MATHEMATIKAI
ÉS
PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENNYOLCZADIK ÉVFOLYAM

I. FÜZET 1909 JANUÁR.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1909.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A tizennyolczadik társulati év 1909 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Lévay Ede* főgymnasiumi tanár (VI., Nagy János utcza 37.) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéséért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak néhány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két—két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX. Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kívánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☛ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

TIZENNYOLCZADIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1909

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

TIZENNYOLCZADIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

Második füzet.

Harmadik füzet.

Negyedik füzet.

Ötödik füzet.

★

Hatodik füzet.

Hetedik—Nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Önálló és ismertető czikkek.

Physikai Laboratorium.

Társulati ügyek.

Megoldott feladatok.

ANALITIKAI FÜGGVÉNY VISELKEDÉSE AZ ÖSSZETARTÁSI KÖRÖN.[1]

1. §. Ha az analitikai függvények WEIERSTRASS-féle elméletét veszszük kiindulópontul, akkor függvényünknek csakis az összetartási körbe eső értékkészlete áll rendelkezésünkre s így az analitikai függvények további vizsgálata legtermészetesebben az összetartási körön való viselkedés tanulmányozásával kezdhető. Első és közvetlenül kinálkozó probléma a függvényérték előállításának kérdése az összetartási kör szabályos helyein (ily helyeken egyebet nem is vizsgálhatunk) az eredetileg adott TAYLOR-sor együtthatóinak felhasználásával.

Minthogy azonban a függvényt az egész összetartási kör belsejében s így az összetartási körnél kisebb sugarú, de tőle tetszőlegesen kevéssé különböző konczentrikus körön is ugyanaz a TAYLOR-sor állítja elő, természetes, hogy az összetartási kör valamely helyén fellépő szingularitás befolyást gyakorol a szabályos helyekhez tartozó függvényértékek előállítására. Például FATOU[2] bebizonyította, hogy mindannyiszor, mikor az együtthatók nulla felé tartanak, a sor az összetartási kör minden szabályos helyén összetartó; legyen e sor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \varphi(x), \quad \lim_{n=\infty} a_n = 0.$$

Adjuk hozzá a $\varphi(x)$ függvényhez az

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

[1] Bemutatva a Magyar Tud. Akadémia III. osztályának 1908 decz. 14-én.

[2] FATOU: Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Mathematica 30. köt. 389. lap. 1906.

függvényt ily módon

$$\varphi(x)+\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(1+a_n)\,x^n.$$

Ez a sor az egységnyi sugarú összetartási kör egyetlen helyén sem lehet összetartó, mert a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+a_n)\,e^{in\varphi}$$

sorban az összetartásnak az a szükséges feltétele sem teljesül, hogy a tagok nulla felé tartsanak.

2. §. A szabályos helyekre vonatkozó vizsgálatokat általában nem lehet tehát elválasztani a szinguláris helyek vizsgálatától; sőt — bizonyos fokig — egyszerre az egész összetartási körön való viselkedést is tekintetbe kell venni. E végből czélszerűnek bizonyult az összetartási kör egyes pontjainak szingularitásaihoz, valamint az egész összetartási kör szingularitásához bizonyos mértékszámot, *rendszámot* rendelni. Ez — mélyreható vizsgálatok után — Hadamardnak[1] sikerült legszerencsésebben. Ebből a czélból mind valós, mind komplex függvényekre vonatkozólag bevezeti a «véges kitérésű» (à écart fini)[2] függvény fogalmát. Véges kitérésű az $f(x)$ folytonos függvény az (a, b) számközben, ha

$$n\int\cos nx\,.\,f(x)\,dx \quad \text{és} \quad n\int\sin nx\,.\,f(x)\,dx$$

integrálok az (a, b) számköz bármely két pontja között véve, abszolut értékben kisebbek maradnak, mint egy fix I szám, mikor n végtelen felé tart. A legkisebb ilyen I szám neve az $f(x)$ függvény *kitérése* (écart) az (a, b) számközben.

Például ha az $f(x)$ függvénynek az (a, b) számköz minden helyén van véges deriváltja, akkor az $f(x)$ függvény az (a, b) számközben véges kitérésű.

---

[1] Hadamard: Essai sur l'étude des fonctions etc. Thèse 70. lap, valamint Journal de mathématiques 1892. Troisième partie.

[2] Thèse 65. lap.

Vezessük be most az eredetileg adott

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

függvény mellé — melyről a vizsgálat megszorítása nélkül feltehetjük, hogy összetartási körének sugara az egység — a

$$H^{\alpha} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha} a_n x^n \tag{2}$$

függvényeket, hol α bármilyen valós szám. Ezekről Hadamard bebizonyítja, hogy ha egy bizonyos α értéknél nyert $H^{\alpha}f(x)$ függvény az összetartási körnek egy (a, b) ívén véges, folytonos és véges kitérésű, akkor $H^{\alpha'}f(x)$ függvény is az, feltéve, hogy $\alpha' < \alpha$. Az összetartási kör minden (a, b) ívéhez tartozik tehát egy ω határszám oly tulajdonsággal, hogy a $H^{-\omega-\varepsilon}f(x)$ függvény véges, folytonos és véges kitérésű, de a $H^{-\omega+\varepsilon}f(x)$ függvény a három tulajdonság közül legalább egyikkel nem rendelkezik. Hogy miként viselkedik ugyanott a $H^{-\omega}f(x)$ függvény, az határozatlan. Az ω szám neve: az $f(x)$ függvény «rendje» (ordre) az összetartási kör (a, b) ívén.

Könnyű belátni, hogy ha (a', b') ív az (a, b) ív belsejébe esik, akkor abban a függvény rendje vagy ugyanolyan, vagy kisebb, mint az (a, b) ívben, s így megdefiniálhatjuk a függvény rendjét az összetartási kör egy pontjában, mint az e pontot magukban foglaló, folyton kisebbedő ívek rendszámának határértékét. Minthogy a H^{α} operáczió új szinguláris pontot nem hoz be,[1] az összetartási kör szabályos helyeinek rendje $-\infty$. Az egész összetartási kör rendje az egyes helyekhez tartozó rendszámok közül a legnagyobbik (nem abszolut értékben, hanem algebrailag).

Az összetartási kör rendszámát, (Ω) Hadamard egyik alaptétele[2] adja meg, mely szerint

[1] Hadamard: id. mű 62. lap.

[2] U. o. 71. lap.

$$\Omega = 1 + \limsup_{n=\infty} \frac{\log |a_n|}{\log n}. \tag{3}$$

3. §. E fogalmak segélyével kijelenthetjük végre HADAMARD-nak a szabályos helyekre vonatkozó eredményeit.[1] Ha egy adott

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

függvény rendszáma az egész összetartási körre vonatkozólag kisebb 1-nél, azaz, *ha* $\Omega < 1$, *akkor a sor összetartó az összetartási kör minden szabályos helyén.* Továbbá általában *a részletösszegek* $(\Omega+\varepsilon)$*-adik számtani közepe — hol* ε *tetszőleges pozitiv szám — megadja a függvény értékét az összetartási kör minden szabályos helyén.*

Az r-edik számtani közép,[2] — hol r bármilyen pozitiv valós szám — alatt a

$$\sigma_n^{(r)} = \Gamma(r+1) \frac{s_n^{(r)}}{n^r} \tag{4}$$

kifejezés értendő, hol

$$s_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{n} B_{n-i}^{(r+1)} a_i$$

és

$$B_{n-i}^{(r+1)} = \frac{\Gamma(r+n-i+1)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n-i+1)},$$

a rendes binomiális együttható.

A következő s bizonyos értelemben befejező lépést BOREL[3] tette meg azzal, hogy egész általánosságban (azaz $\Omega = \infty$ esetet sem zárva ki, melynek tárgyalását HADAMARD eredményei még nem engedik meg) bebizonyította, hogy az általa általánosított határértéknek (limite généralisée) nevezett kifejezés bármilyen

[1] U. o. 82., 83. lap.

[2] T. i. ha r egész szám, a közönséges r-edik számtani közép létezése maga után vonja (4) létezését. Lásd pl. KNOPP: Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. Inaugural Dissertation, Berlin. 1907.

[3] Lásd pl. BOREL: Séries divergentes: Sommation exponentielle.

együtthatók esetében megadja a függvény értékét az összetartási kör szabályos helyein.

A szabályos helyekre vonatkozólag fel kell még említenünk a HADAMARD most felsorolt tételeit egyszerűsítő FATOU-tételt,[1] mely szerint ha

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0,$$

akkor a sor összetartó az összetartási kör minden szabályos helyén. Ez azért mond egyszerűségétől eltekintve valamivel többet, mint HADAMARD megfelelő tétele, mert ez utóbbi szerint nagyon kevéssé fogyó együtthatójú sorok esetében, mint például

$$a_n = \frac{1}{\log n}$$

az sor összetartásáról a szabályos helyeken nem vagyunk biztosítva s a számtani közepekhez kellene folyamodnunk. Ezt a FATOU-féle egyszerűsítést és pontosítást RIESZ M.[2] kiterjesztette véges fokban növő együtthatókra olyformán, hogy ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = 0,$$

akkor már az r-edik számtani közép előállítja a függvényt a szabályos helyeken.

4. §. A szabályos helyekre vonatkozó vizsgálatok után oly szinguláris helyek tanulmányozásának kell következnie, melyeken a függvénynek van határozott értéke, azaz melyek közelében a függvény véges s melyek felé (az összetartási kör belsejéből) közeledve az úttól független határértéket nyerünk. Ilyen például az

$$(1-x)^\alpha + A \quad \text{vagy} \quad [\log(1-x)]^\beta + A$$

függvényeknek (hol $\alpha > 0$ s nem egész szám; $\beta < 0$) az 1 pont.

---

[1] Id. mű 389. lap.

[2] RIESZ M.: Összegezhető trigonometrikus sorok és összegezhető hatványsorok. Doktori értekezés, 1908. 53. lap.

Felvetjük tehát a kérdést, hogy ama (szinguláris helyekhez tartozó) függvény-értékeket hogyan lehet előállítani az együtthatók, illetve a részletösszegek segítségével. HADAMARD két tételének és a befejező BOREL-tételeknek megfelelően a *szinguláris helyekhez tartozó* függvény-értékek előállítására három tételt adunk.

I. *Adva lévén*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

függvény, h l

$$\lim a_n = 0, \tag{5}$$

a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *sor összetartó az összetartási kör minden negativ rendű helyén* (tehát nemcsak a szabályos helyeken, melyeknek rendje $-\infty$).

Tételünk bebizonyitása HADAMARD[1] következő tételén alapszik:

Az összetartási kör (a, b) ívén ω-rendű függvény egyenlővé tehető két oly függvény összegével, melyek közül az egyiknek rendje az egész összetartási körön csak tetszőleges kicsinynyel nagyobb, mint ω, a másik függvény pedig holomorf az (a, b) ív minden helyén.

Legyen tehát $f(x)$ függvénynek az x_0 hely negativ rendű helye. Ekkor van egy ív is, melynek x_0 belső pontja s mely ívnek rendje negativ. A most idézett tétel szerint tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

hol $\Sigma b_n x^n$ sor által előállitott függvény rendje az egész összetartási körre vonatkozólag (Ω_1) negativ; (3) szerint azonban

$$\Omega_1 - 1 = \limsup_{n=\infty} \frac{\log |b_n|}{\log n},$$

azaz

$$\frac{\log |b_n|}{\log n} < \Omega_1 - 1 + \varepsilon,$$

[1] Id. mű 72. lap.

hol ε tetszőleges kicsiny pozitiv szám. Innen

$$\log |b_n| < (\Omega_1 - 1 + \varepsilon) \log n = \log n^{\Omega_1 - 1 + \varepsilon},$$

azaz

$$|b_n| < n^{\Omega_1 - 1 + \varepsilon}.$$

Mível pedig Ω_1 a feltétel szerint negativ, ε tetszőleges, választhatunk oly kicsiny ε számot, hogy

$$\Omega_1 + \varepsilon = -\eta < 0$$

egyenlőtlenség fennálljon; ily ε esetében

$$|b_n| < \frac{1}{n^{1+\eta}} \tag{6}$$

s így

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n$$

sor az összetartási kör minden helyén összetartó.

Másrészt a Fatou által pontosított Hadamard-tétel szerint a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$$

sor összetartó, mert a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

sor által előállított függvénynek az x_0 hely szabályos helye s (5) és (6) szerint

$$\lim_{n=\infty} c_n = \lim_{n=\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Következőleg

$$\Sigma a_n x_0^n = \Sigma b_n x_0^n + \Sigma c_n x_0^n$$

mint két összetartó sor összege, szintén összetartó.

Viszont világos, hogy ha egy negativ rendű helyen a sor összetartó, akkor az együtthatók nulla felé tartanak.

5. §. Hasonló az okoskodás abban az esetben is, mikor az (5) föltétel helyett

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = 0$$

föltétel áll fenn. Erre vonatkozik a következő tétel:

II. *Adva lévén*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

függvény, hol

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = 0, \tag{7}$$

a részletösszegek r-edik számtani középének van határértéke (s így előállítja a függvény odatartozó határértékét) *az összetartási kör minden negativ rendű helyén.*

A bizonyítás így hangzik:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

hol megint a

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

sor által előállitott függvény rendje az egész körön negativ, mert tetszőleges kicsinynyel nagyobb, mint az adott $f(x)$ rendje az x_0 pontot magában foglaló tetszőleges kicsiny íven s az utóbbi a feltétel szerint negativnak vehető. Tehát megint a

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

sor összetartó az összetartási kör minden pontjában s így a fortiori az r-edik számtani középnek is van határértéke.

Ebből következik továbbá, hogy

$$\lim b_n = 0$$

s így

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n^r} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n - b_n}{n^r} = 0,$$

De a

$$\Sigma c_n x^n$$

sor által előállitott függvénynek az x_0 pont szabályos pontja (a fentebbi, lényegesen kihasznált Hadamard-tétel értelmében) s így a Riesz M. által pontositott második Hadamard-tétel értelmében a részletösszegeknek a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$$

sorból képezett r-edik számtani közepe megadja az ábrázolt függvény x_0 helyhez tartozó értékét.

Következőleg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$$

sorra vonatkozólag a részletösszegekből képezett r-edik számtani középnek van határértéke; s így KNOPP által általánositott HÖLDER-tétel szerint az összetartási kör belsejéből nem érintőileg közeledve az x_0 ponthoz, a függvénynek van határértéke, s ezt az r-edik számtani közép előállítja.

Viszont ha negativ rendű helyen a részletösszegek r-edik számtani közepének van határértéke, akkor

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = 0,$$

tehát *ez szükséges és elégséges föltétele annak, hogy az r-edik számtani közepeknek a negativ rendű helyeken legyen határértéke.*

6. §. *A* BOREL-*féle általánosított határérték van az összetartási kör minden negativ rendű helyén.*

A bizonyítás menete megegyezik az előbbivel. Az adott

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

hol

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n$$

megint összetartó, mert a

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

sor által előállított függvény rendje az egész összetartási körön negativ.

Másrészt az említett BOREL-tétel szerint

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$$

sorra képezett BOREL-féle általánositott határérték van, mert a

$$\Sigma c_n x^n$$

sor által előállitott függvénynek az x_0 hely szabályos helye s igy a kettő összegeként előállitott $f(x)$ függvény sorára képezett általánositott határérték is van.

7. §. E tételek lényegükben mind a DARBOUX problémához tartoznak, mely tudvalevően abból áll, hogy adott szingularitások mily együtthatókat (vagy részösszegeket, közepeket stb.) szolgáltatnak. Ha előre csak az együtthatókat adom meg s ezekből akarom meghatározni a szingularitásokat, a kérdés természete szerint csak általános problémák vethetők fel, mert például az együttható főrésze határozza meg annak határtulajdonságait, a főrészt pedig egyedül a legmagasabb rendű szingularitások határozzák meg. Az együttható többi (nem fő-) része azonban akár (alacsonyabbrendű) *szinguláris vonalból* is eredhet.[1]

A legfontosabb felvetett probléma e körben az, hogy az együtthatók növekedése meghatározza-e a függvény legmagasabb növekedését az összetartási körön. HADAMARD erre — kissé hozzávetőleg — igennelt felelt,[2] de BOREL[3] adott egy példát, melyből bizonyos, hogy ez csak ú. n. szabályos növekedésű együtthatók esetében lehet igaz. Mi adunk most egy példát, mely erre az esetre is megczáfolja HADAMARD és BOREL sejtését, mely pontosabban abban áll, hogy ha például

$$\lim_{n=\infty} \frac{|a_n|}{n^{r-1}} = A,$$

akkor a függvény r fokban válik végtelenné valahol az összetartási körön; $r=1$ esetében, ha

[1] Lásd HADAMARD: Série de Taylor (Scientia) 46. l.

[2] HADAMARD: Série de Taylor 46. lap.

[3] BOREL: Séries à termes positifs 77—79. lap.

$$\lim |a_n| = A,$$

akkor a függvény első fokban válik végtelenné.

8. §. Jelentse

$$E(\sqrt{n})$$

az $\sqrt{n}$-ben levő legnagyobb egész számot, s alkossunk

$$a_n = (-1)^{E(\sqrt{n})}$$

együtthatókból

$$f(x) = \Sigma a_n x^n$$

függvényt. PRINGSHEIM[1] — egész más czélzattal — kimutatja, hogy

$$\limsup_{n=\infty} \left| \frac{s_n}{\sqrt{n}} \right| = 1,$$

a miből a CESARO-tétel alkalmazásával világos, hogy $f(x)$ az 1 helyen (érintői közelítést mindég kizárva)[2] legfeljebb $\frac{1}{2}$ fokban válik végtelenné. Bebizonyítjuk, hogy ugyanígy van az összetartási kör bármely $x_0 \neq 1$ helyén is. Általában, ha

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sigma_n,$$

akkor

$$\sum_{k=1}^{n} p_k q_k = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (q_k - q_{k+1}) + \sigma_n q_n,$$

azaz

$$s_n(x_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_0^k = \sum_{k=1}^{n-1} (x_0 + x_0^2 + \cdots + x_0^k)(a_k - a_{k+1}) +$$

$$+ (x_0 + x_0^2 + \cdots + x_0^n) a_n =$$

$$= \frac{x_0}{1-x_0} [\sum_{k=1}^{n} (1-x_0^k)(a_k - a_{k+1}) + (1-x_0^n) a_n].$$

Nézzük most az

$$\frac{s_n(x_0)}{\sqrt{n}}$$

[1] Lásd pl. VIVANTI: Theorie der Eindeutigen anal. Funktionen 419. l.

[2] Ha az érintői közelítést is megengedjük, akkor a függvény végtelenné válásának általában nincs semmi határozott értelme.

kifejezést. Mivel

$$\lim_{n=\infty}(1-x_0^n)\frac{a_n}{\sqrt{n}}=0$$

a nagy zárójelből csak a Σ marad. De a legtöbb $a_k=a_{k+1}$ s így ezek is kiesnek. Csak ha $k=r^2-1$, akkor lesznek a_k és a_{k+1} ellenkező jelűek s így

$$|a_k-a_{k+1}|=2.$$

Ilyen alakú index van n-ben $\sqrt{n}$, azaz a szummában előfordul a 2, $\sqrt{n}$-szer s így tényleg

$$\limsup_{n=\infty}\left|\frac{s_n(x_0)}{\sqrt{n}}\right|=A \text{ (véges)}$$

s így megint a Cesàro-tétel alkalmazásával világos, hogy x_0 felé tartva (nem érintőileg) a függvény nem válik $\frac{1}{2}$ foknál erősebben végtelenné.

Ezen példa könnyen általánosítható más szabályosan növő együtthatók esetére is.

9. §. Beláttuk tehát, hogy az

$$f(x)=\Sigma a_n x^n$$

függvény nem válik okvetlenül valahol oly erősen végtelenné, mint a

$$\varphi(x)=\Sigma|a_n|x^n \tag{8}$$

függvény; más szavakkal, a függvény növekedésére nemcsak az együtthatók abszolut értékének van befolyása, hanem az argumentum eloszlásának is. Az idevágó eddigi kisérletek mind az együtthatók abszolut értékének növekedését akarták összekötni a függvény növekedésével; mint látjuk, e törekvések mind kiegészítésre szorulnak. Felvetjük tehát egész általánosságban a problémát;[1] megvizsgálandó az argumentum szerepe a szingularitások föllépésénél. Evidens például, hogy a_n helyett

[1] Dienes Pál: Adalékok az analitikai függvények elméletéhez 19. lap.

$a_n e^{-in\alpha}$ együtthatókból alkotva Taylor-sort, az újnak α argumentumú helye ugyanolyan helye lesz, mint volt a 0 argumentumú a réginek. Az argumentum megváltoztatásával tehát eltolhatjuk a szinguláris helyet. Ezzel szemben felmerül az a kérdés, hogy miként szabad az argumentumot változtatni, hogy ugyanaz a hely szinguláris hely maradjon. Erre vonatkozólag van egy elég általános eredményünk, melynek bizonyítására használt lemmánk ugyanezen kérdés vizsgálatában másutt is tehet szolgálatot.

10. §. Tudjuk, hogy ha az együtthatók pozitivok — jelük legyen ρ_n — akkor az 1 hely okvetetlenül szinguláris hely (feltéve, hogy az összetartás sugara egységnyi). Jelöljük a_n argumentumát α_n-nel és abszolut értékét ρ_n-nel. Ha bizonyos n indextől kezdve bármilyen $m>n$ esetében

$$|\alpha_n - \alpha_m| < \pi, \tag{8}$$

azaz, *ha bizonyos tagtól kezdve a* $\rho_n e^{i\alpha_n}$ *együtthatók a komplex síknak egy* π*-nél kisebb nyilású szögterületére esnek* (melynek csúcsa a 0 pont), *akkor az 1 hely szinguláris helye* nemcsak a $\varphi(x) = \Sigma \rho_n x^n$ függvénynek, hanem *az*

$$f(x) = \Sigma \rho_n e^{i\alpha} x^n$$

függvénynek is. Az említett felhasználandó lemma, mely általánosítása a doktori értekezésem *II. Rész*-ében adott lemmának, a következő:

Legyen adva

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n = \rho_n e^{i\alpha_n}, \ldots$$

sorozat, hol az argumentumok eleget tesznek (9) feltételnek; akkor

$$\liminf_{n=\infty} \frac{|a_0 + a_1 + \cdots + a_n|}{\rho_0 + \rho_1 + \cdots + \rho_n} = \liminf_{n=\infty} \frac{|s_n|}{s_n'} = A > \Psi(\alpha) > 0, \tag{10}$$

hol $\Psi(\alpha)$ oly szám, mely *nem függ a* ρ_n *számoktól*, csak azon $\alpha < \pi$ szögnyilástól, melyben az együtthatók vannak.

Oszszuk a szöget két egyenlő, α_1 és α_2 szögre s az α_1 szögbe eső tagok adjanak s_{n_1} összeget, a többiek s_{n_2} összeget úgy, hogy $s_n = s_{n_1} + s_{n_2}$ s megfelelően $s'_n = s'_{n_1} + s'_{n_2}$. Doktori értekezésemben[1] bebizonyitottam, hogy

$$\liminf_{n=\infty} \frac{|s_{n_1}|}{s'_{n_1}} = B \geqq \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\liminf_{n=\infty} \frac{|s_{n_2}|}{s'_{n_2}} = C \geqq \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Legyen most már az s_{n_1} és s_{n_2} argumentuma φ_{n_1}, illetve φ_{n_2}; ekkor tudjuk, hogy

$$|\varphi_{n_1} - \varphi_{n_2}| < \alpha < \pi$$

s így

$$\liminf_{n=\infty} \frac{\big||s_{n_1}|e^{i\varphi_{n_1}} + |s_{n_2}|e^{i\varphi_{n_2}}\big|}{s'_{n_1} + s'_{n_2}} \geqq$$

$$\geqq \liminf_{n=\infty} \frac{\big||s_{n_1}| + |s_{n_2}|e^{i\alpha}\big|}{|s_{n_1}| + |s_{n_2}|} \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Másrészt általában, ha A_n, B_n pozitiv számok sora és $\cos\alpha < 0$, akkor

$$\left[\liminf_{n=\infty} \frac{|A_n + B_n e^{i\alpha}|}{A_n + B_n}\right]^2 \geqq \liminf_{n=\infty} \frac{A_n^2 + B_n^2}{(A_n + B_n)^2} +$$

$$+ \cos\alpha \,.\, \limsup_{n=\infty} \frac{2A_nB_n}{(A_n + B_n)^2} \geqq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos\alpha > 0$$

s ezzel lemmánk igazolva van.

Kijelentett tételünk bebizonyitása végett fejtsük ki adott

$$f(x) = \Sigma a_n x^n$$

függvényünket a valós tengely egy $0 < x_0 < 1$ helyén:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \tag{11}$$

Bármily k esetében $f^{(k)}(x_0)$ minden tagja $\alpha < \pi$ szögben van s így (8) és (10) szerint

[1] Id. mű 19. és 20. lap.

$$\limsup_{k=\infty} \sqrt[k]{\frac{|f^{(k)}(x_0)|}{k!}} \geqq \limsup_{k=\infty} \sqrt[k]{A \cdot \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}} = \frac{1}{1-x_0}.$$

Tehát (11) összetartási sugara legfeljebb $1-x_0$, de kisebb nem lehet s így épen ennyi. Ekkor pedig az 1 hely tényleg szinguláris helye.

11. §. Lemmánk nagyon egyszerű bizonyításokat szolgáltat más, már ismert, főleg Pringsheimtől eredő tételekre vonatkozólag. De ezek ismertetése helyett inkább bemutatjuk még az argumentum-eloszlás és a függvény végtelenné válása közötti összefüggésre vonatkozó eredményünket.

Doktori értekezésemben kimutattam, hogy ha az argumentumok legalább bizonyos tagtól kezdve π-nél kevesebbel különböznek egymástól, akkor az

$$f(x) = \Sigma a_n x^n$$

függvény az 1 helyen épen úgy válik végtelenné, mint

$$\varphi(x) = \Sigma \rho_n x^n$$

függvény, hol $\rho_n = |a_n|$. Felmerülhet most az a kérdés, hogy viszont ha egymással szemben fekvő argumentumok is vannak, mennyiben lehet arra következtetni, hogy akkor a függvény az 1 helyen nem válik oly erősen végtelenné, mint az együtthatók abszolut értékéből alkotott sor. Rövidség kedvéért s mivel inkább példázni akarjuk az argumentum szerepét, azon egyszerű esetre szorítkozunk, midőn

$$\lim_{n=\infty} \rho_n = A,$$

azaz

$$\rho_n = A + \varepsilon_n.$$

A sokat idézett Cesaro-tétel szerint bárminő is α_n,

$$\lim_{x=1} \frac{\Sigma \varepsilon_n e^{i\alpha_n} x^n}{\Sigma \rho_n x^n} = 0$$

s így elég

$$\frac{f_1(x)}{A} = f(x) = \Sigma e^{i\alpha_n} x^n$$

függvény viselkedését vizsgálni az 1 hely felé. A kérdéses tétel a következő:

Ha $e^{i\alpha_n}$ *eloszlása a körön egyenletes, akkor* $f(x)$ *már nem válik az 1 helyen első fokon végtelenné.*

Egyenletes eloszlásúnak mondjuk az argumentumot, ha bármilyen k részre osztjuk is a kört, az egy részbe esők gyakoriságának[1] nevezett határérték van és épen $\frac{1}{k}$.

Bebizonyítás. Vegyük az egy részbe eső a_n-ek helyett az intervallum közepét $\beta_n^{(k)}$-et s képezzük

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(k)} x^n$$

függvényeket. Alkalmazva gyakoriságtételünket[2] s megjegyezve, hogy a k-adik egységgyökök összege $\Sigma c_k = 0$, kapjuk, hogy

$$\lim_{x=1} (1-x)\varphi_k(x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{k}}}{k} \Sigma c_k = 0.$$

De $f(x)$ határfüggvénye a $\varphi_k(x)$ függvényeknek, azaz pontosan

$$f(x) = \varphi_k(x) + \varepsilon_k(x),$$

hol $\varepsilon_k(x)$ hatványsor együtthatói mind kisebbek, mint egy η_k s így ha előre megadunk egy ε-t, oly messze megyünk k-val, hogy $\varepsilon_k(x)$ minden együtthatója abszolut értékben kisebb legyen, mint $\frac{\varepsilon}{2}$ s ekkor

$$|(1-x)f(x)| < |(1-x)\varphi_k(x)| + \frac{\varepsilon}{2},$$

másrészt oly messze, hogy

$$|(1-x)\varphi_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

s ekkor tényleg

$$|(1-x)f(x)| < \varepsilon,$$

hol ε tetszőleges s így tételünk be van bizonyitva.

Dienes Pál.

---

[1] DIENES PÁL: Id. mű 11. lap.

[2] Id. mű 12. lap.

ANALITIKAI FÜGGVÉNYEK VÉGTELENSÉGI HELYEINEK VIZSGÁLATA.[1]

1. §. Egyik előbbi tanulmányunkban[2] tételeket adtunk a függvény-határértékek előállítására az összetartási kör negativrendű helyein, a számtani közepek és az exponencziális összegezés segítségével. Mint láttuk, a számtani közepek használata természetszerűleg mindig feltételez valaminő megszorítást az együtthatók növekedését illetőleg s így teljesen általános tételek, melyek bárminő együtthatók esetében tehát bárminő függvényekre érvényesek lennének, általa nem nyerhetők. Ugyanígy áll a dolog, midőn a számtani közepeket a (természetszerűleg pozitivrendű) végtelenségi helyek vizsgálatára használjuk fel.[3] Könnyebben kezelhetők lévén, mint az exponencziális összeg, komplikáltabb szinguláris helyek vizsgálatára is alkalmasak, de általános összefüggéseket az együtthatók és végtelenségi helyek között nem nyerünk általok, mint azt a következő, idevágó eredményeinket összefoglaló, általános kijelentés mutatja:

Hogy valamely pólus (vagy algebrai és logaritmikus elágazó hely) végesrendű számtani közepekkel megvizsgálható legyen, arra kell és elég, hogy a függvény rendje az összetartási körön véges legyen.

A számtani közepek használata feltételezi tehát, hogy az

---

[1] Bemutatva a Magyar Tud. Akadémia 1909 január 18-án tartott ülésén.

[2] Dienes P.: Analitikai függvény viselkedése az összetartási körön. Mathematikai és Fizikai Lapok jelen füzet 1. lapján.

[3] Hadamard: Essai sur l'étude des fonctions etc. Thèse-Paris. 83. lap. 1892.

együtthatók véges rendben válnak végtelenné. Például nem alkalmazható a számtani közepek módszere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^\alpha} x^n \quad 0<\alpha<1$$

függvénynél (melynek összetartási sugara az egység), mert a függvény rendje végtelen. Ugyanis

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log e^{n^\alpha}}{\log n} = \lim_{n=\infty} \frac{n^\alpha}{\log n} = \infty.$$

Azt lehetne ugyan mondani, hogy talán ennek a függvénynek nincs is pólusa, a mire a tételt alkalmazhatnók. De tetszésszerinti pólus főrészének hozzáadásával ismét végtelenrendű függvényt kapunk s így ennek a pólusnak felismerésére nincs módszerünk. Lehetnek tehát oly végtelenrendű szingularitások (pl. lényeges pontok) az összetartási körön, mik lehetetlenné teszik a pólusoknak a számtani közepekkel történő vizsgálatát.

2. §. Mivel tehát a pólusok és számtani közepek között nincsen teljesen általános, akárminő együtthatókra kiterjedő összefüggés, kénytelenek vagyunk ezt az általános összefüggést az együtthatókból alkotott általánosabb kifejezés segítségével keresni. Az a kifejezés, melylyel sikerül megadnunk a keresett általános összefüggést, a Borel-féle exponencziális összeg.[1] Mivel ez utóbbi hazai irodalmunkban még nem igen szerepelt, pár szóval értelmeznünk kell.

A legáltalánosabb «közép» az adott

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

számok között

$$\frac{u_0 s_0 + u_1 s_1 + \cdots + u_n s_n + \cdots}{u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots}, \tag{1}$$

hol az u_i számok pozitivok vagy nullák. Ennek speczialis esete

[1] Borel: Leçons sur les séries divergentes 93—95. lap.

az eddig használt CESÀRO-féle számtani közép, mit megkapunk, ha az u_i számokat úgy választjuk, hogy

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1, \ldots, u_n = 1$$

s a többi

$$u_{n+k} = 0 \qquad k > 0$$

s ezután n-et végtelenné teszszük.

Az (1) alatti általánosabb módszerre, tudjuk, csak az esetben szorulunk, midőn az s_n mennyiségek erősen nőnek. Hogy tehát (1) véges számot adjon, kell hogy az u_i számok erősen fogyjanak. De mi másrészt azt is akarjuk, hogy (1) épen az s_n számok határértékét adja, ha ez utóbbi van, vagy a függvény értékét az 1 helyen, ha legalább ez van; általában azt, hogy szoros összefüggésben legyen a függvény viselkedésével az 1 hely környezetében (ha az s_n mennyiségeket az 1 helyhez tartozó részletösszegeknek tekintjük). De mindezek csak az igen nagy indexű s_n számoktól függenek s így túlságos kicsiny szorzóval nem szabad ezek befolyását a középérték meghatározására csökkenteni, mert különben nem remélhetjük, hogy önkényes «középérték»-ünk s az $s_n - s_{n-1} = a_n$ együtthatókból alkotott függvény között lesznek fontos összefüggések. BORELnek sikerült szerencsésen eltalálni a középútat, két indexű, $u_n^{(a)}$ sort véve u_i szorzókul; így egész sorozatát nyeri a fontos közepeknek, mik közül egyelőre csak a legegyszerűbbet vezetjük be, hol ugyanis

$$u_n^{(a)} = \frac{a^n}{n!}$$

s így a közép

$$s = \lim_{a=\infty} \frac{s_0 + s_1 \frac{a}{1!} + s_2 \frac{a^2}{2!} + \cdots + s_n \frac{a^n}{n!} + \cdots}{1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \cdots} = \lim_{a=\infty} S(a), \tag{2}$$

hol az a folytonos változónak is gondolható. $S(a)$ neve *exponencziális összeg* (megfelel a számtani közép szónak), az s határérték neve pedig az s_n számsorozat *általánosított határértéke* (limite généralisée).

Az így értelmezett «közepek»-nek egyik legfontosabb tulajdonsága az, hogy ha

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

függvény az összetartási kör egy x_0 pontjában szabályos, akkor (2) képletben az s_n számok helyébe az x_0 helyre képzett részletösszegeket, azaz

$$s_n=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n$$

számokat téve, általánosított határértékül épen a függvény x_0 helyhez tartozó értékét kapjuk.

Idézett értekezésünkben kimutattuk, hogy az általánosított határérték van az összetartási kör minden negativrendű helyén is és ez a határérték épen a függvény határértéke, midőn ezen ponthoz belőlről vagy a körön közeledünk. Egyelőre az exponencziális összeg ezen két tulajdonságát fogjuk lényegesen kihasználni, hogy azután kiterjeszszük eredményeinket — mindig az exponencziális összeg tulajdonságainak kihasználásával — az összetartási körön kivül fekvő szinguláris helyekre.

3. §. A módszer bemutatása végett vegyük először az elsőfokú pólus esetét, azaz x_0 hely környezetében legyen

$$f(x)=\frac{B_1}{1-\dfrac{x}{x_0}}+f_1(x),$$

hol $f_1(x)$ az x_0 helyen szabályos. Az említett Borel-tétel szerint tehát

$$f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n-\frac{B_1}{x_0^n}\right)x^n$$

függvényre az x_0 helyen képzett exponencziális összegeknek van határértéke, mondjuk A_0. Az $f_1(x)$ függvény x_0 helyre képzett részletösszegei

$$s_0'=a_0-B_1,\ s_1'=a_0+a_1x_0-2B_1,\ldots,\ s_n'=s_n-(n+1)B_1,\ldots$$

tehát

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0 - B_1 + (s_1 - 2B)\frac{a}{1!} + \cdots + [s_n - (n+1)B_1]\frac{a^n}{n!} + \cdots}{1 + \frac{a}{1!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \cdots} = A_0.$$

Ez azonban írható

$$\lim_{a=\infty} \left[S(a) - B_1 \frac{1 + \frac{2a}{1!} + \frac{3a^2}{2!} + \cdots + \frac{(n+1)a^n}{n!} + \cdots}{1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \cdots} \right] = A_0,$$

továbbá

$$\lim_{a=\infty} \left[S(a) - \frac{B_1 \frac{d}{da}(ae^a)}{e^a} \right] = A_0 \tag{3}$$

alakban, mert

$$\frac{d}{da}(ae^a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\frac{a^n}{n!}.$$

Azonban

$$\frac{\frac{d}{da}(ae^a)}{e^a} = \frac{ae^a + e^a}{e^a} = a + 1$$

s így

$$\lim_{a=\infty} \frac{\frac{d}{da}(ae^a)}{ae^a} = 1.$$

Tehát (3) képletben a számmal osztva, kapjuk, hogy

$$\lim_{a=\infty} \frac{S(a)}{a} = B_1. \tag{4}$$

Elsőfokú pólus esetében az exponencziális összeg első fokon válik végtelenné s hányadosa a-val határértékül a residuumot adja.

Hangsúlyozzuk, hogy az adott $f(x)$ függvény a_n együtthatóira *semmi megszorítást* nem tettünk.

4. §. Hasonló az okoskodás az általános esetben, midőn az x_0 hely k-adfokú pólus, azaz

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$

$$=\frac{B_k}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^k}+\frac{B_{k-1}}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^{k-1}}+\cdots+\frac{B_1}{1-\frac{x}{x_0}}+f_1(x), \quad (5)$$

hol $f_1(x)$ már szabályos az x_0 helyen s így a fent is használt Borel-tétel szerint, ha az egész főrész Mac-Laurin sorának együtthatóit c_n-nel jelöljük, az

$$f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-c_n)\,x_n$$

függvényre az x_0 helyen képzett exponencziális összegeknek van határértéke (A_0). Azaz, ha $S_i(a)$ az

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^i}$$

kifejezésre az x_0 helyen képzett exponencziális összeg jele, akkor írhatjuk, hogy

$$\lim_{a=\infty}[S(a)-B_1S_1(a)-B_2S_2(a)-\cdots-B_kS_k(a)]=A_0. \quad (6)$$

De, mint könnyű számítás mutatja,

$$S_i(a)=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+i)(n+i-1)\ldots(n+1)\frac{a^n}{n!}}{i!\,e^a}=\frac{(a^ie^a)^{(i)}}{i!\,e^a},$$

hol a zárójel feletti index differencziálást jelent. Ebből kapjuk, hogy

$$\lim_{a=\infty}\frac{S_i(a)}{a^i}=\frac{1}{i!}$$

s így $i<k$ esetében

$$\lim_{a=\infty}\frac{S_i(a)}{a^k}=0,$$

míg $i=k$ esetben

$$\lim_{a=\infty}\frac{S_k(a)}{a^k}=\frac{1}{k!}$$

s igy végre a (6) egyenlőség mindkét oldalát osztva a^k mennyiséggel kapjuk, hogy

$$\lim_{a=\infty} \frac{S(a)}{a^k} = \frac{B_k}{k!} \tag{7}$$

k-adfokú pólus esetében az exponencziális összeg k-adfokon válik végtelenné s (7) megadja a pólus főrészének B_k együtthatóját.

A B_k kiszámitása után

$$\frac{B_k}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^k}$$

levonásával oly függvényt nyerünk, melynek az x_0 helyen csak $(k-1)$-edfokú pólusa van, s igy erre ismét alkalmazva tételünket, az exponencziális összeg segitségével megkapjuk B_{k-1} együtthatót s igy tovább valamennyi együttható összefüggését az adott a_n együtthatókkal.

A (7) alatti összefüggés egészen általános, bármilyen együtthatójú TAYLOR-sorra érvényes s igy előállitja a keresett általános összefüggést a pólus és az együtthatók között, bárminők is más helyen a függvény szingularitásai. Tehát egy hely szingularitásának megvizsgálását függetlenítettük a többi helyen levő (bárminő) szingularitásoktól.

A szingularitások függetlenitésében azonban még tovább is mehetünk. A szingularitások szempontjából a pólusnak csak főrésze fontos, mert a másik része szabályos, tehát úgy gondolhatjuk a pólust, hogy egy szingularitás (t. i. a főrész) hozzá van adva egy ugyanott szabályos függvényhez. Ugyanigy azonban a főrész hozzá lehet adva (s ez az általános eset) oly függvényhez, mely ugyanott nem szabályos.[1] A mivel csak azt a közönséges tényt akarjuk kifejezni, hogy egy hely szingularitása többféle szingularitás összetömörüléséből, összeadá-

---

[1] Például $\dfrac{B_1}{1-\dfrac{x}{x_0}} + \sqrt{x-x_0}$.

sából is eredhet. Ha tehát felteszszük, hogy a főrész csak szingularitás részlet az x_0 helyen, mely a függvény végtelenné válását jellemzi azon a helyen, van-e ily általános összefüggés az előre adott együtthatók és a főrész között? Kijelölünk egy általános esetet, midőn a keresett összefüggés épen oly alakú, mint a (7) alatti relácczió.

Legyen ugyanis az x_0 helyen

$$f(x) = \frac{B_k}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^k} + \frac{B_{k-1}}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^{k-1}} + \cdots + \frac{B_1}{1-\frac{x}{x_0}} + f_1(x), \quad (8)$$

hol $f_1(x)$ az x_0 helyen már negativrendű; ekkor a (6) alatti határértéknek (mely épen az $f_1(x)$ függvényre képzett exponencziális összeg) megint lennie kell, mert az általunk[1] kiterjesztett Borel-tétel szerint az exponencziális összegnek az összetartási kör minden negativrendű helyén van határértéke. Az okoskodás többi része változatlanul fenmarad s így (7) akkor is fennáll, ha $f(x)$ az x_0 hely környezetében (8) alakban írható. Megjegyezzük, hogy az $f_1(x)$ függvény az x_0 helyen (pólusokat kivéve) bármilyen *fajtájú* szingularitás daczára is lehet negativrendű; például lehet algebrai vagy logaritmikus elágazó pont stb., sőt akár szinguláris vonal belső pontja. Így tehát, ha egy helyen a függvény végtelenné válását egy pólus főrészének is vehető kifejezés jellemzi, s ettől eltekintve a függvény ott már negativrendű, a függvény végtelenné válását jellemző «főrész» kiszámítását függetlenítettük az ugyanazon helyen fellépő többi szingularitástól is. Nagy szerepet játszik ez a megjegyzés az algebrai és logaritmikus elágazó helyek vizsgálatánál. Most azonban az exponencziális összeg tulajdonságait akarjuk még a lehető legteljesebben kihasználni a szingularitások és együtthatók összefüggése szempontjából.

5. §. Mint tudjuk, az exponencziális összegezés nemcsak az összetartási kör szabályos (és negativrendű) helyein állítja

[1] Id. mű 6. §.

elő a függvény értékét, hanem azonkivül is az ú. n. összegezési sokszög (polygone de sommabilité)[1] minden belső pontjában. Az összegezési sokszöget úgy nyerjük, hogy kiszemeljük azokat a szinguláris pontokat, melyek az ő félsugarukon a kezdőponthoz legközelebb esnek s ezen kiszemelt pontokban merőlegeseket emelünk az illető félsugarakra. A kezdőpont körül így szerkesztett, nyitott vagy zárt (esetleg néhol görbe által is határolt) idom az összegezési sokszög. Természetesen jövő gondolat tehát ezen exponencziális összegezés felhasználása eddigi eredményeink általánosítására, kiterjesztésére az összetartási körön kívül eső szinguláris helyekre. E czélból legelőször is meg kell alkotnunk a szingularitás rendjének fogalmát az összetartási körön kívül eső szinguláris helyekre vonatkozólag. Hadamardnak[2] a körön fekvő helyekre vonatkozó rendfogalmát többféle, igen mélyreható nehézségek miatt nem vihetjük át ugyanazon formában a körön kívül eső helyekre. Azonban definicziónkat ezen fogalom leglényegesebb tulajdonságaiból igyekszünk összerakni, mit az igazol legjobban, hogy az így értelmezett negativ helyekre most bebizonyítandó tétel szóról-szóra megegyezik az összetartási körön a Hadamard-féle rendfogalommal nyert tétellel.

A kérdéses definiczió a következő: Kössük össze az x_0 pontot a kezdőponttal s ezen a vonalon x_0 legyen az egyetlen szinguláris hely. Az x_0 szinguláris hely rendje ω, ha van oly $\varphi(x)$ függvény, melyet az adott $f(x)$ függvényből levonva, a különbség az x_0 helyen már szabályos, hol $\varphi(x)$ összetartási sugara $|x_0|$ és rendje az összetartási körén legfeljebb $\omega+\varepsilon$; ε tetszésszerinti kicsiny pozitiv szám.

Könnyen meghatározható ezen definiczió szerint például minden pólus vagy algebrai és logaritmikus elágazó hely rendje (itt ε nullának is vehető), általában minden egymagában is megadható szinguláris helyé. Például ha a nem pozitiv egész

[1] Lásd Borel id. mű 126. lap.

[2] Lásd Hadamard id. mű 41. §. vagy Dienes P. id. mű 2. §.

szám és $f_1(x)$ összetartási sugara kisebb ugyan mint $|x_0|$, de a $\overline{0x_0}$ vonalon nincs szinguláris helye, az

$$(x-x_0)^\alpha\left[\log(x-x_0)\right]^\beta+f_1(x)$$

függvény rendje az x_0 helyen $-\alpha$.

Tegyük fel most, hogy az adott $f(x)$ függvény összegezési sokszögének egyik oldalán (s nem csúcsában) van egy negativrendű szinguláris hely, x_0. A feltevésünknél fogva létező $\varphi(x)$ kivonása után az x_0 hely szabályos lesz s az

$$F(x)=f(x)-\varphi(x) \tag{9}$$

függvény összetartási sokszögének *belsejébe* fog esni, tehát az ezen függvényre az x_0 helyen képzett exponencziális összegeknek van határértéke.

Másrészt $\varphi(x)$ összetartási sugara $|x_0|$ s így x_0 a $\varphi(x)$ összetartási körére esik s ott negativrendű, mivel $\varphi(x)$ függvénynek az egész körre vonatkozó rendje negativvá tehető alkalmas ε választásával s így idézett értekezésünk 6. §-a szerint ezen függvényre az x_0 helyen képzett exponencziális összegnek van határértéke. Mivel pedig (9) szerint

$$f(x)=F(x)+\varphi(x)$$

s az exponencziális összegezés *disztributiv* operáczió,[1] tehát nemcsak maga az $f(x)$ függvény, hanem az $f(x)$ függvényre az x_0 helyen képzett exponencziális összeg is az ugyanott $F(x)$ függvényre és $\varphi(x)$ függvényre képzett exponencziális összegek összegéül írható s így ennek is van határértéke.

Az összegezési sokszög oldalaira eső negativrendű helyeken az exponencziális összegnek van határértéke s ez megegyezik a függvény odatartozó határértékével.

6. §. Ugyanígy kiterjeszthetők az összegezési sokszögre a pólusokra vonatkozó eredményeink. Legyen x_0 ezen sokszög

---

[1] Erre vonatkozólag lásd PINCHERLE: Sur le calcul fonctionel distributif. Mathematische Annalen 49. köt. 325. lap.

egyik oldalára (s nem csúcsába) eső k-adfokú pólus, azaz

$$f(x)=\frac{B_k}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^k}+\frac{B_{k-1}}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^{k-1}}+\cdots+\frac{B_1}{1-\frac{x}{x_0}}+f_1(x), \quad (10)$$

hol $f_1(x)$ függvény az x_0 helyen már szabályos. Mivel $f_1(x)$ szingularitásai épen ott vannak, a hol a $f(x)$ függvényéi, kivéve az x_0 pontot, ez utóbbi az $f_1(x)$ függvényre alkotott összegezési sokszög belsejébe esik s így a rá alkotott $S'(a)$ exponencziális összegeknek van határértéke. Másrészt a pólus főrészéből eredő $S_i(a)$ exponencziális összegeket megvizsgáltuk a 4. §-ban s így az ottani okoskodás felhasználásával kapjuk, hogy

$$\lim_{a=\infty}\frac{S(a)}{a^k}=\frac{B_k}{k!}. \quad (11)$$

Ugyanolyan összefüggés áll fenn az összegezési sokszög oldalaira eső pólusok és az együtthatók között, mint a minőt az összetartási körre eső pólusoknál találtunk.

Az előbbi §. segítségével ez tüstént általánosítható arra az esetre, mikor a főrész csak a végtelenné válást jellemző szingularitás-részlet az x_0 helyen olyformán, hogy (10) képletben $f_1(x)$ az x_0 helyen nem szabályos, hanem ott negativrendű szingularitása van. Az eredmény azonos (11) képlettel.

Látjuk itt, hogy az exponencziális összeg mily szoros összefüggésben van a függvény viselkedésével. Ehhez hasonló, de tágabb kiterjedésű összefüggéseket adnak az exponencziális összegezés általánosított alakjai is. Vehetjük ugyanis e^a függvény helyett e^{a^r} függvényt is összegezési függvény (fonction sommatrice) gyanánt, azaz képezhetjük az s_n részletösszegekből

$$\lim_{a=\infty}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}s_{r.n}\frac{a^{r.n}}{n!}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^{r.n}}{n!}}$$

«közepeket» (hol r tetszőleges pozitiv egész szám) s BOREL[1] kimutatja, hogy ezek az összegezési sokszögön kivül is előállitják a függvényt elég tág határok között. Például, ha a szinguláris helyek halmazának nincs a végesben határpontja (s a gyakorlatban ez legtöbbször igy van), egy önkényes szabályos ponthoz tetszőlegesen közel fekvő helyeken elő lehet velök állitani a függvény értékét. Általában a komplex sík azt a részét, hol a most bemutatott r-edik exponencziális összeg előállitja a függvény értékét az r-edik exponencziális összeg összegezési tartományának nevezzük.

Legyen megint az x_0 hely k-adfokú pólus s az x_0 hely essék bele az ezen pólustól megszabaditott függvényre vonatkozó r-edik összegezési tartományba. Azaz legyen megint

$$f(x) = \frac{B_k}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^k} + \frac{B_{k-1}}{\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^{k-1}} + \cdots + \frac{B_1}{1-\frac{x}{x_0}} + f_1(x)$$

s $f_1(x)$, mely az x_0 helyen már szabályos, legyen összegezhető az x_0 helyen az $S^{(r)}(a)$, r-edik exponencziális összeggel. A fentebbiekhez teljesen hasonló okoskodás és könnyű számitás mutatja, hogy ekkor

$$\lim_{a=\infty} \frac{S^{(r)}(a)}{r^k a^{rk}} = \frac{B_k}{k!}.$$

Dienes Pál.

---

[1] Id. mű. 129–133. lap.

A KÉT KÉPSÍKON VALÓ ÁBRÁZOLÁS ELMÉLETÉHEZ.

(Első közlemény.)

Az ábrázoló geometria módszerei között egyszerűség és gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából első helyet foglal el a MONGE-féle ábrázolás, melynek segitségével a térbeli alakzatokat két képsíkon ábrázoljuk. E módszernek meg vannak a maga szigorúan tudományos alapjai. Magában véve azonban nem világítja meg kellőképen a két képsíkon való ábrázolás lényegét. Hogy egymásra merőleges képsíkokat és orthogonális vetitéseket használunk, hogy a képsíkokat egymásba forgatjuk, mind fontos lehet a módszer egyszerűsítése szempontjából, de lényegtelen a két képsíkon való ábrázolás elmélete szempontjából.

Ha tekintetbe veszszük, hogy a két képsík egymásba forgatását alkalmas parallel vetítéssel helyettesithetjük, megállapithatjuk, hogy a két képsíkon való ábrázolás eszközei: *három sík és három vetítés*. A vetítések mindegyike kétszeresen végtelen sok egyenessel, vetítő sugarakkal történik, melyekről azonban kikötjük, hogy a tér valamely pontján, a vetítő sugarak minden rendszeréből, általában egy és csak egy sugár haladjon keresztül. A vetítésre szolgálhatnak valamely pontban találkozó egyenesek, a mikor *czentrális vetítés*sel van dolgunk. Ide számítjuk a parallel vetítést is. De használhatjuk vetítésre valamely *lineáris kongruencziá*nak a sugarait is.

MONGE módszerének is ez a lényege. Csakhogy itt az említett eszközök speczialis vonatkozásban vannak. Ha ezeket a speczialis vonatkozásokat elhagyjuk, általánosabb, bár komplikáltabb ábrázoló módszereket nyerünk.

Ezekkel kivánok e dolgozatomban foglalkozni.

I. Ábrázolás czentrális vetítések alkalmazásával.

1. Az ábrázolás czéljaira választunk három tetszőleges síkot: π_1, π_2, π. A két elsőt *első* és *második képsík*nak, az utolsót, melyen a szerkesztéseket végezzük, *szerkesztő sík*nak nevezzük. A π_1 és π_2 képsíkok metszésvonala az x_{12} *képtengely*. Legyen továbbá U, V, T három vetítő czentrum. Ezeket úgy választjuk, hogy U ne legyen az első képsíkban, V ne legyen a második képsíkban, T pedig sem a képsíkokban, sem a szerkesztő síkban ne legyen. Az első kettőt *első*, ill. *második czentrum*nak, az utolsót *szerkesztő czentrum*nak nevezzük. Az U ponton átmenő egyenesek az *első-*, a V ponton átmenők a *második vetítő sugarak*. A π szerkesztő sík átmehet az x_{12} képtengelyen is, vagy valamely képsíkkal egybe is eshetik. Az U első czentrum a π_2 képsíkban, vagy V az első képsíkban is lehet. Végül az U, V, T czentrumok egy egyenesen is lehetnek.*

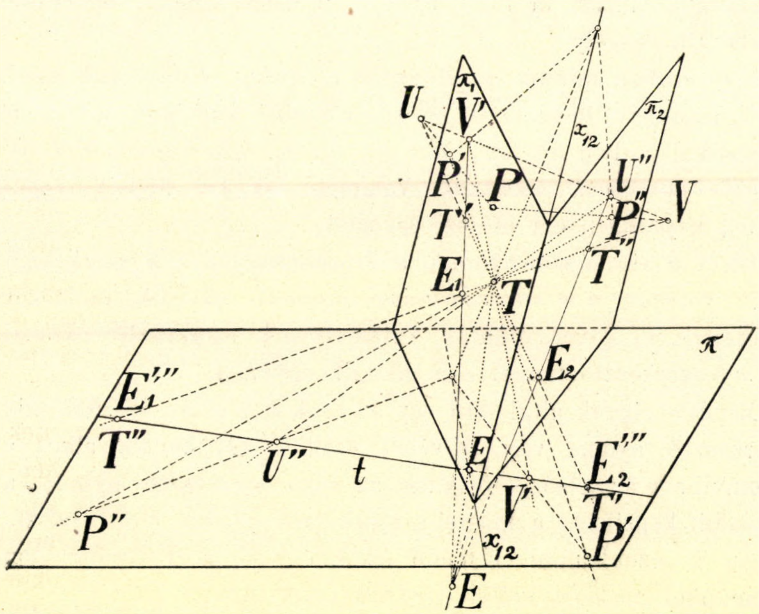
Az így választott térelemekkel alkotott ábrázoló módszernek a MONGE-féle az a speczialis esete, melyben a π_1 és π_2 képsíkok egymásra merőlegesek, a π szerkesztő sík az egyik képsíkkal egybeesik, az U vetítő czentrum az első képsíkra merőleges egyeneseknek, a V vetítő czentrum a második képsíkra merőleges egyeneseknek, míg végre a T czentrum a második felező, koinczidenczia síkra merőleges egyeneseknek a végtelenben fekvő pontja. Ebben az esetben az U, V, T czentrumok

---

* Azokkal a speczialis esetekkel, melyek előállanak, midőn az $[UV]$ egyenes az x_{12} képtengelyt metszi, vagy az $[UVT]$ sík a képtengelyen átmegy, itt nem foglalkozom.

egy egyenesen, még pedig a képtengelyre merőleges síkok végtelenben fekvő egyenesén vannak. Végül U a π_2 képsíkban, V a π_1 képsíkban van.

2. Vetítsük a tér egy tetszőleges P pontját az U czentrumból π_1-re, a V czentrumból π_2-re. *Az így nyert P' és P'' projekcziót nevezzük a P pont első és második képsík-projekcziójának.* Vetítsük most e képsík-projekcziókat a T czentrumból a π szerkesztő síkra. *Az így nyert két projekcziót*, melyeket szintén P' és P''-vel jelölünk, *a P pont első és második szerkesztő projekcziójának nevezzük* (1. ábra).



1. ábra.

A tér minden pontjának általában egy és csak egy első, ill. második szerkesztő projekczió felel meg. Kivételt csak az U és V vetítő czentrumok képeznek, a mennyiben az U czentrumnak az első, a V czentrumnak a második projekcziója határozatlan.

3. Az U pont második, a V pont első és a T pont mindkét szerkesztő projekcziója egy egyenesen van, még pedig azon az egyenesen, melyben a három czentrumon átmenő $[UVT]$ sík, *a czentrális sík*, a szerkesztő síkot metszi. Ezt a t egyenest *czentrális tengelynek* fogjuk nevezni.

Ha az x_{12} képtengelyt a T czentrumból a π szerkesztő síkra vetítjük, az x_{12} *szerkesztő tengelyt* nyerjük.

Az U'', V', T', T'' szerkesztő projekcziókat és az x_{12} szerkesztő tengelyt *ábrázoló elemeknek* nevezzük.

Ha az U, V, T czentrumok egy egyenesen vannak, akkor az U'', V', T', T'' szerkesztő projekcziók egybe esnek és a szerkesztő síknak minden ezen a ponton átmenő egyenese szerkesztő tengely.

Első sorban mindig az ábrázoló elemeket határozzuk meg.

4. Valamely tetszőleges σ sík az első képsíkot s_1-ben, a másodikat s_2-ben metszi. *Ezt az s_1, s_2 egyenespárt a σ sík képsík-nyomainak nevezzük.* Valamely sík két képsík-nyoma az x_{12} képtengelyben metszi egymást.

Ha a σ sík képsík-nyomait a T czentrumból a π szerkesztő síkra vetítjük, *a σ sík szerkesztő nyomait* nyerjük, melyeket szintén s_1 és s_2-vel jelölünk. Valamely sík szerkesztő nyomai az x_{12} szerkesztő tengelyben metszik egymást.

Minden síknak általában egy és csak egy első-, ill. második szerkesztő nyoma van. Kivételt csak a két képsík alkot, a mennyiben az első képsíknak az első szerkesztő nyoma, a második képsíknak a második szerkesztő nyoma határozatlan.

Az U czentrumon átmenő síkokat *első*, a V czentrumon átmenőket *második vetítő síkoknak* nevezzük.

A síkot általában két szerkesztő nyoma meghatározza. Kivételt képeznek azok a síkok, melyek a képtengelyen mennek át. Ezeknek két szerkesztő nyoma az x_{12} szerkesztő tengely.

5. Az egyenes összes pontjainak első szerkesztő projekcziója az egyenes *első szerkesztő projekcióját*, összes pontjainak második szerkesztő projekcziója az egyenes *második szerkesztő projekcióját* adja. Az egyenes első szerkesztő projekcziója e

szerint az egyenesen átmenő első vetítő sík első szerkesztő nyoma és második szerkesztő projekcziója az egyenesen átmenő második vetítő sík második szerkesztő nyoma.

Az egyenesnek a képsíkokkal való metszéspontjai az egyenes *képsík-nyomai.* Ha ezeket a T czentrumból a π szerkesztő síkra vetítjük, kapjuk az egyenes *szerkesztő nyomait.*

Ha valamely egyenes egy síkban van, úgy annak első szerkesztő nyoma a sík első szerkesztő nyomában, második szerkesztő nyoma a sík második szerkesztő nyomában van.

Az egyenest két projekcziója általában meghatározza. Kivételt képeznek azok az egyenesek, melyek az $|UV|$ egyenest metszik.

Az egyenest két szerkesztő nyoma is meghatározza. Kivételt képeznek azok az egyenesek, melyek az x_{12} képtengelyt metszik.

6. *Két pont, P' és P'' akkor és csak akkor valamely térbeli P pont két szerkesztő projekcziója, ha a $|P'V'|$ és $|P''U''|$ egyenesek egymást az x_{12} szerkesztő tengelyben metszik.* Mert a P ponton átmenő két vetítő sugár a $[PUV]$ síkban van és $|P'V'|$ e sík első, $|P''U''|$ e sík második szerkesztő nyoma és így ezek tényleg az x_{12} szerkesztő tengelyben metszik egymást. És fordítva, ha a $|P'V'|$ és $|P''U''|$ egymást az x_{12} tengelyben metszik, úgy ezek az egyenesek egy olyan sík szerkesztő nyomai, mely átmegy az U és V czentrumon. De akkor a P' ponthoz tartozó első, és a P''-hez tartozó második vetítő sugár is e síkban van. E két egyenes tehát egy pontban metszi egymást, és ez a P pont (1. ábra).

Ha az U, V, T czentrumok egy egyenesen vannak, akkor valamely pont két szerkesztő projekcziója egy és ugyanazon a szerkesztő tengelyen van.

7. Az $|UV|$ egyenes, vagyis a *czentrális* minden pontjának első szerkesztő projekcziója V', második szerkesztő projekcziója U''.

Ha az U czentrum π_2-ben van, $T' \equiv U''$ és ha V π_1-ben van, akkor $T'' \equiv V'$.

8. *Az első képsík pontjainak első és második szerkesztő*

projekcziója között czentrális kollineáczió áll fenn, mely kollineácziónak czentruma a T'' szerkesztő projekczió, tengelye pedig az x_{12} szerkesztő tengely, és egy megfelelő pontpárja V', U''.

Hogy kollineáczió, még pedig czentrális kollineáczió áll fenn az említett esetben és hogy az x_{12} szerkesztő tengely annak tengelye, megokolást nem kiván.

Hogy V', U'' egy megfelelő pontpár, az onnan következik, hogy az első képsík és az $|UV|$ czentrális metszéspontjának első projekcziója V', második projekcziója U''.

Hátra marad tehát még annak a bebizonyítása, hogy T'' szerkesztő projekczió a kollineáczió ezentruma. Hogy ezt igazoljuk, kimutatjuk, hogy az első képsík valamely P_1 pontjának két szerkesztő projekczióját összekötő egyenes a T'' ponton halad át. Tegyünk ugyanis a P_1, V, T pontokon egy síkot, akkor e síkban van a P_1 pont első és második képsík projekcziója és a T pont második képsík projekcziója. De akkor e síkban vannak egyúttal a P_1', P_1'' és T'' szerkesztő projekcziók is, még pedig abban az egyenesben, melyben a $[P_1VT]$ sík a szerkesztő síkot metszi.

Hasonló megfontolásokból következik, hogy *a második képsík pontjainak második és első szerkesztő projekcziója között czentrális kollineáczió áll fenn, mely kollineácziónak czentruma a T' szerkesztő projekczió, tengelye pedig az x_{12} szerkesztő tengely és egy megfelelő pontpár U'', V'.*

Ezekből következik, hogy a T'' szerkesztő projekczió az első képsík egy E_1 pontjának, és a T' szerkesztő projekczió a második képsík egy E_2 pontjának a két szerkesztő projekcziója.

Ha a V czentrum az első képsíkban van, akkor az első, vagy ha az U czentrum a második képsíkban van, akkor a második kollineácziónak szinguláris elemei vannak.

Ha pedig az U, V, T czentrumok egy egyenesen vannak, akkor e kollineácziók csak úgy lesznek meghatározva, ha a képsíkok egy-egy pontjának két szerkesztő projekczióját megadjuk.

9. Ha az ábrázoló elemeket és egy pont két szerkesztő projekczióját ismerjük, akkor a pont térbeli helyét következőképen határozzuk meg.

Felveszszük a szerkesztő síkon kívül tetszőlegesen a T szerkesztő czentrumot és a T meg az x_{12} szerkesztő tengely meghatározta síkban az x_{12} képtengelyt, de úgy, hogy az ne menjen át a T czentrumon. Ez a képtengely a szerkesztő tengelylyel azonos is lehet. Azután az x_{12} képtengelyen át tetszőlegesen fektetjük a π_1, π_2 képsíkokat, de úgy, hogy azok egyike sem menjen át a T czentrumon. Most vetítsük a T czentrumból a P', V', T' szerkesztő projekcziókat a π_1-re, és a P'', U'', T'' szerkesztő projekcziókat a π_2-re. Így kapjuk az első képsíkon a P', V', T', a második képsíkon a P'', U'', T'' képsík-projekcziókat. A V' és U'' képsík-projekcziókat összekötő egyenes a czentrális, melynek a $|TT'|$ egyenessel való metszéspontja U, a $|TT''|$ egyenessel való metszéspontja V. Ezek után, ha a P' képsík-projekcziót U-val és a P'' képsík-projekcziót V-vel kötjük össze, ezeknek metszéspontja a térbeli P pont.

Így valamely tetszőleges P' és P'' összetartozó szerkesztő projekczióknak általában, a T czentrum, az x_{12} képtengely és a képsíkok felvétele után a tér egy és csak egy pontja felel meg. Kivételt képez az az eset, midőn $P' \equiv V'$ és $P'' \equiv U''$. Ebben az esetben a P', P'' szerkesztő projekczióknak a czentrális bármely pontja felel meg.

Ha az ábrázoló elemek olyanok, hogy

$$U'' \equiv V' \equiv T' \equiv T'',$$

akkor a rekonstrukczionál ismerni kell az első képsík valamely P_1 pontjának és a második képsík valamely P_2 pontjának a szerkesztő projekczióit. Ebben az esetben a P_1' és P_1'', ill. a P_2' és P_2'' képsík-projekcziókat összekötő egyeneseknek a czentrálissal való metszéspontjai adják a V, ill. az U czentrumot.

A pont rekonstruálásánál a T czentrumot, az x_{12} képtengelyt és a π_1. π_2 képsíkokat, bizonyos megszorításoktól eltekintve, önkényesen választjuk. A mint ezeket másképen és másképen választjuk, ugyanazoknak a P', P'' szerkesztő projekczióknak más és más pont felel meg a térben.

Ha azonban a pontok valamely rendszerét ábrázoljuk, és ezeket az önkényes elemek különböző választásának megfelelőleg rekonstruáljuk, oly pontrendszereket nyerünk, melyeknek méreti tulajdonságaik különbözők, de helyzeti tulajdonságaik ugyanazok, vagyis ezek kollineáris pontrendszerek.

10. *Koinczidáló pontoknak a tér ama pontjait nevezzük, melyeknek két szerkesztő projekcziója egy pontba esik.*

A 6. pontból következik, hogy a szerkesztő sík valamely $P' \equiv P''$ pontja, akkor és csak akkor lehet valamely térbeli P pont két szerkesztő projekcziója, ha a $P' \equiv P''$ pont vagy az x_{12} szerkesztő tengelyben, vagy a t czentrális tengelyben van. Az első esetben a P pont az x_{12} képtengelyben, a második esetben a czentrális síkban van. Minden az x_{12} képtengelyben fekvő pont egyúttal koinczidáló pont is, de a czentrális sík nem minden pontja koinczidáló pont. Feladatunk lesz a czentrális sík koinczidenczia pontjainak a meghatározása (2. ábra).

E czélból vegyük fel a t czentrális tengelyben a $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, koinczidáló pontoknak szerkesztő projekcióit:

$$P'_1 \equiv P''_1,\ P'_2 \equiv P''_2, \ldots, P'_n \equiv P''_n, \ldots$$

Az ezeknek megfelelő képsík-projekcziók sorban:

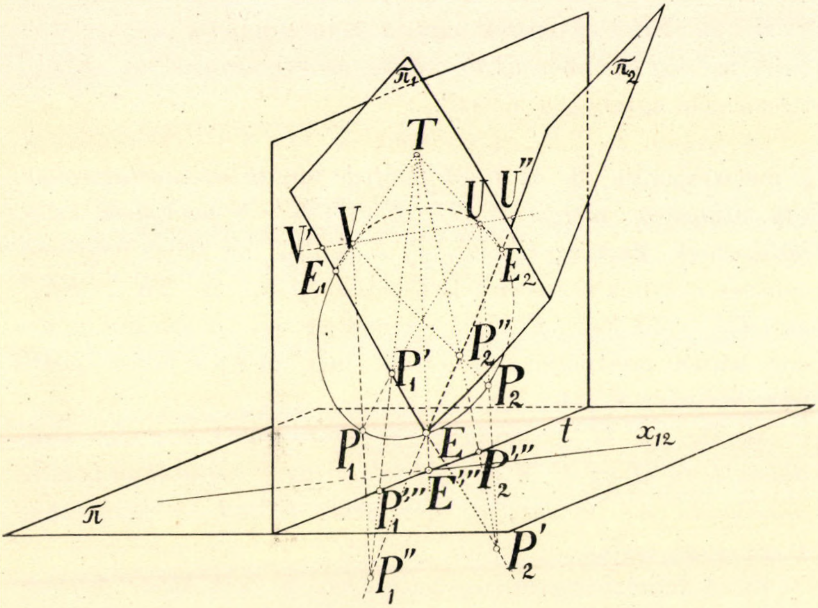
$$P'_1,\ P'_2, \ldots, P'_n, \ldots \quad \text{és} \quad P''_1,\ P''_2, \ldots, P''_n, \ldots$$

két, a T czentrumra nézve perspektiv pontsort alkotnak és így, ha az egyik pontsor pontjait U-val, a másiknak pontjait V-vel kötjük össze, két projektiv sugársort nyerünk:

$$|\,U \,.\, P'_1 P'_2 \ldots P'_n \ldots| \;\overline{\wedge}\; |\,V \,.\, P''_1 P''_2 \ldots P''_n \ldots|. \qquad (s)$$

E két projektiv sugársor megfelelő sugarainak metszéspontjai egy kúpszeletet alkotnak. Ebből következik, hogy *a czentrális síkban fekvő koinczidáló pontoknak geometriai helye kúpszelet, melyet koinczidáló kúpszeletnek nevezünk.*

Ez a kúpszelet átmegy az U és V czentrumokon, és azon az E ponton, melyben a czentrális sík az x_{12} képtengelyt metszi; továbbá átmegy a π_1 képsík amaz E_1 pontján, melyben a $|TV|$ egyenes π_1-et metszi és a π_2 képsík amaz E_2



2. ábra.

pontján, melyben a $|TU|$ egyenes π_2-t metszi. E pontok szerkesztő projekcziói:

$$E_1' \equiv E_1'' \equiv T'' \quad \text{és} \quad E_2' \equiv E_2'' \equiv T'.$$

A koincziddáló kúpszeletet az U, V, E, E_1, E_2 pontok teljesen meghatározzák.

11. Ha az U pont a π_2, a V pedig a π_1 képsíkban van, akkor $U \equiv E_2$ és $V \equiv E_1$; ebben az esetben $|UT|$ az U pontban, $|VT|$ a V pontban érinti a kúpszeletet. A T czentrum tehát az $|UV|$ czentrálisnak harmonikus pólusa a koinczidenczia kúpszeletre nézve. A kúpszeletet most az U, V, E pontok és $|TU|$, $|TV|$ érintők határozzák meg.

12. *A koinczidenczia kúpszelet, amaz érintője, mely az E pontban érinti a kúpszeletet, ugyanabban az L pontban metszi az $|UV|$ czentrálist, melyben az E''_1 és E'_2 képsík-projekcziókat összekötő $|E''_1E'_2|$ egyenes azt metszi.* Mert az $|UV|$ egyenes és az $|EE|$ érintő, az $|UE_2|$ és $|EE_1|$ egyenesek, végül a $|VE_1|$ és $|EE_2|$ egyenesek egy a koinczidenczia kúpszeletbe beírt hatszög szemben fekvő oldalai, melyek egymást az $|E''_1E'_2|$ Pascal-féle egyenesen metszik.

13. Legyen a $|TE|$ egyenesnek és az $|UV|$ czentrálisnak a metszéspontja M. *Az L, M pontpár annak az involucziónak egy elempárja, melyet az U'', U és a V', V pontpárok meghatároznak.* Mert az E''_1, E'_2, T, E pontok egy teljes négyszög csúcsai, melynek szemben fekvő oldalai $|EE_2|$ és $|TE_2|$, $|EE_1|$ és $|TE_1|$, $|TE|$ és $|E''_1E'_2|$ a czentrálist egy involucziós pontsor három pontpárjában metszik, még pedig e három pontpár: U'', U; V', V; M, L.

14. *Ha az U czentrum a π_2 képsíkban, V a π_1-ben van, akkor L és M az U, V pontpártól és így a képsíkoktól is harmonikusan van elválasztva.* Mert akkor $U''\equiv U$, $V'\equiv V$, tehát U és V az involuczió kettős pontjai.

15. *A koinczidenczia kúpszelet akkor és csak akkor degenerál egyenespárrá, ha a T czentrum az $|UV|$ czentrálison van.* Mert az (s) alatti sugársorok akkor és csak akkor lehetnek perspektivek, ha T az $|UV|$ czentrális pontja. Az egyenespár egyik egyenese maga az $|UV|$ czentrális. A másik egyenes átmegy az E ponton és az $|UV|$ czentrálist abban az L pontban metszi, mely T-vel együtt annak az involucziónak elempárja, melyet az U'', U és V', V pontpárok meghatároznak. Mert az egyenespár utóbb említett egyenesének egy tetszőleges P pontja, továbbá a P' és P'' képsík-projekcziók és az E pont egy teljes négyszög négy csúcsa, melynek szemben fekvő oldalai: $|P'P''|$ és $|PE|$, $|P''E|$ és $|PP'|$, $|P'E|$ és $|PP''|$ az $|UV|$ czentrálist egy involuczió három pontpárjában metszik.

Minthogy most a czentrálison átmenő minden sík czentrális sík, tehát minden ilyen síkban van egy ilyen egyenespár, mint degenerált koinczidenczia kúpszelet. Az összes ilyen egyenespárok közös egyenese az $|UV|$ czentrális és minden ilyen egyenespár másik egyenese metszi egyrészt a képtengelyt, másrészt a czentrálist; még pedig az utóbbit valamennyien ugyanabban az L pontban. Ezek az utóbbi egyenesek tehát abban a síkban vannak, melyet az x_{12} képtengely és az L pont meghatároznak. Ezt a síkot *koinczidenczia-síknak* nevezzük. Így az összes pontok, melyeknek két szerkesztő projekcziója egy pontba esik, vagy a czentrálison, vagy a koinczidenczia-síkban vannak.

Ha most még U a π_2 képsíkban, V a π_1-ben van, akkor U és V az involuczió kettőspontjai és így a koinczidenczia-sík a T czentrumtól a képsíkok által harmonikusan van elválasztva. Ez az eset előfordul a MONGE-féle ábrázolásnál is.

16. A czentrális sík valamely P pontjának két szerkesztő projekcziója P', P'', egyúttal a czentrális sík egy Q pontjának is két projekcziója Q', Q'', úgy hogy

$$Q' \equiv P'' \quad \text{és} \quad Q'' \equiv P'.$$

Nem így áll a dolog azonban általában, ha a P pont nincsen a czentrális síkban (3. ábra).

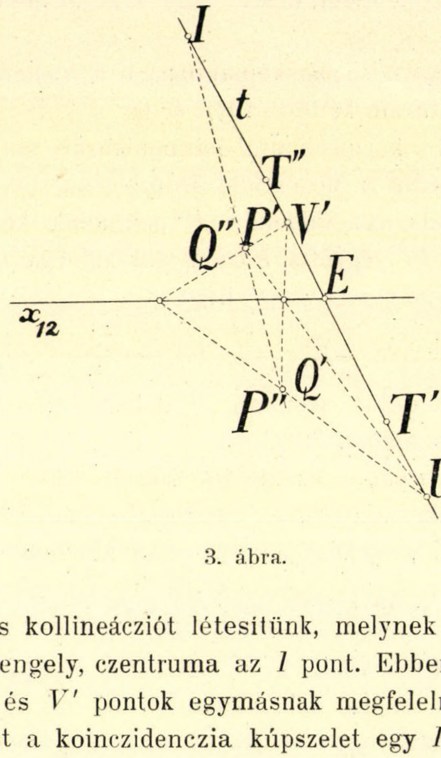
Ha valamely nem a czentrális síkban fekvő P pont két szerkesztő projekcziója P', P'' egyúttal valamely Q pontnak is két szerkesztő projekcziója, olyan formán, hogy

$$Q' \equiv P'' \quad \text{és} \quad Q'' \equiv P',$$

akkor a szerkesztő síknak $|P'V'|$ és $|P''U''|$ egyenesei, valamint a $|P'U''|$ és $|P''V'|$ egyenesei is az x_{12} szerkesztő tengelyben metszik egymást. Ez a négy egyenes egy teljes négyoldal oldalai, melynek egyik átlója a t czentrális tengely, második átlója az x_{12} szerkesztő tengely, harmadik átlója $|P'P''|$. Ebből következik, hogy a P pont két szerkesztő projekcziója egymástól az x_{12} szerkesztő tengely és a t czentrális tengely által harmonikusan van elválasztva. Továbbá a szerkesztő sík $|P'P''|$ egyenese a t czentrális tengelyt abban az I pontban metszi, mely az x_{12} szerkesztő tengelytől az U'' és V' pontok által harmonikusan van elválasztva.

A tér ama pontjait, melyeknek szerkesztő projekcziói az I ponttal egy egyenesen vannak, továbbá az I pont és az x_{12} szerkesztő tengely által egymástól harmonikusan vannak elválasztva, involutorikus pontoknak nevezzük.

Az által, hogy a szerkesztő sík ama pontjait, melyek valamely involutorikus pont projekcziói, egymásra vonatkoztatjuk,



3. ábra.

involutorikus kollineácziót létesitünk, melynek tengelye az x_{12} szerkesztő tengely, czentruma az I pont. Ebben az involuczióban az U'' és V' pontok egymásnak megfelelnek.

Az I pont a koinczidenczia kúpszelet egy K pontjának két szerkesztő projekcziója. E K pont helyzetének és az involutorikus pontok geometriai helyének a meghatározásával későbbben, a 23. pontban foglalkozunk.

17. Az egyenes pontjainak két projekcziója két projektiv pontsor, melyben az egyenes egy és ugyanazon pontjának a projekcziói a megfelelő pontok. E projektivitás alapján meg-

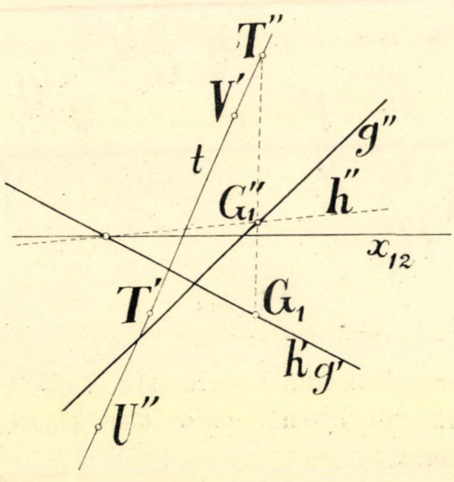
határozhatjuk a két pont által adott egyenes valamely harmadik pontjának egyik projekcziójából a másikat. A szerkesztést általában megkönnyíti az a körülmény, hogy a

$$|V'.A'B'C'\ldots| \text{ és } |U''.A''B''C''\ldots|$$

sugársorok, hol A', B', C',... és $A''B''C''$,... az egyenes A, B, C,... pontjainak a szerkesztő projekcziói, perspektivek és a perspektiv tengely az x_{12} szerkesztő tengely.

Ha azonban az egyenes az $|UV|$ czentrálist metszi, a szerkesztés ilyen módon nem végezhető. De ebben az esetben az egyenes és a czentrális metszéspontjának, S-nek, is ismerjük a projekczióit, még pedig $S' \equiv V'$, $S'' \equiv U''$. Úgy, hogy a projektivitás az adott két pont és az S projekcziói által meg van határozva.

18. Ha adva van a g egyenes két szerkesztő projekcziója: g', g'', akkor első szerkesztő nyomát következőképen határoz-

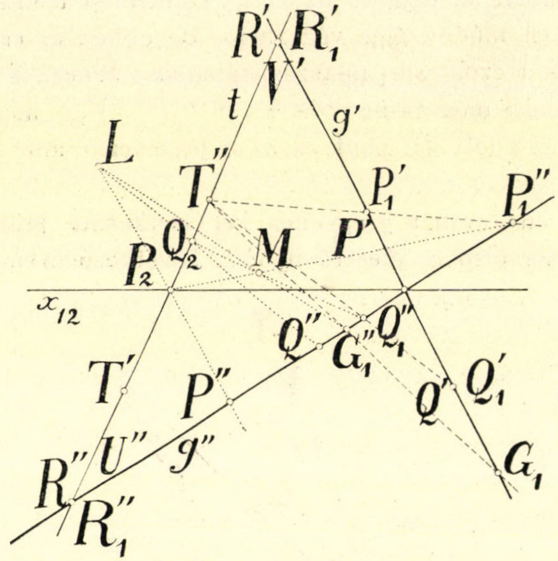


4. ábra.

zuk meg. Az első képsík egy h egyenesének első szerkesztő projekcziója $h' \equiv g'$; a h egyenes második szerkesztő projekcziója h'', megfelel h'-nek abban a czentrális kollineáczióban, melynek tengelye az x_{12} szerkesztő tengely, czentruma a T''

pont és egy megfelelő pontpár V', U'' (8. pont). A hol h'' metszi g''-t, ez G''_1, az első szerkesztő nyom második szerkesztő projekcziója. Ebből azután meghatározzuk G_1-et (4. ábra). Hasonló eljárással megszerkesztjük az egyenes második szerkesztő nyomát.

19. Ha az egyenes az $|UV|$ czentrálist metszi, akkor a két projekcziója az egyenest nem ábrázolja, hanem az egyenes két



5. ábra.

pontjának is meg kell adni a szerkesztő projekczióit. Az egyenes első szerkesztő nyomát most következőképen határozzuk meg (5. ábra).

Legyen az egyenes két adott pontja P, Q és a czentrálissal való metszéspontja R. Ekkor $R' \equiv V'$, $R'' \equiv U''$. Legyen továbbá P_1, Q_1, R_1 az első képsik ama három pontja, melyeknek első szerkesztő projekcziója P', Q', R'. Már most a $(P''_1 Q''_1 R''_1 \ldots)$ és $(P'' Q'' R'' \ldots)$ közös tartóval biró projektiv pontsorok, melyeknek egyik kettős pontjuk U'', másik kettős pontjuk az egyenes első nyomának második szerkesztő projekcziója G_1'', miből G_1-et meghatározhatjuk.

Hasonló eljárással nyerjük az egyenes második nyomát, G_2 t.

20. *Koinczidáló egyenesek a tér amaz egyenesei, melyeknek két szerkesztő projekcziója egy és ugyanaz az egyenes.*

A czentrális sík minden egyenese koinczidáló egyenes. Ha pedig a koinczidáló egyenes nincs a czentrális síkban, minthogy az egyenesen fekvő pontsor két projekcziója a jelen esetben közös tartóval biró projektiv pontsorokat szolgáltat és ezek kettős pontjai koinczidáló pontoknak a projekcziói, akkor az egyenes az x_{12} képtengelyt és a koinczidenczia kúpszeletet egy-egy pontban metszi.

A koinczidáló egyenesek e szerint egy elsőrendű és harmadosztályú kongruencziát alkotnak, mely azonban, egy sugársíkra, meg egy elsőrendű és másodosztályú kongruencziára esik szét.

A tér valamely pontján átmenő koinczidáló egyenes két szerkesztő projekcziója az az egyenes, mely a pont két szerkesztő projekczióját összeköti.

Ha T az $|UV|$ czentrálison van, akkor a koinczidenczia-sík minden egyenese koinczidáló egyenes.

21. *Involutorikus egyenesek a tér amaz egyenesei, melyeknek összes pontjai involutorikus pontok.*

Az ilyen egyenesek szerkesztő projekcziói az x_{12} szerkesztő tengelyben metszik egymást, és egymástól a 16. pontban említett I pont és az x_{12} szerkesztő tengely által harmonikusan vannak elválasztva. Minden involutorikus egyenes két szerkesztő projekcziója a 16. pontban említett involutorikus kollineácziónak egy-egy elempárja.

22. Valamely sík pontjai és egyenesei első és második szerkesztő projekcziója között kollineáris összefüggés áll fenn. E kollineáczióban a sík ugyanazon pontjának, illetőleg ugyanazon egyenesének a két szerkesztő projekcziója felel meg egymásnak. Minden ilyen kollineáczióban a V' és U'' pontok egymásnak megfelelő elemek, mint a sík és az $|UV|$ czentrális metszéspontjának két szerkesztő projekcziója.

A sík általában az x_{12} képtengelyt egy, a koinczidenczia kúpszeletet két pontban metszi. E három pont szerkesztő projekcziói a kollineácziónak kettős pontjai.

E három pontot párosával összekötő három egyenes a sík koinczidáló egyenesei és szerkesztő projekcziói a kollineáczió kettős egyenesei.

Ha a sík az x_{12} képtengelyen megy át, akkor a kollineáczió czentrális. Az x_{12} szerkesztő tengely a kollineáczió tengelye, és ama pontnak szerkesztő projekcziója, melyben a sík a koinczidenczia kúpszeletet még egyszer metszi, a kollineáczió czentruma.

Ha a képtengelyen átmenő sík a koinczidenczia kúpszeletet érinti, akkor a kollineáczió czentruma az a pont, a melyben az x_{12} szerkesztő tengely a t czentrális tengelyt metszi.

Ha a T czentrum az $|UV|$ czentrálison van, akkor a sík pontjai és egyenesei két szerkesztő projekcziója között fennálló kollineáczió mindig czentrális. E kollineáczió tengelye amaz egyenes két szerkesztő projekcziója, melyben a sík a koinczidenczia-síkot metszi és a kollineáczió czentruma az $U'' \equiv V'$ pont.

23. Ebből már következtetést vonhatunk az involutorikus pontok geometriai helyére.

Először határozzuk meg a koinczidenczia kúpszelet ama K pontját, melynek két szerkesztő projekcziója I (16. pont). Egyszerű megfontolásokból következik, hogy az $(UVEK\ldots)$ másodrendű pontsor az $(U''V'E'K') \equiv (U''V'E''K'')$ elsőrendű pontsorral projektiv; minthogy pedig az $I \equiv K' \equiv K''$ pont az $E' \equiv E''$ ponttól az U'' és V' pontok által harmonikusan van elválasztva, azért K a másodrendű pontsorban E-től az U és V czentrumok által szintén harmonikusan van elválasztva. Ezzel a K pont helye meg van határozva. A $|KE|$ egyenes, e szerint a kúpszeletet az E pontban érintő egyenestől, az $|EU|$ és $|EV|$ egyenesek által harmonikusan van elválasztva. A $|KE|$ egyenes tehát az L pont harmonikus polárisa a koinczidenczia kúpszeletre nézve és az L pontból a koinczidenczia kúpszelethez húzott két érintő közül az egyik az E pontban, a másik a K pontban érinti a kúpszeletet.

A K pont és az x_{12} képtengelyen átmenő sík pontjainak két projekcziója között fennálló czentrális kollineáczió az az involutorikus kollineáczió, melyet a 16. pontban említettünk. Ez a $[K, x_{12}]$ sík tehát az involutorikus pontok és egyenesek geometriai helye, melyet épen ezért *involutorikus sík*nak nevezünk. A koinczidenczia kúpszeletnek a képtengelyen átmenő érintő síkja az involutorikus siktól az U és V pontok által harmonikusan van elválasztva.

Ha a T czentrum az $|UV|$ czentrálison van, akkor

$$I \equiv K' \equiv K'' \equiv U'' \equiv V',$$

és az involutorikus sík a koinczidenczia-síktól az U és V czentrumok által harmonikusan van elválasztva. Vegyünk fel ugyanis valamely tetszőleges általános helyzetű egyenest. Legyen e g egyenes két szerkesztő projekcziója g' és g'' és határozzuk meg ennek az egyenesnek az $[U, x_{12}]$, $[V, x_{12}]$ sikokkal, továbbá a koinczidenczia és az involutorikus síkkal való metszéspontoknak a szerkesztő projekczióit. Legyenek e metszéspontok sorban A, B, C, D. Az A pont első projekcziója A' az a pont, hol g' az x_{12} szerkesztő tengelyt metszi és A'' az $|A'I|$ és g'' egyenesek metszéspontja. Hasonló módon határozzuk meg a B pont két szerkesztő projekcióját. A C pont két projekcziója a g' és g'' metszéspontja. Végül a D' és D'' pontokat úgy szerkesztjük meg, hogy az $|A''B'|$ egyenes és az x_{12} szerkesztő tengely metszéspontját összekötjük I-vel és a hol ez a g' és g'' egyeneseket metszi, ez a D' és D''. Az $|A'A''|$, $|B'B''|$, $|B'A''|$ és $|B''A'| \equiv x_{12}$ egyenesek egy teljes négyoldal oldalai, melynek diagonális pontjai D', D'', $C' \equiv C''$, két diagonálisa pedig g' és g''. Ebből azután következik, hogy úgy a g' mint a g'' diagonálison fekvő két csúcspont és két diagonális pont egymástól harmonikusan van elválasztva, azaz,

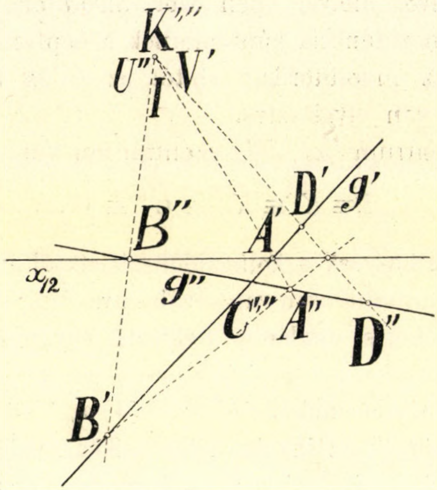
$$(A'B'C'D') = (A''B''C''D'') = -1$$

és így egyúttal

$$(ABCD) = -1,$$

a mi bebizonyítandó volt (6. ábra).

24. Ha P', P'' az involutorikus sík egy P pontjának két szerkesztő projekcziója, akkor van az involutorikus síkban egy



6. ábra.

Q pont, melynek szerkesztő projekcziói a P pont szerkesztő projekcziói, olyan formán, hogy

$$Q' \equiv P'' \quad \text{és} \quad Q'' \equiv P'.$$

Az ilyen két ponton átmenő egyenes koinczidenczia egyenes mely a koinczidenczia kúpszeletet a K pontban, az x_{12} képtengelyt egy X pontban metszi. Minthogy pedig

$$(P'Q'X'K') = (P''Q''X''K'') = -1,$$

azért egyúttal

$$(PQXK) = -1.$$

E szerint a P és Q pont egymástól a K pont és a képtengely által harmonikusan van elválasztva.

Ha P a czentrális sík egy tetszőleges pontja, akkor mindig van a czentrális síkban egy Q pont, melyre nézve

$$Q' \equiv P'' \quad \text{és} \quad Q'' \equiv P'.$$

A $|PQ|$ egyenes két projekcziója ebben az esetben is egybeesik, és az egyenes pontjainak két projekcziója között fennálló projektivitás involutorikus, melyben a P', P'' és V', U'' egymásnak megfelelő elempárok. Az involuczió kettős pontjai a $|PQ|$ egyenes és a koinczidenczia kúpszelet metszéspontjainak szerkesztő projekcziói. Ha e metszéspontok R és S, akkor

$$(P'Q'R'S') = (P''Q''R''S'') = -1,$$

és így

$$(PQRS) = -1,$$

vagyis *az ilyen P és Q pont konjugált harmonikus pólusok a koinczidenczia kúpszeletre nézve.*

A $|PQ|$ egyenes átmegy az $|UV|$ czentrálisnak a koinczidenczia kúpszeletre vonatkozó harmonikus pólusán. Legyen az $|UV|$ egyenes említett harmonikus pólusa N, akkor első projekcziója $N' \equiv U''$ és második projekcziója $N'' \equiv V'$. Hogy csakugyan az az N pont az $|UV|$ pólusa, melynek szerkesztő projekcziója U'', ill. V', azt úgy bizonyitjuk be, hogy kimutatjuk, hogy az N pont a czentrális minden pontjától a koinczidenczia kúpszelet által harmonikusan van elválasztva. Legyen ugyanis az N ponton átmenő tetszőleges egyenesnek és az $|UV|$ czentrálisnak metszéspontja P_*, akkor $P'_* \equiv V' \equiv N''$ és $P''_* \equiv U'' \equiv N'$. De akkor az előbbiekből már következik, hogy az N pont P_*-től, vagyis az $|UV|$ czentrális minden pontjától a kúpszelet által harmonikusan van elválasztva. Az N pont tehát az $|UV|$ pólusa.

Visszatérve már most a $|PQ|$ egyenesre, hamar belátjuk, hogy az N pont a $|PQ|$ egyenes pontja. Mert az egyenes pontjai két projekcziója között fennálló projektivitás involutorikus. A $|PQ|$ egyenes és az $|UV|$ czentrális P_* metszéspontjának két szerkesztő projekcziója

$$P'_* = V', \quad P''_* = U''.$$

Az involuczióból már most következik, hogy | PQ | egyenes ama pontjának második szerkesztő projekcziója, melynek első szerkesztő projekcziója U'', a V' ponttal azonos; de az a pont az N pont és így N csakugyan a PQ pontja.

Az N pont az involutorikus síknak is pontja.

Az által, hogy a czentrális sík ama pontjait, melyek mindegyikének első projekcziója egyúttal a másiknak második projekcziója, egymásnak megfelelőknek tekintjük, rokonságot létesítünk a czentrális sík pontjai között. Ez a rokonság az általános inverzió, melyet Tőtössy Béla tanár úr leírásából is ismerünk.* A jelen esetben direktrix kúpszelet a koinczidenczia kúpszelet, sorozó pólus az N pont.

Ha a koinczidenczia kúpszelet egyenespárrá degenerál, akkor a P és Q pont egymástól az egyenespár két egyenese által, vagyis az | UV | czentrális és a koinczidenczia-sík által harmonikusan van elválasztva.

Továbbá a | PQ | egyenes az involutorikus síkot ugyanabban a K pontban metszi, a melyben azt az | UV | czentrális metszi.

Ezeket hasonló megfontolások alapján látjuk be, mint az előbbieket.

A Monge-féle ábrázolás esetében a P és Q pont a koinczidenczia-síkra nézve szimmetrikusan van elhelyezve.

25. Ezeknek a további részletezésébe nem bocsátkozom. Ezek után az ábrázoló geometria összes feladatait az ismeretes eljárások és elvek szerint megoldhatjuk. De az eddigiekből is kiviláglik már, hogy miben rejlik a Monge-féle módszer egyszerűsége, különösen a gyakorlati alkalmazás szempontjából.

Ezeket az előnyöket a következőkben foglaljuk össze:

1. A T, U, V czentrumok egy egyenesen vannak.

2. Az ábrázolás szempontjából szinguláris pontok, t. i. az U és V pontok, a végtelenben vannak, miáltal az $U'' \equiv V'$ pont is a végtelenben van.

---

* Tőtössy Béla: Elemi symmetriák általánosítása. Math. és Term.-tud. Értesítő XVIII. kötet, 233. old.

3. Az U czentrum a π_2, a V czentrum a π_1 képsíkban van, a mi a képsíkok pontjainak egyszerűbb ábrázolását biztosítja.

4. A méreti viszonyok feltüntetésére teszi MONGE módszerét alkalmassá, hogy a képsíkokat egymásra merőlegesen és a czentrális síkot a képsíkokra merőlegesen választja. Továbbá, hogy szerkesztő sík gyanánt a képsíkok egyikét használja, és T pontnak az UV távolság felező pontját veszi.

Privorszky Alajos.

A HÁROM TEST PROBLÉMÁJA ÉS A ζ CANCRI RENDSZERE.

I. Bevezetés.

1. Részben annak belátása, hogy az astromechanika fundamentális problémája, a három test problémája, általánosságban meg nem oldható, részben a megfigyelő csillagászat igényei korán rákényszerítették a mathematikusokat arra, hogy e probléma egyes speciális eseteivel foglalkozzanak behatóbban és hogy e speciális esetek megoldásait minél nagyobb megközelítéssel állítsák elő. Ily tapasztalás-nyujtotta legközelebb fekvő eset a bolygómozgás problémája: keresendő két aránylag igen kicsiny tömegű égitest relativ pályája egy igen nagytömegű czentrális test körül. Az astromechanikusok legnagyobb része e problémával foglalkozott és hosszú sora a legfényesebb neveknek szerzett hervadhatlan érdemeket tárgyalása körül: Euler, Lagrange, Laplace, Jacobi, Hill, Gyldén, Poincaré, hogy csak a legelőkelőbbeket említsem.

Egy másik speciális esete a három test problémájának a holdmozgás problémája. Ez némiképpen épp ellenkezője a bolygómozgás problémájának. Itt a perturbáló test a nagytömegű Nap, a czentrális test egy kicsiny tömegű bolygó. E probléma sokkal komplikáltabb és nehezebb az előbbinél. Tárgyalása körül Laplace, Delaunay, Hill és Brown szerezték a legnagyobb érdemeket. Különösen pedig Delaunay és Hill. Az előbbi az által, hogy egyszerűségében is oly geniális módszerével nemcsak azt mutatta meg, miként kell és lehet az eddig oly sok nehézséget okozó sæculáris perturbácziókat elkerülni, hanem egyszersmind a holdmozgás általános és eddig létező egyetlen tisztán analytikus elméletét is megalkotta; HILL pedig POINCARÉ által egyszerűen «admirable»-nek deklarált «Researches on the lunar theory»-jében bevezetett periodikus megoldások által. Mindkét módszer rendkívül termékenyítő hatással volt nemcsak a bolygómozgás modernebb tárgyalására, hanem az egész astromechanikában teljesen új perspektivákat nyitott.

Egy harmadik speczıális eset a két fix czentrum körüli mozgás. Tudva van, hogy ez az eset teljes általánosságban szigorúan integrálható HAMILTON-JACOBI módszerével. Ezzel az esettel szoros összefüggésben áll az asteroidák problémája, az ú. n. «problème restreint»: a Nap körül körpályában mozog egy bolygó, keressük egy másik, zérustömegű bolygó relativ pályáját.

Mindezen esetekben a szereplő masszák közül kettőnek a kicsiny vagy elhanyagolható volta a döntő faktor, s valamennyi a mi naprendszerünkben végbemenő mozgások analysálását tűzi ki czélul.

2. Azonban, mint POINCARÉ «Nouvelles Méthodes»-jaiban nyomatékosan kiemeli, az astromechanika feladata nem az ephemeridák többé vagy kevésbbé pontos kiszámítása, hanem annak megvizsgálása, hogy NEWTON törvénye általánosan érvényes-e, nemcsak a mi naprendszerünkben, hanem az egész megfigyeléseinknek hozzáférhető universumban. Eltekintve néhány jelenségtől, melyet pusztán a NEWTON-féle törvény alapján absolute lehetetlen megmagyarázni, mint például a Mercur periheliumának mozgása, vagy a Hold sæculáris acceleratiója, naprendszerünkben a NEWTON-féle törvény érvényes, mivel a bolygók mind nagyjából KEPLER-féle ellipsist írnak le.

A NEWTON-féle törvény érvényességének kimutatása azonban sokkal nehezebb, ha kettős-csillagokról van szó. Igaz, hogy a kettős-csillagok relativ pályája ellipsis, de igen nehéz annak eldöntése, hogy ez az ellipsis tényleg KEPLER-féle ellipsis-e. Van egy másik törvény is, a BERTRAND-féle, NEWTONén kívül az egyetlen, mely szintén elliptikus mozgást von maga után két test esetében, csakhogy a relativ pályának itt a középpontját foglalja el az egyik égitest, míg a NEWTON esetében a gyujtópontot.

SEELIGER megjegyzése szerint teljesen igaz, hogy csak a NEWTON törvénye képes a kettős-csillagok eddig megfigyelt mozgását megmagyarázni, ha bizonyos különben igen plausibilis hypothesiseket engedünk meg. Egeszen máskép alakul azonban a kérdés, ha tekintettel vagyunk a számításoknak alapul szolgáló mérések igen tetemes hibáira, melyeknél fogva e mérések nem definiálnak mathematikai szigorúsággal egy határozott mozgási folyamatot, hanem inkább csak bizonyos határokat jelölnek ki, melyeken belül kell foglaltatniok az elmélettől való eltéréseknek. Ezek a határok pedig meglehetősen tágak, például 5—10%-nyi, sőt magasabb hibák a távolságokban egyáltalán nem ritkák. Minthogy esetleges kételyeink a NEWTON-féle törvény általános érvényességét, illetőleg természetesen csak oly eltérésekre fognak vonatkozhatni, melyek a valóságtól csak kevéssé térnek el, ennélfogva meg kell engednünk, hogy az eddig meghatározott kettős-csillag-pályák nem birnak absolut bizonyító erővel.

3. A kérdésre hamarább várhatunk feleletet a hármas vagy többszörös csillagrendszerek mozgásának megfigyeléséből. Egyik vagy másik törvény érvényessége itt sokkal charakteristikusabban fog nyilvánulni a trajektoriák alakjában, különösen azért, mert ily csillagrendszerekben a szereplő tömegek rendje lényegesen különbözik attól, mely például naprendszerünket jellemzi. A mint a megfigyelés bizonyitja, az álló csillagok rendszereiben általánosságban nem fordulnak elő oly masszák, melyek közül egyiket a másikhoz viszonyitva igen kicsinynek vagy éppen elhanyagolhatónak tehetnénk fel. Ellenkezőleg a tömegek itt mind legalább is ugyanolyan rendűek.

És itt felmerül a három test problémájának egy újabb speczialis esete, mely az előbb emlitettektől lényegesen különbözik: a három egyenlő testé. Hogy a kérdést preczizirozzuk, tegyük fel, hogy egy hármas csillagrendszerben az egyik komponens tömege m, a másiké $m+\mu_1$, a harmadiké $m+\mu_2$, hol μ_1, μ_2 igen kicsiny m-hez képest. Ha megoldottuk a problémát abban az esetben, mikor μ_1 és μ_2 elhanyagoltatott, vagyis mikor a három test tömege egyenlő, akkor a μ_1 és μ_2 bevezetése által okozott ú. n. perturbácziókat az ismert módszerekkel meghatározhatjuk. De a három egyenlő test problémája külön vizsgálat tárgyát kell hogy képezze. Mindama deductiók, melyek az interveniáló masszák relativ kicsinységén alapszanak, tehát a bolygótheoriák egésze, itt nem alkalmazhatók. Így le kell mondanunk a perturbáló függvény sorbafejtéséről masszák szerint, le kell mondanunk a periodikus megoldások keresésének Poincaré-féle módszeréről. Sőt azt kell mondanunk, hogy itt perturbáló függvény nincs is, továbbá be kell látnunk, hogy az elliptikus elemeknek, a középmozgást kivéve, nem fogjuk hasznát vehetni, s hogy ennélfogva a probléma analytikai charaktere lényegesen elüt attól, melyet a bolygómozgás tárgyalásában megszoktunk.

Ezekkel a hátrányokkal szemben azonban a tömegek egyenlősége bizonyos előnyöket nyujt különösen symmetria tekintetében, s látni fogjuk, hogy néhol lehetséges lesz a szigorú integráczió ott, hol máskép lehetetlen mikor a masszák különbözők, s hogy stabilitás váltja fel a mozgás instabilitását.

4. Későbbi tárgyalás czéljából fel fogjuk állítani a mozgás általános egyenleteit s ezeket bizonyos transformácziókkal a legmegfelelőbb alakra hozzuk. Az általános esetből két speczialis esetet fogunk levezetni: az egyik a periodikus megoldások egy bizonyos neme, az lesz, mikor a mozgás relativ síkja az invariábilis síkkal csak csekély hajlási szöget alkot, a másik pedig a síkmozgás. Minthogy a mozgás általános tárgyalása messze túlhaladná egy értekezés keretét, jelen dolgozatomban csak a síkmozgás partikuláris, illetve periodikus megoldásaival foglalkozhatom, az általános tárgyalást külön munkának tartva fenn. A vizsgálatot a 2. pontban említett szempontnál fogva a Bertrand törvényére is ki fogjuk terjeszteni. Itt sokkal eklatánsabban fog kitűnni a Newton és a

Bertrand törvénye közti különbség a pályák alakjában, mint a kettős-csillagoknál.

Eltekintve attól, hogy ezek a partikuláris megoldások bizonyos tájékozódást engednek meg a felvetett problémában, szükségszerűen kell velük foglalkoznunk, mert a mozgás egész további tárgyalása tőlük függ. Mivel itt, mint már említettük, nem a tömegek azok a parameterek, melyektől e periodikus megoldások függenek, más módszert kell találnunk ily megoldások előállítására. De a theoretikus érdeken kívül praktikus érték is fűződhetik ezen alapjukban véve igen egyszerű megoldásokhoz. T. i. nem lehet a priori tagadni ily periodikus megoldások létezését a természetben, s látni fogjuk, hogy ily mozgás tényleg előfordul a hármas-csillagok rendszerei között. Ily rendszer a ζ Cancri.

II. A mozgás általános egyenletei.

5. Minthogy a tömegek egyenlők, legyen

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1.$$

Az egységek mindig úgy választhatók, hogy a Gauss-féle constans az egységgel legyen egyenlő. Ha a naprendszerünkben időegységül veszszük a Laplace-Hill-féle időegységet, 58·132 36 középnapot, a föld siderikus keringési idejét 365·256 38 35 ily napból állónak véve, akkor, ha még a földpálya nagytengelyét veszszük hosszegységül, a Gauss-féle constans egyenlő lesz az egységgel. Legyen $a =$ egy más csillagrendszerben a középtávol az előbbi hosszegységben kifejezve, $M =$ a Nap tömege kifejezve e csillagrendszer tömegegységében, akkor, ha időegységül választunk

$$\sqrt{\frac{a^3 M}{2}}\, 58{\cdot}132\,36$$

középnapot, ívhosszban kifejezve, a Gauss-féle constans az új rendszerben is $= 1$.

Ennélfogva a potentiálfüggvény Newton törvénye esetében, a tömegeket gömbalakúaknak tételezve fel, írható:

$$R = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c};$$

Bertrand törvénye esetében pedig

$$R = -\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

hol a, b, c az m_1, m_2, m_3 által alkotott háromszög oldalai.

6. Vonatkoztassuk a három test mozgását egy derékszögű koordinátarendszerre, melynek kezdőpontja a három test által alkotott háromszög súlypontjában van. A mozgás közönséges egyenletei lesznek:

$$\xi_i'' = \frac{\partial R}{\partial \xi_i}; \quad \eta_i'' = \frac{\partial R}{\partial \eta_i}; \quad \zeta_i'' = \frac{\partial R}{\partial \zeta_i}.$$

$$(i=1, 2, 3)$$

És

$$a^2 = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2;$$
$$b^2 = (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2 + (\zeta_2 - \zeta_3)^2;$$
$$c^2 = (\xi_3 - \xi_1)^2 + (\eta_3 - \eta_1)^2 + (\zeta_3 - \zeta_1)^2.$$

A súlypontot nyugvónak véve, a súlypontintegrálok a következők:

$$\Sigma\xi_i = 0; \quad \Sigma\eta_i = 0; \quad \Sigma\zeta_i = 0.$$

A felületi integrálok pedig:

$$\Sigma(\eta_i \zeta_i' - \zeta_i \eta_i') = c_1;$$
$$\Sigma(\zeta_i \xi_i' - \xi_i \zeta_i') = c_2;$$
$$\Sigma(\xi_i \eta_i' - \eta_i \xi_i') = c_3.$$

Legyen az invariábilis síkra vonatkoztatva

$$\Sigma(y_i x_i' - x_i y_i') = 0; \quad \Sigma(z_i x_i' - x_i z_i') = 0;$$
$$\Sigma(x_i y_i' - y_i z_i') = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = C,$$

és

$$\xi_i = \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i + \alpha_3 z_i;$$
$$\eta_i = \beta_1 x_i + \beta_2 y_i + \beta_3 z_i;$$
$$\zeta_i = \gamma_1 x_i + \gamma_2 y_i + \gamma_3 z_i.$$

Az új x tengely essék az invariábilis sík fölszálló csomójába (a $\xi\eta$ síkon), legyen π a ξ és x által alkotott szög, γ az invariábilis sík inclinátiója a $\xi\eta$ síkhoz. Akkor, mint könnyen található,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\pi ; & \alpha_2 &= -\cos\gamma \sin\pi ; & \alpha_3 &= \sin\gamma \sin\pi ; \\ \beta_1 &= \sin\pi ; & \beta_2 &= \cos\gamma \cos\pi ; & \beta_3 &= -\sin\gamma \cos\pi ; \\ \gamma_1 &= 0 ; & \gamma_2 &= \sin\gamma ; & \gamma_3 &= \cos\gamma ; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\gamma \sin\pi = \frac{c_1}{c_3} ; \quad \operatorname{tg}\gamma \cos\pi = -\frac{c_2}{c_3} \cdot$$

Az új mozgásegyenletek pedig, most már oly derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatva, melynek x és y tengelyei az invariábilis síkba esnek:

$$x_i'' = \frac{\partial R}{\partial x_i} ; \quad y_i'' = \frac{\partial R}{\partial y_i} ; \quad z_i'' = \frac{\partial R}{\partial z_i} \cdot$$

Itt is

$$\Sigma x_i = 0 ; \quad \Sigma y_i = 0 ; \quad \Sigma z_i = 0 ;$$

és

$$\begin{aligned} a^2 &= (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 ; \\ b^2 &= (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2 ; \\ c^2 &= (x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2 . \end{aligned}$$

Képzeljünk a három testen át egy síkot fektetve, mely azokat mozgásukban folyton követi. Ez a sík állandóan átmegy a rendszer súlypontján, mely viszont az invariábilis síkban fekszik. A három testen át fektetett síkban képzeljünk egy új $\xi\eta$ derékszögű koordinátarendszert. Ha ϑ eme sík inclinatiója az invariábilis síkhoz, ψ pedig az x tengelytől számított felszálló csomó hossza, akkor a három test mozgását két relativ mozgásra bontottuk. Az egyik a három test relativ mozgása a $\xi\eta$ síkban, a másik eme sík relativ mozgása az invariábilis xy síkhoz képest.

7. Elimináljuk a súlypontintegrálok segítségével az m_3 test koordinátáit, x_3, y_3, z_3-t, és tegyük

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 \cos\psi + y_1 \sin\psi ; \\ \xi_2 &= x_2 \cos\psi + y_2 \sin\psi ; \end{aligned}$$

$$\eta_1 \cos\vartheta = -x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi;$$
$$\eta_2 \cos\vartheta = -x_2 \sin\psi + y_2 \cos\psi;$$
$$\eta_1 \sin\vartheta = z_1;$$
$$\eta_2 \sin\vartheta = z_2;$$
$$a^2 = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2;$$
$$b^2 = (\xi_1 + 2\xi_2)^2 + (\eta_1 + 2\eta_2)^2;$$
$$c^2 = (2\xi_1 + \xi_2)^2 + (2\eta_1 + \eta_2)^2.$$

Az előbb említett mozgások egyenletei lesznek:

$$\xi_1'' - \xi_1 \psi'^2 - 2\eta_1' \psi' \cos\vartheta + 2\eta_1 \psi' \vartheta' \sin\vartheta - \eta_1 \psi'' \cos\vartheta = \frac{2}{3}\frac{\partial R}{\partial \xi_1} - \frac{1}{3}\frac{\partial R}{\partial \xi_2};$$

$$\xi_2'' - \xi_2 \psi'^2 - 2\eta_2' \psi' \cos\vartheta + 2\eta_2 \psi' \vartheta' \sin\vartheta - \eta_2 \psi'' \cos\vartheta = \frac{2}{3}\frac{\partial R}{\partial \xi_2} - \frac{1}{3}\frac{\partial R}{\partial \xi_1};$$

$$\eta_1'' - \eta_1 \vartheta'^2 + 2\xi_1' \psi' \cos\vartheta - \eta_1 \psi'^2 \cos^2\vartheta + \xi_1 \psi'' \cos\vartheta = \frac{2}{3}\frac{\partial R}{\partial \eta_1} - \frac{1}{3}\frac{\partial R}{\partial \eta_2};$$

$$\eta_2'' - \eta_2 \vartheta'^2 + 2\xi_2' \psi' \cos\vartheta - \eta_2 \psi'^2 \cos^2\vartheta + \xi_2 \psi'' \cos\vartheta = \frac{2}{3}\frac{\partial R}{\partial \eta_2} - \frac{1}{3}\frac{\partial R}{\partial \eta_1};$$

$$\eta_1 \vartheta'' + \eta_1 \psi'^2 \sin\vartheta \cos\vartheta - 2\xi_1' \psi' \sin\vartheta + 2\eta_1' \vartheta' - \xi_1 \psi'' \sin\vartheta = 0:$$
$$\eta_2 \vartheta'' + \eta_2 \psi'^2 \sin\vartheta \cos\vartheta - 2\xi' \psi' \sin\vartheta + 2\eta_2' \vartheta' - \xi_2 \psi'' \sin\vartheta = 0.$$

Ezekben az egyenletekben csak az m_1 és m_2 koordinátái szerepelnek. Ha ezeket integrátio által megtaláltuk, a súlypont-integrálok közvetlenül adják m_3 koordinátáit.

Az előbbi mozgásegyenleteket egyszerűsíthetjük, ha bevezetünk egy fix és egy mozgó koordinátarendszert. A fix koordinátarendszer kezdőpontját helyezzük a három test súlypontjába és legyenek x_1, y_1 az $m_1 m_2$ tömegek súlypontjának koordinátái e rendszerre vonatkozólag; a mozgó koordinátarendszert, mely mozgás közben parallel marad az $x_1 y_1$ rendszerhez, helyezzük az m_1 és m_2 súlypontjába, és legyenek x_2,

y_2 az m_1 koordinátái e rendszerre vonatkoztatva. Minthogy $m_1=m_2$, m_2 koordinátái ellentetten egyenlőek lesznek m_1 koordinátáival. Hogy teljes symmetriát nyerjünk, még bizonyos állandó faktorokkal kell szoroznunk.

Legyen tehát:

$$x_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}(\xi_1+\xi_2); \quad y_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}(\eta_1+\eta_2);$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi_1-\xi_2); \quad y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\eta_1-\eta_2);$$

akkor a mozgásegyenletek lesznek:

$$x_1''-x_1\psi'^2-2y_1'\psi'\cos\vartheta+2y_1\psi'\vartheta'\sin\vartheta-y_1\psi''\cos\vartheta=\frac{\partial R}{\partial x_1};$$

$$x_2''-x_2\psi'^2-2y_2'\psi'\cos\vartheta+2y_2\psi'\vartheta'\sin\vartheta-y_2\psi''\cos\vartheta=\frac{\partial R}{\partial x_2};$$

$$y_1''-y_1\vartheta'^2+2x_1'\psi'\cos\vartheta-y_1\psi'^2\cos^2\vartheta+x_1\psi''\cos\vartheta=\frac{\partial R}{\partial y_1};$$

$$y_2''-y_2\vartheta'^2+2x_2'\psi'\cos\vartheta-y_2\psi'^2\cos^2\vartheta+x_2\psi''\cos\vartheta=\frac{\partial R}{\partial y_2};$$

$$y_1\vartheta''+2y_1'\vartheta'-2x_1'\psi'\sin\vartheta+y_1\psi'^2\sin\vartheta\cos\vartheta-x_1\psi''\sin\vartheta=0;$$

$$y_2\vartheta''+5y_2'\vartheta'-2x_2'\psi'\sin\vartheta+y_2\psi'^2\sin\vartheta\cos\vartheta-x_2\psi''\sin\vartheta=0.$$

Itt

$$a^2=2(x_2^2+y_2^2);$$

$$b^2=\tfrac{1}{2}\left[(\sqrt{3}\,x_1-x_2)^2+(\sqrt{3}\,y_1-y_2)^2\right];$$

$$c^2=\tfrac{1}{2}\left[(\sqrt{3}\,x_1+x_2)^2+(\sqrt{3}\,y_1+y_2)^2\right].$$

8. A mozgásegyenletek egy igen figyelemreméltó alakját nyerjük, ha fölteszszük, hogy az xy sík az invariábilis síkhoz képest egyenletes præcessiós mozgást végez, azaz hogy $\psi'=$ constans és hogy ϑ csak igen szűk határok között variál egyenletesen, úgy hogy ϑ' is constans és igen kicsiny. E feltételek alatt mozgásegyenleteink, mivel $\sin\vartheta=\vartheta$, $\cos\vartheta=1$, $\vartheta''=0$, ϑ'^2 és $\vartheta'\vartheta$ pedig elhanyagolhatók, a következők lesznek:

$$x_1''-x_1\psi'^2-2y_1'\psi'=\frac{\partial R}{\partial x_1};$$

$$y_1''-y_1\psi'^2+2x_1'\psi'=\frac{\partial R}{\partial y_1};$$

$$x_2''-x_2\psi'^2-2y_2'\psi'=\frac{\partial R}{\partial x_2};$$

$$y_2''-y_2\psi'^2+2x_2'\psi'=\frac{\partial R}{\partial y_2};$$

$$2y_1'\vartheta'-2x_1'\psi'\vartheta+y_1\psi'^2\vartheta=0;$$

$$2y_2'\vartheta'-2x_2'\psi'\vartheta+y_2\psi'^2\vartheta=0.$$

Az utóbbi két egyenlet két első integrált jelent. Ha teszszük

$$\Omega=R+\tfrac{1}{2}(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2)\psi'^2,$$

akkor a mozgásegyenletek a következő alakot öltik:

$$x_1''-2y_1'\psi'=\frac{\partial\Omega}{\partial x_1};$$

$$y_1''+2x_1'\psi'=\frac{\partial\Omega}{\partial y_1};$$

$$x_2''-2y_2'\psi'=\frac{\partial\Omega}{\partial x_2};$$

$$y_2''+2x'\psi'=\frac{\partial\Omega}{\partial y_2}.$$

Ezen egyenletek alakilag teljesen megegyeznek Hill egyenleteivel, melyek szép holdtheoriája alapjául szolgálnak. Csakhogy míg Hill egyenleteiben csak két változó szerepel, itt ez egyenletek négy dimensiós alakjával állunk szemben. A ψ' itt teljesen ugyanazt a szerepet játszsza mint Hillnél a forgó koordinátarendszer állandó szögsebessége. Ennélfogva közelfekvő a gondolat, hogy a három egyenlő test problémája általános tárgyalásának alapjául ezeket az egyenleteket válaszszuk és a belőlük leszármaztatható periodikus megoldásokon épitsük föl a megoldást. E. W. Brown mutatta meg, miként lehet Hill módszerével a holdmozgás teljes birását elérni eddig nem ismert preczizitással és eleganeziával. Ha e módszert nem is fogjuk itt változatlanul alkalmazhatni, mégis az előbb említett teljes analogiánál fogva, a módszer szelleme biztos útmutatóul fog szolgálni.

9. Különben tudvalevő, hogy a koordináták megválasztása egyáltalán nem indifferens theoretikus szempontból, s különösen a periodikus megoldásokat illetőleg nem az, mert egyik koordinátarendszer megengedhet oly periodikus megoldásokat, miket egy másik rendszer kizár. Ebből pedig azt kell következtetnünk, hogy a periodikus megoldások nem geometriai, hanem lényegesen mechanikai sajátságai egy adott rendszernek. Hill sikerének titka éppen a megválasztott koordinátarendszerben rejlik, melyet egyébiránt már Euler vezetett be az ő második holdelméletében.

10. A legegyszerűbb alakot akkor nyerik egyenleteink, ha $\psi =$ constans, $\vartheta =$ constans. A mozgás ekkor teljesen egy síkban megy végbe s egyenletei lesznek:

$$x_1'' = \frac{\partial R}{\partial x_1}; \quad y_1'' = \frac{\partial R}{\partial y_1};$$

$$x_2'' = \frac{\partial R}{\partial x_2}; \quad y_2'' = \frac{\partial R}{\partial y_2}.$$

Ebben a formában azonban nem alkalmasak a további tárgyalásra. Oly alakra van szükségünk, mely a mellett, hogy egyszerű, engedjen meg közvetlen szemléletet a három test configurátiójáról s legyen alkalmas periodikus megoldások előállítására is. Ezt elérhetjük, ha előbbi két derékszögű koordinátarendszerünk helyett két polárrendszert vezetünk be e substitutióval:

$$\sqrt{3}\,x_1 = r_1 \cos\varphi_1; \quad x_2 = r_2 \cos\varphi_2;$$

$$\sqrt{3}\,y_1 = r_1 \sin\varphi_1; \quad y_2 = r_2 \sin\varphi_2.$$

Itt, az előrebocsátottak értelmében,

$$r_1^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2},$$

vagyis r_1 az a oldalra vont súlypontvonal $\sqrt{2}$-szerese; és

$$r_2^2=\frac{a^2}{2},$$

vagyis r_2 az a oldal felének $\sqrt{2}$-szerese; $\varphi_1-\varphi_2$ pedig azon szög, melyet a súlypontvonal az a oldal ama felével képez, mely az m_1 tömeg felé irányul.

Tehát:

$$a^2=2r_2^2;$$
$$b^2=\tfrac{1}{2}\left[r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right];$$
$$c^2=\tfrac{1}{2}\left[r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right].$$

11. Ha az a oldallal szemközt fekvő szög hegyes, akkor $b^2+c^2>a^2$, s ennélfogva $r_1^2>r_2^2$. Ha a b és c oldallal szemközt fekvő szögek is hegyesek, akkor még a következő két egyenlőtlenség áll fenn: $a^2+c^2>b^2$; $a^2+b^2>c^2$.

Ha $r_1^2=r_2^2$, akkor $b^2+c^2=a^2$; a három test által alkotott háromszög ennélfogva derékszögű.

Ha $r_1^2<r_2^2$, akkor $b^2+c^2<a^2$, s az a oldallal szemközt fekvő szög tompa. Természetes, hogy a másik két szög hegyes, s így itt is $a^2+c^2>b^2$, $a^2+b^2>c^2$.

Ha $r_1^2=3r_2^2$ s azonkívül $\varphi_1-\varphi_2=\frac{\pi}{2}$, a háromszög egyenoldalú.

Ha $\varphi_1-\varphi_2=0$, a három test egy egyenesben fekszik.

Ha $r_1=nr_2$ és $\varphi_1-\varphi_2=$ constans, a configuratio folytonos hasonlóságával van dolgunk.

Látjuk, hogy e koordinátarendszer tényleg megfelel ama követelésünknek, hogy könnyű bepillantást engedjen a három égitest által képezett configuratio mivoltába. Az előbbi elemi egyenlőtlenségekre pedig azért van szükségünk, mert ők szabják meg a potentiálfüggvény sorbafejtésének alakját a szolgáltatják esetenként a paramétereket, mivel itt a masszák teljesen elesnek.

III. A Lagrange-féle periodikus megoldások a síkban.

12. Legyen

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{r_1'^2+r_1^2\varphi_1'^2}{3} + r_2'^2+r_2^2\varphi_2'^2\right];$$

$$F = T-R;$$

$$q_1 = r_1; \quad q_2 = \varphi_1; \quad q_3 = r_2; \quad q_4 = \varphi_2;$$

$$p_1 = \frac{r_1'}{3}; \quad p_2 = \frac{r_1^2\varphi_1'}{3}; \quad p_3 = r_2'; \quad p_4 = r_2^2\varphi_2'.$$

Akkor a mozgásegyenletek kánonikus alakban:

$$q_i' = \frac{\partial F}{\partial p_i}; \quad p_i' = -\frac{\partial F}{\partial q_i};$$
$$(i=1, 2, 3, 4)$$

és a Jacobi-Hamilton-féle egyenlet:

$$\frac{1}{2}\left[3\left(\frac{\partial S}{\partial r_1}\right)^2 + \frac{3}{r_1^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r_2}\right)^2 + \frac{1}{r_2^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_2}\right)^2\right] = R+h.$$

Newton törvénye esetében

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}\, r_2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}}$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\varphi_1=\varphi_2)}};$$

Bertrand törvénye esetében pedig

$$R = -\tfrac{1}{2}[r_1^2+3r_2^2],$$

s ennélfogva az utóbbi esetben,

$$3\left(\frac{\partial S}{\partial r_1}\right)^2 + \frac{3}{r_1^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r_2}\right)^2 + \frac{1}{r_2^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_2}\right)^2 = -r_1^2-3r_2^2+2h.$$

Rögtön látható, hogy ez esetben a Jacobi-Hamilton egyenlete szigorúan integrálható. Mindjárt hozzá teszszük, hogy a négy egyenlő test JACOBI-HAMILTON egyenlete is szigorúan integrálható, mint később látni fogjuk. Világos, hogy ez az integrálhatóság itt kifejezetten a tömegek egyenlőségétől függ, és megszűnik, mihelyt a tömegek nem egyenlők. NEWTON törvénye esetében ugyan még egyenlő tömegek sem vezetnek szigorúan integrálható alakhoz, azonban mégis a LAGRANGE-féle ismert periodikus megoldások egy kis általánosítását fogjuk találni.

13. Minthogy a BERTRAND-féle potentiálfüggvényben φ_1 és φ_2 nem szerepelnek, legyen

$$S = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + S_1,$$

hol S_1 független φ_1 és φ_2-től. A JACOBI-HAMILTON egyenlete lesz:

$$3\left(\frac{\partial S_1}{\partial r_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial r_2}\right)^2 = -\left(r_1^2 + \frac{3c_1^2}{r_1^2}\right) - \left(3r_2^2 + \frac{c_2^2}{r_2^2}\right) + 2h,$$

és STAECKEL theorémája alapján könnyen találjuk:

$$S = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \int\sqrt{-\frac{c_1^2}{r_1^2} - \frac{r_1^2}{3} + 2h - 2c_3}\, dr_1 +$$

$$+\int\sqrt{-\frac{c_2^2}{r_2^2} - 3r_2^2 - 4h + 6c_3}\, dr_2.$$

Legyen:

$$\frac{\partial S}{\partial c_3} = c_7; \quad \frac{\partial S}{\partial h} = t + c_8;$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = c_5; \quad \frac{\partial S}{\partial c_2} = c_6;$$

akkor, mint könnyen található, a pályák egyenletei:

$$\frac{2\sqrt{3}\,(h-c_3)\,r_1^2 - \sqrt{3}\,c_1^2}{r_1^2\sqrt{3\,(h-c_3)^2 - c_1^2}} = \sin 2\,(\varphi_1 - c_5);$$

$$\frac{2\,(3c_3-2h)\,r_2^2 - c_2^2}{r_2^2\sqrt{(3c_3-2h)^2 - 3c_2^2}} = \sin 2\,(\varphi_2 - c_6);$$

$$\frac{-6\,(h-c_3) + r_1^2}{\sqrt{(3h-3c_3)^2 - c_1^2}} = \cos 2\sqrt{3}\,(t + c_8 + \tfrac{2}{3}c_7);$$

$$\frac{-2(3c_3-2h)+3r_2^2}{\sqrt{(3c_3-2h)^2-3c_2^2)}}=\cos 2\sqrt{3}(t+c_8+2c_7).$$

Ezek ellipsisek középponti egyenletei. A mozgás periodusa mindig $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ és a középmozgás mindig $=\sqrt{3}$, a mi megfelel körülbelül a Venus középmozgásának, ha a tömegek ugyanolyanok mint a Nap tömege. Úgynevezett perturbácziók itt nincsenek, a mozgás tisztán periodikus. A lineáris sebesség itt annál nagyobb, minél távolabb van az illető égitest az ellipsis czentrumától.

14. A Newton-féle törvény esetében a Jacobi-Hamilton egyenlet a következő:

$$\frac{1}{2}\left[3\left(\frac{\partial S}{\partial r_1}\right)^2+\frac{3}{r_1^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial r_2}\right)^2+\frac{1}{r_2^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_2}\right)^2\right]=\frac{1}{\sqrt{2}\,r_2}+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}}$$

Ez az egyenlet a variábilisok separatiójával szigorúan integrálható, ha $r_1=nr_2$ és $\varphi_1-\varphi_2=$ constans.

Ismeretes, hogy Lagrange találta az általános három test problémájának első periodikus megoldásait meglehetősen komplikált módon. Ezek a Lagrange-féle megoldások itt: $\varphi_1-\varphi_2=0$, s akkor a három test állandóan egy egyenesben marad, vagy $\varphi_1-\varphi_2=\frac{\pi}{2}$, s akkor a három test állandóan egy szabályos háromszög csúcsait foglalja el. Látjuk, hogy a három egyenlő test esetében a Jacobi-Hamilton-féle egyenlet igen egyszerűen szolgáltatja ezeket a megoldásokat, azzal az általánosítással, hogy $\varphi_1-\varphi_2=$ egy tetszőleges constanssal, a mi azt jelenti, hogy a kezdeti configuratio tetszőleges.

Legyen tehát

$$\varphi_1-\varphi_2=\alpha=\text{constans};$$

$$\frac{r_1}{r}=n=\text{constans};$$

$$\frac{3+n^2}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+n^2-2n\cos\alpha}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+n^2+2n\cos\alpha}}\right]=B;$$

$$\frac{3+n^2}{3}h=h_1;$$

akkor a Jacobi-Hamilton egyenlete a következő egyszerű alakra redukálódik:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r_2}\right)^2+\frac{1}{r_2^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_2}\right)^2=\frac{2B}{r_2}+2h_1,$$

a miből következik, hogy a pályák általában Kepler-féle ellipsisek.

15. Ha $\varphi_1-\varphi_2=0$, akkor a három test állandóan egy egyenesben marad. Ez esetben

$$a+b=c;$$

$$r_1=\sqrt{2}\,b+\frac{a}{\sqrt{2}};$$

$$r_2=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

és következőleg mindig $r_1>r_2$. Vizsgáljuk meg közelebbről azt az esetet, mikor $a=b$. Ekkor $r_1=3r_2$ és ha még tesszük

$$q_1=r_1; \qquad q_2=\varphi_1;$$

$$p_1=\frac{4}{9}r_1'; \qquad p_2=\frac{4}{9}r_1^2\varphi_1';$$

$$T=\frac{9}{8}\left[p_1^2+\frac{p_2^2}{q_1^2}\right]; \quad R=\frac{15\sqrt{2}}{4r_1}; \quad F=T-R$$

a kánonikus egyenletek lesznek

$$q_i'=\frac{\partial F}{\partial p_i}; \quad p_i'=-\frac{\partial F}{\partial q_i};$$

és

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r_1}\right)^2+\frac{1}{r_1^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_1}\right)^2=\frac{10\sqrt{2}}{3r_1}+\frac{8}{9}h.$$

Ennélfogva m_1 és m_3 az m_2 körül elliptikus pályákban keringenek; m_2 elfoglalja e két egyenlő ellipsis gyujtópontját. Az m_1 által leírt ellipsis az m_3-éhoz képest az egyik közös gyujtópont körül 180°-nyira van elforgatva. Ha az m_1-ből az m_2-őn át egy egyenest képzelünk vonva, úgy m_3 helye ott lesz, hol ezen egyenes meghosszabbitása az m_2-őn túl a másik ellipsist metszi. m_1 és m_3 egyidejűleg vannak a periastrumban vagy apastrumban.

Minthogy

$$p_1' = \frac{4}{9} r_1'' = \frac{9}{4} \frac{p_2^2}{q_1^3} - \frac{15\sqrt{2}}{4q_1^2};$$

$$p_2' = 0;$$

és így

$$p_2 = \frac{4}{9} r_1^2 \varphi_1' = \text{constans},$$

az $r_1 = \text{constans}$ is megoldása az egyenleteknek. Ekkor $\varphi_1' =$ constans. Legyen $r_1 = c_1$, $\varphi_1' = c_3$, $\varphi_1 = c_2 + c_3$-t, akkor

$$c_1^3 c_3^2 = \frac{5 \cdot 27 \cdot \sqrt{2}}{16}.$$

Ennélfogva m_1 és m_3 egy és ugyanazon a körön kering egyenletes sebességgel. m_2 e kör czentrumában van, m_1 és m_3 az átmérő két végpontján. Ezt a megoldást egyszerűen az előbbi elliptikus mozgásból is származtathattuk volna, az excentricitást zérusnak véve. A két symmetrikusan fekvő ellipsis ekkor identikus lesz egy és ugyanazon kör kerületével.

16. Bebizonyitjuk, hogy az $r_1 = \text{constans}$, $\varphi_1' = \text{constans}$ által jellemzett egyenesvonalú mozgás stabilis. E czélra felhasználjuk az $F = h$, vagy $T = R + h$ integrálnak, a Jacobi-féle integrálnak egy érdekes tulajdonságát, melyet Hill vett észre és használt fel először.

Ha a T-ben csak tisztán quadratikus tagok fordulnak elő, akkor T absolute positiv, s ennélfogva az $R + h = 0$ által jellemzett görbe (vagy felület), ha létezik és zárt, elválasztja a sík (vagy tér) ama részét, melyen belül a sebességek reálisak a sik (vagy tér) ama részétől, melyben e sebességek imagináriusak. Ha tehát a tömegek valamely pillanatban az $R+h=0$ zárt görbén (vagy felületen) belül találtatnak, örökké e görbén belül kell maradniok. E görbét (vagy felületet) HILL-féle határgörbének (vagy határfelületnek) szokás nevezni. Világos, hogy ha ily zárt HILL-féle határgörbe létezik, akkor a mozgás stabilis.

HILL a holdmozgás azon egyenletein demonstrálja e görbét, melyek akkor keletkeznek, ha elhanyagoljuk a holdpálya inclinatióját, excentricitását és a Nap parallaxisát. Ezen egyenletek a következők:

$$x''-2y'+\left[\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\right]x=0;$$

$$y''+2x'+\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

és a JACOBI-féle integrál itt

$$x'^2+y'^2=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}+3x^2-2C.$$

Ha C positiv, mint például a Hold esetében, a

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{3}{2}x^2=C$$

által definiált hatodrendű görbe általában három külön ágból áll. Ezek egyike egy zárt kis ovális a koordinátarendszer kezdőpontja körül, másik két ága pedig symmetrikusan van elhelyezve az x és y tengelyhez és asymptotikusan közeledik két az y tengelylyel parallel egyeneshez. Holdunk esetében C, x és y értékei olyanok, hogy a Hold pályája, az előbb említett megszorítások mellett, a kis zárt oválison belül esik. HILL ezen a mily egyszerű, oly ingeniózus okoskodása első érdemleges bizonyítása Holdunk stabilitásának.

17. Az előbb idézett HILL-féle egyenletek megengednek egy evidens egyenesvonalú megoldást:

$$y=0;\quad x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Ez a mozgás azonban instabilis, mert, mint könnyen látható, a Hill-féle határgörbe itt egy ponttá degenerálódik, és így zárt határgörbe nem létezik.

Ezt az instabilitást levezethetjük magukból a mozgásegyenletekből. Helyezzük az égi testet nem pontosan az $y=0$, $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ megoldásnak megfelelő pontba, hanem egy ehhez igen közel eső

$$y=0+\delta y,\quad x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\delta x$$

helyzetbe. Ekkor a variácziós egyenletek, mint könnyen található:

$$\delta x''-2\delta y'-9\delta x=0;$$
$$\delta y''+2\delta x'+3\delta y=0.$$

Eltekintve a $\delta x=0$, $\delta y=0$ banális megoldástól, mely visszavezet bennünket az $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $y=0$ esetre, ha fölteszszük, hogy

$$\delta x=Ae^{\lambda t},\quad \delta y=Be^{\lambda t},$$

ez értékeket behelyettesítve, találjuk, hogy

$$(\lambda^2-9)A-2\lambda B=0;$$
$$2\lambda A+(\lambda^2+3)B=0.$$

Mivel sem A, sem B nem lehetnek egyenlők zérussal, kell hogy legyen

$$(\lambda^2-9)(\lambda^2+3)+4\lambda^2=0.$$

Ezen egyenlet gyökei:

$$\lambda_1=+\sqrt{2\sqrt{7}+1},\quad \lambda_2=-\sqrt{2\sqrt{7}+1},$$

$$\lambda_3=+\sqrt{-1}\sqrt{2\sqrt{7}-1},\quad \lambda_4=-\sqrt{-1}\sqrt{2\sqrt{7}-1}.$$

A variácziós egyenletek teljes integrálja:

$$\delta x=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}+A_3e^{\lambda_3 t}+A_4e^{\lambda_4 t},$$
$$\delta y=B_1e^{\lambda_1 t}+B_2e^{\lambda_2 t}+B_3e^{\lambda_3 t}+B_4e^{\lambda_4 t},$$

periodikus tagokon kívül oly tagot is tartalmaznak, mely az idővel minden határon túl növekszik. Ennélfogva egy kis dislocatio az $y=0$, $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ helytől az égitest határtalan és gyors eltávolodását vonja maga után, vagyis a mozgás instabilis. Ha a λ gyökök mind tisztán imagináriusok lennének, δx és δy tisztán periodikus lenne. Az égitest az xy hely körül periodikusan oscillálna és attól sohasem távolodhatnék el bizonyos határon túl. Ez lenne a stabilis mozgás.

18. Ha a három test nem egyenlő tömegű, akkor mint könnyen belátható, a 15. pontban adott megoldás nem létezhetik. Ez a megoldás tehát a masszák egyenlőségétől függ. Ha a 15. pont alatti mozgásegyenletek variáczióit képezzük az $r_1=$ constans, $\varphi'_1=$ constans közelében, akkor találjuk:

$$\delta r''_1=\left(\varphi_1'^2-\frac{6\,.\,15\,.\,\sqrt{2}}{8\,.\,r_1^3}\right)\delta r_1+2\varphi'_1 r\delta\varphi'_1\,;$$

$$2\varphi'_1\delta r'_1+r_1\delta\varphi''_1=0;$$

a miből

$$2\varphi'_1\delta r_1+r_1\delta\varphi'_1=c.$$

Ebből, ha teszszük:

$$3\left(\varphi_1'^2+\frac{3\,.\,15\,.\,\sqrt{2}}{8r_1^3}\right)=A=\text{constans},$$

$$2\varphi'_1 c=B=\text{constans},$$

lesz:

$$\delta r''_1+A\delta r_1-B=0,$$

és ennek teljes integrálja ennélfogva,

$$\delta r_1=D\cos(\sqrt{A}\,t)+\frac{E}{\sqrt{A}}\sin(\sqrt{A}\,t)+\frac{B}{A},$$

hol D és E integrátio konstansok.

δr_1 és igy r_1 tehát nem növekedhetik minden határon túl, hanem az $r_1=$ constans körül periodikusan oscillál. Vagyis a mozgás stabilis.

Ez még akkor is áll, ha koordinátarendszerünket forgónak tételezzük fel. Ekkor $\varphi'_1=0$, és

$$\delta r_1'' = -\frac{9 \cdot 15 \cdot \sqrt{2}}{8 r_1^3}\,\delta r_1$$

és mint közvetlenül látható, δr_1 tisztán periodikus. A $\delta\varphi_1$ számára az $r_1 \delta\varphi_1' = c$ egyenletből lesz

$$\delta\varphi_1 = \frac{c}{r_1}\,t + c_1.$$

Minthogy pedig ezen egyenesvonalú megoldásnál $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, és ha a koordinátarendszer forgó, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, ennélfogva itt a $\delta\varphi_1$ veszi át ugyanazt a szerepet, mely a nyugvó koordinátarendszerben a φ_1-é volt és következőleg az m_1 égitest pályája nem lesz kör, hanem sinusois-alakban fog e körtől eltérni, mivel most r_1 nem állandó, hanem $=$ (constans $+ \delta r_1$), hol δr_1 periodikus. A Hill-féle határgörbe itt az

$$R + h \equiv \frac{15\sqrt{2}}{4 r_1} + h = 0$$

egyenletből következőleg kör, ha h negativ. Ebből is következtethettünk volna a mozgás stabilitására.

Liouville azt hitte, hogy a Lagrange-féle egyenesvonalú megoldás minden körülmények között instabilis. Látjuk azonban, hogy a mozgás stabilis, ha a három test egyenlő.

19. Az egyenesvonalú megoldás a Bertrand-féle törvény esetében is létezik. Ekkor a 13. pont alapján

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r_1}\right)^2 + \frac{1}{r_1^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_1}\right)^2 = -\frac{16}{27} r_1^2 + h.$$

és a trajektoria egyenlete:

$$r_1^2 = \frac{\frac{1}{3} c_1^2}{\dfrac{c_2 + \sqrt{c_2^2 - 12 c_1^2}}{6} \sin^2(\varphi_1 + c_3) + \dfrac{4 c_1^2}{c_2 + \sqrt{c_2^2 - 12 c_1^2}} \cos^2(\varphi_1 + c_3)}$$

hol c_1, c_2, c_3 integráczió-állandók.

Itt ennélfogva m_1 és m_3 egy és ugyanazon az ellipsisen mozognak, melynek középpontját m_2 foglalja el, m_1 és m_3

pedig a diameter két végpontján vannak. Épp úgy mint a NEWTON törvénye esetében itt is lehet $r_1 =$ constans. A középmozgás $= \sqrt{3}$, mint már találtuk. A mozgás stabilis, ha h positiv.

Ha

$$r_1 = \beta_1, \quad \varphi'_1 = \beta_3, \quad \varphi_1 = \beta_2 + \beta_3 t,$$

akkor itt

$$p_2 = \tfrac{4}{9} r_1^2 \varphi'_1 = \tfrac{4}{9} \beta_1^2 \beta_3 \quad \text{és} \quad \beta_3 = \sqrt{3}.$$

Minthogy a NEWTON törvénye esetében is lehet $c_3 = \sqrt{3}$, ha

$$c_1 = \sqrt[3]{\frac{45\sqrt{2}}{16}} = 1{\cdot}584,$$

ennélfogva mind a két esetben identikus lesz a mozgás, ha $c_1 = \beta_1 = 1{\cdot}584$, vagyis $a = 0{\cdot}7469$, a mi körülbelül a Venus távolságának és középmozgásának felel meg, ha az égitestek tömege a Napéval azonos.

20. Ha $r_1 = \sqrt{3}\, r_2$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, a három test által alkotott háromszög szabályos. Legyenek r_2, φ_2, $2r'_2$, $2r_2^2\varphi'_2$ a kánonikus változók, akkor NEWTON törvénye esetében

$$\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r_2}\right)^2 + \frac{1}{r_2^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_2}\right)^2\right] = \frac{3}{\sqrt{2}\, r_2} + h,$$

a miből következik, hogy a pályák KEPLER-féle ellipsisek.

Ha $r_2 =$ constans, a mi evidens partikuláris megoldás, akkor a három test egy és ugyanazon a körön mozog egyenletes sebességgel. Legyen $r_2 = c_1$, $\varphi_2 = c_2 + c_3 t$, $\varphi'_2 = c_3$, akkor itt

$$c_1^3 c_3^2 = \tfrac{3}{4}\sqrt{2}.$$

BERTRAND törvénye esetében

$$\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r_2}\right)^2 + \frac{1}{r_2^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi_2}\right)^2\right] = -3r_2^2 + h.$$

A pályák itt középpontjukra vonatkoztatott ellipsisek. $r_2 =$ constans itt is megoldás. A három test ekkor egy és ugyanazon a körön mozog. Ha $a=b=c=1$, a NEWTON és BERTRAND-féle törvény esetében ugyanazt a trajektoriát nyerjük. Ha a tömegek a Napéval egyenlők, egymástól való kölcsönös távolságuk egyenlő a Nap-Föld középtávolával. A kör sugara 0·577.

Van ennélfogva két speciális eset, mikor úgy a NEWTON mint a BERTRAND-féle törvény identikus pályákat ad eredményül. Egy ily rendszeren élő megfigyelő, csupán csillagászati megfigyelésekből föl lenne jogosítva akár az egyik, akár a másik törvényre következtetni. Minden más esetben a két törvény lényegesen különböző pályákat szolgáltat.

IV. Ujabb periodikus megoldások. A ζ Cancri.

21. Úgy a LAGRANGE-féle szigorú megoldások mint a HILL-féle periodikus megoldások a természetben úgy látszik nem fordulnak elő abban a formában, a melyet a tiszta analysis követel. De naprendszerünkben is előfordulnak oly esetek, midőn az égi testek egy ily szigorú vagy periodikus megoldás követelte kezdeti helyzethez igen közel vannak, mint például a három belső Jupiter-hold. Láttuk előbb, hogy ily esetben, ha a mozgás stabilis, az egyes tömegek az ily kezdeti configuratio körül periodikusan oscillálnak. De a periodikus megoldások létesüléséhez nem is szükséges, hogy az alapul szolgáló mozgásegyenletek egy minden körülmények között stabilis mozgást charakterizáljanak, a mint azt BURRAU bebizonyította. Eklatáns példa erre a HILL-féle egyenletek, melyek az ő periodikus megoldásainak alapul szolgálnak, s melyek a mint láttuk, bizonyos partikuláris megoldás esetében föltétlenül instabilis mozgást adnak, de természetesen stabilis mozgást jellemeznek, mihelyt a fölvett partikuláris megoldás maga periodikus.

Ha adott differencziálegyenletek által definiált mozgás periodikus megoldásait keressük, általában két eljárást követhetünk. Vagy kiindulunk egy tetszésszerinti kezdőhelyzetből s mechanikus quadraturával megállapitjuk a trajektoriát. Ez vagy zárt görbe, vagy nem az. Az utóbbi esetben addig variáljuk a kezdeti helyzet állandóit, míg nem zárt görbéhez jutunk. Vagy pedig, és ezt a merész utat HILL választotta a mozgásegyenletek változóit periodikusoknak tételezve föl, értékeiket behelyettesítjük az eredeti mozgásegyenletekbe s így határozzuk meg a változókat kifejező periodikus sorok coefficienseit. Világos, hogy ez az utóbbi út csak praktikusan fáradságos, ha az erőfüggvény csak kevéssé is komplikált. Az előbbi módszer azonban theoretikusan is több kifogás alá esik, melyek között nem az utolsó a mechanikus quadratura által szolgáltatott sorok divergencziája.

22. Míg a naprendszerben tényleg nem három, hanem igen sok testtel van dolgunk, addig az álló csillagoknál lehetséges, hogy ha nincsenek bolygóik, tényleg csak három tömeg szerepel, ha a rendszer például hármas. Eddig a megfigyelőket leginkább a rendkívül nagy számban előforduló kettős csillagok foglalkoztatták. Sokkal ritkábbak, de nehezebben megfigyelhetők és theoretikusan annál érdekesebbek és fontosabbak a hármas és többszörös rendszerek. A hármas rendszerek közül egyike a legjobban megfigyelteknek a ζ Cancri. TOBIAS MAYER fedezte fel 1756-ban. Rendszeres megfigyeléseink azonban csak 1820 óta vannak, mikor W. STRUVE programmszerűen kezdte a kettős és többszörös csillagok katalogizálását. W. DOBERCK az Astronomische Nachrichten 4144. és 4273. számaiban közli az összes eddigi megfigyeléseket.

A rendszer három közel egyenlő fényességű komponensből áll, melyeket A, B, C-vel szokás jelölni. Ezek mozgása igen sajátságos. A és B körül közel 60 év alatt ellipsist ír le, miközben egymástól való távolságuk 0·6″—1·1″ között változik. Minthogy a rendszer valószínű parallaxisa 0·056″, ezek megfelelnek körülbelül 10·7—19·6 Nap-Föld-távolságnak. Tömegük egyenként 0·5, a Nap tömegét egynek véve.

A harmadik komponens C, az A és B súlypontja körül igen közel egy kört ír le. FLAMMARION és O. STRUVE vették észre először, hogy a C mozgását majdnem teljes pontossággal le lehet írni, ha *C* maga egy 0·2″-nyi sugarú körön mozgónak tételeztetik föl, mely kis körnek középpontja ismét az *A* és *B* súlypontja körül ír le egy 5·49″ sugarú kört. E sugarak megfelelnek körülbelül 2·8, ill. 98 Nap-Föld-távolságnak. A *C* mozgása a kis körön retrograd.

23. Seeliger, hogy e sajátságos mozgás mechanikai magyarázatát adja, szükségesnek találta, hogy a *C* komponensen kívül még egy negyedik *D* komponens létezését tételezze fel, mely azonban daczára nagyobb tömegének, teljesen láthatatlan. E szerint a *C* és *D* közös súlypontja lenne a *C* által leírt kis kör középpontja és e közös súlypont írná le a nagy kört az *A* és *B* súlypontja mint középpont körül. A kis kör periodusa 17·4 év, a nagy köré 677 év. *C* tömege e hypothesis szerint 0·43, a láthatatlan *D* tömege pedig 0·62 lenne. Seeliger arra a különös eredményre jutott, hogy a *D* tömege igen tág határok között változhatik, a nélkül, hogy ezáltal a *C* pályájában valami változás keletkeznék. Így tehát a ζ Cancri nem három, hanem négy komponensből állana, tehát a négy test problémájával állanánk szemben.

Mindazonáltal a pályák számítása úgy történik, mintha *A* és *B* egy külön kettős rendszert, *C* és *D* is egy külön kettős rendszert képeznének. Az ekként nyert pályák a megfigyeltektől azonban sokszor tetemesen eltérnek. Az *A* és *B* megfigyelt positivszöge a számitottól $\pm 3{\cdot}5^\circ$-nyira, a távolság 0·37″-nyire tér el, a mi több mint az *A* és *B* periastrikus távolságának fele. Sőt Brünnow egy 1872. évi megfigyelésénél 10°42′ eltérés van a positivszögben számítás és megfigyelés között. A *C* komponensnél épp ily eltérések szerepelnek.

Mindenesetre igen különös, hogy a *C* és *D* különböző tömegei mellett, daczára nagy közelségüknek, relativ pályájuk kör. De, ha tényleg négy komponensből állana a rendszer, a legkülönösebb a *C* retrograd mozgása. Ha a *C* tömege igen csekély lenne, úgy ez érthető volna a *D* direkt mozgása mellett is. De *A*, *B*, *C*, *D* közel egyenlő tömegűek és így a *C* és *D* retrograd mozgása teljesen rejtélyes.

24. Vizsgáljuk meg közelebbről, hogy a négy test problémája megenged-e oly megoldást, minőt a ζ Cancri nekünk tényleg mutat. Mivel az A, B, C, D tömegek igen közel egyenlőek, elegendő, ha a négy egyenlő test problémájában találunk ily megoldást. Ha pedig kiderülne, hogy ily alakú megoldás nem létezhetik, akkor meg kell engednünk azt, hogy az a hypothetikus negyedik láthatatlan komponens sem létezhetik és hogy a három test problémájában kell keresnünk a megoldást. Úgy, a mint a pályaszámítás tényleg történik, egyáltalán fölösleges feltételezni a D komponenst. Hiszen a STRUVE hypothesise elég pontosan írja le a mozgást, akár létezik ez a D, akár nem.

Legyen A-nak az A és B súlypontjától való távolsága r_2; C-nek a C és D súlypontjától való távolsága r_3; A és B súlypontjának távolsága a C és D sulypontjától r_1. Vegyünk fel három koordinátarendszert. Az egyik fix az egész rendszer súlypontjában; a másik A és B, resp. C és D súlypontjában van, azzal együtt mozog és folyton parallel marad a fix rendszerhez. Legyen φ_1 az a szög, melyet r_1 a fix rendszer alapirányával alkot, $\varphi_1-\varphi_2$ az $r_1 r_2$, $\varphi_1-\varphi_3$ az $r_1 r_3$ alkotta szög.

Ha az A, B, C, D komponenseket 1, 2, 3, 4-gyel jelöljük, egymástól való távolságaikat pedig r-rel, melyhez indexként a megfelelő komponensek számait teszszük, akkor könnyen találjuk, hogy

$$r_{12}^2 = 4r_2^2 ; \quad r_{34}^2 = 4r_3^2 ;$$

$$r_{23}^2 = r_1^2+r_2^2+r_3^2-2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)-2r_1r_3\cos(\varphi_1-\varphi_3)+ \\ +2r_2r_3\cos(\varphi_2-\varphi_3);$$

$$r_{13}^2 = r_1^2+r_2^2+r_3^2+2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)-2r_1r_3\cos(\varphi_1-\varphi_3)- \\ -2r_2r_3\cos(\varphi_2-\varphi_3);$$

$$r_{24}^2 = r_1^2+r_2^2+r_3^2-2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+2r_1r_3\cos(\varphi_1-\varphi_3)- \\ -2r_2r_3\cos(\varphi_2-\varphi_3);$$

$$r_{14}^2 = r_1^2+r_2^2+r_3^2+2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+2r_1r_3\cos(\varphi_1-\varphi_3)+ \\ +2r_2r_3\cos(\varphi_2-\varphi_3).$$

25. Legyenek a kánonikus változók

$$
\begin{aligned}
q_1 &= r_1; & p_1 &= \tfrac{1}{2} r'_1; \\
q_2 &= r_2; & p_2 &= r'_2; \\
q_3 &= r_3; & p_3 &= r'_3; \\
q_4 &= \varphi_1; & p_4 &= \tfrac{1}{2} r_1^2 \varphi'_1; \\
q_5 &= \varphi_2; & p_5 &= r_2^2 \varphi'_2; \\
q_6 &= \varphi_3; & p_6 &= r_3^2 \varphi'_2.
\end{aligned}
$$

A kánonikus mozgásegyenletek lesznek;

$$q_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}; \quad p'_i = -\frac{\partial F}{\partial q_i};$$

$$(i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$F = T - R;$$

$$T = \frac{1}{2}\left[2p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \frac{2p_4^2}{q_1^2} + \frac{p_5^2}{q_2^2} + \frac{p_6^2}{q_3^2}\right];$$

$R = \Sigma \dfrac{1}{r_{ab}}$ NEWTON törvénye esetében és

$R = -\frac{1}{2} \Sigma r_{ab}^2$ BERTRAND törvénye esetében.

Mivel

$$-\tfrac{1}{2} \Sigma r_{ab}^2 = -2(r_1^2 + 2r_2^2 + 2r_3^2) = R,$$

közvetlenül látható, hogy a négy test problémája itt is szigorúan integrálható, ha áll a BERTRAND törvénye.

NEWTON törvénye esetében a

$$p'_4 + p'_5 + p'_6 = 0$$

egyenletből lesz a felületi integrál

$$p_4 + p_5 + p_6 = \text{constans},$$

vagyis

$$\tfrac{1}{2} r_1^2 \varphi'_1 + r_2^2 \varphi' + r_3^2 \varphi'_3 = \text{constans}.$$

A mi koordinátarendszerünkben a ζ Cancri mozgása, négy testet tételezve fel, azt jelenti, hogy

$$r_1 = \text{constans}, \quad r_3 = \text{constans},$$
$$\varphi_1 = a_1 t + \beta_1; \quad \varphi_3 = a_3 t + \beta_3.$$

De akkor $p_4 =$ constans, $p_6 =$ constans és következőleg $p_5 =$ constans. Ennélfogva $p'_4 = p'_5 = p'_6 = 0$.

Ez értékeket kiszámítva találjuk, hogy a

$$0 = r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\left[\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} + \frac{1}{r_{24}^3} - \frac{1}{r_{14}^3}\right] +$$

$$+ r_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)\left[\frac{1}{r_{23}^3} + \frac{1}{r_{31}^3} - \frac{1}{r_{24}^3} - \frac{1}{r_{14}^3}\right];$$

$$0 = r_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\left[-\frac{1}{r_{23}^3} + \frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{24}^3} + \frac{1}{r_{14}^3}\right] +$$

$$+ r_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)\left[\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} + \frac{1}{r_{24}^3} - \frac{1}{r_{14}^3}\right];$$

$$0 = r_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)\left[\frac{1}{r_{14}^3} + \frac{1}{r_{24}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right] +$$

$$+ r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\left[\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{24}^3} + \frac{1}{r_{14}^3}\right]$$

egyenleteknek egyszerre kellene fennállaniok, a mi csak úgy lehetséges, ha vagy $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$, vagyis a négy test állandóan egy egyenesben marad, vagy pedig ha $\varphi_2 = \varphi_3$, $r_{13} = r_{24}$ és $r_{23} = r_{14}$, vagyis a négy test állandóan egy parallelogrammot alkot.

Látjuk tehát, hogy azok a feltételek, melyek a ζ Cancri mozgásánál érvényesek, a négy test problémájában LAGRANGE-féle megoldásokat involválnának. Már pedig a ζ Cancri tényleges mozgása távol áll attól, hogy egy ily megoldáshoz csak hasonlítson is. Következik ebből, hogy a ζ Cancri nem állhat négy komponensből.

26. Figyelemreméltó, hogy itt is mily egyszerűen találtuk meg a LAGRANGE-féle megoldásoknak megfelelő alakokat négy egyenlő test esetében.

Általánosságban pedig a négy test problémája szigorúan integrálható, $\varphi_1 - \varphi_2 =$ constans, $\varphi_1 - \varphi_3 =$ constans és

$$r_1 : r_2 : r_3 = c_1 : c_2 : c_3,$$

vagyis ha fennáll a kezdeti configuratio állandó hasonlósága. Erről rögtön meggyőz bennünket a JACOBI-HAMILTON egyenlete.

Minthogy koordinátarendszerünk alkalmazható n test esetében is és mivel e rendszerben a felületi integrál mindig

$$\Sigma p_i = \text{constans}, \quad \text{hol} \quad p_i = r_i^2 \varphi_i',$$

könnyen látható, hogy a LAGRANGE-féle megoldások mindig akkor keletkeznek, valahányszor

$$r_i^2 \varphi_i' = \text{constans},$$

míg a JACOBI-HAMILTON egyenlete sokkal általánosabban azt mutatja, hogy az n egyenlő test problémája mindannyiszor szigorúan integrálható, valahányszor külön-külön

$$\frac{r_1}{r_k} = c_k, \quad \varphi_1 - \varphi_k = d_k.$$

Ezek a megoldások a LAGRANGE-féléket mint speciális eseteket magukban foglalják. Ekkor t. i. $d_k = 0$ vagy $\frac{\pi}{2}$.

Egy nem LAGRANGE-féle periodikus megoldás lenne például ha

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \frac{3\pi}{2}; \quad \varphi_3 - \varphi_3 = \frac{\pi}{2}; \quad r_1 : r_2 : r_3 = 2 : 1 : \sqrt{3}.$$

Ekkor az m_2, m_3, m_4 testek egy szabályos háromszög csúcsait foglalják el, m_1 pedig e háromszög súlypontjában van. m_2, m_3, m_4 általában KEPLER-féle ellipsiseket írnak le. Minthogy r_1 lehet = constans, ez esetben m_2, m_3, m_4 az m_1 mint czentrum körül köralakú pályán keringene. De a három test problémájában is találtunk egy megoldást, mikor a három test egy és ugyanazon a körön kering.

Ha most például az m_1 komponens láthatatlan lenne, semmi sem árulná el nekünk, hogy itt tényleg négy testtel van dolgunk. A középmozgásban okvetlenül mutatkozó differencziát a tömegek rovására írnók.

Tegyük fel azonban, hogy például az m_2 komponens lenne láthatatlan. Mivel m_3 és m_4-nél ismét csak körmozgást figyelnénk meg az m_1 körül, most már kényszerítve lennénk egy negyedik komponens létezését elfogadni, mert hiszen a három test problémájában a körmozgás csak úgy lehetséges, ha a configuratio vagy egyenes, vagy szabályos háromszög, míg itt a háromszög egyenszárú.

Míg az utóbbi példában fönforgott egy negyedik láthatatlan komponens fölvételének kényszerűsége, addig a ζ Cancri mozgása épp ellenkezőleg azt mutatja, hogy ily negyedik láthatatlan komponens nem létezhetik. Mert ha léteznék, a ζ Caucri mozgásának feltétlenül egy LAGRANGE-féle megoldásnak kellene eleget tennie. És mivel ez nem áll, az a hypothetikus negyedik tömeg elveszti minden jogosultságát. Következik tehát, hogy ha nem akarunk még több láthatatlan tömeget fölvenni, a ζ Cancri mozgásának magyarázatát a három test problémájában kell keresnünk.

27. A három test mozgásának a 12. pontban adott kánonikus egyenletei

$$p_i' = -\frac{\partial F}{\partial q_i}$$

a következő alakban írhatók:

$$r_1'' = r_1\varphi_1'^2 + 3\frac{\partial R}{\partial r_1};$$

$$r_2'' = r_2\varphi_2'^2 + \frac{\partial R}{\partial r_2};$$

$$2r_1r_1'\varphi_1' + r_1^2\varphi_1'' = 3\frac{\partial R}{\partial \varphi_1};$$

$$2r_2r_2'\varphi_1' + r_2^2\varphi_2'' = \frac{\partial R}{\partial \varphi_2}.$$

Ezeknek két első integrálja pedig:

$$\tfrac{1}{3}r_1^2\varphi_1' + r_2^2\varphi_2' = c;$$

$$\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{3}r_1'^2 + \tfrac{1}{3}r_1^2\varphi_1'^2 + r_2'^2 + r_2^2\varphi_2'^2\right] = R + h.$$

Láttuk, hogy a LAGRANGE-féle megoldások mily szoros összefüggésben állanak a felületi integrállal, s hogy mindannyiszor keletkeznek, valahányszor $r_i^2\varphi_i' =$ constans. Hogy a három test esetében LAGRANGE-féle megoldás keletkezzék, ahhoz elegendő feltennünk, hogy például $r_1^2\varphi'_1 =$ constans, mert a felületi integrálból akkor önként következik, hogy $r_2^2\varphi'_2$ is $=$ constans. Más szavakkal a LAGRANGE-féle megoldások keresése azt jelenti, milyen az m_1 és m_2 mozgása, ha közös súlypontjuknak és ennélfogva m_3-nak mozgása eleget tesz az $r_1^2\varphi'_1 =$ constans feltételnek?

Ily módon a felületi integrál alapján a három egyenlő test esetében számos más a LAGRANGEétól teljesen különböző periodikus megoldást találhatunk. Így például kérdezhetjük, hogy mi az m_1 és m_2 mozgása, ha felteszszük, hogy $r_1 =$ constans, azaz, hogy m_3 az m_1 és m_2 súlypontja körül kört ír le, de úgy, hogy φ'_1 ne legyen állandó. Két köralakú mozgást találtunk a LAGRANGE-féle megoldások között, de ott $\varphi'_1 =$ constans volt. Ha azonban felteszszük, hogy φ'_1 nem állandó, világos, hogy találhatunk az m_1 és m_2 számára más, igaz hogy komplikált mozgást, mely mellett $r_1 =$ constans.

Kérdezhetjük azt is, hogy például milyen az m_1 és m_2 mozgása, ha r_1 periodikusan egy állandó középérték körül, φ_1 pedig egy $n_1t+\beta_1$ érték körül oscillál. Látható, hogy ez a ζ Cancri esete. Úgyszólván az egyedüli ok, a mely SEELIGERt ama láthatatlan negyedik test hypothezisére vezette, az volt, hogy a felületi integrál általa használt alakjából nem látszott ilyen mozgás létezésének lehetősége. De egyrészt az az egyszerű összefüggés, melyet az általunk használt koordinátarendszer a LAGRANGE-féle megoldásokra nézve kiderített, másrészt a HILL-féle periodikus megoldások eszméje, teljesen más világításba helyezi a ζ Cancri mozgásának problémáját.

28. Bebizonyítjuk most, hogy ha

$$r_1 = a+\delta r_1, \quad \varphi_1 = n_1t+\beta_1+\delta\varphi_1,$$

hol δr_1 és $\delta\varphi_1$ nem állandók, de aránylag igen kicsinyek, akkor δr_1 és $\delta\varphi_1$ tényleg periodikusak.

Ha a 27. pont elején adott egyenletek variácziós egyenleteit képezzük, könnyen találjuk, hogy

$$\delta r_1'' = \varphi_1'^2 \delta r_1 + 2r_1\varphi_1'\delta\varphi_1' + 3\left[\frac{\partial^2 R}{\partial r_1^2}\delta r_1 + \frac{\partial^2 R}{\partial r_1 \partial \varphi_1}\delta\varphi_1\right];$$

$$r_2'' = r_2\varphi_2'^2 + \frac{\partial R}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 R}{\partial r_1 \partial r_2}\delta r_1 + \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi_1 \partial r_2}\delta\varphi_1;$$

$$2r_2r_2'\varphi_2' + r_2^2\varphi_2'' = \frac{\partial R}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial^2 R}{\partial r_1 \partial \varphi_2}\delta r_1 + \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}\delta\varphi_1;$$

$$\delta\varphi_1' = \frac{c_1}{r_1^2} - \frac{2\varphi_1'}{r_1}\delta r_1;$$

$$r_1\varphi_1'^2\delta r_1 + r_1^2\varphi_1'\delta\varphi_1' = 3\left[\frac{\partial R}{\partial r_1}\delta r_1 + \frac{\partial R}{\partial \varphi_1}\delta\varphi_1\right] + h_1,$$

hol természetesen $r_1 = a$, $\varphi_1' = n_1$ és c_1, h_1 különbözők az előbbi c és h-tól. Az $r_1^2\varphi_1'$ variácziós egyenletére nincsen szükségünk, mivel ezt teljesen helyettesiti a felületi integrál variácziója.

A két utolsó egyenletből lesz:

$$-r_1\varphi_1'^2\delta r_1 = 3\left[\frac{\partial R}{\partial r_1}\delta r_1 + \frac{\partial R}{\partial \varphi_1}\delta\varphi_1\right] + h_1 - c_1\varphi_1',$$

és következőleg r_1 szerint differencziálva:

$$-\varphi_1'^2\delta r_1 = 3\left[\frac{\partial^2 R}{\partial r_1^2}\delta r_1 + \frac{\partial^2 R}{\partial r_1 \partial \varphi_1}\delta\varphi_1\right].$$

Ezt az értéket a $\delta r_1''$ egyenletébe behelyettesitve nyerjük

$$\delta r_1'' + 4n_1^2\delta r_1 - \frac{2c_1 n_1}{a} = 0,$$

és ebből

$$\delta r_1 = A\cos(2n_1 t) + \frac{B}{2n_1}\sin(2n_1 t) + \frac{c_1}{2an_1}\cdot$$

Most már a $\delta\varphi_1$ számára igen könnyen találjuk:

$$\delta\varphi_1 = -\frac{A}{a}\sin(2x_1 t) + \frac{B}{2an_1}\cos(2n_1 t) + \beta_2.$$

Ennélfogva r_1 és φ_1 tényleg periodikusan oscillálnak az a. ill. $n_1 t + \beta_1$ értékek körül. Vagyis egy az r_1 végpontján levő szemlélő számára az m_3 test kis zárt pályát fog leírni, míg maga az r_1 végpontja kört ír le az m_1 és m_2 súlypontja körül. Látható, hogy e mozgás retrográd, ha $B=0$, mint például a ζ Cancrinál is. Mivel ∂r_1-et igen kicsinynek tételeztük fel, A-nak is kicsinynek kell lennie.

E bizonyításnál feltételeztük, hogy ∂r_1 és $\partial \varphi_1$ függetlenek r_2 és φ_2-től. Más periodikust fogunk találni, ha ezt a föltételt elejtjük s i. t.

29. A mi már most a ζ Cancri-t illeti, úgy meg kell jegyeznünk, hogy az, a mit mi mozgásából tényleg megfigyelhetünk, az óriási távolságnál fogva, mely bennünket ez érdekes rendszertől elválaszt, tulajdonkép csak a hosszú periodusok intermediáris pályája, hogy GYLDÉN terminologiájával éljünk. A kis periodusú tagok által okozott «perturbácziók» számunkra teljesen elvesznek. Ha tehát a potentiált sorba fejtjük, teljesen elejthetjük azokat a tagokat, melyeknek periodusa kicsiny, valamint azokat is, melyek ∂r_1 vagy $\partial \varphi_1$-gyel vannak szorozva. Így érthető, hogy az r_2 és φ_2 mozgásegyenletei igen közel ellipsist definiálnak.

A pályák tényleges kiszámitása azután legegyszerűbben HILL módszerével történik. Fölteszszük, hogy

$$r_1 = a + A\cos(n_3 t);$$
$$\varphi_1 = n_1 t - B\sin(n_3 t);$$
$$r_2 = \Sigma[A_i \cos i(n_2 t+\alpha) + B_i \sin i(n_2 t+\alpha)];$$
$$\varphi_2 = n_2 t + \Sigma[C_i \cos i(n_2 t+\beta) + D_i \sin i(n_2 t+\beta)].$$

Ezeket az r_2, φ_2 mozgásegyenleteibe helyettesítve, s tekintetbe véve, hogy a, n_1, n_2, n_3, A, B a megfigyelés által adva vannak, meghatározhatjuk az A_i, B_i, C_i, D_i coefficienseket tetszésszerinti számban és pontossággal. E pusztán numerikus számítás technikai kivitele nem ütközik nehézségekbe, miután mint láttuk, igen tetemes elhanyagolásokat engedhetünk meg magunknak. Az elvet illetőleg pedig legyen szabad HILL gyönyörű «Researches»-eire utalnom.

30. Röviden összefoglalva, eddig talált eredményeink a következők: megállapitottuk, hogy a három egyenlő test problémáját teljes általánosságban ugyanoly módon tárgyalhatjuk, mint a hogy Hill-Brown tárgyalták a holdmozgást; kimutattuk, hogy a három és négy test problémája szigorúan integrálható Bertrand törvénye esetében; kimutattuk a Lagrange-féle megoldások létezését és az utóbbiak közül az ú. n. egyenesvonalú megoldás stabilitását három egyenlő test esetében; kimutattuk továbbá, hogy a Lagrange-féle megoldások mily egyszerű összefüggésben állanak a felületi integrállal, s hogy ebből miként lehet különböző periodikus megoldásokat előállítani. Végül sikerült kimutatnunk, hogy a ζ Cancri mozgása nem lehet egy negyedik láthatatlan komponens eredménye, hanem hogy tényleg a három test problémájának egy aránylag igen egyszerű periodikus megoldásának esete.

Wodetzky József.

A REZGÉSTAN ÉS OPTIKA NÉHÁNY JELENSÉGÉNEK ELEMI TÁRGYALÁSA.

Általánosan ismeretes és elemi tárgyalásoknál gyakran használatos eljárás: a rezgőmozgásnak, mint az egyenletes körmozgás vetületének törvényeit az utóbbinak törvényeiből levezetni. Ez az eljárás azonban, különösen a mi a mozgások dynamikáját illeti, koránt sincs teljesen kihasználva. A következőkben épen azt szándékszom megmutatni, hogy körrezgést véve a tárgyalás alapjául (a melyről vetítéssel mindig áttérhetünk a lineáris mozgás esetére), miként lehet a rezgéstannak eredményeit nemcsak egyszerű módon levezetni, hanem értelmezni is, azaz mechanikai belátásunk számára hozzáférhető elemeire visszavezetni. Ez eljárást optikai jelenségekre alkalmazva, a Faraday-jelenség (a polározás síkjának mágneses forgatása) elmélete is egyszerű mechanikai értelmezést nyer.

1. Szabad pont körrezgése.

Legyen az m tömegű pont egyensúlyi helyzetéhez oly rugalmas erővel hozzákötve, melynek nagysága 1 cm-nyi elongatió esetén α^2, legyen a a mozgás amplitudója (a kör sugara), ω a szögsebesség (frequentia). Írjuk fel, hogy a centrifugális és a rugalmas erő egyensúlyban vannak:

$$m \,.\, a \,.\, \omega^2 = a \,.\, \alpha^2, \tag{1}$$

ebből a pont saját rezgésének periodusa

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha^2}{m}}\,.$$

Alkalmazás a Zeeman-jelenség elemi elméletére.

A Zeeman-jelenség legegyszerűbb esetében a (vonalas) spektrum egy vonala a mágneses erőtér irányában két, ellentett irányban körösen poláros s az eredetihez szimmetrikusan fekvő vonalra oszlik, míg az erőtérre merőleges irányból tekintve három, síkban polározott vonalra, melyek közül egy az eredeti vonal helyén van s az erővonalakkal párhuzamosan rezeg (az erővonalakra merőlegesen van polározva), a másik kettő tőle jobbra-balra szimmetrikusan fekszik s rezgéssíkjuk merőleges az erővonalakra. A jelenség magyarázatára feltételezik (Lorentz), hogy a fényt emittáló czentrumok rezgő elektronok, melyekről az elektronelmélet[1] kimutatja, hogy bármely irányban olyan elektromos sugárzást emittálnak, a milyen az elektron pályájának a kérdéses irányra merőleges vetülete, azaz a milyennek látszik a pálya a kérdéses irányból. Például egy körmozgást végző elektron körösen poláros fényt emittál a kör síkjára merőleges irányban, síkban polározottat a kör síkjában fekvő irányokban, elliptikusan polározottat minden más irányban; lineárisan rezgő elektron bármely irányban síkban poláros fényt, melynek rezgési síkja a rezgés irányán s a kérdéses irányon át fektetett sík, s amplitudója e két irány által bezárt szög sinusával arányos, tehát zérus magának a rezgésnek irányában, a honnan tekintve ugyanis a pálya egy pontba esik össze. Ezek szerint a Zeeman-jelenség legegyszerűbb esetében észlelt fényemissiót olyan elektronokra lehet visszavezetni, melyeknek mozgása összetehető egy lineáris rezgőmozgásból az erővonalak irányában az eredeti frequentiával s két ellentett irányú körmozgásból az erővonalakra merőleges síkban az eredetinél nagyobb, ill. kisebb frequentiával. Ugyanilyen három componensre (egy lineáris és két circuláris rezgésre) bonthatjuk az elektron mozgását a mágneses téren kívül is, csakhogy akkor a három componens frequentiája egyenlő s eredőjük

---

[1] Bucherer: Math. Einf. in d. Elektronentheorie. 90. l.

szolgáltatja az elliptikus rezgést, a legáltalánosabb mozgást, a melyet rugalmas erő hatása alatt egy pont végezhet.

A ZEEMAN-jelenséget megmagyarázandó arról kell tehát számot adni, miért és hogyan változik meg m tömegű, e elektromos töltésű pont körrezgésének frequentiája, ha körülötte a rezgés síkjára merőleges H erősségű mágneses teret keltünk. Világos, hogy a változás okozója az az elektrodynamikus erő, melyet a mágneses tér mozgó elektromos töltésre gyakorol, melynek nagysága jelen esetben $\frac{e}{c}a\omega H$ (c a fény terjedési sebessége), a mely — a töltés, a keringés s a mágneses tér iránya szerint — az elektronra centrifugális vagy centripetális irányban hat s csökkenti, illetve növeli a különben egyedül működő külső erőt, a rugalmas erőt. De akkor a (tétlenségi) centrifugális erőnek is csökkenie, illetve növekednie kell, hogy az egyensúly fenmaradhasson, azaz ω-nak kisebbnek, illetve nagyobbnak kell lennie, mint volt a mágneses tér gerjesztése előtt. Ez a ZEEMAN-jelenség legegyszerűbb esetének értelmezése.

Egyenletben kifejezve:

$$ma\omega^2 = a\alpha^2 \pm \frac{e}{c} a\omega H \tag{2}$$

s mivel a második tag kicsiny, ott ω helyébe az

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{m}}$$

értéket tehetjük s lesz

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \frac{e}{mc}\omega_0 H$$

s ebből

$$\omega = \omega_0\left(1 \pm \frac{e}{2mc\omega} H\right) = \omega_0 \pm \Delta\omega,$$

a hol a frequentia változása

$$\Delta\omega = \frac{e}{2mc} H. \tag{3}$$

Minthogy

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega},$$

tehát a hullámhossz változása

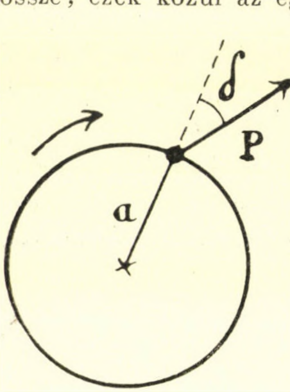
$$\Delta\lambda = \frac{2\pi c}{\omega^2}\Delta\omega = \frac{e \,.\, H\lambda_0^2}{4\pi c m} \tag{4}$$

s innen egyúttal

$$\frac{e}{m} = \frac{4\pi c}{H}\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}.$$

2. Gerjesztett körmozgás.

Mint ismeretes, a gerjesztett rezgőmozgás két tagból tehető össze; ezek közül az egyik, a saját rezgés a surlódás folytán elhal s a stationär állapotban csupán a gerjesztett rezgés marad meg, melyet a pont a amplitudóval s a gerjesztő erőhöz képest δ fáziskülönbséggel végez. Az ezeknek meghatározására szükséges két egyenletet a mozgás differentiálegyenlete szolgáltatja a nélkül azonban, hogy e két egyenlet értelmét is megadná. Itt e két egyenletet értelmezésükkel együtt rögtön megkapjuk; csak azt kell felírnunk, hogy a működő külső erők, meg a tétlenségi erő radiális, illetve tangentiális componensei külön-külön egyensúlyt tartanak.



1. ábra.

Lesz tehát

$$\begin{aligned} ma\omega^2 &= a \,.\, a^2 - P\cos\delta, \\ a\omega\beta &= P\sin\delta, \end{aligned} \tag{5}$$

a hol β a közegellenállás egységnyi sebesség esetén.

Tegyük megint

$$m\omega_0^2 = a^2$$

s lesz

$$\begin{aligned} -P \,.\, \cos\delta &= ma(\omega^2 - \omega_0^2), \\ P\sin\delta &= a\omega\beta, \end{aligned}$$

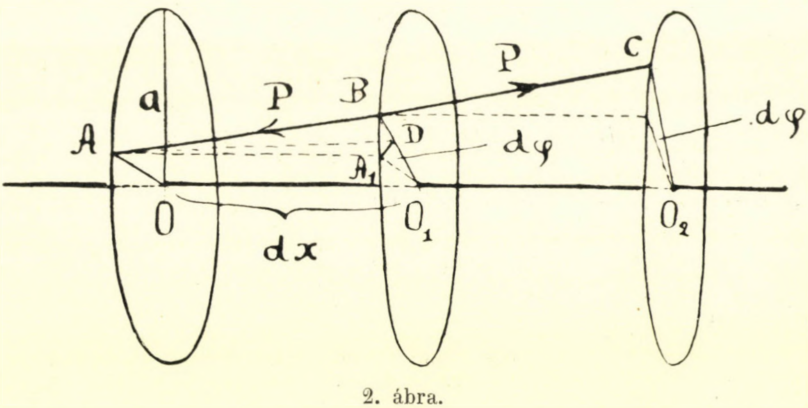
s ezekből

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{\beta}{m}\frac{\omega}{\omega^2-\omega_0^2},$$
$$a = \frac{P}{\sqrt{\omega^2\beta^2+m^2(\omega^2-\omega_0^2)^2}}. \tag{6}$$

Nézzük még meg, hogy például a resonantia esetének a (6)-ból kiolvasható tulajdonságai miképen értelmezhetők. Ez esetben $\omega=\omega_0$, tehát $\operatorname{tg}\delta=\infty$, $\delta=\frac{\pi}{2}$, az erő a mindenkori radiusvektorra merőleges és

$$a=\frac{P}{\omega_0\beta}.$$

S valóban, a pont saját rezgése esetén már a centrifugális s a rugalmas erő egyensúlyt tartanak, tehát a külső erőnek nem lehet radiális componense; a mellett e radiális erők egyensúlya fennáll a minden értékénél, s így a értéke pusztán abból a feltételből adódik ki, hogy a közeg ellenállása egyenlő legyen az egész P erővel.



2. ábra.

Legyen most $\omega>\omega_0$, akkor $ma\omega^2>\alpha a^2$, a centrifugális erő nagyobb a rugalmas erőnél; hogy tehát az egyensúly megmaradhasson, P-nek oly irányításúnak kell lennie, hogy radiális componense a rugalmas erőhöz hozzájáruljon, azaz $\delta>\frac{\pi}{2}$ kell lenni, a pont elmarad az erő mögött; fordítva, ha $\omega<\omega_0$.

3. Körrezgés tovaterjedése pontsoron. (Húrmozgás.)

Legyen $OO_1O_2\ldots$ a húr egyensúlyi helyzetében, $ABC\ldots$ a mozgás egy pillanatában. Helyettesítsük az egyenletes tömegelosztást egymástól dx távolságban elhelyezett ρdx tömegű pontokkal; legyen $d\varphi$ két ilyen pont fáziskülönbsége, P a húrt feszitő erő. A B pont mozgását meghatározandó, írjuk fel, hogy a radiális és tangentiális erők külön-külön egyensúlyban vannak.

Közegellenállástól eltekintve, a *tangentiális erő* előre $P.\frac{ad\varphi}{dx}$, hátra ugyanakkora, összegük zérus.

A radius mentén működik egyrészt a centrifugális erő: $\rho dx\,.\,a\,.\,\omega^2$; másrészt a P-nek radiusmenti componense

$$\left(ABO_1\measuredangle \text{ és } CBO_1\measuredangle \doteq \frac{\pi}{2} \text{ lévén}\right).$$

Ez a componens

$$2P.\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = 2P.\frac{\overline{BD}}{dx},$$

azonban

$$\overline{BD} = a - \overline{O_1D} = a - a\cos d\varphi = a\frac{d\varphi^2}{2}$$

s az erők egyenlőségének feltétele

$$\rho dx a\omega^2 = Pa\frac{d\varphi^2}{dx}.$$

Azonban

$$d\varphi = \omega dt = \omega\frac{dx}{v},$$

ha v a terjedési sebesség; ezt helyettesitve

$$\rho dx a\omega^2 = P\frac{a\omega^2 dx}{v^2} \tag{7}$$

s ebből

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

az ismeretes eredmény, melyet megint könnyű értelmezni. A rezgés tovaterjedésének *sebességét* meghatározni ugyanis annyit tesz, mint meghatározni két adott pont között fellépő *fáziskülönbséget*. Ezt a fáziskülönbséget pedig az a feltétel határozza meg, hogy a P-nek e fáziskülönbség ($d\varphi$) folytán előálló radiális componense a centrifugális erővel egyenlő legyen. Ez a componens pedig $d\varphi^2$-vel arányos, tehát ha P-t például négyszeresére növeljük, $d\varphi$ csak felére fog csökkenni, hogy e componens nagysága ugyanaz maradjon. Azonban ugyanazon két pont közt feleakkora fáziskülönbség kétszerakkora sebességet jelent.

Alkalmazás a Faraday-féle jelenségre.

A FARADAY-féle jelenség — mint ismeretes — abban áll, hogy valamely anyagi közegen áthaladó lineár poláros fény polárossági síkja elfordul, ha a közegben a fénysugár irányával párhuzamos mágneses teret keltünk. FRESNEL kimutatta, hogy a lineár poláros fény ilyen mágnesezett közegben két, ellentett irányú, körösen poláros fényvektorra oszlik, melyek különböző sebességgel terjednek; az így előálló fáziskülönbség nyilvánul a kilépéskor lineárissá egyesült fényvektor azimuthjának elfordulásában.

A lineár poláros fény (legalább gondolatban) egyébként a mágneses téren kívül is ilyen két circuláris componensre bontható, csakhogy a két componens terjedési sebessége ugyanaz. Tehát a FARADAY-féle jelenséget megmagyarázandó, arról kell számot adnunk, miért és hogyan változik meg longitudinális mágneses tér hatása alatt a jobbra, illetve balra tartó, körösen poláros fény terjedési sebessége.

Anyagi közegben a fény terjedését a molekulákhoz kötött rezgésre képes elektronok közvetítik. Mint a ZEEMAN-jelenség tárgyalásánál, úgy itt is a fényvektor helyett az elektronok elongatiójával operálhatunk. Állítsunk elő egyszerűség kedvéért egy lineáris elektronsort oly módon, hogy az előbb tárgyalt húr minden ρdx tömegét lássuk el εdx elektromos töltéssel. Ha már most a keringés iránya például olyan, hogy az elektromos töltésekre gyakorolt elektrodynamikus erő a czentrum felé irányul, akkor ez az erő részben már egyensúlyozza a centrifugális erőt, a P radiusmenti componense már kisebb lehet, tehát $d\varphi$ kisebb, azaz a terjedési sebesség nagyobb lesz; ellenkezőleg, a sebesség csökken, ha a keringés iránya megfordul. Ez a FARADAY-jelenség értelmezése.

Egyenletben:

$$\rho dx a\omega^2 = \frac{Pa\omega^2 dx}{v^2} \pm \frac{\varepsilon a\omega}{c} H dx, \tag{8}$$

$$v^2\rho\omega = P\omega \pm \frac{v^2\varepsilon}{c} H,$$

s a második tagban $v^2 = \frac{P}{\rho}$ téve s rendezve

$$v^2 = \frac{P}{\rho}\left(1 \pm \frac{\varepsilon H}{\rho\omega}\right),$$

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}\left(1 \pm \frac{\varepsilon H}{\rho\omega}\right)},$$

a hol az egyik irányú circuláris rezgésekre a $+$, a másik irányúra a $-$ jel lévén érvényes, a kétféle circulár poláros fényre tényleg két különböző v_1 és v_2 sebesség adódik ki. Ennélfogva l hosszúságú úton a kettő között

$$\frac{l}{v_1} - \frac{l}{v_2}$$

időkülönbség, azaz

$$\left(\frac{l}{v_1} - \frac{l}{v_2}\right)\frac{2\pi}{T}$$

fáziskülönbség áll elő, a mely még így is írható

$$l\left(\frac{c}{v_1} - \frac{c}{v_2}\right)\frac{2\pi}{cT} = l\,(n_1 - n_2)\frac{2\pi}{\lambda} = l\Delta n\frac{2\pi}{\lambda},$$

hol n a törésmutatót jelenti. A polárosság síkjának elfordulása tehát

$$\delta = l\Delta n\frac{\pi}{\lambda}\,. \tag{9}$$

A Zeeman és Faraday-jelenség kapcsolata.

Nem lesz talán felesleges néhány szóval végül arról is megemlékezni, hogy a ZEEMAN és FARADAY-jelenség között a legszorosabb okozati kapcsolat áll fenn, mely rögtön előtérbe lép, mihelyt a szóban forgó anyag (pl. natriumgőz) dispersióját is tekintetbe veszszük. A dispersió elmélete szerint valamely anyagnak bizonyos λ hullámhosszra vonatkozó törésmutatója n_λ függvénye λ-nak és λ_0-nak, az illető anyag emissió, illetve absorptióvonala hullámhosszának, azaz

$$n_\lambda = f(\lambda, \lambda_0).$$

Minthogy pedig longitudinális mágneses térben a λ_0 hullámhoszszal biró emissió (absorptió) vonal helyett két, $\lambda_0 + \Delta\lambda$ és $\lambda_0 - \Delta\lambda$ hullámhosszú ellentetten circulár poláris vonal lép fel, ennélfogva minden más λ hullámhosszúságú két ellentetten circulár poláris fény törésmutatói közt

$$\Delta n = 2 \frac{\partial f}{\partial \lambda_0} \Delta\lambda \qquad (10)$$

különbség áll elő, a melyből a polárosság síkjának elfordulása (9) szerint adódik.

Selényi Pál.

A KÉTTEST PROBLÉMÁJA VÁLTOZÓ TÖMEGEK ESETÉN.

(Első közlemény.)

A kéttest problémájával, mikor a tömegek folyton nőnek, Gyldén[1] foglalkozott először. Kimutatta, hogy alkalmas transformátióval a mozgási egyenletek még ez esetben is a szokásos alakra hozhatók. Az x, y heliocentrumos derékszögű coordináták helyébe

$$x = \frac{\xi}{1+\varphi}, \quad y = \frac{\eta}{1+\varphi} \tag{1}$$

heliocentrumos derékszögű coordinátákat vezetvén be:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\mu}{\rho^3}\xi &= 0, \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{\mu}{\rho^3}\eta &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

mozgási egyenletekhez jutott. A φ-t

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{\mu}{\rho^3}\varphi = \frac{F}{\rho^3} \tag{3}$$

differentiálegyenlet megoldasaként választotta meg. Ezekben:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \xi^2+\eta^2, \\ \frac{dt}{d\tau} &= \frac{1}{(1+\varphi)^2}, \\ \varphi &= \varphi(t), \\ t &= \text{a folyó idő}, \\ \mu &= k^2(M+m), \end{aligned} \tag{4}$$

F pedig a tömegváltozás időbeli lefolyását jelenti.

---

[1] Die Bahnbewegungen in einem Systeme von zwei Körpern in dem Falle, dass die Massen Veränderungen unterworfen sind. Astr. Nachr. 109. B. 1. l.

A (2) szerint a ΞH rendszerre vonatkoztatott pálya τ reducált időben ismét kúpszelet. E pályát középpályának szokás nevezni.

Ha φ meghatározása már megtörtént, akkor a valódi pálya alakját az (1) egyenletekből állapithatjuk meg. A φ meghatározása végett ismernünk kell F-nek a folyó időtől, (t)-től való függését. GYLDÉN a φ származtatása céljából $F=\gamma t$ tömegváltozást vesz fel; a ρ, ξ, η, $\frac{1}{\rho^3}$ periodikus természetű függvényeket pedig FOURIER-féle sorba fejtve igen körülményes, de szellemes úton jut φ-nek közelitő értékeihez. GYLDÉN után LOVETT [1] egész általános jellegű transformatiókból indulva ki önkényes feltevésekkel csupán ama transformatiót állapítja meg, mely akkor érvényes, ha a középpálya kör lesz.

Mivel e probléma kosmologiai szempontból is rendkívül fontos, nem lesz érdektelen, ha e helyen oly kifejtést mutatunk be, melylyel φ-t egyszerűbben és szerkezetére is nagyobb világot vetve határozhatjuk meg.

E probléma vizsgálatát megkiséreltem polárcoordinátákban és sikerült oly kifejtésekhez jutnom, melyek φ-t és ennek szerkezetét igen egyszerű, jól áttekinthető módon nyujtják. Két eljárást mutatok be: egyik a (3) integrálját folytonos közelitéssel adja, a másik pedig pontos integrátióval.

1. *A φ függvény meghatározása közelítő úton.* Világos dolog, hogy erő csak a rádius mentén fog fellépni a vonzó erő természete miatt, bármiként szaporodjék is a két test tömege. A bolygó rádiusmenti gyorsulásának kifejezésében csak annyiban lesz változás, hogy a jelenre érvényes tömegkifejezéshez μ-hez F tömegszaporulat járul. Ennélfogva a rádiusmenti és a rotatorius gyorsulások egyenletei:

$$\begin{aligned}\varphi_r &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{\mu+F}{r^2},\\ \varphi_s &= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{ds}{dt}\right) = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

[1] Note on Gyldén's equations of the problem of two bodies with masses varying with the time. Astr. Nachr. 158. B. 337. l.

Alkalmazzuk ezen egyenletekre

$$r=\frac{\rho}{1+\varphi},\quad \frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{(1+\varphi)^2} \tag{6}$$

transformátiókat.

Ekkor:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{d\rho}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dt}\,\frac{1}{1+\varphi}-\frac{\rho\frac{d\varphi}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}}{(1+\varphi)^2}=\frac{d\rho}{d\tau}-\rho\frac{d\varphi}{d\tau}+\frac{d\rho}{d\tau}\varphi,$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{dt^2}&=\frac{d^2\rho}{d\tau^2}(1+\varphi)^3-\rho\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}(1+\varphi)^2,\\ r\left(\frac{ds}{dt}\right)^2&=r\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2=\rho\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2(1+\varphi)^3,\\ r^2\frac{ds}{dt}&=r^2\frac{ds}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dt}=\rho^2\frac{ds}{d\tau}\end{aligned} \tag{7}$$

kifejezéseket képezve (5) alatti egyenleteink $(1+\varphi)^3$-al való osztás után:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{d\tau^2}-\rho\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2&=\left(\rho\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}-\frac{\mu+F}{\rho^2}\right)\frac{1}{1+\varphi},\\ \frac{1}{\rho}(1+\varphi)\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{ds}{d\tau}\right)&=0\end{aligned} \tag{8}$$

lesznek.

Ha most φ-t úgy választjuk meg, hogy

$$\left(\rho\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}-\frac{\mu+F}{\rho^2}\right)\frac{1}{1+\varphi}=-\frac{\mu}{\rho^2}, \tag{9}$$

azaz:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\frac{\mu}{\rho^3}\varphi=\frac{F}{\rho^3} \tag{10}$$

másodrendű differentiálegyenletnek tegyen eleget, akkor a ΞH rendszerben

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{d\tau^2}-\rho\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2&=-\frac{\mu}{\rho^2},\\ \rho^2\frac{ds}{d\tau}&=\mu_1=\text{állandó}\end{aligned} \tag{11}$$

lesznek mozgási egyenleteink. A bolygó tehát a (ΞH) rendszerre vonatkoztatva kúpszeletet ír le, jelesen ellipsist a Nap körül.

A (11) teljesen megoldott, ha ismerjük φ-nek a folyó időtől, illetőleg a valóságos anomaliától (s) való függését, azaz, ha előbb megoldjuk a (10) alatti másodrendű differentiálegyenletet.

Hozzuk be (10)-be független változónak a valóságos anomaliát s-t.

Ekkor:

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{d\tau}=\frac{\mu_1}{\rho^2}\frac{d\varphi}{ds},$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}=\frac{\mu_1\rho^2\frac{d^2\varphi}{ds^2}\frac{ds}{d\tau}-2\mu_1\rho\frac{d\rho}{ds}\frac{ds}{d\tau}\frac{d\varphi}{ds}}{\rho^4}, \tag{12}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}=\frac{\mu_1^2\frac{d^2\varphi}{ds^2}-2\mu_1^2\rho^{-1}\frac{d\rho}{ds}\frac{d\varphi}{ds}}{\rho^4}.$$

A (12)-re való tekintettel a (10) alakja lesz:

$$\mu_1^2\frac{d^2\varphi}{ds^2}-2\mu_1^2\rho^{-1}\frac{d\rho}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+\mu\varphi\rho=F\rho,$$

vagy:

$$\mu_1^2\rho\frac{d^2\varphi}{ds^2}-2\mu_1^2\frac{d\rho}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+\mu\varphi\rho^2=F\rho^2. \tag{13}$$

A (11) alatti középpálya legyen ellipsis. Ekkor:

$$\frac{d\rho}{d\tau}=\frac{d\rho}{ds}\frac{ds}{d\tau}=na\frac{e\sin s}{\sqrt{1-e^2}}; \tag{14}$$

azaz:

$$\frac{d\rho}{ds}=\frac{nae\sin s}{\mu_1\sqrt{1-e^2}}\rho^2. \tag{15}$$

Az utóbbit (13)-ba felhasználva lesz ρ-val való rövidítés után:

$$\mu_1^2\frac{d^2\varphi}{ds^2}-2\mu_1\frac{nae\sin s}{\sqrt{1-e^2}}\frac{d\varphi}{ds}\rho+\mu\varphi\rho=F\rho. \tag{13*}$$

A (13*)-ba helyettesítsük be még

$$\mu_1=\sqrt{\mu p}=\sqrt{\mu a(1-e^2)},$$

$$n=\frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}, \tag{16}$$

$$\rho=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos s}$$

értékeket, ekkor $a(1-e^2)$-al rövidítve:

$$\mu\frac{d^2\varphi}{ds^2}-2\mu\frac{e\sin s}{1+e\cos s}\frac{d\varphi}{ds}+\mu\frac{\varphi}{1+e\cos s}=\frac{F}{1+e\cos s}, \qquad (13^{**})$$

vagy pedig:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}(1+e\cos s)-2e\sin s\frac{d\varphi}{ds}+\varphi=\frac{F}{\mu} \qquad (\mathrm{I})$$

egyszerű másodrendű differentiálegyenlethez jutunk, mely φ taglalására kiválóan alkalmasnak mutatkozik.

Mielőtt az (I) általános megoldását megadnók, vizsgáljuk meg azon speczialis esetet, melyben az eredeti körpálya akként módosul, hogy a középpálya is kör lesz.

Legyen s' az eredeti körpálya valóságos, egyúttal középanomáliája is, s pedig a középpályáé. E kettő csak egy állandóban különbözik egymástól. Tegyük fel, hogy állandóan egyenletes tömegszaporodás van jelen. Ekkor F a folyó idővel (t), illetve az eredeti pálya anomaliájával s' egyenesen arányos, azaz:

$$F=\beta s'=mt. \qquad (17)$$

Mivel $s'=\alpha s$, azért

$$F=\gamma s;\quad \gamma=\beta\alpha \qquad (18)$$

is írható.

Ennélfogva az (I) akkor, mikor a középpálya kör, vagyis $e=0$:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\varphi=\frac{\gamma}{\mu}s, \qquad (\mathrm{I}^*)$$

melynek megoldása, az integratiós állandót és a periodikus jellegű tagot nem számítva:

$$\varphi=\frac{\gamma}{\mu}s=\frac{\gamma}{\mu\alpha}s'=\frac{\gamma m}{\mu\alpha\beta}t=mt. \qquad (19)$$

Világos dolog, hogy φ csak az excentriczitással egyenlőrendű javításra szorulhat, ha az eredeti pálya nem kör. E javítást

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\varphi=\frac{F}{\mu}=\frac{mt}{\mu} \qquad (\mathrm{I}^{**})$$

differentiálegyenletből könnyen előállíthatjuk, ha a középpálya tényleg kör. Hozzuk be s helyett a folyó időt. Ekkor:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{ds} &= \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{a^2}{\mu_1}\frac{d\varphi}{dt}\frac{1}{(1+\varphi)^2},\\ \frac{d^2\varphi}{ds^2} &= \frac{a^4}{\mu_1^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\frac{1}{(1+\varphi)^4} - 2\frac{a^4}{\mu_1^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\frac{1}{(1+\varphi)^5}.\end{aligned} \tag{20}$$

A (20) folytán az (I**):

$$\frac{a^4}{\mu_1^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\frac{1}{(1+\varphi)^4} - 2\frac{a^4}{\mu_1^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\frac{1}{(1+\varphi)^5} + \varphi = \frac{m}{\mu}t. \tag{II}$$

A (II) megadja azon utat, mely φ-nek mindig jobb közelitő értékéhez vezet. Az előbbi meggondolásaink értelmében (19) csak igen kis javitásra szorulhat, ha az eredeti pálya igen csekély excentriczitással bir. E szerint tehát $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ elhanyagolható kis érték.

A (II)-ből tehát φ-nek javitott értéke:

$$\varphi = \frac{m}{\mu}t + 2\frac{a^4}{\mu_1^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\frac{1}{(1+\varphi)^5}, \tag{21}$$

hol a jobb oldalon φ-nek (19) alatti első közelitő értéke helyettesítendő. Mivel

$$\mu_1^2 = a\mu.$$

$$n = \frac{\mu}{a^{\frac{3}{2}}} = \text{középnapi mozgás}, \tag{22}$$

azért φ-nek második javitott értéke:

$$\varphi = \frac{m}{\mu}t + \frac{2}{n^2}\frac{\left(\frac{m}{\mu}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{\mu}t\right)^5}. \tag{23}$$

Ez azon függvény, melyhez Gyldén is jutott. A mi eljárásunk elementárisabb és kéznél levő módon nyujtja (II) folytán φ további közelitéseit a nélkül, hogy a problémában szereplő periodikus mennyiségek Fourier-féle sorbafejtésére kellene utalnunk. A (23)-ból és (II)-ből kitetszik, hogy a további közelitések feleslegesek m igen kis értéke miatt. *Terkán Lajos.*

A KÉT KÉPSÍKON VALÓ ÁBRÁZOLÁS ELMÉLETÉHEZ.

(Második és befejező közlemény.)

II. Ábrázolás lineáris kongruencziák felhasználásával.

26. Riesz Frigyes úr, «*Új módszer a térbeli alakzatok ábrázolására*» czímű dolgozatában* az ábrázolás czéljaira egy lineáris kongruencziát és egy képsíkot használ. A következő sorokban bemutatom, miképen lehetne az ábrázolást *két képsíkon* lineáris kongruencziák alkalmazásával végezni.

Az ábrázolás nagyjában hasonló módon történik, mint dolgozatom első részében, csak azzal a különbséggel, hogy az U és V czentrumokon átmenő czentrális vetítő sugarak helyett két lineáris kongruenczia sugarait használjuk.

A lineáris kongruencziákat megadjuk tengelyeik által. Az egyiknek tengelyei legyenek u és $\mathfrak{u}$, a másiké v és $\mathfrak{v}$. E két kongruencziát *első,* ill. *második* kongruencziának, sugaraikat *első,* ill. *második* vetítő sugaraknak nevezzük.

A tengelyeknek képsík-nyomai legyenek: U_1, $\mathfrak{U}_1$, V_1, $\mathfrak{V}_1$, ill. U_2, $\mathfrak{U}_2$, V_2, $\mathfrak{V}_2$. Ha ezeket a tér egy tetszőleges T pontjából, a szerkesztő síkra vetítjük, a tengelyek szerkesztő nyomait kapjuk. Ezeket ugyanazokkal a betűkkel jelöljük, mint a megfelelő képsík-nyomokat.

27. A tér valamely pontján át általában egy és csak egy *első,* ill. *második* vetítő sugár halad. Ezeknek a megfelelő képsíkkal való metszéspontjai a pont *képsík-projekcziói.*

A pontot ez a két képsík-projekcziója meg is határozza. Ha

* Math. és Phys. Lapok, XV. kötet, 280. old. és XVI. kötet, 223. old.

a pont képsík-projekczióit a T czentrumból a szerkesztő síkra vetítjük, a pont *szerkesztő projekczióit* nyerjük.

A térbeli pontot általában a két szerkesztő projekcziója meghatározza és így azok ábrázolására szolgálhatnak.

A kongruencziák tengelyeinek pontjai az ábrázolás szempontjából kivételesen viselkednek. Az első kongruenczia tengelyei valamely pontjának első projekcziója, a második kongruenczia tengelyei valamely pontjának második projekcziója egy-egy egyenes bármely pontja. E szerint *a tengelyek pontjainak első, ill. második projekcziója határozatlan.*

Kivételesen viselkednek még általában a két kongruenczia közös sugarainak a pontjai; e két egyenes bármely pontjának ugyan általában meghatározott első és második projekcziója van, de ezek nem határozzák meg a térbeli pontot, mert e két projekczióhoz tartozó első, ill. második vetítő sugár egy és ugyanaz.

28. Valamely síknak a képsíkokkal való metszésvonalait a sík *képsík-nyomainak* nevezzük. Ha a képsík-nyomokat a T czentrumból a szerkesztő síkra vetítjük, a sík *szerkesztő nyomait* nyerjük.

A síkot a két szerkesztő nyoma meghatározza, vagyis ábrázolja. Kivételt képeznek azok a síkok, melyek a képtengelyen mennek át. Ezeknek mind a két nyoma az x_{12} szerkesztő tengely.

Bármely sík szerkesztő nyomai a szerkesztő tengelyben metszik egymást.

29. Valamely egyenes pontjain átmenő összes első, ill. második vetítő sugarak egy-egy reguláris sugársort alkotnak. Ebből következik, hogy *az egyenes első és második projekcziója egy-egy kúpszelet.* Az egyenes első projekcziója átmegy az U_1, $\mathfrak{U}_1$, második projekcziója a V_2, $\mathfrak{V}_2$ pontokon. Az egyenesnek a képsíkokkal való metszéspontjai az egyenes *képsík-nyomai;* ha ezeket a T czentrumból a szerkesztő síkra vetítjük, az egyenes *szerkesztő* nyomait kapjuk.

Ha az egyenes egy síkban van, akkor az egyenes nyomai a sík nyomaiban vannak.

30. Az első képsík valamely P_1 pontjának második projekczióját, P_1'' t, úgy határozzuk meg, hogy megszerkesztjük a P_1 ponton átmenő q második vetítő sugárnak második nyomát. A q egyenes első nyoma $Q_1 \equiv P_1$. Második nyoma Q_2 a $[P_1, v]$ és $[P_1, \mathfrak{v}]$ síkok metszésvonalának második nyoma.

A $[P_1, v]$ sík első nyoma a $|P_1V_1|$ egyenes; második nyoma abban a pontban metszi az x_{12} tengelyt, a hol az első nyom és átmegy a V_2 ponton. A $[P_1, \mathfrak{v}]$ sík első nyoma a $|P_1\mathfrak{V}_1|$ egyenes; második nyoma ott metszi az x_{12} tengelyt, a hol az első nyom és átmegy a $\mathfrak{V}_2$ ponton. E két sík második nyomainak metszéspontja $Q_2 \equiv P_1''$.

Hasonló módon megszerkesztjük a második képsík valamely pontjának az első projekczióját.

31. Az első képsík valamely P_1 pontján átmenő p első vetítő sugár második nyomát, P_2-t, úgy határozzuk meg, hogy megszerkesztjük a $[P_1, u]$ és $[P_1, \mathfrak{u}]$ síkok metszésvonalának második nyomát.

A $[P_1, u]$ sík első nyoma a $|P_1U_1|$ egyenes; második nyoma abban a pontban metszi az x_{12} tengelyt, a melyben az első nyom és átmegy az U_2 ponton. A $[P_1, \mathfrak{u}]$ sík első nyoma a $|P_1\mathfrak{U}_1|$ egyenes; második nyoma abban a pontban metszi az x_{12} tengelyt, a melyben az első nyom és átmegy az $\mathfrak{U}_2$ ponton. E két sík második nyomainak metszéspontja P_2, a mit kerestünk.

Hasonló módon szerkesztjük meg a második képsík valamely Q_2 pontján átmenő második vetítő sugár első nyomát Q_1-t.

32. A szerkesztő sík két tetszőleges pontja P_1 és Q_2 nem mindig a tér valamely pontjának két szerkesztő projekcziója. Hogy ilyen két pont egy térbeli pont két projekcziója legyen, szükséges és elégséges, hogy a P_1 képsík-ponton átmenő p első vetítő sugár és a Q_2 képsík-ponton átmenő q második vetítő sugár, metsző egyenesek legyenek.

A szükséges és elégséges feltétel tehát arra nézve, hogy a P_1 és Q_2 pontok egy térbeli pont két projekcziója legyen az, hogy a $|P_1Q_1|$ és $|P_2Q_2|$ egyenesek az x_{12} tengelyben messék egymást.

33. Valamely p első vetítő sugár pontjain átmenő második vetítő sugarak egy reguláris sereget alkotnak. E vetítő sugarak második nyomai egy kúpszelet pontjai, mely a V_2, $\mathfrak{V}_2$ pontokon áthalad és a p vetítő sugár második projekcziója p''. Ha a p sugár első nyoma P_1 és a 30., ill. a 31. pont alapján megszerkesztjük a P_1'' és P_2 pontokat, azzal a p'' kúpszelet újabb két pontját nyerjük. Továbbá meghatározhatjuk a p egyenes ama pontjainak második projekczióját, a mely pontokon átmenő második vetítő sugaraknak első nyoma V_1, ill. $\mathfrak{V}_1$. E végből egyrészt a $[V_1, p]$ és $[V_1, \mathfrak{v}]$ síkok, másrészt a $[\mathfrak{V}_1, p]$ és $[\mathfrak{V}_1, v]$ síkok metszésvonalainak második nyomát kell meghatározni.

E síkok első nyomai sorban $|V_1P_1|$, $|V_1\mathfrak{V}_1|$, $|\mathfrak{V}_1P_1|$, $|\mathfrak{V}_1V_1|$; második nyomuk pedig sorban átmegy a P_2, $\mathfrak{V}_2$, P_2, V_2 ponton és azokban a pontokban metszik és x_{12} tengelyt, a melyekben az első nyomuk.

A p'' kúpszeletet az itt említett hat pont közül akármelyik öt határozza meg.

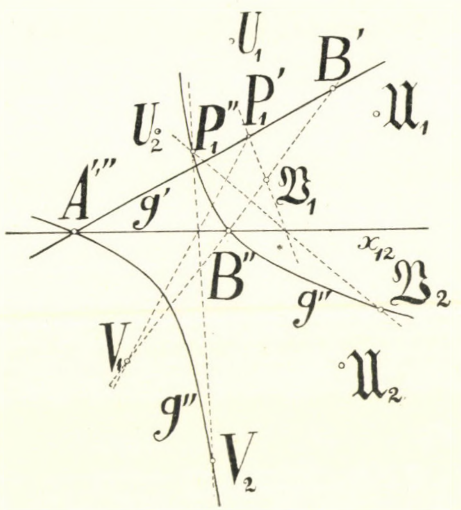
Így a π_1 képsík minden P_1 pontjának megfelel a π_2 képsíkban egy p'' kúpszelet. *A π_1 képsík P_1 pontja és a π_2 képsík egy Q_2 pontja akkor és csak akkor egy térbeli pont két projekcziója, ha Q_2 a P_1 pontnak megfelelő p'' kúpszeleten van.*

Hasonlóan a π_2 képsík minden Q_2 pontjának megfelel a π_1 képsík egy q' kúpszelete, mely a Q_2 ponton átmenő q második vetítő sugárnak első projekcziója.

Az előbb meghatározott p'' kúpszelet egyes pontjainak általában a π_1 képsík más és más kúpszelete felel meg, de ezek valamennyien a P_1 ponton mennek át.

34. A T pont első vetítő sugara a $[T, u]$ és $[T, \mathfrak{u}]$ síkok metszésvonala, második vetítő sugara a $[T, v]$ és $[T, \mathfrak{v}]$ síkok metszésvonala. Minthogy e négy síknak az $|U_1U_2|$, $|\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2|$, $|V_1V_2|$, $|\mathfrak{V}_1\mathfrak{V}_2|$ egyenesek a közös első és második szerkesztő nyoma, abból következik, hogy e szerkesztő nyomok közül az első kettőnek metszéspontja T', az utolsó kettő metszéspontja T''.

35. Az első képsík valamely g egyenesének első szerkesztő projekcziója g', egyenes; második szerkesztő projekcziója g'', kúpszelet, mely a V_2 és $\mathfrak{B}_2$ pontokon halad át és azokban a pontokban metszi az x_{12} szerkesztő tengelyt, a melyben a g' és a $| V_1\mathfrak{B}_1 |$ egyenesek azt metszik. A g'' kúpszelet egy ötödik pontját úgy nyerjük, hogy a g' egyenes egy tetszőleges P_1 pontjának megfelelő P_1'' pontját szerkesztjük meg a 30. pont



7. ábra.

alapján. (7. ábra). Hasonlóan megszerkesztjük a második képsík valamely egyenesének első projekcióját.

36. Ha valamely σ sík két nyoma s_1, s_2 adva van, a síkban fekvő első vetítő sugarat úgy határozzuk meg, hogy megszerkesztjük a sík második nyomának első projekczióját s_2'-t. Ez az s_1 nyomot két pontban metszi. Az egyik az s_1 és x_{12} metszéspontja, a másik pedig a keresett p vetítő sugár első nyoma P_1. Ebből a p második nyomát a 31. pont alapján szerkesztjük meg.

Hasonló eljárással meghatározhatjuk a síkban fekvő második vetítő sugarat.

37. Ha valamely egyenes két szerkesztő nyoma G_1 és G_2, ezekből megszerkeszthetjük az egyenes g' és g'' projekczióit. A g'-nek ismerjük az U_1, $\mathfrak{U}_1$ és G_1 pontját. Egy negyedik pontja G'_2. Egy ötödik pontját úgy határozzuk meg, hogy a g egyenesen át síkot teszünk és meghatározzuk az e síkban fekvő első vetítő sugár első nyomát, és ez okvetlen az egyenes valamely pontjának első projekcziója. Ezzel az öt ponttal az egyenes első projekcziója meg van határozva.

Hasonló eljárással szerkesztjük meg az egyenes második projekczióját g''-t.

38. Ha a g egyenes P és Q pontjának projekcziói: P', P'' Q', Q'', ezekből megszerkeszthetjük az egyenes G_1, G_2 nyomait. A P és Q pont vetítő sugarai legyenek p, $\overline{p}$; q, $\overline{q}$. A p és q második nyomai P_2, Q_2, a $\overline{p}$ és $\overline{q}$ első nyomai $\overline{P}_1$, $\overline{Q}_1$. A $|PQ| \equiv g$ egyenes a $[P, q]$ és $[P, \overline{q}]$ síkok metszésvonala lévén, G_1 első nyoma e síkok első nyomainak, második nyoma G_2 e síkok második nyomainak metszéspontja.

A $[P, q]$ sík egyik egyenese q, egy másik egyenese a $|PQ'|$ egyenes; ez ismét a $[Q', p]$ és $[Q', \overline{p}]$ síkok metszésvonala. De e két sík első nyomai $|Q'P'|$ és $|Q'\overline{P}_1|$, mig második nyomuk a P_2, ill. a P'' ponton megy át és az x_{12} tengelyt abban a pontban metszik, a melyben a megfelelő első nyomok. E két sík második nyomának metszéspontja a $|PQ'|$ egyenes második nyoma. Ha ezt a Q_2 ponttal összekötjük, a $[P, q]$ sík második nyomát kapjuk; első nyoma átmegy a Q' ponton és abban a pontban metszi az x_{12} tengelyt, a melyben a második nyom. Hasonló eljárással nyerjük a $[P\overline{q}]$ sík nyomait.

Az által, hogy az egyenes nyomait meghatároztuk, úgy az első, mint a második projekcziójának 5—5 pontját ismerjük. T. i. az első projekczió ismeretes pontjai: U_1, $\mathfrak{U}_1$, P', Q', G_1; a második projekczió ismeretes pontjai: V_2, $\mathfrak{V}_2$, P'', Q'', G_2.

39. A g egyenes meg van határozva egyik pontjának két, és másik két pontjának egy-egy projekcziója által. Legyen például adva az egyenes A pontjának két projekcziója: A', A''; a P pont első projekcziója: P' és a Q pont második pro-

jekcziója: Q''. Ezekből az egyenes nyomait megszerkeszthetjük.

Ha a P pont első vetítő sugara p és a Q pont második vetítő sugara $\overline{q}$, akkor a g egyenes tulajdonképen az $[A, p]$ és $[A, \overline{q}]$ síkok metszésvonala; az egyenes első nyoma tehát e síkok első nyomainak, második nyoma pedig e síkok második nyomainak metszéspontja. A síkok nyomait olyan módon határozzuk meg, mint a 38. pontban a $[P, q]$ és $[P, \overline{q}]$ síkok nyomait.

40. Ha g' és g'' valamely g egyenes két projekcziója, akkor ezek egy harmadrendű térgörbének is a projekcziói, mert az egyenes pontjait projicziáló két reguláris sugársor oly negyedrendű térgörbében metszi egymást, mely egy egyenesre és egy harmadrendű térgörbére esik szét.

Legyen P' a g egyenes valamely P pontjának első projekcziója, akkor a P' pontnak a π_2 képsikban megfelelő kúpszelet p'', a g'' kúpszeletet a V_2 és $\mathfrak{B}_2$ pontokon kívül még két pontban metszi. Ezek egyike a P második projekcziója P'', a másik pedig az említett harmadrendű térgörbe ama Q pontjának a második projekcziója, mely Q pont P-vel közös első sugáron van, úgy hogy $Q' \equiv P'$.

Az a kérdés merül most fel, hogy a p'' és g'' kúpszeletek szóban levő két metszéspontja közül, melyik a P'' és melyik a Q''? Erre nézve a következő megfontolás útbaigazít. A Q'' pont úgy a g, mint a p egyenes egy-egy, de nem ugyanazon pontjának a második projekcziója és így a Q ponton átmenő második vetítő sugár a $[p, g]$ síkban van és Q'' ennek a síknak a második nyomában. A $[p, g]$ sík első nyoma a $|P'G_1|$ egyenes, második nyoma átmegy a G_2 ponton és abban a pontban metszi az x_{12} tengelyt, a melyben az első nyom metszi. A két metszéspont közül tehát az, a mely a $[p, g]$ sík második nyomában van a Q'', a másik a P'' pont.

41. Két egyenes, g és h, első projekcziói az U_1 és $\mathfrak{U}_1$ pontokon kívül még két pontban metszik egymást. Ha g és h metsző egyenesek, úgy a g' és h' említett két metszéspontja

közül az egyik a metszéspont első projekcziója, a másik, a $[g, h]$ síkban fekvő első vetítő sugár első nyoma. Ez a metszéspont tehát a $[g, h]$ sík $| G_1H_1 |$ első nyomában van. Ha a g és h egyenesek kitérők, akkor az első projekcióinak említett két metszéspontja a két egyenest metsző első vetítő sugarak első nyomai. Hasonlót állíthatunk a g és h egyenesek második projekczióinak metszéspontjairól.

42. Az eddigi tárgyalásokból látjuk, hogyan történhetik lineáris kongruencziák felhasználásával a két képsíkon való ábrázolás. A további részletezésbe nem bocsátkozom, csak megjegyzem, hogy a térelemek kölcsönös helyzetére vonatkozó feladatokat, az eddig tárgyaltak alapján, meg tudjuk oldani. A szerkesztések azonban sokkal komplikáltabbak, mint a MONGE-féle módszer alkalmazása esetében.

Némi egyszerűsítéseket érünk el, ha a lineáris kongruencziák, a T czentrum és a képsíkok között bizonyos kapcsolatot létesítünk. Ezekre az egyszerűsítésekre kivánok a következőkben rámutatni.

43. Válaszszuk a két kongruencziát úgy, hogy az u és $\mathfrak{u}$ tengelyek mindegyike a v és $\mathfrak{v}$ tengelyek mindegyikét messe. A másodrendű reguláris felületek, melyek a négy tengelyben egymást metszik, egy felületsort alkotnak. E másodrendű felületek egyik alkotó-rendszere az egyik kongruencziának, másik alkotórendszere a másik kongruencziának sugarai. A tér minden pontján át általában a felületsor egy-egy felülete halad. E felületnek ebben a pontban találkozó két alkotója, az illető pont két vetítő sugara.

E szerint valamely pont két vetítő sugara mindig a felületsor egy és ugyanazon a felületén van és egy első és egy második vetítő sugár csak akkor metszi egymást, tehát csak akkor határoznak meg pontot, ha azok a felületsor egy és ugyanazon felületén vannak.

E felületek mindegyike, úgy az első, mint a második képsíkot egy-egy kúpszeletben metszi. Az ilyen két kúpszelet *egymásnak megfelelő* vagy *összetartozó* két kúpszelet.

Két összetartozó kúpszelet ugyanabban a két pontban metszi az x_{12} tengelyt.

Az első képsík valamely P' pontja és a második képsík valamely P'' pontja, akkor és csak akkor valamely térbeli P pont két projekcziója, ha azok összetartozó kúpszeleteken vannak.

Ha a felületsor egyik felülete az első képsíkot a k' kúpszeletben, a második képsíkot a k'' kúpszeletben metszi, akkor k' a felület minden második vetítő sugarának első, és k'' a felület minden első vetítő sugarának második projekcziója.

Összetartozó kúpszeletek közül az egyik az U_1, $\mathfrak{U}_1$, V_1, $\mathfrak{V}_1$ pontokon, a másik az U_2, $\mathfrak{U}_2$, V_2, $\mathfrak{V}_2$ pontokon megy keresztül. A P' ponthoz tartozó p'' kúpszeletet úgy határozzuk meg, hogy az U_1, $\mathfrak{U}_1$, V_1, $\mathfrak{V}_1$, P' pontok meghatározta kúpszeletnek az x_{12} tengelylyel való metszéspontjait határozzuk meg. E két metszésponton és az U_2, $\mathfrak{U}_2$, V_2, $\mathfrak{V}_2$ pontokon átmenő kúpszelet a p''.

A szerkesztés abban az esetben az által válik egyszerűbbé, hogy a k' kúpszelet minden pontjának egy és ugyanaz a k'' kúpszelet és a k'' kúpszelet minden pontjának egy és ugyanaz a k' kúpszelet felel meg.

Ha ilyen egyszerűbb szerkesztéseket akarunk végezni, a tengelyek szerkesztő nyomainak a felvételénél csak arra kell ügyelnünk, hogy az $|U_1V_1|$ és $|U_2V_2|$, az $|U_1\mathfrak{V}_1|$ és $|U_2\mathfrak{V}_2|$, az $|\mathfrak{U}_1V_1|$ és $|\mathfrak{U}_2V_2|$, az $|\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1|$ és $|\mathfrak{U}_2\mathfrak{V}_2|$ egyenesek egymást párosával az x_{12} szerkesztő tengelyben messék, de az $|U_1\mathfrak{U}_1|$ és $|U_2\mathfrak{U}_2|$, továbbá a $|V_1\mathfrak{V}_1|$ és $|V_2\mathfrak{V}_2|$ egyenesek ne messék egymást az x_{12} szerkesztő tengelyben.

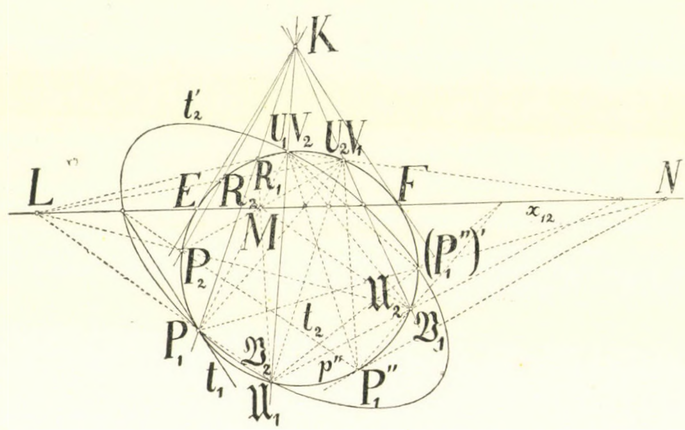
44. További egyszerűsítést érünk el a tengelyek és a T czentrum oly választása által, hogy a tengelyek szerkesztő nyomai között a következő kapcsolat fennálljon:

$$U_1 \equiv V_2,\quad \mathfrak{U}_1 \equiv \mathfrak{V}_2,\quad V_1 \equiv U_2,\quad \mathfrak{V}_1 \equiv \mathfrak{U}_2,$$

és hogy az x_{12} szerkesztő tengely az $|U_1\mathfrak{V}_1|$ és $|\mathfrak{U}_1V_1|$ egyenesek metszéspontján menjen át, de ne menjen át az $|U_1\mathfrak{U}_1|$ és $|V_1\mathfrak{V}_1|$ egyenesek metszéspontján.

Ilyen felvételnek előnye az, hogy minden az U_1, V_1, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$ pontokon átmenő kúpszelet önmagának felel meg. Így azután a szerkesztő sík két pontja, P' és P'', akkor és csak akkor egy térbeli pont két projekcziója, ha ezek az előbb említett négy ponttal egy és ugyanazon a kúpszeleten vannak.

További egyszerűsítéshez jutunk végül, ha az x_{12} szerkesztő tengelyt úgy választjuk, hogy az egyúttal az $| U_1U_2 |$ és $| \mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 |$ egyenesek metszéspontján menjen át. Ezzel az ábrázolással fogunk most részletesebben foglalkozni.



8. ábra.

45. Legyen a szerkesztő sík valamely P_1 pontjához tartozó kúpszelet p''; e kúpszeletnek az x_{12} szerkesztő tengelylyel való metszéspontjai legyenek E és F, a P_1 ponton átmenő első vetítő sugár második nyoma pedig P_2. Ez a P_2 pont, melyet a 31. pont alapján megszerkeszthetünk, a p'' kúpszelet pontja. Legyen továbbá az $| U_1\mathfrak{U}_1 |$ és $| V_1\mathfrak{V}_1 |$ egyenesek metszéspontja K; ez a K pont az x_{12} szerkesztő tengely harmonikus pólusa a p'' kúpszeletre nézve (8. ábra).

A $| KP_1 |$ *és* $| KU_1 |$, *a* $| KP_2 |$ *és* $| KU_2 |$, *a* $| KE |$ *és* $| KF |$ *egyenesek egy involucziós sugársor három elempárja.*

A $| KP_1 |$ egyenes ugyanis a p'' kúpszeletet még egy R_1, a $| KP_2 |$ még egy R_2 pontban metszi. A P_2 pontnak a 31. pontban adott szerkesztéséből következik, hogy $|\mathfrak{U}_1P_1|$ és $|\mathfrak{U}_2P_2|$ az x_{12} szerkesztő tengelyben metszik egymást. Legyen e metszéspont L. Minthogy pedig x_{12} a K pont harmonikus polárisa a p'' kúpszeletre nézve, azért az $|U_1R_1|$ és $|U_2R_2|$ egyenesek is az L pontban metszik egymást. Továbbá az $|U_1P_1|$ és $|U_2P_2|$ egyenesek is az x_{12} tengely egy M pontjában metszik egymást. Tekintve ismét, hogy x_{12} a K polárisa, következik, hogy $|\mathfrak{U}_1R_1|$ és $|\mathfrak{U}_2R_2|$ is az M pontban metszik egymást. Egyébként következik, hogy az M és L pontok egymástól a $|KP_1|$ és $|KU_1|$, a $|KP_2|$ és $|KU_2|$, a $|KE|$ és $|KF|$ egyenesek által harmonikusan vannak elválasztva, tehát e három sugárpár tényleg egy involucziós sugársor három elempárja.

Hasonló megfontolásokból következik, ha Q_1 és Q_2 egy második vetítő sugár két nyoma, hogy *a* $|KQ_1|$ *és* $|KV_1|$, *a* $|KQ_2|$ *és* $|KV_2|$, *a* $|KE|$ *és* $|KF|$ *egyenesek egy involucziós sugársor három elempárja.* Itt Q_1 helyébe P_1 és Q_2 helyébe P''_1 is tehető, hol P_1 az első képsík valamely pontja, a P''_1 e pont második projekcziója.

46. Az első képsík valamely P_1 pontjában találkozó két vetítő sugár síkja, a P_1 ponton átmenő és a két kongruencziában foglalt közös másodrendű reguláris felület érintő síkja, mely a felületet a P_1 pontban érinti. Ennek az érintő síknak első nyoma a P_1 pontban érinti a hozzá tartozó kúpszeletet, míg a sík második nyoma a $|P_2P''_1|$ egyenes. Ebből következik, hogy *a* P_1 *ponthoz tartozó kúpszeletet a* P_1 *pontban érintő egyenes és a* $|P_2P''_1|$ *egyenes egymást az* x_{12} *tengelyben metszik.*

Hasonló következtetéssel nyerjük, hogy *valamely* Q_2 *ponthoz tartozó kúpszeletet a* Q_2 *pontban érintő egyenes és a* $|Q_1Q'_2|$ *egyenes egymást az* x_{12} *tengelyben metszik.*

47. A P_1 pontban találkozó két vetítő sugár τ síkjának nyomai legyenek t_1, t_2. Az előző pont szerint t_1 a P_1 pontban érinti a P_1-hez tartozó kúpszeletet, mely a P_1 ponton átmenő p első vetítő sugár p'' második projekcziója és a rajta átmenő q második vetítő sugár q' első projekcziója. A t_2 nyom első projekcziója t'_2. Ennek öt pontját ismerjük, t. i. az U_1, $\mathfrak{U}_1$, P_1

pontokat és azt a két pontot, melyben t'_2 az x_{12} tengelyt metszi. Az utóbbi két pontot a 35. pont alapján határozzuk meg. A t'_2 és q' kúpszeletek az U_1, $\mathfrak{U}_1$, P_1 pontokon kívül még egy pontban metszik egymást, mely a P''_1 pont első projekcziója $(P''_1)'$ (8. ábra).

De a P''_1 ponton átmenő két vetítő sugár síkja szintén érintő síkja a reguláris felületnek. Ennek első nyoma a $| P_1(P''_1)' |$ egyenes, míg a második nyoma a P''_1 pontban érinti a kúpszeletet. Ha tehát a $| P_1(P''_1)' |$ egyenes és az x_{12} tengely N metszéspontjából a két érintőt a $p'' \equiv q'$ kúpszelethez megszerkesztjük, úgy ez érintők egyikének érintő pontja P''_1.

48. Úgy a 45. mint a 47. pont egy-egy módszert szolgáltat a P_1 ponthoz tartozó P''_1 pontnak a megszerkesztésére, az U_1, $\mathfrak{U}_1$, V_1, $\mathfrak{V}_1$, ill. az U_2, $\mathfrak{U}_2$, V_2, $\mathfrak{V}_2$ pontok közvetlen felhasználásának elkerülésével. Ennek jelentősége abban rejlik, hogy ezt a szerkesztést elliptikus kongruencziák alkalmazása esetében is könnyen végezhetjük, míg a 30. pontban adott eljárás felhasználásánál ebben az esetben nehézségekbe ütközünk.

De bizonyos nehézséggel most is találkozunk. Ugyanis a 45. pont alapján meghatározhatjuk a $| KP''_1 |$ egyenest; de, hogy ennek a p'' kúpszelettel való melyik metszéspontja lesz P''_1, arra nézve felvilágositást nem nyerünk. Épen úgy a 47. pont alapján meghatározhatjuk az N pontot; de hogy e pontból a p'' kúpszelethez húzható két érintő érintőpontjai közül melyik P''_1, azt megint nem tudjuk eldönteni. Hiperbolikus kongruencziák esetében könnyen eligazodunk, mert úgy a $| P_1V_1 |$ és $| P''_1V_2 |$ egyenesek, mint a $| P_1\mathfrak{V}_1 |$ és $| P''_1\mathfrak{V}_2 |$ egyenesek az x_{12} tengely egy-egy pontjában metszik egymást. Ha az $U_1 \equiv V_2$ és $\mathfrak{U}_1 \equiv \mathfrak{V}_2$ pontokat, vagy az $U_2 \equiv V_1$ és $\mathfrak{U}_2 \equiv \mathfrak{V}_1$ szerkesztő nyomokat egymással felcseréljük, az által a $| KP''_1 |$ egyenes, vagy az N pont helyét nem változtatja. De ha az egyik esetben *az egyik* metszéspont vagy érintőpont volt P''_1, úgy a másik esetben, t. i. a felcserélés után, *a másik* metszéspont vagy érintőpont P''_1. Elliptikus kongruencziák esetében azonban lényegtelen az, hogy a $p'' \equiv q'$ kúpszelet és az $| U_1\mathfrak{U}_1 |$, vagy a $| V_1\mathfrak{V}_1 |$ egyenes *képzetes* metszéspontjai közül melyiket tekintjük U_1-nek és melyiket $\mathfrak{U}_1$-nek, illetőleg, melyiket V_1-nek és melyiket $\mathfrak{V}_1$-nek. De akkor az sem lényeges, hogy a $| KP''_1 |$ egyenes és a p'' kúpszelet melyik metszéspontja, vagy az N pontból a p'' kúpszelethez húzott két érintő közül, melyiknek az érintő pontja a P''_1. Így a kérdéses pontok közül akármelyiket tekinthetjük P''_1-nek.

49. Az első képsík csak egy P_1 pontjára nézve választhatjuk tetszésünk szerint a két kérdéses pont közül a P''_1-t.

Az $| U_1\mathfrak{U}_1 |$, $| V_1\mathfrak{V}_1 |$ egyenesek és az x_{12} szerkesztő tengely a szerkesztő síkot négy háromszögre osztja. Ha az $| U_1\mathfrak{U}_1 |$ vagy a $| V_1\mathfrak{V}_1 |$ egyenesek egyike sem a sík végtelenben fekvő egyenese, e háromszögek egyike véges lesz. Ezt jelöljük I-gyel. A hátralevő három háromszög végtelen kiterjedésű, melyeket a szerkesztő sík végtelenben fekvő egyenese ketté metsz. Ezeket II, III, IV-gyel jelölöm. Ha az $| U_1\mathfrak{U}_1 |$, vagy a $| V_1\mathfrak{V}_1 |$ egyenesek egyike a végtelenben van, akkor mind a négy háromszög végtelen nagy. Ezek akármelyikét jelöljük I-gyel.

A II, III, IV. háromszögek egy-egy oldala az I. háromszögnek is egy-egy oldala. Állapodjunk meg abban, hogy a II, III, IV. háromszögeknek az I. háromszöggel közös oldalai legyenek sorban: x_{12}, $| U_1\mathfrak{U}_1 |$, $| V_1\mathfrak{V}_1 |$.

Legyen most P_1 az I. háromszög valamely pontja, akkor a két kérdéses pont közül, melyeket P''_1-nek választhatunk, elliptikus kongruencziák esetében, az egyik az I, a másik a II. síkrészben lesz; mert a P_1 pontnak megfelelő p'' kúpszelet, mely a P_1 ponton átmegy és a melyen a P''_1 is rajta van, nem metszi valós pontokban az $| U_1\mathfrak{U}_1 |$ és $| V_1\mathfrak{V}_1 |$ egyeneseket és így nem lehet pontja sem a III., sem a IV. pontban. Továbbá a két kérdéses pont az x_{12} tengely és a K pont által egymástól harmonikusan van elválasztva.

Állapodjunk meg abban, hogy ha P_1 az I. háromszögben van, akkor P''_1 is abban legyen. És most kimutatjuk, hogy akkor minden az I. háromszögben fekvő Q_1 pontnak megfelelő Q''_1 is I-ben van, minden a II-ben fekvő Q_1 pontnak megfelelő

Q_1'' is a II-ben van, minden a III-ban fekvő Q_1 pontnak megfelelő Q_1'' IV-ben, és végre minden a IV-ben fekvő Q_1 pontnak megfelelő Q_1'' III-ban van.

Legyen először Q_1 I-ben és határozzuk meg a $|P_1Q_1| \equiv g$ egyenes második projekczióját, g''-t. A g'' kúpszelet átmegy az x_{12} tengely ama két pontján, a melyben azt a g és a $|V_1\mathfrak{V}_1|$ egyenesek metszik. A g'' és $|V_1\mathfrak{V}_1|$ vonalak metszéspontjainak egyike az x_{12} tengelyben van, a másik metszéspont a g egyenes ama pontjának a második projekcziója, melyben az az $|U_1\mathfrak{U}_1|$ egyenest metszi, a mi a 45. pontból következik. Végül g'' az $|U_1\mathfrak{U}_1|$ egyenest valós pontokban nem metszi. Már most a P_1 pontból átmehetünk a g egyenesen a Q_1 pontba, a nélkül, hogy az I. háromszög kerületét átlépnők, és így az átmenet közben a mozgó pont második projekcziója sem megy át, sem az x_{12} tengelyen, sem a $|V_1\mathfrak{V}_1|$, sem az $|U_1\mathfrak{U}_1|$ egyenesen. Tehát Q_1'' tényleg I-ben van.

Másodszor legyen Q_1 a II. háromszögben. A P_1 pontból a g egyenesen, esetleg a végtelenben fekvő egyenes átmetszésével, úgy juthatunk Q_1-be, hogy az x_{12} szerkesztő tengelyen átmegyünk, a nélkül, hogy az $|U_1\mathfrak{U}_1|$, vagy a $|V_1\mathfrak{V}_1|$ egyenest átmetszenők. De akkor a mozgó pont második projekcziója is átlép az x_{12} tengelyen és igy a II. síkrészbe jut. Így tehát Q_1 és Q_1'' a II. síkrészben van.

Harmadszor legyen Q_1 a III. háromszögben. Most a P_1 pontból Q_1-be az I. háromszög $|U_1\mathfrak{U}_1|$ oldalának átmetszésével megyünk a g egyenesen. De akkor a mozgó pont második projekcziója átlép a $|V_1\mathfrak{V}_1|$ egyenesen, a nélkül, hogy az x_{12} tengelyen is átmenne; de akkor Q_1'' a IV. háromszögbe jut. Ha tehát Q_1 III-ban van, úgy Q_1'' IV-ben van.

Végül negyedszer legyen Q_1 a IV. háromszögben. Most a P_1 pontból a g egyenesen az I. háromszög $|V_1\mathfrak{V}_1|$ egyenesén át megyünk. De akkor a mozgó pont második projekcziója átmegy a $|\mathfrak{V}_1V_1|$ egyenes és az x_{12} metszéspontján és III-ba jut. Így tehát, ha Q_1 IV-ben van, Q_1'' III-ban van.

50. A 46. pont alapján már most a P_1''-ből könnyen meg-

szerkeszthetjük a P_2 pontot. Továbbá nem okoz nehézséget az, hogy P_2-ből a P_1 és P_2' pontokat megszerkeszszük.

A 42. pontig bemutatott szerkesztések, az által, hogy P_1-ből a P_1'' és P_2 pontokat, illetőleg P_2-ből a P_1 és P_2' pontokat a kongruenczia-tengelyek szerkesztő nyomai nélkül meg tudjuk határozni, keresztülvihetőkké válnak abban az esetben is, midőn az

$$U_1 \equiv V_2, \quad \mathfrak{U}_1 \equiv \mathfrak{V}_2, \quad V_1 \equiv U_2, \quad \mathfrak{V}_1 \equiv \mathfrak{U}_2$$

pontok képzetesek, tehát a kongruencziák elliptikusak.

51. A szerkesztést elliptikus kongruencziák felhasználása esetében rendkívül megkönnyítjük, ha az $U_1 \equiv V_2$ és $\mathfrak{U}_1 \equiv \mathfrak{V}_2$ pontoknak a szerkesztő sík végtelenben fekvő képzetes körpontjait veszszük. Ebben az esetben a szerkesztő sík egyes pontjainak megfelelő kúpszeletek, t. i. a vetítő sugarak projekcziói egy körsort alkotnak. A körök középpontjai az x_{12} tengelyben vannak. Azonkívül valamely tetszőleges egyenes úgy első, mint második projekcziója kör. A szerkesztéseket ebben az esetben épen azért végezhetjük el kényelmesen, mert az összes a szerkesztés szempontjából lényeges kúpszeletek körök.

Ebben az esetben az I, II, III, IV. síkrészek azok a derékszögek, melyekre az x_{12} tengely és a $|V_1\mathfrak{V}_1|$ egyenes a síkot felbontja.

52. Most még a rekonstrukczióról kell néhány szót elmondanom. A térbeli alakzatok rekonstrukcziója általában hasonló módon történik, mint a dolgozatom első részében, a 9. pontban. Először felveszszük pl. az x_{12} képtengelyt, de úgy, hogy az az x_{12} szerkesztő tengelyt messe, vagy vele egybeessék. Azután a két tengelyen át teszünk egy síkot és abban valahol választjuk a T czentrumot. Végre az x_{12} képtengelyen át teszünk két síkot, ezek a képsíkok. Ha most az U_1, $\mathfrak{U}_1$, V_1, $\mathfrak{V}_1$ pontokat π_1-re, az U_2, $\mathfrak{U}_2$, V_2, $\mathfrak{V}_2$ pontokat π_2-re vetítjük a T czentrumból, a kongruencziák tengelyeinek képsík-nyomait nyerjük, a mivel a kongruencziák tengelyeit meghatároztuk.

A P pontot a két projekcziójából úgy határozzuk meg, hogy a P' szerkesztő projekcziót a T czentrumból π_1-re, a P'' szerkesztő projekcziót, szintén T-ből π_2-re vetitjük. Így kapjuk a P pont képsík-projekczióit. Ha most a P' képsík-projekczión át első, a P'' képsík-projekczión át második vetítő sugarat bocsátunk, ezeknek metszéspontja adja a P pontot.

Itt is a rekonstrukcziónál bizonyos önkényesen felvett elemek szerepelnek, mint a 9. pontban. Így azután ugyanazon szerkesztő projekczióknak általában különböző alakzatok felelnek meg, a mint az önkényes elemeket másképen és másképen választjuk. De az így nyert különböző alakzatok kollineárisak.

E vizsgálatoknak közvetlen gyakorlati jelentőséget nem tulajdonítok. Én csak a MONGE-féle módszernek általánosabb szempontból való megvilágítására törekedtem. A gyakorlati módszerek ilyen általánosabb szempontból való megvilágításának pedig, úgy a gyakorlat emberei, mint a tárgy tanításával foglalkozók is hasznát vehetik.

Dr. Privorszky Alajos.

A DIRICHLET-FÉLE PROBLÉMA EGY ESETÉRŐL.

(Harmadik és befejező közlemény.)

III. Alkalmazás.

18. Előre várhatjuk, hogy a kapott általános megoldásból le lehet vezetni azt az eredményt is, a melyhez Fourier eljutott. E czélból tegyük $\varphi(y)$-t és $\psi(y)$-t zérussal egyenlővé; ekkor

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x) \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{y=0} dx, \tag{44}$$

egyébként

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{i}{2}\left[\cot\frac{x-x_0+y_0 i}{2} - \cot\frac{x-x_0-y_0 i}{2}\right] -$$

$$-\frac{i}{2}\left[\cot\frac{x+x_0+\pi+y_0 i}{2} - \cot\frac{x+x_0+\pi-y_0 i}{2}\right]. \tag{45}$$

E kifejezést sorba fejtjük a következő formulák alapján:

$$\frac{1+a}{1-a} = (1+a)(1+a+a^2+\cdots) = 1+2(a+a^2+a^3+\cdots) \quad (\text{ha } |a|<1)$$

és

$$\frac{i}{2}\left[\cot\frac{u+vi}{2} - \cot\frac{u-vi}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1+e^{-v+ui}}{1-e^{-v+ui}} + \frac{1+e^{-v-ui}}{1-e^{-v-ui}}\right)$$

$$= 1+2(e^{-v}\cos u + e^{-2v}\cos 2u + \cdots) \quad (v>0)$$

Ennek következtében

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{y=0} = 2\sum_1^\infty e^{-ny_0}\left[\cos n(x-x_0)-\cos n(x+x_0+\pi)\right]$$

$$= 4\sum_1^\infty e^{-ny_0}\sin n\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

és

$$V(x_0, y_0) = \sum_1^\infty e^{-ny_0}\sin n\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x)\sin n\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)dx.$$

Emlékezzünk vissza arra, a mit $f(x)$-ről a 2. §-ban mondtunk. Ha n páratlan, akkor

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x)\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx dx = (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_n,$$

$$\sin n\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos nx_0;$$

ha pedig n páros, akkor

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x)\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx dx = (-1)^{\frac{n}{2}} b_n,$$

$$\sin n\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{n}{2}}\sin nx_0$$

és így

$$V(x_0, y_0) = a_1 e^{-y_0} \cos x_0 + a_3 e^{-3y_0} \cos 3x_0 + a_5 e^{-5y_0} \cos 5x_0 + \cdots$$
$$+ b_2 e^{-2y_0} \sin 2x_0 + b_4 e^{-4y_0} \sin 4x_0 + b_6 e^{-6y_0} \sin 6x_0 + \cdots \qquad (46)$$

Ez nem más, mint a Fourier-féle megoldás.

19. Vegyük azt a különös esetet, a mikor

$$f(x) = 1, \quad \varphi(y) = 0, \quad \psi(y) = 0.$$

Az integrálalakból kiindulva, lesz

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{y=0} dx. \qquad (47)$$

Idézzük emlékezetünkbe $\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{y=0}$-nak előbbi, cotangensekből összerakott (45) kifejezését. Az integráczió nem jár semmi nehézséggel; például

$$\frac{1}{2\pi} \frac{i}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cot \frac{x - x_0 + y_0 i}{2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{i}{2} \, 2 \operatorname{logsin} \frac{x - x_0 + y_0 i}{2} \right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=+\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{i}{2\pi} \log \cot \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{x_0 - y_0 i}{2} \right)$$

és így tovább. Tehát

$$V(x_0, y_0) = \frac{i}{\pi} \left[\log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x_0 - y_0 i}{2} \right) - \right.$$
$$\left. - \log \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x_0 + y_0 i}{2} \right) \right] + n.$$

n egy bizonyos, még meghatározandó egész szám, melyet a logarithmus függvény többértékű volta hoz be.

Legyen

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0-y_0 i}{2}\right)=Re^{i\Phi};$$

ekkor

$$V(x_0, y_0)=\frac{i}{\pi}(\log R+i\Phi-\log R+i\Phi)+n=-\frac{2}{\pi}\Phi+n,$$

azaz

$$V(x_0, y_0)=-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1-e^{-2y_0}}{2e^{-y_0}\cos x_0}+n.$$

Itt már csupa valós mennyiséggel van dolgunk; szabad tehát azt a megszorítást tennünk, hogy arctg értéke mindig $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ közötti legyen. Ha y_0-t zérus felé közelítjük, $V(x_0, y_0)$ határértéke 1, ennek következtében

$$n=1;$$

minthogy pedig

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} a=\operatorname{arctg}\frac{1}{a},$$

végre

$$V(x_0, y_0)=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2e^{-y_0}\cos x_0}{1-e^{-2y_0}}. \tag{48}$$

Ez a formula azonos azzal, a melyet Poincaré teljesen más úton nyer *Théorie analytique de la propagation de la Chaleur* czímű munkájában.

IV. A derészögű négyszög Green-féle függvénye.

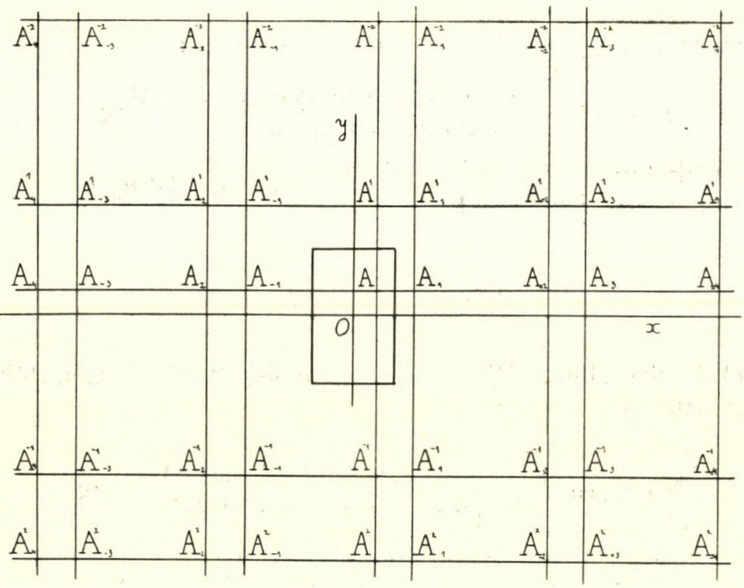
20. Az előbbiekben megkaptuk egy oly tartomány Green-féle függvényét, a mely derékszögű négyszögnek tekinthető, ha annak egy oldalát a végtelenben képzeljük. Lássuk, hogy a használt módszer nem vezet-e czélhoz, ha közönséges derékszögű négyszögről van szó.

Mindenekelőtt megszerkesztjük valamely belső $A(x_0, y_0)$ pont képeit és a képek képeit a D derékszögű négyszög összes oldalaira vonatkozólag. Ekként a képek két dimenziós hálózata keletkezik: A_n^p, $(n, p=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)$; a vízszintes sorokban p, a függélyesekben n index állandó. Az A_n^p kép összesen $|n| + |p|$ számú vetítéssel keletkezett.

Először természetesen a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+p} \log \frac{1}{r_n^p} \tag{49}$$

sorra gondolunk (r_n^p az $M(x, y)$ pont távolságát jelenti az A_n^p képtől), a mely formálisan megfelel mindazon követeléseknek,



12. ábra.

melyeket a Green-féle függvényhez fűzünk. E sor azonban széttartó, mert

$$\lim \log r_n^p = \infty.$$

Próbáljuk összetartóvá tenni a sort azáltal, hogy bizonyos tagokat egy csoportba foglalunk. Egy-egy csoport tagjai vonatkozzanak azon képekre, a melyek a háló egy négyszögének csúcsait alkotják. Ilyen négyszög négyféle van. Válaszszuk például azokat, a melyek az $AA_1A_1^{-1}A^{-1}$ négyszöghöz hasonlók. Egy ilyen R négyszög csúcsai:

$$A_{2n}^{2p},\ A_{-2n+1}^{2p},\ A_{-2n+1}^{-2p+1},\ A_{2n}^{-2p+1}.$$
$$(n, p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Helyezzük koordinátarendszerünk kezdőpontját az adott négyszög középpontjába. Legyenek a és b a négyszög oldalai úgy, hogy az első az Ox, a második Oy tengelylyel legyen párhuzamos. Ekkor A_n^p koordinátái:

$$\begin{aligned} x_n &= (-1)^n (x_0 - na) \\ y_p &= (-1)^p (y_0 - pb), \end{aligned} \tag{50}$$

tehát az R négyszöghöz tartozó tagok összege:

$$a_{np} = \tfrac{1}{2}\log\frac{(x-x_0+2na)^2+(y+y_0-b-2pb)^2}{(x-x_0+2na)^2+(y-y_0+2pb)^2}\times$$
$$\times\frac{(x+x_0-a-2na)^2+(y-y_0+2pb)^2}{(x+x_0-a-2na)^2+(y+y_0-b-2pb)^2}=\tfrac{1}{2}\log(1+u_{np}).$$

Ha a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, a_{np} \quad \text{vagy} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_p\, a_{np}$$

sorokat vizsgáljuk, látjuk, hogy mind feltétlenül összetartók, mert például

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, u_{np} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{(-2x+a+4na)(2x-a)}{[(x-x_0+2na)^2+(y-y_0+2pb)^2]}\times$$
$$\times\frac{(2y_0-b-4pb)(2y-b)}{[(x+x_0-a-2na)^2+(y+y_0-b-2pb)^2]},$$

ez a sor pedig úgy tart össze (p állandó lévén), mint

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Ellenben a
$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} a_{np}$$

sor nem feltétlenül összetartó, mert az

$$U = \sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty} u_{np}$$

sor széttartó. Lehet ugyanis két véges számot, k-t és K-t, találni úgy, hogy n és p minden pozitiv értékére nézve

$$k\frac{np}{(n^2+p^2)^2} < u_{np} < K\frac{np}{(n^2+p^2)^2}.$$

Azonban CAUCHYnak egy tétele értelmében,[1] az U sor egyidőben konvergens a

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{uvdudv}{(u^2+v^2)^2}$$

integrállal, melyet az

$$u = \rho \cos \omega$$
$$v = \rho \sin \omega$$

transzformáczióval ilyen alakban vizsgálhatunk:

$$J = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\rho} \sin \omega \cos \omega d\rho d\omega = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho};$$

tehát a J integrál végtelen nagy.

21. Mindamellett a

$$G = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{p} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} a_{np}\right] \tag{51}$$

sor összetartó és — mint megmutatjuk — elő is állítja a GREEN-féle függvényt.

Jegyezzük meg, hogy a

$$\sigma_0 = \sigma(x, y; x_0, y_0) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} a_{n_0}$$

sort már ismerjük, mert a 10. §-ban szereplő S sorból σ-t megkapjuk, ha

$$y_0 \text{ helyébe } \frac{b}{2} - y_0$$

$$y \text{ helyébe } y - \frac{b}{2}$$

$$x \text{ és } x_0 \text{ helyébe } \pi\frac{x}{a} \text{ és } \pi\frac{x_0}{a}$$

[1] L. pl. PICARD: Traité d'Analyse, II. kiadás, I. k. 289. l.

mennyiségeket írjuk. S értékét a (19) alatti képlet adja meg, tehát

$$\sigma(x, y; x_0, y_0) = \tfrac{1}{2}\log\frac{1-2e^{-y+y_0}\cos\frac{\pi}{a}(x-x_0)+e^{-2y+2y_0}}{1+2e^{-y+y_0}\cos\frac{\pi}{a}(x+x_0)+e^{-2y+2y_0}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\log\frac{1-2e^{b-(y+y_0)}\cos\frac{\pi}{a}(x-x_0)+e^{2b-2(y+y_0)}}{1+2e^{b-(y+y_0)}\cos\frac{\pi}{a}(x+x_0)+e^{2b-2(y+y_0)}}. \qquad (52)$$

Ha a Σa_{n_0} sorról a Σa_{n_1} sorra akarunk áttérni, az A_n^p képek hálózatának egyik vízszintes vonalát, a mely $p=0$ értéknek felel meg, $2b$-vel kell sülyesztenünk, vagy — a mi egyre megy — y-t kell $2b$-vel növelnünk; és általában $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^n a_{np}$ csak annyiban különbözik $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_{n_0}$-tól, hogy y helyébe $y+2pb$-t kell tennünk; azaz

$$\sigma_p = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{np} = \sigma(x, y+2pb; x_0, y_0). \qquad (53)$$

Vizsgáljuk már most a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sigma_p$$

sort. Legyen Δ olyan, a végesben fekvő tartomány, a melynek pontjai A-tól és ennek valamennyi A_n^p képétől legalább δ távolságban vannak. Úgy képzelhetjük, hogy az A és A_n^p pontokból, mint középpontokból, köröket írunk le δ sugárral és Δ mind e körökön kívül fekszik. δ egyébként tetszés szerint kicsiny pozitiv szám lehet.

Azt állítom, hogy *a $\Sigma\sigma_p$ sor feltétlenül és egyenletesen összetartó a Δ tartományban.*

Legyen ugyanis

$$e^b = B, \quad e^{y_0-y} = u, \quad e^{y_0+y} = v,$$

akkor

$$\sigma_p = \tfrac{1}{2}\log\frac{1-2u\cos\frac{\pi}{a}(x-x_0)B^{-2p}+u^2B^{-4p}}{1+2u\cos\frac{\pi}{a}(x+x_0)B^{-2p}+u^2B^{-4p}} -$$

$$-\tfrac{1}{2}\log\frac{1-2v\cos\frac{\pi}{a}(x-x_0)B^{2p-1}+v^2B^{2(2p-1)}}{1+2v\cos\frac{\pi}{a}(x+x_0)B^{2p-1}+v^2B^{2(2p-1)}};$$

a σ_p felírásában a következő kis átalakitással éltünk:

$$\frac{1-2\alpha B^{-m}+B^{-2m}}{1+2\beta B^{-m}+B^{-2m}} = \frac{1-2\alpha B^{m}+B^{2m}}{1+2\beta B^{m}+B^{2m}}.$$

Ennek alapján $$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma_p = \tfrac{1}{2}\log\frac{P_1}{P_2},$$

a hol

$$P_1 = \prod_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-2u\cos\frac{\pi}{a}(x-x_0)B^{-2p}+u^2B^{-4p}}{1+2u\cos\frac{\pi}{a}(x+x_0)B^{-2p}+u^2B^{-4p}} = \prod_{-\infty}^{+\infty}(1-w_p)$$

és P_2 csak abban tér el P_1-től, hogy u helyén v és $2p$ helyén $-(2p-1)$ van.

A Δ tartományban a P_1 szorzat feltétlenül és egyenletesen konvergens, mert ugyanez állítható a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}|w_p|$$

sorról. Ugyanis

$$w_p = \frac{8u\cos\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{a}x_0}{1+2u\cos\frac{\pi}{a}(x+x_0)B^{-2p}+u^2B^{-4p}}B^{-2p}$$

és így, ha $|p|$ meghalad egy bizonyos N számot,

$$|w_p| < \frac{\mu}{B^{2|p|}}, \qquad (B>1)$$

a hol μ állandó, pozitiv szám, bárhol van is $M(x, y)$ pont a Δ tartományban.

Hasonló okból a P_2 szorzat is feltétlenül és egyenletesen összetartó; továbbá Δ-ban $|P_1|$ és $|P_2|$ két véges, pozitiv határ közt maradnak; ennélfogva a $\sum_{-\infty}^{+\infty} \sigma_p$ sor szintén egyenletesen összetartó. Sőt feltétlenül is, mert a $\prod_{-\infty}^{+\infty}(1-w_p)$ szorzat feltétlenül összetartó lévén, az 1-nél nagyobb és 1-nél kisebb tényezők külön-külön konvergens szorzatokat alkotnak és így a $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\log(1-w_p)|$ sor összetartó.

22. Igazoljuk most, hogy a

$$G = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sigma_p$$

függvényt szabad úgy differencziálni, hogy a sort tagonkint differencziáljuk. E czélból mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \sigma_p}{\partial x}$$

sor egyenletesen összetartó Δ-ban. Részletesen kiírva,

$$\sum \frac{\partial \sigma_p}{\partial x} = \sum \left[\frac{\pi}{a} \frac{u \sin \frac{\pi}{a}(x-x_0) B^{-2p}}{1-2u \cos \frac{\pi}{a}(x-x_0) B^{-2p} + u^2 B^{-4p}} + \cdots \right]$$

(a szögletes zárjelen belül négy tag van). Ha $|p|$ elég nagy, e sor általános tagja absolut értékre nézve kisebb, mint

$$\frac{\mu}{B^{2|p|}},$$

a hol μ állandó (azaz x és y-tól független) szám. Ugyanez áll a

$$\sum \frac{\partial \sigma_p}{\partial y}, \quad \sum \frac{\partial^2 \sigma_p}{\partial x^2}, \quad \sum \frac{\partial^2 \sigma_p}{\partial y^2}$$

sorokra is. Azt tudjuk egyébként, hogy

$$\frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial y^2} = 0$$

és így

$$\frac{\partial^2 \sigma_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_p}{\partial y^2},$$

az előbbiek alapján tehát

$$G(x, y; x_0, y_0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sigma_p \tag{54}$$

függvény is eleget tesz a LAPLACE-féle egyenletnek.

Hátra van annak az igazolása, hogy a $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_p$ sor értéke zérus az adott négyszög oldalain és hogy az (x_0, y_0) pontban éppen úgy válik végtelenné, mint $\log \frac{1}{r}$.

Az

$$x = + \frac{a}{2}, \quad x = - \frac{a}{2}$$

egyeneseken minden p-re nézve

$$\sigma_p = 0.$$

Ha továbbá $y = \frac{b}{2}$, akkor

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 + \sigma_{-1} = 0, \ldots, \sigma_p + \sigma_{-p} = 0, \ldots$$

és végre, ha $y = -\frac{b}{2}$

$$\sigma_0 + \sigma_1 = 0, \quad \sigma_{-1} + \sigma_2 = 0, \ldots, \sigma_{-p} + \sigma_{p+1} = 0, \ldots$$

Tehát az adott D négyszög oldalain $\Sigma \sigma_p$ csakugyan zérus. Az egész D négyszögben a

$$H(x, y) = \sum_1^{\infty} \sigma_p + \sum_{-\infty}^{-1} \sigma_p$$

függvény harmonikus, σ_0 pedig ilyen alakú

$$\sigma_0 = \log \frac{1}{r} + H_1,$$

(a H_1 szintén harmonikus); ennélfogva

$$\sum_{\infty}^{+\infty} \sigma_p = \log \frac{1}{r} + (H + H_1) \tag{55}$$

és így be van bizonyítva, hogy a derékszögű négyszög GREEN-féle függvényét a következő kifejezés állítja elő:

$$G(x, y; x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_p \log \frac{1-2e^{y_0-y-2pb}\cos\frac{\pi}{a}(x-x_0)+e^{2(y_0-y-2pb)}}{1+2e^{y_0-y-2pb}\cos\frac{\pi}{a}(x+x_0)+e^{2(y_0-y-2pb)}}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_p \log \frac{1-2e^{b-y_0-y-2pb}\cos\frac{\pi}{a}(x-x_0)+e^{2(b-y_0-y-2pb)}}{1+2e^{b-y_0-y-2pb}\cos\frac{\pi}{a}(x+x_0)+e^{2(b-y_0-y-2pb)}}. \quad (56)$$

23. Ennek a formulának tökéletlensége, hogy a és b-re vonatkozólag nem szimmetrikus. De mivel tudjuk, hogy csak egy GREEN-féle függvény van és hogy a négyszög oldalainak szerepe felcserélhető, felírhatjuk G-t úgy is, hogy az előbbi formulában $x, y; x_0, y_0; a, b$ helyett rendre $y, x; y_0, x_0; b, a$-t írunk. A két kifejezést egyenlővé téve, mellékeredményül egy, közvetlenül talán bajosan igazolható, egyenlőséget nyerünk.

Megjegyzem még, hogy a leírt fejtegetések és számítások lényeges módosítás nélkül a térre is átvihetők, csak $\log\frac{1}{r}$ függvény szerepét kell az $\frac{1}{r}$ függvényre ruháznunk.

Szűcs Adolf.

AZ ELEKTRODINAMIKA ALAPEGYENLETEINEK MEGOLDÁSI MÓDSZEREIRŐL.

(Második közlemény.)

III. Független áramkörrendszerek.

Független áramkörrendszernek nevezzük az áramköröknek azt a rendszerét, melyben egyik áramkör sincs a másikkal vezetői összeköttetésben.

a) Áramkörök kondenzátor nélkül. Ha rendszerünk n áramkörből áll és ezek r-ikében az ellenállás W_r, az elektromotoros erő E_r, az áramintenzitás J_r, az autoindukcziós együttható L_{rr}, az s-edik áramkörre vonatkozó indukcziós együtthatója L_{rs}, akkor a

$$\frac{d}{dt} = D, \; W_r + L_{rr} D = M_{rr}(D), \; L_{rs} D = M_{rs}(D)$$

jelölések alkalmazásával a rendszerünkben fellépő jelenséget a következő egyenletrendszer jellemzi:

$$M_{r1}(D) J_1 + \cdots + M_{rn}(D) J_n = E_r. \qquad (r=1, \ldots, n) \tag{I}$$

Mivel a rendszer elektrokinetikai energiája

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{r,k=1}^{n} L_{rk} J_r J_k, \quad L_{rk} = L_{kr}$$

pozitiv, azért az

$$L_i = \begin{vmatrix} L_{11} & \dots & L_{1i} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ L_{i1} & \dots & L_{ii} \end{vmatrix}$$
$$(i=1,\dots,n)$$

determinánsok mindegyike pozitiv és az

$$L(\nu) = \begin{vmatrix} L_{11}+\nu & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn}+\nu \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet minden gyöke negativ valós szám. Ha a rövidség kedvéért

$$\frac{L_{rk}}{\sqrt{W_r W_k}} = L'_{rk},$$

akkor, mivel az L'_{rk} együtthatókkal biró $\Sigma L'_{rk} x_r x_k$ quadratikus alak szintén pozitiv definit, azért az

$$L'(\nu') = \begin{vmatrix} L'_{11}+\nu' & \dots & L'_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ L'_{n1} & \dots & L'_{nn}+\nu' \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

egyenlet összes gyökei szintén negativek.

Ha az (I) alatt levő egyenletrendszer determinánsát $\Delta(D)$-nek, ennek a M_{rs} eleméhez tartozó aldeterminánsát $\Delta_{rs}(D)$-nek nevezzük, akkor a lineáris egyenletek megoldási módszerével az (I) alatt levő rendszerből a következőt származtathatjuk le:

$$\Delta(D) J_r = \Delta_{1r}(D) E_1 + \dots + \Delta_{nr}(D) E_n. \tag{II}$$
$$(r=1,\dots,n)$$

Ha a

$$\Delta(\nu) = 0 \tag{2}$$

egyenletet elosztjuk ν^n-nel, azaz a determináns minden sorát ν-vel, azután pedig az s-edik oszlopot és sort $\sqrt{W_s}$-sel és ezt a műveletet minden sor és oszlopra nézve elvégezzük, akkor $\frac{1}{\nu}$ helyett ν'-t írván, eljutunk az (1) alatt levő egyenlethez; következőleg *a*

$$\Delta(\nu) = 0 \tag{2}$$

egyenlet összes gyökei negativek. Ha ezek a gyökök rendre $\nu_1, \ldots, \nu_n$, akkor a

$$\Delta(D) J_r = 0 \quad (r=1,\ldots,n)$$

egyenletrendszer általános megoldása

$$J_r = A_{r1} e^{\nu_1 t} + \cdots + A_{rn} e^{\nu_n t}, \quad (r=1,\ldots,n)$$

mely a

$$M_{r1}(D) J_1 + \cdots + M_{rn}(D) J_n = 0 \quad (r=1,\ldots,n) \tag{3}$$

egyenletrendszernek is megoldása, ha

$$A_{1s} M_{r1}(\nu_s) + \cdots + A_{ns} M_{rn}(\nu_s) = 0, \quad \binom{r=1,\ldots,n}{s=1,\ldots,n}$$

honnan

$$A_{rs} = A_s \Delta_{1r}(\nu_s), \quad (r, s=1,\ldots,n) \tag{4}$$

hol az A_s-ek tetszőleges konstansok. Ennélfogva a (3) alatt levő egyenletrendszer általános megoldása

$$J_r = A_1 \Delta_{1r}(\nu_1) e^{\nu_1 t} + \cdots + A_n \Delta_{1r}(\nu_n) e^{\nu_n t}. \quad (r=1,\ldots,n) \tag{5}$$

Ha a (II) alatt levő rendszer egyik partikuláris megoldása $(J_1), \ldots, (J_n)$, akkor ugyancsak ennek a rendszernek a segítségével győződhetünk meg arról, hogy

$$\Delta(D) \sum_{r=1}^{n} M_{sr}(D)(J_r) \equiv \Delta(D) E_s,$$

a mi azt mondja ki, hogy

$$\sum_{r=1}^{n} M_{sr}(D)(J_r) - E_s = \Phi_s(t)$$

eleget tesz a

$$\Delta(D)\Phi = 0$$

egyenletnek, tehát $\Phi_s(t)$ ilyen alakú:

$$\Phi_s(t) = B_{s1}e^{\nu_1 t} + \cdots + B_{sn}e^{\nu_n t}.$$

De ha az $(J_1), \ldots, (J_n)$ alakjaiból előre látható, hogy $\Phi_s(t)$ konstans vagy valós periodussal biró függvény, akkor, ha t-t a periodus pozitiv egész számú végtelenszeresével növeljük, egyenletünk bal oldala nem változik, jobb oldala meg zérus lesz, tehát

$$\Phi_s(t) \equiv 0,$$

azaz ebben az esetben $(J_1), \ldots, (J_n)$ az (I) egyenletrendszernek is partikuláris megoldása, következőleg az (I) alatt levő egyenletrendszer általános megoldása:

$$J_r = (J_r) + A_1\Delta_{1r}(\nu_1)e^{\nu_1 t} + \cdots + A_n\Delta_{1r}(\nu_n)e^{\nu_n t}. \qquad \text{(III)}$$
$$(r=1, \ldots, n)$$

Az $A_1, \ldots, A_n$ konstansokat a $t=0$ időhöz tartozó kezdőértékek $J_{10}, \ldots, J_{n0}$ tökéletesen meghatározzák. Ezzel tehát az (I) rendszer fizikai tartalmát kimerítettük.

$\nu_1, \ldots, \nu_n$ negativ volta következtében a rendszerben a staczionér állapotot az

$$J_r = (J_r) \qquad \text{(IV)}$$
$$(r=1, \ldots, n)$$

rendszer jellemzi.

1. Pl. Ha $E_1, \ldots, E_r$ konstansok, akkor a (II) alatt levő egyenletrendszer ily alakúvá lesz:

$$\Delta(D)J_r = \frac{W_1 \ldots W_n}{W_r} E_r.$$
$$(r=1, \ldots, n)$$

Ennek partikuláris megoldása

$$(J_r) = \frac{E_r}{W_r} \qquad (6)$$
$$(r=1, \ldots, n)$$

konstans lévén, ez tehát partikuláris megoldása az (I) egyenletrendszernek is.

2. Pl. Ha pedig

$$E_r = \mathrm{E}_r \sin(\omega_r t + \varepsilon_r), \quad (r=1, \ldots, n)$$

akkor a (II) rendszernek van ilyen alakú partikuláris megoldása

$$(J_r) = J_{r1} \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \delta_{r1}) + \cdots + J_{rn} \sin(\omega_n t + \varepsilon_n + \delta_{rn}). \tag{7}$$

Ugyanis, ha ezt a föltételes megoldást behelyettesítjük a (II) egyenletrendszerbe s azután a $\sin(\omega_s t + \varepsilon_s)$ és $\cos(\omega_s t + \varepsilon_s)$-ek szerint rendezett egyenletben az együtthatókat rendre zérussá teszszük, akkor az J_{rs}-k és δ_{rs}-ek meghatározására a következő egyenleteket nyerjük:

$$\begin{aligned} B_{rs} \cos \delta_{rs} - C_{rs} \sin \delta_{rs} &= G_{rs} : J_{rs} \\ B_{rs} \sin \delta_{rs} + C_{rs} \cos \delta_{rs} &= H_{rs} : J_{rs}. \end{aligned} \tag{8}$$

Hol a B, C, G, H mennyiségek ismeretes konstansok. Ebből a rendszerből aztán nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} J_{rs}^2 &= \frac{G_{rs}^2 + H_{rs}^2}{B_{rs}^2 + C_{rs}^2}, \\ \operatorname{tg} \delta_{rs} &= -\frac{G_{rs} C_{rs} - H_{rs} B_{rs}}{H_{rs} C_{rs} + G_{rs} B_{rs}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Ha $\omega_1, \ldots, \omega_n$ raczionális számok s számlálóinak legnagyobb közös osztója k, nevezőinek legkisebb közös többszöröse pedig τ, akkor (J_r)-nek, valamint a föntebb bevezetett $\Phi_s(t)$-nek is periodusa $\frac{\tau}{k} 2\pi$, következőleg a (7) alatt levő rendszer az (I) egyenletrendszernek is partikuláris megoldása.

Mivel a (7) rendszer $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$-től függetlenül megoldás vagy nem megoldás, azért ha a (7) az $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ valamely értékrendszerére nézve megoldás, akkor minden más értékrendszerére nézve az.

Legyenek már most $\omega_1, \ldots, \omega_n$ irraczionális számok, akkor, ha egyenletrendszereinkben t helyett mindenütt $t+T$-t írunk, hol T végtelen nagy, és

$$\omega_r(t+T) = \omega_r t + m_r 2\pi + \varepsilon'_r,$$

hol m_r egész szám és $\varepsilon'_r < 2\pi$: (J_r) (7) alatti alakjában, valamint $\Phi_s(t)$-ben is ε_r helyett mindenütt $\varepsilon_r + \varepsilon'_r$ lép, de $\Phi_s(t)$ ebben az alakban $T = \infty$ miatt zérus, következőleg

$$(J_r) = J_{r1} \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \varepsilon'_1 + \delta_{r1}) + \cdots + J_{rn} \sin(\omega_n t + \varepsilon_n + \varepsilon'_n + \delta_{rn})$$

s vele együtt a (7) alatti rendszer is az (I) alatt levő rendszernek partikuláris megoldása.

Ezek a fejtegetések azért fontosak, mert mint könnyen belátható — legalább elméletileg — a (II) alatt levő egyenletrendszer sokkal alkalmasabb az E_{rs}-ek és δ_{rs}-ek meghatározására, mint az (I) alatt levő.

β) Áramkörök kondenzátorral. Ha az r-edik áramkörben levő C_r kapaczitású kondenzátor potencziálisa V_r, akkor a rendszerünkben fellépő jelenség tanulmányozására szolgáló egyenletrendszer a következő:

$$\begin{aligned} M_{r1}(D) J_1 + \cdots + M_{rn}(D) J_n &= E_r + V_r, \\ J_r = -C_r \frac{dV_r}{dt} &= -C_r D V_r. \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$
$$(r=1,\ldots,n)$$

Ebből a rendszerből a

$$DM_{rs}(D) = N_{rs}(D), \quad DM_{rr}(D) + \frac{1}{C_r} = N_{rr}(D), \quad DE_r = E'_r$$
$$r \neq s$$

jelölések alkalmazásával könnyű szerrel leszármaztatható a következő:

$$N_{r1}(D) J_1 + \cdots + N_{rn}(D) J_n = E'_r. \qquad \text{(IV)}$$
$$(r=1,\ldots,n)$$

Ha ennek a rendszernek a determinánsát megint $\Delta(D)$-vel, aldeterminánsait meg $\Delta_{rs}(D)$-vel jelöljük, akkor

$$\Delta(D) J_r = \Delta_{1r}(D) E'_1 + \cdots + \Delta_{nr} E'_n, \qquad \text{(V)}$$
$$(r=1,\ldots,n)$$

melynek általános megoldása az előbbi jelölések megtartásával

$$J_r = (J_r) + A_1 \Delta_{1r}(\nu_1) e^{\nu_1 t} + \cdots + A_{2n} \Delta_{1r}(\nu_{2n}) e^{\nu_{2n} t}, \qquad \text{(VI)}$$
$$(r=1,\ldots,n)$$

hol $\nu_1, \ldots, \nu_{2n}$ a

$$\varDelta(\nu) = 0 \tag{VII}$$

egyenlet gyökei. Kimutatjuk, hogy ezen egyenlet gyökeinek valós részei negativek. Legyen ugyanis egyenletünknek egyik gyöke $\nu = \alpha + \beta i$, akkor a $\varDelta(\nu) = 0$ föltétel következtében a

$$\left[\frac{1}{C_r} + (\alpha+\beta i) W_r\right] x_r + (\alpha+\beta i)^2 \sum_{s=1}^{n} L_{rs} x_s \tag{10}$$
$$(r=1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszernek van megoldása; legyen egy ilyen megoldás:

$$x_s = \xi_s + i\eta_s.$$
$$(s=1, \ldots, n)$$

Ha ezt az értékrendszert behelyettesítjük a (10) alatt felírt egyenletbe s aztán a valós és képzetes részeket szétválasztjuk, akkor a következő egyenletekhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi_r}{C_r} + \alpha W_r \xi_r - \beta W_r \eta_r + (\alpha^2 - \beta^2) \sum_{s=1}^{n} L_{rs} \xi_s - 2\alpha\beta \sum_{s=1}^{n} L_{rs} \eta_s &= 0, \\ \frac{\eta_r}{C_r} + \alpha W_r \eta_r + \beta W_r \xi_r + (\alpha^2 - \beta^2) \sum_{s=1}^{n} L_{rs} \eta_s + 2\alpha\beta \sum_{s=1}^{n} L_{rs} \xi_s &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Ha ezen egyenletek elsejének η_r-szeresét kivonjuk a második ξ_r-szereséből s aztán szummázunk r-re nézve 1-től n-ig, akkor a következő egyenlethez jutunk:

$$\beta \sum_{r=1}^{n} W_r (\xi_r^2 + \eta_r^2) + 2\alpha\beta \left[\sum_{r,s=1}^{n} L_{rs} \xi_r \xi_s + \sum_{r=1}^{n} L_{rs} \eta_r \eta_s\right] = 0.$$

Mivel ebben az egyenletben előforduló quadratikus alakok mindegyike pozitiv definit alak, azért $\beta \neq 0$ föltétel mellett egyenletünk csak úgy állhat meg, ha α negativ.

Ha pedig $\beta = 0$, akkor a (11) alatt levő egyenleteink a következőre redukálódnak:

$$\frac{\xi_r}{C_r} + \alpha W_r \xi_r + \alpha^2 \sum_{s=1}^{n} L_{rs} \xi_s = 0, \tag{12}$$

honnan

$$\sum \frac{\xi_r^2}{C_r} + \alpha \sum W_r \xi_r^2 + \alpha^2 \sum_{r,\, s=1}^{n} L_{rs} \xi_r \xi_s = 0, \tag{13}$$

a mi megint csak akkor lehetséges, ha α negativ.

Ennélfogva a (VI) egyenletrendszerrel jellemzett jelenségben *nem staczionér állapotban minden áramkörben csillapodó áramok is lépnek fel, melyek közül némelyek lehetnek oszczilláló hullámok; az oszczilláló hullámok maximális száma n. Ez a maximális szám fel is lép, ha W-ék igen kicsinyek.* Ugyanis $W_r=0$ esetben a (13) egyenlet szerint a (VII) egyenletnek valós gyökei nem lehetnek.

A staczionér állapotot jellemző egyenletrendszer megint

$$J_r = (J_r). \qquad (r=1, \ldots, n)$$

1. Pl. Ha $E_1, \ldots, E_n$ konstansok, akkor

$$(J_r) = 0 \qquad (r=1, \ldots, n)$$

és a (III) alapján

$$(V_r) = -E_r. \qquad (r=1, \ldots, n)$$

2. Pl. Ha

$$E_r = \mathrm{E}_r \sin(\omega_r t + \varepsilon_r), \qquad (r=1, \ldots, n)$$

akkor annak megfontolásával, hogy

$$\left(\frac{1}{C_r} + W_r D + L_{rr} D^2\right) \sin(\omega_s t + \varepsilon_s) =$$

$$= D\left[W_r + \left(L_{rr} - \frac{1}{\omega_s^2 C_r}\right) D\right] \sin(\omega_s t + \varepsilon_s) =$$

$$= D\,(W_r + L_{rr}^{(s)} D)\,(\sin \omega_s t + \varepsilon_s);$$

$$\Delta(D) \sin(\omega_s t + \varepsilon_s) = D^n \Delta^{(s)}(D) \sin(\omega_s t + \varepsilon_s),$$

$$\Delta_{sr}(D)\, E_s' = D^n \Delta_{sr}^{(s)}(D)\, E_s,$$

hol $\Delta^{(s)}(D)$-t az *a)* fejezet $\Delta(D)$-jéből úgy nyerjük, ha abban L_{rr} helyett $L_{rr}^{(s)}$-t írunk. Könnyű belátni, hogy

$$(J_r) = J_{r1}^{(1)} \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \delta_{r1}^{(1)}) + \cdots + J_{rn}^{(n)} \sin(\omega_n t + \varepsilon_n + \delta_{rn}^{(n)}),$$

hol $J_{rs}^{(s)}$-t és $\delta_{rs}^{(s)}$-t az *a)* fejezet (9) alatt levő képleteivel meghatározott J_{rs} és δ_{rs}-ből úgy nyerjük, ha L_{kk} helyett $L_{kk}^{(s)}$-t írunk ($k=1, \ldots, n$).

3. Pl. Ha

$$E_r = \mathrm{E}_r e^{\alpha_r t} \sin(\omega_r t + \varepsilon_r),$$

akkor részint az *a)* fejezetben, részint az imént tárgyalt 2. példában leírt módszerrel találjuk, hogy az (V) egyik partikuláris integrálja

$$(J_r) = J_{r1}^{(1)} e^{\alpha_r t} \sin(\omega_r t + \varepsilon_r + \delta_{r1}^{(1)}) + \cdots + J_{rn}^{(n)} e^{\alpha_r t} \sin(\omega_n t + \varepsilon_n + \delta_{rn}^{(n)}),$$

hol $J_{rs}^{(s)}$ és $\delta_{rs}^{(s)}$ az α_s, ω_s és $L_{kk}^{(s)}$ $(k=1, \ldots, n)$ függvényei.

Könnyű meggyőződni, hogy (J_r) a (IV) alatt levő egyenletnek is partikuláris megoldása. Ugyanis az *a)* fejezetben leírt módszerrel találjuk, hogy

$$\sum_{r=1}^{n} N_{sr}(D) J_r - E_s' = \Phi_s(t)$$

eleget tesz a

$$\Delta(D)\Phi = 0$$

egyenletnek. De (J_r) részletes alakjából következik, hogy

$$\Phi_s(t) = \sum_{r=1}^{n} [\Phi_{sr}^{(1)} e^{(\alpha_r + i\omega_r)t} + \Phi_{sr}^{(2)} e^{(\alpha_r - i\omega_r)t}],$$

következőleg

$$\sum_{r=1}^{n} [\Phi_{rs}^{(1)} \Delta(\alpha_r + i\omega_r) e^{(\alpha_r + i\omega_r)t} + \Phi_{sr}^{(2)} \Delta(\alpha_r - i\omega_r) e^{(\alpha_r - i\omega_r)t}] \equiv 0,$$

a mi tetszőleges α-k és ω-k mellett csak úgy lehetséges, ha

$$\Phi_{rs}^{(1)} = \Phi_{rs}^{(2)} = 0,$$

tehát

$$\Phi_s(t) \equiv 0,$$

a mi bebizonyítandó volt.

A (VI) képletben a nem staczionér jelenséget jellemző részben előforduló $2n$ konstanst $J_1, \ldots, J_n$; $V_1, \ldots, V_n$ kezdő értékei egyértelműleg meghatározzák.

Mivel $n=1$, $E_1=0$ esetben problémánk megegyezik a Thomson által már megoldott problémával, azért a *β)* fejezetben megoldott problémát általánositott Thomson-féle *problémának* is nevezhetjük. Ennek a problémának ily teljes megoldása az irodalomban eddig — úgy hiszem — nem fordult elő.

Az $n=2$; $E_1=E_2=0$ esetre vonatkozólag ismert kutatások nem terjeszkednek ki a gyököknek imént vázolt diskussziójára.[1]

Alkalmazások.

I. Pl. *A transzformátorok elmélete.* Az

$$n=2, \quad E_1=\mathrm{E}_1 \sin(\omega_1 t+\varepsilon_1), \quad E_2=0$$

egyenletekkel jellemzett rendszert transzformátornak nevezzük. A kondenzátor nélküli transzformátorra vonatkozó alapegyenletek tehát:

$$\left.\begin{aligned} M_{11}(D)J_1+M_{12}J_2 &= E_1, \\ M_{21}(D)J_1+M_{22}J_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{I'}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta(D)J_1 &= \Delta_{11}(D)E_1, \\ \Delta(D)J_2 &= \Delta_{12}(D)E_1. \end{aligned}\right\} \tag{II'}$$

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} W_1+L_{11}\nu & L_{12}\nu \\ L_{21}\nu & W_2+L_{22}\nu \end{vmatrix} = 0.$$

Ha a (II') rendszer partikuláris megoldása

$$\left.\begin{aligned} (J_1) &= A_1 \sin(\omega_1 t+\varepsilon_1+\delta_1), \\ (J_2) &= A_2 \sin(\omega_1 t+\varepsilon_1+\delta_2), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

akkor az *a)* fejezetben leírt módszerrel az A-k és δ-k meghatározására a következő egyenleteket találjuk:

$$[W_1W_2-\omega_1^2(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)]\cos\delta_1-(L_{11}W_2+L_{22}W_1)\omega_1\sin\delta_1 = \frac{W_2\mathrm{E}_1}{A_1},$$

$$[W_1W_2-\omega_1^2(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)]\sin\delta_1+(L_{11}W_2+L_{22}W_1)\omega_1\cos\delta_1 = \frac{\omega_1 L_{22}\mathrm{E}_1}{A_1};$$

$$[W_1W_2-\omega_1^2(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)]\cos\delta_2-(L_{11}W_2+L_{22}W_1)\omega_1\sin\delta_2 = 0,$$

$$[W_1W_2-\omega_1^2(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)]\sin\delta_2+(L_{11}W_2+L_{22}W_1)\omega_1\cos\delta_2 = \frac{\omega_1 L_{12}\mathrm{E}_1}{A_2}.$$

---

[1] OBERBECK: Wied. Ann. 55. Bd. 623. p. 1895. — DOMALIP u. KOLÁCEK: Wied. Ann. Bd. 57. p. 731. 1896. — WIEN: Wied. Ann. Bd. 61. p. 151. 1897. Bd. 8. IV. Folge. p. 686. 1902. — DRUDE: Ann. d. Phys. Bd. 13. p. 512. 1904. Bd. 16. p. 116. 1905.

Mely egyenletekből a

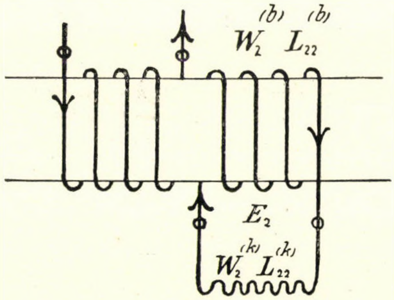
$$\lambda^2 = \frac{\omega_1^2 L_{12}^2}{W_2^2 + \omega_1^2 L_{22}^2}$$

jelölés alkalmazásával egész könnyűséggel találjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} A_1^2 &= \frac{E_1^2}{(W_1+\lambda^2 W_2)^2 + \omega_1^2 (L_{11} - \lambda^2 L_{22})^2}, \\ A_2 &= \lambda A_1; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_1 &= -\frac{\omega_1 (L_{11} - \lambda^2 L_{22})}{W_1 + \lambda^2 W_2}, \\ \operatorname{tg} \delta_2 &= \frac{(W_1 + \lambda^2 W_2)\, W_2 - \omega_1^2 (L_{11} - \lambda^2 L_{22})\, L_{22}}{\omega_1 [(W_1 + \lambda^2 W_2)\, L_{22} + (L_{11} - \lambda^2 L_{22})\, W_2]}, \\ \operatorname{tg}(\delta_1 - \delta_2) &= -\frac{W_2}{\omega_1 L_{22}}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Mivel a (14) egyenletek jellemzik a transzformátorban a staczionér állapotot, azért ezekkel az egyenletekkel kifejezett törvényt a *transzformátorok* OHM-*féle törvényének* nevezzük.



5. ábra.

Ha a szekundér tekercs kapcsolási feszültsége E_2 s a szekundér vezető belső ellenállása és autoindukcziós együtthatója $W_2^{(b)}$, illetőleg $L_{22}^{(b)}$, akkor érvényesek a következő egyenletek

$$W_1 J_1 + L_{11} \frac{dJ_1}{dt} + L_{12} \frac{dJ_2}{dt} = E_1,$$

$$L_{21} \frac{dJ_1}{dt} + W_2^{(b)} J_2 + L_{22}^{(b)} \frac{dJ_2}{dt} = E_2.$$

Ha a szekundér vezető külső ellenállása s autoindukcziós együtthatója $W_2^{(k)}$, illetőleg $L_{22}^{(k)}$, akkor érvényes még a következő egyenlet:

$$L_{21}\frac{dJ_1}{dt}+(W_2^{(b)}+W_2^{(k)})J_2+(L_{22}^{(b)}+L_{22}^{(k)})\frac{dJ_2}{dt}=0,$$

ebből s a föntebbi egyenletek másodikából következik, hogy

$$E_2=-\left(W_2^{(k)}J_2+L_{22}^{(k)}\frac{dJ_2}{dt}\right).$$

Tekintettel a (14) alatt levő egyenletekre E_2-nek a staczionér állapotra vonatkozó értéke:

$$(E_2)=A_2\sqrt{W_2^{(k)2}+\omega_1^2L_{22}^{(k)2}}\sin(\omega_1 t+\varepsilon_1+\delta_2+\eta_2),$$
$$\operatorname{tg}\eta_2=\frac{\omega_1 L_{22}^{(k)}}{W_2^{(k)}}. \tag{18}$$

Ha a szekundér áramkör zárva van s oly gyorsan váltakozó az áram, hogy W_2 $\omega_1 L_{22}$ mellett elenyésző csekély, akkor a szekundér és primér áramkörök amplitudóinak viszonyát a következő képlet szolgáltatja:

$$\frac{(J_2)_{max.}}{(J_1)_{max.}}=\frac{A_2}{A_1}=\lambda=\frac{L_{12}}{L_{22}}. \tag{19}$$

Ha a primér és szekundér tekercs tekervényeinek a számát N_1, illetőleg N_2-vel jelöljük, akkor teljes mágneses bekapcsolás esetére:

$$\frac{(J_2)_{max.}}{(J_1)_{max.}}=\frac{\sqrt{L_{11}}}{\sqrt{L_{22}}}=\frac{N_1}{N_2}.\text{[1]} \tag{20}$$

Ha pedig a szekundér áram nyitva van, akkor

$$W_2^{(k)}=\infty,\quad \frac{W_2}{W_2^{(k)}}=\frac{W_2^{(k)}+W_2^{(b)}}{W_2^{(k)}}=1,$$

[1] Ugyanis teljes mágneses bekapcsolás esetére $L_{12}L_{22}=L_{12}^2$. Egy N tekervényű, S keresztmetszetű, l hosszúságú s μ permeabilitású szolenoidra nézve:

$$L=\frac{4\pi\mu SN^2}{l}.$$

következőleg a szekundér és primér vezetők kapcsolási feszültségeinek amplitudói a következő viszonyban vannak:

$$\frac{(E_2)_{max.}}{(E_1)_{max.}}=\frac{\omega_1 L_{12}}{\sqrt{W_1^2+\omega_1^2 L_{11}^2}}. \tag{21}$$

Ha W_1 $\omega_1 L_1$ *mellett elenyésző csekély, s a mágneses bekapcsolás is teljes, akkor*

$$\frac{(E_2)_{max.}}{(E_1)_{max.}}=\frac{N_2}{N_1}. \tag{22}$$

Ha a szekundér áramkörben rövid zárlat áll be, akkor

$$W_2^{(k)}=0,\quad L_{22}^{(k)}=0,$$

következőleg

$$\frac{(J_2)_{max.}}{(J_1)_{max.}}=\frac{\omega_1 L_{12}}{\sqrt{W_2^{(b)}+\omega_1^2 L_{22}^{(b)}}}.$$

Gyorsan váltakozó áramokra vonatkozólag teljes mágneses bekapcsolás esetére érvényes a (20) alatt levő tétel.

Ha a szekundér áram nyitva van, akkor

$$(J_1)=\frac{\mathrm{E}_1}{\sqrt{W_1^2+\omega_1^2 L_{11}^2}}\sin(\omega_1 t+\varepsilon_1+\delta_1),$$

$$\operatorname{tg}\delta_1=-\frac{\omega_1 L_{11}}{W_1},$$

tehát a jelenség olyan, mintha a szekundér tekercs nem is volna jelen.

$$(W_1+\lambda^2 W_2)^2+\omega_1^2(L_{11}-\lambda^2 L_{22})^2-(W_1^2+\omega_1^2 L_{11}^2)=$$
$$=\lambda^2[2W_1 W_2-\omega_1^2(2L_{11}L_{22}-L_{12}^2)].$$

Egyenletünk jobb oldalán levő mennyiség negativ, mert, mint W_2-nek folytonos függvénye, $W_2=\infty$-nél zérus, $W_2=0$ helyen pedig negativ, mivel $2L_{11}L_{22}-L_{12}^2$ legkisebb értéke $L_{11}L_{22}$ is pozitiv. Ennélfogva:

Ha a szekundér áramkört zárjuk, akkor a primér áram intenzitása növekszik.

A primér tekercsben az időegység alatt végzett munka

$$M_1 = \frac{\mathrm{E}_1 A_1}{2} \cos \delta_1 = \frac{A_1^2}{2}(W_1 + \lambda^2 W_2). \tag{23}$$

A külső szekundér vezetékben egy időegység alatt nyert munka abszolut értéke:

$$M^{(k)} = \frac{A_2^2 \sqrt{W_2^{(k)2} + \omega_1^2 L_{22}^{(k)2}}}{2} \cos \eta_2 = \frac{A_1^2}{2} \lambda^2 W_2^{(k)} = \frac{A_2^2 W_2^{(k)}}{2}. \tag{24}$$

A szekundér tekercsben létrejött munka:

$$M_2^{(b)} = \frac{A_1^2}{2} \lambda^2 W_2^{(b)} = \frac{A_2^2 W_2^{(b)}}{2},$$

tehát

$$M_2 = M_2^{(k)} + M_2^{(b)} = \frac{A_1^2}{2} \lambda^2 W_2 = \frac{A_2^2 W_2}{2}.$$

Ennélfogva a szekundér vezetékbe letranszformált energia csak egy részét képezi annak az energiának, a mi a primér tekercsben megjelenik s azt annál jobban megközelíti, minél kisebb $\frac{A_1^2 W_1}{2}$.

A szekundér vezetékbe letranszformált és a primér tekercsben megjelenő energia mennyiségek közötti viszonyról különben elég világos képet nyujt a következő egyenlet:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{\lambda^2 W_2}{W_1 + \lambda^2 W_2}.$$

A kondenzátorokkal fölszerelt transzformátorra vonatkozó formulákat, az imént levezetett formulákból úgy nyerjük, ha azokban L_{11}, L_{22} helyett rendre L'_{11}, L'_{22}-t írunk

$$L'_{11} = L_{11} - \frac{1}{\omega_1^2 C_1}, \quad L'_{22} = L_{22} - \frac{1}{\omega_1^2 C_2}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy A_2 mikor lesz a jelen esetben maximum

$$A_2 = \frac{\mathrm{E}_1}{\sqrt{\left(\frac{W_1}{\lambda} - \lambda W_2\right)^2 + \omega_1^2 \left(\frac{L'_{11}}{\lambda} - \lambda L'_{22}\right)^2 + 4 W_1 W_2}},$$

tehát

$$A_{2\,max.} = \frac{\mathrm{E}_1}{2\sqrt{W_1 W_2}};$$

és ez akkor következik be, ha

$$\lambda^2 = \frac{W_1}{W_2} = \frac{L'_{11}}{L'_{22}} = \frac{\omega_1^2 L_{12}^2}{W_2^2 + \omega_1^2 L'^2_{22}},$$

honnan

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{1}{C_1 C_2} \cdot \frac{W_2 C_2 - W_1 C_1}{W_2 L_{11} - W_2 L_{22}}, \\ L_{12}^2 &= \frac{W_1 W_2 + \omega_1^2 L'_{11} L'_{22}}{\omega_1^2}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Ha ezek a relácziók teljesülnek, akkor azt mondjuk, hogy áramintenzitásra nézve a transzformátor hangolva van, s ekkor

$$(J_1) = \frac{\mathrm{E}_1}{2 W_1} \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1),$$

$$(J_2) = \frac{\mathrm{E}_1}{2\sqrt{W_1 W_2}} \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \delta_2),$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{W_2}{\omega_1 L'_{22}},$$

$$\frac{(J_2)_{max.}}{(J_1)_{max.}} = \frac{\sqrt{W_1}}{\sqrt{W_2}} = \frac{\sqrt{L'_{11}}}{\sqrt{L'_{22}}},$$

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{1}{2}.$$

Tehát az intenzitásra hangolt transzformátor a primér tekercsben megjelenő energiának csak a felét transzformálja le a szekundér vezetékbe.

Az általános esetben, miként könnyű meggyőződni

$$\left(\frac{M_2}{M_1}\right)_{max.} = \frac{1}{1 + \dfrac{W_1 W_2}{\omega_1^2 L_{12}^2}}, \tag{26}$$

a mi akkor következik be, ha a szekundér vezető hangolva van az elektromotoros erőhöz, azaz

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_{22}C_2}}. \qquad (27)$$

A (26) képletből az is világos, hogy az energia transzformáczió, akkor legerősebb, mikor nincs mágneses szétszóródás, és ekkor

$$\left(\frac{M_2}{M_1}\right)_{max.} = \frac{1}{1 + \frac{C_2 W_1 W_2}{L_{11}}}. \qquad (28)$$

A (27) és (28) egyenletekből világos, hogy L_{22} és C_2 alkalmas megválasztásával elérhető, hogy az energia átalakitása lehető teljes legyen. Ilyenkor azt mondjuk, hogy *a transzformátort az energia átalakitásra hangoltuk.*

Az energia átalakitásra hangolt transzformátorra nézve A_2 legnagyobb értékét akkor veszi fel, ha L'_{11} is zérus, azaz, ha a primér tekercs is hangolva van az elektromotoros erőhöz. *Tehát a transzformátor úgy az energia átalakitásra, mint az áram intenzitásra nézve hangolva van, ha C_2 elég kicsiny és úgy a primér, mint a szekundér vezeték hangolva van az elektromotoros erőhöz.*

Mivel a (24) képlet értelmében a szekundér vezeték külső részében végzett munka maximális értékét A_2-vel egyszerre éri el, azért, *ha a transzformátor révén a lehető legnagyobb energiát akarjuk előállitani, akkor azt intenzitásra kell hangolni; de ugyanekkor* (18) *feszültségre is lesz hangolva.*

A mágneses hysterezisnek a transzformátorok működésére való befolyásának tanulmányozása feladatunkon kivül esik. Csak azt jegyzem még meg, hogy legelőször Stanlay s vele körülbelül egyidejűleg Tesla konstruáltak kondenzátoros transzformátorokat 1891-ben. A kondenzátorok gyakorlati alkalmazásának úgy a kisérleti, mint az elméleti részre vonatkozó nagy irodalmáról teljesen világos képet nyújt Bisicz «Anwendung und Zukunft der Kondensatoren in der Wechselstromtechnik» czimű munkálatában.

A transzformátor nyitásának, illetőleg zárásának a jelensége a II. fejezetben tárgyalt módon tanulmányozható.

II. Pl. *Két egymásra ható oszczillátor elmélete.*

A *β)* alatt tárgyalt probléma egyik speciális esete, az

$$n=2,\quad E_1=E_2=0$$

eset, mely nem más, mint két egymásra ható oszczillátor problémája és a melyre vonatkozó differencziálegyenletek a következők:

$$\begin{aligned}(W_1+L_{11}D)J_1+L_{12}DJ_2 &= V_1,\\ L_{21}DJ_1+(W_2+L_{22}D)J_2 &= V_2;\\ J_1=-C_1DV_1,\ J_2 &= -C_2DV_2.\end{aligned}\qquad \text{(III')}$$

J_1 és J_2 helyett határozzuk meg most V_1-et és V_2-t. Az alkalmazandó módszer minden módosítás nélkül a *β)* alatt tárgyalt általános problémára is alkalmazható s lényegében az ott bemutatott módszerrel azonos.

A (III') rendszerből következik, hogy

$$\begin{aligned}(1+C_1W_1D+C_1L_{11}D^2)\,V_1+C_2L_{12}D^2V_2 &= 0,\\ C_1L_{21}D^2V_1+(1+C_2W_2D+C_2L_{22}D^2)\,V_2 &= 0.\end{aligned}$$

Következőleg úgy V_1, mint V_2 eleget tesznek a következő egyenletnek:

$$\Delta(D)=\begin{vmatrix}1+C_1W_1D+C_1L_{11}D^2 & C_2L_{12}D^2\\ C_1L_{21}D^2 & 1+C_2W_2D+C_2L_{22}D^2\end{vmatrix}V=0. \qquad (29)$$

Ha tehát a

$$\Delta(\nu)=0 \qquad (30)$$

egyenlet gyökei $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$, akkor a (VI) egyenletrendszernek megfelelően az általános megoldás:

$$\begin{aligned}V_1 &= A_1\Delta_{11}(\nu_1)e^{\nu_1t}+A_2\Delta_{11}(\nu_2)e^{\nu_2t}+A_3\Delta_{11}(\nu_3)e^{\nu_3t}+A_4\Delta_{11}(\nu_4)e^{\nu_4t},\\ V_2 &= A_1\Delta_{12}(\nu_1)e^{\nu_1t}+A_2\Delta_{12}(\nu_2)e^{\nu_2t}+A_3\Delta_{12}(\nu_3)e^{\nu_3t}+A_4\Delta_{12}(\nu_4)e^{\nu_4t},\\ \Delta_{11}(\nu_i) &= 1+C_2W_2\nu_i+C_2L_{22}\nu_i^2,\\ \Delta_{12}(\nu_i) &= -\,C_1L_{21}\nu_i^2.\end{aligned}$$

Ha a kezdő feltételek:

$$(V_1)=V_0,\ (V_2)=0,\ (J_1)=-C_1\left(\frac{dV_1}{dt}\right)=0,\ (J_2)=-C_2\left(\frac{dV_2}{dt}\right)=0,$$

akkor könnyű meggyőződni, hogy az A-k eleget tesznek a következő egyenletrendszernek:

$$\sum_{i=1}^{4} A_i \nu_i^3 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{4} A_i \nu_i^2 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{4} A_i \nu_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{4} A_i = V_0.$$

Honnan tekintettel arra, hogy

$$\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 = 1 : C_1C_2(L_{11}L_{22}-L_{12}^2),$$

$$\Delta_{12}(\nu_i)A_i = \frac{L_{12}V_0}{C_2(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)}\cdot\frac{\nu_i}{(\nu_i-\nu_k)(\nu_i-\nu_l)(\nu_i-\nu_s)}\cdot$$

Ha már most a rövidség kedvéért

$$(\nu_1,\ \nu_2)=(\alpha_1+\omega_1 i,\ \alpha_1-\omega_1 i);\quad (\nu_3,\ \nu_4)=(\alpha_2+\omega_2 i,\ \alpha_2-\omega_2 i);$$

$$\lambda = L_{12}V_0 : C_2(L_{11}L_{22}-L_{12}^2),$$

akkor

$$\Delta_{12}(\nu_1)A_1 = \lambda\frac{\omega_1-\alpha_1 i}{2\omega_1[\alpha_1-\alpha_2+(\omega_1-\omega_2)i]\,[\alpha_1-\alpha_2+(\omega_1+\omega_2)i]} = a_1+b_1 i,$$

$$\Delta_{12}(\nu_3)A_3 = \lambda\frac{\omega_2-\alpha_2 i}{2\omega_2[\alpha_2-\alpha_1+(\omega_2-\omega_1)i]\,[\alpha_2-\alpha_1+(\omega_2+\omega_1)i]} = a_2+b_2 i, \qquad (31)$$

$$\Delta_{12}(\nu_2)A_2 = a_1-b_1 i,\quad \Delta_{12}(\nu_4)A_4 = a_2-b_2 i.$$

Következőleg:

$$V_2 = B_1e^{\alpha_1 t}\sin(\omega_1 t+\delta_1)+B_2e^{\alpha_2 t}\sin(\omega_2 t+\delta_2),$$

$$\left.\begin{aligned} B_r &= 2\sqrt{a_r^2+b_r^2},\\ \operatorname{tg}\delta_r &= -\frac{a_r}{b_r}.\end{aligned}\right\}\ r=1,2 \qquad (32)$$

A mi az általános elméletnek megfelelően két csillapodó rezgést jelent.

Az α-k és ω-k a (30) egyenlet együtthatóival a következő összefüggésben vannak:

$$\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2 &= -\frac{W_1L_{22}+W_2L_{11}}{2(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)}, \\ \alpha_1^2+4\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2+\omega_1^2+\omega_2^2 &= \frac{L_{11}C_1+L_{22}C_2+W_1W_2C_1C_2}{C_1C_2(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)}, \\ (\alpha_1^2+\omega_1^2)(\alpha_2^2+\omega_2^2) &= \frac{1}{C_1C_2(L_{11}L_{12}-L_{12}^2)}. \end{aligned} \tag{33}$$

Van még egy összefüggés, de arra nem lesz szükségünk.

a) Ha a mágneses kapcsolás igen csekély, tehát L_{12} igen kicsiny, akkor, ha $|\alpha_1|$ és $|\alpha_2|$ igen kicsinyek, úgy hogy ω_1 és ω_2 mellett elhanyagolhatók, nagy megközelítéssel:

$$\begin{aligned} a_1+b_1i &= \frac{\lambda}{2(\omega_1+\omega_2)}\cdot\frac{\omega_2-\omega_1+i(\alpha_2-\alpha_1)}{(\omega_2-\omega_1)^2+(\alpha_2-\alpha_1)^2} = -(a_2+b_2i), \\ B_1=B_2 &= \frac{\lambda}{\omega_1+\omega_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_2-\omega_1)^2+(\alpha_2-\alpha_1)^2}} = B, \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \omega_1^2+\omega_2^2 &= \frac{L_{11}C_1+L_{22}C_2+W_1W_2C_1C_2}{C_{11}C_2L_{11}L_{22}}, \\ \omega_1^2\omega_2^2 &= \frac{1}{C_1C_2L_{11}L_{22}}. \end{aligned} \tag{35}$$

Mivel α_1 és α_2 egyenlő előjelűek s abszolut értékeik igen kicsinyek, azért a (33) formulák elsejéből következik, hogy $\frac{W_2}{L_{22}}$ és $\frac{W_1}{L_{11}}$ is igen kicsinyek, tehát szorzatuk is az; ennélfogva a (35) alatt levő formulák elsejéből a

$$\frac{W_1W_2}{L_{11}L_{22}}$$

elhanyagolható, minek következtében a (35) egyenletekből nyerjük, hogy

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_{11}C_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L_{22}C_2}. \tag{36}$$

B nagyságára nézve legkedvezőbb eset akkor következik be, ha

$$\omega_1=\omega_2=\omega,$$

azaz, ha a két oszczillátor hangolva van egymáshoz. Ebben az esetben aztán

$$B=\frac{\lambda}{2\omega(a_2-a_1)}=\frac{C_1L_{12}V_0\omega^3}{2(a_2-a_1)}. \tag{37}$$

Tekintettel még a (34) alatt levő formulák elsejére is:

$$\delta_1=\pi, \quad \delta_2=0.$$

Ennélfogva a jelen speczialis esetünknek megfelelő általános megoldás — V_1-et figyelmen kívül hagyva —

$$V_2=\frac{C_1L_{12}V_0\omega^3}{2(a_1-a_2)}(e^{a_1t}-e^{a_2t})\sin\omega t. \tag{38}$$

Tehát V_2 amplitudójának maximuma

$$(V_2)_{max.}=-\frac{C_1L_{12}V_0\omega^3}{2a_2}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{a_1}{a_2-a_1}}. \tag{39}$$

Más teoriák alapján ettől ugyan eltérő, de azért analog formulákat állapitottak meg még BJERKNES [1] és DRUDE.[2]

Ha pedig $a_2=a_1=a$, akkor

$$a_1+b_1i=\frac{\lambda}{2(\omega_2^2-\omega_1^2)}=-(a_2+b_2i),$$

következőleg:

$$V_2=\frac{\lambda}{\omega_2^2-\omega_1^2}e^{at}(\cos\omega_1t-\cos\omega_2t),$$

vagy

$$V_2=\frac{2\lambda}{\omega_2^2-\omega_1^2}e^{at}\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\sin\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t. \tag{40}$$

Ha $\omega_2-\omega_1$ igen kicsiny, akkor $\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t$ lassan változik,

[1] Wied. Ann. Bd. 55. p. 134. 1895.

[2] Ann. d. Phys. Bd. 13. p. 524. 1904.

tehát V_2 olyan sinusos oszczilláczióként fogható fel, melynek amplitudója

$$B = \frac{2\lambda}{\omega_2^2 - \omega_1^2} e^{\alpha t} \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t.$$

Könnyű meggyőződni, hogy

$$B_{max.} = \frac{\lambda}{(\omega_1 + \omega_2)\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)^2}} e^{\frac{2\alpha}{\omega_2 - \omega_1} \operatorname{arctg} \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\alpha}} . \quad (41)$$

Analog formulát közöl bizonyítás nélkül Wien.[1]

A (39) és (41) formulák alkalmazhatók a drótnélküli távirásnál eleinte használt Marconi, Slaby és Arco-féle egyszerűbb készülékek által létesített jelenségek kimagyarázására. Wien az imént idézett helyen kimutatta, hogy a Slaby és Arco által megállapított kisérleti eredmények az elmélettel meglehetősen összeegyeztethetők.

Mivel

$$\left(\frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2}\right)_{\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha} = te^{\alpha t},$$

$$\left[\frac{2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right]_{\omega_1 = \omega_3 = \omega} = \frac{t}{2\omega}.$$

Azért, ha megközelítőleg $\alpha_1 = \alpha_2$, $\omega_1 = \omega_2$, akkor nagy megközelítéssel

$$V_2 = \frac{C_1 L_{12} V_0 \omega^3}{2} te^{\alpha t} \sin \omega t. \quad (42)$$

Jól lehet a $\nu_1 = \nu_3$ esetnek szigorú tárgyalása más eljárást igényel, mivel ekkor az általános megoldás is más alakú, mindazonáltal eljárásunk ellen nem emelhető kifogás, mivel ha ν_1 csak megközelítőleg egyenlő ν_2-vel, akkor az általános megoldás még mindig megtartja azt az alakját, melynek alapján kutatásainkat végeztük.

b) Ha a mágneses szétszóródás igen csekély, azaz $L_{11} L_{22} - L_{12}^2$

[1] Ann. d. Phys. Bd. 8. p. 691. 1902.

igen kicsiny, de $|a_1|$ és $|a_2|$ még mindig igen kicsinyek ω_1 és ω_2-höz képest, akkor megfontolva, hogy a jelen esetben a (33) alatt levő képletek alapján megközelítőleg:

$$\omega_1^2+\omega_2^2=\frac{L_{11}C_1+L_{22}C_2}{C_1C_2(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)},$$

$$\omega_1^2\omega_2^2=\frac{1}{C_1C_2(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)},$$

honnan

$$\omega_2^2-\omega_1^2=\frac{\sqrt{(L_{11}C_1-L_{22}C_2)^2+4C_1C_2L_{12}^2}}{C_1C_2(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)}. \tag{43}$$

Következőleg ω_1 nem lehet egyenlő ω_2-vel, még közelítőleg sem, azért a_1-a_2 elhanyagolható $\omega_1-\omega_2$-höz képest, ennélfogva:

$$a_1+b_1i=\frac{\lambda}{2(\omega_2^2-\omega_1^2)}=-(a_2+b_2i),$$

tehát

$$V_2=\frac{\lambda}{\omega_2^2-\omega_1^2}(e^{a_1t}\cos\omega_1t-e^{a_2t}\cos\omega_2t), \tag{44}$$

$$(\omega_2^2-\omega_1^2)_{min.}=2L_{12}:(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)\sqrt{C_1C_2},$$

akkor következik be, ha

$$L_{11}C_1=L_{22}C_2, \tag{45}$$

azaz, ha a primér és szekundér vezetékek hangolva vannak. Ebben az esetben aztán tekintettel λ értékére

$$V_2=\frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}(e^{a_1t}\cos\omega_1t-e^{a_2t}\cos\omega_2t). \tag{46}$$

A (45) és (46) alatt levő képletek a Tesla-*féle transzformátor konstrukcziójára s egy ily transzformátorban végbemenő jelenségre teljes felvilágosítással szolgálnak.*

Ha a drótnélküli távirás feladó állomásánál egy Tesla-féle transzformátort alkalmazunk, akkor a (46) alatt levő elektromotoros erő jelenik meg a leadó állomáson, ha már most itt is egy Tesla-féle transzformátort alkalmazunk felfogó készülékül, akkor az a kérdés, hogy a (46) alatt levő V_2 — persze már gyöngébb amplitudóval — mily jelenséget létesít benne. A nyert eredmények bizonyára útmutatásul szolgálnának a felfogó készülékek helyes konstrukcziójára is. Az eddig megállapitottam formulák még igen komplikáltak arra nézve, hogy a lefolyó jelenségről csak megközelítőleg is oly világos képet nyujtsanak, mint a felvevő állomásra vonatkozó (45) és (46) formulák.

DRUDEnek[1] 1904-ben megjelent erre a kérdésre vonatkozó fejtegetései mathematikai szempontból nem állják meg a helyüket, a mennyiben az 558. lapon levő — $y_i = z_i$ — feltevései alapján a (130), (133), (134) alatt levő egyenleteinek megoldása $A_i + B_i = 0$; a mi azt mondaná ki, hogy a felvevő állomáson nem lép fel elektromotoros erő (128). Hogy mégis eljut valamelyes eredményhez, annak az az oka, hogy egy összegből (l. (139), (140), (141) képleteket) kihagyja a véges tagokat s így a végtelen nagy tagok összegéből nyert véges eredményt teszi diszkusszió tárgyává.

III. Pl. *Egyszerű oszczillátorok rezonancziája.*

Ha a feladó állomáson egy szekundér tekercs nélküli oly egyszerű oszczillátort alkalmazunk, a melyben végbemenő jelenséget az

$$LC\frac{d^2V}{dt^2} + WC\frac{dV}{dt} + V = 0, \quad J = -C\frac{dV}{dt} \tag{47}$$

egyenletek tartalmazzák, (lásd első közlemény (V') formula, $E=0$),[2] akkor a felvevő állomáson

$$E = E_0 e^{at} \sin(\omega t + \varepsilon) \tag{48}$$

elektromotoros erő jelenik meg, hol

$$a = -\frac{W}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - a^2}. \tag{49}$$

Ha a felvevő állomáson egy L_1, C_1, W_1 számokkal jellemzett egyszerű oszczillátort alkalmazunk, akkor az ebben végbemenő jelenségről az

[1] DRUDE: Ann. d. Phys. Bd. 13. p. 550. 1904.
[2] Math. és Phys. Lapok 1908. p. 223.

$$L_1C_1\frac{d^2V}{dt^2}+W_1C_1\frac{dV}{dt}+V+E_0e^{at}\sin(\omega t+\varepsilon)=0,\quad J=-C_1\frac{dV}{dt}\tag{50}$$

egyenletek számolnak be.

A már leírt módszerrel könnyen meggyőződhetünk, hogy egyenletrendszerünk egyik partikuláris megoldása

$$\begin{aligned}(V)&=Ae^{at}\sin(\omega t+\delta),\\(J)&=Be^{at}\sin(\omega t+\eta),\end{aligned}\tag{51}$$

hol

$$\begin{aligned}B&=E_0:\sqrt{\left(L_1a+W_1+\frac{a}{(a^2+\omega^2)C_1}\right)^2+\left(L_1\omega-\frac{\omega}{(a^2+\omega^2)C_1}\right)^2},\\A&=\frac{B}{C_1\sqrt{a^2+\omega^2}};\end{aligned}\tag{52}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\delta-\varepsilon)&=-C_1\omega\frac{2aL_1+W_1}{L_1C_1(a^2-\omega^2)+W_1C_1a+1},\\\operatorname{tg}(\eta-\varepsilon)&=-\frac{L_1\omega-\dfrac{\omega}{(a^2+\omega^2)C_1}}{aL_1+W_1+\dfrac{a}{(a^2+\omega^2)C_1}}.\end{aligned}\tag{53}$$

Az első közlemény (X') alatt levő formulái alapján tehát az (50) alatt levő egyenletek általános megoldása

$$\begin{aligned}V&=Ae^{at}\sin(\omega t+\delta)-A_1e^{a_1t}\sin(\omega_1t+\delta_1),\\J&=-C_1\frac{dV}{dt},\end{aligned}\tag{54}$$

hol A_1 és δ_1 az integráczió konstansai és

$$a_1=-\frac{W_1}{2L_1},\quad \omega_1=\sqrt{\frac{1}{L_1C_1}-a_1^2}.\tag{55}$$

A

$$(V)_{t=0}=0,\quad \left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=0}=0$$

kezdő feltételek az integráczió konstansainak meghatározására a következő egyenleteket szolgáltatják:

$$A \sin\delta - A_1 \sin\delta = 0,$$
$$A(\alpha \sin\delta + \omega\cos\delta) - A_1(\alpha_1 \sin\delta_1 + \omega_1 \cos\delta_1) = 0, \tag{56}$$

honnan

$$A_1 = A\frac{\sin\delta}{\sin\delta_1} = \frac{1}{\omega_1}\sqrt{\omega_1^2 \sin^2\delta + [(\alpha-\alpha_1)\sin\delta + \omega\cos\delta]^2},$$
$$\operatorname{ctg}\delta_1 = \frac{(\alpha-\alpha_1)\sin\delta + \omega\cos\delta}{\omega_1 \sin\delta}. \tag{57}$$

Ha a feladó és felfogó állomás oszczillátorai teljesen megegyeznek, azaz

$$\omega_1 = \omega, \quad \alpha = \alpha_1,$$

akkor

$$\delta = \delta_1, \quad A = A_1;$$

következőleg

$$V \equiv 0,$$

ennélfogva a felfogó állomás oszczillátora nem szólal meg.

Ha pedig $|\alpha|$ *és* $|\alpha_1|$, *azaz a csillapodási mennyiségek igen kicsinyek* ω *és* ω_1*-hez képest, akkor megközelítőleg:*

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},$$

$$B = E_0 C_1 : \sqrt{\left[\alpha\left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega^2}\right) + C_1 W_1\right]^2 + \omega^2\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)^2}, \tag{58}$$
$$A = \frac{B}{C_1 \omega}.$$

Ha a két oszczillátor hangolva van, azaz

$$\omega_1 = \omega,$$

akkor

$$B = \frac{E_0}{2L_1(\alpha-\alpha_1)}, \quad A = \frac{E_0 \omega}{2(\alpha-\alpha_1)}, \tag{59}$$
$$\delta = \delta_1;$$

következőleg:

$$V = \frac{E_0 \omega}{2(\alpha-\alpha_1)}(e^{\alpha t} - e^{\alpha_1 t})\sin(\omega t + \delta). \tag{60}$$

V amplitudójának maximuma

$$(V)_{max.} = -\frac{E_0\omega}{2a_1}\left(\frac{a}{a_1}\right)^{\frac{a}{a_1-a}}, \tag{61}$$

a mi analog a (39) alatt levő formulával.

Az $a=a_1$, vagy pedig a csak közelítőleg érvényes $a=a_1$, $\omega=\omega_1$ föltevések alapján, miként könnyen belátható, megállapíthatók a (40), (41) és (42) formulák analogonjai. A mi természetes is, mert *két egyszerű oszczillátornak az imént tárgyalt esete, megegyezik két oly egyszerű oszczillátor esetével, melyek egymással csekély mágneses kapcsolatban vannak.* Bjerknes[1] fejtegetéseiben az előbbi, Drude[2] pedig az utóbbi felfogáshoz csatlakozik.

Suták József.

*

Az első közleményben észrevett sajtóhibák: A 230. l. 2. sorban h^2 helyett kell L^2. A 241. l. 12. sorában a zárójel elé minus előjel teendő. A 243. l. 4. sorában a négyzetgyök alatt a zárójeles tag négyzetre emelendő. A 244. l. 2. sorában ν_1-gyel helyett ν_2-vel teendő.

---

[1] Bjerknes: Wied. Ann. Band. 55. pag. 121. 1895. Ueber elektrische Resonanz.

[2] Drude: Ann. d. Phys. Bd. 13. p. 521. 1904. II. Die magnetische Koppelung ist sehr klein.

Utalványczim : Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás

az 1908. évi jún. hó 1-től dec. hó végéig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek :

1907. évre : Égly Sándor 6 kor., Luckhaub Gyula 6 kor. Összesen ... 12 kor.

1908. évre : Arató Frigyes még 2 kor., Baló Gyula 6 kor., Csopey László 10 kor., Dávid Lajos 6 kor., Dózsa János 6 kor., Eltscher Simon 6 kor., Habán Mihály dr. 6 kor., Hananer Jenő 10 kor., Harsányi Dezső 10 kor., Heller Richárd 6 kor., Jakucs István 6 kor., Kopp Lajos dr. 10 kor., bozóki Lengyel Sándor 10 kor., Lutter János 10 kor., Pogány Béla 6 kor., Rátz László 10 kor., Richter Rezső 10 kor. Salamon Ernő 6 kor., Steiner Miklós 6 kor., Szabó Lajos 6 kor., Szabó Péter dr. 10 kor., Székelyudvarhelyi áll. főreáliskola 6 kor., Tihanyi Miklós 6 kor., Wodetzky József 6 kor., Zilahy László 6 kor. Összesen ... 182 kor.

1909. évre : Arató Frigyes 6 kor., Bozzay Zoltán 10 kor., Nagy József 10 kor., Pallós Kajetán 6 kor., Pogány Béla 6 kor., Szőke Béla 10 kor., Tihanyi Miklós 6 kor. Összesen ... 54 kor.

1910. évre: Arató Frigyes 4 kor. Összesen ... 4 kor.

Előfizettek :

1908. évre : Aradi kir. főgimn. 10 kor., Mezőberényi áll. polg. iskola 10 kor., Podolini kath. gimn. 10 kor. Összesen ... 30 kor.

1909. évre : Egri áll. főreáliskola 10 kor., Eötvös kollégium 10 kor., Gyulai kath. főgimnázium 10 kor., Jászói prépostság könyvtára 10 kor. Összesen ... 40 kor.

Összesen befolyt :

Hátralékokból ... 12 kor.
F. és köv. évi tagsági díjakból ... 240 «
Előfizetési díjakból ... 70 «

Kelt Budapesten, 1909. évi január 1-én.

Dr. Lévay Ede.

Kérelem.

A Mathematikai és Physikai Lapok jelen füzetéhez postai befizetőlapot mellékelek. Felkérem a Társulat igen t. tagjait és előfizetőit, hogy a mellékelt befizető lapot előző évi hátralékos, illetőleg most már esedékes f. évi tagdíjaik és előfizetési díjaik beküldésére felhasználni sziveskedjenek. Az 1909. évi január hó 1-je óta történt befizetésekről a kimutatást egyik közelebbi füzetben teszem közzé.

Budapesten, 1909. évi március hó 31-én.

Dr. Lévay Ede
pénztáros.
VI., Nagy János-utca 37. sz.

A RACZIONÁLIS EGÉSZ FÜGGVÉNYEK OSZTHATÓSÁGÁRÓL.[1]

Jelentse

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) \quad g(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

az $x_1, x_2, \ldots x_r$ változók két adott raczionális egész függvényét; f legyen m-ed vagy alacsonyabb fokú, g pedig n-ed vagy alacsonyabb fokú. Szándékom annak feltételével foglalkozni, hogy f és g hányadosa egy legfeljebb $(m-n)$-ed fokú egész függvény legyen. Pontosan m-ed fokú f-nek és pontosan n-ed fokú g-nek esetében e kérdés azonos avval, hogy f egyáltalában mikor osztható g-vel.

Leginkább az az eset érdekel, hogy f és g pontosan m-ed, illetőleg n-ed fokú *homogén* egész függvények. Erre az esetre nézve magukon a feltételeken kívül az is érdekel, hogy miként viselkednek a feltételi egyenletek, ha az adott homogén egész függvényekre lineáris helyettesitést alkalmazunk. Erre vonatkozó vizsgálatomat az algebrai alakok (formák) elméletének egy általános tételére alapitom, mely lényegében HILBERT-től származik s melyet épen azért róla nevezek el. Az út, melyen HILBERT e tételnek, vagy legalább lényegének felismeréséhez jutott,[2] a

---

[1] Más, általánosabb eredményekkel együtt előadatott a Math. és Phys. Társulat 1909 április 1-jén tartott ülésén.

[2] HILBERT, Über die notwendigen und hinreichenden covarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständiger Potenz; *Mathematische Annalen*, Bd. 27. (1886) pag. 158—161. A tétel maga HILBERT-nél nincs *általánosan,* hanem csak egy érdekes speczíális esetben, kimondva.

formaelméleti tételek egy hosszabb sorozatán vezet keresztül. Dolgozatom első fejezete a szóban forgó tételnek közvetlenebb bebizonyítását tartalmazza.

I. Hilbert tétele.

1. Legyen

$$f(x_1, x_2) = A_0 x_1^m + \binom{m}{1} A_1 x_1^{m-1} x_2 + \dots + A_m x_2^m$$

$$g(x_1, x_2) = B_0 x_1^n + \binom{n}{1} B_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + A_n x_2^n$$

két *általános* binær forma, azaz x_1-nek és x_2-nek egy oly m-ed fokú s egy oly n-ed fokú homogen egész függvénye, melyekben az együtthatók határozatlanok. Bármely

$$x_1 = \alpha\xi_1, + \beta\xi_2, \quad x_2 = \gamma\xi_1 + \delta\xi_2 \tag{1}$$

lineáris helyettesítés az f, g formákat az új változók formáiba viszi át. A transzformált formák legyenek

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) = A'_0 \xi_1^m + \binom{m}{1} A'_1 \xi_1^{m-1} \xi_2 + \dots + A'_m \xi_2^m$$

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = B'_0 \xi_1^n + \binom{n}{1} B'_1 \xi_1^{n-1} \xi_2^n + \dots + B'_m \xi_2^n.$$

Mi az *unimodulár* helyettesítésekre fogunk szorítkozni, vagyis azokra, melyeknek

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

determinánsa vagy *modulusa* az egységgel egyenlő. Az összes unimodulár helyettesítések, mint ismeretes, olyanokból tehetők össze, melyeknek determinánsa

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

vagy

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

alakú. Az első két typust így foglalhatjuk össze:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix}.$$

Az

$$\begin{aligned} &A_0, A_1, \dots, A_m; \\ &B_0, B_1, \dots, B_n; \qquad (2) \\ &x_1, x_2, \end{aligned}$$

valamely F raczionális függvényéről azt mondjuk, hogy az f, g alakrendszer *covariánsa*, ha:

1) F a (2) alatti változó sorok mindegyikében *homogen*, azaz létezik három oly kitevő

$$\sigma, \tau, \chi$$

hogy λ. μ, ρ bármely értékére nézve

$$\begin{aligned} &F(\lambda A_0, \dots, \lambda A_m; \mu B_0, \dots, \mu B_n; \rho x_1, \rho x_2) = \\ &= \lambda^\sigma \mu^\tau \rho^\chi F(A_0, \dots, A_m; B_0, \dots, B_n; x_1, x_2); \end{aligned}$$

2) bármely unimodulár lineáris helyettesítésre nézve a transzformált alak együtthatóiból és változóiból képezett

$$F(A'_0, \dots, A'_m; B'_0, \dots, B'_n; \xi_1, \xi_2)$$

egyenlő a

$$F(A_0, \dots, A_m; B_0, \dots, B_m; \alpha\xi_1, + \beta\xi_2, \gamma\xi, + \delta\xi_2)$$

függvénynyel.

Az utóbbi követelést az

$$\begin{aligned} &F(A'_0, \dots, A'_m; B'_0, \dots, B'_n; \xi_1, \xi_2) = \\ &= F(A_0, \dots, A_m; B_0, \dots, B_n; x_1, x_2) \end{aligned}$$

egyenlettel szokás kifejezni, magától értetődőnek vévén, hogy az összehasonlítás ξ_1, ξ_2 és x_1, x_2 összetartozó értékeire vonatkozik.

A χ számot, mely megadja F fokát az x_1 és x_2-ben, a covariáns *rendszámának* nevezzük. Ha $\chi = 0$ és F az x_1 és x_2-től ment, akkor F-et covariáns helyett *invariánsnak* mondjuk.

Ha F-ben a A és B együtthatók helyébe speczialis értékeket helyettesítünk, megkapjuk ama *speczialis* alakoknak F covariánsát, melyeknek e speczialis A-k és B-k az együtthatói.

2. Az algebrai alakok elméletének elemeiben csak oly F covariánsokat használunk, melyek a (2) alatti mennyiségeknek *egész* függvényei. A következőkben azonban kivánatos azt az esetet is tekintetbe vennünk, midőn F tört függvény. Sőt Hilbert tétele érvényes akkor is, ha a covariáns fogalmát kiterjesztjük oly F-ekre, melyek a (2) alatti mennyiségek irraczionális függvényei.[1]

Egyébiránt könnyen belátható a következő megjegyzés helyessége:

Ha valamely F (raczionális) covariáns az

$$A_0, A_1, \dots, A_m; B_0, B_1, \dots, B_n$$

mennyiségeknek egész függvénye, akkor x_1 és x_2-t is csak egész módon tartalmazhatja.

Legyen ugyanis F a G és H egész függvényeknek hányadosa, melyek közül H csak x_1 és x_2-t tartalmazza. Egyszersmind tegyük fel, hogy a G számlálónak és a H nevezőnek nincs az x_1-t és x_2-t tartalmazó közös osztója.

Az F covariáns voltánál fogva

$$\frac{G(A'_0,\dots; B'_0\dots; \xi_1, \xi_2)}{H(\xi_1, \xi_2)} = \frac{G(A_0,\dots; B_0,\dots; \alpha\xi_1 + \beta\xi_2, \gamma\xi_1 + \delta\xi_2)}{H(\alpha\xi_1, + \beta\xi_2 . \gamma\xi_1 + \delta\xi_2)}.$$

Itt természetesen egyik oldalon sem rövidíthetünk ξ_1, ξ_2-t tartalmazó osztóval, tehát létezik olyan tisztán az α, β, γ, δ helyettesítési együtthatóktól függő, soha el nem tünő C tényező, hogy

$$CG(A'_0,\dots; B'_0,\dots; \xi_1,\xi_2) = G(A_0,\dots, B_0,\dots; \alpha\xi_1+\beta\xi_2, \gamma\xi_1+\delta\xi_2)$$

[1] Az a speczialis eset, melyet Hilbert valóban tárgyal, épen ilyen irraczionális covariánsra vonatkozik.

és

$$CH(\xi_1, \xi_2) = H(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2, \gamma\xi_1 + \delta\xi_2).$$

Ha most $H(x_1, x_2)$ valóban tartalmazza x_1, x_2-t, akkor az utóbbi egyenletben $\alpha, \beta, \gamma\delta$ alkalmas választásával elérhetjük, hogy a jobb oldal egy tetszés szerint megadott $\lambda\xi_1 + \mu\xi_2$ lineáris függvénynyel osztható. De ez lehetetlen, mert a bal oldal tényezői változatlanul ugyanazok, bárhogyan választottuk a lineáris helyettesítést. Tehát H-nak puszta állandónak kell lennie. Vagyis esetünkben F valóban x_1 és x_2-t csak egész módon tartalmazhatja.

3. Jelentse F az x_1, x_2 változóknak valamely homogen függvényét, melynek nem kell épen az f, g rendszer covariánsának lennie. E függvény teljesen meg van határozva, mihelyt tudjuk: 1) hogy F eme változóknak hányadfokú homogen függvénye, vagyis a homogenitást kifejező

$$F(\rho x_1, \rho x_2) = \rho^\chi F(x_1, x_2)$$

egyenletben a χ kitevőt; 2) az

$$F_0(x) = F(x, 1)$$

egyváltozós függvényt. Valóban e két adatból

$$F(x_1, x_2) = x_2^\chi F_0\left(\frac{x_1}{x_2}\right).$$

A következőkben az f, g homogén formák helyett a megfelelő

$$f_0(x) = f(x, 1) \quad g_0(x) = g(x, 1)$$

függvényekre fordítjuk figyelmünket, a transzformált $\varphi(\xi_1, \xi_2)$, $\psi(\xi_1, \xi_2)$ formák helyett pedig a

$$\varphi_0(\xi) = \varphi(\xi, 1) \quad \psi_0(\xi) = \psi(\xi, 1)$$

függvényekre. Ezek f_0 és g_0-ból úgy keletkeznek, hogy x helyébe az

$$x = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} \tag{3}$$

kifejezést helyettesítjük és azután $(\gamma\xi+\delta)$-nak m-edik, illetőleg n-edik hatványával szorzunk.

Noha φ_0 és ψ_0 nem pusztán a (3) alatti helyettesítéssel, hanem azonkívül még egy idegen tényezővel való szorzással keletkeznek f_0 és g_0-ból, mégis röviden a transzformált függvényeknek nevezzük.

Ha

$$F(A_0,\ldots; B_0,\ldots; x_1, x_2)$$

az $f(x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2)$ homogén formáknak covariánsa, akkor az

$$F_0 = F(A_0,\ldots, B_0,\ldots; x, 1)$$

függvényről is azt mondjuk, hogy $f_0(x)$ és $g_0(x)$-nek covariánsa. Ugyanezt úgy is jelentjük ki, hogy F_0 a $f(x_1,x_2)$, $g(x_1, x_2)$ valamely covariánsának nem homogen irásmódja.

A covariánsok második jellemző tulajdonságát kifejező egyenlet ebben a nem homogen irásmódban:

$$F_0(A'_0,\ldots; B'_0,\ldots; \xi) = (\gamma\xi+\delta)^\chi F_0(A_0,\ldots; B_0,\ldots; x).$$

4. Most már könnyen bebizonyítható Hilbert tétele, melyet így fogalmazhatunk:

Ha F_0 az f, g formák valamely χ-ed rendű covariánsának nem homogen irásmódja, hol χ nem negativ szám, akkor

$$\frac{d^{\chi+1}F_0}{dx^{\chi+1}}$$

— $(\chi+2)$ *rendű covariáns.*

Midőn F_0 a x-nek χ-ed fokú egész függvénye, ez magától értetődik, de érdektelen, mert ekkor a szóban forgó differencziálhányados azonosan eltűnik. Talán ez okozta azt, hogy a tétel aránylag későn tűnt fel a formaelmélet művelőinek.

A mi a bebizonyítást illeti, nyilván F_0-sal együtt minden differencziálhányadosa is homogen az f illetőleg g együtthatóiban. Tehát csak azt kell kimutatnunk, hogy a

$$\frac{d^{\chi+1}F_0}{dx^{\chi+1}}$$

függvénynek meg van a covariánsok második jellemző tulajdonsága. Még pedig e tulajdonságot elég lesz a

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix}$$

és a

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

determinánsú helyettesítésekre bebizonyítanunk.

Rövidség kedvéért jelöljük Φ_0-sal azt a függvényt, mely a transzformált φ_0, ψ_0 rendszerre nézve hasonló módon van képezve, mint F_0 az eredeti f_0, g_0 rendszerre nézve. Az F_0-nak covariáns voltánál fogva:

$$\Phi_0(\xi) = (\gamma\xi + \delta)^\chi F_0(x).$$

A bebizonyítandó

$$\frac{d^{\chi+1}}{d\xi^{\chi+1}} \Phi_0(\xi) = (\gamma\xi + \delta)^{-(\chi+2)} \frac{d^{\chi+1}}{dx^{\chi+1}} F_0(x) \tag{4}$$

egyenletet innen egyszerűen a differencziálás tényleges elvégzésével kaphatjuk.

A

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix}$$

determinánsú helyettesítés esetében

$$x = \lambda(\lambda x + \mu), \quad \frac{dx}{d\xi} = \lambda^2$$

és

$$\Phi_0(\xi) = \lambda^{-\chi} F_0(x).$$

Innen

$$\frac{d}{d\xi}\Phi_0(\xi) = \lambda^{-\chi}\frac{d}{dx}F_0(x)\frac{dx}{d\xi} = \lambda^{-(\chi-2)}\frac{d}{dx}F_0(x);$$

általában

$$\frac{d^i}{dx^i}\Phi_0(\xi)=\lambda^{-(\chi-2i)}\frac{d^i}{dx^i}F_0(x).$$

Tehát $i=\chi+1$ esetében

$$\frac{d^{\chi+1}}{d\xi^{\chi+1}}\Phi_0(\xi)=\lambda^{\chi+2}\frac{d^{\chi+1}}{dx^{\chi+1}}F_0(x);$$

ez pedig épen a (4) alatti egyenlet a szóban forgó helyettesekre nézve.

A

$$\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}$$

determinánsú helyettesítésekre nézve

$$x=\frac{-1}{\xi},\quad \frac{dx}{d\xi}=\frac{1}{\xi^2}$$

és

$$\Phi_0(\xi)=\xi^\chi F_0(x).$$

Innen, mint rögtön látni fogjuk:

$$\xi^i\frac{d^i}{d\xi^i}\Phi_0(\xi)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{i}\binom{i}{\nu}(\chi-\nu)(\chi-\nu-1)\cdots(\chi-i+1)\,\xi^{\chi-\nu}\frac{d^\nu}{dx^\nu}F_0(x),\quad (5)$$

hol $\nu=i$ esetében

$$(\chi-\nu)(\chi-\nu-1)\cdots(\chi-i+1)$$

helyébe 1 teendő.

Valóban, ha $i=1$, akkor

$$\frac{d}{d\xi}\Phi_0(\xi)=\chi\xi^{\chi-1}F_0(x)+\xi^\chi\frac{d}{dx}F_0(x)\frac{dx}{d\xi}=$$

$$=\chi\xi^{\chi-1}F_0(x)+\xi^{\chi-1}\frac{d}{dx}F_0(x),$$

azaz

$$\xi\frac{d}{d\xi}\Phi_0(\xi)=\chi\xi^\chi F_0(x)+\xi^\chi\frac{d}{dx}F_0(x),$$

úgy, mint a bebizonyitandó differencziálási képlet kivánja. Az (5) alatti képlet általános érvényességét pedig a következő i-ről $(i+1)$-re való következtetéssel igazolhatjuk.

Ha (5) alatt ξ-vel szorzunk és azután differencziálunk, leszen

$$(i+1)\,\xi^i \frac{d^i}{d\xi^i}\Phi_0(\xi) + \xi^{i+1}\frac{d^{i+1}}{d\xi^{i+1}}\Phi_0(\xi) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{i}\binom{i}{\nu}(\chi-\nu+1)(\chi-\nu)\ldots(\chi-i+1)\,\xi^{\chi-\nu}\frac{d^\nu}{dx^\nu}F_0(x) + \qquad (6)$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{i}\binom{i}{\nu}(\chi-\nu)(\chi-\nu-1)\ldots(\chi-i+1)\,\xi^{\chi-\nu-1}\frac{d^{\nu+1}}{dx^{\nu+1}}F_0(x).$$

Itt a jobb oldal

$$\xi^\chi F_0(x), \ldots, \xi^{\chi-\nu}\frac{d^\nu}{dx^\nu}F_0(x), \ldots, \xi^{\chi-i-1}\frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}}F_0(x)$$

homogén lineáris függvénye állandó együtthatókkal. A

$$\xi^\chi F_0(x) \quad \text{és} \quad \xi^{\chi-i-1}\frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}}F_0(x)$$

szorzatok együtthatója

$$\chi(\chi-1)\ldots(\chi-i+1) \quad \text{ill.} \quad 1.$$

Bármely más

$$\xi^{\chi-\nu}\frac{d^\nu}{dx^\nu}F_0(x)$$

együtthatója:

$$\left(\binom{i}{\nu}+\binom{i}{\nu-1}\right)(\chi-\nu+1)(\chi-\nu)(\chi-\nu-1)\ldots(\chi-i+1) =$$

$$= \binom{i+1}{\nu}(\chi-\nu+1)(\chi-\nu)(\chi-\nu-1)\ldots(\chi-i+1).$$

Tehát a (6) alatti képlet így is írható:

$$(i+1)\,\xi^i\frac{d^i}{d\xi^i}\Phi_0(\xi) + \xi^{i+1}\frac{d^{i+1}}{d\xi^{i+1}}\Phi_0(\xi) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{i+1}\binom{i+1}{\nu}(\chi-\nu+1)(\chi-\nu)(\chi-\nu-1)\ldots(\chi-i+1)\,\xi^{\chi-\nu}\frac{d^\nu}{dx^\nu}F_0(x).$$

Továbbá az (5) alatti egyenletből:

$$(i+1)\,\xi^i \frac{d^i}{d\xi^i}\,\Phi_0(\xi) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{i+1} \binom{i+1}{\nu} (i-\nu+1)(\chi-\nu)(\chi-\nu-1)\dots(\chi-i+1)\,\xi^{\chi-\nu} \frac{d^\nu}{dx^\nu} F_0(x).$$

Az imént nyert két egyenletet egymásból kivonva:

$$\xi^{i+1} \frac{d^{i+1}}{d\xi^{i+1}}\,\Phi_0(\xi) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{i+1} \binom{i+1}{\nu} (\chi-\nu)(\chi-\nu-1)\dots(\chi-i+1)(\chi-i)\,\xi^{\chi-\nu} \frac{d^\nu}{dx^\nu} F_0(x),$$

ez pedig épen az (5) alatti képlet i helyett $(i+1)$-re nézve.

Abban a különös esetben, midőn (5) alatt $i=\chi+1$, jobb oldalt minden tag az utolsónak kivételével eltűnik, mert

$$\chi-i+1=0.$$

Tehát

$$\xi^{\chi+1} \frac{d^{\chi+1}}{d\xi^{\chi+1}}\,\Phi_0(\xi) = \xi^{-1} \frac{d^{\chi+1}}{dx^{\chi+1}}\,F_0(x),$$

azaz

$$\frac{d^{\chi+1}}{d\xi^{\chi+1}}\,\Phi_0(\xi) = \xi^{-(\chi+2)} \frac{d^{\chi+1}}{dx^{\chi+1}}\,F_0(x),$$

úgy mint a (4) alatti egyenlet állítja.

5. Legyenek például az $f(x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2)$ alakok mindketten n-edrendűek. Akkor $\frac{f_0}{g_0}$ egy zérusrendű covariánsnak nem homogén írásmódja. Tehát

$$\frac{d}{dx}\,\frac{f_0}{g_0} = \frac{g_0 \frac{df_0}{dx} - g_0 \frac{df_0}{dx}}{g_0^2}$$

egy (-2)-odrendű és

$$g_0 \frac{df_0}{dx} - g_0 \frac{df_0}{dx}$$

egy $2(n-1)$-edrendű covariánsnak nem homogén írásmódja. Az utóbbinak részletes alakja

$$n\begin{vmatrix} A_0x^{n-1}+\binom{n-1}{1}A_1x^{n-2}+\cdots+A_{n-1} & f \\ B_0x^{n-1}+\binom{n-1}{1}B_1x^{n-2}+\cdots+B_{n-1} & g \end{vmatrix}.$$

Ha még az első oszlopot x-szel szorozva kivonjuk a másodikból, akkor a második oszlop helyett

$$\begin{matrix} A_1x^{n-1}+\binom{n-1}{1}A_2x^{n-2}+\cdots+A_n \\ B_1x^{n-1}+\binom{n-1}{1}B_2x^{n-2}+\cdots+B_n \end{matrix}$$

irható.

Áttérve a homogén írásmódra, az

$$\frac{1}{n}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

covariánst nyerjük, tehát egy állandó hiján a Jacobi-féle covariánst.

II. Binaer alakok esete.

6. Az a kérdés, hogy az

$$f(x_1, x_2) = A_0x_1^m + \binom{m}{1}A_1x_1^{m-1}x_2+\cdots+A_mx_2^m$$

alak osztható-e a

$$g(x_1, x_2) = B_0x_1^n + \binom{n}{1}B_1x_1^{n-1}x_2+\cdots+B_nx_2^n$$

alakkal (hol $m \geqq n$), azonos azzal, vajjon $f_0(x) = f(x, 1)$ és $g_0(x) = g(x, 1)$ hányadosa mint x-nek legfeljebb $(m-n)$-edfokú egész függvénye fejezhető-e ki.

Ha a kérdést az utóbbi alakban fogalmazzuk, nyilván

$$\frac{d^{m-n+1}}{dx^{m-n+1}}\frac{f_0}{g_0} \tag{7}$$

azonos eltünése fejezi ki a szükséges és elégséges feltételt arra, hogy f_0 és g_0 hányadosa a kivánt alakú legyen. Minthogy f_0-ról és g_0-ról természetesen fölteszszük, hogy egyik sem tűnik el azonosan, a (7) alatti kifejezést a

$$g_0^{m-n+2} \frac{d^{m-n+1}}{dx^{m-n+1}} \frac{f_0}{g_0} \tag{8}$$

szorzattal is pótolhatjuk.

HILBERT tétele szerint a (7) alatti kifejezés egy $-(m-n+2)$-rendű covariánsnak, tehát a (8) alatti kifejezés egy

$$(n-1)\,(m-n+2)\text{-}$$

rendű covariánsnak nem homogén írásmódja. Az $m=n$ esetben a JACOBI-féle covariánst kapjuk.

Szándékunk a nyert covariánst az $m>n$ esetben is determináns alakjában előállítani.

7. Ha rövidség kedvéért

$$F=\frac{f_0}{g_0}$$

akkor

$$Fg_0=f_0.$$

Ha i-szer differencziálunk

$$\sum_{\nu=0}^{i}\binom{i}{\nu}\frac{d^\nu F}{dx^\nu}\,\frac{d^{i-\nu}g_0}{dx^{i-\nu}}=\frac{d^i f_0}{dx^i},$$

továbbá i szorzatosával osztva:

$$\sum_{\nu=0}^{i}\frac{1}{\nu!}\,\frac{d^\nu F}{dx^\nu}\,\frac{1}{(i-\nu)!}\,\frac{d^{i-\nu}g_0}{dx^{i-\nu}}=\frac{1}{i!}\,\frac{d^i f_0}{dx^i}.$$

Végre az

$$f_i=\frac{1}{m(m-1)\dots(m-i+1)}\,\frac{d^i}{dx^i}f_0(x),$$

$$g_i=\frac{1}{n(n-1)\dots(n-i+1)}\,\frac{d^i}{dx^i}g_0(x)$$

jelölések segítségével ugyanez az egyenlet így is írható:

$$F\binom{n}{i}g_i+\frac{dF}{dx}\binom{n}{i-1}g_{i-1}+\frac{1}{1.2}\frac{d^2F}{dx^2}\binom{n}{i-2}g_{i-2}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{i!}\frac{d^iF}{dx^i}g_0=\binom{m}{i}f_i.$$

Ha itt i helyébe rendre a

$$0,1,2,\ldots,m-n+1$$

számokat helyettesítjük, akkor

$$F,\ \frac{dF}{dx},\ \frac{1}{1.2}\frac{d^2F}{dx^2},\ldots,\frac{1}{(m-n+1)!}\frac{d^{m-n+1}F}{dx^{m-n+1}}$$

meghatározására $m-n+2$ lineáris egyenletet nyerünk. Az ismeretlenek együtthatóiból alkotott determináns g_0-nak $(m-n+2)$-dik hatványa.

Ebből az egyenletrendszerből

$$\frac{1}{(m-n+1)!}g_0^{m-n+2}\frac{d^{m-n+1}F}{dx^{m-n+1}},$$

vagyis

$$\frac{1}{(m-n+1)!}g_0^{m-n+2}\frac{d^{m-n+1}}{dx^{m-n+1}}\frac{f_0}{g_0}$$

a következő determinánssal egyenlő:

$$H=\begin{vmatrix}
g_0 & 0 & \ldots & 0 & f_0\\
\binom{n}{1}g_1 & g_0 & \ldots & 0 & \binom{m}{1}f_1\\
\binom{n}{2}g_2 & \binom{n}{1}g_1 & \ldots & 0 & \binom{m}{2}f_2\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\binom{n}{m-n-1}g_{m-n-1} & \binom{n}{m-n-2}g_{m-n-2} & \ldots & 0 & \binom{m}{m-n-1}f_{m-n-1}\\
\binom{n}{m-n}g_{m-n} & \binom{n}{m-n-1}g_{m-n-1} & \ldots & g_0 & \binom{m}{m-n}f_{m-n}\\
\binom{n}{m-n+1}g_{m-n+1} & \binom{n}{m-n}g_{m-n} & \ldots & \binom{n}{1}g_1 & \binom{m}{m-n+1}f_{m-n+1}
\end{vmatrix}$$

Ez determináns alakja ama covariáns nem homogén írásmódjának, melynek azonos eltűnése fejezi ki $f(x_1, x_2)$-nek a $g(x_1, x_2)$ formával való osztható voltát. Minthogy H az f és g együtthatóit csak egész módon tartalmazza, azért e covariáns homogén alakja x_1-t és x_2-t szintén egész módon tartalmazza, vagyis a szó szűkebb értelmében vett covariáns.

III. Több nem homogén változó esete.

8. Legyen az

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r), \quad g(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

egész függvények foka pontosan m_1, ill. n_1, hol $m_1 \leqq m$ és $n_1 \leqq n \leqq m$. Továbbá tegyük fel, a mi alkalmas lineáris helyettesítéssel mindig elérhető, hogy f és g valóban tartalmazza x_1-nek m_1-dik, ill. n_1 dik hatványát.

Ekkor arra, hogy f és g hányadosa az x-eknek legfeljebb $(m-n)$-edfokú egész függvénye legyen, szükséges és elégséges, hogy e hányados x_1-et csak egész módon tartalmazza és mint x_1 függvénye legfeljebb $(m-n)$-edfokú legyen.

E feltétel nyilván szükséges. Hogy egyszersmind elégséges, az a következő módon látható be.

Ha f-t mint x_1 függvényét elosztjuk g-vel, akkor a hányados együtthatóinak meghatározása egész műveleteken kívül csak azzal a B számmal való osztásokat kíván, mely g-ben $x_1^{n_1}$ együtthatója. Tehát ha f és g hányadosa x_1-nek egész függvénye, akkor ebben az egész függvényben az együtthatók az $x_2, x_3, \ldots, x_r$ változókat csak egész módon tartalmazzák. Vagyis e hányados mint $x_1, x_2, \ldots, x_r$ függvénye szintén egész függvény.

Továbbá e hányados, akár pusztán mint x_1-nek, akár mint $x_1, x_2, \ldots, x_r$-nek függvényét tekintjük, pontosan m_1-n_1 fokú. Tehát, ha e hányados mint x_1 függvénye kielégíti a fokszámra vonatkozó követelésünket, akkor kielégíti mint $x_1, x_2, \ldots, x_r$ függvénye is.

9. Ejtsük el most már azt a megszorítást, hogy f és g valóban tartalmazza x_1-nek m_1-dik, ill. n_1-dik hatványát. Még e megszorítás elejtése után is érvényes a következő tétel, mely a feladatot mindenkor egy független változó esetére vezeti vissza:

Hogy a legfeljebb m-edfokú

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

egész függvénynek a legfeljebb n-edfokú

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

egész függvénnyel való hányadosa az x-eknek legfeljebb (m—n)-edfokú egész függvénye legyen, arra szükséges és elégséges, hogy

$$F(\lambda) = f(x_1+\lambda y_1, x_2+\lambda y_2, \ldots, x_r+\lambda y_r)$$

és

$$G(\lambda) = g(x_1+\lambda y_1, x_2+\lambda y_2, \ldots, x_r+\lambda y_r)$$

hányadosa λ-nak legfeljebb (m—n)-edfokú egész függvénye legyen. Az y-k itt új határozatlanok.

E feltétel szükséges volta közvetetlenül világos. Elégséges volta a következő módon látható be.

Tegyük fel, hogy

$$F(\lambda) = G(\lambda)\,Q(\lambda),$$

hol $Q(\lambda)$ a λ-nak legfeljebb $(m-n)$-edfokú egész függvénye. Az x-ek és y-ok egyelőre akármilyen módon szerepelhetnek mint parameterek Q együtthatóiban.

Az

$$x_1, x_2, \ldots, x_r$$

helyébe írjunk

$$0, z_2, \ldots, z_r$$

-t, hol a z-k új változók; az y-okat helyettesítsük állandó számértékekkel. Ekkor az

$$\overline{F}(\lambda) = f(\lambda y_1, z_2+\lambda y_2, \ldots, z_r+\lambda y_r),$$

$$\overline{G}(\lambda) = g(\lambda y_1, z_2+\lambda y_2, \ldots, z_r+\lambda y_r)$$

függvények hányadosa $\overline{Q}(\lambda)$, szintén λ-nak legfeljebb $(m-n)$-edfokú egész függvénye.

Az $\overline{F}$, $\overline{G}$ függvények nem egyebek, mint azok, melyekbe f és g átmennek, ha az

$$x_1 = \lambda y_1, \ x_2 = z_2 + \lambda y_2, \dots, x_r = z_r + \lambda y_r \tag{9}$$

lineáris helyettesitéssel az új

$$\lambda, \ z_2, \dots, z_r$$

változókat vezetjük be. E függvények tehát megint m_1 ill. n_1 fokúak. Továbbá, ha az y-ok helyébe tett számértékeket alkalmasan választottuk, akkor $\overline{F}$ és $\overline{G}$ valóban tartalmazza λ^{m_1}-et, ill. λ^{n_1}-et. Ennélfogva a 8. alatt mondottak után, $\overline{Q}(\lambda)$ csak úgy lehet λ-nak legfeljebb $(m-n)$-edfokú függvénye, ha mint

$$\lambda, \ z_2, \dots, z_r$$

függvénye szintén legfeljebb $(m-n)$-edfokú egész függvény.

A (9) alatti transzformáczió megfordítása az $\overline{F}$, $\overline{G}$ és $\overline{Q}$ függvényeket f-be, g-be ill. egy legfeljebb $(m-n)$-edfokú

$$q(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

egész függvénybe viszi át, az

$$\overline{F} = \overline{G}\overline{Q}$$

egyenletet pedig a keresett

$$f = gh$$

egyenletbe.

IV. Több homogén változó esete.

10. Az imént mondottak természetesen homogén változók esetében is igazak. Csakhogy ekkor a feltételi egyenletek alakja különösen figyelemre méltó, főleg ha az algebrai alakok elméletében szokásos szimbolikus írásmódot használjuk.

Elég lesz az $m = n$ esettel foglalkoznunk, mert a nyert eredmény minden más esetre könnyen átvihető.

Két n-edrendü *binaer* alak

$$f = a_x^n = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n, \quad g = b_x^n = (b_1 x_1 + b_2 x_2)^n,$$

mint tudjuk, akkor és csak akkor különbözik egymástól pusztán egy állandó tényezőben, ha az

$$(ab)\, a_x^{n-1} b_x^{n-1} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n-1} (b_1 x_1 + b_2 x_2)^{n-1} \quad (10)$$

Jacobi-féle covariáns azonosan eltűnik.

Áttérve több változó esetére,

$$f = a_x^n = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r)^n,$$
$$g = b_x^n = (b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_r x_r)^n,$$

akkor és csak akkor különbözik egymástól pusztán egy állandó együtthatóban, ha

$$F(\lambda) = (a_x + \lambda a_y)^n,$$
$$G(\lambda) = (b_x + \lambda b_y)^n$$

pusztán egy λ-tól ment együtthatóban térnek el egymástól. Ennek feltételét pedig a (10) alatti minta szerint az

$$(a_x b_y - a_y b_x)(a_x + \lambda a_y)^{n-1} (b_x + \lambda b_y)^{n-1} \quad (11)$$

kifejezés azonos eltűnése fejezi ki. E kifejezés még a következő egyszerűbbel pótolható:

$$(a_x b_y - a_y b_x)\, a_x^{n-1} b_x^{n-1}. \quad (12)$$

Valóban (11) vagy (12) azonos eltünése teljesen ugyanazt jelenti, mert úgy keletkeznek egymásból, hogy az x-ek helyébe az

$$x_i - \lambda y_i \qquad (i=1, \ldots, r)$$

különbségeket illetve az

$$x_i + \lambda y_i \qquad (i=1, \ldots, r)$$

összegeket helyettesítjük.

Hasonló módon $m > n$ esetében is binaer alakokról úgy térünk át több változósakra, hogy abban a covariánsban, melynek azonos eltünése az oszthatóságot kifejezi, az (ab) szimbolumok helyébe

$$a_x b_y - a_y b_x$$

alakú szimbolumokat irunk. Világos, hogy az így nyert kifejezések covariáns jellegűek, csakhogy az x-eken kivül még egy y változósort tartalmaznak.

Kürschák József.

MERŐLEGES SZERKESZTÉSE EGY EGYENES ADOTT PONTJÁBAN VONALZÓVAL ÉS ÉTALONNAL.

Hilbert «Grundlagen der Geometrie» cz. művében öt síkgeometriai feladatot jelölt ki mint olyant, melyeknek elvégezhetőségét a geometria elemeiben okvetetlenül fel kell tennünk. E feladatok azonban, mint kimutatja, nem függetlenek egymástól, hanem visszavezethetők az első kettőre, t. i. a következőkre:

1. Két pont összekötése egyenessel és két nem párhuzamos egyenes metszéspontjának meghatározása.

2. Adott hosszúságnak adott egyenesen adott pontból való felrakása.

Az 1. feladat megoldására a *vonalzó* szolgál. A 2. feladat megoldására alkalmas eszközt *transporteur*nek nevezzük.

Utóbb Kürschák bebizonyította,[1] hogy minden szerkesztési feladat, melyet a vonalzóval és a transporteurrel megoldhatunk, akkor is elvégezhető, ha a transporteurt egy *étalon*nal helyettesítjük, vagyis oly eszközzel, mely csak egy bizonyos, az illető eszköz által teljesen megszabott hosszúságnak (mondjuk a hosszegységnek) átrakására alkalmas. Ezt a tételt Hilbert is átvette említett művének újabb kiadásaiba.

Még egy lépéssel tovább juthatunk Steiner ama tételére hivatkozva, hogy mihelyt a síkban megrajzoltunk egy parallelogrammát, bármely pontban bármely egyeneshez pusztán vonalzó segítségével szerkeszthetünk párhuzamot. Ekkor ugyanis köny-

[1] Math. Annalen 55. kötet.

nyen belátható, hogy az *étalont* oly eszköz is helyettesítheti, melynek segítségével csak egy fix O pontból rakhatjuk fel az eszköz által megszabott hosszúságot, nem pedig a sík tetsző-leges pontjából. Erre a körülményre VAHLEN figyelmeztetett egy BAUER MIHÁLYhoz intézett levélben.

Jelen dolgozatban azonban nem ezzel a redukczióval akarok foglalkozni, hanem szándékom a vonalzóval és magával az étalonnal egy feladatot megfejteni.

HILBERT idézett könyvében igen szépen oldja meg azt a feladatot, hogy valamely adott egyenesre pusztán vonalzó és étalon segítségével merőlegeset állítsunk. Szerkesztésének egyedüli hiánya, hogy ezt a merőlegest nem az egyenes valamely adott pontjában kapjuk, tehát az egyenes adott pontján átmenő merőleges meghatározása még egy párhuzamos vonal szerkesztését teszi szükségessé.

Megoldjuk tehát a következő feladatot: Rajzoljunk a megadott a egyenesre ennek előre megadott A pontjában merőlegest.

A megoldás a következő: A-ból kiindulva ráмérjük az a-ra az egységet, végpontja O. O-n át két tetszésszerinti egyenest rajzolok, s rájuk mérem mindkét irányban az étalont. (A végpontok B_1, B_2, ill. C_1, C_2.) Az AC_2 a B_1B_2-t B-ben, az AB_2 a C_1C_2-t C-ben metszi. A BC-nek a B_1C_1-gyel való metszéspontja A_1. Ekkor AA_1 a keresett merőleges.

Szerkesztésünk igen könnyen igazolható.

A ugyanis egy czirkuláris involuczió középpontja, a mely az AB_1, AB_2; AC_1, AC_2 sugárpárokkal teljesen meg van határozva, s a melyben szerkesztésünk megadja az a megfelelőjét az AA_1-et. (AC_1 és AB_1 az ábrában nincs kirajzolva.)

A közölt szerkesztés a PASCAL-tétel segítségével is indokolható, ha meggondoljuk, hogy a kör érintője merőleges a sugárra, már pedig AA_1 az $AB_1C_2B_2C_1$ kör érintője, a választott szerkesztés mellett BCA_1 a PASCAL egyenes. A hatszög pedig $AC_2C_1B_1B_2A$.

Elemibb úton nem sikerült a szerkesztést igazolnom.

Legyen szabad szerkesztésünket néhány szóval a HILBERT-féle merőleges szerkesztéssel összehasonlitanom.

Mindkét konstrukczió hat segédvonalat használ fel, de míg mi a kivánt pontban kapjuk a merőlegest, addig HILBERTnek ezen czél elérésére még párhuzamosat is kell rajzolnia, a mi, ha csak étalon áll a rendelkezésünkre, magában sem egyszerűbb a merőleges szerkesztésénél. A fent közölt szerkesztés tehát a gyakorlatban mindenesetre tisztábban hajtható végre. HILBERT szerkesztésének azonban előnye, hogy egy igen elemi tétel segítségével igazolható, melyet már a középiskolai tanuló is megérthet, míg nekünk a proiectiv geometria egy-két alapfogalmát, illetve könnyű tételét kellett felhasználnunk.

Obláth Richard.

A KÉTTEST PROBLÉMÁJA VÁLTOZÓ TÖMEGEK ESETÉN.

(Második és befejező közlemény.)

Az (I)-ből leszármaztatható φ azon része, mely a középpálya exczentriczitásával e-vel függ össze. Ha e igen kis mennyiség, akkor φ-nek e mennyiségtől függő részét φ'-vel jelezve:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} e \cos s - 2e \sin s \frac{d\varphi}{ds} + \varphi' = 0 \tag{III}$$

egyenlet irható fel φ' értékének megállapitására. Ebből a (II)-re való tekintettel:

$$\left[\frac{1}{n^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\frac{1}{(1+\varphi)^4} - \frac{2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{n^2(1+\varphi)^5}\right] e \cos s - 2e \sin s \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{n(1+\varphi)^2} + \varphi' = 0 \tag{IV}$$

azon egyenlet, mely a gyakorlatban alkalmazásba jön, ha már s-t is kifejeztük, mint az idő függvényét. Az s a középpálya valóságos anomáliája, igen kis exczentriczitás esetén:

$$s = n\tau. \tag{24}$$

Ámde

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{(1+\varphi)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{\mu} t\right)^2}$$

differentiálhányadosból:

$$\tau = \int\left(1 + \frac{m}{\mu} t\right)^2 dt = \frac{m}{3\mu}\left(1 + \frac{m}{\mu} t\right)^3. \tag{25}$$

Így tehát a (IV)-ből az exczentriczitástól függő első javítás:

$$\varphi' = 2e \sin\left[n\frac{m}{3\mu}\left(1+\frac{m}{\mu}t\right)^3\right]\frac{\frac{m}{\mu}}{n\left(1+\frac{m}{\mu}t\right)^2}. \tag{26}$$

A kéttest problémájának megoldását folyton szaporodó tömegek esetén

$$\varphi = \frac{m}{\mu}t + \frac{2}{n^2}\frac{\left(\frac{m}{\mu}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{\mu}t\right)^5} +$$

$$+ 2e \sin\left[n\frac{m}{3\mu}\left(1+\frac{m}{\mu}t\right)^3\right]\frac{\frac{m}{\mu}}{n\left(1+\frac{m}{\mu}t\right)^2} \tag{V}$$

függvény bevezetése segíti elő a szokásos alakban.

A φ egymásután következő javított értékei a (IV) folytán φ'-nek is mindig pontosabb értékét adják meg. A φ függvény egyes értékei a középpálya pontos elemeihez is vezetnek.

A középpálya elemeinek megállapítása után a valódi pályát is leírhatjuk. Igen érdekes eme, a Napra viszonyított valódi pálya viselkedése is különösen kosmologiai szempontból. A tömegszaporulat feltevés tényleg helyes: a mint Földünk tömegét is növelik a meteorok, úgy a többi bolygóéit, csupán az egyenletes szaporodás jellegéhez fér kétség. Ennélfogva az m mennyiség positiv jellegű. A Napra viszonyított pálya sugara tehát:

$$r = \frac{\rho}{1+\frac{m}{\mu}t} \tag{27}$$

folyton kisebb és kisebb lesz, azaz a bolygó pályája a Nap körül folyton szűkül, csigavonalszerű alakot ölt. A bolygónak tehát végül a Napba kell zuhannia egyenletes tömegszaporulat esetén. Belátható, hogy még nem egyenletes tömegszaporulat esetén is megmarad a valódi pályának e jellege.

Az (I) LOVETT eredményéhez is egyszerű úton vezet. Köralakú középpálya esetén:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\varphi=\frac{\gamma}{\mu}s,$$
$$\varphi=\frac{\gamma}{\mu}s=\frac{\gamma}{\mu}n\tau=l\tau. \tag{28}$$

Ha tehát valamely elliptikus bolygó pályája folytonosan egyenletes tömegszaporodás mellett akként módosul, hogy a középpálya körré lesz, akkor

$$r=\frac{\rho}{1+l\tau} \tag{29}$$

transformátió alkalmazandó. Itt

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{(1+l\tau)^2}, \tag{30}$$

melyből:

$$t=-\frac{1}{l(1+l\tau)}. \tag{31}$$

A (29) és (31) épen LOVETT transformátiói.

2. *A φ pontos meghatározása.* Az (I) alatti egyenletünk φ-nek nemcsak közelítő értékeit, hanem φ pontos kifejezését is nyujtja, ha F-t ki tudjuk fejezni a valóságos anomalia függvényeként. Legyen ugyanis

$$(1+e\cos s)\varphi=\psi, \tag{32}$$

ekkor:

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{1+e\cos s}\frac{d\psi}{ds}+\frac{e\sin s}{(1+e\cos s)^2}\psi,$$
$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}=\frac{1}{1+e\cos s}\frac{d^2\psi}{ds^2}+\frac{2e\sin s}{(1+e\cos s)^2}\frac{d\psi}{ds}+$$
$$+\frac{e^2+e\cos s+e^2\sin^2 s}{(1+e\cos s)^3}\psi \tag{33}$$

helyettesítések alkalmazhatók. Ezekkel az (I):

$$\frac{d^2\psi}{ds^2}+\psi=\frac{F}{\mu}. \tag{34}$$

Ha a (34) jobb oldala zérus, akkor

$$\psi = E \sin s + G \cos s \tag{35}$$

alakú a megoldás. Ebből (34) megoldását az állandók variátiójával nyerjük. Az állandókat variálva:

$$E'' \sin s + G'' \cos s - 2G' \sin s + 2E' \cos s = \frac{F}{\mu}$$

egyenlethez jutunk. Itt E és G meghatározása czéljából kiköthetjük, hogy

$$\left.\begin{aligned} E'' \sin s - 2G' \sin s &= \frac{F}{\mu} \sin^2 s, \\ F'' \cos s + 2E' \cos s &= \frac{F}{\mu} \cos^2 s \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

feltételi differentiálegyenletek teljesüljenek. A (36)-ból:

$$\left.\begin{aligned} E' - 2G &= \int \frac{F}{\mu} \sin s \, ds - g, \\ G' + 2E &= \int \frac{F}{\mu} \cos s \, ds + h. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

A (37)-nek eleget tesznek:

$$\left.\begin{aligned} E &= h + \int \frac{F}{\mu} \cos s \, ds, \\ G &= g - \int \frac{F}{\mu} \sin s \, ds \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

függvények. Ennélfogva a (35) szerint:

$$\psi = (1 + e \cos s)\varphi =$$

$$= h \sin s + g \cos s + \sin s \int \frac{F}{\mu} \cos s \, ds - \cos s \int \frac{F}{\mu} \sin s \, ds. \tag{39}$$

Az (I) általános integrálja tehát:

$$\varphi = \frac{h \sin s + g \cos s + \sin s \int \frac{F}{\mu} \cos s \, ds - \cos s \int \frac{F}{\mu} \sin s \, ds}{1 + e \cos s} \tag{VI}$$

A (VI)-ban kijelölt integrátió feltétlenül elvégezhető, mert $F=mt$ kifejezhető a valóságos anomália függvényeként. Ugyanis F ily alakban állítható elő:

$$F=\beta_0 s+\beta_1 \cos s+\beta_2 \cos^2 s+\beta_3 \cos^3 s+\cdots \tag{40}$$

A (VI) alatti általános integrálból tüstént előállítható φ alakja, ha a jelenre érvényes pályát körpályának veszszük fel. Ez esetben:

$$F=mt=\frac{m}{n}s.$$

Most

$$\varphi=\frac{h\sin s+g\cos s+\dfrac{m}{n}s}{1+e\cos s} \tag{41}$$

egyszerű alakban jelenik meg, mert

$$\begin{aligned}\int\frac{m}{n}s\cos s\,ds &= \frac{m}{n}s\sin s+\frac{m}{n}\cos s,\\ \int\frac{m}{n}s\sin s\,ds &= -\frac{m}{n}s\cos s+\frac{m}{u}\sin s.\end{aligned} \tag{42}$$

A h és g integrátiós állandók meghatározására a következő feltételi egyenletek szolgálhatnak:

$$\begin{aligned}&a)\quad s=0,\quad \varphi=0;\quad \text{azaz:}\quad g=0,\\ &b)\quad s=\frac{\pi}{2},\quad \varphi=\varphi_0;\quad \text{azaz:}\quad h=\varphi_0-\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}.\end{aligned} \tag{43}$$

Az F-nek (40) alatti kifejezése mellett a (VI)-ban kijelölt integrátiók szintén végrehajthatók. A (40)-ben szereplő β_0, $\beta_1,\ldots$ együtthatók m-el és a jelenre érvényes pálya exczentriczitásával fejezhetők ki; ugyanis:

$$nt=s-2e'\sin s+\frac{3}{4}e'^2\sin 2s-\cdots \tag{44}$$

Itt e' és n a jelenre érvényes pályára vonatkoznak. Ép így kifejezhető s az idő függvényeként:

$$v = nt + 2e' \sin nt + \frac{e'^2}{2^2} 5 \sin 2nt +$$

$$+ \frac{e'^3}{2^2 . 3} (13 \sin 3nt - 3 \sin nt) + \cdots \qquad (45)$$

Ezzel φ nemcsak a valóságos anomália, hanem a folyó idő függvényeként is előállítottnak tekinthető.

Ily módon φ-re az általános megoldást megadtuk. A gyakorlatban emez általános alak nem jöhet számításba, mert csak φ-vel lehet az általános megoldásban szereplő középpálya exczentriczitását kiszámítani. A gyakorlatban tehát az általánosból közelítő értékeket használunk fel mindaddig, míg a középpálya ez exczentriczitása változást nem mutat.

Terkán Lajos.

A TALAJ MELEGÉNEK PERIODUSOS INGÁSA.

(Első közleméay.)

Általános rész.

Ismeretes dolog, hogy a napsugárzás következtében a Földnek felső rétegében feltározodott melegnek periodusos ingása szoros összefüggésben van a Földnek tengelye körüli forgásával és Nap körüli keringésével; vagyis a Földnek felső rétegeiben a melegnek napi és évi ingása van. A különböző talajokban az a mélység, melyben a melegnek napi, illetve évi ingását még észlelhetjük, a talaj hővezető koefficziensétől függ. Bármely talajban a melegnek napi és évi ingása között azonban az az egyszerű összefüggés áll fenn, hogy a meleg az évi periodusban k. b. 19-szer mélyebbre, de 19-szer lassabban terjed, mint a napi periodusban.

Általában valamely talajnak periodusos meleg viszonyait akkor ismerjük, ha 1. feltüntetjük a hőmérsékletnek periodusos ingását a különböző mélységekben, 2. meghatározzuk a talaj melegvezető koefficziensét és 3. kiszámitjuk a melegmenynyiséget, mely a periodus alatt a talajban kicserélődik.

1. A talajhőmérséklet periodusos ingásának ábrázolása. A valóságban a talajhőmérsékletnek periodusos ingását a különböző mélységekben rendszeresen végezett hőmérsékleti észlelések segitségével ábrázolhatjuk, ha a viszonyokat derékszögű koordinata rendszerre vonatkoztatjuk.

a) Ugyanis az abszcissza tengelyre egyenlő távolságokban az órákat, vagy napokat és az ordinata tengelyre a megfelelő hőmérsékleteket felrakjuk, azután pedig az ordinaták végpontjait folytonos görbékkel összekötjük. Ezek a görbék ábrázolják a talajhőmérséklet *periodusos ingását* a különböző mélységekben.

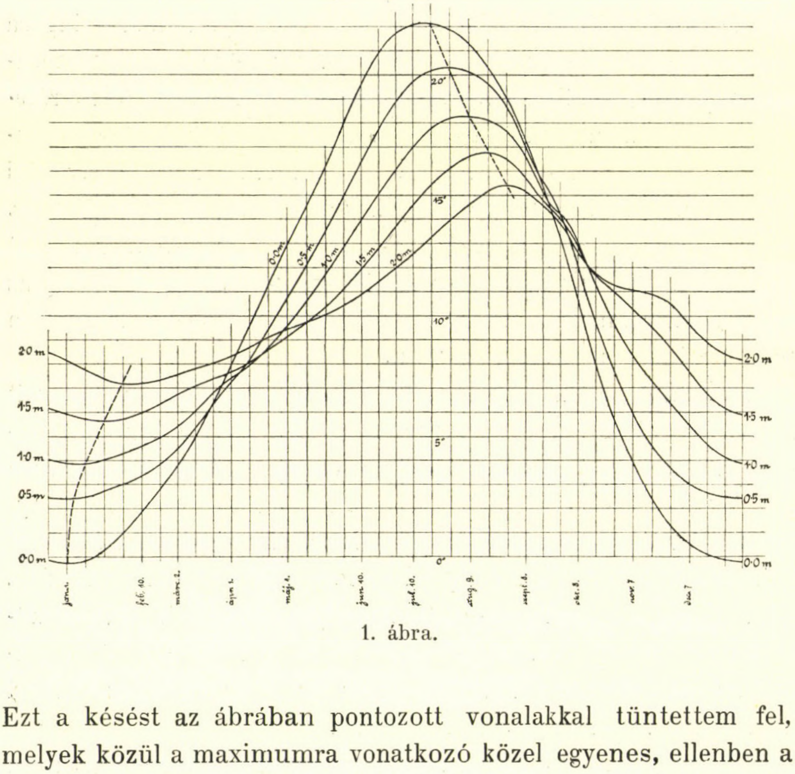
---

[1] Előadatott a Math. és Phys. Társulat 1909. április 1-i ülésén.

Ezen eljárással ábrázoltam az 1. ábrában az ógyallai talajhőmérsékletnek *évi ingását* a 0·0 m, 0·5 m, 1·0 m, 1·5 m és 2·0 m mélységekben. A görbék mutatják, hogy a hőmérséklet évi ingásának amplitudója a mélységgel folytonosan növekszik és hogy a hőmérséklet szélső értékei a mélységgel megkésnek.

Ógyallai talajhőmérséklet.

Évi ingás.



1. ábra.

Ezt a késést az ábrában pontozott vonalakkal tüntettem fel, melyek közül a maximumra vonatkozó közel egyenes, ellenben a minimumra vonatkozó feltünő görbületet mutat, melyet — úgy hiszem — a talajt borító hóréteg hatásának kell tulajdonítani. A görbéknek jellemző sajátságuk, hogy azok az ekvinokcium körül közös pont felé közelednek. Ez pedig azt jelenti, hogy az ekvinokcium körül az ógyallai talajban a melegátadás melegfelvételbe és a melegfelvétel melegátadásba átfordul. Tehát a talajhőmérsékletnek *inversiói* az ekvinokciumok körül jelentkeznek.

A görbék összehasonlitásából az is kitünik, hogy a hőmérséklet évi ingása a felszinen a legszabályosabb, ellenben a többi mélységekben a szabályosság tavasszal és ősszel megbomlik és ez a szabálytalanság a mélységgel — 2 m-ig — növekszik úgy, hogy a legnagyobb rendellenesség a két méteres mélységben mutatkozik.

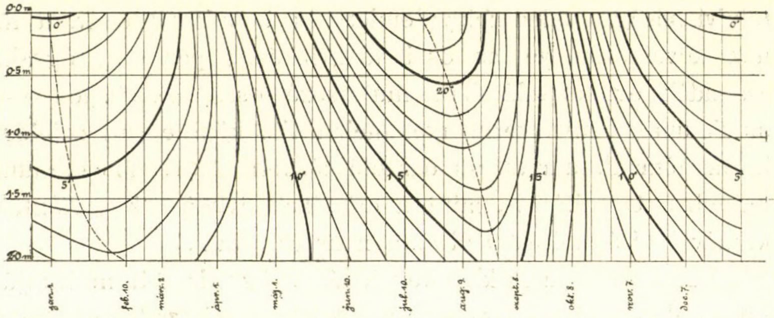
Ezt a szabálytalanságot a legnagyobb valószinüség szerint talajvíz okozta, mert a víz jelenléte a talajban a hőmérséklet erősebb ingását akadályozza. Tapasztalás igazolja, hogy Ógyallán a talajvíz aránylag már kis mélységben mutatkozik és tavaszszal, meg ősszel a felszinhez igen közel jelentkezik. A tavaszi talajvízbőség a télen felgyülemlett és tavaszszal elolvadt hónak következménye, az őszi talajvízbőség pedig az ógyallai csapadék évi eloszlásában mutatkozó őszi másodlagos esőmaximumnak következménye, mely a Földközi-tengeri esőeloszlásnak főmaximumával áll összefüggésben. (Az eső főmaximuma különben Ógyallán is, mint a mérsékelt övben a kontinentális klimával biró helyeken általában nyáron van).

b) A talaj hőmérsékletének ingását úgy is feltüntethetjük, hogy a derékszögű koordinata rendszer, abszcissza tengelyére az időegységeket és ordinata tengelyére a mélységeket rakjuk fel úgy, hogy minden időben és bármely mélységben észlelt hőmérsékleti adatot a koordinata rendszer síkjára bevezethetjük. Azután az egyenlő hőmérsékletű pontokat folytonos görbékkel összekötjük, melyek a talaj *geothermarendszerét,* vagy *izopletgörbéit* képezik.

Ily módon készültek *az ógyallai geothermák* (2. ábra), melyek a hőmérséklet szélső értékei körül jellemző eloszlást mutatnak. Ugyanis a hőmérséklet növekedése a besugárzás tartama alatt a mélységgel megkésik és a hőmérséklet csökkenése a kisugárzás tartama alatt felölről befelé szintén megkésik; a maximális hőmérséklet terjedése meglehetősen szabályos ellenben a minimális hőmérséklet terjedése — különösen a felszinhez közel — igen lassú. Ezen szabálytalanság oka, mint az előzőkben említettem, valószinűleg a hótakaró hatásában rejlik. A tavaszi és őszi geothermák szintén mutatnak némi szabálytalanságot, vagyis rámutatnak a talajviz zavaró hatására.

A geothermák eloszlásából az is kitűnik, hogy a talaj hőmérsékletének szélső értékei a mélységgel csökkennek, vagyis a hőmérséklet amplitudói a mélységgel fogynak és bármely rétegben a periodusos hőmérsékleti ingás a felszin periodusos ingását követi. Hogy a talajhőmérséklet amplitudói a mélységgel fogynak és a fázisok a mélységgel elmaradnak, az következik, hogy a talajban a meleg vezetéssel terjed.

Ógyallai geothermák.

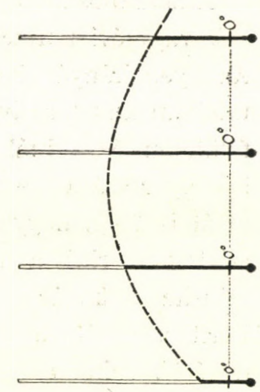


2. ábra.

c) A talaj melegviszonyait a v. Bezold által bevezetett *tautochronokkal*, illetve *tautochronhalóval* is ábrázolhatjuk.

Ha a derékszögű rendszer abszcissza tengelyére a hőmérsékleteket, az ordinata tengelyre pedig a mélységeket rakjuk fel, akkor a periodus valamely időpontjában a hőmérséklet eloszlását feltüntethetjük, ha a kijelölt időpontban a különböző mélységekben észlelt hőmérsékleti adatokat a rendszerbe rajzoljuk és az ordináták végpontjait folytonos görbével összekötjük. Az így szerkesztett görbe lesz azután a megjelölt időponthoz tartozó *tautochron*.

A valóságban a tautochront úgy képzelhetjük, mintha a talajban egymás alá vízszintesen teljesen egyenlő hőmérőket akképen helyeznénk el, hogy azoknak 0°-juk ugyanazon függőleges egyenesbe esnének, akkor a hömérők higanyszálainak végpontjait összekötő görbe lesz a talaj tautochronja. (3. ábra.)

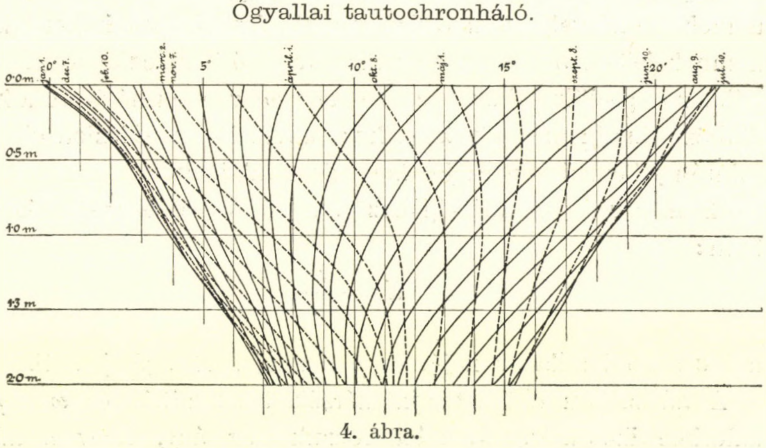


3. ábra.

Ha a periodus minden időpontjához ily módon a tautochronokat megszerkesztjük, akkor ezek a rendszer síkjában végtelen sokszor metszhetik egymást úgy, hogy a görbék tautochronhálót képeznek, mellyel a talajhőmérséklet eloszlását a periodusban a felszintől adott mélységig ábrázolhatjuk. Általában a tautochronok azon mélységig terjednek, melyben a hőmérséklet ingása megszünik.

A 4. ábrában fel van tüntetve az ógyallai talajnak évi *tautochronhálója*, tiznapos közepekben, a felszintől két méter

Ógyallai tautochronháló.



4. ábra.

mélységig. Az ábrában a folytonos görbék az év első felére és a szakadozott görbék az év második felére vonatkoznak. A tavaszi és őszi tautochronok kivételével, midőn a hőmérséklet változása egyik napról a másikra, a talajvíz hatása következtében, lassúbb, mint egyébkor, a tautochronok meglehetősen szimmetrikusak.

Általánosságban megjegyzem, hogy a talaj évi geothermáival, vagy évi tautochronjaival a fagy terjedését is előállíthatjuk. Az ilyen irányú vizsgálatok igazolják, hogy a fagy ugyanazon talajban annál mélyebbre hatol, minél gyorsabb a lehülés a felületen és minél hosszabb ideig tart a téli hideg. A lehülés gyorsasága pedig az időjárási helyzetek befolyásán kívül attól is függ, hogy a talajt mi borítja. Például az oroszországi adatok szerint a fű annyira akadályozza a fagy terjedését, mintha a kopár talaj 0·5 m vastagságú földréteggel volna borítva, a hótakaró pedig annyira védi a talajt a fagy terjedésétől, mintha a hó vastagságának megfelelő háromszoros homokréteg borítaná a talajt.[1]

2. A talaj hővezető koefficiensének meghatározása. A talajhőmérséklet eloszlása bármely előállításban általában azt mutatja, hogy az egyes talajnemeket nagy közelítéssel izotrop közegeknek tekinthetjük és hogy a különböző talajnemek a meleget különbözően vezetik úgy, hogy minden talajnemnek jellemző thermometrikus hővezető koeffiziense (K) és jellemző specifikus hőkapacitása ($\omega = c\rho$) van, ennélfogva a különböző talajnemeknek kalorikus hővezető koeffiziensei (k) szintén jellemző tényezőjét képezik a talajnak.

Ezen három mennyiség között a következő összefüggés áll fenn:

$$K = \frac{k}{c\rho},$$

hol c a talaj fajlagos hőjét és ρ a talaj sűrűségét jelenti.

A valóságban K-t a talajhőmérséklet adataiból és $\omega = c\rho$-t kalorimetrikus mérésekből határozzuk meg úgy, hogy a talaj kalorimetrikus hővezető koeffiziensét (k) a fenti relaczióval kiszámíthatjuk. Megemlítem, hogy a K dimensioja:

---

[1] H. WILD: «Differenzen der Bodentemperatur mit und ohne Schneedecke». Mem. d. Petersburger Akademie VIII. S. T. V. Nr. 7. és 8. 1897.

$$[K] = \frac{L^2}{T}.$$

Láttuk, hogy általánosságban a hőmérséklet periodusos ingása a talaj belsejében mindenütt a felszin hőmérsékletének periodusos ingásával van meghatározva és a periodusos hőmérséklet (ϑ) a talaj különböző mélységeiben a mélységnek (x) függvénye, azaz $\vartheta = f(t, x)$, hol t a folyó időt jelenti. Mivel pedig a meleg a talajban vezetéssel terjed, ennélfogva a $\vartheta = f(t, x)$-nek a hővezetés általános egyenletét ki kell elégíteni, vagyis ϑ a

$$\frac{d\vartheta}{dt} = K \frac{d^2\vartheta}{dx^2}$$

másodrendű differenciális egyenletnek megfejtését képezi.

A hőmérséklet periodusos ingását a felületen, harmonikus analysissel az ingalengéshez hasonló hullámokra bonthatjuk és

$$\vartheta = \Theta + a_1 \sin\left(A_1 + \frac{2\pi}{T} t\right) + a_2 \sin\left(A_2 + 2\frac{2\pi}{T} t\right) + \ldots.$$

sorral előállíthatjuk.[1] Hol Θ a hőmérséklet középértékét a periodusban jelenti, a periodusos tagok pedig a hőmérsékletnek a középtől való eltéréseit adják, vagyis a hőmérsékletnek tulajdonképeni ingását. Az a_1, $a_2 \ldots$ az egész, fél... periodusos hullámok amplitudóit, A_1, $A_2 \ldots$ a hullámok fázisait fokokban, T a periodus tartamát és t a folyó időt jelenti. Az amplitudókat és fázisokat az észlelésekből a BESSEL-féle sorokkal számíthatjuk, a folyó időt pedig az évi periodusban január elsejétől és a napi periodusban éjféltől szokták számítani.

A valóságban a félperiodusos hullám amplitudója az egész periodusos hullám amplitudójához viszonyítva igen kicsiny és általában azt az egész periodusos hullám korrekcziójának lehet tekinteni úgy, hogy nagy közelítéssel elegendő lesz a talaj felszinének ingását egyetlen taggal jellemezni, vagyis

---

[1] Dr. J. HANN: «Lehrbuch der Meteorologie» zweite, umgearb. Auflage 576—582 l.

$$\Theta_0 = \Theta + \vartheta_0, \quad \text{hol} \quad \vartheta_0 = a_0 \sin\left(A_0 + \frac{2\pi}{T} t\right).$$

Az előző megfontolások után a hőmérsékletet a talaj belsejében, x mélységében pedig

$$\Theta_x = \Theta + \vartheta_x, \quad \text{hol} \quad \vartheta_x = a_x \sin\left(A_x + \frac{2\pi}{T} t\right)$$

függvénynyel határozhatjuk meg.

Mivel ϑ_x a mélységnek függvénye és kielégíti a hővezetést jellemző általános másodrendű differencziális egyenletet, továbbá a valóságban Θ a mélységgel csak keveset változik, azt az integrácziónál némi elhanyagolással állandónak tekinthetjük, ennélfogva az integráczio elvégzése után az amplitudók és fázisok között a következő összefüggéseket nyerjük:[1]

$$\lg\left(\frac{a_0}{a_x}\right) = x\sqrt{\frac{\pi}{KT}} \quad \text{és} \quad A_0 - A_x = x\sqrt{\frac{\pi}{KT}}.$$

A fáziskülönbség, ha a mélységet a felszíntől számítjuk, a mélységgel növekszik, vagyis a mélyebben fekvő hullámok a felsőbb hullámoktól időben elkésnek. A fáziskülönbséget, fázis elmaradásnak is mondják, melyet r-el szoktak jelelni.

Könnyen ki lehet mutatni, hogy a fenti összefüggés nemcsak a felszin és x mélység között áll fenn, hanem érvényes az bármely $x_2 - x_1 = p$, (hol $x_2 > x_1$), mélységkülönbségnél úgy, hogy

$$\lg\left(\frac{a_{x_1}}{a_{x_2}}\right) = r \quad \text{és} \quad r = p \cdot \sqrt{\frac{\pi}{KT}}.$$

Tehát *a talaj felső rétegében bármely mélységkülönbségnél a hőmérsékleti hullámnak fáziselmaradása az amplitudók logarithmusos dekrementumával egyenlő*. Ebből aztán az is következik, hogy *a mélységnek arithmetikai sorban való növekedésével a hőmérsékleti amplitudók geometriai sorban csökkennek.*

[1] B. LANG: Einleitung in die theoretische Physik. II. Aufl. 1891.

Ezzel kriteriumot is nyertünk az észlelési anyag minemű-ségének megállapítására és módszert a talaj thermometrikus hővezető együtthatójának meghatározására. Ugyanis a fentiek-ből nyerjük, hogy

$$K = \frac{\pi}{T}\left(\frac{p}{\lg\left(\frac{a_{x_1}}{a_{x_2}}\right)}\right)^2 \tag{1}$$

és a fázis elmaradásból

$$K = \frac{\pi}{T}\left(\frac{p}{r}\right)^2. \tag{2}$$

Mivel az amplitudók kétszerese nagy közelítéssel a tény-leges hőmérsékletek szélső értékeinek különbségével egyenlő, azaz $\theta_{x\,\text{max.}} - \theta_{x\,\text{min.}} = \varDelta\theta_x$-el, ennélfogva a K meghatározására elegendő csupán a hőmérséklet maximumát és minimumát ismerni a különböző mélységekben. E szerint az (1) alattiból nyerjük

$$K = \frac{\pi}{T}\left(\frac{p}{\lg\left(\frac{\varDelta\theta_{x_1}}{\varDelta\theta_{x_2}}\right)}\right)^2. \tag{3}$$

A fáziselmaradást pedig ugyancsak nagy közelítéssel meg-állapíthatjuk a különböző rétegek középhőmérsékletének késé-seiből úgy, hogy a periodus középhőmérsékleteinek meghatá-rozásból is számíthatjuk a K-t. Ha p rétegben a középhőmér-sékletnek elmaradását R-el jeleljük, akkor

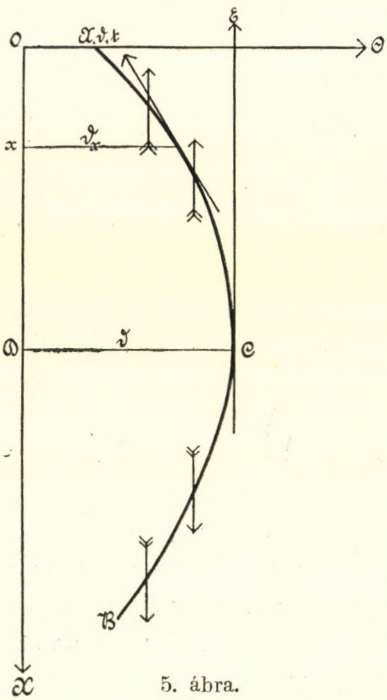
$$K = \frac{\pi}{T}\left(\frac{p}{R}\right)^2. \tag{4}$$

A (3) és (4) alattiakkal K-t közvetlenül a talaj hőmérsékleti adataiból meghatározhatjuk, ellenben az (1) és (2) alattiakat csak akkor használhatjuk, ha a hőmérséklet periodusos ingását előzetesen már a harmonikus analysissel felbontottuk.

A talaj thermometikus hővezető képességét a hőmérséklet-nek terjedési sebességéből is meghatározhatjuk. Ugyanis, ha a hőmérsékleti hullám terjedési középsebességét v-vel jeleljük, akkor bizonyos fizikai megfontolások után nyerjük, hogy

$$K=\frac{v^2 T}{4\pi}\cdot \tag{5}$$

Ezek azok a képletek, melyekkel a talaj thermometrikus hővezetőkoefficziensét meghatározni szokták. A következőkben egy új módszert mutatok be, melylyel K-t a tautochronok jellemző tulajdonságainak felhasználásával meghatározhatjuk.



5. ábra.

Legyen az izotrop talajban a t időhöz tartozó tautochron az ACB görbe (5. ábra), melyen a melegáramlás irányát a görbére húzott kis nyilakkal tüntettük fel, a mennyiben a meleg a magasabb hőmérsékletű helyről az alacsonyabb hőmérsékletű hely felé áramlik, vagyis a meleg C-től A és B felé áramlik. A melegáramlás a C pontban megfordul, vagyis a melegfelvétel melegátadásba vagy fordítva átcsap úgy, hogy a hőmérsékletnek C helyen *inverziója* van. Mivel a hőmérséklet (ϑ) az izotrop talajban a mélységnek függvénye, ennélfogva bármely mélységben *a geothermikus gradienst*, — (hőmérsékletesést) $-\frac{d\vartheta}{dx}$-t, a tautochron x mélységének megfelelő pontjához tartozó érintővel tüntetjük fel. A $\frac{d\vartheta}{dx}$ az ACB görbe mentén C pont kivételével mindenütt a zérustól különböző szám. A C pontban azonban $\frac{d\vartheta}{dx}=0$. Ennek jelentése pedig az, hogy a tautochron C pontjában az érintőnek iránya a talaj felszínére merőleges és hogy t időben a hőmérsékletnek C pontban maximuma vagy minimuma van és pedig maximuma van, ha $\frac{d^2\vartheta}{dx^2} < 0$ és minimuma van, ha $\frac{d^2\vartheta}{dx^2} > 0$.[1]

A tautochronok ezen tulajdonságát felhasználtam a thermometrikus hővezetőkoefficziens meghatározására.

Ugyanis találtuk, hogy a hőmérsékletet a talaj x mélységéebn $\Theta_x = \Theta + \vartheta_x$ egyenlet határozza meg, hol

$$\vartheta_x = a_x \sin\left(A_x + \frac{2\pi}{T} t\right),$$

vagyis

$$\vartheta_x = a_0 e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{KT}}} \sin\left(A_0 - x\sqrt{\frac{\pi}{KT}} + \frac{2\pi}{T} t\right).$$

Ebből, mivel Θ-t a differencziáczióra nézve állandónak vehetjük, a geothermikus gradiens következő lesz:

$$\frac{d\Theta_x}{dx} = \frac{d\vartheta_x}{dx}.$$

A differencziálás végrehajtásának egyszerűsitése czéljából, legyen

$$\sqrt{\frac{\pi}{KT}} = a \quad \text{és} \quad A_0 + \frac{2\pi}{T} t = \beta,$$

akkor

$$\frac{d\vartheta_x}{dx} = - a_0 a e^{-ax} [\sin(\beta - ax) + \cos(\beta - ax)].$$

Ebből némi átalakitás és összevonás után

$$\frac{d\vartheta_x}{dx} = + \sqrt{2}\,.\,a\,.\,a_0 e^{-ax} \sin\left(\beta - ax - \frac{3\pi}{4}\right).$$

Végre az a és β értékeit visszahelyettesitvén, lesz

$$\frac{d\vartheta_x}{dx} = a_0 \sqrt{\frac{2\pi}{KT}} e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{KT}}} \sin\left(A_0 - x\sqrt{\frac{\pi}{KT}} + \frac{2\pi}{T} t - \frac{3\pi}{4}\right).$$

---

[1] W. v. Bezold: «Der Wärmeaustausch an der Erdoberfläche und in der Atmosphäre». Sitzungsb. d. Berliner Akademie für 1892.

És ebből

$$\frac{d^2\vartheta_x}{dx^2}=a_0\frac{2\pi}{KT}e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{KT}}}\cos\left(A_0-x\sqrt{\frac{\pi}{KT}}+\frac{2\pi}{T}t\right).$$

A fentiből következik, hogy x bármely véges értéke mellett a

$$\frac{d\vartheta_x}{dx}=0$$

feltétel csak akkor teljesül, ha

$$A_0-x\sqrt{\frac{\pi}{KT}}+\frac{2\pi}{T}t-\frac{3\pi}{4}=\begin{cases}\pi\\ \text{vagy}\\ 0\end{cases}$$

Ezen feltételi egyenletekből tehát meghatározhatjuk t-nek azon t_1 és t_2 értékeit, melyekhez tartozó tautochronok az x mélységű és a felülettel párhuzamos talajrétegre merőleges fekvésűek.

Legyen ugyanis

$$A_0-x\sqrt{\frac{\pi}{KT}}+\frac{2\pi}{T}t_1-\frac{3\pi}{4}=\pi,$$

és

$$A_0-x\sqrt{\frac{\pi}{KT}}+\frac{2\pi}{T}t_2-\frac{3\pi}{4}=0.$$

Ezekből

$$t_1=\left[\frac{7}{8}-\frac{A_0}{2\pi}+\frac{x}{2\sqrt{\pi KT}}\right]T$$

és

$$t_2=\left[\frac{3}{8}-\frac{A_0}{2\pi}+\frac{x}{2\sqrt{\pi KT}}\right]T. \tag{6}$$

Vagyis: *A felülethez párhuzamos talajrétegeken átvonuló valamennyi tautochron között mindig találunk kettőt olyant, melyek valamely rétegre merőlegesek és a különböző talajrétegekre merőleges tautochronoknak időpontjai mindig különbözők.*

A fentiek szerint ezen t_1 és t_2 időpontban, x mélységben a hőmérsékletnek maximuma és minimuma is bekövetkezik úgy, hogy x mélységben a t_1 és a t_2 időpontban a melegátadás melegfelvételbe és a melegfelvétel melegátadásba átfordul; vagyis t_1 és t_2 az x mélységben a hőmérséklet *inversióinak* időpontjait jelentik.

Az a két időpont pedig, melyekben a tautochronok a talaj felszínére merőlegesek ($x=0$), következők:

$$\tau_1 = \left[\frac{7}{8} - \frac{A_0}{2\pi}\right] T \quad \text{és} \quad \tau_2 = \left[\frac{3}{8} - \frac{A_0}{2\pi}\right] T. \qquad (6')$$

Tapasztalás mutatja, hogy a középszélességek alatt az évi periodusban, durva közelítéssel, $A_0 = 225^\circ = \frac{5\pi}{4}$ úgy, hogy

$$\tau_1 = + \frac{T}{4} \quad \text{és} \quad \tau_2 = - \frac{T}{4},$$

vagyis mivel t folyó időt január 1-től számítjuk $\tau_1 = 91n$, (IV. 1.) és $\tau_2 = 274n$, (X. 1.).

Könnyen meggyőződhetünk, hogy τ_1 és τ_2 ezen értékénél fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\left(\frac{d^2\vartheta_x}{dx^2}\right)_{\substack{x=0\\t=\tau_1}} > 0 \quad \text{és} \quad \left(\frac{d^2\vartheta_x}{dx^2}\right)_{\substack{x=0\\t=\tau_2}} < 0.$$

Ennélfogva a középszélességek alatt, az évi periodusban, a talaj tautochronjai az ekvinokcium körül merőlegesek a felületre és a tautochronok a mélységgel úgy haladnak, hogy a tavaszi tautochron az OX tengelytől állandóan távolodik és az őszi tautochron az OX tengelyhez állandóan közeledik, a két tautochron pedig ott találkozik, hol a talajhőmérséklet évi periodusos ingása megszűnik. Ebből aztán az is következik, hogy a középszélességek alatt az évi periodusban a tavaszi ekvinokcium közül a talaj melegátadása melegfelvételbe és az őszi ekvinokcium körül a talaj melegfelvétele melegátadásba csap át.

A talajrétegen a felszíntől a periodusos hőmérsékleti ingás határáig átvonuló és a talaj felszínére merőleges tautochronokat pedig *főtautochronoknak* nevezhetjük, mert ezek által a talajnak periodusos melegviszonyai megvannak határozva.

A tautochronoknak említett tulajdonságát felhasználhatjuk a thermometrikus hővezetőkoefficziens meghatározására. Ugyanis, ha a periodusban a talajnak valamennyi tautochronját ismerjük, akkor kiválasztjuk először azokat, melyek a felszínre merőlegesek, vagy igen közel merőlegesek. Legyenek az ezeknek megfelelő időpontok: $t=\tau_1$ és $t=\tau_2$. Azután pedig kikeressük azokat a tautochronokat, melyek az x mélységű és a felszínhez párhuzamos rétegre merőlegesek, az ezekhez tartozó időpontok legyenek $t=t_{x,1}$ és $t=t_{x,2}$. Ha már most ezeket az időpontokat a (6) és (6') alattiak szerint egymással összekapcsoljuk, akkor a következő két egyenletet nyerjük:

$$t_{x,1}=\tau_1+\frac{x}{\sqrt{\pi K T}}\cdot\frac{T}{2} \quad \text{és} \quad t_{x,2}=\tau_2+\frac{x}{\sqrt{\pi K T}}\cdot\frac{T}{2},$$

ebből

$$K=\frac{T}{4\pi}\cdot\left(\frac{x}{t_{x,1}-\tau_1}\right)^2 \quad \text{és} \quad K=\frac{T}{4\pi}\cdot\left(\frac{x}{t_{x,2}-\tau_2}\right)^2.$$

Könnyen kimutathatjuk, hogy ezek a képletek nemcsak a felületnek x mélységű rétegében, hanem bármely $x_2-x_1=p$ vastagságú oly rétegben is érvényesek, melyben a hőmérsékletnek periodusos ingását még észlelhetjük.

Ugyanis legyenek a periodusban a talajra merőleges tautochronoknak időpontjai az x_1 mélységben $t_{x_1,1}$ és $t_{x_1,2}$, továbbá az x_2 mélységben $t_{x_2,1}$ és $t_{x_2,2}$. Ekkor a fentiek szerint:

$$t_{x_1,1}=\left[\frac{7}{8}-\frac{A_0}{2\pi}+\frac{x_1}{2\sqrt{\pi K T}}\right]T$$

és

$$t_{x_1,2}=\left[\frac{3}{8}-\frac{A_0}{2\pi}+\frac{x_1}{2\sqrt{\pi K T}}\right]T,$$

$$t_{x_2,1}=\left[\frac{7}{8}-\frac{A_0}{2\pi}+\frac{x_2}{2\sqrt{\pi K T}}\right]T$$

és

$$t_{x_2,2}=\left[\frac{3}{8}-\frac{A_0}{2\pi}+\frac{x_2}{2\sqrt{\pi K T}}\right]T.$$

Ha most a harmadikat az elsőből és a negyediket a másodikból levonjuk, akkor némi átalakítás után nyerjük, hogy

$$K=\frac{T}{4\pi}\left(\frac{p}{t_{x_2,1}-t_{x_1,1}}\right)^2 \quad \text{és} \quad K=\frac{T}{4\pi}\left(\frac{p}{t_{x_2,2}-t_{x_1,2}}\right)^2. \qquad (7)$$

A valóságban K tényleges értékéül pedig ezen képletekkel külön-külön számított K-nak arithmetikai közepét vehetjük. Mivel ezen eljárásnál a lényeg abban áll, hogy a jellemző tautochronokat felkeressük, azt hiszem nem tévedek, ha a tárgyalt eljárást a K meghatározása *geometriai* módszerének nevezzük.

Ezzel egyúttal módszert is nyertünk a talaj bármely rétegére merőleges tautochron időpontjának közelítő megállapítására, ha valamely módon előzetesen már meghatároztuk a talaj thermometrikus hővezetőkoefficziensét.

Megjegyzem, hogy az utolsó képletekben a négyzet alatti tényezők tulajdonképen sebességet jelentenek és pedig az (5) és (7) alattiak összekapcsolásából nyerjük, hogy azok a hőmérsékleti hullám terjedési sebességét jelentik. Ennélfogva a tautochronoknak említett tulajdonságaiból bizonyos közelítéssel meghatározhatjuk a talaj bármely rétegében a periodusos hőmérsékletnek *középterjedési sebességét* (v), azaz

$$v=\frac{p}{t''-t'},$$

hol t'' a p talajréteg alsó felületére és t' a p talajréteg felső felületére merőleges tautochronoknak időpontjait jelentik.

3. A talaj periodusos melegének meghatározása. Ha az egységnyi keresztmetszetű és x mélységű talajhasáb tömegelemét ρdx-el, speczifikus hőjét c-vel és hőmérsékletét θ_x-el jeleljük, akkor a tömegelem melegmennyisége

$$dQ=c\rho\theta_x dx.$$

Ebből az x mélységű talajhasábban bizonyos idő alatt feltározódott melegmennyiséget a következő

$$Q_0 - Q_x = c\rho \int_0^x \theta_x dx = c\rho \{ \int_0^x \theta dx + \int_0^x \vartheta_x dx \}$$

integrállal számíthatjuk. Megjegyezzük, hogy a fenti integrálok akkor érvényesek, midőn a meleg a talajban a felszínről annak belseje felé áramlik; ha pedig a meleg áramlása ellenkező, akkor a keresett melegmennyiség

$$Q_x - Q_0 = c\rho \{ \int_0^x \theta dx + \int_0^x \vartheta_x dx \}.$$

Mivel θ-t, mint a talaj középhőmérsékletét az integrálásnál állandónak tekinthetjük, ennélfogva

$$Q_0 - Q_x = c\rho \int_0^x \vartheta_x dx + C,$$

hol Q_0 a felszínen, Q_x az x mélységben és C a periodusos ingástól független melegmennyiséget jelenti.

Ha az integrálba ϑ_x-nek az előzőkben tárgyalt periodusos értékét helyettesítjük és $c\rho$-t rövidség okáért ω-val jeleljük, akkor a talajhasáb melegkészlete:

$$Q_0 - Q_x = \omega a_0 \int_0^x e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{KT}}} \sin\left(A_0 - x\sqrt{\frac{\pi}{KT}} + \frac{2\pi}{T} t\right) dx + C.$$

Legyen rövidebb jelelés czéljából itt is

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{KT}} \quad \text{és} \quad \beta = A_0 + \frac{2\pi}{T} t,$$

akkor

$$Q_0 - Q_x = \omega a_0 \int_0^x e^{-ax} \sin(\beta - ax)\, dx + C.$$

Ezt már ismeretes integrálokra visszavezethetjük,[1] úgy hogy az integráczió elvégzése után lesz

[1] Dr. FRÖHLICH I.: «Mathematikai Repertorium physikusok számára».

$$Q_0 - Q_x = \omega a_0 \sqrt{\frac{KT}{2\pi}} \left[\sin\left(A_0 + \frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{4}\right) - \right.$$

$$\left. - e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{KT}}} \sin\left(A_0 - x\sqrt{\frac{\pi}{KT}} + \frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{4}\right)\right] + C.$$

E szerint a meleg periodusos ingása a talaj bármely mélységében következő egyenlettel van feltüntetve:

$$Q_x = \omega a_0 \sqrt{\frac{KT}{2\pi}} \cdot e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{KT}}} \sin\left(A_0 - x\sqrt{\frac{\pi}{KT}} + \frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{4}\right).$$

A talaj melegmennyiségének — hőenergiájának — periodusos ingását tehát a talajhőmérséklet periodusos ingásához hasonló egyenlet jellemzi. A két hullám amplitudóinak viszonya és fázisainak különbsége mindenütt állandó: t. i. a meleghullámnak amplitudója $\omega \sqrt{\frac{KT}{2\pi}}$-szerese a hőmérsékleti hullám amplitudójának és a hőmérséklet hulláma $\frac{\pi}{4}$-el később követi a meleghullámot, vagyis a hőmérsékleti hullám az évi periodusban 45 nappal, a napi periodusban pedig 3 órával elkésik a meleghullámhoz képest.

A fenti egyenlettel kiszámíthatjuk azt a meleget is, mely a periodus tartama alatt a talajban kicserélődik. Ugyanis, ha az integrácziót a talajhasáb azon mélységéig terjesztjük, melyben a meleg periodusos ingása éppen megszűnik, vagyis elméleti fejtegetéseink szerint $x = \infty$-ig, akkor a t tetszőleges időre vonatkoztatott melegmennyiséget az egész hasábban

$$Q_0 - Q_\infty = \omega a_0 \sqrt{\frac{KT}{2\pi}} \sin\left(A_0 + \frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{4}\right) + C = Q_t$$

egyenlet szolgáltatja.

Legyen ez a melegmennyiség $t = t_1$ időben Q_{t_1} és $t = t_2$ időben Q_{t_2}, vagyis

$$Q_{t_1} = \omega a_0 \sqrt{\frac{KT}{2\pi}} \sin\left(A_0 + \frac{2\pi}{T} t_1 - \frac{\pi}{4}\right) + C,$$

és

$$Q_{t_2} = \omega a_0 \sqrt{\frac{KT}{2\pi}} \sin\left(A_0 + \frac{2\pi}{T} t_2 - \frac{\pi}{4}\right) + C,$$

akkor a $t_1 \ldots t_2$ időközben a talajhasábban feltározódott melegmennyiség következő lesz:

$$Q_{t_2} - Q_{t_1} = \omega a_0 \sqrt{\frac{KT}{2\pi}} \left[\sin\left(A_0 + \frac{2\pi}{T} t_2 - \frac{\pi}{4}\right) - \right.$$
$$\left. - \sin\left(A_0 + \frac{2\pi}{T} t_1 - \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Ha pedig a $t_1 \ldots t_2$ időköz a periodusnak az a része, mely alatt a talajban a melegnek maximuma feltározódott, akkor t_2 és t_1 azon időpontokat jelentik, melyekre nézve $Q_{t_2} - Q_{t_1}$-nek maximuma van. Ez pedig akkor következik be, ha

$$A_0 + \frac{2\pi}{T} t_2 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad A_0 + \frac{2\pi}{T} t_1 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Ebből

$$t_2 = \left[\frac{3}{8} - \frac{A_0}{2\pi}\right] T \quad \text{és} \quad t_1 = \left[\frac{7}{8} - \frac{A_0}{2\pi}\right] T,$$

vagyis az előzők szerint

$$t_1 = \tau_1 \quad \text{és} \quad t_2 = \tau_2.$$

A t_1 és t_2 tehát a periodusnak azon két időpontja, melyekben a felületen a hőmérsékletnek inversiói vannak, vagyis melyekben a melegátadás melegfelvételbe, illetve a melegfelvétel a melegátadásba csap át; ekkor pedig az előzök szerint a tautochronok a talaj felszínére merőlegesek.

Tehát a periodusban kicserélődött összes melegmennyiség:

$$Q_{\tau_2} - Q_{\tau_1} = 2\omega a_0 \sqrt{\frac{KT}{2\pi}} \tag{8}$$

egyenlettel van meghatározva.

E szerint a periodus alatt a talajban feltározódott összes meleg a talaj felszínének hőmérsékleti amplitudójával arányos.

A talaj melegmennyiségét a tautochronokkal is meghatározhatjuk. Ugyanis valamely megadott időponthoz tartozó tautochron az izotroptalajban csupán az x mélységnek függvénye úgy, hogy diagrammját egy határos integrállal kifejezhetjük; vagyis a 6. ábra szerint

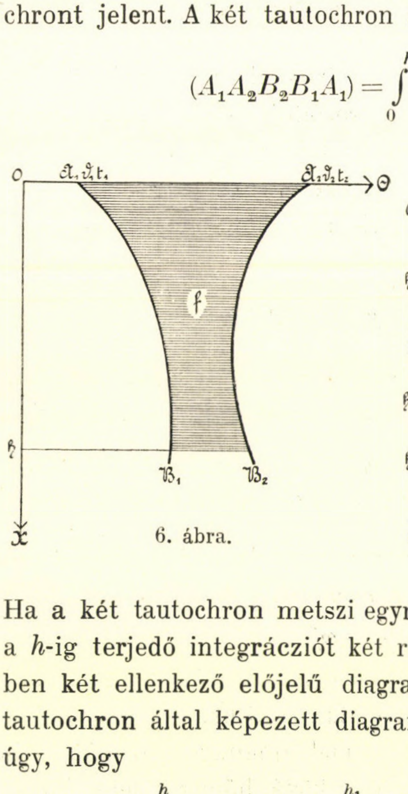
$$(OA_1B_1hO) = \int_0^h \vartheta_1 dx$$

és

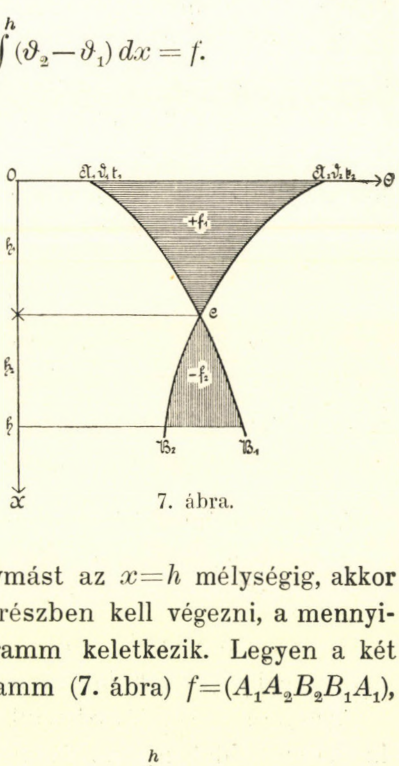
$$(OA_2B_2hO) = \int_0^h \vartheta_2 dx,$$

hol $\vartheta_1 = \vartheta_1(x)$ a t_1 és $\vartheta_2 = \vartheta_2(x)$ a t_2 időponthoz tartozó tautochront jelent. A két tautochron által határolt terület pedig lesz

$$(A_1A_2B_2B_1A_1) = \int_0^h (\vartheta_2 - \vartheta_1)\, dx = f.$$



6. ábra.



7. ábra.

Ha a két tautochron metszi egymást az $x = h$ mélységig, akkor a h-ig terjedő integrácziót két részben kell végezni, a mennyiben két ellenkező előjelű diagramm keletkezik. Legyen a két tautochron által képezett diagramm (7. ábra) $f = (A_1A_2B_2B_1A_1)$, úgy, hogy

$$f = \int_0^h (\vartheta_2 - \vartheta_1)\, dx = \int_0^{h_1} (\vartheta_2 - \vartheta_1)\, dx + \int_{h_1}^h (\vartheta_2 - \vartheta_1) dx.$$

Mivel azonban $x = 0$ tól $x = h$-ig $\vartheta_2 > \vartheta_1$ és $x = h_1$-től $x = h$-ig $\vartheta_2 < \vartheta_1$, ennélfogva

$$f=\int_0^{h_1}(\vartheta_2-\vartheta_1)\,dx-\int_{h_1}^{h}(\vartheta_2-\vartheta_1)\,dx,$$

vagyis

$$f=(+f_1)+(-f_2).$$

E szerint valamely megadott mélységig az egymást metsző tautochronok által képezett terület mindenkor a metszési ponttól felfelé és lefelé ellenkező előjelű területrészekből áll úgy, hogy általában a periodusban a tautochronok végtelen sok pozitiv és negativ előjelű területrészekből összetett hálót képeznek. A tautochron-területek összegezésénél ezt mindenkor figyelembe kell venni.

Ezek után mutassuk meg, hogy bármely t_1 és t_2 időközben a talajban $x=h$ mélységig feltározódott meleg a megfelelő tautochronok által képezett területtel arányos mennyiség.

Ugyanis az egységnyi keresztmetszetű, h mélységű talajhasáb melegmennyisége $t_1 \dots t_2$ időközben, ha a talaj fajhője c és sűrűsége ρ, következő:

$$Q_{t_2}-Q_{t_1}=\int_0^h c\rho\,(\vartheta_2-\vartheta_1)\,dx.$$

A $c\rho=\omega$ speczifikus hőkapaczitást, mely általában a hőmérsékletnek függvénye, csekély elhanyagolással állandónak tekinthetjük úgy, hogy

$$Q_{t_2}-Q_{t_1}=\omega\int_0^h(\vartheta_2-\vartheta_1)\,dx.$$

A határos integrális azonban a tautochronok által határolt területet jelenti úgy, hogy a melegmennyiség

$$Q_{t_2}-Q_{t_1}=\omega f.$$

A mi bebizonyitandó volt. A melegmennyiséget tehát planiméter segitségével könnyen meghatározhatjuk.

Azonban meghatározhatjuk a melegmennyiséget akkor is, ha t_1 és t_2 időben $x=h$-ig a talaj középhőmérsékletét ismerjük. Ugyanis a fenti egyenletet írhatjuk a következően:

$$Q_{t_2}-Q_{t_1}=\omega h.\left\{\frac{1}{h}\int_0^h\vartheta_2 dx-\frac{1}{h}\int_0^h\vartheta_1 dx\right\}.$$

Az integrál középértéktétele szerint a zárójelben levő tagok a t_2, illetve t_1 időpontokhoz tartozó középhőmérsékletet jelentik, azaz

$$\theta_{t_2} = \frac{1}{h}\int_0^h \vartheta_2 dx \quad \text{és} \quad \theta_{t_1} = \frac{1}{h}\int_0^h \vartheta_1 dx,$$

ennélfogva

$$Q_{t_2} - Q_{t_1} = \omega h (\theta_{t_2} - \theta_{t_1}).$$

Vagyis bizonyos időközben a talajban a feltározodott meleg az időköz végéhez és elejéhez tartozó középtalajhőmérséklettel arányos mennyiség. Az ωh pedig azt a melegmennyiséget jelenti, mely szükséges, hogy az egységnyi keresztmetszetű, h mélységű talajhasáb hőmérséklete egy fokkal emelkedjék. Ezt a melegmennyiséget a talajhasáb hőkapaczitásának mondjuk.

Ha a $t_1 \ldots t_2$ a periodusnak az a része, mely alatt a talaj összes melege feltározódik és $x = H$ azt a mélységet jelenti, melyben a hőmérséklet periodusos ingása éppen megszűnik, akkor

$$Q_{\tau_2} - Q_{\tau_1} = \omega \int_0^H (\vartheta_2 - \vartheta_1)\, dx = \omega F, \qquad (9)$$

hol tehát ϑ_1 és ϑ_2 a τ_1 és τ_2 időpontokhoz tartozó fő-tautochronokat jelentik.

Tehát a periodus alatt a talajban feltározódott összes meleg a főtautochronok által képezett területtel arányos.

Ha pedig a főtautochronokhoz tartozó középtalajhőmérsékletet θ_{τ_1} és θ_{τ_2}-vel jeleljük, akkor az egységnyi keresztmetszetű és H mélységű talajhasáb összes melege a periodusban

$$Q_{\tau_2} - Q_{\tau_1} = \omega H . (\theta_{\tau_2} - \theta_{\tau_1}). \qquad (10)$$

Tehát a periodus alatt a talajban feltározódott összes meleg a főtautochronokhoz tartozó középhőmérsékletek különbségeivel arányos.

Megjegyezzük, hogy hasonló eljárással meghatározhatjuk a talaj melegmennyiségét akkor is, ha tekintetbe veszszük a talaj nedvességét és olvadáspontalatti hőmérsékletét. Legyen t_1 és t_2

azon időköz, melyben a talaj bizonyos mértékben vízzel van telitve és $x = H_1$ mélységig meg van fagyva és pedig legyen a hőmérséklet $x = H_1$ mélységig $\vartheta_1 < 0$ és $x = H_1$-től $x = H$-ig $\vartheta_1 > 0$, a ϑ_2 pedig mindenütt nagyobb a zérusnál, azaz $\vartheta_2 > 0$. Legyen továbbá a száraz talaj térfogategységnyi hőkapaczitása ω_0 és z a térfogategységben foglalt vízmennyisége, akkor a nem fagyott nedves talaj fajlagos hőkapaczitása

$$\omega_n = \omega_0 + z$$

és a fagyott nedves talaj fajlagos hőkapaczitása

$$\omega_n' = \omega_0 + 0{\cdot}5z.$$

Ennélfogva a $t_1 \ldots t_2$ időközben az egységnyi keresztmetszetű, H mélységű, részben fagyott, nedves talajban a melegmennyiség következő:

$$Q_2 - Q_1 = \int_0^{H_1} \omega_n \vartheta_2 dx - \int_0^{H_1} \omega_n' \vartheta_1 dx + 80zH_1 + \int_{H_1}^{H} \omega_n (\vartheta_2 - \vartheta_1) dx,$$

hol $80zH_1$ az egységnyi keresztmetszetű és H_1 mélységű talajhasáb megolvasztásához szükséges meleget jelenti.

Írhatjuk még, hogy

$$Q_2 - Q_1 = \omega_0 \int_0^{H_1} (\vartheta_2 - \vartheta_1) dx + z \int_0^{H_1} (\vartheta_2 - \tfrac{1}{2}\vartheta_1) dx +$$

$$+ (\omega_0 + z) \int_{H_1}^{H} (\vartheta_2 - \vartheta_1) dx + 80zH.$$

Vagy ha Θ_2' és Θ_1' az $x=0 \ldots x=H_1$ mélységű és Θ_2, Θ_1 a $h = H - H_1$ mélységű hasáb középhőmérsékletét jelenti, akkor a melegmennyiséget

$$Q_2 - Q_1 = \omega_0 H_1 (\Theta_2' - \Theta_1') + zH_1 (\Theta_2' - \Theta_1') +$$

$$+ (\omega_0 + z)(H - H_1)(\Theta_2 - \Theta_1) + 80zH_1.$$

egyenlettel számíthatjuk.

Anderkó Aurél.

AZ INTEGRÁLRÓL.

(Második és befejező közlemény.)

20. **Az integrálhatóság ismertető jele.** — Vizsgáljuk meg most az integrálás szempontjából $f(x)$ szakadásait az (a, b) intervallumban. Oszszuk be az (a, b) intervallumot szakaszokra, melyeknek hosszai $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ és a legnagyobb köztük legyen δ. Ha $f(x)$ integrálható, akkor az olyan szakaszok összes hossza, a melyek ε-nál nagyobb ingadozású pontokat foglalnak magukban, az osztópontok sűrítésével zérus felé közeledik. Ez a RIEMANN-féle feltételből folyik, mert az ilyen intervallumokban $f(x)$ ingadozása nagyobb, mint ε.

Tehát, ha $f(x)$ integrálható és ε tetszés szerint kicsiny szám, akkor azok a pontok, a melyeken $f(x)$ ingadozása nagyobb ε nál, integrálható csoportot alkotnak.

Ez az állítás meg is fordítható. Tegyük fel, hogy — ε megadott szám lévén — $f(x)$ ingadozása csak egy integrálható csoport pontjain haladja meg ε-t. Zárjuk be e pontokat oly intervallumokba, a melyeknek összes hossza η és tartsuk meg ezeket az I intervallumokat, a mikor (a, b)-t szakaszokra osztjuk. A többi intervallum bizonyosan választható oly kicsinynek, hogy az ingadozás egyikben sem legyen nagyobb 2ε-nál (ha ez nem volna lehetséges, akkor lenne az I intervallumokon kívül legalább egy olyan pont, a melyen az ingadozás 2ε-nál nem kisebb, de ez ki van zárva). Így tehát azon szakaszok összes hossza η, a melyekben az ingadozás 2ε-nál nagyobb lehet, valóban tetszés szerint kicsiny. Ebből RIEMANN kriteriuma szerint következik, hogy $f(x)$ integrálható.

Ezek alapján kimondhatjuk az integrálhatóság RIEMANN-féle feltételének a következő, DU BOIS-REYMONDtól módosított alakját: *Az $f(x)$ véges függvény integrálható voltának szükséges és elegendő feltétele az, hogy azok a pontok, melyeken ingadozása egy tetszés szerinti ε számot meghalad, integrálható csoportot alkossanak.*

21. A DU BOIS-REYMOND-féle kriterium már jobban megvilágítja a függvény szakadásainak szerepét, mint a RIEMANN-féle. LEBESGUEet követve, még tökéletesebb alakot is adhatunk az integrálhatóság kriteriumának:

Hogy a véges $f(x)$ függvény az (a, b) intervallumban integrálható legyen, arra szükséges és elegendő, hogy a szakadásos pontok zérus mértékű halmazt alkossanak.

Legyen $G(\varepsilon)$ azon pontok halmaza, a melyeken $f(x)$ ingadozása nagyobb ε-nál. Ha $f(x)$ integrálható, akkor

$$G(1),\ G(\tfrac{1}{2}), \ldots, G\left(\frac{1}{n}\right), \ldots$$

mind integrálható csoportok, tehát valamennyien zérus mértékűek. E halmazok együttvéve a szakadásos helyek E összességét alkotják és így E mértéke zérus.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $f(x)$ az (a, b) intervallumban véges és hogy valamely zérus mértéke E halmaz pontjain van csak szakadása. Az $\omega(x) \geq \varepsilon$ feltételnek megfelelő pontok $H(\varepsilon)$ halmaza zárt és — mivel részét teszi E-nek — zérus mértékű; ennélfogva integrálható csoport. A $G(\varepsilon)$ halmazb ennfoglaltatik $H(\varepsilon)$-ban, tehát $G(\varepsilon)$ is integrálható csoport, bárminő kis szám is ε. Ez elegendő arra, hogy $f(x)$ integrálható legyen.

Az előbb említett RIEMANN szerkesztette függvény (15. §.)

$$\varphi(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{2^2} + \cdots + \frac{(nx)}{n^2} + \cdots$$

integrálható, mert véges és csak egy megszámlálható halmaz pontjain nem folytonos. Nem integrálható ellenben az a $\psi(x)$ függvény, a mely

$$\psi(x) = 1, \text{ ha } x \text{ raczionális,}$$
$$\psi(x) = 0, \text{ ha } x \text{ raczionális,}$$

mert ingadozása minden ponton 1-gyel egyenlő.

Ha valamely véges függvény egy irányban változik, akkor integrálható, mert azok a helyek, a hol ingadozása nagyobb, mint $\frac{1}{n}$, véges számmal vannak és így az összes szakadások halmaza megszámlálható. Innen következik, hogy azok a függvények, a melyeket Jordan «à variation bornée»-nak nevez, integrálhatók, mert minden ilyen függvény előállítható, mint két soha nem fogyó függvény különbsége.

23. Bemutatunk egy példát adott függvény integráljának kiszámítására. E példa legyen a következő:

$$\int_0^\pi \log(1-2a\cos x+a^2)\,dx,$$

a melyben a valós és különbözik ± 1-től. 0 és π között a $\log(1-2a\cos x+a^2)$ függvény folytonos, tehát integrálható. Ezért akármilyen felosztásból indulunk is ki és akármely értékét válaszszuk is a függvénynek az egyes szakaszokban, a keresett határérték ettől független lesz. Oszszuk fel a $(0, \pi)$ intervallumot n egyenlő részre és vegyük mindig a függvénynek azon értékét, a melyet egy-egy szakasz baloldali szélén felvesz. A vizsgálandó összeg

$$\sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{\pi}{n} \log\left(1-2a\cos p\frac{\pi}{n}+a^2\right) =$$
$$= \frac{\pi}{n}\log\left[\prod_0^{n-1}\left(1-2a\cos p\frac{\pi}{n}+a^2\right)\right] =$$
$$= \frac{\pi}{n}\log\left[(1-a)^2\prod_1^{n-1}(a-e^{p\frac{\pi}{n}i})(a-e^{-p\frac{\pi}{n}i})\right].$$

Tekintve, hogy az

$$x^{2n}-1=0$$

egyenlet gyökei

$$1, \ -1, \ e^{p\frac{\pi}{n}i}, \qquad (p=\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(n-1)$$

az előbbi kifejezést így írhatjuk:

$$\frac{\pi}{n}\log(1-a)^2\frac{1-a^{2n}}{1-a^2}$$

és látjuk, hogy határértéke 0, ha $|a|<1$ és $\pi\log a^2$, ha $|a|>1$, azaz

$$\int_0^\pi \log(1-2a\cos x+a^2)\,dx=\begin{cases}0, & \text{ha } a^2<1\\ \pi\log a^2, & \text{ha } a^2>1.\end{cases}$$

23. Nem sikerül azonban mindig ilyen egyszerűen a számítás. Nagyon sokszor a *primitiv függvényt* veszszük segítségül.

Tegyük fel, hogy $F(x)$ primitiv függvénye a véges $f(x)$ függvénynek, azaz

$$F'(x)=f(x).$$

Azt tudjuk már, hogy ha $f(x)$ folytonos, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Ez az egyenlőség mindig fennáll, ha $f(x)$ integrálható. Altalában ugyanis, ha $f(x)$ alsó és felső határa l és L az (α, β) intervallumban, a középértéktétel szerint

$$l<\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}<L,$$

azaz

$$l(\beta-\alpha)<F(\beta)-F(\alpha)<L(\beta-\alpha).$$

Oszszuk részekre (a, b)-t az

$$a=x_0,\ x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_{n-1},\ x_n=b$$

pontok segítségével; legyenek l_i és L_i $f(x)$-nek alsó és felső határai az (x_{i-1}, x_i) szakaszban és adjuk össze az

$$l_i\delta_i<F(x_i)-F(x_{i-1})<L_i\delta_i \qquad (\delta_i=x_i-x_{i-1})$$

egyenlőtlenségeket. Bármilyen kicsinyek is a δ_i szakaszok,

$$\sum_1^n l_i\delta_i<F(b)-F(a)<\sum_1^n L_i\delta_i,$$

tehát

$$\underset{-}{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq F(b)-F(a) \leqq \overset{}{\underset{+}{\int_a^b}} f(x)\,dx.$$

A mikor $f(x)$-nek alsó és felső integrálja összeesik,

$$F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Abból azonban, hogy $f(x)$-nek van primitiv függvénye, nem következik, hogy integrálható. Hogy világosan lássuk a dolgot, forduljunk vissza a középértéktételhez. Ha $F(x)$-nek mindenütt van véges differencziálhányadosa az (x_{i-1}, x_i) intervallumban, akkor ezen belül van oly ξ_i hely, hogy

$$F(x_i)-F(x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

és így

$$F(b)-F(a) = \sum_1^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1});$$

sűrítsük minden határon túl az osztópontokat, ekkor lesz

$$F(b)-F(a) = \lim_{x_i-x_{i-1}=0} \sum_1^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

Csakhogy ebből még nem következik, hogy $f(x)$ integrálható, mert a $\sum f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ összegnek van ugyan határértéke, ha az (x_{i-1}, x_i) intervallumban ξ_i-t meghatározott módon választjuk; de hogy van-e akkor is, ha ξ_i-t akárhogyan választjuk, az egyáltalában nem bizonyos, sőt néha nem is igaz.

24. **Volterra példája.** — Volterra szerkesztett először olyan differencziálható függvényt, a melynek differencziálhányadosa nem integrálható, mert azok a helyek, melyeken a differencziálhányados nem folytonos, bár sehol sem sűrű, de mégis nem zérus mértékű halmazt alkotnak. Ilyen halmazra már láttunk példát (11. §.); az a H halmaz úgy keletkezett, hogy bizonyos

$$(a_1, b_1), \ldots, a_n, b_n), \ldots$$

intervallumok belső pontjait kitörültük a $(0, 1)$ alapintervallumból.

Vegyük szemügyre a

$$\varphi(x, a) = (x-a)^2 \sin\frac{1}{x-a}$$

függvényt. Differencziálhányadosa

$$\varphi'_x(x, a) = 2(x-a)\sin\frac{1}{x-a} - \cos\frac{1}{x-a}$$

végtelen sokszor válik zérussá az $x=a$ hely környezetében. Erről közvetlenül meggyőződhetünk, ha felrajzoljuk az

$$y_1 = \frac{1}{2(x-a)} \quad \text{és} \quad y_2 = \operatorname{tg}(x-a)$$

függvényeket, mert a hol $y_1 = y_2$, ott φ'_x egyenlő zérussal. Legyen a_i+c_i a $\varphi'_x(x, a_i)$ függvény legnagyobb zérushelye az $\left(a_i, \frac{a_i+b_i}{2}\right)$ számközben és definiáljuk $F(x)$-et a következő módon:

A H halmaz pontjain:

$$F(x) = 0$$

az (a_i, b_i) intervallumban pedig:

$$\begin{aligned} F(x) &= \varphi(x, a_i), & &\text{ha } a_i \leqq x \leqq a_i+c_i, \\ F(x) &= \varphi(a_i+c_i, a_i) = -\varphi(b_i-c_i, b_i), & &\text{« } a_i+c_i \leqq x \leqq b_i-c_i, \\ F(x) &= -\varphi(x, b_i), & &\text{« } b_i-c_i \leqq x \leqq b_i. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy $F(x)$ mindenütt folytonos; az egyes (a_i, b_i) intervallumokban differencziálható volta sem kétséges. De nem szakad meg a differencziálhatóság H pontjain sem. Legyen ugyanis x_0 a H halmaznak pontja. A

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{F(x_0+h)}{h}$$

hányados zérus, ha x_0+h is benn van H-ban és kisebb (abszolut értékre nézve), mint

$$\frac{|x_0+h-a|^2}{|h|} < |h|,$$

ha x_0+h benn van egy, a H-val határos intervallumban, a melynek két széle közül az x_0 és x_0+h közé esőt jelöltük α-val. Ennélfogva

$$F'(x_0) = \lim_{h=0} \frac{F(x_0+h)}{h} = 0.$$

Ámde $F'(x)$ nem folytonos az $x=x_0$ helyen. Ha például $x_0=a_i$, akkor x_0-tól jobbra

$$F'(x) = 2(x-a_i)\sin\frac{1}{x-a_i} - \cos\frac{1}{x-a_i}$$

és így $F(x)$ ingadozása az x_0 pontban legalább 2. Ugyanez áll H-nak akármely A pontjára nézve, mert A maga vagy valamelyik a_i vagy b_j pont, vagy pedig ezek közül egy sorozatnak határhelye.

E szerint $F'(x)$-nek valóban szakadása van a H halmaz minden helyén és így $F'(x)$ nem integrálható.

25. Jegyezzük meg különben, hogy ha *egy függvény differencziálhányadosa* nem is okvetetlenül integrálható és annál kevésbbé folytonos, azért fel van ruházva a folytonos függvények azon tulajdonságával, hogy *ha két értéket felvesz, akkor felvesz minden mást is, a mely e két érték közé esik.*

Legyen $F(x)$ mindenütt folytonos és differencziálható függvény az (a, b) intervallumban, továbbá

$$F'(a) = A, \quad F'(b) = B, \qquad (A<B)$$

és végre legyen C egy tetszőleges szám A és B között. Ha h-nak elég kicsiny értéket adunk, $\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$ és $\frac{F(b+h)-F(b)}{h}$ oly közel vannak már A, illetőleg B-hez, hogy

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h} < C < \frac{F(b+h)-F(b)}{h}.$$

Másrészt

$$\Phi(x) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

(h-t nem változtatván) x-nek folytonos függvénye; mivel pedig

$$\Phi(a) < C, \quad \Phi(b) > C,$$

valamely x_1 helyen a és b között

$$\Phi(x_1)=\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{h}=C.$$

Alkalmazzuk a középértéktételt: van x_1 és x_1+h között egy x_2 pont, a hol

$$F'(x_2)=C.$$

Ez a tétel, a melyet most bebizonyitottunk, sok esetben megengedi, hogy eldöntsük, hogy egy megadott függvénynek nincs primitiv függvénye.

Az $f(x)$ függvény határozatlan integrálja

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx+C$$

folytonos függvény és minden x_0 helyen, a hol $f(x)$ folytonos, differencziálhányadosa: $f(x_0)$. Ha az x_0 helyen $f(x)$ nem folytonos, meglehet, hogy $F(x)$ differencziálható és differencziálhányadosa $f(x_0)$; meglehet, hogy differencziálható, de differencziálhányadosa különbözik $f(x_0)$-tól és meglehet, hogy $F(x)$ nem is differencziálható. E három esetre példa ($x_0=0$):

$$\begin{array}{llll} f_1(x)=1, & \text{ha} \quad x=\frac{1}{n}, & \text{egyébként} & f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, & \text{ha} \quad x\neq 0, & \text{és} & f_2(0)=1, \\ f_3(x)=\cos\log|x|, & \text{ha} \quad x\neq 0, & \text{és} & f_3(0)=0. \end{array}$$

26. **A Riemann-féle integrál általánosítása.** — Az $\int_a^b f(x)\,dx$ integrál értelmezése arra az esetre szól, a mikor $f(x)$ az egész (a, b) intervallumban integrálható; ez magában foglalja már azt is, hogy $f(x)$ véges. Terjeszszük ki most általánosabb esetekre ezt az értelmezést. Az általánositásban Jordannal ahhoz a feltételhez ragaszkodunk, hogy az integrál felső és alsó határának folytonos függvénye maradjon. Előbb azonban bebizonyitjuk, hogy ha $f(x)$ véges az (a, b) intervallumban és

minden (a, b)-n belül fekvő (α, β) intervallumban integrálható, akkor $f(x)$ (a, b)-ben is integrálható. Legyen ugyanis

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$$

oly intervallumsorozat, a melynek mindegyike magában foglalja a megelőzőt és $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Jelöljük I_n-nel (a_n, b_n)-nek azt a részét, a mely (a_{n-1}, b_{n-1}) intervallummal nem közös. I_n-ben integrálható az $f(x)$ függvény; tehát a szakadásos pontok E halmazának I_n-be eső része, E_n zérus mértékű. Minthogy pedig

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n + \cdots,$$

E-nek mértéke is zérus (9. §.) és így $f(x)$ integrálható az egész (a, b) intervallumban.

Ha $f(x)$ minden (a, b)-n belül fekvő intervallumban integrálható, de (a, b)-ben nem, akkor ez csak abból eredhet, hogy az a és b helyeknek legalább egyikén $f(x)$ maximuma vagy minimuma végtelen. Meglehet, hogy ebben az esetben az $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx$ integrál értéke közeledik egy véges A számhoz függetlenül attól, hogy ε és ε' miként válnak zérussá; ekkor definicziónk így szól:

$$\int\limits_a^b f(x) = A.$$

Ha az intervallum belsejében is vannak pontok véges számmal

$$c_1, c_2, \ldots, c_n,$$

a melyek körül $f(x)$ nem integrálható, akkor abban állapodunk meg, hogy

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{c_1} f(x)\,dx + \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int\limits_{c_n}^{b} f(x)\,dx,$$

és természetesen az $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ integrál létezése attól függ, hogy a jobboldali kifejezésnek van-e véges és meghatározott értéke.

27. Hasonló módon járunk el, ha a c szinguláris pontok, a melyek az integrálhatóságot megszakítják, végtelen számmal

vannak. Halmazuk E biztosan zárt, mert a c pontok környezetében $f(x)$ nem lévén véges, ugyanez áll a c pontok határhelyeire is, tehát a határhelyek E-be tartoznak. Ez arra késztet bennünket, hogy kizárjuk azt az esetet, a mikor a szinguláris pontok valahol sűrű halmazt alkotnának. Az E zárt halmazt úgy kapjuk meg, hogy megszámlálható — esetleg egymással érintkező — intervallumok belső pontjait kitörüljük. Ezt figyelembe véve, oszszuk fel az (a, b) intervallumot véges számú szakaszra, a melyek δ-nál mind kisebbek legyenek és egyesítsük azokat az érintkező szakaszokat, melyek egy szinguláris pontot sem foglalnak magukban. Így az (a_i, b_i) részintervallumokat kapjuk és mindegyik (a_i, b_i) benn van valamelyik E-vel határos (contigu) intervallumban és pedig széleinek távolsága amannak széleitől legfeljebb δ. Valamely intervallum, Baire elnevezése szerint, határos az E halmazzal, ha végpontjai E vagy E'-be tartoznak. Az (a_i, b_i) intervallumok együttvéve a D tartományt alkotják és legyen röviden

$$\Sigma \int_{a_i}^{b_i} f(x)\, dx = \int_D f(x)\, dx.$$

Ha az $f(x)$ szinguláris pontjainak E halmaza zérusmértékű és az

$$S = \Sigma \int_{a_i}^{b_i} f(x)\, dx$$

összeg véges és meghatározott érték felé tart, bármi módon közeledünk is δ-val zérushoz, ezt a határértéket $\int_a^b f(x)\, dx$-nek nevezzük.

E határérték létezésére szükséges és elegendő, hogy minden ε számhoz lehessen oly η-t találni, a melyre nézve:

$$\left| \int_{D_1} f dx - \int_D f dx \right| < \varepsilon$$

feltéve, hogy a D és D_1 tartományokhoz tartozó δ számok kisebbek η-nál. Ha ugyanis így van és a Δ és D tartományokra nézve $\delta<\eta$, továbbá $\varDelta$ a D-t magában foglalja, akkor

$$\left|\int_{\varDelta} f dx - \int_{D} f dx\right| < \varepsilon,$$

a miből következik, hogy $\lim\limits_{\delta=0} \int_{D} f(x)\, dx$ véges és meghatározott. Megfordítva, legyen D és D_1 két ilyen tetszés szerinti tartomány η-nál kisebb δ számokkal. Ha a keresett határérték létezik és $\varDelta_1 = D + D_1$, akkor η-t elég kicsinynek választván:

$$\left|\int_{\varDelta_1} - \int_{D}\right| < \varepsilon, \quad \left|\int_{\varDelta_1} - \int_{D_1}\right| < \varepsilon,$$

a honnan

$$\left|\int_{D} - \int_{D_1}\right| < 2\varepsilon.$$

A $\varDelta - D$ tartományt véges számú (α_i, β_i) intervallum alkotja, tehát

$$\left|\int_{\varDelta} - \int_{D}\right| = \left|\Sigma \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f dx\right| \leqq \Sigma \left|\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f dx\right| \leqq \Sigma \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |f|\, dx.$$

Az utolsó összeg tetszés szerint kicsinynyé tehető, ha $\int_a^b |f|\, dx$ véges. Ebben az esetben $\int_a^b f dx$ is létezik és azt mondjuk róla, hogy absolut convergens.

28. Nem láttuk eddig, miért volt szükséges megszorítanunk, hogy E mértéke zérus legyen; erről fogunk még szólni. Jegyezzük meg különben, hogy ha $\int_a^b f dx$ véges és E helyett oly E_1 zárt halmazt tartunk szem előtt, a mely E-t magában foglalja és szintén zérus mértékű, akkor a megfelelő

$$S_1 = \Sigma \int_{\alpha_j}^{\beta_j} f dx = \int_{D_1} f dx$$

összeg határértéke ugyancsak $\int_a^b f(x)\, dx$.

Tegyük fel ugyanis, hogy a D tartományhoz tartozó $\delta<\eta$ és hogy D-n belül $f(x)$ véges, mondjuk: $|f(x)| < M$. D meghatározása után válaszszunk egy D_1 tartományt, mely E_1-hez tartozzék úgy, hogy a megfelelő $\delta_1 < \eta$. Ha δ_1 elég kicsiny, a D tartományból kiindulva úgy szerkeszthetjük meg D_1-et, hogy először néhány (α'_k, β'_k) intervallumot kivetünk D-ből, a melyekben $(E_1 - E)$-nek pontjai vannak és másodszor D intervallumaihoz hozzáfüggesztünk velük érintkező és az E-vel határos intervallumokban bennlevő (α''_l, β''_l) intervallumokat. Ha az (α'_k, β'_k) intervallumokat nem vettük volna ki, egy a D-t magába záró Δ tartomány keletkezett volna és a feltétel értelmében

$$\left|\int_\Delta - \int_D\right| = \left|\Sigma \int_{\alpha''_l}^{\beta''_l} f dx\right| < \varepsilon;$$

másrészt

$$\left|\Sigma \int_{\alpha'_k}^{\beta'_k} f dx\right| < \sigma M$$

és σ a δ_1-gyel együtt zérushoz közeledik, mert $E_1 - E$ mértéke zérus. Tehát

$$\left|\int_{D_1} - \int_D\right| \leqq \left|\Sigma \int_{\alpha'_k}^{\beta'_k}\right| + \left|\Sigma \int_{\alpha''_l}^{\beta''_l}\right| < M\sigma + \varepsilon$$

és így azzal a feltétellel, hogy δ_1 elég kicsiny, egyszersmind

$$\left|\int_a^b f dx - \int_{D_1} f dx\right| < 2\varepsilon + M\sigma.$$

Q. E. D.

29. Az integrál értelmezésének most megállapított kiterjesztése nem volna jogosult, ha nem maradnának meg a kezdetben definiált integrálnak alaptulajdonságai. Ezt fogjuk tehát megvizsgálni.

1°. Az általánosított integrál felső határának folytonos függvénye. Éppen azt tartottuk az általánosításban szem előtt, hogy ez a tulajdonság ezután is fennálljon.

2°. Közvetlenül világos továbbá, hogy

$$\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c.$$

3°. Ha az

$$S = \Sigma \int_{a_i}^{b_i} f(x)\, dx$$

összegben az $\int_{a_i}^{b_i} = -\int_{b_i}^{a_i}$ egyenlőséget alkalmazzuk, azt találjuk, hogy

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

4°. Ha $\int_a^b f dx$ és $\int_a^b f_1 dx$ végesek, akkor $f+f_1$ integrálható az általánosított értelemben és

$$\int_a^b f dx + \int_a^b f_1 dx = \int_a^b (f+f_1)\, dx.$$

Valóban, ha az f és f_1 függvények szinguláris pontjai az E és E_1 halmazokat alkotják, akkor $E+E_1$ zárt, mértékű zérus és E-t, E_1-et, tehát $f+f_1$ szinguláris pontjait magában foglalja. Szerkeszszük meg az $E+E_1$ halmazhoz az (a_i, b_i) intervallumokat, ekkor

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \Sigma \int_{a_i}^{b_i} f dx, \quad \int_a^b f_1(x)\, dx = \lim \Sigma \int_{a_i}^{b_i} f_1 dx,$$

$$\int_a^b (f+f_1)\, dx = \lim \Sigma \int_{a_i}^{b_i} (f+f_1)\, dx = \lim \Sigma \int_{a_i}^{b_i} f dx + \lim \Sigma \int_{a_i}^{b_i} f_1 dx.$$

Ha nem követeltük volna meg az E halmaztól, hogy mértéke zérus legyen, az integrálnak ez a tulajdonsága elveszett volna. Tegyük fel ugyanis, hogy E mértéke: $\alpha > 0$ és $\lim \Sigma \int_{a_i}^{b_i} f(x)\, dx$ véges és meghatározott. Legyen $f_1(x) = 1$. Az f és $f+f_1$ függvények szinguláris pontjai ugyanazok és

$$\int_a^b f dx + \int_a^b f_1 dx = \int_a^b f dx + (b-a),$$

míg

$$\int_a^b (f+1)\, dx = \int_a^b f dx + (b-a-\alpha).$$

5°. Felírhatjuk végre azt is, hogy

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b f_1(x)\,dx,$$

ha $f(x) \leqq f_1(x)$ és $a < b$, mert

$$\int_a^b f_1 dx = \int_a^b f dx + \int_a^b (f_1 - f)\,dx \geqq \int_a^b f dx.$$

III. A Lebesgue-féle integrál.

30. A Riemann-féle integrál kiszámításában úgy járunk el, hogy az x változó intervallumát részekre osztjuk és egy ily rész terjedelmét szorozzuk valamelyik odatartozó függvényértékkel. Lebesgue fordított utat követ.[1] Ő a függvény ingadozásának intervallumát osztja részekre és a függvény egy-egy értékét szorozza azon ponthalmaz mértékével, a melyen a függvény az illető értéket felveszi vagy ahhoz elég közel marad.

Legyen adva az (a, b) intervallumban az $f(x)$ véges függvény. Nevezzük l és L-nek $f(x)$ alsó és felső határát és oszszuk be az (l, L) intervallumot az

$$l = l_0, l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}, l_n = L$$

pontok segítségével, feltételül szabva, hogy

$$l_i - l_{i-1} < \varepsilon.$$

Jelöljük e_i-vel azt a halmazt, melynek pontjain

$$l_{i-1} < f(x) < l_i,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

és e_i'-vel azt a halmazt, a melynek pontjain

$$f(x) = l_i,$$

[1] Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.

a mit szimbolikusan így fejezünk ki:

$$e_i = E\,[l_{i-1} < f(x) < l_i],$$
$$e'_i = E\,[l_i = f(x)].$$

Tegyük fel az $f(x)$ véges függvényről, hogy az (l, L) intervallum bárminő felosztásának megfelelő e_i és e'_i halmazok mind mérhetők (8. §.). Ez esetben a

$$\sigma = \sum_1^n l_{i-1} m(e_i) + \sum_0^n l_i m(e'_i)$$

$$\Sigma = \sum_1^n l_i m(e_i) + \sum_0^n l_i m(e_i)$$

összegek egy közös határ felé közelednek, ha az (l, L) intervallum szakaszai végtelen kicsinyekké válnak.

Először is világos, hogy

$$0 \leqq \Sigma - \sigma < \varepsilon \sum_1^n m(e_i) \leqq \varepsilon\,(b-a),$$

ha tehát úgy osztjuk mind apróbb részekre az (l, L) intervallumot, hogy mindig a meglevő osztópontok közé iktatjuk az újakat és a p-edik felosztás szakaszai már ε_p-nél kisebbek, a p-edik felosztáshoz tartozó összegek különbsége:

$$\Sigma_p - \sigma_p < \varepsilon_p\,(b-a).$$

Azonban

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p, \ldots$$

nem növekedő és

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p, \ldots$$

nem csökkenő számok sorozata; van tehát közös határértékük: S. Vegyünk most egy más felosztássorozatot, csak azt kötvén ki, hogy a szakaszok minimuma szintén zérus felé tartson. A megfelelő Σ és σ sorozatok legyenek

$$\Sigma'_1, \Sigma'_2, \ldots, \Sigma'_p, \ldots$$
$$\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_p, \ldots$$

Helyezzük a két sorozat p-edik felosztásait egymás fölé; az így keletkező felosztás a Σ''_p és σ''_p összegekhez vezet. Nyilvánvaló, hogy

$$\sigma_p \leqq \sigma''_p \leqq \Sigma''_p \leqq \Sigma_p,$$
$$\sigma'_p \leqq \sigma''_p \leqq \Sigma''_p \leqq \Sigma'_p.$$

Az első sor azt mutatja, hogy a σ''_p és Σ''_p összegek közös határértéke S; a második, hogy ugyanez a σ'_p és Σ'_p számok határértéke is, mert σ'_p és Σ'_p az S-et közre fogják, különbségük pedig zérus felé közeledik.

A σ és Σ összegek közös határértékét az $f(x)$ függvény a-tól b-ig terjedő (LEBESGUE-féle) integráljának nevezzük és számára az

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

jelet használjuk. Ha meg akarjuk különböztetni a RIEMANN-féle integráltól, akkor eléje teszünk egy (L) betűt, amaz elé pedig (R)-et.

31. Az általánosítás igazolására be fogjuk bizonyítani, hogy a LEBESGUE-féle integrál mindig létezik, ha a véges $f(x)$ függvény RIEMANN szerint integrálható és hogy ebben az esetben a két integrál értéke ugyanaz.

Előbb azonban vizsgáljuk meg, mi LEBESGUE szerint az integrálhatóság feltétele, megjegyezvén, hogy egyelőre csak véges függvényről lesz szó. Alapfeltevésünk az volt, hogy azon x helyek, a melyeken $(l \leqq \alpha < \beta \leqq L)$

$$\alpha < f(x) < \beta$$

vagy a melyeken

$$f(x) = \alpha,$$

mérhető halmazt alkotnak. Ebben az esetben az

$$\alpha < f(x)$$

föltétel is mérhető $E[\alpha < f(x)]$ halmazt jellemez, a mit megkapunk, ha összeadjuk az

$$\alpha < f(x) < L \quad \text{és} \quad f(x) = L$$

feltételekkel kiválasztott pontok halmazait. Megfordítva, tegyük fel, hogy az

$$E_\alpha = E[\alpha < f(x)]$$

halmaz minden α-ra nézve mérhető. Legyen $\beta > \alpha$, akkor E_β, sőt $E_\alpha - E_\beta$ is mérhető, mert

$$C(E_\alpha - E_\beta) = C(E_\alpha) + E_\beta.$$

Ámde $E_\alpha - E_\beta$ éppen az a halmaz, a melynek pontjain

$$\alpha < f(x) \leqq \beta,$$

tehát $E[\alpha < f(x) \leqq \beta]$ is mérhető. Válaszszunk most pozitiv számokból egy zérus felé tartó

$$h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$$

sorozatot. Az összes

$$E_n = E[\alpha - h_n < f(x) \leqq \alpha]$$

halmazok közös elemei azok a pontok, a melyeken $f(x) = \alpha$. E szerint az $E[f(x) = \alpha]$ halmaz mérhető. Végre az

$$E_1 = E[\alpha < f(x) \leqq \beta] \quad \text{és} \quad E_2 = E[f(x) = \beta]$$

halmazok különbsége

$$E_3 = E[\alpha < f(x) < \beta]$$

szintén mérhető, mert

$$C(E_3) = C(E_1) + E_2.$$

Ezekután kimondhatjuk, hogy *az $f(x)$ véges függvény* LEBESGUE-*féle integráljának létezésére szükséges és elegendő, hogy bármilyen szám is α, az $E[\alpha < f(x)]$ halmaz mérhető legyen.*

Ez esetben az *$f(x)$ függvény*ről magáról is azt mondjuk, hogy *mérhető.*

32. Tegyük fel most, hogy $f(x)$ véges az (a, b) intervallumban és hogy RIEMANN szerint integrálható. Ha E_1 az $E = E[\alpha \leqq f(x)]$ halmaz olyan határpontjainak halmaza, a melyek E-be nem tartoznak, akkor E_1 mértéke bizonyára zérus, mert pontjain $f(x)$ nem folytonos. Másrészt $E + E_1$ zárt halmaz, ennélfogva

mérhető és végre ilyen az $E[a \leqq f(x)]$ halmaz is. Azonban $E[a<f(x)]$ nem más, mint az összes $E[a+h_n \leqq f(x)]$ halmazok ($n=1, 2, \ldots; h_n>0$; $\lim h_n=0$) közös pontjainak halmaza, tehát $E[a<f(x)]$ mérhető és így $f(x)$-nek van LEBESGUE-féle integrálja.

Altalában LEBESGUE integrálja a DARBOUX-féle alsó és felső integrál között fekszik. Ugyanis

$$l(b-a) \leqq (L)\int_a^b f(x)\,dx \leqq L(b-a),$$

ezt az egyenlőtlenséget az (a, b) részintervallumaira kell csak alkalmaznunk és látjuk, hogy

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq (L)\int_a^b f(x)\,dx \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

E két tételből egyenesen következik, hogy *ha valamely véges $f(x)$ függvénynek van* RIEMANN-*féle integrálja, akkor van* LEBESGUE-*féle integrálja is és a kettő értéke megegyezik.*

A LEBESGUE-féle integrál azonban sokkal általánosabb esetekben is létezik, mint a RIEMANN-féle. Vegyük példának azt a $\varphi(x)$ függvényt, melynek értéke 1, ha x irraczionális és zérus, ha x raczionális. Az $E[\varphi(x)=0]$ halmaz mértéke zérus, tehát az (a, b) intervallumban $E[\varphi(x)=1]$ mértéke: $b-a$ és így

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = b-a.$$

33. Keressünk általánosabb mérhető függvényosztályokat. E végből arra támaszkodunk, hogy mérhető függvények öszszege, szorzata, hányadosa (ha csak az osztó abszolut értéke nagyobb, mint egy véges pozitiv szám) szintén mérhető függvények. Bizonyitsuk be például, hogy ha az $E[f_1 > a]$ és $E[f_2 > a]$ halmazok mérhetők, akkor az $E[f_1+f_2>a]$ halmaz is mérhető.

Válaszszunk oly $-\infty$-től $+\infty$-ig terjedő

$$\ldots, l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2, \ldots$$

számsorozatot, a melyben

$$l_i - l_{i-1} < \varepsilon$$

és szemeljük ki mindazokat az l_i, l_j párokat, a melyekre nézve $l_i + l_j > a$. Legyen $E(\varepsilon)$ az ily módon kapott mérhető

$$E_{ij} = E[f_1 > l_i] + E[f_2 > l_j]$$

halmazok összege. $E(\varepsilon)$ felmérhető. Ha már most

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$$

pozitiv számok zérus felé tartó sorozata, akkor

$$E[f_1 + f_2 > a] = E(\varepsilon_1) + E(\varepsilon_2) + \cdots,$$

a miből következik, hogy az $E[f_1 + f_2 > a]$ halmaz is mérhető.

Sőt tovább mehetünk. *Ha az $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ függvények mérhetők,* továbbá az

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

sor az (a, b) intervallum minden pontján összetartó és

$$u(x) = \sum_0^\infty u_n(x),$$

akkor $u(x)$ függvény is mérhető. Legyen ugyanis

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x).$$

Azt már tudjuk, hogy valamennyi $s_n(x)$ mérhető. Nevezzük E_n-nek az

$$E[s_n(x)] > a, \quad E[s_{n+1}(x) > a], \ldots$$

halmazok közös elemeinek összességét; világos, hogy

$$E[u(x) > a] = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots,$$

tehát $E[u(x) > a]$ csakugyan mérhető.

Lássuk, mi e tételek következménye. Az $f = \text{const.}$, $f = x$ függvények nyilvánvalóan mérhetők, tehát minden polinom mérhető függvény. Weierstrass tétele szerint folytonos függvény előállítható polinomsorban vagy a mi egyre megy, mint polinomok határértéke. Tehát folytonos függvény mérhető. Mérhető minden olyan függvény, a mely folytonos függvények határértéke (az ilyeneket BAIRE első osztályúaknak nevezi). Mérhetők továbbá az első osztályú függvényekkel megközelíthető — másodosztályú — függvények (ilyen az előbbi példa: $\varphi(x)=0$, ha x raczionális, $\varphi(x)=1$, ha x irraczionális) és így tovább. Eddig nem ismerünk és nem biztos, vajjon lehet-e valóban definiálni olyan véges függvényt, a melynek LEBESGUE-féle integrálja nem volna.

34. Foglalkozzunk most a LEBESGUE-féle integrál *alaptulajdonságai*val.

1°. Közvetetlenül világos, hogy, ha k állandó,

$$\int_a^b f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

2°. Összeg integrálja egyenlő a tagok integráljainak összegével:

$$\int_a^b (f_1+f_2)\,dx = \int_a^b f_1dx + \int_a^b f_2dx.$$

Hogy ezt bebizonyítsuk, tekintsünk először olyan φ_1 és φ_2 függvényeket, a melyek csak végesszámú értéket vesznek fel és pedig

$$\varphi_1(x) = l'_i \text{ az } E'_i \text{ halmaz pontjain } (i = 1, 2, \ldots, p),$$
$$\varphi_2(x) = l''_j \text{ az } E''_j \text{ halmaz pontjain } (j = 1, 2, \ldots, q).$$

Ekkor (E'_i, E''_j)-vel jelölvén E'_i és E''_j közös részét,

$$\begin{aligned}\int_a^b (\varphi_1+\varphi_2)\,dx &= \sum_1^p{}^i \sum_1^q{}^j (l'_i+l''_j)\, m(E'_i, E''_j) = \\ &= \sum_1^p{}^i\, l'_i\,[m(E'_i, E''_1)+m(E'_i, E''_2)+\cdots+m(E'_i, E''_q)]+ \\ &+ \sum_1^q{}^j\, l''_j\,[m(E'_1, E''_j)+m(E'_2, E''_j)+\cdots+m(E'_p, E''_j)]= \\ &= \sum_1^p l'_i m(E'_i) + \sum_1^q l''_j m(E''_j) = \int_a^b \varphi_1dx + \int_a^b \varphi_2dx.\end{aligned}$$

Ezekután legyenek f_1 és f_2 akármilyen véges és mérhető függvények. Mindenesetre lehet találnunk oly φ_1 és φ_2 függvényeket, a melyek f_1-től és f_2-től egy előre megadott ε számnál kevesebbel különböznek és csak véges számú értéket vesznek fel. Legyen például

$$\varphi_1(x)=l_i, \quad \text{ha} \quad l_{i-1}\leqq f_1(x)<l_i \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

és

$$\varphi_1(x)=l_n, \quad \text{ha} \quad f(x)=l_n,$$

a hol

$$l=l_0,\ l_1,\dots,l_{n-1},\ l_n=L$$

osztópontok az $f_1(x)$ ingadozásának (l, L) intervallumában és

$$l_i-l_{i-1}<\varepsilon.$$

Hasonló módon választhatunk egy φ_2 függvényt. Ekkor

$$\left|\int_a^b f_1dx-\int_a^b \varphi_1dx\right|=\left|\int_a^b (f_1-\varphi_1)\,dx\right|<\varepsilon(b-a),$$

$$\left|\int_a^b f_2dx-\int_a^b \varphi_2dx\right|=\left|\int_a^b (f_2-\varphi_2)\,dx\right|<\varepsilon(b-a),$$

$$\left|\int_a^b (f_1+f_2)\,dx-\int_a^b (\varphi_1+\varphi_2)\,dx\right|<2\varepsilon(b-a),$$

azaz

$$\left|\int_a^b (f_1+f_2)\,dx-\int_a^b f_1dx-\int_a^b f_2dx\right|<4\varepsilon(b-a),$$

mert

$$\int_a^b (\varphi_1+\varphi_2)\,dx=\int_a^b \varphi_1dx+\int_a^b \varphi_2dx.$$

ε azonban tetszés szerint kicsiny és az $\int_a^b (f_1+f_2)\,dx$, $\int_a^b f_1dx$, $\int_a^b f_2dx$ integrálok ε-tól függetlenek. Ebből következik, hogy

$$\int_a^b f_1dx+\int_a^b f_2dx=\int_a^b (f_1+f_2)\,dx.$$

3°. Ha az

$$f_1(x),\ f_2(x),\dots,f_n(x),\dots$$

sorozat az (a, b) intervallum minden helyén meghatározott $f(x)$ értékhez közeledik és minden $f_n(x)$ függvény mérhető, sőt van olyan M szám, hogy

$$|f_n(x)| < M, \quad (n=1, 2, \ldots)$$

akkor

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(Ez a tétel a RIEMANN-féle integrálokra vonatkozó hasonló tételnél sokkal általánosabb). Tudjuk, hogy az

$$f(x) = f_1(x) + [f_2(x) - f_1(x)] + \cdots + [f_n(x) - f_{n-1}(x)] + \cdots$$

függvény mérhető. Legyen E_n az

$$|f(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad (p=0, 1, 2, \ldots)$$

föltételnek eleget tevő x pontok halmaza. Világos, hogy E_{n+1} magában foglalja E_n-t, E_{n+2} az E_{n+1}-et és így tovább, tehát a

$$C(E_1),\ C(E_2), \ldots,\ C(E_n), \ldots$$

sorozatban mindegyik halmaz magába zárja az utána következőket; ha tehát mind e halmazok közös része H, akkor (10. §.)

$$m(H) = \lim m\,[C(E_n)].$$

Azonban H-nak egyetlen egy pontja sincs, mert minden x hely benn van az E_n halmazok egyikében; ennélfogva

$$\lim m\,[C(E_n)] = 0.$$

Minthogy pedig

$$\left|\int_a^b [f(x) - f_n(x)]\,dx\right| < \varepsilon m(E_n) + 2Mm[C(E_n)],$$

ebből azt látjuk, hogy

$$\lim_n \int_a^b [f(x) - f_n(x)]\,dx = 0.$$

Az eddigiek alapján kimondhatjuk a következő tételt:

Ha $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *mind véges és mérhető függvények, továbbá az*

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

sor összetartó az (a, b) *intervallum minden helyén és az* $f(x)$ *függvényt állítja elő, ha végre van egy* A *szám a következő tulajdonsággal:*

$$|u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}+\cdots| < A,$$

bármilyen egész szám is n, *akkor* $f(x)$ LEBESGUE *szerint integrálható és integrálját megkapjuk, ha a* $\sum_1^\infty u_n$ *sort tagonkint integráljuk.*

Valóban, $f(x)$ mérhető és minthogy

$$|f(x)| < A,$$

tehát véges is egyszersmind; szintúgy végesek az

$$s_n(x) = u_1+u_2+\cdots+u_n$$

részletösszegek, mert

$$|s_n(x)| = |f(x)-(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots)| < 2A,$$

tehát

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_n \int_a^b s_n(x)\,dx = \lim_n \left[\int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_1 dx + \cdots + \int_a^b u_n dx\right],$$

azaz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_1^\infty \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

35. Eddig a LEBESGUE-féle integrált csak véges $f(x)$ függvény és pozitiv (a, b) intervallum (t. i. $a<b$) esetére értelmeztük. Most általánositunk.

Ha $a>b$, akkor definiczióul a következő egyenlőség szolgál:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

e szerint

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^a = 0.$$

Ha továbbá $f(x)$ mérhető, de nem véges az (a, b) intervallumban, tehát esetleg végtelen valahol, akkor $-\infty$ és $+\infty$ közé iktatjuk az

$$\ldots, l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2, \ldots$$

számsorozatot ($l_i - l_{i-1} < \varepsilon$) és vizsgáljuk e két végtelen sort

$$\sigma = \sum_{-\infty}^{+\infty} l_i m \{E [l_i \leqq f(x) < l_{i+1}]\},$$

$$\Sigma = \sum_{-\infty}^{+\infty} l_{i+1} m \{E [l_i < f(x) \leqq l_{i+1}]\}.$$

Ugyanazzal az okoskodással, a melylyel a LEBESGUE-féle integrál létezését kimutattuk, beláthatjuk, hogy, ha e sorok közül az egyik összetartó — és ez esetben mindjárt feltétlenül összetartó —, akkor a másik is az, továbbá

$$0 < \Sigma - \sigma < \varepsilon (b - a)$$

és ε csökkentésével σ és Σ egy közös határ felé közelednek, bármint válaszszuk is egyébként az l_i számokat. E közös határérték neve: az $f(x)$ függvény integrálja.

Azt a függvényt, a melyre az integrálnak ez az általános értelmezése alkalmazható, *summabilis*nek nevezzük. Véges, nem summabilis függvényt nem ismerünk, de olyant igen, a mely nem véges és nem summabilis.

Sokszor kényelmes, ha valamely $f(x)$ függvény integrálját nem intervallumra, hanem egy E halmaz pontjaira vonatkoztatjuk, mely E benfoglaltatik az (a, b) intervallumban. Ezt úgy értelmezzük, hogy ha az az $f_1(x)$ függvény, a mely E-nek pontjain $f(x)$-szel, másutt zérussal egyenlő, summabilis az (a, b) intervallumban, akkor

$$\int_E f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx.$$

E definiczióból következik például, hogy ha $E_1, E_2, \ldots$ oly halmazok, a melyek közül kettőnek közös pontja nincs és ha ezek összege E, akkor

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx + \cdots$$

36. Ha a függvény nem véges, akkor esetleg van RIEMANN-féle integrálja az általánosabb értelemben. Tartozunk annak a vizsgálatával, hogy ilyenkor milyen viszony van a LEBESGUE-féle és az általánosított RIEMANN-féle integrál között.

Először bebizonyítom a következő tételt:

Summabilis függvény integrálja az integráczió tartományának folytonos függvénye, azaz ha az $\int f(x)\,dx$ integrál olyan intervallumcsoportra vonatkozik, a mely (a, b)-n belül van és az intervallumcsoporton kívül levő szakaszok összes hossza már elég kicsiny, ez az integrál $\int_a^b f(x)\,dx$-től tetszőleges kevéssel különbözik.

Válaszszunk ugyanis egy mindkét irányban végtelenné váló számsorozatot

$$\ldots, l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2, \ldots$$

a melyben $l_i - l_{i-1} < \varepsilon$. Ha $f(x)$ summabilis (a, b)-ben, ez annyit mond, hogy a

$$\sigma = \sum_{-\infty}^{+\infty} l_i\, m\{E[l_i \leqq f(x) < l_{i+1}]\}$$

$$\Sigma = \sum_{-\infty}^{+\infty} l_{i+1} m\{E[l_i < f(x) \leqq l_{i+1}]\}$$

sorok összetartók. Azt, hogy ezek a sorok az (a, b) intervallumra vonatkoznak, azzal tüntetjük majd ki, hogy σ és Σ helyett $\sigma(a, b)$ és $\Sigma(a, b)$-t írunk. Minthogy

$$|\Sigma(a, b) - \sigma(a, b)| < \varepsilon(b-a),$$

egyszersmind

$$\left|\int_a^b - \sigma(a, b)\right| < \varepsilon(b-a).$$

Válaszszuk ν-t elég nagynak ahhoz, hogy a

$$\sum_{-\nu}^{+\nu} |l_i| m\{E[l_i \leqq f(x) < l_{i+1}]\}$$

összeg a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |l_i| m\{E[l_i \leqq f(x) < l_{i+1}]\}$$

sortól (amely összetartó, hiszen a σ sor feltétlenül összetartó) legfeljebb ε-nal különbözzék. Legyen

$$\sigma' = \sum_{-\nu}^{+\nu} l_i m\{E[l_i \leqq f(x) < l_{i+1}]\}$$

és jelöljünk (α, β)-val szimbolikusan egy (a, b)-ben foglalt tetszésszerinti intervallumcsoportot. Ha ν-t a leírt módon meghatároztuk, egyszersmind

$$|\sigma(\alpha, \beta) - \sigma'(\alpha, \beta)| < \varepsilon$$

és tekintve, hogy

$$|\Sigma(a, b) - \sigma(a, b)| < \varepsilon(b-a),$$

annál inkább

$$|\Sigma(\alpha, \beta) - \sigma(\alpha, \beta)| < \varepsilon(b-a),$$

tehát

$$\Big|\int\limits_{(\alpha, \beta)} - \sigma(\alpha, \beta)\Big| < \varepsilon(b-a).$$

A σ' összeg csak véges számmal tartalmaz tagokat, tehát ha az (α, β) intervallumcsoporton kívül levő szakaszok összes hossza elég kicsiny,

$$|\sigma'(a, b) - \sigma'(\alpha, \beta)| < \varepsilon.$$

Ezt feltételezve, foglaljuk össze a következő egyenlőtlenségeket:

$$\Big|\int_a^b - \sigma(a, b)\Big| < \varepsilon(b-a), \quad \Big|\int\limits_{(\alpha, \beta)} - \sigma(\alpha, \beta)\Big| < \varepsilon(b-a),$$

$$|\sigma(a, b) - \sigma'(a, b)| < \varepsilon, \quad |\sigma(\alpha, \beta) - \sigma'(\alpha, \beta) < \varepsilon,$$

$$|\sigma'(a, b) - \sigma'(\alpha, \beta)| < \varepsilon.$$

Innen következik, hogy

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - \int\limits_{(\alpha, \beta)} f(x)\,dx\Big| < 2\varepsilon(b-a) + 3\varepsilon.$$

37. Ezek után kimondhatjuk a következő tételt:

Ha $f(x)$ summabilis az (a, b) intervallumban és van általánosított Riemann-*féle integrálja, akkor ez egyenlő a* Lebesgue-*féle integrállal.*

Gondoljunk vissza ugyanis a $\Sigma \int_{a_i}^{b_i} f(x)\,dx$ összegre (27. §.). Az (a_i, b_i) intervallumokban

$$(R)\int_{a_i}^{b_i} = (L)\int_{a_i}^{b_i};$$

ha δ-val zérus felé közeledünk, ez az összeg egyrészt $(R)\int_a^b f(x)\,dx$-hez, másrészt $(L)\int_a^b f(x)\,dx$-hez tart, tehát

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Abban az esetben, a mikor $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ abszolut konvergens, azaz $(R)\int_a^b |f(x)|\,dx$ véges, $f(x)$ mindig summabilis. Valóban $\sigma'(\alpha, \beta)$ a $\sigma'(a, b)$-hez közeledik, ámde $|f(x)|$-re vonatkozólag

$$|\sigma'(\alpha, \beta)| \leqq (R)\int_{(\alpha, \beta)} |f(x)|\,dx \leqq (R)\int_a^b |f(x)|\,dx,$$

és így

$$|\sigma'(a, b)| \leqq (R)\int_a^b |f(x)|\,dx,$$

függetlenül ν-től. Innen következik, hogy $\sigma(a, b)$ — a mely $|f(x)|$-re vonatkozik — konvergens és így konvergens az $f(x)$-re vonatkozó $\sigma(a, b)$ sor is, tehát $f(x)$ summabilis.

Megjegyzem, hogy az általánosított Riemann-féle integrál létezhetik a nélkül, hogy a függvény summabilis volna. Példa rá az

$$f(x) = \left(x^2 \sin\frac{1}{x^2}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

függvény, a melynek van általánosított RIEMANN-féle integrálja a $(0, b)$ intervallumban, mert

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\varepsilon}^{b}\left(2x^2\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right)dx=\lim_{\varepsilon=0}\left(b^2\sin\frac{1}{b^2}-\varepsilon^2\sin\frac{1}{\varepsilon^2}\right)=$$
$$=b^2\sin\frac{1}{b^2},$$

de a mely még sem summabilis. Hogy ezt megmutassuk, elég a

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

függvényt vizsgálnunk, mert $f(x)$ és $\varphi(x)$ egy időben summabilisek, tekintve, hogy az $x\sin\frac{1}{x^2}$ függvény véges és folytonos és

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x^2}-2\varphi(x).$$

Tudjuk, hogy ha $\varphi(x)$ summabilis, akkor $|\varphi(x)|$ is az; de ha $|\varphi(x)|$ summabilis, akkor

$$\int_0^b|\varphi(x)|\,dx=\int_{a_p}^{b}\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right|dx+\int_{a_{p+1}}^{a_p}\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right|dx+\cdots+$$
$$+\int_{a_n}^{a_{n-1}}\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right|dx+\cdots,$$

a hol

$$a_n=\left[\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

A jobboldali sor azonban divergens. Ugyanis $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ éppen az a_n helyeken változtatja jelét és így

$$\int_{a_n}^{a_{n-1}}\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right|dx=\left|\int_{a_n}^{a_{n-1}}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}\,dx\right|=\frac{1}{2}\left|\int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{1}{u}\cos u\,du\right|>$$
$$>\frac{1}{2}\,\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}\left|\int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi}\cos u\,du\right|=\frac{2}{(2n+1)\pi},$$

a $\sum \frac{1}{(2n+1)\pi}$ sorról pedig tudjuk, hogy széttartó.

Világos, hogy ha a LEBESGUE-féle integrál értelmezését éppen úgy kiterjesztenők, mint a hogy JORDAN a RIEMANN-félével tette, akkor az általánosított RIEMANN-féle integrál, a mikor létezik, mindig megegyezne az általánosított LEBESGUE-félével.

38. A LEBESGUE-féle integrál arra a kérdésre: mely függvény az, a melynek differencziálhányadosa az adott $f(x)$, általánosabb feleletet ad, mint a RIEMANN-féle.

Tegyük fel, hogy $f(x)$ véges. Ha van primitiv függvénye $F(x)$, akkor $f(x)$ mérhető, mert minden differencziálhányados megközelíthető folytonos függvényekkel, t. i.

$$f(x) = \lim_{h=0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

és $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ (h-t nem változtatván) folytonos.

Azt állítom, hogy $f(x)$-nek LEBESGUE-féle integrálja csak egy állandóban különbözik $F(x)$-től. Valóban

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x \lim_{h=0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\,dx = \lim \int_a^x \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\,dx$$

$$= \lim \frac{1}{h}\left[\int_a^x F(x+h)\,dx - \int_a^x F(x)\,dx\right]$$

$$= \lim \frac{1}{h}\left[\int_{a+h}^{x+h} F(x)\,dx - \int_a^x F(x)\,dx\right]$$

$$= \lim \left[\frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} F(x)\,dx\right]$$

és minthogy $F(x)$ folytonos,

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x)-F(a).$$

39. Az *ívhossz* elméletét is tökéletesíthetjük a LEBESGUE-féle integrál bevezetésével.

Legyenek $f(t)$, $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ a t valós változónak egyértékű folytonos függvényei $t=a$ és $t=b$ között. Az

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t)$$

egyenletek egy görbe ívet ábrázolnak, melyet a $P(x, y, z)$ pont leír, a midőn t az (a, b) intervallumot befutja. Jelöljük meg a görbén az

$$A, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, B$$

pontokat, a melyek az egymásután következő

$$t=a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, b$$

értékekhez tartoznak és tekintsük az $AP_1P_2 \ldots P_{n-1}B$ törtvonal σ hosszát. Be lehet bizonyítani, hogy ha a $t_i - t_{i-1}$ különbségek maximumát zérus felé közelítjük, akkor σ mindig közeledik egy bizonyos s értékhez, a mely azonban végtelen is lehet. Ezt az s értéket a görbe ívhosszának nevezzük.

Mikor véges a görbe ívhossza? E kérdésre JORDAN talált feleletet. Mondjuk meg azonban előbb, milyen függvényt nevez JORDAN «*à variation bornée*»-nak.

Legyen $\chi(x)$ véges függvény az (a, b) intervallumban és iktassuk a és b közé a tetszőleges

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$$

osztópontokat. Az osztópontok minden választásának megfelel egy

$$V=|\chi(a_1)-\chi(a)|+|\chi(a_2)-\chi(a_1)|+\cdots+|\chi(b)-\chi(a_{n-1})|$$

összeg. Ha a V értékek felső határa véges, a $\chi(x)$ függvényt JORDAN «*fonction à variation bornée*»-nak mondja; nevezzük mi röviden az ilyen függvényt JORDAN-félének.

Az

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

egyenletekkel jellemzett görbe ívhosszának véges voltához szükséges és elegendő, hogy $f(t)$, $\varphi(t)$ *és* $\psi(t)$ JORDAN-*féle függvények legyenek.*

Ezzel azonban nincs még megoldva az a kérdés, hogyan állítsuk elő valamely görbe ívhosszát. Ha az f, φ, ψ függvények differencziálhatók és az $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ differencziálhányadosok folytonosak vagy legalább is integrálhatók, akkor

$$s = (R)\int_a^b \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt.$$

Nincs azonban kizárva, hogy f, φ, ψ differencziálhatók ugyan, de $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ nem integrálható.

Ez esetben talán a $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ függvénynek van primitiv függvénye: $\sigma(t)$; be lehet bizonyítani, hogy ilyenkor

$$s = \sigma(b) - \sigma(a).$$

Általában, ha csak annyit tudunk, hogy x', y', z' differencziálhányadosok léteznek és hogy végesek, egyebet nem állíthatunk, mint hogy

$$_{-}\int_a^b \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt \leqq s \leqq {}_{+}\int_a^b \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt.$$

Mindezekből a legáltalánosabb esetben semmit sem használhatunk, mert egy Jordan-féle függvénynek nincs okvetetlenül mindenütt differencziálhányadosa. A Lebesgue-féle integrál bevezetése azonban a felsorolt tökéletlen tételeket mind feleslegesekké teszi.

Legyen Γ olyan görbe ív, a melynek hossza véges. Azt a t parametert, a melynek függvényében Γ egyes pontjainak koordinátáit megadjuk, választhatjuk olyan módon, hogy az

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t)$$

függvények a Lipschitz-féle feltételnek eleget tegyenek. Ezen azt értjük, hogy van oly k szám, a melyre nézve

$$|f(t_2) - f(t_1)| < k\,|t_2 - t_1|,$$
$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < k\,|t_2 - t_1|,$$
$$|\psi(t_2) - \psi(t_1)| < k\,|t_2 - t_1|.$$

Ez egyébként magában foglalja már azt is, hogy f, φ, ψ JORDAN-féle függvények.

LEBESGUE megmutatta, hogy — *ha a t parametert a leírt módon választjuk — az $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ függvények differencziálhatók, legfeljebb egy zérus mértékű halmaz pontjainak kivételével.* Ha tehát kiveszszük az (a, b) intervallumból azokat a pontokat, melyeken az f, φ vagy ψ függvények valamelyikének nincs differencziálhányadosa, a maradó E halmaz az (a, b) intervallummal egyenlő mértékű. LEBESGUE bebizonyította továbbá, hogy

$$s = (L)\int_E \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt.$$

40. Még sokkal fontosabb alkalmazása van a LEBESGUE-féle integráloknak a *trigonometrikus sorok* elméletében, a minek oka az új integrálfogalom nagyobb hajlékonyságában rejlik. Eddig is láttuk, hogy mindig kevesebb megszorítást kell tennünk, ha LEBESGUE-féle, mint ha RIEMANN-féle integrált használunk.

A mikor egy $f(x)$ függvényt FOURIER-sorban akarunk előállítani, első dolog az

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$$

együtthatók kiszámítása és ezután következik a

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sor vizsgálata. Ha $f(x)$ nem integrálható, LEBESGUE előtt a fenti formuláknak értelmük sem lehetett. Pedig van olyan függvény, mely a előállitható trigonometrikus sorban a nélkül, hogy volna RIEMANN-féle integrálja. Hogy megmutassuk azt a haladást, a melyet e téren a LEBESGUE-féle integrál lehetővé tett, a trigonometrikus sorok egész elméletét alapjától kezdve ki kellene fejtenünk. E feladatot megoldotta maga LEBESGUE *Leçons sur les séries trigonométriques* czímű könyvében.

Szűcs Adolf.

A TALAJ MELEGÉNEK PERIODUSOS INGÁSA.

(Második és befejező közlemény.)

Az ó-gyallai talaj évi periodusos melege.

A talajhőmérsékleti észlelések feldolgozása. Az ó-gyallai talaj évi meleg ingásának vizsgálatára az 1894—1908-ig terjedő, 0·0 m, 0·5 m, 1·0 m, 1·5 m és 2·0 m mélységben végzett, rendszeres észlelés anyagát dolgoztam fel. A 15 évi sorozat nem volt homogén, mert a műszerek 1900-ig a csillagda mögött elterülő mesterséges tó közelében, a csillagdától északra kb. 4 méternyire voltak elhelyezve és 1900 óta a meteorologiai obszervatoriumnak újonnan készített parkjában lettek az új műszerek leásva. Mivel 1900-ban a két észlelő helyen párhuzamos észlelések is végeztettek, az adatokat ugyanazon észlelési helyre átszámíthattam és pedig az utóbbi évek adatait a régi felállításra redukáltam. A tizenöt éves közepes hőmérsékleteket először többnyire az évkönyvekben közölt adatokból képeztem. Ezen átlagokkal számított amplitudóknak logarithmusos dekrementumai és fáziselmaradásai között azonban lényeges eltérések mutatkoztak úgy, hogy az adatok helyességét kétségbe kellett vonni. Ismerve azonban az akkori észlelőnek — MARCZELL GYÖRGY úrnak — lelkiismeretességét, nem volt okom az észlelések megbizhatóságában kételkedni, úgy, hogy az eltérések okát a műszerek korrekczióinak kellett tulajdonítani.

Utólagosan értesültem is, hogy az évkönyvek adatai a nyers leolvasásokra vonatkoznak, mert a hőmérők korrekcziói ismeretlenek voltak, sőt később sem sikerült azokat meghatározni.

Ezután ismét hozzáfogtam az adatok feldolgozásához, most már többnyire az eredeti feljegyzések alapján, hogy az esetleges sajtóhibákat is elkerüljem és a tizenöt évi átlagokat egy, a meteorologiában szokatlan módszer alkalmazásával korrigáltam.

Ugyanis az ó-gyallai adatokat összehasonlítottam az Ó-Gyallával csaknem ugyanazon szélesség alatt levő *müncheni* talajhőmérsékletekkel azon feltevés következtében, hogy a két észlelő helyre sugárzott melegmennyiség közel ugyanaz.[1] Megjegyzem, hogy az adatokat közvetlenül nem lehetett összehasonlítani, mert a müncheni adatok nem vonatkoznak ugyanazon mélységekre, mint az ó-gyallaiak és ezenkívül az ó-gyallai adatok ismeretlen műszerhibákat is tartalmaztak.[2] A müncheni átlagokat tehát először ugyanazon mélységekre, mint az ó-gyallaiak, átszámítottam. Ezután pedig mind a két állomáson a hőmérséklet évi ingását harmonikus analysissel sinus sorba fejtettem, vagyis az évi ingást regulárissá tettem. A reguláris ingáshoz tartozó napi hőmérsékleti adatok közötti különbségeket képeztem és ezeket az eltéréseket aztán alkalmaztam a müncheni és ó-gyallai nem reguláris hőmérsékletekre úgy, hogy az ó-gyallai adatokat ilyformán korrigálni lehetett.

Az eredményeket a müncheni adatokhoz hasonlóan 10 napos átlagokban az alábbi táblázatban állítottam össze.

Ó-gyallai talajhőmérsékleti adatok 1894—1908-i időközből.

Idő		Tiz napos átlagok a különböző mélységekben					Középhőmérséklet 0—2 m. rétegben	1 cm.-re vonatkoztatott temp. grádiens	1 cm²-en átáramlott meleg, kis kaloriákban
		0·0 m.	0·5 m.	1·0 m.	1·5 m.	2·0 m.			
Január	1.	— 0·20	2·42	3·88	5·91	8·22	4·05	—0·0636	—15·37
	11.	— 0·32	2·30	3·79	5·67	7·82	3·85	623	15·06
	21.	+ 0·29	2·85	4·08	5·57	7·30	4·02	560	13·55
	31.	1·00	2·99	4·27	5·69	7·10	4·21	479	11·59
Február	10.	1·92	3·25	4·53	5·86	7·13	4·54	392	9·48
	20.	2·64	3·85	5·05	6·35	7·33	5·04	359	8·69

[1] Ó-Gyalla szélessége 47° 52′, Münchené 48° 9′.

[2] Dr. K. SINGER: «Die Bodentemperaturen an der k. Sternwarte bei München». Deutsches Meteor. Jahrbuch 1889.

Idő		Tiz napos átlagok a különböző mélységekben 0·0 m.	0·5 m.	1·0 m.	1·5 m.	2·0 m.	Középhőmérséklet 0—2 m. rétegben	1 cm.-re vonatkoztatott temp. grádiens	1 cm²-en átáramlott meleg, kis kaloriákban
Márczius	2.	3·70	4·57	5·41	6·73	7·55	5·59	284	6·87
	12.	4·70	5·07	5·83	7·02	7·85	6·09	214	5·18
	22.	6·45	6·57	6·98	7·47	8·02	7·10	100	2·42
Április	1.	7·93	7·25	7·50	7·66	8·30	7·73	+0·0025	+0·60
	11.	9·54	7·90	7·69	7·96	8·74	8·37	147	3·55
	21.	11·26	9·45	8·89	8·71	9·02	9·47	253	6·12
Május	1.	13·07	10·70	9·55	9·23	9·51	10·41	377	9·12
	11.	14·54	12·03	10·53	9·72	9·69	11·30	465	11·25
	21.	16·06	13·53	11·72	10·45	10·00	12·35	539	13·04
	31.	18·09	14·96	12·86	11·06	10·49	13·49	670	16·20
Junius	10.	19·65	16·39	14·03	11·91	10·91	14·58	743	17·96
	20.	21·08	17·87	15·06	12·78	11·48	15·65	798	19·29
	30.	21·78	18·87	16·12	13·74	11·98	16·50	782	18·91
Julius	10.	22·03	19·78	17·05	14·56	12·63	17·21	720	17·41
	20.	22·20	20·26	17·83	15·43	13·25	17·79	660	15·96
	30.	22·00	20·30	18·28	16·13	13·96	18·13	584	14·13
Augusztus	9.	21·39	20·22	18·41	16·70	14·61	18·27	475	11·49
	19.	20·30	19·69	18·25	16·87	15·27	18·08	352	8·52
	29.	19·07	18·90	18·06	16·60	15·46	17·64	224	5·42
Szeptember	8.	17·38	17·17	16·58	15·80	15·29	16·44	143	3·45
	18.	15·26	15·19	14·86	14·68	14·52	14·90	054	1·31
	28.	13·50	14·60	14·42	14·24	14·00	14·15	—0·0075	— 1·81
Október	8.	10·56	12·10	13·22	12·80	12·55	12·25	235	5·68
	18.	7·93	9·75	11·21	11·89	11·50	10·46	360	8·71
	28.	5·85	7·63	9·62	10·95	11·30	9·07	470	11·37
November	7.	3·70	5·86	8·27	10·29	11·00	7·82	600	14·51
	17.	2·39	4·41	7·23	9·65	10·90	6·92	622	15·04
	27.	1·03	3·76	6·28	8·70	10·45	6·10	665	16·08
Deczember	7.	0·65	2·90	5·48	7·68	9·60	5·26	688	16·63
	17.	— 0·10	2·60	4·52	6·59	8·83	4·49	684	16·54
	27.	— 0·13	2·51	4·00	6·12	8·34	4·17	643	15·54
Évi közép		10·22	10·28	10·35	10·46	10·58	10·35	+0·0471	+11·39
								—0·0457	—11·06

Megjegyzem, hogy az ó-gyallai 0·0 m mélységű hőmérő adatai külön vizsgálatot igényeltek, mert a hőmérő gömbje a régi helyen vékonyan fedve volt földdel, az új felállításban azonban a hőmérő gömbje csak félig volt a talajba ásva. A táblázatban foglalt adatok árnyékolt hőmérsékleti adatokat jelentenek.

Ezen táblázat segítségével meghatároztam az ó-gyallai talaj thermometrikus hővezető koefficziensét és az évi periodusos melegmennyiséget. A számításnál lehetőleg minden módszert felhasználtam, hogy a korrigált adatok közelítő értékéről meggyőződjek.

1. A talaj thermometrikus hővezető koefficziensének meghatározása. A talaj hőmérsékletének reguláris évi ingását a külömböző mélységekben, a harmonikus analysissel,

$$\vartheta = \Theta + a_1 \sin\left(A_1 + \frac{2\pi}{T} t\right) + a_2 \sin\left(A_2 + \frac{2\pi}{T} t\right) + \ldots$$

sémával állíthatjuk elő. Az erre vonatkozó középhőmérsékletek, amplitudók és fázisok, melyeket a félhónapos átlagokból (24 adatból) számítottam, a következő táblázatban foglaltatnak:

Mélység m.	Θ	a_1	a_2	A_1	A_2
0·0	10·22	11·20	1·38	258·4	20·2
0·5	10·28	9·00	1·30	246·0	0·8
1·0	10·35	7·14	1·20	235·8	331·6
1·5	10·46	5·68	1·11	222·2	294·4
2·0	10·58	4·52	1·00	206·6	251·1

Ezen adatokból kitűnik, hogy a középhőmérséklet a mélységgel keveset növekszik, a hullámok amplitudói a mélységgel folytonosan csökkennek és a féléves hullámok amplitudói igen kicsinyek az éves hullámok amplitudóihoz viszonyítva úgy, hogy a féléves hullámokat némi elhanyagolással figyelmen kívül hagyhatjuk.

Az éves hullámok logarithmusos dekrementumai és fáziselmaradásai az egymásra következő talajrétegek között következők:

Mélység:	0·0 m	0·5 m	1·0 m	1·5 m	2·0 m
$\lg \frac{a_1}{a_2}$:	0·2181	0·2315	0·2287	0·2295	
r:	12°.4	10°.2	13°.6	15°.6	

Ebből az $x = 1$ m mélységkülönbségre vonatkoztatott átlagos

$$\lg \frac{a_1}{a_2} = 0{\cdot}4539 \text{ és } r = 25°.9 = 0{\cdot}4520,$$ [1]

vagyis az amplitudók log. dekrementuma és a fáziselmaradások között a különbség elenyészően kicsiny úgy, hogy a talaj thermometrikus hővezető koefficziensét, K-t az (1) és (2) alattiakkal kiszámíthatjuk.

Tehát

$$K = 0{\cdot}290 \frac{\text{cm}^2}{\text{min.}}, \ldots (\alpha)$$

illetve

$$K = 0{\cdot}292 \frac{\text{cm}^2}{\text{min.}}, \ldots (\beta).$$

Hogy K-t a hőmérséklet szélső értékeiből is meghatározhassam, kiírtam a hőmérséklet maximumát és minimumát a különböző mélységekben, melyekből képeztem a hőmérséklet változékonyságát. Ugyanis

	0·0 m	0·5 m	1·0 m	1·5 m	2·0 m
Max:	22·30	20·42	18·36	16·83	15·60
Min:	—0·40	2·44	3·78	5·47	6·80
$\Delta\theta$:	22·70	17·98	14·58	11·36	8·80

$$\lg \frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2}: \quad 0{\cdot}2221 \quad 0{\cdot}2210 \quad 0{\cdot}2499 \quad 0{\cdot}2556$$

Ebből az $x = 1$ m mélységkülönbségre vonatkoztatott átlag

$$\lg\left(\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2}\right) = 0{\cdot}4743.$$

[1] 1° = 0·01745 ívhossz.

Ennélfogva a (3) alatti szerint

$$K = 0{\cdot}266 \frac{cm^2}{min.} \ldots (\gamma),$$

Az előzőkből tudjuk, hogy a fáziselmaradást — közelítően — a középhőmérsékletek elmaradásaiból is számíthatjuk. Ezen czélból kiirtam azokat a naptári napokat, melyekben a különböző mélységekben a hőmérséklet az átlagokat leginkább megközelítették. Ugyanis

	0·0 m	0·5 m	1·0 m	1·5 m	2·0 m
	IV. 20.	V. 4.	V. 15.	V. 31.	VI. 14.
Jan. 1-től	110	124	135	151	166

R: 14_n 11_n 16_n 15_n.

Ebből az 1 m mélységkülönbségre vonatkoztatott fáziselmaradás

$$R = 28_n = 27^\circ{.}58\,[1] = 0{\cdot}4813 \text{ ívh.}$$

Ennélfogva a (4) alatti szerint

$$K = 0{\cdot}259 \frac{cm^2}{min.} \ldots (\delta).$$

Az (5) alatti szerint a K-t a hőmérsékleti hullám középterjedési sebességéből számíthatjuk. A hullám középterjedési sebességét pedig a maximális és minimális hőmérsékletek terjedési sebességének számtani közepe — némi elhanyagolással — megközelíti úgy, hogy elegendő volt a szélső hőmérsékleteknek átlagos terjedési sebességét meghatározni. Ezen czélból kiirtam a hőmérsékletek szélső értékeinek megjelenési ideit a különböző mélységekben. Ezek következők:

	0·0 m	0·5 m	1·0 m	1·5 m	2·0 m
Max.	VII. 16.	VII. 28.	VIII. 9.	VIII. 22.	IX. 4.
	197_n	209_n	221_n	234_n	247_n
Min.	I. 17.	I. 30.	II. 13.	III. 1.	III. 16.
	17_n	30_n	44_n	60_n	75_n

[1] $1_n = 0^\circ{.}985$.

Ebből az 1 m mélységkülönbségre vonatkoztatott szélső hőmérsékleteknek közepes elmaradásai: maximumoknál 25_n és minimumoknál 29_n; vagyis a maximális hőmérsékletnek terjedési sebessége egy nap alatt 4·0 cm és a minimális hőmérsékleté 3·4 cm.

Ha most még figyelembe vesszük, hogy a hótakaró nélküli fagyott talaj hővezető képessége nagyobb, mint a nem fagyott talajé, akkor valószinűnek tarthatjuk, hogy a hótakaró a hőmérséklet terjedését a talajban jelentékenyen is csökkentheti.[1]

A szélső hőmérsékletekből számított közepes hőmérsékleti sebesség lesz

$$V = 0{\cdot}00257 \frac{\text{cm}}{\text{min.}}.$$

Ennélfogva az (5) alatti szerint

$$K = 0{\cdot}276 \frac{\text{cm}^2}{\text{min.}} \ldots (\varepsilon).$$

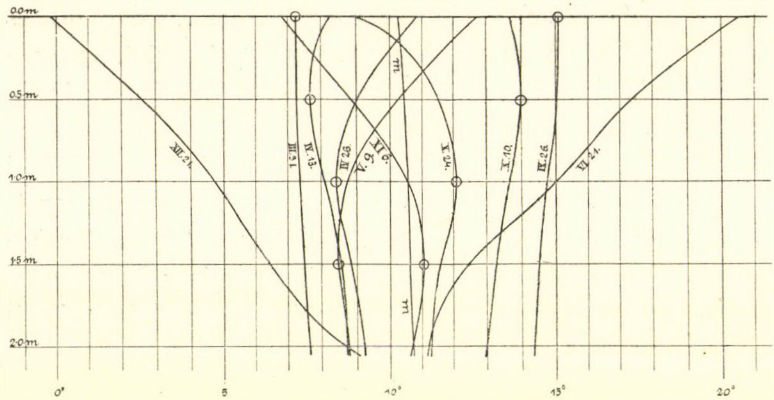
A következőkben bemutatom a geometriai módszer alkalmazását. Ezen czélból az ó-gyallai tautochronok közül kikerestem azokat, melyek a különböző mélységű talajrétegekre a merőleges helyzetet leginkább megközelítik.

Ezeket a tautochronokat jellemző hőmérsékletek a következő táblázatban foglaltatnak, melyek alapján készült a 8. ábra. Az ábrában az idő feltüntetésén kívül a merőleges helyzetet kis körrel is megjeleltem.

---

[1] Észlelések hiányában ezen irányban kvantitativ meghatározásokat nem végezhettem. A pawlowski észlelések szerint a fagyott talaj thermometrikus hővezető kœfficziense $0{\cdot}56 \frac{\text{cm}^2}{\text{min.}}$, a nem fagyotté $0{\cdot}32 \frac{\text{cm}^2}{\text{min.}}$.

Ógyallai tautochronok.



8. ábra.

Idő	0·0 m	0·5 m	1·0 m	1·0 m	2·0 m
III. 31.	7·28	7·30	7·38	7·52	7·68
IV. 13.	8·28	7·70	8·10	8·53	8·75
IV. 26.	10·84	9·00	8·45	8·60	9·00
V. 9.	12·78	10·50	8·78	8·66	9·16
IX. 26.	15·10	15·07	14·75	14·52	14·35
X. 10.	13·68	14·00	13·66	13·30	13·00
X. 24.	8·98	11·55	12·12	11·60	11·30
XI. 6.	6·84	8·75	10·64	11·08	10·70.

Ezen adatokból a (7) szerint mind a két csoportból $p = 0·5$ m mélységkülönbség szerint a K középértéke:

$$K = 0·294 \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{min.}} \ldots (\eta).$$

Hogy a módszert a tíznapos átlagokra és két méternél nagyobb mélységekben is sikerrel alkalmazhatjuk, kitűnik az a müncheni adatokból. Ugyanis a Singer-féle 25 éves müncheni talajhőmérsékletek tíznapos átlagaiból szerkesztett tautochronok közül kikerestem a különböző mélységű rétegekre közel merőleges tautochronokat, melyeknek jellemző adatai az alábbi táblázatban foglaltatnak:

Idő	1·29 m	2·46 m	3·63 m	4·80 m	5·97 m
IV. 11.	5·29	5·53	6·54	7·51	8·24
V. 11.	8·11	6·84	6·86	7·38	7·94
V. 31.	10·28	8·10	7·43	7·57	7·92
VI. 20.	12·19	9·54	8·24	7·95	8·03
X. 8.	13·03	12·73	11·71	10·73	9·88
X. 28.	11·19	11·98	11·56	10·88	10·08
XI. 27.	7·86	10·18	10·78	10·66	10·18
XII. 27.	5·64	8·27	9·62	10·04	9·98.

Ez adatoknak megfelelő tautochronok 9. ábrában vannak feltüntetve az ó-gyallai tautochronokhoz hasonlóan. A görbék pontozott része extrapolaczióval közelítően vannak megállapítva.

Ha ezen adatokkal 1·17 m mélységkülönbségekben a talajhővezető koefficziensét kiszámítjuk a (7) alattiakkal, akkor középértékben a müncheni talaj thermometrikus hővezető koefficziensének értéke

$$K = 0{\cdot}504 \frac{\text{cm}^2}{\text{min.}},$$

mely a Singer által más módszerrel meghatározott értékkel — 0·496 — igen jól egyezik.

Láttuk, hogy az ó-gyallai talajnak thermometrikus hővezető koeffieziense a különböző módszerekkel meghatározva csak lényegtelen eltérést mutat úgy, hogy a K valódi értékének a hat ($\alpha - \eta$) különböző eljárással számitolt eredmények átlagát elfogadhatjuk.

E szerint az ó-gyallai talajnál

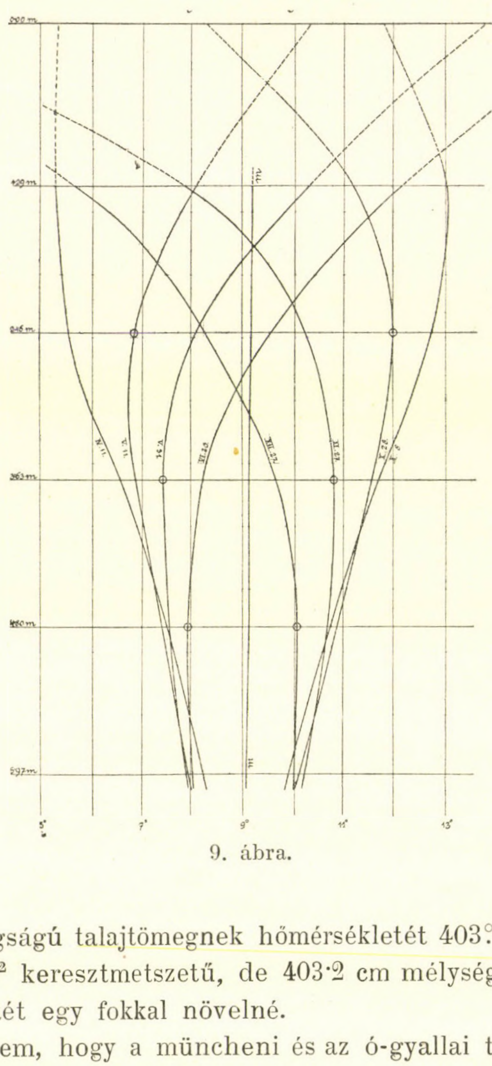
$$K = 0{\cdot}280 \frac{\text{cm}^2}{\text{min.}},$$

vagy

$$K = 403{\cdot}2 \frac{\text{cm}^2}{d}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az ó-gyallai talajnak egy cm^2-nyi felületén naponta átáramlott melegmennyiség, ha a temperatura gradiens 1° C. marad, az 1 cm^2 keresztmetszetű és

Müncheni tautochronok.



9. ábra.

1 cm vastagságú talajtömegnek hőmérsékletét 403°2 C.-al, vagy pedig 1 cm^2 keresztmetszetű, de 403·2 cm mélységű talajhasáb hőmérsékletét egy fokkal növelné.

Megjegyzem, hogy a müncheni és az ó-gyallai talajnak ezen thermometrikus hővezető koefficziensei szerint a hőmérséklet terjedési sebessége naponkint átlagosan a müncheni talajban 4·97 cm-t és az ó-gyallai talajban 3·73 cm-t tesz.

2. A talaj periodusos melegmennyiségének meghatározása. Mivel az ógyallai obszervatoriumon a talaj speczifikus hőkapaczitásának meghatározására kalorimetrikus mérések nem történtek, a talaj fajlagos hőkapaczitásának közelítő értékét a müncheni adatokból voltam kénytelen megállapitani. Ezen czélból meg kellett határozni a müncheni talajnak is az évi melegét úgy, hogy a következőkben bemutatom a két észlelőhely periodusos melegének meghatározását.

Előbb azonban állapitsuk meg azt a mélységet, meddig a meleg a periodus alatt a talajba áramlik. Ezt a mélységet (H), mivel észlelések nincsenek, számítással lehet meghatározni a a következő feltételekből: Feltesszük, 1. hogy a periodusos talajhőmérséklet mindenütt

$$\lg \frac{a_{x_1}}{a_{x_2}} = p\sqrt{\frac{\pi}{KT}}.$$

egyenletnek eleget tesz, 2. hogy legyen az a mélység, ($x = H$) melyben a melegnek évi ingása megszűnik ott, hol a hőmérséklet évi ingása 0·01 C° tesz. Ekkor az ógyallai talajban, a fenti képlet szerint

$$H_ó = 15{\cdot}2 \text{ m}$$

az a mélység, meddig a meleg az év alatt a talajba hatol.

A müncheni talajban ez a mélység SINGER szerint

$$H_m = 21{\cdot}6 \text{ m}$$

Mivel a müncheni talajhőmérsékleti észlelések csak 1·29 m mélységnél kezdődnek és az évi melegmennyiség meghatározásánál a felszíni talajhőmérséklet amplitudójára is szükség van, ennélfogva a fenti adatokból is képlettel kiszámithattam a felszíni amplitudót a_0-t, melynek értéke $a_0 = 9{\cdot}44°$

Ezek után számitsuk ki az ógyallai és müncheni talajban évenkint feltározódott meleget a (8) alattival.

Ugyanis

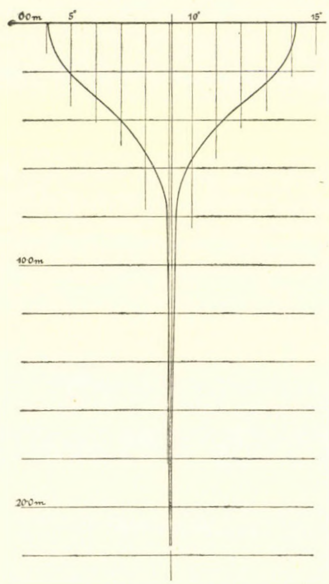
Ó-gyallai talajban	Müncheni talajban
$a_0 = 11{\cdot}20, \quad K = 0{\cdot}280 \frac{\text{cm}^2}{\text{min.}}$	$a_0 = 9{\cdot}44, \quad K = 0{\cdot}496 \frac{\text{cm}^2}{\text{min.}}$
$Q_ó = 34{\cdot}3\omega_0 \cdots (a)$	$Q_m = 38{\cdot}5\omega_m \cdots (a')$.

hol ω_0, ω_m egy m^3 talaj fajlagos hőkapaczitását jelenti.

Hogy a maximális évi talajmeleget a (9) alattival is meghatározzam, meg kellett szerkeszteni a főtautochronokat, vagyis azokat a tautochronokat, melyek a talajfelszinére merőlegesek és 15·2 m, illetve 21·6 m mélységben találkoznak.

Először megszerkesztettem a müncheni főtautochronokat, mert ott az észlelések 6 m mélységre terjedtek úgy, hogy a szimmetriát szigorúan megállapíthattam. A két főtautochron az április 1. és szeptember 28.-i tautochron, melyeket 6 m-ig a hőmérsékleti észlelésekből lehetett szerkeszteni. Ezután a 4·80 m és 5·97 m mélységekben a főtautochronok egymástóli távolságait feleztem. A felezési pontokon át merőleg egyenest húztam, mely a talaj felszinére merőleges és igen csekély eltéréssel az április 1. és szeptember 28. közötti középhőmérséklet (körülbelül 9° C.) pontjába esett; vagyis ezt az egyenest a főtautachron által képezett diagramm szimmetria tengelyének tekinthetjük. A szimmetria tengelyt 21·6 m-ig meghosszabbítottam, hol aztán a két főtautochronnak a szimmetria tengelyben kell találkoznia úgy, hogy a két görbének megszerkesztése 6 m mélységtől, nehézséget már nem okozott (10 ábra).

Müncheni főtautochronok.



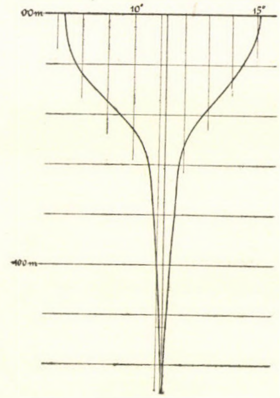
10. ábra.

Megismerkedvén a főtautochronok szimmetrikus tulajdonságaival könnyű volt az ó-gyallai főtautochronokat szerkeszteni, bár az észlelések csak 2 m mélységig terjedtek. Az ó-gyallai két főtautochron a márczius 31-i és a szeptember 26-i tautochronok. Ezeket 2 m-ig az adatokból megszerkesztettem, azután a két görbének távolságát 2 m. mélységben feleztem, mely ponton keresztül a felületre merőlegest szerkesztettem, mely csekély hibával az márczius 31. és szeptember 26 közötti közéhőmérséklet pontjába esett (kb. 11° C.). A főtautochronok diagrammjainak ezen szimmetria tengelyét 15·2 m-ig meghosszabbítottam úgy, hogy a főtautochronoknak 2 m mélységen aluli részét már könynyen lehetett szerkeszteni (11. ábra). Ezután a főtautochronok által határolt területeket planimeterrel kimértem. A mérési eredmények következők: Az ó-gyallai főtautoehronterület $F_0 = 33{\cdot}8$ és a müncheni $F_m = 41{\cdot}8$ úgy hogy a (9) alatti szerint

$$Q_ó = 33{\cdot}8\omega_o \ldots (b),$$
$$Q_m = 41{\cdot}8\omega_m \ldots (b').$$

Interpolaczioval a főtautochronokból megállapithatjuk az egész rétegnek, a felszíni inversiók napjára érvényes középtalajhőmérsékleteit is. Az észlelések és ábrák felhasználásával találtam, hogy a közép talajhőmérsékletek e két talajban következők:

Ógyallai főtautochronok.



11. ábra.

Ó-Gyalla	München
III. 31. $\theta_1 = 10{^\circ}09$	IV. 1. $\theta_1 = 8{\cdot}27$
IX. 26. $\theta_2 = 12{\cdot}33$	IX. 26. $\theta_2 = 10{\cdot}22$.

Ennélfogva az évi melegmennyiség a (10) alatti szerint

$$Q_ó = 34{\cdot}0\omega_ó \ldots (c), \qquad Q_m = 42{\cdot}1\omega_m \ldots (c').$$

Mivel a három módon meghatározott évi periodusos melegmennyiség egymástól alig különbözik, ennélfogva az (a), (b) és (c) illetve (a') (b') és (c') alattiak számtani közepe megfelel a két talajban az év folyamán feltározodott összes melegnek, vagyis

az ó-gyallai talaj évi periodusos melege $Q_0 = 34{\cdot}0\omega_0$,
a müncheni « « « « $Q_m = 40{\cdot}8\omega_m$.

BEZOLD szerint a müncheni talaj fajlagos hőkapaczitása m^3-enkint klgr kalóriákban 500, vagyis $\omega_m = 500$ úgy, hogy a melegmennyiség, mely münchenben egy év alatt az m^2 átmetszetű és 21·6 m mélységű talajhasábban feltározódik 20400 kg kaloria.

Mivel az ó-gyallai speczifikus talaj hőkapaczitást nem ismerjük és a két észlelőhelynek geografiai szélessége lényegtelenül különbözik, valamint a felhőzeti és csapadékviszonyok között sincs lényeges különbség, felvettem, hogy az ó-gyallai és a müncheni talajnak évi melege ugyanaz, vagyis

$$34{\cdot}0\omega_0 = 40{\cdot}8.500$$

Ebből

$$\omega_0 = \frac{40{\cdot}8}{34{\cdot}0} 500 = 600.$$

Vagy kifejezve cm^3-ben és gr kaloriákban,

$$\omega_0 = 0{\cdot}60.$$

Tehát a periodusos melegmennyiség mely az ó-gyallai talajban egy év alatt feltározódik, vagyis az a meleg, mely a felü let egy cm^2 keresztül egy év alatt átáramlik

$$Q_0 = 2040 \text{ (cm, } g\text{-kal)}.$$

Ismervén az ó-gyallai talajnak speczifikus hőkapaczitását, meghatározhatjuk a talaj kalorimetrikus hővezető koeficziensét (k)-t, mert

$$k = c\rho K = \omega K.$$

Az adatok helyettesitése után nyerjük, hogy perczenkint

$$k = 0{\cdot}168 \text{ (cm. gcal)},$$

vagy naponkint

$$k = 241{\cdot}9 \text{ (cm. gcal)}.$$

Ez tehát az a melegmennyiség, grcal.-ban kifejezve, mely az ógyallai talaj egy cm^3-nyi tömegén egy nap alatt átáramlik, miközben a temperatura gradiens állandóan 1° C marad.

3. Az ó-gyallai talaj melegmennyiségének évi ingása. Ha a talajhőmérsékleti adatokból a temperatura gradienst az évnek minden napjára meghatározzuk, akkor a talajba áramlott, illetve a talajból kiáramlott melegmennyiséget az év bármely napjára kiszámíthatjuk.

Mivel a periodusos talajhőmérsékletek naponkint és a mélységgel is változnak és pedig úgy, hogy a hőmérsékleti különbségek annál kisebbek ugyanazon mélységkülönbségekben, minél lejebb hatolunk a talajba, a temperatura gradienst γ-t csak akkor határozhatjuk meg, ha a tautochronok görbületeit is figyelembe vesszük, vagy ha a γ-t grafikailag meghatározzuk. A tautochronokból számított és grafikailag a felületre megállapított, egy cm. mélységkülönbségre vonatkoztatott temperatura gradiensek az évi középben igen szépen egyeztek:

	Beáramláskor	Kiáramláskor
tautch. számított:	+ 0·0471	— 0·0457
grafik. számított:	+ 0·0470	— 0·0454

Az évi menetben azonban némi eltérés mutatkozott, a mi a grafikai módszer természetében rejlik. Az 1 cm.-re vonatkoztatott temperatura gradiensek az első táblázat 7. rovatában foglaltatnak. A gradiensek előjelei a melegáramlás irányára vonatkoznak. Ugyanis a pozitiv előjel azt jelenti, hogy a meleg a felszinről a talajba áramlik és a negativ előjel azt jelenti, hogy a meleg a talajból a felszinre áramlik.

A táblázat utolsó rovata a γk sorozatot tartalmazza, mely a felületegységen (cm^2) egy nap alatt átáramlott meleget g. caloriákban foglalja magában. Ezen adatokkal ábrázoltam a melegmennyiség évi ingását a 12. ábrában.

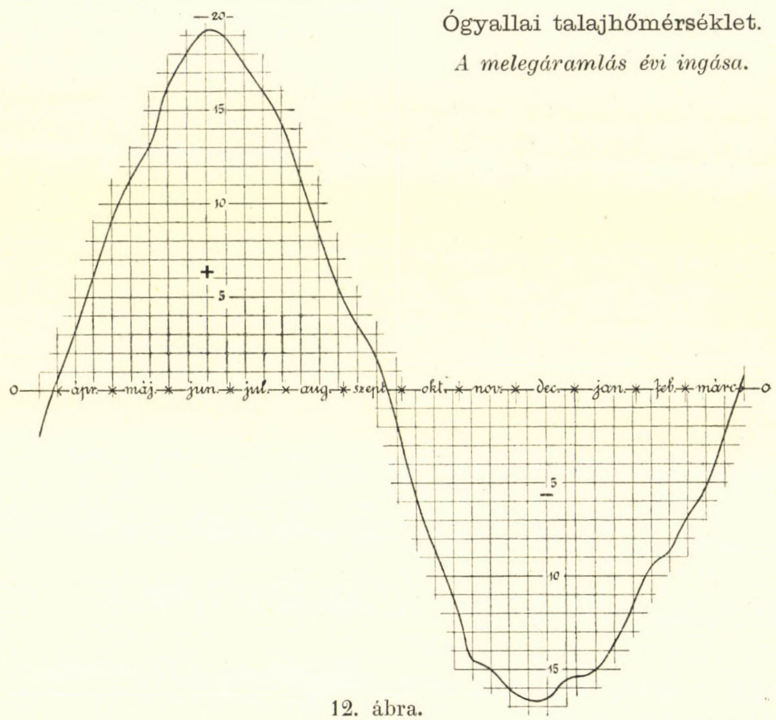
A görbe abszcissza tengelye azon időpontokat foglalja magában, melyekben a melegátadás melegfelvételbe és melegfelvétel melegátadásba csap át, vagyis magába foglalja a talajfelszini inversióknak időpontjait.

Ennélfogva a görbének az abszcissza-tengely fölötti része az év folyamán a talajba áramlott meleget és az abszcissza-tengely alatti része az év folyamán a talajból kiáramlott meleget tünteti fel úgy, hogy a két területnek tulajdonképen teljesen egyenlőnek kellene lenni, mert a beáramlott és kiáramlott melegmennyiségnek egyezni kell.

Az évi periodusos melegingás görbéje nem szigoruan szimetrikus, mert meglátszanak az időjárással kapcsolatos té-

Ógyallai talajhőmérséklet.

A melegáramlás évi ingása.



12. ábra.

nyezők befolyása az insolaczióra. A talajba áramlott meleg a tavaszi melegfölvétel kezdetétől (III. 31) a nyári szolszticziumideig (VI. 20), hol maximumát éri el, folytonosan növekszik, azután pedig folytonosan csökken, míg IX. 26-án már a beáramlás megszünik és szeptember 26. után a meleg a talajból kiáramlik. A kiáramlás november végén, illetve deczember elején maximumát éri el, azután pedig folytonosan kevesebb meleg áramlik ki a talajból, míg márczius 31-ére már az összes meleg kiáramlott. A talajból kiáramlott meleg maximuma tehát megelőzte a téli szolszticziumot (XII. 21), minek okát — azt hiszem — a talajt borító hóréteg hatásában kell keresni, mert a hó a talaj melegének kiáramlását akadályozza.

Érdekes megjegyezni, hogy míg a talajmelegnek maximuma junius 20-ika körül van, addig a talajhőmérsékletnek maximuma augusztus elejére esik és míg a talajmelegnek minimuma deczember elején mutatkozik, addig a hőmérsékletnek minimuma január derekára esik, vagyis az elmélet által megszabott 45 napi késést a talajmelegnek és a talajhőmérsékletnek évi ingása között a valóságban is bizonyos közelítéssel megtaláljuk.

A talajhőmérséklet az ekvinokciumok körül változik a leggyorsabban és a szolszticziumok körül a leglassabban. Általában a talajhőmérsékletnek időbeni változása tavaszszal és őszszel jelentékenyen nagyobb, mint nyáron és télen, vagyis a talaj évszakos melegváltozása az inszolaczió változását követi. Így a táblázat adatai szerint a két méteres talajrétegben a középhőmérséklet-változás az egymásra következő 10 napos időközökben, évszakonkint következő :

Tél	Tavasz	Nyár	Ősz
—0·15	+0·85	+0·44	—1·29

Hol a negativ jel azt jelenti, hogy minden 10 nap átlagos értéke alacsonyabb az előző 10 napi átlagánál és pozitiv jel azt jelenti, hogy minden 10 nap átlagos értéke nagyobb az előző 10 napi átlagnál.

Ezen adatok összehasonlításából az is kitünik, hogy a talaj lehülése gyorsabb lefolyású, mint fölmelegedése és hogy a téli hőmérséklet-változás a hóréteg hatása következtében is jóval lassúbb, mint a nyári hőmérséklet-változás.

A melegáramlás görbéje (12. ábra) feltünő rendellenességet mutat májusban, nyáron, szeptemberben, télen, február végén és márczius elején. Ezeket a rendellenességeket, azt hiszem, az időjárás következményeinek lehet tekinteni. Ugyanis a májusi meleghiány a levegő erős lehülésével (májusi fagyok), a nyári meleghiány az eső maximumával, a szeptemberi melegtöbblet a derült, száraz időjárással, a téli lassú melegingás a hóolvadással függ össze.

Az ógyallai talajban egy év alatt kicserélődött melegmennyiséget a táblázat 8. rovatával is kiszámithatjuk, ha a talajba beáramlott és a talajból kiáramlott melegnek egy napi középértékét (+ 11·39 és — 11·06) a melegfelvétel (179 *n*), illetve a melegátadás (186 *n*) tartamával szorozzuk. Ekkor találjuk, hogy az ógyallai talajba cm^2-kint egy év alatt 2040 g. kalória meleg beáramlik és 2057 g. kal. a talajból kiáramlik. A talajba áramlott melegmennyiség teljesen egyezik az előzőkben számított azon melegmennyiséggel, mely Ógyallán a 15·2 m mélységű talajrétegben egy év alatt kicserélődik. Azonban a kiáramlott melegmennyiség az észlelés szerint 17 kalóriával több. Ezt a melegtöbbletet pedig mint valós értéket kell elfogadni, mert az észlelések szerint a talaj középhőmérséklete a mélységgel folytonosan keveset növekszik; a mi azt jelenti, hogy az év folyamán a talajrétegen át oly meleg is kiáramlik, mely a talajmeleg évi ingásában részt nem vesz.

Ez a melegtöbblet valószinüleg, részint a talajmelegnek szekuláris változásából, részint a Föld belső melegének állandó kiáramlásából keletkezik.

Ha a 17 g. kalória évi talajmeleg-többletet az egész Földre érvényesnek tekintjük, akkor közelitő számitással megállapithatjuk, hogy hány kalória esik ebből a Föld belső melegének csökkenésére és hány kalória esik a talajmeleg szekuláris változására.

Mivel a 17 g. kalória a 15·2 m mélységű talajréteg évi periodusos melegének körülbelül 0·88%-t teszi és ezen talajrétegnek a főtantochronokkal megállapitott középhőmérséklete körülbelül 11° C, ennélfogva a 17 kalória meleg a talajréteg évi középhőmérsékletét körülbelül 0·0968° C-al megváltoztatná. E szerint az egész Földnek 15·2 m mélységű rétege egy év alatt 0·0968 cdM melegtöbbletet kapna a Föld belső melegéből, vagyis a dM réteg évi melegtöbblete egyenlő az egész

Földnek egy évi közép melegveszteségével, melyet — $cM\theta$-val fejezhetjük ki, hol M a Földnek középtömegét, c közép fajhőjét és θ középhőmérsékletnek csökkenését jelenti.

Ennélfogva írhatjuk, hogy

$$0{\cdot}0968\ cdM = -\ cM\theta.$$

Ebből

$$\theta = -\ 0{\cdot}0968 . \frac{dM}{M},$$

vagy

$$\theta = -\ 0{\cdot}0968 . 3 . \frac{dR}{R},$$

hol R a Föld sugarát és dR a réteg vastagságát jelenti. Ha $R = 6 . 10^6$ m és $dR = 15$ m, akkor

$$\theta = -\ 70 . 10^{-8}\ C°.$$

Ha tehát a Föld felületén cm^2-kint évenkint 17 kalóriával több meleg áramlanék ki, mint be és ezt a melegtöbbletet csupán a Föld belső melege csökkenésének tulajdonítjuk, akkor a Föld középhőmérséklete jelenleg évenkint $70 . 10^{-8}$ C°-al, azaz $1\frac{1}{2}$ millió év alatt 1 C°-al csökken.

Hergesell számításai szerint ez a szám

$$\theta = -\ 42 . 10^{-8}\ C°,$$

vagyis a Föld középhőmérséklete jelenleg $2\frac{1}{2}$ millió év alatt csökken 1 C°-al.[1]

Hergesell ezt a számot a Föld középkiterjedési együtthatójának, középrugalmassági modulusának, közép kontrakczió-kœfficziensének és a königsbergi talajhőmérsékletekből számított thermometrikus hővezető-kœfficziensnek tekintetbevételével állapította meg.

A két adat rendje teljesen egyezik, úgy, hogy durva közelítéssel azt mondhatjuk, hogy a 17. kalória melegtöbblet csupán

[1] H. Hergesell: «Die Abkühlung der Erde und die gebirgsbildenden Kräfte.» Beiträge zur Geophysik Zft. f. physik. Erdkunde. Herausgegeben von Prof. Dr. G. Gerland. II. Band. 153—184.

a Föld belső melegének veszteségéből származott. Ha azonban a Hergesell-féle állandót tekintjük általános érvényűnek, akkor a 17 kalória melegtöbbletnek csak 70 : 42 = 1·7 részét, azaz 17 : 1·7 = 10 kalóriát számithatunk a Föld belső melegveszteségére; a visszamaradt 7 kalóriát pedig a talajréteg szekuláris változásának kell tekinteni.

Hogy pedig a talajréteg melegének szekuláris változása a valóságban reális jelenség, már abból is következik, hogy a különböző helyeken végzett talajhőmérsékleti észlelések szerint a talaj évi középhőmérséklete a mélységgel változik: Az évi középhőmérséklet a legtöbb helyen a mélységgel folytonosan keveset nő, de vannak helyek, hol az a mélységgel keveset csökken.

4. Megjegyzések. 1. Azon czélból, hogy az ógyallai talajt melegvezetés szempontjából minő talajnemek közé kell sorozni, összeállítottam néhány talajnemnek hővezető koefficziensét és speczifikus hőkapaczitását.

Talajnemek	K	k	$c\varrho$
Homokkő	1·387	0·642	0·46
Gránit (finnországi)	1·139	0·582	0·51
Gránit (schwarzwaldi)	0·902	0·470	0·52
Homokos agyag	0·816	0·579	0·71
Homok	0·523	0·157	0·30
Pusztai talaj	0·315	0·176	0·56
Mocsaras talaj	0·133	0·129	0·97
[Hó 0·2 sürüségü	0·160	0·016	0·10
Hó 0·3 sürüségü	0·240	0·036	0·15
Jég]	0·680	0·310	0·46
Ó-gyallai talaj*	0·280	0·168	0·60

Az adatok összehasonlításából nyerjük, hogy az ógyallai talajt hővezetés szempontjából a pusztai talaj és a mocsaras talaj közé kell sorozni. Ez az eredmény nagy közelítéssel a valóságnak meg is felel.

2. Az ógyallai talajmelegnek napi ingására vonatkozó vizsgálatokat nem végezhettem, mert ily irányú észlelések rendelkezésemre nem álltak. Pedig érdekes lett volna a napi periodusban a főtautochronokat meghatározni és ezzel a talaj melegfelvételének és a meleg átadásának idejét napról-napra kiszámítani, vagyis a talajhőmérséklet napi inverzióinak évszakos menetét megállapitani. Általánosságban azonban annyit mégis megállapíthattam, hogy miután a talajhőmérséklet évi ingásának határa 15·2 m mélységre terjed és a napi ingás az évinek 19·1 része, a talajhőmérséklet napi ingása körülbelül csak 80 cm-ig terjed és a melegáramlás középsebessége a napi periodusban 0·546 $\frac{cm}{min}$.

3. Az ógyallai talajmeleg évi ingásának vizsgálata közben felmerült annak szüksége, hogy mindenütt, hol talajhőmérsékleti észleléseket végeznek, a hóréteg sürűsége is kísérleti uton esetről-esetre meghatároztassék, mert bár a talajt borító hórétegben a hó sürűsége és a hóréteg magassága közötti összefüggés megállapítása már magában is érdekes meteorologiai feladatot képez, azonban a különböző sürűségű hórétegek befolyását a fagy terjedésére a talajban, valamint a talajmeleg kiáramlásának sebességére elsőrangú gyakorlati feladatnak kell tartani.

4. Tapasztalás igazolja, hogy a talajmelegnek periodusos ingása a növények fejlődésére jelentékeny befolyást gyakorol, különösen a növény azon fejlődési szakában, melyben az jobbára a talajmelegtől és a csapadéktól függ (például a «szőlő levezése»); ennélfogva agrár-meteorologiai vizsgálatoknál a talaj kalorimetrikus hővezető kœfficziense lényeges tényezőt képez. Ezen czélból nem tartom elégségesnek csupán talajhőmérsékleti észleléseket végezni, hanem szükséges még a talaj speczifikus hőkapaczitását is rendszeresen meghatározni.

Láttuk, hogy a talajhőmérsékleti észlelésekből a talaj thermometrikus hővezető kœfficziensét *(K)* meghatározhatjuk, melyet «talajjavítással» vagy «talajlazítással» növelhetünk is, azonban a talaj speczifikus hőkapaczitását, mely az időjárással változik, rendszeresen végezett kalorimetrikus módszerekkel kell meghatározni. A kalorimetrikus hővezető kœfficzienssel és a temperatura gradienssel pedig bármely időben megállapithatjuk a talajban feltározódott meleget, úgy hogy a növények fejlődése és a talaj melegmennyiségének változása közötti összefüggés megállapitása valószinünek látszik.

5. Végre kivánatosnak tartom, hogy a Magyarországon ez ideig meglehetősen hiányos talajmeleg és talajhőmérséklet-észlelések a jövőben kiterjesztessenek, mert azok nemcsak meteorologiai és bizonyos tekintetben geologiai fontossággal birnak, hanem azoknak mezőgazdasági rendeltetésük is van.

Anderkó Aurél.

Kimutatás

az 1909. év január hó 1-től junius hó 20-ig befolyt dijakról.

Tagsági dijat fizettek:

1906. évre: Szabó Gábor 10 kor. Összesen ... ... 10 kor.

1907. évre: Anderkó Aurél dr. 10 kor., Asbóth Emil 10 kor., Elekes Pál 6 kor., Fejér Lipót dr. 6 kor., Fodor László dr. 6 kor., Fraunhoffer Lajos dr. 10 kor., Ondrus Pál 6 kor., Pecz Samu 10 kor., Steiner Lajos dr. 10 kor., Szabó Gábor 10 kor., Wartha Vincze 10 kor. Összesen... ... ... 94 kor

1908. évre: Anderkó Aurél dr. 10 kor., Asbóth Emil 10 kor., Bánki Donát 10 kor., Bauer Mihály 10 kor., Beke Manó dr. 10 kor., Bielek Miksa 10 kor., Bodola Lajos 10 kor., Buchböck Gusztáv dr. 10 kor., Bugarszky István 10 kor., Csemez József 10 kor., Czakó Adolf 10 kor., Demeczky Mihály dr. 10 kor., Dienes Pál 10 kor., Eötvös Loránd br. dr. 10 kor., Fejér Lipót dr. 6 kor., Fodor László dr. 6 kor., Fraunhoffer Lajos 10 kor., ifj. Füzy Rezső Vilmos 10 kor., Gáti Béla 10 kor., Halász Ernő 10 kor., Hauszmann Alajos 10 kor., Heuer Ede 10 kor., Hill József 6 kor., Hoór Mór dr., 10 kor., Jónás Ödön 10 kor., Kherndl Antal 10 kor., Klúg Lipót dr. 6 kor., Kőnig Dénes 10 kor., Kőnig Gyula dr. 10 kor., Lakits Ferencz 10 kor., Lendvay Hugó 6 kor., Lengyel Béla dr., 10 kor., Lengyel Endre 6 kor., Lévay Ede dr. 10 kor., Lóky Béla dr. 6 kor., Marczell György 10 kor., Molnár Szaniszló 6 kor., Muraközy Károly 10 kor., Müller József 10 kor., Nagy Dezső 10 kor., Péch Aladár 10 kor., Pécsi Albert dr. 10 kor., Pecz Samu 10 kor., Rejtő Sándor 10 kor., Schimanek Emil 10 kor., Scholtz Ágost dr. 10 kor., Schuller Alajos 10 kor., Steiner Lajos dr. 10 kor., Strausz Ármin 10 kor., Suták József dr. 10 kor., Szabó József 6 kor., Szépréthy Béla 6 kor., Szűcs Adolf dr. 10 kor., Terkán Lajos dr. 6 kor., Thanhoffer Lajos dr. 10 kor., Tolnay Lajos 10 kor., Tötössy Béla 10 kor., Wartha Vincze dr. 10 kor., Winter József 10 kor., Wittmann Ferencz 10 kor., Závodszky Adolf 10 kor., Zipernovszky Károly 10 kor. Összesen ... ... 576 kor.

1909. évre: Anderkó Aurél dr. 10 kor. Bánki Donát 10 kor., Beck Károly 6 kor., Beke Manó dr. 10 kor., Bielek Miksa 10 kor., Bláthy Ottó Titusz 10 kor., Bodola Lajos 10 kor., Bozóky Endre dr. 10 kor., Buchböck Gusztáv dr. 10 kor., Csizhegyi Lajos 6 kor., Czakó Adolf 10 kor., Dávid Lajos dr. 6 kor., Demeczky Mihály dr., 10 kor., Dienes Pál 10 kor., Eötvös Loránd br. dr. 10 kor., Fehér Lipót dr. 6 kor., Fodor László dr. 6 kor. ifj. Füzy Rezső Vilmos 10 kor., Gáti Béla 10 kor., herényi Gotthard Jenő 6 kor., Halász Ernő 10 kor., Heller Richárd 6 kor., Hirschmann Nándor 6 kor., Hortobágyi Zsigmond 6 kor., Ilosvay Lajos dr. 10 kor., Jónás Ödön 10 kor., Karai Sándor 6 kor., Kherndl Antal 10 kor., Király Henrik 6 kor., Kiss Gábor 10 kor., K. Kiss József 6 kor., Klatt Román 6 kor., Klúg Lipót dr. 6 kor., Korda Dezső 6 kor. 18 fill., Koschovitz Gyula 10 kor., Kovács Ferencz 6 kor., König Dénes 10 kor., König Gyula dr. 10 kor., Kövesligethy Radó dr. 10 kor., Lakits Ferencz dr. 10 kor., Lengyel Béla dr. 10 kor., Lévay Ede dr., 10 kor., Magdics Gáspár 6 kor., Malatin Gotthárd 6 kor., Marczell György 10 kor., Markoss Imre 6 kor., Mihálovich Alajos 6 kor., Mikola Sándor 10 kor., Módly Krizsó 6 kor., Molnár Szaniszló 6 kor., Muraközy Károly 10 kor., Müller József 10 kor., szőkefalvi Nagy Gyula 6 kor., Nagy Dezső 10 kor., Pap János 10 kor., Péch Aladár 10 kor., Pécsi Albert dr. 10 kor., Pecz Samu 10 kor., Privorszky Alajos 10 kor., Rados Gusztáv 10 kor., Rados Ignácz 10 kor., Rejtő Sándor 10 kor., Richter Rezső 10 kor., Riegl Sándor 6 kor., Riesz Marcell 10 kor., Schimanek Emil 10 kor., Schuller Alajos 10 kor., Schwartz Ottó dr. 6 kor., Selényi Pál 10 kor., Steiner Lajos dr. 10 kor., Suták József dr. 10 kor., Szűcs Adolf dr. 10 kor., Terkán Lajos dr. 6 kor., Terlanday Emil 10 kor., Tőtössy Béla 10 kor., Tresztyánszky Sándor 6 kor., Vámos Dezső 10 kor., Walther Béla 6 kor., Wartha Vincze dr. 10 kor., Wittmann Ferencz 10 kor., Wodeczky József 10 kor., Zipernovszky Károly 10 kor. Összesen ... ... 708·18 kor.

Előfizetési díjat fizettek:

1908. évre: Bártfai áll. főgymnasium 10 kor., Budapesti II. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti Tanárképző int. gyakorló főgymn. 10 kor., Kolozsvári kegyesrendi Kalazantinum 10 kor., Malaczkai szt. Ferencz-rendi zárda 6 kor., Miskolczi ev. ref. főgymn. 6 kor., Nagyváradi áll. főreáliskola 6 kor., Pozsonyi kir. kath. főgymnasium 10 kor., Székelyudvarhelyi r. k. főgymnasium 10 kor. Összesen ... ... 78 kor.

1909. évre: Bártfai áll. főgymnasium 10 kor., Beregszászi állami főgymnasium 10 kor., Brassói áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. főgymnasium 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. tanitónőképző 10 kor., Budapesti tud. egyetemi könyvtár 10 kor., Budapesti VIII. ker. áll. főgymn. 10 kor., Budapesti X. ker. (kőbányai) áll. főgymn. 10 kor., Budapesti Premontrei tanárképző «Norbertinum» 10 kor., Budapesti ciszt. r. tanárképző 10 kor., Csiksomlyói r. kath. főgymn. 10 kor., Debreczeni ref. főiskola 10 kor., Deési áll. főgymn. 10 kor., Érsekujvári áll. közs. kath. főgymn. 10 kor., Fiumei tengerészeti akadémia 10 kor., Fogarasi áll. főgymn. 10 kor., Győri áll. főreáliskola 10 kor., Gyulafehérvári r. kath. főgymn. 10 kor., Hajdúnánási ev. ref. főgymn. 6 kor., Jászberényi áll. főgymn. 10 kor., Kaposvári áll. főgymn. 10 kor., Karczagi ev. ref. főgymn. 10 kor., Kecskeméti áll. főreáliskola 10 kor., Kisujszállási ev. ref. főgymn. 10 kor., Körmöczbányai áll. főreáliskola 10 kor., Makói áll. főgymn. 10 kor., Malaczkai szt. Ferencz-rendi zárda 6 kor., Máramarosszigeti ev. ref. főgymn., 10 kor., Marosvásárhelyi r. kath. főgymn. 10 kor., Mezőberényi áll. polg. isk. 10 kor., Nagybányai áll. főgymn. 6 kor., Nagyenyedi Bethlen főiskola 10 kor., Nagyváradi áll. fő-

reáliskola 6 kor., Nagyszebeni áll. főgymn. 10 kor., Nyitrai felsőbb leányiskola 10 kor., Pannonhalmi főapátsági könyvtár 10 kor., Pécsi felső keresk. isk. könyvtára 10 kor., Privigyei kegy. rendi gymn. 10 kor., Sepsiszentgyörgyi ev. ref. főgymn. 10 kor., Soproni ág. hitv. ev. lyceum 10 kor., Soproni áll. főreáliskola 6 kor., Szakolczai főgymn. 10 kor., Szarvasi ág. h. ev. főgymn. 10 kor., Szászvárosi ev. ref. Kun-kollegium 6 kor., Székesfehérvári áll. főreáliskola 10 kor., Székesfehérvári felsőbb leányiskola 10 kor., Szentesi áll. főgymn. 10 kor., Temesvári áll. főgymn. 10 kor., Urbán Ignácz Ujvidék 10 kor., Ungvári áll. főreáliskola 10 kor., Ungvári kir. kath. főgymn. 10 kor., Zombori áll. főgymn. 10 kor.
Összesen ... 506 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból ...	758	kor.
F. évi tagsági díjakból ...	708·18	«
F. évi előfizetési díjakból ...	506	«

Kelt Budapesten, 1909. június hó 20-án.

Dr. Lévay Ede
pénztáros.
VI., Nagy János-utcza 37.

AZ INTEGRÁLRÓL.[1]

(Első közlemény.)

Az integrálszámitásnak két probléma adott létet: az egyik görbe vonallal határolt terület mérése, a másik a differencziálás műveletének megforditása volt. A mikor e problémákat felvették, a függvény fogalma sem volt még tisztán megállapitva. NEWTON és LEIBNITZ idejében körülbelül azt a kifejezést nevezték függvénynek, a melyben raczionális műveletek, gyökvonás, trigonometrikus és exponencziális műveletek és logarithmus szerepeltek. Ha görbét rajzoltak, gondosan megkülönböztették, hogy valódi függvényt ábrázol-e vagy nem és a függvényfogalom első kiterjesztése az volt, a mikor bármely görbében függvénynek képét látták, de az előbbi függvényeknek mégis előkelőbb rangot juttattak és őket folytonos függvényeknek nevezték.

Adva lévén valamely $f(x)$ folytonos függvény (az előbbi, EULER-féle értelemben), van-e olyan $F(x)$ függvény, melynek differencziálhányadosa $f(x)$? E kérdésre abban az esetben, a mikor nem tudták $F(x)$-et felirni, geometriai ábrázolással feleltek meg. Felrajzolták az

$$y = f(x)$$

görbét és $F(b)$-nek nevezve amaz idom területét, a melyet e görbe, az Ox tengely és az a, b abscissákhoz ($a < b$) tartozó ordináták határolnak, kimutatták — bár nem egészen szigorúan — hogy

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Általában $F(x)$-nek nem volt meg az EULER-féle folytonossága.

---

[1] E czikk második része a nyomda sajnálatos tévedése folytán idő előtt már e folyóirat 1909. májusi füzetében a 205. lapon jelent meg.

Mióta Fourier előállított nem folytonos függvényeket is analitikai kifejezéssel, a valódi és nem valódi függvények megkülönböztetése tarthatatlanná vált. Cauchy az y változót az x változó függvényének tekintette, ha x bármely értékéhez y-nak meghatározott értéke tartozott. Ez a függvénynek ma elfogadott értelmezése.

Az $f(x)$ függvény Cauchy szerint folytonos az x_0 helyen, ha bármilyen kis pozitiv ε-hoz meg lehet határozni oly η-t, hogy a $|h| < \eta$ egyenlőtlenségnek az

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség következménye legyen. Ezt a definicziót használjuk ma.

Legyen $f(x)$ véges és folytonos az a és b számok között, a határokat is ideértve. A *véges* szón azt értjük, hogy van oly M szám, melynél $f(x)$ abszolut értéke kisebb marad. Oszszuk fel az (a, b) számközt n részre, az i-dikköznek hossza legyen δ_i és benne egy tetszés szerinti pont x_i. Az

$$S = f(x_1)\delta_1+f(x_2)\delta_2+\cdots+f(x_n)\delta_n$$

összeg az előbb $F(b)$-vel jelölt területnek közelitő értékét szolgáltatja és a megközelítés szemlátomást annál jobb, mennél kisebbek a δ_i szakaszok. Ez arra késztet bennünket, hogy az S összeget tüzetes vizsgálatnak vessük alá, a nélkül, hogy az $f(x)$ függvény természetéről előre feltennénk valamit.

E vizsgálatban szükségünk lesz a ponthalmazok alaptulajdonságainak ismeretére.

I. Ponthalmazok.

1. Olyan pontok halmazaival fogunk foglalkozni, a melyek valamely véges egyenesdarabon vannak elhelyezve. A beszéd geometriai jellege az elképzelés megkönnyitésére szolgál; pont helyett lehetne mindig számot is mondani.

Legyen adva az E ponthalmaz. Az A pont e halmaz határpontja, ha — bárminő kis pozitiv szám is ε — van E-nek olyan pontja, a melynek távolsága A-tól nem zérus, de legfeljebb ε. A határpontok összessége az E halmaz deriváltja, jele E'. Az E' halmaz deriváltját E''-vel jelöljük és így tovább.

Az E halmaz *zárt*, ha magában foglalja E' összes pontjait és *teljes*, ha E'-vel összeesik.

A derivált E' halmaz mindig zárt. Legyen ugyanis A'' az E'' halmaz pontja; bizonyára van E'-ben oly A' pont, melynek távolsága A''-től nem haladja meg $\frac{\varepsilon}{2}$-t, másrészt lehet E-ben oly A pontot találni, mely A'-től legfeljebb $\frac{\varepsilon}{2}$ távolságban van, tehát A'' és A távolsága nem nagyobb ε-nál. Mivel pedig ε tetszőlegesen kicsiny, A'' az E halmaz határpontja és így benne van E'-ben.

2. **Weierstrass-Bolzano tétele.** — *Végtelen sok pontot magában foglaló halmaznak van legalább egy határpontja.*

A halmaz egy (a, b) intervallum belsejében fekszik; legyen c az intervallum középpontja. Az (a, c) és (c, b) intervallumok egyikében bizonyára végtelen sok pont van; ha mind a kettőben, vegyük a baloldalit, ha csak az egyikben, vegyük ezt és jelöljük végpontjait a_1, b_1-gyel. Az (a_1, b_1) intervallumra alkalmazva az előbbi eljárást, eljutunk az (a_2, b_2) és így tovább az

$$(a_3, b_3), (a_4, b_4), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$$

intervallumokhoz. Az (a_n, b_n) intervallum az adott halmaznak végtelen sok pontját tartalmazza; hosszúsága: $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ végtelen kicsinynyé lesz $\frac{1}{n}$-nel együtt; továbbá

$$a \leqq a_1 \leqq a_2 \cdots \leqq a_n \leqq \cdots$$
$$b \geqq b_1 \geqq b_2 \cdots \geqq b_n \geqq \cdots,$$

van tehát az a_n és b_n számoknak közös határuk; nevezzük ezt α-nak. α az adott halmaz határpontja, mert bármily kicsiny is ε, lehet egy az $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ intervallumban foglalt (a_n, b_n)

intervallumot találni, tehát van az adott halmaznak α-val össze nem eső pontja, mely α-tól legfeljebb ε távolságban van.

3. *Mindazon intervallumok között, a melyek valamely E halmaz pontjait magukba zárják, van egy legkisebb:* (A, B).

Ha ki tudjuk jelölni E-nek baloldali szélső pontját, akkor ez maga A; ha ilyen pontot nem tudunk kijelölni, akkor $A=\alpha$. Mindezt könnyű belátni, valamint azt is, hogy a B pont létezik. Az A és B pontokat az E halmaz alsó és felső határának nevezzük.

Vegyük példának azon értékek E halmazát, a melyeket az $f(x)$ véges függvény felvesz, ha az x változó az (a, b) intervallumot bejárja. Kimondhatjuk, hogy:

van két szám A és B azzal a tulajdonsággal, hogy

$$A \leqq f(x) \leqq B,$$

de — bármily kis pozitiv szám is ε — vannak oly x helyek, a melyeken

$$f(x) > B - \varepsilon$$

és más oly helyek, a melyeken

$$f(x) < A + \varepsilon.$$

Mi több, *ha az $f(x)$ függvény folytonos, akkor fel is veszi az A, B értékeket.* Ezt csak abban az esetben szükséges bebizonyítanunk, a mikor A (vagy B) az E' halmaznak pontja. Ilyenkor lehet találni az (a, b) intervallumban oly

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{a}$$

helyeket, hogy

$$A \leqq f(x_n) < A + \frac{1}{n}.$$

Tudjuk, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ pontoknak van legalább egy határhelyük x'. Legyen

$$f(x') = C.$$

Azt állitom, hogy

$$C = A.$$

Ugyanis, $f(x)$ folytonos lévén

$$|f(x)-f(x')| < \frac{1}{n},$$

mihelyt

$$|x-x'| < \delta_n.$$

Az (a) sorozatban lehet e feltételnek megfelelő x_{i_n}-et $(i_n \geqq n)$ kiszemelni és így

$$|f(x_{i_n})-f(x')| < \frac{1}{n},$$

a honnan

$$|A-C| < \frac{2}{n}.$$

A és C azonban meghatározott értékek, tehát

$$A = C.$$

Éppen így meg lehet mutatni, hogy valamely x'' helyen

$$f(x'') = B,$$

továbbá, hogy *van a és b között olyan ξ hely, a melyen*

$$f(\xi) = K,$$

bármilyen pont is K az (A, B) intervallumban. Lássuk közelebbről ez utóbbi állítást. Legyen H_1 az (a, b) intervallum azon x pontjainak halmaza, a melyeken

$$f(x) \leqq K$$

és H_2 azon x pontok halmaza, a melyeken

$$f(x) \geqq K.$$

Bizonyos, hogy mind a H_1, mind a H_2 halmaz tartalmaz pontokat. Legyen β a H_1 halmaz felső határa. Tudjuk, hogy

$$\beta < b,$$

továbbá, hogy $\beta - \varepsilon$ és β között vannak H_1-nek pontjai és végre, hogy a $(\beta, \beta+\varepsilon)$ intervallum minden belső pontja $(\beta+\varepsilon<b)$ H_2-höz tartozik. $f(x)$ folytonos lévén,

$$f(\beta) = K.$$

4. Ha a határpontja az E halmaznak, akkor — bárminő kicsiny is ε — az $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ intervallum E-nek végtelen sok pontját zárja magába, a mit úgy fejezünk ki, hogy a-nak *közelében* végtelen sok pont van az E-ből. Megfordítva, ha valamely a pontról ezt constatáljuk, a határpont.

Végtelen halmazt *megszámlálható*nak nevezünk, ha elemei az

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

egész számokkal kölcsönös és egyértelmű vonatkozásba hozhatók.

Minden végtelen halmaznak van megszámlálható része, mert elvehetünk a halmazból egy első, egy második, ..., egy n-edik elemet, a nélkül, hogy kimerülésétől kellene tartanunk (különben a halmaz nem volna végtelen).

Az E halmaz E' deriváltjának azon pontjai (ha ilyenek egyáltalában vannak), a melyeknek közelében E-ből meg nem számlálhatóan végtelen sok pont van, az E halmaz sűrűsödési pontjai.

A sűrűsödési pontok P halmaza mindig teljes. Közvetetlenül világos, hogy a P halmaz zárt; de ez még nem elég. Legyen a a P valamely pontja; az $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ intervallum az E halmaz meg nem számlálhatóan végtelen sok pontját tartalmazza, tehát az

$$\left(a-\varepsilon, a-\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \left(a+\frac{\varepsilon}{2}, a+\varepsilon\right); \quad \left(a-\frac{\varepsilon}{2}, a-\frac{\varepsilon}{2^2}\right),$$
$$\left(a+\frac{\varepsilon}{2^2}, a+\frac{\varepsilon}{2}\right); \ldots$$

intervallumok közül egy legalább E-nek meg nem számlálhatóan végtelen sok pontját foglalja magában és így $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ intervallumban — ε tetszőleges kicsiny lévén — van a-n kívül más pont is a P-ből. Ellenkező esetben az E-nek $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$-ba eső pontjai úgy volnának felírhatók, mint megszámlálhatóan végtelen sok megszámlálható halmaz pontjai:

$$\begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{pn}, \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Ilyen halmaz pedig megszámlálható, mert elemei egy sorba rendezhetők:

$$a_{11};\ a_{12},\ a_{21};\ a_{13},\ a_{22},\ a_{31};\ a_{14},\ a_{23},\ a_{32},\ a_{41};\ a_{15},\ldots$$

E szerint P-nek minden pontja határpont: P teljes halmaz.

5. **Cantor-Bendixson tétele.** — *Minden zárt halmaz felbontható egy teljes és egy megszámlálható halmazra.*

Az E zárt halmaz magában foglalja a sűrűsödési pontok P halmazát. P-ről tudjuk már, hogy teljes; megmutatjuk, hogy E többi pontjai megszámlálható D halmazt alkotnak. Vegyük szemügyre E-nek azon pontjait, melyek minden sűrűsödési ponttól $\frac{1}{n}$-nél nagyobb távolságra fekszenek. E pontok összessége megszámlálható, ellenkező esetben összesűrűsödnének egy pont körül, a melynek P-be kellene tartoznia. A D halmaz pontjai osztályokba sorozhatók a szerint, a mint P pontjaitól való távolságaik $\frac{1}{2}$-nél nagyobbak vagy $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{4}$; ...; $\frac{1}{n}$ és $\frac{1}{n+1}$; ... között fekszenek (a felső határ beleértésével). Mindegyik osztály megszámlálhatóan sok pontot tartalmaz, tehát a D halmaz megszámlálható.

Ha az E zárt halmaz olyan, hogy egy sűrűsödési pontja sincs, akkor redukálhatónak nevezzük.

6. **Teljes halmazok szerkezete.** — *Minden teljes halmazt úgy kaphatunk meg, hogy végesszámú vagy megszámlálhatóan végtelen sok egymással nem érintkező intervallumnak belső pontjait kitöröljük.*

Tegyük fel, hogy az E teljes halmaz az (a, b) intervallumban fekszik. Az E halmaz vagy elfoglalja magát az (a, b) intervallumot vagy van ezen belül oly c pont, mely nem tartozik E-be. Ez utóbbi esetben az (a, c) intervallum x helyei két osztályba sorozhatók a szerint, a mint az (x, c) intervallumon belül van vagy nincsen E-nek pontja. A két osztály pontjait egy c' pont választja el. Bármily kicsiny is ε, a $(c'-\varepsilon, c)$ intervallum tartalmaz E-ből pontokat, tehát c' határpont és minthogy E halmaz teljes, magában foglalja a c' pontot. A c és c' pontok *között* azonban nincs E-nek egy pontja sem. Hasonló módon meg lehet mutatni, hogy a c helytől jobbra is van az E halmaznak egy első pontja c'', tehát kitörülhetjük a (c', c'') intervallum belső pontjait. Ezt az eljárást mindig ismételhetjük, ha (a, b)-ben egy az E halmazhoz nem tartozó pontot felfedezünk. Világos, hogy a kitörlendő intervallumok halmaza megszámlálható; mert azon intervallumok, a melyeknek hosszai 1-nél nagyobbak vagy 1 és $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{3}$; ... ; $\frac{1}{n}$ és $\frac{1}{n+1}$ között fekszenek (a felső határ beleértésével), mindig véges számmal vannak.

A bebizonyított tétel meg is fordítható:

Ha kitörüljük az (a, b) intervallumból az egymással nem érintkező

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$$

intervallumok belső pontjait, a maradó pontok P halmaza teljes.

Először is a P halmaz zárt. Ellenkező esetben a P' halmaz valamely A pontja nem volna eleme P-nek, tehát helyet foglalna egy kitörült intervallum belsejében, de akkor A nem volna határpont.

Másodszor P-nek minden pontja határpont. Legyen B a halmaz egy pontja és (α, β) oly intervallum, a mely B-t tartalmazza. Ha az (α, B) vagy (B, β) intervallumok közül egynek legalább minden pontja P-hez tartozik, B nyilván határpont. Ha nem, akkor van olyan hely α és B között, mely nincs benn P-ben; e hely tehát pontja valamely (α_1, β_1) intervallumnak $(\beta_1 < B)$, a melynek csakis határpontjai tartoznak a P halmazhoz; e szerint az (α, B) intervallum magába zárja a P halmaznak β_1 pontját. Minthogy ez intervallum hossza tetszés szerint kicsiny, világos, hogy B határpont.

A bebizonyított tételek zárt halmazokra is alkalmazhatók, ha *egymással nem érintkező*

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$$

intervallumok helyébe *egymással legfeljebb egy pontban érintkező intervallumokat* teszünk.

7. **Borel tétele.** — *Ha az MN intervallumok E halmaza olyan, hogy az (a, b) számköz minden pontja ez intervallumok közül egynek legalább belsejébe esik, akkor ki lehet választani véges számmal oly MN intervallumokat, a melyek (a, b)-t teljesen befödik (abban az értelemben, hogy (a, b) minden pontja valamely intervallumnak belsejében van).*

Ugyanis valamely MN intervallum magába zárja az a pontot, tehát ha x elég közel van a-hoz, az (a, x) számköz mindenesetre véges számú MN intervallummal van befödve és ugyanezt mondhatjuk (a, x')-ről is, ha $x' < x$. Tegyük fel, hogy ez nem áll az (a, y) számközre nézve $(y < b)$, akkor ugyanezt állíthatjuk (a, y')-ről is, ha $y' > y$. Az x és y számok osztálya egy z számmal van elválasztva és z olyan tulajdonságú, hogy $(a, z-\varepsilon)$ befödhető véges számú intervallummal, $(a, z+\varepsilon)$ pedig nem. De ez lehetetlen: z ugyanis valamelyik MN intervallum belsejében van, a mely magában foglalja a $z-\varepsilon$ és $z+\varepsilon$ pontokat, ha ε-t elég kicsinyre választottuk. E szerint nincs az (a, b) számközben egy y pont sem, a mi igazolja a kimondott tételt.

Eredetileg e tételt megszámlálható MN intervallumhalmazra Borel bizonyította be; a fenti általános alak Lebesguetől származik.

Borel tételével a folytonosság egyenletes voltát igen elegánsan bizonyíthatjuk be.

Legyen $f(x)$ folytonos az (a, b) intervallumban — a határhelyek beleértésével —, ez annyit jelent, hogy ε megadott tetszőleges szám lévén

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon,$$

ha

$$|x-x_0| < h.$$

A h szám függ x_0-tól; azonban lehet olyan pozitiv h-t kijelölni, a mely minden x_0 helyen használható.

Képzeljük el minden x_0 pont körül azt az $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ intervallumot, a melyben

$$|f(x)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

Egy ilyen intervallumban a függvény ingadozása, azaz maximumának és minimumának különbsége kisebb $\frac{\varepsilon}{2}$-nél. Az imént megállapitott tétel szerint ez intervallumok közül ki lehet választani véges számmal olyanokat, melyek az adott intervallumot teljesen befödik; ha a legrövidebb ilyen intervallum hossza δ, akkor világos, hogy minden δ-nál rövidebb intervallumban az $f(x)$ függvény ingadozása legfeljebb ε, azaz $|x_1-x|<\delta$ egyenlőtlenség következménye:

$$|f(x_1)-f(x)| < \varepsilon.$$

A most bebizonyitott tételt igy szokás fogalmazni:

Ha valamely függvény egy intervallum belsejében és határhelyein folytonos, akkor folytonossága egyenletes.

8. **Ponthalmazok mértéke.** — Legyen adva a véges AB intervallumon belül valamely E ponthalmaz és foglaljuk bele E-nek pontjait kis intervallumokba, a melyek véges, vagy megszámlálhatóan végtelen halmazt alkotnak. Ez intervallumok hosszúságainak összege legyen λ. Az E pontjainak ilyen intervallumokba való foglalása természetesen végtelen sokféle módon történhetik és mindegyik mód egy λ számot szolgáltat. Valamennyi λ pozitiv, tehát van zérus vagy pozitiv alsó határuk, a mely AB hosszánál semmiesetre sem nagyobb. Ezt az alsó határt az E halmaz *külső mértékének* nevezzük és $m_e(E)$-vel jelöljük. Legyen $C_{AB}(E)$ az AB intervallum E-be nem tartozó pontjainak halmaza és jelöljük $m(AB)$-vel az AB intervallum hosszúságát. Az E halmaz *belső mértékének* a következő számértéket nevezzük:

$$m_i(E) = m(AB) - m_e[(C_{AB}(E)].$$

Azt állitom, hogy

$$m_i(E) \leqq m_e(E).$$

Foglaljuk be E-nek és $C_{AB}(E)$-nek pontjait az α és β intervallumcsoportokba. Ez intervallumok együttvéve általában végtelen számmal vannak, de az AB intervallumot egészen befödik úgy, hogy minden pont valamely intervallum belsejében van.

Borel tétele szerint e végtelen sok intervallum közül kiválaszthatók véges számmal olyanok, a melyek AB-nek minden pontját belsejükben tartalmazzák. E csoport intervallumainak összes hossza legalább is egyenlő AB hosszával, tehát annál inkább

$$m(\alpha)+m(\beta)\geqq m(AB)$$

és így

$$m_e(E)+m_e[C_{AB}(E)]\geqq m(AB),$$

$$m_e(E)\geqq m(AB)-m_e[C_{AB}(E)],$$

azaz

$$m_e(E)\geqq m_i(E).$$

Ha $m_i(E)=m_e(E)$, akkor a közös értéket az E halmaz *mértékének* nevezzük, jele $m(E)$ és E-ről azt mondjuk, hogy *mérhető*. Világos, hogy valamely intervallum mértéke ugyanaz, mint az intervallum hosszúsága.

9. *Legyenek $E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots$ mérhető halmazok az AB intervallumban és pedig olyanok, hogy kettőnek közülük soha nincsen közös pontja. Ha e halmazok pontjai együttvéve az E halmazt alkotják, akkor E mérhető és*

$$m(E)=\sum_1^\infty m(E_i).$$

Zárjuk be ugyanis E_i pontjait az α_i és $C_{AB}(E_i)$ pontjait a β_i intervallumcsoportokba azzal a kikötéssel, hogy α_i és β_i közös részeinek mértéke ε_i, a $\sum_1^\infty \varepsilon_i$ sor összetartó és $\sum_1^\infty \varepsilon_i=\varepsilon$ legyen. $\left(\text{például } \varepsilon_i=\frac{\varepsilon}{2^i}\right)$. E_2 mindenesetre β_1-en belül van; jelöljük α'_2 és β'_2-vel α_2-nek és β_2-nek β_1-gyel közös részét. E_3 benn van β'_2-ben, legyen α'_3 és β'_3, α_3-nak és β_3-nak β'_2-ben levő része,... Az E_i halmaz pontjait az α'_i intervallumok magukban foglalják, tehát E-nek külső mértéke legfeljebb

$$s=m(\alpha_1)+m(\alpha'_2)+m(\alpha'_3)+\cdots$$

Világos, hogy

$$m(\alpha_1)+m(\beta_1)=m(AB)+\varepsilon_1$$

$$m(\alpha'_2)+m(\beta'_2)\leqq m(\beta_1)+\varepsilon_2$$

$$m(\alpha'_3)+m(\beta'_3)\leqq m(\beta'_2)+\varepsilon_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ha összeadjuk a bal- és jobboldalakat, azt találjuk, hogy

$$m(a_1)+m(a_1')+m(a_2')+\cdots\leqq m(AB)+\sum_1^\infty \varepsilon_i,$$

tehát az s sor összetartó és minthogy

$$m(E_i)\leqq m(a_i')\leqq m(a_i)\leqq m(E_i)+\varepsilon_i,$$

következik, hogy

$$\sum_1^\infty m(E_i)\leqq s\leqq \sum_1^\infty m(E_i)+\varepsilon$$

és innen

$$m_e(E)\leqq \sum_1^\infty m(E_i)+\varepsilon,$$

bármilyen kis szám is ε; ez csak akkor lehetséges, ha

$$m_e(E)\leqq \sum_1^\infty m(E_i).$$

Bebizonyítjuk másrészt, hogy

$$m_i(E)\geqq \sum_1^\infty m(E_i).$$

A β_i' intervallumcsoport magában foglalja $C_{AB}(E)$-t. β_i'-nek pedig az $a_1+a_2'+a_3'+\cdots$ intervallumokkal való közös része egyfelől

$$a_{i+1}'+a_{i+2}'+\cdots,$$

másfelől az $a_1, a_2', \ldots, a_i'$-nek β_i'-be eső részei; de ezeknek nagysága legfeljebb $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_i$; és így β_i' mértéke legfeljebb:

$$[m(AB)-s]+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_i+m(a_{i+1}')+m(a_{i+2}')+\cdots,$$

a mi kisebb, mint

$$m(AB)-s+2\varepsilon,$$

mert, ha i elég nagy,

$$m(a_{i+1}')+m(a_{i+2}')+\cdots<\varepsilon.$$

Tehát

$$m_e[C_{AB}(E)]\leqq m(AB)-\sum_1^\infty m(E_i)+2\varepsilon$$

akárminő kicsiny is ε, a mi csak akkor lehetséges, ha

$$m_e[C_{AB}(E)]\leqq m(AB)-\sum_1^\infty m(E_i),$$

azaz

$$m_i(E) \geqq \sum_1^\infty m(E_i).$$

Arra az eredményre jutottunk, hogy

$$m_e(E) \leqq \sum_1^\infty m(E_i), \quad m_i(E) \geqq \sum_1^\infty m(E_i),$$

azonban $m_i(E) \leqq m_e(E)$, tehát E mérhető és

$$m(E) = \sum_1^\infty m(E_i).$$

10. *Nem lépünk ki a mérhető halmazok köréből, ha*

I. *véges számú vagy megszámlálható módon végtelen sok ponthalmaz összes elemeit egyesítjük egy halmazzá* (a melyet röviden az adott halmazok összegének nevezünk, megengedve bennük közös elemeket is),

II. *véges számú vagy megszámlálhatóan végtelen sok ponthalmaz közös elemeiből alkotunk egy halmazt.*

Bizonyítsuk be az első állítást.

Legyenek adva az $E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots$ halmazok és összegük

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_i + \cdots,$$

jelöljük továbbá E_i'-vel E_i-nek azt a részét, mely az

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_{i-1}$$

halmazon kívül van. Nyilvánvaló, hogy

$$E = E_1 + E_2' + E_3' + \cdots,$$

az $E_1, E_2', E_3', \ldots$ halmazok közül kettőnek soha nincsen közös eleme, tehát előbbi tételünk szerint E is mérhető, ha E_2', $E_3', \ldots$ halmazok ilyenek. Mutassuk meg például, hogy E_2' mérhető. E czélból zárjuk be ismét E_1-et az α_1, $C_{AB}(E_1)$-t a β_1 intervallumcsoportokba, továbbá E_2-t és $C_{AB}(E_2)$-t α_2 és β_2-be. Legyenek ε_1 és ε_2 az α_1, β_1 és α_2, β_2 közös részeinek terjedelme, α_2' és β_2' pedig α_2 és β_2-nek β_1-ben foglalt részei. E_2' benn van α_2'-ben, $C(E_2')$ benn van $\alpha_1 + \beta_2'$-ben és minthogy α_2' meg $\alpha_1 + \beta_2'$

közös részeinek hosszúsága legfeljebb $\varepsilon_1+\varepsilon_2$, a mely előre megadható kis szám, következik, hogy E_2' mérhető. Hasonló bizonyítás adható az E_3', E_4', ... halmazokra is.

A második tétel az elsőből következik. Jelöljük F-fel az E_1, $E_2, \ldots, E_i, \ldots$ halmazok közös részét. Felteszszük, mint rendesen, hogy E_1, $E_2, \ldots, E_i, \ldots$ mind benfoglaltatnak valamely AB intervallumban. Közvetlenül látható, hogy

$$C(F)=C(E_1)+C(E_2)+\cdots+C(E_i)+\cdots,$$

mert, ha egy pont valamelyik E_i-ben nincs benn, bizonyára F-ben sincs, tehát $C(E_i)$ minden eleme $C(F)$-be tartozik és megfordítva, $C(F)$ bármely pontja az E_1, $E_2, \ldots, E_i, \ldots$ halmazok egyikében nincs meg. Az előbbi tétel szerint $C(F)$ mérhető, tehát ugyanezt mondhatjuk F-ről is.

Megjegyezzük még, hogy ha az

$$E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots$$

mérhető halmazok sorában mindegyik E_i tartalmazza a rákövetkező halmazt és F az E_1, $E_2, \ldots, E_i, \ldots$ közös elemeinek halmaza, akkor

$$m(F)=\lim m(E_i).$$

Valóban

$$C(F)=(AB-E_1)+(E_1-E_2)+(E_2-E_3)+\cdots$$

$$m[C(F)]=m(AB)-m(E_1)+m(E_1-E_2)+m(E_2-E_3)+\cdots$$

az E_1-E_2, $E_2-E_3, \ldots$ halmazok közül kettőbe egy elem soha sem tartozik, tehát

$$m[C(F)]=m(AB)-\lim[m(E_1)-m(E_1-E_i)],$$

$$m[C(F)]=m(AB)-\lim m(E_i)$$

és innen

$$m(F)=m(AB)-m[C(F)]=\lim m(E_i).$$

11. Valamely ponthalmaz sűrű az (α, β) intervallumban, ha ennek bármilyen kis része a halmaz végtelen sok elemét foglalja magában. Például a valódi törtek halmaza sűrű, noha megszámlálható. A valódi törteket t. i. így lehet felírni:

$$\tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3};\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{3}{4};\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5};\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{5}{6};\ \tfrac{1}{7},\ \tfrac{2}{7},\ldots,$$

ezért megszámlálhatók. Természetesen sűrű a valós számok halmaza is.

Abból azonban, hogy valamely halmaz sűrű, még semmit sem lehet e halmaz mértékére következtetni. A 0 és 1 között fekvő raczionális számok halmazának, mint minden megszámlálható halmaznak mértéke zérus. Ez a 9. §-ban bebizonyitott tételből folyik, ha arra gondolunk, hogy egyetlen egy pontból álló halmaz mértéke zérus.

Viszont meglehet, hogy sehol sem sűrű halmaz mértéke nem zérus. Be is mutatunk ilyen példát, a melyre különben fontos szerep vár. Induljunk ki egy összetartó $\prod\limits_1^\infty a_n$ végtelen szorzatból, melynek minden tényezője pozitiv és 1-nél kisebb, például

$$a_n = 1 - \frac{1}{4n^2}\cdot$$

A $\prod\limits_1^\infty a_n$ szorzat értéke 1-nél kisebb pozitiv szám; jelöljük P-vel. Oszszuk fel a (0, 1) intervallumot három részre úgy, hogy a középsőnek hossza $1-a_1$, a két szélsőé pedig egyenlő legyen és törüljük ki a középső (a_1, b_1) intervallum belső pontjait. A maradó két intervallum mindegyikére alkalmazzuk az előbbi műveletet, de a_1 helyett $\frac{1}{2}a_2$-t véve, ekkor kitörüljük összesen két intervallum

$$(a_2, b_2), (a_3, b_3)$$

belső pontjait és ezt a műveletet akárhányszor ismételhetjük. Lesznek pontok, a melyek — bármilyen sokáig folytassuk is a leírt eljárást — nem törlődnek ki; e pontok H halmaza zárt és sehol sem sűrű, a H halmaz mértéke pedig (10. §.)

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots = P.$$

12. Valamely halmaz mértéke zérus, ha pontjai belefoglalhatók oly véges számú vagy megszámlálhatóan végtelen sok intervallumba, a melyeknek összes hossza tetszőlegesen kicsiny. Néha

fontos, hogy tudjuk, elegendő-e erre a czélra véges számú intervallum; ha elegendő, a halmazt DU BOIS-REYMOND *integrálható csoport*nak nevezi.

Zárt, zérus mértékű halmaz mindig integrálható csoport.

Ilyen E halmaz ugyanis úgy keletkezik, hogy az adott (a, b) alapintervallumból kitörüljük az egymással legfeljebb egy pontban érintkező

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$$

intervallumok belső pontjait. Legyenek

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$$

ez intervallumok hosszai és $C(E)$ az E-be nem tartozó pontok halmaza (a, b)-ben. Tudjuk, hogy

$$\sum_1^\infty \Delta_n = m[C(E)] = b-a-m(E) = b-a.$$

Törüljük ki már most az

$$\left(a_1+\frac{\varepsilon}{2}, b_1-\frac{\varepsilon}{2}\right), \ldots, \left(a_n+\frac{\varepsilon}{2^n}, b_n-\frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

intervallumok belső pontjait (ha esetleg $a_i+\frac{\varepsilon}{2^i} \geqq b_i-\frac{\varepsilon}{2^i}$, akkor nem törlünk ki semmit), a maradó intervallumok száma véges és terjedelmük legfeljebb:

$$b-a-(\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n)+2\varepsilon,$$

tehát — ha n elég nagy — kisebb, mint 3ε. Innen következik, hogy E integrálható csoport, mert ε tetszés szerint kicsiny szám lehet.

II. A RIEMANN-féle integrál.

Legyen $f(x)$ egy az (a, b) intervallumban és ennek határhelyein véges függvény; oszszuk fel továbbá az adott intervallumot n szakaszra; az i-edik szakasz hossza legyen δ_i és benne x_i egy tetszőleges pont. *Vizsgálatunk tárgya az*

$$S = f(x_1)\,\delta_1 + f(x_2)\,\delta_2 + \cdots + f(x_n)\,\delta_n$$

összeg.

13. **Folytonos függvény integrálja.** — *Ha $f(x)$ folytonos és a δ_i számok δ maximuma zérus felé tart* (a mivel együttjár n-nek végtelenbe-növekedése), *az S összeg meghatározott I értékhez közeledik, függetlenül az alapintervallum felosztásának módjától és az x_i helyek választásától.* Az I értéket az $f(x)$ függvény a-tól b-ig terjedő integráljának nevezzük.

Ha δ_i-ben $f(x)$ a ξ_i helyen éri el maximumát és az η_i helyen minimumát, ingadozása pedig ugyancsak δ_i-ben: ω_i, akkor

$$\sigma = \sum_1^n f(\eta_i)\,\delta_i \leqq S \leqq \sum_1^n f(\xi_i)\,\delta_i = \Sigma$$

és

$$\Sigma - \sigma = \sum_1^\infty [f(\xi_i) - f(\eta_i)]\,\delta_i = \sum_1^\infty \omega_i \delta_i .$$

Válaszszuk először a δ kisebbitésének azt a módját, hogy minden meglevő intervallumot több részre osztunk; ekként a

$$D_1,\ D_2, \ldots, D_p, \ldots$$

felosztások keletkeznek, a melyekben egy-egy szakasz maximális hossza:

$$\Delta_1,\ \Delta_2, \ldots, \Delta_p, \ldots \qquad (\lim \Delta_p = 0)$$

A D_p felosztáshoz tartozó S, σ és Σ összegek jelei legyenek S_p, σ_p, Σ_p. Világos, hogy

$$\Sigma_1 \geqq \Sigma_2 \geqq \Sigma_3 \geqq \cdots \geqq \Sigma_p \geqq \cdots,$$

$$\sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \sigma_3 \leqq \cdots \leqq \sigma_p \leqq \cdots.$$

másrészt

$$0 < \Sigma_p - \sigma_p = \Sigma \omega_i^{(p)} \delta_i^{(p)},$$

a hol $\omega_i^{(p)}$ az $f(x)$-nek ingadozása a D_p felosztás i-edik szakaszában, melynek hossza $\delta_i^{(p)}$.

Tekintve, hogy $f(x)$ egyenletesen folytonos, minden adott ε-hoz lehet olyan Δ-t találni, hogy $f(x)$ ingadozása bármely Δ-nál rövidebb intervallumban kisebb legyen, mint ε és így ha p elég nagy ahhoz, hogy már $\Delta_p < \Delta$, akkor

$$\Sigma_p - \sigma_p < \varepsilon\,(b-a) = \varepsilon_1 .$$

Innen következik, hogy σ_p, Σ_p és velük S_p egy közös I határ felé közelednek és hogy I nem függ attól, miként választjuk az x_i helyeket az egyes részintervallumokon belül.

De vajjon akkor is az I érték felé tart-e az S összeg, ha akármilyen módon szaporítjuk a részintervallumokat, feltéve, hogy Δ — a szakaszok maximális hossza — a zérushoz közeledik?

Képzeljünk el egy D felosztást, melynek minden szakasza kisebb Δ-nál. Azt állítom, hogy a megfelelő S összeg I-től legfeljebb $2\varepsilon_1$-gyel különbözik $[\varepsilon_1 = \varepsilon(b-a)]$. Helyezzük ugyanis egymás fölé a D és D_p felosztásokat; ily módon a D' felosztás származik és a megfelelő σ' és Σ' összegekre nézve:

$$\sigma \leqq \sigma' \leqq \Sigma' \leqq \Sigma$$

$$\sigma_p \leqq \sigma' \leqq \Sigma' \leqq \Sigma_p.$$

Azonban

$$\sigma_p \leqq I \leqq \Sigma_p \quad \text{és} \quad \Sigma_p - \sigma_p < \varepsilon_1,$$

tehát

$$\Sigma' < \sigma_p + \varepsilon_1 < I + \varepsilon_1;$$

másrészt

$$\Sigma < \sigma + \varepsilon_1 \leqq \Sigma' + \varepsilon_1 < I + 2\varepsilon_1$$

és éppen így

$$\sigma > I - 2\varepsilon_1,$$

tehát csakugyan

$$|S - I| < 2\varepsilon_1.$$

I az $f(x)$ folytonos függvény integrálja a-tól b-ig; jele

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

14. A definiczióból világos, hogy $(a < c < b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

és ha a és b között

$$l \leqq f(x) \leqq L,$$

akkor

$$l(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq L(b-a).$$

Bizonyítsuk be, hogy az

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

függvény ($x<b$) folytonos és hogy differencziálhányadosa: $f(x)$. Valóban

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_a^{x_0+h} f(x)\,dx-\int_a^{x_0} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dx+\int_{x_0}^{x_0+h}[f(x)-f(x_0)]\,dx=hf(x_0)+\int_{x_0}^{x_0+h}[f(x)-f(x_0)]\,dx;$$

minthogy pedig $f(x)$ folytonos, x_0 és x_0+h között — ha h elég kis szám — mindenesetre

$$|f(x)-f(x_0)|<\eta$$

bárminő kicsiny is a megadott η. Tehát

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|<\eta$$

és innen

$$\lim_{h=0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0).$$

A következő függvénynek (K tetszőleges állandó lévén)

$$\int_a^x f(x)\,dx+K$$

neve: $f(x)$-nek határozatlan integrálja. Azt a függvényt, a melynek differencziálhányadosa $f(x)$, az $f(x)$ primitiv függvényének nevezzük.

Folytonos $f(x)$ függvénynek határozatlan integrálja egyúttal $f(x)$-nek primitiv függvénye is.

15. *Az integrálfogalom első általánosítása* nem folytonos függvényre nézve Cauchytól ered. Eddig csak olyan függvény számára értelmeztünk integrált, mely az adott (a, b) intervallumban véges és folytonos. Meglehet, hogy $f(x)$ véges és folytonos minden az (a, b)-n belül fekvő (α, β) intervallumban, de (a, b)-ben nem

(példa rá az $\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)^{\frac{1}{2}}$ függvény 0 és 1 között), ebben az esetben CAUCHY ezt a definicziót állítja fel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon'=0}} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték létezik. És ha az intervallum belsejében is vannak pontok:

$$c_1,\ c_2, \ldots, c_n,$$

a melyeken $f(x)$ folytonossága megszakad, de úgy, hogy az $\int_a^{c_1}, \int_{c_1}^{c_2}, \ldots, \int_{c_{n-1}}^{c_n}, \int_{c_n}^{b}$ integráloknak van értelmük, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} + \int_{c_n}^{b}.$$

LEJEUNE-DIRICHLET még tovább ment az általánosításban. Feltette először, hogy a szakadások helyeinek E halmaza végtelen, de a derivált E' halmaz csak végesszámú $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pontból áll. Akkor előbb az

$$\int_a^{a_1-\varepsilon} f(x)\,dx$$

integrált vizsgálta, hogy létezik-e és hogy van-e határértéke, ha ε zérus felé tart. Ha van, e határérték az $\int_a^{a_1} f(x)\,dx$ integrál és hasonlóan definiálva az $\int_{a_1}^{a_2}, \ldots, \int_{a_{m-1}}^{a_m}, \int_{a_m}^{b}$ integrálokat,

$$\int_a^b = \int_a^{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} + \cdots + \int_{a_{m-1}}^{a_m} + \int_{a_m}^{b}.$$

Ugyanígy kiterjeszthetjük a definicziót arra az esetre, a mikor az E' halmaz is végtelen, de E'' csak véges számmal tartalmaz pontokat és így tovább. A nélkül, hogy keresnők az E halmaz legáltalánosabb alakját, a melyre a DIRICHLET-féle elv még alkalmazható, jegyezzük meg, hogy ez semmi esetre sem lehet sűrű, mert sűrű halmaz első deriváltja maga az intervallum és a többi derivált az elsővel összeesik. Arra tehát nem lehet reményünk, hogy ilyenkor a derivált halmazok számbavételével csökkentjük a nehézségeket.

RIEMANN mutatott olyan véges függvényt, a mely nem folytonos egy sűrű halmaz helyein a nélkül, hogy mindenütt szakadása volna. E függvény:

$$\varphi(x) = \frac{(x)}{1^2} + \frac{(2x)}{2^2} + \cdots + \frac{(nx)}{n^2} + \cdots,$$

a hol (x) jelenti x-nek és a legközelebb eső egész számnak különbségét, kivéve ha x ilyen alakú: $n+\frac{1}{2}$, a mely esetben $(x)=0$. Bárminő pozitiv egész számok is p és q, $\varphi(x)$ nem folytonos, ha $x=\dfrac{2p+1}{2q}$; valóban

$$\lim_{\varepsilon=+0} \varphi\left(\frac{2p+1}{2q}-\varepsilon\right) = \varphi\left(\frac{2p+1}{2q}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{q^2} + \frac{1}{(2q)^2} + \frac{1}{(3q)^2} + \cdots\right]$$

$$\lim_{\varepsilon=+0} \varphi\left(\frac{2p+1}{2q}+\varepsilon\right) = \varphi\left(\frac{2p+1}{2q}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{q^2} + \frac{1}{(2q)^2} + \frac{1}{(3q)^2} + \cdots\right].$$

Ellenben minden más helyen $\varphi(x)$ folytonos, mert a $\sum_{1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$ sor egyenletesen összetartó és tagjai folytonosak.

16. **A Riemann-féle integrál.** — RIEMANN az integrálfogalom közvetlen forrásához, az

$$S = f(x_1)\delta_1 + f(x_2)\delta_2 + \cdots + f(x_n)\delta_n$$

összeghez fordult vissza és azt kereste, mikor van ez összegnek határértéke, ha az (a, b) intervallum δ_i szakaszainak δ maximuma zérus felé tart és x_i tetszés szerinti hely δ_i-n belül?

Nevezzük l_i- és L_i-nek az $f(x)$ alsó és felső határát a δ_i intervallumon belül (δ_i határpontjait is ideértve), a függvény ingadozása: $\omega_i = L_i - l_i$. Jelentsék továbbá l, L, ω a megfelelő mennyiségeket az (a, b) intervallumra vonatkozólag. A

$$\sigma = \sum_{1}^{n} l_i \delta_i$$

és

$$\Sigma = \sum_1^n L_i \delta_i$$

összegek halmaza egészen a végesben fekszik, mert

$$l(b-a) \leqq \Sigma l_i \delta_i \leqq L(b-a)$$

$$l(b-a) \leqq \Sigma L_i \delta_i \leqq L(b-a),$$

tehát a minden lehető felosztáshoz tartozó Σ számoknak van alsó határuk; nevezzük ezt B-nek és hasonlóképpen legyen A a σ számok halmazának felső határa.

Mindenekelőtt bebizonyítjuk, hogy

$$A \leqq B.$$

Vegyünk ugyanis két tetszésszerinti felosztást, a melyekhez a Σ, σ és Σ', σ' összegek tartoznak és a két felosztás egymásra helyezéséből származó felosztásnak megfelelő összegek legyenek Σ'' és σ''. Világos, hogy

$$\sigma < \sigma'' < \Sigma'' < \Sigma',$$

tehát a Σ halmaz minden eleme nagyobb, mint a σ halmaz bármelyik eleme. Ennek következménye az $A \leqq B$ egyenlőtlenség.

Azt állítom, hogy *δ csökkentésével Σ és σ egyenletesen közelednek a B és A értékekhez*, azaz minden ε-hoz meg lehet határozni olyan α-t, hogy

$$|B-\Sigma| < \varepsilon \quad \text{és} \quad |A-\sigma| < \varepsilon,$$

ha $\delta < \alpha$.

Tegyük fel egyszerűség kedvéért, hogy $f(x)$ nem negativ a és b között. Ellenkező esetben $f(x)$ helyett az $f(x)+C$ függvényt vetnők vizsgálat alá, C-t oly nagynak választva, hogy $f(x)+C$ mindenütt pozitiv legyen és ekkor Σ, σ, B, A helyébe ezeknek $C(b-a)$-val megnagyobbitott értéke kerülne.

Induljunk ki egy meghatározott felosztásból, a melyben az intervallumok:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p \qquad (\delta_i \geqq \Delta)$$

és a melyre nézve $\sum_1 = \sum_1^p L_i\delta_i$ összeg a B alsó határtól legfeljebb $\frac{\varepsilon}{2}$-vel különbözik. Ilyen felosztás mindenesetre van, ez az alsó határ értelmezéséből következik. Vegyünk most egy másik felosztást, a hol a részintervallumok maximális hossza, δ kisebb, mint az előbbiek minimuma: $\delta < \varDelta$. Ez új szakaszokat két csoportba oszthatjuk; az első fajtájú δ'_j intervallum egészen benn van valamelyik δ_i-ben, a másik fajtájú δ''_k két ilyen intervallumba is átnyúlik; ez utóbbiak száma legfeljebb $p-1$. Erre az új felosztásra vonatkozólag

$$\Sigma = \Sigma L'_j\varepsilon'_j + \Sigma L''\delta''_k,$$

azonban

$$\sum L'_j\delta'_j < \sum_1^p L_i\delta_i, \quad \sum L''_k\delta''_k < L\delta(p-1),$$

azaz

$$\Sigma < \Sigma_1 + L\delta(p-1).$$

Ha tehát α eleget tesz e két feltételnek:

$$\alpha \leqq \varDelta, \quad \alpha \leqq \frac{\varepsilon}{2L(p-1)},$$

akkor

$$\Sigma < \Sigma_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

mihelyt $\delta < \alpha$. Másrészt

$$B \leqq \Sigma_1 < B + \frac{\varepsilon}{2}$$

ennélfogva a $\delta < \alpha$ feltételből következik, hogy

$$B \leqq \Sigma < B + \varepsilon.$$

Azaz a $\sum$ összegek egyenletesen közelednek B-hez és hasonlót állíthatunk a σ összegekről is.

Az A és B határértékeket az $f(x)$ függvény alsó és felső integráljának nevezzük az (a, b) intervallumban; létezésüket Darboux mutatta ki; jeleik:

$$A = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx, \quad B = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

és láttuk, hogy létezésük csak ahhoz a feltételhez van kötve, hogy $f(x)$ véges függvény.

17. Térjünk vissza most az

$$S = f(x_1)\delta_1 + f(x_2)\delta_2 + \cdots + f(x_n)\delta_n$$

összeghez. *Ha $f(x)$ véges, az S értékek halmaza is az, mert*

$$l(b-a) \leqq S \leqq L(b-a).$$

E halmaz deriváltja maga az egész (A, B) intervallum. Más szóval, x_i-t választjuk úgy δ_i-ben, hogy $\sum_1^n f(x_i)\delta_i$ egy tetszőleges C értékhez közeledjék, ha δ zérus felé tart és $A \leqq C \leqq B$. Egyébként világos, hogy ez nem volna lehetséges, ha $C < A$ vagy $C > B$.

Jegyezzük meg, hogy $\underset{-}{\int_a^x} f(x)\,dx$ és $\overset{+}{\int_a^x} f(x)\,dx$ az x-nek folytonos függvényei $(a<x<b)$, mert $(h>0)$

$$lh \leqq \overset{+}{\int_a^{x+h}} f(x)\,dx - \overset{+}{\int_a^{x}} f(x)\,dx = \overset{+}{\int_x^{x+h}} f(x)\,dx \leqq Lh$$

és ugyanez az egyenlőtlenség áll $\underset{-}{\int_a^x} f(x)\,dx$ alsó integrálra.

Válaszszuk most a felosztások egy végtelen sorozatát

$$D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$$

oly módon, hogy valamely meghatározott x hely mindegyikben osztópont legyen és a D_n felosztásban egy-egy szakasz hossza kisebb legyen, mint $\frac{1}{n}$. Legyen továbbá

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

pozitiv, csökkenő számok zérus felé tartó sorozata. A D_n felosztásban úgy válaszszuk az x_i-ket, hogy

$$a \text{ és } x \text{ között} \quad f(x_i) > L_i - \varepsilon_n$$
$$x \text{ és } b \text{ között pedig } f(x_i) < l_i + \varepsilon_n.$$

Ekkor

$$\sum_{(a,b)} L_i\delta_i+\sum_{(x,b)} l_i\delta_i-\varepsilon_n(b-a)<\sum_{(a,b)} f(x_i)\,\delta_i<\sum_{(a,x)} L_i\delta_i+\sum_{(x,b)} l_i\delta_i+\varepsilon_n(b-a),$$

azaz

$$\lim_{n=\infty}\sum f(x_i)\,\delta_i=\underset{+}{\int_a^x} f(x)\,dx+\underset{-}{\int_x^b} f(x)\,dx.$$

E határérték x-nek folytonos függvénye, mely A-val egyenlő, ha $x=a$ és B-vel, ha $x=b$; van tehát oly ξ hely a és b között, hogy

$$\underset{+}{\int_a^\xi} f(x)\,dx+\underset{-}{\int_\xi^b} f(x)\,dx=C.$$

Ha most az előbb leírt módon választjuk a $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ felosztásokban az x_i helyeket és az x-et ξ-vel helyettesítjük, látjuk, hogy a megfelelő $\sum f(x_i)\,\delta_i$ összegek C felé közelednek.

18. E tétel alapján nyilvánvaló, hogy *ahhoz, hogy az $f(x)$ véges függvényre és az (a, b) intervallumra vonatkozó*

$$f(x_1)\,\delta_1+f(x_2)\,\delta_2+\cdots+f(x_n)\,\delta_n$$

összeg meghatározott értékhez közeledjék, ha a δ_i intervallumok δ maximuma zérus felé tart, bármiként választjuk is δ_i-n belül az x_i helyet, szükséges és elegendő, hogy $f(x)$-nek alsó és felső integrálja egyenlő legyen.

Ha e feltétel teljesül, az alsó és felső integrál közös értékét az $f(x)$ függvény (Riemann-féle) integráljának nevezzük — jele $\int_a^b f(x)\,dx$ — és az $f(x)$ függvényt magát *integrálható*nak. Megállapodunk továbbá abban, hogy

$$\int_a^b=-\int_b^a$$

és innen következik, hogy

$$\int_a^b+\int_b^c+\int_c^a=0.$$

Valamely függvény tehát integrálható, ha

$$B-A=0,$$

azaz

$$\lim_{\delta=0} \sum_1^n (L_i - l_i)\,\delta_i = 0,$$

vagy végre ($\omega_i = L_i - l_i$)

$$\lim_{\delta=0} \sum_1^n \omega_i \delta_i = 0.$$

Folytonos függvény nyilván integrálható; ezt külön bebizonyítottuk (13. §.), de az adott feltételből is következik. Ha ugyanis $f(x)$ folytonos az (a, b) intervallumban — a határokat is ideértve — akkor egyenletesen folytonos, azaz ha $\delta < \alpha$, akkor

$$\omega_i < \varepsilon$$

és így

$$\sum_1^n \omega_i \delta_i < \varepsilon\,(b-a).$$

Az integrálhatóság feltételét RIEMANN a következő alakba öntötte:

Az $f(x)$ véges függvény akkor és csak akkor integrálható, ha azon intervallumok összes hossza λ, a melyekben az ingadozás ε-nál nagyobb, zérus felé közeledik, a mint az osztópontokat minden határon túl sűrítjük. Valóban

$$\lambda\varepsilon < \sum_1^n \omega_i \delta_i < \varepsilon\,(b-a) + (L-l)\,\lambda.$$

Az integrálszámítás alapproblémájára ezekután a következő megoldást adhatjuk: *Ha az $f(x)$ függvény integrálható az (a, x) intervallumban, sőt valamivel az x-en túl is és folytonos az x helyen, akkor* (14. §.):

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

19. Mielőtt tovább mennénk, czélszerű lesz néhány fogalmat szabatosan körülírni. Legyen ξ az $(x-h, x+h)$ intervallum valamely pontja. Az $f(\xi)$ értékek összességének felső határa egy $M(x, h)$ szám, feltéve, hogy van olyan véges szám, a melynél $f(\xi)$ kisebb marad; ha ilyen nincs, akkor azt mondjuk, hogy

$M(x, h) = +\infty$. Hasonlóképpen legyen $m(x, h)$ az $f(\xi)$ értékek alsó határa, a mely esetleg: $-\infty$. Meglehet, hogy $f(x)$ mindenütt véges és $M(x, h)$ vagy $m(x, h)$ mégis végtelen. Az $(x-h, x+h)$ intervallumban való ingadozást így definiáljuk:

$$\omega(x, h) = M(x, h) - m(x, h).$$

Ha $h' < h$, akkor

$$f(x) \leqq M(x, h') \leqq M(x, h), \quad f(x) \geqq m(x, h') \geqq m(x, h),$$

$$0 \leqq \omega(x, h') \leqq \omega(x, h).$$

Ebből látszik, hogy $M(x, h)$, $m(x, h)$, $\omega(x, h)$ meghatározott értékekhez közelednek, ha h zérus felé tart. Legyenek $M(x)$, $m(x)$, $\omega(x)$ e határértékek; közvetlenül belátható, hogy

$$M(x) \geqq f(x), \quad m(x) \leqq f(x), \quad \omega(x) = M(x) - m(x) \geqq 0;$$

az $M(x)$, $m(x)$, $\omega(x)$ számok az $f(x)$ függvénynek maximuma, minimuma és ingadozása az x helyen.

A folytonosság ismertető jele az, hogy $\omega(x) = 0$. Valóban, ha $f(x)$ folytonos, azaz

$$|f(x+a) - f(x)| < \varepsilon,$$

a mikor $|a|$ kisebb h-nál, bizonyára

$$M(x, h) \leqq f(x) + \varepsilon, \quad m(x, h) \geqq f(x) - \varepsilon$$

és igy függetlenül ε-tól

$$f(x) \leqq M(x) \leqq f(x) + \varepsilon,$$
$$f(x) - \varepsilon \leqq m(x) \leqq f(x),$$

tehát

$$M(x) = m(x) = f(x) \quad \text{és} \quad \omega(x) = 0.$$

Megfordítva, ha $\omega(x) = M(x) - m(x) = 0$, akkor

$$M(x) = m(x) = f(x),$$

mert általában

$$m(x) \leqq f(x) \leqq M(x).$$

Azonban, ha h elég kicsiny

$$M(x, h) < M(x) + \varepsilon, \quad m(x, h) > m(x) - \varepsilon$$

és így $|\alpha|$-t kisebbnek választva h-nál

$$|f(x+\alpha) - f(x)| < \varepsilon.$$

Az $f(x)$ függvény nem folytonos az x helyen, ha $\omega(x) > 0$. Világos, hogy ha x oly pontok határhelye, a melyek mindegyikén az ingadozás legalább ε, akkor $\omega(x) \geqq \varepsilon$. E szerint *mindazon pontok, a melyeken az ingadozás legalább ε, zárt halmazt alkotnak.*

Szücs Adolf.

VONTATÁS IVES VASUTI PÁLYÁN.

Az ívben fekvő vasuti vágány külső sinszálát azért, hogy a centrifugális gyorsulás hatását ellensúlyozzuk, általában magasbbítani szoktuk.

A német vasutak egyesülete régebben a biztonság tekintetéből tette kötelezővé a magasbbítást; ujabban csak azt követeli meg, hogy «oly magasbbítást alkalmazzunk, a melylyel — tekintettel az illető pályán előforduló sebességekre — legtökéletesebben érhetjük el, hogy a kerekek nyomkarimáinak a két sinszál belső éleire gyakorolt hatása legkisebb lesz».

Franczia és német pályákon[1] ugyanis azt mutatták a kisérletek, hogy a magasbbítás elhagyása biztonság tekintetéből semmi hátránynyal sem jár: a Noisy-le-sec-i kisérleti pályán jelentékeny sebességgel 300, 200, sőt 75 m sugarú íveken minden veszély nélkül bocsátottak át vonatokat. A német vasutak egyesületének pályáin is eszközöltek hasonló kisérleteket, a melyek ugyancsak beigazolták, hogy a vontatás biztonsága nem szenved a magasbbítás elhagyása miatt.

A vontatási ellenállások szempontjából azt mutatták a franczia kisérletek, hogy magasbbítás mellett mintegy 20—30%-kal kisebbek az ellenállások, mint a nélkül; ez a megfigyelés azonban a német vasutak egyesületének területén nem nyert beigazolást, a miért vitásnak kell tekintenünk.

E kisérleti eredményeknek hatása alatt a magasbbítás értékét a gyakorlatban lényegesen leszállították, úgy, hogy a porosz államvasutak a következő képlet szerint alkalmazzák:[2]

---

[1] Handbuch der Ingenieurwissenschaften, V. 2-ik kötet 94. old.

[2] Die Eisenbahn-Technik der Gegenwart II. 2. 152. oldal. 1908.

$$h^{mm} = m \cdot \frac{V^{km}}{R^m},$$

a melyben $m = 500-700$.

A magasbbításnak a fenntartásra való befolyása még kétes.[1] Eziránt SANDNER I. folytatott kisérleteket, a melyekből azonban törvényszerűség nem volt megállapítható. A fenntartásnak az a szempontja, hogy oly mértékű magasbbítást alkalmazzunk, a melylyel a sinszálaknak lehetőleg egyforma igénybevételét érjük el.

Dr. ZIELINSKI SZILÁRD tanár műegyetemi előadásaiban az ívben haladó vonatot a stabilitás szempontjából vizsgálja meg. A centrifugális erő felborító hatása ellenében a járműnek súlya biztosítja az egyensúlyt. Az áthaladás biztonságának fokát abból itélhetjük meg, hogy szembeállítjuk a gyakorlatban szokásos sebességet azzal, a melynek esetén a centrifugális erő nyomatéka épen egyenlő a súly nyomatékával.

Dr. ZIELINSKI tanár szerint szabványos nyomközű pályán, 1·5 m. sulypont magasság esetén a kocsi egyensúlyban van, a míg

$$V^{km} \leqq \sqrt{60R^m}.$$

Ez a képlet egyenlő magasságban fekvő sínszálakra vonatkozik; ha azonban az íves pálya külső sínszálát megemeljük, akkor az ív közepe felé egy lejtőt állitottunk elő, a minélfogva a súlynak a lejtő irányába eső komponense a centrifugális erővel ellenkező értelemben forgat, vagyis a stabilitást megnöveltük. Ha például 10 cm.-nyi magasbbítást tételezünk fel, akkor most

$$V = \sqrt{70R}$$

fejezi ki azt a kritikus sebességet, a melynél a jármű a külső sínszál körül billen.

Hasonlóképen 15 cm. magasbbítás esetén

$$V = \sqrt{74R}$$

a kritikus sebesség.

---

[1] Der Eisenbahnbau der Gegenwart 1908, 2. rész 152. oldal.

A gyakorlatban egy R sugarú ivben megengedhető sebesség maximumát a következő képlettel számitjuk:

$$V^{\frac{km}{óra}} = 4\sqrt{R^m - 50}.$$[1]

A biztonság fokát ezek után megitélhetjük, hogy ha az e képlettel, különböző sugarak esetén számitott sebességeket a kritikus sebességekkel együtt egy táblázatba foglaljuk:

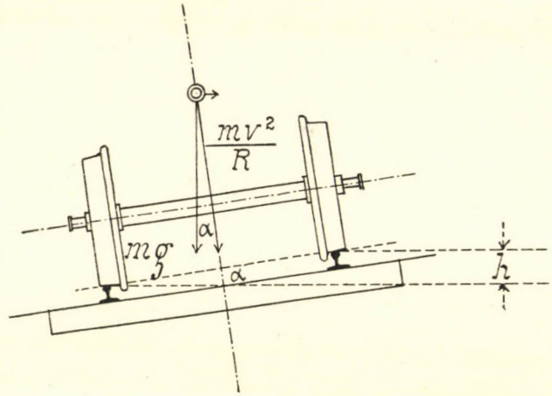
R méter	Megengedett sebesség km.	Kritikus sebességek km.-ekben		
		Magasbbitás cm.		
		0	10	15
	$V=4\sqrt{R-50}$	$V=\sqrt{60R}$	$V=\sqrt{70R}$	$V=\sqrt{74R}$
1000	123	245	265	272
500	85	173	187	192
300	63	134	145	149
200	49	110	118	121

A táblázat három utolsó oszlopának összehasonlításával látjuk, hogy 10, ill. 15 cm. magasbbitás esetén csak mintegy 8, ill. 11%-kal lesz nagyobb az a kritikus sebesség, melynél a kocsi a külső sínszál körül billen. (A kritikus sebességek képleteiben nem vétetett figyelembe az a körülmény, hogy a magasbbitással a centrifugális erő karja is kisebb lesz. A sebességnek ez okból való növekedése azonban még az előbbinél is kisebb.)

A táblázat segítségével megitélhetjük, hogy a külső sínszál megemelésével csak igen kis mértékben vagyunk képesek a vonat stabilitását növelni. A magasbbitás alkalmazásával ezek után tehát csak azt a szempontot kell kielégitenünk, hogy vele a vontatás és a pályafentartás költségeit legelőnyösebbekké tegyük.

---

[1] Die Eisenbahn-Technik der Gegenwart. II. köt. II. rész 1908, 151. oldal.



1. ábra.

Az ábrában feltüntetett «h» a theoretikus magasbbitás. Ezt úgy nyerjük, hogy oly keresztirányú lejtőt állitunk elő, a mely merőleges a súly és a centrifugális erő eredőjére. Szabványos nyomközű pálya esetén

$$h = 0{,}0155 \frac{V^2}{R} \cdot$$

Nagy sebességek esetén a theoretikus képlet már oly nagy magasbbitásokat eredményez, hogy a belső sinszál — a vágánytengelyből nézve — kifelé dűlne, továbbá pedig előállhatna még az a veszély, hogy az ívben valamely okból lassan haladó, vagy megálló vonat a tetemes magasbbitás következtében befelé felborulna.

A gyakorlatban a theoretikus képletet ez okok miatt csak addig alkalmazhatjuk, a míg a magasbbitás ca. 125 mm.-nél kisebb.[1] Mivel a theoretikus képlet más tekintetben sem elégitette ki a gyakorlat-támasztotta követelményeket, eltértek tőle és többé-kevésbbé önkényes képleteket állitottak fel a magasbbitás kiszámitására.

A magyar királyi államvasutaknál egy 1900. évi julius hó

[1] Der Eisenbahnbau V. 2. kötet 1906. 95. oldal.

12-ikén kelt miniszteri leirat értelmében — a mely még hatálylyal bír — a magasbbitás maximuma *100 mm.* Ez értéken alul pedig a porosz államvasutaktól átvett

$$h = \frac{V}{2R}$$

képlettel számitják ki a magasbbitást.

Ez a lineáris képlet azonban tökéletlen annyiban, hogy kisebb sebességek mellett, nevezetesen másodrendű pályák esetén, nagyobb magasbbitásokat eredményez, mint a theoretikus képlet. Már pedig a theoretikusnál még nagyobb magasbbitást semmivel sem vagyunk képesek megokolni.

Dr. Zielinski tanár ez okból a következő képletet ajánlja:

$$h = \left(10 - \frac{5V}{1000}\right)\frac{V^2}{R}.$$

Ezt a képletet dr. Zielinski tanár a theoretikus és a lineáris képletek egybevetésével állitotta fel. Előnye, hogy a theoretikusnál sohasem ad nagyobb magasbbitásokat.

Míg ma mindenütt megegyeznek abban, hogy a theoretikusan egy kerékpár esetére számitott magasbbitás túlságosan nagy, addig a régebbi gyakorlat és az irodalom ennél még nagyobb magasbbitásokat is megkövetel.[1]

Így kisfaludi Lipthay tanár a theoretikusan számitott magasbbitás szögét

$$a = \frac{v^2}{Rg}$$

általában nem tartja elégségesnek, hanem ehhez a lokomotivok járása miatt egy nagyobbat vesz fel, úgy hogy:

$$\gamma = \frac{v^2}{gR} + \frac{8}{R}.$$

---

[1] Kisfaludi Lipthay Sándor: Vasutépitéstan I. 88. és 245. oldal.

Lipthay szerint a $\frac{8}{R}$ többletnek alkalmazása a gyakorlatban czélszerűnek bizonyult be. A magasbbítás nagysága szabványos nyomköz és $g = 9.81$ mellett:

$$h = \frac{0,153v^2+12}{R}.$$

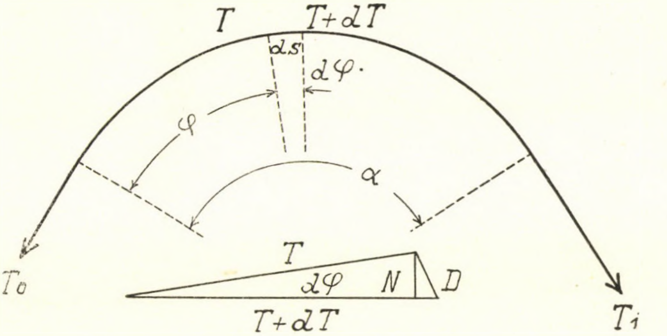
Lipthay szerint «a képlet alkalmazásánál v ... helyett a leggyorsabban járó vonatok sebessége választandó. Lassu vonatoknál azután annál nagyobb többlet keletkezik a központfutó erő fölött».

Kitünik ez ellentétes felfogásokból, hogy a míg a régebbi irodalom a magasbbítást biztonsági szempontból tartotta szükségesnek, addig ma csak azért alkalmazzuk, hogy a vontatást és a pályafenntartást gazdaságosabbá tegyük.

Mivel a magasbbítás kérdésének helyes elbirálásához az eddigi kisérleti eredmények nem nyujtanak elegendő anyagot, szükségesnek látjuk a kérdést elméleti úton is megvilágítani, hogy ezzel a tapasztalat jelenségeit és ezeknek látszólagos ellentmondásait megmagyarázhassuk.

Használjuk fel elméleti fejtegetéseink kiindulási pontjául a legujabb irodalomban több helyütt kifejezett ama nézetet, a mely a következőkben merül ki.

Az ujabb irodalom a magasbbítás csökkentésének okául mindenekelőtt a kisérleti eredményeket állítja oda, magyarázza pedig a régi gyakorlattól való eltérést azzal, hogy az íves pályán nem egy egyes kerékpár gördül, hanem ezeknek kocsikból alkotott rendszere: a vonat, a melyet *egy* mótorral vontatunk. Ekkor a haladó vonat úgy viselkedik, mint egy kifeszitett láncz, melynek az a törekvése, hogy kiegyenesedjen. Keletkezni fog tehát egy erő, mely a tengelyeket a belső sinszál felé igyekszik szorítani. Bizonyos, hogy ez az erő csökkenteni fogja a centrifugális erőt, a minélfogva a magasbbítást is csökkenthetjük.



2. ábra.

Tekintsük tehát az ívben haladó vonatot egy láncznak vagy kötélnek és keressük meg, hogy a külső erők milyen nagyságú feszültségeket fognak benne előidézni. Legyen ez a lánez egyelőre súlytalan és tegyük föl, hogy A és B pontjaiban T_0 és T_1 nagyságúak a feszültségek. Ekkor T_0 és T_1 hatása alatt a láncz kiegyenesedni törekszik, a minélfogva a kényszerre, az íves pálya belső sinszálára nyomást fog gyakorolni.

Legyen $T_0 < T_1$. Mi a feltétele annak, hogy az egyensúly megzavartassék? Vagyis keressük meg T_1 erőnek ama értékét, a mely épen elegendő ahhoz, hogy az A és B pontok közötti lánczszakasz T_1 irányában elmozduljon.

Feladatunkat, ilyen fogalmazásban már ismerjük a mechanikából: a hengeren surlódó kötél problémájával állunk szemben.

Már előbb megjegyeztük, hogy a surlódó kötél problémája abban az alakban, a mint azt a statikában tárgyalni szokás, közvetlenül nem alkalmazható a vasuti vonat esetére. De mivel következtetéseinket mégis a hengeren surlódó kötél feladatára alapítjuk, szükségesnek tartjuk ennek megoldását itt megismételni.[1]

Adva van tehát egy kötél, a melyet egy szilárdan megrögzí-

[1] Dr. Réthy Mór műegyetemi tanár előadásaiból.

tett henger körül csavaroltunk. A kötél egyik végén T_0 erő hat, kérdés, mekkora lesz az a legkisebb T_1 erő, melyet a kötél másik végén alkalmazva, elmozdulás áll elő. Természetesen felteszszük, hogy a henger oly szilárdan van megerősitve, hogy azt T_1 erő nem képes elforgatni.

Az egyensúlyi állapotot a henger és a kötél között előálló surlódás tartja fenn. Ez akkor fog megszünni, hogyha oly nagyságú T_1 erőt alkalmazunk, a mely T_0-t és az összes, maximális surlódási erőket képes legyőzni.

Legyen a T_0 feszültséghez tartozó középponti szög abszolut mérőszáma $= 0$, a T_1-hez tartozó pedig $= \alpha$. Az ábrán kiemelt «ds» kötélelem szöge legyen $= d\varphi$. A «ds» ivelem addig marad nyugalomban, a míg a reá ható aktiv erők eredője kisebb, mint az a reakczió, a melyet a kényszer képes kifejteni. Az aktiv erők: T, a kötélelemet megelőző és $T+dT$ az azt követő kötélfeszültségek. Ez a két erő ellenkező értelmű és közbezárt szögük $= d\varphi$, hogyha $d\varphi$ a «ds»-hez tartozó középponti szög.

Rajzoljuk meg a «ds»-hez tartozó erőábrát. Ebből látjuk, hogy az egyensúly fenntartásához szükséges, hogy a kényszer egy D nagyságú ferde reakcziót gyakoroljon. Bontsuk D-t két összetevőre, akkor N a «ds» elemre ható normális erő, $f.N$ pedig a kényszer felületén keletkező surlódás. Az egyensúlyi állapot akkor szünik meg, hogyha f surlódási tényező legnagyobb értékét vette fel.

Az egyensúly határán tehát:

$$N = T.d\varphi \quad \text{és} \quad dT = f.N.$$

$$\frac{dT}{T} = f d\varphi.$$

Az utóbbi kifejezés egy ismeretes differencziál egyenlet: a baloldalon a számláló a nevező differencziálja, tehát integrálással

$$l.T = f.\varphi + C.$$

Az integrálási állandó megállapitására

$$\varphi = 0; \quad T = T_0$$

kezdeti feltétel szolgál. Ez értékpár behelyettesitésével pedig

$$C = l.\, T_0$$

$$l.\, \frac{T}{T_0} = f\varphi.$$

Hozzuk mindkét oldalt «e» alapra, akkor

$$\frac{T}{T_0} = e^{f\varphi}, \quad \text{vagyis} \quad T = T_0\, e^{f\varphi}.$$

Az «α» középponti szöggel jellemzett helyzetben pedig

$$T_1 = T_0\, e^{f\alpha}.$$

Az «f» surlódási tényező nagyságát kisérletekből ismerjük. Csak azt jegyezzük meg, hogy a sebesség növekedésével «f» csökken és hogy nem közömbös «f» értékére nézve, hogy milyen irányuak a surlódó anyagok szálai a támadó erőhöz képest.

Hogyha «f» tényező és α középponti szög elegendő nagyok, akkor megadott T_0 erővel bármely nagyságú, de véges T erőt képesek vagyunk egyensúlyban tartani. Ellenben sohasem lehet $T_0 = 0$; mert akkor $\varphi = +\infty$.

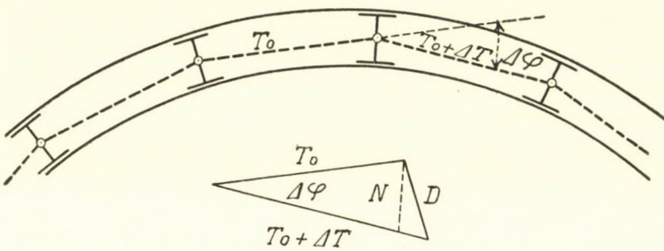
A surlódási erőnek ilyetén felhasználása a gyakorlatban is előfordul, nevezetesen a hajók kikötésénél, a mikor a hajókötelet elégszer a kikötő-bak körül csavarolva, bármely nagyságú járművet képesek vagyunk egyensúlyban tartani. Ugyanezen az elven alapszik a szalagfékek alkalmazása is.

A hengeren surlódó kötél feszültségeinek kifejezését — ilyen alakban — nem alkalmazhatjuk az ívben haladó vasuti vonat kapcsoló szerkezetében fellépő feszültségek kiszámitására. Ugyanis az ívben haladó vasuti vonat is egy fix kényszeren surlódó kötélnek volna tekinthető, ennek azonban tetemes súlya van, a miért nemcsak a görbe felületű kényszeren, hanem az alzaton is fog surlódni. Egy másik különbség vonat és kötél között az, hogy vonat esetén a kényszer reakcziói többé nem folytonosan elosztottak, hanem konczentráltak. Vasuti jármű esetén surlódás csakis a kerekek és a sinek érintkező felületein léphet fel.

A kerekekre átháramló reakcziók azután a kocsi-aljakon keresztül átadódnak a kapcsoló szerkezetre.

Milyen változást fog a vonóerő szenvedni, hogyha folytonosan elosztott reakczió helyett, elszigetelt pontokban működőt vezetünk be?

Képzeljünk el minden egyes keréktengely közepén egy-egy csuklót és helyettesitsük a vonat kapcsolószerkezetét az e csuklókat összekötő egyenes vonórudakkal.



3. ábra.

Vegyünk egy bizonyos csuklót szemügyre, akkor a reá ható erők ezek: a megelőző vonóerő $= T_0$, a követő vonóerő $= T_0 + \Delta T$ és a belső sinszálon keletkező reakczió $= D$. A csukló nyugalomban van, tehát

$$(T_0 + \Delta T, T_0, D) = 0.$$

Bontsuk fel D erőt két komponensre, úgy hogy az egyik a kényszerre normális, a másik érintőirányú legyen, akkor egyenlő nagyságú tengelytávolságok esetén $\sphericalangle T_0$, $T_0 + \Delta T$ szögfelezője lesz — igen tökéletes megközelitéssel — a «D» erő támadáspontjában a kényszerhez huzott érintő iránya.

Keressük meg ΔT kifejezését az erőábra segitségével, akkor a kényszerre ható normális erő:

$$T_0 \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + (T_0 + \Delta T) \sin \frac{\Delta\varphi}{2};$$

a surlódás nagysága e szerint:

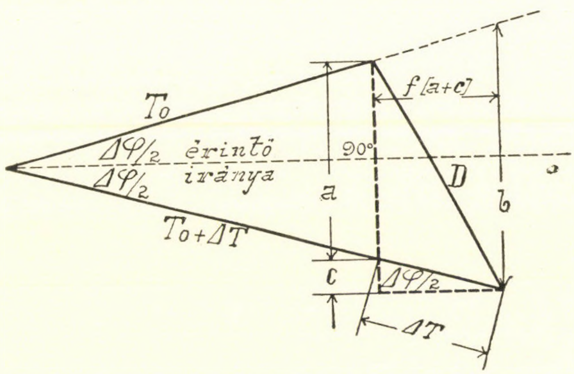
$$f(2T_0 + \Delta T) \sin \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

A feszültség növekménye tehát:

$$\Delta T = f(2T_0 + \Delta T) \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2},$$

a miből:

$$\Delta T = T_0 \frac{2f . \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2}}{1 - f \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2}}.$$



4. ábra.

Ezzel megtaláltuk a feszültség növekményét elszigetelt pontokban való érintkezés esetén.

Keressük meg mostan a feszültség növekményét folytonosan érintkező kötél esetén, a mikor a szögeltérés úgy mint előbb $= \Delta\varphi$. Legyen ez a növekmény most $= \Delta T'$, akkor az előbb levezetett képlet segítségével:

$$T = T_0 + \Delta T' = T_0 e^{f\Delta\varphi}.$$

Hogy az összehasonlítást megejthessük, fejtsük ki az $e^{f\Delta\varphi}$ hatványsort, akkor

$$\Delta T' = T_0 \left(f\Delta\varphi + \frac{f^2\Delta\varphi^2}{2!} + \frac{f^3\Delta\varphi^3}{3!} + \cdots \right).$$

Ha már most összehasonlítjuk ΔT és $\Delta T'$ kifejezéseit, azt találjuk, hogy vasuti vonat esetén, a mikor f ca. 0·25 és $\Delta\varphi$ ca. 0·02, a feszültségek növekményei, ΔT és $\Delta T'$ csaknem egyenlők, vagyis izolált és folytonos érintkezés között gyakorlatilag nincsen különbség.

Tekintsünk el ezért a következőkben is az elosztott és konczentrált reakcziók között való különbségtől és képzeljük el a vonatot olyannak, mintha az végtelen sok kerékpárból állana, a melyek úgy vannak egymáshoz kötve, hogy bármily görbültségű pályán is tökéletesen, szabatosan képesek gördülni. Vonatunk tehát épen olyan hajlékony lesz, mint egy kötél.

Bizonyos, hogy a vonatnak ilyetén összehasonlításával nemcsak a folytonosság tekintetében, hanem ennél még sokkal fontosabb tényezőkben is követtünk el hibát: így nem számoltunk még a tengelyek merevségével, a kerekek járó lapjainak kopásával — a minélfogva ezek nem képesek szabatosan gördülni, hanem csúszni is fognak — továbbá azzal, hogy a sinszálak maguk sem teljesen fixek.

E tényezőknek egyelőre csak annyiban felelhetünk meg, hogy az «f» surlódási együtthatónak nem azzal az értékével számolunk, a mely pl. a gépelemek szerkesztésénél használatos, hanem ennél jóval nagyobbat veszünk fel.

A megnövekedett «f» tényező értékét KISFALUDI LIPTHAY[1] tanár egy számítási példában $f = 1/4$-nek vette fel, mert «a nyomkarima és sinek közötti surlódásnak, melynek iránya a szálak irányával ferde szöget zár be, nagyobb együtthatója van, mint a kerekek csúsztatásának» . . .

---

[1] Vasutépítéstan I. 104. oldal lent.

BOEDECKER: «Die Wirkungen zwischen Rad und Schiene und ihre Einflüsse auf den Lauf und den Bewegungswiderstand der Fahrzeuge in den Eisenbahnzügen» cz. művében a nyomkarima és a sinfej között fellépő súrlódás együtthatója, $f = \frac{1}{4}$ (71. old.)

A súlyos kötél.

Térjünk át most, egy a valósághoz közelebb álló esetre, a mikor a kötélre megint csak statikai erők hatnak, de annak súlyát is figyelembe veszszük. Ilyen esettel állunk szemben, a mikor az ivben álló vonatot megindítjuk, vagy a mikor az ivben egyenletesen haladó vonat sebességétől eltekinthetünk. Attól, hogy a járművek csak egyes pontokban, nem folytonosan érintkeznek a kényszerrel, továbbá, hogy a kerekek nem gördülnek szabatosan, most is eltekintünk.

Írjuk fel újból a surlódó kötél előbb talált differencziálegyenletét:

$$dT = fTd\varphi$$

és alkalmazzuk ezt a súlyos kötél esetére. Emeljünk ki újból egy véges kötélszakaszt és tegyük föl, hogy ennek végein T_0 és T erők működnek.

A rendszer csak akkor fog T irányában elmozdulni, hogy ha ez legyőzi T_0-t, továbbá a kényszeren előálló összes surlódást és végül le kell még győznie azt a surlódást is, a mely a súlyos kötél és annak alzata között előáll.

Legyen a kötélnek egységnyi hosszúságú részére eső ilyen surlódása λ, akkor ds kötélelemre λds esik. A ds kötélelem addig van egyensúlyban, a míg a kényszer képes egy olyan nagyságú D erőt kifejteni, a melylyel

$$(T+dT,\ T,\ D) \doteq 0.$$

Azt a határt keressük, a melynél az egyensúly megszűnik, vagyis a mikor dT oly nagy, hogy a passziv erők maximális értékét legyőzi. Ekkor szükséges, hogy

$$dT = fTd\varphi + \lambda ds.$$

Az előbbi problémában, a súlytalan kötél esetében az érintkező felületnek geometriai tulajdonságai nem szerepeltek a feszültség kifejezésében, mert a $T=T_0 e^{f\varphi}$ képlet levezetésekor csak azt tételeztük föl, hogy az érintkezés folytonos és hogy $\varphi = \sphericalangle T, T_0$.

Hogy az érintkező felület milyen természetű, továbbá, hogy a kötélnek milyen hosszúságú része surlódik a kényszeren, közömbös volt a T erő nagyságára. A súlyos kötélnek előbb felirt differencziálegyenletéből azonban látjuk, hogy most már a kényszer alakja is hatással van a feszültség nagyságára.

$$dT = fTd\varphi + \lambda\rho d\varphi,$$

a hol felteszszük, hogy $\rho = F(\varphi)$ egy folytonos függvény.

A görbült vasuti pálya azonban vagy köríves, vagy az átmenetekben, aránylag rövid szakaszokban parabolikus. Bennünket csak a körív esete érdekel, tehát

$$dT = fTd\varphi + \lambda R d\varphi.$$

Hogy ha λ értékét állandónak tekintjük, akkor a változók szétválasztásával

$$dT = fd\varphi\left(T + \frac{\lambda R}{f}\right),$$

$$\frac{dT}{T + \frac{\lambda R}{f}} = fd\varphi,$$

a minek a megoldása teljesen azonos a súlytalan kötél esetében talált megoldással, mert λ állandó lévén, a számláló újból a nevező differencziálja.

$$\int \frac{dT}{T + \frac{\lambda R}{f}} = \int fd\varphi,$$

$$\mathrm{l.}\left(T + \frac{\lambda R}{f}\right) = f\varphi + C.$$

A C állandó megállapitásához egy kezdeti feltételre van szükségünk. Ennek megállapitásában is van különbség a súlytalan kötél esetéhez képest. Mert míg ott $T = T_0 e^{f\varphi}$-ben $T_0 = 0$ csak akkor lehetséges, hogy ha $\varphi = \infty$, addig a fennforgó esetben azt követeljük, hogy $\varphi = 0$ helyen, vagyis a kötél szabad végén T elenyészszen. $T = 0$, tehát behelyettesítéssel

$$\mathrm{l.}\,\frac{\lambda R}{f} = C.$$

Itt a logarithmus jele alatt egy véges pozitiv szám áll, C tehát valós. Helyettesítsük be már mostan C értékét, akkor

$$\mathrm{l.}\left(T + \frac{\lambda R}{f}\right) - \mathrm{l.}\left(\frac{\lambda R}{f}\right) = f\varphi,$$

$$\mathrm{l.}\left(\frac{T + \frac{\lambda R}{f}}{\frac{\lambda R}{f}}\right) = f\varphi$$

és ha mindkét oldalt «e» alapra hozzuk,

$$\frac{T + \frac{\lambda R}{f}}{\frac{\lambda R}{f}} = e^{f\varphi}; \quad T = \frac{\lambda R}{f} e^{f\varphi} - \frac{\lambda R}{f},$$

$$T = \frac{\lambda R}{f}\left(e^{f\varphi} - 1\right),$$

a mivel megtaláltuk a súlyos kötélben fellépő feszültségek kifejezését.

$\varphi = 0$ helyen, vagyis a kötél egyik végén $T = 0$ lesz, a mi most már megfelel a valóságnak, mert tudjuk, hogy a vasuti vonat utolsó kocsijának szabad kapcsoló szerkezetében csakugyan 0 a feszültség. A φ szög növekedésével $(e^{f\varphi} - 1)$ hatványsor értéke is folyton nő, tehát φ szöggel a feszültség is megnövekedik.

Képletünk egyben megmagyarázza a bak körül csavarolt hajókötél jelenségét is. A tapasztalatból ugyanis tudjuk, hogy képesek vagyunk a hajót úgy is megrögzíteni, hogy a kötél végén semminő T_0 erőt nem alkalmazunk. Az egyensúlyt pusztán azzal is elérhetjük, hogy a kötelet elég sokszor körülcsavaroljuk.

Ez ellentmond az előbbi $T=T_0e^{f\varphi}$ képletnek, de egybehangzik a most találttal. Ennek az a magyarázata, hogy az így alkalmazott hajókötelet már súlyos kötélnek kell tekintenünk; mert az egyes csavarulatok a nehézség miatt egymáson is fognak surlódni. Ha ismerjük a bak és kötél közötti surlódás tényezőjét, továbbá a kötél csavarulatai között fellépő surlódást, a mit λ-val fejeztünk ki, végül a bak sugarát, akkor adott T erő mellett kiszámíthatjuk, hányszor szükséges a kötelet körülcsavarolni. Legyen $\varphi=n2\pi$, akkor az előbbiek szerint

$$\mathrm{l.}\left(\frac{T+\frac{\lambda R}{f}}{\frac{\lambda R}{f}}\right)=2f.n\pi,$$

miből a csavarulatok száma:

$$n=\frac{1}{2f\pi}\,\mathrm{l.}\left(\frac{fT}{\lambda R}+1\right).$$

Állapitsuk meg ezekután a képletünkben előforduló λ tényező értékét. λ a kötél egységnyi hosszúságára eső ama ellentállást jelenti, a mely kötél és alzat között keletkezik. Legyen a kötél keresztmetszete állandó és anyaga végig ugyanaz, akkor λ-át így is írhatjuk fel:

$$\lambda=\frac{\Sigma Q}{L}\cdot\tau,$$

a hol

ΣQ a szóban forgó kötélszakasz súlya,
L a kötélszakasz hosszúsága és

τ a kötél és alzat közötti surlódás tényezője. λ értékét az eddigiekben állandónak tételeztük fel, azonban mi sem változik, hogy ha λ nem állandó, hanem a középponti szögnek valamilyen függvénye. Ekkor $\lambda=\Psi(\varphi)$, a mit a kiindulási differencziálegyenletbe behelyettesitve, annak csak analitikai megoldását tenné körülményesebbé.

Alkalmazzuk a súlyos kötél esetét a vasuti vonatra. Ekkor λ mindenekelőtt nem surlódási együtthatót fog jelenteni. Legyen ΣQ az L hosszúságú vonatnak teljes súlya tonnákban, akkor τ alatt értjük az annak 1 tonnájára eső összes ellenállásokat.

Vízszintes és egyenes pálya esetén τ a vonat fajlagos ellenállását jelenti

$$\tau = \mu.$$

Ennek meghatározására számos empirikus képletünk van, a melyek közül a «Studien Gesellschaft»[1] kisérletei szerint az a typus bizonyult be legtökéletesebbnek, a melynek alakja LEITZMANN és BORRIES mérnököktől ered.

A kocsivonat összes ellenállása ezek szerint:

$$E^{kg} = (a+bv)\Sigma Q^t + cv^2 F^{m^2}, \quad \mu = \frac{E}{\Sigma Q},$$

a hol a, b és c állandó együtthatók, «v» a vonat sebessége, F^{m^2} pedig a vonatnak ama felülete, a melyre nyugodt levegő esetén «v» képzelt szélnyomás hat.

Vízszintes, de nem egyenes pálya esetén hozzájárul még τ-hoz az az ellenállástöblet, a mely egy egyetlen járóműnek az ívben való áthaladásakor a tengelyek merevsége s a kerekek csuszása miatt keletkezik: ez a fajlagos kanyarulati ellenállás *egy járómű esetére*, a melyet ν-vel fogunk jelölni.

A gyakorlatban a kanyarulati ellenállást ezzel a képlettel számitjuk:[2]

$$\nu = \frac{C}{R},$$

a hol C a járómű szerkezetétől függ.

Ha az íves pálya vizszintes, akkor tehát $\tau = \mu + \nu$.

Ezekkel azonban még nem merítettük ki τ tényező értelmezését. Ha a pálya nem vízszintes, akkor ugyancsak τ-ban foglaltatik még ama tonnánkénti erő, a melyet a nehézségi erőnek a pálya irányába eső komponense ellenében kell kifejtenünk.

---

[1] A «Studiengesellschaft für elektrische Schnellbahnen in Berlin» kisérletei «Annalen f. Gew. und Bauw.» 1906, I. 225. oldalán vannak közölve.

LEITZMANN és BORRIES kisérletei a «Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ingenieure» 1904. évfolyamában jelentek meg.

[2] KISFALUDI LIPTHAY SÁNDOR: Vasutépítéstan I. 105. oldal.

BOEDECKER: Die Wirkungen zwischen Rad u. Schiene. § 19: Widerstand der Fahrzeuge in Folge der Krümmung des Gleises.

Ha a pálya emelkedése «p» permille, akkor Q tonna súly esetén, annak a pálya irányába eső komponense igen kis elhanyagolással: $Q \cdot p$ kilogramm. A pálya emelkedését jellemző $^0/_{00}$, tehát épp úgy fog szerepelni az ellenállások kifejezésében, mint a gördülés és levegőnyomás ellenállása. Ezekután τ-t így írhatjuk fel:

$$\tau = \mu + \nu \pm p,$$

a mit T kifejezésbe helyettesítve,

$$T = \frac{\Sigma QR}{Lf}(\mu + \nu \pm p)(e^{f\varphi} - 1).$$

Hogy a vonat fajlagos kanyarulati ellenállása általában a vonat hosszúságától is függ, a tapasztalatban már régen felismerték.[1]

Így a franczia «Orléans» vasut a következő képletet fogadta el:[2]

$$\nu = \frac{1000v \cdot n}{R^2},$$

melyben n a járóművek számát és v a vonat sebességét jelenti. Megjegyzi e képlethez Lipthay tanár, hogy: «kisebb sugaraknál túlságos ellenállásokat ad».

λ értékét, a kötél hosszegységének az alzaton való ellenállását,

$$T = \frac{\lambda R}{f}(e^{f\varphi} - 1)\text{-ben}$$

állandónak tételeztük fel.

Kérdés, vajjon ezt egy vonat esetén is megengedhetjük-e? Mivel a terhelés megoszlását egy vonatban előre nem ismer-

---

[1] Annales des ponts et chaussées 1880. p. 455. Ing. Charles Baum: Des longueurs virtuelles d'un tracé de chemin de fer.

[2] Kisfaludi Lipthay: Vasutépitéstan I. 106. oldal.

Bulletin de la Commission internationale du Congrès de chemin de fer 1903, 188. oldalán J. F. A. Aspinall kisérletei szerint a vonat fajlagos ellenállása egyenes, vízszintes pályán is függ a vonat hosszúságától.

hetjük, sőt tehervonat esetén a megrakott és üres kocsik csoportosítására nézve, a mostaniakkal ellenkező szempontok is merülhetnek fel, kénytelenek vagyunk λ-át most is állandónak feltételezni. Azonban nem mulaszthatjuk el itt megjegyezni, hogy a terhelés megosztása sem közömbös a vontatás szempontjából.

Tegyük fel például, hogy egy hosszú tehervonat üres és megrakott teherkocsikból volna összeállítva.

Legyen a megrakott kocsiknak a hosszegységre eső ellenállása λ_2, az üres kocsiké λ_1; a megfelelő középponti szögek pedig legyenek az összes egymás mellett lévő megrakott kocsikra vonatkozólag φ_2, az üres kocsikra vonatkozólag pedig φ_1. Milyen nagyságú lesz a vontató erő, hogy ha a λ_2 és φ_2-vel jellemzett vonatszakasz a haladás irányában elől, a λ_1 és φ_1-gyel jellemzett szakasz pedig hátul van elhelyezve? A vonat sebességétől eltekintünk.

Feladatunkat úgy foghatjuk fel, mint hogyha két külön vonatot kellene vontatnunk: az elől levőnek hosszúsága $R\varphi_2$, a hátul levőé pedig $R\varphi_1$. Az $R\varphi_1$ hosszúságú vonatnak vontatását azonban nem úgy kell elképzelnünk, mintha a mótort φ_2 és φ_1 határán alkalmaztuk volna, hanem mintha ez is az egész vonat elején volna alkalmazva úgy, hogy a vonóerőt egy súlytalan kötél közvetíti, mely kötél $R\varphi_2$ hosszúságú és épp úgy mint az egész vonat, a belső sinszálat nyomja.

A hátul levő vonat vontatásához szükséges vonóerő, hogy ha a motor φ_1 és φ_2 határán van:

$$T_0 = \frac{\lambda_1 R}{f} \cdot (e^{f\varphi_1} - 1).$$

Ha pedig a motort az egész vonat elejére teszszük, akkor a hátulsó rész ellenállása:

$$T_0 e^{f\varphi_2} = \frac{\lambda_1 R}{f} (e^{f\varphi_1} - 1) \,.\, e^{f\varphi_2}.$$

Mindkét vonatrész vontatásához tehát szükséges:

$$T_2 = \frac{\lambda_2 R}{f} \cdot (e^{f\varphi_2} - 1) + \frac{\lambda_1 R}{f} (e^{f\varphi_1} - 1) \,.\, e^{f\varphi_2}.$$

Tegyük fel, hogy a pálya vízszintes és írjuk fel a vonóerő kifejezését ép úgy, mint előbb, azzal a különbséggel, hogy most nem $R\varphi_2$, hanem $R\varphi_1$ vonatszakasz legyen elől:

$$T_1 = \frac{\lambda_1 R}{f} (e^{f\varphi_1} - 1) + \frac{\lambda_2 R}{f} (e^{f\varphi_2} - 1)\, e^{f\varphi_1}.$$

Alkossuk meg e két kifejezés különbségét:

$$T_1 - T_2 = \frac{R}{f} \left\{(e^{f\varphi_1} - 1)(\lambda_1 - \lambda_1 e^{f\varphi_2}) + (e^{f\varphi_2} - 1)(\lambda_2 e^{f\varphi_1} - \lambda_2)\right\} =$$

$$= \frac{R}{f} \left\{(e^{f\varphi_1} - 1)\lambda_1 (1 - e^{f\varphi_2}) + (e^{f\varphi_2} - 1)\lambda_2 (e^{f\varphi_1} - 1)\right\} =$$

$$= \frac{R}{f} \cdot (e^{f\varphi_1} - 1) \,.\, (e^{f\varphi_2} - 1) \,.\, (\lambda_2 - \lambda_1),$$

a miből látjuk, hogy $\lambda_2 > \lambda_1$ esetén $T_1 > T_2$, vagyis a vontatás előnyösebb, hogy ha a megrakott kocsikat a vonat elején sorozzuk be.

A gyakorlatban a kocsik csoportositásánál csakugyan azt az elvet követik, hogy a nehéz járművek a vonat elején legyenek besorozva. Ennek azonban más okai is vannak, mint a gazdaságos vontatás.[1]

A súlyos kötélben keletkező feszültségek kifejezését úgy vezettük le, hogy a haladás sebességét figyelmen kívül hagytuk. A sebességnél fogva ugyanis «*ds*» kötélelemben egy czentrifugális gyorsulás fog keletkezni, a melynek következtében «*ds*» a kényszertől eltávolodni törekszik. De nemcsak ezzel az erővel kell még számolnunk, hanem még a kötél és alzat között, a kényszerre normális irányban fellépő surlódással is.

E tényezőknek hatását a vonóerőre a következő feladatban fogjuk megbeszélni.

---

[1] L. «Megjegyzés a kocsik csoportositásáról».

Az ellenállások kiszámítása jelentékeny sebességű vonat esetén.

A haladó vonat a dynamika szempontjából egy mozgásban levő pontrendszer. Ezt a pontrendszert egyensúlyi rendszernek tekinthetjük, hogy ha annak minden pontjában az arra ható összes statikai erőket kiegészitjük a D'ALEMBERT-féle intertiaerővel.

Mivel bennünket nem a vonat egyes részeinek, hanem csakis az egész rendszernek mozgása érdekel, az erők egyensúlyának feltétele helyett, czélszerűbb lesz egy olyan egyenletet felírni, a melyben a mozgásmennyiségek tételének felhasználásával bevezethetjük a vonat tömegközéppontjának mozgását; erre alkalmasnak mutatkozik a következő megfontolás:

Tulajdonítsunk az egész vonatnak egy «ds» nagyságú elemi elmozdulást és fejezzük ki az összes külső és a D'ALEMBERT-féle erőkkel kiegészített erőrendszerrel T vonóerő elemi munkáját:

$$Tds = ds\int_0^\varphi f\,.\,N + ds\int_0^\varphi \lambda ds + Mv\,.\,dv + Iw\,.\,dw.$$

Ebben φ jelenti a vonathosszúságnak megfelelő középponti szöget,

- N sugárirányú erő, a mely a «ds» hosszúságú vonatelemet a kényszerhez igyekszik szorítani;
- λ a kötél egységnyi hosszúságára eső ama ellenállások összessége, a melyek a nehézségi erőtől erednek;
- M az egész vonat tömege;
- I az összes forgó alkatrészeknek, a forgástengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka;
- v a vonat sebessége és végül
- w a forgó tömegek mozgásmennyiségeiből az egy tengelyre vonatkoztatott szögsebesség.

Legyen az L hosszúságú vonatnak terhelése állandó és folytonos, akkor N erőt még így is írhatjuk fel:

$$N = \left| Td\varphi - \frac{M}{L}\frac{v^2}{R}\cdot ds \pm ads \right|,$$

a hol $\frac{v^2}{R}$ a czentrifugális gyorsulás és «$\pm a$» az egységnyi hosszúságú kötélnek keresztirányú surlódása.

A surlódást kifejező tagot itt $\pm$ jellel láttuk el, mert a surlódás passziv erő lévén, mindig ellenkező értelmű lesz, mint a többi erők eredője.

Mivel vasuti vonat esetén M és L, illetőleg v és w viszonya körülbelül állandó, kiindulási egyenletünk két utolsó tagja helyett ezt írhatjuk:

$$(M+m)\,vdv,$$

a hol m egy képzelt tömeg.

Tekintsük λ-át úgy mint előbb, állandónak, akkor megfelelő behelyettesítéssel:

$$Tds = dsf\int_0^\varphi \left(Td\varphi - \frac{M}{L}\frac{v^2}{R}\cdot ds \pm ads \right) +$$

$$+ ds\lambda \int_0^\varphi ds + (M+m)\,vdv,$$

$$ds = Rd\varphi.$$

Oszszunk mindkét oldalon R-el:

$$Td\varphi = fd\varphi \int_0^\varphi \left(Td\varphi - \frac{M}{L}\cdot v^2 d\varphi \pm aRd\varphi \right) +$$

$$+ \lambda R\varphi d\varphi + \left(\frac{M+m}{R} \right) vdv.$$

Ha ebben az egyenletben a sebességet φ, vagy T függvényében megadjuk, problémánkat a differencziálegyenlet megfejtésének esetleges nehézségeitől eltekintve, általában megoldhatjuk.

Bennünket azonban e megoldásnak csak egy speciális esete érdekel: az, a mikor a vonat sebessége állandó: $v =$ constans;

ebben az esetben $dv =$ azonosan 0, a miért egyenletünknek utolsó tagja eltünik. Ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, hogy ha az egyenletnek mindkét oldalán integrálást végzünk el, ekkor az utolsó tag integrálásával

$$\int_0^\varphi v dv = \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^\varphi + c = \frac{v_\varphi^2 - v_0^2}{2} + c,$$

a hol $v_\varphi = v_0$.

Az utolsó tag elhagyásával tehát:

$$T = f\int_0^\varphi \left(Td\varphi - \frac{M}{L} v^2 d\varphi \pm aRd\varphi\right) + \lambda R\varphi,$$

ha ennek mindkét oldalán differencziálokat képezünk, akkor

$$dT = f\left(Td\varphi - \frac{M}{L} v^2 d\varphi \pm aRd\varphi\right) + \lambda R d\varphi,$$

$$dT = fd\varphi\left(T - \frac{M}{L} v^2 \pm aR + \frac{\lambda R}{f}\right),$$

a minek megoldását a súlyos kötél differencziálegyenletének tárgyalásából már ismerjük, vagyis:

$$T = \left|\frac{\lambda R}{f} - \frac{M}{L} v^2 \pm aR\right| (e^{f\varphi} - 1).$$

A jobboldal első tényezőjét az absolut érték jelével láttuk el, mert tudjuk, hogy T előjele csakis φ előjelétől függhet. Vagyis hogy ha φ pozitiv, akkor T a

$$\left|\frac{\lambda R}{f} - \frac{M}{L} \cdot v^2 \pm aR\right|$$

tényezőnek bármely értéke mellett is pozitiv marad.

Ha az absolut érték jele alatti mennyiség negativ, akkor az csak annak lesz kifejezője, hogy többé nem a belső, hanem a külső sinszál érvényesül mint kényszerpálya.

Vezessük be még T egyenletébe

$$M=\frac{\Sigma Q}{g}$$

és úgy mint előbb

$$\lambda^{kg.}=\frac{\Sigma Q^t}{L}\cdot(\mu+\nu\pm p),$$

akkor

$$T^{kg.}=\left|\frac{\Sigma Q^t}{L}\cdot\frac{R}{f}(\mu+\nu\pm p)-1000\frac{\Sigma Q^t}{gL}v^2\pm Ra^{kg.}\right|(e^{f\varphi}-1).$$

Az e kifejezésben előforduló tényezőket már ismerjük. Szükséges azonban még «a»-t, a keresztirányú surlódás kifejezőjét értelmeznünk. Mivel «a» a vonat hosszegységére vonatkozik, felírhatjuk, hogy

$$a^{kg.}=1000\frac{\Sigma Q^t}{L}\cdot f',$$

a hol f' a járólap és a sín között, a sugár irányában fellépő surlódás tényezője.

Ezzel felírhatjuk a v sebességgel, R sugarú ívben haladó *vonatnak fajlagos ellenállását:*

$$E_v^{kg.}=\frac{T}{\Sigma Q}=\left|\frac{R}{fL}(\mu+\nu\pm p)-1000\frac{v^2}{gL}\pm1000\frac{Rf'}{L}\right|(e^{f\varphi}-1).$$

Végezzük el a kiszorzást, akkor az első tag

$$E_0=\frac{R}{fL}(\mu+\nu\pm p)(e^{\frac{fL}{R}}-1),$$

a hol

$$(e^{\frac{fL}{R}}-1)=\frac{fL}{R}+\frac{f^2L^2}{2!\,R^2}+\frac{f^3L^3}{3!\,R^3}+\cdots$$

$$E_0=\mu+\nu\pm p+(\mu+\nu\pm p)\frac{fL}{2R}\left(1+\frac{fL}{3R}+\frac{f^2L^2}{12R^2}+\frac{f^3L^3}{60R^3}+\cdots\right),$$

a mit megközelitéssel így irhatunk fel:

$$E_0=\mu+\nu\pm p+(\mu+\nu\pm p)\frac{fL}{2R}\left(\frac{e^{\frac{fL}{R}}+2}{3}\right).^1$$

A többi tagot is felírhatjuk hasonlóképen:

---

1 Lásd «Megjegyzések BOEDECKER képletéhez».

$$\frac{v^2}{gL}(e^{f\varphi}-1)=\frac{fv^2}{gR}+\frac{f^2v^2L}{2gR^2}\left(\frac{e^{\frac{fL}{R}}+2}{3}\right),$$

$$\frac{Rf'}{L}(e^{f\varphi}-1)=ff'+\frac{f'f^2L}{2R}\left(\frac{e^{\frac{fL}{R}}+2}{3}\right).$$

Megfelelő rendezéssel pedig

$$E_v^{kg.}=(\mu+\nu\pm p)+1000f\left(\frac{v^2}{gR}-f'\right)+$$

$$+\frac{fL}{2R}\left[1000f\left(\frac{v^2}{gR}-f^1\right)-(u+v\pm p)\right]\cdot\left[\frac{e^{\frac{fL}{R}}+2}{3}\right].$$

E kifejezéssel képet nyertünk arról, hogy miképen növekedik *a fajlagos ellenállás* a vonat hosszán és összehasonlíthatjuk vele a vonat és az egyes jármű ellenállásait, a mikor ezek azonos viszonyok mellett ugyanazon az íven haladnak át.

Egy egyetlen jármű esetén $L=0$, tehát E_v képletében a jobboldal első két tagja marad meg.

Eddigi fejtegetéseinkkel sikerült tehát az ívben haladó vonat vontatásához szükséges erőt úgy felírni, hogy a vonatnak hosszúsága, továbbá a haladásra merőleges irányban fellépő erőknek hatása is kifejezésre jutott.

Használjuk fel ezekután eredményeinket a sínmagasbbítás kérdésének megitélésére.

A régebbi irodalomnak felfogásáról már tárgyalásunk kezdetén szólottunk. Láttuk, hogy például KISFALUDI LIPTHAY a theoretikus magasbbítás hajlásszögét, $\alpha=\frac{v^2}{gR}$-t nem is tartja elégségesnek, hanem ahhoz még egy $\delta=\frac{8}{R}$ többletet ajánl.

Báró GOSTKOWSKI[1] a theoretikus magasbbítást tartja szükségesnek: a centrifugális erő ellenében, azért, hogy a külső sínszál vízszintes nyomást ne szenvedjen, szükséges a pályára

[1] ROMAN Baron GOSTKOWSKI: Die Mechanik des Zugs-Verkehres auf Eisenbahnen. 66. oldal.

merőleges irányban egy $a = \frac{v^2}{gR}$ hajlásszögű rézsüt alkalmazni. Hogy ha ezt nem teszszük, akkor Schima és Gostkowski szerint a kocsitengelye a külső sínszálra nyomást fog gyakorolni, melynek nagysága

$$S = \frac{Mv^2}{2R} \cdot \left(1 + \frac{a}{4}\right),$$

a hol M a kocsi tömegét, a pedig a kocsi tengelytávolságát jelenti.

E felfogásokkal szemben az újabb irodalom és a gyakorlat azt a nézetet vallja, hogy a külső sínszálak megmagasbbítására a biztonság tekintetéből nincsen szükség. Ezt a kisérleti eredmények kétségbevonhatatlanul bebizonyították. Hogy ha mégis alkalmazunk magasbbítást, ezt csak azért teszszük, mert a kisérletek eddig még nem voltak kielégítők arra nézve, hogy vajjon a magasbbítás elhagyásával emelkednek-e a vontatási ellenállások és kedvezőtlenebbé válik-e a síneknek igénybevétele.

Keressünk ezek után magyarázatot arra nézve, vajjon lehetséges-e, hogy a magasbbítás elhagyásával meg ne növekedjenek a vontatási ellenállások?

Ezt csak úgy képzelhetjük el, hogy a centrifugális erőn kívül más erők is működnek a haladás irányára merőleges síkokban. Nem lehetséges tehát, hogy a vonat csakis a centrifugális erőnek engedelmeskedvén, minden esetben a külső sínszálhoz fog szorulni. A régebbi irodalom felfogásával a német és franczia kisérleti pályákon talált eredményeket nem vagyunk képesek megmagyarázni.

Nevezetesen nem számolt a régebbi irodalom azzal, hogy a centrifugális erő ellenében mindenekelőtt igen jelentékeny surlódás fog fellépni; egy másik tényező, a mely szintén a centrifugális erő ellenében lép fel, az a sugárirányú nyomás, a mely a kocsiknak vonattá való összekapcsolásával keletkezik. Vajjon lehetséges, hogy ez a három keresztirányú erő egymagában is fentartja az egyensúlyt?

A német pályákon folytatott kisérletek erre a kérdésre igennel feleltek.

Beállhat tehát a normális erőknek egy olyan kedvező összműködése, a minek következtében egy ívben haladó, jelentékeny hosszúságú és sebességű vonat esetén, sem a belső, sem a külső sínszálra nem fog nagyobb nyomás gyakoroltatni, mint a mikor ugyanaz a vonat hasonló viszonyok mellett egyenes pályán halad.

Ehhez persze fel kell tételeznünk, hogy a tengelyeknek a normálisba való beállása elég tökéletes, hogy a nyombőség és a nyomkarima játéka[1] kellő nagyok s végül, hogy a kerekek járólapjainak meg van a megfelelő kuposságuk.

Hogy egy ilyen ideális vonatot könnyebben tudjunk elképzelni, emlékezzünk meg egy pillanatig a RENARD-féle közuti automobilvonatról.[2] Ez minden vezetés nélkül, nagy sebesség mellett is képes egy önmagába visszatérő pályát leírni. A vasuti vonathoz képest — a mi szempontunkból — csak az a különbség van szerkezetében, hogy az automobilvonat tengelyei tökéletesen beállanak, mert a beállást a motorról kormányozzuk, továbbá az útkülönbség miatt nem csúsznak kerekei, végül pedig az automobilvonat kapcsoló szerkezetében nem állhat elő jelentékeny feszültség, mert minden tengely egyben hajtott tengely is.

Az automobilvonatnak legutóbb felsorolt tulajdonságánál fogva, itt nem állhat elő az a sugárirányú erő, a mely a vasuti vonatot a görbület középpontja felé igyekszik tolni. De viszont a következőkben látni fogjuk, hogy ez az erő a gyakorlatban előforduló méretek esetén akár el is hanyagolható a többi normális irányú erőkkel szemben. A mi pedig a

---

[1] Lásd a «Nyomkarima játékának befolyásáról».

[2] Dr. ZIELINSKI SZILÁRD műegyetemi tanár előadásaiból és

Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens 1908. Heft 1. 11, 12.

Ing. WILHELM von HEVESY in Budapest: Gleislose Züge und die Zugbildung von Renard.

MÜLLER: Der Automobil-Zug.

szabatos gördülést illeti, tudjuk, hogy ennek tökéletesebb megoldása, a vasuti vonat esetén csak idő kérdése: a vasuti vonat tengelyeit — ha arra ugyan szükség volna — is lehetne a lokomotivról kormányozni.[1]

A vasuti vonatnak a Renard-féle automobilvonattal való összehasonlításával ezekután el tudjuk képzelni azt az ideális vonatot, a mely épp úgy mint a Renard-féle, minden vezetés nélkül, kis sugarú ívben, nagy sebesség mellett is stabilis maradna.

Egy ilyen vasuti vonatot megvalósitani természetesen nem lehet, mert a legcsekélyebb véletlen körülmény, mint például szélnyomás, ütközések stb. mihamar megzavarnák a stabilitást.

A midőn felismertük a normális irányú surlódásnak a vonat stabilitására való jelentőségét, mérlegeljük még, hogy minő értéket tulajdonitsunk ennek az új tényezőnek.

A normális irányban működő erők ellenében fellépő surlódás tényezőjét eddigi fejtegetéseinkben f'-el jelöltük.[2]

Minő értéket vehet fel f' maximuma?

Erre nézve nincsenek közvetlen tapasztalataink, ellenben tudjuk, hogy f' maximuma nem igen fog különbözni attól a surlódási együtthatótól, a melylyel például a fékezés kiszámításánál a járólap és sínfej közötti surlódást veszszük figyelembe.

A hosszirányú surlódás együtthatóját a fékezés és az adhæsio kiszámításánál, a nyilt pályán általában 0·15-nek, alagútban pedig a nyálkás nedvesség miatt kisebbnek, circa 0·13-nak szoktuk felvenni.

Valószinű, hogy f' maximuma ezeknél az értékeknél általában nagyobb lesz, mert például az adhæsio együtthatója,

---

[1] A «Klose-féle radial-lokomotiv» tengelyei kormányozhatók. E lokomotiv hajtóműve nehézkes ugyan, azért hegyi pályákon mégis ismételten bevált.

[2] Der Eisenbahnbau I. kötet 135. oldalán Birk tanár normális irányú surlódásról is tesz említést. Ezt azonban elhanyagolja, mert «a vasuti üzemben nincsen kizárva, hogy egyik-másik keréktengely véletlenül tehermentesítve van».

0·15-el, nem a meginduló, hanem a haladó vonatra vonatkozik. Mivel a normális irányában nincsen sebesség, valószínű, hogy ott sokkal nagyobb surlódás fog fellépni.

Ezek daczára f'-t az előbbi együtthatóknál kisebbnek fogjuk felvenni számitásainkban, mert a normális irányú elmozdulás esetén nagyobb biztonságot követelünk meg.

Az f' tényező értékének megállapitásával egyben megállapithatjuk a pályára normális irányú szél hatását is. Egy konkrét esetnek számszerű megoldására itt nem terjeszkedhetünk ki; de viszont nem mulaszthatjuk el megjegyezni, hogy a régebbi irodalomnak erre vonatkozó felfogása is kétséges;[1] mert úgy mint a sinmagasbbitás kérdésénél, itt is figyelmen kivül maradt a surlódás szerepe.

Lipthay tanár szerint: «A szélnek közvetett hatása oldalszélnél keletkezik és abból áll, hogy a szél a járóműveket a vágányközepes állásból oldalt eltolja, a mi által a tengelyek két oldalán levő kerekek különböző futóköröket irnak le, a miből a kerekeknek a sineken való csusztatása ered, az ezzel járó munkaveszteségekkel.»

Az oldalszél azonban csak akkor lesz képes a vonatot eltolni, hogy ha a szélnyomás oly nagy értéket vesz fel, a mely nagyobb a normális irányú surlódásnál.

Lipthay tanár a hosszirányú surlódás tényezőjét e feladatban $^1/_6$-dal veszi fel. Ha már most a keresztirányú surlódás számitásánál ennek tényezőjét szintén csak $^1/_6$-dal veszszük fel, akkor egy fedett kocsikból álló vonat esetén az oldalszél csak akkor lesz képes a vonatot eltolni, hogy ha a szélnyomás nagysága ca. 75 kg./m^2-nél nagyobb.

A Beaufort-féle[2] táblázat szerint az ilyen nagyságú szélnyomásnak 25 m./sek. sebességű «vihar» felel meg, a melynek esetén a vonatnak felborulás ellen való biztonsága is már igen csekély.

---

[1] Kisfaludi Lipthay: Vasutépitéstan I. 71. oldal.

[2] Hütte: Ingenieurs-Taschenbuch 1905. 2. kötet, 380. old.

Ha tehát ca. 25 m./sek.-nál gyengébb oldalszélnél is megnövekednek a vontatási ellenállások, ezt nem tulajdoníthatjuk «a tengelyek két oldalán levő kerekek különböző futóköreinek», hanem annak, hogy oldalszél esetén a levegő ellenállása lett nagyobb.

Keressük meg ez után, mi lesz a feltétele annak, hogy egy ívben haladó hosszú vonatnak egy meghatározott tengelye megtartsa egyensúlyi állapotát.

Ennek vizsgálatához szükségünk van az előbbiekből már ismeretes következő differencziálegyenletre, a mely a T vonóerő elemi munkáját fejezi ki:

$$Tds = ds\int_0^\varphi f\,.\,N + ds\int_0^\varphi \lambda ds + Mvdv + Iw\,.\,dw.$$

Ebben N azt az erőt jelentette, a mely a ds hosszúságú kötélelemet a kényszerhez igyekszik szorítani. Ezt az erőt előbb így írtuk fel:

$$N = \left| Td\varphi - \frac{M}{L}\frac{v^2}{R}\cdot ds \pm ads \right|,$$

a hol T a vonóerő, $\frac{M}{L}$ a hosszegységre eső tömeg, a az a passziv erő, melyet az egységnyi hosszúságra eső súly, a normális irányában előidéz.

$$a = \frac{\Sigma Q}{L} f'; \quad M = \frac{\Sigma Q}{g}; \quad ds = Rd\varphi;$$

$$N = \left| Td\varphi - \frac{v^2}{gR}\cdot\frac{\Sigma Q}{L} R\,.\,d\varphi \pm f'\frac{\Sigma Q}{L}\cdot Rd\varphi \right|;$$

$$N = d\varphi \left| T - \frac{v^2}{g}\cdot\frac{\Sigma Q}{L} \pm f'R\frac{\Sigma Q}{L} \right|.$$

Azt követeljük, hogy a pályára normális erők eredője egy φ szöggel jellemzett helyen 0-val legyen egyenlő: $N=0$. Tehát

$$\left| T - \frac{v^2}{g}\cdot\frac{\Sigma Q}{L} \pm f'R\frac{\Sigma Q}{L} \right| = 0.$$

E kifejezésben csakis T függ φ középponti szögtől; $\frac{\Sigma Q}{L}$ a hosszegységre eső súly az előbbiek szerint állandó.

T kifejezését már előbb levezettük. Tudjuk, hogy $\varphi = 0$ helyen, az utolsó kocsi végén elenyészik, azután φ-vel együtt nő s legnagyobb értékét a lokomotiv s az első kocsi között levő kapcsolószerkezetben éri el.

Ennélfogva T maximális értékét egyenlőnek vehetjük azzal a maximális vonóerővel, melyet a lokomotiv egy meghatározott sebesség mellett képes kifejteni.

A lokomotiv vonóereje függ a hajtott kerekek átmérőjétől, a kazán fűtőfelületétől és a vontatás sebességétől.

A nagy személy- és gyorsvonatú lokomotivok vonóereje aránylag kicsiny a nagy tehervonatú lokomotivok vonóerejéhez képest: a mig egy 90 km. óránkénti sebességű gyorsvonat compound[1] lokomotivja cca. 2420 kg. vonóerőt fejt ki, a mikor 228^t súlyt vízszintesben vontat, addig a Cleveland St.-Louis vasut 4/5 csatlós tehervonatú lokomotivja $83{\cdot}9^t$ összes és $74{\cdot}8^t$ adhæsio súly mellett cca. 11·220 kg.[2] vonóerőt képes kifejteni, hogy ha az adhæsio együtthatóját 0·15-nek tételezzük fel.

Tegyük fel, hogy az előbbi compound lokomotiv egy 300 méter sugarú ívben is képes volna 90 km. óránkénti sebességgel vontatni, akkor

$$\left| \frac{T}{R} - \frac{v^2}{gR} \cdot \frac{\Sigma Q}{L} \pm f' \frac{\Sigma Q}{L} \right| = 0$$

feltételünkbe a gyorsvonatra vonatkozó számértékeket behelyettesítve: $T = 2420$ kg, $R = 300$ m, $v = \frac{90{\cdot}000}{3{\cdot}600} = 25$ m, $\frac{\Sigma Q}{L}$ max. cca. 2000 kg., $g = 10$ m. esetén:

---

[1] «Hütte» Ingenieurs Taschenbuch 1902. II. 587., 599. oldal.

[2] Der Eisenbahnbau. V. Teil des Handbuchs der Ingenieurwissenschaften. I. kötet 114. oldala szerint a kapcsolószerkezet hatásszenvedése miatt 12.000 kg-nál nagyobb vonóerő nem engedhető meg. Az előfogatú-lokomotivok alkalmazását ez a maximális vonóerő korlátozza.

$$\left|\frac{2420^{kg}}{300}-\frac{625\times2000^{kg}}{10\times300}\pm f'\,.\,2000^{kg}\right|=0,$$

$$(8{\cdot}1-416{\cdot}6+f'\,.\,2000)=0.$$

A lokomotiv közelében tehát addig nem állhat elő normális irányú eltolás, a míg f':

$$f'\geqq\frac{408{\cdot}5}{2000}\ \text{cca.}\ \frac{1}{5}\,.$$

Ha f' ennél kisebb, például csak 0·15 volna, akkor már a külső sínszál egy folyóméterére 108,5 kg. vízszintes nyomás gyakoroltatnék, a mely a vontatási ellenállásokat igen nagy mértékben megnövelné: a fajlagos ellenállás megnövekedését kiszámithatjuk az előbb bemutatott $E_v=\frac{T}{\Sigma Q}$ képlettel, melyből egyszersmind a vonat hosszúságának befolyását is megitélhetjük.

A 90 km sebességű gyorsvonat példájából ezekután meg tudjuk magunknak magyarázni a Noisy-le-sec-i és a németországi kisérleti eredmények közötti látszólagos ellenmondást: Ugyanis a sebességnek egy bizonyos határon túl való fokozásával bekövetkezik, hogy a centrifugális erő legyőzi a normális irányú ellenállásokat, a miért a vontatási ellenállás rohamosan megnövekszik.

Ezen a határon túl tehát már szükséges a külső sinszálnak megmagasbbítása.

Az előbbi gyorsvonat példájából megitélhetjük azt is, hogy T vonóerő magában csak igen kis mértékben van hatással a keresztirányú erők egyensúlyára; ezért csaknem közömbös, hogy a hosszú vonatnak melyik pontjában vizsgáljuk meg a keresztirányú erőket.

Kétségtelen ugyan, hogy a vonatnak utolsó kocsija kevésbbé stabilis, mint bármelyik; ez azonban csak akkor lesz érezhető, a mikor a vonat sebessége az előbb felismert kritikus határt eléri.

Látjuk ebből, hogy az ujabb irodalom túlbecsülte azt a normális irányú nyomást,[1] a melyet a vonatnak lánczszerű hatásából levezethetünk. Ez a nyomás enyhíti ugyan a centrifugális erő hatását, de távolról sem elegendő annak leküzdésére.

Ha sikerült tehát íves pályán magasbbítás nélkül, tetemes sebességgel úgy vontatnunk, hogy az ellenállások egyáltalán nem vagy csak alig növekedtek meg, azt annak kell tulajdonítanunk, hogy a centrifugális erő ellenében jelentékeny surlodás lép fel, a mely azt a gyakorlatban előforduló mérsékelt sebességek és sugarak esetén teljesen legyőzi.

Tehát csak igen nagy sebességek és kis sugarak esetén lesz arra szükség, hogy a külső sinszálnak magasbbításával egy befelé ható erőt állítsunk elő, a mely a centrifugális erő többletét legyőzze.

Hogyha az előbbi megfontolások alapján $T=0$, akkor egyensúlyi feltételünk ilyen alakba megy át:

$$\left|\frac{v^2}{gR} - f'\right| = 0,$$

a miből

$$v = \sqrt{f' \,.\, g \,.\, R},$$

vagyis magasbbításra mindaddig nincsen szükség, a míg

$$v \leqq \sqrt{f' \,.\, g \,.\, R}.$$

Ha pl. $R = 250$ m és $f' = 0{\cdot}11$, akkor $v = 16{\cdot}58$ m, vagyis $V =$ cca 60 km pro óra; hogy ha ezzel a sebességgel nem érjük be és pl. szükséges volna azt 80 km-re felemelni, akkor a 20 km többletnek megfelelőleg egy lejtőt kell előállítanunk, a melynek bevezetésével az egyensúly megint fennállhat.

Kérdés, milyen nagy legyen ekkor a magasbbítás hajlásszöge $= \varphi$?

Az egyensúly feltétele ez

---

[1] Handbuch der Ingenieurwissenschaften. V. 94. oldal, első bekezdés.

$$\left|\frac{v^2}{gR} - f' - \varphi\right| = 0$$

itt $v = \frac{80}{3{\cdot}6} = 22{\cdot}2$ m, $f' = 0{\cdot}11$, $R = 250$ m, tehát $\varphi = 8{\cdot}68\%$, a minek cca 0·13 m magasbbítás felel meg.

Igen hasonlít előbb talált képletünkhöz

$$v = \sqrt{f' g \,.\, R}\text{-hez,}$$

ez a képlet

$$V^{\frac{km}{óra}} = 4\sqrt{R^m - 50},[1]$$

a melyet egy R sugarú ívben megengedhető maximális óránkénti sebesség kiszámítására használunk a gyakorlatban. Hogyha $f' = 0{\cdot}11$, akkor a két képlet összehasonlításával látjuk, hogy a különböző sugarak mellett megengedhető sebességek körülbelül megegyeznek azokkal, melyek esetén magasbbításra sincsen szükség.

Ez a megegyezés igazolja, hogy a ma használatos sebességek esetén a magasbbítás úgy a biztonság, mint a vontatás szempontjából egyaránt mellőzhető.

Ezzel azonban még megoldatlan maradt az a szempont, melylyel az utasok kényelmének tartozunk. A míg például a vonóerő igen tág határokon belül csaknem érzéketlen a magasbbítás hatása iránt, addig az utas megérzi a sebesség- és irányváltozásnak minden árnyalatát. Elérkezhet az az idő, a mikor a sebesség tetemes fokozása miatt az utasokat külön e czélra szerkesztett berendezésekkel kell majd a centrifugális erő ellenében megvédenünk. Ilyen lehetne pl. az ingaszerűen, rugalmasan felfüggesztett kocsiszekrény, a melynek a centrifugális erő maga adná meg a megfelelő kilengést. . . .

Fejtegetéseink végén foglalkozzunk még röviden azzal a tehervonattal, a mely egy olyan íves pályán halad, melynek

---

[1] Die Eisenbahn-Technik der Gegenwart. II. kötet, II. rész 1908. 151. oldal.

külső sínszála a nagy sebességű vonatok miatt meg van magasbbítva.

Legyen a magasbbítás hajlásszöge a, akkor az egyensúly feltétele a lokomotiv közelében ez

$$N = \left| Td\varphi + a \frac{\Sigma Q}{L} \cdot ds \pm f' \frac{\Sigma Q}{L} \cdot ds - \frac{v^2}{gR} \cdot \frac{\Sigma Q}{L} \cdot ds \right| = 0.$$

Hanyagoljuk el a sebességet, akkor

$$\left| \frac{T}{R} \cdot \frac{L}{\Sigma Q} + a - f' \right| = 0.$$

Mikor lesz az a hajlásszögű magasbbítás a vontatás tekintetéből káros hatású?

Számítsuk ki a-nak ezt a határát a következő példán: Legyen $R = 200$ m, $f' = 0{\cdot}11$, $\frac{\Sigma Q}{L} = 1{\cdot}2^t$ és T, a Cleveland-St.-Louis vasut lokomotivjának vonóereje: $T = 11{\cdot}22^t$, akkor

$$a = \left| \frac{T}{\frac{R\Sigma Q}{L}} - f' \right| = 0{\cdot}047 - 0{\cdot}11 = 0{\cdot}063,$$

vagyis a míg a magasbbítás hajlásszöge nagyobb 0·063-nál (cca. 9 cm. magasbbítás) annak a vonóerőre nem lesz hatása.

A tapasztalatból azonban nincsen adatunk a magasbbításnak a tehervonat ellenállására gyakorolt befolyásáról. Ezért kivánatos volna, hogy a kisérleti pályákon folytatott megfigyelések — ilyen értelemben — tehervonatokra is kiterjesztessenek.

Megjegyzés a kocsik csoportosításáról.

A gyakorlatban a tehervonat kocsijait mindenekelőtt a teherárúk legegyszerűbb kezelése szempontjából fogjuk csoportosítani.

Csak a mennyiben ez a szempont még játékot enged meg, fogjuk a tisztán műszaki szempontokat is érvényesíteni. Ezek a következők:

1. Tekintettel a vonat lassudó menetére (megállására), helyesebb a megrakott kocsikat elől besorozni, mert ezáltal mérsékelhetjük az ütközéseket.

2. A szomszédos kocsik ütközőinek érintkezése lehetőség szerint centrikus legyen; az ütközőtengelyek magasságkülönbsége ne legyen nagyobb 80 mm-nél. Teljesen megrakott kocsi után tehát — ha csak lehet — ne kapcsoljunk üres kocsit.

3. A kapcsolószerkezet hatásszenvedése kisebb lesz, hogy ha a súlyos kocsikat elől kapcsoljuk be; így a vonatszakadás ellenében nagyobb biztonságot érhetünk el.

4. A vontatást gazdaságosabbá teszszük, hogy ha ugyanazt a szállítandó terhet kisebb hosszúságú vonatban helyezzük el. Rakott és üres kocsikból álló vonat esetén pedig kisebb a vontatási ellenállás, ha a rakott kocsikat elől sorozzuk be.

E különböző szempontok összehasonlításával látjuk, hogy a kocsik csoportosítására elmélettel talált eredményünk fedi a gyakorlatban — egészen más szempontokból — támasztott követeléseket.

Az irodalomban e tárgyra vonatkozólag a következő helyeken találunk adatokat:

a) A kereskedelemügyi m. kir. miniszternek 1904. évi márczius hó 26-án kelt 15,400. számú rendeletében, a forgalmi szolgálatra vonatkozó szabályok alapelveiben a 11-ik czikk 48. és 59. számú bekezdéseiben többek között ezeket találjuk:

48. «A vonatokat rendesen úgy kell összeállítani, hogy a nehéz járművek a könnyebbek előtt legyenek besorozva;...»

59. «Vegyes vonatoknál és személyszállító tehervonatoknál a személyszállító teherkocsikat lehetőleg a vonat hátulsó felébe kell besorozni...»

b) Kelényi Ödön m. á. v. felügyelő: A vasuti személy- és teherkocsik. Közlekedési szakkönyvtár I. sorozat 4. és 5. könyv, 145. és 146. oldalakon:

«Üzembiztonsági szempontból előnyös az, ha a vonat lehetőleg egynemű és egyenlő súlyú kocsikból áll. A mennyiben a vonatot egyenlőtlen súlyú kocsikból kellene összeállítani, úgy szükséges, hogy a nehezebb kocsikat a vonat elejére, a könnyebbeket pedig annak végére sorozzák. ... tehervonatoknál a vonat elejére a rakott, hátsó részére az üres kocsik kerüljenek...»

«Vegyes vonatokat úgy kell összeállítani, hogy a teherkocsik a mozdony mögé, a személykocsik pedig a vonat hátulsó felébe kerüljenek.»

c) Magyar vasuti szaknaptár, közlekedési almanach és sematizmus, szerkeszti RÉCSEY EMIL m. á. v. főmérnök.

«Egyes fontosabb tudnivalók a forgalmi szolgálatból. A kocsik besorozása.»

«A vonatokat általában úgy kell összeállítani, hogy a nehéz kocsik a könnyűk előtt, tehát az üres kocsik a rakottak után legyenek besorozva.»

d) Kalender für Eisenbahn-Techniker begründet von Edm. Heusinger von Waldegg 1907. Gehefteter Teil. 276. oldal. A vonatok összeállítása.

«Tehervonatok esetén az egyes kocsik sorrendjét illetőleg nem követhetünk egy általános érvényű elvet. Az egyes csoportokba sorozandó kocsik száma és sorrendje ama közbenső állomások szerint fog igazodni, a melyekben egyes kocsikat, vagy egész vonatrészeket kell be- vagy kikapcsolnunk.»

«Nehezen megrakott kocsikat és hideg lokomotivokat elől, üres kocsikat pedig a vonat hátulsó részében kell elhelyezni.»

Megjegyzések Boedecker képletéhez.

«Die Wirkungen zwischen Rad und Schiene und ihre Einflüsse auf den Lauf und den Bewegungswiderstand der Fahrzeuge» czimű művében BOEDECKER tisztán elméleti alapon fejtegetvén, a fajlagos kanyarulati ellenállásra ezt a képletet állítja fel:

$$W = \frac{0{\cdot}85938}{R} - \frac{\sigma}{134},$$

W a fajlagos kanyarulati ellenállás kg.-ban,
R a sugár kilométerekben,
σ a nyomkarima játéka milliméterekben.

A 71. oldalon megjegyzi e képlethez BOEDECKER: «A kapcsolószerkezetben fellépő feszültség a képlet levezetésekor figyelmen kívül maradt, a miért ez szigorúan véve csakis a vonat végső szakaszára vonatkozik. Azonban nem járna nehézséggel «W» kifejezésében a kapcsolást is figyelembe venni».

«A kapcsolás hatása általában kedvező lesz, a mennyiben a kanyarulati ellenállást csökkenti s azt eredményezi, hogy W a vonat végéről a lokomotiv felé és egyáltalán a feszültség növekedésével csökken. Ugyanannak a vonatnak kanyarulati ellenállása tehát emelkedő pályán kisebb lesz, mint vízszintesben, vagy esésben».

BOEDECKER erre a következtetésre úgy jut, hogy *teljesen* merev tengelyű járműveket tételez fel, a melyek úgy állanak be az ívbe, hogy a haladás irányában első, külső kerék a külső, a hátulsó, belső kerék pedig a belső sinszálhoz szorul. Hogy BOEDECKER eme feltevése mennyire felel meg a valóságnak, csak igen pontos kisérletekkel lehetne ellenőrizni.

Olyan kisérleti anyagot, a mely BOEDECKER következtetéseinek elbirálására közvetlenül alkalmas volna, nem találtunk. Bizonyos azonban, hogy BOEDECKER következtetése merőben ellentétes az «Orléansi» képletben

(308. oldal) kifejezett tapasztalattal és azzal a képletünkkel (308. és 314. oldalakon), a mely egy egyszerű physikai jelenségből kiindulva a tapasztalattal egybehangzóan azt fejezi ki, hogy a vonat hosszúságával növekszik a fajlagos kanyarulati ellenállás. Emelkedő pályarészen pedig *nagyobb* lesz a kanyarulati ellenállás, mint vízszintesben, vagy esésben.

Ez ellenmondás némi megvilágítására bemutatjuk az alanti táblázatot, a melyet Ing. CHARLES BAUM-nak az «Annales des ponts et chaussées»-ben megjelent (l. a 308. oldalon) értekezéséből vettünk át.

A Semmering-pályán egyenlő terhelésű hosszú és rövid vonatokkal eszközölt kisérletek íves pályarészeken a következőket eredményezték:

R m.	26 kocsiból álló vonat 198,77^t terheléssel *W* kg.	13 kocsiból álló vonat 198,77^t terheléssel *W* kg.
189	3,58	3,03
265	2,57	2,32
284	2,57	2,22

Látjuk e táblázatból, hogy egyenlő nagyságú terhelés, de kétszeres vonathosszúság mellett nagyobb a fajlagos kanyarulati ellenállás, a mí kétségkívül megerősíti a 314. oldalon talált «E_0» képletünket.

BOEDECKER következtetéséből kiindulva azonban nem tudjuk megmagyarázni, hogy miért volt «*W*» hosszabb vonat esetén nagyobb.

A nyomkarima játékának befolyásáról.

BOEDECKERnek fenti képlete szerint a nyomkarimának nagyobb játéka mellett (σ) kisebb lesz a fajlagos kanyarulati ellenállás. BOEDECKER elméletének ezt az eredményét a kisérletek is beigazolták. Így például a bajor pályákon folytatott kisérletek szerint a nyomkarima játékának befolyása még nagyobb volt, mint a hogyan azt a fenti képlet kifejezi. Sőt egyik kisérlet szerint normális nyombőségü pályán 25%-al volt kisebb a kanyarulati ellenállás, mint ugyanazon a pályán bővítés nélkül.

Látjuk ebből, hogy tapasztalat és elmélet egyaránt megerősítették azt a törekvést, hogy a nyomkarimának lehetőleg bő játékot adjunk. Ha megnöveljük a nyomkarima játékát, kisebb pályasugarat engedhetünk meg.

Oly esetekben, amikor a szabványosnál sokkal kisebb sugárral kell egy vágánykapcsolási feladatot (pl. teherpályaudvar tervezésekor) megoldanunk, olyképen segítünk, hogy kivételesen «felfutósines felépítményt» alkalmazunk. A magyar kir. államvasutak szabványa szerint így 40 m. sugarú pályát is létesíthetünk. A külső sínszálat pótló lemez szélessége ez esetben 200 mm.

Wellisch Zsigmond.

ADALÉK A FERMAT-FÉLE TÉTEL ELMÉLETÉHEZ.

A következő sorokban oly tételt óhajtok bemutatni, a mely bár a nagy FERMAT-tétel bebizonyításához csak adalékot szolgáltat, mégis tartalmánál és bebizonyítása teljesen elemi voltánál fogva némi érdekre tarthat igényt.

A tétel a következő:

Az

$$x^k + y^k = z^k \quad (k=2, 3, \ldots) \tag{1}$$

és

$$x^l + y^l = z^l \quad (l>k) \tag{2}$$

diophantosi egyenleteknek semmilyen közös valódi megoldásuk nincsen, ha $k<l$. Valódi megoldáson az olyant értvén, a melyben minden ismeretlen értéke a zérustól különböző.

Mindenekelőtt a következő segédtételt bizonyítom be:

Segédtétel. Ha az 1) *egyenletnek az*

$$ax^k + by^k = cz^k \tag{3}$$

egyenlettel van közös megoldása, akkor csak a következő két eset lehetséges: vagy c értéke a és b értékei közé esik; vagy pedig $a = b = c$.

α) Ha $a<b$, akkor a közös megoldást x, y, z-vel jelölvén, 1) miatt

$$cz^k > a(x^k+y^k) = az^k, \quad \text{tehát} \quad a<c,$$
$$cz^k < b(x^k+y^k) = bz^k, \quad \text{«} \quad c<b$$

és így

$$a < c < b.$$

β) Ha $a>b$, akkor

$$cz^k > b(x^k+y^k) = bz^k, \quad \text{tehát} \quad b<c,$$
$$cz^k < a(x^k+y^k) = az^k. \quad \text{«} \quad c<a$$

és így

$$b < c < a.$$

γ) Ha $a=b$, akkor

$$cz^k = a(x^k+y^k) = az^k, \quad \text{tehát} \quad a=c$$

és így

$$a = b = c.$$

E segédtétel bebizonyítása után jegyezzük még meg, hogy az 1) egyenletnek nincsen oly valódi megoldása, a melyben x és y egyenlő értékeket vesz fel, mert a mint közvetetlenül világos a

$$2x^k = z^k \qquad (k>1)$$

egyenletnek egész-számú megoldása nincsen.

Ezek után tételünk néhány szóval bebizonyítható. A 2) egyenletről tegyük fel, hogy van valódi közös megoldása 1)-gyel és legyen ez x, y, z. A 2) egyenletet így írván

$$x^k x^{l-k} + y^k y^{l-k} = z^k z^{l-k}$$

ez az

$$ax^k + by^k = cz^k$$

alakban írható, ha

$$a = x^{l-k}, \quad b = y^{l-k}, \quad c = z^{l-k}$$

teszszük. De az előbbi megjegyzésünk után világos, hogy a segédtétel γ) esete ki van zárva, kellene tehát, hogy ugyan e segédtétel értelmében a $c=z^{l-k}$ értéke az $a=x^{l-k}$ és a $b=y^{l-k}$ értékek közé essék. De mivel valódi megoldás esetében $|z| > |x|$ és $|z| > |y|$, a c értékének egyszersmind a és b értékénél nagyobbnak kellene lennie, a mi nyilvánvaló ellentmondás. De ezzel tételünk teljesen be van bizonyítva.

Németh János.

ALGEBRAI GÖRBÉK ARITHMETIKAI TULAJDONSÁGAIRÓL.

(Első közlemény.)

I. Bevezetés.

A mathematikának ez a fejezete igazában FERMAT-val veszi kezdetét, kinek ilyen irányú vizsgálatait, DIOPHANTOS arithmetikájának BACHET-féle kiadásában tett széljegyzeteken kívül,[1] nagyrészt «Doctrinæ analyticæ inventum novum» czím alatt J. DE BILLY jezsuita foglalta össze.[2]

FERMAT általánosan alkalmazható módszereket adott több egyszerűbb feladaton kívül az

$$\begin{cases} y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3, \\ y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4, \end{cases} \tag{1}$$

$$y^3 = a + bx + cx^2 + dx^3 \tag{2}$$

rationális coefficiensű határozatlan egyenleteknek rationális számokkal való megoldására, vagyis másképen kifejezve az (1) és (2) alatti rationális coefficiensű algebrai görbék rationális (rationális coordinátákkal biró) pontjainak felkeresésére, kiin-

---

1 E széljegyzetekben van többek között a nagy FERMAT-féle tétel is kimondva, mely szerint az $x^n + y^n = z^n$ egyenletet nem lehet rationalis számokkal megoldani, mibelyt $n > 2$.

2 A széljegyzetek és az Inventum novum először FERMAT halála után 5 évvel, 1670-ben jelentek meg DIOPHANTOS arithmetikájának S. FERMAT (P. FERMAT fia) által rendezett kiadásában. FERMAT munkáit újabban P. TANNERY adta ki (Oeuvres de FERMAT), melynek III. kötetében (1896) a széljegyzetek p. 241—274., az Inventum novum p. 325—398. franczia nyelven található.

dulva egy rationális pont ismeretéből vagy azzal æquivalens feltevésből.

Fermat eljárását, melyet az (1) alatti görbék rationális pontjainak felkeresésére alkalmaz, Euler öntötte mathematikai formulákba a szentpétervári akadémia által halála után csak 47 évvel 1830-ban kiadott 1., 6. és 7. értekezésében.[1]

E Fermat és Euler által tárgyalt problémát Jacobi[2] hozta kapcsolatba az integralszámítással, midőn arra utalt, hogy a szerinte Eulernek tulajdonított algorithmus, melyet Euler az (1) görbék egy rationális pontjából újaknak felkeresésére alkalmaz, megegyezik az (1)-hez tartozó elsőfajú elliptikus integrálok szorzásának algebrai algorithmusával. Sőt Jacobi egy lépéssel előrehalad, midőn a szóban forgó problémának általánosítását rationális coefficiensű

$$y^2 = R(x) = a_0 x^{2p+2} + a_1 x^{2p+1} + \cdots + a_{2p+2}$$

alakú hyperelliptikus görbékre nézve kimondja, rationális coefficiensű tetszőleges algebrai görbékre pedig jelzi.

Hyperelliptikus görbékre Jacobi a tételét következőképpen mondja ki:

Ha $R(x)$ valamely $(2p+1)$-ed, vagy $(2p+2)$-ed fokú rationális coefficiensekkel biró egész függvény és ha ξ oly rationális érték, a mely mellett $\sqrt{R(\xi)}$ is rationális, akkor végtelen sok p-ed fokú rationális coefficiensekkel biró egyenlet van, mely oly tulajdonságú, hogy egy tetszőleges $x_k (k = 1, 2, \ldots, p)$ gyökével $\sqrt{R(x_k)}$ rationálisan kifejezhető rationális coefficiensekkel.[3]

---

[1] Mémoires de l'Académie impériale de St. Pétersbourg, XI. k. V. ö. Euler, Anleitung zur Algebra, II. k. (St. Petersburg 1771.) p. 239—274.

[2] De usu theoriæ integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in analysi Diophantea, Crelle Journal 13. k. (1834) p. 353—355, Jacobis Werke II. k. p. 53—55.

[3] Hogy a $p = 2$ esetben egy rationális pontból általánosságban nem lehet rationális pontot leszármaztatni, hanem lehet a Jacobi-féle tétel értelmében egy rationális coefficiensű másodfokú egyenletet, azt Euler is észrevette, Anleitung zur Algebra (1771). II. k. p. 263.

A XIX. század folyamán rationális coefficiensű harmad- és negyedrendű elsőfajú görbékkel arithmetikai szempontból többen foglalkoztak.[1]

1901-ben jelent meg POINCARÉ terjedelmes közleménye az algebrai görbék arithmetikai tulajdonságairól,[2] melyben elődeire való hivatkozás nélkül részletesen foglalkozik a rationális coefficiensű unicursalis és bicursalis görbékkel s az utóbbiak közül különösen a harmadrendű görbékkel, ellenben úgyszólván csak az eredmények összefoglalására szorítkozik a magasabb fajú görbéknél. A JACOBI-féle tétellel szemben a p-ed fajú görbéknél nem egy rationális pontból, hanem oly p pontból indul ki, melyek ugyan nem rationálisak, de *rationális pontcsoportot* alkotnak, vagyis coordinatáiknak minden elemi symmetrikus függvényei rationálisak, és szerkeszt más p elemű rationális pontcsoportokat.

POINCARÉ dolgozatában lényeges szerep jut a görbék rationális koefficiensű birationális transformatiójának, mint a mely a görbék arithmetikai tulajdonságait nem változtatja meg, a meny-

---

[1] Lásd P. BACHMANN, Encyklopädie der math. Wissensch., Art. I. C. 1., p. 571—573. v. ö. annak franczia fordítását is, Encyclopédie des Sc. Mathém. Tome I., vol. 3., p. 27. s köv. Az ott említetteken kívül meg kell még említenünk STEINER-t, CLEBSCH-et és VÁLYI GYULÁT, kik, ugyan nem arithmetikai szempontból, olyan szerkesztést alkalmaztak (STEINER-féle polygonok szerkesztése) a harmadrendű elsőfajú görbére, mely által egy rationális pontból új rationalis pontokat tudunk felkeresni. Ha u. i. egy rationális coefficiensű harmadrendű görbén A rationalis pont, akkor A érintője szintén rationális A_1 pontot metsz ki a görbéből, A_1 érintője szintén és így tovább. Vagy ha A, B és C rationális pontok, akkor az AC rationális C_1 pontot, a BC_1 rationális C_2 pontot és így tovább metsz ki. STEINER, Crelle Journal 32. k. p. 182; CLEBSCH ugyanott 63. k.; CLEBSCH-LINDEMANN, Vorlesungen über Geometrie, I. k. p. 615.; VÁLYI GYULA, Mathematikai és Természettudományi Értesítő, IX. k. p. 18—25, X. k. p. 2—13, X. k. p. 249, mely utóbbi dolgozatában olyan szerkesztést ad, melyet rationális coefficiensű negyedrendű elsőfajú térbeli görbékre alkalmazva egy rationális pontból újakat tudunk föltalálni.

[2] Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques, Journal de mathématiques (Liouville) (5) t. 7. (1901), p. 161—233.

nyiben minden rationális pontnak rationális pont, minden q elemű rationális pontcsoportnak q elemű rationális pontcsoport felel meg. Mint ilyen transformatióra nézve invariáns számot definiálja POINCARÉ a harmadrendű görbe rangszámát, vagyis azon rationális pontok számát, melyek egymásból nem származtathatók le, de belőlük minden rationális pont leszármaztatható a görbén.

Újabban SCHLESINGER LAJOS mutatott reá ezekre a vizsgálatokra a Deutsche Mathematiker-Vereinigung 1907. évben tartott EULER-ülésén felolvasott közleményében,[1] melyben kimutatja, hogy a JACOBItól EULERnek tulajdonított algorithmus már FERMATnál feltalálható; kimutatja továbbá, a mire JACOBI csak hivatkozott, hogy t. i. a FERMAT-EULER-féle algorithmus, mely által az (1) görbék egy rationális pontjából másoknak ismeretéhez eljutunk, egyezik az (1)-hez tartozó elliptikus integrálok szorzásának algebrai algorithmusával; felhívja a figyelmet JACOBI bizonyítás nélkül maradt tételére s végül felállítja az összefüggést FERMAT, EULER, JACOBI és POINCARÉ dolgozatai közt.

Körülbelül egy időben SCHLESINGER dolgozatával jelent meg BEPPO LEVI egy közleménye, mely azután még három közleményben folytatódott,[2] a rationális coefficiensű harmadrendű görbékről. Az első közleményben rationális coefficiensű birationális transformatióval egymásba átvihető harmadrendű görbékkel, azok invariánsaival s a rajtuk levő rationális pontok eloszlásával foglalkozik, míg a többi három közleményben oly speciális harmadrendű görbéket állít elő, melyeken egy bizonyos rationális pontból csak véges számú rationális pont származtatható le.

SCHLESINGER dolgozatának nyomán a Jahresbericht ezidei első számában (XVIII. kötet 1909) három idevágó dolgozat

---

[1] Über ein Problem der DIOPHANTischen Analysis bei FERMAT, EULER, JACOBI und POINCARÉ, Jahresbericht 17. k. p. 57—67.

[2] Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie, Nota I—IV, Accademia reale delle scienze di Torino, 1906—1908.

látott napvilágot, melyek közül a J. PTASZYCKIÉ[1] és az enyém[2] a JACOBItól kimondott tételt bizonyítja be és pedig az első dolgozat hyperelliptikus görbékre, a második általános algebrai görbékre is. A harmadik dolgozat,[3] melynek szerzője P. v. SCHAEWEN, a czímben kifejezett FERMAT-féle problémával foglalkozik és azt visszavezeti az (1) alatti alakra.

SCHLESINGER professzor úr szíves ösztönzésének, melyért hálás köszönetemet kifejezni e helyen sem mulaszthatom el, köszöni létrejöttét a jelen dolgozat is, mely POINCARÉ nyomán részletesebben szól a magasabb fajú görbékről, különösebben pedig a másodfajú görbékről és ezek közül is a negyedrendű egy kettősponttal biró görbékről.

Az eddig említett dolgozatok nem általános rationális koefficiensű görbékből indulnak ki, hanem olyanokból, melyeken van egy rationális pont, vagy egy p elemű rationális pontcsoport (p a görbe fajszáma). Hogy a coefficiensek mely értékrendszere mellett van a görbén rationális pont, 2, 3, . . . elemű rationális pontcsoport, ez a kérdés igen nehéz és bizonyos nagyon is speciális görbéken[4] kívül csak a kúpszeletekre van eldöntve.[5]

II. Magasabb fajú görbékről.

1.

Rationális coefficiensekkel biró elsőfajú görbéken egy ismeretes (ξ, η) rationális (rationális coordinatákkal biró) pontból, miként POINCARÉ kimutatta, általánosságban végtelen sok rationális pontot lehet felkeresni. Magasabb fajú görbéknél azonban egy ismeretes (ξ, η) rationális pontból általánosságban nem lehet rationális pontokat leszármaztatni, de lehet egy rationális

---

[1] Sur un théorème d'analyse indéterminée, énoncé par JACOBI.
[2] Über ein Theorem von JACOBI und seine Verallgemeinerung.
[3] $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 = z^3$ in rationalen Zahlen zu lösen.
[4] BACHMANN, Encyklopädie der math. Wissensch. I. C. 1. p. 572—573.
[5] BACHMANN, id. h. I. C. 2. p. 613—622, 633—635.

pontcsoportból, vagyis oly pontcsoportból, melynek pontjai ugyan nem rationálisak, de coordinatáiknak minden elemi symmetrikus függvénye rationális, végtelen sok más rationális pontcsoportot leszármaztatni.

Mint általánosítását az elsőfajú rationális coefficiensekkel biró algebrai görbékre szóló tételnek POINCARÉ dolgozatában a következő tételt mutatta ki:

Ha

$$f(x, y) = 0 \tag{3}$$

egy n-ed rendű, p-ed fajú rationális coefficiensű algebrai görbe egyenlete[1] és ha ismeretes ezen egy p elemű rationális pontcsoport, vagyis oly p pont, melyek (x_k, y_k) $(k = 1, 2, \ldots, p)$ coordinátáinak minden elemi symmetrikus függvénye rationális szám, akkor belőle általánosságban végtelen sok p elemű rationális pontcsoportot tudunk leszármaztatni.

Az adott p elemű rationális pontcsoportból új p elemű rationális pontcsoportokat rationalis coefficiensű adjungált görbék által tudunk az (3) görbéből kimetszeni.

Az algebrai görbék elméletének ismeretes tételei szerint[2] a (3) görbének $q > (n - 3)$-ad rendű adjungált görbéivel való (a d számú kettősponton kívüli) $nq - 2d$ metszéspontja közül általánosságban csak $nq - 2d - p$ választható tetszőlegesen s a többi p metszéspont ezek által meg van határozva, úgy hogy az (3) görbén levő $g_{nq-2d}^{nq-2d-p}$ pontsereget egy $k = nq - 2d - p$ nem homogén lineáris parametert tartalmazó

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) + \lambda_1\varphi_1(x, y) + \lambda_2\varphi_2(x, y) + \cdots + \lambda_k\varphi_k(x, y) = 0 \tag{4}$$

---

[1] Kényelem szempontjából azt az esetet fogjuk szem előtt tartani, hogy az (3) görbe csak közönséges singularitásokkal, tehát egyszerű kettőspontokkal és csúcspontokkal bir, de vizsgálataink arra az esetre is alkalmazhatók, mikor az (3) görbe singularitásai nem ily egyszerűek.

[2] Lásd BERZOLARI, Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven, Encyklopädie, III. C. 4., p. 414. ; STAHL, ABELsche Funktionen, p. 71—75.

q-ad rendű adjungált görbesorral ki tudjuk metszeni az (3) görbéből, a hol $\varphi_0(x, y), \varphi_1(x, y) \ldots \varphi_k(x, y)$ egymástól lineárisan független q-ad rendű adjungált görbék, melyeknek coefficiensei az (3) görbe coefficienseiből rationálisan vannak összetéve; jelen esetben tehát, a mikor az (3) görbe coefficiensei rationálisak, a $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ görbék koefficiensei is rationálisak.

Ha tehát a (4) görbét a (3) görbének egy $k = nq - 2d - p$ elemű rationális pontcsoportján keresztülvezetjük, akkor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ rationális értékeket nyernek s így, minthogy a (3) és (4) rationális coefficiensekkel biró görbék a kettőspontok rationális pontcsoportján és a k elemű rationális pontcsoporton kívül szükségképen ismét rationális pontcsoportban metszik egymást, a többi p metszéspont rationális pontcsoportot alkot.

Előfordulhat az az eset is, hogy a $k = nq - 2d - p$ elemű rationális pontcsoporton nemcsak egy, hanem végtelen sok (4) alakú q-ad rendű adjungált görbe megy keresztül, vagyis a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ parameterek közül $1, 2 \ldots$, tetszőleges marad; ekkor a (4) alakú s a k elemű pontcsoporton átmenő görbét a síknak $1, 2 \ldots$, tetszőleges rationális pontján keresztülvezethetjük, hogy a p elemű pontcsoport határozott legyen.

Olyan $k = nq' - 2d - p$ elemű rationális pontcsoportot, a a milyenre p elemű rationális pontcsoportok szerkesztésénél szükségünk van, mindig tudunk megalkotni, ha a (3) görbének egy p elemű rationális pontcsoportját ismerjük. Ezen p elemű rationális pontcsoportból és egy tetszőleges $q > (n-3)$-ad rendű rationális koefficiensű adjungált görbének a (3) görbével való $nq - 2d$ elemű G rationális pontcsoportjából állítunk össze egy $nq' - 2d - p$ elemű rationális pontcsoportot azáltal, hogy amazt $(\varepsilon - 1)$-szer, emezt $(\lambda + 1)$-szer számítjuk, a hol $\varepsilon - 1$ és $\lambda + 1$ positiv egész számok (az egyik zéró is lehet), melyek eleget tesznek az

$$nq' - 2d - p = (\varepsilon - 1)p + (\lambda + 1)(nq - 2d), \tag{5}$$

egyenletnek, melynek az

$$n(q'-q)-\lambda(nq-2d)=\varepsilon p \tag{6}$$

alakot is adhatjuk.

Legyen

$$\rho=[n, 2d], \quad \rho'=[n, 2d, p],$$

a hol a zárójel a közötte levő számok legnagyobb közös osztóját jelenti, akkor a (6) egyenlet csak akkor elégíthető ki positiv $q'-q$ és $\lambda \geqq -1$ egészszámú értékekkel, ha $\frac{\varepsilon p}{\rho}$ egészszámú értékkel bir. Ez pedig oly legkisebb ε érték mellett fog bekövetkezni, a mely

$$\varepsilon=\frac{\rho}{\rho'}=\frac{[n, 2d]}{[n, 2d, p]}.$$

Ilyen ε érték mellett a (6) egyenletnek végtelen sok positiv $q'-q$ és $\lambda \geqq -1$ egészszámú megoldása van. Az (5) egyenlet miatt tehát azon q' rendű adjungált görbe, mely az adott p elemű rationális pontcsoporton $(\varepsilon-1)$-szer, a G rationális pontcsoporton pedig $(\lambda+1)$-szer megy keresztül, ezeken kívül a (3) görbéből egy p elemű rationalis pontcsoportot metsz ki.

Új p elemű rationális pontcsoportokat kapunk, ha vagy a (6) egyenlet más $q'-q$, λ megoldásából indulunk ki, vagy pedig a már megkapott p elemű rationális pontcsoportokra ismételjük az előző szerkesztést.

Más módszert is ad Poincaré p elemű rationális pontcsoportok szerkesztésére, mely azonban csak akkor alkalmazható, ha már két vagy több p elemű rationális pontcsoport ismeretes a (3) görbén. Ha u. i. két p elemű rationális pontcsoporton (ha csak kettő ismeretes, akkor az egyiken kétszeresen) egy $q \geqq \frac{3p+2d}{n}$-ed rendű rationális coefficiensű adjungált görbét vezetünk keresztül, akkor e görbe a (3)-at egy $nq-2d-2p$ elemű rationális pontcsoportban metszi. Egy ezen a pontcsoporton valamint egy harmadik p elemű rationális pontcsoporton keresztülvezetett ugyanolyan q-ad rendű adjungált görbe egy új p elemű rationális pontcsoportot metsz ki a (3)-ból.

Ezen eljárást alkalmazva az előző módszer által megkapott két vagy több p elemű rationális pontcsoportokra, s a belőlük kapott új p elemű rationális pontcsoportokra, ezen módszer is általánosságban végtelen sok p elemű rationális pontcsoport ismeretéhez juttat el a (3) görbén.

Azon speczialis esetben, a mikor lehet oly q egészszámot találni, a mely $q = \frac{3p+2d}{n}$, akkor POINCARÉ második szerkesztése egy p elemű rationális pontcsoportra is alkalmazható, mivel ekkor a szerkesztésnél segítségül használt $nq - 2d - 2p$ elemű rationális pontcsoport maga is p elemű s így szintén felhasználható új p elemű rationális pontcsoportok szerkesztésére. Az ily módon kapott p elemű rationális pontcsoportok általánosságban különböznek az előbbi két szerkesztés által nyert pontcsoportoktól. Ezen szerkesztés azonban csak akkor alkalmazható, ha

$$q = \frac{3p+2d}{n} = \frac{p+2p+2d}{n} = n - 3 + \frac{p+2}{n}$$

vagyis, ha $p+2$ n-nel osztható, a mi pl. teljesül, ha

$$p = 2,\ n = 4;\ p = 3,\ n = 5, \text{ stb.}$$

Ha ezen feltétel nem is teljesül, de teljesül az

$$nq - 2d = (h+2)p$$

egyenlőség, a hol q és h positiv egészszámok, akkor a q-ad rendű adjungált görbét $(h+1)$-szeresen keresztülvezetve az adott p elemű rationális pontcsoporton, vagy pedig $h+1$ p elemű rationális pontcsoporton keresztülvezetve, az még egy p elemű rationális pontcsoportban metszi a (3) görbét.

De hogy az említett egyenlőség teljesülhessen, annak feltétele, hogy $hp + 2$ osztható legyen n nel. Ez pedig akkor teljesül, ha a

$$kn - hp = 2$$

egyenletnek van megoldása, a mi nem mindig következik be.

2.

A (3) görbén levő p-elemű pontcsoportokat a JACOBI-féle inversio probléma szerint a (3) algebrai egyenlethez tartozó elsőfajú ABEL-féle integrálok összegeivel jellemezhetjük.

Legyen ugyanis $u_1, u_2, \ldots, u_p$ a (3)-hoz tartozó egymástól lineárisan független p elsőfajú normálintegrál, akkor, ha (a_i, b_i) $(i=1, 2, \ldots, p)$ p fixpontja a (3) görbének, az

$$\alpha_k = \int\limits_{(a_1, b_1)}^{(x_1, y_1)} du_k + \int\limits_{(a_2, b_2)}^{(x_2, y_2)} du_k + \cdots + \int\limits_{(a_p, b_p)}^{(x_p, y_p)} du_k \qquad (7)$$
$$(k=1, 2, \ldots, p)$$

integrálösszegek megadásával a (3) görbe (x_i, y_i) $(i=1, 2, \ldots, p)$ p-elemű pontcsoportja teljesen meg van határozva,[1] föltéve, hogy az integrátió útja az (a_i, b_i) és (x_i, y_i) $(i=1, 2, \ldots, p)$ pontok között a p integrálösszeg mindenikében ugyanaz a (3)-hoz tartozó RIEMANN-féle felületen.

Egyszerűség szempontjából tegyük fel, hogy (7) alatt szereplő integrálok alsó határai mind ugyanazok, vagyis $a_i = a$, $b_i = b$ $(i=1, 2, \ldots, p)$.

A (7) alatti integrálösszegeket, melyek által az (x_i, y_i) $(i=1, 2, \ldots, p)$ p-elemű pontcsoport meg van határozva, ezen pontcsoport *argumentumai*nak, s a pontcsoportot $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ pontcsoportnak, vagy röviden α pontcsoportnak nevezzük. Ugyancsak argumentumoknak nevezzük a (7) alatti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ integrálösszegeket akkor is, ha azok nem p számú (x_i, y_i) pontra vonatkoznak, hanem többre vagy kevesebbre, a mikor tehát az argumentumok által a pontcsoport nincs meghatározva.[2]

---

[1] Kivéve azon esetet, a mikor az (x_i, y_i) $(i=1, 2, \ldots, p)$ p elemű pontcsoport egy $(n-3)$-adrendű adjungált görbén van, a mikor az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ összegek nem egy, hanem végtelen sok p elemű pontcsoportot határoznak meg.

[2] POINCARÉ az elsőfajú integrálokat úgy választja meg, hogy a (3) görbének minden adjungált görbével való (a kettőspontokon kívüli) metszéspontjaira nézve az argumentumok összege

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = 0$$

Az Abel-féle theoréma szerint a (3) görbének egy q-adrendű görbével való nq metszéspontjára vonatkozó

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$$

argumentumok függetlenek a q-adrendű görbe koefficienseitől, s az argumentumokban szereplő integrálok alsó határain s a (3) görbe koefficiensein kívül csakis a q rendszámtól függenek. Ha tehát egy tetszőleges egyenessel való (x_i, y_i) $(i=1, 2,\ldots, n)$ n metszéspontra vonatkozólag

$$\alpha_1 = \varkappa_1, \; \alpha_2 = \varkappa_2, \ldots, \alpha_p = \varkappa_p,$$

akkor egy q-adrendű görbével való qn metszéspontra vonatkozólag

$$\alpha_1 = q\varkappa_1, \; \alpha_2 = q\varkappa_2, \ldots, \alpha_p = q\varkappa_p.$$

Jelölje a kettőspontokhoz (kétszeresen számítva) tartozó argumentumokat

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p,$$

akkor a (3) görbének egy tetszőleges q-adrendű adjungált görbével a kettőspontokon kívüli $nq-2d$ metszéspontjára vonatkozólag

$$\alpha_1 = q\varkappa_1 - \delta_1, \; \alpha_2 = q\varkappa_2 - \delta_2, \ldots, \alpha_p = q\varkappa_p - \delta_p.$$

Ezek előrebocsátása után egy p elemű rationális

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_p)$$

pontcsoport argumentumai által előállíthatjuk a belőle leszármaztatható p-elemű rationális poncsoportokat, illetve azoknak argumentumait.

Az előző pontban alkalmazott q'-rendű adjungált görbe, mely az a pontcsoporton $(\varepsilon-1)$-szer a

$$G = q\varkappa - \delta = (q\varkappa_1 - \delta_1, \; q\varkappa_2 - \delta_2, \ldots, q\varkappa_p - \delta_p)$$

---

legyen. Ez nála azért kényelmes, mert ő egy p elemű rationális a pontcsoportból leszármaztatható p elemű rationális pontcsoportoknak csak az $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p$ argumentum összegeit állítja elő, a mi által a pontcsoport még nincs jellemezve.

$(nq-2d)$-elemű rationális pontcsoporton keresztül pedig $(\lambda+1)$-szer megy, a (3) görbéből az (5) alatti egyenlet miatt a

$$q'\varkappa-[(\varepsilon-1)a+(\lambda+1)(q\varkappa-\delta)+\delta]=a-\varepsilon a-[(\lambda+1)q-q']\varkappa-\lambda\delta$$

p elemű rationális pontcsoportot metszi ki, vagyis azon pontcsoportot, melynek argumentumai

$$a_i-\varepsilon a_i-[(\lambda+1)q-q']\varkappa_i-\lambda\delta_i. \quad (i=1,2,\dots,p)$$

λ és $(q'-q)$ eleget tesznek a (6) alatti egyenletnek, melyből

$$(\lambda+1)q-q'=\frac{2\lambda d-\varepsilon p}{n}=\mu,$$

vagyis

$$2\lambda d-n\mu=\varepsilon p.$$

Ha ezen egyenletnek legkisebb, feladatunknak megfelelő λ, μ egész számú megoldása $(\lambda\geqq-1)$ λ_0 és μ_0, akkor az összes céljainknak megfelelő megoldások

$$\lambda=\lambda_0+\frac{n}{\rho}k,\quad \mu=\mu_0+\frac{2d}{\rho}k,$$

a hol $\rho=[n, 2d]$ és k nem negativ egész szám. Ennek alapján az a p-elemű rationális pontcsoportból a q'-rendű adjungált görbe rendszámának megfelelő változtatásával a következő p elemű rationális pontcsoportokat kapjuk:

$$a-\varepsilon a-\mu_0\varkappa-\lambda_0\delta-k\left(\frac{n}{\rho}\varkappa+\frac{2d}{\rho}\delta\right). \quad (k=0,1,2,3,\dots)$$

Rövidség kedvéért tegyük

$$\varepsilon a+\mu_0\varkappa+\lambda_0\delta=\bar{a}$$

és

$$\frac{n}{\rho}\varkappa+\frac{2d}{\rho}\delta=\sigma,$$

akkor az előbb kapott p-elemű rationális pontcsoportok

$$a-\bar{a}-k\sigma. \quad (k=0,+1,+2,\dots)$$

Alkalmazzuk most Poincaré második szerkesztését adott α, β, γ p-elemű rationális pontcsoportokra. A β és γ pontcsoportokon keresztül fektetett $q \geqq \frac{3p+2d}{n}$ -edrendű rationális koefficiensű görbe a (3)-ból egy

$$-(\beta_k+\gamma_k)+q\varkappa_k-\delta_k \atop (k=1, 2, \ldots, p)$$

argumentumú rationális pontcsoportot metsz ki, mely rationális pontcsoporton és az α pontcsoporton keresztülmenő q-adrendű adjungált görbe a (3)-ból a

$$\beta+\gamma-\alpha$$

p-elemű rationális pontcsoportot metszi ki.

Ezen második szerkesztést alkalmazva az

$$a-\bar{a}-k_1\sigma, \quad a-\bar{a}-k_2\sigma, \quad a+\bar{a}-k_3\sigma \atop (k_1, k_2, k_3 \geqq 0)$$

p-elemű rationális pontcsoportokra, kapjuk az

$$a-\bar{a}+(k_1-k_2-k_3)\,\sigma$$

p-elemű rationális pontcsoportot, a hol most $k_1-k_2-k_3$ minden egészszámú érték lehet a zérót is beleszámítva.

Ha tehát a p-elemű rationális pontcsoport, akkor

$$a-\bar{a}+k\sigma \atop (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{8}$$

is p-elemű rationális pontcsoport.

Az így kapott p-elemű rationális pontcsoportokon kívül még máskép is tudunk p-elemű rationális pontcsoportokat kapni a (3) görbén, ha Poincaré második szerkesztésmódját alkalmazzuk a következő egyenletsorozat által meghatározott módon:

$$\begin{aligned}
&2(a-\bar{a})-a=a-2\bar{a},\\
&2(a-2\bar{a})-(a-\bar{a})=a-3\bar{a}=(a-2\bar{a})+(a-\bar{a})-a,\\
&2(a-3\bar{a})-(a-2\bar{a})=a-4\bar{a}=2(a-2\bar{a})-a,\\
&\quad\vdots\\
&2(a-k\bar{a})-\big(a-(k-1)\bar{a}\big)=a-(k+1)\bar{a},\quad \text{stb.}\\
&2a-(a-\bar{a})=a+\bar{a},\\
&2(a+\bar{a})-a=a+2\bar{a},\\
&2(a+2\bar{a})-(a+\bar{a})=a+3\bar{a}=(a+2\bar{a})+(a+\bar{a})-a,\\
&\quad\vdots\\
&2(a+k\bar{a})-\big(a+(k-1)\bar{a}\big)=a+(k+1)\bar{a}\quad \text{stb.}
\end{aligned}$$

Ezen két egyenletsorozat bizonyos algorithmust állapit meg a p-elemű rationális pontcsoportok meghatározásában, a mely szerint eljárva az a és $a-\bar{a}$ p-elemű rationális pontcsoportból az

$$\underset{(m=0,\,\pm1,\,\pm2,\dots)}{a+m\bar{a}}$$

p-elemű rationális pontcsoportokat kapjuk. A (8) tekintetbevételével tehát az a pontcsoportból leszármaztatható kétszeresen végtelen sok p-elemű rationális pontcsoport[1]

$$\underset{(m,\,k=0,\,\pm1,\,\pm2,\dots)}{a+m\bar{a}+k\sigma.} \tag{9}$$

Hogy pedig általánosságban ezektől a p-elemű rationális csoportoktól különböző p-elemű rationális pontcsoportot Poincaré két szerkesztésével nem tudunk levezetni, azt a következőkép mutatjuk ki.

Nem tudunk új p-elemű pontcsoportokat kapni az első szerkesztéssel, mivel az $a+m\bar{a}+k\sigma$ rationális pontcsoportból az első szerkesztéssel nyert

---

[1] A félreértés kikerülése végett szükségesnek tartom kijelenteni, hogy itt $a+m\bar{a}+k\sigma$ nem az argumentumok összege, mint Poincarénál, hanem csak symbolum, mely azon rationális pontcsoportot jelenti, melynek argumentumai:

$$\underset{(k=1,\,2,\,\dots,\,p)}{a_k+m\,(\varepsilon a_k+\mu_0\varkappa_k+\lambda_0\delta_k)+k\left(\frac{n}{\varrho}\,\varkappa_k+\frac{2d}{\varrho}\,\delta_k\right).}$$

$$(a+m\bar{a}+k\sigma)-\varepsilon(a+m\bar{a}+k\sigma)-\mu_0\varkappa-\lambda_0\delta-k_1\sigma =$$
$$= a-(\varepsilon a+\mu_0\varkappa+\lambda_0\delta)-(\varepsilon m-m)\bar{a}-(\varepsilon k-k+k_1)\sigma =$$
$$= a-(\varepsilon m-m+1)\bar{a}-(\varepsilon k-k+k_1)\sigma$$

p-elemű rationális pontcsoport közte van a (9) alattiaknak.

De nem nyerhetünk Poincaré második eljárásával sem, mivel az

$$(a+m_1\bar{a}+k_1\sigma)+(a+m_2\bar{a}+k_2\sigma)-(a+m_3\bar{a}+k_3\sigma) =$$
$$= a+(m_1+m_2-m_3)\bar{a}+(k_1+k_2-k_3)\sigma$$

p-elemű rationális pontcsoport a (9) alattiak közé tartozik.

Az a p-elemű rationális pontcsoportból Poincaré kétféle szerkesztésével leszármaztatható összes p-elemű rationális pontcsoportokat tehát (9) állítja elő. Azon esetben, a mely azonban nem általános eset, mikor az előbbi pont végén említett feltételek teljesülnek, még más p-elemű rationális pontcsoportokat is kaphatunk. A mi a (9)-ből mint lényeges különbség a $p=1$ esettel szemben azonnal szembetünő, az az, hogy míg az elsőfajú rationális koefficiensű görbék egy rationális pontjából általánosságban csak egyszeresen végtelen sok rationális pont származtatható le, addig a magasabbfajú ($p\geqq 2$) rationális koefficiensű algebrai görbéken egy p-elemű rationális pontcsoportból általánosságban legalább is kétszeresen végtelen sok p-elemű rationális pontcsoport származtatható le.

Ha az a p-elemű rationális pontcsoporton kívül ismeretes még egy oly β p-elemű pontcsoport, mely az a-ból nem származtatható le, akkor belőle Poincaré szerkesztéseivel a

$$\beta+m\bar{\beta}+k\sigma$$
$$(m, k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

rationális pontcsoportok származtathatók le ($\bar{\beta}=\varepsilon\beta+\mu_0\varkappa+\lambda_0\delta$), s ha az említett feltételek nem teljesülnek, ezek az egyedüliek. Az így kapott és a (9) alatti p-elemű pontcsoportokon kívül a kétféle pontcsoportok combinálásával is kapunk új p-elemű rationális pontcsoportokat Poincaré második szerkesztésével. Így kapjuk az

$$\alpha+m_1\bar{\alpha}+k_1\sigma+\alpha+m_2\bar{\alpha}+k_2\sigma-(\beta+m_3\bar{\beta}+k_3\sigma)=$$
$$=2\alpha-\beta+(m_1+m_2)\bar{\alpha}-m_3\bar{\beta}+(k_1+k_2-k_3)\sigma \quad \text{stb.},$$

általánosan az

$$n_1\alpha+n_2\beta+m_1\bar{\alpha}+m_2\bar{\beta}+k\sigma$$

p-elemű rationális pontcsoportokat,[1] a hol n_1, n_2, m_1, m_2, k tetszőleges egész számok a zérót is belevéve, melyekre csupán az a kikötés, hogy

$$n_1+n_2=1.$$

Még általánosabban, ha α, β, γ, ... egymástól független p-elemű rationális pontcsoportok, melyek közül egyik sem származtatható le a többiekből, akkor belőlük a

$$n_1\alpha+n_2\beta+n_3\gamma+\cdots+m_1\bar{\alpha}+m_2\bar{\beta}+m_3\bar{\gamma}+\cdots+k\sigma \tag{10}$$

p-elemű rationális pontcsoportok származtathatók le az általánosan alkalmazható módszerekkel. A (10) alatt n_1, n_2, n_3, ..., m_1, m_2, m_3, ..., k tetszőleges egész számok a zérót is belevéve, s csupán az n-ek vannak kitéve annak a megszorításnak, hogy

$$n_1+n_2+n_3+\cdots=1.$$

Ha az előző pont végén említett nem általános módszer is alkalmazható, akkor a (10)-ben foglalt p-elemű rationális pontcsoportokhoz járulnak azon pontcsoportok, melyeket az ott mondott szerkesztéssel találunk meg.

Ha az α, β, γ, ... p-elemű rationális pontcsoportokból a (3) görbén levő összes p-elemű rationális pontcsoport leszármaztatható, akkor az α, β, γ, ... r_p számú pontcsoportot *primitiv* p-elemű rationális pontcsoportoknak nevezzük, s r_p számukat a (3) görbén levő p-elemű rationális pontcsoportok *rangszámá*nak mondjuk.

---

[1] Ha az említett feltételek nem teljesülnek, akkor ezek ki is merítik az α és β p elemű rationális pontcsoportokból szerkeszthető p elemű rationális pontcsoportokat.

3.

Rationális koefficiensű T birationális transformátióra nézve egy C rationális koefficiensű algebrai görbe arithmetikai tulajdonságai invariánsok.

Minden s-elemű S rationális pontcsoportnak a C görbén a T transformatió miatt egy és csakis egy[1] szintén s-elemű S' rationális pontcsoport felel meg a transformált C' rationális koefficiensű algebrai görbén és viszont. Továbbá, ha S irreducibilis, vagyis nem esik szét kevesebb pontból álló rationális pontcsoportokra, akkor az S' is az, mert ha S' reducibilis volna, s szétesnék $S'_1, S'_2, \ldots, S'_k$ $s_1, s_2, \ldots, s_k$ elemű, rationális pontcsoportokra, a hol

$$s_1+s_2+s_3+\cdots+s_k=s,$$

akkor a T transformatió inverse miatt az S rationális pontcsoportnak is szét kellene esnie $s_1, s_2, \ldots, s_k$ elemű $S_1, S_2, \ldots, S_k$ pontcsoportokra, a mi pedig feltevésünkkel ellenkezik. Viszont minden reducibilis S pontcsoportnak ugyancsak reducibilis S' pontcsoport felel meg, a mely ugyanannyi számú és rendre ugyanannyi elemű rationális pontcsoportra esik szét, mint az S.

Ezek alapján általánosságban rationális koefficiensű birationális transformátióra invariáns számok a C görbén levő rationális pontok száma, az irreducibilis és ennek következtében az összes 2, 3,... stb. elemű rationális pontcsoportok száma. Ha pedig s-elemű rationális pontcsoport végtelen sok van, akkor invariáns a végtelenségi rendszámuk, invariáns tehát a p-elemű rationális pontcsoportoknak r_p rangszáma.

Tegyük még a magasabbfajú görbékre azon megjegyzést, hogy ha a görbe n rendszáma és $p-1$ nem bírnak közös osztóval, akkor mindig, koefficienseinek tetszőleges rationális értéke mellett, van rajtuk p-elemű rationális pontcsoport.

---

[1] Kivételes eset csak akkor fordulhat elő, ha az S rationális pontcsoport a transformáló görbék alappontjaiba esik.

Poincaré első szerkesztésmódjánál az a p-elemű rationális pontcsoporton $(\varepsilon-1)$-szer, a G $(nq-2d)$-elemű rationális pontcsoporton $\lambda+1$-szer kell keresztülvezetnünk a q'-rendű adjungált görbét, mely egy új p-elemű rationális pontcsoportot metsz ki a (3)-ból. Ez a p-elemű rationális pontcsoport független az a-tól, ha $\varepsilon=1$, s az olyan görbéken, melyeken e föltétel teljesül akkor is kaphatunk p-elemű rationális pontcsoportokat, ha előre egyet sem ismerünk. ε pedig akkor és csakis akkor egyenlő az egységgel, ha n és $p-1$ nem bir közös osztóval, ugyanis

$$\varepsilon=\frac{[n, 2d]}{[n, 2d, p]},$$

de mivel

$$2d=n(n-3)-2(p-1),$$

azért

$$[n, 2d]=[n, 2(p-1)],$$

$$[n, 2d, p]=[n, 2(p-1), p],$$

melyekből könnyen kiolvasható, hogy ε csak akkor lehet az egységgel egyenlő, ha n és $p-1$ nem bír közös osztóval. Ezzel kimondott állításunk igazolva van.

Mindig léteznek tehát rationális pontkettősök a másodfajú rationális koefficiensű görbéken; rationális ponthármasok azon harmadfajú görbéken, melyeknek rendszáma páratlan; rationális pontnégyesek az oly negyedfajú görbéken, melyeknek rendszáma nem osztható 3-mal, és így tovább.

A következőkben a másodfajú rationális koefficiensekkel biró görbékkel fogunk foglalkozni, mint azon legegyszerűbb görbékkel, a melyeken mindig vannak rationális pontkettősök.

Szőkefalvi Nagy Gyula.

NÉHÁNY SZÁMELMÉLETI FÜGGVÉNY ADDITIV ELŐÁLLÍTÁSÁRÓL.

I. Bevezetés. Czélkitűzés.

A jelen dolgozat czélja néhány elemi, de a számelmitéle vizsgálatokban jelentősebb szerepet játszó számelméleti függvény olyan előállításának bemutatása, mely a függvényargumentum törzstényezős felbontásának ismeretét nem kivánja meg. Közelebbről meghatározva, czélul azt tűzzük ki magunk elé, hogy az előállitandó függvényeket definicziójuk alapján mindenkor oly analytikai kifejezésekkel adjuk meg, melyek *expliczit* módon a függvényargumentumnak *csakis számértékétől s nem törzsszám-szerkezetétől* függnek.[1]

Könnyű belátni, hogy a számelméleti függvények előállítására használni szokott két előállítási mód: a multiplikativ és additiv közül csakis az utóbbi lehet az, mely esetleg az argumentum törzstényezős felbontása nélkül is elvezethet a függvényérték meghatározásához. Ugyanis a függvényegyenlet[2] létezéséhez kötött és e függvényegyenletnek majdnem kivétel nélkül

$$f(n_1 n_2) = \varepsilon f(n_1) f(n_2)$$

[1] Az argumentum törzstényezős felbontásának ismeretétől független előállítás első példáját e sorok írójának tudomása szerint Vörös Dezső adta $\Sigma(n)$ ily előállításával. (Lásd a Math. és Phys. Lapok 1906 okt.-nov. havi füzetét.)

[2] Valamely számelméleti függvény függvényegyenlete alatt azt a relácziót szokás érteni, mely az egymáshoz relativ prim n_1 és n_2 számokhoz és a szorzatukhoz tartozó függvényértékek között fennáll. A függvényegyenlet általános alakja tehát:

$$f(n_1 n_2) = F(f(n_1), f(n_2)).$$

($\varepsilon=1$ vagy 2; n_1 és n_2 rel. primek) tipusú alakjáról *multiplikativnak* nevezett előállítás az $f(n)$ számelméleti függvény értékét

$$f(n)=\varepsilon^{r-1}f(p_1^{\alpha_1})f(p_2^{\alpha_2})\ldots f(p_r^{\alpha_r})$$

szorzatalakban adja meg, ha n törzstényezős előállítása

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$$

volt, tehát ez az előállítás egyenesen az argumentum törzsszám-szerkezetének meghatározásához van kötve.

Ezzel szemben az *additiv* előállítás a meghatározandó $f(n)$ függvényt oly összeg alakjában adja meg, melynek tagjai egy bizonyos, a szóban forgó függvénynyel szoros kapcsolatban álló, ahhoz «*adjungált*» függvénynek meghatározott speciális argumentumokhoz tartozó helyettesítési értékei. Valamely $f(n)$ számelméleti függvénynek egynél több additiv előállítása is lehetséges. Ez előállítások közül a függvényérték meghatározásához az argumentum törzsfelbontása nélkül elvezet az, melynél az előállítás alapjául szolgáló adjungált függvény argumentumának és a benne esetleg paraméterként szereplő n-nek expliczite csakis számértékétől s nem törzsszám-strukturájától függ és mely az adjungált függvény oly helyettesítési értékeit összegezi, melyek az 1-től n-ig terjedő számsor tagjaihoz tartoznak, mint argumentumokhoz.

Más szóval valamely $f(n)$ számelméleti függvény az argumentum törzstényezős felbontása nélkül is előállítható, ha oly (adjungált) függvény summatora,[1] mely argumentumainak és a paraméterként szereplő n-nek expliczit módon csakis számértékétől függ.

---

[1] Általánosan elfogadott kifejezésmód szerint $g(n)$ a $\gamma(n)$ summatora, ha köztük a

$$g(n)=\sum_{k=1}^{n}\gamma(k)$$

reláczió áll fenn. Ugyanígy beszélhetünk kétváltozós függvények summatorairól is.

Mi az argumentum törzstényezős felbontását mellőző additiv előállítás lehetőségét és módját a következő függvények esetére fogjuk bemutatni:

$\varphi(n)$: az n-nél nem nagyobb és n-nel relativ prim számok száma,

$\psi(n)$: az n-nél nem nagyobb és n-nel relativ prim számok összege;

$S(n)$: n összes osztóinak száma,

$\Sigma(n)$: n összes osztóinak összege;

$\rho(n)$: n amaz osztóinak száma, melyek társosztóikkal relativ primek,

$\sigma(n)$: n amaz osztóinak összege, melyek társosztóikkal relativ primek.

E függvények közösen úgy jellemezhetők, hogy n-nel, illetőleg n-nel és egymással adott oszthatósági relácziókban álló számoknak, illetőleg számpár-elemeknek számát vagy összegét adják meg. Látnivaló, hogy ha *associáltnak* nevezünk két olyan függvényt, melyeknek egyike ugyanazon számoknak adja meg a számát, mint a mely számoknak a másik összegét jelenti, függvényeink associált (társ-) függvények párjaiba foglalhatók. E függvénypárok: $\varphi(n)$, $\psi(n)$; $S(n)$, $\Sigma(n)$; $\rho(n)$, $\sigma(n)$.

Legyenek már most $a_n(k)$, $b_n(k)$, $c_n(i, k)$ olyan függvények, melyeknek rendre az a tulajdonságuk, hogy értékük 1 vagy 0, a szerint, a mint k n-nel, illetőleg i és k n-nel meg egymással rendre az első, második, illetőleg a harmadik függvénypár definicziójában megadott oszthatósági relácziókban állanak, vagy nem. Más szóval:

$a_n(k)=1$, ha $(k, n)=1$, míg $a_n(k)=0$, ha $(k, n)>1$;[1]

$b_n(k)=1$, ha $(k, n)=k$, míg $b_n(k)=0$, ha $(k, n)<k$; $(k \leqq n)$

$c_n(i, k)=1$, ha $ik=n$ és $(i, k)=1$; $c_n(i, k)=0$, ha $ik \neq n$ vagy $(i, k)>1$.

Világos, hogy $a_n(k)$, $b_n(k)$, $c_n(i, k)$ most adott definicziója alapján függvényeink a következőkép állíthatók elő:

---

[1] A (k, n) symbolum a k és n egész számok legnagyobb közös osztóját jelenti.

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= \sum_{k=1}^{n} a_n(k), & \psi(n) &= \sum_{k=1}^{n} k a_n(k), \\
S(n) &= \sum_{k=1}^{n} b_n(k), & \Sigma(n) &= \sum_{k=1}^{n} k b_n(k), \\
\rho(n) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_n(i, k), & \sigma(n) &= \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (i+k) c_n(i, k),
\end{aligned} \tag{1}$$

tehát $\varphi(n)$ az $a_n(k)$, $\psi(n)$ a $ka_n(k)$, $S(n)$ a $b_n(k)$, $\Sigma(n)$ a $kb_n(k)$, $\rho(n)$ a $c_n(i, k)$, $2\sigma(n)$ az $(i+k)\,c_n(i, k)$ adjungált függvény summatora.

Legközelebbi czélunk annak kimutatása, hogy $a_n(k)$, $b_n(k)$ és $c_n(i, k)$ meghatározhatók oly módon, hogy argumentumaiknak és a paraméterként szereplő n-nek expliczite csakis számértékétől és ne törzsszám-szerkezetétől függjenek. E végből a felsorolt adjungált függvényeket az (x^n-1) és (x^k-1), illetve az (x^n-1) és (x^i-1) binomok SYLVESTER-féle resultánsa főminorainak függvényeképen fogjuk előállítani. Mint látni fogjuk, ez előállítások — ha az $(x^\alpha-1)$ és $(x^\beta-1)$ binomok SYLVESTER-féle resultánsát $R_{\alpha,\beta}$-val és ennek γ-ik főminorát $R^{(\gamma)}_{\alpha,\beta}$-vel jelöljük — a következő formulákkal advák:

$$\begin{aligned}
a_n(k) &= |R^{(1)}_{k,n}|, \\
b_n(k) &= 1 - |R^{(k-1)}_{k,n}|, \\
c_n(i, k) &= |R^{(1)}_{i,k}|\left(1 - |R^{(k-1)}_{k,n}|\right)\left(1 - |R^{(i-1)}_{i,n}|\right)\left(1 - |R^{(ik-1)}_{ik,n}|\right).
\end{aligned} \tag{2}$$

Evidens, hogy e formulákkal $a_n(k)$, $b_n(k)$ és $c_n(i, k)$ valóban úgy vannak meghatározva, hogy expliczit módon k-nak, i-nek és n-nek csakis számértékétől függnek. Ha tehát e formulák igazak, $\varphi(n)$, $S(n)$, $\rho(n)$ és társfüggvényeik (1) alatt felírt előállításai megfelelnek annak a követelménynek, hogy e függvényeket olyan analytikai kifejezésekkel adják meg, melyek expliczit módon az n argumentumnak csakis számértékétől függnek.

Tulajdonképeni feladatunk ezek után tehát abban áll, hogy a (2) alatt felírt formulákat verifikáljuk. Hogy ezt megtehessük, az egységgyököket szolgáltató binomegyenletek SYLVESTER-féle resultánsáról szóló két lemmának ismeretére lesz szükségünk. Ezen önmagukban is jelentős lemmák tételszerű kimondása és bebizonyítása lesz a következő fejezet tárgya.

II. Két lemma az $x^k-1=0$ és $x^n-1=0$ binomegyenletek Sylvester-féle resultánsáról.

Már jeleztük, hogy a $\varphi(n)$, $S(n)$, $\rho(n)$ elemi számelméleti függvények és társfüggvényeik előállításánál szereplő $a_n(k)$, $b_n(k)$ és $c_n(i,k)$ adjungált függvények czéljainknak megfelelő meghatározásához szükségünk van két oly lemma ismeretére, melyek az egységgyököket szolgáltató binomegyenletek SYLVESTER-féle resultánsára vonatkoznak. E két lemma a következő:

I. *Arra, hogy az*

$$x^k-1=0 \quad \textit{és} \quad x^n-1=0$$

egyenleteknek δ számú közös gyöke legyen, szükséges és elegendő, hogy SYLVESTER-*féle resultánsuk a $\delta-1$ számú legelső főminorral, azaz az első, második, ..., $(\delta-1)$-ik főminorral egyetemben eltűnjék.*

II. *Ha az*

$$x^k-1=0 \quad \text{és} \quad x^n-1=0$$

egyenletek közös gyökeinek száma δ, akkor ezen egyenletek SYLVESTER-*féle resultánsának összes főminorai a δ-iktől kezdve abszolut értékben 1-gyel egyenlők.*

A mi a most felírt lemmák elsejét illeti, ez a binomegyenletek speciális esetére való kimondása a következő, sokkal általánosabb tételnek:

I$^+$. *Arra, hogy a zérusgyökkel nem biró, egyébként tetszésszerinti*

$$\begin{aligned} &f(x)\equiv a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k=0 \\ \textit{és} \quad & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3) \\ &g(x)\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=0 \end{aligned}$$

egyenleteknek δ számú[1] *közös gyöke legyen, szükséges és ele-*

[1] Ha valamely közös gyök az $f(x)=0$ és $g(x)=0$ egyenleteknek több-

gendő, hogy ez egyenletek Sylvester-*féle resultánsa első, második,..., $(\delta-1)$-ik főminorával együtt eltűnjék.*[1]

Mi a közös gyökök létezésének új kritériumait szolgáltató I. és I⁺. alatt felírt tételek közül az utóbbit, az általánosabbat fogjuk bebizonyítani, mivel ez az elsőt nyilvánvalóan magában foglalja. Mielőtt azonban a bebizonyítás részleteire rátérnénk, jelezni kivánjuk, hogy a (3) alatt részletesen kiírt egyenletek Sylvester-féle resultánsát mindig a következő determináns alakjában gondoljuk felírva:

$$\mathrm{Res}\big(f(x),\, g(x)\big) = R =$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_k & 0 & . & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} & a_k & . & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & & b_{n-2} & b_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & . & . & \dots & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix};$$

megjegyezzük még, hogy e resultáns $R^{(i)}$-vel jelölendő i-ik főminora alatt oly minordeterminánst kivánunk érteni, mely az eredeti determinánsból az i utolsó sor és i utolsó oszlop elhagyása által származik.

A mi már most az I⁺. tételt illeti, annak általános érvényét a teljes inductio módszerével könnyen kimutathatjuk, a $\delta=1$ esetre a Sylvester-féle resultánsnak algebrai kézikönyvekben is közölt elmélete alapján minden külön bebizonyítás nélkül igaznak fogadván el a tételt.

---

szörös gyöke, akkor a közös gyökök számának megállapításánál annyiszor vétetik számba, a hányszoros gyöke az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok legnagyobb közös osztójának.

[1] Érdekesnek tartjuk annak megjegyzését, hogy a homogén lineár differencziálegyenletek közös független megoldásai számának megállapítására képesítő — a Sylvester-féle resultanshoz analog — determinánsalakzat esetében a főminorok eltünése csak szükséges, de nem elegendő feltétele annak, hogy e közös megoldások száma egynél több legyen.

Tegyük fel, hogy I⁺. $\delta=i$ esetben igaz; e feltevés mellett tételünk igaz voltát $\delta=i+1$-re is kimutatandó, csakis annak bebizonyítására kell szorítkoznunk, hogy — ha i számú közös gyök létezését már fölismertük — egy $(i+1)$-ik közös gyök létezésére szükséges és elegendő az, hogy a szóban forgó egyenletpár resultánsának i-ik főminora is zérussal legyen egyenlő.

Legyenek az $f(x)=0$ és $g(x)=0$ egyenletek gyökei: x_1, $x_2, \ldots, x_k$, illetőleg $y_1, y_2, \ldots, y_n$ és legyenek a már közösnek felismert gyökök $y_1, y_2, \ldots, y_i$, illetőleg $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{k-i+1}$.

Hogy $R^{(i)}$ ama tulajdonságát kimutathassuk, miszerint eltünése egy $(i+1)$-ik közös gyök létezésének szükséges és elegendő feltétele, állítsuk elő e főminort egyenleteink gyökeinek függvényeképen. Szorozzuk meg e czélból az

$$R^{(i)}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & & a_k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots & & a_{k-1} & a_k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_0 & \cdot & & \ldots & a_k \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 & & \ldots & a_{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & & & a_0 & \ldots & a_{k-i} \\ b_0 & b_1 & \ldots & & & b_{n-1} & b_n \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_0 & & & \ldots & b_n \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}(n-i \text{ sor}) \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}(i \text{ sor}) \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}(k-i \text{ sor}) \end{matrix}$$

determinánst a következő, másik determinánssal:

$$D=\begin{vmatrix} y_1^{k+n-1} & y_1^{k+n-2} & \ldots & y_1^i \\ y_2^{k+n-1} & y_2^{k+n-2} & \ldots & y_2^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^{k+n-1} & y_n^{k+n-2} & \ldots & y_n^i \\ x_1^{k+n-1} & x_1^{k+n-2} & \ldots & x_1^i \\ x_2^{k+n-1} & x_2^{k+n-2} & \ldots & x_2^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k-i}^{k+n-1} & x_{k-i}^{k+n-2} & \ldots & x_{k-i}^i \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n \text{ sor} \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k-i \text{ sor} \end{matrix}$$

A szorzást akként végezve, hogy sorral sort komponálunk és a $f(x_1)=\cdots=f(x_k)=0$, $g(y_1)=\cdots=g(y_n)=0$ relácziók tekintetbe vételével kapjuk, hogy:

$$D\,.\,R^{(i)}=\begin{vmatrix}
y_1^{n-1}f(y_1) & \dots & y_n^{n-1}f(y_n) & 0 & \dots & 0\\
y_1^{n-2}f(y_1) & \dots & y_n^{n-2}f(y_n) & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
y_1^{i}f(y_1) & \dots & y_n^{i}f(y_n) & 0 & \dots & 0\\
y_1^{i-1}\left[f(y_1)-h_0(y_1)\right] & \dots & y_n^{i-1}\left[f(y_n)-h_0(y_n)\right] & -x_1^{i-1}h_0(x_1) & \dots & -x_{k-i}^{i-1}h_0(x_{k-i})\\
y_1^{i-2}\left[f(y_1)-h_1(y_1)\right] & \dots & y_n^{i-2}\left[f(y_n)-h_1(y_n)\right] & -x_1^{i-2}h_1(x_1) & \dots & -x_{k-i}^{i-2}h_1(x_{k-i})\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
y_1\left[f(y_1)-h_{i-2}(y_1)\right] & \dots & y_n\left[f(y_n)-h_{i-2}(y_n)\right] & -x_1h_{i-2}(x_1) & \dots & -x_{k-i}h_{i-2}(x_{k-i})\\
\left[f(y_1)-h_{i-1}(y_1)\right] & \dots & \left[f(y_n)-h_{i-1}(y_n)\right] & -h_{i-1}(x_1) & \dots & -h_{i-1}(x_{k-1})\\
0 & \dots & 0 & x_1^{k-1}g(x_1) & \dots & x_{k-i}^{k-1}g(x_{k-i})\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & x_1^{i}g(x_1) & \dots & x_{k-i}^{i}g(x_{k-i})
\end{vmatrix},$$

hol

$$h_\lambda(x)=a_k+a_{k-1}x+\cdots+a_{k-\lambda}x^\lambda$$

Azonban $y_1, y_2, \ldots, y_i$ feltétel szerint közös gyöke az $f(x)=0$ és $g(x)=0$ egyenleteknek, tehát $f(y_1)=f(y_2)=\cdots=f(y_i)=0$ és így LAPLACE tétele alapján:

$$D \,.\, R^{(i)} = (-1)^{\alpha} D_1 \Delta(y_{i+1}, \ldots, y_n) \,.\, (y_{i+1} y_{i+2} \ldots y_n)^i f(y_{i+1}) \ldots$$
$$f(y_n) \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_{k-i})(x_1 \ldots x_{k-i})^i g(x_1) \ldots g(x_{k-i}),$$

hol α egy egész számot jelent, (melynek értéke közelebbről nem érdekel bennünket), s a hol $\Delta(y_{i+1}, \ldots, y_n)$ és $\Delta(x_1, \ldots, x_{k-i})$ argumentumainak VANDERMONDE-féle determinánsát, D_1 pedig a következő determinánst jelenti:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_k y_1^{i-1} & \ldots & a_k y_i^{i-1} \\ a_{k-1} y_1^{i-1} + a_k y_1^{i-2} & \ldots & a_{k-1} y_i^{i-1} + a_k\, y_i^{i-2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-i+2} y_1^{i-1} + \cdots + a_k y_1 & \ldots & a_{k-i+2} y_i^{i-1} + \cdots + a_k y_i \\ a_{k-i+1} y_1^{i-1} + \cdots + a_k & \ldots & a_{k-i+1} y_i^{i-1} + \cdots + a_k \end{vmatrix}$$

Egyszerű determináns átalakítások[1] mutatják, hogy:

$$D_1 = (-1)^{\beta} a_k^i \Delta(y_1, y_2, \ldots, y_i).$$

Másrészt

$$D = (-1)^{\gamma} (y_1 y_2 \ldots y_n)^i (x_1 x_2 \ldots x_{k-i})^i \Delta(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_{k-i})$$
$$D = (-1)^{\varepsilon} b_n^i (x_1 x_2 \ldots x_{k-i})^i \Delta(y_1, \ldots, y_n) \Delta(x_1, \ldots, x_{k-i}) \,.$$
$$\,.\, g(x_1) \ldots g(x_{k-i}),$$

tehát

$$(-1)^{\varepsilon} b_n^i (x_1 x_2 \ldots x_{k-i})^i \Delta(y_1, \ldots, y_n) \Delta(x_1, \ldots, x_{k-i}) g(x_1) \ldots$$
$$g(x_{k-i}) R^{(i)} = (-1)^{\eta} a_k^i \Delta(y_1, y_2, \ldots, y_i) \Delta(y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_n)$$
$$\Delta(x_1, \ldots, x_{k-i}) g(x_1) \ldots g(x_{k-i})(x_1 \ldots x_{k-i})^i \,.$$
$$\,.\, f(y_{i+1}) \ldots f(y_n)(y_{i+1} \ldots y_n)^i.$$

Ezen egyenlőség $x_1, x_2, \ldots, x_k$ és $y_1, y_2, \ldots, y_n$-ben azonos egyenlőség, mely e változók minden értékrendszere mellett fennáll, feltéve, hogy még a

$$f(y_1) = \cdots = f(y_i) = g(x_k) = \cdots = g(x_{k-i+1}) = 0$$

[1] Ezen átalakítások elvégezhetése az $a_k \neq 0$ feltételhez van kötve.

relácziók is ki vannak elégítve. Szabad tehát az egyenlőség mindkét oldalát $R^{(i)}$ együtthatójával osztani, miből következik, hogy:

$$R^{(i)} = (-1)^{\vartheta} \frac{a_k^i \Delta(y_1, \ldots, y_i)\Delta(y_{i+1}, \ldots, y_n)}{b_n^i \Delta(y_1, \ldots, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)} (y_{i+1}y_{i+2} \ldots y_n)^i \cdot$$
$$\cdot f(y_{i+1}) f(y_{i+2}) \ldots f(y_n). \tag{4}$$

Abban az esetben, mikor a $g(x)=0$ egyenletnek csakis egyszerű gyökei vannak,

$$\Delta(y_1, \ldots, y_i), \quad \Delta(y_{i+1}, \ldots, y_n), \quad \Delta(y_1, \ldots, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$$

zérustól különböző véges mennyiségek, tehát erre az esetre vonatkozólag már $R^{(i)}$ most felírt alakjából is következtethetjük, hogy $R^{(i)}$ zérus volta egy $(i+1)$-ik közös gyök létezésének szükséges és elegendő feltétele. Hogy azonban ugyane konkluzióra juthassunk akkor is, ha a $g(x)=0$ egyenlet gyökeire vonatkozólag csakis azzal a megszorító feltevéssel élünk, hogy azok a zérustól különböznek: a (4) alatti egyenlőség jobboldalát át fogjuk alakítani.

Figyelembe veszszük, hogy egyrészt:

$$\Delta(y_1, \ldots, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) =$$
$$= \Delta(y_1, \ldots, y_i)\Delta(y_{i+1}, \ldots, y_n) \prod_{j=i+1}^{n} (y_j - y_1) \ldots (y_j - y_i),$$

másrészt:

$$f(y_{i+1}) \ldots f(y_n) = \prod_{j=i+1}^{n} (y_j - x_1) \ldots (y_j - x_{k-i})(y_j - x_{k-i+1}) \ldots (y_j - x_k)$$
$$= \prod_{l=1}^{k-i} \prod_{j=i+1}^{n} (y_j - x_l) \cdot \prod_{j=i+1}^{n} (y_j - y_1) \ldots (y_j - y_i),$$

a miből következik, hogy:

$$R^{(i)} = (-1)^{\vartheta} \frac{a_k^i}{b_n^i} (y_{i+1}y_{i+2} \ldots y_n)^i \prod_{l=1}^{k-i} \prod_{j=i+1}^{n} (y_j - x_l). \tag{5}$$

Feltevésünk szerint a_k és b_n a zérustól különbözvén, az (5) alatti relációból leolvashatjuk a verifikálandó kritérium igazságát, t. i. azt, hogy $R^{(i)}$ eltünése egy $(i+1)$-ik közös gyök létezésének szükséges és elegendő feltétele; de, mint már mondottuk, a $\delta = i$ esetre érvényesnek feltételezett I^+ tételt a $\delta = i+1$ esetre is igazolandó, csakis a most verifikált kritérium bebizonyítására kellett szorítkoznunk. Kimondhatjuk tehát, hogy a $\delta = 1$ esetben igaz I^+ tétel a $\delta = 2, 3, 4, \ldots$ esetben is igaz, azaz általános érvényű.

A I^+ tételt az

$$x^k - 1 = 0 \quad \text{és} \quad x^n - 1 = 0$$

binom egyenletek esetére külön formulázva az I. lemma mondja ki.

Mielőtt a II. lemma bizonyításába belefognánk, meg akarjuk jegyezni, hogy az

$$x^k - 1 \quad \text{és} \quad x^n - 1$$

binomok legnagyobb közös osztója mindig az

$$x^\delta - 1$$

alakkal bir, hol δ a k és n számok legnagyobb közös osztóját jelenti. E megjegyzés szerint az az állítás, miszerint az $x^k - 1 = 0$ és $x^n - 1 = 0$ egyenletek közös gyökeinek száma $= \delta$, æquivalens az

$$(x^k - 1, x^n - 1)^1 = x^\delta - 1$$

szimbolikus egyenlőséggel mindig szimultán fennálló

$$(k, n) = \delta$$

reláczió tartalmával.

Ezek alapján a II. lemma így is formulázható:

Ha $(n, k) = \delta$, akkor

$$|R_{k,n}^{(\delta)}| = |R_{k,n}^{(\delta+1)}| = \cdots = |R_{k,n}^{(k+n-1)}| = 1.$$

E tétel bizonyítása két lépésben fog történni: először azt mutatjuk ki, hogy, ha $(n, k) = \delta$, akkor $|R_{k,n}^{(\delta)}| = 1$, azután a teljes inductio módszerével általánosítani fogjuk ezt az ered-

---

1 Az $(\alpha(x), \beta(x)) = \gamma(x)$ szimbolikus egyenlőség azt jelenti, hogy az $\alpha(x)$ és $\beta(x)$ raczionális egész függvények legnagyobb közös osztója: $\gamma(x)$.

ményt, bebizonyítván, hogy ha $|R_{k,n}^{(i)}| = 1$, akkor $|R_{k,n}^{(i+1)}|$ is 1-gyel egyenlő $(i \geqq \delta)$.

A (4) alatti formulát az $f(x) \equiv x^k - 1$, $g(x) \equiv x^n - 1$, $i = \delta$ esetre írván fel, kapjuk, hogy:

$$R_{k,n}^{(\delta)} = (-1)^{\vartheta} \frac{\Delta(y_1, \ldots, y_\delta)\, \Delta(y_{\delta+1}, \ldots, y_n)}{\Delta(y_1, \ldots, y_\delta, y_{\delta+1}, \ldots, y_n)} \cdot$$
$$\cdot f(y_{\delta+1}) \ldots f(y_n)\, (y_{\delta+1} \ldots y_n)^\delta.$$

Ámde

$$(y_{\delta+1}\, y_{\delta+2} \ldots y_n)^\delta = \frac{(-1)^{\delta n}}{y_1^\delta\, y_2^\delta \ldots y_\delta^\delta} = (-1)^{\delta n},$$

mert $y_1, y_2, \ldots, y_\delta$ — egyenleteink közös gyökei — az

$$x^\delta - 1 = 0$$

egyenletnek tesznek eleget, tehát

$$R_{k,n}^{(\delta)} = (-1)^\lambda \frac{\Delta(y_1, \ldots, y_\delta)\, \Delta(y_{\delta+1}, \ldots, y_n)}{\Delta(y_1, \ldots, y_\delta, y_{\delta+1}, \ldots, y_n)} f(y_{\delta+1}) \ldots f(y_n).$$

Vegyük most tekintetbe, hogy:

$$\Delta(y_1, \ldots, y_\delta, y_{\delta+1}, \ldots, y_n) =$$
$$= \Delta(y_1, \ldots, y_\delta)\, \Delta(y_{\delta+1}, \ldots, y_n) \prod_{j=\delta+1}^{n} (y_j - y_1) \ldots (y_j - y_\delta)$$

és hogy

$$\prod_{r=1}^{\delta} (x - y_r) = x^\delta - 1.$$

Ezek alapján:

$$R_{k,n}^{(\delta)} = (-1)^\lambda \frac{(y_{\delta+1}^k - 1) \ldots (y_n^k - 1)}{(y_{\delta+1}^\delta - 1) \ldots (y_n^\delta - 1)}.$$

Hogy az $|R_{k,n}^{(\delta)}| = 1$ relácziót igazolhassuk, azt fogjuk még bebizonyítani, hogy az

$$y_{\delta+1}^\delta, y_{\delta+2}^\delta, \ldots, y_n^\delta \tag{α}$$

$$y_{\delta+1}^k, y_{\delta+2}^k, \ldots, y_n^k \tag{β}$$

sorozatok egymással azonosak, tagjaik sorrendjétől eltekintve.

Legyen $n = n'\delta$, $k = k'\delta$. Mindenekelőtt evidens, hogy az (α) és (β) sorozatok tagjai n'-ik egységgyökök.

Az (α) alatti sorozat általános tagja:

$$\cos\frac{2\pi(qn'+r)}{n'}+i\sin\frac{2\pi(qn'+r)}{n'}\cdot$$

A (β) alatti sorozat általános tagja:

$$\cos\frac{2\pi(qk'n'+rk')}{n'}+i\sin\frac{2\pi(qk'n'+rk')}{n'}\cdot$$

A q, illetve r összes, itt számbajövő értékei a következők:

$$q=0,1,2,\ldots,\delta-1;\quad r=1,2,\ldots,n'-1.$$

Az (α) alatti sorozatban tehát — az egység kivételével — minden n'-ik egységgyök előfordul, még pedig mindegyik δ-szor ismétlődve. Könnyű belátni, hogy a (β) alatti sorozatra is ugyanez a megjegyzés áll; e végből csak azt kell számításba vennünk, hogy

$$(k',n')=1$$

lévén, az alatt, míg r mod. n' befutja a teljes maradékrendszert, $k'r$ is befutja e teljes maradékrendszert.

Az (α) és (β) sorozatok, tagjaik sorrendjétől eltekintve, azonosak, tehát

$$R_{k,n}^{(\delta)}=(-1)^{\lambda}$$

és így

$$|R_{k,n}^{(\delta)}|=1,$$

a mi bizonyítandó volt.

Ezek után annak a bebizonyitására térünk át, hogy ha $(n,k)=\delta$, akkor $R_{k,n}$-nek nemcsak a δ-ik, hanem a $(\delta+1)$, $(\delta+2),\ldots,(n+k-1)$.-ik főminora is egygyel egyenlő abszolut értékben.

Hogy a k.-ik, $(k+1)$.-ik, ..., $(n+k-1)$.-ik főminornak meg van ez a tulajdonsága, az már az $R_{k,n}$ determináns *alakjából* közvetlenül leolvasható; az $|R_{k,n}^{(i)}|=1$ egyenlőség igazságát tehát tulajdonképen csak a $\delta<k$ esetre és i-nek oly értékeire kell bebizonyitanunk, melyek a

$$\delta\leqq i\leqq k-1$$

feltételnek tesznek eleget. A bizonyítás úgy történik, hogy kimutatjuk: az

$$|R_{k,n}^{(i)}| = 1$$

egyenlőség mindenkor maga után vonja az

$$|R_{k,n}^{(i+1)}| = 1$$

relácózió teljesülését.

Ez állítás igazsága evidencziába lép, ha hivatkozunk arra, hogy az $R_{k,n}$ determináns, értékének megváltoztatása nélkül — az által, hogy egyes soraihoz a megelőző sorok kellően megválasztott linearis következményeit adjuk hozzá — oly $\overline{R}_{k,n}$ determinánssá alakítható át, melynek minden főminora megegyezik számértékre az $R_{k,n}$ megfelelő (a szóban forgóval egyenlő) fokú főminorával és mely azzal a tulajdonsággal bir (az említetten kívül), hogy a fődiagonalisában szereplő elemek mind egész számok, míg a fődiagonalis baloldalán álló elemek mind zérussal egyenlők.

Világos ugyanis, hogy $\overline{R}_{k,n}$-hez hasonlóan ennek i.-ik főminora: $\overline{R}_{k,n}^{(i)}$ is azzal a tulajdonsággal bir, hogy főátlós elemei egész számok, a főátló baloldalán álló elemei pedig mind zérussal egyenlők; ha tehát

$$|R_{k,n}^{(i)}| = 1,$$

akkor a vele egyenlő számértékű $\overline{R}_{k,n}^{(i)}$ fődiagonalisában csakis oly elemek lehetnek, melyek abszolut értékben egygyel egyenlők, míg a fődiagonális baloldalán csupa 0 elem áll; de ekkor $\overline{R}_{k,n}^{(i)}$ első főminora: $\overline{R}_{k,n}^{(i+1)}$ is ily alakkal bir, a miből következik, hogy

$$|\overline{R}_{k,n}^{(i+1)}| = 1;$$

de feltevésünk szerint

$$R_{k,n}^{(i+1)} = \overline{R}_{k,n}^{(i+1)},$$

tehát

$$|R_{k,n}^{(i+1)}| = 1.$$

Azon feltevés elfogadásával, hogy $R_{k,n}$ a fentebb jelzett módon átalakítható, ki tudtuk mutatni, hogy, ha $|R_{k,n}^{(i)}| = 1,$

akkor egyszersmind $|R_{k,n}^{(i+1)}| = 1$. De azt már bebizonyítottuk, hogy ha $(n, k) = \delta$, akkor $|R_{k,n}^{(\delta)}| = 1$, tehát ekkor

$$R_{k,n}^{(\delta+1)},\ R_{k,n}^{(\delta+2)}, \ldots,\ R_{k,n}^{(k+n-1)}$$

is egygyel egyenlő abszolut értékben. Qu. e. d.

Hátra van még annak bebizonyítása, hogy $R_{k,n}$, az által, hogy egyes soraihoz a megelőzők lineáris következményeit adjuk hozzá, tényleg átalakítható oly $\overline{R}_{k,n}$ determinánssá, mely a következő három tulajdonsággal bir:

1) $\overline{R}_{k,n} = R_{k,n}$, $\overline{R}_{k,n}^{(i)} = R_{n,k}^{(i)}$; $(i=1, 2, \ldots, n+k-1)$

2) az $\overline{R}_{k,n}$ fődiagonalisába tartozó elemek egész számok;

3) az $\overline{R}_{k,n}$ fődiagonalisának baloldalán csakis zérus elemek állanak.

Meg akarjuk e helyen jegyezni: abból, hogy $R_{k,n}$ a 2) és 3) tulajdonságokkal biró $\overline{R}_{k,n}$ determinánssá *azáltal* alakítható át, hogy egyes soraihoz az előző sorok linearis következményeit adjuk hozzá, már következik $\overline{R}_{k,n}$ 1) tulajdonsága is; könnyen bebizonyitható ugyanis, hogy az

$$|a_{hj}| \quad (h, j=1, 2, \ldots, r)$$

és

$$|a_{hj}+\lambda_{1h}a_{1j}+\lambda_{2h}a_{2j}+\cdots+\lambda_{h-1,h}a_{h-1,j}| \quad (h, j=1, 2, \ldots, r)$$

determinánsok, valamint egyenlő fokú főminoraik mindig egyenlő számértékűek.

A mi már most annak tényleges bebizonyítását illeti, hogy $R_{k,n}$ a már több ízben jellemzett eljárással valóban átalakítható oly $\overline{R}_{k,n}$ determinánssá, mely az 1)—3) tulajdonságokkal bir, ez a nagyobb áttekinthetőség kedveért közvetett úton fog megtörténni: az $R_{k,n}$ $n+k$-ad fokú determinánshoz oly $n+k$ számú, $n+k$ főegységgel alkotott A_h hyperkomplex számot rendelünk, melyeknek együttható rendszere az $R_{k,n}$ determináns és kimutatjuk, hogy e hyperkomplex számokra nézve megoldható a következő, az $R_{k,n}$ kívánt módon való átalakításának problemájával evidenter teljesen æquivalens probléma:

Az A_h $(h = 1, 2, \ldots, n+k)$ hyperkomplex számok rendszere oly $\bar{A}_h$ hyperkomplex számok rendszerével helyettesítendő, mely számok az adottakkal

$$\bar{A}_h = A_h + \lambda_{1h} A_1 + \lambda_{2h} A_2 + \cdots + \lambda_{h-1,\,h} A_{h-1} \qquad \text{(I)}$$
$$(h=1, 2, \ldots, n+k)$$

alakú relácziókban állanak (a λ-k valós számok) és a melyek az $e_1, e_2, \ldots, e_{n+k}$ főegységekkel linearisan

$$\bar{A}_h = a_h^{(h)} e_h + a_{h+1}^{(h)} e_{h+1} + \cdots + a_{n+k}^{(h)} e_{n+k} \qquad \text{(II)}$$
$$(h=1, 2, \ldots, n+k)$$

alakban fejeződnek ki, hol $a_h^{(h)}$ közönséges egész számot jelent.

E probléma megoldhatóságának bebizonyitásánál a teljes inductio bizonyitó erejét fogjuk felhasználni: ki fogjuk mutatni, hogy a probléma megoldható az $R_{k,n}$ determinánshoz hozzárendelhető A_h $(h = 1, 2, \ldots, n+k)$ hyperkomplex számok rendszerének esetére, ha megoldható oly $A_{h'}$ $(h' = 1, 2, \ldots, n'+k')$ hyperkomplex számok rendszerére, melyeknek együtthatórendszere az $R_{k',n'}$ determinans, hol

$$k' \leqq k-1, \quad n' \leqq n-1.$$

Mielőtt a most mondottak igazolására rátérnénk, irjuk le egyszer az $R_{k,n}$ resultánshoz tartozó A_h hyperkomplex számok rendszerét a főegységekkel expliczit módon kifejezett alakjában:

$$\left.\begin{aligned} A_\alpha &= e_\alpha - e_{\alpha+k}, & (\alpha=1, 2, \ldots, n) \\ A_{n+\beta} &= e_\beta - e_{\beta+n}. & (\beta=1, 2, \ldots, k) \end{aligned}\right\} \quad (H)$$

E hyperkomplex számrendszernek a fentebb előirt módon és eredménynyel való transzformálhatóságát bizonyitván, fel fogjuk tenni, hogy $k \leqq n$.[1]

---

[1] A $k>n$ eset tárgyalása az általunk tárgyalt $k \leqq n$ esetre vezethető vissza. Ha ugyanis $k > n$, található oly i pozitiv egész szám, hogy $0 < k - in \leqq n < k - (i-1)n$. Az A_h $(h = 1, 2, \ldots, n+k)$ számok rendszerére alkalmazván az

$$\begin{aligned} A'_\alpha &= A_\alpha & (\alpha=1, 2, \ldots, n) \\ A'_{jn+\beta} &= A_{jn+\beta} + A_{(j-1)n+\beta} + \cdots + A_{(j-(j-1))n+\beta} - A_\beta & \text{(III}^+\text{)} \\ & (\beta=1, 2, \ldots, n) \quad (j=1, 2, \ldots, i) \\ A'_{(i+1)n+\gamma} &= A_{(i+1)n+\gamma} & (\gamma=1, 2, \ldots, k-in) \end{aligned}$$

E feltevés mellett n mindig az

$$n = kq + r$$

alakban állítható elő, hol q pozitiv egész szám, r pedig a $0 \leq r \leq k-1$ feltételnek tesz eleget.

Ha $r > 0$,[1] alkalmazzuk a (H) rendszerre a következő transzformácziót:

$$\begin{aligned}
&A'_\alpha = A_\alpha \quad {\scriptstyle(\alpha=1,2,\ldots,n)} \\
&A'_{n+\beta} = A_{n+\beta} - (A_\beta + A_{\beta+k} + A_{\beta+2k} + \cdots + A_{\beta+qk}) \quad {\scriptstyle(\beta=1,2,\ldots,r)} \\
&A'_{n+r+\gamma} = A_{n+r+\gamma} - (A_{r+\gamma} + A_{r+\gamma+k} + \cdots + A_{r+\gamma+(q-1)k}). \quad {\scriptstyle(\gamma=1,2,\ldots,k-r)}
\end{aligned} \tag{III}$$

Világos, hogy e transzformácziónál az (I.) tipusú transzformáczió lépéseit alkalmaztuk; vizsgáljuk meg, az A' hyperkomplex számok hogyan fejeződnek ki a főegységekkel:

$$A'_\alpha = e_\alpha - e_{\alpha+k} \quad {\scriptstyle(\alpha=1,2,\ldots,n)}$$

$$A'_{n+\beta} = (e_\beta - e_{n+\beta}) -$$

$$- \left\{(e_\beta - e_{\beta+k}) + (e_{\beta+k} - e_{\beta+2k}) + \cdots + (e_{\beta+qk}) - e_{\beta+qk+k})\right\},$$

tehát

$$A'_{n+\beta} = - e_{n+\beta} + e_{n+\beta+k-r} \quad {\scriptstyle(\beta=1,2,\ldots,r)}$$

$$A'_{n+r+\gamma} = (e_{r+\gamma} - e_{r+\gamma+n}) -$$

$$- \left\{(e_{r+\gamma} - e_{r+\gamma+k}) + (e_{r+\gamma+k} - e_{r+\gamma+2k}) + \cdots + (e_{r+\gamma+(q-1)k} - e_{r+\gamma+qk})\right\},$$

tehát:

$$A'_{n+r+\gamma} = e_{n+\gamma} - e_{n+\gamma+r} \quad {\scriptstyle(\gamma=1,2,\ldots,k-r)}$$

A (III.) transzformáczió tehát a (H) hyperkomplex számrendszert oly A'_h $(h = 1, 2, \ldots, n+k)$ rendszerbe viszi át, melynek

---

transzformácziót, oly hyperkomplex számrendszert nyerünk, melynek első in tagja a (II.) kifejezte törvényszerűségnek hódol, míg e rendszer többi: $k-in+n$ számú tagja oly hyperkomplex számrendszernek tekinthető, mely az $R_{k-in,n}$ resultánshoz tartozik. De $k-in$ már megfelel a $k-in \leq n$ feltételnek.

[1] Ha $r=0$, az $A'_\alpha = A_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$,

$$A'_{n+\gamma} = A_{n+\gamma} - (A_\gamma + A_{\gamma+k} + \cdots + A_{\gamma+(q-1)k}) \quad (\gamma = 1, 2, \ldots, k)$$

transzformációval az $A'_\alpha = e_\alpha - e_{\alpha+k}$, $A'_{n+\gamma} = 0$ rendszerre jutunk, mely a II.) tulajdonságot már mutatja.

első n tagja: A'_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$ a (II.) relázióban kifejezésre jutó tulajdonságot mutatja;

$$-A'_{n+1}, -A'_{n+2}, \ldots, -A'_{n+r}, A'_{n+r+1}, \ldots, A'_{n+k}$$

viszont, (hol $r \neq 0$), olyan k főegységgel alkotott hyperkomplex számok rendszere, mely az $R_{k-r,r}$ determinánshoz tartozónak tekinthető, a mely tehát, $k-r \leqq k-1$ és $r \leqq n-1$ lévén, feltevésünk szerint (I.) tipusú transzformáczióval (II.) tulajdonságú hyperkomplex számok rendszerébe vihető át; de ekkor az

$$A'_{n+1}, \ldots, A'_{n+r}, A'_{n+r+1}, \ldots, A'_{n+k}$$

rendszerre ugyanez a megjegyzés érvényes.

Az eme számok átalakítására szolgáló és a (III.) alatti transzformácziók együttes alkalmazásával tehát a (H) rendszer oly $\bar{A}_h$ $(h = 1, 2, \ldots, n+k)$ rendszerbe vihető át, melynek meg van a (II.) tulajdonsága. De e transzformácziók egyesítése megint (I.) tipusú transzformáczió, kimondhatjuk tehát azt a tételt, hogy az A_h $(h = 1, 2, \ldots, n+k)$ rendszer a kívánt módon (II.) tulajdonságú $\bar{A}_h$ rendszerré transzformálható, ha ez a transzformabilitás lehetséges oly $A_{h'}$ számok esetében, hol

$$h' = 1, 2, \ldots, n'+k' \quad \text{és} \quad k' \leqq k-1, \; n' \leqq n-1.$$

De a $k'=1$, $n'=1$ esetben ez a transzformálhatóság nyilvánvaló, tehát a mondottak értelmében k és n tetszésszerinti értékei mellett is lehetséges a transzformálás az előírt módon és a kívánt eredménynyel. Ebből következik az, amit tulajdonképen bizonyítani akartunk: az $R_{k,n}$ determináns k és n tetszésszerinti értékei mellett is oly $\bar{R}_{k,n}$ determinánssá alakítható át, melynek meg van az 1)—3) tulajdonsága. Ezzel a II. lemma bizonyításának e fontos segédfeltevése igazolást nyert.

III. $\varphi(n)$, $S(n)$, $\rho(n)$ és társfüggvényeik additiv előállítása. Alkalmazások.

A megelőző fejezetben egész részletességgel bebizonyítottuk, hogy, ha

$$(n, k) = \delta,$$

akkor

$$R_{k,n} = R^{(1)}_{k,n} = \cdots = R^{(\delta-1)}_{k,n} = 0,$$

$$|R^{(\delta)}_{k,n}| = |R^{(\delta+1)}_{k,n}| = \cdots = |R^{(n+k-1)}_{k,n}| = 1;$$

megmutattuk azt is, hogy ha viszont az (x^k-1) és (x^n-1) binomok resultánsa és ennek főminorai a most felírt relácziókat kielégítik, akkor $(n, k) = \delta$.

Ezekben foglalható össze a tárgyalt két lemma tartalma, a minek ismeretével könnyű szerrel igazolhatjuk ama formulákat, melyekben a $\varphi(n)$, $S(n)$, $\rho(n)$ és társfüggvényeik additiv előállításának alapjául szolgáló $a_n(k)$, $b_n(k)$ és $c_n(i, k)$ adjungált függvényeket a fentebbi resultáns-főminorok függvényeiképp adtuk meg.

$a_n(k)$ értelmezése úgy szólott, hogy értéke zérus vagy 1, a szerint, a mint $(k, n) > 1$, vagy $(k, n) = 1$. A fentiekből világos, hogy $|R^{(1)}_{k,n}|$ ugyanezzel a tulajdonsággal bir, tehát

$$a_n(k) = |R^{(1)}_{k,n}|. \tag{α}$$

$b_n(k)$ a következő két tulajdonsága által volt megadva:

$$b_n(k) = 1, \quad \text{ha} \quad (k, n) = k,$$

míg

$$b_n(k) = 0, \quad \text{ha} \quad (k, n) < k.$$

Lemmáink szerint — n és k legnagyobb közös osztója δ-val jelöltetvén —

$$|R^{(k-1)}_{k,n}| = 0, \quad \text{ha} \quad \delta = k,$$

míg

$$|R^{(k-1)}_{k,n}| = 1, \quad \text{ha} \quad \delta < k,$$

a miből következik, hogy

$$b_n(k) = 1 - |R^{(k-1)}_{k,n}|. \tag{β}$$

A $c_n(i, k)$ adjungált függvényt úgy értelmeztük, hogy értéke 1 vagy 0, a szerint, a mint az

$$(i, k) = 1, \quad ik = n$$

relácziók szimultán teljesülnek vagy közülük egy is nem teljesül. Könnyű belátni, hogy az $(i, k) = 1$, $ik = n$ egyidejűleg fennálló feltételek az

$$(i, k) = 1, \quad (i, n) = i, \quad (k, n) = k, \quad (ik, n) = n$$

hasonlóképen egyidejűleg fennálló feltételekkel teljesen æquivalensek, tehát $c_n(i, k)$ definiczióját úgy is formulázhatjuk, hogy az oly függvénye i és k-nak, melynek értéke 1, ha az i és k argumentumok a most felírt négy feltételi relácziót egyidejűleg kielégítik, míg 0 az értéke, ha e relácziók közül csak egy is nem teljesül. Az új definiczió alapján:

$$c_n(i, k) = a_i(k)\, b_n(i)\, b_n(k)\, b_n(ik)$$

és így (α) és (β) figyelembe vételével:

$$c_n(i, k) = |R_{i,k}^{(1)}|\left(1 - |R_{i,n}^{(i-1)}|\right)\left(1 - |R_{k,n}^{(k-1)}|\right)\left(1 - |R_{ik,n}^{(ik-1)}|\right). \qquad (\gamma)$$

Az (α), (β) és (γ) alatti formulák alapján $\varphi(n)$, $S(n)$ és $\rho(n)$ és társfüggvényeik additiv előállítása a következő:

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} |R_{k,n}^{(1)}|, \qquad (1)$$

$$\psi(n) = \sum_{k=1}^{n} k\, |R_{k,n}^{(1)}|, \qquad (2)$$

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - |R_{k,n}^{(k-1)}|\right), \qquad (3)$$

$$\Sigma(n) = \sum_{k=1}^{n} k\left(1 - |R_{k,n}^{(k-1)}|\right), \qquad (4)$$

$$\rho(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |R_{i,k}^{(1)}| \left(1 - |R_{i,n}^{(i-1)}|\right)\left(1 - |R_{k,n}^{(k-1)}|\right)\left(1 - |R_{ik,n}^{(ik-1)}|\right), \qquad (5)$$

$$\sigma(n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |R_{i,k}^{(1)}| \left(1 - |R_{i,n}^{(i-1)}|\right)\left(1 - |R_{k,n}^{(k-1)}|\right) \cdot \left(1 - |R_{ik,n}^{(ik-1)}|\right)(i+k). \qquad (6)$$

E formulákban függvényeink kitűzött czélunknak megfelelően oly analytikai kifejezésekkel vannak megadva, melyek expliczit módon az n függvényargumentumnak csakis számértékétől és nem törzsszám-szerkezetétől függnek. Az előállításnak ez a módja tehát nem kívánja meg az előállitott függvény argumentuma törzstényezős felbontásának ismeretét és így *eliminálja azokat a kisérleti lépéseket, melyekkel az argumentum primfaktoros előállítása jár.*

Fel lehetne vetni azt kérdést, vajjon függvényeink bemutatott additiv előállításában *egyáltalában belép-e valahol a kisérleti elem?* Könnyű belátni, hogy e kérdéstétel æquivalens a következővel: *igényel-e kisérleti lépéseket az olyan determinánsok kiszámítása, melyeknek minden eleme egész szám?*

Mi nem kívánunk e kérdéstétel eldöntésével foglalkozni; fejtegetéseink befejezéseképen csak egy alkalmazását akarjuk még bemutatni a tárgyalt függvényelőállításnak: oly alkalmazását, mely ezen additiv előállításnak az argumentum törzstényezős felbontásától való függetlenségén alapszik.

Ismeretes, hogy az n egész szám törzsszám voltára szükséges és elegendő a

$$\varphi(n) = n-1,$$

$$\psi(n) = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$S(n) = 2,$$

$$\Sigma(n) = n+1$$

relácziók egyikének fennállása.

A multiplikativ — n törzstényezős felbontásának ismeretéhez kötött — előállításmód mellett e kritériumok semminemű gyakorlati jelentőséggel sem birtak. A bemutatott additiv előállításmód ismeretével azonban képesek vagyunk a fentebbi feltételi relácziókban szereplő elemi számelméleti függvényeket argumentumuk primfaktoros felbontásának ismerete nélkül előállitani, a mi a szóban forgó törzsszámkritériumoknak theoretiko-praktikus jelentőséget kölcsönöz.

$\varphi(n)$, $\psi(n)$, $S(n)$ és $\Sigma(n)$ (1)—(4) alatt felirt előállításait véve alapul, kimondhatjuk, hogy:

valamely n egész szám akkor és csakis akkor törzsszám, ha a

$$\sum_{k=1}^{n} |R_{k,n}^{(1)}| = n-1,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\,|R_{k,n}^{(1)}| = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} |R_{k,n}^{(k-1)}| = n-2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\,|R_{k,n}^{(k-1)}| = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

(egymást involváló) *relácziók egyike teljesítve van.*

Fekete Mihály.

A HOLD MOZGÁSÁNAK ELMÉLETE, TÖRTÉNETE ÉS JELENLEGI ÁLLAPOTA.

Az égi mechanika problémái között előkelő hely jut a Hold mozgására vonatkozónak egyrészt nehézsége miatt, másrészt azoknak az érdekes kérdéseknek nagy száma folytán, a melyek a nyomán keletkeztek. Jó példát ad ez a természettudománynak azokra az általános módszereire, a melyekkel a természet jelenségeit előre megjövendöljük. E czélból mindenekelőtt megfigyelés útján fel kell fedeznünk a természet törvényeit, azután meg kell tudnunk, hogy ezek a törvények milyen különleges feltételek mellett érvényesek és végül meggondolások alkalmazásával le kell vezetnünk hatásuk eredményeit. De a vizsgálatok folytatásában sohasem szünetelünk. Miután jövendöléseinket kimondottuk, új megfigyelések alapján meg kell állapítanunk, hogy ezek a jövendölések pontosak-e. Ha eltérés mutatkozik a megfigyelt eredmények és azok között. a melyeket az elmélet alapján megjövendöltünk, ki kell igazítanunk, vagy a törvények alakját, vagy azokat az adatokat, a melyeket a jövendölés alapjául fogadtunk el.

Ezek a kutatási módszerek ép az égi mechanikában érvényesülnek a legtökéletesebb mértékben. Az alapvető törvény az általános gravitatio, Newton-féle alakjában; a tények — ebben az esetben mondhatjuk, hogy az adatok — a bolygók pálya-elemei, tömegük és minden körülmény, a mely mozgásukat módosíthatja. Newton törvényének kimondása óta, a nagy mathematikusok hosszú sora, mint d'Alembert, Clairaut, Laplace, Lagrange, Euler, Plana, Damoiseau, Hansen — nem is említve az élőket — kifejlesztette és tökéletesítette a deductio módszereit, míg a tiszta astronomia nagy mesterei szakadatlanul javították megfigyelések alapján a csillagászati elemeket. Mindeme munkálatok általános eredményeként kimondhatjuk, hogy két kivételtől eltekintve, ma már tökéletes a megegyezés a megfigyelés és az elmélet eredményei között. A megfigyelések és az elmélet következtetései között még fennálló kis különbségeket kélségtelenül el fogja tüntetni az elemek csekély javítása.

A szóban forgó kivételek a Merkur bolygó és a Hold mozgása. A Merkur esetében a különbség megmagyarázására csak azt kell feltennünk, hogy a Merkur és a Nap között még ismeretlen tömegek vannak. Ezen tömegek létezésének kérdése nem tartozik a mi tárgyunkhoz. A Hold esetében valóságos rejtélylyel állunk szemben, oly jelenséggel, a mely látszólag valami ismeretlen ok hatására mutat, a mely ok elég hatalmas ahhoz, hogy megváltoztassa vagy a Hold mozgását, vagy a Földnek tengelye körül való forgását. Hogy valami fogalmat adjunk a kérdés nehézségéről és a Hold elméleti mozgása és megfigyelt mozgása között fennálló eltérésből eredő kérdések fontosságáról, nagyjában vázolnunk kell Holdunk mozgáselméletének általános jellegét és jelenlegi állapotát.

I.

Az égi mozgások minden elméletének czélja azoknak az algebrai képleteknek a megszerkesztése, a melyek valamely test koordinátáit az idő függvényében fejezik ki. Ezeknek a képleteknek a segítségével ezeket a koordinátákat bármely adott pillanatra nézve meg tudjuk határozni. Az általános törvény az általános gravitatió, a mely három differencziálegyenlet alakjában fejeződik ki és ezekben az idő szerepel, mint független változó. A deductió menete ezen egyenletek integrálásában áll, a mely valamely test három koordinátájának az idő és az integrálás folyama közben belépett hat tetszőleges állandó függvényében való kifejezésére vezet. Ez utóbbiak a testtől befutott pálya elemei. Ezek nem *apriori* adott tények; meg kell őket határozni, úgy hogy ezek képviselik a megfigyeléseket.

A teljes integrálás csak abban az esetben lehetséges, ha a testek száma csak kettő, a melyek közül az egyiket a mozgás középpontjának tekintjük, míg a másik az, a melynek a koordinátáit ki akarjuk fejezni. Akkor a megoldás a Kepler-féle törvények szerint ellipsisben való mozgás alakját ölti. A mikor még egy harmadik testet is felveszünk, a fokozatos megközelítések módszerét kell elfogadnunk.

A Hold esetén a főtest, a melyre a mozgást vonatkoztatjuk, a Föld, a melynek a középpontja a koordináták kezdőpontja. Ha nem hatna semmiféle háborgató erő egyenlőtlenül a Holdra és a Földre, a Hold pályája Kepler-féle ellipsis volna. De a Nap háborgató hatása oly nagy és a Hold helyzetére gyakorolt hatása következményeinek meghatározása annyira bonyolult és nehéz feladat, hogy a mult valamennyi nagy mathematikusának zsenialitása nem volt elegendő oly pontos megoldás elérésére, a mely a modern csillagászat igényeit kielégítené. Az eddig meghatározott megoldások értékelése czéljából azt a megjegyzést szokás tenni, hogy két osztályba sorozhatók: az egyik algebrai és általános, a másik számbeli. Az első osztályban a koordináták az elemek explicit függvényeinek alakjában fejeződnek ki, a másikban az elemek számértékeit az integrálás előtt vezetik be.

Algebrai megoldás véges számú tagokkal nincs; de az elemek némelyikének csekélysége folytán ki lehet fejteni olyan megoldást, a mely a Hold esetére alkalmazható és ezen kis elemek hatványai és szorzatai szerint rendezett végtelen soralakját ölti. Ezen elemek gyanánt vehetők:

e, e' a két pálya excentricitása;

$\gamma = \sin \frac{1}{2} J$ (a holdpálya hajlása az ekliptikához);

m, a Hold periodusának viszonya a Földéhez.

E sor együtthatói az idő periodikus függvényei és a problémát megoldottnak tekinthetjük, ha ezeket az együtthatókat elegendő pontossággal kiszámítottuk. A mult azon mathematikusai közül, a kik e problémával foglalkoztak, megemlíthetjük LAPLACEt, EULERt, PLANAt, de PONTÉCOULANTt, LUBBOCKOT, DELAUNAYt. Egyikük sem ért el teljes sikert, mivel alig lehet egy emberélet tartama alatt a sor valamennyi együtthatóját a mai astronomia követelte pontossággal kiszámítani.

E tudósok közül DELAUNAY munkái érdemlik meg különös figyelmünket. Módszere a LAGRANGEtól kigondolt tetszőleges állandó-változtatás módszerének a kiterjesztése. Úgy lehet ezt leírni, mint a mozgás differencziál-egyenleteinek olyan átalakítását, a melyben az első integrálás tetszőleges állandói, vagyis az elliptikus elemek lesznek az új változók. E változóknak az időszerinti első differencziálhányadosai oly tagok végtelen sorában fejthetők ki, a melyek mindegyike ezeknek a változóknak és az időnek a függvénye. A kifejtésnek és a differencziál egyenletek fokozatos megközelítések útján való megoldásának elmélete LANGRANGE ideje óta jól ismeretes. Azonban, jóllehet ez a módszer a bolygók esetében alkalmazható, a Hold esetére való alkalmazása nehézségekbe ütközik, a szükséges megközelítések számánál fogva.

Hogy némi fogalmat adjunk DELAUNAY módszeréről, legyen a a Hold elliptikus mozgásának valamely eleme. A Holdra ható valamilyen háborgató erő ennek az elemnek a következő alakban kifejezhető változását okozza:

$$\frac{da}{dt} = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots \qquad (1)$$

a hol a P tagok az elemeknek és az időnek a függvényei, kivéve a P_0-t, a mely az időt nem tartalmazza explicite. DELAUNAY eszméje abban áll, hogy vesszük először az állandó P_0 tagot és a változó tagok közül valamelyiket, mondjuk P_1-et és teljesen mellőzve a többi tagokat pontosan elvégezzük az integrálást. Ily módon a mi a elemünk hat új tetszőleges állandónak a_1, b_1, c_1, ...-nek és a t időnek a függvényévé lesz:

$$a = f\ (a_1, b_1, c_1, \ldots, t) \qquad (2)$$

Hogy a többi tagot is számba vegyük, DELAUNAY az a_1, b_1, stb. tetszőleges változandókat tekinti új változóknak, a melyeknek az idő szerint vett első differencziálhányadosai (1) alakú függvények lesznek, de a P_1 tag nélkül. Újabb integrálással, a melyben csak a P_0 és P_2 tagokat vesszük tekintetbe, azt érjük el, hogy a_1, b_1, ... t-nek és hat új tetszőleges állandónak a_2, b_2, ... -nek függvényeként fejeződik ki. A továbbiak során ez utóbbiak lesznek a változók és így tovább egészen addig, míg a hátralevő tagok oly kicsinyek, hogy négyzeteiket és szorzataikat el lehet hanyagolni. Akkor már a hátralevő tagokra nézve az integrálást egyszerű quadraturával elvégezhetjük.

Ezen a módon a problémát algebrai műveletek egymásután való elvégzésére vezettük vissza, a mely vég nélkül ismétlődő, de a változók pontos értékét mindinkább megközelítő helyettesítésekben áll.

Csak csodálnunk lehet a lángelmét, a mely LAGRANGE termékeny módszerének ezt a kiterjesztését megteremtette. Alkalmazhatósága nem szorítkozik a Hold elméletére; hanem a mint TISSERAND, HILL és mások megmutatták, felhasználható arra, hogy fontos lépéssel előbbre vigye a bolygók elméletét.

DELAUNAY nagy munkája: *Théorie du mouvement de la Lune,* az algebrai és a numerikus számítás oly csodálatos emléke, hogy rendkívüli dolognak látszik, hogy egyetlen ember fel tudta állítani. Azonban, habár DELAUNAY eredményei pontosságban felülmulják is a Hold elméletének minden más algebrai kifejtését, mégsem elégítik ki a modern astronomia szükségleteit. A megoldásban minden tag együtthatója maga is olyan végtelen sor, a melynek a tagjai a már értelmezett e, e', γ és m kis számok hatványai és szorzatai szerint vannak rendezve. Ez a sor e, e' és γ-ra nézve eléggé összetartó. De az m-et tartalmazó tagok összetartása gyakran olyan lassú, hogy csaknem lehetetlen mindazokat a tagokat kiszámítani, a melyek elhanyagolása érezhető volna. Sőt az is lehetséges, hogy az m hatványai szerint való kifejtés egyes tagokban széttartó. De akárhogy van is, bizonyos, hogy DELAUNAY elmélete az m hatványai szerint való kifejtést nem viszi elég messze ahhoz, hogy jelenlegi szükségleteinket kielégítse.

II.

Azok a módszerek, a melyekről eddigelé beszéltem, tisztán algebraiak és általánosak. Azaz e, e', γ és m megtartja algebrai és általános értékét; a probléma az, hogy a Hold koordinátáit az elemek explicit függvényeiként fejezzük ki. A koordináták kiszámítása czéljából elegendő, ha algebrai kifejezésükbe behelyettesitjük az elemek számértékét, a mint a megfigyelésekből kapjuk őket. De az algebrai kifejezéseknek már jelzett nehézségei folytán megpróbálták a Hold jelenlegi mozgásának a képleteit úgy szerkeszteni meg, hogy az elemek számértékeit az integrálás előtt behelyettesitik. Akkor a mozgás egyenleteinek általános megoldása helyett egy partikuláris megoldást kapunk. Azt hiszem, ezt az eljárást DAMOISEAU alkalmazta először. De a legfontosabb numerikus elmélet a HANSENÉ, a melyen a félszázadon át használt hold-táblák alapszanak. HANSEN numerikus elmélete elvben elég egyszerű. A mozgás differencziál-egyenleteinek jobb oldalán megközelitő számkifejezéseket helyettesitünk be; ebből integrálás útján az elemeknek és a koordinátáknak olyan értékeit kapjuk, a melyeknek hihetőleg pontosabbaknak kell lenniök a kezdetben felhasználtaknál. Az eljárást annyiszor ismételhetjük, a hányszor csak akarjuk, vagy inkább addig, a míg az eredményen az ismétlés nem változtat. Így történt az, hogy HANSEN, miután a *holdtábláiban* felhasznált egyenlőtlenségek értékeit kiszámitotta, újra elvégezte a számitást és egyik-másik tagnak a táblában levő értékétől kissé különböző értékéhez jutott. De az ezen módszerrel nyert eredmények pontossága nem mentes minden ellenvetéstől.

Másrészt a tisztán numerikus módszer nem elégiti ki az elmélet összes igényeit, mivel a koordinátáknak az elemek szerint vett differencziálhányadosait ilyen kifejezések alapján nem lehet kiszámitani. Következésképp nem tekinthetjük sem DELAUNAY módszerét, sem a HANSENét teljesen kielégitőnek.

III.

Áttérek most a vizsgálatok olyan sorára, a mely azt hiszem a korunk astronomiájától megkivánt teljes pontossággal biró eredményekre vezet bennünket. Ez a sor EULER LEONHARDnak: *Theoria Motuum Lunae, Novo Methodo Pertractata* czímű munkájával kezdődik. Tudományunk történetében eléggé figyelemreméltó tény, hogy egy teljes század mult el a nélkül, hogy egyetlen mathematikus észrevette volna az EULER ezen munkájában vázolt eljárás fensőbbségét, a mely 1772-ben került nyilvánosságra. 1878-ban történt, hogy GEORGE W. HILL közzétette a Hold mozgására vonatkozó munkáit, mikor a hajlást és az excentricitást nullának vették, a mely eszme alapjában EULER művéből indult ki. HILL híres értekezése a Hold perigeum mozgásának főtagjáról 1888-ban jelent meg. Kutatásainak alapelve a következő: Adottnak tekintve a Földnek a Nap körül és a Holdnak a Föld körül való középmozgását, a Hold minden koordinátájának kifejezését oly sorban lehet kifejteni, a mely a két pálya e és e' excentricitása és egymáshoz való fél hajlásának γ sinusa hatványai és szorzatai szerint van rendezve. Legyen y egy ilyen koordináta, akkor

$$y = P_0 + eP_1 + e'P_2 + \gamma P_3 + e\gamma P_4 + \dots \qquad (3)$$

a hol a P-k a következő alakú periodikus függvények:

$$P = \Sigma h \begin{smallmatrix} sin \\ cos \end{smallmatrix} (A + Bt) \qquad (4)$$

A h együtthatók függvényei m-nek, a Nap és a Hold középmozgásai viszonyának; az A-k a Nap, a Hold, a perigeum és a csomópont középhosszúságainak lineáris kapcsolata és a B-k m-nek, e-nek, e'-nek és γ-nak függvényei.

Tudjuk, hogy EULER megpróbálta külön kifejteni a P értékeket. De az m, e, e' és γ P-be való bevitele nehézségekbe ütközött. E miatt az argumentumok mozgásait a megfigyelésből adottaknak kellett tekintenie. A mit HILL száz évvel később csinált, azt a következőkben lehet összefoglalni:

1. Általános eljárást alkotott a P_0 tagoknak a középmozgások függvényeként olyan pontossággal való kifejtésére, a mint csak akarjuk; sőt a kifejtését jóval túlvitte az astronomia minden szükségletén.

2. Új módszert fejtett ki a perigeum mozgása azon részének a tárgyalására, a mely független e-től, e'-től és γ-tól.

A mit Hill elvégzett a perigeumra nézve, azt a csomópont mozgására nézve Adam és Cowell csinálta meg.

Természetesen Hill eszméi és módszerei alkalmazhatók a probléma általánosabb alakjára, a melyben e, e' és γ is megvan. De van egy nehézség, a mely akkor jelentkezik, a mikor az e, e' és γ hatványainak és szorzatainak P_1, P_2, stb. együtthatóit akarjuk meghatározni. Ilyen végtelen sorbafejtés rendes alakjában az együtthatók nem tartalmazzák ezeket az elemeket. De a mint megjegyeztem, a mi e, e' és γ elemeink szerepelnek a B értékekben és így belépnek a P-kbe is. A nehézség ott van a mikor a B-ket, vagyis a perigeum és a csomó mozgásait, e mennyiségek hatványaiban és szorzataiban akarjuk kifejezni.

Ernest W. Brown fogott bele az így jelentkező probléma megoldásába, egymásután legyőzte a nehézségeket és fokozatosan tökéletesítette a megoldást. A Brown alkalmazta módszer főpontjait következőképen lehet összefoglalni.

1. A helyett, hogy a h együthatókat m-nek, a középmozgások viszonyának hatványaiban fejezné ki, *kezdettől fogva* m számértékét használja fel. Módszere tehát a már leírt módszerek összekapcsolása, mert e-re és e'-re vonatkozólag algebrai és m-re nézve numerikus.

2. Talált egy eljárást az m szerint vett differencziálhányadosoknak a többi elemek szerinti differencziálhányadosokkal való kifejezésére.

3. Általános módszert fejtett ki arra, hogy a P_1, P_2, stb. periodikus függvények mindegyike egy másodrendű differencziálegyenlet megoldásától függjön. Ezt a megoldást a legnagyobb megkívánt pontossággal meg lehet kapni egy lineáris egyenletrendszer megoldása folytán.

4. Minden lépésnél meghatározza a perigeum és a csomó mozgásának azokat a tagjait, a melyek a megoldáshoz szükségesek.

5. Úgy végezte el az elmélet numerikus számításait, hogy a Hold hosszúságának, szélességének és parallaxisának minden együtthatóját $\pm 0''$, 01-nél kisebb hibával kapja meg.

6. Ellenőrző képleteket alkotott a tagok numerikus számításaiban elkövetett némely hibák megtalálására.

Hansen és Delaunay együtthatóinak a Brownéval való összehasonlítása azt a hitet kelti bennünk, hogy ezek az eredmények olyan pontosak, a milyennek csak kivánhatjuk.

Meg kell említenem még egy tudós munkáit, a ki hozzájárult ehhez a modern elmélethez. Az Euler, Hill és Brown alkalmazta koordináták derékszögűek és megalakításuk után át kell őket alakítani sark-koordinátákká. H. Andoyer módszert ajánlott a sark-koordinátáknak közvetlenül, ugyanazon alakban, való kifejtésére. Ezt a módszert méltónak tartom azoknak a mathematikusoknak a figyelmére, a kik a kérdéses probléma iránt érdeklődnek.

IV.

Eddigelé csak a Nap hatásáról beszéltem, mint olyan háborgató erőről, a mely módositja a Holdnak a Föld körül való elliptikus mozgását. A mennyiben a Föld pályája nem változik, a Hold mozgásában a Nap hatása alatt beállott változások csak periodikusak. A Holdnak, perigeumának és csomójának mozgása századról-századra egyenletes lenne és a Hold egyenlőtlenségei újra felvennék kezdő értékeiket, valahányszor a Hold perigeuma és csomója visszatérne eredeti helyére. De a bolygók hatásának is kell a Hold mozgásában kis változásokat létrehoznia és pedig kétféleképen: először is a két testre, a Földre és a Holdra gyakorolt közvetlen hatásuk különbsége folytán és másodszor a Föld a Nap-körüli mozgásának módosításával, a mi megváltoztatja a Nap hatását a Holdra. Általában a bolygók hatása kisebb, mint a Napé ugyanolyan mértékben, mint tömegük és következőleg elhanyagolhatónak lehetne gondolni. De úgy a megfigyelés, mint az elmélet egyaránt azt mutatja, hogy ennek a hatásnak az eredménye fontos. Először is a modern megfigyeléseknek a PTOLEMAEUS említette holdfogyatkozásokkal való összehasonlításából HALLEY azt találta, hogy a Hold középmozgása gyorsabb lett. Később a gyorsulás mértékét századonként 10″-re becsülték. Ennek a jelenségnek az okát LAPLACE fedezte fel; ez a földpálya excentricitásának a bolygók hatása folytán való százados csökkenése. LAPLACE számításai 10″-et adtak a százados gyorsulás értékéül, úgy, hogy az elméletnek a megfigyeléssel való megegyezése tökéletesnek látszott. 1850 felé HANSEN újra elvégezte a számítást holdtáblái számára és eredménye 12″,18 lett. Későbbi *Darlegung*-jában közölt számításai még 0″, 35-tel nagyobb eredményt adtak, vagyis 12″, 53-et. Megpróbálta ezt az eredményt igazolni, nemcsak az elmélettel, hanem a megfigyeléssel is, úgy, hogy a régi történetíróktól feljegyzett néhány teljes napfogyatkozást megvizsgált. De ezt a megegyezést tönkretették J. C. ADAMS mélyreható kutatásai, a ki azt találta, hogy továbbvive a megközelítéseket, a gyorsulás értéke csak körülbelül fele a HANSEN számította értéknek. Ezt az eredményt hamarosan megerősítette DELAUNAY. HANSEN ugyanis ép úgy, mint LAPLACE és a többi mathematikusok, a kik evvel a kérdéssel foglalkoztak, a Nap háborgató hatására nézve elsőrendű tagokra szorítkozott, holott a magasabbrendű tagok jól érezhető eredményeket hoznak létre. BROWN tanár utolsó számításai 5″, 81-re vezettek és ezt az eredményt néhány század-másodperczre elméletileg pontosnak vehetjük.

Tehát az elmélet és a megfigyelés között elég feltűnő ellentét volt, a melynek *valódi okát* megtalálta WILLIAM FERREL és később DELAUNAUY, a Holdnak a tengerjárásokra gyakorolt hatásában. A súrlódás folytán a tengerjárások nem symmetrikusak a Hold irányára nézve; ebből a Holdnak a tengerre való hatásában oly erőpár keletkezik, a mely mindig lassítani törekszik a Föld tengelyforgását és ennek folytán kissé megnyujtani a Nap hosszát, úgy hogy időszámításunk századról-századra mindig hátra marad. Csak 12 másodpercznyi késésre van szükség, hogy 6″ látszólagos gyorsulást hozzon létre a Hold középmozgásában. A legutóbbi kutatások csak 8″-et adnak a látszólagos gyorsulás értékéül, úgy hogy e mennyiség elméleti értékének és megfigyelt értékének a különbsége, vagyis a súrlódás hatása csak 2″ minden évszázadban.

Érdekes tény, hogy a Föld forgásának a tengerjárásoktól okozott lassúdását KANT hirdette, bár a hatásra vonatkozó bizonyítása nem volt helyes. LAPLACE kimutatta, hogy a KANT-tól feltételezett hatás nem áll fenn; de az a következtetése, hogy nincs lassúdás, nem áll helyes alapokon.

LAPLACE a Hold mozgásának LALANDE tábláival való összehasonlításából kimutatott ebben a mozgásban bizonyos hosszú periodusú egyenlőtlenségeket. HANSEN volt az első, a ki az elméletben ki tudta mutatni ilyen egyenlőtlenség fennállását. Holdtábláiban két a Vénus hatásából eredő egyenlőtlenséget vezetett be, a melyek közül az egyiknek a periodusa 273 év, a másiké 239 év. Ezek közül az első egyenlőtlenség tényleg megvan az elméletben, de a másik nagyon kicsi, csak 0″, 24, a mint DELAUNAY és RADAU kimutatta. A HANSENtől elfogadott érték majdnem százszor akkora és a mi még rosszabb, sem HANSEN értéke, sem a valódi érték nem felel meg a megfigyelésnek. Ennek a rejtélyes eltérésnek fogom tanulmányom végét szentelni.

Vegyük először is összehasonlításunk elméleti szempontját. A Hold mozgásának három háborgató-okát tudom elképzelni. Ezek a Nap, a bolygók és a Föld gömbalaktól való eltérésének a hatásai. Ez utóbbi nem okozhat a holdpálya csomópontjáénál hosszabb periodusú egyenlőtlenséget, mivel napi forgása következtében a Föld alakjában fennálló minden hosszmenti egyenlőtlenség hatása egy nap alatt megszünik. A Nap hatása jól meg van határozva. Nem marad tehát más hátra, mint a bolygók hatása.

A bolygóknak a Holdra gyakorolt hatásának problémája az égi mechanika valamennyi jól értelmezett problémája között a legbonyolultabb. De HANSEN kora óta az ezen hatás kiszámítására szolgáló eljárások DELAUNAY, RADAU, HILL és BROWN mélyreható kutatásai folytán annyira tökéletesedtek, hogy eredményeik kétségteleneknek látszanak. A HANSEN-féle első egyenlőtlenség az elméletben az egyetlen hosszú periodusú, a mely fontos eltérést okoz.

Fontos jellemvonása ezeknek a megfigyelt eltéréseknek, hogy inkább szabálytalanoknak látszanak, mint periodikusoknak. Hogy pontosabban beszéljünk, nem állítható elő egy periodikus taggal, sőt kettővel sem. Mindamellett, ha fölveszünk egy kb. 250 éves periodusú tagot, az eltérés nagy részét elő lehet vele állitani és a mi marad, egészen szabálytalannak látszik. A legfigyelemreméltóbb ingadozások 1850 óta mentek végbe. Ezidőtájt a középmozgás gyorsulóban volt és a gyorsulás látszólag folytatódott 1864-ig. Akkor a mozgás hirtelen meglassult úgy, hogy az 1864-től 1890-ig terjedő időközben az évi mozgás hosszúságban 1″, 5-czel kisebb volt, mint az 1850-től 1863—4-ig terjedő időben. A Holdra átvive, ennek a testnek a sebessége két-három kilométerrel változott évenkint. Körülbelül 1890 óta ennek a mozgásnak az iránya megfordult.

Két feltevést lehet gondolni ezeknek a változásoknak a megmagyarázására: vagy valósággal megvannak ezek, vagy csak látszólagosak és a Föld forgásában beálló változások hozzák létre épúgy, mint a hogy ennek a forgásnak a lassabbodása a százados gyorsulás látszólagos megnövekedését okozza. Ahhoz, hogy ezek közt a feltevések között választani tudjunk, időmértékünk egyenletességétől független bizonyitékra van szükségünk. Sajnos azonban, nincs szigorú bizonyítékunk. A legjobbat még a Merkur mozgása szolgáltatja. Ennek a bolygónak 1677-tól 1907-ig megfigyelt átmenetei a Nap korongján hasonló változásokra mutatnak, de nagyságuk felénél kisebb annál, a mely a szóban forgó jelenség megmagyarázására felveendő. Úgy látszik tehát, hogy a változás egy része valós és más része a Föld forgásában előforduló változások következménye. Tehát nem a Holdnak a tengerjárásokra gyakorolt hatása változó-e és nem magyarázhatja-e meg tökéletesen a jelenséget ennek a hatásnak összekapcsolódása, a tengerjárások visszahatásával a Holdra? Igen ám? csakhogy ennek a visszahatásnak ép ellenkezőleg inkább lassítania kellene a Hold tényleges mozgását, semmint gyorsítania. Röviden ki fogom fejteni ennek a hatásnak és visszahatásnak az elméletét:

1. Eltekintve a Nap hatásától, a tengerjárások mozgását a Hold hatása okozza.

2. Ez a mozgás szükségképen surlódással jár.

3. Ez a surlódás a Föld-Hold rendszer összes energiájának, a mozgásbeli és helyzeti energiának csökkenését vonja maga után.

4. E rendszer momentumának nyomatéka, vagyis az

$$\int m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$$

mennyiség változatlan marad. Két különböző részre bomlik, a melyek közül egyik a Földé, a másik a Holdé, a mely utóbbi a Föld körül keringésből származik.

5. A Föld momentumát részeinek semminemű kölcsönhatása nem változtathatja, még a surlódás sem. Ahhoz, hogy változás jőjjön létre, a Holdtól származó erőpár hatására van szükség, ez pedig csak abban az esetben állhat be, a mikor a tengerjárások e Hold vezérsugarára nézve asymetrikusok.

6. Ugyanez az erőpár visszahat a Holdra, úgy, hogy momentumának növekedése egyenlő a Föld nyomatékának csökkenésével.

7. Ugyanezen visszahatás következtében a Hold középtávolsága és középmozgása is meg fog változni oly módon, hogy megtartva állandó kapcsolatukat, a rendszer mozgási energiájának és helyzeti energiájának összege a surlódás nagyságával egyenlő mértékben csökken.

8. Ezeknek a viszonyoknak az eredménye George Darwin szerint időmértékünkben körülbelül 3″,6-nyi késés a Hold

középmozgásának minden 1″-nyi látszólagos gyorsulása után és viszont.

Ha ezeket az elméleti következtetéseket alkalmazzuk a mi problémánkra, egyáltalában nem felelnek meg a megfigyelt változásoknak. Más szóval ahhoz, hogy a Hold középmozgásának változásait a tengerjárások hatásával meg tudjuk magyarázni, időmértékünkben majdnem egy perczn yi változást kell feltételeznünk az 1700-at követő két századra. De a Merkur átmenetei arra látszanak mutatni, hogy ezek a változások nem lehetnek nagyobbak néhány másodpercznél.

Mindezen megfontolások után azt hiszem, hogy az így előálló rejtély megmagyarázása ma az égi mechanikának legfontosabb és legérdekesebb problémája. De a kérdés inkább az ég physikájának körébe tartozik, mint a mathematikához és így tartózkodom a vizsgálatától.

G. Newcomb.

Fordította: *Kelemen Ignácz.*

KÚPSZELETEK, MINT FÖLDRENGÉSI SUGARAK.

A seismologia egyik nagy fejezetét a földrengési sugarak alakjának vizsgálata alkotja. Ezeknek a vizsgálatoknak nagy jelentőséget ad az, hogy a geophysika innen remél feleletet a Föld belsejének szerkezetére vonatkozó sok kérdésére. Világos ugyanis, hogy ha valami módon sikerül megtudnunk, milyen úton jönnek át a Föld belsején a rengés fészkétől az észlelés helyéig a rengési sugarak, ezek a sugarak — hogy úgy mondjam — el fognak árulni egyet-mást azokról a viszonyokról, a melyeken útközben keresztüljöttek.

Az említett vizsgálatoknál három úton járnak a kutatók; három — a természettudományi vizsgálatoknál typikus úton. Időrendi sorrendben elsők azok, a kik à priori valami egyszerű rengéssugár-alakot tételeznek fel s az észlelésekkel törekszenek azt igazolni. Ide sorolhatjuk elsősorban a japán seismologusokat (Omori, Imamura, Nagaoka stb.), a kik szerint a rengés a földkéreg mentén egy bizonyos mélységben a földfelülettel párhuzamosan történik, tehát a rengéssugarak körök. Ez a feltevés a rengési diagrammok (seismogrammok) harmadik fázisának kezdőhullámára az észlelésekkel megegyező következtetéseket ad, az első és második fázis kezdőhullámára azonban a mai észlelési pontosság mellett már tarthatatlan. Ebbe a csoportba sorolhatjuk az egyenesvonalú terjedés feltevését, mely szerint a rengési hullámfelület gömbfelület, mintha a Föld a rengési sugarakra nézve homogén viselkedést mutatna. Ez a feltevés, mely Milne nevéhez fűződik, eléggé kielégítően egyezik az észleléssel az első és második fázis kezdőhullámánál, legalább is jobb megközelítés, mint az előző feltevés. (Lásd dr. JORDÁN KÁROLY: La propagation des ondes sismiques. Revue générale des Sciences 1907.)

A kutatás második módja, melyet elméleti útnak nevezhetünk, abban áll, hogy az elméleti physika és a geophysikai elméletek segítségével kiséreljük meg a rengéssugarak alakját levezetni. Ezen az úton halad a KÖVESLIGETHY-féle geometriai elmélet, mely a Föld belsejében a rétegek sűrűségének változására a geophysikából a ROCHE-féle törvényt, a sűrűség és a rugalmas törésmutató közötti összefüggésre a NEWTON-féle formulát véve alapul, a rengéssugarak alakjára kúpszeleteket talál. (Lásd R. de KÖVESLIGETHY: Seismonomia 1906.) Az ezen elmélet alapján történt rengés-számolások még nem képezték egységes kritikai feldolgozás tárgyát és így az elméletről még itéletet nem mondhatunk.

WIECHERT legújabb vizsgálatai jelölik ki a kutatás harmadik — empirikus — útját. (Lásd WIECHERT und ZOEPPRITZ: Über Erdbebenwellen. Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1907.) Ennek az útnak az a meggondolás a kiinduló pontja, hogy ha ismeretes a rengés valamely hullámának hodographja — értve alatta a hullám megérkezésének idejét, mint a fészektől való gömbi távolság függvényét — ebből az illető hullám útjának alakja a Föld belsején keresztül megállapitható függetlenül mindenféle feltevéstől (a concentrikus homogén héjak feltevésétől eltekintve). A vizsgálat egyelőre főleg csak graphikus eljárással vitetett keresztül és mivel a megbizható észlelési adatok csak mintegy 11000 km. epicentrális távolságig terjedtek, csak 4000 km. mélységig jutó rengéssugarak alakjára és terjedési sebességére kaptunk felvilágositásokat, azonban ez az eljárás — ép hypothesismentessége miatt — még sok eredménynyel biztat.

Jelen sorok czélja oly feladat megoldása, mely az első csoportba sorozott kutatások közé tartozik. Az egyenes és a felülettel párhuzamos kör, mint legegyszerűbb feltevések elégteleneknek bizonyulván, fel lehet vetni a kérdést, nem ad-e jobb, az észlelések mai pontossága mellett esetleg kielégítő megoldást az egygyel magasabbfokú megközelítés: a kúpszeletalakú rengéssugarak feltevése. De még ez előtt fellép az a kérdés, lehetnek-e a rengéssugarak kúpszeletek? A KÖVESLIGETHY-féle elméletben a rengéssugarak centrális kúpszeletek. (oly kúpszeleteket akarok így nevezni, melyek középpontja a Föld középpontjával esik össze), tehát a kérdés arra szorítkozik, nem lehetnek-e rengéssugarak a nem centrális kúpszeletek? A rengéssugarak általános egyenlete, ha a Föld középpontjától ρ távolságban a rugalmassági törésmutatót n-nel, a rengéssugárnak a Földsugárral bezárt szögét i-vel jelöljük:

$$n\rho \sin i = \text{const.} \tag{1}$$

(l. Seismonomia, pag. 8; WIECHERT: Erdbebenwellen, pag. 68.)

Itt kell megemlítenem, hogy ez az egyenlet nemcsak a seismologiában alapegyenlet, hanem szerepel mindenütt, a hol rezgőmozgásnak homogén gömbhéjakból álló testekben való terjedéséről van szó (pl. refractió problémák égi testeknél) és így az eredmények közvetlenül ezekre is alkalmazhatók.

Feladatunk a ρ sugárnak oly n függvényét találni, melynél az (1) feltételnek kúpszelet tesz eleget. Az (1) feltétel, ha a rengéssugár polárcoordinátái ρ és φ, a következő differentiálegyenlettel æquivalens:

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{C}{\rho\sqrt{n^2\rho^2 - C^2}}. \tag{2}$$

(Seismonomia, pag. 8.)

A kúpszelet polárkoordinátás egyenletének segítségével ebből az egyenletből a keresett n függvény adódik. Nem kell azonban egész általános helyzetű kúpszeletet vennünk. Világos ugyanis a symmetria viszonyokból, hogy csak oly kúpszeletek lehetnek rengéssugarak, melyeknek valamelyik tengelye átmegy a Föld középpontján, a melyek tehát symmetrikus le- és felszálló ággal birnak. Az általánosság megszorítása nélkül vehetjük ezt a tengelyt polártengelynek és akkor a parabola esetét egyelőre kivéve,

$$(b^2-a^2)\rho^2\cos^2\varphi-2b^2c\rho\cos\varphi+a^2\rho^2+b^2c^2-a^2b^2=0, \tag{3}$$

a hol a és b a kúpszelet tengelyhosszai, c a kúpszelet középpontjának távolsága a Föld középpontjától. Az $a^2b^2>0$ az ellipsis, $a^2b^2<0$ a hyperbola esete.

Ha egyelőre még a kör esetét is kizárjuk, azaz $a^2 \gtrless b^2$ egyenlőtlenséget tételezzük fel, akkor

$$\cos\varphi=\frac{1}{h^2\rho}\{b^2c\pm a\sqrt{b^2f^2-h^2\rho^2}\}, \tag{4}$$

ha $f^2=b^2+c^2-a^2$ és $h^2=b^2-a^2$, a honnan

$$\frac{d\varphi}{d\rho}=\frac{h^2\rho\cos^2\varphi-b^2c\cos\varphi+a^2\rho}{[h^2\rho\cos\varphi-b^2c]\,\rho\sin\varphi}. \tag{5}$$

A (2), (3) és (5) egyenletekből $\frac{d\varphi}{d\rho}$-t és φ-t kiküszöbölve a keresett n függvényre adódik:

$$\left(\frac{n}{C}\right)^2=\frac{1}{\rho^2}\left\{1-\frac{R}{b^2f^2}\,\frac{h^2\rho^2-(a^2f^2+b^2c^2)\mp 2ac\sqrt{R}}{\frac{c^2}{f^2}h^2\rho^2-(a^2f^2+b^2c^2)\mp 2ac\sqrt{R}}\right\}, \tag{6}$$

a hol

$$R=b^2f^2-h^2\rho^2.$$

Ha $c=0$, azaz centrális kúpszeletek esetén, (6)-ból marad:

$$\left(\frac{n}{C}\right)^2=\frac{a^2+b^2-\rho^2}{a^2b^2}, \tag{7}$$

vagy ha a törésmutatót a Föld középpontjában n_0-sal jelöljük, azaz

$$\left(\frac{n_0}{C}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2},$$

akkor

$$\left(\frac{n}{n_0}\right)^2=1-\frac{1}{a^2+b^2}\rho^2=1-q\rho^2. \tag{8}$$

Ha megadok egyetlen kúpszeletet, mely rengéssugár legyen, meg lévén ezzel adva a és b, a törésmutató értékeit az egyes mélységekben (8) egyenlet meghatározza és így a megadotton kívül még csak azon kúpszeletek lehetségesek, melyekre nézve

$$q = \frac{1}{a^2+b^2} = \text{const.} \tag{I}$$

A q állandót, mely egymagában már jellemzi a törésmutató értékváltozását, seismikus indexnek nevezi KÖVESLIGETHY. (Seismonomia, pag. 10.)

Visszatérve a (6) alatti általános képletre, az a ρ változó másodfokú irrationalitása lévén következő normálalakra hozható:

$$\left(\frac{n}{C}\right)^2 = R_1(\rho) + R_2(\rho)\sqrt{R}, \tag{9}$$

a hol R_1 és R_2 rationális törtfüggvények és pedig jelen esetben:

$$\left.\begin{aligned} R_1(\rho) &= \frac{A\rho^4+B\rho^2+C}{(\rho^2+G)^2}, \\ R_2(\rho) &= \frac{D\rho^2+E}{(\rho^2+G)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

a hol

$$A = \frac{h^2}{b^2c^2}, \quad B = -\frac{f^2h^2}{b^2c^4}(a^2+2c^2),$$

$$C = \frac{f^4}{b^2c^4}[a^2(a^2+b^2)+c^2h^2], \quad D = \pm\frac{2afh^2}{bc^3}, \tag{11}$$

$$E = \mp\frac{2abf^3}{c^3}, \quad F = \frac{h^2}{b^2f^2}, \quad G = \frac{f^2}{c^2h^2}(a^2f^2-b^2c^2),$$

ámde $D = -EF$, tehát

$$\left(\frac{n}{C}\right)^2 = \frac{(A\rho^4+B\rho^2+C)+E(1-F\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{(\rho^2+G)^2}. \tag{12}$$

A törésmutató a Föld középpontjában:

$$\left(\frac{n_0}{C}\right)^2 = \frac{C+E}{G^2}. \tag{12a}$$

Ha megadok egyetlen kúpszeletet, tehát egy a, b, c értékcsoportot, ezzel az összes szereplő együtthatók $A, B, \ldots, G$ meg vannak adva (a (11) képletekkel) és ezzel a törésmutató törvénye is; tehát ezen egyetlen kúpszeleten kívül még csak azok lehetségesek, melyekre nézve ugyanazon $A, B, \ldots, G$ adódik, azaz kell, hogy:
$A(a, b, c) = \text{const.}, B(a, b, c) = \text{const.}, \ldots, G(a, b, c) = \text{const.}$ legyen. Ámde az A, E, F függvénydeterminansa:

$$\frac{\partial(A, E, F)}{\partial(a, b, c)} = \frac{(a^2-b^2)^3}{b^7c^6f^5} \neq 0,$$

mert a kör esetét tárgyalásainkból egyelőre kizártuk. De akkor A, E és F függetlenek lévén, az $A = \text{const.}$, $E = \text{const.}$, $F = \text{const.}$ egyenleteket megadott constansok mellett csak véges számú a, b, c értékcsoport elégítheti ki, tehát megadott töréstörvénynél csak véges számú nem centrális kúpszelet lehetséges. Mi azonban oly töréstörvényeket kerestünk, melynél az összes rengéssugarak kúpszeletek; ezen követelést a nem centrális kúpszeletekkel nem lehet kielégíteni.

Kör esetén $a^2=b^2$ és a (4) képlet helyébe

$$\cos\varphi = \frac{c^2+\rho^2-a^2}{2c\rho} \tag{13}$$

lép, melyből

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{c\cos\varphi-\rho}{c\sin\varphi}. \tag{14}$$

Ezen kifejezések felhasználásával (2)-ből adódik:

$$\frac{n}{C} = \pm\frac{2a}{(c^2-a^2)-\rho^2},$$

ha $\rho=0$-nál $n=n_0$, akkor

$$\frac{n}{n_0} = \frac{c^2-a^2}{(c^2-a^2)-\rho^2}. \tag{15}$$

Oly körök lehetnek tehát egyszerre rengéssugarak, melyeknél

$$c^2-a^2 = \text{const.} \tag{II}$$

Ha $c>a$, akkor ezen körök mind orthogonalisan metszik a $(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$ sugarú, a Földdel concentrikus kört (lásd WIECHERT idézett értekezésében 21. §. *a)* és *b)* esetet), ha pedig $c<a$, akkor ezen körök az $(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}$ sugarú — a Földdel concentrikus — kört diametrálisan szemközt fekvő pontokban metszik. (Lásd WIECHERT 21. §. *c)* esetet.)

Vizsgáljunk végre parabolikus rengéssugarakat. A parabolánál

$$\cos\varphi = \frac{1}{\rho}\cdot(-p+\sqrt{p^2+2pc+\rho^2}) \tag{16}$$

(p a parabola paramétere).

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = -\frac{1}{\rho\sin\varphi}\cdot\frac{\rho\sin^2\varphi-p\cos\varphi}{\rho\cos\varphi+p} \tag{17}$$

és így

$$\left(\frac{n}{C}\right)^2 = \frac{A\rho^2+B\pm(C\rho^2+D)\sqrt{\rho^2+E}}{(\rho^2-F)^2}, \tag{18}$$

a hol

$$A=\frac{3}{p}(p+2c),\quad B=\frac{2}{p}(p^3+3p^3c-4c^3),\quad C=\frac{2}{p},$$
$$D=2(p+2c),\quad E=p(p+2c),\quad F=2c(p+2c). \tag{19}$$

Ámde $D=EC$, tehát írható:

$$\left(\frac{n}{C}\right)^2 = \frac{A\rho^2+B\pm C(\rho^2+E)^{\frac{3}{2}}}{(\rho^2-F)^2}. \tag{20}$$

Ugyanúgy, mint az általános esetben az együtthatók függetlensége vizsgálandó meg:

$$\frac{\partial(E,F)}{\partial(p,c)} = 4(p+2c)^2.$$

Ha tehát $p+2c\neq0$, akkor az összes rengési sugarak nem lehetnek parabolák.

Ha $p+2c=0$, akkor

$$A=B=D=E=F=0$$

és

$$C=-\frac{1}{c}$$

és a töréstörvény:

$$\left(\frac{n}{C}\right)^2 = \mp \frac{1}{c\rho},$$

ha $\rho = 1$-nél $n = n_1$, akkor

$$\left(\frac{n}{n_1}\right)^2 = \frac{1}{\rho}. \tag{21}$$

A (21) alakú töréstörvény esetén lehetséges rengéssugarak mindazon parabolák, melyeknél

$$p + 2c = 0, \tag{III}$$

azaz, a melyeknél a focus a Föld középpontjába esik. Ez itt a centrális kúpszeletek analogiája.

Az eredményeket így foglalhatjuk össze: rengési sugarak lehetnek a kúpszeletek közül: 1. centrális ellipsisek és hyperbolák az (I) alatti feltétellel, 2. körök a (II) alatti feltétellel és 3. a (III) feltételt kielégítő parabolák.

Ezen eredmény a Kövesligethy-féle geometriai elméletből levezetett kúpszeletalakú rengéssugarakat új szempontból világítja meg, a mennyiben látjuk, hogy ha a rengéssugarakat ellipsis vagy hyperbola alakokkal akarjuk megközelíteni, egyedül a Kövesligethy-féle centrális esetek lehetségesek.

Jánosi Imre.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

Kisérletek az Atwood-géppel.

I.

E közlemény megírására, a benne tárgyalandó kisérletek elvégzésére az okot dr. PÉCSI GUSZTÁVnak: «*Krisis der Axiome der modernen Physik. Reform der Naturwissenschaft*» cz. munkájának [1] megjelenése adta. A szerzőnek e könyv előfutárjaként megjelent magyarnyelvű füzetével volt alkalmam e lapok hasábjain foglalkozni.[2] A most említett mű ettől különbözik azon tulajdonságánál fogva, hogy az új törvényeket megfelelőbb formában közli s ezeknek végső igazolásánál *a kisérleti alapra* helyezkedik. Éppen ez a szempont az, melyből most tárgyalni akarom dr. PÉCSI tételeit. A kisérlet adataiból kiindulva, akarom megvizsgálni ezen «új törvények» helyességét s ezzel kapcsolatban dönteni el, szolgáltatnak-e ezek a fizika fejlődéséhez újabb adalékot? Mondanak-e a mai tudásunkkal szemben új dolgot; megfelelnek-e a helyesen felfogott kisérleti tényeknek s a mennyiben esetleg erre igenlő a felelet, nem magyarázhatók-e meg jelenleg helyeseknek tartott alapelveink segítségével?

A megvizsgálandó törvények, melyeken nyugszik az idézett könyvben felsorolt többinek javarésze, az ATWOOD-gépen előidézett mozgásjelenségre vonatkoznak s a NEWTON-féle I. axióma tarthatatlanságát vannak hivatva kimutatni. Ezen törvények a következők:

a) *A sebesség egyenesen arányos a mozgató erővel.*[3]

b) *A megtett út hossza egyenes arányban áll a mozgató erővel.*[4]

c) *Folytonosan és egyenletesen működő erő hatása egyenletes mozgás, mely egyenletes gyorsulással kezdődik és (miután az erő működése megszűnt) egyenletes lassubbodással végződik.*[5]

---

[1] Esztergom, Buzárovits G. nyomása 1908.

[2] M. Ph. L. XVII. pag. 278.

[3] PÉCSI i. m. pag. 270.

[4] I. m. pag. 270.

[5] I. m. pag. 181.

II.

Röviden ismertetem dr. Pécsi kisérleteit.[1]

Az Atwood-gépen mozgó egyik súlyra (C) a szokásos módon leszedhető túlsúlyt (r) teszszük s ez alá még egy másikat (q) helyezünk el. Most leejtjük az r és q túlsúlyokkal megterhelt C súlyt bizonyos magasságon keresztül (ezt az útat s_{q+r}-nek fogom nevezni), itt a gép gyűrűjének segítségével leemeljük az r-et s megfigyeljük, hogy a most már csak q-val megterhelt C súly hány cm út megtétele után fog magától megállani (a C súly által befutott összes útat $s_{összes}$-nek nevezem). Az s_{q+r}-et arithmetikai haladvány szerint növelve, figyeljük, hogy miképpen növekedik $s_{összes}$? A kisérleti berendezés az eddig szokásban levőktől abban különbözik, hogy állandó túlsúly (q) gyanánt vagy igen kis súlyokat alkalmazunk,[2] vagy egyáltalában semmit.

A kisérletek eredményére nézve dr. Pécsi a következő két táblázatot közli.[3]

$q = 0$ gr esetében:

r túlsúly	r túlsúly útja					
	5	6	7	8	9	10 hüv.
gramm	C súly teljes útja					
1	$8\frac{1}{2}$	10	$11\frac{1}{2}$	13	$14\frac{1}{2}$	hüv. 16
2	17	20	23	26	29	32
3	$25\frac{1}{2}$	30	$34\frac{1}{2}$	39	$43\frac{1}{2}$	48
4	34	40	46	52	58	64

$q = 0{\cdot}45$ gr esetében:

r túlsúly	r túlsúly útja					
	5	6	7	8	9	10 hüv.
gramm	C súly teljes útja					
1	$25\frac{1}{2}$	30	$34\frac{1}{2}$	39	$43\frac{1}{2}$	hüv. 48
2	51	60	69	78	87	96
3	—	—	—	—	—	—

[1] I. m. XIV. §. pag. 273. [2] 0·10—0·45 gr. [3] I. m. pag. 268. és 269.

Ezen eredményekből dr. Pécsi így következtet:[1] «A mozgató erő ezen kisérleteknél a $C+C_1$ súlyok végsebessége, a melyet ezek az r túlsúly gyorsulásától kaptak (kölcsönöztek). A vonzás törvénye értelmében ezen mozgató erő egyenes arányban áll az r túlsúly *tömegével.* Mivel azonban az egymás alatt feljegyzett mozgások (pl. $8^1/_2$, 17, $25^1/_2$, 34; épp így $25^1/_2$, 51) *isochronok,* azaz ugyanazon időben folytak le, világos *a)* először, hogy egy kétszeres, háromszoros, négyszeres erő kétszer-, háromszor-, négyszerakkora sebességet hoz létre; más szavakkal: *A sebesség egyenesen arányos a mozgató erővel. b)* De az is világos, hogy *a megtett út hossza* szintén *egyenes arányban áll a mozgató erővel.* Ez már az első táblázatból is kitűnik; de még inkább a másodikból (a hol a mozgásakadályok meg vannak szüntetve).»

A kisérletek továbbá azt mutatják, hogy r túlsúly eltávolítása után a mozgás bizonyos idő mulva megszűnik. Ha q-t fokozatosan növelem, elérhetem, hogy C súly minden r alkalmazása nélkül is megindul, de a mozgás bizonyos idő mulva ekkor is megszűnik. Ezen kisérleti tény szolgál dr. Pécsi szerint experimentális alapjául az általa megelőzőleg[2] logikai okoskodással megállapított új törvénynek, a mely leginkább van hivatva arra, hogy eddigi felfogásunkat megdöntse. E törvényt föntebb *c)* alatt közöltük.

III.

Elsősorban az *a)* és *b)* alatt felsorolt törvényekről szólunk. Ezekről azonnal megállapítható, hogy *éppenséggel nem fejeznek ki új dolgot,* annál kevésbbé tartalmaznak ellentmondást a Newton-féle erődefiniczión alapuló tételekkel.

A föllépő mozgásokat dr. Pécsi *isochronoknak mondja;*[3] ekkor pedig a fizika ma elfogadott tételei szerint:

$$f = ma = \frac{mv}{t}$$

és

$$f_1 = ma_1 = \frac{mv_1}{t}.$$

Ezekből következik, hogy:

$$f : f_1 = v : v_1,$$

---

[1] I. m. pag. 270.

[2] I. m. pag. 181.

[3] I. m. pag. 270. N. B. arra nézve, hogy az itt idézett esetben a mozgások tényleg isochronok-e, nem találunk a könyvben adatokat.

a mely aránypár az *a)* alatti törvény mathematikai alakja. Ugyszintén írható, hogy:

$$f = ma = \frac{2ms}{t^2},$$

$$f_1 = ma_1 = \frac{2ms_1}{t^2},$$

és innen:

$$f : f_1 = s : s_1,$$

a mi pedig a *b)* alatti törvény, mathematikai alakban kifejezve.

IV.

Ezek után már teljesen alapos a feltevés, hogy az $s_{összes}$-nek arithmetikai haladvány szerint való növekedése, a mint azt a közölt két táblázat mutatja — ha helyesek a megfigyelések — szintén nem megmagyarázhatatlan mai tételeink szerint.

Vizsgáljuk meg, hogyan folyik le ez a jelenség? A C súlyt megterhelem bizonyos q állandó és r levehető túlsúlylyal s előre meghatározott magasságig (s_{q+r}) ejtem. Ebben a pillanatban a lefelé eső testnek bizonyos mozgási energiája lesz és ha most r-et felfogom, C súly az eleven erejénél fogva meglévő munkaképessége következtében addig fog még mozogni, míg eleven erejét a mozgás akadályai fel nem emésztik. A mozgási energia pedig:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{2mas_{q+r}}{2} = mas_{q+r}.$$

Növeljük s_{q+r}-et arithmetikai haladvány szerint s tegyük föl, hogy a gyorsulás állandó; akkor:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{2ma\,(s_{q+r}+s_1)}{2} = ma\,(s_{q+r}+s_1),$$

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{2ma\,(s_{q+r}+2s_1)}{2} = ma\,(s_{q+r}+2s_1).$$

. . . .

Ezekből:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \cdots = mas_1.$$

Vagyis: *az eleven erő is arithmetikai haladvány szerint növekszik.* A mi magyarázatunk alapján most pedig rögtön kell következnie, hogy a C által befutott összes utaknak $(s_{összes})$ arithmetikai haladvány szerint kell növekedniök.

Állandó marad-e azonban a gyorsulás? A fizika azt mondja, hogy bizonyos megszorítások mellett igen, ha t. i. a mozgásakadályokat elhanyagolható kicsinyeknek vehetjük. Szükségesnek látszik tehát, hogy konkrét esetben eldöntsük, lehetőleg pontos kisérletekkel, vajjon állandónak tekinthető-e a gyorsulás?[1]

Az általam használt gépre nézve a következő adatokat sorolom fel. A felhasználható legnagyobb ejtési magasság 192 cm. A frikcziós kerekeken forgó[2] korong manganinból készült; sugara 8·6 cm, súlya 50·38 gr. A két mozgó, hengeralakú C súly a sodratlan selyemfonállal együtt 40·014 gr-ot nyomott.[3] Az összes mozgatott súly 90·394 gr. Kisérleteimnél az új törvényekre nézve legkedvezőbb esetet választottam, midőn ugyanis $r = 1$ gr-ot alkalmazva, $q = 0$ gr. Mivel előre tisztában voltam azon nehézségekkel, a melyekkel az Atwood-géppel való kisérletezésnél küzdeni kell, következő útat követtem. A mai fizikai tételeink alapján kiszámítottam, hogy az adott körülmények között, a mozgásakadályokat elhanyagolhatóknak véve, mennyi a gyorsulás. Ezt az értéket helyesnek véve, a $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ képlet alapján meghatároztam minden egyes s_{q+r} befutására szükséges időt. Ugyanezen időt kisérletileg megállapítottam s a két érték összevetéséből akartam eldönteni, hogy a gyorsulás elméleti s a kisérletekből megállapítható értékei megfelelnek-e egymásnak. Az időt chronoskoppal (stopper) mértem, mely 0·1″-et még megmutatott. Három ízben végeztem kisérleteimet; az idő közepes értékét (t^k) mindig 10 megfigyelésből számítottam ki.

Ismeretes, hogy ha r a mozgató súly, R az összes mozgatott súly, akkor az Atwood-gépen jelentkező gyorsulás:

$$a = \frac{r}{R} g.$$

A mi esetünkben a számítás szerint: $a = 10{\cdot}73$ cm sec^{-2}.

---

[1] V. ö. i. m. pag. 272, 3. pont.

[2] Egyáltalában nem vagyok hajlandó elfogadni dr. Pécsinek azon véleményét, hogy: «A ki a mozgás természetére vonatkozólag exakt kisérleteket akar végezni, annak okvetlenül a régi ejtőgéphez kell visszatérni», a melyen ugyanis nincsenek frikcziós kerekek. (I. m. Ergänzung zum § XIV. pag. 6.)

[3] Ebből a fonál súlya 0·014 gr.

r gr	q gr	$s \frac{\text{cm}}{q+r}$	a szám	t'' szám	t k[1]) kisérl		
		4		0·91	0·86	—	0·7
		8		1·22	1·2	—	—
		12		1·49	1·45	—	—
		16		1·73	1·6	—	1·7
		20		1·93	1·9	—	—
		24		2·12	2·1	2·0	—
		30		2·36	2·3	—	—
		40		2·73	2·5	2·6	2·7
		50		3·10	2·9	—	3·0
1	0	60	10·73	3·34	3·2	3·2	3·3
		70		3·61	3·4	—	3·55
		80		3·86	3·7	—	3·8
		90		4·09	3·9	—	—
		110		4·53	4·4	4·2	4·4
		130		4·92	4·7	—	4·9
		150		5·29	5·1	5·0	5·2
		170		5·63	5·3	—	5·5
		190		5·95	5·7	—	5·8

A mint látjuk, az időre kapott kisérleti eredmények annyira különböznek egymástól, hogy biztos következtetés vonására csak negativ értelemben használhatók; csak azt állapíthatjuk meg, hogy *a gyorsulás nem tekinthető állandónak,* mikor a mozgató súly a mozgatottnak igen kis törtrésze (a mi esetünkben kb. $\frac{1}{90}$). A mit különben is jól tudunk; éppen azért használunk, midőn az egyenletesen gyorsuló mozgás törvényeit *demonstrálni* akarjuk az Atwood-géppel nagyobb túlsúlyokat, hogy a létrejövő mozgás minél jobban megközelítse az egyenletesen gyorsulót.[2]

---

1 Az egyes sorozatokban észlelt min. és max. érték közt a legnagyobb különbség 0·4 mpercz.

2 Dr. Pécsi könyvének egyes részei úgy tüntetik fel a dolgot, mintha a fizikusok csak azért használnák a nagy túlsúlyokat, hogy erővel elrejtsék a jelenség igazi lefolyásának képét.

Az eddigieknek eredményeképpen megállapíthatom, hogy az s_{q+r} és $s_{összes}$ utaknak szóban forgó összefüggése csak akkor fog jelentkezni kisérleteinknél, ha berendezésünk olyan, hogy a mozgásakadályok elhanyagolhatók, de ekkor is úgy, mint *mai alapelveink egyenes következése.* Ha pedig a mozgásakadályok nem hanyagolhatók el, ama bizonyos törvényszerű összefüggést nem is fogjuk észlelni.

Megjegyzem, hogy kisérleteim folyamán nem volt szükséges azon esetekre kiterjeszkedni, melyekben $q > 0$; dr. Pécsi szempontjából sem, mert ő éppen arra fekteti a súlyt, hogy q kicsiny legyen.[1]

Mivel dr. Pécsi fentebb közölt táblázataira nézve semmi adatot sem közöl a mozgatott tömegek nagyságára nézve, nem lehet tudni, vajjon kisérleti körülményei voltak-e annyira kedvezőek, vagy a középértékeket túlságos naivitással állapította-e meg? Én legalább egyáltalában nem tudtam hasonló szép eredményeket kapni, mint azt a következő táblázatok mutatják. Ezekre vonatkozólag az adatok következők.

I. táblázat.

A kerék súlya: 124·045 gr; átmérője: 8·45 cm;
C súlyok s a fonál együttes súlya: 140·45 gr.

II. táblázat.

A kerék súlya: 124·045 gr; átmérője: 8·45 cm;
C súlyok s a fonál együttes súlya: 40·014 gr.

III. táblázat.

A kerék súlya: 50·38 gr; átmérője: 8·6 cm;
C súlyok s a fonál együttes súlya: 40·014 gr.

---

[1] I. m. pag. 273.

I.

s^{cm}_{q+r}	$s^{\text{cm}}_{\text{összes}}$				
	$r=2$ gr		$r=3$ gr		$r=4$ gr
	$q=0{\cdot}1$ gr	$q=0{\cdot}2$ gr	$q=0{\cdot}1$ gr	$q=0{\cdot}2$ gr	$q=0{\cdot}1$ gr
6	18	21	24	28	32
8	24	26	34	39	39
10	30	34	40	53	50
12	36	43	51	66	62
14	42	49	64	71	69
16	48	59	69	79	85
18	53	72	79	97	95
20	60	79	91	109	116
22	69	89	99	133	138
24	72	98	117	—	149
26	80	102	127	—	—
28	90	121	136	—	—
30	97	134	161	—	—
32	105	150	170	—	—
34	110	—	192	—	—
36	125	—	—	—	—
38	146	—	—	—	—
40	151	—	—	—	—
42	156	—	—	—	—
44	176	—	—	—	—

II.[1]

s^{cm}_{q+r}	$s^{\text{cm}}_{\text{összes}}$
	$r=1$ gr
	$q=0$ gr
5	18
10	38
20	72
40	164

III.[2]

s^{cm}_{q+r}	$s^{\text{cm}}_{\text{összes}}$
	$r=1$ gr
	$q=0$ gr
5	105
6	117
7	128
8	141
9	156
10	177
11	184

[1] $s_{\text{összes}}$ értékei 10 megfigyelés középértékei, egyesig kikerekítve. Az egyes sorozatokban észlelt max. és min. értékek közti legnagyobb különbség 8·5 cm.

[2] $s_{\text{összes}}$ értékei 20—25 megfigyelés középértékei, egyesig kikerekítve. Az egyes sorozatokban észlelt max. és min. értékek közti legnagyobb különbség 13·5 cm.

A II. és III. alatti kisérletsorozatot teljesen ugyanazon körülmények között 3 nap mulva megismételve, a következő eredményeket kaptam.

II.1

$s\,\frac{cm}{q+r}$	$s\,\frac{cm}{\text{összes}}$
	$r = 1$ gr
	$q = 0$ gr
4	123
5	135
6	147
7	159
8	174
9	186

III.1

$s\,\frac{cm}{q+r}$	$s\,\frac{cm}{\text{összes}}$
	$r = 1$ gr
	$q = 0$ gr
4·5	20
5	22
6	25
7	28
8	31
9	36
10	42
20	79
40	154

Ez utóbbi kisérleteket megismételtem oly módon, hogy a kereket tengelyével együtt megfordítottam. Eredményeim a következők.

II.2

$s\,\frac{cm}{q+r}$	$s\,\frac{cm}{\text{összes}}$
	$r = 1$ gr
	$q = 0$ gr
4	104
5	122
6	152
7	174
8	186

III.2

$s\,\frac{cm}{q+r}$	$s\,\frac{cm}{\text{összes}}$
	$r = 1$ gr
	$q = 0$ gr
4·5	17
5	20
6	23
7	25
8	27
9	30
10	34
20	70
40	183

Megfigyeltem azt is, hogy a fonál hosszának folytonos változása van-e lényeges befolyással az utakra? E czélból a kezdőpontot, mely az eddigi kisérleteknél mindig 0 cm-nél volt, 50 cm-nél, illetve 100 cm-nél vettem föl. Az ily módon nyert eredményeket a következő két táblázat mutatja.

II.3[1]

Kezdőpont 50 cm	
s_{q+r}^{cm}	$s_{összes}^{cm}$ $r = 1$ gr, $q = 0$ gr
5	156
6	174
7	195

III.3[1]

Kezdőpont 100 cm	
s_{q+r}^{cm}	$s_{összes}^{cm}$ $r = 1$ gr, $q = 0$ gr
5	124
15	167

V.

Az új törvények közül legfontosabb szerepre az értekezésemben *c)*-vel jelzett tétel van hivatva, a mennyiben ebben jut leghatározottabban kifejezésre dr. Pécsi felfogása az erőről. Ezen tétel logikai megállapítását a munka VIII. §-ában találhatjuk meg; reávonatkozó kisérleti eredmények nincsenek közölve.

A szemlélet tényleg mutatja, hogy kis q túlsúlyok alkalmazása esetében, r eltávolítása után a mozgás bizonyos idő mulva megszűnik.[2] Ezen mozgásmegszűnés a könyv szerint úgy megy végbe, hogy kis ideig tartó gyorsulás után hosszabb ideig egyenletesen mozog a súly, azután beáll a lassubbodó mozgás, mely éppen annyi ideig tart, a meddig tartott a gyorsulás.[3] Már pedig, ha a mozgás megszüntét a mozgásakadályok okoznák, akkor a lassubbodásnak rögtön el kellene kezdődni, a mint

[1] $s_{összes}$ értékei 10 megfigyelés középértékei egyesig kikerekítve. Egy sorozatban az eltérés a min. és max. érték közt II_3-ban 17·5 cm, III_3-ban 2 cm.

[2] Ugyanezen eset áll be, ha olyan q túlsúlyt alkalmazunk, mely mellett C minden r alkalmazása nélkül megindul. Kisérleteimnél, a könnyebb kereket használva, $q = 0·02$ gr. esetében C kb. 100 cm-nél állt meg, $q = 0·04$ gr-ot alkalmazva, kb. 190-nél.

[3] I. m. pag. 274, 3. pont; pag. 290, 7*a*—*b*. pont.

r-et felfogjuk.[1] Mindez világosan és egyszerűen következik a tétel, rajzzal is megvilágított logikai felépítéséből.[2]

Az állandó erő által okozott mozgásnak lényege tehát, e szerint, az egyenletes mozgás, melynek időtartama a kezdetben előforduló gyorsulásához dr. Pécsi szerint oly viszonyban van, mint 70 : 8.[3] A kérdés eldöntése csak a gondos kisérlet útján lehetséges. Az említett logikai tárgyalás a legkedvezőbb esetben is csak érdekes mintája lehetne annak, hogy miképpen lehetne még a mozgásjelenséget megmagyarázni. Azonban a pusztán hipothétikus tételekre nézve sem áll, hogy azokat a fizika azonnal elveti, a mint *valószínűbb* hipothézis merül fel;[4] a valószínűség magában még elégtelen és ingadozó kriterium a hipothézis megitélésénél. Annál kevésbbé járhatunk el így — bármilyen kifogástalan benne is a kigondolt új hipothézis — az oly tételeknél, melyek egyenesen a tapasztalatban gyökereznek.

Kisérleteimet úgy rendeztem be, hogy különböző r és q alkalmazásával próbálgatással meghatároztam az egyes másodperczek alatt befutott utakat. A kerekek közül a nehezebb, sárgarezet használtam. A következő eredményeket kaptam:

t''	1″ alatt megtett utak					
	$r = 3$ gr $q = 0{\cdot}1$ gr	$r = 4$ gr $q = 0{\cdot}1$ gr	$r = 5$ gr $q = 0{\cdot}1$ gr	$r = 3$ gr $q = 0{\cdot}2$ gr	$r = 4$ gr $q = 0{\cdot}2$ gr	$r = 5$ gr $q = 0{\cdot}2$ gr
1	26 cm	26 cm	26 cm	19 cm	19 cm	19 cm
2	24 «	22 «	23 «	21 «	23 «	21 «
3	16 «	16 «	16 «	17 «	14 «	19 «
4	16 «	16 «	17 «	12 «	12 «	12 «
5	16 «	16 «	16 «	12 «	14 «	12 «
6	13 «	12 «	13 «	12 «	13 «	13 «
7	10 «	8 «	16 «	12 «	13 «	13 «
8[5]	7 «	—	—	14 «	—	9 «

[1] I. m. pag. 274, 3. pont; pag. 286, 1. pont.
[2] I. m. pag. 174, II.
[3] I. m. pag. 274, 3. pont.
[4] I. m. pag. 171.
[5] A 8-ik másodperczen túl a megfigyelések, már egészen bizonytalan eredményeket adtak.

A kisérletek többszörös végrehajtása sem változtatta meg az eredmények itt látható ingadozó jellegét; ezek pedig semmi módon sem igazolják a szóban forgó elméleti tétel helyességét. Nem volna egyéb puszta ráfogásnál, ha e táblázat adatai alapján azt mondanók, hogy a mozgás észlelt csökkenése a fönt előadott módon menne végbe. Ha a fizika kisérleti tételeit ilyen eredmények igazolnák, akkor igazán jogos lenne kicsinyléssel viseltetni ezek iránt; szemben a tisztán logikus úton felépített törvényekkel. Mi csak azt mondhatjuk ki, hogy a kisérletek a *c)* tételt nem igazolják s így azt mint a valóságnak meg nem felelőt kell tekinteni.

VI.

Visszagondolva az elmondottakra, eredményeimet a következőkben foglalhatom össze:

1. Dr. Pécsinek *a)* és *b)* alatt idézett két törvénye semmi új dolgot sem mond.

2. Az ezen tételek igazolására szolgáló kisérleti jelenségre nézve, mely az s_{q+r} és $s_{összes}$ utak közt bizonyos szabályos összefüggést állapít meg, azon eredményt kaptuk, hogy csak mint «ideális» törvény tekinthető érvényesnek; akkor ugyanis, ha az a gyorsulás állandónak tekinthető. De ekkor sem jelent valami új, megmagyarázhatatlan tüneményt, mert egyenes következése a fizika mai alapelveinek.

3. A *c)* törvényt a kisérletek nem igazolják. Föltéve tehát, hogy ennek logikai megokolása ellen semmi kifogást nem lehetne tenni, mivel a tényeknek nem felel meg, nem fogadhatjuk el igaznak.

*

Végső konklúzióképpen azt mondhatjuk, hogy dr. Pécsi törvényei, a mennyiben jók, nem újak — s a mennyiben újak, nem nyernek igazolást a tények által. Ez utóbbi követelmény fontosságát e munkájában dr. Pécsi is elismeri;[1] én azonban az általa idézett mondást e formában ajánlom neki, valamint minden kezdő fizikusnak figyelmébe: Contra experimentum, **recte perfectum**, non valet argumentum.

Péch Aladár.

[1] I. m. pag. 285, III.

A Mathematikai és Physikai Társulat tizenhatodik rendes közgyűlése.

A választmánynak márczius 26-án kibocsájtott meghivójára a Mathematikai és Physikai Társulat XVI. rendes közgyűlését f. évi május hó 1-én tartotta meg. A kitett névsor több vendégen kívül a következő tagok részvételét igazolja:

Anderkó Aurél, Bartoniek Géza, Bauer Mihály, Beke Manó, Bihari Ferencz (Miskolcz), Bodola Lajos, Csemez József, Demeczky Mihály, br. Eötvös Loránd, Fröhlich Izidor, Grúber Nándor, br. Harkányi Béla, Hausbrunner Vilmos, Hoor Mór, Jánosi Imre, Jánosi Imréné, Jordan Károly, Kármán Ferencz, Kiss Gábor, Klupathy Jenő, Kopp Lajos, Kőnig Dénes, Kőnig Gyula, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Lakits Ferencz, Lévay Ede, Mattyasóvszky Kasszián (Győr), Mikola Sándor, Péch Aladár, Pécsi Albert, Pekár Dezső, Rados Ignácz, Rátz László, Riesz Frigyes, Riesz Marcel, Rucsinszki Lajos, Schuller Alajos, Selényi Pal, Steiner Lajos, Szabó Gábor, Szabó József (Vácz), Szabó Péter, Szerényi Géza, Szőke Béla, Sztrokay Kálmán, Terlanday Emil, Tőtössy Béla, Visnya Aladár, Wagner Alajos, Winter József, Wodetzky József, Zemplén Győző.

A közgyűlés napirendje:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1909-re.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. A tisztikar és választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

Báró Eötvös Loránd elnök megnyitja a közgyűlést, üdvözli a megjelent tagokat, különösen a vidékieket, a kik megjelenésükkel hozzánktartozóságuk ily szép jelét adták. Kimenti Feichtinger Győző volt pénztárnokot, Károly Irén alelnököt és Rados Gusztáv titkárt, a kiket betegség akadályozott a megjelenésben és kivánja, hogy egészségük mielőbb ismét helyreálljon.

A mult évi közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítése után a jelen ülés jegyzőkönyvének hitelesítésére Bihari Ferencz és Visnya Aladár tagtárs urakat kéri fel.

2. Titkári jelentés Kövesligethy Radótól.

Tisztelt Közgyűlés!

Az elmult esztendő, Társulatunk tizenhetedik éve, kevesebb dolgot ad a krónikásnak, mint az elmélkedőnek. Kipróbált Választmányunk most is irányította a régi szeretettel és odaadással Társulatunk minden lépését, tíz szakülésünk előadóban és tárgyban változatos, mathematika és physika között egyenletesen megoszló tárgysorozatot nyujtott folyton szép számban érdeklődő tagtársainknak és mathematikai tanulóversenyünk eredménye úgy a résztvevők, mint a beadott dolgozatok számánál és szintjénél fogva fényes volt.

Kevésbé kedvező jelentést adhatok folyóiratunkról. Hogy a XVII. évfolyam megjelenéséről egyáltalán szólhatok, alapszabályaink csak azon áldásos intézkedésének köszönhetem, mely a közgyűlést körülbelül negyedévvel a társulati év befejezése után teszi.

A ki azt vallja, hogy a mit határolatlannak szeretünk hinni, annak fejlődése nem lehet egyirányúan folyton emelkedő, az ilyen visszaesést elébb-utóbb várhatott, bár várakozásunk ilyféle bekövetkezése sem nem örvendetes, sem nem vigasztaló. Röviden fogva a dolgot, Társulatunk az elmult év második felében eléggé éles krisist állott ki, mely természetesen a legérzékenyebb szervet és szerencsére csak azt, folyóiratunkat sujtotta. De sietek hozzátenni, hogy a bajon teljesen, és remélem, hosszú időre túl vagyunk.

Őszszel egyszerre elapadt a physikai czikkek forrása és a physikai rész szerkesztője, a kitől ilyenkor elvárnám a szorgalmas munkatárs szerepét, hivatali teendőktől tartósan írói tétlenségre volt itélve. Innen az utolsó kötet befejező részének késedelmes megjelenése, anyagának egyenetlen eloszlása és csak 22 ívre rugó terjedelme. A viszonyok azonban most annyira javultak, hogy ezen hó végén ismét helyes mederben leszünk. A folyó kötet második része is teljesen biztosítva van és nagyobb terjedelmével ki lesz pótolható a megelőzőnek csonka volta.

Már a mult évben is utaltam arra, hogy a Magyar Tudományos Akadémia alig fogja tudományos testületeinket oly bőkezűen támogathatni, mint a hogy eddig tette, és legalább is bizonyos formai követelményekkel fogja megnehezíteni a segély megszavazását. Ezzel az intézkedéssel Társulatunk mintegy a szülői házat elhagyó ifjú módjára kilép az életbe, hogy — a mit eddig kegyelemből élvezett — saját érdemeivel vívja ki. Azt hiszem, szives munkatársaink között, a kiknek őszinte köszönetet mondunk, nincs egy sem, a ki a Társulat érdemeinek fokozásával anyagi érdekeinek előmozdításában nem kérne részt. A Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának és Mathematikai és Természettudományi Bizottságának a mult évben is kegyesen engedélyezett 2000 korona segélyeért pedig mondjunk hálás köszönetet és kérjük komoly törekvéssel kiérdemelendő jóindulatát a jövőre is. Még csak egy-két szót.

A XV. tanulóversenyt 1908 október hó 10-én tartottuk meg: 80 versenyző 77 dolgozatot adott be. Az első díjat Orphanides Etelka, a másodikat Kudlák Lajos nyerte el, és négy dolgozat dicsérőleg említtetett.

Tagtársaink száma az év végén 390 volt. Ezek közül van 182 budapesti és 208 vidéki tag; folyóiratunknak azonkívül még 82 előfizetője is van. Az utóbbi évek nyomasztó terheket róttak mindnyájunkra, kimutathatólag ennek rovására irandó a csekély apadás. Azonban ez irányban is észlelhető már némi javulás.

Súlyos csapást mért a Társulatra a halál is, a mely Korbúly Emil, Kovács István, Osztrogonácz János, Takáts Gyula, Than Károly, Thanhoffer Lajos és gróf Zayné-Hilbert Stefánia társainkat szólította el. Emlékük áldott legyen!

Társulatunk egy hároméves cyclusa ismét letelt: őszinte köszönetet mondva az eddig élvezett bizalomért és támogatásért, a tisztikar megbizói kezébe adja vissza mandátumát, utódai számára is kérve jóleső szives jóindulatukat.

És most még csak arra kérem a Tisztelt Közgyűlést, hogy titkári jelentésünket szíves tudomásul venni méltóztassék.

Budapest, 1909 május hó 1-én. *Kövesligethy Radó.*

3—4. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1909-re és a pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.

Lévay Ede pénztárnok előterjeszti az alábbi zárszámadást, vagyon-mérleget és költségelőirányzatot, melyeket tételenkint megmagyaráz, illetőleg indokol.

Az ügyvivő titkár felolvassa az 1909 április 30-ról kelt, Balog Mór és Bogyó Samu a közgyűlés részéről kiküldött pénztárvizsgálók jelentését, a mely így hangzik: «A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk».

1908. év

BEVÉTEL	Előirányzat Kor.	fill.	Eredmény Kor.	fill.
1907. évi zárszámadási maradvány	3160	49	3160	49
Folyó és köv. évi tagdijak	2400	—	873	—
Hátralékos tagdijak	300	—	274	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	380	—	100	—
Kamatok	550	—	625	80
Előfizetési dijak	750	—	606	—
Vegyesek			215	84
			7855	13

Vagyon-

VAGYON	1907. év végén Kor.	fill.	1908. év végén Kor.	fill.
Forgó tőke:				
Készpénz	735	60	704	58
Leszám. és pénzv. bankban takp. betét	48	80	48	80
M. kir. postatakarékpénztárban	1283	09	212	78
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján	1093	—	1180	—
Alaptőke:				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján:				
a) Készpénz	880	—	880	—
b) 2600 K névért. főv. kölcsönkötv.	2262	—	2262	—
c) 100 « « koronajáradék-kötv.	100	—	100	—
Első hazai takarékpénztári betét	108	—	108	—
Majthényi Ottó-féle hagyaték	10000	—	10000	—
Tagdijhátralék	300	—	1300	—
Föl nem vett hirdetési dij	380	—	200	—
	17190	49	16996	16

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk.

A választmány megbizásából: *Kövesligeth*

Rátz László s. k. *Beke Manó dr.* s. k. ügyviv

1909. évi költség-

BEVÉTEL	1908. évi előirányzat Kor.	fill.	1909. évi előirányzat Kor.	fill.
Zárszámadási maradvány	3160	49	2146	16
Folyó és köv. évi tagdijak	2400	—	2400	—
Hátralékos tagdijak	300	—	1200	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	380	—	200	—
Kamatok	550	—	550	—
Előfizetési dijak	750	—	700	—
Hiány	768	05	937	84
	10308	54	10134	—

zárszámadás.

KIADÁS	Előirányzat Kor.	fill.	Eredmény Kor.	fill.
Nyomdai költségek a mult évre	1536	54	1536	54
a folyó évre	3400	—	483	02
Irói tiszteletdijak a mult évre	1612	—	1612	—
a folyó évre	2600	—	1063	13
Expeditió- és irodai költségek	1000	—	824	28
Középiskolai tanulóverseny	160	—	162	54
Vegyesekre			27	46
Pénztári maradvány *a)* készpénzben			704	58
b) takarékp. betétben			1441	58
			7855	13

mérleg.

TEHER	1907. év végén Kor.	fill.	1908. év végén Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	1536	54	2000	—
Irói tiszteletdijak	1612	—	1074	—
Tiszta vagyon	14041	95	13922	16

Budapesten, 1909 április 30-án.

ladó dr. s. k. A közgyülés megbizásából:
itkár.

Bogyó Samu s. k. *Balog Mór* s. k.

előirányzat.

KIADÁS	1908. évi előirányzat Kor.	fill.	1909. évi előirányzat Kor.	fill.
Nyomdai költség a mult évre	1536	54	2000	—
a folyó évre	3400	—	3400	—
Irói tiszteletdijak a mult évre	1612	—	1074	—
a folyó «	2600	—	2600	—
Expeditió- és irodai költségek	1000	—	900	—
Középisk. tanulóverseny	160	—	160	—
Vegyesekre	—	—	—	—
	10308	54	10134	—

Dr. Lévay Ede
pénztárnok.

Mire a közgyűlés a meghallgatott jelentéseket tudomásul vévén, a pénztárnak a felmentvényt megadja. E felmentvény természetesen úgy értendő, hogy 1908 június közepéig Feichtinger Győző volt pénztárnoknak, azontúl pedig az új pénztárnoknak szól.

Elnök megköszönvén a pénztárvizsgálók fáradozását, a közgyűlés részéről a pénztár megvizsgálására újból Balog Mór és Bogyó Samu tagtárs urakat kéri fel.

5. A tisztikar és választmányi tagok választása.

A Társulat alapszabályainak 20. §-a értelmében a tisztikar lelép és a választmányból Bartoniek Géza, Szily Kálmán és Wagner Alajos kilépnek. Az elhunyt Than Károly helyébe, a kinek mandátuma most szintén lejárt, új tag választandó.

A választmány hagyományaihoz hiven a kilépett tagokat, Than Károly helyébe pedig Lengyel Béla egyetemi tanár urat ajánlja.

Elnök felfüggeszti a választás idejére a közgyűlést és Csemez József elnöklete mellett Sztrokay Kálmán és Zemplén Győző tagtársakból álló szavazatszedő bizottságot küld ki.

A választás megejtetvén, a bizottság elnöke jelenti az újból megnyitott közgyűlésnek, hogy a beadott 43 szavazat közül a régi tisztikar 42 szavazattal, tehát egyhangúlag újra megválasztatott.

A lelépett, illetőleg új választmányi tagok közül Bartoniek Géza és Szily Kálmán 42, Wagner Alajos és Lengyel Béla 40 szavazatot kapott.

Tisztikar és Választmány ezek szerint a régi marad azon kivétellel, hogy Than Károly helyébe Lengyel Béla lép.

6. Indítványok.

Elnök úr kijelenti, hogy bár a meghivó az alapszabályoktól követelt idő előtt szétküldetett, indítvány nem érkezett; a napirend utolsó pontja tehát elesik. A meghivó márczius 26-án küldetett szét, de sajtóhiba folytán az április 26-iki keltet viseli.

A tárgysor ki lévén merítve, Elnök a közgyűlést berekeszti.

★

A közgyűlést rendes előadó ülés követte, melyeken érdekes és tanulságos bemutatások kiséretében Frőhlich Izidor az «egyenletes törésű közegek belsejében szétterülő fénysugarak polározásának általános törvényéről» és Visnya Aladár «a legegyszerűbb æroplanokról» értekezett.

A Mathematikai és Physikai Társulat XVI. tanulóversenye.

A folyó évi október hó 9-én tartott XVI. tanulóversenyre Budapesten 47, Kolozsvártt 9 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen egyidejüleg zárt helyiségben, a Társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett, szabályszerűen folyt le. A verseny lefolyásáról mindkét helyen felvett jegyzőkönyv tanusága szerint a tételek kidolgozására engedett 4 órai idő alatt Budapesten 21, Kolozsvártt 2 dolgozat adatott be. A mult évhez képest a versenyzők száma 24-gyel, a beadott dolgozatok száma 54-gyel fogyott. E kedvezőtlen számbeli eredmény egyedüli oka, hogy a verseny napján az új helyiségeibe alig költözött Műegyetemen a beírások még be nem fejeződtek, hogy tehát versenyünk egy nagy contingense még a fővárosban sem volt. Hogy ez a csökkenés igazi oka, mutatja az a körülmény is, hogy Kolozsvártt a versenyzők száma állandó maradt. A mi egyébiránt a beadott dolgozatokat illeti, a biráló bizottság itélete szerint ezek szintje nem sülyedt, különösen ha tekintetbe veszszük, hogy az idei tételek kissé nehezebbek voltak, mint a tavalyiak.

E tételek különben a következők:

1. Bebizonyítandó, hogy három egymás után következő pozitiv egész szám közül a legnagyobbiknak köbe nem lehet egyenlő a másik kettő köbének összegével.

2. Bebizonyítandó, hogy bármely hegyes szögnek ívmértékben kifejezett mérőszáma kisebb, mint ama szög sinusának és tangensének számtani közepe.

3. Legyen az ABC háromszög magasságainak talppontjai a BC, CA, AB oldalokon rendre A_1, B_1, C_1, a három magasság közös pontja M; bebizonyítandó, hogy nem derékszögű ABC háromszög esetében az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszög mind a három oldalát érintő köröknek középpontjai rendre: M, A, B, C. Minő különbség mutatkozik hegyesszögű és tompaszögű ABC háromszögek esetei között?

A versenydolgozatok nyomban a verseny befejezése után lepecsételtettek és előzetes birálatra Szijártó Miklós tanár úrnak adattak ki. A teljes biráló bizottság üléséről és határozatáiól a következő jegyzőkönyv számol be.

Jegyzőkönyv

a XVI. tanulóversenyen beadott mathematikai dolgozatok elbirálása ügyében 1909 október hó 24-én tartott ülésről. Jelen voltak: Bartoniek Géza, Beke Manó, Éber József, Kőnig Gyula, Kőnig Dénes, Kopp Lajos, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Rados Gusztáv, Szekeres Kálmán és Szijártó Miklós előadó. Beadatott Budapesten 21, Kolozsvártt pedig 2 dolgozat.

A bizottság mindenekelőtt konstatálja, hogy az idei versenyben sokkal kevesebb tanuló vett részt, mint az előbbi évek versenyein. Valószínűnek tartja a bizottság, hogy ennek az apadásnak az oka a műegyetem késői megnyitásában rejlik.

Ezután Szijártó Miklós előadó jelentéstétele után az egyes dolgozatokat behatóan megvizsgálva, következőképpen határozott:

Az I. díjat Raj Lászlónak, a VI. ker. főreáliskolában Rados Ignácz tanár volt tanítványának adja, a ki mindhárom feladatot helyesen oldotta meg. A II. díjat Lukács Ferencznek, a budapesti V. ker. főgimnáziumban Virág Oszkár tanár növendékének adja, a kinek dolgozata, bár a második feladat megoldása hibás, éles logikai gondolkodásra valló szabatos fogalmazással tűnik ki. Végre dicséretre méltónak tartja Báron Gyula, ugyanazon intézetben ugyanazon tanár növendékének dolgozatát, a ki szintén csak két tételt dolgozott ki hibátlanul.

Budapest, 1909 október 24-én.

Szijártó Miklós, előadó. *Kőnig Gyula,* elnök.

Bartoniek Géza, *Kopp Lajos,*
Beke Manó, *Kövesligethy Radó,*
Éber József, *Kürschák József,*
Kőnig Dénes, *Rados Gusztáv,*
Szekeres Kálmán.

A f. évi november hó 4-én tartott választmányi ülés e jelentést tudomásul vette és a javaslathoz egyhangúlag hozzájárulván, azt határozattá emelte.

A nyomban rá tartott rendes ülés kezdetén kihirdettetett a verseny eredménye, a mire báró Eötvös Loránd elnök a nyerteseknek meleghangú, rövid beszéd után kiosztotta a jutalmat, megbizva őket azzal, hogy volt tanáruknak is vigyék a Társulat üdvözletét.

A Mathematikai és Physikai Társulat XVI. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

I. Raj László dolgozata.

1.

Bebizonyítandó, hogy 3 egymásután következő pozitiv egész szám közül a nagyobbiknak köbe nem lehet a másik kettő köbeinek összege.

Kidolgozás.

Legyen ama három pozitiv egész szám: $(n-1)$, n, $(n+1)$. [Nyilvánvaló, hogy $n>1$.] Ekkor a legnagyobbiknak köbe:

$$n^3+3n^2+3n+1$$

s a másik kettő köbeinek összege:

$$n^3+n^3-3n^2+3n-1.$$

Vajjon állhat-e ez az egyenlet?

$$n^3+3n^2+3n+1=n^3+n^3-3n^2+3n-1$$

vagy

$$6n^2+2=n^3.$$

Oszszuk el mindkét oldalt n-nel:

$$n^2=6n+\frac{2}{n}.$$

Ha $n>2$, akkor a baloldal egész, a jobb pedig törtszám; tehát ezen egyenletet a 2 nél nagyobb pozitiv egész számok közül egy sem elégíti ki; következőleg nem elégítik ki e számok a fenti egyenletet sem, melynek ez algebrai következménye. Hogy pedig az $n=2$ érték

---

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

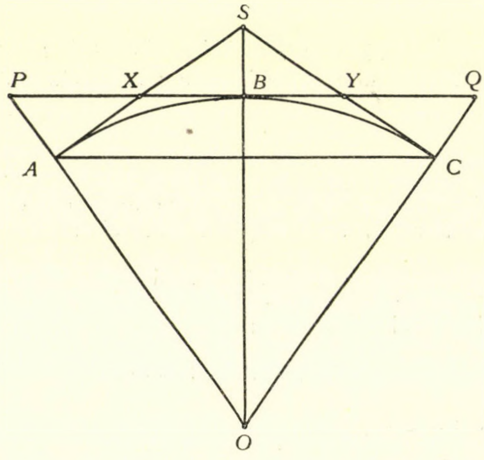
mellett sincs az egyenlet kielégítve, arról behelyettesítéssel közvetlenül meggyőződhetünk.

2.

Bebizonyítandó, hogy bármely hegyes szög ívmértékben kifejezett mérőszáma kisebb, mint a szög sinusának és tangensének számtani közepe.

Kidolgozás.

Rajzoljuk az egységsugarú körön kétszer egymás mellé a tetszésszerinti φ ívet $\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ A-tól B-ig és B-től C-ig. Messék az A-n és C-n túl meghosszabbított sugarak a B-n átmenő és AC-vel párhuzamos



egyenest P-ben és Q-ban. Állítsunk végül A-ban és C-ben érintőket a körhöz; ezek messék egymást S-ben.

Az ábrából látható, hogy:

$$\sin\varphi = \frac{AC}{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{PQ}{2}.$$

Tehát

$$\frac{\sin\varphi + \operatorname{tg}\varphi}{2} = \frac{AC+PQ}{4}.$$

Ha a PQ-nak az AS, ill. CS-sel való metszéspontjait X, ill. Y-nal jelöljük, akkor az $SXY\,\Delta$ és az $SAC\,\Delta$ hasonlóságából:

$$\frac{XY}{AC} = \frac{SX}{AS}$$

vagy:

$$\frac{XY}{AC} = \frac{\left(\frac{PQ}{2} - \frac{XY}{2}\right)}{\left(\frac{PQ}{2}\right)},$$

a miből:

$$XY = \frac{AC \,.\, PQ}{AC + PQ}.$$

Most alkossuk e különbséget:

$$\frac{\sin\varphi + \operatorname{tg}\varphi}{2} - XY$$

más alakban (a fentiek szerint):

$$\frac{AC+PQ}{4} - \frac{AC \,.\, PQ}{AC+PQ} = \frac{(AC-PQ)^2}{4\,(AC+PQ)}.$$

Mivel ez mindég pozitiv, következik, hogy:

$$\frac{\sin\varphi + \operatorname{tg}\varphi}{2} > XY.$$

Ámde XY tekinthető valamely a kör körül írt (szabálytalan) poligon egy oldalának, melynek középponti szögéhez tartozó íve: φ, tehát

$$XY > \varphi$$

s így:

$$\frac{\sin\varphi + \operatorname{tg}\varphi}{2} > \varphi.$$

3.

Vizsgáljuk például az A_1CB háromszöget. Látnivaló, hogy:

$$\frac{A_1C}{B_1C} = \frac{b\cos\gamma}{a\cos\gamma} = \frac{b}{a},$$

továbbá

$$A_1B_1^2 = b^2\cos^2\gamma + a^2\cos^2\gamma - 2ab\cos^3\gamma = c^2\cos^2\gamma,$$

tehát

$$\frac{A_1B_1}{A_1C} = \frac{c\cos\gamma}{b\cos\gamma} = \frac{c}{b}.$$

Minthogy pedig az eredeti γ szög is szöge a háromszögnek, tehát e háromszög az eredetivel hasonló. S így:

$$A_1B_1C\sphericalangle = \beta, \quad B_1A_1C = \alpha.$$

Egészen hasonló okoskodással kaphatjuk, hogy

$$AB_1C_1 \measuredangle = \beta, \quad BC_1A_1 \measuredangle = \gamma,$$
$$BA_1C_1 = \alpha, \quad B_1C_1A \measuredangle = \gamma.$$

Ebből nyilvánvaló, hogy például

$$AA_1C_1 = 90^\circ - \alpha = AA_1B_1$$

s

$$BB_1A_1 = BB_1C_1,$$
$$CC_1A_1 = CC_1B_1.$$

Tehát az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek a $C_1A_1B_1$, $C_1B_1A_1$ és $A_1C_1B_1$ szögeket felezik, s így közös pontjuk M, valóban az $A_1B_1C_1$ háromszögbe írható kör középpontja. Mivel pedig ez egyenesek az eredeti háromszög oldalaira merőlegesek, tehát ez oldalak az $A_1B_1C_1$ háromszög külső szögfelezői és így metszéspontjaik azon körök középpontjai, melyek az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalait kívülről érintik.

Raj László György.

II. Lukács Ferencz dolgozata.

I. tétel.

Legyen a három szám $a-1$, a, $a+1$. Ha $(a+1)^3 = a^3 + (a-1)^3$ volna, úgy kapnók:

$$a^3+3a^2+3a+1 = a^3+a^3-3a^2+3a-1,$$

a honnan

$$2 = a^3+6a^2 = a^2(a-6).$$

De mivel két szám szorzata csak akkor pozitiv, ha a két szám egyenlő előjelű, itt pedig $a^2 > 0$, kell hogy $a-6 > 0$ legyen, azaz $a > 6$. De akkor $a^2(a-6) > 36$ és nem lehet egyenlő 2-vel. Ellentmondásra jutottunk, a mi bizonyítja, hogy kiinduláspontunk helytelen volt és nem lehet $(a+1)^3 = a^3 + (a-1)^3$. Qu. e. d.

II. tétel.

Vegyük fel állításunk ellenkezőjét, azaz — a szög nagyságát ívmértékben kifejezve — legyen: 1°. $\left(a < \frac{\pi}{2}\right)$

$a \geqq \frac{1}{2}[\sin a + \operatorname{tg} a]$, $2a \geqq \sin a + \operatorname{tg} a$, $2a \cos a \geqq \sin a \cos a + \sin a$,

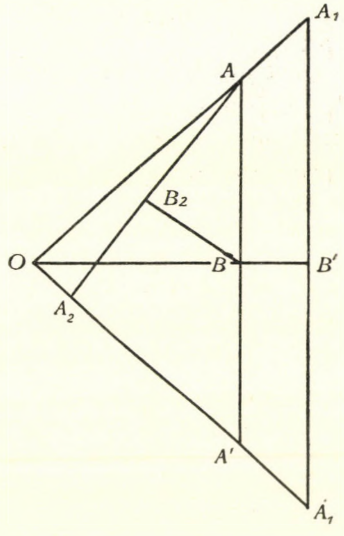
s mivel

$$\operatorname{tg} a > a, \quad 2 \operatorname{tg} a \cos a \geqq \frac{\sin 2a}{2} + \sin a,$$

kivonva mindkét oldalból $\sin \alpha$-t:

$$\sin \alpha \geqq \frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

Vegyünk most fel egy egységnyi sugarú kört és ábrázoljuk benne szokott módon a szögfüggvényeket: $AOB' \sphericalangle = \alpha \sphericalangle$ és így $\widehat{AB'} = \alpha$; $AB = \sin \alpha$; és ha $A'OB \sphericalangle = AOB \sphericalangle = \alpha \sphericalangle$, $AA_2 = \sin 2\alpha$. Ejtsünk az AA_2A' derékszögű háromszög átfogójának B középpontjából merőlegest AA_2, akkor a kapott $ABB_2 \triangle$ is derékszögű és mivel



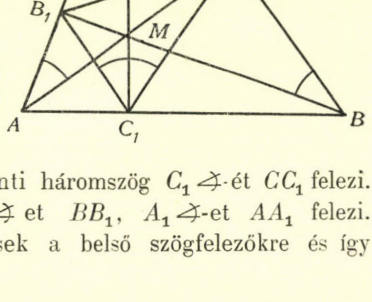
$$AB_2B \triangle \sim AA_2A' \triangle,$$

$$AB_2 = \frac{AA_2}{2} = \frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

Fenti egyenlőtlenség annyit mond tehát, hogy $AB \geqq AB_2$. De ez abszurd, mert egy derékszögű háromszög átfogója mindig nagyobb, mint az egyik befogó. Kiindulópontunk így hát helytelen és mindig $\alpha < \frac{1}{2}[\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha]$.

III. tétel.

Ha a háromszög derékszögű, a három talppont egybeesik a derékszög csúcsával, s talpponti háromszög tulajdonképen nincs is. 1°. Ha a háromszög hegyesszögű, akkor az $A_1B_1C_1 \triangle$ belül van teljesen az $ABC \triangle$-ben. A_1C_1CA egy kör kerületén fekszenek, mert



$$AA_1C \sphericalangle = AC_1C \sphericalangle = 90°$$

és

$$CAA_1 \sphericalangle = CC_1A_1 \sphericalangle,$$

mert egy íven nyugvó kerületi szögek. Ép így BCB_1C_1 egy körön fekszenek és $CBB_1 \sphericalangle = CC_1B_1 \sphericalangle$. Azonban $CAA_1 \sphericalangle = CBB_1 \sphericalangle$, mert ugyanazt az $ACB \sphericalangle$-et egészítik ki 90°-ra. Tehát $B_1C_1C \sphericalangle = A_1C_1C \sphericalangle$ és a talpponti háromszög $C_1 \sphericalangle$-ét CC_1 felezi. Ugyanígy bebizonyítható, hogy $B_1 \sphericalangle$ et BB_1, $A_1 \sphericalangle$-et AA_1 felezi. A külső szögfelezők pedig merőlegesek a belső szögfelezőkre és így

$C_1 \measuredangle$-et AB, $B_1 \measuredangle$-et AC, $A_1 \measuredangle$-et BC felezi kívülről. A mindhárom oldalt érintő körök középpontja tehát: a három belső szögfelező metszéspontja M, két-két külső szögfelezőnek és a harmadik szög belső felezőjének metszéspontjai: A, B, C.

2°. Ha a háromszög tompaszögű és $C \measuredangle$ a tompaszög, akkor a A_1 és B_1 pontok az oldalak meghosszabbítására esnek, a talpponti háromszög részben kívüle lesz $ABC\,\Delta$-nek, M pont pedig úgy $ABC\,\Delta$-ön, mint $A_1B_1C_1\,\Delta$-ön kívül esik. A fenti ábra csak abban változik, hogy benne M-et és C-t felcseréljük és így külön bizonyításra szükség nincs, csak látjuk, hogy a belső szögfelezők C-ben metszik egymást, két-két külső szögfelező és a harmadik szög belső felezője A, B és M-ben.

Lukács Ferencz.

MEGOLDOTT FELADATOK.

41. *Ismeretes, hogy* $\alpha = \frac{p}{q}$ *(hol p és q két oly raczionális egész szám, melyeknek nincs valódi közös osztójuk) csak akkor tehet eleget az*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_1x^{n-1} + a_n = 0$$

egész számú együtthatókkal biró algebrai egyenletnek, ha a_0 *osztható q-val és* a_n *osztható p-vel.*

Bebizonyitandó, hogy ha $\alpha = \frac{p}{q}$ *az adott egyenletnek valóban gyöke, akkor*

$$A_0 = a_0,\ A_1 = A_0\alpha + a_1,\ A_2 = A_1\alpha + a_2, \dots, A_{n-1} = A_{n-2}\alpha + a_{n-1}$$

rendre a q-val osztható egész számok.

(KÜRSCHÁK.)

*

Első megoldás dr. Demeczky Mihály egyetemi m. tanártól.

A kimondott tétel így is fogalmazható:

«Ha $\alpha = \frac{p}{q}$ gyöke az

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_1x^{n-1} + a_n = 0 \tag{1}$$

egyenletnek, akkor az egyenlet bal oldalát osztva a gyöktényezővel, $\left(x - \frac{p}{q}\right)$-val, a HORNER-féle osztási algorithmussal nyerjük a következő n—1-fokú egyenletet:

$$A_0x^{n-1} + A_1x^{n-2} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{n-2}x + A_{n-1} = 0,$$

a hol $A_0 = a_0$ és az A-*k rendre q-val osztható raczionális egész számok.*»

E tételt az általános GAUSS-tételtől függetlenül így bizonyítjuk: Ha $\frac{p}{q}$ gyöke az (1) alatti egyenletnek, akkor

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \dots + a_ip^{n-i}q^i + \dots + \\ + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0. \tag{2}$$

A (2) alatti egyenletből közvetlenül világos, hogy a_0 osztható q-val és a_n osztható p-vel. E tétel eddig is ismeretes volt. Vizsgáljuk rendre az A számokat.

$$A_1 = a_0 a + a_1 = \frac{a_0 p + a_1 q}{q}.$$

Ámde a (2) alatti egyenletet így is írhatjuk:

$$p^{n-1}(a_0 p + a_1 q) + a_2 p^{n-2} q^2 + \cdots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0.$$

Ebből közvetlenül világos, hogy $p^{n-1}(a_0 p + a_1 q)$ osztható q^2-vel; ámde p^{n-1} és q relativ törzsszámok, tehát $a_0 p + a_1 q$ osztható q^2-vel, azaz A_1 egész szám és osztható q-val.

Általában véve A_i ily alakban is írható:

$$A_i = a_0 a^i + a_1 a^{i-1} + \cdots + a_{i-2} a^2 + a_{i-1} a + a_i,$$

azaz

$$A_i = \frac{a_0 p^i + a_1 p^{i-1} + \cdots + a_{i-1} p q^{i-1} + a_i q^i}{q^i}.$$

Írjuk most a (2) alatti egyenletet ily alakban:

$$p^{n-1}(a_0 p^i + a_1 p^{i-1} q + \cdots + a_{i-1} p q^{i-1} + a_i q^i) +$$
$$+ a_{i+1} p^{n-i-1} q^{i+1} + \cdots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0.$$

Ebből az egyenletből közvetlenül világos, hogy:

$$p^{n-1}(a_0 p^i + a_1 p^{i-1} q + \cdots + a_{i-1} p q^{i-1} + a_i q^i)$$

osztható q^{i+1}-gyel.

Ámde p^{n-i} és q^{i+1} relativ primszámok, tehát

$$a_0 p^i + a_1 p^{i-1} q + \cdots + a_{i-1} p q^{i-1} + a_i q^i$$

osztható q^{i+1}-gyel, azaz A_i valóban egész szám és osztható q-val.

Q. e. d.

A tárgyalt tételt és bebizonyítását az ideálok elméletének segítségével lényeges módosítás nélkül átvihetjük a raczionális számok tartományáról genus-tartományokra is.

Példa.

$$3x^5 + 4x^4 + 5x^3 - 7x + 2 = 0. \qquad (3)$$

Minthogy a_n osztható 2-vel és a_0 osztható 3-mal, az egyenlet *lehetséges* raczionális gyökei között van $\frac{2}{3}$ is. Alkalmazzuk a Horner-féle osztási algorithmust

$$\begin{array}{c|cccccc} 2 & 3, & 4, & 5, & 0, & -7, & 2 \\ \hline 3 & 3, & 6, & 9, & 6, & -3, & 0 \end{array}$$

azaz $\frac{2}{3}$ valóban gyöke a (3) alatti egyenletnek és a nyert 4-edfokú egyenlet

$$3x^4+6x^3+9x^2+6x-3=0$$

együtthatói mind oszthatók 3-mal, a mint a bebizonyított tétel kivánja.

*

Második megoldás Kronberger Ede erzsébetvárosi áll. főgimn. tanártól.

Az

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

egyenletnek $\alpha=\frac{p}{q}$ gyöke lévén,

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\cdots+a_n\equiv 0,$$

vagy

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\cdots+a_nq^n\equiv 0, \qquad (1)$$

a mely azonosság, tehát a baloldala is osztható q-val. Az azonosság baloldalát rendezve, azután rendre q-val, q^2-tel, q^3-nal, ... q^{n-1}-nel osztva, ezt nyerjük:

$$\begin{aligned} & a_0p^n+q\,(a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}q+\cdots+a_nq^{n-1})\equiv 0, \\ & \left[a_0\frac{p}{q}+a_1\right]p^{n-1}+q\,(a_2p^{n-2}+\cdots+a_nq^{n-2})\equiv 0, \\ & \left[a_0\left(\frac{p}{q}\right)^2+a_1\frac{p}{q}+a_2\right]p^{n-2}+q\,(a_3p^{n-3}+\cdots+a_nq^{n-3})\equiv 0, \qquad (I) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \left[a_0\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\right]+qa_n\equiv 0, \end{aligned}$$

vagy másképp:

$$\begin{aligned} & A_0p^n+q\,(a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}q+\cdots+a_nq^{n-1})\equiv 0, \\ & (A_0\alpha+a_1)\,p^{n-1}+q\,(a_2p^{n-2}+\cdots+a_nq^{n-2})\equiv 0, \\ & (A_1\alpha+a_2)\,p^{n-2}+q\,(a_3p^{n-3}+\cdots+a_nq^{n-3})\equiv 0, \qquad (II) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & (A_{n-2}\alpha+a_{n-1})\,p+qa_n\equiv 0. \end{aligned}$$

A (II) alatti azonosságok mindegyike osztható q-val; ámde a azonosságok baloldalán levő összegek második tagja oszthatók q-val, kell tehát, hogy az első tagok is oszthatók legyenek; mivel pedig p és q relativ primszámok, azért kell, hogy

$$A_0,\ A_1 = A_0 a + a_1,\ A_2 = A_1 a + a_2, \ldots, A_{n-1} = A_{n-2} a + a_{n-1},$$

melyek (mint A_i-ről A_{i+1}-re való következtetéssel könnyen bebizonyítható) egész számok, oszthatók legyenek q-val. *Q. e. d.*

*

Harmadik megoldás Szőkefalvi Nagy Gyula tanárjelölttől Kolozsvárt.

Tegyük fel, hogy A_{k-1}-re áll a tétel, kimutatjuk, hogy A_k-ra is áll. Ha A_{k-1} q-val osztható egész szám, akkor

$$A_k = A_{k-1}\, a + a_k = \frac{A_{k-1}}{q}\, p + a_k$$

szintén *egész szám*, csak még azt kell kimutatni, hogy q-val osztható. Vegyük tekintetbe, hogy A_k ily alakban írható

$$A_k = a_0 a^k + a_1 a^{k-1} + \cdots + a_{k-1} a + a_k.$$

Minthogy pedig egyenletünknek gyöke az $a = \frac{p}{q}$, azért $x = a$ behelyettesítése után A_k kifejezésének tekintetbe vételével írhatjuk, hogy

$$A_k\, a^{n-k} + a_{k+1}\, a^{n-h-1} + \cdots + a_n = 0,$$

vagy q^{n-k-1}-val való átszorzás után

$$\frac{A_k}{q}\, p^{n-k} + a_{k+1}\, p^{n-k-1} + a_{k+2}\, p^{n-k-2}\, q + \cdots + a_n\, q^{n-k-1} = 0,$$

mely egyenlőség, tekintve, hogy az összes a koefficiensek, továbbá p és q egész számok közös osztó nélkül, csak akkor állhat fenn, ha A_k *osztható q-val.*

Ezzel a tétel be van bizonyítva, mivel $A_0 = a_0$-ra teljesül az A_{k-1}-re kiszabott feltétel.

Ugyanezt a feladatot még megoldották: Léber Gyula és Csada Imre tanárjelöltek, továbbá Kálmán Adolf műegyetemi hallgató. *Szerk.*

Utalványczim: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás.

az 1909. évi június hó 21-től december hó 31-ig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1907. évre: Benda Jenő 10 kor., Layer Antal dr. 6 kor. Összesen ... K 16.—

1908. évre: Benda Jenő 10 kor., Bricht Lipót 10 kor., Czekéliusz Antal 10 kor., Emszt Kálmán dr. 10 kor., Goldziher Károly dr. 10 kor., Király László 6 kor., Layer Antal dr. 6 kor., ifj. Léber Gyula 6 kor., Neustadt Lipót 10 kor., Obláth Richárd 6 kor., Petry Gyula 6 kor., Prokesch Ignác 6 kor., Purpringer István 6 kor., Rigó Ferenc 10 kor., Sós Ernő dr. 10 kor., Straub Sándor 10 kor., Straub L. Gyula 6 kor., Szekeres Kálmán dr. 10 kor., Szemethy Béla 10 kor., Szokol Pál dr. 6 kor. Összesen K 164.—

1909. évre: Angehrn Tivadar 10 kor., Asbóth Emil 10 kor., Baranyi Balázs 6 kor., Bauer Mihály 10 kor., Bretz Berta 6 kor., Csopey László 10 kor., Demeter István 6 kor., Eltscher Simon 6 kor., Emszt Kálmán dr. 10 kor., Félegyházy Antal 6 kor., Goldziher Károly dr. 10 kor., Hang Dániel dr. 6 kor., Heuer Ede 10 kor., Jánosi Imre dr. 10 kor., Javorik János 6 kor., Jordán Károly dr. 10 kor. Kirchknopf András 6 kor., Layer Antal dr. 6 kor., ifj. Léber Gyula 6 kor., Lutter János 10 kor., Mattyasovszky Kasszián 6 kor., Miller Gyula 6 kor., Neumann Jenő 6 kor., Neustadt Lipót 10 kor., Németh János 6 kor., Obláth Richárd 6 kor., Ortvay Rudolf 6 kor., Petry Gyula 6 kor., Purpringer István 6 kor., Radó Simon 6 kor., Salamon Ernő 6 kor., Selmecbányai főiskola math. tanszéke 6 kor., Simon Tádé 6 kor., Strausz Ármin 10 kor., Szabó Lajos 6 kor., Szarvas Lajos 6 kor., Székely Károly 6 kor., Széky István 6 kor., Szemethy Béla 10 kor., Szmodics Kázmér 6 kor., Tolnay Lajos 10 kor., Ulreich Ede 6 kor., Walek Károly dr. 6 kor., Zilahy László 6 kor. Összesen K 320.—

1910. évre: Anderkó Aurél dr. 10 kor., Dienes Pál dr. 10 kor., Füzy Rezső 10 kor., Layer Antal dr. 6 kor., Pap János 10 kor., Petry Gyula 6 kor., Suták József dr. 10 kor., Terkán Lajos dr. 6 kor. Összesen ... K 68.—

1911. évre: Füzy Rezső ... K 1.90

Előfizetési díjat fizettek:

1909. évre: Békéscsabai ágh. ev. Rudolf főgimnázium 10 kor., Szabadkai községi főgimnázium 10 kor., Szigetvári állami polg. fiuiskola 10 kor. Összesen ... K 30.—

1910. évre: Budapesti prem. tanárképző «Norbertinum» 10 kor., Budapesti ciszt. tanárképző «Bernardinum» 10 kor. Összesen ... K 20.—

	Összesen befolyt:	Jan. 1-től.
Hátralékokból ...	K 180.—	K 938.—
F. és köv. évi tagsági díjakból ...	K 389.90	K 1098.08
Előfizetési díjakból ...	K 50.—	K 556.—

Budapesten, 1909. évi december hó 31-én.

Dr. Lévay Ede, pénztárnok.
VI., Nagy János-utca 37. sz.