MATHEMATIKAI
ÉS
PHYSIKAI LAPOK

TIZENKETTEDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1903

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

TIZENKETTEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

Második—Harmadik füzet.

Negyedik füzet.

Ötödik füzet.

*

Hatodik füzet.

Hetedik füzet.

Nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Ismertető és önálló dolgozatok.

Physikai Laboratorium.

Irodalom.

Megoldott feladatok.

Társulati ügyek.

Vegyesek.

BOLYAI JÁNOS SZÜLŐHÁZÁRA ELHELYEZETT EMLÉKTÁBLA KÉPE.

BOLYAI JÁNOS «UJJ, MÁS VILÁGÁNAK» ISMERTETÉSE.

1. A Mathematikai és Physikai Lapok e füzete Bolyai Bolyai János emlékének van szentelve, annak a rendkivűli férfiúnak, a ki Temesvárról 1823 nov. 3-ról keltezett levelében, 21 éves korában megirhatta édes atyjának B. Bolyai Farkasnak, hogy «semmiből egy ujj, más világot teremtettem», és a ki egész életét az ő új világa mivelésének szentelte. Miben áll ez az ő új világa, az ő új tere? Hát lehet egyáltalán terekről beszélni? A mi anyagi világunk tere, az a tér, melyben a föld, a bolygók és a naprendszerek miriádjai mozognak, bizonyára csak meghatározott, csak egyetlen egy lehet. Ámde ismerjük-e valamennyi tulajdonságát annyira, hogy azok alapján ezt a, mondjuk röviden, tapasztalati teret teljesen, egyértékűleg, jellemezhessük? Igaz, hogy az ókor nagy geometrája Euklides összeállította a térre vonatkozó ama axiomákat és postulatumokat, melyekből az ő bámulatra méltó rendszerét, a tér tudományát felépitette, és a melyekkel egy teljesen meghatározott teret jellemez. De kérdés, hogy ez az Euklides tere-e az egyetlen egy, a *valóságos* világtér. Hátha vannak az ő axiomái és postulatumai között olyanok is, a melyek ez anyagi világban nincsenek megvalósitva? Ha vannak, akkor a meg nem valósitottakat vagy kéteseket kiiktatva a geometria rendszeréből, míg a többieket a kétségen fölül állókat fentartva, ezeken bizonyára egy új általánosabb geometriának kell felépithetőnek lenni, mely az Euklidesét mint speciális esetét öleli fel. Akkor azután csakugyan volna nem egy, hanem több, esetleg végtelen sok egyaránt gondolható, és így a mi lelkünk világában egyaránt élő, világtér; és ekkor

azután nem csak lehetne, hanem kellene is beszélni terekről «ujj, más világról». Ilyen új, más világot fedezett fel az ifjú Bolyai János abban az időben, a mikor nagy riválja Lobatsefskij még csak annyit tudott, hogy az Euklidesi geometria egyedüli lehetőségét bizonyítgató addigi munkák valamennyien hibásak. Ezt az új világot írja le mesteri módon az Appendix, melyet végleges fogalmazásában 1829-ben küldött meg atyjának,* ugyanabban az évben, a melyben Lobatsefskij «A geometria első alapjai» czímű munkáját orosz nyelven közzétette. És ezekkel a tiszta filosofiára nézve is nagy fontosságú munkákkal új út nyilik meg a mathematikai buvárlatok számára, melyek nyomán egy napról-napra óriási arányokban növő már most is rengeteg irodalom fejlődött.

Feladatom e helyen a tisztelt olvasót Bolyai és Lobatsefskij terével megismertetni, és a forrásmunkák tanulására előkészíteni és serkenteni. E megismertetést olyan úton teszem, mely egyúttal betekintést enged a geniális RIEMANNtól kigondolt véges térnek a tudományába is. Ezúttal előadom Bolyai állandó görbületi vonalait és felületeit, és ez utóbbiaknak, valamint általánosan az állandó (akár positiv, akár negativ) görbületű felületeken legrövidebb vonalaktól bezárt idomoknak a trigonometriáját. Egy következő alkalomnak tartom fenn folytatólag előadni Bolyai területmeghatározását, és a kör négyszegesitésére vonatkozó remek exact szerkesztéseit.

2. Bolyai tere, épúgy mint az Euklidesé, végtelen nagy. Bolyai terében, épúgy mint az Euklideseében, a sik az a felület, mely a teret, az egyenes az a vonal, mely a sikot két teljesen szimmetriás részre osztja; az egyenes teljesen meg van határozva két, a sik három (nem egyenesen fekvő) pontja által; és az az egyenes, melynek *két* pontja egy sikon van, *egészen* azon a sikon van. Euklides gömbje és köre Bolyainak is gömb, kör. A gömb és sik, a kör és egyenes egymásra való vonatkoztatása hasonlóképen ugyanaz. Egyenes hosszának mérése egyenes da-

* L. Bedőházi, A két Bolyai, 428. lap.

rabbal, és körív mérése vele egyenlő sugarú körívvel, a folytonosság elvével kapcsolatban, épúgy megadja a hosszúságnak és a szögnek arithmetikai teljes meghatározását. A szöget illetőleg, melynek csúcsa a kör középpontjában van, és melynek két szára e körnek két sugara (félegyenes), a következőkben állapodjunk meg: Ha e két szár közé fogott körív s, és a kör egész kerülete K, akkor $s:K$ számérték jellemzi a szögnek ω-val jelölt arithmetikai mértékét e képlet alapján

$$\omega = 2\pi \frac{s}{K}. \tag{1}$$

E megállapodás annyit jelent, hogy az egész szöget 2π-vel jelöljük; nyilvánvaló továbbá, hogy ugyanannál a szögnél az $s:K$ viszony független az épen választott körsugár nagyságától.

I. Ha $AD \perp BD$, $AD \perp CD$, akkor AD merőleges minden más egyenesre is, mely a D ponton átmenve a BCD síkban fekszik.

II. Ha AD és $A'D'$ egy ugyanazon síkban feküvén $AD \perp DD'$, $A'D' \perp D'D$, akkor az idomot AD tengely körül forgatva

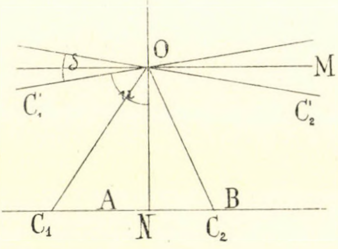
a) a DD' egyenes síkot ír le, mely $\perp AD$,
b) e DD' egyenes leírta síkra $\perp A'D'$ egyenes,
c) e DD' « « « $\perp AD$ és $A'D'$ síkja is.

Épígy igaz marad a gulának, tehát határátmenet révén a kúpnak is, síkra való lefejthetősége; miután itt csak a síkra vonatkozó axiomák, az egybevágósági tételek és a folytonosság elve jő szóba.

Az egyenes szinte-erői; állandó görbületű vonalak és felületek.

3. Huzzunk (1 idom) az AB egyenes C_1 és C_2 pontjaihoz a kivüle eső O pontból OC_1 és OC_2 egyeneseket; mozogjanak a C_1 és C_2 pontok az AB egyenesen, és pedig az első az AB értelemben, a második az ellenkezőben: akkor az OC_1 és OC_2

egyenesek forognak az O pont körül mindegyik más értelemben. És ez egyenesek folytatva forgásukat a megkezdett értelemben, egyszer csak elpattannak az AB egyenestől. Nevezzük a két forgó egyenest az elpattanás pillanatában $O'C_1'$, illetve $O'C_2'$ egyeneseknek. Már mostan két eset gondolható: vagy egymás folytatásai a $C_1'O$ és OC_2' vagy nem. Az első esetben a nevezett $C_1'O$ és OC_2' együttesen egyetlen egy $C_1'C_2'$ egyenest alkotnak; második esetben a $C_1'O$ meghosszabbítása az OC_2'-val δ szöget képez. Mind a két eset egyaránt gondolható; de hogy a természetben a két gondolható eset közül melyik van megvalósítva, azt direct mérések semmikép se dönthetik el abszolut pontossággal.



1. idom.

Euklides a priori felteszi, hogy a természet az első gondolható esetet valósítja meg: ezt a feltevését mondja ki az ő ismeretes ötödik postulatumában, hogy bármely ponton át egy adott egyeneshez *egy* egyenes vonható párhuzamosan, mely postulatumot XI. axiomának is neveznek. Erre a feltevésre alapítja Euklides geometriáját. Ez a régi, a szokott geometria.

Bolyai a kérdés eldöntését függőben hagyva, a priori a második esetet is megengedé és kérdezé, milyen következtetések vonhatók akkor is, ha az $C_1'O$ és OC_2' egyenesek egymásnak nem a folytatásai, hanem a $C_1'O$ meghosszabbítása az OC_2'-vel δ szöget zár be. Így ő egy új, az Euklidesénél általánosabb, azt mint speciális esetét felölelő geometriát épitett fel, melyet abszolut geometriának (Geometria absolute vera) nevezett el.

4. Bolyai Appendixében az OC_1' és OC_2' egyenesek helyzetét az AB egyeneshez (miként Bolyai János irja,* atyjától feltalált) e következő jelöléssel jellemzi:

$$OC_1' \parallel\!| AB; \quad OC_2' \parallel\!| BA.$$

* Bedőházi, A két Bolyai, Élet- és jellemrajz; pag. 193.

Szavakban BOLYAI JÁNOS hátrahagyott iratai értelmében úgy fogjuk e kölcsönös helyzetet jellemezni, hogy az OC_1' *szinte-erője* (vagy *aszimptotája*) az AB-nek, az OC_2' pedig szinte-erője a BA-nak.

Képzeljük az O középpontból leirt összes sugársort; e sugársort a visszafelé is meghosszabbitott szinte-erők, az OC_1' és OC_2' egész egyenesek, négy csoportba osztják: ezek közül kettőben (csúcsszögekben) olyan sugarak foglalnak helyet, a melyek vagy maguk vagy meghosszabbitásaik valós metszést szolgáltatnak a végtelen AB egyenesen; a másik kettőben pedig az AB (láthatólag) nem metszői foglalnak helyet. A metszők csúcsszögét két egyenlő részre osztja az AB-re merőleges ON egész egyenese; a nem metszők csúcsszögét két egyenlő részre osztja az ON-re merőleges OM-nek az egyenese. Az

$$|NOC_1'| = |NOC_2'| = u$$

szinte-erői szögek tehát hegyes szögek.

Következmény. BOLYAI geometriájában az u szög hegyes lévén, ebből folyólag bármelyik egyenesoldalú háromszögnek a szögösszege $< \pi$. Ugyanis a C_1NOC_1' idomban az N-nél lévő szög $= \frac{\pi}{2}$, az O pontnál lévő szög pedig $= u$, míg a végtelenben levő szöge $= 0$.* A szögösszeg tehát

$$= \frac{\pi}{2} + u < \pi.$$

Ebből LEGENDRE ismeretes tételéből folyólag következik, hogy mindenik egyenesoldalú háromszög szögösszege is $< \pi$.

5. *A paracziklus.* Szerkeszszünk szabályos sokszöget következőképen: Legyen (2. idom)

$$O_1M \perp MC; \quad O_1C_1 \parallel MC,$$

* Ennek a szemléletből vett állításnak pontos bizonyitására nézve az Appendixre utalok; hasonlóképen azon tételnek a bizonyitására nézve is, hogy két egyenes, mely egy harmadik AB-nek a szinte-erője, egymásnak is a szinte-erője.

épúgy mint az előző (1.) idomon. A folytonosság elvéből folyólag kell lenni az O_1M egyenesen egy olyan Ω_1 pontnak, a melyből $\Omega_1 M_1$ merőlegest vonva az O_1C_1-re

$$\Omega_1 M_1 = \Omega_1 M.$$

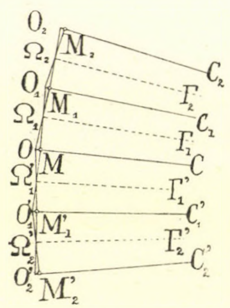
Vonjuk meg ez $\Omega_1 M_1$ egyenest, melynek metszéspontja az MC-vel legyen O; felezzük az $M\Omega_1 M_1$ szöget $\Omega_1 \Gamma_1$ egyenessel, mely az eddig szerkesztett idomot két szimmetriás részre osztja, úgy hogy

$$CMO\Omega_1\Gamma_1 \equiv C_1M_1O_1\Omega_1\Gamma_1.$$

Ennélfogva az $\Omega_1\Gamma_1$ szinte-erője úgy az OC, mint az O_1C_1 egyeneseknek.

A nyert egész idomot $180°$-kal forgatva az O_1C_1 tengely körül nyerjük az O_1C_1 fölött rajzolt idomot, úgy hogy

$$CMO\Omega_1O_1M_1C_1 \equiv C_1M_2O_2\Omega_2O_2M_2C_2;$$



2. idom.

ez utóbbi idomot $\Omega_2\Gamma_2$ egyenes két szimmetriás részre osztja. E körülményből folyólag fedésbe hozható a $CMO\Omega_1O_1M_1C_1$ idom a másik idommal a nélkül is, hogy a maga síkjából kimozdíttassék. És az $\Omega_2\Gamma_2$ és O_2C_2 szinte-erői az O_1C_1-nek.

Az egész nyert idomot forgassuk az O_2C_2 tengely körül $180°$-kal, nyerünk egy új idomot, melyet ismét szélső tengelye körül forgatva, újat nyerünk. Mindig a síknak OC feletti részén foly a szerkesztés, és így mindig új meg új a régiekkel egybevágó részekből álló szabályos idomot nyerünk végtelenségig.

Épígy $180°$-kal való átforgatás révén létesül az OC feletti idomból az OC alatti idom. Vegyük ezentul az egész idomnak

$$\ldots M_2'M_1'MM_1M_2 \ldots$$

csúcspontok jellemezte szabályos sokszögét szemügyre, és sürítsük a csúcspontjait oly módon, hogy a $CM\Omega_1\Gamma_1$ idomból kiindulva ugyanazt ismételjük, a mit előbb a CMO_1C_1 idomon végeztünk. Így az $\Omega_1\Gamma_1$, $\Omega_2\Gamma_2, \ldots$ egyeneseken új M pontokat és az OC, $\Omega_1\Gamma_1, \dots$ szinte-érők között új szinte-érőket nyerünk. Az eljárást folytatva, e szerint a szemügyre vett szabályos sokszög pontjait vég nélkül süríthetjük.

Az M pontok mértani helye egy görbe, melyet BOLYAI Appendixében az *MC tengelyhez tartozó L vonalnak*, hátrahagyott irataiban pedig *paracziklus*nak nevez. LOBATSEFSKIJ e vonalat *határvonal*nak nevezi. A vonal szerkesztésénél fogva épúgy egyenletes, önönmagán eltolható, mint egy körív a maga egész körvonalán; az elforgatással a tengelyek mindig tengelyekkel jönnek fedésbe; a vonal mindenik tengelyéhez képest egyformán fekszik, épúgy, mint a körvonal mindegyik átmérőjéhez. A vonal görbülete egy szóval állandó, mint a köré; normálisai, a tengelyek, a végtelenben metszvén egymást, a vonal kör gyanánt tekinthető, melynek középpontja a végtelenben van. Tényleg az $M\Omega_1M_1 \dots$ azon eljárás szerint szerkesztetett, mint a kör körül írt sokszög.

Ime egy lényeges különbség BOLYAI tere és EUKLIDES tere között: EUKLIDES végtelen sugarú köre *egyenes;* BOLYAI végtelen sugarú köre, a *paracziklus*, *görbe* vonal. Ebből folyólag nem állhat meg BOLYAI geometriájában az EUKLIDESének az a tétele, hogy a vonal görbülete egyenlő a görbületi sugár reciprok értékével. Ellenben fennáll a görbület ismeretes definicziója, hogy a vonal görbülete

$$g = \lim \frac{\omega}{s}, \qquad (2)$$

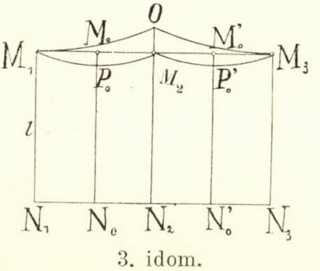
ha s az ívelem hossza és ω az ívelem két végén húzott érintők alkotta külső szög. Ez az érték, miként később látni fogjuk, a paracziklus mindenik pontjában egy ugyanazon állandó $\frac{1}{k}$, hol k a valóságban minden bizonynyal rengeteg nagy hosszúságú vonal: EUKLIDES geometriájában $k = \infty$.

6. *Az egyeneshez egyenközü vonalok: hipercziklusok.*

Szerkeszszük N_1N_2 egyenesre merőlegesen az N_1M_1 és N_2O egyeneseket, és N_1M_1-re merőlegesen az M_1O egyenest; tehát (3. idom)

$$N_1M_1 \perp N_1N_2; \quad N_2O \perp N_1N_2; \quad M_1O \perp N_1M_1.$$

Az $N_2N_1M_1ON_2$ négyszög három csúcspontjában derékszög lévén, a 4. következményéből folyólag az O csúcsnál lévő szöge hegyes szög: Az N_2O oldala tehát nagyobb az N_1M_1-nél. Ha ugyanis



3. idom.

$$M_1N_1 = M_2N_2,$$

akkor az M_1M_2 egyenes hegyes szöget zár be az M_1N_1-gyel abból az okból, mert az $M_1N_1N_2M_2M_1$ négyszög szögeinek az összege kisebb négy derékszögnél, holott két szöge (N_2 és N_1 csúcscsal) derékszög, többi két szöge pedig (M és M_1 csúcscsal) egymással egyenlő. Miután így $N_1M_1M_2$ szög kisebb derékszögnél, ellenben N_1M_1O szerkesztés szerint egyenlő derékszöggel, tehát M_1O egyenes fölötte van az M_1M_2-n, és így csakugyan

$$ON_2 > M_2N_2 = M_1N_1.$$

Felezve az N_2N_1-et és a felező N_0 pontban

$$N_0P_0 \perp N_0N_1$$

emelve lészen

$$P_0N_0 < M_1N_1,$$

még pedig ugyanazon okból, a miért M_1N_1 kisebb mint ON_2. Ugyanis az $M_1N_1N_0P_0M_1$ négyszög az N_1 és N_0-on kívül a P_0 csúcsnál is derékszögű, épúgy mint az $M_1N_1N_2OM_1$ négyszög derékszögű az N_2, N_1-en kívül az M_1-nél is. Derékszög van pedig a P_0 csúcsnál azért, mert az N_0P_0-tól jobb és balra eső két négyszög egybevágó, t. i.

$$M_1N_1N_0P_0M_1 \equiv M_2N_2N_0P_0M_2;$$

tehát

$$N_0P_0M_1 = N_0P_0M_2,$$

mely két szög összege π.

Megszerkesztve az $M_1M_0M_2M_0'M_3$ folytonos vonalat, melynek minden pontja egyenlő távolban van az N_1N_2 egyenestől, e vonalnak M_1M_2 húrja egészen a vonal alatt fekszik. A szerkesztett vonal tehát görbe vonal, melynek homorú oldala az N_1N_2 alapegyenes felőli oldalra néz. A vonalnak M_1 pontbeli érintője az M_1O, mely $\perp M_1N_1$-re. A vonalat BOLYAI FARKAS a Tentamenben és B. JÁNOS az Appendixben az N_1N_2 alapegyeneshez parallel görbének nevezi; B. JÁNOS hátrahagyott irataiban pedig *hiperciklus* a neve, alapegyenese az N_1N_2, tengelye a bármely pontjából az alapegyenesre vont merőleges, pl. M_1N_1. A vonal görbülete állandó épúgy, mint a köré, vagy a paracziklusé; a görbület nagysága az M_1N_1 távolság függvénye: ha $M_1N_1=0$, akkor a görbület $=0$, a vonal összeesik az egyenessel, míg növekedő M_1N_1-nel a görbület nő; ha $\lim M_1N_1=\infty$, akkor görbülete a paracziklusé-hoz közeledik vég nélkül. De valós görbületi középpontja e vonalnak nincs; mert hiszen normálisai, merőlegesek lévén az N_1N_2 alapegyenesre, egymást valós pontban bizonyára nem metszik: látni fogjuk, hogy e görbületi középpont imaginär. BOLYAI JÁNOS ismerte fel e vonal nagy fontosságát, azt is, hogy a kör, a paraciklus és hiperciklus ugyanabból a fajtából való vonalak, hogy voltaképen kör valamennyi. LOBATSEFSKIJ nem tudott a hiperciklusról semmit.

Ez eredmény azért fontos, mert valamint Euklidesi geometriában körrel, úgy itt e körfajtákkal hasonlítják össze a vonalak görbületét.

7. *A gömb, a parasféra, a hipersféra.* A körből átmérője körül való forgatással *gömb*, a paracziklusból tengelye körül való forgatással *parasféra*, a hiperciklusból *hipersféra* keletkezik. Ezeknek a felületeknek a görbülete egyenlőnemű, t. i. állandó és positiv. Míg az Euklidesi geometriában egyedül a gömb azaz állandó positiv görbületi felület, melynek bármely darabja rajta hajlítás nélkül úgy tovacsusztatható, hogy minden pontja rajta legyen, és a határon a zérus görbületű sík áll: addig az abszolut geometriában a gömbökhöz a hipersférák sora csatlakozik, melyek határán egy oldalról a végtelen sugarú gömb, a parasféra, más oldalról a zérus görbületű sík foglal helyet.

BOLYAI és LOBATSEFSKIJ geometriai rendszereik felépitésében megegyeznek abban, hogy mind a ketten a parasféra geometriáján kezdve kimutatják, hogy ez azonos az Euklidesi sikgeometriával. Az azonosság oka a következő. Az Euklidesi háromoldalú prizmának az analogonja a BOLYAI terében egy triéder, melynek élei egymásnak a szinte-erői; úgy ez, mint az egy háromoldalú gulának a határesete, ha a csúcsa a végtelenbe távozik: nevezzük a nevezett triédert az abszolut geometriai háromoldalú prizmának, és irjuk röviden *A. G.* prizmának. Ha az Euklidesi háromoldalú prizmát egy gömbbel metszem, melynek középpontja az élek metszéspontjában van, azaz egy az élekre merőleges sikkal, akkor kimetszek az egyenesoldalú háromszöget, melynek szögei a prizma lapszögeit mérik: a szögek összege $=\pi$. Ha az *A. G.* prizmát egy gömbbel metszem, melynek középpontja az élek metszéspontjában van, azaz egy az élekre merőleges parasférával, akkor kimetszek az oldalain egy paracziklusoktól bezárt háromszöget, melynek szögei az *A. G.* prizma lapszögeit mérik. Már mostan úgy BOLYAI, mint LOBATSEFSKIJ kimutatták. hogy az *A. G.* prizma lapszögeinek az összege szintén $=\pi$. E szerint a parasférán háromszöget paracziklus ivekkel rajzolva, e háromszög szögeinek az összege $=\pi$. Miután az egyenesoldalú háromszögöknek azon a tulajdonságán épül az egész Euklidesi sik-geometria, hogy a háromszög szögösszege $=\pi$, e tétel alapján ki volt mondható, hogy az EUKLIDESI geometriai tételekben az egyenes vonalak hosszai helyett paracziklus ívhosszat téve, a parasférán igaz tételeket nyerünk.

A parasféra geometriájából vezetik le BOLYAI és LOBATSEFSKIJ az abszolut geometria sikháromszögtanát, melyre az egész geometria épül. Nem tartom szükségesnek e módszerek ismertetését; olvasni kell e módszereket, különösen BOLYAI elejétől végéig szellemes, remek, szinthetikus, magvas Appendixét, mely ritkítja párját a világirodalomban.

Feladatomul tüzöm ki a következőkben egy módszerrel élni, melylyel véges térrészre szoritkozó szerkesztésekkel (a szinteerők használata nélkül) érünk czélt; az előny az, hogy az eredmények így érvényesek lesznek RIEMANN terében is.

Az állandó görbületű felületek trigonometriája.

8. *Határátmenet végtelen kicsiny térrészre.*

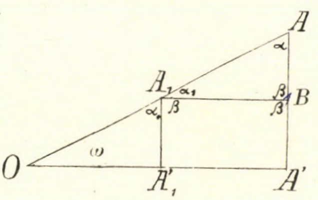
Ha egy háromszög oldalai a, b, c, és az ezekkel átellenes szögek α, β, γ, akkor a, b, c oldalaknak folytonos és végnélkül való fogyásával

$$\lim(\alpha+\beta+\gamma)=\pi, \tag{3}$$

$$\lim(a:b:c)=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma. \tag{4}$$

1) A tétel első része közvetlenül foly abból, hogyha az oldalak folytonos módon fogynak, akkor a szögek is folytonos módon változnak, míg más részről, ha a három csúcs összejőve egy pontban egyesül, akkor a három szög együtt egy egyenes szöget alkot.

2) A tétel második részének az igazolására szerkesztessék $AOA'=\omega$ szög AO szárán (4. idom)



4. idom.

$$OA_1=A_1A,\quad \text{huzassék}\quad A_1A_1'\perp OA',\quad AA'\perp OA'$$

és legyen az AA' oldalon $BA'=A_1A_1'$, és huzassék A_1B egyenes.

Ha ω szög állandó maradván a szerkesztett pontok végnélkül közelednek az O ponthoz, akkor A_1 és B végnélkül közeledvén az A_1' illetve A' pontokhoz

$$\lim\frac{A_1B}{A_1'A'}=1,$$

és a β és β_1 mellékszögek végnélkül közelednek a derégszöghöz. Ennélfogva (3) egyenlet értelmében

$$\alpha+\alpha_1=\frac{\pi}{2}+\delta_1,$$

$$\alpha_0+\alpha_1=\frac{\pi}{2}+\delta_0,$$

$$\alpha_0+\omega=\frac{\pi}{2}+\delta,$$

hol

$$\lim \delta = \lim \delta_0 = \lim \delta_1 = 0.$$

Ez egyenletekből levonás révén ered

$$a - a_0 = \delta_1 - \delta_0; \quad \lim (a - a_0) = 0,$$
$$a_1 - \omega = \delta_0 - \delta; \quad \lim (a_1 - \omega_0) = 0.$$

Ennélfogva az A_1AB háromszöget rátéve az OA_1A_1' háromszögre úgy, hogy A_1A oldal fedje az OA_1 oldalt a háresethez való közeledéssel mindinkább és végtelenül közeledik a másik két oldal is a fedéshez, tehát

$$\lim \frac{AB}{A_1A_1'} = 1, \quad \lim \frac{A_1B}{OA_1'} = 1.$$

Így hát

$$\lim \frac{AA'}{A_1A_1'} = \lim \frac{AB+BA'}{A_1A_1'} = 2,$$
$$\lim \frac{OA'}{OA_1'} = \lim \frac{OA_1'+A_1'A'}{OA_1'} = 2.$$

Szóval az AOA' háromszög szögei a határesetben egyenlőkké válnak az A_1OA_1' háromszög szögeivel, oldalai pedig kétszereseivé lesznek a nevezett háromszög homolog oldalainak: *a két háromszög a hasonlósághoz végnélkül közeledik.*

Épúgy bizonyítható be részekre való osztás révén, a hasonlósághoz végnélkül való közeledés akkor is, ha

$$OA_1 : OA = m : n,$$

hol m és n egész számok; és azután áttérhetni ismeretes módon arra az esetre is, a mikor m és n irrationális számok.

3) Így hát igaz lévén, hogy

$$\lim \frac{AA'}{OA} = \lim \frac{A_1A_1'}{OA_1}$$

mindaddig, a míg csak

$$AOA' = A_1OA_1' = \omega$$

kimondható, hogy derékszögű háromszögben

$$\lim \frac{AA'}{OA} = f(AOA') = f(\omega).$$

De ezzel meg van nyerve az alap goniometriai tételek általános bebizonyításához. Jelesül megmutatható az f függvényről az additio-tétel tökéletesen az Euklidesi geometria ismeretes útja szerint, hogy t. i. x és y-nal bármekkora szögeket jelölve

$$f(x+y) = f(x) f\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + f(y) f\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

mely függvényegyenletnek egyedül a sinusfüggvény felelvén meg, ezzel (tekintettel még, hogy $f(0) = 0$) be van bizonyítva, hogy derékszögű háromszögben

$$\lim \frac{AA'}{OA} = \sin \omega. \tag{5}$$

Miután így a sinustétel bebizonyíttatott végtelen kicsiny átfogójú derékszögű háromszögre, a ferdeszögű háromszögnek két derékszögűre való osztása révén a fent kimondott tétel második része is beigazoltnak tekinthető.

Következmény. A hasonlósági elvnek és erre alapított sinustételnek a bebizonyítása után kimondható, hogy az Euklidesi geometriának tételei az abszolut geometriában — a szokásos kifejezésmóddal élve — végtelen kicsiny térrészre mindig igazak, és így az abszolut geometriában vagy határátmeneti tételekké válnak vagy pontosan igazak.

Például a körmérés Euklidesi tételei az abszolut geometriában határátmeneti tételek; így az r sugarú kör kerülete $\bigcirc(r)$-rel jelölve

$$\lim_{r=0} \frac{\bigcirc(r)}{r} = 2\pi. \tag{6}$$

Második példa gyanánt kiemelem a gömbháromszögtan tételeit, a melyek voltaképen az Euklidesi geometriában is a háromélű zúg élszögei (oldalak) és lapszögei (szögek) közötti vonatkozásokat állapítják meg. Ezek pontosan és változatlanul igazak az abszolut geometriában is. Ezzel meg van a szilárd alap az általános abszolut geometria felépítésére. Az egyik módja a felépítésnek az, mely BEKE MANÓ úr czikkében a BOLYAI terére vonatkozólag vázolva van. A másik módja az, melyet a következő 9., 10. és 11. czikkekben úgy fogok előadni, hogy az összes eredmények érvényesek lehessenek a tapasztalati téren belől akkor is, ha RIEMANN szerint nem akarnók feltétlenül igaznak tekinteni az egyenesről szóló azt a postulátumot sem, hogy a térnek egymástól akármilyen távol fekvő bármelyik két pontján át is csak egy egyenes vonható. Erre nézve csak abban kell megállapodnunk, hogy szerkesztendő idomaink ne lépjék tul azt a térrészt, a melyen belül az egyenes postulátuma még érvényes; idomainkra e megállapodás után alkalmazhatni fogjuk a 2. és 8. czikkbeli tételeket.*

9. *Szerkesztés:* Legyen adva (5. idom) BAC szög és annak AB szárán B_1 és B pontok, melyekből a szög AC szárára

$$B_1C_1 \perp AC, \quad BC \perp AC$$

szerkesztetnek. Azután forgatva az idomot AC tengely körül, B_1C_1 és BC egyenesek leírnak a tengelyre merőleges síkokat (2. czikk II.), ebben B_1 és B pontok köröket, az AB él pedig egy kúpfelületet.

Áll a következő tétel:

$$\bigcirc(BC) : \bigcirc(AB) = \bigcirc(B_1C_1) : \bigcirc(AB_1). \qquad (7)$$

Az AB él leírta kúpfelület fejtessék le egy síkra (2. czikk II.); a lefejtett idom egy ω szögterület, melyen a $\bigcirc(BC)$ és $\bigcirc(B_1C_1)$ mint az ω szögben levő s és s_1 ivek jelentkeznek, mely ívek sugarai AB, illetve AB_1. Következésképen (1) értelmében

$$\omega = 2\pi\frac{s}{K} = 2\pi\frac{s_1}{K_1}$$

azaz

$$\omega = 2\pi\frac{\bigcirc(BC)}{\bigcirc(AB)} = 2\pi\frac{\bigcirc(B_1C_1)}{\bigcirc(AB_1)}.$$

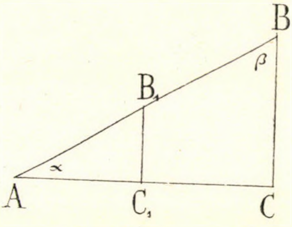
---

* Az itt közölt módszer lényegében nem különbözik attól, a melyet 1875-ben közzétettem (Tud. Akad. Ért.). Más elemi módszerekre nézve l.: Killing; Einführung in die Grundlagen der Geometrie; Két kötet. — De Tilly; Etudes analytiques sur la théorie des parallèles.

1. Következmény: *Minden derékszögü háromszögben a befogóval leírt kör kerülete egyenlő a befogóval átellenes szög szinusa megszorozva az átfogóval leírt kör kerületével.*

Ugyanis

$$\frac{\bigcirc(BC)}{\bigcirc(AB)} = \lim_{AB_1=0} \frac{\bigcirc(B_1C_1)}{\bigcirc(AB_1)}.$$



5. idom.

Ámde (5) és (6) egyenletek értelmében

$$\lim_{AB_1=0} \frac{\bigcirc(B_1C_1)}{\bigcirc(AB_1)} = \lim_{AB_1=0} \frac{B_1C_1}{AB_1} = \sin\alpha;$$

következésképp

$$\frac{\bigcirc(BC)}{\bigcirc(AB)} = \sin\alpha. \tag{8}$$

2. *Következmény. Minden egyenes vonalú háromszögben az a, b, c oldalak és ezekkel átellenes α, β, γ szögek között fennáll a következő egyenlet:*

$$\bigcirc(a) : \bigcirc(b) : \bigcirc(c) = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma. \tag{9}$$

A bizonyitás a derékszögű háromszögre vonatkozó előbbi tétel alapján épúgy megy, mint az Euklidesi geometriában.

10. *A $\bigcirc(r)$ függvény meghatározása.*

Szerkesztés. A BCA derékszögű háromszög hegyes szögei legyenek α, β; ez utóbbi B csúcsán emeljünk az a befogóra BD merőlegest, és erre megint az α szög A csúcsából az AD merőlegest; azaz

$$DB \perp BC;\ AD \perp DB.$$

Végül rajzoljuk a BCA háromszöggel szimmetrice egyenlő $B'CA$ háromszöget.

1. *Következtetés.* Az imént bebizonyitott tételt (2. Köv.) az ABB' háromszögre alkalmazván felírható

$$\bigcirc(2a) : \bigcirc(c) = \sin 2\alpha : \sin\beta.$$

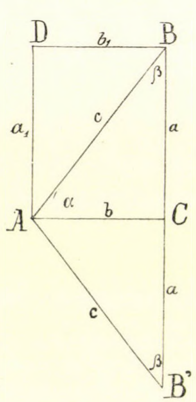
Ép így a BCA derékszögű háromszögre való alkalmazással

$$\bigcirc(a) : \bigcirc(c) = \sin\alpha.$$

E két egyenletből osztás révén

$$\frac{\bigcirc(2a)}{2\bigcirc(a)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\,. \tag{10}$$

Ez egyenlet azt a tételt fejezi ki, hogy minden derékszögű háromszögben az α hegyes szög koszinusa osztva a β hegyes szög szinusával az a befogó függvénye; ezt a függvényt $\varphi(a)$-val jelölve így írhatom az imént talált egyenletet



6. idom.

$$\bigcirc(2a)=2\bigcirc(a)\,\varphi(a), \tag{11}$$

$$\cos\alpha=\sin\beta\,\varphi(a)\,; \tag{12$_1$}$$

ép így

$$\cos\beta=\sin\alpha\,\varphi(b). \tag{12$_2$}$$

2. *Következtetés.* Az ADB derékszögű háromszögből folyólag

$$\bigcirc(a_1)=\bigcirc(c)\cos\beta. \tag{13}$$

A BCA derékszögű háromszögből folyólag

$$\bigcirc(b)=\bigcirc(c)\sin\beta. \tag{14$_2$}$$

E két egyenletből következik [$\bigcirc(r)\bigcirc(r)=\bigcirc(r)^2$ irásmóddal élve] Bolyai János remek tétele

$$\bigcirc(a_1)^2+\bigcirc(b)^2=\bigcirc(c)^2: \tag{15}$$

mely Pithagoras tételének az általánosítása.

A BCA háromszögből folyólag

$$\bigcirc(a)=\bigcirc(c)\sin\alpha, \tag{14$_1$}$$

tehát a (13) egyenlet révén

$$\frac{\bigcirc(a_1)}{\bigcirc(a)}=\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}, \tag{16}$$

és így a (12$_2$) egyenletre való tekintettel

$$\frac{\bigcirc(a_1)}{\bigcirc(a)}=\varphi(b)\,; \tag{17}$$

mely eredmény felhasználásával a (15) egyenlet így írható:

$$\bigcirc(a)^2\,\varphi(b)^2+\bigcirc(b)^2=\bigcirc(c)^2. \tag{18}$$

De a és b, a derékszögű háromszög befogói, egyenjogú elemek lévén, felcserélhetők; tehát egyszersmind

$$\bigcirc(a)^2+\bigcirc(b)^2\,\varphi(a)^2=\bigcirc(c)^2. \tag{19}$$

E két utóbbi egyenletből a $\bigcirc(c)$ eliminálása révén ered

$$\bigcirc(a)^2\,[\varphi(b)^2-1]+\bigcirc(b)^2\,[1-\varphi(a)^2]=0,$$

tehát

$$\frac{\bigcirc(a)^2}{1-\varphi(a)^2}=\frac{\bigcirc(b)^2}{1-\varphi(b)^2}. \tag{20}$$

Miután a és b befogók értékei egészen függetlenek egymástól, ez egyenlet azt mondja, hogy a-nak bármilyen értéke mellett is igaz, hogy

$$\bigcirc(a)^2=h^2\big(1-\varphi(a)^2\big), \tag{20*}$$

hol h állandót jelent; vagyis

$$\left(\frac{1}{h}\bigcirc(a)\right)^2+\varphi(a)^2=1.$$

Végül írjuk ide a (11) egyenletet ebben az alakban:

$$\frac{1}{h}\bigcirc(2a)=\frac{2}{h}\bigcirc(a)\,\varphi(a).$$

Miután $\varphi(0)=1$, ez utóbbi két függvény-egyenletnek csakis úgy tehetek eleget, ha

$$\frac{1}{h}\bigcirc(a)=\sin\frac{a}{\varkappa}\,;\quad \varphi(a)=\cos\frac{a}{\varkappa}, \tag{21}$$

hol $\varkappa$ állandót jelent. Ezeknek a h és $\varkappa$ állandóknak az összefüggését végül a (6) egyenlet állapítja meg; mert

$$\lim_{a=0}\frac{\bigcirc(a)}{a}=\lim_{a=0}\frac{h\sin\frac{a}{\varkappa}}{a}=2\pi$$

egyenlet folytán

$$\frac{h}{\varkappa} = 2\pi.$$

Igy hát végül

$$\bigcirc(a) = 2\pi\varkappa \sin\frac{a}{\varkappa}, \tag{22}$$

$$\varphi(a) = \cos\frac{a}{\varkappa}\cdot \tag{23}$$

11. *Összefoglalás.* A $\bigcirc(x)$ és $\varphi(x)$ függvényeknek az imént megejtett meghatározása után a derékszögű egyenesoldalú háromszög adatai között a következő összefüggéseket mondják ki a (14_1), (14_2), (12_1), (12_2), (19) egyenletek:

$$\sin\frac{a}{\varkappa} = \sin\frac{c}{\varkappa}\sin\alpha, \tag{25_1}$$

$$\sin\frac{b}{\varkappa} = \sin\frac{c}{\varkappa}\sin\beta, \tag{25_2}$$

$$\cos\alpha = \sin\beta\cos\frac{a}{\varkappa}, \tag{25_3}$$

$$\cos\beta = \sin\alpha\cos\frac{b}{\varkappa}, \tag{25_4}$$

$$\sin^2\frac{c}{\varkappa} = \sin^2\frac{a}{\varkappa} + \sin^2\frac{b}{\varkappa}\cos^2\frac{a}{\varkappa}\cdot \tag{25}$$

Miután pedig az egyenletek legutolsója így írható:

$$1-\cos^2\frac{c}{\varkappa} = \sin^2\frac{a}{\varkappa} + \cos^2\frac{a}{\varkappa} - \cos^2\frac{a}{\varkappa}\cos^2\frac{b}{\varkappa},$$

tehát ily alakban mondható ki:

$$\cos\frac{c}{\varkappa} = \cos\frac{a}{\varkappa}\cos\frac{b}{\varkappa}; \tag{25_5}$$

ugyanis mind a két oldal egyenlő előjegygyel veendő, abból az okból, mert ha az $a=b=0$, akkor egyszersmind $c=0$.

Ezek az egyenletek azonosakká válván a derékszögű gömbháromszögekről szóló egyenletekkel, mihelyt $\frac{a}{\varkappa}$, $\frac{b}{\varkappa}$, $\frac{c}{\varkappa}$ helyett a gömbháromszög oldalai tétetnek, kimondhatjuk, hogy a gömbháromszögtani összes tételekből helyeseket nyerünk az abszolut geometria egyenesoldalú háromszögei számára, mihelyt azokban az oldalak helyett $\frac{a}{\varkappa}$, $\frac{b}{\varkappa}$, $\frac{c}{\varkappa}$-t teszünk.

Ide iktatok még néhány trigonometriai tételt azért, mert a későbbiekben szükségünk lesz rájuk. A (25_3), (25_4), (25_5) egyenletekből az a és b eliminálásával ered

$$\cos\frac{c}{\varkappa}\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1. \qquad (25_6)$$

A (25_1), (25_2), (25_3) és (25_4) egyenlet segélyével pedig könnyen igazolható, hogy

$$\operatorname{tang}\frac{a}{\varkappa} = \sin\frac{b}{\varkappa}\operatorname{tang}\alpha, \qquad (25_7)$$

$$\operatorname{tang}\frac{b}{\varkappa} = \sin\frac{a}{\varkappa}\operatorname{tang}\beta. \qquad (25_8)$$

Továbbá a (25_1) és (25_6) alapján

$$\sin\frac{b}{\varkappa}\cos\frac{c}{\varkappa}\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tg}\beta = \sin\frac{b}{\varkappa} = \sin\frac{c}{\varkappa}\sin\beta,$$

tehát a (25_7) felhasználásával

$$\operatorname{tang}\frac{a}{\varkappa} = \operatorname{tang}\frac{c}{\varkappa}\cos\beta, \qquad (25_9)$$

ép így

$$\operatorname{tang}\frac{b}{\varkappa} = \operatorname{tang}\frac{c}{\varkappa}\cos\alpha. \qquad (25_{10})$$

Végül igazolom még a következő két összefüggést a (6. idom) darabjai között

$$\operatorname{tang}\frac{a_1}{\varkappa} = \operatorname{tang}\frac{a}{\varkappa}\cos\frac{b_1}{\varkappa}, \qquad (26_1)$$

$$\operatorname{tang}\frac{b}{\varkappa} = \operatorname{tang}\frac{b_1}{\varkappa}\cos\frac{a}{\varkappa}\cdot \qquad (26_2)$$

Ugyanis az AB közös átfogójú két derékszögű háromszög révén

$$\cos\frac{c}{\varkappa} = \cos\frac{a}{\varkappa}\cos\frac{b}{\varkappa} = \cos\frac{a_1}{\varkappa}\cos\frac{b_1}{\varkappa}\cdot$$

Másrészről a (17), (22) és (23) értelmében

$$\sin\frac{a_1}{\varkappa}=\sin\frac{a}{\varkappa}\cos\frac{b}{\varkappa}\cdot$$

E két egyenlet összeszorzásával tehát csakugyan

$$\sin\frac{a_1}{\varkappa}\cos\frac{a}{\varkappa}=\sin\frac{a}{\varkappa}\cos\frac{a_1}{\varkappa}\cos\frac{b_1}{\varkappa}\cdot$$

12. *Az $\varkappa$ állandó befolyása.* Legyen adva egy derékszögű háromszög a befogója és a mellette levő β szög. Akkor a (25_3) szerint

$$\cos\alpha=\sin\beta\cos\frac{a}{\varkappa}\cdot$$

Ebből következik, hogy valós $\varkappa$ esetében lehetséges olyan háromszög, melynek két derékszöge is van. Ha ugyanis β is $=\frac{\pi}{2}$, akkor

$$\cos\alpha=\cos\frac{a}{\varkappa},$$

mely követelménynek

$$\alpha=\frac{a}{\varkappa}$$

megfelel. A (25_2) és (25_8)-ból következik ép úgy, hogy

$$\frac{b}{\varkappa}=\frac{c}{\varkappa}=\frac{\pi}{2}\cdot$$

Ha tehát $\varkappa$ valós és véges, akkor a háromszög minden darabja valós és véges, noha két szöge derékszög; a mellett

$$b=c=\frac{\pi}{2}\varkappa.$$

Könnyű megmutatni, hogy az $a=BC$ befogó mindenik pontja ugyanekkora távolságban van az A csúcstól. *Az egyenes darab tehát egyszersmind $\frac{\pi}{2}\varkappa$ sugárral leírt körívnek tekinthető.* És az AB és AC oldalak meghosszabbitásával megrajzolva a BC befogón tükröző szimmetrikus BCA' háromszögöt, arra a következtetésre vagyunk feljogosítva, hogy *valós* $\varkappa$ esetén *az A és A' pontokon át több egyenes vonható.*

*A valós $\varkappa$ állandón alapuló térszemlélet a Riemann-féle.**

Ha ellenben $\varkappa$ nem valós, akkor egy egyenesre vont merőlegesek nem valós pontban metszik egymást, vagyis akkor az egyenesdarab (arithmetikai értelemben) nem valós középpontból és $\frac{\pi}{2}\varkappa$ nem valós sugárral leírt körívnek tekinthető.

Könnyen megmutatható, hogy a nem valós $\varkappa$ csakis képzetes lehet. Ha ugyanis valós derékszögű háromszögöt veszünk szemügyre, melynek két hegyes szöge α és β adva van, akkor a (25_3) és (25_4)-ből folyólag $\cos\frac{a}{\varkappa}$ és $\cos\frac{b}{\varkappa}$ valós értékek, a mi (a és b valósak lévén) maga után vonja, hogy $\varkappa$ képzetes legyen.

A képzetes $\varkappa$-en alapuló térszemlélet a Bolyai-Lobatsefskij-féle.

Ezentúl ez utóbbi esetre fogunk szorítkozni. Erre való tekintettel tényleges számításoknál a trigonometriai és a többi egyenletekben is

$$\varkappa = ik$$

teendő, hol k valós, míg $i = \sqrt{-1}$; úgy hogy

$$2i\sin\frac{x}{\varkappa} = e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}},$$

$$2\cos\frac{x}{\varkappa} = e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}. \qquad (27)$$

13. *A $\varphi(x)$ függvény és az alapegyenestől l távolságú hiperczikIus.*

Tantétel. Ha a hiperczikIust l tengelye körül forgatom, akkor bármelyik pontja leírta kör kerülete olyan viszonyban áll az alapegyenes leírta síkon való projekcziójához, a milyenben a

---

* A Klein-Killing-féle rokon térszemléletre nem terjeszkedem ki. Lásd Killing f. i. h.

hipercziklus bármekkora íve a maga (e síkon való) *projekczió-jához.*

Ugyanis a nevezett körök területei meg a köröknek projicziáló egyenesei egy testet határolnak, melynek köpenyfelülete lefejthető síkra; a mi beleírt prizmák segélyével és határátmenettel szokott módon bizonyítható. A lefejtés eredménye az, hogy az alapkör kerülete átmegy a egyenes darabba, a hiperszférán levő kör kerülete átmegy s hipercziklus ívbe, melynek minden pontja l távolságban van az a egyenestől; hiszen a projicziáló l hosszúságú egyenesek lefejtés után valamennyien az a egyenesre merőlegesekbe mennek át. Miután végül egyazon hipercziklus különböző ívhosszainak a viszonya az alapegyenesen való projekcziójukhoz egyugyanaz, tehát a tétel be van bizonyítva.

1. *Következmény.* Tekintettel a (17) egyenletre, be van tehát bizonyítva, hogy

$$s : a = \cos \frac{l}{\varkappa} \cdot \tag{28}$$

2. *Következmény.* Miután a hipercziklus tengelyei egymást az előző 13. czikk értelmében egy képzetes pontban metszik, melynek távolsága az alapegyenestől $= \frac{\pi}{2} \varkappa$, tehát a hipercziklus mindegyik pontjának távolsága ettől a képzetes ponttól $= \pm l + \frac{\pi}{2} \varkappa$. Szóval *a hipercziklus olyan körnek tekinthető, melynek középpontja a tengelyén fekszik, és melynek sugara* $= \pm l + \frac{\pi}{2} \varkappa$ $= \pm l + \frac{\pi}{2} ki$. Ez eredmény, miként látni fogjuk, arithmetikai tekintetben fontos.

14. *A kör, a paracziklus és a hipercziklus görbülete.* (7. idom) Ha 2ω az MT-nek a meghosszabbítása és a TM_1 érintők közötti szög, míg $2s$ az MM_1 ívnek a mérőszáma, akkor a vonal görbülete az M pontban (definitio szerint)

$$g = \lim_{s=0} \frac{\omega}{s} \cdot$$

Ha MM_1 a körív, O a középpont, r a sugár, akkor (25_9) szerint

$$(*)\ \operatorname{tang}\frac{MT}{\varkappa}=\operatorname{tang}\frac{OT}{\varkappa}\cos MTO=\operatorname{tang}\frac{OT}{\varkappa}\sin\omega,$$

tehát

$$g=\lim_{s=0}\frac{\omega}{MT}$$

azaz

$$g=\lim_{s=0}\frac{\sin\omega}{\varkappa\operatorname{tang}\frac{MT}{\varkappa}}$$

vagyis a (*) egyenlet révén (miután $r=\lim OT$) a kör görbülete

$$g=\frac{1}{\varkappa}\cot\frac{r}{\varkappa}=\frac{1}{k}\cdot\frac{e^{\frac{r}{k}}+e^{-\frac{r}{k}}}{e^{\frac{r}{k}}-e^{-\frac{r}{k}}}\cdot \tag{29}$$

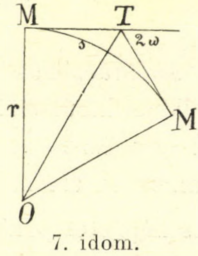
Ha MM_1 hiperciklus íve, akkor az imént előadott eredmény alapján r helyett $-l+\frac{\pi}{2}\varkappa$ téve, ered a hiperciklus görbülete gyanánt

$$g=\frac{1}{\varkappa}\cot\left(-\frac{l}{\varkappa}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\varkappa}\operatorname{tang}\frac{l}{\varkappa},$$

azaz a hiperciklus görbülete

$$g=\frac{1}{k}\cdot\frac{e^{\frac{l}{k}}-e^{-\frac{l}{k}}}{e^{\frac{l}{k}}+e^{-\frac{l}{k}}}\cdot \tag{30}$$

E számítás jogosultságát következőleg látjuk be. A kört rajzoljuk fel egy valós $\varkappa$ sugarú gömbre, ugyanezen rajzoljuk meg a körhöz parallel legnagyobb kört, melynek tőle való ívtávolsága l; a kör pontjainak polustávola pedig legyen r. Akkor görbületét az Euklidesi hipothézisek esetén épúgy megadja a $g=\frac{1}{\varkappa}\cot\frac{r}{\varkappa}$, mint a $g=\frac{1}{\varkappa}\operatorname{tang}\frac{l}{\varkappa}$. De a kör viszonya a hozzá parallel legnagyobb körhöz a gömbön ugyanaz, mint a hiperciklus viszonya az egyeneshez a Bolyai síkon. Az arithmetikai apparatus



7. idom.

pedig *csak* annyiban különbözik, hogy a valós $\varkappa$ helyére itt képzetes $\varkappa$ lép. Ámde e számítást úgy is el lehet végezni a gömbön, hogy azokat mindig csak olyan háromszögekre alkalmazzuk, melyek a Bolyai síkon is valósak maradnak. Minélfogva a végeredménynek ez arithmetikai apparatussal direkte kiszámitva a Bolyai síkon is

$$g = \frac{1}{\varkappa} \operatorname{tang} \frac{l}{\varkappa}$$

kifejezést kell szolgáltatni. E *direkt* kiszámitás azonban fáradságos.

Ha végül MM_1 paracziklus ive, akkor behelyettesítve az előzőkben $r=\infty$, avagy $l=\infty$, a paracziklus görbületéül

$$g = \frac{1}{k}$$

adódik. Ime ez a k állandónak egyik legegyszerűbb jelentése. Összefoglalva a görbületre vonatkozó eredményeket ismét azt látjuk, hogy a körök görbülete ∞ és $\frac{1}{k}$ között fekszik, $\frac{1}{k}$ a paracziklus görbülete, a hiperciklikusoké pedig $\frac{1}{k}$ és 0 között fekszik, 0 a sík görbülete kiadódik a formulából, ha benne $l=0$ tétetik.

A $\cot \frac{r}{\varkappa} = \varkappa g$ egyenlet alapján kiszámitva $\sin \frac{r}{\varkappa}$, a képlet révén

$$K = \bigcirc(r) = \frac{2\pi}{\sqrt{g^2 - \frac{1}{k^2}}}, \tag{31}$$

honnét

$$g^2 = \frac{1}{k^2} + \frac{4\pi^2}{[\bigcirc(r)]^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{4\pi^2}{K^2}. \tag{32}$$

A paracziklus kerületéül a (31) egyenletből ∞ jő ki. A hipercziklus kerületéül imaginär értéket ad ugyanaz a formula; de ez természetesen nem a hiperciklus ívhossza, mert ez ∞; hanem az eredmény megint csak azt mutatja, hogy a hipercziklus képzetes pontból mint középpontból $\frac{\pi}{2} ki$ sugárral leirt kör.

15. *A gömb, a parasféra és a hipersféra geometriája.**

1. *Gömb.* Kiindulva a 8. czikk végén bebizonyított tételből, hogy a háromélű zug oldalai és szögei között változatlanul fennállanak az Euklidesi gömbháromszögtan összes tételei, az 1. egyenlet révén tüstént felírhatjuk az r sugarú G gömbön legnagyobb körökkel rajzolt háromszög egész trigonometriáját. Ugyanis a zug szögeit változatlanul meghagyva, az a, b, c oldalak helyébe pedig

$$2\pi\frac{a}{K},\quad 2\pi\frac{b}{K},\quad 2\pi\frac{c}{K}$$

téve, a gömbháromszögtan képleteiből olyan képleteket kapok, melyek a G gömbön rajzolt a, b, c oldalú háromszögre érvényesek. Ha ugyanis ω-val jelölöm a zug bármelyik oldalát és s-sel a G gömbön az ω szög szárai között levő szöget, akkor az 1. egyenlet értelmében

$$\omega = 2\pi\frac{s}{K},$$

hol K a főkör kerülete.

Miután

$$\frac{K}{2\pi} = \varkappa \sin\frac{r}{\varkappa} = \frac{1}{2}k(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}), \qquad (33)$$

ez alapon a G gömb háromszögeire vonatkozó problémákat megoldhatjuk. Épúgy e gömbön $\widehat{s}$ ívsugárral leírt kör kerülete

$$\bigcirc(\widehat{s}) = K\sin 2\pi\frac{\widehat{s}}{K}\cdot \qquad (34)$$

2. *Parasféra.* Áttérve a gömb geometriájában arra a határesetre, a midőn $\lim K = \infty$, megkapjuk a parasféra geometriáját. Ez tehát azonos az Euklidesi sík geometriájával. Így pl. mivel

$$\lim_{K=\infty}\left(\sin 2\pi\frac{a}{K} : \sin 2\pi\frac{b}{K} : \sin 2\pi\cdot\frac{c}{K}\right) = a : b : c;$$

---

* Ezt a geometriát BOLYAI JÁNOS «A képzetes számok elméletében (283—4. lapon álló tételében) foglalja össze; (33) és (36_2)-ben meghatározott $\frac{K}{2\pi}$ állandót az illető felület parameterének nevezi. Lásd Math. és Term. Értes. 1899. évf. STÄCKEL közleményét.

tehát a parasférán a, b, c a paracziklus íveket jelentvén

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma. \tag{35}$$

Épúgy a Pithagoras tételének Bolyai-tól eredő általánosításából, pl. a (25) alakból, mely szerint G gömbön rajzolt derékszögű háromszög esetén

$$\sin^2 2\pi\frac{c}{K} = \sin^2 2\pi\frac{a}{K} + \sin^2 2\pi\frac{b}{K}\cos^2 2\pi\frac{a}{K},$$

lészen

$$\lim_{K=\infty}\frac{K}{2\pi}\sin 2\pi\frac{s}{K} = s\,;\quad \lim_{K=\infty}\cos 2\pi\frac{a}{K} = 1$$

tekintetbe vételével

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Továbbá az $\bar{s}$ paracziklus ívvel mint sugárral a paracikluson leírt kör kerülete a (34) egyenletből folyólag

$$\bigcirc(\bar{s}) = 2\pi\bar{s}. \tag{35}$$

3. *Hipersféra.* Projicziáljuk a hipersférán a hiperciklus ivektől bezárt háromszöget a felület alapsíkjára, és jelöljük az a_1, b_1, c_1-gyel a háromszög ívoldalait, a, b, c-vel azok projekczióit. Akkor (28) szerint

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \cos\frac{l}{\varkappa},$$

hol l a hipersféra pontjainak az alapsíktól való állandó távola. Ebből következik, hogy Bolyai síkgeometriájának minden tételéből a hipersférán érvényes tétel ered, ha $\frac{a}{\varkappa}$, $\frac{b}{\varkappa}$, $\frac{c}{\varkappa}$ helyébe

$$\frac{a_1}{\varkappa\cos\frac{l}{\varkappa}},\qquad \frac{b_1}{\varkappa\cos\frac{l}{\varkappa}},\qquad \frac{c_1}{\varkappa\cos\frac{l}{\varkappa}}$$

tétetik. Más szóval az Euklidesi gömbháromszögtan minden tételéből a hipersférán érvényes tétel származik, ha a gömbháromszög szögeinek megtartásával az oldalai helyébe

$$2\pi\frac{a}{K},\qquad 2\pi\frac{b}{K},\qquad 2\pi\frac{c}{K} \tag{36_1}$$

tétetik, hol a, b, c a hipersféra-háromszög oldalai, míg

$$\frac{K}{2\pi} = \gamma \cos\frac{l}{\chi} = \frac{1}{2} ki\,(e^{\frac{l}{k}} + e^{-\frac{l}{k}}). \qquad (36_2)$$

4. *E felületek görbülete.* Valamely pontban szerkesztett normálmetszetek görbületei abban a pontban vagy valamennyien egyenlők vagy különbözők; utóbbi esetben egy normálmetszet görbülete legnagyobb, a reá merőlegesé a legkisebb. E két *fő-görbület* szorzata a felület görbületének a mértéke az abszolut geometriában is.

E szerint a K kerületű főkört tartalmazó *gömb görbülete* (32) értelmében

$$\Gamma = g^2 = \frac{1}{k^2} + \frac{4\pi^2}{K^2}\cdot \qquad (37)$$

A *parasféra görbülete*

$$= \frac{1}{k^2}\cdot$$

Végre a *hipersféra görbülete* ugyanaz a formula segélyével határozódik meg; csak K a (36_2) képlet szerint képzetes érték lévén K^2 negativ. Az $l = \infty$ esetben a görbület $\frac{1}{k^2}$; az $l = 0$ esetben pedig $K^2 = -4\pi^2 k^2$ lévén $\Gamma = 0$ adódik a sík görbületéül.

17. *A pseudosféra.* És már mostan az a kérdés merül fel, mi lesz, ha valamely felületen a legrövidebb, mondjuk, geodétikus vonalak alkotta háromszögök alkatrészei ép olyan alakú egyenletekkel függnek össze, mint a gömb és hipersférán rajzoltak, és a különbség csak az, hogy a K^2 számértéke $= -4\pi^2 h^2$, hol h valós és $h^2 < k^2$? Könnyű megmutatni, hogy ennek a felületnek a görbülete negativ. Ha ugyanis bármely pontjából állandó r hosszaságú geodétikus vonalakat szerkesztek, akkor a végpontok mértani helye egy zárt vonal, melynek hossza

$$L = 2\pi hi \sin\frac{r}{hi}\cdot \qquad (38)$$

Miután

$$\frac{\partial L}{\partial h} = 2\pi\left(i \sin\frac{r}{hi} - \frac{1}{h}\cos\frac{r}{hi}\right),$$

tehát

$$\left(\frac{\partial L}{\partial h}\right)_{r=0} = -\frac{2\pi}{h}.$$

Ebből következik, hogy egymással összehasonlítva olyan L vonalakat, a melyek különböző h-hoz és egyenlő r-hez tartoznak, a míg az r bizonyos határon alul fekszik, az L fogyó h-val növekedik. Az L vonalak tehát nagyobbak az r sugárral a síkon rajzolt körnél. A felület tehát negativ görbületű.

Részletesebb vizsgálatot az Euklidesi geometria esetén ejtsünk meg. Ekkor e felület görbülete Gauss szabálya szerint

$$\Gamma = -\frac{1}{L}\frac{d^2L}{dr^2}, \tag{39}$$

tehát (38)-ból helyettesítvén L-et,

$$\Gamma = -\frac{1}{h^2}. \tag{40}$$

A felület tehát egy negativ állandó görbületű felület, melyen minden geodétikus vonalak alkotta háromszög darabjai között ugyanazok az egyenletek állanak fönn, mint a Bolyai síkon az egyenes vonalak alkotta háromszög darabjai között, föltéve csak, hogy a h épen a Bolyai tér k állandója. E felületet Beltrami fedezte fel; neve *pseudosféra.* Ezen a felületen tehát a Bolyai sík egész geometriája legkisebb részeiben egybevágó módon ábrázolható: két pont közötti Bolyai egyenes helyébe egyszerűen a két pontot összekötő geodétikus vonal lép. Épúgy ábrázolható, miként láttuk, a parasféra az Euklidesi síkon; és nyilvánvaló, hogy az összes hipersférák ábrázolhatók azokon az Euklides térbeli pseudosférákon, a melyek görbületének abszolut értéke zérus és $\frac{1}{k^2}$ között fekszik; végre a többi Euklides térbeli pseudosférán azoknak a (Bolyai-térbeli) felületeknek, pseudosferáknak, a geometriája ábrázolható, melyekről e czikk első részében volt szó.

A pseudosférák felfedezésére Beltramit épen a Bolyai térszemlélete inditotta. De ez a legkevesebb. Miként láttuk, e térszemlélet a vonalak görbületének elméletébe új gondolatokat hozott; és miként észrevehettük, a görbe felületek elméletét is át kellett alakitania: hisz pl. GAUSS (39) alatti szabálya az itt tárgyalt (Bolyai-térbeli) felületre alkalmazva egészen hibás eredményre vezetne. — ellenben igenis helyesen adja meg a felületnek *relativ* görbületét a parasférához képest. Tényleg a Geometria számára «ujj, más világ» nyilt meg, melybe belépett, benne megizmosodott és megsokasodott.

Budapest, 1902 deczember.

Dr. Réthy Mór.

Megjegyzés. 1874. évi följegyzéseimből a $\varphi(x)$ függvénynek e következő, a RIEMANN terében érvényes, direkt meghatározását iktatom ide:

Ha a derékszögű háromszögben β is $= \frac{\pi}{2}$, akkor az α szöget α_a-val jelölvén, a (12_1) egyenlet értelmében (16. l.)

$$\cos \alpha_a = \varphi(a).$$

Más részről a háromszögben két derékszög lévén, az ezekkel átellenes oldalak egyenlők; de ez oldalakkal egyenlő minden egyenes darab is, melyet az A csúcspontból az a oldal bármelyik pontjához húzok. Ennélfogva, $\varkappa$-val állandót jelölvén,

$$\alpha_a = \frac{a}{\varkappa},$$

tehát ép úgy mint (21) szerint (17. l.), most is

$$\cos \frac{a}{\varkappa} = \varphi(a).$$

A BÓLYAI-FÉLE TRIGONOMETRIA.

I.

1. Bólyai Appendixének főczéljául a trigonometria megállapitását tekinthetjük. Ehhez szüksége van Bólyai-nak arra, hogy megmutassa, hogy az ő F felületének,[1] (Lobatschefsky által határfelületnek nevezett felületen), a hol az egyenest az L alakú vonalak helyettesítik, a geometria teljesen megegyezik az euklidesi geometriával. Ebből következteti, hogy az S rendszerben is érvényesek a közönséges trigonometriai sinustételek, ha csak az oldalak helyett ezekkel, mint radiusokkal leirt körök kerületeit veszszük.[2] Mint igen becses mellékeredményt kapja, hogy a sphærikus trigonometria független az ötödik postulatumtól[3] (a XI. axiomától), de ezt tárgyalásai további folyamán nem használja fel. — A trigonometriai formulák végleges megállapitása czéljából tehát csak a kör kerületét kell kiszámítania. Ehhez azonban igen sok segédeszközre van szüksége: az L vonal hoszszúságára,[4] az adott egyenestől (síktól) egyenlő távolságra levő pontok geometriai helye meghatározta vonalra (felületre)[5] és mindenekfölött az Appendix egyik legcsudálatraméltóbb részletére, a z-vel jelölt szögre[6] [Lobatschefsky parallella-szöge $\pi\,(x)$.]

Nem sokkal kisebb apparatussal jut el Lobatschefsky a főmunkájában (Neue Anfangsgründe stb.) a trigonometriához. A derékszögű háromszög alkotó részei közötti összefüggések egész laby-

---

[1] Appendix 11. §.
[2] U. o. 25. §.
[3] U. o. 26. §.
[4] U. o. 24. §.
[5] U. d. 27. §-ban.
[6] U. o. 29. §.

rinthusán[1] kell áthaladnunk, míg a parallella-szög meghatározásához és ez után a trigonometriához jutunk. Valamivel egyszerűbb utat követ a Pangeonometriában; [2] de még mindig sok szükségtelen segédeszközhöz folyamodik. Ennek főoka abban van, hogy bár munkájának legérdekesebb részében minden síkháromszöghöz egy oly gömbháromszöget rendel, a melynek alkotórészei között a síkháromszög oldalaihoz tartozó parallella-szögek foglaltatnak, mégsem használja fel közvetetlenül a sphærikus trigonometriát, hanem ennek megállapítását is a határfelület előbb említett alaptulajdonságával kapcsolatban végzi.

Talán hasznos dolgot végzek, ha a Bólyai-féle geometria e legfontosabb részét, a trigonometria megállapítását, jórészt e két genialis mathematikus szellemében, de a legszükségesebbekre szorítkozva, rövidebb úton tárgyalom.

2. Kiinduló pontul azt a tételt választjuk, hogy a sphærikus trigonometria független az ötödik postulatumtól. A sphærikus trigonometria ugyanis a triéder élszögei és lapszögei közötti relaciókat tartalmazza. Az élszög természetesen független a gömb sugarától, a lapszög függetlenségét igen könnyű megmutatni.[3] Tételünk tehát annak a postulálásából ered, hogy végtelen kis térrészben az euklidesi geometria érvényes.[4]

3. A párhuzamosság fogalmának megállapítása után[5] csakis két tételre van szükségünk. 1. Ha két egyenes egy harmadikkal

---

[1] Engel, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie I. p. 136. §.

[2] L. p. Ostwald's Klassiker Nr. 130. 3. §.

[3] L. például Frischauf Elemente der abs. Geometrie p. 19.

[4] Ehhez megjegyezzük először is, hogy a sphærikus trigonometria három alapképletét levezethetjük úgy, hogy az egész szerkesztés a gömb belsejében történjék (pl. az Euler-féle levezetése a cosinus-tételnek) mert megelégedhetünk pl. olyan gömbháromszöggel is, a melynél az élszögek $\frac{\pi}{2}$-nél kisebbek, vagy akár — mint ki fog tünni — elemi derékszögű gömbháromszöggel is. Ez a postulatum (a síkra alkalmazva) tulajdonképpen minden absolut geometriai tárgyalásnál szerepel. (L. Killing: (Die nichteuklidischen Raumformen p. 3); de azt hiszem e tételnek igazságát a folytonosság elvéből nem bizonyítani, hanem postulálni kell. L. még Stäckel és Kürschák: Bólyai észrevételei stb. Math. és termtud. ért. 1902, p. 57.

[5] Appendix 1. §.

párhuzamos, egymással is párhuzamos[1] és 2. Ha három sík egymást párhuzamos egyenesekben metszi [mondjuk: három oldalu prismapalástot alkotnak,] akkor a lapszögeinek összege 2R.[2]

Talán nem lesz felesleges jelezni, hogy e tételt hogyan lehetne a 2. alatti postulatum felhasználásával egyszerűen bizonyítani. Először is megjegyezzük, hogy a prismapalástról épen olyan módon, mint a hogyan LEGENDRE a síkháromszögre nézve kimutatta, (második bebizonyítás) bebizonyítható, hogy a lapszögek összege $2R$-nél nagyobb nem lehet; és ebből következtethető épen olyan módon, mint a háromszögeknél, hogyha egyetlen egy prismapalástban a lapszögek összege $2R$, mindegyikben $2R$. E megjegyzések után a tétel bebizonyitása a következő:

Legyen adva az O középponttal biró $OABC$ triéder, melynek OC élénél levő lapszöge derékszög. Ha a sphærikus excessust $[\alpha+\beta+\gamma-\pi]$ E-vel jelöljük, akkor CAGNOLI tétele szerint[3] $\gamma=\frac{\pi}{2}$ téve

$$\sin\tfrac{1}{2}E=\frac{\sin\frac{1}{2}a\,.\,\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}. \qquad \text{A)}$$

Ha az O középpontot a CO irányában O_1-be toljuk, de az ABC pontokat megtartjuk, és az új triéder oldalait $a_1b_1c_1$-el és excessusát E_1-gyel jelöljük:

$$\sin\tfrac{1}{2}E_1=\frac{\sin\frac{1}{2}a_1\sin\frac{1}{2}b_1}{\cos\frac{1}{2}c_1}.$$

De az a szög külső szöge a BOO_1 háromszögnek, tehát nagyobb mint a_1 éppen így $b>b_1$, továbbá a

$$\cos c_1=\cos a_1\cos b_1$$

egyenletből következik, hogy egyúttal

$$c_1<c$$

és így

$$E_1<E$$

---

[1] U. o. 7. §.

[2] U. o. 9. §.

[3] L. péld. TODHUNTER Spherical trigon. p. 70.

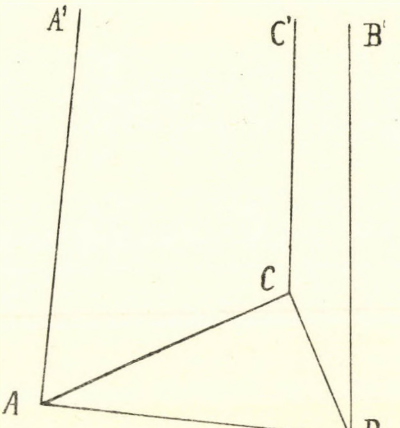
A sphærikus excessus tehát az O pont eltolásánál csökken és ha a triéder élei párhuzamosakká válnak, azaz prismapalásttá lesz, mely esetben $a=b=c=0$, az A) alattiból:

$$\lim E = 0$$

vagyis

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

4. Lobatschefsky nyomán megmutatjuk, hogy minden síkháromszöghöz tartozik egy-egy gömbháromszög, melynek alkotórészei között a háromszög oldalaihoz tartozó parallella-szögek is foglaltatnak. Legyen ABC a papiros síkjában fekvő, C-nél derékszögű háromszög. Emeljünk e síkra A-ban merőlegest (AA') és úgy a B ponton, mint C-n át AA'-hoz párhuzamosakat húzunk.



B csúcspontban keletkezik egy triéder, a melyet az ABC háromszöghöz tartozó triédernek nevezünk. E triéder élszögei a következők: $\sphericalangle CBA = \beta$ az adott háromszög egyik szöge. $B'BA$ nem más, mint az AB-hez tartozó parallella-szög: $\pi(c)$. $B'BC$ pedig a BC-hez tartozó parallella-szög $\pi(a)$. Ugyanis $A'ACC'$ sík merőleges a papiros síkjára, tehát BC, mely merőleges AC-re, egyuttal derékszöget alkot CC'-al is. E triéder élszögei tehát:

$$\beta, \quad \pi(c), \quad \pi(a).$$

Lapszögeit kell most meghatároznunk. A BB' élnél levő lapszöget az előbbi tétel segítségével határozzuk meg. AA', BB', CC' ugyanis prismapalástot alkot, melynek lapszögei: AA' mellett α, CC' melletti derékszög (mert BC merőleges az $AA'CC'$ síkra), tehát a BB' melletti lapszög: $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Az AB melletti lapszög derékszög és a BC melletti lapszöget a C-nél méri a $C'CA \measuredangle = \pi(b)$. E szerint e triédernek a lapszögei sorban:

$$\frac{\pi}{2} - a, \quad \pi(b), \quad \frac{\pi}{2}$$

E derékszögű triéderre vonatkozó minden reláczio egyuttal az ABC háromszög oldalai és szögei közötti összefüggésre vezet. Igy pl. az ismeretes sphærikus trigonometriai képletek:

$$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta$$
$$\cos c = \cos a \cos b$$
$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta.$$

a jelen esetben a következő egyenleteket szolgáltatják:

$$\cos \pi(a) = \operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{tg} \pi(b)$$
$$\cos \pi(a) = \cos \pi(c) \cos \beta$$
$$\cos \pi(b) = \cos \pi(c) \cos \alpha \text{ stb.} \tag{1}$$

5. Nincs más hátra, mint hogy a $\pi(x)$ analitikai alakját megállapitsuk. E végből az imént felirt harmadik egyenletet, a

$$\cos \pi(c) = \frac{\cos \pi(b)}{\cos \alpha}$$

a következő alakra hozzuk:

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} \pi(c) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} [\pi(b) + \alpha] \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} [\pi(b) - \alpha]. \tag{2}$$

A π függvény analitikai alakjának meghatározása végett egy egészen specialis derékszögű háromszöget választunk: olyant, melynek átfogója c és egyik hegyes szöge épen $\pi(c)$. Ilyen háromszöget nyerünk, ha c-re A végpontjában merőlegest huzunk (AD) és B végpontjában ehhez párhuzamosat vonunk (BE) és erre az A pontból az AC merőlegest vonjuk. Ezen az ábrán látjuk, hogy $\measuredangle ABC = \pi(c)$ és $\measuredangle CAD = \pi(b)$; tehát:

$$\pi(b) + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$\pi(b) - \alpha$ meghatározása végett hosszabbitsuk meg CB-t még B-n túl, húzzuk meg ehhez A-n át (tehát AC-hez szimmetrikusan fekvő) AD' párhuzamosat, hosszabbítsuk meg AB-t B-n túl $BA' = BA$ darabbal és emeljük az AA'-ra az $A'D''$ merőlegest.

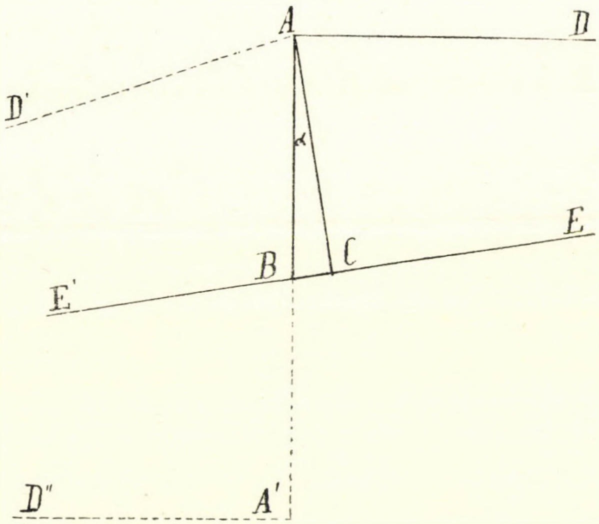
Minthogy $E'BA' = \pi(c)$, tehát BE' párhuzamos $A'D''$-vel s a 3. alatti tétel szerint AD' is $|||$ $A'D''$, vagyis

$$D'AB = \pi(b) - a = \pi(2c),$$

és így a föntebbi 2. alatti egyenlet így irható:

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\pi(c) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\pi(2c), \tag{3}$$

mely egyenlet minden c-re nézve érvényes.



A 3.-ból következik, hogy

$$2 \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\pi(c) = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\pi(2c)$$

vagy rövidebb jelzésben $\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\pi(c) = \varphi(c)$ téve:

$$2\varphi(c) = \varphi(2c).$$

Tegyük

$$\frac{\varphi(c)}{c} = \psi(c),$$

akkor pedig

$$\psi(2c) = \psi(c)$$

és ebből általában

$$\psi(2^n c) = \psi(c)$$

vagy $2^n c = x$ téve:

$$\psi(x) = \psi\left(\frac{x}{2^n}\right). \tag{4}$$

Ha fölteszszük, hogy a $\psi(x)$ a 0 helyen folytonos (elégséges a jobboldali környezet figyelembe vétele) és $\psi(0) = -\frac{1}{k}$, akkor e (4) alatti egyenletből következik, hogy x minden értékénél

$$\psi(x) = -\frac{1}{k}.$$

Ebből következik, hogy:*

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} \pi(c) = e^{\frac{c}{k}} \tag{5}$$

A $\pi(x)$ függvény ezen meghatározásához csak azt kellett föltételezni, hogy

$$\frac{1}{x} \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \pi(x) \tag{6}$$

a 0 helyen folytonos. Minthogy pedig $\pi(x)$-ről — a folytonosság postulatuma alapján — fölteszszük, hogy $x = 0$-nál $\frac{\pi}{2}$ értéket vesz fel (azaz 0 távolságban a parallella-szög megegyezik az euklidesi parallella-szöggel), tehát e föltevés azt jelenti, hogy log tg $\frac{1}{2} \pi(x)$ $x = 0$ helyen oly módon válik 0-á, hogy a (6) alatti kifejezésnek véges és meghatározott határértéke legyen.

A trigonometriai képleteket most már végleges alakban nyerjük, ha az (1.) alatti egyenletekben előforduló trigonometriai függvényeit a $\pi(a)$, $\pi(b)$ és $\pi(c)$-nek a félszögek cotangensei által kifejezzük, vagyis

$$\sin \pi(x) = \frac{2}{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}} \quad \text{és} \quad \cos \pi(x) = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}$$

* A $\pi(c)$ meghatározását Bólyai (Appendix 29. §.) és Engel (Zur nicht-eucl. Geom. Berichte der königl. sächs. Ges. 1898. p. 187) tisztán geometriai uton végezték. Az első planimetriai, a második stereometriai uton. Egy igen egyszerü függvénytani eljárás van ez értekezés II. részében.

teszszük. Igy pl. az (1) alatti egyenletek elsejéből a következő lesz:

$$\frac{e^{\frac{a}{k}}-e^{-\frac{a}{k}}}{e^{\frac{a}{k}}+e^{-\frac{a}{k}}}=\operatorname{tg}\alpha\,.\,\frac{e^{\frac{b}{k}}-e^{-\frac{b}{k}}}{2}$$

és ha a hyperbolikus függvényeket vezetjük be, vagyis:

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\mathfrak{Sin}\,x,\quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathfrak{Cos}\,x \text{ stb.}$$

teszszük, akkor a (4) alatti egyenletek a következőkbe mennek át:

$$\mathfrak{Tg}\frac{a}{k}=\operatorname{tg}\alpha\,.\,\mathfrak{Sin}\frac{b}{k}$$

$$\mathfrak{Tg}\frac{a}{k}=\mathfrak{Tg}\frac{c}{k}\cos\beta$$

$$\mathfrak{Tg}\frac{b}{k}=\mathfrak{Tg}\frac{c}{k}\cos\alpha \quad \text{s i. t.}$$

vagyis megkapjuk a trigonometriai képleteket olyen alakban, a melybe a közönséges sphærikus trigonometriai egyenletei átmennek, ha a közönséges trigonometriai függvények helyett a hyperbolikus függvényeket teszszük és a, b, c helyett $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ helyettesitjük.

A derékszögű háromszögre megállapitott egyenletekből az általános háromszög trigonometriája ugyanolyan módon állapitható meg, mint a sphærikus trigonometriában. Igy jutunk a következő egyenletekre:*

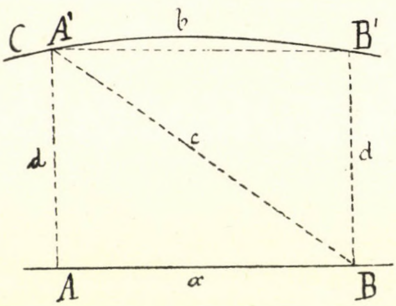
$$\mathfrak{Sin}\frac{a}{k}:\mathfrak{Sin}\frac{b}{k}:\mathfrak{Sin}\frac{c}{k}=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$$

$$\mathfrak{Cos}\frac{a}{k}=\mathfrak{Cos}\frac{a}{k}\,\mathfrak{Cos}\frac{b}{k}-\mathfrak{Sin}\frac{a}{k}\,\mathfrak{Sin}\frac{b}{k}\cos\alpha$$

$$\mathfrak{Sin}\frac{a}{k}\cos\beta=\mathfrak{Cos}\frac{b}{k}\,\mathfrak{Sin}\frac{c}{k}-\mathfrak{Sin}\frac{b}{k}\,\mathfrak{Cos}\frac{c}{k}\cos\alpha.$$

* L. pl. FRISCHAUF: Elemente der abs. Geometrie p. 64.

6. Még csak azt akarom megmutatni, hogy a trigonometriának ezen megállapitásából hogyan következtethetünk az Appendix egyéb eredményeire: az egyenlőközű vonal hosszára, a kör kerületére és hogy a parallellaszög minő összefüggésben van a BÓLYAI-féle L-vonalak hosszúságával.



Egy adott egyenestől egyenlő távolságra levő pontok geometriai helyét, (mely nem egyenes), *egyenlőközű vonalnak* hívjuk. Legyen adva AB egyenes. Ezen egyenestől d távolságban levő pontok geometriai helye legyen a C görbe. Ha az ábrát AB mentén eltoljuk, a C görbe változatlan marad. Ebből következtethetjük, hogy $\frac{A'B'}{AB}$ viszony állandó. Ezen viszony meghatározása végett számitsuk ki az $ABB'A'$ négyszögből $A'B'$ egyenes hosszuságát.

Az $A'B'B$ háromszögben:

$$\mathfrak{Cos}\,\frac{b}{k} = \mathfrak{Cos}\,\frac{c}{k}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{d}{k} - \mathfrak{Sin}\,\frac{c}{k}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{d}{k}\sin\beta.$$

De az $A'AB$ derékszögű háromszögből:

$$\mathfrak{Cos}\,\frac{c}{k} = \mathfrak{Cos}\,\frac{d}{k}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{a}{k}$$

$$\mathfrak{Sin}\,\frac{c}{k} = \mathfrak{Sin}\,\frac{d}{k} : \sin\beta$$

és így

$$\mathfrak{Cos}\,\frac{b}{k} = \mathfrak{Cos}^2\,\frac{d}{k}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{a}{k} - \mathfrak{Sin}^2\,\frac{d}{k}.$$

Ha $\mathfrak{Cos}\,\frac{b}{k}$ helyett $1 + \frac{b^2}{2k^2} + \cdots$ s hasonlóan $\mathfrak{Cos}\,\frac{a}{k}$ helyett is a sorát helyettesitjük, akkor

$$1+\frac{b^2}{2k^2}+\cdots=\mathfrak{Cos}^2\frac{d}{k}+\frac{a^2}{2k^2}\mathfrak{Cos}^2\frac{d}{k}+\cdots-\mathfrak{Sin}^2\frac{d}{k}$$

-re jutunk, melyből

$$\mathfrak{Cos}^2\frac{d}{k}-\mathfrak{Sin}^2\frac{d}{k}=1$$

téve, ered a következő egyenlet:

$$\frac{b^2}{2k^2}+\cdots=\left(\frac{a^2}{2k^2}+\cdots\right)\mathfrak{Cos}^2\frac{d}{k}$$

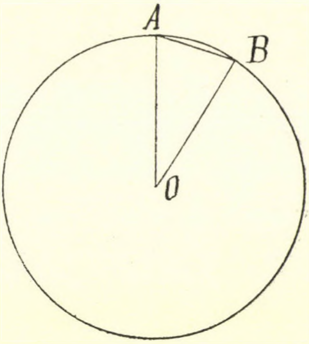
és innen, ha $\lim a=\lim b=0$

$$\lim\frac{b}{a}=\mathfrak{Cos}\frac{d}{k}\cdot$$

De $\dfrac{A'B'}{AB}$ viszony állandó lévén, következik, hogy:

$$\frac{A'B'}{AB}=\mathfrak{Cos}\frac{d}{k}\cdot$$

A *kör kerülete* a következőképpen határozható meg: Az OAB egyenlőszárú háromszögben O-nál levő szöget jelöljük ω val, OA-t r-rel, AB-t pedig h-val.



$$\mathfrak{Sin}\frac{h}{k}=2\,\mathfrak{Sin}\frac{r}{k}\sin\frac{\omega}{2}$$

vagyis

$$F(h)=\frac{h}{k}+\cdots=2\,\mathfrak{Sin}\frac{r}{k}\left(\frac{\omega}{2}+\cdots\right)$$

és ha ebből az egyenletből, melyben $\dfrac{\partial F}{\partial h}\neq 0$ a $h=0$ helyen, a $\dfrac{h}{k}$-t mint ω hatványai szerint haladó sort állítják elő:

$$\frac{h}{k}=\mathfrak{Sin}\frac{r}{k}\,.\,\omega+\cdots$$

és innen

$$\Sigma h=k\,.\,\mathfrak{Sin}\frac{r}{k}\,\Sigma\omega+A\Sigma\omega^2+\cdots$$

és ha $\lim \omega = 0$ teszszük, $\lim \Sigma\omega = 2\pi$ lesz, a többi pedig 0; tehát a kör kerülete:*

$$C = 2k\pi \,\mathfrak{Sin}\, \frac{r}{k}.$$

Ha nem az egész kör kerületét határozzuk meg, hanem csak a körív hosszát, akkor

$$L = 2k\pi\varrho \,\mathfrak{Sin}\, \frac{r}{k} \tag{7.}$$

a hol ϱ a középponti szögnek $4R$-hez való viszonya. Egy r_1 sugarú körben ugyanezen középponti szöghöz tartozó ív hossza:

$$L_1 = 2k\pi\varrho \,\mathfrak{Sin}\, \frac{r_1}{k} \tag{8.}$$

és így

$$\frac{L}{L_1} = \frac{\mathfrak{Sin}\, \frac{r}{k}}{\mathfrak{Sin}\, \frac{r_1}{k}} = \frac{e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}}{e^{\frac{r_1}{k}} - e^{-\frac{r_1}{k}}}.$$

Legyen $r > r_1$, akkor ezt a kifejezést még így írjuk:

$$\frac{L}{L_1} = \frac{e^{\frac{r-r_1}{k}} - e^{-\frac{r+r_1}{k}}}{1 - e^{-\frac{2r_1}{k}}}.$$

Tegyük fel, hogy r és r_1 folyton nőnek; de úgy, hogy $r - r_1$ állandóan x marad, akkor, ha r végtelen nagygyá válik, a körből a Bólyai-féle L vonal (a Lobatschefsky-féle határvonal) lesz és e két L-vonalnak két radius (illetőleg Bólyai-féle tengelyek) közé foglalt iveinek viszonya:

$$\frac{L}{L_1} = e^{\frac{x}{k}}$$

vagyis ( ) szerint:

$$\frac{L}{L_1} = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\pi(x).$$

---

* Ebből azonnal következik az Appendix azon remek tétele, hogy a közönséges trigonometria sinus-tétele érvényben marad, ha az a, b, c oldalak helyett ezen oldalakkal leirt körök kerületei tétetnek.

II.

1. A megelőzőkben abból indultunk ki, hogy a gömbháromszögtan független az ötödik postulatumtól; e tétel segítségével állapitottuk meg a BÓLYAI-féle trigonometriát és a trigonometriai képletek alkalmazása rávezetett bennünket BÓLYAI nevezetes eredményeire: az egyenlőközü vonal hosszuságára, a kör kerületére, az L vonal hosszára.

A következőkben oly eljárást akarunk bemutatni, mely nem csak a BÓLYAI-féle trigonometria megállapitására alkalmazható, hanem egyuttal abban az esetben, midőn az euklidesi második postulatum kihagyásával, a háromszög szögösszegét $2R$-nél nagyobbnak tételezzük fel, a RIEMANN-féle trigonometriára is rávezet.

E végből feltételezzük, hogy végtelen kis sikrészben az euklidesi tételek érvényesek, vagyis oly geometriát keresünk, melynek tételei a határesetben az euklidesi geometria tételeivel megegyeznek.

Az r sugarú kör kerülete csakis az r-től függ; tehát ilyen alakban irható:

$$k = 2\pi\varphi(r).$$

Az egész geometriára a $\varphi(r)$ függvény a jellemző; tehát egyik főczélja az absolut geometriai tárgyalásnak: az egyes idomoknak, vagy mondhatjuk mindjárt, a háromszögnek az euklidesi postulatumokban és axiomákban lerakott tulajdonságaiból tisztán analytikai, (logikai) módszerekkel a $\varphi(r)$ függvény meghatározása.

A körív hosszusága a középponti szöggel arányos, a mi épen úgy bizonyítható, mint a közönséges geometriában. Így tehát ha a szöget pl. a $4R$-hez való viszonyszámával mérjük, az ω középponti szöghöz tartozó ívhosszuság az r sugarú körben:

$$\text{arc}\ \omega = 2\pi\omega\varphi(r).$$

Ha az ω középponti szöghöz tartozó húr hossza: h, akkor, minthogy a kör kerülete mint a beírt szabályos sokszögen határa fogható fel:

$$\lim_{\omega=0} \frac{h}{\text{arc}\,\omega} = 1,$$

vagyis

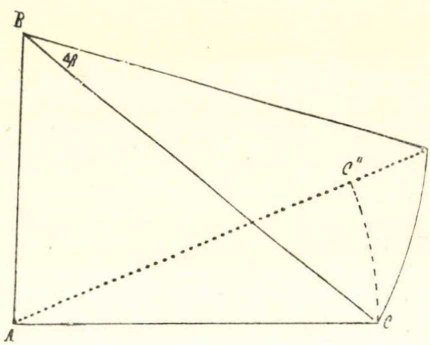
$$h = \text{arc}\,\omega + \varepsilon$$

a hol

$$\lim \frac{\varepsilon}{\omega} = 0.$$

Röviden szólva: a végtelen kis ív a hurtól másodrendű végtelen csekélyben különbözik.

2. Ezen előzetes megállapitások után azt akarjuk megmutatni, hogy minden derékszögű háromszögben:



$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$$

csakis az a befogótól függ. A derékszögű háromszög ezen nevezetes tulajdonsága képesít majd bennünket az egész trigonometria levezetésére.

Legyen ABC tetszésszerinti háromszög, melynek β szögét $\Delta\beta$-val változtatjuk, a szárait megtartva. Az új háromszög ABC'. B-ből, mint centrumból, rajzoljuk a CC' ívet és A-ból a CC'' ivet. $C''C'$-et jelöljük Δb-vel. $C'C''C$ háromszögben:

$$C'C = 2\pi\varphi(a)\,\Delta\beta + \varepsilon, \quad \text{a hol} \quad \lim_{\Delta\beta=0} \frac{\varepsilon}{\Delta\beta} = 0$$

$$\measuredangle C'C''C = R + \varepsilon' \quad \text{és} \quad \measuredangle C'CC'' = \gamma + \varepsilon''$$

a hol

$$\lim_{\Delta\beta=0} \varepsilon = \lim_{\Delta\beta=0} \varepsilon'' = 0$$

Az euklidesi geometriában e kis háromszögre nézve volna:

$$C'C'' = \Delta b = \frac{C'C \sin C'CC''}{\sin CC''C'} = \frac{[2\pi\varphi(a)\,\Delta\beta + \varepsilon] \sin(\gamma + \varepsilon'')}{\sin(R + \varepsilon')}.$$

tehát
$$\frac{\Delta b}{\Delta\beta}=\frac{\left(2\pi\varphi(a)+\varepsilon'''\right)\sin(\gamma+\varepsilon'')}{\sin(R+\varepsilon')}$$

és így minden geometriában:
$$\lim_{\Delta\beta=0}\frac{\Delta b}{\Delta\beta}=2\pi\varphi(a)\sin\gamma,$$

vagyis:
$$\frac{\partial b}{\partial\beta}=2\pi\varphi(a)\sin\gamma$$

és szimmetria szerint:
$$\frac{\partial b}{\partial\beta}=2\pi\varphi(c)\sin\alpha,$$

miből:
$$\sin\alpha:\sin\gamma=\varphi(a):\varphi(c)$$

és a harmadik oldalra is kiterjesztve, a sinustételt a következő alakban nyertük:
$$\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=\varphi(a):\varphi(b):\varphi(c),$$

a mely megegyezik Bólyainak már említett sinustételével.*

Ha már most e sinustételt egyenlőszárú háromszögre alkalmazzuk, melynek alapját $2a$-val, szárát c-vel, az alap melletti szöget β-val, a csúcsnál levőt pedig 2α-val jelöljük, akkor:
$$\sin 2\alpha:\sin\beta=\varphi(2a):\varphi(c),$$

vagyis:
$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}=\frac{\varphi(2a)}{2\varphi(c)\sin\alpha}.$$

De $\varphi(c)\sin\alpha=\varphi(a)$, tehát:**
$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}=\frac{\varphi(2a)}{2\varphi(a)}=\psi(a) \qquad 9)$$

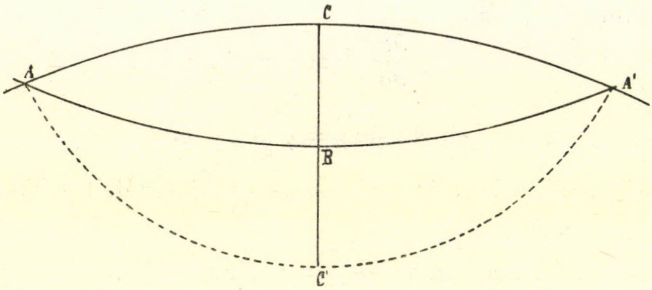
és ezzel kimutattuk, hogy a derékszögű háromszögben a $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ viszony csakis az a függvénye.

---

* L. Vallée Poussin: Sur la geom. non-euclidienne. Mathesis, 1895.

** A $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ ezen kifejezésének a sinustételből való ezen egyszerű deductióját Réthy Mór szíves közlésének köszönöm.

3. Ha fölteszszük, hogy a háromszög szögeinek összege $2R$-nél nagyobb, akkor kell lenni olyan háromszögnek is, melyben két derékszög fordul elő. Ha ABC ilyen háromszög volna (az ábrán két oldalt körívnek kellett rajzolnunk), melynek β és γ szögei derékszögek, akkor az ábrának BC körül való átfordulásából következik, hogy az AC és AB egyenesek meghosszabbításai A'-ben, az A-hoz BC-re nézve szimmetrikusan fekvő pontban



is metszik egymást; vagyis $2R$-nál nagyobb feltevés esetében az euklidesi második postulatumot is eliminálnunk kell.

Ha az egybevágóság axiomája érvényben van az egész síkon, akkor azonnal következtethetjük, hogy a BC arányos a γ szöggel. Ha ugyanis a BC-t $BC' = BC$-vel meghosszabbitjuk, akkor $ABC \triangle$ egybevágó ABC'-el (mert két oldal és a közbezárt szög egyenlő) és így a 2α-val szemben a BC kétszerese van. Ugyanezzel a gondolatmenettel mutathatjuk meg, hogy általában $n\alpha$-val szemben $n.BC$ nagyságú oldal van, ha n raczionalis szám. Ebből pedig következik, hogy általában két ilyen két-derékszögű háromszögben a csúcsszög arányos a szemközti oldallal.

Ha e két-derékszögű háromszögre alkalmazzuk a 9) alatti tételt akkor, minthogy α arányos a szemközti a-val (mondjuk $\alpha = \frac{a}{r}$, a hol r positiv szám) és $\beta = R$, tehát

$$\psi(a) = \cos\frac{a}{r}$$

és így ebben a geometriában általában:

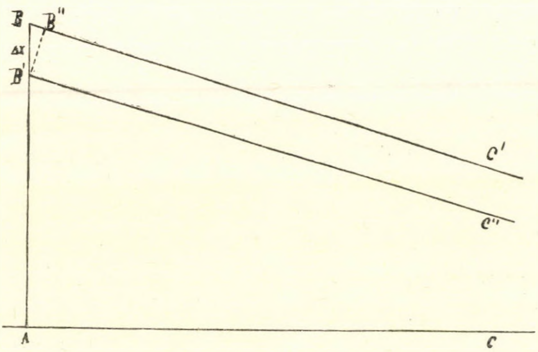
$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \cos\frac{a}{r}\cdot$$

Ha még ehhez a megfelelő:

$$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \cos\frac{b}{r}$$

egyenletet is hozzáveszszük, akkor e két egyenletből az egész trigonometriát már megállapithatjuk. Ez a trigonometria, mint e két egyenletből következik, teljesen megegyezik az r sugarú gömb trigonometriájával.

4. Ha pedig érvényben tartjuk azt a postulatumot, hogy két egyenes egymást csak egy pontban metszheti, akkor, miként LEGENDRE tételeiből következik, a háromszög szögeinek összege $2R$-nál nagyobb nem lehet. Ha fölteszszük, hogy a háromszög



szögeinek összege $2R$-nál kisebb, akkor az ötödik postulatumtól eltekintünk a geometria megalkotásánál. Ez esetben a 2) alatt szereplő $\psi(a)$ függvény meghatározása végett az a távolsághoz tartozó parallella szögre van szükségünk, hogy a $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \psi(a)$ egyenletet a derékszögű háromszög azon határesetére alkalmazhassuk, a melynek egyik befogója a, ezzel szemközti szöge 0, tehát mellette levő szöge $\pi(a)$.

A parallellaszög meghatározására a következő egyszerű eljárást használom. Huzzuk az AC-re merőlegesen az $AB = x$-et;

és a B ponton át a BC' egyenest párhuzamosan AC-hez; akkor tehát

$$\sphericalangle ABC' = \pi(x).$$

Mérjük a BA-ra a $BB' = \Delta x$ távolságot és huzzuk a B' ponton át a $B'C''$ egyenest párhuzamosan az AC-hez, illetőleg a BC'-hez; tehát

$$\sphericalangle AB'C'' = \pi(x - \Delta x).$$

Huzzuk a $B'B''$-et merőlegesen a BC'-re. Az így keletkező $BB'B''$ derékszögű háromszögben

$$B'B'' = \varepsilon \Delta x \,.\, \sin \pi(x),$$

a hol $\lim\limits_{\Delta x=0} \varepsilon = 1$; továbbá

$$\sphericalangle BB'B'' = \frac{\pi}{2} - \pi(x) + \varepsilon',$$

a hol $\lim\limits_{\Delta x=0} \varepsilon' = 0$.

Minthogy pedig $B'B''$ merőleges BC'-re, a $B''B'C''$ szög nem más, mint a $B'B''$-hez tartozó parallellaszög, azaz:

$$B''B'C'' = \pi[\varepsilon \Delta x \sin \pi(x)].$$

A B'-nél levő szögek összege:

$$\frac{\pi}{2} - \pi(x) + \varepsilon' + \pi[\varepsilon \Delta x \,.\, \sin \pi(x)] + \pi(x - \Delta x) = \pi.$$

Ha fölteszszük, hogy $\pi(x)$ az x változónak az $x=0$ (jobboldali) környezetében differencziálható függvénye, akkor

$$\pi[\varepsilon \Delta x \sin \pi(x)] = \pi(0) + \varepsilon \Delta x \sin \pi(x) \pi'(\xi),$$

a hol ξ egy, a 0 és $\varepsilon \Delta x \,.\, \sin \pi(x)$ közötti számot jelent.

Ha még tekintetbe veszszük, hogy $\pi(0) = \frac{\pi}{2}$, akkor a föntebbi egyenletből a következő lesz:*

---

* $\frac{\varepsilon'}{\Delta x} = \varepsilon''$ tettük. Meg kell mutatnunk, hogy $\lim \varepsilon'' = 0$, azaz hogy ε' Δx-hez képest másodrendű végtelen csekély lesz. Ezt a következőképen láthatjuk be: A háromszög területe [miként pl. Gauss Bólyai Farkashoz

$$\frac{\pi(x-\Delta x)-\pi(x)}{-\Delta x}=\varepsilon\sin\pi(x).\pi'(\xi)+\varepsilon''$$

és ebből:

$$\pi'(x)=\sin\pi(x).\pi'(0)$$

és $\pi'(0)=\gamma$ téve:

$$\frac{d\pi(x)}{\sin\pi(x)}=-\gamma dx,$$

miből integrálva kapjuk, hogy:

$$\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\pi(x)=\gamma x+c$$

és figyelembe véve, hogy $\pi(0)=\frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\pi(x)=e^{\frac{x}{k}},$$

a hol k, mint ezen egyenletből azonnal következik, jelenti azt a (tetszés szerinti) távolságot, a melyhez tartozó parallellaszög:

$$\pi(k)=2\operatorname{arccotg}e.$$

A k egy másik értelmezésére azonnal visszatérünk.

5. Ha most már a

$$\frac{\cos a}{\sin\beta}=\varphi(a)$$

egyenletet az előbbi pontban említett háromszögre alkalmazzuk, vagyis $\alpha=0$, $\beta=\pi(a)$ teszszük, akkor:

$$\varphi(a)=\frac{1}{\sin\pi(a)}$$

írt levelében egészen elemi úton kimutatta, (Math. Ann. 49. k.)] arányos az excessussal, azaz $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$-val. $B'BB''$ háromszög területe tehát $c\varepsilon'$, a hol c véges szám. De e kis háromszög területe az euklidesi úton mért terület által is kifejezhető pl. így:

$$\eta(\Delta x)^2\sin\pi(x).\cos\pi(x),\quad\text{a hol}\quad\lim\eta=\tfrac{1}{2};$$

tehát

$$c\varepsilon'=\tfrac{1}{2}\eta(\Delta x)^2\sin2\pi(x),$$

miből már következik, hogy $\lim\frac{\varepsilon'}{\Delta x}=0$.

egyenletre jutunk; és ha $\sin \pi (a)$ a $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \pi (a)$ által kifejeztetik: *

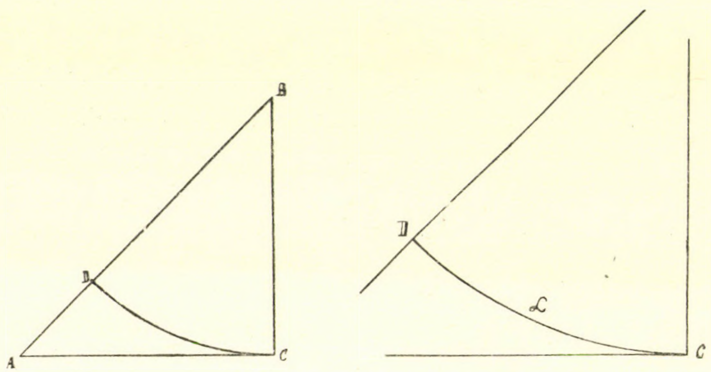
$$\psi(a) = \frac{e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}}}{2} = \mathfrak{Cos}\, \frac{a}{k}.$$

A Bólyai-féle geometriában tehát mindig:

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \mathfrak{Cos}\, \frac{a}{k} \qquad \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \mathfrak{Cos}\, \frac{b}{k}, \tag{10}$$

mely két egyenletből az egész trigonometria megállapitható.

6. A képleteinkben szereplő k meghatározását, vagyis a Bólyai-féle geometria «természetes» mértékegységének meg-



állapitását akarjuk még bemutatni. E végből vegyük fel az ABC egyenlőszárú derékszögű háromszöget és ebbe B-ből, mint centrumból, BC sugárral rajzoljuk a CD körívet.

---

* Ebből az egyenletből a 9) alatti segítségével most már a $\varphi(a)$ is meghatározható. Fönn áll ugyanis a $\frac{\varphi(2a)}{2\varphi(a)} = \mathfrak{Cos}\, \frac{a}{k}$ függvényegyenlet. Ha $\frac{\varphi(a)}{\mathfrak{Sin}\, \frac{a}{k}} = \varrho(a)$ teszszük, akkor ebből következik, hogy a $\varrho(a)$-ra nézve érvényes a $\varrho(2a) = \varrho(a)$ függvényegyenlet, vagyis $\varrho(a) = \text{const.}$; tehát $\varphi(a) = C\, \mathfrak{Sin}\, \frac{a}{k}$. Minthogy pedig a kör kerülete $2\pi\varphi(a)$, $\lim a = 0$ esetére menve, azonnal következik, hogy $C = k$; tehát $\varphi(a) = k\, \mathfrak{Sin}\, \frac{a}{k}$.

Minthogy $AC = BC = a$, tehát a 10) alatti egyenletek a jelen esetben:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \mathfrak{Cos}\,\frac{a}{k}\,. \tag{11}$$

A CD ív hossza, [l. 8) alatti egyenletet] a szöget a közönséges absolut módon mérve, (azaz α-fokú szöghöz $\frac{\pi\alpha}{180}$ mértékszámot rendelve)

$$CD = k\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\frac{a}{k}\,,$$

vagyis a 11) egyenlet és a hyperb. függvények között fönnálló ismeretes reláczió figyelembe vételével:

$$\overline{CD}^2 = k^2\alpha^2 (\operatorname{cotg}^2\alpha - 1).$$

Ha már most az AB átfogót úgy mozdítjuk el, hogy az ABC egyenlőszárú háromszög A és B szögei eltünjenek, vagyis az átfogó a derékszög két szárához párhuzamos legyen, akkor

$$\overline{CD}^2 = \lim_{\alpha=0} k^2\alpha^2 (\operatorname{cotg}^2\alpha - 1) = k^2.$$

Ezen határátméretnél a CD körívből a $CD\ L$ alakú vonal lett; tehát arra jutottunk, hogy ezen L vonalív hossza a Bólyai-geometria természetes egysége.*

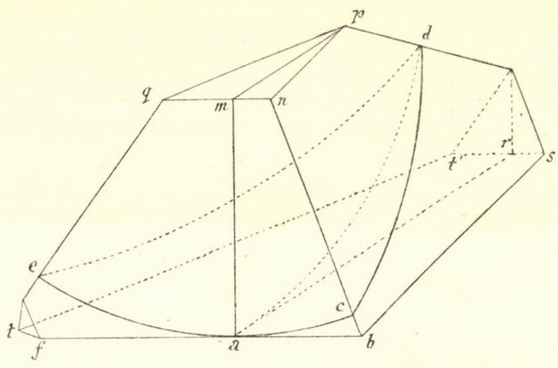
Beke Manó.

---

* Ugyanerre az eredményre jut egészen más uton Engel: Zur Nichteuklidischen Geometrie. Sächs. Berichte. 1898.

A PARALLELSZÖGRŐL.

Azok a meggondolások, melyeket a következőkben az *Appendix* 29. §-ában foglalt alapvető tétel levezetésére használok, lényegükben ugyanazok, mint a melyekkel ENGEL FRIGYES * e tételt bebizonyította. Eltérés csak annyiban van, hogy az ábrát épen a fordított úton állítom elő, mint a melyet ENGEL követett, továbbá hogy a számítás némely részletét egybevágó idomok



szemléletével pótoltam. Az *Appendix* első 23 §-át természetesen ismeretesnek tekintem, ellenben a továbbiakra nem hivatkozom.

A bebizonyítandó tétel ez:

Ha (1. ábra)

$$bam = R, \quad ab = y \quad \text{és} \quad bn \,\|\, am,$$

akkor S-ben — az u parallelszögre nézve — *a következő képlet érvényes*

* *Zur nichteuklidischen Geometrie*, Berichte der m. ph. Classe der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1898.

$$Y = \text{cotg.}\, \tfrac{1}{2} u.$$

Itt Y az Appendix 23. §-ában értelmezett viszonyt jelenti.

Hogy a közönséges trigonometria képleteire hivatkozhassunk, szerkeszszünk az $a\tilde{m}$ tengelyhez tartozó F felületen (határgömbön) oly L vonalú $\triangle\, acd$ derékszögű háromszöget, melyben a derékszögnek c csúcsa épen bn-nek az F-fel való metszéspontja és válaszszuk az a-nál levő szöget u-val egyenlőnek. Ha még a $c\tilde{a}$ L vonalon

$$ae = ad,$$

akkor az L vonalú $\triangle\, ade$-ben a d és e csúcsoknál levő szögek mindegyike egyenlő az u külszög felével, mert F-en ugyanazok a tételek érvényesek az L vonalú idomokra nézve, mint az euklidesi rendszerben az egyenesvonalú síkidomokra nézve. Ugyanazon oknál fogva egyszersmind $\triangle\, ecd$-ben

$$\text{cotg.}\, \tfrac{1}{2} u = \frac{ec}{cd}.$$

Legyen most már

$$dp \mathbin{|||} am,$$

tehát egyszersmind

$$dp \mathbin{|||} bn,$$

továbbá legyen $am\tilde{d}$-ben

$$ar \perp am,$$

azaz jelentse ar az ad L vonal érintőjét a-ban; végre legyen bs az $ab\tilde{r}$ és $bn\tilde{d}$ síkok metszése.

Minthogy

$$\widetilde{bam} \perp \widetilde{bar} \quad \text{vagyis} \quad \widetilde{abn} \perp \widetilde{abs},$$

továbbá a c-nél levő derékszög miatt

$$\widetilde{acn} \perp \widetilde{dcn} \quad \text{vagyis} \quad \widetilde{abn} \perp \widetilde{nbs},$$

azért

$$bs \perp ba \quad \text{és} \quad bs \perp bn.$$

Minthogy azonfelül a bar szög egyenlő u-val, nyilván

$$rabs \equiv nbam$$

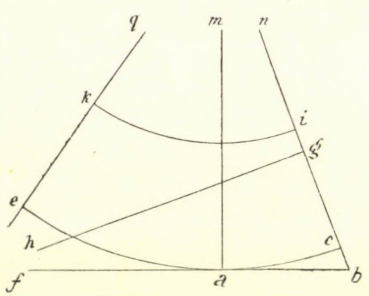
és

$$ar \mathbin{|||} bs.$$

Tehát az Appendix 7. §-ának végén foglalt tétel értelmében $ar\bar{d}$ és $bs\bar{d}$ úgy metszik egymást, hogy

$$pd \,|||\, ar \quad \text{és} \quad pd \,|||\, bs.$$

Ha még mar-et az maf-re fektetjük, hol af az ab-nek a-n túl való meghosszabbítását jelenti, akkor ad épen ae-re esik, ap pedig F-nek az e ponthoz tartozó eq tengelyére. Ennélfogva nemcsak



$$eq \,|||\, am,$$

hanem egyszersmind

$$qe \,|||\, ba.$$

Ezeket tudván, válaszszuk (2. ábra) bn-en a g és i pontokat úgy, hogy $bg = ci = ab$.

Ha továbbá

$$gh \,\llcorner\, gb,$$

akkor

$$fbgh \equiv nbam$$

és

$$gh \,|||\, bf,$$

tehát egyszersmind

$$gh \,|||\, qe.$$

Ha még nbs-et ngh-ra fektetjük, akkor c az i pontra esik, a cd L vonal pedig az $i\tilde{n}$ tengelyhez tartozó L vonalra, végre d e vonalnak eq-val való k metszéspontjára jut, mert csak így kerülhet pd a gh-val $|||$ egyenesre. Ennélfogva csakugyan

$$\frac{ec}{cd} = \frac{ec}{ki} = Y$$

és

$$\text{cotg.}\, \tfrac{1}{2} u = Y.$$

Befejezésül legyen szabad az 1. ábra leirását azzal kiegészíteni, hogy az ed L vonal síkja szintén metszi az $ab\tilde{r}$ síkot, még pedig oly tt' egyenesben, hogy

$$tt' \,|||\, ar \quad \text{és} \quad t't \,|||\, ba.$$

Kürschák József.

BOLYAI JÁNOS SZÜLŐHÁZÁRÓL.

Tekintetes Bolyai-Bizottság!

A következőben bátorkodom Bolyai János szülőházának megállapítására tett nyomozásaimról beszámolni.

A kérdéses ház megállapítására az első támaszpontot Bolyai Farkasnak 1802 szeptember 11-én Domáldról kelt Gausshoz intézett levele[1] szolgáltatta, melyben czímét így adja:[2]

«Meine Adresse: a Mr. Wolfg. Bolyai
Bodor Pál urnál p.
a belső közép utczában Ofen
a Clausenbourg.

Következő levele Gausshoz, mely Kolozsvárról 1803 febr. 27-én kelt[3] és melyben Gausst János fiának születéséről értesíti («Gott hat mir einen schönen Sohn geschenkt, 1802, 15. X-br Johan getauft»), t. i. uj czímet nem tartalmaz, csak a már Marosvásárhelyről 1804 szeptember 16-án kelt levél végén[4] ád uj czímet (Marosvásárhelyre), megjegyezve:

«a Bodor Pál úr házánál a belső...... brauchst Du nicht mehr, das hie bey Paul Bodor..... N Strasse»,

úgy hogy igen valószinűnek látszott, hogy Bolyaiék kolozsvári tartózkodásuk alatt, azaz 1802 őszétől 1803 tavaszáig a belközép-utczai Bodor-féle házban laktak és hogy János ugyane házban látott napvilágot.

Több megbizható kolozsvári lakos (ezek közt Bodor László királyi itélőtáblai biró úr, Bodor Pálnak az unokája) tanusága szerint ezen Bodor-féle ház már most nem áll, hanem néhány évvel ezelőtt lerom-

---

[1] Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai, herausgegeben von F. Schmidt und P. Stäckel (Leipzig, 1899.) pag. 42.

[2] u. o. pag. 44.

[3] u. o. pag. 48.

[4] u. o. pag. 66.

boltatván, helyén és a szomszédos ház telkén egy nagyobb ház épült, mely jelenleg Deák Ferencz-utczai 14. számot viseli. De többen, kik a Bodor-féle házban gyakran megfordultak, ezen házra jól emlékeznek és e házról adott leirásuk megingatta azt az első feltevésemet, hogy ez a ház volna Bolyai János szülőháza.[1] E ház t. i. csak két kisebb lakrészből állott; mivel pedig az 1803 február 27-ikén kelt Bolyai-Gauss levélből minden kétséget kizáró módon kitűnik, hogy Bolyaiék Kolozsvárt Bolyainé (Benkő Zsuzsánna) szüleinél (Benkő József borbélynál) laktak,[2] mivel továbbá az 1802 szeptember 11-iki levélbeli czím «a Bodor Pál ur*nál*» (nem pedig csak B. P. úr házánál) kifejezést használja, fel kellett volna tételezni, hogy e két lakrészben Bodor Pál és Bolyainé szülei, Benkő Józsefék, állandóan és azon kívül kolozsvári tartózkodásuk idejében Bolyaiék is elhelyezkedtek, a mi tekintettel arra, hogy Bodor Pál «a maga idejében elökelö művelt és közszereplö ember» volt, Bolyai Farkas pedig magáról azt írja[3] «aber ich lebe doch auf einem ziemlichen Fusse», teljesen kizártnak tekinthető.

A Bodor-féle házra vonatkozó nyomozások alkalmával szives volt Bodor László úr Bolyai Farkasnak Bodor Pálhoz intézett és Bodor Pál hátrahagyott irattárában őrzött leveleit rendelkezésünkre bocsátani, mely levelek a mellett, hogy egyáltalában Bolyai Farkas élettörténetéhez számottevő adatokat szolgáltatnak, Bolyai János szülőházának végleges megállapíttatását is lehetővé tették.[4] Mindenekelőtt kitünt e levelekből, hogy Benkő Józseféknek Kolozsvárt saját házuk volt, melyben laktak és melyet Bólyai anyósa, özvegy Benkő Józsefné született Bachmann Julianna[5] 1815—16-ben eladni igyekezett. Ezen ház eladásáról van folytonosan szó a Bólyai-Bodor 2.—10. levelekben, míg végre a 10. számú levél ezen eladást mint befejezett tényt állítja elénk. Bodor Pál, mint Benkő Józsefné

[1] Bolyai Jánosnak 1900-ban itt elhalt fia Bolyai Gyula kalapos szintén úgy nyilatkozott, hogy tudomása szerint apja ugyan a belközép-utczában, de nem a Bodor-féle házban született.

[2] a. i. h. pag. 49.: «jetzt bin ich bei meinen Schwiegereltern; weil mein Weib hier niedergekommen ist, und hat bis zur Stunde an der linken Brust gelitten — heute ist es ihr zum erstenmal verlaubt, aus der Stube zu gehen», v. ö. pag. 50 is, hol a családbeli szokásokat leirja, a melyekhez neki alkalmazkodnia kell.

[3] a. i. h. pag. 43.

[4] E leveleket kivonatban a Mathematikai és Physikai Lapok XI. kötetének 197—230. lapjain közöltem.

[5] v. ö. Benkő Józsefnének Bodor Pálhoz intézett, a 10. számu Bolyai-Bodor levélhez tett jegyzetben közölt levelét, a. i. h. 203. l.

pleni-potentiariusa. a házat nyilvános árverés útján eladta, és hagyatékában az 1816. évi február 12-én megkezdett és ugyanazon évi április 4-én véget ért kótyavetyésztetésről szóló hivatalos *jegyzőkönyv* is találtatott, melyet Bodor László úr szintén szives volt rendelkezésünkre bocsátani. Ezen jegyzőkönyv szerint 1816 április 4-ikén[1] «néhai Benkő József úr B. közép utczai Háza» 12,500 rajnai forintért «ledoboltatott Szenkovits Jakab úrra».

Hogy Benkő Józsefék kolozsvári házukban tényleg, és pedig sok esztendőn át laktak is, kitünik abból, hogy a 10. számú Bolyai Bodor levél szerint özvegy Benkő Józsefné a ház eladását megtudva, csak nehezen csendesedett meg, — «egy szomorú elmerülés maradt meg estvig, mellybe az azon vén falak közé temetett esztendők vidám tavaszait s komor teleit elválasztotta azon háztól», hogy még sok év után folyton szemére hányta Bolyai Farkasnak és Bodor Pálnak, hogy[2] «kiűzted a házából, bujdosóvá tetted; azt mondja, hogy a házába maradt volna s tisztességesen élt volna; azt mondja, hogy ollyan conditio alatt adta volna el, hogy lakjék benne holtig» és hogy továbbá Benkőék nagyon mozgékony természetűek nem lehettek, mert a mint Bolyai Farkas Gausshoz intézett Kolozsvárról 1803 február 27-ikén kelt levelében írja[3] «es ist hier «uxoris amnis» c'est à dire, der Fus ist oben — die Schwiegermutter hat seit dreissig Jahren vielleicht nicht volle drey Maass frischer Luft getrunken — und sitzt noch in der Luft, die unter die Wände eingeschlossen ward, wo das Haus gebaut wurde».

Az eddigiek szerint biztosítottnak tekinthető a következő tényállás: Bolyaiék kolozsvári tartózkodásuk idejében (1802 őszétől 1803 tavaszáig) nem Bodor Pál házában, hanem a szintén a belközép-utczában fekvő, akkor Benkő József, borbély, tulajdonát képező, 1816 óta pedig Szenkovits Jakab-féle házban laktak, és ezen házban látott Bolyai János 1802 deczember 15-én napvilágot. Hogy Bolyai Farkas leveleit kolozsvári tartózkodása idejében, épen úgy, mint mikor még Domáldon lakott, Bodor Pál barátjához czímeztette, egyszerűen azzal indokolható, hogy szükségtelennek látta az amugy is rövid időre Gausst czímváltozással megterhelni, mivel kolozsvári lakása a Bodor Pál lakásához oly közel volt, hogy a Bodor Pálnál leadott levelek birtokához minden időveszteség nélkül juthatott.

[1] Lásd a 10. számu Bólyai-Bodor levélhez tett jegyzetben közölt kivonatot, a. i. h. 202., 203. l.

[2] Lásd a 33. számu Marosvárhelyről 1825. április 24-ikén kelt Bólyai-Bodor levelét, a. i. h. 229. l.

[3] a. i. h. pag. 49.

A mi már most az előbb Benkő-féle, később Szenkovits Jakab-féle ház helyét a belközép-utczában illeti, a Bolyai-Bodor levelek ennek is teljes meghatározását teszik lehetővé.

A 2. számú levélben Bolyai azt írja Bodornak, hogy (a. i. h. 198. l.): «a Napom..... mondja, mennyibe került épitések, alól pedig a solid épület meg volt». Ebből kitűnik, hogy a ház emeletes lehetett. Ugyanazt bizonyítja a 3. számú Bolyai Bodor levél borítékára írt következő passus (a. i. h. 199. l.): «A míg eladódik a ház,.... kér a Napom, hogy maga idejébe add-ki,..... nem tudjuk, marad e Harsányiné; Fenigsdorf azon esetbe, ha nem marad..... kéri az alsó házat; ha megmarad, úgy kéri a felsőt.....» Továbbá a 7. számú 1816 február 23-ikán kelt levélben (a. i. h. 201. l.): «..... hogy az épület (értem az elsőt) ezelőtt hét esztendőkkel merőbe meg-zsendelyeztetett, sőt a Dachstuhl is merőbe ujjan tsináltatott — a sikátor felől való hasadások is régiek......» E szerint a ház a belközép-utcza és egy sikátor sarkán feküdt.

Három utcza metszi a belközép-utczát: a Minorita-utcza, a Tivoli-utcza, továbbá kétfelől a Bethlen-utcza; az utóbbi nem jön tekintetbe, mivel a XIX. század kezdetén a városi kapu ez *előtt* állott, úgy hogy a sarokházak már nem tartoztak a belközép-utczához. Marad tehát csak négy ház; de ezek közt a Minorita- és belközép-utcza egyik sarka a Minorita-templom, másik sarka a Radnóthfai-ház volt, épen úgy kiválik a Tivoli- és belközép-utcza Trencsén-tér felőli sarokháza, mely régi főuri birtok. Marad tehát mint egyértékűleg meghatározott ház a Tivoli- és belközép-utcza főtér felőli sarkán fekvő, jelenleg a kereskedő-társulat birtokában levő ház, mely, mivel most csak a Tivoli-utcza felől bír bejárattal, Deák Ferencz-utczai számot nem visel, hanem Tivoli-utczai 1. számot.

Ezen házra nézve sikerült még idősebb kolozsvári lakosok kihallgatása útján a következőket megállapítani: «Szenkovits Jakab örmény rőföskereskedő, kinek neje Szábel Mária volt,[1] a XIX. század 30-as éveiben ezen házban lakott, mely az övé volt (a szemben fekvő Radnóthfai házban lakott Szenkovits István), később ott lakott a fia Szenkovits Márton. Ez a ház rég idő óta egyemeletes volt.

E szerint tehát bebizonyitottnak tekinthető, hogy a jelenleg Tivoli-utczai 1. számu ház Bolyai János szülőháza.

Kolozsvárott, 1902 május 10.

A tekintetes bizottságnak alázatos tagja *Schlesinger.*

[1] V. ö. az emlitett árverési jegyzőkönyv hátlapjára írt következő észrevételt: «8000 Rh. forintot letészen, 4500 Rh. forintot pedig ezen Holnap 24-kén Szenkovits Jakab úr Felesége Szábel Mária», a. i. h. 203. l.

BOLYAI JÁNOS.

A kolozsvári Ferencz-József m. kir. Tudomány-Egyetem BOLYAI-ünnepén, 1903 jan. 15. mondott emlékbeszéd.

Nagytekintetű gyülekezet!

Ez a terem, az auditorium maximum, a melyben a mindennapi rendes munkájában külön szakokra tagolt tudomány-egyetem időnként összegyül, hogy ünnepeit ülje, a történelemnek van szentelve. A nemzet, az egyetem, a tudomány történelme az a közös talaj, a melyen alkalom adtán találkozunk, hogy a multba visszapillantva, a jelen feladatait megérteni és a jövő kérdéseit megfogalmazni tanuljuk. A mai nap egy férfiu történelmének jelében áll; BÓLYAI JÁNOS az a férfiu, a kinek emlékét ünnepelni készülünk, BOLYAI JÁNOS, ki száz esztendővel ezelőtt városunkban erre a világra született, és kinek nevét a tudomány történelme az ókor legnagyobb geometrájának EUKLIDES-nek neve mellé jegyzi fel lapjain, jóllehet, hogy attól az időtől fogva, a midőn EUKLIDES a Στοιχεῖα-ban a görög geometria rendszerét felépitette, addig az időig, a midőn BOLYAI JÁNOS az Appendixben a térnek absolute igaz tudományát megalapitotta, csaknem kétezer év telt el.

Az 1796-ik év végén Göttingen hires egyetemén két ifju ismerkedett meg egymással, kik nemsokára az igazság zászlaja alatt testvéri frigyet kötnek;[1] az idősebb, tüzes lelkü, közlékeny magyar, a csak két esztendővel fiatalabb csendes elmélkedésbe

---

[1] BOLYAI FARKAS és GAUSS K. F. levelezése, kiadják SCHMIDT és STÄCKEL (Budapest, 1899) pag. 152 «und bald schwuren wir unter der Fahne der Wahrheit Brüderschaft».

mélyedt német, ki[2] soha előre nem szól, még kész dolgokról is hallgat. E két ifju BOLYAI FARKAS volt Erdélyből és GAUSS CARL FRIEDRICH Braunschweigből. Minden este találkoznak, gyakran a mathematika alapjairól[3] vitatkoznak, a geometria foltja,[4] a parallelák axiomája, is szóba kerül;[5] mindegyikük fogadva ad és adva fogad, mert, a mint BOLYAI FARKAS irja,[6] «az elemekben GAUSS akkor kevésbbé biztos volt, mint én a magam erejéből, de neki a felsőbb számítások, a melyekről nekem még fogalmam sem volt, már gyermekjáték voltak.» Egynehány boldog, a mint BOLYAI mondja,[7] «földöntuli rajongásban, az egyedüli Uránia oltára előtt töltött esztendő» után, szétválnak a két barát utjai; az egyik «a dicsőség templomába kerül»,[8] a másik visszatér félreeső magányos hazájába, mint egész életén át hiven őrzött drága kincset magával vive annak a barátságát, a kiben ő már akkor Európa jövendőbeli legelső mathematikusát látta és megjövendőlte[9] és kinek emberi tökélyében minden alkalommal föltétlenül bizott.

Kolozsvárra visszatérve, egy bálon ismerkedik meg BOLYAI FARKAS BENKŐ JÓZSEF borbély leányával ZSUZSANNÁ-val, a mint GAUSS-nak irja,[10] «egy igen vonzó, finom szellemü leánynyal,» kivel 1801 szeptember 28-án meg is esküszik. 1802 deczember

---

[2] a. i. h. «der nie in voraus spricht, auch bey fertigen schweigend.»

[3] a. i. h.

[4] v. ö. BOLYAI FARKAS levelét fiához, STÄCKEL-nél, Mathem. és Természettud. Értesítő, 1900, pag. 243, 244.; a folt szó SACCHERI «EUCLIDES ab omni *naevo* vindicatus»-ára emlékeztetett, v. ö. ENGEL u. STÄCKEL die Theorie der Parallellinien von EUCLID bis auf GAUSS (Lipcse. 1895) p. 18, 36.

[5] lásd JÁNOS feljegyzéseit, STÄCKEL a. i. h. p. 248; GAUSS levelét GERLING-hez (1832 február 14), GAUSS—BOLYAI levelezése p. 193 «mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten habe».

[6] STÄCKEL a. i. h. p. 248. «In den Elementen der Arithmetik und Geometrie war damals GAUSS weniger fest als ich durch mich selbst, aber ihm waren die höheren Rechnungen bereits eine Spielerei, wo ich noch nicht einmal eine Idee davon hatte».

[7] GAUSS—BOLYAI levelezése p. 153.

[8] ugyanott p. 179.

[9] ugyanott p. 152.

[10] ugyanott p. 40.

15-én a fiatal házaspárnak Kolozsvárt a nő szüleinek házában fiuk születik, kit deczember 21-én JÁNOS névre kereszteltetnek; a boldog atya leirása szerint[11] «egészséges, igen szép gyermek, finom vonásokkal, fekete hajjal és szemöldökkel és égő sötétkék szemekkel, melyek néha úgy fénylenek, mint két drágakő.» Ezek a szemek voltak hivatva, a geometria rejtélyeibe oly mélyen belepillantani, mint emberi lény szemei ő előttük soha.

Rendkivül boldogan folynak a fiatal JÁNOS első évei Domáldon, az atyai birtokon; a gyakran házi gondoktól és kellemetlen rokonsági viszonyoktól megzavart családi élet az imádott fiu körül, mint egy világot és vidámságot sugárzó nap körül forog.[12] 1804-ben a család átköltözik Marosvásárhelyre, a hová BOLYAI FARKAS az ev. ref. collegiumhoz mint a mathesis és physika professora hivatott meg, és az ottani szerény kis tiszti lakásban leste az atya, mint BEDŐHÁZY úr mondja,[13] JÁNOS fiának csodálatosan fejlődő elméjét. Ugyanis csakhamar, már a gyermek-játékokban, nyilatkozik a fiunak rendkivüli mathematikai tehetsége;[14] de bölcs előrelátással gondoskodik az atya fia testének ápolásáról és fejlesztéséről[15] és vigyázva vigyáz, nehogy e sarjadzó talentumot csodagyermekké torzitsa el. Csak a 9-ik esztendőben kezdi a rendszeres tanitást,[16] de akkor már csakugyan nem mindennapi tanitványnak megfelelő módon, mindjárt EUKLIDES-sel és EULER-rel. Valószinü, hogy már ebben az időben beleültette a gyermek lelkébe azokat a csirákat, a melyekből későbben az Appendix mint felséges érett gyümölcs jött napvilágra, mert kétségtelen,[17] hogy FARKAS tanulásra vágyó fiát a parallelák elméletében levő hé-

---

[11] ugyanott p. 49.

[12] ugyanott p. 57. «Unser Sohn ein herrlicher Knabe, ist ein weckender Strahl in die Nacht unserer Seele».

[13] BEDŐHÁZY, A két BOLYAI (Marosvásárhely, 1896) p. 66.

[14] GAUSS—BOLYAI levelezése p. 56. 2. kikezdés.

[15] a. i. h.

[16] ugyanott p. 99.

[17] v. ö. SCHMIDT, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, VIII kötet p. 137, JÁNOS önéletrajzából: «er machte mich auf die grosse Lücke in der Parallelentheorie aufmerksam.»

zagra is figyelmeztette, e hézagra, mely őt magát szakadatlanul foglalkoztatta. Tizenhárom éves korában a fiatal JÁNOS már a differentiális és integrális calculusban járatos, szereti, a mint atyja GAUSS-nak irja,[18] a mély elméleteket.

De atyja a legnagyobb gondot forditja arra is, hogy JÁNOS kiképeztetése egyoldaluvá ne váljék. JÁNOS kifejezett zenészeti képessége gondos művelésben részesül, és egyik főgondja FARKAS-nak,[19] hogy fia a szabályos iskolai tanfolyamon átmenjen. Az eredmény minden tekintetben kitünő: JÁNOS excellens hegedüs lesz, és Róma örök nyelvét, mely akkor az iskolai oktatásban még vitatlanul elfoglalja az őt megillető központi helyet, úgy sajátitja el, hogy azt egész életén át mesterileg kezeli; 1817 junius havában leteszi a Rigorosumot.

Az életpálya választása a fiu természeti képessége és a mathesishez való hajlam által, melyben apa és fiu találkoznak, magától adódik; FARKAS fiát, a mint maga mondja[20] «a mathesisnek szentelte áldozatúl,» mihez JÁNOS maga is örömest hozzájárul, és mi természetesebb mint az, hogy FARKAS ekkor arra a gondolatra jön, hogy fiát GAUSS barátjához küldje, ki akkor már dicsőségének a tetőpontján állva, Göttingenben tanitott. Éveken át ápolja FARKAS ezt a tervet,[21] és JÁNOS, ki atyjának GAUSS iránt való határtalan tisztelete[22] és talán egyik-másik GAUSS-féle dolgozat olvasása folytán e nagy férfiúra, mint egy magasabb lényre tekintett fel, maga is csak GAUSS-hoz kivánkozik.[23] FARKAS a terv anyagi oldalát is fontolóra veszi, egyáltalában még költészeti munkái között is folytonosan ezzel az ő kedvencz tervével foglalkozik,[24] gróf KENDEFFI ÁDÁM megigéri a segélyét[25] és végre,

---

[18] GAUSS—BOLYAI levelezése p. 99.

[19] ugyanott p. 100, um nach unserem Gebrauche in unseren drei Lancollegien Examen abzustatten, nicht alle thun es, aber ich will von dieser Regel nicht weichen.

[20] ugyanott p. 99.

[21] v. ö. BOLYAI—BODOR levelek, ezen folyóirat XI. kötetében p. 198; GAUSS—BOLYAI levelezése p. 49, 87.

[22] lásd GAUSS—BOLYAI levelezése p. 96.

[23] ugyanott p. 100.

bár GAUSS már nyolcz éve, hogy utolsó levelére nem válaszolt, FARKAS megteszi a döntő lépést, a mennyiben 1816 április 10-én kelt levelében[26] közli GAUSS-al kedvencz tervét, a mely tervre különben már kilencz esztendővel előbb,[27] mikor JÁNOS még gyermek volt, reá mutatott volt.

Mily izgalommal várhatott apa és fiu GAUSS válaszára, erre a válaszra, a mely a fiu jövője felett döntést volt hozandó; de hónapok és esztendők multak, és a várva várt levél Göttingenből örökre elmaradt.

A mint már BEDŐHÁZY úr megjegyzi,[28] némelyek szemére vetették GAUSS-nak, hogy régi barátjának a levelét még elutasitó válaszra sem méltatta. De azon már magukban döntő okokhoz, a melyekkel BEDŐHÁZY úr maga GAUSS magatartását indokolja, most, a mikor BOLYAI FARKAS GAUSS-hoz intézett levele teljes szövege előttünk fekszik, még hozzátehető az is, hogy nem anynyira GAUSS-nak a magatartásán, mint inkább azon, már a naivságon is túlmenő módon kell csodálkoznunk, a melylyel FARKAS saját tervének pro és contráját GAUSS családjának bevonásával[29] tárgyalja. Mindenesetre bele kell nyugodnunk abba a ténybe, hogy az a szép terv, mely JÁNOS mathematikai geniusát a leghivatottabb alkotónak a kezébe adta volna, meghiúsult.

Tehát másra kellett gondolniok; elhatározták, hogy JÁNOS a katonai pályára megy, arra a pályára, a mely iránt FARKAS ifjuságában maga is előszeretettel viseltetett.[30] És 1818[30a] szeptember havában JÁNOS-t már a bécsi cs. k. mérnöki akadémiában látjuk, a hol 1822-ig marad.

---

[24] v. ö. ugyanott p. 101 és BOLYAI—BODOR levelek p. 202.

[25] BOLYAI—BODOR levelek p. 204.

[26] GAUSS—BOLYAI levelezése p. 98, 's köv.

[27] ugyanott p. 87.

[28] BEDŐHÁZY a. i. h. p. 192, 193.

[29] v. ö. kűlönösen GAUSS—BOLYAI levelezése pag. 99, 100. 1. 2. 3.

[30] BEDŐHÁZY a. i. h. 39.

[30a] SCHMIDT a. i. h. tévesen 1817-et ír; az 1818 év helyes, a mit a bécsi cs. és kir. műszaki Akadémia a BOLYAI ünnepen jelen volt képviselője, BUDISAVLJEVIC alezredes úr az Akademia actái szerint is igazolt.

JÁNOS elválása a szülei háztól anyjára nézve a legszomorubb következményekkel járt.[31] Ez a bár nagyon hystericus, de nem mindennapi asszony annál nagyobb gyöngédséggel ragaszkodik egyetlen fiához, minél mélyebbre megy az elidegenedés közte és férje között. Bámulatos előrelátással, de saját énjét fia boldogságának alárendelve, azt mondja JÁNOS-ról, hogy[32] «itthon ne maradjon, de ha elmegy meg fogok őrülni.» És sajnos, úgy is lett. JÁNOS bucsúja az anyjától egész életre szóló búcsú volt; a boldogtalan nő szelleme mindinkább elsötétedik, míg 1821 szeptember 10-én négy reá, valamint környezetére nézve kínos esztendő után meghal, a nélkül, hogy fiát viszontláthatta volna. De a szülői háztól való elválással JÁNOS boldog ifjuságának is vége szakadt és megkezdődik életsorsa, mely a világosság és homály rideg váltakozásával az emberiség egyik legmeghatóbb tragédiája.

Az első évekről, melyeket JÁNOS a katonai akadémián töltött, kevés adat áll rendelkezésre. FARKAS levelei BODOR PÁL barátjához, melyek az 1818—22. évekből valók, ugyan elég gyakran emlegetik JÁNOS nevét, de inkább külső viszonyokkal kapcsolatban; az anyának JÁNOS-on való búja,[33] JÁNOS-nak haladása a rajzolásban.[33] pénzügyi nehézségek,[35] melyeken gróf KENDEFFI ÁDÁM segíteni akar, de JÁNOS-nak kitünő előmenetele is[36] említvék.

Azonban JÁNOS önéletrajzi feljegyzéseiből és különösen két levélből, melyekről később még szólanunk kell, kitetszik, hogy JÁNOS az akadémián való tartózkodása idejében a paralleläk elméletét kedvencz foglalkozásává teszi.[37]

Láttuk, hogy a parallelák elmélete már JÁNOS tudományos

---

[31] v. ö. pld. BOLYAI—BODOR levelek, p. 214 s köv., 21, 23, 24, 25, 28 számú levelek.

[32] BEDŐHÁZY a. i. h. p. 77.

[33] BOLYAI—BODOR levelek p. 214; 1819 jun. 14. kelt levél.

[34] ugyanott p. 215, 217.

[35] ugyanott p. 218, 219.

[36] ugyanott p. 217.

[37] STÄCKEL a. i. h. p. 242.

nevelésének első kezdetében szerepel; szakadatlanul foglalkoztatja ez a tárgy az apját, és ha FARKAS látva, hogy erőlködő fáradozásai sikertelenek maradnak, majdnem kétségbe esve költői vagy gyakorlati foglalkozásban keres menedéket,[38] mégis ujból és ujból erre, a mint nevezi, «zsarnoki eszmére» tér vissza.

Könnyen érthető, hogy annak a férfiunak az eszmeiránya, ki JÁNOS-nak atya és tanitó volt egy személyben, JÁNOS szellemi fejlődésére döntő befolyást gyakorolt; JÁNOS-nál ismereteinek a bővítésével az atyja kezdetben talán teljesen meg sem értett szavai fogalmakká alakulnak, és a paralleláк elméletében levő hézag kitöltése az emberi tudás legfelsőbb, legfontosabb feladata gyanánt tündöklik szeme előtt. Azzal az eltökélt szándékkal hagyja ott a szülei házat, hogy ezt a czélt vagy eléri, vagy elbukik, és még az atya megható intése, melylyel ez egy emlékezetes 1820-ból származó levelében[39] fiát ezen feneketlen éjszakán való áthaladástól elijeszteni igyekszik, JÁNOS-nak azt a vágyát, hogy minden áron ezen a sziklán áttörjön, nemcsak, hogy nem csökkenti, hanem mindinkább fokozza.

Önként felmerül előttünk az a kérdés, hogy vajjon tényleg oly fenséges-e ez a czél, mely után itt küzdenek, vajjon örüljünk-e annak, vagy pedig sajnáljuk-e, hogy JÁNOS-nak nagy tehetségét a sors és a nevelés egész rendszerességgel arra a pályára sodorta, a mely ezen czél elérésére vezetett? A felelet erre a kérdésre nem könnyü, de ma már kétes nem lehet. A mint oly gyakran a tudományban, úgy ebben az esetben is az eredeti czél elérése nem az egyedüli, de nem is a legértékesebb termés, mely annak integet, a ki e czél felé törekszik.

Ha alulról nézve még oly magasztosnak, még oly kecsegtetőnek látszik is a hegy orma, a kapaszkodónak szemei elől annál inkább eltünik, minél közelebb jön hozzá; de minél magasabbra vezet az ösvény, annál tágabbá válik a kilátás, és ha már a láb az ormot maga alatt érzi, a szem az előtt nem is sejtett távo-

---

[38] STÄCKEL a. i. h. p. 243. s köv.
[39] STÄCKEL a. i. h.

lokba csapong, uj ormokat, uj völgyeket lát, *egy uj más világot.*[40]

Így volt a parallelák elméletével is.

A Στοιχεῖα-ban, melyek kétezer esztendőn át a geometriai gondolkodás alapját alkották, Euklides a geometria rendszerét bizonyos feltevésekre állítja, melyeket Ὅροι, Αἰτήματα és Κοιναὶ ἔννοιαι-ra oszt. Az Ὅροι a pont, egyenes, sik, szög, kör, átmérő értelmezését, a Κοιναὶ ἔννοιαι pedig tisztán mennyiségfogalmi meghatározásokat tartalmaznak. Az Αἰτήματα 1—4-ike is mindig elfogadtatott, de nem úgy volt az ötödik postulatummal, mely mivel régibb kiadásokban tévedésből a Κοιναὶ ἔννοιαι közé soroztatott, a mult század kezdetén mint XI. vagy parallelák axiomája volt ismeretes. E postulatum pedig így szól (Heiberg kiadása szerint):

έ. καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπι τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύσ ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Tehát azt állítja, hogy két egyenes a végtelenbe meghosszabitva egy harmadik őket metsző egyenesnek azon oldalán találkozik, a mely oldalon a belső szögek összege két derékszögnél kisebb.

Ezen postulatum ellen pedig már a legrégibb idők óta joggal tették azt az ellenvetést, hogy nem közvetlenül szemlélhető, és a geometrák igyekezete oda irányult, hogy ezt a postulatumot bebizonyitsák, azaz mint a többi Euklides-féle feltevéseknek a következményét levezessék. Nem lehet a feladatunk, hogy azokat a kisérleteket ecseteljük, a melyeket ezen czél elérésére két évezreden át tettek, és melyeknek közös gyarlósága rendesen abban állott, hogy hallgatva az Euklides-féle postulatum helyébe egy más, vele egyenértékű, postulatumot helyeztek; megelégedhetünk azzal, hogy leirjuk azt az eszmemenetet, a mely Bolyai János-t a szóban levő kérdés megoldásához elvezette.

---

[40] lásd János levelét atyjához 1823 nov. 3-áról, mely facsimilében egyetemünk emlékiratához van csatolva.

Kövessük hát azt az leirást, a melyet BOLYAI JÁNOS maga adott eszméinek a fejlődéséről.[41]

JÁNOS első izben 1820-tól kezdve szintén azon fáradozik, hogy az előbb jelzett értelemben az EUKLIDES-i postulatumot bebizonyítsa, és erre hasonló módszert követ, mint 1733-ban SACCHERI és 1766-ban LAMBERT,[42] kiknek munkáit különben nem ismerte. Nagy jelentőségüvé válik JÁNOS-ra nézve egy fiatal erdélyi honfitársával, SZÁSZ KÁROLYlyal való érintkezése, ki akkor Bécsben gróf TELEKI ELEK házánál mint nevelő működött[43] és ki későbben Nagyenyeden juris professorrá lett. JÁNOS kisérleteinek az előmeneteléről atyjának híven referált, de ez távol attól, hogy fiát további erőlködésre buzdítsa, a már emlitett levélben szivre ható szavakkal óva inti «azon pokoli holt tenger szirtjeitől, a melyek mellett ő maga is hajótörést szenvedet, széttépett vitorlával, eltört árboczczal visszatérve.»[44] Tanuljon a fiu az ő példáján; «ha igazán kihoztad volna», irja FARKAS, «akkor igaz, hogy ennek jobban örülnék, mint egy uradalomnak, de mivel ezt épenséggel nem hiszem, félek, hogy mindenedet elveszited egy milliónyi sorsjátékra téve.»[45]

Az 1822-ik évben JÁNOS kilép az akadémiából és ezen év szeptember havának 7-én[46] az aktiv szolgálatba soroztatik be; egy évvel reá mint alhadnagy Temesvárra tétetik át és kevéssel ezután beáll életének az a nagy fordulata, mely az absolut geometria feltalálásával van megjelölve.

1823 nov. 3-ikáról kelt levelében ezeket irja atyjának:

«A' feltételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem, elkészitem, 's mód leszsz, a' parallelákról egy munkát adok ki: ebbe 'a pillanatba *nints* kitalálva, de az az út, mellyen mentem, tsaknem bizonyosan igérte a' tzél elérését, ha az egyébaránt lehetséges; nints meg, de ollyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam el-bámultam, 's örökös kár volna elveszni; ha

---

41 STÄCKEL a. i. h. p. 242 s köv.

42 ugyanott.

43 ugyanott p. 246.

meglátja Édes Apám, meg-esmeri; most többet nem szóllhatok, tsak annyit: *hogy semmiből egy uj más világot teremtettem.»* Akkor tehát a dolog lényegén még nem hatolt át teljesen, álláspontja körülbelül az lehetett, mint a SACCHERIé, t. i. az *apagoge*; azaz abból a föltevésből, ha a parallelák axiomája nem volna igaz, levonta a következményeket, ezek a következmények alkotják azt az új más világot, a melyről ír, és már most e következményekben keresi az ellentmondást; de már kételkedik abban, hogy ilyen ellentmondás egyáltalában létezik-e, azt mondja, «ha az egyébaránt lehetséges.» Hogy mikor tette meg a döntő lépést, azaz mikor jutott arra a meggyőződésre, hogy az a geometriai rendszer, a mely a parallelák axiomájától független, magában fenállhat, teljes biztonsággal meg nem állapítható. Csak annyit tudunk, hogy 1825-ben volt tanítójának, JOHANN WOLTER von ECKWEHR, akkori százados, későbbi tábornagynak egy irásbeli értekezését adta át, melyben a mint maga mondja, már az egésznek az alapja megvolt.[47]

Az 1825. év tavaszán JÁNOS ellátogat Marosvásárhelyre[48] és ez a látogatás úgyszólván utolsó napsugár FARKAS és JÁNOS életében. FARKAS akkor már ujból megházasodott;[49] jogos apai büszkeséggel irja le a fiát BODOR barátjához intézett egyik levelében. «Nagy, kemény természetü szép ifju, a katonai bátorság az ártatlanság szemérmességével be pelgyedett — se nem kártyázik, se bort, pálinkát, se kávét nem iszik, se nem pipázik, se nem tubákol, még nem beretválkozik, csak péhés — rendkívül való mathematikus, igaz genie, excellens hegedüs — minden hivatalok közt leginkább szereti a katonaságot; csak az Otiumot

---

[44] ugyanott p. 247.

[45] ugyanott.

[46] SCHMIDT a. i. h. p. 139.

[47] STÄCKEL a. i. h. p. 252; BEDŐHÁZY a. i. h. p. 427.

[48] STÄCKEL a. i. h. p. 252.

[49] BOLYAI—BODOR levelek p. 228; 1825 után JÁNOS nyugdíjaztatásáig (1833) alig volt ismét Marosvásárhelyt, de 1829 körül (v. ö. STÄCKEL a. i. h. p. 252) még egyszer találkozott apjával (v. ö. az 57*a* számú jegyzetet), azonban nem tudni, hogy hol.

szeretné inkább, melybe dolgozhatnék, már is sokat dolgozott a hivatal mellett is.»

Ezen együttlét alkalmával JÁNOS atyjával egész rendszerét közölte, de a mint feljegyzéseiből kitünik, FARKAS nem értette meg mindjárt teljesen; ez lehetett egyik oka a közöttük kiütött meghasonlásoknak,[50] a milyenek későbben is megzavarták a különben oly gyöngéd viszonyt ezen két kiváló szellem közt; egyébb okok talán a mostoha anyjához való viszonyból, meg az anyai hagyatékra vonatkozó vagyoni kérdésekből [51] eredhettek; de hogy ez a meghasonlás nem igen mélyre menő volt, kitünik abból, hogy április 24-én már azt irja FARKAS BODOR PÁL-nak, «a fiammal hála istennek megint jól vagyunk; írt már Temesvárról kétszer is.»[52] Ezen összejövetelnél valószinüleg megállapíttatott az is, hogy JÁNOS felfedezése mikép publicáltassék. FARKAS maga sürgeti a publicálást, «először», úgy nyilatkozik, «mert az eszme könnyen átmehet másra, a ki azután előbb közzé teszi, másodszor igaz az is, hogy némely dolognak úgyszólván megvan a maguk epochája, a midőn azután több helyt egyszerre találtatnak.[53]

Mint egy profétai sugallat, úgy hangzanak FARKAS eme szavai. Tényleg 1826 febr. 12-ikén NIKOLÁI IVÁNOVICS LOBACSEFSZKIJ, az orosz kazani egyetem tanára, az ottani physiko-mathematikai karnak bemutat egy dolgozatot: «Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles», melynek tartalmára nézve különben minden közvetlen tájékozódás lehetetlen, mivel a dolgozat maga elveszett.[54] De a czím szövegezése szerint annyi bizonyos, hogy LOBACSEFSZKIJ akkor, tehát oly időben, midőn BOLYAI JÁNOS, a mint láttuk, uj tanát már teljesen kifejtette volt, legfeljebb a SACCHERI álláspontján, vagyis azon az állásponton lehetett, melyet JÁNOS 1823-ból való levelében jelez, úgy hogy JÁNOS személyi

---

[50] STÄCKEL a. i. h. p. 252, 253.

[51] BOLYAI—BODOR levelek p. 229, 1825. aprilis 24. kelt levél.

[52] ugyanott p. 228.

[53] STÄCKEL a. i. h. p. 252.

[54] ENGEL, N. J. LOBATSCHEFSKIJ (Lipcse, 1899) p. 370, 372.

prioritása minden kétség felett áll. Csak 1829-ben jelenik meg LOBACSEFSZKIJ értekezése «a geometria alapjairól», a hol az első lap alján álló jegyzetben azt mondja, hogy «a szerzőtől magától egy 1826 február 12-ikén olvasott értekezésből kivonva, mely értekezés czime «Exposition succincte des principes de la géometrie etc.,»[55] a mi talán, mivel a czim idézésénél az ominosus végső mondatot «avec une démonstration rigoureuse du theórème des parallèles,» kihagyja, úgy értendő, hogy LOBACSEFSZKIJ ugyan a BOLYAI FARKAS-tól úgynevezett antieuklidesi rendszer[56] kidolgozását, értjük a már emlitett apagogét, az 1826-iki értekezésből az 1829-ikibe átvette, de hogy az a belátása, hogy az új rendszer magamagában fenállhat, csak az 1826-tól 1829-iki időközben érlelődött meg. Különben az 1829-iki publicatiója LOBACSEFSZKIJ-nek a publicálás formális prioritását tényleg biztositja,[57] de tekintetbe kell vennünk, 1. hogy ez a publicatio a bizonyitások hiányos voltánál fogva teljes értékünek nem mondható, 2. hogy orosz nyelven lévén irva, a mathematikusoknak teljesen hozzáférhetetlen maradt, s a geometriai gondolkodás fejlődésére ezért befolyással nem lehetett. LOBATCSEFSZKIJ első közérthető nyelven irt publicatiója 1837-ből van, míg BOLYAI JÁNOS az ő felfedézét kifogástalan latinsággal és az előállitás felülmulhatatlan tökéletességével megirt értekezésben, atyjának az 1831-ik év elején[57a] átadta, ki ez értekezést Tentamenjéhez, mint Appendixet kinyomatja, mely Appendix különnyomatát még ugyanazon év junius havában JÁNOS kivánsága szerint GAUSS-nak küldi meg.[58] Ezen alkalommal

---

[55] ugyanott p. 1.

[56] lásd STÄCKEL a. i. h. p. 253.

[57] ENGEL, a. i. h. p. 392.

[7a] A STÄCKEL-től a. i. h. kivonatban közölt feljegyzésekben JÁNOS azt irja: «Umstände und Hindernisse *verzögerten* die Herausgabe, bis *endlich* ein *zufälliges* Zusammentreffen mit meinem Vater veranlasste, dass ich das Wesen der Sache in lateinischer Sprache verfasste und Anfang 1831 meinem Vater übergab». Ezen passust STÄCKEL úr egy 1903. febr. 3. kelt levélben szives volt velem közölni.

[58] STÄCKEL a. i. h. p. 254.

veszi fel ujból FARKAS a részéről 15 esztendőn át félbehagyott levelezést ifjukori barátjával.[58a]

A válasz Göttingenből ismét késik, a miért Farkas 1832 januariusban az Appendixnek egy második példányát rövidebb levél kiséretében küldi el Göttingenbe; ez a második példány tényleg GAUSS kezébe kerül és márczius 6-ikáról kelt hires levelében[59] a princeps mathematicorum huszonhat esztendei hallgatás után válaszol.

Az irat egész tartalma az út, a melyet JÁNOS követett, azt irja, majdnem teljesen egyezik az ő saját, részben már 30—35 évvel azelőtt tett, meditatióival, módfelett meg van lepve és nagyon örül, hogy épen régi barátjának a fia az, a ki őt oly csodálatos módon megelőzi. JÁNOS-t szivből üdvözli és különös nagyrabecsüléséről biztositja.

Nem az egyedüli, de nem is az első alkalom ez, a mint már BEDŐHÁZY úr megjegyzi,[60] melyben GAUSS-nak ilyféle nyilatkozatával találkozunk. Midőn 1827-ben JACOBI és ABEL — kinek száz éves születésnapját nehány hóval ezelőtt a christianiai egyetem megünnepelte — az ellipticus függvények elméletére vonatkozó vizsgálataikat közzé tették, GAUSS kinyilatkoztatta, hogy ezen vizsgálatok eredményeit részben már 20 év óta ismeri, és hogy ugyanazon az úton jutott el hozzájok, mint ABEL.[61] A két eset hasonló volta abban is nyilvánul, hogy BOLYAI JÁNOS majdnem ugyanazon elkeseredett szavakkal vonja kétségbe GAUSS állításának az igazságát,[62] mint ugyan nem ABEL maga, de annak

---

[58a] GAUSS—BOLYAI levelezése p. 102 s köv. Megjegyzendő, hogy e helyen, valamint SCHMIDT-nél a. i. h. p. 141 «Anhang» helyett tévesen «Anfang» áll; az «Anhang» helyes volta nem csak a facsimile szerint kétségtelen, de az összefüggésbe is jól beillik, FARKAS t. i. azt irja: «es ist der erste Anhang (t. i. Appendix) von meinem Werke».

[59] GAUSS—BOLYAI levelezése p. 109 s köv.

[60] BEDŐHÁZY a. i. h. p. 423.

[61] *Briefwechsel* zwischen GAUSS und SCHUMACHER, Bd. II (Altona, 1860) p. 177, 178. (1828, május 30.)

[62] STÄCKEL a. i. h. p. 255.

lelkes pártfogója, az öreg Legendre,[63] kinek a maga saját ügyében már előbb volt prioritási vitatkozása Gauss-al. Az ellipticus függvények esetében Gauss hagyatéka állításainak az alaposságát fényesen bebizonyította — ha ily bebizonyításra egyáltalában szükség volt — és az absolut geometriára nézve is kitünik levelekből és feljegyzésekből, melyek Gauss műveinek VIII. kötetében össze vannak állítva, hogy Gauss tényleg az *antieuklidesi rendszert* már az Appendix vétele előtt ismerte. Szándékosan használjuk ezt a kifejezést, mert most, áttérve Bolyai János felfedezésének az ismertetésére, látni fogjuk, hogy a mit János tett, *több* az antieuklidesi rendszer kifejtésénél, a mely rendszerre nézve a prioritás kérdése Gauss-al szemben már azért is hiábavaló és felesleges, mivel ezen rendszer lényege már 1807-ben Schweikardt-nál és 1825, 1826-ban annak unokaöcscsénél Taurinus-nál megvan.[64] Bolyai felfedezésének az ismertetésében nem térhetek ki egyéni felfogásomnak az érvényesítése elől, annál kevésbé, mivel részletekbe bocsátkozni a mai alkalommal lehetetlen.

Az V-ik euklidesi postulatum helyes vagy helytelen voltáról a szemlélet révén nem lehet meggyőződni, a mint azt már Ptolemæus megjegyezte.[65] Logikailag három eset képzelhető:

I. Az a két egyenes, a melyet egy harmadik metsz, kellőképen meghosszabbítva a metsző egyenesnek nemcsak azon az oldalán találkozik, a hol a belső szögek összege két derékszögnél kisebb, hanem a másik oldalon is; ez a feltevés, a mint már régebben felismertetett (Saccheri), arra a következtetésre vezet, hogy a tér véges, a mi azoknak a mathematikusoknak, kik a geometriát az analysis segédeszközei nélkül tárgyalták, lehetetlennek látszott — bár Lambert és Taurinus erről az esetről is szóltak.[66]

---

[63] Jacobi. Werke, I. kötet (Berlin, 1881), p. 398, 418.

[64] lásd Engel u. Stäckel, die Theorie der Parallellinien (Lipcse, 1895) p. 237 s köv.

[65] Procli, in primum Euclidis elem. libr. comm. Ex rec. G. Friedlein (Lipsiæ, 1873), p. 191.

[66] Engel u. Stäckel a. i. h. p. 145, 257.

II. A két egyenes mindig azon az oldalon találkozik, hol a belső szögek összege két derékszögnél kisebb, a mi az EUKLIDES-féle postulatum.

III. A két egyenes nem találkozik mindig, azaz bizonyos határig találkoznak, azontúl pedig nem. Ez a feltevés az úgynevezett antieuklidesi rendszernek képezi az alapját, mely rendszer főleg abban különbözik a rendes EUKLIDESI rendszertől, hogy benne egy állandó mennyiség szerepel, melyet BOLYAI i-vel jelöl, s mely attól a határtól függ, mely a találkozó egyenesek osztályát a nem találkozó egyenesek osztályától elválasztja; e határ — az úgynevezett parallelismus szöge — a priori meg nem szabható, ezért a BÓLYAI-tól i-vel jelölt állandó, minden tetszőleges positiv szám lehet. Ha i a végtelenbe nő, az antieuklidesi rendszer átmegy az EUKLIDES-félébe.

Ezen antieuklidesi rendszer azonban, melyet BOLYAI az Appendixben bámulatos elmeéllel és se egyik, se másik vetélytársától el nem ért világos és szabatos előállításban kifejt, nem teszi JÁNOS alkotásának leglényegesebb részét. Ő t. i. mindjárt arra — a KANT értelmében — *kritikus* álláspontra emelkedik, hogy emez i állandó értékének határozatlannak kell maradnia és az így adódó általános geometriai rendszer az ő absolut geometria rendszere.

Hogy JÁNOS épen erre a pontra fekteti a fősulyt, kitetszik különösen feljegyzéseinek egy helyéből,[67] a hol leirja, hogy atyja 1825-iki marosvásárhelyi találkozásuk alkalmával a fia rendszerében épen ezt a pontot nem tudta teljesen felfogni. «Azt mondta (FARKAS), hogy (JÁNOS) dolgozata csak az antieuklidesi rendszernek kifejtése, azt is állítva, hogy csak két gondolható rendszer létezhetik, az EUKLIDESI, vagy egy másik, a melyben a parallelszög nagysága absolute meg van határozva. Semmiképen nem akarta belátni» — így folytatja JÁNOS — «minden bizonyító okok daczára, hogy hiszen végtelen sokféle hypotheticus rendszer létezhet, melyek közt az igazat nem vagyunk képesek kiválasztani.»

---

[67] STÄCKEL a. i. h. p. 253.

Úgy látszik, hogy FARKAS később se tudott teljesen JÁNOS álláspontjára helyezkedni,[68] és GAUSS-nak reánk átjött nyilatkozatai szerint a princeps mathematicorum felfogása (1832 előtt) is a FARKAS felfogásával egyezik, mert ismételten arról szól,[69] hogy az új rendszerben egy absolut hossz létezik.

JÁNOS álláspontját következőképen fogalmazom. A geometria egy a prioristicus tudomány, melynek feladata abban áll, hogy a tér világának a tüneményeit, melyekről a szemlélet révén szerezünk tudomást, leirja. A geometria rendszerének, mely egészen abstract fogalmakból épitendő fel, csak azt a feltételt kell tehát kielégiteni, hogy eredményei a térbeli szemlélettel összhangzatban legyenek. De mivel ez a szemlélet csak véges tartományra terjedhet ki, az EUKLIDES postulátumából eredő kérdésre más feleletet nem adhat, mint azt, hogy a mennyire a kérdéses két egyenes a metsző harmadikon mérve, véges távolságot mutatnak, e két egyenes mindig a két deréknél kisebb belső szögek oldalán találkozik addig, a mig ezt a szemlélettel követni tudjuk, azaz addig a míg két szög összege egy bizonyos határon alul marad. Hogy mekkora ez a határ, ezt a szemlélettel — azaz *gyakorlatilag* (practice), a mint JÁNOS[70] mondja, — nem lehet eldönteni.

Az olyan feltevés, mint az EUKLIDESi postulatum, avagy valamelyik *meghatározott* antieuklidesi rendszer postulatuma, mely a metsző és nem metsző egyenesek közti határt megszabja, nyilvánvalóan azt foglalja magában, hogy a végesből a végtelen nagyra, vagy a mi mathematikailag ugyanezt mondja, a végtelen kicsinyről a végesre vonunk következtetést. Hogy pedig ilyen következtetésnél egy tetszőleges állandónak szükségképen fel kell lépnie, az analyticus előtt közvetetlenül evidens, mert ha-

---

[68] v. ö. különösen GAUSS—BOLYAI levelezése p. 115 lent, p. 116. fönt.

[69] lásd levél GERLING-hez (1816. április 14), GAUSS, Werke VIII. kötet (1900) p. 169, levél TAURINUS-hoz (1824. november 8.) ugyanott p. 187; v. ö. ugyanott p. 165.

[70] STÄCKEL Mathem. és Term.-tud. Értesitő 1902, p. 169, 170 és ugyanott p. 62, 63.

sonló viszonyokkal van dolgunk, mintha a sebesség törvényéből a mozgás törvényére akarunk következtetni, szóval, mert differentialegyenletet kell integrálnunk.[70a]

Ezen tetszőleges állandóra, a Bolyai i-jére nézve csak az adódik, hogy a szemléletnek alávethető távolságokhoz képest igen nagynak kell lennie, de ezen feltétel mellett az S rendszer — a mint Bolyai az absolut rendszert jelöli, szemben az Euklidesivel, melyet Σ-val jelöl, — egy a szemlélettel teljesen egyező geometriát szolgáltat, sőt ugyanaz áll az olyan rendszerről is, a minőt későbben Riemann vezetett be, a melyben az i négyzetének az értéke negativ, és mely a fentemlitett I. feltevés alapján ered. Csak a nevelés és a szokásnak tulajdonitandó az, hogy rendesen az Euklidesi rendszert tartják az egyedül szemlélhetőnek.

Az a kétezer esztendős kérdés tehát, hogy vajjon Euklides postulatuma helyes-e vagy sem, Bolyai János szerint teljesen hiábavaló, e postulatum sem helyes, sem hamis, hanem a geometria felépitésére egyszerüen felesleges; az Euklidesi geometria a térbeli tünemények leirására ép oly alkalmas, mint akármily S rendszer, elegendő nagy i mellett; történelmileg az Euklidesi rendszer azért fejlődött először, mert bizonyos tekintetben a legegyszerűbb. De ezen egyszerüséggel szemben ki kell emelni, hogy a tetszőleges állandót tartalmazó S rendszer sokkal változatosabb, mint az Euclidesi Σ. Az S-nek viszonylata a Σ-hoz — hogy egy ugyancsak mathematikusnak szembetünő hasonlatot használjak — olyan, mint az ellipticus függvényeké a trigonometricus függvényekhez, mint az ellipsisé a körhez. Hogy az absolut geometria mégis még az Appendix megjelenése után, figyelmen kivül maradt vagy harminczöt évig, sajátságos viszonyoknak a következménye, melyeket röviden fel kell emlitenünk, mielőtt az új tudomány jelentését a mathesis többi fejezeteire nézve leirjuk.

[70a] v. ö. Stäckel megjegyzéseit Gauss műveinek VIII. kötetében, pag. 253—264.

Gauss azt irja,[71] hogy a *Boeoticus*-ok kiabálásától fél. Oly anynyira félt, hogy ő, ki különben minden jelentékenyebb tudományos vívmányt a ,Göttinger Gelehrte Anzeigen'-ben referálni szokott, nyilvánosan az Appendixről és annak szerzőjéről — kit egy magánlevélben[72] első nagyságu geniusnak mond — soha meg nem emlékezett.

Az Appendix teljesen ismeretlen marad, és a tudomány folytatta az utját, nem törődve azzal a meggazdagodással, melyet Bolyai János geniusának köszönhetett, miglen egynehány évtized mulva oda érett, hogy az absolut geometriát már képes volt birtokába bekebelezni. De mit tesz a tudomány örök életében egynehány évtized? és mit tesz másrészt ez a néhány évtized egy ember életében! Míg a tudomány lassu fejlődéssel oda jutott, hogy az Appendixet méltathatta, addig annak szerzője elhervadt csendes félrevonult magányában. De talán mégis helyesen cselekedett Gauss, midőn a fejlödés folytonos menetét nem akarta megszakitani, talán az ő tartózkodása — melyet mi, kik nagy szellemének utjait követni nem tudjuk, érthetetlennek találunk — óvta meg János-t attól, hogy a Bœoticusok őt mint bolondot és eretneket rágalmazzák, és így legalább a magány nyugalmában részesité azt, ki mint más úttörő is, meg nem élhette a tőle ültetett magból fakadó termésnek a megérését.

Gauss magatartása és egyáltalában az elismerésnek teljes kimaradása János-nak tüzes, dicsőségre vágyó lelkére a legvégzetesebb következményekkel volt. Az elismerést, melyet a világ tőle megtagadott, ugyancsak beteges önmagasztalással akarja pótolni, minek következtében az ő szenvedélyes ugyan, de személyes ismerősei tanusága szerint, rendkívül szeretetreméltó természete ingerlékenyre és bizalmatlankodóra változik;[73] büszkén és elzárkózva kerüli tiszttársainak a körét, személyes bátorsága viszálykodó, igazságszeretete[74] sértő ridegséggé fajul. Nem

[71] Gauss levele Bessel-hez (1829 jan. 29), Werke VIII. kötet, p. 200.

[72] Gauss levele Gerling-hez (1832 febr. 14) ugyanott p. 220.

[73] Bedőházy a. i. h. p. 442.

[74] ugyanott p. 301 idézve van János e nyilatkozata: «gyermekkoromtól

csoda ekkép, hogy az előbb oly nagyon kedvelt katonai hivatását megunja, míg 1833 junius havában, határőrökkel való összekoczczanás következtében,[75] nyugdíjazzák, a szolgálatba való visszalépés fentartásával és különös hangsulyozásával annak, hogy a felsőbb mathesis oktatására alkalmas személyiség. Mint nyugdíjazott százados visszatér hőn szeretett[76] erdélyi hazájába, a hol 13 esztendőn át atyjának Domáldi birtokán él, majd 1846-tól fogva Marosvásárhelyt telepedik le.

Bár János egészsége nem volt a legjobb — különösen váltólázban szokott volt szenvedni[77] — a legnagyobb hévvel adja magát a munkára. Részben geometriai rendszerének kidolgozásával és új alapra fektetésével, részben arithmetikai kérdésekkel foglalkozik. Hogy János-nak ezen és későbbi időben írt dolgozatairól, bár e dolgozatokból János életében mi sem került nyilvánosságra, a mai napon számot adhatunk és így képet alkothatunk e férfiu teljes tudományos egyéniségéről, ki még öt esztendővel ezelőtt csakis mint az Appendix szerzője volt ismeretes, Stäckel úr ernyedetlen és a legszebb eredménynyel koszorúzott, több évre terjedő munkásságának köszönjük, ki János hagyatékát — miután az több mint harmincz esztendőn át ugaron maradt — bámulatos szeretettel és ritka szakismerettel kutatta át, és az ezen kutatásban talált kincsekről Akadémiánknak több dolgozatban referált.[78] A legutolsó, Bolyai János születésnapjának századik évfordulóján bemutatott dolgozatát, mely még nyomtatásban nem jelent meg, Stäckel szives engedelmével, ki a kéziratot rendelkezésemre bocsátotta, szintén felhasználhatom itten.

János az Appendixben — hogy az előállítást minél rövidebbre

---

fogva egyik fő alapvonása volt jellememnek az igazság határtalan szeretete erkölcsileg és tanilag».

[75] ugyanott p. 442.

[76] Bolyai—Bodor levelek p. 228 «mely irásából azt is láttom, hogy Erdélyre hazai érzéssel tekint vissza.»

[77] v. ö. Stäckel, Mathem. és Term.-tud. Értesítő 1899, (Responsio) pag. 266, 267.

[78] Mathem. és Term.-tud. Értesítő, 1899, 1900, 1902; Kürschák-kal ugyanott 1902.

foghassa,[79] — elfogadta az EUKLIDES adta alapokat és csak az V. postulatumot mellőzte. De nem zárkózott el az elől, hogy az EUKLIDESI alapokban, különösen az Ὅροι-ban, ezen postulatumon kívül még egyéb nehézségek is vannak, a mire figyelmét különben atyjának munkálkodása és GAUSS levelének egy passusa[80] is rá irányította. Ezért az a törekvése, hogy a geometria számára egy magában teljesen consequens új rendszert alkosson, sőt az egész mennyiségtudományt is teljesen uj alapokra fektesse. Egy munkát tervez ezen czím alatt: «*Reformation der Elemente der Mathematik,*» mely magában foglalná a számtant (GAUSS), az időtant, az űrtant és a mozgástant. Az 1835-ik évből való[81] az űrtannak egy terjedelmes előszava, mely szerint a szemlélettől teljesen függetlenül, elvont fogalmaknak és ezekre vonatkozó feltevéseknek a rendszerét akarja felállítani, mely a térbeli tünemények leirására épen és teljesen elegendő. JÁNOS a fogalmak jelölésére is oly szavakat használ, melyek elejétől fogva a szokott, térbeli szemlélettel kapcsolatos szavaktól eltérnek, így a körnek megfelelő fogalmat *gyűrű*-nek (Ring), a gömbnek megfelelőt *kerekség*-nek (Runde) nevezi. Előállítása, mely egy még későbben említendő — mert későbbi időből származó — 134 nyomtatásra kész foliooldalra terjedő kéziratban maradt reánk, sokban hasonlít atyja Tentamenje Conspectus geometriæ czímü fejezetéhez, de a mint maga PHAEDRUS-sal mondja:[82]

Pater auctor quam materiam reperit,
hanc ego polivi, versibus senariis.

Lassanként a tervezett óriási mű talán kifejlődött volna, de egy körülmény lép közbe, mely őt geometriai elmélkedéseiről arithmetikai vizsgálatokra tereli.

1834-ben a lipcsei JABLONOWSKI-féle tudós társaság egy pálya-

---

[79] STÄCKEL a. i. h. 1902, p. 160. v. ö. BOLYAI FARKAS: Tentamen etc., I. kötet p. 489—490. idézve GAUSS—BOLYAI levelezésében p. 194 lent.

[80] GAUSS—BOLYAI levelezése p. 112.

[81] lásd a szövegben említett még ki nem adott STÄCKEL-féle értekezést, melyet a következőkben «STÄCKEL-kézirat»-nak idézem.

[82] BEDŐHÁZY a. i. h. p. 193.

kérdést tűzött ki, melyben a complex mennyiségek geometriai ábrázolásának szigoru megalapitását követeli. Atyjától, ki maga is részt vett a pályázaton, felszólítva, JÁNOS egy dolgozattal pályázik, mely nyolcz negyedrét oldalból áll, s melynek büszke jeligéje ez volt: «*Fructus nonnisi maturi decerpendi.*» E dolgozatban, a *Responsio*-ban, melyet STÄCKEL 1899-ben kiadott,[83] JÁNOS a complex mennyiségek elméletének megalapitására hasonló elveket alkalmaz,[83a] a minők alapján atyja a negativ számok elméletét épité fel. Hasonlóképen mint 1837-ben HAMILTON, ő is a complex mennyiséget számnégyesként fogja fel, melyekre nézve a formális számitási szabályokat felállitja, a mivel a complex számok ujabb elméletének egyik megalapitójává lesz.

Előállitása azáltal válik kissé nehézkessé, hogy azon négy jegyen kivül, melyek, a mint mondja: ad indicandos modos, quibus quantitates in calculo tractari debeat, introducta sunt, még atyja módjára négy megfelelő operatio symbolumot vezet be.

Teljesen eredeti azonban az 8. §., melyben a logarithmusnak akkor új elméletét adja, felfogva azt a sorral értelmezett exponentiális függvény invers függvényeként, és azután a logarithmus segélyével a tetszőleges kitevőjü hatványt értelmezi. De ha ebben a 8. §-ban csodálva látjuk, hogy BOLYAI JÁNOS teljesen a maga erejéből, mitsem tudva CAUCHY ról, 1837-ben egészen modern függvénytani szellemben dolgozik, legnagyobb bámulatunkat kelti fel, a Responsio 9. és 11. §§-a, mely a complex mennyiségeknek az absolut geometriában való alkalmazására vonatkozik.

Már a Tentamen második kötetéhez csatolt *Additamentum*-ban FARKAS, fiának nevében, reámutatott arra az analogiára, mely a sphæricus trigonometria és valamely *S* rendszer síkbeli trigonometriája közt fennáll, és mely már korábbi kutatóknak, különösen TAURINUS-nak is feltünt volt.[83b] A Responsio 9. §-ban már most

---

[83] Mathem. és Term.-tud. Értesítő 1899 p. 259 s köv.

[83a] STÄCKEL a. i. h. Bevezetés; ugyane Bevezetést v. ö. a következőkre nézve is.

[83b] ENGEL u. STÄCKEL a. i. h. pag. 252 és STÄCKEL, Abh. zur Gesch. der Mathem. IX. kötet, (Lipcse, 1899) p. 416—419.

azt mutatja meg JÁNOS, hogy az *S* rendszer síkbeli geometriája speciális esete annak a geometriának, a mely valamely *superficies undique uniformis*-on érvényes, és ezen paragraphusnak egy részletesebb kidolgozásában [84] azt teszi hozzá, hogy általánosan be lehet bizonyítani, hogy a síkokon kívül más superficies undique uniformes nem léteznek, mint a gömbök, a hypersphærák (síkokból æquidistans felületek), és az Appendixben *F*-fel jelölt felületek, a paraspærak, a mely utóbbiakon a geometria az EUKLIDESI rendszer síkgeometriájával azonos.

Nem csoda, hogy épen JÁNOS dolgozatának ezen utolsó fejezete teljesen érthetetlen marad lipcsei biráinak; mert ha ma, felfegyverkezve az utolsó félszázadban elért kutatások eredményeivel, bámulva állunk azon geometriai és analytikai belátás előtt, mely JÁNOS említett megjegyzéseiben nyilvánul, akkor 1837-ben csak *egy* ember élt, ki képes lett volna ezen megjegyzéseket megérteni és kellőleg méltatni — GAUSS, ki bennök felismerhette volna a rokonságot saját — JÁNOS előtt ismeretlen maradt — disquisitiones generales circa superficies curvas bizonyos fejtegetéseivel.

A dolgozat nem nyerte el a díjat, ép oly kevéssé, mint FARKAS dolgozata, hanem egy harmadik magyar ember, kinek a neve csak ezen alkalomból [85] vált ismeretessé, kapta a díjnak a felét. E második balsiker JÁNOS-ban a munkakedvet is megtörte; az atyjához való viszony, mely már egy a pályamunkák elküldésénél felmerült félreértés következtében meglazult, még ridegebbé válik azáltal, hogy FARKAS nem restelli, mint már előbb GAUSS-hoz,[86] úgy most öcscséhez [87] írt levelekben fiára panaszkodni; JÁNOS egészen elszigetelve érzi magát, és magával és az egész világgal meghasonolva, tiz éven át tétlen életet folytat, hajdani erkölcsi ereje mindinkább fogy, egészsége hanyatlik, a szellemóriás

---

[84] STÄCKEL, Mathem. és Term.-tud. Értesítő, 1902, p. 164.

[85] STÄCKEL ugyanott, 1899, Responsio, Bevezetése.

[86] GAUSS—BOLYAI levelezése, p. 117, 118.

[87] BEDŐHÁZY, a. i. h. pag. 299 s köv.; FARKAS-nak ANTAL öcscséhez írt evele későbben JÁNOS kezébe került.

látszólag hiú, élvezethajhászó, mindennapi emberré törpül. De 1848-ban oly esemény lép JÁNOS életébe, mely csak alvó szellem energiáját még egyszer uj életre ébreszti és őt újból tudományo munkához szólítja. — GAUSS közbenjárása által, kivel BOLYAI FARKAS az 1836 óta megakadt levélváltást 1848 január 18-án ismét felveszi, LOBACSEFSZKIJ-nek 1840-ben megjelent munkája «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien», FARKAS-nak a kezébe kerül, ki azt október 19-én JÁNOS-nak adja át.

Nagy vetélytársa ezen munkája áttanulmányozásának az eredményeit JÁNOS egy értekezésbe foglalja, (az egyedüli mathematikai, melyet magyar nyelven írt), melyet STÄCKEL és KÜRSCHÁK urak a mult évben közzétettek.[88] Egy bevezetés után, melyben JÁNOS régi szenvedélyességgel, de régi elmeéllel is a saját és a LOBACSEFSZKIJ vizsgálatainak találkozására vonatkozó gyanitásait kifejti, következik a LOBACSEFSZKIJ-féle munkának egy igen éles, de teljesen tárgyi birálata, melyben JÁNOS egyebek közt, LOBACSEFSZKIJ előállításának olyan pontatlanságára utal, melyet rajta kivül senki sem vett észre. Majd a Responsióban is tárgyalt amaz összefüggésről értekezik, mely a sphæricus és az absolut síkbeli trigonometria között fennáll, mely összefüggés LOBACSEFSZKIJ-nél csak mint tisztán analytikai tény említettik fel, míg ő a magasabb geometriai szempontot igyekszik érvényesíteni;[89] közben

[88] Mathem. és Term.-tud. Értesítő, 1902, p. 40 s kőv. JÁNOS értekezésének teljes czíme ez:

Tan vagy Jegyzetek vagy Értekez(l)et, Észrevételek és Hozzávetmények, Világosítmányok, Cáfolatok — némi egyebekkel együtt — jelenleg minden rendszer nélkül a mint jött —

a

Lobatsewsky Miklós

cár — vagy oroz—császári Valóságos Álam vagy álodalmi Tanácsnok és a Kasani Egyetembeni Rendes Tanárnak az egy-közü egyenek vagyis a' XI Euklidi elv' vagy arroli tan' tárgyában tett Berlinben 1840- évben ki-jött és a Fincke' könyv-(kereskedő-) boltjaban található ürtani vizsgálataira nézve, ...

E czím közlését KÜRSCHÁK úr szívességének köszönöm.

[89] ugyanott, és részletesebben Math. u. naturw. Berichte aus Ungarn XVIII. kötet p. 289.

oly észrevételeket tesz, a melyekből kitünik, hogy JÁNOS a legkülönbözőbb geometriai és algebrai problemákról gondolkodott, a milyenek a területek végszerű egyenlősége, az algebrai egyenletek megoldása, a trigonometrikus függvények arithmetikai tulajdonságai, és hogy az absolut geometria mechanikai és csillagászati következményeivel is foglalkozott. Igaz, hogy részben csak odavetett jegyzeteket ír, mint általában későbbi dolgozatainak egy részében, ellentétben az Appendix classicus pontosságával,[90] vagy csak felületes észrevételekre szorítkozik, vagy pedig atyja virágos stylusába esve, terjedelmes peroratiokban régi gondolatokat ismétel. Különösen figyelemreméltó meg az a kritika, melyet JÁNOS LOBACSEFSZKIJ-nek azon kisérletére gyakorol, a mely az *i* állandó mérések utján való meghatározására czéloz; ezen alkalommal JÁNOS «genialis intuitio»-val azt az alakot is emliti, melyben a NEWTON-féle gravitatio törvény az absolut térben kimondandó.[91]

Így visszanyerve a munkához való kedvet, JÁNOS a harminczas években folytatott gondolatmeneteket ujból felveszi. Már az 1832-ben FARKAS-hoz intézett levelében GAUSS JÁNOS-nak a figyelmét a tetraëder köbösitésének az absolut geometriában való elvégzésére irányitotta. FARKAS erre azt felelhette,[92] hogy JÁNOS e feladatot már 1830-ban megoldotta, de az ezen feladatra vonatkozó feljegyzések[93] — egy kivétellel — csak az 1856. évből származnak, és csak egy speczialis tetraëder köbösitését tartalmazzák, mely különben ugyanaz, a melyre nézve a térfogat meghatározását GAUSS és LOBACSEFSZKIJ is megkezdték volt. Még csudálatosabb, hogy azon négy módszer közt, a melyeket JÁNOS a szóban levő problema megoldására javaslatba hoz, az első, melyet —

[90] STÄCKEL Mathem. és Term.-tud. Értesitő 1902, p. 44.

[91] ugyanott pag. 64 és Mathem. nat. Berichte aus Ungarn XVIII. kötet p. 277; v. ö. STÄCKEL, de ea mechanicæ analyticæ parte etc., JOANNIS BOLYAI in Memoriam (Kolozsvár, 1902) p. 64.

[92] GAUSS—BOLYAI levelezése p. 115, STÄCKEL Mathem. és Term.-tud. Értesitő, 1902 pag. 175; v. ö. a *Tentamen*-nek a 79. jegyzetben idézett passusát.

[93] STÄCKEL a. i. h. 175.

a mint Stäckel megállapította[94] — közvetlenül Gauss 1832. évi levelének vétele után felírt, azzal egyezik, a melyet Gauss maga egy ugyanezen évből származó (1900-ban publicált),[95] feljegyzésben adott, míg a második lényegében azzal találkozik, a melyet[96] Lobacsefszkij a «kazani híradóban» 1829-ben közölt.

Hogy János mennyire autodidakta volt, kitünik abból, hogy azt az elliptikus integrált, melyre a tetraëder köbösitése vezet, elemi függvényekkel igyekszik kifejezni, a miből az is látszik, hogy Abel és Jacobi nevei Marosvásárhelyt ismeretlenek maradtak.

Továbbá visszatér János az űrtanra vonatkozó munkálataihoz. Mint már említettük, egy terjedelmes része e munkának nyomtatásra kész alakban is megvan, a kézirat 1855-ből való. A geometriai alapfogalmak bevezetésénél Stäckel megjegyzése szerint[97] különösen figyelemreméltó, hogy János a sikbeli symmetria elvét bőven felhasználja, a mivel az is áll összefüggésben, hogy a két rögzített pont körüli forgatást a legegyszerűbb és legbiztosabban véghez vihető mozgásnak tekinti. Ennek folytán a geometriai szerkesztéseket hasonló alapra igyekszik fektetni, mint Mascheroni az ő «*Geometria del compasso*» czimü, 1797-ben megjelent munkájában, a mely munkát János ismer és dicsér, bár a maga módszerét a Mascheroni-é fölé helyezi. A *szerkezettan* (Constructionslehre) ezenkívül az oly vizsgálatokat tartalmazza, melyek a ma *Analysis situs*-nak nevezett tanba tartoznak. János a későbben Listing- és Riemann-tól kifejtett, a felületek összefüggésére vonatkozó elmélet alapvonalait adja, és az Euler-féle polyëdertétel általánositását többszörösen összefüggő felületü polyëderek esetére körvonalozza. Úgy látszik, hogy a munka kiadásával járó nehézségek elijesztették János-t a kidolgozás folytatásától; legyen szabad e helyen is azt a kivánságot kifejezni,

---

[94] ugyanott.

[95] Gauss Werke, VIII. kötet, p. 232.

[96] Engel a. i. h. p. 53 s köv.

[97] Stäckel, kézirat.

hogy a reánk maradt részlet, melyből STÄCKEL úr legújabb dolgozatában szemelvényeket közöl, lehetőleg teljesen is kiadassék.[98]

Hogy JÁNOS a Responsio 9. §-ában és LOBACSEFSZKIJ munkája birálatában is érintett felfogására, mely szerint a síkbeli geometria a superficies undique uniformis-on érvényes geometriának speciális esete, visszatér, szoros kapcsolatban van egy oly kérdéssel, mely JÁNOS-t már 1830-ban foglalkoztatta, s melylyel 1850 után ismét behatóan foglalkozik, egy kérdés, melyben az absolut geometria megalkotója tragikus sorsának javarésze is rejlik. A kérdés az, hogy vajjon az absolut geometria ment-e ellentmondástól? Az Appendix végén azt mondja JÁNOS «Superesset denique (...), impossibilitatem (...) decidendi, num Σ aut aliquod (et quodnam) S sit demonstrare; quod tamen occasioni magis idoneæ reservatur.» Ez a bebizonyítás meg volna, ha ki volna mutatva, hogy a tetszőleges állandóval járó S rendszer sem magamagával, sem pedig a szemlélettel nincs ellenmondásban. Egy helyen[99] JÁNOS erre nézve az egyedüli helyes felfogást vallja, hogy tudni illik ez a kérdés csak akkép dönthető el, hogy az absolut geometria rendszere teljesen kifejtetik és észleltetik, vajjon adódik-e ellenmondás, vagy sem. A követendő út az volna, a melyen JÁNOS az ürtanában indult, de a helyet, hogy JÁNOS ezt már most minden erélylyel folytatta volna, azt látjuk, hogy a saját tanán kételkedni kezd.

A síkbeli geometria ellentmondástól ment voltát, hasonlóképen mint LOBACSEFSZKIJ is, abból következteti, hogy a síkbeli trigonometria a sphæricus trigonometriából akkép adódik, hogy a gömb radiusát képzetesnek választjuk; de a hasonló okoskodást a térre nézve nem tudja alkalmazni, mivel az ahhoz szükséges segédeszközöket nélkülözi, különösen azt a gondolatot, mely mikor először 1844-ben GRASSMANN-tól, majd CAYLEY- és CAUCHY-tól kimondatott, a maga merészségével a legélesebb

[98] Utólag STÄCKEL úr szíves volt velem közölni, hogy az *űrtant*, a két BOLYAI-ról szóló, készülőben levő, nagy munkájában fogja közölni.

[99] STÄCKEL Mathem. és Term.-tud. Ertesítő, 1902, p. 172.

ellentmondásra — mert félreértésre — talált, és mely gondolat nem más, mint a több dimensiós geometria. Így látjuk, hogy JÁNOS, mindig ellentmondást keresve, terjedelmes számításokat végez,[100] néha azt véli, hogy ily ellentmondásra bukkant, a mit azután számítási hibának ismer fel; de mindenesetre — és ez JÁNOS tudományos pályájának igazi tragikuma — élethossziglan nem tudott meggyőződni arról, hogy az ő rendszere a térben sem vezet ellentmondásra.

Kétségtelen, hogy tiszta geometriai úton — a több dimensiós geometria nélkülözésével is — ki lehet mutatni, hogy az absolut térgeometria nem ellentmondásos; a mint már jeleztük, JÁNOS maga jelölte meg ennek az utját az ő ürtanában. De daczára azoknak a fontos vizsgálatoknak, a melyeket ez irányban tettek, ezen módszer teljesen systematicus követése még ma is hiányzik, úgy hogy arról a más két módszerről kell még megemlékeznünk, melyek a történelmi fejlődés során a szóban forgó czél tökéletes eléréséhez vezettek.

Az egyik az analyticus geometria módszerén alapszik. A már említett, 1828-ban megjelent Disquisitiones generales circa superficies curvasban GAUSS az EUKLIDESI térben foglalt felületeket oly módszerrel tárgyalja, a melynek révén kiadódik, hogy a felületek tulajdonságai két osztályba sorozhatók. Az egyik osztályba tartozó tulajdonságok lényegesen ahhoz vannak kötve, hogy az illető felület egy háromdimensiós EUKLIDESI térben létezik, a másik osztályéi pedig tetszőleges kétdimensiós sokaságokra vonatkoznak, a melyek ívelemének a négyzete a coordináták positiv definita négyzetes differentiális alakjával előállítható. GAUSS ezen módszerét általánosítva, RIEMANN 1854-ben a Göttingeni bölcsészeti kar előtt tartott habilitatiós előadásában «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen»[101] egy nagyszerü elméletnek a körvonalait adta, mely, ha feltesz-

---

[100] ugyanott, p. 174.

[101] Abh. der Gött. Ges. der Wissenschaften XIII. kötet (1867), Werke (1892) p. 272 s köv.

szük, hogy a tér számsokaságnak tekinthető, minden képzelhető geometria rendszert felölel.

Ha n valós mennyiségnek a rendszerét pontnak nevezzük, akkor két végtelen közeli pont távolsága még mint a két pont coordinatáinak tetszésszerinti függvénye értelmezhető. Sajátságos megfontolások, melyek lényegében egy a szemlélettel a posteriori elérendő összhangzatra czéloznak, arra vezetik RIEMANN-t, hogy ezen infinitesimális távolság vagy ivelem négyzetét a coordinatadifferentiálok positiv definita négyzetes alakjának válaszsza. Az igy meghatározott sokaságnak a jellege a helynek $\frac{n(n-1)}{2}$ számú függvényével van meghatározva, melyek $n=2$ esetén arra az egyetlen mennyiségre vezetnek, melyet GAUSS valamely felület *görbületi mértéke* néven vezetett be. Ha a sokaság olyan, hogy az $\frac{n(n-1)}{2}$ függvény mind egymással egyenlő, a miből SCHUR szerint,[102] már az következik, hogy állandók, akkor $n=3$ esetén az igy adódó, állandó görbületi sokaság megfelel az EUKLIDESI Σ rendszernek, ha a görbület zeró, a BOLYAI-féle S rendszernek, ha negativ, míg a positiv görbület rendszere, mely itt először fellép, és mely ezért RIEMANN rendszerének neveztetik, nem egyéb mint az, melyben a két egyenesre vonatkozó kérdésre az első lehetőséggel válaszolunk. Mivel az az analytikai disciplina, mely az ilyen allandó görbületü sokaság geometriáját szolgáltatja, ellentmondástól ment, következik, hogy ugyanaz az absolut geometria rendszerére is áll.

RIEMANN dolgozatának a megjelenésétől 1867-től kelteződik az absolut geometriának a mathematikai tudományok birtokába való tényleges bekebelezése. Egy nem sokkal ezután megjelent dolgozatban BELTRAMI azt mutatta meg, hogy az S rendszernek megfelelő tér az EUKLIDESI tér valamely gömbjének a belsejére leképezhető, és hogy épen úgy, mint a RIEMANN-féle rendszer síkgeometriája egy gömbön valósitható meg, úgy a BOLYAI

---

[102] Mathem. Annalen, XXVII. kötet (1886).

S rendszerének síkgeometriája megvalósul az EUCLIDESI térnek bizonyos felületén, melyet BELTRAMI *pseudosphaerá*-nak nevezett el. Gömb és pseudosphæra pedig, mint GAUSS szerint mondjuk, állandó görbületü felületek, a rajtuk érvényes geometriára nézve tehát a BOLYAI JÁNOS-tól superficies undique uniformes-nak mondott felületosztálylyal egyeznek, úgy hogy itt a Responsio 9-ik §-ának gondolatmenetével találkozunk.

Nem tagadható, hogy BELTRAMI az absolut geometriának eme EUKLIDES térbeli interpretatiójával sok oly mathematikust nyert meg az új tannak, ki addig az absolut geometriát csak puszta agyrémnek volt hajlandó tekinteni, de azért ezt az interpretatiot nem szabad túlbecsülni.

Ugyanis a mi az ellentmondás kérdését illeti, ezen interpretatio a kérdést az absolut geometriára nézve nem annyira megoldja, mint inkább az EUKLIDESI geometria megfelelő kérdésére visszavezeti; hogy ez utóbbira nézve ellentmondás nem létezése soha kétségbe nem vonatott, igaz, de ép oly igaz, hogy a priori az ellentmondás kérdése az EUCLIDESI geometriában egy árnyalattal sem különb, mint az *S* rendszerben.

Más tekintetben azonban igenis ismerettani szempontból is haladást jelez BELTRAMI munkája, a mennyiben kimutatja, hogy az absolut rendszer tere mindig bent foglaltatik egy többdimensiós EUKLIDESI térben, úgy hogy a többdimensiós geometria fogalma felöleli az absolut geometria fogalmát.

A második út, a melyen be lehet bizonyítani, hogy az absolut geometria nem tartalmaz ellenmondást, azért nevezetes, mert azt az összefüggést derítette ki, mely az absolut geometria és a közönséges geometriának ama fejezete közt áll fenn, melyet újabb, synthetikus vagy projectiv geometria néven különösen a mult század első felében dolgoztak ki.

Azokban a geometriai tételekben ugyanis, melyek tisztán graphikai természetűek bizonyos *dualitás* mutatkozott, másrészt az adódott, hogy mindazok a tételek birnak tisztán graphikai jelleggel, a melyekben távolok és szögek csak az úgynevezett *kettős arány* alakjában szerepelnek.

1859-ben Cayley-t algebrai természetü vizsgálatok arra vezették, hogy két pont távolát és két egyenes vagy sik hajlásszögét ilyen kettős arányokkal állítsa elő, azáltal, hogy egy bizonyos másodrendü felületet absolut képződményként vesz segitségül. Ezen másodrendü felületet természete szerint három különböző geometriai rendszert talált, melyeket elliptikus, parabolikus, illetőleg hyperbolikus rendszernek neveznek. Későbben (1870—71) Klein Felix azt mutatta meg, hogy e három rendszer sorban a Riemann, Euklides illetőleg Bolyai-féle rendszerrel egyezik, a mivel az, hogy az absolut geometria ellentmondástól ment, újból ki van mutatva.

A projectiv geometria mind a három rendszerben ugyanaz, a mi onnét közvetlen világos, hogy az a két állandó, a melytől valamely geometriai rendszerben a távolság és a szög mértéke függ, t. i. a hosszegység és s görbület mértéke, a kettős arányból kiesik, és ebből közvetlenül kiadódik a dualitás elve, mivel ez nem mond egyebet, mint azt, hogy az Euclidesi tér projectiv geometriája a Riemann-féle térben is áll.

Fájdalom, Bolyai János már nem lehetett tanuja annak, hogy az ő tana a kutatásnak mindegyre szélesebb köreit hóditja meg, hogy nemcsak a geometriában, hanem az analysisben és a mechanikában is nagyjelentőségü haladások kútfejévé válik.

Ismeretlenül és mindenkitől, még attól az egytől is elfelejtve, ki geniusát méltatni tudta, örömtelen életét élte.

Mikor 1856-ban atyjában környezetének azt az egyedüli emberét is elvesztette, ki személyiségét és tudományos törekvéseit megérteni képes volt, János a mathematikával végkép felhagyott, de fájdalmaktól és szenvedésektől megtört testében is lankadatlanul munkálkodó szelleme másféle problemák felé fordult. Egy az egész emberi tudást felölelő tudományos rendszert akart teremteni, tökéletes világnyelven megirva, mely czélra magyar anyanyelvét alkalmasnak véli. Világboldogitó eszméket, a sociális alapon nyugvó állam eszméjét gondolja ki, de mindezeknek a kezdetén megakad. Ötvennyolcz éves korában fáradt és roskadozó aggastyán, bensőleg oly gazdag, külsőleg oly tragikus életét 1860 januarius havában végzi be.

Midőn JÁNOS a maga egyetlen könyvét, az Appendixet megalkotta, a világ annak megértésére még nem volt megérve, mind ennek a körülménynek, mind külső viszonyainak, mind ki nem elégített nagyravágyásának az áldozata, elesett, mint egy tragikus hős, miután a legmagasabbat elérte, miután a kétezer esztendős problemát megoldotta. — Ma az egész művelt világ áldoz emlékének, nem sirjára, hanem örökbecsű munkáira téve le a bámulat és a hála babérát. És mi, a kik ma itt vagyunk, hogy emlékét ünnepeljük, emlékezzünk meg hálásan azokról a férfiakról is, kik a világ figyelmét erre az elfelejtett emberre és annak sohasem ismert könyvére először irányitották, a német BALTZER-ről, a franczia HOÜEL-ről és végre, de nem utolsóként, a mi SCHMIDT FERENCZ-ünkről, ki harmincz esztendőn át, 1867-től haláláig, életének legszebb feladatát abban látta, hogy nagy honfitársának, BOLYAI JÁNOS-nak az elismeréseért tettel és irásban küzdjön.

Midőn kilencz évvel ezelőtt a kazani egyetem BOLYAI JÁNOS szellemi rokonának, LOBACSEFSZKIJ születésének századik évfordulóját megünnepelte, midőn nehány hónappal ezelőtt a christianiai egyetemen az összes művelt nemzetek — sajnos, csak mi nem lehettünk ott — ABEL évszázados ünnepére összegyültek, ezek az egyetemek az ünnepelt férfiakat büszkén magukénak vallhatták vagy mint tanitót, vagy mint tanulót. Mi most nem vagyunk ebben a szerencsés helyzetben; midőn a mult század első felében BOLYAI JÁNOS élt és működött, a mi egyetemünk száz éves álmát aludta. De mindjárt az első években, mi után (1872-ben) Felséges Urunk akaratából új életre kelt, a BOLYAI traditio hű ápolójává lett. A mathesis egyik legelső tanitója a mi egyetemünkön[103] már 1874-ben előadást tartott az absolut geometriáról, talán egyáltalában a legelső ilynemü előadás, mely tudomány-egyetemen tartatott, mert — úgy mondá — hazánkban, hol amaz ideig a két BOLYAI-n kivül számottevő ma-

[103] RÉTHY MÓR, most budapesti műegyetemi tanár.

thematikus nem élt, ezen két férfiu működéséből kell minden további tudományos törekvésnek kiindulni. Azóta az Appendixben foglalt tan hirdetése egyetemünkön nem szünetelt és ma sem jövünk üres kezekkel az ünnepre.

Van szerencsém azt az emlékiratot bemutatni, melyet egyetemünk mathematikai és természettudományi kara a mai ünnepen kibocsát és melyben az egyetemünkön kívül álló két tudós, Stäckel Pál Kielben, és Bonola Robert Paviában is közreműködött. Egyébre nézve az irat előszava nyujtson tájékozást. A mai ünnepre csak a latin szöveg készülhetett el, azonban előszavát magyar fogalmazványban van szerencsém felolvasni:

«Tudomány-egyetemünk Mathematikai és Természettudományi Kara 1899 évi deczember hó 19-én tartott ülésében elhatározta, hogy annak a napnak a századik évfordulóján, a mely napon Bolyai János született, születési házát emléktáblával jelöli meg és emlékiratot bocsát ki, melynek czélja legyen feltüntetni azt a befolyást, a melylyel a Bolyai János-tól megalkotott absolut geometria a mathematikai tudományok fejlődésére a XIX. évszázban volt.

Midőn ez iratot az egész világ tudós társulatainak, egyetemeinek és mathematikusainak megküldjük, kedves kötelességünknek tartjuk, hogy őszinte hálánkat nyilvánitsuk a Nagyméltóságu vallás- és közoktatásügyi m. kir. Minister úrnak, a ki a kiadás költségeit rendelkezésünkre bocsátani kegyes volt, a Magyar Tudományos Akademiának, mivel jóakaratának köszönjük, hogy iratunkat Bolyai János-tól, az apjához intézett, az absolut geometria történelmére fontos levelének hű másával diszithetjük, végre azoknak a tudósoknak, kik iratunk létesitéséhez közreműködni szivesek voltak.

Legyen ez irat jele annak, hogy hazánk nagy fiának emlékét híven őrzi és ápolja, és járuljon hozzá ahhoz is, hogy a Bolyai János-tól megalkotott tan továbbra is viruljon és gyarapodjék.»

Schlesinger Lajos.

A POLÁROZOTT FÉNY INTERFERENTIÁJA TÖRVÉNYEINEK KISÉRLETI BEMUTATÁSA.*

(Második és befejező közlemény.)

III. I. Stefan és E. Mach kísérletei: Valamennyi törvény kimutatása. Megjegyzések.

18. §. Stefan kísérletei a kettős quarczczal.

I. STEFAN ** ide tartozó kisérletei másodikában egy színképkészülék collimator-lencséje és prismája közé egy SOLEIL-féle kettős quarcz ***-ot úgy állitott fel, hogy a két quarczfél összeérő felülete a prisma törő élével párhuzamos volt. A kettős quarcznak a törő élhez közelebben eső fele üveglemezkével volt födve, menetkülönbség létesítése czéljából.

Az észlelő távcsőben oly színkép jelent meg, melyen át interferentia-csikok, az ú. n. TALBOT-féle sávok vonultak, melyek az említett födő üveglemezke jelenlétének köszönhetik keletkezésüket. STEFAN főleg azokat a változásokat vizsgálta meg, melyeket a csíkrendszerek a szerint mutatnak, a mint a collimator-

* Előadva a Mathematikai és Physikai Társulat 1902. évi november hó 6-án tartott rendes ülésén.

** «Über die mit dem SOLEIL'schen Doppelquartz ausgeführten Interferenz-Versuche. Sitzungs-Berichte der Wiener Akademie,

(2) LIII. 1866 p. 548—554;
(2) LXVI. 1872 p. 425—453.

*** Ez egyenlő méretű, derékszögű parallelepipedon alakú oly két quarcz összeillesztéséből keletkezett kettősquarcz, melynek mindegyik fele a kristálytengelyre merőlegesen van metszve, de az egyik ú. n. jobbra, a másik balra forgató quarczból való; az összeillesztés lapja az egymással párhuzamos tengelyekkel párhuzamos.

Az egy-egy ily quarczlapra merőlegesen beeső, síkban polározott fénynyaláb e quarczban jobbra és balra körben polározott két nyalábra oszlik, melyek haladási sebessége egymással nem egyenlő s így relativ phasis-különbséggel lépnek ki a lemezből.

hasadékra eső fény egyenesben, körben vagy ellipsisben van polározva. Ugyanígy vizsgálta meg elméletileg és kisérletileg azokat a csíkrendszereket, melyek keletkeztek, mikor az előbbi berendezésben a prismát finom két hasadékkal ellátott, egyébként átlátszatlan ernyővel akként helyettesitette, hogy az egy-egy quarczfélen áthaladott fénynyalábok egy-egy hasadékon hatoljanak által. Ezen utóbbival egyenlő berendezést alkalmazott STEFAN idetartozó első dolgozatában is, mely azonban főleg annak a kimutatására szolgált, hogy a quarczban a tengely mentén haladó kétféleképen körben polározott sugarak továbbterjedési sebessége különböző; erre az ily két nyalábból alkotott interferentia-csíkrendszer eltolódásából lehetett következtetni. Minthogy itt is általában véve különbözőképen és nem mindig síkban polározott négy sugár interferentiája létesül, mely sugarakat sem egymástól teljesen elválasztani és külön megvizsgálni nem lehet, sem mindegyikükre külön-külön optikailag hatni nem lehet: a 12. és 16. §-okban említett okoknál fogva az ARAGO-FRESNEL-féle törvények kifogástalan kimutatására nem alkalmasak, de STEFAN nem is végezte kisérleteit e végből. Mindazonáltal e kisérletek a nevezett szerzőktől származó kisérletekkel szemben már azért is jelentenek haladást, mert nem csak síkban, hanem különbözőképen ellipsisben polározott sugarak interferentiájával foglalkoznak.

19. §. Mach és Rosicky kísérletei; az első két törvény kimutatása.

Egyenesen a szóban forgó törvényeknek új alakban való kimutatására törekedtek E. MACH és W. ROSICKY,* miért is ezen kisérletekről kissé bővebben kell szólanunk, annál is inkább, mivel e szerzők szerint,** «habár a FRESNEL-ARAGO-féle kisérletek később sokszorosan bővíttettek és módosíttattak, mindazonáltal ezeknek itt leirandó alakja a legtisztább betekintést nyújthatja ezek nagyon is bonyolódott körülményeibe.»

* Über eine neue Form der FRESNEL-ARAGO-schen Interferenz-Versuche mit polarisirtem Licht. Sitzungs-Berichte der Wiener Akademie (2) LXXVII. 1875, p. 197—213.

** i. h. p. 197.

Valamely collimator-lencse gyújtósíkjában levő hasadékból jövő keskeny sugárnyaláb e lencsére érve belőle, mint párhuzamos nyaláb lépett ki, mely a collimatorral szemben állított, vele közös tengelyű távcső tárgylencséjére esett; e távcső a végtelenre levén beállítva, látóterében a collimator-hasadék tiszta képe jelent meg.

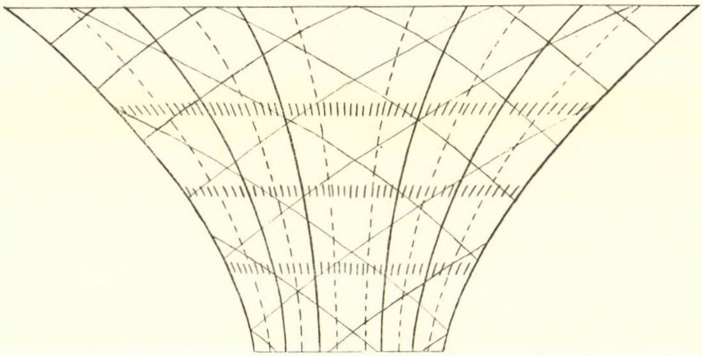
Ha a távcső objectivuma elé verticalis, keskeny nyílást helyeztek, akkor ez jelentékeny, de közönséges fényelhajlást létesített, mely a verticalis, széles képek vízszintes sorozatából állott; a középső kép szélessége kétszer akkora, mint a többi oldalt eső képeké. A collimator-hasadékot pontszerű nyilássá röviditve, az elhajlott képek sorozata a látótérben vízszintes, fénylő egyenessé redukálódik, mely egyenes világos és sötét helyekből — ugyanis az előbbi elhajlitásbeli fényjelenség vízszintes, szalagszerű részéből áll.

Most az észlelő-távcső szemlencséje elé egy egyenes látású kicsiny spectroscopot helyeztek, melynek törő élei vízszintesek voltak; e spectroscop széthúzta a vonalas elhajlitásbeli képet oly színképpé, melynek vörös széle fent, ibolyaszínű széle lent volt, de e színképben egyszersmind az elhajlitásbeli kép sötét helyei sötét csíkokká húzattak ki, melyek a vertikalis középső fényes sáv két oldalán symmetrikusan helyezkednek el és az ibolya felé convergálnak.

Az igy előkészitett eszközben a collimator-lencse után, de a verticalis nyilás elé oly két planparallel quarczlemezt tettek, melyek lapsíkjai optikai tengelyükkel párhuzamosak. Az egyik quarcz a nyilás egyik $\frac{1}{2}D$ szélességű felét födte el s verticalis tengelyű; a másik quarcz a nyilás másik, szintén $\frac{1}{2}D$ szélességű felét födte el s vízszintes tengelyű. A fénynyaláb a collimatorból e lemezekre mindig normalisan esett s az azokon áthaladott kettősen törött o_1, e_1; o_2, e_2 sugárnyalábok a dolog természete szerint teljesen úgy viselkedtek, mintha egymás mellett levő, egymással egyenlő $\frac{1}{2}D$ szélességű hasadékokból indulnának; de szem előtt tartandó, hogy a quarczlemezek jelzett helyzeténél o_1 és o_2; e_1 és e_2 *egymásra merőleges síkokban vannak polározva.*

Ezen berendezés mellett a következő tapasztalatokat tették: Ha a collimator-hasadékra természetes fény esik, akkor a látótérben három interferentia-csíkrendszer jelentkezik: egy erősebb centralis és két gyengébb, ferde, oldalt eső rendszer.

Az erős rendszer onnan származik, hogy a két quarczon át egyenesen áthaladó mindegyik nyaláb, az $\frac{1}{2}D$ szélességű nyiláson átmenve, ez által elhajlást szenved, s a látótérben a színképes elhajlításbeli kép jelentkezik, mely mind a négy sugárra nézve congruens és egy helyre esik. (A jelenség ezen része



7. ábra.

ugyanaz marad, ha a quarcz-lemezek helyét egymással egyenlő törésmutatójú üveglapok foglalják el.) Ezen így származó négyszeres elhajlításbeli centralis rendszer fényes közepe verticalis; ennek két oldalán a rendszer sötét sávjai symmetrikusan feksze-nek, s az ibolya felé convergálnak; l. a 7. ábra erősebben kihúzott görbéit.*

A többi két rendszer e centralis rendszerhez symmetrikusan, de ferdén úgy fekszik, hogy a tőle baloldali *lefelé-jobbfelé*, a jobboldali *lefelé-balfelé* volt irányítva; a két rendszer az egymáshoz párhuzamosan polározott o_1 és e_2 és a szintén egymáshoz párhuza-

* V. ö. a szerzők idézett értekezése 203. lapján előfordúló kis ábrát, melynek jobb kivitelű, kétszeres nagyobbítása a jelen 7. ábra.

mosan polározott o_2 és e_1 sugarak interferentiájából létesült; l. a 7. ábra gyengébben kihúzott, egymást keresztező két ferde rendszerét. Más rendszer nem látható, azaz az egymásra merőlegesen polározott o_1 és o_2 sugarak, valamint az ugyanilyen e_1 és e_2 sugarak egymással való interferálásának nyoma nem látszik. Ezen jelenség szerint a szerzők az ARAGO-FRESNEL-féle törvények *elsejét* és *másodikát* látják bebizonyitottnak.

20. §. Folytatás: A harmadik és negyedik törvény kimutatása.

a) Ha most a szemlencse elé analyzaló nicolt helyeztek és látótengelye körül forgattak: a középső rendszer változatlanúl megmaradt, az oldalt eső két rendszer fényerőssége változott, az egyik eltünt, mikor az analyzator polározási síkja merőleges volt e rendszert alkotó nyalábok polározási síkjára, míg a másik rendszer ekkor legnagyobb erősséget mutatott; a megfordított eredmény mutatkozott az analyzatornak 90°-al történt elforgatásánál. De e közben új csíkrendszert nem láthattak s evvel a *harmadik* törvényt mutatták ki.

b) Eltávolítva az analyzaló nicolt, de a collimator-hasadékra síkban polározott fényt bocsátva: szintén nem észleltek új interferentia-csíkrendszert; ez a harmadik törvény némi módosulata. Ezen esetben ugyanis a quarcz lemezekre síkban polározott állapotban eső fény e lemezekben o_1 és e_1; o_2 és e_2 nyalábokra oszlik, melyek interferentiális viselkedése — ha ezentúl polározást nem szenvednek — teljesen olyan, mintha a collimatorból jövő, a quarcz lemezekre eső fény természetes fény volna.

c) A *negyedik* törvényt úgy mutatták ki, hogy a collimator-hasadékra eső fényt előzőleg, a quarczlemezek tengelyéhez 45° alatt hajlott főmetszetű *nicol* segélyével polározták s az észlelő távcső szemlencséje elé analyzáló, forgatható *nicol*-t helyeztek.

Ha a két nicol főmetszetei egymáshoz párhuzamosak, akkor az analyzatorra eső o_1, e_1; o_2, e_2 sugárnyaláboknak csak e nicol főmetszetére merőleges (rendkívüli) összetevői hatolhatnak belőle ki, melyeket helyesen o_1e; e_1e; o_2e; e_2e jelekkel jelölhetni; ezek mindegyike létesít külön-külön, egymástól függetlenűl elhajlításbeli képrendszert, melyek egybeesvén, a középső *centralis elhajlításbeli rendszert* alkotják.

Másrészt az o_1e és o_2e nyalábok, melyek egymáshoz képest phásiskésést nem mutatnak, egymással interferálva, *centralis interferentialis csíkrendszert* létesitenek; ugyanilyet létesitenek az e_1e és az e_2e nyalábok is; e két rendszer egymással egybeesik és *egy* centralis *interferentia*-csíkrendszert mutat, melynek köze a centralis *elhajlításbeli* képrendszer közétől különböző; l. a 7. ábra gyengén vonalkázott görbéit; e két fajta rendszer ennélfogva egymástól helyileg is megkülönböztethető.

De ezeken kivül az o_1e és e_1e egymással és az o_2e és e_2e egymással interferálnak és ennélfogva, mivel a színkép-complexum a verticalis szerint van széthúzva, vízszintes csíkrendszert létesítenek úgy, hogy a látótérben egyes színek eloltottaknak látszanak és pedig ugyanazok, melyek a közönséges módon létesített színképben hiányoznának, ha a fény két párhuzamos *nicol* közé helyezett tengely-párhuzamosságú quarczlemezen haladna át; e vízszintes rendszert a 7. ábra vonalkázott vízszintes sávjai tüntetik elő; ezek a TALBOT-féle vonalaknak a jelen berendezésnél fellépő rendszerét alkotják.

Az o_1e és e_2e és az o_2e és e_1e sugárpárok interferentiájából előbb származott, *a)* és *b)* alatt felemlíttetett ferde rendszerek nem jelentkeznek, úgy, hogy más, mint a jelzett három rendszer e berendezésnél nem látható.

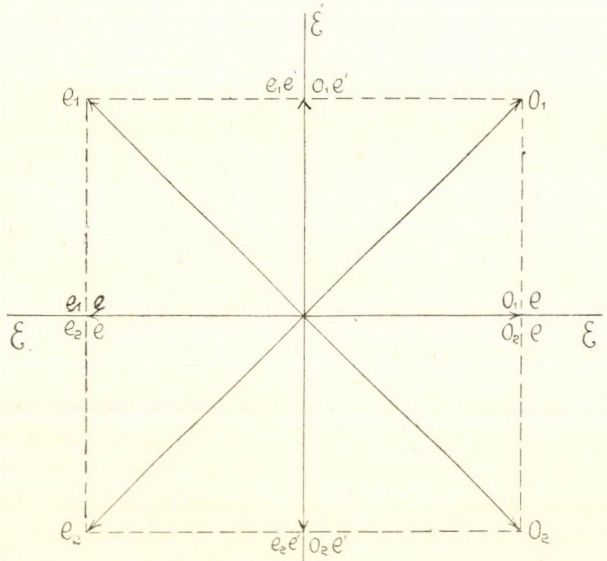
A centralis interferentialis rendszer létezése a negyedik törvényt igazolja.

21. §. Folytatás. Az ötödik törvény igazolása.

Végre, mikor a 20. §. *c)* pontjában említett két nicol főmetszetei egymásra merőlegesek, az előbb jellemzett jelenség annyiban változik, hogy a centralis interferentialis rendszer maximumainak és minimumainak előbbi helyei felcserélődnek; épen így felcserélődnek az előbbi vízszintes interferentialis rendszer maximumainak és minimumainak helyei a jelen rendszerben.

A felcserélés oka könnyen belátható:

Ugyanis, ha o_1, e_1; o_2, e_2 az analyzatorra eső fényvectorok irányai (8. ábra) és EE az analyzator polározási síkja, mikor ez pl. a beeső fény polározásával párhuzamos, akkor az analyzatorból kilépő o_1e, o_2e sugarak fényvectorai egymás között egyirányúak és e_1e, e_2e sugarak-éi egymás között szintén egyirányúak, de az előbbi párral ellentett irányúak, bár mind a négy vector



8. ábra.

egy s ugyanazon EE polározási síkban fekszik; az o_1e és e_1e vectorok egymással ellentett irányúak, épen így az o_2e és e_2e vectorok.

Az előbbi centralis interferentia-rendszer az o_1e és o_2e nyalábok s az e_1e és e_2e nyalábok egymással való interferálásából keletkezett; a vízszintes rendszer az o_1e és e_1e és az o_2e és e_2e interferálásának eredménye.

De, ha az analyzatort 90°-al elforgatjuk: polározásának síkja $E'E'$, s az analyzatorból kifelé haladó nyalábok a 8. ábra szerint o_1e', e_1e'; o_2e', e_2e', melyek közül a centralis interferentia csíkrendszert o_1e' és o_2e', valamint e_1e' és e_2e' sugarak alkotják; de e párok tagjai most egymással ellentett irányúak, azaz egymáshoz képest 180° relativ phasiskülönbséget mutatnak, miért is a most keletkező interferentia-jelenség maximumai és minimumai az előbbi, ugyanilyszerű rendszer minimumai és maximumai helyére esnek, miáltal az eredő centralis interferentialis rendszer verticalis közepén nem mint előbb világos sáv, hanem sötét csik keletkezik.

Épen így a vízszintes interferentia-rendszert most létesitő o_1e' és e_1e', valamint o_2e' és e_2e' sugárpárok tagjainak vectorai itt egymás között egyenlő irányúak, míg előbb az o_1e és e_1e, valamint az o_2e és e_2e egymás között ellentett irányúak voltak; e szerint a vízszintes rendszernek maximumai és minimumai most azon helyekre esnek, hol a párhuzamos nicolok esetében a minimumok és maximumok léptek fel.

Az o_1e' és e_2e' és az o_2e' és e_1e' sugárpárokból *egy* nicol jelenlétében előállott ferde rendszerek (20. §. *a)* és *b)* pontjai) itt sem észlelhetők.

A 7. ábra egyszerre mutatja az említett öt különböző csikrendszert, mely az előadottak szerint részben egymásután, részben egyszerre jelenhet meg a látótérben s melyekről az illető helyeken tettünk említést: a centralis elhajlitásbeli rendszer erősebben van kihúzva, a centralis interferentialis rendszer gyengén vonalkázva van; az oldalt eső, ferde két interferentialis rendszer gyengébben van kihúzva, végre a vízszintes rendszer vonalkázott.

A továbbiakban szerzők megjegyzéseket tesznek az Arago-Fresnel-féle kisérleteknek, szerzőik által adott értelmezésére s a Young-féle berendezéssel végzetteket tökéletleneknek s értelmezésüket ki nem elégitőnek tekintik. Végre pedig azon eredményhez jutnak, melyet Airy és Stokes idézett értekezéseikben (v. ö. e közlemény 29. §-át is) már sokkal előbb mondott ki, hogy természetes fény szétbontható vagy egymásra merőlegesen polározott, vagy egymással ellentetten körben polározott vagy egymással ellentetten ellipsisben polározott, egyenlő fényerősségű két sugárra.

22. §. Megjegyzések Stefan és Mach kisérleteihez.

a) STEFAN kisérleteit tulajdonképen nem oly czélból végezte, hogy velük az ARAGO-FRESNEL-féle törvényeket szabatosan igazolja, miért is e kisérletek ily szempontból nem is eshetnek elbirálás alá, annyival kevésbbé, mivel az észlelésnek alávetett TALBOT-féle sávok helyes tárgyalása a fényelhajlás elméletének szükségszerű alkalmazását követeli.* De itt érvényes a 18. §. végén tett észrevételek végkövetkeztése, ugyanis hogy e kisérletek a jelzett törvények egyszerű kimutatására nem alkalmasak.

b) MACH és ROSICKY kisérletei épen ezen igazolás egyszerű formáját törekesznek megvalósitani; de sajnos, ép oly kevéssé mondhatók egyszerű eljárásoknak, mint a mily kevéssé egyszerű a kivitelüknél felmerülő jelenség-complexum bonyolódott volta.

Először is itt *ötféle* csikrendszer látszik: a centralis rendszerek egyike fényelhajlitásbeli képrendszer, mely *négy* ily rendszer összerakásából létesült; a másika egymást erősitő — de egymástól el nem választható — két interferentiális rendszer algebrai összegének az eredménye; a harmadik és negyedik jobb- és baloldalt eső, ferde két csikrendszer egy-egy rendes nyalábnak a másik-másik rendkivüli nyalábbal való interferentiájából létesült; az ötödik látható rendszer egy-egy rendes nyalábnak a hozzá tartozó egy-egy rendkivüli nyalábbal való interferentiájából keletkezett egymást erősitő két csikrendszer algebrai összegéből áll, (ezek az ú. n. TALBOT-féle vonalak.)

Ezek szerint az itt szereplő négyféle sugárnyalábból négy elhajlitásbeli és hat interferentiabeli, azaz összesen *tiz rendszer* keletkezik, mely, egybeesések folytán csak *öt*, egymástól megkülömböztethető rendszer formájában jelentkezik.

Továbbá, bár a keletkezett rendszereknek szinképi széthúzása

* G. KIRCHHOFF: Vorlesungen über mathematische Optik; herausgegeben von K. HENSEL, Leipzig. 1891, p. 115, 116.

bizonyos tekintetben előnyös, ez mégis új optikai behatást jelent, mely épen a törvények egyszerű kimutatása czéljából lehetőleg kerülendő, de e végből egyszersmind fölösleges is.

Az e téren tapasztalt physikus élvezettel tanúlmányozhatja ugyan e jelenség-összeséget; de kétségtelen, hogy az ily kísérleti berendezés sehogy sem lehet alkalmas arra, hogy a kezdőt a szóban forgó egyszerű törvények tapasztalatszerű helyességéről könnyen és közvetetlenűl meggyőzze.

Ezen nem segíthet a szerzők által használt graphikon sem,* melyen a szereplő négy sugárnyaláb négy mező által van előtüntetve; e rajz az elhajlításbeli képrendszer bármely helyén találkozó sugarak menetkülönbsége és polározásbeli viszonyai felderítésére szolgál és Mach ezt idetartozó előadásaiban használta is. Nem tudok azonban esetet, hogy Mach és Rosicky ezen eljárását más physikus didaktikai tekintetben tényleg alkalmazta volna a szóban forgó törvények igazolására.

IV. Az Arago-Fresnel-féle törvények szabatos, ellenpróbás kimutatásának legegyszerűbb formája.

23. §. A kifogástalan igazolás elegendő és szükséges kellékei; a szükséges segédeszközök rövid megnevezése.

A polározott fény interferentiája törvényei — miként ezek az 1. §-ban közölt fogalmazásukban kifejezést nyernek — elég egyszerűek; különösen az első kettő; az a körülmény, hogy felfedezőik e törvényeket nem egészen egyszerű jelenségek tökéletlen complexumából voltak képesek kiolvasni, éleselműségük nevezetes bizonyítékát képezi. A természet törvényei felismerésének menete gyakran szokott ilyen lenni; de a mikor egyszer a törvényeket biztosan megállapították s valódi jelentésüket helyesen felfogták: mindenkor arra törekedtek a természettudósok, hogy a nyert új tapasztalati igazságokat a tanrendszerekbe akként illesszék be, miszerint az igazolásukra szolgáló kísérletek minden más jelen-

* i. h. 199.

ség lehető kizárásával egyszerűek, ellenpróbának alávethetők és feltétlenül bizonyító erejűek legyenek.

A fent a 2—22. §§-ban részletezett berendezések e követelések kielégítésétől még nagyon messze vannak s minthogy optikai előadásaim tapasztalati alapjának biztos megvetésére a szóban forgó törvények egyszerű demonstratióját elkerülhetetlenűl szükségesnek tartottam: ennek megvalósítása felett már körülbelül két évvel ezelőtt kezdtem gondolkozni. Nagyobb részükben ismételve az eddig ismertetett eljárásokat, számos, részben meghiúsult, részben tökéletlenül sikerült kisérlet után beláttam, hogy igazán tanitó és meggyőző berendezésnek e következő szükséges és elegendő feltételeket kell kielégitenie.

1. *A jelenség a lehetőség szerint egyszerű, tiszta, de tetszőlegesen változtatható, interferentia-jelenség legyen;* ez legjobban a Fresnel-féle két-tükör segélyével érhető el.

2. *A jelenség létesítésére két és csak két sugárnyaláb szolgáljon; több nyaláb ne is lehessen jelen a látótérben és több mint egyetlenegy interferentia-csíkrendszer ne is keletkezhessék.* Ezt a 4.-ben említett polározókkal értem el.

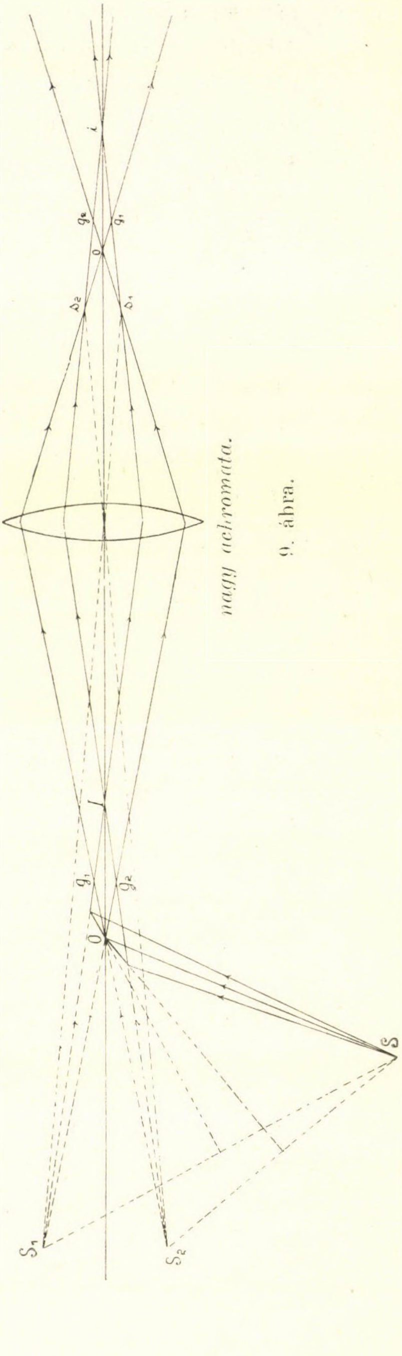
3. *Az interferálásra használt, közös eredetű két nyaláb, menetüknek jelentékeny részében egymástól tetemes, egész 5·0—10·0 cm-ig tetszőlegesen váltóztatható távolságban elválasztva, azaz külön-külön hozzáférhető legyen, úgy, hogy mindegyik nyalábot külön-külön teljesen meg lehessen vizsgálni és hogy mindegyik nyalábra tetszőleges optikai behatásokat lehessen létesíteni.* Ezt egy jó nagy achromatának a Fresnel-féle kéttükörrel való combinálásával érhetni el.

4. *A két nyaláb akár együtt, akár külön-külön, teljesen síkban polározható legyen, a nélkül, hogy ezáltal a* **nyalábok irányváltozást, vagy egymáshoz képest** *észrevehető vagy zavaró* **menetkülönbséget nyerjenek.** Az elsőt egy nagy polározó, ez utóbbit æquivalens két (iker-) polározó segélyével értem el, mely utóbbiak csak egy-egy nyalábot bocsátanak át.

5. *A két nyaláb polározása síkjai, akár együtt, akár különkülön, a sugarak továbbterjedése irányai körül egészen tetszőle-*

gesen forgathatók legyenek, a nélkül, hogy e forgatás a sugárnyalábok irányváltozását, avagy észrevehető vagy zavaró menetkülönbségét létesíthetné. Ezt a nagy polározó és az ikerpolározók alkalmas szerelésével érhettem el.

6. *A két nyaláb a polározás után az interferentia-térig zavartalanul folytathassa az útját, azaz menetük ezen részében semmiféle törést vagy visszaverődést vagy elhajlást ne szenvedjenek.* Erre nézve semmiféle külön intézkedés nem kellett.



9. ábra.

24. §. Az új eljárás leírása: Az első és harmadik kellék kielégítése.

A 9. és 10. ábra körvonalaiban előtünteti az általam követett eljárást, mely a megelőző 23. §. 1—6. követelményeinek mindenben megfelel s a szóban forgó törvények kifogástalan kimutatására teljesen bevált.

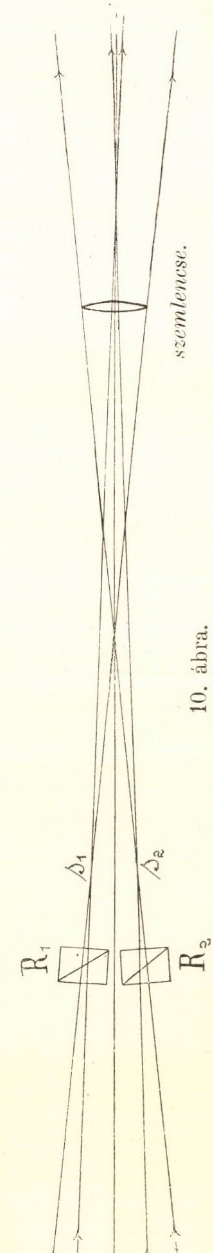
Az 1. követelményt a Fresnel-féle iker-tükör létesitette jelenség elégiti ki, feltéve, hogy a tükrökre beeső fény beesés szöge nincs nagyon közel a 90°-hoz s hogy a tükrök szélétől származó diffractió (árnyék-) jelenség kissé zavaró hatását elkerüljük. Ezt némi próbálgatással mindig igen jól érhetni el s ekkor tiszta interferentia-csíkrendszer létesül.

A 3. követelmény egy jó achromata lencsének hozzácsatolásával elégithető ki; ez ugyanis, miként a 9. ábra mutatja, a reális, hasadékszerű S fényforrás sugarai tükör-visszaverődéséhez tartozó két virtuális képnek, S_1-nek és S_2-nek reális képeit létesíti s_1- és s_2-ben; az ezeket alkotó sugárnyalábok, útjokat folytatva, egymáson áthatolnak és interferálnak.

Az ábra egyszersmind meggyőz arról is, hogy az így keletkező og_1g_2i interferentia-tér nem más, mint a tükrök után mindig fellépő OG_1G_2I (első) interferentia-térnek a lencse által létesített optikai képe; ezen vonatkozás az e terekben fellépő interferentia-*jelenségekre* nézve is fennáll. Mindegyik jelenség nagysága szerint szabad szemmel vagy loupával megfigyelhető, sőt jó beállítás mellett a második tér jelensége szabályosság és kiterjedés tekintetében fölülmúlja az elsőét.

A két sugárnyaláb I-től o-ig egymástól teljesen el van választva; e hosszuságot szükség esetében könnyen *6—7* méterre lehetett terjeszteni egy kb. *70·0* cm, gyujtótávolságú, *10 cm* átmérőjű jó achromata segélyével; e mellett e nyaláboknak egyenkénti szélessége a lencsén kb. *0·5—1·0 cm*-t, s egymástól való középtávolsága egészen *8·0 cm*-t tehetett ki a nélkül, hogy a második térben felmerülő csíkrendszer tökéletessége vagy megfigyelhetősége szenvedett volna.

Az egész jelenséget a Fresnel-féle vagy a Mascart kettős prismával* is lehetne ugyan létesíteni, de akkor a nyalábok egymástól való távolsága csak szűk határok között és



10. ábra.

* E. Mascart i. h. p. 189.

igen kényelmetlenül — ugyanis a lencsének a biprismához való relativ helyzete megváltoztatásával szabályozható. Ámde itt derül ki az iker-tükör nagy fölénye e kettős hasábok fölött, mert egy kis csavar forgatásával a tükrök egymáshoz való hajlását s így a nyalábok egymástól való távolságát igen jelentékeny határok között tetszőlegesen és pedig a legkényelmesebb módon lehet változtatni.*

25. §. Folytatás: A többi kellékek kielégítése. A használt polarizatorok.

a) A 4. első kellékét egy különös gonddal elkészitett Rochon-féle mészpáthasáb** segélyével értem el, mely 26 mm átmérőjű hengerformájú s a rendes sugarat változatlan irányban bocsátja át, míg a rendkívüli sugarat jelentékeny mértékben, 5—6°-kal eltereli úgy, hogy ez a látótérből teljesen kilép.

A Rochon prismát a reá merőlegesen beeső természetes nyaláb körül forgatva, a kilépő rendes nyaláb polározási síkja ugyanily mértékben forog, de e forgás folytán a sugár semmiféle észrevehető vagy zavaró irányváltozást vagy menetkülönbséget nem mutat.

Ezen nagy polarizátort a természetes fényű két nyaláb útjába alkalmas helyen állítva: ez mindkét nyalábot egyformán polározza; a polarizátort mindjárt a két tükör után lehet elhelyezni, hol a két nyaláb még nem is vált el egymástól jelentékenyen, úgy, hogy mindegyik jóformán teljesen haladhat át rajta.

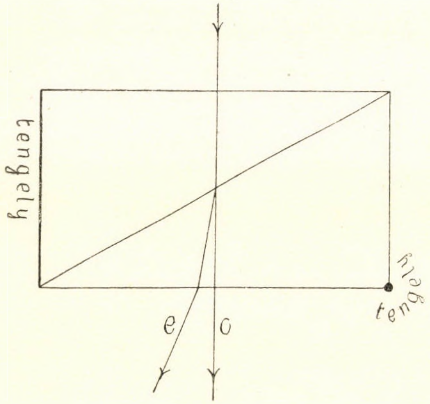
b) A 4. második kellékét: hogy mindegyik nyaláb külön-külön, egymástól függetlenül, észrevehető menetkülömbség nélkül teljesen síkban polározható legyen: *optikailag aequivalens* Rochon-

* A Billet féllencséi által létesített jelenség tökéletlenségeit maguk a franczia physikusok ismerik el; v. ö. pl. Mascart, i. h. p. 192.; miért is jelen czélból nem alkalmaztam.

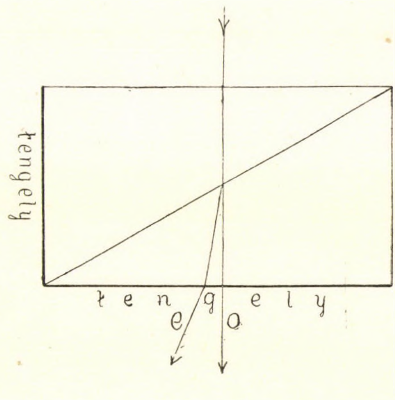
** 11. ábra; ez kb. 30° törő éllel biró két oly mészpát prismából áll, melyek egyikének optikai tengelye az átmetszet kisebb befogójával párhuzamos, míg másikának optikai tengelye az átmetszetre — e szerint az elsőnek tengelyére — merőleges; a két hasáb átfogó lapjaival canadabalzsammal van egymáshoz ragasztva.

féle vagy Sénarmont-féle* *mészpát-hasábokkal teljesen érhettem el.*

E végből hosszabb ily prismából, mely a legnagyobb gonddal készült, 13. ábra, s mely a canadabalzsammal való összerakás

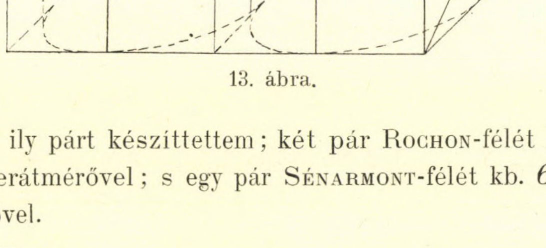


11. ábra.



12. ábra.

után hosszabb, vastag planparallel lemezet alkotott, egyenlő két hengert metszettem ki, mely így elkészülvén, az optikai egyenértékűségnek lehető legnagyobb biztosítékával bírt.

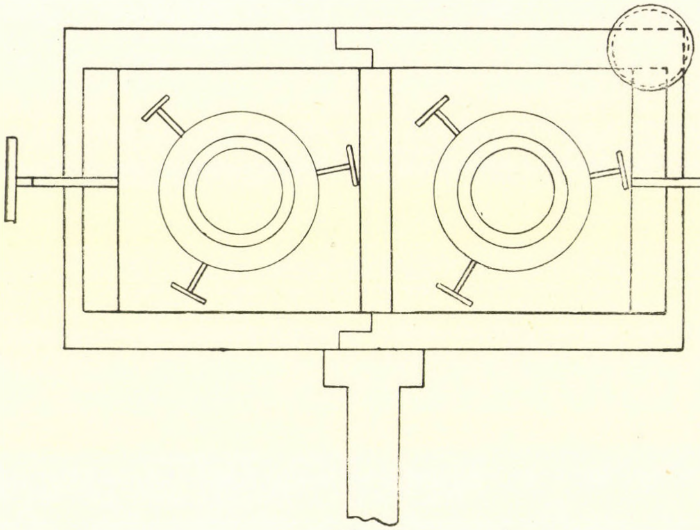


13. ábra.

Három ily párt készíttettem; két pár Rochon-félét kb. *12* és *8 mm* hengerátmérővel; s egy pár Sénarmont-félét kb. *6 mm* hengerátmérővel.

* Sénarmont hasábja, 12. ábra, csak annyiban különbözik Rochon prismájától, hogy második alkotó hasábjának optikai tengelye az átmetszet párhuzamos lapjában fekszik és szintén merőleges az első hasáb ily tengelyére.

E szerint, ha ily æquivalens pár két prismája egyikét az egyik—, másikát a másik nyaláb útjába helyezzük: e nyalábokból származó rendes sugár irányváltozás nélkül halad át a prismákon, míg ezek a rendkívüli nyalábokat teljesen kitérítik az interferentia térből; ezzel a 2. kellék is ki van elégítve. A rendes két nyaláb, az æquivalens két prismán való áthaladás folytán *egymáshoz képest* semmiféle észrevehető vagy zavaró relativ menet-



14. ábra.

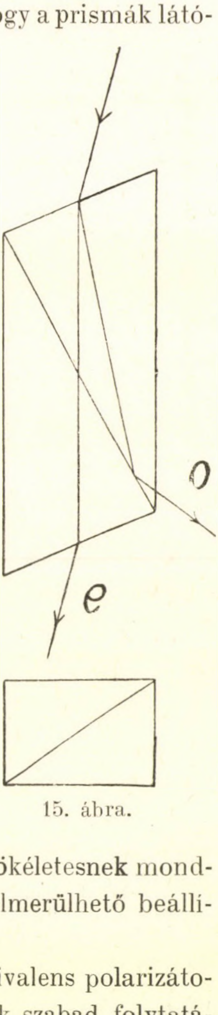
különbséget nem nyert. A nagy polarizátor és az iker-polarizátorok e szerint a 2. és 4 összes kellékeit teljesen kielégítik.

c) Az 5. követelményeinek eleget lehetett tenni ezen polarizátoroknak alkalmas szerelésével.

A nagy polarizátor hengeres csőbe foglaltatott, mely hosszténgelye körül forgathatólag erősíttetett szilárd állványba, úgy hogy polározási azimutja hajtócsavarral tetszőlegesen változtatható volt.

Az æquivalens polarizátor-párok czélszerű és biztos használatára kivánságom szerint Süss Nándor úr, a budapesti mechanikai tanműhely igazgatója igen alkalmas szerelést készitett (14. ábra), mely lényegében véve e polarizátorokat vivő két csőből áll, melyek a foglalatban levő kissé tágabb két csőben vannak elhelyezve; ez utóbbiak foglalatlan hossztengelyeik körül forgathatók és hat-hat állító csavarral vannak ellátva, hogy a prismák látótengelyeit a külső csövek látótengelyeivel külön-külön párhuzamosakká lehessen állítani.

A külső hengereket vivő derékszögű két fémrész szán-módra van a külső, derékszögű keretbe foglalva és az oldalt eső csavarok segítségével a hengerek tengelyére merőlegesen jelentékeny mértékben elmozdítható s így a polarizátorok látótengelyeinek egymástól való távolsága is tetszőlegesen változtatható. Végre e szánok egyike még a külső keret rövidebb symmetria-vonala körül is bizonyos mértékben forgatható s két állítócsavar segélyével megerősíthető, úgy hogy a két polarizátor látótengelyeinek, bár egy síkban maradnak, egymáshoz képest mégis hajlást lehet adni; ezen beállításra akkor van szükség, mikor az interferáló két sugárnyaláb egymáshoz való hajlása el nem hanyagolható s ez a legtöbb esetre nézve áll, s mikor szép interfentia-csikok létesítése czéljából a nyalábokat a polarizátorok látótengelyeihez párhuzamosan kivánjuk átbocsátani, l. a 10. ábrát.



15. ábra.

Ezen szerelés e szerint czéljához képest elég tökéletesnek mondható, mert az ide tartozó minden kisérletnél felmerülhető beállításokat és javításokat lehetővé teszi.

A 6. követelmény önként teljesül, ha az æquivalens polarizátorokból haladó különvált két sugárnyalábot útjuk szabad folytatásának engedjük, míg interferálnak. Az interferentia-térben vagy ezen túl szemlencsét és esetleg analyzátort helyezhetünk, mely Rochon-féle vagy Sénarmont-féle, vagy Nicol-féle hasáb lehet.*

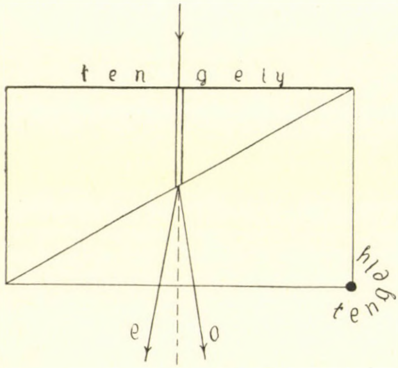
* Az eljárásnál használt æquivalens polarizátorok e kisérleti berendezés leglényegesebb alkotórészét képezik. Ezek elkészítése tárgyában eleinte vala-

26. §. Az Arago-Fresnel-féle törvényeknek egyszerű kimutatása.

I. és II. Állitsuk elő a Fresnel-féle interferentia-csíkrendszert a 9. ábra sémája szerint úgy, hogy az og_1g_2i térben a jelenség jól lássék s a nyalábok is eléggé távol legyenek egymástól.

---

mely jó Nicol-féle hasábnak (15. ábra) hosszmetszet szerint æquivalens két felére leendő metszésére gondoltam; de e gondolattól elállottam, mert a Nicol hasáb körülbelül háromszorta hosszabb szélességénél s igy egy-egy fél Nicol hossza hatszorta akkora lett volna, mint a szélessége; ezzel szemben a Rochon- vagy a Sénarmont-féle hasábok szélessége *nagyobb* és pedig körülbelül $^{10}/_{7}$ arányban, *mint magasságuk* (15. ábra); e körülmény volt a döntő a *13. ábrában* körvonalozott ikerprismák elkészitésénél. A tényleges kivitelre először 1901. évi október havában a Dr. Steeg & Reuter jelentékeny optikai czéget (Homburg vor der Höhe) kértem fel, de minthogy részletes leveleimre és többszöri irásbeli sürgetésemre semmiféle feleletet nem nyerhettem, 1901. évi deczember hóban a berlini Schmidt & Haensch jóhirnevű czéghez fordultam, mely azonnal késznek jelentkezett a kivitelre, de kis időt kért e soron kivüli munka költségvetésének elkészitésére. Ez megtörténvén, a megrendelés megállapittatott s 1902. évi márczius havában a küldemény sértetlenül Budapestre érkezett.



16. ábra.

De legnagyobb meglepetésemre kellett tapasztalnom, hogy a két polarizátor közül csak a két legkisebbik volt Sénarmont-féle és pedig tökéletlen kivitelben; a többi öt ellenben Wollaston-féle prisma (16. ábra), mely mind a rendes, mind a rendkivüli sugarat a normális beeső irányától jelentékenyen eltériti, úgy, hogy a beeső sugár körül forgatva ily hasábot, a kilépő két sugár a beeső körül kúpokat ír le; miért is e prisma czéljainkra nem használható.

A küldemény visszaküldése után a czég beismerte tévedését, melyet azért nem vették észre, mivel a prismákat ellenőrzés nélkül küldték el; újabb felszólitásomra hajlandónak nyilatkozott a czég, a polarizátorokat a pontosan, kivánságom szerint, az előbbi egyezkedés fentartásával szállitani.

Az új küldemény 1902. évi április hó végén érkezett meg; a polarizátorok a részletes megrendelési egyezkedés szerint kitünő kristályanyagból, kifogástalanul voltak készitve.

Allítsuk e két nyaláb útjába az s_1 és s_2 képek közelébe a 24. §. *c)* pontja szerint felszerelt és beállított egymáshoz tartozó, R_1 és R_2 æquivalens két prismát úgy, hogy az egyik nyaláb az egyik hasáb, a másik nyaláb a másik hasáb közepén s normálisa mentén haladjon át; ez mindig könnyen és biztosan érhető el. (10. ábra, 13. lap.) Ha a két hasáb polározási síkja egymáshoz párhuzamos, akkor a csíkrendszer igen élesen, teljesen sötét csíkokkal jelentkezik; forgatva most látótengelye körül az egyik vagy a másik hasábot tetszőlegesen, de folytonosan: a csíkrendszer fokozatosan gyengül, ha a polározási síkok egymással mindinkább $\frac{1}{2}\pi$-hez közeledő szöget képeznek s végre e szögnél teljesen eltünnek s i. t. Ezzel az *első* és a *második törvény* kifogástalanul és tényleg experimentum crucis (döntő kisérlet) módjára ki van mutatva.

Jegyzet. A kisérlet tulajdonképen *többet* mutat, mint a két törvényt, mert általában véve kimutatja az interferentiának függését a síkban polározott két sugár polározási síkjának egymáshoz való hajlásától (azimutjától).

Jelöljék ugyanis rendre

$$I_1^2;\ I_2^2;\ \alpha_1;\ \alpha_2$$

a két sugár intenzitását és polározása azimutját, r_2-r_1 relativ menetkülönbségüket; λ közös hullámhosszuságukat és I^2 az eredő sugár fényerősségét, akkor elemi meggondolások alapján áll:

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \cos(\alpha_2-\alpha_1)\cos\left(2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}\right).$$

Az egyszerű interferentia-jelenség esetében, ha l a virtuális két fényforrás egymástól való —, [vagy az achromata lencse közvetítésével létesített jelenségnél, a fényforrás reális két s_1 és s_2 képének egymástól való —] távolsága; L ezeknek a felfogó merőleges ernyőtől vagy a szemlencse gyujtósíkjától való távolsága és x az ernyő vagy a látótér valamely pontjának a csíkrendszer hosszúsági symmetria vonalától való távolsága, s ha végre az interferáló két sugár fényerőssége egymással egyenlő:

$$I^2 = 2I_1^2\left\{1+\cos(\alpha_2-\alpha_1)\cos\left(2\pi\frac{xl}{\lambda L}\right)\right\}.$$

A szövegben említett kisérlet e kifejezés helyességét ($\alpha_2-\alpha_1$) azimutkülönbség minden értékére és az interferentia tér minden pontjára nézve mutatja ki; az $\alpha_2-\alpha_1=0$ és $=\frac{1}{2}\pi$ speczialis két eset vonatkozik az első két törvényre.

III. a. Az előbbi berendezést megtartva, a két ikerprisma polározási síkjait egymásra merőlegesekké téve: helyezzünk az észlelő szemlencse után bármily polarizátort (NICOL-féle hasábot, ROCHON-féle vagy SÉNARMONT-féle hasábot), mely csak egyféleképen síkban polározott nyalábot bocsát át. Az analyzatornak látótengelye körüli forgatásánál sem észlelhető semmiféle interferentia, de ez azonnal előtűnik, mihelyt az ikerpolározók síkjai nem pontosan merőlegesek egymásra. Ha az egymásra nem merőleges polarizátorok egyikének síkjára merőleges az analyzátor síkja: ebből csak egy nyaláb léphet ki és interferentia nem létesülhet. Ezzel a *harmadik törvény* van kimutatva.

Ezen kisérletnél a két tükörre eső fény beesés-szöge a $\frac{1}{2}\pi$-től ne térjen jelentékenyen el, nehogy e kéttükörről való visszaverődés folytán fellépő partiális polározás észrevehető legyen: erről meggyőződhetünk, ha a visszaverődött két nyalábot külön-külön, forogható analyzátorral megvizsgáljuk s e forgás közben polározást nem veszünk észre. Ha a kéttükröt biprismával helyettesítve létesítjük a kisérletet: az erre eső természetes fény a biprismán áthaladása után is ilyen marad.

III. b. Elhagyva a *III. a.* pont berendezésében az ott említett analyzatort s valamely nagyobb polarizátort a kéttükör után úgy helyezve, hogy mindkét sugárnyaláb haladjon rajta keresztül: a *III. a.*-val egyező tapasztalatot nyerjük. Ez a *harmadik törvény* módosított alakja.

IV. és V. A nagy polarizátort a *III. b.* helyzetében hagyva, de úgy, hogy ennek síkja $\frac{1}{4}\pi$ szöget képezzen az egymásra merőleges síku iker-polarizátorokéival, s az analyzátor síkját a nagy polarizátoréhoz párhuzamossá téve: élénk csíkrendszer látszik, mely az analyzátornak $\frac{1}{4}\pi$-vel való elforgatásával eltűnik s további $\frac{1}{4}\pi$-vel való elforgatás után, mikor az analyzátor síkja merőleges a nagy polarizátor-éra, ujra, de úgy előtűnik, hogy most az előbbi csíkrendszer maximumainak és minimumainak helyei fel vannak cserélve, a mit a szemlencsével egybekapcsolt oculármicrometerben levő egy vagy több fonál segélyével azonnal megállapithatni. Ezzel a *negyedik* és az *ötödik* törvény van kimutatva.*

Mindezen kisérletek úgy napfényben, mint villamos fényben teljesen sikerültek.

V. Általánosítás: Tetszőlegesen polározott fénynyalábok egymással való interferálásának egyszerű kisérleti előállitása.

27. §. Babinet compenzátora. Optikai hatása.

Indíttatva a 23—26. §§. meggondolásai és eredményei által, arra törekedtem, hogy ne csak sikban, hanem tetszőlegesen, különböző ellipsisekben, polározott két fénysugár interferentiáját állitsam elő kisérletileg. E végből az ellipsisben polározott fény létesítésére szolgáló különböző segédeszközök közül első sorban a Babinet-féle compenzátorra gondoltam, melynek épen az az egyik fő rendeltetése, hogy a sikban polározott fényt tetszőleges ellipsisben polározott fénynyé változtassa át.** Ezen eszköz igen kicsiny törőszöget mutató oly két quarcz-ékből áll, melyek egyikének optikai tengelye az ék-éllel párhuzamosan, de a törőszög síkjára, azaz, a rajz síkjára merőlegesen, másikának tengelye az élre merőlegesen, de a törőszög síkjában, azaz, a rajz síkjában fekszik. (17. ábra.)

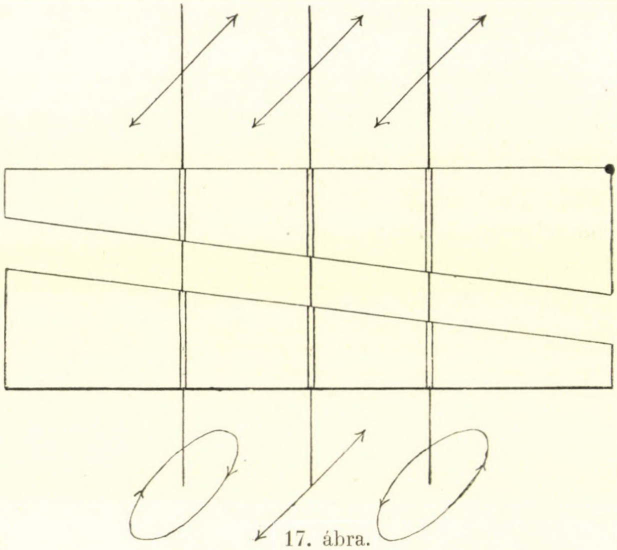
Ily szerkezet elülső lapjára merőlegesen eső bármily természetű sugarat tekintve, ez az *első* ékbe hatolva: jóformán ugyanazon

---

* A *III. a.*, *III. b.*, *IV.* és *V.* alatt felsorolt kisérletek, melyeknél úgy az első polarizátor, mint a két ikerpolarizátor és az analyzátor polározási azimutjai egymáshoz képest tetszőlegesen változtathatók: tulajdonképen szintén többet mondanak, mint a mennyi a harmadik, negyedik és az ötödik törvény tartalma; e törvények a polározás síkjainak csak bizonyos, meghatározott relativ helyzeteire vonatkoznak; az általános esetek tárgyalása — mely itt nagyon messze vezetne — az előbbi *Jegyzet* tárgyalásának jelentékeny bővítésében áll.

** Részletes leirását l. pl. E. Mascart: Traité d'Optique, T. II. Paris, 1891, p. 57—60; P. Drude: Lehrbuch der Optik, Leipzig, 1900; p. 237; F. Kohlrausch: Leitfaden der praktischen Physik. IX. Auflage, Leipzig und Berlin, 1901; p. 299—302; Ph. Pellin-Dubosq: Instruments d'Optique et de Précision IV-e fascicule. Paris, 1900; p. 35, 36.

egyenes mentén haladó rendes és rendkivüli nyalábra oszlik, melyek elseje, a rendes sugár, nagyobb sebességgel halad és a sugár s a tengely irányát tartalmazó síkban az ú. n. *főmetszetben* van polározva, mely itt a rajz síkjára merőleges; míg a rendkivüli sugár kisebb sebességgel halad és a főmetszetre merőleges síkban van polározva; e sík itt a rajz síkjában fekszik.



17. ábra.

E két sugár az első ékből kilépve, a törőszög kicsinységénél fogva, elhanyagolhatóan kicsiny irányváltozást és még kisebb színszórást szenved.

A második ékhez érve, melynek főmetszete az első ék-ére merőleges, a benyomuló két sugár mindegyike polározási síkja irányitását megtartja, de épen ezért az eddigi rendes sugár a második ékben mint rendkivüli sugár kisebb sebességgel, az eddigi rendkivüli sugár ellenben mint rendes sugár nagyobb sebességgel halad tovább; a töréstől s a vele járó színszóródástól e törőszög kicsinységénél fogva itt is eltekinthetünk.

A második ékből kilépő két sugár e szerint, a kilépés helyén egymáshoz képest, általában véve menetkülönbséget mutat; mert ha pl. az egyik sugár, a szerkezeten áthaladva, hosszabb utat futott meg, mint rendes-, s e szerint rövidebbet mint rendkivüli sugár, akkor a másik sugárra nézve megforditva áll a dolog. (17. ábra.) Kivételes az az eset, mikor a beeső sugár mentén a quarcz-ékek vastagsága épen egymással egyenlő; ekkor a két sugár teljesen egyenértékű utakat futott meg s a kilépésnél relativ menetkülönbséget nem mutat; l. a 17. ábra középső sugarát. Az *egy* beeső sugárból származó, egymásra merőlegesen polározott, kilépő *két* sugár általánosságban ellipsisben polározott sugárrá tevődik össze. Ha a beeső fény természetes: ez tapasztalat szerint az időben szabálytalanul változó polározott fény optikai hatásával æquivalens fény; ekkor a kilépő eredő fény is ily tulajdonságu s intenzitására nézve a természetes fény benyomását teszi.

De, ha a beeső fény polározási állapota az időben nem változik, akkor az *egy* meghatározott beeső sugárból származó, a compenzátorból kilépő, eredő fény is meghatározott polározási állapotot mutat, mely állapot kizárólagosan a kilépő két sugár (componens) egymáshoz viszonyított erősségétől és relativ menetkülönbségétől függ. Minthogy pedig, még az egymáshoz párhuzamosan beeső egyenlő polározási állapotot mutató sugarak esetében is, a compenzátor különböző helyén kilépő két sugár relativ menetkülönbsége e hely szerint más és más: az ezen esetben más-más helyen kilépő eredő sugárnak is más-más a polározási állapota.

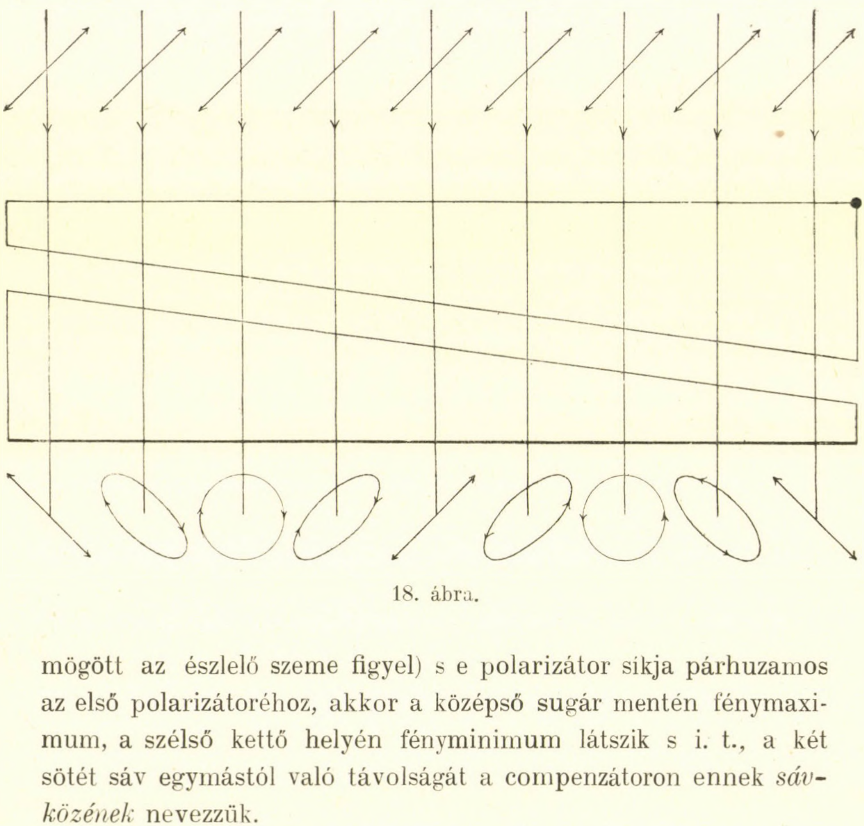
A 17. ábra azt az esetet tünteti elő, mikor a beeső nyaláb polározási síkja $\frac{1}{4}\pi$ szöget képez a compenzátor optikai tengelyeivel; a középső s ennek két oldalán levő beeső sugárból keletkezett kilépő sugarak polározása képét a hozzájuk rajzolt ellipsisek mutatják.

A 18. ábrában az ugyanily módon polározott, beeső fénynyaláb egyenlőközü sugaraiból keletkező kilépő eredő sugarak polározási állapotainak képei akként vannak felrajzolva, hogy az első és utolsó két-két kilépő sugár relativ menetkülönbségei egymáshoz képest épen λ különbséget mutassanak; e szerint az ábra egy-egy közére nézve a menetkülönbség $\frac{1}{8}\lambda$-val növekszik.

A középső sugár kilépő két componense egymáshoz képest menetkülönbséget nem mutatván, a belőlük származó eredő fény polározási állapota a beeső-ével egyenlő.

Jegyzet. A compenzátor egyik éke rendesen rövidebb szokott lenni a másiknál, mely utóbbi, micrometer-csavar segélyével, merőlegesen az élre, az elsőhöz képest eltolható, hogy bármily helyen is, tetszőleges menetkülönbséget, azaz tetszőleges polározási állapotot lehessen létesíteni, l. a 19. ábrát.

Ha e kilépő nyalábot polarizátorral megvizsgáljuk (azaz ily nyalábot pl. Nicol-féle vagy Rochon-féle hasábon átbocsátjuk, mely



18. ábra.

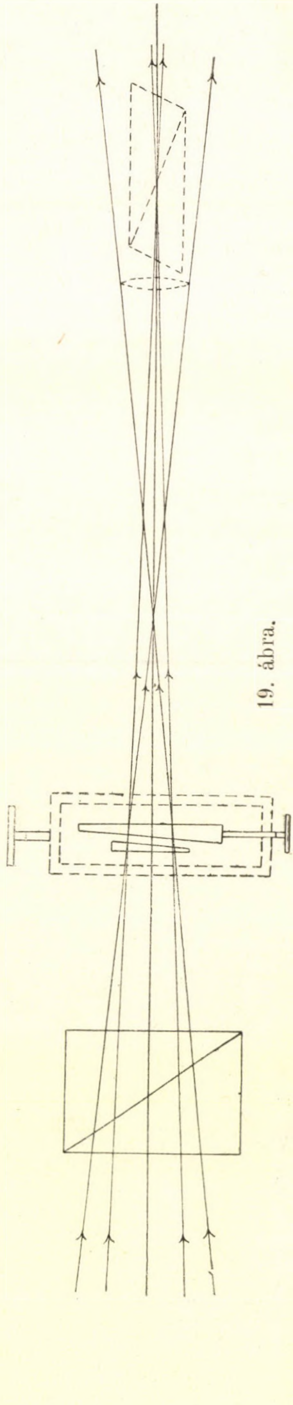
mögött az észlelő szeme figyel) s e polarizátor síkja párhuzamos az első polarizátoréhoz, akkor a középső sugár mentén fénymaximum, a szélső kettő helyén fényminimum látszik s i. t., a két sötét sáv egymástól való távolságát a compenzátoron ennek *sávközének* nevezzük.

28. §. Babinet compenzátorának alkalmazása tetszőlegesen polározott fénysugarak interferálására.

Előre bocsátjuk, hogy Fresnel csikrendszerét a 24. §. és a 9. ábra sémája szerint a Fresnel-féle ikertükör és a vetítő achromata-lencse segélyével pontosan előállítottuk. A két nyaláb útjába a 19. ábra sémája szerint egy nagy polarizátort, legjobban a nagy ROCHON-prismát helyezzük, mely a két nyalábot egyformán polározza, de irányuktól észrevehetőleg el nem téríti. Azután egy jó BABINET-féle compenzátort úgy helyezünk e polározott két nyaláb útjába, hogy az S fényforrásnak e nyalábokból alkotott s_1 és s_2 képei épen a compenzátor elülső és hátulsó lapja közötti középső síkjára essenek.

Minthogy az S igen keskeny hasadék, melyből intenziv fénynyaláb hatol ki: az S_1 és S_2 virtuális képek is ezzel congruens alakú virtuális hasadék-képek, míg az s_1 és s_2 ezeknek igen éles, reális képei; ezeknek szélessége a compenzátor sávközének — mely nehány milliméterť — igen kis törtrészét képezi, *miért is e képeket fényvonalaknak szabad tekintenünk.* Úgy a hasadék, mint a tükrök síkjai, mint a hasadék virtuális és reális képeinek hossziránya, mint a polarizátor planparallel határlapjai, mint a compenzátor éklapjai a rajz síkjára, az ú. n. *interferentia-síkra* merőlegesek.

Az egymáshoz párhuzamos síkokban polározott két vékony nyaláb, legkeskenyebb helyükön, a compenzátoron áthaladva: irányukat észrevehetőleg nem változtatják, de *egymástól különböző, meghatározott ellipsisekben polározott nyalábokká alakulnak,* melyek tovább haladva, egymással interferálnak.



19. ábra.

Mindegyik kilépő egész sugárnyaláb meghatározott, ellipsisben polározott állapota függ a compenzátorra eső fény polározása azimutjától és azon helytől, melyben e nyaláb sugarainak éles metszővonala a compenzátort találja. E kilépő sugárnyalábok mindegyike, a másiknak pl. elfödése mellett, külön-külön megvizsgálható és polározási állapota megállapitható. Megváltoztatva e szerint a nagy polarizátor azimutját és a nyalábok mindegyike s_1 és s_2 metszővonalainak helyét a compenzátoron (pl. a kéttükör egyikének hajlása megváltoztatásával): ezen egyszerű segédeszközökkel hatalmunkban áll bármily ellipsisben polározott két fénynyaláb interferentiáját létesithetni.

Rendesen azt a legegyszerűbb berendezést követjük, hogy a polarizátor sikja az interferentia-síkjával $\frac{1}{4}\pi$ szöget képez; ekkor a compenzátorból kilépő sugarak polározási állapotait a 18. ábra tünteti elő; közülük tetszőleges két sugár interferáltatható.

29. §. A nem-interferentia legáltalánosabb esetének kimutatása: az ellentett (conjugált) ellipsisekben polározott sugarak. Az eredmény analyzálása.

A fényvectorok transversálitása az Arago-Fresnel-féle első két törvényből kényszeritő szükségességgel folyván s kiderülvén, hogy a fényvector képe általánosságban a sugárra merőleges ellipsis által állitható elő: Stokes* azokat a legáltalánosabb feltételeket kereste, melyek mellett egymástól különböző ellipsisekben polározott két fénysugár bármily menetkülönbségnél sem interferál, azaz kereste azt a legáltalánosabb esetet, mikor polározott két fénysugár találkozásánál az eredő megvilágitás az egyes sugarak megvilágitása algebrai összegével egyenlő.

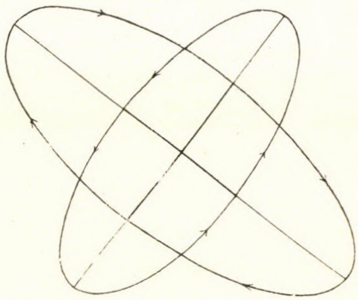
Azt találta, hogy a nem-interferálásnak ezen legáltalánosabb esete előáll, ha a két sugár vector-ellipsisei egymáshoz hasonló alakúak, síkjukban egymáshoz képest $\frac{1}{2}\pi$-vel vannak elforgatva s ellentett irányban iratnak le, 20. ábra. Az ily sugarakat *ellentetten polározottak*-nak mondotta; G. B. Airy ezeket már előbb**

* i. h. p. 239—241.

** Cambridge Philosophical Transactions, Vol. IV., 1831, p. 79, 198.

conjugáltak-nak nevezte; ha az ellipsisek körökké fajulnak: ellentetten körben (circularisan) polározott sugarak, ha egyenesekké fajulnak: egymásra merőleges síkokban polározott sugarak.

Téves volna e szerint azt gondolni, hogy ha polározott két sugár egymással nem interferál: ezeknek okvetlenül egymásra merőleges síkokban polározottaknak kell lenniök; a nem-interferálás tényéből kényszerítő szigorral csak az következtethető, hogy a sugarak conjugáltak.* Compenzátorunkkal az AIRY-STOKES-féle ezen nevezetes általános tétel a legnagyobb könnyűséggel és biztossággal igazolható kisérletileg.



20. ábra.

Ugyanis, a megelőző §. utolsó kikezdése berendezését megtartva: változtassuk meg a FRESNEL-tükrök hajlását és ezzel az $s_1 s_2$ távolságot úgy, hogy ez a compenzator sávköze *felét* tegye ki; ekkor az áthaladott két sugárnyaláb ellentetten polározottá leszen és pedig vagy egymásra merőleges egyenesekben, vagy ellen-

---

* Nem érdektelen annak felemlitése, hogy J. STEFAN egyik dolgozatában «Ein Versuch über die Natur des unpolarisirten Lichtes etc.» Sitzungsberichte der Wiener Akademie (2) L. 1864, p. 380—389: ily nem-interferentia-esetből azt következtette, hogy a *természetes fény* kizárólagosan *síkban polározott* oly sugarakból áll, melyek polározás-síkjukat és amplitudójukat igen rövid időközökben, szabálytalanúl változtatják. De E. VERDET, a korán elhalt geniális franczia physikus: «Étude sur la constitution de la lumière non polarisée et de la lumière partiellement polarisée» czímű dolgozatában, mely STOKES többször idézett értekezésének commentárja, (Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, T. II. 1865, p. 291; vagy E. VERDET: Oeuvres, T. 1. Paris, 1872, p. 281—312) igen egyszerűen kimutatja (i. h. p. 300—303), hogy STEFAN következtetése általánosságban véve nem kényszerítő, bár mint specialis eset lehetséges s hogy okoskodásának tévedése az ellentett ellipsisekben polározott sugarak eredő hatásának félreismerésén alapszik. Ezen tévedését később STEFAN maga is beismerte: Sitz. Ber. d. Wiener Ak. (2) LXVI. p. 427; ezen pontra reátér MACH is, i. h. p. 209, 210.

tett körökben vagy általánosságban ellentett ellipsisekben polározvák. Ily egymáshoz tartozó, conjugált fényvectorok képeit a *18. ábra* is mutatja: az első és az ötödik; az ötödik és a kilenczedik sugár egymásra merőleges síkokban polározottak; a harmadik és a hetedik ellentetten körben polározottak, a második és a hatodik, a negyedik és a nyolczadik ellentett ellipsisekben polározottak.

E szerint, ha a compenzátorra eső két nyaláb egymástól a sávköz felét kitevő távolságban van, akkor az áthaladott nyalábok találkozásuk helyén nem mutathatnak interferentiát.

A megejtett kisérlet teljesen igazolja a várakozást. Ugyanis a párisi Duboscq-czég által jól készitett egy Babinet-féle compenzátort a jelzett módon alkalmaztam és úgy szereltem szilárd állványon, hogy a compenzátor, *mint egész szerkezet* még önmagához, *lapjaihoz párhuzamosan is*, és pedig a törő-élekre *merőlegesen* legyen eltolható; ezt egy nagyobb mikrometercsavarral értem el; l. a 19. ábrát.

A látótér közepén egyenletes megvilágitás jelentkezik, bármily párhuzamos eltolást is adunk a compenzátornak. Napfényben nem értem el azt, hogy az egész látótér egyszerre egyenletes megvilágitású lett; de élesen jelentkezett ez helyes beállitásnál a látótér közepén, lent és fent gyenge csíkok nyomai is mutatkozván; a polarizátornak vagy a compensátornak látótengelye körüli kis elforgatásnál ez egyenletes megvilágitású hely a látótérben másmás helyzetet foglalt el. Ugyanigy változatlan marad a jelenség, ha a compenzátor ékeit egymáshoz képest tetszőlegesen eltoljuk. Ezzel az Airy-Stokes-féle általános tétel kisérletileg igazolva van.

Jegyzet: A jelenség szintén előáll, ha a compenzátorra eső két fényvonal egymástól való távolsága nem *egy* fél sávközzel, hanem *három* fél, vagy *öt* fél s. i. t. sávközzel egyenlő.

A látótér analyzálása. A látótér ezen egyenletes megvilágitása azonnal megszünik, ha forgatható analyzátorral vizsgáljuk meg: ez ugyanis mutatja, hogy a látótérben egyszerre *két* csíkrendszer van jelen, melyek egyikének maximumai a másiknak minimumaira esnek és viszont. E két rendszer fénye azonban egymásra merőleges síkokban van polározva s az analyzátor forgatása közben erősségét akként változtatja, hogy a mikor ennek polározási síkja az interferentia-síkra merőleges, az egyik rendszer teljesen el van oltva, míg a másik teljesen kifejlett fényes és fekete csíkokkal jelentkezik; megfordítva jelentkeznek a rendszerek, mikor az analizátor síkja az interferentia síkjába esik. Mikor az analyzátor a polarizátorhoz párhuzamos vagy arra merőleges síkú: a látótér közepe egyenletesen van megvilágítva.

30. §. Látszólagos optikai paradoxon. Kiegészítő és befejező megjegyzések.

A berendezés olyan legyen, mint a megelőző §-ban: a nagy polarizátor azimutja az interferentia síkhoz $\frac{1}{4}\pi$, a compenzátorra eső két reális fényvonal egymástól való távolsága a sávköz felével (vagy ennek páratlan számú sokszorosával) egyenlő legyen; a kilépő nyalábokat külön-külön a másiknak elfödése mellett vizsgálhatni meg s ellentett polározásuk így megállapitható;* találkozásuk helyén interferentiát nem mutatnak, de a jelenlevő, egymást fényerősségben kiegyenlítő s *egymásra merőleges síkokban polározott* két csíkrendszer — mint a 29. §. végén, — analyzátor segélyével ismerhető fel és vizsgálható meg.

A berendezést egyébként változatlanul meghagyva, *csak a polarizátort eltávolítva: az átmenő nyalábok mindegyikét különkülön*, önmagában *megvizsgálva, egyikük sem mutat semmiféle polárosságot*; *ellenben interferálva*: teljesen ugyanazt a jelenséget mutatja, mint a mikor az $\frac{1}{4}\pi$ azimuttal biró polarizátor van a compenzátor előtt. Azaz: a természetes fényből származó, a compenzátoron áthaladt két nyaláb, mely egyenként intenzitás dolgában teljesen úgy viselkedik, mint a természetes fény: a közös interferentia-térben egyenletes megvilágítást létesít ugyan, de ez is, miként az analyzátor mutatja, *egymásra merőlegesen polározott fényű, egymást fényerősségben kiegyenlítő két rendszer együttes fellépésének eredménye. E szerint két sugárnyaláb, melyek egyike sem mutatja a polározás nyomát: interferálásával a síkban polározott fényt létesítheti.*

---

* pl. analyzátor és $^1/_4$ hullámhossz-lemezke segélyével.

Ennek oka: a compenzátorból kilépő nyalábok mindegyike egymásra merőleges, de folyton változó amplitudóval biró két componensből áll; a vízszintes componensnek egymással való interferentiája létesíti az egyik, a verticalis két componens egymással való interferentiája létesiti a másik rendszert, melyek csíkjai akkor nem eshetnek egybe egymással, ha a kilépő vízszintes componensek relativ menetkülönbsége más, mint a verticalis componensek-é.

I. Jegyzet: Ezen látszólagosan paradoxális jelenséget kissé általánosabban is állíthatni elő.

Ugyanis, ha a két fényvonal egymástól való Δ távolsága nagyobb, mint a $2D$ sávköz fele: akkor a compenzátornak látótengelye körüli forgatásával mindig nyerhetni oly helyzetet, melyben a csíkrendszer eltűnik. Ha φ a compenzátor éleire merőleges egyenes s az interferentia-sík közötti szög, akkor a csíkrendszer eltűnése helyzetében áll: $\Delta \cos \varphi = D$; vagy $= 3D$, vagy $= 5D$ s i. t., úgy, hogy Δ alkalmas választásánál, $\varphi = o$ és $= \frac{1}{2}\pi$ között több ily helyzet lehetséges; ily megfigyelések igen könnyen sikerülnek.

II. Jegyzet: Ha $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, akkor az interferentia-térben létesülő csíkrendszer olyan, mintha a compenzátor jelen sem volna; ha $\varphi = 3\frac{\pi}{2}$, a csíkrendszer egy egész csíkközzel el *van tolva s i. t.*

Zárszó: Jelen közleményemmel egyrészt összefoglalni és kritikailag méltatni kívántam az Arago-Fresnel-féle törvények kísérleti kimutatására használt eddigi eljárásokat, s minthogy ezek ki nem elégítettek: saját berendezésemet ismertettem.

Nagyon örülnék, ha ezzel e Lapok olvasóiban e szép tárgy iránt némi érdeket ébreszthetnék.

Végre kedves kötelességet teljesítek, mikor e helyen is köszönetet mondok Homor Ernő és Jakucs István bölcsészethallgatóknak, a báró Eötvös-Collégium tagjainak, kik a Társulat ülésében tartott előadásomhoz szolgált nagyobb s az e szöveghez mellékelt kisebb ábrák rajzait vázlataim szerint készítették el.

Fröhlich Izidor.

ELEKTROMOS HULLÁMOK KELTÉSE A GALVÁN-ÁRAMKÖR ELLENÁLLÁSÁNAK VÁLTOZTATÁSÁVAL.

Az egyensuly helyzetében megzavart áramkör oszczillál; igy oszczillál az áramkör a kondenzátor kisülésekor, az áramkör zárása és nyitása alkalmából, gyors elektrostatikai töltéskor.

Általában, ha r ellenállású L önindukcziójú s C kapaczitású áramkör energiája megváltozik s az áramkör magára marad, mig $r < \sqrt{\frac{L}{C}}$: az áram oszczillál $N = \frac{r}{4\pi a L}$ periodussal s $a = \frac{1}{\sqrt{\frac{4L}{r^2 C} - 1}}$ dekrementummal.*

E hullámok kitüntetésére a kohérer érzékenységénél fogva igen egyszerű s alkalmas indikátor.

Eddig különböző alakú s berendezésű oszczillátorokkal állították elő az elektromos hullámokat.

Azonban az áramkörbe csatolt önindukcziós tekercs is elegendő arra, hogy az áramkör zárása és nyitásakor fellépő önindukczió elektromótoros ereje eme hullámokat létrehozza; sőt külön tekercs bekapcsolása nélkül is létrejő az áram zárása és nyitásakor az oszczilláczió, csak legyen elég érzékeny kohérer, mely a hullámokat megérezze.

Ha pedig valamely áramkörben áramelágazást csinálunk úgy, hogy az egyik ágba kerüljön valamely nagy önindukcziójú galvanométer, pl. egy Deprez D'Arsonval-féle, melléje pedig megmágnesezett két kötőtűből készitett kohérer, a másik ágba pedig

* Ch. Pr. Steinmetz, Theorie und Berechnung der Wechselstromerscheinungen. p. 465. — Tallqvid, Ann. der Phys. p. 1083, 1902.

pl. 0·5 Ω. (ohm) ellenállás: akkor az osztatlan vezetékben levő kommutátort nem lehet zárni, vagy az áram irányát megváltoztatni a nélkül, hogy a nagy ellenállású ca. 10,000 Ω. kohérer áram zárás okozta oszczillálás miatt ellenállásában meg ne kisebbedjék, ca. 0·1 Ω-ra, s a galvanométer tűje erős kitérést ne mutasson.

Hiába rázzuk meg a kohérert s állitjuk vissza eredeti nagy ellenállását, az áramnak újból való zárása, avagy az áram irányának a megváltoztatása a kohérer ellenállását megint megkisebbiti s a galvanométer tűje újból kicsap.

E jelenség oly fontos szerepet játszik bizonyos kisérletezésmódnál, hogy tekintetbe nem vétele, egészen hibás eredményre vezet s helytelen következtetésre adhat alkalmat.

Így mindazoknál a kisérleteknél, a melyek a HERTZ-féle hullámok keltésekor megkivánják az áramkör nyitva maradását, s csak a HERTZ-féle hullámok keltése után zárhatók: a kohérer ellenállásának a megkisebbedését s a galvanométer tűjének a kitérését nemcsak a HERTZ-féle hullám idézi elő, hanem első sorban az áramkör zárása okozta oszczilláczió. Így pl. valamely elektrolitnél ama réteg vastagságát kellene kohérerrel meghatározni, a mely a HERTZ-féle hullámokat még átbocsátja, de oly berendezéssel, hogy az áramkört csak a hullám keltése után lehet zárni — (mint tette NORDMANN. C. R. CXXXIII. 339. 1901. és CXXXIV. 417. 1902.) — az elmélet és más irányú kisérletek biztos adatai szerint is, bizonyos vastagságú elektrolitnek nem kelle átbocsátani az elektromos hullámokat; s mégis az áramkör zárása után azt látjuk, hogy a kohérer ellenállásában megkisebbedik s a galvanométer tűje kitérést mutat. De a kohérernek ez az ellenállásmegkisebbedése nem az áthatolt hullám hatásának a következménye, hanem az áramzárás okozta oszczillácziónak.

Erről meggyőződhetünk vagy úgy, hogy a nagy önindukcziójú galvanométer helyett kis önindukcziójú galvanométert csatolunk a mellékágba; vagy a nagy önindukcziójú galvanométer használata mellett az áramkört nem az osztatlan vezetékben, hanem abban a mellékágban zárjuk, a hol a galvanométer van.

Mind a két esetben, ugyanoly körülmények mellett, a kohérer ellenállásában meg nem kisebbedik s a galvanométer tűje meg sem mozdul.

Némelyek azt tartják, hogy kondenzator bekapcsolásával az áramzárás okozta oszczillácziót s így a kohérer ellenállásának a megkisebbedését meg lehet akadályozni.

De én ezt kisérleteimnél nem tapasztaltam; mert 0·1 mikrofaradot az áramkör bármely pontjaiban hiába kapcsoltam párhuzamosan, az osztatlan vezeték áramzárása minden kapcsolásmódnál oszczillácziót hozott létre s a kohérer ellenállásában megkisebbedett, a galvanométer tűje kitért.

Az áram zárása és nyitása létrehozta oszczillácziókkal már régen foglalkozom, kisérleteim eredményét «Kisérletek a nyitási extra árammal» czím alatt e lapokban is közöltem 1898-ban. Azóta az áram zárása és nyitása előidézte hullámokkal TH. SUNDORF,* H. MURAOKA és T. TAMARU,** tettek kisérletet; E. LUDIN *** pedig eme hullámok hosszát rezonanczia segélyével határozta meg.

Az önindukczió fogalmából önkényt következik, hogy nincs vezetőkör, melyben létre ne jönnének az önindukcziótünemények, ha az áramok erőssége változik; adhatunk ugyan a vezető körnek olyan alakot, hogy a benne haladó áram mágnesi hatása, a vezetőt körülvevő szigetelőkben keltett indukczióvonalok száma, a minimális értéket érje el; de azért a vezetőkör önindukcziója nulla nem lesz.

Ha már az áramkörben az áramerősségnek nulláról állandó I intenzitásra való növekedése $\left(I=\frac{E}{r}\right)$ az áramkört környező mágnesi mediumban $W=\frac{LI^2}{r}$ energiát halmoz össze, a mit az áramkör áramának a megszünésekor visszanyerünk s ha az önindukczió következtében a végleges áramerősségig mozgásnak indított elektromos mennyiség abszolut értéke $Q=-\frac{LI}{r}=-\frac{LE}{r^2}$

* Ann. d. Phys. 68. p. 594. 1899.

** Ann. d. Phys. 7. p. 554. 1902.

*** Ann. d. Phys. 7. p. 584. 1902.

megegyezik az I erősségű áram megszünésekor gerjesztett $Q = \frac{LI}{r} = \frac{LE}{r^2}$ elektromos mennyiséggel; s ha az áram zárása és nyitása az áramkör egyensulyhelyzetét megzavarja s oszczillácziót hoz létre: akkor az áramkör ellenállásának a gyors megváltoztatása is az áramkör egyensulyát megzavarja s így oszczillácziót hoz létre.

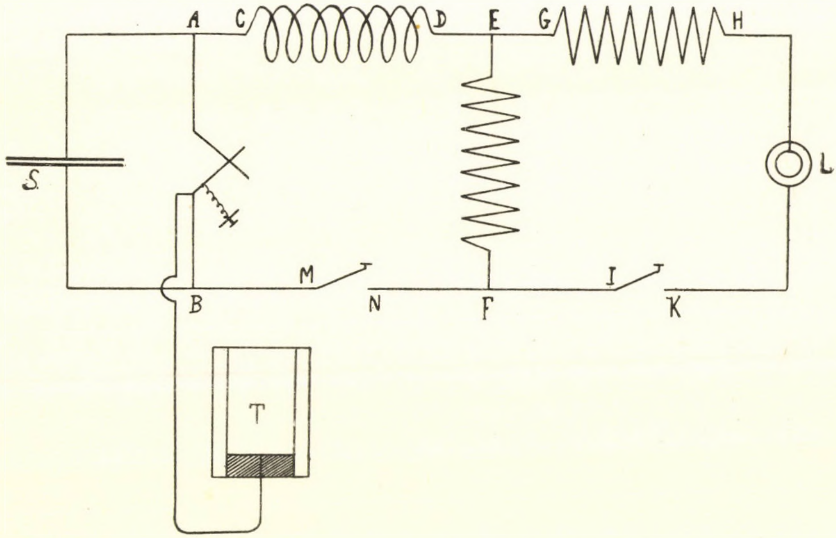
Hisz ha az áramkört megszakítjuk, csak azt teszszük, hogy ellenállását r értékről végtelenre növeljük; s ha $I = \frac{E}{r}$ intenzitású áramkörben az ellenállást r_1-el változtatjuk, az áramkör áramereje is megváltozik s végleges értékét most is csak bizonyos idő multán éri: tehát az önindukczió most is mint az áramkör zárása- és nyitásánál meghatározott nagyságú elektromos mennyiséget indít mozgásnak, miért is az áramkör egyensulyhelyzetéből kilép s így az áramkör oszczillál.

Mivel a galvánáramkör- ellenállásának a változtatásával keltett elektromos hullámoknak a kohérerre való hatását eddig nem ismertették — legalább tudtommal nem —: idevágó kisérleteim eredményét, habár röviden is, jónak látom itt közzé tenni.

Ha egy szárazelem áramkörében áramelágazást csinálunk oly módon, hogy az egyik mellékágba jusson a Deprez D'Arsonval-féle galvanométer a már fentebb leirt kohérerrel, a másik ágba pedig az ellenállásszekrénynek néhány tized Ω ellenállása: akkor az osztatlan vezetékben levő ellenállásszekrény pl. 50 Ω-os dugójának a kivétele, avagy betevése, tehát az áramkör ellenállásának a megnagyobbitása, avagy megkisebbitése és így az áram erejének a megkisebbedése avagy megnagyobbodása oszczillálást hoz létre;. a kohérer ugyanis ellenállásában mind a két esetben megkisebbedik s a galvanométer tűje erősen kicsap; de a leggyengébb rázás elegendő arra, hogy az ellenállásában megkisebbedett kohérer eredeti nagy ellenállását visszanyerje s a galvanométer tűje 0°-ra térjen azonnal vissza.

A kisérlet berendezését az 1. ábra mutatja.

L egy száraz elem; *GH* az ellenállásszekrényből kivett dugónak megfelelő ellenállás; *EF* a mellékágban az ellenállásszekrénynek néhány Ω-ja; *CD* a Deprez D'Arsonval-féle galvanométer; *AB* a kohérer; *S* 0·1 mikroforad; *T* egy platinalemezzel beforrasztott kettősfalú üvegcső, a melynek platinalemeze fémileg érintkezik a kohérerrel, de csak akkor, ha e csővel teszünk kisérletet; erről később; *IK* kommutátor; *MN* áramzáró. Az osztatlan vezetékbe állandóan 200 Ω van bekapcsolva szeriesre.



Mivel a galvanométer ellenállása a vezetékkel 235 Ω; *EF* mellékág ellenállása e kisérletezésnél 10 Ω:

$$I = \frac{1\,V}{\Omega\,.\,(200+R)}\,; \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{10} + \frac{1}{235} = \frac{245}{2350}\,;$$

tehát $R = 9{\cdot}9\ \Omega$; következésképp $I = \dfrac{1}{209{\cdot}9} = 0{\cdot}00476\ A$.

A galvanométeren keresztülhaladó áram intenzitása

$$i_1 = \frac{Ir}{r+r_1} = 0{\cdot}000192\ A\,;$$

a másik mellékágban pedig

$$i = \frac{Ir_1}{r+r_1} = 0{\cdot}00457\ A.$$

E berendezés mellett az áramkör ellenállásának a változtatása (az osztatlan vezetékben az ellenállásszekrényből kivett vagy újból betett dugók utján), úgy az ellenállás megnagyobbítása, mint a megkisebbítése, erős oszczillácziót hoz létre, a kohérer ellenállásában megkisebbedik (0·1 Ω-ra) és a galvanométer tűje erősen kitér. Még 5000 Ω-os dugónak a kivétele, tehát az áramkör ellenállásának 5000 ohm-mal való megnagyobbítása is kitériti a tűt ca. 50 skálarészre. Megjegyzem, hogy a leolvasás objektive történik, a tükör és skála egymástól való távolsága 100 cm.

A galvánáramkör ellenállásának a változása előidézte hullámok kimutatására nem is annyira érzékeny galvanométer kell — hisz a kevésbbé érzékeny is megteszi a szolgálatot — mint inkább érzékeny, szabályozható és biztosan működő kohérer. Noha a vasszögekből álló kohérer is jelzi e hullámokat, de mert ellenállása nagyon változik s nem eléggé biztos: eddig e czélra legalkalmasabb a kötőtűből álló kohérer.

Már 1899-ben, a mikor az antikohérer jelenséget ismertettem,* készítettem kötőtűből igen érzékeny kohérert.

Ez évben még jobban tökéletesítettem. A két megmágnesezett kötőtű egyikét egy elszigetelőn mozdulatlanul megerősítem; a másikát rugalmas lemezhez forrasztom; ez utóbbihoz rúgós szerkezetet erősitek úgy, hogy a rajta levő mikrométeres csavarral a szilárdan álló kötőtűhöz erősebben szoríthatom, vagy lazán érinthetem s a kivánt helyzetben állandósíthatom. Ily módon nemcsak érzékenységét tudom változtatni, hanem biztos, precziz működését állandósithatom is. Állandó működését igazolja tíz egymásután keltett Hertz-féle hullám hatásának az egyformasága; még 1 skálarésznyi differencziát sem észleltem, ha oszczillátorral állítottam elő a hullámokat. S a leggyengébb rázás is elegendő arra, hogy az ellenállásában megkisebbedett kohérer eredeti nagy ellenállását visszanyerje és a galvanométer azonnal a 0°-ra térjen vissza.

* A párák szerepe a kohérer jelenségeknél. Math. és Phys. Lapok 1899.

E mellett oly biztos, hogy három hónap alatt nem volt reá eset — pedig nap-nap után használom — hogy egyszer is felmondta volna a szolgálatot.

Érzékenységét pedig mutatja már az is, hogy egy 15 kilométer távolságban keltett áramzárás oszczilláczió — ha ama áramkört telefonvezető összeköti a kohéreremmel — a kohérer ellenállását oly módon befolyásolja, mintha a tőszomszédságában keltettük volna a hullámot, a galvanométer tűje erősen kicsap.

Az osztatlan vezeték zárása okozta oszczillácziót, mint láttuk, a 0·1 mikrofaradnyi kapaczitású kondenzátornak parallel való bekapcsolása nem szünteti ugyan meg, de más és más ellenállást kiván, a szerint a mint más és más pontokon kapcsoljuk be. Így EF-nél vagy AB-nél való bekapcsolásakor az osztatlan vezetékből ki kell venni a 200 Ω-ot és helyébe csak 10 Ω-t kell tennünk, hogy a főáramzárása okozta oszczilláczió a kohérer ellenállását megkisebbítse s a galvanométer tűjét kitérítse.

Holott, ha a 0·1 mikrofad MN-nél van párhuzamosan bekapcsolva, nemcsak 200, hanem még 500 Ω-nál is erősen kicsap a galvanométer tűje, ha az osztatlan vezetőben zárjuk az áramkört.

Míg az osztatlan áramvezetőjének a zárásakor keltett hullámokat a kondenzátor fent jelzett nagysága nem volt képes kiküszöbölni: addig ugyanezen kapaczitású kondenzátor, az áramkör különböző pontjain, a galvánáramkör ellenállásának a változtatásával keltett hullámokat teljesen lerontja; a kohérer ellenállásában meg nem kisebbedik s a galvanométer tűje meg sem mozdul. Így ha a 0·1 mikrofaradnyi kapaczitású kondenzátort EF-hez vagy AB-hez kapcsoljuk párhuzamosan, akkor a galvánáramkör ellenállásának sem a nagyobbítása, sem a megkisebbítése nem hoz létre oszczillácziót, a galvanométer tűje állandóan a 0°-on van.

Ha azonban IK-hoz, MN-hez kapcsoljuk a kondenzátort, 50 ohmnyi ellenállásváltozás, a kohérert ellenállásában megkisebbíti és a galvanométer tűje erősen kitér; sőt CD-nél már 20 Ω-nyi ellenállásváltozás is erősen kitériti a galvanométer tűjét.

Hogy a galvánáramkör ellenállásának a változtatásával keltett oszczilláczió mily erősen függ a kapaczitás és önindukczió viszonyától, legfeltűnőbben mutatja az a körülmény, hogy még az EF-hez vagy AB-hez kapcsolt kondenzátor esetében is lehet a galvánáramkör ellenállásának a változtatásával oszczillácziót kelteni, ha az osztatlan vezetékhez nagy önindukcziós tekercset (vasmagost) kapcsolunk szeriesre; mihelyt azonban e tekercset eltávolitjuk, nincs reá eset, hogy az ellenállásváltozás a kohérer ellenállását megkisebbitené s a galvanométer tűjét megmozdítaná. Itt megjegyzem még, hogy a régi ellenállásszekrényekkel a galvánáram ellenállásának a változtatása által keltett hullámokat jobban lehet kimutatni, mint a jobb újakkal; mert a régi szekrények ellenállásának a készitésénél nem törekedtek annyira az önindukcziónak a kisebbítésére, mint a jobb fajta újaknál. De még e tekintetben a legjobb ellenállásszekrényekkel is kimutathatók az ellenállásváltozás okozta hullámok, ha az osztatlan vezetékhez szeriesre kapcsolunk nagy önindukczióju tekercset.

Valamint az áram zárása és nyitása előidézte oszczillácziókat telefonvezetővel messze elvezethetjük és effajta kohérerrel kimutathatjuk: úgy a galvánáramkör ellenállásának a változtatásával keltett oszczillácziót is telefonvezetővel messze vihetjük s e kohérerrel kimutathatjuk. Így, ha egy szárazelem áramkörének az egyik ágába kapcsoljuk eme kohérert s egy Deprez D'Arsonval-féle galvanométert, a másik mellékágba pedig 0·1 Ω-ot, az osztatlan vezetékbe pedig önindukcziós tekercset (vasmagost) s az áramkört tetszésszerinti hosszúságú vezetővel kötjük össze egy oly áramkörrel, a melynek egyik mellékágában egy kevésbbé érzékeny galvanométer van egy érzékeny kohérerrel, a másik ágában pedig 9 Ω ellenállás: akkor, ha ez utóbbi áramkör osztatlan vezetékében levő ellenállásszekrényből pl. 50 Ω-nyi ellenállásnak megfelelő dugót kiveszünk, a létrejött hullám mind a két kohérer ellenállását megkisebbiti s mind a két galvanométer tűje kitér; ugyanezt tapasztaljuk akkor is, ha a dugót visszateszszük.

A surlódás okozta elektromos töltés hatását is ki lehet e berendezéssel mutatni. Ha ugyanis a *T* kettősfalú üvegcső falai közé higanyt öntünk s az üvegcső platinája vezető útján érintkezik a kohérer egyik végével: a kohérer ellenállása erősen megkisebbedik s a galvanométer tűje kicsap; de gyenge rázás elegendő arra, hogy a kohérer eredeti nagy ellenállását visszanyerje s a galvanométer tűje a 0°-ra térjen azonnal vissza.

Ime e berendezés mellett effajta kohérerrel nemcsak a közönségesen használt fajait lehet az oszczillálásnak kimutatni, hanem a galvánáramkör ellenállásának a gyors változtatása által keltett hullámokat is; még pedig egész biztosan és pontosan; sőt méréseket is lehet vele tenni. (Egyszersmind módot és eszközt ad a gyakorlati embernek arra, hogyan lehetne a haladó vonatoknak egymással érintkezni, hogyan lehetne a haladó vonatról jeleket küldeni és e jeleket az állomásokon felfogni, s miként lehetne az elektromos czentrálékból az ívlámpákat felgyujtani.)

Károly Irén.

A

MECHANIKAI ELVEK ALKALMAZÁSA SURLÓDÁSSAL TÖRTÉNŐ MOZGÁSOKRA.

(Első közlemény.)

A mechanika általános elveit mindeddig csak oly mozgások tanulmányozására használták fel, a melyeknél az anyagi rendszer szabadságát korlátozó feltételi egyenletek csupán a rendszer pontjainak koordinátáit és a folyó időt tartalmazzák. A következőkben szándékom megmutatni, miként juthatunk az által, hogy a feltételi egyenletekbe a pontok koordinátáinak idő szerinti differencziálhányadosait is bevezetjük, a *surlódással történő mozgásoknak* igen természetes tárgyalására.

Hogy a mechanikai elveknek ily esetekre való alkalmazása a mechanika következetes felépitése végett valóban kivánatos, arról meggyőződhetünk, ha figyelemmel kisérjük a mechanikai elveknek szerepét ama jelenségcsoportokban, a melyek tárgyalása eddig ezen elvek alapján történt.

1. §. Szabad erő, kényszererő, surlódási erő.

Az anyagi rendszerek mozgási állapotában bekövetkező változásokat bizonyos mennyiségeknek, az *erőknek* tulajdonitjuk, s ezen erők s a mozgást meghatározó mennyiségek közötti összefüggéseknek alkalmas választása által törekszünk a mechanikai jelenségeknek lehetőleg áttekinthető leirására.

E czélból legelőször is ú. n. *szabad erőket* vezetünk be, a melyeknek a rendszer *mozgásától* független létezést tulajdonitunk és a melyekről fölteszszük, hogy kizárólag a rendszer anyaga térbeli eloszlásának és a rendszeren kívül eső változó mennyiségeknek (pl. a folyó időnek) függvényei.

E szabad erőknek az anyagi rendszer mozgására való befolyásáról a következő képet alkotjuk magunknak.

I. Ha egy anyagi pont semmi más feltételnek nem volna alávetve, mint hogy egy bizonyos szabad erő hat reá, ezen szabad erő hatása alatt egy bizonyos *gyorsulást* nyerne: e gyorsulás irányát a szabad erő irányának nevezzük s a szabad erő nagyságát az általa létesített gyorsulással arányosnak tekintjük (Newton második axiómája). Az arányossági tényezőt az anyagi pont változatlan jellemzőjének tekintjük s az anyagi pont *tömegének* nevezzük.

II. Ha egyidejüleg több szabad erő hat egy anyagi pontra, minden szabad erő által ugyanarra a gyorsulásra fog szert tenni a pont, a melyre szert tenne, ha csakis az illető szabad erő befolyása alatt állana, a többié alatt nem. Az egyes szabad erőktől nyert gyorsulások most már összeadódnak, *összetevődnek* a mozgásoknak egymástól való függetlensége alapján. Röviden: a szabad erőkről fölteszszük, hogy függetlenek egymástól (az erők parallelogrammjának elve).

Ha egy rendszer pontjai a reájok ható szabad erők által nyert gyorsulások szerint végzik mozgásukat, akkor a rendszert *szabad rendszernek* tekintjük: ezen esetben azonnal felirhatjuk a rendszer mozgásának differencziálegyenleteit:

Jelöljük X_i, Y_i, Z_i-vel az m_i tömegű x_i, y_i, z_i koordinátákkal biró pontra ható szabad erők eredőjének derékszögű komponenseit, akkor a rendszer mozgásegyenletei:

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} - X_i = 0 \qquad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} - Y_i = 0 \qquad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} - Z_i = 0 \qquad 1)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

a hol n a rendszer pontjainak száma.

A rendszer mozgása le lesz irva, ha X_i, Y_i, Z_i-t a rendszer koordinátáinak, a folyó időnek s esetleg egyéb a rendszeren kivüli mennyiségeknek oly függvényeiként tudjuk előállítani, hogy az 1) alatti differencziálegyenletek megoldásai híven ábrázolják a valóságban végbemenő jelenséget.

Szabad rendszernek szabad erők behatása alatt történő mozgását tehát leirhatjuk a nélkül, hogy szükségünk volna az ú. n. általános mechanikai elvek bármelyikére is.

A természetben lefolyó mechanikai jelenségek leirása végett többféle szabad erőt vezettek be: pl. a nehézségi erőt, a rugalmas erőket; a tapasztalat azonban azt mutatta, hogy a jelenségek leirása csupán szabad erőket és szabad rendszereket tételezve fel, csak kivételes esetekben sikerül s akkor is mindig csak bizonyos közelitéssel: az első esetre példa egy a légben aláhulló jégszem, a másodikra ugyanaz a jégszem, midőn egy ferde sziklafalon csuszik lefelé.

Az első esetet bizonyos közelitéssel leirtuk, ha a jégszemet szabad anyagi pontnak tekintjük s felteszszük, hogy minden testre a Földön egy oly erő hat, a mely minden pontjának ugyanazon g nagyságú vertikális gyorsulást szolgáltatja.

Ugyane föltevések mellett a sziklafalon lefelé csúszó jégszem mozgását csak úgy tudjuk leirni, ha felteszszük, hogy a sziklafal jelenléte folytán egy oly gyorsulási összetevő járul a g gyorsuláshoz, hogy a két összetevő eredője épen a valóságban végbemenő mozgás gyorsulása. Így ha pl. a sziklafalnak a jégszemmel érintkező felülete bizonyos közelitéssel oly sik, a mely a horizonnal α szöget zár be, a sziklafal jelenléte folytán fellépő gyorsulási összetevőt állandóan a sziklafal sikjára merőlegesnek és $g \cos \alpha$ nagyságúnak véve fel, meglehetős közelitéssel leirtuk a jelenséget.

Ezt a $g \cos \alpha$ nagyságú, a sziklafal sikjára merőleges gyorsulási összetevőt azonban már semmiképen sem lehet egy *szabad erőtől* származónak tekintenünk, minthogy a szabad erőt definiáló I. és II. alatti alaptulajdonságok egyikét sem találjuk meg benne: ugyanis, ha pl. felteszszük, hogy a gravitáczió megszünnék működni, vagy pl. valami g_1, g-től különböző nagyságú szintén vertikális gyorsulást szolgáltatna az anyagi pontok számára, semmi értelme sem volna a sziklafal hatását még mindig egy $g \cos \alpha$ nagyságú, a sziklafal sikjára merőleges gyorsulással előállitani. A következetesség azt kivánná, hogy a sziklafal által nyert gyorsulást O-nak, illetőleg $g_1 \cos \alpha$-nak vegyük, azaz a sziklafal által nyert gyorsulás függ attól, hogy a sziklafal hatása mily más szabad erővel együtt lép fel; a sziklafal hatása tehát nem tekinthető oly értelemben szabad erőnek, mint a hogy a szabad erőket I. és II. alatt definiáltuk.

Kizárólag szabad erőket és szabad rendszereket tételezve fel, a valóságban végbemenő mechanikai jelenségeket nem tudjuk leirni, megkisértjük tehát a jelenségek leirását ama föltevés mellett, hogy a rendszerek nem végzik mindig mozgásaikat ama gyorsulások szerint, a melyeket a szabad erők által nyernének, azaz a *természetben előforduló rendszerek nem mind szabad rendszerek.* Hogy milyen az eltérés a valóságban végbemenő mozgás és ama mozgás között, a melyet a rendszer végezne, ha szabad rendszer volna, arra nézve ujabb hipotézisekkel kell élnünk: ily hipotézisek az *általános mechanikai elvek* néven ismert axiómák.

Analitikai alakjukat tekintve a mechanikai elvek két főcsoportra oszthatók: az első csoportban lévő elvek végeredményben a következő egyenletrendszerhez vezetnek:

$$\sum_{i=1}^{n} \{(m_i x_i'' - X_i)\,\delta x_i + (m_i y_i'' - Y_i)\,\delta y_i + (m_i z_i'' - Z_i)\,\delta z_i\} = 0. \qquad 2)$$

Ennek az egyenletnek fenn kell állani minden t időpillanatban a koordináták δx_i, δy_i, δz_i varáczióinak mindazon értékeire nézve, a melyek *a rendszer szabadságát korlátozó feltételeknek* eleget tesznek. Ebbe az első csoportba tartozik a D'Alembert-féle elv és Hamilton elve: ez utóbbi esetében:

$$-X_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad -Y_i = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad -Z_i = \frac{\partial V}{\partial z_i},$$

a hol V a rendszernek ú. n. erőfüggvénye.

A második csoporthoz tartozó elvek analitikai alakja végeredményben:

$$\sum_{i=1}^{n} \{(m_i x_i'' - X_i)\,\delta x_i'' + (m_i y_i'' - Y_i)\,\delta y_i'' + (m_i z_i'' - Z_i)\,\delta z_i''\} = 0. \qquad 3)$$

Ennek az egyenletnek fenn kell állani minden t időpillanatban a *gyorsulási összetevőknek* mindama $\delta x_i''$, $\delta y_i''$, $\delta z_i''$ variáczióinál, a melyek *a rendszer szabadságát korlátozó feltételeknek* eleget tesznek. Ebbe a csoportba tartozik a legkisebb kényszernek GAUSS-féle elve és a KŐNIG-féle energéma elv.

Szabad rendszerek esetén δx_i, δy_i, δz_i, $\delta x_i''$, $\delta y_i''$, $\delta z_i''$ egészen tetszőlegesek s úgy a 2) mint a 3) egyenlet az 1) alatti rendszerhez vezet.

A rendszer szabadságát korlátozó feltételeket eddig mindig a rendszer koordinátái közt fennálló feltételi egyenletek által állították elő: feltették ugyanis, hogy az x_i, y_i, z_i koordináták minden t időpillanatban a következő egyenletrendszernek tartoznak eleget tenni:

$$\varphi_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n;\, t) = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, r) \tag{4}$$

(a sziklafalon csúszó jégszem példájánál: $n=1$, $r=1$ s a koordinátarendszer alkalmas választásánál:

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1, t) = x_1 \cos a + y_1 \sin a = 0).$$

A 2) egyenlet tehát mindama δx_i, δy_i, δz_i értékeknél fennáll, a melyeknél:

$$\varphi_k(\ldots, x_i+\delta x_i, y_i+\delta y_i, z_i+\delta z_i, \ldots;\, t) = \varphi_k(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots;\, t) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial \varphi_k(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots;\, t)}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i}\delta z_i\right\} = 0,$$

azaz a 4) alapján mindama δx_i, δy_i, δz_i értékeknél, a melyeknél:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i}\delta z_i\right\} = 0. \qquad (k=1, 2, \ldots, r) \tag{5}$$

A 2) alatti egyenlet és az 5) alatti egyenletrendszer együttes fennállásából már most következnek a rendszer mozgásának differencziálegyenletei:

$$
\begin{aligned}
m_i x_i'' - X_i - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} - \cdots - \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} &= 0, \\
m_i y_i'' - Y_i - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i} - \cdots - \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial y_i} &= 0, \\
m_i z_i'' - Z_i - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_i} - \cdots - \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial z_i} &= 0, \\
(i=1, 2, \ldots, n) & \\
\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_r = 0. &
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Ez $3n+r$ egyenlet az

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$$

ugyanakkora számmal lévő ismeretlenek meghatározására.

Könnyen belátható, hogy a 4) alatti feltételek mellett a 3) alatti egyenlet ugyanerre az eredményre vezet; elég meggondolnunk, hogy az x_i, y_i, z_i koordináták és az x_i', y_i', z_i' sebességi összetevőknek értéke egy adott t időpillanatban az x_i'', y_i'', z_i'' gyorsulási összetevőknek ugyanazon időbeli értékétől teljesen független, minthogy a gyorsulás értéke csupán a koordináták és sebességek későbbi értékeire lesz befolyással, a gyorsulási összetevők variálásánál tehát a koordináták és sebességi összetevők állandók szerepét fogják játszani.

A 4) alatti rendszert kétszer egymás után differencziálva a t idő szerint azt kapjuk, hogy:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} x_i'' + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} y_i'' + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i} z_i'' \right\} + \Phi = 0, \qquad (k=1, 2, \ldots, r) \tag{7}$$

a hol Φ csupán a koordináták, sebességi komponensek és a t idő függvénye; a 7) alatti egyenlet a gyorsulási összetevők szerint variálva most már a

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \delta x_i'' + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \delta y_i'' + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \delta z_i'' \right\} = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, r) \tag{8}$$

egyenletrendszert nyerjük, a melyet most már a 3) alatti egyenlettel összekapcsolva ismét csak a 6) alatti mozgásegyenletekre kell jutnunk, minthogy a 2) és 5) alatti rendszer a 3) és 8) alattitól most már csakis a határozatlan mennyiségek jelölésében különbözik.

Az említett mechanikai elvek tehát azonos eredményre vezetnek szabad rendszereknél és akkor, ha a rendszer szabadságának korlátozását abban látjuk, hogy a *koordináták* nem vehetik fel mindamaz értékeket, a melyeket a szabad erők egy szabad rendszer koordinátáival felvétetnének, s csak bizonyos meghatározott értékkészleten belül változhatnak. Szokás még a 6) alatti egyenleteket úgy is jellemezni, hogy a rendszer szabadságát korlátozó feltételeket *erőkkel* helyettesítettük s visszavezettük a rendszer mozgását *szabad rendszer* mozgására. Ezen erőkomponensek, a melyekkel az említett feltételeket helyettesítettük a 6) baloldalán szereplő:

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i}$$

mennyiségek.

Az *erő* elnevezés tisztán formai jogosultsággal bir, ugyanis e mennyiségek is ép úgy befolyásolják a pont gyorsulását, mint a szabad erő összetevői, a szabad erőktől azonban igen lényegesen különböznek az által, hogy a *szabad erőktől nem függetlenek*, mások, a szerint, a mint más szabad erővel kapcsolatban lépnek fel és *egyáltalában nem lépnek fel, ha a rendszerre semmiféle szabad erő nem hat.* Ezért adtak külön nevet is a rendszer szabadságát korlátoló feltételek révén fellépő erőknek, az ú. n. *kényszererőknek.*

A 6) alatti egyenletekkel már az összes mechanikai jelenségek leirása sikerül, de csak bizonyos megközelítéssel. A 6) alapján számitott és a valóságban végbemenő mozgás között megint oly természetű eltérés van, a melyet nem lehet új szabad erők bevezetése által megszüntetni, ugyanis ez az eltérés is változik a szerint, a mint más és más szabad erő hat ugyanarra a rendszerre, sőt ugyanannál a szabad erőnél, más és más kezdőfeltételek (pl. kezdősebesség) mellett más eltérést kapunk a számitott és a valódi mozgás között. Ezen eltéréseket rendesen szintén bizonyos erőknek a *surlódásnak* és *közegellenállásnak* szokás tulajdonitani, azonban ezek is ép oly lényegesen különböznek a szabad erőktől, mint a kényszererők, azzal a különbséggel, hogy a surlódási erők akkor is fellépnek, midőn szabad erők a rendszerre nem hatnak s igen nagy mértékben függenek a *kényszererőktől.*

Eme surlódási és közegellenállási jelenségek leirása végett eddig rendesen úgy jártak el, hogy a 6) alatti egyenletek baloldalához bizonyos empirikus korrekciótagokat függesztettek, mit sem törődve azzal, mily összefüggésben vannak e korrekció tagok ama mechanikai elvekkel, a melyek alapján a 6) alatti rendszert magát származtatták. A következőkben megmutatom, hogy lehet e korrekció tagokat, a melyek a surlódási és közegellenállási jelenségek leirására alkalmasak, egyenesen a mechanikai elvekből magukból levezetni; elég ugyanis e czélból föltételeznünk, hogy a *rendszer szabadságát korlátozó feltételi egyenletek a koordinátáknak idő szerinti differenciálhányadosait is tartalmazhatják.*

Azonnal látható, hogy a mechanikai elveknek föntebb megkülönböztetett két csoportja a feltételi egyenletek ily alakja mellett korántsem fog úgy mint az előbb megvizsgált esetben azonos eredményre vezetni. A különböző eredmények közül ki kell választanunk azt, a mely a tapasztalattal megegyezik s akkor a mechanikai elveknek egyik csoportja veendő alapul a mechanika felépitésében, míg a másik csoport elvetendő, mint a mely a mechanikai jelenségeket csak bizonyos közelitéssel irja le s a közelités fokozásánál a valóságtól eltérő eredményekre vezet.

Zemplén Győző.

A Mathematikai és Physikai Társulat IX. tanulóversenye.

A Társulat meghivására 1902. október 9-ikén Budapesten 49, Kolozsvártt 9 középiskolai érettségi vizsgálatot tett tanuló jelentkezett, összesen 14-gyel kevesebb, mint a mult évben, tehát ugyanannyi, mint 1900-ban. A verseny mindkét helyen zárt helyiségben, a Társulat nagyszámu érdeklődő tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett teljesen rendben folyt le és Kolozsvártt 5^h 35^m-kor, Budapesten 6^h 40^m-kor ért véget. A verseny lefolyásáról mindkét helyen jegyzőkönyv vétetett fel a helyszínén, melynek tanusága szerint a tételek kidolgozására engedélyezett négy órai idő alatt Budapesten 28, Kolozsvártt 2 dolgozat adatott be, tehát csak nyolczczal kevesebb, mint a mult évben.

A tanulóverseny tételei a következők voltak:

1. Bebizonyítandó:

a) hogy bármely

$$Ax^2+Bx+C$$

másodfokú egész kifejezés, melyben az A, B és C együtthatók adott számértékek, ily alakban is irható

$$k\frac{x(x-1)}{1.2}+lx+m,$$

hol k, l és m megint meghatározott számértékek;

b) hogy az Ax^2+Bx+C kifejezés akkor és csak akkor vesz fel x minden egész számú értékének behelyettesítésével maga is egész számú értéket, ha a

$$k\frac{x(x-1)}{1.2}+lx+m$$

alakban való előállításában k, l, m egész számok.

2. Jelentse O egy adott K gömbnek középpontját; P és Q legyenek a térnek a K gömbön kivül eső pontjai. Bebizonyítandó, hogy a P körül mint középpont körül PO sugárral leirt A gömbfelületnek és a Q körül

mint középpont körül QO sugárral leirt B gömbfelületnek K belsejébe eső részei egyenlő felszínűek.

3. Adva lévén valamely háromszögnek területe t és egyik szöge C, mekkoráknak választandók a C szögponton átmenő a és b oldalak, hogy a C-vel átellenes c oldal a lehető legkisebb legyen.

A dolgozatok az ellenőrző tagok jelenlétében lepecsételtettek s az elnökség elbirálásukra bizottságot küldött ki, melynek jelentése a következő:

Tisztelt Választmány!

A Mathematikai és Physikai Társulat az alulirott bizottságot küldötte ki, hogy a IX. mathematikai tanulóversenyen beadott 30 dolgozatot megbirálja.

A kiküldött bizottság örömmel jelenti, hogy ez évben, bár a feladatok színvonala a szokottnál magasabb volt, mégis örvendetesen kedvező eredményről számolhat be.

Magasan a többi dolgozat felett áll KŐNIG DÉNES úré a megoldások teljessége és szigorúsága, mint szabatos fogalmazása tekintetében, úgy, hogy a bizottság az első díjat egyhangulag neki itéli oda.

A második díjra SZMODICS HILDEGÁRD úr érdemesítette magát, a ki szintén mind a 3 tételt oldotta meg, de az első tétel bebizonyításának fogalmazása nála szabatosság tekintetében részben fogyatékos.

Az első díj nyertese, KŐNIG DÉNES, a budapesti gyakorló főgymnasium és BEKE MANÓ, majd pedig SZIJJÁRTÓ MIKLÓS tanárok növendéke; a második díj nyertese, SZMODICS HILDEGÁRD, a kaposvári főgymnasium és PRILISAUER ADOLF tanár növendéke volt.

Dicséretet érdemelnek:

KORNIS FERENCZ, a pécsi főreáliskolában KISS JÓZSEF tanárnak volt növendéke, a ki különösen a 3. tételnek elegáns bizonyítását adta, de dolgozatában az 1. tétel egyik leglényegesebb pontjának bebizonyítása hiányzik; továbbá

RIESZ KORNÉL és SZŰCS ADOLF, az V. ker. főreáliskolában SZEKERES KÁLMÁN tanár volt tanítványai, a kik a 2. és 3. tételt teljesen hibátlanul és szabatos fogalmazással oldották meg, míg az 1. tétel bizonyítása náluk lényeges pontjaiban hibás.

Budapesten, 1902 október 25-én.

Schmidt Ágoston, bizotts. elnök *Kopp Lajos*, előadó.

Éberling József, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Rados Gusztáv, Rátz László, Szekeres Kálmán, Szijjártó Miklós.

E jelentést a választmány egyhangulag magáévá tette és ennek folytán úgy határozott, hogy az I. br. Eötvös-díjat KŐNIG DÉNES, a budapesti gyakorló főgymnasium és BEKE MANÓ és SZIJJÁRTÓ MIKLÓS tanárok növendékének, a II. br. Eötvös-díjat SZMODICS HILDEGÁRD, a kaposvári főgymnasium és PRILISAUER ADOLF tanár növendékének itélte oda. Dicsérőleg kiemeli továbbá KORNIS FERENCZ (a pécsi főreáliskolában KISS JÓZSEF tanár), RIESZ KORNÉL és SZŰCS ADOLF (az V. kerületi főreáliskolában SZEKERES KÁLMÁN tanár növendékeinek) dolgozatait.

A díjakat báró Eötvös elnök úr a Társulatnak 1902. november hó 6-ikán a szünidő után tartott első rendes ülésén néhány szép, buzdító szó kiséretében kiosztotta.

A Mathematikai és Physikai Társulat IX. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

I. Kőnig Dénes dolgozata.

I.

a) Hogy a k, l, m számokat mint az A, B és C számok függvényeit fejezhessük ki, irjuk a

$$k\frac{x(x-1)}{2}+lx+m \tag{1}$$

kifejezést is

$$Ax^2+Bx+C \tag{2}$$

alakban. (1) így rendezve így irható:

$$\frac{k}{2}x^2+\left(l-\frac{k}{2}\right)x+m,$$

hol most már

$$\frac{k}{2}=A,\quad l-\frac{k}{2}=B \quad \text{és} \quad m=C$$

és innen

$$k=2A,\quad l=B+\frac{k}{2}=A+B,\quad m=C;$$

ezen értékeket (1)-be helyettesítve (2)-t a következő módon állíthatjuk elő (1) alakjában:

$$2A\frac{x(x-1)}{2}+(A+B)x+C.$$

b) Ha (2) x-nek minden értékénél egész szám, akkor egész $x=0$, 1, —1 esetében is, azaz az

$$N_1=C,\quad N_2=A+B+C \quad \text{és} \quad N_3=A-B+C$$

számok mind egészek, valamint tehát az

$$N_2-N_1=A+B,\quad N_3-N_1=A-B$$

számok is és ezek összege meg különbsége: $2A$ és $2B$ is. Valóban szükséges tehát, hogy

$$k=2A,\quad l=A+B \quad \text{és} \quad m=C$$

egész számok legyenek. Hogy ezen számok egész volta egyszersmind elegendő is ahhoz, hogy (2) mindig egész legyen, azt a következő mó-

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

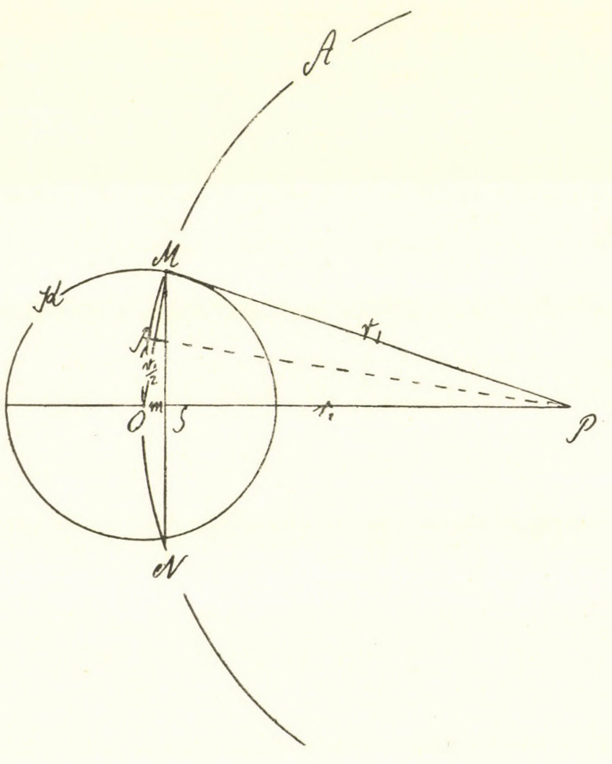
don bizonyíthatjuk be. Ha A és B egész szám, világos, hogy (2) x-nek minden egész számú értékénél egesz szám, ha A és B egyike nem egész, akkor a másik sem lehet egész, mert különben $A+B$ nem lehetne egész szám, így tehát ez esetben mindkettő egy páratlan szám felével egyenlő, minthogy $2A$ és $2B$ egész szám, (2) alakja ekkor a következő:

$$\frac{2\alpha+1}{2}x^2+\frac{2\beta+1}{2}x+C=\alpha x^2+\beta x+C+\frac{x^2+x}{2},$$

mely szintén mindig egész, mert ha x páros, x^2 is az, ha meg páratlan, x^2 is páratlan, összegük x^2+x tehát mindig páros; $\alpha x^2+\beta x+C$ pedig a feltétel szerint mindig egész szám.

II.

Hogy a viszonyokat ábrázolhassuk, fektessünk át az OP egyenesen egy tetszőleges síkot. Legyen M és N a K és A gömböknek e síkba eső



közös pontjuk és messe MN az OP egyenest S-ben, ha most P-ből MO-ra a PP_1 merőlegest bocsátjuk, akkor az OSM és OMP háromszögek hasonlóságából kitünik, hogy

$$\frac{m}{r} = \frac{\frac{r}{2}}{r_1},$$

hol r és r_1 a K, illetve A gömb sugarát jelenti és $m = OS$; innen:

$$m = \frac{r^2}{2r_1}.$$

A kérdéses felület most már az A gömb m-magasságu gömbsüvegének felülete, melyet — mint ismeretes — úgy nyerünk, hogy az A gömb legnagyobb körének kerületét m-mel megszorozzuk; a kérdéses felület tehát

$$F = 2r_1\pi . m$$

és ha m értékét helyettesítjük:

$$F = r^2\pi,$$

mely tehát független r_1-től s így a P helyzetétől is. Ezzel tehát tételünk be van bizonyítva.

Jegyzet. Hogy az állandó F mennyiség $r^2\pi$-vel, a K kör legnagyobb körének területével egyenlő, kitünik akkor, midőn P a végtelenbe távozik; ekkor ugyanis az A gömbfelület az O-n átmenő OP-re merőleges síkká válik.

III.

Ismeretes képlet szerint

$$t = \tfrac{1}{2} ab \sin C$$

és így

$$ab = \frac{2t}{\sin C}$$

állandó szám; c minimumával c^2 is minimumát éri el; c^2 pedig Carnot tétele szerint így irható:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

vagyis

$$c^2 = (a + b)^2 - 2ab\,(1 + \cos C),$$

hol csakis $(a+b)^2$ változó mennyiség s így c akkor lesz minimális, ha $(a+b)^2$ s így $(a+b)$ is lehető legkisebb, már pedig, ha ab állandó, akkor, mint ismeretes, $(a+b)$ akkor minimális, ha

$$a = b,\text{*}$$

vagyis midőn a háromszög egyenlőszárú, ez esetben az adatokkal kifejezve

$$a = b = \sqrt{\frac{2t}{\sin C}}$$

és a c^2 minimális értéke

$$c^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos C = 2a^2 . 2 . \sin^2 \frac{C}{2} = \left(2a \sin \frac{C}{2}\right)^2$$

tehát

$$C_{\text{min.}} = 2a \sin \frac{C}{2},$$

a mint az geometriai úton is belátható.

II. Szmodics Hildegárd dolgozata.

1. tétel.

Bebizonyítandó, hogy

a) bármily:

$$Ax^2 + Bx + C$$

másodfokú egész kifejezés, melyben A, B és C együtthatók adott számértékek, ily alakban is irható:

$$k . \frac{x(x-1)}{1 . 2} + l . x + m$$

a hol k, l és m szintén meghatározott számértékek;

---

* Ez a következőképen bizonyítható. Legyen

$$xy = a^2$$

egy állandó szám; mivelhogy

$$(x - a)^2 \geqq 0,$$

azért

$$x^2 + a^2 \geqq 2ax$$

és $x > 0$-val osztva

$$x + \frac{a^2}{x} \geqq 2a,$$

azaz

$$x + y \geqq 2a.$$

Az $x + y$ összeg tehát minimális, ha

$$x + y = 2a$$

és ezt (1)-gyel összekapcsolva nyerjük, hogy

$$x = a, \quad y = a.$$

b) hogy:

$$Ax^2 + Bx + C$$

kifejezés akkor és csak akkor vesz fel x minden egész számú értékének behelyettesítésénél maga is egész számú értékeket, ha a:

$$k \cdot \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + lx + m$$

alakban való előállításában k, l, m egész számok.

a) A második kifejezés így is irható:

$$\frac{k}{1 \cdot 2} x^2 + \left(l - \frac{k}{1 \cdot 2}\right) x + m$$

nyilvánvaló tehát, ha:

$$A = \frac{k}{1 \cdot 2}$$
$$B = l - \frac{k}{1 \cdot 2} = l - A$$
$$C = m$$

azaz a két kifejezés ugyanazon értéket representálja.

b) Minthogy $y = Ax^2 + Bx + C$ kifejezésben x-nek változásával a két első tag értéke folyton változik, ennélfogva y akkor és csakis akkor lesz egész szám, ha külön-külön:

$$y' = Ax^2 + Bx \quad \text{és} \quad C$$

egész számok.

Ámde, ha y' x-nek minden értékénél egész szám, úgy kell, hogy x helyett az egygyel nagyobb $x+1$ számot irva is egész számot nyerjünk, azaz:

$$y'' = A(x+1)^2 + B(x+1)$$

mennyiség egész szám, miért is y'' és y' különbsége

$$y'' - y' = 2Ax + A + B$$

is egész szám, a mi nyilvánvalóan x bármily egész számú értéke mellett akkor és csakis akkor lehetséges, ha külön-külön:

$$2A$$
$$A + B$$

egész számok, szóval: annak elegendő és szükséges föltétele, hogy y kifejezés x-nek minden egész számú értéke mellett maga is egész szám legyen, az, hogy:

$$1 . 2A,\quad A+B \text{ és } C$$

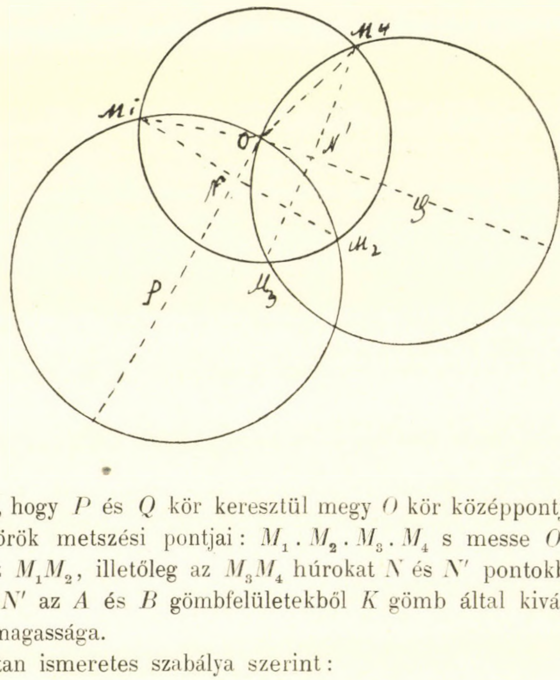
értékek egész számok legyenek.

Ámde *a)* szerint $1 . 2A=k$, $A+B=l$ és $C=m$, miért is a tétel igazolva van.

2. tétel.

Jelentse O egy adott K gömbnek középpontját, P és Q legyenek a térnek a K gömbön kivül eső pontjai; bebizonyítandó, hogy a P körül, mint középpont körül a PO sugárral leirt A gömbfelületnek és a Q körül, mint középpont körül a QO sugárral leirt B felületnek K belsejébe eső részei egyenlő felszínűek!

Ha a három gömböt O, P és Q pontokon keresztül menő síkkal elmetszük, akkor három egymást metsző O, P és Q köröket kapjuk, még



pedig úgy, hogy P és Q kör keresztül megy O kör középpontján; legyenek a körök metszési pontjai: $M_1 . M_2 . M_3 . M_4$ s messe OP, illetőleg az OQ az M_1M_2, illetőleg az M_3M_4 húrokat N és N' pontokban, akkor: ON és ON' az A és B gömbfelületekből K gömb által kivágott gömbsüvegek magassága.

A körtan ismeretes szabálya szerint:

$$ON . 2OP = \overline{M_1O}^2 = \overline{M_4O}^2 = ON_1 . 2OQ$$

vagy:

$$2 . ON . OP\pi = 2ON_1 . OQ\pi$$

a jobb és a bal oldal a kérdéses két gömbsüveg felszíne lévén, tételünk bebizonyíttatott.

3. feladat.

Adva lévén valamely háromszögnek területe t és az egyik szöge C. Mekkorának választandók a C szögponton átmenő a és b oldalak, hogy a C-vel átellenes c oldal a lehető legkisebb legyen.

A cosinus tétel értelmében:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \cos C,$$

de mivel

$$ab \,.\, \sin C = 2 \,.\, t,$$

ebből

$$b = \frac{2t}{a \sin C}$$

s így b értékét a fenti egyenletbe téve:

$$c^2 = a^2 + \frac{4t^2}{a^2 \sin^2 C} - \frac{4t \cos C}{\sin C}$$

$$= \left(a - \frac{2t}{a \sin C}\right)^2 + \frac{4t}{\sin C} - \frac{4t \,.\, \cos C}{\sin C}$$

az utolsó két tag állandó lévén c^2 s így c is akkor éri el minimumát, ha $\left(a - \frac{2t}{a \sin C}\right)^2$ kifejezés a legkisebb értéket veszi fel, azaz ha

$$\left(a - \frac{2t}{a \sin C}\right)^2 = O,$$

azaz

$$a = \sqrt{\frac{2t}{\sin C}}$$

s így

$$b = 2t : a \sin C = \sqrt{\frac{2t}{\sin C}} = a,$$

azaz a háromszög egyenlő szárú. Eme értékek mellett c legkisebb értéke:

$$c = \sqrt{\frac{4t}{\sin C}(1 - \cos C)} = \sqrt{\frac{4t \,.\, 2 \sin^2 \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}} = 2\sqrt{t \,.\, \mathrm{tg}\frac{C}{2}}.$$

Kimutatás

az 1903. év január havában befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1902. évre: Ábrahám István 10 k., Bóbita Endre, 6 k., Magyar László 10 k., Petrogalli Géza 6 k., Terkán Lajos dr. 6 k. Össz. 38 kor.

1903. évre: Ábrahám István 10 k., Antolik Károly 6 k., Ballenegger Henrik 10 k., Barányi Balázs 6 k., Bricht Lipót 10 k., Bukovszky János 6 k., Feichtinger Győző 10 k., Félegyházy Antal 6 k., Ferenczy István 6 k., Frank István 6 k., Grosz Ferencz 6 k., Gruber Nándor 10 k., Halász Ernő 10 k., Halmi János 6 k., Hirschmann Nándor 6 k., Hortobágyi Zsigmond 6 k., Ilosvay Lajos dr. 10 k., Karai Sándor 6 k., Karlovitz László 10 k., Klein Pál 6 k., Klúg Lipót dr. 6 k., Konkoly Thege Miklós ifj. 6 k., Korda Dezső 6 k., Lóczy Lajos 10 k., Malatin Gotthárd 6 k., Markoss Imre 6 k., Müller József 10 k., Neustadt Lipót 10 k., Orbán Antal 10 k., Palatin Gergely 6 k., Pallos Béla Kajetán 6 k., Petrogalli Géza 3 k., Petry Gyula 6 k., Raffmann Jákó dr. 10 k. Összesen 13 à 10 k., 20 à 6 k., 1 à 3 k. ... 253 kor.

1904. évre: Orbán Antal ... 10 kor.

1905. évre: Orbán Antal ... 10 kor.

Előfizetési dijat fizettek:

1902. évre: Miskolczi ev. ref. főgymnasium 10 k., Máramarosszigeti ref. lyceum 10 k. Összesen ... 20 kor.

1903. évre: Budapesti Norbertinum 10 k., Deési állami főgymnasium 10 k., Dévai áll. főreáliskola 6 k., Gyulafehérvári róm. kath. főgymnasium 10 k., Jászberényi kir. kath. főgymn. 10 k., Kaposvári áll. főgymn. 10 k., Kecskeméti áll. főreáliskola 5 k., Körmöczbányai áll. főreáliskola 6 k., Lőcsei áll. főreáliskola 10 k., Makói áll. főgymnasium 10 k., Marosvásárhelyi r. k. főgymnasium 10 k., Miskolczi ev. ref. főgymn. 10 k., Nagyenyedi Bethlen főiskola 10 k., Nyitrai felsőbb leányiskola 10 k., Pannonhalmi főapátsági könyvtár 10 k., Pozsonyi kir. kath. főgymnasium 10 k., Sepsi-szt-györgyi ev. ref. főgymnasium 10 k., Soproni ág.

hitv. ev. lyceum 10 k., Soproni áll. főreáliskola 6 k., Szarvasi ág. h. ev. főgymnasium 10 k., Szegzárdi áll. főgymnasium 10 k., Székesfehérvári áll. főreáliskola 10 k., Ungvári áll. főreáliskola 10 k., Ungvári kir. kath. főgymnasium 10 k., Zilahi ev. ref. főgymnasium 10 k. Összesen ... ... 233 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból ... ... 38 kor.,
f. év és köv. évi dijból ... ... 273 «
Előfizetési dijakból ... ... 253 «

Helyreigazitás: A Math. és Phys. Lapok m. é. VII. füzetében közölt kimutatás hibás. U. i. az 1902. évi tagdijat megfizetők sorában Csemez József neve helyett tévedésből D. M. neve került ugyanazon összeggel a kimutatásba.

Kelt Budapesten, 1903 január 31.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
VII., Aréna-út 66. III. 19.

Utalványczím: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás

az 1903. február havában befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1900. évre: Hassák Vidor 6 k., Kemény X. Ferencz dr. 10 k., Klatt Virgil 6 k. Össz. ... 22 kor.

1902. évre: Bein Károly 10 k., Simm Ferencz 6 k., Szijártó Miklós 10 k. Össz. ... 26 kor.

1903. évre: Barabás Jenő 6 k., Bauer Mihály 10 k., Beke Manó dr. 10 k., Blau Ármin 6 k., Csorba György 6 k., Czekeliusz Aurél 10 k., Dózsa János 6 k., Edelmann Sebő dr. 6 k., Egan Luiza 10 k., Farbaky István 10 k., Feldmann Gyula 10 k., Goldziher Károly 10 k., Gotthard Jenő 6 k., Heuer Ede 10 k., Hilbert Stefánia 10 k., Hill József 6 k., Hőgyes Endre dr. 10 k., Janell József 6 k., Juckel Gyula dr. 10 k., Károly J. Irén 6 k., Ketterer Károly 6 k., K. Kiss József 6 k., Klatt Román 6 k., Klimkó Mihály 6 k., Klupathy Jenő dr. 10 k., Kopp Lajos dr. 10 k., Koschovitz Gyula 10 k., Kovács István 6 k., Lendvay Hugó 6 k., Lengyel Sándor 10 k., Lóky Béla dr. 6 k., Mattyasovszky Kászon 6 k., Mikola Sándor 10 k., Pekár Dezső dr. 10 k., Pető Menyhért 6 k., Pilcz Ottó 10 k., Rados Ignácz 10 k., Sárkány Lajos dr. 6 k., Schenek István dr. 10 k., Schwarcz Ottó dr. 6 k., Simon Tádé 6 k., Stanics Fulgent 6 k., Stauber József 6 k., Straub Gyula 6 k., Straub Sándor 10 k., Suták József dr. 10 k., Szabó János 6 k., Szabó Lajos 6 k., Székely Károly 6 k., Szekeres Kálmán dr. 10 k., Széky Isvtán 6 k., Szenessy Mihály 10 k., Szupper Mártha 10 k., Tihanyi Miklós 6 k., Vámos Dezső 10 k., Vörös Cyrill dr. 6 k., Wodeczky József 6 k., Závodszky Adolf 10 k., Zemplén Győző dr. 7 k., Zorkóczy Samu 6 k. Összesen ... 469 kor.

1904. évre: Szabó János 4 k. ... 4 kor.

Előfizetési dijat fizettek:

1902. évre: A győri főreáliskola 10 k., az ógyallai meteorologiai intézet 10 k. Össz. ... 20 kor.

1903. évre: Aradi áll. tanítóképző 10 k., Aradi kir. főgymnasium 10 k., Bártfai áll. főgymnasium 10 k., Budapesti II. k. áll. főreáliskola 10 k., Budapesti VI. k. áll. főreáliskola 10 k., Budapesti VI. k. áll. főgymnasium 10 k., Csiksomlyói r. kath. főgymnasium 10 k., Debreczeni állami főreáliskola 10 k., Egri áll. főreáliskola 6 k., Hajdú-Böszörményi ev. ref. főgymnasium 10 k., Karczagi ev. ref. főgymn. 10 k., Körmöczbányai áll. főreáliskola 4 k., Mérnök-építész-egylet 10 k., Nagyváradi áll. főreálisk. 10 k., Podolini kegy. rendi gymn. 10 k., Privigyei kegy. rendi gymn. 10 k., Pozsonyi áll. főreáliskola 10 k., Soproni szt. B.-rendi főgymn. 6 k., Szakolczai főgymn. 10 k., Szamosujvári áll. főgymn. 10 k., Szászvárosi ev. ref. Kun-kollegium 6 k., Székely-udverhelyi r. kath. főgymn. 10 k., Ujvidéki kir. kath. főgymn. 10 k. Össz. ... 212 kor.

Összesen befolyt:

Hátrálékokból	48 kor.,	január 1-től	86 kor.
f. és köv. évi díjból	473 kor.,	« «	746 kor.
Előfizetési díjakból	232 kor.,	« «	485 kor.

Budapest, 1903 márczius 1.-én.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII. Aréna-út 66. III. 19.)

HIPERBOLOIDIKUS FEKVÉSŰ EGYENESEKRŐL.

Az Archiv der Mathematik und Physik czímű folyóirat XVII. részében (1899) DOEHLEMANN az «Über hyperboloidische Gerade, die sich aus einem Tetraeder und einer Fläche 2. Ordnung ableiten lassen» czímű értekezésében a következő tételeket bizonyítja be *analitikai* úton:

«Adva van az $ABCD$ tetraéder és egy másodosztályú felület f. Ha kiválasztunk egy tetraéderlapot, pl. az ABC-t és annak minden élén keresztül egy-egy síkot vezetünk, mely az élből a felülethez menő érintősíkokkal és a tetraéderlappal egy határozott, de különben tetszés szerinti kettősviszonyt alkot, úgy a három sík egymást egy D' pontban metszi. Ugyanezen úton nyerjük a kettősviszony értékének megtartása mellett az A', B', C' pontokat. A tétel abban áll, hogy az AA', BB', CC', DD' *egyenesek hiperboloidikus fekvésűek*».

Az ezzel analogus tételt a kúpszeletekre vonatkozólag DOEHLEMANN ekkép fejezi ki:

«Adva van egy másodosztályú görbe és egy ABC háromszög. Ha a B és C pontból sugarakat huzunk, melyek ugyane pontokból a görbéhez vezetett érintőkkel és a BC háromszögoldallal egy tetszés szerinti értékű kettősviszonyt, α-t képeznek, akkor ama sugarak egymást egy A' pontban metszik. Ugyanigy lehet az α értékének megtartása mellett egy B' pontot találni. Ezzel a harmadik háromszögoldalra nézve meg van állapitva az a vonatkozás, melylyel ugyanigy egy C' pont meghatározható. Az AA', BB', CC' pontpárok összekötő egyenesei ekkor egyugyanazon X ponton mennek keresztül».

A következőkben megmutatjuk, mikép lehet e tételeket és azoknak speciális eseteit *szintetikai* úton igazolni.

*

1. Valamely k kúpszelethez egy háromszög A, B, C szögpontjaiból vezethető a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 érintőpárok

$$a_1b_2c_1a_2b_1c_2$$
$$a_1a_2c_1c_2\,b_1b_2$$
$$a_1c_2\,c_1b_2b_1a_2.$$

Brianchon-hatodalakat alkotnak s ezért ezeknek

$$\begin{array}{ccc} (b_1c_2)(c_1a_2)=\mathfrak{a} & (c_1a_2)(a_1c_2)=\mathfrak{b} & (a_1b)_2(b_1a_2)=\mathfrak{c} \\ A\,(b_1c_2) & B\,(c_1a_2) & C\,(a_1b_2) \\ A\,(c_1b_2) & B\,(a_1c_2) & C\,(b_1a_2) \end{array}$$

főátlói egymást egy-egy P, E', E'' pontban metszik.

Az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ pólusai k-ra vonatkozólag a P polárisának p-nek, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ metszőpontjai az ABC háromszög BC, CA, AB oldalaival, s mely oldalaknak tehát $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ metszőpontjai az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$-vel konjugált pólusok az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ pontokkal. Minthogy az $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ pontpárok az ABC háromszög szögpontpárjait harmonikusan választják el, azért az

$$A\mathfrak{A}' \qquad B\mathfrak{B}' \qquad C\mathfrak{C}'$$

egyenesek egymást egy E pontban, a p egyenesnek az ABC háromszögre vonatkozó haımonikus polárisában metszik.

Az ABC háromszög BC, CA, AB oldalainak $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ pólusai tudvalevőleg szintén oly tulajdonságúak, hogy az

$$A\mathfrak{A}_1 \qquad B\mathfrak{B}_1 \qquad C\mathfrak{C}_1$$

egyenesek egymást ugyanegy E_1 pontban metszik.

Minthogy ezek szerint az a három sugárnégyes, mely az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ egyeneseken fekvő

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}'(b_1c_2)(c_1b_2), \qquad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}'(c_1a_2)(a_1c_2), \qquad \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}'(a_1b_2)(b_1a_2)$$

harmonikus pontnégyest az A, B, C pontokból projicziálja egymást az $E_1EE'E''$ pontokban metszi: e négy pont az ABC háromszög körülírt $\varkappa$ kúpszeleten van.

Ha ezután az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ egyeneseken az A', B', C' pontokat akkép választjuk, hogy

$$A'\mathfrak{A}'(b_1c_2)(c_1b_2) \barwedge B'\mathfrak{B}'(c_1a_2)(a_1c_2) \barwedge C'\mathfrak{C}'(a_1b_2)(b_1a_2),$$

akkor az

$$AA' \qquad BB' \qquad CC'$$

egyenesek egymást szintén a $\varkappa$ kúpszelet X pontjában metszik, mert ama három projektiv pontnégyesnek projekcziója az A, B, C pontokból a kúpszeletre oly három projektiv pontnégyes, melynek E, E', E'' megfelelő pontjai, tehát negyedik pontjai is egybeesnek az X pontban.

Ezzel a kúpszeletre vonatkozó tétel igazolva van. Ebből egy új tételt nyerünk, ha a k kúpszeletet, az ABC háromszöget és az A', B', C' pontokat egy síkjukon kívül fekvő D pontból projicziáljuk, mely egy $D(k)$ II. r. kúpra a $D(ABC)$ háromélre és a DA', DB', DC' sugarakra vonatkozik, s mely tétel szerint a DAA', DBB', DCC' síkok egymást egy d egyesben metszik.

Ezzel pedig bebizonyíthatjuk az első tételt, mely az f felületre és az $ABCD$ tetraéderre vonatkozik.

Ugyanis, ha az A, B, C, D szögpontokból az f felülethez vezethető 2. r. kúpokat $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $C^{(2)}$, $D^{(2)}$-vel jelöljük, akkor

az $A^{(2)}$ kúp és az $A(BCD)$ háromél miatt az ABB', ACC', ADD' síkok egymást az a egyenesben metszik,

a $B^{(2)}$ kúp és a $B(CDA)$ háromél miatt a BCC', BDD', BAA' síkok egymást a b egyenesben metszik,

a $C^{(2)}$ kúp és a $C(DAB)$ háromél miatt a CDD', CAA', CBB' síkok egymást a c egyenesben metszik,

a $D^{(2)}$ kúp és a $D(ABC)$ háromél miatt a DAA', DBB', DCC' síkok egymást a d egyenesben metszik, melyek az AA', BB', CC', DD' egyeneseknek szelői, tehát ezek hiperboloidikus fekvésűek és az első tétel is igazolva van.

2. Ha az f felület a végtelen távol fekvő képzetes gömbkör, akkor az első tételből ujat nyerünk, melyet Doehlemann ekkép fejez ki:

«*Ha egy tetszés szerinti tetraéder lapjaira tetszés szerinti, de egyenlő δ hajlású gulákat helyezünk és pedig vagy mind kifelé, vagy mind befelé, akkor csúcsaiknak összekötő egyenesei a tetraédernek szemben fekvő szögpontjaival hiperboloidikus fekvésűek*». Tekintettel arra, hogy az előbbi tétel igazolásánál használt elemek jelenleg képzetesek lesznek, mi e tételt az előbbitől függetlenül akarjuk igazolni.

Induljunk ki egy $D(abc)$ háromélből, melynek bc, ca, ab lapjai $D(a'bc)$, $D(ab'c)$, $D(abc')$ egyenszárú háromélеket helyezünk, melyeknek egyenlő szárai a $D(abc)$ háromél lapjaihoz δ szög alatt hajlanak és mutassuk meg, hogy az aa', bb', cc' síkok egymást egy egyenesben metszik.

Ha $\delta = 0$, akkor az $a'b'c'$ egyenesek a bc, ca, ab élszögeknek $a_s b_s c_s$ felezői és az aa_s, bb_s, cc_s síkok egymást, mint ismeretes a háromél s súlyvonalában metszik. Ha pedig $\delta = 90°$, akkor az $a'b'c'$ egyenesek a D pontban a bc, ca, ab lapokra emelt $a_m b_m c_m$ merőlegesek és az aa_m, bb_m, cc_m síkok egymást a háromél m magasságvonalában metszik.

Változó δ szög mellett az a', b', c' egyenesek az $a_s a_m$, $b_s b_m$, $c_s c_m$ síkokban projektiv sugársorokat irnak le és az aa', bb'; bb', cc'; cc', aa' projektiv síksoroknak képződményei oly másodrendű kúpok, melyek az $absm$, $bcsm$, $casm$ egyeneseken mennek keresztül. De e három kúp egybeesik.

Ugyanis, ha az a' az ac, $a_s a_m$ síkoknak a_1 metszésvonala, tehát a b' a bc, $b_s b_m$ síkoknak b_1 metszővonala ($\delta = \pi$ a c-nél levő lapszög), akkor az aa_1, bb_1 síkok egymást a c-ben metszik és így az első kúp a c élen is keresztül megy. Ugyanígy kimutatható, hogy az a, ill. b a második és harmadik kúpon is rajta van, tehát hogy mind a három kúp ezen öt egyenesen $abcsm$-en megy keresztül, azaz egybeesik. Ebből pedig már következik, hogy az aa', bb', cc' síkok egymást ama kúpnak alkotóiban metszik.

Ha most ismét az $ABCD$ tetraéderre és annak lapjaira helyezett egyenlő (δ) hajlású gúlákra gondolunk, melyeknek csúcsai A', B', C', D', akkor az $A(BCD)$, $B(CDA)$, $C(DAB)$, $D(ABC)$ háromélek miatt: az ABD', ACC', ADD'; BCC', BDD', BAA';

CDD', CAA', CBB'; DAA', DBB', DCC' síkhármasok egymást egy-egy egyenesben metszik. Ezek az egyenesek az AA', BB', CC', DD' egyeneseknek szelői és így e négy egyenes hiperboloidikus fekvésű.

3. Vegyük figyelembe az előbbi $D(abc)$ háromélnél a bc, ca, ab élszögők mellékszögeinek a_s', b_s', c_s' felezőit is, melyekről ismeretes, hogy az aa_s, bb_s', cc_s'; aa_s', bb_s, cc_s'; aa_s', bb_s', cc_s síkok egymást szintén egy-egy s_a, s_b, s_c egyenesben metszik. Ezek segélyével három új II. r. kúpot nyerünk, melyek az $abcs_am$, $abcs_bm$, $abcs_cm$ alkotókon mennek keresztül és úgy mint az első $abcsm$ kúp egyenoldalúak. E kúpok a $D(abc)$ háromélnek lapjaira helyezett háromélekhez tartoznak, melyek közül egyik az előbbiekből való, tehát δ hajlású, a másik kettőnek pedig lapjai a $D(abc)$-nek lapjaihoz δ és $\pi-\delta$ szögek alatt hajlanak.

Ha ismét áttérünk az $ABCD$ tetraéderre és a BCD háromszög oldalain keresztül síkokat fektetünk, melyek a BCD síkhoz δ szög alatt hajlanak, akkor e hat sík egymást hármankint nyolcz A_i pontban metszi, melyek közül négy a másik négynek tükörképe a BCD síkra vonatkozólag. Ugyanígy lehet a CDA, DAB, ABC tetraéder lapoknak és a δ szögnek felhasználásával nyolcz B_i, C_i, D_i pontot találni.

A 32 $a_i = AA_i$, $b_i = BB_i$, $c_i = CC_i$, $d_i = DD_i$ egyenes pedig négyessével 64-szer hiperboloidikus fekvésű, mert két tetszés szerinti a_ib_i egyeneshez egy ezek által már meghatározott c_i és d_i egyenes tartozik.

Ha a δ átmegy a zérusba, akkor az A_i, B_i, C_i, D_i pontok a BCD, CDA, DAB, ABC háromszögekbe írt körök középpontjai lesznek. Ha azoknak a köröknek középpontjait, melyek mind a tetraéder éleket véges darabjukban érintik $A_0B_0C_0D_0$-sal jelöljük, azoknak a köröknek középpontjait pedig, melyek a CD, DB, BC, AB, AC, AD éleket véges darabjukban érintik A_2, B_1; A_3, C_1; A_4, D_1; C_4, D_3; B_3, D_2; B_3, C_2-vel jelöljük, akkor a tizenhat a_i, b_i, c_i, d_i egyenes közül a következő négyesek hiperboloidikus fekvésűek:

$a_0b_0c_0d_0$	$a_2b_0c_1d_1$	$a_3b_0c_1d_0$	$a_4b_0c_0d_1$
$a_0b_0c_4d_3$	$a_2b_0c_2d_2$	$a_3b_0c_2d_3$	$a_4b_0c_0d_2$
$a_0b_1c_1d_1$	$a_2b_1c_0d_0$	$a_3b_1c_0d_1$	$a_4b_1c_1d_0$
$a_0b_1c_2d_2$	$a_2b_1c_4d_3$	$a_3b_1c_4d_2$	$a_4b_1c_2d_3$
$a_0b_3c_2d_0$	$a_2b_3c_0d_2$	$a_3b_3c_0d_3$	$a_4b_3c_1d_2$
$a_0b_3c_1d_3$	$a_2b_3c_4d_1$	$a_3b_3c_4d_0$	$a_4b_3c_2d_1$
$a_0b_4c_0d_2$	$a_2b_4c_2d_0$	$a_3b_4c_0d_2$	$a_4b_4c_0d_3$
$a_0b_4c_4d_4$	$a_2b_4c_1d_3$	$a_3b_4c_2d_1$	$a_4b_4c_4d_0$.

Klug Lipót.

AZ AZONOS KONGRUENCZIÁK ELMÉLETÉHEZ.

A következő sorokban meghatározom a

$$\prod_{i=1}^{n}(x-i) \pmod{n}$$

szorzat explicit alakját.* Az eredmény a következő.

A) Ha

$$n=p^{\pi}m,\ (p,\ m)=1$$

akkor

$$\prod_{i=1}^{n}(x-i) \equiv (x^p-x)^{\frac{n}{p}} \ (\text{mod. } p^{\pi}.)$$

B) Ha $\beta>1$ és

$$n=2^{\beta}m,\ m\equiv 1 \ (\text{mod. } 2)$$

akkor:

$$\prod_{i=1}^{n}(x-i) \equiv (x^4+2x^3-x^2-2x)^{\frac{n}{4}} \ (\text{mod. } 2^{\beta}.)$$

C) Ha $n=2m$, *akkor:*

$$\prod_{i=1}^{n}(x-i) \equiv x^{\frac{n}{2}}(x-1)^{\frac{n}{2}} \ (\text{mod. } 2.)$$

*

1) Vezessük be az

$$S_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-i)$$

jelzést, akkor mindenekelőtt:

$$S_p(x) \equiv x^p - x \ (\text{mod. } p),$$
$$S_2(x) \equiv x(x-1) \ (\text{mod. } 2),$$
$$S_4(x) \equiv x(x+2)(x+1)(x-1) \equiv x^4+2x^3-x^2-2x \ (\text{mod. } 4).$$

* V. ö. e lapok X. k. 145. l.

2. Be fogjuk bizonyítani, hogy:

$$S_{p^{\alpha+1}}(x) \equiv \left(S_{p^\alpha}(x)\right)^p \ (\text{mod. } p^{\alpha+1}) \tag{1}$$

Ugyanis

$$S_{p^{\alpha+1}}(x) = \prod_{i=1}^{p^\alpha} \prod_{t=0}^{p-1} (x-i-tp^\alpha)$$

$$S_{p^{\alpha+1}}(x) \equiv \prod_{t=0}^{p-1} \left(S_{p^\alpha}(x) - tp^\alpha G(x)\right) \ (\text{mod. } p^{\alpha+1}).$$

és így csakugyan:

$$S_{p^{\alpha+1}}(x) \equiv \left(S_{p^\alpha}(x)\right)^p \ (\text{mod. } p^{\alpha+1}) \tag{1}$$

3) Be fogjuk bizonyítani, hogy $\beta > 1$ esetében:

$$S_{2^{\beta+1}}(x) \equiv \left(S_{2^\beta}(x)\right)^2 \ (\text{mod. } 2^{\beta+1}) \tag{2}$$

Ugyanis

$$S_{2^{\beta+1}}(x) = \prod_{i=1}^{2^\beta}(x-i) \prod_{i=1}^{2^\beta}(x-i-2^\beta)$$

tehát

$$S_{2^{\beta+1}}(x) \equiv \left(S_{2^\beta}(x)\right)^2 - 2^\beta \sum_{i=1}^{2^\beta} \frac{S_{2^\beta}(x)}{x-i} S_{2^\beta}(x) \ (\text{mod. } 2^{\beta+1})$$

azonban

$$\frac{S_{2^\beta}(x)}{x-i} \equiv \begin{cases} x^{2^{\beta-1}-1}(x-1)^{2^{\beta-1}} (\text{mod. } 2), \text{ ha } i \equiv 1 \ (\text{mod. } 2) \\ x^{2^{\beta-1}}(x-1)^{2^{\beta-1}-1} (\text{mod. } 2), \text{ ha } i \equiv 0 \ (\text{mod. } 2) \end{cases}$$

és így

$$\sum_{i=1}^{2^\beta} \frac{S_{2^\beta}(x)}{x-i} \equiv 0 \ (\text{mod. } 2), \ \beta > 1$$

vagyis csakugyan:

$$S_{2^{\beta+1}}(x) \equiv \left(S_{2^\beta}(x)\right)^2 \ (\text{mod. } 2^{\beta+1}). \tag{2}$$

4) Ha d az n-nek osztója, akkor:

$$S_n(x) \equiv \left(S_d(x)\right)^{\frac{n}{d}} \ (\text{mod. } d). \tag{3}$$

Ugyanis a (*mod. n*) inkongruens számok egyenletesen vannak a

$$dy+1, \ dy+2, \ldots \ dy+d \ (\text{mod. } n)$$

sorozatokban elhelyezve.

Az (1), (2), (3) egybevetése az elől kijelentett eredményeket adja.

Bauer Mihály.

Helyreigazítás. A magasabbfokú kongruencziák elméletéhez czímű czikkben *(XI. k. p. 32)* a *II.* tétel bebizonyításába hiba csúszott be, mely azonban az eredményt nem érinti. A *19*-ik sor helyébe a következő teendő: Az adott egyenlet GALOIS-féle lévén a k testben felbomlik. Ugyanis:

$$f(x) = (x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \cdots + \alpha_r)(x^{n-r} + \beta_1 x^{n-r-1} + \cdots + \beta_{n-r}) \qquad (2)$$

(α_i, β_k a k test egész számai.)

Hasonló értelemben javítandók a következő sorok.

Bauer Mihály.

A
MECHANIKAI ELVEK ALKALMAZÁSA SURLÓDÁSSAL TÖRTÉNŐ MOZGÁSOKRA.

(Második és befejező közlemény.)

2. §. D'Alembert és Hamilton elve.

Igen egyszerüen beláthatjuk, hogy a mechanikai elvek első csoportja nem alkalmas oly rendszerek mozgásának tárgyalására, a melyek szabadságát a koordináták időszerinti differencziálhányadosaitól is függő feltételi egyenletek korlátozzák. A 2) alatti egyenletnek ugyanis fenn kell állani minden oly δx_i, δy_i, δz ú. n. virtuális elmozdulásnál, a mely a rendszer feltételeivel megegyezik, fenn kell tehát állani a dt időelem alatt valósággal bekövetkező elmozdulásnál is, a mely esetben

$$\delta x_i = x_i'dt, \quad \delta y_i = y_i'dt, \quad \delta z_i = z_i'dt,$$

tehát a 2) egyenletből:

$$dt\sum_{i=1}^{n}\{(m_ix_i''-X_i)\,x_i'+(m_iy_i''-Y_i)\,y_i'+(m_iz_i''-Z_i)\,z_i'\}=0,$$

azaz

$$\sum_{i=1}^{n}(X_ix_i'+Y_iy_i'+Z_iz_i')=\sum_{i=1}^{n}[m_i\,(x_i'x_i''+y_i'y_i''+z_i'z_i'')]=$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)=\frac{dT}{dt},$$

a hol T a rendszer eleven ereje.

A 2) alatti egyenletnek tehát közvetlen folyománya az *eleven erő* tétele, a surlódási jelenségek fő jellemzője pedig épen az, hogy az eleven erőnek adott időben történő megváltozása nem egyenlő a szabad erőknek akközben végzett munkájával. A 2) egyenlet tehát surlódással történő jelenségekre egyáltalában nem alkalmazható, a mi különben D'ALEMBERT elvének amaz alakjából is világos, mely szerint a kényszererőre nézve mindig egyensúly áll fenn, azaz a kényszererők virtuális munkája mindig zérus, zérus lesz tehát a kényszererők munkája a valósággal bekövetkező mozgásnál is.

A 2) alatti egyenlet tulajdonképen nem egyéb, mint a D'ALEMBERT-féle elv, azáltal tehát, hogy a 2) alatti egyenletről kimutattuk, hogy surlódással történő mozgások leirására alkalmatlan, ugyanez magára a D'ALEMBERT-féle elvre nézve is be van bizonyítva, de be lesz bizonyítva a HAMILTON-féle elvre nézve is, minthogy erről is belátható, hogy tetszőleges feltételek mellett a 2) alatti egyenlethez vezet.

Ha ugyanis V-vel jelöljük a rendszer erőfüggvényét, T-vel a rendszer eleven erejét s ha a valóságban végbemenő mozgásnál t_0 időpillanatban a koordináták és sebességi összetevők értékei:

$$x_{i0},\ y_{i0},\ z_{i0};\quad x'_{i0},\ y'_{i0},\ z'_{i0} \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{9}$$

t_1 időpillanatban pedig

$$x_{i1},\ y_{i1},\ z_{i1};\quad x'_{i1},\ y'_{i1},\ z'_{i1}, \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{10}$$

akkor HAMILTON elve következőképen fogalmazható:

A rendszer a t_0-beli állapotból a t_1-beli állapotba oly mozgással jut, a melynél az

$$I=\int_{t_0}^{t_1}(V-T)\,dt$$

integrál szélső értéke mindazon integráloknak, a melyeknél a koordináták és sebességi összetevők értékei a t_0 és t_1 időkben a 9) *illetőleg* 10) *alatti mennyiségekkel egyenlők, t_0 és t_1 között azonban a koordináták az időnek tetszőleges a rendszer föltételeivel összeférő függvényei.*

Ezen elvnek fenn kell állani t_0 és t_1 tetszőleges értékénél.

Bármilyenek a rendszer szabadságát korlátozó feltételek, I

szélsőérték voltának szükséges föltétele mindig az lesz, hogy I-nek csak magasabbrendű végtelen kicsiny mennyiséggel szabad megváltoznia, ha az x_i, y_i, z_i függvények helyébe a t időnek más

$$x_i + \delta x_i, \quad y_i + \delta y_i, \quad z_i + \delta z_i$$

függvényeit teszszük, a melyek szintén kielégitik a rendszer föltételi egyenleteit és x_i, y_i, z_i-től csak végtelen kevéssé különböznek.

Azaz a variácziószámitás jeleivel élve, Hamilton elve azt kivánja, hogy

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} (V - T) = 0,$$

hacsak δx_i, δy_i, δz_i a rendszer feltételi egyenleteit kielégitik és $t = t_0$ és $t = t_1$ időkben egyaránt:

$$\delta x_i = \delta y_i = \delta z_i = \delta x_i' = \delta y_i' = \delta z_i' = 0, \tag{11}$$

épen minthogy ezen időkben x_i, y_i, ..., z_i' a 9) és 10) alatti egyenletek által meg vannak adva, tehát nem variálhatók.

De

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \delta (V - T)\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \delta z_i + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i'} \delta x_i' + \frac{\partial \Phi}{\partial y_i'} \delta y_i' + \frac{\partial \Phi}{\partial z_i'} \delta z_i' \right],$$

a hol

$$\Phi = V - T,$$

s parcziálisan integrálva:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i'} \delta x_i' = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_i'} \delta x_i \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i'} \right) \delta x = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i'} \right) \delta x.$$

11) szerint azonban

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_i'} \delta x \right]_{t = t_1,\, t_0} = 0,$$

s igy:

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i'} \right) \delta x_i + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i'} \right) \delta y_i + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial z_i'} \right) \delta z_i \right] =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} - m_i x_i'' \right) \delta x_i + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i} - m_i y_i'' \right) \delta y_i + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i} - m_i z_i'' \right) \delta z_i \right] = 0.$$

Ha most tekintetbe veszszük, hogy e kifejezésnek t_0 és t_1 bármely értékénél fenn kell állania, azt kapjuk, hogy bármely a föltételekkel összeférő δx_i, δy_i, δz_i értéknél:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} - m_i x_i'' \right) \delta x_i + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i} - m_i y_i'' \right) \partial y_i + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i} - m_i z_i'' \right) \delta z_i \right] = 0,$$

ez pedig már nem egyéb, mint a 2) alatti egyenlet ama megszorítás mellett, a mely a Hamilton-féle elv alapja, hogy ugyanis a szabad erők a koordináták valamely V függvényének az egyes koordináták szerinti parciális differenciálhányadosai.

A 2) egyenlettel együtt tehát Hamilton elve is alkalmatlannak mutatkozik surlódással történő mozgások leirására.

3. §. Gauss elve surlódással történő mozgásoknál.

Egészen más eredményre jutunk, ha a legkisebb kényszer Gauss-féle elvével kiséreljük meg a surlódással történő mozgások leirását. Igen kényelmes analitikai alakra hozhatjuk e czélból a Gauss-féle elvet, ha nem a 3) alatti alakját használjuk, hanem egy kicsiny, de véges τ időközre nézve irjuk fel úgy a Gauss-féle elvet magát, valamint a rendszer szabadságát korlátozó feltételi egyenleteket s miután a rendszer mozgására vonatkozó differenciálegyenleteket előbb csak első közelítésben megkaptuk, a τ időközt minden határon tul kisebbítve eljutunk a mozgás pontos differenciálegyenleteihez.

Gauss elve egy kicsiny, de véges τ időre nézve következőképen fogalmazható:

Legyen adva ismét egy n anyagi pontból álló rendszer, az i-edik pont tömege legyen m_i s a t időpillanatban legyenek a valósággal végbemenő mozgásnál koordinátái:

$$x_i,\ y_i,\ z_i$$

sebességi összetevői

$$u_i,\ v_i,\ w_i.$$

Legyen τ egy oly kicsiny véges időköz, hogy a koordináták és sebességi összetevők ezalatt bekövetkezett megváltozásainak második és magasabbrendű hatványai első hatványaikhoz képest igen kicsinyek legyenek s legyenek a koordináták és sebességi összetevők értékei a $t+\tau$ időpillanatban rendre:

$$\bar{x}_i,\ \bar{y}_i,\ \bar{z}_i;\ \ \bar{u}_i,\ \bar{v}_i,\ \bar{w}_i.$$

Ha a rendszer teljesen szabad volna s az i-edik pontra ható szabad erők komponenseit a t időpillanatban ismét

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i\text{-}$$

vel jelöljük, a rendszer a τ idő alatt bizonyos állapotba jutna, a melynél az i-edik pont koordinátái legyenek

$$\mathfrak{x}_i,\ \mathfrak{y}_i,\ \mathfrak{z}_i$$

és sebességi összetevői

$$\mathfrak{u}_i,\ \mathfrak{v}_i,\ \mathfrak{w}_i.$$

Ha τ oly kicsiny, hogy azalatt a mozgást közel egyenletesen gyorsulónak tekinthetjük, az i-edik pont által e képzelt szabad mozgásnál befutott utat annál pontosabban állíthatjuk elé a következő egyenletek segítségével, minél kisebb τ:

$$\mathfrak{x}_i - x_i = \frac{1}{2}\frac{X_i}{m_i}\tau^2 + u_i\tau, \qquad \mathfrak{y}_i - y_i = \frac{1}{2}\frac{Y_i}{m_i}\tau^2 + v_i\tau,$$

$$\mathfrak{z}_i - z_i = \frac{1}{2}\frac{Z_i}{m_i}\tau^2 + w_i\tau.$$

$\frac{X_i}{m_i}, \frac{Y_i}{m_i}, \frac{Z_i}{m_i}$ ugyanis nem egyebek, mint a szabadnak képzelt rendszer gyorsulási összetevői a t időpillanatban s a rendszer szabad elmozdulásának összetevőit úgy állítottuk elő, mint egy hajított test elmozdulási összetevőit.

A valódi mozgásnál τ idő alatt végbemenő elmozdulás összetevői ugyanily megközelítéssel:

$$\bar{x}_i - x_i = (u_i + \bar{u}_i)\frac{\tau}{2}, \quad \bar{y}_i - y_i = (v_i + \bar{v}_i)\frac{\tau}{2}, \quad \bar{z}_i - z_i = (w_i + \bar{w}_i)\frac{\tau}{2}.$$

Tehát annak az elmozdulásnak összetevői, melynek a szabadnak képzelt rendszernél bekövetkező elmozduláshoz hozzá kellene járulnia, hogy a rendszer a valóságban bekövetkező konfiguráczió változást szenvedje:

$$\bar{x}_i - \mathfrak{x}_i = \bar{x}_i - x_i - (\mathfrak{x}_i - x_i) = (u_i + \bar{u}_i)\frac{\tau}{2} - \frac{1}{2}\frac{X_i}{m_i}\tau^2 - u_i\tau =$$

$$= \left(\frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} - \frac{X_i}{m_i}\right)\frac{\tau^2}{2},$$

$$\bar{y}_i - \mathfrak{y}_i = \left(\frac{\bar{v}_i - v_i}{\tau} - \frac{Y_i}{m_i}\right)\frac{\tau^2}{2},$$

$$\bar{z}_i - \mathfrak{z}_i = \left(\frac{\bar{w}_i - w_i}{\tau} - \frac{Z_i}{m_i}\right)\frac{\tau^2}{2}.$$

Gauss szerint ezen $\bar{x}_i - \mathfrak{x}_i$, $\bar{y}_i - \mathfrak{y}_i$, $\bar{z}_i - \mathfrak{z}_i$ összetevőkkel biró elmozdulás négyzetének szorzatát az anyagi pont tömegével ama *kényszer*nek nevezzük, a melyet a rendszer szabadságát korlátoló feltételek a pont szabad mozgására gyakorolnak, a *kényszer* tehát nem egyéb, mint a szabad mozgástól való elterelődés egyik jellemző adata. Egy egész rendszerre gyakorolt kényszer alatt az egyes pontokra gyakorolt kényszerek összegét értjük; a feltételek által a rendszer szabad mozgására τ idő alatt gyakorolt kényszer tehát:

$$\frac{\tau^4}{2}K = \frac{\tau^4}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{m_i\left[\left(\frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} - \frac{X_i}{m_i}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\bar{v}_i - v_i}{\tau} - \frac{Y_i}{m_i}\right)^2 + \left(\frac{\bar{w}_i - w_i}{\tau} - \frac{Z_i}{m_i}\right)^2\right]\right\}.$$

Gauss elve azt mondja, hogy *a valóságban végbemenő mozgásnál a kényszer kisebb, mint az a kényszer, mely bármely más a feltételeknek megfelelő mozgásnál ugyanazon idő alatt fellépne.*

$\frac{\tau^4}{2}$ K-nak tehát állandó $\tau, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, \ldots, u_i, v_i, w_i, \ldots$ mellett minimumnak kell lenni, a variácziószámítás szempontjából tehát egy egyszerű relativ szélső érték feladat előtt állunk. A t időnek a rendszer szabadságát korlátoló feltételekkel összeférő $\bar{u}_i$, $\bar{v}_i$, $\bar{w}_i$ függvényei közül, melyek teszik K-t állandó $\tau, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, \ldots u_i, v_i, w_i$ mellett minimummá?

Ha K minimum, akkor

$$\delta K = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial K}{\partial \bar{u}_i} \delta \bar{u}_i + \frac{\partial K}{\delta \bar{v}_i} \delta \bar{v}_i + \frac{\partial K}{\partial \bar{w}_i} \delta \bar{w}_i \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(m_i \frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} - X_i \right) \delta \bar{u}_i + \left(m_i \frac{\bar{v}_i - v_i}{\tau} - Y_i \right) \delta \bar{v}_i + \right.$$

$$\left. + \left(m_i \frac{\bar{w}_i - w_i}{\tau} - Z_i \right) \delta \bar{w}_i \right\} = 0. \qquad 11)$$

$\delta \bar{u}_i$, $\delta \bar{v}_i$, $\delta \bar{w}_i$ mindazon értékeinél, a melyek a feltételeknek megfelelnek.

Látható, hogy ez az egyenlet mihelyt τ-t végtelen kicsinynek veszszük egyenlő jelentésű a 3) alatti egyenlettel. Ha ugyanis 11)-ben τ-val végigosztunk s áttérünk a határra, úgy, hogy $\lim \tau = 0$, valóban a 3) alatti egyenletet nyerjük, ugyanis:

$$\lim_{\tau=0} \frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} = x_i'' ,$$

és

$$\frac{1}{\tau} \lim_{\tau=0} \delta \bar{u}_i = \lim_{\tau=0} \delta \frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} = \delta \lim \frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} = \delta x_i'' \quad \text{s i. t.}$$

A határátmenetet azonban majd csak akkor fogjuk elvégezni, ha a rendszer szabadságát korlátoló feltételeket már tekintetbe vettük.

E feltételeket most két csoportba osztjuk:

Az első csoportba tartozzanak az ú. n. *surlódás nélküli feltételek:* ezek a rendszer bizonyos pontjai közt fennálló merev kapcsolatok, oly feltételek, melyek megszabják, hogy a rendszernek bizonyos pontjai bizonyos nyugvó, mozgó vagy változó felületeken vagy görbéken tartoznak mozogni; analitikai kifejezésük a pontok koordinátái közt fennálló egyenletekkel történik, a melyekben a koordinátákon kívül csak a t folyó idő szerepelhet explicite, a koordinátáknak idő szerinti differencziálhányadosai azonban nem.

A második csoportbeli feltételek, az ú. n. *surlódás és közegellenállási feltételek* kikötik, hogy a rendszer pontjai más sebességgel végzik az első csoportbeli feltételeknek megfelelő mozgást, mint a mely sebességgel mozognának, ha csakis az első csoportbeli feltételek állanának fenn.

Legyenek az első csoportbeli feltételi egyenletek:

$$\varphi_k(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots; t) = 0, \qquad (k=1,2,\ldots, r;\ i=1,2,\ldots, n) \tag{12}$$

akkor azonnal belátható, hogy, ha csakis az első csoportbeli feltételek állanának fenn, ismét a 6) alatti egyenletrendszerhez jutunk. A 12) rendszernek ugyanis a $t+\tau$ időpillanatra nézve is fenn kell állaniok, tehát:

$$\begin{aligned}\varphi_k(\ldots, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, \ldots; t+\tau) &= \varphi_k(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots; t) + \\ +\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\right)_t(\bar{x}_i-x_i)+\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}\right)_t(\bar{y}_i-y_i)+\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial z_i}\right)_t(\bar{z}_i-z_i)\right] &+ \frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\tau = \\ = \varphi_k(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots; t) &+ \\ +\frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}(u_i+\bar{u}_i)+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}(v_i+\bar{v}_i)+\frac{\partial\varphi_k}{\partial z_i}(w_i+\bar{w}_i)\right] &+ \frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\tau=0.\end{aligned} \tag{13}$$

A 11) alatti egyenletnek $\delta\bar{u}_i$, $\delta\bar{v}_i$, $\delta\bar{w}_i$ mindamaz értékeinél fenn kell állania, a melyeknél a 13) alatti egyenletnek $\bar{u}_i$, $\bar{v}_i$, $\bar{w}_i$ szerinti variácziói eltünnek, azaz:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\delta\bar{u}_i+\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\delta\bar{v}_i+\frac{\partial\varphi_k}{\partial z_i}\delta\bar{w}_i\right)=0. \qquad (k=1,2,\ldots, r) \tag{14}$$

A 11) és 14) alatti egyenletek együttes fennállásából folynak a következő egyenletek:

$$
\begin{aligned}
&m_i \frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} - X_i - \sum_{k=1}^{r} \bar{\lambda}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = 0, \\
&m_i \frac{\bar{v}_i - v_i}{\tau} - Y_i - \sum_{k=1}^{r} \bar{\lambda}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} = 0, \\
&m_i \frac{\bar{w}_i - w_i}{\tau} - Z_i - \sum_{k=1}^{r} \bar{\lambda}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i} = 0, \\
&\qquad (i=1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

a hol a $\bar{\lambda}_k$-k úgy határozandók meg, hogy a 13) alatti egyenletek fennálljanak. Látható, hogy áttérve a határra úgy a 15) mint a 13) alatti egyenletekben valóban a 6) alatti rendszert kapjuk, hacsak a

$$
\lim_{\tau=0} \bar{\lambda}_k = \lambda_k \qquad (k=1, 2, \ldots, r)
$$

jelölést használjuk.

Feltételeink második csoportja azt mondja, hogy a rendszer tényleges mozgása nem történik a 6) alatti mozgásegyenletek szerint, ugyanis a rendszer sebessége a valóságban mindig kisebb, mint a mekkora sebesség a 6) alatti egyenletrendszerből következnék: bizonyos surlódás és közegellenállás gyüjtőnév alatt összefoglalt, eddig tekintetbe nem vett okok miatt ugyanis a rendszer minden pontja bizonyos eleven erőbeli veszteséget szenved, a mely veszteség nagysága függ a pont helyzetétől és sebességétől abban az időben, mialatt a veszteséget szenvedte, attól az időtartamtól, a mely alatt az eleven erőbeli veszteség bekövetkezett, azonkívül még akárhány idegen paramétertől, pl. magától a folyó időtől, a rendszer hőmérsékletétől s i. t.

A mozgás egyenleteit tehát következőképen kaphatjuk meg: A valódi mozgásnak a 6) alatti egyenletektől való eltérését ismét Gauss elve alapján számítjuk, feltételeknek választva az eleven erő veszteségre vonatkozó tapasztalati alapon felállítandó egyenleteket és az előbbi 13) alatti feltételrendszert.

Tegyük fel ugyanis, hogy a rendszer i-edik pontja a t időpillanatban A_i-ban volt s τ idő alatt, ha a mozgás a 6) alatti egyenletrendszernek megfelelően történt volna B_i-be jutott volna, a valóságban pedig ugyanazon idő alatt C_i-be jutott; $K = \sum_{i=1}^{n} m_i (\overrightarrow{B_iC_i})^2$ a GAUSS-féle kényszer, a melyet a surlódás és közegellenállás a 6) alatti egyenletrendszernek megfelelően mozgó rendszerre gyakorol. Fölteszszük most már, hogy egész hasonlóan az eddig GAUSS elve alapján tárgyalt esetekhez, a valóságban végbemenő mozgás a többi lehetséges mozgás előtt az által van kitüntetve, hogy mindazon mozgások közül, a melyek a 13) alatti egyenletrendszernek megfelelnek és a melyek eleven erőbeli vesztesége a föltett módon megy végbe, a valódi mozgásnak K-ja a legkisebb.

GAUSS elve tehát a jelen esetben következőképen fogalmazható:

A 6) alatti egyenletek alapján, ha ugyanoly megközelitéssel, mint a milyennel eddig is éltünk, a τ idő alatt végbemenő mozgást egyenletesen gyorsulónak tekintjük, az $\overrightarrow{A_iB_i}$ elmozdulás összetevői:

$$u_i\tau + \frac{1}{2m_i}\left[X_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right]\tau^2,$$

$$v_i\tau + \frac{1}{2m_i}\left[Y_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\right]\tau^2,$$

$$w_i\tau + \frac{1}{2m_i}\left[Z_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i}\right]\tau^2;$$

a valódi mozgás sebességi összetevői legyenek a τ időtartam végén:

$$\overline{U}_i, \ \overline{V}_i, \ \overline{W}_i,$$

akkor $\overrightarrow{A_iC_i}$ összetevői:

$$\frac{\tau}{2}(u_i + \overline{U}_i), \quad \frac{\tau}{2}(v_i + \overline{V}_i), \quad \frac{\tau}{2}(w_i + \overline{W}_i)$$

s így $\overrightarrow{B_iC_i}$ összetevői:

$$\frac{\tau^2}{2}\left(\frac{\overline{U}_i-u_i}{\tau}-\frac{1}{m_i}\left[X_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\right]\right),$$

$$\frac{\tau^2}{2}\left(\frac{\overline{V}_i-v_i}{\tau}-\frac{1}{m_i}\left[Y_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}\right]\right),$$

$$\frac{\tau^2}{2}\left(\frac{\overline{W}_i-w_i}{\tau}-\frac{1}{m_i}\left[Z_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial z_i}\right]\right),$$

tehát a kényszer

$$K=\sum_{i=1}^{n}m_i(\overrightarrow{B_iC_i})^2=$$

$$=\frac{\tau^4}{4}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(m_i\frac{\overline{U}_i-u_i}{\tau}-\left[X_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\right]\right)^2+\right.$$

$$+\left(m_i\frac{\overline{V}_i-v_i}{\tau}-\left[Y_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}\right]\right)^2+$$

$$\left.+\left(m_i\frac{\overline{W}_i-w_i}{\tau}-\left[Z_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial z_i}\right]\right)^2\right\}.$$

K-nak minimumnak kell lenni az említett feltételek mellett, azaz K-nak $\overline{U}_i$, $\overline{V}_i$, $\overline{W}_i$ szerinti variácziója $\partial\overline{U}_i$, $\partial\overline{V}_i$, $\partial\overline{W}_i$ mindazon értékeinél el fog tünni, a melyek a rendszer föltételi egyenleteit kielégítik, azaz a variácziók ezen értékei mellett:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(m_i\frac{\overline{U}_i-u_i}{\tau}-\left[X_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\right]\right)\partial\overline{U}_i+\right.$$

$$+\left(m_i\frac{\overline{V}_i-v_i}{\tau}-\left[Y_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}\right]\right)\partial\overline{V}_i+$$

$$\left.+\left(m_i\frac{\overline{W}_i-w_i}{\tau}-\left[Z_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial z_i}\right]\right)\partial\overline{W}_i\right\}=0. \qquad 16)$$

A föltételi egyenletek első csoportját irva fel $t+\tau$ időpillanatra ép úgy mint előbb a 14) alatti rendszert, most a következőt kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\delta \overline{U}_i+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}\delta \overline{V}_i+\frac{\partial\varphi_k}{\partial z_i}\delta \overline{W}_i\right)=0. \qquad 17)$$

$$(k=1, 2, \ldots, r)$$

Az eleven erő veszteség egyenleteit kell még felállítanunk: Tapasztalat szerint az eleven erőbeli veszteség, nem a teljes eleven erőtől, csupán a pontnak ama felülethez vagy görbéhez viszonyított relativ eleven erejétől függ, a melyen a pont a 17) alatti egyenletek alapján mozogni tartozik. Az eleven erő veszteség feltételét (a surlódás és közegellenállási feltételt) tehát úgy mondhatjuk ki, hogy az m_i pont relativ eleven ereje a $t+\tau$ időpillanatban mindig nagyobb volna a valódi relativ eleven erőnél, ha a pont mozgását a 6) alatti egyenletek alapján (surlódás és közegellenállás nélkül) végezné. A különbség a két relativ eleven erő között függ mindama mennyiségektől, a melyek tapasztalat szerint a surlódás és közegellenállásbeli jelenségeket befolyásolják, tehát a pont helyzetétől (x_i, y_i, z_i koordinátáitól), a τ időtartamtól, ama középsebességtől, a melylyel utját a τ idő alatt befutja, tehát az

$$\frac{u_i+\overline{U}_i}{2}, \quad \frac{v_i+\overline{V}_i}{2}, \quad \frac{w_i+\overline{W}_i}{2}$$

összetevőktől, azonkívül még bizonyos más változóktól (pl. függhet explicite az időtől, vagy egy másik pont koordinátáitól, a rendszer hőmérsékletétől s i. t.)

E surlódási függvény alakja esetről-esetre különböző és tapasztalati alapon határozandó meg: általánosságban csak a benne szereplő változók számát tudjuk redukálni, tekintetbe véve azt, hogy τ oly kicsiny idő, hogy elsőnél magasabb hatványai első hatványaihoz képest elhanyagolható kicsinyek.

Legyen ugyanis

$$\Psi_i\left(x_i,\, y_i,\, z_i;\, \frac{u_i+\overline{U}_i}{2},\, \frac{v_i+\overline{V}_i}{2},\, \frac{w_i+\overline{W}_i}{2};\, \tau,\, t\right)$$

a benne szereplő változóknak egy oly függvénye, mely a változók bármely értékénél csak pozitiv értékeket vehet fel s csak akkor lehet 0, ha $\tau = 0$, akkor a különbséget a 6) szerinti mozgás és a valódi mozgás relativ eleven ereje közt épen egy ily alakú függvény adja meg; ha azonban τ kicsiny, akkor:

$$\Psi_i\left(x_i,\, y_i,\, z_i;\, \frac{u_i+\overline{U}_i}{2},\, \frac{v_i+\overline{V}_i}{2},\, \frac{w_i+\overline{W}_i}{2};\, \tau,\, t\right) = (\Psi_i)_{\tau=0} +$$

$$+\left[\frac{d}{dt}\left(\Psi_i\left(x_i,\, y_i,\, z_i;\, \frac{u_i+\overline{U}_i}{2},\, \frac{u_i+\overline{V}_i}{2},\, \frac{w_i+\overline{W}_i}{2};\, \tau,\, t\right)\right)\right]_{\tau=0} \tau =$$

$$= \Phi_i(x_i,\, y_i,\, z_i;\, u_i,\, v_i,\, w_i;\, t)\,\tau,$$

a hol Φ_i a benne szereplő változóknak szintén oly függvénye, a mely a változók minden értékénél pozitiv, csak akkor 0, ha a mozgás surlódás nélkül történik; a benne szereplő változók száma azonban megfogyott, ugyanis kiesett τ és $\overline{U}_i$, $\overline{V}_i$, $\overline{W}_i$, minthogy:

$$\left(\frac{u_i+\overline{U}_i}{2}\right)_{\tau=0} = u_i \quad \text{s i. t.}$$

Az eleven erőbeli veszteség feltétele tehát, miután a 6) alatti egyenletek szerint történő mozgás sebességi összetevői a $t+\tau$ időpillanatban:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= u_i + \frac{\tau}{m_i}(X_i + L_i), \\ \bar{v}_i &= v_i + \frac{\tau}{m_i}(Y_i + M_i), \qquad\qquad 18) \\ \bar{w}_i &= w_i + \frac{\tau}{m_i}(Z_i + N_i), \end{aligned}$$

a hol rövidség kedvéért:

$$L_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \quad M_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \quad N_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i},$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} m_i \{ &(\bar{u}_i - \bar{\alpha}_i)^2 + (\bar{v}_i - \bar{\beta}_i)^2 + (\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i)^2 - \\ &- (\overline{U}_i - \overline{A}_i)^2 - (\overline{V}_i - \overline{B}_i)^2 - (\overline{W}_i - \overline{\Gamma}_i)^2 \} - \\ &- \Phi_i(x_i,\, y_i,\, z_i;\, u_i,\, v_i,\, w_i;\, t)\,\tau = 0, \qquad\qquad 19) \end{aligned}$$

$\bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_i$, $\bar{\gamma}_i$ jelentik itt ama felület vagy görbe sebességi összetevőit, a melyen az m_i pont mozogni tartozik, $t+\tau$ időpillanatban és abban a pontban, a melybe az m_i pont a 6) alatti rendszert követve az x_i, y_i, z_i pontból τ idő alatt eljutott volna, $\bar A_i$, $\bar B_i$, $\bar\Gamma_i$ pedig ugyancsak e felület vagy görbe sebességi összetevőit a $t+\tau$ időpillanatban, de abban a pontban, a melybe az m_i pont az x_i, y_i, z_i pontból τ idő alatt a valódi mozgásnál jut. Világos, hogy ha α_i, β_i, γ_i a felület vagy görbe sebességi összetevői a t időpillanatban és x_i, y_i, z_i pontban:

$$\lim_{\tau=0} \bar\alpha_i = \lim_{\tau=0} \bar A_i = \alpha_i \quad \text{s í. t.}$$

$\bar\alpha_i$, $\bar\beta_i$, $\bar\gamma_i$, $\bar U_i$, $\bar V_i$, $\bar W_i$-től függetlenek, míg $\bar A_i$, $\bar B_i$, $\bar\Gamma_i$ ha $\bar\Xi_i$, $\bar H_i$, $\bar Z_i$-vel jelöljük ama pont koordinátáit, a melybe a valódi mozgásnál jutott τ idő alatt az m_i pont, (a C_i pont koordinátái) így irhatók:

$$\bar A_i = \alpha_i + \frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}(\bar\Xi_i - x_i) + \frac{\partial\alpha_i}{\partial y_i}(\bar H_i - y_i) + \frac{\partial\alpha_i}{\partial z_i}(\bar Z_i - z_i) \tag{20}$$

s í. t.

de

$$\bar\Xi_i - x_i = \frac{\tau}{2}(u_i + \bar U_i), \quad \bar H_i - y_i = \frac{\tau}{2}(v_i + \bar V_i),$$

$$\bar Z_i - z_i = \frac{\tau}{2}(w_i + \bar W_i). \tag{21}$$

Variálva a 19) alatti egyenleteket $\bar U_i$, $\bar V_i$, $\bar W_i$ szerint a 20) és 21) tekintetbe vételével, a következőképen fogalmazhatjuk problémánkat analitikai alakban:

Mily függvényei a t időnek $\bar U_i$, $\bar V_i$, $\bar W_i$, ha

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(m_i\frac{\bar U_i - u_i}{\tau} - (X_i + L_i)\right)\delta\bar U_i + \right.$$
$$+\left(m_i\frac{\bar V_i - v_i}{\tau} - (Y_i + M_i)\right)\delta\bar V_i +$$
$$\left. + \left(m_i\frac{\bar W_i - w_i}{\tau} - (Z_i + N_i)\right)\delta\bar W_i\right\} = 0. \tag{16}$$

$\delta\bar U_i$, $\delta\bar V_i$, $\delta\bar W_i$ mindazon értékeinél, a melyeknél:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\delta\bar U_i + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}\delta\bar V_i + \frac{\partial\varphi_k}{\partial z_i}\delta\bar W_i\right) = 0 \tag{17}$$
$$(k=1, 2, \ldots, r)$$

és

$$\begin{aligned}
&\left\{(\overline{U}_i-A_i)\left(1-\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}\frac{\tau}{2}\right)-\right.\\
&\quad\left.-\left[(\overline{V}_i-B_i)\frac{\partial \beta_i}{\partial x_i}-(\overline{W}_i-\Gamma_i)\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}\right]\frac{\tau}{2}\right\}\delta \overline{U}_i+\\
&+\left\{(\overline{V}_i-B_i)\left(1-\frac{\partial \beta_i}{\partial y_i}\frac{\tau}{2}\right)-\right.\\
&\quad\left.-\left[(\overline{U}_i-A_i)\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_i}-(\overline{W}_i-\Gamma_i)\frac{\partial \gamma_i}{\partial y_i}\right]\frac{\tau}{2}\right\}\delta \overline{V}_i+\\
&+\left\{(\overline{W}_i-\Gamma_i)\left(1-\frac{\partial \gamma_i}{\partial z_i}\frac{\tau}{2}\right)-\right.\\
&\quad\left.-\left[(\overline{U}_i-A_i)\frac{\partial \alpha_i}{\partial z_i}-(\overline{V}_i-\Gamma_i)\frac{\partial \beta_i}{\partial z_i}\right]\frac{\tau}{2}\right\}\delta \overline{W}_i=0. \qquad 22)\\
&\qquad\qquad (i=1,2,\ldots,n)
\end{aligned}$$

Ezen egyenletek együttes fennállásából következnek a szokásos eljárást alkalmazva a mozgásegyenletek, hacsak a feltételi egyenletek egymástól függetlenek; be fogjuk bizonyítani, hogy a jelen esetben a 17) alatti egyenletrendszer tekintetbe vétele fölösleges, minthogy a 16) és a 22) alatti egyenletekből kiadódó mozgás a 17) alatti egyenleteket mindig kielégíti, más szóval, ha a K kényszer úgy minimum, hogy az eleven erőbeli veszteség a 19) alatti egyenletnek megfelelően történik akkor a rendszer pontjai a 17) alatti feltételi egyenleteknek eleget tesznek.

A mozgásegyenleteket tehát egyszerűen a 16) és 22) rendszerek együttes fennállásának föltételezéséből nyerjük. Fenti állításunk bizonyításához épen az így nyert mozgásegyenletekre van szükségünk:

A 16) és 22) együttes fennállásából következik, hogy:

$$\begin{aligned}
m_i\frac{\overline{U}_i-u_i}{\tau}-(X_i+L_i)+\mu_i(\overline{U}_i-A_i-P_i\tau)&=0\\
m_i\frac{\overline{V}_i-v_i}{\tau}-(Y_i+M_i)+\mu_i(\overline{V}_i-B_i-R_i\tau)&=0 \qquad 23)\\
m_i\frac{\overline{W}_i-w_i}{\tau}-(Z_i+N_i)+\mu_i(\overline{W}_i-\Gamma_i-S_i\tau)&=0
\end{aligned}$$

a hol P_i, R_i, S_i τ-tól független mennyiségek; részletes alakjukra szükségünk nincs, mert a τ szerinti határátmenetnél úgyis kiesnek.

Legközelebbi feladatunk μ_i meghatározása.

E végből a 19) alatti egyenletet kissé átalakítjuk; elvégezve a kijelölt négyzetreemeléseket tekintettel a 18) alatti egyenletekre s a τ^2-t tartalmazó tagokat elhagyva azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
&\tau\big((u_i-\bar{a}_i)(X_i+L_i)+(v_i-\bar{\beta}_i)(Y_i+M_i)+(w_i-\bar{\gamma}_i)(Z_i+N_i)\big)+\\
&+\tfrac{1}{2}m_i\{\bar{a}_i^2+\bar{\beta}_i^2+\bar{\gamma}_i^2-\bar{A}_i^2-\bar{B}_i^2-\bar{\Gamma}_i^2-\\
&-2(u_i\bar{a}_i+v_i\bar{\beta}_i+w_i\bar{\gamma}_i-\bar{U}_i\bar{A}_i-\bar{V}_i\bar{B}_i-\bar{W}_i\bar{\Gamma}_i)-\\
&-(\bar{U}_i+u_i)(\bar{U}_i-u_i)-(\bar{V}_i+v_i)(\bar{V}_i-v_i)-(\bar{W}_i+w_i)(\bar{W}_i-w_i)\}=\\
&=\Phi_i(x_i,\ y_i,\ z_i;\ u_i,\ v_i,\ w_i;\ t)\,\tau. \qquad 24)
\end{aligned}$$

Oszszuk el ezt az egyenletet $\frac{\tau}{2}$-vel s adjuk hozzá a 23) alatti rendszer első egyenletének $(\bar{U}_i-\bar{A}_i+u_i-\bar{a}_i)$-szorosát, második egyenletének $(\bar{V}_i-\bar{B}_i+v_i-\bar{\beta}_i)$-szeresét és harmadik egyenletének $(\bar{W}_i-\bar{\Gamma}_i+w_i-\bar{\gamma}_i)$ szorosát.

Az eredmény a következő:

$$\begin{aligned}
&-\{\bar{U}_i-\bar{A}_i-P_i\tau)(\bar{U}_i-\bar{A}_i+u_i-\bar{a}_i)+\\
&+(\bar{V}_i-\bar{B}_i-R_i\tau)(\bar{V}_i-\bar{B}_i+v_i-\bar{\beta}_i)+\\
&+(\bar{W}_i-\bar{\Gamma}_i-S_i\tau)(\bar{W}_i-\bar{\Gamma}_i+w_i-\bar{\gamma}_i)\}\mu_i=\\
&=(X_i+L_i)(u_i-\bar{a}_i-\bar{U}_i+\bar{A}_i)+\\
&+(Y_i+M_i)(v_i-\bar{\beta}_i-\bar{V}_i+\bar{B}_i)+\\
&+(Z_i+N_i)(w_i-\bar{\gamma}_i-\bar{W}_i+\bar{\Gamma}_i)+\\
&+\frac{m_i}{\tau}\{\bar{a}_i^2+\bar{\beta}_i^2+\bar{\gamma}_i^2-\bar{A}_i^2-\bar{B}_i^2-\bar{\Gamma}_i^2+u_i(\bar{A}_i-\bar{a}_i)+v_i(\bar{B}_i-\bar{\beta}_i)+\\
&+w_i(\bar{\Gamma}_i-\bar{\gamma}_i)+\bar{U}_i(\bar{A}_i-\bar{a}_i)+\bar{V}_i(\bar{B}_i-\bar{\beta}_i)+\bar{W}_i(\bar{\Gamma}_i-\bar{\gamma}_i)\}-\\
&-2\Phi_i(x_i,\ y_i,\ z_i;\ u_i,\ v_i,\ w_i;\ t).
\end{aligned}$$

Ha μ_i innen kiadódó értékét 23)-ba beteszszük s áttérünk a limesre úgy, hogy $\tau=0$, a következő képletekre kell tekintettel lennünk:

$$\lim_{\tau=0} \bar{U}_i = \lim_{\tau=0} \bar{u}_i = u_i = x'_i \qquad \text{s i. t.}$$

$$\lim \bar{A}_i = \lim \bar{a}_i = a_i \qquad \text{s i. t.}$$

$$\lim_{\tau=0} \frac{\bar{U}_i - u_i}{\tau} = \frac{du_i}{dt} = x''_i, \qquad \text{s i. t.}$$

végre minthogy:

$$\bar{A}_i = a_i + \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial x_i} (\bar{U}_i + u_i) + \frac{\partial \beta_i}{\partial y_i} (\bar{V}_i + v_i) + \frac{\partial \gamma_i}{\partial z_i} (\bar{W}_i + w_i) \right\} \frac{\tau}{2},$$

$$\bar{a}_i = a_i + \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial x_i} (\bar{u}_i + u_i) + \frac{\partial \beta_i}{\partial y_i} (\bar{v}_i + v_i) + \frac{\partial \gamma_i}{\partial z_i} (\bar{w}_i + w_i) \right\} \frac{\tau}{2},$$

$$\lim_{\tau=0} \frac{\bar{A}_i - \bar{a}_i}{\tau} = \tfrac{1}{2} \lim_{\tau=0} \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial x_i} (\bar{U}_i - \bar{u}_i) + \frac{\partial \beta_i}{\partial y_i} (\bar{V}_i - \bar{v}_i) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \gamma_i}{\partial z_i} (\bar{W}_i - \bar{w}_i) \right\} = 0. \qquad \text{s i. t.}$$

Ha tehát a 6) alatti egyenletrendszer megszabta mozgástól való eltérés GAUSS elvének megfelelően történnék, úgy azonban, hogy a rendszer szabadságát most már csak a 19) alatti egyenletek korlátolnák, a következő egyenletrendszer szolgáltatná a mozgásegyenleteket:

$$\left.\begin{aligned}
&m_i x''_i - X_i - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} + \frac{\Phi_i(x_i, y_i, z_i;\, x'_i, y'_i, z'_i;\, \tau)}{(x'_i - a_i)^2 + (y'_i - \beta_i)^2 + (z'_i - \gamma_i)^2} (x'_i - a_i) = 0 \\
&m_i y''_i - Y_i - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} + \frac{\Phi_i(x_i, y_i, z_i;\, x'_i, y'_i, z'_i;\, \tau)}{(x'_i - a_i)^2 + (y'_i - \beta_i)^2 + (z'_i - \gamma_i)^2} (y'_i - \beta_i) = 0 \\
&m_i z''_i - Z_i - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i} + \frac{\Phi_i(x_i, y_i, z_i;\, x'_i, y'_i, z'_i;\, \tau)}{(x'_i - a_i)^2 + (y'_i - \beta_i)^2 + (z'_i - \gamma_i)^2} (z'_i - \gamma_i) = 0 \\
&\qquad \varphi_k(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_n, y_n, z_n;\, t) = 0 \\
&\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, r;\ i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}\right\} A)$$

Kimutatjuk, hogy ez az *A)* alatti egyenletrendszer feladatunknak végleges megoldását szolgáltatja, minthogy, ha a mozgás az *A)* alatti egyenletek szerint történik, a 18) alatti feltételek azonosan ki vannak elégítve s így ezeknek tekintetbe vétele többé nem szükséges.

A 17) alatti feltételi egyenletek ugyanis a rendszer pontjaitól azt követelik, hogy bizonyos felületektől, a melyek az idővel szintén, változnak, ne távozzanak el, a felületekhez viszonyított relativ sebességi összetevőknek tehát e felület mindenkori normálisára merőlegesnek kell lenniök.

Legyenek ama felületek x_i, y_i, z_i pontja normálisainak iránykoszinusai, a melyeken a rendszer i-edik pontja maradni tartozik rendre a t időpillanatban

$$\begin{array}{lll} \Lambda_{i1}, & M_{i1}, & N_{i1} \\ \Lambda_{i2}, & M_{i2}, & N_{i2} \\ \Lambda_{i3}, & M_{i3}, & N_{i3} \end{array}$$

(a felületek száma lehet egy, kettő vagy három a szerint, a mint a pont egy felületen vagy görbén tartozik mozogni, vagy mozgása teljesen meg van szabva.)

A 12) egyenletek folytán tehát a t időpillanatban:

$$\Lambda_{il}(x_i'-\alpha_i)+M_{il}(y_i'-\beta_i)+N_{il}(z_i'-\gamma_i)=0. \qquad (l=1,2,3) \tag{24}$$

Ha a mozgás az $A)$ alatti egyenletek szerint megy végbe és a relativ gyorsulás összetevői szintén kielégítik a 24) alatti feltételeket, ez annyit tesz, hogy a pont a legközelebbi időelemben is eleget fog tenni a 12) alatti feltételeknek, azaz az $A)$ rendszer szolgáltatja a kivánt mozgásegyenleteket. S ez valóban így van, mert ha

$$\begin{array}{lll} F_{i1}, & G_{i1}, & H_{i1} \\ F_{i2}, & G_{i2}, & H_{i2} \\ F_{i3}, & G_{i3}, & H_{i3} \end{array}$$

ama felületek x_i, y_i, z_i pontjának gyorsulási összetevői a t időpillanatban, a melyeken az i-edik pont mozogni tartozik, az $A)$ rendszer megszabta mozgásnál az i-edik pont relativ gyorsulási összetevői e felületekre vonatkozólag:

$$
\begin{aligned}
x_i'' - F_{il} &= \frac{1}{m_i}\left(X_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right) - F_{il} - \frac{\Phi_i}{2\Theta_i}(x_i' - \alpha_i), \\
y_i'' - G_{il} &= \frac{1}{m_i}\left(Y_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\right) - G_{il} - \frac{\Phi_i}{2\Theta_i}(y_i' - \beta_i), \\
z_i'' - H_{il} &= \frac{1}{m_i}\left(Z_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i}\right) - H_{il} - \frac{\Phi_i}{2\Theta_i}(z_i' - \gamma_i), \\
&(l=1,2,3)
\end{aligned}
\qquad 25)
$$

a hol

$$\Theta_i = \tfrac{1}{2} m_i \left((x_i' - \alpha_i)^2 + (y_i' - \beta_i)^2 + (z_i' - \gamma_i)^2\right).$$

E relativ gyorsulási összetevőkről most már könnyű szerrel kimutathatjuk, hogy kielégítik a következő egyenleteket:

$$A_{il}(x_i'' - F_{il}) + M_{il}(y_i'' - G_{il}) + N_{il}(z_i'' - H_{il}) = 0, \quad (l=1,2,3) \qquad 26)$$

azaz a relativ gyorsulás a kényszererők irányára minden időpillanatban merőleges, ha csak e pillanatban a relativ sebesség merőleges volt a kényszererők irányára.

Ugyanis

$$
\begin{aligned}
&A_{il}\left(\frac{1}{m_i}\left[X_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right] - F_{il}\right) + \\
&+ M_{il}\left(\frac{1}{m_i}\left[Y_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\right] - G_{il}\right) + \\
&+ N_{il}\left(\frac{1}{m_i}\left[Z_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i}\right] - H_{il}\right) = 0, \\
&(l=1,2,3)
\end{aligned}
$$

mivel a nagy zárójelekben álló mennyiségek a 6) alatti egyenletrendszernek megfelelően történő mozgás relativ gyorsulási összetevői, a bennük szereplő λ_k-kat pedig épen úgy határoztuk meg, hogy a 12) alatti feltételek ki legyenek elégítve, azaz úgy, hogy a 6) szerint történő mozgás relativ gyorsulása merőleges legyen a kényszererők irányára.

Továbbá a 24) alapján

$$-\frac{\Phi_i}{2\theta_i}\left(A_{il}(x_i'-a_i)+M_{il}(y_i'-\beta_i)+N_{il}(z_i'-\gamma_i)\right)=0,$$

s összeadva e két egyenletet a 25) alapján világossá lesz a 26) alatti egyenlet helyessége.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a surlódás nélkül történő mozgástól való eltérés a surlódási feltétel mellett csak akkor minimum, ha ez eltérésnél a rendszer surlódás nélküli feltételei érintetlenek maradnak, a minimális kényszerrel történő mozgás ugyanis azonosan kielégíti e surlódás nélküli föltételeket; az *A)* alatti egyenletrendszer tehát valóban megoldását képezi a következő általános feladatnak:

Irjuk le Gauss *elve alapján egy n tömegpontból álló rendszernek mozgását, a melyre tetszőleges adott szabad erők hatnak s a melynek pontjai bizonyos adott nyugvó, mozgó vagy változó felületeken vagy görbéken tartoznak surlódás és közegellenállással mozogni.*

4. §. A levezetett surlódási egyenletek fizikai értelmezése.

Az *A)* alatti egyenletrendszer a 6) alatti rendszertől abban különbözik, hogy minden pont mozgásegyenleteinek baloldalán rendre a következő mennyiségek szerepelnek:

$$-A_i=\frac{m_i\Phi_i}{2\theta_i}(x_i'-a_i),\quad -B_i=\frac{m_i\Phi_i}{2\theta_i}(y_i'-\beta_i),\quad -C_i=\frac{m_i\Phi_i}{2\theta_i}(z_i'-\gamma_i).$$

Ha akarjuk, tekinthetjük az A_i, B_i, C_i-t egy vektor derékszögű összetevőinek, a mely vektort épen mert az *A)* alatti rendszer alapján összetevői a pont gyorsulásával X_i, Y_i, Z_i-hez hasonló összefüggésben vannak, szintén *erőnek* nevezhetünk, még pedig beláthatjuk, hogy jogosult a *surlódási* vagy *közegellenállási erő* elnevezés, minthogy e mennyiségek segitségével épen sikeresen irhatjuk le ama jelenségcsoportot, a melyet rendesen a «surlódási és közegellenállási jelenségek» név alatt szoktunk összefoglalni. *Az* A_i, B_i, C_i *összetevők által meghatározott vektor ugyanis mindig a pont relativ sebességével ellentett irányú,* ugyanis Φ_i a benne előforduló változók semmiféle értékénél negativ értékeket nem vehet fel s így az A_i, B_i, C_i meghatározta vektor iránykoszinusai:

$$-\frac{(x'_i-\alpha_i)}{\{(x'_i-\alpha_i)^2+(y'_i-\beta_i)^2+(z'_i-\gamma_i)^2\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$-\frac{(y'_i-\beta_i)}{\{(x'_i-\alpha_i)^2+(y'_i-\beta_i)^2+(z'_i-\gamma_i)^2\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$-\frac{(z'_i-\gamma_i)}{\{(x'_i-\alpha_i)^2+(y'_i-\beta_i)^2+(z'_i-\gamma_i)^2\}^{\frac{1}{2}}},$$

míg az m_i pont relativ sebességének iránykoszinusait ezekből megkapjuk, ha valamennyinek előjelét ellenkezőre változtatjuk. Ezek az ú. n. *surlódási és közegellenállási* erők tehát mindenkor a pont relativ sebességével ellentett irányúak teljesen megfelelően ama szerepnek, a melyet általában a surlódás és közegellenállásnak tulajdonítani szoktunk. Az *erő* név azonban az A_i, B_i, C_i összetevőknél ép oly formális, mint a milyen az L_i, M_i, N_i kényszererő összetevőknél volt s mindkét fajta erő abban különbözik a mozgástól függetleneknek képzelt ú. n. *szabad erőktől,* hogy a surlódási és kényszererők nem függetlenek ama szabad erőktől, a melyekkel egyidejűleg lépnek fel, sőt a surlódási erők nagy mértékben függhetnek a velük egyidejűleg fellépő kényszererőktől is.

Ha most a valóságban végbemenő jelenségeknek az *A)* alatti rendszer segítségével való hű leirását akarjuk adni, a

$$\Phi_i(x_i,\ y_i,\ z_i;\ x'_i,\ y'_i,\ z'_i;\ t)$$

függvényt kell a tapasztalati tényeknek megfelelően meghatározni.

E végből már külön kell választanunk két jelenségcsoportot, a melyeket mindeddig egyidőben vizsgálhattunk meg, épen mert Φ_i alakját egyelőre határozatlannak hagytuk, ugyanis a *surlódási* és *közegellenállási* jelenségeket.

Egy pont mozgásánál surlódásról fogunk beszélni, ha a pont két különböző anyagú közeg határfelületén tartozik maradni, és közegellenállásról, ha a pont mozgását egy folytonosan eloszlott anyagban végzi; a valóságban e jelenségek sohasem lépnek fel elszigetelve, azonban hol egyik, hol másik van túlsúlyban a másik felett, úgy hogy beszélhetünk egy bizonyos megközelítéssel külön surlódással és külön közegellenállással történő mozgásokról.

Közegellenállással történő mozgásnál (pl. változatlan hosszúságú fonálra függesztett szilárd golyó mozgása levegőben a nehézség behatása alatt) a valósággal meglehetős megegyezést kapunk, ha a Φ_i közegellenállási függvényt $\frac{k\Theta_i}{m_i}$-vel egyenlőnek veszszük, a hol k egy puszta számérték, a mely azon anyagnak jellemző adata, a melyben a mozgás végbemegyen. Φ_i ily módon való választása tulajdonképen annyit tesz, hogy a surlódás nélkül történő mozgás és a valódi mozgás relativ eleven ereje közti különbség a mindenkori relativ eleven erővel arányos (l. a 19) alatti egyenletet).

A mozgásegyenletek ez esetben:

$$
\left.
\begin{aligned}
m_i x_i'' - X_i - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} + k(x_i' - \alpha_i) &= 0,\\
m_i y_i'' - Y_i - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} + k(y_i' - \beta_i) &= 0,\\
m_i z_i'' - Z_i - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i} + k(z_i' - \gamma_i) &= 0.\\
(i=1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
\right\} \qquad B)
$$

Ezen egyenletrendszer alapján például az ellenálló közegben a nehézség, rugalmasság vagy mágnesség behatása alatt végbemenő lengő mozgásoknak a tapasztalattal igen szépen megegyező tárgyalása lehetséges, ugyanis a *B)* rendszer, mint speciális esetet magában foglalja a csillapított harmonikus mozgásnak:

$$x'' + Ax' + Bx = 0$$

differencziálegyenletét, a melylyel mind e jelenségek leirása történik s a mely módot nyujt az anyagok k közegellenállási együtthatójának meghatározására is.

Más esetekben pl. nagyobb sebességek fellépésénél a Φ_i alakját másképpen kell választanunk, hogy a tapasztalással megegyezésben maradjunk, az egyenletek tipusa azonban mindig az *A)* alatti marad.

Surlódással történő mozgásoknál tapasztalat szerint a surlódás folytán fellépő eltérés a surlódás elhanyagolásával számított mozgástól (a 6) alatti egyenletek szolgáltatta mozgástól) a rendszerre ható *kényszererőktől* függ, e kényszererők függvénye lesz tehát a Φ_i is.

Az m_i pontra ható kényszererő összetevőit jelöltük

$$L_i,\quad M_i,\quad N_i\text{-}$$

vel; nagysága

$$K_i = \{L_i^2 + M_i^2 + N_i^2\}^{\frac{1}{2}},$$

iránykoszinusai pedig:

$$\rho_i = \frac{L_i}{K_i} \qquad \sigma_i = \frac{M_i}{K_i} \qquad \tau_i = \frac{N_i}{K_i}.$$

K_i mindig merőleges a pont pályájára; reakczió erejét vagyis egy vele ellentetten egyenlő erőt szoktunk a pályára gyakorolt *nyomó erőnek* nevezni. Tapasztalat szerint a surlódási függvényt e nyomó erő függvényének kell tekintenünk, pl. ha első közelítésben felteszszük, hogy Φ_i K_i-val arányos (ha t. i. $K_i=0$, Φ_i is $=0$), a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} m_i x_i'' - X_i - K_i\left\{\frac{L_i}{K_i} - h_i(x_i' - \alpha_i)\right\} &= 0, \\ m_i y_i'' - Y_i - K_i\left\{\frac{M_i}{K_i} - h_i(y_i' - \beta_i)\right\} &= 0, \qquad C) \\ m_i z_i'' - Z_i - K_i\left\{\frac{N_i}{K_i} - h_i(z_i' - \gamma_i)\right\} &= 0, \end{aligned}$$

$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

a hol $\frac{m_i\Phi_i}{2\theta_i} = K_i h_i$ és h_i vagy állandó, vagy $x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i'$-nek alkalmasan meghatározandó függvénye.

Könnyen belátható, hogy ezen egyenletrendszer mint speciális esetet tartalmazza a surlódásnak eddig felállított legáltalánosabb egyenleteit, a LAGRANGE-KIRCHOFF-féle surlódási egyenleteket. Ha ugyanis az m pont pl. a

$$\varphi_1(x, y, z, t) = 0,$$
$$\varphi_2(x, y, z, t) = 0$$

felületeken tartozik maradni, azaz pályája elő van irva:

$$L_i = \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, \quad M_i = \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial y},$$
$$N_i = \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}$$

és a következő jelölést használva:

$$K_1 = \lambda_1 \left\{ \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \lambda_1 F_1$$
$$K_2 = \lambda_2 \left\{ \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \lambda_2 F_2.$$

a hol tehát K_1 a $\varphi_1 = 0$ felülettől, K_2 a $\varphi_2 = 0$ felülettől származó kényszererőt jelenti, könnyen belátható, hogy az összes kényszererő:

$$K = K_1 \cos(K_1, K) + K_2 \cos(K_2, K).$$

Ezen relácziók felhasználásával a *C)* rendszerből az i indeksz elhagyásával a következő rendszert kapjuk a jelen speciális esetre nézve:

$$\begin{aligned}
mx'' - X - \lambda_1 &\left\{ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - hF_1 \cos(K_1, K)(x' - \alpha) \right\} - \\
-\lambda_2 &\left\{ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - hF_2 \cos(K_2, K)(x' - \alpha) \right\} = 0, \\
my'' - Y - \lambda_1 &\left\{ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - hF_1 \cos(K_1, K)(y' - \beta) \right\} - \\
-\lambda_2 &\left\{ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - hF_2 \cos(K_2, K)(y' - \beta) \right\} = 0, \\
mz'' - Z - \lambda_1 &\left\{ \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - hF_1 \cos(K_1, K)(z' - \gamma) \right\} - \\
-\lambda_2 &\left\{ \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - hF_2 \cos(K_2, K)(z' - \gamma) \right\} = 0.
\end{aligned} \qquad D)$$

Ezek pedig, ha csak a h függvényt

$$\frac{k}{\left\{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

-nak választjuk, a hol k ismét állandó, vagy egy alkalmasan meghatározandó függvény lehet, az ismert LAGRANGE-féle egyenletek egy pontnak érdes, változó vagy mozgó előírt pályán való mozgására nézve (l. FRÖHLICH, Dynamika, I. rész 129 lap, 13) képlet).

A surlódási függvény ily választása:

$$\Phi_i = k_i K_i \left\{(x'_i-\alpha_i)^2+(y'_i-\beta_i)^2+(z'_i-\gamma_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

tehát a tapasztalattal kielégítő módon megegyező LAGRANGE-KIRCHHOFF-féle surlódási egyenletekhez vezetett. Φ_i ily módon való választása tulajdonképen annyit jelent, hogy az *eltérés a surlódás nélkül és surlódással történő mozgás relativ eleven erői közt mindig arányos a pályára ható nyomó erővel és a mindenkori relativ sebességgel.*

Ha k_i-t állandónak veszszük, a COULOMB-féle surlódási törvényt kapjuk, mely szerint a surlódási erő csakis a nyomó erőtől függ s a sebességtől teljesen független; ebben az esetben az A_i, B_i, C_i surlódási összetevők eredője:

$$k_i K_i.$$

E surlódási törvény érvényességére nézve bővebbet l. RÉTHY MÓR «A surlódás elméletéhez» czimű dolgozatában (Math. Phys. Lapok III. kötet, 5, 111, 224, 274. l.). Ugyanott más surlódási törvények tárgyalása is megtalálható, melyek mind az *A)* rendszer speciális esetei.

*

Sikerült tehát a surlódási és közegellenállási jelenségeket is beleilleszteni az általános mechanikai elvek keretébe, még pedig oly módon, hogy az összes ily jelenségekre vonatkozó eddigi eredmények, mint speczialis esetek ezen elvekből kiadódnak. A dolog természete szerint ez csak a mechanikai elveknek az 1. §-ban *második*nak nevezett csoportjával sikerülhet (Gauss elvével és König energéma elvével) a mi által ezen elvek általánosságuknál fogva messze túlszárnyalják a D'Alembert és Hamilton-féle elveket, a melyekkel a mechanikai jelenségeknek csupán egy bizonyos közelítéssel való leirása lehetséges.

Zemplén Győző.

A ZÖLLNER-FÉLE PHOTOMETER.

A legújabb időkig az astronomiának alig volt elhanyagoltabb ága a photometriánál. A XVIII. században még Bouguer és Lambert — az elméleti photometria megalapitói — oly primitiv műszerekkel dolgoztak, melyeket csak erősebb fényforrások mérésére használhattak, mint a Napra és Holdra, de már csillagok fénymérésére nem. Csak a mult században tapasztalunk e téren örvendetes fellendülést, a mikor az ifjabb Herschel és Steinheil használható műszerekkel alapitották meg az astrophotometriát. Bár a legutóbbi évtizedek tudományos és technikai vivmányai sokban hozzájárultak az égi photometriát szolgáló készülékek tökéletesitéséhez, még ma sem rendelkezünk minden elméleti és gyakorlati igényt teljesen kielégitő oly photometerrel, melylyel valamely csillag magnitudóját, nagyságrendjét néhány századig pontosan meghatározni lehetne. Ennek következtében oly subtilis kérdések, minők a bolygók megvilágitásának a problemája, vagy a változó csillagok fényjelenségeinek a vizsgálata, az astronomia megszokott pontosságával még nem fejthetők meg.

Pedig kétségtelen, hogy az égitestek fényviszonyainak vizsgálata époly fontos a csillagos égre vonatkozó ismereteink kibővítésére, mint helyzeteiknek a meghatározása. Seidel, de különösen Zöllnernek a mult század közepe táján megjelent szellemes dolgozatai általános érdeklődést keltettek az astrophotometria iránt úgy, hogy jelenleg a megfigyelő tevékenység annak minden ágára kiterjed. Ez annál örvendetesebb, mert a nagy anyaghalmaz feldolgozásához egyesek aránylag csak kevéssel járulhatnak, s csakis több észlelőnek czéltudatos együttműködése pótolhatja az eddig elmulasztottakat.

Az ó-gyallai csillagda is hozzájárulni kivánván e fontos munkához, a maga részéről a változó csillagok photometrikus megfigyelését tűzte ki főprogrammjául. Munkaterve megvalósithatása végett előbb egy ékphotometert,* midőn pedig ennek fogyatkozásai mindjobban szembetüntek, egy ZÖLLNER-féle astrophotometert szerzett be. E műszerrel végzett tekintélyesebb észlelési sorozat most már időszerűvé teszi a műszer ismertetését. De mielőtt erre rátérnék, legyen szabad azokat a feltételeket röviden körvonaloznom, melyek egy visuális megfigyelésekre szolgáló, s a czélnak teljesen megfelelő photometer szerkesztésénél tekintetbe jönnek.

Minden ily fajta műszer feladata vagy egy fénybenyomás eltünésének, vagy két fényforrás intensitása egyenlőségének a megállapitása lévén, végeredményben szemünk itélőképességére vagyunk utalva. Így előre várható, hogy a mérések pontosságának látóérzékünk physiologiai fogyatkozásai szabnak határt.

Mi ugyanis nem a fényforrás objectiv fényességét mérjük, hanem ennek physiologiai intensitását. Ez pedig úgy az objectiv fényességnek, mint a szinnek, vagy hullámhossznak függvénye lévén, a szem első természetes fogyatkozása a különböző szinű fényforrások összehasonlitásánál fog fellépni. Mennél nagyobb két fényforrás közti szinkülönbség, annál nagyobb eltérések mutatkoznak intensitásuk egyenlőségének megitélésében. Másik fogyatkozása látószervünknek, hogy nem képes szám szerint megbecsülni két egymástól észrevehetően különböző fénybenyomás relativ erősségét; végül nem tudja megállapitani, vajjon hosszabb idő eltelte után valamely fényforrás megtartotta-e intensitását bizonyos fokig avagy sem? Hosszas gyakorlat után szemünk csakis egymáshoz közel levő s igy egyidejüleg ható két fénybenyomás egyenlőségének megitélésére képes s erre is csak akkor, ha a két fényforrás látszólagos nagysága egymással közel egyenlő s felületük megvilágitása egyenletes. Megvilágitott pont-

---

* Az ékphotometerről bővebbet lásd br. HARKÁNYI B.: «A Nova Persei photometriai megfigyelései» Math. és Term.-tud. Értesítő XIX. köt. 3. füz.

nak megvilágitott felülettel való összehasonlítása a tapasztalás szerint teljesen megbizhatatlan eredményt ad. A szem érzékenysége végül megköveteli, hogy a mérendő fénybenyomások sem tulerősek, sem tulgyengék ne legyenek. Első esetben a látóidegek tulerős ingereltetése folytán azok eltompulása, a másodikban a szemnek tulságos megerőltetése áll elő, a mi a fénybenyomások helyes felfogását meghamisíthatja.

Az imént érintett feltételeken kívül egy a czélnak megfelelő photometer constructiójánál főkép arra kell tekintettel lennünk, hogy az összehasonlítandó fényforrások közül az egyiknek elevenerejét vagyis objectiv fényességét mérhető módon megváltoztatni módunkban legyen, hogy mindkettő a szemre egyenlő physiologiai benyomást létesíthessen. Az optika elemeiből jól ismert RITCHIE, FOUCAULT, RUMFORD és BUNSEN-féle photometerek ez utóbbi követelést eléggé kielégitik. Lássuk már most, hogy a mondott követelményeknek mennyiben felel meg a ZÖLLNER-féle astrophotometer.

ZÖLLNER első — technikai czélokat szolgáló — photometerét 1857-ben, ismert astrophotometerét 1861-ben készitette.* Lényeges részei a tulajdonképeni intensitásmérő és a colorimeter.

Az intensitásmérés a polározott fény sajátságainak felhasználásával történik. Két kettőstörésű prismán át, melyek közül az egyik mint polarisátor, a másik mint analysátor működik, fénysugarat vezetve, ennek intensitása bizonyos határok között mérhető módon változtatható. A polarisatorra — ha ez WOLLASTON- vagy ROCHON-prisma — eső fénysugár I intensitása két egyenlő fényességü componensre bomlik, melyek közül a rendes sugár a prisma főmetszéssikjában, a rendkívüli rája merőlegesen polározódott. Legyenek a kilépő fénysugarak intensitásai i_1, i_2, a prisma anyagának fényátbocsátó coefficiense m, úgy nyilvánvaló:

$$i_1 = \tfrac{1}{2} mI \quad \text{és} \quad i_2 = \tfrac{1}{2} mI.$$

* ZÖLLNER: Grundzüge einer allgemeinen Photometrie des Himmels; Berlin, 1861.

Ha a polarisátorból kilépő két fénysugár NICOL-prismára, mint analysátorra esik, mindegyik már csak egy-egy kilépő sugarat adhat, melyeknek intensitásai MALUS törvénye értelmében:

$$i_1' = \tfrac{1}{2} m^2 I \sin^2\varphi \quad \text{és} \quad i_2' = \tfrac{1}{2} m^2 I \cos^2\varphi$$

képletekből adódnak, hol φ a prisma főmetszéssíkjának a fénysugár polarisátió síkjával képezte szög.

ZÖLLNER polarisatornak is NICOL-prismát használt. Az analysáló NICOL-prismából tehát csak az

$$i_2' = \tfrac{1}{2} m^2 I \cos^2\varphi \qquad a)$$

intensitású fénysugár léphet ki, a hol φ a NICOL-prismák főmetszéssíkjai bezárta szög.

Ha ezt a fényforrást egy oly másik I_1 intensitású fényforrással hasonlítjuk össze, melyet közvetlenül, polározódó közegek nélkül figyelünk, akkor i_2'-t az analysáló Nicol kellő forgatása által egyenlővé tehetjük I_1-gyel. A fénybenyomások egyenlősége, azaz $I_1 = i_2'$ mellett legyen $\varphi = \alpha_1$, azaz

$$I_1 = \tfrac{1}{2} m^2 I \cos^2\alpha_1 .$$

Hasonlóképen egy I_2 fényforrásra nyerünk egy oly $\varphi = \alpha_2$ szöget a Nicolok megfelelő forgatása által, hogy

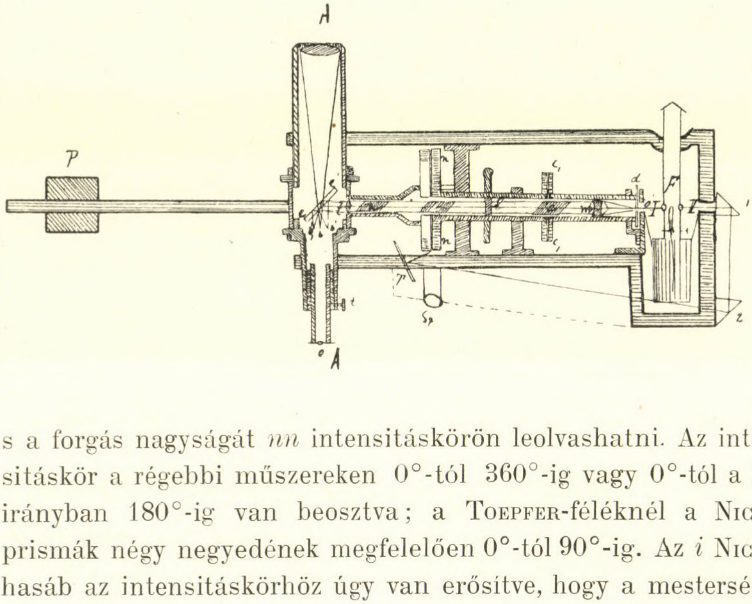
$$I_2 = \tfrac{1}{2} m^2 I \cos^2\alpha_2 ,$$

és így

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\cos^2\alpha_1}{\cos^2\alpha_2} . \qquad A)$$

ZÖLLNER astrophotometerénél talál alkalmazást e módszer. Maga e műszer — mint a mellékelt ábra mutatja — AA távcsőből áll, mely egyik oldalán a mesterséges csillagok előállítására szolgáló optikai szerkezetet, a másikon pedig a P ellensúlyt hordja. A természetes csillag képe b-ben jelenik meg, a mesterségesekéi b_1 és b_1'-ben állanak elő. Mérés előtt e csillagokra a gyöngén nagyitó o oculárt t hajtócsavar segélyével élesen beállítjuk. A mesterséges csillagokat az F petroleumlámpa I fénynyalábja állítja elő a következőképen.

I fénysugár o nyilás mögött lévő s különböző nagyságú környilással ellátott d diaphragmára esik, melynek képét m biconcavlencse kisebbíti. Erről a fénysugár c NICOL-prismán, a tengelyére merőlegesen csiszolt l quarclemezen s végül az i és h NICOL-prismákon át s f gyűjtőlencsén keresztül ee' planparallel üveglapra esik s a b' és b'_1 pontalakú képpé egyesül az üveglemez mellső és hátsó felületén való reflexió útján. A NICOL-prismák közül h szilárd helyzetű, a másik kettő a köztük levő quarclemezzel együtt a szilárd helyzetű h-hoz képest forgatható



s a forgás nagyságát nn intensitáskörön leolvashatni. Az intensitáskör a régebbi műszereken 0°-tól 360°-ig vagy 0°-tól a két irányban 180°-ig van beosztva; a TOEPFER-féléknél a NICOL-prismák négy negyedének megfelelően 0°-tól 90°-ig. Az i NICOL-hasáb az intensitáskörhöz úgy van erősítve, hogy a mesterséges csillagok eltünjenek akkor, a mikor az intensitáskör 0-ra van beállítva, azaz a mikor az i és h NICOL-hasábok főmetszései egymásra merőlegesek. Ebben az esetben a mesterséges csillagok intensitásai egyszerűen arányosak az elforgatásszöge sinusának négyzetével (MALUS törvénye) és így $A)$ alatti egyenletünkben a cosinusok helyébe sinusok lépnek, azaz:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_2}. \qquad B)$$

Ha tehát két csillag fényintensitásának viszonyát akarjuk meghatározni, a távcsövet egymásután beállítjuk a két csillagra s úgy választjuk meg a *d* diaphragma nyilását, hogy a mesterséges csillagok képei közel egyenlők legyenek a mérendő csillagokéival, azután a mesterséges csillagok közül az egyiknek (rendesen a jobbikét, mely a fényesebb, mivel az *ee'* planparallel üveg mellső felületéről való reflexió útján származik) intensitását a megfigyelendő csillagéval egyenlővé teszszük az intensitáskör forgatása által s e körön egyúttal leolvassuk a Nicol-hasábok főmetszéseinek hajlásszögét. Ily módon meghatároztuk az I_1 intensitású csillaghoz tartozó α_1 szöget s hasonló módon meghatározzuk az I_2 intensitású csillag α_2 szögét. *B*)-ből:

$$\log I_1 - \log I_2 = 2\,[\log \sin \alpha_1 - \log \sin \alpha_2].$$

Ha I_1 és I_2 közül az egyik értéke adva van — mint a változó csillagok esetében, a mikor a változót valamely photometrikus catalogusból alkalmasan kiválasztott s így ismert fényű csillaggal összehasonlítjuk — a másik értékét könnyen kiszámíthatjuk. Hogy a fényességek logarithmusainak különbségét a szokásos photometriai nagyságrendben kifejezhessük, a nyert eredményt még 0·4-el osztjuk. Az α értékében pedig az intensitáskör zéruspontjának hibás értéke nem szerepel, mert a Nicol-hasábok főmetszései négy helyzetben zárják be egymással ugyanazt az

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{4} \alpha_i}{4}$$

szöget s a középérték vételénél a zéruspont hibája kiesik.

Hangsulyoztuk, hogy a különböző szinű fényforrások az intensitás egyenlőségének megitélését megnehezítik. Ezen a bajon Zöllner az által segitett, hogy az *i* és *c* hasábok közé, melyek egymáshoz képest is elforgathatók, az *l* quarzlemezt helyezte. Erre ráesik a *c* Nicol-hasáb által polározott fény, mely a lemezen való áthaladás után *i* által analysáltatik s így a mesterséges csillagok az *i* és *c* Nicol-hasábok főmetszései képezte szög értékének változása szerint más és más szinben jelenik meg, mely azonban a quarzlemez vastagságától is függ. E két adat egyértelműen határozza meg a mesterséges csillagok szinét. ZÖLLNER photometere tehát colorimeter is. De hogy ilyennek használhassuk, szükséges a *c* hasábot osztott körrel, az ú. n. colorimeterkörrel (az ábrában c_1c_1) ellátni s ennek indexhibáját meghatározni. Különben ZÖLLNERen kívül senki sem használta fel rendszeresen a colorimetert szinmérésekre. Az egész berendezés csak arra szolgál, hogy a mesterséges csillagok szinét a természetesével egyenlővé tegyük; épp azért a colorimetert közepes csillagszínre állítjuk be s ezen állásában végleg meghagyjuk. A legtöbb csillag szine vagy fehéres vagy sárgás-fehéres s e két szin a colorimeterrel nem adható teljesen vissza, mert a colorimeter szinei oly keverékszinek, melyek a vöröses ibolyából gyorsan kékbe mennek át, azután zöldes árnyalatokon keresztül lassabban világossárgához vezetnek, végül a zöld különböző fokozatain át narancs majd biborvörös szinhez jutunk.*

Az összehasonlító csillagokat előállító petroleumlámpa a photometer távcsövéhez erősített keretben függ s szabadon mozog úgy, hogy a lámpa mindig függőleges marad. A lámpa II fénysugara az 1 és 2 prismákon át *T* tükörre vetíttetik, a melyről reflectálás által az intensitáskört megvilágítja s így az *Sz*-nél lévő szem az intensitáskör adatait közvetlenül leolvashatja. Az ábrában látható vonalak egy védőernyőt jeleznek, mely az észlelő szemét zavaró fénybehatások ellen megvédelmezi.

Végül a ZÖLLNER-féle photometer előnyeiről és hátrányairól, használatáról s a vele elérhető pontosságról óhajtok néhány megjegyzést tenni. A többi, az égi photometriát szolgáló photometerek fölött nagy előnye az, hogy a mesterséges csillagpár ugyanarra a háttérre projiciálódik, a melyen a természetes csillag jelenik meg s így az égnek fényessége nincs befolyással a mérések pontosságára. A tapasztalat azt bizonyítja, hogy a lámpa lángjának magassága több órán át is állandó. Léghuzam és szél ugyan megpislogtathatja a lángot, de photometerünk

* A colorimeter részletes elméletét itt mellőzöm, minthogy azt TERKÁN LAJOS e helyen legközelebb ismertetni fogja.

lámpája oly kitünően van légáram ellen védve, hogy a műszer használata óta csak két-három izben vettem észre pislogást. Az egyedüli kifogás, melyet a műszer ellen felhozhatni, az, hogy a gyakorlott szem a mesterséges csillagokat a természetesektől az első pillanatra tudja megkülönböztetni. Míg a mesterséges csillagok élesen határolt, bágyadt kinézésű, köralakú pontocskák, addig a természetes csillagok sugáralakú képek, mi erős légáramlatoknál különösen jellemző s így hosszas gyakorlat szükséges, míg a szem hozzászokik a mesterséges és természetes csillag ezen elütő képéhez. Gyakorlott észlelő egyes beállításának közepes hibája Müller szerint $\pm 0{\cdot}092$ magnitudó, tehát négy beállítás középértékének hibája $\pm 0{\cdot}046$ magnitudó. E photometerrel elérhető pontosság általában $\pm 0{\cdot}06$ magnitudóra tehető. Müller és Kempf «Photometrische Durchmusterung des nördlichen Himmels» czímű photometrikus catalogusa egy-egy adatának valószínű hibája csak $\pm 0{\cdot}04$ magnitudó, tehát oly rendkivül pontos eredmény, melyet más a stellarphotometriát szolgáló műszerrel felülmulni eddig nem sikerült.

E sorok keretében még csak a photometriai megfigyelések kiváló fontosságára óhajtok néhány szóval utalni. Eltekintve attól, hogy a pontos photometriai adatok bizonyos mértékben pótolják a nagy nehézségekkel összekötött parallaxis meghatározásokat, a mennyiben belőlük különös feltevések mellett az állócsillagoknak naprendszerünktől való távolságára s azoknak térbeli eloszlására következtethetünk, még más szempontok is érvényesülnek, melyek megbizható photometriai méréseket nélkülözhetetlenekké tesznek. Sok állócsillag mutat fényváltozást, melynek eredetét vagy magán az illető égitest felületén, vagy annak közvetlen környezetében kell keresnünk. E fényingadozások egyes csillagoknál periodikus lefolyásuak, másoknál teljesen szabálytalanok. E jelenségekkel szorosan függ össze az a kérdés, vajjon az idők folyamán nincs-e minden állócsillag oly fényváltozásnak alávetve, mely fejlődésének különböző stádiumaival kapcsolatban van. E változások törvényszerűsége csakis az egyes objectumok hosszas megfigyelése által mutatható ki. Ezért mindenkor kötelessége, hogy a rendelkezésére álló eszközökkel a csillagos ég pontos leirását adja s ez által a későbbi nemzedéknek megbizható anyagot szolgáltasson, melyre mint megbizható alapra lehessen további speculatiókat épiteni.

De a photometrikus mérések az Algol-typusú fényváltozó csillagok természetére máris új fényt derítettek. Pickering már 1880-ban az Algol (β Persei) fényváltozását két csillag feltételezése által iparkodott megmagyarázni, úgy, hogy a fényesebb nagyobb csillag körül egy gyengébb sötét test körpályán mozog, sőt a fényváltozás maximum-minimum periodusából a hypothetikus kettőscsillag pályáját is kiszámította. Vogel spectroscopikus megfigyeléseiből a Doppler-Fizeau elv alapján meghatározta, hogy a spectrumot szolgáltató csillag 1·4 napig távozik tőlünk fényességének minimuma előtt, ugyanannyi idő alatt közeledik hozzánk minimuma után. Ez által egy közös súlypont körül forgó rendszer létezése kétségtelenül van bebizonyítva. A photometrikus mérések meghatározzák a keringési időt és a két test tömegét; a spectroscopikus mérések pedig a látás vonalába eső sebességi componenst. Feltételezve, hogy a két test egyenlő sűrűségű és körpályán mozog, Vogel a következő eredményekhez jutott:*

a fényesebb főcsillag átmérője	1707000	kilometer
a sötétebb kisérő «	1336000	«
centrumaik távola	5194000	«
a főcsillag másodperczenkinti sebessége ...	42	«
a kisérő « « ...	88	«
a főcsillag tömege $^4/_9$-ed naptömeg		
a kisérő « $^2/_9$-ed «		

Az *Y* Cygni és *Z* Herculisra vonatkozó adatokat Dunér dolgozta fel e szempontból, de erről részletesebben most nem szólunk.

Befejezésül mintegy beszámolásképen még felsorolom azokat

* Lásd: Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam, Band 7.

a változó csillagokat, melyeket ez év második felében a Zöllner-féle photometerrel mértem. A rövid periodusú változók közül *S* Sagittæt 31, 1901. 3. Sagittæt 26 s *T* Vulpeculæt 20 izben; a hosszú periodusú változók közül *T* Andromedæt 5, *R* Andromedæt 3, *T* Cassiopeiæt 1, *S* Cetit 2, *S* Cassiopeiæt 1, *R* Pisciumot 2, *R* Arietist 2, *S* Perseit 1, *R* Cetit 2, *R* Taurit 2, *R* Aurigæt 2, *U* Orionist 1, *R* Virginist 1, *S* Ursæ majorist 1, *S* Bootist 1, *R* Camelopardalist 1, *R* Bootist 2, *S* Serpentist 1, *S* Coronæ borealist 5, *R* Herculist 4, *U* Herculist 1, *R* Draconist 3, *S* Herculist 1, *T* Herculist 4, *RX* Herculist 7, *RZ* Herculist 2, *X* Lyræt 2, *RR* Lyræt 1, *U* Vulpeculæt 1, *R* Cygnit 4, *X* Cygnit 5, *R* Delphinit 4, *V* Cygnit 2, *T* Aquariit 1, *R* Vulpeculæt 5, *S* Cepheit 3, *R* Pegasit 3, *S* Pegasit 3, *R* Aquariit 2, *R* Coronæt 1 és *R* Serpentist 1 estén.

Az egyes csillagok megfigyeléséből nyert érdekesebb fénygörbék közlését más alkalomra tartom fenn magamnak.

Tass Antal.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

Hosszlökések visszaverődésének előállítása sodronyspirálison. Nem egy alkalmas eszközünk van, a melyek a hosszhullámok feltüntetésére szolgálnak. Ezekhez csatlakozik F. Richarz-nak spirálisa is, a melyet kevés fáradsággal bárki megkészíthet (Sitz.-Ber. d. Naturf.-Gesellsch. z. Marburg. 1901.).

Vegyünk elő 34 m. hosszú és 1·5 mm. vastag aczélsodronyt, készítsünk ebből oly spirálist, a melynek 115 menete és minden menetnek kb. 9 cm. átmérője van. E spirálisnak hossza kb. 6 m.; ha tehát egyik végét az előadó terem mennyezetére erősítjük, úgy alsó vége a kisérletező asztal szintjén lóg és kényelmesen kezelhető.

Indítsunk most ez eszköz alsó végén egyszeres hosszlökést olyatén-képen, hogy azt néhányszor felülről lefelé húzzuk, vagy alulról fölfelé taszítjuk: úgy e lökés a spirális mentén fölfelé halad, majd visszaverődik, azután lefelé megy, itt szintén visszaverődik, és így tovább. A felső és alsó visszaverődés között az a különbség van, hogy a felső visszaverődésnél a szilárd vég miatt az egyes sodronymenetek mozgás-iránya megfordul; az alsó visszaverődésnél, a szabad végen, e megfordulás nem áll elő. Könnyen megfigyelhetni a mozgásnak egymásra következő változatait, mert a mozgásnak egyszeres áthaladása a spirálison körülbelül egy másodperczig tart. Főleg azt a két esetet lehet egymástól világosan megkülönböztetni, hogy a sodronymeneteknek eltolódásuk van úgy a tovahaladó impulzusnak mentén, mint azzal ellenkező irányban. Az első esetben a spirálison végighúzódó sürüsödés látható, a második esetben pedig ritkulás. E szerint azok az ellentétek, a melyek a hosszhullámoknál a különböző helyeken egymásután előtérbe lépnek, e kisérletnél jól szemlélhetők. Azt is könnyen észrevehetni, hogy a fölfelé haladó sürűsödés a szilárd végről mint sürüsödés, ellenben az alsó, szabad végről mint ritkulás verődik vissza; a fölfelé haladó ritkulás pedig a felső, szilárd végről mint ritkulás, a szabad végről mint sürűsödés tér vissza. Nem kevésbbé figyelemreméltó az a körülmény, hogy valahányszor a lökés a spirálison keresztül futott, tehát fölérkezett és visszatért, a spirálisnak összes rövidülése, illetőleg hosszabbodása változatlan maradt; a miből következik, hogy ha a lökés a spirálison kétszer megy át, a rövidülések és hosszabbodások váltakoznak. *Sz. K.*

ÉRTESÍTŐ A MATH. ÉS PHYS. TÁRSULAT ELŐADÁSAIRÓL.*

1902. január 23. WITTMANN FERENCZ: A sivító Volta-ívről.
FEJÉR LIPÓT: Az izoperimetrikus problemáról.

— február 6. LENGYEL BÉLA: A Boltwood-féle módosított higany-légszivattyú és Röntgen-kisérletek.
RAFFMANN JAKAB: Numerikus interpoláczió kapcsolatban a legkisebb négyzetek módszerével.

— február 20. BAUER MIHÁLY: A számtani haladvány elméletéhez.
MIKOLA SÁNDOR: Egy optikai jelenség.

— márczius 6. VISNYA ALADÁR: A számelmélet és a kristallografia egy közös problemájáról.
STEINER LAJOS: A területi sebesség elve a meteorologiában.

— márczius 20. CSILLAG VILMOS: Adott ellipszis és kör affinitásáról.
STEINER LAJOS: Langley bolometeres vizsgálatairól.

— április 10. IX. rendes közgyűlés (ld. XI. évf. 231. lap) és rendes ülés.
KÜRSCHÁK JÓZSEF: Adalékok az elemi szerkesztések elméletéhez.
PALLAGI GYULA: Megjegyzések az energia-törvény filozofiájához.

— novemb. 6. A IX. mathematikai tanulóverseny eredményének kihirdetése és a díjak kiosztása.
FRÖHLICH IZIDOR: A polározott fény interferencziája törvényeinek kisérleti bemutatása.

---

* A XI. évfolyam 47. lapján adott értesítő folytatása.

1902. novemb. 20. Bogyó Samu : A halandósági valószínüség kiegyenlítése.
Zemplén Győző : Az Ostwald-féle maximum-elvről.
— decz. 4. Kürschák József : Az absolut geometria két tétele.
Kövesligethy Radó : Egyszerű csillagászati előadási kisérlet.
— decz. 18. Beke Manó : A Bolyai-féle trigonometria.
Gruber Nándor : Elektromos hullámok gáz- és vízvezető csövekben.
1903. január 22. Réthy Mór : A Bolyai és Riemann-féle trigonometriáról.
Hoor Mór : A dielektrikus testek szívós tulajdonságairól.
— február 5. Bauer Mihály : Az algebrai számok kongruenczia-feltételekkel való jellemzése.
Lakits Ferencz : Régi templomok beirányítása.
— február 19. Zemplén Győző : Grafikus interpoláczió.
Mahler Ede : A zodiakus eredete.
— márcz. 5. Gruber Nándor : A Pupin-féle telefonia nagy távolságokra.
— márcz. 19. Réthy Mór : A quadratura circuli Bolyai Jánosnál (I. előadás).
Zemplén Győző : A mechanikai elvek alkalmazása surlódással járó mozgásokra.
— április 23. Réthy Mór : Megjegyzések Zemplén Győző : «A mechanikai elvek alkalmazása surlódással járó mozgásokra» czimű előadására.
Szerényi Géza : Kör- és kúpszelet metszéspontjainak szerkesztése.
— május 2. X-ik rendes közgyűlés.

A LINEÁR HELYETTESÍTÉSEKBŐL KÉPEZETT VÉGES CSOPORTOK INTRANZITIVITÁSÁNAK KRITÉRIUMAIRÓL.

Intranzitivnak nevezzük MASCHKE* nyomán a lineár helyettesítések valamely csoportját akkor, ha oly alakra transzformálható, hogy a transzformált csoport határozatlanai egyes rendszerekre oszlanak úgy, hogy minden helyettesítésben az ugyanazon rendszerhez tartozó határozatlanok csak egymás között szenvednek helyettesítést. Intranzitiv pl. egy quaternär csoport, a melyben minden helyettesítés együtthatórendszere ilyen alakú:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha' & \beta' \\ 0 & 0 & \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

De ez mindjárt abban az alakban van megadva, a melyben minden helyettesítése, a mint mondani szokás, *szétbontható (zerlegbar)*, és pedig *egyforma módon szétbontható (ähnlich zerlegbar)*. Rövidesen ilyenkor a csoportot is szétbonthatónak mondhatjuk. Az ilyet természetesen nem tekinthetjük igazi quaternär csoportnak, mert nem egyéb, mint két izomorf binär csoport összerakása. Ha csoportunkat transzformáljuk, úgy ezen szétbonthatósága általában teljesen elmosódik, de mivel a transzformált csoportot az eredetivel velejére nézve azonosnak szokás venni, az így előálló csoportok is csak látszólagosan tartoznak az illető magasabb dimenzióhoz és ily értelemben mondjuk őket intranzitiveknek. De

* Beweis des Satzes, dass diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehends verschwindende Coefficienten auftreten, intransitiv sind. Math. Ann. 52. köt. 363. l.

ha e megkülönböztetést elfogadjuk, akkor, mivel az egyes helyettesítések alakját tekintve semmi sem mutatja a csoport intranzitivitását, (a mely épen abban áll, hogy az *összes* helyettesítések alkalmas transzformáczióval *egyszerre* mennek át *egyforma módon* szétbontható alakba), az a kérdés támad, hogyan lehet mégis ezeket az intranzitiv csoportokat a valódi magasabb dimenziójú (mondhatjuk : tranzitiv) csoportokkal szemben felismerni.

A véges csoportokra nézve MASCHKE az idézett dolgozatban egy tételt ad, mely bizonyos feltételeket elegendőknek állapít meg az intranzitivitás felismerésére. Mint a czíme is mondja, ez az elegendő feltétel az, hogy a csoport helyettesítéseinek együtthatórendszerében legalább egy (nem a fősaid diagonálisban lévő) helyen mindvégig zérus álljon. De természetesen ez nem szükséges, mert a transzformáczió által a zérusok általában teljesen elvesznek a szétbontható alakból. Könnyen sikerül azonban ehhez egy *szükséges és elegendő feltétel* levezetését fűzni, a mely már biztos és a döntést minden esetben megadó kritérium gyanánt szolgálhat.

E tétel a következő :

Arra nézve, hogy az n-változós lineár helyettesítések valamely véges csoportja intranzitiv legyen, szükséges és elegendő, hogy létezzék egy n-nél alacsonyabb rangú szemidefinit HERMITE-*féle alak*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_i\bar{x}_k\,, \qquad (a_{ki}=\bar{a}_{ik})^{*}$$

mely a csoport minden helyettesítésénél invariáns. És pedig, ha ezen alak rangszáma r, a csoport oly alakra transzformálható, hogy egy r-dimenziós és egy vele izomorf (n—r)-dimenziós lineár csoportra bontható szét.

A tételnek kritérium gyanánt való alkalmazása adott csoport esetében számításokat igényel, a melyek ilyen alacsonyabbrangú invariáns HERMITE-féle alakok meghatározását czélozzák, miközben, ha a csoport nem intranzitiv, annak kell kiadódnia, hogy

* $\bar{x}_k$ és $\bar{a}_{ik}$ szokásos módon az x_k illetőleg a_{ik} konjugált komplex értékeit jelölik.

csak zérusadrangút (azonosan zérust) kapunk. Elegendő természetesen esetleg a csoportból csak az ú. n. *alkotó (erzeugende)* helyettesítéseknek egy rendszerével operálni.

Ha azonban a csoport csak kissé speczialis alakú, (így pl. egy helyettesítése kanonikus alakra van redukálva, főleg ha ez olyan, hogy karakterisztikus egyenletének gyökei mind különbözők) e számítások aránylag elég kényelmesen alakulnak, a mint azt alkalmam lesz megmutatni, midőn bizonyos véges csoportok tényleges előállítását adó számítások eredményeit fogom megbecsülni e kritérium segítségével. E számítások, melyeket RADOS tanár úr megbizásából végeztem, a kinek köszönettel tartozom az impulzusért, legközelebb szintén meg fognak jelenni, előbb azonban az említett általánosabb eredmények levezetését kivánom ismertetni és némi más irányú alkalmazásukat adni.

I.

Kiinduló pontunk a következő tétel:

Az n-dimenziós lineár helyettesítések minden véges csoportja változatlanul hagy egy n-változós definit pozitiv HERMITE-*féle alakot.**

HERMITE-féle alaknak nevezzük az oly bilineár alakot, melynél a határozatlanok két rendszerében konjugált komplex értékek felelnek meg egymásnak és az együtthatórendszerben szimmetrikusan fekvő együtthatók is konjugált értékek (a főátlóban levők valósak):

$$H(a \mid x, \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k . \qquad (a_{ki} = \bar{a}_{ik})$$

Mivel tehát ez önönmagának a konjugáltja, az x-ek bármely értékrendszerénél csakis valós értékeket vesz fel. Ha értékkészlete csupa pozitiv számokból áll — kivéve az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ helyet, a hol zérus — definit pozitivnak mondjuk.

---

* LOEWY: Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjugées de M. HERMITE. (Compt. Rend. 123. köt. 168—171. lap.)

MOORE: An Universal Invariant for Finite Groups of Linear Substitutions etc. (Math. Ann. 50. köt. 213. lap.) L. itt a régebbi irodalmat is.

Ha az x-eket lineár helyettesítésnek vetjük alá:

$$x_i = \sum_{l=1}^{n} t_{il} y_l, \quad \bar{x}_i = \sum_{l=1}^{n} \bar{t}_{il} \bar{y}_l$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

megint ilyen alakra jutunk:

$$H(a \mid x, \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k = \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a'_{lm} y_l \bar{y}_m = H(a' \mid y, \bar{y}),$$

mert

$$a'_{lm} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} t_{il} \, a_{ik} \bar{t}_{km}$$

lévén

$$a'_{ml} = \bar{a}'_{lm}$$

és világos, hogy definit pozitiv alakokból megint csakis ilyeneket kapunk, ha a helyettesítés determinánsa nem volt zérus.

Legyen megadva már most a lineár helyettesítések egy véges csoportja, mely N számú helyettesítésből áll:

$$\left. \begin{array}{c} x_i = \sum_{l=1}^{n} t_{il}^{(r)} x_l \\ (i=1, 2, \ldots, n) \end{array} \right\} S_r \; (r = 1, 2, \ldots, N)$$

Alkalmazzuk ezeket mind rendre egy tetszőleges $H(\beta \mid x, \bar{x})$ definit pozitiv alakra. $\big(H(\beta \mid x, \bar{x})$ gyanánt, pl. legegyszerűbben választhatjuk az $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n$ kanonikus alakot$\big)$.

A $H(\beta \mid x, \bar{x})$-ból ily módon N számú $H(\beta^{(r)} \mid x', \bar{x}')$ alakot kapunk, ezek összege adja a kivánt invariánst:

$$H(a \mid x, \bar{x}) = \sum_{r=1}^{N} H(\beta^{(r)} \mid x, \bar{x}),$$

mert világos, hogy a csoport bármely helyettesítését alkalmazván, csak a $H(\beta^{(r)} \mid x, \bar{x})$ tagok sorrendje cserélődik fel. Kiemelendő azonban, hogy ez az invariáns mindig *tényleg* létezik, vagyis nem vagyunk kitéve annak, hogy végeredményben azonosan zérusra jussunk, mert, ha az egyes tagok olyan alakok, a melyek csupa pozitiv értékeket vesznek fel, és csak a kezdőpontban válnak zérussá, akkor az összeg is ilyen.

Tudvalevőleg minden definit pozitiv HERMITE-féle alak a következő kanonikus alakra redukálható:

$$K \equiv y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \cdots + y_n\bar{y}_n.$$

E redukcziót egész hasonlóan lehet lépésről-lépésre végrehajtani, mint a definit pozitiv quadratikus alakok transzformáczióját négyzetösszegekké.

A következőkben nagy szerepe van annak, hogy a lineár helyettesítések bármely véges csoportját oly alakra lehet hozni, hogy invariánsa épen ez a kanonikus alak legyen. MASCHKE nyomán rövidség kedvéért azt fogjuk mondani, hogy a csoport *az* HERMITE-*féle normálalakra van redukálva.*

Hogy e redukczió csakugyan megtörténhetik lineár helyettesítéseink csoportjellegének megőrzésével, azt szimbolikus számítás segítségével a következőképen láthatjuk be:

Legyen L az a lineár transzformáczió, mely H-t a K kanonikus alakba viszi át.

$$LH\bar{L} = K. \tag{1}$$

Csoportunk S_i helyettesítéseire csakis TS_iT^{-1} alakú transzformácziókat (az S_i bilineár alak két változó rendszerére nézve kontragrediens helyettesítéseket) szabad alkalmazni, mert csak akkor marad meg csoportjellegük. Megmutatjuk, hogy ha T gyanánt épen az előbbi L-et választjuk, mely az eredeti csoport H-ját a K kanonikus alakba vitte át, az új csoport invariánsa épen a K lesz.

Feltételünket, hogy H a csoport S_i helyettesítéseinél invariáns, így fejezhetjük ki:

$$S_iH\bar{S}_i = H. \tag{2}$$

Kiindulunk már most a következő identitásból:

$$L^{-1}LH\bar{L}\overline{L^{-1}} = H.$$

Ha erre két oldalról S_i-t és $\bar{S}_i$-t alkalmazzuk:

$$S_iL^{-1}LH\bar{L}\overline{L^{-1}}\bar{S}_i = S_iH\bar{S}_i = H$$

a (2) alatti feltétel szerint. De most L-t és $\bar{L}$-t alkalmazva két oldalról:

$$(LS_iL^{-1})(LH\bar{L})(\bar{L}^{-1}\bar{S}_i\bar{L}) = LH\bar{L}$$

a mi az (1) tekintetbe vételével:

$$(LS_iL^{-1})K(\bar{L}^{-1}\bar{S}_i\bar{L}) = K$$

alakban épen azt mondja ki, hogy K csakugyan invariánsa az így transzformált csoportnak.

Ezzel kapcsolatban kényelmi szempontból egyszer s mindenkorra megjegyezzük, hogy ha egy csoportnak és HERMITE-féle invariánsának egy T helyettesítéssel egyidejűleg való transzformácziójáról beszélünk, az mindig úgy értendő, hogy a csoport TGT^{-1} transzformácziót szenved, az HERMITE-féle alak pedig $TH\bar{T}$ alakút, úgy hogy az eddigiek alapján $TH\bar{T}$ a transzformált csoportnak invariánsa lesz.

Ha egy helyettesítés épen az HERMITE-féle kanonikus alakot hagyja változatlanul, együtthatói közt nevezetes relácziók állanak fenn,* ebben rejlik épen a véges csoportokra nézve az HERMITE-féle normálalak használatának előnye.

Mivel majd szükségünk lesz rájuk, e relácziókat is mindjárt le akarjuk vezetni.

Legyen a megadott helyettesítés, mely a kanonikus alakot önönmagába transzformálja:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\,, \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

akkor

$$x'_i\bar{x}'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ik}\bar{x}_k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}\bar{a}_{ik}x_j\bar{x}_k$$

és

$$x'_1\bar{x}'_1 + x'_2\bar{x}'_2 + \cdots + x'_n\bar{x}'_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}\bar{a}_{ik}x_j\bar{x}_k$$

a mi még így is irható:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\bar{a}_{ik}\Big)x_j\,\bar{x}_k.$$

* MASCHKE: Über den arithmetischen Charakter der Coefficienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen. Math. Ann. 50. köt. 497. lap. L. még VALENTINER és FUCHS MOORE-nál idézett értekezéseit is.

Már most az

$$x_1'\bar{x}_1' + x_2'\bar{x}_2' + \cdots + x_n'\bar{x}_n' = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n$$

feltétel az a_{ik} együtthatók és konjugáltjaik között a következő n^2 összefüggést adja:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\bar{a}_{ik} = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

a hol

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{ha } j = k \\ 0 & « \; j \gtrless k. \end{cases}$$

Írjuk fel ezek közül a következő n egyenletet, a melyet kapunk, ha $j = 1, 2, \ldots, n$-et teszünk:

$$\begin{array}{l}
a_{11}\,\bar{a}_{1k} + a_{21}\,\bar{a}_{2k} + \cdots + a_{i1}\,\bar{a}_{ik} + \cdots + a_{n1}\,\bar{a}_{nk} = 0 \\
a_{12}\,\bar{a}_{1k} + a_{22}\,\bar{a}_{2k} + \cdots + a_{i2}\,\bar{a}_{ik} + \cdots + a_{n2}\,\bar{a}_{nk} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1k}\,\bar{a}_{1k} + a_{2k}\,\bar{a}_{2k} + \cdots + a_{ik}\,\bar{a}_{ik} + \cdots + a_{nk}\,\bar{a}_{nk} = 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n}\,\bar{a}_{1k} + a_{2n}\,\bar{a}_{2k} + \cdots + a_{in}\,\bar{a}_{ik} + \cdots + a_{nn}\,\bar{a}_{nk} = 0.
\end{array}$$

Ez az $\bar{a}_{1k}, \bar{a}_{2k}, \ldots, \bar{a}_{nk}$ ismeretlenekre egy lineár egyenletrendszer, melynek determinánsa az illető lineár helyettesítés determinánsával A-val egyenlő. Ebből tehát:

$$A\bar{a}_{ik} = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{i-1\,1} & 0 & a_{i+1\,1} & \ldots & a_{n1} \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{i-1\,2} & 0 & a_{i+1\,2} & \ldots & a_{n2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{1k} & a_{2k} & \ldots & a_{i-1\,k} & 1 & a_{i+1\,k} & \ldots & a_{nk} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{i-1\,n} & 0 & a_{i+1\,n} & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix} = A_{ik}$$

vagy a konjugált értékekre téve át

$$\bar{A}a_{ik} = \bar{A}_{ik}$$

ez pedig, mivel egy csoportban csakis zérustól különböző determinánsú helyettesítések szerepelhetnek,* így is irható:

$$a_{ik} = \frac{\bar{A}_{ik}}{\bar{A}} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

* Rendesen pozitiv egység determinánsú helyettesítésekből szokás a csoportot megalakítani, akkor ez a reláczió egyszerűen: $a_{ik} = \bar{A}_{ik}$.

A csoport HERMITE-*féle normálalakjában minden együttható egyenlő a hozzá tartozó aldetermináns és az illető helyettesítés determinánsa hányadosának konjugált értékével.*

A mi már most az általunk bebizonyítandó tétel elsö részét illeti, az a LOEWY-MOORE-féle tételnek közvetetlen folyománya.

Tegyük fel, hogy valamely megadott véges lineár csoport intranzitiv és oly alakra tudjuk transzformálni, hogy az új X határozatlanokban minden helyettesítés r és $(n-r)$ változós helyettesítésekre bontható szét egyforma módon.

Szimbolikusan ezt az alakot így jelölhetjük:

$$\left(\begin{array}{c|c} G_1^{(r)} & 0 \\ \hline 0 & G_2^{(n-r)} \end{array}\right) \qquad \mathrm{I)}$$

és világos, hogy az r-dimenziós valamint az $(n-r)$-dimenziós együtthatórendszereknek $G_1^{(r)}$-rel, illetőleg $G_2^{(n-r)}$-rel jelölt összessége csoportot alkot.

De akkor az r-dimenzós $G_1^{(r)}$ csoportra nézve kell lenni egy r-dimenziós invariáns definit pozitiv HERMITE-féle alaknak:

$$H_1(a' \mid X, \overline{X}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} a'_{ik} X_i \overline{X}_k .$$

Ha most az új X-ekről visszatérünk az eredeti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ határozatlanokra, ebből egy n-változós HERMITE-féle alakot kapunk, a mely természetesen megint invariáns a megadott csoport minden helyettesítésére nézve, *de a melyre most az a jellemző, hogy r-edrangú.* Mint a H_1-nek, úgy ennek az értékkészlete is a zéruson kívül csupa pozitiv számokból áll, de ez már a zérust a kezdőponton kívül még végtelen sok más helyen is (a melyeket $X_1=0$, $X_2=0, \ldots, X_r=0$ jellemeznek) felveheti. Az ilyen alakot r-edrangú *szemidefinit* HERMITE-féle alaknak nevezzük.

Kimondhatjuk tehát: *ha a véges csoport intranzitiv és pedig oly értelemben, hogy r- és (n—r)-dimenzióra szétbontható alakba lehet transzformálni, szükséges, hogy legyen egy r-edrangú szemidefinit* HERMITE-*féle alak, mely a csoport összes helyettesítéseinél invariáns.*

Tételünk ezen első részével már birtokába jutottunk annak a kényelmes kritériumnak, a melylyel, ha egy véges csoport valóban az illető magasabb dimenzióhoz tartozik (tranzitiv), ezt kétségtelenné tehetjük. És legtöbbször erről van szó. Akkor csak azt kell kimutatni, hogy az illető csoportra nézve ilyen alacsonyabbrangú invariáns HERMITE-féle alak nincsen.

De hogy biztositva legyünk, hogy kritériumunk a valódi magasabb dimenziójú csoportoknál soha sem mondja fel a szolgálatot, vagyis, ha találunk ilyen szemidefinit alakot, rámutathassunk arra, hogy a csoport intranzitiv, be kell még bizonyitanunk, hogy az ilyen alak létezése nemcsak szükséges, de elegendő feltétele is az intranzitivitásnak.

II.

Tételünk e második részének bebizonyításánál nincs is szükségünk az idézett MASCHKE-féle dolgozatban * foglalt főeredményre, hanem elegendő a 3. §-ban (367. lap) tárgyalt segédtétel, mely így fogalmazható: *Ha egy n-dimenziós véges lineár csoport minden helyettesítésének együtthatórendszerében az első r sor utolsó (n—r) eleme mind zérus, a csoport oly alakra transzformálható, hogy nemcsak ezek, hanem az első r oszlop utolsó (n—r) elemei is csupa zérusok legyenek,* vagyis csoportunk a fentebb felirt szimbolikus schema szerint szétbonthatóvá válik.

A most megadott alakot a következő schemával szemléltethetjük

$$\left(\begin{array}{c|c} Q_1 & R_1 \equiv 0 \\ \hline R_2 & Q_2 \end{array}\right) \qquad \text{II)}$$

a hol Q_1 és Q_2 r^2, illetőleg $(n-r)^2$ elemből álló quadratikusan elosztott együtthatórendszerek, míg R_2 $(n-r)$ sorból és r oszlopból áll.

A tétel bebizonyítása, mely egyszersmind módszert ad a jelzett redukczió kivitelére, olyképen történik, hogy megmutatjuk, hogy a

* Beweis des Satzes, dass diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen in welchen einige durchgehends verschwindende Coefficienten auftreten, intranzitiv sind. Math. Ann. 52. köt. 363. lap.

csoportot az HERMITE-féle normálalakra lehet transzformálni, a nélkül, hogy a schemánkban feltüntetett zérusokat megbolygatnók. A csoport normálalakjának együtthatóira nézve adott relácziók ugyanis rögtön kiadják, hogy ezzel a kivánt redukczió megtörtént.

Legyen a csoport egy definit pozitiv HERMITE-féle invariáns alakja:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k . \qquad (a_{ki} = \bar{a}_{ik})$$

Először is megmutatjuk, hogy a csoportot a schemánkban feltüntetett zérusok megőrzése mellett, olyan alakra lehet transzformálni, hogy az új változókra nyert HERMITE-féle alak $X_1, X_2, \ldots, X_r$ és $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_n$ szerint szétbonthatóvá válik:

$$H = H_1 + H_2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} a'_{ik} X_i \overline{X}_k + \sum_{i=r+1}^{n} \sum_{k=r+1}^{n} a'_{ik} X_i \overline{X}_k .$$

Ilyen alakú transzformáczióval élünk:

$$\left\{ \begin{array}{lr} x_i = \sum\limits_{k=1}^{r} t_{ik} X_k & (i=1, 2, \ldots, r) \\ x = X_i + \sum\limits_{i=1}^{r} t_{ik} X_k . & (i=r+1, \ldots, n) \end{array} \right.$$

A transzformáczió alakjából már világos, hogy az első r sor utolsó $(n-r)$ helyén levő zérusok minden helyettesítésben megmaradnak, mert ez az első r változót csak egymás között transzformálja. Még csak azt kell megmutatni, hogy a t_{ik}-k alkalmas választásával elérhetjük, hogy minden $X_k \overline{X}_l$ tag kiesik, a melyben $k \leq r$ és $l > r$, mert evvel egyúttal a konjugáltjaik is eltünnek, vagyis azok, a hol $k > r$, $l \leq r$.

Számítsuk ki e végből $\overline{X}_{r+1}, \overline{X}_{r+2}, \ldots, \overline{X}_n$ együtthatóit. $\overline{X}_l$-t, a hol $l > r$, csakis ezekből a tagokból kapunk:

$$a_{il} x_i \bar{x}_l = a_{il} x_i (\overline{X}_l + \sum_{k=1}^{r} t_{lk} \overline{X}_k). \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

Az $\overline{X_l}$ együtthatója tehát:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{il} x_i = \sum_{i=1}^{r} a_{il} x_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_{il} x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} a_{il} \sum_{k=1}^{r} t_{ik} X_k + \sum_{i=r+1}^{n} a_{il} (X_i + \sum_{k=1}^{r} t_{ik} X_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} a_{il} t_{ik} X_k + \sum_{i=r+1}^{n} a_{il} X_i . \quad (l=r+1, \ldots, n)$$

Ha tehát azt akarjuk, hogy $\overline{X_l}$ $(l = r+1, \ldots, n)$ mellett X_k $(k=1, 2, \ldots, r)$ ne forduljon elő, a t_{ik}-knak a következő $r(n-r)$ egyenletet kell kielégíteni:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{il} t_{ik} = 0. \quad \begin{matrix} (k=1, 2, \ldots, r) \\ (l=r+1, \ldots, n) \end{matrix}$$

De ha k-t határozatlanul meghagyjuk, látható, hogy ez t_{1k}, $t_{2k}, \ldots, t_{nk}$-ra mindig ugyanazt az egyenletrendszert szolgáltatja, bármi legyen is $k=1, 2, \ldots, r$ és pedig a következő $(n-r)$ egyenletből álló n ismeretlenű egyenletrendszert:

$$a_{1l} u_1 + a_{2l} u_2 + \cdots + a_{nl} u_n = 0. \quad (l=r+1, \ldots, n)$$

Tehát a t_{ik}-k végtelen sokféleképen választhatók, csak arra kell még tekintettel lenni, hogy a transzformáczió determinánsa ne legyen zérus. E determináns schematikusan így irható fel:

$$\left| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} t_{ik} \\ {\scriptstyle i, k=1, 2, \ldots, r} \end{matrix} & 0 \\ \hline \begin{matrix} t_{ik} \\ {\scriptstyle k=1, 2, \ldots, r} \\ {\scriptstyle i=r+1, \ldots, n} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \end{array} \right| = \underset{(i, k=1, 2, \ldots, r)}{|t_{ik}|}$$

De akármilyenek legyenek is az a-k, $(n-r)$ homogén lineár egyenletnek n ismeretlenben mindig van $n-(n-r)=r$ lineárisan független megoldása, vagyis a

$$t_{1k}, t_{2k}, \ldots, t_{nk} \quad (k=1, 2, \ldots, r)$$

r számú értékrendszert mindig lehet úgy választani, hogy a belőle képezhető r-edfokú determinánsok között legyen a zérustól különböző és ez épen a $|t_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$ legyen.*

A t_{ik}-k ilyen választásánál a H transzformált alakjában csakis azok az $X_k \overline{X_l}$ tagok maradnak meg, a hol

$$k, l = 1, 2, \ldots, r$$

vagy

$$k, l = r+1, r+2, \ldots, n$$

vagyis az új Hermite-féle alak egy r-dimenziós és egy $(n-r)$-dimenziós alakra esik szét, melyek közül az első csakis $X_1, X_2, \ldots, X_r$-et (és természetesen a konjugáltjaikat) a másik csakis $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_n$-et tartalmazza.

De ekkor egyrészt az $X_1, X_2, \ldots, X_r$-eket, másrészt az $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_n$-eket egymás között transzformálva, elérhető, hogy úgy az első, mint a második ezen két Hermite-féle alak közül a kanonikus alakba jusson és világos, hogy e transzformácziók a schemánkban feltüntetett zérusokat megint érintetlenül hagyják. Ezzel azonban H is a kanonikus alakot vette fel, és így csoportunk csakugyan Hermite-féle normálalakba ment át a megkivánt feltételek mellett.

Most már könnyű kimutatni, hogy az ily módon transzformált csoport minden együtthatórendszerében az R_2 összes elemeinek is el kell tűnni.

Láttuk ugyanis, hogy Hermite-féle normálalak esetében, minden együttható konjugált értéke a hozzátartozó aldetermináns és az illető helyettesítés determinánsának hányadosával egyenlő. De

---

* Sőt ha $|a_{ik}| \neq 0$, $(i, k = r+1, \ldots, n)$ a t_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$ együtthatórendszer így választható:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

vagyis az első r határozatlant *identikusan* transzformáljuk. Ennek a megjegyzésnek később hasznát fogjuk venni.

az R_2-ben levő elemek összes aldeterminánsai zérusok, mert mindegyikük oly $(n-1)$-edfokú determináns, mely az R_1-ben levő összes $r(n-r)$ zérusokat tartalmazza. Ebből látható, hogy csakugyan az R_2-ben levő összes elemek zérusok az így transzformált csoport minden helyettesítésében.

E most bebizonyított MASCHKE-féle tétel úgy is fogalmazható, hogy az I. schema szerint való intranzitivitás konstatálására elegendő tudnunk, hogy a csoport oly alakra transzformálható, hogy az első r sor utolsó $(n-r)$ eleme minden helyettesítés együtthatórendszerénél csupa zérus legyen.

Könnyű belátni, hogy ez az elegendő feltétel tulságosan specziális követeléseket támaszt ahhoz képest, hogy szükséges is lehessen, de azért mégis igen könnyű a mi szükségesnek bizonyult feltételünk elegendő voltának a kimutatását erre visszavezetni.

Tegyük fel, hogy valamely n-dimenziós véges lineár csoportra nézve találtunk egy r-edrangú $(r<n)$ szemidefinit pozitiv HERMITE-féle alakot, mely a csoport összes helyettesítéseinél invariáns:

$$H' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a'_{ik} x_i \bar{x}_k. \qquad (a_{ki} = \bar{a}_{ik})$$

Nem kell mást tenni, mint ezt az

$$X_1\overline{X_1} + X_2\overline{X_2} + \cdots + X_r\overline{X_r}$$

kanonikus alakra transzformálni.

Azt állítjuk, hogy ezzel a transzformáczióval csoportunk oly alakba megy át, mint a milyet a II. schema szimbolizál. Az új változókban csoportunk egy tetszés szerinti helyettesítése legyen:

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} X'_k. \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

Akkor a transzformácziót végrehajtva az egyes tagokból lesz:

$$X_i \overline{X_i} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} X'_k \sum_{l=1}^{n} \bar{c}_{il} \overline{X'_l} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ik} \bar{c}_{il} X'_k \overline{X'_l}.$$

Ezeket összegezni kell $i=1, 2, \ldots, r$ értékekre.

Irjuk fel mi lesz egy tetszőleges $X'_j \overline{X'_j}$ együtthatója. Az imént felirt tagok mindegyikéből $c_{ij}\bar{c}_{ij}$-t kapunk, összesen tehát:

$$c_{1j}\bar{c}_{1j} + c_{2j}\bar{c}_{2j} + \cdots + c_{rj}\bar{c}_{rj}.$$

De ha $\sum\limits_{i=1}^{r} X_i \overline{X_i}$ ennél a transzformácziónál invariáns marad, ezeknek a $j = r+1,\ r+2, \ldots, n$ értékeknél el kell tűnni, vagyis

$$c_{1j}\bar{c}_{1j} + c_{2j}\bar{c}_{2j} + \cdots + c_{rj}\bar{c}_{rj} = 0.$$
$$(j = r+1, r+2, \ldots, n)$$

Itt az egyes tagok, mint konjugált értékek szorzatai, negativok nem lehetnek, ezen összegek tehát csak úgy tünhetnek el, ha minden egyes tagjuk zérus:

$$c_{1j} = 0 \quad c_{2j} = 0 \ldots c_{rj} = 0$$
$$(j = r+1, r+2, \ldots, n)$$

vagyis látjuk, ha csoportunk oly alakra van transzformálva, hogy az

$$X_1\overline{X_1} + X_2\overline{X_2} + \cdots + X_r\overline{X_r}$$

r-edrangú kanonikus alakot változatlanul hagyja, minden helyettesítésének együtthatórendszerében az első r sor utolsó $(n-r)$ elemének zérusnak kell lenni.

Ha tehát valamely véges csoportnak van egy r-edrangú $(r<n)$ invariáns szemidefinit Hermite-féle alakja, akkor a csoport ennek a kanonizálásával a II. schema által szimbolizált alakra transzformálható. De Maschke tétele alapján akkor egyszersmind az I. schema szerint intranzitiv.

Ezzel nemcsak bebizonyítottuk feltételünk elegendő voltát, hanem módszert is adtunk, melylyel valamely intranzitiv csoportnak a szétbontható alakra való transzformáczióját tényleg el tudjuk végezni, ha az illető szemidefinit Hermite-féle alakot már meghatároztuk (de ezt még az intranzitivitás felismerése végett úgyis meg kell tennünk).

Az eljárás három részből áll. Első a H' kanonizálása, második a Maschke-féle transzformáczió, melylyel H-t egy r- és egy $(n-r)$-dimenziós alakra bontjuk szét a II. schema szerinti alak megőrzésével, a harmadik pedig ezen r- és $(n-r)$-dimenziós alakok kanonizálása.

Módszertani szempontból már most fontos az a megjegyzés, hogy ennél az eljárásnál általában nem kell a H' legelőször előállított kanonikus alakját elrontani és azután ismét (új változókban) mintegy újra visszaállítani. Mert a mint a 214. lapon sor alatt megjegyeztük, hacsak

$$|a_{ik}| \neq 0 \quad (i, k=r+1, \ldots, n)$$

a H-nak MASCHKE-féle redukcziója egy r-dimenziós és egy $(n-r)$-dimenziós alak összegére végrehajtható *a nélkül, hogy az első r határozatlant egyáltalában transzformálni kellene.* Akkor

$$X_1\overline{X}_1 + X_2\overline{X}_2 + \cdots + X_r\overline{X}_r$$

megmaradván változatlanul invariánsnak, csak még az $X_{r+1}, \ldots,$ X_n határozatlanokban nyert $(n-r)$-dimenziós alakot kell kanonikussá tenni, hogy csoportunknak egy HERMITE-féle normálalakjára jussunk, a melyben szétbonthatóvá válik.

Visnya Aladár.

EGY FÜGGVÉNYRELÁCZIÓ.

A $\sin x$ és $\cos x$ kielégítik ezeket a függvényrelácziókat:

$$\frac{d\sin x}{dx} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad \frac{d\cos x}{dx} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Azt akarjuk megvizsgálni, hogy melyek azok az analytikai függvények, melyek az

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x+c) \tag{1}$$

függvényrelácziót kielégítik x minden valós értékénél, a hol c egy meghatározott állandó valós számérték.

Állítsuk elő a keresendő $f(x)$ függvényt, valamint a differencziálhányadosát is trigonometrikus sorban.

$$f(x) = \sum_0^\infty a_\nu \sin\nu x + b_\nu \cos\nu x,$$

akkor:

$$f'(x) = \Sigma\, \nu\, (a_\nu \cos\nu x - b_\nu \sin\nu x).$$

Az 1) alatti függvényreláczió szerint:

$$\Sigma\, \nu\, (a_\nu \cos\nu x - b_\nu \sin\nu x) = \Sigma\, a_\nu \sin\nu(x+c) + b_\nu \cos\nu(x+c) =$$
$$= \Sigma \sin\nu x\,(a_\nu \cos\nu c - b_\nu \sin\nu c) + \cos\nu x\,(a_\nu \sin\nu c + b_\nu \cos\nu c).$$

Kell tehát, hogy ν minden pozitiv egész értékénél fennálljanak a következő egyenletek:

$$\begin{aligned} \nu a_\nu &= a_\nu \sin\nu c + b_\nu \cos\nu c \\ -\nu b_\nu &= a_\nu \cos\nu c - b_\nu \sin\nu c. \end{aligned} \tag{2}$$

Ezen egyenletek 0-tól különböző a_ν és b_ν esetében csakis akkor állhatnak fenn, ha

$$\begin{vmatrix} \sin\nu c - \nu, & \cos\nu c \\ \cos\nu c & \nu - \sin\nu c \end{vmatrix} = 0$$

azaz, ha:

$$\nu^2 - 2\nu\sin\nu c + 1 = 0.$$

Ezen egyenletnek csakis akkor lehet egyáltalában valós megoldása, ha

$$\sin^2\nu c = 1$$

és ekkor a megoldása

$$\nu = 1,$$

tehát kell, hogy

$$\sin^2 c = 1$$

legyen, azaz:

$$c = \pm(4k+1)\frac{\pi}{2}\cdot$$

Ha $c = (4k+1)\frac{\pi}{2}$, akkor a 2) alatti egyenletekből az egyetlen lehető $\nu = 1$ esetében következik, hogy a_1 és b_1 tetszés szerinti számok, tehát a keresett

$$f(x) = a\sin x + b\cos x.$$

Ha pedig $c = -(4k+1)\frac{\pi}{2}$, akkor $a_1 = b_1 = 0$; tehát *a* $\sin x$ *és* $\cos x$*-en kívül más olyan* $f(x)$*, melynek differencziálhányadosa is trigonometriai sorba fejthető, nem létezik.*

Beke Manó.

RÉGI TEMPLOMOK BEIRÁNYÍTÁSA.

A nemzetközi csillagászati társaságnak (Astronomische Gesellschaft) 1902. évben Göttingában tartott XIX. rendes közgyűlésén Charlier C. V. L., a lundi csillagvizsgáló igazgatója beszámolt azon tanulmányairól, melyeket Lockyer-nek és Nissen-nek az egyptomi és görög emlékek, illetve régi keresztény templomok helyzetéről tett vizsgálatai nyomán folytatott. Ezek a tanulmányok ismét új adatokat szolgáltatnak az asztronomiának a történelemben való és művelődési szempontból is fontos alkalmazásához. Charlier ezen előadását,* röviden érintve a kapcsolatos vizsgálatokat is, akarom — egy-két megjegyzéssel és alkalmazással — ismertetni. Arról van ugyanis szó, hogy valamely épületnek a déllőhöz való fekvéséből annak korára következtessünk.

Hogy régi síremlékeknek, templomoknak és a kultusz céljaira szolgáló más épitkezéseknek van vonatkozásuk a világtájakhoz, már régebben szembetűnt az ilyenekkel foglalkozóknak. Az egyptomiak templomaik alapitását — mint általában mindent — számos ceremóniával kötötték össze; ezek közűl egyik volt a templom tengelyének kitűzése: «a kötél kifeszitése.» Erről Nissen ** néhai bonni professzor az oni (heliopolisi) Naptemplom, az abydosi templom alapitására (Kr. e. 1445 körül), az edfui Horus-templom újjáépitésére vonatkozólag fenmaradt hieroglifák nyomán közöl bővebbet. A kötélfeszítéstől kapták az egyptomi mérnökök ἁρπεδονάπται görög nevüket is.

De az egyptomiak nemcsak templomaikat, hanem egyéb emlékműveiket is beállították a világtájak szerint. Így a pyramisok

* Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft 37. k. III. f. 1902.

** Nissen H. Über Tempel-Orientirung. Rheinisches Museum für Philologie XXVIII., XXIX. és XL. köt.

a meridiánban állanak és Proctor * ezért valóságos csillagvizsgálóknak tartja őket, még azt is állítva, hogy a királyi sírkamrába vezető úgynevezett nagy folyosóból folyadéktükör közbeiktatásával reflex észleleteket tehettek; magát a nagy folyósót meridiáncsőűl használták.

Nissen, úgy mint Lockyer ** foglalkoztak azzal a kérdéssel is és meg is feleltek reá, hogyan határozhatjuk meg csupán csillagászati úton a különféle ó-egyptomi templomoknak a korát. Ezen épületek tengelyét ugyanis eredetileg bizonyos égi testek (főkép a Nap, Sirius, Canopus), kelte vagy nyugta szerint állították be, az épület korának meghatározására tehát csakis azt kellett kiszámítani, mikor jelent meg a kérdéses égi test a látóhatáron a templom tengely-irányában. A denderahi nagy Hathorünnepet akkor ülik, mikor a Sirius az év végén (jul. 20) hosszabb idő után ismét megjelenik a hajnali szürkületben. «Az ég királynője, ő belépett házába, egyesült isteni képmásával, fénye úgy ragyogott az arczokon, mint a Nap, ha reggel mutatkozik.» (Dümichen szerint egyik fal-felírás kezdete (l. Nissen i. h.) Ez természetesen csakis úgy volt lehetséges, hogy a csillag keltének iránya összeesett a templom tengelyével; ebből aztán Nissen azt következteti, hogy a templom alapitása a K. e. második évezred első felébe esik.

Nissen már római régiségi tanulmányai révén foglalkozott hasonló vizsgálatokkal kiterjesztve kutatásait a kereszténység első idejéből való különféle római templomokra, különösen azokra, melyek a vértanúk tiszteletére épültek. Vizsgálataiból az tűnik ki, hogy a templomok alapításakor a Nap a templom védőszentjének napján keltekor vagy nyugtakor a templomot tengelyének irányában ragyogta be.

Ennek a beállításnak vallási jelentőségét Nissen és különösen Lockyer behatóan méltatta. Charlier nem foglalkozik bővebben ezekkel az eredményekkel, csak kiemeli azt a körülményt, hogy a vallási szertartások eredetének és a vallási képzetek fejlődésé-

* Proctor R. (Ranyard) Old and New Astronomy.

** Lockyer I. N. The Dawn of Astronomy. 1894.

nek ilyetén megvilágitása ezen fontos tárgynak legérdekesebb és legmélyrehatóbb adatai közé sorolandó.

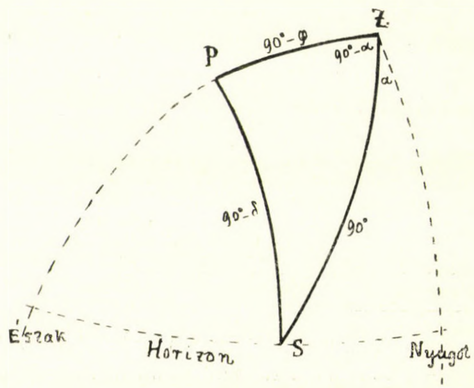
Magát Charlier-t ezen munkák olvasása arra a gondolatra hozta, vajjon a középkorból fenmaradt templomok szintén ezen elv szerint vannak-e épitve és igenlő esetben : lehet-e ezeknek a korát is csillagászati úton meghatározni?

A kor meghatározása ez esetben a miatt lehetséges, mert az egész középkorban — és még jócskán az újkorban is — a hibás juliánus kalendáriummal éltek. A meghatározás nem volna lehetséges, ha a polgári időszámítás alapjáúl az év pontos hosszát alkalmazták volna. Így azonban a megoldandó problema egyszerűen ez: Mikor volt a juliánus naptárnak a Gergely-féléhez képest — melyet erre a czélra egészen pontosnak vehetünk — oly eltérése, hogy a Nap a templom védőszentjének napján épen a templom irányában kelt avagy nyugodott? Matematikai nehézségek épen nincsenek.

Ha arról van szó, hogy csak megközelítőleg és nem egészen pontosan feleljünk a felvetett kérdésre, következőképen járhatunk el. Legyen α a templomnak — az oltártól a bejárat felé irányított tengelye és a csillagászati kelet-nyugoti vonal által képezett szög, nyugatról éjszak felé számitván ezt, φ a templom földrajzi szélessége és δ a Napnak az a deklinácziója, melynél a Nap tényleg a templom tengelyének irányában nyugszik. Ekkor kiszámitjuk először δ-t* és aztán a Gergely-féle naptárban az t

* Ennek kiszámitása gömbi csillagászat egyik egyszerű képlete alapján eszközölhető; ugyanis az égi test, a zenit és az éjszaki polus közti háromszögben, ha az égi test lenyugszik vagyis magassága = 0 és e szerint zenittávolsága 90°, és az α szöget a fenti értelemben vesszük, áll:

$$\sin\delta = \cos\varphi \,.\, \sin\alpha.$$



a napot keressük fel, melyen ez a δ a Nap deklinácziója. A juliánus és a Gergely-féle kalendáriumok közti ismert különbség folytán megkapjuk a Julián-féle naptár megfelelő napját. És mert a két naptár 128 évre marad el egy-egy nappal, nem fog a Nap nyugtára igy talált nap a templom védőszentjének keltével a juliánus naptárban összeesni, hanem attól ennyi, meg ennyi nappal eltér; tegyük fel n nappal. Akkor a templom kora:

n-szer 128 év.

Charlier azon megjegyzését, hogy pontos számításnál az n törtrészeit is tekintetbe kell venni, túlzottnak tartom, mert a Nap deklinácziójának változása legfeljebb 0.4°, tehát alig nagyobb akkor is, mint az egy nappal elérhető pontosság. Manapság rendszerint úgy épülnek templomaink, hogy a bejárat nyugotnak, a főoltár keletnek fekszik; régibb templomoknál azonban ezt csak közelítőleg találjuk, gyakran nagy az eltérés. Ha már most a középkorban Nissen elve alapján épitették a templomokat, akkor a tengelynek, melyet Charlier mindig az oltártól a bejárat felé számít, a *nyugoti ponttól éjszakra* kell mutatnia, ha a védőszent névnapja a nyári félévbe (tavaszi és őszi equinoctium közé) esik, ellenben a *nyugoti ponttól délre*, ha a névnap a téli félévbe esik. Rövidség okáért Charlier «nyári szent»-ről szól, ha a névnap a nyári, és «téli szent»-ről, ha a téli félévbe esik.

Az első templom, melyet e tekintetben Charlier megvizsgált, a lundi régi székesegyház volt. Ennek a templomnak a védőszentje szt. Lőrincz, a kinek névnapja tudvalevőleg augusztus 10-ére esik — mindkét naptárban — ki tehát «nyári szent». A templom tengelyének tehát a nyugoti ponttól éjszakra kellene mutatnia. Charlier oly szerkezetű azimut kompaszszal, mint a minő Lockyer-é volt és a milyennel még tizedfokokat lehet lemérni, azt találta, hogy a székesegyház tengelye 24.°3-kal mutat éjszakra a nyugoti ponttól. A Nap ezen a ponton Lundban a Gergely-naptár szerint augusztus 17-én nyugszik, tehát a Juliánus-naptárban augusztus 4-én, a templom tehát $6 \times 128 = 768$ éves. Az alapkő letételének ennélfogva 1132 körül kellett megtörténnie. (CHARLIER 1900-ban végezte a számítást.) A székesegyházat állítólag 1143-ban szentelték fel és így a megegyezés majdnem teljes. CHARLIER azóta több alkalommal végezett ilyféle méréseket, és sikerült néhány templomnak a korát meghatározni, melyekre vonatkozólag a történeti hagyomány az alapítási évnek még közelítő meghatározására sem nyújtott elegendő alapot.

Ilynemű meghatározások legnagyobb nehézségét azok a változtatások képezik, melyeken a templomok az idők folyamán átmennek, és melyek miatt néha nagyon nehéz vagy épen lehetetlen az oltár és eredeti bejárat közti irány meghatározása. Általában nem elegendő a templomfalak irányát megállapítani. Egy másik hibaforrás legalább mágnes boussolának alkalmazása mellett a templomokban fellépő mágneses zavargások (kályhák, gőzcsövek, szögek stb.).

Néha váratlan akadály az a bizonytalanság, mely a templom eredeti védőszentjére fennáll. Érdekes e tekintetben az «Alte Upsala» templom esete. A tengely iránya a nyugoti ponttól 8°2-nyira éjszakra mutat, a védőszentnek tehát «nyári szentnek» kellene lennie, nevenapjának vagy márczius végére vagy szeptember elejére esnie. Ámde a hagyomány szerint vagy szt. Erik vagy szt. Lőrincz a védőszent, egyiknek a nevenapja sem esik a mondott időre; (Erik május 18, Lőrincz aug. 10-én van). Azok közűl a szentek közül, kiknek nevenapja szeptember elejére esik, egy Európa éjszaki részében fekvő templomnál csak egy választható védőszentül, t. i. Szűz Mária, kinek születése napjáúl régtől fogvást szept. 8-át tartjuk meg. Mikor CHARLIER erre a következtetésre jutott, tényleg néhány régi idézetre tették őt figyelmessé, melyek közvetetlenül kimondják, hogy valójában Szűz Mária volt e templom eredeti patronusa. A felvetett módszerrel tehát nemcsak a templomok korát, hanem néha védőszentjük nevét is meg lehet állapítani.

Természetes, hogy CHARLIER érdekes fejtegetéseit mindjárt a kéznél fekvő példákon, Budapesten, akartam kipróbálni. Mindössze három templom jöhet szóba, a pesti oldalon az esküteri, a budai oldalon a Mátyás-templom és a helyőrségi. Lockyer fent idézett könyve nem volt megszerezhető, a műszer nem állott rendelkezésemre, így a tengelyek fekvését máshonnan kellett megszereznem. A székesfővárosi mérnöki hivatal illető osztálya volt oly szíves és megadta az említett templomok tengelyének azimutját, a miért is e helyen őszinte köszönetet mondok.

A három templom közül kettővel nem érhettem czélt; a Mátyás-templom ugyanis kétségtelenül a Boldogságos Szűz Máriáról nevezett templom; búcsúnapja Nagy Boldogasszony tehát augusztus 15-ére esik, Charlier szerint «nyári» a védőszentje és így ha a jelzett módon tűzték volna ki főtengelyét annak éjszak felé kellene elhajlania, holott a Mátyás-templom főtengelye délnek mutat ($\alpha = -21^\circ.9$).

A helyőrségi templomnál meg úgy áll a dolog, hogy ha a mondott módon jelölték is ki tengelyét, hát kelleténél is jobban tértek el a kelet-nyugati iránytól. A templom eredetileg Ev. szt. János tiszteletére 1260-ban épült, tengelyének tehát — a téli solstitiumnak megfelelően — délre kell elhajolnia. Úgy is van most is, csakhogy az elhajlás $42^\circ.3$, holott Budapesten a Napnak legnagyobb eltérése a keletnyugati iránytól keltekor vagy nyugtakor csak 36° 10′ lehet. Különben is a Mátyás-templom egészen restauráltatott, a helyőrségiből pedig csak a torony régi.

Maradt tehát az esküteri templom, és ha nem is teljesen kielégítő, némi eredményre mégis jutottam; nem sikerült az alapítás évét meghatározni, de talán védőszentjének napját kimutatni. A templomról Rupp Jakab: «Budapest és környékének helyrajzi története» czímű munkájában ezeket írja a IV. Béla 1237-iki kegyelemleveléről szólva (X. fejezet, 2. §.): «Ezek közt a plébánia-templom majdnem a város közepén, de mégis inkább a Dunaparthoz közel, melyre homlokzata néz, a város legrégibb épületeihez számítandó. 1413-ban János plébános Bajmóczi budai polgárnak évenként fizetendő 14 arany forintért eladja a templom budai házát örök jogon, midőn azonban a díj 6 éven át elmaradt, a budai tanács a házat az egyház birtokába visszabocsátotta 1486-ban.»

«Alig félszázad mulva a török hatalom Pestet Budával hasonló sorsra juttatá; a templomok kirabolva részint megrontattak, részint mecsetekké alakíttattak át. Így járt a Mária-egyház is, csak a szentély gót idomú falai maradtak változatlanok, melyek baloldalán márványban kivésve a város czímere látható e felírással: «Arma Inclitæ Civitatis Regalis Pestiensis M. D. V. II.»

«A török kivonulása után az egyházak régi állapotukba visszahelyeztetvén, e templom is korábbi rendeltetésének visszaadva az ajtótól közepéig megujíttatott.»

Ennek a templomnak elhajlása délfelé 25°, vagyis az α szög — 25°. Budapesten a Nap ezen a helyen február 3-án vagy november 12-én nyugszik. A novemberi kelet ki van zárva, mert azon tájban Márianap nincsen. Ha a Juliánus-naptárra való 13 napos redukcziót levonjuk a februári keletből, január 11-ét kapjuk. Ez január 23-ikára Mária eljegyzésére utalna és akkor az eltérés 2 nap lévén (1903—2×128) 1647-re jönnék. Csakhogy ekkor már Magyarország elfogadta a Gergely-féle kalendáriumot, azonkivül Pest — épúgy mint Buda — még a török birtokában volt. A későbbi helyreállításnál tehát — ha a Nap nyugta szerint állították be a főtengelyt és ha ez az eredetivel egyezett is — csak a február 2-iki Gyertyaszentelő Boldogasszonyt vehetjük az esküitéri templom védőszentjének. Különben az eltérés a Napnak 2-iki és 3-iki nyugta közt csak 28′-et tesz! tehát még nem is egy egész Napátmérőt.

Mikor Charlier a jelzett gyűlésen Göttingában volt, az ottani templomok helyzetét is meghatározta, mely alkalommal egész csoportjára a különös helyzetű régi templomoknak lett figyelmessé. Ezek szt. Jánosnak és a Szűz Máriának szentelt templomok voltak. Mindkettőnek, tudjuk, több napja van a kalendáriumban, irányuk tehát különböző lehet. De a különböző Márianapok közűl a Gyümölcsoltó Boldogasszony márczius 25-én és a szt. Jánosok közül a szeptember 24-iki érdemelnek különös figyelmet. Mivel ezen napok a Juliánus-kalendáriumban is eredetileg nagyon közel esnek az æquinoctiumokhoz, azok a templomok, melyeket Szűz Máriának vagy szt. Jánosnak szenteltek, igen közel nyugat felé néznek. Elképzelhetjük tehát, hogy ennélfogva ezen templomoknál háromféle módon volt a beirányítás keresztülvihető, m. p.:

vagy úgy, hogy a mondott napokon közvetetlenül megfigyelték a Nap nyugtát és a tengelyt ezen pont felé irányították;

vagy hogy a templomokat pontosan a kelet-nyugoti vertikálisba állították;

vagy végűl, hogy — a kompasz feltalálása után — a templomokat a mágneses meridiánra merőlegesen épitették.

Minden egyes esetben könnyen eldönthetjük, melyik módon jártak el. Azok az esetek, a mikor a későbbi középkorban a harmadik módszert használták, a mágneses deklináczió százados változásáról való nagyon is hiányos ismereteink értékes kiegészítését képezhetik.

Feltünhetik, hogy már régtől fogvást nem épitették a templomokat többé-kevésbbé pontosan kelet-nyugoti irányban, hanem e helyett a Napnak bizonyos napokon való lenyugvása szerint állitották be. A vallási tradicziók és fontos vallási tekintetek mellőzésével ki kell emelni azt, hogy sokkal könnyebb a templomot a jelzett módon beállitani, mint azt pontosan kelet-nyugoti irányban felépiteni. Valószínű ugyanis, hogy az alapkövet a védőszent napján tették le ünnepélyesen és akkor tényleg nagyon egyszerűen — pl. egy zsinór kifeszítésével — lehetett a templom irányát meghatározni. Nissen és Lockyer kimutatják — mint fentebb emlitettük — hogy az ókori Egyptomban így jártak el a templomok alapitásánál, bizonyára azért, mert jóval könnyebb mód volt, mint épen a kelet-nyugoti vonalban épiteni a templomot.

Lakits Ferencz.

A COLORIMETER ELMÉLETE.

Az ég photometriájában két fényforrás egyenlő intensitásának megbecslésére a ZÖLLNERtől kigondolt, rendkívül elmés colorimeter szolgál; vele a mesterséges csillag a természetessel egyenlő szinűvé tehető.*

A colorimeter mathematikai elméletét dr. KÖVESLIGETHY «Grundzüge einer theoretischen Spektralanalyse» czímű munkájában 1890-ben saját spektralegyenlete alapján dolgozta ki. A tárgy fontossága és a spektralelméletben történt lényeges haladás indítottak arra, hogy e rendkívül fontos műszer elméletét közöljem. Lényegben KÖVESLIGETHY elméletét adom némi egyszerűsítéssel és a tárgyalást a legújabb, PLANCK-féle spektralegyenletre is kiterjesztem, melylyel egy igen fontos, más kérdést is világítok meg: Az égi testek hőmérsékletének meghatározását.

A colorimeter a circular polározás elvén alapszik. Az összehasonlító lámpa fényét a NICOL-prisma linearisan sarkítja, e linearisan sarkított fényvector a tengelyre merőlegesen álló planparallel kvarczlemezen két egymásra merőlegesen polározott fényvectorra bomlik, melyek circularisan polározott fényt adnak. Az első két NICOL-prisma főmetszete által képezett ω szög a szin mértéke.

Hogy ez utóbbit megbizonyíthassam, az egyszerűség kedveért az összehasonlító lámpa fényéül homogen fényforrást vegyünk, melyből a valódi, kevert fény integratio utján nyerhető.

Válaszszuk meg a coordinatarendszert úgy, hogy az első NICOL-

---

* Részletes leírása TASS ANTAL «A Zöllner-féle photometer» czímű és e Lapok áprilisi füzetében megjelent közleményben található.

prismán átjutott s e prisma főmetszetére merőleges síkban sarkított fényvector essék össze az y tengelylyel.

Ekkor:

$$\begin{aligned} \xi &= 0, \\ \eta &= a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta\right), \\ \zeta &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

lesznek a rezgő pont coordinatai t időben.

Az η fényvector a kvarczlemez első határfelületén két egymásra merőlegesen polározott fényvectorra bomlik:

$$\begin{aligned} &\mu_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta + \delta_1\right), \\ &\mu_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta - \delta_1\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Ámde az intensitásbeli viszonyokból következik:

$$a^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2. \tag{3}$$

A tapasztalat szerint a (2) alatti fényvectorok circular polározottságbeli állapotot adnak, ennélfogva:

$$\begin{aligned} a^2 &= 2\mu^2, \\ 2\delta_1 &= \tfrac{1}{4}(2r+1), \quad 2\delta_1 = \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

E szerint a $\varDelta$ vastagságú kvarczlemez második határfelületéig jutott (2) alatti fényvectorok alakja:

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{a}{2} \sqrt{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta - \frac{\varDelta}{\lambda} - \frac{1}{8}\right), \\ \eta' &= \frac{a}{2} \sqrt{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta - \frac{\varDelta}{\lambda} + \frac{1}{8} - D\right), \end{aligned} \tag{5}$$

minthogy az η' extraordinarius sugár D késést is szenved.

Az (5) alatti fényvectorok kifejtett alakja:

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta - \frac{\varDelta}{\lambda}\right) - \frac{a}{2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta - \frac{\varDelta}{\lambda}\right), \\ \eta' &= \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta - \frac{\varDelta}{\lambda} - D\right) + \frac{a}{2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta - \frac{\varDelta}{\lambda} - D\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Ime a (6) alatti ξ', η' fényvectorok oly részekből állanak, a melyek alkalmasan combinalva csakugyan circularisan polározott fényt adnak.

E fényvectorokat a második NICOL-prisma linearisan polározott fényvectorrá egyesíti, melynek sarkítási síkja e NICOL főmetszetének síkjára merőleges. Legyen ω az első két NICOL főmetszete által képezett szög, ekkor a második NICOL főmetszetére merőleges síkban polározott fényvector az összehasonlító lámpa fénye, míg e NICOL főmetszetében sarkított fényvector zérus.

Minthogy a planparallel kvarczlemez az első NICOLlal részt vesz a forgásban, ezért a (6) alatti fényvectorok imént említett projectioi:

$$\begin{aligned}
S = & \frac{a}{2}\cos\omega\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\delta-\frac{\Delta}{\lambda}\right)+\\
& +\frac{a}{2}\cos\omega\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\delta-\frac{\Delta}{\lambda}-D\right)-\\
& -\frac{a}{2}\sin\omega\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\delta-\frac{\Delta}{\lambda}\right)+\\
& +\frac{a}{2}\sin\omega\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\delta-\frac{\Delta}{\lambda}+D\right),\\
0 = & \sin\omega\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\delta-\frac{\Delta}{\lambda}\right)+\\
& +\sin\omega\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\delta-\frac{\Delta}{\lambda}-D\right)+\\
& +\cos\omega\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\delta-\frac{\Delta}{\lambda}\right)-\\
& -\cos\omega\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\delta-\frac{\Delta}{\lambda}-D\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

A (7) alatti második egyenlet feltételt szolgáltat ω szögre. Ha röviden

$$\begin{aligned}
2\pi\left(\frac{t}{T}+\delta-\frac{\Delta}{\lambda}\right) &= \varphi,\\
2\pi D &= \psi,
\end{aligned} \tag{8}$$

akkor

$$\sin\omega\sin\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos\psi - \sin\omega\cos\varphi\sin\psi + \cos\omega\cos\varphi - \\ - \cos\omega\cos\varphi\cos\psi - \cos\omega\sin\varphi\sin\psi = 0. \qquad (9)$$

A (9) vonatkozás φ bármely értékére érvényes, ennélfogva:

$$\begin{aligned} \sin\omega + \sin\omega\cos\psi - \cos\omega\sin\psi &= 0, \\ \sin\omega\sin\psi + \cos\omega\cos\psi - \cos\omega &= 0, \end{aligned} \qquad (10)$$

azaz:

$$\operatorname{tg}\omega = -\operatorname{tg}(\omega - \psi),$$

$$\omega = \frac{\psi}{2}. \qquad (11)$$

A (8) folytán:

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\pi D, \qquad (12)$$

a hol Biot megfigyelései szerint

$$D = h\frac{\Delta}{\lambda}, \qquad (13)$$

és h állandó. Így tehát ω tisztán a kvarczlemez vastagságának függvénye.

Az ω szög további physikai értelmét a (7) alatti egyenletek elsejéből olvashatjuk ki.

Az S-t szolgáltató egyenlet némi egyszerűsítés után:

$$\begin{aligned} S = \frac{a}{2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \delta - \frac{\Delta}{\lambda}\right)&[\cos\omega \quad + \cos(\omega - 2\pi D)] + \\ + \frac{a}{2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \delta - \frac{\Delta}{\lambda}\right)&[-\sin\omega + \sin(\omega - 2\pi D)]. \end{aligned} \qquad (14)$$

A (14) alapján a második Nicolból kilépő fénysugár intensitása:

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 dt = \frac{2a^2\pi^2}{T^2}\cos^2(\omega - \pi D). \qquad (15)$$

Ámde az összehasonlító lámpa intensitása az első Nicol előtt, mikor még linearisan nem polározódott:

$$I_0 = \frac{4a^2\pi^2}{T^2}, \qquad (16)$$

és így I és I_0 között az

$$I = 2I_0 \cos^2 \left(\omega - \frac{k}{\lambda}\right) \tag{17}$$

összefüggés áll fönn; a hol

$$k = h\pi\Delta; \tag{18}$$

azaz a k állandó csak a kvarczlemez vastagságától függ. Ennek meghatározása akként történhetik, hogy valamely fényforrás spektrumát a colorimeteren átbocsátjuk; ekkor egyes fekete csikok keletkeznek, melyek helyei

$$\omega - \frac{k}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, \ldots \tag{19}$$

értékekkel adottak.

Az ω és a λ (19) folytán megadja k-t, k és Δ pedig együttesen teljesen jellemzik a colorimetert.

A colorimeterrel a szin problemájának megoldása a (17) egyenlet alapján csak úgy intézhető el, ha ismerjük I-nek az objectiv intensitásnak analytikai alakját.

A spektralegyenlet* származtatására az első nagy fontosságú theoretikus kisérletet dr. KÖVESLIGETHY tette meg, rendkívül egyszerű s nagyon könnyen kezelhető algebrai függvényt állított fel több hypothesis alapján:

$$I = \frac{4}{\pi} \mu A \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}, \tag{20}$$

melyben μ tisztán a test hőmérsékletétől és anyagszerkezetétől függő állandó és A a spectrum teljes intensitása $\lambda = 0$ és $\lambda = \infty$ határok között.

Utána MICHELSON elméleti, WEBER kisérleti úton próbálkoztak, de a problémát még mindig nem sikerült szigoruan megoldaniok. PASCHEN 1895-ben igen közel viszi a szilárd testek spectralegyenletének kérdését a megoldáshoz.

Míg PASCHEN vizsgálódásainak rendszeres feldolgozásán fáradozott, óriási buzgalom indult meg e téren részben elméleti,

---

* Handbuch der Spectroscopie von H. Kayser. 1902.

részben kisérleti úton. 1896-ban WIEN theoretikus úton tökéletes spektralformulához jut, a mely PASCHEN formulájának egy specialis esete. THIESEN, LUMMER-JANKE kisérleti, RAYLEIGH elméleti úton nem kevésbbé fontos eredményekhez jutnak. PLANCK-nak 1900-ban sikerült a WIEN-egyenletet javítani s lehetőleg szigorú spektralegyenletet származtatni, a mely így hangzik:

$$I = I_m \lambda_m^5 (e^{4.965} - 1) \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{4.965\,\lambda_m}{\lambda}} - 1} = I_m (e^{4.965} - 1)\, \lambda_m^5 f(\lambda_m), \tag{21}$$

s melyben I_m a spektrumnak λ_m helyére eső maximalis intensitása.

A (21) alatti egyenletet RUBENS és KURLBAUM 1900-ban a kősóra és fluoritra hat különböző kisérletben vizsgálták meg s azt tapasztalták, hogy a hőmérsékleti viszonyokat az összes spektralegyenletek közül a leghűbben adja vissza.

Nevezetesen igazolták ujból, hogy

$$\lambda_m T = \text{const.} \tag{22}$$

valamennyi testre külön-külön.

A mondottak alapján (20)-ra mint történeti értékű, (21)-re mint eddig legjobb spektralegyenletre adom a szinmérésnek a colorimeterrel való megoldását.

A tárgyalás egységesen vihető ki mindkét esetre. Hozzuk be a következő egyszerű jelzéseket:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\mu) &= \frac{4}{\pi}\,\mu\,\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2} \\ \psi(\lambda_m) &= (e^a - 1)\,\lambda_m^5 \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{a\lambda_m}{\lambda}} - 1}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

a hol $a = 4.965$.

Ekkor KÖVESLIGETHY szerint:

$$I = A\varphi(\mu), \tag{24}$$

és PLANCK szerint:

$$I = I_m \psi(\lambda_m). \tag{25}$$

A (24) és (25) valamely izzó test objectiv intensitását a legszabatosabb alakban tüntetik fel. Az objectiv intensitás két részből, energia készletből és a szint kifejező szorzóból áll. Az energia készleteket A, I_m fejezik ki, a szint a $\varphi(\mu)$ és $\psi(\lambda_m)$ függvények jellemzik.

A (24) és (25) valamely izzó test spektrumában λ helyen adják az intensitást. Ha $\lambda=\lambda_1$ és $\lambda=\lambda_2$ határok alkotta mező intensitását akarjuk, akkor

$$F(\mu) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\mu)\, d\lambda = \frac{4\mu}{\pi} \left[\frac{1}{2\mu} \operatorname{arctg} \frac{\mu(\lambda_2-\lambda_1)}{\mu^2+\lambda_1\lambda_2} - \frac{1}{2} \frac{(\mu^2-\lambda_1\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1^2+\mu^2)(\lambda_2^2+\mu^2)} \right], \tag{26}$$

$$P(\lambda_m) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \psi(\lambda_m)\, d\lambda = \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-mcl}}{mc} (l^3-3l^2+6l-6) \right]_{l_2}^{l_1} (e^a-1)\, \lambda_m^{+5},$$

a hol

$$l = \frac{1}{\lambda}, \qquad c = a\lambda_m \tag{27}$$

kifejezések képzése után a mező intensitása a két formula szerint:

$$I' = AF(\mu), \qquad I' = I_m P(\lambda_m). \tag{28}$$

A Zöllner-féle photometerrel végzett mérések elve, hogy a mesterséges csillag a harmadik Nicol v szöglettel való elforgatása után egyenlő intensitásúvá tehető a természetes csillagéval, ha már a colorimeterrel a mesterséges csillag szinének a természetesével egyenlővé tétele megtörtént. Számolnunk kell azonban azon körülménynyel is, hogy a subjectiv intensitás az objectivnek valamely s törtrésze, a hol s tisztán a szem érzékenységétől függ.

Ezek szerint a természetes csillagnak, mint kevert fénynek intensitását nyerjük, ha (24) és (25)-re kiterjesztjük az integratiot a látható spektrum határain belül: $\lambda = A$ és $\lambda = H$, a Nap spektrumában látható FRAUNHOFER-féle vonalakig.

Így a természetes csillag intensitása:

$$\int_H^A I s d\lambda, \tag{29}$$

és a (17) egyenlet szerint hasonlóképen az összehasonlító lámpáé:

$$2\int_H^A I_0 s \cos^2 v \cos^2\left(\omega - \frac{k}{\lambda}\right) d\lambda. \tag{30}$$

Ámde az előrebocsátott méréselv szerint v úgy van választva, hogy a természetes és mesterséges csillag egyenlő fényességű, hogy tehát

$$\int_H^A I s d\lambda = 2\int_H^A I_0 s \cos^2 v \cos^2\left(\omega - \frac{k}{\lambda}\right) d\lambda. \tag{31}$$

Az s tisztán a hullámhossz függvénye. Minthogy mindkét oldalon az integratio határai ugyanazok, azért s-nek e határok között van oly s_0 értéke, a mely aztán kiemelhető és mindkét oldalon elhanyagolható hibán belül elhagyható.

A (23) és (24) folytán:

$$\frac{4}{\pi}\mu A \int_H^A \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2} d\lambda = 2\frac{4}{\pi}\mu' A' \int_H^A \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu'^2)^2} \cos^2 v \cos^2\left(\omega - \frac{k}{\lambda}\right) d\lambda,$$

a hol μ, A a természetes csillag spektrumának, μ', A' az összehasonlító lámpa spektrumának jellemzői.

Minthogy bármely fénynek energiabeli és szinbeli hatásai egymástól függetlenek, azért (32) két részre bomlik:

$$A = A' \cos^2 v,$$

$$F(\mu) = \frac{8}{\pi}\mu' \int_H^A \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu'^2)^2} \cos^2\left(\omega - \frac{k}{\lambda}\right) d\lambda. \tag{33}$$

Ha most a jobb oldali kifejezést röviden x-el jelöljük, akkor $F(\mu)$ számára nyerjük a következő differentialegyenletet

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2} + 4x - 2\frac{8}{\pi}\mu' \int\limits_H^A \frac{\lambda^2}{(\mu^2+\lambda^2)^2} d\lambda = 0, \tag{34}$$

melynek megoldása:

$$F(\mu) = F(\mu') + A\cos(2\omega + a), \tag{35}$$

a hol A és a integratiós állandók.

Ha a természetes csillag helyett az összehasonlító lámpával azonos fényt veszünk, akkor

$$\mu = \mu'$$

$$2\omega_1 + a = \frac{\pi}{2},\ 3\frac{\pi}{2}, \ldots \tag{36}$$

A második integratiós állandó meghatározására természetes csillag helyett tiszta fehér fényforrást használunk s a colorimetert addig forgatjuk, a míg szintén a legtisztább, a kékesfehér csillagoknak megfelelő fehér fényt nem nyerjük, ekkor:

$$F(\mu_0) = F(\mu') + A\cos(2\omega_0 + a) \tag{37}$$

megadja A-t is.

E szerint a szinmérés alapjául szolgáló egyenlet KÖVESLIGETHY szerint:

$$F(\mu) = F(\mu') + \frac{F(\mu_0) - F(\mu')}{\sin 2(\omega_0 - \omega_1)} \sin 2(\omega - \omega_1). \tag{38}$$

A (25) alatti PLANCK-féle egyenletre ugyanazon meggondolás szóról-szóra alkalmazható: A szerepét I_m, $F(\mu)$ szerepét $P(\lambda_m)$ viszi.

PLANCK szerint a szinmérés egyenlete:

$$P(\lambda_m) = P(\lambda'_m) + \frac{P(\lambda^0_m) - P(\lambda'_m)}{\sin 2(\omega_0 - \omega_1)} \sin 2(\omega - \omega_0). \tag{39}$$

Ha tehát sikerül valami módon $F(\mu')$, $F(\mu_0)$; $F(\lambda'_m)$ és $P(\lambda^0_m)$ kifejezéseket meghatározni, akkor (26) szerint táblázatok készíthetők, melyek egyike ω-hoz μ-t, a másika ω-hoz λ_m-t szolgáltatja; azaz ω kétségtelenül a szin mértéke, bármelyik spektralegyenletet fogadjuk is el. Ez annál fontosabb, minthogy colorimeteres mérések elég könnyen végezhetők, míg az állócsillagok teljesebb spektrophotometriai mérései még rendkívül nehézségeket okoznak.

Úgy a (38)-ban, mint a (39)-ben szereplő állandó értékek kétkét spektralphotometriai méréssel mindenkor meghatározhatók.

A

$$P(\lambda_m) = a + b \sin 2(\omega - \omega_0) \tag{40}$$

ezután igen alkalmas az égi testek hőmérsékletének meghatározására is. A (40) bármely ω-hoz szolgáltatja a megfelelő λ_m-t. De LUMMER és PRINGSHEIM kisérleti úton bebizonyították, hogy az absolut fekete testre, illetve a fehéren izzó platinára:

$$\lambda_m T = 2940, \quad \text{ill.} \quad \lambda_m T = 2630, \tag{41}$$

a hol T az izzó test absolut hőfoka.

Minthogy az összes izzó testek e két határ közé vehetők, azért az égi testek absolut hőfokára két határértéket nyerünk a következő egyenletekből:

$$T_{max.} = \frac{2940}{\lambda_m}; \quad \text{és} \quad T_{min.} = \frac{2630}{\lambda_m}. \tag{42}$$

Ime e rövid megjegyzésünk is mutatja, mennyire fontos teret nyit az ég photometriája.

Terkán Lajos.

A Mathematikai és Physikai Társulat tizedik rendes közgyűlése.

A nemzeti ünnep, közgyűlésünk megszokott napja, ez idén nagyszombatra esett, a miért is a Választmány úgy határozott, hogy a közgyűlés május 2-án délután 5 órakor tartassék meg az egyetemi physikai intézetben. Az április hó 2-ról keltezett meghivóra számos fővárosi és vidéki tag és vendég jelent meg. A kitett íveken a tagok következő névsora szerepel:

Andor Tivadar, Arany Dániel, Balog Mór, Bartoniek Géza, Bauer Mihály, Beke Manó, Biskoroványi Vilmos, Bodola Lajos, Bozóky Endre, Buchböck Gusztáv, Csemez József, Demeczky Mihály, Dietz Lajos, báró Eötvös Loránd, Feichtinger Győző, Fekete Jenő, Fényes Dezső (Arad), Fröhlich Izidor, Fröhlich Károly, Galló Paula, Glücklich Vilma, Gruber Nándor, Halász Ernő, báró Harkányi Béla, Harsányi Dezső, Hausbrunner Vilmos, Hilberth Stefánia, Hoor Mór, Horváth József (Pápa), Kados Aladár, Kármán Ferencz, Károly Irén (Nagyvárad), Klupathy Jenő, Kopp Lajos, Kőnig Gyula, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Lakits Ferencz, Mikola Sándor, Mórotz Kálmán, Oberle Károly, Obláth Richárd, Pekár Dezső, Rados Gusztáv, Rados Ignácz, Raffmann Jakab, Réthy Mór, Steiner Lajos, Straub Sándor, Szabó József (Vácz), Szabó Péter, Széchy István, Szerényi Géza, Szijjártó Miklós, Szily Kálmán, Szőke Béla, Tangl Károly, Vámos Dezső, Winter József, Wittmann Ferencz, Zemplén Győző.

A közgyűlés napirendje:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1903-ra.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. A tisztikar és választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

A közgyűlést báró Eötvös Loránd elnök nyitotta meg rövid üdvözlő beszéddel s a mult közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítése után a jegyzőkönyv hitelesítésére Fényes Dezső és Straub Sándor tagtárs urakat kéri fel.

2. Titkári jelentés Kövesligethy Radótól.

Tisztelt Közgyűlés!

A zárókő letétetett és messze világra tekint a pompás épület, melyet a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai János emlékének emelt.* Szép szokás, hogy a felszentelőn nem felejtik el az alapvetés szerényebb ünnepét és ezért büszkeséggel szabad felemlítenem e helyen, hogy a Mathematikai és Physikai Társulat volt az, mely még 1894-ben, II. rendes közgyűlésén Szily Kálmán indítványa folytán Bolyai János addig jeltelen sírjának szerény emlékkővel való ellátására megtette az első lépéseket, majd három évvel később «a tér absolut igaz tudományának» magyar nyelven való közzétételével igyekezett kegyeletét folytatólagosan is kifejezni.

Az elmult társulati évünk, nagy mathematikusunk születésének százados fordulója, nem kis részében e nagy szellem emlékezetének volt szentelve. Bár a körülmények az ünnep főrészét időben kissé eltolták, lényegesen mégis ezen jelentésembe tartozik megemlítenem, hogy az ünnepre Társulatunk is elvitte koszorúját. De múló virágoknál szebb koszorút font amaz, ünnepi Bolyai-füzetünkben immár nyomtatásban is megjelent előadásokból, melyet néhány lelkes tagtársunk Bolyai tudományáról tartott. E helyen nincsen jogom, hogy az elhangzott előadásokat osztályokba sorozzam, de ezúttal tudom, szívesen köszönik meg velem együtt tagtársaim, hogy az előadók bennünket, távolabb állókat, Bolyai magasan szárnyaló gondolatmenetébe beavatni szívesek voltak.

Ennél többet a Társulat úgy céljánál, mint eszközeinél fogva nem tehetett, de ennél többet tőle bizonyára senki nem is várt. Hogy a haza határain belül tudunk ünnepelni, és okosan tudunk ünnepelni, azt már 1894-ben mutattuk ki, midőn a tanulóversenyek létesítésével az Élőt ünnepeltük. De «hogy midőn kevesünket is mind külföldről vettük, adhassunk vissza is valaha valamit», arra hatalmasabb, hivatottabb intézmény kellett. Örvendünk, és büszkeséggel tölt el, hogy a Magyar Tudományos Akadémia talán épen a mi tanulóversenyeinkben

---

* Akad. Értesítő, 1903 február. 110—111. l.

rejlő gondolatot Bolyai Farkas óhajának betűszerinti értelmében is, oly ragyogón tudta a nagyszabásúba fejleszteni.

De mégsem mondottam helyesen, hogy Társulatunk ünneplése csak honi nyelven hangzott el. Egyik lelkes tagtársunk, Darvai Mór igazgató úr, a történelmi tudományok Rómában 1903 április 2—9-ig tartott nemzetközi kongresszusán a mathematikai, physikai, természetrajzi és orvosi tudományok történetével foglalkozó osztályban Bolyai János életéről olasz nyelven nagy figyelemmel és élénk érdeklődéssel hallgatott előadást tartott, melynek folyamán Lapunknak speczialis Bolyai-kutatásokat tartalmazó számát is bemutatta.

Szokásom ellenére kissé hosszasabban, tán kissé melegebben is szóltam ez emlékeinkről. Szükségem volt reá, hogy az ünnep hangulatát minél tovább fentarthassam, hogy — a mennyire tőlem telik — kevésbbé tűnjék fájdalmasnak, kevésbbé tudjon lesújtani az a sok és súlyos veszteség, mely Társulatunkat az elmult esztendőben érte.

Az év utolsó napján elvesztettük Társulatunknak kezdettől fogva buzgó alelnökét, Schmidt Ágostont, és az év folyamán meghalt ugyancsak megalakulása óta odaadó két választmányi tagja: Mauritz Rezső és Heller Ágost. Ravatalukra letettük a Társulat koszorúját és áldott emléküket szívünkben ápoljuk.

Tagjaink névsora is gyérült: kegyetlen kézzel törölt a halál egy-egy nekünk kedves nevet, olyat is, melynek viselője még élete virágát élte. Elhúnyt Mandák Dezső, Társulatunknak éveken át volt hű és buzgó pénztárosa, Felix János, Gerevich Emil, Károlyi Lajos, Krüger Viktor, Lengyel István, Nikolits Lázár, Plósz Pál, Serédy Marczell, Steindl Imre és ujabban egy kedves, nagyrabecsült és szorgalmas tagtársunk, Pallagi Gyula, a kit még mult évi közgyűlésünk élvezettel hallgatott.

A tizenegyedik társulati évben 11 rendes ülést tartottunk, melyek látogatottsága megnyugtathat azíránt, hogy helyes úton járunk. Nyolcz előadó tíz mathematikai, kilencz előadó tizenegy physikai tárgyról értekezett és ezek közül öt előadást kisérletek is élénkítettek. Talán a Természettudományi Társulatnak példájára hivatkozással köszönhetjük, hogy a tizenhét felolvasó közül a Társulatnak már öt választmányi tagja is szerepel. A kisérleti előadásoknak még mindig felpanaszolható kis számát hatalmasan emeli mai közgyűlésünk tárgysorozata, melynek — reménylem — vidéki társaink is látják hasznát. A közgyűlés szokásos napja, nemzeti ünnepünk napja, ezúttal a húsvéti szünet közepére esett és ezért nem volt betartható.

A Mathematikai és Physikai Lapok XI. évfolyama a legvégsőig menő takarékosság parancsolta 24 ívnyi terjedelemben szabályosan megjelent. A megszokott rovatokon kívül benne hét szerző tizenegy mathematikai, tizenegy szerző tizenöt physikai tárgyú czikkét találjuk. Van közöttük nem egy, a mely egészen új, elméletileg és kisérletileg fontos eredményekhez vezet.

A IX. mathematikai tanulóverseny 1902. október 9-én folyt le. A jelentkezők száma, összesen 58, ezúttal 14-gyel kevesebb volt, mint a múlt alkalommal, de bőven kárpótolta a Társulatot a feltünően javult eredmény. Az első díjat — mint azt az őszi első rendes ülésünk bővebben megokolva hirdette — Kőnig Dénes, a másodikat Szmodics Hildegard nyerte el.

Választmányi üléseink, melyek kizárólag a Társulat belső életével járó teendőkkel foglalkoztak, ezúttal nem hoztak a nyilvánosságot közelebbről érdeklő határozatot.

Tagtársainknak száma a társulati év végén 420, előfizetőink száma 72. Amaz a mult évhez képest 13-mal fogyott, emez öttel emelkedett. A halál ütötte réseket a Társulat még nem volt képes betölteni, de azért mégis túl vagyunk az oly számos éven át makacsul betartott létszámon, úgy, hogy a lassú terjedés némi reményét táplálhatjuk. Tagtársaink majdnem fele, 199 Budapesten lakik, 221 vidéki, s közöttük 8 hölgy és 16 alapító tag van.

Jelentésem végén ujból a hála szavaival a Magyar Tudományos Akadémiához kell fordulnom, a melynek III. osztálya, és Mathematikai és Természettudományi Bizottsága most is kegyes volt Társulatunkat összesen 2000 (kétezer) koronányi segélyben részesíteni. E hathatós támogatás nélkül már régen be kellett volna szüntetni Társulatunk tevékenységét, noha igen tisztelt pénztárosunk a tagdíjak behajtása körül szinte a csodással határos eredményeket ér el.

A három év, melyre a közgyűlés megtisztelő választása szólt, letelt, s tiszttársaimmal együtt a közgyűlés kezébe teszszük le megbizatásunkat. Szívből fakadó köszönetet mondok tagtársainknak mindvégig tapasztalt jóindulatáért s lankadatlan munkakedvéért, melylyel tisztségünket megtisztelni és könnyíteni szívesek voltak.

Kérem a tisztelt közgyűlést, hogy jelentésemet tudomásul venni méltóztassék.

Budapest, 1903 május 2-ikán.

3—4. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1903-ra és pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.

Mélyen tisztelt Közgyűlés!

Az 1902. év Társulatunk anyagi helyzetét illetőleg, elég kedvezően zárült, mert tiszta vagyonunk az év végén 12,629 kor. 82 fillér,* a 12,670 koronát kitevő alaptőkével szemben tehát a hiány csak 40 korona 18 fillér.

Ugyanis tartozásunk összege, mint azt a vagyon-mérleg teher oldalán kimutatom, 2336 kor. 38 fillér, t. i.:

1. a nyomdai tartozás a mult évre kitesz 1833 k. 38 f.
2. decz. 31-ig ki nem fizetett irói t.-díjak 503 k. — f.

Ezen tartozások födözetéül szolgál a forgó tőke 859 kor. 85 fillér készpénzzel s több rendbeli takarékpénztári betéttel, melyek részletezése a vagyon-mérleg vagyon oldalán található, e betétek összege 1136 kor. 35 fillér, továbbá hozzájárulnak még némi követelések is, melyeket ugyanazon oldalon mutatok ki, t. i. tagdíjhátralékok 200 kor., hirdetési díj, mely rendszerint utólag fizettetik, 100 kor.

A födözet tehát 2296 kor. 20 fillér, vagyis 40 kor. 18 fillérrel kevesebb, mint a tartozás. Megjegyzem, hogy e két utóbbi tétel nagyobb összegben is felvehető volna.

E kedvező eredmény főleg abban leli magyarázatát, hogy részint a f. évi tagdíjak, részint az előfizetési díjak, de különösen a hátralékokból jelentékenyen több folyt be, mint a mennyire számítottunk, így

f. é. tagdíjból 243 koronával,
előfiz. díjból 182 koronával,
hátralékokból 537 koronával több folyt be, ellenben kevesebb jött be a kamatokból 9 kor. 17 fillérrel.

Megemlítendő még az, hogy vegyes és átmeneti bevételeink 44 kor. 1 fillért tettek ki, erre előirányozva nem volt semmi.

A kiadásoknál is némi megtakarítás volt eszközölhető, de hogy tiszta képet nyerjünk e tekintetben, tartozásainkat figyelmen kívül hagyni nem szabad, illetőleg azokat a teljesített kiadásokhoz hozzá kell számítani, tehát:

a nyomdai kiadások	3057 kor.	54	fillér,
hozzászámítva a tartozást	1833 kor.	38	fillér,
Összesen	4890 kor.	92	fillér,

vagyis az 5054 kor. 99 fillér előirányzattal szemben 164 kor. 7 fillér megtakarítás.

Az irói t.-díjak czímén kifizettünk	1891 kor.	82	fillért,
kifizetendő még	503 kor.	—	fillér,
Összesen	2394 kor.	82	fillér,

* A közgyűlésen körözött nyomtatott kimutatásban sajtóhibából ezen összeg három koronával nagyobb volt.

vagyis a 2400 kor. előirányzattal szemben itt 5 kor. 18 fillér megtakarítás mutatkozik.

Az expeditiónál 16 kor. 63 fillér, az irodai költségeknél 17 kor. 43 fillér, a középiskolai math. tanulóverseny költségeinél 2 kor. a megtakarítás.

E kedvező eredményeket némileg korlátozza a vegyes és átmeneti kiadások czímén szereplő 102 kor. 66 fillér, olyan kiadások, melyekre előre számítani nem lehetett, s melyek az előbb említett czímek alá nem foglalhatók.

Ezekben volt szerencsém röviden vázolni mult évi bevételeinket és kiadásainkat, bár bevételeink összege kiadásainkat, a csekély hiánytól eltekintve, födözték, s talán ha említett követeléseink összegét fölemelnők, némi fölösleget is tudnánk kimutatni, mégis anyagi helyzetünk olyan volt, hogy folyóiratunk ívszámát emelnünk ez idő szerint nem lehetett.

Ezután, ha a m. t. Közgyűlés megengedi, áttérek az 1903. évi költségelőirányzatra.

Egyes tételek a zárszámadásból közvetlenül áthelyezendők az előirányzatba, ilyenek: 1) pénztári maradvány 1996 kor. 20 fillér, t. i. a mely áll készpénzből és takarékpénztári betétből, 2) hátralékos tagdíjak 200 koronája, továbbá a hirdetési díjak 100 koronája, melyhez a f. é. hirdetési díj, 160 korona, járul. A kiadásoknál a nyomdai tartozások, 1833 kor. 38 fillér, s irói tiszteletdíjak a mult évre, 503 korona egyszerűen beiktatandó.

Egyebekben a költségvetés a mult évi alapján készült, némi változást óhajtanék csak tenni, t. i. f. é. tagdíjak czímén 2100 kor. helyett 2200 koronát, előfizetési díjak czímén 500 kor. helyett 600 koronát, továbbá kamatok czímén 550 kor. helyett 540 koronát felvenni.

A kiadásoknál pedig egészen a tavalyi előirányzatot kérem elfogadni, s ehhez képest a hiányt, 1000 kor. 18 fillért, megállapítani.

Kérem a m. t. Közgyűlést, a számvizsgáló-bizottság jelentésének meghallgatása után, a multra nézve nekem fölmentvényt, és a jövő évi közgyűlésig az elnökségnek s a megválasztandó pénztárnoknak fölhatalmazást adni szíveskedjék.

E jelentés meghallgatása, az alábbi számadás és költségelőirányzat tételenkint való mérlegelése és a pénztárvizsgáló-bizottságnak felolvasott jelentése alapján a közgyűlés egyhangulag megadja a pénztárnoknak a felmentvényt és költségelőirányzatát 1903-ra elfogadja.

1902. évi zárszámadás.

BEVÉTEL	Előirányzat Kor.	fil.	Eredmény Kor.	fil.
1901. évi zárszámadási maradvány	1445	32	1445	32
Alapitó dij	—	—	—	—
Folyó évi tagdijak	2100	—	2343	—
Hátralékos tagdijak	300	—	837	—
M. Tud. Akademia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	180	—	180	—
Kamatok	550	—	540	83
Előfizetési dijak	500	—	682	—
Vegyes s átmeneti bevételek			44	01
			8072	16

KIADÁS	Előirányzat Kor.	fil.	Eredmény Kor.	fil.
Nyomdai költségek	5054	99	3057	54
Irói tiszteletdijak	2400	—	1891	82
Expeditió	400	—	383	37
Irodai költségek	500	—	482	57
Középisk. math. tanulóverseny költs.	160	—	158	—
Vegyes kiadások	—	—	102	66
Alaptőkéhez	—	—	—	—
Pénztári maradvány *a)* készpénzben			859	85
b) tak. p. betétben			1136	35
			8072	16

VAGYON	1901. év végén Kor.	fill.	1902. év végén Kor.	fill.
Forgó tőke :				
Készpénz	7	58	859	85
Leszámitoló és pénzváltó bankban takarékpénztári betét	48	80	48	80
M. kir. postatakarékpénztárban	1388	94	342	55
Leszámitoló és pénzváltóbank letétszámláján	—	—	745	—
Alaptőke :				
1. Leszámitoló és pénzváltóbank letétszámláján :				
a) Készpénz	200	—	200	—
b) 2600 kor. névértékü főv. kötvény à 87	2262	—	2262	—
c) 1 drb koronajáradék-kötvény	100	—	100	—
2. Első hazai takarékpénzt. betét	108	—	108	—
3. Majthényi Ottó-féle alap	10000	—	10000	—
Tagdijhátralékok	300	—	200	—
Föl nem vett hirdet. dij	180	—	100	—
	14595	32	14966	20

TEHER	1901. év végén Kor.	fill.	1902. év végén Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	2054	99	1833	38
Ki nem fizetett irói tiszteletdijak	—	—	503	—
Tiszta vagyon	12540	33	12629	82
	14595	32	14966	20

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk. Budapesten, 1902 april 2.
A választmány megbizásából : **Gruber Nándor** s. k. **Beke Manó dr.** s. k.

Kövesligethy Radó dr. s. k. ügyvivő titkár.
A közgyülés megbizásából : **Bogyó Samu** s. k. **Balog Mór** s. k.

1903. évi költségelőirányzat.

BEVÉTEL	1902. évi előirányzat Kor.	fill.	1903. évi előirányzat Kor.	fill.
1902. évi zárszámadási maradvány	1445	32	1996	20
Folyó évi tagdijak	2100	—	2200	—
Hátralékos tagdijakból	300	—	200	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	180	—	260	—
Kamatok	550	—	540	—
Előfizetési dijak	500	—	600	—
Hiány	1439	67	1000	18
	8514	99	8796	38

KIADÁS	1902. évi előirányzat Kor.	fill.	1903. évi előirányzat Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	2054	99	1833	38
Folyó évi nyomdai költségek	3000	—	3000	—
Irói tiszteletdijak:				
a) a mult évre	—	—	503	—
b) a folyó évre	2400	—	2400	—
Expeditió	400	—	400	—
Irodai költségek	500	—	500	—
Középisk. math. tanulóverseny	160	—	160	—
	8514	99	8796	38

Feichtinger Győző pénztárnok.

5. A tisztikar és választmányi tagok választása.

A Társulat alapszabályainak 20. §-a értelmében a tisztikar lelép és a választmányból kilépnek: Bartoniek Géza, Szily Kálmán, Than Károly és Wagner Alajos választmányi tagok. Elhalálozás folytán azonkívül még két választmányi hely üresedésben van, mely szintén betöltendő.

A közgyűlés felfüggesztetvén, megejtettek a választások, melyek eredményéről a Tangl Károly, Fényes Dezső és Steiner Lajos tagtársakból állott szavazatszedő-bizottság a következőt jelentette:

Beadatott 40 szavazat. Elnök lett 39 szavazattal báró Eötvös Loránd; alelnökök: Kőnig Gyula 38 és Károly Irén 39 szavazattal. Titkárok: Rados Gusztáv 39, Kövesligethy Radó 39 szavazattal; jegyzők: Kopp Lajos 39 és Kürschák József 39 szavazattal, végre pénztárnok: Feichtinger Győző 39 szavazattal. Választmányi tagok lettek: Bartoniek Géza 39, Szily Kálmán 38, Than Károly 40 és Wagner Alajos 40 szavazattal. Új választmányi tagokul választattak: báró Harkányi Béla 37 és Rátz László 39 szavazattal. Szavazatot nyertek még az elnökségre Kőnig Gyula 1; az alelnökségre Gruber Nándor 1, Scholtz Ágost 1, Szekeres Kálmán 1; a titkárságra Kürschák József 1, Zemplén Győző 1; a jegyzői tisztre Szekeres Kálmán 1, Balog Mór 1, Tötössy Béla 1 és a választmányi tagságra Szekeres Kálmán 2, Schlesinger Lajos 1, Klupathy Jenő 1, Zemplén Győző 1, Tangl Károly 1 és Demeczky Mihály 1 szavazatot.

A lelépett tisztikar és a kilépett választmányi tagok tehát nagy szótöbbséggel ujból választattak. Új alelnök az elhunyt Schmidt Ágoston helyett Károly Irén, és új választmányi tagok báró Harkányi Béla és Rátz László, a kik a szintén elhunyt Heller Ágost és Mauritz Rezső helyébe léptek.

6. Indítványok.

Minthogy indítvány egyáltalán nem adatott be, a napirend ezen pontja magától elesett.

*

Ezzel a közgyűlés hivatalos része befejeződött s miután elnök a pénztár vizsgálására a közgyűlés nevében ismét Balog Mór és Bogyó Samu tagtárs urakat kérte fel, a gyűlést berekesztette.

*

A közgyűlés estéjén azután a következő előadások tartattak:

Szily Kálmán: Gauss elvének viszonya d'Alembertéhez.

Klupathy Jenő: A Wehnelt-féle megszakító.

Báró Harkányi Béla: Az égitestek hőmérsékletének meghatározásáról.

Wittmann Ferencz: Elektromos hullámjelenségek kisérleti bemutatásokkal.

Május 3-án d. e. 9 órakor az egyetemi physikai intézetben:

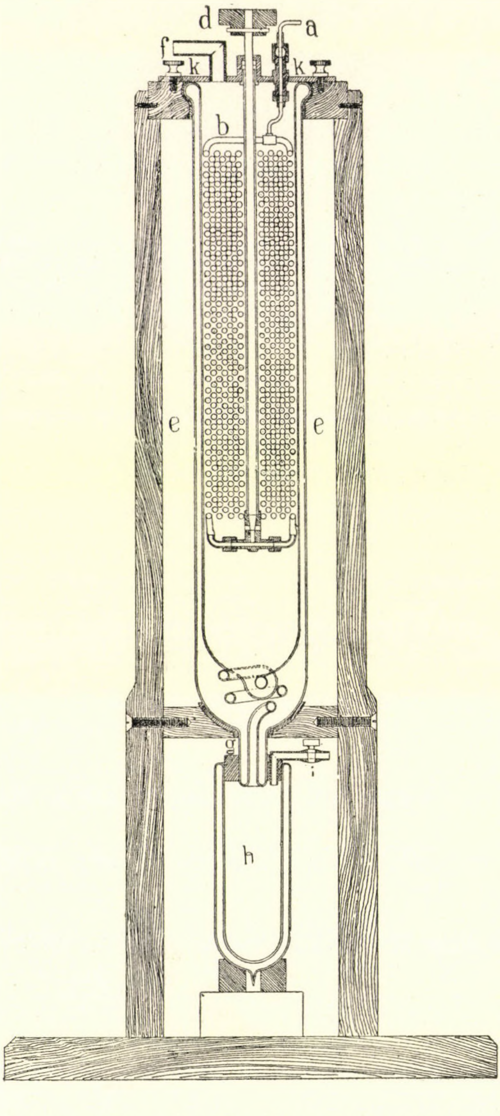
Fröhlich Izidor: A polározott fény interferentiája törvényeinek kisérleti bemutatása.

Pekár Dezső: Ujabb földmágneses műszerek bemutatása.

ELŐADÁSI KÉSZÜLÉK A LEVEGŐ CSEPPFOLYÓSÍTÁSÁRA.

Olszewski K. a krakói akadémiában bemutatott értekezésében (az Annalen der Physik 1903. 4. sz. füzetében is megjelent) a levegő és hidrogén folyósítására szolgáló ujabb készülékeit ismerteti, melyek fő-előnye a Linde- és Hanyson-féle készülékekkel szemben az, hogy jóval rövidebb idő alatt lehet a folyósítást elérni, illetve ugyanazon időben nagyobb mennyiségű folyós levegőt előállítani. Az ismertetett készülékek közt van egy kisebb, melynek czélja, hogy egy előadás keretében a levegőt folyósítani és netáni kisérleteket megtenni lehessen.

Az egyszerű szerkezetű készüléket Olszewski következőkép írja le: Faállványon *ee* vakuumedény van megerősítve, mely felső részében a *c* expanziós-szelepig ezüstözve van, alsó része átlátszó. Ebben az edényben van a két vékony vörösréz-csőből álló Hanyson-féle regenerátor *bb*; a csövek külső átmérője 2·5, a belső 1·6 mm., mindegyik cső 22 m. hosszú, a csavarodás átmérője 50 mm., magassága 24 cm. A regenerátornak a hozzátartozó szeleppel és a megerősítésre szolgáló sárgarézlemezzel együtt a súlya 1·600 gr. A regenerátor csövei újezüst-cső körül vannak felcsavarva és ezzel a *kk* sárgarézlemezre erősítve; a regenerátor alsó végén a *c* expanziós szelep, melyet a *d* kerékkel szabályozhatni. A regenerátort vékony flanellel csavarjuk körül, úgy, hogy gyenge erőltetéssel a vakuumedénybe betolható legyen; a *kk* csavarok arra szolgálnak, hogy a faállványhoz erősíthessük a regenerátort. *a* csövecske útján a készüléket fémmanometerrel és körülbelül 13 liternyi aczélpalaczkkal kötjük össze, melyben 200 légnyomás alatti száraz, széndioxydmentes levegő van. Az aczélpalaczk megnyitása után az expanziót a *d* fogantyúval úgy szabályozzuk, hogy a nyomás a palaczkban öt perc mulva mintegy 90 légnyomásra essék. A kiterjeszkedett levegő a szelepen át a regenerátor csavarodásai közé jut és az *f* csövön át a körlégbe megyen. Ha ily módon járunk el, egy aczélpalaczk alkalmazásával öt percz alatt 10—20 köbcm. folyós levegőre tehetünk szert; ha azonban két palaczkot használunk fel, melyek mindegyikében 200 légnyomás alatt van a levegő, a kiterjeszkedés kezdetétől számított 10 percz multán kb. 100 köbcm. folyós levegőnk lesz. A 90 légnyomásnál kisebb nyomásra való kiterjedés eredménytelen marad.



Az *ee* vakuumedény alsó részében összegyülő levegő az *i* csapon át a kisebb *h* vakuumedénybe gyűjthető; ezt a nagyobb edénynyel *g* dugó légmentesen köti össze; különben könnyen levehető és a benne levő folyós levegő különféle kisérletekre felhasználható. *L. F.*

MEGOLDOTT FELADATOK.

31. *Az A, B, C, P, Q pontok megadatván, szerkesztessék három kúpszelet úgy, hogy az első a B, C, P, Q, a második a C, A, P, Q, a harmadik az A, B, P, Q pontokon menjen át és egyszersmind kettenként érintsék egymást az A, B, illetőleg C pontban.* VÁLYI.

★

Ötödik megoldás Csillag Vilmos műegyetemi tanársegédtől.

Tekintsük a P és Q szilárd pontokon keresztülmenő kúpszeletek egész rendszerét $(k_1, \dots k_i, \dots k_j, \dots k_l, \dots)$. E kúpszeleteknek páronkint (k_i, k_j) a szilárd PQ-n kívül még egy változó (valós) közös húrjuk (s_{ij}) van és pedig olyformán, hogy hármanként véve a kúpszeleteket (k_i, k_j, k_l), a megfelelő három közös húr (s_{ij}, s_{jl}, s_{li}) egy pontban S_{ijl}-ben találkozik. Továbbá ebből az S_{ijl} pontból — a k_i, k_j és k_l kúpszeletekhez — vont érintők érintés-pontjai a szilárd P, Q pontokkal együtt ugyanegy kúpszeleten (k_{ijl}) feküsznek és az S_{ijl} pont nem egyéb, mint a PQ egyenesnek a k_{ijl} kúpeszeltre vonatkozó pólusa.*

Miután e relácziókat előrebocsátottuk, jelöljük a P, Q szilárd pontokon átmenő kúpszeletrendszernek a feladatban keresett elemeit k_1, k_2, k_3-mal. A reájuk vonatkozó érintkezési föltételek következtében változó közös húrjaik (s_{12}, s_{23}, s_{31}) nem egyebek, mint a C, A ill. B pontbeli közös érintők. Mihelyt e közös érintőket megszerkeszteni sikerült, azzal a keresett kúpszeletek meg lesznek határozva. Erre nézve pedig a fönt idézett relácziók megadják a teljes utasítást. Fölkeressük ugyanis az A, B, C, P, Q, öt pont meghatározta k kúpszeletre vonatkozólag a szilárd PQ egyenes pólusát, S-t, mely a C, A, ill. B pontokkal összekötve, megadja:

SC közös érintőjét a k_1 és k_2 kúpszeleteknek,
SA « « « k_2 « k_3 «
SB « « « k_3 « k_1 «

* Lásd pl. Clebsch-Lindemann. Vorles. ü. Geom. I. k. pg. 155.

Ezzel végre a keresett kúpszeleteket pl. a következő adatokkal határozhatjuk meg:

k_1-et P, Q, B, C pontjai és SC érintője által,
k_2-őt P, Q, C, A « « SA « «
k_3-at P, Q, A, B « « SB « «

Egyébként az elmondott szerkesztés most utólag közvetetlenűl is igazolható. Nézzük az imént meghatározott kúpszeletek bármelyikének, pl. a

$$k_1 \equiv (P, Q, B, C; SC)$$

kúpszeletnek összefüggését a

$$k \equiv (P, Q, B, C; SQ)$$

kúpszelettel. Legyen

$$(PQ, BC) = R, \quad (PB, QC) = T, \quad (PC, QB) = U,$$

akkor RTU a k és k_1 közös polárháromszöge úgy, hogy az R pont polárisa k és k_1-re nézve is ugyanazon $TU \equiv r$ egyenesbe esik, mely az $RQ \equiv PQ$-nak k-ra vonatkozó pólusán, az S-en keresztül megy. Már most ennek az S pontnak k_1-re vonatkozó polárisát megkapjuk, ha az $ST \equiv TU = r$-nek és az SC érintőnek pólusait, R-et és C-et összekötjük. Végre RC-nek k_1-gyel való második metszéspontja B lévén, B-ben vont érintője a k_1-nek szintén az $RC \equiv BC$ pólusán, az S-en megy keresztül.

N. B. Az egész szerkesztés megfelelő módosításokkal akkor is könnyen elvégezhető, ha a megadott pontok között párosával konjugált képzetesek vannak.

Két szilárd ponton (P, Q) átmenő kúpszeletrendszer elemi példáját képezi. pl. az egy síkban fekvő körök összessége, a mely esetben (P, Q) a sík végtelenben fekvő körpontjai. Erre a specziális esetre kellőképen átfogalmazva a feladatot, kitűztem az a «Középisk. Math. Lapok»-ban.

A GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEK ELMÉLETÉHEZ.

HILBERT a «Grundlagen der Geometrie» czímű értekezésében megmutatta, hogy mindazok a síkbeli szerkesztési feladatok, a melyek a tőle tárgyalt öt axiomacsoport kizárólagos használatával megoldhatók, gyakorlati kivitelben csak a «vonalzó» és a «hosszátvivő» használatát igénylik. Sőt a hosszátvivő használatát meg lehet szorítani annyiban, hogy mindig ugyanazt a hosszat visszük át, hogy tehát egyszersmindenkorra meglevő etalont használunk, a mint azt KÜRSCHÁK úr megjegyezte.* Minthogy az etalon hossza egyáltalában nem lényeges az idevágó feladatok megoldásánál, könnyen felmerül az a kérdés, vajjon az etalon hordozhatósága nem szintén csak lényegtelen feltétele, vagyis más szóval, nem lehet-e az etalont valamely fix hosszal vagy legalább fix (egyenesvonalú) síkidommal pótolni? A pótolás tényleg nem lehetséges. A következő sorok ennek a ténynek, melyre KÜRSCHÁK úr hívta fel figyelmemet, pontos bebizonyítását adják.

1. A bebizonyításban döntő szerepet fog játszani a következő tételnek egy speciális esete.

*Valamely raczionális tartományból kiválasztott bármely orthoid tartomány szintén raczionális tartomány.***

Legyen

$$(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\mu)$$

az adott raczionális tartomány. A tételt úgy fogjuk bebizonyítani, hogy az orthoid tartomány előállításában az $\mathfrak{R}$ mennyiségeket fokozatosan az orthoid tartomány mennyiségeivel fogjuk pótolni.

---

* Math. Annalen. 55. köt. 597. o.

** A definicziókra nézve lásd KŐNIG: Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai.

Ha a az orthoid tartomány mennyisége, akkor

$$a=\frac{E_1(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\mu)}{E_2(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\mu)}, \tag{1}$$

a hol az E mennyiségek az $\mathfrak{R}$-ek raczionális és egész formái és E_2 nem zérus. Az $\mathfrak{R}_1$ hatványai szerint rendezve legyen

$$\begin{aligned} E_1&=A_0\mathfrak{R}_1^m+\cdots \\ E_2&=B_0\mathfrak{R}_1^m+\cdots \end{aligned} \tag{1*}$$

a hol A_0 és B_0 nem mindakettő zérus. Az E_2 nevezővel felszorozva, a rendezés után lesz

$$C_0\mathfrak{R}_1^n+\cdots+C_n=0, \tag{2}$$

a hol a

$$C_i=C_i(\mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\mu, a)$$
$$(i=0, 1, 2, \ldots, n)$$

mennyiségek argumentumaiknak raczionális és egész formái és hacsak nem minden C egyenlő zérussal, C_0-t a zérustól különbözőnek választjuk. A (2) egyenlet különböző viszonyokat tüntethet fel.

Legyen először $n>1$. Ekkor a-t hozzácsatoljuk az $\mathfrak{R}$-ekhez, de egyelőre $\mathfrak{R}_1$-et még nem hagyjuk el. Az a felhasználásával az $\mathfrak{R}_1$-nek n-dik és magasabb hatványai a következő módon fejezhetők ki:

$$\mathfrak{R}_1^{n+l}=-\frac{C_1}{C_0}\mathfrak{R}_1^{n+l-1}+\cdots \tag{3}$$
$$(l=0, 1, 2, \ldots)$$

Lehetséges másodszor, hogy $n=1$. Ekkor

$$\mathfrak{R}_1=-\frac{C_1}{C_0}=\frac{G_1(\mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\mu, a)}{G_2(\mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\mu, a)}, \tag{3*}$$

tehát az $\mathfrak{R}_1$ mennyiség az a-val pótolható. Lehetséges végre, hogy $n=0$, vagyis az összes C-k zérusok.

Minthogy E_2 nem zérus és ennélfogva a B mennyiségek közül pl. B_s nem zérus, azért az

$$A_s-aB_s=0$$

reláczióból következik, hogy α már az

$$(\mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\mu) \tag{4}$$

tartomány mennyisége. Ebben az esetben α helyett vagy az orthoid tartomány más mennyiségéből indulunk ki; vagy ha nincs olyan, melyre nézve n a zérustól különböznék, akkor az eredeti tartomány helyett mindjárt (4)-ből indulunk ki.

2. Az előbb tárgyalt első esetben, melyben $\mathfrak{R}_1$ még megmaradt, a következő módon fogjuk $\mathfrak{R}_1$-et előbb-utóbb eltávolítani. Ha β az orthoid tartománynak α-tól különböző mennyisége, akkor

$$D_0 \mathfrak{R}_1^{\overline{m}} + \cdots = \beta (F_0 \mathfrak{R}_1^{\overline{m}} + \cdots)$$

a hol a

$$D_i = D_i (\mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\mu, \alpha), \; F_i = F_i (\mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\mu, \alpha)$$

mennyiségek argumentumaiknak raczionális és egész formái és nem minden F_i zérus. Más szóval:

$$H_0 \mathfrak{R}_1^{\overline{n}} + \cdots + H_{\overline{n}} = 0, \tag{5}$$

a hol a

$$H_i = H_i (\mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\mu, \alpha, \beta)$$

mennyiségek argumentumaiknak raczionális és egész formái. Még pedig itt (3) következtében, mindenesetre:

$$\overline{n} < n. \tag{5*}$$

Hasonlókép az orthoid tartomány további $\gamma, \delta \ldots$ mennyiségeinek bevezetése után $\mathfrak{R}_1$-re oly rendre alacsonyabb fokú egyenleteket nyerünk, melyeknek együtthatói az $\mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\mu, \alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ raczionális és egész formái. Ez bekövetkezik az $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ tetszőleges választásánál. Mi azonban — és ez lényeges — minden újabb mennyiséget gondolatban úgy választunk, hogy a megfelelő egyenlet *hacsak lehetséges, az $\mathfrak{R}_1$-et valóban tartalmazza.* Ha már most az $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu$ bevezetése után végre elsőfokú egyenletre jutunk, akkor $\mathfrak{R}_1$ ezekkel a mennyiségekkel pótolható. Ha pedig a mennyiségek bevezetésének előbb megállapitott módjánál a μ bevezetése a zérus fokszámra vezet, akkor $\mathfrak{R}_1$ már az $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ mennyiségek által pótolható. Miután így az $\mathfrak{R}_1$-et eltávolítottuk, hasonlókép járhatunk el a többi $\mathfrak{R}$-re vonatkozólag, míg végre ezek helyett csakugyan az orthoid tartomány mennyiségei lépnek be.

3. Mi a tétel következő speciális esetét fogjuk alkalmazni. Álljon a raczionális tartomány számokból, akkor a tartományban foglalt algebrai számok összessége mindenesetre orthoid tartomány és így raczionális tartomány. Ámde ismeretes tétel szerint algebrai számokból álló raczionális tartomány számokból álló, azaz [1]-ből származó genustartományt alkot.

4. Áttérünk vizsgálatunk tulajdonképeni tárgyára. Nevezzük (A) typusú szerkesztéseknek azokat, melyek a vonalzót és etalont használják fel; (B) typusúaknak azokat, melyek csak a vonalzó és a fix síkidom használatát engedik meg. Ki fogjuk mutatni, hogy az (A) typusú szerkesztések nem pótolhatók a (B) typusúakkal. Tekintsük a következő feladatot.

Adva vannak a

$$(0, 0), \quad (1, 0)$$

koordinátákkal biró pontok, megszerkesztendő a

$$(\sqrt{p}, 0)$$

(p tetszőleges raczionális törzsszám) koordinátákkal biró pont. Ez a feladat az (A) typusú szerkesztésekkel megoldható; meg akarjuk vizsgálni, vajjon a (B) typusúakkal is megoldható-e?

5. Minden (B) typusú szerkesztés oly $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ véges műveletsorozatból áll, melynek minden tagja a következő műveletek valamelyike.

I. 1. Ismeretes (azaz adott, vagy már meghatározott) két pont összekötése egymással.

2. Ismeretes pont összekötése valamely ismeretes egyenes vagy a sík tetszőleges pontjával.

3. Ismeretes egyeneseken, vagy a síkban tetszőlegesen választható pontok összekötése egymással.

II. Ismeretes egyenesek metszése.

Ha valamely feladatot segédeszközeinkkel megoldhatunk, akkor ez megoldható úgy is, ha a szerkesztésben szereplő *tetszőleges* pontokat a következő speciális módon gondoljuk megválasztva. A sík tetszés szerinti pontjainak koordinátáit raczionális számoknak választjuk. Ha pedig a pont egy már ismeretes egyenes tetszés szerinti pontja, akkor koordinátáit úgy választjuk, hogy az egyenes meghatározására használt két pontra nézve képezett jellemző viszony raczionális szám legyen.

Az analitikai geometria első elemei szerint már most a szóban forgó feladat megoldására szükséges feltétel, hogy a $\sqrt{p}$ alakú számok annak a raczionális tartománynak mennyiségei legyenek, a melyet a fix síkidom szögpontjainak koordinátái meghatároznak. A $\sqrt{p}$ számoknak tehát egy *adott*

$$(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_\mu)$$

raczionális tartományban kellene lenni. Azonban a $\sqrt{p}$ számok algebrai számok és így ezeknek az előbbi tétel szerint egy az [1]-ből származó Γ genustartomány mennyiségeinek kellene lenni. Ez azonban lehetetlen. Ugyanis

$$p = \sqrt{p}\,\sqrt{p}$$

vagyis p a Γ-ban többszörös ideáltényezőkkel bir, tehát a Γ diszkriminánsának osztója. Ilyenek azonban csak véges számmal léteznek és így feladatunk a p-nek nem minden értékénél oldható meg a (B) typusú szerkesztésekkel.

Bauer Mihály.

AZ ÉGI TESTEK HŐMÉRSÉKLETÉNEK MEGHATÁROZÁSÁRÓL.

Az égi testek hőmérsékletének közelitő meghatározása a hőspektrumra vonatkozó újabban felfedezett törvényeken alapszik; ezért bevezetésül ismertetni kivánom az e tárgyra vonatkozó fontosabb elméleti és kisérleti vizsgálatokat, melyek a sugárzó energia törvényeinek mélyebb ismeretéhez vezettek.*

KIRCHHOFF hires törvényével, melyben az emissio- és absorbtioképesség közötti összefüggést szigorú elméleti alapon állapitja meg, nemcsak a spektroskopia sokoldalú alkalmazását tette lehetővé, hanem az újabb vizsgálatok irányát is kijelölte. Ha E-vel jelöljük egy tetszőleges test emissioképességét; A-val absorbtioképességét ugyanazon hullámhossznál és hőmérsékletnél, akkor KIRCHHOFF szerint az:

$$\frac{E}{A} = e \tag{1}$$

hányados független a test anyagi mineműségétől s csakis a hullámhossz és hőmérséklet függvénye. Ezen egyenlet alapján az e függvény úgy is értelmezhető, mint egy olyan test emissioképessége, melynek absorbtioképessége minden hullámhossznál és

* V. ö. O. LUMMER: «Le rayonnement des corps noirs» az 1900-iki párizsi physikus-congressus «Rapport»-jának II. kötetében, 41—99. l. (1900.)

H. KAYSER: «Handbuch der Spectroscopie» II. k. II. fejezet 67—136. l. (1902), mindkettő részletes irodalmi tájékoztatóval.

J. SCHEINER: «Strahlung und Temperatur der Sonne» (1899).

H. C. VOGEL: «Resultate spectralphotometrischer Untersuchungen». Monatsber. der k. Preuss. Akad. der Wiss. Jahrg. 1880, 801—811. l.

Baron B. HARKÁNYI: «Ueber die Temperaturbestimmung der Fixsterne auf spectralphotometrischem Wege». Astron. Nachr. Nr. 3770 (1902).

hőmérsékletnél egyenlő az egységgel, mely tehát minden ráeső sugarat absorbeál. Ilyen testet Kirchhoff absolut feketének nevez. Mivel ezen e függvény ilyformán minden anyagra közös, míg az E és A mennyiségek más és más fényforrásoknál a hullámhossz változásával igen különbözően viselkednek, nyilvánvaló ezen függvény kiváló fontossága úgy az elmélet, mint az alkalmazások szempontjából.

Az újabb elméleti vizsgálatok kiindulópontja a Stefan-Boltzmann-féle törvény, mely szerint az absolut fekete test összes sugárzása vagyis az e függvénynek a spektrum egész hosszára kiterjesztett integrálja a hullámhossz szerint véve, az absolut hőmérséklet negyedik hatványával arányos, vagyis:

$$\int_0^\infty e d\lambda = \sigma T^4. \tag{2}$$

Ezen törvényt Stefan tapasztalati úton vezette le s Boltzmannnak sikerült azt elméletileg bebizonyítani, a mechanikai hőelmélet második főtételére támaszkodva.

Az izzó szilárd testek spektrumának energia-eloszlását vizsgálva már régen felismerték azt a tényt, hogy az intenzitás a spektrum ibolya végétől kezdve elég gyorsan emelkedik maximumáig s azután valamivel lassabban kisebbedik zérus értékig. Az energia-maximum helye más és más testnél általában elég különböző, de jellemző tulajdonsága, hogy a rövidebb hullámhosszak irányában tolódik el, ha a hőmérséklet növekszik. Ez az oka annak, hogy az izzó test szine fokozatos hevítésnél a vörösből a sárgába, végül a fehérbe és kékesbe megy át. Az absolut fekete test esetében Wiennek sikerült elméletileg bebizonyítani, hogy az energia-maximum hullámhosszának: λ_m és az absolut hőmérsékletnek szorzata állandó, azaz:

$$\lambda_m T = \text{const.} \tag{3}$$

A törvény levezetésénél a thermodynamikai alapelveken kívül Doppler elvére is támaszkodik s a törvényt «eltolódási törvénynek» (Verschiebungsgesetz) nevezi. Ezután hasonló alapon az:

$$e = T^5 \varphi(\lambda . T) \qquad 4)$$

fontos egyenletet vezeti le, mely szerint az $\frac{e}{T^5}$ hányados csak a $\lambda . T$ szorzat függvénye. Ebből, ha a λ_m-hez tartozó energiát e_m-mel jelöljük, a 3) egyenlet felhasználásával lesz:

$$\frac{e_m}{T^5} = \text{const.} \qquad 5)$$

Végül sikerült WIENnek kevésbbé biztos alapon, a kinetikai gázelmélet felhasználásával az e függvényt a következő alakban előállítani:

$$e = C\lambda^{-5} \varepsilon^{-\frac{c}{\lambda T}}, \qquad 6)$$

hol ε a természetes logarithmusok alapszáma, C és c pedig állandók.

Míg az 1)—5) alatti egyenletek teljesen szigorúaknak tekinthetők s azokat általánosan el is fogadták, addig a 6) alatti eloszlási törvény levezetését hypothetikus alapjánál fogva többen kifogásolták s a dolgok jelen állása szerint ezen egyenlet nem is tekinthető szigorúan indokoltnak, de azért mint interpolatioformula a spektrum bizonyos részére igen jó szolgálatokat tesz.

PLANCK az elektromágneses fényelmélet alapján a következő emissioegyenletet vezette le:

$$e = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\varepsilon^{\frac{c_1}{\lambda T}} - 1} . \qquad 7)$$

Ha ezen egyenlet jobb oldalának számlálóját és nevezőjét $\varepsilon^{-\frac{c_1}{\lambda T}}$-vel szorozzuk, lesz:

$$e = C_1 \lambda^{-5} \varepsilon^{-\frac{c}{\lambda T}} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon^{-\frac{c}{\lambda T}}} ;$$

ha tehát $\frac{c}{\lambda T}$ elég nagy érték, a nevezőben álló exponentialis elhanyagolható az egység mellett, ez esetben tehát a PLANCK-féle egyenlet alakilag a WIEN-féle 6) egyenletbe megy át. A c és c_1

állandók arányosak az eltolódási törvény állandójával s egyszerű számítás alapján igazolható, hogy:

$$\lambda_m T = \frac{c}{5} = \frac{c_1}{4{\cdot}965}. \tag{8}$$

A felsorolt sugárzási törvények kisérleti igazolására mindenekelőtt szükséges volt az absolut fekete testet kisérletileg előállitani, mi újabban több kutatónak teljesen kielégitő közelitéssel sikerült is. Ezen kisérletek Kirchhoff azon megjegyzésén alapulnak, melyet ő az emissióról és absorbtióról szóló értekezésének végén mint alaptörvényének egyszerű következményét állitja oda. E szerint, ha valamely tér egyenlő hőmérsékletű testekkel teljesen körül van zárva s ezek semmiféle sugarat sem bocsátanak át (athermanok), akkor minden a tér belsejében áthaladó sugárnyaláb úgy qualitative mint intenzitását illetőleg olyan tulajdonságokkal bir, mintha egy ugyanolyan hőmérsékletű absolut fekete testtől származnék s teljesen független a testek mineműségétől és a tér alakjától s csak a hőmérséklettől függ. A tétel bizonyitásába itt nem bocsátkozom, csak egy Lummertől származó megjegyzéssel kivánom az itt fellépő viszonyokat magyarázni. Ha a feltevés szerint a teret körülzáró testek athermanok, ezeknél a Kirchhoff-féle törvény 1) alatti kifejezésébe az A absorbtioképesség helyett az R reflexioképességet vezethetjük be. Mivel:

$$A = 1 - R;$$

tehát:

$$E = e(1 - R);$$

s így:

$$e = E + Re.$$

Tehát az absolut fekete test emissioképessége egyenlő a vele egyenlő hőmérsékletű tetszőleges test emissioképességével, hozzáadva e azon törtrészét, mely a test reflexioképességével arányos. Ha tehát egy tetszőleges test sugárzásához hozzáadjuk azon energiát, mely a test reflexioképessége folytán sugárzásából hiányzik, az úgy fog viselkedni, mintha absolut fekete volna. Az előbb emlitett esetben a teret körülzáró testek emissioképessége épen az által válik egyenlővé e-vel, mert a többszöri reflexio következtében épen a hiányzó energiarész pótoltatik.

LUMMER és PRINGSHEIM ilyen egyenletes hőmérsékletű üregeket használtak a sugárzási törvények kisérleti igazolására. Az üreg falait fémből, porczellánból s legújabban a legmagasabb eddig elért hőmérsékletnél szénből állították elő. A hevítésre alkalmas fürdőket, a PERROT-féle gázkemenczét és legújabban többnyire elektromos áramot használtak. A hőmérsékletet egyes esetekben thermometerrel, a magasabb hőfokoknál azonban rendesen a LE CHATELIER-féle thermoelemmel mérték. Az összes sugárzás leméréseénél az általuk szerkesztett és alaposan tanulmányozott ú. n. felület-bolometer igen pontos adatokat szolgáltatott s ily módon sikerült a STEFAN-BOLTZMANN-féle törvényt a 100° C-tól 1300° C-ig terjedő közben a mérési pontosság határain belül teljesen igazolni, sőt legújabb időben az említett szénhenger segélyével körülbelül 2000° C-ig is kiterjeszthették vizsgálataikat, de itt a hőmérséklet már csak indirect úton a többi sugárzási törvények alapján volt meghatározható s ezen sorozat is igen kielégítő egyezést mutat. Példaképen álljon itt egyik régibb sorozat eredménye. Mivel a sugárzás, melyet a T_1 hőmérsékletű test kibocsát T_1^4-nel arányos, de ha az egy T_2 hőmérsékletű bolometerfelületre esik, ezen utóbbi saját sugárzása folytán csak a: $H = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$ hőmennyiséget fogja absorbeálni, a lemért sugárzás osztva a $T_1^4 - T_2^4$ különbséggel a STEFAN-BOLTZMANN-féle törvény szerint állandó lesz. Ezen hányadosok vannak LUMMER és PRINGSHEIM nyomán a következő táblázatban összeállítva a hozzájuk tartozó T_1 és T_2 absolut hőmérsékletekkel együtt:

T_1	T_2	$\frac{H}{T_1^4 - T_2^4}$
372·8	290·5	108·9
492	290	109·0
654	290	108·4
795	290	109·9
1108	290	109·0
1481	290	110·7

Az egyezés, tekintve a mérések nehézségeit, igen kielégítő.

A WIEN-féle eltolódási törvény és a 6) alatti spektrálegyenlet igazolása czéljából ugyanezen szerzők előállították a fentebb leírt fekete testek spektrumát egy olyan spektral-bolometer segélyével, melynél törőközegül egy fluoritprizmát, különben pedig semmi más absorbeáló közeget sem alkalmaztak, mert a szokásos lencséket concav tükrökkel helyettesítették. A sugárzást egy egyetlen szálból álló linear bolometerrel mérték s ennek adataiból megszerkesztve az energiagörbéket, belőlük λ_m értékét levezették. Ebből kiszámítván a 3) egyenletben álló szorzat értékét, ezen utóbbi a WIEN-féle eltolódási törvényt igen jól igazolja, mint azt a következő táblázat mutatja (λ_m mindenütt mikronokban (μ)):

abs. hőmérséklet	λ_m	$\lambda_m T$
621·2	4·53 μ	2814
723	4·08	2950
908·5	3·28	2980
998·5	2·96	2956
1094·5	2·71	2966
1259·0	2·35	2959
1460·4	2·04	2979
1646	1·78	2928
	közép	2940

Végül összehasonlították az energiagörbék alakját a WIEN-féle 6) egyenlet szerint számított görbékével s az egyezést a λT szorzat kisebb (3000 et nem meghaladó) értékeinél igen kielégítőnek találták. A nevezett szorzat nagyobb értékeinél az eltérés az észlelt és számított görbék között már elég jelentékeny s határozottan systematikus jellegű.

Még feltünőbb ezen eltérés BECKMANN mérésénél, ki sokkal nagyobb hullámhosszaknál dolgozott. Ő a sugarakat fluorit-felületekről többszörösen reflektáltatván, sikerült neki oly sugárnyalábokat elkülöníteni, melyek hullámhossza 24 μ-vel, illetőleg 32 μ-vel egyenlők. Ezzel ellentétben PASCHEN és WANNER, kik kisebb és közepes hullámhosszaknál végezték méréseiket, a WIEN-féle 6) alatti egyenletet azok által szigorúan igazoltnak tartják.

Mindamellett az idézett egyenlet, ha csak a spektrum látható (mintegy 0·4 μ-től 0·7 μ-ig terjedő) részére szorítkozunk, még magas hőmérsékletek esetében is elegendő közelítést nyújt, sőt tekintve a photometriai méréseknek aránylag korlátolt pontosságát, mintegy 6000° abs. hőmérsékletig alkalmazható lesz. A Planck-féle formula újabb mérések tanusága szerint ugyan λT nagyobb értékeinél sokkal jobb közelítést ad, de másrészt a látható spektrumban az említett szorzat kicsinysége folytán oly kevéssé tér el a Wien-féle egyenlettől, hogy a gyakorlat szempontjából ezen közben a két formula csaknem teljesen azonosnak tekinthető.

A fentebbi törvényekben szereplő főbb állandók ez idő szerint legmegbizhatóbb értékei a következők. A 2) alatti Stefan-Boltzmann-féle állandó: σ Kurlbaum szerint:

$$\sigma = 1{\cdot}277 \times 10^{-12} \frac{\text{gramm caloria}}{\text{cm}^2\ \text{sec}},$$

ha σ-t a felületegység által minden irányban kisugárzott energiára vonatkoztatjuk. Ugyancsak Kurlbaum mérte meg egy 1 cm² nagyságú 100° C hőmérsékletű fekete felület sugárzását minden irányban, ha a környezet hőmérséklete mindenütt 0° C; ezen $e_{100} - e_0$-lal jelölendő állandó értéke:

$$e_{100} - e_0 = 0{\cdot}01763 \frac{\text{gr. cal.}}{\text{cm}^2\ \text{sec}}.$$

Végül az eltolódási törvény állandója Lummer és Pringsheim fent közölt mérései alapján:

$$c = 2940.$$

Az absolut fekete test sugárzásán kivül újabban más anyagok, különösen fémfelületek sugárzását is többen megvizsgálták. A továbbiakra nézve fontosak a fényes platinafelületeknél talált törvényszerűségek, mert ezen utóbbi test nagy reflexioképessége folytán, sugárzás tekintetében a fekete testhez hasonlítva, mintegy az ellenkező szélsőséget képviseli. Ilyen platinafelület sugárzása Lummer szerint közel arányos az absolut hőmérséklet 5-ik hatványával és az energiamaximum hullámhossza itt is fordítva arányos az absolut hőmérséklettel, csak az állandó értéke kisebb valamivel mint a fekete testnél. Lummer mérései szerint itt:

$$\lambda_m T = 2630.$$

Az energiaelosztás ez esetben is előállitható a Wien-féléhez hasonló formulával, csak λ exponense változik, úgy hogy itt az emissioképesség:

$$E = C\lambda^{-6}\varepsilon^{-\frac{c'}{\lambda T}};$$

lesz, de az egyezés ezen utóbbi esetben a számitott és észlelt görbék között kevésbbé kielégitő, mint a fekete test esetében. Ezen utóbbi következtetéseket Paschen megfigyelései is igazolják.

Az itt felsorolt törvények alapján az izzó testek hőmérsékletének meghatározása elvi szempontból igen egyszerű, ha feltételezhetjük, hogy a vizsgált testek hősugárzás tekintetében eléggé megközelitik a fekete testet s így az arra bebizonyitott törvényszerűségek a vizsgált testre is, legalább nagy közelitéssel érvényesek. A tárgyalt törvények a fekete test esetében elég nagy közre vannak igazolva, hogy ily czélra is alkalmazhatók legyenek, sőt a Stefan-Boltzmann-féle törvény és a Wien-féle eltolódási törvény szigorú elméleti levezetésen alapulván, ezen közön kivül is érvényesek.

Legegyszerűbb módszer az összes sugárzást alkalmas módon lemérni s azután a hőmérsékletet a Stefan-Boltzmann-féle törvény alapján kiszámitani. A másik eljárás a Wien-féle eltolódási törvényen alapszik, de ehhez az energiamaximum hullámhosszának ismerete szükséges, melyből a 3) egyenlet alapján T egyszerűen számitható ki. Ezen módszereket s egyéb, a Wien-féle 6) alatti törvényre alapitott constructiv vagy numerikus eljárásokat több physikus használta lángok, elektromos lámpák s más technikai szempontból is fontos fényforrások hőmérsékletének meghatározására s a különféle úton talált eredmények általában kielégitő egyezést mutatnak.

Az itt vázolt módszerek nagyobb elvi nehézség nélkül alkalmazhatók olyan égi testeknél is, melyeknek saját fényük van, ha akár az összes sugárzást, akár a spektrum energiaeloszlását sikerül elegendő pontossággal mérések útján megállapitani. Ily kisérletek a Nap hőmérsékletének meghatározására már elég régiek, de mivel a régibb sugárzási törvényck csak igen tökéletlenül állítják elő a sugárzást magasabb hőmérsékleteknél s egyébként a régibb mérési adatok sem birtak még a kellő pontossággal, e számítások példátlan nagy eltéréseket mutatnak. Így Secchi értékei 4 és 10 millió fok között ingadoznak, míg Violle 1550° C-t vezet le a Dulong és Petit-féle sugárzási törvény alapján. Ezen óriási eltérések igen jelentékenyen kisebbednek, ha a számítást a modern sugárzási törvények egyikére alapítjuk.

Legegyszerűbb a Nap összes sugárzását valamely megbizható pyrheliometerrel vagy actinometerrel lemérni, vagyis az ú. n. solaris állandót meghatározni. Ez azon hőmennyiség grammcaloriákban, melyet a Nap perczenkint egy a földfelületen levő 1 cm^2 nagyságú 0° C hőmérsékletű felületre sugároz merőleges incidentia mellett, levonva belőle a felület által visszasugárzott hőmennyiséget. A solaris állandó ismeretével a számítás a következőképen alakul. Ha E-vel jelöljük a Nap felületegységének emissioképességét minden irányban és $\Delta\omega$-val a napkorong kúpszögét a Földről nézve, akkor a photometria egyik alaptörvénye szerint a 0° C hőmérsékletű fekete felület egysége által elnyelt energia, vagyis a solaris állandó lesz:

$$s = \frac{E}{\pi} \Delta\omega = E \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

hol φ a Nap átmérője szögmértékben; a napkorong kúpszöge ugyanis itt megengedettt közelítéssel:

$$\Delta\omega = \pi \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Ha most T-vel jelöljük a Nap absolut hőmérsékletét, mivel a feltevés szerint a fekete felületegységé 273°, a 2) egyenlet szerint lesz:

$$E = \sigma(T^4 - 273^4).$$

Ha végül a KURLBAUM által lemért $e_{100}-e_0$ különbség 60-szorosát: a perczenkint ez esetben kisugárzott hőmennyiséget h-val jelöljük, analog módon lesz:

$$h = \sigma(373^4 - 273^4)$$

s így:

$$\frac{s}{h} = \frac{T^4 - 273^4}{373^4 - 273^4} \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Ha ezen egyenletet T szerint megoldjuk, itt megengedett közelítéssel lesz:

$$T = 273 \sqrt[4]{\frac{2{\cdot}485 \times s}{\sin^2\frac{\varphi}{2} \times h}}$$

a Nap absolut hőmérséklete.

SCHEINER, ki újabban ezen fontos állandó meghatározásával igen behatóan foglalkozott, alapos discussio után s legmegbizhatóbb értékéül 4·0 gr. cal.-t választja, h-ra az idézett KURLBAUM-féle adatot fogadja el s így $\varphi = 32'$ értéke mellett T következő értékét számítja ki:

$$T = 7010°.$$

A talált formula alakjából következik, hogy s csekély változtatása T-re alig gyakorol befolyást; ha pl. s idézett értéke helyett 3·75 gr. cal.-t helyettesitünk a formulába, a hőmérséklet 6900° lesz. A SECCHI illetőleg VIOLLE által használt értékekből ily módon T-re 5400° illetőleg 6200° adódnék, legalább nagyságrendet illetőleg jó egyezésben a SCHEINER-féle értékkel s az óriási eltérés, melyet az idézett eredeti számadatok mutattak, ily módon csaknem teljesen eltünik.

Az így számitott hőmérséklet tulajdonképen nem egyéb, mint egy olyan absolut fekete test hőmérséklete, melynek látszólagos átmérője a Napéval egyenlő, s a Föld felületén észlelt sugárzása is ugyanaz. Az így definiált hőmérsékletet LE CHATELIER nyomán effectiv hőmérsékletnek nevezik. A Napfelület, helyesebben a photosphæra hőmérséklete, melyből a sugárzás ered, ettől lényegesen különböző lehet; egyrészt, mert ezen réteg emissioképessége kisebb lehet a fekete testénél, másrészt azért is, mert e réteg sugárzása még egy fölötte levő gáz- vagy gőznemű rétegen is keresztül halad, mint azt különösen spektral-photometriai mérések kétségtelenül bizonyítják. Ezen utóbbi réteg absorbtiója, mely különben a hullámhossz szerint is eléggé különböző, a photosphæra sugárzását mindenesetre gyengíteni fogja. Ezen utóbbi körülményt számításba veendő, SCHEINER itt nem részletezendő eljárás szerint arra az eredményre jut, hogy a fentebb közölt solaris állandót körülbelül 1·5-del kell még megszoroznunk. A solaris állandónak ezen helyesbített értéke tehát: 6·00 gr. cal. lesz, miből:

$$T = 7760^\circ$$

következnék.

A hőmérsékletmeghatározás második módszere még egyszerűbb számításhoz vezet. Ha λ_m az energiagörbe alapján ismeretes, a 3) egyenletből T kiszámítható. SCHEINER λ_m-re a LANGLEY-féle értéket: 0·6 μ-t fogadja el, a WIEN-féle törvény állandójára pedig LUMMER és PRINGSHEIM régibb méréseinek eredményét véve alapul, középértékben:

$$T = 4870^\circ$$

hőmérsékletet vezet le, mely az előbbinél lényegesen kisebb. Hogy mi az oka ezen elég jelentékeny eltérésnek, arra ismereteink jelen állása szerint kielégítő választ nem adhatunk. A két módszer igen különböző mérési adatokon alapul, továbbá azt sem tudjuk megitélni, hogy a Napfelület emissioja mennyire közelíti meg a fekete testét; ha most ezen eltérés az emissioképességek között elég jelentékeny volna, könnyen képzelhető, hogy ez a körülmény úgy a mérési adatokat, mint belőlük igen különböző módon számított eredményeket igen különböző mértékben befolyásolhatja. Ha például a Napfelület ú. n. szürke felület volna, vagyis absorbtioképessége kisebb volna ugyan az egységnél, de minden hullámhosszra ugyanaz, akkor a STEFAN-BOLTZMANN-féle törvényből számított hőmérséklet a valódinál alacsonyabb volna, míg az absorbtioképesség ilynemű viselkedése sem λ_m-re, sem a belőle a 3) egyenlet alapján kiszámított T értékre nem gyakorolna semminemű befolyást.

Még egy fontos hibaforrás is okozhat itt nehézségeket, melyről eddig nem szóltam: ez a földi légkör elnyelő képessége (extinctio), mely más és más hullámhosszakra igen különböző és elég gyorsan növekszik a spektrum ibolya vége felé. Ezért a solaris állandó közvetlenül lemért értéke elég jelentékeny correctióra szorul. E hatás másrészről λ_m-et is számbavehetőleg befolyásolja, mert a légkör hatása az energiagörbe alakját is módosítja s ezáltal az energiamaximum helyzete a vörös vég felé tolódik el. Ha most a solaris állandó levezetésénél teljesen szigorúan akarnánk eljárni, le kellene mérnünk az emissio értékét különböző hullámhosszakra s ezen mennyiségeket a megfelelő extinctio coefficiensekkel osztva, az így számított értékekből kiszámítani az 1) egyenletben álló integrál értékét. Ebből láthatjuk, hogy az első módszer tulajdonképen csak látszólag egyszerűbb a másodiknál; de e mellett még abban az elvi hibában is szenved, hogy a sugárzásnak oly részei, melyek a légköri extinctio folytán már nem is jutnak a Föld felületéig, a solaris állandó levezetésénél természetesen nem jöhetnek tekintetbe s így a mérés eredménye a valódinál kisebb értékhez vezet, mely körülményre már Langley figyelmeztetett. Ezen elhanyagolás λ_m-et nem befolyásolja, mert az a Nap esetében a spektrum látható részébe esvén, mindig meghatározhatjuk az energiagörbe elég hosszú darabját arra, hogy abból a maximum helyzete kielégítő pontossággal megszerkeszthető legyen.

Nem kivánok azonban semmiképen sem állást foglalni a λ_m-re alapított módszer mellett a másik módszerrel szemben, melyet Scheiner igen sokkal megbizhatóbbnak tart az előbbinél, főképen azért, mert a solaris állandó relative igen egyszerűen lemérhető és hibája a sugárzási törvény speczialis alakja folytán jelentékenyen kisebbítve megy át az eredménybe, holott λ_m hibája T értékét relative sokkal nagyobb mértékben befolyásolja. Csupán rá akartam utalni a probléma gyakorlati nehézségeire, melyek ilynemű újabb vizsgálatoknál tekintetbe veendők. Ilyfajta újabb munkálatok feladata lesz a fentebb constatált eltérést a két módszer között megszüntetni és a szóban forgó fontos állandót az eddigieknél pontosabban és szigorubban meghatározni.

A fentebb ismertetett vizsgálati módszerek érdekes eredményei inditottak arra, hogy a Wien-féle eltolódási törvényen alapuló módszert az állócsillagokra alkalmazzam.* Az első módszer itt felmondja a szolgálatot, mert egyrészt az összes sugárzás lemérése grammcaloriákban a csillagok esetében, ha talán nem is kivihetetlen feladat, mégis oly nehézségekbe ütközik, hogy az eddigi ily irányú kisérletek legfeljebb csak előzetes tájékoztatásúl szolgálhatnak a sugárzás nagyságrendjének megállapitására, másrészt a csillagok mérhető koronggal nem birván, a sugárzó felület kúpszöge ez esetben teljesen ismeretlen.

Az ily czélra felhasználható észleleti anyag eddig még igen fogyatékos. Jóformán csak a Vogel-féle mérési sorozat jöhet itt tekintetbe. Vogel 1880-ban összehasonlította spektralphotometer segélyével hat fényes állócsillag, továbbá a Nap és elektromos ívfény spektrumát egy igen állandó petroleumlámpa spektrumával. A mérések eredményeképen közli a fényességek viszonyát hét különböző hullámhosszra, melyek a látható spektrumnak csaknem teljes hosszán meglehetős egyenletesen oszlanak el. A mért hányadosok értékei a következő táblázatban vannak összeállítva. Az összehasonlítás megkönnyitésére Vogel az adatokat úgy számitotta át, hogy ezen hányadosok értéke mindegyik fényforrásnál $\lambda_0 = 0{\cdot}555\ \mu$ értékre 100-zal legyen egyenlő.

---

* Nem szándékom ugyan a következőkben mindazon kisérleteket ismertetni, melyek az állócsillagok hőmérsékletének meghatározására vonatkoznak, de azért mégsem mulaszthatom el megemlíteni, hogy dr. Kövesligethy Radó volt az elsők egyike, ki ezen problémával behatóan foglalkozott. Mivel vizsgálatai részint saját — újabb mérések által nem igazolt — emissioformuláján, részint kevésbbé pontos régibb mérési adatokon alapulnak, azok eredményeit ismereteink mai állása szerint nem tekinthetjük teljesen megbizhatóknak. V. ö.: A spektrumanalysis két parameteregyenlete; Math. és Termtud. Ért. XVI. k. 1898; és A csillagrend physikai értelmezése. U. o. XVIII. köt. 1900. Beiträge zur Erkenntniss der Natur variabler Sterne, Astr. Nachr. 2585, (1884), melyben az absorptió-képességet már a kinetikai gázelmélet alapján kisérli levezetni.

Intensitás-viszonyok.

Hullámhossz	Petroleum / Sirius	Petroleum / Wega	Petroleum / Capella	Petroleum / Arcturus
0·633 μ	285	270	232	200
0·600	200	191	173	153
0·555	100	100	100	100
0·517	49	50	46	71
0·486	24	27	20	57
0·464	14	16	14	50
0·444	11	9	12	46
0·426	—	—	—	—

Hullámhossz	Petroleum / Aldebaran	Petroleum / Beteigeuze	Petroleum / Nap	Petroleum / elektr. fény
0·633 μ	218	202	232	190
0·600	159	153	175	149
0·555	100	100	100	100
0·517	70	61	52	64
0·486	53	47	27	43
0·464	48	39	18	32
0·444	41	32	11	25
0·426	—	—	10	20

A táblázat adataiból látható, hogy a fényesség a vizsgált fényforrások spektrumában a petroleum fényéhez hasonlítva sokkal gyorsabban növekszik, ha a vörös végtől az ibolya vég felé haladunk s hogy ez a növekedés leggyorsabb a fehér (I. typushoz tartozó) csillagoknál (Wega és Sirius), a leglassúbb a vöröses (III. typushoz tartozó) csillagoknál (Aldebaran és Beteigeuze). A II. typushoz tartozó égi testek: Nap, Capella és Arcturus középütt állanak. Ezen viselkedésükből már VOGEL azt következtette, hogy az első csoportba tartozó csillagok magasabb hőmérsékletűek mint a Nap, a harmadikba tartozók hőmérséklete ellenben jóval alacsonyabb és körülbelül az elektromos ívfényéhez hasonlítható. Capella és Arcturus ellenben e tekintetben is igen hasonlók a Naphoz, mint az spektrumuk jellegéből is várható volt.

Hogy a hőmérséklet levezetésére a WIEN-féle törvényt alkalmazhassam, λ_m-et kellett ezen mérésekből levezetnem. Mivel a petroleumfény spektrumgörbéjét nem ismerjük s a mérések valamennyien relativ jellegüek, czélszerűbbnek tartottam az összes adatokat a Napra mint összehasonlító fényforrásra átszámítani. A kissé bizonytalan constructiv eljárás helyett, mely a λ_m-ek absolut értékét adná, czélszerűbbnek tartottam a $\lambda_m - \lambda_M$ különbségeket vezetni be mint ismeretleneket, hol λ_M az energiamaximum hullámhossza a Napnál, mely mennyiség legalább közelítőleg ismeretes. A számitás főfeltétele, hogy ezen fényforrások, legalább a spektrum itt tekintetbe jövő terjedelmében a WIEN-féle 6) alatti törvényt kövessék.

A számitás elég egyszerű: a T absolut hőmérséklet helyett λ_m-et vezetve be a 6) egyenletbe, a 8) egyenlet felhasználásával e feltevések szerint a fényforrás sugárzási energiája i lesz:

$$i = C\lambda^{-5} e^{-5\frac{\lambda_m}{\lambda}}.$$

Ha most az i egységét a méréseknek megfelelően úgy állapitom meg, hogy i a $\lambda_0 = 0{\cdot}555\,\mu$ hullámhossznál az egységgel legyen egyenlő, mindkét oldal közönséges logarithmusát véve lesz:

$$\log i = -5\,[\log\lambda - \log\lambda_0] - 5\mathfrak{M}\left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right]\lambda_m;$$

hol $\mathfrak{M}$ a közönséges logarithmusok modulusát jelenti. Ha a Nap spektrumában a megfelelő mennyiségeket I-vel és λ_M-mel jelölöm, ezen utóbbi fényforrásra analog egyenletet képezve és az előbbiből levonva lesz:

$$\log\frac{i}{I} = 5\mathfrak{M}\left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right](\lambda_M - \lambda_m).$$

Ezen egyenlet igen egyszerű alakú és a keresett ismeretlent lineárisan tartalmazza. Ha $5\mathfrak{M}\left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right]$-t mint abscissát, $\log\frac{i}{I}$-t mint ordinatát egy derékszögű koordinátarendszerben felrakjuk, akkor ezen utóbbi egyenlet egyenest ábrázol, mely a rendszer kezdőpontján halad át s melynek iránytangense a keresett $\lambda_M - \lambda_m$

különbség. Ily módon az ismeretlen értéke minden egyes csillagnál akár graphikus, akár numerikus úton könnyen meghatározható.

Én az utóbbi eljárást választottam s az egyenletekben fellépő ismeretes mennyiségektől függő coefficienseket az észlelt 7 (esetleg 8) hullámhosszra kiszámítván, az így talált feltétegyenletekből a $\lambda_M - \lambda_m$ ismeretleneket mindegyik fényforrásnál a legkisebb négyzetek módszere szerint határoztam meg.

Szigorúan véve a mérési adatokat, további feldolgozás előtt a légköri extinctio hatásától meg kellene szabadítani, de mivel Vogel az ehhez szükséges adatokat, sajnos nem közölte, ezen fontos correctiotól el kellett tekintenem. Csak a Siriusnál próbáltam meg ezen tényező hatását legalább közelítőleg tekintetbe venni, mert ezen utóbbi csillagnak elég nagy déli declinatioja van s így a hatás ez esetben nagyobb, mint a többi csillagoknál. Természetesen csak a hatás minimumát vehettem számításba, mert az óraszöget nem ismervén, a legkedvezőbb esetet tételeztem fel t. i. a meridiánátmenet időpontját, s az extinctio-számítást — itt nem részletezendő módon — a meridiánmagasság esetére eszközöltem. Hasonló módon kiszámítottam az extinctiot a Nap és petroleumfényre vonatkozó sorozatnál is, a Nap zenittávolságát 45°-nak véve fel.

$\lambda_M - \lambda_m$-nek a számítástól folyó értékei a következők:

Sirius: Nap	$+0{\cdot}080\ \mu$
Wega: Nap	$+0{\cdot}076$ «
Arctur: Nap	$-0{\cdot}538$ «
Aldebaran: Nap	$-0{\cdot}492$ «
Beteigeuze: Nap	$-0{\cdot}404$ «
Petroleum: Nap	$-0{\cdot}912$ «
Petroleum: elektr. fény	$-0{\cdot}612$ «

Az extinctioval számitott értékek:

Sirius: Nap	$+0{\cdot}168\ \mu$
Petroleum: Nap	$-0{\cdot}998$ «

A Capellara vonatkozó sorozatot nem használtam fel, mert ennek adatai csaknem identikusak lévén a Napspektrumra talált adatokkal, az eredmény előrelátható volt.

A hőmérsékletek kiszámításához most már csak a λ_M mennyiség ismeretére volt szükségem. Ennek levezetésére a régibb MOUTON-féle méréseket használtam, mert LANGLEY adatai nem voltak hozzáférhetők. Az extinctio tekintetbe vételével megszerkesztvén az energiagörbét, annak maximuma 0·54 μ-nél feküdt s ezen értéket használtam a további reductioknál. Ezen mennyiségből levonva a fentebb közölt $\lambda_M - \lambda_m$ különbségeket, az eredmény λ_m lesz; ebből most már nemcsak a fekete testre vonatkozó 2940 értékű állandóval számitottam ki a hőmérsékletet, hanem LUMMER és PRINGSHEIM példáját követve, kik ezen eljárást földi fényforrásokra jó sikerrel alkalmazták, a fényes platinára vonatkozó 2630 értékű állandóval kiszámitottam T-nek egy másik értékét is, mely a hőmérséklet alsó határának $T_{min.}$ tekinthető, mig az előbbi $T_{max.}$ annak felső határa. Az igy talált végeredmények λ_m értékeivel együtt a következő táblában foglaltatnak:

Fényforrás	λ_m	$T_{max.}$	$T_{min.}$
Sirius	0·46 μ	6400°	5700°
Wega	0·46 «	6400°	5700°
Arcturus	1·08 «	2700°	2450°
Aldebaran	1·03 «	2850°	2550°
Beteigeuze	0·94 «	3150°	2800°
Petroleum	1·45 «	2050°	1800°
Elektr. ivfény	0·84 «	3500°	3150°
Nap	0·54 «	5450°	4850°

Extinctioval számitott értékek:

Sirius	0·37 μ	7950°	7100°
Petroleum	1·54 «	1900°	1700°
Elektr. ivfény	0·93 «	3150°	2850°

Ezen legutóbbi érték a «petroleum: Nap» sorozatra vonatkozó második adatból van kiszámitva.

A talált hőmérsékleti adatok jelentékeny különbségeket mutatnak s általában megerősítik VOGEL következtetéseit. A vöröses csillagok hőmérséklete az itt levezetett adatok szerint még az elektromos ivfényénél is alacsonyabbnak adódik. Azt is láthatjuk továbbá, hogy az extinctio, különösen fehér csillagok esetében a végeredményt elég nagy mértékben módosítja, mert ily esetekben λ_m kicsiny lévén, kis változása T értékét nagyobb mértékben befolyásolja, mint az alacsonyabb hőmérsékletű csillagoknál.

A számítás helyességének ellenőrzésére szolgálhat a petroleumfényre és elektromos ivfényre talált adatok összehasonlítása más észlelők eredményeivel. Az első fényforrásra ugyan nem találtam másutt adatokat, de valószínűnek tartom, hogy annak hőmérséklete nem fog lényegesen eltérni a gyertya és Argand-lámpa hőmérsékletétől, melyekre nézve LUMMER és PRINGSHEIM szerint $\lambda_m = 1{\cdot}5$ μ-vel illetőleg $1{\cdot}55$ μ-vel. A nevezett szerzők egy elektromos izzólámpánál λ_m-et $1{\cdot}4$ μ-nek találják, s így az általam levezetett adat alapján a VOGEL által használt petroleumlámpa hőmérséklete az említett izzólámpáé és az Argand-lámpáé között feküdnék. Az elektromos ivfénynél az egyezés szintén kielégítő; ennek λ_m-je LUMMER és PRINGSHEIM szerint $0{\cdot}7$ μ, VERY szerint $0{\cdot}73$ μ, végül WANNER hőmérsékletre vonatkozó adatából, mely szerint $T = 3682°$, $\lambda_m = 0{\cdot}79$ μ következnék.

A mi az eredmények megbizhatóságát illeti, ez legjobban megítélhető a kiegyenlítésnél hátramaradó hibákból. Ezek általában nem nagyobbak, mint az a mérések csekély pontosságánál várható; VOGEL szerint ugyanis a lemért viszonyszámok csak mintegy 5%-ig tekinthetők biztosaknak. A kiegyenlítésnél hátramaradó eltérések legnagyobbak a vöröses csillagoknál, különösen a spektrum vörös részében és határozottan systematikus jellegűek, mi különösen graphikus előállításnál szembetűnő. Ezen eltérések oka alig kereshető észlelési hibákban. Vajjon onnan erednek-e, hogy a WIEN-féle 6) alatti egyenlet nem állítja elő ezen csillagok energiaspektrumát elegendő közelítéssel, vagy inkább physiologiai okokra vezethetők-e vissza, melyek ezen gyöngébb fényű csillagoknál a mérések eredményét nagyobb mértékben befolyásolják, mint az I. typushoz tartozó fényesebb csillagokét, a jelen észlelési anyag alapján alig lesz eldönthető. A VOGEL-féle mérések ismétlése nagyobb terjedelemben és tökéletesebb eszközökkel talán majd a jövőben lehetővé teszi e kérdés tisztázását s így a csillaghőmérsékletek biztosabb meghatározását is, mint ez jelen szerény kisérletem alapján lehetséges volt. Addig is a fentebb levezetett hőmérsékletek mint első, durva közelítések felhasználhatók arra, hogy az egyes spektráltypusok definitióját szigorúbb physikai alapra fektessük, mint az eddig tisztán qualitativ ismertető jelek alapján lehetséges volt.

Végül még röviden rá kivánok utalni ezen adatok fontosságára más problémák esetében is. Ha sikerülne a fekete test photometrikusan mérhető felületi fényességét az absolut hőmérséklet függvényeképen előállitani, ebből kiszámithatnók, hogy egy ismert hőmérsékletű állócsillag felületi fényessége hogy viszonylik a Napéhoz. Ismerve most — mi photometriai úton könnyen megoldható feladat, legalább közelitőleg — a csillag összes fényének viszonyát a Nap összes fényéhez, ezen adatokból kiszámithatjuk a csillag látszólagos (szögmértékben kifejezett) átmérőjét s ha még parallaxisa is ismeretes volna valódi, linearis átmérőjét is. A felületi fényesség ismeretével továbbá biztosabb alapra fektethetők azon adatok is, melyeket PICKERING ismeretes keringési idejű állócsillagok sűrűségére levezetett, mert a felületi fényesség a végeredményre itt nagy befolyást gyakorolhat.

Így az itt kifejtett módszerek alkalmazására nem csak az astrophysika, hanem a stellarastronomia körében is tág tér nyilik s ezen hőmérséklet-meghatározások alapján a jövőben módunkban lesz az állócsillagokra vonatkozó ismereteinket jelentékenyen gazdagitani.

Báró Harkányi Béla.

A MECHANIKAI ELVEK ALKALMAZÁSA SURLÓDÁSSAL TÖRTÉNŐ MOZGÁSOKRA.

A Társulat gyűlésein utolsó időben ismételten fordult az érdeklődés am akérdés felé, vajjon a mechanikai elvek különböző alakjai egyformán alkalmasak-e a surlódással történő mozgások leirására.*

Úgy idézett előadásomban, mint e Lapok XII-dik kötetének 128—135 és 162—187. lapjain megjelent dolgozatomban a mechanikai elveket analitikai alakjuk szerint két csoportba osztottam be: az első csoportba tartozók analitikai alakja egy pontra nézve (áttekinthetőség kedvéért csupán ezen egyszerű esettel foglalkozom) a szokásos jelölésben:

$$\delta D = (mx''-X)\,\delta x+(my''-Y)\,\delta y+(mz''-Z)\,\delta z=0 \qquad \text{I)}$$

δx, δy, δz mindazon értékei mellett, a melyek a feltételi egyenleteket kielégítik, a második csoportba tartozóké pedig:

$$\delta G = (mx''-X)\,\delta x''+(my''-Y)\,\delta y''+(mz''-Z)\,\delta z''=0 \qquad \text{II)}$$

$\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ mindazon értékei mellett, a melyek a feltételi egyenleteket kielégítik.

Előadásomban és dolgozatomban egyaránt csupán annak az esetnek tárgyalására szorítkoztam, midőn az elvek analitikai ki-

---

* 1903 márczius 19. ZEMPLÉN GYŐZŐ előadása: «*A mechanikai elvek alkalmazása surlódással járó mozgásokra*».

1903 április 23. RÉTHY MÓR előadása: *Megjegyzések Zemplén Győző: «A mechanikai elvek alkalmazása surlódással járó mozgásokra»* czímű előadására.

1903 május 2. SZILY KÁLMÁN: «*Gauss elvének viszonya D'Alembert*»-*éhez.*

fejezésében *csak egyenlőségi jel szerepel* és csupán oly feltételekkel foglalkoztam, a melyek *egyenlőségek* által fejezhetők ki s ama kijelentésem, hogy D'ALEMBERT és HAMILTON elve surlódással járó mozgásokra nem alkalmasak, akkor az elveknek csupán ezen alakjára vonatkozott. A következőkben be fogom bizonyitani, *hogy ezen állítás kiterjeszthető e két elvnek arra az alakjára is, melyben egyenlőtlenség is fellép és a föltételek akár egyenlőségekben, akár egyenlőség- és egyenlőtlenségekben nyernek kifejezést.*

D'ALEMBERT elve ugyanis pl. GAUSS* fogalmazásában a manapság szokásos műszavakkal élve igy mondható ki:

A mozgás mindig úgy történik, hogy az ú. n. elveszett erők (a kényszererőkkel ellentetten egyenlő erők) *mindig egyensúlyban vannak.* Az egyensúly feltétele pedig az, hogy ezen elveszett erők munkája semmiféle virtuális elmozdulásnál ne lehessen pozitiv; analitikailag tehát, minthogy az elveszett erők összetevői:

$$X-mx'', \quad Y-my'', \quad Z-mz'',$$

az elv igy fejezhető ki:

δx, δy, δz mindazon értékeinél, a melyek a feltételeknek megfelelnek:

$$\delta D=(mx''-X)\,\delta x+(my''-Y)\,\delta y+(mz''-Z)\,\delta z \geqq 0. \qquad \text{I*)}$$

Ugyanerre az alakra hozható HAMILTON elve is: annak ugyanis, hogy az

$$I=\int_{t_0}^{t_1}(V-T)\,dt$$

integrál, a hol V a szabad erők erőfüggvényét, T a pont eleven erejét jelenti a t időpillanatban, a koordinátáknak t_0 és t_1-ben megadott értékei mellett minimum legyen, szükséges föltétele, hogy

$$\delta I \geqq 0.$$

* GAUSS: Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik, Werke V, 27. l.

De

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial (V-T)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (V-T)}{\partial x'} \right] \right) \delta x + \cdots \right] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} + mx'' \right) \delta x + \cdots \right] \geqq 0$$

feltétele, minthogy ezen egyenlőtlenség t_0 és t_1 bármely értékénél fennáll:

$$\left(mx'' + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \delta x + \left(my'' + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \delta y + \left(mz'' + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \delta z \geqq 0$$

a mi pedig már az I*) alatti egyenlőtlenség, ha a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -X, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -Y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -Z$$

helyettesítést elvégezzük.

Hogy pedig az I*) egyenlet surlódással járó mozgások leirására nem alkalmas, az közvetlenül világos: ha ugyanis a feltételek az időt nem tartalmazzák, akkor a virtuális elmozdulások közé tartozik a valóságban tényleg bekövetkező elmozdulás is, tehát az I*) egyenlőtlenség a

$$\delta x = x'dt, \quad \delta y = y'dt, \quad \delta z = z'dt$$

behelyettesitések után is fennáll, azaz:

$$m(x'x'' + y'y'' + z'z'')dt \leqq (Xx' + Yy' + Zz')dt.$$

D'ALEMBERT és HAMILTON elvének I*) alatti fogalmazása mellett tehát az eleven erő megváltozása *nagyobb vagy legfeljebb egyenlő* a szabad erők munkájával, a mi homlokegyenest ellenkezik a surlódás szerepével, úgy, hogy az I*) alatti alak még kevésbé alkalmas a surlódással járó mozgások leirására mint az I) alatti.

Közelfekvő tehát ama gondolat, hogy a

$$\delta D = (mx'' - X)\delta x + (my'' - Y)\delta y + (mz'' - Z)\delta z \leqq 0 \qquad \text{I**)}$$

egyenlőtlenséggel tegyünk kisérletet.

Erre az egyenletre vezet D'ALEMBERT elve, ha következőképen fogalmazzuk:

A *kényszererők* a tényleges mozgásnál egyensúlyban vannak (virtuális munkájuk nem lehet pozitiv).

HAMILTON elve pedig a következő fogalmazásban:

Az I integrál a valódi mozgásnál *maximum*, vagy pedig $-I$ *minimum*.

Be fogjuk bizonyítani, hogy ily alakú feltételek mellett:

$$\varphi(x, y, z; x', y', z'; t) = 0 \qquad 1)$$

vagy

$$\psi(x, y, z; x', y', z'; t) \leqq 0 \qquad 2)$$

az I**) alatti egyenlőtlenség sem vezethet surlódással járó mozgások leirására. Az 1) és 2) alakokkal a koordinátákat, sebességi összetevőket és az időt tartalmazó feltételek minden lehetséges alakját kimerítettük, minthogy a

$$\Phi(x, y, z; x', y', z'; t) \geqq 0$$

alakúak mindig

$$-\Phi(x, y, z; x', y', z'; t) \leqq 0,$$

azaz 2) alatti alakban irhatók fel, s oly feltételeket, a melyekben csak valamely egyenlőtlenségi jel szerepel nem akarunk tekintetbe venni, minthogy ezek csupán kvalitativ jellegűek s nem vezethetnek a mozgás egyértelmű leirására.

Ha a pont szabadon mozoghat, vagy a feltételek mind 1) alatti alakúak, tételünk azonnal világos: δx, δy, δz mindazon értékeinél, a melyek az 1) alatti egyenlet variácziójának (a t idő nem variál):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\delta z + \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z'}\delta z' = 0 \qquad 3)$$

egyenletnek eleget tesznek, δD legfeljebb 0 lehet, pozitiv soha.

Tegyük fel, hogy létezik pl. egy δx_0, δy_0, δz_0, $\delta x'_0$, $\delta y'_0$, $\delta z'_0$ értékrendszer, a mely a 3) alatti egyenletet kielégíti úgy, hogy:

$$(mx'' - X)\,\delta x_0 + (my'' - Y)\,\delta y_0 + (mz'' - Z)\,\delta z_0 < 0. \qquad 4)$$

Ha a $\delta x_0, \delta y_0, \ldots, \delta z'_0$ mozgás virtuális mozgás, virtuális lesz a

$$-\delta x_0, \ -\delta y_0, \ -\delta z_0, \ -\delta x'_0, \ -\delta y'_0, \ -\delta z'_0$$

mennyiségek által meghatározott mozgás is, ámde a variácziók ezen értékei mellett a 4) alapján:

$$(mx''-X)(-\delta x_0)+(my''-Y)(-\delta y_0)+(mz''-Z)(-\delta z_0)>0,$$

a mi nem lehetséges, tehát nem lesz a virtuális elmozdulások közt egy sem olyan, a melynél δD negativ, mert akkor volna olyan is, a melynél δD pozitiv, az a követelés tehát, hogy az I**) baloldala a 3) alatti egyenletet kielégitő összes variácziók mellett ne lehessen pozitiv, teljesen egyértékű azzal a követeléssel, hogy ugyane variácziók mellett δD 0-sal legyen egyenlő.

D'Alembert és Hamilton elvének I**) alatti alakja tehát arra az esetre, midőn a feltételek egyenletekben nyernek kifejezést, azonos az I) alatti alakkal s ezzel együtt a surlódás leirására alkalmatlan.

Hátra van még annak az esetnek a megvizsgálása, midőn a feltételek egyenlőség- és egyenlőtlenségek alakjában jelennek meg:

Hogy rövidebben beszélhessünk, képzeljük a pont mozgását a hat dimenziós térben akként ábrázolva, hogy

$$x, y, z; x', y', z'$$

minden értékrendszeréhez tartozzék a hat dimenziós tér egy pontja, a pont mozgását akkor egy hat dimenziós görbe ábrázolja s a 2) alatti reláczió kiköti, hogy ez a görbe egy hat dimenziós felületnek egyik oldalán tartozik maradni. Tegyük most fel, hogy a mozgási problémát megoldottuk s ezt a hat dimenziós görbét tényleg előállitottuk: minthogy csupán fizikailag megvalósitható mozgásokkal foglalkozunk, a görbét folytonosnak és kétféle szakaszokból állónak tekinthetjük:

$t=t_0$-tól $t=t_1$-ig feküdjék például görbénk a

$$\varphi(x, y, z; x', y', z'; t)=0$$

felületen,

$t=t_1$-től $t=t_2$-ig feküdjék a $\psi=0$ felületnek a mozgás számára megengedett oldalán;

$t=t_2$-től $t=t_3$-ig feküdjék ismét a felületen s i. t.

Be fogjuk bizonyítani, hogy időtől független ψ esetén ismét folyománya az I**) relácziónak az eleven erő tétele.

Ha ugyanis ψ független az időtől, akkor a valóságos mozgásnak

$$dx,\ dy,\ dz,\ dx',\ dy',\ dz'$$

jellemzői mindaddig, a míg a hat dimenziós görbe rajta fekszik a $\psi=0$ felületen, ki fogják elégíteni a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz+\frac{\partial\varphi}{\partial x'}dx'+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}dy'+\frac{\partial\varphi}{\partial z'}dz'=0 \quad 5)$$

egyenletet,* tehát dx, dy, dz virtuális elmozdulás összetevői, ∂D-nek tehát a

$$\partial x=dx,\quad \partial y=dy,\quad \partial z=dz$$

behelyettesítés elvégzése után nem szabad pozitivnak lennie. Tegyük fel, hogy

$$(mx''-X)\,dx+(my''-Y)\,dy+(mz''-Z)\,dz<0, \quad 6)$$

akkor, minthogy

$$-dx,\ -dy,\ -dz,\ -dx',\ -dy',\ -dz'$$

szintén kielégítik az 5) alatti egyenletet, $-dx$, $-dy$, $-dz$ szintén virtuális elmozdulás összetevői lesznek, ∂D-nek tehát a

$$\partial x=-dx,\quad \partial y=-dy,\quad \partial z=-dz$$

behelyettesítés elvégzése után sem szabad pozitivnak lenni, a mi ellenkezik a 6) alatti feltevéssel, e föltevés tehát helytelen s a tényleges elmozdulásnál

$$(mx''-X)\,dx+(my''-Y)\,dy+(mz''-Z)\,dz=0,$$

s az eleven erő tétele fennáll.

* A mozgás folytonosságánál fogva az 5) egyenlet ama $t=t_2$ időpillanatban is ki lesz elégítve, a melyben a görbe a $\psi=0$ felületet elhagyja, mert hiszen a görbe ebben a pillanatban *érinti* a felületet.

Még egyszerűbbek a viszonyok a mozgásnak oly szakaszaiban midőn a hat dimenziós görbe nem fekszik a $\psi=0$ felületen; ekkor a ψ-ben szereplő koordináták és sebességi összetevők variácziói, semmi korlátozásnak nincsenek alávetve, mert e szakaszokban

$$\psi(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z)<0,$$

tehát a

$$\psi(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z;\ x'+\delta x',\ y'+\delta y',\ z'+\delta z')=$$

$$=\psi(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z')+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z+$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\delta x'+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\delta y'+\frac{\partial\varphi}{\partial z'}\delta z'\leqq 0$$

feltétel a variácziók minden értékénél ki lesz elégítve. A mozgás e szakaszaira nézve tehát a $\psi\leqq 0$ fellétel teljesen figyelmen kívül hagyható s a probléma mindenkor a már tárgyalt esetekre lesz visszavezethető.

Bebizonyítottuk tehát, hogy

$$\delta D=0$$

$$\delta D\geqq 0$$

$$\delta D\leqq 0$$

relácziók egyike sem alkalmas

$$\varphi(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z';\ t)=0$$

és

$$\psi(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z';\ t)\leqq 0$$

alakú feltételek mellett surlódással járó mozgások leirására, minthogy mind a három esetben időtől független feltételek mellett a valódi mozgás az eleven erő tételének megfelelően megy végbe.

Zemplén Győző.

IRODALOM.

Kőnig Gyula: Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai. (Budapest, 1903. a M. Tud. Akadémia kiadványa; VIII+599 l.)*

A mathematikának egyik disciplinája sem áll oly hosszú idő óta állandóan a kutatás és érdeklődés homlokterében mint az algebra. Talán az a körülmény, hogy tárgya egyéb mathematikai disciplinák tárgyához hasonlítva egyszerűbb és elemibb, tette lehetővé, hogy az algebra fogalomalkotásainak élességével, módszereinek minden szemléleti elemet kizáró szigorúságával, részeinek szerves összefüggésével a mathematika többi disciplinájának mint a szigorú és tökéletes tárgyalásnak mintaképe elüljárjon. Ily módon az algebra az egész mathematikán belül bizonyos központi helyet biztosított magának. S valóban minden igazi haladás az algebrai kutatás terén fellendülést okozott a mathematika egészén is; részint azzal, hogy a talált új algebrai módszerek nagy sikerrel átültethetők a mathematikai kutatásnak úgyszólván összes területére, részint pedig azzal, hogy új algebrai tételek a tartalmokból folyó alkalmazásokkal is gazdagítják a mathematika egészét.

Az algebra ősi problémája az

$$f(x) \equiv A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x + A_n = 0$$

n-edfokú egyenlet megoldására, azaz az

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

gyökeinek meghatározására vonatkozott. De a míg az algebra pusztán erre az eredeti problemájára szorítkozott, addig csak szorványos és szerves összefüggés nélkül való, többnyire esetről-esetre külön kieszelt apró fogásokon alapuló eredmények gyűjteménye volt és tudományos rend-

* E mű német fordítása az eredetivel egyidőben a következő czímmel jelent meg: «Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen» von Julius Kőnig aus dem Ungarischen übertragen vom Verfasser. Leipzig B. G. Teubner. 1903.

szerről szólni nem lehetett. A másod-, harmad- és negyedfokú egyenletek megoldására vonatkozó többé-kevésbbé hiányos módszerekben állanak az összes vívmányok, a melyeket az algebra története Euklides és Lagrange működése között eltelt óriási időszakból feljegyezhetett. Csak az a körülmény, hogy az ötödfokú egyenlet megoldásának nehézségei minden erőlködéssel daczoltak, valamint Gaussnak a körosztás problemájával kapcsolatos fényes algebrai vizsgálódásai ösztönözték a mathematikusokat arra, hogy az algebra eredeti feladatát általánosabb és mégis mélyebbre hatoló kérdéstételekkel felcseréljék. Így egyrészt keletkezett a resolvensek elmélete és a csoportelméleti algebra, másrészt az algebrai mennyiségek arithmetikai elmélete. Ugyanis az $f(x)=0$ egyenlet $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gyökeinek meghatározására vonatkozó feladat helyébe, azt az általánosabb feladatot tehetjük, hogy határoztassanak meg és vizsgáltassanak meg arithmetikai szempontból is az összes $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kifejezések, a melyek az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gyökökből és valamely adott számtartomány számaiból (a melyhez az $A_0, \ldots, A_n$ együtthatók is tartoznak) az első négy alapművelet segítségével képezhetők.

Ez az új feladat az algebrai irányban a resolvensek elméletére, számelméleti irányban pedig a genustartományok arithmetikájára, az ideálelméletre vagy divisorok elméletére vezetett. Ezen elméletek, valamint az algebrai egyenletrendszerekre vonatkozó elimináczio-elmélet, teszik ki a főtartalmát annak a tudományágnak, a melyet ma az algebrai mennyiségek elméletének nevezünk.

Az algebrának imént felsorolt és főtartalmát alkotó elméletek mindannyian aránylag új keletűek; hiszen származásuk Gauss, Abel, Galois, Kummer, Kronecker és Dedekind nevéhez fűződik, tehát a XIX. századból valók. Ez a körülmény magyarázza azt, hogy daczára ama központi állásnak, a melyet az algebra a mathematikában elfoglal, mindezideig hiányzott oly munka, a mely az algebrának összes lényeges alaptételeit rendszeresen és összefüggően előadná. Erre a bizonyára nem könnyű feladatra vállalkozott König Gyula, midőn «Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonásai» czímű munkáját megírta; s e munkában csakugyan sikerült neki szerves összefüggésbe foglalni mindazt, a mi az algebra eddig ismert általános elméletét képezi; sőt munkájának eredetileg szabott keretén messze túl ment azzal, hogy a műbe felvett és beleolvasztott fölötte becses eredeti vizsgálódásaival az algebrát nemcsak számos új tétellel, de alapvető új módszerekkel is gazdagította.

Ilyen értelemben e nagyszabású munka, melynek több mint felerésze szerzőjének eredeti kutatásait tartalmazza, míg egyoldalról teljesen önálló és új felfogásban összefoglalja azt, a mit a mult teremtett, más oldalról gazdag új tartalmával a jövő fejlődésnek sok becses eredménynyel kecsegtető kiinduló pontja lesz.

Mindjárt az első fejezetben, melynek czíme «Bevezető alapfogalmak», több új éles és fontos fogalomalkotással ismerkedünk meg. Ilyen mindenek előtt a *holoid tartomány* fogalma. A legegyszerűbb holoid tartományt ama raczionális számok összessége alkotja, melyek egyszersmind egészek is. Általában *bizonyos mennyiségek összessége holoid tartományt alkot, ha az összeadás és szorzás közönséges törvényét követi, tartalmazza 1-et* (az absolut egységet) *és az 1 ismételt összeadásából származó mennyiségsorozat*

$$1,\ 1+1,\ 1+1+1, \ldots$$

nem tartalmazza a 0 mennyiséget.

Az *összeadás közönséges törvényét* az A tartomány akkor követi, ha A-ban az összeadás és megfordítása — a kivonás — mindig elvégezhető egyértelmű műveletek, továbbá mindig

$$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_2+\alpha_1 \quad (\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3=\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3).$$

Hogy a *szorzás közönséges törvénye* minő követeléseket fejez ki, továbbá, hogy a *0*-sal illetőleg az *1*-gyel jelölt mennyiségnek melyek a jellemző sajátságai, Kőnig művében szintén részletesen ki van fejtve. Itt legyen elég kiemelnünk, hogy az

$$\alpha x=\beta$$

egyenlet megoldhatóságát *nem* követeli a szorzás közönséges törvénye, hanem ebben a tekintetben két eshetőség marad. Némely holoid tartományban találhatunk (végtelenül sok módon) oly két — a zérustól különböző — α, β mennyiséget, a melyekre nézve az

$$\alpha x=\beta$$

egyenlet nem oldható meg. Ezek a *valódi holoid tartományok*. De vannak oly holoid tartományok is, melyekben ez az egyenlet mindig megoldható, ha csak α a zérustól különböző. Ezek az *orthoid* vagy *nem valódi holoid tartományok*.

Pl. a raczionális számok összessége orthoid tartományt alkot, melyet (1)-gyel jelölünk. De ha e számok közül kiválasztjuk a raczionális és egész számokat, ezek magukban valódi holoid tartományt alkotnak, melyet [1]-gyel jelölünk. Ha tisztán a páros egész számokat tartjuk meg, az új tartomány nem tartalmazza az absolut egységet, tehát egyáltalában nem holoid. Egészen más oknál fogva nem lesz holoid az a tartomány, melyet a raczionális és egész számokból úgy nyerünk, hogy velök a szokott módon számolunk, de egy bizonyos p modulusra nézve kongruens számokat egyenlőknek tekintjük; ekkor ugyanis az

$$1,\ 1+1,\ 1+1+1, \ldots$$

sorozat p-dik tagja egyenlő a zérussal.

Mint látjuk, az orthoid tartománynak fogalma lényegében ugyanaz, mint a mit DEDEKIND testnek nevez, a holoid tartomány pedig a KRONECKER-féle «Integritätsbereich» közel rokona. Mégis az új elnevezések elkerülhetetlenek voltak az illető tartományok általános tulajdonságainak egyszerű és találó kifejezésére. A régibb elnevezések merevek s nem illenek ahhoz a felfogáshoz, mely az orthoid tartományokban csak a holoidoknak speciális esetét látja. Az új szók eredetüknek megfelelőleg arra emlékeztetnek, hogy a holoid ($\ddot{o}\lambda o\varsigma$ = egész) tartományok az egész számok tartományának, az orthoidok ($\dot{o}\rho\vartheta \acute{o}\varsigma$ = raczionális) pedig a raczionális számok tartományának lényeges tulajdonságait megtartják. A hogyan az egész számokból megalkotjuk a raczionális számok összességét, ugyanazon a módon bármely valódi holoid tartomány ki egészíthető orthoiddá. Az eredeti holoid tartományt $[A]$-val, a belőle szerkesztett *mellérendelt orthoid tartományt* (A)-val jelöljük.

Valódi holoid tartományban a zérus az egyetlen mennyiség, a mely a tartomány minden zérustól különböző mennyiségével osztható. Ily tartományban tehát bármely a zérustól különböző β mennyiségnek osztói a tartománynak csak (valódi) részletsokaságát alkotják. A legkisebb ily részletsokaságot az absolut egység osztói adják, melyeket a tartomány *egységeinek* nevezünk. Pl. a raczionális és egész számok tartományában két egység van: $+1$ és -1. A holoid tartomány két mennyisége akkor és csak akkor osztható egymással kölcsönösen, ha az egyik a másiknak egy egységgel való szorzata. Két ilyen α és β mennyiséget æquivalensnek mondjuk; képletben

$$\alpha \backsim \beta.$$

A holoid tartomány valamely α mennyisége *irreducibilis*, ha nincsen *valódi* osztója, hanem csak olyan osztói vannak, melyek 1-gyel vagy pedig magával α-val æquivalensnek. Ezzel rokon de korántsem azonos a törzsmennyiség fogalma. *Törzsmennyiségnek* (prim mennyiségnek) nevezünk valamely a zérustól és a tartománynak egységeitől különböző π mennyiséget, ha bármely $\alpha\beta$ szorzat csak úgy osztható π-vel, hogy valamelyik tényezője osztható π-vel. Minden törzsmennyiség egyszersmind irreducibilis, de vannak tartományok, melyekben nem minden irreducibilis mennyiség egyszersmind törzsmennyiség.

Hogy valamely holoid tartomány összes irreducibilis mennyiségei egyszersmind törzsmennyiségek-e vagy sem, az összefügg azzal a kérdéssel, lehet-e ama tartományban bármely két α, β mennyiséghez *legnagyobb közös osztót*, vagyis oly δ mennyiséget találni, melynek osztói ugyanazok, mint α és β közös osztói. Ha mindig lehet, akárhogyan választottuk α-t és β-t a tartományban, legnagyobb közös osztót találni, akkor König a tartományt *teljes holoid tartomány*nak nevezi. Teljes holoid tartományokban minden irreducibilis mennyiség egyszersmind törzsmennyiség. Ilyen tartomány pl a raczionális és egész számok összessége. Minden orthoid tartomány olyan teljes holoid tartománynak tekinthető, melyben bármely két mennyiség legnagyobb közös osztója $\backsim 1$. *Nem teljes* holoid tartományt alkotnak pl. az

$$a + b\sqrt{-5}$$

alakú számok, hol a és b raczionális és egész számok. E tartományban 9-nek és $3(1-2\sqrt{-5})$-nek nincsen legnagyobb közös osztója; továbbá $2-\sqrt{-5}$ irreducibilis ugyan, de *nem* törzsmennyiség, mert $3(1-2\sqrt{-5})$ osztható e mennyiséggel, habár sem 3, sem $1-2\sqrt{-5}$ nem osztható vele. E Dedekindtől származó példának egyszerű tárgyalása az első fejezetnek egyik igen tanulságos része. Nem kevésbbé érdekes az az ujítás, hogy teljes tartomány esetében a legnagyobb közös osztó tulajdonságai tisztán e mennyiségnek értelmezéséből vannak levezetve, tehát a legnagyobb közös osztó algorithmusa nélkül.

Nem teljes holoid tartományra nézve az a kérdés merül fel: nem lehetne-e ezt a tartományt új mennyiségek *associatió*jával úgy bővíteni, hogy teljes holoid tartományt nyerjünk, de az eredeti tartománynak mennyiségei az összeadásra, szorzásra és oszthatóságra vonatkozó tulajdonságaikat az új tartományban is megtartsák. Az utóbbi követelés így értendő: ha α, β és γ az eredeti tartomány három mennyisége és az eredeti tartományban $\alpha+\beta=\gamma$ vagy $\alpha\beta=\gamma$, akkor az új tartományban az összeadás és szorzás úgy legyen értelmezve, hogy ezek az egyenletek ott is megtartsák érvényességüket; továbbá β az új tartományban akkor és csak akkor osztható α-val, ha már az eredeti tartományban osztható vele. E kérdésnek megoldása legalább bizonyos fontos nem teljes holoid tartományokra (genustartományokra) nézve alkotja az utolsó fejezetnek egyik lényeges részét. Lássuk az odáig vezető útat.

A második fejezet czíme «A holoid tartományból származó formák». Az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ határozatlanoknak A-ból származó *formája* minden oly

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

(raczionális) egész függvény, melynek együtthatói az A tartományba tartoznak. *Raczionális forma* az olyan, melynek együtthatói raczionális számok; a *raczionális és egész formák*nak együtthatói raczionális és egész számok. Ha a forma valamely tagjában összeadjuk a határozatlanok kitevőit, akkor a nyert összeg megadja annak a tagnak *dimensióját;* minden egyes határozatlannak kitevője külön megadja ama tag *fokát* az illető határozatlanra vonatkozólag. Valamely forma n dimensiós, ha legalább egy n dimensiós tagot tartalmaz, de n-nél magasabb dimensiós tagjai nincsenek. Ha az $F(x_1, \ldots, x_m)$ forma, a melynek dimensiója n, az x_i^n tagot a 0-tól különböző együtthatóval tartalmazza, akkor azt *x_i-re nézve szabályos*nak mondjuk: *szabályos*nak pedig — minden hozzátevés nélkül — akkor nevezzük, ha minden határozatlanra nézve szabályos. A második fejezet főbb tárgyai: a derivált formáknak képezése (differencziálás), a symmetrikus formák, a redukált formák, a lineáris helyettesítés. Uj a 12. §-ban az ismeretes

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

determináns egy messzemenő általánosításának felbontása $x_i - x_j$ alakú tényezők hatványszorzataira.

A harmadik fejezet tárgya «A formák oszthatósága». Első fele annak az ismeretes ténynek bebizonyításával foglalkozik, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ határozatlanoknak valamely *teljes* $[A]$ tartományból származó formáinak összessége, melyet $[A, x_1, x_2, \ldots, x_m]$-mel jelölünk, ismét *teljes* holoid tartományt alkot. A bebizonyítás természetesen oly eljárásnak megállapításában áll, mely megadja két ily forma legnagyobb közös osztóját. Az eljárás megállapításában lényeges szerepe jut ama szintén ismeretes ténynek, hogy (ha csak $[A]$ tetjes tartomány) két formából alkotott FG szorzat együtthatóinak legnagyobb közös osztója egyenlő az F együtthatóinak legnagyobb közös osztójából és a G együtthatóinak legnagyobb közös osztójából alkotott szorzattal. Kőnig e tényt oly általános tételre alapítja, mely majdan — az utolsó fejezetben — nem teljes tartományból származó formák együtthatóinak oszthatósági viszonyaiba szintén betekintést enged. Ez Kronecker *alaptétele,* melyre feltalálója csak a «Festschrift» kiadása után jutott. Az, hogy Kőnignek ezt az alaptételt már e helyen és pedig minden segédelmélet nélkül sikerült bebizonyítania, módszertani szempontból jelentékeny haladás.

A harmadik fejezet második felében annak a kérdésnek tárgyalása, hogy az

$$F = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m$$
$$G = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n$$

formáknak mikor van x-et tartalmazó közös osztójuk, átvezet F és G resultánsának előállítására és általában az eliminánczió elméletének előkészítésére. E részben lép fel a *formarendszer resolvensformájá*nak eredeti és új fogalma, mely nemcsak az eliminánczió elméletének eddig el nem ért tökéletesítését teszi lehetővé, hanem egyszersmind az algebrai egész mennyiségek elméletét új alapokra fekteti.

Az

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, F_j(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, F_k(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

rendszer resolvensformáját a következő módon nyerjük. Bontsuk fel e formákat

$$F_1 = D\bar{F}_1, \ldots, F_j = D\bar{F}_j, \ldots, F_k = D\bar{F}_k$$

alakú szorzatokra, hol D az adott formák legnagyobb közös osztója; továbbá foglaljuk össze az $\bar{F}_j$ formákat új határozatlanok segítségével a

$$\Sigma \bar{F}_j u_j = \bar{F}_1 u_1 + \cdots + \bar{F}_k u_k \quad \Sigma \bar{F}_j v_j = \bar{F}_1 v_1 + \cdots + \bar{F}_k v_k$$

két formába. Ezeknek nyilván nincs valódi közös osztójuk. Ha még felteszszük, a mi alkalmas lineáris helyettesítéssel mindig elérhető, hogy az $\bar{F}_j$-k x_1-ben szabályosak, akkor e két formának x_1-re vonatkozó resultánsa nem lehet zérus, hanem

$$\operatorname{Res}\begin{pmatrix} \Sigma \bar{F}_j u_j, & \Sigma \bar{F}_j v_j \\ x_1, & 1 \end{pmatrix} = F_1^{(1)} U_1 + F_2^{(1)} U_2 + \cdots + F_{j_1}^{(1)} U_{j_1} + \cdots$$

hol $U_1, U_2, \ldots$ az u és v határozatlanok különböző hatványszorzatait jelentik, míg $F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \ldots$ az $[A, x_2, \ldots, x_m]$ tartomány mennyiségei. Ha a mondottakat az $F_{j_1}^{(1)}$ formákra és az x_2 határozatlanra vonatkozólag ismételjük, egy $D^{(1)}$ legnagyobb közös osztót és oly $F_{j_2}^{(2)}$ formákat kapunk, melyek már x_2-t sem tartalmazzák. Ezt az eljárást addig folytatjuk, míg végre egy r-dik lépés után az $F_{jr}^{(r)}$ formák mind 0 dimensiósak. Ha még

$$F_{jr}^{(r)} = D^{(r)} C_{jr},$$

hol $D^{(r)}$ az $F_{jr}^{(r)}$-ek legnagyobb közös osztója, akkor *az adott formarendszer resolvensformájának a*

$$DD^{(1)} \ldots D^{(r)} \Sigma C_{jr} w_{jr}$$

szorzatot mondjuk, hol az w_{jr}-ek új határozatlanok. E fogalom nagy jelentőségét különösen annak a körülménynek köszöni, hogy

$$DD^{(1)} \ldots D^{(r)} \Sigma C_{jr} w_{jr} = \Sigma G_j F_j, \qquad (R)$$

hol a G-k az $[A, x_1, x_2, \ldots, x_m, w_1, \ldots]$ tartománynak oly mennyiségei, melyeknek meghatározására *módszerünk* van. E módszer a resultáns egyik ismeretes tulajdonságának közvetetlen folyománya.

A (R) képletből rögtön belátható, hogy az $F_1 = 0, \ldots, F_k = 0$ egyenletrendszer bármely gyökrendszerére nézve a resolvensforma valamelyik $D^{(h)}(x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_m)$ tényezőjének el kell tünnie. Vajjon fordítva a $D^{(h)} = 0$ egyenlet bármely

$$x_{h+1} = \xi_{h+1}, \ldots, x_m = \xi_m$$

megoldása kiegészíthető-e oly

$$x_1 = \xi_1 \ldots x_h = \xi_h$$

értékrendszerrel, hogy azután

$$x_1 = \xi_1, \ldots, x_m = \xi_m$$

az $F_j = 0$ egyenleteknek megoldása: az alapul vett A tartomány természetétől függ. Ha e tartományban minden *egy ismeretlent* tartalmazó algebrai egyenletnek van gyöke, akkor a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ kérdéses meghatározása mindig lehetséges és csak az egy ismeretlenű egyenletek bizonyos lánczolatának megoldását kivánja.

A formák oszthatóságáról mondottak csak teljes $[A]$ holoid tartományokra vonatkoznak; nem teljes tartomány esetében csak úgy alkalmazhatók, hogy e tartományt a *mellérendelt* (A) orthoid tartománynyal pótoljuk.

A negyedik fejezet, melynek czíme «Az algebrai mennyiségek», a *raczionális* és *egész* formák tényezőkre bontásával kezdődik. A felbontásra Kőnig új módot talált, mely Kronecker alaptételét használja fel a tényezők együtthatóinak meghatározására. *Orthoid* (A) tartományból származó formák felbontására nincs általános módszerünk, de ha az orthoid tartomány a raczionális számok összessége, akkor a probléma visszavezethető az előbbi feladatra.

A tényezőkre bontással szorosan összefügg az

$$F(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_n = 0$$

egyenlet megoldásának feladata. Ha $F(z)$ nem bontható fel oly alacsonyabbfokú tényezőkre, melyeknek együtthatói megint az (A) orthoid tartomány mennyiségei, akkor az $F(z) = 0$ egyenletet az (A) tartományban irreducibilisnek mondjuk. Irreducibilis egyenletnek, ha magasabb mint elsőfokú, nincsen oly gyöke, mely az (A) tartományba tartozik ennélfogva a következő feladat merül fel:

Az adott orthoid (A) *tartomány úgy bővítendő, hogy az* (A)*-ban megoldhatatlan* $F(z)=0$ *egyenlet a bővített tartományban megoldhatóvá váljék.*

E feladatot König tisztán formálisan oldja meg, még pedig teljesen úgy, a hogyan a valós számok tartományában megoldhatatlan $z^2+1=0$ egyenletet a komplex számoknak bevezetésével, tehát bizonyos valós számokból alkotott csoportok összeadásának és szorzásának alkalmas megállapításával teszszük megoldhatóvá. Habár az új mennyiségek értelmezésében nincsenek a *nagyságra* vonatkozó adatok, a szerző épen nem helyezkedik — úgy mint Kronecker tette — ellentétbe az analizissel és geometriával. Pl. e tudományokban $\sqrt{2}$-vel jelölt számban meg vannak mindama tulajdonságok, melyeket az algebrai mennyiségek elmélete $z^2-2=0$ gyökétől követel, de azonfelül meg van a számsíkban való helye is, melyet itt nem veszünk tekintetbe.

Hogy az $F(z)=0$ egyenletet megoldhatóvá tegye, König az erre alkalmas orthoid tartományok közül azt választja, mely (A)-n és az egyenlet egyik α gyökén kívül csak az (A) mennyiségeiből és α-ból szorzás és összeadás révén keletkező mennyiségeket tartalmazza. Ezt az (A)-ból *a adjunctió*ja révén származó (A, α) tartománynak szoktuk nevezni. E tartományban $F(z)$ még nem fog mindig lineáris tényezőkre szét esni, sőt általában α-n kívül más gyöke nincs. A legkisebb tartomány, melyben az $F(z)=0$ egyenlet bal oldala lineáris tényezőkre bontható, ennek az egyenletnek Galois-*féle tartománya*. Még pedig ez az elnevezés akkor is használatos, ha $F(z)=0$ reducibilis.

Mindazoknak az $F(z)=0$ egyenleteknek gyökeit, melyeknek együtthatói az (A) tartomány mennyiségei, «(A)*-ra vonatkozólag» algebrai mennyiségek*nek nevezzük; *absolut* algebrai mennyiségeknek vagy röviden *algebrai mennyiségek*nek pedig akkor, ha (A) valamely $[(1), x_1, \ldots, x_m]$ formatartomány mellérendelt orthoid tartománya; ha végre (A) a raczionális számok tartománya, akkor e mennyiségeket *algebrai számok*nak mondjuk. Ha valamely algebrai mennyiség nem algebrai szám, azaz értelmezésében határozatlanok is szerepelnek, azt *algebrai függvény*nek is nevezzük.

Az (A)-ból valamely (A)-ra vonatkozólag algebrai mennyiségnek adjunctiója révén származó (A, α) tartományt Kronecker terminologiája szerint az (A)*-ból származó genus-tartomány*nak, (A)-t pedig (A, α) *törzstartományának* nevezzük. Az algebrai mennyiségek elméletére nézve alapvető fontosságú, hogy ha csak az (A)-ból származó formáknak irreducibilis tényezőkre bontására van módszerünk, akkor a tényezőkre bontás feladata egy Kroneckertől eredő eljárással arra az esetre is megoldható, midőn (A) helyébe az (A, α) genus-tartomány lép.

Ha most már az (A, α) genus-tartományból kiindulva valamely (A, α)-ban irreducibilis egyenlet β gyökének adjunctiójával áttérünk az (A, α, β) tartományra, akkor mindig oly tartományt kapunk, mely közvetetlenül (A)-ból is előállítható egy egyetlen γ adjunctiójával. Az (A) törzstartományra vonatkozólag algebrai mennyiségek összessége tehát önmagában zárt *országot* alkot, a mennyiben az (A) törzstartományból származó genus-tartományok összessége már nem bővíthető oly egyenletek gyökeinek adjunctiójával, a melyeknek együtthatói valamely ilyen genus-tartományba tartoznak.

König az algebrai mennyiségek elméletében elvileg algebrai és arithmetikai módszereket különböztet meg. Az elvi különbséget a következő módon fejezi ki:

«Az *algebra* megvizsgálja valamely orthoid tartományból származó formákat, a melyeknek tartományában nemcsak hogy mindig van legnagyobb közös osztó, hanem ez — a mint tudjuk — megállapított algorithmus segítségével véges számú lépésben meg is határozható. Az adott $F_1, \ldots, F_k$ formáknak más felbontását tényezőkre nem is használja, mint azt, mely két-két ily forma legnagyobb közös osztójának létezéséből következik. Az *arithmetika* megvizsgálja a valamely holoid vagy orthoid tartományból származó formákat arra az esetre, hogy azok mindig mint véges számmal lévő irreducibilis formák szorzatai állíthatók elő. Ebben a felfogásban, — de a dolog lényege szerint is — az arithmetika területe a magasabb, a mely csak az algebrai módszereknek kifejtése után vizsgálható tüzetesen».

A módszerek e szigorú elkülönítését valóban keresztülvinni a szerző nem tartja tanácsosnak, hanem megelégszik annak megmutatásával, hogy az elkülönítés csakugyan keresztülvihető úgynevezett *hyperorthoid tartományok* segítségével. Ezek az orthoid tartományoktól csak annyiban különböznek, hogy a szorzat eltünhetik akkor is, midőn egyik tényezője sem zérus. Ilyen tartományt használunk pl. az infinitesimalis számításban, midőn a véges mennyiségek mellett még az *elsőrendű végtelen kicsinyeket*, de csak ezeket, tekintetbe veszszük. Valóban, ha az a-k és b-k véges értékek, δ pedig elsőrendű végtelen kicsiny, akkor a mondott esetben az

$$(a_1+b_1\delta)+(a_2+b_2\delta) = a_1+a_2+(b_1+b_2)\delta$$
$$(a_1+b_1\delta)(a_2+b_2\delta) = a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)\delta$$

képletek szerint számolunk; tehát $b_1\delta$ és $b_2\delta$ szorzata eltűnik, habár e tényezők egyike sem zérus.

A későbbiekben a hyperorthoid tartományok nem találnak alkalmazást. Hasonló mondható e fejezet további anyagából Galois *elvéről* és az *algebra alaptételéről.* Ellenben alapvető fontosságú a *raczionális tartomány* (Rationalitätsbereich) KRONECKERtől származó fogalmának éles megkülönböztetése az orthoid tartomány általános fogalmától. Az

$$(\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_\mu)$$

véges számú mennyiségnek raczionális tartománya e mennyiségek raczionális formáiból és azok hányadosaiból áll. E tartomány természetesen orthoid; de nem minden orthoid tartomány állítható elő mint véges számú mennyiség raczionális formáinak és e formák hányadosainak összessége. Pl. az algebrai számok összessége ugyan orthoid tartomány, de nem raczionális tartomány. Ellenben az (1) tartomány, vagyis a raczionális számok összessége, továbbá az $[(1), x_1, x_2, \ldots, x_m]$ formatartomány mellérendelt orthoid tartomány, valamint bármely ezekből a tartományokból származó genus-tartomány a megállapított értelemben raczionális tartomány. KRONECKERnek egyik híres észrevétele, hogy az algebrai mennyiségek elméletében csak a felsorolt raczionális tartományokkal kell foglalkoznunk.

Habár az eddigi fejezetek felépítése is hosszú önálló gondolkodás eredménye, a műnek eredetibb és a szakemberre nézve érdekesebb részét mégis a hátralevő fejezetek alkotják. Mindjárt «Az eliminánczió általános elméletéről» szóló ötödik fejezet nemcsak KRONECKER ide vonatkozó összes tételeinek szigorú bebizonyítását tartalmazza, hanem azon túl is megy, a mennyiben a megoldások többszörösségét is tekintetbe veszi.

Valamely

$$F_1(x_1, \ldots, x_m) = 0, \ldots, F_k(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

egyenletrendszernek gyökrendszereit egyszerű és általános módon adja meg a rendszer *összresolvense,* melyet a következő módon képezünk. Vezessük be az

$$x = t_1 x_1 + \cdots + t_m x_m$$

helyettesítéssel, hol a t-k új határozatlanok, az x_m helyébe x-et; ha még t_m alkalmas hatványával szorzunk, az F-ek az $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x$ határozatlanok oly formáiba mennek át, melyekben az együtthatók a t-knek formái. Legyenek azok a legnagyobb közös osztók, melyek a transformált rendszernek $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$-re és x-re vonatkozó resolvensformájának előállításánál fellépnek, rendre

$$D_t, D_t^{(1)}, \ldots, D_t^{(m-1)},$$

akkor az adott rendszer *összresolvense*

$$\varphi_t = D_t D_t^{(1)} \ldots D_t^{(m-1)} = 0.$$

Ha most

$$x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \ldots, x_m = \xi_m$$

az adott egyenletrendszernek egyik gyökrendszere, akkor az

$$x = \sum_{h=1}^{m} t_h \xi_h, \; x_1 = \xi_1, \ldots, x_{m-1} = \xi_{m-1}$$

behelyettesítésnél okvetlenül a φ_t valamelyik $D_t^{(h)}$ tényezőjének a t-ktől függetlenül el kell tűnnie. Fordítva az összresolvens minden egyes

$$D_t^{(h)}(x;\, x_{h+1}, \ldots, x_{m-1};\, t_1, t_2, \ldots, t_m)$$

tényezőjéből a következő módon kapunk gyökrendszereket. Ha az $F_1 = 0 \ldots F_m = 0$ rendszer együtthatói az (A) orthoid tartomány mennyiségei, $\{A\}$ pedig az (A)-ra vonatkozólag algebrai mennyiségek összessége, végre

$$\xi_{h+1}, \xi_{h+2}, \ldots, \xi_{m-1}$$

az $\{A\}$-ból tetszés szerint választott értékek, akkor

$$D_t^{(h)}(x;\, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_{m-1};\, t_1, t_2, \ldots, t_m)$$

az $\{A\}$ tartományban

$$x - \xi'_1 t_1 - \xi'_2 t_2 - \cdots - \xi'_h t - \xi_{h+1} t_{h+1} - \cdots - \xi_{m-1} t_{m-1} - \xi'_m t_m$$

alakú tényezők szorzatára esik szét és minden ily tényezőnek

$$\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_h, \xi_{h+1}, \ldots, \xi_{m-1}, \xi'_m$$

együtthatói egy-egy gyökrendszert szolgáltatnak.* Midőn $D_t^{(h)}$ linearis tényezői közt egyenlők vannak, az ezeknek megfelelő gyökrendszer többszörösen számítandó. Ha a mondottakat rendre minden $D_t^{(h)}$ tényezőre alkalmazzuk, megkapjuk az összes gyökrendszereket. Gyökrendszer csak akkor nincs, ha az összes $D_t^{(h)}$-k zérus dimensiósak.

Ha φ_t-t mint az $x, x_1, \ldots, x_{m-1}, t_1, t_2, \ldots, t_m$ határozatlanok formáját tekintjük és irreducibilis tényezőkre bontjuk, természetesen többszörös tényezők is léphetnek fel. Kronecker elmélete eredeti alakjában φ_t helyett oly formát nyujt, mely φ_t minden többszörös tényezőjét is csak egyszer tartalmazza; ennélfogva a megoldások többszörösségének meghatározására alkalmatlan.

E fejezet utolsó czikkelyei a függvénydetermináns algebrai elméletét tartalmazzák, mely e műben van először kifejtve.

---

* Az analizisben már (A), tehát $\{A\}$ is, a valós és komplex számok összessége.

A hatodik fejezet m határozatlan m általános formájának resultánsát és discriminánsát tárgyalja. A resultáns elmélete több pontban találkozik MERTENSnek erre vonatkozó vizsgálataival. A discrimináns elmélete teljesen új. A 26. czikkelyben KRONECKER egyik nem egészen szabatos állításának helyreigazítása és kiegészítése az arithmetikának és az invariáns elméletnek szempontjából egyaránt figyelemre méltó.

Az utolsó három fejezet egységes egésznek tekintendő. A kilenczedik fejezet «Az algebrai egész mennyiségek» elméletét, a megelőző két fejezet pedig ennek az elméletnek hatalmas segédeszközét, a lineáris diophantikus problémák megoldását tartalmazza. E két fejezet minden izében új; még ott is, a hol HILBERT néhány ismeretes tételével találkozunk, a bebizonyítás teljesen más és egyszerűbb. Itt tünik ki a resolvensforma alapvető fontossága egész teljességében.

A hetedik és nyolczadik fejezetben tárgyalt probléma a következő: Legyen $[A, x_1, x_2, \ldots, x_m]$ az A *holoid* tartományból származó formatartomány,

$$F_{i0}, F_{i1}, \ldots, F_{il} \quad (i=1, 2, \ldots, k)$$

pedig e tartományhoz tartozó adott formák; meghatározandók azok az

$$X_1, \ldots, X_l$$

formák, melyek ugyanahhoz a tartományhoz tartoznak és kielégítik az

$$F_{i0} = F_{i1}X_1 + F_{i2}X_2 + \cdots + F_{il}X_{il} \quad (i=1, 2, \ldots, k)$$

lineáris diophantikus egyenletrendszert. Az algebrai mennyiségek elméletére nézve két eset fontos: először, midőn A *orthoid* tartomány, másodszor pedig, midőn A a raczionális és egész számok tartománya. Az első esettel e probléma *algebrai*, a második esettel pedig annak *arithmetikai* elmélete foglalkozik. Mind a két esetben a feladat visszavezethető a következő két alapproblémára:

1. egy

$$F_1X_1 + \cdots + F_lX_l = 0$$

homogen egyenlet összes megoldásainak meghatározása;

2. egy

$$F_1X_1 + \cdots + F_lX_l = 1$$

egyenlet *egy* megoldásának meghatározása, vagy annak felismerése, hogy ennek az egyenletnek egyáltalában nincs megoldása.

Az *algebrai* elméletben a két alapprobléma megoldása igen egyszerű. A mi különösen az utóbbit illeti, ez szoros kapcsolatban van az elimináczió elméletével. Ha az $F_1=0\ldots F_l=0$ rendszer összeresolvensének φ_t bal oldala valódi forma, akkor az $F_1X_1+\cdots+F_lX_l=1$ diophantikus egyenletnek nincs megoldása. Ha ellenben φ_t az A orthoid tartománynak mennyisége, akkor alkossuk meg $F_1,\ldots,F_l$ resolvensformáját, mely ebben az esetben az x-ktől ment. Ha még a w-k helyébe az A tartomány alkalmasan választott mennyiségeit helyettesítjük, a harmadik fejezetből idézett (R) képlet bal oldalán az egységet kapjuk, a jobb oldalon álló G-k pedig a szóban forgó diophantikus egyenlet egy megoldását adják.

A lineáris diophantikus problémák *arithmetikai* elméletét tárgyaló nyolczadik fejezet a műnek legfárasztóbb része. Fog-e valaha sikerülni ennek a fejezetnek bonyodalmas segédelméleteit egyszerűbb meggondolásokkal helyettesíteni, az igen kérdéses. De ha e kivánatos egyszerűsítés be is következnék, a szerzőnek megmarad az az érdeme, hogy először adott módszert, még pedig tisztán a négy alapművelettel és a legnagyobb közös osztó képezésével, e problémák megoldására. E módszernek leirásába nem bocsátkozhatunk és a levezetésére szükséges fogalomkört is csak alig jelezhetjük.

Legyen a

$$(P^{(k)})=(P_kP_{k-1},\ldots,P_i,P_{i-1},\ldots,P_1,p_0)$$

modulusrendszerben p_0 valamely természetes törzsszám, minden egyes P_i pedig oly

$$P_i=x_i^{n_i}+\varphi_{i1}x_i^{n_i-1}+\cdots+\varphi_{in_i}$$

alakú forma, melynek együtthatói az $[[1],x_1,\ldots,x_{i-1}]$ formatartomány mennyiségei. Továbbá legyen P_i irreducibilis mod. $(P_{i-1},\ldots,P_1,p_0)$. Ha még a mod. $(P^{(k)})$ kongruens formákat egymással egyenlő mennyiségeknek tekintjük, akkor az $[[1],x_1,x_2,\ldots,x_m]$ tartomány mennyiségei (hol $m>k$) *pseudoholoid* tartományba mennek át, vagyis az új tartománynak meg vannak a holoid tartomány összes tulajdonságai, kivévén azt az egyet, hogy most az

$$1,\ 1+1,\ 1+1+1,\ldots$$

sorozatban a zérus is előfordul. A harmadik és negyedik fejezet összes vizsgálatai csekély módosítással ismételhetők arra az esetre, ha az ottan A-val jelölt teljes holoid, illetve orthoid tartomány helyébe ez a pseudoholoid vagy a *mellérendelt pseudoorthoid* tartomány lép. Az így nyert eredményeken alapszik a lineáris diophantikus problémák arithmetikai elmélete.

E problémákkal együtt természetesen a modulusrendszerek æquivalentiájának kérdése szintén el van intézve. Továbbá a diophantikus problémák algebrai elméletében a szerző kiterjeszkedik NOETHERnek az algebrai síkgörbék elméletéből ismeretes tételének általánosítására és a gyökrendszerek charakterisztikájának elméletére is.

A kilenczedik fejezetben «*Az egész algebrai mennyiségek elmélete*» az $[A, x_1, \ldots, x_m]$ tartományból indul ki, hol A vagy orthoid tartomány, vagy pedig a raczionális és egész számok tartománya. Az utóbbi esetben $m=0$ is lehet; ekkor $[A, x_1, \ldots, x_m]=A=[1]$. Az $[A, x_1, \ldots, x_m]$ tartomány *mellérendelt* orthoid tartományt $(A, x_1, \ldots, x_m)$-mel jelöljük, Γ pedig jelentsen egy ebből származó genus-tartományt. E genus-tartomány minden mennyisége oly

$$G_0 z^d + \cdots + G_d = 0$$

algebrai egyenletnek tesz eleget, a melynek bal oldala z-nek a $[A, x_1, \ldots, x_m]$ tartományból eredő és ebben a tartományban irreducibilis formája. Ha $G_0=1$, akkor a szóban forgó mennyiséget a Γ genus-tartomány *egész* algebrai mennyiségének mondjuk. A Γ tartománynak egész mennyiségei *valódi holoid* tartományt alkotnak, a melyet $[\Gamma]$-val jelölünk.

Az az α mennyiség, melynek adjunctiója révén Γ származott, legyen az $F(z)=0$ egyenletnek gyöke, hol $F(z)$ a z-nek az $[A, x_1, \ldots, x_m]$ tartományból származó és ebben irreducibilis formája. Ha ez az egyenlet n-edfokú, akkor Γ a

$$g(\alpha) = \frac{G_0 + G_1\alpha + \cdots + G_{n-1}\alpha^{n-1}}{H}$$

alakú mennyiségekből áll, a hol $G_0, \ldots, G_{n-1}, H$ a $H \neq 0$ feltétel mellett $[A, x_1, \ldots, x_m]$ bármely mennyiségei lehetnek. A Γ tartománynak ama mennyiségei, melyek $\frac{G_0}{H}$ alakban írhatók, nem egyebek mint $(A, x_1, \ldots, x_m)$ mennyiségei; ezeket a Γ tartomány *raczionális* mennyiségeinek nevezzük.

A Γ tartomány mennyiségei mellett czélszerű e tartományból származó formákat is a vizsgálat körébe vonni. Ezek

$$\sum_r g_r(\alpha)\, U_r$$

alakú összegek, hol a U-k új $u_1, u_2, \ldots$ határozatlanoknak hatványszorzatai, a $g_r(\alpha)$ együtthatók pedig a Γ-ba tartozó mennyiségek. Bármely ily forma egy

$$G_0 z^d + \cdots + G_d = 0$$

alakú egyenletet elégít ki, melynek bal oldala z-nek az

$$[A, x_1, \ldots, x_m, u_1, u_2, \ldots]$$

tartományból származó és ebben a tartományban irreducibilis formája. Ha $G_0 = 1$, akkor a $\sum_r g_r(\alpha) U_r$ formát *egész* formának mondjuk.

Ha az $F(z) = 0$ egyenletnek gyökei rendre

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$

(melyek azonban általában nem mindannyian tartoznak Γ-ba), akkor a

$$\sum_{(r)} g_r(\alpha_1) U_r, \quad \sum_{(r)} g_r(\alpha_2) U_r, \ldots, \sum_{(r)} g_r(\alpha_n) U_r$$

konjugált formáknak szorzata az $u_1, u_2, \ldots$ határozatlanoknak oly formája, melynek együtthatói az $(A, x_1, \ldots, x_m)$ tartományba tartoznak; sőt ha $\sum_{(r)} g_r(\alpha) U_r$ *egész* forma, akkor ezek az együtthatók mind az $[A, x_1, \ldots, x_m]$ tartomány mennyiségei. A konjungált formák e szorzatát a $\sum_{(r)} g_r(\alpha) U_r$ *normá*jának nevezzük és így jelöljük

$$\mathrm{Nm.} \sum_r g_r(\alpha) U_r.$$

Ha $\sum_r g_r(\alpha) U_r$ *egész* forma, továbbá normája az $u_1, u_2, \ldots$ határozatlanoknak oly formája, melyben az együtthatók legnagyobb közös osztója (az $[A, x_1, x_2, \ldots, x_m]$ formatartományban) egyenlő 1-gyel, akkor a $\sum_r g_r(\alpha) U_r$ formát *primitiv*nek vagy *egységformá*nak mondjuk.

Valamely Γ-ból származó forma akkor és csak akkor egész forma, ha minden egyes $g_r(\alpha)$ együtthatója egész mennyiség. Az ily formák összessége valódi holoid tartományt alkot, melyet $[\Gamma]_w$-vel jelölünk.

Az imént értelmezett $[\Gamma]$ és $[\Gamma]_w$ valódi holoid tartományok általánosságban *nem teljesek*. Pl. ha $[A, x_1, \ldots, x_m] = A = [1]$ és

$$F(z) = z^2 + 5 = 0,$$

akkor $[\Gamma]$ az első fejezetben példaképen említett nem teljes holoid tartomány.

A Γ genus-tartomány egész mennyiségeiből alkotott $[\Gamma]$ tartományra vonatkozólag tehát felmerül az a kérdés, *miként lehetne azt oly teljes holoid tartománynyá kibőviteni, hogy az új tartományban a $[\Gamma]$ összes mennyiségeinek az összeadásra, a szorzásra és az oszthatóságra vonatkozó tulajdonságai megmaradjanak.*

Ha e kérdésből elhagyjuk mindazt, a mi az összeadásra vonatkozik, akkor követeléseinket a következőkre szorítjuk: $[\Gamma]$ úgy bővítendő, hogy a bővített tartomány mennyiségei a szorzás közönséges törvényét kövesse, benne bármely két mennyiségének legyen legnagyobb közös osztója, továbbá $[\Gamma]$ összes mennyiségei a szorzásra és oszthatóságra vonatkozó tulajdonságaikat az új tartományban is megtartsák. Ha ezzel beérjük, akkor DEDEKIND ideáljainak vagy KRONECKER algebrai osztóinak bevezetésével e követeléseket kielégíthetjük. KŐNIG e művében KRONECKER alapgondolatát tovább fejlesztve az összeadásra vonatkozó követeléseket is kielégítette.

Jelentse [𝔖] *a* $\frac{\gamma_u}{\varepsilon_r}$ *hányadosok összességét, a hol* γ_u *a* $[\Gamma]$ *tartomány tetszésszerinti formája,* ε_r *pedig ugyanennek tetszésszerinti primitiv formája. Ha a* [𝔖] *tartományban az összeadást és szorzást ugyanazon törvények szerint hajtjuk végre mint* $[\Gamma]_w$ *mellérendelt orthoid tartományában, akkor* [𝔖] *az előbbi követelések mindegyikének megfelel.*

A [𝔖] tartomány egységei az $\frac{\varepsilon_u'}{\varepsilon_r}$ alakú hányadosok, a hol a számláló is primitiv forma. Ha a [𝔖] tartomány két $\frac{\alpha_u'}{\varepsilon_v'}$ és $\frac{\alpha_u''}{\varepsilon_v''}$ mennyiségének számlálóiban az együtthatók rendre $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_1'', \alpha_2'', \ldots$, továbbá $W_1', W_2', \ldots, W_1'', W_2'', \ldots$ az $u_1, u_2, \ldots$ határozatlanoknak csupa *különböző* hatványszorzatai, akkor ama két mennyiség legnagyobb közös osztója æquivalens a

$$\gamma_w = \alpha_1' W_1 + \alpha_2' W_2 + \cdots + \alpha_1'' W_1'' + \alpha_2'' W_2 + \cdots$$

formával.

A [𝔖] tartomány mennyiségei vagy olyanok, hogy már a $[\Gamma]$ tartománynak is (valódi) mennyiségei, vagy pedig a $[\Gamma]$ tartományhoz *associált* új mennyiségek. Tágabb értelemben mind e kétféle mennyiséget, szűkebb értelemben azonban csak az utóbbiakat a $[\Gamma]$ *ideális* mennyiségeinek vagy Γ *ideális egész* mennyiségeinek nevezzük. A $[\Gamma]$ tartománynak oly ideális mennyiségét, a mely csak az æquivalentia-meghatározás értelmében van megadva, KŐNIG *ideál*nak nevezi, mert a $[\Gamma]$ tartománynak ezzel az ideális mennyiséggel osztható valódi mennyiségei ideált alkotnak DEDEKIND értelmében. KŐNIG ideáljai azonosak KRONECKER algebrai osztóival. Ezekkel csak szorozni lehet; az ideális mennyiségek azonkívül összeadhatók is.

Minthogy [𝔖] *teljes* holoid tartomány, minden irreducibilis mennyisége egyszersmind törzsmennyiség. Továbbá könnyen bebizonyítható, hogy [𝔖] minden mennyisége (kivévén a zérust és az egységeket) mint *végesszámú törzsmennyiség szorzata* állítható elő; még pedig ugyanannak a mennyiségnek két ily előállítása csak annyiban különbözhetik egymástól, hogy az egyik felbontás tényezői a másikban æquivalens mennyiségekkel vannak helyettesítve.

Ép oly egyszerű $[\Gamma]$-ról bebizonyítani, hogy valódi mennyiségei közül mindig kiválasztható oly

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$$

alaprendszer, melyből $[\Gamma]$ összes valódi mennyiségei a

$$\mu = H_1\mu_1 + H_2\mu_2 + \cdots + H_r\mu_r$$

alakban állíthatók elő, hol a H együtthatók az $[A, x_1, \ldots, x_m]$ tartomány mennyiségei.

De az említett tényekre csak az existentia-bebizonyítás könnyű. $[\mathfrak{G}]$-ben a törzstényezőkre való felbontásnak, $[\Gamma]$-ban az alaprendszer felállításának *elvégezése* nehéz alapproblémák. Hogy ezeknek végleges megoldását megfogalmazhassa, KŐNIG az *aequivalentia-modulus* új fogalmát, más szóval a következő írásmódot vezeti be. Ha $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ és $\mathfrak{m}$ valamely teljes holoid tartományba tartozó mennyiségek, akkor az

$$\mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{A}_2 \; (\text{æqu. mod. } \mathfrak{m})$$

képlet oly két $\mathfrak{m}$-hez képest relativ-primmennyiség — $\mathfrak{e}_1$ és $\mathfrak{e}_2$ — létezését fejezi ki, hogy

$$\mathfrak{e}_1\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{e}_2\mathfrak{A}_2 \; (\text{mod. } \mathfrak{m}).$$

Továbbá azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}_1$ osztható $\mathfrak{A}_2$-vel æqu. mod. $\mathfrak{m}$, ha ama holoid tartományban van oly $\mathfrak{A}_3$, hogy

$$\mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 \; (\text{æqu. mod. } \mathfrak{m}).$$

A következőkben az $\mathfrak{A}$-k az új $z_1, z_2, \ldots$ határozatlanoknak az $[A, x_1, \ldots, x_m]$ tartományból származó formái, $\mathfrak{m}$ pedig az $[A, x_1, \ldots, x_m]$ tartománynak valamely P irreducibilis mennyisége. Ebben az esetben a P æquivalentia-modulus szerint való oszthatóság elméletében minden irreducibilis tényező egyszersmind törzstényező; továbbá minden F forma egy és csak egy módon bontható fel véges számú törzstényező szorzatára; még pedig e felbontás mindig a négy alapművelettel és a legnagyobb közös osztó algorithmusával történik. (Ha P igazi forma, akkor e felbontás lényegében F-nek egy bizonyos genus-tartományban való felbontását követeli.)

Most már $[\Gamma]$ alaprendszerének meghatározásánál legyen $\gamma = A_0\alpha$, hol A_0 az α-t értelmező

$$F(z) = A_0 z^n + \cdots = 0$$

egyenletben z^n együtthatója. E $\gamma = A_0\alpha$ szorzat egész mennyiség és ennek segítségével a Γ genus-tartomány bármely egész mennyisége oly

$$\frac{G_0 + G_1 + \cdots + G_{n-1}\gamma^{n-1}}{D}$$

hányados alakjában állítható elő, melyben a G-k az $[A, x_1, \ldots, x_m]$ tartományba tartozó mennyiségek, D pedig a γ-t értelmező egyenlet discriminánsa. Amde fordítva nem minden ily hányados ad egész mennyiséget. Feladatunk épen e hányadosok közül azoknak kiválasztásában áll, melyek egész mennyiséget ábrázolnak. E kiválasztást Kőnig a következő alakú feladatok véges sorozatára vezeti vissza:

Legyenek $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ *az* $F(z)=0$ *egyenlet* Galois-*féle tartományába tartozó valódi egész mennyiségek, P az* $[A, x_1, x_2, \ldots, x_m]$ *tartomány valódi irreducibilis formája, továbbá P-nek e* Galois-*féle tartományban törzsideálokra bontott alakja*

$$P=(\mathfrak{pqr}\ldots)^a.$$

A legáltalánosabb módon meghatározandók az $[A, x_1, \ldots, x_m]$ *tartomány mindama* $X_1, \ldots, X_k$ *formái, melyekre nézve*

$$X_1\varphi_1+\cdots+X_k\varphi_k\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{pqr}\ldots).$$

Még pedig e congruentia úgy oldandó meg, hogy P-nek tényleges felbontása, vagyis $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}\ldots$ ismerete ne legyen szükséges.

Ha most $z, z_1, z_2, \ldots, z_k$ új határozatlanok, $\varphi(z)$ pedig a

$$z-\varphi_1 z_1-\varphi_2 z_2-\cdots-\varphi_k z_k$$

formának (a Galois-féle tartományra vonatkozólag) normája, akkor $\varphi(z)$ nek a P æquivalentia-modulusra vonatkozó felbontása után az előbbi congruentia visszavezethető lineáris diophantikus problémákra, tehát oly feladatokra, melyeknek megoldására már van módszerünk.

E módszer, melynek részleteit nem ismertethetjük, a $[\Gamma]$ tartomány mennyiségeit épen a

$$H_1\mu_1+\cdots+H_r\mu_r$$

alakban adja meg, hol a μ-k a $[\Gamma]$ tartománynak bizonyos meghatározott mennyiségei, a H-k pedig $[A, x_1, \ldots, x_\mu]$ tetszésszerinti mennyiségei. Szóval $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ a keresett alaprendszer.

A $[\Gamma]$ tartomány valódi mennyiségeinek alaprendszere, melyben az elemek száma — r — sohasem lehet kisebb mint n, bizonyos értelemben e tartomány ideális mennyiségeire nézve is alaprendszernek tekinthető. Ugyanis $[\Gamma]$ ideális mennyiségeinek általános alakja

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{P}_1\mu_1+\cdots+\mathfrak{P}_r\mu_r,$$

a hol a $\mathfrak{P}$-k *racziónális és egész* ideális mennyiségek, vagyis mindegyik az $[A, x_1, \ldots, x_m]$-ből származó valamely formának és egy ugyanabból a tartományból származó primitiv formának hányadosa.

Ha A *orthoid* tartomány, akkor az $[A, x_1, x_2, \ldots, x_m]$-ből származó Γ genus-tartomány *összes* ideális mennyiségei az imént említett alakon kívül egy másik figyelemre méltó alakban is állíthatók elő a genus-tartománynak

$$\mathfrak{g} = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_r u_r$$

alapformájának vagy *alapmennyiségének* segítségével. Ez az uj alak

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{P}_0 \mathfrak{g}^{n-1} + \mathfrak{P}_1 \mathfrak{g}^{n-2} + \cdots + \mathfrak{P}_{n-1},$$

hol a $\mathfrak{P}$-k ismét tetszésszerinti raczionális és egész ideális mennyiségek. Vajjon ez a kifejezés akkor is megadja $[\Gamma]$ *összes* ideális mennyiségeit, ha $[A, x_1, \ldots, x_m] = [[1], x_1, \ldots, x_m]$, az még nyilt kérdés és összefügg azzal a másik kérdéssel, hogy

$$\mathfrak{P}_0 \mathfrak{g}^{n-1} + \mathfrak{P}_1 \mathfrak{g}^{n-1} + \cdots + \mathfrak{P}_{n-1}$$

mikor osztható az $[A, x_1, \ldots, x_m]$ tartománynak valamely P törzsmennyiségével. Ha A akár orthoid tartomány, akár az $[1]$ tartomány, P pedig valóban *forma*, akkor az oszthatóságra *szükséges*, hogy minden egyes $\mathfrak{P}$ osztható legyen P-vel. Ha azonban $[A, x_1, \ldots, x_m] = [[1], x_1, \ldots, x_m]$ és P valamely p törzsszám, akkor azokra a törzsszámokra nézve, melyek a

$$Nm\,(z - \mu_1 u_1 - \cdots - \mu_r u_r) = 0$$

mindenkor irreducibilis *alapegyenlet* ϑ discriminánsának és $(n-2)!$-nak közös osztói, e föltétel szükséges volta még kétséges. E törzsszámok közül azokat, ha ugyan olyanok egyáltalában léteznek, melyekre nézve az oszthatóság említett föltétele nem szükséges, *nem szabályos* törzsszámoknak nevezzük. (A legegyszerűbb esetre, azaz az algebrai számok elméletére vonatkozólag Hensel bebizonyította, hogy ott minden törzsszám szabályos.)

Most már megvannak a segédeszközök a másik alapproblémának, az ideális törzstényezőkre való felbontásnak megoldására. A Γ bármely valódi vagy ideális egész mennyiségének felbontása visszavezethető az $[A, x_1, \ldots, x_m]$ tartománynak (ebben a tartományban) irreducibilis mennyiségeinek felbontására. Ez utóbbi felbontás akkor, ha a felbontandó P mennyiség szabályos törzsszám vagy pedig valódi forma, a következő szabály szerint történik. *Bontsuk fel a*

$$\varphi(z) = Nm.\,(z - \mu_1 u_1 - \mu_2 u_2 - \cdots - \mu_r u_r) = 0$$

alapegyenlet bal oldalát a P aequivalentia-modulusra vonatkozólag irreducibilis tényezőkre. Ha a felbontás

$$\varphi(z) \backsim \varphi_1(z)^{a_1} \varphi_2(z)^{a_2} \ldots \varphi_r(z)^{a_r} \text{ (æqu. mod. } P),$$

akkor P-nek törzsideálokra való felbontását a

$$P \sim (P+\varphi_1(\mathfrak{g}))^{a_1}(P+\varphi_2(\mathfrak{g}))^{a_2}\dots(P+\varphi_r(\mathfrak{g}))^{a_r}$$

képlet szolgáltatja, hol

$$\mathfrak{g} = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_r u_r.$$

Az a módszer, mely erre az eredményre vezet, megadja a törzsdeálokra való felbontást akkor is, midőn P nem szabályos törzsszám, ha ugyan ilyen létezik. Csakhogy ekkor a végeredményben nincs meg az az egyszerűség, mint az előbbi esetben.

Kronecker «Festschrift»-jében a $\varphi(z)$ formának nem a P æquivalentia-modulus, hanem a P congruentia-modulus szerint való felbontását követelte. Hogy ez tévedés, azt Kőnig egy egyszerű példán igazolja.

A két alapproblémának t. i. az alaprendszer felállításának és az ideális törzstényezőkre való felbontásnak első teljes és helyes megoldása alkotja e munka legkimagaslóbb eredményét; de ez csak az utolsó előtti két fejezetnek a lineáris diophantikus problémára vonatkozó eredeti és alapvető vizsgálataival volt elérhető.

Az utolsó czikkelyek a genus discriminánsának és discriminánsformájának Kroneckertől eredő fogalmával foglalkoznak és ezzel megadják a teljes alapot bármely speczialis algebrai képződmény vizsgálatára.

K. J. és R. G.

BOLYAI JÁNOS «UJJ, MÁS VILÁGÁNAK» ISMERTETÉSE.

(Második közlemény.)

16. A Mathematikai és Physikai Lapokban e czímen megjelent első közleményemben megismertettem az abszolut geometria sík háromszögtanát, állandó görbületű vonalait és felületeit, és ez utóbbiak háromszögtanát. Jelen alkalommal meg fogom ismertetni BOLYAI geometriai szerkesztéseit körző és vonalzóval, és e szerkesztések alkalmazását a sokszögek és körök területeinek egymásba való átalakítására.* Hogy a módszert előre is jelezzem, megjegyzem, hogy a szerkesztések paracziklus és parasféra felhasználásával végeztetnek; a mi azonban nem azt jelenti, hogy BOLYAI a paracziklust és parasférát egyszersmindenkorra megszerkesztett vonalnak és felületnek tekinti, a melyeken úgy lehet mérni, mint az Euklidesi geometriában az egyenesen és síkon. Sőt inkább azt mutatja meg előzőleg az ő geometriai szerkesztéseivel, hogy miként lehet két pont közé akárhány æquidistans pontját a paracziklusnak közbeiktatva, paracziklikus mérőrudat szerkeszteni; hogy akármilyen egyenesnek, mely a paracziklus egyik pontjából indul ki, miként lehet a két pontja által megadott paracziklussal való második metszőpontját meghatározni; hogy a paracziklus-tengely egyenesének az így megadott paracziklussal való metszéspontját miképen lehet megszerkeszteni stb. Ha már mostan a megszerkesztett paracziklust egy tengelye körül más síkba kiforgatva, a térben egy második paracziklusom is van, akkor BOLYAI megmutatja, hogy e két paracziklus meghatározta parasférán miként lehet geometriai szerkesztéseket egyenes és körző felhasználásával végezni stb.

* V. ö. FRISCHAUF, Elemente der absoluten Geometrie. 1876.

17. *Feladat: Adott egyeneshez adott ponton át szinteérőt szerkeszteni.* Első közleményem (16), (17) és (21) alatti képleteinek összefoglalásával (16, 17. l.)

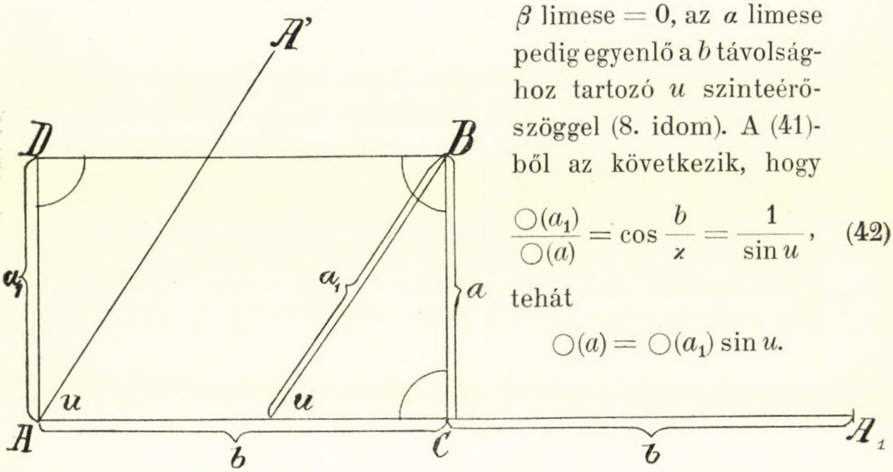
$$\frac{\bigcirc(a_1)}{\bigcirc a} = \cos\frac{b}{\varkappa} = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}; \tag{41}$$

ha már mostan b állandó maradván a vele átellenes B csúcspont a CB egyenesén a végtelenbe távozik (u. o. 6. idom), akkor a β limese $= 0$, az α limese pedig egyenlő a b távolsághoz tartozó u szinteérőszöggel (8. idom). A (41)-ből az következik, hogy

$$\frac{\bigcirc(a_1)}{\bigcirc(a)} = \cos\frac{b}{\varkappa} = \frac{1}{\sin u}, \tag{42}$$

tehát

$$\bigcirc(a) = \bigcirc(a_1)\sin u.$$



8. idom.

E képleten alapszik az adott CB egyeneshez az adott A pontból való szinteérőnek a megszerkesztése: *Az u szinteérő-szög ugyanis egyenlő az a_1 átfogóval és a befogóval szerkesztett derékszögű háromszögnek avval a szögével, mely az a-val átellenes.*

A 8. idomban a C, B és D csúcspontokhoz tartozó (ívvel bekerített) szögek derékszögek; a b adva van mint az adott A pontból az adott CB egyenesre vont merőleges; az $a = BC$ oldal pedig akármekkorának felvéve kiadódik geometriai szerkesztéssel az $a_1 = AD$ távolság, mely a BC befogó mellett szerkesztett derékszögű háromszög átfogója. Az u szög azután az A csúcsból AC fölött felmérve megvan a keresett AA' szinteérő.

1. Következmény. Az AC meghosszabbitására a BC-től jobbra felrakva $CA_1 = b$ távolságot, az A_1 pontja annak a paracziklusnak, melynek A pontja és AA' tengelye.

2. Következmény. Az előadott szerkesztés segélyével megoldható a feladat, miként lehet két pontjával A és A_1-gyel megadott paracziklus tengelyeit a megadott két pontban szerkeszteni. Az A és A_1 összekötő egyenest merőlegesen felezve, megvan CB egyenes; ennek szinteérői az A és A_1 pontokból a keresett tengelyek.

Hasonlóképen megszerkeszthetem a sík akármelyik pontján át az A és A_1 meghatározta paracziklus tengelye.

Végül megszerkeszthetek igy e paracikluson A_i pontot olyképen, hogy az AA_i húr akármekkora adott h hossz legyen. Mert erre nézve csak fel kell mérni a CA egyenesre C pontból a $b_i = \frac{h}{2}$ hosszat, s az igy nyert M pontban az MM' szinteérőt azaz u_M szinteérői szöget megszerkeszteni. Ez u_M szöget felmérve AA' mellé és a szög nyert szárára az A csúcstól h húrt felrakva, megvan a kivánt A_i pont. E módon tehát akármilyen sűrűn lehet paracziklus-pontokat az AA_1 íven közbe iktatni.

3. Következmény. A szerkesztéssel el lehet dönteni, hogy egy adott egyenes egy adott síkot, vagy két adott sík egymást metszi-e vagy sem.

Mert az adott AA' egyenesnek az adott síkon való CB projekczióját meghatározva, és A-ból e CB-hez szinteérőket vonva két eset lehetséges: az AA' egyenes vagy kivül esik a szinteérőknek $2u$ nagyságú szögén vagy nem; első esetben nincs metszés, másodikban van. E második esetben az AA' és CB egyenesnek a metszése egyszersmind az adott egyenesnek az adott síkkal való metszése.

Két adott sík esetén az S_1 sík A pontjából m_1 merőlegest vonva az S_1 síkra és m_2 merőlegest az S_2 síkra, ha $m_1 \equiv m_2$ a két sík természetesen nem metszi egymást; ha m_1 nem azonos az m_2-vel, akkor az m_1 és m_2 egyeneseken át síkot vonva, ezek kimetszenek az S_1 és S_2 síkokon két egyenest, a melyekre nézve az előző szerkesztéssel el lehet dönteni, hogy van-e valós metszéspontjuk vagy nincs. Ha van metszéspont, akkor ezen át merőlegest vonva az (m_1, m_2) síkra, ez egyenes az S_1 és S_2 metszése.

4. Következmény. A (42) egyenletből következik, hogy ($i=\sqrt{-1}$ jelöléssel élve)

$$i \sin\frac{b}{\varkappa} = \cot u, \tag{43}$$

honnan

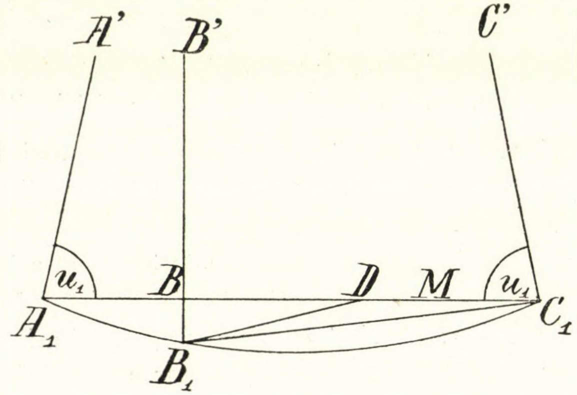
$$e^{\frac{b}{k}} = \cot u + (\cot^2 u + 1)^{\frac{1}{2}},$$

vagyis

$$e^{\frac{b}{k}} = \cot\frac{u}{2}, \tag{44}$$

mely vonatkozás BOLYAI hires 29. §-ának az eredménye.

18. Tantétel. (9. idom.) *A_1, B_1, C_1 paracziklusnak három pontja, A_1A', B_1B', C_1C' annak három tengelye és ha $B_1A_1A'=u$*



9. idom.

szög nagyobb $C_1A_1A'=u_1$ szögnél: akkor van az A_1C_1 húrnak BC_1 oldalán egy D pont, mely a B_1 és C_1 pontoktól egyenlő távolságban feküvén a mellett DB_1B' szög $= u_1$.

Ha ugyanis M pont a BC_1 egyenesen a B ponttól a C_1-ig halad, akkor a paracziklus köri tulajdonságánál fogva MB_1C_1 szög kezdetben $= B_1C_1C'$ szöggel, azaz nagyobb mint u_1, végül pedig a mikor az M a C_1-be érkezik az MB_1C_1 szög $= 0$. Kell tehát közben az M olyan helyzetének létezni, a melyben $MB_1B' = u_1$: legyen az M-nek e helyzete D-vel jelölve. Lészen a paracziklus köri tulajdonságánál fogva, miként láttuk

$$B'B_1C_1 = C'C_1B_1,$$

továbbá a D pont definicziójánál fogva

$$B'B_1D = C'C_1D.$$

E két egyenletből levonás révén

$$DB_1C_1 = DC_1B_1,$$

azaz a B_1C_1D háromszögnek B_1 és C_1 csúcspontjaiban egyenlők a szögei; a háromszög tehát egyenesszárú lévén, csakugyan

$$DB_1 = DC_1. \qquad \text{q. e. d.}$$

Megjegyzés. Ez a tantétel, miként a bizonyításából tüstént látható, igaz akkor is, ha A_1, B_1, C_1 kör három pontja, míg A_1A', B_1B', C_1C' a körnek három sugara. A tételt az A_1C_1 ívtől és húrtól bezárt idomnak az ív mentén való elcsusztatásával keletkező szimmetriás ábrával is be lehet bizonyítani. Az eredeti és elcsusztatott idomnak úgy közös része lesz a B_1C_1D, a melytől egy oldalon van A_1B_1D, más oldalon egy ezzel egybevágó idom.

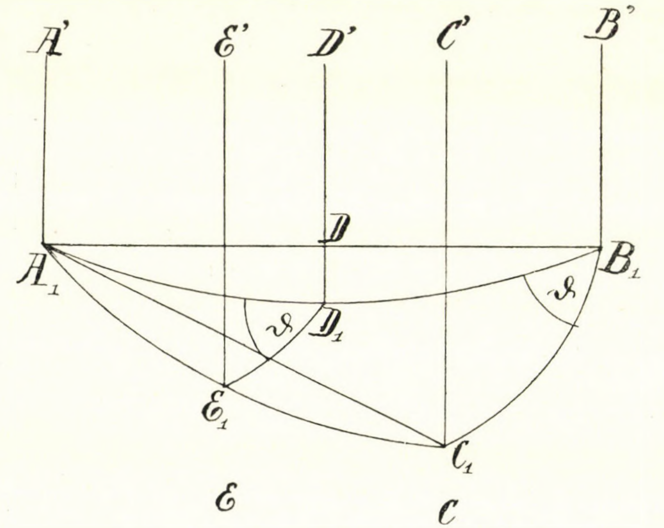
1. Következmény. Ha a paracziklus A_1 pontjából akármilyen irányú A_1M egyenest vonok, e tétel segélyével meghatározhatom az A_1M egyenes metszéspontját a paracziklussal. Mert a 17. 2. következményének utolsó pontja szerint szerkeszthetek a paracziklusón egy B_1 pontot, a melyhez tartozó u szinteérői szög a derékszögtől akármilyen kevéssé különbözik, a mely B_1 pont ennélfogva közelebb esik az A_1-hez, mint a keresett C_1 metszőpont. Ha már mostan B_1-ből meghuzom a B_1B' paracziklus-tengelyt és e mellé az A_1-gyel ellentétes oldalon felmérem az $A'A_1M = u_1$ szögöt, akkor megkapom a D pontot, melytől az A_1D meghosszabbítására felrakva a DB_1 távolságot, megszerkesztettem a keresett C_1 pontot.

2. Következmény. Az A_1C_1 felező pontjában (9. idom) merőlegest vonva az A_1C_1 egyenesre, a merőleges szinteérője lesz úgy az A_1A' mint a C_1C' tengelyeknek. Az iménti szerkesztéssel olyan egyenest lehet tehát szerkeszteni, mely egy adott bármilyen hegyes szög egyik szárára merőleges és egyúttal a másikhoz szinteérő.

Ezek után kimondhatjuk, hogy minden adott vagy megszerkeszthető u szinteérőszöghöz tartozó $2b$ húrt megszerkesztettük (l. 17. czikk 4. köv.)

19. *Feladat.* A paracziklus A_1 és B_1 pontjaiban megszerkesztettem az adott síkon az A_1A', B_1B' tengelyeket és e tengelyeknek CC' szinteérőjét a tér olyan C pontjában, mely nem fekszik az adott síkon; *feladat meghatározni e CC'-nek és az* (A_1-en átmenő, az) *A_1A' tengelyhez tartozó parasférának a metszéspontját.*

Szerkesztés. (10. idom.) Felezve az A_1B_1 húrt és a felező D pontban DD' merőlegest vonva A_1B_1 húrra az adott síkon, e



10. idom.

DD' szinteérő az A_1A', B_1B' tengelyekhez. A B_1B'-n és CC'-n át síkot téve, zárjon be e sík az adott síkkal ϑ szöget; és tegyünk

DD'-n át is egy síkot, mely az adott síkkal ugyanabban az értelemben vett ϑ szöget zár be. Ezen DD'-n áttett sík egyik oldalán feküvén az A_1A', másik oldalán a CC' egyenesek, melyek a sík szinteérői, a sík metszi az (A_1A', C_1C') síkot; és ez EE' metszésvonal is szinteérő az A_1A' tengelyhez. Az A_1 pontból merőlegest vonva az EE'-re, a merőleges kimetszi a CC' egyenesen a parasféra rajta fekvő pontját.

Bizonyítás. Az A_1 ponton átmenő, az A_1A' tengelyhez tartozó parasférát a szerkesztésben megnevezett síkok paracziklusokban metszik; mert hiszen e síkok a parasféra tengelyein vannak áttéve. E paracziklusok $A_1B_1C_1$ háromszöget alkotnak, melynek a D_1E_1 paracziklus a transversálisa, és melynek B_1-nél fekvő szöge $= \vartheta$; és a D_1E_1 transversális az A_1B_1 paracziklust a D_1 pontban szintén ϑ szög alatt metszi (szerkesztésnél fogva). Az $A_1B_1C_1$ paracziklus háromszög tehát hasonló az $A_1D_1E_1$-hez. Továbbá $A_1D_1 = D_1B_1$ (szerkesztésnél fogva). Következésképen $A_1E_1 = E_1C_1$ lévén, az A_1C_1 húr merőleges az EE_1E' tengelyre és azt felezi. Ebből következik, hogy az A_1 pontból az EE'-re merőlegesen szerkesztett egyenes azonos lévén az A_1C_1 húrral, az adott CC' egyenesen csakugyan a parasférával való metszéspontot vágja ki.

Megjegyzés. Ha a C pont az adott síkon fekszik, akkor a CC'-nek az A_1B_1 paracziklussal való metszéspontját e szerkesztéssel nem lehet meghatározni. De ha az A_1B_1 paracziklust az A_1A' tengely körül más síkba forgatva a CC'-t helyén hagyom, akkor C_1 pont megszerkesztése a 19. alatti feladatra van visszavive.

20. *A paracziklusívnek n egyenlő részre való osztása.* A végpontjai által megadott, egyenlő részekre osztandó, paracziklus ív legyen A_1C_1; az A_1A' paracziklus-tengely körül kiforgatva az ívnek A_1 ponton kezdődő bármekkora darabját a síkból, jelöltessék az ív A_1D_1-gyel; és ezen A_1D_1 ívet rakjuk föl az A_1D_1 paracziklus folytatására n-szer; így nyerjük a paracikluson a $D_2, D_3, \ldots, D_n$ pontokat, úgy hogy tehát

$$A_1D_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = \cdots = D_{n-1}D_n.$$

A paracziklus folytatása és e felrakás a $D_1D'_1$, majd $D_2D'_2, \ldots, D_{n-1}D'_{n-1}$ paracziklus-tengelyek körül való átforgatással történik.

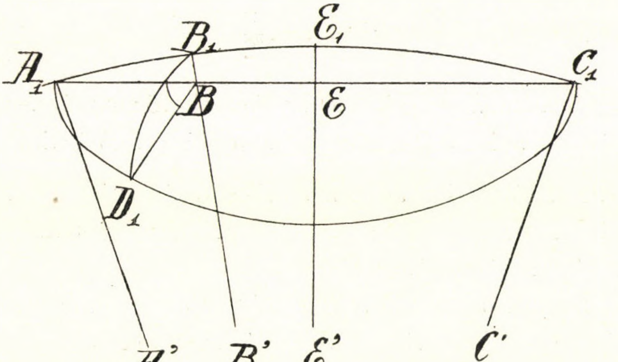
Már most a $D_nD'_n$ paracziklus-tengelyen és az adott C_1 ponton át téve síkot zárjon be ez a sík az $A_1A'D_n$ síkkal ϑ szöget; és e ϑ szöggel nagyságra és értelemre egyenlő hajlás alatt rakjunk fel az $A_1A'D_n$ sík mellé a $D_1D'_1$, $D_2D'_2, \ldots, D_{n-1}D'_{n-1}$ tengelyeken át transversális síkokat. E síkok az adott $A_1A'C_1$ síkon egyeneseket metszenek ki, melyeknek az A_1A' tengelyhez tartozó parasferával való metszéspontjait a 19. alatti szerkesztéssel meghatározva az A_1C_1 ív n egyenlő részre van osztva.

A bizonyítás épúgy történik mint a 19. alatt, t. i. az $A_1D_nC_1$ paracziklus háromszöget a nevezett transversális síkok háromszögökre osztják, melyeknek $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$ csúcsoknál fekvő szögei egyenlők ϑ szöggel, mely egyszersmind az $A_1D_nC_1$ háromszögnek a D_n csúcsnál fekvő szöge. Ezek a háromszögek tehát hasonlók.

Megjegyzés. Ezek után világos, miképen lehet egy paracziklusívet megszerkeszteni, melynek hossza az A_1C_1 ívegységben kifejezve $= \frac{m}{n} A_1C_1$, föltéve hogy m és n vagy egész számok, vagy pedig paracziklusívek végpontjai által meghatározott viszonyszámok. Ha t. i. m és n így meg van adva, akkor a negyedik arányos megszerkesztése a transversális sík segélyével az előadott módon történik.

21. *A mértani középarányos megszerkesztése.* Az A_1C_1 paracziklusíven legyen B_1 egy adott pont és E_1 legyen az ív felező pontja: feladat az A_1B_1 és B_1C_1 ívek közötti mértani középarányost megszerkeszteni. Az A_1C_1 húr és E_1E' tengely metszéspontján E-n át tegyünk P síkot merőlegesen az E_1E'-re. E síknak azon a B pontján át, melyben e sík a B_1B' tengelyt metszi, húzzunk merőlegesen az A_1C_1 húrra a P síkban BD_1 egyenest; ez metszi a P síkban EA_1 sugárral leirt kört D_1 pontban. A B_1D_1 paracziklusív a keresett mértani középarányos.

Ugyanis az A_1C_1 paracziklusív és a szerkesztett kör parasferán feküsznek, minélfogva a B_1D_1 paracziklusív is azon fekszik. Más részről (szerkesztésnél fogva) a B_1D_1 ív derékszög alatt metszi az A_1C_1 paracziklusivet; és a kör középpontja a parasférán E_1. Miután pedig a parasféra geometriája azonos az Euklidesi sík



11. idom.

geometriájával, mihelyt az utóbbiban az egyenesek helyébe paracziklusokat teszünk, tehát az állítás be van bizonyítva.

Következmény. Az előadott szerkesztéseket és azoknak a szerkesztett vonalokon való ismételt alkalmazását röviden parasférán való szerkesztésnek nevezve, kimondhatjuk tehát Bolyai János tételét, miszerint mindazok a szerkesztések, melyek az Euklidesi rendszerben a síkon körző és vonalzóval végezhetők, ugyanezen segédeszközökkel elvégezhetők itt a parasférán való szerkesztéssel.

Gaussnak körosztási tétele tehát igaz az abszolut geometriában is; e szerint a kör felosztható n egyenlő részre, föltéve, hogy n a 2 hatványain kívül csak olyan primszorzókat tartalmaz (még pedig csak *első* hatványon), melyek a 2^m+1 alakban foglaltatnak. Az ilyen n számokat a következőkben röviden Gauss-féle körosztási számoknak fogom nevezni.

Hasonlóképen ha valamely szám szerkeszthető az Euklidesi rendszerben a síkon és így a Bolyai rendszerében a parasférán, akkor ez a szám trigonometriai függvény gyanánt felfogva, a függvényhez tartozó szög is szerkeszthető. És ha pl. adva van, hogy

$$e^{\frac{b}{k}} = h, \tag{45}$$

hol k a Bolyai tér állandója és hol h szerkeszthető szám, akkor téve

$$h = \cot. \frac{u}{2}, \tag{46}$$

az $u = 2 \operatorname{arc.} \cot. h$ szög is megszerkeszthető; ennélfogva a (44) egyenletre és a 18. czikk utolsó mondatára való tekintettel a b is megvan. Szóval, ha adva h szerkeszthető szám, és a $h = e^{\frac{b}{k}}$ egyenletnek megfelelő b kerestetik, akkor e b geometriai megszerkesztésére kész módszerünk van.

22. *Az egyenes oldalú háromszög területe.* A feladatot nem lehet általánosabban, világosabban és szebben megoldani, mint a hogy azt Bolyai megoldotta: az ő módszere e Lapokban VI. kötetben, Rados Ignácz tagtárs úr fordításában is olvasható. Egyszerűbb, rövidebb a megoldás, ha előbb a gömbháromszög területét határozzuk meg, és azután alkalmazzuk azt az elvet, hogy Bolyai síktrigonometriája azonossá válik az r sugarú gömb trigonometriájával, mihelyt r^2 helyébe $-k^2$ tétetik, hol k a Bolyai tér állandója.

A gömbháromszög területe

$$= r^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi),$$

hol α, β, γ a gömbháromszögnek a szögei. A nevezett elvnél fogva a Bolyai terében az egyenesoldalú háromszög területe, ha szögei α, β, γ,

$$\varDelta = k^2(\pi-\alpha-\beta-\gamma). \tag{47}$$

Bármely egyenesoldalú háromszög átalakitható olyan derékszögűre, melynek átfogója szinteérő egyik befogójához. Ha ugyanis e derékszögű háromszög hegyes szöge u, akkor

$$\varDelta = k^2(\pi-\alpha-\beta-\gamma) = k^2\left(\pi - \frac{\pi}{2} - u - 0\right) = k^2\left(\frac{\pi}{2} - u\right),$$

tehát

$$u = \alpha+\beta+\gamma - \frac{\pi}{2}.$$

A következőkben irni fogjuk

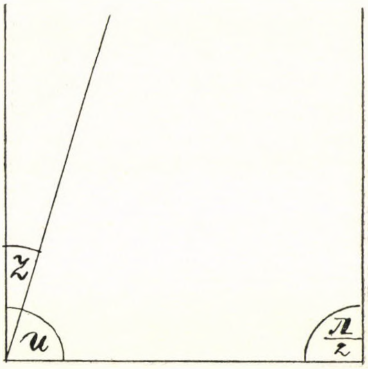
$$\frac{\pi}{2} - u = z,$$

tehát az egyenesoldalú háromszög területe mindig

$$\Delta = k^2 z. \tag{48}$$

A legnagyobb a háromszög területe (47)-ből folyólag, ha mindegyik szöge $=0$, ekkor a terület a

$$= \pi k^2. \tag{48*}$$



12. idom.

A sokszög területe, ha szögei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, lészen

$$= k^2(n\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n - 2\pi). \tag{49}$$

A legnagyobb az n oldalú sokszögek között az, melynek mindegyik szöge $= 0$; a legnagyobb területe tehát

$$T = (n-2)\pi k^2. \tag{50}$$

A lehető legnagyobb terület tehát nő az oldalak számával, minélfogva n oldalú sokszöget nem lehet föltétlenül átalakitani $(n-1)$ oldalura, míg $n+1$ oldalura mindig lehet. A föltétel arra nézve, hogy n oldalú sokszög vele egyenlő területű $(n-\nu)$ oldalura átalakitható legyen az, hogy szögösszege $\nu\pi$-nél kisebb ne legyen.

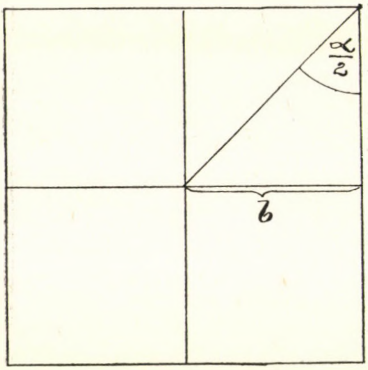
A négyzet területe, ha egyik szöge α, lészen (49)-ből folyólag

$$= 4k^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \tag{51}$$

Az n oldalú szabályos sokszög területe pedig épúgy

$$= nk^2\left(\frac{n-2}{n}\pi - \alpha\right). \tag{52}$$

Ha $k^2 z$ területű egyenes oldalú síkidom α szögű négyzettel egyenlő területű, akkor



13. idom.

$$z = 4\left(\frac{\pi}{2} - a\right),$$

azaz

$$a = \frac{\pi}{2} - \frac{z}{4}.$$

E szerint, föltéve, hogy z nem nagyobb 2π-nél, az egyenesoldalú síkidom mindig átalakítható geometriai szerkesztéssel vele egyenlő területű négyzetté. Ugyanis négy egyenlő részre akármekkora z szög osztható. A négyzet oldalának a középpontjától való távola b-vel jelölve, lészen

$$\cos\frac{b}{\chi} = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{z}{4} + \sin\frac{z}{4};$$

azaz

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{b}{k}} + e^{-\frac{b}{k}}\right) = \cos\frac{z}{4} + \sin\frac{z}{4}.$$

Miután így $\frac{z}{4}$ szerkeszthető lévén, a cos. és sin. s e másodfokú egyenlet megoldásából eredő $e^{\frac{b}{k}}$ is megszerkeszthető, tehát a 21. czikk végén előadottak szerint a b is megszerkeszthető. Pl. a legnagyobb területű háromszög esetén $z = \pi$; ekkor tehát (51) a vele egyenlő területü négyzet mindegyik szöge $a = \frac{\pi}{2} - \frac{z}{4} = \frac{\pi}{4}$ és

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{b}{k}} + e^{-\frac{b}{k}}\right) = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2},$$

$$e^{\frac{b}{k}} = 1 + \sqrt{2}.$$

A legnagyobb területű háromszöggel egyenlő négyzetet Bolyai $\square$-tel jelöli.

Ha $k^2 z$ területű egyenesoldalú síkidom a szögű szabályos n szöggel egyenlő területű, akkor (52) szerint

$$z = n\left(\frac{n-2}{n}\pi - a\right),$$

azaz

$$a = \pi - \frac{2\pi}{n} - \frac{z}{n}.$$

A szerkeszthetőségre első feltétel, hogy z ne legyen nagyobb $(n-2)\pi$-nél. A második feltétel pedig az, hogy úgy 2π, mint z geometrice osztható legyen n-nel. Ugyanis $\frac{2\pi}{n}$ a középpontnál lévő szöge annak a háromszögnek, mely a szabályos sokszög n-edrésze; és az a megszerkesztésére nézve még az is szükséges (a $\frac{2\pi}{n}$ szerkesztése után), hogy $\frac{z}{n}$ szerkeszthető legyen.

Kimondhatom tehát a következő tételt:

Ha egy sokszög szögösszege megfelel a $z \lesseqgtr (n-2)\pi$ *föltételnek, akkor területe n oldalú szabályos sokszöggé geometriai szerkesztéssel átalakítható, ha n vagy 2 hatványa, mely esetben z akármekkorának lehet megadva, vagy pedig ha n körosztási szám, mely esetben szükségképen* $z = \frac{m}{n_1}\pi$, *hol m egész szám az* n_1 *pedig olyan körosztási szám, melynek az n-nel 2 hatványain kívül más közös szorzója nincs.* Más esetben nem alakitható át.

Az Appendix utolsó előtti (csak bizonyítás nélkül odavetett) mondata «Et potest quævis figura rectilinea in polygonum regulare n laterum geometrice converti, siquidem n sub formam *Gaussianam* cadat» ebben az értelemben egészítendő ki.

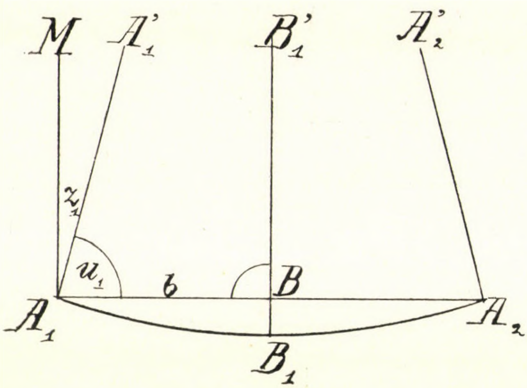
23. *A paracziklus ívhoszsza és a kör területe.* (14. ábra.) A_1, B_1, A_2 legyenek paracziklus pontjai $A_1A_1', B_1B_1', A_2A_2'$ annak tengelyei és

$$\overset{\frown}{A_1B_1} = \overset{\frown}{B_1A_2} = s$$

$$\overline{A_1B_1} = \overline{B_1A_2} = R$$

úgy hogy

$$A_1A_2 \perp B_1B_1'; \quad A_1B = BA_2 = b.$$



14. idom.

Leirva B középpontból kört b sugárral ennek kerülete egyrészről

$$= 2\pi s\,;$$

más részről

$$= 2\pi \varkappa \sin \frac{b}{\varkappa}\,;$$

tehát

$$s = \varkappa \sin \frac{b}{\varkappa}\,; \tag{53}$$

és épúgy

$$\frac{\widehat{A_1B_1}}{2} = \frac{s}{2} = \varkappa \sin \frac{\overline{A_1B_1}}{2\varkappa}\,,$$

azaz

$$s = 2\varkappa \sin \frac{R}{2\varkappa}\,. \tag{54}$$

Tekintettel a (43) alatti egyenletre (4. lap), az következik továbbá a (54) egyenletből, hogy

$$s = k \cot u_1 = k \operatorname{tg} z_1, \tag{55}$$

ha $A_1M \perp A_1B$.

Jelölve Bolyai szerint a kör területét, melynek sugara R $\odot(R)$ symbolummal, és $0 < r < R$ lévén, leirva köröket r és $r+dr$ sugárral (hol dr végtelen kicsiny), a $\odot(R)$ eleme

$$= \bigcirc(r)\,dr$$

$$= 2\pi\varkappa \sin \frac{r}{\varkappa}\,dr,$$

honnan

$$\odot(R) = 2\pi\varkappa \int_0^R \sin \frac{r}{\varkappa}\,dr = 2\pi\varkappa^2 \left(1 - \cos \frac{R}{r}\right),$$

azaz

$$\odot R = 4\pi\varkappa^2 \sin^2 \frac{R}{2r}\,, \tag{56}$$

tehát a (54) egyenlet révén

$$\odot R = \pi s^2. \tag{57}$$

Az egyenlet BOLYAI JÁNOSnak e következő tételét mondja ki: Az $\overline{A_1B_1}$ sugárral síkban leirt körterület egyenlő az $\widehat{A_1B_1}$ paracziklusívvel parasférán leirt körterülettel.

Az (57) és (55) egyenletekből más részről következik, hogy

$$\odot(R) = \pi k^2 \operatorname{tg}^2 z_1. \tag{58}$$

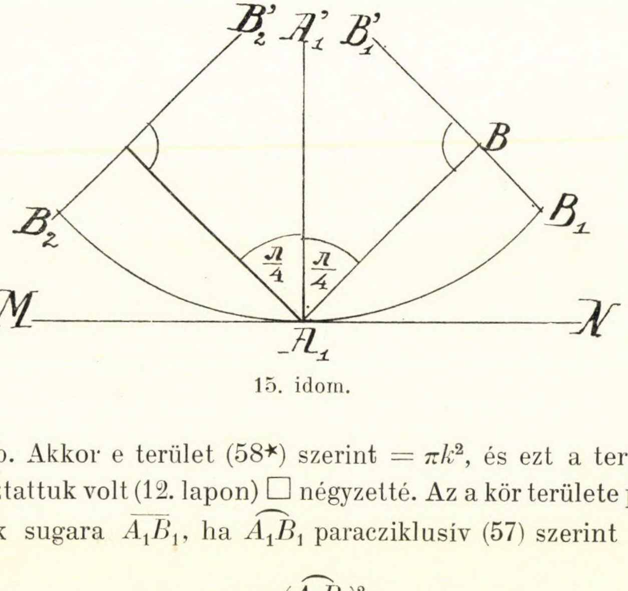
1. Alkalmazás. Legyen

$$A_1A_1' \perp MN; \quad A_1B \perp B_1B_1'; \quad BA_1A_1' = \frac{\pi}{4};$$

legyen továbbá

$$BB_1' \parallel\!\parallel A_1A_1' \parallel\!\parallel B_2B_2',$$

szóval az MN, BB_1', B_2B_2' egyenesek közötti háromszögnek mind a három szöge $= 0$; e háromszög területe tehát a lehető leg-



15. idom.

nagyobb. Akkor e terület (58*) szerint $= \pi k^2$, és ezt a területet átváltoztattuk volt (12. lapon) $\square$ négyzetté. Az a kör területe pedig, melynek sugara $\overline{A_1B_1}$, ha $\widehat{A_1B_1}$ paracziklusív (57) szerint

$$= \pi(\widehat{A_1B_1})^2;$$

ámde $z_1 = \frac{\pi}{4}$ lévén az (55) képlet értelmében

$$\widehat{A_1B_1} = k,^\star$$

$\star$ ENGELnek ezen eredményét BOLYAI anticipálta, noha szokása szerint szavakban, mint sok egyebet ki nem mondta.

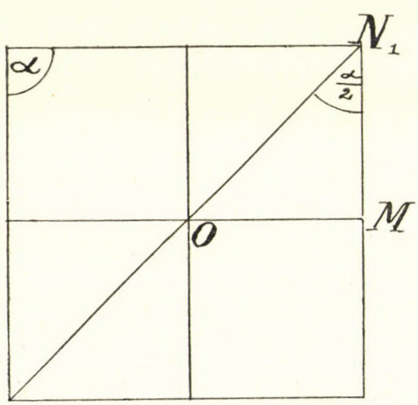
tehát az $\overline{A_1B_1}$ sugárral leirt sikterület $= \pi k^2$. Szóval a legnagyobb háromszög területe $= \square = \overline{A_1B_1}$ sugárral leirt kör területével.

Ime egy körterület, melylyel egyenlő nagyságú négyzetet vonalzó és körző segélyével megszerkeszthetünk. Ugyanis a $BA_1A_1' = \frac{\pi}{4}$ megszerkeszthető; továbbá a (18. 2 köv.) szerint megszerkeszthetjük azt a BB_1' egyenest, mely $\perp AB$ és $\parallel A_1A_1'$, és a (19) szerint megszerkeszthetjük a BB_1' egyenesen a B_1 paraciklus pontot. Az A_1B_1 sugár tehát megvan. Más részről megvan a $\square$ az imént említett helyen.

2. *Alkalmazás.* Irva az (58) egyenletet így

$$\odot(\overline{B_1A_1}) = \mathrm{tg}^2 z_1 \,\square,$$

észreveszszük, hogy $\overline{B_1A_1}$ adva lévén, megszerkeszthető a z_1 szög (17. czikk). Ámde a z_1 áttéve parasférára körző és volnalzóval, megszerkeszthető a parasférán $\mathrm{tg}\, z_1$ ugyanezen segédeszközökkel. Az egyenlet tehát kimondja, hogy minden kör területének a viszonya a körző és vonalzóval megszerkesztett $\square$ négyzet területéhez olyan szám, mely ugyanezen segédeszközökkel megszerkeszthető: a quadratura circuli ebben az értelemben Bolyai síkján minden kör esetén eszközölhető.



16. idom.

24. *Négyzettel egyenlő területű körök.* Az a szögű négyzet (16. idom) területe (51) szerint $= k^2(2\pi - 4a)$. A z_1 szöghöz tartozó kör területe (58) szerint $= \pi k^2 \,\mathrm{tg}^2 z_1$. A két terület egyenlőségére a szükséges és elegendő feltétel, hogy

$$a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\,\mathrm{tg}^2 z_1$$

legyen. A négyzet OMN_1 nyolczada szerkeszthető, ha $\frac{a}{2}$ azaz

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\operatorname{tg}^2 z_1,$$

szerkeszthető, a mire nézve szükséges és elegendő, hogy

$$\operatorname{tg}^2 z_1=\frac{m_1}{n_1} \quad (51)$$

egyenlet jobb oldalán m_1 és n_1 relativ primszámok lévén az n_1 Gauss-féle körosztási szám legyen. Ha e föltétel ki van elégítve, akkor tényleg OM körző és vonalzóval megszerkeszthető. Ugyanis

$$\cos\frac{OM}{k}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\cos\left(\frac{\pi}{8}\operatorname{tg}^2 z_1\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}\operatorname{tg}^2 z_1\right),$$

tehát az egyenlet jobb oldalán álló szám a parasférán megszerkeszthető, és az eredményből másodfokú egyenlet megoldásával $e^{\frac{OM}{k}}$, végül ebből a (21. czikk) módszerével megvan az OM. És így a négyzet OMN_1 nyolczada meglévén szerkesztve, meg van a feladat oldva.

25. *Szabályos n szöggel egyenlő körök.* Az a szögű szabályos n szög területe $=k^2\big((n-2)\pi-na\big)$ lévén (52), a z_1 szöghöz tartozó kör területe egyenlő az n-szögével, ha

$$a=\pi-\frac{2\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}^2 z_1.$$

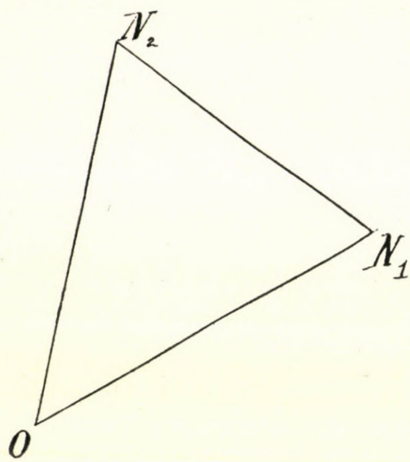
Hogy a sokszög megszerkeszthető legyen, szükséges és elegendő, hogy a szabályos sokszög ON_1N_2 háromszögű része szerkeszthető legyen, mely az egész sokszög n-edrésze. Az N_1ON_2 középponti szög $=\frac{2\pi}{n}$, a másik két szög

$$ON_1N_2=ON_2N_1=\frac{a}{2}$$

lévén,

$$\frac{\pi}{2n}\operatorname{tg}^2 z_1$$

szögnek is szerkeszthetőnek kell lennie. Így tehát n-nek GAUSS-féle körosztási számnak kell lennie, és azonfölül $\mathrm{tg}^2 z_1$-nek a fenti (59) alakkal kell birnia azzal a megtoldással, hogy n és n_1 szükségképen olyan körosztási számok, melyeknek a 2 hatványain kívül más közös szorzójuk nincs. Hogy e föltételek mellett a kör szabályos n-szöggé átalakítható, hogy t. i. az O középpont távolsága az N_1N_2 oldaltól megszerkeszthető, épúgy megmutatható mint a 24. czikkben.



17. idom.

26. Nyilvánvaló, hogy a parasférán rajzolt négyzet területe nem lehet egyenlő kör területével: mert a négyzet paracziklus-oldala a-val, a kör parasférikus sugara r-rel jelölve, a lehetőség esetén

$$\pi r^2 = a^2,$$

azaz $\pi = \left(\frac{a}{r}\right)^2$ körző és vonalzóval megszerkeszthető paracziklusívnek és a paracziklusi egységívnek viszonya volna, a mi abszurdum.

Más részről az előadott bizonyítások ereje megszünik, mihelyt k végtelen nagy. Ez esetben ugyanis az n-szögek területe $\infty . 0$ alakot vesz fel. Ha pedig a határátmenetet megcsináljuk, akkor az a oldalú négyzet területe $= a^2$; épígy a kör területe $= \pi r^2$ stb.

Végül észreveszszük, hogy a területátalakítási eredmények könnyen átvihetők gömbi körökre és sokszögökre úgy az Euklidesi rendszerben, mint az absolut geometriában.

Réthy Mór.

AZ ABSZOLUT GEOMETRIA EGYIK ALAPTÉTELÉRŐL.

Az *Appendix* 10. §-a az L vonalak (paracziklusok) elméletének alapvető tételét foglalja magában. Ezt a tételt Bolyai János stereometriai megfontolásokkal bizonyítja.

A következő soroknak czélja bemutatni az említett tétel levezetését planimetriai úton. A gondolatmenet nagyjából a Lobatschefskij-ével* megegyezik, de kiegészítve és olyan alakban adom elő, hogy az *Appendix* rendszerébe beilleszthető legyen.

Ismeretesnek tekintem az *Appendix*nek 1—7. §-ait és azt a 13. §-ból könnyen következtethető tételt, hogy a parallelszög a távolság nőttével fogy.

1. *Segédtétel. Ha* $bn \; ||| \; am$ *és az* $ambn$*-ben levő* c*-ből vont* cp *sem* am*-et, sem* bn*-et nem metszi, akkor*

$$cp \; ||| \; bn \; ||| \; am.$$

Ugyanis, ha volna

$$cq \; ||| \; am \; (\; ||| \; bn),$$

úgy cp-nek vagy acq-ba, vagy bcq-ba kellene esnie. De ekkor metszené am-et, vagy bn-et.

Következmény. Ha $bn \; ||| \simeq am$, akkor az ab-t merőlegesen felező fs nem metszheti egyik egyenest sem; minthogy

$$mafs \equiv nbfs,$$

ezért:

$$fs \; ||| \; am \; (\; ||| \; bn). \qquad (\textit{Appendix } 8. \; \S.)$$

---

* Lobatschefskij: Geom. Untersuchungen. Berlin. 1840. 34—37. l. Oeuvres géométriques. Kazan. Tome II. 1886. 566. l.

V. ö. még: Neue Anfangsgründe 111. §. (Engel: Urkunden. *I. Bd.* 182—184. l. s jegyzet hozzá. *II. Bd.* 344. l.)

2. *Tétel. Ha az abc $\triangle$-nek bc, ca, ab oldalait dq, er, fs egyenesek rendre merőlegesen felezik és közülök bármely kettő egymással $|||$, akkor*

$$dq \ ||| \ er \ ||| \ fs.$$

Mindenekelőtt igaz, hogy ha az említett egyenesek közül kettő szinteérő, a harmadik egyiket se metszheti. Például, ha

$$er \ ||| \ fs,$$

és dq er-et v-ben metszené,

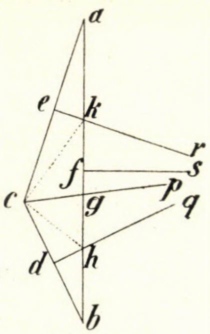
$$va = vc = vb$$

lenne, s v fs-nek is pontja lenne, tehát er és fs is metszenék egymást.

A tétel teljes bebizonyítására azonban különbséget teszünk, hogy a két szinteérő egyenes a legnagyobb szög szárait felezi-e, vagy nem.

A jelölést úgy választjuk, hogy acb legyen a háromszög legnagyobb szöge.

a) Legyen (1. rajz) $dq \ ||| \ er.$



1. rajz.

Kimutatjuk, hogy dq és er metszik ab-t és f e két metszéspont közé esik.* E végből húzzuk

$$cp \ ||| \ er,$$

a mely ab-t g-ben metszi. Mivel még

$$cp \ ||| \ dq$$

is, er-nek ag-t és dq-nak bg-t kell metszenie. Ha ezek a metszéspontok sorra k, h; akkor

$$ak = ck, \quad bh = ch$$

és

$$ack = cak, \quad bch = cbh.$$

Mivel ck ach-ban van

* Ez akkor is igaz, ha csupán annyit teszünk föl, hogy dq és er *nem metsző* egyenesek.

$$ach > ack = cak,$$

tehát az ach $\triangle$-ben

$$ah > (ch = hb).$$

De

$$ah + hb = ab$$

lévén,

$$ah > \tfrac{1}{2}\, ab = af; \tag{1}$$

a mi azt mondja, hogy h fb-n van.

Épen így belátható, hogy k az fa vonaldarabon van, tehát f *pont a hk vonaldarabon fekszik.*

Minthogy

$$hq \;|||\; kr$$

és fs közös nem metsző, innen az 1. segédtétel szerint következik, hogy

$$fs \;|||\; kr,$$

azaz

$$fs \;|||\; er \;|||\; dq. \tag{2}$$

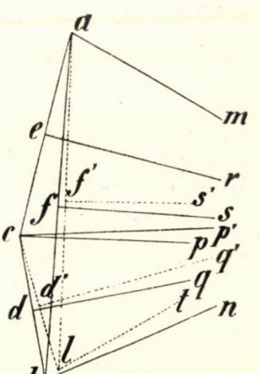
b) Felezze a szinteérő egyenesek egyike a legnagyobb szöggel szemben levő oldalt; legyen (2. rajz)

$$fs \;|||\; er.$$

Mivel dq és er nem metszők, ha

$$cp \;|||\; dq, \quad cp' \;|||\; er,$$

cp' acp-ben van. Kimutatjuk, hogy cp összeesik cp'-vel. Húzzuk $bn \;|||\; dq$, s így



2. rajz.

$$bn \;|||\; \overset{\frown}{=}\; cp,$$

legyen továbbá

$$tlcp' \equiv nbcp,$$

a hol

$$cl = cb,\; p'cl = pcb,\; lt \;|||\; \overset{\frown}{=}\; cp'$$

és l bcp'-ben van.

Tehát, ha cl-et $d'q'$ merőlegesen felezi

$$d'q' \;|||\; cp' \;|||\; er.$$

Húzzuk még

$$am \;|||\; er,$$

akkor

$$am \;|||\; \triangleq cp', \quad am \;|||\; fs. \tag{3}$$

Innen következik, hogy acl háromszögnek legnagyobb szöge acl. Ugyanis l pont bcp'-ben lévén, al-nek metszenie kell cp'-t, tehát

$$mac = acp' > lac,$$
$$tlc = p'cl > alc,$$
$$acl > alc + alc. \tag{4}$$

Minthogy $d'q' \;|||\; er$, az acl $\triangle$-re az *a)* alattiak alkalmazhatók, ennélfogva, ha $f's'$ al-et felezi merőlegesen

$$f's' \;|||\; er \;|||\; d'q'$$

és így

$$f's' \;|||\; am. \tag{5}$$

Legyen

$$ab = 2y, \quad al = 2y'$$

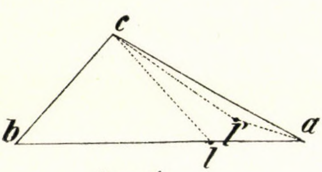
s jelölje az y és y'-höz tartozó parallelszögeket u, u', akkor a (3) és (5) értelmében

$$bam = u, \quad lam = u'. \tag{6}$$

Könnyen belátható, hogy *l pont az abc $\triangle$-ön kívül* (bam-ben) van. Ha $bc > ac$, állításunk igazsága evidens.

Ha $bc < ac$, vegyük tekintetbe, hogy az acl a legnagyobb szög acl $\triangle$-ben.

Már pedig, a midőn l ab-n, vagy az abc háromszög belsejében van, nem lehet acl a legnagyobb szög.



3. rajz.

Ugyanis legyen (3. rajz) l ab-n, akkor a bcl háromszögben

$$clb = cbl = cba.$$

De

$$cba < R, \quad clb + cla = 2R,$$

tehát

$$cla > R.$$

Ha pedig l abc háromszögön belül volna, jelölje helyét l', akkor cl' acl-ben lenne és a mint könnyen kimutatható

$$cl'a > cla,$$

s annál inkább

$$cl'a > R.$$

E szerint egyik esetben se volna c pontnál az acl ill. acl' háromszög legnagyobb szöge.

Ebből következik, hogy l pont (2. rajz) valóban kívül van az abc $\triangle$-ön (bam-ben), s ezért az a pontnál levő szög nőtt, úgy hogy

$$u' < u. \tag{7}$$

Másfelől az abc és alc háromszögekben (2. rajz) acb-t és acl-et egyenlő oldalok alkotják, s minthogy

$$acl < acb$$

az euklidesi geometriának itt is igaz tétele szerint

$$al < ab,$$

vagy

$$y' < y,$$

a honnan

$$u' > u \tag{8}$$

következnék.

Mivel a (7) és (8) állítások egymásnak ellentmondók, cp és cp' összeesnek, tehát

$$dq \mathrel{|||} er \mathrel{|||} fs.$$

3. *Tétel. Ha úgy* am, *mint* $bn \mathrel{|||} \bumpeq cp$, *akkor egyszersmind*

$$bn \mathrel{|||} \bumpeq am.$$

Rajzoljuk meg az abc háromszöget, s húzzuk meg az oldalait merőlegesen felező egyeneseket. Ezek számára az eddigi jelöléseket megtartjuk. (2. rajz.)

Az 1. értelmében

$$dq \mathrel{|||} cp, \quad er \mathrel{|||} cp, \quad (\textit{Appendix } 10.\ \S.)$$

tehát

$$dq \mathrel{|||} er.$$

De a 2. szerint, ebből az következik, hogy

$$dq \mathrel{|||} er \mathrel{|||} fs.$$

Mivel még
$$dq \,|||\, bn, \quad er \,|||\, am,$$
azért
$$fs \,|||\, bn \,|||\, am,$$
azonkívül
$$af = fb,$$
tehát
$$nbfs \equiv mafs,$$
a honnan
$$bn \,|||\, \stackrel{\frown}{=} am.$$

Ez a bizonyitás a 2. tétel értelmében az *am, bn, cp* egyenesek kölcsönös helyzetétől független.

Szabó Péter.

VILLAMOS KONDENZÁTOROK TÖLTŐ ÉS KISÜLÉSI ÁRAMÁNAK VIZSGÁLATA ÉS OBJEKTIV ELŐÁLLÍTÁSA.*

Jelen közleményem czélja annak megállapitása, hogy az *oszcillograf,* vagyis gyors lengésű galvánmérő, az elektromos kondenzátorok töltő és kisülési áramának kisérleti vizsgálására és objektiv előállitására alkalmas.

Kellő kisérleti eljárással mind a két áramgörbét egymás mellett kivánt ideig föntarthatjuk és ezáltal oly módszerrel rendelkezünk, mely a valójában gyorsan lefolyó, de képen tetszőleges ideig bemutatható jelenség vizsgálására tanulságosnak igérkezik.

I. Elméleti bevezetés.

Az elmélet alapját és az abból levont eredményeket kivánom röviden tárgyalni abból a czélból, hogy az utóbb bemutatandó kisérleti adatoknak az elmélettel való megegyezését megvizsgálhassuk.

Tudvalevőleg William Thomson tárgyalta először 1853-ban elméleti alapon azt a jelenséget, midőn kapaczitással, állandó önindukczióval és ohmikus ellentállással biró vezető a földdel való összekötés által kisüttetik.

Számitásaimban általánosabb esetet vizsgálok, mely specializálva úgy a töltés mint a kisülés jelenségének elméletét adja.**

---

* Szerzőnek e tárgyról az Annalen der Physik 1903. évfolyama 12. kötete 805—813. lapján megjelent közleménye e helyütt bővitve jelenik meg.

** Lásd: Alternating currents: an analytical and graphical treatment or students and engineers, by Frederick Bedell and Albert C. Crehore 1893. E mű a szóban levő vizsgálatot igen hosszadalmasan tárgyalja; ezenfelül egészen az eredményig előjeli hibát visz, a mely hiba a jelenség fizikai magyarázatánál zavart okozhat.

Legyen a C kapaczitású kondenzátor zárókörének állandó önindukczió tényezője L, ohmikus ellentállása R, a kondenzátoron kívül a zárókör egyéb részeinek kapaczitását elhanyagolhatónak veszszük. Tegyük fel, hogy $\varepsilon = f(t)$ feszültség t időpillanatban a zárókörben i áramerősséget okoz; akkor a zárókörnek dt idő alatt szolgáltatott energia $\varepsilon i dt$, három részben kifejezhető hatásban nyilvánul: egy rész a vezetéket felmelegíti, ez $i^2 R dt$; a másik rész a vezeték környezetében mágneses teret létesít, a mely czélra $L i di$ energia fordíttatik; a harmadik rész, mely $\frac{q dq}{C}$, a kondenzátornak q töltését dq-val megváltoztatja. Az energia megmaradása elvének értelmében

$$\varepsilon i dt = i^2 R dt + L i di + \frac{q dq}{C},$$

és mivel

$$i = \frac{dq}{dt},$$

azért innen

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{CL} q = \frac{\varepsilon}{L} = \frac{1}{L} f(t). \qquad 1)$$

A kondenzátor töltési és kisülési jelenségét vizsgálva

$$\varepsilon = f(t) = E$$

állandó; a mi úgy értendő, hogy a zárókörben működő elektromindító erőt kezdeti E_0 értékéről hirtelen egy másik állandó E értékre változtatjuk, a jelenséget pedig attól az időponttól számítjuk, midőn az említett változás már végbement.

Ha e speciális esetnek megfelelő

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{CL} q = \frac{E}{L} \qquad 1')$$

egyenletet differencziáljuk és tekintetbe veszszük, hogy $i = \frac{dq}{dt}$, akkor

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{CL} i = 0,$$

és innen

$$i = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad 1'')$$

hol a λ-k a

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL} = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei. Minthogy ezen egyenlet együtthatói mind egyenlő jelűek, azért a gyökök, ha valósak, okvetetlenül negativ értékűek. Dimenziójuk a számításnál alkalmazott elektromágneses mértékrendszerben az időnek reciprokja. Ezen okoknál fogva a λ_1 és λ_2 gyököket a következőkben így jelöljük: $-\frac{1}{T_1}$ és $-\frac{1}{T_2}$. Itt T_1 és T_2 a következő egyenlet gyökei:

$$\frac{1}{T^2} - \frac{R}{L}\frac{1}{T} + \frac{1}{CL} = 0,$$

melynek rendezett alakja

$$T^2 - CRT + CL = 0.$$

Tehát

$$T_1 + T_2 = CR, \qquad T_1 T_2 = CL$$

és

$$T_1 = \frac{CR + \Delta}{2}, \qquad T_2 = \frac{CR - \Delta}{2},$$

hol

$$\Delta = \sqrt{C^2R^2 - 4CL}.$$

Az 1'') egyenletből e jelölés mellett

$$i = c_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + c_2 e^{-\frac{t}{T_2}}. \qquad A)$$

Az 1') egyenlet így is írható:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i + \frac{1}{CL}(q - Q) = 0,$$

hol $Q = CE$. Innen

$$q = Q - CRi - CL\frac{di}{dt} = Q - (T_1 + T_2)i - T_1T_2\frac{di}{dt},$$

és ha még i-nek $A)$ alatti kifejezését behelyettesítjük, akkor

$$q = Q - c_1T_1e^{-\frac{t}{T_1}} - c_2T_2e^{-\frac{t}{T_2}}. \qquad B)$$

Ebből az egyenletből a $Q = CE$ mennyiség értelme is kitünik; ez ugyanis a $t = \infty$ idő lefolyása után a kondenzátor töltése.

Az integráczió állandóinak kiszámítására vegyük tekintetbe, hogy a $t=0$ időpontban

$$i=0 \qquad q=Q_0,$$

a hol Q_0 a kondenzátor kezdeti töltése. Tehát az *A)* és *B)* egyenletek értelmében, ha azokat erre az időpontra alkalmazzuk:

$$c_1+c_2=0$$

$$c_1T_1+c_2T_2=Q-Q_0,$$

vagyis

$$c_2=-c_1=\frac{Q_0-Q}{T_1-T_2}.$$

Az állandók ez értékeit *A)* és *B)* alatt behelyettesítve

$$i=-\frac{Q_0-Q}{T_1-T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}}-e^{-\frac{t}{T_2}}\right), \tag{I}$$

$$q=Q+\frac{Q_0-Q}{T_1-T_2}\left(T_1e^{-\frac{t}{T_1}}-T_2e^{-\frac{t}{T_2}}\right). \tag{II}$$

Itt

$$\frac{1}{T_1}=\frac{T_2}{T_1T_2}=\frac{CR-\Delta}{2CL}=\frac{R}{2L}-a$$

és

$$\frac{1}{T_2}=\frac{R}{2L}+a,$$

hol rövidség kedvéért

$$a=\frac{\Delta}{2CL}=\frac{\sqrt{C^2R^2-4CL}}{2CL};$$

továbbá

$$T_1-T_2=\Delta=2aCL,$$

$$\frac{T_1}{T_1-T_2}=\frac{CR+\Delta}{2\Delta}=\frac{1}{2}+\frac{CR}{2\Delta}=\frac{1}{2}+\frac{R}{4aL}$$

és

$$\frac{T_2}{T_1-T_2}=-\frac{1}{2}+\frac{R}{4aL}.$$

Első eset.

Ha T_1 és T_2 realisak, vagyis

$$R^2>\frac{4L}{C},$$

akkor i és q értékei is realisak; ez esetre:

$$i = -\frac{Q_0 - Q}{\sqrt{C^2R^2 - 4CL}} e^{-\frac{R}{2L}t} (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}),$$

$$q = Q + (Q_0 - Q) e^{-\frac{R}{2L}t} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{4\alpha L} \right) e^{\alpha t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{R}{4\alpha L} \right) e^{-\alpha t} \right],$$

a hol a kezdeti töltés $Q_0 = CE_0$ és a végtöltés $Q = CE$.

A nyert kifejezések az áramerősséget illetőleg töltést adják t időpillanatban, melyet attól az időtől számítunk, a mikor a kezdeti állandó E_0-nak az ugyancsak állandó E-re való hirtelen változása már végbement.

Látjuk hogy $q = F(t)$ és $i = F'(t)$ az *aperiodikus lefolyás* jellegével birnak.

Az egyenletek eme általános alakjukban a teljes vagy részleges töltésre illetőleg kisülésre érvényesek ahhoz képest, a mint az E_0 és E-t, és megfelelően a Q_0 és Q-t választjuk.

Ha a kezdeti töltés $Q_0 = 0$, akkor a Q-ra való töltésre érvényes

$$i = \frac{Q}{\sqrt{C^2R^2 - 4CL}} e^{-\frac{R}{2L}t} (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}). \qquad \text{I}')$$

Ha pedig a végső töltés $Q = 0$, a kondenzátor *kisülése* van szóban; feltéve még, hogy a kezdeti töltés akkora, mint a töltés jelenségénél a végtöltés, vagyis ha Q_0 helyébe Q-t teszünk

$$i = -\frac{Q}{\sqrt{C^2R^2 - 4CL}} e^{-\frac{R}{2L}t} (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}). \qquad \text{II}')$$

Ez eredményekből kitünik, hogy az aperiodikus lefolyású töltő és kisülési áramgörbék, melyek az *áramerősséget* az idő függvényében tüntetik elő és a melyeknek kisérleti vizsgálata és bemutatása jelen értekezés egyik főtárgya lesz, ugyanabban a zárókörben előállítva, egymásnak a t tengely irányában eltolt *tükörképei.*

Második eset.

Ha T_1 és T_2 komplex számok, a minek feltétele

$$R^2 < \frac{4L}{C},$$

akkor az előbbi esetre talált általános képletekben a helyett ia' irandó, hol $i=\sqrt{-1}$ és

$$a'=\frac{\sqrt{4CL-C^2R^2}}{2L}.$$

Lesz

$$i=-\frac{2(Q_0-Q)}{\sqrt{4CL-C^2R^2}}e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{e^{ia't}-e^{-ia't}}{2i}$$

és

$$q=Q+(Q_0-Q)e^{-\frac{R}{2L}t}\left(\frac{e^{ia't}+e^{-ia't}}{2}+\frac{R}{2a'L}\frac{e^{ia't}-e^{-ia't}}{2i}\right),$$

vagyis

$$i=-\frac{2(Q_0-Q)e^{-\frac{R}{2L}t}}{\sqrt{4CL-C^2R^2}}\sin\frac{\sqrt{4CL-C^2R^2}}{2CL}t \qquad \mathrm{I}'')$$

és

$$q=Q+(Q_0-Q)e^{-\frac{R}{2L}t}\left(\cos a't+\frac{R}{2a'L}\sin a't\right)=$$

$$=Q+\frac{(Q_0-Q)e^{-\frac{R}{2L}t}}{\sqrt{4CL-C^2R^2}}\left(\sqrt{4CL-C^2R^2}\cos a't+CR\sin a't\right).$$

Az utolsó képletben a második tényező mint t elsőfokú függvényének sinusa fejezhető ki.

Ha ugyanis az M és φ állandókat úgy választjuk, hogy

$$CR=M\cos\varphi$$

$$\sqrt{4CL-C^2R^2}=M\sin\varphi,$$

tehát

$$M=2\sqrt{CL}$$

és

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{4CL-C^2R^2}}{CR},$$

akkor

$$q=Q+\frac{2(Q_0-Q)\sqrt{CL}}{\sqrt{4CL-C^2R^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{4CL-C^2R^2}}{2CL}t+\varphi\right). \qquad \mathrm{II}'')$$

Az I") és II") egyenletek t időpillanatban, melyet attól az időtől számítunk, mikor E_0-nak hirtelen E-re való változása már végbement, megadják az áramerősséget és töltést $R^2<\frac{4L}{C}$ esetére.

A kifejezések érvényesek teljes vagy részleges töltésre illetőleg kisütésre.

A kisérleti vizsgálatra való tekintetből minket különösen érdeklő *áramerősség* abban az esetben, ha a kezdeti töltés $Q_0=0$ és a kondenzátor Q-ra *töltetett*:

$$i=\frac{2Qe^{-\frac{R}{2L}t}}{\sqrt{4CL-C^2R^2}}\sin\frac{\sqrt{4CL-C^2R^2}}{2CL}t.$$

Ha pedig a Q végtöltés egyenlő zérussal, a kondenzátor teljes *kisütése* van szóban; feltéve még, hogy ez esetben a kezdeti töltés akkora, mint a töltés műveleténél a végtöltés, úgy Q_0 helyébe Q-t írva

$$i=-\frac{2Qe^{-\frac{R}{2L}t}}{\sqrt{4CL-C^2R^2}}\sin\frac{\sqrt{4CL-C^2R^2}}{2CL}t.$$

Innen látjuk, hogy $i=\psi(t)$ a *csillapított harmonikus* mozgás jellegével bir, vagyis a töltés és kisülés csillapitott oszczillácziókban megy végbe.

A tárgyalt második esetben — ép úgy mint a jelenség aperiodikus lefolyásánál láttuk — a töltő és kisütési áramgörbék, melyek az áramerősséget az idő függvényében tüntetik elő, és melyeknek kisérleti előállítása és vizsgálata lesz második főfeladatunk, ugyanabban az áramkörben előállítva egymásnak a t tengely irányában eltolt *tükörképei.*

Az i-re talált képlet értelmében az egyszerű rezgés ideje:

$$T=\frac{2CL\pi}{\sqrt{4CL-C^2R^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}}.$$

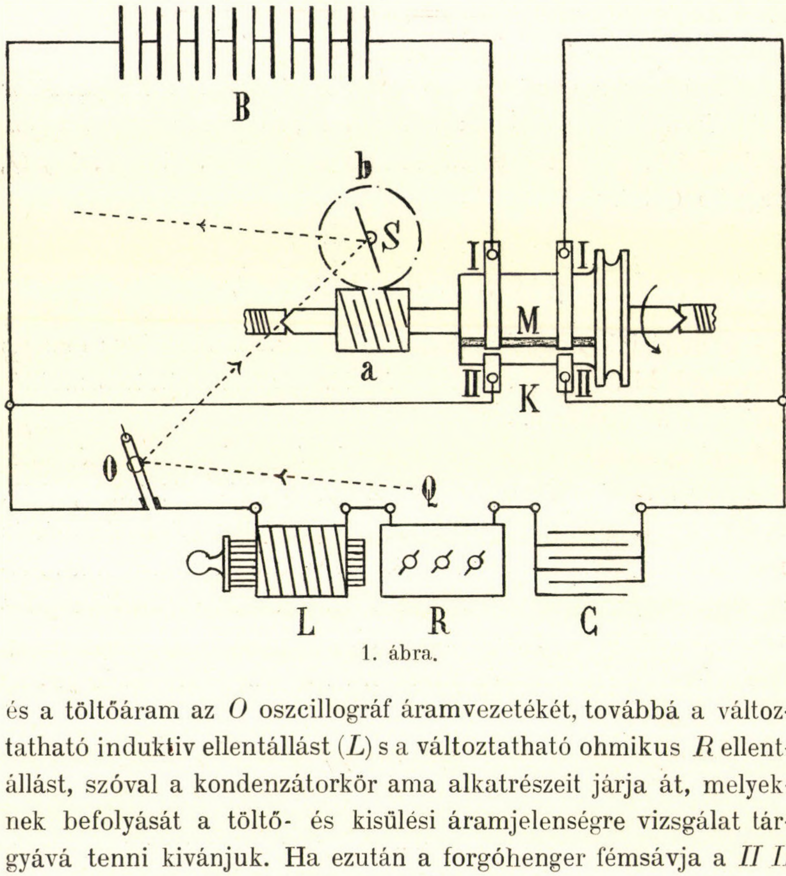
Azokra az áramkörökre nézve, melyekre kisérleteink vonatkoznak, a nevező második tagja az elsőhöz képest elhanyagolható, úgy hogy az egyszerű rezgésidőre vonatkozó Thomsonformulánk ez lesz

$$T=\pi\sqrt{CL}.$$

II. Kisérleti vizsgálat.

A kondenzátor töltő és kisülési áramgörbéjének előállítására szolgált elrendezés kapcsolási rajzát az 1. kép mutatja.

B villamforrás ama rövid ideig, míg az *I I* fémrugók a *K* érintő forgóhenger *M* keskeny fémsávját érintik, a *C* kondenzátort tölti



1. ábra.

és a töltőáram az *O* oszcillográf áramvezetékét, továbbá a változtatható induktiv ellentállást (*L*) s a változtatható ohmikus *R* ellentállást, szóval a kondenzátorkör ama alkatrészeit járja át, melyeknek befolyását a töltő- és kisülési áramjelenségre vizsgálat tárgyává tenni kivánjuk. Ha ezután a forgóhenger fémsávja a *II II* fémrugókkal jut érintkezésbe, a kondenzátor az oszcillográf áramvezetékén, meg *L* és *R*-en át kisül.

A vízszintes tengely körül forgó érintő-henger az *S* síktükröt függélyes tengely körül való forgásra készti; ha valamely (*Q*) fényforrásból, a Napból vagy ívlámpából jövő fénynyalábot az oszcillográf apró tükrére és a visszavert fényt a hengertől forgásra késztetett tükörre, végre az összvergődő nyalábot ernyőre vetjük, a töltő- és kisülési áram időbeli lefolyását feltüntető két áramgörbét egymás mellett ugyanegy képen látjuk. A görbék legnagyobb ordinátáit könnyű szerrel *egy méternyi* nagyságban állíthatjuk elő, úgy, hogy a képeket nagyszámú auditórium is jól megfigyelheti. A képek fotografiái is könnyen készíthetők; a felvételek közül néhányat másolatban e közlemény során bemutatok.

A kisérleti berendezés részleteiről a következőket kell kiemelnem. *Villamforrásul* 5 egészen 15 feszültségre kapcsolt akkumulator-elemből egybeállitott battéria szolgált. A műegyetem technikai fizikai laboratóriumában készült egyszerűsített összeállítású Blondel-Duddell-féle *oszcillográf** velejében Deprez-d'Arsonval tipusú gyors lengésű galvánmérő. A fix mágnesteret erős elektromágnes képezi, melynek összvergődő, beállitható sarksarúi között 3—4 mm-nyi levegőközt hagyunk; a mozgékony vezeték az elektromágnes sarksarúi közé helyezett vékony, foszforbronz szalagból való, milyet most az igen érzékeny Deprez-galvánmérőnél áramhozzávezetőül alkalmaznak.** E szalagból fakeretbe illesztett keskeny hurkot készítünk, mely apró csontcsiga hornyán van átvetve; a csigát tartó csavarorsóval a szálakat egyenletesen megfeszithetjük. A hurok két végét vastag áramhozzávezető drótokkal és kapcsokkal látjuk el, közepére, nevezetesen mellső oldalán, mindkét szálra reáfekvő mikroszkóp-fedőlemezből kiválasztott, ezüstözött tükröt, a hurok hátsó oldalára pedig, szintén a közepe

* Szerző ily készülékkel a Mathematikai és Physikai Társulatban tartott előadásain több izben kisérletezett; rövid leirása «A hangzó lángokról» szóló közleményében a Természettudományi Közlöny 1902. május havi füzetében. Részletesebb tárgyalása szerzőnek «A leydeni batteria és induktorium árama lefolyásának vizsgálata és objektiv előállítása» czímű értekezésében, A magyar tudományos Akadémia Math. és természettudományi Értesítője, XXI. köt. 4. füzete. 1903. és az Annalen d. Physik 12. kötete 373—384. lapján megjelent közleményében.

** Az alkalmazott szalagot a Münchenből hozatott Edelmann-féle ú. n. «solenoid-galvanometerhez» tartalékul kaptam. A karácsonyfadíszül szolgáló fémszálakat is erre a czélra jól használhattam.

táján csillapítóul, igen könnyű aluminiumkeretet elszigetelten felragasztunk.

Ha a hurok áram nélkül való, síkja a gerjesztett elektromágnes saruközének erővonalaival párvonalas. A vizsgálandó áramot a hurkon átvezetvén, az áram és mágnestér kölcsönös hatásától a hurok elcsavarodik és a reá erősített apró tükör elfordul; ez a tükör-elfordulás az áramerősséggel arányos és annak mértéke.

A tárgyalandó vizsgálatoknál használt oszcillográfhurok hossza 20 mm; kisérlettel meghatározott (egyszerű) rezgésideje vagyis az oszcillográf saját rezgésideje 0,0009 másodpercz.

A változtatható induktiv ellentállást 17 cm hosszú, faorsóra felcsavart dróttekercs képezi. Az 1·5 mm átmérőjű elszigetelt vörösrézdrótból hat rétegen 507 menet van. Az orsó belsejében lágyvas drótokból készített 30 cm hosszú vasmag, illetőleg nyaláb tolható el. Ez a drótnyaláb a tekercshez képest szimmetriás helyzetében — a tekercs menetein átvezetett váltakozó áram bizonyos effektiv erősségét tételezvén fel — maximális önindukczióval bir. A vasmagvat a tekercsből kihúzván, a tekercs önindukczió tényezője kisebbedik.

Ha bizonyos effektiv áramerősséggel dolgozunk, a vasmag helyzeteit megjelölve, az önindukczió tényezőnek kisérlettel meghatározandó különböző értékeit reprodukálhatjuk.

Az önindukczió tényezőjét (L-et) Joubert módszere szerint idiostatice kapcsolt Carpentier-féle elektrometerrel 104 volt effektiv feszültségű váltakozó árammal mértem, melyet másodperczenkint 42 periodussal a Magyar Villamossági R.-T. a transformátor kapcsain szolgáltat. Ezeknél a méréseknél erős áramokra méretezett összesen 31·05 Ω-nyi Siemens-Halske-féle sorozatot használtam ohmikus ellentállásul; az áramerősséget Hartmamn-Braun-féle melegdrót-ampermérő mutatta.

A következő táblázat L értékeit adja azokra az esetekre, ha a vasmagvat az L maximum helyétől 2—2 czentiméternyire a tekercsből kihúzzuk. Az áramerősség a harmadik oszlop adatai értelmében 2·7-től 3·11 amperre növekedett, mert állandó effektiv feszültség mellett L értéke egyre csökkent.

cm.:	$i_{eff.}$ amp.:	L henry:
0	2·70	0·06955
2	2·70	0·06799
4	2·73	0·06608
6	2·78	0·06054
8	2·89	0·05237
10	2·95	0·04326
12	2·99	0·03470
14	3·03	0·02662
16	3·09	0·01902
18	3·11	0·01453

Eme értékeit L-nek grafice a 2. ábra tünteti fel.

Az oszcillográfikus vizsgálatoknál az R ohmikus ellentállást (1. ábra) HARTMANN-BRAUN-féle kis ellentállási sorozat képezte.

A használt technikai kondenzátor* egyes elemeinek kapaczitása 0·996; 2·010; 2·014; 4·960; 9·980 mikrofarad; ezek az elemek elszigetelt fémkarok útján nagy felületre kapcsolhatók, úgy hogy összesen 19·96 mikrofarad kapaczitású kondenzátorral rendelkezünk.

A tükröt hajtó érintőhenger (K) kis elektromotorral forgatott ebonithenger, melynek palástjába az alkotóval párvonalasan keskeny sárgaréz sáv van beeresztve.

Fotográfiai felvételekre a hengerről a tükörre való átvitelt 1 : 12 arányban végtelen csavar- és fogaskerékkel találtam czélszerűnek.

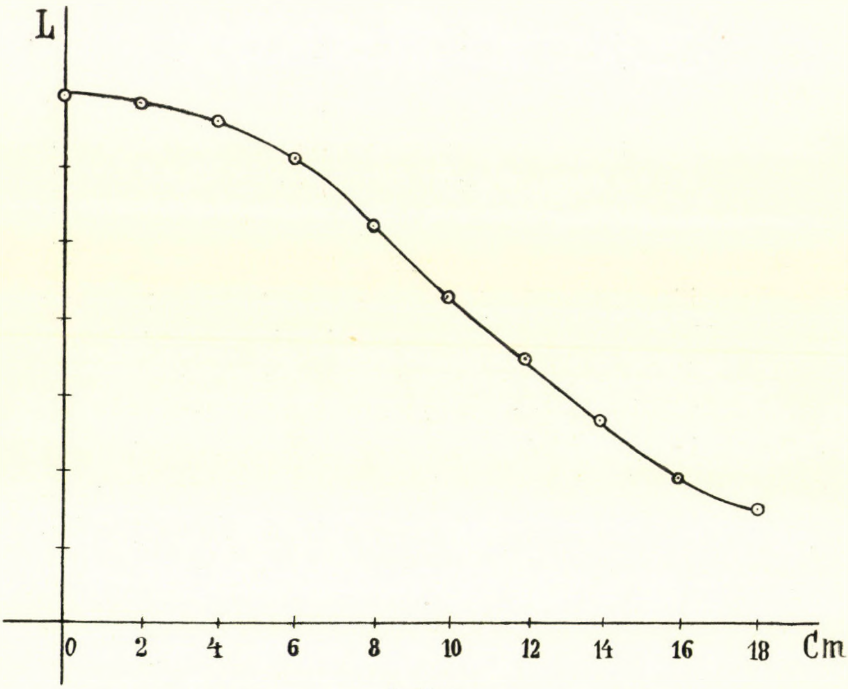
Hogy objektiv bemutatásnál, vagyis az áramgörbék vetítésénél azokat necsak mozdulatlanul egy helyen, de folytonosan is lássuk, a következő kétféle eljárást alkalmazom.

Először a beállítható lapokkal ellátott forgó sokszögű tükröt**

* A műegyetem techn. fiz. laboratoriuma részére nagy gonddal és kitűnő szigeteléssel Szvetics Emil elektromérnök úr készítette, budapesti elektromechanikai intézetében.

** A műegyetem techn. fiz. laboratoriumának műhely rajzai szerint igen tetszetős és szolid kivitelben készítette 1899-ben Süss Nándor úr, az állami mech. tanműhely igazgatója.

említem; ez ahhoz hasonló, melyet Fröhlich O. az áramgörbék objektiv előállítására használt.* Nyilvánvaló, hogy ezt az elrendezést a fotográfiai felvételeknél is használhatjuk, de ajánlatos ilyenkor a tükröző lapokat, egynek kivételével, fekete papirral bevonni.



2. ábra.

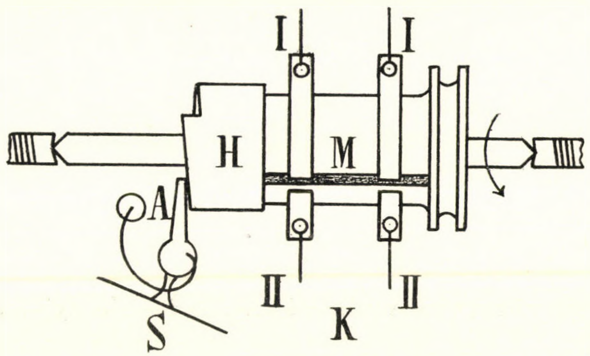
Másodhelyen azt az elrendezést tárgyalom, melynek elvét Barr, Burnie és Rodgers ismertették ** és a melyhez hasonlót Blondel és Duddell teljes felszerelésű oszcillográfikus berendezésüknél is használnak. Ez quadratikus alakú, mintegy 5 cm oldalhosszal biró siktükör (S) (3. ábra), mely függélyes tengely körül alternáló mozgást végez.

* Elektrotechn. Zeitschrift, 1889. évfolyam, 345. és 369. lap.

** The Electrician, Vol. 35. p. 720, 1895. évfolyam.

Erre a czélra a *K* érintőhengerre erős falu fémhüvelyt (*H*) ékelünk, melynek szabad végét 4 mm magasságu csavarmenetté leesztergályozzuk.

A tükör tengelyéhez vízszintes kar (*A*) van erősítve, melyet egy csavarrugónak feszültsége állandóan a csavarmenet homlokfelületére szorít. Ha az érintőhengert forgásban tartjuk, a hengerre ékelt hüvely csavarmenete a tükör karát és a közös tükörtengelyre erősített tükröt mintegy 12 foknyi egyenletes forgásra készti. Mihelyt a kar a csavarmenet legmagasabb helyét eléri, a rugó feszült-



3. ábra.

ségétől a tükör eredeti helyzetébe visszapattan. Minthogy a tükörnek visszafordulása gyorsan és abban az időközben megy végbe, melyben a kondenzátor köre áram nélkül való, ép úgy, mint a sokszögű tükörnél, ennél a könnyebben összeállitható berendezésnél is, az áramgörbék folytonosan és egy helyen vesztegelve mutatkoznak.

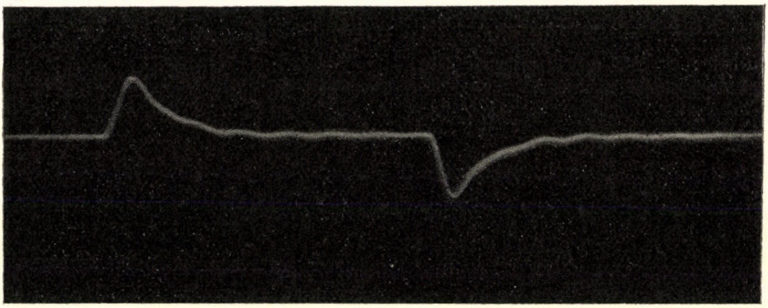
Az ismertetett kisérleti berendezéssel számos kisérletet végeztem, melyeknél Fleischer József műegyetemi adjunktus úr volt szíves segédkezni. E kisérletek sorából a következőket tárgyalom.

I. A kondenzátor aperiodikus töltése és kisütése.

A közölt számítás értelmében az ilyen aperiodikus töltési és kisülési jelenség akkor következik be, ha a kondenzátor körében

$R^2 > \frac{4L}{C}$; ez a feltétel a kisérleti összeállításnál C, L és R legkülönbözőbb értékeivel kielégíthető.

Az oszcillográffal való kisérlet az elméletet teljesen igazolja. Villamforrásul feszültségre kapcsolt 15 akkumulátorelem szolgált; a vasmag az orsóból 1 cm-nyire van kihuzva és az ellent-



4. ábra.

állási sorozatba 118 Ω van beigtatva; az áramlefolyást a 4. ábra mutatja.

Ez esetre

$$R = 118{,}94.10^9 \text{ C. G. S.}$$

(0,94 Ω az L orsó ellentállása),

$$L = 0{,}06877.10^9 \text{ C. G. S.}$$
$$C = 19{,}96.10^{-15} \text{ C. G. S.};$$

továbbá

$$R^2 = 1{,}4196.10^{22} \text{ C. G. S.}$$
$$\frac{4L}{C} = 1{,}378.10^{22} \text{ C. G. S.}$$

II. A kondenzator oszcillatorius töltése és kisülése.

Eme jelenség előállitására, az elmélet követelményének megfelelendő $R^2 < \frac{4L}{C}$ vesszük; ezt a czélt is L, C és R legkülönbözőbb értékeinél érhetjük el.

Továbbá érdekes annak a vizsgálata vajjon az egyszerű rezgés idejére vonatkozó THOMSON-féle formulát $T=\pi\sqrt{LC}$-t a kisérlet megerősiti-e.

Hogy az áramgörbékből a rezgés-időt meghatározzuk, előleges kisérletekben következőképen járunk el. A forgó tükör tengelyére apró siktükröt ragasztunk és elébe (1694 mm távolságban) vízszintes millimeter osztályzatot és leolvasó távcsövet helyezvén, a skála bizonyos osztályrészének tükörképét az okulár hajszálkeresztjének függélyes fonalával hozzuk egybevágásba.

Egyidőben a fénynyalábot O illetőleg S-re ejtvén (1. ábra) a Q fényforrástól megvilágitott kerek diafragma nyilásnak mint tárgynak éles képét a fotograf-készülék homályos lapján állítjuk elő.

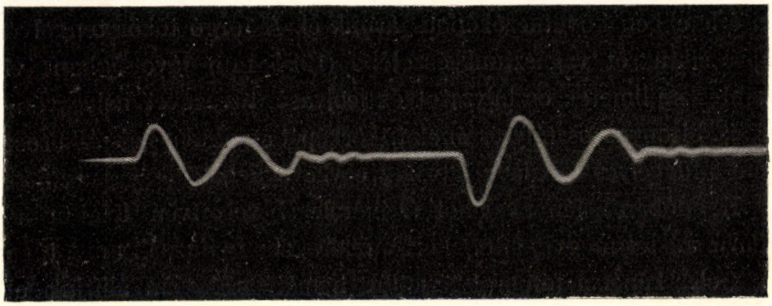
Ha ezután a tükör tengelyét kézzel annyira forgatjuk, hogy a képpont a homályos üvegen 1—1 cm-nyire elmozduljon s egyidőben távcső-leolvasásokat teszünk, a kép elmozdulásoknak megfelelö tükör-elfordulásokat könnyen kiszámithatjuk. Ezután minden egyes kisérletnél még a tükör egy teljes körülfordulásának tartamát kell meghatároznunk.

Az eredményeket az 5., 6., 7. és 8. ábrában reprodukált fotografiai felvételek mutatják.

Az áramkörre vonatkozó adatokat a következő táblázat mutatja, melyekből az egyszerű rezgésidőkre vonatkozólag a kisérleti eredményeknek az elmélettel való kielégitő megegyezését is látjuk.

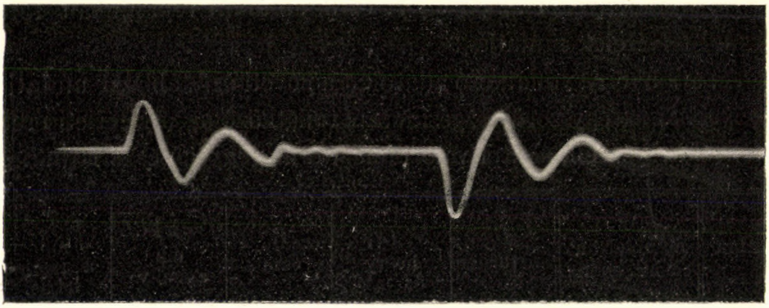
Ábra	Az akkumulator elemek száma	C mikrofarad	L henry	R ohm	$T=\pi\sqrt{CL}$ mp. számitva	T mp. a kisérletekből
5	10	19,96	0,06955	0,94	0,003701	0,00367
6	10	19,96	0,05237	5,94	0,003205	0,00300
7	10	9,98	0,04326	10,94	0,002060	0,00211
8	5	15,00	0,01453	10,94	0,001465	0,00148

Az áramgörbéknek a csillapitott harmonikustól való eltérését úgy vélem, az L tekercsben levő lágy vas hysteresise okozza és nem tulajdonitanám az oszcillograf hiányos működésének. Véleményemet arra a tapasztalásra alapitom, melyet számos esetben az áramgörbéknek a JOUBERT-féle módszer szerint pontról-pontra való felvételénél tettem. Igy például a műegyetem technikai fizi-



5. ábra.

kai laboratoriumának régi szerkesztésű GRAMME-féle váltakozó áramú gépe egyszerű harmonikus szerint lefolyó elektromindító erőt szolgáltat; de ha áramkörébe tagozott vasat tartalmazó te-

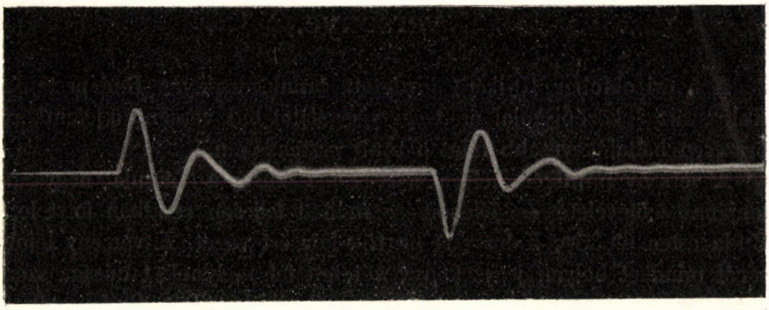


6. ábra.

kercset kapcsolunk, az áramgörbének az egyszerű harmonikustól való eltérése egészen hasonló jellegű ahhoz, melyet némely fotografiai felvétel csillapitott hullámvonalain megfigyelünk.

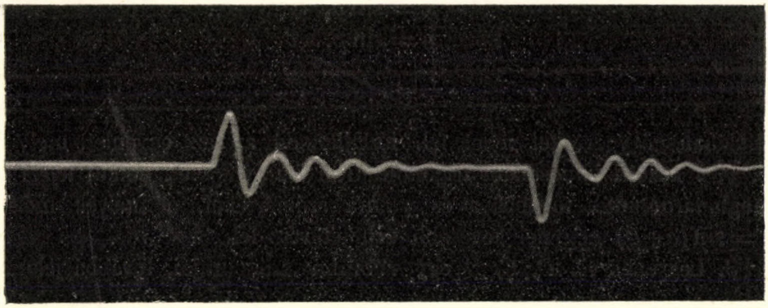
Az áramgörbék arról is tanuságot tesznek, hogy a vas átmágnesezése a közölt kisérleteknél a 0,0015 egészen 0,0037 másodpercz alatt lefolyó rezgéseket követi.

Gyönyörű látványt nyujtanak az ernyőre vetett, egy helyen veszteglő folytonosan mutatkozó áramgörbék, midőn a vasnyalábnak a tekercsből való fokozatos kihuzásánál a csillapított rezgés-



7. ábra.

görbék összébb szorulnak, miközben az amplitudók megnövekednek. A bemutatott kisérleti eljárással továbbá a folytonos töltés- és kisülésnek az oszcillatoriusra való átmenetelét, vagy a fordított



8. ábra.

sorrendben való átmenetelt *C*, *L* és *R*-nek kellő választásával igen egyszerűen, tanulságosan és szépen szemlélhetővé tehetjük.

Wittmann Ferencz.

A Mathematikai és Physikai Társulat X. tanulóversenye.

A f. évi október 10-ikére hirdetett tanulóversenyre Budapesten 44, Kolozsvárt 8 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett, összesen hattal kevesebb mint a mult esztendőben.

A verseny mindkét helyen zárt helyiségben, a Társulat nagyszámú tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett teljesen rendben folyt le, és Budapesten $6^h\ 35^m$, Kolozsvárt $6^h\ 15^m$-kor ért véget. A verseny lefolyásáról mindkét helyen jegyzőkönyv vétetett fel, melynek tanúsága szerint a tételek kidolgozására engedett négy órai idő alatt Budapesten 22, Kolozsvárt két dolgozat adatott be, tehát hattal kevesebb, mint a mult alkalommal.

A tanulóverseny tételei a következők voltak:

1. Legyen $n=2^{p-1}(2^p-1)$; továbbá 2^p-1 törzsszám; bebizonyítandó, hogy ekkor n-nek n-nél kisebb osztóit összeadván, összegül pontosan n adódik.

2. Ha adva van

$$x = \sin\alpha,$$
$$y = \sin\beta,$$

akkor

$$z = \sin(\alpha+\beta)$$

általában négy értéket vehet fel. Felállítandó az az egyenlet, mely az x, y, z közötti kapcsolatot trigonometriai- és gyökjelek nélkül fejezi ki; meghatározandók továbbá x és y ama számértékei, a melyek mellett $z=\sin(\alpha+\beta)$ négynél kevesebb értéket vesz fel.

3. Legyenek A, B, C, D egy rhombus szögpontjai, továbbá jelentse

K_1	a	B, C, D	pontokon
K_2	az	A, C, D	«
K_3	«	A, B, D	«
K_4	«	A, B, C	«

átmenő kört. Bebizonyítandó, hogy a K_1 és K_3-hoz B-ben vont érintők ugyanakkora szöget zárnak be, mint a K_2 és K_4-hez A-ban vont érintők.

A dolgozatok az ellenőrző tagok jelenlétében lepecsételtettek és az elnökség elbirálásukra bizottságot küldött ki, melynek jelentése a következő:

Tisztelt választmány!

A biráló bizottsághoz érkezett Budapestről 22, Kolozsvárról két dolgozat, és pedig:

Budapestről:	15 dolgozat	3—3	föladattal
	2 «	2—2	«
	7 «	1—1	«
Kolozsvárról:	2 «	1—1	«

A dolgozatok áttekintése után a bizottság megállapítja, hogy az összes dolgozatok közül Haar Alfréd és Kronstein Béla dolgozatai relative a legsikerültebbek. Mindkettőben az első és a harmadik föladat megoldása helyes. A második föladat első része a negyedfokú egyenlet fölállításáig szintén helyes, de a negyedfokú egyenlet gyökeinek részletes vizsgálata helyett megelégedtek e versenyzők nehány nem rendszeres megjegyzéssel, a minek alapján nincs kimutatva, hogy az esetek lehetőségének összességét kimerítették.

Mindezek tekintetbe vételével a bizottság azt javasolja a választmánynak, hogy az első díjat ne adja ki, hanem *Haar Alfrédet* és *Kronstein Bélát egy-egy második díjjal jutalmazza.* Ezenkívül azt javasolja, hogy *Kertész Gusztáv* mind a három föladat elég ügyes kidolgozásáért *dicséretben* részesüljön.

Budapest, 1903 november hó 5-én.

Grúber Nándor, biz. előadó. *Kőnig,* biz. elnök

Bartoniek Géza, *Kopp Lajos,* *Rados Gusztáv,*
Beke Manó, *Kövesligethy Radó,* *Rátz László,*
Éberling József, *Kürschák József,* *Szekeres Kálmán,*
bizottsági tagok.

A f. évi november hó 5-ikén tartott választmányi ülés e jelentést tudomásul vette és a javaslathoz egyhangúlag járulván ezt határozattá emelte.

Ennek alapján a nyomban tartott rendes ülés kezdetén kihirdettetett a verseny eredménye, mire b. Eötvös elnök szivélyes szavakkal üdvözölte Haar Alfréd-et, a budapesti evang. főgymnasium és Rátz László tanár növendékét és Kronstein Bélá-t, a budapesti I. ker. főgymnasium és Andor Tivadar tanár növendékét, és dicsérőleg felemlítette Kertész Gusztáv-ot, a pécsi főreáliskola és Hekinger Gusztáv tanár növendékét. Az első kettőnek kiosztván a két díjat, felkérte őket, hogy volt tanáruknak is tolmácsolják a Társulat üdvözletét.

A Mathematikai és Physikai Társulat X. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

I. Haar Alfréd dolgozata.

1. Legyen $n=2^{p-1}(2^p-1)$, továbbá (2^p-1) törzsszám. Bebizonyítandó, hogy akkor «n»-nek «n»-nél kisebb osztóit összeadván, összegül pontosan «n» adódik.

Irjuk fel az «n» szám összes osztóit. Látnivaló, hogy ezek két csoportra oszlanak. Az első csoportot «2»-nek egymásután következő hatványai, 2^0-tól 2^{p-1}-ig, alkotják. A másik csoport, a már felírt osztóknak («2^{p-1}» kivételével) a (2^p-1) törzsszámmal való szorzatából áll.

Ennélfogva — ha «A»-val jelöljük az osztók összegét, —

$$A=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{p-2}+2^{p-1}+$$
$$+2^0(2^p-1)+2^1(2^p-1)+\cdots+2^{p-2}(2^p-1).$$

Az első sor tagjai mértani haladványt alkotnak, melynek összege $=2^p-1$.

A második sor is geométriai haladvány s összege $=(2^p-1)(2^{p-1}-1)$.

Igy tehát az összes osztók összege

$$A=2^p-1+(2^p-1)(2^{p-1}-1)=$$
$$=(2^p-1)(1+2^{p-1}-1)=$$
$$=2^{p-1}(2^p-1)=n. \qquad Q. E. D.$$

2. Ha adva van

$$x=\sin\alpha$$

és

$$y=\sin\beta,$$

akkor

$$z=\sin(\alpha+\beta)$$

általában 4 értéket vesz fel. Felállítandó az az egyenlet, mely az «x», «y», «z» közötti kapcsolatot trigonometriailag, s gyökjel nélkül fejezi ki.

---

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. Szerk.

Meghatározandó továbbá «x» és «y» ama értékei, melyeknél $z=\sin(\alpha+\beta)$ 4-nél kevesebb értéket vesz fel.

Induljunk ki az ismert

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{1}$$

képletből. Jelen esetben

$$\sin\alpha=x,\ \text{tehát}\ \cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$$
$$\sin\beta=y,\ \text{tehát}\ \cos\beta=\sqrt{1-y^2}$$

és

$$\sin(\alpha+\beta)=z.$$

Az 1) számú egyenlőség tehát ily alakot ölt

$$z=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

Kétszeri négyzetre emelés által a gyökjel eltünik, s egyenletünk ily alakban írható

$$z^4-2z^2(x^2-2x^2y^2+y^2)+(x^2-y^2)^2=0. \tag{2}$$

Minthogy «z» egy negyedfokú egyenlet gyöke, azért általában 4 értéket vesz fel.

2) még így is írható

$$\sin^4(\alpha+\beta)-2\sin^2(\alpha+\beta)[\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\beta]+$$
$$+(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)^2=0.$$

«z»-nek 4-nél kevesebb értéke van, ha az abszolut tag $=0$, a mikor $x=\pm y$, és $\alpha=\pm\beta$.

Ebben az esetben

$$z^4-2z^2(2x^2-2x^4)=0,$$

mely egyenlet ki van elégítve, ha

$$1)\quad z^2=0 \qquad \text{azaz ha} \qquad z=0$$
$$2)\quad z^2=4(x^2-x^4) \quad « \quad « \qquad z=\pm 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Világos tehát, hogy, ha $x=\pm y$, akkor «z» 3 értéket vesz fel.

«z»-nek akkor is 4-nél kevesebb értéke volna, ha «x» és «y» olyanok volnának, hogy «z^2» együtthatója nullal volna egyenlő. Ez az eset azonban itt nem vehető tekintetbe, mert ekkor «z»-re nem kapunk valós értéket.

Ha végre «z»-t a 2) egyenletből kiszámítjuk, akkor látjuk, hogy a discriminans

$$D=(x^2-2x^2y^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2=$$
$$=(2y^2-2x^2y^2)(2x^2-2x^2y^2)=$$
$$=4x^2y^2(1-x^2)(1-y^2).$$

Látnivaló, hogy $D=0$, ha

1) $x=0$, 2) $y=0$, 3) $x=\pm 1$, 4) $y\pm 1$,

mely esetekben csak két megoldás van.

Ha még megfigyeljük azt az esetet, ha $x=y=0$, a mikor «z»-re csak egy értéket kapunk, akkor az összes lehető és feladatunkra vonatkozó eseteket a következő táblázatba foglalhatjuk össze.

Ha $x=\pm y$ általában, akkor «z»-nek 3 érték felel meg.

Ha $x=0$ vagy $y=0$, v. $x=\pm 1$ vagy $y=\pm 1$, akkor «z»-nek két érték felel meg; ha $x=y=0$, akkor «z»-nek egy értéke van.

3. Legyenek A, B, C, D, egy rhombus szögpontjai, továbbá jelölje

K_1 a B, C, D pontokon
K_2 az A, C, D «
K_3 « A, B, D «
K_4 « A, B, C «

átmenő kört.

Bebizonyítandó, hogy K_1 és K_3-hoz B-ben vont érintők ugyanakkora szöget zárnak be, mint a K_2 és K_4 körökhöz A-ban vont érintő.

Legyen a K_1, K_2, K_3, K_4 körök középpontjai rendre O_1, O_2, O_3, O_4, melyek a rhombus átlóin fekszenek és a hozzájuk a megfelelő pontokban rajzolt érintők t_1, t_2, t_3, t_4.

Minthogy

$$O_1B\perp t_1 \quad \text{és} \quad O_3B\perp t_3,$$

azért

$$t_1t_3\sphericalangle=180^\circ-O_1BO_3\sphericalangle.$$

Ugyanígy kimutatható, hogy

$$t_2t_4\sphericalangle=180^\circ-O_2AO_4\sphericalangle.$$

Minthogy

$$ABC\triangle\cong ADC\triangle \quad \text{és} \quad ABD\triangle\cong BCD,$$

azért

$$AO_4=AO_2 \quad \text{és} \quad BO_1=BO_3.$$

Ha végre $BAC\sphericalangle=\alpha$, tehat $ABD\sphericalangle=90-\alpha$, akkor az AO_2B háromszög egyenlőszárúsága folytán ($AO_2=BO_2$)

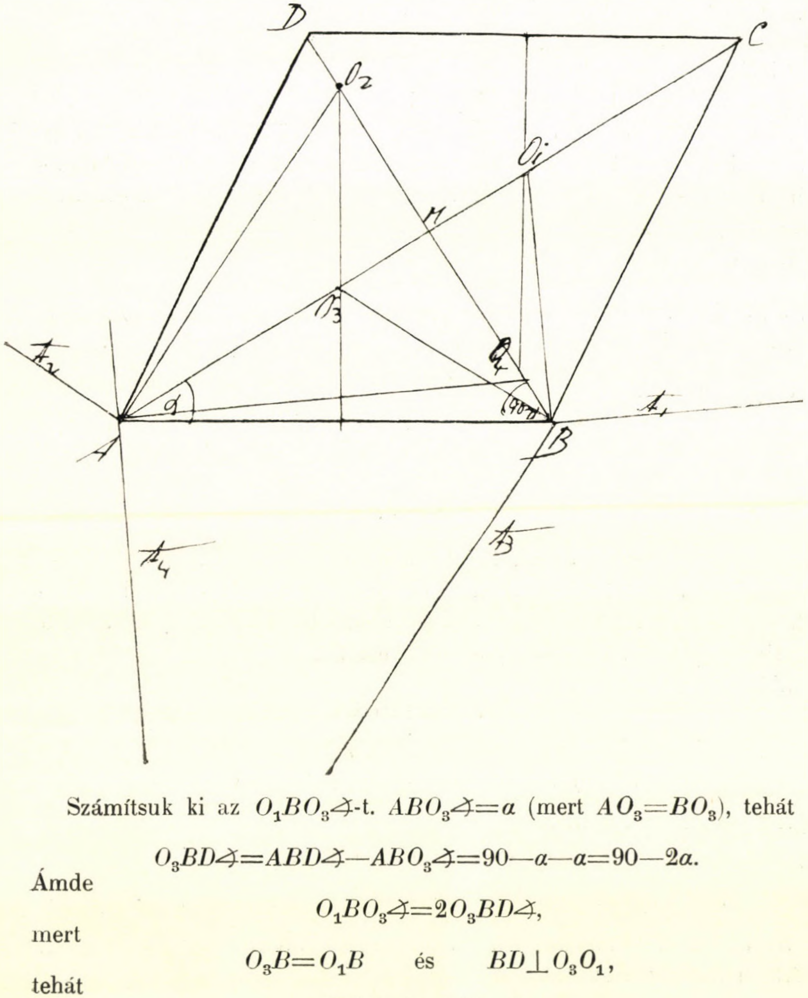
$$BAO_2\sphericalangle=ABO_2\sphericalangle=90-\alpha$$

és

$$O_2AC\sphericalangle=O_2AB\sphericalangle-CAB\sphericalangle=90-\alpha-\alpha=90-2\alpha.$$

Minthogy továbbá AO_2O_4 ($AO_4=AO_2$) egyenlőszárú háromszög, melynek magassága AM, azért

$$O_2AO_4\sphericalangle=2O_2AC\sphericalangle=180-4\alpha \quad \text{és} \quad t_2t_4\sphericalangle=4\alpha. \qquad 1)$$



Számítsuk ki az $O_1BO_3\sphericalangle$-t. $ABO_3\sphericalangle=\alpha$ (mert $AO_3=BO_3$), tehát

$$O_3BD\sphericalangle=ABD\sphericalangle-ABO_3\sphericalangle=90-\alpha-\alpha=90-2\alpha.$$

Ámde

$$O_1BO_3\sphericalangle=2O_3BD\sphericalangle,$$

mert

$$O_3B=O_1B \quad \text{és} \quad BD\perp O_3O_1,$$

tehát

$$O_1BO_3\sphericalangle=180-4\alpha$$

és

$$t_1t_3\sphericalangle=180-O_1BO_3\sphericalangle=4\alpha. \qquad 2)$$

Az 1) és 2) egyenlőséget egybevetve

$$t_1t_3\sphericalangle=t_2t_4\sphericalangle. \qquad Q.\ E.\ D.$$

II. Kronstein Béla dolgozata.

1. Legyen $n=2^{p-1}(2^p-1)$; továbbá 2^p-1 törzsszám; bebizonyítandó, hogy ekkor n-nek n-nél kisebb osztóit összeadván, összegül pontosan n adódik.

Kidolgozás.

Ha a $2^{p-1}(2^p-1)$ szorzat tényezőit sorra megvizsgáljuk, akkor látjuk, hogy a 2^{p-1} tényező az egységen és önmagán kívül osztható még 2-nek minden $p-1$-nél alacsonyabb hatványánál is; 2^p-1, mint törzsszám az egységen és önmagán kívül csupán az előbbiekkel sorra szorozva szolgáltat még új osztókat. Az osztók összegét két mértani haladvány összege szolgáltatja:

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{p-2}+2^{p-1}+(2^p-1)+2(2^p-1)+2^2(2^p-1)+\cdots+$$
$$+2^{p-2}(2^p-1)=(2^p-1)+(2^p-1)(2^{p-1}-1)=(2^p-1)(1+2^{p-1}-1)=$$
$$=(2^p-1)2^{p-1}=n.$$

2. Ha adva van

$$x=\sin\alpha$$
$$y=\sin\beta,$$

akkor

$$z=\sin(\alpha+\beta)$$

általában 4 értéket vehet fel. Felállítandó az az egyenlet, mely az x, y, z közötti kapcsolatot trigonometriai és gyökjelek nélkül fejezi ki; meghatározandók továbbá x és y ama számértékei, a melyek mellett $z=\sin(\alpha+\beta)$ 4-nél kevesebb értéket vesz fel.

Kidolgozás.

$$z=x\cos\beta+y\cos\alpha$$

$$z^2=x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$
$$4x^2y^2(1-x^2)(1-y^2)=[z^2-x^2(1-y^2)-y^2(1-x^2)]^2,$$

végre z szerint rendezve:

$$z^4-z^2[2x^2(1-y^2)+2y^2(1-x^2)]+$$
$$+[x^4(1-y^2)^2+y^4(1-x^2)^2-2x^2y^2(1-x^2)(1-y^2)]=0.$$

Ez egyenlet, mint negyedfokú egyenlet, mutatja, hogy z tényleg 4 értékű lehet. Ha azonban az egyenlet discriminánsa:

$$D=[2x^2(1-y^2)+2y^2(1-x^2)]^2-$$
$$-4[x^4(1-y^2)^2+y^4(1-x^2)^2-2x^2y^2(1-x^2)(1-y^2)]=0,$$

miből:

$$16x^2y^2(1-x^2)(1-y^2)=0,$$

akkor az egyenletnek csupán két gyöke van.

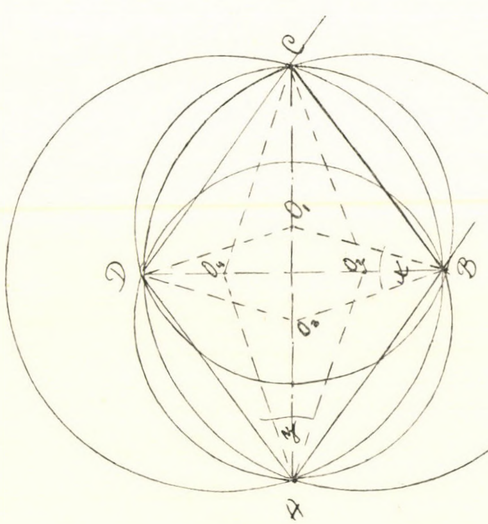
Ilyenkor vagy $x^2=0$, $\quad x=0$,
« $y^2=0$, $\quad y=0$,
« $1-x^2=0$, $\quad x=\pm 1$,
« $1-y^2=0$, $\quad y=\pm 1$.

3. Legyenek A, B, C, D egy rhombus szögpontjai, továbbá jelentse:

K_1 a BCD pontokon
K_2 az ACD «
K_3 « ABD «
K_4 « ABC «

átmenő kört.

Bebizonyítandó, hogy K_1 és K_3-hoz B-ben vont érintők ugyanakkora szöget zárnak be, mint a K_2 és K_4-hez A-ban vont érintők.



Minthogy az érintők az érintőpontokhoz tartozó sugarakra merőlegesek, az oly szögek pedig, melyek szárai egymásra merőlegesek, — a jelen körülmények között — egyenlők, azért nézzük az érintőpontokhoz tartozó sugarak által bezárt szögeket (x, y).

Jelöljük a K_1, K_2, K_3, K_4 körök középpontjait rendre: O_1, O_2, O_3, O_4-el, akkor a szerkesztés értelmében $O_1B=O_1C=O_1D$, $O_2A=O_2C=O_2D$, $O_3A=O_3B=O_3D$, $O_4A=O_4B=O_4C$.

Ezekből következik, hogy

$$BAO_4\sphericalangle=DAO_2\sphericalangle=\frac{ABC\sphericalangle}{2}$$

és

$$ABO_3\sphericalangle = CBO_1\sphericalangle = \frac{BAD\sphericalangle}{2}.$$

Mindezért pedig:

$$BAD\sphericalangle = ABC\sphericalangle - y$$

és

$$ABC\sphericalangle = BAD\sphericalangle + x$$

$$ABC\sphericalangle + BAD\sphericalangle = ABC\sphericalangle + BAD\sphericalangle + x - y,$$

végre

$$x = y.$$ *q. e. dem.*

A LINEÁR HELYETTESÍTÉSEK VÉGES CSOPORTJAIHOZ TARTOZÓ INVARIÁNS HERMITE-FÉLE ALAKOK ÖSSZESSÉGÉRŐL.

A mult alkalommal* bebizonyított tétel, melyre a lineár helyettesitésekből képezett véges csoportok intranzitivitásának felismerése alapitható, nemcsak mint ilyen gyakorlati kritérium tesz jó szolgálatot, hanem további elméleti vizsgálatokra is felhasználható. Mielőtt a gyakorlati alkalmazások ismertetésére térnék, legyen szabad ez elméleti vizsgálatoknak is egy legközelebbfekvő első eredményét bemutatni, annál is inkább mert e vizsgálatok bizonyos tekintetben az előző czikkben bebizonyított és felhasznált LOEWY-MOORE-féle tételnek kiegészitésére irányulnak.

E LOEWY-MOORE-féle tétel (i. h. 205. lap) azt mondja ki, hogy a lineár helyettesitések minden véges csoportja változatlanul hagy egy definit pozitiv HERMITE-féle alakot. Bebizonyitása úgy történt, hogy megmutattuk, mikép lehet egy ilyet tényleg előállitani. Ha ezt tetszőleges állandó faktorokkal szorozzuk, megint ilyen invariáns alakokat kapunk (definit pozitivokat, ha e szorzópozitiv), de ezek t természetesen nem lehet lényegesen különbözőknek tekinteni. Az a kérdés támad: *lehetnek-e a csoportnak lényegesen különböző ilyen* HERMITE-*féle invariánsai is?*

Rögtön szembeötlik, hogy a kérdés szoros kapcsolatban van a csoport intranzitivitásával, mert, ha a csoport intranzitiv, a felelet mindenesetre igenlő. Ha ugyanis a csoportot a

$$\left(\begin{array}{c|c} G_1^{(r)} & 0 \\ \hline 0 & G_2^{(n-r)} \end{array}\right) \qquad \text{I)}$$

* Math. és Phys. Lapok XII. évf. 203. l.

schema szerint (l. i. h. 210. lap) szétbontható alakra lehet transzformálni, $G_1^{(r)}$-nek tudvalevőleg van egy r-dimenziós H_1, $G_2^{(n-r)}$-nek egy $(n-r)$-dimenziós H_2 (definit pozitiv) invariánsa és a

$$\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2$$

HERMITE-féle alakok mind invariánsai a csoportnak. E sereg pedig lényegesen különböző definit pozitiv alakokat is foglal magában. De még mindig kérdés marad, valjon az ily módon nyerhető alakok kimerítik-e a csoporthoz tartozó invariáns HERMITE-féle alakok összességét?

Megkisérlettem nem lehetne-e a LOEWY-MOORE-féle tételt kiegésziteni azzal, hogy a csoporthoz tartozó invariáns HERMITE-féle alakok összességéről is áttekintést szerezzünk. A következőkben meg akarom mutatni, hogy, *ha a csoportban van legalább egy helyettesítés, a melynek karakterisztikus egyenlete csupa különböző gyököket szolgáltat,* igen egyszerűek a viszonyok.

Egész teljességében azonban a kérdést nem sikerült elintéznem. De e részleges eredmény közlését eléggé indokolja az a körülmény, hogy az említett feltétel nem szoritja túlságosan szűk körre, a bebizonyitandó tétel alkalmazhatóságát. Hivatkozhatom ALFRED LOEWY egy dolgozatára is,* a melyben ő ugyanezen HERMITE-féle invariáns alakokat más czélra, t. i. a véges csoportoknak bizonyos («véges jellegű») végtelen csoportoktól való megkülönböztetésére használja fel és a melyben ugyane megszorítást mindvégig megtartja. E mellett még módomban lesz egy példán megmutatni, hogy a szóbanforgó megszorítás elejtésével, lényegesen bonyolódottabb viszonyok állhatnak elő.

A tétel, a melyet be fogunk bizonyitani, a következő: *Ha a lineár helyettesítések valamely véges csoportjában van legalább egy helyettesítés, a melynek karakterisztikus egyenlete csupa különböző gyököket szolgáltat és a csoportot (ha intranzitiv volna), olyan alakra transzformáltuk, hogy a* $G_1^{(n_1)}, G_2^{(n_2)}, \ldots, G_k^{(n_k)}$ *csoportok,*

* Zur Theorie der Gruppen linearer Substitutionen. (Math. Ann. 53. köt. 225. l.)

a melyekre szétbontható, már mind tranzitivek, akkor, ha* H_1, $H_2, \ldots, H_k$ *e részeknek egy-egy (rendre* $n_1, n_2, \ldots, n_k$*-dimenziójú definit, pozitiv)* HERMITE*-féle invariánsa, a csoporthoz tartozó* HERMITE*-féle invariánsok összességét a*

$$\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \cdots + \lambda_k H_k$$

k-dimenziós alaksereg adja meg.

A $k=1$ eset a tranzitiv csoportok esete. Ezekről, ha eleget tesznek az említett megszorításnak, tételünk azt mondja, hogy egy állandó faktortól eltekintve, csak egyetlen egy HERMITE-féle invariánsuk van. Ha ellenben $k>1$, vagyis a csoport intranzitiv, a tétel tartalma úgy is fogalmazható, hogy, ha a szóban forgó megszorítás fennáll, az egyes részekhez tartozó HERMITE-féle invariánsok lineáris összetételei, (a melyeket mindig rögtön felírhatunk, mint az egész csoport invariánsait) kimerítik a csoporthoz tartozó invariáns HERMITE-féle alakok összességét. Az említett példán épen azt fogjuk látni, hogy különben a viszonyok már nem ilyen egyszerűek.

A tétel bebizonyítása elsősorban a következőn fordul meg: ha a csoportban van egy ilyen «különböző gyököket tartalmazó» helyettesítés (SYLVESTER nyomán rövidesen így is mondhatjuk feltételünket), akkor a csoportot oly alakra transzformálván, hogy e helyettesítés kanonikus alakú legyen, a csoport HERMITE-féle invariánsai csakis ilyen alakúak lehetnek:

$$H = a_{11} x_1 \bar{x}_1 + a_{22} x_2 \bar{x}_2 + \cdots + a_{nn} x_n \bar{x}_n$$

A szóbanforgó helyettesítés kanonikus alakja ugyanis;

---

* Úgy hogy e részek dimenzióinak összege a csoport dimenziójával egyenlő:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

Ha $k>2$, a csoportot *többszörösen intranzitivnak* mondhatjuk. Hogy egy ilyennek egy itt szóbanforgó «végleges» felbontására jussunk, nem kell mást tenni, mint az első felbontás által előállott $G_1^{(r)}$, illetőleg $G_2^{(n-r)}$ csoportokat tovább vizsgálni, valjon intranzitivek-e és őket esetleg fokozatosan tovább szétbontani.

$$S \ldots \begin{cases} x_1 = \varepsilon_1 x'_1 \\ x_2 = \varepsilon_2 x'_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = \varepsilon_n x'_n \end{cases}$$

Minthogy véges csoport minden helyettesítése periodikus, az ε-ok egységgyökök, és pedig p-edik egységgyökök, ha a helyettesítés periodusa p.

Már most, ha azt akarjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_k x'_i \bar{x}'_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x'_i \bar{x}'_k$$

legyen, ez annyit tesz, hogy

$$a_{ik} \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_k = a_{ik},$$

vagyis

$$a_{ik}(1 - \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_k) = 0.$$

De mivel ε_k egységgyök:

$$1 - \varepsilon_k \bar{\varepsilon}_k = 0$$

és így feltételezvén, hogy $\varepsilon_i \neq \varepsilon_k$,

$$1 - \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_k$$

nem lehet zérus. Kell tehát, hogy

$$a_{ik} = 0$$

legyen, ha $i \neq k$. *Q. e. d.*

Ezzel kapcsolatban mindjárt megmutathatjuk, hogy, ha véges csoportunkban van egy különböző gyököket tartalmazó helyettesítés, *egyidejűleg* elérhető, hogy e helyettesítés az S kanonikus alakban és maga a csoport az Hermite-féle normálalakban jelenjék meg.* Ha ugyanis először úgy transzformáljuk a csoportot, hogy a szóbanforgó helyettesítés kanonikus alakú legyen, és

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n$$

---

* Maschke megmutatja, hogy *bármely* véges csoportot úgy lehet transzformálni, hogy egy *tetszőleges* helyettesítése a kanonikus alakba jusson és maga a csoport az Hermite-féle normálalakban legyen. (Math. Ann. 51. köt. 258. l. — Bestimmung aller ternären und quaternären Collineationsgruppen, welche etc. 2. §.) De mivel ez az általánosabb tétel némi előzményeket igényel, csak a fenti egyszerű esetnél maradunk.

nem volna invariánsa a csopotnak, hanem egy más, az előbbiek szerint ilyen alak:

$$\mu_1 x_1 \bar{x}_1 + \mu_2 x_2 \bar{x}_2 + \cdots + \mu_n x_n \bar{x}_n,$$

a hol a μ-k mind pozitivok, akkor nem kell már egyebet tenni, mint az

$$X_i = \mu_i^{\frac{1}{2}} x_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

transzformácziót alkalmazni, a mely S-et változatlanul hagyja, míg H-t a kanonikus alakba viszi át.

De mindjárt tovább mehetünk. Ha intranzitiv csoporttal van dolgunk, csoportunknak a szétbontható alakra való transzformácziója úgy hajtható végre, hogy, ha van benne egy különböző gyököket tartalmazó helyettesítés, ez a kanonikus alakban legyen, és *minden egyes* alacsonyabb dimenziójú csoport Hermite-féle normálalakban.

Először a szétbontható alakra való transzformácziót hajtjuk végre. Tegyük fel, hogy a $G_1^{(n_1)}, G_2^{(n_2)}, \ldots, G_k^{(n_k)}$ alacsonyabb dimenziójú csoportokra jutottunk (a melyek dimenzióinak öszszege: $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$). Ez után a csoport bármely helyettesítése kanonikussá tehető a nélkül, hogy a szétbonthatóságot alterálnók, mert e végből az egyes $G_i^{(n_i)}$ csoportok határozatlanait csak egymás között kell transzformálni. Ha már most van a csoportban egy ilyen S helyettesítés, ennek az egyes $G_i^{(n_i)}$-kben szereplő részei ugyancsak csupa különböző ε-okat tartalmaznak és ép úgy mint előbb látható, hogy az S megváltoztatása nélkül e $G_i^{(n_i)}$ csoportok is mind Hermite-féle normálalakra hozhatók.

Ezek alapján már most feltéve, hogy a csoportban van legalább egy helyettesítés, a melynek karakterisztikus egyenlete csupa különböző gyököket szolgáltat, egyszersmind feltehetjük, hogy a midőn már *csupa tranzitiv* csoportra bontottuk szét, e szétbontható alak olyan, hogy az említett helyettesítés a kanonikus alakban van és e mellett $G_1^{(n_1)}, G_2^{(n_2)}, \ldots, G_k^{(n_k)}$ invariánsai rendre:

$$\begin{aligned} K_1 &= x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_{n_1}\bar{x}_{n_1} \\ K_2 &= x_{n_1+1}\bar{x}_{n_1+1} + \cdots + x_{n_1+n_2}\bar{x}_{n_1+n_2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_k &= x_{n-n_k+1}\bar{x}_{n-n_k+1} + \cdots + x_n\bar{x}_n. \end{aligned}$$

E feltételek mellett könnyű meggyőződni, hogy a

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_k K_k$$

invariáns alaksereg magában foglalja a csoporthoz tartozó invariáns HERMITE-féle alakok összességét.

Az előzők értelmében ugyanis csoportunk egy tetszőleges HERMITE-féle invariánsa csakis ilyen lehet:

$$H = \mu_1 x_1 \bar{x}_1 + \mu_2 x_2 \bar{x}_2 + \cdots + \mu_n x_n \bar{x}_n.$$

Megjegyzendő, hogy nem is kell épen csak a definit pozitiv alakokra szorítkoznunk, a μ-k negativok is lehetnek (de természetesen csak valósak).

Már most, ha itt nem volna

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n,$$

kényelmi szempontból minden egyes esetben feltehetjük, hogy a jelölés (az x-ek sorrendje) úgy van választva, hogy

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s < \mu_{s+1} \leqq \cdots \leqq \mu_{n_1}. \qquad (s < n_1)$$

Akkor

$$H - \mu_1 K_1 = (\mu_{s+1} - \mu_1) x_{s+1} \bar{x}_{s+1} + \cdots + (\mu_{n_1} - \mu_1) x_{n_1} \bar{x}_{n_1} + \\ + \mu_{n_1+1} x_{n_1+1} \bar{x}_{n_1+1} + \cdots + \mu_n x_n \bar{x}_n$$

szintén invariánsa a csoportnak. De mivel egyrészt $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$, másrészt a többi $n - n_1$ határozatlan csak egymás között szenved helyettesítést, ez csak úgy lehetséges, ha

$$(\mu_{s+1} - \mu_1) x_{s+1} \bar{x}_{s+1} + \cdots + (\mu_{n_1} - \mu_1) x_{n_1} \bar{x}_{n_1}$$

invariánsa a $G_1^{(n_1)}$ csoportnak. Ez azonban ki van zárva; mert ez az invariáns egy $(n - s_1)$-edrangú szemidefinit pozitiv alak, (feltételeink értelmében együtthatói mind pozitivok, továbbá $n_1 - s \neq 0$) és ha $G_1^{(n_1)}$-nek volna egy ilyen alacsonyabbrendű pozitiv HERMITE-féle invariánsa, akkor a mult alkalommal bebizonyított tétel értelmében intranzitiv volna, a mi ellenkezik azzal a feltevésünkkel, hogy csoportunkat már csupa tranzitiv csoportra bontottuk szét.

Ha tehát $G_1^{(n_1)}$ már valóban tranzitiv, kell, hogy

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{n_1}$$

legyen.

Már most az első n_1 határozatlant tartalmazó $G_1^{(n_1)}$ csoportot le lehet választani és a nyert $(n-n_1)$-dimenziós csoportnál ennek $H-\mu_1 K_1$ invariánsára, ugyanezt az okoskodást alkalmazni. Akkor látjuk, ha $G_2^{(n_2)}$ is valóban tranzitiv, kell, hogy

$$\mu_{n_1+1} = \mu_{n_1+2} = \cdots = \mu_{n_1+n_2}$$

legyen. Ez tovább így folytatható, míg végül kapjuk, hogy

$$\mu_{n-n_k+1} = \mu_{n-n_k+2} = \cdots = \mu_n,$$

vagyis H csakugyan a

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_1 K_2 + \cdots + \lambda_k K_k$$

alakseregből való.

Az ily módon bebizonyított tételhez még csak azt akarjuk megjegyezni, hogy e végtelen sok HERMITE-féle invariáns nem tekinthető mind lényegesen különbözőnek, mert, ha a sokaság k-dimenziós, k *lineárisan független* invariánsból a többi már mind előállítható. Azt, hogy a $H_1, H_2, \ldots, H_i$ HERMITE-féle alakok lineárisan függetlenek, a szokásos módon úgy kell érteni, hogy

$$\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \cdots + \lambda_i H_i \equiv 0$$

nem elégíthető ki, a nélkül, hogy minden λ zérus ne lenne. A mi eseteinkben azonkívül világos, hogy e k lényegesen különböző HERMITE-féle alak kiválasztása mindig megtörténhetik úgy, hogy csupa definit pozitiv alakok legyenek, mert, ha mint előbb, azt az előállítást tartjuk szem előtt, a melyhez a

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_k K_k$$

sokaság tartozik, csak arra kell ügyelni, hogy a λ-k mind pozitivok legyenek.

Hátra van még, hogy, a mint igértük, meggyőződjünk a tételünkben foglalt megszorítás lényeges voltáról. Erre nézve elegendő egy példát szerkeszteni, a mely mutatja, hogy, ha a szóbanforgó feltétel nem teljesül, a viszonyok lényegesen mások lehetnek. Legérdekesebb volna természetesen, ha azt lehetne megmutatni, hogy egy tranzitiv csoportnak, ha nincs benne olyan helyettesítés, a melynek karakterisztikus egyenlete csupa különböző gyököket szolgáltat, több mint egy HERMITE-féle invariánsa is lehet. Az irodalomban rendelkezésemre álló tranzitiv csoportok azonban eleget tesznek megszorításunknak; ilyen példa megszerkesztésére pedig nem tudtam alkalmas kiinduló pontokat találni. De könnyű szétbontható csoportokat megadni, a melyeknél a HERMITE-féle invariáns alakok összessége nem csupán az egyes részekhez tartozók lineáris összetétele, hanem ezeken kívül még vannak mások is.

Ilyen példát szolgáltat az a quaternär csoport, a melyet kapunk, ha a binär tetraédercsoport minden

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

helyettesítése alapján a következő quaternär helyettesítést képezzük:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

A binär tetraédercsoport alkotó helyettesítéseit a következőképen írhatjuk fel (WEBER, Algebra II. köt. 1. kiadás, 215. lap, 2. kiad. 275. lap):

$$\theta = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad \chi = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ -\frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$$

Hozzávéve ezekhez még a következőket:

$$\psi = \theta\chi\theta\chi^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \theta^2 = \chi^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a csoport 24 helyettesítését így adhatjuk meg szimbolikusan:

$$\begin{array}{llll} 1, & \theta, & \psi, & \theta\psi, \\ \chi, & \theta\chi, & \psi\chi, & \theta\psi\chi, \\ \chi^2, & \theta\chi^2, & \psi\chi^2, & \theta\psi\chi^2, \end{array}$$

valamint ezek mindegyikének Γ-val való szorzata, (a mi annak felel meg, hogy minden együtthatót ellenkező előjellel irunk). Quaternär csoportunk alkotó helyettesítései tehát lesznek:

$$\theta' = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\chi' = \begin{vmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{vmatrix}$$

Ezekből megint a fentebbi szimbolumok szerint tevődik össze a csoport.

Mivel e széteső helyettesítések karakterisztikus determinánsa szintén szétesik:

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\lambda & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda \end{vmatrix}^2$$

világos, hogy e csoportban nincsen helyettesítés, a melynek karakterisztikus egyenlete csupa különböző gyököket tartalmazna.

Határozzuk meg e csoport Hermite-féle invariánsainak összességét. Ily példa átdolgozása talán azért sem lesz érdektelen, mert az előző alkalommal csak futólag utalhattunk arra, hogy miképp alakul az ilyen számítás, a mely pedig az ott előadott kritérium alkalmazásának alapját képezi.

Nem kell mást tenni, mint az alkotó helyettesítéseket alkalmazni egy tetszőleges

$$H = \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} a_{ik}\, x_i \bar{x}_k \qquad (a_{ki} = \bar{a}_{ik}).$$

HERMITE-féle alakra és meghatározni az a_{ik}-kat úgy, hogy H ezeknél a helyettesítéseknél invariáns legyen. Akkor, mivel a csoport összes helyettesítései ezekből összetehetők, az ily H-k az egész csoportnak is invariánsai lesznek.

Alkalmazzuk először is a θ-t. Ez kanonikus alakú, vagyis olyan, mint a 358. lapon az S. Csakhogy itt $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_4$. Ezért az ott végzett számítás eredménye oda módosul, hogy H invariancziájának szükséges és elegendő feltétele a mostani esetben:

$$a_{ik} = 0,$$

ha

$$\varepsilon_i \neq \varepsilon_k$$

vagy részletesen:

$$a_{12} = 0 \quad a_{14} = 0 \quad a_{23} = 0 \quad a_{34} = 0.$$

A továbbiakban tehát már csak a következő alakú (x_1, x_3 és x_2, x_4 szerint szétbontható) HERMITE-féle alakok jöhetnek tekintetbe:

$$H^* = a_{11}x_1\bar{x}_1 + a_{13}x_1\bar{x}_3 + \bar{a}_{13}x_3\bar{x}_1 + a_{33}x_3\bar{x}_3 +$$
$$+ a_{22}x_2\bar{x}_2 + a_{24}x_2\bar{x}_4 + \bar{a}_{24}x_4\bar{x}_2 + a_{44}x_4\bar{x}_4.$$

Most erre még csak χ'-t kellene alkalmazni. De czélszerű a ψ'-t is segítségül venni. A

$$\psi' \ldots \left| \begin{array}{l} x_1 = ix'_2 \\ x_2 = ix'_1 \\ x_3 = ix'_4 \\ x_4 = ix'_3 \end{array} \right.$$

alkalmazásával az első sorban levő tagokból rendre olyan jellegűeket kapunk, mint a milyenek alattuk állnak és megfordítva.

Tehát, hogy H invariánsa legyen csoportunknak, kell, hogy

$$a_{11} = a_{33} = \lambda, \quad a_{22} = a_{44} = \mu, \quad a_{13} = a_{24} = \nu$$

legyen.

Úgy, hogy a χ'-t

$$\chi' \ldots \begin{cases} x_1 = \dfrac{1-i}{2}(x_1' + x_2') \\ x_2 = -\dfrac{1+i}{2}(x_1' - x_2') \\ x_3 = \dfrac{1-i}{2}(x_3' + x_4') \\ x_4 = -\dfrac{1+i}{2}(x_3' - x_4') \end{cases}$$

csak erre kell alkalmazni:

$$\begin{aligned} H^{**} = & \lambda(x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2) + \mu(x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4) + \\ & + \nu(x_1\bar{x}_3 + x_2\bar{x}_4) + \bar{\nu}(x_3\bar{x}_1 + x_4\bar{x}_2). \end{aligned}$$

Megjegyezve, hogy — a mint könnyű meggyőződni — binär csoportunk HERMITE-féle normálalakban volt felírva,

$$H_1 = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2$$

és

$$H_2 = x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4$$

invariánsok. Tehát csak az a kérdés, hogy a második sorban levő rész invariáns-e, vagy ν-nek zérusnak kell-e lenni, hogy H^{**} csoportunknál invariáns legyen.

De rövid számítás:

$$x_1\bar{x}_3 = \frac{1-i}{2}\,\frac{1+i}{2}(x_1' + x_2')(\bar{x}_3' + \bar{x}_4')$$

$$x_2\bar{x}_4 = +\frac{1+i}{2}\,\frac{1-i}{2}(x_1' - \bar{x}_2')(\bar{x}_3' - \bar{x}_4')$$

$$\begin{aligned} x_1\bar{x}_3 + x_2\bar{x}_4 = & \tfrac{1}{2}(x_1'\bar{x}_3' + x_1'\bar{x}_4' + x_2'\bar{x}_3' + x_2'\bar{x}_4') + \\ & + \tfrac{1}{2}(x_1'\bar{x}_3' - x_1'\bar{x}_4' - x_2'\bar{x}_3' + x_2'\bar{x}_4') = \\ = & x_1'\bar{x}_3' + x_2'\bar{x}_4' \end{aligned}$$

meggyőz, hogy

$$h = x_1\bar{x}_3 + x_2\bar{x}_4$$

(és vele együtt konjugáltja is) invariáns. A H^{**} tehát λ, μ, ν bármely értékeinél invariánsa csoportunknak.

Látjuk tehát, hogy e csoport Hermite féle invariánsainak összessége nem egyszerűen

$$\lambda H_1 + \mu H_2,$$

vagyis a részeihez tartozó invariánsok lineáris összetétele. Azért itt több mint két lényegesen különböző definit pozitiv Hermite-féle invariánst írhatunk fel. Pl.:

$$\begin{aligned} D_1 &\equiv H_1 + H_2 \\ D_2 &\equiv H_1 + 2H_2 \\ D_3 &\equiv H_1 + 2H_2 + h + \bar{h} \\ D_4 &\equiv H_1 + 2H_2 - ih + i\bar{h}. \end{aligned}$$

Hogy az utóbbi kettő is valóban definit pozitiv, azt úgy mutatjuk meg, hogy kanonikus alakban írjuk őket:

$$\begin{aligned} D_3 &\equiv (x_1+x_3)\,(\bar{x}_1+\bar{x}_3) + (x_2+x_4)\,(\bar{x}_2+\bar{x}_4) + x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4 \\ D_4 &\equiv (x_1+ix_3)\,(\overline{x_1+ix_3}) + (x_2+ix_4)\,(\overline{x_2+ix_4}) + x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4. \end{aligned}$$

E négy alak egymástól lineárisan független, mert

$$\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \lambda_3 D_3 + \lambda_4 D_4 \equiv 0$$

csak úgy lehet, ha

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_3 - i\,\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_3 + i\,\lambda_4 &= 0. \end{aligned}$$

De e homogén lineár egyenletrendszer determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{vmatrix} \neq 0,$$

kell tehát, hogy minden λ zérus legyen.

Legyen szabad végül egy következtetésre utalnom, a melyet a lineár helyettesitések véges csoportjaihoz tartozó HERMITE-féle alakok ismerete lehetővé tesz.

A homogén lineár differencziálegyenletek elméletének következő tétele: *Ha egy homogén lineár differencziálkifejezést különböző módon irreduczibilis tényezőkre bontunk:*

$$P = Q_k Q_{k-1} \cdots Q_2 Q_1$$

e tényezők rendje: $n_1, n_2, \ldots, n_k (n_1+n_2+\cdots+n_k=n)$ *a különböző felbontásoknál legfeljebb sorrendben különbözhetik egymástól,** az algebrailag integrálható differencziálegyenletekre alkalmazva és a raczionalitási csoportjukkal kapcsolatba hozva, a lineár helyettesitések véges csoportjaira nézve kiadja a következő tételt:

Ha a lineár helyettesítések valamely intranzitiv véges csoportját bármiképen transzformáljuk is szétbontható alakra, úgy, hogy az egyes $G_1^{(n_1)}, G_2^{(n_2)}, \ldots, G_k^{(n_k)}$ *csoportok* $(n_1+n_2, \ldots, n_k=n)$ *már mind tranzitivok, a csoport e különböző alakjainál az* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *dimenziószámok, legfeljebb sorrendben különbözhetnek egymástól.*

E tétel már csak azért is fontos, mert pl. nem is lehet addig pontosabb terminologiával kétszeresen, háromszorosan s i. t. intranzitiv** csoportokról beszélni, a míg ki vagyunk téve annak, hogy a csoport más-más alakjában több vagy kevesebb tranzitiv csoportra bontható szét.

---

* E. LANDAU: Ein Satz über die Zerlegungen homogener linearer Differentialgleichungen in irreducible Faktoren (Crelle Journal. 124. köt. 115. lap.)

Különösen a tételnek a lineár csoportokkal való összefüggésére nézve: A. LOEWY: Über die irreduciblen Faktoren eines linearen homogenen Differentialausdruckes. (Sächsische Berichte. 1902. 1. lap.)

Arra, hogy az alábbi következtetés a lineár differencziálegyenletek elméletéből is levonható, BEKE tanár úr volt szíves figyelmemet felhívni.

** k-szorosan intranzitivnak volna nevezendő az a csoport, a mely $k+1$ tranzitiv csoportra bontható szét. (Úgy, hogy az, a mely két tranzitiv csoportra bontható, egyszerűen, egyszeresen intranzitiv.)

De mint magában véve is érdekes tételt kivánatos volna tisztán formális algebrai úton is bebizonyítani. Ehhez pedig nem szükséges egyéb, mint a csoportjainkhoz tartozó HERMITE-féle invariánsok összességének ismerete. Az intranzitivitás kriteriumát szem előtt tartva ugyanis világos, hogy az ezen alakseregekben foglalt alacsonyabbrangú alakok áttekintésének rögtön ki kell adni a tételt.

Mutassuk ezt mindjárt meg azokra az esetekre, a melyekben már meghatároztuk az HERMITE-féle invariánsok összességét, vagyis az oly csoportokra, a melyekben van különböző gyököket tartalmazó helyettesítés.

Rövidség kedvéért vegyünk olyan alakú csoportot, a milyet már a 359. lapon jellemeztünk. Az invariánsok összessége ott

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_k K_k \qquad \text{I)}$$

alakban volt felirva.

Azután tegyük fel, hogy a csoport más alakra transzformálva $m_1, m_2, \ldots, m_l$-dimenziós *tranzitiv* csoportokra bontható szét, a hol szintén:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_l = n.$$

Az e részekhez tartozó, rendre $m_1, m_2, \ldots, m_l$-dimenziós, $H_1, H_2, \ldots, H_l$ invariánsok mindenesetre az I) alatti alaksereg bizonyos elemeiből, *a melyekre nézve az a jellemző, hogy rendre* $m_1, m_2, \ldots, m_l$*-edrangúak,* állottak elő ugyane transzformáczióval.

A H-k, a mint alakjukról világos, lineárisan függetlenek és mivel, ha ez a felbontás is végleges volt, tételünk értelmében a

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \cdots + \mu_l H_l$$

seregnek is meg kell adni a csoport összes HERMITE-féle invariánsait (csakhogy transzformálva) számuknak meg kell egyezni a K-k számával, azaz

$$l = k.$$

Az I) alatti sokaságból azonban alacsonyabbrangú alakot akkor és csakis akkor kapunk, ha egyes λ-k zérusok. De mivel, ha már pl. egy $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$ alakot veszünk, ennek rangszáma $n_1 + n_2$, rögtön látható, hogy az I) alatti seregből nem lehet másképen kiválasztani a H-knak megfelelő alacsonyabbrangú alakok sorozatát, vagyis oly k lineárisan független alakot, a melyek rangszámainak összege n, mint, ha a különböző K_i-k egy teljes sorozatát veszszük, a melyben mindegyik még egy tetszőleges pozitiv állandóval lehet szorozva. Ily módon az $m_1, m_2, \ldots m_l$ számok sorozata, valóban csak legfeljebb sorrendben különbözhetik $n_1, n_2, \ldots, n_k$-tól.

Azt hiszem, hogy a szóbanforgó tételt formális algebrai úton is egész teljességében bebizonyithassuk, érdemes lesz a lineár helyettesitések véges csoportjaihoz tartozó HERMITE-féle invariánsok összességének meghatározásával tovább is foglalkozni és a kérdésnek minden megszoritástól ment elintézésére törekedni.

*

Jegyzet. Nehogy azonban fentebbi eredményeink érvényességi köre, különösen a mi a többszörösen intranzitiv csoportokat illeti, túlságosan szűknek lássék, nem lesz felesleges talán figyelmeztetni, hogy intranzitiv csoportok másképen is képezhetők, mint úgy, hogy két izomorf csoport megfelelő S_i és S_i' helyettesitéseit az

$$\left(\begin{array}{c|c} S_i & 0 \\ \hline 0 & S_i' \end{array}\right)$$

schema szerint összerakjuk. Ily módon ugyanis, főleg, ha csupa alacsonyabb periodusú helyettesitésekből alakul az illető csoporttipus (pl. a tetraédercsoportok), nem igen kapunk olyan intranzitiv csoportokat, a melyek eleget tesznek megszoritásunknak.

Vegyünk azonban két egészen tetszőleges és tetszőleges dimenziójú lineár csoportot (a melyek esetleg azonosak is lehetnek):

$$S_i \quad (i=1,2,\ldots,M) \qquad \text{I)}$$

$$T_j \quad (j=1,2,\ldots,N) \qquad \text{II)}$$

és rakjuk össze az egyik minden egyes helyettesítését, a másik minden egyes helyettesítésével. Világos, hogy az ily módon előálló MN helyettesítés:

$$\left(\begin{array}{c|c} S_i & 0 \\ \hline 0 & T_j \end{array}\right)$$
$$(i=1,2,\dots,M;\ j=1,2,\dots,N)$$

csoportot alkot. Ha ennek az I) schema szerint való értelemben a a $G_1^{(r)}$, $G_2^{(n-r)}$-rel jelölt részeit veszszük, ezek lényegben azonosak lesznek az I) és II) alatti csoportokkal, csakhogy minden egyes S_i helyettesítés N-szer szerepel a G_1-ben, és minden egyes T_j M-szer a G_2-ben. A G_1 és G_2 között levő meriëdrikus izomorfizmus nem is igazi izomorfizmus, hanem triviális, mert olyan, hogy pl. a G_1 minden egyes elemének megfelel G_2-ből a különböző (N számú) T_j-k egy teljes sorozata. Olyanforma ez, mint a hogy minden csoport izomorfnak tekinthető az identitással. Megjegyzendő, hogy ez az eset itt is előáll, ha az egyik csoport helyett egy tetszőleges dimenziójú identikus helyettesítést veszünk, mint pl. az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

schema szerint való szegélyezésnél.

Már ez a schema is nagyon sok olyan intranzitiv csoportot ad, a melyre tételünk érvényes. De az általánosabbal többszörösen intranzitiv csoportok képezésére is nagy szabadságot nyerünk, még ha megszorításunkat nem is ejtjük el. Pl. magából a binär tetraédercsoportból, mivel a Θ karakterisztikus egyenletének gyökei: i és $-i$, χ-é a komplex harmadik egységgyökök: ω_1 és ω_2, $\Gamma\chi$-é pedig: $-\omega_1$ és $-\omega_2$, ily módon oly hatdimenziós csoportot lehet képezni, a mely három binärre esik szét és a melyben a

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \Theta & 0 & 0 \\ \hline 0 & \chi & 0 \\ \hline 0 & 0 & \Gamma\chi \end{array}\right)$$

helyettesítésnek karakterisztikus egyenlete csupa különböző gyököket ad.

E hatdimenziós, 3. 24-edrendű csoport természetesen nem tetraédercsoport. A megfelelő típus a binär sokaságban nincs is meg. (Mert tudvalevőleg a cziklikus, diéder, tetraéder, oktaéder és ikozaéder-csoportok képviselik ott az összes típusokat.)

E megjegyzés tehát talán azért sem érdektelen, mert figyelmeztet arra, hogy valamely magasabb dimenziójú sokaságban lehetségesek olyan intranzitiv csoportok is, a milyen típusúak az alacsonyabb dimenziókban nincsenek meg, a mi paradoxonként tűnik fel, mert az ember első pillanatra hajlandó volna azt gondolni, hogy a részeknek ugyanoly típusú csoportokat kell adni, mint az egésznek.

A LEGNAGYOBB ENERGIAFORGALOM ELVÉRŐL.

E Lapok XI. kötetében (318—336.) ily czím alatt egy dolgozatom jelent meg, a melyben bebizonyítottam, hogy az ú. n. OSTWALD-féle maximumelv, mely szerint egy tetszőleges anyagi rendszerben az összes ugyanazon elemi idő alatt végbemenő, az energia megmaradásának elvével összeférő lehetséges energiaátalakulások (jelenségek) közül az az átalakulás fog valóban bekövetkezni, a melynél az energiaforgalom a lehető legnagyobb, csupán kivételes esetekben alkalmazható tisztán mechanikai jelenségek leirására, minthogy általában a NEWTON-féléktől eltérő differencziálegyenletekre vezet.

E vizsgálataimat német nyelven az Annalen der Physikban is közzétettem (12. k. 419—428) s a következőkben be akarok számolni ama megjegyzésekről, a melyeket dolgozatomra a külföld szakemberei tettek, s közlöm ama kiegészitéseket is, a melyek e megjegyzések alapján szükségeseknek mutatkoztak.

Elsőnek maga OSTWALD szólt hozzá a tárgyhoz: magánlevélben keresett fel s a feltételi egyenletek bizonyos módositását ajánlotta ama reményének adva kifejezést, hogy a feltételi egyenletek ily módositása mellett az ő elve is a dinamika szokásos alapegyenleteire fog vezetni.

Tisztán mechanikai jelenségekre nézve ugyanis OSTWALD elve azt követeli, hogy a kinetikai energia dT megváltozása egy bizonyos dt idő alatt a tényleges mozgásnál nagyobb legyen mint mindama mozgásoknál, a melyek ugyanezen idő alatt úgy mennek végbe, hogy az eleven erő tétele érvényes maradjon.

Egy pontra nézve tehát a szokásos jelölésekkel élve:

$$dT = m(x''dx+y''dy+z''dz) \qquad 1)$$

legyen maximum, úgy hogy:

$$m(x''dx+y''dy+z''dz) - (Xdx+Ydy+Zdz) = 0. \qquad 2)$$

Ebben, az eleven erő és munka szokásos definicziójának megfelelő fogalmazásban egy oly változás, melynél a mozgó pont sebessége nagyság szerint változatlan, de iránya megváltozik, nem számít energiaátalakulásnak. Ostwald levelében az elvnek oly fogalmazását ajánlja, a melyben az eleven erőnek ne csak nagyságot, hanem irányt is tulajdonítunk, úgy hogy az eleven erő irányváltozását is beleszámítsuk az energiaforgalomba.

Az eleven erő definicziójának hasonló átalakítását már szóba hozták akkor, a midőn egyes fizikusok a mechanika alapegyenleteinek «energetikai» alapon való levezetését tűzték ki czélul. Legelőször M. Planck,* utána C. Neumann és Helm tényleg le is vezették a dinamika alapegyenleteit ily irány által is jellemzett energiák segélyével.

Az eleven erőnek az x tengely irányában történt megváltozása alatt az $mx''dx$ mennyiséget értve, az y irányában történő megváltozása alatt $my''dy$-t s í. t. az eleven erő tétele helyébe a következő axiómát állították fel: Az eleven erőnek minden koordinátatengely mentén való megváltozása az erő ugyanazon irányra való vetületének munkájával egyenlő; képletben:

$$\begin{aligned} mx''dx &= Xdx, \\ my''dy &= Ydy, \\ mz''dz &= Zdz. \end{aligned} \tag{3}$$

Világos, hogy dx, dy, dz-vel való osztás útján egy szabad pont szokásos mozgásegyenleteit kapjuk.

Ostwald ajánlatának tehát olyformán gondoltam eleget tenni, hogy az eleven erő megváltozásának Planck-féle definiczióját használom, úgy, hogy azután az elv fenti fogalmazásában a 2) egyenlet helyébe a 3) alatti rendszer lép: Ostwald maga második levelében kijelentette, hogy tényleg az eleven erő Planck-féle definicziójára gondolt.

Ha azonban ilyenformán a 2) alatti feltételi egyenletet a 3) alatti feltételrendszerrel pótoljuk, az Ostwald-féle elv már tel-

* M. Planck, Das Princip der Erhaltung der Energie. Leipzig, Teubner 1887, 148. l.

jesen fölöslegessé válik: a feltételi egyenletek ugyanis már maguk teljesen meghatározzák a mozgást s így az összes virtuális elmozdulások, a melyek közül a legnagyobb energiaforgalmút ki kellene választanunk, egyetlen egyre redukálódnak.

Ilyen úton tehát az elvet megmenteni nem sikerült.

Fölszólalt azután az Annalen der Physik hasábjain JANUSCHKE, kit szintén felsoroltam dolgozatomban azok között, a kik OSTWALD elvének a kellőnél nagyobb érvényességi kört tulajdonítottak. JANUSCHKE a maga álláspontját védelmezi s az én érvelésem megdöntésére törekszik, minthogy azonban megjegyzései nagyobbrészt félreértéseken alapúlnak, nem tartom szükségesnek itt részletes megvitatásukba bocsátkozni.*

Részletesebben fogok azonban foglalkozni E. FÖRSTER dolgozatával, a ki a Zeitschrift für Mathematik und Physikban** foglalkozik az OSTWALD-féle axiómával s azt állítja, megemlékezvén az én dolgozatomról is, hogy nemcsak lehetetlen az OSTWALD-féle elvből a NEWTON-féle differencziálegyenleteket levezetni, hanem hogy egyáltalában nem létezik oly mozgás, a mely az elv követelményeinek megfelel. Minthogy azonban én az OSTWALD elvet követő pont mozgásának differencziálegyenleteit tényleg felállítottam, FÖRSTER állítása az én eredményeimmel homlokegyenest ellenkezik. A következőkben néhány kiegészítést teszek közzé, a melyek talán alkalmasak lesznek vizsgálataimat kellő világításba helyezve mathematikai alapjukat megszilárdítani s kimutatni, hogy az OSTWALD elv által az összes virtuális mozgások közül egy meghatározott mozgás mindig *ki van tüntetve* a többi fölött OSTWALD amaz eszméinek megfelelően, a melyeket: «Über das Prinzip des ausgezeichneten Falles» czímű értekezésében*** kifejtett. Sajnos

* H. JANUSCHKE, Ann. d. Phys. 11. k., 445—448. l., ZEMPLÉN G., Ann. d. Phys. 12. k. 370—372. l., H. JANUSCHKE, Ann. d. Phys. 12. k. 1175—1176. l.

** E. FÖRSTER, Zum Ostwald'schen Axiom der Mechanik. Zeitschrift für Math. und Physik, 49. k. 84. l. 1903.

*** Berichte über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 45. kötet, 600. l. 1893.

azonban a jelen «kitüntetett eset» csak kivételes esetekben vezet a mechanika szokásos egyenleteire.

*

Előbbi dolgozatomban előbb a közelítőleg helyes 11), 12), 13) alatti egyenletrendszert vezettem le (330. l.), s ebből $\lim \tau = 0$ határátmenettel nyertem a III) alatti végleges rendszert.

Először is a III) alatti rendszer levezetésének mathematikai alapját akarom megszilárdítani: az első értekezésemben közölt eljárás ugyanis két helyen szorul kiegészítésre:

1-ször. A 11), 12), 13) egyenletek levezetésénél csupán a szélsőérték létezésének szükséges feltételeit vettem tekintetbe: be fogom bizonyítani, hogy ez által a szélsőérték létezésének elegendő föltételeit is kielégítettük (e kiegészítés szükséges voltára Rados tanár úr figyelmeztetett, mindjárt amaz előadásom után, a melyet a Math. és Phys. Társulatban 1902 november 20-án tartottam).

2-szor. Ugyancsak a 11), 12), 13) egyenletek levezetésénél egy bizonyos közelítést használtam: $\left(\bar{x}-x=\frac{\tau}{2}(\bar{u}+u),\right.$ s í. t.$\left.\right)$ be fogom bizonyítani, hogy bármily más közelítés ugyanarra az eredményre vezet.

Egy véges de kicsiny τ időre nézve az Ostwald-féle elvet következőképen fogalmaztam:

x, y, z, u, v, w jelöljék egy m tömegű pont koordinátáit és sebességi összetevőit a t időpillanatban, ugyane mennyiségek értékét $t+\tau$ időpillanatban egy föléjük helyezett vonás jelezze, akkor keressük ama $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ értékeket, a melyeknél

$$T_{t+\tau}-T_t=\tfrac{1}{2}m(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2)-\tfrac{1}{2}m(u^2+v^2+w^2) \tag{4}$$

maximum, úgy, hogy:

$$F=\tfrac{1}{2}m(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2)-\tfrac{1}{2}m(u^2+v^2+w^2)-$$
$$-\frac{\tau}{2}\big(X(u+\bar{u})+Y(v+\bar{v})+Z(w+\bar{w})\big)=0, \tag{5}$$

és

$$G=\frac{\tau}{2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(u+\bar{u})+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(v+\bar{v})+\frac{\partial\varphi}{\partial z}(w+\bar{w})\right]=0. \tag{6}$$

$x, y, z, u, v, w, t, \tau$ állandók szerepét játszszák, φ csupán x, y, z függvénye.

A szélsőérték szükséges feltételeit úgy kapjuk, hogy a

$$R = \delta\,(T_{t+\tau} - T_t) + \lambda\delta F + \mu\delta G$$

kifejezésben $\delta\bar{u}$, $\delta\bar{v}$, $\delta\bar{w}$ első hatványainak együtthatóit zérussal teszszük egyenlővé s az így nyert három egyenletből (329. l. 8, 9, 10) és az 5) és 6)-ból kiküszöböljük a λ-t és μ-t.

A számítás eredménye (329. l. 5. sor alulról):

$$-\lambda = \frac{2\bar{u}(u+\bar{u}) + 2\bar{v}(v+\bar{v}) + 2\bar{w}(w+\bar{w})}{(u+\bar{u})^2 + (v+\bar{v})^2 + (w+\bar{w})^2}.$$

A szélsőérték elegendő föltételeit úgy kapjuk, hogy $\delta\bar{u}$, $\delta\bar{v}$, $\delta\bar{w}$ második hatványait is tekintetbe véve R-től azt követeljük, hogy $\delta\bar{u}$, $\delta\bar{v}$, $\delta\bar{w}$ bármely értékénél állandó előjelü legyen.

És valóban, minthogy:

$$\delta\,(T_{t+\tau} - T_t) = m\bar{u}\delta\bar{u} + m\bar{v}\delta\bar{v} + m\bar{w}\delta\bar{w} + \tfrac{1}{2} m\,(\delta\bar{u}^2 + \delta\bar{v}^2 + \delta\bar{w}^2),$$

$$\delta F = \left(m\bar{u} - \frac{\tau}{2} X\right)\delta\bar{u} + \left(m\bar{v} - \frac{\tau}{2} Y\right)\delta\bar{v} + \left(m\bar{w} - \frac{\tau}{2} Z\right)\delta\bar{w} + \tfrac{1}{2} m\,(\delta\bar{u}^2 + \delta\bar{v}^2 + \delta\bar{w}^2),$$

$$\delta G = \frac{\tau}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta\bar{u} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta\bar{v} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta\bar{w},$$

λ és μ említett választása mellett:

$$R = \tfrac{1}{2} m\,(1+\lambda)\,(\delta\bar{u}^2 + \delta\bar{v}^2 + \delta\bar{w}^2) = \\ = \tfrac{1}{2} m\,\frac{u^2 + v^2 + w^2 - \bar{u}^2 - \bar{v}^2 - \bar{w}^2}{(u+\bar{u})^2 + (v+\bar{v})^2 + (w+\bar{w})^2}\,(\delta\bar{u}^2 + \delta\bar{v}^2 + \delta\bar{w}^2),$$

$T_{t+\tau} - T_t$ tehát maximum lesz, ha

$$\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2 > u^2 + v^2 + w^2,$$

azaz, ha

$$T_{t+\tau} > T_t, \qquad 7)$$

és minimum, ha

$$T_{t+\tau} < T_t. \qquad 8)$$

A 7) esetben azonban az *energiaforgalom* (l. 320. l.) az átalakult energiamennyiség abszolut értéke egyenlő magával $T_{t+\tau} - T_t$-vel, a 8) esetben pedig $T_t - T_{t+\tau}$-val, maga az energiaforgalom tehát (az állandó eleven erővel történő mozgás szinguláris esetétől eltekintve) az Ostwald-féle elvnek teljesen megfelelően tényleg maximum.

Áttérünk most a második kiegészítésre s a III) alatti rendszernek oly levezetését adjuk, a melynél az eddiginél világosabban kitünik az, hogy a számítás folyamán mindenütt a közelítésnek ugyanazt a fokát használjuk s a melyből kiviláglik, hogy bármily úton végezve a $\lim \tau = 0$ határátmenetet, mindig a III) alatti rendszer lesz a végeredmény.

A közelítés fokát következőképen szabjuk meg: *Legyen τ oly kicsiny, hogy harmadik és magasabb hatványai elhanyagolhatók legyenek.*

Akkor:

$$\bar{x} - x = u\tau + \frac{1}{2}\frac{du}{dt}\tau^2, \quad \text{s í. t.}$$

s a τ idő alatt végzett munka:

$$L_\tau = \int_0^\tau \left\{(Xu)_{t+\vartheta} + (Yv)_{t+\vartheta} + (Zw)_{t+\vartheta}\right\} d\vartheta.$$

Azonban

$$(Xu)_{t+\vartheta} =$$

$$= \left\{X(x,y,z) + \frac{\partial X(x,y,z)}{\partial x}(x_{t+\vartheta} - x_t) + \frac{\partial X}{\partial y}(y_{t+\vartheta} - y_t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial X}{\partial z}(z_{t+\vartheta} - z_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X(x,y,z)}{\partial x^2}(x_{t+\vartheta} - x_t)^2 + \cdots \right\}$$

$$\left(u + \frac{du}{dt}\vartheta + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dt^2}\vartheta^2\right),$$

de mivel:

$$x_{t+\vartheta} - x_t = u\vartheta + \frac{1}{2}\frac{du}{dt}\vartheta^2, \quad \text{s í. t.}$$

$$(Xu)_{t+\vartheta} = X(u + u'\vartheta + \tfrac{1}{2}u''\vartheta^2) +$$

$$+ \frac{\partial X}{\partial x}\left(u^2\vartheta + \tfrac{3}{2}uu'\vartheta^2 + \tfrac{1}{2}(u'^2 + u''u)\vartheta^3 + \tfrac{1}{4}u'u''\vartheta^4\right) +$$

$$+ \frac{\partial X}{\partial y}\left(uv\vartheta + (vu' + \tfrac{1}{2}uv')\vartheta^2 + \tfrac{1}{2}(u'v' + vu'')\vartheta^3 + \tfrac{1}{4}v'u''\vartheta^4\right) +$$

$$+ \frac{\partial X}{\partial z}\left(uw\vartheta + (wu' + \tfrac{1}{2}uw')\vartheta^2 + \tfrac{1}{2}(u'w' + wu'')\vartheta^3 + \tfrac{1}{4}(w'u''\vartheta^4)\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\vartheta^2 f(u, u', u'', \vartheta) + \cdots$$

a hol f az u, u', u'', ϑ raczionális egész függvénye.

Végrehajtva az integrácziót és elhagyva a τ^3-mal szorzott tagokat kapjuk:

$$L_\tau = X\left(u\tau + u'\frac{\tau^2}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\tau^2\left(\frac{\partial X}{\partial x}u^2 + \frac{\partial X}{\partial y}uv + \frac{\partial X}{\partial z}uw\right) +$$
$$+ Y\left(v\tau + v'\frac{\tau^2}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\tau^2\left(\frac{\partial Y}{\partial x}vu + \frac{\partial Y}{\partial y}v^2 + \frac{\partial Y}{\partial z}vw\right) +$$
$$+ Z\left(w\tau + w'\frac{\tau^2}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\tau^2\left(\frac{\partial Z}{\partial x}wu + \frac{\partial Z}{\partial y}wv + \frac{\partial Z}{\partial z}w^2\right) =$$
$$= X\left(u\tau + u'\frac{\tau^2}{2}\right) + Y\left(v\tau + v'\frac{\tau^2}{2}\right) + Z\left(w\tau + w'\frac{\tau^2}{2}\right) + \tau^2\Phi,$$

a hol Φ csupán x, y, z és u, v, w függvénye.

Ha most az u', v', w' gyorsulási összetevők helyére a következő, szintén τ második hatványáig pontos egyenletek által az $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ új változókat vezetjük be:

$$u\tau + u'\frac{\tau^2}{2} = \frac{\tau}{2}(u+\bar{u}), \quad v\tau + v'\frac{\tau^2}{2} = \frac{\tau}{2}(v+\bar{v}),$$
$$w\tau + w'\frac{\tau^2}{2} = \frac{\tau}{2}(w+\bar{w}),$$

akkor az eleven erő tétele számára a következő kifejezést kapjuk:

$$F = \tfrac{1}{2}m(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2-u^2-v^2-w^2) -$$
$$- \frac{\tau}{2}\left[X(u+\bar{u}) + Y(v+\bar{v}) + Z(w+\bar{w})\right] - \tau^2\Phi = 0.$$

Ugyanazt a számítást hajtva végre mint első dolgozatomban, a szélsőérték létezésének szükséges föltételei az eleven erő tétele eme módosított alakja mellett a következő egyenletrendszert szolgáltatják:

$$X + \rho_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} = m\frac{\bar{u}}{\tau}\,\frac{m(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2-u^2-v^2-w^2)-2\tau^2\Phi}{m[\bar{u}(u+\bar{u})+\bar{v}(v+\bar{v})+\bar{w}(w+\bar{w})]} \quad \text{s i. t.} \qquad 9)$$

A maximum létezésének elégséges föltételei szintén ki vannak elégítve, ugyanis, mivel most

$$-\lambda = \frac{2m[(u+\bar{u})\bar{u}+(v+\bar{v})\bar{v}+(w+\bar{w})\bar{w}]}{m[(u+\bar{u})^2+(v+\bar{v})^2+(w+\bar{w})^2]-2\tau^2\Phi},$$
$$R = \delta(T_{t+\tau} - T_t) + \lambda\delta F + \mu\delta G = \tfrac{1}{2}m(1+\lambda)(\delta\bar{u}^2+\delta\bar{v}^2+\delta\bar{w}^2) =$$
$$= \tfrac{1}{2}m\frac{m(u^2+v^2+w^2-\bar{u}^2-\bar{v}^2-\bar{w}^2)-2\tau^2\Phi}{m[(u+\bar{u})^2+(v+\bar{v})^2+(w+\bar{w})^2]-2\tau^2\Phi}.$$

Látható, hogy ha τ oly kicsiny, hogy τ^2 is elhanyagolható, R alakja ugyanaz, mint a megelőző számításban, tehát az eleven erő megváltozása ismét mindig szélsőérték s az energiaforgalom maximum.

Ha a 9) alatti rendszerben a $\lim \tau = 0$ határátmenetet elvégezzük, ugyanarra az egyenletrendszerre jutunk, melyre a megelőző számítás vezetett s a melyet megelőző értekezésemben III)-mal jelöltem:

$$\left.\begin{aligned} X + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= mx'\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{x'^2+y'^2+z'^2}, \\ Y + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= my'\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{x'^2+y'^2+z'^2}, \\ Z + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= mz'\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{x'^2+y'^2+z'^2}, \\ \varphi(x, y, z) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{III)}$$

Ez az egyenletrendszer e szerint csupa oly egyenletrendszerekből keletkezik határátmenet útján, a melyek annál pontosabban felelnek meg Ostwald elvének, minél kisebbnek választjuk a τ időközt, a melyre az elvet alkalmazzuk; a III) alatti rendszer által jellemzett mozgás a végtelen sok lehetséges mozgással szemben *ki van tüntetve* az által, hogy felé közelednek minden határon túl mindama mozgások, a melyeket az Ostwald elvnek τ kisebbedésével fokozódó mértékben hódoló 9) alatti egyenletrendszerek határoznak meg. Ily értelemben határozza meg a III) által jellemzett mozgást az Ostwald-féle elv: a határátmenet elvégzése után már nem beszélhetünk az energiaforgalom maximumáról, minthogy ha $\tau = 0$ az energiaforgalom maga is zérus.

Förster idézett dolgozatában az eleven erőnek $T_{t+\tau} - T_t$ megváltozását a következő alakban állítja elő:

$$T_{t+\tau} - T_t = \frac{dT}{dt}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2T}{dt^2}\tau^2 + \cdots$$

Adottaknak tekinti x, y, z-t és x', y', z'-t s keresi x'', y'', z'' amaz értékeit, a melyeknél $T_{t+\tau} - T_t$ az eleven erő tételének megfelelő módon maximum. Minthogy — így okoskodik Förster —

$$\frac{dT}{dt} = m(x'x''+y'y''+z'z'') = Xx'+Yy'+Zz'$$

a független változókat nem tartalmazza, $T_{t+\tau} - T_t$ maximum lesz, ha

$$\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{d(Xx'+Yy'+Zz')}{dt} = Xx''+Yy''+Zz''+\Phi(x,y,z,x',y',z')$$

maximum.

Förster azt mondja, hogy e követelményeknek «a mint egy egyszerű számítás mutatja» csak abban az esetben lehet eleget tenni, midőn $x'=y'=z'=0$.

Végezzük el e számítást, a mely Förster dolgozatában nem fordul elő:

$$\delta\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right) = X\delta x''+Y\delta y''+Z\delta z''=0.$$

A feltételi egyenletek pedig:

$$F = m(x'x''+y'y''+z'z'')-Xx'-Yy'-Zz'=0, \qquad 10)$$

$$\varphi(x,y,z)=0.$$

$$\delta F = mx'\delta x''+my'\delta y''+mz'\delta z''=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x''+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y''+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z''=0.$$

tehát az x'', y'', z''-t meghatározó egyenletrendszer:

$$X_1+\lambda mx'=0,$$

$$Y_1+\lambda my'=0,$$

$$Z_1+\lambda mz'=0,$$

a hol

$$X+\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}=X_1 \quad \text{s i. t.}$$

Kiküszöbölve a 10) tekintetbe vételével ezen egyenletekből a λ-t, minthogy a számítás eredményeként

$$-\lambda = \frac{x'x''+y'y''+z'z''}{x'^2+y'^2+z'^2},$$

látható, hogy szintén a III) alatti rendszert kapjuk.

Megjegyezvén, hogy ennek a levezetési módnak nem tulajdonítok a III) rendszer helyességére nézve bizonyító erőt, még

FÖRSTER amaz állítását szándékozom megczáfolni, mely szerint a III) rendszer követelményeinek csak abban az esetben lehet eleget tenni, midőn $x'=y'=z'=0$.

Igaz, hogy a III) rendszer utólag az egyelőre önkényesen választott x, y, z-re kiszabja, hogy az erőkomponensekkel arányosak legyenek, ez azonban nem ellenmondás és magyarázatát leli abban, hogy a III) alatti egyenletek csak látszólag másodrendűek mind a három változóra nézve; a III) alatti rendszer első három egyenlete ugyanis nem független egymástól s az eleven erő 10) alatti egyenlete bevonása mellett a következő rendszerrel pótolható:

$$y' = \frac{Y_1}{X_1} x',$$

$$z' = \frac{Z_1}{X_1} y',$$

$$x'' = \frac{X_1 x' + Y_1 y' + Z_1 z' - m x' \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{Y_1}{X_1}\right) y' + \frac{d}{dt}\left(\frac{Z_1}{X_1}\right) z' \right\}}{m \left\{ x' + \frac{Y_1}{X_1} y' + \frac{Z_1}{X_1} z' \right\}}.$$

E rendszer x''-re nézve másodrendű, y' és x'-re azonban elsőrendű, úgy, hogy tulajdonképen csak négy integráczióbeli állandó fölött rendelkezünk, x, y, z és x' kezdőértékei fölött, tehát csak a sebesség abszolut nagyságát adhatjuk meg egy pontban, az iránya az erőösszetevőknek illető pontbeli értékétől függ.

Sőt, a mint azt már az első dolgozatomban megmutattam, ha a szabad erőknek erőfüggvényük van, mind a három egyenlet elsőrendű lesz:

$$x' = X_1 \sqrt{\frac{2(C-V)}{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}},$$

$$y' = Y_1 \sqrt{\frac{2(C-V)}{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}},$$

$$z' = Z_1 \sqrt{\frac{2(C-V)}{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}},$$

a hol a négyzetgyök mindig pozitiv előjelűnek veendő: ismét

x, y, z kezdőértékeit választhatjuk szabadon és a C állandót, a mely ismét a sebesség abszolut nagyságát határozza meg egy időpillanatban az

$$\tfrac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)+V(x,y,z)=C$$

egyenlet alapján.

A III) alatti rendszer tehát semmiféle teljesíthetetlen követelményt nem tartalmaz, sőt egyes egyszerűbb esetekben megoldását is sikerült előállítanom, úgy hogy azt hiszem továbbra is változatlanul fentarthatom amaz állításomat, mely szerint az Ostwald-féle elv meghatároz ugyan egy bizonyos mozgást, ez azonban csak kivételes esetekben egyezik meg a dinamika szokásos alapegyenletei által meghatározott mozgással.

Zemplén Győző.

ELEKTROMOS HULLÁMOK GÁZ- ÉS VÍZVEZETŐ CSÖVEKBEN.*

Zivatarok alkalmával a villámok előidézte elektromos háborgások a gáz- és vízvezető csövekben elektromos hullámokat keltenek. Ezeknek jelenlétét kohererrel könnyen kimutatjuk. A használt egyszerű összeállítás a következő. (Lásd az ábrát). A koherer (K) galvanométerrel (G) és elemmel (E) egy áramkörbe van kapcsolva. A koherer egyik elektródja a gáz- vagy a vízvezeték csapjával van összekötve. A használt igen érzékeny koherer durva sárgaréz forgácsból állott, mely 1 cm átmérőjű üvegcsőben hengeralakú, ezüst amálgámmal bevont vörösrézelektrodok közé volt foglalva.

Minden villámcsapáskor a galvanométer tűje kitért, és pedig annál gyorsabban és annál jobban, mennél erősebb volt a villámcsapás.

A villámlás és a galvanométer tűjének elindulása között észrevehető idő telt el, mely hosszabb volt, ha a villámlás a megfigyelés helyétől távolabb történt.

Ez a tünemény mutatja, hogy a csőhálózatban keletkező elektromos hullámok nem is annyira az épület falaiba mélyesztett vezetékekben, hanem inkább a földben szerteágazó nagy keresztmetszetű csövekben indittattnak. A gázvezető csövekben inditott elektromos hullámok tehát nagyobbrészt azon elektromos hullámoktól erednek, melyek a levegőből a földbe hatolnak.**

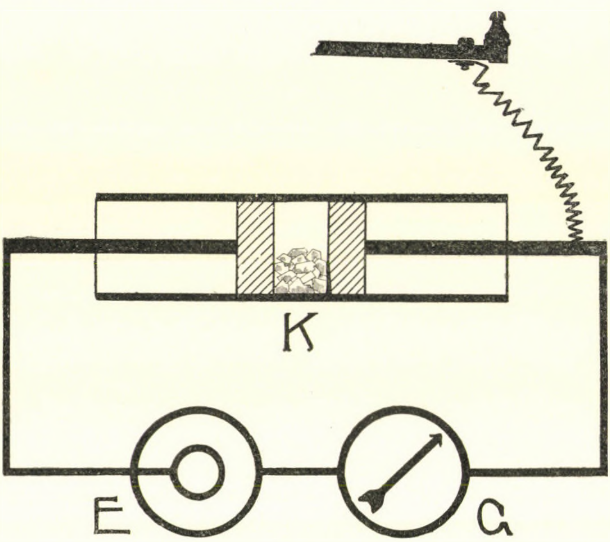
---

* Az 1902 deczember 18-án tartott előadás vázlata.

** Érdemes volna kikutatni, hogy a levegőben keletkező elektromos hullámok milyen mélyre hatolnak a földbe. A megfigyelésre talán legalkalmasabb helyek volnának egy bányának különböző mélységű tárnái.

A galvanométer tűjének késleltetett elindulása pedig a kiterjedt csőhálózat nagy kapaczitásának a következménye.

A leírt módon a zivatar elektromos háborgásainak lefolyása jól és kényelmesen megfigyelhető. 1902 május hó 20-án és 21-én déli 1 és 3 óra között jégesővel súlyosbított zivatar vonult el Budapest fölött. Mindkettő lefolyását szertáramban gondosan megfigyeltem. A zivatar kezdetén és végén diszkrét, egymástól jól megkülönböztethető villámokat jelzett a galvanométer.



A koherer gyönge megkopogtatása után a galvanométer tűje mindig visszatért a nyugalmi helyzetbe. De mikor a zivatar magva vonult el az épület fölött, a mikor legjobban szakadt az eső, a galvanométer tűje nem volt lecsillapítható. A koherer megkopogtatásakor a tű visszatért ugyan a nyugalmi helyzet felé; de a megkopogtatás megszünte után nyomban ujra kitért. Ez a sajátszerű magatartás néhány perczig tartott, mialatt villámlás nem volt észlelhető. Ugy látszik, hogy vagy gyors egymásutánban következő apró kisülések, vagy pedig a felhők elektromos töltésének a nagy víztömegek aláesése előidézte nagy potencziál-változásai okozták a koherer folytonos influálását.

Egy időben az előbb leírt megfigyelésekkel a gáz- és a vízvezető csövek közt haladó földi áramokat is megvizsgáltam igen érzékeny galvanométerrel s azt tapasztaltam, hogy a zivatarnak azokra semmiféle befolyása nem volt.

A gázvezető csövek az elektromos hullámokat tehát tova vezetik s nem adják át azonnal az elektromos energiát a környező földrétegeknek. Ebből következik, hogy elektromos oszczillácziókkal gázcsöveken keresztül telegrafálni lehet és pedig a következő módon. Az egyik állomáson az elektromos oszczillátor egyik sarkát összekötjük a gázvezetékkel, a másik állomáson pedig a gázvezetéket egy Marconi-féle jelfogóval. A jelfogó az adott szikra-jeleket visszaadja.

Gruber Nándor.

ELEKTROMOS ÁRAMMAL HAJTOTT TERMOFÓN.

Ha két vizszintes és egymással párhuzamos fémrudra keresztbe fektetünk egy könnyű fémcsövet és a két fémrudat összekötjük valamely áramforrás két sarkával, akkor a fémcső eleinte ide s tova gurul, azután haladó mozgásnak indul. *Gore* a tőle először megfigyelt eme tünemény alapján szerkesztette ismeretes motorát. A *Trevelyan*-féle termofónt elektromos árammal szintén megszólaltathatjuk. A kisérletet egyszerüen és megbizhatóan a következő módon végezhetjük.

Fektessük a termofón himbálóját két egymástól 10 cm.-nyire párhuzamosan elhelyezett és egy mm. vastag sárgarézből készült léczre. Kössük össze a léczeket valamely áramforrás két sarkával, akkor az áramnak 2—3 ampernyi intenzitása mellett a himbáló meglökése után a termofón azonnal megszólal és hosszú időn át szakadatlanul szól mindaddig, míg a szikrázás következtében az érintkező felületek vezetőképessége nem csökken.

A hang erőssége fokozódik s a termofón zúgása tovább tart, ha a himbáló barázdájával érintkező lécz éle reczézett. Az intenzitás növelésével — mint az előre is várható — a hang mélyebb lesz. Ha a himbálót szénrudakra (pl. ívlámpa belekre) fektetjük, az áram zárása után a termofón magától megszólal.

Ha a termofón áramkörébe valamely transformátor primär orsóját iktatjuk, akkor az intenzitás lüktetéseinek megfelelően a sekundär orsóban gyorsan váltakozó áramot kapunk, mely a közbe kapcsolt telefónt a termofón hangján megszolaltatja. Ez az egyszerű összeállítás a telefónnal végzendő igen sok ki érletnél pótolhatja a Helmholtz-féle hangvillát. *Gruber Nándor.*

A TUDOMÁNY ÉS A HYPOTHEZIS.*

Az elmúlt XIX. század fizikusai eleinte a fizikának filozofiai oldalával keveset törődtek. Hogy mi lehetett ennek oka, annak kutatásába jelenleg nem akarunk belebocsátkozni, azt azonban kiemelhetjük, hogy a filozofiai tekintetek elhanyagolása megboszulta magát. Az idők folyamán annyi új fogalom jött be a fizikába, magyarázat közben annyiféle elvet alkalmaztak s ezek a fogalmak és elvek a hozzájuk kapcsolt újabb szinezetek szerint annyiszor bővültek és átalakultak: hogy végre a jelentkező zürzavar letagadható nem volt s komoly veszedelemmel fenyegetett. A század vége felé változtak a viszonyok. MACH volt az első, ki figyelmét a fizikai fogalmak genezisére fordította és eléggé meg nem becsülhető műveivel a tisztázáshoz nagy mértékben hozzájárult. HERTZ mechanikai magyarázatainkat igen mélyreható kritikának vetette alá s újabb alapú mechanikájával tágkörü összehasonlításokra adott alapot. Következtek: PEARSON, BOLTZMANN, CLIFFORD, VOLKMANN, STALLO, OSTWALD művei. Ezekhez csatlakozik POINCARÉ-nak föntebb említett könyve, melynek rövid ismertetése e sorok czélja.

A könyv egy bevezetésre és három részben 12 fejezetre oszlik. Az egyes fejezetek a következő tárgyakkal foglalkoznak: A szám és a mennyiség, A mennyiség és a kisérlet, A különböző geometriák, A tér és a geometriák, A geometria és a kísérlet, A klassikus mechanika, Relativ és absolut mozgás, Energia és Thermodynamika, A fizikai hypothézisek, A modern fizika elméletei, Valószinüségszámítás, Optika és elektromosság.

A bevezetésben röviden jelzi álláspontját. Sokan azt hiszik, úgymond, hogy a természettudományok igazságai minden kétségenkívül állanak. Úgy gondolják, hogy a mathematika szabályai magát a teremtőt is annyira megbűvölték, hogy nem tehetett másképen, mint a hogyan azok parancsolnak. Mások ismét mindenben kételkednek. Pedig: mindenben kételkedni, és mindent elhinni csak két egyformán kényelmes megoldás; az egyik úgy mint a másik feleslegessé teszi a gondolkodást.

---

* H. POINCARÉ: La Science et l'Hypothèse. Paris, E. FLAMMARION. 1902.

Hypotheziseket kell alkotnunk. A hypothezisek a legtöbbször nemcsak szükségesek, hanem jogosak is. Van többféle hypothezis. Némelyiket az idők folyamán igazolni is lehet s akkor nagyon termékeny igazsággá válik (a fény hullámhypothezise). Mások gondolatainkat a jelenségnek bizonyos oldalára tudják irányítani, úgy hatnak tehát, mint a költő metaforái és hasonlatai (az elektromos fluidumok hypothezise). Ismét mások nem is hypothezisek, hanem definitiók és önkéntelen megállapodások.

Tartsuk meg ez önkéntelen «megállapodások» jelölésére a Poincaré által használt «*conventio*» szót, mert a mint látni fogjuk, ez a fogalom végig húzódik az egész művön és jellemzi azt a fölfogást, melyet Poincaré képvisel. Hogy mi az a conventio, bajos volna megmondani. Poincaré szerint: lelkünk szabad tevékenységének eredménye, azé a léleké, ki az ő országában nem ismer határt. Itt a lélek *állithat,* azért mert *választhat.* Hogyan kell ezt érteni? Mindazok a nehézségek, melyek az alapigazságok kutatása közben fölmerülnek, onnan erednek, mert azt hisszük, hogy az a világ, melyet lelkünk a természetről alkotott, egyszersmind a természet világa. Tudjuk, hogy ez nincs így. Tudjuk, hogy a külső világ megindít bennünk egy folyamatot, melynek végeredménye egy kép a külvilágról. De ez nem maga a külvilág. Azt az ürt, mely a valódi külvilág és lelkünkben levő képe közt tátong, áthidalni nem tudjuk. Innét van minden nehézség. Már most Poincaré ezt az áthidalást mégis megpróbálja és erre szolgál a «conventio» szó. Úgy kell képzelnünk, hogy a lélekben a külvilág képe nem képződik *automatice,* hanem hogy maga a lélek határozza meg milyen legyen e kép. Ő neki módjában és jogában áll többféle választást tenni, ő szuverén a maga elhatározásában. Ennek az elhatározásnak eredménye a conventio, a mely tehát a természettől (a külvilágtól) teljesen idegen. Ilyen conventio például az, hogy a tér folytonos. Ennek igazságáról soha sem lesz módunk meggyőződni. Mert ezt a folytonosságot a lélek tette hozzá. Mindenki érzi, hogy ezzel a nehézségek nincsenek elhárítva. Azzal, hogy nevet adtunk neki, még nem tudjuk mi az valójában. Azt is látjuk, hogy Poincaré ezzel a lelket bizonyos misztikus homályba burkolja. Végre is a lélek szintén jelenség és ezt ép úgy kell kutatni, mint akár az elektromos kisülést. De térjünk át a részletes tárgyalásra.

Először is a mathematikai okoskodás természetéről szól. Úgy látszik, mintha már magának a mathematikai tudománynak lehetősége is megoldhatatlan ellenmondással járna. Deductiv tudomány-e, vagy inductiv? Ha deductiv, honnan van, hogy akkor az egész mathematika nem tautologia? Ha pedig inductiv, honnét származik tételeinek szigorúsága?

A mathematikai bizonyítások között különbséget kell tenni. Az egyik csoportba tartoznak azok, melyek nem igazi bizonyítások, hanem igazolások (verificatio). Ilyen pl. LEIBNITZ-é annak igazolására, hogy $2\times2=4$. Ez semmi egyéb, mint két conventionális definitiónak egymáshoz való közelítése abból a czélból, hogy identikus voltukat constatáljuk. Minden partikuláris állítás így igazolható. Ez az igazolás abban különbözik a valódi bizonyítástól, hogy analitikus és terméketlen (új igazságot nem hoz).

Kimutatja azután, hogy minden termékeny mathematikai okoskodás *recurrens* okoskodás. Valamely igazság igaz 1-re. De ha igaz 1-re, akkor igaz 2-re is. Tehát igaz 2-re. De ha igaz 2-re, akkor igaz 3-ra is. Tehát igaz 3-ra is. És így tovább. Miért olyan hatalmas ez az itélet? Mert a lélek hatalmának «megerősítése». A lélek képesnek hiszi magát arra, hogy ezt a cselekedetet végtelen sokszor ismételje.

E megoldás kissé meglepő. POINCARÉ szerint tehát az igazi mathematikai bizonyítás azért olyan meggyöző, mert a lélek benne saját hatalmának megnyilatkozását látja. De megint fölmerül az a kérdés, mi hát az a lélek, mely ilyen szuverén? Kétségtelen azonban az, hogy ezzel a mathematika szorosan össze van kapcsolva az esztétikai tudományokkal, melyekben szintén a lélek szuverén tetszése vagy nem tetszése a döntő.

A II. fejezetben különösen a folytonosság fogalmával foglalkozik. Ez a fogalom nem a tapasztalatból származik, hanem olyas jelenségekből, mint a mikor pl. a kéz nem tud különbséget tenni 10 gramm és 11 gramm, továbbá 11 gramm és 12 gramm között, ellenben nagyon jól észreveszi a 10 gramm és 12 gramm között lévő különbséget. A lélek azt tapasztalja, hogy $A=B$; $B=C$ és $A<C$. Oka van azt hinni, hogy a természetben ez így nem lehetséges. Az ellenmondást meg kell szüntetni az által, hogy végtelen sok tagot közbeiktatva gondol. Így születik meg a folytonosság conventiója.

A III., IV. és V. fejezetben a tér, a geometria és a kisérlet egymáshoz való viszonyaival foglalkozik. Arra a kérdésre igyekszik felelni, hogy mi a geometriai alaptételek természete? A felelet ismét az, hogy ezek lelkünk conventiói. Választásunkat azonban a kisérlet vezeti, de nem korlátolja semmi más, csak az a logikai kényszer, hogy az ellenmondásokat el kell kerülni. A geometria axiomái tehát nem egyebek, mint elálarczozott definitiók. Melyik geometria hát igaz, BÓLYAI é, EUKLIDES-é, vagy talán RIEMANN-é? Ennek a kérdésnek értelme nincs, mert ez ép olyan, mintha azt kérdeznők, melyik az igaz mértékegység: a méter-e, vagy a rőf?

A geometria nem kisérleti tudomány, semmiféle kisérlet sem fogja megmutatni, hogy BÓLYAI-nak van-e igaza vagy EUKLIDESnek. Minden kisérlethez eszköz kell, de nincs olyan eszköz, mely az egyik vagy a másik geometria tulajdonságait ne foglalná magában.

Vázolja azt a különbséget, mely a geometriai tér és a tapasztalati tér (reprezentáló tér) között fölmerül. A geometriai tér: folytonos, végtelen, három dimenziójú, homogén, izotrop. A tapasztalati tér háromféle: látási, mozgási és tapintási tér. A látási tér nem homogén, nem izotrop. A mozgási térnek annyi dimenziója lehet, a hány izmunk van. Kétségtelen, hogy a tapasztalatok hozzájárultak a geometriai tér kialakulásához, de azért a geometria még sem tapasztalati tudomány.

A VI—VIII. fejezetekben a mechanika alapigazságait és alapfogalmait veszi igen erős kritika alá. Első kifogása az, hogy a mechanika kézikönyvei nem tesznek különbséget a között, ami kisérleti tény, és a között, ami mathematikai okoskodásból származik. Ez a kifogás, sajnos, nagyon is igaz, de menthető. A két körülménynek összezavarása a legtöbbször pædagogiai okból történik. Avagy hol van elég idő és tér arra, hogy mindazokat a kisérleteket és meggondolásokat részletesen ismételjük, melyeket Galilei tett, mikor a mozgásnak három törvényére rájutott, melyeket később Newton megfogalmazott? Újabb időben különösen Fröhlich Dynamikájában történt kisérlet arra nézve, hogy a két elem: a kisérleti és a mathematikai külön tartassék. De mekkora nehézséggel jár az ilyen tárgyalás!

De vannak még nagyobb hibák. Absolut teret nem ismerünk, mi csak relativ helyzetváltozásokat láthatunk és a mechanikai tényeket mégis úgy mondjuk ki, mintha volna egy absolut tér, melyre azok vonatkoztathatók. De nincs absolut idő sem, sőt nincs semmiféle módunk arra, hogy két időköz egyenlőségét valahogyan kimutathassuk. Az, hogy az egypercznyi időközt a rákövetkező egypercznyi időközzel egyenlőnek mondjuk, tisztán a megállapodás, a conventio dolga. De még az egyidejüséget sem birjuk constatálni. Mondhatjuk ugyan, hogy a leejtett kő ugyanakkor koppan, mikor ingánk egyet üt, de ezzel a két jelenség egyidejüsége nincs bizonyítva, hiszen a hang keletkezésére és terjedésére idő kell és ez két különböző helyen és különböző körülmények között történik.

A mechanika első elve: a tehetetlenség elve. Semmiképen sem apriori igazság, de ép oly kevéssé tapasztalati elv. Van benne valami a tapasztalatból, de van benne conventio is. Különben a tehetetlenség elve benne van egy tágabbkörü elvben, mely így fogalmazható: valamely test gyorsulása csak a test helyzetétől, a szomszédos testektől és azok sebességétől függ. Már most sem ebben az alakban, sem a közönséges alakban nem lehet kisérletileg igazolni. Honnét tudjam, hogy egy testre nem működik külső erő? Vagy ha valamikor azt tapasztalnók, hogy valamely test gyorsulása *egyéb* dolgoktól is függ, mint a látható testek helyétől és sebességétől, akkor sem változtatnók meg a tehetetlenség elvét, hanem szupponálnánk valami ismeretlen fluidumot, mely a változást létre hozta.

Semmivel sem állunk jobban a mozgás második törvényével, a gyorsulás törvényével. «A gyorsulás egyenlő a testreható erővel osztva a tömeggel. Lehet-e ezt a tapasztalattal igazolni? Szó sincs róla! Hogy lehetséges legyen, mérni kellene tudni három dolgot: a gyorsulást, erőt és tömeget. Tegyük fel, hogy a gyorsulást kinetikus definitiója alapján tudjuk mérni, de hogyan mérjük az erőt és a tömeget? Mi az erő? LAGRANGE szerint az az ok, a mely a test mozgását okozza, KIRCHHOFF szerint a tömeg szorozva a gyorsulással. Egyik definitio sem használható; mi nem azt akarjuk tudni, mi az erő, vagy mi a tömeg; mi egyszerüen csak mérni akarjuk őket (minden más segédeszköz fölhasználása nélkül). Látjuk, hogy ez lehetetlen. Még azt sem tudjuk megállapítáni, hogy két erő mikor egyenlő egymással. Egyik szerint akkor, ha ugyanazt a gyorsulást létesítik. De ez sem kielégítő, mert először föl kell tennem az actio és reactio egyenlőségének elvét, a mi ismét nem tapasztalati elv; másodszor abból, ha tudom, hogy két erő ellenkező irányban hatva hogyan viselkedik, egyáltalában semmit sem tudok következtetni arra az esetre, mikor nem ellenkező irányúak.

Mindezek a nehézségek a tömegmérésnél is föllépnek. Absolut definitiót egyik mennyiségre sem adhatok, a közönséges definitiókat használva pedig circulus vitiosusban mozgok.

A végeredmény tehát a következő: ámbár a mozgás törvényei úgy tünnek fel, mint kisérleti törvények, mégis csak definitio útján sikerül őket megállapítani. Tehát az erő csak a definitio alapján tehető a tömeg és a gyorsulás szorzatával egyenlővé. Minthogy így a törvény a definitióból következik, a kisérlet soha meg nem hazudtolhatja.

Kétségtelen azonban az, hogy a mozgás három törvénye a kisérlettel igazolható, ha nem ragaszkodunk teljesen izolált testekhez, hanem megelégszünk azzal, ha az izoláczió csak közelítő.

Semmivel sem jobb az antropomorfisztikus fölfogás, a mely azt mondja: nem kell az erőt definiálni, mert úgy is minden ember érzi, mi az erő. Nem jobb azért, mert szintén nem mondja meg, hogyan kell az erőt mérni.

A mozgás három törvényét helyettesítheti az energetikus rendszer következő két törvénye:

1. A kinetikus és potentiális energiák összege állandó (energia megmaradásának elve).

2. Ha valamely rendszer t_0 pillanatban A pontban, t_1 pillanatban

B pontban van: akkor az első helyzetből a másodikba mindig úgy megy át, hogy a két energia közötti különbségnek a t_0—t_1 időközben vett középértéke a lehető legkisebb legyen (Hamilton elve).

Kétségtelen, hogy ennek az energetikus rendszernek sok előnye van. De újabb nehézségek támadnak. Hogyan definiáljuk a két energiát? Könnyű akkor, ha a Newton-féle mechanika szerint már előre tudjuk, hogy van erőfüggvény. Ez esetben az egyik energia független a sebességtől, a másik pedig függ attól. De tudjuk, hogy van olyan jelenség is, mikor nincs erőfüggvény és ilyenkor a két energiát még egymástól megkülönböztetni sem tudjuk, nem hogy definiálni tudnók őket.

Ez esetben tehát az energia megmaradásának elve erre redukálódik: «van valami, ami állandó marad». Ez pedig tautologia, mert összes természetkutatásainknak az az alapfeltevése, hogy a lefolyó természeti jelenségekben valami állandónak kell lennie. De van egy másik baj is: a Hamilton elv, vagy a legkisebb hatás elve csak a megfordítható folyamatoknál érvényes s így a meg nem fordítható jelenségek e mechanikában helyet sem találnának.

A végeredmény, melyre Poincaré jut, a következő. A mechanika elvei két alakban mutatkoznak: egyrészt oly igazságok, amelyek a kisérleten alapulnak és közelítőleg igazolva vannak: másrészt postulatumok, amelyeket az egész világra érvényeseknek hirdetünk. Hogy ezekben a postulatumokban van valami, a mi a kisérleten felül van, ez csak onnét van, mert ez a «valami» egyszerű conventio. De ez sem önkényes, mert mindig a kisérlet mutatja meg, melyik conventio a kényelmes.

A IX. fejezet a hypothezisek jelentőségével foglalkozik. Kétségtelen, hogy a tapasztalat az igazságnak egyetlen forrása. De akkor micsoda szerep jut a mathematikai fizikának? A ház kő- és téglahalmaz, de azért egy halmaz kő és tégla nem mindig ház. Hogy ház legyen: a köveknek el kell rendezve lenniök. Hasonlóképen a meztelen kisérleteknek halmaza sem tudomány. Jó kisérlet az, mely nem esetleges tényt mutat. Ennélfogva a kisérleteknek bizonyos rendszerben kell lenniök. Micsoda szempont vezérelhet a rendszer felállításában? Semmi egyéb mint az, hogy jóslásokra képesek legyünk. A tudománynak az a czélja, hogy a jövendőbe beláthassunk. Már pedig jóslásokra csak akkor vagyunk képesek, ha általánosítani tudunk. A kisérlet csak pontokat ad, nekünk interpolálnunk s a pontokat folytonos görbével összekötnünk kell. A mathematikai fizikának az általánosításokat vezetnie kell.

Minden általánosítás azon a hallgatag föltevésen alapszik, hogy a természet «egyszerű» és «egységes». Valamikor azt gondolták, hogy minden természettudományi törvény egyszerű. De most már — sajnos — rájutottunk, hogy nem mindig van így. De azért még most is mindig az egyszerűséget kell keresnünk. MACH megmutatta, hogy ez a tudományok ökonomiájából következik.

Ha a tudomány történetét vizsgáljuk, két egymással ellentétes jelenséget tapasztalunk: majd az egyszerűség rejtőzik el szövevényes jelenségek mögé, majd pedig az egyszerűség csak látszólagos, mely mögött nagyon komplikált jelenségek folynak le. Például igen komplikált a bolygóknak a háborgások folytán megzavart mozgása, de igen egyszerű NEWTON vonzási törvénye, mely itt uralkodik (itt tehát az elrejtett egyszerűséget kellett fölfedezni). Az ellenkezőre példa a BOYLE MARIOTTE törvény, mely mint egyszerű törvény közvetlenül tapasztalható, holott ez az egyszerűség a gázelmélet szerint a molekulák rettenetesen kuszált pályáinak eredménye. Itt tehát az egyszerűség csak látszólagos, csak érzékeink durvasága az oka, hogy a komplikált jelenséget nem látjuk.

Kétségtelen, hogy a mint kutató módszereink hatékonyabbakká és hatékonyabbakká válnak, mindig föl fogjuk fedezni az egyszerűt a szövevényes alatt, azután a szövevényest az egyszerű alatt, azután újból az egyszerűt a szövevényesben és így tovább: anélkül, hogy látnók, mikor érünk a végére. Valahol mégis meg kell állanunk. És hogy a tudomány lehetséges legyen, megállunk ott, a mikor az egyszerűséget elértük. Az egyszerűségre való törekvést, mint a fizika jellemvonását, már szintén MACH ismerte fel és bővebben meg is okolta.

A következőkben az elméletek és a hypothezisek jelentőségével foglalkozik. A hozzá nem értő emberek meglepődnek azon, hogy annyi a fizikai elmélet és hogy azok eltűnnek és újból föltámadnak. Azért azután a tudományt ócsárolják és azt mondják, hogy a tudomány csődöt mondott. Ezek az emberek nem értik a tudomány czélját és nem ismerik eszközeit. Már föntebb láttuk, hogy ahhoz, hogy a tudomány segítségével jóslásokra képesek legyünk, föltétlenül szükséges az általánosítás. Már pedig minden általánosítás hypothezis. A hypothezisnek tehát szükségszerű szerepe van a kutatásban. Tulajdonképen mindig örülnünk kellene, ha egy hypothezisről fölfedeztük, hogy többé nem igaz. Ha t. i. nem igaz, ez csak azért van, mert van valami rendkívüli dolog a jelenségben, amelyet, mikor a hypothezist fölállítottuk, nem vettünk észre. Az elvetett hypothezis nem terméketlen, sőt néha többet ér mint az igazi hypothezis, minthogy új tény fölfedezésére vezetett. Csak azok a hypothezisek a veszedelmesek, amelyeket hallgatagon és önkénytelenül teszünk fel, mert ép ez okból nem is birjuk őket elhagyni.

Vannak hypothezisek, melyek természetesek és így nem mondunk le róluk szivesen. Ilyenek: nagyon messze fekvő testek hatása elhanyagolható, vagy: a kicsiny elmozdulások lineáris törvényeknek hódolnak, vagy: az okozat az oknak folytonos függvénye. Ezek a *szükséges* hypothezisek.

A második fajtához tartoznak a *közömbös* hypothezisek. Így pl. az anyagról föltehetjük akár azt hogy folytonos, akár azt hogy szakadásos. Ezek sem veszedelmesek, ha csak természetüket félre nem ismerjük. Részben hasznosak, mert számításbeli segédeszközök.

Harmadik fajta hypothezisek: a *valódi általánosítások*. Ezeket kell a kisérletnek igazolni vagy meghazudtolni.

A hypotheziseken nő fel a fizikai elmélet. Minden elméletnek meg van a maga haszna még akkor is, ha már elhagytuk. Így például Fresnel fényelméletét elhagytuk s most Maxwell elméletének álláspontján állunk. De azért Fresnel munkája nem volt felesleges. Ami a jelenségben lényeges, azt Fresnel elmélete ma is épúgy megmondja, mint azelőtt. Maxwell elméletét csak azért fogadtuk el, mert általánosabb.

Ilyen fajta hypothezisek olyanok, mint a költő metaforái. Innét érthető, hogyan van az, hogy bizonyos elméletek sirjukból újra felélednek és új életet kezdenek? Onnét van, mert bizonyos jó oldal van bennük. Még 15 évvel ezelőtt is alig volt valami nevetségesebb, naivabb és ósdibb, mint Coulomb elektromos fluidumai és íme ma újra uralkodnak Lorentz elektronjainak képében. De még ennél is jobb példa: Carnot elve. Carnot hamis föltevésekből indúlt ki, rosszul indokolta, rosszul is fogalmazta tételét és mégis igaza volt, mert az az igazság ma Clausius elve, vagy a thermodynamika második főtétele gyanánt szerepel. A tétel levetette azt, a mi benne hamis volt, a hogy a fának száraz ágait levágják.

A következőkben általános áttekintést nyújt a ma uralkodó főbb elméletekről. Kétségtelen, hogy ez elméletek legtöbbje mechanikus magyarázatok felé törekszik. Az egyik részen a molekulákat mozgásokkal és távolbaható erőkkel ruházzák fel. A másik részen kárhoztatják a távolbahatást, és mindent a molekulák ütközésével akarnak megmagyarázni. Viszont Hertz az erőt teljesen számûzi, tehát az ütközésnél fölmerülő közelható erőt sem engedi meg; az ő molekulái geometriai összeköttetéseknek vannak alávetve.

Már Maxwell megmutatta, hogy valahányszor a jelenség eleget tesz az energia megmaradása és a legkisebb hatás elvének, akkor végtelen sok mechanikai magyarázat lehetséges. Viszont König megmutatta, hogy végtelen sokféle csuklós rendszerrel is lehet mechanikus magyarázatokat adni. Hasonlóképen kimutatható, hogy távolbaható czentrális erőkkel is lehetséges kielégítő mechanikai magyarázat. És végül kimutatható az is, hogy minden megmagyarázható ütközéssel.

Ez utóbbi a ma uralkodó rendszer, amely fölteszi, hogy az anyag atómokból áll; föl kell továbbá tennie valamelyes anyagtalan fluidumot, amilyen pl. az éther. Némelyek az éthert úgy tekintik, mint az egyedüli valódi anyagot, a szerényebbek a közönséges anyagot összesürüsödött éthernek nézik. Mások ismét a közönséges anyagban nem látnak egyebet, mint az éther egyenetlenségeit. Lord Kelvin szerint az anyag örvénylő éther, Riemann szerint az a hely, a hol az éther folyton megsemmisül, Larmor és Wiechert szerint megcsavarodott és feszülésben lévő éther. Mindezek a föltevések csak arra valók, hogy mechanikus magyarázat lehetséges legyen.

A főczél azonban ne legyen a mechanikus magyarázat, hanem a természet egységes volta. Egységet akarunk, semmi egyebet. Ez az egység eddig elég szépen nyilvánul. Az energia megmaradásának elve mindig csak megerősítést nyert. Csak újabb időben, Poincaré könyvének megjelenése óta, merült föl kétely eziránt. A radium oly csodálatos viselkedést mutat, hogy az energia megmaradásának elvét csak bizonyos hypothezisekkel lehet fönntartani. Épígy a legkisebb hatás elve is olyan, mely a megfordítható jelenségeknél beigazolást nyert. A meg nem fordítható jelenségek ugyan kivételt képeznek, de ezek is egy egységes elvnek: Clausius tételének tesznek eleget, mely mindazon jelenségekben beigazolást nyert, melyekben a hőnek valami szerepe van.

Az ismertetés végére érve mondhatjuk, hogy ámbár sokat abból, a mit Poincaré mond, már Mach, Stallo, Hertz és más természetfilozófusok könyveiben is olvastunk, különösen pedig azokat a dolgokat, melyek mechanikai fogalmaink kritikájára vonatkoznak: mégis nagyon sok új gondolatot, meglepő kapcsolatot és szellemes általánosítást találunk e könyvben.

Mikola Sándor.

MEGOLDOTT FELADATOK.

33. Adva van az $A_1A_2A_3A_4$ tetraeder és a P pont. Az A_1P, A_2P, A_3P illetőleg A_4P metszéspontja az $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ illetőleg $A_1A_2A_3$ síkkal legyen B_1, B_2, B_3 illetőleg B_4. Megvizsgálandó ama P pontok geometriai helye, a melyekre nézve a $B_1B_2B_3B_4$ tetraeder köbtartalma állandó.

(Tőtössy.)

Megoldás Csillag Vilmos műegyetemi tanársegédtől.

Mintául szolgált azon analitikai kifejtés, melylyel Tőtössy tanár úr a szintén tőle kitűzött, analog síkbeli feladatot tárgyalta. (Lásd e folyóirat I. évf. 292. l. ff.)

1. Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraedert választjuk koordinátatetraedernek. Mint egységsíkot, vagyis azt a síkot, melynek egyenlete

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

választjuk a végtelenben fekvő síkot; ekkor tudjuk, hogy az egységpont, melynek koordináta-viszonyai

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : 1 : 1 : 1,$$

nem más, mint a koordinátatetraeder súlypontja E és valamely tetszőleges P pont koordináta-viszonyai meg lesznek adva

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 := PA_2A_3A_4 : PA_3A_4A_1 : PA_4A_1A_2 : PA_1A_2P_3$$

tetraederek térfogat-mérőszámainak viszonyaival, a hol természetesen a térfogatok előjelei is tekintetbe veendők. Ezért ezeket a koordinátákat *térfogat-koordinátáknak* is szokás nevezni.*

Első teendőnk e koordinátarendszerben valamely tetraeder térfogatát szögpontjainak koordinátáiban kifejezni. Ez koordinátatransformáczióval eszközölhető.

---

* L. pl. Fiedler Darst. Geom. III. köt. 1888. p. 108.

Az $A_1A_2A_4$ lap legyen valamely *derékszögű* koordinátarendszernek xy-síkja, a z tengely menjen keresztül az A_3 ponton, a koordináta kezdőpontot jelöljük O-val és OA_2 legyen az y tengely. Ily módon az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok derékszögű koordinátái legyenek rendre

$$(m_{11}, m_{12}, 0)\,;\quad (0, m_2, 0)\,;\quad (0, 0, m_3)\,;\quad (m_{41}, m_{42}, 0),$$

akkor az

$$A_2A_3A_4 \equiv (\mathbf{A}_1),\quad A_3A_4A_1 \equiv (\mathbf{A}_2),\quad A_4A_1A_2 \equiv (\mathbf{A}_3),$$

illetőleg

$$A_1A_2A_3 \equiv (\mathbf{A}_4)$$

koordinátasíkok egyenletei, vonatkoztatva a derékszögű koordinátarendszerre

$$m_3(m_2-m_{42})\,.\,x+m_3m_{41}\,.\,y+m_2m_{41}\,.\,z-m_2m_3m_{41}=0$$

$$m_2(m_{12}-m_{42})\,.\,x+m_3(m_{41}-m_{11})\,.\,y+$$
$$+(m_{12}m_{41}-m_{42}m_{11})\,.\,z-m_3(m_{12}m_{41}-m_{42}m_{11})=0$$

$$z=0$$

illetőleg

$$m_3(m_2-m_{12})\,.\,x+m_3m_{11}\,.\,y+m_2m_{11}\,.\,z-m_2m_3m_{11}=0.$$

A tetszőleges P pont derékszögű koordinátái legyenek x, y, z; az $A_1A_2A_3A_4$ koordinátatetraederre vonatkoztatott térfogatkoordinátái pedig legyenek x_1, x_2, x_3, x_4; akkor a kétféle koordináta közötti összefüggést megadják a következő egyenletek:

$$\rho x_1=k_1\,[m_3(m_2-m_{42})\,x+m_3m_{41}y+m_2m_{41}z-m_2m_3m_{41}]$$

$$\rho x_2=k_2\,[m_2(m_{12}-m_{42})\,x+m_3(m_{41}-m_{11})\,y+$$
$$+(m_{12}m_{41}-m_{42}m_{41})\,z-m_3(m_{12}m_{41}-m_{42}m_{11})]$$

$$\rho x_3=k_3\,[0\,.\,x+0\,.\,y+1\,.\,z-0\,.\,m_3]$$

$$\rho x_4=k_4\,[m_3(m_2-m_{12})\,x+m_3m_{11}y+m_2m_{11}z-m_2m_3m_{11}],$$

a hol a k_1, k_2, k_3, k_4 állandók felett úgy kell rendelkeznünk, hogy

$$\rho\,(x_1+x_2+x_3+x_4)\equiv m_3\,[m_2(k_1+k_4)-m_{42}(k_1+k_2)-m_{12}(k_4-k_2)]\,.\,x+$$
$$+\,m_3\,[m_{41}(k_1+k_2)+m_{11}(k_4-k_2)]\,.\,y+$$
$$+\,[m_{41}(m_2k_1+m_{12}k_2)+k_3+m_{11}(m_2k_4-m_{42}k_2)]\,.\,z-$$
$$-\,m_3\,[m_{41}(m_2k_1+m_{12}k_2)+m_{11}(m_2k_4-m_{42}k_2)]=0$$

az egységsíknak, tehát a mi esetünkben a végtelenben fekvő síknak a derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott egyenlete legyen.

Ezt a feltételt kielégítik a

$$k_1 = -1, \quad k_2 = k_4 = 1, \quad k_3 = m_{41}(m_2 - m_{12}) + m_{11}(m_{42} - m_2) \gtreqless 0$$

értékek, mert ezeket az értékeket behelyettesítvén,

$$\rho(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \equiv 0 . x + 0 . y + 0 . z + m_{41}(m_2 - m_{12}) + \\ + m_{11}(m_{42} - m_2) = 0$$

lesz a végtelenben fekvő síknak a derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott egyenlete.

Az a lineár helyettesítés tehát, mely az átmenetet a térfogatkoordinátáktól a derékszögű koordinátákra közvetíti, következő:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= m_3(m_{42} - m_2)\, x - m_3 m_{41} . y - m_2 m_{41} z + m_2 m_3 m_{41} \\ \rho x_2 &= m_3(m_{12} - m_{42})\, x + m_3(m_{41} - m_{11})\, y + (m_{12} m_{41} - m_{42} m_{11})\, z - \\ &\qquad - m_3(m_{12} m_{41} - m_{42} m_{11}) \\ \rho x_3 &= [m_{41}(m_2 - m_{12}) + m_{11}(m_{42} - m_2)] . z \\ \rho x_4 &= m_3(m_2 - m_{12})\, x + m_3 m_{11} y + m_2 m_{11} z - m_2 m_3 m_{11} . \end{aligned}$$

Ha ezt az egyenletrendszert az x, y és z szerint megoldjuk, akkor az

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_{11} x_1 + m_{41} x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \\ y &= \frac{m_{12} x_1 + m_2 x_2 + m_{42} x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \\ z &= \frac{m_3 x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \end{aligned} \tag{1}$$

egyenletekben nyerjük *azt a lineár helyettesítést, melynek segítségével derékszögű koordinátákról áttérhetünk térfogatkoordinátákra.*

A $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, $P^{(4)}$ pontok derékszögű koordinátái legyenek rendre $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$; $x^{(2)}$, $y^{(2)}$, $z^{(2)}$; $x^{(3)}$, $y^{(3)}$, $z^{(3)}$; $x^{(4)}$, $y^{(4)}$, $z^{(4)}$; térfogatkoordinátái pedig $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, $x_3^{(i)}$, $x_4^{(i)}$; $(i = 1, 2, 3, 4.)$.

Feladatunk a $P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}P^{(4)}$ tetraeder térfogatát, V-t az $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, $x_3^{(i)}$, $x_4^{(i)}$ koordinátákban kifejezni.

Derékszögű koordinátákban e tetraeder hatszoros térfogata

$$6V = \begin{vmatrix} x^{(1)} & y^{(1)} & z^{(1)} & 1 \\ x^{(2)} & y^{(2)} & z^{(2)} & 1 \\ x^{(3)} & y^{(3)} & z^{(3)} & 1 \\ x^{(4)} & y^{(4)} & z^{(4)} & 1 \end{vmatrix}$$

Az (1) alatti értékeket behelyettesítvén és az egyenlet mindkét oldalát a közös nevezőkkel szorozván, lesz:

$$6V(x_1^{(1)}+x_2^{(1)}+x_3^{(1)}+x_4^{(1)})(x_1^{(2)}+x_2^{(2)}+x_3^{(2)}+x_4^{(2)})(x_1^{(3)}+x_2^{(3)}+x_3^{(3)}+x_4^{(3)})(x_1^{(4)}+x_2^{(4)}+x_3^{(4)}+x_4^{(4)})$$

$$= \begin{vmatrix} m_{11}x_1^{(1)}+m_{41}x_4^{(1)} & m_{12}x_1^{(1)}+m_2x_2^{(1)}+m_{42}x_4^{(1)} & m_3x_3^{(1)} & x_1^{(1)}+x_2^{(1)}+x_3^{(1)}+x_4^{(1)} \\ m_{11}x_1^{(2)}+m_{41}x_4^{(2)} & m_{12}x_1^{(2)}+m_2x_2^{(2)}+m_{42}x_4^{(2)} & m_3x_3^{(2)} & x_1^{(2)}+x_2^{(2)}+x_3^{(2)}+x_4^{(2)} \\ m_{11}x_1^{(3)}+m_{41}x_4^{(3)} & m_{12}x_1^{(3)}+m_2x_2^{(3)}+m_{42}x_4^{(3)} & m_3x_3^{(3)} & x_1^{(3)}+x_2^{(3)}+x_3^{(3)}+x_4^{(3)} \\ m_{11}x_1^{(4)}+m_{41}x_4^{(4)} & m_{12}x_1^{(4)}+m_2x_2^{(4)}+m_{42}x_4^{(4)} & m_3x_3^{(4)} & x_1^{(4)}+x_2^{(4)}+x_3^{(4)}+x_4^{(4)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & x_4^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & x_4^{(3)} \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} & x_3^{(4)} & x_4^{(4)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{41} \\ m_{12} & m_2 & 0 & m_{42} \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

De a második determinánstényező nem más, mint az $A_1A_2A_3A_4$ tetraeder hatszoros térfogata ; ezt Θ-val jelölvén, lesz :

$$\frac{6V}{\Theta} = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & x_4^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & x_4^{(3)} \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} & x_3^{(4)} & x_4^{(4)} \end{vmatrix}}{(x_1^{(1)}+x_2^{(1)}+x_3^{(1)}+x_4^{(1)})(x_1^{(2)}+x_2^{(2)}+x_3^{(2)}+x_4^{(2)})(x_1^{(3)}+x_2^{(3)}+x_3^{(3)}+x_4^{(3)})(x_1^{(4)}+x_2^{(4)}+x_3^{(4)}+x_4^{(4)})}. \quad (2)$$

2. E képlet segítségével a keresett geometriai hely egyenlete tüstént felírható. A megadott P pont koordinátáit x_1, x_2, x_3, x_4-gyel jelölvén, a feladatban szereplő B_1, B_2, B_3, B_4 pontok koordinátái lesznek :

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} : x_2^{(1)} : x_3^{(1)} : x_4^{(1)} &= 0 : x_2 : x_3 : x_4 \\ x_1^{(2)} : x_2^{(2)} : x_3^{(2)} : x_4^{(2)} &= x_1 : 0 : x_3 : x_4 \\ x_1^{(3)} : x_2^{(2)} : x_3^{(3)} : x_4^{(3)} &= x_1 : x_2 : 0 : x_4 \\ x_1^{(4)} : x_2^{(4)} : x_3^{(4)} : x_4^{(4)} &= x_1 : x_2 : x_3 : 0. \end{aligned}$$

Ezeket az értékeket helyettesítsük a (2) alatti képletbe, akkor lesz :

$$\frac{6V}{\Theta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 0 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & 0 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix}}{(x_2+x_3+x_4)(x_3+x_4+x_1)(x_4+x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)}$$

$$= \frac{-3x_1x_2x_3x_4}{(x_2+x_3+x_4)(x_3+x_4+x_1)(x_4+x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)} = -\frac{3}{m}.$$

A keresett geometriai hely egyenlete tehát:

$$F_m \equiv (x_2+x_3+x_4)(x_3+x_4+x_1)(x_4+x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)- \\ -m \,.\, x_1x_2x_3x_4 = 0 \qquad (3)$$

a hol az m állandó a $B_1B_2B_3B_4$ tetraeder térfogat-mérőszámának reczi-prok értéke, ha az $A_1A_2A_3A_4$ tetraeder háromszoros térfogatának mérőszámát tekintjük mértékegységnek.

Ez egyenlet dimenziója az x_i-pontkoordinátákban négy, *a keresett geometriai hely tehát negyedrendű felület.*

3. Tekintsük mindjárt az összes felületeket, melyek úgy keletkeznek, hogy m valós változó és evvel a $B_1B_2B_3B_4$ tetraeder térfogata felvesz minden értéket $-\infty$-től $+\infty$-ig. A (3) alatti egyenlet

$$F_m = u - mv = 0,$$

melyben m mint lineár paraméter fordul elő, azt mutatja, hogy *az egyenlet negyedrendű felület-sort képvisel,* vagyis oly egyszerűen végtelen sok negyedrendű felületet, *mely ugyanazt a tizenhatodrendű görbét bírja közösen.*

Az

$$m = 0 \quad \text{és} \quad m = \infty$$

paraméterértékeknek megfelelnek az

$$F_0 \equiv u \equiv (x_2+x_3+x_4)(x_3+x_4+x_1)(x_4+x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3) = 0$$

és

$$F_\infty \equiv v \equiv x_1x_2x_3x_4 = 0$$

degeneráló negyedrendű felületek.

Mind a kettő négy-négy síkból áll. Az első (F_0) esetben egy-egy sík keresztűl megy a koordinátatetraeder egyik szögpontján és párhuzamos a szemben fekvő lappal; a második (F_∞) esetben a négy sík összeesik a koordinátatetraeder négy lapjával. E két degenerált negyedrendű felület teljes metszése megadja a *felületsor-tizenhatodrendű alapgörbéjét,* mely tehát esetünkben *tizenhat egyenesből* áll.

Ebből a tizenhat egyenesből három-három keresztül megy egyik koordináta-szögponton és parallel a szemben fekvő koordinátalap éleivel, úgy hogy az F_0 síkjai valamennyi Fm-felület közös érintősíkjai, melyek a koordináta-szögpontokban érintenek. Ez összesen *tizenkét* egyenes, a még hiányzó *négy* a koordinátatetraeder lapjainak végtelenben fekvő egyenesei. Ez utóbbiakat a következőkben q_i-vel jelöljük, úgy hogy q_i az $(A_jA_kA_l)$-síknak végtelenben fekvő egyenese. Ez alkalommal és a következőkben mindig $i, j, k, l \equiv 1, 2, 3, 4$ és i, j, k, l egymástól különbözők.

Legyen továbbá $\mathbf{A}_i$ az A_i koordináta-szögponttal szemben fekvő koordinátasík; $\mathbf{A}_i'$ az A_i ponton keresztül menő sík, a mely parallel $\mathbf{A}_i$-vel; A_i' az $\mathbf{A}_1'\mathbf{A}_2'\mathbf{A}_3'\mathbf{A}_4'$ tetraederben az $\mathbf{A}_i'$-vel szemben fekvő szögpont; E az egységpont, mely a koordinátatetraeder súlypontja; e_i az A_i és E pontok összekötő sugara, tehát a koordinátatetraeder súlyvonala; E_i az e_i és $\mathbf{A}_i$ metszéspontja; végre Q_{ij} jelelje az A_iA_j tetraederél ∞-ben fekvő pontját.

4. *A felület további egyenesei és szimmetria-tulajdonságai.* A koordinátatetraeder éleinek ∞-ben fekvő pontjai az F_m-felület *dupla pontjai*, mert egy részről az (A_iA_j) irányának, Q_{ij}-nek koordinátái:

$$x_i : x_j : x_k : x_l = 1 : -1 : 0 : 0$$

a

$$\frac{\partial F_m}{\partial x_r} = 0 \quad (r=1, 2, 3, 4)$$

egyenletrendszert azonosan kielégítik; más részről a Q_{ij} pólus *első* poláris felülete

$$P_{ij}' \equiv \frac{\partial F_m}{\partial x_i} - \frac{\partial F_m}{\partial x_j} = 0,$$

vagyis

$$P_{ij}' \equiv (x_i - x_j)\,[(x_i + x_j + x_k)(x_i + x_j + x_l) - m x_k x_l] = 0$$

széteső harmadrendű felület, második poláris felülete pedig

$$P_{ij}'' \equiv \frac{\partial P_{ij}'}{\partial x_i} - \frac{\partial P_{ij}'}{\partial x_j} = 0$$

$$P_{ij}'' \equiv (x_i + x_j + x_k)(x_i + x_j + x_l) - m x_k x_l = 0$$

másodrendű hengerfelület, melynek alkotói természetesen az A_iA_j-vel párhuzamosak.

Ismeretes, hogy a pólusból körülírt kúp (henger) érintési görbéjét az első poláris felület metszi ki az eredeti felületből.

Közvetlenül látni, hogy a Q_{ij} ∞-ben fekvő pólusból F_m körülírt henger érintési görbéje két részből áll: az

$$\begin{aligned} F_m &= 0 \\ P_{ij}'' &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

és az

$$\begin{aligned} F_m &= 0 \\ x_i - x_j &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

görbékből.

Az (I) alattinak meghatározása végett a P_{ij}'' hengerfelület tetszőleges pontjának koordinátáit

$$x_i + \lambda : x_j - \lambda : x_k : x_l; \quad P''(x_i, x_j, x_k, x_l) \equiv 0$$

F_m-be helyettesítvén,

$$(x_k+x_l)(x_i+x_j+x_k+x_l)=0$$

eredményre jutunk, a mi azt mutatja, hogy (I) ismét két részre oszlik, az

$$F_m=0$$
$$x_i+x_j+x_k+x_l=0$$

vagyis F_m-nek a négy ∞-ben fekvő (q_1, q_2, q_3, q_4) egyenesére és az

$$\begin{aligned} F_m&=0 \\ x_k+x_l&=0 \end{aligned} \qquad (\mathrm{I}^*)$$

síkmetszésre.

Ez a síkmetszés négy egyenesből áll, melyek parallelogrammot képeznek. Ugyanis kettő-kettő ez egyenesek közül parallel az A_kA_l ill. az A_iA_j tetraederéllel.

Bizonyítás. Az

$$x_k+x_l=0$$

az a sík, mely az A_iA_j élen keresztül megy és parallel az A_kA_l-éllel; tartalmazza tehát az F_m felületsor tizenhat alapegyenese közül azt a kettőt, mely parallel az A_kA_l éllel. A szóban forgó síkmetszésnek még hiányzó része szintén egyenes pár, melynek meghatározása végett keressük fel pl. az A_iA_j felező pontján

$$x_i:x_j:x_k:x_l=1:1:0:0$$

keresztülmenő és az A_kA_l irányába, Q_{kl}

$$x_i:x_j:x_k:x_l=0:0:1:-1$$

pontba futó

$$x_i:x_j:x_k:x_l=1:1:\lambda:-\lambda$$

sugárnak végesben fekvő metszéspontjait az F_m felülettel. Erre vonatkozólag az

$$F(1,\,1,\,\lambda,\,-\lambda)=0$$

egyenletből

$$\lambda=\frac{2}{\sqrt{1-m}}$$

hol

$$m \gtreqless 1$$

úgy, hogy a metszéspontok koordináta-viszonyai:

$$x_i:x_j:x_k:x_l=\pm(1-m)^{\frac{1}{2}}:\pm(1-m)^{\frac{1}{2}}:\pm 2:\mp 2.$$

Ezeken a pontokon keresztül, az A_iA_j — irányába, Q_{ij} —

$$x_i:x_j:x_k:x_l=1:-1:0:0$$

pontba futó egyenespár pedig valóban a felületen fekszik, mert ez egyenespár parameteres előállítása

$$x_i : x_j : x_k : x_l = \pm (1-m)^{\frac{1}{2}} + \lambda : \pm (1-m)^{\frac{1}{2}} - \lambda : \pm 2 : \mp 2$$

és λ-tól függetlenül

$$F_m(\pm(1-m)^{\frac{1}{2}} + \lambda, \pm(1-m)^{\frac{1}{2}} - \lambda, \pm 2, \pm 2) \equiv 0.$$

Ezzel mindegyik

$$x_k + x_l = 0$$

síkban *két*, összesen tehát tizenkét egyenest találtunk úgy, hogy a tizenhat alapegyenessel együtt már huszonnyolcz egyenest ismerünk az F_m felületen.

Megjegyzendő még, hogy az imént talált tizenkét egyenes

1.) *valós*, ha

$$m < 1;$$

2.) ha

$$m = 1,$$

akkor *négy-négy* az

$$x_i + x_j = 0$$

és

$$x_k + x_l = 0$$

parallel síkok közös állásában (∞-ben fekvő egyenesében) — *összeesik;*

3.) *képzetes*, ha

$$m > 1.$$

A mi pedig a (II) síkmetszést illeti, legyen ennek tetszőleges pontja:

$$a_{ij} : a_{ij} : x_3 : x_4,$$

akkor ezen a ponton és a Q_{ij}-n átmenő hengeralkotó

$$a_{ij} + \lambda : a_{ij} - \lambda : x_3 : x_4$$

és az

$$F_m(a_{ij} + \lambda, a_{ij} - \lambda, x_3, x_4) = 0$$

egyenletből

$$\lambda^2 = 0$$

adódik, vagyis ez esetben a hengeralkotó két összeeső pontban érint. Minthogy pedig $F_m(x_1, x_2, x_3, x_4)$ a *koordinátáк szimmetrikus függvénye,* közvetlenül látni, hogy ha $x_i : x_j : x_k : x_l$ pontja a felületnek, akkor

$$x_j : x_i : x_k : x_l$$

szintén az. Más szóval: *az F_m felület szimmetrikus mindegyik*

$$x_i - x_j = 0$$

vagyis (A_kA_lE) *síkra, mint szimmetria-síkra és az* (A_iA_j) *tetraederélre, mint a szimmetria-sugarak irányára vonatkozólag.*

Az (x_1, x_2, x_3, x_4) elemek mind a huszonnégy permutácziója succes-siv transpozicziókkal képezhető; csupán két koordináta helycseréje pedig geometriailag az említett szimmetriák egyikének alkalmazását jelenti. Ennek következtében, ha az F_m felület egy pontjából kiindulunk és a jellemzett hat szimmetriát (mindegyiket négyszer) fölhasználjuk, összesen huszonnégy pontból álló csoportot szerkeszthetünk a felületen.

Megemlítjük még e helyen, hogy mindegyik F_m felületre vonatkozólag az egységpont poláris síkja a végtelenben van. Ebből következik, hogy *az egységpontnak az összes* F_m *felületekre vonatkozó második poláris felületei konczentrikus másodrendű felületek*, melyeknek közös középpontja az egységpontba vagyis az alaptetraeder súlypontjába esik.

5. Határozzuk meg a sor *egy tetszőleges* F_m *felületének aszimptota-síkjait.* Az érintősík egyenlete

$$\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_1}\right) x_1 + \left(\frac{\partial F_m}{\partial x_2}\right) x_2 + \left(\frac{\partial F_m}{\partial x_3}\right) x_3 + \left(\frac{\partial F_m}{\partial x_4}\right) x_4 = 0,$$

mely az $(A_jA_kA_l)$ tetraederlap q_i végtelenben fekvő egyenesének tetsző-leges pontjában a következő alakot ölti:

$$\mathbf{W}_i^{(m)} \equiv m x_i + x_j + x_k + x_l = 0.$$

Látni, hogy F_m-nek a q_1, q_2, q_3 ill. q_4 végtelenben fekvő egyenese mentén az érintősík állandó, tehát

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1^{(m)} &\equiv m x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \mathbf{W}_2^{(m)} &\equiv x_1 + m x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \mathbf{W}_3^{(m)} &\equiv x_1 + x_2 + m x_3 + x_4 = 0 \qquad (4) \end{aligned}$$

illetőleg

$$\mathbf{W}_4^{(m)} \equiv x_1 + x_2 + x_3 + m x_4 = 0$$

egyenletei az aszimptota-síkoknak, melyeknek érintési egyenesei (q_i) kétszer számítanak úgy, hogy a föntebb talált huszonnyolcz egyeneshez négy újabb járul és összesen immár *harminczkét egyenest* ismerünk az F_m felületen.

Az aszimptota-síkok szerkesztése. Minthogy a (4) alatti:

$$W_i^{(m)} \equiv m x_i + x_j + x_k + x_l$$

aszimptota-sík parallel az

$$\mathbf{A}_i \equiv A_jA_kA_l$$

koordináta-síkkal, elegendő, ha $\mathbf{W}_i^{(m)}$-nek egy pontját, pl. az $e_i \equiv A_iE$ sugárral való metszéspontját $(e_i, \mathbf{W}_i^{(m)})$ meghatározzuk. Az E pont koordináta-viszonyai

$$x_i : x_j : x_k : x_l = 1 : 1 : 1 : 1\ ;$$

az A_i pont koordináta-viszonyai

$$x_i : x_j : x_k : x_l = 1 : 0 : 0 : 0\ ;$$

az A_iE egyenes parameteres előállítása tehát:

$$x_i : x_j : x_k : x_l = 1 + \lambda : 1 : 1 : 1.$$

Ezt az aszimptota-sík egyenletébe helyettesítve, az

$$m(1+\lambda)+1+1+1=0$$

egyenletből

$$\lambda = -\frac{m+3}{m},$$

úgy, hogy a keresett $(e_i, \mathbf{W}_i^{(m)})$ pont koordináta-viszonyai:

$$x_i : x_j : x_k : x_l = -\frac{3}{m} : 1 : 1 : 1.$$

Negativ m-nél az aszimptota-sikok belépnek a koordináta-tetraeder belsejébe, pozitiv m-nél nem.

6. A (4) alatti aszimptota-síkok kivételes helyzetűek lesznek, ha

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)^3(m+3) = 0.$$

Az

$$m = 1$$

esetben a négy aszimptota-sík a tér végtelenben fekvő síkjában egyesül;

$$m = -3$$

esetben pedig mind a négy aszimptota-sík az egységponton, vagyis az alaptetraeder súlypontján megy keresztül.

Általánosságban a (4) alatti aszimptota-síkok tetraedert zárnak be. Ezen *aszimptotikus tetraeder* $W_i^{(m)} = \mathbf{W}_j^{(m)}\mathbf{W}_k^{(m)}\mathbf{W}_l^{(m)}$ szögpontjainak koordináta-viszonyai (4) alapján:

$$\begin{aligned} W_1^{(m)};\quad & x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = -(m+2) : 1 : 1 : 1 \\ W_2^{(m)};\quad & x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : -(m+2) : 1 : 1 \\ W_3^{(m)};\quad & x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : 1 : -(m+2) : 1 \\ W_4^{(m)};\quad & x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : 1 : 1 : -(m+2). \end{aligned} \tag{5}$$

A $W_i^{(m)}$ szögpontok tehát az

$$e_i \equiv A_i E$$

egyeneseken feküsznek. Az

$$A_1 A_2 A_3 A_4;\ A_1' A_2' A_3' A_4';\ W_1^{(m)} W_2^{(m)} W_3^{(m)} W_4^{(m)}$$

szögpontok három oly tetraedert alkotnak, melyek közül bármely kettő perspektiv helyzetű, oly módon, hogy E a perspektiv czentrum, a végtelenben fekvő sík pedig a perspektiv-átmetszés síkja.

Ha

$$m = -2,$$

akkor az aszimptotikus tetraeder szögpontjai a koordináta-tetraeder lapjainak súlypontjaiba, az E_i pontokba esnek.

7. Az *aszimptotikus tetraeder térfogatát* — viszonyítva a koordinátatetraeder térfogatához — megkapjuk, ha a $W_i^{(m)}$ szögpontok (5) alatti koordináta-viszonyait a (2) alatti képletbe helyettesítjük; az $\frac{m-1}{m-1}$ tényező elhagyásával:

$$T_m = \left(\frac{m+3}{m-1}\right)^3. \tag{6}$$

Jegyzet.

$$T_0 = -27$$

és

$$T_{-2} = -\frac{1}{27}.$$

vagyis egy adott tetraeder szögpontjain keresztül a szemben fekvő lapokkal parallel vezetett síkok új hasonló tetraedert alkotnak, melynek térfogata huszonhétszer akkora, mint az eredeti tetraederé; vagy a mi ugyanaz: egy adott tetraeder lapjainak súlypontjai új, hasonló tetraedert alkotnak, melynek térfogata huszonhétszer kisebb mint az eredetié.

8. A (6) sz. képletből egyrészről kitűnik, hogy

$$T_{-3} = 0;$$

a mi előrelátható volt, mert már a 6. pont elején láttuk, hogy az F_{-3} felületnek mind a négy aszimptota-síkja az egységponton megy keresztül.

Másrészről az

$$m = 1$$

esetben T_m helyettesítési értéke elveszti értelmét. Azonban határértéke

$$\lim_{m=1} T_m = \infty.$$

Ebben az esetben a felület egyenlete a következő alakra hozható:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)\sum_{i=1}[x_i^2(x_j+x_k+x_l)+2x_jx_kx_l]=0,$$

a hol $(i\,j\,k\,l)$ az $(1\;2\;3\;4)$ ismétlés nélkül való kombinácziója. Ezen felület tehát két részből áll: az

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0$$

egyenletnek megfelelő végtelenben fekvő síkból és részletesen kiírva az

$$x_1^2(x_2+x_3+x_4)+x_2^2(x_3+x_4+x_1)+x_3^2(x_4+x_1+x_2)+x_4^2(x_1+x_2+x_3)+$$
$$+2x_2x_3x_4+2x_3x_4x_1+2x_4x_1x_2+2x_1x_2x_3=0$$

egyenletnek megfelelő harmadrendű felületből. Ezen harmadrendű felület egyenlete könnyen a következő alakra hozható:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^3-x_1^3-x_2^3-x_3^3-x_4^3=0,$$

hol

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)-x_1-x_2-x_3-x_4\equiv 0,$$

a mi azt mutatja, hogy a koordinátatetraeder lapjai és a végtelenben fekvő sík együttvéve képezik ezen Clebsch-től talált *harmadrendű diagonálisfelület* pentaederét.*

Lássuk az F_m sorban azt a felületet, mely az E egységponton megy keresztül. Az

$$F_m(1,\,1,\,1,\,1)=0$$

egyenletből

$$m=81$$

értéket kapjuk. Minthogy pedig

$$\left(\frac{\partial F_{81}}{\partial x_i}\right)_{x_1=x_2=x_3=x_4=1} \equiv 0 \qquad (i=1,\,2,\,3,\,4),$$

E az F_{81}-nek *szinguláris pontja* és a tér bármely pontjának F_{81}-re vonatkozó első poláris felülete az E ponton keresztül megy.

9. Visszatérve az aszimptotikus tetraeder térfogatának (6) alatti képletére

$$T_m=\left(\frac{m+3}{m-1}\right)^3;$$

* Lásd bővebben pl. Salmon-Fiedler, Anal. Geom. d. Raumes. 1880. p. 414—416. és az ott idézett értekezésekben.

látni, hogy

$$T_m = -T_{m'},$$

ha

$$\frac{m'+3}{m'-1} = -\frac{m+3}{m-1}$$

vagyis, ha

$$mm' + m + m' - 3 = 0.$$

Ez a bilineár relázió — m és m' fölcserélhető lévén — involucziót jelent úgy, hogy a megfelelő (F_m, $F_{m'}$) *felületpárok szintén involucziót alkotnak, melynek dupla-elemei az*

$$m^2 + 2m - 3 = 0\,; \quad (m_1 = -3,\ m_2 = 1)$$

egyenlet alapján a már föntebb tárgyalt F_{-3} és F_1 *felületek.* Involucziót képeznek egyszersmind a megfelelő aszimptotikus tetraederpárok, valamint a megfelelő parallel aszimptota-síkok ($\mathbf{W}_i^{(m)}$, $\mathbf{W}_i^{(m')}$) is. Még pedig a $\mathbf{W}_i^{(m)}$ és $\mathbf{W}_i^{(m')}$ aszimptota-síkok, melyek az alaptetraeder $\mathbf{A}_i$ lapjával parallelek, az E egységponttól *aequidistáns-módon* sorakoznak, mert ez involuczió *duplaelemeire*

$$m_1 = -3 \quad \text{és} \quad m_2 = 1$$

vonatkozólag láttuk, hogy $\mathbf{W}_i^{(3)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) az E *egységponton* mennek keresztül, $\mathbf{W}_i^{(1)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) pedig a végtelenbe esnek.

10. *Projektiv előállítás.*

Közelfekvő még az F_m felület következő projektiv előállítása

$$(x_2+x_3+x_4)(x_3+x_4+x_1) - \lambda x_1 x_2 = 0$$
$$(x_4+x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3) - \mu x_3 x_4 = 0$$

hol

$$\lambda\mu = m$$

tartozik lenni.

Vagy más fölirásban

$$H_\lambda \equiv (x_3+x_4)(x_1+x_2+x_3+x_4) - (\lambda-1)x_1x_2 = 0$$
$$H_\mu \equiv (x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3+x_4) - (\mu-1)x_3x_4 = 0$$

a mi azt mutatja, hogy a jelen előállításra szolgáló *másodrendű felületsorok* mindegyike *hiperbolikus* paraboloidokból áll. Egyszersmind látni, hogy a H_λ ill. H_μ hiperbolikus paraboloidoknak iránysíkjai közösek; a H_λ iránysíkjait az

$$x_1 = 0 \quad \text{és} \quad x_2 = 0,$$

a H_μ iránysíkjait pedig az

$$x_3 = 0 \quad \text{és} \quad x_4 = 0$$

tetraederlapok képviselik.