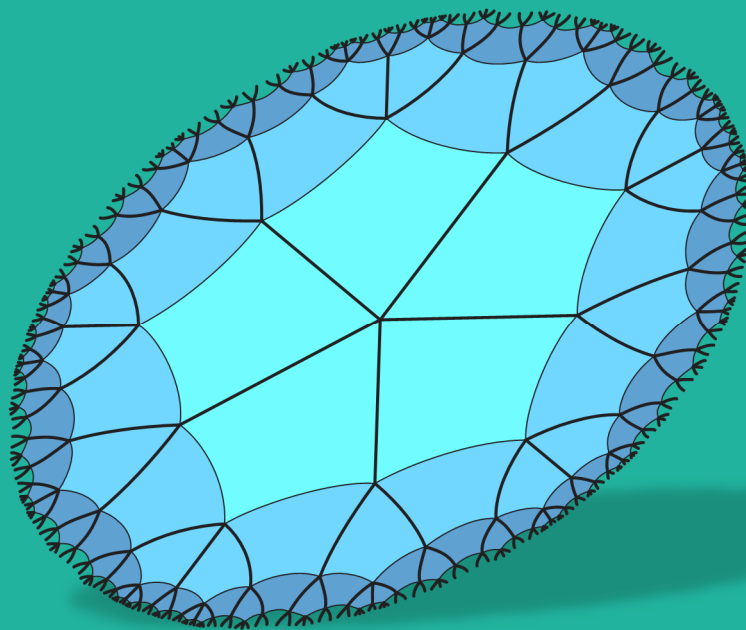


# Dimenziók

Matematikai Közlemények

III. kötet



NyME EMK Matematikai Intézet  
Soproni Tudós Társaság  
2015

# **Dimenziók**

**Matematikai Közlemények**

**III. kötet**

**NymE EMK Matematikai Intézet**

**Soproni Tudós Társaság**

**2015**

Szerkesztők:

Dr. Németh László  
egyetemi docens

Dr. Szalay László  
intézetigazgató egyetemi docens

Dr. Závoti József  
egyetemi tanár

Nyugat-magyarországi Egyetem  
Erdőmérnöki Kar  
Matematikai Intézet  
9400 Sopron, Ady Endre út 5.



MTA VEAB Soproni Tudós Társaság  
9400 Sopron, Csatkai Endre utca 6-8.



Kiadja: NymE EMK Matematikai Intézet és Soproni Tudós Társaság

HU ISSN 2064-2172

## Tartalomjegyzék

Bevezető .....	3
Adatelemzés mozgó statisztikákkal.....	5
Az R szoftver alkalmazása az Adatbányászat tárgy oktatásában .....	14
Hőszivattyús fűtési rendszer vizsgálata.....	21
Időjárás elemzés regressziós eljárás alkalmazásával.....	25
Az alkalmazott matematika tantárgy oktatásának sokszínűsége és módszertanának modernizálása az MSc képzésében.....	35
Egy érdekes térképi vetület matematikai és csillagászati alkalmazásai - folytatás .....	43
Matematikai módszerek a mechanikában.....	49
Matematika a fizikában .....	53
Diofantikus számhármások a Lucas-Lehmer sorozatokban.....	61
Die exakte Lösung der ausgleichenden Geraden im Rahmen der Total Least Squares Methode .....	63



## Bevezető

### 250 éves a Matematikai Intézet

Immár harmadízben került megrendezésre a Matematika Oktatása és Kutatása Szeminárium (MOKUS'15) a Soproni Tudós Társaság és a Nyugat-magyarországi Egyetem Matematikai Intézetének szervezésében. Nagy öröm számunkra, hogy a soproni résztvevők mellett ismét vendégül láhattunk külső előadót is. Bízunk benne, hogy a jövőben újból meg tudjuk találni a lehetőséget egy hasonló rendezvény lebonyolítására.

Az előző konferencia óta eltelt időben fontos esemény részesei lehettünk, 2015 októberében ünnepeltük a Matematikai Intézet jogelődje megalapításának 250 éves évfordulóját. Philadelphiában még a Függetlenségi Nyilatkozat szövegezésével voltak elfoglalva, mikor Selmecbányán már javában oktatták a matézist a Bányászati Akadémián, intézményesített keretek között. A jeles évfordulóra egy emléknappal emlékeztünk. Az ünnepi köszöntők után Dr. F. Nagy Györgyi egyetemi docensnek az intézet selmecbányai éveiről szóló előadása következett, majd ifj. Sarkady Sándor, a Központi Könyvtár és Levéltár főigazgatójának magával ragadó expozéja a Sopronba történő átköltözés utáni időszakról. Később Dr. F. Nagy Györgyi, és ifj. Sarkady Sándor jóvoltából lehetőség nyílt a Központi Könyvtár muzeális értékű matematika könyveinek megtekintésére. A délutáni programban öt tudományos, illetve visszaemlékező előadás hangzott el. A 250 éves évfordulóra az SKK Faipari Tanüzem elkészítette fából az intézet címerét, amely az F épület aulájában megtekinthető.

Köszönöm mindazoknak, akik részvételükkel megtisztelték, vagy munkájukkal segítették a két rendezvény lebonyolítását.

Szalay László  
intézetigazgató



## Adatelemzés mozgó statisztikákkal

**Kalmár János**  
MTA CSFK GGI  
kalmar@ggki.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** A tanulmányban mozgó statisztikák segítségével határozom meg geofizikai és geodéziai idősorok 'eseményeit'. Ezek manuálisan, diagram-elemzéssel is megtalálhatók lennének, de az idősorok (több száz ezres) hossza miatt indokolt az automatizált keresés megoldása.

**ABSTRACT.** In this study the „events” in geophysical and geodetic time series are identified by moving statistics. Although these events can be identified manually, the length of time series (several hundred thousands) justifies the automated search solution.

### 1. Bevezetés

Intézetünkben a közelmúltban merült fel két olyan probléma – nevezetesen geomágneses Q-kitörések illetve dőlésmérő méréshatár elmozdulások helyének meghatározása –, melyek kapcsán általánosítható eljárást fejlesztettem ki egydimenziós adatsorbéli „események” kimutatására (mintaillesztésre).

Idősorok valószínűségi eloszlását szokás jellemezni statisztikával, ami alatt az időorból képlettel levezetett skalárt értünk. Ilyen nevezetes statisztika pl. a várható érték, szórás, regresszió, ferdeség vagy lapultság, két adatsor összevetésekor pedig a kovariancia és a konvolúció.

Az adatsorokban található események nem feltétlen mutathatók ki a teljes adatsorra alkalmazott statisztikával [5], hanem általában csak egy részintervallumon alkalmazva mutatnak az átlagostól eltérő viselkedést (anomáliát), ezért mintaillesztéskor célszerűbb részintervallumokon számolt mozgó statisztikákat alkalmazni.

Tanulmányomban megmutatom, konkrét mintaillesztéskor hogyan célszerű kiválasztani a legjobb statisztikát és annak paramétereit, a mozgó intervallum hosszát és indikátor tartományát.

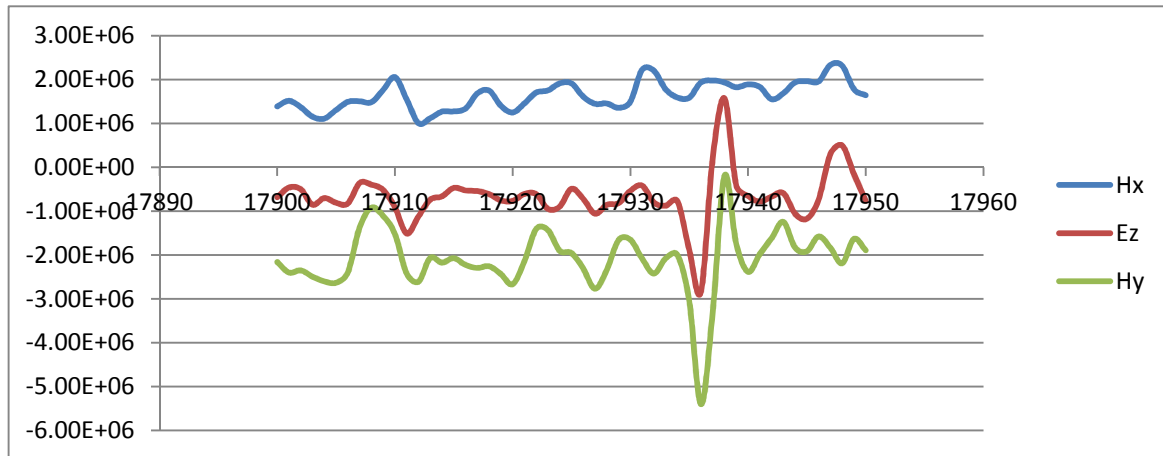
### 2. Q-kitörések geomágneses és geoelektromos adatsorokban

*Schumann-rezonanciáknak* [1] nevezzük a bolygófelszín és az ionoszféra által határolt gömbréteg elektromágneses sajátfrekvenciáit, amit a zivatartevékenység során keletkező villámok keltenek. A jelenség robusztus becslést ad a Föld troposzférájában lejátszódó globális időjárás folyamatokról a világ zivatartevékenységének idő- és térbeli változásán keresztül, valamint a Föld–ionoszféra üregrezonátor felső határoló régióját (ionoszférikus D-tartomány) érő extra-terresztrikus hatásokról.



A Schumann-rezonanciákban mutatkozó tranziens kitörések (1. ábra) kapcsolatban állnak a magas-légköri fényjelenségekkel (angol rövidítéssel: TLE). 1995-ben Boccippio és mások [2] megmutatták, hogy a leggyakoribb magas-légköri fényjelenség, a *vörös lidérc* pozitív töltésű, felhő-föld típusú villámlás során keletkezik. Ugyanekkor a Schumann-rezonanciák sávjában Q-kitörés jelentkezik. Más megfigyelések [3] rámutattak arra, hogy a vörös lidérc előfordulása és a Q-kitörések összefüggnek, így a Schumann-rezonanciákból nyerhető adatok felhasználhatók a lidérc globális előfordulásának becslésére [4].

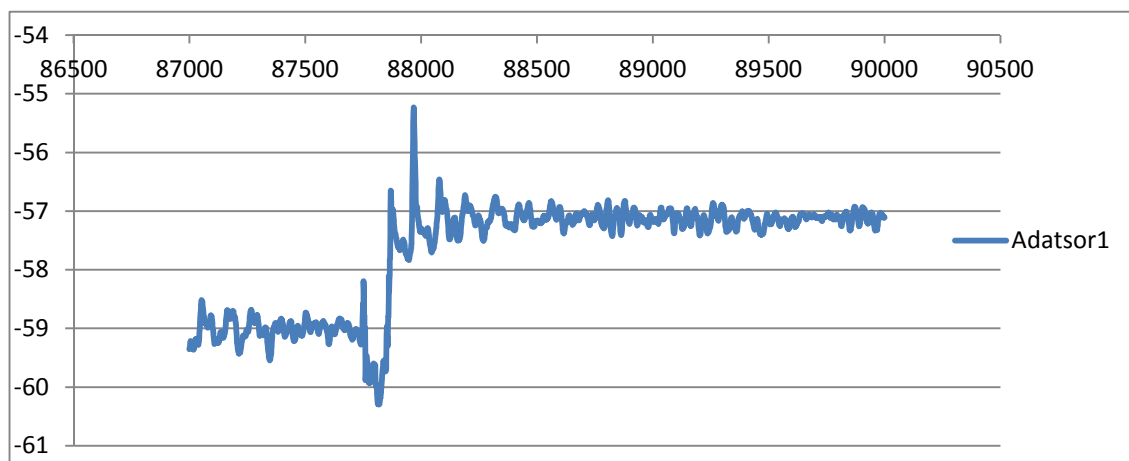
A Schumann-rezonancia mérése két geomágneses ( $H_x$  és  $H_y$ ), és egy ( $E_z$ ) geoelektromos csatornán történik. A Q-kitörés  $E_z$ -ben mindig jelentkezik és  $H_x$ , illetve  $H_y$  közül legalább egyben.



1. ábra. Q-kitörés esemény 17936-nál

### 3. Méréshatár elmozdulás dőlésmérőnél

Geodéta kollégáim több módszerrel is igyekeznek kimutatni a Föld természetes felszíne vagy az épített műtárgyak lokális mozgását, deformációját. Egyik műszerük a dőlésmérő, mely a mérés síkjában megfigyelhető dölést detektálja. A használt műszer sajátossága, hogy nagyobb kilengések a méréshatár elmozdulását okozhatják, amire a 2. ábrán látunk példát. Az adatsor feldolgozása előtt ezen lépcsőket korrigálni kell, hogy az elemzés ne vezessen téves következtetéshez.



2. ábra. Méréshatár elmozdulás esemény 87862-nél

#### 4. A felhasznált statisztikai jelzőszámok és tulajdonságai

Jelölje  $\mathbf{E}[X]$  az  $X$  valószínűségi változó várható értékét, akkor  $X$  változó  $k$ -adrendű  $\mathbf{M}_k$  centrális momentuma

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^k].$$

A szórás ( $\mathbf{D}[X]$ ) négyzete (amit *varianciának* is neveznek) tulajdonképpen a másodrendű centrális momentum, azaz

$$\mathbf{D}[X]^2 = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2] = \mathbf{M}_2.$$

A szórást az átlagtól való átlagos eltérésnek is tekinthetjük.

Az  $X$  valószínűségi változó *ferdesége* vagy *ferdeségi együtthatója* lényegében azt mutatja meg, mennyire szimmetrikus a valószínűségi változó eloszlása. Képlete:

$$\beta_1 = \mathbf{M}_3/\mathbf{M}_2^{3/2}.$$

Ha  $X$  sűrűségfüggvénye szimmetrikus (mint pl. a haranggörbe), akkor  $\beta_1 = 0$ , ha 'jobbra húz el', akkor  $\beta_1 > 0$ , ha 'balra húz el', akkor  $\beta_1 < 0$ , természetesen a deformációval arányosan.

Az  $X$  valószínűségi változó *lapultsága*, vagy *lapultsági mutatója* (másként *csúcsossága*, vagy *csúcsossági együtthatója*) lényegében a normális eloszlás sűrűségfüggvényéhez viszonyítja az  $X$  valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Képlete:

$$\beta_2 = \mathbf{M}_4/\mathbf{M}_2^2 - 3.$$

Normális eloszlás esetén  $\beta_2 = 0$ . A normális eloszlás haranggörbe sűrűségfüggvényénél 'csúcsosabb' (meredekebb) sűrűségfüggvényű eloszlások esetén  $\beta_2 > 0$ . A haranggörbénél 'laposabb' sűrűségfüggvényű eloszlások esetén  $\beta_2 < 0$ .

A konvolúció két függvényhez egy harmadikat rendel hozzá. Generáló képlete:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Ha  $f[i]$  és  $g[i]$  ( $i = 0, \dots, k$ ) diszkrét idősorok (mérési értékek), akkor a konvolúció képlete:

$$(f * g)[n] = \sum_{m=0}^n f[m]g[n - m].$$

A generált idősor egy eleme felfogható úgy, hogy az az egyik idősor elemeinek súlyozott összege, ahol a súlyok fordított sorrendben lettek kiválasztva a második időorból.

A lineáris regresszió modellje azt feltételezi, hogy a független  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  vektor és a függő  $y$  (skalár) változó között lineáris összefüggés van. Az

$$y(\mathbf{B}, X) = \beta_0 + \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot x_k$$

$m$  elemű  $(X^i, y^i)$   $i=1, \dots, m \geq n+1$  mérési adatsor esetén a  $\mathbf{B}$  együtthatóvektor meghatározható pl. a legkisebb négyzetek elve alapján.

A  $dy^i(\mathbf{B}, X^i) = y^i - y(\mathbf{B}, X^i)$ ,  $i=1, \dots, m$  *hibavektor* alapján ellenőrizhető a linearitás (és az illeszkedés) megléte.

A lineáris regresszió  $y(\mathbf{B}, X) = \beta_0 + \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot x_k$  képlete  $y$  becslésére is felhasználható.

## 5. A mozgó statisztika lényege és alkalmazása

Egy statisztika egy képlet segítségével rendel hozzá egy (akár többdimenziós) adatsorhoz egy skalárt, ami az adatsor statisztikai jellemzője lesz.

‘Az ördög a részletekben rejlik’, azaz az adatsorokban rejtőző események nem feltétlen mutathatók ki a teljes adatsorra alkalmazott statisztikákkal, hanem általában csak egy részintervallumon mutatnak a szokásostól eltérő viselkedést (anomáliát).

A mozgó statisztika a teljes helyett csak egy rögzített hosszú részintervallumon számol, de ezt a részintervallumot végigcsúsztatja a teljes adatsoron, az így számolt statisztikák tehát pozíciókhoz rendelhetők, és maguk is egy adatsort alkotnak.

Ha jó statisztikát választottunk, akkor csak a keresett esemény környezetében lesz ‘találata’ a mozgó statisztikának, vagyis a (ritka) eseményt a mozgó statisztika viszonylag ritkán előforduló értékei jelzik.

Ha a számított mozgó statisztikának (mint adatsornak) előállítjuk a sűrűség függvényét (hisztogramját), akkor onnan leolvashatók azon ‘eseménygyanús’, kis gyakoriságú (indikátor) intervallumok, melyek általában a sűrűségfüggvény két szélén (a farkaknál) találhatóak.

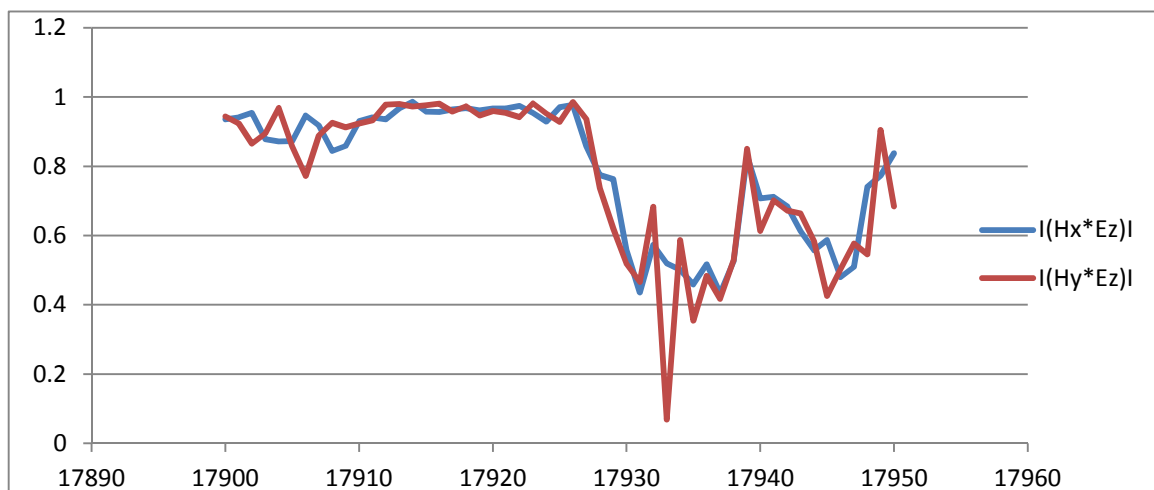
Ahhoz, hogy egy mozgó statisztikát és a hozzá tartozó indikátor intervallumot a keresett esemény kimutatására elfogadjunk, kézzel ellenőrizzük a kapott találatokat, minek alapján

- elfogadjuk a statisztikát és az indikátor intervallumot,
- módosítjuk az indikátor intervallumot,
- elvetjük a statisztikát.

Mivel egy esemény több (egymást részben átfedő) részintervallumon is látható, ezért pontos pozicionálása további (kézi vagy automatikus) elemzést igényel.

## 6. A Q-kitörések kimutatására használt statisztikák és indikátor intervallumaik

*Konvolúció:* a három ( $H_x$ ,  $H_y$ ,  $E_z$ ) adatsor közül legalább kettő (de  $E_z$  mindenképp) tartalmazza az eseményt, ezért együttes vizsgálatuk indokoltnak tűnt (3. ábra).



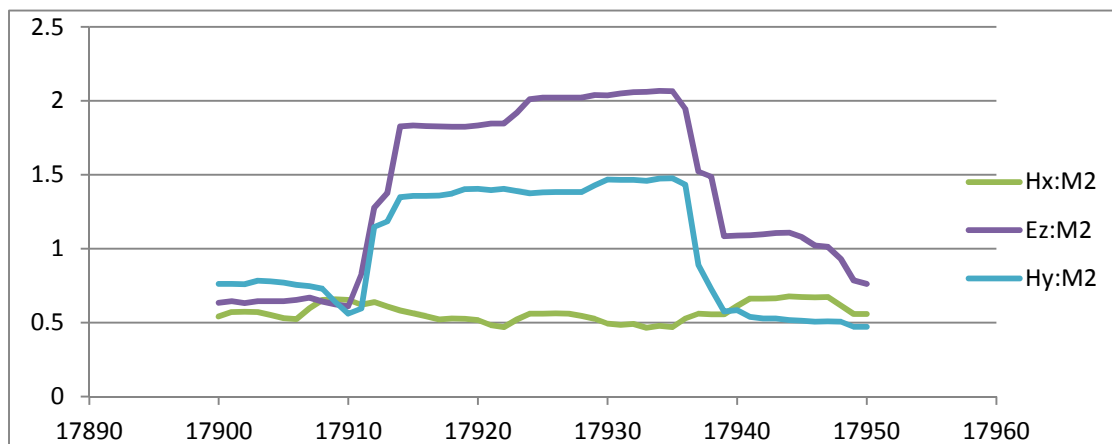
3. ábra. A normált konvolúciók diagramja a 17936-os Q-kitörés környezetében

A konvolúció az adatsorok skálázására érzékeny mutató, ami torzítaná az indikátor intervallumot, ezért normáljuk, vagyis elosztjuk az összetevő vektorok hosszával.

- $I(H_x \cdot E_z)I = (H_x \cdot E_z) / (|H_x| \cdot |E_z|)$  indikátor intervalluma:  $< 0,2$ .
- $I(H_y \cdot E_z)I = (H_y \cdot E_z) / (|H_y| \cdot |E_z|)$  indikátor intervalluma:  $< 0,2$ .

A Q-kitörés környezetében a *variancia* megnő (4. ábra).

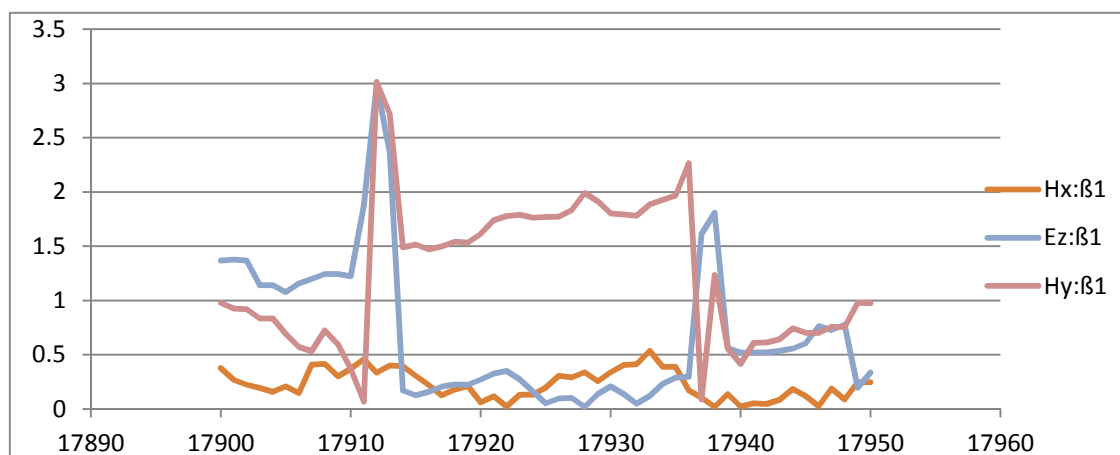
- $H_x$ :  $M_2$  indikátor intervalluma:  $> 1,4$ .
- $H_y$ :  $M_2$  indikátor intervalluma:  $> 1,4$ .
- $E_z$ :  $M_2$  indikátor intervalluma:  $> 2$ .



4. ábra. Szórás diagramok a 17936-os Q-kitörés környezetében

*Ferdesség*: csak az eloszlás pozitív farka utal találatra (5. ábra).

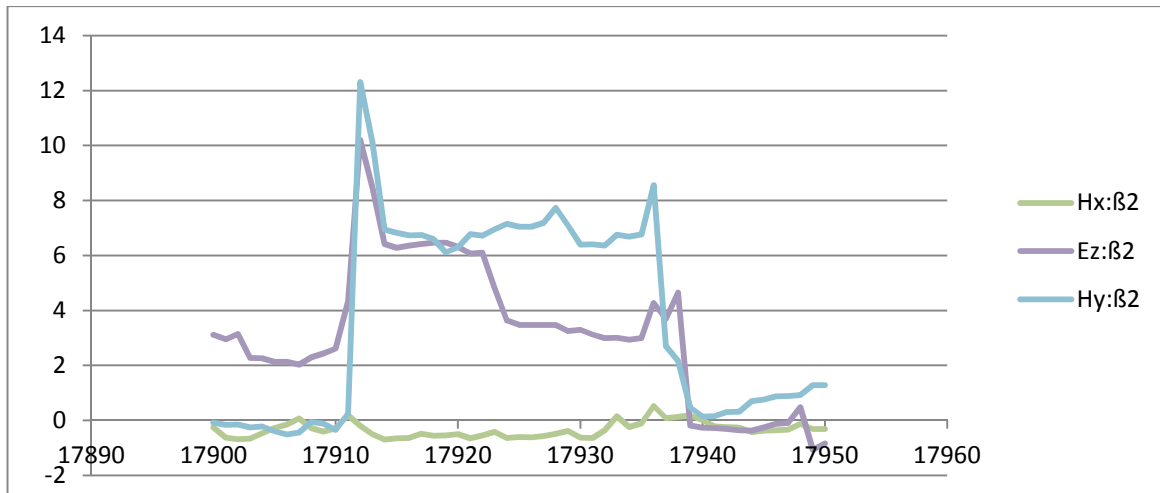
- $H_x$  indikátor intervalluma:  $\beta_1 > 2$ .
- $H_y$  indikátor intervalluma:  $\beta_1 > 2$ .
- $E_z$  indikátor intervalluma:  $\beta_1 > 2$ .



5. ábra. Ferdesség diagramok a 17936-os Q-kitörés környezetében

*Csúcsosság*: csak az eloszlás pozitív farka utal találatra.

- $H_x$  indikátor intervalluma:  $\beta_2 > 8$ .
- $H_y$  indikátor intervalluma:  $\beta_2 > 8$ .
- $E_z$  indikátor intervalluma:  $\beta_2 > 8$ .



6. ábra. Csúcsosság diagramok a 17936-os Q-kitörés környezetében

A *ferdeség* és *csúcsosság* mutatók többnyire megtalálták az ugrás környezetét, de előfordultak téves riasztások is. További sajátosságuk, hogy minden eseményre kétszer riasztanak:

- először amikor a részintervallum végén jelenik meg az esemény,
- másodsor, amikor a részintervallum elején jelenik meg az esemény.

## 7. A Q-kitörések kimutatásának logikai sémája

- Első lényeges döntés a mozgó statisztika részintervallum hosszának kiválasztása volt; ha ez túl rövid, akkor túlságosan érvényesülnek a lokális ‘eltérítő’ hatások, ha pedig túl hosszú, akkor egy részintervallum több ‘eseményt’ is tartalmazhat.
- Tranziens Q-kitörés keresésekor 25 mérés tett ki egy részintervallumot.
- A legfontosabb találatokat a  $I(Hx \cdot Ez)I$  és  $I(Hy \cdot Ez)I$  normált konvolúciók szolgáltatták – de nem feltétlen az esemény pontos helyén, hanem annak részintervallum sugarú környezetében jeleztek.
- A normált konvolúciók generálta hamis riasztásokat úgy szűrjük ki, hogy megnézzük a többi statisztikát (szórás, ferdeség, laposság) a vélt kitörés 25 mérés sugarú környezetében. Ha ott egyik sem jelzett, akkor a találatot elvetettük.
- A valószínűsíthető Q-kitörés pontos helyét úgy határozzuk meg, hogy az összetartozó találatokat tartalmazó 25 hosszú intervallumon meghatároztuk a mérések átlagát, és megkerestük azt a pontot, ahol ezen átlag és a mért érték eltérése maximális volt.
- Előfordulhat, hogy a Q-kitörés esemény közelében egyik konvolúció sem riaszt; szerencsére ekkor a többi statisztika mindegyike jelzett a tranziens környezetében, vagyis a már bemutatott eltérés-számítással ekkor is meghatározható volt a Q-kitörés pontos helye.
- Összefoglalva, Q-kitörés esemény ott van,
  - ahol legalább 1 konvolúciós találat van, és a másik 3 statisztika közül legalább 1 találatot jelez, vagy
  - ahol nincs konvolúciós találat, de a többi statisztika mindegyike riaszt.
  - Szórás, ferdeség és csúcsosság statisztikák esetén akkor van találat, ha legalább két komponensben megjelenik, és közte van ez.

## 8. A méréshatár ugrások kimutatására használt statisztikák és indikátor intervallumaik

Nyilvánvaló, hogy a méréshatár ugrás pozíciójában a függvényérték bal- és jobboldali határértékének különbsége mutatja az ugrás nagyságát.

A vizsgált pontbeli függvényértéket ezért kétoldali *lineáris regresszióval* becsültük.

- Először a vizsgált ponttól balra található mérésekre illesztünk egyenest,
- majd a vizsgált ponttól jobbra található mérésekre illesztünk egyenest.
- A vizsgált pontban a két regressziós egyenes alapján becsült függvényértékek  $dm$  különbsége adja az ugrás nagyságát.
- Ha van tippünk a lépcsőmagasság alsó korlátjára, akkor ezt használhatjuk a regressziós becslések különbségének ellenőrzésére.
- Indikátor intervallumnak példánkban az  $IdmI > 0,4$  feltételt alkalmaztuk.

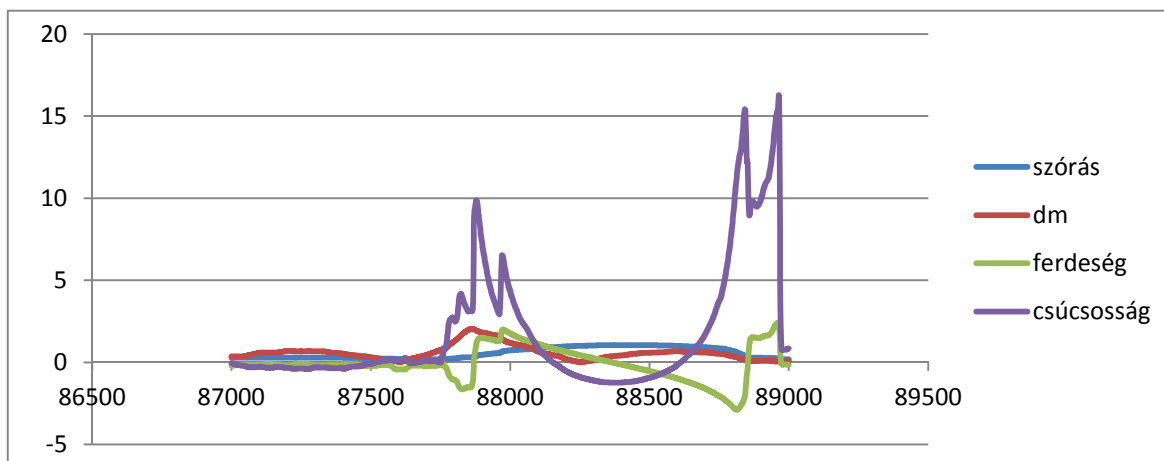
A *ferdeség*-mutató eloszlásának mindkét ‘farka’ generálhat találatot.

- Indikátor intervalluma:  $\beta_1 < -2$  vagy  $\beta_1 > 5$ .
- A ferdeség-mutató általában jelzett az ugrás környezetében, de voltak téves riasztások is.

A *csúcsosság*-mutató eloszlásának mindkét ‘farka’ generálhat találatot.

- Indikátor intervalluma:  $\beta_2 < -1$  vagy  $\beta_2 > 8$ .
- A csúcsosság-mutató általában jelzett az ugrás környezetében, de voltak téves riasztások is.

A *variancia* teljesen alkalmatlannak bizonyult a méréshatár ugrások kimutatására, ugyanis a mérések nem csak a keresett lépcsők környezetében adhatnak szokatlan szórást.



7. ábra. A használt statisztikák diagramja a 87862-es lépcső környezetében

## 9. A méréshatár ugrások kimutatásának logikai sémája

Első lényeges döntés a mozgó statisztika részintervallum hosszának kiválasztása volt; ha túl rövid, akkor túlságosan érvényesülnek a lokális ‘eltérítő’ hatások, ha pedig túl hosszú, akkor egy részintervallum több ‘eseményt’ is tartalmazhat.

A dőlésmérő adatsorában 1000 mérés képezett egy mozgó részintervallumot.

*Ferdeség* és *csúcsosság* statisztika esetén nem volt a priori tudásunk az indikátor intervallumról, ezért meghatároztuk a mutatók hisztogramját.

A hisztogramról úgy olvastuk le az *indikátor intervallum* korlátait, hogy mindkét farokba az összes mérés kb. 2%-a essen (sikertelenség, azaz túl sok, vagy túl kevés találat esetén, ezen paramétert módosítottuk).

Mindhárom statisztika (becsült lépcsőmagasság [ $dm$ ], *ferdeség*, *csúcsosság*) esetén meghatároztuk azon pozíciókat, ahol a feltételek teljesültek.

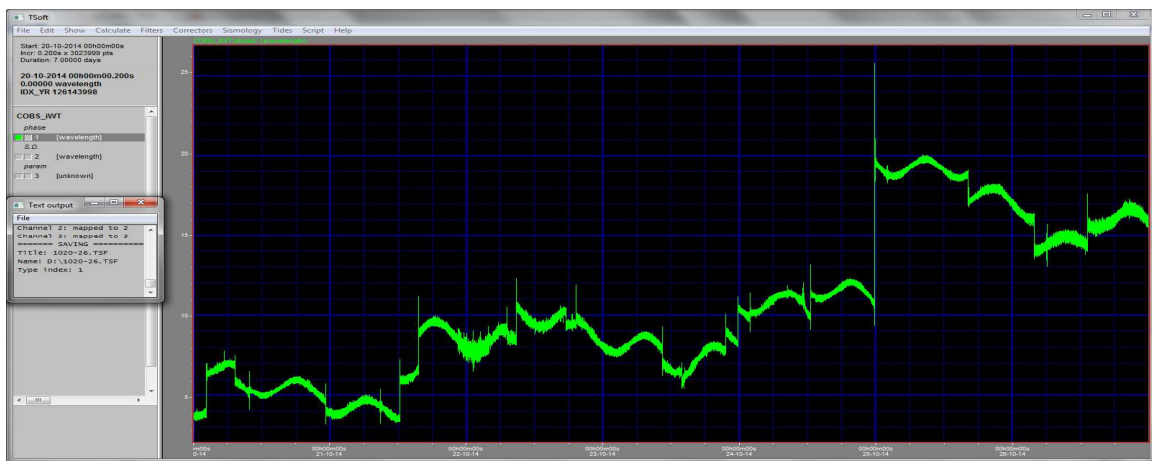
A pozíciók mindhárom mutató esetén zárt intervallumokba tömörültek, mert az esemény nem csak saját pozíciójában, hanem annak környezetében is anomáliát okozott a statisztikákban.

A statisztikák találati intervallumainak főpontját (az ugrás várt helyét) úgy határoztuk meg, hogy megkerestük a kétoldali lineáris becslések  $dm$  különbségének abszolút maximumát.

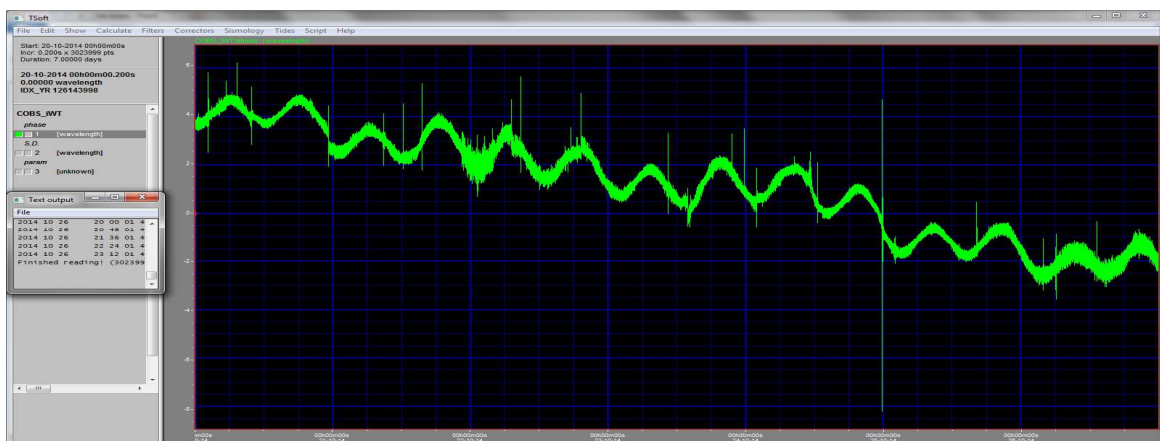
Azt tapasztaltuk, hogy a  $dm$  bázisú mutató minden alkalommal megtalálta az ugrás helyét, ha jól becsültük meg az ugrás minimális nagyságát ( $dm$  indikátor intervallumát).

A *ferdeség* és *csúcsosság* mutatók is többnyire megtalálták az ugrás környezetét, bár előfordultak téves riasztások is. További sajátosságuk, hogy minden eseményre kétszer riasztanak:

- először, amikor a részintervallum végén jelenik meg az esemény,
- másodszor, amikor a részintervallum elején jelenik meg az esemény.



8. ábra. az eredeti dőlésmérő adatsor



9. ábra. a dőlésmérő adatsor a lépcsők ignorálása után



## 10. Összefoglaló

Gyakori feladat, hogy hosszú, kézzel nehezen kiértékelhető mérési adatsorok eseményeinek pontos helyét automatikusan kell meghatározni, pl. online riasztás céljából.

A különböző mozgó statisztikák érzékenyek a lokális események előfordulására, ezért feladatonként megvizsgálandó, melyeket érdemes kimutatásukra felhasználni.

A mozgó statisztikák alkalmazásakor fontos meghatározandó paraméter a részintervallum hossza, illetve az indikátor intervallumok helyzete.

Egyes statisztikák a jól megválasztott paraméterek mellett is hibázhatnak: nem jeleznek egyes eseményeknél, vagy hamisan riasztanak.

Célszerű a vizsgálatoknál több statisztikát egyidejűleg figyelembe venni, mert kombinációjuk megbízhatóbb találatokhoz vezet.

## Irodalomjegyzék

- [1] **W. O. Schumann**, Über die strahlungslosen Eigenschwingungen einer leitenden Kugel, die von einer Luftschicht und einer Ionosphärenhülle umgeben ist, *Zeitschrift und Naturforschung 7a*, (1952) 149–154. (doi: <http://dx.doi.org/10.1515/zna-1952-0202>)
- [2] **D. J. Boccippio, E. R. Williams, S. J. Heckman, W. A. Lyons, I. T. Baker, R. Boldi**, Sprites, ELF transients, and positive ground strokes, *Science* 269 (5227) (1995), 1088–1091. (doi: <http://dx.doi.org/10.1126/science.269.5227.1088>)
- [3] **C., E. Price, Greenberg, Y. Yair, G. Sători, J. Bór, H. Fukunishi, M. Sato, P. Israelevich, M. Moalem, A. Devir, Z. Levin, J.H. Joseph, I. Mayo, B. Ziv, A. Sternlieb**, Ground-based detection of TLE-producing intense lightning during the MEIDEX mission on board the Space Shuttle Columbia, *G.R.L.* 31 (2004).
- [4] **W. S. Hu, A. Cummer, W. A. Lyons, T. E. Nelson**, Lightning charge moment changes for the initiation of sprites, *G.R.L.* 29 (8) (2002), 1279. o.
- [5] **Pödör Z.**, Töréspontok keresése meteorológiai idősorokban, és azok hatásainak vizsgálata, *Dimenziók Matematikai Közlemények II.* (2014), 35–43.



## Az R szoftver alkalmazása az Adatbányászat tárgy oktatásában

**Pödör Zoltán**

NymE, SKK, Informatikai és Gazdasági Intézet  
podor@inf.nyme.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** Az adatbányászat egy tipikus informatikához köthető terület. A gazdaságinformatikus hallgatók számára különösen nagy jelentőséggel bír a gazdasági kötődés miatt. Bemutatjuk az általános elvárásokat az adatbányászati szoftverekkel szemben és konkrétan az R program alkalmazhatóságát az Adatbányászat oktatásában.

**ABSTRACT.** The data mining is a typical part of informatics science. It is especially important for the Business Information Technology students due to the economic specialization. We present the general expectations up to the data mining software and the application opportunities of R software in the education of Data mining.

### 1. Bevezetés

Az ember által generált adatmennyiség évente legalább megduplázódik. Rengeteg adatot gyűjtünk, gondoljunk csak az egyre jobban elterjedő szenzoros mérésekre. A hatalmas adathalmazok feldolgozása, a hasznos információk, összefüggések kinyerése nagy kihívást jelent. A hatalmas méretű adatbázisok, adathalmazok pusztán adattemetők mindaddig, amíg fel nem dolgozzuk azokat. Ez a folyamat magában foglalja a hagyományos matematikai, statisztikai módszereket is. Azonban éppen az adathalmazok mérete teszi szükségessé olyan új megközelítések alkalmazását, ami lehetővé teszi ilyen esetben is a gyors és hatékony (sokszor online) feldolgozását. Ez több - akár hardver, akár szoftver oldalról - komoly informatikai kihívást jelent. Ezért fontos, hogy egy informatikus ismerje azokat a technikákat és eszközöket, melyek segítségével képesek vagyunk a Bigdata jellegű adatokból értékes információkat kinyerni és megjeleníteni. Bemutatjuk – mélyebb részletek ismertetése nélkül-, hogy a nyílt forrású R szoftverkörnyezet hogyan alkalmazható a tipikus adatbányászati feladatok megoldásában, a kapott eredmények vizuális reprezentációjában az NymE SKK gazdaságinformatikus hallgatóknak tartott Adatbányászat tárgy keretein belül.

### 2. Az adatbányászat

Az 1990-es évek elején a tárolókapacitások jelentős növekedése és ezzel párhuzamosan az árak csökkenése lehetővé tette, hogy gyakorlatilag az élet minden területén elterjedjenek a digitális eszközök és adatbázisok. Mindez azt eredményezte, hogy tömegesen keletkeztek nyers, feldolgozatlan adatok. Ezek feldolgozására akkor még csak a hagyományosnak tekinthető matematikai és statisztikai eljárások álltak rendelkezésre. Azonban ezek nem voltak alkalmasak az egyre növekvő méretű adathalmazokkal megbirkózni. Sem mennyiségben, sem a kinyert információk mélységében, finomságának tekintetében. Jól írja le az akkori helyzetet

John Naisbitt híres mondása: „Megfulladunk az információtól, miközben tudásra éhezünk.”. Az így megjelenő szükség keltette életre az adatbányászatnak nevezett tudományterületet.

Az adatbányászat [1], [2] az a folyamat, amellyel hasznos információk, mély, nemtriviális tudás nyerhető ki az adatbázisokból. Ehhez számtalan tudományterületet használunk fel, így az adatbányászat egy tipikus multidiszciplináris területnek tekinthető, mely a statisztikától kezdve, a mesterséges intelligencián keresztül az algoritmikus kérdésekig rengeteg területet ölel fel.

## 2.1. Adatbányászati szoftverek

Az alábbiakban összefoglaljuk azokat a kihívásokat [1], amiknek egy ilyen program meg kell, hogy feleljen. Ezek a problémák serkentői is voltak az adatbányászat fejlődésének.

- **Skálázhatóság:** képes legyen az egyre növekvő méretű adathalmazokat is hatékonyan kezelni.
- **Magas dimenzió:** alkalmas legyen a magas dimenzió számú adatbázisok kezelésére. Sok algoritmus esetében a számítási bonyolultság is gyorsan nő, ahogy a dimenziószám növekszik.
- **Heterogén és összetett adatok:** a hagyományos elemzési módszerek általában azonos típusú adathalmazokat képesek kezelni. Egyre fontosabb például a weben tárolt félig strukturált szövegek kezelése, vagy a szociális hálókat reprezentáló, különböző formátumú adatokat tartalmazó gráfok feldolgozása.
- **Robusztusság:** hiányos, zajos adatokat is kezeljen, ez ne befolyásolja a működést.
- **Adatok tulajdonjoga, megosztása:** az utóbbi években különösen jellemző, hogy az elemzendő adatok fizikálisan sem egy helyen vannak eltárolva. Ez szükségessé tette az elosztott adatbányászati módszerek fejlesztését.

A piacon rengeteg szoftver áll rendelkezésre, röviden felsoroljuk, hogy mik azok a gyakorlati szempontok [1], amik egy jónak tekintett adatbányász szoftvert jellemeznek:

- **Algoritmusok:** az alkalmazott algoritmusok legyenek többszörösen megvalósítva (ahol erre lehetőség van), elvárás velük szemben a robusztusság és rugalmasság.
- **Vizualizációs lehetőségek:** elvárás az, hogy a kapott eredmények, összefüggések minél vizuálisabb módon is megjelenjenek. Ez az elvárás az ipari környezetben gyakran alkalmazott riportokkal szemben is. Ezek sokkal szemléletesebbé és áttekinthetőbbé teszik a táblázatokban tárolt számszerű eredményeket.
- **Be-, és kimeneti fájlformátumok:** az adott szoftver minél több fajta be-, illetve kimeneti formátumot tudjon alapértelmezésben kezelni. Az adatbányászatban tipikus, hogy adatok xls, sql, dbf, csv formában tárolunk, elvárjuk, hogy ezeket a rendszer képes legyen kezelni, mind a bemeneti, mind a kimeneti oldalon.
- **Felhasználóbarát:** az átlagos felhasználó olyan szoftvereket szeret használni, amelyek kezelése könnyen elsajátítható, megtanulható. Tipikusan ilyen pl. a RapidMiner által alkalmazott Drag and Drop technika. Ugyanakkor fontos megemlíteni, hogy ez bizonyos korlátokat is hordoz magában.

Az elérhető szoftverek között vannak fizetősök, mint például az IBM SPSS, SAS, RapidMiner, Statistica Dataminer, Oracle, Microsoft Analysis Services és szinte megszámlálhatatlan nyílt kódú szoftvert lehet összeszedni. A teljesség igénye nélkül néhány: Weka, R, Orange, SCAViS, Knime, Octave Adam. Jelen munkának nem célja kitérni ezekre a szoftverekre, azok előnyeire és hátrányaira. Azonban az interneten fellelhető több olyan oldal [3], ahol ezeket rangsorolják különböző szempontok figyelembe vétele mellett, mint például népszerűség, hatékonyság, jóság. Ezek a statisztikák természetesen nem tekinthetőek reprezentatívnak, sőt sokszor erősen szubjektív elemeket is tartalmaznak, azonban mégiscsak mutatnak egyfajta képet ezekről a szoftverekről. Az R szoftver mind a két felsorolás elején

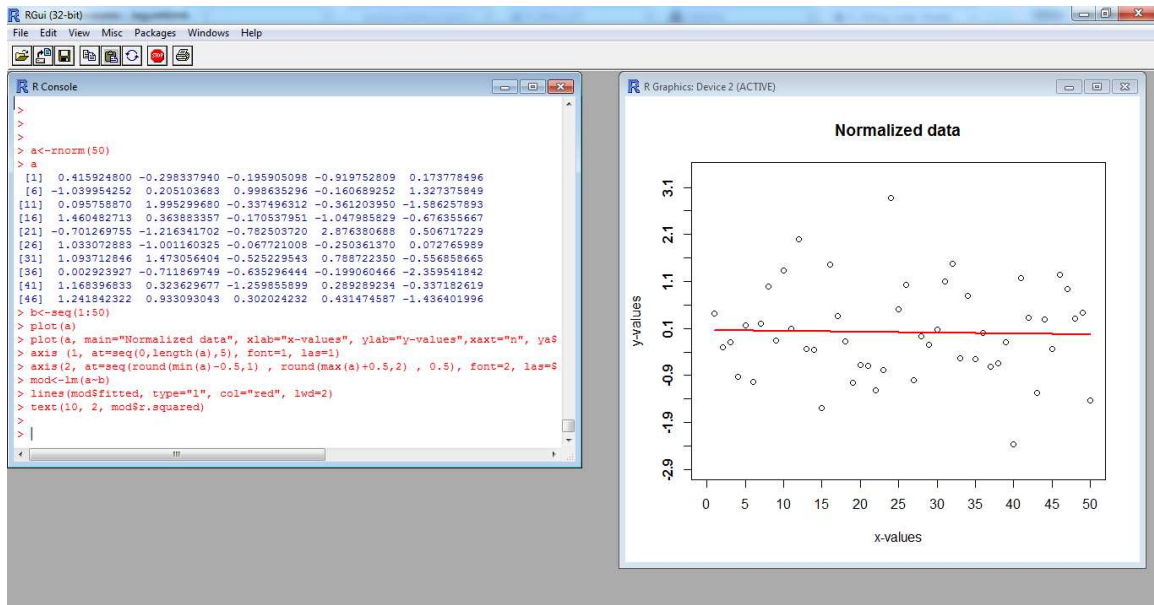
helyezkedik el és figyelembe véve, hogy a felhasználók szempontjából kevésbé kedvelt szkript nyelvről van szó, ez meglehetősen kedvező pozíció.

### 3. R program

#### 3.1. A program rövid bemutatása

Az R egy olyan nyílt forráskódú, szkript alapú nyelv [5], amely különösen alkalmas matematikai, statisztikai és adatelemzési, adatbányászati számítások megvalósítására és az eredmények grafikus megjelenítésére. A program bárki által szabadon fejleszthető, így számtalan publikált csomag és függvény áll rendelkezésre a felhasználóknak. A program egyszerű használatához nem kell feltétlenül informatikusnak lenni, azonban valódi mélységei és lehetőségei programozói ismeretek birtokában tárulnak fel.

Nagyon fejlett és bőséges eszköztárral rendelkezik, és nem csupán matematikai, statisztikai módszerek terén, bár minden olyan feladat megoldható ebben a környezetben, ami például a Matlab vagy a Maple programokkal. Elérhetünk például hagyományos, relációs vagy NOSQL alapú adatbázisokat és minden fontos adatbányászati algoritmus is implementálásra került. Támogatott benne a hálózati kommunikáció, de lehet akár grafikus felhasználói felületeket is készíteni. Egyik legnagyobb erőssége éppen grafikai képességeiben rejlik. Lehetőség van továbbá az R nyelv webes környezetben való működtetésére is az rApache [4] megoldással.



1. ábra. Az R program

Az R-nyelv egy interpretált szkript nyelv, a programkódokat nem fordítjuk bináris állománnyá a futtatáshoz, hanem az R-parancsértelmező értelmezi azokat. Jelen munkának nem célja az R nyelv alapjainak ismertetése, sokkal inkább, hogy néhány jellegzetes adatbányászati feladaton keresztül bemutassuk az R nyelv alkalmazhatóságát. A továbbiakban kiválasztottunk néhány tipikus, az Adatbányászat tárgy keretein belül oktatott témát, amiknek segítségével illusztráljuk az R nyelv működését, programozhatósági és grafikus képességeit, lehetőségeit. A feladatok illusztrálására a szabadon hozzáférhető iris adathalmaz használtuk fel.

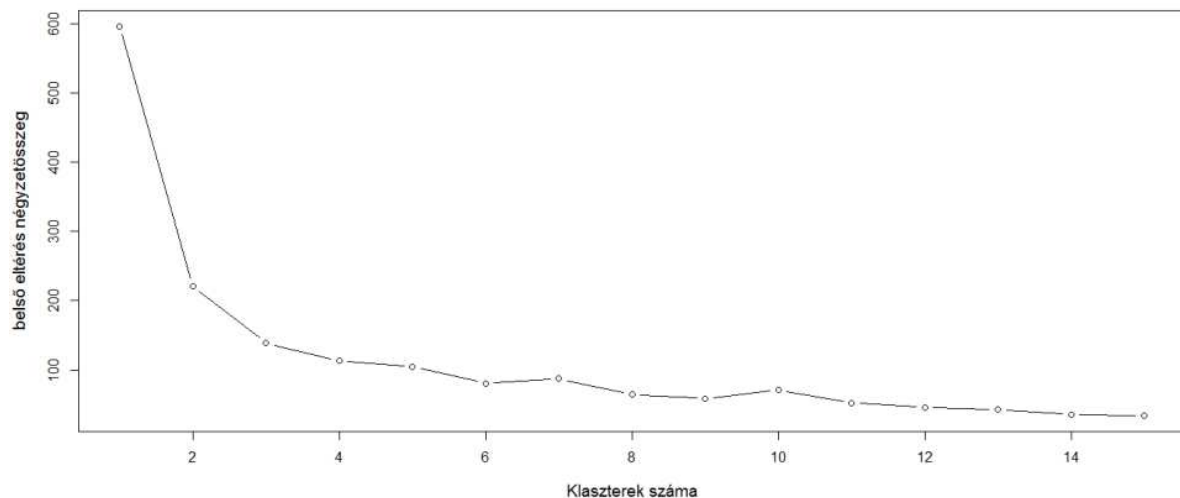
### 3.2. A program alkalmazhatósága az adatbányászatban

Két tipikus adatbányászati feladatot: klaszterezés, osztályozás, illetve egy a hagyományos statisztikában is gyakran alkalmazott témát, a regressziót választottuk ki [1], [2]. Terjedelmi okok miatt nem célunk a fenti eljárások mély elméleti ismertetése, hanem röviden bemutatjuk az alapproblémát és megoldási lehetőségeket az R környezetben. Mindegyik feladat esetében megkerülhetetlen lépés az adatok megfelelő előkészítése, ami magában foglalja a hiányos, zajos adatok kezelését, kiugró adatok szűrését, illetve az adott feladathoz kötődő egyéb műveleteket.

#### Klaszterezés

Szokás a klaszterezést felügyelet nélküli tanulásnak is nevezni, melynek célja, hogy a vizsgált elemeket olyan csoportokba osszuk, ahol az egyes csoportok között maximális, míg a csoportokon belül minimális a távolság/hasonlóság. A klaszterezés célja, olyan csoportosítások kialakítása, melyek triviálisan nem látszanak az alapadatokból és nem használunk előfeltevéseket a csoportok kialakítása során.

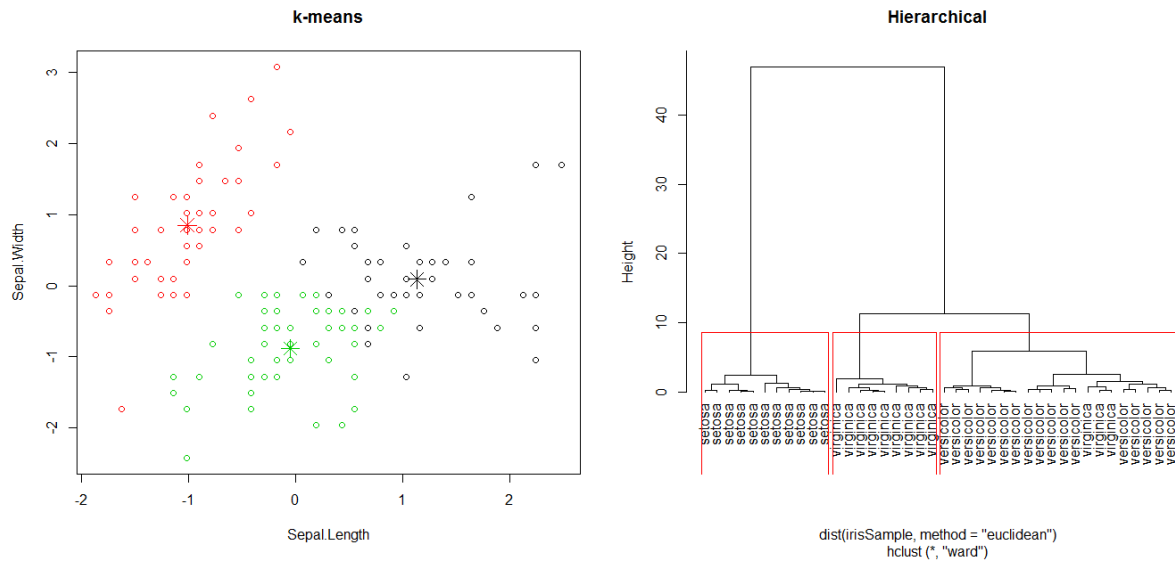
A klaszterezési feladatban nehézséget jelent az alkalmazandó távolság fogalom kiválasztása, a különböző típusú adatok együttes kezelése, és a különböző alakú klaszterek felismerése. Több, különböző klaszterező módszer létezik, mint a particionáló, hierarchikus, sűrűség-, rács-, modell-alapú módszerek stb. Mi a két legáltalánosabban elterjedt megközelítést alkalmazzuk, a felosztó és a hierarchikus megközelítést. Előbbi esetben fontos kérdés a klaszterek számának meghatározása, ami a módszer kötelező bemenő paramétere.



2. ábra. Könyökpont módszer

```
wss <- (nrow(mydata)-1)*sum(apply(mydata,2,var))
for (i in 2:15) wss[i] <- sum(kmeans(mydata, centers=i)$withinss)
plot(1:15, wss, type="b", xlab="Klaszterek száma", ylab="belső eltérés négyzetösszeg")
```

A könyökpont módszer segítségével vizuálisan becsülhetővé válik az optimális klaszterszám, amit így már felhasználhatunk, mint a folyamat bemenő paraméterét. A hierarchikus klaszterezés esetében utólagosan definiálható az ideális klaszterszám, amit vizuálisan a piros téglalapok jelölnek (3. ábra). Az eredmények természetesen táblázatos formában is lekérhetőek, ahol minden sor mellett látható, hogy melyik klaszterbe tartozik.



3. ábra. K-means és hierarchikus klaszterezés

```

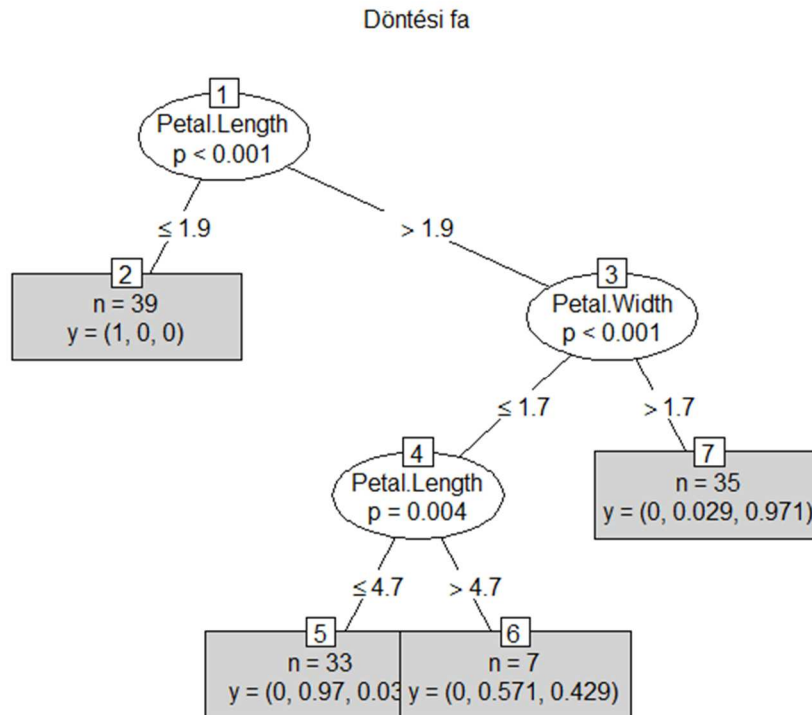
idx <- sample(1:dim(iris)[1], 40)
irisSample <- iris[idx,]
irisSample$Species <- NULL
kc <- kmeans(mydata, 3)
par(mfrow=c(1,2))
plot(mydata[,c("Sepal.Length", "Sepal.Width")], col = kc$cluster, main="k-means")
points(kc$centers[,c("Sepal.Length", "Sepal.Width")], col = 1:3, pch = 8, cex=2)
hc <- hclust(dist(iris, method="euclidean"), method="ward")
plot(hc, hang = -1, labels=iris$Species[idx], main="Hierarchical")
rect.hclust(hc, k=3, border="red")

```

### Osztályozás

A klaszterezéssel ellentétben ezt felügyelt tanulásnak nevezzük, mert előre ismertek az osztálycímkék, ami alapján a csoportok, osztályok kialakításra kerülnek. A rendelkezésre álló adathalmazt felosztjuk egy tanuló és egy validáló halmazra. A tanuló halmazon hozzuk létre a modellt, melynek jóságát a validáló halmazon ellenőrizzük. Az osztályozási feladat célja a kialakított és validált modell alapján előrejelzések készítése. Mint például előzetes hitelbírálat, banki csalások detektálása, weben megjelenő oldalak automatizált besorolása, stb..

A feladat elején definiálnunk kell a függő és magyarázó változókat, utóbbiak segítségével fogjuk a függő paraméter értékei alapján osztályozni adatainkat. Számtalan osztályozási technika létezik, mint a döntési-fa, Bayes-alapú, legközelebbi szomszéd osztályozók, neurális háló, tartóvektor gépek (SVM). A legismertebb osztályozási módszerre, a döntési-fa alapú osztályozásra mutatunk példát.



4. ábra. Osztályozás – döntési fa

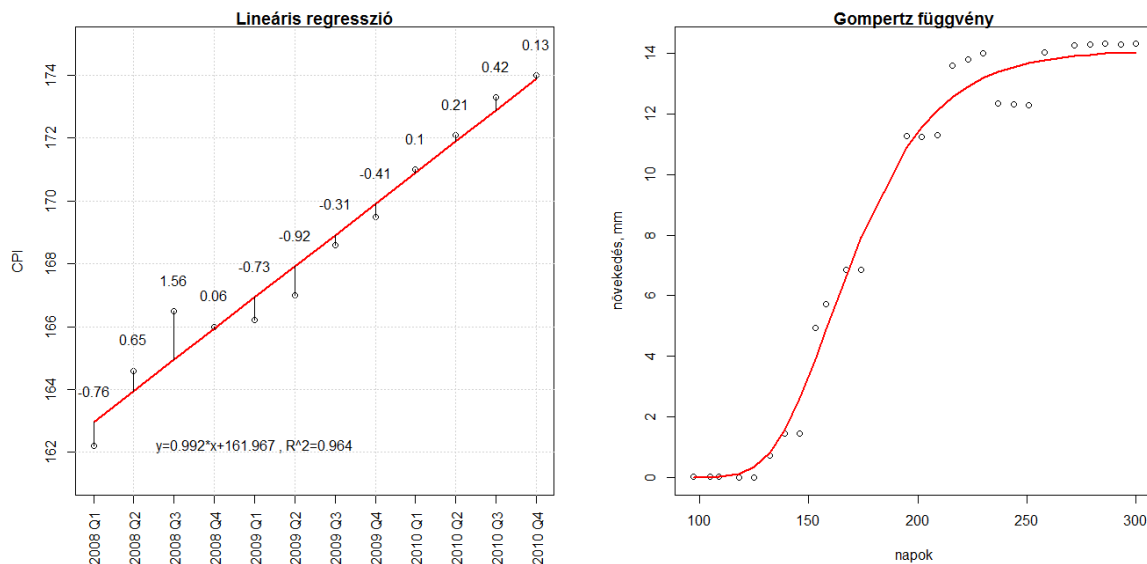
```

tesztdata<-subset(mydata, row.names(mydata) %in% teszt)
tanulodata<-subset(mydata, row.names(mydata) %in% tanulo)
dectree1<-ctree(Species~Sepal.Length+Sepal.Width+Petal.Length+Petal.Width, data=tanulodata)
plot(dectree1, type="simple", main="Döntési fa")
  
```

### Regresszió

Az egy-, és többváltozós, lineáris-, és nemlineáris regresszió a statisztika egy jól ismert és gyakran alkalmazott módszertana. Segítségével függvény jellegű kapcsolat definiálható a függő és független paraméterek között, ami alkalmas a változók közötti kapcsolatok jellemzésére, előrejelzések készítésére a függő paraméter vonatkozásában. Gyakran alkalmazott technika idősorok esetében a trend, tendencia meghatározásában, adatelőkészítő folyamatban (zajos, hiányos adatok kezelése). A nemlineáris regresszió, már egyváltozós esetben is komoly matematikai apparátus alkalmazását követeli meg (pl. nemlineáris egyenletrendszer megoldása), ami többváltozós esetben még tovább bonyolódik, hiszen sokszor már az alkalmazandó függvény meghatározása sem könnyű feladat.





5. ábra. Regressziós görbe illesztése

Két példán keresztül bemutatjuk, hogy mennyire könnyű az R nyelv alkalmazásával elvégezni az illesztéseket, előállítani a modell paramétereit és felhasználni azt az előrejelzésekben. Ugyanakkor mindezt kiegészíti az a grafikus háttér, ami rendkívül szemléletes teszi a kapott eredményeket, segítve azok könnyebb gyakorlati értelmezését.

A vizuális megjelenítéssel együtt könnyen generálhatóak az illesztett görbét jellemző egyéb paraméterek: regressziós egyenlet, determinációs együttható, reziduálisok, illesztett értékek, előrejelzett értékek.

#### 4. Összefoglaló

Az adatbányászat alapjainak ismerete elengedhetetlen egy informatikus végzettségű embernek. Akár ipari, akár tudományos környezetben olyan mennyiségű adat generálódik, aminek a hatékony feldolgozása ma már elképzelhetetlen a hagyományos statisztikai eszközök mellett adatbányászati megoldások alkalmazása nélkül. Ezek tipikusan olyan megoldások, amelyek ötvözik az informatikára jellemző algoritmikus, és a statisztikára jellemző matematikus gondolkodást.

Ahogy bemutatottuk, számtalan fizetős és még több nyílt megoldás létezik adatbányászati feladatok megvalósítására. Ezek közül az R szoftvert mutattuk be röviden, inkább csak felvillantva lehetőségeit ezen a területen. Ehhez három, az adatbányászatra tipikusan jellemző feladatot választottunk ki: klaszterezés, osztályozás és regresszió. Az iris adathalmazon keresztül mutattuk be a lehetőségeket.

#### Irodalomjegyzék

- [1] **Bodon F.**, Adatbányászati algoritmusok, jegyzet (2010).
- [2] **Han, J., Camber, M.**, Data Mining, Concepts and Techniques – second edition, *Morgan Kaufmann Publishers* (2006) pp. 772.
- [3] <http://www.predictiveanalyticstoday.com/>
- [4] <http://rapache.net/>
- [5] <https://www.r-project.org/>

## Hőszivattyús fűtési rendszer vizsgálata

**Borza Sándor, Preklet Edina, Divós Ferenc**

NyME SKK Fizika és Elektrotechnika Intézet

sandor.borza@skk.nyme.hu, edina, preklet.joobne@skk.nyme.hu,

ferenc.divos@skk.nyme.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** A Nyugat-magyarországi Egyetem Simonyi Károly Karán 2015-ben egy 8kW-os hőszivattyút helyeztünk üzembe, mely fűtésre és aktív hűtésre egyaránt alkalmas. Egy darab 100 m mély talajszondát telepítettünk a hőszivattyú kiszolgálására. Ennek környezetében modelleztük a talaj hőmérsékletének változását végeselem-módszerrel. Eredményeinkből az látható, hogy az épület hűtési időszakában az épületből kivont és a talajba juttatott hőmennyiség besegít a fűtési rendszer működésébe. Az épületből a nyári időszakban kivont hőmennyiség a talajban részben tárolódik, minek következtében a fűtési időszak alatt, a talaj hőmérséklete a szondától 0,5m távolságban 1-4°C-kal magasabb, mint amilyen a betáplált hőmennyiség nélkül a talaj hőmérséklete lenne. A magasabb talajhőmérséklet pedig a teljes fűtési időszakban magasabb hatásfokot eredményez a hőszivattyú működése során.

**ABSTRACT.** An 8 kW heat pump was put into operation which is suitable for both active heating and cooling at the Károly Simonyi Faculty of University of West Hungary in 2015. A single 100 m deep ground loop serves the heat pump. The long term temperature history of the soil around the ground loop was calculated by finite element method. Based on our results, it appears that the cooling operation in summer, allocates heat energy in the soil that helps in the heating period. Heat energy extracted from the building during the summer is partly stored in the soil, therefore, the temperature of the soil - 0.5m away from the ground loop - is 1-4 °C higher than it would be without the energy input in summer time. The elevated temperature of the soil results higher efficiency during the entire heating season.

### 1. Bevezetés

A Föld fosszilis energiahordozó készleteinek kimerülése, illetve a környezetszennyezés csökkentése iránti igény erősödése miatt egyre inkább szükségessé válik a megújuló és az alternatív energiaforrások felhasználása. A fosszilis energiahordozók árának emelkedése és a folyamatos fejlesztések eredményeként létrejövő új technológiák, melyek egyre hatékonyabbak és kisebb bekerülési költséggel érhetőek el, együttesen a megtérülési idő rövidülését idézik elő. Magyarország klimatikus és földrajzi adottságai miatt a lehetséges megújuló energiaforrások közül a Föld hőjét hasznosító geotermikus energia kiaknázásában rejlik a legtöbb lehetőség. Mindezek ellenére hazánk a geotermikus hőszivattyús technológia alkalmazásában elmarad a gazdagabb európai országoktól, melynek oka e rendszerek kiépítésének viszonylag nagy költsége és hosszú megtérülési ideje. Ezen okok miatt fontos a geotermikus energia felhasználási lehetőségeinek a kutatása, illetve a technológiák fejlesztése és a fűtési rendszerek hatásfokának javítása.



A kutatásunk célja a geotermikus hőszivattyús fűtési rendszerek optimalizálása, olyan módon, hogy a hűtési időszakban az épületből kivont hőt a talajban tárolva a fűtési szezonban e talajban tárolt hő felhasználásával javítsunk a fűtés hatásfokán. Egy ilyen típusú, a talajban tárolt hőt felhasználó rendszer tervezése során elengedhetetlen a szonda és a földtani közeg közötti hőátadási folyamatok tisztázása, illetve a szondát körülvevő közeg hőmérsékletének számítása. [1].

## 2. A vizsgált rendszer leírása

Kutatásunkban egy NIBE F1145-8 EXP típusú 8kW-os talajszondás geotermikus hőszivattyút használunk, mely fűtésre és aktív hűtésre egyaránt alkalmas.

Egy darab 100 m mély talajszondát telepítettünk úgy, hogy a szonda környezetében három, egymáshoz viszonyított 120 fokos szögben kijelölt irányokban 60 cm és 120 cm távolságban hőmérőket helyeztünk el. A 6 hőmérő csatorna mélysége 30 m. A 100 mély talaj szonda mellett is helyeztünk el hőmérőket. Háromrétegű tokozással ellátott, saját fejlesztésű, kalibrált 1 kΩ-os platina termisztorokból készült hőmérőláncainkban 74 darab hőmérő 4 m-es kiosztásban lett elhelyezve. A regisztrálás automatikusan, 10 percenként történik és az interneten elérhető az adatok.

## 3. A kutatás módszerei

Bármely tetszőleges közegben, általános esetben, a hő hővezetés, hőáramlás és hőszugárzás útján terjedhet. E három hőtranszport folyamatot foglalja össze a hőátadás alapegyenlete, melynek megoldása szolgáltatja az adott elemi térfogatcella hőmérsékletének megváltozását. Tranziens esetben az elemi térfogatcella hőmennyiségének megváltozása:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \rho c = \rho c \left( v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + H.$$

Ha tehát ismerjük az adott test hőmérséklet eloszlását a  $t=0$  pillanatban (kezdeti feltétel), továbbá, a test határfelületén a környezettel való hőcserélődés mértékét (határfeltétel), akkor ezen egyenlet megoldása szolgáltatja a hőmérséklet eloszlást bármely későbbi időpillanatban [2].

A modell készítése során azonban figyelembe vettük, hogy a fent említett három hőterjedési folyamat közül a hőszugárzás a földhőszonda környezetében lévő közeg esetében elhanyagolható a másik két folyamathoz képest. Emellett a vizsgálat tervezésekor feltettük, hogy a földhőszondát a furat teljes hossza mentén agyag veszi körül, mely vízzáró réteget képez a földhőszonda környezetében, ugyanis csak ebben az esetben lehetséges az épületből nyáron kivett hőt a földhőszondát körülvevő talajban tárolni. Mindez azt jelenti, hogyha a földhőszonda környezetében nincs vízáramlás, akkor a hőáramlás is elhanyagolható. Tehát modellünkben a hő a talajban csak hővezetés útján terjed, a másik két hőterjedési folyamatot elhanyagoltuk.

Igy a talaj hőmérsékletének tér- és időbeli eloszlását az ismert Fourier-féle differenciálegyenlet

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = k \Delta T$$

megoldásából kapjuk. Az egyenletben szereplő  $k$  hőmérsékletvezető-képességet a

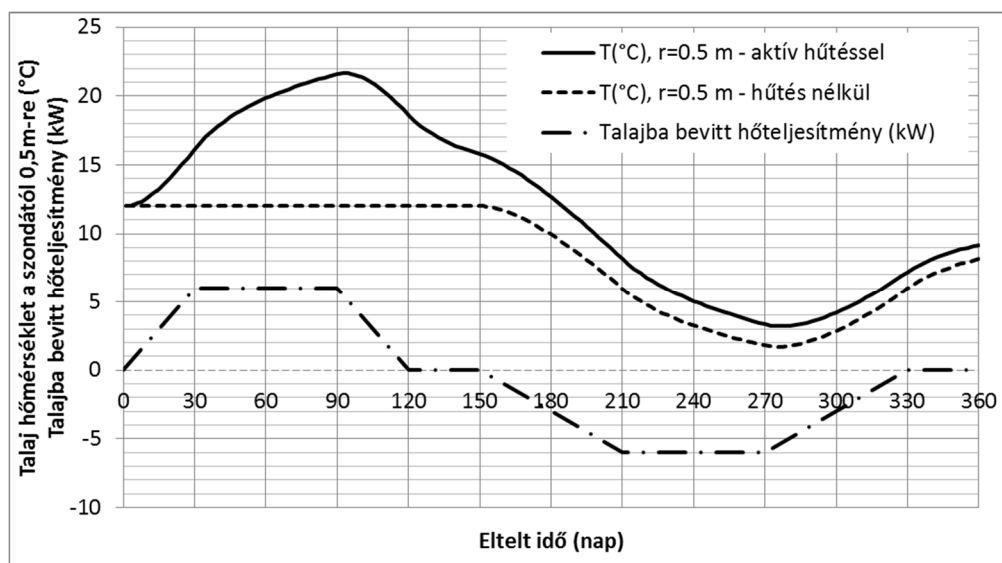
$$k = \frac{\lambda}{\rho c}$$

összefüggésből kapjuk, ahol  $\lambda$  a talaj hővezető-képessége,  $\rho$  a talaj sűrűsége és  $c$  a talaj fajhője. Ezen mennyiségek függenek a talaj fajtájától, nedvességtartalmától, ezért az értékeik meghatározása csak az adott helyen történő mérésekből lehetséges.

A Fourier-féle differenciál egyenletnek nincs zárt, analitikus megoldása, csak numerikus módszerekkel kaphatunk közelítő megoldást. Az egyik ilyen numerikus módszer az ún. véges elem módszer. Ezt a módszert használva, az Ansys program segítségével modelleztük a talaj hőmérsékletének térbeli és időbeli változásait. A későbbiekben a kidolgozott modelleket egyre inkább közelítjük a valóságoshoz, és az adott talaj geotermikus paramétereinek mérése után modellezzük a talaj hőmérsékletének változását.

#### 4. Az eredmények leírása

A földhőszonda és a talaj közötti hőátadást a furat felületén átáramló hő fluxusának segítségével modelleztük. A hőszivattyú által a fűtési időszakban a talajból kivont, illetve a hűtési időszakban a talajba betáplált valóságos hőteljesítményt a külső átlaghőmérséklet szezonális változásának segítségével közelítettük, mivel a hőszivattyú által a talajból kivont, illetve a talajba betáplált hő egyértelműen kapcsolatba hozható a külső átlaghőmérséklettel. A pontosabb összefüggés meghatározásához a későbbiekben fel kívánjuk használni a mérési eredményeket, ami legalább 2 fűtési-hűtési ciklus mérése után lehetséges. Az 1. ábrán jól látható, hogy modellünkben az épület hűtési szezonjának kezdetén, az első 30 napban a talajba betáplált hőenergia, illetve a hőteljesítmény lineárisan növekszik. Ezután 60 napig a hőszivattyú maximális teljesítménnyel működik, majd a hűtési időszak végén a teljesítmény lineárisan csökken. A következő 30 napban, az átmeneti időszakban a hőszivattyú nem vesz fel és nem is táplál be hőenergiát a talajba. Majd az épület fűtési szezonjának kezdetén a hőszivattyú által a talajból kivett hőenergia 60 napig lineárisan növekszik, míg el nem éri a maximális teljesítményét. Ezután újabb 60 napig a hőszivattyú maximális teljesítménnyel üzemel, majd a fűtési időszak végén a teljesítménye 60 nap alatt nullára csökken le. Ezután egy újabb 30 napos átmeneti időszakkal zárul az éves ciklus, amely időszakban nincs a hőszivattyú és a talaj között semmilyen hőcsere folyamat.



1. ábra: A két különböző ciklus talajhőmérsékletének összehasonlítása

A talaj geotermikus gradiensét a modell ezen verziójában nem vettük figyelembe, a talaj kezdeti hőmérsékletét minden csomópontban  $12^{\circ}\text{C}$ -nak vettük. Nem vettük továbbá figyelembe, hogy a földhőszonda csövében keringő folyadék hőmérséklete a visszatérő ágban alacsonyabb, mint az előremenő ágban. Ennek következtében a talaj hőmérséklet térbeli eloszlásának hengersizmetriája a valóságban nem valósul meg, mert a visszatérő ág oldalán a talaj hőmérséklete alacsonyabb, mint az előremenő ág oldalán. A két ágban áramló folyadék hőmérsékletének különbsége a furatban lefelé haladva egyre csökken, tehát lefelé haladva a földhőszonda két oldalán a talaj hőmérsékletének különbsége is egyre kisebb lesz. Mindezek együttesen azt eredményezik, hogy a fűtési időszakban a talajból a hőelvonás a visszatérő ág legfelső pontján lesz a legnagyobb, mert itt a legkisebb a hőszivattyúból visszatérő folyadék hőmérséklete. Ugyanezen ok miatt az előremenő ág legfelső pontján lesz a legkevesebb a hőelvonás, mert a csőben keringő folyadék hőmérséklete is itt lesz a legmagasabb. A jövőben megvalósulhat a mérési eredményeink felhasználása, hiszen az adatokból következtethetünk a talaj adott rétegéből történő hőelvonás mértékére, melynek segítségével modellezhetővé válik a földhőszonda hengerének palástján az adott rétegben átáramló hőfluxus. A kutatás jelenlegi stádiumában első közelítésként a földhőszonda hengerének felületén átáramló hőfluxust mindenhol egységesnek vettük.

Modellünkben a földhőszonda környezetében a talaj hőmérsékletét egy  $r = 10$  m sugarú,  $h = 120$  m magasságú hengerben vizsgáltuk. Ennek a hengernek a tengelyében a földhőszondát egy  $d = 30$  cm átmérőjű,  $h_{sz} = 100$  m magasságú hengerrel modelleztük, mely henger falain keresztül áramlik a hő a talaj és a földhőszonda között. A véges elem felbontás során a modellünkben ezt a hengert osztottuk fel 463367 darab elemre, mely elemek 88116 darab csomópontban kapcsolódnak egymáshoz. Modellünkben a földhőszonda körüli talaj hálózása után a csomópontok sűrűsége a földhőszonda környezetében sokkal nagyobb, mint a földhőszondától nagyobb távolságban, mivel a hőáram fluxusa is itt a legnagyobb, ezért a hőmérséklet változás is ebben a tartományban lesz a leggyorsabb és a legnagyobb.

A modellben figyelembe vett talaj sűrűség  $2750 \text{ kg/m}^3$ , fajlagos hőkapacitás  $879 \text{ J/(kg}\cdot^{\circ}\text{C)}$ , hővezetési tényező  $1,28 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ , a talajban lévő vízmozgást nem vettünk figyelembe. Modellünket hosszú idősoron, egy éves (360 napos) intervallumban, illetve az összehasonlítás céljából csak a fűtési időszakot tartalmazó, féléves (180 napos) intervallumban futtattuk le az Ansys program segítségével.

## 5. Következtetések

Azt a megállapítást tehetjük, hogy azon fentebb említett feltételek teljesülése esetén, melyeket a modell alkotása közben alkalmaztunk, az épület hűtési időszakában az épületből kivont és a talajba juttatott hőmennyiség segíthet a fűtési rendszer optimalizálásában. Az épületből a nyári időszakban kivont hőmennyiség – ilyen feltételek teljesülése esetén – a talajban tárolódik, minek következtében a fűtési időszak kezdetén, sőt a teljes fűtési időszak alatt, a talaj hőmérséklete magasabb, mint amilyen a betáplált hőmennyiség nélkül a talaj hőmérséklete lenne. A nagyobb hőfok különbség pedig a teljes fűtési időszakban magasabb hatásfokot eredményez a hőszivattyú működése során.

## Irodalomjegyzék

- [1] **Tari Cs.**, Földhőszondás hőszivattyús rendszerek primer oldali hőtranszport folyamatainak vizsgálata numerikus modellezéssel, Doktori (Ph.D) értekezés, Szegedi Tudományegyetem (2011).
- [2] **R. Al-Khoury, P. G. Boonier, R. B. J. Brinkgreve**, Efficient finite element formulation for geothermal heating systems. Part I: Steady state. *International Journal for numerical methods in engineering*, **64**, (2005), 988-1013. (doi: <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1313>)

## Időjárás elemzés regressziós eljárás alkalmazásával

**Csanády Viktória**

NyME, EMK Matematikai Intézet  
csanady.viktoria@emk.nyme.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** Napjaink egyik legégetőbb és egyben legfontosabb kutatási témája a klímaváltozás. Számos vélemény, kutatási eredmény lát napvilágot e témában, melyek gyakran bonyolult meteorológiai modellek alkalmazásaiból számítottak. Az alábbiakban tényleges mért hőmérsékleti adatok kielemezésére kerül sor egyváltozós regressziós modellek által, melyek paraméterei fizikailag jól értelmezhetők. Az alkalmazott modellek lehetőséget adnak éves hőmérsékleti adatok összehasonlítására, alapvető különbségek kimutatására.

**ABSTRACT.** Temperature data will be analysed by univariate regression models. The parameters of models can be interpreted well physically. Applied models allow comparison of annual temperature data.

### 1. Bevezetés

Ismert tény, hogy az utóbbi évtizedekben számos alkalommal voltak megfigyelhetők időjárási anomáliák, melyek gyakorisága növekvő tendenciát mutat, szélsőségességük mértéke pedig növekszik. Ezen tények ismeretében felmerült a kérdés, miként mutathatók ki egyszerűbb matematikai statisztikai vizsgálatok alkalmazása révén a különbségek, és ezek milyen paraméterekkel jellemezhetők.

### 2. Anyag és módszer

A vizsgálat tárgyát 3 esztendő, nevezetesen a 2012, 2013 és 2014. évi Budapesten mért hőmérsékleti adatok jelentették. A vizsgálatához felhasználásra került a napi maximális, napi minimális hőmérséklet, valamint az ezen értékekből képzett maximum-minimum hőmérsékleti érték különbsége, vagyis a napi hőmérsékleti differencia. Az éves adatsorok összehasonlításra alkalmas elemzése, a vizuális lehetőség kihasználása érdekében is, regressziós eljárással történt, megfelelő függvény kiválasztásával.

### 3. Eredmények kiértékelése

#### 3.1. Kezdő vizsgálat

A rendelkezésre álló adatok jellegének áttekintése alapján a kiválasztandó függvénynek rendelkeznie kell maximummal, a közelítő szimmetria miatt két inflexiós ponttal, és szükséges, hogy felülről és alulról is korlátos legyen. Ezen túlmenően paraméterei legyenek közvetlenül értelmezhetők, és darabszámuk minél több közvetlen vagy közvetett információt adjon.

Ezek alapján közelítő "Gauss-görbe" látszik szükségesnek, minek megfelelően az alábbi két függvényalak alkalmazható.

A függvény görbületi jellege állandó a 2-es hatványkitevő miatt:

$$1. \quad \text{var2} = b3 / \exp(b2 * (\text{var1} - 1 * b1)^2) + b0.$$

A függvény görbületi jellege változó a b1 hatványkitevő miatt:

$$2. \quad \text{var2} = b4 / \exp((b3 * (\text{abs}(\text{var1} - 1 * b2)))^{b1}) + b0.$$

Mindkét függvény függőlegesen és vízszintesen nyújtott és eltolt a szükségnek megfelelően, és paramétereiről közvetlenül leolvasható a felső és alsó korlát, a maximum helye és értéke, és a 2. függvénynél a görbület jellege. A megadott adatsorokon történt alkalmazás során pedig egyértelműen kiderült, hogy a 2. függvény illesztésénél minden esetben a kapott korrelációs együttható (R) jobb, mint az 1. függvénynél, ezért a 2. függvény alkalmazására került sor.

A számított eredményeket és értékeket az alábbi táblázatok és grafikonok mutatják.

Model: var8=b4/exp((b3*(abs(var1-1*b2)))^b1)+b0 (2012hó)					
Dep. var: VAR8 Loss: (OBS-PRED)**2					
Final loss: 1342,3410890 R= ,83918 Variance explained: 70,423%					
N=365	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	7,862376	0,008015	181,1240	4,233503	3,894965

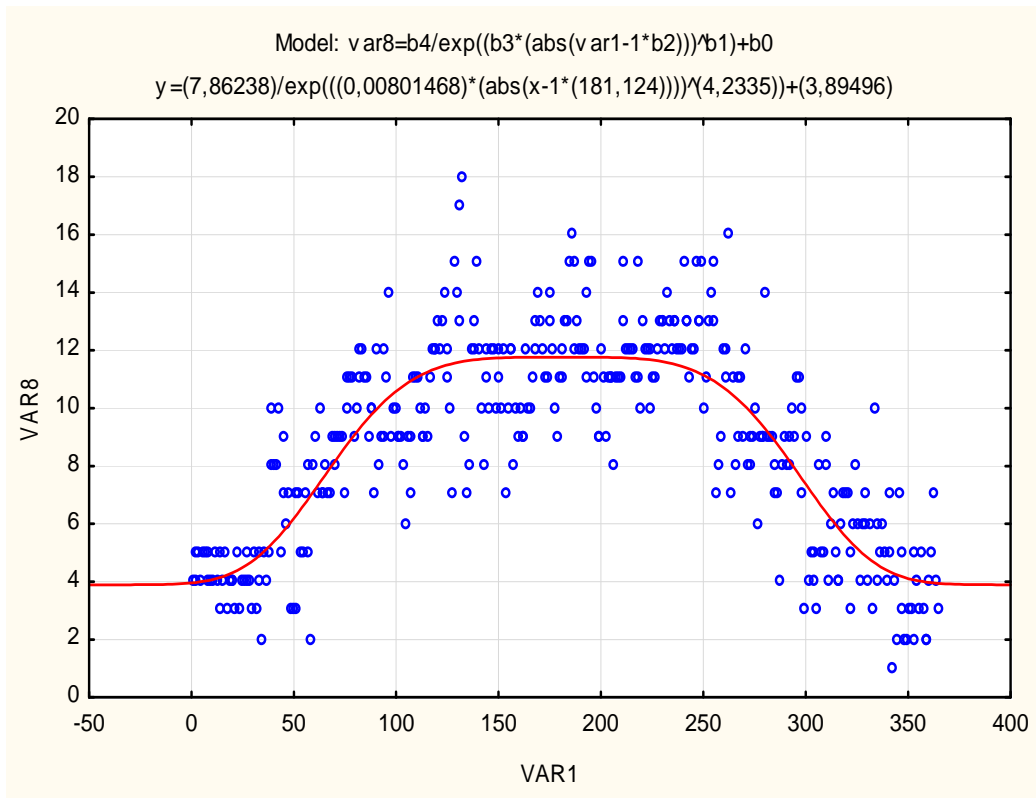
**1. táblázat: Hőmérsékleti differencia 2012**

Model: var5=b4/exp((b3*(abs(var1-1*b2)))^b1)+b0 (2012hó)					
Dep. var: VAR5 Loss: (OBS-PRED)**2					
Final loss: 6686,8264727 R= ,92447 Variance explained: 85,464%					
N=365	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	28,50690	0,008402	197,7722	3,235200	-0,493745

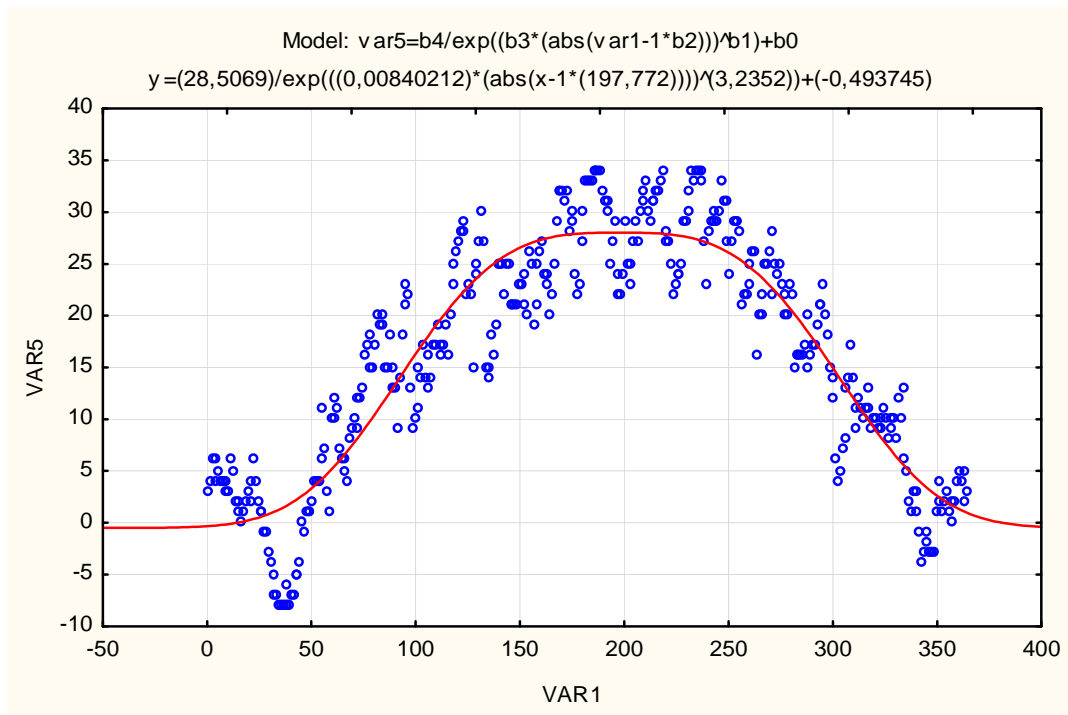
**2. táblázat: Hőmérsékleti maximum 2012**

Model: var6=b4/exp((b3*(abs(var1-1*b2)))^b1)+b0 (2012hó)					
Dep. var: VAR6 Loss: (OBS-PRED)**2					
Final loss: 5016,2605706 R= ,89887 Variance explained: 80,797%					
N=365	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	21,27165	0,008540	204,4272	2,897582	-4,75227

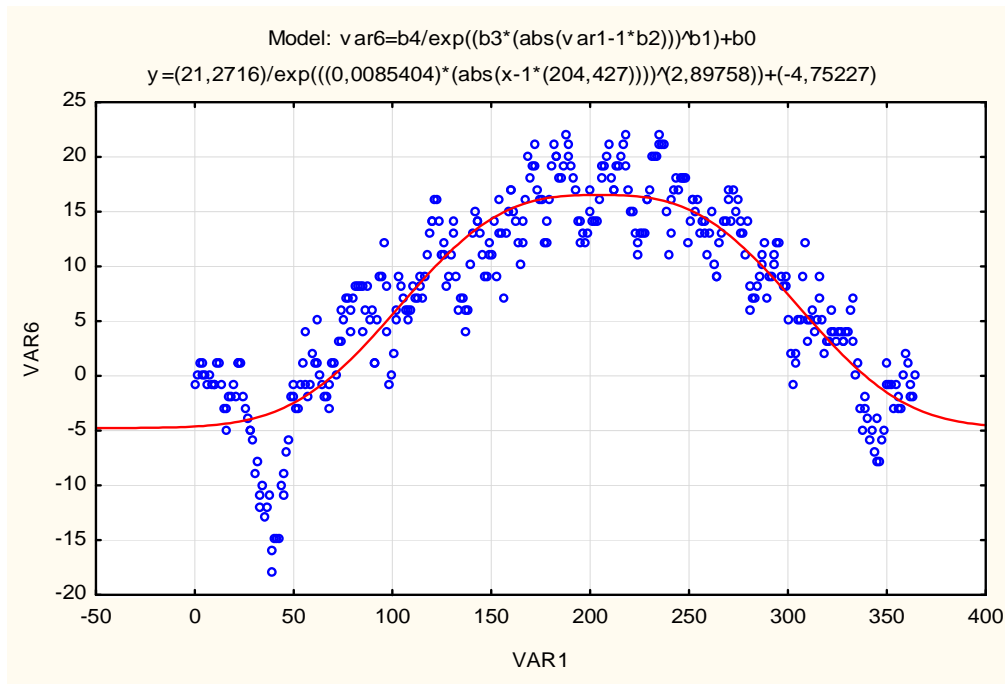
**3. táblázat: Hőmérsékleti minimum a 2012**



1. ábra: Hőmérsékleti differencia 2012



2. ábra: Hőmérsékleti maximum 2012



3. ábra: Hőmérsékleti minimum 2012

N=361	Model: $\text{var8} = b4 / \exp((b3 * (\text{abs}(\text{var1} - 1 * b2)))^{b1}) + b0$ (2013hő)				
	Dep. var: VAR8 Loss: (OBS-PRED)**2				
	Final loss: 1980,6787462 R= ,84992 Variance explained: 72,236%				
	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	15,09615	0,007528	204,9318	1,405378	0,368664

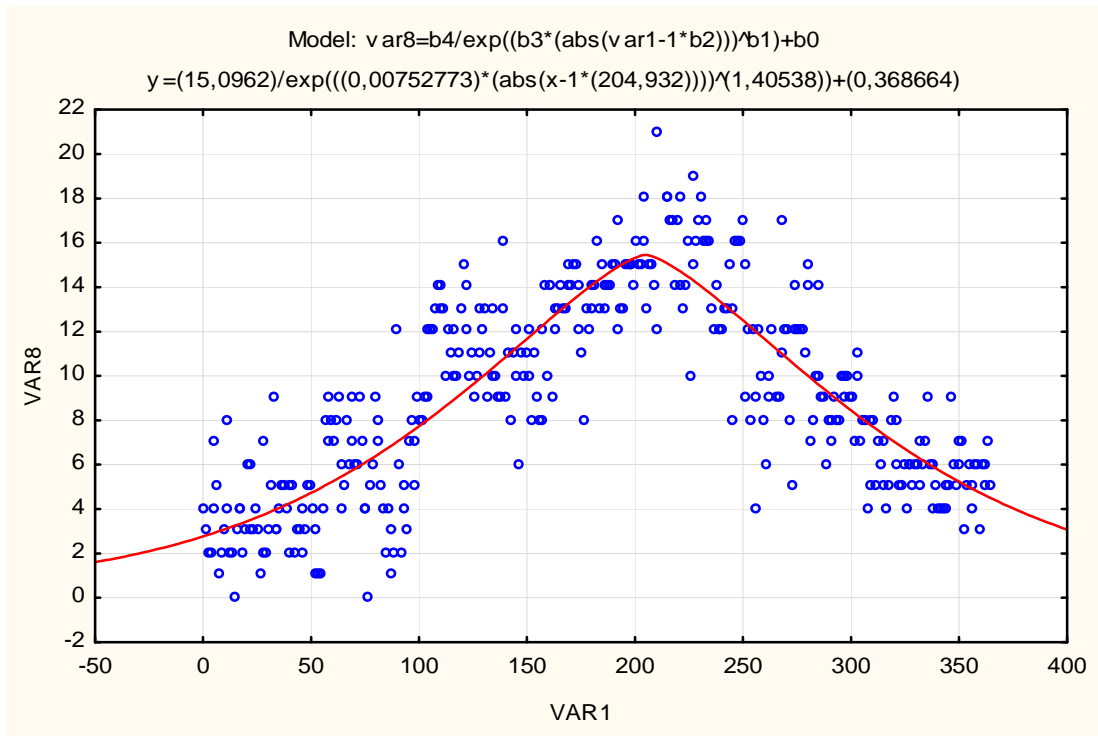
4. táblázat: Hőmérsékleti differencia 2013

N=361	Model: $\text{var5} = b4 / \exp((b3 * (\text{abs}(\text{var1} - 1 * b2)))^{b1}) + b0$ (2013hő)				
	Dep. var: VAR5 Loss: (OBS-PRED)**2				
	Final loss: 6861,6552101 R= ,91966 Variance explained: 84,577%				
	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	35,50512	0,007927	203,8124	1,827248	-3,97838

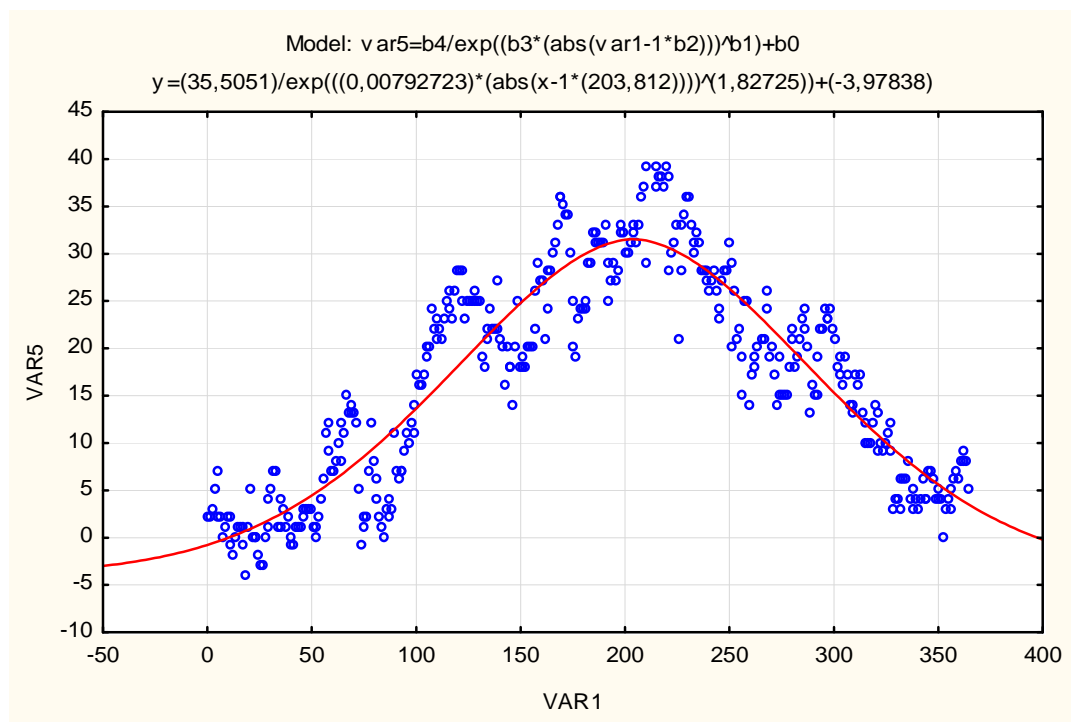
5. táblázat: Hőmérsékleti maximum 2013

N=361	Model: $\text{var6} = b4 / \exp((b3 * (\text{abs}(\text{var1} - 1 * b2)))^{b1}) + b0$ (2013hő)				
	Dep. var: VAR6 Loss: (OBS-PRED)**2				
	Final loss: 4043,1903132 R= ,88752 Variance explained: 78,769%				
	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	20,39401	0,008167	203,7588	2,216833	-4,29048

6. táblázat: Hőmérsékleti minimum 2013

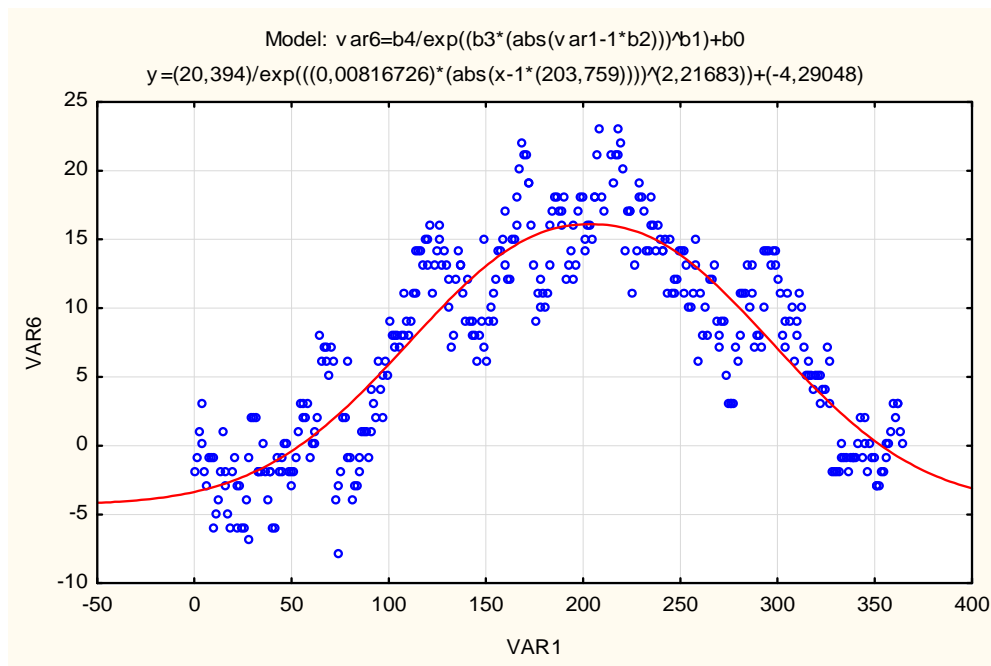


4. ábra: Hőmérsékleti differencia 2013



5. ábra: Hőmérsékleti maximum 2013





6. ábra: Hőmérsékleti minimum 2013

	Model: $\text{var8} = b_4 / \exp((b_3 * (\text{abs}(\text{var1} - 1 * b_2)))^{b_1}) + b_0$ (2014hő)				
	Dep. var: VAR8 Loss: (OBS-PRED)**2				
	Final loss: 1678,7177417 R= ,85303 Variance explained: 72,766%				
N=365	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	10,30769	0,009072	177,3426	2,322190	4,360774

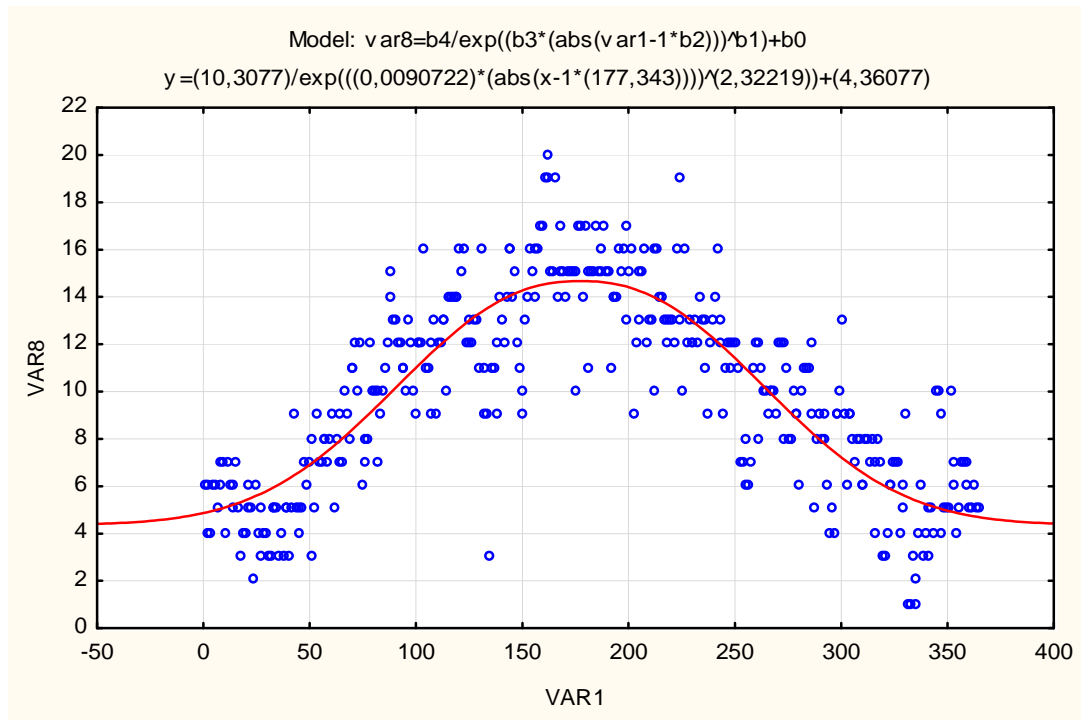
7. táblázat: Hőmérsékleti differencia 2014

	Model: $\text{var5} = b_4 / \exp((b_3 * (\text{abs}(\text{var1} - 1 * b_2)))^{b_1}) + b_0$ (2014hő)				
	Dep. var: VAR5 Loss: (OBS-PRED)**2				
	Final loss: 5707,6577813 R= ,91526 Variance explained: 83,771%				
N=365	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	29,73201	0,007764	191,1810	2,246122	0,416011

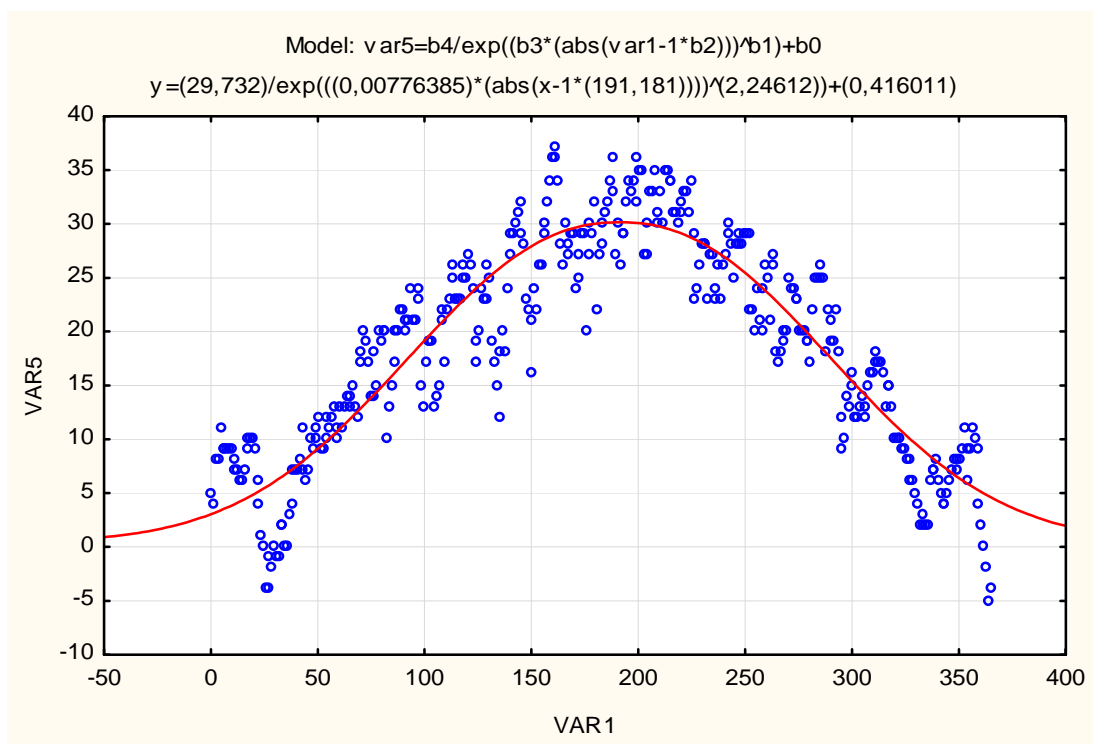
8. táblázat: Hőmérsékleti maximum 2014

	Model: $\text{var6} = b_4 / \exp((b_3 * (\text{abs}(\text{var1} - 1 * b_2)))^{b_1}) + b_0$ (2014hő)				
	Dep. var: VAR6 Loss: (OBS-PRED)**2				
	Final loss: 3768,4147268 R= ,86875 Variance explained: 75,473%				
N=365	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	17,93865	0,008111	199,9433	2,225050	-1,84529

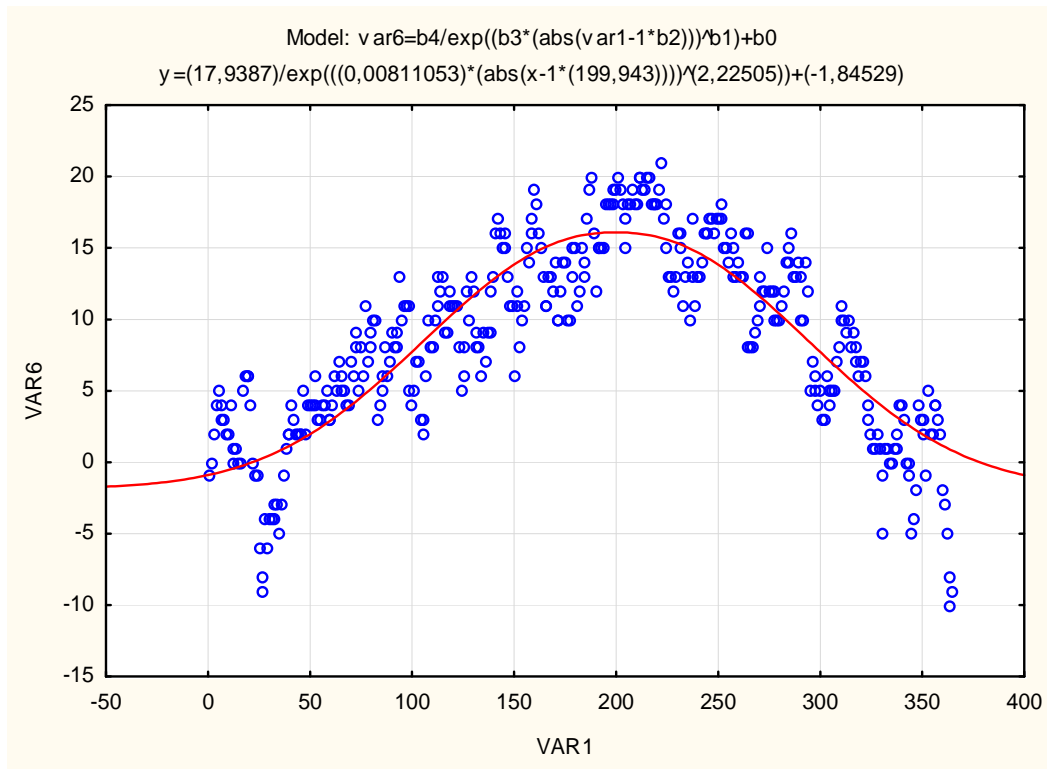
9. táblázat: Hőmérsékleti minimum 2014



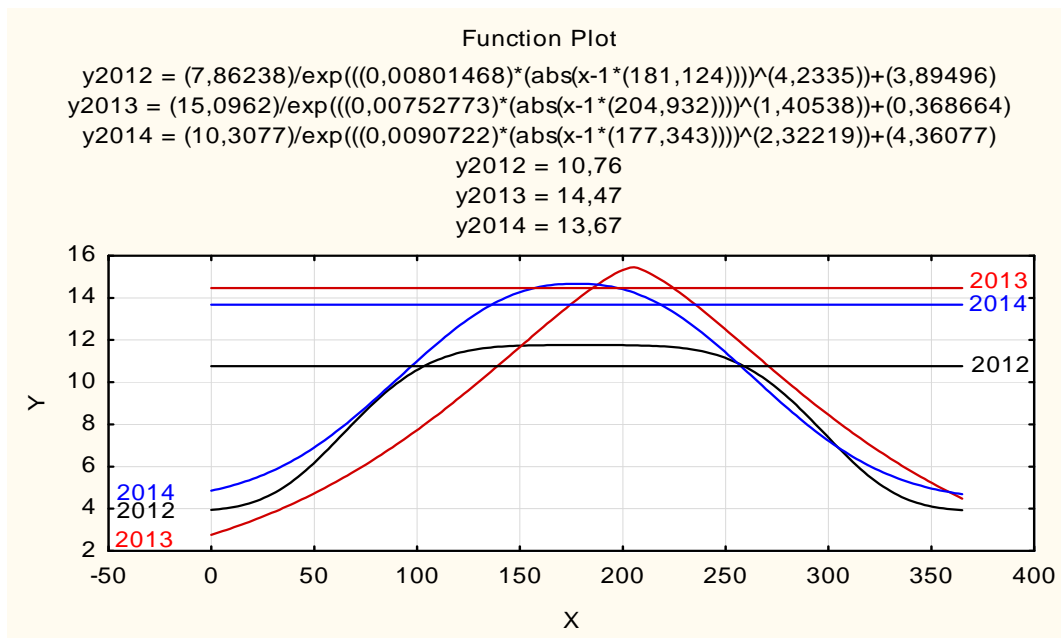
7. ábra: Hőmérsékleti differencia 2014



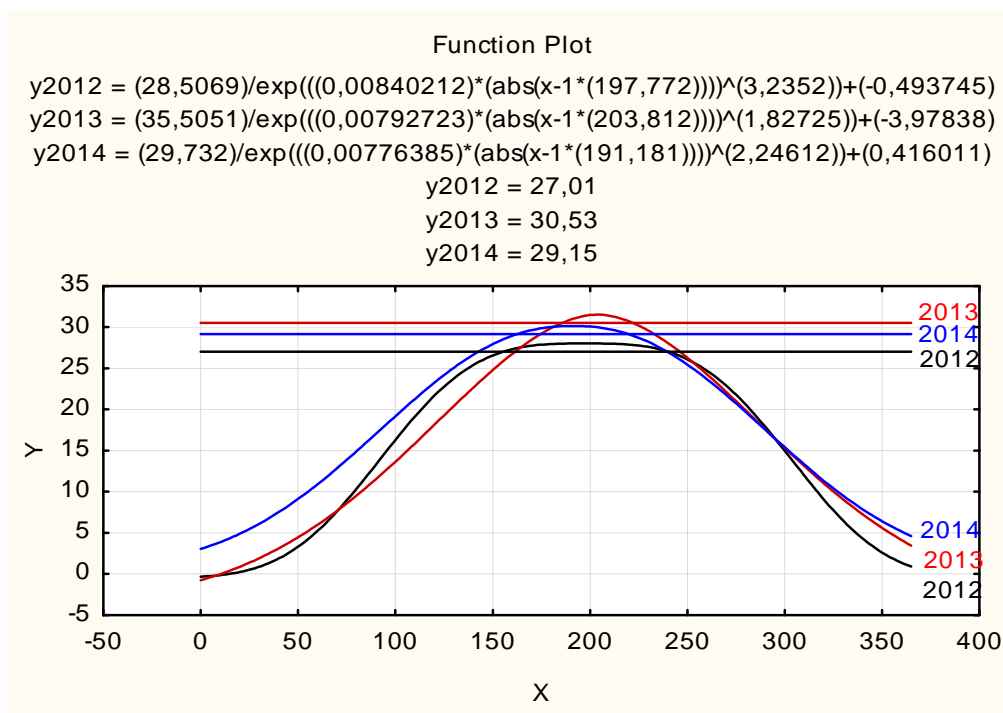
8. ábra: Hőmérsékleti maximum 2014



9. ábra: Hőmérsékleti minimum 2014



10 ábra: A három év összehasonlító grafikonja a hőmérsékleti differenciák menetére nézve, a nyert függvényalakokkal.



11. ábra: A három év összehasonlító grafikonja a hőmérsékleti maximumok menetére nézve, a nyert függvényalakokkal.

### 3.2. Értékelés és elemzés

Az alkalmazott függvényalak paramétereinek értelmezése az alábbi:

$b_4 + b_0$  legnagyobb  $y$  érték,  $b_0$  legkisebb  $y$  érték,  $b_2$  legnagyobb  $y$ -hoz tartozó  $x$ ,  $b_1$  göbealakot meghatározó érték.  $b_1 = 2$  esetén normál alak, ha  $b_1 < 2$  hegyesedő, ha  $b_1 > 2$  laposodó az alak. Az  $1/b_2$  értéke a megfelelő illesztéshez tartozó vízszintes nyújtást kifejező mérték.

A regressziós eljárással nyert görbék közül a hőmérsékletmaximum menetét mutatók korrelációs együttható átlaga a legnagyobb  $R=0,92$ , a hőmérsékletminimumra vonatkozóké  $R=0,88$ , a hőmérsékletdifferenciára vonatkozóké  $R=0,84$ .

A könnyebb és gyorsabb értékelhetőség, összehasonlíthatóság és eltérési kimutathatóság érdekében az alapvető adatok bemutatására az alábbi táblázatban kerül sor, feltüntetve a görbemaximumtól lefelé legfeljebb  $1\text{ }^\circ\text{C}$ -kal eltérő tartományokat is, mely számértékek természetesen a regresszióval nyert függvénygörbék megfelelően kerekített paramétereit. A táblázat rövidítései a következők:

$t(\text{max})$ = az év hőmérsékletmaximumához tartozó időpont az év elejétől számolt napokban.

$h(\text{max})$ = az év hőmérsékletmaximuma celziusz fokokban.

$k(\text{max})$ = az év hőmérsékletmaximum felső tartománya napokban 1 celziusz fok lefelé eltérés figyelembevételével.

$td(\text{max})$ = az év hőmérsékletdifferencia maximumához tartozó időpont az év elejétől számolt napokban.

$hd(\text{max})$ = az év hőmérsékletdifferencia maximuma celziusz fokokban.

$kd(\text{max})$ = az év hőmérsékletdifferencia maximum tartománya napokban 1 celziusz fok lefelé eltérés figyelembevételével.

év	t(max)	h(max)	k(max)	R	<i>b</i> 1
	td(max)	hd(max)	kd(max)	R	<i>b</i> 1
2012	198	28,01	86	0,924	3,23
	181	11,76	156	0,839	4,23
2013	204	31,52	36	0,920	1,83
	205	15,47	40	0,850	1,40
2014	191	30,15	57	0,915	2,25
	177	14,67	82	0,853	2,32

10. táblázat: Összefoglaló táblázat

#### 4. KÖVETKEZTETÉS

A regresszióval nyert görbék összefoglaló ábráit (10. és 11. ábra) is értékelve, a táblázat adatait statisztikai jelleggel elemezve a következő megállapítások tehetők.

- A 2014-es év napi hőmérsékletmaximumot és napi hőmérsékletdifferenciát mutató görbealakja áll legközelebb a Gauss görbéhez a  $b_1=2,25$  ill.  $2,32$  érték miatt, ezért ezen év hőmérséklet menete statisztikai értelemben normálisnak tekinthető.
- A 2012-es év napi hőmérsékletmaximum felső tartománya  $k(\max)=86$  nap, napi hőmérsékletdifferencia maximum tartománya  $kd(\max)=156$  nap, ami a  $b_1=3,23$  ill.  $4,23$  értékkel együtt azt jelzi, hogy ezen évben eltérően hosszú ideig volt statisztikailag nyári évszak.
- A 2013-as évben az előző évhez képest a  $k(\max)=36$  nap, a  $kd(\max)=40$  nap rövid idejű volt  $b_1=1,83$  ill.  $1,40$  érték mellett, ami egyértelműen mutatja, hogy a tavaszi, nyári és őszi évszak gyorsan változó jelleggel rendelkezett. Ugyanekkor a kiemelkedően magas  $h(\max)=31,52$  C°, és  $hd(\max)=15,47$  C° időkeséssel  $t(\max)=204$ -dik nap,  $td(\max)=205$ -dik nap jelent meg.
- A vizsgált három év időbeli hőmérsékletérték változási menete különböző, viszonyítási alapanak a nyert paraméterek alapján a 2014-es év rendje tekinthető. A 2012-es és 2013-as év értékei viszont jelzik, hogy a klímaváltozás elemzéséhez érdemes még néhány éves időszak adatainak megfelelő módszerrel való feldolgozását is elvégezni.

A felsoroltak és bemutatottak alapján megállapítható, hogy a regressziós eljárásához alkalmazott egyedileg szerkesztett függvény jól értékelhető paramétereket szolgáltat meteorológiai adatok feldolgozásához és elemzéséhez.

#### Irodalomjegyzék

- [1] **Csanády V.:** Számítógépre konvertált nem hagyományos regressziós eljárások faipari – erdészeti kutatási és műszaki problémákhoz. Műszaki doktori értekezés, Sopron, EFE, (1993).
- [2] **Orbay L.:** A többváltozós regressziószámítások alapja és fagazdasági alkalmazása, EFE, Sopron, (1990).
- [3] **D. R. Pelz, :** Einführung in die biologische Statistik für Forststudenten. Teil II.Freiburg, (1989).

## Az alkalmazott matematika tantárgy oktatásának sokszínűsége és módszertanának modernizálása az MSc képzésében

**Horváth-Szováti Erika**

NyME EMK Matematikai Intézet  
horvath-szovati.erika@emk.nyme.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** A matematika oktatás modernizálása a felsőoktatásban nagyon időszerű. A matematikai jelölésrendszer elsajátítása, a matematikai gondolkodásmód kialakítása és a problémamegoldó készség fejlesztése a legfontosabb cél.

**ABSTRACT.** The modernization of mathematics teaching in higher education is very timely. The notation used in mathematics to learn, develop problem-solving skills and the development of mathematical thinking is the most important goal.

### 1. Bevezetés

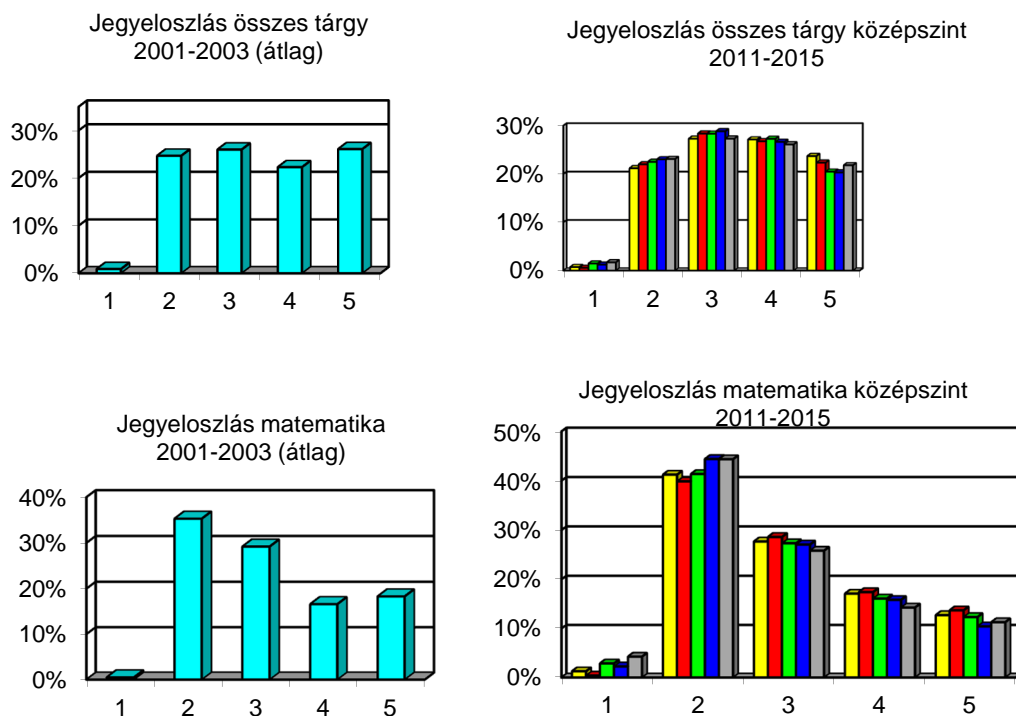
Egyre több felsőoktatási intézmény oktatóiban merül fel az a gondolat, hogy az egyetemi hallgatókat nem lehet a hagyományos módszerekkel tanítani. A 10-20 évvel ezelőtt használt oktatási módszerek (a tételek, bizonyítások vizsgán történő szigorú számonkérése, szóbeli vizsgáztatás, stb.) válságban vannak. Sokszor szembesülünk a régi módszerek negatív következményeivel. Ilyen például az, hogy a diákokban kialakult tudás nem valódi, hanem látszólagos, azaz nem megérteni próbálják az anyagot, hanem csupán értés nélkül memorizálni, és a későbbiekben az ismereteket nem képesek önállóan alkalmazni. Egyre többen értünk egyet abban, hogy oktatás-módszertani megújulásra van szükség a felsőoktatásban. A mesterképzés a mai formájában a 2009/10-es tanévben indult, a Nyugat-magyarországi Egyetem EMK és SKK karain az alkalmazott matematika tárgy oktatását a második évtől, a 2010/11-es tanévtől kezdve vettem át nyugdíjba vonult kollégáktól. A tantárgyi program kidolgozása elődeim munkája, de jelenlegi tantárgyfelelősként az oktatás módszertanát és a vizsgáztatás rendszerét – véleményem szerint a mai kor elvárásaihoz jobban igazodva – megváltoztattam. Ebben a cikkben az azóta összegyűjtött tapasztalataimat szeretném összegezni.

### 2. A matematikai oktatás során felmerülő általános problémák

Az MSc-s hallgatók matematikai alapismeretei – más egyetemek oktatóinak véleménye alapján is – sok esetben hiányosak. Ennek többféle oka lehet. Egyrészt a mesterképzés hallgatói sokféle főiskolai, egyetemi előélettel rendelkeznek, emiatt a BSc képzésben nem teljesen ugyanazt a tananyagot és nem ugyanakkora óraszámban tanulták. Másrészt a BSc-MSc rendszer különözeti vizsgákkal ugyan, de meglehetősen nagy átjárhatóságot biztosít az egyes szakok között. Például környezetmérnöki MSc szakon találkozhatunk olyan hallgatóval is, aki a BSc diplomáját földrajz vagy biológia tanári szakon szerezte, emiatt az alapképzésben sokkal kevesebb matematikát tanult, mint a mérnökhallgatók. A matematikai

hiányosságok egy másik oka az, hogy az utóbbi 10-20 évben a felsőoktatás „bemeneti oldalát” nézve két nagy változást történt: tömegessé vált a felsőoktatás (ez a folyamat már a 90-es években megindult), illetve a 2004/05-ös tanévben bevezették a kétszintű érettségit. Az általunk jelenleg oktatott hallgatók közül kevesen érettségiztek emelt szinten valamilyen tárgyból, matematikából pedig szinte senki sem.

Az Oktatási Hivatal honlapján közzétett prezentációkat (1. ábra) elemezve egyértelműen látszik, hogy – a kétszintű érettségi bevezetésétől függetlenül – matematikából minden évben gyengébb eredmények születnek a többi tárgyhoz viszonyítva. Tehát a kétszintű érettségi bevezetése látszólag nem okozott változást. Az azonban észrevehető, hogy a kétszintű érettségi közép szinten az elégségesek relatív gyakoriságát kissé növelte és közepeseket csökkentette, továbbá kevesebb a jeles, mint a kétszintű érettségi bevezetése előtt volt. Az utolsó öt év adatai alapján azt mondhatjuk, hogy napjainkban a diákok kb. 70%-a legfeljebb közepes osztályzatot szerez a középszintű érettségiben, és a mi egyetemünkre jelentkezők legnagyobb része feltehetőleg közéjük tartozik.



1. ábra. Az érettségi jegyek eloszlása a kétszintű érettségi bevezetése előtt és 2011-15-ben

Az elégségesek számának emelkedése különösen elgondolkodtató, mert a középszintű matematika érettségi jegyek nem ugyanazt a tartalmat tükrözik, mint a korábbiak. A középszintű matematika érettségiből kikerültek a bizonyítások és a komplex feladatok. Ez azért sajnálatos, mert meggyőződésem szerint a matematikaoktatás egyik célja egy speciális gondolkodásmód kialakítása, a logika fejlesztése. Több mint 10 éves érettségi elnöki tapasztalattal rendelkezem a középszintű érettségiken. Ennek során lehetőségem van a legkülönbözőbb középiskolák matematika szakos tanárainak véleményét megismerni. Legtöbbször egyetértenek abban, hogy a bizonyítások, illetve a viszonylag komplexebb feladatok hiánya megváltoztatta a matematika közép szinten történő oktatását. Gyakorlatilag a szaktanárokon múlik, hogy bizonyításokat, gondolkodásra serkentő, összetettebb feladatokat milyen mértékben tanítanak, illetve milyen (általában elemi) szinten kéri ezeket számon.

Tehát az alapképzésekbe belépő hallgatók valószínűleg nem rendelkeznek olyan fokú problémafelismerő, problémamegoldó készségekkel, mint elődeik.

Összefoglalva: a matematikaoktatásnak, sőt az egész felsőoktatásnak valamilyen oktatás-módszertani megújulásra van szüksége, mivel – úgy tűnik – egyrészt az eddigi módszerekkel látszólagos tudást szereztek a hallgatók, másrészt elmaradás tapasztalható a korábban megszokott gondolkodásmódban, problémamegoldó készségekben. A megújulás azt jelenti, hogy a korábbi tematikákat át kell tekintenünk például abból a szempontból, hogy

1. mi a kimeneti követelmény (kiket képzünk),
2. mi a matematika oktatásának célja,
3. milyen matematikai tudásbázisra építhetünk,
4. amit tanítani próbálunk, az mennyire áll közel a gyakorlati élethez,
5. mit és milyen mélységben oktassunk,
6. hogyan vélekednek a hallgatók a matematikaoktatásról.

### 3. Az alkalmazott matematika oktatásának sokszínűsége és módszertanának modernizálása a NyME EMK és SKK Karain MSc képzésben

#### 3.1. A matematika oktatás célja

A felsőfokú matematikai műveltség manapság egyre szélesebb körben hasznosítható. A szerteágazó matematikai alkalmazások szükségessé teszik, hogy a mérnökhallgatók – azok is, akik nem műszaki, hanem agrár, vagy egyéb szakterületre készülnek – olyan matematikai alpműveltségre tegyenek szert, amelynek segítségével a későbbi pályájuk során előforduló matematikai problémákat megértik, és egyedül, vagy kisebb segítséggel meg tudják oldani. Fontos célunk az alapos, alkalmazható, művelhető matematika tudomány átadása. Szeretnénk a hallgatókkal megismertetni a matematika jelölésrendszerét, a felsőbb matematika eszköztárát, a leggyakrabban előforduló gyakorlati módszereket a különböző témakörökben (egy- és többváltozós függvénytan, lineáris algebra, valószínűségszámítás és statisztika).

A piac a végzett hallgatóktól azt várja el, hogy olyan szakemberek legyenek, akik

1. felismerik a vizsgálandó probléma esetleges matematikai vonatkozásait,
2. azt le tudják fordítani a matematika nyelvezetére,
3. ki tudják választani (esetleg segítséggel) a megoldáshoz szükséges matematikai módszert,
4. azt végre tudják hajtani (vagy ha a megoldásban segítséget kérnek, akkor a megoldás menetét – legalább vázlatosan – képesek megérteni),
5. a kapott megoldást tudják értelmezni,
6. az eredményeket vissza tudják fordítani a szakterületük nyelvezetére,
7. más területeken is jó problémamegoldó képességgel rendelkeznek (ez a matematika tanulás egy fontos pozitív hozadéka).

A hallgatóknak az egyetem felé irányuló két legfőbb elvárása az, hogy

1. a megszerzett tudás a gyakorlatban alkalmazható legyen, és
2. a vizsgát sikeresen teljesítsék.

A hallgatók első elvárásának nagyon nehéz megfelelnünk, mert a matematikának az ő szakterületükön történő gyakorlati alkalmazhatóságát sajnos sokszor megkérdőjelezzik. Nem látják be, hogy a matematikai gondolkodásmód kialakulása a problémamegoldó készséget más területeken is javítja. Ezt mi, oktatók a matematikai tájékozatlanságukkal, a tárgy iránti –



legtöbbször a kudarcból fakadó – ellenérzéseikkel magyarázzuk. A hallgatók, mint „vevők” jogosan várnak el a tanulással, a tananyaggal, mint termékkel kapcsolatos minden segítséget, azaz „szolgáltatást”. Ebben a felfogásban az oktató szerepe megváltozik. Az oktató közvetítő szerepet tölt be a hallgatók és a piac között. Meg kell találnia az elmélet és a gyakorlat helyes arányát, meg kell tudnia határozni tudományterületének azon elemeit, illetve ezen elemek olyan formáit, amelyek a gyakorlatban leginkább hasznosíthatók.

Az oktatás tárgyának, formájának és mélységének dilemmái nem csak a matematikaoktatás sajátosságai. Valószínűleg ezekkel a problémákkal bármely tantárgy, illetve tantárgycsoport szembekerült, vagy szembe fog kerülni. Azonban látható, hogy ha bármely tantárgy esetében változtatást vezetünk be, az kihathat más tantárgyak oktatására is, ezért amikor a matematikaoktatás átalakításáról beszélünk, arról is beszélnünk kell, hogy a többi tantárgy oktatását miként alakítsuk át. Nyilvánvalóan ezeknek a kérdéseknek a megoldásához az egyes szakmacsoportok – jelenleg még eseti jellegű – párbeszéde is szükséges.

### 3.2. Az alkalmazott matematika oktatásának sokszínűsége

MSc képzésben alkalmazott matematika tárgyból mind a két karon folyik oktatás, a tananyagban, az óraszámokban, valamint a követelményrendszerben eltérések vannak (1. és 2. táblázat). Van képzés nappali és levelező tagozaton is, szintén nagyon eltérő óraszámokban. Érdekes, hogy a könnyűipari mérnöki képzést az Óbudai Egyetem és a Nyugat-magyarországi Egyetem közösen végzi. A hallgatók az első évben döntően Sopronban, a második évben Budapesten tanulnak. Az alaptárgyak oktatása Sopronban, a szakmai tárgyak oktatása Budapesten történik. A papírfeldolgozó szakirány hallgatói a szakmai tárgyak jelentős részét is Sopronban hallgatják.

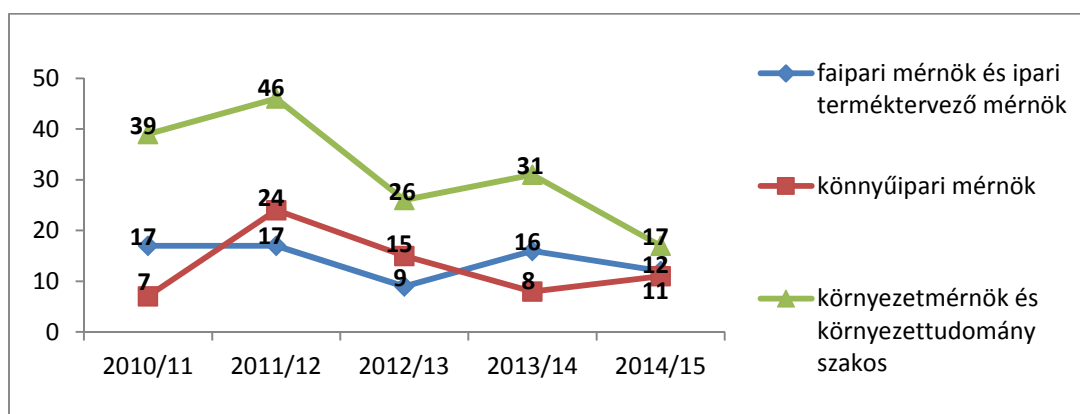
A hallgatói létszámok egyetemünkön az MSc képzésekben nagyon kicsik, az egyetem honlapján érdeklődők is olvashatják, hogy „kis létszámú évfolyamainkon több idő jut Önre, személyes kapcsolata lehet az oktatóival”. A 2. ábrán látható az utolsó öt tanévben (2010/11-től 2014/15-ig) a hallgatók összlétszáma a három fő képzési területen (egy tanévre összegezve az adott szakirányban, a két szemeszterben összesen oktatott nappali és levelező tagozatos hallgatók számát).

kar	kód	szakirány	képzés	óraszám (ea+gyak)	vizsga- évközi jegy	kredit
SKK	F2FNMAT N0,N1	faipari mérnök, ipari terméktervező mérnök	nappali	heti 2+2	v	6
	F2FLMAT L0, L1	faipari mérnök, ipari terméktervező mérnök	levelező	félévi 12+12	v	6
	F2KNMAT N0,N1	könnyűipari mérnök	nappali	heti 2+2	v	6
	F2KLMAT L0,L1	könnyűipari mérnök	levelező	félévi 15+10	v	6
EMK	EG627-CAA00 N0,N1	környezetmérnök, környezettudományi szak	nappali	heti 2+1	é	3
	EG627-CAA00 L0,L1	környezetmérnök, környezettudományi szak	levelező	félévi 6+3	é	3

1. táblázat. Az alkalmazott matematika tantárgy óraszámjai az egyes képzésekben

hét	SKK 2ea+2gyak/hét	EMK 2 ea+1 gyak/hét
1.	Differenciálegyenlettel megoldható szöveges feladatok	u.a. (ugyanaz, kevésbé részletesen)
2.	Állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása (konstansvariálás és próbafüggvény módszere)	u.a.
3.	Differenciálegyenletek megoldása sorbafejtéssel	u.a.
4.	Többváltozós függvények (kiemelten a három és több változós függvények)	u.a.
5.	Lokális szélsőérték (Hesse-féle mátrix), feltételes szélsőérték	u.a.
6.	Abszolút szélsőérték	u.a.
7.	Zárthelyi az 1-6. hét anyagából. Kétfváltozós függvények integrálása (BSc anyag ismétlése, új anyag: nem origó középpontú körrel kapcsolatos tartományok)	Zárthelyi az 1-6. hét anyagából. Két- és háromváltozós függvények integrálása (BSc anyag ismétlése, új anyag: hengerkoordináták)
8.	Kétfváltozós függvények integrálásának folytatása (poláregyenletekkel felírható tartományok, ellipszis tartomány)	Az integrálás alkalmazásai (térfogat, tömeg, tömegközéppont, felszín)
9.	Háromváltozós függvények integrálása (BSc anyag ismétlése, új anyag: hengerkoordináták)	Vektor-skalár függvények (csavarvonal), vektor-vektor függvények, divergencia, rotáció, gradiens, nabla operátor, Laplace operátor, vonalintegrál
10.	Háromváltozós függvények integrálásának folytatása (ellipszoid tartomány)	Statisztikai alapfogalmak ismétlése, a döntésemélet alapjai
11.	Az integrálás alkalmazásai (térfogat, tömeg, tömegközéppont, felszín)	Regressziószámítás
12.	Vektor-skalár függvények (csavarvonal egyenletének felírása), vektor-vektor függvények, divergencia, rotáció, gradiens, nabla operátor, Laplace operátor, vonalintegrál	Varianciaanalízis
13.	Zárthelyi a 7-12. hét anyagából	Zárthelyi a 7-12. hét anyagából
14.	Pótló (javító) zárthelyi	Pótló (javító) zárthelyi

2. táblázat. Az alkalmazott matematika tananyag heti lebontásban



2. ábra. Az MSc képzésben alkalmazott matematikát hallgatók száma az egyes tanévekben

### 3.3. Az alkalmazott matematika oktatás módszertanának és a vizsgáztatás rendszerének modernizálása

Az alkalmazott matematika tantárgy oktatásának során a cél a matematika jelölésrendszerének helyes használata, és az alkalmazást helyezzük előtérbe a mély matematikai háttérösszefüggések megértése helyett. Az előadásanyagokból PPT készült, amelyen az alapvető tételek, illetve a témákhoz kapcsolódó feladatok és nagyszámú házi feladat szerepel végeredménnyel. Ezt a hallgatók a félév első óráján megkapják, így óra alatt csak a feladatok megoldásának menetét kell a tábláról leírni. A hiányzók is pontosan tudják, hogy mi a heti tananyag. Nem kell memorizálni képleteket, a zárthelyik és a vizsga során használható képletgyűjtemény.

A környezetmérnök és környezettudomány szakos levelezős hallgatók kivételével minden hallgató a félév során két zárthelyit ír. A kivételt képző levelezős kurzus számára három konzultáció van (mindegyik konzultáción 2 előadás és 1 gyakorlat). Az első tanévekben egy pótalkalom beillesztésével lehetőségem volt két zárthelyi íratására, ez azonban nyilván csak a hallgatók beleegyezésével volt lehetséges. Egyre gyakrabban előfordul, hogy munkahelyi kööttségekre, utazással kapcsolatos anyagi terhekre és egyéb dolgokra hivatkozva a pótalkalmat nem szavazza meg a csoport, ilyenkor egyetlen „összevont” zárthelyit írnak a harmadik alkalommal. Ez sajnos jóval nagyobb sikertelenséggel zárul, mint amikor két részletben történt a készülés és a számonkérés.

Az alkalmazott matematika az SKK hallgatói számára vizsgaköteles tantárgy, az EMK hallgatói pedig a két zárthelyi pontszámának összegéből kialakított félévközi jegyet kapnak. Az SKK hallgatói a zárthelyik átlagának minimum 40%-os teljesítése esetén „rövid vizsga” lehetőségével élhetnek, akik pedig a zárthelyik során nem érik el ezt a szintet, „hosszú vizsgát” írnak. Ennek során az elégséges feltétele mind a gyakorlati, mind az elméleti rész minimum 40%-os teljesítése. A „rövid vizsga” 60 perces feladatsora két részből áll: „I. Teszt” (30 pont) és „II. Kiegészítendő kérdések” (20 pont) (3-4. ábra). Az I. részben 10 db tesztkérdés van (helyes válasz 3 pont, nincs válasz 0 pont, hibás válasz -1 pont), ezek a feladatmegoldásoknak csak egy-egy részlépésére, az ok-okozati kapcsolatokra kérdeznak rá. A II. rész 5 db 4 pontos, röviden megválaszolható kérdésből áll (példaadás, képlethasználat, vagy egy-két lépéssel könnyen megoldható feladat). A „rövid vizsgán” is minimum 40%-ot kell elérni az elégségeshez. A tapasztalat azt mutatja, hogy az ilyen stílusú feladatsorra nem lehet „magolással” készülni, a hallgatók rákényszerülnek a tananyag megértésére. Olyan nagy feladatbankot állítottam össze, hogy a kérdések ismétlődése szinte kizárt. Meglepő módon az ilyen típusú vizsga előbb-utóbb azoknak is sikerül, akik nagyon gyenge alapokkal, viszont kellő szorgalommal rendelkeznek. A végső osztályzat legtöbbször elégséges vagy közepes, de néha egy-egy ebből kiemelkedő (jó vagy ritkán jeles osztályzatra vizsgázó) hallgatóval is találkozom. A hallgatók kb. 30%-a sajnos nem tudja az első tárgyfelvétel során teljesíteni a követelményeket, így többször felveszi a tárgyat. Ez leginkább azokkal fordul elő, akik nem kellő hangsúlyt fektetnek a tananyag megértésére.

Érdekes kérdés, hogy a nem nappali tagozatos képzésekbe a fenti módszertan átvihető-e. Itt a kevesebb kontaktóra miatt lehetséges, hogy a nappali tagozattal szemben aránytalanul megnehezül a tananyag elsajátítása. A levelezős tananyag a nappalis anyag szűkített változata, néha tartalmaz kisebb, önállóan feldolgozandó részeket is, természetesen részletes kiadott anyag alapján. Véleményem szerint megengedhető, hogy levelező képzésen kicsit más felépítést kövessünk, de nem szabad megfélekedni arról, hogy ez a nappali és levelező képzés közötti átjárhatóságot veszélyezteti. Igaz ugyan, hogy szinte soha nem találkozunk levelező képzésről nappalira történő átjelentkezéssel, inkább fordítva fordul elő.

1. Válasszuk ki azt a differenciálegyenletet, amely homogén részének általános megoldása  $c_1 \sin x + c_2 \cos x$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ :
- A)  $y''(x) - y'(x) = e^x$  B)  $y''(x) - y(x) = \sin x$   
 C)  $y''(x) + y'(x) = x^2$  D)  $y''(x) + y(x) = x$
2. Az  $y'(x) = \frac{1}{2}y^2(x) - e^{-x}$ ;  $y(0) = -1$  differenciálegyenlet sorbafejtéssel történő megoldásakor a harmadfokú tag együtthatója:
- A)  $\frac{1}{4}$  B)  $-\frac{1}{4}$  C)  $\frac{1}{24}$  D) egyik sem helyes
3. A  $z = \sqrt{\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12}} - 3$  grafikon alakja
- A) egy forgáspároloid, melynek csúcspontja  $C(0, 0, 3)$   
 B) egy forgáspároloid, melynek az  $xy$  síkban lévő metszete egy  $r = 6$  sugarú kör  
 C) egy forgáskúp, melynek csúcspontja  $C(0, 0, -3)$   
 D) egy forgáskúp, melynek az  $xy$  síkban lévő metszete egy  $r = 6$  sugarú kör
4. Az  $f(x, y, z) = 8xy + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2}z^2$  függvény Hesse-mátrixának hiányzó elemei:  $H(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 8 & 0 \\ A & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$
- A)  $A = 0$ ,  $B = \frac{2}{y^3}$ ,  $C = 1$  B)  $A = 8$ ,  $B = \frac{2}{y^3}$ ,  $C = -1$   
 C)  $A = 0$ ,  $B = -\frac{2}{y^3}$ ,  $C = -1$  D)  $A = 8$ ,  $B = -\frac{2}{y^3}$ ,  $C = 1$
5. Integráljuk az  $f(x, y, z)$  függvényt a  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; y, z \geq 0\}$  véges térrészen. Az integrálás felírása melyik esetben helyes?
- A)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r, u, v) \cdot r^2 \sin u \, du \, dv \, dr$  B)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r, u, v) \cdot r^2 \sin u \, du \, dv \, dr$   
 C)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r, u, v) \cdot r^2 \sin u \, dv \, dudr$  D)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r, u, v) \cdot r^2 \sin u \, dv \, dudr$
6. Az  $f(x, y) = x^2 + \sqrt{3}y$  függvény  $T$  tartomány feletti felületének felszíne a következő integrálással számítható ki:
- A)  $\iint_T \sqrt{4x^2 + 3y^2 + 1} \, dT$  B)  $2 \iint_T \sqrt{x^2 + 1} \, dT$   
 C)  $\iint_T \sqrt{x^4 + 3y^2 + 1} \, dT$  D) egyik sem helyes
7. Adott  $\vec{v}(x, y, z) = (-z, x, -y)$  és  $\vec{r}(t) = (2t - 1, 2 - 3t, t - 1)$ ;  $t \in [0; 1]$ . Ekkor a vektor-vektor függvény vektor-skalár függvény mentén képzett vonalintegrálja:
- A)  $\frac{1}{2}$  B)  $-\frac{1}{2}$  C)  $0$  D) egyik sem helyes
8. Adott egy  $\vec{f}(\vec{r})$  vektormező (vektor-vektor függvény). Ekkor nem létezik
- A)  $\text{div rot } \vec{f}(\vec{r})$  B)  $\text{grad div } \vec{f}(\vec{r})$   
 C)  $\text{rot div } \vec{f}(\vec{r})$  D)  $(\vec{f}(\vec{r}), \vec{r})$  skaláris szorzat

1. Adjunk példát olyan állandó együtthatós, másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletre, melynek homogén általános megoldása  $c_1 e^x + c_2 x e^x$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , és zavaró függvénye  $\sin x$ :  
.....
2. Adja meg az  $f(x, y, z) = \ln \frac{1}{1-x^2-y^2-z^2}$  függvény értelmezési tartományát! Hol helyezkednek el ezek a pontok a térben?.....
3. Ha az  $f(x, y, z)$  függvénynek  $(x_0, y_0, z_0)$  stacionárius pontja és a Hesse-féle mátrix sarokdeterminánsai  $(x_0, y_0, z_0)$ -ban  $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 = 0$ , akkor  $f(x, y, z)$  függvénynek  $(x_0, y_0, z_0)$ -ban  
.....
4. Egy hasáb egyik csúcsa a koordináta-rendszer origójában van, az ebből a csúcsból kiinduló élek pedig a tengelyek pozitív felére illeszkednek. Az  $x$  tengelyre illeszkedő éle 3, az  $y$ -ra illeszkedő 4, a  $z$ -re illeszkedő 5 egységnyi hosszúságú. Számítsuk ki a tömegét, ha sűrűségfüggvénye:  $s(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$  (az eredményt elég hatvány alakban megadni!)  
.....
5. Adott  $\vec{v}(x, y, z) = (z, -x, -y)$  és  $\vec{r}(t) = (1-2t, 3t-2, t-1)$ ;  $t \in [0; 2]$ . Ekkor a vektor-vektor függvény vektor-skalár függvény mentén képzett vonalintegrálja (a végeredményt is számítsuk ki):  
.....
6. Az  $f(x, y) = x^2 + \sqrt{3}y$  függvény  $T$  tartomány feletti felületének felszínét az  
 $F = \iint_T \dots \dots \dots dT$  kettős integrállal számíthatjuk ki.
7. Ha  $\vec{v}(x, y, z) = (y + xz^3)\vec{i} - xy\vec{j} + x^2 z^2 \vec{k}$ , akkor  $\text{div rot rot } \vec{v}(x, y, z) =$   
.....

#### 4. ábra. Példák kiegészítendő kérdésekre

## 4. Összefoglaló

A matematika oktatás modernizálása időszerű, már megtettük a kezdeti lépéseket. Egyetemünk hallgatóinak MSc képzésében elsősorban az alkalmazásra kell törekedni és nem kell a mély matematikai háttérösszefüggéseket megtanítani (azok a megértésükhöz szükséges komoly alapismeretek hiányában úgyszólván a „levegőben lógnak”). Nem kell értés nélkül memorizáltatni képleteket, eljárások lépéseit, hiszen ezek a későbbiekben, a gyakorlati életben is mindig könnyen hozzáférhetőek lesznek. A legfontosabb cél a felsőbb matematika jelölésrendszerének megismertetése, a matematikai gondolkodásmód kialakítása és a problémamegoldó készség fejlesztése.

## Irodalomjegyzék

[1] [http://www.oktatas.hu/koznevelas/erettsegi/prezentaciok\\_tanulmanyok](http://www.oktatas.hu/koznevelas/erettsegi/prezentaciok_tanulmanyok)

[2] <http://www.nyme.hu>

## Egy érdekes térképi vetület matematikai és csillagászati alkalmazásai - folytatás

**Péntek Kálmán**

NyME TTK Matematika és Fizikai Intézet  
pentek@ttk.nyme.hu

Összefoglaló. A dolgozat a szférikus csillagászzal foglalkozik és bemutat egy, a Nap égbolton történő mozgását szemléltető forgatható korongot (univerzális asztrolábiumot). A készülék első verzióját Philippe de la Hire (1640-1718) alkotta meg 1701-ben. A készülék modern és átdolgozott változatát e cikk szerzője készítette el. Azokat a legfontosabb csillagászati és földrajzi feladatokat érintjük, amelyek ezen eszközzel könnyen megoldhatóak.

Abstract: In the paper we present the spherical astronomy tool – called rotatable daily arc plate (universal astrolabe) – which represents the moving of the Sun in the sky. The first version of this tool was made by Philippe de la Hire (1640-1718) in 1701. The modern and improved version was designed by the author of this paper. We present the most important astronomical and geographical processes, which we can easily solve by the using of this tool.

### 1. Bevezetés

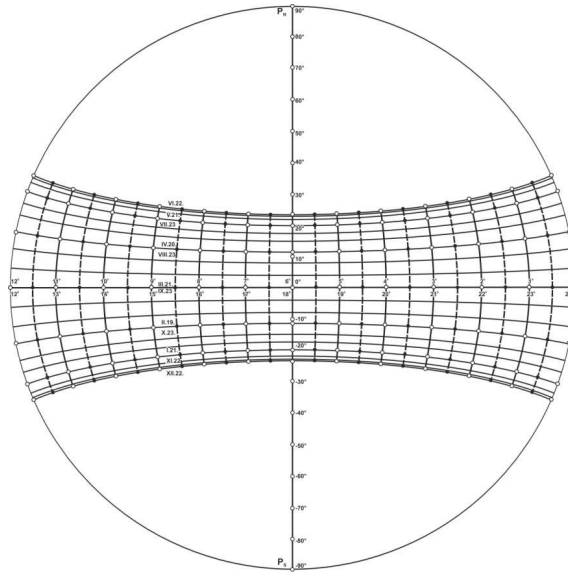
Ez a dolgozat a szerzőnek a Dimenziók II. kötetében 2014-ben ugyanilyen címen megjelent munkájának szerves folytatása (*PÉNTEK*, 2014). Az ott bemutatott Philippe de la Hire-féle vetületi rendszeren alapuló univerzális asztrolábium vizsgálatát és elemzését tartalmazza. A vizsgált vetület további tulajdonságait *SNYDER-VOXLAND* (1989) műve, az asztrolábiumok különböző típusait *HOLLANDER* (1999) és *MORRISON* (2010) monográfiájában találhatjuk. Tárgyalásunk során bemutatjuk a vizsgált asztrolábium korongjának egy érdekes alkalmazását, amikor egy egyszerű kiegészítéssel napóraként alkalmazva néhány perc pontossággal meghatározhatjuk a valódi napidőt, amelynek pedig egyszerű átalakításával megkaphatjuk a karóránk által is mutatott közép-európai zónaidőt.

#### 1.1. A Philippe de la Hire vetületén alapuló csillagászati korong

La Hire előző dolgozatban (*PÉNTEK*, 2014) ismertetett vetületén alapuló készülék két rétegből álló, lapos korong alakú taneszköz, amelynek rétegei a két körlemez középpontján átmenő, a korongok síkjára merőleges tengely körül elforgatható módon vannak összekapcsolva.

A felső réteg merev fóliából készült, átlátszó, rajta megtalálható az éggömb Philippe de la Hire ekvatoriális vetülete hálózatának képe arról az égi egyenlítői zónáról, amely mentén a Nap évi látszólagos mozgását végzi. Mivel a Föld tengelyferdesége jó közelítéssel  $23^{\circ}30'$ , ezért ezen égi egyenlítői zóna  $[-23^{\circ}30', 23^{\circ}30']$  deklinációjú sávot öleli fel. Ezen a sávon belül megjelöltük azokat a Nappályákat, amelyek mentén a tavaszi napéjegyenlőségtől indulva a Nap jó közelítéssel 10-10 nap elteltével végighalad. Ezek értékeit és a hozzá tartozó dátumokat a 1. táblázat tartalmazza (1. ábra).





1. ábra. A Philippe de la Hire-féle vetület alapján készített forgatható korong felső rétege

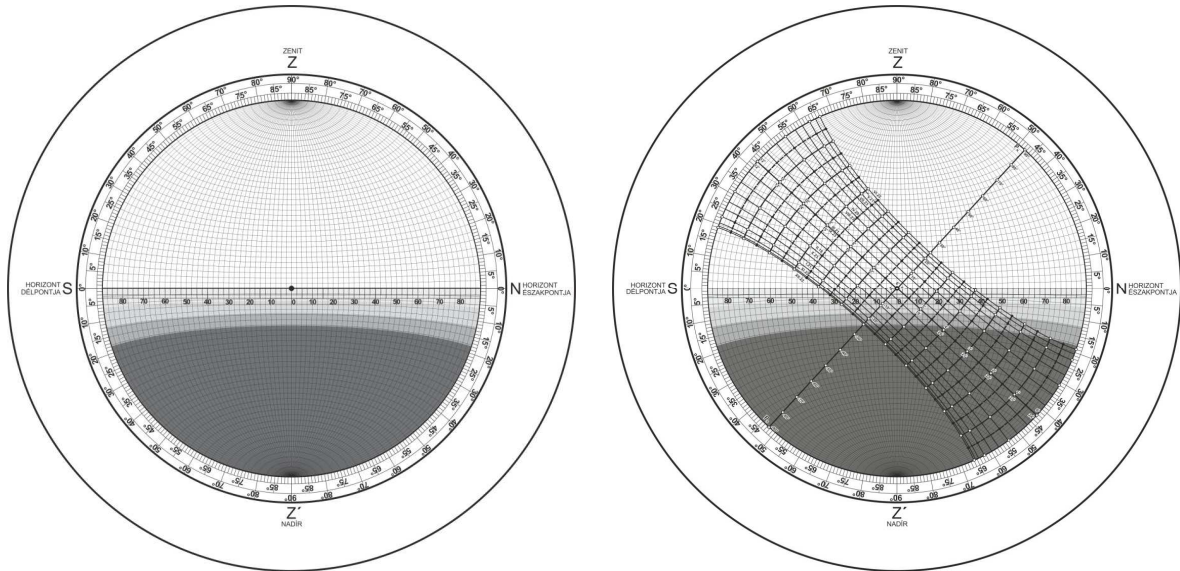
A korong alsó rétege kartonból készült, körkörösén a peremén, továbbá a horizont mentén tartalmazza a szögskálákat, a szürke három sötétedő árnyalatával feltüntettük a szürkületi sávokat, rögzítettük a fő égtájak helyét, valamint a zenit és nadír pontokat. Az égbolt horizont fölötti, látható éggömbjének, ami megfelel a korong felső félkörlemezének, elhelyeztük horizontális koordináta-hálózatát 2,5°-os sűrűséggel La Hire-féle vetületben (2. ábra).

Sorszám	Dátum	Deklináció	Sorszám	Dátum	Deklináció
1	március 21.	0°	19	szeptember 23.	0°
2	március 31.	4°	20	október 3.	-4°
3	április 10.	8°	21	október 13.	-8°
4	április 20.	11,5°	22	október 23.	-11,5°
5	április 30.	15°	23	november 2.	-15°
6	május 10.	17,5°	24	november 12.	-17,5°
7	május 21.	20°	25	november 22.	-20°
8	május 31.	22°	26	december 2.	-22°
9	június 11.	23°	27	december 12.	-23°
10	június 22.	23,5°	28	december 22.	-23,5°
11	július 2.	23°	29	január 1.	-23°
12	július 12.	22°	30	január 11.	-22°
13	július 23.	20°	31	január 21.	-20°
14	augusztus 3.	17,5°	32	január 31.	-17,5°
15	augusztus 13.	15°	33	február 9.	-15°
16	augusztus 23.	11,5°	34	február 19.	-11,5°
17	szeptember 3.	8°	35	március 1.	-8°
18	szeptember 13.	4°	36	március 11.	-4°

1. táblázat. A Nap adatai az év folyamán

Az eszköz lényegében analóg módon épül fel azzal az ortografikus vetületi rendszerrel (PÉNTÉK (2010)) alapuló koronggal, amelyet PÉNTÉK (2012) tanulmánya részletesen ismertet LÓSKAY (1904) korongja nyomán. Az ott részletezett módon megoldhatók a La Hire-vetületen alapuló eszközzel is az alapvető szférikus csillagászati alapfeladatok. Így

könnyedén beállíthatjuk eszközünk a felhasználó helye földrajzi szélességének megfelelően éppen úgy, mint egy univerzális asztrolábiumot. E beállítás után az év bármely napján megállapíthatjuk a Nap delelési magasságát és éjféle mélységét, a Nap kelési és nyugvási időpontját valódi rapidóban, meghatározhatjuk a napkelte és napnyugta irányát, a nappal és az éjszaka időtartamát, továbbá a polgári, a navigációs és a csillagászati szürkület időtartamát is (3. ábra).



**2. ábra. A Philippe de la Hire-féle vetület alapján készített forgatható korong (baloldalon csak az alsó rétege látható)**

Ha a La Hire-féle vetületen alapuló korong hátoldalán kialakítunk egy egyszerű tengerészeti asztrolábiumot, akkor annak segítségével a korongot alkalmasan felfüggesztve meghatározhatjuk bármely időpontban a Nap horizont fölötti magasságát (4. ábra).



**4. ábra. A tengerészeti asztrolábium**

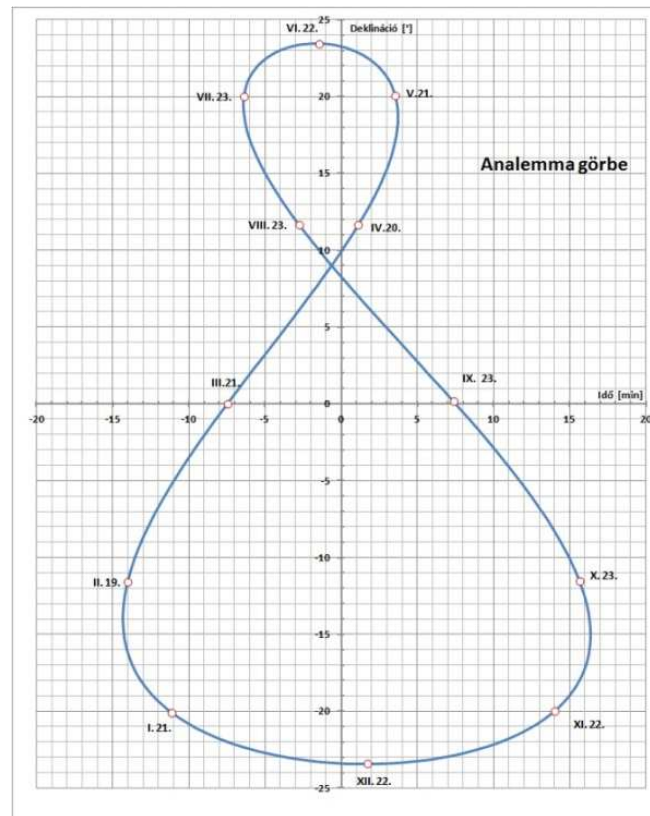


Ismerve a dátumot, megkereshetjük a hozzátartozó Nappályát a korong első oldalán a vizsgált földrajzi hely szélességének megfelelően beállított átlátszó skálán. Keressük meg továbbá a korong alsó rétegén a lemért napmagasság ellipszis ívét. Határozzuk meg ezután e két görbe metszéspontját, s az átlátszó mozgó skála időbeosztásának megfelelően. E metszéspont szolgáltatja az adott időpillanathoz tartozó valódi napedőt (Bartha Lajos tudománytörténész szóbeli közlése).

Az adott hely földrajzi hosszúságát ismerve és felhasználva, továbbá az adott dátumhoz tartozó analemmáról leolvasott időkorrekció figyelembe vételével a valódi napedőből azonnal nyerhetjük a közép-európai zónaidőt, mint a hétköznapi életben használt polgári időt.

A La Hire vetületen alapuló korong ezen napóra üzem módjára egy illusztráló feladatot mutatunk be. Szeptember 13-án a délutáni órákban  $h = 42,5^\circ$  Napmagasságot mérünk. Határozzuk meg a valódi napedőt, s ennek felhasználásával a közép-európai zónaidő értékét!

Szeptember 13-án a Nap deklinációja a I. táblázat felhasználásával  $\delta_\odot = 4^\circ$ . Az analemma görbe felhasználásával az időegyenlítés értéke ekkor  $E = +4^m$  (5. ábra).



5. ábra: Az analemma görbe

Ha pl. Szombathelyen vagyunk, akkor a város földrajzi helyzete miatt  $T_\lambda = +6,5^m$ , hiszen időben kifejezve ennyire vagyunk keletre a közép-európai időzóna középvonalától (6. ábra).

Ezen ismeretek és adatok birtokában a korongról leolvasott valódi napedő értéke  $T_\odot = 13^h 30^m$ , a közép-európai zónaidő  $T$  értéke pedig a

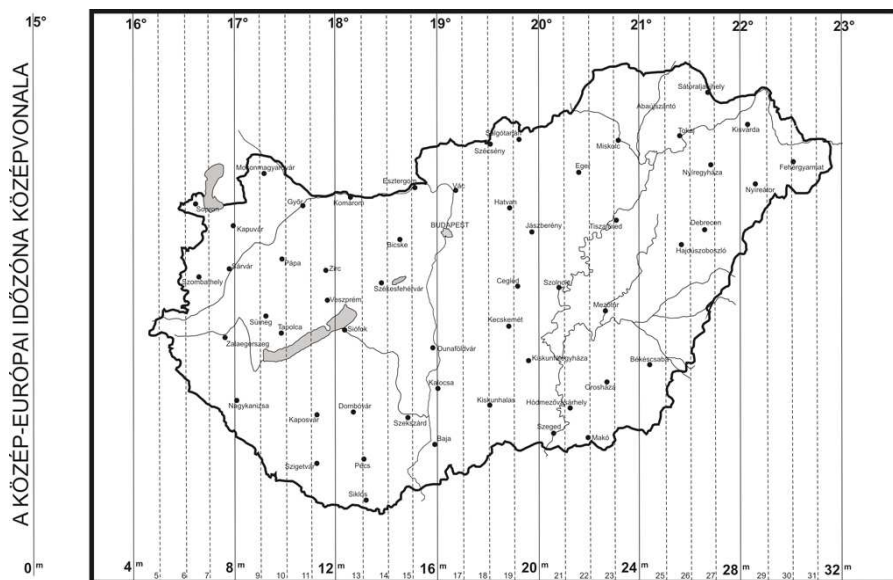
$$T = T_\odot - E - T_\lambda \quad (1)$$

összefüggés felhasználásával

$$T = 13^h 30^m - 4^m - 6^m 30^s = 13^h 19^m 30^s . \quad (2)$$

Megjegyezzük, hogy lineáris interpolációt alkalmazva néhány perc pontossággal meghatározhatjuk a szóban forgó dátumhoz időben szomszédos kihúzott nappályák ismeretében a valódi napidő, vagy a közép-európai zónaidő értékét akkor is, ha a Nap aktuális deklinációjának megfelelő pályáiv nem szerepel a korongon megszerkesztve.

A bemutatott példában felhasznált szférikus csillagászati fogalmak és összefüggések *KÖVESLIGETHY* (1899), *MARIK* (1989) és *SZENKOVITS* (2007) munkájában megtalálhatóak.



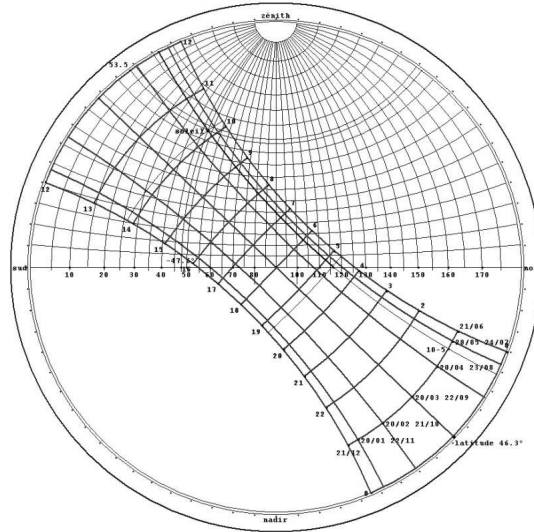
6. ábra: Térkép a földrajzi hely időkorrekciójának meghatározásához

## 2. Alkalmazás: a Girasol, vagyis napraforgó

Francia nyelvterületen (Centre de recherches methodologiques d'architecture de Nantes (CERMA)) az építészetben használnak egy olyan korong alakú eszközt, amely tetszőleges földrajzi szélességen, az év tetszőleges napjának tetszőleges órájában megmutatja a Nap azimutját és magasságát az égen. Erre azért van szükség, mert fontos az építészeti tervezésnél, hogy egymástól milyen távolságra és milyen tájolással kerüljenek az épületek, s lényeges kérdés, hogy milyen árnyékot vetnek egymásra és a környezetükre az év különböző évszakjaiban és különböző napszakjaiban. A Nap pozíciójának meghatározásához használt eszköz lényegében egy speciálisan kialakított univerzális asztrolábium, amely sztereografikus egyenlítői vetületben jeleníti meg az éggömb horizont feletti tartományát és az év során a Nap által befutott égi pályákat (7. ábra).

Így tehát ez az eszköz a Gemma Frisius-féle univerzális asztrolábium lényeges részeinek megtartásával alakult ki. Az előző részben bemutatott Philippe de la Hire vetületén alapuló koronghoz hasonlóan képes a Nap helyzetét megmutatni, viszont skálái sajnos nem lineárisak, a készülék pereme felé ritkulnak. E korong nagy előnye viszont, hogy egyszerűen körzővel és vonalzóval, tehát euklideszi eszközökkel megszerkeszthető, míg a Philippe de la Hire-féle vetület ívei, mint láttuk, nehezebben előállítható ellipszis darabok. A Girasol működéséről további részletek *HOLLANDER* (1999) művében olvashatók.

Az egyes korongokkal számos további probléma is tárgyalható és szemléltethető, ezek vizsgálatával a jövőben kívánunk foglalkozni.



7. ábra. A Girasol, vagy napraforgó

## Köszönetnyilvánítás

Hálás köszönet illeti meg Bartha Lajos tudománytörténészt a kézirat gondos átnézéséért és értékes tanácsaiért, megjegyzéseiért.

A szerző köszönetét fejezi ki továbbá Mitre Zoltánnak, a Gothard AmatőrCsillagászati Egyesület titkárának a Philippe de la Hire-féle korong gondos számítógépes megszerkesztéséért.

## Irodalomjegyzék

- [1] **Hollander, R.:** L' Astrolabe – Histoire, Théorie et Pratique, Institut Océanographique, Paris, (1999).
- [2] **Kövesligethy R.:** A matematikai és csillagászati földrajz kézikönyve, Kogutovicz és társa Magyar Földrajzi Intézete, Budapest, (1899).
- [3] **Lóskay M.:** A Nap és a csillagok járása a Föld tetszőleges helyén, Magyar Földrajzi Intézet Rt. Budapest, (1904).
- [4] **Marik M.:** Csillagászat. Akadémiai Kiadó, Budapest, (1989).
- [5] **Morrison, J. E.:** The Astrolabe, Ed. Janus, Rehoboth Beach, DE, USA, (2010).
- [6] **Péntek K.:** Ábrázoló geometriai módszerek alkalmazása a szférikus csillagászatban: az ortografikus meridián projekció, NymE SEK Tudományos Közleményei XVII. Természettudományok 12, Szombathely, (2010) 27-49.
- [7] **Péntek K.:** Az ortografikus meridionális vetületi rendszeren alapuló csillagászati készülék: a Nap évi mozgását bemutató forgatható korong. NymE SEK Tudományos Közleményei XVIII. Természettudományok 13, Szombathely, (2012) 37-64.
- [8] **Péntek K.:** Egy érdekes térképi vetület matematikai és csillagászati alkalmazásai, *Dimenziók*, Matematikai Közlemények **II**, Sopron, (2014) 3-8.
- [9] **Snyder, J. P. – Voxland, Ph. M.:** An Album of Map Projections, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, Denver, (1989).
- [10] **Szenkovits F.:** Bevezetés a csillagászatba. Kolozsvári Egyetemi Kiadó, Kolozsvár, (2007).

## Matematikai módszerek a mechanikában

Andor Krisztián, Polgár Rudolf

NymE SKK, Műszaki Mechanika és Tartószerkezetek Intézet  
krisztian.andor@skk.nyme.hu, polgar@nyme.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** A kényszerpályás közlekedés esetén a mozgás alapján meghatározott pálya alapvető követelmény. A lineáris görbületi tulajdonságú klotoid átmenetiívet spline-okkal modellezve eddig ismeretlen információkhoz jutottunk. A modellezés további dimenziókat is feltárt, mely során egyszerűen vizsgálhatókká váltak egyéb mozgáskinematikai effektusok.

**ABSTRACT.** In railway transportation it is a fundamental requirement to have track geometry that corresponds to the desired motion. With the modelling of the clothoid transition curve with splines, hitherto unknown information are gained. This modelling has open new dimensions, which helps the simply examination of other kinematic motion-effects.

### 1. A mozgás leírása

A kötőtpályás vasúti közlekedésnél a pályának meghatározó szerepe van a jármű mozgása során ébredő kinematikai igénybevételek keletkezésében. Ezért fontos, hogy olyan geometriai kialakításúak legyenek az íves vágányszakaszok, melyen a kinematikai mozgásjellemzők értékei küszöbérték alatt maradnak. A tervezés során ezért kinematikai szempontok nem hagyhatók figyelmen kívül.

A különböző görbületi tulajdonságú pályaszakaszok (körív = konstans görbület, egyenes = 0 görbület) a hirtelen változó oldalgyorsulás miatt nem követhetik egymást, ezért közékük iktatják be az átmenetiívet, mely a két eltérő, konstans görbületű szakaszt egy változó görbületű szakasszal köti össze, biztosítva ezzel az oldalgyorsulás fokozatos növekedését vagy csökkenését, szemben az ugrásszerű változással. A vasútépítésben az oldalgyorsulás megváltozását  $\bar{h}$ -vektornak nevezik, mely magasabbrendű kinematikai mozgásjellemzőnek számít, és azt döntően a görbületfüggvény ívhossz szerinti első deriváltja befolyásolja. A  $\bar{h}$ -vektor – éppúgy, mint az oldalgyorsulás – nem léphet át egy határértéket, mely a pálya és az utasok fokozottabb igénybevételét okozná.

A hullámos görbületfüggvényű átmenetek esetén a függvény deriváltja minden nehézség nélkül előállítható, azonban a lineáris görbületfüggvény töréspontjaiban a derivált értelmezhetetlen. Noha kinematikai szempontból a lineáris görbületfüggvényt szakaszosan deriválva a legjobb geometriai kialakítású átmenetiív lenne, a két csatlakozási pontban (görbületi töréspontokban) a kinematikai mozgásjellemzők nem ismertek, így feltételezhető akár, hogy elméletileg végtelen nagy értékeket vehetnek fel. Erre alapozva külön csoportokra bontották az átmenetiíveket a görbületfüggvényük deriválhatósága szerint. Így más határértékek vonatkoztak a folytonosan differenciálható görbületfüggvényű, és más, szigorúbb határértékek a töréses görbületfüggvényű átmenetiívekre.

Értekezésemben kettéosztás szükségtelen voltára hívom fel a figyelmet.

Mivel a klotoid átmenetiív a legelterjedtebb átmenetiív-fajta a világon, joggal felmerül az igény az átmenetiívvvel kapcsolatos általános ismeretek kiegészítésére.

## 2. A spline-okkal modellezett vasúti vágánytengely-vonal leírása

A klotoid átmenetív csatlakozásainál fellépő  $\bar{h}$  -vektor nagyságának numerikus meghatározására van szükség, hogy közvetlenül összehasonlítható legyen más, folytonosan deriválható görbületfüggvényű, átmenetívekkel.

Erre biztosított lehetőséget a spline-elmélet. A spline-okkal leírható módszert műszaki területen alkalmazták már a középkorban is. A hajóépítésben felvetődött probléma – miszerint az áramvonalas hajótest-geometriát egy meggörbített pálca vonala szolgálja – és a vasúti átmenetívek kialakítása között analógia található. Matematikailag ezt a modellt a spline-okkal lehet leírni.

A spline-okkal leírt a vasúti pálya modelljének több szempontnak kell megfelelnie.

Az első szempont alapján, a pályagörbe modelljétől elvárjuk, hogy legalább négyszer folytonosan differenciálható legyen, még az átmenetív eleje és vége pontban is. A spline-ok rendűségét mi választhatjuk meg, így a kellő számú differenciálás végrehajtható. Így az eredetileg töréses görbületfüggvényű pálya spline-nal közelített modelljének görbületfüggvénye nem töréses lesz. A kérdéses pontokban folytonosan differenciálható függvényeket vizsgálhatunk. Amennyiben legalább ötödfokú spline-nal dolgozunk, a görbületfüggvény első és második deriváltfüggvénye előállítható lesz.

A második szempont szerint a kitűzési pontok nem esnek az ideális pálya vonalába, melynek okai a következők:

- A kitűzési koordináták nem egzakt módon, hanem a sorbafejtés során, csupán a hatványsor első két tagjának figyelembevételével lettek kiszámítva.
- Az így kiszámított értékeket az ívkitűző zsebkönyv csak mm-re kerekített pontossággal adja meg.
- A geodéziai kitűzés során a kitűzési koordináták kitűzési hibával terheltek.

Ez azt eredményezi, hogy a fent említett módon meghatározott koordinátpontok (kitűzési pontok) hol az ideális pálya egyik, hol a másik oldalára kerülnek és minimális annak az esélye, hogy tökéletesen a göbe vonalára essenek.

Az alap gondolat szerint a spline-nal lehetséges olyan függvényt konstruálni, mely nem illeszkedik közvetlenül a kitűzési pontokra, és a kitűzési pontossággal elkövetett hibát nem haladja meg.

Az approximációs spline értéke egy adott illeszkedési pontnál (64) szerint:

$$\tilde{y}_i = y_i \pm \varepsilon_i,$$

ahol:  $\tilde{y}_i$  a spline értéke,

$y_i$  a kitűzési pont  $y$  ordináta értéke,

$\varepsilon_i$  a spline értéke és a pont közötti eltérés.

Az  $\varepsilon_i$  eltéréseknek kicsiny értékűeknek kell lenniük, ami esetünkben teljesül, hiszen a koordináták meghatározásakor a sorbafejtés és a kerekítés során csupán tizedmilliméteres hibákat vétünk. Az így előállított görbéről elmondható, hogy nem túl nagy eltérésekkel illeszkedik a kitűzési pontokra, miközben igyekszik egy minimális összgörbület-változású görbe vonalát adni.

Miután számunkra a tervek és az ívkitűző zsebkönyv adatai alapján kitűzött pályán ébredő kinematikai igénybevételek nagysága a meghatározó, (nem pedig az elméleti függvényen keletkező mozgásjellemzőké) a vágánytengely spline-nal történő helyettesítésével a valósághoz közelebb álló eredményt kapunk, amennyiben a hiba határértéke a megvalósíthatósági pontosságot nem haladja meg.

A harmadik, a modellezésnél figyelembeveendő szempont szerint a pontok eltérő nagyságban térnek el az ideális görbe vonalától, ezért figyelembe kell venni az eltérések nagyságának változását. Az eltéréseket úgy célszerű súlyozni, hogy a spline nagyobb súllyal



közelítse a minimális összgörbület-változású görbe vonalához közel eső pontokat, és kisebb súllyal a távolabb esőket.

A görbületfüggvény – amely alapján a kitűzési koordináták adottak – csupán a kitűzési pontokban és a görbületfüggvényből történő inetrpolálással az aljknál egyezik a kivitelezett pálya görbületfüggvényével, míg a pontok között azt a sín pár rugalmassága határozza meg.

### 3. A spline-ok alkalmazásával létrehozott átmenetiív geometriai pontossága

A spline-elmélettel kapott görbe illeszkedési pontosságát bemutatandó, meghatároztam a kitűzési értékpárokat 1,0 m-es egymást követő távolságra századmilliméteres pontossággal. Ezt tekintem elméleti kitűzésnek

Az 5 m-es távolságra lévő kitűzési pontokra illesztett spline-helyszínrajz-függvényről leolvasott méterenkénti értékek és az elméleti kitűzés közötti  $\Delta f(x, y) = f(x, y)_{\text{kitűzési}} - f(x, y)_{\text{méterenkénti}}$  eltérés szintén elhanyagolható volt. A legnagyobb eltérés nagysága nem haladta meg a fél millimétert.

Tekintettel arra, hogy a megépítés során a kitűzési koordináták mm-re kerekítve adóttak, és ezen pontok a kitűzési hibával terheltlen lesznek kitűzve, a spline-elmélettel meghatározott átmenetiívmodell pontossága meghaladja az elvárásokat. Ezzel igazolható, hogy a spline-elmélet segítségével lehetséges a gyakorlatban az átmenetiívek megfelelő pontosságú modelljeinek létrehozása.

### 4. A kinematikai mozgásjellemzők meghatározása az átmenetiívek mentén

A fenti szempontokat kielégítő modellezéssel kiszámíthatók lettek a klotoid átmenetiív esetében a magasabbrendű kinematikai mozgásjellemző vektorok a két, eddig kérdéses csatlakozási pontokban is.

Ezeket az értékeket közvetlenül össze lehet hasonlítani más típusú átmenetiíveknél kapott igénybevétel-értékekkel.

A görbületváltozás jellege alapján megkülönböztetett, elméleti feltételezéseken alapuló előírások nem befolyásolják az átmenetiívek összehasonlíthatóságát.

Az elméleti megfontolások alapján a görbület által meghatározott pályavonal a gyakorlatban csupán pontokban egyezhet a megvalósítandó pálya vonalával, mivel a gyakorlatban a vágánytengely vonalát a kitűzési pontok határozzák meg. Az elméleti görbületfüggvény közelítésével csak milliméter pontossággal lehet kitűzni 3-5 méteres távolságban a pontokat, melyekre fektetik a vasúti vágányt. Az aljtávolságra besűrített illeszkedési pontok között a vágány alakját a sín görbülése határozza meg. Megállapítható, hogy a pályatengelyt meghatározó elmélet, és a megvalósult pályatengely között differencia van. Ezt az eltérést érdemes figyelembe venni a vasúti vágány modellezése során.

Az elméleti pályatengely és a megvalósult pályatengely közötti eltérést tudjuk a spline-okkal figyelembe venni, mivel azok természetükből fakadóan viselkednek úgy, ahogyan a gyakorlatban a meghajlított vasúti sín. A spline-ok további tulajdonságai közé tartozik a rendjük meghatározhatósága, így a pályagörbe vonalát leíró függvény szükséges mennyiségben folytonosan deriválható (nem csak szakaszonként), ezek után a magasabbrendű kinematikai mozgásjellemző vektorok függvényei is meghatározhatók.

A spline-okkal modellezett klotoid átmenetiíven – a spline megfelelő mennyiségben és folytonos deriválhatósága miatt – a keletkező kinematikai mozgásjellemző vektorok

függvényei pontosan meghatározhatókká váltak. A spline-elmélet segítségével kapott kinematikai igénybevétel-szélsőértékek a klotoid átmenetiív esetében közvetlenül összehasonlíthatókká váltak más átmenetiíveknél számított szélsőértékekkel. Az összehasonlítások elvégzésével – a megépíthetőségi pontosságot is figyelembe véve – a klotoid átmenetiív bizonyult minden esetben kinematikai szempontból a legjobb átmenetiív-geometria kialakításnak.

## 5. Súlypontpálya leírása

Vizsgálat tárgyává tettem a vágány tengelyvonala, és a merev testszerű kocsiszekrény súlypontpályája közötti eltérés meghatározását.

A kutatást a kinematikai vizsgálatok során a mozgás pontmozgásként történő modellezése indokolta. A kocsiszekrény súlyát – pontként való helyettesítése során – a súlypontba célszerű sűríteni. A súlypont pályáján ébredő kinematikai igénybevételek a meghatározók, és nem a vágánytengely-pályán keletkezők, ahol csupán a megvezetett kocsiszekrény forgószámolyai futnak. Ezáltal a klotoid átmenetiív csatlakozásainál lévő görbületi törés lekerekedik, ami kedvezően befolyásolja a magasabbrendű kinematikai mozgásjellemzők alakulását. Ez ismét a klotoid átmenetiív alkalmazásának előnyét bizonyítja kinematikai szempontból.

## 6. Irányhibák lokalizálása és meghatározása a spline-módszerrel

A spline-elmélet – természetéből fakadóan – irányhiba lokalizálására is alkalmas. Irányhibák lokalizálására történő alkalmazhatóságát más szabályozómódszerrel (érintőszög-eljárás) történt összehasonlítással vizsgáltam. Az approximációs súlyozással közelítő spline figyelni a minimális összgörbület-változású görbétől a pontok távolságát, és ezen távolság alapján veszi figyelembe a pont súlyát a görbe megalkotásában. Ez a súlyozás állítható be úgy, hogy a spline a megvalósíthatósági pontosságot figyelembe véve illeszkedjen a kitézési pontokra. Így a túlzott eltérések olyan következményekkel járnak, hogy a spline-elmélet alulsúlyozza az adott hibás pontot, és a spline görbéjének meghatározásában nem játszik szerepet. Vagyis az így kieső pontok kigyújthatók, a görbétől való távolságuk meghatározható, mely egyben a szabályozás értéke is.

## Irodalomjegyzék

- [1] **Vaszary P.:** Vasútépítés és Pályafenntartás I., MÁV Rt., Budapest, (1999) 35-56.
- [2] **Megyeri J.:** Vasúti mozgásgeometria, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1986).
- [3] **Hasslinger, L. H., Stockinger, H.:** Messtechnischer Nachweis der Überlegenheit eines neuen Trassierungselement, des „Wiener Bogens“, ZEVrail Glasers Annalen, 128. évf. (2004) szept., 66-77.
- [4] **Hainitz, H., Heindl, W., Presle G.:** Neugestaltung von Übergangsbögen. Öster-reichische Ingenieur- und Architekten-Zeitschrift, 138. évf. 10. sz., (1993) 388-395.
- [5] **Kisgyörgy L.:** Szinuszhiperbolikus átmenetiív, Tudományos Diákköri Konferencia dolgozat, Budapesti Műszaki Egyetem, Vasútépítési Tanszék, Budapest, (1994).
- [6] **Sard, A., Weitraub, S.:** A book of splines, John Wiley and Sons, Mc. New York, (1971).
- [7] **Polgár R.:** Általánosított spline-approximáció, Geomatikai közlemények VII. MTA GGKI, Sopron, (2004) 197-209.
- [8] **Kerkápoly E., Megyeri J.:** Vasúti ívkitűzési táblázatok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1980).
- [9] **Megyeri J.:** Vasútépítéstan, Közlekedési Dokumentációs Vállalat, Budapest, (1991).
- [10] **Kormos Gy.:** Ívszabályozás számításon érintőszög-eljárással koszinusz-átmenetiív esetén. Közlekedéstudományi Szemle, 45. évf. 1. sz., (1995) 18-23.
- [11] **Andor K., Polgár R.:** Localization of bearing errors using spline method, Periodica Polytechnica **CE** **58:**(7528), (2014) 1-7, (doi: <http://dx.doi.org/10.3311/PPci.7528>).

## Matematika a fizikában

Nagy Zsolt

Roth Gyula Erdészeti, Faipari Szakközépiskola és Kollégium  
nagyzs@emk.nyme.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** A cikkben az optikai, mechanikai és elektromosságtani példákon keresztül mutatom be az elemi, illetve magasabb matematikai módszereket, amelyeket használhatunk a fizikai problémák megoldásában.

**ABSTRACT.** In this paper, I present elementary and higher mathematical methods through optical, mechanical and electricity exercises that can be efficiently used for solving physical problems.

Néhány problémán keresztül szeretném bemutatni, hogy milyen matematikai eszközöket használhatunk a fizika oktatása során. Természetesen a válogatás önkényes, vannak kimaradó módszerek (elsősorban itt a vektor műveletekre gondolok), és vannak olyanok is, amelyekhez magasabb matematikai ismeretekre van szükség. Ez utóbbiakat természetesen csak az emelt szintű matematikát tanuló diákoknak lehet megmutatni.

### 1. probléma: Fényterjedés

Felhasználva a legkisebb idő **Fermat elvét**: A fény a legrövidebb idejű pályán mozog. Ennek három következményét vizsgálhatjuk, amelyek közül az első kettő triviális, ezért csak a harmadikat vizsgáljuk meg részletesebben:

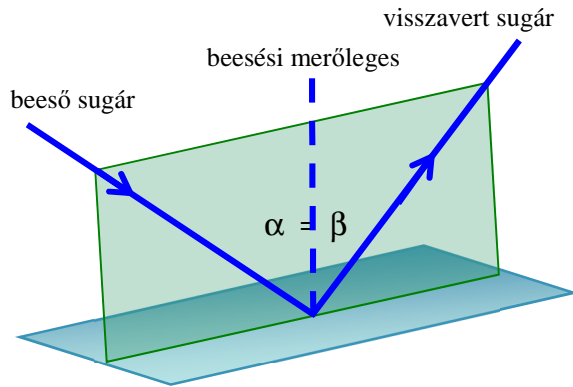
1.1. következmény: A fény a homogén közegben egyenes vonalban terjed, azaz  $t = \frac{s}{c}$  minimális, ha  $s$  is minimális ( $c$ =állandó).



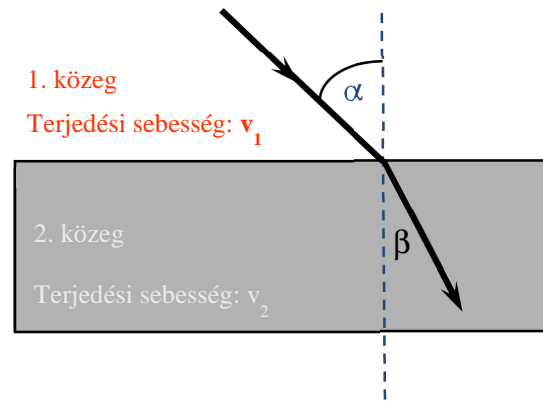
1. ábra

1.2. következmény: A fényvisszaverődés törvénye: beesési szög = visszaverődési szög (2. ábra).





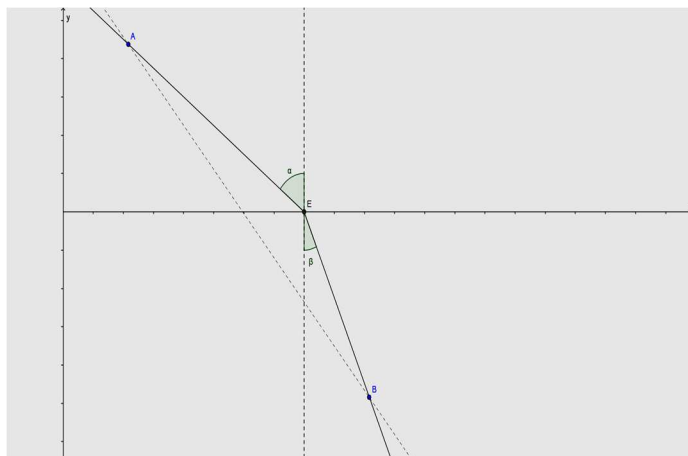
2. ábra



3. ábra

1.3. következmény: Snellius-Descartes törvény, fénytörés:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = n_{2,1}$  (3. ábra).

Helyezzük el az ábrát egy koordináta rendszerbe (4. ábra).



1. ábra

A fény a határfelületen levő E pontban törik meg.

A pontok koordinátái legyenek a következők:  $A(a; b)$   $B(c; d)$   $E(x; 0)$ .

Mivel a terjedés ideje:  $t = \frac{AE}{v_1} + \frac{EB}{v_2}$ .

A pontok koordinátáit felhasználva:  $t(x) = \frac{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + d^2}}{v_2}$ .

A terjedési idő szélsőértékét az  $x$  szerinti első deriváltból tudjuk meghatározni:

$$t'(x) = \frac{2(x-a)}{2v_1\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} + \frac{-2(c-x)}{2v_2\sqrt{(c-x)^2 + d^2}} = 0.$$

Az ábra alapján:  $\sin \alpha = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}}$  és  $\sin \beta = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + d^2}}$ .

Így az idő derivált függvénye a következőképpen alakul:

$$t'(x) = \frac{\sin \alpha}{v_1} - \frac{\sin \beta}{v_2} = 0.$$

Ezt átrendezve kapjuk a keresett összefüggést:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = n_{2,1}.$$

## 2. probléma: Váltakozó feszültség effektív értéke

Igazoljuk, hogy a szinuszosan váltakozó feszültség esetén:  $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$  !

Megjegyzés: A váltakozófeszültség annak az egyenfeszültségnek az értéke, amely ugyanazon az ellenálláson adott idő alatt ugyanannyi munkát végez, mint az adott váltakozó feszültség.

A váltakozó feszültség a következő függvénnyel adható meg:  $U(t) = U_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ .

A váltakozó feszültség  $\Delta t$  időtartam alatt végzett munkája:  $\Delta W = \frac{U^2}{R} \cdot \Delta t$ .

A teljes periódus idő alatt végzett munka ezen elemi munkák 0-tól T-ig vett összege, azaz integrálja:

$$W = \int_0^T \frac{U^2}{R} dt = \frac{1}{R} \cdot \int_0^T U_{max}^2 \sin^2(\omega \cdot t) dt = \frac{U_{max}^2}{R} \int_0^T \sin^2(\omega \cdot t) dt \quad (1)$$

Felhasználva, hogy:  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ .

Kapjuk a következőt:

$$W = \frac{U_{max}^2}{R} \int_0^T \frac{1 - \cos(2 \cdot \omega \cdot t)}{2} dt = \frac{U_{max}^2}{R} \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot t)}{4\omega} \right]_0^T \quad (2)$$

Rendezve:

$$W = \frac{U_{max}^2}{R} \cdot \left( \frac{T}{2} - \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot T)}{4\omega} \right) = \frac{U_{max}^2}{R} \cdot \left( \frac{T}{2} - \frac{\sin\left(2 \frac{2\pi}{T} T\right)}{4\omega} \right) = \frac{U_{max}^2}{R} \cdot \frac{T}{2} \quad (3)$$

Mivel az egyenfeszültség munkája T idő alatt:

$$W = \frac{U_{eff}^2}{R} T \quad (4)$$

A két munka egyenlőségéből adódik, hogy:

$$U_{eff}^2 = \frac{U_{max}^2}{2} \quad (5)$$

Azaz:

$$U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

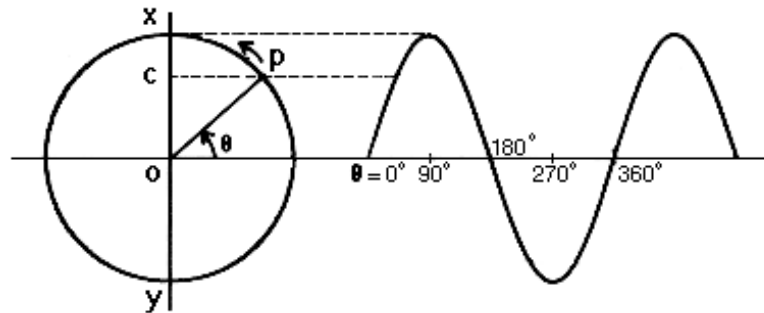
Természetesen a módszer nem csak a szinuszosan váltakozó feszültségre alkalmazható, hanem bármilyen időben periódikusan váltakozó feszültség esetén is. Hasonlóan járhatunk el az áramerősség esetén is.

### 3. probléma: A harmonikus rezgőmozgás

Minden harmonikus rezgőmozgáshoz tartozik egy úgynevezett referencia körmozgás. A harmonikus rezgőmozgás rezgésszáma (frekvenciája) és a körmozgás fordulatszáma is egyenlő, tehát a rezgés szögsebessége a körmozgás szögsebességével egyenlő. A rezgőmozgás amplitúdója és a körmozgás pályájának sugara is megegyeznek.

$$f_{\text{rezgés}} = f_{\text{körmozgás}} \quad | \cdot 2\pi$$

$$\omega_{\text{rezgés}} = \omega_{\text{körmozgás}}$$

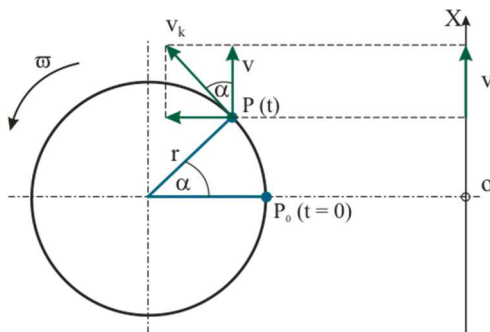


2. ábra

Az előbbieket felhasználásával és az ábrából adódik, hogy a harmonikus rezgőmozgás kitérése:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (1)$$

Vizsgáljuk meg, hogyan függ a harmonikus rezgőmozgást végző test sebessége az időtől!



3. ábra



7. ábra

A rezgő test sebessége (az ábrából):

$$\cos \alpha = \frac{v}{v_k} \Rightarrow v = v_k \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

Egyenletes körmozgás miatt:  $\alpha = \omega \cdot t \longrightarrow v = v_k \cdot \cos(\omega \cdot t)$ .

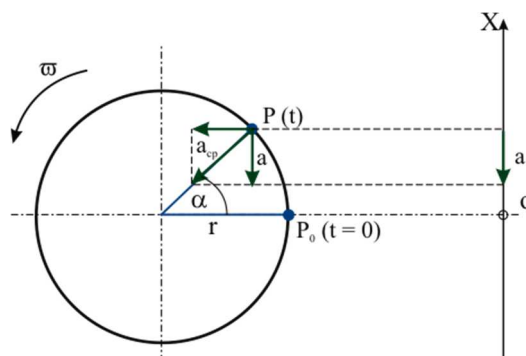
A kerületi sebesség és a szögsebesség közötti összefüggés:  $v_k = r \cdot \omega$

$$v = r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (3)$$

Mivel  $r = A$ , ezért a harmonikus rezgőmozgást végző test sebessége:

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (4)$$

Mivel a rezgőmozgás változó sebességű mozgás, ezért a rezgő test gyorsulása sem nulla!  
Vizsgáljuk meg, hogyan függ a harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulása az időtől!



4. ábra

$a_{cp}$  – a körpályán mozgó test centripetális gyorsulása

$a$  – a rezgő test gyorsulása (az  $a_{cp}$   $x$  irányú komponense)

A rezgő test gyorsulása (ábráról):

$$\sin \alpha = \frac{a}{a_{cp}},$$

$$a = -a_{cp} \cdot \sin \alpha.$$

Egyenletes körmozgás miatt:  $\alpha = \omega \cdot t$ .

Centripetális gyorsulás:  $a_{cp} = r \cdot \omega^2$

$$a = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (4)$$

Mivel:  $r = A$ , a harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulása:

$$a = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (5)$$

A harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulása arányos a kitéréssel, de azzal ellentétes irányú, ezt fejezi ki a negatív előjel.

Közös koordináta-rendszerben ábrázolva a függvényeket (9. ábra).

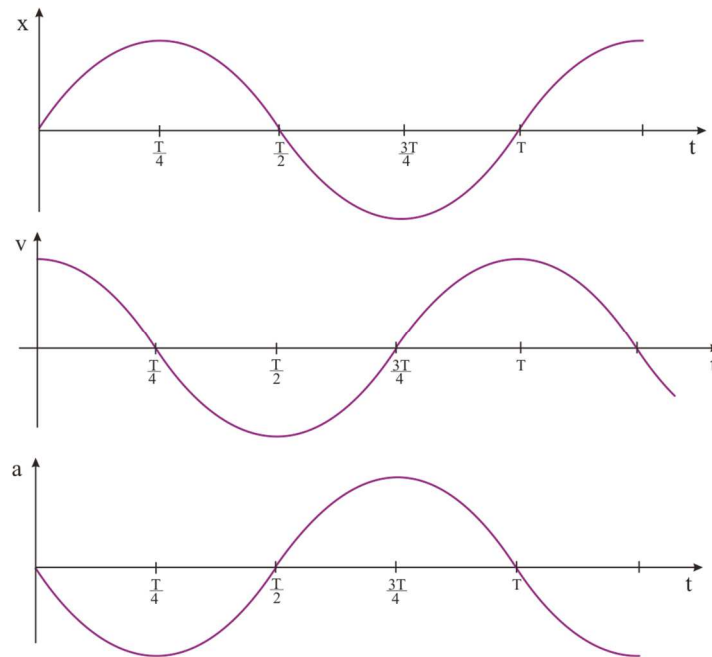
Természetesen az elemi levezetést kiválthatjuk magasabb matematikai ismeretekkel.

Mivel a sebesség a kitérés idő szerinti első deriváltja, a gyorsulás pedig a második, így kapjuk, hogy:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (6)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = (A \cdot \sin(\omega \cdot t))' = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (7)$$

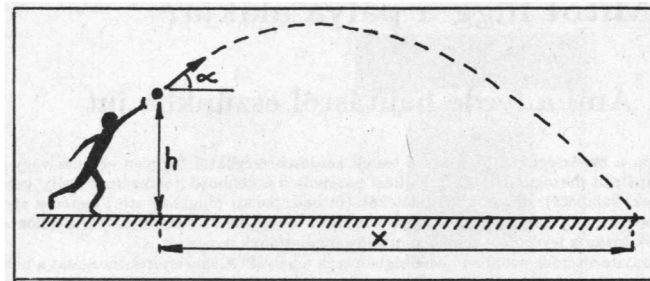
$$a(t) = \ddot{x}(t) = (A \cdot \sin(\omega \cdot t))'' = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (8)$$



5. ábra

#### 4. probléma: A súlylökés optimális szöge

Milyen szög alatt kell elhajítanunk  $h$  magasságból, adott  $v_0$  kezdősebességgel a súlygolyót, hogy vízszintesen a lehető legnagyobb távolságot érjük el? [1]



6. ábra

Az 10. ábra alapján a ferde hajítás függőleges és vízszintes összetevője:

$$-h = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1)$$

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

Fejezzük ki az időt a (2) egyenletből és helyettesítsük be (1)-be:

$$\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} x^2 - x \cdot \tan \alpha - h = 0 \quad (3)$$

Oldjuk meg az egyenletet:

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \cdot h}{g}} \quad (4)$$

Bevezetve a:  $k^2 = \frac{2gh}{v_0^2}$  jelölést:

$$x = \frac{v_0^2}{g} \left( \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2} \right) \quad (5)$$

Ezt deriválva  $\alpha$  szerint:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g} \left( -\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2} + \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2} \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + k^2}} \right) \quad (6)$$

Szélsőértéket keresünk, tehát:  $\frac{dx}{d\alpha} = 0$ .

Megoldva, kapjuk a következőt:

$$\cos 2\alpha \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2} = k^2 \sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha \quad (7)$$

Ezt négyzetre emelve, majd rendezve kapjuk, hogy:

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = k^2 \sin^2 \alpha \quad (8)$$

$$\cot^2 \alpha = 1 + k^2 \quad (9)$$

Felhasználva a következő két azonosságot:

$$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{ill.} \quad \cos^2 \alpha = \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \quad (10)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2 + k^2}} \quad \text{ill.} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{\sqrt{2 + k^2}} \quad (11)$$

eredményre jutunk. Ezeket a (5) egyenletbe behelyettesítve kapjuk a maximális távolságot:

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 + k^2} \quad (12)$$

Visszaírva  $k^2$  értékét:  $x_{max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}$  (13)

Láthatjuk, hogy az elérhető legnagyobb távolság függ az indítás magasságától és a súlygolyó indítási sebességétől.

Eredményeinket táblázatba foglalva kiszámítottuk az optimális szöget, az elérhető legnagyobb távolságot, valamint összehasonlítóképpen 43°, 45°, 47°-os szögek esetén az elérhető távolságot. Jól látható, hogy valóban a lehető legnagyobb távolságot érhetjük el. Bár a 43°-os és az optimális szögek esetében (több mint 13 m/s kezdősebességnél) az eredmények gyakorlatilag megegyeznek függetlenül az indítás magasságától.

$v_0$ (m/s)	h (m)					h (m)					h (m)				
	1,8					2					2,2				
	optimális szög	$x_{\max}$	$x_{43}$	$x_{45}$	$x_{47}$	optimális szög	$x_{\max}$	$x_{43}$	$x_{45}$	$x_{47}$	optimális szög	$x_{\max}$	$x_{43}$	$x_{45}$	$x_{47}$
<b>10</b>	40,68	11,86	11,83	11,75	11,64	40,28	12,03	11,99	11,91	11,78	39,89	12,20	12,14	12,05	11,92
<b>11</b>	41,34	14,02	14,00	13,93	13,80	40,99	14,19	14,17	14,09	13,95	40,65	14,37	14,33	14,24	14,10
<b>12</b>	41,86	16,38	16,37	16,30	16,16	41,56	16,56	16,54	16,46	16,32	41,26	16,73	16,71	16,62	16,47
<b>13</b>	42,29	18,94	18,94	18,87	18,73	42,01	19,12	19,11	19,04	18,88	41,75	19,30	19,29	19,20	19,04
<b>14</b>	42,63	21,71	21,70	21,64	21,49	42,39	21,89	21,88	21,81	21,65	42,15	22,07	22,06	21,98	21,81
<b>15</b>	42,91	24,67	24,67	24,61	24,45	42,70	24,86	24,85	24,79	24,61	42,49	25,04	25,04	24,96	24,77

1. táblázat

## Irodalomjegyzék

- [1] Horváth G., Juhász A., Tasnádi P., Mindennapok fizikája, ELTE TTK Továbbképzési Csoport, Budapest (1989).

## Diofantikus számhármások a Lucas-Lehmer sorozatokban

**Gueth Krisztián**

NymE TTMK Matematika és Fizikai Intézet  
guethk@gmail.com

**ÖSSZEFOGLALÓ.** Dolgozatunkban egy rögzített negyedrendű Lucas-Lehmer sorozatra megállapítjuk, hogy nem adható meg hozzá diofantikus számhármás. A másodrendű sorozatoknál alkalmazott módszerek itt is használhatók, mert a Lucas-Lehmer sorozatok a másodrendűek számos tulajdonságát megöröklik.

**ABSTRACT.** In this paper, we state that there does not exist diophantine triple for a given Lucas-Lehmer sequence. The methods applied for binary sequences can be used here, too, because the Lucas-Lehmer sequences inherit many properties of the recurrences of order two.

### 1 Bevezetés

Diofantikus szám  $n$ -esen olyan  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  pozitív egész számokból álló halmazzt értünk, melyekre  $a_i a_j + 1$  minden  $i, j$ -re négyzetszámot ad. A kérdést az ókorban racionális számokra tekintették, Diofantosz találta az első ilyen számnegyest:  $1/16$ ,  $33/16$ ,  $17/4$  és  $105/16$ .

A problémát négyzetszámok helyett egy adott lineáris rekurzív sorozat elemeire vizsgálták az  $n = 3$  esetben. Florian Luca és Szalay László [2] bebizonyították, hogy a Fibonacci sorozathoz nem adható meg diofantikus számhármás, azaz nincsenek olyan  $0 < a < b < c$  egészek, hogy  $ab + 1 = F_x$ ,  $ac + 1 = F_y$  és  $bc + 1 = F_z$  volna valamely  $x$ ,  $y$  és  $z$  indexekre. Szintén az ő eredményük [3], hogy a Fibonacci-sorozat asszociáltjához, a Lucas-sorozathoz egyetlen ilyen hármás létezik:  $a = 1$ ,  $b = 2$  és  $c = 3$ . A nevezett két szerző, valamint Clemens Fuchs [1] megadtak egy szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy nem degenerált másodrendű sorozathoz végtelen sok hármás létezzen.

### 2 Probléma és megoldása

Mi a problémát bizonyos fajta negyedrendű sorozatokra vizsgáljuk. A Lucas-Lehmer sorozaton olyan negyedrendű sorozatot értünk, melynek rekurziójában az  $n$ -edik tag csak az  $(n - 2)$ -edik és az  $(n - 4)$ -edik függvénye, és a kezdőelemekre is teszünk megszorításokat. Egész pontosan legyenek  $G_0 = 0$ ,  $G_1 = 1$ , valamint  $G_2$  és  $G_3$  tetszőleges egész számok, továbbá  $n \geq 4$  esetén  $G_n = AG_{n-2} + BG_{n-4}$ , ahol  $A$  és  $B$  adott egész együtthatók.



Ezek közül is egy konkrét sorozattal foglalkozunk, az  $A = 4, B = -1$  választás esetén. A továbbiakban az  $(L_n)$  sorozaton az  $L_0 = 0, L_1 = 1, L_2 = 1, L_3 = 3$  kezdőelemekkel megadott  $L_n = 4L_{n-2} - L_{n-4}$  sorozatot értjük. Az alábbi állítást bizonyítottuk.

**Tétel.** Nem léteznek olyan  $0 < a < b < c$  egész számok és  $x, y, z$  nem-negatív egész indexek, hogy

$$ab + 1 = L_x$$

$$ac + 1 = L_y$$

$$bc + 1 = L_z$$

teljesüljön.

A bizonyítás, többek között, azon múlik, hogy  $L_n - 1$  mindig felbomlik az  $(L_n)$  sorozat és asszociált  $(M_n)$  sorozata megfelelő tagjainak szorzatára. Például

$$L_n - 1 = L_{(n-1)/2} M_{(n+1)/2}, \quad \text{ha } n \equiv 1 \pmod{4}.$$

## Irodalomjegyzék

- [1] **C. Fuchs, F. Luca, L. Szalay.**, Diophantine triples with values in binary recurrences, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. III*, 5 (2008) 579–608.
- [2] **F. Luca, L. Szalay.**, Fibonacci Diophantine Triples, *Glasnik Math.*, 43(63) (2008) 253–264. (doi: <http://dx.doi.org/10.3336/gm.43.2.03>)
- [3] **F. Luca, L. Szalay.**, Lucas Diophantine Triples, *Integers*, 9 (2009) 441–457.

## Die exakte Lösung der ausgleichenden Geraden im Rahmen der Total Least Squares Methode

**Josef Zavoti**

NYME KTK, MTA CSFK GGI  
zavoti@ggki.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** Ebben a cikkben adott megfigyelési értékek alapján a legkisebb négyzetek módszerével úgy becsüljük meg egy kiegyenlítő egyenes paramétereit, hogy az egyenes és az adott értékek eltéréseinek négyzetösszege minimális legyen. Két lehetőség létezik: vagy csak az egyik ( $x$  vagy  $y$ ) vagy mindkét változót ( $x$  és  $y$ ) véletlen hibával terhelt mérési eredménynek tekintjük.

**ABSTRACT.** In this work we apply the least squares method to a set of given observation values to obtain the parameters of an adjusted straight line so that the sum of the squares of the differences of the given values from the straight line is minimal. There are two possibilities: either only one of the variables  $x$  and  $y$  or both of them are considered as results of measurements containing random errors.

**ZUSAMMENFASSUNG.** In diesem Beitrag wird mit der Methode der kleinsten Quadratsumme die Parameter der ausgleichenden Geraden aus einer Reihe empirischer Beobachtungswerte so bestimmt werden, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen der Funktionswerte von den empirischen Werten ein Minimum wird. Es gibt zwei Möglichkeiten: entweder eine ( $x$  oder  $y$ ) oder beide ( $x$  und  $y$ ) Koordinatenkomponenten mit zufälligen Fehlern behaftete Messgrößen sind.

### 1. Einführung

In den angewandten Wissenschaften besonders in der Engineering Practice ist eine allgemeine Aufgabe zu gegebenen Punkten eine Funktion anpassen. Mit diesem Problem sind viele Forscher schon beschäftigt. Einige der ersten Versuchen der Total Least Squares (TLS) kann man in York (1966), in Golub und Van Loan (1980) und in Reed (1989) finden. Huffel und Vandewalle (1991) und Reed (1992) hatten das Verfahren weiterentwickelt. Weitere Verfeinerungen hat Nievergelt (1994) und Schaffrin (2006) empfohlen. Die Anwendungen der TLS sollte man unter anderem Lenzmann und Lenzmann (2001), Guo (2007) und Reinking (2008) erwähnen. In Ungarn verhandelte Hazay (1980) das Thema.

### 2. Mathematische Modellen der Anpassung der ausgleichenden Geraden

Gegeben seien  $n$  Punkte  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \geq 2$  in einem kartesischen Koordinatensystem. Ziel ist die Bestimmung einer ausgleichenden Gerade mit der Gleichung  $y = ax + b$  wobei geometrisch gesehen die Unbekannten  $a$  die Steigung und  $b$  der Achsabschnitt sind.

**I.** Das herkömmliche, allbekannte Modell. Bei diesem Fall ist es so betrachtet, dass es sich bei den Werten  $y_i$  um mit zufälligen Fehlern behaftete Beobachtungen und bei den Werten  $x_i$  um fehlerfreie Größen handelt. Wenn man die Verbesserungen  $v_{y_i}$  einführt, erhält man die linearen Beobachtungsgleichungen

$$y_i + v_{y_i} = ax_i + b \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Die Lösung dieser Ausgleichung nach der Methoden der kleinsten Quadraten ist wohlbekannt und nimmt folgende Gestalt an:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}. \quad (2)$$

**II.** Wenn die Variable  $x$  mit zufälligen Fehlern behaftet ist, dann die Beobachtungen  $x_i$  sind mit Verbesserungen  $v_{x_i}$  versehen:

$$y_i = a(x_i + v_{x_i}) + b \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Für die transformierten linearen Beobachtungen bekommt man

$$x_i + v_{x_i} = \frac{y_i - b}{a} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Nach elementaren mathematischen Schritten ergibt sich die LS-Lösung, die mit der Parameterschätzung im linearen GM-Modell identisch ist

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}. \quad (5)$$

**III.** Wenn es sich sowohl bei den Werten  $x_i$  als auch bei den Werten  $y_i$  um mit zufälligen Fehlern behaftete Beobachtungen handelt, man einführt die Verbesserungen  $v_{x_i}$  und  $v_{y_i}$  für beide Variable

$$y_i + v_{y_i} = a(x_i + v_{x_i}) + b \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Von jedem gegebenen Punkt ist eine lotrechte Gerade zur gesuchten Gerade zu ziehen. In diesem Fall soll man die Bedingungen formulieren und ist das nachstehende Gleichungssystem für die Unbekannten  $(x_0, y_0)$  zu lösen

$$\begin{aligned} y_0 &= ax_0 + b \\ y_0 - y_i &= -\frac{x_0 - x_i}{a}. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Lösungen sind die Folgenden

$$x_0 = \frac{ay_i + x_i - ab}{a^2 + 1}, \quad y_0 = \frac{a^2 y_i + ax_i + b}{a^2 + 1}. \quad (8)$$

Die Minimierung des Quadrats der lotrechten Distanz zur ausgleichenden Gerade ist gleichbedeutend mit der Minimierung von  $\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2$ , wobei  $v_{x_i}$  und  $v_{y_i}$  die an den Punktkoordinaten  $(x_i, y_i)$  anzubringenden Verbesserungen sind. Damit können wir das Quadrat der lotrechten Distanz aufschreiben

$$d_i^2 = v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 = \left( x_i - \frac{ay_i + x_i - ab}{a^2 + 1} \right)^2 + \left( y_i - \frac{a^2 y_i + ax_i + b}{a^2 + 1} \right)^2 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Nach einiger mathematischen Wandlung vereinfacht sich die vorige Formel

$$d_i^2 = \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{a^2 + 1} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Also zur Lösung der Aufgabe soll man die Extremwerte einer zweivariablen Funktion  $F(a, b)$  aufsuchen

$$F(a, b) = \frac{1}{a^2 + 1} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad \rightarrow \quad \min \quad (11)$$

Zur Existenz der Extremwerte eine notwendige Bedingung ist, um die partiellen Ableitungen verschwinden. Nehmen wir zuerst die partielle Ableitung nach der Variable  $b$

$$\frac{\partial F(a, b)}{\partial b} = \frac{-2}{a^2 + 1} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0. \quad (12)$$

Aus dieser Bedingung kommt man zu der Formel

$$b = \bar{y} - a\bar{x}. \quad (13)$$

Man kann zur Schwerpunktkoordinaten übergehen

$$\begin{aligned} X_i &= x_i - \bar{x} \\ Y_i &= y_i - \bar{y} \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Der gewählten Verfahren ermöglicht es, von der Zielfunktion mit zwei Variablen zu einer Zielfunktion mit einer Variablen überzugehen. Man erhält auf diese Schreibweise der Punktkoordinaten und mit der Bedingung  $b = \bar{y} - a\bar{x}$  ein Modell nur mit einer Variablen und die Zielfunktion  $G(a)$

$$G(a) = \frac{1}{a^2 + 1} \sum_{i=1}^n (Y_i - aX_i)^2 \quad \rightarrow \quad \min. \quad (15)$$

Durch Bildung der Ableitung nach der Variable  $a$  gelangt man zu dem Zusammenhang

$$\frac{\partial G(a)}{\partial a} = \frac{-2a}{(a^2 + 1)^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - aX_i)^2 - \frac{2}{(a^2 + 1)} \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - aX_i) = 0. \quad (16)$$

Aus dem vorherigen Formel ergibt sich zunächst

$$(a^2 + 1) \sum_{i=1}^n (X_i Y_i - aX_i^2) + a \sum_{i=1}^n (Y_i - aX_i)^2 = 0, \quad (17)$$

lautet dann die Gleichung mit zweiten Grad als Endresultat

$$a^2 \sum_{i=1}^n X_i Y_i + a \sum_{i=1}^n (X_i^2 - Y_i^2) - \sum_{i=1}^n X_i Y_i = 0. \quad (18)$$

Für die Lösungen einer quadratischen Gleichung ergibt sich nach der sogenannten kleinen Lösungsformel für den Parameter  $a$  der folgende Ausdruck

$$a_{1,2} = \frac{-\sum_{i=1}^n (X_i^2 - Y_i^2) \pm \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (X_i^2 - Y_i^2)\right)^2 + 4\left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i\right)^2}}{2\sum_{i=1}^n X_i Y_i}. \quad (19)$$

Da unter dem Wurzelzeichen eine positive Zahl auftritt, gibt es zwei reelle Lösungen, kann man es anzeigen, dass die Funktion  $F(a, b)$  mit dem positiven Zeichen ihr minimaler Wert, mit dem negativen Zeichen ihr maximaler Wert aufnimmt.

### 3. Numerisches Beispiel

In Neitzel und Petrovic (2008) ist eine numerische Beispiel von der Arbeit Kupferers (2005, S91., Tab. 1) genommen.

$i$	$x_i$	$y_i$
1	0	0
2	1	1
3	2	4
4	3	6

Tab. 1: Numerisches Beispiel

Die Aufgabenstellung besteht darin, eine ausgleichende Gerade durch die Punkte 1 bis 4 zu berechnen, wobei die Koordinaten  $x_i, y_i$  als gleichgewichtige und unkorrelierte Beobachtungen angesehen werden.

In diesem Beispiel versucht Kupferer zu zeigen, dass die TLS-Lösung einer ausgleichenden Geraden und die GH-Lösung voneinander abweichen und Neitzel und Petrovic (2008) hat die selbe Aufgabe durch eine strenge Auswertung des nichtlinearen GH-Modells gelöst. Wir geben die exakte Lösung an (Tab. 2).

Ergebnisse	GH-I	GH-II	Kupferer	GH, streng	Exakt-III
Steigung $\hat{a}$	3.000	3.2667	3.241	3.241804	3.241804
Achsabschnitt $\hat{b}$	-1	-1.4000	-1.362	-1.362705	-1.362705
Verbesserungsquadratsumme $v^T v$	4.000	0.4082	0.372	0.372946	0.372946

Tab. 2: Lösung des numerischen Beispiels

#### 4. Schlussbemerkung

In diesem Beitrag als Hauptergebnis wurde die exakte Lösung der ausgleichenden Geraden in Rahmen der TLS Methode abgeleitet indessen die Möglichkeiten der Methode der kleinsten Quadrate völlig einhielt waren, das heißt wurde jeweils die zulässige Lösungsverfahren des nichtlinearen GH-Modells eingesetzt. Dieser Teil der Arbeit ist als heuristische Lösungsverfahren des TLS-Modells zu nennen.

Außerdem anhand eines speziellen Beispiels, in dem die exakte Lösung der ausgleichenden Geraden angewendet war, wurde gezeigt, dass die strenge Auswertung des nichtlinearen GH-Modells und die Anwendung des TLS Methode die gleichen Ergebnisse liefern.

#### Literatur

- [1] **Golub, G. H., van Loan, C.**, An Analysis of the Total Least Squares Problem. *SIAM J. on Numerical Analysis*, Vol. 17, Issue 6 (1980) 883-893.
- [2] **Guo, R.**, Systematical analysis of the transformation procedures in Baden-Württemberg with Least Squares and Total Least Squares methods. Stuttgart (2007) 1-49.
- [3] **Hazay, I.**, Die Variante der ausgleichenden Gerade. *Geodäsie und Kartografie*, Budapest, S. (1980) 88-96.
- [4] **Huffel, van S., Vandewalle, J.**, The Total Least Squares Problem. *Computational Aspects and Analysis*. SIAM, Philadelphia (1991).
- [5] **Kupferer, S.**, Anwendung der Total Least Squares Technik bei geodätischen Problemstellungen. Universität Karlsruhe (TH), Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, 1, Universitätsverlag Karlsruhe (2005).
- [6] **Lenzmann, E., Lenzmann, L.**, Zur Bestimmung eindeutiger Transformationsparameter. *ZfV* 126, S. (2001) 138-142.
- [7] **Neitzel, F., Petrovic, S.**, Total Least Squares (TLS) im Kontext der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten am Beispiel der ausgleichenden Geraden. *ZfV* 133, S. (2008) 141-148.
- [8] **Nievergelt, Y.**, Total Least Squares: state of the art regression in numerical analysis. *SIAM*, Vol. 36, No. 2 (1994) 258-264.
- [9] **Reed, B. C.**, Linear least-squares fit with errors in both coordinates. *Am. J. Physics*, Vol. 57 (1989) 642-646. (doi: <http://dx.doi.org/10.1119/1.15963>)
- [10] **Reed, B. C.**, Linear least-squares fit with errors in both coordinates. II: Comments on parameter variances. *Am. J. Physics*, Vol. 60, No. 1 (1992) 59-62. (doi: <http://dx.doi.org/10.1119/1.17044>)
- [11] **Reinking, J.**, Total Least Squares? *ZfV* 133, S. (2008) 384-389.
- [12] **Schraffrin, B., Lee, I., Felus, Y., Choi, Y.**, Total Least-Squares (TLS) for geodetic straight-line and plane adjustment. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, No. 3 (2006) 141-165.
- [13] **York, D.**, Least Squares fitting of a straight line. *Can. J. Physics*, 44 (1966) 1079-1086. (doi: <http://dx.doi.org/10.1139/p66-090>)