MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

TIZENNEGYEDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1905

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

TIZENNEGYEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Ismertető és önálló dolgozatok.

Physikai Laboratorium.

Társulati ügyek.

Helyreigazítás.

A XIV. évfolyam 344 lapján felülről a 2-ik sorban

$$\frac{1}{(1-y)\,x-y-11)\,x^2y\ldots(1-x^ny)}$$

helyett olvasandó

$$\frac{1}{(1-y)\,(1-xy)\,(1-x^2y)\ldots(1-x^ny)}$$

A 357. lapon felülről a 9-dik sorban $\frac{1}{24!4}$ helyett olvasandó $\frac{1}{24.4}$

A 358. lapon felülről a 11., 12., 13. és alulról az 5. és 7. sorokban 3.4! helyett olvasandó 3!4.

A 358. lapon felülről a 11. sorban 2.4! helyett olvasandó 2!4.

VIZSGÁLATOK AZ [1]-BŐL SZÁRMAZÓ ALGEBRAI GENUSZTARTOMÁNYOK KÖRÉBEN.*

((Első közlemény.)

KRONECKER ** az «Über die Irreductibilität von Gleichungen» czimű értekezésében egy rendkívül érdekes és sajátságos *analitikai* kritériumot állított fel a raczionális és egész együtthatójú egyenletek irreduczibilitásának (elméleti) felismerésére. E kritérium alkalmazása rávezette őt azután annak a ténynek felismerésére, melyet itt előlegesen úgy akarok kifejezni, *hogy két egyenlet* GALOIS-*féle rezolvensének megegyezésére nézve elegendő az, ha a két egyenlet többtagújának arithmetikai viselkedése bizonyos tekintetben megegyezik.* KRONECKER vizsgálatai a genusztartományok elméletének mély tanulmányozását teszik szükségessé, nevezetesen bizonyos törzsszámsokaságok «sűrűségének» meghatározását. E sűrűségek meghatározásánál KRONECKER hallgatólag feltételezte azoknak a létezését. E föltevés jogosságát FROBENIUS *** mutatta ki, a ki tehát így KRONECKER úttörő vizsgálatait szilárd alapokra helyezte. FROBENIUS értekezésében azonban nincs kifejtve KRONECKERnek előbb emlitett észrevétele. Felvetettem tehát azt a kérdést, hogy *valamely algebrai szám mennyiben határozható meg az őt jellemző egyenlet többtagújának arithmetikai viselkedése által?*

---

* A mit itt a KŐNIG-féle terminologiával [1]-ből származó genusztartománynak neveztünk, az tudvalevőleg azonos a DEDEKIND-féle algebrai számtesttel.

** Berliner Monatsberichte *1880* pp. *155—162.*

*** Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines alg. Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe. Berliner Sitzungsberichte 1896 pp. 689—703.

A vizsgálat eredményei, a melyeket első sorban a DEDEKIND-től talált és az itt tárgyalt genusztartományokra alapvető tételek alkalmazásával nyertem, a IV. részben vannak összeállítva. A jelen dolgozat azonban még a FROBENIUS-féle vizsgálatokat is egyszerűbb alakban adja, a mennyiben a tőle bebizonyított tételeket egyetlenegyre vezeti vissza.* (III. 2. és 3. §-a). Végül a III. 4. §-a ezeknek egy alkalmazását adja.

Előleges megjegyzések és egy algebrai segédtétel.

1. A következőkben ismeretesnek tesszük fel az algebrai számok elméletének alapjait, különösen az ideálelmélet alaptételét. Az ideálelmélet alaptételéhez tudvalevőleg különböző utakon lehet eljutni, más-más fogalomalkotások révén. Az ideálelmélet alkalmazásainál azonban, és itt ezekről van szó, teljesen egyre megy, hogy mily módon jutottunk annak birtokába. Erre nézve legyen szabad idéznem KŐNIG tanár úr szavait.** «E szerint az elmélet alapjainak megvetése után — az idevágó irodalom használatánál is — teljesen közömbös, vajjon az ideált az egyik vagy a másik módon akarjuk értelmezni.» Különben a dolgozatban felhasználandó arithmetikai tételek, bebizonyítás nélkül, össze vannak állítva az I. részben, a forrás megjelölésével.

2. A mi a szorosan vett algebrai részt illeti, föltesszük az algebrai egyenletek GALOIS-féle elméletéből az elemek ismeretét. Alapvető szolgálatot fog nekünk tenni a GALOIS-féle csoportnak egy sajátságos, különben régóta ismeretes, előállítása, a melyet itt előrebocsátunk. Legyen adva egy n-edfokú irreduczibilis egyenlet. A megfelelő GALOIS-féle egyenlet legyen m-edfokú, csoportját jelöljük $\mathfrak{Q}$-vel és a csoport elemeit a

$$G_1,\ G_2, \ldots,\ G_m \tag{1}$$

* FROBENIUS értekezése ezeken felül még ez ideig be *nem* bizonyított tételeket is tartalmaz.

** Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai p. 503.

betűkkel. Tartozzék már most az adott egyenlet egyik gyöke az (1) csoportnak $\mathfrak{K}$ alcsoportjához és legyen végre (1)-nek (*mod.* $\mathfrak{K}$) szerinti szimbolikus felbontása:

$$\mathfrak{Q}=\mathfrak{K}T_1+\mathfrak{K}_2T_2+\cdots+\mathfrak{K}_nT_n, \tag{2}$$

a hol a T_i elemek a (*mod.* $\mathfrak{K}$) inkongruens elemek képviselői.* Ha az adott egyenlet gyökeit átmenetileg az

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$$

betűkkel jelöljük, akkor az n-betüs GALOIS-féle csoport tudvalevőleg az

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2,\ldots, & x_n \\ Hx_1, & Hx_2,\ldots, & Hx_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

permutácziók összeségéből áll. Itt H az (1) elemek bármelyikét jelenti, Hx_i pedig azt az x elemet, a mely a H operáczió alkalmazása után származik. Azonban (2) következtében az x_i-k sorrendje úgy választható, hogy

$$\mathfrak{K}T_ix_1=x_i$$

legyen,** minélfogva a (3) betűpermutáczió a

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{K}T_1, & \mathfrak{K}T_2,\ldots, & \mathfrak{K}T_n \\ \mathfrak{K}T_1H, & \mathfrak{K}T_2H,\ldots, & \mathfrak{K}T_nH \end{pmatrix} \tag{3*}$$

komplexus-permutáczióval pótolható. Ugyanis e komplexusok mindegyike bizonyos tekintetben egy-egy elemnek tekinthető, mert ismeretes, hogy a

$$\mathfrak{K}T_iH,\quad \mathfrak{K}T_kH$$

komplexusok, mint az (1) elemekből álló rendszerek vagy egészen összeesnek, vagy teljesen különböznek egymástól. E kom-

* A véges csoportok elméletét illetőleg l. pl. e lapok IX. és XI. k. A GALOIS-féle elméletet illetőleg WEBER Lehrbuch d. Algebra czimű könyvének megfelelő fejezetét.

** Félreértések elkerülése végett az operácziók sorrendjét balról jobbra állapitjuk meg. Tehát pl. $\mathfrak{K}T_i$-ben először $\mathfrak{K}$ alkalmazandó.

plexus-permutácziók révén meghatározható a (3) cziklusainak száma és rendje. A cziklusok rendjét az szabja meg, hogy a

$$\mathfrak{K}T_i,\quad \mathfrak{K}T_iH,\quad \mathfrak{K}T_iH^2,\ \ldots \tag{4}$$

komplexusok között mennyi a különbözők száma. Ha e számot h_i-vel és a H elem hatványai által képezett csoportot $\mathfrak{H}$-val jelöljük, akkor h_i az a szám, mellyel meg kell szorozni $\mathfrak{K}$ rendjét, hogy a

$$\mathfrak{K}T_i\mathfrak{H} \tag{5}$$

komplexus különböző elemeinek számát megkapjuk. Azonban e helyett mi az (5) recziprok elemeiből alkotott

$$\mathfrak{H}T_i^{-1}\mathfrak{K} \tag{5*}$$

komplexus különböző elemeinek számát határozzuk meg, a mely az előbbivel megegyezik. És így

$$h_i = \frac{h}{d_i}, \tag{6}$$

ha h a H elem (vagy a $\mathfrak{H}$ csoport) rendje, d_i pedig a

$$\mathfrak{H},\ (T_i^{-1})\mathfrak{K}(T_i^{-1})^{-1}$$

csoportok legnagyobb közös alcsoportjának rendje.

Ezzel a (3) permutáczió cziklusainak számára és rendjére nézve a következő nevezetes szabály adódik. *Bontsuk fel a $\mathfrak{G}$ csoportot szimbolikusan (modd. $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$), azaz legyen*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}R_1\mathfrak{K} + \mathfrak{H}R_2\mathfrak{K} + \cdots$$

a hol az R_i elemek a (modd. $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$) inkongruens elemek képviselői. Ha már most a

$$\mathfrak{H},\ R_i\mathfrak{K}R_i^{-1}$$

csoportok legnagyobb közös alcsoportjának rendje d_i, akkor a (3) *permutáczió*

$$h_1 = \frac{h}{d_1},\ h_2 = \frac{h}{d_2},\ \ldots,\ h_i = \frac{h}{d_i},\ \ldots$$

$$\Sigma h_i = n$$

elemű cziklusokból áll.

3. E dolgozatban szükségünk lesz még transzczendens segédeszközökre. Nevezetesen az [1]-ből származó genusztartományhoz tartozó ideálok különböző osztályainak számát meghatározó ú. n. osztályszám-képletre.*

I. Az alkalmazandó arithmetikai tételek.**

1. Legyen

$$F(x)=x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n=0 \qquad (1$$

oly irreduczibilis egyenlet, melynek együtthatói raczionális egész számok. Jelöljük továbbá D-vel az egyenlet diszkriminánsát és d-vel az egyenlet egyik ω gyöke által meghatározott genusztartomány diszkriminánsát. A mint ismeretes

$$D=t^2d,$$

a hol t raczionális egész szám.

Ha már most p oly törzsszám, mely t-nek nem osztója, akkor igen nevezetes kapcsolat áll fenn egyrészt az $F(x)$ formának a p modulus szerinti felbontása, másrészt a p törzsszámnak a vizsgált tartományban ideáltörzstényezőkre bontott alakja között. Jelesül, *ha $F(x)$ irreduczibilis tényezőkre bontva*

$$F(x)\equiv F_1^{e_1}(x)\,F_2^{e_2}(x)\ldots F_r^{e_r}(x) \pmod{p}, \qquad (1)$$

ha továbbá az irreduczibilis tényezők fokszámai rendre

$$h_1,\ h_2,\ldots,\ h_i,\ldots,\ h_r,\ \Sigma e_ih_i=n, \qquad (1^*)$$

akkor a p törzsszámnak ideáltörzstényezőkre bontott alakja:

$$p=\prod_i \mathfrak{p}_i^{e_i},$$

* L. az algebrai számok elméletének bármely kézikönyvét.

** DEDEKIND: Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Congruenzen. Göttinger Abhandlungen *1878*. Az ideálelmélet fejlődésében igen nagy nehézséget okoztak azok a törzsszámok, melyek t-nek osztói.

L. még KŐNIG idézett könyvének IX. fejezetét.

a hol az egymástól különböző $\mathfrak{p}_i$ törzsideálok foka egyenlő h_i-vel.

Valamely $\mathfrak{p}$ törzsideál fokszáma (vagy néha rendszáma) alatt a vizsgált tartományra képezett normjának, a mely a p egy bizonyos hatványával egyenlő, kitevőjét értjük.

Még emlékeztetünk arra, hogy ez a fokszám az [1]-ből származó genusztartományok esetében egyenlő a (*mod.* $\mathfrak{p}$) inkongruens számok számosságával.

2. Ama p törzsszámokra, melyek t-nek osztói, vonatkozik DEDEKINDnek következő tétele,*** a melyet szintén alkalmazni fogunk.

Ha p a t-számnak osztója, akkor az $F(x)$ (mod. p) formának van többszörös osztója.

3. Még a következő egyszerű megjegyzést tesszük.

Ha az

$$F(x)=0$$

egyenletben x^n együtthatója nem 1, hanem valamely egytől különböző A_0 egész racz. szám, akkor is igaz marad az, hogy véges számú törzsszám kivételével az $F(x)$ forma arithmetikai viselkedése és a p törzsszám ideáltörzstényezőkre való felbontása között az előbbi kapcsolat áll fenn. Ugyanis:

$$F(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n$$

és így

$$F(x)=\frac{1}{A_0^{n-1}}\{y^n+A_1y^{n-1}+\cdots+A_{n-1}A_0^{n-2}y+A_nA_0^{n-1}\}$$

ha

$$x=\frac{y}{A_0}.$$

Ha már most p nem osztója A_0-nak, akkor $\frac{1}{A_0}$ (*mod.* p) zérustól különböző racz. egész szám és így az $F(x)$ (*mod.* p) irreduczibilis tényezőinek fokszáma és multipliczitása megegyezik a zárjelben álló forma irreduczibilis tényezőinek fokszámával és multipliczitásával.

---

* Az idézett helyen p. 19.

II. Algebrai vizsgálatok.

1. §. *A* Galois-*féle tartomány minden* $\mathfrak{P}$ *törzsideáljához, mely a diszkriminánsnak nem osztója, egy cziklikus alcsoport tartozik.**

1. Láttuk, hogy a p törzsszám ideáltörzstényezőkre való felbontása mily módon függ össze az az egyenlet többtagújának arithmetikai tulajdonságaival. A következőkben látni fogjuk, és ezt már részletesen tárgyaljuk, hogy a törzsideálokra való felbontás mily kapcsolatban van az egyenlet vagy az ω gyöke által adott genusztartomány csoportjának szerkezetével.

Először is legyen az egyenlet a racz. számok tartományában Galois-féle.

2. Jelöljük az m-edfokúnak föltételezett egyenlet csoportját $\mathfrak{G}$-vel, a melynek elemei legyenek:

$$G_1, G_2, \ldots, G_m. \tag{1}$$

Ha most $\mathfrak{P}$ oly törzsideál, a melynek foka h, akkor normja:

$$Nm. (\mathfrak{P}) = p^h = G_1\mathfrak{P} \,.\, G_2\mathfrak{P} \ldots G_m\mathfrak{P}, \tag{2}$$

a hol a G betű előre írása természetesen a permutáczió művelet végrehajtását jelenti. A (2)-ből következik, hogy $\mathfrak{P}$ összes konjugáltjainak, a melyek ismét törzsideálok a vizsgált a Galois-féle tartományban ugyanaz a foka. Tegyük most fel, hogy $\mathfrak{P}$ a tartomány diszkriminánsainak nem tényezője, azaz p csakis egyszerű tényezőkkel bir** és legyen a (2) jobboldalán álló törzsideálok közül r az egymástól különbözők száma, akkor az ideálelmélet alaptétele szerint

$$p = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_r, \tag{3}$$

---

* Hilbert: Grundzüge einer Theorie etc. Göttinger Nachrichten *1894*. Dedekind: Zur Theorie der Ideale. Göttinger Nachrichten. *1894*.

** Dedekind ismeretes tétele a tartomány diszkriminánsáról, először bebizonyitva a következő értekezésében: Über die Discriminanten endlicher Körper. Göttinger Abhandlungen 1882.

a miből tüstént következik, hogy a p minden törzstényezőjéhez a $\mathfrak{G}$ csoportnak egy h-adrendű alcsoportja tartozik, a mely az illető ideált változatlanúl hagyja. Jelöljük pl. a $\mathfrak{P}$-hez tartozó alcsoportot $\mathfrak{H}$-val; akkor a különböző törzstényezőkhöz tartozó csoportok a $\mathfrak{H}$-nak konjugáltjai a $\mathfrak{G}$ csoportban.

3. Be fogjuk bizonyitani, hogy a $\mathfrak{H}$ alcsoport *cziklikus* csoport. Legyen* $\rho\,(mod.\,\mathfrak{P})$ primitiv gyök és alakitsuk meg a

$$P(x)=(x-G_1\rho)(x-G_2\rho)\ldots(x-G_m\rho)=0 \qquad (4)$$

egyenletet. Minthogy az egyenlet együtthatói raczionális egész számok, azért:

$$P(x^p)\equiv\{P(x)\}^p\ (mod.\,p)$$
$$P(x^{p^2})\equiv\{P(x)\}^{p^2}\ (mod.\,p)\ \text{stb.}$$

és így:

$$P(\rho)\equiv P(\rho^p)\equiv P(\rho^{p^2})\equiv\cdots\equiv 0\ (mod.\,\mathfrak{P}). \qquad (4^*)$$

Ha tehát a (4) egyenletet, mint $(mod.\,\mathfrak{P})$-re vonatkozó kongruencziát fogjuk fel, akkor annak úgy ρ, mint ρ^p eleget tesz. Ámde $(mod.\,\mathfrak{P})$ minden kongruenczia egyértelműleg bomlik fel oly irreduczibilis tényezők szorzatára, a melyeknek együtthatói az adott tartomány egész számai és így (4)-ből kitűnik, hogy a G_i elemek között van oly G elem, melyre nézve:

$$G\rho\equiv\rho^p\ (mod.\,\mathfrak{P}). \qquad (5)$$

Erről a G elemről mindenekelőtt világos, hogy a

$$G,\ G^2,\ G^3,\ldots,\ G^h \qquad (6)$$

hatványok egymástól különbözők; mert ρ primitiv gyök lévén, a

$$\rho^p,\ \rho^{p^2},\ \rho^{p^3},\ldots,\ \rho^{p^{h-1}},\ \rho^{p^h}\equiv\rho\ (mod.\,\mathfrak{P}) \qquad (6^*)$$

számok $(mod.\,\mathfrak{P})$ egymástól különbözők. Ha tehát kimutatjuk, hogy a G elem benfoglaltatik a $\mathfrak{H}$ csoportban; akkor kimondhatjuk, hogy $\mathfrak{H}$ a G elemnek hatványaiból áll, mert $\mathfrak{H}$-nak

---

* Ismeretes, hogy a törzsideálokra vonatkoztatott kongruencziák elmélete teljesen analog a törzsszámmodulus elméletével, az [1]-ből származó genusztartományok esetében.

rendje h. És ez csakugyan így is van. A primitiv gyökök fogalmából következik, hogy a

$$G\rho \equiv \rho^p \ (mod. \mathfrak{P}) \tag{5}$$

eláczió maga után vonja a

$$Ga \equiv a^p \ (mod. \mathfrak{P}) \tag{5*}$$

kongruencziát, a hol a a tartomány tetszőleges $\mathfrak{P}$-vel nem osztható egész száma. Ebből látszik, hogy bármely egész szám és az a szám, melyet belőle a G alkalmazása után nyerünk, egyidőben osztható, vagy nem osztható a $\mathfrak{P}$ ideállal. Igy tehát a $G\mathfrak{P}$ ideál osztható a $\mathfrak{P}$ ideállal, de mindketten törzsideálok lévén; kell hogy legyen:

$$G\mathfrak{P} = \mathfrak{P}, \tag{7}$$

azaz G eleme a $\mathfrak{H}$ csoportnak, amint bebizonyitandó volt.

A $\mathfrak{H}$ csoportot, mint már említettük, a $\mathfrak{P}$ ideálhoz tartozó csoportnak a $\mathfrak{H}$-hoz konjugált alcsoportok összeségét, röviden a «$\mathfrak{H}$ osztályát»* a p törzsszámhoz tartozónak fogjuk mondani.

2. §. *A p törzsszám ideáltörzstényezőkre bontása tetszőleges tartományokban.***

1. Minden genusztartományt a hozzátartozó Galois-féle tartomány alárendeltjének tekinthetünk. És így kitűzött feladatunk a következő általánosabban foglaltatik. Ismervén a p törzsszám felbontását egy Galois-féle tartományban, állítsuk elő annak felbontását valamely alárendelt tartományban.

Mi oly törzsszámokra szorítkozunk, melyek a Galois-féle tartomány diszkriminánsának nem tényezői.

Emlékeztetünk még arra, hogy a Galois-féle tartomány diszkriminánsa osztható bármely alárendelt tartomány diszkriminánsának törzstényezőivel, esetleg még másokkal is; ha azon-

---

* Ez a szó a véges csoportok elméletében többféle értelemben használatos.

** Dedekind: Zur Theorie der Ideale. Göttinger Nachrichten *1894*.

ban az alárendelt tartomány GALOIS-féle tartománya összeesik a vizsgált GALOIS-féle tartománnyal, akkor a két tartomány diszkriminánsának törzstényezői ugyanazok.* Erre a tényre még szükségünk lesz.

2. Jelöljük az adott m-edfokú GALOIS-féle tartományt K-val, csoportját $\mathfrak{G}$-vel, az alárendelt n-edfokú tartomány tartozzék a $\mathfrak{K}$ alcsoporthoz és jelöljük $\overline{K}$-val. Mindenekelőtt

$$p = \Pi \mathfrak{P}_k = \Pi \mathfrak{p}_i, \tag{1}$$

a hol a $\mathfrak{P}_k$ ideálok a K, a $\mathfrak{p}_i$ ideálok a $\overline{K}$ tartományban különböző törzsideálokat jelentenek.

Az ideálelmélet alaptételéből és a K, $\overline{K}$ tartományok viszonyából következik, hogy minden $\mathfrak{p}$ ideál nem más, mint bizonyos számú $\mathfrak{P}$ ideálnak a szorzata. Ugyanis a $\mathfrak{p}$ ideálok a felérendelt K tartományban esetleg még egymástól különböző törzsideálok szorzatára bonthatók és most az ideálelmélet alaptételét (1)-re alkalmazva, igazoljuk az előbbi állítást. Tartozzék a $\mathfrak{P}$ ideál a $\mathfrak{H}$ cziklikus alcsoporthoz. Ha most $\mathfrak{p}$ pl. az

$$R\mathfrak{P} \tag{2}$$

ideállal osztható, a hol R a $\mathfrak{G}$ csoportnak eleme, akkor tüstént látható, hogy $\mathfrak{p}$ osztható a

$$\mathfrak{H}R\mathfrak{K}\mathfrak{P}^{**} \tag{2*}$$

ideálok mindegyikével és így osztható a (2*) alatt álló különböző ideálok szorzatával. Másrészt ez a szorzat alkotásánál fogva egy az egységtől különböző és a $\overline{K}$ tartományhoz tartozó ideál; a mely, minthogy $\mathfrak{p}$ törzsideál, a $\mathfrak{p}$-vel egyenlő tartozik lenni.

3. Feladatunk tehát arra redukálódik, hogy a (2*) komplexusban foglalt különböző ideálok számát meghatározzuk.

Minthogy a $\mathfrak{P}$ ideál a $\mathfrak{H}$ csoporthoz tartozik, ez a szám nem más, mint az, a mellyel $\mathfrak{H}$ rendjét meg kell szorozni, hogy a

---

* L. pl. HILBERT: Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung. Bd. IV. pag. 266.

** A műveletek sorrendje, mint már említettük, úgy van értve, hogy először a $\mathfrak{H}$-t alkalmazzuk.

$$\mathfrak{H}R\mathfrak{K} \tag{3}$$

komplexus különböző elemeinek számát megkapjuk.

De $\mathfrak{K}$ rendje $\frac{m}{n}$ és így a keresett szám

$$\frac{m}{nd},$$

ha d-vel jelöljük a

$$\mathfrak{H},\ R\mathfrak{K}R^{-1}$$

csoportok legnagyobb közös alcsoportjának rendjét. Ebből tüstént meghatározhatjuk a $\mathfrak{p}$-nek, mint a $\overline{K}$-hoz tartozó ideálnak fokszámát. Ugyanis a $\mathfrak{p}$ ideál $\frac{m}{nd}$ számú különböző $\mathfrak{P}$ ideál szorzata és így a K tartományra vonatkozó normja $= p^{\frac{hm}{nd}}$; a $\mathfrak{p}$ ideál a $\mathfrak{K}$ helyettesitéseit megengedi, ha tehát a $\overline{K}$ alárendelt tartományra vonatkozó normját $\overline{N}\mathfrak{m}$.-vel jelöljük, akkor a normnak definicziója szerint:

$$\overline{N}\mathfrak{m}.^{\frac{m}{n}} = p^{\frac{hm}{nd}},\quad \overline{N}\mathfrak{m}. = p^{\frac{h}{d}}$$

vagyis a keresett rendszám $\frac{h}{d}$.

4. Ezzel a p törzsszámnak felbontására, ha az a Galois-féle tartomány diszkriminánsának nem tényezője, a következő szabályt nyertük.

Előállítandó a $\mathfrak{G}$ csoportnak (modd. $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$) való szimbolikus felbontása. Legyen:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}R_1\mathfrak{K} + \mathfrak{H}R_2\mathfrak{K} + \cdots$$

a hol az R_i elemek a (modd. $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$) inkongruens elemek képviselői. Ha már most a

$$\mathfrak{H},\ R_i\mathfrak{K}R_i^{-1}$$

csoportok legnagyobb közös alcsoportjának rendje d_i; akkor:

$$p = \Pi\mathfrak{p}_i$$

a hol a $\mathfrak{p}_i$ törzsideálok foka

$$h_i = \frac{h}{d_i},\ \Sigma h^i = n.$$

5. E szabály levezetésének semmiféle szerepet nem játszott az, hogy a $\overline{K}$-hoz tartozó Galois-féle tartomány összeesik-e a K Galois-féle tartománnyal, avagy annak csak egy alárendelt tartományát képezi. Ha föltesszük, hogy a $\overline{K}$-hez tartozó Galois-féle tartomány K-val összeesik, akkor a dolgozat elején kifejtett algebrai segédtétel révén a következő nevezetes, szintén Dedekind*-től eredő tételt nyerjük. *Arra nézve, hogy létezzék oly törzsszám, mely valamely az* [1]-*ből származó n-edfokú genusztartományban olyan különböző törzsideálok szorzatára legyen bontható, a melyeknek foka rendre:*

$$h_1, h_2, \ldots, h_i, \ldots; \Sigma h_i = n$$

szükséges; hogy az alapul szolgáló egyenlet n-betűs Galois-féle csoportja tartalmazzon olyan helyettesítést, a melynek cziklusai rendre:

$$h_1, h_2, \ldots, h_i, \ldots; \Sigma h_i = n$$

elemből állanak.

6. A legnagyobb érdekkel bír már most az a kérdés, hogy az előbbi tétel megfordítható-e? Erre a kérdésre teljes szigorral Frobenius válaszolt, a ki értekezésében Kronecker úttörő vizsgálataiból indult ki. E vizsgálatok már transzczendens segédeszközöket igényelnek. A következő rész 1. §-a a Kronecker-féle alapképletet vezeti le, a 2. és 3. §-a Frobenius vizsgálatait egyszerűbb alakban adja, a mennyiben összes tételeit egyetlenegyből származtatja,** a míg 4. §-a e vizsgálatoknak egy alkalmazását adja.

Bauer Mihály.

* Közzétéve Frobenius idézett értekezésében.

** Frobenius értekezése bevezetésében említi, hogy Hurwitz-tól értesült, hogy tárgyalásai egyszerűsíthetők. Azt, hogy tételei egyre vezethetők vissza, nem említi.

AZ ANALYSIS SITUS-NAK EGY TÉTELÉRŐL.

Az «analysis situs» a folytonos, és megfordíthatóan egyértelmű transzformácziók csoportjának invariáns-elmélete.

Feladata e szerint a pontsokaságokat [1] osztályokba sorozni olyképen, hogy ugyanabba az osztályba azok tartozzanak, amelyek folytonos és megfordíthatóan egyértelmű transzformácziókkal egymásba átvihetők. Ez osztályok közül kettő, *az egyszerű folytonos görbeív* és az *egyszerűen zárt folytonos görbe* az analizis több ágára alapvető fontosságúak.

Az egyszerű folytonos görbeív oly pontsokaság, mely egy egyenes folytonos vonaldarabra ennek végpontjaival együtt folytonosan és megfordíthatóan egyértelműen ábrázolható.

Az egyszerűen zárt folytonos görbe két közös végpontokkal bíró egyszerű folytonos görbe összetétele, melyeknek a végpontokon kívül egy pontjuk sem közös. Az egyszerűen zárt folytonos görbe tehát a körvonalon ábrázolható folytonosan és megfordíthatóan egyértelműen.

Jordan egyik tétele [2] szerint a folytonos, megfordíthatóan egyértelmű transzformáczió megfordítása is folytonos: az egyszerűen

---

[1] A transzfinit pontsokaságok elméletének alapvető fogalmait illetőleg l.: G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883, egyszersmind Math. Ann. 21. k., valamint Cantor többi idevágó dolgozatait.

C. Jordan, Cours d'analyse, 2. kiad. I. k.

E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898.

Összefoglaló ismertetést ad Schoenflies két referátumban: Jahresberichte d. deutschen Math. Ver. 1899. (külön is megjelent) és Encyklopedie der math. Wiss. I. A. 5.

[2] Cours d'analyse, 2. kiad. I. k. 53. o.

folytonos görbeívek és az egyszerűen zárt folytonos görbék tehát tényleg a fenti értelemben a pontsokaságok egy-egy osztályát alkotják.

A pontsokaságoknak ez a két osztálya az analizisben viselt fontos szerepüket két tulajdonságuknak köszönik: az első, hogy az egyszerű folytonos görbeív egyszerűen, az egyszerűen zárt folytonos görbe pedig cziklikusan rendezett perfekt sokaságoknak[1] tekinthetők, mely elrendezés bizonyos értelemben folytonos; a másik pedig, hogy az egyszerűen zárt folytonos görbe, ha síkgörbe, a síkot két összefüggő tartományra osztja, melynek a görbe közös határa.

Az első tulajdonság közvetetlenül következik a definicziókból, a másodikat Jordan[2] bizonyította be először. Jordan ugyanis megmegmutatta, hogy mindegyik tartomány két pontja összeköthető oly — még pedig véges számú egyenes vonaldarabból összetett — egyszerű folytonos görbe-ívvel, mely teljesen a tartományon belül fekszik, ellenben minden a két különböző tartomány egy-egy pontját összekötő egyenes vonaldarabokból álló egyszerű folytonos görbeív a zárt görbét legalább egy pontban metszi.

Mindegyik tartomány bármely pontja összeköthető az egyszerűen zárt folytonos görbe bármely pontjával oly egyszerű folytonos görbeívvel, mely e pont kivételével teljesen a tartományban fekszik.[3] Ez a folytonos görbeív azonban már nem állhat mindig véges számú egyenes vonaldarabból.

Schoenflies[4] vetette fel a kérdést, vajjon Jordan tétele megfordítható-e? Szabatosabban, milyen feltételek mellett alkot perfekt pontsokaság, mely a síkot két összefüggő tartományra

---

[1] Perfekt sokaság alatt itt zárt és önmagában sűrű, vagyis olyan sokaságot értünk, mely derivált sokaságával azonos; az ilyen sokaságok jelölésére Cantor a perfekt, Borel az absolument parfait jelzőket használják. Jordan a parfait szóval zárt sokaságot jelöl.

[2] Cours d'analyse, 2. kiad., I. k., 92. o.

[3] E tételt Schoenflies volt szíves velem közölni, bebizonyítása legközelebb megjelenik a Göttinger Nachrichten-ben és később «Beiträge zur Theorie der Punktmengen» III. alatt a Math. Annalen-ben.

[4] Göttinger Nachrichten, 1902, 185. o. — Math. Annalen, 58. k. 195. o.

osztja, egyszerűen zárt folytonos görbét? SCHOENFLIES kimutatta, hogy *arra, hogy az elválasztó perfekt sokaság egyszerűen zárt folytonos görbe legyen, elegendő, hogy minden pontja a sík minden más pontjával oly — véges számú vagy végtelen sok egyenes darabból álló — egyszerű folytonos görbeívvel legyen összeköthető, mely az illető ponton kívül a perfekt sokaság egy pontját sem tartalmazza*. Hogy ez a föltétel egyszersmind szükséges is, az SCHOENFLIES legújabb vizsgálataiból következik.

E czikk szerzője mutatott rá arra,[1] hogy a JORDAN-féle tételnek ez a megfordítása nagyon egyszerűen bizonyítható be, ha a bebizonyítás élére egy bizonyos eljárást helyezünk, melynek alapján a sokaság pontjai cziklikusan rendeztetnek; ugyanazt az eljárást, melynek segítségével HILBERT «Über die Grundlagen der Geometrie»[2] czimű dolgozatában az úgynevezett «valódi kör»-t a számsík körén ábrázolja. A HILBERT-féle dolgozat 6. §-ában adott tétel bebizonyítása ugyanis akkép módosítható, hogy ahhoz a vizsgálatok alapját képező axiomák helyett csupán a megszerkesztett alakzatnak már ezek alapján megállapított tulajdonságai használtatnak föl; e módosítás után az egész eljárás az itt tárgyalt általánosabb problemára könnyű szerrel átvihető.

Ilyen módon kimutathatjuk, hogy a feltételünknek eleget tevő perfekt pontsokaság a körvonalon folytonosan és megfordithatóan egyértelműen ábrázolható. Az eljárás kapcsán azonban nem csak az ábrázolás lehetőségét mutatjuk meg, hanem magát az ábrázolást is megadjuk. A SCHOENFLIES-féle tételt e mellett valamivel általánosabb fogalmazásban adjuk, amennyiben egyenes vonaldarabokból álló görbeív helyett a legáltalánosabb egyszerű folytonos görbeívet engedjük meg. Természetesen a tétel a SCHOENFLIES-féle fogalmazás megtartásával is hasonló módon bebizonyítható.

Fogalmazásunkban a tétel a következő:

---

[1] Math. Annalen, 59. k., 409. o.

[2] Math. Annalen, 56. k., 381. o. (Újra lenyomtatva: HILBERT, Grundlagen der Geometrie, 2. kiad., 121. o.)

Ha valamely síkbeli, végesben[1] *fekvő* $\mathfrak{P}$ *perfekt pontsokaság a sík többi pontjait egy belső* $\mathfrak{Y}$ *és egy külső* $\mathfrak{A}$ *pontsokaságra osztja olykép, hogy*

1. *az* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{A}}$ *sokaság bármely két pontja oly egyszerű folytonos görbeívvel köthető össze, mely csak az* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{A}}$ *sokaság pontjait tartalmazza;*

2. *a* $\mathfrak{P}$ *sokaság bármely* P *pontja az* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{A}}$ *sokaság bármely pontjával oly egyszerű folytonos görbeívvel köthető össze, mely a* P *pont kivételével csak az* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{A}}$ *sokaság pontjait tartalmazza;*

3. *minden egyszerű folytonos görbeíven, mely az* $\mathfrak{Y}$ *sokaság egy pontját az* $\mathfrak{A}$ *sokaság egy pontjával összeköti, a* $\mathfrak{P}$ *sokaságnak legalább egy pontja fekszik:*

akkor a $\mathfrak{P}$ *pontsokaság egyszerűen zárt folytonos görbe, vagyis a körvonalra folytonosan és megfordíthatóan egyértelműen ábrázolható.*

I. A $\mathfrak{P}$ sokaság cziklikus rendezése.

P_1 és P_2 a $\mathfrak{P}$ sokaság 2 tetszés szerinti pontja. Kössük össze a P_1 és P_2 pontokat az $\mathfrak{Y}$ sokaság valamely J pontjával egy-egy egyszerű folytonos görbeívvel, melyek a P_1, ill. P_2 pontok kivételével csak $\mathfrak{Y}$-beli pontokból állanak. Ha e görbeíveknek J ponton kívül egyéb közös pontjuk is van, akkor mindenesetre van ezek között egy J^* pont, mely az első görbeíven J-től P_1 felé haladva az utolsó.

Ha ugyanis a IP_1 görbeív pontjai két osztályba soroljukak, úgy, hogy egy pont az első osztályba tartozik, ha közte és P_1 között nincsen a két görbeívnek metszéspontja, ellenkező esetben pedig a másodikba, akkor az így létesített Dedekind-féle szeletalkotás meghatározza az I^* pontot. A két görbeívnek P_1 és I^*, I^* és P_2 között fekvő darabjai együttvéve a P_1P_2 egyszerű folytonos görbe-

---

[1] Az a föltevés, hogy a $\mathfrak{P}$ pontsokaság a sík véges részében fekszik, nem tartalmaz lényeges megszorítást; ugyanis minden a síkban fekvő pontsokaság, hacsak nem az egész síkon mindenütt sűrű, reciprok rádiusok által végesben fekvő és vele az analysis situs szempontjából equivalens pontsokaságba transzformálható.

ívet alkotják, mely végpontjai kivételével teljesen az I sokaságban fekszik.

A $\mathfrak{P}$ sokaság bármely két pontja tehát összeköthető egy, végpontjai kivételével teljesen az $\mathfrak{Y}$ sokaságban fekvő P_1P_2 egyszerű folytonos görbeívvel. Hasonlóképen a két pont összeköthető egy $\overline{P_1P_2}$ egyszerű folytonos görbeívvel, mely végpontjai kivételével teljesen az $\mathfrak{A}$ sokaságban fekszik. A P_1P_2 és $\overline{P_1P_2}$ görbeívek együttvéve a $\overline{P_1P_2}$ egyszerűen zárt folytonos görbét alkotják, melynek a $\mathfrak{P}$ sokasággal csupán P_1 és P_2 pontjai közösek.

A $\mathfrak{P}$ sokaság bármely más pontpárja a görbéhez viszonyítva kétféle helyzetű lehet: vagy az egyik pont a görbén belül, a másik a görbén kívül fekszik: a görbe a két pontot elválasztja; vagy pedig mindkettő a görbén belül, illetve mindkettő a görbén kívül fekszik: a görbe a pontpárt nem választja el.

Ha a P_1P_2 görbeívet a $\overline{P_1P_2}$ görbeív helyett egy másik $\overline{\overline{P_1P_2}}$ egyszerű folytonos görbeívvel teszszük össze, mely végpontjai kivételével teljesen az $\mathfrak{A}$ sokasághoz tartozik, egy új $\overline{P_1P_2}$ egyszerűen zárt folytonos görbét nyerünk. A P_3, P_4 pontpár a két zárt görbére nézve ugyanolyan helyzetű. Ha ugyanis például a pontpár a $\overline{P_1P_2}$ görbén belül fekszik, akkor összeköthető egy oly P_3P_4 folytonos egyszerű görbeívvel, mely a $\overline{P_1P_2}$ görbén belül fekszik és a P_3, P_4 pontok kivételével csak $\mathfrak{Y}$-beli pontokat tartalmaz. Ez a görbeív ugyanis összetehető egy a P_3 és P_4 pontokat összekötő és végpontjai kivételével teljesen $\mathfrak{Y}$-ben fekvő egyszerű folytonos görbeív és egy a $\overline{P_1P_2}$ görbén belül fekvő és azt eléggé megközelítő egyszerűen zárt sokszög egyes darabjaiból. Az így előállított P_3P_4 görbeív egyszersmind a $\overline{\overline{P_1P_2}}$ görbén is belül fekszik, tehát a P_3, P_4 pontokat ez a görbe sem választja el. Ha még a P_1P_2 görbeívet egy végpontjai kivételével teljesen $\mathfrak{Y}$-ben fekvő P_1P_2 egyszerű folytonos görbeívvel helyettesitjük, akkor hasonló módon mutathatjuk meg, hogy a P_3, P_4 pontpárt az így nyert $\overline{\overline{P_1P_2}}$ görbe sem választja el.

Abban az esetben, midőn a P_3, P_4 pontpár a $\overline{P_1P_2}$ görbén kívül fekszik, a bebizonyítás teljesen analog. A P_3, P_4 pontpár tehát valamennyi zárt görbére nézve, melyek egy végpontjai kivételével

$\mathfrak{Y}$-ben fekvő P_1P_2 egyszerű folytonos görbeívből és egy végpontjai kivételével $\mathfrak{A}$-ban fekvő $\overline{P_1P_2}$ folytonos görbeívből állíttatnak össze, ugyanolyan helyzetű. Ellentmondás nélkül definiálhatjuk tehát, hogy a P_1, P_2 pontpár a P_3, P_4 pontpárt elválasztja, ill. nem választja el, a szerint, a mint elválasztják vagy nem választják el a P_3, P_4 pontpárt a $\overline{P_1P_2}$ görbék.

Hasonló eljárás segítségével bizonyíthatjuk be még a következő tételeket:

Ha a P_1, P_2 pontpár a P_3, P_4 pontpárt elválasztja, akkor a P_3, P_4 pontpár is elválasztja a P_1, P_2 pontpárt.

Ha a P_1, P_4 pontpárt a P_2, P_5 pontpár és a P_2, P_4 pontpárt a P_3, P_5 pontpár elválasztják, akkor a P_1, P_4 pontpárt a P_3, P_5 pontpár is elválasztja.

Mindebből látjuk, hogy a $\mathfrak{P}$ pontsokaság pontjai cziklikus, vagyis a pontpárok kölcsönös elválasztásának szempontjából ugyanoly elrendezésüek, mint valamely a körvonalon fekvő pontsokaság.

II. A $\mathfrak{P}$ sokaság cziklikus rendje összefüggő.

Látszólag nem lehetetlen, hogy a $\mathfrak{P}$ sokaság elrendezésének megtartásával folytonosan és megfordithatóan egyértelmüen ábrázolható egy körvonalon fekvő perfekt pontsokaságon, mely több perfekt sokaságból áll és e szerint nem összefüggő. Az ilyen ábrázolás lehetetlensége és ezzel a $\mathfrak{P}$ sokaság összefüggő volta a következő tételen alapszik:

Minden P_1, P_2 pontpárhoz tartozik egy és ennélfogva tetszésszerinti sok olyan pontpár, melyek elválasztják.

Hogy tételünket bebizonyíthassuk, a fentebb definiált $\overline{P_1P_2}$ görbék egyikét veszszük szemügyre és felteszszük, hogy tételünk helytelen: vagyis, ha a P_1, P_2 pontokat alkalmasan választottuk, nincs olyan pontpár, melyet a $\overline{P_1P_2}$ görbe elválaszt. Akkor $\mathfrak{P}$ minden pontja vagy a $\overline{P_1P_2}$ görbén belül, vagy azon kívül fekszik. Tekintsük például az első esetet. A P_1P_2 görbeív bármely pontjához, hacsak nem végpont, tartozik mindenesetre olyan környezet, melynek minden pontja $\mathfrak{Y}$-ben fekszik. Ennek a környezetnek okvetetlenül van a $\overline{P_1P_2}$ görbén kívül fekvő pontja. Mindenesetre van tehát az $\mathfrak{Y}$ sokaságnak oly pontja, mely a $\overline{P_1P_2}$ görbén kívül fekszik. De másrészt a $\overline{P_1P_2}$ görbeív bármely pontjának is, hacsak nem végpont, van teljesen $\mathfrak{A}$-ban fekvő környezete és ennek a környezetnek oly pontja, mely a $\overline{P_1P_2}$ görbén kívül fekszik. Ez a két pont összeköthető oly egyszerűen zárt folytonos görbével, mely teljesen a $\overline{P_1P_2}$ görbén kívül fekszik és ennélfogva a $\mathfrak{P}$ sokaság egy pontját sem tartalmazza. Ez azonban ellentmond tételünk 3. feltételének. Hasonlóképen ellentmondásra vezet az a föltevés is, hogy a $\mathfrak{P}$ sokaság a $\overline{P_1P_2}$ görbén kívül fekszik.

III. A $\mathfrak{P}$ sokaság megfordíthatóan egyértelmű ábrázolása a körvonalra.

Az adott tételekből, hasonlóképen mint a Hilbert-féle dolgozatban a valódi körnek, úgy a $\mathfrak{P}$ sokaságnak a körvonalon való folytonos, megfordíthatóan egyértelmű ábrázolása könnyen következik. A bebizonyítás veleje arra a körülményre támaszkodik, hogy a $\mathfrak{P}$ sokaságból kiválasztható oly megszámlálható sokaság, a mely egy a ciklikus elrendezésünkkel szorosan összefüggő egyszerű elrendezésben a nagyságuk szerint rendezett racziońalis számok sokaságának rendjellegével bír és a melynek sűrűsödési pontjai a $\mathfrak{P}$ sokaságot alkotják. Ha azonban existentiabizonyítás helyett magát az ábrázolást tényleg meg akarjuk adni, úgy elő kell állítanunk az illető megszámlálható rész-sokaságot.

Hogy e czélt elérjük, rögzítsünk síkunkban egy derékszögű koordináta-rendszert és határozzuk meg azt a legkisebb parallelogrammát, melynek oldalai a koordináta-tengelyekkel párhuzamosak és a melyen kívül egy $\mathfrak{P}$-beli pont sem fekszik. Egymástól egyenlő távolságra fekvő, a kétféle oldaliránynyal párhuzamos egyenesekkel oszszuk ezt a parallelogrammát n^2 összeillő részparallelogrammára. Valamely pontról akkor mondjuk, hogy egy parallelogrammában fekszik, ha vagy annak belsejében, vagy kerületén van. A $\mathfrak{P}$ sokaság perfekt voltából következik, hogy minden részparallelogrammában, ha abban egyáltalán fekszik $\mathfrak{P}$-nek pontja, úgy fekszik ezek közül olyan is, mely a legkisebb ordinátáju a parallelogrammában fekvő pontok között a legkisebb abszczisszáju. Legyen az összes ilyen pontok száma n_1. Ezek a pontok a cziklikusan rendezett $\mathfrak{P}$ sokaságot n_1 intervallumra osztják. Osszuk a körvonalat n_1 egyenlő intervallumra és rendeljük ezen intervallumokat a $\mathfrak{P}$ sokaság intervallumaihoz oly módon, hogy szomszédos intervallumoknak szomszédos intervallumok feleljenek meg. A megfelelő osztópontokat szintén egymáshoz rendeljük.

Ugyan ilyen módon minden részparallelogrammát további n^2 részparallelogrammára osztjuk és kiválasztjuk minden egyes parallelogrammában, a melyben a $\mathfrak{P}$ sokaságnak egyáltalában pontja fekszik, e pontok közül ismét azt, a mely a legkisebb ordinátával birók közt a legkisebb abszczisszájú. Legyen az ilyen pontok száma n_2. Ez az n_2 pont a $\mathfrak{P}$ sokaságot n_2 intervallumra osztja, melyek az első n_1 intervallum részintervallumai. Ha ez által egy első intervallum bizonyos számú intervallumra oszlik, akkor a körvonalon megfelelő intervallumot ugyanannyi egyenlő részre osztjuk és e részeket ugyanabban a sorrendben a $\mathfrak{P}$ sokaság illető intervalluma részintervallumaihoz rendeljük. Ugyancsak egymáshoz rendeljük ismét a megfelelő osztópontokat.

Ha ezt az eljárást folytatjuk, a $\mathfrak{P}$ sokaság pontjainak határtalan sorozatát kapjuk. Ugyanis minden oly egyenesnek, mely a parallelogramma két oldala között az x-tengelylyel párhuzamosan halad, mindkét oldalán feküsznek $\mathfrak{P}$-beli pontok, és ennélfogva a 2) alatti feltétel értelmében $\mathfrak{Y}$-beli és $\mathfrak{A}$-beli pontok is. Az 1) alatti feltétel következtében feküsznek tehát magán az egyenesen is, úgy $\mathfrak{Y}$-beli mint $\mathfrak{A}$-beli pontok és igy a 3) alatti feltétel folytán legalább a $\mathfrak{P}$ sokaságnak egy pontja is. n_1 tehát nem lehet kisebb n-nél, n_2 nem lehet n^2-énél, a k-ik osztás utáni pontok száma nem lehet n^k-nál kisebb. Elegendő számú parallelogrammára való osztással tehát az osztási pontok tetszésszerinti mennyisége határozható meg.

A $\mathfrak{P}$ sokaság pontjaiból ily módon kiválasztható pontok tehát egy $\mathfrak{P}^*$ megszámlálható pontsokaságot alkothatnak, melynek a körvonalon egy $\mathfrak{K}^*$ megszámlálható pontsokaság felel meg.

E megszámlálható pontsokaságok lényeges tulajdonságai a következők:

a) A $\mathfrak{P}$ pontsokaság bármely pontjának tetszésszerinti környezetében fekszik a $\mathfrak{P}^*$ pontsokaságnak pontja.

Ha ugyanis δ a pont távolsága a környezet határától, akkor mindig megadható a $\mathfrak{P}^*$ sokaság konstrukcziójának egy lépése, mely után a részparallelogrammák két szomszédos oldala négyzeteinek összege δ^2-nél kisebb. A pont ennélfogva egy oly parallelogrammában fekszik, mely ismét teljesen a környezeten belül van; ugyanazon részparallelogrammában mindenesetre fekszik a $\mathfrak{P}^*$ sokaság egy pontja. Ezzel igazoltuk állításunkat.

b) A $\mathfrak{P}$ sokaság két tetszésszerinti pontjához és a $\mathfrak{P}^*$ sokaság egy tetszésszerinti pontjához mindig található a $\mathfrak{P}^*$ sokaság egy másik pontja úgy, hogy az első két pont a másik kettőt elválasztja.

Legyen ugyanis $P_1 P_2$ az első két pont, és legyen $\overline{P_1 P_2}$ egy a két ponthoz tartozó egyszerűen zárt folytonos görbe. P_3 a $\mathfrak{P}^*$ sokaság egy tetszés szerinti pontja. Akkor mindenesetre van a $\mathfrak{P}$ sokaságnak olyan pontja, melyet a $\overline{P_1 P_2}$ görbe a P_3 ponttól elválaszt és van ennek a pontnak egy elég kicsiny környezete, melynek minden pontja ugyanily tulajdonságú. Ebben a környezetben pedig az *a)* pont értelmében okvetetlenül a $\mathfrak{P}^*$ sokaságnak legalább egy pontja fekszik.

c) A $\mathfrak{P}^*$ sokaság sűrűsödési pontjai a $\mathfrak{P}$ sokaságot, a $\mathfrak{K}^*$ sokaságéi a körvonalat alkotják.

Allításunk első fele *a)*-ból és a $\mathfrak{P}$ sokaság zárt voltából következik; második fele pedig abból a körülményből, hogy a $\mathfrak{P}$ sokaságnak, tehát a körvonalnak is minden részintervallumában további osztópontok feküsznek; minthogy pedig a körvonalnál az osztópontok interpolácziója az intervallumoknak egyenlő részekre való osztásával történik, e részek hossza *zérus* felé konvergál; az osztópontok tehát a körvonalon mindenütt sűrűn oszolnak meg.

d) A $\mathfrak{P}^*$ sokaság cziklikus elrendezésének a $\mathfrak{K}^*$ sokaság cziklikus elrendezése felel meg.

Hogy már most a $\mathfrak{P}^*$ sokaságnak a $\mathfrak{K}^*$ sokaságra való ábrázolásából a $\mathfrak{P}$ sokaságnak a körvonalra való ábrázolását származtathassuk, először is kiválasztunk a $\mathfrak{P}^*$ sokaságból egy $P\infty$ és a $\mathfrak{K}^*$ sokaságból a megfelelő $K\infty$ pontot. Ha P a $\mathfrak{P}$ sokaság egy nem a $\mathfrak{P}^*$ sokasághoz tartozó, egyébként tetszés szerinti pontja, akkor a P pont a $\mathfrak{P}^*$ pontjainak — a $P\infty$ pont kivételével — két osztályba való sorolását határozza meg úgy, hogy két pont különböző vagy ugyanazokba az osztályokba tartozik, a szerint a mint a P és $P\infty$ pontok által elválasztatnak vagy sem Akkor azonban ugyanazon osztály bármely két pontja a másik osztály egy pontját sem választja el a $P\infty$ ponttól. A $\mathfrak{P}^*$ sokaságban ilykép létesített szeletalkotásnak a $\mathfrak{K}^*$ sokaságban a sokaság pontjainak — a $K\infty$ pont kivételével — két osztályba való szétválasztása felel meg olykép, hogy a $K\infty$ pontot az egyik osztály bármely pontjától a másik osztály egyik pontpárja sem választja el. A körvonalon mindenütt sűrű sokaságban ily módon létesitett szeletalkotás a körvonalon egy olyan nem a $\mathfrak{K}^*$ sokasághoz tartozó K pontot definiál, hogy a K és $K\infty$ pontok bármely két, különböző osztályhoz tartozó pontot elválasztanak. Ezt a K pontot a P ponthoz rendeljük.

Ily módon a $\mathfrak{P}$ sokaság minden pontjához rendeltetett a körvonal egy-egy pontja, még pedig úgy, hogy a $\mathfrak{P}$ sokaság cziklikus elrendezésének a képsokaság cziklikus rendje felel meg.

Meg kell még mutatnunk, hogy a körvonal bármely K pontja a $\mathfrak{P}$ sokaság egy és csak egy pontjának felel meg. Elég arra az esetre szorítkoznunk, hogy a K pont nem tartozik a $\mathfrak{K}^*$ sokasághoz. Egy ilyen K pont a $\mathfrak{K}^*$ sokaságban, a $K\infty$ pont kivételével egy, a már jelzett tulajdonsággal biró, szeletalkotást létesit; e szeletalkotásnak a $\mathfrak{P}^*$ sokaságban hasonló tulajdonságú szeletalkotás felel meg. Válasszunk ki a $\mathfrak{K}^*$ sokaság egyik osztályából egy cziklikus rendű végtelen pontsorozatot, mely a K pont felé konvergál; a sorozatnak a $\mathfrak{P}^*$ sokaságban az egyik osztály pontjainak $P_1, P_2, \ldots P_i, \ldots$ végtelen sorozata felel meg. A $\mathfrak{K}$ sokaság második osztályából kiválasztott hasonló tulajdonsággal biró végtelen sorozatnak a $\mathfrak{P}^*$ sokaságban a másik osztály pontjainak egy $P'_1, P'_2, \ldots P'_i, \ldots$ végtelen sorozata felel meg. A $P_1, P_2 \ldots$

$P_i, \ldots, P'_1, \ldots, P'_2, \ldots$ végtelen pontsokaságnak mindenesetre van egy P sűrűsödési pontja. Ez a Bolzano-Weerstrass-féle tételből következik. Szerkeszszünk egy $P_i P'_j$ görbét; ez a görbe a $P_{i+1}, P_{i+2}, \ldots, P'_{j+1}, P'_{i+2}, \ldots$ pontokat a P_∞ ponttól elválasztja; elválasztja ennélfogva a P_∞ ponttól a P sűrűsödési pontot is. A P és P_∞ pontok ennélfogva bármely két, különböző osztályba tartozó pontok elválasztanak. A P pontnak tehát a körvonalon a K pont felel meg. Ha volna egy második, (P) pont, melynek a körvonalon szintén a K pont felel meg, akkor ez a $\mathfrak{P}^*$ sokaságban ugyanazt a szeletalkotást definiálná, mint a P pont: akkor azonban a $\mathfrak{P}^*$ sokaságnak nem volna olyan pontja, melyet a P_1 (P) pontpár a P_∞ ponttól elválaszt: ez pedig a $\mathfrak{P}^*$ sokaság *b)* alatti tulajdonságaival ellenkezik.

Ezzel megmutattuk, hogy az adott megfelelés a $\mathfrak{P}$ sokaság pontjait megfordíthatóan egyértelműen ábrázolja a körvonal pontjainak összességén. Az ábrázolásban a cziklikus rendjelleg megmarad.

IV. Az ábrázolás folytonos.

Meg kell még mutatnunk, hogy az adott ábrázolás folytonos. Legyen $K_1, K_2, \ldots$ a körvonal pontjainak egy cziklikus elrendezésű végtelen sorozata, mely nem öleli fel az egész körvonalat. A sorozat egy K ponthoz konvergál. Meg kell mutatnunk, hogy a megfelelő $P_1, P_2, \ldots$ sorozat egy P ponthoz konvergál, melynek a K pont képe. Hogy a $P_1, P_2, \ldots$ sorozat egy P ponthoz konvergál, az világos, minthogy a cziklikus elrendezés folytán a sorozat sűrűsödési pontja konvergenczia-pont. Ha a P pontnak a körvonalon egy a K ponttól különböző (K) pont felelne meg, a mely tehát nem volna a $K_1, K_2, \ldots$ sorozat határpontja, akkor mindenesetre volna a körvonalnak két olyan pontja: $(K)_-$ és $(K)_+$, melyek a K pontot a $K_1, K_2, \ldots$ sorozat pontjaitól legfeljebb egy pont kivételével elválasztják. A megfelelő $(P)_-$ és $(P)_+$ pontok, tehát a $\overline{(P)_- (P)_+}$ egyszerűen zárt folytonos görbe is elválasztanák a P pontot a $P_1, P_2, \ldots$ sorozat pontjaitól, legfeljebb egy pont kivételével; akkor azonban P nem lehetne a sorozat konvergenczia pontja. A P pontnak tehát tényleg a K pont felel meg: az ábrázolás tehát valóban folytonos.

*

A tétel bebizonyítására SCHOENFLIES oly eljárást használ, mely az $\mathfrak{Y}$ sokaságot parallelogrammák megszámlálható sokaságából rakja össze. A $\mathfrak{P}$ sokaság parallelogrammáktól fedett összefüggő síkrész szegélyvonala. Míg a parallelogrammák helyettesítése parallelogramma-testek által a ponttér két részre való szétválasztása esetére szolgáltat analog eljárást, addig az általunk követett eljárás a sugártérnek egy pontsokaság által eszközölt szétválasztása esetére általánosítható. Az első eset egyszerűen zárt folytonos felületre, a második egyszerűen zárt folytonos térgörbére vezet. Az általánosításnál követendő eljárást nem vázolhatom e helyütt, mert a föllépő nehézségek külön tárgyalást igényelnek.

Riesz Frigyes.

RADIOAKTIV ANYAGOKRA VONATKOZÓ VIZSGÁLATOK.

(Harmadik közlemény.)

III. FEJEZET.

A sugárzás tanulmányozására szolgáló eljárások. A radioaktiv anyagok sugárzásának tanulmányozására e sugárzás bármely tulajdonságát felhasználhatjuk: tehát akár a sugarak hatását fotografikus lemezekre, akár ama tulajdonságukat, hogy a levegőt ionizálják és vezetőképességgel ruházzák fel, végre ama sajátságukat is, hogy egyes anyagokat foszforeszkálásra bírnak. Ezentúl, ha e különböző eljárásokról lesz szó, rövidség kedvéért a «radiografikus, elektromos és fluoroszkopikus módszer» elnevezést fogjuk használni.

A két első módszer kezdettől fogva használatban volt az uránsugarak tanulmányozásánál; a fluoroszkopikus módszer csak az új, erősen radioaktiv anyagoknál nyerhet alkalmazást, minthogy a gyöngén radioaktiv anyagok, mint a tórium és uránium nem keltenek észrevehető foszforeszkálást. Egyedül az elektromos módszer vezet a sugárzás erősségének pontos mértékére; a másik kettő e tekintetben csak kvalitativ eredményekre vezet és a sugárzás erősségének csak durva becslésére szolgálhat. A három módszerrel elért eredmények csak igen hozzávetőlegesen hasonlíthatók össze egymással, sőt néha az összehasonlítás egyáltalában nem lehetséges. A fényérzékeny lemez, az ionizálódó gáz, a foszforeszkáló ernyő megannyi «felfogó készülékek», melyektől azt követeljük, hogy a sugárzás energiáját elnyeljék és másnemű energiává változtassák át: Kémiai energiává, iónenergiává vagy fényenergiává. Minden felfogó a sugárzásnak oly részét nyeli el, mely lényegesen függ a felfogó természetétől. Látni fogjuk különben, hogy a sugárzás nem egynemű; a különböző felfogók által elnyelt részek úgy mennyiségileg, mint minőségileg különbözők lehetnek. Végre egyáltalában nem bizonyos, sőt nem is valószínű, hogy az elnyelt energiamennyiség teljesen olynemű energiává alakul át, mint a milyet meg akarunk figyelni; az elnyelt energiának egy része ugyanis átalakulhat hővé, vagy másodlagos sugárzást hozhat létre, (a mely egy esetben előmozdítja a megfigyelt jelenség létrejövését, más esetben nem), vagy pedig a megfigyelt kémiai folyamattól különböző kémiai folyamatokat is létesíthet s i. t. úgy, hogy még az is a felfogó természetétől függ, mennyire felel meg a felfogó annak a czélnak, a melyet kitűztünk magunknak.

Hasonlítsunk össze két adag radioaktiv anyagot, melyek egyike rádiumot, másika polóniumot tartalmaz és a melyek az 1. rajzon ábrázolt lemezes készülékben egyformán radioaktivaknak mutatkoznak. Ha mindkettőt vékony aluminiumlemezzel befedjük, az utóbbi sokkal kevésbbé aktivnak mutatkozik, mint az előbbi; ép így a polóniumot a rádiumnál kevésbbé aktivnak fogjuk találni, ha mindkettőt ugyanazon, elég vastag foszforeszkáló ernyő *alá* helyezzük, vagy pedig az ernyőt egyenlő távolságban tartjuk elég messze a két anyagtól.

A sugárzás energiája. Valamennyi módszer arra az eredményre vezet, hogy az új radioaktiv anyagok sugárzásának energiája sokkal nagyobb az uránium- és a tóriuménál. Így például a közelükbe elhelyezett fényképező lemezen az új anyagok úgyszólván egy pillanat alatt nyomot hagynak, míg az uránium és tórium csak 24 óra alatt hozzák létre ugyanazt a hatást. A fluoreszkáló ernyő élénken világit, ha az új anyagokkal érintkezik, míg uránium- és tóriummal semmiféle fény nem észlelhető. Végre az új anyagok a levegőt körülbelül milliószor erősebben ionizálják, mint az uránium és tórium. Azonban meg kell jegyeznünk, hogy a fent leirt elektromos módszerrel nem lehet az új anyagok *sugárzásának összenergiáját* úgy, mint az urániumét vagy a tóriumét lemérni. Ugyanis pl. az uránium esetében a lemezek közti levegőréteg igen közelítőleg az egész sugárzást elnyeli és a határáramot körülbelül 100 Voltnyi feszültség mellett elérjük. Egészen máskép áll a dolog az erősen radioaktiv anyagoknál. A rádium sugárzásának egy része igen nagy áthatolóképességű sugarakból áll, a melyek a sűritőn és a fémlemezeken áthaladnak a nélkül, hogy a levegő ionizálásához hozzájárulnának. Továbbá a rendelkezésünkre álló feszültségekkel nem tudjuk mindig elérni a határáramot; így pl. igen aktiv polóniumnál az áram 100 és 500 Volt között még arányos a feszültséggel. Ama kisérleti föltételek, melyek mellett a mérések egyszerű értelmezése lehetséges, e szerint nem teljesülnek, s így a nyert számértékek nem tekinthetők az összes sugárzás mértékének és e tekintetben csupán durva közelítést szolgáltatnak.

A sugárzás összetétele. Több fizikus (Becquerel, Meyer és von Schweidler, Giesel, Villard, Rutherford, Curie és Curiené) vizsgálataiból kitünt, hogy a radioaktiv anyagok sugárzása igen sokféle sugarakból áll. Háromféle sugarakat kell megkülönböztetnünk, melyeket Rutherford jelölése szerint α, β és γ sugaraknak fogok nevezni.

1. Az α sugarak, melyek úgy látszik a sugárzás zömét alkotják, igen csekély áthatoló képességű sugarak. E sugarakat ama törvények jellemzik, melyek szerint az anyagok általi abszorpcziójuk végbemegy. A mágneses térnek hatása e sugarakra igen csekély, úgy hogy eleinte azt tartották, hogy az α sugarak egyáltalában nem érzik meg a mágneses tér hatását. Erős mágneses tér azonban gyöngén eltériti e sugarakat: az eltérítés olyanformán történik, mint a katódsugaraknál, de az eltérítés iránya ellenkező, s így megegyezik a Crookes csövekben fellépő csősugarak eltérítésének irányával.

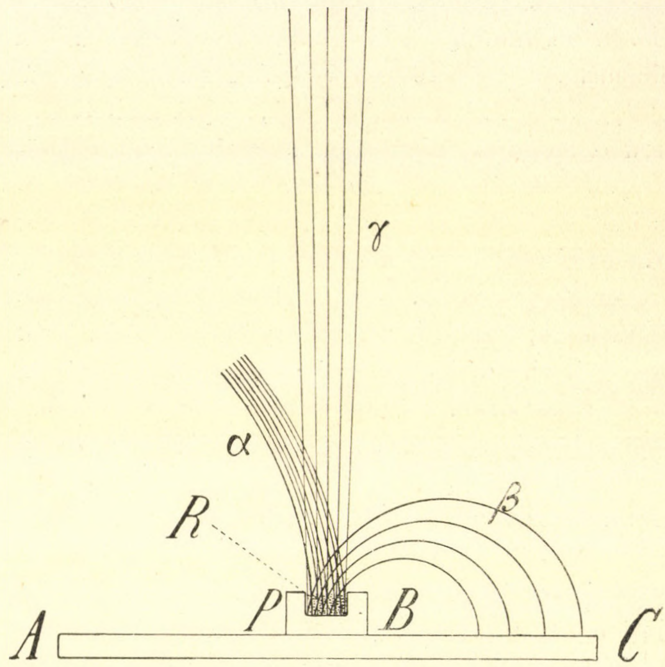
2. A β sugarak abszorpcziója kisebb mint az előbbieké. Mágneses térben ugyanoly nemű és irányú eltérítést szenvednek, mint a katódsugarak.

3. A γ sugarak nagy áthatoló képességű sugarak, melyek a

mágneses tér hatását nem érzik meg és a Röntgen-sugarakhoz hasonlíthatók.

Ugyanazon csoport sugarainak áthatolóképessége igen tág határok között ingadozhatik, a mint azt a β sugarakra nézve kimutatták.

Képzeljük el magunknak a következő kisérletet: a rádiumot (R) egy ólomtömbbe (P) vájt kis mélyedésbe helyezzük (lásd a



4. rajz.

4. rajzot). A mélyedésből egyenes vonalú sugaraknak kissé szétnyiló kévéje fog kiáramlani. Tegyük fel, hogy a kis mélyedés környezetében igen erős homogén mágneses teret létesítünk, mely a rajzsíkra merőleges és melynek iránya a rajzsík mögé mutat. Az α, β és γ sugárcsoportok ezáltal különválnak. A csekély erősségű γ sugarak az eltérítés minden nyoma nélkül folytatják egyenesvonalú útjukat. A β sugarak ugyanúgy terelődnek

el, mint a katódsugarak és a rajzsíkban köralakú görbékbe mennek át, melyeknek sugara tág határok közt ingadozik. Ha az ólomtömböt az *AC* fényképező lemezre helyezzük, a lemez *BC* része, melyre a β sugarak esnek, fénybehatásokat mutat. Végre az α sugarak igen nagy erősségű kévét alkotnak, mely csekély eltérítést szenved és a melyet a levegő igen gyorsan elnyel. E sugarak a rajzsíkban igen nagy sugarú körökbe mennek át s az eltérítés iránya a β sugarakéval ellenkező.

Ha a kis vályút vékony (0·1 mm. vastagságú) aluminiumlemezzel befedjük, az α sugarak igen nagy része eltűnik; a β sugarak abszorpcziója már sokkal kisebb, míg a γ sugaraké egyáltalában nem vehető észre.

A mágneses tér hatása. Láttuk, hogy a radioaktiv anyagok kibocsátotta sugaraknak sok közös tulajdonságuk van a katód- és Röntgen-sugarakkal. A katód- és Röntgen-sugarak szintén ionizálják a levegőt, benyomásokat hagynak a fotografikus lemezen, fluoreszkálást keltenek és nem szenvednek szabályos törést. Azonban a katódsugarak annyiban különböznek a Röntgen-sugaraktól, hogy mágneses tér hatása alatt elterelődnek egyenesvonalú pályájukból és hogy negativ elektromos töltést szállítanak.

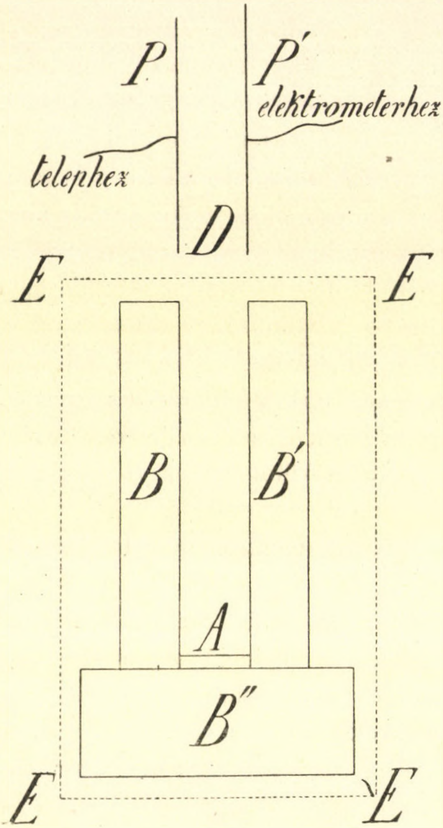
Azt a tényt, hogy a mágneses tér hatást gyakorol a radioaktiv anyagok sugaraira, majdnem egyidejűleg fedezték fel Giesel, Meyer, von Schweidler és Becquerel.* E fizikusok felismerték, hogy a radioaktiv anyagok sugarai ugyanúgy és ugyanoly irányban terelődnek el, mint a katódsugarak; megfigyeléseik a β sugarakra vonatkoztak.

Curie úr kimutatta, hogy a rádium sugárzása határozottan megkülönböztethető sugárcsoportokból áll, melyek egyike könynyen elterelődik mágneses tér hatása alatt (β sugarak), míg a másik csoport úgy látszik nem érzi meg a mágneses tér hatását

* Giesel: Wied. Ann. 1899 nov. 2. — Meyer és von Schweidler: Acad. Anzeiger Wien, 1899 november 3. és 9. — Becquerel: Comptes rendus, 1899 deczember 11.

(α és γ sugarak, melyeknek összeségét «eltéríthetetlen» sugaraknak nevezte).*

Becquerel az általunk készített polónium preparátumoknál nem talált a katódsugarakhoz hasonló sugárzást. Giesel ellenben egy általa készített polónium preparátumnál figyelte meg legelőször a mágneses tér hatását. Az általunk készített polónium preparátumok egyike sem bocsátott ki a katódsugarakhoz hasonló sugarakat.



5. rajz.

Giesel polóniuma csak közvetlenül előállítása után bocsát ki katódnemű sugarakat és valószínű, hogy a jelenség az indukált radioaktivitás jelenségének tudandó be, melyről később lesz szó.

A következő kisérletek igazolják, hogy a rádium sugárzásának egy része (és csupán egy része) áll könnyen eltéríthető (β) sugarakból. E kisérleteknél az elektromos módszer talált alkalmazást.**

Az A radioaktiv test (l. az 5. rajzot) az AD irányban sugarakat bocsát ki a PP' lemezek közé. A P lemez 500 Voltra van megtöltve, P' piezoelektromos kvarczczal ellátott elektrométer-

* P. Curie: Comptes rendus, 1900 január 8.

** P. Curie: Comptes rendus, 1900 január 8.

rel van összekötve. Megmérjük az áramot, mely a sugárzás behatása alatt a levegőn áthalad. Elektromágnessel tetszés szerint mágneses teret létesíthetünk merőlegesen a rajzsíkra az egész *EEEE* térrészben. Ha a sugarak még oly csekély mértékben is elterelődnek, többé nem hatolnak át a lemezek közti levegőrétegen és az áram megszünik. Azt a térrészt, melyen a sugarak áthaladnak a B, B', B'' ólomtömbök és az elektromágnes sarkai veszik körül; ha a sugarak elterelődnek, a B és B' ólomtömbök által elnyeletnek.

A nyert eredmények nagy mértékben függenek az A sugárzó testnek a sűrítő D bejáratától számított AD távolságtól. Ha az AD távolság elég nagy (nagyobb mint 7 cm.), a rádium sugárzásának legnagyobb része (körülbelül 90 százalék) elterelődik és elnyeletik, midőn a mágneses tér erőssége körülbelül 2500 egység. Ezek a β sugarak. Ha az AD távolság 65 mm-nél kisebb, a mágneses tér a sugárzásnak már sokkal kisebb részét nyeli el; ezt a részt azonban a 2500 erősségű tér már teljesen eltünteti és az eltérített sugarak számaránya nem növekszik, ha a tér erőssége 2500-ról 7000-re emelkedik.

A mágneses tér által el nem térített sugarak számaránya annál nagyobb, minél kisebb a sugárzó test és a sűrítő közti AD távolság. Kis távolságoknál a könnyen eltéríthető sugarak az összes sugárzásnak csak igen csekély töredékét alkotják.

A nagyobb áthatoló képességű sugarak tehát legnagyobb részben a katódsugarakhoz hasonló természetű eltéríthető sugarak (β sugarak).

Az imént leírt kisérleti berendezés mellett a mágneses tér hatása az α sugarakra a felhasznált terek mellett nem volt felismerhető. Ama jelentékeny — látszólag el nem téríthető — sugárzás, mely a sugárzó forrástól kis távolságra megfigyelhető, α sugarakból állott, a nagy távolságban megfigyelt el nem téríthető sugárzás pedig γ sugarakból.

Ha a sugárkévét abszorbeáló lemezen (aluminiumon vagy fekete papiron) át megszűrjük, a megmaradt sugarakat a mágneses tér majdnem mind eltériti, úgy, hogy a lemez és a mágneses tér segítségével a sűrítőből a sugarakat majdnem teljesen eltávolíthatjuk, minthogy csupán a csekély számarányban megmaradó γ sugarak hatolnak még át rajta. Az α sugarakat a lemez nyelte el.

Egy század milliméter vastagságú aluminiumlemez már elegendő a nehezen eltéríthető sugaraknak majdnem teljes eltüntetésére, midőn az anyag elég távol van a sűrítőtől; kisebb távolságoknál (34 és 51 mm-nél) két ily század milliméteres lemez szükséges ugyanezen eredmény eléréséhez.

Hasonló méréseket végeztek négy igen különböző aktivitású rádiumos preparátummal (chlorid- vagy karbonátokkal); az elért eredmények megegyeztek egymásközt.

Felemlíthetjük, hogy valamennyi preparátumnál az áthatoló, mágnessel eltéríthető (β) sugarak az összes sugárzásnak csak csekély részét teszik; ezek ugyanis csak kis mértékben szerepelnek ama méréseknél, a hol az összes sugárzást használjuk fel a levegőnek vezetőképességgel való felruházására.

A polónium sugárzása az elektromos módszerrel tanulmányozható. Ha a polónium és a sűrítő *AD* távolságát változtatjuk, eleinte semmiféle áramot nem észlelünk, a míg a távolság elég nagy; midőn a polóniumot közelebb hozzuk, megfigyelhetjük, hogy bizonyos távolságban, mely a megvizsgált preparátumnál 4 cm. volt, a sugárzás egyszerre igen erősen érezhető lesz; azután az áram szabályosan növekszik, ha a polóniumot még jobban közelítjük, a mágneses tér azonban ilyen viszonyok között nem idéz elő észrevehető változást. A látszat az, mintha a polónium sugárzása a tér bizonyos részére volna határolva és alig tudna áthaladni egy bizonyos burkon, mely az anyagot néhány czentiméternyi vastagságban övezi körül.

Az imént leírt kisérletek értelmezésének érvényességi körét azonban a következő fontos megszorításoknak kell alávetnünk. Midőn a mágnessel eltéríthető sugarak számarányáról beszélek, mindig csak a sugárzás ama részéről van szó, a mely a sűrítőben áramot tud kelteni. Ha a Becquerel-sugarak hatását fluoreszkálás vagy fényképező lemezek segítségével vizsgáljuk meg, e számarány valószínűleg másnak fog kiadódni; ugyanis a sugárzás erőssége mértékének csak egyazon módszerrel végzett mérések körében van értelme.

A polóniumsugarak az α sugarak csoportjába tartoznak. Az imént leírt kisérleteknél a mágneses térnek e sugarakra gyakorolt semmiféle hatása nem volt észlelhető, azonban e kisérleti berendezésnél gyönge eltérítések felismerése nem volt lehetséges. A radiografikus módszerrel végzett mérések a fent leírt mérések eredményeit igazolták. Ha a rádiumot használva sugárzó forrásul, fényérzékeny lemezt helyezünk el párhuzamosan az eredeti sugárnyalábbal és merőlegesen a mágneses térre, a mágneses tér által szétválasztott két (eltérített és eltéritetlen) kévének igen tiszta képét nyerjük. Az eltérített kévét a β sugarak alkotják; minthogy az α sugarak igen kis mértékben terelődnek el, kévéjük az el nem térített γ sugarakéval összeolvad.

Az eltéríthető β sugarak. Giesel, továbbá Meyer és von Schweidler kisérleteiből kitünt, hogy a radioaktiv anyagok sugárzása legalább részben mágneses térben elterelődik és hogy az elterelődés ép úgy történik, mint a katódsugaraknál. Becquerel * a mágneses tér hatását radiografikus úton tanulmányozta. Kisérleti berendezése olyan volt, mint a 4. rajznál. A rádiumot a P ólomvályúba helyezte, melyet fekete papirral bevont AC fényképező lemez érzékeny oldalára fektetett. Az egészet elektromágnes sarkai közé helyezte úgy, hogy a mágneses tér iránya a rajzsíkra merőleges volt.

Ha a tér e sík mögé irányul, a lemez BC részén ama sugarak nyoma vehető észre, melyek köralakúvá görbülve merőlegesen esnek vissza a lemezre; ezek a β sugarak.

Becquerel azt találta, hogy a keletkező kép széles, elmosódott sáv, valóságos folytonos spektrum, a mi azt mutatja, hogy a forrás kibocsátotta sugarak a különböző mértékben eltéríthető sugarak egész sokaságából áll. Ha a lemez zselatinját különböző abszorbeáló lemezekkel (papir-, üveg-, fémekkel) takarjuk le, a

* Becquerel: Comptes rendus, 130. k. 206, 372, 810. l.

spektrum részben eltünik, és azt találjuk, hogy ama sugarak szenvedik a legnagyobb abszorpcziót, melyeket a mágneses tér legjobban eltérít, azaz a melyek a legkisebb sugarú körökbe mennek át. Minden lemeznél a fotografikus benyomás csak bizonyos távolságra a sugárzó forrástól kezdődik és e távolság annál nagyobb, minél erősebben abszorbeál a lemez.

Az eltéríthető sugarak töltése. A katódsugarak, a mint azt PERRIN[1] kimutatta negativ elektromossággal vannak megtöltve, sőt PERRIN és LÉNÁRD[2] kisérletei szerint e töltésüket földbe levezetett fémburkokon és szigetelő lemezeken átszállitják. Mindenütt, a hol katódsugarak nyeletnek el, állandóan negativ elektromos töltés keletkezik. Mi kimutattuk, hogy ugyanez mondható a rádium β sugarairól is. *A rádium β sugarai negativ elektromossággal vannak megtöltve.*[3]

Terítsük szét a radioaktiv anyagot egy sűrítő egyik lemezén, és kössük össze e lemezt vezetőleg a földdel; a másik lemezt elektrometerrel kötjük össze: e lemez felfogja és elnyeli az anyag kibocsátotta sugarakat. Ha a sugarak meg vannak töltve, az elektrométeren az elektromosság folytonos gyarapodását kell megfigyelnünk. E kisérletet levegőben végeztük, és nem sikerült a sugarak töltését észrevennünk; az így berendezett kisérlet azonban nem eléggé érzékeny. Minthogy a lemezek közti levegő a sugarak behatása alatt vezetővé lesz, az elektrométer nem lesz tökéletesen elszigetelve és már csak elég erős töltésekre tér ki.

Az α sugarak — hogy ne zavarják a kisérletet — eltüntethetők az által, hogy a sugárzó forrást vékony fémlemezzel letakarjuk. A kisérlet eredménye ugyanaz.[4]

Ugyancsak eredmény nélkül ismételtük e kisérletet levegőben úgy, hogy a sugarakat elektrometerrel összekötött FARADAY-féle henger belsejébe vezettük.[5]

---

[1] Comptes rendus, 121. k. 1130. l. Annales de Chimie et de physique, 2. k. 1897.

[2] LÉNÁRD: Wied. Ann. 64. k. 279. l.

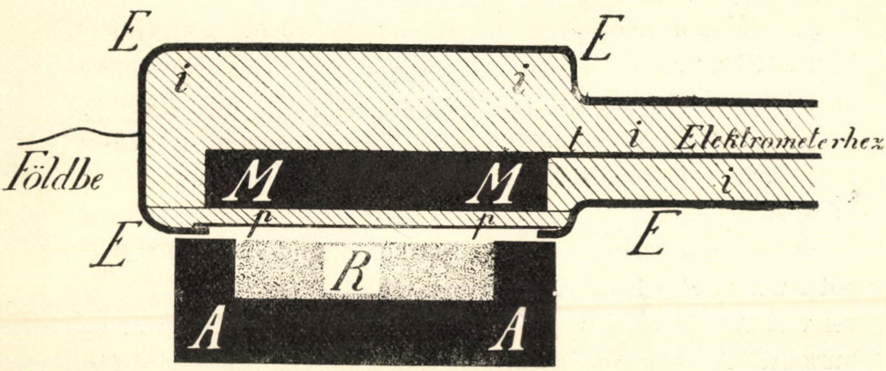
[3] CURIE és CURIE asszony, Comptes rendus, 1900 márczius 5.

[4] A valóságban e kisérleteknél is mindig észlelhető az elektrometer kitérése, de könnyű meggyőződni arról, hogy ez a kitérés az elektrometerrel összekötött lemez és a közelben lévő többi vezető közti érintkezési elektromindító erő folyománya; ezen elektromotoros erő kitériti az elektrometert, minthogy a rádium sugárzásának kitett levegő vezetővé lesz.

[5] A FARADAY-féle henger berendezése nem föltétlenül szükséges, azonban bizonyos előnyökkel járhat, ha a falak, melyekre a sugarak esnek, a

Az előbbi kisérletekből már meggyőződhettünk arról, hogy a sugárzó anyag sugarainak töltése gyönge.

Hogy a sugarakat elnyelő vezetőn összegyülő csekély töltés kimutatható legyen, a vezetőnek igen jól kell elektromosságra nézve elszigetelve lennie; hogy ezt elérhessük, ki kell küszöbölnünk a levegőt, akár az által, hogy a vezetőt igen tökéletesen légüres csőbe helyezzük vagy pedig jó szilárd szigetelővel veszszük körül. Mi az utóbbi berendezést alkalmaztuk.



6. rajz.

Az *MM* vezető korongot (l. a 6. rajzot) a *t* fémrúd az elektrométerrel köti össze; a korongot és a rudat az *iiii* szigetelő anyag teljesen beburkolja; az egészet az *EEEE* fémburok fedi, mely a földdel vezetőleg össze van kötve. A korong egyik oldalán a *pp* szigetelő és a fémburok igen vékonyak. Ezt az oldalt teszszük ki az *R* rádiumos báriumsó sugárzásának, melyet kivülre ólomvályúba helyezünk.* A rádium által kibocsátott sugarak áthatolnak a fémburkon, a *pp* szigetelő lemezen és az *MM* fém-

sugarakat nagy mértékben szétszórják. Ilyenformán az esetleg fellépő szétszórt sugarak összegyűjtése remélhető.

* A szigetelő buroknak teljesen folytonosnak kell lenni. A legcsekélyebb levegővel telt repedés, mely a belső vezetőtől a külső fémburokig terjed, már áramot idéz elő, mely a rádium hatása alatt vezetővé lett levegő révén létrejövő érintkezési elektromotoros erők folyománya volt.

korong által elnyeletnek. A korong állandó negativ elektromos töltés keletkezésének székhelye, a mely az elektrometeren kimutatható és a piezoelektromos kvarczczal lemérhető.

Az így keletkező áram igen gyönge.

Igen aktiv rádiumos báriumchlorid 2·5 cm^2-nyi felületű és 0·2 cm. vastagságú rétegével 10^{-11} Ampère nagyságrendű áramot kaptunk, ha a felhasznált sugarak, mielőtt az *MM* korong által elnyeletnének, egy század milliméteres aluminiumlemezen és 0·3 mm-nyi ebonitrétegen haladtak át.

Az *MM* korongot egymásután ólomból, rézből és czinkből készíttettük, az izoláló réteget pedig ebonitból és paraffinból; az elért eredmények ugyanazok voltak.

Az áram gyöngül, ha az *R* sugárzó forrást nagyobb távolságra helyezzük, vagy pedig, ha kevésbbé aktiv preparátumot használunk.

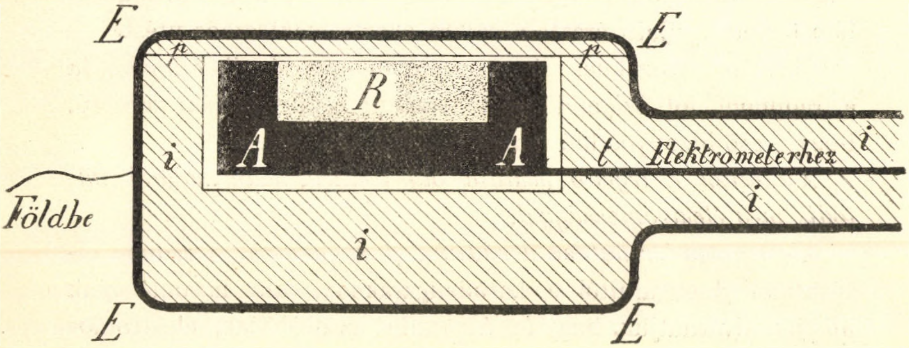
Ugyanily eredményre jutottunk akkor is, midőn az *MM* korongot Faraday-féle hengerrel helyettesítettük, mely belül levegővel volt megtöltve, kívülről azonban szigetelő réteggel volt beburkolva. A henger nyilása, melyet a vékony *pp* szigetelő réteg lezárt, szemben állott a sugárzó forrással.

Végre a megfordított kisérletet is végrehajtottuk, úgy, hogy az ólomvályút a rádiummal együtt a szigetelő anyag belsejébe helyeztük és az elektrometerrel összekötöttük (l. a 7. rajzot), és az egészet a földbe levezetett fémburokkal vettük körül.

Ilyen viszonyok között az elektrométeren észlelhetjük, hogy a rádium pozitiv elektromossággal töltődik, mely mennyiségére nézve az előbbi kisérletnél kimutatott negativ töltés mennyiségével egyenlő. A rádium sugarai áthatolnak a vékony *pp* szigetelő rétegen és elhagyják a belső vezetőt, negativ elektromosságot szállítva magukkal.

A rádium α sugarai e kisérleteknél nem szerepelnek, minthogy az anyagok igen vékony rétegei által már majdnem teljesen elnyeletnek. Az imént leirt módszer már nem használható a polónium sugarai töltésének megvizsgálásánál, minthogy e sugarak áthatoló képessége szintén igen csekély. A töltésnek még nyomát sem észlelhettük a polóniummal, mely csakis α sugarakat bocsát ki; azonban az előbb említett oknál fogva e kisérletből semmiféle következtetést vonnunk nem szabad.

Tehát a rádium eltéríthető β sugarai, ép úgy mint a katódsugarak, elektromos töltést visznek magukkal. Eddig azonban egy esetben sem sikerült anyaghoz nem kötött elektromos töltéseket kimutatni. Ez a körülmény arra indít minket, hogy a rádium eltéríthető β sugarainak tanulmányozásánál ugyanazt az elméletet használjuk, a mely manapság a katódsugarakra vonatkozólag használatos. Ezen ballisztikus elmélet szerint,



7. rajz.

melyet W. Crookes állított fel és J. J. Thomson fejlesztett tovább és egészített ki, a katódsugarak rendkívül apró részecskékből állanak, a melyeket a katód nagy sebességgel lövel ki és a melyek negativ elektromossággal vannak megtöltve. Hasonlókép elképzelhetjük, hogy a rádium negativ töltésű részecskéket lövel a térbe.

Vékony és teljesen szigetelő szilárd burokba zárt rádiumkészitménynek önmagától igen magas potencziálra kell töltődnie. A ballisztikus hipotézis szerint e potencziál addig növekednék, míg a rádium és a rádiumot környező vezető testek közti potencziálkülönbség elég nagy ahhoz, hogy az elektromos töltésű részecskék eltávolodását megakadályozza és visszaszállítsa őket a sugárzó forráshoz.

Véletlenül végre is hajtottuk az itt szóban forgó kisérletet. Igen erős rádiumkészítmény hosszabb idő óta kis üvegcsőbe volt forrasztva. Hogy a csövet felnyithassuk, késsel kissé megkarczoltuk az üveget. Ebben a pillanatban egész határozottan hallottuk egy szikra csattanását s midőn ezután a csövet nagyitóval megvizsgáltuk, észrevettük, hogy az üveget ott, a hol a karczolás megvékonyitotta, szikra lyukasztotta át. Az itt létrejött jelenség egészen hasonló a tulságosan megtöltött Leydeni palaczk üvegének megrepedéséhez.

Ugyanez a jelenség még egy rádiumos csőnél észlelhető volt, sőt a szikra átütésének pillanatában CURIE úr, ki a csövet kezében tartotta, ujjain érezte a szikra okozta elektromos ütést.

Bizonyos üvegeknek jó szigetelő tulajdonságaik vannak. Ha a rádiumot jól szigetelő, beforrasztott csőbe zárják, várható, hogy e cső bizonyos idő mulva magától megreped.

A rádium a legelső példája oly testnek, mely magától töltődik meg elektromossággal.

Elektromos tér hatása a rádium β sugaraira. A rádium eltérithető β sugaraitól a katódsugarakhoz való hasonlóságuk alapján elvárhatjuk, hogy ép úgy, mint az utóbbiak, elektromos térben eltéritést szenvedjenek; az eltéritésnek ugyanoly irányúnak kell lennie, mint a milyet egy nagy sebességgel röpülő negativ töltésű részecske szenved. Ezen elterelődés jelenlétét egyrészt DORN,* másrészt BECQUEREL ** mutatták ki.

Kisérjünk figyelemmel egy sugarat, mely egy sűritő két lemeze közti téren hatol keresztül. Legyen a sugár párhuzamos a sűritő lemezeivel. Ha e lemezek közt elektromos teret létesitünk, a sugár egész l hosszában, mely a sűritőn áthalad, ezen egyenletes tér hatása alatt fog állani. E hatás következtében a sugár a pozitiv lemez felé elhajlik és parabolát ír le; kilépve a térből folytatja egyenesvonalú útját a parabolához a kilépési pontban vont érintő irányában. A sugarat eredeti irányára merőleges

* DORN: Abhandl. Halle, 1900 márczius.

** BECQUEREL: Comptes rendus, 130. k., 819. l.

fényképező lemezen felfoghatjuk. Megfigyeljük a lemezen hagyott nyomot, midőn a tér erőssége zérus és midőn attól különböző ismert mennyiség és megkapjuk ebből a δ eltérités értékét, a mely ama pontok távolsága, melyekben az eredeti és az eltéritett sugár ugyanazon, az eredeti sugárra merőleges sikot átdöfik. Ha h e síknak a sűrítőtől, vagyis a tér határától számított távolsága, akkor egyszerű számítás szerint:

$$\delta = \frac{eFl\left(\frac{l}{2} + h\right)}{mv^2},$$

a hol m a mozgó részecske tömege, e töltése, v sebessége és F a tér erőssége.

Becquerel kisérleteivel δ értékét közelitőleg meghatározta.

A rádium által kibocsátott negativ töltésű részecske töltésének viszonya tömegéhez. Midőn egy m tömegű, e töltésű anyagi részecske v sebességgel röpül eredeti sebességi irányára merőleges mágneses térben, e részecske a tér irányára merőleges és eredeti sebességén átmenő síkban körívet ír le, melynek ρ sugarát, ha H a tér erőssége, a következő képlet szolgáltatja:

$$H\rho = \frac{m}{e} v.$$

Ha ugyanazon sugárnál megmértük a δ elektromos eltérítést és a mágneses térbeli elgörbülés ρ sugarát, e két kisérlet egybevetéséből kiszámíthatjuk az $\frac{e}{m}$ viszony és a v sebesség értékét. Becquerel kisérletei szolgáltatták e tekintetben az első tájékoztatást. Ezek szerint $\frac{e}{m}$ közelitő értéke 10^7 abszolut elektromágneses egység, míg $v = 1{\cdot}6 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$. E mennyiségek nagyságrendje ugyanaz, mint a katódsugarakra vonatkozó megfelelő mennyiségeké.

Kaufmann* ugyane kérdésre vonatkozólag pontos méréseket végzett. E fizikus a rádiumsugaraknak igen vékony kévéjét elek-

---

* Nachr. der kön. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, 1901, 2. füzet.

tromos és mágneses tér egyidejű hatásának vetette alá; a két tér homogén, irányuk ugyanaz volt (merőleges a sugár eredeti irányára). A sugárzó forrással ellentett oldalra, a terek határán túl, az eredeti sugárirányra merőlegesen elhelyezett fényképező lemezen hagyott benyomás egy görbe, melynek minden pontja az eredeti összetett sugárkéve egy-egy sugarának felel meg. A legnagyobb áthatoló képességű és legkevésbbé eltérített sugarak azok, a melyeknek sebessége a legnagyobb.

KAUFMANN kisérleteiből kitünik, hogy a rádiumsugaraknál, melyeknek sebességge a katódsugarakénál jóval nagyobb, az $\frac{e}{m}$ viszony a sebesség növekedésével fogy.

J. J. THOMSON és TOWNSEND* munkálatai alapján fel kell tennünk, hogy a sugarat alkotó mozgásban lévő részecske ugyanazon e töltést viszi magával, mint a hidrogén atóm az elektrolizisnél, úgy, hogy e töltés ugyanaz valamennyi sugárra nézve. Ebből az következnék, hogy a részecske m tömege a sebesség növekedésével növekszik.

Ámde elméleti megfontolások arra az eredményre vezetnek, hogy a részecske tehetetlensége épen mozgásban lévő töltésének tulajdonitandó, minthogy mozgó elektromos töltés sebessége munkavégzés nélkül nem változtatható meg. Más szóval, a részecske tehetetlensége elektromágneses eredetű és a részecske tömege, legalább részben, látszólagos, vagy elektromágneses tömeg.

ABRAHAM** még tovább megy és fölteszi, hogy a részecske tömege egészen elektromágneses eredetű. Ha e föltevés mellett ezen tömeg m értékét ismert v sebességhez kiszámitjuk, azt találjuk, hogy m a végtelenhez konvergál, midőn v a fény sebességéhez közeledik, és hogy m állandó értékhez közeledik, ha v a fény sebességénél sokkal kisebb. KAUFMANN kisérletei összhangzásban vannak emez elmélettel, melynek nagy a fontossága,

* J. J. THOMSON: Phil. Mag. 46. k., 1898. — TOWNSEND: Phil. Trans. 195. k., 1901.

** Nachr. d. kön. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1902, 1. füzet.

mert kilátásba helyezik a mechanikának apró, mozgó, töltött anyagi czentrumok dinamikája alapján való felépítését.*

KAUFMANN a következő értékeket találta $\frac{e}{m}$ és v számára:

$\frac{e}{m}$ elektromágneses egységekben	$v\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$-ban	
$1{\cdot}865\times10^{7}$	$0{\cdot}7\ \times10^{10}$	katódsugaraknál (SIMON)
1·31 «	2·36 «	rádiumsugaraknál (KAUFMANN)
1·17 «	2·48 «	
0·97 «	2·59 «	
0·77 «	2·72 «	
0·63 «	2·83 «	

KAUFMANN kisérleteit az elmélettel egybevetve arra az eredményre jut, hogy az $\frac{e}{m}$ viszony határértéke aránylag kis sebességű rádiumsugarakra ugyanaz, mint az $\frac{e}{m}$ értéke katódsugarakra.

KAUFMANN legtökéletesebb kisérleteit igen kevés, tiszta rádiumchloriddal végezte, melyet mi bocsátottunk rendelkezésére.

KAUFMANN kisérletei szerint a rádiumnak egyes β sugaraiban a sebesség igen közel jut a fény sebességéhez. Érthető, hogy ily gyors sugarak az anyaggal szemben nagy áthatolóképességgel birnak.

A mágneses tér hatása az α sugarakra. Egy legújabb dolgozatában RUTHERFORD** jelezte, hogy igen erős mágneses vagy elektromos térben a rádium α sugarai gyenge eltérítést szenvednek, mintha nagy sebességű pozitiv töltésű részecskék volnának. RUTHERFORD kisérleteiből azt a következtetést vonta, hogy az α sugarak sebessége $2{\cdot}5\times10^{9}\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ és hogy az $\frac{e}{m}$ viszony

* Néhány erre vonatkozó fejtegetés, úgymint a töltött anyagi czentrumok igen tökéletes tárgyalása az idevágó irodalom ismertetésével együtt LANGEOIN doktori értekezésében található. (Paris, Gauthier-Villars, 1902.)

** Phys. Zeitschrift, 1903 jan. 15.

nagyságrendje 6×10^3, azaz 10^4-szer oly kicsiny, mint az eltéríthető β sugaraké. Látni fogjuk, hogy RUTHERFORD eme következtetései összhangzásban vannak az α sugárzás előbb ismert tulajdonságaival és hogy legalább részben számot adnak a sugárzás abszorpcziójának törvényeiről.

RUTHERFORD kisérletei BECQUEREL vizsgálataiban igazolást nyertek. BECQUEREL azonfelül kimutatta, hogy a polónium sugarai mágneses térben ép úgy viselkednek, mint a rádium α sugarai és úgy látszik, hogy egyenlő erősségű térben ez utóbbiakkal egyenlő sugarú körívekké görbülnek. BECQUEREL kisérleteiből továbbá az következik, hogy az α sugarak látszólag nem alkotnak mágneses spektrumot, hanem inkább úgy viselkednek, mint egy homogén sugárzás; az összes sugarak eltérítése ugyanis egyenlőnek mutatkozott.*

DES COUDRES megmérte a rádium α sugarainak elektromos és mágneses eltérítését légüres térben. E sugarakra nézve a v sebességet $1{\cdot}65 \times 10^9 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$-nak és az $\frac{e}{m}$ viszonyt 6400 elektromágneses egységnek találta.** Az α sugarak sebessége e szerint körülbelül husszorta kisebb a fény sebességénél. Az $\frac{e}{m}$ viszony nagyságrendje ugyanaz, mint a melyet a hidrogénre nézve az elektrolizisnél kapunk: $\frac{e}{m} = 9650$. Ha tehát felteszszük, hogy minden kis lövedék töltése ugyanaz, mint a hidrogénatómé az elektrolizisben, ebből arra lehet következtetni, hogy e lövedék tömege ugyanoly nagyságrendű mint a hidrogénatóm.

Láttuk azonban, hogy a katódsugarak és a rádium lassúbb β sugarainál az $\frac{e}{m}$ viszony $1{\cdot}865 \times 10^7$-nel egyenlő; e viszony tehát körülbelül 2000-szer akkora, mint az, a melyet az elektrolizis szolgáltat. Föltéve, hogy a negativ töltésű részecske töltése ugyanakkora, mint a hidrogénatómé, tömegének határértéke

* BECQUEREL: Comptes rendus, 1903 jan. 26. és febr. 16.
** DES COUDRES: Phys. Zeitschrift, 1903 junius 1.

aránylag kis sebességekre nézve tehát körülbelül 2000-szer kisebb volna, mint egy hidrogénatóm tömege.

A β sugarakat alkotó lövedékek e szerint egyrészt sokkal kisebbek, másrészt nagyobb sebességgel mozognak, mint azok, a melyek az α sugarakat alkotják. Könnyen érthető tehát, hogy sokkal nagyobb az áthatolóképességük, mint ez utóbbiaké.

A mágneses tér hatása más radioaktiv anyagok sugaraira. Láttuk, hogy a rádium a csősugarakhoz hasonló α sugarakat, a katódsugarakhoz hasonló β sugarakat és nagy áthatoló képességű eltéríthetetlen γ sugarakat bocsát ki. A polónium csak α sugarakat bocsát ki. A többi anyag közül az aktinium úgy látszik úgy viselkedik, mint a rádium, de ezen anyag sugárzásának tanulmányozása még nem haladt annyira előre, mint a rádiumé. A gyengén radioaktiv anyagokról annyit tudunk, hogy az uránium és tórium α sugarakat és eltéríthető β sugarakat bocsátanak ki (Becquerel, Rutherford).

A β sugarak számaránya a rádium összes sugárzásában. A mint már előbb említettem, a β sugarak számaránya növekszik, a mint a sugárzó forrástól eltávolodunk. E sugarak azonban sohasem mutatkoznak egyedül és nagy távolságokban mindig észrevehető a γ sugarak jelenléte. El nem téríthető, igen nagy áthatolóképességű sugarak jelenlétét a rádium sugárzásában legelőször Villard* vette észre. E sugarak az elektromos módszerrel megmérhető sugárzásnak csak kis részét alkotják, és jelenlétük első kisérleteinknél figyelmünket elkerülte, s így helytelenül azt hittük, hogy a nagy távolságra terjedő sugárzás csupán eltéríthető sugarakból áll.

Itt közöljük ama számértékeket, melyeket az elektromos módszerrel, egy ez 5. rajzon ábrázolt eszközhöz hasonló készülékkel végzett kisérletek alapján határoztunk meg. A rádiumot a sűrítőtől csupán a környezet levegője választotta el. Ha a mágneses tér jelenléte nélküli áram erősségét 100-nak veszszük minden távolságban, a második sor számai adják az áram erősségét a

* Villard: Comptes rendus, 130. k., 1010. l.

mágneses tér jelenlétében. E számok e szerint az α és γ sugarak együttes százalékának tekinthetők, minthogy e kisérleti berendezésnél az α sugarak eltérítése nem volt észrevehető.

Nagy távolságban α sugarak már nincsenek és akkor az el nem téritett sugárzás kizárólag γ sugarakból áll.

Kis távolságok mellett végzett kisérletek:

d czentiméterekben	3·4,	5·1,	6·0,	6·5,
eltérítetlen sugarak százaléka	74,	56,	33,	11.

Nagy távolságok mellett az előbbinél sokkal aktivabb készitménynyel végzett kisérletek:

d czentiméterekben	14,	30,	53,	80,	98,	124,	157,
eltérített sugarak százaléka	12,	14,	17,	14,	16,	14,	11.

Látható, hogy bizonyos távolságtól kezdve az eltérítetlen sugarak számaránya a sugárzásban közelítőleg állandó. E sugarak valószínűleg mind a γ csoporthoz tartoznak. Nem fogunk nagy fontosságot tulajdonítani a második sor számaiban fellépő szabálytalanságoknak, ha tekintetbe veszszük, hogy a két szélső kisérletnél az áram összes erőssége 660 és 10 volt. A méréseket egészen 1·57 m-re a sugárzó forrástól lehetett folytatni és most már még messzebbre is juthatnánk.

Itt következik egy másik kisérletsorozat, melynél a rádium igen szűk üvegcsövecskébe volt zárva, melyet a sűrítő alá helyeztünk a lemezekkel párhuzamosan. A kibocsátott sugarak, mielőtt a sűrítőbe jutottak volna, bizonyos vastagságú üveg és levegőrétegen hatoltak át.

d czentiméterekben	2·5,	3·3,	4·1,	5·9,	7·5,	9·6,	11·3,	13·9,	17·2,
eltéritetlen sugarak százaléka	33,	33,	21,	16,	14,	10,	9,	9,	10.

Mint az előbbi kisérleteknél, a második sor számai állandó határhoz közelednek, midőn a d távolság növekszik, azonban a határt már kisebb távolságoknál elérjük, mint az előbbi kisérleteknél, minthogy az α sugarakat az üveg nagyobb mértékben nyelte el, mint a β és γ sugarakat.

Megemlitünk még egy kisérletet, mely azt mutatja, hogy vékony (0·01 mm-nyi) aluminiumlemez főleg α sugarakat nyel el. Midőn a készítmény a sűrítőtől 5 cm-nyire volt elhelyezve a mágneses tér előállításánál azt találtuk, hogy a sugarak 71 százaléka nem β sugár. Ugyanazt a készítményt — a távolságot változatlanul hagyva — az aluminiumlemezzel befedtük és azt találtuk, hogy majdnem az egész sugárzás elterelődik, minthogy az α sugarakat a lemez elnyelte. Ugyanazon eredményre jutunk, ha papirt használunk abszorbeáló lemez gyanánt.

A rádium sugárzásának zöme α sugarakból áll, melyeket minden valószínűség szerint főleg a sugárzó anyag felületi rétege bocsát ki. Ha a sugárzó anyag rétegének vastagságát változtatjuk, az áram erőssége a vastagsággal növekszik; az összes sugárzás növekedése nem arányos a vastagság növekedésével: a β sugárzás növekedése jelentékenyebb mint az α sugárzásé, úgy, hogy a β sugarak számaránya az aktiv réteg vastagságával növekszik. Ha a sugárzó forrást a sűrítőtől 5 cm-re helyezzük, azt találjuk, hogy 0·4 mm. vastagságú aktiv rétegnél az összes sugárzás mérőszáma 28 és a β sugarak az összes sugárzásnak 29 százalékát alkotják. Ha az aktiv réteg vastagsága 2 mm., vagyis ötszörte nagyobb, az összes sugárzás mérőszáma 102 lesz és az eltéríthető (β) sugarak számaránya 45 százalék. Az összes e távolságra ható sugárzás tehát körülbelül 3·6-szer akkora lett, míg az eltéríthető (β) sugárzás körülbelül 1 : 5 arányban gyarapodott.

Az imént leírt kisérleteknél az elektromos módszer nyert alkalmazást. Ha a radiografikus módszerrel dolgozunk, az elért eredmények a megelőzőkkel látszólag ellenmondásban vannak. VILLARD kisérleteinél a rádiumsugaraknak mágneses térben haladó kévéje fényképező lemezeknek sorozatára esett. A nagy áthatolóképességű és eltérítetlen γ kéve áthaladt valamennyi lemezen és mindegyiken nyomot hagyott. Az eltérített β kéve csupán az első lemezre gyakorolt fotografikus benyomást. Látszólag tehát e kéve nem tartalmazott nagy áthatolóképességű sugarakat.

A mi kisérleteink szerint ellenben, bármely a levegőben tovaterjedő sugárkéve a legnagyobb megfigyelhető távolságokban még körülbelül 90 százalék eltéríthető (β) sugarakat tartalmaz és ugyanezt találtuk abban az esetben is, midőn a sugárzó forrást kicsiny beforrasztott üvegcsőbe helyeztük. Villard kisérleteinél az eltéríthető és nagy áthatolóképességű β sugarak nem hagynak nyomot az első mögött lévő fényképező lemezen, minthogy az első szilárd akadályon, a melybe ütköznek, nagy mértékben szétszóródnak és nem alkotnak többé sugárkévét. A mi kisérleteinknél a rádium által kibocsátott és az üvegen áthatoló sugarak valószínűleg szintén szétszóródtak az üvegen, azonban, minthogy a csövecske igen kicsiny volt, maga az üveg szerepelt felületéről kiáramló β sugarak forrásaként, s e sugarakat tényleg a csőtől nagy távolságra még ki tudtuk mutatni.

A Crookes csövek katódsugarai csak igen vékony rétegeken (legfeljebb 0·01 mm-nyi aluminiumlemezeken) tudnak áthaladni. A lemezre merőlegesen beeső sugárkéve minden irányban szétszóródik; azonban a szétszóródás annál gyöngébb, minél vékonyabb a lemez és rendkívül vékony lemezeknél már oly kilépő sugárkéve létezik, mely körülbelül folytatása a belépő kévének.*

A rádium β sugarai egész hasonlóan viselkednek, azonban az átbocsátott eltéríthető kéve egyenlő vastagságú lemeznél sokkal jelentéktelenebb változást szenved. Becquerel kisérletei szerint a rádiumnak erősen eltéríthető β sugarai (a melyeknek sebessége aránylag kicsiny) igen nagy mértékben szétszóródnak 0·1 mm. vastag aluminiumlemezen; ellenben a nagy áthatoló képességű és kevéssé eltéríthető sugarak (a nagy sebességű katódnemű sugarak) ugyane lemezen észrevehető szétszóródás nélkül haladnak át és a nélkül, hogy a sugárkéve, melyet alkotnak, alakját megváltoztatná, még pedig függetlenül attól, milyen szöget képez a beeső nyaláb a lemezzel. A nagy sebességű β sugarak szétszóródás nélkül sokkal vastagabb (néhány czentiméternyi) paraffinrétegen áthaladnak és egész jól lehet követni

* Des Coudres: Phys. Zeitschrift, 1902 nov.

e rétegben a mágneses tér okozta elgörbülést. Minél vastagabb a réteg és minél nagyobb anyagának elnyelőképessége, annál nagyobb változást szenved az eredeti kéve, minthogy a mint a réteg vastagsága növekszik, a szétszóródás újabb és újabb, nagyobb áthatolóképességű sugaraknál is bekövetkezett.

A levegő a rajta keresztülhaladó β sugarakat szétszórja, még pedig igen erősen a nagy mértékben eltéríthető sugarakat; e szétszórás azonban sokkal gyöngébb, mint az, a mely egyenlő vastagságú szilárd anyagoknál következik be. Ezért terjednek a rádium β sugarai a levegőben oly nagy távolságra.

Ford. Zemplén Győző.

EGYÖNTETŰSÉG A FIZIKÁBAN SZEREPLŐ MENNYISÉGEK JELÖLÉSE KÖRÜL.

A fizikában nagy számmal szereplő mennyiségek jelölése körül nálunk épen úgy, mint másutt, nemcsak minden szerző, hanem minden tanár is úgyszólván a saját izlése és kényelme szerint jár el.

Közel fekvő okoknál fogva, különösen a tanítás érdekeire való tekintettel kivánatos lenne, ha tankönyvirodalmunkban e tekintetben közérvényes megállapodásra juthatnánk.

Mennyire fontosnak tartják pl. a németek ezt a kérdést, az kitűnik abból, hogy a német fizikai társaság már 1901 óta foglalkozik vele, s a kérdéssel olyan férfiak foglalkoznak, mint Boltzmann, Planck, Riecke, E. Wiedemann, Lecher, Pringsheim, Simon, Warburg, M. Wien, Drude és számosan mások is.

Az előmunkálatok annyira haladtak már, hogy 1902-ben (lásd: Berichte der deutschen physikalischen Gesellschaft 1903. Heft 3. p. 68—71) megjelenhetett a javaslat, mely 33 mennyiség számára az egységes jelölést megállapítja, 13 mennyiség számára a legczélszerűbb jelöléseket javaslatba hozza és 11 esetben az elnevezések, definicziók és szabályok dolgában jut megállapodásra.

Nálunk ez iránt az Akadémia meg a mathematikai-fizikai társulat volna hivatva dönteni, s a középiskolának kötelessége volna magát ezen döntésnek alávetni.

A tárgyalások megindítása czéljából az alábbiakban ismertetni fogom a német megállapodásokat, és javaslatba fogom hozni azok egynémelyikének hazai irányú módosítását. Ugyanis oly esetekben, a mikor a jelölés nem internaczionális jellegű —

mert az ilyenen változtatni nem volna czélszerű dolog — arra is tekintettel lehetünk, hogy didaktikai szempontból a kérdéses mennyiséget elnevezése szerint jelöljük. Ily értelemben kielégíthetjük a nyelvnek kétségbevonhatatlan jogait, a nélkül, hogy az egyöntetűség elve ellen megokolatlanul és fölösleges módon vétenénk.

Kétségtelenül tekintettel kell lenni a történeti szempontokra is; más szóval nem szabad figyelmen kívül hagyni azt sem, hogyan jelölte a mennyiséget az a tudós, ki azt első izben alkalmazta és értelmezte. A multra vonatkozólag az nem fog nehézségeket okozni, mert az esetleges megállapodás első sorban a tanítás szempontjából kivánatos, az pedig a középiskolai fokon nem terjed ki a tudomány összes részleteire, s így csupán az alapvető fogalmakra kell szorítkozni.

Ez a körülmény az alábbiakból is azonnal szembeötlővé válik. Első sorban lássuk azon mennyiségeket, melyekre vonatkozólag a német fizikai társulat már megállapodásra jutott.

1. Hosszúság (longitudo)	l
2. Tömeg (massa)	m
3. Idő (tempus)	t
4. Térfogat (volumen)	v
5. Küllő (radius)	r
6. Nehézségi gyorsulás	g
7. Nyomás (pressio)	p
8. Munka (labor)	A
9. Erő	F
10. Tehetetlenségi nyomaték	K
11. Abszolut hőmérséklet	T
12. A gázok tágulási együtthatója	a
13. A gázok állandója a molekulasúlyra vonatkoztatva	R
14. Hőmennyiség	Q
15. Belső energia	U
16. Entropia	S

17. Hullámhosszúság ... ... λ
18. Rezgési szám ... ... n
19. Rezgési idő ... ... τ
20. A fény terjedési sebessége légüres térben ... c
21. A mágneses mező intenzítása ... ... $\mathfrak{H}$
22. Mágneses indukczió ... ... $\mathfrak{B}$
23. Mágneses permeabilitás ... ... μ
24. A mágnesezés intenzítása ... ... $\mathfrak{J}$
25. Mágneses susceptibilitás ... ... $\varkappa$
26. Az elektromos mező intenzítása ... ... $\mathfrak{E}$
27. Elektromos indukczió ... ... $\mathfrak{D}$
28. Dielektromos állandó ... ... ε
29. Capacitas C
30. Az indukczió együtthatója L
31. Elektromotoros erő ... ... E
32. Áramerősség I
33. Ellenállás ... ... W

Első pillanatra belátható, hogy ezen megállapodásokat a magyar középiskola nem fogadhatja el, már csak azért sem, mert furcsa volna, ha a saját hazájukban a latin betűk mögött háttérbe szoruló gothikus betűket vennők pártfogásunkba. A gothikus betűkkel való jelölés tehát föltétlenül mellőzendő.

A középiskola szempontjából a 22., 23., 24., 25., 27. és 30. alatt felsoroltakra nézve a közmegállapodás fölösleges, mert ezek a mennyiségek a tanításban alig szerepelnek.

Mielőtt a módosításokra javaslatot tennénk, lássuk azokat a mennyiségeket, a melyekre nézve a németek nem tudtak még megállapodni. Folytatólagos számozást alkalmazva, ezek a következők:

34. Sebesség (celeritas, velocitas) ... ... u, q
35. Sűrűség (densitas) ... ... δ, k, s, ρ
36. Fajmeleg ... ... γ, c
37. A gázok fajmelegeinek aránya ... ... $c_p/c_v = k$
38. A hő mechanikai egyenértéke ... ... J, j, $\mathfrak{A}$

39. Törésmutató	ν
40. Felszín	f
41. Felszínsűrűség	σ, s, ρ
42. Horizontális componens	H, $\mathfrak{H}$
43. Mágneses momentum	M, $\mathfrak{M}$
44. Mágneses tömeg	$\mathfrak{m}$
45. Elektromos tömeg	e, q
46. Potencziál	V, φ

Látni való, hogy ebben a csoportban igen eltérőek a jelölések, pedig csak a legszokásosabbak vannak fölvéve. Kitünik továbbá az is, hogy számos olyan mennyiség, mely épen a kezdőfokon igen gyakori alkalmazásu, az egész felsorolásból hiányzik.

Ezek után, tekintettel a már fölemlítettekre, összeállítjuk azon mennyiségek jegyzékét, a melyek a középfokú tanítás érdekében egységesen volnának jelölendők, s egyúttal erre a jelölésre vonatkozólag indítványt is teszünk. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy alig kerülhető el az, hogy két mennyiség közös betűt kapjon. De ha ez megtörténtk, akkor legalább arra kell tekintettel lenni, hogy az illető két mennyiség egymástól lehetőleg távolfekvő legyen.

1. Szögek	α, β, γ, φ, ψ
2. Út (spatium)	s
3. Hosszúság (1.)	l
4. Színtmagasság	h
5. Küllő (5.)	r
6. Felszín (40.)	F
7. Térfogat (4.)	v
8. Idő (3.)	t
9. Állandó sebesség (celeritas)	c
10. Változó sebesség (velocitas)	u
11. Szögsebesség	γ
12. Gyorsulás (acceleratio)	a

13. Nehézségi gyorsulás (6.)	g
14. Szöggyorsulás	ω
15. Ponderabilis tömeg (2.)	m
16. Erő (pondus)	P
17. Absolut sűrűség (densitas)	d
18. Relativ sűrűség	ρ
19. Fajsúly	s
20. Munka (labor)	L
21. Hatásfok (effectus)	H
22. Kinetikai energia	E
23. Potencziál	V
24. Tehetetlenségi nyomaték (10.)	K
25. Nyomás (pressio) (7.)	p
26. Keresztmetszet	q
27. Barométerállás	b
28. Felszinfeszültség	f
29. Rezgési szám	ν
30. Hullámhosszúság (17.)	λ
31. Rezgési (keringési) periodus	T
32. Törésmutató	n
33. Intensitás (mindenütt)	I
34. Megvilágitás foka	i
35. Fénymennyiség	F
36. Hőmérséklet (centigrad)	t
37. Absolut hőmérséklet (11.)	T
38. Hőmennyiség (14.)	Q
39. Fajhő (36.)	c, γ
40. Gázok tágulási együtthatója (12.)	a
41. Gázok állandója (13.)	R
42. Gázok fajhőinek aránya (37.)	k
43. A hő mechanikai egyenértéke	J
44. Mágneses tömeg	μ
45. Mágneses momentum	M
46. Horizontális összetevő	H
47. Elektromos tömeg	ε

48. Dielektromos állandó … … *D*
49. Capacitás (29.) … … *C*
50. Elektromotoros erő … … *e*
51. Felszínsűrűség … … σ
52. Ellenállás (resistencia) … … *r*

Ez a felsorolás épenséggel nem tart számot a teljességre, s alkalmas módon mindenesetre kiegészítendő. A betűk megismétlődése oly módon hárítható el, hogy a nyomtatott és irott typusok szerint történhetne megkülönböztetés.

A kérdés tekintetében haladásnak kellene tekinteni ezt is, ha lehetséges volna legalább a javaslatba hozott 52 mennyiségre nézve megegyezést létrehozni.

Bozóky Endre.

Utalványczim: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás

az 1904. év decz. hó 15-től decz. hó 31-ig befolyt dijakról.

Tagsági dijat fizettek:

1904. évre: Ábrahám István 10 kor., Ellend József 6 kor., Perényi Kandid 6 kor. Összesen … … … … … … … … … 22 kor.

1905. évre: Bláthy Ottó 10 kor., Pallós B. Kajetán 6 kor., Riegl Sándor 6 kor. Összesen … … … … … … … … … … 22 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból … … … …	— kor.,	január 1-től … … …	719	kor.
F. és köv. évi tagsági díjakból	44 «	« « … …	2254	«
Előfizetési díjakból … …	— «	« « … … …	842	«

Kelt Budapesten, 1905. jan. 1.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-út 15.)

Kimutatás

az 1905. év január hó 1-től márczius hó 20-ig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1902. évre: Darvai Mór dr. 10 kor., Héjas Endre 10 kor., Tatár Balázs 6 kor. Összesen ... 26 kor.

1903. évre: Szabó Péter 2 kor. Összesen ... 2 kor.

1904. évre: Bogyó Samu 10 k., Bozzay Zoltán 10 kor., Eberhardt Béla 6 kor., Fabinyi Rezső dr. 6 kor., Fodor László dr. 6 kor., Gidró Bonifácz 6 kor., Harkay István 6 kor., Harsányi Lajos 6 kor., Kovács Béla 6 kor. Streitmann András 6 kor., Szontágh Gusztáv 6 kor. Összesen ... 74 kor.

1905. évre: Ábrahám István 10 kor., Aliquander Lajos 6 kor., Barányi Balázs 6 kor., Bodola Lajos 10 kor., Bukovszky János 6 kor., Csopey László 10 k., Dózsa János 6 kor., Dörney Károly 6 kor., Egan Lujza 10 kor., Feichtinger Győző 10 kor., Ferenczy István 10 kor., Fodor László dr. 6 kor., Gidró Bonifácz 6 kor., Gotthard Jenő 6 kor., Halász Ernő 10 kor., Harsányi Lajos 6 kor., Hatvani Ede 6 kor., Heuer Ede 10 kor., Hilbert Stefánia 10 kor., Hortobágyi Zsigmond 6 kor., Illosvay Lajos dr. 10 kor., Károly J. Irén 6 kor., K. Kiss József 6 kor., Klatt Román 6 kor., Klein Pál 6 kor., Korda Dezső 6 kor., Koschovitz Gyula 10 kor., Kovács Ferencz 6 kor., Laczó Endre 6 kor., Lakits Ferencz dr. 10 kor., Lendvay Hugó 6 kor., bozóki Lengyel Sándor 10 kor., Lóczy Lajos 10 kor., Lóky Béla dr. 6 kor., Malatin Gotthárd 4 kor., Mattyasovszky Kászon 10 kor., Miller Gyula 6 kor., Módly Krizsó 6 kor., Müller József 10 kor., Palatin Gergely 6 kor., Pekár Dezső dr. 10 kor., Pető Menyhért 6 kor., Rados Ignácz 10 kor., Raffmann Jákó dr. 10 kor., Richter Rezső 10 kor., Rigó Ferencz 10 kor., Simon Tádé 6 kor., Sinkó József 6 kor., Szabó János 6 kor., Szakmáry József 6 kor., Szőke Béla 10 kor., Szuppan Vilmos 10 kor., Szupper Mártha 10 kor., Terlanday Emil 10 kor., Vámos Dezső 10 kor., Závodszky Adolf 10 kor., Összesen ... 442 kor.

1906. évre: Malatin Gotthárd 2 kor., Orbán Antal 10 kor., Sinkó József 6 kor. Összesen ... 18 kor.

1907. évre: Orbán Antal 10 kor. Összesen ... 10 kor.

1908. évre: Orbán Antal 10 kor. Összesen ... 10 kor.

Előfizetési dijat fizettek:

1905. évre: Bártfai áll. főgymnasium 10 kor., Békés-Csabai ev. ref. Rudolf főgymnasium 6 kor., Brassói r. kath. főgymnasium 10 kor., Budapesti V. k. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. k. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti Tanárképző intézet gyakorló főgymnasiuma 10 kor., Budapesti ciszt. r. tanárképző 10 kor., Csiksomlyói r. kath. főgymnasium 10 kor., Debreczeni állami főreáliskola 10 kor., Deési állami főgymnasium 10 kor., Egri áll. főreáliskola 6 kor., Eötvös kollegium 10 kor., Fogarasi áll. főgymn. 10 kor., Győri állami főreáliskola 10 kor., Gyulafehérvári róm. kath. főgymn. 10 kor., Gyulai gymn. 10 kor., Hajdunánási ev. ref. főgymn. 10 kor., Jászberényi kir. kath. főgymn. 10 kor., Jászói prépostság könyvtára 10 kor., Karczagi ev. ref. főgymn. 10 kor., Kecskeméti állami főreáliskola 5 kor., Kisujszállási ev. ref. főgymn. 10 kor., Kolozsvári ev. ref. theol. 10 kor. Körmöczbányai áll. főreáliskola 10 kor., Lőcsei áll. főreáliskola 10 kor., Makói áll. főgymn. 10 kor., Marosvásárhelyi róm. kath. főgymn. 10 kor., Mármarosszigeti ev. ref. főgymn. 10 kor., Nagyenyedi Bethlen főiskola 10 kor.,Nagyváradi áll. főreáliskola 10 kor., Nyitrai felsőbb leányiskola 10 kor., Pannonhalmi főapátsági könyvtár 10 kor., Pollatsek könyvkereskedő 10 kor., Privigyei kegy. rendi gymnasium 10 kor., Pozsonyi kir. kath. főgymn. 10 kor., Selmeczbányai kir. főgymn. 10 kor., Sepsi-szt.-györgyi ev. ref. főgymn. 10 k., Soproni ág. hitv. ev. lyceum 10 kor., Soproni áll. főreáliskola 6 kor., Szakolczai főgymn. 10 kor., Szarvasi ág. hitv. ev. főgymn. 10 kor., Szilágyi pol. iskola 10 kor., Szegzárdi áll. főgymn. 10 kor., Székelyudvarhelyi ev. ref. főgymn. 6 kor., Székelyudvarhelyi áll. főreáliskola 10 kor., Székesfehérvári áll. főreáliskola 10 kor., Szepesiglói áll. tanitóképző 10 kor., Temesvári áll. főgymn. 10 kor., Temesvári áll. főreáliskola 10 kor., Ujvidéki kir. kath. főgymn. 10 kor., Ungvári áll. főgymn. 10 kor., Vancsó Béla 10 kor., Zilahi ev. ref. főgymnasium 6 kor. Összesen ... 505 kor.

1906. évre: Székelyudvarhelyi róm. kath. főgymnasium 10 kor. Összesen ... 10 kor.

1907. évre: Székelyudvarhelyi róm. kath. főgymnasium 10 kor. Összesen ... 10 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból ...	102 kor.	január 1-től 102 kor.
F. és köv. évi tagsági dijakból	480 kor.	« « 480 kor.
Előfizetési dijakból ...	525 kor.	« « 525 kor.

Kelt Budapesten, 1905. márcz. 21.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-ut 15.)

A KÚPSZELET MINT GEOMETRIAI HELY.

(Negyedik és befejező közlemény.)

II. A kúpszelet, mint geometriai helye azoknak a pontoknak, a melyeknek távolságai egy síktól és egy ponttól állandó viszonyban vannak.

31. Az eddigi tárgyalásban szereplő három forgásfelületet: a sféroidot, az egyágú forgáshiperboloidot és a parabolikus hengert, az ellipsis, a hiperbola, illetve a parabola írja le, ha melléktengelye körül forgattatik. E kúpszeletek főtengelyük körül forgatva megfelelően: forgásellipsoidot, kétágú forgáshiperboloidot és forgásparaboloidot írnak le. A forgás alkalmával a forgó kúpszeletnek, $d^{(2)}$-nek, F és F' gyújtópontjai helyzetüket nem változtatják, ellenben azoknak f és f' vezérlő vonalai ama felületeknek φ és φ' vezérlő síkjait írják le. S minthogy a $d^{(2)}$ kúpszelet pontjainak távolságai a gyújtópontoktól és a hozzátartozó vezérlő vonaltól állandó viszonyban vannak, azért a $d^{(2)}$ által leírt forgásfelületek pontjainak távolságai is ugyanazoktól a gyújtópontoktól (melyeket a felület gyújtópontjainak is nevezünk), és a hozzájuk tartozó vezérlő síkoktól állandó viszonyban, λ-ban, vannak. Az F gyújtópont, a hozzátartozó φ vezérlő sík, valamint a λ viszony vagy a felületnek egy pontja, meghatározza az illető forgásfelületet, s mert e másodrendű forgásfelületeknek minden síkmetszése kúpszelet, ezért:

Azoknak a pontoknak geometriai helye $e^{(2)}$ valamely ε síkban, melyeknek távolságai egy F ponttól és egy φ síktól állandó (λ) viszonyban vannak: kúpszelet.

Ha $\lambda<1$, akkor az $e^{(2)}$ kúpszelet ellipsis (vagy kör); ha $\lambda=1$, akkor az $e^{(2)}$ ellipsis (vagy kör), vagy parabola; végre ha $\lambda>1$, akkor az $e^{(2)}$ lehet ellipsis (vagy kör), hiperbola vagy parabola, mert ezeknek az eseteknek megfelelőleg az F, φ és λ által meghatározott forgásfelületek: ellipsoid, paraboloid, illetve hiperboloid. A φ és ε siknak metszővonala pedig mindig párhuzamos az $e^{(2)}$-nek vezérlő vonalaival.

32. Lássuk most fordítva, hogy *ha adva van valamely ε síkban az $e^{(2)}$ kúpszelet, és egy a kúpszelet vezérlő vonalaival párhuzamos φ sík, mikép lehet az F pontot úgy meghatározni, hogy az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai az F ponttól és a φ síktól állandó viszonyban legyenek.*

Hogy a feladatot megoldhassuk, előre kell bocsátanunk a következő tételeket:

1. «A gyújtópontokkal biró II. r. forgásfelület egyik vagy másik gyújtópontján, F-en, keresztül menő π sík merőleges arra az egyenesre, a mely az F gyújtópontot a π siknak a felületre vonatkozó pólusával összeköti.»

Ugyanis, ha a π sik a felületnek F gyújtópontján megy keresztül, akkor annak P pólusa az F ponthoz tartozó φ vezérlő sikban van. A P rajta fekszik annak a meridiánnak a vezérlő vonalán, a melynek sikja a P-n megy keresztül, tehát a P pontnak e meridiánra vonatkozó polárisa p_1, az F gyújtópontban merőlegesen áll a PF egyenesre. S mert a π sik ezen a p_1 poláríson megy keresztül és merőleges a meridián síkjára, azért a π merőleges egyszersmind a PF egyenesre.

Ennek következménye: «A gyújtóponttal biró II. r. forgásfelületeknek azon kapcsolt poláris síkjai, a melyek egymást egy gyújtóponton keresztül menő p_1 egyenesben metszik orthogonális sort képeznek.»

2. «A gyújtópontokkal biró II. r. forgásfelületnek bármelyik síkmetszése a felületnek úgy az egyik, mint a másik gyújtópontjából forgáskúppal projicziálható. E kúpnak forgástengelye a metszősík és az illető gyújtóponthoz tartozó vezérlősík metszővonalának a felületre vonatkozó polárisa.»

Messe az ε sik az $F^{(2)}$ II. r. forgásfelületet és annak az F gyújtópontjához tartozó φ vezérlő síkját az $e^{(2)}$ kúpszeletben, illetve a p egyenesben, és legyen $F.e^{(2)}$ az a kúp, a mely az $e^{(2)}$-t az F-ből projicziálja. A p egyenes pontjainak poláris síkjai egymást a p-nek a felületre vonatkozó és így az F ponton keresztül menő p_1 polárisában metszik; ezért a p_1 síksorban az $F^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt poláris síkok orthogonális sort képeznek. Ezek a kapcsolt poláris síkok azonban az $F.e^{(2)}$ kúpra vonatkozólag is kapcsolt poláris síkok, és mert a p_1 az $[Fp]$ síkra merőlegesen áll, azért a p_1 forgástengelye az $F.e^{(2)}$ kúpnak.

Az $e^{(2)}$ kúpszelet főtengelyének P, P_1 metszőpontjai a p, p_1 polárispárral, harmonikusan választják el az $e^{(2)}$ főtengelyén levő SS' csúcspontokat, és a mellett a p_1 merőlegesen áll a PF egyenesre az F pontban. Ezért az $F^{(2)}$ felületnek F gyújtópontja azon a PP_1 átmérő fölé írt $k^{(2)}$ körön van, a melynek síkja az $e^{(2)}$-nek főtengelyén megy keresztül és a φ vezérlő síkra merőleges.

A 2. tételnek következménye:

A gyújtópontokkal biró II. r. forgásfelület bármelyik síkmetszésének fokális kúpszelete a felület gyújtópontjain megy keresztül, mert, mint ismeretes, a fokális kúpszelet pontjaiból az eredeti kúpszelet forgáskúppal projicziáltatik.

Ezek után már áttérhetünk a kitűzött feladat megoldásához.

33. Legyen tehát adva az ε síkban az $e^{(2)}$ kúpszelet, továbbá a φ sík, a mely az $e^{(2)}$-nek vezérlő vonalával párhuzamos. Fektessünk az $e^{(2)}$-n keresztül egy oly $F^{(2)}$ II. r. forgásfelületet, a melynek vezérlő síkja a φ, és keressük meg ennek a φ-hez tartozó gyújtópontját F-et.

Az F pont egyrészt az $e^{(2)}$-nek fokális kúpszeletén $e_1^{(2)}$-n van, másrészt azon a $k^{(2)}$ körön is rajta van, a mely az $e^{(2)}$ főtengelyének egy pontjából akkép írható lehet az $e_1^{(2)}$-nek síkjában, hogy az $e^{(2)}$-nek főtengelyén levő SS' csúcsokat harmonikusan válaszsza el és e főtengelynek, valamint a φ síknak P metszőpontján menjen keresztül. A $k^{(2)}$ körnek és az $e_1^{(2)}$ kúpszeletnek F és F' metszőpontjai közül bármelyik, már a keresett $F^{(2)}$ forgásfelület φ vezérlő síkjához tartozó gyújtópont, tehát oly tulajdonságú, hogy az $e^{(2)}$ kúpszelet pontjainak távolságai az F és φ-től, úgyszintén az F' és φ-től, állandó viszonyban vannak.

A talált F és F' pontok, mint a szerkesztésből látható, csak az $e^{(2)}$ kúpszelettől és a φ síknak az $e^{(2)}$ síkján levő p nyomától függnek. Hogy ezt az összefüggést közelebbről megvizsgáljuk, vegyük tekintetbe, hogy az $e^{(2)}$ kúpszeletnek vezérlő vonalai annak ε síkját két részre osztják; e részek egyikében vannak az $e^{(2)}$-nek valós pontjai. A szerint, a mint a φ síknak p nyoma az ε síkon, ebben vagy a másik részben van, vagy végre az $e^{(2)}$-nek egyik vezérlő vonalában van; az FF' pontok képzetesek, valósak és különbözők, illetve egybeesők az $e^{(2)}$-nek egyik gyújtópontjában. Maga a p egyenes pedig az $e^{(2)}$ kúpszelet $e_1^{(2)}$ fokális kúpszelete F és F' pontjaihoz tartozó normális síkoknak nyoma az ε síkon.

Könnyen megállapítható továbbá, hogy milyen lesz az adott $e^{(2)}$ kúpszeleten keresztül menő II. r. forgásfelület $F^{(2)}$, ha a φ sík a p egyenes körül forog.

Miután az $e^{(2)}$ kúpszelet és a p egyenes segélyével meghatároztuk azokat az F és F' pontokat, a melyek az összes $F^{(2)}$ felületeknek gyújtópontjai, az $e^{(2)}$ főtengelyén levő egyik csúcsból az F-en (és az F'-ön) keresztül leírjuk a $\gamma^{(2)}$ gömböt. A p-ből 2, 1, vagy 0 (valós) érintősík vezethető a $\gamma^{(2)}$ gömbhöz a szerint, a mint az $e^{(2)}$ ellipsis, parabola vagy hiperbola. Az $F^{(2)}$ forgásfelület pedig kétágú hiperboloid, ellipsoid vagy paraboloid a szerint, a mint a p síksor φ síkjai közül olyant választunk az F (vagy az F') gyújtóponthoz tartozó vezérlő síknak, a mely a $\gamma^{(2)}$ gömböt valós vagy képzetes körben metszi, vagy végre érinti. Ha tehát az $e^{(2)}$ kúpszelet ellipsis, akkor azon ∞^1 kétágú hiperboloid, ∞^1 ellipsoid és két paraboloid, ha pedig az $e^{(2)}$ kúpszelet parabola, akkor azon ∞^1 hiperboloid és egy paraboloid, végre ha az $e^{(2)}$ kétágú hiperbola, akkor azon csak ∞^1 kétágú hiperboloid megy keresztül, a melynek vezérlő síkja az $e^{(2)}$-nek síkját az adott p egyenesben metszi. Mind a három esetben a kétágú hiperboloidok közül kettő forgáskúppá, egy pedig síkká korcsosul el. A forgáskúpok azokhoz a φ síkokhoz tartoznak, a melyek az F, illetve az F' ponton mennek keresztül, a sík pedig akkor áll elő, ha a φ sík egybeesik az ε-mal.

E vizsgálatokból az iránt is tájékozódtunk, hogy *ha az $e^{(2)}$ kúpszelet és annak $e_1^{(2)}$ fokális kúpszeletén egy F pont van adva, hol keresendők azok a φ síkok, a melyektől és az F ponttól az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai állandó viszonyban vannak.*

Az F pontnak az $e_1^{(2)}$-höz tartozó normális síkja az $e^{(2)}$-nek síkját egy p egyenesben metszi; a p síksornak minden φ síkja a kivánt tulajdonságú.

Ez különben közvetlenül is belátható a 7. pont alapján. Mert az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai az F ponttól és a p egyenestől állandó viszonyban vannak. Tehát az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai az F ponttól és a p síksornak bármelyik síkjától szintén állandó viszonyban lesznek.

34. A 32. pontban levő tételek alapján könnyen kimutatható a II. r. kúpoknak egy tulajdonsága, mely a fokális sugarakra vonatkozik.

Vezessünk valamely M pontból érintősíkokat egy $F^{(2)}$ II. r. forgásfelülethez, a melynek gyújtópontjai F, F'. Ezek az érintősíkok az $F^{(2)}$-t egy $e^{(2)}$ kúpszeletnek pontjaiban érintik, tehát az $M.e^{(2)}$ érintőkúpja az $F^{(2)}$-nek.

Az $F^{(2)}$-nek minden kapcsolt poláris síkpárja, a mely az M-en megy keresztül az $M.e^{(2)}$ kúpra vonatkozólag is kapcsolt poláris síkpár. De az MF, valamint az MF' egyenesen keresztül menő és az $F^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt poláris síkpárok a (32. pont 1. segédtételének következménye sz.) orthogonális sort képeznek, tehát ugyanilyen sort képeznek ezek az $M.e^{(2)}$ kúpra nézve is, és így az MF, MF' egyenesek fokális sugarai az $M.e^{(2)}$ kúpnak.

E szerint:

«Bármely M pontból a gyújtóponttal biró II. r. forgásfelületnek gyújtópontjaihoz vezetett egyenesek fokális sugarai annak a II. r. kúpnak, a melynek alkotói az M pontból a felülethez vezethető érintők.»

Az $e^{(2)}$ kúpszelet az $F^{(2)}$ felületnek F és F' gyújtópontjaiból forgáskúppal projicziáltatik (32. pont 2. tétele). E kúpoknak forgástengelyei az MF, MF' egyenesek. Ezért az F, F' pontok az $e^{(2)}$ kúpszelet fokális kúpszeletének, $e_1^{(2)}$-nek pontjai, és az MF, MF' egyenesek ennek érintői. Tehát:

Azok az érintők, a melyek valamely $e^{(2)}$ kúpszeletnek $e_1^{(2)}$ fokális kúpszeletéhez egy M pontból vezethetők, fokális sugarai az $M.e^{(2)}$ kúpnak.

Vagy általánosabban kifejezve:

Valamely kúpszeletnek két érintője fokális sugara annak a kúpnak, a mely ama érintők metszőpontjából a kúpszeletnek fokális kúpszeletét projicziálja.

III. A kúpszelet, mint geometriai helye azoknak a pontoknak, a melynek távolságai egy síktól és egy egyenestől egyenlő viszonyban vannak.

35. Minden $K^{(2)}$ II. r. kúp pontjainak távolságai a kúp egyik fokális sugarától f-től, és az ehhez tartozó poláris síktól φ-től, állandó viszonyban vannak.* S mert a $K^{(2)}$ kúpnak metszése egy tetszésszerinti ε síkkal egy $e^{(2)}$ kúpszelet, azért az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai ama f egyenestől és φ síktól szintén állandó viszonyban vannak.

Ha fordítva egy $e^{(2)}$ kúpszelet és egy φ sík van adva, a mely az $e^{(2)}$-t nem metszi valós pontokban, akkor mindig lehet egy oly f egyenest találni, hogy az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai ettől az f egyenestől és ama φ síktól állandó viszonyban legyenek. E végből fel kell keresni azt a II. r. kúpot, a mely az $e^{(2)}$-n megy keresztül, és a mely kúp egyik fokális sugarának, f-nek, poláris síkja a φ sík.

Jelöljük G-vel a pólusát annak a $(\varphi, \varepsilon) \equiv g$ egyenesnek, a melyben a φ sík az ε síkot metszi. A G ponton keresztül menő és az $e^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt polárisok egy elliptikus involucziós sugársort képeznek. Két egyenest, f és f'-et, szerkeszthetünk, a melyből ama elliptikus involucziós sugársor orthogo-

* Klug: *Projektiv Geometria* (1903). 42. old.

nális (involucziós) síksorral projicziálható; e két egyenes egymásnak tükörképe az ε síkra nézve.* Az f, f' egyenesek a φ síkot az M, M' pontokban metszik; az $M.e^{(2)}$ kúpnak az f és φ, az $M'.e^{(2)}$ kúpnak pedig az f' és φ az egyik fokális sugara, illetve az ahhoz tartozó poláris síkja. Ez abból következik, hogy a II. r. kúpnak bármelyik fokális sugarán (és csak ezen) keresztül menő kapcsolt poláris síkok orthogonális sort képeznek.**

Az ff' egyeneseknek közös derékszögű projekcziójuk van az $e^{(2)}$ kúpszeletnek síkján. E projekczió könnyen meghatározható. Ugyanis a $g\equiv(\varphi, \varepsilon)$ egyenesnek az $e^{(2)}$ kúpszeletre vonatkozó G pólusán két egymásra merőleges kapcsolt poláris megy keresztül; ezek harmonikusan választják el az $e^{(2)}$-nek FF' gyújtópontjait. Ama derékszögű kapcsolt polárisoknak egyike a kúpszeletnek az FF' gyújtópontok által két részre, m és n-re, osztott főtengelyét azon a vonalrészen, m-en metszi, a melyen annak csúcspontjai vannak, a másik pedig az n részen. Az első egyenes lesz az ff' egyeneseknek közös derékszögű projekcziója. De ha a g egyenes merőleges a kúpszeletnek főtengelyére, tehát a g-nek G pólusa a főtengelyen van, akkor az ff' egyeneseknek derékszögű projekcziója az ε síkra vagy maga a főtengely, vagy merőleges a főtengelyre, vagy végre az egyik gyújtópont, a szerint, a mint a G az n részen, vagy az m részen, vagy az egyik gyújtópontban van.

Ezekből folyólag mondhatjuk:

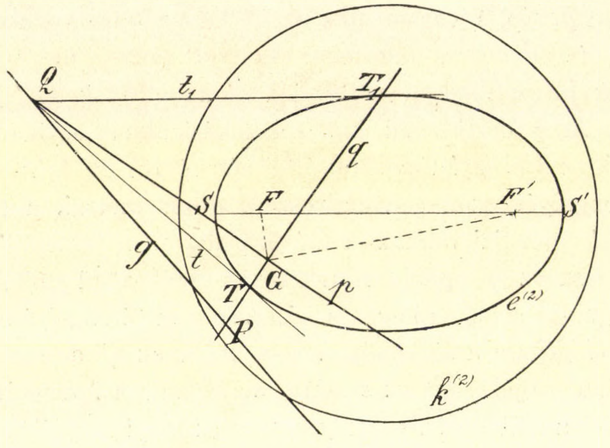
Ha az $e^{(2)}$ kúpszelet ε síkjában az $e^{(2)}$-n kívül fekvő síkrészben egy g egyenest veszünk fel, a melynek az $e^{(2)}$-re vonatkozó pólusa a G pont, akkor a G ponton keresztül oly két, az ε síkra szimmetrikus ff' egyenest szerkeszthetünk, hogy a kúpszelet pontjainak távolságai a g egyenesen keresztül menő bármely φ síktól és az f, valamint az f' egyenestől állandó viszonyban vannak. Ezekből az ff' egyenesekből, a G-ből kisugárzó kapcsolt poláris párok orthogonális síksorral projicziáltatnak. Az

---

* U. o. 9. old.

** U. o. 37—38. old.

f-nek és f'-nek közös derékszögű projekcziója az ε síkra ama kapcsolt poláris párok közül egyike a derékszögű kapcsolt polárisoknak és pedig az, a mely a gyújtópontoktól két részre osztott főtengelyt abban az m részben metszi, a melyben az $e^{(2)}$-nek csúcsai vannak. A főtengelyen fekvő G-re nézve ama derékszögű projekczió vagy merőleges a főtengelyre, vagy a főtengely, vagy az egyik gyújtópont, a szerint a G az m részben vagy azon kívül, vagy az egyik gyújtópontban van.



11. ábra.

36. A további tárgyalást az egyes kúpszeletre nézve külön kell választanunk.

Legyen tehát *először* az $e^{(2)}$ kúpszelet egy *ellipsis* (11. ábra). Ennek ε síkjában felvett g egyenesnek G pólusa legyen az $e^{(2)}$-n belül. Az $e^{(2)}$-nek a G-ből kisugárzó derékszögű kapcsolt poláris párja pq a g-t a QP kapcsolt póluspárban metszi, és így a $GPQ \equiv gpq$ derékszögű poláris háromszöge az $e^{(2)}$-nek. A szerint, a mint a g egyenes nem metszi, érinti, vagy metszi azt a $k^{(2)}$ kört, a melynek pontjaiból az $e^{(2)}$-hez vonható érintők derékszögűek: mindkét pont QP a $k^{(2)}$ körön kívül van, vagy a Q pont a g és $k^{(2)}$-nek érintőpontja, vagy végre csak a Q pont van a $k^{(2)}$ körön kívül a P pedig azon belül (11. ábra). Mert a GPQ

poláris háromszög köré írt kör, a melynek egyik átmérője a PQ a $k^{(2)}$-t derékszög alatt tartozik metszeni, azért a PQ pontok a $k^{(2)}$ körtől harmonikusan vannak elválasztva.

A $k^{(2)}$ körön kívül fekvő Q pontból az $e^{(2)}$-hez vezethető tt_1 érintők az $e^{(2)}$-t az $e^{(2)}$-nek és a q-nak TT_1 metszőpontjaiban érintik, és a TQT_1 szög hegyes. A Q-ból kisugárzó pg kapcsolt polárisok harmonikusan választják el a tt_1 érintőpárt, tehát közülök a p, a mely az $e^{(2)}$-t metszi kisebb hegyes szöget képez a t és t_1-gyel, mint a g, és ezért a T (és a T_1) pontnak távolsága TG (illetve T_1G) a p-től kisebb, mint a g-től.

A g egyenesen keresztül tehát lehet olyan φ síkot vezetni, a melytől a T pont távolsága egyenlő a TG vonaldarabbal. Ha már most az f egyike azoknak az egyeneseknek, a melyekből a G-ből kisugárzó kapcsolt poláris párok orthogonális síksorral projicziáltatnak, akkor az f egyenesnek derékszögű projekcziója az ε síkra a p egyenes, és az $e^{(2)}$ ellipsis T pontjának távolsága az f egyenestől és a φ síktól egyenlő TG-vel, és így az $e^{(2}$ ellipsis minden pontjának távolsága az f és φ-től egyenlő.

Ezért mondhatjuk:

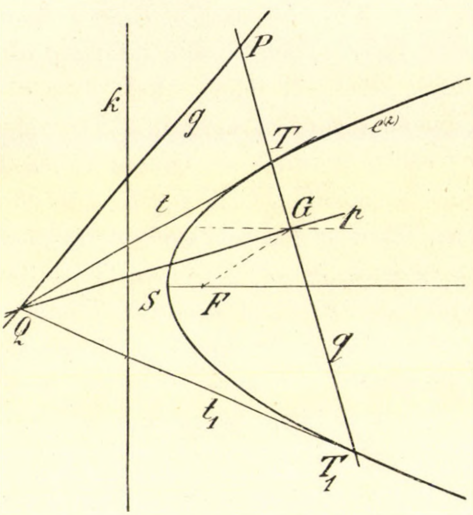
Ha az $e^{(2)}$ ellipsis síkjában felveszünk egy g egyenest, a mely az $e^{(2)}$-t nem metszi, akkor ezen a g-n keresztül lehet egy oly φ síkot, és a g-nek G pólusán keresztül egy oly f egyenest átvezetni, hogy az $e^{(2)}$ pontjai az f-től és a φ-től egyenlő távolságra vannak. Az f-en keresztül menő orthogonális síksor társsíkjainak az $e^{(2)}$ síkját kapcsolt polárisokban kell metszeniök, és az f-ből a φ sík már egyszerű úton szerkeszthető.

Az a kúp, a mely az $e^{(2)}$ ellipsist a φ sík és az f egyenes metszőpontjából projicziálja: HACHETTE-féle. Az f annak egyik fokális sugara, a φ pedig az f-nek a kúpra vonatkozó poláris síkja. Mert a HACHETTE-féle kúp pontjainak távolságai egy fokális sugártól és annak poláris síkjától egyenlők.*

37. Ha *másodszor* az $e^{(2)}$ kúpszelet *parabola* (12. ábra), és a

* KLUG: *Proj. Geom.* Ha ott a 42. oldalon $\lambda=1$, akkor $\psi=45°$, tehát ugyanott a 60. old.) a kúp HACHETTE-féle.

g egyenesnek vele nincs valós közös pontja, akkor a g-nek G pólusán keresztül menő pq derékszögű kapcsolt polárisok a g-t oly QP pontokban metszik, a melyek az $e^{(2)}$-nek vezérlő vonalától egyenlő távolságra vannak. Ha a Q pont és az $e^{(2)}$ parabola a vezérlő vonaltól el van választva, akkor a Q pontból az $e^{(2)}$-hez vezethető tt_1 érintők hegyes szöget képeznek, tehát a Q polárisának, q-nak, TT_1 metszőpontjai a parabolával a G ponttól



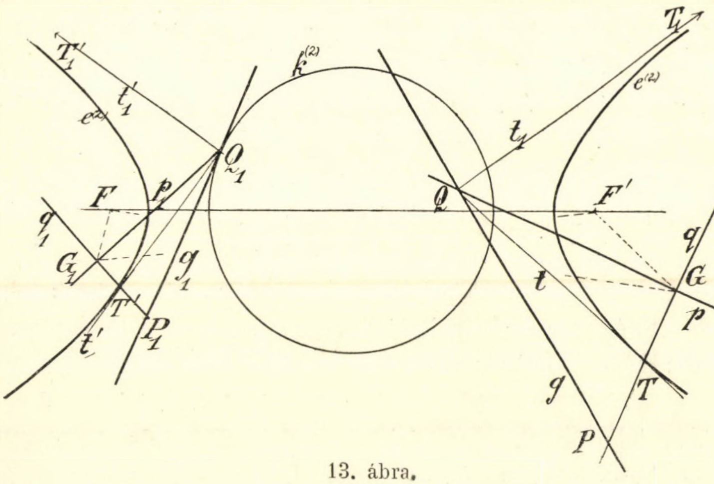
12. ábra.

kisebb távolságra vannak, mint a g egyenestől. Ezért a g-n keresztül oly φ síkot és a G-n keresztül oly f egyenest vezethetünk, a melyektől a parabola pontjai egyenlő távolságra vannak. Így tehát:

Ha az $e^{(2)}$ parabola síkjában levő g egyenes nem metszi a parabolát, akkor a g-n keresztül oly φ síkot, a g-nek G pólusán keresztül pedig oly f egyenest vezethetünk, hogy a parabola pontjai a φ és az f-től egyenlő távolságra vannak. Az f-en keresztül menő orthogonális síksornak társsíkjai az $e^{(2)}$-nek síkját az $e^{(2)}$ kapcsolt polárisaiban metszik, és f már meghatározza a φ síkot.

Az a kúp, a mely az $e^{(2)}$ parabolát az f és φ metszőpontjából projicziálja: Hachette-féle. Csak abban az esetben megy át ez a Hachette-féle kúp hengerbe, ha a g egyenes a parabolának vezérlő vonala, tehát a G pont annak gyújtópontja.

38. Vegyük fel végre *harmadszor*, hogy az $e^{(2)}$ kúpszelet olyan *hiperbola* (13. ábra), a melynek asimptótái a főtengelyhez 45°-nál kisebb szög alatt hajlanak. E hiperbola síkjában van olyan valós $k^{(2)}$ kör, a melynek pontjaiból a hiperbolához vezethető érintők derékszögűek.



13. ábra.

Vegyük fel a g egyenest a hiperbolán kívül fekvő síkrészben akképen, hogy az a $k^{(2)}$ kört messe. A g-nek G pólusán keresztül menő pq derékszögű polárisok a g-t a $GPQ \equiv gpq$ derékszögű poláris háromszögűek QP csúcsaiban metszik, és mert ama poláris háromszög körül írható kör a $k^{(2)}$-t derékszög alatt metszi, azért a QP pontok közül egyik, pl. a Q, a $k^{(2)}$-n belül, a P pedig azon kívül van.

A Q pontból az $e^{(2)}$-hez vezethető tt_1 érintők az $e^{(2)}$-t a TT_1 pontokban érintik, és a TQT_1 szög hegyes. A Q-ból kisugárzó pg kapcsolt polárisok a tt_1 érintőket harmonikusan választják el; közülök a p, a mely az $e^{(2)}$-t metszi a t és t_1-gyel kisebb szöget képez, mint a g, és ezért a T pontnak TG távolsága a p-től kisebb, mint a g-től. Tehát a g egyenesen keresztül lehet oly φ síkot vezetni, a melytől a T pont távolsága egyenlő TG-vel. Másrészt a G ponton keresztül oly f egyenest vezethetünk, a melynek derékszögű projekcziója az $e^{(2)}$-nek síkjára a p, és a melyből a G-ből kisugárzó kapcsolt polárisok orthogonális síksorral projicziáltatnak. Az $e^{(2)}$ hiperbola pontjainak távolságai ettől az f egyenestől és az előbbi φ síktól egyenlők, mert a hiperbola T pontjának távolsága az f és φ-től egyenlő (TG-vel).

Ha a g egyenes nem metszi a $k^{(2)}$ kört, akkor a g-n nincsen olyan pont, a melyből az $e^{(2)}$-höz vezethető érintő félsugarak hegyes szöget képeznek. Ekkor a g-n keresztül nem vezethető olyan φ sík, és a G-n keresztül olyan f egyenes, a melytől az $e^{(2)}$ hiperbola pontjai egyenlő távolságra volnának.

Ha a g_1 egyenes érinti a $k^{(2)}$ kört a Q_1 pontban és nem metszi az $e^{(2)}$-t, akkor a Q_1 pont polárisa q_1 a g_1-et a P_1 pontban metszi. A $G_1P_1Q_1$ poláris háromszöge az $e^{(2)}$-nek; az e háromszög körül írható kör a $k^{(2)}$-t a Q_1 pontban derékszög alatt metszi; tehát a P_1Q_1 átmérője e körülírható körnek, és így a $G_1P_1Q_1$ háromszög derékszögű. (13. ábra.)

A Q_1 pontból az $e^{(2)}$ hiperbolához vezethető $t't'_1$ érintők derékszögűek, tehát ezek $T'T'_1$ érintőpontjainak távolságai a g_1-től és a $Q_1P_1 \equiv p_1$ egyenestől egyenlők. És ha az $e^{(2)}$-nek a G_1-ből kisugárzó kapcsolt polárisai az f egyenesből orthogonális síksorral projicziáltatnak, akkor az f-nek derékszögű projekcziója az $e^{(2)}$-nek síkjára a p_1, tehát az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai az f egyenestől, valamint a g-ben az $e^{(2)}$-nek síkjára merőlegesen álló φ síktól, és így a g egyenestől is egyenlők.

E tárgyalásból következik:

1. Hogy ha az $e^{(2)}$ hiperbola asimptótái a főtengelylyel 45°-nál nagyobb szöget képeznek, tehát a $k^{(2)}$ kör képzetes, akkor a hiperbola síkjában nincsen olyan g egyenes, a melyen keresztül menő φ síktól, és a melynek G pólusán keresztül menő f egyenestől a hiperbola pontjai egyenlő távolságra volnának.

2. Ha az $e^{(2)}$ hiperbola egyenoldalú, tehát a $k^{(2)}$ annak közép-

pontjába huzódik össze, akkor az $e^{(2)}$-nek minden átmérőjét, a mely az $e^{(2)}$-t nem metszi a $k^{(2)}$-t érintő g egyenesnek tekinthetjük. A g-hez kapcsolt átmérő p, derékszögű projekcziója egy a p-vel párhuzamos f egyenesnek, a mely f egyenestől a hiperbola pontjai ugyanoly távolságra vannak, mint a g egyenestől, és mint a g-ben az $e^{(2)}$ síkjára merőlegesen álló φ siktól. Könnyen igazolható még, hogy ha az egyenoldalú hiperbolának félfőtengelye a, és a g átmérője az egyik asimptótával ψ szöget képez, akkor az f egyenesnek távolsága a hiperbola síkjától $a \,.\, \sqrt{\sin 2\psi}$.

Ezek után mondhatjuk:

Ha az $e^{(2)}$ hiperbola asimptótái annak főtengelyével 45°-nál kisebb szöget képeznek, tehát az a $k^{(2)}$ kör, a melynek pontjaiból az $e^{(2)}$-höz vezethető érintőpárok derékszögűek, valós, akkor e $k^{(2)}$ kört metsző vagy érintő és a hiperbolán kívül levő síkrészben felvett bármely g egyenesen keresztül lehet olyan φ síkot, és annak G pólusán keresztül olyan f egyenest vezetni, a mely φ síktól és f egyenestől a hiperbola pontjai egyenlő távolságra vannak. Ha a g egyenes érintője a $k^{(2)}$ körnek, akkor a φ sík merőlegesen áll az $e^{(2)}$-nek ε síkjára.

Ha az $e^{(2)}$-nek asimptótái a főtengelylyel 45° szöget képeznek, tehát a hiperbola egyenoldalú, akkor a φ sík mindig merőleges az ε síkra és azt egy g átmérőben metszi, az f egyenes pedig párhuzamos a g-hez kapcsolt p átmérővel, és f-nek derékszögű projekcziója az ε síkra a p-ben van.

Ha végre az $e^{(2)}$ asimptótái az $e^{(2)}$-nek főtengelyével 45°-nál nagyobb szöget képeznek, akkor nincsen olyan φ sík és f egyenes, a melytől ennek a hiperbolának pontjai egyenlő távolságra vannak.

Az első és második esetben az f egyenestől, a G-ből kisugárzó kapcsolt poláris párok orthogonális síksorral projicziáltatnak. A második esetben az f egyenes távolsága az ε síktól $a \sqrt{\sin 2\psi}$, ha «a» az egyenoldalú hiperbola félfőtengelye, a ψ pedig az f-nek és a g-nek hajlásszöge annak bármelyik asimptótájához.

Az a kúp, a mely az első és második esetben az $e^{(2)}$ hiperbolát az f és φ metszőpontjából projicziálja itt szintén HACHETTE-féle. S mert a HACHETTE-féle kúp nem metszhető olyan hiperbola szerint, a melynek asimptótái a főtengelylyel 45°-nál nagyobb szöget képeznek, azért előreláthatólag az ily hiperbolához nem lehetett oly φ síkot és f egyenest találni, a melytől annak pontjai egyenlő távolságra vannak.

Ez utóbbi tárgyalásból kitünt, hogy a hiperbola ε síkjában lehet olyan g egyenest találni (ezek voltak a $k^{(2)}$ körnek érintői), a mely g egyenestől és a hiperbola síkján kívül levő f egyenestől a hiperbola pontjai egyenlő távolságra vannak. Ilyen volt különben (38. pont) a parabolának g vezérlő vonala, és a gyújtópontjában annak síkjára emelt f merőleges egyenes. Ezért kérdezhetjük, lehet-e általában oly g és f egyeneseket találni, a melyektől egy adott kúpszelet pontjainak távolságai állandó viszonyban vannak. Ezt a kérdést tárgyaljuk a következő fejezetben.

IV. A kúpszelet, mint geometriai helye azoknak a pontoknak, a melyeknek távolságai két egyenestől állandó viszonyban vannak.

39. Azoknak a pontoknak geometriai helye $F^{(2)}$, a melyeknek távolságai két egyenestől, f és g-től, állandó viszonyban vannak az orthogonális hiperboloid* vagy annak elfajulásai: az orthogonális kúp, az egyenlő oldalú hiperbolikus paraboloid, vagy végre a derékszögű síkpár. Az 1-ső és 3-dik esetben a két egyenes f és g nem metszi egymást; ellenben a 2-dik és 4-dik esetben az egyeneseknek van metszőpontjuk. Az 1-ső és 2-dik esetben ama viszony az egységtől különböző; ellenben a 3-dik és 4-dik esetben ama viszony egyenlő az egységgel, tehát az $F^{(2)}$ pontjai az f és g egyenesektől egyenlő távolságra vannak.

Mind a négy esetben az fg egyenespár poláris párja az $F^{(2)}$

---

* KLUG: *Proj. Geom.* 129. old., 54. old. és 154. old.

felületnek, és úgy az f-en, mint a g-n keresztül menő kapcsolt poláris síkjai az $F^{(2)}$-nek egy-egy orthogonális síksort képeznek.

Egy tetszésszerinti ε sík az $F^{(2)}$ felületet az $e^{(2)}$ kúpszeletben vagy egyenespárban metszi, ezért kérdezhetjük:

Ha adva van egy $e^{(2)}$ kúpszelet és még egy f egyenes; hogyan szerkeszthető egy oly g egyenes, hogy az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai az f és g egyenesektől állandó viszonyban legyenek?

Az $e^{(2)}$-n keresztül egy oly orthogonális hiperboloidot $F^{(2)}$-t kell átvezetnünk, hogy úgy az adott f egyenesnek, mint az f polárisának g-nek kapcsolt poláris síkjai az $F^{(2)}$-re vonatkozólag orthogonális sort képezzenek. Ezekből a föltételekből akarjuk a g egyenest szerkeszteni.

40. E végből előre bocsátjuk a következő *segédtételeket:*

1. «Ha valamely $F^{(2)}$ II. r. felületnek PP_1 kapcsolt pólusai az r egyenesből kapcsolt poláris síkokkal projicziáltatnak, akkor a PP_1 kapcsolt pólusok az r-nek polárisából, r_1-ből, szintén kapcsolt poláris síkokkal projicziáltatnak.»

Bizonyítás. A $[Pr]$, $[P_1r]$ kapcsolt poláris síkoknak pólusai az r_1 egyenesnek A, B metszőpontjai a $[P_1r]$, $[Pr]$ síkokkal. A P_1A, PB egyenesek az r-et a C, D pontokban metszik.

A P_1CA egyenes P_1 pontjának poláris síkja a P-n, a C pontjának poláris síkja, az r_1-en megy keresztül és az A pontjának poláris síkja a $[Pr]$ sík; ez a három sík pedig egymást a P_1CA egyenes polárisában metszi. A P-n és az r_1-en keresztül vezetett síkok közül csak azok metszik egymást a $[Pr]$ síknak ugyanegy egyenesében, a melyek a PBD-n mennek keresztül; tehát ez a PBD egyenes a polárisa a P_1CA-nak.

Minthogy ezek szerint az $ABCD$ egy poláris tetraedere az $F^{(2)}$-nek, a $[PDAB] \equiv [Pr_1]$, $[P_1CAB] \equiv [P_1r_1]$ síkok kapcsolt poláris síkjai az $F^{(2)}$-nek.

2. «Ha az $M^{(2)}$ orthogonális kúpnak s_1s_2 főalkotói annak összes alkotóiból derékszögű síkpárokkal projicziáltatnak, és az AB pontok az s_1s_2 alkotóktól harmonikusan vannak elválasztva, akkor az A, B pontoknak a kúp változó alkotóitól, x-től, mért távolságai viszonya állandó.»

Ugyanis az AB pontokat a kúp M csúcsából projicziáló $MA \equiv a$, $MB \equiv b$ sugarak oly kapcsolt polárisai a kúpnak, hogy

$$\frac{\sin(a, x)}{\sin(b, x)} = \lambda = \text{állandó.*}$$

De az A, B pontoknak távolságai az x alkotótól: $MA . \sin(a, x)$, $MB . \sin(b, x)$; e távolságoknak viszonya $\frac{MA}{MB} \cdot \lambda$ pedig független az x-től, tehát állandó.

Fordítva is mondhatjuk:

«Ha az MAB háromszög M csúcsán keresztül oly x egyeneseket vezetünk, a melyeknek távolságai az A, B pontoktól állandó viszonyban vannak, akkor azok egy orthogonális kúpon feküsznek. E kúpnak az MAB síkban fekvő főalkotói a többi alkotókból derékszögű síkpárokkal projicziáltatnak.»

41. Térjünk ezután vissza a kitűzött feladathoz és nevezzük az f egyenesnek metszőpontját az $e^{(2)}$ kúpszelet síkjával, ε-mal, U-nak, és e pontnak az $e^{(2)}$-re vonatkozó polárisát u-nak.

Az f tengelyű orthogonális síksor az ε síkot egy involucziós sugársorban metszi, a melynek az U-ból kisugárzó kapcsolt polárisokkal egy vw közös társsugárpárja van. Az $e^{(2)}$-nek vw kapcsolt polárisai tehát az f-ből derékszögű síkpárral projicziáltatnak. A vw sugarak az u-t a WV pontokban metszik, úgy hogy az $uvw \equiv UVW$ poláris háromszöge az $e^{(2)}$-nek. Tételezzük fel, hogy a V pont van az $e^{(2)}$ kúpszeleten belül, tehát az U és W pont azon kívül van.

Ezután egy g egyenest akarunk abból a föltételből szerkeszteni, hogy azok a kapcsolt pólusai az $e^{(2)}$-nek, a melyek az f-ből derékszögű síkpárokkal projicziáltatnak a g-ből is derékszögű síkpárokkal projicziáltassanak.

Minthogy a W pont és a w-nek bármely pontja, valamint a V pont és a v-nek bármely pontja oly kapcsolt póluspárja az $e^{(2)}$-nek, a mely az f-ből derékszögű síkpárokkal projicziáltatik: azért a g egyenesnek vagy a V, vagy pedig a W ponton kell keresztül menni.

---

* Klug: *Proj. Geom.* 55. old.

Jelöljük az u-nak metszőpontjait az $e^{(2)}$-vel, A és B-vel, az $e^{(2)}$ egy tetszés szerinti pontját C-vel, és legyen az XX' az a kapcsolt póluspár az AC egyenesen, a mely az f-ből derékszögű síkpárral projicziáltatik.

Ez az XX' pontpár a vw egyenes pártól el van választva, mert az UX, UX' és v, w sugarak egy elliptikus involucziónak társsugarai. Az XX' pontpár azonban az $uvw \equiv UVW$ háromszögnek még vagy az uv, vagy az uw oldalpárjától lehet csak elválasztva; tehát vagy a WX, WX'; u, v, vagy pedig a VX, VX'; u, w sugárpárok lehetnek csak egy elliptikus involucziónak társsugarai, és így ezek vagy a W, vagy pedig a V ponton keresztül menő g egyenesből projicziáltatnak derékszögű síkpárokkal. S mert az U pont az $e^{(2)}$-n kívül van, azért csak az $e^{(2)}$-n belül fekvő V ponton keresztül lehet oly két az ε-ra szimmetrikus fekvésű g, g' egyenest szerkesztenünk, a melyből az UW és XX' kapcsolt pólusok derékszögű síkpárokkal projicziáltatnak.

Az $e^{(2)}$ kúpszelet pontjainak távolságai pedig az f és g-től (valamint az f és g'-től) állandó viszonyban vannak.

Ugyanis: Azoknak a pontoknak geometriai helye, a melyeknek távolságai az f és g-től oly viszonyban vannak, mint az A pont (A, f), (A, g) távolságának viszonya az f és g-től, egy az A ponton keresztül menő $F^{(2)}$ orthogonális hiperboloid. Ez az $F^{(2)}$ keresztül megy a B és C ponton is, mert az $U(fAB\ldots)$, $U(fXX'\ldots)$, $V(gXX'\ldots)$ orthogonális kúpok miatt (a 2. segédtétel alapján)

$$(A,f):(B,f) = AV:BV = (A,g):(B,g)$$

$$(A,f):(C,f) = AX:BX = (A,g):(C,g),$$

tehát

$$(A,f):(A,g) = (B,f):(B,g) = (C,f):(C,g).$$

Másrészt az U pontnak az $F^{(2)}$-re vonatkozó poláris síkja az $[ug]$ sík, mert ez merőleges az $[Ug]$ síkra. Az $F^{(2)}$ tehát az ε síkot abban az ABC pontokon keresztül menő kúpszeletben metszi, a melyre nézve az U pontnak polárisa az u egyenes, azaz: az $e^{(2)}$-ben. Ezért az $e^{(2)}$ összes pontjainak távolságai az f és g-től (valamint az f és g'-től) állandó viszonyban vannak.

Foglaljuk ezek után egybe magát a szerkesztést, ha az $e^{(2)}$ kúpszelet és egy f egyenes adva van, a mely az $e^{(2)}$-nek ε síkját az U pontban metszi, és oly g egyenest akarunk találni, hogy az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai az f és g-től állandó viszonyban legyenek.

Az U pontnak polárisa az $e^{(2)}$-re nézve legyen u. Ha az u metszi az $e^{(2)}$-t az AB pontokban, akkor fölkeressük azt a V pontot, a mely az AB húrt magán a húron oly viszony szerint osztja, mint a milyen az AB pontoknak távolsága az f-től. Ezután fölveszünk az $e^{(2)}$-n két pontot, pl. az A és a C-t. és az AC-t az XX' pontokban oly viszony szerint osztjuk, mint a milyen az A és C pontoknak távolsága az f-től.

Ezután a V ponton keresztül oly g egyenest vezetünk, a melyből a VU, u, valamint a VX, VX' egyenesek derékszögű síkpárokkal projicziáltatnak; a g és annak az ε-ra vonatkozó g' tükörképe a kivánt két egyenes.

Ha ellenben az U pont polárisa u nem metszi az $e^{(2)}$-t, akkor felkeressük azt az involucziós sugársort, a melyben az ε sík az f tengelyű orthogonális sort metszi, és abban a sugársorban az $e^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt poláris társsugarakat vw-t. Ezek az u-t a WV pontokban metszik, a melyeknek egyikén megy keresztül a g egyenes.

Az $e^{(2)}$-n most fölveszünk két pontot PQ-t, és a PQ vonaldarabot az XX' pontokban oly viszony szerint osztjuk, mint a milyen a PQ pontoknak távolsága az f-től. Ezek az XX' pontok vagy az uv, vagy pedig az uw egyenes-pártól el vannak választva. Az első esetben az uv; WX, WX' sugárpárok, a másodikban az uw; VX, VX' sugárpárok a keresett g egyenesből (és annak az ε-ra vonatkozó g' tükörképéből) derékszögű síkpárokkal projicziáltatnak.

Meg akarjuk még jegyezni, hogy ha az f egyenes az $e^{(2)}$-nek egyik tengelyére merőleges (a nélkül, hogy azt metszené), akkor az f-nek e tengelyre merőleges és e tengelylyel párhuzamos síkja egymásra merőleges, és az ε sík végtelen távol fekvő egyenesét az $e^{(2)}$ tengelyeinek végtelen távol fekvő pontjaiban metszi. De e metszőpontok kapcsolt pólusok az $e^{(2)}$-re nézve, tehát a g-ből is derékszögű kapcsolt poláris síkpárokkal projicziáltatnak. Ebből következik, hogy a g-nek is az $e^{(2)}$ kúpszelet egyik vagy másik tengelyére merőlegesen kell állania.

Az eredményeket, tekintettel az I. fejezet eredményeire, a következő tételbe foglaljuk össze:

Ha egy $e^{(2)}$ kúpszelet és egy f egyenes van adva, akkor mindig lehet egy oly g egyenest (és annak az $e^{(2)}$ síkjára vonatkozó tükörképét) találni, hogy az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai az f és g-től állandó viszonyban legyenek. Az $e^{(2)}$-nek ama kapcsolt pólusai, a melyek az f egyenesből derékszögű síkpárokkal projicziáltatnak, a g egyenesből szintén derékszögű síkpárokkal projicziáltatnak, a mely tulajdonságból a g meghatározható.

Ha az f merőleges az $e^{(2)}$-nek egyik tengelyére, akkor a g is merőleges az $e^{(2)}$-nek erre vagy a másik tengelyére a szerint, a mint az a pont F, a melytől és az f egyenestől az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai állandó viszonyban vannak, képzetes vagy valós.

Ha az f metszi az $e^{(2)}$ kúpszeletet, akkor a g egybeesik az f-fel. Ha pedig az f az $e^{(2)}$-nek síkjában van, akkor a g az f-nek pólusán megy keresztül és derékszögű síkpárokkal projicziálja az f-en fekvő kapcsolt pólusokat.

42. Lássuk most a feladat megoldását abban az esetben, a melyben az $e^{(2)}$ kúpszelet parabola és az f egyenes annak tengelyére merőleges és az $e^{(2)}$-nek ε síkját az U pontban a parabolán kívül metszi.

Legyenek ismét az U pont u polárisának metszőpontjai az $e^{(2)}$-vel AB; továbbá ossza a V pont az AB húrt oly viszony szerint, mint a milyen az AB pontoknak távolsága az f-től.

A keresett g egyenes a V ponton megy keresztül és vagy merőleges az $e^{(2)}$ parabolának vezérlő vonalára vagy pedig annak tengelyére a szerint, a mint az UV és u egyenesektől képezett hegyes szögnek szárait a V ponton keresztül menő és az $e^{(2)}$-nek vezérlő vonalára vagy tengelyére merőleges sík, választja el egymástól, — a mi az ε sík és az f egyenes hajlásszögétől függ.

Az első esetben az $e^{(2)}$ pontjai távolságainak viszonya az f és g-től különbözik az egységtől; míg a második esetben ez a viszony épen az egységgel egyenlő, azaz az $e^{(2)}$ pontjai az f és a g-től egyenlő távolságra vannak. Más szóval kifejezve: az első esetben az $F^{(2)}$ felület orthogonális hiperboloid, a másodikban pedig egyenlő oldalú hiperbolikus paraboloid.

Föltételezvén ugyanis a második esetet, t. i. hogy a g egyenes úgy, mikép az f, az $e^{(2)}$-nek tengelyére merőleges, messe az A pontból az f egyenest érintőleg leírt gömb az A ponton keresztül menő parabola-átmérőt az XX' pontokban. Az XX' olyan kapcsolt póluspárja az $e^{(2)}$-nek, a mely az f-ből és így a g-ből is derékszögű síkpárokkal projicziáltatik.

Ebből pedig az következik, hogy az A pontnak távolsága a g-től olyan, mint az XX' pontoktól, tehát olyan, mint az f egyenestől, azaz: az $e^{(2)}$ parabolának A pontja, és így minden pontja az f és g-től egyenlő távolságra van. Az $F^{(2)}$ felület tehát, a melynek pontjai az f és g-től egyenlő távolságra vannak, tényleg egyenlőoldalú hiperbolikus paraboloid.

Ebben a második esetben az $e^{(2)}$ pontjaiból az f-et érintőleg leírható gömbök egymást egy képzetes pontpárban metszik. Ellenben az első esetben, a midőn a g egyenes az $e^{(2)}$-nek vezérlő vonalára merőleges ama gömbök egymást két valós pontban FF' metszik. Az első esetben tehát a parabola pontjai az f és F-től (vagy F'-től) egyenlő távolságra vannak, míg a g és F-től (vagy F'-től) mért távolságaik viszonya állandó.

43. Vegyünk fel ismét egy $e^{(2)}$ kúpszeletet és annak egyik poláris háromszögét $UVW \equiv uvw$-t, a melynek a V csúcsa az $e^{(2)}$-n belül van. Ez a poláris háromszög három orthogonális kúpot $U^{(2)}$, $V^{(2)}$ és $W^{(2)}$-t határoz meg, a melynek csúcsai az U, V, W pontok és a melyeknek alkotóiból megfelelően a vw, wu, uv főalkotók derékszögű síkpárokkal projicziáltatnak.

Jelöljük az $e^{(2)}$ kúpszelet ε síkjának valamely x egyenesén (pl. a végtelen távol fekvő egyenesén) fekvő kapcsolt pólusokat X_iX_i'-vel, és a tőlük meghatározott involucziót (X_iX_i')-vel.

Az UV, UW; UX_i, UX_i' társsugarak egy sugárinvolucziót határoznak meg, a melynek tengelyei $f_i f_i'$. E tengelyeken keresztül menő és az ε-ra merőleges síkok az $U^{(2)}$ kúpot két az ε-ra nézve szimmetrikus egyenespárban $f_i^1 f_i^2$ és $f_i^3 f_i^4$-ben metszik, a melyek vagy mind képzetesek, vagy a melyek közül csak az egyik egyenespár képzetes. Ezekből az f_i^k egyenesekből pedig az előbbi sugárinvolucziónak társsugarai derékszögű síkpárokkal projicziáltatnak. (41.)

Ha az $X_i X_i'$ kapcsolt póluspár az egész $(X_i X_i')$ pontinvolucziót befutja, akkor az UV, UW; UX_i, UX_i' társsugárpároktól meghatározott ∞^1 sugárinvolucziónak $f_i f_i'$ tengelyei az $(X_i X_i')$ pontinvoluczióval projektiv orthogonális sugárinvolucziót $(f_i f_i')$-t írnak le.

Ugyanis: az UV, UW sugarak az U ponton keresztül menő és egy tetszés szerinti K pontból leírt $k^{(2)}$ kört még két pontban metszik, a melynek összekötő egyenese az u_1; az $(X_i X_i')$ pontinvolucziónak pedig projekcziója az U pontból a $k^{(2)}$ körre egy $(Y_i Y_i')$ pontinvolucziό, a melynek pólusa egy Y pont; végre az u_1 és $Y_i Y_i'$ egyeneseknek U_i metszőpontján keresztül menő $U_i K$ körátmérőnek végpontjait az U-ból projicziáló sugarak az $f_i f_i'$ tengelyek.

Mialatt az $X_i X_i'$ társpontpár az $(X_i X_i')$ involucziót, tehát az $Y_i Y_i'$ pontpár az $(Y_i Y_i')$ involucziót befutja, az $Y_i Y_i'$ egyenes az Y körül, az U_i pont pedig az u_1 egyenesen, végre az $U_i K$ körátmérő a K középpont körül ama involucziókkal projektiv sorokat ír le. Ebből következik, hogy az $f_i f_i'$ tengelyek, a melyek a változó $U_i K$ körátmérőknek végpontjait projicziálják az U pontból: az $(X_i X_i')$ involuczióval projektiv orthogonális involucziót képeznek.

Kössük ezután össze az UVW poláris háromszögnek másik két csúcsát V és W-t az $X_i X_i'$ kapcsolt póluspárral.

A VW, VU; VX_i, VX_i' és a WU, WV; WX_i, WX_i' társsugarakból meghatározott involucziόknak tengelyei legyenek $g_i g_i'$, illetve $h_i h_i'$. E tengelyeken keresztül menő és az ε-ra merőlegesen álló síkok a $V^{(2)}$ és $W^{(2)}$ kúpokat az ε-ra nézve szimmetrikus $g_i^1 g_i^2$, $g_i^3 g_i^4$ és $h_i^1 h_i^2$, $h_i^3 h_i^4$ alkotókban metszik, a melyekből az első, illetve a második sugárinvolucziónak társsugarai derékszögű síkpárokkal projicziáltatnak.

Mialatt az X_iX_i' kapcsolt póluspár az (X_iX_i') involucziót befutja, ama változó sugárinvoluczióknak változó g_ig_i', illetve h_ih_i' tengelyei, mint előbb láttuk, az (X_iX_i')-vel projektiv és orthogonális (g_ig_i') és (h_ih_i') sugárinvolucziókat írnak le a V és W pontok körül, a melyek tehát még az előbbi (f_if_i') sugárinvoluczióval is projektivek.

Ez a három projektiv involuczió (f_if_i'), (g_ig_i'), (h_ih_i') pedig oly vonatkozásban van az $e^{(2)}$ kúpszelettel (41), hogy a $V^{(2)}$ kúp minden valós g_i^k alkotójához (a melynek derékszögű projekcziója az ε-ra a (g_ig_i')-nek egyik g_i sugara) oly két az ε-ra nézve szimmetrikus valós f_i^k vagy h_i^k alkotó tartozik az $U^{(2)}$, illetve a $W^{(2)}$ kúpon (a melynek derékszögű projekcziója az ε-ra az (f_if_i') vagy a (h_ih_i') involuczióban a g_i-nek megfelelő f_i vagy h_i sugár), hogy az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai a valós g_i^k és f_i^k, vagy a valós $g_i'^k$ és $f_i'^k$ alkotóktól állandó viszonyban vannak.

Az $U^{(2)}$, $W^{(2)}$ kúpoknak közös alkotója a $v\equiv f_0\equiv h_0$ egyenes az ε síkban. Ehhez az ε-ra nézve szimmetrikus alkotópár $g_0^1g_0^2$ tartozik a $V^{(2)}$ kúpon, a melyből a v-n levő és az $e^{(2)}$-re nézve kapcsolt póluspárok derékszögű síkpárokkal projicziáltatnak. A $g_0^1g_0^2$ alkotók a $V^{(2)}$ kúpot két részre, a $g_0^1wg_0^2$ és $g_0^1ug_0^2$ részre osztják. Az elsőben levő g_i^k alkotókhoz az $U^{(2)}$ kúpon fekvő összes f_i^k alkotók, a második részben levő g_i^k alkotókhoz pedig a $W^{(2)}$ kúpon fekvő összes h_i^k alkotók tartoznak, úgy, hogy mialatt az f_i^k alkotó az $U^{(2)}$ kúpon az $f_0\equiv v$-ból w-ig haladt az egyik vagy másik értelemben, ugyanakkor az f_i^k-hoz tartozó g_i^k alkotó a g_0^1 és g_0^2-től kiindulva szintén a w-ig jutott a $V^{(2)}$ kúpon; és mialatt a h_i^k alkotó ismét a v-ből kiindulva az egyik vagy másik értelemben az u-ig haladt a $W^{(2)}$ kúpon, ugyanakkor a hozzátartozó g_i^k alkotó a g_0^1 és g_0^2-ból kiindulva szintén az u-ig jutott a $V^{(2)}$ kúpon. Az összetartozó g_i^k, f_i^k, h_i^k kúpalkotók pedig azok lesznek, a melyeknek derékszögű projekcziói az ε síkra a (g_ig_i'), (f_if_i'), (h_ih_i') projektiv involucziós sorokban megfelelők.

44. *Czélunk most oly összetartozó $f_i^kg_i^k$, vagy $h_i^kg_i^k$ alkotókat*

találni az $U^{(2)}V^{(2)}$ kúpokon, a melyektől az $e^{(2)}$ kúpszelet pontjai egyenlő távolságra vannak.

Tekintve, hogy ha az $e^{(2)}$ kópszeletnek egy pontja egyenlő távolságra van egy összetartozó $f_i^k g_i^k$ alkotópártól, akkor az $e^{(2)}$-nek összes pontjai ezektől az alkotóktól egyenlő távolságra lesznek, arra kell törekednünk: hogy oly összetartozó alkotókat találjunk, a melyek az $e^{(2)}$-nek egy pontjától, pl. a w egyenesen fekvő A pontjától egyenlő távolságra vannak.

Az AW vonaldarab, mint átmérő fölött leírt $\gamma^{(2)}$ gömb az $U^{(2)}$ és a $V^{(2)}$ kúpot először e kúpoknak egy közös $w^{(2)}$ körében metszi, a melynek sikja a W ponton megy keresztül és merőleges az $U^{(2)}V^{(2)}$ kúpoknak közös $w^{(2)}$ alkotójára. Ezenkívül a $\gamma^{(2)}$ gömb az $U^{(2)}$ és $V^{(2)}$ kúpot még másodizben egy-egy $\bar{u}^{(2)}$, $\bar{v}^{(2)}$ körben metszi, a melynek síkja az A ponton megy keresztül és merőleges ama kúpoknak v, illetve u alkotójára és az ε sikot az $\bar{u}$, illetve $\bar{v}$ egyenesekben metszi. Ezek az $\bar{u}^{(2)}$, $\bar{v}^{(2)}$ körök pedig az A pontból az $U^{(2)}$, $V^{(2)}$ kúpok alkotóira bocsátott merőlegesek talppontjainak geometriai helyét képezik.

Ebből következik, hogy bármely az AW gömbátmérőre merőleges λ sik az $\bar{u}^{(2)}$, $\bar{v}^{(2)}$ köröket oly pontokban metszi, a melyen keresztül menő $f^k g^k$ kúpalkotók az A ponttól egyenlő távolságra vannak. Ezért, ha bármely az AW-re merőleges l egyenesnek metszőpontját az $\bar{u}$ és $\bar{v}$ egyenessel az U, illetve a V ponttal összekötjük, oly f^k és g^k kúpalkotóknak derékszögű projekczióit, f és g-t nyerjük, a mely f^k és g^k alkotók az A ponttól egyenlő távolságra vannak. Ezek az f és g projekcziók pedig az l változásával projektiv sugársorokat, (f) és (g)-t írnak le az U és V pont körül.

Keressünk ezután az előbbi $(f_i f_i')$ és $(g_i g_i')$ projektiv involucziós sugársorokban oly megfelelő sugarakat, a melyek a most talált (f) és (g) egyszerű projektiv sugársorokban is megfelelők.

Az (f) sugársorban levő $(f_i f_i')$ orthogonális involucziós sugársornak megfelel az (f) és (g) között levő projektivitás folytán egy $(j_i j_i')$ elliptikus involucziós sugársor a (g) sorban, a mely a $(g_i g_i')$ involucziós sorral projektiv. A $(g_i g_i')$, $(j_i j_i')$ projektiv involuczios sorok mind a négy közös g sugárnak már oly f sugár felel meg az (f) sorban, a mely g és f sugarak az $e^{(2)}$ pontjaitól egyenlő távolságra levő g^k és f^k egyeneseknek derékszögű projekcziói. Minthogy az (f), (g) egyszerü és az $(f_i f_i')$, $(g_i g_i')$ involucziós projektiv sugársoroknak a w-ben közös megfelelő sugaruk van, a mely a $(g_i g_i')$, $(j_i j_i')$ sorokban is megfelelőleg közös, azért a w már egyike ama négy g sugárnak, és a mely még a hozzá tartozó f-fel egybeesik. Van tehát még három megfelelőleg közös g sugár $g_1 g_2 g_3$, a melyeknek az $f_1 f_2 f_3$ sugarak felelnek meg. E $g_1 f_1$, $g_2 f_2$, $g_3 f_3$ sugárpárok közül egy vagy mind a három valós; de még a valósakhoz sem tartoznak szükségkép valós $g^k f^k$ alkotók a $V^{(2)}$, $U^{(2)}$ kúpokon. És pedig, ha az $e^{(2)}$ ellipsis, akkor a $g^k f^k$ alkotók nem lehetnek valósak, mert egyenoldalú hiperbolikus paraboloid nem metszhető ellipsis szerint. Ha az $e^{(2)}$ parabola, akkor lehetséges, hogy van egy pár oly tulajdonságú $g^k f^k$ egyenes, a mely a parabola pontjaitól egyenlő távolságra; ezek az $e^{(2)}$-nek tengelyére merőlegesek, mint azt a 42. pont alatt láttuk. Ha végre az $e^{(2)}$ hiperbola, akkor a $g^k f^k$ egyenesek szintén valósak lehetnek, és a fönt leírt eljárás szerint szerkeszthetők.

Végszó.

Az 1873-diki bécsi világkiállításon egy fiatal orosz egy oly műszert mutatott be, a melylyel kúpszeleteket, azoknak minden változásaiban, leírni lehetett.

E műszer, melyet *konograf*nak nevezhetünk, egy nagyobb kézi körzőhöz hasonló alkotású volt, a melyen azonban kettőnél jóval több szár volt alkalmazva, s mely közül a kúpszelet leirásakor 2—3 a rajzlapba volt betűzve úgy, mikép a kör leirásakor a közönséges körzőnek egyik szárát a rajzlapba szokás betűzni.

A konograf bemutatója ugyanoly könnyűséggel írta le a műszerbe alkalmazott finom rajztollal az ellipsist, a hiperbolát, a parabolát, valamint azoknak elfajulásait: a kört, a metsző- vagy a párhuzamos egyenespárt, mint a mily egyszerűen egy közönséges körzővel a kört leirni lehet.

A konograf beállítása arra a czélra, hogy azzal rajzolni lehessen alig tartott tovább 1—2 másodpercznél. A beállítást rajzolás közben is lehetett megváltoztatni, úgy hogy mindenkor látható volt mikép megy át az ellipsis más méretű ellipsisbe vagy körbe; a hiperbola, metsző egyenespárba; a parabola párhuzamos egyenespárba. A kezelés egyszerűsége szempontjából e műszer össze sem hasonlítható az úgynevezett *ellipsograffal*, a melylyel a kartografus nagyobb méretű ellipsiseket ír le; mert az ellipsograf a leirandó ellipsis középpontja körül levő nagyobb területet befödi és így kisebb méretű ellipsis leirására alig alkalmas.

Hogy hová lett a bécsi kiállításon bemutatott konograf, az a szerző előtt rejtélyes. Sokszorosítva alig lett, mert különben 31 év óta csak reá akadt volna valahol Német- vagy Francziaországban, a hol az iránt részint műegyetemeken, részint nagyobb tanszergyárakban kérdezősködött.*

Gyakorlati szempontból a konografnak nagy fontosságot kell tulajdonítani annyival inkább, mert a több ezer éves körző és vonalzón kívül görbe vonalak leírására más eszközzel alig rendelkezünk.

Talán sikerül ez értekezésben leírt elvek alapján egy mechanikusnak konografot készíteni. Ehhez csak az kivántatik, hogy egy pontot, pl. egy rajztollnak a hegyét, akkép lehessen mozgatni egy síkban, hogy annak távolsága egy síktól és egy egyenestől mindig egyenlő maradjon, vagy pedig hogy a mozgó pont egy ponttól és egy egyenestől, egy ponttól és egy síktól, vagy két egyenestől aránylagosan távolodjék. Az ily műszer föltalálója nemcsak a rajzoló geométert, hanem a kutató geométert is nagy hálára kötelezné. *Klug Lipót.*

---

* A Katalog Mathematischer etc. Modelle. Walter Dyck (1892). (Deutsche Math. Vereinigung) sem szól róla.

A LINEÁR DIFFERENCZIÁLEGYENLET ALAPEGYENLETÉRŐL.

Ha a homogén lineár differencziálegyenlet alaprendszere:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

a mely a független változónak valamely körüljárásánál az

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$$

integrálokba mennek át, melyek a régiekkel az

$$\bar{y}_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

lineár transzformáczióval vannak összekötve, akkor, miként ismeretes az

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11}-\omega & \ldots & a_{1n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0$$

e körüljáráshoz tartozó FUCHS-féle alapegyenlet. Ha az eredetileg választott alaprendszer helyett egy más

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

integrálokból álló alaprendszert választunk, melyek az első alaprendszerrel a

$$z_i = c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \cdots + c_{in}y_n$$
$$(i=1, \ldots, n)$$

transzformáczióval függnek össze, és az új rendszerhez tartozó alapegyenlet:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} b_{11}-\omega & b_{12} \ldots & b_{1n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots & b_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0,$$

a hol a b_{ik} együtthatók a z integrálok körüljárási reláczióiban szereplő együtthatók, akkor a $\Delta(\omega)=0$ egyenlet gyökei megegyeznek a $D(\omega)=0$ egyenlet gyökeivel, sőt minden egyes gyökhöz tartozó elemi osztók is megegyeznek. Vagyis, ha $(\omega-\omega_1)^r$ közös osztója a $D(\omega)$ determináns minden k-adrendű aldeterminánsának, akkor a $\Delta(\omega)$ k-adrendű aldeterminánsainak is osztója és viszont.*

E tétel a lineár differencziálegyenletek elméletében a legfontosabbak közé tartozik. Semmi nehézséggel nem jár a bebizonyítása, ha a componált determinánsok aldeterminánsaira vonatkozó Cauchy-féle tételt és az aldeterminánsokból alkotott determinánsokra vonatkozó Franke tételt felhasználjuk.

A következő sorokban meg akarom mutatni, miként lehet ezt a tételt az alaprendszer két igen egyszerű változtatására való visszavezetéssel bizonyítani.

A

$$z_i = c_{i1}y_1+c_{i2}y_2+\cdots+c_{in}y_n \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

transzformáczió a következő kétféle elemi transzformáczióból alkotható meg:

1. Az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rendszer helyett bevezetjük az ay_1, $y_2, \ldots, y_n$ rendszert, a hol a constanst jelent.

2. Az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rendszer helyett bevezetjük az y_1+y_2, $y_2, \ldots, y_n$ rendszert.

A $|c_{ik}|$ determináns nem tünhetik el; tehát van egy el nem tünő aldeterminánsa; ennek ismét legalább egy el nem tünő aldeterminánsa s í. t. Az indexet úgy választhatjuk, hogy a

$$c_{11}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \ldots$$

aldeterminánsok a 0-tól különbözők legyenek.

---

* L. pld. Schlesinger Handbuch I. p. 91.

Az y rendszerről a z rendszerre az áttérés a következő lépésekben történhetik: Először is $y_1, y_2, \ldots, y_n$ helyett $c_{11}y_1, y_2, \ldots, y_n$ alaprendszert választjuk 1) értelmében. Ha c_{12} nem 0, ezután $c_{11}y_1$, $c_{12}y_2, y_3, \ldots, y_n$-et 1. szerint és $c_{11}y_1+c_{12}y_2, c_{12}y_2, y_3, \ldots, y_n$-et 2. szerint és újból $c_{11}y_1 + c_{12}y_2, y_2, y_3, \ldots, y_n$-et 1. szerint. Ha c_{12} 0 volna, akkor az első lépés után ezt az alakot közvetlenül fölirhatjuk. Ugyanezeket a lépéseket ismételve, az új alaprendszer lesz:

$$z_1, y_2, y_3, \ldots, y_n.$$

Ebből az imént alkalmazott gondolatmenettel áttérünk az

$$a_1z_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n, \quad z_1, y_3, \ldots, y_n$$

-re, a hol $a_1, a_2, \ldots, a_n$ constansokat úgy választjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_1c_{11} &= c_{21} \\ a_1c_{12}+a_2 &= c_{22} \\ &\cdots\cdots \\ a_1c_{1n}+a_n &= c_{2n} \end{aligned}$$

legyen, a mi mindig lehetséges, mert $c_{11} \neq 0$. E szerint tehát most már az új rendszerünk:

$$z_1, z_2, y_3, y_4, \ldots, y_n.$$

Ebből megint áttérünk az

$$a_1z_1+a_2z_2+a_3y_3+\cdots+a_ny_n, \quad z_1, z_2, y_4, \ldots, y_n$$

rendszerre, a hol $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a következő egyenletrendszerből vétetnek:

$$\begin{aligned} a_1c_{11}+a_2c_{21} &= c_{31} \\ a_1c_{12}+a_2c_{22} &= c_{32} \\ a_1c_{13}+a_2c_{23}+a_3 &= c_{33} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_1c_{1n}+a_2c_{2n}+a_n &= c_{3n}, \end{aligned}$$

mely rendszer mindig megoldható, mert hiszen a

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}$$

determináns a 0-tól különbözik. Új rendszerünk tehát most már:

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ y_4, \ldots, y_n.$$

Így haladva tovább, látjuk, hogy mindig az 1. és 2. lépéseket végezve, eljutunk az eredeti alaprendszerről a

$$z_1,\ z_2, \ldots, z_n$$

alaprendszerre.

A szóban forgó alaptétel tehát be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy az 1. és 2. alatti transzformácziókra érvényes.

Az $ay_1 = z_1,\ y_2, \ldots, y_n$ alaprendszer körüljárási relácziói:

$$\begin{aligned}
\bar{z}_1 &= a_{11}\, z_1 + a_{12}\, y_2 + \cdots + a_{1n} a y_n \\
\bar{y}_2 &= \frac{a_{21}}{a} z_1 + a_{22}\, y_2 + \cdots + a_{2n} y_n \\
\bar{y}_n &= \frac{a_{n1}}{a} z_1 + a_{n2} y_2 + \cdots + a_{nn} y_n,
\end{aligned}$$

tehát az alapegyenlet:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11} - \omega, & a_{12} a, & \ldots, a_{1n} a \\ \dfrac{a_{21}}{a}, & a_{22} - \omega, \ldots & , a_{2n} \\ \dfrac{a_{n1}}{a}, & a_{n2}, & \ldots, a_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

E $\Delta(\omega)$ determinánsnak minden olyan aldeterminánsa, melyben sem az első sor, sem az első oszlop nem fordul elő, teljesen megegyezik a $D(\omega)$ megfelelő aldeterminánsával. Azok az aldeterminánsok, a melyekben az első sorból vannak elemek, de az első oszlopból nincsenek, a $D(\omega)$ megfelelő aldeterminánsainak a-szeresei; a melyekben az első oszlopból vannak elemek, de az első sorból nincsenek, azok pedig a megfelelő aldeterminánsok $\frac{1}{a}$-szeresei. Végül pedig, ha valamely aldeterminánsban (beleértve magát a determinánst is) az első elem is előfordul, akkor az első sort a-val osztván és az első oszlopot a-val szorozván, a $D(\omega)$ megfelelő aldeterminánsát kapjuk; tehát kimutattuk, hogy a $\Delta(\omega)$ minden aldeterminánsa megegyezik (legfölebb a, vagy $\frac{1}{a}$ szorzótól eltekintve) a $D(\omega)$ megfelelő aldeterminánsával.

Ha továbbá az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ helyett a $z_1 = y_1 + y_2,\ y_2, \ldots, y_n$ új alaprendszert hozzuk be, akkor az új körüljárási relácziók lesznek:

$$\begin{aligned}
\bar{z}_1 = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 &= (a_{11}+a_{21})\, z_1 + (a_{12}+a_{22}-a_{11}-a_{21})\, y_2 + \\
&\qquad + a_{13}\, y_3 + \cdots + y_{1n} y_n \\
\bar{y}_2 &= a_{21}\, z_1 \qquad + (a_{22}-a_{21})\, y_2 \qquad + \\
&\qquad + a_{23}\, y_3 + \cdots + y_{2n} y_n \\
\bar{y}_3 &= a_{31}\, z_1 \qquad + (a_{32}-a_{31})\, y_2 \qquad + \\
&\qquad + a_{33}\, y_3 + \cdots + y_{3n} y_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\bar{y}_n &= a_{n1}\, z_1 \qquad + (a_{n2}-a_{n1})\, y_2 \qquad + \\
&\qquad + a_{n3}\, y_3 + \cdots + a_{nn} y_n
\end{aligned}$$

és az alapegyenlet:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix}
a_{11}+a_{21}-\omega, & a_{12}+a_{22}-a_{11}-a_{21}, & a_{13}+a_{23}, & \ldots, & a_{1n}+a_{2n} \\
a_{21}, & a_{22}-a_{21}-\omega, & a_{23}, & \ldots, & a_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots, & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots, & \cdot \\
a_{n1}, & a_{n2}-a_{n1}, & a_{n3}, & \ldots, & a_{nn}-\omega
\end{vmatrix}$$

A $\Delta(\omega)$ azon aldeterminánsai, melyekben a két első oszlopból és az első sorból nincsenek elemek, teljesen megegyeznek a $D(\omega)$ megfelelő aldeterminánsaival. Ha az aldeterminánsban a második oszlop nem szerepel, de az első sor igen, tehát például ilyen alakú:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix}
a_{11}+a_{21}-\omega, & a_{13}+a_{23}, & a_{14}+a_{24}, & \ldots \\
a_{k1}, & a_{k3}, & a_{k4}, & \ldots \\
a_{l1}, & a_{l3}, & a_{l4}, & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots
\end{vmatrix}$$

akkor felbontható $D(\omega)$ két aldeterminánsának az összegére

$$\Delta_r = D_s + D_t.$$

Ha a második oszlop is szerepel az illető aldeterminánsban, akkor például ilyen alakú:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_{12}+a_{22}-a_{11}-a_{21}, & a_{1r}+a_{2r}, \dots \\ a_{l2}-a_{l1}, & a_{lr}, \quad \dots \\ a_{k2}-a_{k1}, & a_{kr}, \quad \dots \\ \cdot & \cdot \quad \dots \end{vmatrix}.$$

Ha a Δ_m-ban az első oszlop is előfordulna, akkor ezt a másodikból kivonván, az előbbi Δ_r alakra jutunk. Ha pedig ez nincs benne, akkor a felbontást két lépésben eszközöljük:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_{12}-a_{11}, & a_{1r}, \dots \\ a_{l2}-a_{l1}, & a_{lr}, \dots \\ a_{k2}-a_{k1}, & a_{kr}, \dots \\ \cdot & \cdot \;\dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}-a_{21}, & a_{2r}, \dots \\ a_{l2}-a_{l1}, & a_{lr}, \dots \\ a_{k2}-a_{k1}, & a_{kr}, \dots \\ \cdot & \cdot \;\dots \end{vmatrix}$$

és ha most ismét mindegyiket két részre bontjuk:

$$\Delta_m = D_s - D_u + D_t - D_v$$

alakban állíthatjuk elő a szóban forgó aldeterminánst, a hol a D_s stb. aldeterminánsok ugyanolyan rendűek, mint a D_m. Látjuk tehát, hogy ha a $D(\omega)$ determináns minden k-adrendű aldeterminánsa osztható $(\omega-\omega_1)^r$-el, akkor a $\Delta(\omega)$ minden k-adrendű aldeterminánsai is oszthatók ezzel.

Megfordítva, ha a $z_1, y_2, \dots, y_n$ alaprendszer helyett az első esetnek megfelelően

$$y_1 = \frac{z_1}{a}, \; y_2, \dots, y_n$$

-et és a második esetnek megfelelően:

$$y_1 = z_1 - y_2, \; y_2, \dots, y_n$$

teszszük, azt következtethetjük, hogy a $D(\omega)$ determináns minden k-adrendű aldeterminánsa osztható $(\omega-\omega_1)^r$-el, ha ez osztója a $\Delta(\omega)$ determináns minden k-adrendű aldeterminánsának. Minthogy pedig minden új alaprendszer bevezetése az 1. és 2. alatti lépésekre vezethető vissza, a szóban forgó tétel egész általánosan bebizonyíttatott.

Beke Manó.

VIZSGÁLATOK AZ [1]-BŐL SZÁRMAZÓ ALGEBRAI GENUSZTARTOMÁNYOK KÖRÉBEN.

(Második közlemény.)

III. Transzczendens vizsgálatok.

1. §. *Az alapképlet levezetése.*

1. Tárgyalásaink az «osztályszám» képletéből fognak kiindúlni. Ha ezt a számot $\overline{O}$-val jelöljük, akkor

$$\overline{O}=\overline{o}\lim_{\sigma=1}\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\sigma-1}{Nm.(\mathfrak{a})^{\sigma}}\text{*} \tag{1}$$

a hol $\mathfrak{a}$ a tartomány összes egymástól különböző ideáljait jelenti, a *Nm.* rövidités a normot jelöli, $\overline{o}$ pedig a zérustól különböző szám, a melynek részletezésére nincs szükségünk. Az (1) képletből továbbá mindjárt látszik, hogy a limes értéke csakis azoktól az ideáloktól függ, a melyeknek van elsőfokú ideáltörzstényezője.

Ennek oka a következő. Azoknak az ideáloknak normja, a melyek az előbbi tulajdonsággal nem birnak, raczionális törzsszámoknak egynél magasabb hatványaiból tevődik össze s így ezek a limes jele alatt álló végtelen sorhoz oly részletösszeggel járulnak, a mely $\sigma=1$ esetére összetartó és így a tőlük származó részletlimes zérussal egyenlő.

2. Emez előleges megjegyzések után térjünk át a

$$\sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{Nm.(\mathfrak{a})^{\sigma}},\quad \sigma>1 \tag{2}$$

* A határátmenet az egynél nagyobb számokon át történik.

végtelen sor részletes vizsgálatára. Minthogy minden ideál egyértelmüleg bontható törzsideálok szorzatára a melyekből minden ideál végesszámú tényezőt tartalmaz, minthogy továbbá a (2) pozitiv tagú azaz föltétlenül összetartó sor, azért ismeretes következtetéssel:

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{Nm.(\mathfrak{a})^{\sigma}} = \prod_{\mathfrak{p}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{Nm.(\mathfrak{p})^{\sigma k}} \tag{2*}$$

($\mathfrak{p}$ jelenti az összes primideálokat.)

Vagy továbbá

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{Nm.(\mathfrak{a})^{\sigma}} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\dfrac{1}{Nm.(\mathfrak{p})^{\sigma}}}. \tag{3}$$

Azonban az analizis elemei szerint

$$1-\frac{1}{Nm.(\mathfrak{p})^{\sigma}} = e^{-\frac{1}{Nm.(\mathfrak{p})^{\sigma}} - Ay\frac{1}{Nm.(\mathfrak{p})^{2\sigma}}} \tag{4}$$

és minthogy

$$Nm.(\mathfrak{p})^{\sigma} > 2,$$

azért a $\mathfrak{p}$ ideáltól függetlenül, a mint a $l.(1+z)$ sorkifejtésből világos:

$$\tfrac{1}{3} < A_{\mathfrak{p}} < \tfrac{5}{6}. \tag{4*}$$

Tehát

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{Nm.(\mathfrak{a})^{\sigma}} = e^{\sum_{\mathfrak{p}} \left\{\frac{1}{Nm.(\mathfrak{p})^{\sigma}} + Ay\frac{1}{Nm.(\mathfrak{p})^{2\sigma}}\right\}} \tag{5}$$

és így áttérve a logarithmusokra, lesz:

$$l.\sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{Nm.(\mathfrak{a})^{\sigma}} = \sum_{\mathfrak{p}} \left\{\frac{1}{Nm.(\mathfrak{p})^{\sigma}} + A_{\mathfrak{p}}\frac{1}{Nm.(\mathfrak{p})^{2\sigma}}\right\}, \quad \sigma > 1 \tag{6}$$

vagy pedig:

$$\frac{l.\sum_{\mathfrak{a}} \dfrac{\sigma-1}{Nm.(\mathfrak{a})^{\sigma}}}{l.(\sigma-1)} = 1 + \frac{\sum_{\mathfrak{p}} \dfrac{1}{Nm.(\mathfrak{p})^{\sigma}}}{l.(\sigma-1)} + \frac{\sum_{\mathfrak{p}} \dfrac{A_{\mathfrak{p}}}{Nm.(\mathfrak{p})^{2\sigma}}}{l.(\sigma-1)}, \quad \sigma-1. \tag{7}$$

3. Térjünk most a határra, a midőn $\sigma=1$. Mindenekelőtt

$$\lim_{\sigma=1} \frac{l. \sum\limits_{\mathfrak{a}} \frac{\sigma-1}{Nm.(\mathfrak{a})^\sigma}}{l.(\sigma-1)} = 0. \tag{8}$$

Ugyanis

$$l. \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\sigma-1}{Nm.(\mathfrak{a})^\sigma},$$

ha $\sigma>1$ véges és meghatározott szám, továbbá

$$\lim_{\sigma=1} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\sigma-1}{Nm.(\mathfrak{a})^\sigma}$$

is véges és megharározott pozitiv szám az (1) képlet értelmében tehát

$$l. \lim_{\sigma=1} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\sigma-1}{Nm.(\mathfrak{a})^\sigma}$$

véges és meghatározott szám és így

$$\lim. l. \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\sigma-1}{Nm.(\mathfrak{a})^\sigma} = l. \lim_{\sigma=1} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\sigma-1}{Nm.(\mathfrak{a})^\sigma},$$

a miből (8) következik. Azonkívül

$$\lim_{\sigma=1} \frac{\sum\limits_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} \frac{1}{Nm.(\mathfrak{p})^{2\sigma}}}{l.(\sigma-1)} = 0. \tag{8*}$$

Ugyanis a végtelen sorok elméletének első elemeiből következik, hogy a

$$\sum_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} \frac{1}{Nm.(\mathfrak{p})^{2\sigma}}$$

sor a $\sigma=1$ helyen és annak bizonyos környezetében *egyenletesen* összetartó, tehát

$$\lim_{\sigma=1} \sum_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} \frac{1}{Nm.(\mathfrak{p})^{2\sigma}} = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{A_{\mathfrak{p}}}{Nm.(\mathfrak{p})^2} = \text{véges és megh. szám},$$

a miből (8*) következik. Ezeket tekintetbe véve, lesz (7)-ből a határon:

$$\lim_{\sigma=1} \frac{\sum \frac{1}{Nm.(\mathfrak{p})^\sigma}}{l. \frac{1}{\sigma-1}} = 1. \tag{9}$$

4. A (9) alatti határképletet még átalakíthatjuk. Már az (1) alatti limesképletnél megjegyeztük, hogy a határérték csakis az elsőfokú törzsideáloktól függ. Ezt a megjegyzést ott tovább nem érvényesítettük, mert az eredeti alakból kényelmesen térhettünk át a végtelen szorzatra. Most azonban (9)-ből az összes egynél magasabbfokú törzsideálokat elhagyhatjuk, mert a mint említettük, ezek a limeshez oly részletlimessel járulnak, melyek értéke zérus. Minthogy továbbá $\sigma > 1$ esetére a limes jele alatt álló pozitiv tagú összetartó sor akárhogy rendezhető, összevonjuk azokat az elsőfokú törzsideálokat, a melyeknek normja ugyanaz a törzsszám.

Minden p törzsszám tehát annyiszor fog a limes jele alatt előfordúlni, mint a hány elsőfoku ideáltörzstényezője van, vagyis az I. rész szerint annyiszor, a hány gyöke van az

$$F(x) \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p) \tag{10}$$

kongruencziának. Jelöljük e gyökök számát $\nu(p)$-vel; csakis véges számú p esetében történhetik meg, hogy $\nu(p)$ nem egyezik meg az elsőfokú törzstényezők számával, még akkor is, ha az $F(x)$ legmagasabb együtthatója nem 1. E véges számú kivétel a limesre nincs befolyással.

Igy nyerjük a következő tételt. *Ha*

$$F(x) = 0$$

raczionális egész együtthatókkal biró irreduczibilis egyenlet és az

$$F(x) \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p)$$

kongruenczia gyökeinek száma $\nu(p)$, *akkor:*

$$\lim_{\sigma=1} \frac{\sum_p \frac{\nu(p)}{p^\sigma}}{l.\frac{1}{\sigma-1}} = 1. \tag{I}$$

Ebből egyszersmind kitűnik, miben áll az irreduczibilitás KRONECKER-féle analitikai kritériuma. Ha valamely raczionális egész együtthatókkal biró egyenletre nézve képezzük (I)-et, úgy a limes mindig egész szám, még pedig egyenlő az irreduczibilis tényezők számával.

5. Az (I) képlettel kapcsolatban még egy műszót fogunk bevezetni, a melyet a továbbiakban használunk. Legyen:

$$q_1, q_2, \ldots$$

a törzsszámoknak bizonyos sokasága; akkor a

$$\lim_{\sigma=1} \frac{\sum_i \frac{1}{q_i^\sigma}}{l.\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)}$$

határértéket, ha az létezik, a sokaság «sűrűségének» fogjuk nevezni.

2. §. *A létezési bebizonyítások.*

1. Foglalkozzunk először oly tartományokkal, a melyek a raczionális számok tartományában GALOIS-félék. Ezekben a II. rész 1. §-a szerint (véges számú kivétellel):

$$\nu(p) = \begin{cases} 0 \text{ vagy} \\ m, \ m \text{ a tartomány fokszáma.} \end{cases}$$

Ha tehát most p csak azokat a törzsszámokat jelenti, a melyekre nézve az

$$F(x) \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p)$$

kongruenczia többtagúja csupa lineáris tényező szorzatára bontható, akkor (I)-ből lesz:

$$\lim_{\sigma=1} \sum_p \frac{\frac{1}{p^\sigma}}{l.\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)} = \frac{1}{m}. \tag{1}$$

Minthogy az (1) alatt szereplő törzsszámok — és csak ezek — olyanok, melyek a csoport elemei közül az egységen kívül mást nem engednek meg, azért (1)-ből a következő tétel ered. *Valamely* Galois-*féle tartományban az egység osztályához tartozó törzsszámok sűrűsége a tartomány fokszámának reciprok értékével egyenlő.*

2. Meg akarjuk most vizsgálni a $\mathfrak{H}$ cziklikus alcsoport osztályához tartozó törzsszámok sűrűségét. Ez vezet majd az általános tételre, a melyből a többi levezethető. Maga a tétel a következőkép lesz fogalmazható. *A $\mathfrak{H}$ cziklikus alcsoport osztályához tartozó törzsszámok sűrűsége egyenlő a*

$$\frac{\varphi(h)}{m} S(\mathfrak{H})$$

szorzattal. E szorzatban φ az Euler-*féle számelméleti jelet, m a tartomány fokszámát, $S(\mathfrak{H})$ a $\mathfrak{H}$ osztályához tartozó csoportok számát, h pedig $\mathfrak{H}$-nak rendjét jelenti.*

3. A bebizonyítást az előbbi szakasz (I) alapképletének a $\mathfrak{H}$ alcsoporthoz tartozó alárendelt tartományra való alkalmazása fogja nyújtani; miközben feladatunk lesz a fellépő $\nu(p)$ számokat csoportelméletileg meghatározni. A p törzsszámoknak az alárendelt tartományokban való felbontását a II. 2. §-ában már láttuk; itt ugyanis a diszkrimináns osztóit kizárhatjuk, mert véges számú sokaság a sűrűségre befolyást nem gyakorol. Ha a $\mathfrak{G}$ csoportnak ott adott szimbolikus felbontásában $\mathfrak{K}$ helyett $\mathfrak{H}$-t és $\mathfrak{H}$ helyett rendre a $\mathfrak{G}$ csoport összes cziklikus alcsoportjait tesszük;* látni való, hogy a $\mathfrak{H}$-hoz tartozó alárendelt tar-

* Kénytelenek vagyunk itt a jelölést kissé megváltoztatni. Az ok az, hogy a tétel végleges fogalmazásában a $\mathfrak{H}$ betű a *II. 1. §*-ában adott értelemben szerepeljen.

tományban azok és csak azok a törzsszámok birnak elsőfokú ideáltörzstényezőkkel, a melyek a Galois-féle tartományban vagy magának a $\mathfrak{H}$-nak, vagy pedig a $\mathfrak{H}$ valamely cziklikus alcsoportjának osztályához tartoznak.

4) A $\mathfrak{H}$ csoport cziklikus lévén, összes alcsoportjai is cziklikusak, tehát a szóban forgó cziklikus alcsoportok a $\mathfrak{H}$ összes alcsoportjait kimerítik. Legyenek ezek, a $\mathfrak{H}$-t önönmagát és az egységet is beleértve:

$$\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_k, \ldots \qquad (2)$$

és rendjeik

$$h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(k)}, \ldots \qquad (2^*)$$

a hol tehát a $h^{(k)}$ számok a h-nak összes különböző osztói.

Határozzuk már most meg a Galois-féle tartományban a $\mathfrak{H}_k$ osztályához tartozó törzsszámoknak a $\mathfrak{H}$-hoz tartozó alárendelt tartományban megfelelő $\nu(p)$ számot, a melyet most megkülönböztetés czéljából $\nu(p_{\mathfrak{H}_k})$-val jelölünk. Mindenek előtt képezni kell a

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_k R_1 \mathfrak{H} + \mathfrak{H}_k R_2 \mathfrak{H} + \cdots$$

szimbolikus felbontást. A mint már láttuk, a keresett szám megegyezik amaz inkongruens R_i elemek számával, a melyekre nézve

$$\mathfrak{H}_k \text{ alcsoportja az } R_i \mathfrak{H} R_i^{-1} \text{ csoportnak}$$

vagy a mi ugyanaz az

$$R_i^{-1} \mathfrak{H}_k R_i \text{ alcsoportja a } \mathfrak{H} \text{ csoportnak.}$$

Ámde $\mathfrak{H}$ cziklikus csoport és igy $\mathfrak{H}_k$ az egyetlen $h^{(k)}$-adrendű alcsoportja azaz a keresett szám megegyezik amaz inkongruens R_i elemek számával, a melyekre nézve:

$$R_i^{-1} \mathfrak{H}_k R_i = \mathfrak{H}_k. \qquad (3)$$

Vagyis amaz elemek száma határozandó meg, a melyek a $\mathfrak{H}_k$ alcsoporttal kommutativek és azonkívül még inkongruensek (*modd.* $\mathfrak{H}_k$, $\mathfrak{H}$). Először is az utóbbi követelést ama kevesebbel pótolhatjuk, hogy az elemek (*mod.* $\mathfrak{H}$) inkongruensek legyenek. Ha ugyanis A és B a $\mathfrak{H}$-val kommutativ, de (*modd.* $\mathfrak{H}_k$, $\mathfrak{H}$) kongruens elemek, akkor

$$A \text{ eleme a } \mathfrak{H}_k B\mathfrak{H} \text{ komplexusnak}$$

azonban a föltétel szerint

$$\mathfrak{H}_k B\mathfrak{H} = B\mathfrak{H}_k\mathfrak{H} = B\mathfrak{H}$$

és így

$$A^{-1} \text{ eleme a } \mathfrak{H}B^{-1} \text{ komplexusnak}$$

vagyis az A^{-1} és B^{-1} elemek, a melyek (3)-nak szintén eleget tesznek, (*mod.* $\mathfrak{H}$) kongruensek volnának. Tehát csakugyan elég a (3) egyenlet megoldásai közül a (*mod.* $\mathfrak{H}$) inkongruensek számát meghatározni. Vegyük tekintetbe a $\mathfrak{H}_k$-val kommutativ elemek összeségét. Ezek csoportot alkotnak, a mely csoport, $\mathfrak{H}$ cziklikus lévén, a $\mathfrak{H}$-t mint alcsoportot tartalmazza. A vizsgált csoportot jelöljük átmenetileg $\overline{\mathfrak{H}}_k$-val, rendjét $\bar{r}$-rel, akkor a csoportelmélet első elemei szerint:

$$\frac{m}{\bar{r}} = S(\mathfrak{H}_k). \tag{4*}$$

A $\overline{\mathfrak{H}}_k$ elemeiből kell most egy (*mod.* $\mathfrak{H}$) inkongruens rendszert kiválasztani. Minthogy $\overline{\mathfrak{H}}_k$ tartalmazza $\mathfrak{H}$-t, úgy az inkongruens rendszer elemeinek száma:

$$\nu(p_{\mathfrak{H}_k}) = \frac{\bar{r}}{h} \tag{4**}$$

és így

$$\nu(p_{\mathfrak{H}_k}) = \frac{m}{hS(\mathfrak{H}_k)}. \tag{4}$$

5. A tárgyalás további menete ez. Legyen először $\mathfrak{H}$ törzsszámrendű, azaz összes alcsoportjai: az egység és önönmaga. Ha most az egység osztályát $\mathfrak{E}$-vel jelöljük, akkor az (I) alapképletből lesz:

$$\lim_{\sigma=1} \frac{\sum \frac{\nu(p_{\mathfrak{E}})}{p_{\mathfrak{E}}^{\sigma}}}{l.\frac{1}{\sigma-1}} + \lim_{\sigma=1} \frac{\sum \frac{\nu(p_{\mathfrak{H}})}{p_{\mathfrak{H}}^{\sigma}}}{l.\frac{1}{\sigma-1}} = 1 \tag{5}$$

vagy (4)-et tekintetbe véve:

$$\frac{m}{h}\lim_{\sigma=1}\frac{\sum\frac{1}{p_{\mathfrak{E}}^{\sigma}}}{l.\frac{1}{\sigma-1}}+\frac{m}{hS(\mathfrak{H})}\lim_{\sigma=1}\frac{\sum\frac{1}{p_{\mathfrak{H}}^{\sigma}}}{l.\frac{1}{\sigma-1}}=1 \tag{5*}$$

azonban, a mint láttuk

$$\lim_{\sigma=1}\frac{\sum\frac{1}{p_{\mathfrak{E}}^{\sigma}}}{l.\frac{1}{\sigma-1}}=\frac{1}{m} \tag{1}$$

és így

$$\frac{m}{hS(\mathfrak{H})}\lim_{\sigma=1}\frac{\sum\frac{1}{p_{\mathfrak{H}}^{\sigma}}}{l.\frac{1}{\sigma-1}}=\frac{h-1}{h}=\frac{\varphi(h)}{h}$$

$$\lim_{\sigma=1}\frac{\sum\frac{1}{p_{\mathfrak{H}}^{\sigma}}}{l.\frac{1}{\sigma-1}}=\frac{\varphi(h)}{m}S(\mathfrak{H}), \tag{5**}$$

a mivel tételünk törzsszámú h esetére be van bizonyítva. Tegyük most fel a tételt bebizonyítottnak h-nál kisebb rendű cziklikus csoportok esetére. Akkor jelöléseinket megtartva, lesz:

$$\sum_k \lim_{\sigma=1}\frac{\sum\frac{\nu(p_{\mathfrak{H}_k})}{p_{\mathfrak{H}_k}^{\sigma}}}{l.\frac{1}{\sigma-1}}=1 \tag{6}$$

vagyis:

$$\sum_k \lim_{\sigma=1}\frac{\frac{m}{hS(\mathfrak{H}_k)}\sum\frac{1}{p_{\mathfrak{H}_k}^{\sigma}}}{l.\frac{1}{\sigma-1}}=1 \tag{6*}$$

és így föltevésünk szerint:

$$\frac{m}{hS(\mathfrak{H})}\lim_{\sigma=1}\frac{\sum\frac{1}{p_{\mathfrak{H}}^{\sigma}}}{l.\frac{1}{\sigma-1}}+\sum_k{}'\frac{\varphi(h^{(k)})}{h}=1, \tag{7}$$

a hol a Σ' azt jelenti, hogy az összegezés h összes osztóira kiterjed, kivéve h-t magát. Azonban

$$\sum_k{}' \frac{\varphi(h^{(k)})}{h} = 1 - \frac{\varphi(h)}{h},$$

tehát a mint bebizonyítandó volt:

$$\lim_{\sigma=1} \frac{\sum \frac{1}{p_{\mathfrak{H}}^{\sigma}}}{l.\frac{1}{\sigma-1}} = \frac{\varphi(h)}{m} S(\mathfrak{H}). \tag{8}$$

6. Ha tekintetbe vesszük, hogy valamely h-adrendű cziklikus csoport h-adrendű elemeinek száma $\varphi(h)$, akkor az előző tételt még így fogalmazhatjuk. *Valamely* Galois-*féle tartományban a* $\mathfrak{H}$ *cziklikus alcsoport osztályához tartozó törzsszámok sűrűsége egyenlő a* $\mathfrak{H}$ *osztályában foglalt h-adrendű elemek számának* $\frac{1}{m}$*-szeresével.* (m a tartomány fokszáma).

3. §. *Áttérés tetszőleges genusztartományokra.*

1. Az előbbi tételből a dolgozat elején tárgyalt algebrai tétel révén tüstént áttérhetünk tetszőleges tartományokra. Legyen adva egy n-edfokú genusztartomány, a mely a neki megfelelő m-edfokú Galois-féle tartomány $\mathfrak{G}$ csoportjának $\mathfrak{K}$ alcsoportjához tartozik. A II. 2. §-a szerint arra nézve, hogy létezzék oly törzsszám, mely az n-edfokú tartományban oly törzsideálok szorzatára bontható, a melyeknek fokai sorra:

$$h_1, h_2, \ldots, h_i; \ldots; \Sigma h_i = n$$

szükséges, hogy létezzék $\mathfrak{G}$-nek oly $\mathfrak{H}$ cziklikus alcsoportja, a melyre nézve a

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} R_1 \mathfrak{K} + \mathfrak{H} R_2 \mathfrak{K} + \cdots$$

szimbolikus felbontást megejtve és a

$$\mathfrak{H},\ R_i \mathfrak{K} R_i^{-1}$$

csoportok legnagyobb közös alcsoportjának rendjét d_i-vel jelölve:

$$\frac{h}{d_i} = h_i$$

legyen. Az előbbi szakasz már most azt mondja, hogy az ily tulajdonsággal biró $\mathfrak{H}$ alcsoportok létezése nemcsak szükséges, hanem elegendő is. Sőt a kérdésben forgó törzsszámok sűrűségének m-szerese egyenlő a $\mathfrak{H}$ csoportok «osztályaihoz» tartozó h-adrendű helyettesítések számával. Ámde a már idézett algebrai segédtétel szerint ez megegyezik az n-edfokú tartomány n-betűs Galois-féle csoporjában foglalt ama permutácziók számával, a melyeknek cziklusai rendre:

$$h_1, h_2, \ldots, h_i, \ldots; \; \Sigma h_i = n$$

eleműek.

2. Ez a következő tételt adja. *Valamely n-edfokú genusztartományban azoknak a törzsszámoknak a sűrűsége, a melyeknek törzsideálokra bontott alakja:*

$$p = \prod_i \mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_i \text{ foka } h_i$$
$$\Sigma h_i = n$$

egyenlő a tartomány n-betűs Galois-*féle csoportjában foglalt ama helyettesítések számának $\frac{1}{m}$-szeresével, a mely helyettesítések cziklusai rendre*

$$h_1, h_2, \ldots, h_i, \ldots; \; \Sigma h_i = n$$

elemből állanak. Az m betű jelenti a megfelelő Galois-*féle tartomány fokszámát.* Ugyanezt a tételt az I. 1. §-a alapján még így is ki lehet fejezni. *Ama p törzsszámok sűrűsége, a melyekre nézve az*

$$F(x) = 0$$

raczionális egész együtthatókkal biró n-edfokú irreduczibilis egyenlet többtagúja:

$$F(x) \equiv \prod_i F_i(x) \; (\text{mod.}\, p),$$

a hol $F_i(x)$ (mod. p) h_i-edfokú irreduczibilis forma; egyenlő az egyenlet n-betűs Galois-*féle csoportjában foglalt ama helyettesítések számának $\frac{1}{m}$-szeresével, a mely helyettesítések cziklusai rendre*

$$h_1, h_2, \dots, h_i, \dots; \ \Sigma h_i = n$$

elemből állanak. Érdekes speczialis esete a tételnek a következő.

Ama p törzsszámok sűrűsége, a melyekre nézve az

$$F(x) \equiv 0 \ (\text{mod.}\ p)$$

kongruenczia pontosan ν gyökkel bir, egyenlő az n-betűs Galois-féle csoportban foglalt ama helyettesítések számának $\frac{1}{m}$-szeresével, a melyek pontosan ν betűt hagynak változatlanul.

3. Ha az előbbi speczialis tételben $\nu = n$, akkor a megfelelő sűrűség $\frac{1}{m}$. Vagyis bármely genusztartományban azoknak a törzsszámoknak a sűrűsége, a melyek csupa egymástól különböző elsőfokú törzsideál szorzatára bonthatók, megegyezik azoknak a sűrűségével, melyek ugyanavval a tulajdonsággal birnak a megfelelő Galois-féle tartományban. Ebből még nem következik, hogy a két törzsszámsokaság megegyezik. Ez azonban, mint tisztán algebrai úton látható, tényleg így van. Minthogy erre szükségünk lesz, ezt itt levezetjük, a szóban forgó törzsszámokat «lényegesen elsőfokúak»-nak fogjuk nevezni.

Tehát a következő tételről lesz szó. *Valamely genusztartományra nézve egy törzsszám akkor és csak akkor lényegesen elsőfokú, ha a hozzátartozó* Galois-*féle tartományban is lényegesen elsőfokú.*

4. Mindenek előtt még egyszer emlékeztetünk arra, hogy valamely törzsszám egyidőben tényezője a tartomány és a hozzátartozó Galois-féle tartomány diszkriminánsának. Az itt szóba jövő törzsszámok e tulajdonsággal nem birván, reájok alkalmaz-

hatók a II. 2. §-ának fejtegetései. A többször használt jelöléseket megtartva, előállitandó a

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{H}R_1\mathfrak{K}+\mathfrak{H}R_2\mathfrak{K}+\cdots \quad (1)$$

szimbolikus felbontás. Ebből rögtön látszik, hogy az alárendelt tartományban azok és csak azok a törzsszámok lényegesen elsőfokúak, a melyekre nézve a

$$\mathfrak{H} \text{ csoport alcsoportja az összes } R_i\mathfrak{K}R_i^{-1} \quad (2)$$

csoportoknak. Minthogy az egymás között kongruens elemek közül bármelyiket vehetjük képviselőnek, azért a (2) feltétel azonos a következővel: legyen a $\mathfrak{H}$ csoport alcsoportja

$$\text{az összes } G_i\mathfrak{K}G_i^{-1} \quad (2^*)$$
$$(G_i \text{ tetszőleges eleme a } \mathfrak{G}\text{-nek})$$

csoportoknak. Ámde föltettük, hogy a Galois-féle tartomány éppen a vizsgált alárendelt tartományhoz tartozó Galois-féle tartomány és így a Galois-féle rezolvens értelmezése szerint a (2*) csoportok legnagyobb közös alcsoportja az egység. Igy tehát p a vizsgált alárendelt tartományban akkor és csak akkor lényegesen elsőfokú, ha

$$\mathfrak{H} = \text{az egységcsoporttal}$$

vagyis ha p a Galois-féle tartományban is lényegesen elsőfokú.

4. §. *Az*

$$x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n=0 \quad (1)$$
$$(A_i \text{ racz. egész})$$

*irr. egyenlet többtagújának oly arithmetikai tulajdonságairól, a melyek csak a csoport szerkezetétől függenek.**

1. Az I. részben láttuk, hogy véges számú kivételtől eltekintve, az egyenlet többtagújának (*mod. p*) szerinti felbontásában szereplő irreduczibilis formák fokszáma és multipliczitása megegyezik a p törzsszámnak az egyenlet ω gyöke által megadott tartományban érvényes felbontásában az ideáltörzstényezők

* Math. és Természettud. Értesitő XX. k. pp. 81—84.

fokszámával, illetőleg multipliczitásával. Azt lehetne hinni, hogy a «kivételes» törzsszámok az ilynemű arithmetikai-algebrai vizsgálatoknál mindig zavarólag hatnak. Ez azonban nincs mindig így. Vessük fel a következő kérdéstételt. Mi a szükséges és elegendő feltétele oly p törzsszám létezésének, a melyre nézve az egyenlet többtagúja irreduczibilis marad. A válasz a következő. *Arra nézve, hogy létezzék oly törzsszámmodulus, a melyre nézve* (1) *irreduczibilis marad, szükséges és elegendő, hogy az egyenlet n-betűs* Galois*-féle csoportja tartalmazzon oly helyettesítést, a mely egyetlen n-elemű cziklusból áll.*

2. Az előzőkből látnivaló, hogy valamely genusztartományban vagy nincs irreduczibilis törzsszám, vagy végtelen sok van. Ha ugyanis p irreduczibilis racz. törzsszám, azaz törzsideál, akkor a tartomány diszkriminánsának tényezője nem lehet. És így ily p szám létezésének föltétele a II. 2. §-a szerint az, hogy a tartomány csoportja tartalmazzon oly helyettesítést, a mely egyetlen n elemű cziklusból áll. Fordítva, ha a csoport ily tulajdonságú, akkor az előző 3. §. szerint végtelen sok irreduczibilis törzsszám van, a melyeknek sűrűségét is ismerjük.

3. Jelöljük most az egyenlet ω gyöke által megadott tartomány diszkriminánsát d-vel, az egyenlet diszkriminánsát D-vel, úgy hogy

$$D=t^2d,$$

a hol t raczionális egész szám. Ha p a t-nek osztója, akkor az I. rész szerint

$$x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n \pmod{p}$$

többszörös tényezőt tartalmaz, tehát reduczibilis. Ha tehát van oly p törzsszám, a melyre

$$x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n \pmod{p}$$

irreduczibilis marad, akkor ez t osztója nem lehet és így az I. szerint az ω által megadott tartományban is törzsideál marad, tehát az egyenlet csoportja tartalmaz oly helyettesítést, a mely egyetlen n-elemű cziklusból áll.

4. Ha most fordítva, az egyenlet csoportja ilyen, akkor a tartományban végtelen sok oly p irreduczibilis törzsszám létezik, a mely t-hez relativ prim. Mindezekre pedig (1) irreduczibilis marad.

5. Egészen hasonlókép mutatható ki a következő általánosabb tétel. *Arra nézve, hogy létezzék oly törzsszám, a melyre* (1) *oly irreduczibilis tényezőkre legyen bontható, a melyeknek fokszámai rendre:*

$$h_1, h_2, \ldots, h_i, \ldots; \ \Sigma h_i = n$$
$$h_1 < h_2 < \cdots$$

legyenek; szükséges és elegendő, hogy az egyenlet n-betűs Galois-*féle csoportja tartalmazzon oly helyettesítést, a melynek cziklusai rendre*

$$h_1, h_2, \ldots, h_i, \ldots$$

eleműek.

6. Még megjegyezzük azt, hogy az előbbi tételek, sőt az ebben a részben adott összes «sűrűségi» tételek csak «létezési» bebizonyitások. Olynemű vizsgálatok, melyek azt czéloznák, hogy véges számú próbával meghatározandó oly törzsszám, melyre az

$$F(x) \ (\text{mod.}\, p)$$

forma adott fokszámú és multipliczitásu irreduczibilis tényezőre bomlik fel, vagy pedig eldöntendő, hogy ily törzsszám nem létezik; ezideig általánosságban meg sem kiséreltettek.* Természetesen kivesszük azt az esetet, a midőn úgy a fokszámok, mint a multipliczitások egyenlők 1-gyel, a mely rendkívül egyszerűen tárgyalható. Ugyanis, mint a II. vizsgálataiból látható

$$F(x) \ (\text{mod.}\, p)$$

csak akkor bontható különböző lineáris tényezők szorzatára, ha az egyenlet Galois-féle rezolvensének többtagúja, nevezzük ezt $\overline{F}(x)$-nek, hasonló tulajdonsággal bir, vagyis az

$$\overline{F}(x) \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p) \qquad (2)$$

* A quadratikus recziproczitási tétel induktiv bebizonyitásában szereplő «Gauss-féle erőpróba» e problema egy speciális esetének tekinthető.

kongruencziának van gyöke; megjegyezvén, hogy e szabály alól kivételt alkothatnak azok a törzsszámok, melyek az $F(x)=0$ vagy az $\overline{F}(x)=0$ egyenlet diszkriminánsának tényezői.* Tegyünk már most (2)-ben x helyébe oly raczionális egész számot, hogy az $\overline{F}(x)$ helyettesítési értékének legyen oly osztója, mely nem tartozik az előbbi értelemben kivételes számok közé, akkor máris találtunk oly törzsszámot, mely a kivánt tulajdonsággal bir. Egyszersmind az ismert Euklides-féle eljárással látjuk, hogy végtelen sok ily törzsszám létezik.

Tehát tisztán arithmetikai-algebrai úton beláttuk, hogy bármely genusztartományban végtelen sok lényegesen elsőfokú törzsszám van. Nem kaptuk meg azonban a sűrűségre vonatkozó tételt, a mely pedig úgy az előző §-ban, mint a következő tárgyalásokban döntő szerepet játszik.

IV. Az algebrai számok jellemzése kongruenczia-feltételekkel.**

1. §. *Az*

$$F(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n=0$$
$$(A_i \text{ racz. egész szám})$$

egyenlet Galois-*féle rezolvensének meghatározása.*

1. Az előző részekben láttuk azt az összefüggést, a mely fennáll az egyenlet Galois-féle csoportjának szerkezete és az egyenlet többtagújának arithmetikai tulajdonságai között.

Emez összefüggés következtében az egyenlet bizonyos tulajdonságait, a melyek csoportjának szerkezetétől függenek; tüstént ki lehet fejezni oly követelések által, a melyek többtagújának arithmetikai viselkedését szabják meg. Igy pl. az a követelés, hogy az egyenlet a racz. számok tartományában Galois-féle legyen; egyértékű avval, hogy többtagúja, véges számú kivétel-

* Kényelem kedvéért itt föltettük, hogy mindkét egyenletben a legmagasabb együttható egyenlő 1-gyel. Ha ez nincs úgy, akkor sem változnak ez esetben az eredmények.

** Math. és Természettud. Értesítő XX. k. pp. 470—476.

től eltekintve, minden törzsszámmodulusra mint egyenlőfokú irreduczibilis tényezők szorzata legyen előállítható.

Vagy az a követelés, hogy valamely törzsszámfokú irreduczibilis egyenlet a racz. számok tartományában algebrailag megoldható legyen; egyértékű avval, hogy véges számú modulustól eltekintve, az

$$F(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

kongruenczia gyökeinek száma csak a

$$0,\ 1,\ n$$

értékeket veheti fel.

2. Természetszerűleg fellép az a kérdés: nem lehet-e magát az egyenlet által adott irraczionalitást, nemcsak annak egyes tulajdonságait, meghatározni a többtagú arithmetikai viselkedése által? KRONECKER felvetette e kérdést és kimondotta, hogy ha két irreduczibilis egyenlet olyan, hogy reájok nézve a III. 1. §-ában értelmezett $\nu(p)$ számok «általánosságban»* megegyeznek; akkor a két egyenlet GALOIS-féle rezolvense ugyanazt a tartományt határozza meg. Itt a következő tételt fogjuk kimutatni. *Arra nézve, hogy az*

$$f_1(x) = 0 \qquad (1)$$

$$f_2(x) = 0 \qquad (2)$$

raczionális egész együtthatókkal biró irreduczibilis egyenleteknek GALOIS-*féle rezolvensei ugyanazt a tartományt határozzák meg; szükséges és elegendő, hogy a két egyenlet többtagúja általánosságban ugyanazokra a törzsszámmodulusokra legyen lineáris tényezőkre bontható.*

3. Legyen az (1) egyenlet egyik gyöke ω_1; a (2)-é ω_2 és legyenek a megfelelő tartományok K_1 és K_2. Legyen továbbá K oly GALOIS-féle tartomány, a mely K_1 és K_2-t tartalmazza. Jelöljük a K csoportját $\mathfrak{G}$-vel, a melynek elemei legyenek:

* Azaz legfeljebb oly törzsszámsokaság kivételével, melynek sűrűsége zérus.

$$G_1, G_2, \ldots, G_i, \ldots \tag{3}$$

tartozzék végre K_1 a $\mathfrak{K}_1$, K_2 pedig a $\mathfrak{K}_2$ alcsoporthoz.

4. Az algebrából ismeretes, hogy a $\mathfrak{K}$ alcsoporthoz tartozó tartománynak megfelelő GALOIS-féle tartomány megegyezik a

$$G_1\mathfrak{K}G_1^{-1}, \; G_2\mathfrak{K}G_2^{-1}, \ldots$$

csoportok legnagyobb közös alcsoportjához tartozó tartománynyal. Tehát a bebizonyitandó tételt így is lehet fogalmazni. Ki kell mutatni, hogy ha a

$$G_1\mathfrak{K}_1G_1^{-1}, \; G_2\mathfrak{K}_1G_2^{-1}, \ldots \tag{4}$$

csoportok legnagyobb közös alcsoportját ϑ_1-vel és a

$$G_1\mathfrak{K}_2G_1^{-1}, \; G_2\mathfrak{K}_2G_2^{-1}, \ldots \tag{5}$$

csoportok legnagyobb közös alcsoportját ϑ_2-vel jelöljük, akkor a

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 \tag{6}$$

egyenlet fennállására nézve szükséges és elegendő, hogy az (1) és (2) egyenletek többtagúi általánosságban ugyanazokra a törzsszámokra nézve legyenek lineáris tényezőkre bonthatók.

5. Ámde a II. 2. §-ából következik, hogy a K_1 (illetőleg a K_2) tartományban véges számú kivétellel csak azok a törzsszámok lényegesen elsőfokúak, a melyek a K-ban oly $\mathfrak{H}_1$ (illetőleg $\mathfrak{H}_2$) cziklikus alcsoport osztályához tartoznak, a mely alcsoport egész osztályával tartalmaztatik a ϑ_1 (illetőleg a ϑ_2) csoportban. Minthogy a III. 1. §-a szerint a K-ban bármely cziklikus alcsoport osztályához tartozó törzsszámok sűrűsége zérusnál nagyobb, azért a (6) egyenlet fennállására nézve szükséges, hogy a két tartomány lényegesen elsőfokú törzsszámai — véges számú kivételtől eltekintve — megegyezzenek. Fordítva a (6) egyenlet fennállására már elegendő az a látszólag kevesebbet kivánó követelés, hogy a lényegesen elsőfokú törzsszámok «általánosságban» megegyezzenek. Evvel tételünk be van bizonyítva; sőt azt is látni, hogy ha két egyenlet GALOIS-féle rezolvense ugyanazt a tartományt határozza meg, akkor *tényleg* csak véges számmal

létezhetik oly törzsszám, a melyre nézve a két egyenlet többtagúja közül csak az egyik bontható lineáris tényezőkre.

2. §. *Az összetett genusztartományok.*

1. Az előző szakaszban bebizonyított tétel speciális esete annak, a melyet most fogunk tárgyalni és a melynek bebizonyításához azt nem is fogjuk felhasználni. A K_1 és K_2 tartományokból összetett tartományt röviden $C(K_1, K_2)$-vel fogjuk jelölni. *A $C(K_1, K_2)$ összetett tartományban (véges számú kivétellel) azok és csak azok a törzsszámok lényegesen elsőfokúak, a melyek úgy K_1-ben, mint K_2-ben lényegesen elsőfokúak. Eme törzsszámok sűrűsége megegyezik az összetett tartományhoz tartozó* Galois-*féle tartomány fokszámának reczíprok értékével.*

2. A tétel bebizonyítását vissza lehet vezetni oly tartományok esetére, a melyek a raczionális számok tartományában Galois-félék. Ugyanis a lényegesen elsőfokú törzsszámok a III. 3. §-a szerint megegyeznek a tartományhoz tartozó Galois-féle tartomány lényegesen elsőfokú törzsszámaival. Más oldalról pedig

$$C(K_1, K_2)$$

Galois-féle tartománya megegyezik a

$$C(k_1, k_2) = K$$

Galois-féle tartománnyal, a hol k_1 a K_1, k_2 a K_2-hez tartozó Galois-féle tartomány.

3. Legyen most K csoportja $\mathfrak{G}$ és tartozzék a k_1 illetőleg a k_2 tartomány a $\mathfrak{K}_1$ illetőleg a $\mathfrak{K}_2$ alcsoporthoz. Minthogy a tartományok Galois-félék, azért $\mathfrak{K}_1$ és $\mathfrak{K}_2$ invariáns alcsoportok. Minthogy továbbá a K Galois-féle tartomány a k_1 és k_2 összetételéből ered, azért a $\mathfrak{K}_1$ és $\mathfrak{K}_2$ alcsoportok legnagyobb közös alcsoportja az egységcsoport. Ámde a Galois-féle tartományban azok és csak azok a törzsszámok lényegesen elsőfokúak, a melyek az egység osztályához tartoznak.

Az egység pedig mint a $\mathfrak{K}_1$ és $\mathfrak{K}_2$ legnagyobb közös alcsoportja értelmezhető és így az előző § szerint a szóban forgó törzsszámok megegyeznek azokkal, a melyek úgy k_1-ben mint k_2-ben lényegesen elsőfokúak. Kivételt képeznek esetleg a K diszkriminánsának tényezői. A sűrűségre vonatkozó állítás pedig a III. 2. §-ából következik.

4. Ha már most meggondoljuk, hogy valamely m-edfokú genusztartomány akkor és csak akkor tartalmaz egy adott tartományt, ha a kettő összetételéből eredő tartomány fokszáma ugyancsak m; akkor az előbbi tételből nemcsak az előző § tétele következik mint speciális eset, hanem még a következő is, a melyben az adott

$$f_1(x)=0 \tag{1}$$

$$f_2(x)=0 \tag{2}$$

raczionális egész együtthatókkal biró egyenleteknek irreduczibilis voltát már nem is tételezzük fel. *Arra nézve, hogy az (1) egyenlet* Galois-*féle tartománya tartalmazza a (2) egyenlet* Galois-*féle tartományát, szükséges és elegendő, hogy azokra a törzsszámmodulusokra, a melyekre az (1) többtagúja lineáris tényezőkre bontható, általánosságban a (2) többtagúja is lineáris tényezőkre legyen bontható.*

5. E tételből érdekes speciális következtetések vonhatók, ha a számelmélet ismeretes tényeivel összevetjük. Igy pl. érvényes a következő tétel. *Ha K tetszőleges genusztartomány és A tetszőleges pozitiv egész szám, akkor K-ban végtelen sok oly lényegesen elsőfokú törzsszám van, a mely $\equiv 1$ (mod. A). E számoknak sűrüsége megegyezik a K-ból és az A-dik primitiv egységgyökökből összetett tartományhoz tartozó* Galois-*féle tartomány fokszámának reczíprok értékével.*

A bebizonyitáshoz elég annyit megjegyezni, hogy az A-dik primitiv egységgyökök tartományának lényegesen elsőfokú törzsszámai nem mások, mint az

$$Ax+1$$

alakú törzsszámok. Kiemeljük még külön a következő speciális esetet. *Valamely raczionális egész együtthatókkal biró egyenlet* *akkor és csak akkor körosztási egyenlet, ha lehet oly A pozitiv egész számot találni, hogy az egyenlet többtagúja az*

$$Ax+1$$

alakú törzsszámmodulusokra nézve általánosságban lineáris tényezőkre legyen bontható.

6. Ez az utolsó eredmény, a mely a körosztási irraczionálitásokat tisztán kongruenczia-meghatározások alapján jellemzi, még kissé általánosítható. Mint ismeretes, a körosztási tartományok lényegesen elsőfokú törzsszámai bizonyos számtani haladványokban foglalt törzsszámok. Ki fogjuk mutatni, hogy ezek az *egyedüli genusztartományok*, melyek evvel a tulajdonsággal bírnak. Legyen ugyanis K oly tartomány, a melynek lényegesen elsőfokú törzsszámai az:

$$a_1x+b_1,\ a_2x+b_2, \ldots, a_rx+b_r \tag{3}$$

haladványokban foglaltatnak. Ha a b_i számok között előfordúlna olyan is, a mely $\equiv 1 \pmod{a_i}$; akkor állításunk már be volna bizonyítva. Tegyük fel most az ellenkezőt; majd ki fog tünni, hogy ez ellenmondásra vezet. Ha ugyanis

$$A = \prod_{i=1}^{r} a_i$$

akkor az előbbi föltevés szerint a

$$C(K, \sqrt[A]{1})$$

összetett tartomány egyáltalában nem tartalmazhatna lényegesen elsőfokú törzsszámot, a mi abszurdum. Hangsúlyozni kell, hogy a körosztási irraczionalitások itt kifejtett jellemzése egyelőre nem ad gyakorlati módszert az irraczionalitás felismerésére, de érdekesen jellemzi az egyenlet többtagújának arithmetikai viselkedését. Emlékeztetünk még a szóban forgó irraczionalitások KRONECKER-től* eredő algebrai jellemzésére, mely a

* KRONECKER e híres tételét először WEBER bizonyította be (Acta Math. *8* és *9*). L. még Lehrbuchját. Egy egyszerűbb bebizonyítást adott HILBERT,

következő. *Valamely egyenlet akkor és csak akkor körosztási egyenlet, ha a ráczionális számok tartományára vonatkozó* Galois-*féle csoportja* Abel-*féle csoport.*

7. Láttuk az előzőkben, hogy valamely egyenlet Galois-féle rezolvense jellemezhető az egyenlet többtagújának arithmetikai tulajdonságai által. A Galois-féle rezolvenst az adott egyenlet *összes* gyökei határozzák meg. Az általános probléma, mint már említettük, az volna, hogy az egyenlet *egy* gyöke által megadott tartomány nem jellemezhető-e analog módon kongruenczia-meghatározásokkal? Ezt a kérdést nem sikerült eldöntenem. Némi tájékoztatással szolgál azonban a következő tétel, mely az előzőkben már impliczite benfoglaltatik.

Oly genusztartományok, melyeknek lényegesen elsőfokú törzsszámai «általánosságban» megegyeznek, csak véges számmal létezhetnek.

Göttinger Nachrichten *1896*. L. még nagy Berichtjét §. 100—§. 104. Megemlítem még a kezdő olvasó kedvéért, hogy Hilbert szép bebizonyítása könnyen kijavítható tárgyi tévedéseket is tartalmaz.

Bauer Mihály.

RADIOAKTIV ANYAGOKRA VONATKOZÓ VIZSGÁLATOK.

(Negyedik közlemény.)

A radioaktiv testek sugárzásának áthatoló képességéről. A radioaktiv testekre vonatkozó vizsgálatoknál kezdettől fogva figyelemmel kisérték azt, hogy miként nyelik el különböző anyagok ama sugarakat, melyeket e testek kibocsátanak. Első erre vonatkozó dolgozatomban[1] több számértéket közöltem, melyek az uránium- és tóriumsugarak relativ áthatolóképességét adják meg, s a melyeket alább idézni fogok. RUTHERFORD[2] behatóbban tanulmányozta az urániumsugárzást és kimutatta többféleségét. OWENS ugyanarra az eredményre jutott a tóriumsugárzásra vonatkozólag.[3] Az erősen radioaktiv anyagok felfedezése után, sugárzásuk áthatoló képességét azonnal több fizikus vizsgálta meg (BECQUEREL, MEYER és von SCHWEIDLER, CURIE, RUTHERFORD). Az első megfigyelésekből nyilvánvalóvá lett a sugárzás többfélesége, a mi úgy látszik az összes radioaktiv anyagok közös tulajdonsága.[3] Oly forrásokkal van dolgunk, a melyek sokféle sugárzást bocsátanak ki, minden sugárnemnek meglévén a reá jellemző áthatoló képessége. A kérdés még bonyolódik azáltal, hogy meg kell vizsgálni, menynyiben módosul a sugárzás a különböző anyagokon való áthato-

---

1 CURIE asszony, Comptes rendus, 1898 április.

2 RUTHERFORD, Phil. Mag. 1899 január.

3 OWENS, Phil. Mag. 1899 október.

4 BECQUEREL, Rapports présentés au congrés internat. de Physique, 1900; MEYER és von SCHWEIDLER Wiener Sitzungsberichte 1900 márc. (Physik. Zeitschrift I. k. 209. l.)

lás által és hogy e miatt minden mérési sorozatnak csakis az alkalmazott kisérleti berendezés mellett tulajdoníthatunk jelentést. E fentartással élve megkisérelhetjük a különböző mérések összehasonlítását és az elért eredmények összefoglaló ismertetését.

A radioaktiv anyagok oly sugarakat bocsátanak ki, melyek levegőben és légüres térben tovaterjednek. A tovaterjedés egyenes irányú; ezt bizonyítja a sugárzásra nézve áthatlan testek árnyékának élessége és alakja, a melyeket a sugárzó forrás és a felfogóként szereplő fényérzékeny lemez vagy foszforeszkáló ernyő közé helyezünk, ha a forrás méretei a felfogótól való távolságához képest kicsinyek.

Becquerel több kisérletet végzett, a melyek az uránium-, rádium- és polóniumsugárzás egyenesvonalu terjedését bizonyítják.* Érdekes megtudni, a forrástól milyen távolságra terjed a sugárzás a levegőben. Mi kimutattuk, hogy a rádium oly sugarakat is kibocsát, melyek levegőben több méter távolságban megfigyelhetők. Elektromos méréseink közt voltak olyanok is, melyeknél a sugárzó forrás a sürítő levegőjére két és három méter közt lévő távolságról gyakorolt hatást. Ugyanily nagyrendű távolságok mellett fluoreszkáló hatásokat és fotografikus benyomásokat is kaptunk. E kisérletek csak igen erős sugárzó forrásokkal végezhetők könnyen, minthogy, eltekintve a levegő által történő abszorpcziótól, az adott felvevőre gyakorolt hatás kis kiterjedésű forrás esetén a távolság négyzetével arányosan kisebbedik. E sugárzás, mely a rádiumból kiindulva nagy távolságokra terjed a levegőben, katódnemű és el nem téríthető sugarakat egyaránt tartalmaz; az eltéríthető sugarak azonban jelentékeny túlsúlyban vannak a fenn idézett kisérletek szerint. A sugárzás zöme (az α sugarak) ellenben levegőben a sugárzó forrástól körülbelül hét centiméterre van korlátolva.

Néhány kisérletet végeztem kis üvegcsőbe zárt rádiummal. Az üvegcsőből kiinduló sugarak bizonyos levegőrétegen haladtak át és

---

* Becquerel, Comptes rendus, 130. k. 979 és 1154. l.

a sűrítőbe jutottak, a mely ionizáló képességüknek a közönséges elektromos módszerrel való lemérésére szolgált. Változtattuk a forrásnak a sűrítőtől való d távolságát és lemértük a sűrítőn áthatoló i telítési áram erősségét. Itt közlöm egy mérési sorozat eredményeit:

d centimeterekben	i	$(i \times d^2) \times 10^{-3}$
10	127	13
20	38	15
30	17·4	16
40	10·5	17
50	6·9	17
60	4·7	17
70	3·8	19
100	1·65	17

Bizonyos távolságon túl a sugárzás erőssége körülbelül a sűrítőtől számított távolság négyzetével arányosan csökken.

A polónium sugárzása a levegőben a sugárzó forrástól csak néhány centiméternyi távolságra (4—6 cm-re) terjed.

A rádium és a polónium sugárzása közt alapvető különbséget találunk a szilárd testek által gyakorolt abszorpczióban is. A rádium sugárzásában oly sugarak is vannak, melyek szilárd anyagok vastag rétegén (néhány centiméternyi ólmon vagy üvegen) át tudnak hatolni.* Ama sugarak áthatolóképessége, melyek vastag szilárd rétegen áthaladtak rendkívül nagy, és úgyszólván lehetetlen e sugarakat valamely anyag által teljesen elnyeletni. E sugarak azonban az egész sugárzásnak csak csekély töredékét képezik, míg a sugárzás zömét már igen vékony szilárd anyagréteg elnyeli.

A polónium igen könnyen elnyelhető sugarakat bocsát ki, a melyek csak igen vékony szilárd lemezeken tudnak áthaladni.

A következő táblázat példaképen néhány számadatot tartalmaz, melyek 0·01 mm-nyi vastagságu aluminiumlemez abszor-

---

* Curie és Curiené, Rapports prés. au Congrès, 1900.

pcziójára vonatkoznak. A lemezt a sugárzó anyag fölé helyeztük majdnem közvetlen érintkezésbe az anyaggal. A közvetlen sugárzást és azt, a mely a lemezen áthaladt, elektromos módszerrel (l. a készüléket az 1. rajzon) lemértük; az összes esetekben körülbelül elértük a telítési áramot. a-val jelölöm a sugárzó anyag aktivitását, egységül az urániumét választva.

	a	A lemez által átbocsátott sugárzás százalékokban
Rádiumos báriumchlorid	57	32
« báriumbromid	43	30
« báriumchlorid	1200	30
« báriumszulfát	5000	29
« báriumszulfát	10000	32
Fémpolóniumos bizmut		22
Urániumvegyületek		20
Tóriumvegyületek vékony rétege		38

Látjuk, hogy igen különböző természetű és aktivitású rádiumvegyületek igen hasonló eredményeket szolgáltatnak, megfelelően annak, a mit e dolgozat elején az uránium- és tóriumvegyületekre vonatkozólag megjegyeztem. Látjuk azt is, hogy ha az egész sugárzást vesszük tekintetbe, a megfigyelt lemezre vonatkozólag a különböző radioaktiv anyagok sugaraik fogyó áthatoló képessége szerint a következő sorba állíthatók: tórium, rádium, polónium, uránium.

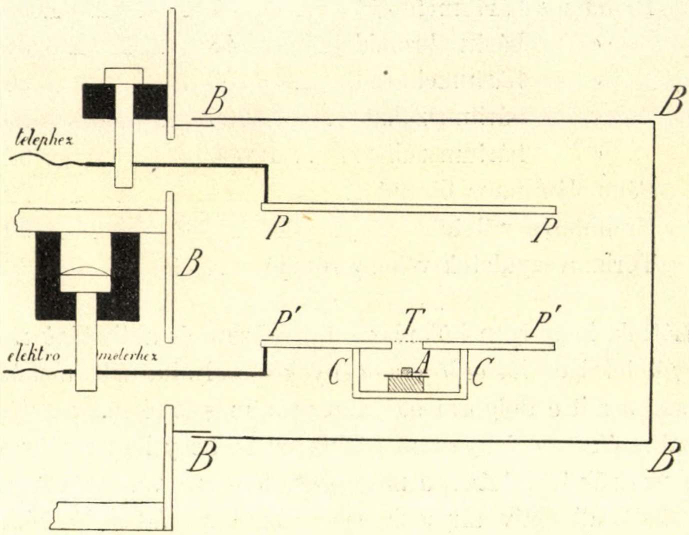
Ezen eredmények hasonlók azokhoz, a melyeket Rutherford tett közzé egy erre a kérdésre vonatkozó dolgozatában.*

Különben Rutherford azt találta, hogy a sorrend ugyanaz, ha a levegő képezi az elnyelő közeget. Azonban valószinű, hogy e sorrendnek semmiféle abszolut jelentősége nincs és hogy e sorrend az elnyelő anyag rétegvastagságának és természetének változtatásánál megváltozhatik. A kisérlet tényleg azt mutatja, hogy az abszorpczió törvénye igen különböző a rádium és polóniumnál

* Rutherford, Phil. Mag. 1902 julius.

és hogy a rádiumnál külön kell megfigyelnünk a három sugárcsoport abszorpczióját.

A polónium különösen alkalmas az α sugarak tanulmányozására, minthogy a birtokunkban lévő készitmények nem bocsátanak ki más sugarakat. Egy első kisérletet végeztem rendkívül aktiv ujonnan előállitott polónium-készitményekkel. Azt találtam, hogy a polóniumsugarak áthatoló képessége annál kisebb, minél vastagabb az anyagréteg, a melyen már áthaladtak.* Ez a külö-



8. rajz.

nös abszorpczió törvény épen ellenkezője annak, a mit a többi sugárzásra vonatkozólag ismerünk.

E vizsgálatnál az elektromos vezetőképesség mérésére szolgáló készülékünket a következő elrendezés mellett használtam:

A sürítő *PP* és *P'P'* lemezeit vízszintesen a *BBBB* földbe levezetett fémládába helyeztük. Az *A* aktiv anyagot a *P'P'* lemezzel mereven összekapcsolt *CCCC* vastag falú fémdobozba helyeztük, úgy hogy a sürítő levegőjétől a *T* fémháló választotta el; az elektromos áram létesitéséhez csupán a hálón áthaladó sugarak járulnak hozzá, minthogy a hálónál az

* Curie asszony, Comptes rendus, 1900 január 8.

elektromos térnek vége szakad. Az aktiv anyagnak a hálóból számított AT távolsága változtatható. A lemezek közti elektromos teret elektromos üteg tartja fenn; az áram erősségének lemérése elektrométerrel és piezoelektromos kvarczczal történik.

A-ban az aktiv testre különböző lemezeket helyezve és változtatva az AT távolságot meg lehet mérni a levegőben különböző utakat befutó sugarak abszorpczióját.

A polóniummal a következő eredményeket nyertem:

Az AT távolság bizonyos nagyságán (4 cm.) felül a sürítőn egyáltalában nem megy át áram: a sugarak nem hatolnak be a sürítőbe. A mint az AT távolságot kisebbítjük, a sugarak egyszerre megjelennek a sürítőben, úgy, hogy e távolság kis csökkentése által az igen gyönge áram jelentékenyen megerősödik; ez után az áram szabályosan erősbödik, a mint a sugárzó testet a T ernyőhöz közelítjük.

Ha a sugárzó anyagot 0·01 mm-nyi vastagságú aluminium lemezzel befedjük, a lemez okozta abszzorpczió annál jelentékenyebb, minél nagyobb az AT távolság.

Ha az első aluminium lemezre még egy hasonló lemezt helyezünk, mindkét lemez a reá eső sugárzásnak bizonyos százalékát elnyeli és e százalék nagyobb a második lemezre nézve mint az elsőre, úgy hogy a második lemez elnyelőképessége nagyobbnak tűnik fel.

A következő táblázatban az első sorba irtam a polónium és a T háló közti távolságokat centiméterekben, a másodikba az egy aluminium lemezen áthaladó sugarak százalékát, a harmadikba a két egyforma aluminium lemezen áthaladó sugarak százalékát:

AT távolság	3·5,	2·5,	1·9,	1·45,	0·5
Egy lemez által átbocsátott sugarak százaléka	0,	0,	5,	10,	25
Két lemez által átbocsátott sugarak százaléka	0,	0,	0,	0,	0·7

E kisérleteknél a P és P' lemezek távolsága 3 cm. volt.

Látható, hogy az aluminium lemez közbehelyezése nagyobb távolságokban nagyobb arányban csökkenti a sugárzás erősségét, mint kisebb távolságokban.

Ez a tény még szembetünőbb, mint a mennyire e számadatokból kiolvasható. Ezek szerint fél centiméternyi távolságokban, az áthatoló sugarak százaléka 25; ez a 25 százalék az összes e távolságra eljutó sugarak áthatoló képességének középértékét adja; e sugarak között azoknak az áthatoló képessége, melyek e távolságot épen még elérik, már igen csekély. Ha pl. csak a 0·5 és 1 cm. között lévő sugarakat gyűjtenők össze, még nagyobb áthatolóképességet kapnánk. És valóban, ha a P' és P lemezeket félcentiméternyi távolságra helyezzük, az aluminiumlemez a fél centiméterről jövő sugárzás (AT=0·5 cm.) 47 százalékát bocsátja át, míg két lemez az eredeti sugárzásnak csupán 5 százalékát.

Legujabban még egy kisérletsorozatot végeztem ugyanazon polónium készítményekkel, a melyeknek aktivitása, a közbeeső három esztendő alatt, jelentékenyen megfogyott.

A régebbi kisérleteknél a polóniumot szubnitrátjában alkalmaztam; az ujabb kisérleteknél fémpolónium szemcséket használtam, melyeket a szubnitrátnak káliumcianiddal való összeolvasztásából nyertem.

Azt találtam, hogy a polónium sugárzása megtartotta jellemző sajátságait, és még néhány uj eredményre is jutottam. Az AT távolság különböző értékei mellett 4 igen vékony vert aluminium levélből képezett réteg a sugárzásnak következő százalékait bocsátotta át:

AT távolság centiméterekben	0	1·5	2·6
A lemez által átbocsátott sugárzás százalékokban	76	66	39

Azt is kimutattam, hogy a sugárzásnak ama százaléka, melyet egy bizonyos lemez elnyel, az anyagréteg vastagságával növekszik, a melyen a sugarak már áthaladtak, azonban csak az AT távolság bizonyos értékén fölül. Midőn e távolság 0 (midőn a polónium a hálóval érintkezik a sürítőn kivül vagy a sürítőben), megfigyeltük, hogy több egyforma egymásra helyezett lemez közül mindegyik a reá eső sugárzásnak ugyanazt a százalékát nyeli el, más szóval a sugárzás erőssége a befutott réteg vastagsága függvényeként exponencziális törvény szerint fogy, ép úgy, mintha homogén sugárzással volna dolgunk, melyet az anyag a sugárzás természetének módosítása nélkül bocsát át.

Itt közlök néhány számadatot e kisérletekből:

Midőn az AT távolság 1·5 cm., vékony aluminiumlemez — egyedül működve — a reá eső sugárzás 51 századrészét bocsátja át; ha a sugarak vele hasonló aluminiumlemezen keresztül esnek reá, e sugárzásnak csupán 34 százalékát.

Ha azonban az AT távolság 0, ugyanaz a lemez mindkét esetben a reá eső sugárzásnak 71 százalékát bocsátja át: az átbocsátott sugarak viszonylagos mennyisége tehát ez esetben nagyobb.

A következő táblázat mutatja, hogy $AT = 0$ esetén vékony lemezek sorozatában minden lemez a reá eső sugárzásnak hányadrészét bocsátja át:

9 igen vékony rézlevélből álló sorozat	7 igen vékony aluminium levélből álló sorozat
0·72	0·69
0·78	0·94
0·75	0·95
0·77	0·91
0·70	0·92
0·77	0·93
0·69	0·91
0·79	
0·68	

Tekintettel a vékony lemezekkel való bánás nehézségeire, különösen a lemezeknek érintkezésig való egymásra helyezésénél, minden oszlop számai állandóknak tekinthetők; csupán az aluminiumra vonatkozó oszlop első száma mutat nagyobb elnyelőképességre mint a reá következő számok.

A rádium α sugarai úgy viselkednek mint a polóniumsugarak. E sugarak majdnem egészen külön tanulmányozhatók, úgy hogy a sokkal jobban eltéríthető β sugarakat mágneses térrel eltereljük; a γ sugarak ugyanis az α sugarakhoz képest elhanyagolhatóknak látszanak. Persze ezen eljárás csak a sugárzó forrástól számitott bizonyos távolságon túl alkalmazható. Egy hasonló kisérlet a következő eredményekre vezetett. Megmértük százalékokban a sugárzást, melyet egy 0·01 mm-nyi vastag aluminiumlemez átbocsátott; e lemezt mindig ugyanarra a helyre tettük kis távolságra a sugárzó forrás fölé. Az 5. rajzon előtüntetett készülék segitségével megfigyeltük az áramot, mely a sürítőn *AD* távolság különböző értékei mellett a lemez jelenlétében és a lemez nélkül áthaladt.

AD távolság	6·0,	5·1,	3·4
Az aluminium által átbocsátott sugarak százaléka	3,	7,	24

Ismét azokat a sugarakat nyeli el az aluminium legnagyobb mértékben, a melyek a levegőben legmesszebbre haladnak. A rádium sugárzásnak elnyelhető α része és a polóniumsugarak között tehát nagy a hasonlóság.

Az eltéríthető (β) sugarak és a nagy áthatoló képességü eltérithetlen (γ) sugarak azonban ezektől eltérő természetüek. Több fizikusnak, különösen MEYER és von SCHWEIDLERnek* kisérletei világosan mutatják, hogy ha a rádiumnak egész sugárzását tekintjük, e sugárzásnak áthatoló képessége a már befutott anyagréteg vastagságával növekszik, ép úgy, mint a RÖNTGEN sugaraké. E kisérleteknél az α sugarak alig szerepelnek, minthogy e sugarakat már igen vékony abszorbeáló lemezek szinte teljesen elnyelik. A mi áthalad egyrészt többé-kevésbé szétszórt β sugarakból és a γ sugarakból áll, mely utóbbiak, úgy látszik, a RÖNTGEN sugarakhoz hasonlók.

Megemlítem néhány erre vonatkozó kisérletem eredményeit:

A rádium üvegcsőbe volt zárva. A csőből kiáramló sugarak 30 cm-nyi levegő rétegen haladnak át és 1·3 mm. vastag üveglemezek sorozatára esnek; az első lemez 49, a második 84, a harmadik 85 százalékát bocsátja át a reá eső sugárzásnak.

Egy más kisérletsorozatnál a rádium, üvegcsőben, a sugarakat

---

* MEYER és von SCHWEIDLER, Physik. Zeitschr. 1 K. 209. l.

felfogó sűrítőtől 10 cm-nyire volt elhelyezve. A csőre egyforma, 0·115 mm. vastagságú ólomlemezeknek sorozatát helyeztük.

Az átbocsátott sugárzásnak viszonyát a beeső sugárzáshoz az egymásután következő lemezekre nézve ezek a számok adják:

0·40, 0·60, 0·72, 0·79, 0·89, 0·92, 0·94, 0·94, 0·97.

Négy, egyenkint 1·5 mm. vastagságú ólomlemezből álló sorozatnál az egymásután következő lemezekre nézve az átbocsátott és a beeső sugárzás viszonyát a következők:

0·09, 0·78. 0 84, 0·82

E kisérletekből kitünik, hogy mialatt a befutott ólomréteg vastagsága 0·1 mm-től 6 mm-ig nő, a sugárzás áthatolóképessége növekszik.

Azt találtam, hogy az említett kisérleti berendezés mellett 1·8 cm. vastag ólomréteg a reá eső sugárzásnak 2 százalékát bocsátja át; 5·3 cm. vastag ólomréteg, a reá eső sugárzásnak még 0·4 százalékát átbocsátja. Azt találom továbbá, hogy az 1·5 mm. ólomrétegen áthatoló sugárzás tekintélyes részét eltéríthető (katódnemű) sugarak alkotják; ez utóbbiak tehát nemcsak levegőben terjednek nagy távolságra, hanem oly erősen abszorbeáló szilárd anyagok vastag rétegein is áthatolnak, mint a milyen az ólom.

Midőn az 5. rajzon látható készülék segitségével egy 0·01 mm. vastagságú aluminiumlemeznek a rádium összes sugárzására gyakorolt abszorpczióját tanulmányozzuk, úgy, hogy a lemezt a sugárzó forrástól mindig ugyanazon távolságra helyezzük, a sűrítőnek *AD* távolságát azonban változtatjuk, az eredmény a három sugárcsoporttól származó jelenségek szuperpozicziója. Ha nagy távolságban észlelünk, a nagy áthatolóképességü sugarak vannak túlsúlyban és az abszorpczió csekély; kis távolságban az *a* sugarak vannak túlsúlyban és az abszorpczió annál gyöngébb, minél jobban közeledünk a sugárzó forráshoz; bizonyos közbeeső távolságnál az abszorpczió képességnek maximuma, az áthatoló képességnek minimuma van.

AD távolság … … … … … … …	7·1,	6·5,	6·0,	5·1,	3·4
Az aluminium által átbocsátott sugarak százaléka … … … … … …	91,	82,	58,	41,	48

Egyes az abszorpczióra vonatkozó kisérletek azt mutatják, hogy mégis van bizonyos hasonlóság az α és az eltéríthető β sugarak közt. BECQUEREL például azt találta, hogy szilárd lemeznek a β sugarakra gyakorolt abszorbeáló hatása a lemez és a forrás távolságának növekedésével nagyobbodik, úgy, hogy ha a sugarakat, mint a 4. rajzon, mágneses tér hatásának vetjük alá, a sugárzó forrásra helyezett abszorbeáló lemez a mágneses spectrumnak nagyobb részét hagyja meg, mint ugyanaz a lemez, ha a fényképező lemezre helyezzük. A lemez abszorpcziójának a lemez és a sugárzó forrás távolságával való változása hasonló ahhoz, a mi az α sugarakkal történik; ezt igazolták MEYER és von SCHWEIDLER, a kik a fluoroskopikus módszert használták; CURIE úr és én ugyanazt a tényt elektromos módszerrel mutattuk ki. E jelenség keletkezésének föltételei még nem képezték vizsgálat tárgyát. Annyit tudunk, hogy, ha a rádiumot üvegcsőbe zárjuk és nagy távolságra helyezzük a sürítőtől, a melyet magát vékonyfalú aluminiumládába zárunk, ugyanazt az áramot kapjuk, akár a sugárzó forrásra helyezzük az abszorbeáló lemezt, akár a sürítőre.

Az α sugarak tanulmányozása arra a föltevésre vezetett engem, hogy e sugarak úgy viselkednek mint bizonyos sebességgel röpített lövedékek, melyek akadályok legyőzése által eleven erejükből veszítenek.* E sugarak mégis egyenes vonalban terjednek, a mint BECQUEREL következő kisérletéből kitünik. A sugarakat kibocsátó polónium kemény papirba vésett igen keskeny vonalszerű nyilásba volt helyezve. Igy lineáris sugárforrás volt előállítható. 1·5 mm. átmérőjű rézdrót a sugárforráshoz párhuzamosan, vele szemben, 4·9 mm. távolságban volt elhelyezve. A papirlappal párhuzamosan 8·65 mm. távolságban a dróton túl fényképező lemez volt elhelyezve. 10 percnyi expozició után a drót geometriai

* CURIE asszony, Comptes rendus, 1900 január.

árnyéka tökéletesen kialakult, az előre várható méretekben és vékony félárnyakkal, mindkét oldalán jó megegyezésben a sugárzó forrás szélességével. Ugyanez a kisérlet ép oly jól sikerül, ha a drótra kettős vert aluminium lemezt helyezünk, melyen a sugaraknak át kell haladniok.

Tehát valóban oly sugarakról van szó, melyek tökéletes geometriai árnyékot tudnak előidézni. Az aluminiummal végzett kisérlet mutatja, hogy e sugarak a lemezen áthaladva nem szóródnak szét és hogy e lemez nem bocsát ki, vagy legalább is nem észrevehető mennyiségben másodlagos sugarakat, melyek a Röntgen sugarak másodlagos sugaraihoz hasonlók.

Úgy látszik, hogy a Crookes-féle *szpintariszkóp*ban * végbemenő szép jelenség létesítésénél is az α sugarak szerepelnek. E készülék lényegben egy szemernyi rádiumsóból áll, mely vékony fémdrót végére van erősítve foszforeszkáló czinkszulfid ernyővel szemben. A rádiumsó igen közel jut az ernyőhöz körülbelül egy fél milliméternyire; ha az ernyőnek a rádium felé fordított oldalát nagyítóval figyeljük meg, a fényes pontoknak egész záporát veszszük észre, a melyek feltünnek és megint eltünnek. A fénylő pontok mind sűrűbben tűnnek fel az ernyőnek a rádiumhoz közelebb eső részein s a rádium közvetlen közelében folytonosnak látszó fénybe mennek át. Levegőáramlatok nem módosítják észrevehető módon a jelenséget; légüres térben is ugyanez tapasztalható, azonban már igen vékony lemez, melyet a rádium és a foszforeszkáló ernyő közé helyezünk, megszünteti a jelenséget. Tényleg valószinü e szerint, hogy a jelenséget a rádiumnak legkönnyebben elnyelhető α sugarai hozzák létre.

Azt képzelhetjük, hogy egy fényes pont megjelenése a foszforeszkáló ernyőn egyetlen lövedék beleütközésétől származik. E felfogás szerint ez volna az első eset, hogy oly jelenséggel van dolgunk, melynél egy oly részecske egyéni hatásait tudjuk megkülönböztetni, melynek méretei ugyanoly nagyságrendűek mint egy atóm méretei.

---

* Chemical news, 1903 ápr. 3.

A fénylő pontok megjelenése hasonló az ultramikroszkopikus csillagok és tárgyakéhoz, melyek a recehártyán nem létesítenek éles képeket, csupán diffrakczió foltokat; ez tényleg megegyezik ama felfogással, hogy minden apró fénypont egyetlen atóm ütközésétől származik.

A nem eltéríthető γ sugarak, úgy látszik, egészen más természetüek és a RÖNTGEN sugarakhoz hasonlók. Semmi sem bizonyítja különben, hogy hasonló természetü, kis áthatolóképességü sugarak ne létezhessenek a rádium sugárzásában, minthogy az anyagi részecskékből álló sugárzás megfigyelésüket megakadályozná.

Látjuk, mennyire összetett jelenség a radioaktiv testek sugárzása. Tanulmányozásának nehézségei növekednek azáltal, hogy meg kell vizsgálnunk, vajjon e sugárzás az anyag részéről csupán kiválasztó abszorpcziót szenved-e, vagy pedig többé-kevésbé mélyremenő átalakulásban is részesül.

E kérdésre vonatkozólag még keveset tudunk. Ha azonban felteszszük, hogy a rádium sugárzása katódnemü sugarakat és RÖNTGEN-nemű sugarakat egyaránt tartalmaz, várható, hogy e sugárzás lemezeken áthaladva módosítást szenved. Tudjuk ugyanis a következőket: először a CROOKES csőből aluminiumablakon át kijutó katódsugarak (LÉNÁRD kisérlete) az aluminiumon erősen szétszóródnak és azonfelül a lemezen való áthatolás a sugarak sebességének csökkentését vonja maga után; így pl. $1{\cdot}4\times10^{10}\frac{cm}{se}$ sebességü sugarak e sebességüknek 10 százalékát elveszítik, ha század mm-nyi vastagságú aluminium lemezen haladnak át;* másodszor a katódsugarak valamely akadályba ütközve, RÖNTGEN-sugarakat hoznak létre; harmadszor a RÖNTGEN-sugarak valamely szilárd akadályba ütközve *másodlagos sugárzást* létesítenek, mely részben katódsugarakból áll.**

A jelenségek közti hasonlóság alapján várható, hogy mind e jelenségek a radioaktiv anyagok sugárzásánál is fellépnek.

* DES COUDRES, Phys. Zeitschr. 1902 november.

** SAGNAC, doktori értekezés. — CURIE és SAGNAC, Comptes rendus, 1900 április.

BECQUEREL a polóniumsugaraknak aluminium lemezen való áthatolását tanulmányozva sem másodlagos sugárzás keletkezését, sem katódnemű sugárzássá való átalakulást nem tapasztalt.*

Én a lemezek felcserélésének módszerével törekedtem a polóniumsugarak átalakulásának kimutatására. Két egymásra helyezett E_1 és E_2 lemezen áthaladó sugárzásnál a lemezek sorrendje a sugárzásra nem lehet befolyással, ha a lemezeken való áthatolás nem módosítja a sugárzást, ha azonban átbocsátás közben az ernyők módosítják a sugárzást, e sorrend már nem lesz közömbös. Ha például a sugarak, ólmon áthaladva könnyebben elnyelhető sugarakká változnának át, míg az aluminium nem gyakorolna ugyanoly mértékben ily befolyást a sugarakra, akkor az ólom-aluminium-rendszer áthatlanabbnak mutatkoznék, mint az aluminium-ólom-rendszer; ez fordul elő a RÖNTGEN-sugaraknál. Az én kisérletem szerint e jelenség a polóniumsugaraknál bekövetkezik. A 8. rajzon előtüntetett eszközt használtam. A polóniumot a *CCCC* dobozba helyeztem s a szükségképen igen vékony abszorbeáló lemezeket a *T* fémhálóra.

Használt lemezek	vastagság milliméterekben	megfigyelt áramerősség
Aluminium	0·01	17·9
Sárgaréz	0·005	
Sárgaréz	0·005	6·7
Aluminium	0·01	
Aluminium	0·01	150
Horgany	0·005	
Horgany	0·005	125
Aluminium	0·01	
Horgany	0·005	13·9
Sárgaréz	0·005	
Sárgaréz	0·005	4·4
Horgany	0·005	

* BECQUEREL, Rapports au Congrès de Physique, 1900.

Ezen eredmények mutatják, hogy a sugárzás módosúl, ha szilárd lemezen halad át. Ez megegyezésben van ama kisérletekkel, melyeknél két egyforma, egymásra helyezett lemez közül az első elnyelőképessége kisebbnek tünik föl mint a másodiké. Valószinű ezek után, hogy egy lemez átalakitó hatása annál nagyobb, minél távolabb fekszik a sugárzó forrástól. E tétel még nem nyert igazolást és az átalakitás természete még nem képezte részletes tanulmány tárgyát.

Ugyane kisérleteket igen erősen aktiv rádiumsóval ismételtem és negativ eredményre jutottam. Az átbocsátott sugárzásnak csupán jelentéktelen változásait tapasztaltam a lemezek sorrendjének felcserélésénél.

A következő lemezrendszereket használtam:

0·55	mm.	vastag	aluminium	és 0·01	mm.	vastag	platina
0·55	«	«	«	« 0·1	«	«	ólom
0·55	«	«	«	« 0·005	«	«	horgany
1·07	«	«	«	« 0·05	«	«	réz
0·55	«	«	«	« 0·005	«	«	sárgaréz
1·07	«	«	«	« 0·005	«	«	sárgaréz
0·15	«	«	«	« 0·01	«	«	platina
0·15	«	«	«	« 0·05	«	»	czink
0·15	«	«	«	« 0·1	«	«	ólom

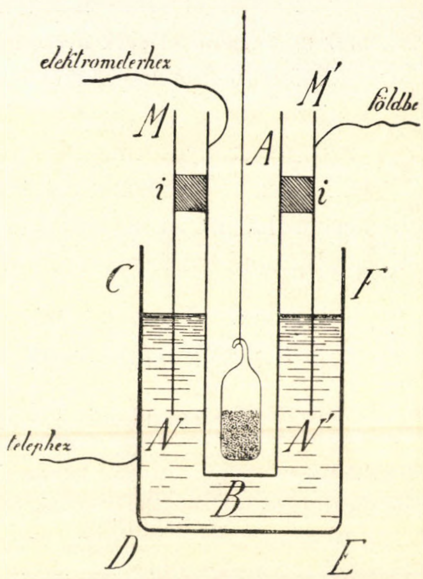
Az ólom-aluminium-rendszer kevéssel áthatlanabbnak mutatkozott, mint az aluminium-ólom, a különbség azonban nem nagy.

Igy tehát a rádiumsugaraknál nem tudtam észrevehető átalakulást kimutatni. Néhány radiografikus kisérletnél Becquerel ezzel szemben a rádiumsugarak hatása alatt álló szilárd lemezek által szétszórt, illetve kibocsátott másodlagos sugárzásnak igen jelentékeny hatásait figyelte meg. A legaktivabb anyag e másodlagos sugárzás kibocsátása szempontjából — úgy látszik — az ólom.

A rádiumsugaraknak szigetelő folyadékokra gyakorolt ionizáló hatása. Curie úr kimutatta, hogy a rádium- és Röntgen-sugarak ugyanúgy hatnak a folyékony dielektrikumokra mint a levegőre, bizonyos elektromos vezetőképességgel ruházva fel őket.*

A kisérlet a következő módon volt berendezve:

A megvizsgálandó folyadék *CDEF* fémedénybe volt helyezve, melybe vékonyfalu *AB* rézcső merült. Az edény kis akkumulátorokból álló telep segítségével, melynek egyik sarka a földbe volt vezetve, állandó ismert potenciálra volt töltve. Az *AB* cső az elektrométerrel állott összeköttetésben. Ha áram hatolt át a folyadékon, az elektrometert piezoellektromos kvarcz segítségével visszahozta a 0 pontra s így lemérte az áram erősségét. A földdel összekötött *MNM'N'* rézcső védelmül szolgált, nehogy az áram a levegőn keresztül haladjon át. Az *AB* cső fenekére üvegcsőbe forrasztott rádiumos báriumsó volt helyezhető; a sugarak a folyadékra az üvegcső és a rézcső falán való áthatolás után gyakorolnak hatást. A hatás elérhető az által is, hogy a rádiumos csövet a *DE* fal alá helyezzük.



9. rajz.

Hogy Röntgensugarak hatása tanulmányozható legyen, e sugarakat a *DE* falon keresztül kell a folyadékba bocsátani.

Ugy látszik valamennyi folyékony dielektrikum vezetőképessége növekszik a rádium- és Röntgensugarak hatása alatt; hogy azonban e növekedés kimutatható legyen, szükséges, hogy a folyadék saját vezetőképessége csekély legyen, nehogy a sugarak hatása hozzá képest elhanyagolható legyen.

Rádium- és Röntgensugarakkal dolgozva Curie úr ugyanoly nagyságrendű hatásokat kapott.

---

* P. Curie, Comptes rendus, 1902 febr. 17.

Ha ugyane kisérleti berendezéssel a levegő vagy valamely más gáznak vezetőképességét tanulmányozzuk a BECQUEREL-sugarak hatása alatt, azt találjuk, hogy a nyert áram erőssége arányos az elektródok közti potenciálkülönbséggel, a míg e különbség nem emelkedik néhány volt fölé; azonban nagyobb feszültségek mellett az áram erőssége mind lassabban növekszik és 100 voltnál már körülbelül elérjük a telitési áramot.

A folyadékok ugyanazon készülékben ugyanazon, igen aktiv sugárzó anyag hatása alatt különbözően viselkednek; az áram erőssége arányos a feszültséggel 0 volttól 450 voltig még akkor is, ha az elektródok távolsága 6 mm-nél nem nagyobb. Összehasonlíthatjuk az ugyanazon körülmények közt ható rádiumsó által különböző folyadékokban létesitett *vezetőképességet.*

A következő táblázat számai 10^{-11}-gyel szorozva $\frac{mho}{cm^3}$-ben* adják e vezetőképességeket:

Szénszulfid	20
Petroléter	15
Amilén	14
Szénchlorid	8
Benzin	4
Folyékony levegő	1·3
Vazelinolaj	1·6

Mindamellett föltehetjük, hogy a folyadékok és gázok hasonló módon viselkednek, azonban folyadékoknál az árama feszültség sokkal nagyobb értékei mellett még arányos a feszültséggel. A gázokhoz való hasonlóság alapján megkisérelhetjük az arányosság határának lejebb szorítását, azáltal, hogy sokkal gyöngébb sugárzást alkalmazunk. A kisérlet e várakozásnak megfelelt; az alkalmazott radioaktiv készítmény 150-szer kevésbbé aktiv volt mint az első kisérletnél. 50, 100, 200, 400 volt feszültség mellett

* $mho = \frac{1}{ohm}$.

az áram intenzitását rendre a következő számok adták: 109, 185, 255, 335. Az arányosság már nem maradt meg, de az áram még nagy mértékben változott, ha a feszültséget megkétszereztük.

A megvizsgált folyadékok közt vannak olyanok, a melyek állandó hőmérséklet mellett — ha nincsenek a sugárzásnak kitéve — majdnem tökéletes szigetelők. Ilyenek: a folyékony levegő, a petroléter, a vazelinolaj, az amilén. Ez esetben igen könnyű a sugarak hatását tanulmányozni. A vazelinolaj sokkal kevésbé érzi meg a hatást, mint a petroléter. Talán e tény összefüggésbe hozható e két szénvegyület különböző illékonysávával. A folyékony levegő, ha már egy ideig forrott a kisérleti edényben, érzékenyebb a sugarak hatása iránt, mint közvetlenül a betöltés után; az első esetben a sugarak létesítette vezetőképesség vagy $^1/_4$-del nagyobb mint a második esetben. Curie úr az amilénen és a petroléteren a sugárzás befolyását +10 és —17 C. foknál tanulmányozta. A sugárzástól származó vezetőképesség +10°-ról —17°-re térve csak egy tizedével csökken.

Ama kisérleteknél, melyeknél a folyadék hőmérsékletét változtatjuk, a rádiumot vagy a környezet hőmérsékletén vagy pedig a folyadékkal egyenlő hőmérsékleten lehet tartani; mindkét esetben ugyanaz az eredmény. Ez azt mutatja, hogy a rádium sugárzása nem változik a hőmérséklettel és erejét változatlanúl megtartja még a folyós levegő hőmérsékletén is. E tény közvetlen mérések által igazolást nyert.

A radioaktiv anyagok kibocsátotta sugárzás ionizáló képességének különböző hatásai. Az radioaktiv anyagok sugarai erősen ionizálják a levegőt. A rádium hatása alatt könnyen előidézhető a *túltelített vízgőz lecsapódása,* tökéletesen úgy, mint Röntgen- vagy katódsugarak hatása alatt.

Az uj radioaktiv anyagok kibocsátotta sugarak hatása alatt a *két fémvezető közt bizonyos potenciálkülönbség mellett létező átütési távolság növekszik;* más szóval a szikra átugrását a sugarak hatása elősegíti. E hatás a legnagyobb áthatolóképességű sugaraknak tudandó be. Ha ugyanis a rádiumot 2 cm. falvastagságú ólomburokba zárjuk, a rádiumnak a szikrára gyakorolt hatása nem szenved jelentékeny gyöngülést, pedig az áthaladó sugárzás az egész sugárzásnak csekély töredéke.

Ha két fémvezető közelében a levegőt vezetőképességgel ruházzuk fel s az egyik vezetőt a földdel, a másikat jól szigetelt elektrometerrel kötjük össze, látjuk, hogy az elektrometer állandó kitérést mutat, a melynek segítségével a levegő és a két fém által képezett elem elektromotoros erejét lemérhetjük (a levegővel elválasztott két fém érintkezési elektromotoros erejét). E módszert lord KELVIN és tanítványai alkalmazták urániumot használva sugárzási forrásúl;[1] hasonló módszert alkalmazott megelőzőleg PERRIN, ki a Röntgensugarak ionizáló hatását használta fel.[2]

A radioaktiv anyagok felhasználhatók a légköri elektromosság tanulmányozására. Az aktiv anyagot vékonyfalú kis aluminiumdobozba zárjuk, melyet elektrométerrel összekötött fémrúd végére erősitünk. A levegő a rúd végének közelében vezetővé lesz és így a rúd a környező levegő potenciálját veszi fel. A rádium így előnyösen helyettesiti a lángokat vagy a lord KELVIN-féle készülékeket, melyeken víz folyik keresztül, a melyeket eddig a légköri elektromosság tanulmányozásánál általában használtak.[3]

Fluoreszkáló- és fényhatások. Az új radioaktiv anyagok által kibocsátott sugarak egyes testeket fluoreszkálásra gerjesztenek. CURIE úr és én fedeztük fel legelőször e jelenséget, úgy, hogy báriumplatinciánid réteget tettünk ki a polónium aluminiumlemezen keresztül való hatásának. Ugyanaz a kisérlet még jobban sikerül eléggé aktiv rádiumos báriummal. Ha az anyag erősen radioaktiv, a létrehozott fluoreszkálás igen szép.

Igen sok anyag foszforeszkál vagy fluoreszkál a BECQUEREL sugarak hatása alatt. BECQUEREL e hatást az urániumsókon, a gyémánton, a szurokérczen stb. tanulmányozta. BARY kimutatta, hogy az alkali fémek és az alkali földes fémek ama sói, melyek mind

---

1 LORD KELVIN, BEATTIE és SMOLAN, Nature 1879.

2 PERRIN, doktori értekezése (magyar fordításban megjelent a Math. phys. Lapok 1897. évfolyamában).

3 PAULSEN, Rapports au Congrès de Physique 1900. — WITKOWSKI, Bulletin de l'Academie de sciences de Cracovie, 1902 jan.

fluoreszkálnak fénysugarak és Röntgensugarak hatása alatt, rádiumsugarak hatása alatt szintén fluoreszkálnak.* Ép igy észlelhető a papir, a pamut, az üveg stb. fluoreszkálása a rádium közelében. A különböző üvegfajták közül különösen jól világít a turingiai üveg.

A báriumplatinciánid legalkalmasabb a radioaktiv testek sugárzásának a fluoroszkopikus módszerrel való tanulmányozására. A rádium sugarak hatását több mint két méter távolságnyira lehet követni. A foszforeszkáló czinkszulfid rendkívül fényes lesz e sugarak hatása alatt, azonban alkalmatlan azért, mert megtartja fényességét még bizonyos ideig, miután már a sugarak hatása megszünt.

Meg lehet figyelni a rádium okozta fluoreszkálást, midőn a rádiumot az ernyőtől abszorbeáló lemezek választják el. Mi megfigyeltük a báriumplatincianid ernyő foszforeszkálását az emberi testen keresztül. A hatás azonban összehasonlíthatatlanúl erősebb, ha az ernyőt egész közel hozzuk a rádiumhoz és semmiféle szilárd testet nem helyezünk közbe. Úgy látszik valamennyi sugárnem képes fluoreszkálást kelteni.

Hogy a polónium hatását megfigyelhessük, az anyagot, szilárd rétegek közbehelyezése nélkül (vagy legalább is csupán vékony szilárd réteg közbehelyezésével) közvetlenül az ernyő közelébe kell tennünk.

E radioaktiv testek hatásának kitett fluoreszkáló anyagok fényessége idővel csökken. Ezzel egyidőben a fluoreszkáló anyag bizonyos átalakulást szenved. Ime nehány erre vonatkozó példa:

A rádiumsugarak a báriumplatincianidot barna, kevésbbé fényes változatává alakítják át (hasonló hatást okoznak — a mint Villard leirja — a Röntgensugarak). A rádiumsugarak megváltoztatják és megsárgítják az uranil- és káliumszulfátot. Az átalakult báriumplatincianid részben visszaalakúl fénysugarak hatása alatt. Helyezzük a rádiumot papirra kiterjesztett báriumplatinciánid alá; a báriumplatincianid világítani fog; ha az egészet sötét-

* Bary, Comptes rendus, 130. k. 1900, 776. l.

ben tartjuk, a platinciánid átalakúl és fényessége jelentékenyen alábbszáll. De tegyük ki az egészet a fény hatásának; a platinciánid részben visszaalakul és ha visszavisszük a sötétbe a fényesség ujra elég erősen lép fel. Így tehát egy fluoreszkáló és egy radioaktiv test segitségével oly rendszert állitottunk össze, mely úgy működik, mint egy hosszú foszforeszkálási idejű foszforeszkáló test. A rádium hatása alatt fluoreszkálásra gerjesztett üveg barna vagy ibolyaszinűvé lesz, és ezzel együtt fluoreszkáló képessége alább száll. Ha az így átalakitott üveget melegítjük, elveszti szinét és a szin elvesztésével egyidőben fényt bocsát ki. Ezen eljárás után az üveg ép oly mértékben fluoreszkál, mint az átalakulás előtt.

A rádium hatásának elegendő időn át kitett czinkszulfid lassankint kifárad és elveszti úgy a rádium, mint a fény behatása alatti foszforeszkáló képességét.

A gyémánt a rádium hatása alatt foszforeszkál és így a gyöngén világitó utánzatoktól megkülönböztethető.

Az összes rádiumtartalmú báriumvegyületek *önként világítanak.** A száraz anhidrát haloidsók különösen erős fényt bocsátanak ki. E fény világos nappal nem látható, ellenben könnyen észrevehető félhomályban vagy gázzal megvilágitott szobában. A kibocsátott fény elég erős lehet ahhoz, hogy olvasni lehessen mellette, ha kevés rádiumoskészítménynyel világitunk magunknak. A kibocsátott fény a készítmény egész tömegéből áramlik ki, míg közönséges foszforeszkáló testnél a fény főleg a megelőzőleg megvilágitott felületrészből árad ki. Nedves levegőben a rádiumos készítmények fényességüket nagy részben elveszitik, azonban szárítás által visszanyerik (GIESEL). A fényesség úgy látszik időben változatlan. Gyengén aktiv készítmények fényességében éveken át nem történt észrevehető változás, ha beforrasztott csövekben sötétségben voltak eltéve. Igen aktiv és igen fényes rádiumos báriumchlorid fényessége néhány hónap alatt megváltozik; ibo-

* CURIE, Société de Physique, 1899 március 3. — GIESEL, Wied. Ann. 69 k. 91. l.

lyább szinü lesz és jelentékenyen meggyöngül; ezzel egyidőben a készitmény bizonyos átalakulásokon megy át; ujra feloldva a sót vizben és ujra kiszáritva, visszanyeri az eredeti fényességet.

A báriumsók oldatai, melyek jelentékeny mennyiségű rádiumot tartalmaznak, szintén világitanak; ezt megfigyelhetjük, ha az oldatot platinacsészébe helyezzük, melyben, minthogy a csésze maga nem világit, észrevehetjük az oldat gyönge fényességét. Rádiumos báriumsó oldatában lerakódott kristályok világitanak, még pedig sokkal erősebben, mint az oldat maga, úgy hogy úgy látszik, mintha a kristályok világitanának.

Giesel rádiumos báriumplatinciánidot készitett. Kristályosodás után e só külszine ugyanaz, mint a közönséges báriumplatinciánidé; ekkor a só igen erősen világit. Lassankint azonban a só önként barnás szint ölt és a kristályok ezzel egyidőben dichroitikusokká lesznek. Ezen állapotban a só sokkal kevésbbé világit, bár radioaktivitása növekedett.* A rádiumplatinciánid, melyet Giesel készitett, még sokkal gyorsabban megváltozik.

A rádiumvegyületek az önként világitó testeknek első példái.

A rádiumsók által kibocsátott hő. — Legujabban Curie és Laborde azt találták, hogy *a rádiumsók önkéntes és folytonos hőkibocsátásnak forrásai.*** E hőkibocsátás következményeképp a rádiumsók hőmérséklete a környezet hőmérsékleténél magasabb; e hőmérsékletkülönbség egyébiránt az anyag hőszigetelésétől függ. E hőmérsékletkülönbség közönséges higanyhőmérővel végzett durva kisérlettel kimutatható. Két egyforma vákuumos hőszigetelő edényt használtunk e czélra. Egyik edénybe 7 dekagramm tiszta rádiumbromidot tartalmazó üvegcsőt helyezünk, a másikba egészen hasonló üvegcsövet, mely azonban valami tetszőleges inaktiv anyaggal, pl. báriumchloriddal van megtöltve. Mindkét edény hőmérsékletét egy-egy hőmérő jelzi, melynek hagymáját az üvegcső közvetlen közelébe helyezzük. A szigetelő edények nyilásait pamuttal betömjük. Midőn a hőmérsékleti egyensúly be-

---

* Giesel, Wied. Ann. 69 k., 91. l.

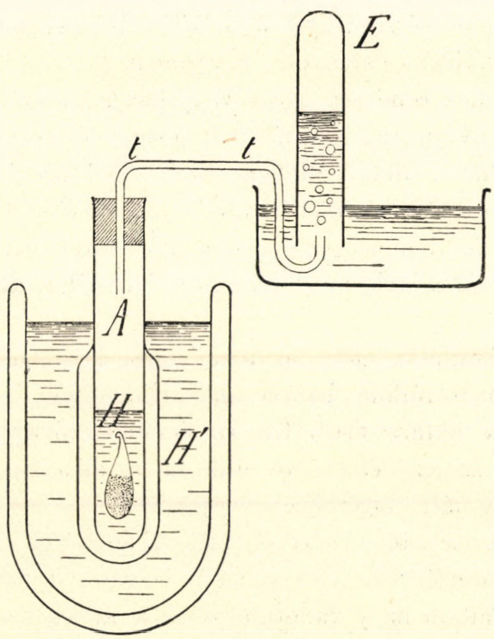
** Curie és Laborde, Comptes rendus, 1903. márczius 16.

következik, a rádiumos edényben lévő hőmérő állandóan magasabb hőmérsékletet mutat, mint a másik; a megfigyelt hőmérsékletkülönbség 3° volt.

A rádium által kibocsátott hőmennyiség a BUNSEN-féle jégkaloriméterrel lemérhető. A kaloriméterbe helyezve a rádiumot tartalmazó üvegcsövet, állandó hőfejlődést veszünk észre, mely azonnal megszünik, a mint a rádiumot eltávolitjuk. Régóta készített rádiumsóval végzett kisérlet mutatja, hogy minden gramm rádium óránkint 80 grammkalória meleget fejleszt. A rádium tehát óránkint annyi meleget bocsát ki, a mennyi vele egyenlő súlyú jég megolvasztásához szükséges, és egy grammatóm (225 gr.) rádium óránkint 18,000 cal. hőt fejlesztene, a mely hőmennyiség a hidrogén grammatóm (1 gr.) elégésénél keletkező hővel összemérhető. Ily jelentékeny hőfejlődés semmiféle közönséges reakcióval nem magyarázható meg, annál kevésbé, mert a rádium állapota éveken át változatlannak mutatkozik. Arra lehetne gondolni, hogy a hőfejlődés magának a rádiumatómnak átalakulásából származik, a mely átalakulás szükségképpen igen lassan menne végbe. Ha így állana a dolog, arra kellene következtetnünk, hogy az atómok képződésénél és átalakulásánál szereplő hőmennyiségek igen jelentékenyek és túlhaladják mindazt, a mit eddig ismerünk.

Meghatározhatjuk még a rádium által kibocsátott hő mennyiségét különböző hőmérsékletek mellett, a rádiummal folyósított gázokat forralva és a keletkező gáz térfogatát mérve le. E kisérlet metilchloriddal (—21 °) végezhető. DEWAR és CURIE folyós oxigénnel (—180°) és folyós hidrogénnel (—252°) végezték ugyane kisérletet. Ez utóbbi test különösen alkalmas a kisérlet végrehajtására. Az *A* vákuumos szigetelő edénynyel körülvett kémcső folyós hidrogént (*H*) tartalmaz (l. a 10. rajzot); a kémcső *t* kivezető csővel van ellátva, melynek segítségével a gáz vízzel töltött, beosztott *E* kémcsőben összegyüjthető. Az *A* kémcső és szigetelő edénye *H'* folyós hidrogénfürdőbe merülnek. Ilyen viszonyok között az *A* kémcsőben semmiféle gáz nem fejlődik. Ha az *A* kémcső folyós hidrogénjébe 7 dekagr. rádiumbromidot tartalmazó üvegcsövet helyezünk, folytonos gázképződés indul meg, és perczenkint 73 cm^3 gáz gyülik össze.

Szilárd rádiumsó közvetlen előállítása után aránylag kevés hőt bocsát ki; a hőfejlődés azonban folytonosan növekszik és bizonyos határértékhez közeledik, melyet egy hónap alatt még nem ér el egészen. Ha vizben oldunk fel rádiumsót és az oldatot beforrasztott üvegcsőbe zárjuk, az oldat által kezdetben kibocsátott hő



10. rajz.

mennyisége csekély, azután növekszik és körülbelül egy hónap alatt bizonyos állandó értéket ér el; a kibocsátott hő mennyisége akkor ugyanaz, mint a szilárd állapotú sóé.

Ha a Bunsen-féle kaloriméterrel mérjük a rádiumsó által kibocsátott meleg mennyiségét, a rádiumnak bizonyos, nagy áthatoló képességű sugarai áthaladnak az üvegcsövön és a kaloriméteren a nélkül, hogy abszorpcziót szenvednének. Hogy meggyőződhessünk arról, vajjon e sugarak mérhető energiamennyiséget szállítanak-e magukkal, a mérést ismételni lehet úgy, hogy az üvegcsövet 2 mm vastag ólomburokkal vesszük körül; azt találjuk, hogy ily körülmények között a hőfejlődés körülbelül 4 százalékkal növekszik; a rádium által nagy áthatoló képességű sugarak alakjában kibocsátott energia tehát semmiképen sem hanyagolható el.

Az uj radioaktiv anyagok által okozott kémiai hatások, szinezések. — Az erősen radioaktiv anyagok által kibocsátott sugarak bizonyos átalakulások, bizonyos kémiai reakcziókat idézhetnek elő. A rádiumos készítmények által kibocsátott sugarak üvegre és porczellánra szinező hatásokat gyakorolnak.*

Az üvegnek rendesen barna vagy ibolya szinezése igen erős; magában az üveganyag belsejében keletkezik és megmarad a rádium eltávolítása után. Minden üveg előbb-utóbb szineződik, nem szükséges, hogy ólomtartalmú legyen. E tény összefüggésbe hozható a Röntgen-sugarakat előállító csöveknek, legujabban észlelt szineződésével, mely hosszabb használat után következik be.

Giesel kimutatta, hogy az alkalifémek kristályos haloid sói (kősó, szilvin) a rádium hatása alatt szineződnek ép úgy, mint katódsugarak hatása alatt. Giesel kimutatta továbbá, hogy hasonló nemű szineződéseket nyerünk, ha az alkalikus sókat huzamosabb ideig nátriumgőzökben tartjuk.**

Én ismert összetételű üvegsorozat szineződését tanulmányoztam, melyet e czélra Le Chatelier úr bocsátott rendelkezésemre. Nem tapasztaltam nagy változatosságot a szineződésben: általában ibolya, sárga, barna vagy szürke. A szineződés úgy látszik, az alkalifémek jelenlétéhez van kötve.

Kristályos, tiszta alkalisók sokkal változatosabb és sokkal élénkebb szineződéseket szenvednek; az eredetileg fehér só kék, zöld, sárga, barna stb. lesz.

Bequerel kimutatta, hogy a fehér foszfor rádium hatása alatt vörös foszforrá változik át.

---

* Curie és Curie asszony, Comptes rendus, 129. k. 1899 november, 823. l.

** Giesel, Deutcshe phys. Gesellschaft; 1900 január.

A papir átalakul és szineződik a rádium hatása alatt: törékenynyé lesz, szétmállik és végre lyuggatott szitához lesz hasonló. Bizonyos körülmények között igen aktiv készitmények közelében ozón keletkezik. Beforrasztott üvegcsőből kiáramló sugarak nem okoznak ozonképződést a levegőben, melyen áthaladnak, ha azonban az üvegcsövet felnyitjuk, erős ozonszag terjed szét. Általában ozon keletkezik a levegőben rádium hatása alatt, ha a levegő rádiummal közvetlenül érintkezik. Bármily szűk vezetéken át történő érintkezés elegendő e czélra; úgy látszik, az ozonképződés az indukált radioaktivitás tovaterjedéséhez van kötve, melyről később lesz szó.

A rádiumos készitmények látszólag átalakulnak az idő folyamán, kétségtelenül saját sugárzásuk hatása alatt. Láttuk előbb, hogy a rádiumos báriumkristályok, melyek a lerakódás pillanatában szintelenek, lassankint néha sárga- és narancs-, néha rózsaszinüekké lesznek; e szineződés oldás által eltüntethető. A rádiumos báriumchlorid chlornak oxigenes vegyületeit bocsátja ki, a bromid brómot. E lassú átalakulások rendszerint csak bizonyos idővel, a szilárd készitmény előállítása után mutatkoznak, s ugyanakkor a készitmény külszine is megváltozik: sárga- vagy ibolyásszinűvé lesz és az általa kibocsátott fény is jobban hajlik az ibolya felé.

A tiszta rádiumsók látszólag ugyanazon átalakulásokat szenvedik, mint a báriumtartalmuak. Azonban a savanyú oldatban lerakodó chloridkristályok nem szineződnek észrevehető módon ugyanazon idő alatt, mely elegendő arra, hogy a rádiumdús báriumchlorid kristályok erős szineződést szenvedjenek.

Gázfejlődés rádiumsók jelenlétében. — Rádiumbromid oldat állandóan gázokat fejleszt.* E gázok főleg hidrogén és oxigén, és a keverék összetétele közel áll a vizéhez; föltehetjük, hogy a rádiumsók jelenlétében a víz felbomlik.

A rádium szilárd sói (rádiumchlorid és bromid) szintén folytonos gázfejlődés forrásai. A gázok a szilárd só likacsait töltik be

* Giesel Chem. Ber. 1903., 347. l. — Ramsay és Soddy, Phys. Zeitschr. 1903 szept. 15.

és elég nagy mennyiségben távoznak el, midőn a sót feloldjuk. A gázkeverékben hidrogént, oxigént, szénsavat, héliumot találni; a gázkeverék szinképe néhány ismeretlen sugarat is tartalmaz.* Gázfejlődéseknek lehet tulajdonítani két jelenséget, melyek Curie úr kisérletei közben mentek végbe. Száraz, szilárd rádiumbromiddal megtöltött, beforrasztott üvegcső két hónappal lezárása után, gyenge melegités következtében felrobbant; a robbanás valószinüleg a belső gázak nyomásának következménye volt. Egy másik kisérleténél hosszú idővel előbb készitett rádiumchloridot tartalmazó üvegcső elég nagy térfogatú edénynyel közlekedett, melyben igen tökéletes vákuumot létesitett. Az üvegcsövet elég gyorsan 300°-ra hevitette, mire a só felrobbant; az üvogcső összetörött, a só messze elröpült; a robbanás pillanatában nem lehetett a nyomás jelentékeny az üvegcsőben. Az eszközt különben ugyanazon körülmények közt próbamelegitésnek vetette volt alá, rádiumsó nélkül, és semmiféle baj nem történt.

E kisérletek mutatják, hogy veszedelmes régóta előállitott rádiumsót felmelegiteni és hasonlóképen veszedelmes a rádiumot huzamos ideig beforrasztott csőben tartani.

Termolumineszczenczia keletkezése. — Bizonyos testek, mint pl. a fluorin, melegitve fényt bocsátanak ki; ez a termolumineszczenczia; világitásuk bizonyos idő mulva megszünik; azonban a villamos szikra és úgyszintén a rádium hatása alatt visszanyerik ama képességüket, hogy melegités következtében világitsanak. A rádium tehát e testeknek visszaadja termolumineszkáló tulajdonságait.** A melegités alatt a fluorin bizonyos átalakulást szenved, mely fénykibocsátással jár. Midőn a fluorint rádium hatásának teszszük ki, ellenkező irányú átalakulás megy végbe, mely szintén fénykibocsátással jár.

Egészen hasonló jelenség játszódik le a rádium hatásának kitett üvegnél. Az üvegben szintén bizonyos átalakulás megy végbe, azalatt, hogy a rádiumsugarak hatása alatt világit; ez átalakulás

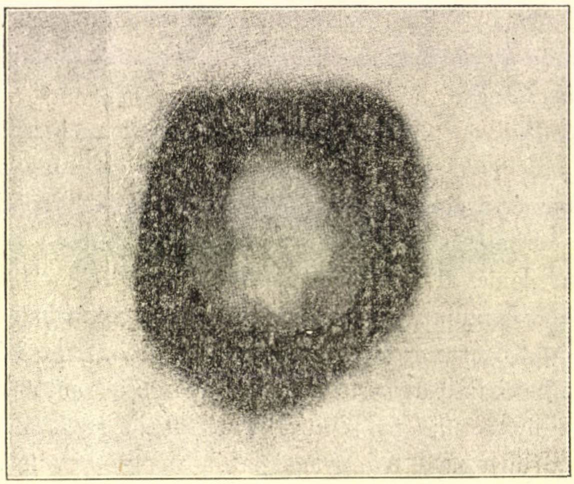
* Ramsay és Soddy, az idézett helyen.

** Bequerel, Rapports au Congrès de Physique, 1900.

a szineződés által nyilvánul, mely fokozatosan mutatkozik és erősbödik. Ha az így átalakitott üveget melegítjük, ellenkező irányú átalakulás megy végbe, a szineződés eltünik és e jelenség fénykibocsátással jár. Igen valószinű, hogy kémiai jellegű átalakulás megyen végbe, és ezen átalakuláshoz van kötve a fénykibocsátás. E jelenség egészen általános lehetne. Lehetséges volna, hogy a rádium hatása alatti fluoreszkálás és a rádiumos anyagok világitása a fényt kibocsátó anyagnak bizonyos kémiai vagy fizikai átalakulásától származnak.

Radiográfiák. — Az új radioaktiv anyagok radiografikus hatása igen erős, azonban különböző eljáráshoz kell folyamodnunk a rádiumnál és a polóniumnál. A polónium csak igen kis távolságra hat és hatását szilárd anyagrétegek tetemesen gyöngitik; igen vékony lemez (1 mmnyi üveg) úgyszólván teljesen megszünteti a hatást. A rádium jóval nagyobb távolságokra hat. Levegőben a rádiumsugarak radiografikus hatása több, mint két méternyire észlelhető, még akkor is, ha a sugárzó anyagot üvegcsőbe zárjuk. Az ily körülmények közt érvényesülő sugarak a β és γ csoportokba tartoznak. Az anyagoknak a sugarakra vonatkozó különböző «átlátszósága» folytán különböző tárgyak radiográfiáit állithatjuk elő, ép úgy mint a Röntgen-sugarakkal. A fémek általában átlátszatlanok; kivételt képez az igen átlátszó aluminium. A hús és a csontok átlátszósága között nincs jelentékeny különbség. Nagy távolságokból kicsiny méretű sugárzó forrásokkal igen éles radiográfiákat lehet előállítani. Igen előnyös a radiográfiák szépségére, ha a β sugarakat mágneses tér segítségével eltereljük és csak a γ sugarakat használjuk fel. A β sugarak ugyanis, áthaladva a leképezendő tárgyon, bizonyos szétszóródást szenvednek és fátyolos képet szolgáltatnak. Ha a β sugarakat eltereljük, hosszabb expoziczió időre lesz szükségünk, az eredmény azonban jobb. Olyanféle tárgy radiografiájához, mint a milyen egy pénztárcza, egy napi expozició szükséges, ha a sugárzó forrás üvegcsőbe zárt néhány centigramm rádiumsó, melyet a fényérzékeny lemeztől 1 méternyire helyezünk, a leképezendő tárgyat pedig magára a lemezre. Ha a forrás és a lemez távolsága 20 cm., ugyanazt az eredményt egy óra alatt érjük el. A sugárzó forrás közvetlen közelébe helyezett lemezen a radiografikus benyomás egy pillanat alatt megvan.

Fiziológiai hatások. — A rádiumsugarak a felhámra (epidermis) hatást gyakorolnak. E hatást WALKHOFF figyelte meg, kinek



11. rajz.

megfigyelései GIESEL és később BEQUEREL és CURIE által igazolást nyertek.*

Ha bőrünkre vékonyfalú celluloid vagy kaucsuk dobozkába zárt igen aktiv rádiumsót helyezünk és bizonyos ideig ott hagyjuk, a bőrön vörös folt keletkezik vagy azonnal, vagy bizonyos idő mulva, még pedig annál későbben, minél gyöngébb és rövidebb volt a behatás; e vörös folt ott jelenik meg, a hol a bőr a rádium hatásának ki volt téve; a bőr helyi elváltozása érezhető és úgy fejlődik tovább, mint az égési seb. Bizonyos esetekben hólyag keletkezik. Ha az expoziczió igen sokáig tartott, nehezen

* WALKHOFF, Photographische Rundschau, 1900 október. — GIESEL, Berichte der deutschen chem. Gesellschaft, 23. k. — BECQUEREL és CURIE, Comptes rendus 132. k., 1289. l.

gyógyuló fekély keletkezik. Curie úr kisérletképen karját tíz órán át aránylag kevéssé aktiv sugárzó anyag hatásának tette ki. A vörös folt azonnal mutatkozott és oly fekély keletkezett belőle, mely csak négy hónap alatt gyógyult el. Az illető helyen a felhám elpusztult és csak igen lassan és nehezen tudott egészséges állapotban ujjáalakulni, igen határozott sebhelyet képezve. Fél órai expozicióval okozott rádiumégetés 15 nap mulva mutatkozott, hólyagot képezett és 15 nap alatt gyógyult be. Egy másik 8 percznyi expoziczióval okozott égetés vörös foltban nyilvánult, mely csak két hónap mulva mutatkozott és melynek hatása jelentéktelen volt.

A rádium fémeken keresztül is hat a bőrre, de gyöngébben. Hogy a hatástól biztosan megóvjuk magunkat, a rádiumot huzamosabb ideig csak ólomlemezbe burkolva szabad magunkon viselnünk.

Dr. Danlos a Saint-Louis kórházban tanulmányozta a rádium hatását a bőrre, bizonyos bőrbetegségek kezelése szempontjából, hasonlóan mint a hogy a Röntgen-sugarakat vagy az ibolyántúli sugarakat alkalmazzák. A rádiummal ez irányban biztató eredményeket értek el; a rádium által részben elroncsolt felhám egészséges állapotban képződik újra. A rádium hatása mélyebb, mint a fényé és alkalmazása könnyebben történhetik, mint a Röntgen-sugaraké vagy a fényé. Az alkalmazás föltételeinek tanulmányozása természetesen kissé hosszadalmas, minthogy a benyomás következményeiről nem adhatunk magunknak azonnal számot.

Giesel észrevette a rádium hatását növénylevelekre. E hatás alatt a levelek megsárgulnak és elporlanak.

Hasonlóképen Giesel fedezte fel a rádiumsugarak hatását a szemre.[1] Ha sötétben lehunyt szemhéjunk vagy halántékunk közelébe rádiumos készítményt helyezünk, úgy érezzük, mintha világosság töltené el szemünket. E jelenséget Himstedt és Nagel[2]

---

[1] Giesel, Naturforscherversammlung München, 1899.
[2] Himstedt és Nagel, Ann. der Phys. 4. k. 1901.

tanulmányozták. E fizikusok kimutatták, hogy a szem összes részei a rádium hatása alatt fluoreszkálókká lesznek és ez magyarázza a tapasztalt fényérzetet. Azok a vakok, kiknek reczehártyája ép, megérzik a rádium hatását, míg azok, a kiknek reczehártyája beteg, nem tapasztalják a rádiumsugaraktól származó fényérzetet. A rádiumsugarak megakadályozzák vagy késleltetik a mikrobatelepek fejlődését, e hatásuk azonban nem igen erős.

Legujabban Danyst kimutatta, hogy a rádiumsugarak erősen hatnak a gerincz- és agyvelőre. Egy órai hatás után a kisérletnek alávetett állatoknál bénulások mutatkoztak s az állatok általában néhány nap mulva elhaltak.[2]

A hőmérséklet befolyása a sugárzásra. — Még csak keveset tudunk arról, hogyan változik a radioaktiv testek sugárzása a hőmérséklettel. Tudjuk azonban, hogy a sugárzás alacsony hőfokoknál is megmarad. Curie folyós levegőbe mártott rádiumos báriumchloridot tartalmazó üvegcsövet.[3] A sugárzó anyag világítása ily viszonyok közt is fenmarad. Sőt abban a pillanatban, midőn a csövet a hideg környezetből kivesszük, még fényesebbnek látszik, mint szobahőmérsékleten. A folyós levegő hőmérsékleténél a rádium még mindig fluoreszkáltatja az uranil- és káliumsulfátot. Curie elektromos mérésékkel igazolta, hogy a sugárzó forrástól bizonyos távolságra lemért sugárzás erőssége ugyanaz, akár szobahőmérséklete, akár folyós levegőhőmérséklete van a rádiumnak. A kisérleteknél a rádiumot egyik végén zárt csőbe helyezte. A sugarak a cső nyilt végén áramlottak ki a csőből, áthaladtak bizonyos levegőrétegen és így jutottak a sürítőbe. Curie megmérte a sugarak hatását a sürítő levegőjére, egyszer midőn a cső a levegőben volt, egyszer midőn bizonyos magasságig folyós levegőbe merült. Az elért eredmény mindkét esetben ugyanaz volt.

Ha a rádiumot magas hőfokra hevítjük, radioaktivitása megmarad. A rádiumos báriumchlorid megolvasztva (800°) radioaktiv

---

[1] Aschkinass és Caspari, Ann. der Phys., 6. k., 1901, 570. l.
[2] Danyst, Comptes rendus, 1903 febr. 16.
[3] Curie, Société de Physique, 1900 márczius 2.

és világít. Azonban, ha a készítményt huzamosabb ideig magas hőfokon tartjuk, radioaktivitása ideiglenesen csökken. E csökkenés igen jelentékeny és az egész aktivitás 75 perczentje is lehet, és aránylag kisebb a könnyebben elnyelhető sugaraknál, mint a nagy áthatoló képességüeknél, melyeket a melegítés majdnem teljesen eltüntet. Idővel a készítmény sugárzása visszanyeri a melegítés előtti erősségét és összetételét; az ehhez szükséges idő körülbelül két hónap, a melegítéstől számítva.

Ford.: Zemplén Győző.

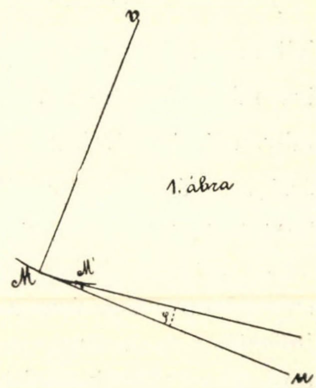
ADALÉKOK A PONT MOZGÁSÁNAK TERMÉSZETES KOORDINÁTÁKBAN TÖRTÉNŐ TÁRGYALÁSÁHOZ.

1. A sík «természetes» geometriájában * egy görbét a görbületi sugara és az ívhossza között fennálló egyenlet jellemez. Ezen adatok nyilván függetlenek mindenféle koordinátarendszertől, s csak a görbének belső, természetes tulajdonságait határozzák meg. A gondolat, görbéket a velük szorosan össze nem függő koordinátáktól menten vizsgálni, a mint azt, bizonyos tekintetben, az elemi geometria is teszi, egyrészt a synthetikus geometriában, másrészt a természetes geometriában lelhető fel. Míg azonban az előbbi különösen az algebrai görbékkel foglalkozik, addig az utóbbi legszebb eredményeit a transcendens görbék vizsgálatánál érte el. A természetes geometria alapgondolatának igazi tartalmába voltaképen csak Lie kutatásai vezettek. Lie ugyanis kimutatta, hogy a síkmozgás differencziálinvariánsai ρ és $\frac{d\rho}{ds}$ (ρ a görbületi sugár, ds az ívelem); minden összefüggés ρ és $\frac{d\rho}{ds}$ között tehát közös mindazon görbékre nézve, a melyek egymásból a sík mozgásai (haladás és forgás) által keletkeznek, vagyis az összes összevágó görbéket ugyanaz a $f\left(\rho, \frac{d\rho}{ds}\right) = 0$ egyenlet adja meg. Scheffers e tétel alapján ρ-t és $\frac{d\rho}{ds}$-t nevezi a görbe természetes koordinátáinak.**

* A geometria ezen ágára nincsen egységesen elfogadott elnevezés. Mi a Lampe-Aoust-féle «Natürliche Geometrie»-t fordítottuk. Az irodalomban előfordul még: Esoterische G. (Hoppe), Intrinsic G. (Whewell), ez utóbbit az angolokon kívül különösen a francziák és olaszok használják.

** Lie-Scheffers: Continuirliche Gruppen. 22. fej. 1. §.

Ha mi ezzel szemben természetes koordinátáknak ρ-t és s-t választjuk, teszszük ezt azért, mert e koordinátáknak egyszerű a geometriai jelentőségük, s mert alkalmazásokban is czélszerűbbeknek bizonyultak az előbbieknél. Egy $F(\rho, s) = 0$ egyenlet ugyan nem az összes összevágó görbékre közös; de az összes összevágó görbéket, az ívhosszmérés kezdőpontjának alkalmas megválasztásával, ugyanazon $F(\rho, s) =$ egyenletre lehet hozni. Adva lévén egy görbe derékszögű koordinátákban, úgy a görbületi sugár és az ívhossz képletéből a független változót (az abscissa, az idő, stb.) kiküszöbölve, nyerjük a görbe egyenletét természetes koordinátákban. Nem ily egyszerű a feladat megfordítása: adott természetes egyenletből a görbe egyenletét derékszögű koordinátákban kiszámitani.



E célból vezessük be a φ *hajlásszöget*, melyet az érintő egy fix iránynyal, pl. az M pont érintőjével (1. ábra) képez. Minthogy az $MM' = ds$ ívelemet tekinthetjük, magasabbrendűek elhanyagolásával, a ρ sugarú kör oly ívelemének, a melyhez tartozó középpont szög $d\varphi$, áll az, hogy

$$\rho d\varphi = ds \tag{1}$$

$$\varphi = \int \frac{ds}{\rho} \cdot \tag{1'}$$

A φ szög ismerete után, a görbe pontjainak (u, v) koordinátáit, oly derékszögű koordinátarendszerben, melynek u tengelye M érintője, v tengelye a normális azon része, a melyen a görbületi középpont van a következő, az ábrából geometriailag világos

$$\begin{aligned} ds \cos \varphi &= du \\ ds \sin \varphi &= dv \end{aligned} \tag{2}$$

egyenletek integrácziója

$$u = \int \cos \varphi ds$$
$$v = \int \sin \varphi ds \qquad 2')$$

adja. A most nyert φ szög, szintén egy «természetes» jellemzője a görbének, s a régebbi irodalomban csaknem kizárólag s és φ voltak a görbe természetes koordinátái.* EULER, de különösen CESÀRO dolgozatai fogadtatták el az (s, ρ) jellemzőket természetes koordinátákul, épen CESÀROnak: «Geometria intrinseca» cz. könyve alapján.**

Az $F(\rho, s) = 0$ egyenlet által definiált görbe singularis pontjait megadják a $\rho = 0$ és $\frac{1}{\rho} = 0$ egyenletek gyökei. A singularitas mineműségének meghatározására megvizsgáljuk, hogy n milyen értékénél lesz e helyen $\lim \frac{s^n}{\rho} \neq 0$; ugyanis e határérték, egy állandótól eltekintve, $\frac{v}{u^{2-n}}$ határértékével egyenlő; e határérték tehát megadja azt, hogy hányadrendű parabola simul legjobban a görbéhez a kérdéses pontban. Ha n két páratlan szám hányadosa, úgy v és u egyidejűleg vált jelet, itt tehát inflexiós pont van; ha n egy páros és egy páratlan szám hányadosa, úgy u csak positiv értékeihez v két ellentetten egyenlő értéke tartozik, a kérdéses pont tehát csúcspont. Ha végre n egy páros és egy páratlan szám hányadosa, úgy e pont környezetétől miben sem tér el? Természetes, hogy a maximum és minimum pontokat e módszer nem tudja adni, mert hiszen e pontoknak csakis a koordinátarendszerhez képest van kiváló helyzetük, a görbe pontjaihoz képest nincsen.

Ha $\lim\limits_{s=\infty} \varphi = \alpha$ létezik, úgy van egy asymptota, mely az ív-

---

* A különféle természetes geometriák felsorolását és kritikai méltatását l. WÖLFFING: Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Coordinaten. Bibl. Math. III. S. I. k., melynek csaknem teljes bibliographiájához hozzáveendő:

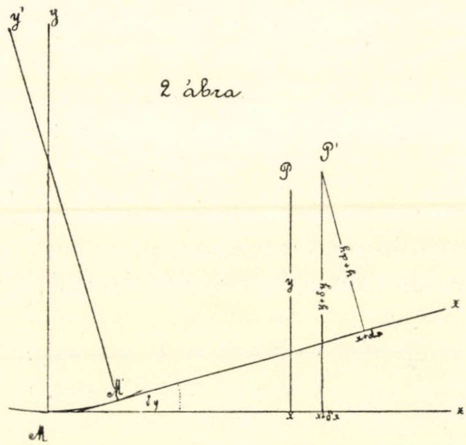
TAUBNER KÁROLY: Az első és másodrendű görbék összrendesekre átvitele stb.

FEST VILMOS: Az első és másodrendű görbék, stb. Budán 1844. Math. pályamunkák.

** Németül Kowalewski fordításában: Natürliche Geometrie.

hosszak mérésének kezdőpontjától $q = \int_0^a \rho \sin(a-\varphi)\, d\varphi$ távolságban van.* Ez a probléma tehát teljesen egyöntetűen tárgyalható szemben a derékszögű koordinátákat használó móddal, mely a koordinátatengelyekkel párhuzamos asymptotákat külön vizsgálatnak veti alá.

2. Két és több görbének együttes vizsgálatánál egy új módszer válik szükségessé, s ez a mozgó koordináták módszere. E gondolat nem CESÀRO sajátja, ő csak annyiban módosította azt, hogy a koordinátáknak végtelen kis változásait vette figyelembe, a mi által lényeges egyszerűsítéseket tudott elérni.



Legyenek a P' pontnak, mely a $P(x, y)$ pont elmozdulásából keletkezett, az (xMy) álló koordinátarendszerben koordinátái $(x+\delta y, y+\delta y)$, a mozgó $(x'M'y')$ koordinátarendszerben $(x+dy, y+dy)$, s legyen végre az MM' ívhossz ds, és a görbülete M pontban ρ, úgy CESÀRO szerint

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= \frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho} + 1 \\ \frac{\delta y}{ds} &= \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho}. \end{aligned}\right\} \quad \text{I)}$$

* CESÀRO i. m. 1. fej. 6. és 7. §.

Megjegyzendő, hogy az x tengely mindig a pálya érintője a kezdőpontban, az y tengely a normálisa.

Ezen egyenletek levezethetők a koordinátákat transzformáló rendes képletekből, ha a trigonometrikus függvények helyett sorkifejtésük első tagját veszszük, s ha felhasználjuk a ds-sel való osztás után, egyrészt az 1) egyenletet, másrészt az M' pont (u, v) koordinátáinak azt a tulajdonságát, hogy $\lim\limits_{ds=0} \frac{u}{ds} = 1$ és $\lim\limits_{ds=0} \frac{v}{ds} = 0$, a melyek a koordinátarendszerek elhelyezésének egyenes következményei.

Ezen Cesàro-féle I) *alapformulákból* levezethetjük annak feltételét, hogy P szilárdan áll az (xMy) síkban; ekkor $\delta x = \delta y = 0$, s P látszólagos pályájának iránycosinusai:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{y}{\rho} - 1 \\ \frac{dy}{ds} &= -\frac{x}{\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Ha M pályájának minden pontjához hozzárendelünk egy P pontot, tehát $x = x(s)$, $y = y(s)$ ismeretesek, úgy feladatunk lehet P geometriai helyének tulajdonságait vizsgálni. Ennél megint az első gondolat lép előtérbe, t. i. a (P) geometriai helynek elegendő csak ívhosszát és görbületét ismernünk, hiszen ezáltal már teljesen jellemezhető a természetes geometria szempontjából. Az s' ívhosszat I)-ből rögtön nyerhetjük:

$$\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 = \left(\frac{\delta x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho} + 1\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho}\right)^2; \tag{3}$$

ha tehát a jobboldalt $\varkappa^2$-tel jelölöm, úgy

$$s' = \int \varkappa ds. \tag{4}$$

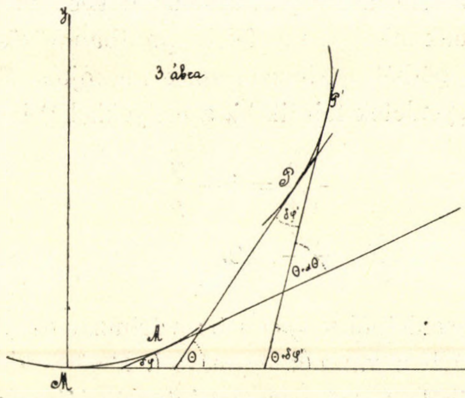
A ρ görbületi sugár meghatározására nézzük a 3. ábrán a P' érintője által képezett szögeket; ha θ P érintője és az álló x tengely meghatározta szög, $\delta\varphi'$ P pályájának hajlásszöge, úgy P érintője a szilárd x tengelylyel $\theta + \delta\varphi'$, a mozgó x' tengelylyel $\theta + d\theta$ szöget zár be, s így a keletkezett háromszögből

$$\theta+\delta\varphi' = \theta+d\theta+\delta\varphi,$$

a miből ds-sel való osztással nyerjük

$$\frac{\varkappa}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + \frac{d\theta}{ds}, \tag{5}$$

a hol $\theta = \operatorname{arctg} \frac{\delta y}{\delta x}$.



Az evoluta egyenleteit úgy nyerem, ha a P pont koordinátáinak $x=0$, $y=\rho$-t veszem. Ezeket I)-be téve, lesz:

$$\frac{\delta x}{ds} = 0$$

$$\frac{\delta y}{ds} = \frac{d\rho}{ds}.$$

Az evoluta ds_1 ívhosszára áll tehát $ds_1 = \delta y = d\rho$, a miből a kezdőpont alkalmas megválasztása után $s_1 = \rho$, vagyis az evoluta ívhossza az evolvens görbületi sugarával egyenlő, a mi az evoluta alapvető tulajdonságát (a lefejtést) fejézi ki. A görbületi sugarára ρ_1-re áll, minthogy $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{d\rho}{\rho_1} = \frac{ds}{\rho}.$$

E szerint

$$s_1 = \rho, \ \rho_1 = \rho \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho}{d\varphi}$$

képletek a (ρ, s) görbe evolutáit jellemzik. Könnyű ezek után a magasabbrendű evolutákat képezni:

$$s_n = \rho_{n-1}, \ \rho_n = \rho \frac{d\rho_{n-1}}{ds} = \frac{d^n\rho}{d\varphi^n}.$$

Egy másik alkalmazás a párhuzamos görbék vizsgálata. Ha P és M pályáinak minden megfelelő pontban közös a normálisuk, úgy a két görbét párhuzamosnak mondjuk. E feltételt az $x=0$, $\delta y=0$ egyenletek fejezik ki, a melyekkel I)-ből:

$$\frac{\delta x}{ds} = 1 - \frac{y}{\rho}$$

$$\frac{\delta y}{ds} = 0.$$

A második egyenletből $y = \text{const.}$; párhuzamos görbék tehát egyenlő távolságban vannak egymástól. P görbe ds' ívhosszára áll $ds' = \delta x$, miből az első egyenlet integrácziójával: $s' = s - a\varphi$, ha a az y-nak állandó értéke. Minthogy pedig $\theta = 0$, a ρ' görbületi sugárra áll $\rho' = \rho - a$. Tehát párhuzamos görbéknek közös a görbületi középpontjuk, tehát közös evolutájuk van. —

Az eddigiekben, úgy gondolom, sikerült bemutatnom a természetes geometria eljárásainak nagy előnyeit, melyek egyrészt a módszerek egyöntetűségében, másrészt minden felesleges számítás elmaradásában, s így az eredmények gyors elérésében nyilvánulnak.

A következőkben megkisértem azt, mennyiben alkalmazhatók e módszerek azon problémáknál, melyek a pont sík kinematikájában felmerülnek.

3. A kinematika alapfogalmaira (sebesség, gyorsulás stb.) vonatkozó definicziókat és képleteket megállapitottaknak, ill. bebizonyitottaknak vehetjük; elegendő, ha röviden csak azokat az egyenleteket soroljuk fel, melyekre a következőkben szükségünk van.

A pont c sebességének nagyságára áll:

$$c = \frac{ds}{dt}; \tag{6}$$

iránya összeesik az érintővel, tehát a szög, melyet egy bizonyos M pont érintőjével képez szintén φ.

A γ gyorsulás komponensei közül itt bennünket csak az a kettő érdekel, melyek az érintő (γ_τ) és a normális (γ_ν) mentén fekszenek; ezekre áll

$$\gamma_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} \tag{7}$$

$$\gamma_\nu = \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{7'}$$

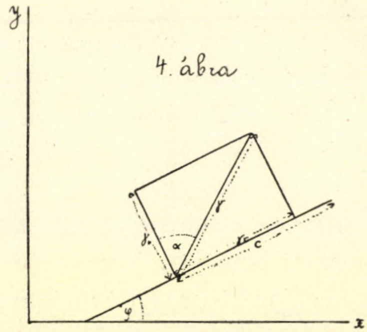
a miből γ nagyságára nyerjük

$$\gamma^2 = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 \tag{8}$$

irányára pedig:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_\nu} = \frac{\rho}{c}\frac{d}{dt} lc = \frac{d}{d\varphi} lc, \tag{9}$$

ha α (4. ábra) a gyorsulás és a normális közötti szög, l pedig, mint rendesen, a természetes logarithmus jele. Mindezen egyenletek kiszámíthatók, ha ismeretes két összefüggés ρ, s és t között, a melyeket, az általánosság megszorítása nélkül, ily alakban vehetünk fel:



$$F(\rho, s) = 0$$
$$G(s, t) = 0,$$

a hol tehát az első a pálya, a második a mozgás egyenlete. E két képlet foglalja el «természetes kinematikánkban» azt a helyet, melylyel a természetes geometriában az első egyenlet maga birt.

4. Képleteink a feladatoknak egész sorát adják, ha bennük a baloldalt állandónak tekintjük, s az integrált egyenletből következtetéseket vonunk a pálya vagy a mozgás tulajdonságaira. Így abból a feltételből, hogy a gyorsulás normális komponense állandóan γ', kis átalakitás és integráczió után nyerjük:

$$t\sqrt{\gamma} = \int \frac{ds}{\sqrt{\rho}}.$$

Ezt az egyszerű alkatú integrált, két irányban használhatjuk fel: adott pályánál meghatározhatjuk a mozgást, adott mozgásnál a pályát. Ha pl. a pálya lánczgörbe, melynek természetes egyenlete $\rho^2 = 2as$, a rajta történő mozgást az idő kezdőpontjának alkalmas megválasztása után a következő egyenlet adja:

$$s = e^{t\sqrt{2a\gamma'}}.$$

Ha a görbén történő mozgás egyenletesen változó, a mikor $\gamma_\tau = \gamma'' =$ állandó, úgy a pálya egyenlete $\rho = 2\frac{\gamma''}{\gamma'}s + R$, tehát általában logarithmikus spiralis, mely esetleg körré ($\gamma''=0$) vagy egyenessé ($\gamma'=0$) fajulhat.* Érdekes különbséget vehetünk itt észre a két komponensre vonatkozó esetnél: míg $\gamma_\tau = \gamma''$ teljesen meghatározza a mozgást (mely a rendesnél kissé általánosabban használt értelemben, egyenletesen változó), de a pályát egészen határozatlanul hagyja, addig $\gamma_\tau = \gamma'$ egy összefüggést ad pálya és mozgás között.

Legyen most a gyorsulás absolut értéke állandó ($= \gamma_0$). Ha a mozgást ismerjük, úgy a pályát a ρ-ra megoldott 8) egyenlet készen adja: könnyen látható, hogy a pálya kör, ha a mozgás egyenletes, s hogy logarithmikus spiralis, ha egyenletesen változó. Nem ily egyszerű a probléma megforditása: ismert pályából a mozgás törvényére következtetni, mely egy másodrendű differencziálegyenlet integrálását kivánja meg. A fent bevezetett *a*

* APPELL: Traité de mécanique rationelle. I. Chap. VI. Ex.

szög segélyével a feladatot egy elsőrendű differencziálegyenletre és egy quadraturára vezethetjük vissza.

Ugyanis a

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\gamma_0 \sin \alpha$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\gamma_0 \cos \alpha,$$

egyenletekből dt értékére a következő két értéket nyerhetjük:

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{\rho\gamma_0 \cos \alpha}}=\frac{d\sqrt{\rho\gamma_0 \cos \alpha}}{\gamma_0 \sin \alpha}.$$

Tehát a $\sigma=\rho \cos \alpha$ változóra a következő elsőrendű differencziálegyenletet nyertük:

$$\frac{1}{2}\frac{d\sigma}{ds}=\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{\rho^2}},$$

a melyben ρ ismert függvénye s-nek.

Ha ebből az egyenletből σ ismeretes, úgy a mozgás törvénye:

$$t=\int\frac{ds}{\sqrt{\gamma_0\sigma}}.$$

A feladat különben már a kör esetén elliptikus integrálra vezet.

Ha végre a gyorsulás irányítását veszszük állandónak, úgy két esetet különböztethetünk meg: az irány állandó lehet az M-mel mozgó síkra, vagy egy álló síkra nézve.

Az első esetben $\alpha=\alpha_0$ és 9)-ből kétszeres integráczióval mindjárt a mozgás egyenletét nyerjük:

$$t=\int ds\,.\,e^{(\varphi-\varphi_0)\operatorname{tg}\alpha_0},$$

hol az integráczió úgy értendő, hogy a benne előforduló φ 2') alapján, mint s függvénye, ismeretes.

A második esetben az álló koordinátarendszert úgy irányíthatjuk, hogy a gyorsulás párhuzamos az y tengelylyel, ekkor $\alpha=\varphi$ és 9)-ből:

$$\lg \frac{ds}{dt} = \int \operatorname{tg} \varphi d\varphi = - \lg . \cos \varphi + la,$$

hol la az integráczió állandója. Numerusra áttérve és ujólag integrálva, nyerjük a mozgást:

$$t = \int \cos \varphi ds.$$

Ezen egyenletnek egyszerű a kinematikai jelentősége: Ha a gyorsulás iránya állandó, úgy a pontnak ezen irányban alkotott vetülete egyenletesen (a sebességgel) halad.

5. Hogy a II) egyenleteket kinematikánkban felhasználhassuk, az ott független változóúl felvett ívhossz helyébe a $ds = cdt$ egyenlettel az időt kell bevezetnünk. Nyerjük így:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{dt} &= \frac{dx}{dt} + c\left(1 - \frac{y}{\rho}\right) \\ \frac{\partial y}{dt} &= \frac{dy}{dt} + c\frac{x}{\rho}. \end{aligned}\right\} \quad \text{III)}$$

E formulák megadják egy mozgó P pont absolut és relativ sebességének komponensei között levő összefüggéseket, ez utóbbiakat viszonyítva a szintén mozgó M pont pályájának érintőjéből és normálisából álló koordinátakeresztre.

Kétféle feladatoknál használhatjuk e képleteket, a szerint a mint P koordinátái az álló vagy a mozgó síkhoz képest ismeretesek. Az első esetben ismeretes $\frac{\partial x}{dt}$ és $\frac{\partial y}{dt}$, III) megoldandó tehát $\frac{dx}{dt}$ és $\frac{dy}{dt}$-re, ez a relativ mozgás problémája. A második esetben $\frac{dx}{dt}$ és $\frac{dy}{dt}$ ismeretes és III) egyenesen megadja a megoldást, ez a fent tárgyalt geometriai helyek részletes kinematikai vizsgálatára vezet.

A két egymásnak megfelelő problémának egyszerű példája a következő: 1. $\partial x = \partial y = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c\left(\frac{y}{\rho} - 1\right) \\ \frac{dy}{dt} &= - \frac{cx}{o}. \end{aligned}\right\} \quad \text{IV)}$$

Ezek lényegben azonosak a fenti II) képletekkel s annak (szükséges és elegendő) feltételei, hogy P az álló síkban mozdulatlan legyen. Az egyenletek P látszólagos sebességének komponenseit adják. Ha ellenben 2. $dx=dy=0$

$$\frac{\delta x}{dt}=c\left(1-\frac{y}{\rho}\right)$$
$$\frac{\delta y}{dt}=\frac{cx}{\rho}; \qquad \text{V)}$$

ezek oly P pont sebességének komponensei, mely az M-mel mozgó síkban szilárdan fekszik. Minthogy P e sík bármely pontja lehet, ezen egyenletek a sík mozgását is jellemezhetik. Így látjuk azt, hogy P sebességének négyzete:

$$c_p^2=\left(\frac{\delta x}{dt}\right)^2+\left(\frac{\delta y}{dt}\right)^2=\frac{c^2}{\rho^2}(x^2+y^2-2\rho y+\rho^2)$$

irányát pedig

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{x}{\rho-y}$$

adja meg. Az egyenlő nagyságú sebességekkel biró pontok konczentrikus körökön fekszenek, melyek középpontja ($x=0$, $y=\rho$), tehát M görbületi középpontja. E pont sebessége nulla; e szerint az egész mozgást úgy tekinthetjük, végtelen kis időköz alatt, mintha ezen pont, a «momentán czentrum» körül történő forgás volna. Az egyenlő irányú sebességekkel biró pontok e körök orthogonalis trajectoriáin, az $x=0$, $y=\rho$ czentrumú sugársoron fekszenek.

A IV) és V) egyenletek összehasonlításából

$$\frac{dx}{dt}+\frac{\delta x}{dt}=0 \quad \text{és} \quad \frac{dy}{dt}+\frac{\delta y}{dt}=0,$$

a mi azt a tételt nyujtja, hogy két pontnak egymásra vonatkozó relativ sebessége ellentetten egyenlő.

IV)-t differencziálva és a benne előforduló differencziálhányadosokat megint IV) által x és y-ban kifejezve nyerjük azt, hogy a mozdulatlan P pont elsőrendű gyorsulásának komponensei, s hasonlóképen a magasabbrendűeké is, x és y-nak lineáris függvényei. Az n-ik gyorsulás számára tehát felvehetjük a következő egyenletpárt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^n x}{dt^n} &= A_n x + B_n y + C_n \\ \frac{d^n y}{dt^n} &= -B_n x + A_n y + D_n , \end{aligned}\right\} \quad \text{VI)}$$

a hol az $A_n \dots D_n$ függvények x és y-tól nem függenek. Az egyenletek teljes indukczióval differencziálás és IV) ujólagos felhasználása által segélyével könnyen bebizonyíthatók, $n=1$-re pedig, mint IV) mutatja, helyesek, ugyanis ekkor

$$A_1=0; \quad B_1=\frac{c}{\rho}; \quad C_1=-c; \quad D_1=0.$$

Ezen eljárás mindjárt a következő rekursiv formulákat adja e függvények számára:

$$\left.\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{dA_n}{dt} - B_n \frac{c}{\rho} \\ B_{n+1} &= \frac{dB_n}{dt} + A_n \frac{c}{\rho} , \end{aligned}\right\} \quad \text{VII)}$$

$$\left.\begin{aligned} C_{n+1} &= \frac{dC_n}{dt} - A_n c \\ D_{n+1} &= \frac{dD_n}{dt} - B_n c. \end{aligned}\right\} \quad \text{VIII)}$$

A VII) rekursiv formulák azonosak azokkal, melyekkel az $n+1$-rendű gyorsulás érintő és normálismenti komponenseit fejezzük ki az n-rendű gyorsulás ugyanilyen komponenseivel.*

Az egyenletekből könnyen bebizonyíthatók a következő tételek. A_n és B_n raczionális egész függvényei a $\frac{c}{\rho} = \frac{d\varphi}{dt}$ forgási sebességnek és $n-1$ első differencziálhányadosainak (tehát A_n legfeljebb $\frac{d^n\varphi}{dt^n}$-t tartalmazhatja).

* L. pl. FRÖHLICH: Kinematika 61. §.

Ha bevezetjük a ψ symbolikus változót, melynek k-ik hatványaival helyettesítjük $\frac{d^k\varphi}{dt^k}$-t, s e symbolikus hatványokra megtartjuk a közönséges szorzás és hatványozás szabályait, úgy A_n és B_n minden tagja ψ^n-t tartalmazza. E függvények további tulajdonságaival, mint a melyek a kinematikában kisebbrendű szerepet játszanak, nem akarunk foglalkozni, csak még a C_n és D_n függvények egyszerű értelmezését adjuk:

$$C_n = \left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)_{x=y=0}$$

$$D_n = \left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)_{x=y=0}.$$

E szerint C_n és D_n az M pont n-rendű gyorsulásának érintő és normálismenti komponensei.

6. A relativ mozgás tárgyalására, mint emlitettük volt, a III) egyenleteket $\frac{dx}{dt}$ és $\frac{\delta x}{dt}$-re kell megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\delta x}{dt} - c\left(1 - \frac{y}{\rho}\right) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\delta y}{dt} - \frac{cx}{\rho}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{III}')$$

Ha P relativ koordinátái $(x'y')$, úgy integrálva lesz:

$$x' = x - \int c\left(1 - \frac{y}{\rho}\right) dt$$

$$y' = y - \int \frac{cx}{\rho}\, dt.$$

Ezen egyenletek, ha bennük az integrácziókat elvégeztük a relativ pályát derékszögű koordinátákban adják meg; hogy a természetes jellemzőit megkaphassuk III')-ból meg kell határoznunk a relativ pálya ívhosszát és görbületi sugarát. Ez a geometriai helyek fent tárgyalt problémájának analogonja; formailag teljesen azonos lesz vele a következő helyettesitésekkel:

$$\frac{\delta x}{dx}\quad\frac{\delta y}{dy}\quad\frac{dx}{\delta x}\quad\frac{dy}{\delta y}\quad\frac{c}{-c'},$$

melyek III)-t és III')-t egymásba átviszik. E szerint a relativ pálya ívhossza itt is

$$s' = \int \varkappa ds,$$

csakhogy itt

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\delta x}{ds} - 1 + \frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{ds} - \frac{x}{\rho}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\delta x}{dt} - c\left(1 - \frac{y}{\rho}\right)\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{dt} - c\frac{x}{\rho}\right)^2\right].$$

Minthogy $\varkappa = \frac{ds'}{ds} = \frac{c'}{c}$, $\varkappa$ kinematikailag P relativ és M absolut sebességének viszonya.

θ-val jelelve a relativ pálya érintője és a mozgó $+x$ tengely közötti szöget, áll $\theta = \text{arctg}\frac{dy}{dx}$ és a görbületi sugárra nyerjük:

$$\frac{c'}{\rho'} = -\frac{c}{\rho} + \frac{\delta\theta}{dt}.$$

s' és ρ'-ból a független változót eliminálva nyerjük a pálya egyenletét, míg a mozgásé:

$$c' = \varkappa c.$$

Nagy mértékben egyszerűsbödnek képleteink, ha M egyenesen ($\rho = \infty$) halad; ekkor:

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\delta x}{ds} - 1\right)^2 = (1 - \cos\varphi')^2 \quad \text{és} \quad \rho' = \frac{1}{c'}\frac{\delta\theta}{dt} = \frac{\delta\theta}{ds'}.$$

7. A geometriai helyek kinematikai vizsgálatánál a fent 2) adott képletekhez még egy csatolandó, mely a P pont mozgását határozza meg. Úgy, mint a relativ mozgásnál, itt is 4) t szerint való differencziácziójából:

$$c' = \varkappa c. \text{ —}$$

Alkalmazásul lássuk azokat a görbéket, melyek természetes kinematikánkban a Hamilton-féle hodografnak felelnek meg.

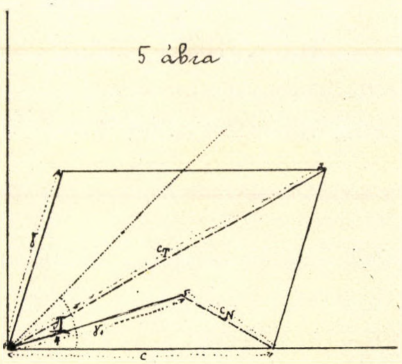
Míg e hodograf pontjait tudvalevőleg úgy nyerjük, hogy adott czentrumból a sebességeket nagyság és irány szerint felrakjuk, addig a mi T hodografunkat* a sebességek végpontjai adják meg, ha azokat a mozgó pontokból szerkesztjük meg.

E definiczió szerint** a T hodografból mozgó pont vagy röviden a T pont, sebességének komponenseit III)-ból nyerjük, ha benne $x=c$, $y=0$; ily módon:

$$\frac{\delta x}{dt} = \frac{dc}{dt} + c = \gamma_\tau + c$$

$$\frac{\delta y}{dt} = \frac{c^2}{\rho} = \gamma_\nu .$$

T sebességének érintőmenti komponense M sebességének és érintőmenti gyorsulásának összegével, normális komponense, M gyorsulásának normális komponensével egyenlő.



A két egyenlet a következő vektoregyenlettel pótolható (5. ábra):

$$\overrightarrow{c_T} = \overrightarrow{c} + \overrightarrow{\gamma},$$

a miből n-szeres differencziálással:

---

* Szemben az utóbb bevezetendő N hodograffal.

** Derékszögű koordinátákban a $T(x_T y_T)$ egyenletei

$$x_T = x + \frac{dx}{dt}, \quad y_T = y + \frac{dy}{dt}.$$

$$\vec{\gamma}_T^{(k)} = \vec{\gamma}^{(n)} + \vec{\gamma}^{(n+1)},$$

hol $\vec{\gamma}^{(n)}$ az n-rendű gyorsulás nagyság és irány szerint.*

Ezen $n+1$ egyenlet összeadásából, ill. váltakozó előjellel való összefoglalásából nyerjük:

$$\sum_0^n \vec{\gamma}_T^{(n)} = \vec{c} + \vec{\gamma}^{(n+1)} + 2\sum_{k=1}^n \vec{\gamma}^{(k)}$$

$$\sum_0^n (-1)^n \vec{\gamma}_T^{(n)} = \vec{c} - \vec{\gamma}^{(n+1)}.$$

Nem nehéz most már az ismertetett módszer alapján a T hodograf természetes egyenletét felállitani. Mi az e czélra kifejthető képletek közül csak a következőt említjük:

$$\cot\theta = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\rho}{c}\left(1 + \frac{dlc}{dt}\right),$$

mivel belőle könnyen nyerhetjük annak feltételét, hogy a T hodograph egyenes legyen. Ha a szilárd koordináták kezdőpontjául azt a pontot választjuk, a melynél a normális párhuzamos a T egyenessel, $\cot\theta = 0$ és az $1 + \frac{dlc}{dt} = 0$ feltételből:

$$s = s_0 e^{(t-t_0)}. \text{ —}$$

A talppontgörbék különös esetei a T hodografnak, mert, ha az O czentrum talppontja P, úgy az M görbét $c = OP$ sebességgel befutva, e mozgáshoz tartozó T hodogra, épen a P talppontgörbe. Az üldözési görbe feladata is szoros összefüggésben van a T hodograffal, ugyanis T mindig rajta van M érintőjén, s így minden T hodograf számításánál egyszersmind egy üldözési feladatot oldunk meg, melyben T az üldöző, M az üldözött.

8. Az M pont mozgását a T hodografnál még jobban jellemzi az N hodograf, melyet úgy nyerünk, hogy a sebességet

* Ezen egyenletek geometriái bizonyitását lásd LIGUINE: Sur quelques propriétés géometriques du mouvemeut d'un point. Nouv. Ann. I. 1882. és Bassaui: Curve piane derivate. Giornale di mat. 1886. XXIV.

a normálisra M-ből felrakjuk.* Az N hodograf több tulajdonsága minden számítás nélkül látható. Ha M egyenletesen mozog, úgy N egy, a pályával parallel görbét ír le; az általános esetben az N hodograf eltérése a parallel görbék rendszerétől grafikusan mutatja a mozgás sajátságait. Ha M egyenesen $c=c(x)$ sebességgel halad, úgy az N hodograph a $c=c(x)$ görbe az (x, c) derékszögű koordinátarendszerben. Ha M körön mozog $c=c(\vartheta)$ sebességgel, az N hodograf a $c=c(\vartheta)$ görbe a $(c\vartheta)$ sarki koordinátákban. Az N hodograf M evolutája, ha $\rho=c$, vagyis $\frac{ds}{d\varphi}=\frac{ds}{dt}$, miből $\varphi=t+\text{const.}$, tehát ha a hajlásszög egyenletesen változik.

N pont sebességének komponenseit nyerem,** ha III)-ban $x=0$, $y=c$:

$$\frac{\delta x}{dt}=c\left(1-\frac{c}{\rho}\right)=c-\gamma_\nu$$

$$\frac{\delta y}{dt}=\frac{dc}{dt}=\gamma_\tau .$$

E szerint N sebességének M érintőjementi komponense M sebességének és gyorsulása normális komponensének különbségével egyenlő, normális komponense pedig M gyorsulásának érintőmenti komponensével.

A megfelelő vektoregyenlet:

$$\vec{c}_N=\vec{c}-\vec{\gamma}_1,$$

hol $\vec{\gamma}_1$ tükörképe $\vec{\gamma}$-nak a koordinátatengelyeket felező $x=y$ egyenesre nézve (5. ábra). n-szeres differencziálással nyerjük:

$$\vec{\gamma}_N^{(n)}=\vec{\gamma}^{(n)}-\vec{\gamma}_1^{(n+1)}.$$

---

* Ilyen görbékkel foglalkozik, de kinematikai vonatkozás nélkül. LESSER: L Kurven gegebener Grundkurven und ihre Bedeutung bei der Konstruktion von Normalen und Tangenten. Zeitschr. f. Math. u. Naturw. Unterricht. 35. k. 1904.

** Derékszögű koordinátákban $x_N=x-\frac{dy}{dt}$, $y_N=y+\frac{dx}{dt}$.

A természetes koordinátákat most is ezek alapján könnyen kiszámíthatjuk, itt megint csak a $\operatorname{tg}\theta$-ra vonatkozó képletet említjük fel egyszerű alakja miatt:

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1}{\frac{\rho}{c} - 1}.$$

Ha $\rho = c$ az N hodograf az evoluta, melynek érintője mindig merőleges az evolvens M görbe érintőjére; ha $\alpha = 0$ az N hodograf, de vele együtt M pont pályája is egyenes lesz.

Sós Ernő.

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT TAGJEGYZÉKE.

1904. év végén.

I. Pártoló, örökítő és rendes tagok:

Ábrahám Istv., tanár, Budapest, IX. ker. ev. ref. főgymn., Lónyai-u.

Aliquander Lajos, tanár Selmeczbánya.

Anderkó Aurél dr., met. int. adjunktus, Budapest, II., Fő-u. 6.

Andor Tivadar, tanár, Budapest, I., Mikó-u. 1.

5 Angheben Albin, főgymnasiumi tanár, Fiume.

Antal Márkus, tanárjelölt, Budapest, VIII. József-körút 22. II. 21.

Antolik Károly, főreálisk. ig., Pozsony.

Arany Dániel, tanár, Budapest, VII., Hernád-u. 43.

Aranyosi Miksa, polg. és keresk. isk. ig., Budapest, V., Nagykorona-u. 13.

10 Arató Frigyes, állami felsőbb leányiskolai igazgató, Mező-Túr.

Asbóth Emil, min. tanácsos, Ganzgyári igazgató, Budapest, II., Ganzgyár.

Azary Miklós, tanár, Munkács.

Babiak Nándor, főreálisk. tanár, Arad.

Baló Gyula, főgymn. tanár, Kaposvár.

15 Balog Mór, főreáliskolai tanár, Budapest, VI., Bulyovszky-u. 22.

Bánki Donát, műegy. tanár, Budapest, Műegyetem.

Barabás Jenő, főreálisk. tanár, Székely-Udvarhely.

Bárányi Balázs, főgymn. tanár, Jászberény.

Bartoniek Géza, Eötvös-Coll. igazgató, *vál. tag*, Budapest, IX., Csillag-u. 8.

20 Bauer Mihály, műegy. adjunk. Budapest, VI., Izabella-u. 78.

Bein Károly, tanár, Budapest, VIII., Baross-u. 47.

Beck Károly tanár, Erzsébetváros.

Bellágh Kálmán, tanár, Budapest, IV., Kálvin-tér 3. II. 8.

Beke Manó dr., egyet. tanár, *vál. tag*, Budapest, II., Bimbó-u. 26.

25 Benda Jenő, tanár, Budapest, VIII., Sándor-u. 23/b. II. 9.

Benko Imre, főgymn. tanár, Nagy-Kőrös.

Beregi Ernő, tanárjelölt, Kolozsvár.

Berkes Imre, főreáliskolai igazgató, Budapest, VIII., Horánszky-u. 9.

Bielek Miksa, műegyet. tanár, Budapest, V., Hold-u. 29.

30 Bihary Ferencz, tanár, Miskolcz.

Bláthy Ottó Titusz, főmérnök, Budapest, II., Retek-u. 77.

Blau Ármin, főreálisk. tanár, Szeged.

Bóbita Endre, főreálisk. tanár, Kassa.

Bodola Lajos, műegyet. tanár, Budapest, VII., Damjanich-u. 52.

35 Bodola László, főgymn. tanár, Csurgó.

Bodor Domokos, főgymnasiumi tanár, Sepsi-Szent-György.

Bogyó Samu, kereskedelmi akad. tanár, Budapest, VI., Munkácsi-u. 22.

Bónis Károly, főgymnasiumi tanár, Kún-Szt-Miklós.

Borcsa Gergely, tanárjelölt, Kolozsvár.

40 Borossay Dávid, szent Benedekrendi tanár, Esztergom.

Bozmánszky Gyárfás, sz. Benedekrendi tanár, Pannonhalma.

Bozóky Endre dr., főgymnasiumi tanár, Budapest, II., Albrecht-út 45/a.

Bozzay Zoltán, főreálisk. tanár, Budapest, V., Markó-u. 20.

Brég Gyula tanárjelölt, Budapest, IV., Kaplony-u. 7. III. 18.

45 Bretz Berta, tanárnő, Szarvas.

Bricht Lipót, keresk. akad. tanár és titkár, Budapest, V., Alkotmány-u. 11.

Bruck Ferencz, tanár, Budapest, VII., Hernád-u. 5. I. 1.

Bruckner Károly, ev. főgymn. igazgató, Késmárk.

Buchböck Gusztáv dr., egyet. adjunkt., Budapest, VIII., Muzeum-körút 4. I. Chemiai intézet.

50 Bugarszky István, egyet. m. tanár, Budapest, VII., Rottenbiller-utcza, állatorv. főiskola.

Bujk Béla, gymn. tanár, Karczag.
Bukovszky János, gymn. igazg., Békés-Csaba.
Butorka Száva dr., tanár, Versecz.
Cholnoky Jenő dr., egyetemi tanár, Kolozsvár.
55 Csajkás Mihály, főgymn. tanár, Szabadka.
Csemez József, tanár, Budapest, VI., Dembinsky-u. 50. II. 17.
Csibortits Imre, tanár, Gyulafehérvár.
Csopey László, főgymn. tanár, Budapest, II., Halász-u. 1. III, 12.
Csorba György, főgymnasiumi tanár, Miskolcz.
60 Czakó Adolf, műegyet. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Czekeliusz Aurél, min. tan., Budapest, Ferencz József-rakpart 9.
K. Danch Ferencz, tanár, Temesvár.
Darvai Mór dr., igazg., Budapest, Vallás- és közokt. minist., V., Hold-u.
Dávid Lajos, egyet. hallg., Kolozsvár.
65 Demeter István, főgymn. tan., H.-M.-Vásárhely.
Demeczky Mihály dr., főgymn. igazg., Ferencz József-int. korm., Budapest II., Ilona-u. 8.
Dienes Pál, tanár, Budapest, X., főgymn. Tisztviselőtelep.
Dietz E. Lajos, tanár, Budapest, VI., Lovag-u. 18.
Dobay Sándor, ev. ref. főgymn. igazgató, Mármaros-Sziget.
70 Dobszay Antal, dr., prépost kanonok, Pécs.
Dohnányi Frigyes, főgymn. tanár, Pozsony.
Dombay Narczisz, sz. Benedek-rendi tanár, Esztergom.
Dózsa Jakab, főreálisk. tanár, Székely-Udvarhely.
Dózsa János, ipari szakiskolai igazgató, Brassó.
75 Dörney Károly, polg. isk. igazgató, Salgótarján.
Eberhardt Béla dr., kegyesrendi tanár, Debreczen.
Eberling József, főreáliskolai tanár, Budapest, IV., Zöldfa-u. 15.
Edelmann Sebő dr., prem. r. kanonok igazg., Szombathely.
Egan Luiza, áll. leányiskolai tanitónő, Budapest, II., Bors-u. 17.
80 Egető Béla, tanárjelölt, Kolozsvár.
Egly Sándor, prem. r. tanár, Kassa.
Elekes Pál, tanár, Sátoraljaujhely.
Ellend József, tanár, Sárospatak.
Eltscher Simon, ág. ev. főgymn. tanár, Nyiregyháza.
85 Emszt Kálmán dr., földt. int. vegyész, Budapest, VII., Stefánia-út 14.
Eötvös Loránd br. dr., egyet. tanár, a m. t. akadémia elnöke, *elnök*, Budapest, VIII., Eszterházy-u. 3/b.
Erdődy Imre, polg. isk. igazg., Budapest, VIII., Csokonay-u.
Fabinyi Rezső, egyet. tan., Kolozsvár.
Faragó Andor, főgymn. tanár, Sopron.
90 Farbaky István dr., főbányatanácsos, Selmeczbánya.
Farkas Gyula dr., egyet. tanár, Kolozsvár.
Fehér Ipoly, főapát, p. t.,* Pannonhalma.
Feichtinger Győző, tanár, Budapest, VII., Aréna-út 15. *Pénztárnok.*
Fejér Lipót dr., tanár, Budapest, VII., Vörösmarthy-u. 19. fsz. 1.
95 Fekete Jenő, tanár, Budapest, VIII., Eszterházy-u. 3.
Feldmann Gyula, mechanikus, Budapest, VI., Felső-erdősor.
Félegyházy Antal, ref. coll. tanár, Székely-Udvarhely.
Fényes Dezső, tanár, ö. t.,** Arad.
Ferenczy István, főgymn. igazgató, Nagy-Szeben.
100 Ferenczy József, kegyesrendi gymn. tanár, Nyitra.
Fertig Vilmos, tanár, Budapest, VIII., Kőfaragó-u. 10. II. 20.
Fettl Lipót, tanár, Budapest, II., főgymnasium.
Fodor László dr., akad. tanár, Selmeczbánya.
Fogarassi Béla, főgymn. tanár, Nagy-Enyed.
105 Fölser István, műegyet. tan., Budapest, VIII., Műegyetem.
Frank Dezső, tanár, Hajduböszörmény.
Frank István, kegyesrendi főgymn. tanár, Szeged.
Fraunhoffer Lajos, met. int. adj., Budapest, II., Fő-u. 6.
Frosch Károly dr., főgymn. tanár, Nagy-Szeben.
110 **Fröhlich Izidor dr.**, egyetemi tanár, ö. t., *vál. tag*, Budapest, VI., Eötvös-u. 26.
Fröhlich Károly, tanár, Budapest, VI., Eötvös-utcza 30.
Ifj. Füzy Rezső Vilmos, gépészmérnök, Budapest, VI., Eötvös-u. 43.

* p. t. = pártoló tag. ** ö. t. = örökítő tag.

Gerecz Lajos, főreálisk. tanár, Kassa.
Gidófalvy Géza, főgymn. tanár, Nagy-Szeben.
115 Gidró Bonifácz, szt. Benedek-rendi tanár, Komárom.
Glücklich Vilma, Budapest, VII., Kemnitzer-u. 19. II. 12.
Goldziher Károly, dr. a magy. halandósági táblák szerk. hiv. vezetője, Budapest, VII., Holló-u. 4.
herényi Gotthard Jenő, a m. tud. akad. l. tagja, Herény, Vasm.
Groo Vilmos, gymn. tanár, Békés-Csaba.
120 **Gruber Nándor**, tanár, p. t. Budapest, VIII., József-körút 44. *Vál. tag.*
Grünwald Miksa, főgymn. tanár, Losoncz.
Habán Mihály dr., tanár, Erzsébetváros.
Hahóthy Sándor, felső-leányiskolai igazg., Budapest, IV., Váczi-u.
Hajnal Márton, felső-keresk. isk. tanár, Budapest, II., fels. keresk. isk.
125 Halász Ernő, gépészmérnök, Budapest, I., Várfok-u. 14.
Halmi János, főgymn. tanár, Hódmező-Vásárhely.
Harkányi Béla b. dr., p. t. Budapest, IV., Váczi-u. 12. II. *Vál. tag.*
Harkay István, tanárjelölt, Tiszacsege.
Harsányi Dezső, mértékhit. bizotts. igazgató, Budapest, VIII. József-körút 10.
130 Harsányi Lajos, tanárjelölt, Kolozsv.
Hassák Vidor, gymn. igazg., Kézdi-Vásárhely.
Hausbrunner Vilmos, tanár, Budapest, VIII., Rökk Szilárd-utcza 28.
Hauser Ignácz, tanár, N.-Kikinda.
Hauszmann Alajos, műegyet. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
135 Hatvani Ede, kegy. r. tanár, Kecskemét.
Havas Miksa, keresk. akad. tanár, Budapest, V., Váczi-u. 78.
Heinrich Teofil, m. kir. posta- és távíró-mérnök, Budapest, VII., Arena-út 62. III. 14.
Héjas Endre, met. int. adj., Budapest, II., Fő-u. 6.
Heller Richárd, polg. isk. igazg., Baja.
140 Heuer Ede, tanár, Budapest, VIII., József-körút 15.
Hilbert Stefánia, Budapest, VII., Damjanich-u. 28/*b*. I. 14.
Hill József, tanár, Nagyvárad.
Hirschmann Nándor, ev. lyc. tanár, Pozsony.
Hlatky Miklós, főreálisk. tanár, Székely-Udvarhely.
145 Homor Ernő, tanár, Szeged.
Homor István, főreálisk. igazgató, Szeged.
Hoór Mór dr., műegyetemi magántanár, gépész-mérnök, Budapest, II., Zsigmond-u. 9.
Hopp Ferencz, a Ferencz József-rend lov., p. t., Budapest, IV., Kishid-u. 4.
Hornig Károly br. dr., val. b. titkos tan., megyés püspök, p. t., Veszprém.
150 Hortobágyi Zsigmond, főgymn. tanár, Pancsova.
Horváth József dr., akad. tanár, Pápa.
Horváth Kálmán, tanár, Csurgó.
Hőgyes Endre dr., egyet. tanár, Budapest, IV., Vámház-körut 9.
Hronyecz György, tanárjelölt, Kolozsvár.
155 Hubatsek Alajos, keresk. isk. tanár, VI., Epreskert-u. 10.
Ilosvay Lajos dr. udv. tan., műegyet. tanár, Budapest, VIII., Eszterházy-utcza 7.
Jakucs István, tanár, Debreczen.
Janell József, főreálisk. tanár, Versecz.
Javorik János, főgymn. tanár, Pancsova.
160 Jeney Pál, tanár, Kecskemét.
Jónás Ödön, műegyet. tanár, Budapest, IX., Lónyay-u. 12.
Jordán Károly dr., Budapest, I., Naphegy-u. 15.
Juckel Gyula dr., tanár, Budapest, VIII., Horánszky-u. 27.
Jurányi Henrik, Budapest, IV., Kishid-u. 4.
165 Kacsoh Pongrácz dr., főgymn. tanár, Budapest, VII., Murányi-u. 57.
Kados Aladár, keresk. isk. tanár, Budapest, VII., István-ut 24. III. 24.
Kalecsinszky Sándor, m. k. földt.-int. fővegyész, Budapest, VIII., Rökk Szilárd-u. 39.
Kanitz Aristid, ö. t. †
Kántor Nándor, tanár, Eger.
170 Karai Sándor, főreálisk. tanár, Debreczen.
Karczag István, bérlő, p. t., Bécs, IV., Paulanergasse 8. I. 25.
Karlovitz László, tanár, Budapest, VIII., Tavaszmező-u. 15.

Kármán Ferencz, tanár, Budapest, II., Bimbó-u. 10.
Károly J. Irén, pr. r. k. jogakadémiai magántanár, Nagyvárad. *Alelnök.*
175 **Kegyes Tanitórend**, p. t., Bpest., IV., Városház-tér.
Kemény Ferencz dr., főreálisk tanár, Budapest, II., Lánczhid-tér 2.
Képessy Imre, tanár, Budapest, VII., Kazinczy-u. 21.
Kerekes Dezső, főgymnasiumi tanár, Rimaszombat.
Ketterer Károly érs. tanitóképezdei tanár, Kalocsa.
180 Kherndl Antal, udv. tan., műegyetemi tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Király Henrik, tanár, Csiksomlyó.
Király László, főgymn. tanár, Szentes.
Kirchknopf András, gépészisk. tanár, Kassa.
Kiss Dénes, polg. isk. igazg., Alsó-Lendva.
185 Kiss E. János, főreáliskolai tanár, Budapest, IV., Reáltanoda-u. 7.
Kiss Gábor, főgymnasiumi tanár, Nagy-Bánya.
K. Kiss József, főgymnasiumi tanár, Debreczen.
Fr. Kiss Károly, főgymnasiumi tanár, Budapest, IX., Lónyay-u. 4/c.
Kiss Károly dr., üv.-techn. int. igazg., Budapest, VIII., Eszterházy-u. 1.
190 Kiss Tamás, tanár, Marosvásárhely.
Kisgyörgy János, tanár, Marmaros-sziget.
Kiss Zoltán, tanárjelölt, Kolozsvár.
Klatt Román, tanár, Pozsony, Szilágyi Dezső-u. 29.
Klatt Virgil, főreálisk. tanár, Pozsony.
195 Klein Pál, főgymn. tanár, Késmárk.
Kleiszner Rezső, főreáliskolai tanár, Budapest, VIII., Zerge-u.
Klimkó Mihály, felsőbb leányiskolai igazg., Lőcse.
Klúg Lipót dr., egy. tanár, Kolozsvár.
Klúg Nándor dr., egyet. tanár, Budapest, VIII., Eszterházy-u. 5.
200 Klupathy Jenő dr., egyet. m.-tanár, *vál. tag*, Budapest, VIII., Luther-u. 3.
Konkoly Thege Miklós ifj., calculat., Ó-Gyalla, Komárommegye.
Konkoly Thege Miklós dr., min. tan., met. int. ig., Budapest, II., Fő-u. 6.
Kopp Lajos dr., főreálisk. tanár, *jegyző*, Budapest, VIII., Üllői-út 46. III. 25.
Korbuly Emil, tanár, Nagy-Szeben, Állami főgymnasium.
205 Korda Dezső, Paris, 64 Rue Caü-martin.
Kóródy Imre, tanárjelölt, Csik-Uj-tusnád.
Koschovitz Gyula, honvédszázados, Budapest, VIII., Ludovika.
Kosztolányi Árpád, főgymn. igazg., Szabadka.
Kovács Béla, tanitónőképezdei tanár, Kolozsvár.
210 Kovács Ferencz, főgymnasiumi tanár, Nagy-Kőrös.
Kovács István, főgymn. tanár, Lőcse.
Kovács János dr., tanár, Budapest, I., (Németvölgy), Hantos-út.
König Dénes, egyet. hallg., Göttingen Wendesstrasse 62.
König Gyula dr., min. tan., műegyet. tanár, *alelnök*, Budapest, IX., Vám-ház-körut.
215 Kötse István, tanár, Sárospatak.
Kövesi Ferencz dr., akadémiai tanár, Selmeczbánya.
Kövesligethy Radó dr., egyet. tanár, Bpest, VII., Csömöri-út 62. *Titkár.*
Kronich Lénárd, met. int. adjunktus, Budapest, II., Fő-u. 6.
Kuncz Adolf dr., prem. r. kanonok prépost, p. tag, Csorna.
220 Kurländer Ignácz, kir. aligazgató, Budapest, V., Akadémia-u. 13.
Kúthy József dr., főigazg., Székes-fehérvár.
Kürschák József dr., műegy. rk. tanár, ö. t., *jegyző*, Budapest, II., Albrecht-út 14.
Laczó Endre, tanitó, Békéscsaba.
Lakits Ferencz dr., tanár, Budapest, VIII., József-u. 58. II.
225 Lakner József, gymn. tanár, Petro-zsény.
Layer Antal dr., főgymnasiumi tanár, Losoncz.
Leber Gyula ifj., tanárjelölt, Kolozs-vár.
Lendvay Hugó, szent Benedekrendi főgymn. tanár, Győr.
Lengyel Béla dr., egyet. tanár, min. tan., Bpest, VIII., Muzeum-körut 4.
230 Lengyel Endre tanár, Hajdúnánás.
Lengyel Imre, főgymn. tanár, Félegy-háza.
bozóki Lengyel Sándor, felső keresk. isk. igazgató, Budapest, VI., Nagy-mező-u. 1.
Lévay Ede dr., tanár, Budapest, VII., Dembinszky-u. 49.

Lieblich Áron, tanárjelölt, Kolozsvár.
235 Lóczy Lajos, egyet. tanár, Budapest, IV., Szerb-u. 10.
Lóky Béla dr., kegy. r. tanár, Kolozsvár.
Lutter János, főgymn. igazgató, Budapest, I., Krisztina-körut 63.
Magdics Gáspár, cziszt. r. tanár, Pécs.
Malatin Gotthárd, szent Benedekrendi tanár, Pannonhalma.
240 **Mandák Dezső** a. t.
Marcsiss János, főgymn. tanár, Beszterczebánya.
Marczell György, met. int. assistens, Rákospalota, Erzsébet-u. 13.
Markoss Imre, ev. ref. főgymn. tanár, Szatmár.
Martin Lajos, p. t. †
245 Mátray Rudolf, cziszt. r. főgymn. tanár, Eger.
Mattyasovszky Kászon, Sz. B. r. tanár, Budapest, VIII., Üllői-út 22.
Mayer Irén, tanárnő, Kolozsvár, (fels. leányisk.)
Medvigy János, főgymnasiumi tanár, Ungvár.
Mialovich Mór, főgymn. tanár, Budapest, II., Albrecht-út 8. III. 7.
250 Mihálovich Alajos, főgymn. tanár, Félegyháza.
Mikola Sándor, főgymn. tanár, Budapest, IV., Sütő-u.
Miller Gyula, felső leányisk. tanár, Mármaros-Sziget.
Módly Krizsó, pr. r. k. tanár, Szombathely.
Molnár Aladár, igazgató, Fiume.
255 Molnár Sándor, tanár, Szeged.
Molnár Szaniszló, tanár, Keszthely.
Morotz Kálmán, műegyet. adjunktus, Budapest, VIII., Szentkirályi u. 22.
Muraközy Károly, műegyetemi tanár, Budapest, X., Szabóky-u. 22.
Müller József, főreálisk. tanár, cz. igazg., Budapest, V., Markó-u.
260 Nagy Balázs, sz. B. r. tanár, Kőszeg.
Nagy Béla, tanárjelölt, Kolozsvár.
Nagy Dezső, műegyet. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Nagy Vazul Pál, tanár, Baja.
Neumann Jenő, főgymnasiumi tanár, Szarvas.
265 Neustadt Lipót, gépész-mérnök, Budapest, V., Hold-u. 25.
Novothny Endre, kegyes r. tanár, Kecskemét.
Nuricsán József dr., akad. tanár, Magyaróvár.

Oberle Károly, főreálisk. tanár, Budapest, VI., Bulyovszky-u. 22.
Obláth Richard, tanár, Rozsnyó.
270 Ondrus Pál, főgymn. tanár, Losoncz
Orbán Antal, főreálisk. tanár, Budapest, VIII., Zerge-u.
Oszlaczky Szilárd, p. és t. főtiszt, Budapest, VII., Dembinszky-u. 36.
Osztrogonácz János, főgymn. tanár, Szabadka.
Palatin Gergely, szt. Benedek-rendi tanár, Pannonhalma.
275 Páll Ferencz, tanárjelölt, Kolozsvár, egyetem.
Pallagi Gyula, gymn. igazg., Kisújszállás.
Pallos Béla Kajetán, szt. Benedekr. tanár, központi számvevő, Pannonhalma.
Pantea Jenő, tanár, Balázsfalva.
Pap János, kegyesr. kormánysegéd, Budapest, IV., Városház-tér 4.
280 Pap Lajos, igazg., Sepsi-Szt-György.
Papp István, tanárjelölt, Kolozsvár, egyetem.
Payer Jenő, m. k. posta- és távirdatiszt, Budapest, VII., Kerepesi-út 71.
Pech Aladár, tanár, Budapest, VI., Szív-u. 16.
Pecz Samu, műegyet. tanár, Budapest, VIII., József-körút 17.
285 Pék János, keresk. isk. tanár, Székesfehérvár.
Pekár Dezső dr., Budapest, VIII., Eszterházy-u. 3/b.
Perényi Candid, cziszt.-rendi tanár, Eger.
Perényi Vilmos, gymn. tanár, Eperjes.
Perjessy László felső-keresk. iskolai igazg., Szeged.
290 Pető Menyhért, szt. Benedek-rendi gymn. igazg., Pápa.
Petry Gyula, főreálisk. tanár, Nagy-Várad, Nagyfürdő-u. 671.
Pfeifer Péter, egyet. magántanár, Kolozsvár.
Pick Jenő, tanár, Sopron.
Pilcz Ottó ny. posta- és távirda-főfelügyelő, Budapest, VII., Aréna-út 9.
295 Pizetti Rokus, főgymn. tanár, Fiume.
Plischka Norbert, főgymnasiumi tanár, Gyöngyös.
Privorszky Alajos, tanár, Temesvár, Gyárváros, Andrássy-út 1.
Prokess Ignácz, főgymn. tanár, Szabadka.
Radó Simon, tanár, Sz.-Udvarhely.

280 Rados Gusztáv, műegyet. tan., titkár, Budapest, X., Szapáry-u. 13.
Rados Ignácz, főreálisk. tanár, Budapest, VI., Szabó József-u. 21.
Raffmann Jákó dr., első m. ált. bizt. társ. mathemat., Budapest, I., Vigadó-tér.
Ráth Arnold Lajos, főgymn. tanár, Budapest, IV., Sütő-u.
Ratkovszky Pál, főgymn. igazgató, Szatmár.
285 Rátz László, főgymn. tanár, Budapest, VI., Hunyady-tér 11.
Rejtő Sándor, udv. tan., műegyet. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Renner János, ág. ev. főgymn. tanár, Sopron.
Réthy Mór, műegyet. tanár, ö. t., választmányi tag, Budapest, VIII., Műegyetem.
Richter Rezső, tanár, Budapest, VIII., áll. főgymn.
290 Riegl Sándor, főgymn. tanár, Kalocsa.
Riesz Frigyes dr., tanár, Lőcse.
Rombauer Emil, főigazg., Budapest, V., Markó-u. 20.
Róna Árpád, mérnök, Budapest, VII., Király-u. 53.
Róna Zsigmond, met. int. aligazg., Budapest, II., Fő-u. 6.
295 Roth Ágoston, tanár, Szászváros.
Rózsa István, kegyesr. tanár, Tata.
Rucsinszky Lajos, tanár, Budapest, I., Táltos-u. 13.
Sándor János, tanárjelölt, Kolozsvár.
Scheiber Ottó, tanár, Verespatak, Alsófehérm.
300 Schenek István, akad. tag, főbányatanácsos, Budapest, V., Akadémia.
Schimanek Emil, műegyetemi tanár, Budapest, IV., Kigyó-u. 1.
Schlesinger Lajos dr., egyet. tanár, Kolozsvár.
Scholtz Ágost dr., egyet. tanár, Budapest, VI., Rózsa-u. 46.
Schöndorfer Gyula, kat. s. mérnök, Nyitra 10.
305 Schuller Alajos, műegyetemi tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Schwartz Ottó dr., főbánya-tanácsos, akad. igazgató, Selmeczbánya.
Schwicker Alfréd dr., főreálisk. tanár, Pozsony, Stefánia-út 9.
Seidner Mihály, mérnök, Budapest, II., Erőd-u. 8.
Simon Ferencz, gymn. igazg., Szászváros.
310 Simon Tádé, plebános, Nyalka, u. p Győr, Pázmánd.
Sinkó József, főgymnasiumi tanár, N.-Szombat.
Skopal István, főgymn. tanár, Budapest, VII., Barcsay-u. 5.
Somogyi István, kegyesrendi tanár, S.-A.-Ujhely.
Sós Ernő, tanár, Budapest, VI., Eötvös-u. 17.
315 Söpkéz Sándor, főfelügyelő, Budapest, V., Sas-u. 14.
Ståhl Géza, főmérnök, Debreczen.
Stanics Fulgent, sz. Benedekrendi gymn. tanár, Pápa.
Stauber József, főreálisk. igazgató, Nagyvárad.
Steécz György, apátkanonok pléb., Apatin.
320 Steiner Lajos dr., met. int. assist., Budapest, II., Fő-u. 6.
Steiner Miklós, pr. r. tanár, Szombathely.
Stefancsik Milán, asszist., Praga.
Straub L. Gyula, tanár, Budapest, VI., Andrássy-út 65.
Straub Sándor, tanár, a techn. iparmuzeumban, Budapest, VIII., József-körút 6.
325 Strausz Ármin, műegyet. adjunktus, Budapest, VIII., Műegyetem.
Streitmann András, tanár, Jászberény.
Strohbach Géza, tanár, Debreczen.
Strompf László, gymnasiumi tanár, Aszód.
Suták József dr., főgymn. tanár, Budapest, IV., Városház-tér.
330 Süss Nándor, mech. t., m. igazgató, Budapest, II., Alkotás-u. 16.
Szabó Gábor, tanár, Budapest. IX., Csillag-u. 6. fsz. 2.
Szabó János, kegy. r. tanár, Tata.
Szabó József, kegy. r. tanár, Vácz.
Szabó Lajos, tanár, Aszód.
335 Szabó Péter, dr., tanár, Budapest, I., Győri-u. 1. I. 15.
Szakmáry József, főgymn. ny. igazg., Beszterczebánya.
Szalay István, főgymn. tanár, Szentes.
Szathmáry Jenő, tanár, Békés.
Szavkay Ede, főgymn. tanár, Budapest, V., Kálmán-u. 24.
340 Széchy Ákos, keresk. akad. tanár, Kolozsvár.
Székely Károly, főgymn. tanár, Baja.
Székely László, tanár, Budapest, VIII., Pál-u. 6.

Szekeres Kálmán, dr., főreálisk. tanár, VI., Nagy-János-u. 22. II.
Széky István, főgymn. tanár, Gyöngyös.
345 Szemethy Béla, tanár, Budapest, VII., Dohány-u. 82. II.
Szentmiklósy Jenő, főgymn. tanár, Gyulafehérvár.
Széréthy Béla, főreálisk. tan., Brassó.
Szerényi Géza, főgymnasiumi tanár, Budapest, VII., Wesselényi-u. 49.
Szijártó Miklós, tanár, Budapest, VIII., József-körút 4.
350 Szily Kálmán, min. tan., a m. t. akadémia főtitkára, *vál. tag*, Budapest, V., Akadémia.
Szily Kálmán, dr., műegyetemi m. tanár, Budapest, VIII., Baross utcza 79. p. t.
Szirtes Ignácz, főreáliskolai tanár, Budapest, VI., Bulyovszky-u. 22.
Szokol Pál dr., kir. bányaisk. igazg., Felsőbánya.
Szombathy Kálmán, tanár, Miskolcz.
355 Szontágh Gusztáv, főreálisk. tanár, Brassó.
Szőke Béla, tanár, Budapest, VI., Kmetty-u. 9.
Szuppan Vilmos, kir. tan., keresk. akad. igazg., Budapest, V., Széchenyi-u. 1.
Szupper Mártha, Budapest, Erzsébet Nőiskola, VII., István-út 93.
Takáts Gyula, áll. reálisk. tan., Sümeg.
360 Tangl Károly dr., egyetemi tanár, Kolozsvár.
Tass Antal, csillagdai observator Ó-Gyalla, Komáromm.
Tatár Balázs, gymnasiumi tanár, Nagy-Szalonta.
Terkán Lajos dr., adjunktus, Ó-Gyalla.
Terlanday Emil, szt Benedek-rendi tanár, Esztergom.
365 Thán Károly dr., min. tan., egyet. tanár, *vál. tag*, Budapest, VIII. ker., Muzeumkörut 4.
Thanhoffer Lajos dr., egyet. tanár, Bpest, V., Ferencz József-rakp. 13.
Tihanyi Miklós, sz. B. r. tanár, Sopron.
Tokaji Aladár, tanár, Szászváros.
Tolnay Lajos, min. tan., Budapest, IX., Üllői-út 19.
370 Tordai Imre, ipari szakisk. igazg., Budapest, II., Lánczhíd-u. 1—3.
Toth Balázs, tanár, Privigye.
Török Sándor egyet. hallg. Kolozsvár, Egyetem-u. 10.
Tőtössy Béla műegyet. tanár, *vál. tag*, Budapest, VIII., Műegyetem.
Tresztyánszky Sándor, tanár, Brassó.
375 Ulreich Ede, ev. lyc. tanár, Pozsony.
Uzoni Imre, tanárjelölt, Kolozsvár. Kossuth Lajos-u. 29.
Vajnóczky István, kegy. rendi tanár. Budapest, IV., Városház-tér 4.
Vályi Gyula dr., egyet. tanár, t., ö. Kolozsvár.
Vámos Dezső, felső-iparisk. tanár, VIII., Népszinház-u. 8.
380 Vater József, műsz. tanácsos, Budapest, VII., Nagymező-u. 54/56.
Vidovich Béla, tanár, Nagyvárad.
Visnya Aladár, tanár, Nagyvárad.
Vörös Cyrill, k. r. tanár, Budapest. IV., Városház-tér 4.
Wagner Alajos dr., főgymn. igazg., *vál. tag*, Budapest, V., Markó-u.
385 Waldapfel János dr., főgymn. tanár, Budapest, VIII., Trefort-u. 8.
Walther Béla, reálisk. igazg., Lőcse.
Wartha Vincze dr. min. tan., műegy. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Wéber Márton, cziszt. r. főgymn. tanár, Zircz.
Weisz Margit, tanárjelölt, Kolozsvár, Rózsa-u. 2.
390 Winkler Lajos dr., egyet. rk.-tanár, Budapest, VIII., Vegytani intézet.
Winter József, főgymn. tanár, Budapest, VII., Dembinszky-u. 34.
Wittmann Ferencz, műegyet. tanár. Budapest, VIII., Műegyetem.
Wodeczky József, nevelő, Szentegát, (Szigetvár mellett).
Závodszky Adolf, főreáliskolai tanár, Budapest, V., Markó-u.
395 Zemplén Győző dr., egyetemi adj., Budapest, VIII., Eszterházy-u. 3.
Zettner Ede, polg. isk. igazg., Budapest.
Zilahy László, tanárjelölt, Orosháza.
Zipernovszky Károly, műegyet. tanár, Budapest, II., Fő-u. 73.

II. A Math. és Phys. Lapok előfizetői:

Aradi áll. főreáliskola.
Aradi áll. tanitónőképző.
Aradi kir. főgymnasium.
Balassagyarmati áll. főgymn.
5 Bártfai áll. főgymnasium.
Békés-Csabai ev. ref. Rudolf főgymn.
Beregszászi állami főgymnasium.
Brassói áll. főreáliskola.

Brassói r. kath. főgymnasium.
10 Budapesti áll. polg. iskolai tanítóképző, I., Győri-u. 9. Pædagogium.
Budapesti II. k. áll. főreáliskola, II., Toldi Ferencz-u.
Budapesti V. k. áll. főgymn., V., Markó-utcza 20.
Budapesti V. k. áll. főreáliskola, V., Markó-u.
Budapesti VI. k. áll. főreáliskola, VI., Bulyovszky-u. 22.
15 Budapesti VI. k. áll. főgymnasium, VI., Lovag-u. 16.
Budapesti VI. k. áll. felsőbb leányiskola, VI., Andrássy-út 65.
Budapesti VIII. k. áll. főgymnasium, VIII., Tavaszmező-u.
Budapesti Premontrei tanárképző, «Norbertinum», VIII., Mária-u. 20.
Budapesti ciszt. r. tanárképző, VIII., Horánszky N.-u.
20 Budapesti Tanárképző int. gyakorló főgymn., VIII., Trefort-u. 8.
Budapesti orsz. meteorologiai int. II., Fő-u. 13.
Csiksomlyói r. kath. főgymnasium.
Debreczeni állami főreáliskola.
Deési állami főgymnasium.
25 Dévai áll. főreáliskola.
Egri állami főreáliskola.
Eötvös Kollegium, Budapest, IX., Csillag-u. 8.
Érsekujvári közs. kath. főgymn.
Fogarasi áll. főgymnasium.
30 Győri áll. főreáliskola
Gyulai róm. kath. főgymn.
Gyulafehérvári róm. kath. főgymn.
Hajdúnánási ev. ref. főgymn.
Hajdú-Böszörményi ev. ref. főgymn.
35 Jászberényi kir. kath. főgymn.
Jászói prépostság könyvtára, Jászóváralja.
Kaposvári áll. főgymnasium.
Karczagi ev. ref. főgymnasium.
Kecskeméti áll. főreáliskola.
40 Késmárki ág. hitv. ev. lyceum.
Kilian Frigyes utóda, Budapest IV., Váczi-u. 1.
Kisujszállási ev. ref. főgymn.
Kolozsvári ev. ref. theol. ifj. egyl.
Kolozsvári kegy. rendi Kalazantinum.
45 Körmöczbányai áll. főreáliskola.
Lőcsei áll. főreáliskola.
Makói áll. főgymnasium.
Mármarosszigeti ev. ref. főgymn.
Marosvásárhelyi róm. kath. főgymn.
50 Mérnök-épitész-egylet, Budapest IV., Ujvilág-u. 2.
Miskolczi ev. ref. főgymn.
Nagyenyedi Bethlen főiskola.
Nagyváradi áll. főreáliskola.
Nyitrai felsőbb leányiskola.
55 Orosházai polg. iskola.
Orsovai áll. polg. iskola.
Pannonhalmi főapátsági könyvtár.
Podolini kegy. rendi gymnasium.
Privigyei kegy. rendi gymnasium.
60 Pozsonyi áll. főreáliskola.
Pozsonyi kir. kath. főgymnasium.
Salgótarjáni polg. iskola.
Selmeczbányai kir. kath. főgymn.
Sepsi-szt-györgyi ev. ref. főgymn.
65 Siklósi polg. iskola.
Soproni ág. hitv. ev. lyceum.
Soproni áll. főreáliskola.
Szabadkai közs. főgymn.
Szakolczai főgymn.
70 Szamosujvári áll. főgymn.
Szarvasi ág. h. ev. főgymn.
Szászvárosi ev. ref. Kun-kollegium.
Szegzárdi áll. főgymn.
Székely-udvarhelyi áll. főreáliskola.
75 Székely-udvarhelyi r. kath. főgymnasium.
Székelyudvarhelyi ref. főgymn.
Székesfehérvári áll. főreáliskola.
Szepesiglói áll. tanítóképző.
Szilágycsehi polg. fiuiskola.
80 Temesvári áll. főgymn.
Temesvári áll. főreáliskola.
Temesvári felső leányiskola.
Temesvári felső keresk. iskola.
Ujvidéki kir. kath. főgymn.
85 Ungvári áll. főreáliskola.
Ungvári kir. kath. főgymn.
Zilahi ev. ref. főgymn.

III. Tiszteletpéldányban részesülnek:

A Magyar Tudományos Akadémia könyvtára.
A Kir. Természettudományi Társulat.
A Műegyetemi kör.
A Ferencz József Tanítókháza.
5 A budapesti napilapok.

ADALÉKOK AZ ANALITIKAI FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉHEZ.*

I. RÉSZ.

1. §. Az analitikai függvények Cauchy adta meghatározásából kiindulva tudjuk, hogy minden analitikai függvény szabályos pontja környezetében Taylor-sorba kifejthető; és viszont minden függvény, mely nem-nulla összetartási sugarú Taylor sorba fejthető, analitikai függvény és a Taylor-sor az analitikai folytatás elvénél fogva egész, u. n. természetes létezési tartományában egyértelműen határozza meg. A természetes létezési tartomány határa, ha van, mindig oly zárt görbe, melyen mindenütt sűrűen vannak elszórva a függvény szinguláris pontjai.

Ebből látható, hogy a Taylor-sor mennyire az analitikai függvényekhez tartozó alakzat, és eléggé természetes a komplex függvény tanában mai nap szokásos kutatásirány, mely az analitikai függvények Taylor kifejtéséből kiindul s ebből akarja felismerni az analitikai függvények tulajdonságait. Kivételes eset, ha az összetartási sugár végtelen nagy, azaz a függvénynek csak a végtelenben van szingularitása s a végesbe eső egész értékkészletet maga a Taylor-sorkifejtés adja meg. Itt az egyetlen probléma a függvény végtelenben való viselkedésének tanulmányozása főleg a zérus-helyekkel kapcsolatban s ezért a Weierstrass-féle szorzat-előállítás a használatosabb. Ezzel foglalkoztak, hogy csak a kiválókat említsük, Poincaré, Picard, Hadamard Laguerre, etc.

---

* E dolgozatban foglalt főbb eredmények megjelentek a franczia Tudományos Akadémia 1905 febr. 20-iki üléséről szóló «Comptes Rendus»-ban.

Sokkal szövevényesebbé, nehezebbé válik a vizsgálat, ha a végesbe eső valamely hely, pl. a zérus-hely körüli sorkifejtés véges összetartási sugarú. Ekkor a TAYLOR-sor a függvénynek csak az összetartási kör belsejébe eső érték-készletet szolgáltatja s egy probléma helyett kettőt kapunk. Tudni akarjuk egyrészt az összetartási körön kívül, valamint az erre eső helyeken a függvény értékét, (szabályos pontban egyebet nem is tudhatunk a függvényről), másrészt a függvény viselkedését a szinguláris helyek környezetében s mindezt a megadott együtthatókból és a hatványsor általános formai tulajdonságaiból. Az első problémát, a mennyiben ez a másik megoldása nélkül egyáltalában lehetséges, MITTAG-LEFFLER oldotta meg azzal, hogy módot talált oly egész függvények szerint haladó függvénysor szerkesztésére az adott együtthatókból, mely az ú. n. csillagtartományba eső minden szabályos pontban megadja a függvény odatartozó értékét.

De a mily szép és általános megoldásunk van az első problémáról, ép oly kevés és speczialis eredményeket tud felmutatni a függvénytan a másikról. A kérdés nagy nehézségeit tekintve, ez épenséggel nem meglepő. Az analitikai függvényeknél fellépő szingularitások végtelen változatossága folytán, csak úgy remélhetjük a problema teljes megoldását, ha a függvényeket jól elhatárolt és jellemzett tipusokba rendezhetjük, ha minél több speczialis, de mindinkább általánosabb esetek vizsgálata segítségével alapos bepillantást nyerünk természe tükbe.

Mivel az összetartási körön mindig van legalább egy szinguláris hely, legtermészetesebb megszorítás, hogy egyelőre csakis az összetartási körre eső szingularitásokat tanulmányozzuk. Természetes ez a megszorítás azért, mert a függvény viselkedését egy szinguláris hely környezetében csakis oda tartó szabályos értékeinek a határon való viselkedéséből ismerhetjük meg. Már pedig az adott TAYLOR-sor csakis az összetartási körön fekvő szinguláris pontokhoz vezető értékeket adja meg. A második problémára vonatkozó eddigi kutatások tényleg legnagyobb részben erre irányulnak. A kérdés tehát ily formán vethető föl:

Kiolvasandó a függvény viselkedése az összetartási kör minden pontjában a TAYLOR-*sor megadott együtthatóiból.*

2. §. ABEL volt az első, a ki ezt a kérdést felvetette, bár épen nem ebben a formában és nem is ily általánosan. A megoldásra mégis ő tette meg az első lépést. A TAYLOR-sor általában széttartó az összetartási kör minden pontjában. De ha egy ily x_0 pontban összetartó, akkor a sor összege megadja az odatartozó függvényértéket, vagy pontosabban kifejezve: az összetartási kör belsejébe eső függvényértékek határértékét az x_0 helyen. A tétel általános ugyan, de hatásköre korlátolt, a mennyiben az együtthatók növekedésére azt a kikötést tartalmazza, hogy ha

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

az együtthatók sorozata, mely

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

függvényt meghatározza. akkor az összetartási föltétel miatt

$$\lim_{n=\infty} a_n x_0^n = 0.$$

S ha az összetartási kör sugara az egység, a mi

$$x = x_0 z$$

átalakítással mindig elérhető a szingularitások jellegének megváltoztatása nélkül, akkor szükségképen

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0.$$

S ekkor — mint könnyen belátható — már elsőrendő pólus sem lehet az összetartási körön (de azért az összetartási kör akár coupure is lehet). Az egész dolog oka az, hogy ugyanaz a TAYLOR-sor közelítvén meg belülről a függvényt, az egész összetartási körön a sor egy pontban való viselkedését, a függvénynek az egész összetartási körre vonatkozó tulajdonságai szabják meg. Pl.:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

függvény szabályos az egységsugarú összetartási kör minden pontjában az egységpontot kivéve és az együtthatók nem tartván nulla felé, (épen az egységpont szingularitása miatt) a sor nem adhatja meg e függvényértékeket az összetartási kör egyetlen pontjában sem.

ABEL tétele mind a mellett nagy fontosságú marad és a függvényosztály, melyre vonatkozik, igen kiterjedt. A későbbiek általában illustrálni fogják az együtthatók *növekedésére* tett föltevések természetességét.

3. §. Legyen $+1$ az a hely, hol az egységnyi összetartási sugarú TAYLOR-sorunk összetartó és legyen

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0, \\ s_1 &= a_0+a_1, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ s_n &= a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

ekkor a függvény értékét az $x=1$ helyen az

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

számsorozat határértéke adja meg. Vajjon, ha e sorozatnak véges felső határa van ugyan (a tagok abszolut értékeit véve tekintetbe), de nem csak egy határpontja (point limite) azaz lehet az indexeket legalább két oly csoportba osztani, hogy külön mindegyik csoporton át az indexszel a végtelenbe menve különböző számokat kapjunk rendes határok gyanánt, vajjon előállítható-e e határpontokból a függvény értéke az $x=1$ helyen? E kérdés megoldása s ennek néhány alkalmazása lesz a jelen dolgozat czélja.

4. §. CESÁROnak* következő eredményére támaszkodunk. Legyenek adva

---

* Lásd: Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli 1893 és BOREL: Leçons sur les séries à termes positifs 66 lap. 1902.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

és

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

hol $f(x)$ sora valós, pozitiv együtthatókkal és egységnyi összetartási sugárral bír, $\varphi(x)$ sora pedig szintén váljék végtelenné az összetartási körének $x=1$ helyén. Ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = a$$

határérték, mint meghatározott szám létezik, akkor

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = a.$$

Ugyanis, bármilyen kicsiny legyen is az előre megadott pozitiv szám ε, van egy oly k index, a melynél nagyobb n indexre

$$(a-\varepsilon)\, b_n < a_n < (a+\varepsilon)\, b_n$$

s így

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n < a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k -$$

$$- (a+\varepsilon)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k) + (a+\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

azaz

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x_n} < \frac{P_k(x)}{\Sigma b_n x^n} + a + \varepsilon,$$

a hol $P_k(x)$, k-adfokú raczionális egész függvény és így

$$\lim_{x=1} \frac{P_k(x)}{\Sigma b_n x^n} = 0,$$

mert $P_k(x)$ egy helyen sem lesz végtelenné, míg a nevező az $x=1$ helyen azzá lesz.

Épen így kimutatható, hogy

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{\varphi(x)} > a - \varepsilon,$$

hol ε tetszésszerinti kicsiny pozitiv szám és így kell, hogy

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = a \tag{2}$$

legyen.

Általánosabban

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

és

$$\frac{\varphi(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s'_n x^n,$$

hol

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$
$$s'_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n;$$

alkalmazván az előbbi tételt: Ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{s'_n} = \beta,$$

akkor

$$\lim_{x=1} \frac{\frac{f(x)}{1-x}}{\frac{\varphi(x)}{1-x}} = \lim_{x=1} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{s'_n} = \beta. \tag{3}$$

5. §. Ezen eredmények segítségével megfelelhetünk a 3. §-ban felvetett kérdésre. Egyszerűség kedvéért tegyük fel egyelőre, hogy az

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots \tag{S}$$

sorozatnak csak két határpontja van, σ_1 és σ_2. Mindenekelőtt definiálni akarjuk a σ_1 és σ_2 felé tartó elemek «*gyakoriságát*». Az (S) sorozat elemeit két csoportba osztjuk, az egyikbe tartozzanak azok az elemek, melyek (a komplex síkon ábrázolva) közelebb vannak a σ_1 komplex számhoz mint a σ_2 számhoz, azaz s_k az első csoportba tartozzék, ha

$$|\sigma_1 - s_k| < |\sigma_2 - s_k|;$$

egyenlő távolságra csak véges számú elem eshetik (különben σ_1 és σ_2 közt feleúton egy újabb határpontunk lenne); ezeket tetzésszerint osztjuk be az első vagy második csoportba. Ha az (S) sorozat első n eleme közül az első csoportba $m_1(n)$ számú elem esik, a másodikba pedig $m_2(n)$ számú, akkor ha a

$$\lim_{n=\infty} \frac{m_1(n)}{n} = g_1$$

és

$$\lim_{n=\infty} \frac{m_2(n)}{n} = g_2$$

határértékek léteznek, ezeket nevezzük a σ_1 illetve σ_2 felé tartó tagok gyakoriságának.

Most már be fogjuk bizonyítani, hogy

$$\lim_{x=1} f(x) = \lim_{x=1} \Sigma a_n x^n = g_1\sigma_1 + g_2\sigma_2. \tag{4}$$

Ha csak egy határpont van, akkor ennek gyakorisága

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{n} = 1$$

s így visszajutunk az ABEL tételéhez.

A jelzett tétel közvetetlen következménye a következő, önmagában is érdekes tételnek: *Ha az*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

kifejtésben

$$\overline{\lim_{n=\infty}}{}^{\star} \, |a_n| = A \quad \text{(véges)}$$

és az

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

sorozat határpontjai α_1 *és* α_2, *ezek gyakorisága pedig rendre* f_1, f_2, *akkor*

$$\lim_{x=1} (1-x) f(x) = f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2. \tag{5}$$

Ez pedig a következő, igen egyszerű módon bizonyítható be:

★ $\overline{\lim}.$ = lim. sup. és $\underline{\lim}.$ = lim. inf.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum a_{n_1} x^{n_1} + \sum a_{n_2} x^{n_2},$$

hol

$$\ldots, a_{n_1}, \ldots$$

és

$$\ldots, a_{n_2}, \ldots$$

sorozatoknak már csak egy-egy határpontja van, a_1 illetve a_2. Mivel

$$a_{n_1} = a_1 + \varepsilon_{n_1}$$

és

$$a_{n_2} = a_2 + \varepsilon_{n_2},$$

tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_1 \sum_{n_1} x^{n_1} + a_2 \sum_{n_2} x^{n_2} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^n$$

és így

$$\lim_{x=1}. (1-x) f(x) = \lim_{x=1}. \frac{f(x)}{\dfrac{1}{1-x}} = \lim_{x=1}. \frac{\Sigma a_n x^n}{\Sigma x^n} =$$

$$= \lim_{x=1}. \left[a_1 \frac{\Sigma x^{n_1}}{\Sigma x^n} + a_2 \frac{\Sigma x^{n_2}}{\Sigma x^n} + \frac{\Sigma \varepsilon_n x^n}{\Sigma x^n} \right].$$

A zárójelben az utolsó hányados a (2) értelmében az $x=1$ helyen eltűnik, mert a megfelelő együtthatók viszonya

$$\lim_{n=\infty}. \frac{|\varepsilon_n|}{1} = 0;$$

a (3) alatti tétel szerint azonban

$$\lim_{x=1} \frac{\Sigma x^{n_1}}{\Sigma x^n} = \lim_{n=\infty}. \frac{m_1(n)}{n} = f_1$$

és

$$\lim_{x=1}. \frac{\Sigma x^{n_2}}{\Sigma x^n} = \lim_{n=\infty}. \frac{m_2(n)}{n} = f_2,$$

ha a jobboldali határértékek léteznek; ugyanis Σx^{n_1} sor minden együtthatója az egység lévén, a reája képzett $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ épen a tagok számát szolgáltatja s ezzel az (5) alatti tétel be van bizonyítva. Alkalmazzuk ezt

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

függvényre:

$$\lim_{x=1}. \varphi(x).(1-x) = \lim_{x=1}. f(x) = g_1\sigma_1 + g_2\sigma_2.$$

És ezt akartuk bizonyítni.

Nagyon egyszerű s egyúttal klasszikus példa

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

mely $x=1$ esetében

$$1-1+1-1+\cdots$$

hires széttartó sorra redukálódik. Az (S) sorozat itt

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots;$$

tehát két határpont van, 0 és 1 s mindegyiknek a gyakorisága $\frac{1}{2}$, tehát a függvény értéke az 1 pontban

$$\tfrac{1}{2}.1 + \tfrac{1}{2}.0 = \tfrac{1}{2}.$$

A fenti tétel világosan beigazolja LEIBNIZ és LAGRANGE azon sejtését, hogy azt kell tekintetbe venni, mily *gyakran* szerepel az 1, még pedig a teljes TAYLOR sort véve alapul, azaz tekintetbe véve, hogy összesen hány s_n nulla.*

6. §. Épen így áll a dolog, ha az

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots \qquad (S)$$

sorozatnak nem két, hanem akárhány határpontja van. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy véges, k számú határponttal van dolgunk. Ekkor az egyes σ_i határpontok felé tartó tagok gyakorisága megint épen úgy meghatározható. Egy csoportba soroljuk az oly s_{n_i} tagokat, melyek legközelebb esnek épen a σ_i határponthoz. Ha valamelyik s_n egyenlő távolságban van több határponttól, akkor azt bármelyik csoportba beoszthatjuk, mert ilyen megint csak véges számmal lesz (különben még egy új határpontunk lenne). Ha az (S) sorozat első n tagja közül az i-dik csoportba esik $m_i(n)$ számú tag, akkor ismét

---

* Erre vonatkozólag lásd BOREL: Leçons sur les séries divergentes. Introduction.

$$\lim_{n=\infty} \frac{m_i(n)}{n} = g_i$$

a σ_i felé tartó elemek gyakorisága, ha e határérték létezik.

Előbb megint az együtthatókra vonatkozó tételt bizonyítjuk be és ép oly könnyen térünk át az (S) sorozatra vonatkozó tételre, ép úgy, mint a $k=2$ esetében. Legyenek tehát az

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

sorozat határpontjai $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ és a megfelelő gyakoriságuk $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Az egész bebizonyítás menetében csak annyi változik, hogy most

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \alpha_1 \sum_{n_1} x^{n_1} + \alpha_2 \sum_{n_2} x^{n_2} + \cdots + \alpha_k \sum_{n_k} x^{n_k} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^n$$

s újra

$$\lim_{x=1} (1-x) f(x) = \lim_{x=1} \frac{f(x)}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x=1} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n} =$$

$$= \lim_{x=1} \left[\alpha_1 \frac{\sum\limits_{n_1} x^{n_1}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n} + \cdots + \alpha_k \frac{\sum\limits_{n_k} x^{n_k}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n} + \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n} \right]$$

s az utolsó tagra a (2), a többire a (3) alatti Cesáro tételét alkalmazván kapjuk, hogy

$$\lim_{x=1} (1-x) \Sigma a_n x^n = f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + \cdots + f_k \alpha_k$$

s ezt a tételt alkalmazván az

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

függvényre: *ha az*

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

sorozat határpontjai $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ *és gyakoriságuk* $g_1, g_2, \ldots, g_k$, *akkor*

$$\lim_{x=1} \Sigma a_n x^n = g_1 \sigma_1 + g_2 \sigma_2 + \cdots + g_k \sigma_k.$$

7. §. Az eddigieket általánosíthatjuk arra az esetre is, midőn az együtthatók, illetve a részletösszegek [az s_n mennyiségek] abszolut értékének felső határa nem véges, hanem pl.

$$\overline{\lim_{n=\infty}}.\frac{|a_n|}{n^p}=a,$$

hol p pozitiv és a véges szám.

Bebizonyitjuk: *ha*

$$\frac{a_1}{1^p},\ \frac{a_2}{2^p},\ldots,\frac{a_n}{n^p},\ldots$$

határpontjai $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *és a megfelelő gyakoriságok rendre* $g_1, g_2, \ldots, g_k$, *akkor*

$$\lim_{x=1}.(1-x)^{p+1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\Gamma(p+1)\,[g_1\alpha_1+g_2\alpha_2+\cdots+g_k\alpha_k].$$

Ugyanis az előbbihez hasonlólag

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\alpha_1\sum_{n_1}n_1^px^{n_1}+\alpha_2\sum_{n_2}n_2^px^{n_2}+\cdots+\alpha_n\sum_{n_k}n_k^px^{n_k}+\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_nn^px^n,$$

tehát

$$(1-x)^{p+1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\frac{1}{(1-x)^{p+1}}}=$$

$$=\alpha_1\frac{\sum\limits_{n_1}n_1^px^{n_1}}{\frac{1}{(1-x)^{p+1}}}+\cdots+\alpha_k\frac{\sum n_k^px^{n_k}}{\frac{1}{(1-x)^{p+1}}}+\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varepsilon_nn^px^n}{\frac{1}{(1-x)^{p+1}}}.$$

Ha most

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}h_nx^n,\quad\left[h_n=\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{n!}\right]$$

és

$$s_{n_1}=\sum_{\nu=0}^{n}n_1^p(\nu),\quad s_{n_2}=\sum_{\nu=0}^{n}n_2^p(\nu),\ldots,s_{n_k}=\sum_{\nu=0}^{n}n_k^p(\nu),$$

hol $n_i(\nu)$ a ν egész számú értékeire vagy zérus vagy ν-vel egyenlő; legyen továbbá

$$s'_n = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu, \quad s''_n = \sum_{\nu=0}^{n} \nu^p,$$

akkor

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{n_1} n_1^p x^{n_1}}{\sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n} = \lim_{n=\infty} \frac{s_{n_1}}{s'_n} = \Gamma(p+1) . \lim_{n=\infty} \frac{s_{n_1}}{s''_n},$$

mert *

$$\lim_{n=\infty} \frac{s''_n}{s'_n} = \Gamma(p+1).$$

Mivel pedig

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

tehát

$$\Gamma(p+1) . \lim . \frac{s_{n_1}}{s''_n} = (p+1)\Gamma(p+1) \lim_{n=\infty} \frac{s_{n_1}}{n^{p+1}} .$$

Ez utóbbi határátmenetre alkalmazzuk p-szer a következő lemmát: ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} \nu . a_\nu}{n^{p+1}} = a'$$

és

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu}{n^p} = a,$$

akkor

$$a' = \frac{p}{p+1} a.$$

Ekkor tételünk már be is van bizonyítva, mert

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_{n_i}}{n^{p+1}} = \frac{p}{p+1} \lim . \frac{\sum_{\nu=0}^{n} n_i^{p-1}(\nu)}{n^p} =$$

$$= \frac{p}{p+1} \cdot \frac{p-1}{p} \lim . \frac{\sum_{\nu=0}^{n} n_i^{p-2}(\nu)}{n^{p-1}} = \cdots = \frac{1}{p+1} \lim . \frac{m_i(n)}{n}$$

és

$$\lim_{x=1} (1-x)^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n n^p x^n = 0.$$

---

* Lásd Appell: Sur certaines séries etc. Comptes Rendus 87. kötet.

A használt lemmát következőképen igazolhatjuk. Legyen

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \quad \text{és} \quad s'_n = \sum_{\nu=0}^{s} \nu a_\nu ,$$

akkor

$$a_0 = s_0$$
$$a_1 = s_1 - s_0$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_n = s_n - s_{n-1},$$

tehát

$$s'_n = 1 \,.\, a_1 + 2 \,.\, a_2 + \cdots + n a_n = 1 \,.\, (s_1 - s_0) + 2\,(s_2 - s_1) + \cdots +$$
$$+ n\,(s_n - s_{n-1}) = - [s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}] + n s_n$$

következőleg

$$\lim_{n=\infty} . \frac{s'_n}{n^{p+1}} = \lim_{n=\infty} \frac{n s_n}{n^{p+1}} - \lim_{n=\infty} . \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n^{p+1}} ,$$

vagyis mivel

$$\frac{s_n}{n^p} = a + \varepsilon_n ,$$

tehát

$$\lim_{n=\infty} . \frac{s'_n}{n^{p+1}} = a - a \,.\, \lim_{n=\infty} . \frac{\sum_{\nu=0}^{n} \nu^p}{n^{p+1}} -$$
$$- a \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 1^p + \varepsilon_2 \,.\, 2^p + \cdots + \varepsilon_{n-1} (n-1)^p}{n^{p+1}} ,$$

azaz

$$= a - \frac{a}{p+1} = a \frac{p}{p+1} .$$

Ezzel pedig lemmánk igazolása megtörtént.

8. §. Alkalmazzuk a most nyert eredményt az

$$\frac{f(x)}{(1-x)^q} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(q)} x^n$$

függvényre, akkor a következő tételhez jutunk: *ha a*

$$\frac{\sigma_1^{(q)}}{1^q}, \frac{\sigma_2^{(q)}}{2^q}, \ldots, \frac{\sigma_n^{(q)}}{n^q}, \ldots$$

határpontjai $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ s a megfelelő gyakoriságok rendre $g_1, g_2, \ldots, g_k$, akkor

$$\lim_{x=1} \Sigma a_n x^n = \Gamma(q+1)[g_1\rho_1+g_2\rho_2+\cdots+g_k\rho_k].$$

A

$$\sigma_1^{(q)}, \sigma_2^{(q)}, \ldots, \sigma_n^{(q)} \qquad (S^{(q+1)})$$

nevezhető a $(q+1)$-edrangú részletösszegek sorozatának, mert

$$\sigma_n^{(1)} = s_0+s_1+\cdots+s_n$$
$$\sigma_n^{(2)} = \sigma_0^{(1)}+\sigma_1^{(1)}+\cdots+\sigma_n^{(1)}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma_n^{(q)} = \sigma_0^{(q-1)}+\sigma_1^{(q-1)}+\cdots+\sigma_n^{(q-1)}.$$

Alkalmazzuk a 7. §-ban bebizonyított tételt a

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

függvényre: *ha*

$$\frac{s_1}{1^p}, \frac{s_2}{2^p}, \ldots, \frac{s_n}{n^p}, \ldots$$

határpontjai mind végesek: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ és a gyakoriságok rendre $h_1, h_2, \ldots, h_k$, akkor

$$\lim_{x=1} (1-x)^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \Gamma(p+1)[h_1\beta_1+h_2\beta_2+\cdots+h_k\beta_k].$$

Ha pedig a

$$\frac{\sigma_1^{(p)}}{1^q}, \frac{\sigma_2^{(p)}}{2^q}, \ldots, \frac{\sigma_n^{(p)}}{n^q}, \ldots$$

sorozat határpontjai mind végesek: $a_1, a_2, \ldots, a_k$ és a gyakoriságok $g_1, g_2, \ldots, g_k$, akkor

$$\lim_{x=1} (1-x)^{q-p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \Gamma(q+1)[g_1a_1+g_2a_2+\cdots+g_ka_k]$$

mi tüstént belátható, ha alkalmazzuk a csak most belátott tételt a

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{(1-x)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(p-1)} x^n$$

függvényre.

II. RÉSZ.

9. §. Az eddigiekben főként az ABEL problémája foglalkoztatott bennünket, mely abban állott, hogy meghatározzuk az együtthatókból a függvény értékét az összetartási kör valamely pontjában (egyszerűség kedvéért a $+1$ pontban). Az ABEL után elért idevonatkozó eredmények közül legfontosabb a FROBENIUSÉ, mely a részletösszegek aritmetikai közepéről szól. Ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n} = A$$

határérték van, akkor a függvény értéke az egységpontban A. A mi eddigi eredményeink ennél nem általánosabbak, mivel mikor a gyakoriságoknak nevezett határértékek léteznek, akkor az aritmetikai középnek is van határértéke [s ha a gyakoriság meghatározásáúl szolgáló kifejezésnek több határértéke van, akkor a határpontjai egész kontinuumot képeznek], de egész másféle szempontból mutatják be a függvényérték meghatározódását a részletösszegekből. Azonkivül nyertünk valamelyes betekintést a függvénynek az összetartási körre eső szingularitásaiba is. Most kizárólag ez utóbbiakkal kivánunk foglalkozni. APPELL és CESÁRO idézett dolgozatai a pozitiv együtthatójú sorokra vonatkoznak. Vajjon hogyan és mennyiben lehet átvinni a pozitiv együtthatójú sorokra nyert eredményeket komplex együtthatójú sorokra? Vajjon a szingularitások minőségét az együtthatók abszolut értéke határozza meg s az együtthatók argumentumai legfeljebb a szingularitások helyére vannak befolyással, mint pl.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \,.\, x^n \quad \text{és} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

függvényeknél? Érdekes világot vet az ilyenfajta kérdések természetére a következő egyszerű tétel, mely bármily növekedésű együtthatóknál érvényes. *Legyenek adva*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n e^{i\varphi_n}x^n \tag{6}$$

és

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n x^n \tag{7}$$

függvények egységnyi összetartási sugárral. Jelöljük ki az egységsugarú körön az

$$e^{i\varphi_0},\ e^{i\varphi_1},\ e^{i\varphi_2},\dots,e^{i\varphi_n},\dots$$

pontokat. *Ha az összes $e^{i\varphi_n}$ pontok az egységkörnek π-nél kisebb ívdarabjára esnek, akkor a valós tengelyen* (az összetartási kör belsejében) *nem tudunk oly $+1$ felé tartó*

$$r_1,\ r_2,\dots,r_n,\dots$$

sorozatot megadni, hogy ezen át menve a határra

$$\lim_{x=1}\frac{|f(x)|}{\varphi(x)}=0$$

határegyenlőség fennálljon.

Ha $\varphi(x)$ a $+1$ helyen végtelenné válik, akkor elég ha az $e^{i\varphi_n}$ pontok csak bizonyos k indextől kezdve esnek mind ugyanazon π-nél kisebb hosszaságú ívdarabra, mert a sorunkból véges számú tagot (tehát polynomot) elhagyhatunk a szingularitások megváltoztatása nélkül. Ekkor a tételt mondhatjuk a következőkép is: *$f(x)$ épen úgy válik végtelenné a $+1$ helyen, mint $\varphi(x)$*, mely az együtthatói abszolut értékeiből alakitott sor. S e tekintetben tovább menni nem lehet, mert ha már π-vel különböző argumentumú együtthatók szerepelnek, pl. váltakozó előjelű, valós együtthatójú soroknál, akkor a tétel nem igaz. Pl.:

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

függvény a $+1$ helyen nem nő egyformán

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 \,.\, x^n = \frac{1}{1-x}$$

függvénynyel, mert az egyik véges lesz, $\frac{1}{2}$, a másik pedig végtelenné válik. Másrészt ha az

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n_1} x^n$$

sorban n_1, pl. csak minden negyedik indexre lesz páratlan, a többire páros, akkor az ABEL tétel első általánosítása szerint (5. §. (5) alatti tétel)

$$\lim_{x=1} (1-x) F(x) = \tfrac{3}{4} \,.\, 1 + \tfrac{1}{4} \,.\, (-1) = \tfrac{1}{2},$$

mert a $+1$ felé tartó együtthatók gyakorisága $\frac{3}{4}$, a -1 felé tartó tagoké $\frac{1}{4}$. Tehát $F(x)$ épen úgy válik végtelenné a $+1$ pontban, mint az együtthatók abszolut értékeivel, mint együtthatókkal készült sor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \cdot$$

[Ebből a példából látjuk, hogy az argumentumnak a residuumra már van befolyása. Hogy mire nincs és mire van befolyása és ha van, ez milyen, a TAYLOR sorhoz fűződő egyik legérdekesebb probléma.]

10. §. Térjünk most át tételünk bebizonyítására. Előre bocsátjuk a következő lemmát. Legyenek adva olyan

$$a_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0},\ a_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, a_n = \rho_n e^{i\varphi_n}$$

komplex számok, hogy

$$|\varphi_i - \varphi_k| < a < \frac{\pi}{2}$$

bármilyen i és k csoportosításra az 1, 2, 3, ..., n sorozatból. Ez egyértelmű azzal, hogy az a_i számok a komplex sík egy $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb nyilású szögterületén vannak elszórva. Ekkor

$$|a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n| > \cos. a \,.\, (\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n).$$

Ugyanis nézzük meg $n=2$ esetében, milyenre kell választanunk a δ számot, hogy fennálljon a következő egyenlőtlenség

$$|\rho_0 e^{i\varphi_0}+\rho_1 e^{i\varphi_1}|>\rho_0+\delta$$

vagy ezt négyzetre emelve

$$\rho_0^2+\rho_1^2+2\rho_0\rho_1 \cos.(\varphi_0-\varphi_1)>\rho_0^2+\delta^2+2\rho_0\delta.$$

Ha

$$\delta<\rho_1$$

és

$$\delta<\rho_1 \cos(\varphi_0-\varphi_1)$$

mi az elsőt is maga után vonja a mi feltételeink mellett, akkor egyenlőtlenségünk áll; azaz

$$|\rho_0 e^{i\varphi_0}+\rho_1 e^{i\varphi_1}|>\rho_0+\rho_1 \cos.\alpha,$$

ha

$$\alpha>|\varphi_0-\varphi_1|;$$

miből az előre kitüzött feltétel önként következik, mert ott ρ_0 még kicsinyítve van egy $\cos.\alpha<1$ szorzóval.

Tegyük fel tehát, hogy lemmánk $(n-1)$ összeadandó esetében igaz s bizonyítsuk be, hogy akkor n összeadandó esetében is igaz. Az előbbiekből tudjuk, hogy

$$|(\rho_0 e^{i\varphi_0}+\rho_1 e^{i\varphi_1}+\cdots+\rho_{n-1}e^{i\varphi_{n-1}})+\rho_n e^{i\varphi_n}|>$$
$$>|\rho_0 e^{i\varphi_0}+\cdots+\rho_{n-1}e^{i\varphi_{n-1}}|+\rho_n \cos\alpha_1.$$

Ugyanis

$$\rho_0 e^{i\varphi_0}+\rho_1 e^{i\varphi_1}+\cdots+\rho_{n-1}e^{i\varphi_{n-1}}$$

összeget — mivel ez is, mint minden tagja a kijelölt $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb nyilású szögterületbe esik — képzelhetjük az $n=2$ esetben szereplő $\rho_0 e^{i\varphi_0}$ helyébe, α_1 megint kisebb, mint $\frac{\pi}{2}$. Az $n-1$ esetre szóló feltevés szerint

$$|\rho_0 e^{i\varphi_0}+\cdots+\rho_{n-1}e^{i\varphi_{n-1}}|>\cos.\alpha_2.(\rho_0+\rho_1+\cdots+\rho_{n-1}),$$

tehát α_1 és α_2 közül a nagyobbikat választva:

$$|\rho_0 e^{i\varphi_0}+\rho_1 e^{i\varphi_1}+\cdots+\rho_n e^{i\varphi_n}|>\cos.\alpha.(\rho_0+\rho_1+\cdots+\rho_n) \quad Q.\ e.\ d.$$

Ha végtelen sok a_n van, de a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

sor föltétlenül összetartó, továbbá az összes a_n számoknak megfelelő pontok $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb nyilású szögterületre esik, akkor épen úgy

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| > \cos.\alpha.\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n.$$

Legyen most már adva egy egységnyi összetartási sugarú TAYLOR-sor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\varphi_n} x^n,$$

hol az $e^{i\varphi_n}$ számok $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb hosszaságú ívdarabon feküsznek. Alkalmazzuk lemmánkat r valós, pozitiv, egynél kisebb értékeire:

$$\cos.\alpha.\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n < \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n$$

α független lévén r-től, az első egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\lim_{r=1} \frac{\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right|}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n} = A \geqq \cos.\alpha > 0.$$

S ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sorral előállított függvény az $x=1$ helyen végtelenné válik, mondhatjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^n$ által előállított függvények a $+1$ pontban, sugár mentén, egyformán válnak végtelenné.

Ha az összes a_n együttható egy π-nél kisebb nyilású szögterületre esik, akkor a szöget megfelezve két $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb nyilású szögterületet nyerünk. Válaszszuk szét a két területre eső a_n számokat — a határra esőket tetszésszerint pl. oly módon rendezve el, hogy minden második odaeső kerüljön ugyanazon csoportba. Jelöljük n_1 indexszel az egyik csoportot, n_2 indexszel a másikat. Mindegyikre külön alkalmazva a fenti lemmát

$$\lim_{r=1} \frac{\left|\sum\limits_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1} r^{n_1}\right|}{\sum\limits_{n_1=0}^{\infty} \rho_{n_1} r^{n_1}} = a_1 > 0$$

és

$$\lim_{r=1} \frac{\left|\sum\limits_{n_2=0}^{\infty} a_{n_2} r^{n_2}\right|}{\sum\limits_{n_2=0}^{\infty} \rho_{n_2} r^{n_2}} = a_2 > 0.$$

Helyettesitsük most a nevezőket $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n$ teljes sorral. Tudjuk azt, hogy ha valamilyen r értékekben menve a határra

$$\lim_{r=1} \frac{\sum\limits_{n_1} \rho_{n_1} r^{n_1}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n} = 0,$$

akkor nem lehet ezen r értékekből oly r értékeket kiválasztani, hogy ezeken át térve a határra

$$\lim_{r=1} \frac{\sum\limits_{n_2} \rho_{n_2} r^{n_2}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n} = 0,$$

mert ekkor ezen r értékeknél azt kapnók, hogy

$$\lim_{r=1} \left[\frac{\sum\limits_{n_1} \rho_{n_1} r^{n_1}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n} + \frac{\sum\limits_{n_2} \rho_{n_2} r^{n_2}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n} \right] = \lim_{r=1} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n} = 0.$$

Ép e miatt, ha valamilyen r értékekre vett határon

$$\lim_{r=1} \frac{\left|\sum\limits_{n_1} a_{n_1} r^{n_1}\right|}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n} = 0,$$

akkor ugyanazon r értékekre

$$\lim_{r=1} \frac{\left|\sum_{n_2} a_{n_2} r^{n_2}\right|}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n} = A \geqq 0.$$

Másrészt tudjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \left|\sum_{n_1} a_{n_1} r^{n_1}\right| e^{i\varphi_r} + \left|\sum_{n_2} a_{n_2} r^{n_2}\right| e^{i\psi_r},$$

hol

$$|\varphi_r - \psi_r| < a < \pi \tag{8}$$

bármilyen r értéknél.

Ha

$$\lim_{r=1} \frac{\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right|}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n}$$

határátmenetnél az ingadozás alsó határa zérus lenne, akkor valamely 1 felé tartó r értéksorozatnál a határérték tényleg zérus lenne. De általában, ha a_r és b_r rendes határértékei nem lehetnek ugyanazon r értékeken át egyszerre nullák s az argumentumuk eleget tesz a (8) alatti föltételnek, akkor könnyen beláthatjuk, hogy

$$c_r^2 = a_r^2 + b_r^2 - 2a_r b_r \cos. \alpha_r,$$

hol α_r az argumentumok különbségének kiegészítő szöge, sem lehet azon r értékekre vett határon nulla. Válaszszunk az adott r sorozatból olyanokat, melyeken át a_r mennyiségnek van rendes határa A, ezek közül ismét olyanokat, melyeken át b_r mennyiségnek is van rendes határa B, (A vagy B nem nulla). Végezzük ekkor a következő kisebbítéseket:

$$a_r^2 + b_r^2 - a_r b_r \cos. \alpha_r > a_r^2 + b_r^2 - 2a_r b_r \cos. a$$

hol a kicsiny, de nem nulla szög (kicsit kisebb, mint az együtthatók szögtartományának nyilását kiegészítő szög). Továbbá

$$c_r^2 > (A-\varepsilon)^2 + (B-\varepsilon)^2 - 2(A+\varepsilon)(B+\varepsilon)\cos. a,$$

hol ε tetszésszerinti kicsiny mennyiség. Azaz

$$c_r^2 > A^2 + B^2 - 2AB\cos.\alpha - \varepsilon K$$

s

$$A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha = 0$$

egyenlet diszkriminánsa

$$B^2(\cos.^2\alpha - 1) \quad \text{vagy} \quad A^2(\cos.^2\alpha - 1)$$

negativ lévén,

$$A^2 + B^2 - 2AB\cos.\alpha$$

nullától különböző szám s ε tetszésszerinti kicsiny lévén, c_r^2 bármilyen r értéknél nagyobb, mint egy zérusnál nagyobb szám s így alsó határa nem zérus. A mi esetünkben

$$a_r = \frac{\left|\sum\limits_{n_1} a_{n_1} r^{n_1}\right|}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n}, \quad b_r = \frac{\left|\sum\limits_{n_2} a_{n_2} r^{n_2}\right|}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n}$$

és

$$c_r = \frac{\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right|}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n}.$$

S ezzel tételünket bebizonyítottuk. Ha

$$a_0,\ a_1 e^{i\varphi},\ a_2 e^{2i\varphi}, \ldots, a_n e^{ni\varphi}, \ldots$$

sorozat tagjai eleget tesznek a tételünkben szereplő feltételnek, akkor az $e^{i\varphi}$ helyen válik a függvény ép úgy végtelenné, mint az abszolut értékekből alakitott sor az 1 helyen.

11. §. Tételünk használhatóságának illusztrálására általánosítjuk Cesáro-nak pozitiv tagokra vonatkozó [4. §. (2) és (3) alatti] tételeit, még pedig nagyon egyszerű úton. Legyenek adva

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n e^{i\varphi_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

és

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n e^{i\psi_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

függvények egységnyi összetartási sugárral és oly együtthatókkal, hogy egy bizonyos k indextől kezdve az összes $e^{i\varphi_n}$ és $e^{i\psi_n}$ komplex számértékek az egységsugarú kör ugyanazon π-nél kisebb hosszaságú ívdarabjára essenek.

Ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = a$$

határérték van, akkor

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = a.$$

Ugyanis

$$a_n = (a+\varepsilon_n)\, b_n = ab_n + \varepsilon_n b_n,$$

hol

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

tehát

$$\lim_{x=1} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = a + \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n b_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n}.$$

Azt állítjuk, hogy

$$\lim_{x=1} \frac{\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n b_n x^n\right|}{\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right|} = 0.$$

Ugyanis, ha x (a valós tengelyen) elég közel fekszik $+1$ ponthoz,

$$\frac{\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n b_n x^n\right|}{\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right|} < \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n| \cdot |b_n| \, x^n}{k \sum |b_n| \, x_n},$$

mert a 9. §-ban kimondott tétel szerint, ha x elég közel van a $+1$ ponthoz

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right| > k \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \, x^n.$$

Másrészt a Cesáro (2) alatti [4. §.] tétele szerint, mivel

$$\lim_{n=\infty} \frac{|\varepsilon_n| \, r_n}{r_n} = \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

következőleg

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n| r_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n} = 0,$$

tehát még inkább

$$\lim_{x=1} \frac{\left|\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n b_n x^n\right|}{\left|\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right|} = 0.$$

Épen így legyenek

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

és

$$s'_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n;$$

ha az

$$|s_0| e^{i\varphi_0},\ |s_1| e^{i\varphi_1},\ |s_2| e^{i\varphi_2}, \ldots, |s_n| e^{i\varphi_n}, \ldots$$

és

$$|s'_0| e^{i\psi_0},\ |s'_1| e^{i\psi_1},\ |s'_2| e^{i\psi_2}, \ldots, |s'_n| e^{i\psi_n}, \ldots$$

sorozatokban bizonyos k indextől kezdve az összes $e^{i\varphi_n}$ és $e^{i\varphi_n}$ értékek az egységkör ugyanazon π-nél kisebb hosszaságú ívdarabjára esnek és *ha*

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{s'_n} = \beta,$$

akkor

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{\varphi - x} = \lim_{x=1} \frac{\frac{f(x)}{1-x}}{\frac{\varphi(x)}{1-x}} = \lim_{x=1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} s'_n x^n} = \lim \frac{s_n}{s'_n} = \beta$$

az imént bebizonyított tétel folytán.

12. §. Másik alkalmazásul Pringsheim egy érdekes tételének* igen egyszerű bebizonyítását s ezáltal némi általánosítását választjuk.

Abel tétele szerint, ha

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots \qquad (S)$$

* Lásd: Sitzungsberichte der bayerischen Akademie zu München. Band XXX. 1900.

sorozatnak van rendes határa, akkor ez megadja a függvény értékét $+1$ pontban. Ha több határpontja van, láttuk — elég általános esetekben — hogy miként határozhatjuk meg ezekből a függvény értékét. Annyit minden esetre mondhatunk, hogy ha

$$\overline{\lim_{n=\infty}}. |s_n| = A,$$

hol A véges szám, azaz (S) sorozatban nincsenek végtelen felé tartó tagok, akkor az 1 pontban a függvény nem válhat végtelenné. Ugyanis egynél kisebb pozitiv x értékekre nézve

$$\left| \frac{f(x)}{1-x} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \right| < \sum_{n=0}^{\infty} |s_n| x^n \leqq A \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{A}{1-x}$$

s igy

$$|1-x| \left| \frac{f(x)}{1-x} \right| = |f(x)| < A$$

minden egynél kisebb pozitiv x értékre s így az $|f(x)|$ értéke az $x=1$ határon legfeljebb A lehet.

A függvény tehát csak akkor válhatik végtelenné az 1 pontban, ha $|s_n|$ felső határa végtelen nagy. De megeshetik az, hogy $|s_n|$ felső határa végtelen nagy és a függvény értéke az 1 pontban véges; mutatja ezt

$$\frac{x}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n$$

függvény, melynél az (S) sorozat

$$+1, \; -1, \; +2, \; -2, \; +3, \; -3, \ldots$$

azaz abszolut értékben végtelenné válik s a függvény értéke az 1 pontban $\frac{1}{4}$. Előfordulhat az is, hogy az $|s_n|$ mennyiségeknek a végtelen is határpontja ugyan, de van véges határpontjuk is. Ez esetben is megtörténik, még tiszta pozitiv együtthatójú soroknál is, hogy a függvény az 1 pontban véges marad. Mennyiben lehet tehát következtetni az s_n végtelenné válásából a függvény végtelenné válására? Egyik tipikus problémája ez az analitikai függvénynek TAYLOR-sor által megkisérelt vizsgálatának.

Pozitiv együtthatójú soroknál a már annyiszor említett CESÁRO tétel segítségével könnyen juthatunk egyszerűbb eredményekre, ha az összehasonlító $\varphi(x)$ függvényül

$$\varphi_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n^p x^n$$

függvényt választjuk, mely tudvalevőleg $(p+1)$-edrendűen válik végtelenné az $x=1$ helyen.* Elég általános eredményt mutat fel PRINGSHEIM idézett értekezésében. Ezt kissé megváltoztatott alakban a következőkép formulázhatjuk. *Ha az*

$$|s_0|e^{i\varphi_0},\ |s_1|e^{i\varphi_1},\ |s_2|e^{i\varphi_2},\ldots,|s_n|e^{i\varphi_n},$$

sorozatnak nincs véges vagy nulla határpontja és bizonyos k indextől kezdve az összes $e^{i\varphi_n}$ az egységsugarú kör ugyanazon π-nél kisebb hosszaságú ívdarabjára esik, akkor az

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

függvény, hol

$$a_n=s_n-s_{n-1}$$

az 1 pontban végtelenné válik.

Ugyanis

$$\frac{f(x)}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

függvény a feltételek és a 9. §. tétele szerint az $x=1$ határon ép úgy válik végtelenné, mint

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}|s_n|x^n$$

pozitiv együtthatójú függvény. De alkalmazva a (3) alatti CESÁRO tételt [4. §.]

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} 1\,.\,x^n$$

---

* Erre vonatkozólag lásd APPELL idézett kis dolgozatát s ezen dolgozat 5, 6, 7, 8. §§-ait.

és

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |s_n| x^n$$

függvényekre, mivel

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{|s_n|} = 0,$$

tehát

$$\lim_{x=1} \frac{1}{(1-x)\,\varphi(x)} = 0,$$

azaz

$$\lim_{x=1} (1-x)\,\varphi(x) = \infty$$

$\varphi(x)$ tétel elsőfokúnál erősebben válik végtelenné s így $\frac{f(x)}{1-x}$ függvény is, azaz $f(x)$ maga végtelenné válik.

Pringsheim fogalmazása abban különbözik a miénktől, hogy nála az összes $e^{i\varphi_n}$ értékek, bizonyos k-tól kezdve, az egységkör $\frac{\pi}{2}$ hosszaságú ívdarabjára esnek. A bebizonyítás egészen új.

13. §. Pringsheimnek most bebizonyított tétele elégséges (de épen nem szükséges) föltételt ad a függvény végtelenné válására. A föltétel egyik része, a mely az $e^{i\varphi_n}$ mennyiségekre vonatkozik, az együtthatók «előjelére» szól t. i. azt mondja ki, hogy az együtthatók a komplex sík egy $\alpha_1 < \pi$ nyilású szögterületén legyenek elszórva, tehát pl. valós együtthatóknál váltakozó előjelű tagok csak véges számban lehetnek. A föltétel másik része pedig az együtthatók növekedésére szól: az (S) sorozatnak ne legyen véges határpontja. Tegyük fel, hogy vannak ily véges határpontok és hogy az «előjelre» sincs semmi megszorítás. Egyszerűség kedvéért beszéljünk valós együtthatókról s a 9. §. tételével minden nehézség nélkül áttérhetünk majd a komplex együtthatók esetére. Tehát vannak pozitiv és negativ együtthatók s általában ugyanolyan részletösszegek (s_n mennyiségek) is és vannak végtelen és véges határ felé tartó részletsorozatai az

$$s_0,\ s_1,\ s_2, \ldots, s_n, \tag{S}$$

sorozatnak. Egyelőre vegyük fel azt a megszorítást, hogy az együtthatók abszolut értékei egy véges A szám alatt vannak, azaz

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, |a_n| = a \leqq A.$$

Lehet-e oly növekedési föltételeket szabni az (S) sorozat tagjaira, hogy abból biztosan következtethessünk a függvény végtelenné válására? Érvényes a következő tétel:

Ha az (S) sorozatban a negativ tagok abszolut értékben véges határon alól maradnak, azaz (S) negativ tagjaira

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, |s_n| = B$$

és a pozitiv tagokra

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, \frac{|s_n|}{n^{\frac{1}{2}}} = \infty,$$

akkor a függvény az 1 helyen végtelenné válik.

Ugyanis ez esetben, mint látni fogjuk,

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{s_0+s_1+\cdots+s_n} = \lim_{n=\infty} \frac{n}{\sigma_n} = 0 \tag{8}$$

és σ_n bizonyos indextől kezdve pozitiv, tehát alkalmazva

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

és

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n$$

függvényekre Cesarò (3) alatti tételét [4. §.], kapjuk, hogy

$$\lim_{x=1} \frac{\frac{x}{(1-x)^2}}{\frac{f(x)}{(1-x)^2}} = \lim_{x=1} \frac{1}{f(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{n}{\sigma_n} = 0,$$

azaz tényleg

$$\lim_{x=1} f(x) = \infty.$$

Igazoljuk tehát a (8) alatti feltevésünket. Megengedhetjük még, hogy

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, |a_n| = a < 1$$

a mi nem új megszorítás, mert ha k lenne, úgy az egész függvényt osztanánk $k'>k$ számmal, mi által növekedésbeli viszonyai nem változnak.

Nézzük először is az (S) sorozatnak ama tagjait, melyek erősebben válnak végtelenné, mint $n^{\frac{1}{2}}$. Az ily tagok száma az $s_1, s_2, \dots, s_n$ (véges számú tagból álló) csapatban, ha a maximális s_n érték $n^{\frac{1}{2}}a_n$ (hol tehát a_n végtelenné válik az n indexszel), legalább is $n^{\frac{1}{2}}.a_n - n^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}}(a_n-1)$, mert az s_n mennyiségek lépésenkint még az egységgel sem nőhetnek az a_n együtthatók kicsinysége folytán. Tehát a

$$\sigma_n = s_0 + s_1 + \cdots + s_n$$

képezésénél ezen tagok összege nagyobb, mint $n^{\frac{1}{2}}.n^{\frac{1}{2}}(a_n-1)$, azaz egy renddel erősebben végtelenné váló részt adnak.

A többi pozitiv tagok csak segítenek a σ_n mennyiséget növelni. A negativ tagok összege pedig abszolut értékben kisebb, mint nB, azaz csak elsőrendűen válhatik végtelenné, tehát az elsőrendűnél jobban végtelenné váló pozitiv tagok összegét le nem vonhatja s így σ_n tényleg elsőrendűnél jobban válik végtelenné s a (8) épen ezt fejezi ki, valamint bizonyos indextől kezdve pozitiv marad.

14. §. Általánosabban: feltéve, hogy

$$\overline{\lim_{n=\infty}}. \frac{|a_n|}{n^k} = a < 1,$$

akkor igaz a következő tétel. *Ha az (S) sorozat negativ tagjaira*

$$\overline{\lim_{n=\infty}}. \frac{|s_n|}{n^k} = B$$

és a pozitiv tagokra

$$\overline{\lim_{n=\infty}}. \frac{s_n}{n^{k+\frac{1}{2}}} = \infty,$$

akkor a függvény az 1 pontban végtelenné válik, még pedig k-adrendűnél erősebben.

Ugyanis az $s_1, s_2, \dots, s_n$ csoportban egy $s_{n_1} = n^{k+\frac{1}{2}}$ nagyságú vagy ehhez legközelebb álló tagtól növekednie kell az s_n menynyiségeknek $n^{k+\frac{1}{2}}.a_n$ értékre (ha ez jelenti a maximális tagot) s mivel az együtthatók, melyekből az s_n mennyiségek összerakódnak kisebbek, mint az indexeik k-adik hatványa, az erre szükséges tagok száma legalább annyi lesz, mint az a legkisebb p, mely a következő feltételnek eleget tesz:

$$n^{k+\frac{1}{2}}+(n-p)^k+(n-p-1)^k+\cdots+(n-1)^k+n^k \gtreqless n^{k+\frac{1}{2}}a_n,$$

hol a lehető legnagyobb indexű s így a lehető legnagyobb tagokból raktuk össze a felnövekedését. Ezt írhatjuk még:

$$(n-p)^k+(n-p-1)^k+\cdots+(n-1)^k+n^k \gtreqless n^{k+\frac{1}{2}}(a_n-1),$$

miből látjuk, hogy p az n oly függvénye, mely nagyobb, mint $n^{\frac{1}{2}}.a_n$, mert a jobboldalon áll a baloldal legnagyobb száma: n^k, megszorozva $n^{\frac{1}{2}}.(a_n-1)$ mennyiséggel, tehát kell, hogy a baloldali tagok száma nagyobb legyen mint $n^{\frac{1}{2}}a_n$.

Most ismételhetjük a fenti okoskodást a σ_n képezésére. Az $n^{k+\frac{1}{2}}$ értéknél nagyobb tagok száma az $s_1, s_2, \ldots, s_n$ csapatban nagyobb, mint $n^{\frac{1}{2}}.a_n$ (hol $\lim\limits_{n=\infty}.a_n=\infty$) s így ezek a σ_n mennyiségbe $(k+1)$ rendűnél jobban növő részt adnak, míg a többiek vagy pozitivok s így elősegítik a σ_n növését vagy negativok, de ekkor kisebbek, mint $n^k(B+c)$ s így összegük σ_n mennyiségben kisebb, mint $n^{k+1}(B+\varepsilon)$, tehát nem ronthatják le a nagy pozitiv tagok összegét. Ezzel bebizonyítottuk, hogy

$$\lim_{n=\infty}.\frac{n^{k+1}}{\sigma_n}=0.$$

Alkalmazzuk most Cesáro tételét az

$$\frac{1}{(1-x)^{k+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}h_n x^n$$

és

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n x^n$$

függvényekre, tekintetbe véve, hogy*

* Lásd Appell idézett dolgozatát.

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^{k+1}}{h_n} = \Gamma(k+2),$$

tehát

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n}{\sigma_n} = 0,$$

tehát

$$\lim_{x=1} \frac{\dfrac{1}{(1-x)^{k+2}}}{\dfrac{f(x)}{(1-x)^2}} = \lim_{x=1} \frac{1}{(1-x)^k f(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{h_n}{\sigma_n} = 0,$$

azaz függvényünk k-ad rendűnél erősebben válik végtelenné.

Komplex együtthatók esetében tételünk így fogalmazható. *Tegyük fel, hogy*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |a_n| = a < 1.$$

Ha fel lehet osztani az s_n mennyiségeket két oly csoportra, hogy az egyikbe π-nél kisebb nyilású szögterületre eső tagok essenek és ezekre

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{|s_n|}{n^{\frac{1}{2}}} = \infty$$

a többire pedig

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |s_n| = B,$$

akkor az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

függvény végtelenné válik az 1 pontban.

Nézzük ugyanis

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

függvényt. Írhatjuk, hogy

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n_2} s_{n_2} x^{n_2} + \sum_{n_1} s_{n_1} x^{n_1}$$

az s_n mennyiségek két csoportjának megfelelően.

Hogy $|s_{n_1}|$ az $n^{\frac{1}{2}}$ értéktől $n^{\frac{1}{2}} . a_n$ értékre nőjjön, még inkább kell $n^{\frac{1}{2}}(a_n-1)$ tag, tehát $\sum_{n_1} |s_{n_1}| x^{n_1}$ függvény, mint a hozzátartozó σ_n is egynél erősebben válik végtelenné. Másrészt tudjuk, hogy minden egynél kisebb pozitiv x értékre

$$\left|\sum_{n_2} s_{n_2} x^{n_2}\right| < \frac{B}{1-x},$$

azaz

$$(1-x)\left|\sum s_{n_2} x^{n_2}\right| < B$$

és a 9. §. szerint ugyanezen x értékekre az $x=1$ helyhez elég közel

$$\left|\sum_{n_1} s_{n_1} x^{n_1}\right| > c \sum_{n_1} |s_{n_1}| x^{n_1},$$

azaz

$$(1-x) \sum_{n_1} s_{n_1} x^{n_1}$$

függvény végtelenné válik az $x=1$ határon s így

$$f(x) = (1-x) \sum_{n_2} s_{n_2} x^{n_2} + (1-x) \sum_{n_1} s_{n_1} x^{n_1}$$

függvény is.

Épen így azon esetben, midőn

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{|a_n|}{n^k} = a,$$

érvényes a valós együtthatók esetére megfogalmazott általános tétel a megfelelő módositással.

Dienes Pál.

A TÉRKÉPSZINEZÉSRŐL.

Egy kettőspont nélküli zárt görbével határolt területet (*«ország»*-ot) tetszőleges vonalakkal tetszőleges számú részre osztunk, mely részeket a következőkben *«megyé»*-knek fogjuk nevezni. Két megyét *szomszédos*-nak nevezünk, ha határuknak van egy vagy több közös pontja; és pedig a két megye *összefüggő*, ha egész (folytonos) vonaldarabja közös a két határnak és *erintkező*, ha ily vonaldarab nincs és csak egy vagy több diszkrét pont tartozik mindkettő határához. *Szögpont* pedig minden oly pont, melyből ezen felosztó vonalak közül kettőnél több indul ki. A beosztott országot *«térkép»*-nek is fogjuk nevezni.

Minden megyéhez most már egy-egy szint rendelünk oly módon, hogy két összefüggő megye különböző szinű legyen. Kérdés, hogy ehhez általában hány szin szükséges, illetőleg, hogy van-e oly n szám, hogy bármikép legyen is az ország beosztva, az említett megfestéshez n szin elegendő?

Ha problémánkat ilyen alakban vetjük fel, akkor azt megoldottnak kell tekintenünk, a mennyiben aránylag könnyen bebizonyitható, hogy *öt szín bármely térkép megfestéséhez elegendő*. Ámde mindmáig sem oly térképet szerkeszteni nem tudtak, melynek megfestéséhez öt szín *szükséges* volna, sem nem sikerült bebizonyitani azt, hogy már négy szín is mindenkor elegendő. Csak annyi bizonyos, hogy ha van is oly térkép, melynek megfestéséhez négy szin nem elegendő, annak legalább tizenkét megyéből kell állania. Ily térkép keresése már ezért is meglehetős nehézségekbe látszik ütközni.

A mi a négy szín tételének történetét illeti, annak eredete ismeretlen. A kik először írnak róla, mint «(angol) térképkészitőktől jól ismert tétel»-ről szólnak.

CAYLEY [1] szerint DE MORGAN ír először «valahol» e problémáról; mások szerint Francis GUTHRIE-t [2] illeti az elsőség. Említett czikkében CAYLEY maga is e problémára tereli a mathematikusok figyelmét, különösen annak kijelentésével, hogy azt nem sikerült megoldania. A nehézségeket CAYLEY abban látja, hogy egy-egy határvonal jelentéktelennek látszó megváltoztatása vagy egy új megye hozzácsatolása esetleg a szinezést teljesen megváltoztatja. Ugyanitt van először kimutatva, hogy a tétel érvényességi körének szűkítése nélkül a bebizonyításnál feltételezhető, hogy minden szögpontból csak három határvonal indul ki. TAIT [3] a következő tételre igyekezett a problémát visszavezetni: «Ha minden szögpontból három határvonal indul ki, akkor a térkép *határainak* oly módon való megfestéséhez, hogy ugyanazon szögpontból kiinduló határok különböző színűek legyenek, *három* szín elegendő.» E tétel azonban a négy szín tételével teljesen aequivalensnek bizonyúlt és így bebizonyítása hasonló nehézségekbe ütközik. KEMPE [4] igen érdekes bebizonyításának középpontja a következő tétel: «Valamely térképnek egy szögpontjába öt határvonal (öt megye) fut össze. Ha e térkép négy színnel megfesthető, akkor oly módon is megfesthető négy színnel, hogy az említett öt megye csak háromféle színre legyen festve». A térkép szögpontjainak, határvonalainak és megyéinek száma közt fennálló EULER-féle összefüggésből következik, hogy minden térképben van oly megye, melynek határán hatnál kevesebb szögpont fekszik. Ennek alapján a fenti KEMPE-féle tételből teljes indukczió segítségével (KEMPE más módszert használ) a négy szín tétele is bebizonyítható. KEMPE tételének bebizonyítása azonban nem helyes. Egy alig észrevehető, de — úgy látszik — helyrehozhatatlan hiba fordul

[1] «On the colouring of maps», 1878; Collected Papers, XI., 7. l.

[2] Frederick GUTHRIE: «Note on the colourings of maps»; Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, X., 727. l. (1878—80.)

[3] «Listing's Topologie», Philosophical Magazine, 5. series, 17. kötet. (1884.)

[4] pld.: «How to colour a map with four colours», a «Nature» folyóirat XXI. kötetében (399. l.) (1886). Gondolatmenetét STORY-éval együtt LUCAS is közli (Récréations Mathématiques, IV., 171. l.)

elő benne, melyet először HEAWOOD[1] vett észre, ki egyszersmind a megfestéshez általában szükséges szinek számára, tetszőleges összefüggésű felületeket véve tekintetbe, egy-egy felső határt állapított meg. A síkra vonatkozólag azonban a felső határ: 5. Utána HEFFTER[2] foglalkozott azon kérdéssel, hogy mikor egyenlő a szükséges szinek száma épen e HEAWOOD-féle felső határral. PETERSEN[3] egy példával igazolta, hogy TAIT említett tétele a térre minden megszorítás nélkül nem általánosítható. Czikke különösen azért érdekes, mert ő az első, ki a négy szín tételének helyességében kételkedni mer. Legutóbb WERNICKE[4] foglalkozott a négy szín problémájával, de az ő bebizonyítása is hibásnak bizonyúlt.

Szoros kapcsolatban van problémánkkal a következő kérdés: n számú megye közül bármely kettő érintkezik[5]; melyik a legnagyobb érték, melyet n felvehet? Könnyen bebizonyítható, hogy e legnagyobb érték: négy, azaz, hogy bármiképen választunk is ki a síkban öt megyét, azok közt mindig található kettő, a mely nem érintkezik. E tétel, melyet MOEBIUS említ először egy 1840. évi előadásában, közvetetlen folyománya a négy szín tételének, de azzal épenséggel nem æquivalens[6]. Hiszen hasonló okoskodással abból, hogy az 1. ábrában legfeljebb három megye választható ki úgy, hogy ezek közül bármely kettő érintkezzék, az követ-

---

[1] «Mapcolour theorem», The Quarterly Journal of Mathematics, XXIV., 332. l. és «On the four-colour map theorem», u. a., XXIX., 270. l. (1890 és 1897.)

[2] «Über das Problem der Nachbargebiete», Mathematische Annalen, XXXVIII., 477. l. (1891.)

[3] Az Intermediaire des Mathématiciens VI. kötetének «Reponses» rovatában (36. l.) (1899).

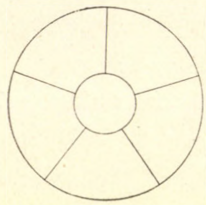
[4] «Über den kartographischen Vierfarbensatz», Mathematische Annalen, LVIII., 413. l. (1904.)

[5] Az ily megyéket nevezi BALTZER «spatia confinia»-nak és HEFFTER «Nachbargebiet»-eknek.

[6] Ezt feltételezi többek közt BALL is «Mathematical Recreations and Problems» czímű könyvében. (1892). Ugyanitt a «semmiféle nehézséget nem nyújt» szavakkal van TAIT fentemlített tételének bebizonyítása elintézve.

keznék, hogy e térkép megfestéséhez három szín már elegendő; ez pedig — mint könnyen belátható — nem igaz.

Mindezen kérdéseknél fontos szerepet játszik az, hogy az egyes megyék, illetőleg több megye összefoglalásával keletkező területek egyszerűen összefüggő (*egy* zárt görbével határolt) területet alkotnak-e. Bizonyos tekintetben legegyszerűbb a térkép, ha megyéiből, bárhogyan választjuk is ki azokat, nem alkotható többszörösen összefüggő terület. A térkép e tulajdonsága — mint egyszerűen belátható — úgy is kifejezhető, hogy minden megye egy folytonos vonaldarab mentén az egész ország határán fekszik. Ily térképek megfestéséhez már három szín is mindenkor elegendő.


1. ábra.

E tétel bebizonyítása lesz tárgya a következőknek.

*

Rövidség kedvéért mindenekelőtt bevezetjük ezeket a jelöléseket:

A tulajdonság: Minden megyének van oly folytonos határdarabja, mely része az országhatárnak.

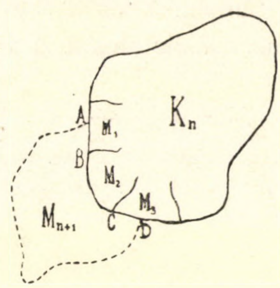
B tulajdonság: Minden megyének csak egy oly folytonos határdarabja van, mely része az ország határának.

I. tétel. Ha az $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *megyékből álló* K_n *térképnek megvan az A és B tulajdonsága, az* $M_1, M_2, \ldots, M_n, M_{n+1}$ *megyékből álló* K_{n+1} *térképnek*[1] *pedig az A tulajdonsága, akkor* M_{n+1} *háromnál kevesebb megyével függ össze.*

Legyen h a K_n térkép határa, melyen az $A, B, \ldots,$ betűkkel megjelölt pontok a térkép szögpontjai (2. ábra.). Ha most már M_{n+1} három megyével függne össze, akkor, minthogy K_{n+1}-nek, mint térképnek, egyetlen zárt görbe a határa, három olyannal is

[1] Ismételjük, hogy térképen kizárólag összefüggő és pedig egyszerűen összefüggő terület beosztását értjük. Úgy, hogy az által hogy K_{n+1} *térkép*ről beszélünk, azt is felteszszük, hogy M_{n+1}-nek K_n-hez való csatolásával a terület egyszerűen összefüggő marad.

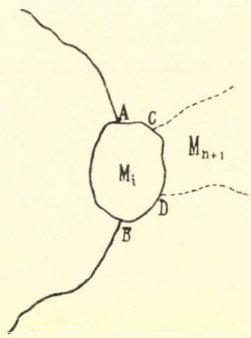
összefüggne, melyek h körüljárásánál közvetetlenül egymásután következnek. Azaz a h vonal bizonyos AB, BC és CD része határa volna M_{n+1}-nek is. Ez azonban valóban lehetetlen: a K_n térkép B tulajdonsága szerint ugyanis a BC mentén határra jutó M_2, megye csakis itt jut a határra, M_{n+1} hozzácsatolásával azonban e BC megszünik az ország határa lenni és így a K_n térkép A tulajdonságával ellentétben, M_2 határának nem volna a külső határon része.



2. ábra.

II. tétel. Ha az M_1, M_2, ..., M_n megyékből álló K_n térképnek megvan az A és B tulajdonsága, az M_1, M_2, ..., M_n, M_{n+1} megyékből álló K_{n+1}-nek az A tulajdonsága és továbbá M_{n+1} egynél több megyével szomszédos, akkor K_{n+1}-nek a B tulajdonsága is megvan.

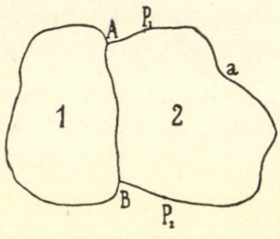
M_{n+1} t. i. nem juthat kétszer a határra, mert akkor elhagyásával a térkép két össze nem függő részre bomlanék, pedig ezen elhagyással az összefüggőnek feltételezett K_n marad. Ámde M_{n+1} hozzácsatolásával az M_1, ..., M_n megyék közűl sem válhatik egy sem az ország-határra kétszer jutó megyévé. Ha t. i. pl. M_i ilyenné válnék, az csak úgy volna lehetséges, ha az AB darabnak, melynek mentén M_i a K_n határára jut, egy CD darabja (A is, B is különböző C- és D-től) M_{n+1} határának egy része volna, a nélkül, hogy AC és DB odatartoznék (l. 3. ábrát.). Így tehát — minthogy K_{n+1}-et egy kettőspont nélküli zárt görbe határol — M_{n+1} határának CD-n kívül nincs K_n határán pontja. M_{n+1} tehát feltevésünkkel ellenkezőleg csakis M_i-vel volna szomszédos.



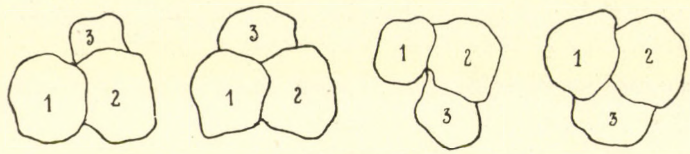
3. ábra.

III. tétel. Ha valamely K térképnek megvan az A és B tulajdonsága, akkor van egy olyan M_0 megyéje, melynek megvan a következő két tulajdonsága: 1. háromnál kevesebb megyével függ *össze; 2. az M_0 elhagyásával keletkező térképnek is megvan az A és B tulajdonsága.*

Legyen 1 és 2 a K térkép két összefüggő megyéje. Az A tulajdonság szerint közös határuk egyetlen folytonos AB vonal, mint a 4. ábra mutatja. Ha 2 más megyét már nem érint, tételünk be van bizonyítva. Ha ellenben van 1-en kívül más a 2-vel összefüggő megye is, azaz nem az egész AaB tartozik az ország határához, akkor ezek közt olyan is van, mely 1-gyel is szomszédos, hiszen az ellenkező esetben, ellentétben a feltételezett B tulajdonsággal a 2. megye az össze nem függő AP_1 és BP_2 vonaldarabok mentén jutna az ország-határra. Az ily (1-gyel és 2-vel szomszédos) 3. megye hozzávételével keletkező (1., 2., 3.) térképnek, (mely olyanszerű lesz, mint a következő négy ábra egyike:)



4. ábra.



5. ábra.

mint K egy részének, szintén megvan az A tulajdonsága és így a II. tétel szerint a B tulajdonsága is (M_{n+1} szerepét a 3. megye játszsza). Ezért ugyanezen okoskodással azt nyerjük, hogy vagy nincs 1-en és 2-n kívül a K térképben a 3-mal szomszédos megye — és ekkor a tétel máris be van bizonyítva — vagy, ha van, olyan (4. megye) is van, mely még vagy 1-gyel, vagy 2-vel is szomszédos. Tehát az (1., 2., 3., 4.) térképnek, mint K részének, meglévén az A tulajdonsága, a II. tétel szerint a B tulajdonsága is megvan. Az I. tétel szerint tehát a 4. megye teljesíti a tételünkben M_0-ra szabott két feltételt, hiszen az (1., 2., 3.) térképnek, mint láttuk, mind az A, mind a B tulajdonsága megvan. Így folytatható ez tovább. De, minthogy K megyéinek a száma véges, azért ez az eljárás egyszer okvetlenül megszakad és az utoljára odacsatolt megye oly tulajdonságú megye lesz, a milyennek létezését épen feladatunk volt bebizonyítani.

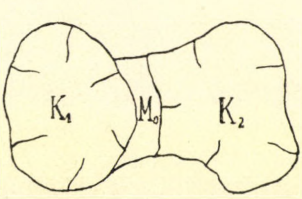
IV. tétel. Ha egy K_n térképnek megvan az A és B tulajdonsága, akkor megfestéséhez három szín elengedő.

Ha a megyék száma $n = 1, 2$ vagy 3, akkor a tétel természetesen érvényes. Elegendő tehát bebizonyítani, hogy n megye esetére érvényes, ha $n - 1$ megye esetére helyesnek teszszük fel. Ezt tehát a következőkben feltételezzük. Az M_0 (ez a III. tételben szereplő megye) elhagyásával keletkező A és B tulajdonságú $n - 1$ megyéből álló K_{n-1} térkép tehát három színnel megfesthető. Ekkor azonban valóban K_n megfestéséhez is elég három szín. A K_{n+1} megfestésénél az egyes megyéknek adott színeket t. i. megtartjuk. Mivel pedig M_0 legfeljebb két megyével függ össze, azért neki is juttatható a három szín egyike.

Főtétel. Ha egy térképnek megvan az A tulajdonsága, azaz minden megye egy egész folytonos vonal mentén az ország határán fekszik, akkor megfestéséhez három szín elegendő.

Feltehető, hogy van egy M_0 megye, mely több folytonos vonal mentén jut a határra, hiszen ellenkező esetben a IV. tétel máris a bebizonyítandót adja.

A bebizonyításnál ismét a teljes indukczió módszerét alkalmazzuk. Ha t. i. a megyék száma $n = 1, 2, 3$, akkor tételünk érvényes. Felteszszük most már, hogy érvényes, ha a megyék száma kisebb



6. ábra.

n-nél. Ha ebből minden n megyéből álló térképre vonatkozólag is következik tételünk helyessége, akkor ezzel a tételt egész általánosságban bebizonyítottuk.

Az M_0 elhagyásával a szóban forgó térkép össze nem függő K_1, K_2,... részekre bomlik (6. ábra.). A IV. tétel és feltevésünk szerint a $K_1 + M_0$, $K_2 + M_0$,... térképek mindegyike megfesthető három szinnel, akár van van oly megyéjök, mely több folytonos vonal mentén jut a külső határra, akár nincs. A szinek szerepe felcserélhető lévén, e színezések úgy is történhetnek, hogy M_0 mindig ugyanazt a színt kapja. Az ily módon megfestett $K_1 + M_0$, $K_2 + M_0$,... részlettérképek tehát eredeti n megyés térképünk három szinnel való megfestését szolgáltatják, a mivel a tétel be van bizonyítja.

Kőnig Dénes.

A TÖBB VÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉHEZ.

Az utolsó időben hazai irodalmunkban is több közleménynyel találkozunk, a mely az ú. n. indukált helyettesítésekkel foglalkozik, s mely ennek, a modern algebra érdekes fejezetének elméletére vonatkozó számos, eddig még ismeretlen tételt hozott napvilágra. E munkálatok valamennyien az algebrai vizsgálatok keretén belül mozognak s így az indukált helyettesítéseknek csak algebrai jelentőségét emelik ki, míg általános függvénytani vonatkozásaira ki nem terjednek. Minthogy pedig ez eredményeknek az általános függvénytanra való kiterjesztése nem csak magára a függvénytanra, de geometriai vizsgálatokra nézve is fontos lehet, legyen szabad az e tárgyra vonatkozó néhány eredményt, mely az említett vonatkozás lényegébe némi bepillantást enged, az alábbiakban közölnöm.

A tárgyalást három részre osztom. Az első rész az indukált helyettesítéseknek az általános függvénytanhoz való viszonyát kifejező tételt s annak bebizonyítását tárgyalja ; a második viszont e tételnek az algebrai alakokhoz való viszonyával foglalkozik; végre a harmadik rész e tételnek a görbe felületek elméletére való elemi alkalmazását mutatja be.

I.

Legyen az

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

n számú mennyiség mint az

$$u_1, u_2, \ldots, u_m$$

m számú független változó függvénye adva, azaz legyen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_m), \\ x_2 &= \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_m); \end{aligned} \tag{1}$$

legyen továbbá

$$k_1, k_2, \ldots, k_r$$

az

$$1, 2, \ldots, m$$

elemeknek valamely ismétléssel való r-ed osztályú kombinácziója; akkor, minthogy e kombinácziók száma $\binom{m+r-1}{r} = \mu$, az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mennyiségekből μ számú következő alakú függvényt alkothatunk:

$$U_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_{k_1}} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_{k_2}} \cdots \frac{\partial x_i}{\partial u_{k_r}}. \tag{2}$$

$$(k=1, 2, \ldots, \mu)$$

Ha most az

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

mennyiségeket az

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(v_1, v_2, \ldots, v_m) \\ u_2 &= f_2(v_1, v_2, \ldots, v_m) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m &= f_m(v_1, v_2, \ldots, v_m) \end{aligned} \tag{3}$$

helyettesítés révén mint a

$$v_1, v_2, \ldots, v_m$$

független változók függvényeit a következő alakban állítjuk elő:

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(v_1, v_2, \ldots, v_m) \\ x_2 &= \psi_2(v_1, v_2, \ldots, v_m) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \psi_n(v_1, v_2, \ldots, v_m), \end{aligned} \tag{4}$$

akkor az U függvényekhez hasonló, szintén μ számú V függvényt képezhetünk:

$$V_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial v_{k_1}} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial v_{k_2}} \cdots \frac{\partial x_i}{\partial v_{k_r}} . \qquad (k=1, 2, \ldots, \mu) \tag{5}$$

Jelen dolgozatom czélja első sorban a következő tételt bebizonyítani:

A

$$V_1, V_2, \ldots, V_\mu$$

függvények mint az

$$U_1, U_2, \ldots, U_\mu$$

függvények lineár alakjai állíthatók elő, mely alakok együtthatói a (3) alatti helyettesítésben szereplő

$$f_1, f_2, \ldots, f_m$$

fügyvények elsőrendű parcziális differencziál hányadosainak r-ed rendű homogén egész függvényei és az alakrendszer determinánsa D_r a $D = \frac{(\partial u_1, u_2, \ldots, u_m)}{(\partial v_1, v_2, \ldots, v_m)} = D_1$ függvény-determináns $\binom{m+r-1}{m}$-dik hatványával egyenlő.

A V függvények tehát mindig meghatározott képletek segítségével helyettesíthetők az U függvényekkel, s ezt a helyettesítést a (3) alatti helyettesítés mint *induktor-helyettesítés* indukálja, a miért is azt jogosan — SYLVESTER terminológiájával szerint — *indukált helyettesítés*nek nevezhetjük. Ennek az elnevezésnek jogosultsága még inkább ki fog tünni, ha sikerül majd a tárgyalás folyamán kimutatnunk, hogy az algebrai alakok elméletében fel lépő indukált helyettesítés, ennek csak speciális esete.

Hogy a tétel első részét bebizonyítsuk, helyettesítsük (5)-be a $\frac{\partial x_i}{\partial v_k}$ differencziál-hányadosok következő értékeit;

$$\frac{\partial x_i}{\partial v_k} = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial v_k} + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial v_k} + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial v_k}$$

és ekkor

$$V_k = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial x_i}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial v_{k_1}}\Big)\Big(\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial x_i}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial v_{k_2}}\Big)\cdots\Big(\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial x_i}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial v_{k_r}}\Big).$$
$$(k=1, 2, \ldots, \mu)$$

Ha most a kijelölt szorzásokat végrehajtjuk, a következő eredményre jutunk:

$$V_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l}\frac{\partial x_i}{\partial u_{l_1}}\frac{\partial x_i}{\partial u_{l_2}}\cdots\frac{\partial x_i}{\partial u_{l_r}}\frac{\partial u_{l_1}}{\partial v_{k_1}}\frac{\partial u_{l_2}}{\partial v_{k_2}}\cdots\frac{\partial u_{l_r}}{\partial v_{k_r}},$$

hol a belső összeadás úgy végzendő, hogy $l_1, l_2, \ldots, l_r$ helyébe az $1, 2, \ldots, m$ elemeknek összes ismétléssel való r-ed osztályú variáczióit teszszük.

Ezt az eredményt még tovább alakithatjuk át s e végből így írjuk:

$$V_k = \sum_{l}\frac{\partial u_{l_1}}{\partial v_{k_1}}\frac{\partial u_{l_2}}{\partial v_{k_2}}\cdots\frac{\partial u_{l_r}}{\partial v_{k_r}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial u_{l_1}}\frac{\partial x_i}{\partial u_{l_2}}\cdots\frac{\partial x_i}{\partial u_{l_r}}.$$
$$(k=1, 2, \ldots, \mu)$$

De a

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial u_{l_1}}\frac{\partial x_i}{\partial u_{l_2}}\cdots\frac{\partial x_i}{\partial u_{l_r}} = U_l$$

kifejezés az

$$1, 2, \ldots, m$$

elemeknek minden olyan variácziójára nézve, melyek ugyanazoknak az

$$l_1, l_2, \ldots, l_r$$

elemeknek permutálásából keletkeznek, ugyanazon értékű. Ha tehát az összeg e tagjaiból a közös U_l-t kiemeljük, a V_k-t a következő alakban írhatjuk:

$$V_k = \sum_{l=1}^{\mu}\Big(\sum_{l}\frac{\partial u_{l_1}}{\partial v_{k_1}}\frac{\partial u_{l_2}}{\partial v_{k_2}}\cdots\frac{\partial u_{l_r}}{\partial v_{k_r}}\Big)U_l, \qquad (6)$$
$$(k=1, 2, \ldots, \mu)$$

hol l jelenti, hogy az

$$l_1, l_2, \ldots, l_r$$

az $1, 2, \ldots, m$ elemeknek hányadik, ismétléssel való r-ed osztályú kombinácziója, és hol a belső összegezés ennek az l-dik kombináczió elemeinek minden egymástól különböző permutácziójára kiterjesztendő. Ha most erre a belső összegre a következő jelet vezetjük be,

$$\sum_l \frac{\partial u_{l_1}}{\partial v_{k_1}} \frac{\partial u_{l_2}}{\partial v_{k_2}} \cdots \frac{\partial u_{l_r}}{\partial v_{k_r}} = A_{kl}, \tag{7}$$

akkor a (6) alatti eredményt részletesen a következő alakban írhatjuk ki:

$$\begin{aligned} V_1 &= A_{11} U_1 + A_{12} U_2 + \cdots + A_{1\mu} U_\mu \\ V_2 &= A_{21} U_1 + A_{22} U_2 + \cdots + A_{2\mu} U_\mu \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_\mu &= A_{\mu 1} U_1 + A_{\mu 2} U_2 + \cdots + A_{\mu\mu} U_\mu . \end{aligned} \tag{8}$$

De ezzel a tétel első részét bebizonyítottuk, mert a (8) alatti egyenletrendszerben a V függvények csakugyan az U függvényeknek oly homogén lineár alakjai gyanánt vannak előállítva, melyekben az A_{kl} együtthatók, mint (7)-ből látjuk a (3) alatti függvények elsőrendű parcziális differencziál-hányadosainak r-ed rendű homogén egész függvényei.

A tétel második része már most ebből önként következik, mert a

$$D_r = |A_{kl}|_{(k,\, l=1,\, 2, \ldots, \mu)}$$

determináns azonos azzal, melyről BREUER MÓR * e lapok hasábjain bebizonyította, hogy ez a

$$D_1 = D\left(\frac{u_1, u_2, \ldots, u_m}{v_1, v_2, \ldots, v_m}\right) = \left|\frac{\partial u_l}{\partial v_k}\right|_{(k,\, l=1,\, 2, \ldots, \mu)}$$

függvénydeterminâns $\binom{m+r-1}{r-1} = \binom{m+r-1}{m}$ - dik hatványával egyenlő,** azaz

$$D_r = D_1^{\binom{m+r-1}{m}}.$$

* BREUER MÓR: Adalék a több változós függvények elméletéhez. Math. és Phys. Lapok IV. k. 270. lap.

** RADOS GUSZTÁV: Indukált lineár helyettesítések. Math. és Termtud. Értesítő XVI. kötet, 396. lap.

II.

Mutassuk már most ki e tételnek közelebbi vonatkozását az algebrai alakok elméletéhez.

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ függvényeket kétféle előállításban ismerjük; úgy is mint az $u_1, u_2, \ldots, u_m$ és úgy is mint a $v_1, v_2, \ldots, v_m$ változók függvényeit. Mind a két előállítás alapján képezhetjük a

$$H = dx_1^r + dx_2^r + \cdots + dx_n^r$$

összeget, melyet tehát szintén vagy mint az $u_1, u_2, \ldots, u_m$, vagy mint a $v_1, v_2, \ldots, v_m$ változók függvényének tekinthetjük.

Minthogy

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial u_m} du_m, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

illetőleg

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial x_i}{\partial v_2} dv_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial v_m} dv_m, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

lesz tehát az egyik esetben:

$$H = \Phi(u_1, u_2, \ldots, u_m) = \sum_{k=1}^{\mu} \rho_k U_k \, du_{k_1} du_{k_2} \ldots du_{k_r},$$

míg a másik esetben:

$$H = \Psi(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \sum_{k=1}^{\mu} \rho_k V_k \, dv_{k_1} dv_{k_2} \ldots dv_{k_r},$$

hol természetesen $U_1, U_2, \ldots, U_\mu$; $V_1, V_2, \ldots, V_\mu$; $k_1, k_2, \ldots, k_r$-nek a régi jelentése van, míg $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$ meghatározott numerikus együtthatók.

De a H-nak Ψ alakja előállítható a Φ alakból is a (3) alatti helyettesítés alkalmazásával. Minthogy e két eredménynek egyeznie kell, látjuk, hogy a Φ, a (3) alatti helyettesítés folytán egy hozzá hasonló alakú Ψ kifejezésbe megy át, melyben a $du_1, du_2, \ldots, du_m$ helyét a $dv_1, dv_2, \ldots, dv_m$, az $U_1, U_2, \ldots, U_\mu$ helyét pedig a $V_1, V_2, \ldots, V_\mu$ foglalják el, hol mint tudjuk az elsők a

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial u_i}{\partial v_2} dv_2 + \cdots + \frac{\partial u_i}{\partial v_m} dv_m \quad (i=1, 2, \ldots, m) \qquad (9)$$

egyenletek alapján, az utóbbiak pedig a (8) alapján függnek össze.

Már most nyilvánvaló, hogy Φ a (3) alatti helyettesítéssel szemben hasonlóan viselkedik, mint az algebrai alakok a lineár helyettesítésekkel szemben; és ez a hasonlatosság még evidensebbé válik, ha a következő speciális esettel foglalkozunk.

Legyenek az (1) alatti

az
$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$
$$u_1, u_2, \ldots, u_m$$

mennyiségeknek homogén lineár függvényei:

$$x_i = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{im}u_m, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

hol tehát az összes a_{ik} mennyiségek az u mennyiségektől függetlenek; de akkor velök együtt az összes

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_k} = a_{ik} \quad \left(\begin{matrix} i=1, 2, \ldots, n \\ k=1, 2, \ldots, m \end{matrix}\right)$$

és

$$U_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik_1} a_{ik_2} \ldots a_{ik_r} \quad (k=1, 2, \ldots, \mu)$$

mennyiségek szintén függetlenek az $u_1, u_2, \ldots, u_m$ mennyiségektől.

Ha most a (3) alatti helyettesítés homogén lineár helyettesítés:

$$u_i = \alpha_{i1}v_1 + \alpha_{i2}v_2 + \cdots + \alpha_{im}v_m, \quad (i=1, 2, \ldots, m) \tag{10}$$

akkor az x-ek a $v_1, v_2, \ldots, v_m$-nek is homogén lineár függvényei; legyenek ezek:

$$x_i = b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + \cdots + b_{im}v_m \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

hol $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{im}$ a $v_1, v_2, \ldots, v_m$ mennyiségektől független és így a

$$V_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ik_1} b_{ik_2} \ldots b_{ik_r}$$

függvények sem tartalmazzák a $v_1, v_2, \ldots, v_m$ határozatlanokat. Ha most még a

$$du_k = y_k \quad (k=1, 2, \ldots, m)$$

és

$$dv_k = \eta_k \quad (k=1, 2, \ldots, m)$$

jelzéseket vezetjük be, a H-nak Φ és Ψ alakjai, mint az y-ok illetve az η-áknak r-edrendű algebrai alakjai jelennek meg; még pedig:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{u} \rho_k U_k y_{k_1} y_{k_2} \cdots y_{k_r}$$

és

$$\Psi = \sum_{k=1}^{u} \rho_k V_k \eta_{k_1} \eta_{k_2} \cdots \eta_{k_r}.$$

Minthogy az

$$y_i = a_{i1}\eta_1 + a_{i2}\eta_2 + \cdots + a_{im}\eta_m \quad (i=1, 2, \ldots, m) \tag{11}$$

homogén lineár helyettesités a (10) alatti helyettesítéssel egyenlő értékű, azért a Φ a (11) alatti helyettesítés folytán átmegy Ψ algebrai alakba, s így a transformált alak Ψ és az eredeti Φ alak együtthatói között a (8) alatti egyenlőségekben kifejezett összefüggés áll fenn, hol a jelen esetben a (8) alatti egyenlőségben szereplő együtthatók:

$$A_{kl} = \sum_{l} a_{l_1 k_1} a_{l_2 k_2} \cdots a_{l_r k_r}$$

és

$k_1, k_2, \ldots, k_r$ a k-dik

$l_1, l_2, \ldots, l_r$ az l-dik

ismétléssel való r-ed osztályú kombináczíója az

$$1, 2, \ldots, m$$

elemeknek, az összegezés pedig az

$$l_1, l_2, \ldots, l_r$$

elemeknek összes külömböző permutáczíójára kiterjesztendő. De akkor a (8) alatti egyenlőségek az algebrai alakok együtthatói között azt az összefüggést fejezik ki, melyet indukált lineár helyettesítés néven ismerünk.

Ezzel már most kétségtelenné válik, hogy a tárgyalás első részében kimondott tételünkben előforduló indukált helyettesités, a jelen speciális esetben, azonos az algebrai alakok elméletében fellépő indukált lineár helyettesitéssel.

III.

Tárgyalásaink befejezéseül szolgáljon e tételnek a felületek elméletére való egyik alkalmazása.

Vegyük u. i. azt az esetet, midőn:

$$n=3,\ m=2,\ r=2;$$

akkor az

$$x_1=\varphi_1(u_1, u_2),\quad x_2=\varphi_2(u_1, u_2),\quad x_3=\varphi_3(u_1, u_2)$$

mennyiségek, ha azokat egy pont három koordinátájának tekintjük, a felületek GAUSS-tól eredő paraméteres analitikai előállítását szolgáltatják. Az 1, 2 elemeknek összes másodosztályú ismétléssel való kombináczióinak száma $\mu=3$, melyek a következők:

$$(1, 1),\quad (1, 2),\quad (2, 2);$$

ezeket az említett sorrendben első, második, ill. harmadik kombináczionak fogjuk nevezni.

A felületek elméletében oly fontos szerepet játszó három elsőrendű GAUSS-féle alapmennyiség: E, F, G, mint könnyen belátjuk, a tételünk értelmébe előállitható három U függvénynyel azonos; ugyanis

$$E=\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1}\right)^2=U_1$$

$$F=\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\frac{\partial x_1}{\partial u_2}+\frac{\partial x_2}{\partial u_1}\frac{\partial x_2}{\partial u_2}+\frac{\partial x_3}{\partial u_1}\frac{\partial x_3}{\partial u_2}=U_2$$

$$G=\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial u_2}\right)^2+\left(\frac{\partial x_3}{\partial u_2}\right)^2=U_3.$$

Ha most az

$$u_1=f_1(v_1, v_2)$$
$$u_2=f_2(v_1, v_2)$$

helyettesités segitségével a felület koordinátáit mint a v_1, v_2 paraméterek függvényeit állítjuk elő:

$$x_1 = \psi_1(v_1, v_2), \quad x_2 = \psi_2(v_1, v_2), \quad x_3 = \psi_3(v_1, v_2),$$

akkor ezekre a paraméterekre vonatkoztatott elsőrendű Gauss-féle alapmennyiségek E', F', G' a tételben előforduló V_1, V_2, V_3 függvényekkel azonosak.

E kétféle alapmennyiség között tehát érvényes a (8) alatti összefüggés:

$$E' = A_{11} E + A_{12} F + A_{13} G,$$
$$F' = A_{21} E + A_{22} F + A_{23} G,$$
$$G' = A_{31} E + A_{32} F + A_{33} G,$$

hol

$$A_{kl} = \sum_l \frac{\partial u_{l_1}}{\partial v_{k_1}} \frac{\partial u_{l_2}}{\partial v_{k_2}},$$

ha k_1, k_2 az 1, 2-nek k-dik, és l_1, l_2 az 1, 2-nek l-dik másod osztályú ismétléssel való kombinácziója, az összeadás pedig az l-dik kombináczió elemeinek összes külömböző permutácziójára kiterjesztendő. Ha ezeket az együtthatókat részletesen kiszámítjuk, a következő értékeket kapjuk:

$$A_{11} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\right)^2, \quad A_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \frac{\partial u_2}{\partial v_1} + \frac{\partial u_2}{\partial v_1} \frac{\partial u_1}{\partial v_1} = 2 \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \frac{\partial u_2}{\partial v_1},$$
$$A_{13} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial v_1}\right)^2,$$
$$A_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \frac{\partial u_1}{\partial v_2}, \quad A_{22} = \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \frac{\partial u_2}{\partial v_2} + \frac{\partial u_2}{\partial v_1} \frac{\partial u_1}{\partial v_2}, \quad A_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial v_1} \frac{\partial u_2}{\partial v_2},$$
$$A_{31} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial v_2}\right)^2, \quad A_{32} = \frac{\partial u_1}{\partial v_2} \frac{\partial u_2}{\partial v_2} + \frac{\partial u_2}{\partial v_2} \frac{\partial u_1}{\partial v_2} = 2 \frac{\partial u_1}{\partial v_2} \frac{\partial u_2}{\partial v_2},$$
$$A_{33} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial v_2}\right)^2.$$

Ezzel a kétféle elsőrendű alapmennyiség között fennálló összefüggés teljesen meg van határozva; minthogy pedig

$$\binom{m+r-1}{m} = \binom{2+2-1}{2} = 3,$$

a rendszer determinása:

$$D_2 = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\right)^2 & 2\frac{\partial u_1}{\partial v_2}\frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \left(\frac{\partial u_2}{\partial v_1}\right)^2 \\ \frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial u_1}{\partial v_2} & \frac{\partial u_1}{\partial v_1}\frac{\partial u_2}{\partial v_2} + \frac{\partial u_2}{\partial v_2}\frac{\partial u_1}{\partial v_2} & \frac{\partial u_2}{\partial v_1}\frac{\partial u_2}{\partial v_2} \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial v_2}\right)^2 & 2\frac{\partial u_1}{\partial v_2}\frac{\partial u_2}{\partial v_2} & \left(\frac{\partial u_2}{\partial v_2}\right)^2 \end{vmatrix} = D_1^3,$$

hol

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial v_1} & \frac{\partial u_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_2} \end{vmatrix},$$

az f_1, f_2 függvények függvény-determinánsa.

Privorszky Alajos.

AZ ELEKTROLYTEK ELEKTROMOS TRANSPARENCIÁJA.*

A Hertz-féle hullámoknak az elektrolyteken való áthatolása tanulmányozásánál meggyőződtem arról, hogy a hullámok abszorbeálásának a kimutatása és mérése annál biztosabb, minél intensivebb a hullám; minél kisebb a műszer kezelésénél az áramkör zárásával járó mechanikai rázás; s minél biztosabban, állandóbban állíthatjuk be az egy kontactusu kohérert a szükséges érzékenységre, s az állandó reagálásra e hullámok irányában. E tapasztalati tényeket tartva szem előtt, módosítottam eddigi készülékemet s eljárásomat. Ugyanis a hullámadó készülék oszcillátorát függélyesen haladó, 1·6 m. hosszú, 0·1 mm. átmérőjű elszigetelt rézdróttal kötöttem össze. Ugyanilyen irányú, nagyságú s méretű drót köti összi a kohérer egyik végét. A hullám intensitása ezzel erősebb és állandóbb lett. Mert míg eddig a 2 m. távolságról keltett hullám — ha az oszcillátoron és a kohéreren nem volt a fent jelzett resonátor — nem volt képes a 33 % kénsavoldat 5 mm. vastagságú rétegén áthatolni, most már 15 mm. magasságú rétegen is áthatol s kohérereffectust hoz létre. A kohérert és az elektrolytet tartó készüléket is, az erősebb mechanikai rázások kikerülése végett, teljesen átalakítottam.**

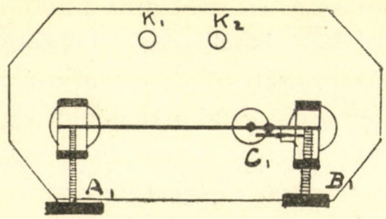
Egy 23 cm. átmérőjű, 2 cm. vastag vaskorong kerületén 10 mm. széles, 8 mm. mély vályúban higany felett nyugszik a kohérert takaró 23 cm. magas fémfedő, mely onnan kényelmesen levehető. A korong három nyilását három fémcső hullám-mentesen

---

* Előadatott a Math. és Phys. Társulat 1905. ápr. 13-iki ülésén.

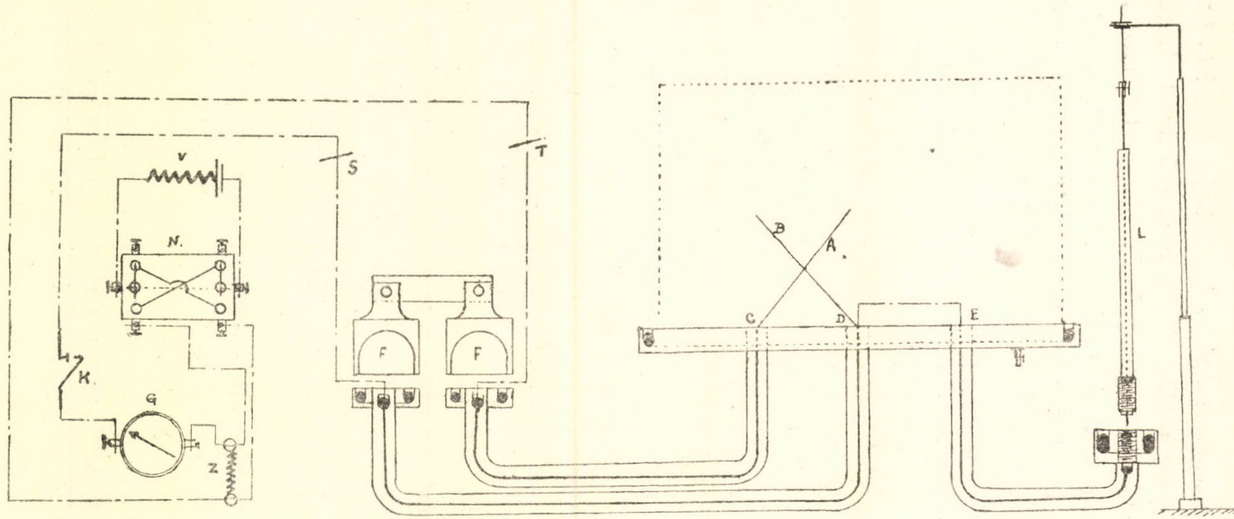
** Mathematikai és Természettudományi Értesítő. XXII. köt. 4. füz. 313. l.

zárja el; mindegyik fémcsőben jól elszigetelt fém vezető halad. E vezetőknek a korongból kiálló részei 15 cm. hosszuságuak, hogy a kohérer szorítóival könnyen összekapcsolhassuk. Mindegyik vezető a fémcső másik végén platinadróttal beforrasztott, higanynyal megtöltött üvegcsövecskében végződik, a telep elektrodjainak a befogadására. A két fémcső eme két végén vaskorong van, hogy a szélein higanynyal megtöltött vályuba egy kétkarú emelővel, egyszerre mozgatható, két fémfedőt lebocsáthassunk; e két fémfedővel az elektromos hullámokat a szigetelt vezetőtől s így a kohérertől is teljesen elzárjuk. A harmadik fémcső végén szintén ilyen vaskorong van, ez azonban lent még csavarmenettel is el van látva, hogy a megvizsgálandó folyadékot tartalmazó platina-csövet — mely alól szintén vas-csavarban végződik — belecsavarhassuk. A platina-cső és vas-csavar között a tért higany tölti be, hogy a hullám itt se hatolhasson a kohérerhez. E három fémcső három vaskorongjának a közepén van a higanynyal megtöltött üvegcső, még pedig kettő a korong felszinétől 3 mm. mélységben, a harmadik, melyen a csavartok van, 30 mm. mélységben. A platinacső közepén végighaladó platinadrót a cső alján szigetelő dugón megy át úgy, hogy e dugóból kiálló, megvastagított vége, a becsavarás után a higanynyal megtöltött üvegcsővel érintkezik, s így a platinadrót magával a kohérer egyik végével áll fémi összeköttetésben. A platinacsőbe 51·4 cm^3 folyadék fér — mikor a platinadrót is benne van — 1 cm^3 folyadéknak megfelel a csőben 7·6 mm. magasság. Ha a kohérer egyik végét a fémcső elszigetelt egyik vezetőjével, a kohérer másik végét pedig a másik két cső elszigetelt két vezetőjével összekötjük, s a két fémcső fémkorongjára lebocsátjuk a fémfedőt, akkor az elektromos hullám csak a platinacső platinadrótján juthat a kohérerhez. A platinacsőből kiálló platinadrót függélyesen halad 1·6 m. magasságig, hol egy elszigetelt fogó tartja. Hullámkeltés után a két fémcső vaskorongjának higanyában fekvő két vaskupakot az emelővel felemeljük, s a telep elektrodjait a kohérerrel összeköttetésben álló, higanynyal megtöltött üvegcsőbe tesszük s így az áramkört zárjuk. Ha a platinacsőben szigetelő folyadék vagy fémreszelék van, melyeken a hullám keresztülhatol, a kohérer ellenállása a hullám hatására megkisebbedik, s a galvanométer tűje kitér. Ha azonban elektrolytet öntünk a platinacsőbe, s a hullámkeltés alatt, a két fémkúppal, a hullám utját elzárjuk s ezután az áramkört zárjuk; a tű annál kisebb kilengést tesz, minél több elektrolyt van a csőben; végre egy bizonyos vastagságú folyadékrétegnél — mely ugyanazon folyadékra állandó, — a hullám abszorbeálása után a kohérer, ellenállásában már nem kisebbedik meg, s a tű 0°-on marad. Megjegyzem, hogy ha a hullámadó készüléknél, akár a szikra közt kisebbítjük, akár a hullámadó távolságát kisebbnek vesszük, vagy a resonátorok hosszúságát megváltoztatjuk, már a hullám áthatol az előbbi folyadék vastagságán. Kisérleteimnél a megoszlató gépnél a szikra köz 7 mm. volt, az oszcillátornál meg 5·4 mm. A jeladó s hullámfelfogónak egymástól való távolsága 2 m.: a kisérletezés 3 szikrával történt. S azt észleltem, hogy 0·15 cm^3 folyadék — melynek a csőben 1·14 mm. magasság felel meg, elegendő arra, hogy a hullám kohérer-effektust ne hozzon létre abban az esetben, ha e folyadékoszlopot ahhoz a határjelző folyadékoszlophoz öntjük, melyen még a hullám áthatolva képes volt a kohérer ellenállását megkisebbíteni. Két méternyi távolságban adott hullámnál már nem is szükséges hullámkeltés alatt a fémkúpokat használni, mert e fémfödők nélkül sem juthat a hullám a fémkorong felszinénél mélyebben fekvő üvegcső higanyán át a kohérerhez; vagy legalább kohérer-effektust létrehozni nem képes.



I. ábra.

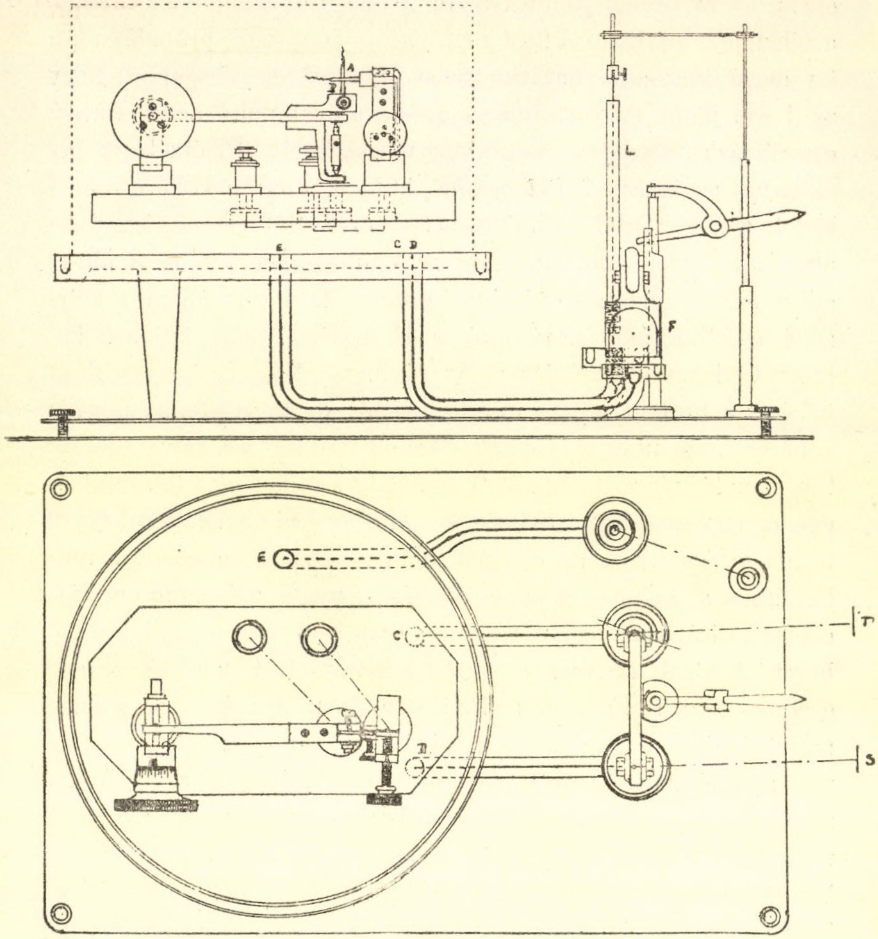
A kohérer érzékeny, állandó s biztos beállítását a Szvetics Emil elektromérnök úr elektrotechnikai műhelyében készült contactmikrométernek nevezhető müszerrel értem el. Az I-el jelölt vázlaton A_1 csavar a mikrométert, B_1 pedig a beállító-csavart mutatja. A mikrométer egy szilárdan álló, 0·5 mm-re osztott hosszosztásból és elcsavarható, százas kerületi osztásból áll. A mikro-



II. ábra.

méter 0·25 mm. magasságú, s így 2 teljes fordulata teszi meg a hosszosztásnak egy osztás részét, azaz 0·5 mm-t. E mikrometer egy kétkarú emelőnek a nagyobb karját — 100 mm. hosszú — mozgatja; rövidebb karja pedig az abba fogott, függélyesen álló drótig (kohérerig) pontosan 4 mm. Az áttételi rendszer eme számadataiból következik, hogy a mikrométernek 1·00 fordulatánál, tehát 100 osztásrészénél, 0·01 mm.-nyi utat tesz meg a rövidebb karba fogott drótdarab (kohérer); 0·10 fordulatnál, vagyis 10 osztályrésznél 0·001 mm.-nyit és 0·01 fordulatnál, azaz 1 osztályrésznél pedig csak 0·0001 mm.-nyi utat. A műszer középső részén a C_1 pilon körül forgó emelő látható; jobboldali kisebb karjának felső részén a függélyes drót (kohérer) számára készült csiptető van, melynek furata 3·2 mm. A 2 cm. hosszú s 2 mm. átmérőjű aluminium-drótot — kohérert — melynek alsó részét előzetesen 3.15 mm. átmérőjű s 6 mm hosszú kaucsukból készült hengerkébe toljuk, oly módon helyezzük el a furatba, hogy az emelőből felénk kinyuló gombot megnyomjuk: ezzel az ollószerű csiptető kinyilik, s ha most a gombot visszabocsátjuk, a kaucsukban végződő aluminiumdrót — a kohérer — rögzítve van. Eme aluminiumdrót felső végén van az áramvezető drót, mely K_1 szorítóval érintkezik. A B_1-vel jelölt beállító szerkezeten a szintén 2 cm. hosszú s 2 mm. átmérőjű aluminiumdrót — a kohérer, melynek alsó része ugyanolyan méretű kaucsukból készült hengerkében végződik, mint az előbbi aluminium-dróté — egyszerű szorítócsavarral rögzíthető; e drótnak szintén a felső végén van az áramvezető, mely K_2 csavarral kapcsolható össze.

E két aluminiumdrót érintkezése adja az egy kontaktusu kohérert. A kohérer beállítása a következő: egy normál elemet (0·9 V) 500 Ω-al egy áramirányváltoztató készülékbe kapcsolok; innen az áramot egy rheosztatba vezetem, hol áramelágazást csinálok: az egyik ágat adja a rheosztatból képezett 1 Ω-nyi ellenállás, a másik ágba jön a tükrös galvanométer (5 Ω), az áramszakító és a kohérer, mint a II-vel jelölt schéma mutatja. A mikrométert úgy állítom be, hogy a hossz- és kerületi osztásnak nullpontjai összeessenek. A beállító-csavart ezután óvatosan addig csavarom az óramutató irányában, a míg a galvanométer tűjének a kilengése kontaktus-állást nem jelez. Többszöri próbálás után így megállapítom a határhelyzetet. Ezután megvizsgálom, hogy az A_1-vel jelölt mikrométernek mekkora óramutatóellenes irányú elcsavarása szükséges a kontaktus megszűntéig. Ily érzékeny beállításnál az áramzárásnál fellépő hullám gyakran kohérer-effectust hoz létre; azért a mikrométert óramutatóellenes irányban addig csavarom óvatosan, míg az áramzárásra a kohérer ellenállása egy esetben sem kisebbedik meg. Ha ezt az állandó helyzetet megtaláltam, hozzáfogok a Hertz-féle hullám utján a kohérer végleges beállításához. Az bizonyos, hogy az így beállított kohérer a hullám keltére mindig reagál; de megtörténik, hogy a kohérer rázás után is megtartja kis ellenállását s a galvanométer tűje nem tér vissza azonnal a 0°-ra. Ezért a mikrométert óramutató ellenes irányban addig csavarom óvatosan, míg a kitért tű 0°-ra nem tér vissza. Ezt az eljárást mindaddig ismétlem, míg a hullám után a kohérer gyenge megrázásakor a galvanométer tűje ellenkező irányban azonnal ki nem csap s el nem foglalja a 0°-ú helyzetet. Csak ezután, ha sem az áramzárásra nem tér ki egy esetben sem a tű, sem a hullámkeltés után a kohérer gyenge megrázásakor nem marad fenn a kohérerben áthidalás — kezdem meg az elektrolyteken áthaladó hullám hatásának a tanulmányozását. Ha egy-két heti folytonos kisérletezés után a kohérer rázás után nem mutatna ellenállásában megnagyobbodást, akkor a kohérert üregében megfordítom, hogy felületének más pontjai érintkezzenek, vagy új kohérert használok s azután újból beállítom. De ilyen esetben, nehogy kisérleti adataink más és más érzékenységű kohérerre vonatkozzanak, addig igazítom a mikrométerrel a kohérer egymástól való távolságát, míg a hullám a már egyszer megvizsgált folyadéknak ugyanazon vastagságú rétegén ugyanazt a hatást nem mutatja; csak ekkor folytatjuk tovább a kisérletezést más folyadékkal. A mikrométert s az elektrolytet tartó készüléket a III. ábra mutatja. E berendezéssel eddig a JK 9 oldatával tettem kisérletetet. A hullámkeltésre egy harmincz czentiméter átmérőjű Wimshurst-féle gépet husználtam a KJ.



III. ábra.

Lindmann-féle oszczillátorral; a hullám hossza ca 20 czentiméter.

A kisérlet eredménye.

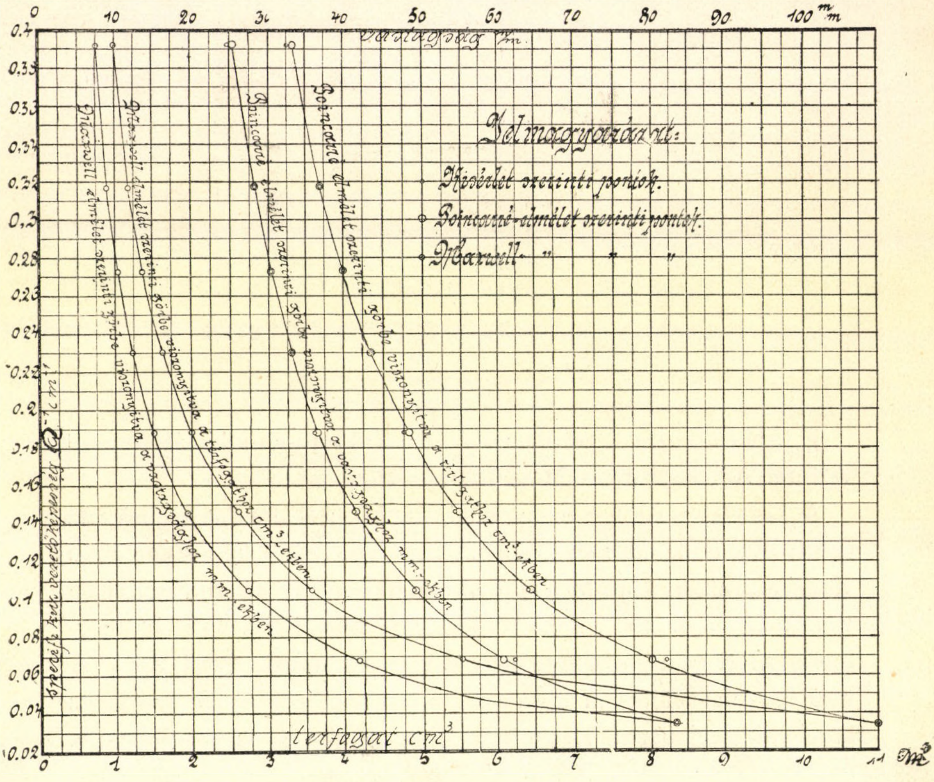
Százalék	Az elektrolyt vezetőképessége Ω^{-1} cm.$^{-1}$	átbocsátó mennyisége cm.^{3}-ben	átbocsátó magassága cm.-ben
	JK		
5%	0·034	11	8·36
10%	0·068	8·2	6·232
15%	0·105	6·4	4·864
20%	0·146	5·4	4·104
25%	0·188	4·75	3·61
30%	0·230	4·35	3·306
35%	0·273	4·00	3·04
40%	0·317	3·7	2·812
50%	0·392	3·2	2·432

E táblázathoz a vezetőképességet a Kohlrausch-féle táblázatból vettem. Az elektrolytet Merk-től szereztem be.

A kisérleti adatok középszámai tíz kisérlet eredményének. Az erektrolyt hullámátbocsátó képessége és vezető képessége közti viszony grafikus kimutatása és az elmélettel való összehasonlítása végett úgy a Maxwell-, mint a Poincaré-féle kifejezés szerint megszerkesztettem a görbéket, hogy a kisérlet alapján nyert görbével való összehasonlítás megmutassa, hogy a kisérleti adat melyikhez közeledik legjobban. E görbékhez az adatokat az abscissára az elektrolytek cm^3-ben, illetve milliméterekben kifejezett ama folyadék mennyiségei adják, melyek a hullámot még átbocsátják; az ordinátára pedig az elektrolytek specifikus vezetőképességei.

Az elmélet és kísérlet összehasonlításához kiinduló pontnak, illetve adatnak vettem a *JK* 5 % oldatának vezetőképességet: 0·034-et s a kisérlet adatát, a 11 cm^3-t, illetve a 8·36 cm.-t.

A két adathoz viszonyítottam az elméletnek megfelelően az átbocsátó réteg köbcentiméterben kifejezett mennyiségét, s centiméterekben az átbocsátó réteg vastagságát, s nyertem a Maxwell- és a Poincaré-féle kifejezés görbéjéhez az ordináta adatait. A nagyobb vezetőképességet ugyanis elosztottam mindig az 5 %-os oldat 0·034 vezetőképességével, az így nyert hányadossal pedig a 11 cm³-t, vagy a neki megfelelő 8·36 cm-t s ez adta a Maxwell-féle görbéhez az adatot.



IV. ábra.

A Poincaré-féle kifejezés görbéjéhez a megfelelő adatokat úgy nyertem, hogy az előbb nyert hányados négyzetgyökével osztottam el a 11 cm³-t, illetve a 8·36 centimétert. Az összehasonlítás eredményét a táblázatos kimutatás és a grafikai ábrák mutatják.

Kisérleti adat s ebből az elmélet szerint számított eredmény.

Kisérleti adat				Az elméletnek megfelelő eredmény			
				Poincaré-féle		Maxwell-féle	
Százalék	Az elektrolyt vezetőképessége Ω^{-1} cm.$^{-1}$	Az elektrolyt átbocsátó					
		mennyisége cm.^{3}	magassága cm.	mennyisége cm.^{3}	magassága cm.	mennyisége cm.^{3}	magassága cm.
		JK					
5%	0·034	11	8·36	11	8·36	11	8·36
10%	0·068	8·2	6·23	8	6·08	5·5	4·18
15%	0·105	6·4	4·84	6·44	4·89	3·56	2·71
20%	0·146	5·4	4·10	5·46	4·15	2·57	1·95
25%	0·188	4·75	3·61	4·82	3·66	1·99	1·51
30%	0·230	4·35	3·31	4·35	3·306	1·63	1·24
35%	0·273	4·00	3·04	3·99	3·03	1·37	1·04
40%	0·317	3.70	2·81	3·70	2·81	1·18	0·89
50%	0·392	3·2	2·43	3·39	2·53	0·99	0·76

A kisérleti adatok s a szerkesztett görbék a Poincaré-féle kifejezést erősítik meg; tehát az elektrolytek hullámátbocsátó képessége nem a specifikus vezetőképességgel, hanem ennek négyzetgyökével áll fordított viszonyban. Ebből következik, hogyha e kisérleti adatokat — akár az átbocsátó folyadék mennyiségét cm^3-ekben, akár az átbocsátó folyadékréteg vastagságát, cm.-ekben, — megszorozzuk az illető folyadék speczifikus vezetőképességének négyzetgyökével, egy konstanst kell nyernünk. Eme állandó középértéke, a mennyiségre 2·069, a magasságra 1·584. Ha a hullámátbocsátó folyadék mennyiségét m-mel, az átbocsátó folyadékréteg vastagságát μ-vel s a folyadékréteg speczifikus vezetőképességét $\varkappa$-al jelölöm, úgy a *JK*-nál az egyes oldatokra a következő értékeket kapjuk:

Százalék	$m\sqrt{\varkappa}$	$u\sqrt{k}$
5%	11 × 0·1843 = 2·0273	8·36 × 0·1843 = 1·5407
10%	8·2 × 0·2607 = 2·13774	6·232 × 0·2607 = 1·6247
15%	6·4 × 0·3240 = 2·0736	4·864 × 0·3240 = 1·5759
20%	5·4 × 0·3821 = 2·06334	4·104 × 0·3821 = 1·5681
25%	4·75 × 0·4336 = 2·0596	3·61 × 0·4331 = 1·6652
30%	4·35 × 0·4796 = 2·08626	3·306 × 0·4796 = 1·5855
35%	4 × 0·5224 = 2·0896	3·04 × 0·5224 = 1·5880
40%	3·7 × 0·5630 = 2·0831	2·812 × 0·5630 = 1·5831
50%	3·2 × 0·6261 = 2·0032	2·432 × 0·6261 = 1·5226
	Középérték: 2·069304	Középérték: 1·5837

Károly Irén.

A LÉGNYOMÁS VERTIKÁLIS GRÁDIENSÉRŐL.[1]

Midőn PASCAL 1648-ban felkérte sógorát PERRIERT, hogy egy Torricelli-féle higanylégsúlymérőt vigyen fel a Puy de Dôme-ra és ott a higanyoszlop csökkenését figyelje meg, akkor már a barometeres magasságmérésnak alapja meg volt vetve.[2] A magasságkülönbség és a légnyomáskülönbség közötti összefüggést HALLEY fedezte fel 1686-ban és találta, hogy két észlelőhely magasságkülönbsége arányos a megfelelő légnyomások logarithmusainak különbségeivel; vagyis *míg a magasság a tengerszinétől fölfelé számtani sorban növekszik, addig a megfelelő légnyomás geometriai sorban csökken.*[3] Ezen a tételen nyugszik a hypszometrikus képlet bármely alakja, mert a későbbi vizsgálatok HALLEY tételét csak annyiban módosították, amennyiben az atmoszfera hőmérsékletét és nedvességi fokát is számításba vették. A barometrikus magasságmérés képletének mai alakja LAPLACE-tól származik és a nyugalomban levő légoszlopra vonatkozik.[4]

Az elmélet vagy közvetlenül tárgyalja a kérdést, vagy pedig a hydrosztatika, illetve a hydrodynamika differencziálegyenleteit alkalmazza az atmoszferára.

---

[1] Előadatott a Math. és Physikai Társulat 1905 márczius 9-iki ülésén.

[2] PASCAL: «Recit de la grande expérience de l'equilibre des liqueurs» Paris, 1648. Az eszme különben DESCARTEStől származik. Ez kitűnik DESCARTESnak MERSENNEhez 1647 decz. 13. irt leveléből: «PASCALnak tanácsoltam, hogy vizsgálja meg, vajjon a hegyen a higany a csőben oly magasra emelkedik, mint alant. Én nem hiszem, hogy az ott fel fog emelkedni.»

[3] HALLEY: A discourse of the rule of the descrease of hight of the mercury in the barometer». Phil. Trans. 1685.

[4] Az irodalom, mely ezzel foglalkozik, igen kiterjedt. Gyűjteményes összefoglalást közöl R. RÜHLMANN: «Die Barometrischen Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre». Leipzig, 1870. V. ö. J. HANN: «Lehrbuch der Meteorologie». Leipzig, 1901.

1. *A dynamikai korrekczió elméleti tárgyalása.* A következőkben az említett differencziálegyenletek alkalmazását fogjuk tárgyalni és a hypszometrikus képletnek olyan alakját akarjuk megszerkeszteni, mely a mozgásban levő levegőre is érvényes legyen.

a) Tegyük fel, hogy a levegő, mely akár száraz, akár nedves legyen, nyugalomban van és a tökéletes gázállapotot nagy mértékben megközelítvén, a MARIOTTE-GAY-LUSSAC egyesített törvénynek hódol. A légtömeg valamely pontja a térben, hol nyomása p és sűrűsége ρ, a fölfelé irányított Z tengelyű derékszögű koordinata rendszerre vonatkoztatva, x, y, z által legyen meghatározva. A légtömeg ezen helyzetéből kimozdulván, x', y', z' új helyzetbe kerül, amikor nyomása is megváltozik. Ezen nyomásváltozás alatt a levegő oly munkát végez, mely a külső erő hatásából származott munkával egyenlő lesz. A mondott összefüggést, ha az elmozdulást eleminek tekintjük és a külső erő derékszögű összetevőit X, Y, Z-vel jelöljük, következően fejezhetjük ki:

$$dp=\rho\,[Xdx+Ydy+Zdz].$$

Tegyük fel, hogy a külső erőösszetevők csupán a koordinátak függvényei, akkor

$$X=-\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=-\frac{\partial U}{\partial y}\quad \text{és}\quad Z=-\frac{\partial U}{\partial z},.$$

ha a jellemző erőfüggvényt $U\equiv U(x, y, z)$-vel jelöljük.

Feltevésünk értelmében a levegő a MARIOTTE-GAY-LUSSAC törvénynek hódol, vagyis a nyomása a sűrűségével arányos, amit $p=\gamma\rho$-val fejezhetünk ki, hol γ arányossági tényezőt jelent, úgy, hogy ezek helyettesitése után a fenti differencziálegyenlet integrálja következő lesz

$$\lg p=C-\frac{1}{\gamma}U,$$

hol C az integráczió állandóját jelenti.

Alkalmazzuk az egyenletet a ZZ' tengely mentén két különböző magasságban, azon megszorítással, hogy egyedül a Föld vonzása legyen az a külső erő, melynek hatása ellen a nyomásváltozás munkát végez, ekkor $U=gz$. Legyen továbbá az alsó állomáson a nyomás p_2, a magasság z_2 és a felső állomáson p_1 illetve z_1, a két helynek magasságkülönbsége pedig $z_1-z_2=h$. Ezek helyettesítése után az integrálegyenlet a következő:

$$h=\frac{\gamma}{g}\lg\frac{p_2}{p_1},$$

vagy

$$h=\frac{\gamma}{Mg}\log\frac{p_2}{p_1}, \dots (a)$$

hol $M=0\cdot4342945$ a természetes logarithmus modulusa és g a középnehézségi intenzitást jelenti. Ez már a hypszometrikus képlet, melyet a számításra könnyen alkalmassá tehetünk.

A légnyomást mindenkor ugyanazon állapotra ($0°$ hőfokra) vonatkoztatott higanyoszloppal fejezhetjük ki, mert $p=\sigma.b.g$, hol σ a higany sűrűségét, b a zérus hőfokra redukált barometer állást és g az észlelőhelyen a nehézségi intenzitást jelenti. A γ-t pedig következően számíthatjuk ki; mivel

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{\rho}{p}=\frac{\rho_0}{p_0}\cdot\frac{1-0\cdot378\frac{e'}{p}}{1+0\cdot00367\theta t},$$

tehát

$$M\frac{g}{\gamma}=0\cdot4342945\cdot\frac{1\cdot29305}{10333}\cdot\frac{1-0\cdot378\frac{e}{b}}{1+0\cdot00367t}\cdot\frac{g}{g_0},$$

hol g_0 a tengerszínén és $45°$ szélesség alatti nehézségintenzitást jelenti és a mértékegység a m, meg a m^3.

Ennek helyettesítése után az (a) alattiból a következőt nyerjük

$$\log B=\log b+\frac{h}{a}\cdot\frac{1-0\cdot378\frac{\varphi}{\eta}}{1+0\cdot00367\theta}, \qquad \text{(I)}$$

hol B az alsó, b a felső észlelőhelynek zérus fokos és a nehézségi intenzitásnak a magasságkülönbségből származott korrekczióval ellátott barometer állásokat, az a pedig a következő állandót jelenti *

* Lásd p. o. J. HANN: «Lehrbuch der Meteorologie» 776. old.

$$a = 18400\,(1 + 0{\cdot}00259 \cos 2\lambda)\left(1{\cdot}00157 + \frac{h+2z}{R}\right);$$

λ az észlelőhely geografiai szélességét, z az alsó állomás tengerszíni magasságát és $R = 6371104$ m a Föld sugarát jelenti. Az (I) alattiban a $\frac{\varphi}{\eta}$ az alsó, meg a felső állomás közötti légoszlop páranyomásából és légnyomásából képezett hányados középértékét, θ pedig ugyancsak a légoszlop középhőmérsékletét jelenti, mely rendesen a felső és alsó észlelőhely középhőmérsékletét szokta jelenteni.

A barometer higanytömegének változása a nehézségi gyorsulás változásával van szoros összefüggésben. Ugyanis ismeretes, hogy valamely észlelőhelyen a nehézségi gyorsulás az észlelő hely geografiai szélességével (λ) és tengerszíni magasságával (h) áll összefüggésben és pedig a szabad atmoszferában (léghajós méréseknél)

$$g = g_0 (1 - 0{\cdot}00259 \cos 2\lambda - 0{,}000000314 h)$$

a szárazföldi helyeken pedig

$$g = g_0 (1 - 0{\cdot}00259 \cos 2\lambda - 0{\cdot}000000196 h),$$

hol g_0 a nehézségi gyorsulás normális értékét jelenti.

E szerint tehát valamely észlelőhelyen leolvasott higanybarometer állásából, a tengerszíni és 45° szélesség alatti barometerállást következő képlettel számítjuk ki

$$b_0 = b\,(1 - 0{\cdot}00259 \cos 2\lambda - 0{\cdot}000000196 h).$$

Az (I) alatti képletet használják a meteorologiában, midőn a különböző helyeken észlelt légnyomásokat ugyanazon szintre — a tengerszínre — átszámítják, hogy aztán az izobárok megszerkeszthetők legyenek. Ezen tengerszíni redukczióhoz azonban még az is szükséges, hogy ismerjük a léghőmérséklet változását a különböző magasságokban. A léghajós megfigyelésekből következő tapasztalati eredményt nyerünk:

$$t = t_0 - 0{\cdot}00458 h - 0{\cdot}00021 h^2,$$

vagyis közelítően a léghőmérséklet csökkenése minden 100 méteres emelkedésnél 0·5 C°-t tesz.

Ezen tapasztalati eredmény felhasználásával a redukcziót könnyen végezhetjük.

Megjegyzem, hogy az (I) alatti képletet HANN egyszerűsítette,[1] a mennyiben a nedvességi és hőmérsékleti tényezőket összevonta, ekkor

$$\log B = \log b + \frac{h}{a}[1+0{\cdot}002\,(t_1+t_2)]^{-1}, \qquad (\mathrm{I}')$$

hol B a tengerszíni, b az észlelt nullfokos és a nehézségokozta korrekcziós barometerállást, a t_1 az észlelt léghőmérsékletet és t_2 a tengerszínre számított hőmérsékletet, h a tengerszíni magasságot jelenti, (tehát $z=0$).

Az (I') alatti a számításra már alkalmas és csak igen kevéssel tér el az (I) alattitól.[2] A két képlet közötti különbséget (I'—I) különböző hőmérsékleteknél és különböző magasságokban RÓNA kiszámította és az eredményeket következő táblázatba foglalta:[3]

C°	100 m	200 m	300 m	400 m	500 m	600 m
−10°	−0·05	−0·08	−0·11	−0·15	−0·19	−0·22
0°	−0·02	−0·03	−0·05	−0·17	−0·08	−0·09
+10°	0·00	0·00	0·00	0·00	+0·01	+0·01
+20°	0·00	+0·02	+0·03	+0·04	+0·05	+0·05.

Ezen különbségi táblázattal tehát I'-ről az I-re való átmenet igen könnyű.

b) Az előző két képlet addig érvényben marad, míg a h magasságú légoszlop nyugalomban van. Ez a két képlet azonban módosul, ha a levegő mozgásban van. Hogy a képlet módosított alakját megszerkesszük, alkalmazzuk az inkompresszibilis folyadékok staczionárius mozgását jellemző differencziálegyenleteket

[1] J. HANN: «Lehrbuch der Meteorologie» p. 782.

[2] J. HANN: «Die Vertheilung des Luftdruckes über Mittel- und Süd-Europa».

[3] RÓNA ZS.: «A légnyomás a Magyar Birodalomban 1861-től 1890-ig».

a levegőre, mely most is eleget tesz a MARIOTTE-GAY-LUSSAC-féle törvénynek.

Az inkompresszibilis folyadékok dynamikai egyenletei EULER-féle alakban következők:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{d^2v}{dt^2} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (\alpha) \\ \frac{d^2w}{dt^2} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

hol $u=u(x, y, z, t)$, $v=v(x, y, z, t)$, $w=w(x, y, z, t)$ az x, y, z pontban levő ρ sűrűségű és p nyomású folyadéktömeg sebesség-összetevőit ($V^2=u^2+v^2+w^2$), az X, Y, Z a külső erőösszetevőket és t a folyó időt jelenti.

A fenti egyenletrendszerhez járul még az inkompresszibilis folyadékoknak tömegváltozatlanságát jellemző kontinuitás egyenlete

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right\} = 0 \qquad (\beta)$$

és a tapasztalásból nyert összefüggés, mely a nyomást és a sűrűséget jellemzi, t. i.

$$p = f(\rho).$$

Ez az öt egyenlet az inkompresszibilis folyadékok transzlatorikus mozgását teljesen leírja, ha azonban a folyadékrészecske haladó mozgáson kívül még forgó mozgást is végez, akkor a tengelyek körüli forgásösszetevőket a következő egyenletek határozzák meg:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ \eta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right), \qquad (\gamma) \\ \zeta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Ha ezeket az egyenleteket az (α) alattiba helyettesítjük, nyerjük

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + 2(v\zeta - w\eta) &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(w\xi - u\zeta) &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2(u\eta - v\xi) &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial z}. \end{aligned} \qquad (\alpha')$$

Ha X, Y és Z most is oly erőösszetevőket jelentenek, melyeknek jellemző potencziáljuk $U \equiv U(x, y, z)$ lesz, akkor

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0,$$

vagyis a külső erő a folyadékban forgást nem létesít, a mit HELMHOLZ így fejezett ki: ha a folyadékrészecske kezdetben forgó mozgásban volt, akkor az továbbra is forgásban marad és ha kezdettől fogva nem forgott, később sem fog forgásba jönni.

A mozgásnak tehát két nemét különíthetjük el, t. i.: Ha ξ, η, ζ nem zérus, vagyis a folyadékrészecske kezdettől fogva forgást is végez, akkor a mozgást *örvénylőnek* mondjuk; ha pedig $\xi = \eta = \zeta = 0$, vagyis a folyadékrészecske kezdettől fogva forgómozgást nem végez, akkor a mozgást *áramlásnak* nevezzük.

A továbbiakban csupán az áramlást jellemző integrál egyenletet akarjuk megszerkeszteni, melyet általánosságban az atmoszferára alkalmazni fogunk.

Az áramlás esetében tehát a (γ) alattiból

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{és} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ez pedig azt a feltételt jelenti, hogy mindig létezik $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ sebességi potencziál, a mely szerint

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

és

$$V^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Alkalmazzuk most ezeket a megfontolásokat a levegőre, mely most is az előzőkben tett feltételeknek eleget tesz. Ekkor az (α') alatti differencziálegyenletrendszert könnyen integrálhatjuk. Ugyanis lesz

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-U-\gamma\lg p-\tfrac{1}{2}V^2+\Phi(t), \tag{1}$$

hol $\Phi(t)$ az integráczió állandója, mely az idő függvénye lehet. Ha azonban az áramlást staczionáriusnak tételezzük fel, akkor $\varphi=\varphi(x, y, z)$, vagyis a sebességi potencziált a kontinuitás egyenletéből

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta^2\varphi=0,$$

kiszámithatjuk és oly felületet definiál, melyre az áramlás iránya merőleges.

Ebben az esetben az (1) alatti integrál állandója sem függvénye többé az időnek; az integrál tehát a következő lesz:

$$\gamma\lg p=C-U-\tfrac{1}{2}V^2. \tag{2}$$

Alkalmazzuk most ezen egyenletet két különböző magasságban, de ugyanazon vertikálisban levő pontra. Az alsó észlelő helyen legyen a magasság z_2, a nyomás p_2 és az áramlás sebessége v_2; a felső állomáson pedig a magasság z_1, a nyomás p_1 és az áramlás sebessége (szélsebesség) v_1 és a két észlelőhely magasságkülönbsége $z_1-z_2=h$. Továbbá most is csupán a nehézséget vegyük számításba mint külső erőt, vagyis $U=gz$.

Ekkor a (2) alattinak alkalmazása után nyerjük

$$\gamma\lg p_2=C-gz_2-\tfrac{1}{2}v_1^2$$
$$\gamma\lg p_1=C-gz_1-\tfrac{1}{2}v_1^2.$$

Az alsót a felsőből levonjuk és a két hely nehézségi intenzitásának középértékét g-vel jelöljük, lesz

$$\gamma \lg \frac{p_2}{p_1} = gh + \tfrac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2).$$

Ezt megszorozván a modulussal, a nyomásokat pedig a barometer állásokkal (nullfokos és nehézségi korrekczió tekintetbe vételével) helyettesítvén, lesz

$$\log \frac{B}{b} = M\frac{g}{\gamma}h + \frac{M}{2\gamma}(v_1^2 - v_2^2).$$

Az előzőkből

$$M\frac{g}{\gamma} = \frac{1}{a}\,\frac{1 - 0{\cdot}378\,\frac{\varphi}{\eta}}{1 + 0{\cdot}003670}$$

helyettesítvén, a következő képletet nyerjük:

$$\log B = \log b + \left[\frac{h}{a} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2ga}\right]\frac{1 - 0{\cdot}378\,\frac{\varphi}{\eta}}{1 + 0{\cdot}00367\theta}. \qquad \text{(II)}$$

Ha pedig a nedvességi korrekcziót a kiterjedési együtthatóval összekapcsoljuk, akkor

$$\log B = \log b + \left[\frac{h}{a} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2ga}\right][1 + 0{\cdot}002\,(t_1 + t_2)]^{-1}. \qquad \text{(II')}$$

A statikai meg à dynamikai hatásokból nyert hypszometrikus képletek összehasonlításából kitűnik, hogy az utóbbi képlet egy taggal módosult, mely a felső és alsó állomáson mért szélsebességtől függ. Ezt a tagot tehát a barometer redukcziós képletében, illetve a hypszometrikus képletben *dynamikai korrekcziónak* nevezhetjük. A dynamikai korrekczió

$$\delta = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2ga} \qquad (1)$$

pozitiv, ha a felső állomáson a szél élénkebb, mint az alsón és negativ a fordított esetben, ha pedig a szélsebesség a két észlelő helyen egyenlő, akkor a dynamikai korrekczió zérus és a (II) alatti az (I) alattiba megy át. *A különböző szélsebességek alkalmával tehát a felső és az alsó állomás között légnyomáskülönbség ΔB keletkezik (vertikális gradiens).*

A dynamikai korrekcziót az alsó és felső állomás észlelt légnyomási különbségével is kifejezhetjük. Ugyanis a (II) alattit írjuk át a természetes logarithmusra, azaz osszuk el $M=0{\cdot}4342945$ modulussal, akkor

$$\lg\frac{B}{b}=\left(\frac{h}{a}+\delta\right)\frac{\mu}{M},$$

hol

$$\mu=\frac{1-0{\cdot}378\,\frac{\varphi}{\eta}}{1+0{\cdot}00367\theta}.$$

Mivel azonban $B-b=\varDelta$ mindenkor pozitiv, tehát

$$\lg\frac{B}{b}=\lg\left(1+\frac{\varDelta}{b}\right)=\frac{\varDelta}{b}-\frac{1}{2}\left(\frac{\varDelta}{b}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{\varDelta}{b}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{\varDelta}{b}\right)^4+\cdots=u$$

és ekkor a dynamikai korrekczió

$$\delta=M.u\frac{1+0{\cdot}00367\theta}{1-0{\cdot}378\,\frac{\varphi}{\eta}}-\frac{h}{a}. \tag{2}$$

A tényleges számitásoknál, ha a légnyomást a millimeter századrészeig számitjuk, az u meghatározására négy tag teljesen elégséges és látni fogjuk, hogy a valóságban az (1) és (2) alattival számitott δ-k számértékei között lényeges különbség nincs.

Most még megmutatjuk ezen dynamikai hatás egy jellemző sajátságát. Ha az (1) és (2) alatti egyenleteket összekapcsoljuk és megelégszünk az u sor első tagjával, akkor oly egyenletet szerkeszthetünk, melylyel a felső állomás szélsebességét kiszámithatjuk, t. i.

$$v_1^2=v_2^2+2ag\frac{M}{\mu}\cdot\frac{\varDelta}{b}-2gh. \tag{3}$$

Alkalmazzuk ezt az egyenletet a nyári (ápril—szept.), meg a téli (okt.—márcz.) félévekre. A nyári félévre vonatkozó mennyiségeket egyszeres és a téli félévre vonatkozó mennyiségeket kétszeres jelzéssel lássuk el, akkor a nyári félévben

a téli félévben
$$v_1'^2 = v_2'^2 + 2ag\frac{M}{\mu'}\cdot\frac{\Delta'}{b'} - 2gh,$$
$$v_1''^2 = v_2''^2 + 2ag\frac{M}{\mu''}\cdot\frac{\Delta''}{b''} - 2gh.$$

Vonjuk le a felsőt az alsóból, akkor

$$v_1''^2 - v_1'^2 = v_2''^2 - v'^2 + 2Mga\left(\frac{1}{\mu''}\frac{\Delta''}{b''} - \frac{1}{\mu'}\frac{\Delta'}{b'}\right).$$

A tapasztalás mutatja, hogy $v_1' < v_1''$ és $v' > v_2''$, ennélfogva az egyenlet jobb oldala pozitiv csak úgy lehet, ha

$$\frac{1}{\mu'}\frac{\Delta'}{b'} < \frac{1}{\mu''}\frac{\Delta''}{b''},$$

mivel pedig $\mu' < \mu''$, tehát az egyenlőtlenség csak úgy lesz általános érvényyű, ha

$$\frac{\Delta'}{b'} < \frac{\Delta''}{b''}.$$

Azonban $B' - b' = \Delta'$ és $B'' - b'' = \Delta''$, tehát az egyenlőtlenség így fejezhető ki

$$\frac{B'}{b'} < \frac{B''}{b''}.$$

Ezen egyenlőtlenség pedig általánosan csakis akkor lehet érvényes, ha

$$B' < B'' \quad \text{és} \quad b' > b'', \qquad (4)$$

vagyis a légnyomás az alsó állomáson a nyári félévben kisebb, mint a téli félévben és a felső állomáson fordítva a nyári félévben nagyobb, mint a téli félévben.

Hasonló eredményhez jutunk, ha a nappali (a. m. 7^h—p. m. 6^h), meg az éjjeli (p. m. 7^h—a. m. 6^h) félnapra alkalmazzuk a (3) alatti egyenletet úgy, hogy a kettőt egybefoglalva azt mondhatjuk, hogy *az atmoszferában oly légnyomás-gradiens létezik, melynek nyáron, meg nappal alólról felfelé és télen, meg éjjel felőlről lefelé irányított hatása van. A tényleges észlelések pedig mutatják, hogy a gradiens értéke nyáron, meg nappal kisebb,* *mint télen, meg éjjel és hogy azt általában a helyi viszonyok nagy mértékben befolyásolják.*

2. *A dynamikai korrekczió igazolása az észlelésekből.* A következőkben kimutatjuk, hogy a valóságban a dynamikai korrekczió kicsiny bár, de véges, úgy, hogy a barometer redukálásánál a valóságot akkor közelítjük meg a legjobban, ha a redukcziót a (II), illetve a (II') alattival végezzük.

Az igazolásra a párisi Eiffel-torony tetején és a Bureau central météorologique helységeiben végezett rendszeres észleléseket használtam fel. A két állomás horizontális eltérése aránylag csekély (480 m) és geografiai szélességük $\lambda = 48° 52'$ ugyanaz; a felső állomás barometerének zéruspontja a tengerszintől 312·9 m és az alsó állomás barometerének zéruspontja a tengerszintől 33·4 m, tehát a két állomás magasságkülönbsége $h = 279·5$ m; ennélfogva a higany nehézségi korrekcziója a felső állomáson $C_g = +0·21$ mm, az alsón pedig $C_g = +0·26$ mm. A hőmérséklet tengerszíni korrekcziója a felső állomáson $\vartheta = +1·56$ C°, az alsón pedig $\vartheta = +0·17$ C°. A két állomás között a nehézségi intenzitásának középértéke $\log 2g = 1·2926503$, a felső állomás és a tengerszíne között $\log 2g = 1·2926525$ és az alsó állomás, meg a tengerszíne között $\log 2g = 1·2926725$ által van meghatározva.

M. A. Angot a két állomás ötévi észleléseit feldolgozta és az «Annales du Bureau central météorologique de France» 1894. évi I. kötetében «Résumé des observations météorologiques faites an bureau central et à la tour Eiffel pendant les cinq années 1890—1894» czímű értekezésében közölte az eredményeket.

Az ötéves átlagok a szélsebességeket nem tartalmazzák, azokat az Annalesekből külön számítottam. Számításaimat egy későbbi (1896—1900) pentád észleléseire is alkalmaztam. Az Annalesek, melyekből az átlagokat számítottam, a páranyomást mindkét állomásról nem közlik; ennélfogva az előzo pentádok páranyomásait az utóbbi pentádoknál is felhasználtam. Ezt megengedhetőnek tartottam, mert maga a páranyomás a logarithmust legfeljebb a hatodik jegyben változtatja meg.

A felső és alsó állomás között a légoszlop középhőmérsékletéül a két állomás észlelt hőmérsékletének arithmetikai közepét használtam.

ANGOT a légoszlop középhőmérsékletét a felső, alsó, meg a torony középső részén észlelt hőmérsékletekből számította. Az így nyert középhőmérséklet valamivel kevesebb ugyan, mint a felső és alsó állomás arithmetikai középértéke, de a különbség melyet találtam nem lényeges és az (1890—94) átlagoknál következő:

Jan.	Febr.	Márcz.	Ápril.	Máj.	Jun.
·21,	·16,	·15,	·04,	·12,	·09
Jul.	Aug.	Szept.	Okt.	Nov.	Decz.
·14,	·15,	·15,	·13,	·17,	·23.

És mivel a legnagyobb hőmérsékleti eltérés (0·23°) is a barometer adatát csupán a harmadik tizedesben módosítja, ennélfogva számításaimban, melyekben csak két tizedesre terjeszkedtem ki, a felső és alsó állomás arithmetikai középértékét minden jelentékeny hiba nélkül használhattam.

A két pentád átlagaiból külön-külön az (I) alattival kiszámítottam a felső állomás zérusfokra redukált légnyomásával (b) az alsó állomás zérusfokos légnyomását (B_1) és képeztem a számított és észlelt légnyomások közötti Δ_1 különbséget, hasonlóan jártam el a (II) alatti képlet alkalmazásával, a nyert különbséget most Δ_2-vel jelöltem. A különbségek negativ előjelei azt jelentik, hogy a számított légnyomás kisebb az észleltnél és pozitiv előjelei, hogy a számított légnyomás nagyobb az észleltnél.

Mind a két pentádból nyert Δ_1 és Δ_2 teljesen hasonló menetű úgy, hogy elégségesnek tartottam itt a két pentád középértékét, mint tíz éves átlagos eredményt összefoglalni. Előzetesen azonban összeállítottam a két pentád átlagaiból nyert azon mennyiségeknek arithmetikai közepeit, a melyek az (I) és (II) képlet szerint szükségesek a számításnál. Az adatok tehát a 10 éves átlagok jellegével bírnak:

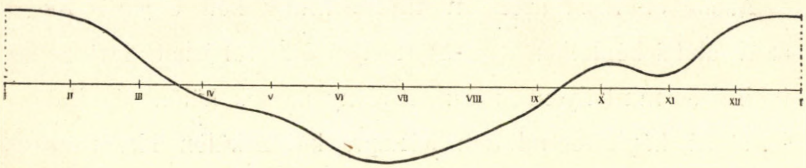
	B	b	$\frac{\varphi}{\eta}$	Θ	v_1	v_2
Január	761·32	735·31	0·0059915	2·95	10·00	2·40
Február	760·84	735·03	0·0062698	4·62	10·05	2·20
Márczius	758·15	732·61	0·0064815	6·33	9·40	2·50
Április	758·19	732·95	0·0073535	9·87	8·75	2·40
Május	758·08	733·11	0·0095503	12·52	8·65	2·30
Junius	759·61	734·94	0·0118254	16·51	7·80	2·00
Julius	759·64	735·15	0·0132275	18·17	7·60	2·15
Augusztus	759·23	734·77	0·0134391	18·13	8·05	2·10
Szeptemb.	760·37	735·63	0·0119577	15·47	8·45	1·75
Október	758·63	733·51	0·0097619	10·82	9·45	1·80
November	759·93	734·34	0·0081746	6·56	9·00	1·75
Deczemb.	760·73	734·76	0·0060847	3·21	10·00	1·95
Évi	759·56	734·34	0·0091765	11·10	8·93	2·11

A számított külömbségek a következő táblázatban foglaltatnak:

	Δ	Δ_1	Δ_2	ΔB
Január	26·06	—·27	+·19	0·46
Február	25·86	—·24	+·22	0·46
Márczius	25·59	—·22	+·17	0·39
Április	25·29	—·22	+·11	0·33
Május	25·02	—·23	+·08	0·31
Junius	24·72	—·22	+·03	0·25
Julius	24·54	—·19	+·05	0·24
Augusztus	24·51	—·17	+·10	0·27
Szeptemb.	24·79	—·18	+·13	0·31
Október	25·17	—·21	+·18	0·39
November	25·64	—·24	+·13	0·37
Deczemb.	26·02	—·27	+·19	0·46
Évi	25·27	—·22	+·13	0·35

A Δ különbség az alsó és felső légnyomás különbségét szolgáltatja, tekintettel a magasságkülönbségből származott nehézségi korrekczióra. A Δ különbségből nyerjük, hogy 10 méteres magasságnövekedésnek átlagosan 0·904 mm légnyomáscsökkenés felel meg, a mi az elméletileg számított értékkel elég jól egyezik. (0·952 mm.).

A Δ_1 és Δ_2 sor állandó, de ellenkező jelű és Δ_1 abszolut értéke nagyobb Δ_2 abszolut értékénél és míg Δ_1-nek alig észrevehető évi menete van, addig Δ_2-nek évi menete jellemző, mert változása a felső és alsó állomásnak szélsebességváltozásait követi. A Δ_1 és Δ_2 egyszerű összehasonlításából már annyi kitűnik, hogy a (II) alattival számított alsó légnyomás inkább megközelíti az észlelt légnyomást, mint az (I) alattival számított; a Δ_2 különbség azonban még mindig elég nagy úgy, hogy való-



1. ábra. A vertikális grádiens évi menete.

színűnek látszik egy *új korrekcziónak* meghatározása, melynek tekintetbe vételével a Δ_2 abszolut értékét csökkenthetjük vagyis az észlelt és számított légnyomás értékeit közelebb hozhatjuk egymáshoz. Később látni fogjuk, hogy ezen új korrekcziót a légnyomás észlelésének módjában kell keresni.

A Δ_1 és Δ_2 előjel nélküli összege az a légnyomáskülönbség, mely a (II) és (I) alattiból származik, vagyis a dynamikai hatás okozta légnyomás ΔB (vertikális gradiens). Ezen légnyomásnak jellemző évi menete van, melyet grafikailag előállíthatunk egy derékszögű koordináta-rendszerben, ha abcisszákul a hónapokat és ordinatákul a havi légnyomásoknak az évi középtől való eltérését nagyság és irány szerint a hónapokhoz rajzoljuk (1. ábra). A nyert görbe egyhullámos és ellenkezője a hőmérséklet évi menetét jellemző görbének. A ΔB sorozatából kimutathatjuk, hogy a dynamikai hatásból keletkezett légnyomás nyáron (ápr.—szept.) jelentékenyen kisebb (0·29 mm), mint télen (okt.—márc. 0·42 mm), a mi megfelel az alsó és felső állomás szélsebességének fordított jellegű évi menetének.

Itt most egy megjegyzést kell tennem. Ugyanis ANGOT nevezett értekezésében az (I) alatti képletnek némileg módosított alakjával a felső és alsó állomás havi átlagos légnyomásainak különbségeit kiszámította és azt találta, hogy az észlelt és számított légnyomáskülönbségek az évi átlagban csupán $\pm$·03 mmrel térnek el úgy, hogy az előző táblázatban a Δ_1 különbségi sor közel zérus volna, a mi annyit jelentene, hogy a dynamikai korrekcziónak nem volna értelme a hypszometrikus képletben.

ANGOT eljárását azonban kifogásolnunk kell. Ugyanis ANGOT az (I) alatti képletben $\frac{h}{aM}$-et (melyet ő B-vel jelelt) változónak tekinti és mint ilyent az észlelt légnyomások különbségeiből az (I) alatti képlettel minden hónapra külön-külön kiszámította. Ezen számított B-k középértékével (0·035133) aztán ugyancsak az (I) alattival a két állomás légnyomáskülönbségeit kiszámította, melyek az észlelt légnyomások különbségeitől csak lényegtelenül térnek el (v. ö. Annales . . . B. 172. old.).

ANGOT számításaira két észrevételt tehetünk *a)* A $\frac{h}{aM} = B$-t változónak tekinteni nem lehet, mert az, a két állomást jellemző állandókból van szerkesztve és értéke egyszersmindenkor 0·0349322. *b)* Ha a B-t valamiképen mégis változónak tekintenők (?), akkor is a dynamikai korrekczió már benfoglaltatik a számított B-kben, mert ezeket ANGOT az észlelt légnyomáskülönbségekkel határozta meg ; az észlelésből nyert nyomáskülönbségek pedig természetesen a dynamikai hatást már magukban foglalják. Ennélfogva az észlelésekből nyert és az ANGOT által meghatározott légnyomáskülönbségek megegyezése a fenti táblázatban a Δ_1 sornak és ezzel egyidejűleg a dynamikai korrekcziónak létezését és a vertikális gradiens évi menetének helyességét nem döntheti meg.

3. *Zárt helyen észlelt barometerállás redukcziója a szabad levegőre.* Láttuk hogy a Δ_1 és Δ_2 különböző előjelűek, vagyis az (I) alatti szerint a felső állomás légnyomásának valamivel nagyobbnak, a (II) szerint pedig valamivel kevesebbnek kellene lenni, a mely körülménynek okát — mint már említettem — az észlelés módjában kerestem, úgy, hogy a barometerállásban ily módon bekövetkezett változás a légnyomás vertikális gradiensének értékét nem módosithatja. Ezen célból közvetlen méréseket végeztem a budai hegyek között a *Pozsony* (János)-hegyen, meg a *Pozsony és Nagy-Hárshegy* között elterülő *völgyben.* A két észlelőhely horizontális eltérését körülbelől 600 meternek vehetjük.

Miután a Pozsonyhegy magasságát ismertem, csupán a völgy tengerszíni magasságát kellett meghatározni. Az 1903. évi augusztus hó folyamán többrendbeli mérést végeztünk egyfelől a Pozsonyhegy és a völgy között, majd a Nagy-Hárshegy (457·8 m) és a völgy között, csaknem elenyészően csekély szélerősség mellett. A kétirányú mérésekből az (I) alatti képlettel aztán kiszámitottam a völgy tengerszíni magasságát.

A két észlelőhely jellemző állandói következők: A két észlelőhely geografiai szélessége $\lambda = 47°31'$. A felső észlelőhely barometerének zéruspontja a tenger színétől 534·6 m, az alsó észlelőhely magassága 266·0 m, tehát a magasságkülönbség $h = 268{\cdot}6$ m. A higany nehézségi korrekcziója (szélesség és magasság szerint) a hegyen $+0{\cdot}06$ és a völgyben $+0{\cdot}11$. A hőmérséklet tengerszíni korrekcziója pedig a hegynél: 2·67 C° és a völgynél 1·33 C°. A két észlelőhely nehézségi gyorsulásának középértéke pedig $\log 2g = 1{\cdot}2925684$, a hegy és a tengerszín között $\log 2g = 1{\cdot}2925861$ és a völgy, meg a tengerszín között $\log 2g = 1{\cdot}2926038$.

Ismervén a két hely jellemző állandóit, 1903 augusztus havában, Kronich Lenár barátommal ugyanazon óraközökben, mint a magasságkülönbség meghatározásnál, de szeles időben, több rendbeli méréseket végeztünk. Egy ily mérés eredményét az alábbi táblázatban állítottam össze. A műszereket észlelés előtt és után összehasonlítottuk és a mutatkozó különbségeket a 0°-os barometerállásnál tekintetbe vettük. A táblázat $\triangle_1$ és $\triangle_2$ rovata az (I') és (II') képlettel számított és észlelt légnyomások különbségeit foglalja magában.

1903 VIII/24	t_1	b	v_1	t_2	B	v_2	$\triangle_1$	$\triangle_2$	$\triangle B$
11h 00m	21·7	716·16	10·0	24·9	738·76	5·0	— 0·30	+ 0·02	0·32
11 30	22·8	16·07	11·0	25·7	38·69	5·0	— 0·41	+ 0·02	0·43
12 00	23·4	15·79	13·0	25·6	38·65	4·0	— 0·67	+ 0·00	0·67
12 30	23·5	16·00	11·0	25·7	38·66	3·0	— 0·47	+ 0·02	0·49
1 00	24·7	16·02	10·0	26·7	38·52	2·0	— 0·40	+ 0·02	0·42
1 30	23·8	15·70	10·0	27·4	38·14	4·0	— 0·34	+ 0·03	0·37
2 00	24·8	15·76	10·0	27·4	38·18	4·0	— 0·36	+ 0·01	0·37
2 30	25·0	15·65	11·0	27·4	38·13	4·0	— 0·43	+ 0·03	0·46
3 00	24·9	15·56	12·0	26·9	38·16	4·0	— 0·53	— 0·01	0·52
3 30	24·6	15·50	12·0	26·9	38·09	4·0	— 0·50	+ 0·05	0·55
4 00	24·8	15·52	12·0	26·4	38·06	5·0	— 0·44	+ 0·07	9·47
4 30	24·1	15·56	10·0	25·9	38·10	3·0	— 0·40	+ 0·00	0·40
5 00	24·0	15·58	10·0	25·2	38·15	2·0	— 0·40	+ 0·03	0·43
Közép	24·01	715·76	10·9	26·32	738·33	3·8	— 0·43	+ 0·02	0·45

Hasonló méréseket végeztünk 1904 szeptember 6-án ugyanazon helyeken mint az előző évben, de a völgyben a barometert úgy helyeztük el, hogy az a szél hatásától lehetőleg ment legyen. Az észlelésben most Marcell György barátom volt szives segédkezni. Az eredmények, melyek összeállításánál az előzőhöz hasonlóan jártunk el, a következő táblázatban vannak összeállítva :

1904 IX/6	t_1	b	e_1	v_1	t_2	B	e_2	v_2	$\triangle_1$	$\triangle_2$	$\triangle B$
1h00m	17·2	718·01	7·2	5·0	22·0	740·75	9·0	1·0	—0·15	—0·04	0·11
1 15	17·0	17·90	7·6	5·8	22·3	40·62	9·3	2·0	—0·16	—0·01	0·15
1 30	17·8	17·79	7·6	6·2	23·1	40·48	9·2	2·0	—0·18	—0·03	0·15
1 45	17·5	17·76	7·4	6·4	21·9	40·54	8·9	1·0	—0·21	—0·03	0·18
2 00	17·6	17·77	7·4	6·8	21·4	40·60	9·2	0·0	—0·24	—0·04	0·20
2 15	17·8	17·69	7·7	6·0	21·9	40·44	9·4	0·0	—0·19	—0·04	0·15
2 30	18·2	17·63	7·7	6·2	22·2	40·38	9·6	0·0	—0·23	—0·06	0·17
2 45	17·8	17·65	7·7	6·6	22·1	40·41	9·7	0·0	—0·21	+0·02	0·23
3 00	17·9	17·67	7·8	6·4	21·3	40·45	9·3	0·0	—0·20	—0·02	0·18
3 15	17·9	17·67	8·1	5·5	20·9	40·36	9·8	0·0	—0·10	+0·04	0·14
3 30	18·2	17·53	8·0	6·0	22·0	40·25	9·7	0·0	—0·18	—0·02	0·16
3 45	18·0	17·48	7·7	8·0	22·0	40·31	9·2	0·0	—0·29	—0·01	0·28
4 00	18·1	17·55	7·7	7·4	21·4	40·38	9·4	0·0	—0·27	—0·03	0·24
4 15	18·4	17·50	7·9	6·8	21·7	40·29	9·8	0·0	—0·25	—0·04	0·21
4 30	18·2	17·53	7·7	7·5	21·4	40·34	9·7	0·0	—0·25	—0·01	0·24
4 45	18·1	17·52	7·8	7·0	20·5	40·32	9·2	0·0	—0·20	+0·01	0·21
Közép	17·86	717·67	7·7	6·5	21·76	740·43	9·4	0·4	—0·21	—0·02	0·19

A $\triangle_1$-et és $\triangle_2$-t most az (I) és (II)-vel számítottam. A $\triangle_1$ mind a két esetben állandóan negativ és $\triangle_2$ pedig a zérus körül ingadozik, vagyis míg az (I) alattival számított alsó légnyomás állandóan kevesebb az észleltnél, addig a (II)-vel számított és az észlelt légnyomások jól egyeznek. Ez pedig a barometer dynamikai korrekcziónak létezését igazolja.

Ha a hegyen és völgyön végzett észlelésekből számított $\triangle_2$-t a párisi adatokból nyert Δ_2-vel összehasonlítjuk, azt fogjuk találni, hogy azok egymástól lényegesen eltérnek, minek okát az észlelés módjában kerestem.

Ugyanis míg a budai hegyek között a barometerek szabadban, árnyékos helyen, addig a párisi állomásokon a barometerek zárt helyiségekben voltak elhelyezve; ennélfogva a mult év folyamán a *Hüvösvölgyben* összehasonlító méréseket végeztem ugyanazon magasságban zárt helyiségben és szabadban elhelyezett barometerekkel. A barometerek adatai között tényleg találtam különbségeket, melyek legnagyobbak voltak télen és legkisebbek nyáron. A zérusfokra redukált és egymással összehasonlított barometerek különbségeiből, meg az észlelt szélsebességekből meghatároztam az 1 $\frac{m}{sec}$ szélsebességhez tartozó kvoczienst (ε) és azt következő értékűnek találtam:

Jan.	Febr.	Márcz.	Ápril.	Máj.	Jun.
–0·024	–0·028	–0·018	–0·015	–0·010	–0·001
Jul.	Aug.	Szept.	Okt.	Nov.	Decz.
–0·002	–0·007	–0·012	–0·020	–0·015	–0·022

Ezen ε_n-ok csak közelítőknek tekinthetők, mert azok csupán néhány észlelésből vannak számítva.* Az észlelés folyamán azonban arról is nyertem tájékoztatást, hogy ezen ε_n pozitiv előjelű is lehet, úgy, hogy abszolut értéke és előjele nem csak a szél sebességétől, hanem a szél irányától is függ. Ezeket az adatokat többnyire az északi negyedből (*NNW—N—NE*) áramló légmozgások megfigyeléséből számítottam, lévén a Hüvösvölgy ez irány felé nyitott.

A következő táblázatban példaképen a f. évi január hó 14-én Marcell barátommal felváltva végzett észleléseket összeállítottam. A műszereket most is összehasonlítottuk az észlelés előtt és után, továbbá vártunk, míg a szabadban felállított barometer teljesen felvette a külső temperaturát és az anemometert a barometerekkel egy vízszintesbe állítottuk. A táblázatban a barometerek összehasonlított adatai zérus fokra vannak redukálva és az első részben a szabadban, a másodikban pedig a zárt szobában észlelt adatok foglaltatnak:

1905 I/14	t_1	b	v	t_2	B	$\triangle$
11h 50m	— 3·3	744·95	7·5	± 0·0	745·09	+ 0·14
12 00	— 3·3	44·83	8·0	± 0·0	45·02	0·19
12 10	— 3·3	44·75	8·4	— 0·2	44·97	0·22
12 20	— 3·2	44·67	6·9	— 0·2	44·84	0·17
12 30	— 3·4	44·61	8·1	— 0·2	44·80	0·19
12 40	— 3·4	44·50	9·2	— 0·2	44·72	0·22
12 50	— 3·4	44·53	7·4	— 0·2	44·71	0·18
1 00	— 3·4	44·54	7·0	— 0·2	44·70	0·16
1 10	— 3·4	44·52	9·3	— 0·2	44·71	0·19
1 20	— 3·4	44·50	8·3	— 0·2	44·71	0·21
1 30	— 3·3	44·54	7·6	— 0·2	44·73	0·19
1 40	— 3·3	44·64	7·0	— 0·1	44·78	0·14
Közép	— 3·35	744·63	7·89	— 0·16	744·82	+ 0·19

* A jövőben az észleléseket rendszeresen szándékozom végezni.

A Δ a két barometer tényleges különbsége $(B-b)$.*

Ezután tehát $\varepsilon=-0{\cdot}19:7{\cdot}89=-0{\cdot}024$ mm a zárt szobában levő barometer korrekcziója, úgy hogy a szabad levegőre redukált barometerállás $b=B-\varepsilon v=744{\cdot}82-0{\cdot}024.7{\cdot}89=744{\cdot}63$ mm. Az εv ennélfogva azon tapasztalati korrekczió, melyet saját jelével adunk a zárt helyen levő barometer adatához, hogy a szabadban ugyanazon vízszintesben elhelyezett barometer adatát kapjuk, melyre aztán a (II) alatti képletet közvetlenül alkalmazhatjuk. Ebből az következnék, hogy a barometert az εv korrekczió elkerülése czéljából szabad helyen állitsuk fel, ekkor azonban a barometer szerkezetéből kifolyólag más nehézségek merülhetnek fel, például a hirtelen bekövetkezett hőváltozásoknál a barometer higanya nem veszi fel oly gyorsan a külső hőmérsékletet, mint a hőmérő higanytömege, minek következtében hiba csúszhatnék be a redukcziónál, ennélfogva kivánatosabb a barometert zárt helyiségben tartani ugyan, de mindenesetre szükséges volna rendszeres összehasonlításokat végezni, hogy az ε-t minden időre és a különböző szélirányokra meghatározhassuk.

Feltéve, hogy a Hüvösvölgyben történt észlelések eredményeit a párisi adatokra is alkalmazhatjuk, akkor az εv korrekczióra következő értékeket kapjuk:

Felső állomás.

Jan.	Febr.	Márcz.	Ápr.	Máj.	Jun.
—·24	—·28	—·17	—·13	—·09	—·01
Jul.	Aug.	Szept.	Okt.	Nov.	Decz.
—·02	—·05	—·10	—·19	—·14	—·22

Alsó állomás.

Jan.	Febr.	Márcz.	Ápr.	Máj.	Jun.
—·06	—·06	—·05	—·04	—·02	±·00
Jul.	Aug.	Szept.	Okt.	Nov.	Decz.
±·00	—·01	—·02	—·04	—·03	—·04

* *Hüvösvölgy* geografiai szélessége $\lambda=47^\circ 33'$, tengerszíni magassága 220·5 m. A higany nehézségi korrekcziója +0·14 mm., a hőmérséklet tengerszíni korrekcziója + 1·10 C° és a nehézségi gyorsulás középértéke $\log 2g=1{\cdot}2925883$.

Alkalmazzuk most ezeket az előzőkben közölt légnyomásokra, azután pedig a felső állomás légnyomásából (b') az (I) és (II) alattival számítsuk ki az alsó állomás légnyomását és képezzük az észlelt, meg számított légnyomások különbségeit (Δ'_1 illetve Δ'_2). Az eredmények a következő táblázatban vannak egybefoglalva :

	B'	b'	Δ'	Δ'_1	Δ'_2	$\Delta B'$
Január	761·26	735·07	26·24	—·45	±·00	0·45
Február	760·78	734·75	26·08	—·47	±·00	0·47
Márczius	758·10	732·44	25·71	—·34	+·05	0·39
Április	758·15	732·82	25·38	—·33	±·00	0·33
Május	758·06	733·02	25·09	—·30	+·01	0·31
Junius	759·61	734·93	24·73	—·23	+·02	0·25
Julius	759·64	735·13	24·56	—·21	+·03	0·24
Augusztus	759·22	734·72	24·56	—·24	+·03	0·27
Szeptember	760·35	735·53	24·87	—·27	+·04	0·31
Október	758·59	733·32	25·32	—·37	+·02	0·39
November	759·90	734·20	25·75	—·36	+·01	0·37
Deczember	760·69	734·54	26·20	—·46	±·00	0·46
Év	759·53	734·21	25·38	—·34	+·02	0·35

A Δ' különbség az alsó és felső légnyomás különbségét szolgáltatja, tekintettel a magasságkülönbségből származott nehézségi korrekczióra. A Δ' különbségből nyerjük, hogy 10 méteres magasságnövekedésnek átlagosan 0·943 mm légnyomáscsökkenés felel meg, mely az elméletileg számított értékkel jobban egyezik, mint a Δ-ból számított. (0·952 mm).

A Δ'_2 pedig igazolja, hogy az észlelt és számított légnyomások akkor adnak legkisebb különbséget, ha a zárt helyen észlelt légnyomást a szabad levegőre redukáljuk és azután számításainkban a dynamikai korrekcziót is bevezetjük (II.). A Δ'_2 állandó pozitiv előjele pedig azt a tapasztalati tényt igazolja, hogy az alsó állomáson a szélsebesség értékét a surlódás és a lokális viszonyok nagyobb mértékben befolyásolják, mint a felsőn; vagyis az alsó állomáson az észlelt szélsebesség kisebb, mint az elmélet kivánja.

A ΔB gradiens most is ugyanaz, mint azt az előzőkben találtuk. Ez pedig megfelel annak, hogy a gradiens értéke az εv korrekcziótól, a barometer észlelésének módjától, független maradt.

Alkalmazzuk az (1) és (2) alatti egyenleteket az észlelt és előzőkben közölt adatokra.

A dynamikai korrekcziót (1) és (2) alattival kiszámítván, a Pozsonyhegyen és a völgyben végzett észlelések középértékeiből nyerjük az első esetben

$$\delta_1 = 289 . 10^{-6} \quad \text{és} \quad \delta_2 = 278 . 10^{-6},$$

a második esetben

$$\delta_1 = 117 . 10^{-6} \quad \text{és} \quad \delta_2 = 131 . 10^{-6},$$

vagyis a megegyezést kielégítőnek vehetjük.

A párisi átlagos értékekből pedig a következő értékeket nyerjük:

	δ_1	δ_2	δ'
Január	$261 . 10^{-6}$	$128 . 10^{-6}$	$268 . 10^{-6}$
Február	267.	106.	274.
Márczius	227.	100.	202.
Április	197.	106.	198.
Május	193.	102.	180.
Junius	159.	106.	142.
Julius	148.	83.	127.
Augusztus	167.	80.	176.
Szeptember	191.	80.	173.
Október	239.	88.	215.
November	210.	105.	205.
Deczember	264.	131.	250.
Évi	$209 . 10^{-6}$	$101 . 10^{-6}$	$201 . 10^{-6}$

A δ'_2 a szabad levegőre redukált légnyomásokkal van számítva. Ezek összehasonlításából azt látjuk, hogy az (1) és (2) alattival számított korrekczió akkor egyezik meg a legjobban, ha a zárt helységben észlelt barometeradatokat a szabad levegőre redukáljuk és aztán végezzük el számításainkat.

Végre mutassuk meg a tízéves átlagokból a (4) alatti relláczió helyességét, a mi egyszerű, mert a már tárgyalt adatokból csupán a nyári és téli féléves átlagokat kell képezni. Ugyanis

felső állomás

	v_1	b	b'	
nyári félév	8·22	734·43	734·36	nyári félév $\mu'=0{\cdot}943$
téli félév	9·65	734·26	734·05	

alsó állomás

	v_2	B	B'	
nyári félév	2·12	759·19	759·17	téli félév $\mu''=0{\cdot}977$.
téli félév	2·10	759·93	759·89	

Hasonló eredményeket nyerünk az óránkénti észlelésekből is. Elégségesnek tartottam két hónap észlelését felhasználni. Az Annalesekből kiszámítottam a párisi 1896—1900. évi észleléseknek január és julius havi pentád értékeit, melyeket a következő táblázatokba foglaltam :

Felső állomáson (+700).

Észlelt légnyomás.

		a. m. 1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	dél
Január	*b*	35·97	36·00	36·02	35·88	35·78	35·70	35·90	36·13	36·23	36·36	36·35	36·15
Julius	*b*	36·24	36·10	35·96	35·93	35·99	36·11	36·26	36·40	36·45	36·49	36·48	36·40

		p. m. 1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	éjfél
Január	*b*	35·86	35·74	35·77	35·80	35·86	35·92	36·02	36·06	36·12	36·16	36·18	36·09
Julius	*b*	36·30	36·21	36·08	35·93	35·86	35·89	36·06	36·19	36·39	36·47	36·48	36·41

Alsó állomáson (+700).

Észlelt légnyomás.

		a. m. 1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	dél
Január	*B*	61·98	62·02	62·03	61·93	61·80	61·79	61·91	62·09	62·29	62·44	62·38	62·12
Julius	*B*	60·80	60·70	60·61	60·62	60·68	60·80	60·96	61·01	61·01	60·99	60·91	60·81

		p. m. 1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	éjfél
Január	*B*	61·84	61·68	61·69	61·73	61·75	61·84	61·96	62·04	62·10	62·14	62·16	62·09
Julius	*B*	60·67	60·50	60·35	60·22	60·13	60·16	60·30	60·49	60·74	60·86	60·91	60·90

Felső állomás.

Hőmérséklet.

a. m.		1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	dél
Január	t_1	2·99	2·88	2·79	2·70	2·68	2·64	2·61	2·63	2·71	2·86	3·06	3·29
Julius	t_1	16·22	15·78	15·44	15·24	15·25	15·31	15·45	16·10	16·96	17·82	18·65	19·39

p. m.		1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	éjfél
Január	t_1	3·50	3·73	3·75	3·64	3·52	3·46	3·40	3 28	3·19	3·09	3·00	2·97
Julius	t_1	19·97	20·53	20·81	20·81	20·68	20·27	19·75	18·93	18·33	17·75	17·25	16·74

Alsó állomás.

Hőmérséklet.

a. m.		1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	dél
Január	t_2	4·13	4·03	3·91	3·81	3·69	3·65	3·61	3·66	3·94	4·41	4·98	5·40
Julius	t_2	17·20	16·70	16·13	15·81	15·80	16·34	17·50	18·75	20·30	21·52	22·43	23·14

p. m.		1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	éjfél
Január	t_2	5·80	6·05	6·05	5·83	5·54	5·36	5·12	4·97	4·68	4·52	4·32	4·30
Julius	t_2	23·82	24·16	24·25	24·24	23·87	23·29	22·35	21·33	20·17	19·38	18·52	17·89

Felső állomás.

Szélsebesség.

		a. m.											
		1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	8^h	9^h	10^h	11^h	dél
Január	v_1	10·1	10·1	10·0	9·7	9·8	10·0	9·9	10·0	9·8	9·4	8·9	8·3
Julius	v_1	9·2	9·1	8·7	8·4	8·2	7·7	6·5	5·2	5·0	5·4	5·8	6·1

		p. m.											
		1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	8^h	9^h	10^h	11^h	éjfél
Január	v_1	8·4	8·5	8·7	9·1	9·6	9·8	10·1	10·2	10·4	10·2	10·1	10·0
Julius	v_1	6·4	6·5	6·6	6·8	7·1	7·2	7·6	8·2	9·0	9·0	9·2	9·4

Alsó állomás.

Szélsebesség.

		a. m.											
		1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	8^h	9^h	10^h	11^h	dél
Január	v_2	2·2	2·1	2·2	2·0	2·0	2·1	2·1	2·1	2·3	2·4	2·5	2·6
Julius	v_2	1·5	1·5	1·4	1·3	1·3	1·6	1·7	1·9	2·1	2·2	2·5	2·5

		p. m.											
		1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	8^h	9^h	10^h	11^h	éjfél
Január	v_2	2·6	2·5	2·5	2·5	2·5	2·4	2·5	2·5	2·4	2·3	2·3	2·3
Julius	v_2	2·5	2·6	2·6	2·5	2·5	2·4	2·3	1·7	1·9	2·0	1·7	1·5

Ezen adatokat felhasználva, az (I') és (II') alatti képlettel kiszámítottam az alsó állomás légnyomását óránként, azután pedig képeztem a számított és észlelt légnyomások különbségeit (Δ_1 és Δ_2). A különbségek pozitiv előjelei mutatják, hogy a számított érték nagyobb az észleltnél és a negativ előjelek azt jelentik, hogy a számított érték kisebb az észleltnél. A Δ_1 és Δ_2 különbségeknek, valamint a II'—I'=ΔB légnyomáskülönbségnek (vertikális gradiens) napi menete a következő táblázatban foglaltatik:

Δ_1 különbs. sor.

a. m.

	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	dél
Január	—·24	—·22	—·22	—·25	—·22	—·22	—·23	—·25	—·26	—·31	—·32	—·32
Julius	—·29	—·10	—·11	—·11	—·12	—·15	—·21	—·21	—·27	—·30	—·31	—·36

p. m.

	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	éjfél
Január	—·26	—·33	—·30	—·29	—·27	—·24	—·24	—·24	—·23	—·22	—·22	—·26
Julius	—·38	—·34	—·34	—·32	—·31	—·28	—·18	—·15	—·11	—·09	—·07	—·07

Δ_2 különbs. sor.

a. m.

	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	dél
Január	+·20	+·24	+·22	+·16	+·20	+·21	+·20	+·19	+·15	+·06	+·03	±·00
Julius	+·28	+·27	+·23	+·20	+·18	+·11	—·06	—·10	—·17	—·19	—·20	—·21

p. m.

	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	éjfél
Január	—·05	—·02	+·01	+·05	+·12	+·17	+·21	+·20	+·22	+·22	+·22	+·17
Julius	—·22	—·20	—·18	—·16	—·11	—·07	+·06	+·14	+·23	+·26	+·30	+·32

ΔB vert. gradiens.

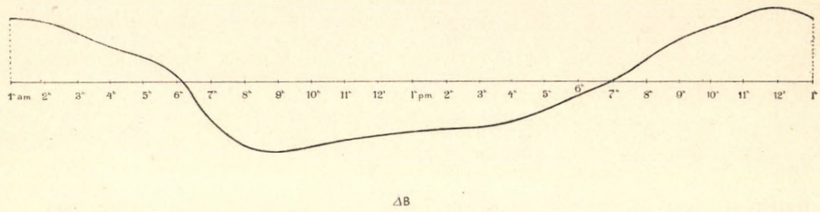
a. m.

	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	dél
Január	·44	·46	·44	·41	·42	·43	·43	·44	·41	·37	·35	·32
Julius	·37	·37	·34	·31	·30	·26	·15	·11	·10	·11	·11	·14

p. m.

	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	éjfél
Január	·31	·31	·31	·34	·39	·41	·45	·44	·45	·44	·44	·41
Julius	·14	·14	·16	·16	·20	·21	·24	·29	·34	·35	·37	·39

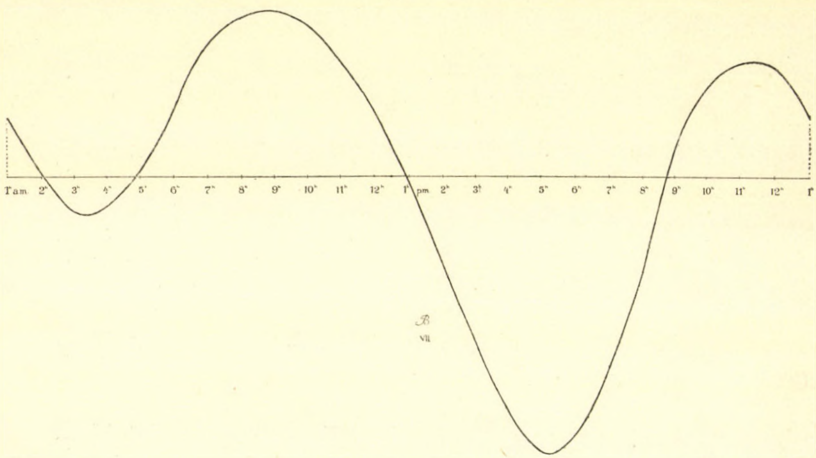
A Δ_1 és Δ_2 különbségi sorok összehasonlításából nyerjük, hogy a felső állomás légnyomásának redukcziójánál a valóságot



2. ábra. A vertikális grádiens napi menete.

inkább megközelítjük, ha a dynamikai korrekcziót is számításba vesszük.

A vertikális gradiensnek (ΔB) pedig meg van jellemző értéke, mely nappal kisebb (I. ·37, VII. ·14), mint éjjel (I. ·44, VII. ·33)



3. ábra. A légnyomás napi menete.

és napi menetét geometriailag megszerkeszthetjük, ha a havi átlagok és az órai értékek közötti különbségeket ordinátáknak, az órákat pedig absczisszáknak választjuk, akkor az ordináták végpontjai a keresett görbe mértani helyét ábrázolják (v. ö. 2. ábrát).

Ha most ezt a görbét valamelyik állomásnak (a 3. ábrában az alsónak) légnyomásából hasonlóan szerkesztett napi menetével összehasonlítjuk, lényeges eltérést látunk. Ugyanis a légnyomás napi menete kettős hullámú görbe, a vertikális grádiens napi menete pedig csak egy hullámú, mely a felső és alsó állomáson észlelt szélsebesség napi menetének felel meg. HANN szerint a légnyomás napi menetét jellemző két hullámú görbét egy egyszeres és egy kétszeres hullám eredőjéül tekinthetjük. Az összetételt a harmonikus analyzissel szokták végezni. A kétszeres hullám fázisideje és amplitudója a Földön mindenütt közel ugyanaz, az egyszeres hullám fázisideje, valamint maximuma, minimuma azonban változik és mindenkor a helyi hatásoktól függ; ennélfogva a vertikális grádiens értéke is mindenkor a helyi hatásoknak is alá van vetve.

A 4. alatti relácziót a januári és juliusi adatokkal is igazolhatjuk, ha a félnapos közepeket képezzük:

Felső állomás.

	Január	Julius
Nappal (a. m. 7^h—6^h p. m.)	$v_1' = 9{\cdot}20$ $b' = 736{\cdot}01$	$v_1' = 6{\cdot}22$ $b' = 736{\cdot}23$
Éjjel (p. m. 7^h—6^h a. m.)	$v_1'' = 10{\cdot}06$ $b'' = 735{\cdot}99$	$v_1'' = 8{\cdot}64$ $b'' = 736{\cdot}18$

Alsó állomás.

	Január	Julius
Nappal (a. m. 7^h—6^h p. m.)	$v_2' = 2{\cdot}42$ $B' = 761{\cdot}98$	$v_2' = 2{\cdot}33$ $B' = 760{\cdot}64$
Éjjel (p. m. 7^h—6^h a. m.)	$v_2'' = 2{\cdot}24$ $B'' = 762{\cdot}00$	$v_2'' = 1{\cdot}64$ $B'' = 760{\cdot}71$
	$\mu' = 0{\cdot}964$ $\mu'' = 0{\cdot}989$	$\mu' = 0{\cdot}923$ $\mu'' = 0{\cdot}936$

Ha az (I) és (II) alatti képletekkel a felső és alsó állomás magasságkülönbségét kiszámítjuk, akkor annak tényleges értékét úgy nyerjük, ha a hypszometrikus képletben a dynamikai korrekcziót is számításba vesszük. Ennek kimutatására csupán a januári, meg a juliusi havi közepeket használtam. A felső és az alsó állomás tényleges magasságkülönbsége $h = 279{\cdot}5$ m. A h-t először a zárt helyen észlelt légnyomásokkal az (I) és (II) alattival

(h_1 és h_2), másodszor a szabad levegőre redukált légnyomásokkal a (II) alattival (h_3) számítottam.

Január	Julius
$h_1 = 282·3$ m	$h_1 = 281·7$ m
$h_2 = 277·8$ «	$h_2 = 279·1$ «
$h_3 = 279·8$ «	$h_3 = 279·3$ «

4. *A dynamikai korrekczió alkalmazása a barometerállás tengerszíni redukcziójánál.* Az előzőkben láttuk, hogy a légnyomás redukcziójánál a dynamikai korrekcziót számításba vehetjük; felvetettem tehát a kérdést vajjon valamely megfigyelő állomáson észlelt légnyomásnak tengerszíni redukcziójában miképen vehetnők számításba a dynamikai korrekcziót? A kérdésnek tárgyalása általánosságban csaknem leküzdhetetlen nehézségbe ütközik, mert a dynamikai korrekcziónak alkalmazása a tengerszíni redukcziónál komplikált, a mennyiben a lokális viszonyok a szélsebességét befolyásolják és annak értékét különösen az alsó állomáson jelentékenyen módosithatják. A felső állomás (teljesen szabad hely) szélsebességéből a (II), vagy (3) alattival számitott alsó állomás szélsebessége általánosan nagyobb az alsó állomáson észlelt szélsebességnél; ennélfogva a két állomás szélsebességének a tengerszínre redukált értékei között lényeges különbség mutatkozhatik. A különbség meghatározásánál tehát nemcsak a surlódást, hanem az orografiai viszonyokat is figyelembe kell venni úgy, hogy a szélsebesség ezen korrekczióját tulajdonképen minden észlelőhelyre külön kell megállapitani.

Abban az esetben, a midőn az észlelőhelyek elég szabadok (a párisi állomások) és az alsó állomás tengerszíni magassága csekély, az észlelt szélsebességeket bizonyos közelítéssel közvetlenül is átszámithatjuk a tengerszínre; ha ellenben az észlelőhelyek zártak (pl. a budai hegyek között az alsó állomás), akkor az észlelt szélsebességeket közvetlenül nem redukálhatjuk a tengerszínre.

A következőkben tehát csupán a párisi adatok redukcziójánál nyert eredményeket tárgyalom. A redukcziót egyfelől a dynamikai korrekczió nélkül a zárt helyen észlelt légnyomásokon, másfelől a dynamikai korrekczió számbavételével a szabadra redukált légnyomásokon végeztem. A számításokat most is a két ötéves átlagon külön-külön elvégeztem és mivel az ötéves átlagok csak lényegtelen eltéréseket mutattak, elégségesnek tartottam azoknak számtani középértékét közölni. A tengerszíni hőmérsékletet (t_0), mindkét állomáson észlelt hőmérsékletekből külön-külön számított tengerszíni hőmérsékleteknek számtani középértéke szolgáltatta. A tengerszíni szélsebességet (v_0) a (II) alattival számítottam ki oly módon, hogy előzetesen a tengerszíni légnyomást B meghatároztam. Ugyanis az észlelőállomás légnyomásához (B' és b') $\frac{h}{h_1}\Delta'$ légnyomást adtam, hol h az észlelőhely tengerszíni és h_1 a két állomás közötti magasságot, Δ' pedig a két állomás közötti légnyomás különbségét jelenti. A két állomáshoz tartozó és az így kiszámított tengerszíni szélsebességeknek számtani közepét tekintettem a tengerszíni szélsebesség közelítő értékének (v_0), melylyel aztán a redukcziót végeztem.

A szükséges adatok a következő táblázatban foglaltatnak:

	B	b	B'	b'	t_1	t_2	t_0	v_0
Január	761·58	735·52	761·52	735·28	3·70	2·19	3·81	1·4
Február	761·10	735·24	761·04	734·96	5·43	3·81	5·48	0·0
Márczius	758·41	732·82	758·36	732·65	7·32	5·33	7·19	3·3
Április	758·45	733·16	758·41	733·03	10·87	8·86	10·73	1·5
Május	758·34	733·32	758·32	733·23	13·68	11·35	13·38	2·6
Junius	759·87	735·15	759·87	735·14	17·68	15·33	17·37	2·0
Julius	759·90	735·36	759·90	735·34	19·33	17·00	19·03	2·3
Auguszt.	759·49	734·98	759·48	734·92	19·10	17·16	18·99	2·5
Szeptem.	760·63	735·84	760·61	735·74	16·22	14·72	16·33	2·3
Október	758·89	733·72	758·85	733·53	11·48	11·68	11·68	1·6
November	760·19	734·55	760·16	734·41	7·26	5·85	7·42	1·7
December	760·99	734·97	760·95	734·75	3·84	2·58	4·07	1·5
Év	759·82	734·55	759·77	734·41	11·33	9·66	11·29	1·89

A B és B' az alsó állomás, b és b' a felső állomás zárt helyen észlelt, illetve szabad levegőre redukált, zérusfokos és a nehézségi korrekczióval ellátott barometerállásokat, t_1 az alsó állomás és t_2 a felső állomás hőmérsékletét jelenti; a többi menynyiségek ismeretesek és a felső, meg alsó állomás szélsebességei már az előzőkben foglaltatnak.

A képleteket, melyekkel a tengerszíni redukcziót végezhetjük, az (I') és (II') alattiból szerkeszthetjük.

A dynamikai korrekczió számításba vétele nélkül

$$\log B = \log b + \frac{h}{a}\left(1+0{\cdot}002\,(t+t_0)\right)^{-1}, \qquad (\mathrm{I}'')$$

a dynamikai korrekczió számításba vételével

$$\log B = \log b + \left(\frac{h}{a} + \frac{v^2-v_0^2}{2ga}\right)\left(1+0{\cdot}002\,(t+t_0)\right)^{-1}. \qquad (\mathrm{II}'')$$

Hol B a tengerszíni légnyomást, b az észlelőhelynek a légnyomását, g az észlelőhely és a tengerszíne között a középgyorsulást jelenti és az a-ban $z=0$. A tengerszínre redukált légnyomások a következő táblázatban foglaltatnak:

	B_1	b_1	d	B'_1	b'_1	d'
Január	764·72	764·50	+·22	764·70	764·72	—·02
Február	764·22	764·02	+·20	764·18	764·21	—·03
Márczius	761·49	761·32	+·17	761·44	761·50	—·06
Április	761·49	761·27	+·22	761·46	761·48	—·02
Május	761·35	761·16	+·19	761·32	761·38	—·06
Junius	762·84	762·64	+·20	762·84	762·88	—·04
Julius	762·85	762·68	+·17	762·85	762·89	—·04
Augusztus	762·44	762·28	+·16	762·43	762·48	—·05
Szeptember	763·62	763·44	+·18	763·59	763·64	—·05
Október	761·92	761·73	+·19	761·89	761·94	—·05
November	763·28	763·07	+·21	763·25	763·30	—·05
Deczember	764·12	763·91	+·21	764·09	764·12	—·03
Év	762·86	762·67	+0·19	762·84	762·88	—·04

A B_1 és B'_1 az alsó állomás és b_1 meg b'_1 a felső állomás adataiból számított tengerszíni légnyomásokat, továbbá $B_1-b_1=d$

és $B'_1 - b'_1 = d'$, az első a zárt helyen észlelt légnyomásokból és dynamikai korrekczió nélküli különbséget, a második pedig a szabad levegőre redukált légnyomásokból és a dynamikai korrekczió számításba vételével nyert különbséget jelenti. A különbségi sorok (d és d') tagjainak abs. értékeit összehasonlítván, látjuk, hogy a d' sor tagjai kisebbek a d sor tagjainál, vagyis a felső és alsó állomás légnyomásainak tengerszínre redukált értékei inkább egyeznek, ha a dynamikai korrekcziót is számításba vesszük és d' sor tagjainak állandó negativ előjele mutatja, hogy az alsó állomáson észlelt szélsebesség a helyi viszonyok közvetlen hatása következtében (surlódás stb.) kisebb, mintha az a lokális viszonyoktól függetlenül mérhető lett volna.

A dynamikai korrekczió bár aránylagosan nem nagy, úgy, hogy a napi időjárási térképek izobárjait számbavehetőleg nem módosítja, azonban valamely nagyobb összefüggő terület több évi légnyomásának átlagos elosztását már lényegesen is megváltoztathatja.

Ezekből aztán egészen általánosan az is következik, hogy a barometereket mindenkor szélcsendes időben kell összehasonlítani és állandóikat az így nyert adatokból kell meghatározni.

Ezek a fejtegetések staczionárius légmozgásokra vonatkoznak, úgy, hogy a fentiekben előfordult számadatok azt is igazolják, hogy az atmoszfera elemeinek átlagos értékei a staczionárius légmozgásnak nagy közelítéssel megfelelnek. Az egyes esetekben, különösen, ha hirtelen változások mutatkoznak, a légmozgás staczionárius jellege megváltozhatik ugyan (például cyklonos légmozgásoknál), de ekkor a hypszometrikus képlet is módosulhat.

Végre az észlelésekben való részvételért őszinte köszönetemet fejezem ki a szövegben említett barátaimnak és különösen lerovom hálámat Marcell György-nek, ki számításaimat is ellenőrizni szives volt.

Anderkó Aurél.

PHYSIKAI LABORATÓRIUM.

A levegőnyomás változása a magassággal. Azok között az iskolakísérletek között, a melyek a levegő nyomásának a magassággal való változását tüntetik fel, az úgynevezett Neyreneuf-féle «gáznivaeu» még ez ideig a legkiválóbb. (Journal de physique. 1882. 460. l.) A kísérletet egyszerűség és érzékenység jellemzik.

Vegyünk egy *T* alakú csövet, s kössük össze alsó szárát kaucsukcsővel a gázvezetékkel, a másik két szárat ugyancsak kaucsukcső segítségével egy-egy 8—12 mm.-es átmérőjű fémcsővel. Az utóbbiak helyett üvegcsövek is alkalmazhatók, de ezek felső vége a nagy melegség miatt könnyen szétpattan. Én a fémcsövek helyett két Bunsen-égőt használtam, a melyek szintén kitünően beváltak. Kisérlet alkalmával a csöveket vagy a Bunsen-égőket egyenlő magasságba helyezzük, s a meggyujtott gázt úgy igazítjuk, hogy a lángok lehető kicsinyek legyenek. Most még az egyik kaucsukcsőre alkalmazott szorítócsap segítségével a két lángot teljesen egyenlő magasságuvá kell tennünk. Ezek után bárhogyan is változtatjuk a lángok helyzetét ugyanabban *a vizszintes síkban*, a két láng fénye és nagysága — még a legkülönbözőbb gáznyomás mellett is — ugyanaz marad. De mihelyt az egyik lángot, hacsak *nagyon kevéssé is* fölemeljük, úgy azonnal nagyobb lesz, és pedig annál inkább, mennél magasabbra emeltük; a másik láng ellenben mindinkább kisebbedik. Ha pedig az előbbi lángot az eredeti helyzetnél alantabbra helyezzük, úgy az most kisebb lesz. Van egy bizonyos magasság különbség, a melynél az alantabb levő láng ki fog aludni. Az érzékenység annál nagyobb, mennél kisebbek a lángok. *Szekeres Kálmán.*

*

Hogyan lesz a papir elektromos? Az egyszerű eljárást, a melylyel a papirt elektromossá tehetni, Kleiber és Böhmländer ismertették. (Zeitschrift f. d. phys. u. chem. Unterricht XIV. 33. és 167. ll.) Ismételheti az eljárást a tanuló is, még pedig otthon, mert valóban mindenütt megtalálható egyszerű eszközöket kell csak felhasználni.

KLEIBER szerint papirt úgy teszünk elektromossá, ha néhány másodperczig a meleg kályha oldalán vagy tűzhely lapján tartjuk, azután az egyik kezünkkel leemeljük s a másik kezünknek hüvelyk- és mutatóujja között néhányszor gyorsan végig húzzuk. Most a papir elektromossága *negativ*. Az ily papir oly nagy mértékben elektromos, hogy a vízszintesen tartott tenyér alján, valamint a falon is függve marad. Tartsuk az ily papirt az egyik kezünkben úgy mintha inga lenne, úgy azt a másik kéz — kedvező körülmények között — már 10 cm. távolságban is vonzza. Ha pedig azt akarjuk, hogy a papir elektromossága *positiv* legyen, úgy a papir darabot a kályha lapon hagyjuk s ott kétszer háromszor radirgummival végig dörzsöljük. Ez esetben elektromossága nagyobb lesz. Mivel a megmelegítés által a papir jó szigetelővé vált, elektromossága száraz napon egy-két óráig is eltart.

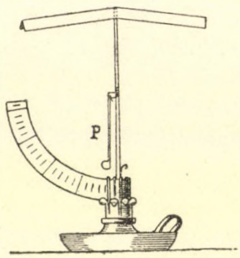
BÖHMLÄNDER a papirt úgy teszi elektromossá, hogy a kályha mellett lévő meleg falra helyezi és kezével néhányszor végig húzza, vagy a mi még hatásosabb, posztóval megdörzsöli. A papir most *negativ* elektromos lesz s a falon függve marad. Ha a papirt leszakítjuk, a serczegés tisztán hallható és sötétben szikrát is látunk. De valóságos szikrapamatot kapunk (sötét szobában), ha az egyik kézzel leszakított papiroshoz a másik kezünk ujjának bütykével közelítünk. E szikrapamat a papir felülettel növekszik. (Egy 30×20 cm^2-eres ujságlapnál csaknem 10 cm-es szikrapamatot kaptam.) Az így elektromossá tett papiros tenyerünkön szintén függve marad. Két egymásra tett s ugyanoly módon dörzsölt papir darab ellentétes elektromosságú lesz.

Ha az említett módon néhány papirlapot elektromossá téve egymásra helyezünk, és ezekre szigetelő nyéllel ellátott fémfödőt teszünk, egy valóban nagyon egyszerű elektrophort kapunk. A hatás itt erősebb, mint az előbbi esetben, de a szikraköz kisebb. (Én e czélra a fenn említett méretű ujságlapokból 6—8 darabot használtam.)

A különböző fajtáju papirok e kísérletre többé-kevésbbé egyaránt alkalmasak, de legszebb eredményeket az ujság- és selyempapiroknál kaptam.

Hogy a KLEIBER-féle eljárással csakugyan positiv is, meg negativ is lesz a papiros, azt a tanuló maga könnyen megvizsgálhatja, ha «fidibusz-elektroskop»-ot készít. Ez pedig nagyon egyszerű. Alacsony gyertyatartóban levő nem nagy darab gyertyába (szigetelőbe) kötőtűt szúr, erre azután — mintha mágnestű lenne — könnyen mozgó papirfidibusz ujság- vagy (kétszeresen vett) selyempapirból készíthető, amelynek hossza kb. 30 cm., szélessége 2 cm., közepén végig behajtva, hogy némi merevséget kapjon. A mikor a fidibuszt a tűre teszszük czélszerű közepén kissé behajtani (l. az ábrát), nehogy könnyen leessék. Ha a fidibuszt a tűre való föltevés előtt Kleiber módszerével positivvá tettük, úgy az ilykép megtöltött papir taszítani, a negativ elektromosságu pedig vonzani fogja. A hatás már 40—60 cm. távolságból könnyen észrevehető.

A fidibusz elektroskopot még arra is felhasználhatja a tanuló, hogy némi összehasonlító méréseket végezzen. E czélból selyempapirból kb. 8 cm. hosszú és 1—1 mm. széles, hosszában behajtott, szalagot készít, azt virágdróttal a kötőtűhöz erősíti, úgy hogy a (*P*) papirszalag vízszin-



tes tengely körül könnyen mozoghasson. Ez most elektromos inga gyanánt szolgál. A gyertyához papirskálát is erősíthetni, (a melynek nem kell épp fokosztályzattal ellátottnak lenni), részben azért is, hogy a (*P*) inga oldalt ki ne térjen.

Kleiber e kísérleteket az osztályokban való bemutatásra is ajánlja. Ha kályhánk nincs, megteszi a szolgálatot épp oly jól az óra előtt izzításra hevített vasalóvas, a mely egy óráig nagyon is eléggé meleg marad. Itt azt is megmutathatjuk, hogy papir papiron vasalva eléggé már elektromos lesz. *Szekeres Kálmán.*

Kimutatás

az 1905. év márczius hó 20-tól május hó végéig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1901. évre: Kacsoh Pongrácz dr. ... ... 10 kor.

1902. évre: Kacsoh Pongrácz dr. 10 k., Tordai Imre 10 k. Összesen ... ... 20 kor.

1903. évre: Fertig Vilmos 10 k., Kacsoh Pongrácz dr. 10 k., Székely László 10 k., Tatár Balázs 6 k. Összesen... ... ... 36 kor.

1904. évre: Asbóth Emil 10 k., Bánki Donát 10 k., Bielek Miksa 10 k., Csillag Vilmos 10 k., Cziegler Győző 10 k., Hauszmann Alajos 10 k., Jónás Ödön 10 k., Kacsoh Pongrácz dr. 10 k., Kisgyörgy János 6 k., Klug Nándor dr. 10 k., Kötse István 6 k., Nagy Dezső 10 k., Pecz Samu 10 k., Schimanek Emil 10 k., Steiner Lajos dr. 10 k., Strausz Ármin 10 k., Tolnay Lajos 10 k., Zipernovszky Károly 10 k. Összesen ... ... 172 kor.

1905. évre: Balog Mór 10 k., Bauer Mihály 10 k., Beregi Ernő 6 k., Blau Ármin 6 k., Bóbita Endre 6 k., Bretz Berta 6 k., Czekeliusz Aurél 10 k., Eltscher Simon 6 k., Félegyházy Antal 6 k., Fraunhoffer Lajos 10 k., Harsányi Dezső 10 k., Heller Richárd 6 k., Hoór Mór dr. 10 k., Janell József 6 k., Jordán Károly dr. 10 k., Juckel Gyula dr. 10 k., Kacsoh Pongrácz dr. 10 k., Kalecsinszky Sándor 10 k., Kirchknopf András 6 k., Kiss Gábor 6 k., Kiss Zoltán 6 k., Klúg Lipót dr. 6 k., Kövesligethy Radó dr. 10 k., Lakner József 6 k., Leber Gyula 6 k., Lieblich Áron 6 k., Magdics Gáspár 6 k., Marczell György dr. 10 k., Mihálovich Alajos 6 k., Molnár Szaniszló 6 k., Nagy Vazul Pál 6 k., Neumann Jenő 6 k., Obláth Richárd 6 k., Oszlaczky Szilárd 10 k., Pilcz Ottó 10 k., Rados Gusztáv 10 k., Stanics Fulgent 6 k., Stauber József 6 k., Steiner Lajos dr. 10 k., Straub Gyula 10 k., Straub Sándor 10 k., Sós Ernő 10 k., Szabó József 6 k., Szalay István 6 k., Székely Károly 6 k., Széky István 6 k., Szemethy Béla 10 k., Tass Antal 6 k., Thán Károly dr. 10 k., Thanhoffer Lajos dr. 10 k., Vajnóczky István 10 k., Vörös Cyrill 10 k., Walther Béla 6 k., Wéber Márton 6 k., Wodeczky József 6 k., Zipernovszky Károly 10 k. Összesen ... ... 436 kor.

1906. évre: Riegl Sándor ... ... 6 kor.

Előfizetési dijat fizettek:

Aradi áll. főreálisk. 10 k., Aradi áll. tanitónőképző 10 k., Aradi kir. főgymn. 10 k., Beregszászi áll. főgymn. 10 k., Brassói r. k. főgymn. 10 k., Budapesti VI. ker. áll. fels. leányisk. 10 k., Érsekújvári közs. kath. főgymn. 10 k., Kaposvári áll. főgymn. 10 k., Késmárki ág. hitv. ev. lyceum 10 k., Kilian Frigyes utóda 20 k., Mérnök-épitész-egylet 10 k., Salgótarjáni polg. isk. 10 k., Szászvárosi ev. ref. Kun-kollegium 10 k. Összesen ... ... 140 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból	238 kor.	január 1-től 340 kor.
F. és köv. évi tagsági dijakból	442 kor.	« « 922 kor.
Előfizetési dijakból	140 kor.	« « 665 kor.

Kelt Budapesten, 1905. junius 1.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-ut 15.)

AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS KÉT ELEMI KÉRDÉSÉRŐL.*

A következő sorokban két megjegyzést bátorkodom közölni, a melyeknek az integrálszámításról tartott egyetemi előadásaimban hasznát vettem; az első az egy valós változó függvényének határozott integráljának existentia bizonyítására vonatkozik, a második pedig egy totalis differential görbe vonalú integráljáról szól, és azoknak az alapvető tételeknek a bebizonyítását adja, melyek emez integrálokra állanak s melyekből CAUCHY tételei a komplex változó monogen függvényeinek integráljairól folynak.

I.

Legyen $f(x)$ az x valós változónak

$$p<x<q$$

számközön belül egyértékű s véges függvénye. Ha a és b két p és q között fekvő érték ($a<b$) akkor az

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

határozott integrál existentiáját RIEMANN** szerint akkép bizonyítjuk, hogy megmutatjuk, miszerint a

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(\xi_{k-1}) \tag{2}$$

összeg meghatározott határérték felé tart, ha az $n-1$ számú $x_1, \ldots, x_{n-1}$ pontoknak, melyek az $a \ldots b$ ($a=x_0$, $b=x_n$) inter-

* A «L'Enseignement mathématique»-ben megjelent czikknek szerző készitette forditása.

** Werke (1892), p. 239.

vallumot n részre osztják, a számát akkép növesztjük a végtelenbe, hogy e részek mindegyike tetszőleges kicsinynyé válik, s hogy e határérték független az $x_1, \ldots, x_{n-1}$ valamint a közbeeső ξ_{k-1} pontok,

$$x_{k-1} \leqq \xi_{k-1} < x_k$$

választásától.

Ha a (2) összeget ugyanazon $x_1, \ldots, x_{n-1}$ pontokkal, de a közbeeső értékek különböző rendszerével $\bar{\xi}_{k-1}$ és ξ_{k-1}-gyel megalkotjuk:

$$S_1 = \sum_k (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1}),$$

$$S_2 = \sum_k (x_k - x_{k-1}) f(\bar{\xi}_{k-1}),$$

akkor a szükséges és elegendő föltétel arra, hogy az $S_1 - S_2$ különbség az n számnak mondott módon való növesztésével tetszőleges kicsinynyé váljék — a mint tudva van — abban áll, hogy

$$\lim_n \sum_k (x_k - x_{k-1}) \sigma_{k-1} = 0, \tag{3}$$

hol σ_{k-1} az $f(x)$-függvénynek $x_{k-1} \ldots x_k$ számközön belül való *ingadozását,* azaz azon szélső értékeknek a különbségét jelenti, melyeket a függvény e számközön belül fölvehet. Annak a bebizonyítását, hogy e föltétel egyszersmind arra is elegendő, hogy az osztási $x_1, \ldots x_{n-1}$ pontok két különböző sorával megalkotott (2) összegek közös határérték felé közeledjenek, rendesen az osztások superpositiójának, CAUCHY * adta elvének alkalmazásával szokás elvégezni. KRONECKERnek egy megjegyzését ** fölhasználva azt akarom megmutatni, hogy ezen elv alkalmazása fölöslegessé válik, ha a (3) föltétel értelmét a következő módon kitágítjuk.

Legyenek $\zeta_{k-1} \ldots \zeta_k$ oly intervallumok, melyek az $x_{k-1} \ldots x_k$ intervallumokat felölelik, s melyek azonfelül olyanok, hogy $\zeta_k - \zeta_{k-1}$ az $x_k - x_{k-1}$-gyel egyidőben a zéró felé tartson. Ha azután σ_{k-1} az $f(x)$-függvénynek $\zeta_{k-1} \ldots \zeta_k$ intervallumon be-

---

* Resumé des leyons etc. (1823), p. 81.

** Vorlesungen über Integrale (1894) p. 6—7.

lül való ingadozását, ξ_{k-1}, $\overline{\xi}_{k-1}$ pedig ugyan ezen intervallum két közbeeső értékét jelenti, akkor a (3) föltétel most is szükséges is elegendő lesz arra, hogy az S_1, S_2 összegek ugyan azon határérték felé közeledjenek.

Növesszük most az $x_{k-1} \ldots x_k$ részeknek a számát n-et egy tetszés szerinti törvény szerint, de oly kép, hogy e részek kiterjedése a zéró felé tartson, s legyenek

$$S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots .$$

az így egymásután következő osztásokkal s tetszés szerinti közbeeső értékekkel megalkotott (2) féle összegek; akkor ki kell mutatni, hogy, lévén δ egy tetszőlegesen megszabott kis positiv mennyiség, az N positiv egész számot akkép tudjuk meghatározni, hogy

$$\left| S_{n_{\lambda+\nu}} - S_{n_\nu} \right| < \delta$$

ha $\nu > N$ s λ tetszőleges, azaz hogy

$$\lim_{\nu} S_{n_\nu}$$

létezik. Azután pedig be kell bizonyitani, hogy e határérték független azon módtól, a mely szerint az n számot növesztettük. — Legyen hát

$$x_1 \ldots, x_{n-1}, \text{ a } \xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$$

és

$$\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{m-1}, \text{ a } \overline{\xi}_0, \ldots, \overline{\xi}_{m-1}$$

közbeeső értékekkel két osztás és

$$S = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1}),$$

$$T = \sum_{k=1}^{m} (\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_{k+1}) f(\overline{\xi}_{k-1})$$

a megfelelő két összeg, akkor elég lesz kimutatni, hogy a $T-S$ különbség a zéró felé tart, ha az n és m számokat akkép növesztjük, hogy az

$$\underset{(k=1,\, 2, \ldots, n)}{x_k - x_{k-1}}$$

$$\underset{(k=1,\, 2, \ldots, m)}{\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_{k-1}}$$

különbségek mindegyike a zéró felé közeledik. E végből jelöljük $X_1, \ldots, X_{n+m-2}$-vel a nagyságuk szerint rendezett x_k és $\mathfrak{x}_k$ menynyiségeket és legyen $X_{\lambda-1} \ldots X_\lambda$ az az intervallum, mely az $x_{\lambda_i-1} \ldots x_{\lambda_i}$ és az $\mathfrak{x}_{\lambda_k-1} \ldots \mathfrak{x}_{\lambda_k}$ intervallumokon belül van, akkor nyilvánvaló, hogy

$$S = \sum_{\lambda=1}^{m+n-2} (X_\lambda - X_{\lambda-1})\, f(\xi_{\lambda_i-1}),$$

$$T = \sum_{\lambda=1}^{m+n-2} (X_\lambda - X_{\lambda-1})\, f(\bar{\xi}_{\lambda_k-1}).$$

De ily módon fölírva, az S, T összegek az S_1, S_2-féle összegek jellegével bírnak, ha ez utóbbiakat a tágabb értelemben veszszük, mivel az $x_{\lambda_i-1} \ldots x_{\lambda_i}$ és $\mathfrak{x}_{\lambda_k-1} \ldots \mathfrak{x}_{\lambda_k}$ intervallumok egyesítésével oly $\zeta_{\lambda-1} \ldots \zeta_\lambda$ intervallumot nyerjük, mely a ξ_{λ_i-1}, ξ_{λ_k-1} pontokat magában foglalja, az $X_{\lambda-1} \ldots X_\lambda$ intervallumot felöleli s melynek kiterjedése $\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda-1}$ az $X_\lambda - X_{\lambda-1}$-gyel egyidőben végtelen kicsinynyé válik. A (3) föltétel tehát elegendő arra, hogy S és T közös határérték felé közeledjen, a mi bebizonyítandó volt.

Nyilvánvaló, hogy a (3) föltétel — *a tágabb értelemben is* — teljesül, ha $f(x)$ a $p \ldots q$ intervallumon belül Cauchy értelmében folytonos függvénye az x-nek.

II.

Legyen $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ a ξ, η valós változóknak két függvénye, mely a (ξ, η)-sik valamely egyszeresen összefüggő tartományán belül egyértékű, véges és ξ és η szerint deriválható. Ha S-en belül az

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial \xi} \tag{1}$$

integrabilitási föltétel teljesül, akkor a

$$du = Pd\xi + Qd\eta \tag{2}$$

differentiálegyenletnek van oly u megoldása, mely a ξ, η két egymástól független változónak S-en belül egyértékü függvénye és mely az S tartománynak egy tetszés szerint megadott (ξ_0, η_0) pontjában eltünik. E tételt be akarjuk bizonyitani, s pedig a nélkül, hogy a görbe vonalú integral meg a kettős integral fogalmát felhasználjuk; ellenkezőleg, a mi bebizonyitásunk révén képesek leszünk fölötte egyszerű módon származtatni azokat az alapvető tételeket, a melyek a görbe vonalú integrálokra vonatkoznak. Eljárásunkban pedig EULER-t követjük.

1. Legyen (ξ_0, η_0) és (ξ, η) az S tartománynak két oly pontja, a melyre nézve a

$$(\xi_0, \eta_0), (\xi, \eta_0), (\xi, \eta), (\xi_0, \eta)$$

pontokkal — a melyeket A, B, C, D-vel jelöljük — meghatározott derékegyenközény teljesen S-en belül van.

Tekintsük e két kifejezést:

$$v = \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\xi_0, \eta)\, d\eta + \int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi, \eta) d\xi, \tag{3}$$

$$\bar{v} = \int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi, \eta_0) d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\xi, \eta) d\eta, \tag{4}$$

a melyeket akkép jellemezhetjük, hogy az első v a *fölsö* (AD, DC) *lépcsőre*, a másik $\bar{v}$ az *alsó* (AB, BC) *lépcsőre* vonatkozik, a mely lépcsőkkel az A pontot a C ponttal összekapcsolhatjuk. Kimutatjuk, hogy v és $\bar{v}$ a (2) differentialegyenletnek megoldásai s hogy e két kifejezés egymással azonos, azaz, hogy

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = P, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = Q, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = Q, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} = P, \tag{6}$$

$$v - \bar{v} = 0. \tag{7}$$

A két (5) alatti egyenlet közvetlenül igazolható, a (6) alatti egyenletekre nézve elég lesz az elsőt bebizonyitani.

* Lásd Institutiones calculi integralis, t. I, caput II. artt. 448. s köv.

Tegyünk e végből

$$w=\int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi,\eta)\,d\zeta, \tag{8}$$

akkor lesz *

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}=Q(\xi_0,\eta)+\frac{\partial w}{\partial \eta}. \tag{9}$$

De

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(Q(\xi,\eta)-\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial Q}{\partial \xi}-\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right),$$

a miből tekintettel az (1) integrabilitási föltételre

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(Q(\xi,\eta)-\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)=0, \tag{10}$$

azaz, hogy a

$$Q(\xi,\eta)-\frac{\partial w}{\partial \eta}=F(\eta) \tag{11}$$

kifejezés ξ-től független. Lévén

$$\lim_{\xi=\xi_0} w=0,\quad \lim_{\xi=\xi_0}\frac{\partial w}{\partial \eta}=0, \tag{12}$$

lesz

$$Q(\xi_0,\eta)=F(\eta)$$

és a (11), (9) egyenletekre való tekintettel

$$\frac{\partial w}{\partial \eta}=Q(\xi\,\eta)-Q(\xi_0,\eta),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}=Q(\xi,\eta),$$

a mi bebizonyitandó volt.

A (7) egyenlet bebizonyitásában a v, $\bar{v}$ integrálok fölső határaiban ξ, η helyébe ξ_1, η_1-et irunk, a bebizonyitandó egyenlet akkor ez lesz:

$$(7a)\quad \int_{\xi_0}^{\xi_1} P(\xi,\eta_0)\,d\xi+\int_{\eta_0}^{\eta_1} Q(\xi_1,\eta)d\eta+\int_{\xi_1}^{\xi_0} P(\xi,\eta_1)d\xi+\int_{\eta_1}^{\eta_0} Q(\xi_0,\eta)\,d\eta=0,$$

a mely egyenletnek az értelme abban áll, hogy a $Pd\xi+Qd\eta$ totalis differential integrálja, az $ABCD$ derékegyenközény kerü-

* V. ö. EULER az i. h. art. 448. A következő számitásoknál a P, Q függvényekre még bizonyos kiegészitő föltevéseket kell kiróni, a melyeket e számitásokból magukból könnyen kivehetjük.

lete mentén véve eltünik; a (7) alatti egyenlet tehát nem más, mint a RIEMANN—CAUCHY-féle tétel * az $ABCD$ derékegyenközény esetére.**

Legyen (ξ, η) egy tetszőleges $(ABCD)$-n belül levő pont, és tegyünk

$$s(\xi, \eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi, \eta) d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\xi_0, \eta) d\eta,$$

akkor az előzők szerint lesz:

$$\frac{\partial s}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta), \tag{13}$$

és a $(7a)$ egyenlet első tagja ekkép irható:

$$\int_{\eta_0}^{\eta} Q(\xi_1, \eta) d\eta - s(\xi_1, \eta_1) + s(\xi_1, \eta_0),$$

vagyis:

$$\int_{\eta_0}^{\eta} \left(Q(\xi_1, \eta) - \frac{\partial s(\xi_1, \eta)}{\partial \eta} \right) d\eta$$

a mely integral a (13) egyenlet folytán identice zéró.

2. Legyen most (ξ_0, η_0) és (ξ, η) az S tartomány belsejében fekvő két tetszőleges pont, akkor végtelen sokféle módon tudunk a

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \cdots (\zeta_{n-1}, \eta_{n-1}) \tag{14}$$

vegyes számú s az S belsejében levő pontokat akkép a (ξ_0, η_0), (ξ, η) közzé iktatni, hogy két egymásután következő pontra

$$(\xi_{\lambda-1}, \eta_{\lambda-1}) \text{ és } (\xi_\lambda, \eta_\lambda)\text{-ra}$$

nézve (hol $\xi_n = \zeta$, $\eta_n = \eta$) vagy a fölső vagy az alsó lépcső, mely e két pontot összekapcsolja, teljesen az S-en belül legyen. A sze-

---

* RIEMANN, Werke (1892), p. 15, I.

** A (7) egyenlet bebizonyítása EULER-nél nem fordul elő; EULER az i. h. art. 452 csak azt mondja: «Ex rei natura patet, perinde esse utra via procedatur necesse enim est ad eandem æquationem integralem perveniri». De a szövegben adott bizonyítás csak oly segédeszközökkel dolgozik, a melyek EULER-nek rendelkezésére állottak.

rint a mint az első vagy a második esettel van dolgunk, jelöljünk vagy a

$$\int_{\eta_{\lambda-1}}^{\eta_\lambda} Q(\xi_{\lambda-1}, \eta)\,d\eta + \int_{\xi_{\lambda-1}}^{\xi_\lambda} P(\xi, \eta_\lambda)\,d\eta \tag{15}$$

vagy a

$$\int_{\xi_{\lambda-1}}^{\xi_\lambda} P(\xi, \eta_{\lambda-1})\,d\xi + \int_{\eta_{\lambda-1}}^{\eta_\lambda} Q(\xi_\lambda, \eta)\,d\eta \tag{15a}$$

kifejezést v_λ-val; ha mind a két lépcső S-en belül volna, akkor a (7) egyenlet folytán, a (15) és (15a) kifejezések úgyis azonosak volnának. A

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n \tag{16}$$

összeg, akkor oly függvényét szolgáltatja a ξ, η-nak, mely a (2) differential egyenletnek eleget tesz és (ξ_0, η_0) pontban eltünik. Annak bebizonyítására, hogy e függvény az S-en belül egyértékü, elég lesz megmutatni, hogy a (16) összeg értéke a közbeigtatott (14) pontsorozat választásától független.

Legyen hát

$$(\xi_1', \eta_1'), \cdots, (\xi_{m-1}', \eta_{m-1}')$$

a közbeigtatott pontoknak egy másik sorozata és

$$v_1' + v_2' + \cdots + v_m' \tag{16a}$$

a megfelelő integráloknak az összege. A (14) és (14a) pontsorozatok két a (ξ_0, η_0)-t a (ξ, η)-val összekapcsoló *lépcsőzetet* fog meghatározni, a mely lépcsőzetek teljesen az S-en belül vannak. Az ezen két lépcsőzettől határolt S-hez tartozó síkrészt, nyilvánvalóan az $(ABCD)$ jellegű derékegyenközények véges számával befödhetjük; ha már most e derékegyenközények mindegyikére a (7) egyenlettel adott tételt alkalmazzuk, akkor közvetlenül kiadódik a (16) és (16a) alatti összegek azonossága.

A (16) alatti összeg a (2) differentialegyenletnek azt az u megoldását szolgáltatja, a melynek existentiáját be akartuk bizonyítani; e megoldást így jelöljük:

$$u = S\int_{(\xi_0,\,\eta_0)}^{(\xi,\,\eta)} (Pd\xi + Qd\eta)^{*}. \tag{17}$$

3. Hogy még a nyert eredményeknek az alkalmazását adjam a görbe vonalú integrálokra vonatkozó alapvető tételekre, legyen C egy az S-en belül foglalt a (ξ_1, η_1) és (ξ_2, η_2) pontokat összekapcsoló görbe, mely a

$$\xi = \varphi(t),\ \eta = \psi(t)$$

egyenletekkel van előállítva, hol $\varphi(t)$, $\psi(t)$ a t parameternek egyértékű függvényei, melyek a $t_1, \ldots t_2$ intervallumon belül, hol

$$\xi_i = \varphi(t_i), \quad \eta_i = \psi(t_i), \quad (i=1,\,2)$$

folytonos t-szerinti deriváltakkal $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$-vel bírnak.**

Akkor a C-görbére szóló görbe vonalú integrál nem más, mint

$$C\int_{(\xi_1,\,\eta_1)}^{(\xi_2,\,\eta_2)} (Pd\xi + Qd\eta) = \int_{t_1}^{t_2} (P.\varphi'(t) + Q.\psi'(t))dt.$$

Minthogy a (17) egyenlettel adott egyértékű $u(\xi, \eta)$ függvény a (2) differential egyenletet kielégíti, lesz

$$P(\varphi(t), \psi(t)).\ \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)).\ \psi'(t) = \frac{du(\varphi(t), \psi(t))}{dt},$$

és ennélfogva

$$C\int_{(\xi_1,\,\eta_1)}^{(\xi_2,\,\eta_2)} (Pd\xi + Qd\eta) = u(\varphi(t_2), \psi(t_2)) - u(\varphi(t_1), \psi(t_1))$$
$$= u(\xi_2, \eta_2) - u(\xi_1, \eta_1)$$

* A (17) alatti integrálnak a 2.-ben jelzett értelmezését körülbelül egyidőben HEFFTER barátommal találtam (lásd HEFFTER közleményét a Göttinger Nachrichtenben, 1904. p. 196). Számomra a jelen dolgozat fejtegetései csak bizonyos általánosabb vizsgálatoknak igen specialis alkalmazásai, a mely vizsgálatok a linear differentiál rendszerekre vonatkoznak és a melyeket a Mathematikai és Természettudományi Értesítőben (XXII. k. p. 486, XXIII. k. p. 102) közöltem.

** Tudva van GOURSAT (Transactions of the American Mathem. Society I, 1900), MOORE (ugyanott), PRINGSHEIM (ugyanott II, 1904), HEFFTER (Göttinger Nachrichten 1902, 1903, 1904) dolgozatai szerint, hogy a görbe vonalú integrál értelmezése sokkal általánosabb jellegű görbék esetére is adható, de mivel a szövegben alkalmazott értelmezés az analytikai alkalmazások legnagyobb részére nézve elég általános, ez értelmezésre szoritkozom előadásaimban és e helyen is.

a mi azt mutatja, hogy a (18) alatti integrál független a C integrátiós görbe választásából, és hogy ennek folytán a zárt görbére vonatkozó integrál zéróra reducálódik.* Az átmenet CAUCHY-nak a monogen függvények integráljaira vonatkozó tételeihez most a szokott módon végezhető.

Jegyezzük meg, hogy az I. fejezet fejtegetéseit, minden nehézség nélkül, a többszörös integrálokra, a II. fejezetéit pedig a tetszőleges számú független változótól függő totalisdifferentiálok integráljaira általánosíthatjuk.

Schlesinger Lajos.

* V. ö. HEFFTER az i. h. 1903, p. 123.

HALMAZOK AEQUIVALENCZIÁJA.*

A halmazok összehasonlításának rendkivül fontos módszerét szolgáltatja a következő tétel:

*Ha A halmaz valamely A_1 része aequivalens B halmazzal, és B valamely B_1 része aequivalens A-val, akkor A is aequivalens B-vel.**

Ennek a nevezetes tételnek igen egyszerű új bebizonyitását és néhány alkalmazását akarjuk a következő sorokban közölni. Előre bocsátjuk ezt a segédtételt.***

Ha T halmaz elemei a végtelen sok

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

---

* A társulat 1905. január havi első ülésében tartott előadásban megemlitettem, hogy a *sokaság* szó, melyet a német *Menge*-re használunk, nem fejezi ki eléggé azt az egységesitést, összesitést, a melyet az elemek összefoglalásával végzünk. A franczia «ensemble», az olasz «aggregato» és az angol «aggregate» sokkal többet fejeznek ki. Az előadás után társulatunk alelnöke KŐNIG GYULA megjegyezte, hogy az elnevezések ügyében már értekezett társulatunk leghivatottabb tagjával: SZILY KÁLMÁN-nal és a vele folytatott megbeszélése alapján czélszerűbbnek tartaná, ha a sokaság helyett a Menge értelmében *halmazt* használnánk, a *Mächtigkeit* helyett pedig a (franczia puissance, az olasz potenza), a *számosság* szót ajánlja. Nagy örömmel fogadtam ez ajánlatokat, e kis czikkben már használom is e kitünő szókat, és azt hiszem, hogy ezek mellett véglegesen meg is maradhatunk.

** A CANTOR-féle tételnek BERNSTEINtől eredő bizonyitása BOREL «Théorie des fonctions analytiques» cz. könyvében foglaltatik. Egy másik, a transfinit számok segitségével eszközölt bizonyitását adta ZERMELO (Göttinger Nachrichten, 1901).

*** E segédtétel, BERNSTEIN doctori dissertatiójában foglaltatik. Bebizonyitása az $\aleph_0$ transfinit szám — igen egyszerű — tulajdonságát használja fel. Mi ezt is el akartuk kerülni.

egyértelmű transzformácziókkal átmennek rendre a

$$T_1,\ T_2,\ T_3, \ldots$$

halmazok (különböző) elemeibe és a T_1, T_2, $T_3, \ldots$ halmazok egymástól mind különböznek (közös elemeik nincsenek, ú. n. *elválasztott* halmazok), melyek mind az S halmaz részei, akkor

$$S + T \sim S.$$

E tételt csak arra a speciális esetre bizonyítjuk be, midőn a φ transzformácziók mindannyian egy bizonyos φ egymásután jövő összes hatványai.

Ha ugyanis a φ transzformácziót az $S+T$ halmazra alkalmazzuk, akkor T átmegy T_1-be, T_1 pedig, mely φT, átmegy $\varphi^2 T$-be, azaz T_2-be s í. t., általában T_i átmegy T_{i+1}-be. Viszont a φ invers transzformácziója a φ^{-1} átviszi a T_{i+1}-et T_i-be.

Az S halmaz azon elemeinek összességét, a melyekbe a T nem jut ezen transzformácziók sorával, R halmaznak nevezzük. Ha ψ alatt oly transzformaciót értünk, mely T_i elemeit T_{i+1}-be viszi át és R elemeit tetszés szerinti módon megint az R elemeibe viszi, akkor a ψ transzformáczió az $S+T$ minden elemét az S valamely elemébe viszi át egyértelműen és fordítva a ψ^{-1} transzformaczió az S elemeit az $S+T$-be viszi át egyértelműen. Ezzel be van bizonyítva a szóban forgó segédtétel.*

A CANTOR-féle æquivalenczia-tétel már most ebből egyszerűen következik. Az A halmaz A_1 része legyen $\sim B$-vel és a B halmaz B_1 része $\sim A$-val.

Az A halmaz A_1-en kívül levő részét jelöljük C-vel, és B-nek B_1-en kívül levő részét D-vel, vagyis

$$A = A_1 + C; \quad B = B_1 + D.$$

A feltételezett æquivalencziából következik, hogy van oly transzformáczió, mely az A-t egyértelműen átviszi B_1-be. Ez a transzformáczió a C-t átviszi B_1 valamely részébe: D_1-be.

---

* Ennek a segédtételnek speciális esete az a BOREL-féle tétel, hogy ha A halmazból kiveszünk egy megszámlálható halmazt, a (végtelen) maradék halmaz æquivalens az eredetivel.

Van továbbá oly transzformáczió, mely B-t átviszi A_1-be. Ez a D_1-et átviszi az A_1 valamely C_1 részébe; tehát van oly φ transzformáczió, mely átviszi a C-t A_1-nek C_1 részébe, mely C-től elválasztott halmaz. Ugyanezen transzformaczióval C_1 átmegy C_2-be, ez C_3-ba s í. t., melyek mindannyian A_1 halmaznak — egymástól elválasztott — részei. Tehát az előbbi tétel szerint:

$$A_1 + C \sim A_1$$

vagyis:

$$A \sim B.$$

E nevezetes tétel alkalmazásaképen néhány egyszerű, ismeretes, a halmazok tanában fontos tételt mutatunk be:

A raczionális számok összessége megszámlálható halmazt alkot. Az $\frac{a}{b}$ raczionális számnak feleltessük meg a következő, (pl. tizes rendszerbeli) számot:

$$\underbrace{111\ldots1}_{a}\ \underbrace{22\ldots2}_{b}$$

vagyis azt a számot, mely a számú 1-ből és b számú 2-ből áll. E szerint tehát a raczionális számok halmaza R æquivalens a természetes számsor egy részével és viszont a természetes számsor elemei benfoglaltatnak a raczionális számok halmazában; tehát a két sokaság a Bernstein-tétel értelmében æquivalens.

Az algebrai számok összessége is megszámlálható. Tudvalevő, hogy minden algebrai szám egyetlen egy — legalacsonyabb rendű

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

oly raczionális egész számú együtthatókkal biró algebrai egyenletnek tesz eleget, melynek együtthatóinak legnagyobb közös osztója: 1. Az egyenletet kielégítő összes gyököket sorozzuk az abs. értékük nagysága szerint és az egyenlő abs. értékűeket, pl. az argumentum nagysága szerint. E sorozásnak megfelelően minden gyökhöz egy bizonyos raczionális egész szám tartozik. Már most az α algebrai számnak, a mely a neki megfelelő egyenletnek k-ik gyöke, a következő számot feleltetjük meg: Felirunk k számú

1-est, utána a_0 számú 2-est, ezután a_1 számú 1-est, ha a_1 pozitiv a_1 számú 3-ast, ha a_1 negativ és egyetlen 0-t, ha a_1 0. Ezután ismét a_2 számú 2-est, ha a_2 pozitiv az a_2 számú 4-est, ha a_2 negativ, a_3 számu *1*-est vagy *3*-ast s i. t. Így például az

$$x^3-3x^2+2x-1=0$$

egyenlet második gyökének megfelel az

$$112333223,$$

tehát az algebrai számok halmazának a természetes számsor egy része és viszont a természetes számsornak, mely benne foglaltatik az algebrai számok összességében, az algebrai számok halmazának egy része felel meg; tehát az æquivalencziatétel szerint a két halmaz æquivalens.

Utolsó alkalmazás gyanánt emlitem, hogy a sík pontjainak halmaza æquivalens bármely görbe által bezárt részében foglalt pontok halmazával, vagyis, hogy ép úgy szólhatunk a két dimenziós halmaz számosságáról, mint az egy dimenzióséról. E tétel bizonyitására előbb kimutatjuk, hogy a sík pontjainak halmaza S ép oly számosságu, mint az egységsugarú köré, melyet C-vel jelölünk. Ha ugyanis az

$$r'=a^{\frac{1}{r}}-a$$

transzformácziót alkalmazzuk, a hol $a>1$, akkor ezzel az r sugarú kör átvihető az r' sugarú körbe, ha $r<1$; az $re^{i\varphi}$ pontnak az $r'e^{i\varphi}$ pontot feleltetjük meg; tehát az 1 sugarú körön belül levő pontok mindegyikének a sík valamely pontja felel meg. Az 1 sugarú kör kerületén levő pontoknak a sík 0 pontja felel meg. Ezekre nézve tehát a leképezés nem egyértelmü; azért tehát az 1 sugarú kör kerületéből egyetlen pontot hagyunk meg, melynek a 0 pontot feleltetjük meg, a többit a halmazból kirekesztjük. Az így megmaradt halmaz része az egység-sugarú kör pontjai halmazának C-nek (a kerületet is beleértve) és æquivalens az egész síkkal. Viszont a síknak része a C sokaság, tehát:

$$C \sim S.$$

Könnyen belátható (pl. projicziálás útján), hogy két kör pontjainak halmaza æquivalens. Tehát bármely kör pontjainak halmaza $\sim S$. Ha már most egy tetszésszerinti görbe által bezárt terület pontjainak halmaza G, akkor rajzolhatunk oly C kört, mely egészen a belsejében van és oly C_1-et, melynek a G egészen a belsejében van. E szerint tehát C_1 része G és G-nek része C, mely æquivalens C_1-el, tehát valóban

$$G \sim C \sim S.$$

Beke Manó.

RADIOAKTIV ANYAGOKRA VONATKOZO VIZSGÁLATOK.

(Ötödik és befejező közlemény.)

IV. FEJEZET.

Az indukált radioaktivitás.

A radioaktivitás közlése eredetileg inaktiv anyagokkal. Vizsgálataink folyamán Curie úr és én észrevettük, hogy minden anyag, mely bizonyos ideig rádiumos só közelében marad, maga is radioaktiv lesz.* Első erre vonatkozó közleményünkben még annak megczáfolására törekedtünk, hogy az eredetileg inaktiv anyagoknak így nyert radioaktivitása radioaktiv pornak ezen anyagok felületére való átrakodásától származik. E tényt, mely ma kétségtelennek mondható, az összes itt leirandó kisérletek világosan bizonyitják, különösen ama törvények, melyek szerint a természettől fogva inaktiv anyagokban keltett aktivitás fokozatosan eltűnik, ha ezen anyagokat a rádium hatása alól kivonjuk.

Az így felfedezett új jelenséget «*indukált radioaktivitás*»-nak neveztük.

Ugyanazon közleményünkben megjelöltük az indukált radioaktivitás lenyeges sajátságait. Különféle anyagokból készült lemezeket szilárd rádiumos sók közelébe helyezve, aktivitással ruháztunk fel s e lemezek radioaktivitását az elektromos módszerrel megvizsgáltuk. Igy a következő tényeket tapasztaltuk:

1-ször. Rádium hatásának kitett lemez aktivitása az expozi-

---

* Curie és Curie asszony, Comptes rendus, 1899 november 6.

czió-idővel növekszik és aszimptotikusan bizonyos felső határhoz közeledik.

2-szor. Rádium által aktivált lemez radioaktivitása, ha a rádium hatása alól kivonjuk, néhány nap alatt eltűnik. Ezen aktivitás, mint az idő függvénye, aszimptotikus törvény szerint közeledik nullához.

3-szor. Egyébként egyenlő körülmények közt ugyanazon rádiumos készítmény által különböző lemezekben keltett aktivitás független a lemez természetétől. Az üveg, a papir, a fémek egyenlő mértékben aktiválódnak.

4-szer. Különböző rádiumos készítmények által ugyanazon lemezben keltett aktivitások felső határa annál magasabb, minél aktivabb a készítmény.

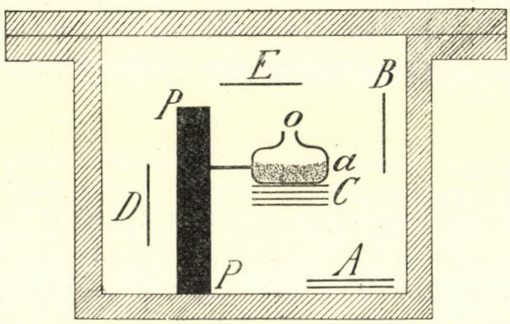
Kevéssel később RUTHERFORD* egy dolgozatot tett közzé, melyben az olvasható, hogy a tóriumvegyületek létrehozhatják az indukált radioaktivitás jelenségét. RUTHERFORD azt találta, hogy e jelenség az imént felsorolt törvények szerint megyen végbe, és azonfelül azt a fontos tényt is fölfedezte, hogy negativ elektromossággal megtöltött testek erősebben aktiválódnak mint más testek. RUTHERFORD különben tapasztalta, hogy tóriumoxidon átszívott levegő körülbelül tíz perczig jelentékeny vezetőképességet árúl el. Az ily állapotú levegő indukált radioaktivitását inaktiv anyagoknak adja át, főképpen pedig negativ elektromossággal megtöltött testeknek. RUTHERFORD kisérleteit ama föltevés alapján értelmezi, hogy a tóriumvegyületek, főképen pedig a tóriumoxid, bizonyos sajátszerű *radioaktiv emanácziót* bocsátanak ki, melyet a légáramlatok magukkal ragadhatnak és a mely pozitiv elektromossággal van megtöltve. Ezen emanáczió lenne az indukált radioaktivitásnak oka. DORN ismételte rádiumos báriumsókkal ama kisérleteket, melyeket RUTHERFORD tóriumoxiddal végzett.**
DEBIERNE kimutatta, hogy az aktinium rendkívül erős mértékben kelt indukált aktivitást a szomszédságába helyezett testekben.

* RUTHERFORD, Phil. Mag. 1900 jan. és feb.

** DORN, Abhand. der Naturforscher Gesellschaft, Halle, 1900 június.

Ép úgy mint a tóriumnál, a levegőáramlatok az aktivitást jelentékeny mértékben szállítják magukkal.*

Aktiválás zárt térben. Az indukált radioaktivitás sokkal erősebben és egyúttal szabályosabban mutatkozik zárt edényben. Az aktiv anyagot kicsiny, *O*-ban nyitott, *a* üvegcsészébe helyezzük zárt edény közepére (l. a 12. rajzot). Különböző, az edényben lévő *A*, *B*, *C*, *D*, *E* lemezek egy napi expoziczió után radioaktivakká lesznek. Az aktivitás ugyanaz, akármiből vannak a lemezek, csak méreteik legyenek egyenlők (lehet a lemez ólom, réz, aluminium,



12. rajz.

üveg, ebonit, viasz, keménypapir, paraffin). E lemezek egyik lapjának aktivitása annál nagyobb, minél nagyobb a szabad tér e lappal szemben.

Ha e kisérletet teljesen zárt *a* üvegcsészével ismételjük, semmiféle indukált aktivitás nem keletkezik.

Az indukált radioaktivitás keltésénél a rádium sugárzása nem szerepel közvetlenül. Például a megelőző kisérletnél a sugárzástól *PP* vastag ólomlemez által megvédett *D* lemez ép úgy aktiválódik mint a *B* vagy *A* lemezek.

A radioaktivitás a levegőben a sugárzó anyagból az aktiválandó testig pontról pontra terjed és nagyobb távolságokra átvihető igen szük hajszálcsöveken át.

* Debierne, Comptes rendus, 1900 július 30; 1903 február 16.

Az indukált radioaktivitás erősebb és egyúttal szabályosabb, ha az aktiváló rádiumos sót vizes oldatával helyettesítjük.

A folyadékok is felveszik az indukált radioaktivitást. Igy pl. a tiszta vizet radioaktivvá lehet tenni úgy, hogy nyitott edényben oly zárt térbe helyezzük, mely rádiumos sóoldatot is tartalmaz.

Bizonyos anyagok, aktiváló térbe helyezve, világítanak (a foszforeszkáló és fluoreszkáló testek, az üveg, a papir, a pamut, a víz, sóoldatok). A foszforeszkáló czinksulfid különösen fénylik ily körülmények közt. E fénylő testek radioaktivitása azonban ugyanaz, mint oly más fémé vagy egyéb anyagé, mely ugyanazon körülmények között, világítás nélkül, aktiválódik.

Bármilyen anyagot is aktiválunk zárt edényben, ezen anyag aktivitása idővel növekszik és végre bizonyos *határértéket* vesz fel, mely mindig ugyanaz, egyazon aktiváló anyag és azonos kisérleti berendezés mellett.

Az indukált radioaktivitás határértéke független az aktiváló teret betöltő gáz természetétől és nyomásától. (Kimutatva levegőre, hidrogénre és széndioxidra nézve.)

Az indukált radioaktivitás határértéke egyazon aktiváló térben csupán a benne oldott állapotban lévő rádium mennyiségétől függ és úgy látszik ezzel arányos.

A gázok szerepe az indukált radioaktivitási jelenségeknél. Az emanáczió. Szilárd rádiumsót vagy rádiumsóoldatot tartalmazó zárt térben jelenlévő gázok radioaktivak. E radioaktivitás megmarad, ha a gázt szivattyúval kiszivjuk és kémcsőben összegyűjtjük. A kémcső falai maguk is radioaktivakká lesznek és világítanak a sötétben. A kémcső aktivitása és világítása később teljesen eltűnik, azonban igen lassan, és még egy hónap mulva is ki lehet mutatni a radioaktivitást.

Még vizsgálataink elején Curie úr és én a szurokérczből felmelegítés által erösen radioaktiv gázt vontunk ki, azonban, épp úgy, mint a megelőző kisérletnél, e gáz aktivitása idővel teljesen eltünt.*

* Curie és Curie asszony, Rapports au Congrès de Physique, 1900.

Ezek szerint a tórium, rádium és aktiniumnál az indukált radioaktivitás a gázban részecskéről részecskére terjed, az aktiv testtől egészen a zárt edény faláig, melybe az aktiv testet zártuk, és a gáz aktiváló tulajdonságát magával viszi, ha az edényből kiszivattyúzzuk.

Midőn a rádiumos testek rádioaktivitását elektromos módszerrel az 1. rajzon ábrázolt eszköz segítségével vizsgáljuk meg, a lemezek közti levegő maga is radioaktivvá lesz; ha azonban levegőáramlatot bocsátunk a lemezek közé, az áram erősségében nem veszünk észre jelentékeny változást, a mi azt mutatja, hogy a lemezek közti térben eloszlott aktivitás csekély magának a szilárd állapotú rádiumnak aktivitásához képest.

A tórium esetén egészen máskép áll a dolog. A tóriumvegyületek radioaktivitása mérésénél megfigyelt szabálytalanságok attól származtak, hogy akkor a szabad levegőben álló sűrítővel dolgoztam; a legcsekélyebb légáramlat ugyanis az áram erősségében lényeges változást idéz elő, minthogy a térben, a tórium közelében eloszlott radioaktivitás jelentékeny az anyag aktivitásához képest.

E hatás még erősebben mutatkozik az aktiniumnál. Igen aktiv aktiniumvegyület sokkal kevésbé aktivnak látszik, ha az anyagra légáramlatot bocsátunk.

A radioaktiv energiát e szerint a gázok különleges alakban foglalják magukban. Rutherford fölteszi, hogy bizonyos radioaktiv testek állandóan valami anyagi természetű gázt bocsátanak ki, melyet *emanácziónak* nevezett.

E gáz volna ama képességgel felruházva, hogy ama testeket radioaktivvá tegye, a melyeket az általa betöltött térbe helyezünk.

Az emanácziót kibocsátó testek a rádium, a tórium és az aktinium.

Az aktivált szilárd testek dizaktiválása szabad levegőben. Rádium által zárt térben kellő ideig aktivált test, melyet az aktiváló térből eltávolítottunk, a szabad levegőn exponenses függvényekkel kifejezhető törvény szerint veszti el aktivitását; e törvény ugyanaz valamennyi testre nézve és a következő képlettel fejezhető ki:[1]

$$I=I_0\left(ae^{-\frac{t}{\theta_1}}-(a-1)e^{-\frac{t}{\theta_2}}\right).$$

I_0 a sugárzás kezdetbeli erőssége, abban a pillanatban midőn a lemezt az aktiváló térből kivesszük, I a sugárzás erőssége t időpillanatban; a számbeli együtthatót jelent: $a=4{\cdot}20$; θ_1 és θ_2 idő jellegű állandók: $\theta_1=2420$ mp, $\theta_2=1860$ mp. Két-három óra mulva e törvény elég közelítőleg egyszerű exponenses törvényre redukálódik, a második exponenses függvény ugyanis már nem befolyásolja észrevehető mértékben I értékét. A dizaktiválás akkor úgy történik, hogy a sugárzás erőssége 28 percz alatt felényire sülyed. E végső törvény jellemzőnek tekinthető a rádium által aktivált testek szabad levegőn való dizaktiválására.

Az aktinium által aktivált szilárd testek szabad levegőn az előbbihez közel álló exponenses törvény szerint vesztik el aktivitásukat, a dizaktiválódás azonban lassabban történik.[2]

A tórium által aktivált testek sokkal lassabban vesztik el aktivitásukat; a sugárzás erőssége 11 óra alatt sülyed felényire.[3]

Dizaktiválódás zárt térben. Az emanáczió eltünési sebessége.[4] Rádium által aktivált s azután a rádium hatása alól kivont zárt tér sokkal lassabban veszti el aktivitását, mint a szabad levegőn dizaktiválódó testek. Példaképpen a következő kisérlet végezhető: üvegcsövet belülről aktiválunk azáltal, hogy bizonyos ideig rádiumsó oldatával hozzuk érintkezésbe. Leforrasztjük azután a csövet és lemérjük az üvegfalain keresztül kívülre bocsátott sugárzást, azalatt, hogy a dizaktiválódás végbemegyen.

A dizaktiválás exponenses törvény szerint történik; a törvényt nagy pontossággal ábrázolja a következő képlet:

$$I=I_0e^{-\frac{t}{\theta}},$$

[1] CURIE és DANNE, Comptes rendus 1903 feb. 9.
[2] DEBIERNE, Comptes rendus, 1903 feb. 16.
[3] RUTHERFORD, Phil. Mag. 1900 február.
[4] P. CURIE, Comptes rendus, 1902 nov. 17.

a hol I_0 a sugárzás kezdetbeli erőssége, I a sugárzás erőssége t időpillanatban, θ pedig idő jellegű állandó, $\theta = 4 \cdot 970.10^5$ mp.

A sugárzás intenzitása négy nap alatt csökken felényire.

E dizaktiválódási törvény teljesen változatlan, bármilyenek a kisérleti körülmények (az aktivált tér méretei, a falak s a térben lévő gáz természete, az aktiválás ideje stb.). A dizaktiválás törvénye ugyanaz marad bármely hőmérsékletnél —180° és 450° között. E dizaktiválódási törvény tehát határozottan jellemző és teljesen független *időegység* definiálására szolgálhatna.

E kisérleteknél a gázban felhalmozott radioaktiv energia tartja fenn a falak aktivitását. Ha ugyanis a gázt eltávolitjuk és az aktivált térben vákuumot állitunk elő, azt találjuk, hogy a falak a gyors dizaktiválás törvénye szerint vesztik el aktivitásukat, úgy hogy a sugárzás erőssége 28 mp alatt sülyed felényire. Ugyanez az eredmény, ha az aktivált térben lévő aktivált levegőt közönséges levegővel helyettesitjük.

Ama dizaktiválási törvény, mely szerint az aktivitás erőssége négy nap alatt felényire csökken, e szerint jellemző a gázokban felhalmozott radioaktiv energia eltünésére. Ha Rutherford kifejezésével élünk, azt mondhatjuk, hogy a rádium emanácziója idővel önként eltünik, még pedig a fele négy nap alatt.

A tórium emanácziója más természetű és sokkal gyorsabban tűnik el. Az aktiváló képesség körülbelül egy óra és 10 percz alatt sülyed felényire.

Az aktinium emanácziója még gyorsabban tűnik el, már nehány másodpercz alatt felényire sülyed.

Elster és Geitel kimutatták, hogy a légkör levegőjében, csekély arányban, mindig található a radioaktiv testek emanácziójához hasonló radioaktiv emanáczió. Negativ elektromossággal megtöltött, a levegőben kifeszitett drótok ezen emanáczió hatása alatt aktiválódnak. A levegő, melyet a talajba sülyesztett szivattyún át szivunk föl, különösen gazdag emanáczióban.* Ezen emanáczió eredete még ismeretlen.

* P. Curie és J. Danne, Comptes rendus, 1903 június 2.

Bizonyos ásványvizekből kivont levegő tartalmaz emanácziót, míg a tenger és folyók vizében alig akad.

Az emanácziók természete. Rutherford szerint a radioaktiv testek emanácziója radioaktiv anyagi gáz, mely a testből elillan. És valóban, a rádium emanácziója sok tekintetben úgy viselkedik, mint közönséges gáz.

Ha közlekedő csővel kötünk össze két edényt, a melyek közül az egyik emanácziót tartalmaz, a másik pedig nem, az emanáczió átmegy a másik edénybe diffuzió útján, és midőn az egyensúly helyreállott, azt találjuk, hogy az emanáczió, akár csak egy közönséges gáz, megoszlott a két edény között: ha a két edény hőmérséklete ugyanaz, az emanáczió térfogatuk arányában oszlik meg bennük; ha hőmérsékletük különböző, úgy oszlik meg köztük, mint egy tökéletes gáz, mely a Mariotte és Gay-Lussac-féle törvényeknek hódol. Hogy ezt megállapíthassuk, elég az első edény sugárzását az aktivitás megoszlása előtt és után lemérni; e sugárzás arányos az edényben foglalt emanáczió mennyiségével. Minthogy azonban az emanáczió diffuziójánál bizonyos idő szükséges ahhoz, hogy az egyensúly bekövetkezzék, a kisérlet kiszámításánál tekintettel kell lenni az emanácziónak az idő folyamán való önkéntes eltünésére.*

A rádium emanácziója keskeny csőben a gázok diffuzió törvényei szerint diffundál és diffuzió együtthatója olyan nagyságrendű, mint a széndioxidé.*

Rutherford és Soddy kimutatták, hogy a rádium és tórium emanácziója a folyós levegő hőmérsékleténél lecsapódik, akár csak egy gáz, mely e hőfokon folyósítható. Emanáczióval megrakott levegőáramlat elveszti radioaktiv tulajdonságait, ha folyós levegőbe merülő kigyózó csövön halad át; az emanáczió a kigyózó csőben lecsapódik és visszajut gázállapotba, ha a csövet felmelegítjük. A rádium emanácziója —150°-nál csapódik le, a tóriumé —100° és —150° között.** A következő kisérlet végezhető: Két

* P. Curie és J. Danne, Comptes rendus, 1903 június 2.

** Rutherford és Soddy, Phil. Mag. 1903 május.

zárt üvegedény, egy nagy és egy kicsiny, rövid, csappal ellátott csővel közlekednek egymásközt; rádium által aktivált gázzal vannak megtöltve, tehát mindketten világitanak. A kis edényt folyós levegőbe mártjuk; erre az egész emanáczió lecsapódik benne; kevés idő mulva, elfordítva a csapot, elválasztjuk a két csövet egymástól és kivesszük a kis edényt a folyós levegőből. Megállapítható, hogy a kis edény tartalmazza az egész aktivitást. Hogy erről meggyőződjünk, elég a két edény üvegének foszforeszkálását megfigyelni. A nagy edény többé nem világit, míg a kisebbik jobban világit, mint a kisérlet elején. A kisérlet különösen fényesen sikerül, ha annyi fáradságot veszünk magunknak, hogy a két edény falát foszforeszkáló czinkszulfiddal vonjuk be.

Mindamellett, ha a rádium emanácziója egészen hasonló volna a folyósítható gázokhoz, a lehűtés általi lecsapódás hőmérsékletének a bizonyos térfogat levegőben foglalt emanáczió mennyiségétől kellene függeni; ezt azonban nem figyelték meg.

Figyelmeztetnünk kell arra is, hogy az emanáczió igen könnyen átmegy a szilárd testek legapróbb lyukain vagy repedésein, a melyeken közönséges gázok csak rendkívül lassan szivároghatnak át.

Végre a rádium emanácziója még abban különbözik a közönséges anyagi gázoktól, hogy magától elpusztul, ha beforrasztott üvegcsőbe zárjuk, vagy legalább is a radioaktiv tulajdonságok eltünése figyelhető meg ily viszonyok közt. Különben is, tudtunkkal az emanácziót jelenleg csakis e radioaktiv tulajdonság jellemzi, minthogy eddig, sem az emanáczióra jellemző spektrumot, sem az emanáczióból származó nyomást határozottsággal megállapítani nem lehetett.

Legújabban azonban RAMSAY és SODDY a rádiumból kivont gázok spektrumában új vonalakat figyeltek meg, melyek szerintük a rádium emanácziójából származnak. Megállapitották, hogy a rádiumból kivont gázok héliumot tartalmaznak és hogy e gáz a rádium emanácziójának jelenlétében önként keletkezik.* Ha ezen

* RAMSAY és SODDY, Physikalische Zeitschrift, 1903 szept. 15.

igen nagyfontosságú eredmények igazolást nyernek, ez arra a feltevésre vezethetne minket, hogy az emanáczió nem állandó, anyagi gáz és a hélium volna talán e gáz önkéntes szétbomlásának egyik terméke.

Igen erős kémiai reagensek úgy látszik nem befolyásolják a rádium és tórium emanáczióját, és ezért RUTHERFORD és SODDY ezen emanácziókat az argoncsalád gázaihoz hasonlítják.*

Aktivált folyadékok és rádiumos oldatok aktivitásainak változásai. Bármely folyadék radioaktivvá lesz, ha nyilt edényben aktiváló térbe helyezzük. Ha a folyadékot kivesszük az aktiváló térből és a szabad levegőn hagyjuk, gyorsan elveszti aktivitását és átadja a környezetében lévő gázoknak és szilárd testeknek. Ha aktivált folyadékot zárt üvegben tartunk, sokkal lassabban veszti el aktivitását és az aktivitás négy nap alatt felényire sülyed, ép úgy mint a zárt edényben tartott aktivált gázoknál. E tényt ama föltevéssel magyarázhatjuk meg, hogy a radioaktiv energia a folyadékokban ugyanoly alakban (emanáczió alakjában) halmozódik fel, mint a gázokban.

Rádiumos sóoldat részben hasonlóan viselkedik. Először is igen figyelemreméltó, hogy ha rádiumos sóoldatot bizonyos ideig zárt térben tartunk, az oldat nem aktivabb, mint az ugyanazon térben, nyilt edényben elhelyezett tiszta víz, ha az aktivitási egyensúly bekövetkezett. Ha a rádiumos oldatot a zárt térből kivesszük és tág, nyilt edényben a levegőn hagyjuk, az aktivitás a térben szétoszlik és az oldat majdnem teljesen inaktivvá lesz, pedig még mindig tartalmazza a rádiumot. Ha ezután e dizaktivált oldatot zárt üvegbe zárjuk, aktivitása lassankint — körülbelül 15 nap alatt — bizonyos határértéket ér el, mely igen jelentékeny lehet. Rádiumot nem tartalmazó, aktivált folyadék azonban nem nyeri vissza aktivitását, ha szabad levegőn dizaktiváljuk és zárt üvegbe helyezzük.

A radioaktivitás elmélete. A következőkben CURIEt és DEBIERNEt követve egy általános elméletet közlök, melynek alapján az

* Phil. Mag. 1902, 580. l., 1903, 457. l.

indukált radioaktivitás vizsgálatának eredményei összefoglalhatók; ezen eredmények, melyeket az imént felsoroltam, minden föltevéstől független kisérleti tények.*

Föltehetjük, hogy minden rádiumatóm mint folytonos és állandó energiaforrás működik, anélkül hogy ezen energia eredetét közelebbről meg kellene határoznunk. A rádiumban felhalmozódott radioaktiv energia két különböző módon törekszik szétszóródásra: 1-ször, sugárzás útján (elektromossággal töltött és semleges sugarak); 2-szor vezetés útján, azaz azáltal, hogy pontról pontra közlődik a környezet testeivel gázok és folyadékok közvetitésével (az emanáczió kibocsátása és átalakulása indukált radioaktivitássá).

Úgy a sugárzás, mint a vezetés általi energiaveszteség a radioaktiv testben felhalmozott energiamennyiséggel növekszik. Bizonyos egyensúlynak szükségképen be kell következni, midőn az említett két veszteség a rádium által folytonosan termelt energiamennyiséget kompenzálja. E felfogásmód hasonló ahhoz, a melyet a hőjelenségeknél szokás alkalmazni. Ha egy test belsejében bármily oknál fogva folytonos és állandö hőtermelés megyen végbe, a hő a testben felhalmozódik és a hőfok emelkedik, mindaddig, míg a sugárzás és vezetés folytán bekövetkező hőveszteség egyensúlyban nem lesz a folytonos hőtermeléssel.

Az aktivitás — bizonyos különös esetek kivételével — általában szilárd testeken át nem terjed pontról pontra. Ha oldatot zárunk beforrasztott csőbe, csak a sugárzás folytán való energiaveszteség marad meg és az oldat sugárzó aktivitása növekedni fog. Ha ellenben az oldatot nyilt edényben tartjuk, a pontról pontra vezetéssel való energiaveszteség jelentékeny lesz és midőn az egyensúly bekövetkezik, a sugárzó aktivitás igen csekély.

Nyilt levegőn tartott szilárd rádiumos só sugárzó aktivitása nem fogy észrevehető mértékben, minthogy a radioaktivitásnak vezetéssel való közlése nem lehetséges szilárd testeken keresztül, csupán igen vékony felületi réteg termel indukált radioaktivitást.

---

* Curie és Debierne, Comptes rendus, 1901 július 29.

És tényleg mepállapítható, hogy ugyanazon só oldata sokkal erősebb indukált radioaktivitási jelenségeket okoz. Szilárd sónál a radioaktiv energia a sóban halmozódik fel és főleg sugárzás útján szóródik szét. Ha azonban a só nehány napig vízben van feloldva, a radioaktiv energia megoszlik a só és a víz között és ha desztillálás által a kettőt szétválasztjuk, a víz az aktivitás nagy részét magával viszi és a szilárd só sokkal (10—15-szörte) kevésbé aktiv mint a feloldás előtt. A só ezután lassankint visszanyeri eredeti aktivitását.

Ezt az elméletet még tovább részletezhetjük azáltal, hogy föltesszük, hogy maga a rádium rádioaktivitása, legalább nagy részében, az emanáczió alakjában kibocsátott radioaktiv energia közvetítésével jön létre.

Föltehetjük, hogy minden rádiumatóm az emanácziónak állandó és folytonos forrása. Azalatt, hogy az energia ezen formája keletkezik, fokozatos átalakulást szenved Becquerel-sugárzásban nyilvánuló radioaktiv energiává; ezen átalakulás sebessége arányos a felhalmozódott emanáczió mennyiségével.

Ha rádiumos oldatot zárt térben tartunk, az emanáczió elterjedhet a térben és a falakon. Tehát ott változik át sugárzássá, míg az oldat maga kevés Becquerelsugarat bocsát ki; a sugárzás bizonyos értelemben *kivülre van helyezve.* A szilárd rádiumban ellenben az emanáczió, minthogy nem illanhat el könnyen, felhalmozódik és ugyanott alakul át Becquerel-sugárzássá; e sugárzás tehát nagy erősségre tesz szert.*

Ha e radioaktivitási elmélet általános volna, fel kellene tennünk, hogy az összes radioaktiv testek emanácziót bocsátanak ki. Az emanáczió kibocsátását rádium-, tórium- és aktiniumnál megállapították; az aktinium rendkívül sokat bocsát ki még szilárd állapotban is. Az uránium és a polónium látszólag nem bocsátanak ki emanácziót, bár Becquerelsugarakat lövelnek ki. E testek nem hozzák létre zárt térben az indukált radioaktivitás jelenségét úgy, mint az előbb említett testek. E tény nincs föltétlen ellen-

* CURIE, Comptes rendus, 1903 január 26.

mondásban a megelőző elmélettel. Ha ugyanis az uránium és polónium oly emanácziót bocsátanának ki, a mely igen nagy sebességgel elbomlik, igen nehéz volna megfigyelni az emanácziónak a levegő általi elragadását és a szomszédos testeken az emanáczió által okozott indukált radioaktivitási jelenségeket. Hasonló föltevés épen nem mondható valószínűtlennek, minthogy azon idők, melyek alatt a rádium- és tóriumemanáczió fele szétbomlik, úgy aránylanak egymáshoz mint 5000 az 1-hez. Látni fogjuk különben, hogy bizonyos körülmények közt az uránium létrehozhatja az indukált radioaktivitást.

Az indukált radioaktivitás más alakja. A rádium által aktivált szilárd testeknek nyilt levegőn való dizaktiválási törvénye szerint a sugárzó aktivitás egy nap alatt szinte teljesen eltűnik. Egyes testek azonban kivételt tesznek: ilyenek a celluloid, a paraffin, a kaucsuk stb. Ha e testeket elég hosszú időn át aktiváljuk, lassabban vesztik el aktivitásukat, mint ahogy a törvény követeli és sokszor tizenöt vagy húsz napig is eltart, a míg az aktivitás észrevehetetlenné lesz. Úgy látszik, e testeknek megvan ama tulajdonságuk, hogy a radioaktiv energiával emanáczió alakjában teleszívhatják magukat; lassankint kibocsátják ezen energiát, indukált radioaktivitást létesítve szomszédságukban.

Lassan kifejlődő indukált radioaktivitás. Az indukált radioaktivitásnak még egy egészen más alakja figyelhető meg, mely úgy látszik minden testen létrejön, mely hónapokon át aktiváló térben marad. Ha e testeket az aktiváló térből kivesszük, aktivitásuk eleinte a közönséges törvényt követve (fél óra alatt felényire) csökken egészen, a míg igen kicsiny nem lesz; midőn azonban az aktivitás kisebb lett az eredeti aktivitás $\frac{1}{20,000}$ részénél, nem fogy tovább, vagy legalább is rendkívül lassan kisebbedik, sőt néha még növekszik is. Vannak oly réz-, aluminium- és üveglemezeink, melyek már hat hónap óta mutatnak ily maradék aktivitást.

Ezen indukált aktivitási jelenségek úgy látszik egészen más természetűek, mint a közönségesek és sokkal lassabb fejlődést mutatnak.

Hosszú idő szükséges az indukált radioaktivitás ezen alakjának keletkezéséhez és eltünéséhez egyaránt.

A rádiummal együtt feloldott testeken létesített indukált radioaktivitásról. Ha rádiumot tartalmazó radioaktiv ásványt kezelünk, addig míg a rádium kiválasztására törekvő munka nincs igen előrehaladva, kémiai szétválasztásokat végzünk, a melyek után a radioaktivitás egészen az egyik reakczió termékben marad, míg a másik termék teljesen inaktiv. Ilyenformán oly aktiv termékeket, melyek az urániumnál nehány százszor aktivabbak lehetnek, választunk el teljesen inaktiv réztől, antimontól, arzéntól stb. Egyes testeket (ólom, vas) sohasem választottunk el teljesen inaktiv állapotban. A sugárzó test konczentrálódásánál már nem így áll a dolog; semmiféle kémiai szétválasztás már nem szolgáltat teljesen inaktiv termékeket; a szétválasztásból származó összes részek mind különböző mértékben aktivak.

Az indukált radioaktivitás felfedezéze után Giesel kisérlette meg legelőször a közönséges inaktiv bizmútot úgy aktiválni, hogy igen aktiv rádiummal együtt oldatban tartotta. Ilyen úton radioaktiv bizmútot* nyert és arra következtetett, hogy a szurokérczből kivont polónium valószínűleg a szurokérczben lévő rádium szomszédsága által aktivált bizmút.

Én is készítettem aktivált bizmútot úgy, hogy a bizmútot igen erős rádiumos sóval együtt feloldva tartottam.

E kisérlet nehézségeit ama rendkivüli fáradság okozta, melylyel a rádiumnak az oldatból való eltávolítása jár. Ha arra a majdnem végtelen kis mennyiségű rádiumra gondolunk, mely egy grammnyi anyagban már igen jelentékeny radioaktivitást okoz, mindig azt hisszük, hogy még nem mostuk és tisztítottuk ki eléggé az aktivált anyagot. Már pedig minden tisztitás az aktivált anyag aktivitásának csökkenését vonja maga után, akár azért, mert valóban eltávolít belőle rádiumnyomokat, akár pedig azért, mert az indukált radioaktivitás e viszonyok közt nem tud a kémiai átalakulásoknak ellenállani.

---

* Giesel, Verhandl. der deutschen phys. Gesellsch. 1900 január.

Azonban az eredmények, a melyekre jutottam, úgy látszik elég biztossággal mutatják, hogy az aktiválás létrejön és megmarad a rádium eltávolítása után. Igy az én bizmútom nitrátjának a salétromsavas oldat lecsapásával való frakczionálásánál azt találtam, hogy igen gondos tisztítás után úgy frakczionálódik, mint a polónium: az aktivabb rész csapódik le előbb.

Ha a tisztítás nem volt elegendő, az ellenkező következik be, a mi azt mutatja, hogy az aktivált bizmútban még rádiumnyomok fordúlnak elő. Igy oly aktivált bizmútot állítottam elő, melynél a frakczionálás iránya nagy tisztaságról tanuskodott és a mely 2000-szer oly aktiv volt mint az uránium. Ezen bizmút aktivitása idővel fogy. Azonban ugyanazon vegyületnek egy másik része, melyet ugyanoly elővigyázattal állítottam elö és a mely ugyanoly irányban frakczionálódott, aktivitását körülbelül három év óta észrevehető változás nélkül megtartja. Ezen aktivitás 150-szer akkora mint az urániumé.

Hasonlóképen aktiváltam ólmot és ezüstöt, azáltal, hogy ezeket rádiummal együtt feloldva tartottam. Leggyakrabban az így nyert indukált radioaktivitás egyáltalában nem fogy az idő folyamán, azonban általában nem tud az aktivált test több egymást követő kémiai átalakulásának ellenállani.

Debierne* báriumot aktivált úgy, hogy aktiniummal együtt oldotta fel. Ezen aktivált bárium több kémiai átalakulás után aktiv marad, aktivitása tehát eléggé állandó atómtulajdonság. Az aktivált báriumchlorid úgy frakczionálódik, mint a rádiumos báriumchlorid, minthogy az aktivabb részek kevésbbé oldhatók vízben és hígitott sósavban. A száraz chlorid magától világít; Becquerel sugárzása hasonló a rádiumos báriumchloridéhez. Debierne az urániumnál 1000-szer aktivabb aktivált báriumchloridot állított elő. E bárium azonban nem ruházódott fel a rádium összes sajátságaival, minthogy a spektroszkópban a rádium legerősebb sugarainak egyikét sem mutatta. Azonfelül aktivitása idővel csökkent és három hét alatt már háromszor oly gyenge volt mint kezdetben.

* Debierne, Comptes rendus, 1900 július.

Egész részletesen kell a radioaktiv testekkel együtt feloldott anyagok aktiválását tanulmányozni. Úgy látszik, hogy a kisérleti körülmények szerint többé-kevésbbé állandó atómikus indukált radioaktivitást lehet létrehozni. Lehet, hogy ily körülmények közt az indukált radioaktivitás ugyanaz, mint a lassú kifejlődésű indukált radioaktivitás, melyet aktiváló térben távolból történő hosszú idejű aktiválás által létesítünk. Kérdezhetjük, mennyire befolyásolja az atómikus indukált radioaktivitás az atóm kémiai természetét, és vajjon meg tudja-e változtatni az atóm kémiai sajátságait akár futólagosan, akár végleg. A távolról aktivált testek kémiai vizsgálatát megnehezíti az, hogy az aktiválás csak vékony felületi rétegre terjed ki és ennek következtében az anyag mennyisége, mely az átalakulást szenvedhette, igen csekély.

Indukált radioaktivitás létesíthető úgy is, hogy egyes anyagokat urániummal együtt oldunk fel. A kisérlet báriummal sikerül. Ha Debierne eljárása szerint kénsavat töltünk urániumot és báriumot tartalmazó oldatba, a lecsapott báriumszulfát aktivitást visz magával; ezalatt az urániumsó aktivitásának egy részét elveszíti. Becquerel azt találta, hogy többször ismételve ezen eljárást, oly urániumot kapunk, mely már alig aktiv. Azt lehetne hinni ezek után, hogy ezen eljárással sikerült az urániumtól egy ezen fémtől különböző radioaktiv testet elválasztani, a melynek jelenléte okozza az uránium radioaktivitását. Ez azonban távolról sincs így, minthogy nehány hónap mulva az uránium visszanyeri eredeti aktivitását; a lecsapott báriumszulfát ellenben elveszti nyert aktivitását.

Hasonló jelenség megyen végbe a tóriummal. Rutherford tóriumsóoldatot csapott le ammoniákkal, elválasztotta az oldatot, bepárologtatta szárazra. Kevés igen aktiv maradékot kapott, míg a kicsapódott tórium kevéssé aktivnak mutatkozott mint annakelőtte. Ezen aktiv maradék, melyet Rutherford * *tórium x*-nek nevezett, idővel elveszti aktivitását, míg a tórium eredeti aktivitását visszanyeri.

* Rutherford és Soddy, Zeitschr. für physik. Chemie, 42. k. 1902, 81. l.

Úgy látszik, az oldatban indukált radioaktivitásra nézve a különböző testek nem viselkednek valamennyien egyformán, úgy hogy egyes testek sokkal nagyobb mértékben aktiválódnak mint a többiek.

Radioaktiv por szétszóródása és a laboratórium indukált radioaktivitása. Erősen radioaktiv anyagok tanulmányozásánál különös óvintézkedéseket kell tennünk, hogy huzamosabb ideig végezhessünk finom méréseket. A kémiai laboratoriumban használt és a fizikai kisérletekre szolgáló különböző tárgyak előbb-utóbb mind radioaktivak lesznek és fekete papiron keresztül nyomokat hagynak a fényérzékeny lemezen. A por, a szoba levegője, a ruhadarabok radioaktivakká lesznek. A szoba levegője vezeti az elektromosságot. A laboratoriumban, a melyben mi dolgozunk, már igen rosszul áll a dolog és már nem tudunk egyetlen műszert sem jól elszigetelni.

Tehát tényleg különös óvintézkedések szükségesek az aktiv por szétszóródásának és így az indukált radioaktivitás elterjedésének megakadályozására.

A használt kémiai tárgyakat sohasem szabad abba a terembe vinnünk, a melyben a fizikai kisérleteket végezzük és lehetőleg kevés ideig kell e szobában tartanunk az aktiv anyagokat. E vizsgálatok megkezdése előtt elektrosztatikai kisérleteknél a különböző eszközök közti vezető összeköttetést elszigetelt fémdrótok segítségével szoktuk volt létesíteni, a melyeket minden külső elektromos befolyástól meg akarván védeni, a földbe levezetett fémhengerekkel vettünk körül. Radioaktiv testek tanulmányozásánál e berendezés igen hiányos; minthogy a levegő vezet, a szigetelés a drót és henger között tökéletlen és a drót és a henger közti elkerülhetetlen érintkezési elektromotoros erő a levegőn keresztülfolyó áram keltésére és az elektrometer kitérítésére törekszik. Most minden összekötő drótot megvédünk a levegőtől úgy, hogy a vezetékeket paraffinnal vagy más szigetelő anyaggal megtöltött hengerek tengelyébe helyezzük. Előnyös volna e vizsgálatoknál még *szigorúan elzárt* elektrometereket használni.

Aktiválás radioaktiv anyagok hatása nélkül. Történtek kisérletek oly czélból, hogy indukált radioaktivitás jöjjön létre radioaktiv anyagok hatása nélkül.

VILLARD* katódsugarak hatásának vetett alá egy darab bizmútot, melyet CROOKES-csőbe antikatódként helyezett el; a bizmút, őszintén szólva, rendkívül gyenge mértékben lett aktiv, minthogy csak 8 napi expoziczióval lehetett fotografikus benyomást létesíteni.

MAC LENNAN többféle sót tett ki katódsugarak hatásának és azután ezeket gyöngén felmelegítette. E sókkal akkor pozitiv elektromossággal töltött testeket ki lehetett sütni.**

Hasonló vizsgálatok igen érdekesnek igérkeznek. Ha ismert fizikai hatók felhasználásával eredetileg inaktiv testben jelentékeny radioaktivitást lehetne létesíteni, ily úton remélhetnők, hogy egyes anyagok önkéntes radioaktivitásának okát földerítjük.

A radioaktiv testek aktivitásának változásai; a feloldás hatása. A polónium aktivitása, a mint előbb megjegyeztem, idővel fogy. E fogyás lassan megy végbe és úgy látszik nem valamennyi készítménynél egyformán. Polóniumos bizmútnitrát készítmény aktivitásának felét 11 hónap alatt veszítette el és 95 százalékát 33 hónap alatt. Más készítmények aktivitása hasonlóan csökkent.

Fémpolóniumos bizmútot állítottam elő szubnitrátjából, mely előállítása után 100,000-szer oly aktiv volt mint az uránium. E fém ma már csak középszerüen radioaktiv (2000-szer aktivabb mint az uránium). Radioaktivitását időnkint megmértük. E fém 6 hónap alatt aktivitásának 67 százalékát elvesztette.

Úgy látszik az aktivitás elvesztését kémiai reakcziók nem segítik elő. Gyors kémiai műveleteknél általában nem lehet jelentékeny aktivitásveszteséget tapasztalni.

Ellentétben a polóniummal a rádiumos sók állandó aktivitást mutatnak, mely éveken át nem fogy észrevehető módon.

Közvetlen előállításuk után a rádiumsók aktivitása sem állandó. Az előállítástól kezdve aktivitásuk növekszik és körülbelül egy hó-

* VILLARD, Société de physique, 1900 július.
** MAC LENNAN, Phil. Mag. 1902 február.

nap alatt az észlelési határokon belül változatlan értéket ér el. Oldatnál megfordítva áll a dolog. Az oldat közvetlenül előállítása után igen aktiv, ha azonban szabad levegőn hagyjuk, gyorsan dizaktiválódik és végre bizonyos határaktivitást mutat, mely jelentékeny mértékben kisebb lehet, mint az eredeti aktivitás. Ezen aktivitásbeli változásokat legelőször GIESEL figyelte meg.* E változások könnyen megmagyarázhatók, ha az emanáczió álláspontjára helyezkedünk. Az oldat aktivitásának csökkenése a térbe elillanó emanáczió kibocsátásának felel meg; e csökkenés sokkal kisebb, ha az oldatot leforrasztott csőbe zárjuk. Nyilt levegőn dizaktivált oldat nagyobb aktivitással ruházódik fel, ha leforrasztott csőbe zárjuk. Az az idő, a mely alatt az oldatból szilárd állapotban előállított só aktivitása növekszik, annak felel meg, hogy az emanáczió a szilárd rádiumban újra felhalmozódik.

Itt közlök nehány erre vonatkozó kisérletet:

Két napig szabad levegőn hagyott rádiumos báriumchloridoldat 300-szor kevésbbé aktiv lesz.

Rádiumos oldat beforrasztott edénybe van zárva; felnyitjuk az edényt, az oldatot csészébe töltjük és megmérjük aktivitását:

Aktivitása közvetlenül az áttöltés után		67
«	két óra múlva	20
«	két nap múlva	0·25

Rádiumos báriumchlorid oldatot, mely szabad levegőn állott, üvegcsőbe töltünk, a csövet leforrasztjuk és a cső sugárzását lemérjük. Az eredmények a következők:

Aktivitás közvetlenül a leforrasztás után			27
«	2 nap múlva		61
«	3	«	70
«	4	«	81
«	7	«	100
«	11	«	100

* GIESEL, Wied. Ann. 69. k. 91. l.

Szilárd sónak előállítás utáni kezdetbeli aktivitása annál kisebb, minél hosszabb ideig volt a só feloldva. Annál nagyobb része az aktivitásnak közlődik az oldó anyaggal. Itt közlöm oly chloridnak kezdőaktivitásait, a melynek végső aktivitása 800 és a mely bizonyos ideig volt feloldva; azután kiszárítottuk a sót és azonnal lemértük aktivitását:

Végső aktivitás	800
Kezdő aktivitás feloldás és közvetlen ezután történt kiszárítás után	440
Kezdő aktivitás 5 napi feloldás után	120
« « 18 « « «	130
« « 32 « « «	114

E kisérletnél a sóoldatot egyszerűen óraüveggel leborított edényben tartottuk. Ugyanazon sóból két oldatot készítettem, melyeket 13 hónapon át leforrasztott csőben tartottam; ezen oldatok egyike nyolcszor oly konczentrált volt mint a másik:

A koncentrált sóoldat kezdő aktivitása a kiszárítás után	200
A híg « « « « « «	100

A só tehát annál jobban dizaktiválódik, minél nagyobb arányban van jelen az oldó anyag, minthogy akkor a folyadékkal közölt radioaktiv energiának nagyobb térfogat folyadékot kell telítenie és nagyobb teret kell betöltenie. Ugyanazon sónak e különböző részei, melyeknek kezdeti aktivitása különböző volt, eleinte igen különböző sebességgel gyarapodtak aktivitásukban; egy nap alatt már ugyanaz volt aktivitásuk és ettől kezdve az aktivitásbelí növekedés mindkettőnél egészen a végaktivitásáig egészen egyformán ment végbe.

Ha az oldat híg, az oldat igen gyorsan veszít aktivitásából; ezt mutatják a következő kisérletek: ugyanazon rádiumos só három egyenlő részét három egyenlő rész vízben oldjuk fel. Az első *a* oldatot egy órán át szabad levegőn hagyjuk, azután kiszárítjuk. A második *b* oldaton egy órán keresztül légáramlatot hajtunk keresztül, azután kiszárítjuk. A harmadik *c* oldatot 13 napig hagyjuk szabad levegőn, aztán kiszárítjuk. A három rész kezdő aktivitásai:

az *a* részé	... ...	145·2
a *b* «	... ...	141·6
a *c* «	... ...	102·6

Ugyanezen só végaktivitása körülbelül 470. Látható tehát, hogy egy óra alatt ment végbe a hatás legnagyobb része. Azonfölül a légáramlat, mely egy órán keresztül a *b* oldaton átbuborékolt, csak kevés hatást létesített. A só az oldatban körülbelül 0·5 százalékban fordúlt elő.

A radioaktiv energia emanáczió alakjában nehezen terjed a szilárd rádiumból a levegőbe; hasonlóképen ellenállást kell legyőzni, ha a szilárd rádiumból egy folyadékba megy át. Ha rádiumos szulfátot egész napon át vízzel rázunk össze, aktivitása e művelet után az észlelés határain belül ugyanaz, mint ugyanazon szulfáté, ha szabad levegőn hagyjuk.

Ha rádiumos só fölött vákuumot állítunk elő, az összes rendelkezésre álló emanácziót eltávolítjuk. Mindamellett rádiumos chlorid radioaktivitása, mely fölött 6 napon át vákuumot állítottunk elő, nem változott észrevehetően e művelet által. E kisérlet mutatja, hogy a só radioaktivitása főleg a szemcsék belsejében felhalmozott radioaktiv energiától származik, a melyet vákuum előállításával nem tudunk eltávolítani.

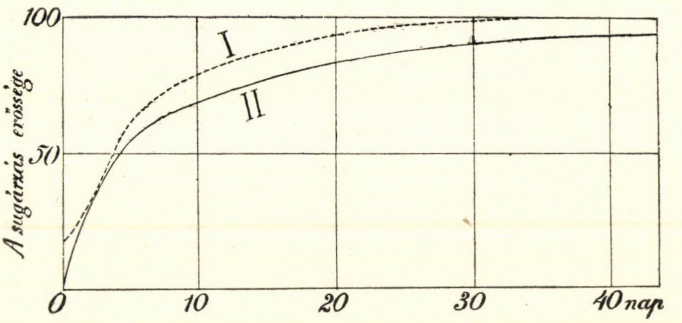
A rádium által feloldásnál szenvedett aktivitásbeli veszteség aránylag nagyobb a nagy áthatoló képességű, mint a könnyen elnyelhető sugarakra nézve. Ime nehány erre vonatkozó példa:

Rádiumos chloridot, melynek végaktivitása 470 volt, feloldunk és egy órán át oldatban hagyunk; azután kiszárítjuk és elektromos módszerrel lemérjük kezdő aktivitását. Azt találjuk, hogy összes kezdősugárzása az összes végső sugárzásnak 0·3 része. Ha a sugárzás erősségét úgy mérjük le, hogy az aktiv anyagot 0·01 mm vastag aluminiumlemezzel fedjük be, azt találjuk, hogy ama kezdő sugárzás, mely e lemezen áthalad, az ugyanezen lemezen áthaladó végső sugárzásnak csupán 0·17 része.

Miután a só 13 napon át maradt feloldva, az összes kezdő sugárzást az összes végső sugárzás 0·22 részével, a 0·01 mmes aluminiumon áthaladó kezdő sugárzást a végső sugárzás 0·13 részével egyenlőnek találtuk.

A két esetben a feloldás utáni kezdő sugárzás viszonya a végső sugárzáshoz 1·7-szer nagyobb az összes sugárzásra nézve, mint a 0·01 mmes aluminium lemezen áthaladó sugárzásra nézve.

Megjegyzendő különben, hogy kiszárítva a készítményt a feloldás után, nem kerülhetünk el bizonyos időközt, mely alatt a készítmény rosszúl definiált (sem egészen szilárd és sem egészen folyós) állapotban van. Azonfelül nem kerülhető el a készítmény felmelegítése, ha a vizet gyorsan el akarjuk belőle távolítani.



13. rajz.

E két okból nem igen lehetséges az oldott állapotból szilárd állapotba átmenő sónak igazi kezdő aktivitását meghatározni. Az ismertetett kisérleteknél egyenlő mennyiségű sugárzó anyagokat oldottunk fel ugyanazon vízmennyiségben, az oldatokat azután lehetőleg azonos viszonyok között szárazra bepárologtattuk a nélkül, hogy 120°—130°-nál magasabb hőmérsékleteket létesítettünk volna bennük.

Én tanulmányoztam azt a törvényt, mely szerint szilárd rádiumos só aktivitása növekszik a feloldás utáni kiszárítás pillanatától egészen addig, míg a végaktivitást el nem éri. A következő táblázatokban I. alatt a sugárzás erősségét (J) az idő függvényeképen tüntetem elő, a végső aktivitást 100-nak véve és az időt a készítmény kiszárításától számítva. Az I. táblázat (13. rajz, I. görbe) az összes sugárzásra vonatkozik. A II. táblázat (13. rajz, II. görbe) csupán a nagy áthatolóképességű sugarakra vonatkozik (oly sugarakra, melyek 3 cm levegő és 0·01 mm aluminiumrétegen haladtak át).

I. Táblázat. Idő	J	*II. Táblázat.* Idő	J
0	21	0	1·3
1	25	1	19
3	44	3	43
5	60	6	60
10	78	15	70
19	93	23	86
33	100	46	94
67	100		

Még több hasonló természetű mérést végeztem, melyek azonban egyáltalában nincsenek egymásközt megegyezésben, bár a nyert görbék általános sajátságai ugyanazok. Nehéz szabályos eredményeket kapni. Annyit azonban megjegyezhetünk, hogy az aktivitás visszanyerése több mint egy hónapig tart, és hogy a feloldás a legnagyobb áthatoló képességű sugarakat ritkítja meg legnagyobb mértékben.

A 3 cm-nyi levegő és 0·01 mm aluminiumrétegen áthaladó kezdő sugárzás csupán 1 százaléka a végső sugárzásnak, míg az összes kezdő sugárzás az összes végső sugárzásnak 21 százaléka.

Feloldott és kiszárított rádiumos só közvetlen előállítása után ugyanoly mértékben képes indukált radioaktivitást kelteni (tehát ugyanannyi emanácziót bocsát ki) mint ugyanazon só, ha szilárd állapotban való előállítása után elég idő telt el ahhoz, hogy végső aktivitását elérhesse. E két készítmény sugárzó aktivitása ellenben igen nagy mértékben különböző: az elsőé például 5-szörte kisebb mint a másodiké.

A rádiumsók aktivitásának változása a hőmérséklettel. Ha rádiumos vegyületet melegítünk, a vegyület emanácziót bocsát ki és veszít aktivitásából. Az aktivitásbeli veszteség annál nagyobb, minél erősebb és egyúttal minél hosszabb ideig tart a melegítés.

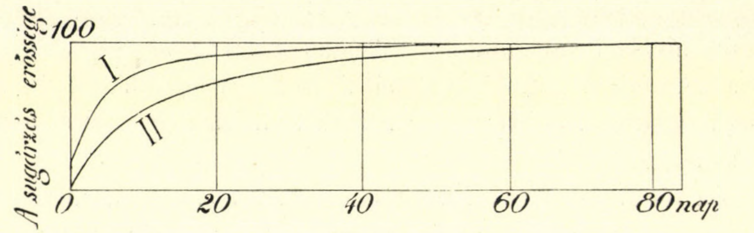
Igy pl. egy órán át 130°-on tartva egy bizonyos rádiumsót, öszszes sugárzásának 10 perczentjét megvonjuk tőle; ellenben 10 perczig tartó 400°-ra való hevités nem okoz észrevehető változást. Nehány óráig tartó vörös izzásra való hevités az összes sugárzás 77 százalékát elvonja.

Az aktivitásbeli veszteség aránylag nagyobb a nagy átható képességű sugarakra, mint a könnyen elnyelhető sugarakra nézve. Pl. nehány óráig tartó melegités az összes sugárzásnak körülbelül 77 százalékát vonja el, azonban ugyanaz a melegités majdnem teljesen (99%) megszünteti azt a sugárzást, mely 3 cm levegő és 0·05 mm aluminiumon át tud hatolni. Ha a rádiumos báriumchloridot nehány órán át olvadó (800° körül) állapotban tartjuk, a 0·3 mm-nyi aluminiumon áthaladó sugárzásnak 98 százalékát megszüntetjük. Azt lehet mondani, hogy a nagy átható képességű sugarak nem léteznek felismerhető mértékben erős és huzamos melegités után.

Ha rádiumsó aktivitásának egy részét melegités által elvesztette, aktivitásának e csökkenése nem maradandó; a só aktivitása önként ujjáalakul a közönséges hőmérsékleten és bizonyos határértékhez közeledik. Azt a különös tényt tapasztaltam, hogy ezen határérték magasabb, mint a só végaktivitása a melegités előtt. Ime nehány példa: rádiumos báriumchlorid, mely szilárd állapotban való előállítása után már régóta elérte végaktivitását, a 470-es számmal jellemezhető összes aktivitást mutatja, míg a 0·01 mm aluminiumon áthaladó sugárzása a 157-es számmal jellemezhető. E készítményt nehány órán át vörös izzásban tartjuk. Két hónappal a melegités után a végaktivitás az összes sugárzásra nézve 690, és 0·01 mm aluminiumon át 227. Az összes sugárzás és az aluminiumon áthaladó sugárzás rendre $\frac{690}{470}$ és $\frac{227}{156}$ viszonyban növekedtek. E két viszony közel egyenlő egymással és 1·45-tel.

Rádiumos báriumchloridot, mely szilárd állapotban előállítva 62-es végaktivitást ért el, nehány órán át olvadó állapotban tartottunk; a megolvasztott sót azután porrátörtük. E készítmény 140-nel egyenlő új végaktivitást vesz fel, a mely e szerint kétszer akkora, mint az, a melyet szilárd állapotban való előállítása után el tudott érni, midőn kiszárítás közben nem szenvedett jelentékeny hevítést.

Tanulmányoztam a rádiumos vegyületek aktivitásának a melegítés után való emelkedését. Itt közlöm példaképpen két mérési sorozat eredményeit. Az I. és II. táblázat számai (*J*) a sugárzás erősségét állítják elő az idő függvényeképen, a végerősséget 100-nak véve és az időt a melegítés befejezésétől számítva. Az I. táblázat (14. rajz, I. görbe) rádiumos báriumchlorid összes sugárzására vonatkozik. A II. táblázat rádiumos báriumszulfátnak nagy áthatolóképességű sugárzására vonatkozik, minthogy azt a sugárzást



14. rajz.

mértük le, mely 3 cm-nyi levegő és 0·01 mm-nyi aluminiumrétegen haladt át. A két készítményt 7 órán át cseresnyevörös izzásban tartottuk.

I. Táblázat. Idő	*J*	*II. Táblázat.* Idő	*J*
0 nap	16·2	0 nap	0·8
0·6 «	25·4	0·7 «	13
1 «	27·4	1 «	18
2 «	38	1·9 «	26·4
3 «	46·3	6 «	46·2
4 «	54	10 «	55·5
6 «	67·5	14 «	64
10 «	84	18 «	71·8
24 «	95	27 «	81
57 «	100	36 «	91
		50 «	95·5
		57 «	99
		84 «	100

Még több sorozat mérést végeztem, de ép úgy mint a feloldás utáni aktivitásbeli növekedésre nézve, a különböző mérések eredményei nincsenek jó megegyezésben egymásközt.

A melegítés hatása nem marad meg, ha a felmelegített rádiumos anyagot feloldjuk. Ugyanazon 1800 aktivitású rádiumos anyag két része közül egyik részt erősen felmelegítettük, mire aktivitása a melegítés miatt 670-re sülyedt. Mindkét részt erre feloldottuk és húsz órán át feloldva tartottuk és a nem melegített rész kezdőaktivitását 460-nak, a melegítettét 420-nak találtuk; a két készítmény aktivitása közt tehát nem volt jelentékeny különbség. Ha azonban az anyagok nem maradnak elegendő ideig feloldva, ha pl. kiszárításuk azonnal a feloldás után történik, a nem melegített készítmény sokkal aktivabb mint a melegített; bizonyos idő szükséges ahhoz, hogy az oldott állapot a melegítés hatását eltüntesse. 3200 aktivitású készítményt felmelegítettünk és aktivitása a melegítés után már csak 1030 volt. E készítményt ugyanazon anyagnak egy más, fel nem melegített részével egyidőben feloldottuk és a két részt azonnal kiszárítottuk. A kezdőaktivitás 1450 volt a nem melegített és 760 a melegített résznél.

A szilárd rádiumos anyagoknál a melegítés nagy mértékben befolyásolja az indukált radioaktivitást keltő képességet. A rádiumos vegyületek melegítés közben több emanácziót bocsátanak ki, mint közönséges hőmérsékletnél; ha azonban újra felveszik a közönséges hőmérsékletet, nemcsak radioaktivitásuk lesz sokkal kisebb, mint volt melegítés előtt, hanem aktiváló képességük is jelentékenyen alábbszáll. A melegítést követő idő alatt, az anyag radioaktivitása növekszik, sőt felülmúlhatja az eredeti értéket. Az aktiválóképesség is részben helyreáll, azonban huzamosabb vörös izzásra való melegítés után majdnem az egész aktiválóképesség eltünik, a nélkül, hogy idővel magától visszatérne. A rádiumos só visszanyeri aktiváló képességét, ha vízben feloldjuk és 120°-nyi állandó hőmérsékleten kiszárítjuk. Úgy látszik tehát, hogy a meszesedés a sót oly sajátságos fizikai állapotba hozza, melyben az emanáczió sokkal nehezebben illan el, mint elillanna ugyanazon anyagból, ha nem hevítettük magas hőmérsékletre; ennek természetes következménye, hogy a só magasabb végaktivitást ér el, mint melegítés előtt. Hogy a sót a melegítés előtti fizikai állapotba visszahozzuk, elég a sót feloldani és kiszárítani a nélkül, hogy 150°-nál magasabb hőmérsékletre emelnők.

Itt közlök nehány erre vonatkozó számpéldát:

a-val jelölöm az indukált aktivitást, a melyet zárt térben 1600 aktivitású rádiumos báriumkarbonát idéz elő rézlemezen.

Legyen a nem melegített anyagnál:

$$a = 100.$$

A kisérletek eredménye, hogy

1 nappal a melegítés után	...	$a = 3{\cdot}3$
4 « « « «	...	$a = 7{\cdot}1$
10 « « « «	...	$a = 15$
20 « « « «	...	$a = 15$
37 « « « «	...	$a = 15$

Az anyag radioaktivitása a melegítés által 90 százalékkal megfogyott, azonban egy hónap mulva már visszanyerte eredeti értékét.

Hasonló kisérletet végeztünk 3000 aktivitású rádiumos báriumchloriddal. Az aktiváló képességet ép úgy definiáljuk, mint a megelőző kisérletnél.

A melegítetlen anyag aktiváló képessége:

$$a = 100.$$

Az anyag aktiváló képessége három óráig tartó vörös izzás után:

2 nappal a melegítés után	...	2·3
5 « « « «	...	7·0
11 « « « «	...	8·2
18 « « « «	...	8·2

A melegítetlen anyag aktiváló képessége feloldás és 150°-on való kiszárítás után 92.

A melegített anyag aktiváló képessége feloldás és 150°-on való kiszárítás után 105.

A rádiumos sók feloldás és melegítés utáni aktivitásbeli változásainak elméleti értelmezése. Az imént felsorolt tények részben megmagyarázhatók azon elmélet alapján, mely szerint a rádium az energiát emanáczió alakjában termeli s az emanáczió változik azután át sugárzási energiává. Ha rádiumsót feloldunk, a kibocsátott emanáczió az oldaton kívül szétoszlik és radioaktivitást hoz létre távol a forrástól, a mely létrehozta; ha az oldatot elpárologtatjuk, a nyert szilárd só kevéssé aktiv, minthogy csak kevés emanácziót tartalmaz. Lassankint az emanáczió felhalmozódik a sóban, melynek aktivitása bizonyos határértékig növekszik, melyet akkor ér el, midőn a rádium emanáczió-termelése épen pótolja a külső térbe való kibocsátás és Becquerel-sugárzássá való átalakulás folytán bekövetkező emanáczió-veszteséget. Ha rádiumsót melegítünk, a són kivüli emanáczió termelés növekszik és az indukált radioaktivitási jelenségek erősebben mutatkoznak, mint mikor a só közönséges hőmérsékleten van. Mire azonban a só visszanyeri a szobahőmérsékletet, ki van merülve, ép úgy mint a feloldás után, csupán kevés emanácziót tartalmaz és aktivitása igen megcsappant. Lassankint az emanáczió újból felhalmozódik a szilárd sóban és a sugárzás növekszik.

Föltehető, hogy a rádium emanáczió termelése állandó, s az emanáczió egy része kivülre távozik, míg a megmaradó rész magában a rádiumban Becquerelsugarakká változik át. Vörösre izzítva a rádiumot, aktiváló képességének legnagyobb részét elveszíti; más szóval a külső emanáczió-termelés kisebbedik. Ennek megfelelően a rádiumban magában elhasznált emanáczió mennyisége lesz nagyobb és az anyag így nagyobb végaktivitásra tesz szert.

Kitűzhetjük magunknak a következő feladatot: állítsuk elő elméleti úton ama törvényt, mely szerint feloldott vagy felmelegített szilárd rádiumos só aktivitása növekszik. Fel fogjuk tenni, hogy a rádium sugárzása minden pillanatban arányos a rádiumban jelenlévő emanáczió q mennyiségével. Tudjuk, hogy az emanáczió önként eltűnik oly törvény szerint, hogy minden pillanatban:

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{\theta}} \qquad (1)$$

a hol q_0 az emanáczió mennyisége $t=0$ időpillanatban és a θ idő állandó $4{\cdot}97 \times 10^5$ mp.

Legyen másrészt $\varDelta$ a rádium emanáczió termelése, melyet állandónak fogunk feltételezni. Lássuk mi történnék, ha az emanáczió nem illanna el a rádiumot környező térbe. Az egész termelt emanáczió akkor arra szolgálna, hogy a rádiumban sugárzást létesítsen. Az (1) képlet szerint azonban:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} = -\frac{q}{\theta},$$

tehát egyensúlyi állapotban a rádium bizonyos Q emanáczió-mennyiséget tartalmazna, a mely Q-t a

$$\varDelta = \frac{Q}{\theta} \qquad (2)$$

képlet határozna meg és a rádium sugárzása akkor Q-val arányos volna.

Tegyük fel, hogy a rádium oly viszonyok közé jut, hogy kifelé emanácziót veszít; ezt érjük el az által, hogy a rádiumos vegyületet feloldjuk vagy felmelegítjük. Az egyensúly meg fog bomolni és a rádium aktivitása fogyni fog. Mihelyt azonban megszűnik az emanáczióveszteségnek oka (az anyag visszajut szilárd állapotába, a melegítés megszűnik) az emanáczió a rádiumban újra felhalmozódik s oly idő következik, midőn a $\varDelta$ emanácziótermelés nagyobb mint a $\frac{q}{\theta}$ eltűnési sebesség. Akkor ugyanis

$$\frac{dq}{dt} = \varDelta - \frac{q}{\theta} = \frac{Q-q}{\theta}$$

a honnan

$$\frac{d}{dt}(Q-q) = -\frac{Q-q}{Q}$$

$$Q-q = (Q-q_0)\, e^{-\frac{t}{\theta}} \qquad (3)$$

a hol q_0 a $t=0$ időben a rádiumban jelenlévő emanáczió mennyiség.

A (3) képlet szerint a különbség azon Q emanácziómennyiség között, melyet a rádium egyensúlyi állapotában tartalmaz és ama q mennyiség közt, mely bizonyos időpillanatban fordul elő benne az idő folyamán exponenses törvény szerint fogy és e törvény ugyanaz, mint az emanáczió önkéntes eltünésének törvénye. Minthogy másrészt a rádium sugárzása az emanáczió mennyiségével arányos, a különbség a sugárzás végerőssége és a mindenkori erősség közt ugyanezen törvény szerint fogy; e különbségnek tehát körülbelül 4 nap alatt felényire kell csökkeni.

Az itt közölt elmélet tökéletlen, minthogy elhanyagoltuk a kivülre való kibocsátás által bekövetkező emanáczióveszteséget. Azonban nehéz megtudni, milyen függvénye az időnek e külső veszteség. Összehasonlítva a tapasztalati eredményeket e tökéletlen elmélettel, nem találunk kielégítő megegyezést; mindamellett azt a benyomást nyerjük, hogy ezen elmélet mégis tartalmaz némi valóságot. Ama törvény, mely szerint a végső és a mindenkori aktivitás közti különbség 4 nap alatt felényire sülyed, bizonyos közelítéssel ábrázolja körülbelül tíz napig a melegítés utáni aktivitásbeli növekedést. A feloldás utáni aktivitás-növekedésnél e törvény meglehetősen megfelel a tapasztalatnak bizonyos időközben, mely 2—3 nappal a szárítás után kezdődik és 10—15 napig tart. A jelenségek különben igen bonyolultak; ezen elmélet nem magyarázza meg, miért tűnik el nagyobb része a nagyobb áthatolóképességü, mint a könnyen elnyelhető sugárzásnak.

A radioaktivitási jelenségek természete és oka.

Mindjárt a radioaktiv testekre vonatkozó vizsgálatok kezdetén, mikor e testek tulajdonságai még alig voltak ismeretesek, sugárzásuk önkéntes volta oly kérdésnek mutatkozott, mely a fizikusok érdeklődését igen nagy mértékben lekötötte. Ma már előbbre vagyunk a radioaktiv testek ismerete dolgában és elő tudunk állítani egy rendkívül erősen radioaktiv testet, a rádiumot. A rádium figyelemreméltó tulajdonságai révén sikerült a radioaktiv testek által kibocsátott sugarakat behatóan tanulmányozni; az eddig tanulmányozott különböző sugárcsoportok a CROOKES csövekben fellépő sugárcsoportokhoz, katód-, Röntgen- és csősugarakhoz hasonlók. Ugyanezen sugárcsoportokat találjuk még a Röntgensugarak keltette másodlagos sugárzásban* és az indukált radioaktivitással felruházott testek sngárzásában.

Azonban, míg a sugárzás természete ma már jobban ismeretes, az önkéntes radioaktivitás okát ma is titokzatos homály borítja és e jelenség még mindig talány marad előttünk és még mindig ámulatba ejt bennünket.

Az önként radioaktiv testek, első sorban a rádium, energiatermelésük Becquerel-sugárzásban, kémiai fényhatásokban és állandó hőkiadásban nyilvánul.

Sokszor felmerült az a kérdés, vajjon az energia magukban a radioaktiv testekben keletkezik-e vagy pedig e testek külső forrásoktól kapják kölcsön ezen energiát. Az e két felfogásnak megfelelő számos föltevések egyike sem nyert kisérletileg igazolást.

Fel lehet tenni, hogy a radioaktiv energia megelőzőleg halmozódott fel és lassankint fogy ki, mint a hosszú ideig tartó foszforeszkálásnál. Azt is feltehetjük, hogy a radioaktiv energia kibocsátása a sugárzó test fejlődésben lévő atómjai természetének átalakulását kiséri; az a tény, hogy a rádium hőt bocsát ki, e föltevés helyessége mellett szól. Föltehetjük továbbá, hogy az átalakulás súlyveszteséggel és a sugárzást alkotó anyagi részecskék kilövellésével jár. Az energia forrása még a gravitáczióban kereshetö. Végre föltehetjük, hogy a teret állandóan előttünk még ismeretlen sugárzások járják keresztül kasúl, melyeket a radioaktiv testek útjokban elfognak és radioaktiv energiává alakitanak át.

Több ok hozható fel e hipotézis mellett és e hipotézisek ellen, és legtöbbször a föltevések következményeinek kisérleti igazolása

* SAGNAC doktori értekezése. — CURIE és SAGNAC, Comptes rendus, 1900 április.

negativ eredményre vezetett. Az uránium és a rádium radioaktiv energiája az eddigi vizsgálatok szerint úgy látszik nem merül ki, sőt az idő folyamán sem mutat észrevehető változást. DEMARÇAY öt hónapon keresztül vizsgált a spektroszkóppal tiszta rádium-chloridot; öt hónap alatt a spektrumban semmi változást nem tapasztalt. A bárium fővonala, mely a spektrumban látszott és a mely a báriumot tisztátlanság alakjában mutatta, a megfigyelt idő alatt nem erősödött meg; a rádium tehát nem változott át észrevehető mennyiségben báriummá.

A rádiumvegyületekre nézve HEYDWEILLER által jelzett súlyváltozások * nem tekinthetők megállapitott ténynek.

ELSTER és GEITEL azt találták, hogy az uránium radioaktivitása egy bánya 850 m mély aknája fenekén nem változott; ily vastag földréteg tehát nem változtatná a föltételezett első sugárzást, mely az uránium radioaktivitását okozná.

Mi lemértük az uránium radioaktivitását déltől éjfélig, arra gondolva, hogy ha a föltételezett első sugárzás forrása a Nap volna, részleges abszorpcziót szenvedne a Földön való áthatolása közben. A kisérlet semmi különbséget nem szolgáltatott a két eset között.

A legújabb vizsgálatok a rádium atomikus átalakulásának hipotézisére nézve kedvezők. E hipotézis a radioaktivitásra vonatkozó kutatások legelején merült fel; RUTHERFORD szabadon átvette és föltette, hogy a rádium emanácziója anyagi gáz, a mely a rádiumatóm dizaggregácziójának egyik terméke. RAMSAY és SODDY utolsó kisérletei annak a bizonyitására törekszenek, hogy az emanáczió bomlékony gáz, melynek szétesése hélium keletkezéssel jár. Másrészt a rádium folytonos hőtermelése nem magyarázható meg közönséges kémiai reakczió által, azonban az atóm átalakulásában lehetne forrását keresni.

Megemlitjük végre, hogy az új radioaktiv anyagok mindig urániumos ásványokban fordulnak elő; a mint emlitettük, hiába kerestünk rádiumot a kereskedésben kapható báriumban. A rádium

* HEYDWEILLER, Phys. Zeitschr. 1902. október.

jelenléte tehát úgy látszik az urániumhoz van kötve. Az urániumos ásványok másrészt argont és héliumot tartalmaznak és ez valószínűleg nem tulajdonítandó a véletlennek. E különböző testek jelenléte ugyanazon ásványban arra a gondolatra vezet minket, hogy egyiknek jelenléte talán szükséges a többiek keletkezéséhez.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy ama tények, melyek a rádium atomikus átalakulása mellett szólnak, másképp is értelmezhetők. A rádiumatóm átalakulásának föltételezése helyett úgy is képzelhetjük a dolgot, hogy az atóm maga állandó, és környezetére (szomszédos anyagi atómokra, az éter atómjaira) hat úgy, hogy abban atómikus átalakulásokat létesít. E hipotézis szintén az elemek átalakulásának föltételezésére vezet, de a rádium maga nem volna már pusztulófélben lévő elem.

Ford. *Zemplén Győző.*

Utalványczim : Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás

az 1905. év május hó 1-től november hó 10-ig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek :

1901. évre: Bujk Béla 6 k., Somogyi István 6 k., Stáhl Géza, 6 k., Winkler Lajos 10 k. Összesen ... ... 28 kor.

1902. évre: Dobay Sándor 6 k., Dózsa Jakab 6 k., Bujk Béla 6 k., Kiss E. János 10 k., Nuricsán József dr. 10 k., Stáhl Géza 6 k., Szerényi Géza 10 k. Összesen ... ... 54 kor.

1903. évre: Csajkás Mihály 6 k., Dobay Sándor 6 k., Gidófalvi Géza 6 k., Klatt Virgil 6 k., Kosztolányi Árpád 6 k., Layer Antal dr. 6 k., Nuricsán József dr. 6 k., Sándor János 6 k., Szathmáry Jenő 6 k., Szerényi Géza 10 k. Összesen ... ... 64 kor.

1904. évre: Aranyosi Miksa 10 k., Babiak Nándor 6 k., Cholnoky Jenő dr. 10 k., Farkas Gyula dr. 6 k., Hassák Vidor 6 k., Homor Ernő 6 k., Homor István 6 k., Kemény Ferencz dr. 10 k., Képessy Imre 10 k., Kiss Tamás 4 k., Korbuly Emil 6 k., Kerékgyártó Jenő 6 k., Kosztolányi Árpád 6 k., Molnár Aladár 6 k., Molnár Sándor 6 k., Oberle Károly 10 k., Osztrogonácz János 6 k., Pizetti Rókus 6 k., Strompf László 6 k., Szabó Gábor 10 k., Székely László 10 k., Toth Balázs 6 k., Uzoni Imre 6 k. Összesen 164 kor.

1905. évre: Anderkó Aurél dr. 10 k., Antal Márkus 6 k., Arató Frigyes 4 k., Bánki Donát 10 k., Barabás Jenő 6 k., Bartoniek Géza 10 k., Beke Manó dr. 10 k., Berkes Imre 10 k., Bodor Domokos 6 k., Brich Lipót 10 k., Buchböck Gusztáv 10 k., Czakó Adolf 10 k., Demeter István 6 k., Dienes Pál 10 k., Eberling József 10 k., Elekes Pál 6 k., Eötvös Lóránt br. dr. 10 k., Erdődy Imre 10 k., Faragó Andor 6 k., Ferenczy József 6 k., Fölser István 10 k., Ifj. Füzy Rezső Vilmos 10 k., Glücklich

Vilma 10 k., Goldziher Károly dr. 10 k., Hahóthy Sándor 10 k., Hauszmann Alajos 10 k., Havas Miksa 10 k., Hill József 6 k., Hirschmann Nándor 6 k., Homor Ernő 6 k., Jakucs István 6 k., Javorik János 6 k., Jónás Ödön 10 k., Jurányi Henrik 10 k. Karai Sándor 6 k., Kerekes Dezső 6 k., Krendl Antal 10 k., Kiss Dénes 6 k., Konkoly Thege Miklós ifj. 6 k., Kopp Lajos dr. 10 k., Kerékgyártó Jenő 6 k., König Gyula dr. 10 k., Lakner József 6 k., Lengyel Béla dr. 10 k., Lengyel Endre 6 k., Lengyel Imre 6 k., Lipthay Sándor 10 k., Luckhaub Gyula 6 k., Margittai Antal 6 k., Lieblich Áron 6 k., Markoss Imre 6 k., Mayer Irén 6 k., Morotz Kálmán 10 k., Nagy Balázs 6 k., Neustadt Lipót 10 k., Ondrus Pál 6 k., Pech Aladár 10 k., Pék János 6 k., Prokess Ignácz 6 k., Radó Simon 6 k., Scholtz Ágost dr. 10 k., Schöndorfer Gyula 6 k., Simon Ferencz 6 k., Suták József dr. 10 k., Szabó Lajos 6 k., Szekeres Kálmán dr. 10 k., Szentmiklósy Jenő 6 k., Szijártó Miklós 10 k., Szokol Pál dr. 6 k., Takáts Gyula 6 k., Tőtössy Béla 10 k., Tresztyánszky Sándor 6 k., Wagner Alajos dr. 10 k. Összesen ... ... 564 kor.

1906. évre: Arató Frigyes 6 k., Suták József dr. 10 k. Összesen ... ... 16 kor.

Előfizetési dijat fizettek:

1905. évre: Budapesti V. ker. áll. főgymn. 10 k., Budapesti VIII. k. áll. főgymn. 10 k., Kecskeméti áll. főreálisk. 5 k., Podolini kegy. rendi gymnasium 10 k., Szabadkai közs. főgymn. 10 k., Teván Adolf 10 k. Összesen ... ... 55 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból	304 kor.	január 1-től	644 kor.
F. és köv. évi tagsági dijakból	580 kor.	« «	1502 kor.
Előfizetési dijakból	55 kor.	« «	720 kor.

Kelt Budapesten, 1905. november 11.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-ut 15.)

A SZÁMTANI HALADVÁNYRÓL.

A következőkben egyszerű, habár elvileg nem elemi bebizonyítását adjuk annak a ténynek, hogy az $nt-1$ számtani haladvány — a hol n tetszőleges összetett szám — végtelen sok törzsszámot tartalmaz.

I.

1. Valamely p pozitiv törzsszámot a

$$\Phi(z)=c_0z^m+c_1z^{m-1}+\cdots+c_m \tag{1}$$

$$(c_i \text{ racz. egész, } c_0>0)$$

forma törzsosztójának nevezünk, ha a

$$\Phi(z)\equiv 0 \pmod{p}$$

kongruenczia raczionális egész számmal kielégíthető. A következő segédtételt fogjuk kimutatni. *Ha az (1) forma törzsosztói véges kivétellel $at\pm 1$ alakúak és a*

$$\Phi(z)=0 \tag{I}$$

egyenletnek van páratlan multipliczitású valós gyöke; akkor a törzsosztók között végtelen sok $\equiv -1 \pmod{a}$.

2. Ha az (I) egyenlet a jelzett tulajdonsággal bír, akkor található oly *raczionális*

$$\xi=\frac{r}{R},\quad R>0$$

$$(r,\ R \text{ egész})$$

szám, amelyre

$$R^m\Phi\left(\frac{r}{R}\right)=c_0r^m+c_1Rr^{m-1}+\cdots+c_mR^m<0.$$

Ezt a tényt még így fejezhetjük ki. A:

$$\Psi(z)=c_0z^m+c_1Rz^{m-1}+\cdots+c_mR^m \tag{2}$$

formára vonatkozólag

$$\Psi(r)<0. \tag{2*}$$

Az (1) forma törzsosztóinak vizsgálata nagyon egyszerűvé lesz, ha még bevezetjük a

$$H(z)=\frac{\Psi\left(-\Psi(r)z+r\right)}{-\Psi(r)}=H_0z^m+H_1z^{m-1}+\cdots+H_m \tag{3}$$

formát, a melynek együtthatói raczionális egész számok és a

$$H_0>0,\quad H_m=-1 \tag{3*}$$

feltételeket kielégítik.

3. A H forma törzsosztói, a mint látnivaló, egyszersmind a Ψ formának is törzsosztói, ámde a Ψ és a Φ formáknak R-hez relativ prim törzsosztói, miként az a

$$\begin{aligned}c_0(zR)^m+c_1R(zR)^{m-1}+\cdots+c_mR^m&=\\=R^m(c_0z^m+c_1z^{m-1}+\cdots+c_m)&\end{aligned} \tag{J}$$

identitásból kitünik, ugyanazok. Igy tehát a H forma törzsosztói véges számú kivétellel $at\pm1$ alakúak. Legyen a kivételes törzsosztók szorzata Q; akkor, hacsak $\bar{z}$ elég nagy:

$$0<H(aQT\bar{z})\equiv-1 \pmod{aQT}, \tag{4}$$

a hol T tetszőleges raczionális egész számot jelent.

A (4) reláczióból azonban segédtételünk evidenssé lesz.

II.

1. Legyen

$$F_n(z)=0$$

az n-dik primitiv egységgyökök egyenlete: akkor

$$(x-y)^{\varphi(n)}F_n\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=G_n(x,y^2),$$

a hol G_n argumentumainak egészszámú formája és $\varphi(n)$ az ismeretes EULER-féle jel. Már most KRONECKER * elemi uton, sőt tisztán a raczionális számok és formák körében maradva, a következő tételt mutatta ki, melynek speczialis eseteit már DIRICHLET bebizonyította.

Ha q a

$$G_n(x, s) \tag{1}$$

formának n és s-hez relativ prim osztója, akkor

$$q \equiv \left(\frac{s}{q}\right) (\text{mod. } n),$$

a hol $\left(\frac{s}{q}\right)$ *a* LEGENDRE-*féle jel.***

2. Ámde a

$$G_n(x, s) = 0 \tag{2}$$

egyenlet gyökei a:

$$\sqrt{s}\,\frac{\rho+1}{\rho-1} \tag{2*}$$

számok, ha ρ primitiv n-dik egységgyök. Ha tehát s negativ, akkor a gyökök valósak és egyszerűek. Az (1) forma törzsosztói véges kivétellel $nt \pm 1$ alakúak, van tehát közöttük végtelen sok, mely $\equiv -1$ (mod. n).

3. A tétel bebizonyítása még a következő módon is adható. Legyen $s = -1$, akkor az (1) forma $4t-1$ alakú törzsosztói egyszersmind $\equiv -1$ (mod. n). Azonban bármely forma páratlan törzsosztói $4t \pm 1$ alakúak.

Az (1) formának tehát végtelen sok $4t-1$ alakú törzsosztója van.

Bauer Mihály.

---

* Über die arithmetischen Sätze etc. Berliner Sitzungsberichte 1888. p. 417—423. A szóban forgó formák sok oldalról megvizsgáltattak. L. pl. ezen Lapok IV. k. 331—336.

** Az említett dolgozatban nincs explicite kiemelve, hogy q relativ prim s-hez. Az s szám természetesen nem teljes négyzet.

DESARGUES TÉTELÉNEK ANALITIKUS BEBIZONYÍTÁSÁHOZ.

A perspektiv fekvésű háromszögekre vonatkozó *Desargues*-tétel analitikai bebizonyitását általános alakban HUNYADY JENŐ közölte.*

A bebizonyításban szereplő determinánsokkal HUNYADY még külön; ismételten is foglalkozott.**

A jelen közleményben azért térek vissza e tételre, mert sikerült a számításokat jelentékenyen egyszerűsítenem.

1. A következőkben mindenütt általános trimetrikus koordinátákat használunk.

Válasszuk először egyik háromszöget koordináta-háromszögül; a másik oldalainak egyenletei legyenek:

$$y_i \equiv \gamma_{i1}x_1 + \gamma_{i2}x_2 + \gamma_{i3}x_3 = 0. \qquad (i=1,2,3) \tag{1}$$

Az (1) rendszer determinánsa:

$$\Gamma = |\gamma_{ik}| \neq 0 \qquad (i=k, 1, 2, 3)$$

és aldeterminánsait jelöljük Γ_{ik}-val.

A megfelelő oldalok metszéspontjainak koordinátáiból, mint elemekből alkotott determináns:

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} 0 & \gamma_{13} & -\gamma_{12} \\ -\gamma_{23} & 0 & \gamma_{21} \\ \gamma_{32} & -\gamma_{31} & 0 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

---

* Lásd: HUNYADY J. Desargues tétele a perspectiv háromszögekről. *Műegyetemi Lapok* 1876. 81—84. l. és: Der Satz von Desargues. *Crelle Journal* 89. Bd. p. 79—81.

** L. Über einige Determinantengleichungen. *Crelle Journal* 94. Bd. p. 171. és köv.; v. ö. még részben: Tételek a componált determinánsoknak egy különös neméről 1880. (*Akadémiai Értekezések* 7. k. XXI. szám.)

A megfelelő szögpontok metszéspontjait összekötő egyenesek egyenletrendszerének determinánsa:

$$\overline{\Delta}=\begin{vmatrix} 0 & \Gamma_{13} & -\Gamma_{12} \\ -\Gamma_{23} & 0 & \Gamma_{21} \\ \Gamma_{32} & -\Gamma_{31} & 0 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Jegyezzük meg, hogy $\overline{D}$-t kifejtve, a $\gamma_{13}\gamma_{31}\gamma_{22}$ szorzatot hozzáadva és levonva, még így is irhatjuk:

$$\overline{D}=\Gamma_{13}\gamma_{13}-\Gamma_{31}\gamma_{31}. \tag{2'}$$

Ezután egyszerű számítással kimutathatjuk, hogy $\overline{D}$ és $\overline{\Delta}$ determinánsok minő összefüggésben állanak. Fejtsük ki $\overline{\Delta}$-t, azután adjuk hozzá és vonjuk le a $\Gamma_{13}\Gamma_{31}\Gamma_{22}$ szorzatot. Elemi determinánstételek segítségével ezt kapjuk:

$$\overline{\Delta}=\Gamma.(\Gamma_{13}\gamma_{13}-\Gamma_{31}\gamma_{31}), \tag{3'}$$

a mit (2')-vel összehasonlítva, ered:

$$\overline{\Delta}=\Gamma.\overline{D}. \tag{4}$$

A (4) egyenlet fejezi ki analitikai alakban *Desargues* tételét erre a speczialis esetre. Az általános esetben is reá támaszkodunk.

Megjegyzés. A $\overline{D}$ determinánst még a következö alakokra hozhatjuk:

$$\overline{D}=\Gamma_{21}\gamma_{21}-\Gamma_{12}\gamma_{12},$$

$$\overline{D}=\Gamma_{32}\gamma_{32}-\Gamma_{23}\gamma_{23}.$$

2. Az általános esetben legyenek a két háromszög oldalainak egyenletei

$$y_i\equiv a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3=0; \tag{5}$$

$$z_i\equiv b_{i1}x_1+b_{i2}x_2+b_{i3}x_3=0, \tag{6}$$

a hol úgy mint a következőkben az indexek helyére mindenütt 1, 2, 3 irandó.

E rendszerek determinánsai

$$A=|a_{ik}|,\quad B=|b_{ik}|;$$

legyenek mindketten zérustól különbözök, aldeterminánsaikat jelölje A_{ik}, B_{ik}.

Ha megfelelő oldalokul $y_i=0$ és $z_i=0$-at válasszuk, a $\overline{D}$ és $\overline{\Delta}$ determinánsok helyére, a (2) ill. (3)-nak megfelelő jelentéssel a következők lépnek:

$$D = \begin{vmatrix} a_{12}b_{13}-a_{13}b_{12}, & a_{13}b_{11}-a_{11}b_{13}, & a_{11}b_{12}-a_{12}b_{11} \\ a_{22}b_{23}-a_{23}b_{22}, & a_{23}b_{21}-a_{21}b_{23}, & a_{21}b_{22}-a_{22}b_{21} \\ a_{32}b_{33}-a_{33}b_{32}, & a_{33}b_{31}-a_{31}b_{33}, & a_{31}b_{32}-a_{32}b_{31} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

és

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{12}B_{13}-A_{13}B_{12}, & A_{13}B_{11}-A_{11}B_{13}, & A_{11}B_{12}-A_{12}B_{11} \\ A_{22}B_{23}-A_{23}B_{22}, & A_{23}B_{21}-A_{21}B_{23}, & A_{21}B_{22}-A_{22}B_{21} \\ A_{32}B_{33}-A_{33}B_{32}, & A_{33}B_{31}-A_{31}B_{33}, & A_{31}B_{32}-A_{32}B_{31} \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

A D és Δ között szintén fennáll a (4)-hez hasonló alakú összefüggés. Ennek levezetése a legközelebbi feladatunk.

3. Az előbb mondott czélból oldjuk meg a (6) rendszert az x_i-kre vonatkozólag, s helyettesitsünk (5)-be, azaz: a $(z_1 z_2 z_3)$ háromszöget választjuk koordináta háromszögül.

Ekkor az (5) az (1) rendszerrel alak szerint megegyezik, ha:

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{B}(B_{k1}a_{i1}+B_{k2}a_{i2}+B_{k3}a_{i4}). \qquad (9)$$

Ugyanazon helyettesités után

$$\Gamma_{ik} = \frac{1}{B}(A_{i1}b_{k1}+A_{i2}b_{k2}+A_{i3}b_{k3}). \qquad (10)$$

Mind a γ_{ik}, mind a Γ_{ik} számlálója determináns alakban is irható. Úgy hogy ezek behelyettesitésével a (2) ill. (3)-ba *komponált* determinánsokat kapunk $\overline{D}$ és $\overline{\Delta}$ kifejezéseül.

Ezeket azonban átalakitjuk úgy, hogy D illetőleg Δ-val való egybefüggésük kitünjék. E végre megalkotjuk a

$$\overline{D}.|B_{ik}|, \quad \overline{\Delta}.B$$

szorzatokat. Részletesen kiirva:

$$\overline{D}.|B_{ik}| = \overline{B}^3.$$

$$\begin{vmatrix} 0, & a_{11}B_{31}+a_{12}B_{32}+a_{13}B_{33}, & -(a_{11}B_{21}+a_{12}B_{22}+a_{13}B_{23}) \\ -(a_{21}B_{31}+a_{22}B_{32}+a_{23}B_{33}), & 0, & a_{21}B_{11}+a_{22}B_{12}+a_{23}B_{13} \\ a_{31}B_{21}+a_{32}B_{22}+a_{33}B_{23}, & -(a_{31}B_{11}+a_{32}B_{12}+a_{33}B_{13}), & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix}$$

Ha a szorzásnál a jobbfelöli második determináns sorait a harmadiknak oszlopaival komponáljuk, azután a

$$|B_{ik}| = B^2$$

egyenlőséget tekintetbe vesszük, egyszerűsítünk s az eredményt a (7)-tel egybevetjük, ezt kapjuk:

$$\overline{D}.B^2 = D. \tag{11}$$

Hasonló módon járunk el a $\overline{\varDelta}.B$ szorzat kifejtésénél:

$$\overline{\varDelta}.B = \overline{B}^3.$$

$$\begin{vmatrix} 0, & b_{31}A_{11}+b_{32}A_{12}+b_{33}A_{13}, & -(b_{21}A_{11}+b_{22}A_{12}+b_{23}A_{13}) \\ -(b_{31}A_{21}+b_{32}A_{22}+b_{33}A_{23}), & 0, & b_{11}A_{21}+b_{12}A_{22}+b_{13}A_{23} \\ b_{21}A_{31}+b_{22}A_{32}+b_{23}A_{33}, & -(b_{11}A_{31}+b_{12}A_{32}+b_{13}A_{33}), & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} b_{13} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \\ b_{31} b_{32} b_{33} \end{vmatrix}$$

Az eredmény, (8)-ra való tekintettel ez lesz:

$$\overline{\varDelta}.B^4 = \varDelta. \tag{12}$$

Vegyük még tekintetbe, hogy a (9) helyettesítés után:

$$\Gamma = A.B^{-1}. \tag{13}$$

A (11), (12) és (13)-ból $\overline{D}$, $\overline{\varDelta}$ és Γ-t meghatározva, helyettesítsünk a (4)-be. Ekkor végül van:

$$\varDelta = A.B.D. \tag{14}$$

Ez az egyenlőség fejezi ki a *Desargues* tételét az általános esetben.*

Hunyady levezetésében determinánsnak egy másik determinánssal való szorzását hatszor veszi segítségül, a fennebbi sorokban csak kétszer volt erre szükségünk. Ellenben nála a végső egyenlet a számításnak közvetetlen eredménye, míg itt egy megelőző egyenletnek közvetítésével származik. *Szabó Péter.*

---

* A (14) összefüggést, mint bebizonyítandót, közölte Arany D. is (*M. Ph. L.* VIII. kötet 270. lapon).

A KETTŐS PARTICZIÓKRÓL.

(Második és befejező közlemény.)

Ezzel a feladatunkat megoldottuk. Ugyanis a $c_{mt}(B;\,x)$ periodikus függvényekre vonatkozólag a III. (12) szerint:

$$c_{m,t}(B;\,x)=\frac{(-1)^{s_m-1-t}}{t!\,(s_m-1-t)!\,\prod_i^{(m)}\left(1-x^{b\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)}\right)^{s_i}}\left\{\text{coeffs } b^{s_m} \text{ in } bG^{(m)}_{s_m-1-t}(b,\,\nu)\right\},$$

hol

$$B\equiv\nu\ (\mathrm{mod}\ b);\qquad \nu>b.$$

Így

$$c_{m,s_m-1-h}(B;\,x)=\frac{(-1)^h}{h!\,(s_m-1-h)!\,\prod_i^{(m)}\left(1-x^{b\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)}\right)^{s_i}}\left\{\text{coeffs } b^{s_m} \text{ in } bG^{(m)}_{h}(b,\,\nu)\right\}.$$

Ebből, tekintetbe véve a (17) alatti kifejezést, végső eredménykép nyerjük:

$$c_{m,s_m-1-h}(B;\,x)=\sum_{k=0}^{s_m-1}\ \sum_{\substack{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k=1\\ \sigma_1<\sigma_2<\ldots<\sigma_k}}^{s_m}\ \sum_{\sum_i^{(m)}\sum_\varrho h_{i\varrho}+\sum h_{m\sigma}=h}\frac{(-1)^h\,d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}}{(s_m-1-h)!\,\prod_i^{(m)}\prod_\varrho h_{i\varrho}!\,\prod_\sigma h_{m\sigma}!\ b_{m1}\ldots b_{ms_m}}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\ldots\nu_{i\varrho}\ldots\nu_{m\sigma_1}\ldots\nu_{m\sigma_k}}\left\{x^{\sum_i^{(m)}\sum_\varrho b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)\nu_{i\varrho}}\right.$$

$$\left.\Pi^{(m)}_{i} \Pi_{\varrho} g_{i\varrho}(\nu_{i\varrho};\, x) \prod_{z=1}^{k} f_{m\sigma_z}(\nu_{m\sigma_z})\right\}, \tag{18}$$

hol:

$$\sum_{i}^{(m)} \sum_{\varrho} b_{i\varrho}\nu_{i\varrho} + \sum_{z=1}^{k} b_{m\sigma_z}\nu_{m\sigma_z} \equiv B \pmod{d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}}$$

$$0 \leqq \nu_{i\varrho} < t^{(i\varrho)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}, \quad 0 \leqq \nu_{m\sigma} < t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k};$$

a $g_{i\varrho}(\nu_{i\varrho};\, x)$ és $f_{m\sigma}(\nu_{m\sigma})$ függvények kifejezései (11) és (14) alatt. A $k=0$ esetben $h_{m\sigma}=0$, $\nu_{m\sigma}=0$, $f_{m\sigma}(\nu_{m\sigma})=1$, és $d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}=d^{(m)}$, az összes b_m számok legnagyobb közös osztója.

A II. (1) alatti partiezionális alkotó függvénynek hatványsorba fejtését az egyik változó (y) szerint a II. (22) értelmében ezzel elvégeztük; a számítás elvégezhetése végett bevezetett tetszőleges b mennyiséget a végeredményből kiküszöböltük. A további feladat most már elvégezni a másik változó (x) szerinti kifejtést is.

V. A kettős particziók visszavezetése egyszerű particziókra.

Miután a kettős particziók száma (II. (3))

$$P(A, B) = \text{coeffs}\, x^A\, in \frac{\Phi(B;\, x)}{\prod_{\varepsilon}(1-x^{\alpha_\varepsilon})},$$

annak bebizonyítására, hogy a kettős particziók számának meghatározása mindig egyszerű particziókra vezethető, elegendő kimutatni, hogy $\Phi(B;\, x)$ kifejezésében x-nek csak olyan raczionális törtfüggvényei szerepelnek, melyek az egyszerű particziók alkotó függvényének

$$\frac{1}{\prod_{i}(1-x^{a_i})}$$

tipusához tartoznak.

Ha behelyettesítjük $\Phi(B;\, x)$-nek II. (22) alatti jellemző alakját, előáll:

$$P(A, B) = \text{coeffs } x^A \, in \sum_{m=1}^{v} \frac{x^{\frac{a_m}{b_m} B}}{\prod_\varepsilon (1-x^{\alpha_\varepsilon})}$$

$$\sum_{h=0}^{s_m-1} c_{m,\, s_m-1-h}(B;\, x)\, B^{s_m-1-h}. \tag{1}$$

Ez így is rendezhető

$$P(A, B) = \sum_{m=1}^{v} \left\{ \text{coeffs } x^A \, in \frac{x^{\frac{a_m}{b_m} B}}{\prod_\varepsilon (1-x^{\alpha_\varepsilon})} \right.$$

$$\left. \sum_{h=0}^{s_m-1} c_{m,\, s_m-1-h}(B;\, x)\, B^{s_m-1-h} \right\}. \tag{2}$$

Az x-re vonatkozólag mutatkozó irraczionalitás teljes eltüntetésére vezessünk be

$$x^{\frac{1}{b_m}} \quad \text{helyett} \quad \xi$$

betűt. Mivel általában

$$\text{coeffs } x^A \, in \, F(x) = \text{coeffs } \xi^{b_m A} \, in \, [F(x)]_{x=\xi^{b_m}},$$

a jelen esetben lesz:

$$P(A, B) = \sum_{m=1}^{v} \left\{ \text{coeffs } \xi^{b_m A} \, in \frac{\xi^{a_m B}}{\prod_\varepsilon (1-\xi^{b_m \alpha_\varepsilon})} \right.$$

$$\left. \sum_{h=0}^{s_m-1} B^{s_m-1-h} \left[c_{m,\, s_m-1-h}(B;\, x) \right]_{x=\xi^{b_m}} \right\}. \tag{3}$$

Minthogy továbbá általában:

$$\text{coeffs } \xi^{b_m A} \, in \, \xi^{a_m B} F(\xi) = \text{coeffs } \xi^{b_m A - a_m B} \, in \, F(\xi),$$

a jelen esetben:

$$P(A, B) = \sum_{m=1}^{v} \left\{ \text{coeffs } \xi^{b_m A - a_m B} \, in \frac{1}{\prod_\varepsilon (1-\xi^{b_m \alpha_\varepsilon})} \right.$$

$$\left. \sum_{h=0}^{s_m-1} B^{s_m-1-h} \left[c_{m,\, s_m-1-h}(B;\, x) \right]_{x=\xi^{b_m}} \right\}. \tag{4}$$

Ki akarjuk mutatni, hogy az itt ξ-re vonatkozólag előforduló raczionális törtek mind az egyszerű particziók alkotó függvényének tipusához tartoznak.

Előbb vizsgáljuk meg, hogy $c_{m,\,s_m-1-h}(B;\,x)$-ben x-nek milyen jellegű kifejezései jönnek elő.

A IV. (22) szerint $c_{m,\,s_m-1-h}(B;\,x)$ ilyenféle összeg:

$$c_{m,\,s_m-1-h}(B;\,x)=$$

$$=\sum Hx^{\sum\limits_i^{(m)}\sum\limits_\varrho b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)\nu_{i\varrho}}\prod_i^{(m)}\prod_\varrho g_{i\varrho}(\nu_{i\varrho};\,x),$$

hol H az x-től független mennyiségeket jelent. Itt a IV. (14) szerint

$$g_{i\varrho}(\nu_{i\varrho};\,x)=$$

$$=b_{i\varrho}^{h_{i\varrho}}\sum_{\xi_{i\varrho}=0}^{h_{i\varrho}}\binom{h_{i\varrho}}{\xi_{i\varrho}}\nu_{i\varrho}^{h_{i\varrho}-\xi_{i\varrho}}\left[\left[\Delta^{\xi_{i\varrho}}\left(\frac{1}{1-y^{t^{(i\varrho)}}}\right)\right]\right]_{y=x^{b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)}}.$$

Külön tárgyalással teljes inductio alkalmazásával könnyen meg lehet győződni róla, hogy általában

$$\Delta^s\left(\frac{1}{1-y^r}\right)=r^s\left\{\frac{E_{s0}}{(1-y^r)}+E_{s1}\frac{y^{1r}}{(1-y^r)^2}+\right.$$

$$\left.+E_{s2}\frac{y^{2r}}{(1-y^r)^3}+\cdots+E_{ss}\frac{y^{sr}}{(1-y^r)^{s+1}}\right\},\tag{5}$$

hol

$$E_{00}=1$$

$$E_{s0}=0\qquad(s>0)$$

$$\underset{(s>0),\ (m>0)}{E_{sm}}=(-1)^{m-1}\begin{vmatrix}1^s & \binom{1}{1} & 0 & \dots & 0\\ 2^s & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ m^s & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \dots & \binom{m}{m-1}\end{vmatrix}$$

E szerint

$$g_{i\varrho}(\nu_{i\varrho};\,x)=b_{i\varrho}^{h_{i\varrho}}\sum_{\xi_{i\varrho}=0}^{h_{i\varrho}}\binom{h_{i\varrho}}{\xi_{i\varrho}}\nu_{i\varrho}^{h_{i\varrho}-\xi_{i\varrho}}(t^{(i\varrho)})^{\xi_{i\varrho}}\sum_{\eta_{i\varrho}=0}^{\xi_{i\varrho}}$$

$$\left\{E_{\xi_{i\varrho}\eta_{i\varrho}}\frac{x^{\eta_{i\varrho}b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)t^{(i\varrho)}}}{\left(1-x^{b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)t^{(i\varrho)}}\right)^{\eta_{i\varrho}+1}}\right\}.$$

Ennélfogva $c_{m,\,s_m-1-h}(B;\,x)$ az x-re nézve ilyen jellegű kifejezés:

$$c_{m,\,s_m-1-h}(B;\,x)=$$

$$=\sum H'\left\{\frac{x^{\sum\limits_i^{(m)}\sum\limits_\varrho b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)(\eta_{i\varrho}t^{(i\varrho)}+\nu_{i\varrho})}}{\prod\limits_i^{(m)}\prod\limits_\varrho\left(1-x^{b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)t^{(i\varrho)}}\right)^{\eta_{i\varrho}+1}}\right\},\tag{6}$$

hol H' az x-től független mennyiségeket jelent. Ebből

$$\left[c_{m,\,s_m-1-h}(B;\,x)\right]_{x=\xi^{b_m}}=$$

$$=\sum H'\frac{\xi^{\sum\limits_i^{(m)}\sum\limits_\varrho\frac{b_{i\varrho}}{b_i}(a_ib_m-a_mb_i)(\eta_{i\varrho}t^{(i\varrho)}+\nu_{i\varrho})}}{\prod\limits_i^{(m)}\prod\limits_\varrho\left(1-\xi^{\frac{b_{i\varrho}}{b_i}(a_ib_m-a_mb_i)t^{(i\varrho)}}\right)^{\eta_{i\varrho}+1}}.\tag{7}$$

Ezek alapján $P(A,\,B)$ ilyen tipusú kifejezés:

$$P(A,B)=\sum_{m=1}^{v}\Bigg[\text{coeffs}\ \xi^{b_mA-a_mB}\ in\sum_{h=0}^{s_m-1}B^{s_m-1-h}\sum H'.$$

$$\cdot\left\{\frac{\xi^{\sum\limits_i^{(m)}\sum\limits_\varrho\frac{b_{i\varrho}}{b_i}(a_ib_m-a_mb_i)(\eta_{i\varrho}t^{(i\varrho)}+\nu_{i\varrho})}}{\prod\limits_i^{(m)}\prod\limits_\varrho\left(1-\xi^{\frac{b_{i\varrho}}{b_i}(a_ib_m-a_mb_i)t^{(i\varrho)}}\right)^{\eta_{i\varrho}+1}\prod\limits_\varepsilon(1-\xi^{b_ma_\varepsilon}}\right\}\Bigg].\tag{8}$$

Az eredeti feltevések szerint

$$\frac{a_i}{b_i}\lesseqgtr\frac{a_m}{b_m},$$

a mint

$$i\lesseqgtr m;$$

így

$$a_ib_m-a_mb_i\equiv d_{im}\lesseqgtr 0,$$

a mint

$$i\lesseqgtr m.$$

Ennek tekintetbe vételével a kifejezés így is írható:

$$P(A,B) = \sum_{m=1}^{v} \Big[\text{coeffs}\, \xi^{b_m A - a_m B}\ in \sum_{h=0}^{s m-1} B^{sm-1-h} \sum H'' .$$

$$\cdot \left\{ \frac{\xi^{\sum\limits_{i=1}^{m-1} \sum\limits_{\varrho} \frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi} (t^{(i\varrho)} - \nu_{i\varrho}) + \sum\limits_{j=m+1}^{v} \sum\limits_{\tau} \frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm} (\eta_{j\tau} t^{(j\tau)} + \nu_{j\tau})}}{\prod\limits_{\varepsilon=1}^{k} (1-\xi^{b_m \alpha_\varepsilon}) \prod\limits_{i=1}^{m-1} \prod\limits_{\varrho} \left(1-\xi^{\frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi} t^{(i\varrho)}}\right)^{\eta_{i\varrho}+1} \prod\limits_{j=m+1}^{v} \prod\limits_{\tau} \left(1-\xi^{\frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm} t^{(j\tau)}}\right)^{\eta_{j\tau}+1}} \right\} \Big], \tag{9}$$

hol H'' a ξ-től független mennyiségeket jelent.

Mivel

$$b_m \alpha_\varepsilon, \quad \frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi} t^{(i\varrho)} \quad \text{és} \quad \frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm} t^{(j\tau)}$$

pozitiv egész számok, az itt szereplő törtek ξ-ben mind az egyszerű particziók alkotó függvényének

$$\frac{1}{\prod (1-\xi^{\alpha})}$$

tipusához tartoznak. Ezzel az előállítással be van tehát bizonyitva, hogy a kettős particziók számának meghatározása *mindig* egyszerű particziók számának meghatározására vezethető vissza.

VI. A kettős particziók számának meghatározására szolgáló függvények charakterisztikus alakja.

A kérdés további elemzése az egyszerű particziók általános elméletének alkalmazását kivánja. Az egyszerű particziók általános elmélete szerint, ha a

$$b_m \alpha_\varepsilon$$
$$(\varepsilon = 1, 2, \ldots, k)$$

$$\frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi} t^{(i\varrho)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, (m-1);\ \varrho = 1, 2, \ldots, s_i)$$

$$\frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm} t^{(j\tau)}$$
$$(j = m+1, m+2, \ldots, v;\ \tau = 1, 2, \ldots, s_j)$$

számok legnagyobb közös osztója δ_m, akkor az

$$\left\{\frac{1}{\prod\limits_{\varepsilon}(1-\xi^{b_m\alpha_\varepsilon})\prod\limits_{i=1}^{m-1}\prod\limits_{\varrho}\left(1-\xi^{\frac{b_{i\varrho}}{b_i}d_{mi}t^{(i\varrho)}}\right)^{\eta_{i\varrho}+1}\prod\limits_{j=m+1}^{v}\prod\limits_{\tau}\left(1-\xi^{\frac{b_{j\tau}}{b_j}d_{jm}t^{(j\tau)}}\right)^{\eta_{j\tau}+1}}\right\}$$

raczionális tört kifejtésében ξ^M együtthatója csak úgy különbözhetik zérustól, ha

$$M \equiv 0 \pmod{\delta_m},$$

és ekkor értéke épen annyi, mint

$$\text{coeffs } z^{\frac{M}{\delta_m}} \text{ in}$$

$$\left\{\frac{1}{\prod\limits_{\varepsilon}\left(1-z^{\frac{b_m\alpha_\varepsilon}{\delta_m}}\right)\prod\limits_{i}\prod\limits_{\varrho}\left(1-z^{\frac{b_{i\varrho}}{b_i\delta_m}d_{mi}t^{(i\varrho)}}\right)^{\eta_{i\varrho}+1}\prod\limits_{j}\prod\limits_{\tau}\left(1-z^{\frac{b_{j\tau}}{b_j\delta_m}d_{jm}t^{(j\tau)}}\right)^{\eta_{j\tau}+1}}\right\},$$

mely már mindig bizonyos

$$\varphi^{(m)}\left(\frac{M}{\delta_m}\right)$$

számelméleti függvény által fejezhető ki.*

E szerint $P(A, B)$ kifejezése így is írható fel:

$$P(A,B) = \sum_{m=1}^{v} \sum_{h=0}^{s_m-1} B^{s_m-1-h} \sum H''.$$

$$\cdot\,\varphi^{(m)}\left(\frac{b_mA - a_mB - \sum\limits_{i=1}^{m-1}\sum\limits_{\varrho}\frac{b_{i\varrho}}{b_i}d_{mi}(t^{(i\varrho)}-\nu_{i\varrho}) - \sum\limits_{j=m+1}^{v}\sum\limits_{\tau}\frac{b_{j\tau}}{b_j}d_{jm}(\eta_{j\tau}t^{(j\tau)}+\nu_{j\tau})}{\delta_m}\right). \quad (1)$$

Az alkalmazásnál gondosan figyelembe kell azonban venni, hogy a $\varphi^{(m)}(T)$ particzionális függvény csak nem negativ egész T argumentumokra nézve jelenti az egyszerű particziók számát, bár értéke negativ argumentumokra nézve általában zérustól különböző is. Ezért a felírt formulában meg kell különböztetni azon eseteket, midőn $\varphi^m(T)$ argumentuma negativ lenne, mert ez esetben a függvény nem alkalmazható, s helyére zérus teendő.

* V. ö. CSORBA GY.: Adalék stb. Math. és Term. tud. Ertesítő. XVII. k.

A $P(A, B)$ formulájánál tehát a

$$\varphi^m(-)$$

képletet A és B-nek csak olyan pozitiv egész értékeire lehet alkalmazni, melyekre nézve egyrészt

$$b_m A - a_m B - \sum_i \sum_\varrho \frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi}(t^{(i\varrho)} - \nu_{i\varrho}) -$$
$$- \sum_j \sum_\tau \frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm}(\eta_{j\tau} t^{(j\tau)} + \nu_{j\tau}) \equiv 0 \pmod{\delta_m},$$

másrészt olyan A és B értékekre mindenesetre *kell* alkalmazni, melyekre nézve ezenkívül az argumentum pozitiv, azaz

$$b_m A - a_m B - \sum_i \sum_\varrho \frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi}(t^{(i\varrho)} - \nu_{i\varrho}) -$$
$$- \sum_j \sum_\tau \frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm}(\eta_{j\tau} t^{(j\tau)} + \nu_{j\tau}) \geqq 0.$$

Az egyszerű particziók elméletéből ismeretes tétel, hogy a $\varphi^{(m)}(T)$-féle particzionális függvény értéke zérus mindazon negativ T argumentumokra, melyek a

$$-S < T < 0$$

határolásba esnek, hol S jelenti az illető alkotó függvény nevezőjének fokát.* Ennélfogva $P(A, B)$ formulájánál a

$$\varphi^{(m)}(-)$$

függvényt olyan A és B értékekre is *lehet* alkalmazni, melyekre nézve:

$$-\Big(\sum_\varepsilon b_m \alpha_\varepsilon + \sum_i \sum_\varrho \frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi} t^{(i\varrho)}(\eta_{i\varrho}+1) +$$
$$+ \sum_j \sum_\tau \frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm} t^{(j\tau)}(\eta_{j\tau}+1)\Big) <$$
$$< b_m A - a_m B - \sum_i \sum_\varrho \frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi}(t^{(i\varrho)} - \nu_{i\varrho}) -$$
$$- \sum_j \sum_\tau \frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm}(\eta_{j\tau} t^{(j\tau)} + \nu_{j\tau}) < 0,$$

* V. ö. CSORBA GY.: «A partitio numerorum irodalma». Math. és Phys. Lapok. XI. k. 268. lap.

mert ez által csak zérus értékű tagokat csatolunk az összeghez. Végre olyan negativ T argumentumokra, melyek a

$$T \leqq -S$$

határolásba esnek, a $\varphi^m(T)$-féle függvények értéke általában zérustól különbözik. Ezért a $P(A, B)$ formulájánál a

$$\varphi^{(m)}(-)$$

függvényt olyan A, B értékekre egyáltalában *nem szabad* alkalmazni, melyekre nézve:

$$b_m A - a_m B - \sum_i \sum_\varrho \frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi}(t^{(i\varrho)} - \nu_{i\varrho}) -$$

$$- \sum_j \sum_\tau \frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm}(\eta_{j\tau} t^{(j\tau)} + \nu_{j\tau}) \leqq$$

$$\leqq - \Big(\sum_\varepsilon b_m \alpha_\varepsilon + \sum_i \sum_\varrho \frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi} t^{(i\varrho)} (\eta_{i\varrho} + 1) +$$

$$+ \sum_j \sum_\tau \frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm} t^{(j\tau)} (\eta_{j\tau} + 1) \Big).$$

E feltételeket így is fogalmazhatjuk. A $P(AB)$ formulájánál a

$$\varphi^{(m)}(-)$$

függvényt *kell* alkalmazni, ha

$$\sum_i \sum_\varrho \frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi}(t^{(i\varrho)} - \nu_{i\varrho}) + \sum_j \sum_\tau \frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm}(\eta_{j\tau} t^{(j\tau)} + \nu_{j\tau}) \leqq b_m A - a_m B;$$

lehet alkalmazni, ha

$$- \Big(\sum b_m \alpha_\varepsilon + \sum_i \sum_\varrho \frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi}(\eta_{i\varrho} t^{(i\varrho)} + \nu_{i\varrho}) +$$

$$+ \sum_j \sum_\tau \frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm}(t^{(j\tau)} - \nu_{j\tau}) \Big) <$$

$$< b_m A - a_m B < \sum_i \sum_\varrho \frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi}(t^{(i\varrho)} - \nu_{i\varrho}) +$$

$$+ \sum_j \sum_\tau \frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm}(\eta_{j\tau} t^{(j\tau)} + \nu_{j\tau}),$$

és *nem szabad* alkalmazni, ha

$$b_m A - a_m B \leqq$$

$$\leqq -\left(\sum_{\varepsilon} b_m\alpha_\varepsilon + \sum_i\sum_\varrho \frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi}(\eta_{i\varrho}t^{(i\varrho)} - \nu_{i\varrho}) + \sum_j\sum_\tau \frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm}(t^{(j\tau)} - \nu_{j\tau})\right).$$

E megállapitások azt mutatják, hogy $P(A, B)$ formulájában a $\varphi^{(m)}$-féle függvényeket

$$(b_mA - a_mB)\text{-}$$

nek csak bizonyos pozitiv értékeire *kell* alkalmazni; néha még a

$$b_mA - a_mB = 0$$

értékre is kell, de ez csak $m=1$ esetben jöhet elő valamely tagnál, ha pl. $\eta_{j\tau}=0$ és $\nu_{j\tau}=0$.

Ellenben

$$(b_mA - a_mB)\text{-}$$

nek csak bizonyos *biztosan negativ* értékeire nézve *nem szabad* a $\varphi^{(m)}$-féle függvényeket alkalmazni; de $m=v$ esetben előfordulhat olyan tag is, melynél a $\varphi^{(v)}$ függvényt

$$b_mA - a_mB = 0$$

esetben sem szabad alkalmazni; ha pl.

$$\alpha_\varepsilon = 0$$
$$(\varepsilon = 1, 2, \ldots, k)$$

$$\eta_{i\varrho} = 0; \quad \nu_{i\varrho} = 0.$$

Ezek szerint legegyszerűbb és legáttekinthetőbb beosztás lesz és helyes eredményt is szolgáltat, ha következőleg járunk el:

A $\varphi^{(1)}$-féle függvényeket nem alkalmazzuk, ha $b_1A - a_1B < 0$, alkalmazzuk, ha $b_1A - a_1B \geqq 0$.

A $\varphi^{(m)}$-féle függvényeket, hol $1 < m < v$, nem alkalmazzuk, ha $b_mA - a_mB \leqq 0$, alkalmazzuk, ha $b_mA - a_mB \geqq 0$.

A $\varphi^{(v)}$-féle függvényeket nem alkalmazzuk, ha $b_mA - a_mB \leqq 0$, alkalmazzuk, ha $b_mA - a_mB > 0$.

Tekintve, hogy a feltevések szerint

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \cdots < \frac{a_m}{b_m},$$

a fenti határmegállapitások igy is kifejezhetők:

Ha

$$A < \frac{a_1}{b_1} B,$$

akkor a $\varphi^{(m)}$-féle függvények egyike sem alkalmazható; ugyanis $\varphi^{(1)}$ nem alkalmazható, annál kevésbbé $\varphi^{(2)}$, stb. Ekkor tehát a kettős particziók száma zérus.

Ha

$$\frac{a_1}{b_1} B \leqq A \leqq \frac{a_2}{b_2} B,$$

akkor csak a $\varphi^{(1)}$-féle függvények alkalmaztatnak.

Ha

$$\frac{a_2}{b_2} B \leqq A \leqq \frac{a_3}{b_3} B,$$

akkor a $\varphi^{(1)}$ és $\varphi^{(2)}$-féle függvények alkalmaztatnak.

Így tovább.

Ha

$$\frac{a_{v-1}}{b_{v-1}} B \leqq A < \frac{a_v}{b_v} B,$$

akkor a $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(v-1)}$-féle függvények alkalmaztatnak.

Ha

$$\frac{a_v}{b_v} B < A,$$

akkor a $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(v)}$-féle függvények alkalmaztatnak.

Ezek az egyszerű határmegállapítások most már lehetővé teszik, hogy $P(A, B)$ számára teljesen szabatos végleges formulákat állítsunk. Ha ugyanis általában

$$\frac{a_r}{b_r} B \leqq A < \frac{a_{r+1}}{b_{r+1}} B, \qquad (r=1, 2, \ldots, v-1)$$

akkor a kettős particziók számát a következő függvény fejezi

$$\Phi_r(A, B) = \sum_{m=1}^{r} \sum_{h=0}^{s_m-1} B^{s_m-1-h} \sum H''.$$

$$\cdot\, \varphi^{(m)}\left(\frac{b_m A - a_m B - \sum\limits_i \sum\limits_\varrho \frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi}\,(t^{(i\varrho)} - \nu_{i\varrho}) - \sum\limits_j \sum\limits_\tau \frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm}\,(\eta_{j\tau} t^{(j\tau)} + \nu_{j\tau})}{\delta_m}\right). \qquad (2)$$

Ha pedig

$$\frac{a_v}{b_v} B < A,$$

akkor a kettős particziók $P(A, B)$ száma kifejezésére a $\Phi_v(A, B)$ függvény szolgál, melynél az m-re vonatkozó összegezés 1-től v-ig terjed. Mindegyik esetben szükséges, hogy

$$b_m A - a_m B - \sum_i \sum_\varrho \frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi}(t^{(i\varrho)} - \nu_{i\varrho}) + \sum_j \sum_\tau \frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm}(\eta_{j\tau} t^{(j\tau)} + \nu_{j\tau}) \equiv$$
$$\equiv 0 \pmod{\delta_m}$$

legyen.

Az

$$A < \frac{a_1}{b_1} B$$

esetekben pedig nincs kettős particzió.

Megállapitottuk, hogy a kettős particziók számát v *függvényből álló függvénysorozattal* minden lehetséges esetben ki lehet fejezni. Nem nehéz most már megállapitani e függvények charakterisztikus alakját.

Az egyszerű particziók elmélete szerint $\varphi^{(m)}(T)$ a T-nek olyan

$$(k + \sum \eta_{i\varrho} + \sum \eta_{j\tau} + \sum s_i + \sum s_j - 1)$$

fokú egész kifejezése, hogy az együtthatók T-re nézve periodikusok. Tekintve, hogy

$$\sum \eta_{i\varrho} + \sum \eta_{j\tau} \leqq \sum h_{i\varrho} + \sum h_{j\tau} \leqq h$$

és

$$\sum s_i + \sum s_j = s - s_m,$$

a $\varphi^{(m)}(T)$-féle függvényekben T-nek előfordulható és előforduló legmagasabb hatványa:

$$(k + h + s - s_m - 1).$$

A $\Phi_r(A, B)$-féle függvényekben a $\varphi^{(m)}(-)$-féle függvények csoportja együttesen A és B-re nézve olyan

$$(k + h + s - s_m - 1)$$

fokú egész kifejezés, hol az együtthatók úgy A, mint B-re nézve periodikusok.

Az egész $\Phi_r(A, B)$ függvény olyan kifejezések lineáris összetétele, melyek ilyenféle $\varphi^{(m)}$ függvények szorzatai (B^{sm-1-h})-val és még B-re nézve periodikus részekkel; tehát a melyek A és B-re nézve együttesen

$$(k+s-2)$$

fokú egész kifejezések szorozva kettősen periodikus együtthatókkal.

Ennélfogva $\Phi_r(A, B)$ a következő jellegzetes alakban írható fel:

$$\Phi_r(A, B) = \sum_{\substack{\alpha, \beta = 0 \\ (\alpha+\beta = s+k-2)}}^{s+k-2} c^{(r)}_{\alpha, \beta}(A, B)\, A^\alpha B^\beta, \tag{3}$$

hol $c^{(r)}_{\alpha, \beta}(A, B)$ kettősen periodikus számelméleti függvény; $s+k$ a kettős particziók száma meghatározására szolgálható alkotó függvény nevezőjében előforduló tényezők száma; $r = 1, 2, \ldots, v$ lehet.

Ezek után a részletesebb elemzés feladata a

$$c_{\alpha\beta}(A, B)\text{-}$$

féle periodikus függvények independens kifejezésének valóságos előállítása. Tekintve, hogy már az egyszerű particzióknál szereplő

$$c_k(A)\text{-}$$

féle egyszerűen periodikus függvények általános kifejezése is meglehetősen complicált, a kettősen periodikus $c_{\alpha\beta}(A, B)$-féle függvények indepedens formulája az általános esetben bizonyára nagyon complicált kifejezés. Teljes kiszámitásával a legáltalánosabb esetre nézve itt nem is foglalkozunk. Megelégszünk azzal, hogy a kettős particziók számának ilyen alakú függvényekkel való kifejezhetőségét kimutattuk. Részletesebben csak speczialis esetekkel fogunk foglalkozni, melyek a kitűzött programm szerint úgy lesznek választva, hogy más irányú, ú. m. invariánselméleti vizsgálatoknál is alkalmazást találjanak.

VII. Specziális esetek.

A kettős particziók számának meghatározására szolgáló függvényeknél részint a határolásokat illetőleg, részint a formulák szerkezetében állhatnak elő bizonyos feltételek mellett egyszerűsbödések. Mielőtt ezekre térnénk, előbb egy olyan tételt kell felemlítenünk, mely a legáltalánosabb esetben is érvényes, az első tárgyalandó speciális esetnél pedig nagyon csinos eredményekre vezet. E tétel következő.

Ha $$\Phi(B;\, x) = \text{coeffs}.\, y^B\, in \frac{1}{\prod\limits_i \prod\limits_\varrho (1-x^{a_{i\varrho}} y^{b_{i\varrho}})},$$

hol a $b_{i\varrho}$ számok mind zérustól különbözők, akkor $\Phi(B;\, x)$ az x nek egész kifejezése.

Ugyanis kimutatható, hogy

$$\text{coeffs}\, y^B\, in \frac{1}{\prod\limits_i \prod\limits_\varrho (1-x^{a_{i\varrho}} y^{b_{i\varrho}})} =$$

$$= \text{coeffs}\, y^B\, in \frac{\prod\limits_i \prod\limits_\varrho (1-x^{a_{i\varrho}(B+1)} y^{b_{i\varrho}(B+1)})}{\prod\limits_i \prod\limits_\varrho (1-x^{a_{i\varrho}} y^{b_{i\varrho}})}.$$

Ámde az utóbbi szorzat, mely így is írható:

$$\prod_i \prod_\varrho \left(\frac{1-(x^{a_{i\varrho}} y^{b_{i\varrho}})^{B+1}}{1-(x^{a_{i\varrho}} y^{b_{i\varrho}})} \right),$$

x és y-ban egész kifejezés, tehát benne y^B együtthatója is, mely $\Phi(B;\, x)$-el azonos, szintén egész kifejezése x-nek.

Az alapul szolgált segédtételt ekkép lehet igazolni. Ha a $b_{i\varrho}$ számok mind zérustól különböznek, akkor mindenesetre

$$\prod_i \prod_\varrho (1-x^{a_{i\varrho}(B+1)} y^{b_{i\varrho}(B+1)}) =$$

$$= 1 + H_1(x)\, y^{\alpha_1 B+\beta_1} + H_2(x)\, y^{\alpha_2 B+\beta_2} + \dots$$

alakú, hol az $\alpha_1, \alpha_2, \dots;\ \beta_1, \beta_2$ egész számok mind zérustól különböznek. E szerint

$$\text{coeffs}\,.\,y^B\ in\ \frac{\prod\limits_i \prod\limits_\varrho (1-x^{a_{i\varrho}(B+1)}y^{b_{i\varrho}(B+1)})}{\prod\limits_i \prod\limits_\varrho (1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}})} =$$

$$= \text{coeffs}\,.\,y^B\ in\ \frac{1}{\prod\limits_i \prod\limits_\varrho (1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}})} +$$

$$+ H_1(x)\,\text{coeffs}\,.\,y^{-((\alpha_1-1)B+\beta_1)}\ in\ \frac{1}{\prod\limits_i \prod\limits_\varrho (1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}})} +$$

$$+ H_2(x)\,\text{coeffs}\,.\,y^{-((\alpha_2-1)B+\beta_2)}\ in\ \frac{1}{\prod\limits_i \prod\limits_\varrho (1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}})} +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Itt a másodiktól kezdve minden tag elenyészik, mert a kifejtésben negativ hatvány nem jöhet elő, tehát valóban

$$\text{coeffs}\,.\,y^B\ in\ \frac{\prod\limits_i \prod\limits_\varrho (1-x^{a_{i\varrho}(B+1)}y^{b_{i\varrho}(B+1)})}{\prod\limits_i \prod\limits_\varrho (1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}})} = \text{coeffs}\ y^B$$

$$in\ \frac{1}{\prod\limits_i \prod\limits_\varrho (1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}})}\,.$$

Ha most $\Phi(B;x)$ az x-nek egész kifejezése, akkor

$$[\Phi(B;x)]_{x=\xi^b}$$

a ξ-nek szintén egész kifejezése lenne.

Ha b úgy választatik, hogy a $b_{i\varrho}$ számoknak valamely, pl. legkisebb közös többszörösét jelenti, úgy az utóbbi kifejezésben ξ-re nézve megszünik az a *látszólagos irracziomalitás* is, mely $\Phi(B;x)$ kifejezésében x-re nézve mutatkozik. Ha a látszólagos irraczionalitás eltüntetésére az V. fejezetben vázolt eljárás helyett ezt a módot gondolnók alkalmazva, úgy lenne

$$P(A,B) = \text{coeffs}\ \xi^{bA}\ in\ \frac{[\Phi(B;x)]_{x=\xi^b}}{\prod\limits_\varepsilon (1-\xi^{b\alpha_\varepsilon})}\,.$$

Állapítsuk meg most

$$[\Phi(B;x)]_{x=\xi^b}$$

fokát ξ-ben, vagy a fokszám valamely felső határát. A megállapítás a következő tételen alapszik.

Ha tudjuk, hogy a

$$\sum_i \frac{f_i(\xi)}{g_i(\xi)}$$

összeg, melynél $f_i(\xi)$ foka α_i, $g_i(\xi)$ foka β_i, és $\sum_{\beta_i} = \beta$, az összevonásban egész kifejezésre vezet, akkor annak foka már előre megállapítható, nevezetesen egyenlő

$$(\alpha_m - \beta_m)\text{-}$$

el, mely nem egyéb, mint az

$$\underset{(i=1,2,3,\ldots)}{(\alpha_i - \beta_i)}$$

különbségek legnagyobbika. Mert midőn a törteket egyenlő nevezőre hozzuk és összeadjuk, előáll:

$$\frac{\sum\limits_i f_i(\xi) \prod\limits_m^{(i)} g_m(\xi)}{\prod\limits_m g_m(\xi)}.$$

A számláló foka itt legfellebb az $(\alpha_i + \beta - \beta_i)$ számok legnagyobbika, a nevezőé β; így az osztás után, mely a feltevés szerint maradék nélkül végezhető, a hányados foka legfellebb

$$(\alpha_m - \beta_m),$$

mely az

$$\underset{(i=1,2,3,\ldots)}{(\alpha_i - \beta_i);}$$

számok legnagyobbika.

Alkalmazzuk most e tételt $[\Phi(B;x)]_{x=\xi^b}$ fokának, vagy e fokszám felső határának kiszámítására.

$$\Phi(B;x) = \sum_{m=1}^{v} x^{\frac{a_m}{b_m}B} \sum_{h=0}^{s_m-1-h} B^{s_m-1-h} c_{m,\, s_m-1-h}(B;x).$$

Ebből

$$[\Phi(B;x)]_{x=\xi^b} = \sum_{m=1}^{v} \xi^{\frac{ba_m}{b_m}B} \sum_{h=0}^{s_m-1-h} B^{s_m-1-h} [c_{m,\, s_m-1-h}(B;x)]_{x=\xi^b}.$$

Vegyük tekintetbe $c_{m,\, s_m-1-h}(B\,;\,x)$-nek V. (6) alatti kifejezését, akkor lesz:

$$[\Phi(B\,;\,x)]_{x=\xi^b} = \sum_{m=1}^{v} \xi^{\frac{ba_m}{b_m}B} \sum_{h=0}^{s_m-1-h} B^{s_m-1-h} \sum H'.$$

$$\cdot \left\{ \frac{\xi^{\sum_i^{(m)} \sum_\varrho \frac{bb_{i\varrho}}{b_i b_m}(a_i b_m - a_m b_i)(\eta_{i\varrho} t^{(i\varrho)} + \nu_{i\varrho})}}{\prod_i^{(m)} \prod_\varrho \left(1 - \xi^{\frac{bb_{i\varrho}}{b_i b_m}(a_i b_m - a_m b_i)\, t^{(i\varrho)}}\right)^{\eta_{i\varrho}+1}} \right\}.$$

Vagy bevezetve az

$$a_i b_m - a_m b_i = d_{im}$$

jelzést, melyre nézve

$$d_{im} \lesseqgtr 0, \qquad \text{a mint} \qquad i \lesseqgtr m,$$

$$[\Phi(B\,;\,x)]_{\xi^b} = \sum_{m=1}^{v} \xi^{\frac{ba_m}{b_m}B} \sum_{h=0}^{s_m-1} B^{s_m-1-h} \sum H'.$$

$$\cdot \left\{ \frac{\xi^{\sum_{i=1}^{m-1} \sum_\varrho \frac{bb_{i\varrho}}{b_i b_m} d_{mi}(t^{(i\varrho)} - \nu_{i\varrho}) + \sum_{j=m+1}^{v} \sum_\tau \frac{bb_{j\tau}}{b_j b_m} d_{jm}(\eta_{j\tau} t^{(j\tau)} + \nu_{j\tau})}}{\prod_{i=1}^{m-1} \prod_\varrho \left(1 - \xi^{\frac{bb_{i\varrho}}{b_i b_m} d_{mi} t^{(i\varrho)}}\right)^{\eta_{i\varrho}+1} \prod_{j=m+1}^{v} \prod_\tau \left(1 - \xi^{\frac{bb_{j\tau}}{b_j b_m} d_{jm} t^{(j\tau)}}\right)^{\eta_{j\tau}+1}} \right\}.$$

Látható, hogy ez szintén törtalakú kifejezések összege. Jelölje az általános tagnál a számláló fokát α, a nevezőét β, akkor

$$\alpha = \frac{ba_m}{b_m} B + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_\varrho \frac{bb_{i\varrho}}{b_i b_m} d_{mi}(t^{(i\varrho)} - \nu_{i\varrho}) +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{v} \sum_\tau \frac{bb_{j\tau}}{b_j b_m} d_{jm}(\eta_{j\tau} t^{(j\tau)} + \nu_{j\tau}),$$

$$\beta = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_\varrho \frac{bb_{i\varrho}}{b_i b_m} d_{mi}\, t^{(i\varrho)}(\eta_{i\varrho} + 1) +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{v} \sum_\tau \frac{bb_{j\tau}}{b_j b_m} d_{j\tau} t^{(j\tau)}(\eta_{j\tau} + 1),$$

$$\alpha-\beta=\frac{ba_m}{b_m}B-\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{\varrho}\frac{bb_{i\varrho}}{b_ib_m}d_{mi}(\eta_{i\varrho}t^{(i\varrho)}+\nu_{i\varrho})$$
$$-\sum_{j=m+1}^{v}\sum_{\tau}\frac{bb_{j\tau}}{b_jb_m}d_{jm}(t^{(j\tau)}-\nu_{j\tau}).$$

Mivel itt

$$t^{(j\tau)}-\nu_{j\tau}>0,$$

tehát

$$\alpha-\beta\leqq\frac{ba_m}{b_m}B.$$

Mivel másrészt

$$\frac{a_m}{b_m}<\frac{a_v}{b_v},$$

innen

$$\alpha-\beta\leqq\frac{ba_v}{b_v}B.$$

Ezzel az $\alpha-\beta$ különbségek legnagyobbika, és annál inkább a

$$[\Phi(B;x)]_{x=\xi^b}$$

egész kifejezés foka ξ-ben mindenesetre

$$\leqq\frac{ba_v}{b_v}B.$$

A keresett fokszám ξ-ben tehát legfellebb

$$\frac{ba_v}{b_v}B.$$

Térjünk át most már az *első speciális esetre.* Tegyük fel, hogy

$$\alpha_\varepsilon=0,$$
$$(\varepsilon=1,2,3,\ldots)$$

azaz az alkotó függvényből hiányzik az

$$\frac{1}{\prod\limits_{\varepsilon}(1-x^{a_\varepsilon})}$$

tényező. Ekkor a kettős particziók száma

$$P(A, B) = \text{coeffs} . x^A y^B in \left\{ \frac{1}{\prod_i \prod_\varrho (1-x^{a_{i\varrho}} y^{b_{i\varrho}})} \right\}.$$

Ez így is írható

$$P(AB) = \text{coeffs} . x^A in \, \Phi(B; x);$$

vagy ha az $x = \xi^b$ átalakítást gondoljuk alkalmazva

$$P(A, B) = \text{coeffs} . \xi^{bA} in \left[\Phi(B; x)\right]_{x=\xi^b}.$$

Ámde épen kimutattuk, hogy

$$\left[\Phi(B; x)\right]_{x=\xi^b}$$

olyan egész kifejezés, melynek foka legfellebb $\frac{ba_v}{b_v} B$, tehát ebben a speciális esetben a

$$bA > \frac{ba_v}{b_v} B,$$

azaz

$$A > \frac{a_v}{b_v} B$$

esetekben nincs kettős particzió.

Másrészt az általános formulák szerint a kettős particziók számát az

$$A > \frac{a_v}{b_v} B$$

esetekben következő függvény fejezi ki:

$$\Phi_v(A, B) = \sum_{m=1}^{v} \sum_{h=0}^{s_m - 1} B^{s_m-1-h} \sum H''.$$

$$. \varphi^{(m)} \left(\frac{b_m A - a_m B - \sum_i \sum_\varrho \frac{b_{i\varrho}}{b_i} d_{mi} (t^{(i\varrho)} - \nu_{i\varrho}) - \sum_j \sum_\tau \frac{b_{j\tau}}{b_j} d_{jm} (\eta_{j\tau} t^{(j\tau)} + \nu_{j\tau})}{\delta_m} \right).$$

A kétféle előállítás összehasonlítása a következő függvény-összefüggés ismeretére vezet:

A felvett speciális esetben, hacsak

$$A > \frac{a_v}{b_v} B,$$

$$\Phi_v(A, B) = \sum_{m=1}^{v} \sum_{h-0}^{s_m-1} B^{s_m-1-h} \sum H'' \varphi^{(m)}(-) = 0.$$

A függvény szerkezetéből következik, hogy ha a

$$\Phi_v(A, B) = 0$$

összefüggés az

$$A > \frac{a_v}{b_v} B$$

feltétel által meghatározott végtelen sok esetre érvényes, akkor az olyan *azonos összefüggés,* mely egyáltalában az A és B minden értékére helyes.

Ebben a speciális esetben tehát a kettős particziók száma csak úgy különbözhetik zérustól, ha

$$\frac{a_1}{b_1} B \leqq A \leqq \frac{a_v}{b_v} B,$$

és meghatározásához a $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{v-1}$ függvények sorozata teljesen elegendő.

A másik speciális eset, melynél a formulák szerkezetében áll elő jelentékeny egyszerűsbödés, a következő.

Legyen

$$s_1 = s_2 = \cdots = s_v = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy az összes

$$\frac{a}{b} \text{-}$$

féle törtek különbözők. Felesleges tehát az a és b betűknél kettős mutatókat használni, mert minden csoportba csak egy-egy betűpár tartozik. Ekkor az alkotó függvény:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{v}(1 - x^{a_i} y^{b_i}) \prod_{\varepsilon=1}^{\varkappa}(1 - x^{\alpha_\varepsilon})} = \sum_{A,\,B=0}^{\infty} P(A, B)\, x^A y^B.$$

Itt

$$\begin{aligned} s_m &= 1 \\ k &= 0 \\ h &= 0 \\ h_{i\varrho} &= h_{m\sigma} = 0 \\ d\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k &= b_m \end{aligned}$$

$$t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k} = 1$$
$$\nu_{m\sigma} = 0$$
$$\xi_{m\sigma} = 0$$
$$f_{m\sigma}(\nu_{m\sigma}) = 1$$
$$t^{(i\varrho)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k} = \frac{b_m}{\delta_{im}},$$

hol δ_{im} a b_i és b_m legnagyobb közös osztója.

Hasonlókép

$$t^{(j\tau)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k} = \frac{b_m}{\delta_{jm}}$$
$$\xi_{i\varrho} = 0$$
$$\eta_{i\varrho} = 0$$
$$\frac{b_{i\varrho}}{b_i} = \frac{b_{j\tau}}{b_j} = 1.$$

Ezek alapján a IV. (18) szerint az V. (6) kifejezésnél jelen esetben

$$H' = 1,$$

az V. (9)-nél

$$H'' = (-1)^{m-1}$$

és a VI. (1) általános formula ilyen alakot vesz fel:

$$P(A, B) = \sum_m \sum_{\ldots\nu_i\ldots\nu_j\ldots} (-1)^{m-1}$$
$$\varphi^{(m)}\left(\frac{b_m A - a_m B - \sum_{i=1}^{m-1} d_{mi}\left(\frac{b_m}{\delta_{im}} - \nu_i\right) - \sum_{j=m+1}^{v} d_{jm}\nu_j}{\delta_m}\right),$$

hol

$$\sum_{i=1}^{m-1} b_i\nu_i + \sum_{j=m+1}^{v} b_j\nu_j \equiv B \pmod{b_m},$$
$$\left(0 \leq \nu_i < \frac{b_m}{\delta_{im}}\right)$$
$$\left(0 \leq \nu_j < \frac{b_m}{\delta_{jm}}\right)$$

δ_m a

$$b_m\,\alpha_\varepsilon$$
$$(\varepsilon = 1, 2, \ldots, k)$$

$$d_{mi}^{\frac{b_m}{\delta_{im}}}$$
$$(i=1, 2, \ldots, m-1)$$

$$d_{jm}^{\frac{b_m}{\delta_{jm}}}$$
$$(j=m+1, m+2, \ldots, v)$$

számok legnagyobb közös osztója és $\varphi^m(M)$ az a függvény, mely ξ^M együtthatóját fejezi ki

$$\frac{1}{\prod_i \left(1-\xi^{\frac{b_m d_{mi}}{\delta_{im}\delta_m}}\right) \prod_j \left(1-\xi^{\frac{b_m d_{jm}}{\delta_{jm}\delta_m}}\right) \prod_\varepsilon \left(1-\xi^{\frac{b_m \alpha_\varepsilon}{\delta_m}}\right)}$$

kifejtésében.

Ennélfogva, ha

$$\frac{a_r}{b_r} B \leqq A \leqq \frac{a_{r+1}}{b_{r+1}} B,$$
$$(r=1, 2, \ldots, v-1)$$

a kettős particziók számát kifejező függvény lesz:

$$\Phi_r(A, B) = \sum_{m=1}^{r} \sum_{\ldots \nu_i \ldots \nu_j \ldots} (-1)^{m-1}$$
$$\varphi^{(m)}\left(\frac{b_m A - a_m B - \sum_i d_{mi}\left(\frac{b_m}{\delta_{im}} - \nu_i\right) - \sum_j d_{jm}\nu_j}{\delta_m}\right)$$

hol
$$\sum_i b_i\nu_i + \sum_j b_j\nu_j \equiv B \pmod{b_m}$$
$$\left(0 \leqq \nu_i < \frac{b_m}{\delta_{im}}\right)$$
$$\left(0 \leqq \nu_j < \frac{b_m}{\delta_{jm}}\right).$$

Az $r=v$ esetben ugyanez a formula olyan A és B értékeknél alkalmaztatik a kettős particziók száma kifejezésére, hol

$$A > \frac{a_v}{b_v} B.$$

Mind a két speczialis eset egyesítése áll elő harmadszor, ha

$$\alpha_\varepsilon = 0 \quad (\varepsilon = 1, 2, \ldots, \varkappa)$$

és azonkívül

$$s_1 = s_2 = \cdots = s_v = 1.$$

Ekkor a kettős particziók számát, vagyis $x^A y^B$ coefficiensét

$$\frac{1}{\prod_i (1 - x^{a_i} y^{b_i})}$$

kifejtésében,* ha

$$\frac{a_r}{b_r} B \leqq A \leqq \frac{a_{r+1}}{b_{r+1}} B,$$

$$\Phi_r(A, B) = \sum_{m=1}^{r} \sum_{\ldots \nu_i \ldots \nu_j \ldots} (-1)^{m-1}$$

$$\varphi^m \left(\frac{b_m A - a_m B - \sum_i d_{mi} \left(\frac{b_m}{\delta_{im}} - \nu_i \right) - \sum_j d_{jm} \nu_j}{\delta_m} \right),$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} b_i \nu_i + \sum_{j=m+1}^{v} b_j \nu_j \equiv B \pmod{b_m},$$

$$\left(0 \leqq \nu_i < \frac{b_m}{\delta_{im}} \right)$$

$$\left(0 \leqq \nu_j < \frac{b_m}{\delta_{jm}} \right)$$

hol $\varphi^m(M)$ az a függvény, mely ξ^M együtthatóját fejezi ki

$$\frac{1}{\prod_i \left(1 - \xi^{\frac{b_m d_{mi}}{\delta_{im} \delta_m}} \right) \prod_j \left(1 - \xi^{\frac{b_m d_{jm}}{\delta_{jm} \delta_m}} \right)}$$

kifejtésében; itt δ_m jelenti a

$$\frac{b_m}{\delta_{im}} d_{mi} \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1)$$

a következő függvény fejezi ki:

* Még ez a speciális eset is általánosabb annál, melyet CAYLEY tárgyalt: «On a Problem of double Partitions». Phil. Mag. XX.

$$\frac{b_m}{\delta_{jm}} d_{jm}$$
$$(j = m+1,\ m+2, \ldots, v)$$

számok legnagyobb közös osztóját; r csak $1, 2, \ldots, v-1$ lehet, mert csak

$$\frac{a_1}{b_1} B \leqq A \leqq \frac{a_v}{b_v} B$$

esetekben van kettős particzió; továbbá az

$$A > \frac{a_v}{b_v} B$$

esetekben a következő függvényösszefüggés áll fenn:

$$\Phi_v(A, B) = 0,$$

hel $\Phi_v(A, B)$ a $\Phi_r(A, B)$ számára előbb felírt kifejezésből így áll elő:

$$\Phi_v(A, B) = [\Phi_r(A, B)]_{r=v}.$$

A második és harmadik speciális esetben a formulák, a mint ez eredmények mutatják, az általános alakzatokhoz képest jóval egyszerűbbek.

VIII. Euler példája.

A legutóbbi speciális esethez, tehát az

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{v} (1 - x^{a_i} y^{b_i})}$$

particzionális tipushoz, hol $b_1, b_2, \ldots, b_v$ zérustól különböző pozitiv egész számok, továbbá

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \cdots < \frac{a_v}{b_v},$$

tartozik az a példa, melyet már Euler vizsgált és invariánselméleti alkalmazásai miatt Cayley és Sylvester részletesen tárgyaltak. Meghatározandó $x^A y^B$ együtthatója

$$\frac{1}{(1-y)x- y-11)))x^2y)\ldots(1-x^ny)}$$

kifejtésében. Itt

$$\begin{aligned}
v &= n+1 \\
a_i &= i-1 \\
b_i &= 1 \\
\delta_{im} &= 1 \\
\nu_i &= \nu_j = 0 \\
d_{mi} &= m-i \\
\sum_{i=1}^{m-1} d_{mi} &= 1+2+\cdots+m-1 = \frac{m(m-1)}{2} \\
d_{jm} &= j-m
\end{aligned}$$

δ_m, mely jelenti az $1, 2, \ldots, m-1, 1, 2, \ldots, n-(m-1)$ számok legnagyobb közös osztóját, mindig 1.

A keresett kifejtési együttható értékét a

$$\underset{(h=1,2,\ldots,n)}{(h-1)B \leqq A \leqq hB}$$

esetekben a következő függvény fejezi ki:

$$\Phi_h(A, B) = \sum_{m=1}^{h}(-1)^{m-1}\varphi^{(m)}\left(A-(m-1)B - \frac{m(m-1)}{2}\right),$$

hol $\varphi^{(m)}(M)$ az a függvény, mely z^M együtthatóját fejezi ki

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)\ldots(1-z^{m-1})(1-z)(1-z^2)\ldots 1-z^{n-(m-1)}}$$

kifejtésében.

Az
$$A > nB$$

esetekben nincs kettős particzió, hanem ekkor a következő függvényösszefüggés áll fenn:

$$\Phi_{n+1}(A, B) = \sum_{m=1}^{n+1}(-1)^{m-1}\varphi^{(m)}\left(A-(m-1)B - \frac{m(m-1)}{2}\right) = 0.$$

Hogy a kifejezések alakja egyszerűbb legyen, és hogy már a jelzés a feladatot lehetőleg teljesen jellemezze, vezessünk be $(m-1)$ helyett r betűt, használjunk helyett

$$\Phi_h(A, B)$$

$$\Phi_{n,h}(A, B)$$

jelzést; továbbá $\varphi_{n,r}(M)$ jelentse azt a függvényt, mely z^M együtthatóját fejezi ki

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)\dots(1-z^r)(1-z)(1-z^2)\dots(1-z^{n-r})}$$

kifejtésében. Ebben a jelzésben aztán, ha

$$(h-1)B \leqq A \leqq hB, \quad (h=1, 2, \dots, n)$$

$x^A y^B$ együtthatóját

$$\frac{1}{(1-y)(1-xy)\dots(1-x^n y)}$$

kifejtésében a következő függvény fejezi ki:

$$\Phi_{n,h}(A, B) = \sum_{r=0}^{h-1}(-1)^r \varphi_{nr}\left(A - rB - \frac{r(r+1)}{2}\right);$$

továbbá

$$A > nB$$

esetében nincs kettős particzió, hanem

$$\Phi_{n,n+1}(A, B) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \varphi_{nr}\left(A - rB - \frac{r(r+1)}{2}\right) = 0.$$

Ugyanilyen eredményekre juthatni azon kifejtések során, melyekre e feladat önálló tárgyalása vezet. EULER * szerint

$$\text{coeffs}\ x^\mu y^\varrho\ in\ \frac{1}{(1-y)(1-xy)\dots(1-x^n y)},$$

ha azt $P_n(\mu, \varrho)$-val jelöljük, következőkép állítható elő:

$$P_n(\mu, \varrho) = \text{coeffs}\ x^\mu\ in\ \frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\dots(1-x^{n+\varrho})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^\varrho)}.$$

* V. ö. CSORBA GYÖRGY: «A partitio numerorum irodalma». Math. és Phys. Lapok VIII. 358. lap.

Mivel

$$\frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\ldots(1-x^{n+\varrho})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^\varrho)}=$$

$$=\frac{(1-x^{\varrho+1})(1-x^{\varrho+2})\ldots(1-x^{\varrho+n})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)},$$

tehát az előbbi kifejezés így is írható

$$P_n(\mu,\varrho)=\text{coeffs}\, x^\mu\, in\, \frac{(1-x^{\varrho+1})(1-x^{\varrho+2})\ldots(1-x^{\varrho+n})}{(1-x^1)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}.$$

Itt megint CAYLEY kifejtései szerint: *

$$\frac{(1-x^{\varrho+1})\ldots(1-x^{\varrho+n})}{(1-x)\ldots(1-x^n)}=$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r x^{r\varrho+\frac{r(r+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)(1-x)\ldots(1-x^{n-r})},$$

tehát

$$P_n(\mu,\varrho)=$$

$$=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\, \text{coeffs}\, x^{\mu-r\varrho}\, in\, \frac{x^{\frac{r(r+1)}{2}}}{(1-x)\ldots(1-x^r)(1-x)\ldots(1-x^{n-r})}.$$

Ha x^M együtthatóját

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^r)(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{n-r})}$$

kifejtésében a $\varphi_{nr}(M)$ függvény fejezi ki, akkor innen általánosságban:

$$P_n(\mu,\varrho)=\sum_r(-1)^r\varphi_{nr}\left(\mu-r\varrho-\frac{r(r+1)}{2}\right).$$

Nagyon gondosan kell azonban ügyelni e formulánál a $\varphi_{nr}(M)$ függvény alkalmazhatásának határaira. E határolások tekintetbe vétele, úgy, mint az általános elméletnél, rávezet, hogy a

$$(h-1)\varrho\leq\mu\leq h\varrho$$
$$(h=1,2,\ldots,n)$$

* V. ö. CSORBA GY.: «A part. num. irodalma». M. és P. L. VIII. 359. lap.

esetekben a kettős particziók számának kifejezésére a következő függvény szolgál:

$$\Phi_{nh}(\mu,\varrho)=\sum_{r=0}^{h-1}(-1)^r\varphi_{nr}\left(\mu-r\varrho-\frac{r(r+1)}{2}\right).$$

Ha pedig

$$\mu>n\varrho,$$

akkor nincs particzió, hanem a következő függvényösszefüggés ismeretére jutunk:

$$\Phi_{n,n+1}(\mu,\varrho)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\varphi_{nr}\left(\mu-r\varrho-\frac{r(r+1)}{2}\right)=0.$$

Most már elemezzük tovább a nyert eredményt.

Az egyszerű particziók elmélete szerint e példánál

$$\varphi_{nr}(M)$$

olyan $(n-1)$-fokú egész kifejezése M-nek, hol az együtthatók M-re nézve általában periodikus függvények. Innen következik, hogy

$$\Phi_{nh}(\mu,\varrho)$$

olyan $(n-1)$-fokú egész kifejezése μ és ϱ-nak, hol az együtthatók úgy μ-re, mint ϱ-ra periodikusok, tehát

$$\Phi_{nh}(\mu,\varrho)=\sum_{\alpha+\beta\leqq n-1}c^{(h)}_{\alpha\beta}(\mu,\varrho)\mu^\alpha\varrho^\beta$$

alakú, hol

$$c^{(h)}_{\alpha\beta}(\mu,\varrho)$$

általában kettősen periodikus függvény, néha állandó.

Ki fogjuk számítani e függvényeknek legalább azon csoportjait, melyek a μ és ϱ-ra nézve legmagasabb fokú tagokhoz tartoznak, tehát

$$\alpha+\beta=n-1,\ n-2,\ n-3$$

esetekben.

Az egyszerű particziók elmélete értelmében

$$\varphi_{nr}(M)=c_{r,0}(M)+c_{r,1}(M)M^1+\cdots+c_{r,n-1}(M)M^{n-1}$$

alakú. Itt az «Adalék az egész számok additiv előállításának elméletéhez» czímű dolgozat V. fej. (1) képlete szerint

$$c_{r,n-1}(M)=\frac{1}{(n-1)!\,r!\,(n-1)!}=\left(\frac{1}{n!}\right)^2\binom{n}{1}\binom{n}{r}.$$

Ugyancsak, mivel $n \geqq 3$ esetén az

$$1, 2, \ldots, r, 1, 2, \ldots, (n-r)$$

elemek minden $(n-1)$-es combinatio csoportjának legnagyobb közös osztója 1, az «Adalék . . .» V. (2) szerint, hol ekkor

$$d_i=1, \quad \xi_i=0, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

lesz

$$c_{r,n-2}(M)=$$

$$=\frac{1}{2!\,(n-2)!\,r!\,(n-r)!}\left\{\frac{r(r+1)}{1}+\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}\right\}=$$

$$=\left(\frac{1}{n!}\right)^2\binom{n}{2}\binom{n}{n}\left\{\frac{r(r+1)}{2}+\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}\right\}.$$

$$(n \geqq 3)$$

Továbbá $n \geqq 5$ esetén az

$$1, 2, \ldots, r, 1, 2, \ldots, (n-r)$$

elemek minden $(n-2)$-es combinatio csoportjának legnagyobb közös osztója 1, így az «Adalék . . .» V. (4) szerint, hol ekkor

$$d_i=d_{ik}=1, \quad \xi_i=\xi_{ik}=0 \quad (i, k=1, 2, \ldots, n)$$

$$c_{r,n-3}(M)=$$

$$=\frac{1}{(n-3)!\,r!\,(n-r)!}\Big\{\tfrac{1}{12}\left[1^2+2^2+\cdots+r^2+1^2+2^2+\cdots+(n-r)^2\right]+$$

$$+\tfrac{1}{8}\Big[\left(1+2+\cdots+r+1+2+\cdots+(n-r)\right)^2-$$

$$-\left(1^2+2^2+\cdots+r^2+1^2+2^2+\cdots+(n-r)^2\right)\Big]\Big\}.$$

Összevonva

$$c_{r,n-3}(M)=$$

$$=\left(\frac{1}{n!}\right)^2\binom{n}{3}\binom{n}{r}\Big\{\tfrac{3}{4}\left(1+2+\cdots+r+1+2+\cdots+(n-r)\right)^2-$$

$$-\tfrac{1}{4}\left(1^2+2^2+\cdots+r^2+1^2+2^2+\cdots+(n-r)^2\right)\Big\}.$$

Mivel általában

$$1+2+\cdots+m = \frac{m(m+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+\cdots+m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

tehát

$$c_{r,n-3}(M) =$$

$$= \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \binom{n}{3}\binom{n}{r}\left\{\frac{3}{4}\left[\frac{r(r+1)}{2}+\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}\right]^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\left[\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}+\frac{(n-r)(n-r+1)(2n-2r+1)}{6}\right]\right\}.$$

$$(n \overline{\gtrless} 5)$$

Így ha $n \overline{\gtrless} 5$, $\varphi_{nr}(M)$ kifejezésében az M három legmagasabb hatványának együtthatója állandó.

Ezek elegendők $\Phi_{nh}(\mu, \varrho)$ kifejezésében a kijelölt legmagasabb fokú tagok együtthatói kiszámítására. Ugyanis

$$\Phi_{nh}(\mu, \varrho) = \sum_{r=0}^{h-1}(-1)^r \left\{c_{r,n-1}\left[\mu - r\varrho - \frac{r(r+1)}{2}\right]^{n-1} + \right.$$

$$\left. + c_{r,n-2}\left[\mu - r\varrho - \frac{r(r+1)}{2}\right]^{n-2} + \cdots\right\}$$

$$= \sum_{r=0}^{h-1}(-1)^r \left\{[c_{r,n-1}](\mu - r\varrho)^{n-1} + \right.$$

$$+ \left[c_{r,n-2} - (n-1)\frac{r(r+1)}{2}c_{r,n-1}\right](\mu - r\varrho)^{n-2} +$$

$$+ \left[c_{r,n-3} - (n-2)\frac{r(r+1)}{2}c_{r,n-2} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{r^2(r+1)^2}{4}c_{r,n-1}\right](\mu - r\varrho)^{n-3} + \cdots\right\}.$$

A helyettesitések elvégzésével

$$\Phi_{nh}(\mu, \varrho) = \sum_{r=0}^{h-1}(-1)^r \left\{\left(\frac{1}{n!}\right)^2 \binom{n}{1}\binom{n}{r}(\mu - r\varrho)^{n-1} + \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \binom{n}{2}\binom{n}{r}\left[(n+1)\left(\frac{n}{2} - r\right)\right](\mu - r\varrho)^{n-2} +$$

$$+ \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \binom{n}{3}\binom{n}{r}\left[\frac{n+1}{4}\left\{(3n+2)\left(\frac{n}{2} - r\right)^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{n(n+2)}{12}\right\}\right](\mu - r\varrho)^{n-3} + \cdots\right\},$$

hol

$$n \geqq 5,$$

de az első két tag $n=3$ és $n=4$ esetekben is érvényes.

E kifejezés magában foglalja mindazon

$$c_{\alpha\beta}^{(h)}(\mu, \varrho)$$

függvények értékeit, melyeknél

$$\alpha+\beta = n-1,\ n-2,\ n-3.$$

Ezek még nem periodikusok, hanem μ es ϱ-tól független állandók. Például

$$\underset{(\alpha+\beta=n-1)}{c_{\alpha,\beta}^{(h)}(\mu, \varrho)} = \sum_{r=0}^{h-1}(-1)^r\left(\frac{1}{n!}\right)^2\binom{n}{1}\binom{n}{r}\binom{n-1}{\alpha}(-1)^\beta r^\beta =$$

$$= (-1)^\beta\binom{n}{1}\left(\frac{1}{n!}\right)^2\binom{n-1}{\alpha}\sum_{r=0}^{h-1}(-1)^r\binom{n}{r}r^\beta.$$

Hasonlókép

$$\underset{(\alpha+\beta=n-2)}{c_{\alpha,\beta}^{(h)}(\mu, \varrho)} = \sum_{r=0}^{h-1}(-1)^r\left(\frac{1}{n!}\right)^2\binom{n}{2}\binom{n}{r}(n+1)\left(\frac{n}{2}-r\right)\binom{n-2}{\alpha}(-1)^\beta r^\beta =$$

$$= (-1)^\beta\left(\frac{1}{n!}\right)^2\binom{n}{2}\binom{n-2}{\alpha}(n+1)\sum_{r=0}^{h-1}(-1)^r\binom{n}{r}\left(\frac{n}{2}-r\right)r^\beta.$$

Így tovább.

Egyes egyszerűbb esetekben, pl. $n=2$, 3, a

$$\Phi_{nh}(\mu, \varrho)$$

féle függvények *teljes* kiszámítása is nagyobb nehézség nélkül elvégezhető. Ezek egyszersmind első példái lesznek a kettős particziók száma kifejezésére szolgáló függvények teljes kiszámításának.

Például $n=2$ esetben az «Adalék . . .» V. (3) alkalmazásával a

$$\text{coeffs } x^M \textit{ in } \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

együttható meghatározására szolgáló függvény:

$$\varphi_{2,0}(M) = \tfrac{1}{2}\big(2-\xi(M) + M\big),$$

hol

$$\xi(M) \equiv M (\text{mod } 2), \quad \big(\xi(M) < 2\big).$$

A

$$\text{coeffs } x^M \, in \frac{1}{(1-x)(1-x)}$$

együttható meghatározására szolgáló függvény

$$\varphi_{2,1}(M) = 1 + M.$$

Így a particziók $P_2(\mu, \varrho)$ számát, vagyis $x^\mu y^\varrho$ együtthatóját

$$\frac{1}{(1-y)(1-xy)(1-x^2y)}$$

kifejtésében kifejező függvény

$$0 \leqq \mu \leqq \varrho$$

esetben:

$$\Phi_{2,1}(\mu, \varrho) = \varphi_{2,0}(\mu) = \tfrac{1}{2}\big(2-\xi(\mu) + \mu\big),$$

hol

$$\xi(\mu) \equiv \mu (\text{mod } 2), \quad \big(\xi(\mu) < 2\big).$$

A

$$\varrho \leqq \mu \leqq 2\varrho$$

esetben pedig a particziók számát kifejezi

$$\Phi_{2,2}(\mu, \varrho) = \varphi_{2,0}(\mu) - \varphi_{2,1}(\mu - \varrho - 1) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\big(2 - \xi(\mu) + \mu\big) - (\mu - \varrho) = \tfrac{1}{2}\big(2 - \xi(\mu) + (2\varrho - \mu\big),$$

hol $\xi(\mu)$ jelentése, mint előbb. Más esetekben nincs particzió.

Ha $n=3$,

$$\text{a coeffs } x^M \, in \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

együttható meghatározására szolgáló $\varphi_{30}(M)$ függvény az «Adalék . . .» V. (7) alkalmazásával számíttatik ki. Itt

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad a = 6, \quad \sum a_i d_i = 6,$$
$$d_1 = 1, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = 1, \quad d = 1, \quad \sum a_i d_i^2 = 14,$$
$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0,$$

$$2\eta_1^{(2)}+3\eta_1^{(3)} \equiv M \pmod 1, \quad (\eta_1=0),$$
$$1\eta_2^{(1)}+3\eta_2^{(3)} \equiv M \pmod 2, \quad (\eta_2<2),$$
$$1\eta_3^{(1)}+2\eta_3^{(2)} \equiv M \pmod 3, \quad (\eta_3<3),$$
$$\sum \eta_1^{(2)}\eta_1^{(3)} = 0.$$

Ha

$$\eta_2^{(3)} = 0, \quad \text{akkor} \quad \eta_2^{(1)} \equiv M \pmod 2,$$

ha

$$\eta_2^{(3)} = 1, \quad \text{akkor} \quad \eta_2^{(1)} \equiv M-1 \pmod 2,$$

így

$$\sum \eta_2^{(1)}\eta_2^{(3)} = \eta_2(M-1),$$

hol

$$\eta_2(M-1) \equiv M-1 \pmod 2, \quad \bigl(\eta_2(M-1)<2\bigr).$$

Ha

$$\eta_3^{(2)} = 0, \quad \text{akkor} \quad \eta_3^{(1)} \equiv M \pmod 3,$$

ha

$$\eta_3^{(2)} = 1, \quad \text{akkor} \quad \eta_3^{(1)} \equiv M-1 \pmod 3,$$

ha

$$\eta_3^{(2)} = 2, \quad \text{akkor} \quad \eta_3^{(1)} \equiv M-2 \pmod 3,$$

így

$$\sum \eta_3^{(1)}\eta_3^{(2)} = \eta_3(M-2)+2\eta_3(M-1),$$

hol általában

$$\eta_3(R) \equiv R \pmod 3, \quad \bigl(\eta_3(R)<3\bigr).$$

Ezek szerint

$$\begin{aligned}\varphi_{3,0}(M) &= \tfrac{1}{144}\bigl[108-14-\{18-36\eta_2(M-1)\}-\\ &\quad -\{48-16[\eta_3(M-2)+2\eta_3(M-1)]\}\bigr]+\tfrac{6}{12}M+\tfrac{1}{12}M^2 =\\ &= \tfrac{1}{36}[7+9\eta_2(M-1)+4\eta_3(M-2)+8\eta_3(M-1)]+\\ &\quad +\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{12}M^2;\end{aligned}$$

hol általában

$$\eta_2(M) \equiv M \pmod 2, \quad \bigl(\eta_2(M)<2\bigr),$$
$$\eta_3(M) \equiv M \pmod 3, \quad \bigl(\eta_3(M)<3\bigr),$$

továbbá

$$\eta_2(M)+\eta_2(M-1) = 1,$$
$$\eta_3(M)+\eta_3(M-1)+\eta_3(M-2) = 2.$$

Hasonlókép a

$$\text{coeffs } x^M \text{ in } \frac{1}{(1-x)(1-x)(1-x^2)}$$

együttható kiszámítására szolgáló $\varphi_{3,1}(M)$ függvénynél:

$$a_1=1,\quad a_2=1,\quad a_3=2,\quad a=2,\quad \sum a_i d_i=4.$$
$$d_1=1,\quad d_2=1,\quad d_3=1,\quad d=1,\quad \sum a_i^2 d_i^2=6,$$
$$\xi_1=0,\quad \xi_2=0,\quad \xi_3=0,$$

és ha η helyett megkülönböztetésül itt ζ betűt használunk

$$\zeta_1^{(2)}=\zeta_1^{(3)}=0,$$
$$\zeta_2^{(1)}=\zeta_2^{(3)}=0,$$
$$\zeta_3^{(1)}+\zeta_3^{(2)}\equiv M(\text{mod}\, 2),\qquad (\zeta_3<2).$$

Ha

$$\zeta_3^{(2)}=0,\quad \text{akkor}\quad \zeta_3^{(1)}\equiv M(\text{mod}\, 2),$$

ha

$$\zeta_3^{(2)}=1,\quad \text{akkor}\quad \zeta_3^{(1)}\equiv M-1\,(\text{mod}\, 2),$$

így

$$\sum \zeta_3^{(1)}\zeta_3^{(2)}=\zeta_3(M-1),$$

hol

$$\zeta_3(M-1)\equiv (M-1)(\text{mod}\, 2),\quad \big(\zeta_3(M-1)<2\big).$$

E szerint

$$\varphi_{3,1}(M)=\tfrac{1}{48}\big[48-6-\{6-12\zeta_3(M-1)\}\big]+\tfrac{4}{4}M+\tfrac{1}{4}M^2.$$

vagy ha ζ_3 helyett, mint $\varphi_{3,0}(M)$-nél, η_2-t írunk,

$$\varphi_{3,1}(M)=\tfrac{1}{4}[3+\eta_2(M-1)]+M^1+\tfrac{1}{4}M^2,$$

hol

$$\eta_2(M-1)\equiv M-1\,(\text{mod}\, 2),\quad \big(\eta_2(M-1)<2\big).$$

$$\text{A coeffs } x^M \text{ in } \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x)}$$

együttható meghatározására szolgáló függvény

$$\varphi_{3,2}(M)=\varphi_{3,1}(M).$$

Ezek után a particziók számát, vagyis $x^\mu y^\varrho$ együtthatóját

$$\frac{1}{(1-y)(1-xy)(1-x^2y)(1-x^3y)}$$

kifejtésében

$$0\leq\mu\leq\varrho$$

esetben a

$$\Phi_{3,1}(\mu,\varrho)=\varphi_{3,0}(\mu)=$$
$$=\tfrac{1}{36}\big[7+9\eta_2(\mu-1)+4\eta_3(\mu-2)+8\eta_3(\mu-1)\big]+\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{12}\mu^2$$

függvény fejezi ki, hol általában

$$\eta_2(M) \equiv M (\text{mod } 2), \quad \eta_2(M) < 2.$$
$$\eta_3(M) \equiv M (\text{mod } 3), \quad \eta_3(M) < 3.$$

Másodszor a

$$\varrho \leqq \mu \leqq 2\varrho$$

esetben

$$\Phi_{3,2}(\mu, \varrho) = \varphi_{3,0}(\mu) - \varphi_{3,1}(\mu - \varrho - 1) =$$
$$= \tfrac{1}{36}\left[7 + 9\eta_2(\mu - 1) + 4\eta_3(\mu - 2) + 8\eta_3(\mu - 1)\right] + \tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{12}\mu^2 -$$
$$- \left[\tfrac{1}{4}\left(3 + \eta_2(\mu - \varrho - 2)\right) + (\mu - \varrho - 1) + \tfrac{1}{4}(\mu - \varrho - 1)^2\right] =$$
$$= \tfrac{1}{36}\left[7 + 9\eta_2(\mu - 1) + 4\eta_3(\mu - 2) + 8\eta_3(\mu - 1) - 9\eta_2(\mu - \varrho)\right] +$$
$$+ \frac{\varrho}{2} - \frac{1}{12}(2\mu^2 - 6\mu\varrho + 3\varrho^2),$$

hol $\eta_2(M)$, $\eta_3(M)$ mint fentebb.

Végre a particziók számát a

$$2\varrho \leqq \mu \leqq 3\varrho$$

esetekben kifejező függvény:

$$\Phi_{3,3}(\mu, \varrho) = \varphi_{3,0}(\mu) - \varphi_{3,1}(\mu - \varrho - 1) + \varphi_{\ 2}(\mu - 2\varrho - 3) =$$
$$= \tfrac{1}{36}\{7 + 9\eta_2(\mu - 1) + 4\eta_3(\mu - 2) + 8\eta_3(\mu - 1) - 9\eta_2(\mu - \varrho)\} + \tfrac{1}{2}\varrho -$$
$$- \tfrac{1}{12}(2\mu^2 - 6\mu\varrho + 3\varrho^2) + \tfrac{1}{4}\left[3 + \eta_2(\mu - 2\varrho - 4)\right] + (\mu - 2\varrho - 3) +$$
$$+ \tfrac{1}{4}(\mu - 2\varrho - 3)^2 = \tfrac{1}{36}\{16 + 4\eta_3(\mu - 2) + 8\eta_3(\mu - 1) - 9\eta_2(\mu - \varrho)\} +$$
$$+ \tfrac{1}{2}(3\varrho - \mu) + \tfrac{1}{12}(\mu^2 - 6\mu\varrho + 9\varrho^2),$$

hol $\eta_2(M)$, $\eta_3(M)$ mint fentebb.

Más esetekben, midőn t. t. $\mu > 3\varrho$, nincs particzió.

A

$$\Phi_{n,n+1}(\mu, \varrho) = 0$$

féle azonosságok létezését, melyeket az általános elméletben indirekt úton bizonyítottunk be, itt $n=2$, 3 esetekben a meglevő adatok alapján direkt is ki lehet mutatni. Ugyanis

$$\Phi_{n,n+1}(\mu, \varrho) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \varphi_{n,r}\left(\mu - r\varrho - \frac{r(r+1)}{2}\right) =$$
$$= \Phi_{n,n}(\mu, \varrho) + (-1)^n \varphi_{n,n}\left(\mu - n\varrho - \frac{n(n+1)}{2}\right).$$

Mivel pedig a definitiók értelmében

$$\varphi_{n,n}(M)=\varphi_{n,0}(M),$$

$$\Phi_{n,n+1}(\mu,\varrho)=\Phi_{n,n}(\mu,\varrho)+(-1)^n\varphi_{n,0}\left(\mu-n\varrho-\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

Ennek alkalmazásával $n=2$ esetben

$$\begin{aligned}\Phi_{2,3}(\mu,\varrho)&=\Phi_{2,2}(\mu,\varrho)+\varphi_{2,0}(\mu-2\varrho-3)=\\&=\tfrac{1}{2}\big(2-\xi(\mu)+2\varrho-\mu\big)+\tfrac{1}{2}\big(2-\xi(\mu-1)+\mu-2\varrho-3\big)=\\&=\tfrac{1}{2}\big(1-(\xi(\mu)+\xi(\mu))\big)=\tfrac{1}{2}(1-1)=0\end{aligned}$$

$n=3$ esetben

$$\begin{aligned}\varphi_{3,0}(\mu-3\varrho-6)=\tfrac{1}{36}\big[7+9\eta_2(\mu-\varrho-1)+4\eta_3(\mu-2)+8\eta_3(\mu-1)\big]+\\+\tfrac{1}{2}(3\varrho-\mu)+\tfrac{1}{12}(\mu^2-6\mu\varrho+9\varrho^2).\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}\Phi_{3,4}(\mu,\varrho)&=\Phi_{3,3}(\mu,\varrho)-\varphi_{3,0}(\mu-3\varrho-6)=\\&=\tfrac{1}{36}\big(9-9\left[\eta_2(\mu-\varrho)+\eta_2(\mu-\varrho-1)\right]\big)=\tfrac{1}{36}(9-9)=0.\end{aligned}$$

Most még teljesség kedvéért $n=4$ esetre kiszámítjuk

$$\underset{(h=1,2,\ldots,n)}{\Phi_{n,h}(\mu,\varrho)}$$

kifejezéséből a három legmagasabb hatványtipusnak megfelelő tagokat. Ezek kiszámítására az «Adalék . . .» V. (1), (2) és (6) képletei használtatnak.

$$\text{A coeffs } x^M \text{ in } \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

együttható kiszámítására szolgáló

$$\begin{aligned}&\varphi_{4,0}(M)=\\&=c_{0,3}(M)M^3+c_{0,2}(M)M^2+c_{0,2}(M)M^2+c_{0,1}(M)M^1+c_{0,0}M\end{aligned}$$

függvénynél:

$$\begin{array}{llllll} a_1=1, & a_2=2, & a_3=3, & a_4=4, & \sum a_id_i=10, & \\ d_1=1, & d_2=1, & d_3=1, & d_4=1, & \sum a_i^2d_i^2=30, & \\ \xi_1=0, & \xi_2=0, & \xi_3=0, & \xi_4=0, & \sum a_i\xi_i=0, & \\ d_{12}=1, & d_{13}=1, & d_{14}=1, & d_{23}=1, & d_{24}=1, & d_{34}=1, \\ \eta_{12}=0, & \eta_{13}=0, & \eta_{14}=0, & \eta_{23}=0, & \eta_{24}=0, & \eta_{34}=0. \end{array}$$

$$\eta_{13}^{(1)} + 3\eta_{13}^{(3)} \equiv M \,(\mathrm{mod}\ 2), \qquad (\eta_{13} < 2),$$

$$\sum \eta_{13}^{(1)} \eta_{13}^{(3)} = \eta_2 (M-1),$$

ha

$$\eta_2 (M-1) \equiv M-1 \,(\mathrm{mod}\ 2), \qquad \big(\eta_2 (M-1) < 2\big).$$

Így

$$\varphi_{4,0}(M) = \frac{M^3}{3!\,4!} + \frac{10M^2}{2!\,2!\,4!} + \frac{M}{24.4!}$$

$$\left\{3.(10)^2 - 30 - \left[18 - 36\eta_2(M-1)\right]\right\} + \cdots$$

$$= \frac{M^3}{3!\,4!} + \frac{5M^2}{2!\,4!} + \frac{\big(21 + 3\eta_2 (M-1)\big)}{2!\,4!} M^1 + \cdots$$

$$\text{A coeffs } x^M \, in \, \frac{1}{(1-x)(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

együttható kiszámítására szolgáló

$$\varphi_{4,1}(M) = c_{1,3}(M)\, M^3 + c_{1,2}(M)\, M^2 + c_{1,1}(M)\, M^1 + \cdots$$

függvénynél :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3, \quad \sum a_i d_i = 7,$$

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = 1, \quad d_4 = 1, \quad \sum a_i^2 d_i^2 = 15,$$

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_4 = 0,$$

$$d_{12} = d_{13} = d_{14} = d_{23} = d_{24} = d_{34} = 1,$$

$$\eta_{12} = \eta_{13} = \eta_{14} = \eta_{23} = \eta_{24} = \eta_{34} = 0.$$

Így

$$\varphi_{4,1}(M) = \frac{M^3}{3!\,3!} + \frac{7M^2}{2!\,2!\,3!} + \frac{1}{24.3!}\left\{3.(7)^2 - 15\right\} M^1 + \cdots =$$

$$= \frac{M^3}{3!\,3!} + \frac{7M^2}{4.3!} + \frac{11M^1}{2!\,3!} + \cdots$$

$$\text{A coeffs } x^M \, in \, \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x)(1-x^2)}$$

együttható kiszámítására szolgáló

$$\varphi_{4,2}(M) = c_{2,3}(M)\, M^3 + c_{2,2}(M)\, M^2 + c_{2,1}(M)\, M^1 + \cdots$$

függvénynél

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 2, \quad \sum a_i d_i = 6,$$

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = 1, \quad d_4 = 1, \quad \sum a_i^2 d_i^2 = 10,$$

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_4 = 0,$$

$$d_{12}=d_{14}=d_{23}=d_{24}=d_{34}=1,$$
$$\eta_{12}=\eta_{14}=\eta_{23}=\eta_{24}=\eta_{34}=0,$$
$$d_{13}=2,\quad \eta_{13}^{(1)}+\eta_{13}^{(3)}\equiv M \pmod 2),\qquad (\eta_{13}<2),$$
$$\sum \eta_{13}^{(1)}\eta_{13}^{(3)}=\eta_2(M-1),$$

ha

$$\eta_2(M-1)\equiv M-1 \pmod 2),\qquad (\eta_2(M-1)<2).$$

Így

$$\varphi_{4,2}(M)=\frac{M^3}{3!\,4}+\frac{6M^2}{2!\,2!\,4}+\frac{1}{24!\,4}$$
$$\{3.(6)^2-10-[6-12\eta_2(M-1)]\}M^1+\cdots=$$
$$=\frac{M^3}{3!\,4}+\frac{3M^2}{2!\,4}+\frac{\left(23+3\eta_2(M-1)\right)M^1}{3!\,4}+\cdots$$

A coeffs x^M in $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x)}$

együttható kiszámítására szolgáló függvény

$$\varphi_{4,3}(M)=\varphi_{4,1}(M).$$

Ezek után előállithatjuk az

$$\frac{1}{(1-y)(1-xy)(1-x^2y)(1-x^3y)(1-x^4y)}$$

raczionális törtfüggvény kifejtésében $x^\mu y^\varrho$ együtthatójának kifejezésére szolgáló

$$\Phi_{n,h}(\mu,\varrho)$$

függvények azon tagjait, melyek a három legmagasabb hatványtipushoz tartoznak.

Ha

$$0\leqq\mu\leqq\varrho,$$

a kifejtési együttható értékét kifejezi:

$$\Phi_{4,1}(\mu,\varrho)=\varphi_{4,0}(\mu)=\frac{\mu^3}{3!\,4!}+\frac{5\mu^2}{2!\,4!}+\frac{\left(21+3\eta_2(\mu-1)\right)}{2!\,4!}\mu^1+\cdots$$

Ha

$$\varrho\leqq\mu\leqq 2\varrho,$$

a kifejtési együttható értékét szolgáltatja

$$\Phi_{4,2}(\mu,\varrho)=\varphi_{4,0}(\mu)-\varphi_{4,1}(\mu-\varrho-1)=$$
$$=\Phi_{4,1}(\mu,\varrho)-\varphi_{4,1}(\mu-\varrho-1)=\Phi_{4,1}(\mu,\varrho)-$$
$$-\left[\frac{(\mu-\varrho-1)^3}{3!\,3!}+\frac{7(\mu-\varrho-1)^2}{4.3!}+\frac{11(\mu-\varrho-1)}{2!\,3!}+\cdots\right]=$$
$$=\Phi_{4,1}(\mu,\varrho)-\left[\frac{(\mu-\varrho)^3}{3!\,3!}+\frac{5}{4.3!}(\mu-\varrho)^2+\frac{5}{2!\,3!}(\mu-\varrho)+\cdots\right]$$

Ha
$$2\varrho\leq\mu\leq\varrho,$$
a kifejtési együttható értékét megadja

$$\Phi_{4,3}(\mu,\varrho)=\varphi_{4,0}(\mu)-\varphi_{4,1}(\mu-\varrho-1)+\varphi_{4,2}(\mu-2\varrho-3)=$$
$$=\Phi_{4,2}(\mu,\varrho)+\varphi_{4,2}(\mu-2\varrho-3)=$$
$$=\Phi_{4,2}(\mu,\varrho)+\left[\frac{(\mu-2\varrho-3)^3}{3.4!}+\frac{3(\mu-2\varrho-3)^2}{2.4!}+\right.$$
$$\left.+\frac{(23+3\eta_2(\mu-2\varrho-4))}{3.4!}(\mu-2\varrho-3)+\cdots\right]=$$
$$=\Phi_{4,2}(\mu,\varrho)+\left[\frac{(\mu-2\varrho)^3}{3.4!}-\frac{(4-3\eta_2(\mu))}{3.4!}(\mu-2\varrho)+\cdots\right]$$

Ha
$$3\varrho\leq\mu\leq4\varrho,$$
a kifejtési együttható kifejezésére szolgál:

$$\Phi_{4,4}(\mu,\varrho)=$$
$$=\varphi_{4,0}(\mu)-\varphi_{4,1}(\mu-\varrho-1)+\varphi_{4,2}(\mu-2\varrho-3)-\varphi_{4,3}(\mu-3\varrho-6)=$$
$$=\Phi_{4,3}(\mu,\varrho)-\varphi_{4,3}(\mu-3\varrho-6)=\Phi_{4,3}(\mu,\varrho)-\varphi_{4,1}(\mu-3\varrho-6)=$$
$$=\Phi_{4,3}(\mu,\varrho)-\left[\frac{(\mu-3\varrho-6)^3}{3!\,3!}+\frac{7(\mu-3\varrho-6)^2}{3.4!}+\right.$$
$$\left.+\frac{11(\mu-3\varrho-6)}{2!\,3!}-\cdots\right]=$$
$$=\Phi_{4,3}(\mu,\varrho)-\left[\frac{(\mu-3\varrho)^3}{3!\,3!}-\frac{5(\mu-3\varrho)^2}{3.4!}+\frac{5(\mu-3\varrho)}{2!\,3!}+\cdots\right]$$

Gyakorlati számításokra a $\varphi_{n,r}(M)$ függvények számára könynyen lehetne czélszerű *számtáblázatokat* késziteni a következő egyszerű reductiós formulák felhasználásával, melyeknek bizonyitása azon alkotó függvények összehasonlitása által, melyeknek kifejtési együtthatói kifejezésére szolgálnak, nem jár nagy nehézséggel:*

$$\varphi_{n,r}(M) = \varphi_{n,r}\big(M-(n-r)\big)+\varphi_{n-1,r}(M),$$
$$\varphi_{n,r}(M) = \varphi_{n,r}(M-r) + \varphi_{n-1,r-1}(M),$$
$$\varphi_{n,r}(M) = \varphi_{n,n-r}(M).$$

A következő összefüggés pedig a meghatározásokból folyik:

$$\Phi_{n,h}(\mu,\varrho) =$$
$$= \Phi_{n,h-1}(\mu,\varrho)+(-1)^{h-1}\varphi_{n,h-1}\left(\mu-(h-1)\varrho-\frac{h(h-1)}{2}\right).$$
$$(h=2, 3, \ldots, n+1)$$

Hogy a

$$\Phi_{n,h}(\mu,\varrho)$$

particzionális függvény értékeinek akár képletszerinti, akár táblázatos előállítása nem felesleges, mutatja a következő fontos invariánselméleti alkalmazás.

Ha

$$\text{coeffs } x^\mu y^\varrho \text{ in } \frac{1}{(1-y)(1-xy)\ldots(1-x^n y)}$$

$P_n(\mu,\varrho)$-val jelöltetik, akkor az n-edrendű binär alak ϱ-fokú lineárisan független covariánsainak összes száma:

$$P_n\left(\frac{n\varrho}{2},\varrho\right)+P_n\left(\frac{n\varrho-1}{2},\varrho\right).$$

E tétel szolgál a Cayley-Sylvester-féle invariáns elméletben kiinduló pontul az irreducibilis covariánsok száma kiszámítására vonatkozó eljárásnál.**

Invariánselméleti alkalmazásainál fogva még fontosabb a következő particzionális mennyiség:

$$Q_n(\mu,\varrho) = P_n(\mu,\varrho) - P_n(\mu-1,\varrho).$$

A definitio szerint ezt a megelőzőkben tárgyalt

* V. ö. Csorba Gy.: «A part. num. irodalma». M. és P. L. VIII. 363. lap.

** Lásd e tételt (másféle jelzésben): Faa' di Bruno Walther: «Einleitung in die Theorie der binären Formen». 195. lap.

$$\Phi_{n,h}$$

féle függvények mindig meghatározzák.

A kérdéses alkalmazás a következő. Ha

$$\text{coeffs}\ x^{\mu}\, y^{\varrho}\ in\ \frac{(1-x)}{(1-y)(1-xy)\dots(1-x^n y)}$$

$Q_n(\mu, \varrho)$-val jelöltetik, akkor az n-edrendű binär alak ϱ-fokú, ν-rendű, μ súlyú $\left(\mu = \frac{n\varrho-\nu}{2}\right)$ lineárisan független covariánsai számát épen

$$Q_n(\mu, \varrho)$$

fejezi ki. A $\nu=0$ esetben ugyanez jelenti a lineárisan független ϱ-fokú invariánsok számát.[1]

Ez az invariánselmélet egyik alaptétele, melynek bizonyításával sokan foglalkoztak és ebből indul ki az egész CAYLEY-SYLVESTER-féle invariánselméleti módszer.

Ugyanide tartozik a HILBERT újabb irányú vizsgálatainál szereplő következő problema is:[2]

Mennyi a binär alak azon ν-rendű lineárisan független covariánsainak összes száma, melyeknek foka $\leqq \varrho$.

Ha a partitionális számok meghatározására nem az ú. n. *alkotó függvényeket*, hanem az itt tárgyalt indepedens *függvényképleteket* használjuk, ezek alkalmazása az említett feladatokra és egyáltalában az invariánselméletre jelentékeny egyszerűsítésekhez és új eredményekhez vezet.[3] *Csorba György.*

[1] V. ö. FAA' DI BRUNO WALTHER: «Einleitung in die Theorie der binären Formen». 123, 130, 194. lapok.

[2] HILBERT: «Über vollen Invariantensysteme». Math. Ann. 42. 9—10. §§.

[3] Erről az alkalmazásról, mely az invariánselmélet tárgyalásának mintegy új módját és alakját állapítja meg és az így nyerhető eredményekről önálló közleményekben szólunk.

FOLYADÉKOKBAN VÉGBEMENŐ NEM FOLYTONOS MOZGÁSOKRÓL.

Figyelemmel kisérve valamely folyadék *folytonos deformáczióját* és bizonyos föltevésekkel élve e deformáczió keltette belső erőkre vonatkozólag, eljutunk az ú. n. ideális (surlódás és hővezetés nélküli) folyadékok mozgásának alapegyenleteihez, a melyek pl. az ú. n. EULER-féle alakban felírva, a következők;

$$
\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=X-\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=Y-\frac{\partial p}{\partial y}\\
&\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=Z-\frac{\partial p}{\partial z}\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0\\
&p=\varphi(\rho)
\end{aligned}
\qquad \mathrm{I)}
$$

ρ jelenti itt a folyadék sűrűségét, p a nyomását, u, v, w az áramlási sebességnek, végre X, Y, Z a térfogategységre ható külső erőknek derékszögű összetevőit az x, y, z pontban t időpillanatban. Az első három egyenlet a tulajdonképeni három mozgásegyenlet, a negyedik a tömeg megmaradását kifejező ú. n. folytonossági egyenlet, míg az utolsó egyenlet a nyomás és térfogat között fennálló kisérletileg meghatározható összefüggést fejezi ki: a φ függvényt a következőkben adottnak fogjuk tekinteni.

Ha megadjuk a külső erőket mint x, y, z, t függvényeit, továbbá bizonyos időpillanatban pl. $t=0$-nál a folyadék kezdőállapotát ρ, u, v, w-t mint x, y, z függvényeit és ha — véges térben végbemenő mozgásnál — a határfelületre vonatkozó feltételeket megszabjuk, a jelenség további lefolyásának leírását analitikai problémára, ρ, u, v, w-nek az I) alatti differencziálrendszerből x, y, z, t függvényeként való előállítására vezettük vissza.

Ezen analitikai probléma megoldása azonban nagy nehézségekkel jár, főleg azért, mert a ρ, u, v, w ismeretlenek és differencziálhányadosaik kettős szorzatai is előfordulnak az egyenletekben, az egyenletek tehát *nem lineárisak*.

Majdnem az összes hidrodinamikai problémáknál e miatt arra kell szorítkoznunk, hogy a *kis sebességgel* végbemenő mozgásokat vizsgáljuk meg. Ha ugyanis u, v, w-ről és első differencziálhányadosaikról föltesszük, hogy oly kicsinyek, hogy négyzeteik és bilineáris szorzataik elhanyagolhatók, a lineáris tagokhoz képest az I) első három egyenletének baloldala már lineáris lesz az ismeretlenekben ill. differencziálhányadosaikban, a mi a megoldást egyszerűsíti.

Természetesen ezen elhanyagolás miatt nem is várhatjuk, hogy megoldásunk általános érvényességű és a tapasztalati jelenségekkel mindig megegyező legyen; sőt sajnálattal kell elismernünk, hogy e megoldás csak igen kevés esetben egyezik meg kielégítő módon a tapasztalattal, a miben az elhanyagolt surlódás és hővezetés mellett még igen jelentékeny része van eme, az analitikai tárgyalás megkönnyítése végett bevezetett egyszerűsítésnek.

RIEMANN volt az első, a ki a hidrodinamika alapegyenleteit egy bizonyos egyszerűbb esetben minden elhanyagolás nélkül, a bilineáris tagok tekintetbe vételével integrálta meg.* RIEMANN ugyanis a folyadékok mozgásának *egydimenziós* problémájával foglalkozott: föltette, hogy a folyadék sebességének iránya min-

* Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite; Abhandlungen der königl. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, 8. kötet, 1860; RIEMANN, Werke 144. l. (Leipzig, 1876.)

denütt ugyanaz és bármely ezen irányra merőleges síkban a sebesség és a sűrűség ugyanaz: közelítőleg megvalósul e mozgás pl. valamely gáznak állandó keresztmetszetű egyenes csőben való áramlásánál.

Ezen egyszerű esetben csak két független változó (x és t) és csak két ismeretlen lesz: ρ és u, ha x tengelynek pl. a cső tengelyét választjuk. Ez esetben az I) alatti rendszer a következőre redukálódik:

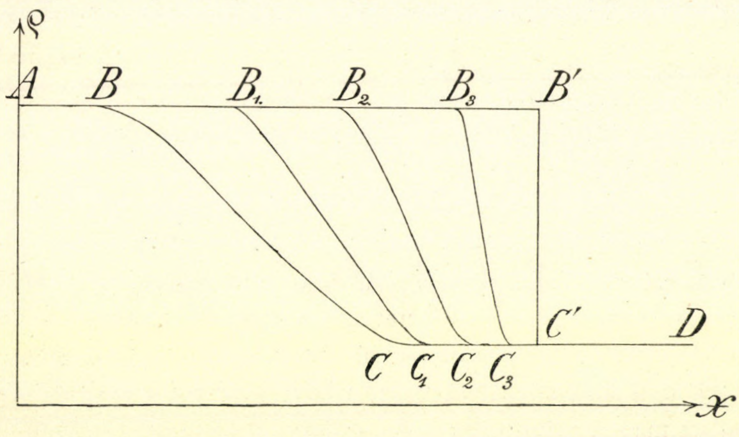
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=X-\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0 \qquad \mathrm{I}^{*})$$

$$p=\varphi(\rho)$$

Riemann, még mielőtt ezen egyenleteket megintegrálta volna, alkalmas átalakításokkal élve, ezen egyenletekből igen fontos és érdekes eredményeket olvasott ki. Ezen átalakításokat itt nem közöljük, hanem rátérünk mindjárt az eredmények ismertetésére.

Induljunk ki a sűrűségnek a csőben való bizonyos eloszlásából; tegyük fel pl. hogy $t=0$ időpillanatban a cső egy részében



(pl. $x=-\infty$-től $x=x_1$-ig) a sűrűség állandó pl. $\rho=\rho_0$, $x=x_1$-től bizonyos adott törvény szerint fogy egészen $x=x_2$-ig, a honnan kezdve ismét állandó pl $\rho=\rho_2$ $x=\infty$-ig. A sűrüség ezen eloszlását ábrázolja a mellékelt rajzon az $ABCD$ görbe.

RIEMANN kimutatta, hogy, ha a sűrűség t időben x-ben ρ volt, akkor $t+t'$ időben bizonyos $x+x'$ pontban lesz ρ a sűrűség; valamely sűrűség tehát *tovaterjed* a folyadékban; e tovaterjedés sebessége, annál nagyobb, minél nagyobb a ρ sürüseg maga, *hacsak* $\frac{d\varphi(\rho)}{d\rho}$ *nem negativ*. E föltétel valamennyi folyadéknál teljesül, úgy hogy általában a sűrűség bármely értéke annál nagyobb sebességgel fog a gázban tovaterjedni, minél nagyobb e sűrűségi érték maga. E tétel alapján megvizsgálhatjuk, miként változik a sűrűség eloszlása az idő folyamán, azaz miként alakul át idővel az $ABCD$ görbe.

Két eset lehetséges a sűrűség és sebesség különböző kezdőeloszlásai szerint: vagy a fogyó, vagy a növekvő x-ek irányában fog a sűrűség tovaterjedése végbemenni: az első esetben a görbe mindjobban ellapul, és a sűrűség eloszlása a mozgás további folyamán is folytonos marad. Sokkal érdekesebb a második eset: ekkor a görbe hajlása az idő folyamán folyton meredekebb lesz (l. a rajzon az AB_1C_1D, AB_2C_2D,... görbéket)és bekövetkezik egy időpont, midőn a görbének egy pontjában az érintője merőleges lesz az x tengelyre: akkor $\frac{\partial\rho}{\partial x}=\infty$, a sűrűség az illető időpontban a cső illető keresztmetszetén véges ugrást fog szenvedni. Az anyag megmaradásából következik, hogy ott, a hol a sűrűség hirtelen változik, hirtelen változást szenved az áramlási sebesség is.

RIEMANN megvizsgálta, mily feltételek mellett terjedhet tova egy ily sűrűségi ugrás a folyadékban s a *tovaterjedő* szakadási felületet *sűrítő*, ill. *ritkító lökésnek* (vagy *lökési hullámnak* — németül «Stosswelle» —) nevezte a szerint, a mint e felület a folyadéknak ritkább illetőleg sűrűbb része felé terjed tova.

E feltételek között szerepel a következő is: a szakadási felületen maguk a hidrodinamika differencziálegyenletei nem érvényesek, hanem új egyenletekkel pótolandók, a melyek ama hipotézisből adódnak ki, hogy e felületen áthaladó anyagban valamely időelem alatt bekövetkezett mozgásmennyiség változása egyenlő a felületre ható erőknek ugyanazon időelemre vonatkozó *impulzusával* (az erőknek az időelemmel való szorzatával). A szakadási felület tetszőleges kis környezetében azonban már a hidrodinamika közönséges differencziálegyenleteinek kell teljesülniök.

E feltételt nevezhetjük a lökések tovaterjedése *dinamikai összeférési* (kompatibilitási) *föltételének*, minthogy ez ama feltétel, melynek teljesülni kell, hogy a szakadás a dinamika axiomái (NEWTON hipotézisei) szempontjából fenmaradhasson két folyadékrész közt, melyekben a mozgás folytonos.

A feltételek másik csoportja, melyeknek részletezésébe itt nem bocsátkozunk, az ú. n. *kinematikai összeférési feltételeket* tartalmazza; ezek ama föltevésnek pusztán kinematikai folyományai, hogy a szakadási felület a folyadékban tovaterjed, azaz a sűrűség ugrásai minden időpillanatban egy a folyadékban folytonosan eltolódó és deformálódó felületen feküsznek.*

RIEMANN e feltételekből meghatározta a lökések tovaterjedési sebességét: e képlet folyománya, hogy a lökések mindig nagyobb sebességgel terjednek, mint a melylyel a hang terjedne a megfelelő állapotú folyadékban. E lökéseknek kisérleti megfigyelése e szerint nagy nehézségekbe ütközik: a tüzi fegyverek lövedékeinek mozgásánál mégis sikerült hasonló lökéseket kimutatni, midőn a lövedék sebessége a hang tovaterjedési sebességénél nagyobb. Különösen érdekesek e szempontból MACHnak lövedékfényképei, melyeket részben pontszerű fényforrás felhasználásá-

---

* HUGONIOT franczia tudós, nem ismerve RIEMANN művét, önállóan ugyanazon eredményekhez jutott 1887-ben mint a hires német mathematikus. (Liouv. Journal des mathém. 4. sorozat, 5. kötet (1887) és Journ. de l'école politechnique, cahier 57 et 58 [1887—1889].)

Újabb időben J. HADAMARD tartott előadást ezen és ezzel rokon problémákról Párisban a Collège de Franceban: előadása *Leçons sur la propagation des ondes* czimen meg is jelent (Paris Hermann, 1903) könyvalakban.

A folyadékokban végbemenő nem folytonos mozgásokról e sorok írója készített összefoglaló referátumot, mely legközelebb az Encyklopädie der math. Wissenschaften, Mechanik czímű IV. kötetében (281—323. l.) fog megjelenni.

val, részben az interferencziál refaktor elvének értékesitésével végzett.*

Figyelemreméltók E. STODOLA ** vizsgálatai a gőzturbinák csöveiben végbemenő áramlásokra vonatkozólag: STODOLA az áramlatok kisérleti tanulmányozásánál oly eredményekre jutott, melyeknek eddig csak a RIEMANN-féle sűritő lökések alapján lehetett kielégitő magyarázatát szolgáltatni. STODOLA szerint, ha a gáz áramlási sebessége a hang terjedési sebességét meghaladja, a csövekben *álló* sűritő lökések jöhetnek létre. Ha ugyanis a gáz ugyanazon sebességgel áramlik, mint a melylyel vele ellenkező irányban a sűritő lökés benne tovaterjed, a szakadási felület a térben nyugalomban marad és igy a sűrűség, nyomás és sebesség ugrása kisérletileg kimutatható. Az álló sűritő lökéseket még RIEMANN különös tanulmány tárgyává tette és most épen ezek kisérleti tanulmányozására nyilik alkalom.

A jelenség kiváló figyelmet érdemel még a technika szempontjából is: a sűritő lökéseknél ugyanis mindig mozgási energia alakul át hőenergiává (a véges mértékben különböző sebességű gáztömegek belső surlódása folytán), minthogy pedig a gőzturbináknál a czél minél nagyobb mozgási energia termelése, a surlódási hővé átalakult energia mindig a gőzgép hasznossági tényezőjét károsan befolyásolja. A gyakorlat szempontjából tehát igen fontos ama körülmények kifürkészése, melyek mellett a sürítő lökések létrejöhetnek, hogy a gép hasznossági tényezője az esetleges sürítő lökések miatt ne szenvedjen.

Ugyancsak alkalmazást talált a RIEMANN-féle elmélet a robbanásnak robbanó anyagokban (különösen robbanó gázokban) való tovaterjedésénél, melyet BUNSEN, BERTHELOT, MALLARD és LE CHATELIER, VIEILLE, MACH és legújabban DIXON vizsgáltak meg kisérleti úton.

---

* Wiener Sitzungsberichte 92. k. (1885). A részletes irodalom megtalálható az idézett Encyklopädie IV. kötetében CRANTZ Ballistik czímű referátumában (194. l.)

** Die Dampfturbinen und die Aussichten der Wärmekraftmaschinen. (3. kiadás Berlin, 1905.)

Érdekes, hogy RIEMANN dolgozatának előszavában (Voranzeige) ama véleményének ad kifejezést, hogy valószínűleg nem igen fog arra kerülni a sor, hogy a dolgozatában foglalt elméleti fejtegetések tényleges kisérletek eredményekkel ellenőrizhetők legyenek, s ime máris több jelenség akadt, melyeknél a RIEMANN-féle sűrítő lökéseknek döntő szerep jut, s így — a nagy mathematikus még nagyobb dicsőségére — vizsgálatai korántsem pusztán analitikai horderejűek, mint a hogy ő maga gondolta annak idején.

A jelen dolgozat czélja megmutatni, miként illeszthető bele a RIEMANN-féle elmélet az analitikai mechanika egységes keretébe, azáltal, hogy úgy a mozgásegyenleteket, mint a dinamikai összeférhetőségi föltételeket egy mechanikai elvből, a HAMILTON-féle staczionárius működés elvéből vezetjük le.*

Az elmélet szempontjából ugyanis kifogásolható, hogy oly mozgások vizsgálatánál, melyeknél a folyadék egyes részeiben a sűrűség és a sebesség nem változik folytonosan, a folytonossági meggondolások segítségével levezetett hidrodinamikai alapegyenleteiből indulunk ki. Igaz ugyan, hogy magán a szakadási felületen ezen egyenleteket nem tekintjük érvényeseknek, és új föltételeket (a dinamikai összeférési föltételeket) vezetünk be, mégis kivánatos a probléma alapegyenleteit egy egységes elvből levezetni, úgy, hogy ezen elv a mozgás azon fázisaira, melyben minden folytonos, a közönséges egyenleteket és a szakadási helyekre az összeférési föltételeket szolgáltassa.

E problémára HILBERT göttingeni egyetemi tanár hivta fel figyelmemet az 1904—05-i téli féléven tartott hidrodinamikai szemináriumban.

Előttem már P. DUHEM franczia fizikus két ízben is megpróbálkozott azzal, hogy valamely általános mechanikai elvből a nem folytonos mozgások alapegyenleteit előállítsa. Első izben Hydrodinamique, Élasticité, Acoustique (Paris, 1891) czímű előadásai-

* E dolgozat — kissé rövidebb fogalmazásban — a Mathematische Annalen 61. kötetében jelent meg a 438—449. lapokon (1905).

ban, melyeket a bordeuxi egyetemen tartott. E művében DUHEM a D'ALEMBERT-féle elvből indul ki: eljárása azonban nem kifogástalan, a mi leginkább abból világos, hogy csupán a hidrodinamikai egyenleteket tudja meggondolásai alapján előállítani az összeférési föltételeket azonban nem.*

Másodízben foglalkozik e problémával DUHEM Recherches sur l'hydrodynamique (Paris, 1904) czímű munkájának első kötetében.** Itt is a D'ALEMBERT-féle elvből indul ki, de most ezen elvet úgy fogalmazza, hogy a gyorsulási összetevők helyére az

$$\frac{u_2-u_1}{dt}, \quad \frac{v_2-v_1}{dt}, \quad \frac{w_2-w_1}{dt} \tag{1}$$

mennyiségeket írja, a hol u_1, v_1, w_1 a sebességi összetevőket jelentik t időpillanatban, u_2, v_2, w_2 ugyane mennyiségeket $t+dt$ időpillanatban. Nem folytonos mozgás esetén az 1) alatti mennyiségek végtelen nagyokká lesznek (mert u_2-u_1, v_2-v_1, w_2-w_1 végesek); e miatt nem előnyös a probléma ilyen fogalmazása.

A következőkben megmutatom, miként lehet mind e nehézségeket elkerülni, ha a HAMILTON-féle staczionárius működés elvéből indulunk ki. Az első §-ban megmutatom, miként vezethetők le a hidrodinamikai egyenletek és az összeférési föltételek a RIEMANN által megvizsgált egydimenziós esetben, a második §-ban ezen eljárást kiterjesztem tetszőleges térbeli mozgásokra.

1. §. Egydimenziós nem folytonos mozgások.

Vizsgálatunk tárgyát a következő probléma fogja képezni:

Hengeres cső folyadékkal van megtöltve: a henger alapjai dugattyú módra mozgathatók és mozgásuk az idő folyamán elő van írva. Kérdés, milyen törvények szerint megyen végbe a két dugattyú közti folyadék mozgása, ha föltesszük, hogy a mozgás a HAMILTON-féle staczionárius működés elve szerint megyen végbe

* L. DUHEM idézett művének 60—98. lapjait.

** L. DUHEM e művének 75. lapját.

és ha a folyadékban oly *lökések* tovaterjedését is megengedjük, mint a milyenekről az imént szólottunk. A mozgást ismét ama föltevés mellett tárgyaljuk, hogy a cső bármely keresztmetszetében a sűrűség, sebesség és nyomás ugyanaz; ezáltal válik problémánk egydimenzióssá.

Első feladatunk magának a HAMILTON-féle integrálnak előállítása:

Valamely anyagi rendszer esetén ezen integrál, (a működés), a mozgási (T) és potencziális energia (U) különbségének időintegrálja:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt.$$

A jelen esetben a hengeres cső tengelyét választva x tengelynek és a cső keresztmetszetét egységnyi felületűnek tételezve fel:

$$T = \tfrac{1}{2} \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} \rho u^2 dx,$$

a hol $x = x_0(t)$ és $x = x_1(t)$ a dugattyúk mozgását megszabó adott függvények.

A potencziális energia két részből fog állani: a külső erők és a belső erők potencziális energiájából: az első rész legyen megadva úgy, hogy megadjuk a külső erők *erőterét,* azaz a térfogategységre vonatkozó potencziális energiát mint x és t függvényét $V(x, t)$-t; a külső erők összes potencziális energiája e szerint:

$$U^{(k)} = \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} \rho V(x, t)\, dx.$$

A belső erők tértogategységre eső potencziális energiájáról föltesszük, hogy csupán a folyadék térfogatváltozásától, a kezdetbeli és a mindenkori sűrűségek viszonyától függ; hogy miképpen, az a folyadék fizikai tulajdonságaitól függ, melyek kisérletileg megállapithatók úgy, hogy a belső erők térfogategységre eső potencziális energiáját $W\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)$-nak vehetjük, a hol ρ_0

a sűrűség $t=t_0$ időpillanatban és W egy kisérletileg meghatározható, tehát megadottnak tekinthető függvény. Az összes belső energia tehát:

$$U^{(b)} = \int\limits_{x_0(t)}^{x_1(t)} \rho W\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) dx$$

és

$$I = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{x_0(t)}^{x_1(t)} \rho\left(\tfrac{1}{2}u^2 - V(x, t) - W\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right) dx dt. \tag{2}$$

Ha a mozgást úgy variáljuk, hogy a folytonossági egyenlet ki legyen elégítve, akkor az I variácziójának el kell tünnie; ezen feltételi egyenlet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

E fogalmazásnál kellemetlen az, hogy a feltételi egyenlet differencziálegyenlet az ismeretlen ρ és u-ra vonatkozólag. Ezen azonban segíthetünk az által, hogy az I integrált uj változók bevezetésével (az ú. n. LAGRANGE-féle hidrodinamikai leírásmód felhasználásával) transzformáljuk; ez esetben a 3) alatti parcziális differencziálegyenlet oly egyenlettel helyettesíthető, mely az egyik ismeretlenre (ρ-ra) nézve egyszerű algebrai egyenlet és így ez ismeretlen a másik által közvetlenül kifejezhető és a föltételi egyenlet fölöslegessé válik, a mi a feladat megoldását a variáczioszámítás szempontjából nagy mértékben egyszerűsíti.

A LAGRANGE-féle leírásmódnál az egyes folyadékpontokat (elemeket) koordinátákkal jellemezzük (pl. az által, hogy helyzetüket $t=0$ időben megadjuk) és azután minden egyes folyadékelemet pályáján kisérjük és a mozgás problémáját tekintjük, ha minden folyadékelem pályagörbéjét és mozgását a pályagörbén ismerjük.

A jelen esetben minden folyadékelem pályagörbéje előre ismeretes (egyenes), a kérdés tehát csak az, miként fognak az egyes folyadékelemek ezen, a cső tengelyével párhuzamos egyeneseken mozogni; minthogy pedig az összes, egyazon keresztmetszeten fekvő folyadékpontok egyazon mozgást végzik, elégséges vala-

Legyen a valamely ezen egyenes fekvő folyadékpont koordinátája és jelölje x ezen a pont helyzetét a t időpillanatban, akkor a mozgás ismeretes lesz, ha x-et mint a és t függvényét elő tudjuk állitani, a és t bizonyos intervallumára, pl. a_0 és a_1, ill. t_0 és t_1 közt, a hol a_0 és a_1 a dugattyúkkal közvetlenül érintkező folyadékpontok koordinátái, a melyek kénytelenek e dugattyúk előirt mozgását követni.

Az anyag megmaradása ez esetben a következő módon fogalmazható: a mozgás folyamán a folyadékelemek változtathatják ugyan sűrűségüket, de tömegüket nem, tehát

$$\rho dx = C.$$

C itt az időtől független, de a-tól általában nem; C-t a folyadéknak $t=t_0$ időben való sűrűségbeli eloszlása határozza meg: legyen $C = \bar{\rho}_0 da$, akkor

$$\frac{\bar{\rho}_0}{\rho} = \frac{\partial x}{\partial a}$$

lép a leirásmódnál a folytonossági egyenlet helyére.

Megjegyzendő, hogy $\bar{\rho}_0$ csak abban az esetben jelenti a $t=t_0$ időbeli sűrűséget, (csak akkor azonos az előbbi ρ_0-val), ha a x-nek $t=t_0$-beli értékét jelenti; ennek azonban nem kell szükségképen igy lenni, sőt hogy ha $t=t_0$ időpillanatban a folyadékban sűrűségbeli szakadás fordul elő, a nem jelentheti x kezdőértékét csak a gáz egyik részében (egészen a szakadási pontig).* Mindenesetre azonban $\bar{\rho}_0$ és ρ_0 egymásból kiszámithatók, úgy hogy megadva a gáz kezdőállapotát, mindenesetre ρ_0 és $\bar{\rho}_0$ egyaránt ismeretesek lesznek, úgy, hogy pl. a $W\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)$ függvény ép úgy $\frac{\bar{\rho}_0}{\rho}$, azaz $\frac{\partial x}{\partial a}$ *adott* $\overline{W}$ függvényének is tekinthető.

---

* Ha ugyanis az egész gázban $t=t_0$-nál $x=a$, akkor ugyanazon időben $\frac{\partial x}{\partial a} = 1$, (tehát $\rho = \bar{\rho}_0$); a kinematikai összeférési egyenlet szerint, ha a sebesség szakadást szenved, szakadást kell szenvednie $\frac{\partial x}{\partial a}$-nak is, tehát $\frac{\partial x}{\partial a}$ az egész gázban nem lehet egyenlő 1-gyel és igy x sem a-val.

mely a cső tengelyével párhuzamos egyenesen lévő folyadékpontok mozgását megvizsgálni.

A működés 2) alatti alakjába bevezetjük most az x, t integrálási változók helyére az a, t változókat; a transzformáczió eredménye:

$$I_L = \int_{t_0}^{t_1} \int_{a_0}^{a_1} \rho_0 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 - V(x,\, t) - \overline{W} \left(\frac{\partial x}{\partial a} \right) \right\} da dt. \qquad 3)$$

A működés e kifejezése már tetemesen egyszerűbb az előbbinél, minthogy itt az integráljel alatt az a, t független változóknak egyedül x függvénye szerepel ismeretlenként s a variáczió problémánál nem lesz többé feltételi egyenlettel dolgunk, másrészt az integrálási tartomány derékszögű parallelogramm az at síkban.

Ha tehát megadjuk egyrészt a folyadék mozgási állapotát t_0 és t_1 időpillanatokban $\big(x(a,\, t_0)$ és $x(a,\, t_1)$-et$\big)$, másrészt a dugattyúk mozgását $\big(x(a_0,\, t)$ és $x(a_1,\, t)$-t$\big)$, a mozgás teljes meghatározása a következő egyszerű variáczió problémára lesz visszavezetve.

Keressük a, t-nek azt az x függvényét, a melyet úgy variálva, hogy az integrálási tartomány határain a variácziók zérusok, az I_L integrál variácziója maga is zérus lesz.

Vagy geometriai értelmezésben:

Adva van az atx térben egy zárt A térgöbe, melynek vetülete az at síkra az előírt integrálási tartomány határa: keressük azt a F felületdarabot, mely ezen zárt görbén keresztülfektethető és ama tulajdonsággal bír, hogy oly variáczióknál, melyek nem szakítják le a felületet az A görbéről az ezen felületre vonatkozó I_L integrál variácziója zérus.

Ha kikötnénk, hogy úgy x, valamint a és t szerinti differencziálhányadosai az integrálási tartományban mindenütt folytonosak legyenek, variáczióproblémánk megoldását az ismert Lagrange-féle egyenlet alakjában azonnal felírhatnók; ezen egyenlet a hidrodinamikai alapegyenlet Lagrange-féle alakban; K-val jelölve I_L integranduszát a kitűzött variáczióprobléma megoldását a következő egyenlet szolgáltatja:

$$\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{d}{da}\left(\frac{\partial K}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)}\right) = 0$$

vagy kiszámítva:

$$-\rho_0 \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial a}\left(\rho_0 \frac{\partial W}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)}\right) - \rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0. \qquad 4)$$

Ez tényleg a közönséges hidrodinamikai egyenlet; elég ugyanis a p nyomást a következő egyenlet által bevezetni:

$$-\rho_0 \frac{\partial W}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)} = p, \qquad 5)$$

akkor 4) átmegy a:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

egyenletbe; vagy, minthogy $\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\partial x}{\partial a}$ és $-\rho \frac{\partial V}{\partial z} = X$:

$$\left(\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial a} = 0, \qquad \mathrm{I}^{**})$$

a mely egyenlet egyszerű transzformáczióval az I*)-ből is nyerhető.

Vizsgáljuk meg, miként állanak a viszonyok abban az esetben, ha a folyadékon egy *lökéshullám* fut végig.

Ha pl. $t = t_0$ időpillanatban a sebesség és sűrűségbeli szakadás az $a = a'$ pontban lép fel, e szakadás idővel általában mindig más-más folyadékelemekre fog átruházódni: ez épen a lökés *tovaterjedése* a folyadékban; általában tehát a szakadást szenvedő folyadékelemek valamely $a = f(t)$ egyenlet által lesznek meghatározva, mely bizonyos görbének felel meg az at síkban. Az $a = f(t)$ függvény megadja minden t pillanatban azt az a-t, melynek megfelelő folyadékelemen a t pillanatban a *lökés*, a *szakadás* áthalad.

Az $a = f(t)$ függvénynek megfelelő γ görbe az integrálási tartományt két részre osztja, e két részt jelöljük 1 és 2-vel; e részeken belül x és összes differencziálhányadosai a, t-nek folytonos függvényei; a határgörbén a két x érték megegyezik ugyan, de a differencziálhányadosok már nem.

Jelöljük ω_1-gyel valamely $\omega(a, t)$ mennyiség határértékét a γ görbén, ha a határátmenetet az 1 tartományon keresztül végezzük, és ω_2-vel e mennyiség határértékét ugyane pontban, ha a határátmenetnél a 2 tartományon át közeledtünk a γ görbéhez; az $\omega_2-\omega_1$ különbséget E. B. CHRISTOFFEL * kezdeményezésére $[\omega]$-val fogjuk jelölni. A γ görbén e jelölés értelmében:

$$x_1 = x_2, \quad [x] = 0$$

azonban $\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right]$ és $\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]$ általában zérustól különbözők; $\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right]$ a sűrűség $\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]$ a sebesség *ugrását* határozza meg a szakadási felületen (pontban).

Variáczió problémánkat tehát igy kell átfogalmaznunk:

Milyen egyenletek határozzák meg azt az x-et, a mely az egész integrálási tartományban folytonos, melynek differencziálhányadosai azonban az $a=f(t)$ görbén véges ugrásokat szenvedhetnek, és a melyet úgy variálva, hogy az integrálási tartomány határain ne változzék, az I_L működés variácziója zérus lesz.

A keresett *felületnek* (a geometriai értelmezésben) *gerincze* lesz, melynek vetülete az *at* síkra a γ görbe.

A feladat megoldását úgy állítjuk elő, hogy x-nek és I_L-nek e variáczióit tényleg előállítjuk és ezek eltünésének föltételeit kutatjuk:

I_L ama részét, mely az (1) tartományra terjed ki $I_L^{(1)}$-vel, másik részét $I_L^{(2)}$-vel jelöljük.

$$I_L = I_L^{(1)} + I_L^{(2)}.$$

Legyen $x(a, t)$ problémánknak keresett megoldása; akkor, ha ε egy tetszőlegesen kicsiny állandó és $\xi(a, t)$ egy tetszőleges,

* Ann. di Mathematica, 2-dik sorozat, 8. k. 82. l. (1887).

mindenütt differencziálhányadosaival együtt folytonos függvény, mely az

$$\xi(a, t) = \xi(a, t_1) = \xi(a_0, t) = \xi(a_1, t) = 0 \qquad 6)$$

egyenleteknek eleget tesz (az integrálási határokon eltünik), akkor nyilván I_L-ben x helyére $x+\varepsilon\xi$-t írva az integrácziók elvégzése után ε-nak bizonyos függvényét kapjuk; ha x variálásánál I_L variácziója zérus, akkor minden esetre

$$\left(\frac{dI_L}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left(\frac{dI_L^{(1)}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \left(\frac{dI_L^{(2)}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0. \qquad 7)$$

Ez az egyenlet szolgáltatja majd az összes szükséges egyenleteket.

$$\left(\frac{dI_L^{(1)}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \iint\limits_{(1)} \rho_0 \left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x}\xi - \frac{\partial W}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)}\frac{\partial \xi}{\partial a}\right) da dt. \qquad 8)$$

Hasonló kifejezés adja $\left(\frac{dI_L^{(1)}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$-t is.

Minthogy x és ξ az (1) ill. (2) tartományokban differencziálhányadosaikkal együtt folytonosak $\left(\frac{dI_L^{(1)}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$ és $\left(\frac{dI_L^{(2)}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$-on külön-külön elvégezhetjük az integrálok variácziójánál szokásos parcziális integrácziót (alkalmazhatjuk a Stokes-féle tételt).

A 7) alatti integrál ezáltal felbomlik egy vonalintegrál és egy felületi integrál összegévé; a vonalintegrál az 1 tartomány határgörbéjére, a felületi integrál az 1 tartományra magára terjesztendő ki:

$$\left(\frac{dI_L^{(1)}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int\limits_{s_1} \left\{\rho_0\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cos\alpha_1 + \frac{\partial W}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)}\sin\alpha_1\right)\right\}\xi ds_1 -$$

$$- \iint\limits_{1} \left\{\rho_0\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(\rho_0 \frac{\partial W}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)}\right)\right\} \xi da dt.$$

ds_1 az 1 tartomány határgörbéjének vonalelemét jelenti, mely pozitiv az óramutató járásának irányában való körüljárásnál, α_1 ezen ívelem és az a tengely által bezárt szög. Egészen hasonlóan:

$$\left(\frac{dI_L^{(2)}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{s_2} \left\{ \bar{\rho}_0 \left(\frac{\partial x}{\partial t} \cos \alpha_1 + \frac{\partial \overline{W}}{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial a} \right)} \sin \alpha_1 \right) \right\} \xi ds_1 -$$

$$- \iint_2 \left\{ \bar{\rho}_0 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial a} \left(\bar{\rho}_0 \frac{\partial \overline{W}}{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial a} \right)} \right) \right\} \xi dadt.$$

A vonalintegrálok ama részei, melyek az eredeti integrálási tartománynak határvonalára vonatkoznak, eltünnek, minthogy ξ e határvonalon a 6) alatti egyenletek alapján eltünik, tehát e vonalintegrálnak csak a γ görbére vonatkozó részei maradnak meg; már pedig minthogy

$$\cos \alpha_2 = - \cos \alpha_1$$

$$\sin \alpha_2 = - \sin \alpha_2$$

továbbá a γ görbén

$$da = ds_1 \cos \alpha_1, \quad dt = ds_1 \sin \alpha_1$$

és

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = \frac{da}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = \theta,$$

a hol θ a *lökés tovaterjedési sebessége,* végre a következő egyenlethez jutunk:

$$\left(\frac{dI_L}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \bar{\rho}_0 \left\{ \left[\frac{\partial x}{\partial t} \right] \theta + \left[\frac{\partial \overline{W}}{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial a} \right)} \right] \right\} \xi dt -$$

$$- \int_{a_0}^{a_1} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \bar{\rho}_0 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial a} \left(\bar{\rho}_0 \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial a} \right)} \right) \right\} \xi dadt.$$

Hogy e kifejezés ξ minden értékénél eltünjék, annak föltétele, hogy I) mindenütt, a hol x differencziálhányadosaival együtt folytonos, teljesüljön a

$$\bar{\rho}_0 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial a} \left(\bar{\rho}_0 \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial a} \right)} \right) = 0$$

egyenlet, II) a szakadási vonalon pedig a

$$\bar{\rho}_0 \left[\frac{\partial x}{\partial t}\right] \theta + \left[\bar{\rho}_0 \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)}\right] = 0 \tag{9}$$

föltétel.

Ime a folytonos helyekre nézve visszajutottunk az előbbi 4) alatti egyenlethez, a szakadási görbére nézve azonban egy új egyenletet nyertünk; ez a *dinamikai összeférési egyenlet.* A p nyomásnak 5) alatti definiczióját használva ezen egyenlet még így is írható:

$$\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right] \rho_0 \theta = [p]. \tag{10}$$

Ennek az egyenletnek igen egyszerű a fizikai jelentése: Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát dt-vel, akkor az egyenlet tekintettel a $\rho_0 da = \rho dx$ egyenletre, így írható:

$$\rho dx \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_2 - \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_1\right\} = (p_2 - p_1)\, dt.$$

Balról ama folyadéktömegnek ρdx-nek mozgásmennyiségbeli megváltozása áll, a mely dt idő alatt a szakadási felületen áthaladt, jobbról pedig a szakadási felületre ható $p_2 - p_1$ erőnek a dt idő alatti *impulzusa.* A 10) alatti egyenlet tehát — a mint előre jeleztük — valóban az impulzus tétele a szakadási felületen átvonuló folyadékmennyiségre nézve.

Tényleg sikerült e szerint a Hamilton-féle integrál elv segítségével egyszerre kikapnunk a folytonos részekre a közönséges mozgásegyenleteket, a szakadási helyekre pedig az impulzus tételét.

Folytonos mozgások tárgyalásánál az e levezetésben fellépő vonalintegrálok azonosan eltünnek, minthogy a határvonalon nem variáljuk az x-et, nem folytonos mozgásoknál azonban a szakadási vonalra vonatkozó részek nem tünnek el azonosan és ép ezek szolgáltatják az összeférési egyenletet. Megjegyzendő, hogy ez utóbbi általánosabb magánál a mozgásegyenletnél és föltéve, hogy a szakadás végtelen kicsiny (hogy a mozgás folytonos) az összeférési feltétel átmegy a mozgásegyenletbe.

2. §. Térbeli nem folytonos mozgások.

A lökési hullámoknak egydimenziós mozgásokra vonatkozó ezen tárgyalása egyszerűen átvihető tetszőleges három dimenziós (térbeli) mozgásokra.

Lökési hullámnak fogunk nevezni általában egy a folyadékban eltolódó és deformálódó felület, melyen a sűrűség és az áramlási sebesség hirtelen változást (ugrást) szenved.

A hullámfelületnek egyenlete általában a következő alakú lesz:

$$\Psi(x, y, z, t) = 0.$$

Legyen

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2 = K^2$$

akkor

$$\frac{1}{K}\frac{\partial\Psi}{\partial x} = A, \quad \frac{1}{K}\frac{\partial\Psi}{\partial y} = B, \quad \frac{1}{K}\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \Gamma$$

a hullámfelület normálisának iránykoszinusai és

$$T = -\frac{1}{K}\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

a hullámfelület eltolódási sebessége. K előjele kétféle lehet annak megfelelőleg, hogy a Ψ felület eltolódása két ellenkező irányban mehet végbe.

A LAGRANGE-féle felfogásban* minden $\Psi(x, y, z, t)=0$ felületnek a tényleges x, y, z térben bizonyos

$$\psi(a, b, c, t) = 0$$

felület felel meg az a, b, c térben, mely amaz a, b, c pontokat köti össze minden időpillanatban, a melyeknek megfelelő folyadékpontokon a tényleges hullámfelület ugyanazon időpillanatban végigvonul.

---

* a, b, c-vel jelölünk három parametert, mely a folyadéknak egy bizonyos tömegpontját jellemzi; a, b, c lehetnek pl. x, y, z-nek kezdőértékei a $t=t_0$ időpontban, de csak az a, b, c tér egy részére vonatkozólag (egészen a szakadási felületig), ugyanazon okból, melyet az egydimenziós mozgások tárgyalásánál is említettünk (l. a 371. lap lábjegyzékét).

A ψ felület az a, b, c teret minden időpillanatban két tartományra bontja, melyeket 1 és 2-vel fogunk jelölni; a, b, c, t valamely Ω függvényének határértékét a ψ szakadási felületen Ω_1-gyel fogjuk jelölni, ha a határérték képezésénél az 1 tartományon át közeledtünk a szakadási felülethez; hasonló jelentése lesz Ω_2-nek és ismét használni fogjuk az $\Omega_2 - \Omega_1 = [\Omega]$ jelölést.

A ψ felületen a megelőzők szerint $[x]$, $[y]$ és $[z]$ zérussal lesznek egyenlők, míg $[\rho]$ és $[u]$, $[v]$, $[w]$ általában zérustól különbözők lesznek. Minthogy pedig

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \tag{11}$$

a hol ρ_0-t a

$$\rho dxdydz = \rho_0 dadbdc = \text{const.}$$

egyenlet definiálja, ρ és u, v, w szakadásából általában x, y, z összes differencziálhányadosainak szakadása fog következni; a ψ felületen e szerint általában

$$\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right], \left[\frac{\partial x}{\partial b}\right], \left[\frac{\partial x}{\partial c}\right], \left[\frac{\partial x}{\partial t}\right], \left[\frac{\partial y}{\partial a}\right], \ldots, \left[\frac{\partial z}{\partial t}\right]$$

zérustól különbözők lesznek.

A ψ felületnek a 2 tartomány belseje felé mutató normálisának iránykoszinusai

$$\frac{1}{k}\frac{\partial \psi}{\partial a} = \alpha, \quad \frac{1}{k}\frac{\partial \psi}{\partial b} = \beta, \quad \frac{1}{k}\frac{\partial \psi}{\partial c} = \gamma, \tag{12}$$

a hol

$$k^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial c}\right)^2$$

és k pozitivnak választandó, ha $\psi(a, b, c, t)$ a 2 tartományban pozitiv.

A
$$\theta = -\frac{1}{k}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{13}$$

mennyiség, mely a φ felület eltolódási sebességét jelöli az a, b, c térben az előbb bevezetett T mennyiséggel egyszerű összefüggés köti össze, melynek levezetését itt nem részletezzük.

Ha ugyanis a, b, c-t az 1 tartományban x, y, z-vel egyenlőknek veszszük (az 1 tartomány t időbeli állapotát választjuk kezdőállapotnak), akkor a Ψ és φ felületek a t időpillanatban össze fognak esni, a $t+dt$ időelemben azonban már újra különválnak és eltolódási sebességeik közt a

$$T = \theta + [V_n]$$

összefüggés áll fönn, a hol V_n a folyadék áramlási sebessége a hullámfelület normálisának irányában.

E kifejezésből világos θ fizikai jelentése: míg a T a tényleges hullámfelületnek abszolut eltolódási sebessége, addig θ a hullámnak a folyadék anyagához viszonyitott, relativ eltolódási sebessége. θ-t e tulajdonsága folytán *a hullám tovaterjedési sebességének* nevezzük.

Fölteszszük most már, hogy a vizsgálatunk tárgyát képező folyadékban egy lökési hullám vonul végig és kérdezzük, milyen föltételek adódnak ki a szakadási felületre vonatkozólag, ama hipotézisből, hogy a mozgás a Hamilton*-féle staczionárius működés elve szerint megyen végbe.*

Először is előállitjuk a működés kifejezését: az előbbi jelölésekkel élve:

$$T = \tfrac{1}{2}\iiint \rho\,(u^2+v^2+w^2)\,dxdydz$$
$$U^{(k)} = \iiint \rho\,V(x, y, z, t)\,dxdydz.$$

Az integrácziók mindig az egész folyadékra terjesztendők ki.

A térfogategységre eső *belső* potencziális energiáról W-ről fölteszszük, hogy a folyadék minden pontjában ismert módon függ a folyadék *deformáczióját* jellemző

$$\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c};\quad \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial c};\quad \frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial c} \tag{14}$$

mennyiségektől. Ha W-t ily általános függvénynek tekintjük, eredményeink tetszőleges rugalmas testre érvényesek lesznek; ideális folyadékokra úgy kell áttérnünk, hogy W-ről fölteszszük, hogy csupán a $\frac{\rho_0}{\rho}$ dilatácziónak függvényei, a mely maga a 14) alatti mennyiségeknek 11) alatti függvénye.

Ezek szerint

$$U^{(b)} = \iiint \rho W dxdydz$$

és a működés:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \rho \left(\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) - V(x, y, z, t) - W\right) dxdydz.$$

Nehogy a mozgás variácziójánál ismét egy differencziálegyenletet (az EULER-féle felfogás szerinti folytonossági egyenletet) kelljen mellékföltétel gyanánt bevezetnünk, áttérünk ismét a LAGRANGE-féle leírásmódra és bevezetjük független változóknak x, y, z, t helyett a, b, c, t-t és ismeretlen függvények gyanánt ρ, u, v, w helyére x, y, z-t.

Tekintettel a 11) alatti egyenletre azt kapjuk, hogy:

$$I_L = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{\Phi(a,b,c)=0} \rho_0 \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \right] - \right.$$
$$\left. - V(x, y, z, t) - W\left(\frac{\partial x}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial c}\right) \right\} dadbdc.$$

A folyadék mozgási állapotát t_0 és t_1 időkben megadjuk és előírjuk a folyadék határfelületének mozgását (megadjuk x, y, z-t mint t függvényét a $\Phi(a, b, c)=0$ felületen) és föltesszük, hogy a sebesség és a sűrűség az *adott*

$$\varphi(a, b, c, t) = 0$$

felületen véges ugrást szenved, ezáltal az előrebocsátott kérdést a következő analitikai feladatra vezettük vissza:

Milyen feltételeknek tesznek eleget az a, b, c, t változóknak oly x, y, z függvényei egy adott $\Phi(a, b, c)=0$ felület és a $t_0 \ldots t_1$ köz által meghatározott tartományban, melyek e tartományban *differencziálhányadosaikkal együtt mindenütt folytonosak a $\psi=0$ felület kivételével, melyen a függvények maguk folytonosak első differencziálhányadosaik azonban véges ugrást szenvednek, és a mely függvények variálásánál az I_L működés variácziója zérus? A variácziókra vonatkozólag kikötjük, hogy x, y, z, t_0, t_1 időbeli és a $\Phi=0$ felületre vonatkozó összes variácziói eltűnjenek.*

Egészen úgy járhatunk el, mint az egydimenziós mozgások tárgyalásánál: I_L-et ismét két részre bonthatjuk:

$$I_L^{(1)} = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{(1)} F\left(x, y, z, \frac{\partial x}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial c}\right) dadbdc,$$

$$I_L^{(2)} = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{(2)} F dadbdc,$$

a hol F-fel jelöltük I_L integranduszát.

Tegyük x, y, z helyére az

$$x+\varepsilon\xi(a, b, c, t), \quad y+\varepsilon\eta(a, b, c, t), \quad z+\varepsilon\zeta(a, b, c, t)$$

függvényeket, a hol ε tetszőleges kicsiny állandó ξ, η, ζ pedig oly függvények, melyek t_0, t_1-nél és a $\Phi(a, b, c)=0$ felületen eltünnek, egyébként tetszőlegesek. Ha x, y, z variácziói zérus, akkor

$$\left(\frac{dI_L}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left(\frac{dI_L^{(1)}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \left(\frac{dI_L^{(2)}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0.$$

$I_L^{(1)}$ és $I_L^{(2)}$ oly tartományokra vonatkoznak, melyeken belül minden folytonos és így $\left(\frac{dI^{(1)}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$ és $\left(\frac{dI^{(2)}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$ kifejezéseiben is parcziális integráláson alapuló szokásos átalakításokat elvégezhetjük (alkalmazhatjuk a Green-féle tételt a négydimenziós térben).

$$\left(\frac{dI_L^{(1)}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{(1)}}_{\mathrm{I.}} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial z}\zeta + \right.$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial a}} \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial b}} \frac{\partial \xi}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial c}} \frac{\partial \xi}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial t}} \frac{\partial \xi}{\partial t} +$$

$$\left. + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial z}{\partial t}} \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right) da\,db\,dc =$$

$$= \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \iiint_{(1)}}_{\mathrm{I.}} \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d^*}{da} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial a}} - \frac{d}{db} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial b}} - \frac{d}{dc} \frac{dF}{\partial \frac{\partial x}{\partial c}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial t}}\right)\xi + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \cdots\right)\eta + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \cdots\right)\zeta\right\} da\,db\,dc\,dt +$$

$$+ \iiint_{f_1} \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial a}}\lambda_1 + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial b}}\mu_1 + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial c}}\nu_1 + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial t}}\tau_1\right)\xi + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial y}{\partial a}}\lambda_1 + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial y}{\partial b}}\mu_1 + \cdots\right)\eta + \left(\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial z}{\partial a}}\lambda + \cdots\right)\zeta\right\} df.$$

A $\left(\frac{dI_L}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$ kifejezés ugyanis négyszeres integrál, mely ama négydimenziós tartományra vonatkozik az a, b, c, t térben, melyet egyrészt a $t=t_0$, $t=t_1$, másrészt a $\Phi(a, b, c)=0$ felület (háromdimenziós pontsokaságok) határolnak. Ezt a tartományt a $\psi(a, b, c, t)=0$ felület két részre osztja, melyeket I) és II)-vel fogunk jelölni; $\left(\frac{dI_L^{(1)}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$-t, mely eredetileg az I) tartományra vonatkozó négyszeres integrál, szétbontottuk két összeadandó részre: egy ugyanarra a tartományra vonatkozó négyszeres integrállá és egy ezen tartomány *határára* vonatkozó «felületi»

* A totális differencziálhányadosok azt jelentik, hogy x, y, z mint a, b, c, t adott függvénye tekintendő a differencziálásnál.

háromszoros integrállá. E határfelületet jelöltük f_1-gyel, felületelemnek nagyságát df-fel, a kifelé mutató normális négy iránykoszinuszát λ_1, μ_1, ν_1, τ_1-gyel. E határfelület részben a $t=t_0$, $t=t_1$ és $\Phi(a, b, c)=0$ felületekből áll; ezeken ξ, η, ζ zérusok, az integrál e részei tehát elesnek, marad a $\psi=0$ felület 1 oldalára vonatkozó felületi integrál; itt:

$$\lambda_1 = \frac{1}{Q}\frac{\partial\psi}{\partial a}, \quad \mu_1 = \frac{1}{Q}\frac{\partial\psi}{\partial b}, \quad \nu_1 = \frac{1}{Q}\frac{\partial\psi}{\partial c}, \quad \tau_1 = \frac{1}{Q}\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

a hol

$$Q^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial c}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2.$$

Egész hasonlóan alakítható át $\left(\frac{dI_L^{(2)}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$ is; tekintettel arra, hogy a $\psi=0$ másik oldalára vonatkozólag a kifelé mutató normális λ_2, μ_2, ν_2, τ_2 iránykoszinuszai ellentetten egyenlők λ_1, μ_1, ν_1, τ_1-gyel, azt kapjuk, hogy:

$$\left(\frac{dI_L}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{\Phi(a,b,c)=0} \Bigg\{\Bigg(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{da}\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial a}} - \frac{d}{db}\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial b}} - \frac{d}{dc}\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial c}} - \frac{d}{dc}\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial t}}\Bigg)\xi +$$

$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \cdots\right)\eta + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \cdots\right)\zeta\Bigg\} da\,db\,dc +$$

$$+ \iiint_{\psi(a,b,c,t)=0} \frac{1}{Q}\Bigg\{\Bigg(\left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial a}}\right]\frac{\partial\psi}{\partial a} + \left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial b}}\right]\frac{\partial\psi}{\partial b} + \left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial c}}\right]\frac{\partial\psi}{\partial c} +$$

$$+ \left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial t}}\right]\frac{\partial\psi}{\partial t}\Bigg)\xi +$$

$$+ \left(\left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial y}{\partial a}}\right]\frac{\partial\psi}{\partial a} + \cdots\right)\eta + \left(\left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial z}{\partial a}}\right]\frac{\partial\psi}{\partial a} + \cdots\right)\zeta\Bigg\} df.$$

E kifejezésnek ξ, η, ζ tetszőleges értékeinél el kell tünnie; el kell tünnie tehát az I. és II. tartomány minden belső helyén a térfogati integrál integranduszában ξ, η és ζ együtthatójának, azonkívül a $\psi=0$ felületen a felületi integrál integranduszában ugyancsak ξ, η, ζ együtthatóinak.

A *folytonos* helyeken tehát a következő egyenletek érvényesek:

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{da}\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial x}{\partial a}}-\frac{d}{db}\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial x}{\partial b}}-\frac{d}{dc}\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial x}{\partial c}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial x}{\partial t}}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\cdots=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\cdots=0.$$

A $\psi=0$ felületen pedig:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial x}{\partial a}}\right]\frac{\partial\psi}{\partial a}+\left[\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial x}{\partial b}}\right]\frac{\partial\psi}{\partial b}+\left[\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial x}{\partial c}}\right]\frac{\partial\psi}{\partial c}+\left[\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial x}{\partial t}}\right]\frac{\partial\psi}{\partial t}=0.$$

F értékét behelyettesítve és tekintetbe véve a 12) és 13) alatti képleteket, azt kapjuk, hogy a folytonos helyeken a mozgásegyenletek

$$-\rho_0\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\frac{d}{da}\left(\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial x}{\partial a}}\right)+\frac{d}{db}\left(\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial x}{\partial b}}\right)+\frac{d}{dc}\left(\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial x}{\partial c}}\right)=0$$

$$-\rho_0\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{d}{da}\left(\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial y}{\partial a}}\right)+\frac{d}{db}\left(\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial y}{\partial b}}\right)+\frac{d}{dc}\left(\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial y}{dc}}\right)=0 \qquad 15)$$

$$-\rho_0\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\frac{d}{da}\left(\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial z}{\partial a}}\right)+\frac{d}{db}\left(\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial z}{\partial b}}\right)+\frac{d}{dc}\left(\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial z}{\partial c}}\right)=0$$

a dinamikai összeférési egyenletek pedig a szakadási felületen:

$$\rho_0\theta\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]+\left[\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial x}{\partial a}}\right]\alpha+\left[\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial x}{\partial b}}\right]\beta+\left[\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial x}{\partial c}}\right]\gamma=0$$

$$\rho_0\theta\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]+\left[\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial y}{\partial a}}\right]\alpha+\left[\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial y}{\partial b}}\right]\beta+\left[\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial y}{\partial c}}\right]\gamma=0 \qquad 16)$$

$$\rho_0\theta\left[\frac{\partial z}{\partial t}\right]+\left[\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial z}{\partial a}}\right]\alpha+\left[\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial z}{\partial b}}\right]\beta+\left[\rho_0\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial z}{\partial c}}\right]\gamma=0.$$

Ha bevezetjük a feszültségi komponenseket a következő egyenlőségek alapján:

$$X_x = -\rho_0 \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial a}}, \quad X_y = -\rho_0 \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial b}}, \ldots$$

ezen egyenletek átmennek a következőkbe:

$$\begin{aligned} \rho_0\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{dX_x}{da} + \frac{dX_y}{db} + \frac{dX_z}{dc} &= 0 \\ \rho_0\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{dY_x}{da} + \frac{dY_y}{db} + \frac{dY_z}{dc} &= 0 \\ \rho_0\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{dZ_x}{da} + \frac{dZ_y}{db} + \frac{dZ_z}{dc} &= 0 \end{aligned} \qquad 17)$$

$$\begin{aligned} \rho_0\theta\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right] &= [X_x]\,\alpha + [X_y]\,\beta + [X_z]\,\gamma \\ \rho_0\theta\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right] &= [Y_x]\,\alpha + [Y_y]\,\beta + [Y_z]\,\gamma \\ \rho_0\theta\left[\frac{\partial z}{\partial t}\right] &= [Z_x]\,\alpha + [Z_y]\,\beta + [Z_z]\,\gamma. \end{aligned} \qquad 18)$$

A 17) alatti egyenletek végtelen kis eltolódások esetén azonosakká lesznek a rugalmas testek végtelen kis deformálódásaira vonatkozó mozgásegyenletekkel, míg a 18) alatti egyenletek, ha pl. kezdőállapotnak választjuk az 1 tartomány t időpillanatbeli állapotát (ha ugyanis t időpillanatban $x=a$, $x=b$, $z=c$) és ρ_0 és θ megfelelő értékeit ρ_1 és θ_1-gyel jelöljük, ismét az impulzus egyenletekre vezetnek. Minthogy ez esetben a φ felület a Ψ felülettel összeesik $\rho_1\theta_1\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right] dfdt$ a hullámfelület df felületelemén átáramló anyag x-menti mozgásmennyiségének magváltozása dt idő alatt, míg

$$\{[X_x]\,\alpha + [X_y]\,\beta + [X_z]\,\gamma\}\, dfdt$$

az ezen felületre ható nyomó erők x-menti összetevőjének impulzusa a dt idő alatt.

Ha ezen eredményeket folyadékokra akarjuk átvinni a belső erők potencziális energiájának sűrűségéről, W-ről fel kell tennünk, hogy kizárólag az $\omega = \frac{\rho_0}{\rho}$ dilatácziótól függ, azaz $W = W(\omega)$.

Ha most ismét kezdőállapotnak a folyadék t időpillanatbeli állapotát választjuk, a 15) alatti egyenletek átmennek a folyadék EULER-féle mozgásegyenletbe, hacsak a p nyomást a

$$p = -\rho_1 \frac{dW}{d\omega}$$

egyenlettel definiáljuk.

A 16) alatti egyenletek ugyane föltevések mellett ismét az impulzus egyenletekbe mennek át.

Az a föltevés, hogy valamely $\Omega(a, b, c, t)$ függvény differencziálhányadosainak szakadása a t időpillanatban a ψ felületen fekszik, maga után vonja azt, hogy $\left[\frac{\partial \Omega}{\partial a}\right]$, $\left[\frac{\partial \Omega}{\partial b}\right]$ és $\left[\frac{\partial \Omega}{\partial c}\right]$ a ψ felület iránykoszinuszaival α, β, γ-val arányosak;* e szerint:

$$\left[\frac{\partial x}{\partial a}\right] = \lambda\alpha, \quad \left[\frac{\partial x}{\partial b}\right] = \lambda\beta, \quad \left[\frac{\partial x}{\partial c}\right] = \lambda\gamma,$$

$$\left[\frac{\partial y}{\partial a}\right] = \mu\alpha, \quad \left[\frac{\partial y}{\partial b}\right] = \mu\beta, \quad \left[\frac{\partial y}{\partial c}\right] = \mu\gamma,$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial a}\right] = \nu\alpha, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial b}\right] = \nu\beta, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial c}\right] = \nu\gamma.$$

a hol λ, μ, ν arányossági szorzók.

Ha most az 1 tartományban $x=a$, $y=b$, $z=c$ a t időpillanatban, akkor

---

* E föltételeket HADAMARD idézett könyvének 81. lapján vezeti le és *azonos föltételek*nek nevezi.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_2 = 1+\lambda a, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)_2 = \lambda\beta, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)_2 = \lambda\gamma,$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_2 = \mu a, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_2 = 1+\mu\beta, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_2 = \mu\gamma,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_2 = \nu a, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)_2 = \nu\beta, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_2 = 1+\nu\gamma,$$

$$\omega_1 = 1$$

$$\omega_2 = 1 + \lambda a + \mu\beta + \nu\gamma.$$

Ezen egyenletekre való tekintettel könnyen belátható, hogy

$$\left[\rho_0 \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial a}}\right] a + \left[\rho_0 \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial b}}\right] \beta + \left[\rho_0 \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial c}}\right] \gamma =$$

$$= \left[\rho_0 \frac{dW}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \frac{\partial x}{\partial a}}\right] a + \left[\rho_0 \frac{dW}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \frac{\partial x}{\partial b}}\right] \beta + \left[\rho_0 \frac{dW}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \frac{\partial x}{\partial c}}\right] \gamma =$$

$$= \left[\rho_0 \frac{dW}{d\omega}\right] a$$

úgy, hogy a dinamikai összeférési egyenletek valóban a következő impulzusegyenleteket szolgáltatják:

$$\rho_1\theta_1 \left[\frac{\partial x}{\partial t}\right] = [p]\, a,$$

$$\rho_1\theta_1 \left[\frac{\partial y}{\partial t}\right] = [p]\, \beta,$$

$$\rho_1\theta_1 \left[\frac{\partial z}{\partial t}\right] = [p]\, \gamma.$$

Kimutattuk tehát, hogy ha az oly anyag mozgását, melyen egy lökéshullám fut keresztül a HAMILTON-féle variáczióprobléma megoldásával írjuk le, a szakadási felületen fennálló dinamikai föltételek e variáczióprobléma folyományai.

*

Egyszerű integrálok variácziójánál a nem folytonos megoldások megfelelő föltételei ERDMANN-*féle föltételek* néven ismeretesek. Tetszőleges többszörös integrálokra vonatkozólag ugyanoly meggondolások alapján, mint a milyenekkel itt a dinamikai összeférési egyenleteket felállítottuk, szintén levezethetők. Itt közlöm a végeredményt.

Ha az

$$I = \int_{(n)} \cdots \int F\left(x_1, x_2, \ldots, x_k, \frac{\partial x_1}{\partial a_1}, \frac{\partial x_1}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial x_k}{\partial a_k}\right) da_1 da_2 \ldots da_n$$

integrál oly variácziója, melynél $x_1, x_2, \ldots, x_k$ variácziói az integrálási határokon eltünnek, oly x-ek mellett zérus, melyek az integráczió tartományban mindenütt differencziálhányadosaikkal együtt folytonosak a

$$\psi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

felület kivételével, a melyen az x-ek első differencziálhányadosai véges ugrásokat szenvednek, akkor a folytonos helyeken érvényesek a variácziószámítás közönséges LAGRANGE-féle alapegyenletei, míg a szakadási felületen a következő, általánositott ERDMANN-féle föltételeknek kell teljesülniök:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x_1}{\partial a_1}}\right]\frac{\partial \psi}{\partial a_1} + \left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x_1}{\partial a_2}}\right]\frac{\partial \psi}{\partial a_2} + \cdots + \left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x_1}{\partial a_n}}\right]\frac{\partial \psi}{\partial a_n} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x_2}{\partial a_1}}\right]\frac{\partial \psi}{\partial a_1} + \left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x_2}{\partial a_2}}\right]\frac{\partial \psi}{\partial a_2} + \cdots + \left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x_2}{\partial a_n}}\right]\frac{\partial \psi}{\partial a_n} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x_k}{\partial a_1}}\right]\frac{\partial \psi}{\partial a_1} + \left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x_k}{\partial a_2}}\right]\frac{\partial \psi}{\partial a_2} + \cdots + \left[\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x_k}{\partial a_n}}\right]\frac{\partial \psi}{\partial a_n} = 0.$$

A lökési hullámok tovaterjedésének dinamikai összeférési egyenletei e szerint a megfelelő HAMILTON-féle variácziós elv ERDMANN-féle föltételei.

Zemplén Győző.

A Mathematikai és Physikai Társulat XII. tanulóversenye.

A folyó évi október hó 7-ére hirdetett tanulóversenyre Budapesten 68, Kolozsvártt 10 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen zárt helyiségben, a Társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett teljesen rendben folyt le, és Budapesten 6^h47^m-ig, Kolozsvárt 6^h25^m-ig tartott. A verseny lefolyásáról mindkét helyen jegyzőkönyv vétetett fel, melynek tanusága szerint a tételek kidolgozására engedett négy órai idő alatt Budapesten 46, Kolozsvárt 7 dolgozat adatott be. A mult évhez képest a versenyzők száma 25-tel nőtt, de a beadott dolgozatok száma csak 8-czal nagyobb, mint mult évben volt.

A tanulóverseny tételei a következők voltak:

1. Mik a szükséges és elegendő feltételei annak, hogy az

$$x + py = n$$
$$x + y = p^z$$

egyenletrendszernek, melyben n és p megadott pozitiv egész számok, legyen pozitiv egész számokból álló (x, y, z) gyökrendszere? Bebizonyítandó továbbá, hogy ilyen gyökrendszer legfeljebb egy van.

2. Az egységnyi oldalú négyzetet az oldalakkal parallel két-két egyenessel 9 egyenlő részre osztjuk és a középsőt eltávolítva képzeljük. A megmaradt 8 négyzet mindegyikét ismét ily módon 9 egyenlő részre osztjuk és mindegyikben ismét a középsőt eltávolítjuk s í. t.

n-szer ismételve ezt, kérdés:

1. hány $\frac{1}{3^n}$ oldalhosszúságú négyzet marad meg?

2. mekkora az eltávolított négyzetek területének összege, ha $n = \infty$?

3. Az ABC háromszög BC oldalán B és C között választott A_1 pontot kössük össze A-val.

A B szögponton áthaladó és AA_1-gyel parallel egyenes messe AC-t a B_1 pontban, a C szögponton át AA_1-gyel parallel vont egyenes messe BA-t a C_1 pontban.

Bebizonyítandó, hogy

$$\frac{1}{AA_1} = \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1}.$$

Jegyzőkönyv

a XII. mathematikai tanulóversenyen beadott dolgozatok megbirálása végett 1905 október 9-én összehivott bizottságnak üléséről, melyen megjelentek: Bartoniek Géza dr., Beke Manó dr., Kőnig Gyula dr., Kopp Lajos dr., Kövesligethy Radó dr., Rados Gusztáv, Szekeres Kálmán dr., Szijártó Miklós.

A bizottság a Budapesten készített 46 dolgozatnak és a Kolozsvárró utólag beérkezett 7 dolgozatnak, összesen 53 dolgozatnak beható átvizsgálása után azt találta, hogy a 2. és 3. feladatot a versenyzők nagyobbrésze helyesen oldotta meg. Neubauer Constantin és Ujj Gyula azonban a 2. és 3. feladaton kívül megoldották, bár némi fogyatékossággal, az 1. feladatot is. Mivel Neubauer Constantin a könnyebb 3. feladat meg oldásánál, Ujj Gyula pedig a nehezebb 1. feladat megoldásánál mutatott több ügyességet, a bizottság nem tekintvén az 1. feladat megoldásában mutatkozó fogyatékosságot, az I. báró Eötvös-díjat Ujj Gyulának, ki a kaposvári állami főgymnasiumban Prilisauer Adolfnak volt tanítványa, a II. báró Eötvös-díjat pedig Neubauer Constantinnak, ki a budapesti VII. ker. állami főgymnasiumban Szemethy Bélának volt tanítványa, itélte oda.

Budapesten, 1905 okt. 9-én.

Szijártó Miklós, mint a biz. előadója. *Kőnig Gyula,* biz. elnök.

Bartoniek Géza, *Kövesligethy Radó,*
Beke Manó, *Rados Gusztáv,*
Kopp Lajos, *Szekeres Kálmán,*
bizottsági tagok.

A f. évi október hó 12-én tartott választmányi ülés e jelentést tudomásul vette és a javaslathoz egyhangúlag járulván, azt határozattá emelte. Ennek alapján a nyomban tartott rendes ülés kezdetén kihirdettetett a verseny eredménye, mire báró Eötvös Loránd elnök a nyerteseknek: Ujj Gyulának és Neubauer Constantinnak meleghangú, a nyertesek volt tanáraikat is megtisztelő szavakkal átnyujtotta a jutalmat.

Az ülést különösen nevezetessé tette, hogy azon Felix Klein göttingeni egyetemi tanár és Gaston Darboux, a franczia tudományos Akadémia örökös titkára is résztvett.

A Mathematikai és Physikai Társulat XII. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

I. Ujj Gyula dolgozata.

I. Mik a szükséges és elegendő feltételei annak, hogy

$$x + py = n,$$
$$x + y = p^z$$

egyenletrendszernek, a melyben n és p megadott positiv egész számok, legyen positiv egész számokból álló (x, y, z) gyökrendszere? Bebizonyítandó továbbá, hogy ilyen gyökrendszer legfeljebb egy van.

$$x + py = n \tag{1}$$
$$x + y = p^z \tag{2}$$

2)-t $-p$-vel megszorozva, 1)-ből kivonva, kapjuk, hogy

$$x(1-p) = n - p^{z+1}$$

a honnan

$$x = \frac{n-p^{z+1}}{1-p} = \frac{p^{z+1}-n}{p-1} = \frac{(p^{z+1}-1)-(n-1)}{p-1} = \frac{p^{z+1}-1}{p-1} - \frac{n-1}{p-1} \tag{3}$$

2)-t 1)-ből kivonva, kapjuk, hogy

$$y(p-1) = n - p^z,$$

a honnan

$$y = \frac{n-p^z}{p-1} = \frac{(n-1)-(p^z-1)}{p-1} = \frac{n-1}{p-1} - \frac{p^z-1}{p-1} \tag{4}$$

1) Minthogy $\frac{p^{z+1}-1}{p-1}$ és $\frac{p^z-1}{p-1}$ z-nek minden pozitiv egészszámú értéke mellett positiv egész szám, x és y 3) és 4) értelmében csakis akkor lehet egész szám, ha $n-1$ többszöröse $p-1$-nek. x és y positiv akkor, ha

$$\frac{p^{z+1}-1}{p-1} > \frac{n-1}{p-1} > \frac{p^z-1}{p-1}.$$

$p-1$-el egyszerűsítve, -1-et, mint az egyenlőtlenségekre befolyással nem birót elhagyva, kapjuk:

$$p^{z+1} > n > p^z.$$

---

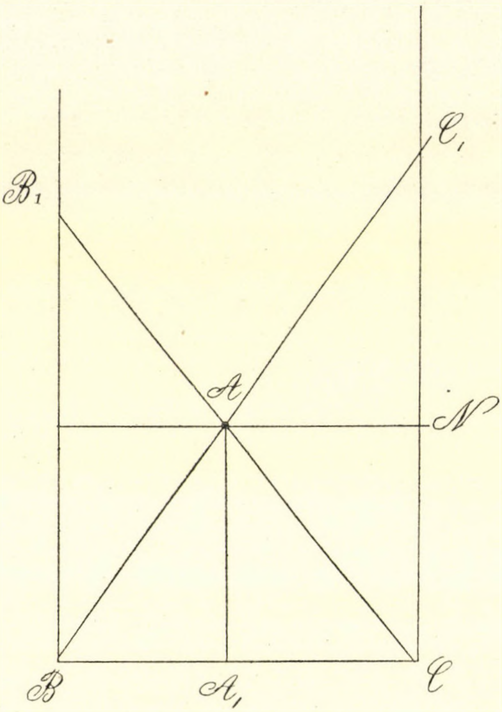
* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

Annak föltételei tehát, hogy az egyenletrendszernek legyen egészszámú gyökrendszere, a következők:

a) $n-1$ egészszámú többszöröse $p-1$-nek,

b) $$p^{z+1} > n > p^z.$$

2) A megfejtések számát és minőségét az előbbiek alapján z értéke határozza meg. Legyen z_1 z-nek az az értéke, a mely megfelel az adott



Ujj Gyula dolgozata.

feltételeknek. Tegyük fel, hogy z-nek egy más positiv egész számú értéke z_2. z_2 kifejezhető a következő alakban:

$$z_2 = z_1 \pm a, \quad z_2 = z_1 + b,$$

a hol $a=1, 2, \ldots z_1$, $b=1, 2, \ldots \infty$. z_2-nek a következő feltételeknek kell megfelelni:

$$p^{z_2+1} > n > p^{z_2},$$

vagy

$$p^{z_1 \pm a+1} > n > p^{z_1 \pm a}, \quad p^{z_1+b+1} > n > p^{z_1+b}.$$

Ha z_1 értéke csak 1-el csökken, vagy növekszik, már valamelyik egyenlőtlenséget nem elégíti ki, tehát $a=b=0$, azaz $z_2=z_1$, vagyis z csak egyetlen egy értéket vehet fel. Ha pedig z-nek csak 1 értéke lehet, x és y is csak 1 értéket vehet fel, vagyis az egyenletrendszernek csak 1 positiv egészszámú gyökrendszere van.

II. Az egységnyi oldalú négyzetet az oldalakkal parallel 2—2 egyenessel 9 egyenlő részre osztjuk és a középsőt eltávolítva képzeljük. A megmaradt 8 négyzet mindegyikét ismét ily módon 9 egyenlő részre osztjuk és mindegyikben a középsőt ismét eltávolítjuk és így tovább, n-szer ismételve ezt, kérdés:

1. hány $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ oldalhosszúságú négyzet marad meg?

2. mekkora az eltávolított négyzetek területének összege, ha n minden határon túl nő?

1) Az 1. felosztás után marad 8 négyzet
A 2. « « « $8 \cdot 8 = 8^2$ «

. . . .

Az n. « « « 8^n négyzet.

Megmarad tehát $8^n \left(\frac{1}{3}\right)^n$ oldalhosszúságú négyzet.

2) Az 1. felosztás után eltávolított négyzetek területe: $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

A 2. « « « « « $8\left(\frac{1}{3}\right)^4$

A 3. « « « « « $8^2 . \left(\frac{1}{3}\right)^6$

. . . .

Az n. « « « « « $8^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$

$$\text{Összesen: } S=\left(\frac{1}{3}\right)^2+8\left(\frac{1}{3}\right)^4+8^2\left(\frac{1}{3}\right)^6+\cdots+8^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left\{1+8\left(\frac{1}{3}\right)^2+8^2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^2+\cdots+8^{n-1}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{n-1}\right\}.$$

A fenti egyenlet jobb oldala oly geometriai haladvány, a melynek első tagja $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, hányadosa $8 . \left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$, összeg tehát:

$$S=\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^n}{1-\frac{8}{9}}.$$

n értékének növekedésével $\left(\frac{8}{9}\right)^n$ értéke közeledik a 0-hoz, s ha n végtelen nagy, $\left(\frac{8}{9}\right)^n$ végtelen kicsiny, a melyet 0-nak vehetünk, s akkor

$$S=\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{1-\frac{8}{9}}$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{1}{9}}=\frac{1}{9}\cdot 9=1,$$

azaz, ha $n=\infty$, akkor az eltávolított négyzetek területének összege eléri az adott négyzet területét.

III. Az ABC háromszög BC oldalán B és C között választott A_1 pontot kössük össze A-val. A B szögponton áthaladó és AA_1-el parallel egyenes messe AC-t a B_1 pontban, a C szögponton áthaladó AA_1-el parallel egyenes messe AB-t a C_1 pontban.

Bebizonyítandó, hogy

$$\frac{1}{AA_1}=\frac{1}{BB_1}+\frac{1}{CC_1}.$$

Szerkesztés: $MN \parallel BC$.

$$AB_1M \triangle \sim AA_1C \triangle$$

(mert szögeik egyenlők), tehát:

$$B_1M : AM = AA_1 : A_1C,$$

$$B_1M=\frac{AA_1 \,.\, AM}{A_1C}$$

$$AC_1N \triangle \sim AA_1B \triangle$$

(mert szögeik egyenlők), tehát

$$C_1N : AN = AA_1 : A_1B,$$

azaz

$$C_1N=\frac{AN \,.\, AA_1}{A_1B}.$$

$$BB_1 = BM + B_1M$$

$$= BM+\frac{AA_1 \,.\, AM}{A_1C}$$

$$CC_1 = CN + C_1N$$

$$= CN+\frac{AA_1 \,.\, AN}{A_1C}.$$

De

$$BM = CN = AA_1,$$

és

$$AM = A_1B, \quad AN = A_1C,$$

behelyettesítve:

$$BB_1 = AA_1\left(1 + \frac{A_1B}{A_1C}\right)$$

$$= AA_1 \frac{A_1B + A_1C}{A_1C}$$

$$CC_1 = AA_1\left(1 + \frac{A_1C}{A_1B}\right)$$

$$= AA_1 \frac{A_1B + A_1C}{A_1B}$$

$$\frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} = \frac{A_1B + A_1C}{AA_1(A_1B + A_1C)} = \frac{1}{AA_1}.$$

Ezt kellett bebizonyítani.

II. Neubauer Constantin dolgozata.

I. Mik a szükséges és elegendő feltételei annak, hogy az

$$x + py = n$$
$$x + y = p^z$$

egyenletrendszernek, melyben n és p megadott positiv egész számok, legyen positiv egész szamokból álló (x, y, z) gyökrendszere?

Bebizonyítandó továbbá, hogy ilyen gyökrendszer legfeljebb egy van.

$$x + py = n$$
$$x + y = p^z.$$

A második egyenletet az elsőből kivonva

$$(p-1)\,y = n - p^z$$

és ebből

$$y = \frac{n - p^z}{p-1}.$$

Az egyenlet jobb oldalán a nevezőhöz adjunk és vonjunk ki belőle 1-et. Ezáltal értéke nem változik

$$y = \frac{(n-1) - (p^z - 1)}{p-1} = \frac{n-1}{p-1} - \frac{p^z - 1}{p-1}.$$

Mint ismeretes

$$\frac{p^z-1}{p-1}=p^{z-1}+p^{z-2}+\dots+1.$$

Miután úgy p mint z positiv egész szám $\frac{p^z-1}{p-1}$ is az.

Tehát y egész szám, ha

$$\frac{n-1}{p-1}$$

is az és positiv, ha

$$\frac{n-1}{p-1}>\frac{p^z-1}{p-1}.$$

$p-1$ positiv szám és így szabad ezen egyenlőtlenséget vele megsokszorozni

$$n-1>p^z-1$$

és

$$n>p^z.$$

Tehát röviden összefoglalva y positiv egész szám, ha $(n-1)$ osztható $(p-1)$-gyel és ha $n>p^z$.

Sokszorozzuk most a második egyenletet p-vel és vonjuk ki belőle az elsőt

$$\begin{array}{r} px+py=p^{z+1} \\ x+py=n \\ \hline (p-1)x=p^{z+1}-n \end{array}$$

és ebből

$$x=\frac{p^{z+1}-n}{p-1}.$$

Adjunk a nevezőhöz és vonjunk ki belőle $+1$-et.

$$x=\frac{(p^{z+1}-1)-(n-1)}{p-1}=\frac{p^{z+1}-1}{p-1}-\frac{n-1}{p-1}.$$

De

$$\frac{p^{z+1}-1}{p-1}=p^z+p^{z-1}+\dots+1$$

ez ismét positiv egész szám, mivel p és z is az.

Tehát x egész szám, ha $\frac{n-1}{p-1}$ is az és positiv, ha

$$\frac{p^{z+1}-1}{p-1}>\frac{n-1}{p-1}.$$

$(p-1)$-gyel újra megsokszorozhatjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát. Lesz:

$$p^{z+1}-1>n-1 \quad \text{vagy} \quad p^{z+1}>n.$$

Tehát x egész szám, ha $n-1$ osztható $(p-1)$-gyel és positiv, ha

$$p^{z+1} > n.$$

Ha z positiv egész szám, akkor $\frac{p^z-1}{p-1}$ is az, mert

$$\frac{p^z-1}{p-1} = p^{z-1}+p^{z-2}+\dots+1.$$

Tehát megfordítva z egész szám, ha $\frac{p^z-1}{p-1}$ is az.

Előbb már láttuk, hogy

$$y = \frac{n-1}{p-1} - \frac{p^z-1}{p-1}$$

és ebből

$$\frac{p^z-1}{p-1} = \frac{n-1}{p-1} - y.$$

Miután y a feladat értelmében positiv egész szám, $\frac{p^z-1}{n-1}$ akkor egész szám, ha $\frac{n-1}{p-1}$ is az és ekkor z is egész szám. z akkor positiv, ha $\frac{p^z-1}{p-1}$ is az. De miután p positiv a

$$\frac{p^z-1}{p-1} = p^{z-1}+\dots+1$$

kifejezés z minden reális egészszámú értékénél is positiv és mivel a kettő egyidejűleg positiv, a mondott feltételek közt z positiv egész szám, ha megelőzőleg x és y is azok.

Tehát az (x, y, z) gyökrendszer positiv egész számokból áll, ha $n-1$ osztható $p-1$-gyel és ha

$$p^z < n < p^{z+1}.$$

Tételezzük fel, hogy egy másik gyökrendszer (x_1, y_1, z_1) is kielégíti az egyenletrendszert s tételezzük fel, hogy $x > x_1$, $y > y_1$

$$x + py = n$$

és

$$x_1 + py_1 = n.$$

E két egyenletet egymásból kivonva

$$(x-x_1)+p\,(y-y_1) = 0.$$

De

$$x-x_1 \geqq 0, \quad p > 0, \quad y-y_1 \geqq 0$$

és így a kifejezés 0 csak akkor lehet, ha

$$x - x_1 = 0, \quad y - y_1 = 0,$$

vagyis

$$x = x_1, \quad y = y_1.$$

Ilyenkor természetesen

$$z = z_1 \text{ is.}$$

II. Az egységnyi oldalú négyzetet az oldalakkal parallel két-két egyenessel kilencz egyenlő részre osztjuk és a középsőt eltávolítva képzeljük. A megmaradt nyolcz négyzet mindegyikét ismét ily módon kilencz egyenlő részre osztjuk és mindegyikben ismét a középsőt eltávolítjuk és így tovább folytatjuk.

n-szer ismételve ezt, kérdés:

1. Hány $\frac{1}{3^n}$ oldalhosszúságú négyzet marad meg?

2. Mekkora az eltávolított négyzetek területeinek összege, ha n minden határon túl nő.

1. Az első művelet után marad 8, $\frac{1}{3}$ oldalhosszúságú négyzet s ebből lesz $8 \,.\, 9$ négyzet, melyeknek oldalhosszúsága $\frac{1}{3^2}$.

Minden középsőt vagyis minden kilenczediket elvéve, marad:

$$8 \,.\, 9 - \frac{8 \,.\, 9}{9} = 8 \,.\, 9 - 8 = 8 \,.\, 8 = 8^2.$$

S ezt folytatva az $\frac{1}{3^n}$ oldalhosszúságú négyzetek száma

$$8^n.$$

2. Az egységnyi oldalhosszúságú négyzet területe 1. Ennek először $\frac{1}{9}$ részét távolítjuk el s így 8 oly négyzet marad, melynek területe egyenkint $\frac{1}{9}$, tehát összesen $\frac{8}{9}$.

A kilenczedrészt ismét eltávolítva marad $8 \,.\, \frac{1}{9^2} = \frac{8}{9^2}$.

Ha ezt tovább folytatjuk, akkor az n-dik műveletnél eltávolított négyzetek területe lesz

$$8^{n-1} \frac{1}{9^n}.$$

Tehát az összes műveletnél elvett négyzetek területeinek összege

$$T = \frac{1}{9} + \frac{8}{9^2} + \frac{8^2}{9^3} + \cdots + \frac{8^{n-1}}{9^n} + \cdots$$

tehát

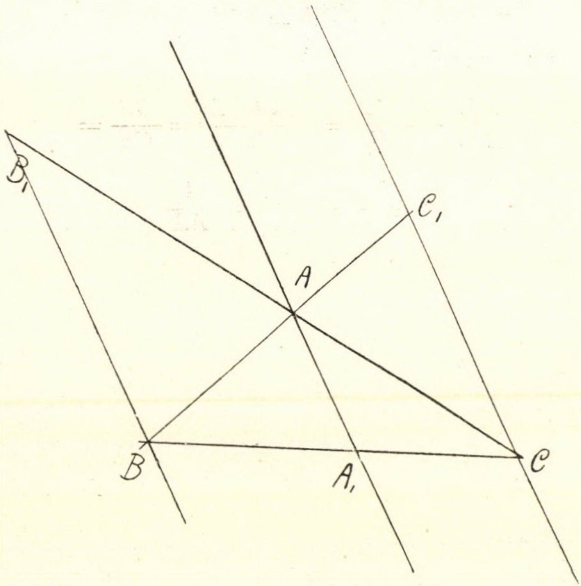
$$T = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{9-8} = 1,$$

mert

$$\frac{1}{9}+\frac{8}{9^2}+\cdots$$

egy konvergens végtelen mértani haladvány, mivel hányadosa $\frac{8}{9}<1$.

III. Az ABC háromszögnek BC oldalán B és C között választott A_1 pontot kössük össze A-val. A B szögponton áthaladó és AA_1-gyel



Neubauer Constantin dolgozata.

parallel egyenes messe AC-t a B_1 pontban. A C szögponton át AA_1-gyel parallel vont egyenes messe BA-t a C_1 pontban.

Bebizonyítandó, hogy:

$$\frac{1}{AA_1}=\frac{1}{BB_1}+\frac{1}{CC_1}.$$

Miután AA_1, BB_1 és CC_1 parallel vont egyenesek

$$ACA_1\,\triangle \sim B_1CB\,\triangle$$

és

$$ABA_1\,\triangle \sim C_1BC\,\triangle.$$

Tehát az egymásnak megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$AA_1 : B_1B = CA_1 : CB$$

és

$$AA_1 : C_1C = BA_1 : CB,$$

de ezen aránylatok így is írhatók

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{CA_1}{CB}$$

és

$$\frac{AA_1}{CC_1} = \frac{BA_1}{CB}$$

e két egyenlet összeadva

$$\frac{AA_1}{BB_1} + \frac{AA_1}{CC_1} = \frac{CA_1 + BA_1}{CB} = \frac{CB}{CB} = 1$$

és ebből

$$\frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} = \frac{1}{AA}.$$

A Mathematikai és Physikai Társulat tizenkettedik rendes közgyűlése.

A választmánynak márczius 11-én kibocsátott meghivója értelmében a Mathematikai és Physikai Társulat XII. rendes közgyűlését folyó évi április 13-án tartotta meg. A kitett íven tagtársaink következő névsorát találjuk:

Balog Mór, Bartoniek Géza, Bauer Mihály, Bein Károly, Beke Manó, Feichtinger Győző, Fényes Dezső, Fekete Jenő, Fraunhoffer Lajos, Frőhlich Károly, Goldziher Károly, Grúber Nándor, Harsányi Dezső, Hausbrunner Vilmos, Hoor Mór, Jordán Károly, Kalecsinszky Sándor, Kármán Ferencz, Károly Irén, Klupathy Jenő, Kopp Lajos, Kőnig Gyula, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Lakits Ferencz, Lévay Ede, Marczell György, Mórocz Kálmán, Oberle Károly, Pekár Dezső, Plósz Pál, Rados Gusztáv, Rados Ignácz, Raffmann Jákó, Riesz Frigyes, Róna Árpád, Róna Zsigmond, Schuller Alajos, Sós Ernő, Steiner Lajos, Szabó József, Szabó Péter, Szekeres Kálmán, Szirtes Ignácz, Szőke Béla, Tötössy Béla, Waldapfel János, Winter József.

A közgyűlés napirendje:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1905-re.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. Választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

A közgyűlést báró Eötvös Loránd elnök nyitotta meg, ezúttal a Társulat anyagi életére vetvén visszapillantást. A Társulat utolsó évében örvendetes anyagi fejlődés mutatkozik, mely egyenesen Feichtinger pénztárnok buzgóságának és ügyességének köszönhető. Mint mindenütt, úgy bizonyára nálunk is az anyagi gondok mulásával fokozottabb fejlődés várható.

A múlt közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítése után a jegyzőkönyv hitelesítésére Fényes Dezső és Riesz Frigyes tagtárs urakat kéri fel.

2. Titkári jelentés Kövesligethy Radótól.

Tisztelt Közgyűlés!

Társulatunk tizenharmadik évéről szóló jelentésemet e közgyűlést előkészítő választmányi ülésünknek egy örvendetes jelentésével kezdem. Érdemes pénztárnokunk beszámolóját azzal végezte, hogy immár nincs kifogása ellene, ha a titkárság lapunknak nehány évvel ezelőtt szűkes helyzetünktől megszabott és ezóta aprólékos gonddal betartott minimális terjedelmét ezentúl némileg bővíteni óhajtaná.

Ime tehát, megvan úgy saját tapasztalatunk szerint, mint egy más társulat egyik legközelebbi pályázatán is várakozáson felüli számban megnyilvánult, a mi társulatunkba talán még be sem vont szellemi erő, melyet, ha így fejlődik a jövő, már nem nyügöz nyers anyagi gond. És e biztatással kezdhetjük az új évet.

De van az anyagi gondnak még egy egész más, ép oly komoly neme; ennek béklyói alól felszabadítani a lappangó szellemi erőket, már nem a pénztárnok, ez magának a Társulatnak dolga. Úgy veszem észre, a gondolat foglalkoztatta is már Társulatunknak mindkét tudomány-szakmáját művelő tagjait és bár végleges fogalmazásban nem jelent még meg, azon óhajban nyert kifejezést, hogy üléseink általánosságban inkább referáló ülések jellegét öltsék. Ez talán csak más nyilvánulása ama szükségképen egyoldalú panaszomnak, hogy kisérleti előadásokban hiányt szenvedünk és azon más oldalról is kifejezett kivánságnak, hogy «bár csak alkalma nyilnék a lappangó erőknek a kisérleti téren való müködésre is, a mely hazánkban összehasonlítva a külfölddel, fájdalom, még nagyon el van maradva, még pedig most már nem annyira a munkaerő, mint inkább az anyagi eszközök hiánya miatt.*

Legyen szabad e kérdésben legilletékesebb tagtársunk véleményét megjegyzéssel kisérnem, mely talán rajtunk is némileg segíthet.

A tudomány gyors haladása mellett is neves csillagászok nem ritkán nagyterjedelmű munkásságra utalnak, mely a legkezdetlegesebb segédeszközökkel, vagy épen műszerek nélkül fejthető ki, és a tudománynak mégis nagy hasznára lehet.

---

* Természettudományi Közlöny 1905. 426. füzet 188. lap.

És hogy ilyesmi a physikában is lehetséges, G. H. DARWIN-tól tudjuk,* a kinek vonatkozó nézetét épen végkövetkeztetéseért idézem. «Sokan azt hiszik ma, hogy a tudomány előbbrevitele csak tökéletes műszerekkel lehetséges, holott számos, igen kényes kisérlethez kártyapapir, parafa és pecsétviasz is elég volt. Hogy egyetemi laboratoriumban annyi finom készülékkel találkozunk, annak főoka, hogy a tanár alig foglalkozhatna nagyobbszámú hallgatósággal, ha minden egyesnek meg kellene mutatni a műszer felállítását és jókarba helyezését; viszont a hallgató is csak igen korlátozott anyagot győzne, ha mérési előkészületei napokra terjednének. A nagy laboratoriumoknak valóban megvan az az árnyoldaluk, hogy a hallgatóságnak nagy zömét gyámoltalanná teszik: eltörpítik találékonyságát és ügyességét. A tudományos munkát, tömegre nézve, kétségtelenül rendkívüli mértékben fejlesztették e berendezések, de úgy látszik, hogy a valóban nagy kutatók számára befolyással nincsenek. De nem szeretném azt a benyomást kelteni, mintha az én itéletem szerint a nagy laboratoriumok nem járnának haszonnal. Kétségtelen mindenesetre, hogy azok nélkül nagy hallgatóságnak tudományt előadni nem lehetne és vannak elvégre is kutatások, melyeknél a műszerek minden kigondolható tökéletesítése szükséges. Az én állításom csupán az, hogy a laboratoriumok alig emelték a nagy kutatók számát, és hogy a tudománykedvelő ne mondjon le csüggedve azért, hogy laboratoriumhoz nem férkőzik.»

Bár kedvet merítene e biztatásból mindenki!

*

Az elmult társulati évben kilencz rendes, mindvégig nagy érdeklődéssel látogatott ülésen hat-hat előadó kilencz mathematikai és hét physikai tárgyról értekezett. A Társulat adminisztrativ teendőit választmányi üléseink látták el; egyik főeredményünk, hogy a lenyügöző gondoktól a Társulat lassan-lassan szabadúl.

A Mathematikai és Physikai Lapok XIII. évfolyama $25^1/_2$ ív terjedelemben jelent meg. Kilencz szerző tiz mathematikai tárgygyal, hat szerző hét physikai értekezéssel tette változatossá tartalmát. Talán szabad reménylenünk, hogy a mechanikai elvek körül Társulatunkban megindult eszmecsere magában a Társulatban nyert végleges megoldást.

A XI. mathematikai tanulóversenyt 1904 október 8-án tartottuk meg. Budapesten és Kolozsvárott együttesen 53 versenyző jelentkezett, egygyel több, mint az elmúlt esztendőben. Mégis a külső sikernek is jelentős

---

* A tengerjárás és rokontünemények naprendszerünkben, Budapest, 1904. 13. lap.

emelkedéséről szólhatunk, a mennyiben a beadott dolgozatok száma a mult évieket 20-al multa felül. Az első díjat Riesz Marcel, a másodikat Fuchs István nyerte el és ezenkívül három más tanuló dolgozatát lehetett dicsérettel kitüntetni.

Tagtársaink száma az elmúlt társulati év végén 422, előfizetőink száma 91. A tagok sorában van 17 alapító és 8 hölgy. Biztató jel, hogy újabban oly vállalkozások, melyek a mi tudományunktól látszólag messze állanak, a velünk való érintkezést keresik és velünk cserébe lépni óhajtottak.

Fájdalommal kellett tudomásul vennünk Burkovits Lajos, Csehély Adolf, Csillag Vilmos, Czigler Győző, Kukla István, Petrogalli Géza, Schmidt Sándor, Szenessy Mihály tagtársaink elhúnytát. Egyikök különösen közel állt szivünkhöz és előadásaink sorozata, minden évfolyamunk sokszorosan hirdeti, mennyire szívén viselte Társulatunk felvirágozását. Emlékök áldott legyen!

Az év történetének még két örvendetes mozzanatával zárom jelentésemet. A Magyar Tudományos Akadémia III. osztálya és annak Mathematikai és Természettudományi Bizottsága most is kegyes volt Társulatunkat évi 2000 koronával támogatni. Mondjunk köszönetet a hathatós segítségért és kérjük ki az Akadémia jóindulatát a jövőre is. De nem csupán jótétemény, fény is áradt ránk. Az őszinte öröm jóleső melegével vettük a magas kitüntetést, mely Társulatunk két vezető férfiának hosszú, tudományos munkásságát külsőleg is elismeri.

És most hálát mondva mindazoknak, a kik Társulatunk tevékenységében bármily módon is résztvettek, kérem a tisztelt Közgyűlést, hogy a titkárság e jelentését tudomásul venni méltóztassék.

Budapest, 1905 április 13-án.

3—4. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1905-re és a pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.

M. T. Közgyűlés!

Néhány évvel ezelőtt, midőn az elmúlt év zárszámadását s a következő év költségelőirányzatát a M. T. közgyűlésnek előterjesztettem, kifejezést adtam annak, hogy anyagi helyzetünk aggodalommal tölt el, mert nem volt reményem arra, hogy a M. T. Akadémia segélyén kívül más külső segélyben részesüljünk, abban pedig, hogy magunk erejéből sorsunkon lendíthessünk, nem bíztam.

E külső segély, a magas kormány segélye, módot nyújtott volna arra is, hogy a Math. és Phys. Lapokat nagyobb terjedelemben adjuk ki.

A magas kormánynál azonban Társulatunk számára segélyt kieszközölni nem tudtunk.

Így tehát, lemondva folyóiratunk bővítéséről, csakis a Magyar Tud. Akadémiára, melynek, azt hiszem, e helyen is mondhatunk hálás köszönetet, és saját magunkra, tagtársainkra támaszkodhatunk. Nehéz feladat, kellemetlen feladat jutott nekem, Tagtársaimat békében nem hagyva, sürgetve kérni az alapszabályszerű fizetések teljesítésére. Kérő szavam nem volt eredménytelen s most módomban van egy jobb jövőt igérő zárszámadást előterjeszteni.

Összes bevételeink … … … … …	9565·90 K	
míg összes kiadásaink … … …	7540·87	K-át tettek ki,
tehát … … … … … … … …	2025·03 K	

maradványunk van, részint készpénzben, részint takarékpénztári betétben.

Ezen felül még 490 K követelésünk is van; de van 1558·29 K tartozásunk is, t. i. utolsó füzeteink nyomdai költsége és írói t. díja. Ezen összegek egybevetése által megkapjuk a tiszta maradványt, azaz 956·74 K, közel 1000 K.

Talán az egyes tételekről részletes jelentést nem kiván a M. T. Közgyűlés, hiszen ha a zárszámadás eredményeit az előirányzattal egybevetjük, könnyen meggyőződhetünk, hogy míg a bevételek majdnem minden tételben az előirányzatot fölülmulták, addig a kiadások az előirányzott összegeken alul maradtak, vagy csak egy csekélységgel multák fölül, még abban az esetben is, ha a valódi kiadásokhoz az év végén fönnálló tartozásokat hozzászámítjuk.

Alaptőkénk 1904-ben 400 K-val szaporodott, a mennyiben Gruber Nándor és báró Harkányi Béla tagtársaink 200—200 K-val az alapító tagok közé léptek. A befizetett összegeket az alaptőkéhez csatoltam.

Az 1905. évi költségelőirányzat a megelőző évitől annyiban különbözik, hogy az előfizetési dijakból 650 K helyett 700 K-át voltam bátor fölvenni, továbbá hogy a tartozásokat a mostani mérlegnek megfelelően állítottam be a költségvetésbe és ehhez képest 13 K 26 f hiányra volna kilátásunk.

Kérem a M. T. Közgyűlést, kegyeskedjék jelentésemet tudomásul venni, s úgy a zárszámadásra, valamint az előirányzatra nézve határozatot hozni.

E jelentés meghallgatása, az alábbi számadás és költségelőirányzat tételenkint való mérlegelése és a pénztárvizsgáló-bizottságnak felolvasott jelentése alapján a közgyűlés egyhangúlag megadja a pénztárnoknak a felmentvényt és 1905-iki költségelőirányzatát elfogadja.

1904. évi

BEVÉTEL	Előirányzat Kor.	fill.	Eredmény Kor.	fill.
1904. évi zárszámadási maradvány	2523	59	2523	59
Alapitói dij	—	—	400	—
Folyó és köv. évi tagdijak	2200	—	2254	—
Hátralékos tagdijak	200	—	719	—
M. Tud. Akademia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	300	—	190	—
Kamatok	540	—	545	—
Előfizetési dijak	650	—	842	—
Vegyes és átmeneti bevételek			92	31
	8774	41	9565	90

Vagyon-

VAGYON	1903. év végén Kor.	fill.	1904. év végén Kor.	fill.
Forgó tőke:				
Készpénz	118	18	289	53
Leszám. és pénzv. bankban takp. betét	48	80	48	80
M. kir. postatakarékpénztárban	2024	51	1231	70
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján	332	—	455	—
Alaptőke:				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján:				
a) Készpénz	200	—	600	—
b) 2600 K névért. főv. kölcsönkötv. à 87	2262	—	2262	—
c) 1 drb koronajáradék-kötvény	100	—	100	—
Első hazai takarékpénztári betét	108	—	108	—
Majthényi Ottó-féle alap	10000	—	10000	—
Tagdijhátralékok	250	—	250	—
Föl nem vett hirdetési dij	140	—	240	—
	15533	49	15585	03

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk

A választmány megbizásából:

Rátz László s. k. *Beke Manó dr.* s. k.

1905. évi költség

BEVÉTEL	1904. évi előirányzat Kor.	fill.	1905. évi előirányzat Kor.	fill.
1904. évi zárszámadási maradvány	2523	59	2025	03
Folyó évi tagdijak	2200	—	2200	—
Hátralékos tagdijak	200	—	200	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	300	—	340	—
Kamatok	540	—	540	—
Előfizetési dijak	650	—	700	—
Hiány	360	82	13	26
	8774	41	8018	29

zárszámadás.

KIADÁS	Előirányzat Kor.	fill.	Eredmény Kor.	fill.
Nyomdai költségek	4189	41	2862	96
Irói tiszteletdijak	3525	—	3173	14
Expeditio	400	—	271	85
Irodai költségek	500	—	506	32
Vegyes és átmeneti kiadások	—	—	168	60
Középiskolai mathemat. tanulóverseny	160	—	158	—
Alaptőkéhez	—	—	400	—
Pénztári maradvány *a)* készpénzben			289	53
b) takarékp. betétben			1735	50
	8774	41	9565	90

mérleg.

TEHER	1903. év végén Kor.	fill.	1904. év végén Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	1189	41	1195	49
Irói tiszteletdijak	1125	—	362	80
Tiszta vagyon	13219	08	14026	74
	15533	49	15585	03

Budapesten, 1905 márczius 21.

Kövesligethy Radó dr. s. k.
ügyvivő titkár.

A közgyülés megbizásából :

Bogyó Samu s. k. *Balog Mór* s. k.

előirányzat.

KIADÁS	1904. évi előirányzat Kor.	fill.	1905. évi előirányzat Kor.	fill.
Nyomdai tartozás	1189	41	1195	49
Folyó évi nyomdai költségek	3000	—	3000	—
Irói tiszteletdijak:				
a) a mult évre	1125	—	362	80
b) a folyó évre	2400	—	2400	—
Expeditio	400	—	400	—
Irodai költségek	500	—	500	—
Középisk. math. tanulóverseny	160	—	160	—
	8774	41	8018	29

Feichtinger Győző
pénztárnok.

5. Választmányi tagok választása.

A Társulat alapszabályainak 20. §-a értelmében a választmányból kilépnek Beke Manó, Grúber Nándor, báró Harkányi Béla és Réthy Mór.

A választás idejére elnök felfüggeszti az ülést és Lakits Ferencz elnöklete alatt Fröhlich Károly és Jordán Károly tagtársakból álló szavazatszedő-bizottságot küldi ki.

A választás megejtetvén, a bizottság jelenti az újból megnyitott közgyűlésnek, hogy a beadott 38 szavazatból Beke Manó, Grúber Nándor, báró Harkányi Béla és Réthy Mór 37 szavazattal, tehát egyhangulag újból választmányi tagul választatott.

6. Indítványok.

Minthogy indítvány egyáltalán nem adatott be, a napirend utolsó pontja magától elesett.

*

Elnök végre a pénztár vizsgálására a közgyűlés nevében ismét Balog Mór és Bogyó Samu tagtársakat kérte fel és ezzel a közgyűlés hivatalos része elintézést nyervén, a közgyűlést berekesztette.

*

A közgyűlést rendes előadó ülés követte, melyen Károly Irén: Kisérletek az egy kontaktusu kohérerrel; Riesz Frigyes: A halmazok (sokaságok) elméletéhez; és Goldziher Károly: A halandósági tábla kiegyenlítése czímen értekezett.

Utalványczim: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás

az 1905. év november hó 1-től deczember hó 31-ig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1902. évre: Fr. Kiss Károly 10 k., Somogyi István 6 k. Összesen ... 16 kor.

1904. évre: Fekete Jenő 10 k., Molnár Aladár 6 k., Szabó Péter 10 k. Összesen ... 26 kor.

1905. évre: Andor Tivadar 10 k., Angheben Albin 6 k., Aranyosi Miksa 10 k., Baló Gyula 6 k., Bein Károly 10 k., Beck Károly 6 k., Bellágh Kalmán 10 k., Báthory József 6 k., Benkó Imre 6 k., Bihary Ferencz 6 k., Bodola László 6 k., Bogyó Samu 10 k., Bozóky Endre dr. 10 k., Bozzay Zoltán 10 k., Bruck Ferencz 10 k., Bruckner Károly 6 k., Bugarszky István 10 k., Butorka Száva dr. 6 k., Csajkás Mihály 6 k., Csemez József 10 k., Csibortits Imre 6 k., Csorba György 6 k., K. Danch Ferencz 6 k., Dávid Lajos 6 k., Demeczky Mihály dr. 10 k., Edelmann Sebő dr. 6 k., Egly Sándor 6 k., Ellend József 6 k., Emszt Kálmán dr. 10 k., Fabinyi Rezső dr. 6., Farbaky István dr. 6 k., Farkas Gyula dr. 6 k., Fekete Jenő 10 k., Feldmann Gyula 10 k., Frank István 6 k., Gerecz Lajos 6 k., Groo Vilmos 6 k., Habán Mihály dr. 6 k., Hajnal Márton 10 k., Halmi János 6 k., Hassák Vidor 6., Hausbrunner Vilmos 10 k., Hlatky Miklós 6 k., Homor István 6 k., Horváth József dr. 6 k., Horváth Kálmán 6 k., Hubatsek Alajos 10 k., Jeney Pál 6 k., Kados Aladár 10 k., Kántor Nándor 6 k., Karlovitz László 10 k., Ketterer Károly 6 k., Király Henrik 6 k., Király László 6 k., Kisgyörgy János 6 k., Kleiszner Rezső 10 k., Klimkó Mihály 6 k., Klupathy Jenő dr. 10 k., Konkoly Thege Miklós dr. 10 k., Korbuly Emil 6 k., Kovács István 6 k., König Dénes 6 k., Kövesi Ferencz dr. 6 k., Kurländer Ignácz 10 k., Lutter János 10 k., Marcsiss János 6 k., Mátray Rudolf 6 k., Medvigy János 6 k., Melczer Gusztáv dr. 10 k., Mialovich Mór 10 k., Mikola Sándor 10 k., Novothny Endre 6 k., Osztrogonácz János 6 k., Pap Lajos 6 k., Perényi Candid 6 k., Perjessy László 6 k., Petry Gyula 6 k., Pfeifer Péter dr. 6 k., Pizetti Rokus 6 k., Plischka Norbert 6 k., Privorszky Alajos 6 k., Ráth Arnold 10 k., Ratkovszky Pál 6 k., Rátz László 10 k., Renner János 6 k., Riesz Frigyes dr. 6 k., Róna Zsigmond 10 k., Roth Ágoston 6 k., Rucsinszky Lajos 10 k., Schenek István dr. 10 k., Schwartz Ottó dr. 6 k., Skopal István 10 k., Steécz György 6 k,, Steiner Miklós 6 k., Strasser Sándor 6 k., Streitmann András 6 k., Strompf László 6 k., Süss Nándor 10 k., Szépréthy Béla 6 k., Szombathy Kálmán 6 k., Tangl Károly dr. 6 k., Tihanyi Miklós 6 k., Ulreich Ede 6 k., Uzoni Imre 6 k., Vater József 10 k., Vidovich Béla 6 k., Winter József 10 k., Zettner Ede 10 k., Zilahy László 6 k. Összesen ... 802 kor.

1906. évre: Bláthy Ottó 10 k., Klúg Lipót dr. 6 k., Pap János 10 k., Schwarcz Ottó dr. 4 k., Vidovich Béla 6 k. Összesen ... 36 kor.

Előfizetési dijat fizettek:

1905. évre: Budapesti áll. polg. iskolai tanitóképző 10 k., Dévai áll. főreálisk. 10 k., Hajdú-böszörményi ev. ref. főgymn. 10 k., Hepke Bertalan 10 k., Kolozsvári kegy. rendi Kalazantinum. 10 k., Miskolczi ev. ref. főgymn. 10 k., Pozsonyi áll. főreáliskola 10 k., Szamosujvári községi főgymn. 10 k., Temesvári felső leányiskola 10 k., Ungvári áll. főreáliskola 10 k. Összesen ... 100 kor.

1906. évre: Lőcsei áll. főreáliskola 10 k. Összesen ... 10 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból ...	42 kor.	január 1-től	686 kor.
F. és köv. évi tagsági dijakból	838 kor.	« «	2340 kor.
Előfizetési dijakból ...	110 kor.	« «	830 kor.

Kelt Budapesten, 1905. deczember 31.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-ut 15.)