\omega_1 = G(\alpha, \beta), \quad \omega\omega_2 = \alpha\, G(\alpha, \beta), \ldots \omega_p = \alpha^{m-1}\beta^{n-1}\, G(\alpha, \beta)$$

számok mind ily alakban fejezhetők ki:

$$\begin{aligned}
\omega\, \omega_1 &= k_{11}\omega_1 + k_{12}\omega_2 + \ldots + k_{1p}\omega_p \\
\omega\, \omega_2 &= k_{21}\omega_1 + k_{22}\omega_2 + \ldots + k_{1p}\omega_p \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\omega\, \omega_p &= k_{p1}\omega_1 + k_{p2}\omega_2 + \ldots + k_{pp}\omega_p\,.
\end{aligned}$$

Vagyis $\omega, \omega_1, \ldots \omega_p$ a következő egyenletrendszernek tesznek eleget:

$$\begin{aligned}
(k_{11} - \omega)\,\omega_1 + k_{12}\omega_2 + \ldots + k_{1p}\,\omega_p &= 0 \\
k_{21}\omega_1 + (k_{22} - \omega)\,\omega_2 + \ldots + k_{2p}\,\omega_p &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k_{p1}\omega_1 + k_{p2}\omega_2 + \ldots + (k_{pp} - \omega)\,\omega_p &= 0.
\end{aligned}$$

E rendszer $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$-ben homogén és lineáris, továbbá egy oly értékrendszer által van kielégítve, melyben $\omega_1 = 1$ szerepel. Ennélfogva ω a következő egyenletnek tartozik eleget tenni:

$$\begin{vmatrix}
k_{11} - \omega & k_{12} & \ldots & k_{1p} \\
k_{21} & k_{22} - \omega & \ldots & k_{2p} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
k_{p1} & k_{p2} & \ldots & k_{pp} - \omega
\end{vmatrix} = 0,$$

tehát ω algebrai szám. Még pedig abban az esetben, ha α és β *egész* algebrai számok, akkor ω is olyan.

A bebizonyítás menete több mint két algebrai szám függvényeire nézve teljesen ugyanaz s a következő eredményre vezet:

Az

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$$

algebrai számok bármely oly egész függvénye, melyben az együtthatók egész számok, megint algebrai szám, sőt algebrai egész szám mihelyt az α-k olyanok.

3. *Algebrai számok ráczionális kapcsolatai.*

Ha a az

$$a_0x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

ráczionális együtthatókkal biró egyenletnek (zérustól külömböző) gyöke, akkor $\frac{1}{a}$ az

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

egyenletnek tesz eleget, tehát szintén algebrai szám.

E megjegyzés alapján az előbb bebizonyitott tétel következőleg általánosítható:

Bármely szám, mely az

$$a_1, a_2, \ldots a_k$$

algebrai számokból a négy alapművelettel nyerhető, vagyis mint

$$a_1, a_2, \ldots a_k$$

-nak egész számú együtthatókkal biró ráczionális függvénye fejezhető ki, maga is algebrai szám.

Ugyanis bármely

$$\frac{G_1(a_1, a_2, \ldots, a_k)}{G_2(a_1, a_2, \ldots, a_k)}$$

hányadosban, hol G_1 és G_2 ráczionális egész függvények, úgy a számlálónak mint a nevezőnek értéke algebrai szám, tehát a nevező reciprok értéke szintén algebrai szám, és

$$G_1, \frac{1}{G_2}$$

algebrai számoknak szorzata nem kevésbbé az.

4. *Algebrai együtthatókkal biró algebrai egyenletek.* Ugyancsak algebrai számokra vezet bármely oly algebrai egyenlet megoldása, melyben az együtthatók (bármilyen) algebrai számok.

Legyen tehát adva egy ilyen egyenlet:

$$x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-1} + \ldots + \nu = 0$$

s jelentse ω ennek egyik gyökét.

Az

$$\alpha, \beta, \ldots, \nu$$

számokat értelmezzék rendre a következő ráczionális együtthatókkal biró egyenletek:

$$f_1(x) \equiv x^{m_1} + A_1 x^{m_1-1} + \ldots + A_{m_1} = 0$$
$$f_2(x) \equiv x^{m_2} + B_1 x^{m_2-1} + \ldots + B_{m_2} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n(x) \equiv x^{m_n} + N_1 x^{m_n-1} + \ldots + N_{m_n} = 0.$$

Jelentsék végre

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_j$$

rendre az

$$\omega^h \alpha^{h_1} \beta^{h_2} \ldots \nu^{h_n}$$

alakú szorzatokat, hol

$$h = 0, 1, \ldots, n-1$$
$$h_1 = 0, 1, \ldots, m_1-1$$
$$h_2 = 0, 1, \ldots, m_2-1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$h_n = 0, 1, \ldots, m_n-1$$

és

$$p = n m_1 m_2 \ldots m_n$$

értékeket veszik fel.

Ekkor ismeretes módon bármely

$$\omega\omega_j = G_j(\omega, \alpha, \beta, \ldots, \nu)$$

kifejezésből először ω-nak $(n-1)$-nél magasabb hatványai, azután rendre $\alpha, \beta, \ldots, \nu$-nek $(m_1-1), (m_2-1) \ldots, (m_n-1)$-nél magasabb hatványai eltávolíthatók, úgy hogy

$$\omega\omega_j = k_j\omega_1 + \ldots + k_{yp}\omega_p,$$

hol

$$k_{j_1} \ldots k_{jp}$$

ráczionális számok. Innen pedig az következik, hogy ω a

$$\begin{vmatrix} k_{11}-\omega & k_{12} & \dots & k_{1p} \\ k_{21} & k_{22}-\omega & \dots & k_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{p1} & k_{pp} & \dots & k_{pp}-\omega \end{vmatrix} = 0$$

egyenletnek tesz eleget, tehát ω *algebrai szám.*

Sőt ha $\alpha, \beta, \dots, \nu$ egész algebrai számok, akkor $k_{11}, \dots, k_{pp}$ szintén egész számok, tehát ω *ekkor algebrai egész szám.*

5. *A megszerkeszthető számok.* Hozzuk az imént mondottakat kapcsolatba a II. fejezet eredményeivel. Ott azt találtuk: *Hogy valamely egyenes vonaldarab, melynek mérőszáma a, a hosszegységből megszerkeszthető legyen, arra szükséges és elegendő, hogy a oly*

$$1,\ a_1,\ a_2, \dots, a_j, \dots, a_{n-1},\ a$$

véges számsorozat utolsó eleme legyen, melyben mindegyik elem oly első vagy másodfokú egyenlet gyöke, a melynek együtthatói az előbbi elemekből a négy alapművelettel nyerhetők.

Világos, hogy itt a_1 algebrai szám; de akkor az a_2-t értelmező együtthatói is algebrai számok, ezekkel együtt pedig a_2 is. Továbbá abból, hogy a_1, a_2 algebrai számok, következik, hogy az a_3-t meghatározó egyenlet együtthatói s velök maga a_3 is algebrai számok stb. A következtetést folytatva, végre kitünik, hogy a algebrai szám.

Tehát *transzczendens mérőszámmal biró vonaldarabokat a hosszegységből nem lehet megszerkeszteni.*

Ennélfogva az az állítás, hogy *a π transzczendens szám* valóban magában foglalja ama másikat, hogy a *kör-quadratura lehetetlen,* miként ezt már e fejezet bevezetésében állítottuk.

De várható-e a körquadratura lehető vagy lehetetlen voltának ilyetén eldöntése? Valóban a π transzczendens voltának kimondására semmiféle alap sem volt mindaddig, míg az sem volt kiderítve, hogy léteznek-e egyáltalában más számok, mint az algebraiak. Ennélfogva Liouville-nek a transzczendens számok létezésére vonatkozó vizsgálatai a π természetének felismerésére irányzott kutatásokkal a legszorosabb kapcsolatban vannak. Térjünk tehát át reájuk.

6. *Ráczionális számoknak ráczionális határértékkel biró sorozata.* A transzczendens számok létezésének kimutatására a legtermészetesebb mód az, hogy oly számsorozatokat képezünk, melyeknek határértéke nem tesz eleget egész együtthatókkal biró algebrai egyenletnek. Ámde hogy ezt megtehessük, előbb a ráczionális vagy legalább algebrai határértékkel biró számsorozatokkal kell foglalkoznunk.

Legyen a

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots$$

és

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_m, \ldots$$

ráczionális egész számok hányadosaiból álló

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_m}, \ldots, \frac{p_m}{q_m}, \ldots$$

számsorozatban

$$\lim_m \frac{p_m}{q_m} = a,$$

hol a ráczionális szám, de olyan, mely a $\frac{p_m}{q_m}$ *hányadosok egyikével sem egyenlő. Ekkor okvetlenül létezik oly A positiv szám hogy m minden értékénél*

$$\left| \frac{p_m}{q_m} - a \right| > \frac{1}{A \, |q_m|}.$$

Valóban az

$$a = \frac{p}{q}$$

ráczionális szám s ennek

$$\frac{p_m}{q_m}$$

megközelitése közt levő különbség abszolut értéke

$$\frac{|qp_m - pq_m|}{|q_m|\,|q|}.$$

Ámde $|qm_m - pq_m|$ mint pozitiv egész szám nem lehet kisebb az egységnél, tehát

$$\left|\frac{p_m}{q_m} - a\right| \geq \frac{1}{|q_m|\,|q|}$$

s ennélfogva

$$\left|\frac{p_m}{q_m} - a\right| > \frac{1}{A\,|q_m|}$$

mihelyt

$$A > |q|.$$

7. *Ráczionális számoknak algebrai határértékkel biró sorozata.* Az előbbi tétel következőleg általánositható irráczionális algebrai számokra:

Legyen a

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_m}{q_m}, \ldots$$

ráczionális számsorozat határértéke oly a szám, mely egy n-ed fokú (ráczionális egész együtthatókkal biró) *algebrai egyenletnek tesz eleget. Ekkor okvetlenűl létezik oly A pozitiv szám, hogy*

$$\left|\frac{p_m}{q_m} - a\right| < \frac{1}{A\,|q_m|^n}$$

az m minden értékénél.

Az algebrai egyenlet, melynek a eleget tesz, *homogén* alakban irva legyen a következő:

$$f(x, y) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_n y^n = 0,$$

vagy a rendes alakban:

$$f(x, 1) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Erről az egyenletről feltehető, hogy a legalacsonyabb fokú mindama ráczionális együtthatókkal biró algebrai egyenletek közt, melyeket a kielégit. Ha ugyanis a lehető legalacsonyabb fokú egyenletre vonatkozólag igaz, hogy

$$\left| \frac{p_m}{q_m} - a \right| > \frac{1}{A \mid q_m \mid^n},$$

akkor minden magasabb fokszámra nézve már ebből az egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\left| \frac{p_m}{q_m} - a \right| > \frac{1}{A \mid q_m \mid^{n+k}}.$$

Feltevésünk értelmében

$$f(p_m, q_m)$$

nem lehet zérus, mert ellenkező esetben

$$f(x, y) = 0$$

többtaguját az

$$q_m x - p_m y$$

tényezővel osztva az egyenlet fokát, redukálhatjuk anélkül, hogy a megszünnék az egyenlet gyöke lenni. Ámde $f(p_m, q_m)$ azonfelül ráczionális egész szám, tehát

$$| f(p_m, q_m) | \geqq 1.$$

Másrészt az egyenlet gyökeit

$$a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$$

-gyel jelölve, az

$$a\left(\frac{p_m}{q_m} - a_1\right) \left(\frac{p_m}{q_m} - a_2\right) \cdots \left(\frac{p_m}{q_m} - a_{n-1}\right)$$

alakú szorzatoknak véges és meghatározott határértékük van. Ennél fogva kell oly A positiv számnak léteznie, hogy m bármely értéke mellett

$$\left| a\left(\frac{p_m}{q_m} - a_1\right) \left(\frac{p_m}{q_m} - a_2\right) \cdots \left(\frac{p_m}{q_m} - a_{n-1}\right) \right| < A.$$

Most már könnyen becsülhetjük meg

$$\left| \frac{p_m}{q_m} - a \right|$$

értékét. Ugyanis

$$f(p_m, q_m) = a q_m^n \left(\frac{p_m}{q_m} - a \right) \left(\frac{p_m}{q_m} - a_1 \right) \cdots \left(\frac{p_m}{q_m} - a_{n-1} \right)$$

egyenletből a levezetett egyenlőtlenségek értelmében az következik, hogy

$$1 < | q_m |^n \left| \frac{p_m}{q_m} - a \right| A$$

vagyis

$$\left| \frac{p_m}{q_m} - a \right| < \frac{1}{A \, | q_m |^n}$$

A nyert eredmény így is fogalmazható:

Ha valamely

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_m}{q_m}, \ldots$$

ráczionális számsorozatnak a határértéke van oly módon, hogy az A pozitiv számot és az n pozitiv egész számot bármiként választván, az

$$\left| \frac{p_m}{q_m} - a \right| > \frac{1}{A \, | q_m |^n}$$

egyenlőtlenség sohasem lesz m minden értékére nézve érvényes, akkor a nem lehet algebrai szám. Kivételt csak az az egy eset képez, melyben a oly raczionális szám, mely az $\frac{p_m}{q_m}$ hányadosok egyikével egyenlő.

8. *Transzczendens értékű végtelen sorok.* Az előző tételből az következik, hogy az igen gyorsan összetartó végtelen sorok, láncztörtek stb. transzczendens számokat értelmeznek (feltéve, hogy a bennök szereplő számok ráczionálisak).

Vizsgáljuk pl. a következő sort

$$\frac{\mathfrak{K}_1}{X}+\frac{\mathfrak{K}_2}{X^{2!}}+\frac{\mathfrak{K}_3}{X^{3!}}+\cdots\frac{\mathfrak{K}_m}{X^{m!}}+\cdots,$$

hol X pozitiv egész számot jelent, $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ pedig a X-nél kisebb nem negativ egész számokat, melyek közül végtelen soknak kell a zérustól külömbözőnek lennie. E sor összege — a — a következő számsorozatnak határértéke:

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{\mathfrak{K}_1}{X}$$

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{\mathfrak{K}_1}{X}+\frac{\mathfrak{K}_2}{X^{2!}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{p_m}{q_m}=\frac{\mathfrak{K}_1}{X}+\frac{\mathfrak{K}_2}{X^{2!}}+\cdots+\frac{\mathfrak{K}_m}{X^{m!}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

hol

$$q_m = X^{m!}$$

$$p_m = X^{m!}\left(\frac{\mathfrak{K}_1}{X}+\frac{\mathfrak{K}_2}{X^{2!}}+\cdots+\frac{\mathfrak{K}_m}{X^{m!}}\right)$$

ráczionális egész számok. Továbbá

$$0<a-\frac{p_m}{q_m}<\frac{X}{X^{(m+1)!}}<\frac{1}{q_m^m}$$

Most már bármelyik közönséges egész számot jelentse is n, továbbá bármelyik pozitiv számot A, hacsak m eléggé nagy:

$$q_m^m > Aq_m^n,$$

s ennek folytán

$$0<a-\frac{p_m}{q_m}<\frac{1}{Aq_m^m},$$

tehát a transzczendens szám.

Ha pl.

$$X=10$$

$$\mathfrak{K}_m = 1$$

akkor a következő transzczendens számot nyerjük:

$$a = 0{\cdot}\ 110001\ 000000\ 000000\ 000001\ \ldots$$

hol az 1-esek az

$$1.,\ 2!,\ 3!, \ldots, m!, \ldots$$

helyen vannak. E számban a 0-okat meghagyva, az 1-eket pedig bármily egyenlő vagy külömböző jegyekkel helyettesítve, megint csak transzczendens szám adódik ki.

9. *Transzczendens értékű láncztörtek.* Transzczendens értékű végtelen sorok mellett képezzünk még pl. transzczendens láncztörteket.

Az

$$a = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}}}$$

láncztört értékei és ennek

$$\frac{S_1}{N_1}, \frac{S_2}{N_2}, \ldots, \frac{S_m}{N_m}, \ldots$$

közeledő törtjei között, mint ismeretes, a következő egyenlőtlenség áll fenn:

$$\left|\frac{S_m}{N_m} - a\right| < \left|\frac{S_m}{N_m} - \frac{S_{m+1}}{N_{m+1}}\right|.$$

Továbbá

$$\left|\frac{S_m}{N_m} - \frac{S_{m+1}}{N_{m+1}}\right| = \frac{1}{N_m N_{m+1}} = \frac{1}{N_m(N_m q_{m+1} + N_{m+1})} < \frac{1}{N_m^2 q_{m+1}}$$

tehát

$$\left|\frac{S_m}{N_m} - a\right| < \frac{1}{N_m^2 q_{m+1}}.$$

Ha most a egy ráczionális együtthatókkal biró n-ed fokú egyenlet gyöke, akkor A úgy választható, hogy

$$\left|\frac{S_m}{N_m}-a\right|>\frac{1}{AN_m^n},$$

tehát még inkább

$$\frac{1}{N_m^2 q_{m+1}}>\frac{1}{AN_m^n},$$

vagyis

$$q_{m+1}<AN_m^{n-2}.$$

Hogy tehát transzczendens értékű láncztörtet nyerjünk, arra elég a

$$q_1, q_2, \ldots, q_m, q_{m+1}, \ldots$$

sorozatot úgy képeznünk, hogy A-t és n-t bármiként is választva, a

$$q_{m+1}>AN_m^{n-2}$$

egyenlőtlenség ne álljon fenn m minden értékénél. Ezt pl. úgy érhetjük el, hogy a nevezőket a

$$q_1\geqq 1 \quad q_2\geqq q_1 \quad q_3\geqq N_2^2, \ldots, q_{m+1}\geqq N_m^m, \ldots$$

egyenlőtlenségeknek megfelelőleg választjuk.

Kürschák József.

IRODALOM.

Carl Neumann, *Beiträge zu einzelnen Theilen der mathematischen Physik, insbesondere zur Elektrodynamik und Hydrodynamik, Elektrostatik und magnetischen Induction.* 314 pag. Leipzig, Teubner 1893. Ára 10 mk.

A physikusok nestorának, a königsbergi NEUMANN-nak fia, KÁROLY, a lipcsei egyetemen a mathematika tanára, jelen művében az elméleti physika nehány törvényének taglalásával foglalkozik oly módon, hogy az ezekből folyó következtetéseket a természetben tényleg előforduló vagy esetleg csak költött feltételekre nézve vizsgálat tárgyává teszi. Eljárásában hivatkozik NEWTON, HUYGHENS, EULER, BERNOULLI, LAGRANGE, LAPLACE, JACOBI, GAUSS, HAMILTON és mások példájára, kik hasonló módon jártak el. Ekképen kivánja ő az elektrodynamikára és a mágnességre megállapított törvényeket tárgyalni és COULOMB és POISSON, továbbá AMPÉRE és az öregebb NEUMANN törvényeit különféle feladatokra alkalmazni.

Többek között a KIRCHHOFF-tól talált «Ueber die Kräfte, welche zwei unendlich dünne Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben» cz. értekezésében leírt analogia az elektrodynamika és a hydrodynamika között alkotja vizsgálatainak tárgyát. Arra az eredményre jut, hogy ez analogiának* semmi mélyebb alapja sincsen és hogy nem következtethetni belőle arra, mintha a két tünemény számára valami közös basis léteznék. Az analogia okát NEUMANN a következő tételben találja: Ha R egy külső és tetszőleges számu belső felületektől határolt tér, u, v, w az x, y, z térbeli coordinátáknak tetszőleges, de adott és leszármazottjaikkal együtt az R térben folytonos függvények, továbbá u_1, v_1, w_1 az u, v, w-nek értékei az R térben fekvő x_1, y_1, z_1 pontban, akkor $4\pi u_1$, $4\pi v_1$ és $4\pi w_1$, bizonyos részben mágneses, bizonyos részben elektromos okokból származó összhatás coordinátáinak tekinthetők, melyek az x, y, z pontra hatnak, föltéve, hogy ez utóbbi oly mágnessark, melyben a mágnestömeg az egységgel egyenlő.

Ebből a tételből következik, hogy számos oly jelenség, mely folytonos

* Ez volt KIRCHHOFF-nak is meggyőződése, már 1870-ben, midőn e sorok írójával bizonyos, az ő laboratóriumában végrehajtandó, ép e tárgyra vonatkozó kisérleteket beszélt meg, melyek kivitele azonban elmaradt.

függvények segítségével kifejezhető, egyszersmind az elektrodynamikai törvények segítségével leírható. Minthogy pedig a hydrodynamika bizonyos részeiben csakis folytonos függvényekről lehet szó, az ily függvények elektrodynamikailag szerkeszthetők, vagyis jobban mondva, ugyanazon mathematikai schema szerint szerkeszthetők, mint az elektrodynamikai törvények. Ezen forrásból származik a hydrodynamika és elektrodynamika között mutatkozó analogia, mely ennélfogva csakis külső, a megegyező mathematikai formában rejlő analogia és teljesen független a két tünemény physikai lényegétől.

Az egész könyv tartalma röviden a következő: Kezdetben mathematikai præliminariák állanak, melyekre később a szerzőnek szüksége van. A második fejezet: «Zur Elektrodynamik» czím alatt egy áramelem és egy mágnessark vagy solenoidsark között fennálló potential felállításával foglalkozik. Levezeti azután az áramelem potentiálját egy mágnessarkra, végtelen hosszú egyenes vonalú és egy tetszőleges alakú solenoidra. Azután szól az elektromos felületi áramokról, melyek alatt egy zárt felületet hézag nélkül borító áramokat ért, melyekben helyről-helyre az irány és erősség folytonos módon változik. Ilyen stationär áramok zárt felületen úgynevezett áramréteget alkotnak, mely tetszőlegesen fekvő mágnessarkokra való hatás tekintetében mindig helyettesíthető a felületnek kettős mágneses rétegével. Azután kiszámítja a stationär áramréteg potentiálját egy magnessarkra és egy másik testre, melyen szintén ily stationär áramréteg van.

A következő fejezetben a test belsejében és felszinén előforduló áramokról van szó, hol szerző az atyjától már tárgyalt egyik feladattal foglalkozik. E feladat azt kivánja, hogy egy adott mágneses test helyettesíttessék külső mágnessarkokra való hatásában egy oly stationär áramrendszerrel, mely a test felszinén és belsejében összefüggésben kering.

Ezt követi nehány hydrodynamikai problema tárgyalása, melyek későbbi feladatokkal állanak összeköttetésben. Ezek után a Hamilton-féle elvet alkalmazza hydrodynamikai feladatokra. Hivatkozik 1883-ban közölt egyik dolgozatára, hol megmutatta, hogy a nevezett általános dynamikai elv csakugyan alkalmazható oly módszerre, mely egyik részében merev, szilárd testekből áll, másik részében összenyomhatatlan folyadékból, még pedig abban az alakban alkalmazható, melyben Thomson és Tait használta, miről Boltzmann később kimutatta, hogy ez az alak csak egyszerűen összefüggő tér esetében alkalmazható. Szerző jelenleg egyszerűbben adja a levezetést, mint az idézett művében.

Miután a szerző a hydrodynamika ezen feladataival foglalkozott, áttér a hydrodynamika és elektrodynamika mathematikai tárgyalásában felötlő analógiákra és ezekre nézve a fentjelzett végeredményre jut.

A következő fejezet az úgynevezett Bobylew-féle elektrostatikai theoremának általánosításával foglalkozik, mely szerint két szigetelt, de elektromosan töltött golyó egymásra való ponderomotorikus hatása az elektromosság mennyiségeinek bizonyos arányánál elenyészik.

Az utolsó fejezet az indukált mágnesség elméletét tárgyalja. A művet egy kis mathematikai értekezés fejezi be, mely egy adott tetszőleges térnek egyszerűen összefüggő térbe való átváltoztatásával foglalkozik.

Szerző előszavában idézi FOURIER szavait, melyek szerint a mechanika a hő hatásaira mai napig sem alkalmazható, minthogy ezek a tüneményeknek külön faját képviselik, melyek mechanikai elvek alapján meg nem magyarázhatók. Szerző úgy vélekedik, hogy e tétel még mai nap is áll és hogy nincs is kilátás, mintha valamikor a FOURIER-től felállított thermikai elveket mechanikaiakkal pótolni lehetne. Úgy látszik, mintha akkor sem a helyes úton járnánk, midőn az elektromosság és mágnesség számára mechatikai alapfelfogásokat keresünk. A mit e téren eddig próbáltak, az mind nem felel meg a hozzá kötött várakozásoknak. Úgy tetszik, hogy ama határozatlan távolságban lebegő alapfelfogások nem lesznek tisztán mechanikai természetüek. Nem ismerjük ekként tehát az útat, mely felismerésökhöz biztosan elvezetne: lépésről-lépésre kell előre hatolnunk. Ezek a szempontok vezették a szerzőt, hogy a föntemlített módon egyes feladatokat tárgyaljon, ezáltal mintegy az útját egyengetve újabb tervszerű vizsgálatoknak. *Heller Ágost.*

Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften.

10. Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme, von FRANZ NEUMANN (1845). Herausgegeben von C. NEUMANN. Leipzig, ENGELMANN 1889. — 96 l. Ára 1,50 márka.

NEUMANN értekezése kiindul a LENZ-féle törvényből, mely szerint az indított áram az indító mozgást akadályozza s WEBER kisérleti úton talált ama tételéből, hogy az indított áram erőssége az indító mozgás sebességével arányos. Kimutatja, hogy a mozgásba hozott elektromosság mennyisége a vezetők kezdet- és véghelyzetéből, tehát a potential függvénynek ezen két helyzetbeli külömbségétől függ. Kimutatja azt is, hogy e tétel nem zárt vezetőkre is érvényes, ha mozgásaik felcserélése által az indításnak alávetett részük hossza nem változik.

Ismeretes törvényének megállapítása után megmutatja még azt is, hogy az inductio okát mindenkor a potential változásában bírja, megtalálja az áram vagy mágnes erősségének változása folytán keletkezett áramra vonatkozó törvényt is, mely szerint az indított integráláram mindenkor ugyanaz, bármi legyen is a potentiál változásának az oka.

Mindezen tételek az elméleti physika legszebb eredményei közé tartoznak. Belőlük indult ki mindaz, a mi azóta az inductió elméleti tárgyalására vonatkozik. A mint a stationär áramokra vonatkozólag az Ohm-féle törvény, úgy szolgál biztos alapul a N.-féle törvény az indított áramokra vonatkozó minden számításban. Az értekezés világos és szabatos s mindenki, a ki potentialelmélet elemeiben jártas, könnyen megértheti.

Érdekesek még az értekezés kiadójának a füzet végén olvasható megjegyzései az Ampère-féle áramtörvények ellen felhozott ellenvetésekre.

Heller Richárd.

*

13. Vier Abhandlungen über die Elektricität und den Magnetismus, von Coulomb (1785—1786). Uebers. und herausg. von Walt. König. Leipzig 1890. 88 lap. Ára 1,80 márka.

Coulomb vizsgálatai az elektromosság és mágnesség köréből korszakot alkotnak a physika történetében. Ő végezte e téren az első quantitativ mérő kisérleteket, az elektromosság és mágnesség mathematikai elmélete az ő vizsgálataival kezdődik. Tisztán kisérleti úton állapította meg ama törvényt, hogy az elektromos és mágneses erők a távolság négyzetével fordított arányban hatnak. Lehetségessé tette ezen kisérleteket pedig az a körülmény, hogy Coulomb a torziós mérlegben oly mérő eszköz birtokába jutott, mely alkalmas kis erőknek nagy pontossággal való lemérésére, s melyet az ő ideje óta kis erők mérésére mai napig is használnak.

Coulomb idevágó vizsgálatait 7 értekezésben tette közzé ; ezek közül e füzet a 4 elsőt foglalja magában. Az első értekezésben a torziós mérlegnek és ama kisérletek leírása van, melyekből az elektromos hatásnak előbb említett alaptörvénye folyik, egyelőre csak az egynemű elektromosságok taszító erejére vonatkozólag. A második értekezésben Coulomb ezen törvényt a különnemű elektromosságok vonzására és a mágneses erőkre is kiterjeszti. Meghatározta pedig ezen törvényt úgy statikai mint dynamikai úton, a mérlegrud illetőleg mágnestű eltérítéseiből és lengéseiből elektromos, illetőleg mágneses erők hatása alatt. A harmadik értekezés az elektromosságnak a levegővel való érintkezés folytán és szigetelő tartókon át való elszáródásával foglalkozik. Vizsgálataiból kitünt, hogy levegővel érintkezve külömben egyenlő körülmények között az egy bizonyos idő alatt elveszett elektromosság arányos az elektromosság sűrűségével, s hogy minden szigetelő tartóra nézve van a töltésnek bizonyos határa, melyen alúl a tartó teljesen szigetel. A negyedik értekezésben végre kimutatja, hogy bármely testben az elektromosság nem chemiai erők, hanem egyedül az elektromos taszító erő hatása következtében terjed és hogy vezető testekben egyensúly esetén az elektromosság mindig a felületen terül el és nem hatol a test belsejébe.

Tangl Károly.

MEGOLDOTT FELADATOK.

13. *Adva van valamely ellipszisen a P pont. Szerkesztessék az adott ellipszisbe beírt ama háromszög, melynek egyik szögpontja P és magassági pontja az ellipszis középpontja.* (KLUG LIPÓT.)

*

Negyedik megoldás Maksay főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.

Az ellipszis főtengelyeire vonatkozó egyenlete:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Az adott pont $P_1(x_1, y_1)$.
P_1 ponton átmenő átmérő egyenlete:

$$y_1x - x_1y = 0,$$

ez egyszersmind a keresett haromszög egyik magassága. E magassághoz tartozó oldal egyenlete:

$$x_1x + y_1y - n = 0,$$

mely oldal az ellipszist a:

$$P_2\left(\frac{a^2nx_1 + aby_1\sqrt{u^2-n^2}}{u^2}, \frac{b^2ny_1 - abx_1\sqrt{u^2-n^2}}{u^2}\right)$$

$$P_3\left(\frac{a^2nx_1 - aby_1\sqrt{u^2-n^2}}{u^2}, \frac{b^2ny_1 + abx_1\sqrt{u^2-n^2}}{u^2}\right)$$

pontokban metszi, mint a háromszög keresett két szögpontjában, hol

$$u^2 = a^2x_1^2 + b^2y_1^2.$$

A P_1P_2 oldal egyenlete:

$$y - y_1 = \frac{(u^2 - b^2n)\,y_1 + abx_1\sqrt{u^2-n^2}}{(u^2 - a^2n)\,x_1 - aby_1\sqrt{u^2-n^2}}\,(x - x_1);$$

a P_3 ponthoz tartozó átmérő egyenlete, mely egyszersmind a P_1P_2 oldalhoz tartozó magasság:

$$y = \frac{b^2ny_1 + abx_1\sqrt{u^2-n^2}}{a^2nx_1 - aby_1\sqrt{u^2-n^2}}x,$$

mely a feltétel szerint merőleges lévén P_1P_2-re:

$$u^2y_1\left(b^2ny_1 + abx_1\sqrt{u^2-n^2}\right) - \left(b^4n^2y_1^2 - a^2b^2x_1^2(u^2-n^2)\right) =$$
$$= -u^2x_1\left(a^2nx_1 - aby_1\sqrt{u^2-n^2}\right) + \left(a^4n^2x_1^2 - a^2b^2y_1^2(u^2-n^2)\right).$$

Kifejtvén és rendezvén ez egyenletet tekintetbe véve, hogy

$$u^2 = a^2x_1^2 + b^2y_1^2,$$

n meghatározására az

$$(a^2+b^2)n^2 - u^2n - a^2b^2(x_1^2+y_1^2) = 0$$

egyenletet nyerjük.

Ez egyenlet gyökei, mint azonnal felismerhető:

$$n_1 = x_1^2 + y_1^2,\quad n_2 = -\frac{a^2b^2}{a^2+b^2},$$

mert könnyen kimutatható, hogy

$$u^2 = (a^2+b^2)(x_1^2+y_1^2) - a^2b^2.$$

E szerint a feladat vagy kétértelmű, vagy az egyik gyök nem képez megoldást.

n értékeit P_2P_3 oldal egyenletébe helyettesítvén lesz:

$$x_1x + y_1y - (x_1^2+y_1^2) = 0 \qquad 1)$$
$$x_1x + y_1y - \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = 0. \qquad 2)$$

Az 1) egyenes az átmérőre P_1 pontban emelt merőleges, tehát nem lehet a keresett háromszög alapja s így a feladat megoldására a 2) egyenes vezet, mely, mint első tekintetre feltűnik, az:

$$\left(x + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{y_1}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2+y_1^2}{4}$$

és

$$x^2+y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

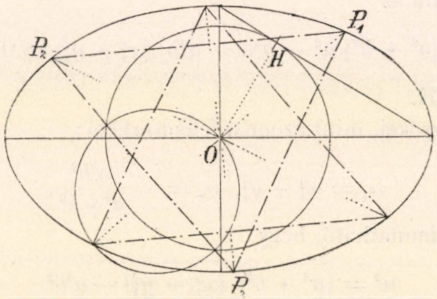
körök közös hatványvonala (chordale). Az első kör szerkesztése nagyon egyszerű, a másodiknak sugara $r = \frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, a mi a nagy és kis féltengelyekből, mint befogókból alkotott derékszögű háromszögnek az átfogóhoz tartozó magassága.

Az

$$x_1x + y_1y + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = 0$$

egyenesnek az ellipszissel közös pontjai, P_2, P_3, megadják a háromszög hiányzó két csúcsát. (1. ábra.)

Természetes, hogy P_1 diametrálpontja egy az előbbivel kongruens háromszög csúcsa, melynek oldalai amazéival páronként parallel helyzetűek. E két háromszög csúcsai az ellipszisbe írt hatszöget határoznak meg, mely-



1. ábra.

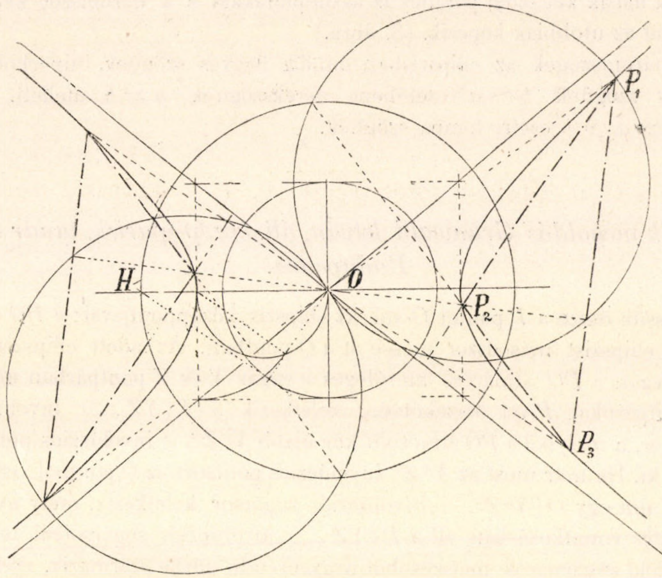
nek átellenes oldalai parallelák, mint az a két háromszög egybevágóságából következik. A körben a megfelelő idomok mindig szabályosak.

A feladat kiterjeszthető a hiperbolára is. Az eredmény egyszerűen található, ha P_2P_3 egyenes egyenletében b^2 helyett $(-b^2)$-et írunk s így az adott ponttal szemben fekvő oldal egyenlete hiperbola esetében:

$$x_1x + y_1y - \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} = 0.$$

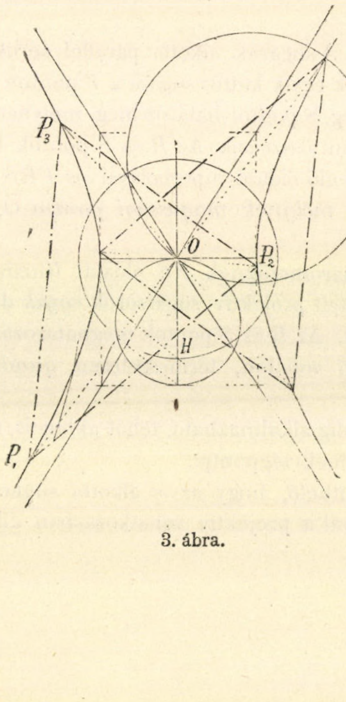
Ez egyenletből világosan látszik, hogy ha $a > b$, a háromszögnek P_2P_3 oldala a P_1 ponthoz tartozó átmérőt mindig abban a felében vágja, melyen P_1 pont van s így a háromszög nem mindig lehetséges; de ha lehetséges, akkor a háromszög csúcsai a hiperbola egyik ágára esnek, a mi bekövetkezik, ha $b\sqrt{2} > a > b$. (2. ábra.)

Ez esetben négy oly háromszög van, mely egy-egy egyenessé redukálódik s egy oldal iránya érintő lesz, míg a másik kettő egybeesik. Ha $a \geqq b\sqrt{2}$, a háromszögek mindig lehetetlenek, míg $b > a$ esetében mindig valósak s egy csúcs a hiperbola egyik, kettő a másik ágán van. (3. ábra.)



2. ábra.

Ha $a = b$, tehát a hiperbola egyenlő oldalú P_2P_3 oldal mindig a végtelen távolban fekvő egyenes, mint az egyenletének alakjából azonnal kitünik,



3. ábra.

tehát a másik két oldal parallel az aszimptotákkal s a háromszög két magasságát ez utóbbiak képezik. (3. ábra.)

A háromszögek az ellipszisben mindig hegyes szögűek, hiperbolában hegyes szögűek $b > a$ esetében, derékszögűek $a = b$ mellett, míg $b\sqrt{2} > a > b$ esetre tompa szögűek.

Ötödik megoldás Grünwald István, áll. közép-iparisk. tanár úrtól Budapesten.

Kössük össze a P pontot O-val, az ellipszis középpontjával; e PO egyenes az ellipszist másodszor messe át a Q pontban. Az adott ellipszist egy tetszőleges, a PQ átmérőre merőleges x sugár Y és Z pontpárban metszi. E pontpárokat P-vel összekötvén, keletkezik a $P(YZ\ldots)$ involúcziós sugársor, a melyből a PO átmérőjű kör újabb $Y^*Z^*\ldots$ involúcziós pontsort metsz ki. Ha már most az Y^*Z^* involúczios pontsort az O pontból vetítjük, akkor ujra egy $O(Y^*Z^*\ldots)$ involúcziós sugársor keletkezik, mely nyilván projektív vonatkozásban áll a $P(YZ\ldots)$ involúcziós sugársorral, tehát a megfelelő sugárpárok metszéséből negyedrendű görbe származik, melynek egy részét a PO átmérőjű kör teszi, a maradék rész tehát szintén kúpszelet, még pedig egyenlő oldalú hiperbola lesz. E hiperbola, mely egyébként P pontban az adott ellipszist érinti, a PY és OZ^*, illetőleg PZ és OY^* egyenespárok U, illetőleg V metszéspontjainak geometriai helye. Az UV pontok összekötő vonala x' merőleges a PQ átmérőre, mert O a PUV háromszög magassági pontja.

Az $(x\ldots)$ és $(x'\ldots)$ sugarak alkotta parallel sorok egyesített projektív sugársorok, melyeknek egyik kettős sugara a P ponton megy keresztül, míg a másik oly R, illetőleg S pontot határoz meg, melyben két megfelelő Y és U, illetőleg Z és V pont összeesik. Az R és S pontok tehát metszéspontjai az ellipszisnek az egyenlő oldalú hiperbolával és PRS *oly, az adott ellipszisbe írt háromszög, melynek magassági pontja O, az ellipszis középpontja.*

A keresett PRS háromszögnek RS oldalát *lineárisan* szerkesztettük meg, mint oly egyesített projektív sugársorok *egyik* duplaelemét, melyekben *másika* adva volt. Az R és S pontok meghatározása a lineárisan megszerkesztett összekötő vonalon, természetesen *quadratikus* szerkesztést igényel.

E szerkesztés mindig alkalmazható, tehát akkor is, ha a P pont az ellipszis valamely tengelyének végpontja.

Mellékesen felemlíthető, hogy az x alkotta sugársor az $O(Y^+Z^+\ldots)$ involúcziós sugársorral is projektív vonatkozásban áll, s ez oknál fogva a megfelelő elemek metszéspontjai egy harmadrendű és negyedosztályú görbe vonalon feküsznek, melynek O a duplapontja; e görbe áthalad a PO átméröjű segédkör és az ellipszis metszéspontján, valamint a keresett háromszög három szögpontján is; egyetlen valós aszimptatoja természetesen merőleges PQ-ra.

FELADATOK.

19. Valamely egyenletes vonalas körgyűrű elemei a gyűrű vonalán kívül levő külső pontokra csak a távolságtól függő centrális erőkkel hatnak. Milyennek kell ez erők törvényének lennie, hogy a gyűrű középpontjába helyezett, a gyűrű síkjában szabadon mozogható pont ez erők behatása alatt stabilis egyensúlyban legyen? (FRÖHLICH.)

20. *Bizonyittassék be, hogy*

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}^2$$

mindig osztható 2-vel, $(a+1)$-gyel és $2(2a-1)$-gyel. (SZILY.)

21. *Legyen*

$$F(u, v) = 0$$

valamely görbének egyenlete vonalkoordinátákban; bizonyittassék be, hogy az (u, v) érintőnek érintéspontjában a görbületi mértéket a következő képlet adja:

$$G = \frac{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}} = \frac{\left(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right]}$$

(KÜRSCHÁK.)

22. *Bizonyittassék be a következő tétel. Ha az (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), (D, D_1) pontpárok valamely kúpszeletre nézve konjugált párok, akkor az $[(AB, CD), (A_1D_1, B_1C_1)]$, $[(AD, BC), (A_1B_1, C_1D_1)]$ pontpárok ugyan e kúpszeletre nézve egy időben konjugált vagy nem konjugált párok.* (Ha $A \equiv C_1$, $B \equiv D_1$, akkor a két utolsó pontpár összeesik és HESSE egyik tétele alapján mindig konjugált lesz.) (KLUG.)

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1893. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

1893. november 5. Dr. KÜRSCHÁK JÓZSEF: A transcendnes számok elméletéről.

1893. november 30. Dr. FRÖHLICH IZIDOR: A forgó testek egy nevezetes tulajdonságáról.

Dr. VÁLYI GYULA: A másodrendű forgási felületekről. (Bemutatta RADOS GUSZTÁV.)

Ugyanez ülésen br. EÖTVÖS LORÁND a tömegvonzás állandóját határozta meg az előadó teremben végrehajtott előadási kisérletben.

1893. deczember 14. Dr. SUTÁK JÓZSEF: A végtelen determinánsok elméletéről.

Dr. DEMECZKY MIHÁLY: A Catalan-féle tétel új bebizonyítása.

*

A vertikális légáramlásokról.*

A bájos kép, melyet csendes nyári nap láttat, midőn délig folyton növő, este felé lassan enyésző ezüstszinű gomolyagfelhők az ég ritka mélységű kékjében úsznak; a légperspektiva valóban elbájoló elváltozása főnös ** időben, mely az Alpok legkisebb részleteit még a távoli megfigyelőnek is éles körvonalakban feltárja: a fel- és leszálló légáramlások játéka. De kell-e a tárgy festői szépségére utalnunk, midőn annak nagyobb értelmi szépsége is kelthet érdeklődést, melyet meg nem tagadhat a természettudománytól a physikus, ha ez statisztikai kezdetektől a szigorú ismeretrendszer felé emelkedik. A vertikális légáramlás tanulmányozása a meteorologia legfontosabb kérdéseihez vezet, a minők az általános légkeringés magasságbeli folyamata, a hőmérséklet fölfelé való változása, a felhők keletkezése és enyészte, magassága és alakja, a csapadékok neme és mennyisége s a zuhanó szelek sokáig misztikus elmélete.

* Előadatott a Math. és Phys. Társ. 1893 márcz. 16-án tartott rendes ülésén.

** Az első sorban kompetens svájczi írók szerint főn s nem föhn irandó.

Ismeretes, hogy a levegő a légnyomás maximumának helyéről a tengerszínre redukált barometer állások külömbségével nagyjában arányos sebességgel áramlik a minimum felé. Habár ez a mozgás a mi féltekénken a földforgás következtében jobbra kanyarodva, némi késleltelést is szenved, mégis várható volna, hogy a levegő nyomáskülömbségei mihamarabb megszünjenek. Azonban a tapasztalat általában véve azt mutatja, hogy barometrumos minimum (cyclon) és maximum (anticyclon) napokon át is megállhat, s így az a kérdés támad, hogy mi történik az alacsony nyomású helyekre beáramló levegővel, ha nem a fennálló nyomáskülömbségeket egyenlíti ki?

A minimum és maximum környékén uralkodó időjárás maga felel kérdésünkre: A depresszió középpontjában felhőzet és sűrű csapadék, a maximum táján derült ég és szárazság, mint alább látni fogjuk, itt leszálló, amott felemelkedő légáramlatok jelenlétéről tesz tanuságot, mely utóbbiak minden oldalra lefolyván, a nyomáskülömbségek megmaradását s az uralkodó időjárás állandósítását okozzák. Az általános levegő áramlásnak vertikális összetevője az, melynek elméletét itt röviden kifejteni iparkodom.

Ha a nyugvó légkör valamely pontján a levegő felfelé irányított sebességet kap, emelkedése közben kiterjedni s ennek folytán hűlni kezd. A magára hagyott légtömeg emelkedése egyenletes leend, ha a felhajtó erő és a nehézség minden pillanatban egymással egyensúlyt tart. És ezen feltétel meg van, ha a levegőben a hőmérséklet vertikális eloszlása olyan, hogy az emelkedő részecske mindenütt ama hőmérsékletet találja, melyet kiterjedése folytán már magával hoz. Világos, hogy ezúttal a felszálló légtömeg környezetével hőt nem cserél, s hogy ennélfogva egyenletes emelkedése és a légkör izentrop vagy indifferens egyensúlya egy és ugyanazon feltételhez van kötve. Ha ellenben a légkör hőmérséklete felfelé gyorsabban vagy lassabban fogy, mint valamely egyenletesen emelkedő részecske hőmérséklete, egyensúlya labilis vagy pedig stabilis.

Ily indifferens egyensúlyt, száraz levegőt s a gáztörvények korlátlan érvényességét tételezvén fel, az emelkedéssel járó hőmérsékletcsökkenés könnyen kiszámítható, a mennyiben az emelés eszközlésére két teljesen külömböző mód áll rendelkezésünkre. Ha ugyanis az absolut hőmérséklet zéruspontjáig lehűtött levegő tömegegységét a föld felületéről h magasságig közvetlenül emeljük s az ott lévő t hőmérsékletű levegővel annak állandó nyomása mellett keveredni engedjük,

$$m = gh$$

munkát végeztünk, a mennyiben véges nyomás mellett az absolut hideg levegőtömeg térfogata 0 lévén, felhajtó erő nincs, s a nehézség gyorsulása h téren belül állandónak tekinthető.

A t hőmérsékletű levegővel való keveredés alatt légtömegünk a

$$Q' = c_p (273 + t)$$

hőmennyiséget vette fel, ha c_p a levegő állandó nyomás melletti fajhője. Másrészt meg a földfelületen uralkodó állandó nyomás mellett annyi hőt közölhetünk az emelendő légtömeggel, míg ez az alsó réteg t_0 hőmérsékletét felveszi. Ha azután bármily kis felfelé irányított sebességet nyer, az indifferens környezetben ugyancsak egyenletesen emelkedik. A hőközlés ez esetben

$$Q = c_p (273 + t_0)$$

s mivel mindkét eljárás ugyanazon hatást időzte elő, kell hogy álljon:

$$Agh + c_p (273 + t) = c_p (273 + t_0)$$

azaz:

$$Agh = c_p (t_0 - t)$$

melyben $A = \frac{1}{424\,g}$, $c_p = 0{,}2375$ értékek helyettesítése után

$$t_0 - t = 0{,}00993\,h$$

Kifejezésünk nyilván azt mondja, hogy a *száraz levegő egyenletes emelkedés közben 100 méterenkint közel 1 C. fokkal hűl.*

Ugyanezen eredményhez vezet a hőelmélet első főegyenlete is, ha benne a tett feltevések értelmében $dQ = 0$. Ugyanis

$$0 = c_p dT - Avdp$$

Egyensúlyban lévő levegő számára a hydrodynamika ismert

$$dp = -\frac{1}{v}\,gdh$$

egyenlete állván,

$$\frac{dT}{dh} = \frac{dt}{dh} = -\frac{Ag}{c_p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

mi az előbbi egyenlettel teljesen egyezik, ha T az absolut hőmérsékletet jelenti.

Nedves, de telítettségétől még messze álló, s az emelkedés folyamata alatt ezt el sem érő levegő hőmérsékletcsökkenésének meghatározására ezt oly gázkeveréknek tekinthetjük, melynek minden egyes része a Boyle-Gay-Lussac-féle törvény alapján tárgyalható.

Foglaljuk most össze a nedves levegő jellemzésére itt szükséges adatokat.

Ha a száraz levegő normális sűrűsége ρ, a légkör nyomása p, hőmérséklete t, s a benne foglalt vízgőz nyomása e, akkor az egy köbméterben foglalt levegő tömege

$$m = \rho \frac{p-e}{p_0(1+at)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

míg az ugyanott lévő vízgőz tömege:

$$m' = 0{,}622\,\rho \frac{e}{p_0(1+at)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

hol 0,622 a vízgőz sűrűsége a levegőéhez viszonyítva, $\rho = 1293$ gr., $p_0 = 760$ és $a = \frac{1}{273}$. Ez értékek behelyettesítése a következő kifejezésre vezet:

$$m' = 1{,}0582 \frac{e}{1+at} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3')$$

hol m' grammokban van kifejezve.

1 kilogramm nedves levegőben foglalt levegő μ, és vízgőz μ' tömege

$$\frac{\mu}{m} = \frac{1}{m+m'}, \qquad \frac{\mu'}{m'} = \frac{1}{m+m'}$$

egyenletek segítségével származtatható s a következő értékekhez vezet:

$$\mu = \frac{p-e}{p-0{,}378\,e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

és

$$\mu' = \frac{0{,}622\,e}{p-0{,}378\,e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

A levegő fajhője állandó nyomas és térfogat mellett: $c_p = 0{,}2375$, $c_v = 0{,}1684$, míg ugyanazon mennyiségek a vízgőz esetében $c'_p = 0{,}4805$ és $a'_v = 0{,}370$ értéküek. Ámde a két gáz keverékére vonatkozólag

$$\gamma_p = \mu c_p + \mu' c'_p, \qquad \gamma_v = \mu c_v + \mu' c'_v$$

mely kifejezésekbe az előbb kiszámított értékeket helyettesítvén,

$$\gamma_p = \frac{c_p + (0{,}622\,c'_p - c_p)\,\frac{e}{p}}{1-0{,}378\,\frac{e}{p}}, \qquad \gamma_v = \frac{c_v + (0{,}622\,c'_v - c_v)\,\frac{e}{p}}{1-0{,}378\,\frac{e}{p}} \quad 6)$$

melyekből még a bennünket érdeklő

$$\varepsilon = \frac{\gamma_p}{\gamma_p - \gamma_v} = \frac{c_p}{c_p - c_v}\left[1 + \left(0{,}622\,\frac{c'_p}{c_p} - 1\right)\frac{e}{p}\right] = 3{,}44\left(1 + 0{,}258\,\frac{e}{p}\right) \quad 7)$$

értéket vezethetjük le.

Az értékek behelyettesítése után a nedves levegő emelkedését kisérő hőmérséklet csökkenés, a — jegy elhagyásával 1)-ből:

$$\frac{dt}{dh} = \frac{0{,}00993 - 0{,}0038\,\frac{e}{p}}{1 + 0{,}2585\,\frac{e}{p}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

A hőmérséklet csökkenése tehát minden esetre kisebb, mint a száraz levegőben. Mivel az $\frac{e}{p}$ viszony az emelkedés alatt legfölebb igen kis mértékben változik, a mennyiben a vízgőz vertikális elterjedése a levegőétől kissé külömböző, az emelkedéssel járó mérsékletcsökkenés a telítettség hőmérsékletének elérése előtt állandónak tekinthető.

Ha végül a levegő vízgőzzel telített, akkor a lehűléssel lecsapódás jár, mely a szabaddá lévő hő következtében a további lecsapódást késlelteti. Ha tehát indifferens egyensúlyt tételezünk fel, akkor a hőelmélet első egyenletében dQ hőmennyiség ez esetben nem 0, hanem a vízgőz lecsapódási hőjével azonos. Ha t hőmérsékletnél a víz párolgási hője r, akkor a $-dt$ hőmérsékletváltozás közben szabaddá váló hő $-rd\mu'$, hol μ' mint előbb a nedves levegő egy kilogrammjában foglalt vízgőz tömege. Ha az 5) egyenletet kis elhanyagolással

$$\mu' = 0{,}622\,\frac{e}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

alakban írjuk és

$$dQ = -rd\mu' = -r\mu'\left(\frac{de}{e} - \frac{dp}{p}\right) \quad \ldots\ldots \quad 10)$$

értéket a hőelmélet első egyenletébe helyettesítjük, a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{dt}{dh} = -\frac{A + \frac{r\mu'}{RT}}{c_p + \frac{r\mu'}{e}\,\frac{de}{dT}}\,.g \quad \ldots\ldots \quad 11)$$

mely kifejezésben $R = 29{,}272\;g$ tétetvén s a minus jel elhagyatván

$$\frac{dt}{dh} = 0{,}0342\;\frac{0{,}0690 + 0{,}622\,\frac{re}{pT}}{0{,}2375 + 0{,}622\,\frac{r}{p}\,\frac{de}{dT}} \quad \ldots\ldots \quad 12)$$

értékhez jutunk. Telített levegő esetében tehát a magassággal való hőcsökkenés már nem állandó, hanem a hőmérséklettel elég gyorsan változó.

Minden adott esetben r, e, $\frac{de}{dt}$ vagy táblázatokból, vagy empirikus formulákból vezethető le.

100 méternyi emelkedés számára HANN kissé pontosabb egyenlet alapján a következő táblázatot vezeté le:

kezdeti nyomás mm.-ben.	Kezdeti hőmérséklet -10°	-5°	0°	$+5^\circ$	$+10^\circ$	$+15^\circ$	$+20^\circ$	$+25^\circ$	$+30^\circ$	tenger fel. magasság 0° mellett.
760	0,76	0,69	0,63	0,60	0,54	0,49	0,45	0,41	0,38	20 m.
700	0,74	0,68	0,62	0,59	0,53	0,48	0,44	0,40	0,37	680
600	0,71	0,65	0,58	0,55	0,49	0,44	0,40	0,37		1910
500	0,68	0,62	0,55	0,52	0,46	0,41	0,38			3360
400	0,63	0,57	0,50	0,47	0,42	0,38				5150
300	0,57	0,51	0,44	0,42						7430
200	0,49	0,43	0,38							10670

A levezetett egyenletek a légkör magasságának igen érdekes meghatározási módját is szolgáltatják. Ha ugyanis az 1) egyenletet a légkör teljes H magasságán belül integráljuk, mialatt az absolut hőmérséklet a földfelületi T_0 értéktől a világür 0-nak feltételezett értékéig sülyed, a következő egyenlethez jutunk:

$$A_g H = c_p T_0$$

mely 0° C hőmérséklet számára $H = 27491$ metert ad. Itt is a légtömegnek a földfelülettől a légkör határáig való emelés munkája æquivalense azon hőnek, melylyel ez a földfelület hőmérsékletéig az ott uralkodó állandó nyomás mellett hevíthető.

Ha általában valamely gömbalakú, r sugarú s g' felületi gyorsulással biró világtest légkörmagassága H és felületi hőmérséklete T_0, akkor általánosabban

$$c_p T_0 = Ag'r \frac{H}{r+H}$$

ha a

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{1}{v} g' \frac{r^2}{(r+h)^2}$$

hydrodynamikai alapegyenletben a nehézségi gyorsulás változását tekintetbe veszszük, de a légkör tömegét a szilárd test tömegéhez képest elenyészőnek tekintjük. Ezen egyenlet különösen azért érdekes, mert

$$c_p T_0 = Ag'r$$

esetben $H = \infty$ értéket szolgáltat, vagyis azt a határhőmérsékletet adja, melynél a világtest anyaga az űrben szétszóródni kezd. Ha a föld hydrogenatmosphærával birna, ezen hőmérséklet 4100° C lenne, de a hold számára már csak 197°, azaz —76° C. A holdnak napsütötte fele ennél sokkal magasabb hőmérsékletű, s így a sűrűbb levegőkör hiánya thermodynamikai okból is érthető.

Ha ellenben légkörünk indifferens állapotú tiszta vízgőzből állana, melynek legalsó rétege egyszerűség kedvéért 0° C-nál telített legyen, akkor magasságának meghatározására a következőkép járhatnánk el: ha ζ_p a levegő alsó rétegének állandó nyomása mellett a jég közepes fajhője $T=0$ és $T_0=273$ között, L_0 annak T_0 mérséklet melletti párolgási hője, akkor az absolut nullpontra hűtött jégnek egy kilogrammja

$$Q = \zeta_p T_0 + L_0$$

hőt vesz fel, míg T_0 mérsékletre melegszik s ezután ugyanily mérsékletű telített gőzzé alakul át. A légkör határáig való emelésére ezen hővel æquivalens munka AgH kell, úgy hogy

$$AgH = \zeta_p T_0 + L_0$$

a miből $\zeta_p = 0{,}5$, $T_0 = 273$ és $L_0 = 686$ értékek esetében $H = 349{,}000$ m. kiadódik.

Eszerint valószínű, hogy a levegő számára is a valósághoz közelebb álló értéket kaphatnánk, ha a Boyle-Gay-Lussac-féle törvénytől való eltérését kellőképen tekintetbe vehetnők.

Mindezen levezetett egyenletek természetesen csak akkor állanak, ha az emelkedő légtömeg a többi nyugvó levegőtől mintegy elrekesztő fallal elkülönítetnek tekinthető, vagy más szóval, míg a barometrumos magassági formula maga is érvényes. Mivel azonban a vertikális barometrumos gradiens értéke tapasztalat szerint mindig nagyon kicsiny, ezen eredmények első közelítésben nemcsak tájékozást nyújthatnak, hanem, mint látni fogjuk, bizonyos egyszerű esetekben még a hő mechanikai æquivalensének meglepő pontos levezetésére is használhatók.

A száraz, nedves és vízgőzzel telített levegő egyenletes emelkekésével beálló hőmérsékletcsökkenést kifejező három egyenletünk immár a legegyszerűbben válaszol a bevezető sorokban felvetett kérdésekre.

Ha pl. tudni kivánnók, hogy $+20°$ C. hőmérsékletű, normális nyomású levegő, mely kb. 20 m. tengerfeletti magasságú rétegben keresendő, 15 mm. páranyomás mellett mily magasságban válik telítetté úgy, hogy felhőképződés megindúlhat, a következőkép járnánk el: 8) egyenletünk $e = 15$ és $p = 760$ esetében a következő értéket adja:

$$\frac{dt}{dh} = 0{,}00980$$

úgy, hogy 100 m. emelkedésnek 0,980°-nyi mérsékletcsökkenés felelne meg. A vízgőz feszültségi táblázatai szerint 15 mm.-nyi feszültség 17,6° C.-nak felel meg, tehát levegőnknek 20,0—17,6 = 2,4 fokkal kell hülnie, hogy telítetté váljék. S ez nyilván 245 m. emelkedés után, azaz 245+20= 265 m. tengerfeletti magasságban történik. E számítás azonban csak közelítőleg helyes, mert a telítettségi hőmérséklet a lehütéssel járó nyomáscsökkenés miatt a táblából vett értéke alá sülyed.* Pontosabb értékek 17,08° C. s ill. 318 m. tengerfelszín feletti magasság.

Fontos kiegészítésül hozzá kell tennünk, hogy az ily módon számított magasság csak alsó határértéket képvisel, a mennyiben látható felhőképződés csak akkor indul meg, ha a levegő a telitettség hőmérséklete mellett elegendő számú szilárd részecskéket tartalmaz, melyek a lecsapódási produktumoknak mintegy magvául szolgálhatnak.

Az emelkedés második, most következő stadiumában a kiváló víz, ha ugyan eső alakjában le nem hull, 0°-ig lehül és újabb emelkedés a cirrus felhők regiójába viszi, melyek mintegy 4000 m. magasságon túl lebegnek. Lássuk, mily magasságot szolgáltat ez esetben a 12) egyenlet vagy az avval kapcsolatos tábla.

A kezdethőmérséklet 17,08° és a tengerfeletti magasság 318 m. lévén, a 100 m.-re eső mérsékletcsökkenés a folyamat kezdetén táblázatunk szerint 0,47° mi a 0°-ig való lehülés számára $\frac{100{,}17{,}08}{0{,}47} = 3634$ m. emelkedést adna, ha ennek egész tartama alatt a hőcsökkenés állandónak volna tekinthető. De ezen magasság s 0° számára táblázatunk 0,54-et ad s így előreláthatólag a magasságnak pontosabb értékéhez jutunk, ha a két szám

---

* Eme pontosabb értékek a következő okoskodás útján találhatók. Isentrop változás számára nedves, de még nem telített levegő esetében is áll a Poisson-féle egyenlet

$$\frac{p}{p'} = \left(\frac{273+t}{273+t'}\right)^{\varepsilon}$$

alakjában, hol p', t' a kezdetállapotnak felel meg, és ε 7) egyenlettel adva van. A telitettség pillanata előtt

$$\frac{p}{p'} = \frac{e}{e'}$$

egyenlet is áll, melyben e a lecsapódás pillanatában a t hőméksékletnek megfelelő feszültség, ez pedig Magnus szerint

$$e = 4{,}525.\ 10^{\frac{7{,}4475\,.\,t}{234{,}67\,.\,t}}$$

képlettel kifejezhető. A két egyenletből következik $t'=20$ és $e'=15$ számára a pontosabb $t=17{,}08$ érték, melynek $\frac{20{,}0-17{,}08}{0{,}0098} = 298$ m. emelkedés felel meg. Pontosabb számítás szerint *a felhőképződés 318 m. tengerfeletti magasságban indúlhat meg.*

$\frac{1}{2}$ (0,47+0,54) = 0,505 átlagával számolunk, mi 3382 m. emelkedéshez, tehát 3382+318 = 3700 m. tengerfeletti magassághoz vezet.

A harmadik stadium, a teljes fagyás alatt a hőmérséklet állandóan 0° marad s így újabb emelkedés létrejötte attól függ, valjon időközben esett-e eső. Ezen utóbbi stadiumra vonatkozólag meg kell jegyeznem, hogy Tissandier léghajós tapasztalatai szerint a levegőben jégkristályok nagy tömegei lebeghetnek a nélkül, hogy a földfelületi megfigyelőre nézve az ég átlátszóságát zavarnák.

A csapadék képződése egyáltalában csak úgy keletkezhetik, ha vagy felszálló áramunk van, vagy nem egyenlő hőmérsékletű légtömegek keveredének, vagy a levegő a megfigyelés helye közelében lehűl. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a második mód csak igen gyér, a harmadik pedig csak igen rövid tartamú esőt szolgáltathat. Az első módra nézve lássunk egy-két példát.

A felszálló áram adott példájában a második stadiumban 17,1° hőmérsékletű telített levegőnk volt, mely további 3382 m. magasságban való emelkedés által 0°-ra hűlt le. A 3') egyenlet szerint a vízgőztartalom köbméterenkint 318 m. magasságban ($e = 15$ mm.) 14,4 gr. míg 3700 m.-nél már csak 4,8 gr. lehet, úgy hogy köbméterenkint 9,6 gr. víznek kellett kiválnia. Ha a vertikális áramnak sebessége 1 m., akkor minden négyzetméter felületről perczenkint 60 m^3 levegő emelkedik, úgy hogy a csapadék négyzetméteres perczenkint 0,576 kg, vagy a meteorologiában szokásos feljegyzési mód szerint 0,576 mm. (óránként 34,56 mm.), mi ritka bőségű záporesőt jelent. Ha a lecsapódás kezdete után az emelkedés különben változatlan viszonyok között csak 1000 m. volna is, a felszálló levegő 17,1°-ról 12,2°-ra hűlne, s köbméterenkint 3,7 gr. vizet választana ki, mi hasonló mozgási viszonyok között perczenkint ismét 0,222 mm. (óránként 13,32 mm.), még mindig igen tekintélyes csapadék-magasságnak felel meg.

Ha ezzel szemben az észlelés helyén 17,1° és 12,2° telített levegő keveredének, úgy hogy a közös hőmérséklet közel 14°6 lenne, köbméterenkint csak 0,15 gr. víz csapódhatnék le, a mennyiben a keverék két köbméterjében 14,4+10,7 gr. viz lenne, holott 14,6° hőmérsékletnél csak 24,8 grammot foglalhat magában. Ily keveredésnek egy 1000 m. hatalmasságú rétegen belül kellene végbemennie, hogy egy éppen észrevehető 0,15 mm.-es csapadék jöjjön létre.

A mondottak után már könnyű lesz számot adni egynehány gyakran észlelt s nem mindig helyesen értelmezett jelenségről. Így a magas hegyek minden látogatója ismeri azt a remek látványt, mikor a felhő gyorsan a völgybe zuhan s mintegy varázsütésre eltűnik. A leszálló mozgással, különösen a sebes mozgással járó isentrop mérsékletemelkedés a felhőt telítettségi hőmérsékletén jóval túlhevíti, úgy hogy gyors párolgás áll be, miáltal a levegő átlátszóságát teljesen visszanyeri. Így a felhők is általában ott keresendők, hol a felszálló áram a harmatpont hőmérsékletét éri; ha ez áram azután végre a vízszintes irányba megy át, a felhők kiálló csúcsait magával ragadja s felhőszőnyeget létesít. Ha a nyári heves insolatio folytán gyorsan emelkedő légáramlatok keletkeznek, ezek lecsapódási produktuma a cumulusfelhő, s az ezek között látszó rendkívül átlátszó, sötétkék színű közök leszálló áramok következményei. Ezek tetemes melegedésében a levegő nedvessége majdnem teljesen elenyésző, s innen a nagymérvű átlátszóság.

Ide tartozik még végül a zuhanó szelek problemája is, melyeknek legismertebb képviselője a főn, még e század második felében is ugyancsak sok fejtörést okozott, noha már 1865-ben Helmholtz «jég és glecserekről» tartott egyik népszerű előadásában elméletéhez igen közel járt. Escher von der Linth Saharából jövő szele s Dove kedvelt æquatoriális árama minden valószinűtlensége ellenére tán még soká kisért volna, ha Hann a helyes thermodynamikai elmélet felállításával egyidőben ki nem mutatja, hogy a főn nem geographiailag lokálizált, nem az Alpokhoz kötött jelenség, hanem minden emelkedés lejtőjén, még Grönland jéghegyeinek alján is észlelhető, hol jégmezők fölött fujva télen 12°—30°, tavaszszal 11° hőmérséklet emelkedéssel jár.

Ha az Alpok északi oldalán a légnyomásbeli minimum lép fel, ennek aspiráló hatása kiterjed legelőször is a hegység gerinczén lévő hidegebb levegőre, mely elég gyorsan, tehát isentropikusan melegedve, lezuhan. Ha a minimum fennállása e levegőáramlással meg nem szünik, az aspiráló hatás a hegység déli lejtőjéről is a gerinczen át szívja a levegőt. E levegő a lejtőn felkúszva hűl s a benne foglalt vízgőz lecsapódása bő esőket okoz, míg a túloldalon leesve, mint meleg, száraz szél érezhető. A melegedés s szárazság oly nagy, hogy főnös időben még házakban sem tanácsos nyilt tüzet táplálni. Ez okozza egyszersmind a bevezetésben mondott változását a légperspektivának, mely főnös időben a távoli hegyeknek és mélyedéseknek legkisebb részleteit is különben nem észlelhető élességben engedi látni.

Hann számos meteorologiai feljegyzés gondos megvizsgálásából azt az eredményt vezeté le, hogy a főnnel járó mérsékletemelkedés 100 méterenként 0,97°-ot tesz, mi egyrészt a levegőnek rendkívüli szárazsága mellett bizonyít, másrészt a gyors zuhanás tartama alatt isentropikusan végbemenő változását is támogatja.

Egészen hasonlóan magyarázható a bóra keletkezése is. A főn, a bóra s

* Ez adatból Hann az æquivalens értékét is kiszámította, melyet 1) egyenletünk alapján 433 kgmmnyinak talál.

a közönséges éjjeli hegyi szél egy és ugyanazon leszálló áramlatnak lehet hatása, a szerint, a minő a környező levegőben a hőmérséklet eloszlása. Télen a légkörnek hőmérsékletcsökkenése 100 m. emelkedésre átlagban 0,45°, nyáron 0,70°. Legyen most *A* és *F* valamely hegység egy alsó és felső, *h* méter vízszinkülömbségű pontja; akkor *A* fönt érez, ha leszálló áram alkalmával *F* hőmérséklete *A*-énál legfőlebb 0,0045. *h* fokkal alacsonyabb, mert ekkor a melegedés *A*-ban még mindig (0,0099—0,0045). *h*=0,0054. *h* fokot tesz.

Ha ellenben *F* hőmérséklete többel mint 0,0099. *h* fokkal alacsonyabb, mint *A*-ban, akkor a leszálló áram daczára melegedés nem érezhető, mert a szél környezeténél hidegebben érkezik. Mivel a melegebb szomszédsága páratelt, e szél, a bóra, a nedvesnek tetszik.

Ha végül *F* hőmérséklete *A*-énál 0,0045. *h* és 0,0099. *h* értékek közötti értékkel alacsonyabb, a közönséges éjjeli hegyi szél keletkezik. Mivel nyáron a szabad levegő vertikális hőcsökkenése tetemesen nagyobb, a nyári főn sokkal kevésbé érezhető s csak mintegy (0,0099—0,0070). *h*=0,0029. *h* foknyi melegedéssel jár.

Ha a soláris klimának jobbadán csak elméleti érdeket keltő kérdéseit mellőzzük, a levegő körfolyamata a meteorologiának ma még egyetlen tárgya, mely az analytikai tárgyalást megbírja; a horizontális áramlások főleg a mechanika, a függőlegesek inkább a hőelmélet keretébe tartoznak. Ezért gondoltam, hogy a tárgy minden egyszerűsége mellett is némi érdeket lesz képes kelteni.

Kövesligethy Radó.

VEGYESEK.

Kummer és Kronecker. Rövid két év leforgása alatt vesztette el a matematikai tudomány e két kiváló művelőjét. Az a gyors egymásután, melyben e két első rangú tudós munkás és termékeny élet után a halál birodalmába pihenésre tért, kettős gyászba borította az egész mathematikus világot.

Életük legkiválóbb mozzanatai a legszorosabb kapcsolatban vannak, hiszen a két elhunyt nagy tudóst a benső barátság kötelékein kívül még a tanár és tanuló viszonya is fűzte egymáshoz. Különösen emlékezetes nap az 1881-iki szeptember 10-ike, Kummer Ernő Ede (szül. Sorauban 1810 január 29-én) doktorrá avattatásának e félszázados évfordulója, ifjabb társának élettörténetében is. Ugyanis Kronecker Lipót (szül. Liegnitzen 1823 deczember 7-én), ki Kummer-nek a liegnitzi gimnáziumban és később a boroszlói egyetemen tanítványa volt, erre az alkalomra készíté remek *Festschrift*-jét: *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.*

Két évvel később az agg mester nyugalomba vonult s a berlini egyetemen bírt tanszékén Kronecker lett utódjává, ki addig csak mint akadémikus tartott egyetemi előadásokat.

Azóta alig egy évtized mult el és mester meg tanítvány, az előd és utódja, egyaránt a holtak birodalmába költözött. Kummer Berlinben 1893 május 14-én szenderült jobb létre, Kronecker ugyanott már 1891 deczember 29-én dőlt ki az élők sorából.

Érdemeikről a világnak egyik legtekintélyesebb tudományos testülete a következő nekrologokkal emlékezett meg.

*Kummer működéséről. Hermite-től.** E híres matematikus tudományos élete telve van oly alkotásokkal, melyek a tudományban elenyészhetetlen nyomot fognak hátrahagyni.

Az analizisben mélyre ható vizsgálatokat köszönünk neki, melyek a hipergeometrikus sorra, a határozott integrálokra, az Euler-féle függvé-

---

* Comptes rendus. T. CXVI. 1893.

nyekre és a lassan konvergáló sorok összegének meghatározására vonatkoznak.

A geometriában KUMMER vizsgálta meg először azt a rendkívül érdekes negyedrendű felületet, mely az ő nevét viseli s mely számos fontos vizsgálat tárgyává lett.

Az algebrában a másodrendű felületek főtengelyeinek meghatározására szolgáló harmadfokú egyenlet diszkriminánsát mint hét négyzetnek összegét sikerült előállítania. E kiváló és figyelemre méltó eredmény BORCHARDT egyik híres értekezésének szolgált kiinduló pontjául. Ez ama hasonló jellegű, de általánosabb egyenletről szól, a mely a bolygók mozgásában előforduló szekuláris egyenlőtlenségek meghatározásánál fellép.

Ismét más dolgozatok a sugárrendszerek (kongruencziák) elméletére és a légköri fénytörésre vonatkoznak; ámde matematikai működésének legnagyobb részét tagtársunk a számelméletnek szentelte.

Az egység-gyökökből képezett komplex-számok elmélete, az ideális tényezők s az æquivalens osztályok eredeti és mély fogalmainak megalkotása, az osztályok számának DIRICHLET módszereinek általánosításával történő meghatározása, FERMAT tételének (a

$$z^p = x^p + y^p$$

egyenletről) mindama törzsszám kitevőkre való bebizonyítása, melyek a BERNOULLI-féle számokkal bizonyos kapcsolatban vannak, mindannyian oly felfedezések, melyek osztatlan bámulatban részesültek. E vizsgálatok eredményei — ép úgy mint DIRICHLET-i — korunk számelméleti ismeretei közt első rangúak. Az akadémia ezeket a matematikai tudományok nagy díjával jutalmazta; nehány év mulva KUMMER a matematikai osztály levelező tagjává (Correspondant dans la Section de Géometrie) lett; 1868-ban külső taggá (Associé étranger) választatott.

A híres geometra elhunyta felett minden matematikus mély megilletődést érez; barátjainak és művei bámulóinak e gyászában akadémiánk is élénken részt vesz.

*Kroneckerről. Hermite-től.** A matematikát és akadémiánkat nagy, és pótolhatatlan veszteség érte: híres levelező tagtársunk, KRONECKER, rövid betegség után Berlinben a mult (1891) deczember 29-én elhunyt.

Tagtársunk a számelméletre vonatkozó felfedezéseivel a legnagyobb

---

* Comptes rendus. T. CXIV. 1892.

KRONECKER érdemeinek bővebb méltatását és értekezéseinek teljes felsorolását WEBER H. tollából l.: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 2. B. 1892. Ugyanezek a *Mathematische Annalen* 43. kötetében is lenyomattak.

matematikusok közé emelkedett és magának oly halhatatlan dicsőséget biztosított, hogy neve Gauss, Dirichlet és Eisenstein-ével egy sorba tartozik. Lángesze azonfelül a tiszta algebra, a felsőbb analizis s a matematikai fizika körébe vágó számos vizsgálatában is nyilvánult; én azonban csak oly eredményeiről akarok nehány szóval megemlékezni, melyek az aritmetikára és az elliptikus függvényekre vonatkoznak.

Jacobi a *Fundamenta*-ban a számelmélet számára új szempontot nyújtott, a mennyiben az egész számok négyzetösszegekre való felbontására vonatkozó rendkívül érdekes tételeket — Gauss módszereitől merőben eltérően — oly identitások segítségével vezette le, melyekből a felbontások közvetetlenül szembeszöktek. Kronecker legnagyszerűbb alkotása, hogy a transzformáczió elméletében és a complex multiplikácziót megengedő szinguláris modulusok tanulmányozásában az aritmetika számára sokkal nehezebben hozzáférhető, de véghetetlenül gazdagabb tárnát fedezett fel. Mihelyt ennek kifejtéséhez fogott, mit annyi sikerrel folytatott, már eleve a negativ determinánsú alakok osztályainak számáról egészen új jellegű tételekre akadt, s ezekkel Dirichlet után, ki először jutott el az osztályok számának kifejezéséhez, megint egy lépéssel tovább vezetett a Gauss lángelméje alapította nagy elméletben. Ujabb fáradozásokkal azután egy más, mélyebb és nehezebb, felfedezést ért el, hol az ugyanazon determinánshoz tartozó osztályok nemek szerint való eloszlása is szerepel.

Kronecker megállapította, hogy a quadratikus alakok mindegyik osztályának egy-egy oly szinguláris modulus felel meg, mely complex multiplikácziót enged; az ugyanazon determinánshoz tartozó osztályokhoz oly ráczionális együtthatókkal biró egyenlet tartozik, melynek irreduktibilitását sikerült kimutatnia; végre a nemek szerint való eloszlásnak megfelelnek ennek az egyenletnek bizonyos tényezőkre való felbontásai. Egy-egy ily felbontás a determináns ama törzsosztóiból vont négyzetgyökök adjungálása révén adódik ki, melyek a nemek karaktereit szolgáltatják.

Ezeknél az eredményeknél, melyeknek helye a tudományban mindenkorra biztosítva van, hadd állapodjunk meg egy pillanatig.

A quadratikus alakok elmélete, mely a Gauss írta *Disquisitiones arithmeticae* legfontosabb része, Fermat-nak híres kijelentéseivel kezdődik, azután másfél századon át egyes elszigetelt dolgozatokban Euler-nek, Lagrange-nak, Legendre-nek és magának Gauss-nak felfedezéseivel fejlődik tovább, míg végre az emlitett műben bámulatosan egységessé válik. Mind e tudósok, noha csak az egész számok tulajdonságainak kipuhatolásán fáradoztak, tudtokon kívül más czélhoz is közeledtek. Kronecker kimutatta, hogy a negatív determinánsú quadratikus alakok elmélete az elliptikus függvények elméletének anticzipálása oly értelemben, hogy az osztálynak és nemnek, a szabályos determinánsnak és a szabálytalanság kitevőjének fogalmai ama transzczedenseknek vizsgálatából is nyerethettek volna. A matematika két ennyire különböző, egymástól ily távol fekvő diszcziplinájának ez a megfelelkezése oly meglepő, hogy lelkünk a tudomány előttünk részben rejtett menetében oly titkos munkarendet kezd sejteni, mely annak kifejlesztésére irányított fáradozásainkban hathatósan támogatni látszik. A termékeny úton, melyet Kronecker magának tört, több jeles matematikus sikerrel követte őt; Weber-től újabban egy nagy becsű mű jelent meg, mely e nehéz kérdésekkel behatóan foglalkozik; Kiepert, Greenhill szintén foglalkoztak e tárgygyal, és korán siratott szép tehetségű tagtársunk, Halphen utolsó erejét szintén ennek szentelte.

E felfedezések egymagukban is örök hírnevet biztosítanának Kronecker-nek, de az a maradandó nyom, melyet a tudományban hagyott, épen nem szorítkozik csupán reájuk. A nélkül, hogy az elliptikus függvényeket elhagynám, még az általános ötödfokú egyenlet megoldásáról kell megemlékeznem, melyet a transzformáczió-elméletben a modulus és a multiplikator közt Jacobi-tól eredő reláczíók segítségével ért el.

Hírneves levelező-társunk szerette az akadémiát, melybe 1868-ban hivatott meg, és többször foglalt helyet közöttünk. 1882-ben Freycinet indítványára a becsületrenddel tüntettetett ki. Betegsége előtt, mely őt elragadta, az analizisnek azzal az alapvető kérdésével foglalkozott, hogy miként lehet a több ismeretlent tartalmazó egyenletrendszereknél a megoldások számát többszörös integrálok segítségével kifejezni. E tárgyra vonatkozó eszméit abban a levélben tudatta velünk, melyet a mult ülésen Picard úr bemutatott, sorai csak halála után jelentek meg.

De dicséretemben elnémit a gyász, mely a tudományt érte, s a mély megilletődés, mely a nagy geometra elvesztése miatt minden matematikust elfog; a fájdalmat, melyet e munkás, felfedezésekkel eltöltött életről való megemlékezés bennem kelt, növeli az, hogy egy pótolhatatlan barátot siratok, ki harmincz éven át tüntetett ki bizalmával.

Kürschák József.