BIGFIVE90

Mélyen tisztelt Elnök Úr, kedves Kollegák!

Legyen szabad megköszönnöm BIGFIVÉreim nevében is a bennünket ért nagy megtiszteltetést, hogy a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Osztálya ezt az ünnepi rendezvényt szervezte 90-ik születésnapjaink alkalmából. Nagy örömmel és hálával tölt el bennünket ez a rendkívüli megtiszteltetés. Mély hálával tartozunk Lovász elnök úrnak, Pálfy akadémikusnak, valamint az előadó kollégáknak.

Mind az öten majdnem 70 évvel ezelőtt kezdtük el a kutatómunkát, és a matematikának szenteltük egész életünket. Nem kutattunk közösen: a matematika különböző ágait műveltük, s ki-ki a maga területén igyekezett megoldani a fontos és érdekes problémákat. Hogy milyen mértékben sikerült nekünk hozzájárulni tudományunk fejlődéséhez, az majd idővel elválik, de úgy vélem, hogy munkásságunkkal nemcsak a matematikai tudományt szolgáltuk, de a magyar matematikát is. A magyar matematikai iskola tanítványai vagyunk, ennek az iskolának a tradícióit igyekeztünk elsajátítani s folytatni. És ennek a világhírű iskolának képviselőiként is tekintettek bennünket, valahányszor előadtunk öt világrész számos egyetemén.

Rendkívül hálásak vagyunk az Akadémiának, hogy ilyen megtisztelő módon emlékezik meg életünk e mérföldkövéről. Igaz örömmel tölt el bennünket az is, hogy itt kollégáink elismeréssel szóltak munkánkról.

Engedtessék meg, hogy röviden felidézzem csoportunk születésének és működésének körülményeit.

Kezdem 1945-ben, amikor a budapesti egyetemen három matematikai tanszék volt, de csak két professzor. Fejér Lipót 65 éves volt, őt a háború alatti szenvedés nagyon megviselte, és már nem volt oly aktív. Kerékjártó Béla már súlyos beteg volt, és meghalt, mielőtt előadhatott volna a háború után. A harmadik tanszék üres volt, csak 1946-ban töltötték be Riesz Frigyessel, mikor már négyen abszolváltunk. Szász Pál docens volt az egyetlen, akitől komolyan tanulhattunk; az ő előadásai tökéletesen előkészített, rendkívül precíz, komoly mennyiségű anyagot öleltek fel. Fejes-Tóth László geometriai, majd később Turán Pál számelméleti magántanári előadásai főként kezdőknek szóltak. A Matematikai és Fizikai Társulat nem szervezett matematikai előadásokat, mert valami vita volt a szétválással kapcsolatban, és a Bolyai Társulat csak később alakult meg. Bár a matematikai atmoszféra kitűnő volt az egyetemen, ez nem elégitett ki bennünket, mi többre vágytunk, hogy tanulhassunk.

Gál Pista ötlete volt, hogy szervezzünk magunknak egy fórumot, ahol tanulhatunk up-to-date matematikát, és vitatkozhatunk. Öten jöttünk össze 1945 nyarán, majd hetenként találkoztunk. Minden alkalommal egyikünk beszámolt arról, hogy mit olvasott, s mit tett hozzá. Íratlan szabály volt, hogy az előadónak valami újat is kellett hozzáadni: általánosítást vagy érdekes következményt. Fejér Lipót tanácsát követtük: olvassunk, eresszük mélyre a szondát, és tegyünk fel kérdést magunknak.

Az 1946/47-es tanévben mindnyájan rendkívül intenzíven dolgoztunk. Az előadások témája megváltozott: már nem olvasott anyagról számoltunk be, hanem új eredményeinket ismertettük. Készülő disszertációink tételei itt kerültek tüzetes megvitatásra. Ebben a tanévben mindegyikünk ledoktorált, s hangsúlyozom: egyikünknek sem volt témavezetője vagy tanácsadója! Sokat tanultunk abban is, hogy miként kell előadni. A tanév végén előadó ülést tartottunk, amelyen öt rövid előadás hangzott el kutatási eredményeinkről. A meghívóhoz mellékelve volt egy 4 oldalas ismertető a már megjelent vagy sajtó alatt levő cikkekről a Mathematical Reviews stílusában.

A 47/48-as tanévben kibővültünk: Fenyő Istvánt és Rényi Alfrédot „levelező” (rügyező) taggá választottuk. Mintegy 30 előadást tartottunk az év folyamán. A tanév végén sokszorosított tájékoztató vagy 30 dolgozatot ismertet 7 szerzőtől.

Néhány szót arról, hogy miként működünk. Összejöveteleink nemcsak abban különböztek közönséges szemináriumi előadásoktól, hogy állandóan közbevágtunk kérdésekkel, hanem abban is, hogy szinte megállás nélkül nevettünk, tréfáltunk. Aczél János volt a legtöbb vicc szerzője, de a tréfálkodásban mindegyikünk nagyon is aktív volt. A tréfa tárgya többnyire a tárgyalt téma vagy annak tálalási módja volt. Csodálatos, hogy a sok tréfa mellett komoly matematikát tudtunk tanulni.

Talán a legjellegzetesebb tevékenységünk a plakátkészítés volt. Számos összejövetel után a legviccesebb helyzeteket rögzítettük plakát formájában. A plakát meghívó formájában készült, megbízóként a lezajlott előadásra, mintha előre tudtuk volna a vicces eseményeket. Az előadások helyét mindenkor „Lipót-mező”-ként jeleztük, hivatkozással Lipi bácsira és a közismert Lipót-mezei elmebeteg gyógyintézetre. Mindegyikünknek más neve lett, pl. Gál Pista Log-log Pista néven szerepelt. A plakátszerkesztéshez mindegyikünk hozzájárult ötleteivel, és az én feladatom volt a végleges forma megszerkesztése Aczél János aktív közreműködésével. Ezek a plakátok ma már nem sokat jelentenek, mert az akkori helyzetre való utalásokat lehetetlen ma értékelni.

Az 1948/49-es tanévben már kevésbé tevékenykedtünk együtt. Gál és Horváth Párizsba távozott, Aczél a szegedi, majd miskolci egyetemre került, Császár a Műegyetemen adott elő, én tanítóképző-intézeti tanári tevékenység után az Eötvös egyetemen dolgoztam. Elszakadtunk egymástól, de a barátság és a közös cél, a matematika iránti odaadó szeretet összekapcsolt bennünket a világ 5 különböző városából. Ritkán volt alkalmunk összejönni, többnyire nemzetközi konferenciákon találkoztunk. Utoljára a 80 éves akadémiai rendezvényen voltunk együtt mind az öten, most is itt ötünkre számítottunk, de csak ketten jöttünk el.

Tisztában vagyunk azzal, hogy 90 évünkkel a jövőben már nem fogunk tudni sokat tenni tudományunkért, de a matematika továbbra is szívünkben marad.

Még egyszer köszönjük a számunkra oly sokat jelentő ünneplést, köszönet mindenkinek, aki eljött ide minket köszönteni. Legyen szabad remélnem, hogy 10 év múlva mind az öten találkozhatunk majd.

Fuchs László

BEVEZETÉS A HOMOGÉN STRUKTÚRÁKRÓL SZÓLÓ CIKKSOROZATHOZ

SZABÓ CSABA

A homogén struktúrák elméletének kutatása újraéledt az utóbbi néhány évben. A legismertebb homogén struktúrák a megszámlálhatóan végtelen dimenziós vektorterek. Ilyen még a racionális számok a $\leq$ rendezéssel, azaz ha elfelejtjük az összeadást és a szorzást, akkor egy sűrű, végpont nélküli rendezett halmazunk marad. És idetartozik többek közt a véletlen gráf is, amelyet úgy kapunk, hogy veszünk megszámlálható sok csúcsot, és bármely két csúcs közt pénzfeldobással eldöntjük, hogy van-e él közöttük.

Egy $\mathcal{A}$ algebrai- vagy relációs struktúrát homogénnek nevezünk, ha akármelyik $A, B < \mathcal{A}$ véges részstruktúrák esetén, amennyiben van egy $\varphi : A \mapsto B$ izomorfizmus, akkor φ kiterjeszthető $\mathcal{A}$ egy automorfizmusává. Hogy ez a fogalom mennyire nem bonyolult, az abból is látszik, hogy ha $\mathcal{V}$ egy megszámlálhatóan végtelen dimenziós vektortér, akkor a homogenitás elemi lineáris algebrai eszközökkel mutatható meg. Ekkor ugyanis A és B két egyforma (véges) dimenziós altér kell, hogy legyen. Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok A egy bázisát alkotják, akkor a $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$ a bijektivitás miatt B egy bázisa lesz. Ha mindkét bázist kiegészítjük $\mathcal{V}$ egy-egy bázisává, akkor egy bijkekció a két bázis közt, amelyik φ-t megőrzi, a lineáris leképezések előírhatósági tétele alapján kiterjed V egy lineáris transzformációjává. Ez pedig éppen $\mathcal{V}$ egy automorfizmusa.

A definícióból látható, hogy a homogén struktúrák elmélete szoros kapcsolatban áll a végtelen permutációcsoportok elméletével. Az idők során azonban az ilyen irányú kutatások megtorpantak. A 2000-es évek elején ezek a kutatások lendületre kaptak egy M. Bodirsky és M. Pinsker által kifejlesztett elmélettől, amely a Ramsey-tételek segítségével új megvilágításba helyezi a témakört. Véges nyelvek (relációk) felett módszert adnak arra, hogy hogyan kell vizsgálni egy homogén struktúra reduktjait. Ehhez a kutatócsoporthoz csatlakozott Pongrácz András, akinek részvétele, majd irányítása mellett számos új eredmény született. Az ő vezényletével többek közt csoportunk, Pach Péter Pál, Pluhár Gabriella, Michael Pinsker és én felsoroltuk a véletlen részbenrendezett halmaz reduktjait, munkánk lényegében az első olyan átfogó munka volt, amely ezen új elméleten alapul. A következő cikkben Pongrácz András írja le a homogén struktúrák elméletének alapjait és a legfrissebb kutatási irányokat. A cikkben nemcsak felsorolja a definíciókat és tételeket, hanem kitér benne a legfontosabb fogalmak szemléltetésére és magyarázatára, érthetővé téve azt egy külső érdeklődő számára is. Ezután elhelyezi a témát a matematika többi területén belül is, mint például a bonyolultságelmélet vagy a végtelen permutációcsoportok területe.

A Bodirsky–Pinsker-féle elmélet nem alkalmazható azokra az esetekre, amikor a nyelv nem véges. Ez azt jelenti, hogy a struktúránk nem írható le modellelméleti szempontból véges sok relációval. Ilyen struktúrák például a véges test fölötti végtelen dimenziós projektív-, illetve vektorterek vagy a megszámlálhatóan végtelen dimenziós atommentes Boole-algebra. Ezen struktúrák vizsgálatára nincsenek általános módszerek, jól bevált trükkök. Ezt a témát kezdtük el kutatni a már említett Michael Pinskerrel, valamint Bodor Bertalannal és Kalina Kendével, akik matematikus MSc-s hallgatók az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. A két fiatal eddig négy jól összefoglalható eredmény kitalálója, ezeket az eredményeket olvashatjuk ebben és a következő számban az ő tálalásukban. Az első két eredményük bizonyításait, amely a projektív terekről és a kételemű test fölötti vektortérről szólnak, sikerült annyira megérteni, hogy csak elsőéves lineáris algebrai és elemi csoportelméleti eszközöket használnak. A másik két munka olvasása sem igényel komolyabb előzetes tudást, de a páratlan prím elemű testek fölötti vektorteres dolgozatban komoly szerepet játszik a pontonkénti konvergencia, illetve az orbit és a stabilizátor fogalma, a Boole-algebrás cikkben pedig szerepel egy-két riasztónak kinéző definíció, illetve jelölés, mint például (rész)csoportok szorzata és generátuma.

A kutatásoknak még csak az elején tartunk. Alig van olyan struktúra, amelyre ismert valamilyen teljes leírás, az általános összefüggések pedig – egyelőre – leginkább sejtések formájában léteznek. Éppen ezért a kérdéskör vár minden érdeklődő kutatót.

Szabó Csaba
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Algebra és Számelmélet Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/c
csaba@cs.elte.hu

OMEGA-KATEGORIKUS STRUKTÚRÁK ÉS ALGEBRAI INVARIÁNSAIK*

PONGRÁCZ ANDRÁS

Az ω-kategorikus struktúrák elméletében nagyon hasznos eszköz azok algebrai invariánsainak – pl. automorfizmuscsoport vagy polimorfizmusklón – vizsgálata. Maga az ω-kategoricitás is leolvasható az automorfizmuscsoportból. Ebben a cikkben összefoglalunk néhány, az ω-kategorikus struktúrák reduktjaival, algebrai invariánsaival és azok közötti homomorfizmusokkal kapcsolatos fontos eredményt, illetve ezek alkalmazásait elméleti számítástudományban.

1. Bevezetés

1.1. Rövid áttekintés. A legfontosabb definíciók tisztázása után néhány olyan, egymással szorosan összefüggő kérdéskört tárgyalunk ω-kategorikus struktúrákkal kapcsolatban, amikben ma is aktív kutatás folyik. A 2. fejezetben bevezetjük a redukt fogalmát, és áttekintjük a legfrissebb eredményeket, amik ω-kategorikus struktúrák reduktjait írják le valamilyen módon. A téma alapkérdése az a modellelméleti probléma, hogy milyen struktúrákat tudunk egy adott struktúrából elsőrendű formulák segítségével definiálni. A 3. fejezetben bemutatjuk, hogy az egyes algebrai invariánsok milyen információt tárolnak el a struktúráról. Bevezetünk egy természetes topológiát az automorfizmuscsoporton, az endomorfizmusmonoidon és a polimorfizmusklónon, majd megvizsgáljuk, hogy a csoport (monoid, klón) algebrai struktúrája mikor határozza meg egyértelműen a topologikus struktúrát. A 4. fejezetben kitérünk az eredmények alkalmazására elméleti számítástudományban, azon belül a „Constraint Satisfaction Problems” (CSP) témakörben. Az itt bemutatott módszer lehetőséget ad arra, hogy tagsági problémák széles osztályára igazoljuk a dichotómiasejtést, vagyis azt, hogy az adott osztályban minden problémára igaz, hogy vagy létezik egy azt polinomidőben megoldó algoritmus, vagy NP-teljes. Végül az 5. fejezetben röviden bemutatjuk az ω-kategorikus struktúrák automorfizmuscsoportjainak folyamairól szóló legfrissebb eredményeket. Ez a téma napjainkban igen népszerű, mert kapcsolatot teremtett a modellelmélet, a végtelen permutációcsoportok és a dinamikai rendszerek elmélete között. A fejezeteket nyitott problémákkal zárjuk.

*A szerzőt az EPSRC támogatta az Infinite-domain Constraint Satisfaction Problems, grant no. EP/L005654/1 projekt keretében.

1.2. ω-kategorikus struktúrák. A véges struktúrákat izomorfizmus erejéig egyértelműen leírja az elsőrendű elméletük, vagyis azon elsőrendű formulák halmaza, melyek igazak a struktúrában. Már Cantor is tudta, hogy a megszámlálható struktúrák körében a racionális számok $(\mathbb{Q}, <)$ teljes rendezésére ez szintén igaz, sőt elegendő egyetlen axiómát felírni, ami azt mondja ki, hogy a kétváltozós reláció egy teljes rendezés, ami végpontnélküli és sűrű. Ha egy megszámlálható Δ struktúrára fennáll, hogy $\Delta \cong \Gamma$ minden olyan megszámlálható Γ struktúrára, amiben ugyanazok az elsőrendű formulák igazak, mint Δ-ban, akkor Δ egy *ω-kategorikus* struktúra. Eszerint a véges struktúrák és $(\mathbb{Q}, <)$ egyaránt ω-kategorikusak.

Utóbbi állítás egy egyszerű, az irodalomban „back-and-forth” (vagyis „oda-vissza”) algoritmusnak nevezett módszerrel látható be. Ennek lényege, hogy rögzítünk egy-egy sorozatot, amelyek felsorolják $\mathbb{Q}$ és az adott végpontnélküli sűrű rendezés, Γ elemeit, majd az izomorfizmust szisztematikusan építjük fel $(\mathbb{Q}, <)$ és Γ között. Egy általános lépésben felváltva definiálunk képet $(\mathbb{Q}, <)$ soron következő elemének, illetve ősképet Γ soron következő elemének (feltéve, hogy még nincs neki). Vagyis a páratlan sorszámú lépésekben egy Γ-beli elemet rendelünk $(\mathbb{Q}, <)$ legkisebb indexű eleméhez, aminek még nincs képe, a páros sorszámú lépésekben pedig keresünk egy alkalmas elemet a $(\mathbb{Q}, <)$ struktúrában, amihez Γ legkisebb indexű kimaradt elemét rendelve továbbra is izomorfizmust kapunk. Azt, hogy egy adott köztes állapotból ez az algoritmus minden esetben folytatható, éppen az garantálja, hogy mindkét teljes rendezés végpontnélküli és sűrű. Ezt részletesen abban az esetben indokoljuk, amikor $(\mathbb{Q}, <)$ soron következő elemének definiálunk képet, a másik eset teljesen hasonlóan működik. Legyen az adott köztes állapotban a már felépített izomorfizmus $a_1 \mapsto b_1, \ldots, a_k \mapsto b_k$, és tegyük fel, hogy az $u \in (\mathbb{Q}, <)$ elemnek kell képet találnunk Γ-ban. Ha $u < a_1$, akkor bármilyen $v < b_1$ megfelelő: ilyen v létezik, hiszen Γ-nak nincs legkisebb eleme. Hasonlóan járunk el, ha $u > a_k$. Végül ha $a_i < u < a_{i+1}$, akkor tetszőleges v megfelel u képének, amire $b_i < v < b_{i+1}$: ilyen elem azért létezik, mert Γ sűrű. Mivel $\mathbb{Q}$ minden eleme sorra kerül egyszer ősképként, és Γ minden eleme sorra kerül egyszer képként, így végtelen sok lépésben az algoritmus valóban izomorfizmust ad meg $(\mathbb{Q}, <)$ és Γ között.

Általában természetesen nem várhatjuk, hogy egy végtelen ω-kategorikus struktúrát egyetlen axióma írjon le izomorfizmus erejéig, ehhez tipikusan végtelen sok elsőrendű formulára van szükség a struktúra elméletéből.

Ryll-Nardzewski, Engeler és Svenonius egymástól függetlenül karakterizálta az ω-kategorikus struktúrákat. A három szerző több ekvivalens karakterizációt is adott, mi részletesen csak Ryll-Nardzewski eredményét tárgyaljuk. Egy Δ struktúra automorfizmuscsoportja természetes módon hat Δ minden hatványán: az $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ permutációt – mint függvényt – koordinátánként alkalmazhatjuk Δ^n elemeire, vagyis $\alpha(a_1, \ldots, a_n) = \big(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)\big)$. Ryll-Nardzewski tétele szerint egy megszámlálható Δ struktúra pontosan akkor ω-kategorikus, ha $\mathrm{Aut}(\Delta)$ *oligomorf,* vagyis minden így kapott csoporthatásnak csak véges sok orbitja van. Ez alapján nagyon könnyű új bizonyítást adni arra, hogy $(\mathbb{Q}, <)$ ω-kategorikus. Nyilvánvaló ugyanis, hogy egy $(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{Q}, <)^n$ n-es orbitjában pontosan azok az $(s_1, \ldots, s_n) \in (\mathbb{Q}, <)^n$ n-esek vannak, amikre a $t_i \mapsto s_i$ függvény rendezéstartó. (Minden ilyen hozzárendelés kiterjeszthető $(\mathbb{Q}, <)$-re egy szigorúan monoton növő, szakaszonként lineáris függvénnyé, ami $(\mathbb{Q}, <)$-nek automorfizmusa.) Vagyis egy $(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{Q}, <)^n$ orbitját egyértelműen meghatározza az, hogy a $t_1, \ldots, t_n$ elemek hogyan vannak rendezve. Mivel n elemet csak véges sok módon lehet rendezni, így $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ oligomorf, vagyis $(\mathbb{Q}, <)$ ω-kategorikus. Ez a gondolatmenet vezet el a homogén struktúra definíciójához.

1.3. Homogén struktúrák. Amint arra az előző levezetésben utaltunk, egy $(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{Q}, <)^n$ orbitját egyértelműen meghatározza, hogy a benne szereplő elempárokra a $<$, $>$ és $=$ relációk közül melyik áll fenn. Vagyis ha két n-es lokálisan „ugyanúgy néz ki", akkor nem lehet köztük semmilyen módon különbséget tenni a struktúrán belül. Ilyen esetben azt mondjuk, hogy a struktúra *homogén*. Precízen, egy megszámlálható Δ struktúra homogén, ha tetszőleges A, B végesen generált részstruktúrákra és $\varphi : A \to B$ izomorfizmusra létezik a struktúrának egy $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ automorfizmusa, amire $\alpha \restriction_A = \varphi$. A végesen generált részstruktúrák közötti izomorfizmusokat a struktúra *parciális izomorfizmusainak* nevezzük. Ez alapján úgy fogalmazhatunk, hogy egy megszámlálható struktúra akkor homogén, ha minden parciális izomorfizmusa kiterjed automorfizmussá. A homogenitás definíciójára úgy is gondolhatunk, mint az a feltétel, ami garantálja, hogy az oda-vissza algoritmus minden köztes állapotból folytatható. A $(\mathbb{Q}, <)$ struktúra tehát homogén. Megjegyezzük, hogy a legtöbb struktúra nyelve, amivel foglalkozunk, nem tartalmaz függvényjeleket, sőt általában konstansokat sem. Vagyis a legtöbb struktúra ebben a cikkben *relációs struktúra*, azaz nyelvük csupán relációkból áll. Ilyen esetben a homogenitás definíciójában szereplő „végesen generált" kifejezés lecserélhető a „véges" szóra, hiszen relációs struktúrákban minden részhalmaz saját magát generálja.

A homogén struktúrákat Fraïssé vizsgálta először átfogóan. A már említett „oda-vissza" algoritmus segítségével belátta, hogy a homogén struktúrákat izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározza a *véges nyomuk*. Egy megszámlálható Δ struktúra véges nyoma azokból a végesen generált struktúrákból áll, amik beágyazhatók Δ-ba, és ezt az osztályt $\mathrm{Age}(\Delta)$ jelöli. Fraïssé karakterizálta azokat az osztályokat, amik megegyeznek valamely homogén struktúra véges nyomával. Eszerint egy adott megszámlálható nyelv feletti végesen generált struktúrákból álló $\mathcal{K}$ osztály pontosan akkor véges nyoma egy homogén struktúrának, ha a következő egyszerű feltételek fennállnak.

- Izomorfizmus erejéig $\mathcal{K}$-ban megszámlálható sok struktúra van.
- $\mathcal{K}$ lefelé zárt, vagyis ha $B \in \mathcal{K}$ és A beágyazható B-be, akkor $A \in \mathcal{K}$. (Következésképpen $\mathcal{K}$ izomorfizmusra zárt.)
- *Közös kiterjeszthetőség tulajdonsága:* minden $B_1, B_2 \in \mathcal{K}$ esetén létezik $C \in \mathcal{K}$, amibe B_1 és B_2 is beágyazható.
- *Vegyítési tulajdonság:* ha $A, B_1, B_2 \in \mathcal{K}$ és $\varphi_1 : A \hookrightarrow B_1$, $\varphi_2 : A \hookrightarrow B_2$ beágyazások, akkor létezik egy $C \in \mathcal{K}$ és $\psi_1 : B_1 \hookrightarrow C$, $\psi_2 : B_2 \hookrightarrow C$ beágyazások, amikre $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$.

Megjegyezzük, hogy általában a vegyítési tulajdonságból nem következik a közös kiterjeszthetőség. Egy egyszerű példa, amit [33] is említ, az összes véges test osztálya. Erre nem teljesül a közös kiterjeszthetőség, hiszen ha B_1 és B_2 karakterisztikája különböző, akkor lehetetlen ezeket ugyanabba a testbe ágyazni. A vegyítési tulajdonság ellenőrzése azonban rutin feladat. Ott ugyanez a probléma nem léphet fel, hiszen ha egy A véges testet be tudunk ágyazni B_1-be és B_2-be, akkor mindhárom test karakterisztikája megegyezik. Ha a nyelv nem tartalmaz függvényjeleket és konstansokat, csak relációkat, akkor a vegyítési tulajdonságból és a lefelé zártságból következik az együttes kiterjeszthetőség tulajdonsága ($A = \emptyset$ választással), így ilyenkor elég előbbieket leellenőrizni.

Ha egy végesen generált struktúrákból álló $\mathcal{K}$ osztályra fennállnak a fenti felsorolásban szereplő tulajdonságok, akkor $\mathcal{K}$ egy *Fraïssé-osztály.* A továbbiakban $\mathrm{Flim}(\mathcal{K})$ jelöli azt az (izomorfizmus erejéig) egyértelmű struktúrát, aminek $\mathcal{K}$ a véges nyoma, feltéve, hogy ilyen létezik. Ez a Fraïssé-osztály *Fraïssé-limesze.* Ha $\mathcal{K}$ az összes véges teljes rendezés osztálya, akkor $\mathrm{Flim}(\mathcal{K}) = (\mathbb{Q}, <)$. Ha $\mathcal{K}$ az összes véges gráf osztálya, akkor $\mathrm{Flim}(\mathcal{K})$ az Erdős–Rényi-féle véletlen gráf. Ez az a gráf, amit 1 valószínűséggel megkapunk (izomorfizmus erejéig) ha egy megszámlálható alaphalmazba minden élet egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel húzunk be. Teljesen hasonlóan definiálhatók a véletlen k-uniform hipergráfok minden $k \geq 2$-re, és a véletlen turnament is. Ezeket a struktúrákat a legegyszerűbben Fraïssé felépítésében lehet tárgyalni: mind $\mathrm{Flim}(\mathcal{K})$ alakban állnak elő, előbbiek esetében $\mathcal{K}$ az összes véges k-uniform hipergráf, utóbbi esetben az összes véges turnament osztálya. Az, hogy ezen osztályok mindegyike Fraïssé-osztály, egyszerűen igazolható. Az egyetlen nemtriviális lépés a vegyítési tulajdonság ellenőrzése, melyet a véges gráfok osztályával illusztrálunk. Adott $\varphi_1 : A \hookrightarrow B_1$, $\varphi_2 : A \hookrightarrow B_2$ esetén legyen C az a struktúra, amit B_1 és B_2 diszjunkt uniójából kapunk az A-beli elemek képeinek azonosításával. Ez alatt azt értjük, hogy a diszjunkt uniót lefaktorizáljuk azzal az ekvivalenciarelációval, ami azonosítja a $\big(\varphi_1(a), \varphi_2(a)\big)$ alakú párokat minden $a \in A$-ra. Az ekvivalenciaosztályok halmazán azok a párok lesznek élek, amelyek B_1-beli vagy B_2-beli reprezentánsai élt alkotnak. Ekkor azt mondjuk, hogy összeragasztjuk B_1-et és B_2-t A mentén. A véletlen turnament esetén ugyanez a konstrukció általában nem képez turnamentet, hiszen $B_1 \setminus \varphi_1(A)$ és $B_2 \setminus \varphi_2(A)$ között nem definiáltunk éleket. Ha azonban minden ilyen pontpárra tetszőlegesen választunk egyet a két lehetséges irányított él közül, akkor a kapott C turnament megfelel a vegyítési tulajdonság feltételének.

Ryll-Nardzewski tételéből közvetlenül adódik, hogy minden véges relációs nyelv feletti homogén struktúra ω-kategorikus, így az összes fentebb említett példa is.

Megemlítünk két példát, amikben konstansok és függvényjelek is vannak. Ha $\mathbb{F}_q$ a q-elemű véges test, akkor az összes $\mathbb{F}_q$ feletti véges dimenziós vektortér egy Fraïssé-osztály. Ennek Fraïssé-limesze az $\mathbb{F}_q$ feletti megszámlálhatóan végtelen dimenziós vektortér. Ha pedig $\mathcal{K}$ az összes véges Boole-algebrából áll, akkor $\mathrm{Flim}(\mathcal{K})$ a megszámlálható atommentes Boole-algebra. Ezek a struktúrák szintén ω-kategorikusak.

Henson vette észre [31], hogy az összes K_n-mentes véges gráf szintén Fraïssé-osztályt alkot. Adott $n \geq 3$ esetén ennek az osztálynak a Fraïssé-limeszét az n-edik Henson-gráfnak hívjuk, és (H_n, E)-vel jelöljük. Lachlan és Woodrow belátták [39], hogy triviális példáktól eltekintve nincs más megszámlálhatóan végtelen homogén gráf, mint a véletlen gráf, a Henson gráfok és azok komplementerei. Lachlan karakterizálta a homogén turnamenteket [38], Schmerl pedig a homogén részbenrendezéseket [54]. Cherlin adott áttekinthető leírást az összes homogén irányított gráfra, amikben két elem között legfeljebb egy irányított él fut [24]. Ez az eredmény azért is figyelemre méltó, mert ilyen gráfból kontinuum sok van, és mert egyszerre általánosítja Lachlan és Schmerl tételeit.

A legérdekesebb homogén részbenrendezés az összes véges részbenrendezett halmaz Fraïssé-limeszeként előálló *generikus részbenrendezés*, vagy más néven *véletlen részbenrendezés*. Erre az osztályra is fennáll a vegyítési tulajdonság, ám ennek igazolása a korábbi esetekhez képest nagyobb óvatosságot igényel. Ha ugyanis összeragasztjuk a B_1 és B_2 részbenrendezett halmazokat A mentén, akkor általában nem kapunk részbenrendezést, hiszen a tranzitivitás sérülhet. Így az összeragasztott struktúra tranzitív lezártját érdemes C-nek választani. Vagyis a véletlen hipergráfokhoz és a véletlen turnamenthez hasonlóan itt is igaz, hogy minden vegyítés elvégezhető úgy, hogy C-ben B_1 és B_2 beágyazott példányai éppen A képében messék egymást. Ekkor azt mondjuk, hogy az osztályra teljesül az *erős vegyítési tulajdonság*. Könnyű meggondolni, hogy relációs nyelvek feletti osztályokra ez azzal ekvivalens, hogy az osztály Δ Fraïssé-limeszének automorfizmuscsoportjában minden véges $H \subseteq \Delta$ halmaz stabilizátora pontosan H elemeit stabilizálja. Ekkor azt mondjuk, hogy Δ-ban *nincs algebraicitás*.

Megjegyezzük, hogy a generikus részbenrendezésnek valóban van egy a véletlen gráfhoz hasonló *véletlen konstrukciója*. Ez a fogalom precízen definiálható, és Ackerman, Freer és Patel [1, Theorem 1.1] meghökkentő eredménye szerint a véletlen konstrukció létezése ekvivalens azzal, hogy a struktúrában nincs algebraicitás. Mint azt fentebb megmutattuk, ez a tulajdonság a generikus részbenrendezésre fennáll, ezért indokolt a véletlen részbenrendezés elnevezés.

Csak a véletlen gráfról rengeteg cikk és összefoglalás jelent meg. A teljesség igénye nélkül az olvasó figyelmébe ajánljuk Cameron cikkét [22], melyben többek között igazolja az erős kis index tulajdonságot a véletlen gráfra, Fagin nulla-egy törvényét [27], ami kapcsolatot teremt véges véletlen gráfok és a végtelen véletlen gráf elmélete között, illetve Truss eredményét, miszerint a véletlen gráf automorfizmuscsoportja egyszerű [59]. Homogén struktúrákról két kiváló angol nyelvű összefoglalót ajánlhatunk [42, 23], előbbinek egy bővített változata is elérhető [41]. Általában ω-kategorikus struktúrákról, Ryll-Nardzewski, Engeler és Svenonius tételeiről és Fraïssé felépítéséről Hodges könyvében [33] olvashatunk.

2. Reduktok

2.1. Definiálható struktúrák.

Egy Δ struktúra *reduktjai* alatt azokat a Γ relációs struktúrákat értjük, amelyek alaphalmaza megegyezik Δ alaphalmazával, és amiknek minden relációja elsőrendben definiálható Δ-ban. Két relációs struktúra *elsőrendben átdefiniálható,* ha egymás reduktjai, vagyis mindkettő relációi elsőrendben definiálhatók a másik struktúrában.

2.1. példa. A $(\mathbb{Q}, <)$ struktúrának reduktjai a $(\mathbb{Q}, \mathrm{Betw})$ és a $(\mathbb{Q}, >)$ struktúrák, ahol a Betw háromváltozós reláció a következő formulával adható meg: $(x, y, z) \in \mathrm{Betw} \Leftrightarrow (x < y \wedge y < z) \vee (z < y \wedge y < x)$. Teljesen világos, hogy $(\mathbb{Q}, <)$ és $(\mathbb{Q}, >)$ elsőrendben átdefiniálhatók, hiszen $x < y \Leftrightarrow y > x$.

Bár ezek a fogalmak tökéletesen értelmesek bármilyen struktúrára, mi csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor Δ ω-kategorikus. A legtöbb konkrét eredmény véges relációs nyelv feletti homogén struktúráról szól. Fontos, hogy Ryll-Nardzewski tételéből közvetlenül következik, hogy egy ω-kategorikus struktúra minden reduktja ω-kategorikus. Érdekes módon hasonló eredmény nem igaz a véges relációs nyelvek feletti homogén struktúrákra. Lachlan mutatott példát egy olyan véges relációs nyelv feletti homogén struktúrára, aminek egy reduktja semmilyen véges nyelv felett nem homogén, vagyis nem elsőrendben átdefiniálható egy véges nyelv feletti homogén struktúrával. Eredményét sajnos nem publikálta, egy rövid összefoglalás a tételről és bizonyításáról [56]-ban található. Megjegyezzük, hogy minden ω-kategorikus struktúra homogén egy megszámlálható relációs nyelv felett: ha ugyanis minden elsőrendben definiálható relációt beveszünk a nyelvbe, akkor az eredetivel elsőrendben átdefiniálható homogén struktúrát kapunk.

Ha Δ egy tetszőleges struktúra, és az R reláció egy elsőrendű ϕ formulával definiálható Δ-ban, akkor a ϕ hossza szerinti indukcióval könnyen igazolható, hogy Δ minden automorfizmusa megőrzi R-et. Eszerint ha Γ reduktja Δ-nak, akkor $\mathrm{Aut}(\Delta) \subseteq \mathrm{Aut}(\Gamma)$. A megfordítás nem igaz teljes általánosságban, de Ryll-Nardzewski tételének egy következménye szerint igaz ω-kategorikus struktúrákra. Vagyis ha Δ ω-kategorikus, akkor egy Γ struktúra pontosan akkor reduktja Δ-nak, ha $\mathrm{Aut}(\Delta) \subseteq \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Ennek következménye, hogy két redukt (vagy általában két ω-kategorikus struktúra), Γ_1 és Γ_2 pontosan akkor elsőrendben átdefiniálható, ha $\mathrm{Aut}(\Gamma_1) = \mathrm{Aut}(\Gamma_2)$. Így ha meg szeretnénk érteni Δ reduktjait elsőrendű átdefiniálhatóság erejéig, akkor elég karakterizálni azokat az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-t tartalmazó csoportokat, amik előállnak $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ alakban. Ebből az észrevételből következik, hogy a 2.1. példában említett $(\mathbb{Q}, <)$ és $(\mathbb{Q}, \mathrm{Betw})$ struktúrák nem elsőrendben átdefiniálhatók, hiszen $(\mathbb{Q}, \mathrm{Betw})$-nek minden rendezésfordító permutáció automorfizmusa. Vagyis $(\mathbb{Q}, \mathrm{Betw})$ valódi reduktja $(\mathbb{Q}, <)$-nek.

2.2. Zárt csoportok. A továbbiakban rögzítünk egy ω-kategorikus Δ relációs struktúrát, és annak alaphalmazát D fogja jelölni. Jelöljük $\mathrm{Sym}(D)$-vel azt a permutációcsoportot, ami a D halmaz összes permutációjából áll. Ezen a csoporton a következőképpen adható meg egy topológia. (A topológiát a lezárási operátorával adjuk meg.) Ha $S \subseteq \mathrm{Sym}(D)$, akkor S lezártja azokból a β permutációkból áll, amik D minden véges részhalmazán interpolálhatók S valamely elemével, vagyis minden véges $F \subseteq D$ esetén létezik egy $\alpha \in S$, amire $\alpha \restriction_F = \beta \restriction_F$. Az így definiált topológiával $\mathrm{Sym}(D)$ egy *topologikus csoport*, vagyis egyszerre csoport és topologikus tér úgy, hogy a szorzás és az inverzképzés folytonos műveletek. Könnyű belátni, hogy $\mathrm{Sym}(D)$ egy részcsoportja pontosan akkor áll elő $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ alakban, ha zárt. Így Δ reduktjai egy-egyértelmű megfeleltetésben állnak $\mathrm{Sym}(D)$-nek az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-t tartalmazó zárt részcsoportjaival.

Ryll-Nardzewski tételének legerősebb formája azt mondja ki, hogy Galois-kapcsolat áll fenn Δ reduktjai és az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-t tartalmazó permutációcsoportok között. A Galois-kapcsolat az Aut és az Inv operátorokkal adható meg. Az Aut operátor minden redukthoz annak automorfizmuscsoportját rendeli, míg Inv az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-t tartalmazó permutációcsoportokhoz rendeli Δ-nak azt a reduktját, ami az összes olyan D-n értelmezett relációt tartalmazza, melyeket az adott csoport megőriz. Mint minden Galois-kapcsolat, ez is megad egy lezárási operátort a csoportokon: egy G csoport lezártja $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Inv}(G)\big)$. Megmutatható, hogy ez a lezárási operátor egybeesik a fent definiálttal. Ahhoz, hogy Galois-kapcsolatról beszélhessünk, meg kell adnunk egy-egy kvázirendezést az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-t tartalmazó részcsoportokon és Δ reduktjain. A csoportokon $G_1 \preceq G_2$ pontosan akkor, ha G_2 lezártja tartalmazza G_1-et, míg két reduktra $\Gamma_1 \preceq \Gamma_2$ akkor és csak akkor, ha Γ_1 reduktja Γ_2-nek. Ez utóbbi kompatibilis az elsőrendű átdefiniálhatósággal, vagyis ha $\tilde{\Gamma}$ jelöli a Γ ekvivalenciaosztályát, akkor jóldefiniált úgy megadni egy részbenrendezést a reduktok ekvivalenciaosztályain, hogy $\tilde{\Gamma}_1 \preceq \tilde{\Gamma}_2$ akkor és csak akkor, ha Γ_1 reduktja Γ_2-nek. Ezek alapján a következő tétel fogalmazható meg.

2.1. tétel (Ryll-Nardzewski)**.** *Legyen Δ egy ω-kategorikus relációs struktúra, melynek D az alaphalmaza. Ekkor az* Aut *és* Inv *operátorok rendezésfordító Galois-kapcsolatot teremtenek* $\mathrm{Sym}(D)$*-nek az* $\mathrm{Aut}(\Delta)$*-t tartalmazó részcsoportjai és Δ reduktjai között. Ez a Galois-kapcsolat egy rendezésfordító, egy-egyértelmű megfeleltetést ad meg a zárt részcsoportok és a reduktok elsőrendű átdefiniálhatóság erejéig vett ekvivalenciaosztályai között.*

Vagyis az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-t tartalmazó zárt részcsoportok karakterizálásával nemcsak Δ reduktjait érthetjük meg, de még az is leolvasható belőle, hogy az egyes reduktokból mely reduktokat lehet elsőrendben definiálni. Triviális speciális esetként érdemes megjegyezni, hogy egy ω-kategorikus Δ struktúrában egy R reláció pontosan akkor elsőrendben definiálható, ha R-et minden $\mathrm{Aut}(\Delta)$-beli permutáció megőriz. Vagyis a Δ-ban elsőrendben definiálható n-változós relációk éppen azok a halmazok Δ^n-ben, amelyek előállnak $\mathrm{Aut}(\Delta)$-orbitok uniójaként. Így minden $n \geq 1$-re Δ-ban csak véges sok elsőrendben definiálható n-változós reláció van. Ez a tulajdonság a megszámlálható struktúrák körében ekvivalens az ω-kategoricitással [33].

A 2.1. tétel segítségével számos konkrét esetben sikerült karakterizálni ω-kategorikus struktúrák reduktjait elsőrendű átdefiniálhatóság erejéig. Cameron igazolta, hogy pontosan 5 zárt csoport van $\mathrm{Sym}(\mathbb{Q})$-ban, ami tartalmazza $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$-et [21]. A véletlen gráf és a véletlen turnament automorfizmuscsoportjára érdekes módon ugyanez igaz, előbbi Thomas [56], utóbbi Bennett [6] eredménye. Thomas megmutatta, hogy a triviális $(H_n,=)$ reduktot leszámítva a (H_n,E) Henson-gráfnak nincs valódi reduktja [56], a véletlen k-uniform hipergráfoknak pedig 2^k+1 reduktjuk van elsőrendű átdefiniálhatóság erejéig [57]. Junker és Ziegler általánosították Cameron eredményét, karakterizálva ezzel $(\mathbb{Q},<,0)$ reduktjait [36]. Megmutatták, hogy $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$-ben minden véges halmaz pontonkénti stabilizátorát csak véges sok zárt csoport tartalmazza.

Jelen cikk szerzője belátta [51], hogy a Henson-gráfokból egy konstans felvételével kapott $(H_n, E, 0)$ struktúrának elsőrendű átdefiniálhatóság erejéig 16 reduktja van $n \geq 4$-re, és csupán 13, ha $n = 3$. Több társszerzővel közösen megmutattuk, hogy a véletlen részbenrendezés automorfizmuscsoportját 5 zárt csoport tartalmazza [49]. Egy másik többszerzős cikk eredményeként megkaptuk a véletlen rendezett gráf reduktjait is [14]. Ez a struktúra az összes véges rendezett gráf osztályának Fraïssé-limesze. Mivel ennek egyaránt reduktja a véletlen gráf, $(\mathbb{Q}, <)$ és a véletlen turnament is, így az eredmény felfogható Thomas, Cameron és Bennett korábbi tételeinek a közös általánosításaként.

A fenti eredmények bizonyításának legfontosabb közös pontja a strukturális Ramsey-elmélet alkalmazása, aminek részleteire később térünk ki. Akiknek ez a téma felkeltette az érdeklődését, azok további részletekért olvassák el Bodirsky és Pinsker összefoglalóját [11].

2.3. Zárt monoidok. A Δ struktúra *endomorfizmusmonoidja* azokból az $f : D \to D$ függvényekből áll, amelyek megőrzik Δ összes relációját. Az $\mathrm{End}(\Delta)$ halmaz valóban monoid, melyben az egységelem az identitásfüggvény, a szorzás pedig a kompozíció. Az endomorfizmusmonoidon belül könnyedén felismerhetők az automorfizmuscsoport elemei. Ezek éppen azok az invertálható elemek, amelyeknek az inverze is az endomorfizmusmonoidban van. Így $\mathrm{End}(\Delta)$ több információt tárol el a Δ struktúráról, mint $\mathrm{Aut}(\Delta)$. Ennek fényében nem meglepő, hogy az előbb tárgyalt Galois-kapcsolat kiterjeszthető az endomorfizmusmonoidokra, és az a reduktokat egy olyan ekvivalenciareláció erejéig karakterizálja, ami finomabb az elsőrendű átdefiniálhatóságnál. Egy formula *egzisztenciális pozitív*, ha egzisztenciális kvantorokkal kezdődik (vagy kvantormentes), és az ezeket követő kvantormentes formulában negáció nem szerepel. Például a véletlen gráf feletti $\exists x \, \exists y \big(E(x, z) \wedge E(y, z)\big) \vee (x = y)$ egy egzisztenciális pozitív formula. Két relációs struktúra, Γ_1 és Γ_2, *e.p.-átdefiniálható*, ha Γ_2 relációi egzisztenciális pozitív formulákkal definiálhatók Γ_1 relációiból, és viszont. Könnyen meggondolható a ϕ hossza szerinti indukcióval, hogy ha az R reláció egy egzisztenciális pozitív ϕ formulával definiálható Δ-ban, akkor Δ minden endomorfizmusa megőrzi R-et. Ha $\mathrm{Mon}(D)$ jelöli az összes D-ből D-be képező függvény monoidját, akkor ezen a halmazon teljesen hasonlóan definiálható egy lezárási operátor, mint $\mathrm{Sym}(D)$ esetében.[1] Itt is igaz, hogy egy monoid pontosan akkor zárt $\mathrm{Mon}(D)$-ben, ha valamely struktúrának endomorfizmusmonoidja. Ekkor a fentebb említett Galois-kapcsolat mintájára megadható egy Galois-kapcsolat az $\mathrm{End}(D)$-t tartalmazó zárt monoidok és Δ reduktjainak ekvivalenciaosztályai között, ahol az ekvivalenciareláció az e.p.-átdefiniálhatóság. Vagyis Δ reduktjai egzisztenciális pozitív átdefiniálhatóság erejéig egy-egyértelmű megfeleltetésben állnak az $\mathrm{End}(D)$-t tartalmazó zárt monoidokkal. A következő tétel foglalja össze ezeket az állításokat.

[1]Ezen a ponton óvatosnak kell lennünk, ha egy permutációcsoport lezártjáról beszélünk, ugyanis nem mindegy, hogy az előző alfejezet szerint tárgyalt módon, $\mathrm{Sym}(D)$-ben, vagy $\mathrm{Mon}(D)$-ben zárjuk le a halmazt. Egy zárt csoport $\mathrm{Mon}(D)$-ben jellemzően nem zárt. Pl. a véletlen gráf automorfizmuscsoportjának monoid-lezártja a véletlen gráf *önbeágyazásaiból* áll, vagyis azokból az injektív endomorfizmusokból, amik a nem-él relációt is megőrzik.

2.2. tétel. *Legyen Δ egy ω-kategorikus relációs struktúra, melynek D az alaphalmaza. Ekkor az* End *és* Inv *operátorok rendezésfordító Galois-kapcsolatot teremtenek* $\mathrm{Mon}(D)$*-nek az* $\mathrm{End}(\Delta)$*-t tartalmazó részmonoidjai és Δ reduktjai között. Ez a Galois-kapcsolat egy rendezésfordító, egy-egyértelmű megfeleltetést ad meg a zárt részmonoidok és a reduktok e.p.-átdefiniálhatóság erejéig vett ekvivalenciaosztályai között.*

2.4. Zárt klónok. Egy k-változós $f : \Delta^k \to \Delta$ függvény a Δ struktúrának akkor *polimorfizmusa*, ha megőrzi Δ minden relációját. Ez alatt azt értjük, hogy Δ tetszőleges n-változós R relációjára fennáll, hogy amennyiben az $(a_1^1, \ldots, a_n^1)$, $\ldots, (a_1^k, \ldots, a_n^k)$ mindegyike R-beli, akkor $\big(f(a_1^1, \ldots, a_1^k), \ldots, f(a_n^1, \ldots, a_n^k)\big) \in R$. A polimorfizmus tehát az endomorfizmus többváltozós általánosítása. Példaképpen érdemes megjegyezni, hogy egy egyváltozós függvény pontosan akkor injektív, ha megőrzi a $\neq$ relációt. Egy többváltozós függvényre azonban ez nem igaz. Pl. egy kétváltozós függvény definíció szerint akkor őrzi meg a $\neq$ relációt, ha minden olyan esetben, amikor $a_1 \neq b_1$ és $a_2 \neq b_2$, fennáll az $f(a_1, a_2) \neq f(b_1, b_2)$ összefüggés. Ettől még a függvény rendelhet azonos értéket olyan pontpárhoz, amiknek megegyezik az első (vagy a második) koordinátája. Hogy ez nem csak elvi lehetőség, azt mutatja az az egyszerű tény is, hogy egy *projekciófüggvény* minden relációt megőriz. A k-változós i-edik projekciófüggvény az a $\pi_i^k : \Delta^k \to \Delta$ függvény, amire $\pi_i^k(a_1, \ldots, a_k) = a_i$. A Δ struktúra összes polimorfizmusának halmazát $\mathrm{Pol}(\Delta)$ jelöli.

2.3. állítás. *Legyen Δ egy tetszőleges struktúra. Legyen $n, k \geq 1$, és legyen $f \in \mathrm{Pol}(\Delta)$ n-változós függvény, valamint $g_1, \ldots, g_n \in \mathrm{Pol}(\Delta)$ k-változós függvények. Ekkor $f \circ (g_1, \ldots, g_n)$, vagyis az $(x_1, \ldots, x_k) \in \Delta^k$-hoz*

$$f\big(g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_k)\big)$$

értéket rendelő függvény szintén $\mathrm{Pol}(\Delta)$*-ban van.*

Bizonyítás. Adott a Δ egy m-változós R relációja és az

$$(a_1^1, \ldots, a_m^1), \ldots, (a_1^k, \ldots, a_m^k)$$

m-esek R-ben. Ekkor minden $1 \leq i \leq n$ esetén

$$t_i := \big(g_i(a_1^1, \ldots, a_1^k), \ldots, g_i(a_m^1, \ldots, a_m^k)\big) \in R,$$

hiszen g_i tartja az R relációt. Mivel f is tartja az R relációt, így

$$\Big(\big(f \circ (g_1, \ldots, g_n)\big)(a_1^1, \ldots, a_1^k), \ldots, \big(f \circ (g_1, \ldots, g_n)\big)(a_m^1, \ldots, a_m^k)\Big) =$$

$$= f(t_1, \ldots, t_n) \in R. \ \blacksquare$$

A 2.3. állítás szerint tehát $\mathrm{Pol}(\Delta)$ zárt a többváltozós függvénykompozícióra, és emellett tartalmazza az összes projekciófüggvényt. Az ilyen tulajdonságoknak eleget tevő halmazokat *klónoknak* nevezzük, $\mathrm{Pol}(\Delta)$-t pedig Δ polimorfizmusklónjának hívjuk. A korábban definiált topológiát k-változós függvényekre is értelmezhetjük. Vagyis ha S a D-n értelmezett k-változós függvények egy részhalmaza, akkor S lezártja azokból az $f : D^k \to D$ függvényekből áll, amik D^k minden véges részhalmazán interpolálhatók S valamely elemével, vagyis minden véges $F \subseteq D^k$ esetén létezik egy $g \in S$, amire $g \restriction_F = f \restriction_F$. Az összes D-n értelmezett többváltozós függvény halmazát $\mathrm{Clo}(D)$-vel jelöljük. Vegyük észre, hogy $\mathrm{Mon}(D)$ topologikus altere $\mathrm{Clo}(D)$-nek. Továbbá minden k-ra a $\mathrm{Clo}(D)$-beli k-változós függvények a $\mathrm{Clo}(D)$-nek egy nyílt-zárt részhalmazát alkotják.

Ahhoz, hogy kimondhassuk Ryll-Nardzewski tételének általánosítását klónokra, be kell vezetnünk a *primitív pozitív formula* fogalmát. Egy formula primitív pozitív, ha egzisztenciális kvantorokkal kezdődik (vagy kvantormentes), és az ezeket követő kvantormentes formulában sem negáció, sem a „vagy” logikai kötőszó nem szerepel, azaz csupán prímformulák „és” kötőszóval való összekapcsolása megengedett. Például a véletlen gráf feletti $\exists x \exists y E(x,z) \wedge E(y,z) \wedge (x = z)$ egy primitív pozitív formula.

2.4. tétel. *Legyen Δ egy ω-kategorikus relációs struktúra, melynek D az alaphalmaza. Ekkor a* Pol *és* Inv *operátorok rendezésfordító Galois-kapcsolatot teremtenek* $\mathrm{Clo}(D)$*-nek a* $\mathrm{Pol}(\Delta)$*-t tartalmazó részklónjai és Δ reduktjai között. Ez a Galois-kapcsolat egy rendezésfordító, egy-egyértelmű megfeleltetést ad meg a zárt klónok és a reduktok primitív pozitív átdefiniálhatóság erejéig vett ekvivalenciaosztályai között.*

2.5. Ramsey-elmélet. Tetszőleges A, B azonos nyelv feletti struktúrákra $\binom{B}{A}$ jelöli a B struktúra A-val izomorf részstruktúráinak halmazát. Fouché vezette be a struktúrák *Ramsey-fokának* fogalmát [28]. Legyen $\mathcal{K}$ egy adott nyelv feletti véges struktúrákból álló osztály. Ekkor $A \in \mathcal{K}$ Ramsey-foka az a legkisebb d pozitív egész szám, amire a következő tulajdonság fennáll: minden $r \in \mathbb{N}$ és $B \in \mathcal{K}$ esetén létezik $C \in \mathcal{K}$ úgy, hogy bárhogyan színezzük a $\binom{C}{A}$ halmazt r színnel, található C-ben a B-nek egy legfeljebb d-színű példánya, azaz $B' \in \binom{C}{B}$, hogy $\binom{B'}{A}$-ban legfeljebb d szín fordul elő. Ha nem létezik ilyen tulajdonságú $d \in \mathbb{N}$, akkor a Ramsey-fokot végtelennek definiáljuk. A $\mathcal{K}$ osztály Ramsey-foka a benne lévő struktúrák fokainak supremuma. Végül egy megszámlálható Δ struktúra Ramsey-foka az $\mathrm{Age}(\Delta)$ osztály Ramsey-foka. Egy megszámlálható Δ struktúra *Ramsey*, ha Ramsey-foka 1.

2.5. definíció. Egy megszámlálható Δ struktúrára teljesül a Ramsey-tulajdonság, ha tetszőleges $r \geq 2$, $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$ esetén létezik egy $C \in \mathrm{Age}(\Delta)$, hogy bárhogyan színezzük is A példányait C-ben r színnel, mindig lesz C-ben egy B-vel izomorf B' részstruktúra, amiben A minden példánya azonos színű.

Mielőtt összefoglalnánk a legfontosabb eredményeket Ramsey-struktúrákkal kapcsolatban, jöjjön néhány egyszerű észrevétel a definícióról.

2.6. állítás. *A következő állítások ekvivalensek tetszőleges megszámlálható Δ struktúrára.*

(1) Δ *Ramsey-tulajdonságú.*

(2) *Minden* $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$ *esetén létezik egy* $C \in \mathrm{Age}(\Delta)$*, hogy tetszőleges* $\chi : \binom{C}{A} \to \{0,1\}$ *esetén létezik egy* $B' \in \binom{C}{B}$ *úgy, hogy* $\chi\restriction_{\binom{B'}{A}}$ *konstans.*

(3) *Minden* $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$*,* $r \in \mathbb{N}$ *és* $\chi : \binom{\Delta}{A} \to \{0,1,\dots,r-1\}$ *esetén létezik egy* $B' \in \binom{\Delta}{B}$ *úgy, hogy* $\chi\restriction_{\binom{B'}{A}}$ *konstans.*

(4) *Minden* $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$*-ra és* $\chi : \binom{\Delta}{A} \to \{0,1\}$ *függvényre létezik egy* $B' \in \binom{\Delta}{B}$ *úgy, hogy* $\chi\restriction_{\binom{B'}{A}}$ *konstans.*

Bizonyítás. Mindegyik feltétel triviálisan teljesül, ha $A \notin \mathrm{Age}(B)$ vagy $r \leq 1$. Így a továbbiakban feltesszük, hogy $A \in \mathrm{Age}(B)$ és $r \geq 2$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Vezessük be a $C_0 = A$ és $C_1 = B$ jelölést. Minden $i \geq 0$-ra legyen $C_{i+2} \in \mathrm{Age}(\Delta)$ egy struktúra, aminek a létezését a (2) pontbeli feltétel garantálja a C_i, C_{i+1} párra. Az r szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy $C_r = C$ megfelelő választás az A, B párra a Ramsey-tulajdonság definíciójában. Ha $r = 2$, akkor C_2 definíció szerint megfelelő. Legyen $r \geq 3$, és tegyük fel, hogy $\binom{C_r}{A}$ r-színezett. Legyen $\chi : \binom{C_r}{A} \to \{0,1\}$ az a függvény, ami A egy példányához pontosan akkor rendel 1-et, ha az az r-edik színt kapta. Ekkor létezik C_{r-1}-nek egy C'_{r-1} példánya C_r-ben, amire megszorítva a χ függvény konstans. Ha ez a konstans 0, akkor az indukciós feltevés miatt vagyunk készen, ha pedig 1, akkor bármely C'_{r-1}-beli példánya B-nek monokromatikus (az r-edik színnel).

(1) $\Rightarrow$ (3). Legyen $C \in \mathrm{Age}(\Delta)$ egy struktúra, aminek a létezését a Ramsey-tulajdonság garantálja az $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$ és $r \in \mathbb{N}$ esetben. Legyen $C' \subseteq \Delta$ ennek a C-nek egy példánya. Ekkor létezik egy a feltételeknek eleget tevő B' a C' részstruktúrában.

(3) $\Rightarrow$ (4) speciális eset $r = 2$ választással.

(4) $\Rightarrow$ (2). Tételezzük fel, hogy (2) nem teljesül valamely $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$-ra. Eszerint minden $C \in \mathrm{Age}(\Delta)$ struktúra 2-színezhető úgy, hogy abban nincs B-nek monokromatikus példánya. Legyen $C_1 \subsetneq C_2 \subsetneq \dots$ a Δ véges részstruktúráinak egy sorozata úgy, hogy $\cup C_i = \Delta$. Minden $i \geq 1$-re álljon a H_i halmaz a C_i összes olyan 2-színezéséből, amiben B-nek nincs monokromatikus példánya. Minden $i \geq 1$-re kössük össze azokat a $H_i \times H_{i+1}$-beli párokat éllel, amiknek a H_i-beli eleme a H_{i+1}-beli elem megszorítása. Erre a gráfra fennállnak a Kőnig-lemma feltételei, így van benne egy végtelen út. Egy ilyen végtelen út megad egy 2-színezést $\binom{\Delta}{A}$-ra, amiben nincs B-nek monokromatikus példánya. ■

A Ramsey-tulajdonságot részstruktúrákra definiáltuk, de gyakran kényelmesebb beágyazásokkal dolgozni. Egy megszámlálható Δ struktúrára teljesül a *Ramsey-tulajdonság a beágyazásokra,* ha tetszőleges $r \geq 2$, $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$ esetén létezik egy $C \in \mathrm{Age}(\Delta)$, hogy bárhogyan színezzük is A beágyazásait C-be r színnel, mindig létezik B-nek egy g beágyazása C-be úgy, hogy minden $f : A \hookrightarrow B$ beágyazásra $g \circ f$ azonos színű. Természetesen a Ramsey-fokot is lehet beágyazásokra definiálni. A két fogalom kapcsolatáról bővebben [44]-ben olvashatunk.

Az nyilvánvaló, hogy a két fogalom ekvivalens, ha minden $A \in \mathcal{K}$ struktúra *merev,* azaz egyetlen automorfizmusa az identitás. Ilyen esetben ugyanis a beágyazások egyértelműen megadhatók a képükkel. Egy Δ struktúra *rendezett,* ha létezik az alaphalmazán egy olyan teljes rendezés, amelyet $\mathrm{Aut}(\Delta)$ minden eleme megőriz. Ryll-Nardzewski tétele alapján ω-kategorikus struktúrák esetén ez azzal ekvivalens, hogy Δ-ban elsőrendben definiálható egy teljes rendezés. Ha egy megszámlálható homogén Δ struktúra rendezett, akkor minden $A \in \mathrm{Age}(\Delta)$ merev.

Nešetřil vette észre [47], hogy lényegében nem veszítünk azzal, ha a Ramsey-tulajdonságot csak homogén struktúrákra vizsgáljuk.

2.7. tétel. *Legyen $\mathcal{K}$ egy adott nyelv feletti véges struktúrákból álló, lefelé zárt osztály a közös kiterjeszthetőség tulajdonságával. Ha $\mathcal{K}$-ra teljesül a Ramsey-tulajdonság, akkor a vegyítési tulajdonság is fennáll rá. Vagyis ha* $\mathcal{K} = \mathrm{Age}(\Delta)$ *valamely megszámlálható Δ Ramsey-struktúrára, akkor* $\mathcal{K} = \mathrm{Age}(\Gamma)$ *alkalmas Γ megszámlálható, homogén Ramsey-struktúrára.*

Ezzel az észrevétellel vette kezdetét a Ramsey-osztályok szisztematikus vizsgálata és karakterizálása. Több konkrét nyelv felett meghatározták már a homogén Ramsey-struktúrákat. Egy effajta vizsgálat nagyban építhet arra, ha az adott nyelv feletti homogén struktúrákat már korábban karakterizálták. A strukturális Ramsey-elmélet egyik legkiemelkedőbb eredményét Nešetřil és Rödl bizonyította [45, 48], belátva ezzel struktúráknak egy igen gazdag osztályára a Ramsey-tulajdonságot. Egy A struktúra *irreducibilis*, ha minden $x, y \in A$-ra létezik egy n-változós R reláció a struktúra nyelvében és $(x_1, \ldots, x_n) \in R$ úgy, hogy x és y is szerepel az $x_1, \ldots, x_n$ elemek között. Legyen $\mathcal{K}$ véges struktúrák egy halmaza egy adott nyelv felett. Ekkor $\mathrm{Forb}(\mathcal{K})$ jelöli az adott nyelv felett az összes olyan véges struktúra osztályát, amibe nem képezhető homomorfizmussal a $\mathcal{K}$ halmaz egyetlen eleme sem.

2.8. tétel (Nešetřil–Rödl)**.** *Legyen $\mathcal{K}$ véges irreducibilis struktúrák egy halmaza. Bővítsük ki a nyelvet egy $<$ szimbólummal, és legyen $\mathcal{K}$ az összes véges struktúra osztálya a kibővített nyelv felett, amiben $<$ interpretációja egy teljes rendezés, az eredeti nyelv feletti redukt pedig* $\mathrm{Forb}(\mathcal{K})$*-beli. Ekkor $\mathcal{K}$ egyszerre Fraïssé-osztály és Ramsey-osztály.*

Ennek bizonyítása megtalálható egy friss összefoglaló cikkben [7]. A tétel legfontosabb következménye, hogy bár a Ramsey-tulajdonság ritka és nagyon erős kombinatorikai feltétel, sok homogén struktúra legalábbis reduktja egy Ramsey-struktúrának. Ez az eredmény is motiválja a Bodirky–Pinsker-sejtést. Ramsey-elméletről a [29, 46] összefoglalókat ajánljuk. Ramsey-fokokról a [28, 35] cikkekben olvashatunk.

2.6. Kanonikus függvények. Egy Δ struktúra $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \Delta^n$ n-esének *típusa* az összes olyan n szabad változóval rendelkező elsőrendű formulából áll, ami teljesül $\underline{a}$-ra. Δ egy n-típusa alatt valamely n-esének típusát értjük. Ezeket a fogalmakat sok forrás másféleképpen nevezi, pl. [33]-ban teljes típusnak hívják azt, amit mi típusnak definiáltunk. Ryll-Nardzewski, Engeler és Svenonius ekvivalens karakterizációinak egyike szerint egy megszámlálható Δ struktúra pontosan akkor ω-kategorikus, ha minden n-re véges sok n-típusa van. Ekkor az n-típusok megfeleltethetők $\mathrm{Aut}(\Delta)$ orbitjainak a Δ^n-en vett koordinátánkénti hatására nézve: vagyis két n-es pontosan akkor van ugyanabban az orbitban, ha megegyezik a típusuk. Δ n-típusainak halmazát $S_n(\Delta)$ jelöli. Ez Δ n-edik Stone-tere.

2.9. definíció. Egy $g : \Gamma \to \Delta$ függvény kanonikus, ha tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in \Gamma^n$-re fennáll, hogy amennyiben $\underline{a}$ és $\underline{b}$ típusa megegyezik Γ-ban, úgy $g(\underline{a})$ és $g(\underline{b})$ típusa megegyezik Δ-ban. Ha g egy kanonikus függvény, akkor g viselkedése alatt az összes olyan (s,t) alakú típusfeltételt értjük, amire $s \in S_n(\Gamma)$, $t \in S_n(\Delta)$, és minden s-típusú $\underline{a} \in \Gamma^n$-re $g(a)$-nak t a típusa.

2.10. megjegyzés. Ha Δ homogén egy m-változós relációs nyelv felett, akkor egy $\underline{a} \in \Delta^n$ típusát egyértelműen meghatározza az, hogy Δ egyes relációi mely m-esekre állnak fenn $\underline{a}$-ban.

2.11. megjegyzés. Könnyen meggondolható, hogy ha Δ homogén egy m-változós relációs nyelv felett, és a $c_1, \ldots, c_n \in \Delta$ elemeket konstansként hozzávesszük Δ nyelvéhez, akkor az így kapott $(\Delta, c_1, \ldots, c_n)$ struktúra szintén homogén egy m-változós relációs nyelv felett. Ha ugyanis ezt a struktúrát mint relációs struktúrát tekintjük azon nyelv fölött, ami az összes legfeljebb m-változós, elsőrendben definiálható relációból áll, akkor egy olyan Γ homogén struktúrát kapunk, amire $\mathrm{Aut}(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\Delta, c_1, \ldots, c_n)$, vagyis ami elsőrendben átdefiniálható a $(\Delta, c_1, \ldots, c_n)$ struktúrával.

Így a továbbiakban minden ilyen esetben úgy gondolunk a $(\Delta, c_1, \ldots, c_n)$ struktúrára, mint a 2.11. megjegyzésben definiált homogén relációs struktúrára. Fontos észrevétel, hogy rendezett struktúrák körében a Ramsey-tulajdonság megőrződik, ha véges sok konstanst hozzáadunk a nyelvhez [17].

2.12. lemma (Borirsky, Pinsker, Tsankov). *Legyen Δ egy megszámlálható, homogén, rendezett Ramsey-struktúra, és legyen $c_1, \ldots, c_n \in \Delta$. Ekkor $(\Delta, c_1, \ldots, c_n)$ Ramsey.*

2.13. megjegyzés. A 2.12. lemmából nem hagyható el a rendezettség feltétele. Legyen $\Delta = (\mathbb{Q}, \mathrm{Betw})$. Ramsey tételéből következik, hogy ez egy Ramsey-struktúra. Vegyük hozzá a 0 elemet konstansként a nyelvhez. Legyen A egy nullától különböző elem, B pedig az a struktúra, ami egy pozitív és egy negatív elemből áll. (Könnyen meggondolható, hogy ezek a megfogalmazások valóban részstruktúrák izomorfiatípusait jelölik ki $(\mathbb{Q}, \mathrm{Betw}, 0)$-ban.) A negatív racionális számokat pirosra, a pozitívakat kékre festve B-nek nem létezik olyan példánya, amiben A minden példánya azonos színű.

2.14. állítás. *Legyen Δ egy véges relációs nyelv feletti homogén, rendezett Ramsey-struktúra. Legyen $c_1, \ldots, c_n \in \Delta$, és jelöljük Γ-val a $(\Delta, c_1, \ldots, c_n)$ struktúrát. Adott egy $f : \Delta \to \Delta$ injektív függvény. Ekkor létezik egy $g : \Gamma \to \Delta$ kanonikus, injektív függvény, amire $g \in \{\alpha \circ f \circ \beta \mid \alpha \in \mathrm{Aut}(\Delta), \beta \in \mathrm{Aut}(\Gamma)\}$, és $f \restriction_{\{c_1,\ldots,c_n\}} = g \restriction_{\{c_1,\ldots,c_n\}}$.*

Bizonyítás. Legyen $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ véges részstruktúráknak egy felszálló lánca $(\Delta, c_1, \ldots, c_n)$-ben úgy, hogy $\cup A_i = D$, ahol D a Δ struktúra alaphalmaza. Legyen $S_1, \ldots, S_k$ az összes legfeljebb m-elemű részstruktúrának egy-egy példánya $\mathrm{Age}(\Gamma)$-ban, ahol m a legnagyobb fellépő aritás Δ (és egyúttal Γ) nyelvében. Γ-ra végig relációs struktúraként gondolunk, ahogy azt a 2.11. megjegyzésben definiáltuk. Színezzük Γ-ban $S_1, \ldots, S_k$ példányait az f-képük izomorfiatípusával. Mivel Δ homogén egy véges relációs nyelv felett, így ehhez csak véges sok színt használunk. A 2.12. lemma alapján Γ Ramsey, így minden A_i-nek létezik egy A_i' példánya Γ-ban, amire tetszőleges $1 \leq j \leq k$ esetén az $\binom{A_i'}{S_j}$ halmaz monokromatikus. Rögzítsük A_i-nek egy ilyen A_i' példányát.

Tekintsük minden i-re az $f\restriction_{A_i'}$ függvény viselkedését. Mivel csak véges sok lehetséges viselkedés van, így valamely b viselkedés végtelen sokszor ismétlődik. Elhagyva az $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sorozatból azokat az elemeket, amikre nem ezt a viselkedést kaptuk, feltehető, hogy minden $i \geq 1$ esetén $f\restriction_{A_i'}$ viselkedése b. Minden $i \geq 1$-re rögzítsünk egy $\alpha_i \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ permutációt, amire $\alpha_i(A_i) = A_i'$. Ekkor $(f \circ \alpha_i)\restriction_{A_i}$ éppen b-nek megfelelően módosítja az A_i-beli típusokat. Vagyis $i < j$ esetén $(f \circ \alpha_j) \circ (f \circ \alpha_i)^{-1}\restriction_{(f\circ\alpha_i)(A_i)}$ tartja Γ típusait, így kiterjed egy $\beta_{i,j} \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ permutációvá. A $h_j := \beta_{1,2}^{-1} \circ \ldots \circ \beta_{j,j+1}^{-1} \circ (f \circ \alpha_{j+1})$ függvénysorozat konvergens $\mathrm{Mon}(D)$-ben a pontonkénti konvergencia topológiájával. Legyen h a határértéke. Ekkor $h \circ f^{-1}\restriction_{\{f(c_1),\ldots,f(c_n)\}}$ tartja Γ típusait, így kiterjed egy $\beta \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ permutációvá. Ekkor a $g = \beta^{-1} \circ h$ függvény megfelel az előírt feltételeknek, hiszen a konstansokhoz ez ugyanazt az értéket rendeli, mint f, és előáll mint a $g_j := \beta^{-1}\beta_{1,2}^{-1} \circ \ldots \circ \beta_{j,j+1}^{-1} \circ f \circ \alpha_{j+1}$ függvénysorozat határértéke $\mathrm{Mon}(D)$-ben. ■

2.15. következmény (Bodirski, Pinsker, Tsankov [17])**.** *Legyen Γ egy véges relációs nyelv feletti megszámlálható struktúra. Tegyük fel, hogy létezik egy megszámlálható Δ struktúra, ami homogén egy véges relációs nyelv felett, rendezett, Ramsey, és aminek Δ reduktja. Ekkor létezik az $\mathrm{End}(\Gamma)$-t szigorú értelemben tartalmazó zárt monoidoknak egy véges $\{M_1, \ldots, M_n\}$ halmaza, amire fennáll, hogy tetszőleges $\mathrm{End}(\Gamma) \subsetneq M$ zárt monoidra $M_i \subseteq M$ valamely $1 \leq i \leq n$ indexre.*

Bizonyítás. Legyen $\mathrm{End}(\Gamma) \subsetneq M$ egy zárt monoid, és legyen $f \in M \setminus \mathrm{End}(\Gamma)$. Ekkor f megsérti Γ valamely R relációját, vagyis létezik $\underline{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in R$ amire $f(\underline{c}) \notin R$. A 2.14. állítás szerint ekkor létezik egy $g : (\Delta, \underline{c}) \to \Delta$ kanonikus függvény, amire $f(\underline{c}) = g(\underline{c})$, és $g \in M$. Vegyük észre, hogy $\underline{c}$ típusa Γ-ban és g viselkedése együttesen egyértelműen meghatározza az $\mathrm{End}(\Gamma) \cup \{g\}$ által generált zárt monoidot, amit persze $g \in M$ miatt az M monoid tartalmaz. Mivel csak véges sok reláció van Γ nyelvében, így csak véges sok különböző típusú $\underline{c}$ és viselkedés van, vagyis az így előálló, $\mathrm{End}(\Gamma) \cup \{g\}$ által generált zárt monoidokból is csak véges sok van. A fenti gondolatmenet szerint minden $\mathrm{End}(\Gamma) \subsetneq M$ zárt monoid tartalmazza ezek valamelyikét. ■

A 2.15. következmény gondolatmenete kiterjeszthető zárt klónokra is. A technikai részleteket mellőzzük, azok megtalálhatók [11]-ben.

2.16. következmény (Bodirski, Pinsker, Tsankov [17]). *Legyen Γ egy véges relációs nyelv feletti megszámlálható struktúra. Tegyük fel, hogy létezik egy megszámlálható Δ struktúra, ami homogén egy véges relációs nyelv felett, rendezett, Ramsey, és aminek Δ reduktja. Ekkor létezik a* $\mathrm{Pol}(\Gamma)$*-t szigorú értelemben tartalmazó zárt klónoknak egy véges* $\{C_1, \dots, C_n\}$ *halmaza, amire fennáll, hogy tetszőleges* $\mathrm{Pol}(\Gamma) \subsetneq C$ *zárt klónra* $C_i \subseteq C$ *valamely* $1 \leq i \leq n$ *indexre.*

Ugyanez az alapötlet segíthet az $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ feletti zárt csoportok karakterizálásában is. Ehhez először meg kell keresnünk az $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ feletti minimális zárt csoportokat, amik $\mathrm{Aut}(\Gamma_1), \dots, \mathrm{Aut}(\Gamma_n)$ alakúak, majd folytatni az eljárást az $\mathrm{Aut}(\Gamma_i)$ feletti minimális zárt csoportok felkutatásával, és így tovább. Mindez a gyakorlatban remekül működik: az összes eredmény, amit a 2.2. alfejezet végén említettünk, belátható ezzel a módszerrel. Teljes körű elméleti magyarázat azonban nincs arra, hogy ez az eljárás mindig feltárja az összes $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ feletti zárt csoportot. A 2.15. és 2.16. következmények és a gyakorlati példák egyértelműen rámutattak arra, hogy erős összefüggés van a kanonikus függvények és az $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ feletti zárt csoportok között. Sajnos egyelőre ez a gondolat nem vihető tovább, amint azt a 3. probléma és annak magyarázata mutatja a következő alfejezetben.

2.7. Nyitott problémák zárt csoportokról. A reduktok karakterizálására vonatkozó legfontosabb sejtést Simon Thomas fogalmazta meg.

1. probléma (Thomas-sejtés). *Minden véges relációs nyelv feletti megszámlálható homogén struktúrának véges sok reduktja van elsőrendű átdefiniálhatóság erejéig.*

Erről a sejtésről nagyon keveset tudunk, bár sok konkrét esetben már sikerült igazolni. A gyakorlati példákból kiindulva kijelenthetjük, hogy a Thomas-sejtésben komoly előrelépést jelentene, ha a következő sejtést igazolnánk.

2. probléma (Bodirsky–Pinsker-sejtés). *Minden véges relációs nyelv feletti megszámlálható homogén Δ struktúra esetén létezik egy ugyanilyen feltételeknek eleget tevő Γ struktúra, ami rendezett, és rendelkezik a Ramsey-tulajdonsággal, és aminek Δ reduktja.*

A Bodirsky–Pinsker-sejtés jelenleg egyértelműen a legfontosabb nyitott probléma a homogén struktúrák elméletében. Pozitív válasz esetén nem csak a Thomas-sejtésben lenne nagy jelentősége, de az összes későbbi fejezetben említett témában is komoly részeredményeket lehetne vele elérni.

A Thomas-sejtés bizonyításában komoly előrelépést jelentene a következő állítás igazolása, ami a 2.15. és 2.16. következmények közvetlen átfogalmazása csoportokra.

3. probléma. *Legyen Δ egy véges relációs nyelv feletti megszámlálható homogén struktúra. Tegyük fel, hogy létezik egy ugyanilyen feltételeknek eleget tevő struktúra, ami rendezett, és rendelkezik a Ramsey-tulajdonsággal, és aminek Δ reduktja. Bizonyítsuk be, hogy létezik* $\mathrm{Aut}(\Delta)$*-t szigorú értelemben tartalmazó zárt csoportoknak egy véges* $\{G_1, \dots, G_n\}$ *halmaza úgy, hogy minden* $\mathrm{Aut}(\Delta) \subsetneq G \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ *zárt csoport tartalmazza* $G_1, \dots, G_n$ *valamelyikét.*

Sajnos a 2.15. és 2.16. következmények bizonyítása nem működik ebben az esetben, aminek az az oka, hogy kanonikus függvények generálása során a szürjektivitás tulajdonsága sérülhet. Vagyis a 2.14. állításban akkor sem tudjuk a g függvény szürjektivitását garantálni, ha f egy permutáció. Konkrét ellenpéldaként tekintsük azt a Cycl háromváltozós relációt, amit $(\mathbb{Q}, <)$-ben a következő formula definiál: $(x, y, z) \in \mathrm{Cycl} \Leftrightarrow x < y < z \vee y < z < x \vee z < x < y$. $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, \mathrm{Cycl})$ egyike a Cameron karakterizációjában szereplő öt zárt csoportnak, amik tartalmazzák $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$-et, mégpedig az $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, \mathrm{Betw})$ csoporttal ezek éppen a minimális zárt csoportok $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ felett. Az $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, \mathrm{Cycl})$ csoport azokból az α permutációkból áll, amelyekhez létezik olyan irracionális t szám (vagy $t = \infty$), hogy minden $x, y \in \mathbb{Q}$-ra

- $x < t < y$ esetén $\alpha(x) > \alpha(y)$,
- $x < y < t$ esetén $\alpha(x) < \alpha(y)$, és
- $t < x < y$ esetén $\alpha(x) < \alpha(y)$.

Ha $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, \mathrm{Cycl}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$, vagyis t ténylegesen egy irracionális szám, akkor α nem kanonikus mint $(\mathbb{Q}, <, c_1, \ldots, c_k) \to (\mathbb{Q}, <)$ függvény semmilyen $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{Q}$ konstansokra. Valóban, ha bevezetjük a $c_0 = -\infty, c_{k+1} = \infty$ jelöléseket, és $t \in [c_i, c_{i+1}]$, akkor a $[c_i, c_{i+1}]$ intervallumon α némely elemekpárokra megtartja, másokra viszont megfordítja a rendezést.

Természetes gondolat, hogy ne a minimális, hanem inkább a maximális zárt csoportok meghatározásával póbáljuk megoldani a Thomas-sejtést, vagy legalábbis részeredményt elérni benne. Ehhez fontos lenne tisztázni a következő kérdést.

4. probléma. *Tetszőleges Δ véges relációs nyelv feletti struktúrára jelöljük $m(\Delta)$-val a legnagyobb fellépő aritást Δ nyelvében. Igaz-e, hogy létezik egy csakis $m(\Delta)$-tól függő $k \in \mathbb{N}$ szám, amire fennáll, hogy minden Δ véges relációs nyelv feletti megszámlálható homogén struktúra esetén, ha $\mathrm{Aut}(\Delta) \subseteq G \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ egy k-tranzitív zárt csoport, akkor $G = \mathrm{Sym}(D)$? (D jelöli Δ alaphalmazát.)*

A 4. problémából – pozitív válasz esetén – következne, hogy minden Δ véges relációs nyelv feletti struktúrára létezik zárt csoportoknak egy véges $\{G_1, \ldots, G_n\}$ halmaza úgy, hogy minden $1 \leq i \leq n$ esetén $\mathrm{Aut}(\Delta) \subseteq G_i \subsetneq \mathrm{Sym}(D)$, és minden $\mathrm{Aut}(\Delta) \subseteq G \subsetneq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoportot tartalmazza a $G_1, \ldots, G_n$ csoportok valamelyike. Ha a 4. probléma igaz, akkor minden $\mathrm{Aut}(\Delta) \subseteq G \subsetneq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoport megőriz egy legfeljebb $(k-1)$-változós relációt, ami elsőrendben definiálható Γ-ban. Ilyenből csak véges sok van, jelöljük ezeket $R_1, \ldots, R_m$-mel. Ekkor a $\{G_1, \ldots, G_n\}$ halmaz pontosan azokból a csoportokból áll, amelyek tartalmazásra nézve maximálisak az $\{\mathrm{Aut}(D, R_1), \ldots, \mathrm{Aut}(D, R_m)\}$ halmazban.

3. Automatikus folytonosság

3.1. Interpretálhatóság. A 2. fejezetben láttuk, hogy az automorfizmuscsoport mint permutációcsoport egyértelműen meghatároz egy ω-kategorikus struktúrát elsőrendű átdefiniálhatóság erejéig. Felmerül a kérdés, hogy vajon mennyi információt tárol el egy ω-kategorikus Δ struktúráról az automorfizuscsoportja mint topologikus csoport, illetve mint absztrakt csoport. Mivel a permutációcsoportból egyértelműen leolvasható a topologikus csoportstruktúra, és abból az absztrakt csoportstruktúra, így nyilvánvaló, hogy ezek az invariánsok egyre kevesebb (legalábbis nem több) információt tárolnak el a Δ struktúráról.

Hogy megválaszolhassuk ezeket a kérdéseket, fel kell elevenítenünk egy alapvető modellelméleti fogalom, az *interpretálhatóság* definícióját. Ismét megjegyezzük, hogy a fogalomnak tetszőleges struktúrapárra van értelme, mi azonban a bonyodalmak elkerülése érdekében csak relációs struktúrákra definiáljuk. (Akit érdekel az általános eset, az megtalálja ennek leírását pl. [33]-ban.) Legyen adott két relációs struktúra, Δ és Γ, nem feltétlenül azonos nyelv felett. Ahhoz, hogy a Γ struktúrát interpretáljuk Δ-ban, feltéve hogy ez egyáltalán lehetséges, három dolgot kell megadnunk: egy n természetes számot, egy n szabad változóval rendelkező ∂ formulát, és egy $f : \Delta^n \to \Gamma$ függvényt. Feltétel, hogy f értelmezési tartománya pontosan azokból a Δ^n-beli n-esekből álljon, amelyekre a ∂ formula igaz, értékkészlete pedig Γ legyen. Ezen felül Γ minden definiálható relációjának f-ősképe definiálható kell, hogy legyen Δ-ban, azaz ha φ egy formula Δ felett k szabad változóval, akkor létezik egy φ_f formula Δ felett kn szabad változóval úgy, hogy minden $t_1, \ldots, t_k \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén $\Gamma \models \varphi\big(f(t_1), \ldots, f(t_k)\big)$ akkor és csak akkor ha $\Delta \models \varphi_f(t_1, \ldots, t_k)$. Mivel f egyértelműen meghatározza n-et és az értelmezési tartományát, így egyes források csak f megadását követelik meg az interpretáció definiálásához. Ha létezik a fentebb megadott feltételeknek eleget tevő f, akkor az Γ egy n-dimenziós interpretációja Δ-ban. Tömör ekvivalens megfogalmazással egy $f : \Delta^n \supseteq S \to \Gamma$ szürjektív függvény Γ egy n-dimenziós interpretációja Δ-ban, ha Γ minden relációjának f-ősképe elsőrendben definiálható Δ-ban. Pl. ha Γ reduktja Δ-nak, Γ-nak létezik egydimenziós interpretációja Δ-ban: f ekkor választható az identitásfüggvénynek Δ-n.

Ha f a Γ-nak egy n-dimenziós interpretációja Δ-ban, g pedig a Δ-nak egy m-dimenziós interpretációja Λ-ban, akkor ez a két interpretáció természetes módon komponálható. A kompozíció, amit fg jelöl, Γ-nak egy nm-dimenziós interpretációja Λ-ban. Ennek alaphalmaza azon $\underline{a} = (a_{1,1}, \ldots, a_{m,1}, \ldots, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}) \in \mathrm{Dom}\,(g)^n$ elemekből áll, amikre $\big(g(a_{1,1}, \ldots, a_{m,1}), \ldots, g(a_{1,n}, \ldots, a_{m,n})\big) \in \mathrm{Dom}(f)$, és $fg(\underline{a}) = f\big(g(a_{1,1}, \ldots, a_{m,1}), \ldots, g(a_{1,n}, \ldots, a_{m,n})\big)$. A speciális eset, amikor $\Gamma = \Lambda$, lehetőséget ad arra, hogy definiáljuk két struktúra *bi-interpretálhatóságát*. Ha létezik Γ-nak egy n-dimenziós f interpretációja Δ-ban, és Δ-nak egy m-dimenziós g interpretációja Γ-ban, továbbá az fg interpretáció (mint függvény) gráfja definiálható Γ-ban és gf gráfja definiálható Δ-ban, akkor Γ és Δ (elsőrendben) bi-interpretálható.

Ahlbrandt és Ziegler [3] a következőt bizonyították.

3.1. tétel (Ahlbrandt–Ziegler). *Legyen Δ ω-kategorikus, és legyen Γ egy tetszőleges megszámlálható struktúra. Δ és Γ pontosan akkor elsőrendben bi-interpretálható, ha $\mathrm{Aut}(\Delta)$ és $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ izomorfak mint topologikus csoportok, vagyis létezik köztük olyan csoportizomorfizmus, ami egyben homeomorfizmus is.*

Vagyis ha Δ ω-kategorikus, akkor $\mathrm{Aut}(\Delta)$ topologikus csoportstruktúrájából bi-interpretálhatóság erejéig egyértelműen rekonstruálható a Δ struktúra.

A következő alfejezet célja annak igazolása, hogy sok esetben – sőt a halmazelmélet egy megfelelő modelljében *mindig* – $\mathrm{Aut}(\Delta)$ absztrakt csoportstruktúrájából szintén egyértelműen rekonstruálható a Δ struktúra bi-interpretálhatóság erejéig. Mindehhez természetesen elegendő annak belátása, hogy $\mathrm{Aut}(\Delta)$ topologikus csoportstruktúrája rekonstruálható annak absztrak csoportstruktúrájából.

3.2. Csoporthomomorfizmusok automatikus folytonossága. Legyen $G \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ egy zárt csoport. Itt D egy megszámlálhatóan végtelen alaphalmaz, a topológia pedig a pontonkénti konvergencia topológiája, ahogyan azt a 2. fejezet 2.2. alfejezetében definiáltuk. Azt mondjuk, hogy G-re fennáll az *automatikus folytonosság*, ha tetszőleges $H \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoportra minden $\Phi : G \to H$ homomorfizmus folytonos. Továbbá G *rekonstruálható*, ha fennáll, hogy minden $H \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoport esetén, amire $G \cong H$, létezik G és H között egy olyan izomorfizmus, ami homeomorfizmus is. Vagyis G akkor rekonstruálható, ha fennáll, hogy amennyiben G izomorf $\mathrm{Sym}(D)$ egy zárt részcsoportjával mint absztrakt csoport, akkor izomorf vele mint topologikus csoport. Maga az elnevezés is erre utal, hiszen ilyen esetben a topologikus csoportstruktúra rekonstruálható az absztrakt csoportstruktúrából. Érdemes összevetni ezt a két fogalmat. Míg az automatikus folytonosság esetén megköveteljük, hogy maga a homomorfizmus legyen folytonos, addig a rekonstruálhatóság esetében csak annyi a követelmény, hogy létezzen folytonos és nyílt izomorfizmus, vagyis fennáll a lehetősége, hogy néhány izomorfizmus nem ilyen.[2]

Egy $G \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoportra fennáll a *kis index tulajdonság*, ha minden megszámlálható indexű részcsoportja nyílt. Ez a tulajdonság ekvivalens az automatikus folytonossággal.

3.2. tétel. *Legyen $G \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ egy zárt csoport. A következő állítások ekvivalensek.*

(1) *G-re fennáll az automatikus folytonosság.*
(2) *G-re teljesül a kis index tulajdonság.*
(3) *G-ben minden megszámlálható indexű részcsoport zárt.*
(4) *Minden $\Phi : G \to \mathrm{Sym}(D)$ homomorfizmus folytonos.*

Bizonyítás. (4) $\Rightarrow$ (2). Legyen $H \subseteq G$ egy megszámlálható indexű részcsoport. Ekkor G hat H bal oldali mellékosztályain a balról szorzással. Mivel H-nak megszámlálható sok bal oldali mellékosztálya van, így létezik egy f egy-egyértelmű függvény a mellékosztályok halmazából D-be. Ez megad egy homomorfizmust G-ből $\mathrm{Sym}(D)$-be. Mivel ez a homomorfizmus szükségképpen folytonos, így az $f(H)$ elemet fixáló permutációk ősképe, vagyis H, egy nyílt halmaz.

(2) $\Rightarrow$ (1). Legyen adott egy $H \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoport és egy $\Phi : G \to H$ homomorfizmus. Legyen $U \subseteq H$ egy bázis nyílt halmaz, vagyis valamilyen $a_1, \ldots, a_k \in$

[2] Angolul „automatic homeomorphicity”-ként hivatkozunk arra a tulajdonságra, ami azt fejezi ki, hogy minden izomorfizmus G és valamely $H \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoport között homeomorfizmus. Ennek a terminológiának a magyarra fordítása embert próbáló feladat volna.

D és $b_1, \ldots, b_k \in D$ elemekre U az összes olyan H-beli α permutáció halmaza, amire $\alpha(a_i) = b_i$ minden $1 \leq i \leq k$-ra. Ha U nem metsz bele Φ képébe, akkor $\Phi^{-1}(U)$ üres, így nyílt. Feltehető tehát, hogy $U \cap \Phi(G) \neq \emptyset$. Ekkor $U \cap \Phi(G)$ az $\{a_1, \ldots, a_k\}$ véges halmaz S pontonkénti stabilizátorának egy mellékosztálya $\Phi(G)$-ben. Mivel a stabilizátor indexe az orbit elemszáma, így $\left|\Phi(G) : S\right|$ megszámlálható, vagyis $\left|G : \Phi^{-1}(S)\right|$ is az. A feltétel szerint tehát $\Phi^{-1}(S)$ nyílt G-ben. A $\Phi^{-1}(U)$ halmaz eltoltja $\Phi^{-1}(S)$-nek, vagyis létezik $g \in G$, amire $\Phi^{-1}(U) = g\Phi^{-1}(S)$, így $\Phi^{-1}(U)$ is nyílt.

(1) $\Rightarrow$ (4) az automatikus folytonosság definíciója alapján nyilvánvaló, így beláttuk az (1), (2) és (4) állítások ekvivalenciáját.

(2) $\Rightarrow$ (3) triviális következménye Lagrange tételének, hiszen egy nyílt részcsoport bal oldali mellékosztályai nyílt halmazokra partícionálják a csoportot. Vagyis egy topologikus csoportban minden nyílt részcsoport komplementere nyílt, és így minden nyílt részcsoport zárt.

(3) $\Rightarrow$ (2). Megtalálható itt [33, Theorem 4.1.3]. $\blacksquare$

Ez az észrevétel alapvető eszköze az automatikus folytonosság bizonyításának. Shelah megmutatta, hogy létezik a halmazelméletnek egy olyan modellje, amiben minden függvény Baire-függvény. A topologikus csoportok elméletében jól ismert tény, hogy topologikus csoportok között minden Baire-homomorfizmus folytonos. Így a halmazelmélet Shelah által konstruált modelljében minden $G \subseteq \mathrm{Sym}(D)$ zárt csoportra fennáll az automatikus folytonosság. Megjegyezzük, hogy Cherlin és Hrushovski konstruáltak egy ω-kategorikus struktúrát, aminek az automorfizmuscsoportjára nem áll fenn az automatikus folytonosság. A látszólagos ellentmondást az oldja fel, hogy a konstrukciójukhoz elengedhetetlenül szükséges feltétel nemprincipális ultrafilterek létezése megszámlálható halmazokon, ami természetesen nem teljesül a halmazelmélet azon modelljében, amelyet Shelah definiált. A konstrukció és az eredmény magyarázata megtalálható [40]-ben.

Számos konkrét esetben mindenféle halmazelméleti feltétel nélkül is sikerült igazolni a kis index tulajdonságot. Ezek között van a $\mathrm{Sym}(D)$ teljes szimmetrikus csoport [55, 25], a véges testek feletti megszámlálhatóan végtelen dimenziós vektorterek automorfizmuscsoportja [26], továbbá a $(\mathbb{Q}, <)$ teljes rendezés [58], a véletlen gráf [34] és a Henson-gráfok automorfizmuscsoportja is [32].

A következő tétel [40, Corollaire 2.8.]-ban található.

3.3. tétel (Lascar). *Legyen $\Phi : G \to H$ folytonos csoportizomorfizmus* $\mathrm{Sym}(D)$ *két zárt részcsoportja között, ahol D egy megszámlálhatóan végtelen halmaz. Ekkor Φ homeomorfizmus.*

Tehát $\mathrm{Sym}(D)$ zárt részcsoportjaira az automatikus folytonosságból következik a rekonstruálhatóság. Így a fent említett példák mindegyikére igaz (a halmazelmélet megfelelő modelljében pedig minden ω-kategorikus Δ struktúrára fennáll), hogy a struktúra pontosan azokkal a megszámlálható struktúrákkal bi-interpretálható, amik automorfizmuscsoportja mint absztrakt csoport izomorf $\mathrm{Aut}(\Delta)$-val.

Rubin [52] kidolgozott egy módszert, amivel egy zárt oligomorf csoport rekonstruálhatósága közvetlenül, a kis index tulajdonság igazolása nélkül is belátható.

Ennek tárgyalása meghaladja a jelen cikk kereteit, az olvasó bővebben a [41, 52] cikkekből tájékozódhat a témáról. Rubin többek között belátta, hogy a véletlen turnament és a véletlen részbenrendezés automorfizmuscsoportja rekonstruálható.

3.3. Primitív pozitív interpretációk. Egy $f : \Delta^n \to \Gamma$ szürjektív függvény Γ egy n-dimenziós egzisztenciális pozitív interpretációja Δ-ban, ha Γ minden relációjának f-őasképe egzisztenciális pozitív formulával definiálható Δ-ban. Ha létezik Γ-nak egy n-dimenziós f egzisztenciális pozitív interpretációja Δ-ban, és Δ-nak egy m-dimenziós g egzisztenciális pozitív interpretációja Γ-ban, továbbá az fg interpretáció (mint függvény) gráfja e.p. definiálható Γ-ban és gf gráfja e.p. definiálható Δ-ban, akkor Γ és Δ egzisztenciális pozitív bi-interpretálható. Teljesen analóg módon definiálhatjuk a primitív pozitív interpretálhatóságot és bi-interpretálhatóságot is.

3.4. Monoidok és klónok. Amikor korábban automorfizmuscsoportokról beszéltünk, mindig hangsúlyoznunk kellett, hogy arra mint permutációcsoportra, topologikus csoportra vagy absztrakt csoportra gondolunk. Hasonló megkülönböztetést tehetünk monoidok és klónok esetén is. Egy $M = \mathrm{End}(\Delta)$ monoidra tekinthetünk úgy, mint az endomorfizmusok halmazára, ilyenkor M-re mint *transzformációmonoidra* gondolunk. Egy *M topologikus monoid* egyszerre rendelkezik egy monoidstruktúrával, és egy topologikus struktúrával, és a szorzás folytonos mint $M \times M \to M$ függvény. Az egységelem egy speciális elem, vagyis ha $\Phi : M_1 \to M_2$ egy (topologikus) monoidhomomorfizmus, akkor Φ az M_1 egységelemét az M_2 egységelemébe képzi. Minden $M = \mathrm{End}(\Delta)$ monoidra tekinthetünk úgy, mint topologikus monoidra. Végül $\mathrm{End}(\Delta)$-ra gondolhatunk úgy is, mint *absztrakt monoidra.* Értelemszerűen ekkor csak $\mathrm{End}(\Delta)$ absztrakt algebrai struktúráját tartjuk számon, vagyis a szorzást és az egységelemet.

Mindhárom fogalom analóg módon definiálható klónokra, ekkor rendre függvényklónról, topologikus klónról és absztrakt klónról beszélünk. Egy C absztrakt klón esetén adott C-nek egy partíciója, $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C^{(n)}$. $C^{(n)}$ elemeire a C klón *n-változós* elemeiként hivatkozunk. Ne felejtsük el, hogy ennek nincs valós tartalma, hiszen C elemei pusztán absztrakt szimbólumok, nem pedig függvények. Az absztrakt klónok struktúrájában minden $n \geq 1$ és $1 \leq i \leq n$ esetén van egy speciális π_i^n elem, az i-edik n-változós projekció. Emellett minden $n, m \geq 1$ párra van egy $(n+1)$-változós $\mathrm{comp}_m^n : C^{(n)} \times \left(C^{(m)}\right)^n \to C^{(m)}$ művelet. Formailag gondolhatunk erre úgy, mint egy parciális műveletre. Egy absztrakt klónok közti $\Phi : C_1 \to C_2$ homomorfizmusnál a C_1-beli n-változós elemek képei n-változós elemek C_2-ben minden $n \geq 1$-re, a C_1-beli i-edik n-változós projekció képe a C_2-beli i-edik n-változós projekció minden $n \geq 1$ és $1 \leq i \leq n$ esetén, továbbá Φ kompatibilis a comp_m^n műveletekkel minden $n, m \geq 1$ számpárra. Topologikus klónról akkor beszélhetünk, ha adott egy absztrakt klón, ami egyben topologikus tér is, és a comp_m^n műveletek minden $n, m \geq 1$ esetén folytonosak. Természetesen tetszőleges megszámlálható Δ struktúrára az $\mathrm{End}(\Delta)$ monoid és a $\mathrm{Pol}(\Delta)$ klón rendre topologikus monoid és topologikus klón a korábban definiált pontonkénti konvergencia topológiájával, ha comp_m^n az az operáció, ami egy n-változós függvényt n darab m-változós függvénnyel komponál. Cayley reprezentációs tétele kiterjeszthető monoidokra és klónokra is, vagyis minden absztrakt monoid reprezentálható transzformációmonoidként, és minden absztrakt klón előáll függvényklónként.

Bodirsky és Pinsker [13] egy friss eredménye az Ahlbrandt-Ziegler-tétel analógiájaként fogható fel.

3.4. tétel (Bodirsky–Pinsker)**.** *Legyen Δ és Γ két ω-kategorikus struktúra. Δ és Γ pontosan akkor primitív pozitív bi-interpretálható, ha* $\mathrm{Pol}(\Delta)$ *és* $\mathrm{Pol}(\Gamma)$ *izomorfak mint topologikus klónok, vagyis létezik köztük olyan klónizomorfizmus, ami egyben homeomorfizmus is.*

Megjegyezzük, hogy hasonló összefüggés áll fenn struktúrák egzisztenciális pozitív bi-interpretálhatósága és az endomorfizmusmonoidok (mint topologikus monoidok) izomorfizmusa között, bár az nem igaz teljes általánosságban minden ω-kategorikus struktúrára [8].

Monoidokra és klónokra is kiterjeszthető az automatikus folytonosság és a rekonstruálhatóság definíciója, teljesen hasonló módon, mint ahogyan azt csoportokra definiáltuk. Ezen fogalmak vizsgálatát a 3.4. tétel is motiválja: ha egy Δ ω-kategorikus struktúrára a $\mathrm{Pol}(\Delta)$ klón rekonstruálható, akkor tetszőleges Γ ω-kategorikus struktúrára Δ és Γ pontosan akkor primitív pozitív bi-interpretálható, ha $\mathrm{Pol}(\Delta)$ és $\mathrm{Pol}(\Gamma)$ izomorfak mint absztrakt klónok.

Míg csoportok esetén az automatikus folytonosság nagyon érdekes fogalom, és erősebb a rekonstruálhatóságnál, addig monoidok és klónok esetén ezek egyike sem igaz. Valójában egyetlen érdekes $\mathrm{End}(\Delta)$ transzformációmonoidra és $\mathrm{Pol}(\Delta)$ függvényklónra sem teljesül az automatikus folytonosság [16]. Így ezt a fogalmat legfeljebb úgy érdemes vizsgálni, ha leszűkítjük azon monoidok vagy klónok körét, ahova a homomorfizmus $\mathrm{End}(\Delta)$-t, illetve $\mathrm{Pol}(\Delta)$-t képezheti. Erre a 4. fejezetben láthatunk egy példát, ami alkalmazási lehetőséget biztosít elméleti számítástudományban. Fontos, hogy a 3.2. és 3.3. tételek egyike sem általánosítható monoidokra vagy klónokra, mert ezek bizonyítása nagyban kihasználja a csoportok szerkezetét és az inverz létezését.

Manuel Bodirskyvel és Michael Pinskerrel közösen indítottuk el a monoidok és klónok rekonstruálhatóságának átfogó vizsgálatát [16]. Amint láttuk, rengeteg csoportról tudjuk, hogy rekonstruálható, és a halmazelmélet megfelelő modelljében ez $\mathrm{Sym}(D)$ minden zárt részcsoportjára igaz. Így természetes gondolat megpróbálni az automorfizmuscsoport rekonstruálhatóságát kiterjeszteni az endomorfizmusmonoidra, illetve a polimorfizmusklónra [16, Proposition 11].

3.5. állítás. *Legyen D egy megszámlálhatóan végtelen halmaz, és legyen M és M' két zárt monoid* $\mathrm{Mon}(D)$*-ben. Tegyük fel, hogy az invertálható elemek halmaza sűrű M-ben és M'-ben, és jelölje ezeket a halmazokat rendre G és G'. Legyen $\xi : G \to G'$ egy folytonos homomorfizmus. Ekkor:*

- *ξ egyértelműen kiterjed egy $\bar{\xi} : M \to M'$ folytonos homomorfizmussá.*
- *Ha ξ izomorfizmus, akkor $\bar{\xi}$ izomorfizmus és homeomorfizmus.*

3.6. következmény. *Legyen D egy megszámlálhatóan végtelen halmaz, és legyen $M \subseteq \mathrm{Mon}(D)$ egy zárt monoid. Jelölje G az invertálható elemek halmazát M-ben. Tegyük fel, hogy*

(1) *G sűrű M-ben,*
(2) *minden izomorfizmus G és $\mathrm{Sym}(D)$ egy zárt részcsoportja között homeomorfizmus, és*
(3) *az identitás az egyetlen injektív endomorfizmusa M-nek, ami G minden elemét stabilizálja.*

Ekkor M rekonstruálható.

Ez az állítás és bizonyítása [16, Lemma 12.]-ben található. Az első két feltétel nagyon sok endomorfizmusmonoidra teljesül, a nehézséget általában a harmadik feltétel bizonyítása jelenti. Vegyük észre, hogy ez már egy tisztán algebrai feltétel, ebben már a topológia nem játszik semmilyen szerepet. Ahhoz, hogy ki tudjuk mondani a legerősebb pozitív eredményt monoidok rekonstruálhatóságáról [16, Theorem 21.], be kell vezetnünk egy új fogalmat.

3.7. definíció. Egy megszámlálható Δ struktúrára fennáll a közös kibővíthetőség tulajdonsága, ha tetszőleges a_1, a_2 parciális izomorfizmusokra, amelyekre $\mathrm{Dom}(a_1) = \mathrm{Dom}(a_2)$ és $a_1^{-1}(x) = a_2^{-1}(x)$ minden $x \in \mathrm{Im}(a_1) \cap \mathrm{Im}(a_2)$-re, és minden $u \in \Delta \setminus \mathrm{Dom}(a_1)$ esetén léteznek $a_1 \subseteq a_1'$ és $a_2 \subseteq a_2'$ parciális izomorfizmusok, amikre $a_1'(u) = a_2'(u)$.

A véletlen gráfra és a véletlen turnamentre például fennáll ez a tulajdonság, a Henson-gráfokra, $(\mathbb{Q}, <)$-re és a véletlen részbenrendezésre azonban nem.

3.8. tétel. *Legyen Δ egy megszámlálható homogén relációs struktúra. Tegyük fel, hogy*

- $\mathrm{Aut}(\Delta)$ *sűrű* $\mathrm{End}(\Delta)$*-ban,*
- *minden izomorfizmus* $\mathrm{Aut}(\Delta)$ *és* $\mathrm{Sym}(D)$ *egy zárt részcsoportja között homeomorfizmus,*
- Δ*-ban nincs algebraicitás, és*
- Δ*-ra fennáll a közös kibővíthetőség tulajdonsága.*

Ekkor $\mathrm{End}(\Delta)$ *rekonstruálható.*

A tétel alapján a véletlen gráf és a véletlen turnament endomorfizmusmonoidja rekonstruálható. Ennek segítségével beláttuk, hogy a véletlen gráf polimorfizmusklónja is rekonstruálható [16, Theorem 50.]. További eredmények és ellenpéldák [16]-ban találhatók.

3.5. Nyitott problémák. Rubin tétele alapján a véletlen turnament és a véletlen részbenrendezés automorfizmuscsoportja rekonstruálható [52]. Azonban a kis index tulajdonság bizonyítására kidolgozott módszerek mindegyike csődöt mond ezekre a csoportokra. Pozitív válasz igazolásához egyértelműen új ötletre van szükség.

5. probléma. *Fennáll-e a véletlen turnament, illetve a véletlen részbenrendezés automorfizmuscsoportjára az automatikus folytonosság?*

A következő két kérdést [16]-ban fogalmaztuk meg. Ebben a cikkben konstruáltunk egy olyan ω-kategorikus struktúrát, amely M endomorfizmusmonoidjának létezik olyan $\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$ automorfizmusa, ami nem folytonos. Ugyanez igaz az M által generált klónra is, ami szintén egy ω-kategorikus struktúra polimorfizmusklónja. Ez a monoid (klón) rekonstruálhatóságát nem cáfolja, hiszen az identitásfüggvény egy folytonos $M \to M$ izomorfizmus.

6. probléma. *Van-e olyan ω-kategorikus sruktúra, amelynek a polimorfizmusklónja nem rekonstruálható?*

Truss és Vargas-García belátták, hogy $\mathrm{End}(\mathbb{Q};<)$ rekonstruálható. Mivel a $(\mathbb{Q},<)$ struktúrára nem áll fenn a közös kibővíthetőség tulajdonsága, így ennek igazolásában nem tudjuk a 3.8. tételt alkalmazni.

7. probléma. *Rekonstruálható-e a* $\mathrm{Pol}(\mathbb{Q},<)$ *klón?*

4. CSP

4.1. Homomorfizmusok. Legyen Δ egy ω-kategorikus relációs struktúra egy véges τ nyelv felett. Az elméleti számítástudományban $\mathrm{CSP}(\Delta)$ az a számítási probléma, melynek inputja egy véges A struktúra a τ nyelv felett, a megválaszolandó kérdés pedig az, hogy van-e homomorfizmus A-ból Δ-ba.[3] A legismertebb példák közé tartozik a gráfok k-színezhetőségének problémája, melyet úgy kaphatunk meg CSP-ként, ha Δ-nak a k-pontú teljes gráfot választjuk. Ugyancsak felírható CSP-ként a közismert NP-teljes probléma, a 3-SAT. Ehhez Δ-nak ismét egy véges struktúrát választunk, aminek alaphalmaza $\{0,1\}$, nyelve pedig négy 3 változós relációból áll. Jelölje ezeket R_1, R_2, R_3 és R_4. Δ-ban ezeket rendre a következőképpen interpretáljuk: $\{0,1\}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $\{0,1\}^3 \setminus \{(0,0,1)\}$, $\{0,1\}^3 \setminus \{(0,1,1)\}$ és $\{0,1\}^3 \setminus \{(1,1,1)\}$. A klasszikus megfogalmazás szerint a 3-SAT lehetséges bemenetei olyan formulák, amikben $A_1 \vee A_2 \vee A_3$ alakú klózokat kapcsolunk össze az „és” kötőszóval, ahol A_1, A_2 és A_3 egy-egy változó vagy annak negáltja. A változók egy előre rögzített $\{x_1,\ldots,x_n\}$ halmazból kerülnek ki. Ehelyett mi úgy fogjuk fel az inputot, mint egy struktúrát az $\{R_1,R_2,R_3,R_4\}$ relációs nyelv felett $\{x_1,\ldots,x_n\}$ alaphalmazzal. Ha egy klózban i db negált változó van, akkor az R_{i+1} reláció interpretációja tartalmazza az összes olyan elemhármast, aminek utolsó i eleme a klóz negált változóinak felsorolása, az ezeket megelőző elemek pedig a klóz fennmaradó változói.

Ennél kevésbé nyilvánvaló példa az aciklikus gráfok problémája. Ebben a bemenet egy véges irányított gráf, a feladat pedig annak eldöntése, hogy vajon a gráf

[3]A CSP rövidítés az angol „Constraint Satisfaction Problem”-ből származik, ami arra utal, hogy úgy keresünk a változóknak értékeket egy célstruktúrában, hogy az a behelyettesítés eleget tegyen bizonyos megkötéseknek.

tartalmaz-e irányított kört. Ez a probléma nem fejezhető ki olyan CSP-ként, melyben a Δ célstruktúra véges. Azonban $\Delta = (\mathbb{Q}, <)$ választással éppen az említett számítási problémát kapjuk meg. Ez a példa is azt igazolja, hogy nem érdemes pusztán a véges célstruktúrájú CSP-kre szorítani a vizsgálatainkat, mert a végtelen, ω-kategorikus célstruktúrákkal megadott CSP-k között is vannak érdekes problémák.

A téma legfontosabb kérdése a dichotómiasejtés, amelyet Feder és Vardi fogalmazott meg először véges Δ-kra.

4.1. sejtés (Feder–Vardi)**.** *Minden véges Δ relációs struktúrára* CSP(Δ) P-*beli vagy* NP-*teljes.*

4.2. Primitív pozitív formulák. A CSP-ket sokféleképpen definiálhatjuk. Egy alternatív megfogalmazás szerint az input egy ϕ primitív pozitív formula a τ nyelv felett, a kérdés pedig az, hogy ez a formula igaz-e a Δ struktúrában. A két definíció ekvivalenciája teljesen világos. Egy ϕ primitív pozitív formulához a Δ nyelve felett azt az A struktúrát rendeljük, aminek alaphalmaza ϕ változóiból áll, és egy R reláció pontosan akkor teljesül az $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ k-asra, ha $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ szerepel ϕ-ben. Egyetlen apró technikai problémaként megemlítjük, hogy ϕ-ben $x_i = x_j$ alakú formulák is előfordulhatnak, hiszen primitív pozitív formulákban ez megengedett. Iyenkor egyszerűen bevezetünk az azonosított változók helyébe egy új változót, és azok előfordulását ϕ-ben mindenütt ezzel helyettesítjük. Könnyű meggondolni, hogy ha az $=$ nem is volt benne Δ nyelvében, az az extra lehetőség, hogy az $=$ jelet is használhatjuk, nem változtat a probléma bonyolultságán. Valójában a fent leírt egyszerű eljárás egy polinomiális visszavezetés a két CSP között, ami megmutatja, hogy a két probléma – az egyenlőség reláció használatával, illetve anélkül – polinomiálisan ekvivalens (a másik irányú visszavezetés triviális). A modellelméleszek szempontjából ez a technikai probléma nem is létezik, hiszen úgy tekintik, hogy az $=$ reláció minden nyelvben benne van. Mi is ezt a konvenciót követjük; ekkor a fenti gondolatmenetre úgy tekinthetünk, mint ami megmutatja, hogy ezzel semmit sem veszítünk, hiszen polinomiális ekvivalencia erejéig minden CSP-t megkapunk.

A CSP-kre adott új definíció azért érdekes, mert ráirányítja a figyelmet a primitív pozitív formulák jelentőségére. Véges célstruktúrájú CSP-kre először Jeavons vette észre, hogy a probléma lényegében nem változik (polinomiális ekvivalencia erejéig), ha a Δ célstruktúrához olyan relációkat (vagyis új megkötéseket) veszünk hozzá, amelyek a korábbiakból primitív pozitív formulákkal definiálhatók [19].

4.2. tétel (Jeavons)**.** *Legyen Δ és Γ két véges relációs struktúra. Tegyük fel, hogy Γ primitív pozitív reduktja Δ-nak. Ekkor* CSP(Γ) *polinomidőben visszavezethető* CSP(Δ)*-ra.*

Bizonyítás. Célunk egy gyors algoritmust konstruálni, ami tetszőleges ϕ primitív pozitív formulára Γ nyelvében legyárt egy olyan ψ primitív pozitív formulát Δ nyelvében, amire $\Gamma \models \phi$ pontosan akkor teljesül, ha $\Delta \models \psi$. Legyen adott egy ϕ primitív pozitív formula Γ nyelvében. Helyettesítsünk ebben minden relációt a Δ-beli primitív pozitív definíciójával úgy, hogy minden $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ alakú prímformulára ϕ-ben a definíciójában lévő egzisztenciális kvantorral ellátott változókat minden esetben új szimbólummal helyettesítjük. Ezt követően egyszerűen gyűjtsük ki az egzisztenciális kvantorokat a hozzájuk tartozó változóval együtt a formula elejére. Ez az algoritmus lineáris futásidejű, és a legyártott ψ formula hossza is lineáris ϕ hosszában, vagyis az eredeti probléma inputjának méretében. ■

Ez az észrevétel vezetett a véges CSP-k vizsgálatának legalapvetőbb módszeréhez, az úgynevezett univerzális algebrai megközelítéshez.

4.3. tétel (Jeavons). *Legyenek* Δ *és* Γ *véges struktúrák, amikre* $\mathrm{Pol}(\Delta) \subseteq \mathrm{Pol}(\Gamma)$. *Ekkor* $\mathrm{CSP}(\Gamma)$ *polinomidőben visszavezethető a* $\mathrm{CSP}(\Delta)$ *problémára. Ha* $\mathrm{Pol}(\Delta) = \mathrm{Pol}(\Gamma)$, *akkor* $\mathrm{CSP}(\Delta)$ *és* $\mathrm{CSP}(\Gamma)$ *polinomiálisan ekvivalensek.*

A véges célstruktúrájú CSP-kről rengeteget tudunk, elsősorban ennek az univerzális algebrai megközelítésnek köszönhetően. A tétel lényegében azt állítja, hogy $\mathrm{CSP}(\Delta)$ bonyolultsága csak Δ polimorfizmusklónjától függ. Ennek az észrevételnek a hatására felélénkült a véges alaphalmazon ható függvényklónok (a továbbiakban csak „véges klónok") vizsgálata, és számtalan eredmény született, ami kapcsolatot teremt véges klónok és tagsági problémák bonyolultsága között. Schaefer [53] igazolta a dichotómiasejtést minden legfeljebb 2 elemű Δ-ra, amelyet Bulatov [18] általánosított minden legfeljebb 3 elemű Δ-ra. Barto és Kozik [5] megmutatták, hogy ha $\mathrm{Pol}(\Delta)$-ban található Jónsson-termeknek egy sorozata, akkor $\mathrm{CSP}(\Delta)$ P-beli. A témát [20]-ban foglalták össze.

Jeavons tétele általánosítható ω-kategorikus struktúrákra [10].

4.4. tétel (Bodirsky, Nešetřil). *Legyenek* Δ *és* Γ ω*-kategorikus struktúrák, amikre* $\mathrm{Pol}(\Delta) \subseteq \mathrm{Pol}(\Gamma)$. *Ekkor* $\mathrm{CSP}(\Gamma)$ *polinomidőben visszavezethető a* $\mathrm{CSP}(\Delta)$ *problémára. Ha* $\mathrm{Pol}(\Delta) = \mathrm{Pol}(\Gamma)$, *akkor* $\mathrm{CSP}(\Delta)$ *és* $\mathrm{CSP}(\Gamma)$ *polinomiálisan ekvivalensek.*

A 4.4. tétel a legáltalánosabb formája a CSP-k univerzális algebrai megközelítésének. A 4.4. tétel segítségével és a kanonikus függvények szisztematikus vizsgálatával Bodirsky és Kára belátták a dichotómiasejtést az összes olyan $\mathrm{CSP}(\Delta)$ alakú problémára, amire Δ a $(\mathbb{Q}, <)$ struktúra reduktja. Ez az osztály számos olyan számítási problémát tartalmaz, amit korábban intenzíven vizsgáltak. Bodirsky és Kára eredménye [9, Theorem 50.] éles határvonalat húz a P-beli és NP-teljes problémák között az adott osztályban: ha $\mathrm{Pol}(\Delta)$ tartalmaz egyet 9 jól meghatározott klón közül, akkor $\mathrm{CSP}(\Delta)$ polinomidőben megoldható. Ellenkező esetben $\mathrm{Pol}(\Delta)$ részklónja 6 zárt klón egyikének [9, Corollary 51.], és ekkor $\mathrm{CSP}(\Delta)$ NP-teljes. Ezzel nemcsak a dichotómiasejtés egy speciális esetét oldották meg, de effektív algoritmust adtak, ami eldönti, hogy $(\mathbb{Q}, <)$ egy adott Δ reduktjára $\mathrm{CSP}(\Delta)$ P-beli vagy NP-teljes. Előbbi pontosan akkor áll fenn, ha Δ minden relációját megőrzi a [9, Theorem 50.]-ben megadott 9 (legfeljebb kétváltozós) függvény valamelyike. Bodirsky és Pinsker hasonló eredményt bizonyított a véletlen gráf reduktjairól is [12].

Ha létezik folytonos homomorfizmus $\mathrm{Pol}(\Delta)$-ból a triviális klónba, vagyis abba a klónba, ami csak a projekciókat tartalmazza, akkor $\mathrm{CSP}(\Delta)$ NP-teljes. Minden ismert esetben igaz, hogy egy ω-kategorikus Δ struktúrára $\mathrm{CSP}(\Delta)$ vagy P-beli, vagy pedig néhány egyszerű, a CSP bonyolultságát nem érintő operációval el tudunk jutni egy olyan Γ struktúrához Δ-ból, amire létezik folytonos homomorfizmus $\mathrm{Pol}(\Gamma)$-ból a triviális klónba. Utóbbi esetben tehát $\mathrm{CSP}(\Delta)$ maga is NP-teljes. Ez az észrevétel indokolja a triviális klónra képező klónhomomorfizmusok automatikus folytonosságának vizsgálatát, amelyet [15]-ben kezdeményeztünk.

4.3. Nyitott problémák. A következő kérdéseket [15]-ben vetettük fel.

8. probléma. *Létezik-e olyan zárt C függvényklón, ami a triviális klónra képezhető homomorfizmussal, de folytonos homomorfizmussal nem?*

A zárt csoportokra tett megfigyelések alapján érdekes lehet halmazelméleti feltételek mellett vizsgálni klónhomomorfizmusok automatikus folytonosságát.

9. probléma. *Létezik-e a halmazelméletnek olyan modellje, amiben igaz, hogy minden zárt függvényklónból a triviális klónra képező homomorfizmus folytonos?*

5. Dinamikai rendszerek

5.1. Folyamok. A dinamikai rendszerek elméletében egy *folyam* egy $G \curvearrowright X$ csoporthatással adható meg, ahol G egy topologikus csoport, ami folytonosan hat az X kompakt Hausdorff-téren, vagyis a $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$ függvény folytonos. Egy G-folyam *minimális*, ha nincs valódi részfolyama.

5.1. lemma. *Az alábbi állítások ekvivalensek egy $G \curvearrowright X$ folyamra.*

(1) *$G \curvearrowright X$ minimális.*
(2) *Nincs X-ben G-invariáns, zárt, valódi részhalmaz.*
(3) *X-ben minden G-orbit sűrű.*

Bizonyítás. Egy kompakt Hausdorff-térben a kompakt részhalmazok éppen a tér zárt halmazai. Így (1) $\Leftrightarrow$ (2) nyivánvaló. Megmutatjuk, hogy minden G-orbit lezártja G-invariáns (és persze zárt), ebből közvetlenül adódik (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Legyen S egy G-invariáns halmaz, és legyen $g \in G$ tetszőleges. A g-vel való szorzás X-en, vagyis az $X \to X$, $x \mapsto gx$ függvény X-nek egy folytonos permutációja, aminek inverze, a g^{-1}-zel való szorzás szintén folytonos. Így a g-vel való szorzás X-nek egy homeomorfimusa. Tehát $g(\overline{S}) = \overline{g(S)} = \overline{S}$. ■

A minimális folyamok többek között azért is nagyon fontosak a folyamok elméletében, mert minden folyamnak van minimális részfolyama. Ez a Zorn-lemma egy triviális következménye.

Tetszőleges G topologikus csoportnak van egy *univerzális minimális folyama*, vagyis egy olyan $G \curvearrowright M(G)$ folyam, aminek minden G-folyam *képe*. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $G \curvearrowright X$ folyam esetén létezik egy folytonos, szürjektív, *G-ekvivariáns* $f : M(G) \to X$ függvény, azaz $\forall g \in G, \forall y \in M(G)$ esetén $f(gy) = gf(y)$. Ez a folyam izomorfizmus erejéig egyértelmű, tehát ha $G \curvearrowright X_1$ és $G \curvearrowright X_2$ univerzális minimális folyamok, akkor létezik egy G-ekvivariáns $f : X_1 \to X_2$ homeomorfizmus.

Az általános konstrukció, ami megmutatja az univerzális minimális folyam létezését, igen komplikált, és nehezen alkalmazható. Ezért általános törekvés a dinamikai rendszerek vizsgálatában az univerzális minimális folyam kezelhető leírása bizonyos speciális esetekben. Egy egyszerű példaként megjegyezzük, hogy ha G egy kompakt Hausdorff-csoport, akkor $M(G) = G$, és a hatás a balról szorzás. Ha azonban G nem kompakt, de lokálisan kompakt topologikus csoport, akkor $M(G)$ igen bonyolult; pl. tudjuk, hogy ilyen esetben $M(G)$ nem metrizálható [37, Theorem A2.2.].

Egy G topologikus csoportot *amenábilisnak* nevezünk, ha létezik $M(G)$-n egy G-invariáns Borel valószínűségi mérték.

5.2. lemma. *Az alábbi állítások ekvivalensek egy G topologikus csoportra.*

(1) *G amenábilis.*
(2) *Minden minimális G-folyamon van G-invariáns Borel valószínűségi mérték.*
(3) *Minden G-folyamon van G-invariáns Borel valószínűségi mérték.*

Bizonyítás. $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$ nyilvánvaló.

$(1) \Rightarrow (3)$. Legyen $G \curvearrowright X$ egy tetszőleges folyam, és legyen $G \curvearrowright Y$ egy minimális részfolyama. Ekkor $G \curvearrowright Y$ képe a $G \curvearrowright M(G)$ univerzális minimális folyamnak. Legyen $f : M(G) \to Y$ egy folytonos, szürjektív, G-ekvivariáns függvény. Legyen μ egy G-invariáns Borel valószínűségi mérték $M(G)$-n. Ekkor az X Borel-halmazain értelmezett $\nu(A) := \mu\big(f^{-1}(A \cap Y)\big)$ egy G-invariáns Borel valószínűségi mérték X-en. ■

Az amenabilitásnak egy extrém változata, ha $\big|M(G)\big| = 1$. Ez azzal ekvivalens, hogy minden G-folyamnak van fixpontja. Az ilyen csoportokról néhány éve igen keveset tudtunk, csak egy-egy konkrét esetben sikerült ezt a tulajdonságot igazolni.

5.2. A Kechris–Pestov–Todorcevic-tétel. A következő tétel emiatt is kiemelt jelentőségű, és mára a téma alaptételévé vált.

5.3. tétel (Kechris–Pestov–Todorcevic)**.** *Legyen Δ egy megszámlálható homogén struktúra egy megszámlálható nyelv felett. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

(1) *Minden* $\mathrm{Aut}(\Delta)$*-folyamnak van fixpontja.*
(2) *Δ egy rendezett Ramsey-struktúra.*
(3) *Δ egy Ramsey-struktúra, és minden $A \in \mathrm{Age}(\Delta)$ merev.*

$(1) \Rightarrow (2)$ **bizonyítása.** Jelölje LO az összes teljes rendezést Δ alaphalmazán. Ekkor $\mathrm{LO} \subseteq 2^{\Delta^2}$ zárt. Tyihonov tétele szerint 2^{Δ^2} egy kompakt, Hausdorff-tér, így LO is az. Az LO halmazon $\mathrm{Aut}(\Delta)$-nak értelmezhető egy folytonos csoporthatása, az úgynevezett *logikai hatás*. Ha $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ és $R \in \mathrm{LO}$, akkor $\alpha(R) \in \mathrm{LO}$ az a teljes rendezés, amire $(u,v) \in \alpha(R) \Leftrightarrow \big(\alpha^{-1}(u), \alpha^{-1}(v)\big) \in R$. Ennek az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-folyamnak tehát van egy fixpontja, legyen ez $R_0 \in \mathrm{LO}$. Az R_0 teljes rendezést ekkor Δ minden automorfizmusa megőrzi.

A Ramsey-tulajdonság bizonyításához legyenek $A, B \in \mathrm{Age}(\Delta)$ és $\chi : \binom{\Delta}{A} \to \{0,1\}$ adottak. Legyen $X = \{0,1\}^{\binom{\Delta}{A}}$. Tyihonov tétele szerint X egy kompakt, Hausdorff-tér. Ezen a téren is értelmezhető $\mathrm{Aut}(\Delta)$-nak egy folytonos csoporthatása. Ha $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ és $\nu \in X$, akkor $\alpha(\nu)$ az a színezés, amire A tetszőleges A' példányára Δ-ban $\alpha(\nu)(A') = \nu\big(\alpha^{-1}(A')\big)$. Legyen $Y := \overline{\mathrm{Aut}(\Delta) \cdot \chi}$. A feltétel szerint ennek az $\mathrm{Aut}(\Delta)$-folyamnak tehát van egy fixpontja, legyen ez $\mu \in Y$. Ha $A_1, A_2 \subseteq \Delta$ az A-nak két példánya, akkor létezik $\beta \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, amire $\beta(A_1) = A_2$. Mivel μ fixpontja $\mathrm{Aut}(\Delta)$-nak, így $\mu(A_2) = \beta(\mu)(A_2) = \mu\big(\beta^{-1}(A_2)\big) = \mu(A_1)$. Vagyis $\mu : \binom{\Delta}{A} \to \{0,1\}$ konstans. Legyen $B' \subseteq \Delta$ egy tetszőleges példánya B-nek, és jelöljük $A'_1, \ldots, A'_n$-vel az A példányait B'-ben. Ekkor $\mu \in \overline{\mathrm{Aut}(\Delta) \cdot \chi}$ miatt létezik $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, hogy $\gamma(\chi) \restriction_{\{A'_1,\ldots,A'_n\}} = \mu \restriction_{\{A'_1,\ldots,A'_n\}}$, vagyis $\chi\big(\gamma^{-1}(A'_1)\big) = \ldots = \chi\big(\gamma^{-1}(A'_n)\big)$. Vegyük észre, hogy $\gamma^{-1}(B')$-ben A példányai éppen $\gamma^{-1}(A'_1), \ldots, \gamma^{-1}(A'_n)$, így $\gamma^{-1}(B')$ egy monokromatikus példánya B-nek. ∎

Az 5.3. tételben a (2) ⇒ (3) irány triviális, a (3) ⇒ (1) irány viszont komolyabb elméleti megalapozást igényel. A tétel fontos eszközévé vált az ω-kategorikus struktúrák vizsgálatának, azonban igazi jelentősége a dinamikai rendszerek elméletében van. A strukturális Ramsey-elmélet előrehaladott eredményeit használva ezzel rengeteg olyan végtelen permutációcsoportra lehet példát adni, aminek univerzális minimális folyama triviális. Korábban csak néhány sporadikus példa volt ismert, így a szeparábilis Hilbert-terek unitér transzformációinak csoportja [30] és $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ [50]. Ezek mindegyikére külön ötletet igényelt annak bizonyítása, hogy az univerzális minimális folyam triviális.

Az 5.3. tétel csak speciális esete annak, amit Kechris, Pestov és Todorcevic bizonyítottak [37]-ben. A tétel általános formája lehetőséget ad arra, hogy átlátható leírást adjunk $M\big(\mathrm{Aut}(\Delta)\big)$-ra, ha Δ reduktja egy rendezett Ramsey-struktúrának. Sokan gondolják úgy, hogy ez minden ω-kategorikus struktúrára igaz, és számos konkrét esetben ez igazolható is, így a Kechris–Pestov–Todorcevic-tétel topologikus csoportok egy széles osztályára írja le azok univerzális minimális folyamát. Pl. $M\big(\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, \mathrm{Cycl})\big)$ a Dedekind-szeletek tere, vagyis az a tér, ami a racionális számok halmazának leszálló részhalmazaiból áll (ebben az esetben azonosítanunk kell az $\emptyset$ és a $\mathbb{Q}$ Dedekind-szeleteket). Ez a tér „majdnem” az S^1 körvonal, annyi a különbség, hogy a körvonal racionális pontjait meg kell dupláznunk – ezek a duplázott racionális pontok az $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}$ és $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq q\}$ szeleteknek felelnek meg adott $q \in \mathbb{Q}$-ra.

Jelen cikk szerzője Moritz Müllerrel közösen egy az 5.3. tételhez hasonló karakterizációt adott azokra a struktúrákra, amik automorfizmuscsoportjának univerzális minimális folyama véges [44]. Azt is megmutattuk, hogy minden Ramsey-struktúra reduktja egy rendezett Ramsey-struktúrának. Így minden esetben, amikor arról beszélünk, hogy egy struktúra reduktja egy rendezett Ramsey-struktúrának, valójában a rendezettség feltétele elhagyható. Továbbá beláttuk, hogy amennyiben egy

Ramsey-tulajdonságú relációs struktúra automorfizmuscsoportja amenábilis, akkor az invariáns Borel valószínűségi mérték egyértelmű a csoport univerzális minimális folyamán, és az egy *generikus* orbiton koncentrálódik. (Egy halmaz generikus, ha komplementere előáll megszámlálhatóan sok sehol sem sűrű, zárt halmaz uniójaként.) Zucker megmutatta [60], hogy hasonló eredmény nem igaz, ha függvényjeleket is megengedünk a struktúra nyelvében. A kételemű test feletti megszámlálhatóan végtelen dimenziós vektortér automorfizmuscsoportjának univerzális minimális folyamán az egyetlen invariáns Borel valószínűségi mérték 0-nak méri a generikus orbitot. A [37]-beli eredményeket Angels, Kechris és Lyons [4] cikke vitte tovább, amiben a fentebb definiált fogalmakat és az ezekkel kapcsolatos kérdéseket tárgyalják. Megmutatták például, hogy a véletlen gráf automorfizmuscsoportjának univerzális minimális folyamán egyetlen invariáns Borel valószínűségi mérték van.

5.3. Nyitott problémák. A következő problémáról és annak jelentőségéről a [4, 61, 43] cikkekben olvashatunk.

10. probléma. *Igaz-e, hogy tetszőleges ω-kategorikus Δ struktúrára az* $\mathrm{Aut}(\Delta)$ *topologikus csoport univerzális minimális folyama metrizálható?*

Zucker megmutatta [61], hogy ha $\mathrm{Sym}(D)$ egy zárt G részcsoportjára $M(G)$ metrizálható, akkor G-nek van egy (egyértelmű) generikus orbitja $M(G)$-ben. Ez alapján Melleray, Nguyen van Thé és Tsankov belátták [43], hogy ω-kategorikus Δ esetén $M\big(\mathrm{Aut}(\Delta)\big)$ pontosan akkor metrizálható, ha létezik egy ω-kategorikus Γ, ami rendezett, Ramsey, és aminek Δ reduktja. Eszerint a 10. probléma ekvivalens a Bodirsky–Pinsker-sejtés alábbi változatával, amit ebben a formában [17, Problem 28.]-ban vetettek fel.

11. probléma. *Igaz-e, hogy minden ω-kategorikus struktúra reduktja egy ω-kategorikus (rendezett) Ramsey-struktúrának?*

A kérdésben a rendezett szó elhagyható, hiszen minden ω-kategorikus Ramsey-struktúra reduktja egy ω-kategorikus rendezett Ramsey-struktúrának [44].

A következő kérdéssel felvázolunk egy ígéretes stratégiát a 11. probléma esetleges cáfolatára.

12. probléma. *Van-e tetszőlegesen nagy n-re olyan ω-kategorikus Δ_n struktúra, amire* $\mathrm{Aut}(\Delta_n)$ *n-tranzitív és* $\mathrm{Aut}(\Delta)$*-nak létezik valódi részfolyama LO-ban, azaz a Δ-n értelmezett teljes rendezések terén?*

Ha a 12. problémára pozitív válasz adható, akkor az így kapott Δ_n struktúrák vegyítésével kapott Δ struktúra is ω-kategorikus. Valóban, minden n-re egy n-es típusa Δ-ban csak annak Δ_k-beli típusaitól függ, ahol $1 \leq k \leq n-1$, és ilyenből csak véges sok van. Ha ez a a vegyítés elvégezhető úgy, hogy az $\mathrm{Aut}(\Delta_n)$ csoportok LO-beli folyamai diszjunktak (mint a lentebb bemutatott példákban is), akkor Δ ellenpéldát ad a 11. problémára. Ha ugyanis létezne egy Γ ω-kategorikus, rendezett Ramsey-struktúra, aminek Δ reduktja, akkor $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ hatna minden n-re az $\mathrm{Aut}(\Delta_n)$ LO-beli valódi részfolyamán, így a Kechris–Pestov–Todorcevic-tétel miatt minden ilyen részfolyamban lenne $\mathrm{Aut}(\Gamma)$-nak egy fixpontja. Ekkor Γ-ban végtelen sok teljes rendezést tudnánk elsőrendben definiálni, ami ellentmond az ω-kategoricitásnak. Kis n-ekre több ismert példa is van, ami megfelel a Δ_n-nel szemben támasztott követelményeknek, és ezek vegyítésével az automorfizmuscsoportnak valóban diszjunkt részfolyamait kapjuk LO-ban. Pl. $n = 1$-re a generikus részbenrendezés megfelelő, az LO-beli részfolyam azokból a teljes rendezésekből áll, amik kiterjesztik a részbenrendezést. Az $n = 2$ esetben jó választás a $(\mathbb{Q}, \mathrm{Cycl})$ struktúra, $n = 3$-ra pedig a véletlen D-reláció (a definíció pl. [2]-ben található).

A következő probléma önmagában is érdekes, de főként azért fontos, mert a benne foglalt állítás [44] alapján erősebb a 12. problémánál.

13. probléma. *Van-e tetszőlegesen nagy n-re olyan ω-kategorikus Δ_n Ramsey-struktúra, amire $\mathrm{Aut}(\Delta_n)$ n-tranzitív és nem $(n+1)$-tranzitív?*

Irodalom

[1] Ackerman, N., Freer, C., Patel, R., Invariant measures concentrated on countable structures. beküldve, arXiv:1206.4011 [math.LO], 2012.

[2] Adeleke, S. A., Neumann, P. M., Relations related to betweenness: their structure and automorphisms. *Memoirs of the American Mathematical Society 131*, 623 (1998), viii+125.

[3] Ahlbrandt, G., Ziegler, M., Quasi-finitely axiomatizable totally categorical theories. *Annals of Pure and Applied Logic 30*, 1 (1986), 63–82.

[4] Angel, O., Kechris, A. S., Lyons, R., Random orderings and unique ergodicity of automorphism groups. *Journal of the European Mathematical Society 16* (2014), 2059–2095.

[5] Barto, L., Kozik, M., Congruence distributivity implies bounded width. *SIAM Journal on Computing 39*, 4 (2009), 1531–1542.

[6] Bennett, J. H., *The reducts of some infinite homogeneous graphs and tournaments.* PhD thesis, Rutgers university, 1997.

[7] Bodirsky, M., Ramsey classes: examples and constructions. beküldve, 2014.

[8] Bodirsky, M., Junker, M., $\aleph_0$-categorical structures: interpretations and endomorphisms. *Algebra Universalis 64*, 3-4 (2011), 403–417.

[9] Bodirsky, M., Kára, J., The complexity of temporal constraint satisfaction problems. *Journal of the ACM 57*, 2 (2009), 41 pp. egy kiterjesztett absztrakt a STOC'08 kiadványában érhető el.

[10] Bodirsky, M., Nešetřil, J., Constraint satisfaction with countable homogeneous templates. *Journal of Logic and Computation 16*, 3 (2006), 359–373.

[11] Bodirsky, M., Pinsker, M., Reducts of Ramsey structures. *Model Theoretic Methods in Finite Combinatorics*, vol. 558 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, 2011, pp. 489–519.

[12] Bodirsky, M., Pinsker, M., Schaefer's theorem for graphs. *Proceedings of STOC'11* (2011), pp. 655–664. a teljes cikk elérhető arXiv:1011.2894 [cs.CC].

[13] Bodirsky, M., Pinsker, M., Topological Birkhoff. *Transactions of the American Mathematical Society* (2014). elfogadva, arXiv:1203.1876 [math.LO].

[14] Bodirsky, M., Pinsker, M., Pongrácz, A., The 42 reducts of the random ordered graph. beküldve, 2013.

[15] Bodirsky, M., Pinsker, M., Pongrácz, A., Projective clone homomorphisms. beküldve, 2014.

[16] Bodirsky, M., Pinsker, M., Pongrácz, A., Reconstructing the topology of clones. beküldve, arXiv:1312.7699 [math.LO], 2014.

[17] Bodirsky, M., Pinsker, M., Tsankov, T., Decidability of definability. *Journal of Symbolic Logic 78*, 4 (2013), 1036–1054.

[18] Bulatov, A., A dichotomy theorem for constraint satisfaction problems on a 3-element set. *Journal of the ACM 53*, 1 (2006), 66–120.

[19] Bulatov, A., Jeavons, P. G., Krokhin, A., Classifying the complexity of constraints using finite algebras. *SIAM Journal on Computing 34* (2005), 720–742.

[20] Bulatov, A., Jeavons, P. G., Krokhin, A., The complexity of constraint satisfaction: An algebraic approach (a survey paper). *Structural Theory of Automata, Semigroups and Universal Algebra (Montreal, 2003), NATO Science Series II: Mathematics, Physics, Chemistry 207* (2005), 181–213.

[21] Cameron, P. J., Transitivity of permutation groups on unordered sets. *Mathematische Zeitschrift 148* (1976), 127–139.

[22] Cameron, P. J., The random graph revisited. *European Congress of Mathematics* (2001), vol. 201 of *Progress in Mathematics*, Birkhäuser Basel, pp. 267–274.

[23] Cameron, P. J., *Aspects of infinite permutation groups*, vol. 339 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, 2007.

[24] Cherlin, G., The classification of countable homogeneous directed graphs and countable homogeneous n-tournaments. *Memoirs of the American Mathematical Society 131*, 621 (1998).

[25] Dixon, J., Peter M. Neumann, Thomas, S., Subgroups of small index in infinite symmetric groups. *Bulletin of the London Mathematical Society 18*, 6 (1986), 580–586.

[26] Evans, D. M., Subgroups of small index in general linear groups. *Bulletin of the London Mathematical Society 18* (1986), 587–590.

[27] Fagin, R., Probabilities on finite models. *Journal of Symbolic Logic 41*, 1 (1976), 50–58.

[28] Fouché, W. L., Symmetry and the Ramsey degree of posets. *Discrete Mathematics* (1997), 309–315.

[29] Graham, R. L., Rothschild, B. L., Spencer, J. H., *Ramsey theory*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990. Second edition.

[30] Gromov, M., Milman, V. D., A topological application of the isoperimetric inequality. *American Journal of Mathematics 105* (1983), 843–854.

[31] Henson, C. W., A family of countable homogeneous graphs. *Pacific Journal of Mathematics 38* (1971), 69–83.

[32] Herwig, B., Extending partial isomorphisms for the small index property of many ω-categorical structures. *Israel Journal of Mathematics 107* (1998), 93–123.

[33] Hodges, W., *A shorter model theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[34] Hodges, W., Hodkinson, I., Lascar, D., Shelah, S., The small index property for ω-categorical ω-stable structures and for the random graph. *Journal of the London Mathematical Society 48*, 2 (1993), 204–218.

[35] Jasiński, J., Laflamme, C., Nguyen van Thé, L., Woodrow, R., Ramsey precompact expansions of homogeneous directed graphs. beküldve, 2014.

[36] Junker, M., Ziegler, M., The 116 reducts of $(\mathbb{Q}, <, a)$. *Journal of Symbolic Logic 73*, 3 (2008), 861–884.

[37] Kechris, A., Pestov, V., Todorcevic, S., Fraissé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups. *Geometric and Functional Analysis 15*, 1 (2005), 106–189.

[38] Lachlan, A. H., Countable homogeneous tournaments. *Transactions of the American Mathematical Society 284* (1984), 431–461.

[39] Lachlan, A. H., Woodrow, R., Countable ultrahomogeneous undirected graphs. *Transactions of the American Mathematical Society 262*, 1 (1980), 51–94.

[40] Lascar, D., Autour de la propriété du petit indice. *Proceedings of the London Mathematical Society 62*, 3 (1991), 25–53. francia nyelven.

[41] Macpherson, H. D., A survey of homogeneous structures. http://ambio1.leeds.ac.uk/Pure/staff/macpherson/homog7.pdf.

[42] Macpherson, H. D., A survey of homogeneous structures. *Discrete Mathematics 311* (2011), 1599–1634.

[43] Melleray, J., Nguyen van Thé, L., Tsankov, T., Polish groups with metrizable universal minimal flows. beküldve, arXiv:1404.6167 [math.DS], 2014.

[44] Müller, M., Pongrácz, A., Topological dynamics of unordered Ramsey structures. elfogadva, 2014.

[45] Nešetřil, J., Rödl, V., Partitions of finite relational and set systems. *Journal of Combinatorial Theory, Series A 22*, 3 (1977), 289–312.

[46] Nešetřil, J., Ramsey theory. *Handbook of Combinatorics* (1995), 1331–1403.

[47] Nešetřil, J., Ramsey classes and homogeneous structures. *Combinatorics, Probability and Computing 14*, 1-2 (2005), 171–189.

[48] Nešetřil, J., Rödl, V., The partite construction and Ramsey set systems. *Discrete Mathematics 75*, 1-3 (1989), 327–334.

[49] Pach, P. P., Pinsker, M., Pluhár, G., Pongrácz, A., Szabó, Cs., Reducts of the random partial order. *Advances in Mathematics* (2014). elfogadva.

[50] Pestov, V., On free actions, minimal flows and a problem by Ellis. *Transactions of the American Mathematical Society 350*, 10 (1998), 4149–4165.

[51] Pongrácz, A., Reducts of the Henson graphs with a constant. elfogadva, 2013.

[52] Rubin, M., On the reconstruction of ω-categorical structures from their automorphism groups. *Proceedings of the London Mathematical Society 3*, 69 (1994), 225–249.

[53] Schaefer, T. J., The complexity of satisfiability problems. *Proceedings of STOC* (1978), pp. 216–226.

[54] Schmerl, J. H., Countable homogeneous partially ordered sets. *Algebra Universalis 9* (1979), 317–321.

[55] Semmes, S. W., Endomorphisms of infinite symmetric groups. *Abstracts of the American Mathematical Society 2* (1981), 426.

[56] Thomas, S., Reducts of the random graph. *Journal of Symbolic Logic 56*, 1 (1991), 176–181.

[57] Thomas, S., Reducts of random hypergraphs. *Annals of Pure and Applied Logic 80*, 2 (1996), 165–193.

[58] Truss, J. K., Infinite permutation groups. II. Subgroups of small index. *Journal of Algebra 120*, 2 (1989), 494–515.

[59] Truss, J. K., The automorphism group of the random graph: four conjugates good, three conjugates better. *Discrete Mathematics 268* (2003), 257–271.

[60] Zucker, A., Amenability and unique ergodicity of automorphism groups of Fraïssé structures. beküldve, arXiv:1304.2839 [math.LO], 2013.

[61] Zucker, A., Topological dynamics of closed subgroups of S_∞. Beküldve, arXiv:1404.5057 [math.LO], 2014.

András Pongrácz: Omega-categorical structures and their algebraic invariants

In this paper, we give a short survey of some important results regarding reducts, algebraic invariants and homomorphisms of algebraic invariants of ω-categorical structures. We review the most resent results and techniques of the area and also emphasize their applications in theoretical computer science.

Pongrácz András

School of Science and Technology
Middlesex University
The Burroughs, London NW4 4BT
United Kingdom

http://www.eis.mdx.ac.uk/staffpages/andraspongracz/

TÁRSULATI ÉLET – 2013

Szele Tibor-emlékérem

A Bolyai János Matematikai Társulat Szele Tibor-emlékérem bizottsága a 2013. évi érmet **Szőnyi Tamásnak** ítélte oda.

Indoklás: *Szőnyi Tamás* nemzetközileg elismert, jelentős hatású kutató, kiváló ifjú matematikusok generációit kinevelő oktató, aki áldozatos munkájával jelentős részt vállalt a hazai matematikai közélet szervezési feladataiból is.

A véges testekre épített terek kombinatorikus és geometriai elméletének egyik vezető kutatója, az ún. polinomos módszerek kifejlesztője. A témakör központi kérdéseit (lefogó ponthalmazok, ívek, magpontok, unitálok, szemioválisok, süvegek) vizsgálta, és mindegyik témában jelentős, sokat idézett eredményeket ért el. Nemcsak fontos tételeket bizonyított, hanem új módszereket is kidolgozott, melyeket azóta is sokan alkalmaznak. 77 dolgozata jelent meg, nagy részük a témakör vezető folyóirataiban. Ezeken kívül egy könyvet, több könyvfejezetet és öt ismeretterjesztő cikket is publikált. Dolgozataira közel 500 független hivatkozást kapott.

1997-ben az MTA Matematikai Osztálya által adományozott Erdős Pál-díjban részesült. 1997-től 2001-ig Széchenyi professzori ösztöndíjas volt, 2001-ben pedig Bolyai Farkas-ösztöndíjat kapott. 2012-ben a Magyar Érdemrend Tisztikeresztjével tüntették ki.

Szőnyi Tamás magával ragadó kiváló stílusú tanár-egyéniség. Az alapképzés mellett rendszeresen tart szemináriumokat és speciálelőadásokat a véges geometriák és a szimmetrikus kombinatorikus struktúrák témájában, valamint előadásokat a blokkrendszerek, leszámláló kombinatorika, kódelmélet, véges matematika témaköréből. Oktatási tevékenysége, tehetséges fiatalokkal való foglalkozása, azok irányítása egészen kiemelkedő színvonalú. Ennek elismeréseként 1995-ben az Országos Tudományos Diákköri Tanács témavezető mester díját (későbbi nevén „mestertanár”) kapta.

Kiemelkedően sikeres iskolát alakított ki a véges geometriák témakörében. Tanítványai közül Gács András (1997-ben doktorált) és Sziklai Péter (1998-ban kandidált) is az ELTE docensei lettek (és maguk is sikeres doktoranduszokat vezettek). Nagy Gábor (1999-ben doktorált) docens a Szegedi Tudományegyetemen. Hadnagy Éva 2002-ben megvédte doktori értekezését a BME-n, Weiner Zsuzsa 2003-ban, illetve Csikvári Péter 2012-ben az ELTE-n, Kovács István pedig 2003-ban Szegeden védett. Jelenleg is több aktív doktorandusza van. Tanítványai közül hárman megkapták a Bolyai János Matematikai Társulat Grünwald Géza-emlékdíját, négyen

Magyary Zoltán Posztdoktori Ösztöndíjat, hárman pedig Bolyai János Kutatói Ösztöndíjat nyertek.

2013-ban a Magyar Tudományos Akadémia által kiírt pályázat nyerteseként megalakította az *MTA-ELTE Geometriai és Algebrai Kombinatorika* kutatócsoportot, amellyel a fiatalokkal való foglalkozás egy újabb lehetősége nyílt meg számára.

Rendkívül lelkiismeretes, nagy munkabírású, kiemelkedő kutató- és oktatómunkája mellett széles körű szakmai-közéleti tevékenységet is folytat, rendszeresen szerkeszt neves szakmai folyóiratokat, és szervez nemzetközi konferenciákat.

Beke Manó-emlékdíj

A Matematikai Lapok 2013/1. számában a 2013. évi Beke Manó-emlékdíj beszámolója jelent meg, így a 2012. évit még nem tettük közzé, alábbiakban pótoljuk ezt.

A 2012. évi Beke Manó-emlékdíj bizottság körültekintő mérlegelés után az alábbi határozatot hozta: a Beke Manó-díj második fokozatában részesül **Csatár Katalin, dr. Kiss Géza, Nagy Tibor, Németh Julianna, Polcz Katalin, Szabó Matúz Magdolna** és **Szamosfalvy Jánosné.**

Csatár Katalin az Eötvös Loránd Tudományegyetemen kitüntetéssel szerzett matematika–fizika szakos tanári diplomát, majd az ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskolában kezdett el tanítani, ahol azóta is dolgozik. Tudását, emberségét és korrekt ítéleteit kollégái is elismerik és elfogadják, ezért bizalmukat élvezve 1979-2003 között a 12 tagú matematika munkaközösség vezetője volt. Szakmai munkáját az igényesség, a pontosság és a sokszínűség jellemzi. A matematikát úgy tudja oktatni, hogy az a gyerekeknek élményt nyújtson, a kevésbé tehetségesek figyelmét is felkeltse.

Kiváló diákokat nevelt, akik a tanulmányi versenyeken szép eredményeket értek el, többek között az OKTV-n, az Arany Dániel, a Kalmár László és a Zrínyi Ilona versenyeken, s a felvételi vizsgákon kivétel nélkül sikeresen szerepeltek. A Radnóti Miklós Gyakorlóiskola tehetségnevelést biztosító matematika tantervének egyik kidolgozója. Több tankönyvcsalád szerzője és szerkesztője, kollégáival és tanítványaival együtt írták meg a nyolc évfolyamos gimnázium tankönyveit, kidolgozták a Suli Nova kiadásában megjelent középiskolai tankönyveket. Jelenleg az Apáczai Kiadó által gondozott gimnáziumi tankönyvcsalád utolsó kötetén dolgoznak. Éveken keresztül oktatóként dolgozott a felsőoktatásban magyar és angol nyelven. Szakmai tanácskozásoknak, konferenciáknak, tanári ankétoknak meghatározó személyisége. Tankönyv- és tantervíróként országosan ismert szakmai körökben, továbbképzéseket is tart. Publikációival a matematika népszerűsítését szolgálja. Érettségi elnökként, majd később közoktatási szakértőként sok iskola munkájának részese. A tanulmányi versenyek versenybizottságában az országos feladatokból is kiveszi részét. Munkássága komoly hatással van a magyar matematikaoktatás módszertanára. Sok tanítványa lett matematikatanár. 2002-ben Graphisoft- és 2007-ben Ericsson-díjjal is jutalmazták.

dr. Kiss Géza pályafutását a Kunhegyesi Gimnázium és Híradástechnikai Szakközépiskolában kezdte, a kisújszállási Móricz Zsigmond Gimnázium és Közgazdasági Szakközépiskolában folytatta, ahol igazgatóként is tevékenykedett. 2003-tól az ELTE Apáczai Csere János Gyakorlógimnázium tanára volt. Jelenleg a Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium vezetőtanára, ahol különböző versenyek szervezésével motiválja a tanulókat. Rendszeresen képzi magát, PhD fokozatát a Debreceni Egyetemen szerezte. Tanárként részt vesz a Matematika Tanítása folyóirat feladatmegoldó rovatának versenyében. Hosszú időn át vett részt a Matematika OKTV III. bizottságának munkájában, érdekes feladatjavaslatai rendszeresen kitűzésre kerültek. Több előadást tartott a matematika tanárok Rátz László Vándorgyűlésén. Rendszeres előadója a Rév-Komáromban rendezett Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozónak, a Nagykanizsán kétévente megrendezett konferenciának, és a zalai nyári táborokon foglalkozásokat vezet. Az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó iskolában is tanít. 2007-től a KöMaL felügyelőbizottságának, majd később szerkesztőbizottságának tagja. Diákjainak eredményei kimagaslóak, és nem egyetlen iskolához köthetőek; rendszeresen szerepelnek az Arany Dániel és az OKTV díjazottjai, illetve első 10 helyezettje között. Több tudományos publikációja jelent meg angolul és magyarul a Frobeniusz problémáról. 2011-től a Magyar Matematikai Tehetségsegítő Tanács elnöke. 1992-ben Kiváló Munkáért díjjal, 2006-ban Graphisoft-díjjal jutalmazták munkásságáért.

Nagy Tibor Szegeden, a Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán szerzett matematika–számítástechnika–technika szakos tanári diplomát, majd a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen végezte el a középiskolai számítástechnika tanári szakot is. A kecskeméti Zrínyi Ilona Általános Iskolában kezdte el tanári pályáját, majd a Kodály Zoltán Általános Iskola, Gimnázium és Zeneművészeti Szakközépiskola informatikatanára lett. 2003-tól a Kecskeméti Református Általános Iskolában tanít matematikát. Munkáját nagy odaadással, szakmai hozzáértéssel végzi. Évek óta a kecskeméti városi matematika szakkör vezetője. Tanítványai rendszeres résztvevői a Varga Tamás, Zrínyi Ilona, Kenguru, Bátaszéki matematikaversenyeknek, ahol többször végeztek az első három hely valamelyikén. Több tanítványa eredményesen vett részt az Abacus matematikai lapok pontversenyén. Már főiskolás korában bekapcsolódott az akkor induló Zrínyi Ilona Matematikaverseny szervezésébe. Az országos forduló szervezését segíti, 1993-tól a verseny feladatsorának egyik összeállítója. 1994-től a verseny után minden évben megjelenő feladatgyűjtemény szerzője és szerkesztője. A Gordiusz verseny megyei bizottság elnöke és szervezi az országos döntőt. 2000-től a Matematikában Tehetséges Gyermekekért Alapítvány Kuratóriumának tagja. Kezdetektől aktívan részt vesz az Abacus matematikai lapok szerkesztésében. Az idei tanévtől a Varga Tamás Matematikaverseny szervezőbizottságának elnöke. Kezdeményezője és több kötet társszerzője volt a 2005-ben elindított Kecskeméti Matematikai Füzetek könyvsorozatnak. Rendszeres látogatója a Rátz László Vándorgyűlésnek, 2010-ben a kecskeméti vándorgyűlés szervezésében komoly részt vállalt. A tanárok versenyében az általános iskolai kategória háromszoros győztese. 2007-ben Ericsson-díjban részesült.

Németh Julianna 1982 óta az Áldás Utcai Általános Iskola tanítója. Dinamikus, határozott egyénisége pozitívan hat az alsó tagozatos munkaközösség munkájára. Az iskolai pedagógiai munkában a tervezéstől a feladatok megvalósításáig minden szinten aktív résztvevő. Komoly hivatástudattal és szeretettel foglalkozik tanítványaival. 2000-től a Tanítóképző Főiskola szakvezető tanára. Rendszeresen szervezi a csoport előtti tanítási és a 10 hetes gyakorlatokat. A főiskola felkérésére 3. éve részt vesz a hallgatók államvizsgáztatásában.

2009-ben elnyerte a „kiváló szakvezető" elismerést. A tehetséggondozásban és versenyeztetésben is aktív szerepet vállal, diákjai különböző tantárgyakhoz kapcsolódó versenyeken érnek el kiemelkedő eredményeket. Pl. vers- és prózamondó verseny, fővárosi mesemondó verseny, a Bolyai magyar és matematika csapatverseny területi fordulója, Zrínyi Ilona Matematikaverseny országos fordulója. 2004 óta kerületi munkaközösség-vezető. Egyéni ötletei, módszertani javaslatai felfrissítették a kerület szakmai életét. Nagyon jó kapcsolatot alakított ki a kerületi PSZK-val, akik minden évben elismerően nyilatkoznak munkájáról. Második éve a tehetségtanács aktív tagja. 2007-ben az iskola javaslatára polgármesteri dicséretben részesült.

Polcz Katalin 1973-tól 1994-ig a Pécsi Nagy Lajos Gimnáziumban (ma Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma), 1994-től 1997-ig az Apáczai Nevelési Központban, 1997-től a Janus Pannonius Gimnáziumban tanít matematikát. 39 éves pályafutását igényes és magas szakmai színvonal, lelkiismeretesség, precizitás, az új dolgok iránti fogékonyság jellemzi. Középiskolai tanárként sokat tett a tehetséges tanulók fejlesztéséért, versenyeztetéséért. Tagja volt annak a csoportnak, amely Magyarországon elindította, és éveken keresztül szervezte a Gordiusz Matematika Versenyt. Nemcsak szervezőként, hanem feladatkitűzőként és lektorként is részt vett a munkában. Kollégáival és tanítványaival jó a kapcsolata, segítőkész, ezért szakmai témában sokszor kérnek tőle tanácsot.

A matematika tagozatos osztály osztályfőnökeként komoly mentori munkát végzett. Nemcsak a tehetséges, de az átlagos képességű tanulókkal is képes megszerettetni tantárgyát. Tanítványai rendszeresen szerepeltek a KöMaL feladatmegoldó versenyén, valamint országos és megyei matematikaversenyeken sokszor az élmezőnyben végeztek. Kiemelkedő eredményeket értek el az Arany Dániel, a Gordiusz, a Kenguru, a Zrínyi Ilona országos, a Baranya-Tolna-Somogy területi, illetve a Fejér Lipót, és Zipernowsky megyei matematikaversenyeken. 2000-ben Ericsson-díjban részesült.

Szabó Matúz Magdolna az Újvidéki Egyetem Természettudományi Matematikai Karán matematikus diplomát szerzett. Pályafutását a Zentai Műszaki Középiskolában kezdte, a Szabadkai Matematikai és Nyelvi Gimnáziumban folytatta, végül a Szabadkai Szvetozár Márkovity Gimnáziumban tevékenykedett nyugdíjazásáig. Több diákja is eljutott az Országos Matematikaversenyre, s ott jó helyezést ért el. Egyik alapítója és elnökségi tagja volt az Észak-bácskai Magyar Pedagógus Egyesületnek. Az egyesület keretein belül működő Cofman Judit Tehetségfejlesztő Központnak fő szervezője, amit 2011-ben a Nemzeti Tehetségsegítő Tanács Akkreditált Kiváló Tehetségponttá nyilvánított. A kezdetektől egyik szervezője a szabadkai Nyári Akadémia néven ismertté vált tanítói és tanári továbbképzésnek. A Nemzetközi Magyar Matematikaversenyek állandó résztvevője és délvidéki régióvezetője.

Ösztönzően és kreatívan hatott a 2004-ben először megrendezett Fekete Mihály Emlékversenyre, amely a vajdasági magyar ajkú középiskolás tanulók válogatóversenye a NMMV-re. A versenynek azóta is szervezője. Nyugdíjasként napjainkig a zentai Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium tanára. Több mint 20 éve rendszeres látogatója a Rátz László Vándorgyűlésnek, s azóta sok más fiatal és idősebb kollégát is ösztönzött a vándorgyűlés látogatásának fontosságára.

Szamosfalvy Jánosné 1991-től a Herman Ottó Gimnázium tanára, 1995-től nyugdíjba vonulásáig pedig a gimnázium első számú vezetője volt. Vezetői munkájában a demokratikus, kollegiális stílust képviselte. Megyei szakfelügyelőként és szaktanácsadóként sok éven át segítette a középiskolák matematikatanárait. OKTV bizottsági tagként versenyek feladatlapjait állította össze, és javította a középdöntők és a döntők dolgozatait. Országos alkotó munkaközösség vezetőjeként NAT-kompatibilis matematika-tantervet készített a középiskolák számára. 2004-ig szakértőként sok országos mérés mérőlapjainak elkészítésében és értékelésében vett részt. Háromfős bizottság tagjaként központi írásbeli feladatsorokat készített a nyolc évfolyamos gimnáziumba jelentkezők mérésére, 2005 és 2007 között ezek lektorálását végezte az OKÉV felkérésére. A Miskolci Egyetem Matematika Tanszékének támogatásával tehetséges tanulók önképzőkörét vezette, felkészítette őket nemzetközi konferenciákra. A Bolyai János Matematika Társulat megyei tagozatának alelnökeként Európai Matematika Kongresszusokat szervezett. Minőségbiztosítási szakértőként miskolci iskolákban koordinálta partnerközpontú működés kialakítását. A miskolci Szakértők Regionális Egyesületének alelnöke. A Borsodi tagozat Oktatási Bizottságának elnökeként Ifjúsági Matematikai Kongresszusokat szervez. A 2001. évi miskolci Rátz László Vándorgyűlés szervezésében komoly szerepet vállalt.

Grünwald Géza-emlékérem

2013-ban a Grünwald Géza-emlékéremre tíz jelölés érkezett. A bizottság idén is örömmel állapította meg, hogy a jelöltek igen magas tudományos színvonalat képviselnek, ami jelzi a Grünwald-emlékérem társadalmi és tudományos elismertségét. A Bolyai Társulat évente legfeljebb négy díjat adhat ki, ezért a bizottságnak különösen nehéz feladat volt a sok érdemes jelölt közül a díjazottakat kiválasztani. Hangsúlyozzuk, hogy eredményeik alapján a díjra négynél többen is érdemesek lettek volna. Végül a bizottság szavazatai alapján az idei a díjazottak a következők: **Harangi Viktor, Makó Judit, Pach-Pluhár Gabriella** és **Vas Gabriella.**

Indoklás: *Harangi Viktor* 1983-ban született, 2007-ben szerzett matematikus diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, majd 2011-ben PhD fokozatot ugyanott Keleti Tamás témavezetésével. Jelenleg a University of Toronto posztdoktori ösztöndíjasa.

Harangi Viktornak 8 tudományos publikációja van, köztük számos rangos nemzetközi folyóiratban, valamint további két dolgozata van jelenleg elbírálás alatt. Nagyon sokoldalú matematikus, így több területen kutatott már, remekül tudja ötvözni a matematika különböző ágainak (valós függvénytan, geometriai mérték-elmélet, kombinatorika, valószínűség-számítás, geometria, csoportelmélet) módszereit. Carbery egy kérdését megválaszolva megmutatja, hogy a von Koch-féle hópehelygörbe tubus-nulla, azaz tetszőleges kis össz-szélességű sávrendszerrel lefedhető. Becslést ad arra, hogy hány pontot lehet megadni R^d-ben úgy, hogy bármely három pont hegyesszögű háromszöget határozzon meg, megjavítva ezzel Erdős és Füredi egy régi eredményét minden $d > 3$-ra. Becslést ad arra, hogy milyen nagy lehet R^d-ben egy olyan mérhető halmaz Hausdorff-dimenziója, amely nem tartalmaz adott szöget vagy adott szöghöz közeli szöget. Legújabb kutatásai egyikében azt vizsgálja, hogy milyen nagy független halmaz van egy nagy véletlen 3 reguláris gráfban? Az eddigi alsó korlátok a mohó algoritmus különböző változatain múltak. Társszerzőivel megjavítják ezeket a becsléseket, egy teljesen új, véletlen spektrális módszerrel. Publikációinak mélysége mellett tehát azoknak sokszínűsége is figyelemreméltó.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Harangi Viktor a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Makó Judit 1983-ban született, 2007-ben szerzett matematikus diplomát a Debreceni Egyetemen, majd 2013-ban PhD fokozatot ugyanott Páles Zsolt témavezetésével. Jelenleg tanársegéd a Miskolci Egyetemen.

Makó Juditnak 8 publikációja van, köztük számos rangos nemzetközi folyóiratban, valamint további egy dolgozata van jelenleg elbírálás alatt. Tudományos kutatómunkáját a függvényegyenlőtlenségek témakörében végzi. 2010-ben a Takagi-típusú függvények approximatív konvexitásával kapcsolatban Páles Zsolttal közösen egy 10 éve megoldatlan extremalitási problémát oldott meg, amely jelentős nemzetközi érdeklődést keltett. A Takagi-típusú függvények egy általános osztályára kapott eredményük pedig a Berstein–Doetsch-tételt általánosítja. További kutatásaikban az erős és az approximatív konvexitás hibatagjának javítására vonatkozó nem-triviális eredményeket bizonyítanak. További 3 dolgozatában az approximatív konvexitás és az approximatív alsó és felső Hermite–Hadamard-féle egyenlőtlenség kapcsolatát vizsgálja, és bizonyít értékes eredményeket.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Makó Judit a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Pach-Pluhár Gabriella 1984-ben született, 2009-ben diplomázott angol–matematika szakon az ELTE-n, majd 2012-ben szerzett matematika PhD fokozatot Szabó Csaba témavezetésével ugyanott. Jelenleg a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium tanára, 2013 júniusától szülési szabadságon van.

Pach-Pluhár Gabriellának 9 tudományos publikációja van, köztük számos rangos nemzetközi algebrai szakfolyóiratban. További két tudományos dolgozata van elbírálás alatt, valamint 3 módszertani cikknek is társszerzője a matematikaoktatás témájában. Kutatásainak fő iránya a félcsoportelmélet és az univerzális algebra határterülete, de bekapcsolódott diszkrét geometriai kutatásokba is. Eredményeinek nemzetközi elismerését a cikkeire történt számos hivatkozás is jól jelzi. Első eredményei a kötegvarietások szabad spektrumát jellemzik: Japheth Wood amerikai kutatóval közösen a valódi kötegvarietások spektrumának logaritmusára ad aszimptotikus becslést. Második cikkét Szabó Csabával közösen írta, ebben az összes köteg varietásának szabad spektrumára adnak aszimptotikus becslést. A fenti eredmények nyomán előtérbe került a félcsoportvarietások szisztematikus vizsgálata a szabad spektrumot illetően. Pach-Pluhár Gabriella ezt néhány fontos félcsoportosztály esetében sikerrel el is végezte. Egy további cikkében Pach-Pluhár Gabriella társszerzőkkel félhálók iterált szemidirekt szorzatai által generált varietások szabad spektrumát vizsgálja. Pach-Pluhár Gabriella bekapcsolódott a Szegedi Tudományegyetem diszkrét geometriai témájú kutatásaiba is. E munkája alapján három cikke született, a témában legismertebb eredménye Czédli Gábor egy kétdimenziós eredményét általánosítja tetszőleges magasabb dimenzióra.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Pach-Pluhár Gabriella a Grünwald Gézaemlékéremben részesül.

Vas Gabriella 1983-ban született, 2006-ban szerzett matematikus diplomát a Szegedi Tudományegyetem, majd 2011-ben PhD fokozatot ugyanott Krisztin Tibor témavezetésével. Jelenleg az MTA-SZTE Analízis és Sztochasztika Kutatócsoportban tudományos munkatárs.

Vas Gabriellának 5 tudományos publikációja van, köztük egy különösen nagy terjedelmű egy rangos nemzetközi folyóiratban. További egy dolgozata van elbírálás alatt. Vas Gabriella kutatási területe a differenciálegyenletek, dinamikus rendszerek elmélete. Egyik cikkében azt mutatja meg, hogy egy késleltetett negatív visszacsatolást modellező egyenlet dinamikája igen bonyolult lehet. Hans-Otto Walther egy 2001-es konstrukcióját ötletes technikával módosítva megmutatja, hogy van olyan nem-linearitás, amellyel az egyenletnek végtelen sok periodikus pályája lesz. Eredményeiből a kapott periodikus pályák hiperbolicitása és orbitális aszimptotikus stabilitása is következik. Egy másik dolgozatában egy lineáris késleltetett argumentumú differenciálegyenlet fundamentális megoldása abszolút értékének az integrálját vizsgálja. A lineáris, szemilineáris egyenletek vizsgálatában a konstans-variációs formula alkalmazása során a vizsgált integrál fontos szerepet játszik stabil egyensúlyi helyzetek vonzási tartományának becslésében. A kapott eredmények a kritikus paraméterérték közelében élesek. Legnagyobb visszhangot kiváltó munkájában Krisztin Tiborral közösen olyan idegsejthálózatok modellezésében is előforduló egyenletet vizsgál, amelynek öt egyensúlyi helyzete van. A legkisebb, középső és legnagyobb egyensúlyi helyzet lokálisan aszimptotikusan stabil, a másik kettő instabil. A cikk fő eredménye az, hogy az öt egyensúlyi helyzet esetében a globális attraktor bonyolultabb lehet, mint egy már korábbról az irodalomból ismert két orsószerű objektum egyesítése. A dolgozat eredményei komoly nemzetközi érdeklődést váltottak ki.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Vas Gabriella a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Farkas Gyula-emlékdíj

A bizottság a beérkezett javaslatok alapján 2013-ban három Farkas Gyula-emlékdíjat adományoz. A díjazottak: **Buza Krisztián, Domokos Csaba** és **Hulmán-Knipl Diána.**

Indoklás: *Buza Krisztián* középiskolai tanulmányait a dunaújvárosi Széchenyi István Gimnáziumban végezte. Egyetemi diplomáját a BME informatika szakán szerezte 2007-ben. 2007-től Németországban, a Hildesheim Egyetemen PhD képzésben vett részt, miközben az egyetem kutatási asszisztensként alkalmazta. A PhD fokozatot 2011-ben szerezte meg summa cum laude minősítéssel. 2011-től tanársegéd, majd adjunktus a BME Számítástudományi és Információelméleti Tanszékén.

Buza Krisztián kutatási területe az adatbányászat elmélete és gyakorlati alkalmazásai. Ezen belül főként idősorok elemzésével foglalkozott a legtöbbet, több publikációja jelent meg idősorok osztályozására adott új módszerekről. Foglalkozott ezen kívül web adatok elemzésével, ontológia tanulással, szövegbányászattal és szociális háló bányászatával is. Publikációs tevékenysége igen aktív: 28 közleménye van, melyekre 58 független hivatkozás történt. Egyik cikke 2010-ben elnyerte az IEEE Computational Science and Engineering Conference „Legjobb cikk" díját, egy másikat hasonló díjra jelöltek 2012-ben. Az eredményei nagy részét különböző kutatási projektek és ipari megbízások során gyakorlatban is sikerrel felhasználta.

Domokos Csaba 1981-ben született Békéscsabán. 2006-ban programtervező matematikus és informatikatanári, 2010-ben matematikatanári diplomát szerzett a Szegedi Tudományegyetemen. Ezt követően nappali tagozatos PhD hallgatóként folytatta tanulmányait az SZTE Informatika Doktori Iskolájában. A PhD tudományos fokozatot 2011-ben summa cum laude minősítéssel szerezte meg. Témavezetője Kató Zoltán volt. Jelenleg posztdoktori ösztöndíjas a National University of Singapore egyetemen.

Kutatási területe a digitális képfeldolgozás és számítógépes látás témakörén belül a képregisztráció, alakzatok illesztése, szemantikus képszegmentálás, sztereó képek illesztése, illetve mátrixok alacsony rangú közelítése. Doktori disszertációjának témája alakzatok affin transzformációnak paraméterbecslése megfeleltetések nélkül. Ehhez kapcsolódóan több különböző módszert dolgozott ki, melyekkel hatékonyan megoldható a bináris képek affin regisztrációjának problémája, továbbá a deformált objektumdarabok helyreállításának problémája is. A disszertációjában leírt algoritmusok általánosításaként, kidolgozott egy új módszert, mellyel tetszőleges diffeomorfizmus által torzult bináris alakzatok regisztrációja is hatékonyan megoldható.

Eddig 12 publikációja jelent meg többek között olyan rangos folyóiratokban, mint a Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence és a Pattern Recognition, illetve vezető konferenciákon, mint például a European Conference on Computer Vision és az International Conference on Computer Vision. 2011-ben elnyerte a Képfeldolgozók és Alakfelismerők Társasága által odaítélt Kuba Attila-díjat.

Hulmán-Knipl Diána 1986-ban született Pécsett. 2010-ben diplomázott a Szegedi Tudományegyetem alkalmazott matematikus szakán, ugyanezen év szeptemberében kezdte meg PhD tanulmányait az SZTE Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolájában Dr. Röst Gergely témavezetése alatt. 2012 óta az MTA–SZTE Analízis és Sztochasztika Kutatócsoport tudományos segédmunkatársa, jelenleg a doktori fokozat megszerzése előtt áll.

Kutatási területe a matematikai biológia, ezen belül leginkább differenciálegyenletes járványterjedési modellekkel foglalkozik. Az influenzajárvány modellezésével kapcsolatos munkái nagy hazai és nemzetközi visszhangot váltottak ki. A 2009-es H1N1 pandémia által motiválva témavezetőjével és az Országos Epidemiológiai Központtal együttműködésben kidolgozott egy korcsoportos modellt a járvánnyal párhuzamosan futó védőoltási kampány optimalizálására. Legutóbbi projektjükben, mely közös a torontói York Egyetem Centre for Disease Modeling csoportjával, fertőző betegségek távoli régiók közötti terjedését vizsgálták valós légiközlekedési adatok felhasználásával.

Öt tudományos publikációt jegyez, munkái többek között olyan rangos nemzetközi folyóiratokban jelentek meg, mint a Mathematical Biosciences and Engineering és a SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. Ezen kívül egy interaktív demonstráció és egy elektronikus könyvfejezet is a nevéhez fűződik. 2012-ben elnyerte a 6. Európai Matematikai Kongresszus legjobb poszterének járó díját, 2013-ban pedig sikerrel pályázott a Nemzeti Kiválósági Program Apáczai- és Jedlik-ösztöndíjaira.

Rényi Kató-emlékdíj

A Rényi Kató-emlékdíj első fokozatában részesül **Kunos Ádám,** a Szegedi Tudományegyetem matematikus mesterszakos hallgatója és **Szikszai Márton,** a Debreceni Egyetem Matematikai és Számítástechnikai Doktori Iskolájának hallgatója. A Rényi Kató-emlékdíj második fokozatában részesül **Vizi Zsolt,** a Szegedi Tudományegyetem Matematikai Doktori Iskolájának hallgatója.

Kunos Ádám [1] dolgozatában azt a $(D, \leq)$ részbenrendezett halmazt vizsgálja, amelynek elemei a véges irányított gráfok, és $A \leq B$ akkor teljesül, ha A beágyazható B-be. Az élek megfordítása (transzpozíció) nyilvánvalóan $(D, \leq)$ automorfizmusát adja. Kunos megmutatja, hogy más automorfizmus nincs. Továbbá igazolja azt a meglepő tényt, hogy transzponált erejéig minden véges irányított gráf definiálható $(D, \leq)$-ben.

Czédli és Kunos [2] dolgozatukban azt igazolják, hogy páros $n \geq 4$ esetén pontosan akkor szerkeszthető n-oldalú húrsokszög az oldalhosszakból, ha $n = 4$. Páratlan n-re a megfelelő állítást $n \leq 769$-re igazolták. A tétel érdekessége, hogy 1993-ban Schreiber már publikálta, azonban, mint Czédli és Kunos rámutat, bizonyítása hibás.

Kunos Ádám publikációi

[1] Á. Kunos: Definability in the embedding ordering of finite directed graphs, *Order*, elbírálás alatt.

[2] G. Czédli, Á. Kunos: On the geometric constructibility of cyclic polygons with an even number of vertices, *Proc. Amer. Math. Soc.,* elbírálás alatt.

[3] Kunos Á.: Amit érdemes általánosítani, *Polygon,* **XX**(2012), 33–48.

[4] Danka T., Kunos Á.: Valós függvények előállítása kompozícióként, *Polygon,* elbírálás alatt.

Szikszai Márton Hajdu Lajossal közös [1] dolgozatában Pillai nevezetes problémáját terjeszti ki lineárisan rekurzív sorozatokra, megmutatva, hogy elég nagy k esetén mindig van k egymás utáni tag, hogy egyikük sem relatív prím a többi szorzatához. (A Fibonacci-sorozat esetén $k = 25$ a legkisebb ilyen érték.) [2] dolgozatukban ezt a tulajdonságot elliptikus görbékből definiált sorozatokra igazolják, és jelenleg publikálatlan munkában Szikszai ezt további sorozattípusokra is kiterjesztette.

Szikszai Márton publikációi

[1] L. Hajdu, M. Szikszai: On the GCD-s of k consecutive terms of Lucas sequences, *Journ. Number Th.,* **132**(2012), 3056–3069.

[2] L. Hajdu, M. Szikszai: On common factors within a series of consecutive terms of an elliptic divisibility sequence, *Publ. Math. Debrecen,* megjelenés alatt.

Vizi Zsolt dolgozatában olyan járványterjedési modelleket vizsgál, amelyekben nem folyamatos, hanem impulzív, azaz diszkrét, kampányszerű vakcináció folyik. A cikk teljes bifurkációs analízist végez, és explicit, szükséges és elégséges feltételt ad arra, mikor lesz backward bifurkáció, azaz szubkritikus endemikus periodikus megoldások. A tétel technikai és hosszadalmas bizonyításának fő eleme a Ljapunov–Schmidt-féle redukciós eljárás. Ez az első eredmény a szakirodalomban, amely impulzív vakcináció mellett backward bifurkációt igazol.

Vizi Zsolt publikációja

[1] G. Röst, Zs. Vizi: Backward bifurcation for pulse vaccination, *Nonlinear Analysis,* elbírálás alatt.

Patai László Alapítvány díja

A bizottság a „Patai László Alapítvány" díját 2013-ban **Gosztonyi Katalinnak** ítéli oda.

Indoklás: *Gosztonyi Katalin* kutatásai Varga Tamásnak, a XX. század nemzetközi mércével mérve is egyik legnagyobb hatású matematika didaktikusának munkásságához kapcsolódnak. Ezen matematikatörténeti és matematikadidaktikai kutatásokat Alian Kuzniak professzor és Kosztolányi József irányításával végzi. Az előzetes tervek szerint Gosztonyi Katalin 2015-re elkészülő doktori értekezését mindkét egyetemen – az SZTE és az Université Paris 7 – be fogja nyújtani, és a vélhetően sikeres párizsi védést követően PhD fokozatát a két egyetemtől közösen kapja meg.

Kutatásainak fő kérdése az, hogy Varga Tamás matematikatanítási kísérletei, kutatásai, reformjai (komplex matematikatanítás) milyen hazai és nemzetközi kulturális és tudományos gyökerekből táplálkoztak, és milyen konkrét hatással voltak a magyarországi és külföldi matematikatanítási gyakorlatra. Ezek a kutatások átfogó jellegüknél fogva úttörőjellegűek. Ennek oka, hogy bár jelentek meg tanulmányok hazai és külföldi szerzőktől is a témához kapcsolódóan, ezek vagy egy speciális területen vizsgálták Varga Tamás munkásságának hatását, vagy kifejezetten vázlatos, kronológiai jellegű összefoglalását adták a kor kutatásainak, reformjainak. Gosztonyi Katalin kutatásai fontosak abból a szempontból is, hogy folytathatók. Ez két dolgot jelent: egyrészt a jelölt tudományos fokozatának megszerzése után is kutathat ezen a területen, másrészt témát, kutatási lehetőséget biztosít másoknak is.

Gosztonyi Katalin okos, tájékozott, igen jelentős enciklopédikus tudását kreatív módon mobilizálni képes doktorjelölt. Mindehhez páratlan szorgalom, tanulmányi és kutatási munkájában szinte karizmatikus elszántság párosul. Emellett kiválóak a kommunikációs képességei (beszél franciául és angolul), és már most jelentős tudományos kapcsolatrendszerrel rendelkezik hazai és nemzetközi szinten egyaránt.

Gosztonyi Katalin fiatal kora ellenére jelentős oktatási tapasztalattal rendelkezik mind a közoktatásban, mind a felsőoktatásban. Jó tanár, tudását érdekesen, strukturáltan és a hallgatóságra maximálisan odafigyelve képes átadni.

JELENTÉS A 2013. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 2013. október 25. és november 4. között rendezte meg a 2013. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, valamint 2013-ban egyetemet vagy főiskolát végzettek vehettek részt.

A Bolyai János Matematikai Társulat a verseny megrendezésére a következő bizottságot kérte fel: *Pethő Attila* (elnök), *Figula Ágota* és *Gselmann Eszter* (titkárok), *Baran Sándor, Bérczes Attila, Bessenyei Mihály, Bódi Béla, Boros Zoltán, Daróczy Zoltán, Fazekas István, Gaál István, Győry Kálmán, Hajdu Lajos, Horváth Gábor, Kozma László, Losonczi László, Lovas Rezső, Maksa Gyula, Molnár Lajos, Muzsnay Zoltán, Nagy Péter Tibor, Páles Zsolt, Pintér Ákos, Szilasi József, Sztrik János, Tamássy Lajos, Tengely Szabolcs, Terdik György.*

A versenybizottság 12 feladatot tűzött ki. A feladatokat sorrendben *Balog Antal, Pink István, Pálfy Péter Pál, Halasi Zoltán, Nagy Péter Tibor, Molnár Lajos, Boros Zoltán, Daróczy Zoltán, Maksa Gyula* és *Páles Zsolt, Tamássy Lajos* és *Kertész Dávid, Tran Quoc Binh,* valamint *Móri Tamás* bocsátotta a bizottság rendelkezésére.

A versenyre 13 versenyző 53 megoldást nyújtott be, melyek közül 31 volt hibátlan. Az alábbi táblázatban pontok jelzik, hogy a versenyzők mely feladatokra nyújtottak be megoldásokat.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ágoston Tamás		•	•					•				
Bodor Bertalan	•		•	•				•				•
Csizmadia Gábor Béla	•	•		•	•			•		•		
Kiss Melinda Flóra		•	•									
Kutas Péter							•					
Mészáros András		•		•				•		•		•
Mészáros Szabolcs			•	•		•		•	•	•	•	•
Nagy Donát								•		•		
Nagy János	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	
Szilágyi Gergely Bence							•	•				
Ta The Anh	•	•				•	•	•				
Virosztek Dániel										•	•	•
Weisz Ágoston								•				

A megoldások értékelése után a versenybizottság a következő döntést hozta.

I. díjban részesül **Nagy János,** az ELTE harmadéves Matematika BSc hallgatója.

II. díjban részesül **Bodor Bertalan,** az ELTE első éves Matematika MSc hallgatója, **Mészáros András,** az ELTE első éves Matematika MSc hallgatója és **Mészáros Szabolcs,** az ELTE másodéves Matematika MSc hallgatója.

III. díjban részesül **Ta The Anh,** az ELTE harmadéves Matematika BSc hallgatója.

Dicséretben részesül **Ágoston Tamás,** az ELTE másodéves Matematika BSc hallgatója, **Nagy Donát,** ELTE harmadéves Matematika BSc hallgatója és **Virosztek Dániel,** a BME 2013-ban végzett másodéves Matematika MSc hallgatója.

Indoklás

Nagy János 10 feladatra nyújtott be megoldást; a 2., 4., 7., 8., 10. és 11. feladatokra adott megoldása teljes; a 3. és az 5. feladatra adott megoldása hiányos, de javítható; a 9. feladat második részét lényegében jól oldotta meg, az 1. feladattal kapcsolatban részeredményeket ért el.

Bodor Bertalan 5 feladatra nyújtott be megoldást; a 3., 8. és 12. feladatokra adott megoldása teljes; az 1. feladatra lényegében jó megoldást adott, a 4. feladatra adott megoldása hiányos.

Mészáros András 5 feladatra nyújtott be megoldást; a 2., 4., 10. és 12. feladatokra adott megoldása teljes; a 8. feladatban egy kicsit gyengébb állítást bizonyít a kitűzöttnél.

Mészáros Szabolcs 8 feladatra nyújtott be megoldást; a 3., 8., 10. és 11. feladatokra adott megoldása teljes; a 9. feladat második részét jól oldotta meg, és az első rész megoldása is tartalmaz jó gondolatokat.

Ta The Anh 5 feladatra nyújtott be megoldást; a 2., 6. feladatokra adott megoldása kiemelkedő, és jól oldotta meg a 8. feladatot is.

Ágoston Tamás 3 feladatra nyújtott be megoldást; a 3. és 8. feladatokra adott megoldása teljes.

Nagy Donát a 8. és a 10. feladatra nyújtott be jó megoldást.

Virosztek Dániel 3 feladatra nyújtott be megoldást; a 12. feladatra adott megoldása kiemelkedő, jól oldotta meg a 10. feladatot, a 11. feladatra benyújtott megoldása hiányos.

A feladatok és megoldásaik

1. feladat (Balog Antal). *Legyen $q \geq 1$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy van olyan C_q egész szám, hogy minden egész számokból álló véges A halmazra*

$$|A + q \cdot A| \geq (q+1)|A| - C_q. \qquad (1)$$

($A + q \cdot A$ azon egész számokból áll, melyek felírhatók $a + qa'$ alakban $a, a' \in A$-val.)

Megoldás (Balog Antal). Az itt leírt bizonyításból $C_q = q^2 2^{(q-2)(q+1)}$ adódik, ami messze van az optimálistól. A, B végig egész számok véges nem üres halmazát jelölik, de megjegyezzük, hogy az első két állítás valós számokra is igaz (azonos bizonyítással). A megoldás során semmilyen ismert vagy ismeretlen eredményre nem hivatkozunk. Illetve egyre mégis. Ha $\mathrm{lnko}(d_1, \ldots, d_k, q) = 1$, akkor modulo q minden maradékosztály kifejezhető $d_1 n_1 + \ldots + d_k n_k$ alakban. (lnko a legkisebb közös osztót jelöli.)

1.1. állítás.

$$|A+B| \geq |A| + |B| - 1. \tag{2}$$

Bizonyítás. Legyenek $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_m\}$ és $B = \{b_1 < b_2 < \ldots < b_n\}$. A következő felsorolás $m+n-1$ elemet tartalmaz $A+B$-ből.

$$a_1 + b_1 < a_1 + b_2 < \ldots < a_1 + b_n < a_2 + b_n < a_3 + b_n < \ldots < a_m + b_n. \ \blacksquare$$

1.2. állítás. *Minden $q \geq 2$ esetén*

$$|A + q \cdot A| \geq 3|A| - 2. \tag{3}$$

Bizonyítás. Legyen $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_m\}$. A következő felsorolás $3m-2$ elemet tartalmaz $A + q \cdot A$-ból.

$$a_1 + qa_1 < a_2 + qa_1 < a_1 + qa_2 < a_2 + qa_2 < a_3 + qa_2 < a_2 + qa_3 <$$
$$< \ldots < a_m + qa_m. \ \blacksquare$$

Feltehetjük, hogy $q \geq 3$, mert az 1. és 2. állítások megoldják a feladatot $q = 1$ és $q = 2$ esetben, továbbá $C_1 = 1$ és $C_2 = 2$. Könnyű példát mutatni arra, hogy ezek az értékek optimálisak, de nagyobb q-ra már nem sikerül az optimális C_q-t megtalálni a jelen módszerrel.

Jegyezzük meg, hogy az A halmaz elemeire alkalmazott lineáris transzformáció sem A, sem $A + q \cdot A$ méretét nem befolyásolja. Osszuk fel A-t q szerinti maradékosztályokra, azaz

$$A = \bigcup_{j=1}^{r} A_j, \quad A_j = a_j + q \cdot B_j, \quad 0 \leq a_j < q, \quad B_j \neq \emptyset, \tag{4}$$

ahol az unió diszjunkt, és az a_j egészek különbözőek. Nyilván $1 \leq r \leq q$. Ha valamilyen $1 \leq j \leq r$ esetén

$$\mathrm{lnko}(a_1 - a_j, a_2 - a_j, \ldots, a_r - a_j, q) = 1 \tag{5}$$

nem teljesül, akkor A-t eltoljuk a_j-vel (balra), és leosztjuk a fenti lnko-val, így kapunk egy új A halmazt (ami természetesen más maradékosztályokban oszolhat el). Ha ez az új rendszer sem teljesíti (5)-öt minden j-re, akkor ismét tolunk és osztunk. Mivel minden osztás csökkenti A legnagyobb és legkisebb elemei közti különbséget (A átmérőjét), előbb-utóbb (5)-nek minden j-re igaznak kell lenni. Ekkor mondjuk azt, hogy A redukált. Ha A redukált, akkor $2 \leq r \leq q$, hiszen $\mathrm{lnko}(a_1 - a_1, q) = q$. Ha $r = q$, azaz A modulo q minden maradékosztályba belemetsz, akkor azt mondjuk, hogy A *teljesen szétosztott modulo* q, röviden A *telosz* mod q.

1.3. állítás. *Ha A (4) szerkezetű* mod q, *akkor*

$$|A + q \cdot A| \geq (r+1)|A| - r.$$

Bizonyítás. Nyilván minden $k \neq j$-re

$$|A_j + q \cdot A| \geq |A_j + q \cdot A_j| + \left|\left(A_j + q \cdot A_k\right) \setminus \left(A_j + q \cdot A_j\right)\right|,$$

és vegyük észre, hogy (eltolva $(q+1)a_j$-val balra, majd leosztva q-val)

$$\left|\left(A_j + q \cdot A_k\right) \setminus \left(A_j + q \cdot A_j\right)\right| =$$

$$= \left|\left(a_j + q \cdot a_k + q \cdot B_j + q^2 \cdot B_k\right) \setminus \left(a_j + q \cdot a_j + q \cdot B_j + q^2 \cdot B_j\right)\right| =$$

$$= \left|\left(a_k - a_j + B_j + q \cdot B_k\right) \setminus \left(B_j + q \cdot B_j\right)\right|.$$

Indirekt érveléshez tegyük fel, hogy ez utóbbi $< |A_k| = |B_k|$. Ekkor minden $b_0 \in B_j$-hez van $b' \in B_k$ úgy, hogy $a_k - a_j + b_0 + qb' \in B_j + q \cdot B_j$, azaz minden $b_0 \in B_j$-hez van $b_1 \in B_j$ úgy, hogy

$$a_k - a_j + b_0 \equiv b_1 \pmod{q}.$$

Megismételve az eljárást $b_1 \in B_j$-vel, és így tovább n-szer, azt kapjuk, hogy van olyan $b_n \in B_j$, hogy $n(a_k - a_j) + b_0 \equiv b_n \pmod{q}$. Sőt, megismételve az eljárást minden $k \neq j$-vel végül azt kapjuk, hogy minden $b_0 \in B_j$ és n_m egészekhez van olyan $b \in B_j$, hogy $n_1(a_1 - a_j) + \ldots + n_r(a_r - a_j) + b_0 \equiv b \pmod{q}$. Ez viszont azt jelenti, hogy B_j *telosz* mod q, hiszen feltettük, hogy (5) teljesül. ∎

1.4. állítás. *Legyen $q \geq 3$ rögzített. Minden $3(q+1) \leq m \leq (q+1)^2$ és minden nem üres véges A esetén*

$$|A + q \cdot A| \geq \frac{m}{q+1}|A| - q^2 2^{m-3(q+1)}. \tag{5}$$

Bizonyítás. A bizonyítás m szerinti teljes indukcióval történik. $m = 3(q+1)$ estén következik az 1.2. állításból. Tegyük fel, hogy az 1.5. állítás igaz $3(q+1) \leq m < (q+1)^2$ esetén, és mutassuk meg, hogy akkor igaz $m+1$-re is. A rövidebb írásmód érdekében jelöljük

$$c_m = q^2 2^{m-3(q+1)}.$$

Legyen A egy tetszőleges nem üres, véges, egész számokból álló halmaz. Feltehetjük, hogy A (4) szerkezetű és redukált, azaz teljesíti (5)-öt. 1.1. állítás és az indukciós feltevés miatt minden $1 \leq k \leq r$-re

$$|A + q \cdot A| \geq |A_k + q \cdot A| + \left|(A \setminus A_k) + q \cdot (A \setminus A_k)\right| \geq$$

$$\geq |A_k| + |A| - 1 + \frac{m}{q+1}|A \setminus A_k| - c_m \geq \frac{m+1}{q+1}|A| - c_{m+1},$$

amennyiben

$$|A_k| + |A| - \frac{m}{q+1}|A_k| \geq \frac{1}{q+1}|A|,$$

ami biztosan teljesül, ha

$$|A_k| \le \frac{1}{q+1}|A|.$$

Maradnak azok az esetek, amikor minden A_k nagy, azaz

$$\min |A_k| > \frac{1}{q+1}|A|. \tag{9}$$

Ha van olyan j, hogy B_j nem *telosz* modulo q, akkor az 1.4. állítás, (9) és az indukciós feltevés miatt

$$|A + q \cdot A| \ge |A_j + q \cdot A_j| + \min_{k \ne j} |A_k| + \big|(A \setminus A_j) + q \cdot (A \setminus A_j)\big| \ge$$

$$\ge \frac{m}{q+1}|A_j| - c_m + \frac{1}{q+1}|A| + \frac{m}{q+1}|A \setminus A_j| - c_m = \frac{m+1}{q+1}|A| - c_{m+1}.$$

Végül, ha minden B_j *telosz* mod q, akkor az 1.3. állítás szerint

$$|A + q \cdot A| \ge \sum_{j=1}^{r} |A_j + q \cdot A_j| = \sum_{j=1}^{r} |B_j + q \cdot B_j| \ge$$

$$\ge \sum_{j=1}^{r} \big((q+1)|A_j| - q\big) = (q+1)|A| - rq \ge \frac{m+1}{q+1}|A| - c_{m+1}. \ \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy ez az utolsó becslés az, ahol lényeges, hogy $m + 1 \le (q+1)^2$, azaz, ez akadályoz meg minket abban, hogy $(q+1)|A| - C_q$-nál jobb alsó becslést adjunk, ami természetesen nem is lenne igaz.

A feladatot lényegében jól oldotta meg Bodor Bertalan. Nagy János részeredményeket ért el.

2. feladat (Pink István). *Mutassuk meg, hogy létezik olyan k_0 konstans, hogy az*

$$a^{2n} + b^{4n} + 2013 = ka^n b^{2n} \tag{1}$$

egyenletnek $k \ge k_0$ esetén nincs pozitív egész a, b, n megoldása.

Megoldás (Ta The Anh)**.** Az $a^n = x$, $b^{2n} = y$ helyettesítéssel az (1) egyenletből az

$$x^2 + y^2 + 2013 = kxy \tag{2}$$

diophantoszi egyenletet kapjuk. Először megmutatjuk a következőt:

2.1. állítás. *Ha a (2) egyenletnek van x, y pozitív egész megoldása, akkor $k \le 2 \cdot 2013^2 + 2013$.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $0 < x \leq y$. A (2) egyenletet átrendezve azt nyerjük, hogy

$$(kx - y)y = x^2 + 2013,$$

amiből, egyrészt adódik, hogy

$$kx - y > 0,$$

másrészt $0 < x \leq y$ miatt azt kapjuk, hogy $(kx-y)y = x^2+2013 \leq xy+2013$. Ezért nyilván

$$kx - y \leq x + \frac{2013}{y}.$$

is teljesül.

1. eset. Ha $y > 2013$, akkor

$$kx - y \leq x + \frac{2013}{y} < x + 1,$$

és ezért

$$0 < kx - y \leq x \leq y.$$

Vegyük észre, hogy ha (x, y) megoldása (2)-nek, akkor $(kx - y, x)$ is az. Ebből az adódik, hogy

(a) vagy $kx - y = x$,

(b) vagy $\min(x, y)$ csökken, ha $y > 2013$.

Az (a) esetben nyilván

$$xy = x^2 + 2013$$

teljesül, és így

$$\frac{y}{x} = 1 + \frac{2013}{x^2}$$

is fennáll. Ezért

$$k = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} = 1 + 1 + \frac{2013}{x^2} \leq 2015 < 2 \cdot 2013^2 + 2013.$$

A (b) esetben, azaz, ha $y > 2013$ esetén a $\min(x, y)$ csökkent, akkor folytatjuk a fent leírt $(x, y) \mapsto (kx-y, x)$ lépést addig, amíg $y \leq 2013$ vagy $kx-y = x$ teljesül.

2. eset. Most tegyük fel, hogy $y \leq 2013$. Ekkor $0 < 1 \leq x \leq y \leq 2013$, így

$$k = \frac{x^2 + y^2 + 2013}{xy} \leq \frac{2013^2 + 2013^2 + 2013}{1 \cdot 1}$$

teljesül.

Tehát mindkét esetben fennáll, hogy $k \leq 2 \cdot 2013^2 + 2013$. Válasszuk a k_0 konstanst $2 \cdot 2013^2 + 2013 + 1$-nek. A 2.1. állítás miatt, ha $k \geq k_0$, akkor a (2) egyenletnek nincsen pozitív egész x, y megoldása. Így az eredeti (1) egyenletnek sincsen pozitív egész megoldása. Ellenkező esetben ugyanis $x = a^n$, $y = b^{2n}$ a (2) egyenlet pozitív egész megoldását szolgáltatná.

A feladatra Kiss Melinda, Mészáros András, Nagy János és Ta The Anh adtak helyes megoldást. Csizmadia Gábor Béla és Ágoston Tamás megoldása hiányos.

3. feladat (Pálfy Péter Pál). *Melyek azok az n számok, melyekre az A_n alternáló csoportban van olyan permutáció, amelyet A_n-nek pontosan egy 2-Sylow részcsoportja tartalmaz?*

Megoldás (Pálfy Péter Pál). Ha $n \leq 4$, akkor A_n-nek egyetlen 2-Sylow részcsoportja van. Az $n = 5$ esetben bármely két 2-Sylow részcsoport metszete csak az egységelemet tartalmazza. A továbbiakban feltesszük, hogy $n \geq 6$. Legyen n felírása 2-hatványok összegeként

$$n = 2^{m_1} + \ldots + 2^{m_k}, \qquad m_1 < \ldots < m_k. \tag{1}$$

Először az S_n szimmetrikus csoport 2-Sylow részcsoportját vizsgáljuk. Világos/jól ismert, hogy ez előáll az $S_{2^{m_i}}$ csoportok 2-Sylow részcsoportjainak direkt szorzataként, továbbá S_{2^m} 2-Sylow részcsoportja nem más, mint az m mélységű gyökeres bináris fa automorfizmuscsoportjának hatása a fa levelein. (A fa csúcsa a legfeljebb m hosszúságú $0-1$ sorozatok, a 0 hosszúságú (üres) sorozat a fa gyökere, az m hosszúságúak a levelek, és minden j hosszúságú ($j = 0, \ldots, m-1$) sorozatot összekötünk azzal a két j hosszúságúval, amelyeket az adott sorozat végére írt 0-val és 1-gyel kapunk.)

3.1. állítás. *Ha $n \geq 6$, akkor A_n minden 2-Sylow részcsoportját S_n-nek pontosan egy 2-Sylow részcsoportja tartalmazza.*

Bizonyítás. Ha adott az A_n-ben egy 2-Sylow részcsoport, akkor azt Sylow tételei következtében tartalmazza legalább egy P 2-Sylow részcsoportja S_n-nek. Azt kell belátnunk, hogy $P \cap A_n$ egyértelműen meghatározza P-t. Ha az (1) felbontásban legalább két 1-nél nagyobb tag van, akkor $P \cap A_n$ és P orbitjai, valamint az orbitokon való hatásuk megegyezik, így a fák $P \cap A_n$-t felhasználva egyértelműen rekonstruálhatóak. Ha $n = 2^m$ vagy $n = 2^m + 1$, akkor $m \geq 3$, és így csak a P-beli páros permutációk között is van olyan részcsoport, ami a fa egyik ágán minden pontot fixen hagy, a másik ág levelein viszont tranzitív, ennélfogva a fa ebben az esetben is egyértelműen rekonstruálható $P \cap A_n$-ből kiindulva.

3.2. állítás. *Ha egy permutáció ciklusai különböző 2 hatvány hosszúságúak, akkor azt S_n-nek egyetlen 2-Sylow részcsoportja tartalmazza.*

Bizonyítás. A ciklusok csak az (1) szerintiek lehetnek. Egy 2^m hosszúságú ciklus egyetlen m mélységű gyökeres bináris fának automorfizmusa.

3.3. állítás. *Ha egy permutációnak két fixpontja van, és az egynél hosszabb ciklusai különböző 2 hatvány hosszúságúak, akkor azt S_n-nek egyetlen 2-Sylow részcsoportja tartalmazza.*

Bizonyítás. A ciklushosszak ekkor a következők: $1, 1, 2, 4, \ldots, 2^{m_1-1}, 2^{m_2}, \ldots, 2^{m_k}$. Ebben az esetben a 2^{m_1} levelű fa is egyértelműen meghatározott, hiszen a két fixpont ugyanannak a pontnak a két leszármazottja kell legyen, a 4 levelet tartalmazó ág másik két pontját a 2-ciklus szolgáltatja stb. A ciklusok pedig az ágakon belül meghatározzák a fa struktúráját.

3.4. állítás. *Ha egy permutáció minden ciklushossza 2-hatvány, és van közöttük két egyenlő, ami 1-nél nagyobb, akkor ezt a permutációt S_n-nek egynél több 2-Sylow részcsoportja is tartalmazza.*

Bizonyítás. Abban az esetben, amikor $n = 2^m \geq 4$, és a permutáció két 2^{m-1} hosszúságú diszjunkt ciklus szorzata, akkor a következőképpen készíthetünk két különböző fát, aminek ez a permutáció automorfizmusa. Először a fa két fő ága álljon egy-egy ciklus pontjaiból. Másodszor viszont vegyünk egy olyan automorfizmust, ami $m-1$ mélységű pontokat egy teljes ciklusban permutálja, mindegyik $m-1$ mélységű pontnak tegyük az egyik leszármazottját az egyik, a másikat a másik ciklusba. Az általános eset ebből az esetből egyszerű indukciós érveléssel kapható.

A 3.1. állításra tekintettel azt kell már csak megnéznünk, hogy a 3.2. és 3.3. állításban szereplő permutációk között van-e A_n-beli, azaz páros permutáció. Ha n páratlan, akkor csak a 3.2. állítás szerinti permutáció lehetséges, és ekkor k-nak, az n kettes számrendszerbeli felírásában az 1-esek számának, páratlannak kell lennie. Ha n páros, akkor a 3.2. állításban szereplő permutáció akkor páros, ha k páros. A 3.3. állításban szereplő permutáció páros hosszúságú ciklusainak száma $(m_1 - 1) + (k - 1)$, tehát páratlan k esetén ez a permutáció akkor páros, ha m_1 páratlan. Tehát pontosan a következő esetek jók: (a) n páratlan, k páratlan; (b) n páros, k páros; (c) (n páros), k páratlan, m_1 páratlan; (d) $n \leq 5$.

Hasonló gondolatmenetet követve oldotta meg a feladatot Ágoston Tamás, Bodor Bertalan és Mészáros Szabolcs. Részeredményeket ért el Nagy János.

4. feladat (Halasi Zoltán). *Legyen A egy n elemű Abel-csoport. Igazoljuk, hogy létezik két, S_n-nel izomorf részcsoport* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$*-ben, melyek metszete izomorf A automorfizmuscsoportjával.*

Megoldás (Mészáros András)**.** Tekintsük az A véges n elemű Abel-csoport lineáris karaktereit, ezek éppen az $A \to \mathbb{C}^*$ homomorfizmusok. Ezekből éppen n darab van. Szükségünk lesz a következő lemmára:

4.1. lemma. *Egy $\pi : A \to A$ permutáció akkor és csak akkor homomorfizmus, ha minden χ karakterére A-nak a $\chi \circ \pi$ leképezés is karaktere A-nak. (Ha π homomorfizmus, akkor persze automorfizmus is automatikusan.)*

Bizonyítás. Egyik irány: Legyen π egy homorfizmus, ekkor minden χ karakterre $\chi \circ \pi$ is egy $A \to \mathbb{C}^*$ homomorfizmus lesz, hiszen két homomorfizmus kompozíciója.

Másik irány: Be szeretnénk látni, hogy $\pi(g_1 + g_2) = \pi(g_1) + \pi(g_2)$ teljesül minden g_1 és g_2 elemére A-nak. Vegyünk egy tetszőleges $\chi : A \to \mathbb{C}^*$ karaktert. Felhasználva, hogy $\chi \circ \pi$ és χ homomorfizmusok: $\chi\big(\pi(g_1 + g_2)\big) = \chi\big(\pi(g_1)\big) \cdot \chi\big(\pi(g_2)\big) = \chi\big(\pi(g_1) + \pi(g_2)\big)$, amiből azt kapjuk, hogy minden χ karakterre $\chi\big(\pi(g_1 + g_2) - \pi(g_1) - \pi(g_2)\big) = 1$. De $0 \in A$ az egyetlen eleme A-nak, mely az A minden karakterének magjában benne van, amiből következik az állítás.

Legyenek az A csoport elemei $g_1, g_2, \ldots, g_n$, karakterei $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$. Legyen K egy $n \times n$-es mátrix, melynek elemei $k_{ij} = \chi_i(g_j)$. Ekkor a karakterek ortogonalitásából $KK^* = nI$. Azaz $U = \frac{1}{\sqrt{n}} K$ egy unitér mátrix.

Legyen G_1 az $n \times n$-es permutációmátrixok csoportja, ez nyilván izomorf S_n-nel. Legyen $G_2 = U^{-1}G_1U$, azaz G_2 a G_1 csoport egy konjugáltja, így G_2 is izomorf S_n-nel. Azt szeretnénk belátni, hogy e két csoport metszete izomorf lesz A automorfizmuscsoportjával. Egy $P \in G_1$ permutációmátrix pontosan akkor lesz benne G_2-ben is, ha létezik olyan Q permutációmátrix, amire $P = U^{-1}QU$, azaz ha UPU^{-1} is egy permutációmátrix.

Mivel rögzítettük az A csoport elemeinek egy indexelését, egy P permutációmátrix meghatározza az A elemeinek egy π permutációját.

Tehát azt kell belátnuk, hogy egy P permutációmátrixra UPU^{-1} pontosan akkor lesz permutációmátrix, ha π automorfizmus. Az UP mátrix elemei $b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}}\chi_i\big(\pi(g_j)\big)$ lesznek. Továbbá UP is egy unitér mátrix lesz. Két U_1 és U_2 unitér mátrixra $U_1U_2^*$ pontosan akkor lesz permutációmátrix, ha U_1 megkapható U_2-ből úgy, hogy a sorait permutáljuk. (Hiszen $U_1U_2^* = Q$ pontosan akkor permutációmátrix, ha $U_1 = QU_2$ valamely Q permutációmátrixra.) Vagyis $(UP)U^*$ pontosan akkor lesz permutációmátrix, ha UP sorai pontosan ugyanazok, mint U sorai. Ez éppen azt jelenti, hogy $\chi \circ \pi$ egy karakter minden χ karakterre. Ez, mint azt már láttuk a korábbi lemmában, pontosan akkor teljesül, ha π egy automorfizmusa A-nak.

A feladatot Mészáros András és Nagy János oldották meg helyesen. Részeredményt ért el Bodor Bertalan.

5. feladat (Nagy Péter Tibor). *A $\mathfrak{g}$ Lie-algebra $\mathfrak{h}$ részalgebráját egy $\mathfrak{g}$-n megadott $\langle .,. \rangle$ skalárszorzatra vonatkozóan γ-tulajdonságúnak mondjuk, ha $X \in \mathfrak{h}$-ból következik $\big\langle [X,Y], X \big\rangle = 0$ minden $Y \in \mathfrak{g}$ elemre. Igazoljuk, hogy egy két lépésben nilpotens Lie-algebrán megadott skalárszorzatra vonatkozóan γ-tulajdonságú részalgebrák dimenziójának maximuma nem függ a skalárszorzat megválasztásától*

Megoldás (Nagy Péter Tibor)**.** A $\mathfrak{g}$ Lie-algebra két lépésben nilpotens, azaz $\mathfrak{g}$ nemnulla kommutátorát tartalmazza a $\mathfrak{z}$ centruma. Legyen adott két különböző $\langle .,. \rangle$ és $\langle .,. \rangle'$ skalárszorzat $\mathfrak{g}$-n. Jelölje $\mathfrak{a}$, illetve $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{z}$ centrum ortogonális komplementerét $\langle .,. \rangle$-ra és $\langle .,. \rangle'$-ra vonatkozóan. Ekkor $\{0\} \neq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = [\mathfrak{a},\mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}',\mathfrak{a}'] \subset \mathfrak{z}$. Egy $\mathfrak{h}$ részalgebra $\langle .,. \rangle$-ra vonatkozóan γ-tulajdonságú, ha $\mathfrak{h}$ minden $A+Z \in \mathfrak{h}$ alakban megadott elemére, ahol $A \in \mathfrak{a}$, $Z \in \mathfrak{z}$, az $\big\langle [A,\mathfrak{a}], Z \big\rangle = \{0\}$ egyenlőség teljesül. A γ-tulajdonság $\langle .,. \rangle'$-ra vonatkozóan analóg módon fogalmazható meg. Megmutatjuk, ha a $\mathfrak{h}$ részalgebra $\langle .,. \rangle$-ra vonatkozóan γ-tulajdonságú, akkor található egy vele izomorf $\langle .,. \rangle'$-ra vonatkozóan γ-tulajdonságú $\mathfrak{h}'$ részalgebra.

Legyen $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ olyan szimmetrikus invertálható lineáris leképezés, amelyre minden $X, Y \in \mathfrak{g}$ esetén fennáll $\langle X, Y \rangle' = \langle TX, Y \rangle$. Jelölje $\pi_{\mathfrak{z}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{z}$ a $\mathfrak{z}$-re való merőleges vetítést a $\langle .,. \rangle$ skalárszorzatra vonatkozóan. Legyenek $\langle .,. \rangle_{(\mathfrak{z})}$, illetve $\langle .,. \rangle'_{(\mathfrak{z})}$ a $\mathfrak{z}$ altéren indukált skalárszorzatok. Az $S = \pi_{\mathfrak{z}} \circ T|_{\mathfrak{z}} : \mathfrak{z} \to \mathfrak{z}$ szimmetrikus lineáris leképezésre teljesül $\langle U, V \rangle'_{(\mathfrak{z})} = \langle SU, V \rangle_{(\mathfrak{z})}$ minden $U, V \in \mathfrak{z}$ esetén, ezért $S = \pi_{\mathfrak{z}} \circ T|_{\mathfrak{z}} : \mathfrak{z} \to \mathfrak{z}$ invertálható. Legyen $R = \pi_{\mathfrak{z}} \circ T|_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{z}$.

Definiáljuk a $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ leképezést a $\Phi(A+U) = A + S^{-1}\big(U - R(A)\big)$ összefüggéssel, ahol $A \in \mathfrak{a}$, $U \in \mathfrak{z}$. A Φ leképezés $A+U$-nak csak a centrális komponensét változtatja meg, és létezik a $\Phi^{-1}(A+U) = A+S(U)+R(A)$ inverze, ezért Φ automorfizmusa $\mathfrak{g}$-nek. A $\mathfrak{z}$ centrum ortogonális komplementuma $\langle .,. \rangle'$-re vonatkozóan $\mathfrak{a}' = \{A - S^{-1}R(A);\ A \in \mathfrak{a}\}$ alakú, mivel

$$\big\langle A - S^{-1}R(A), Z \big\rangle' = \Big\langle T\big(A - S^{-1}R(A)\big), Z \Big\rangle = \Big\langle \pi_{\mathfrak{z}} T\big(A - S^{-1}R(A)\big), Z \Big\rangle =$$

$$= \big\langle R(A) - SS^{-1}R(A), Z \big\rangle = 0$$

teljesül tetszőleges $Z \in \mathfrak{z}$ esetén. Az $\big\langle [A, \mathfrak{a}], Z \big\rangle' = \{0\}$ reláció az $A \in \mathfrak{a}$, $U \in \mathfrak{z}$ vektorokra akkor és csak akkor teljesül, ha igaz $\big\langle [A, \mathfrak{a}], Z \big\rangle = \{0\}$, mert tetszőleges $X - S^{-1}R(X) \in \mathfrak{a}'$, $X \in \mathfrak{a}$, $Z \in \mathfrak{z}$ vektorokra érvényes

$$\Big\langle \big[A - S^{-1}R(A), X - S^{-1}R(X)\big], S^{-1}(Z) \Big\rangle' =$$

$$= \Big\langle S^{-1}(Z), \big[A - S^{-1}R(A), X - S^{-1}R(X)\big] \Big\rangle'_{(\mathfrak{z})} = \big\langle Z, [A, X] \big\rangle_{(\mathfrak{z})}.$$

Ezért $\mathfrak{h}$ a $\langle .,. \rangle$-ra vonatkozóan γ-tulajdonságú akkor és csak akkor, ha a Φ Lie-algebra automorfizmussal vett $\Phi(\mathfrak{h})$ képe a $\langle .,. \rangle'$-ra vonatkozóan γ-tulajdonságú. Ebből következik a feladat állítása.

Nagy János részeredményeket ért el a feladat megoldásában, gondolatmenete jó, de hiányos. Megoldása tartalmaz egy kiegészítést, amiben a végtelen dimenziós esetben a feladat állítását cáfoló konstrukció gondolatmenetét vázolja.

6. feladat (Molnár Lajos). *Legyen $\mathcal{A}$ egy egységelemes C^*-algebra, és jelölje $\mathcal{A}_+$ az $\mathcal{A}$ pozitív elemeinek a kúpját (ez azon $\mathcal{A}$-beli önadjungált elemek halmaza, melyek spektruma benne van a $[0, +\infty[$ halmazban). Tekintsük $\mathcal{A}_+$-on az alábbi $\circ$ műveletet:*

$$x \circ y = \sqrt{x}\, y \sqrt{x} \quad (x, y \in \mathcal{A}_+). \tag{1}$$

Igazoljuk, hogy ha minden $x, y \in \mathcal{A}_+$ esetén

$$(x \circ y) \circ y = x \circ (y \circ y), \tag{2}$$

akkor $\mathcal{A}$ kommutatív.

Megoldás (Ta The Anh megoldása alapján). Jelölje $\mathcal{A}_+^{-1}$ az $\mathcal{A}$ pozitív invertálható elemeinek a halmazát. Ha $x \in \mathcal{A}$ tetszőleges, akkor előáll $x = h + ik$ alakban, ahol $h, k \in \mathcal{A}$ önadjungált. Továbbá minden önadjungált elem előállítható két $\mathcal{A}_+^{-1}$-beli elem különbségeként. Mindezek alapján elegendő belátni, hogy a szorzás $\mathcal{A}_+^{-1}$-re való leszűkítése kommutatív.

Először azt látjuk be, hogy a $\circ$ művelet kommutatív az $\mathcal{A}_+^{-1}$ halmazon. Legyen $x, y \in \mathcal{A}_+^{-1}$. Ekkor $x \circ y = \sqrt{x}\, y \sqrt{x}$, $y \circ y = \sqrt{y}\, y \sqrt{y} = y^2$, így (2)-ből az következik, hogy

$$(x \circ y) \circ y = \sqrt{\sqrt{x}\, y \sqrt{x}}\, y \sqrt{\sqrt{x}\, y \sqrt{x}} = x \circ (y \circ y) = \sqrt{x}\, y^2 \sqrt{x}. \tag{3}$$

(3)-ban írjunk x helyére x^{-1}-et és y helyére $\sqrt{x}\,y\sqrt{x}$-et:

$$\sqrt{\sqrt{x^{-1}}\big(\sqrt{x}\,y\sqrt{x}\,\big)\sqrt{x^{-1}}}\big(\sqrt{x}\,y\sqrt{x}\,\big)\sqrt{\sqrt{x^{-1}}\big(\sqrt{x}\,y\sqrt{x}\,\big)\sqrt{x^{-1}}} =$$

$$= \sqrt{x^{-1}}\big(\sqrt{x}\,y\sqrt{x}\,\big)^2\sqrt{x^{-1}},$$

tehát

(4)
$$\sqrt{y}\ \sqrt{x}\,y\sqrt{x}\sqrt{y} = yxy.$$

Mindkét oldalról $\sqrt{y^{-1}}$-gyel szorozva azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{x}\,y\sqrt{x} = \sqrt{y}\,x\sqrt{y},$$

vagyis

$$x \circ y = y \circ x$$

tetszőleges $x, y \in \mathcal{A}_+^{-1}$ esetén.

Most rátérünk a szorzás kommutativitásának igazolására. Ehhez tekintsük az

$$(1+tx)^2 \circ y = y \circ (1+tx)^2 \quad \big(t \in \mathbb{R}, t \geq 0; x, y \in \mathcal{A}_+^{-1}\big)$$

azonosságot. Ebből

$$y + t(xy+yx) + t^2xyx = y + 2t\sqrt{y}\,x\sqrt{y} + t^2\sqrt{y}\,x^2\sqrt{y}.$$

A két oldal csak úgy lehet egyenlő minden nemnegatív t-re, ha

(5)
$$xy + yx = 2\sqrt{y}\,x\sqrt{y}.$$

Ha (4)-ben x helyére x^2-et írunk, akkor

$$yx^2y = \sqrt{y}\sqrt{x^2}y\sqrt{x^2}\sqrt{y} = \sqrt{y}\,xyx\sqrt{y} = \big(\sqrt{y}\,x\sqrt{y}\,\big)^2,$$

így

$$(xy)^2 + (yx)^2 + xy^2x + yx^2y = (xy+yx)^2 \overset{(5)}{=} 4\big(\sqrt{y}\,x\sqrt{y}\,\big)^2 = 4yx^2y =$$

$$= 2yx^2y + 2y^2 \circ x^2 = 2yx^2y + 2x^2 \circ y^2 = 2yx^2y + 2xy^2x.$$

Egy oldalra rendezve azt kapjuk, hogy

$$(xy)^2 + (yx)^2 - xy^2x - yx^2y = (xy-yx)^2 = 0.$$

Mivel $(xy-yx)^* = -(xy-yx)$, így ebből $(xy-yx)^*(xy-yx) = 0$, és

$$\|xy-yx\|^2 = \big\|(xy-yx)^*(xy-yx)\big\| = 0,$$

tehát $xy = yx$ minden $x, y \in \mathcal{A}_+^{-1}$ esetén.

A feladatra egyedül Ta The Anh adott be helyes megoldást. Az ő megoldásának az a szépsége, hogy nagyrészt elemi algebrai úton igazolta az állítást. A kitűző eredeti megoldása rövidebb, de jóval haladottabb eszközöket használ.

7. feladat (Boros Zoltán). *Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény (azaz, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x+y) = f(x) + f(y)$ teljesül), amelyre az*

$$x \longmapsto f(x) f\left(\sqrt{1-x^2}\,\right)$$

leképezés korlátos a $]0,1[$ intervallum valamely nem üres nyílt részintervallumán. Igazoljuk, hogy f folytonos!

Megoldás (Kutas Péter megoldása alapján a kitűző módosításaival)**.** Először röviden összefoglaljuk az additív függvényekkel kapcsolatos szükséges előismereteket. Viszonylag egyszerűen igazolható, hogy minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvényre tetszőleges x valós és r racionális szám esetén $f(rx) = rf(x)$ teljesül (a levezetés több lépésben történik, pozitív egész r esetén teljes indukcióval, majd ezt kihasználva x helyett x/r helyettesítésével kapjuk ilyenek reciprokaira, illetve az additivitásból egyszerűen adódik f páratlan volta stb.). Tehát valójában minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény lineáris a racionális számok $\mathbb{Q}$ teste felett. Ha f a valós számtest felett is lineáris, akkor $f(x) = cx$ $(x \in \mathbb{R})$ alakú, ahol $c = f(1)$. Ha f nem ilyen alakú, akkor van olyan t valós szám, amelyre $f(t) \neq tf(1)$, tehát az $\big(1, f(1)\big)$ és $\big(t, f(t)\big)$ vektorok $\mathbb{R}$ felett lineárisan függetlenek, így az $\mathbb{R}^2$ tér egy bázisát alkotják a valós számtest felett. Kihasználva f linearitását $\mathbb{Q}$ felett, valamint azt, hogy $\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$-ben, kapjuk, hogy tetszőleges $\mathbb{R}^2$-beli pont előáll az $\big(1, f(1)\big)$ és $\big(t, f(t)\big)$ vektorok racionális lineáris kombinációinak (azaz f gráfja pontjainak) határértékeként. Tehát f gráfja sűrű a síkban. Ennek következménye, hogy ha egy additív függvény felülről korlátos egy nem üres nyílt intervallumon, akkor szükségképpen lineáris (tehát folytonos).

Jelölje I azt a nyílt intervallumot, amelyen a feladat feltevése szerint az

$$x \longmapsto f(x) f\left(\sqrt{1-x^2}\,\right)$$

leképezés korlátos. Legyen J nem üres nyílt intervallum az I belsejében (tehát feltesszük, hogy J lezártja is része I-nek). Ekkor az origó középpontú egységkör

$$H = \left\{\left(x, \sqrt{1-x^2}\,\right) \mid x \in I\right\}$$

íve tartalmazza a

$$K = \left\{\left(x, \sqrt{1-x^2}\,\right) \mid x \in J\right\}$$

ív minden olyan $\phi(K)$ elforgatottját, amelyre a ϕ forgatás elegendően közel van az identitáshoz.

Ha f felülről korlátos a J intervallumon, akkor a fentiek szerint folytonos. A továbbiakban (indirekt módon) feltehetjük, hogy ez nem teljesül, tehát minden n pozitív egészhez létezik $x_n \in J$ úgy, hogy $f(x_n) > n$. Minden n pozitív egész esetén legyen $y_n = \sqrt{1-x_n^2}$, valamint

$$\alpha_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} \quad \text{és} \quad \beta_n = \frac{2n}{n^2+1}.$$

Ekkor $(x_n, y_n) \in K$, $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$, $\alpha_n^2 + \beta_n^2 = 1$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0.$$

Ezért az

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ -\beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

mátrix felhasználásával definiált

$$\phi_n(x,y) = A_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

forgatás tetszőlegesen közel kerül az identitáshoz, ha n elegendően nagy. Tehát van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$ természetes számra $\phi_n(K) \subset H$, ezért az

$$\big(f(\alpha_n x_n + \beta_n y_n) f(-\beta_n x_n + \alpha_n y_n)\big)$$

sorozat a feltevés szerint korlátos. Viszont

$$f(\alpha_n x_n + \beta_n y_n) f(-\beta_n x_n + \alpha_n y_n)$$
$$= -\alpha_n\beta_n\big(f(x_n)\big)^2 + \big(\alpha_n^2 - \beta_n^2\big) f(x_n)f(y_n) + \alpha_n\beta_n\big(f(y_n)\big)^2.$$

A feltevés szerint $(f(x_n)f(y_n))$ korlátos, továbbá $f(x_n) > n$ miatt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0.$$

Tehát a fenti összeg utolsó tagja nullsorozat, középső tagja korlátos, az első tagjának ellentettjére pedig

$$\alpha_n\beta_n\big(f(x_n)\big)^2 \geq \frac{n^2-1}{n^2+1} \cdot \frac{2n}{n^2+1} \cdot n^2 > \frac{n}{2}$$

teljesül (ha $n \geq 2$), tehát az első tag – és vele együtt az összeg – tart $(-\infty)$-hez, ellentétben a vele egyenlő (bal oldali) szorzat korlátosságával. Eszerint az indirekt feltevés hamis.

7.1. megjegyzés. *Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy (nem azonosan nulla) deriváció, akkor minden $x \in \,]0,1[$ esetén $f(x)f\big(\sqrt{1-x^2}\,\big) \leq 0$ teljesül, tehát a feladat szövegében ezen szorzat lokális korlátossága nem gyengíthető úgy, hogy lokálisan felülről korlátos.*

A feladatra Kutas Péter és Nagy János adtak teljes megoldást.

8. feladat (Daróczy Zoltán). *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton függvény, amelyre*

$$(*) \qquad f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)\big(f(x)+f(y)\big) = (x+y)f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$-re (f^{-1} az f inverzét jelöli). Bizonyítsuk be, hogy ekkor léteznek olyan $a \neq 0$ és b valós konstansok, amelyekkel $f(x) = ax + b$ minden $x \in \mathbb{R}$-re.

Megoldás (Ágoston Tamás megoldása alapján)**.** Egyszerű számolás mutatja, hogy ha f teljesíti a $(*)$ egyenlőséget, akkor az $x \longmapsto f(-x)$ és $x \longmapsto -f(x)$ függvények is teljesítik, így az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy f (és így szükségképpen f^{-1} is) szigorúan monoton növekvő, és $f(0) \geq 0$. Ekkor minden $x > 0$-ra $f(x) > 0$.

Be fogjuk látni, hogy f Jensen-affin a $[0, \infty[$ intervallumon, azaz minden $0 \leq x < y$-ra

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

teljesül. Először tegyük fel indirekt módon, hogy valamely $0 \leq x < y$-ra $f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Ekkor

$$f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)\big(f(x)+f(y)\big) > f^{-1}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\big(f(x)+f(y)\big) =$$
$$= (x+y)\frac{f(x)+f(y)}{2} > (x+y)f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Itt mindkét helyen szigorú egyenlőtlenség áll, mert $y > x \geq 0$ miatt $x+y > 2x \geq 0$, és $f(x)+f(y) > 2f(x) \geq 0$. Ez viszont ellentmond $(*)$-nak. Hasonlóképpen, ha valamely $0 \leq x < y$-ra $f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x)+f(y)}{2}$ lenne, akkor

$$f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)\big(f(x)+f(y)\big) < f^{-1}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\big(f(x)+f(y)\big) =$$
$$= (x+y)\frac{f(x)+f(y)}{2} < (x+y)f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

állna fenn, ami szintén ellentmondana $(*)$-nak. Ezzel tehát beláttuk, hogy f Jensen-affin $[0, \infty[$ fölött, amiből, a folytonossággal együtt, jól ismert módon következik, hogy f affin a $[0, \infty[$ intervallumon, vagyis vannak olyan $a > 0$ és $b \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy $f(x) = ax + b$ minden $x \geq 0$ esetén.

Végül belátjuk, hogy f az egész $\mathbb{R}$-en affin. Helyettesítsünk a $(*)$ egyenlőségbe $y = -x$-et:

$$f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right)\big(f(x)+f(-x)\big) = \big(x+(-x)\big)f(0) = 0.$$

Ebből következik, hogy minden $x \in \mathbb{R}$-re vagy $f(x)+f(-x) = 0$, vagy

$$f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right) = 0,$$

azaz $f(x)+f(-x) = 2f(0)$. Mivel f folytonos, így az $x \mapsto f(x)+f(-x)$ függvény is az, vagyis ha $f(x)+f(-x)$ legfeljebb két lehetséges értéket vehet fel, akkor valójában konstans. Ha $x = 0$-t helyettesítünk, akkor $f(0)+f(0) = 2f(0)$, így minden $x \in \mathbb{R}$-re $f(x)+f(-x) = 2f(0) = 2b$. Így végül minden $x \leq 0$-ra is $f(x) = 2b - f(-x) = 2b - (a(-x)+b) = ax + b$ teljesül.

A feladatra Ágoston Tamás, Bodor Bertalan, Mészáros Szabolcs, Nagy Donát, Nagy János és Ta The Anh adtak teljes megoldást. Mészáros András egy kissé gyengébb állítást bizonyított be, Weisz Ágoston megoldása pedig hiányos.

9. feladat (Maksa Gyula és Páles Zsolt). *Bizonyítsuk be, hogy van olyan sehol sem folytonos $f : \,]0,+\infty[\, \to \,]0,+\infty[$ függvény, amelyre minden $x, y \in \,]0,+\infty[$ és minden pozitív racionális α szám esetén fennáll, hogy*

$$f\left(\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \le \left(\frac{f(x)^\alpha + f(y)^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{1}$$

Van-e olyan sehol sem folytonos $f : \,]0,+\infty[\, \to \,]0,+\infty[$ függvény, amely eleget tesz a fenti egyenlőtlenségnek minden $x, y \in \,]0,+\infty[$ és minden pozitív irracionális α esetén?

Megoldás (Maksa Gyula és Páles Zsolt)**.** Jelölje $\mathbb{R}$ a valós, $\mathbb{Q}$ pedig a racionális számok halmazát.

Először azt mutatjuk meg, hogy létezik olyan nem Lebesgue-mérhető f függvény, amelyre (1) minden pozitív racionális α esetén fennáll. Legyen $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy nem azonosan zéró deriváció, azaz egy olyan nem azonosan zéró függvény, amelyre egyidejűleg teljesül, hogy

$$d(x + y) = d(x) + d(y) \quad \text{és} \quad d(xy) = xd(y) + yd(x) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Ilyen d függvény létezése ismert, továbbá az is ismert, hogy egy ilyen függvény nem lehet Lebesgue-mérhető, de a definíciójából következik, hogy

$$d(x^r) = rx^{r-1}d(x) \qquad \big(x \in \,]0,+\infty[\,,\ 0 < r \in \mathbb{Q}\big).$$

(Lásd például [1]-et.) Definiáljuk ezek után az $f : \,]0,+\infty[\, \to \,]0,+\infty[$ függvényt az

$$f(x) = x \exp\big(x^{-1}d(x)\big) \qquad \big(x \in \,]0,+\infty[\,\big)$$

képlettel. Világos, hogy f nem Lebesgue-mérhető. Az alábbiakban igazoljuk, hogy

$$f\big(M_\alpha(x, y)\big) \le M_\alpha\big(f(x), f(y)\big)$$

mégis teljesül, ahol

$$M_\alpha(x, y) = \left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \big(x, y, \alpha \in \,]0,+\infty[\,,\ \alpha \in \mathbb{Q}\big).$$

Valóban, – felhasználva a d deriváció fenti tulajdonságait – kapjuk, hogy

$$d\big(M_\alpha(x, y)\big) = d\left(\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1}{2}d(x^\alpha + y^\alpha) =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\,\frac{M_\alpha(x, y)\alpha\big(x^{\alpha-1}d(x) + y^{\alpha-1}d(y)\big)}{x^\alpha + y^\alpha}.$$

Így

$$\frac{d\big(M_\alpha(x,y)\big)}{M_\alpha(x,y)}=\frac{x^{\alpha-1}d(x)+y^{\alpha-1}d(y)}{x^\alpha+y^\alpha}=\frac{x^\alpha}{x^\alpha+y^\alpha}\frac{d(x)}{x}+\frac{y^\alpha}{x^\alpha+y^\alpha}\frac{d(y)}{y}$$

adódik, ahonnan – f definícióját figyelembe véve –

$$f\big(M_\alpha(x,y)\big)=M_\alpha(x,y)\big(x^{-1}f(x)\big)^{\frac{x^\alpha}{x^\alpha+y^\alpha}}\big(y^{-1}f(y)\big)^{\frac{y^\alpha}{x^\alpha+y^\alpha}}$$

következik. Felhasználva itt a súlyozott mértani és számtani közép közötti egyenlőtlenség

$$u^\lambda v^{1-\lambda}\le\big(\lambda u^\alpha+(1-\lambda)v^\alpha\big)^{\frac{1}{\alpha}}\qquad\big(u,v,\alpha\in\,]0,+\infty[\,,\ \lambda\in[0,1]\big)$$

következményét, azt kapjuk, hogy

$$f\big(M_\alpha(x,y)\big)\le M_\alpha(x,y)\left(\frac{x^\alpha}{x^\alpha+y^\alpha}\frac{f(x)^\alpha}{x^\alpha}+\frac{y^\alpha}{x^\alpha+y^\alpha}\frac{f(y)^\alpha}{y^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=$$

$$=\left(\frac{f(x)^\alpha+f(y)^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=M_\alpha\big(f(x),f(y)\big).$$

A megoldás második felében megmutatjuk, hogy ha (1) minden pozitív irracionális α esetén fennáll, akkor folytonos (tehát nem lehet nem mérhető). A hatványközepek középérték tulajdonsága miatt

$$f\left(\left(\frac{x^\alpha+y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\le\left(\frac{f(x)^\alpha+f(y)^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\le\max\big(f(x),f(y)\big),\tag{2}$$

ha α pozitív irracionális szám. A hatványközepek összehasonlítási tétele miatt, $x\neq y$ esetén az

$$\alpha\longmapsto\left(\frac{x^\alpha+y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\qquad(\alpha>0)$$

függvény szigorúan monoton növő és folytonos, és így értékkészlete a

$$\big]\sqrt{xy},\max(x,y)\big[$$

nyílt intervallum. Ezzel a leképezéssel a pozitív irracionális számok halmazának képe $\big]\sqrt{xy},\max(x,y)\big[\setminus C(x,y)$ alakú, ahol $C(x,y)$ egy megszámlálható halmaz. Tehát (2) szerint f korlátos a

$$\big]\sqrt{xy},\max(x,y)\big[\setminus C(x,y)$$

halmazon, ami pozitív Lebesgue-mértékű. Másrészt, egy rögzített α irracionális szám esetén (1) szerint az $f_\alpha(x):=\big(f(x^{1/\alpha})\big)^\alpha$ képlettel definiált f_α függvény Jensen-konvex, és emellett korlátos a $\big]\sqrt{xy}^\alpha,\max(x,y)^\alpha\big[\setminus C(x,y)^\alpha$ halmazon, ami szintén pozitív mértékű. Ezért a Bernstein–Doetsch-tétel Sierpiński-féle általánosítása szerint (ld. [1]) f_α konvex, tehát folytonos. Így f is folytonos kell legyen.

Hivatkozás

[1] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Mainunctional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.

Mészáros Szabolcs jól oldotta meg a feladat második részét és a megoldása az első résszel kapcsolatban is tartalmazott jó gondolatmenetet. Nagy János helyesen oldotta meg a feladat második részét.

10. feladat (Tamássy Lajos és Kertész Dávid). *Legyen adva az $\mathbb{R}^n$ valós vektortéren egy Riemann-metrika, amelyre nézve bármely két a és b pont között egyetlen $g(a,b)$ távolságminimalizáló geodetikus szakasz létezik. Tegyük fel, hogy minden $a \in \mathbb{R}^n$ esetén a tőle vett Riemann-távolságot mérő $\varrho_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény konvex, és differenciálható az a-n kívül. Mutassuk meg, hogy ha egy $x \neq a, b$ pontra*

$$\partial_i \varrho_a(x) = -\partial_i \varrho_b(x), \quad i = 1, \ldots, n$$

teljesül, akkor x a $g(a,b)$ egy pontja, és fordítva.

Megoldás (Mészáros Szabolcs megoldása alapján, kis kiegészítéssel)**.** Legyenek $a, b \in \mathbb{R}^n$ rögzített pontok, $d := d(a,b)$, és jelölje $\gamma : [0,d] \to \mathbb{R}^n$ a $g(a,b)$ geodetikus ívhossz szerinti paraméterezését. Átfogalmazva a feladatot, azt kell megmutatni, hogy a $\varrho_a + \varrho_b : \mathbb{R}^n \setminus \{a,b\} \to \mathbb{R}$ függvény gradiense pontosan azokban az x pontokban tűnik el, amelyek elemei a γ geodetikus képhalmazának. Vizsgáljuk meg tehát az $f := \varrho_a + \varrho_b$ függvényt:

Egyrészt $f(a) = f(b) = d$, másrészt bármely $x \in \mathbb{R}^n$-re $f \geq d$, hiszen $f(x) = d(a,x) + d(b,x) < d(a,b)$ ellentmondana a háromszög-egyenlőtlenségnek. Emellett f konvex, mivel konvex függvények összege. Ebből már következik az állítás könnyebbik iránya: ha $x = \gamma(t)$ valamely t-re (és $a \neq x \neq b$), akkor $\varrho_a(x) \leq t$, hiszen γ egy t hosszúságú összekötő görbe a és x között. Hasonlóan, $\varrho_b(x) \leq d - t$, mert γ egy $d - t$ hosszúságú görbe x és b között. Ebből $d \leq f(x) \leq t + (d-t) = d$, vagyis $f(x) = d$ következik. A feltételek szerint f differenciálható a-n és b-n kívül, ezért egy globális minimumhelyen, mint amilyen x, a gradiense eltűnik.

Megfordítva, tegyük fel, hogy f gradiense x-ben 0 ($a \neq x \neq b$). Ekkor szükségképpen $f(x) = d$ kell, hogy teljesüljön. Tekintsük ugyanis az $[a,x]$ szakasz által meghatározott egyenest $\mathbb{R}^n$-ben és f leszűkítését erre, jelölje ezt $\bar{f}$. Ekkor $\bar{f}$ konvex, egyparaméteres függvény, a-n kívül deriválható, így folytonosan deriválható is, és a deriváltja x-ben eltűnik. Ez csak úgy történhet, ha x lokális minimumhely, amely konvex függvény esetén globális minimumhely is, így $f(x) = d$. Ekkor viszont a feladat feltételei szerint létezik (egyetlen) $g(a,x)$ geodetikus, $d(a,x)$ hosszal, és hasonlóan létezik $g(x,b)$ geodetikus $d(x,b)$ hosszal. Ezt a két görbét összefűzve, egy $d(a,b)$ hosszúságú görbét kapunk a és b között, amely – mivel minimális hosszúságú – kénytelen geodetikus lenni (ld. pl. *P. Petersen, Riemannian Geometry 2nd ed., 128. oldal, Theorem 13*). A $g(a,b)$ geodetikus azonban egyértelmű, így x benne van γ képhalmazában.

A feladatra Csizmadia Gábor Béla, Mészáros András, Mészáros Szabolcs, Nagy Donát, Nagy János és Virosztek Dániel helyes megoldást nyújtott be.

11. feladat (Tran Quoc Binh). (A) *Adva van egy ellipszis a síkban. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan Riemann-metrika, amely az egész síkon értelmezve van, és amelyre nézve az adott ellipszis geodetikus. Igazoljuk, hogy minden ilyen Riemann-metrika Gauss-görbülete felvesz pozitív értéket is.*

(B) *Legyen adva két, egymást nem metsző, egyszerű, sima, zárt görbe a síkban. Mutassuk meg, hogy ha egy, az egész síkon értelmezett teljes Riemann-metrikának a két adott görbe geodetikusa, akkor a metrika Gauss-görbülete valahol eltűnik.*

Megoldás (Tran Quoc Binh). (a) 1. Alkalmas koordinátarendszer bevezetésével az adott ellipszis egyenlete $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ alakú. Tekintsük az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$;

$$(x,y)\mapsto\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)$$

és a $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{S}^2\backslash\{(0,0,1)\}$,

$$(x,y)\longmapsto\frac{1}{1+x^2+y^2}(2x,2y,-1+x^2+y^2)$$

függvényeket.

Könnyen belátható, hogy f és g is diffeomorfizmus. f az adott ellipszist az egységkörbe viszi, g pedig nem más, mint az egységgömb északi pólusából történő standard sztereografikus projekciónak az inverze, mely az újonnan kapott egységkört viszi át az egységgömb „vízszintes” főkörébe.

Tekintsük most az $\mathbb{S}^2$ egységgömbön az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térből örökölt kanonikus metrikát. Ekkor $\mathbb{S}^2$ minden főköre geodetikus. Így a „vízszintes” főköre geodetikusa lesz a $\mathbb{S}^2\backslash\{(0,0,1)\}$ lyukas gömbnek.

Az $f^{-1}\circ g^{-1}$ diffeomorfizmus visszahúzza a gömbi metrikát a síkra. $f\circ g$ és inverze is izometria. Mivel az izometria geodetikus görbét geodetikus görbébe visz át, az adott ellipszis geodetikusa a „visszahúzott” metrikának.

2. Vegyünk most egy tetszőleges Riemann-metrikát a síkban, melyre nézve az adott ellipszis geodetikus. Alkalmazzuk a Gauss–Bonnet-tételt az adott ellipszis által határolt M tartományra. Mivel az adott ellipszis geodetikus, $\int_M K dA = 2\pi\chi(M)$, ahol $\chi(M)$ az M tartomány Euler-karakterisztikája. Könnyen belátható, hogy az ellipszis által határolt síkbeli tartomány Euler-karakterisztikája 1. Így $\int_M K dA = 2\pi > 0$, amiből következik, hogy a Gauss-görbület biztosan felvesz pozitív értéket is az ellipszis által határolt tartományon belül.

(B) A feladat (A) részéből tudjuk, hogy a síkban minden olyan Riemann-metrikának, melyre nézve az adott egyszerű, sima görbék geodetikusok, a Gauss-görbülete pozitív értéket is felvesz legalább a görbék által határolt tartományokban. Elegendő tehát belátnunk, hogy nem létezhet olyan teljes, pozitív görbületű Riemann-metrika az egész síkban, melynek a két adott egyszerű, zárt és sima görbe geodetikusai. Ezt indirekt módon látjuk be.

Tegyük fel, hogy létezik teljes, pozitív görbületű Riemann-metrika, melyre nézve a két adott zárt görbe geodetikus. Jelöljük a két adott zárt görbét C_1, illetve C_2-vel. Tetszőleges $(x,y)\in C_1\times C_2$ pontpárhoz rendeljük hozzá az őket összekötő legrövidebb geodetikus görbe hosszát. Ezt mindig megtehetjük, hiszen a metrika teljes. Könnyen belátható, hogy az így definiált függvény folytonos. Mivel mindkét zárt görbe kompakt halmaz, a direkt szorzatuk is az, következésképpen a rajta definiált folytonos függvény felveszi a minimum értékét is. A mi esetünkben azt kapjuk, hogy létezik egy legrövidebb görbe, mely összeköti a két adott zárt görbét. Jelöljük ezt a görbét γ-val és a hosszát l-el. Tekintsük γ ívhossz-paraméterezését: $\gamma : [0,l] \to \mathbb{R}^2$. Tegyük fel, hogy $\gamma(0) = p \in C_1$, $\gamma(l) = q \in C_2$. Az első variációs formulából tudjuk, hogy γ merőleges C_1-re, illetve C_2-re.

Legyen $V(0) \in T_{x_0}\mathbb{R}^2$ olyan egységvektor, mely merőleges a $\dot\gamma(0)$-ra, tehát egység érintő vektora C_1-nek az x_0 pontban. Toljuk el párhuzamosan a $V(0)$ vektort $\gamma(s)$ mentén. Így kapjuk a $V(s)$ párhuzamos vektormezőt a γ görbe mentén. Nyilván $V(l)$ egység érintő vektora C_2-nek az y_0 pontban. Legyen

$$\Omega : [0,l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2, \quad (s,t) \mapsto \Omega(s,t) := \exp_{\gamma(s)}\big(tV(s)\big),$$

$$\sigma_1(t) := \Omega(0,t), \qquad \sigma_2(t) := \Omega(l,t).$$

Ekkor $\Omega(s,t)$ olyan variációja a $\gamma(s)$ görbének, melyre megfelelő kicsi ε esetén $\Omega(0,t) = \sigma_1(t) \in C_1$, $\Omega(l,t) = \sigma_2(t) \in C_2$, mivel a C_1 és a C_2 görbék geodetikusok, és minden pontból minden irányba lokálisan egyetlen geodetikus indul ki. Az $\Omega(s,t)$ megadásából azt is kapjuk, hogy $\Omega(s,0) = \gamma(s)$ és $V(s) = \frac{\partial\Omega(s,t)}{\partial t}\,|_{t=0}$.

Legyen továbbá

$$L(t) := \int_0^s \sqrt{\left\langle \frac{\partial\Omega(s,t)}{\partial s}, \frac{\partial\Omega(s,t)}{\partial t} \right\rangle}\, ds.$$

Ekkor $L(t)$ az $\Omega(s,t)$ görbe hossza rögzített t esetén, mely összeköti a $\sigma_1(t) \in C_1$ pontot a $\sigma_2(t) \in C_2$ ponttal. Mivel $\Omega(s,0) = \gamma(s)$, $L(t)$ minimum értéket vesz fel a $t = 0$-ban, így $\frac{\partial L}{\partial t}\,|_0 = 0$ és $\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}\,|_0 \geq 0$.

A második variációs formula szerint:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}_{\;0} = \int_0^s \langle \nabla_{\dot\gamma} V, \nabla_{\dot\gamma} V\rangle - \big\langle R(V,\dot\gamma)\dot\gamma, V\big\rangle\, ds +$$

$$+ \big\langle \nabla_{\dot\sigma_2}\dot\sigma_2, \dot\gamma(l)\big\rangle\Big|_{t=0} - \big\langle \nabla_{\dot\sigma_1}\dot\sigma_1, \dot\gamma(0)\big\rangle\Big|_{t=0}.$$

Mivel V párhuzamos vektormező γ mentén, $\nabla_{\dot\gamma} V = 0$. Továbbá C_1 és C_2 geodetikus, $\nabla_{\dot\sigma_1}\dot\sigma_1 = \nabla_{\dot\sigma_2}\dot\sigma_2 = 0$. Így azt kapjuk, hogy

$$\left.\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}\right|_0 = -\int_0^s \big\langle R(V,\dot\gamma)\dot\gamma, V\big\rangle\, ds < 0,$$

hiszen a görbület pozitív. Ez ellentmondás.

A feladatra adott megoldások közül Nagy János és Mészáros Szabolcs megoldása jó. Virosztek Dániel a feladat (A) részét helyesen megoldotta, a (B) részének csak egy speciális esetét tudta belátni.

12. feladat (Móri Tamás). *Egy zsákban n golyó van, ezek közül néhány (legalább egy, de nem mind) fehér, a többi fekete. A zsákból egymás után, visszatevés nélkül véletlenszerűen kihúzzuk az összes golyót. Jelölje X_i a fehér golyók számának arányát a zsákban az i-edik húzás előtt, és legyen*

$$T = \max\big\{|X_i - X_j| : 1 \le i \le j \le n\big\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{E}(T) \le H\big(\mathbb{E}(X_1)\big)$, ahol $H(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x)$.

Megoldás (Virosztek Dániel)**.** Legyen n tetszőleges, fix. Elég belátni, hogy

$$\left(T \;\middle|\; X_1 = \frac{k}{n}\right) \le H\left(\frac{k}{n}\right), \tag{1}$$

ha $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, mert a toronyszabály és a H függvény konkavitása (Jensen-egyenlőtlenség) miatt ez esetben

$$\mathbb{E}(Tt) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(T \mid X_1)\big) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(T \;\middle|\; X_1 = \frac{k}{n}\right)\mathbb{P}\left(X_1 = \frac{k}{n}\right) \le \tag{2}$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1} H\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}\left(X_1 = \frac{k}{n}\right) = \mathbb{E}\big(H(X_1)\big) \le H\big(\mathbb{E}(X_1t)\big).$$

Az $\{X_j\}_{j=1}^{n}$ sztochasztikus folyamat martingál, mert ha $X_j = \frac{k}{n+1-j}$ valamely $k \in \{0, \ldots, n+1-j\}$ számra, akkor

$$\mathbb{P}\,(\text{a j. húzáskor fekete golyót húzunk}) = \mathbb{P}\left(X_{j+1} = \frac{k}{n-j}\right) = 1 - \frac{k}{n+1-j}$$

és

$$\mathbb{P}\,(\text{a j. húzáskor fehér golyót húzunk}) = \mathbb{P}\left(X_{j+1} = \frac{k-1}{n-j}\right) = \frac{k}{n+1-j}.$$

Így

$$\mathbb{E}(X_{j+1} \mid X_j) = \frac{k}{n-j}\left(1 - \frac{k}{n+1-j}\right) + \frac{k-1}{n-j}\frac{k}{n+1-j} = \tag{3}$$

$$= \frac{k}{n+1-j}\left(\frac{n+1-j-k}{n-j} + \frac{k-1}{n-j}\right) = \frac{k}{n+1-j} = X_j.$$

T definíciójából látszik, hogy

$$T = \sup_{1\le j\le n} X_j - \inf_{1\le j\le n} X_j = \sup_{1\le j\le n} X_j - \Big(1 - \sup_{1\le j\le n}(1 - X_j)\Big). \tag{4}$$

Behelyettesítéssel adódik, hogy $T = \sup_{1\le j\le n} X_j$, ha $X_n = 0$, és $T = \sup_{1\le j\le n}(1 - X_j)$, ha $X_n = 1$. (Nyilván mindig $X_n \in \{0, 1\}$.)

Vagyis

$$T = \Big(\sup_{1\le j\le n} X_j\Big)\mathbb{I}_{\{X_n=0\}} + \Big(\sup_{1\le j\le n}(1-X_j)\Big)\mathbb{I}_{\{X_n=1\}} = \tag{5}$$

$$= \sup_{1\le j\le n} X_j + \sup_{1\le j\le n}(1-X_j) - \Big(\sup_{1\le j\le n} X_j\Big)\mathbb{I}_{\{X_n=1\}} - \Big(\sup_{1\le j\le n}(1-X_j)\Big)\mathbb{I}_{\{X_n=0\}} =$$

$$= \sup_{1\le j\le n} X_j + \sup_{1\le j\le n}(1-X_j) - 1,$$

hiszen $X_n = 1 \Rightarrow \sup_{1\le j\le n} X_j = 1$, $X_n = 0 \Rightarrow \sup_{1\le j\le n}(1-X_j) = 1$ és $\mathbb{I}_{\{X_n=1\}} + \mathbb{I}_{\{X_n=0\}} = 1$.

Világos, hogy $\{X_j\}_{j=1}^n$ és $\{1-X_j\}_{j=1}^n$ is nemnegatív értékű martingálok, így a Doob-féle martingálegyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{1\le j\le n} X_j \ge t_1\Big) \le \frac{1}{t_1}\mathbb{E}(X_n t)\,\forall\, t_1 > 0, \tag{6}$$

és

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{1\le j\le n}(1-X_j) \ge t_2\Big) \le \frac{1}{t_2}\mathbb{E}(1-X_n t)\,\forall\, t_2 > 0. \tag{7}$$

Az első megjegyzésünk értelmében feltehetjük, hogy $X_1 = \frac{k}{n}$ $(k \in \{1,\dots,n-1\})$, ebben az esetben $\{X_j\}_{j=1}^n$ martingálsága miatt $\mathbb{E}(X_n t) = \frac{k}{n}$ és $\mathbb{E}(1-X_n t) = 1-\frac{k}{n}$.

Ha Y egy nemnegatív, integrálható valószínűségi változó, akkor

$$\mathbb{E}(Yt) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y \ge t)\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Tehát (6) és (8) alapján

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{1\le j\le n} X_j\Big) = \int_0^\infty \mathbb{P}\Big(\sup_{1\le j\le n} X_j \ge t_1\Big)\,\mathrm{d}t_1 = \tag{9}$$

$$= \int_0^{\frac{k}{n}} \mathbb{P}\Big(\sup_{1\le j\le n} X_j \ge t_1\Big)\,\mathrm{d}t_1 + \int_{\frac{k}{n}}^1 \mathbb{P}\Big(\sup_{1\le j\le n} X_j \ge t_1\Big)\,\mathrm{d}t_1 +$$

$$+ \int_1^\infty \mathbb{P}\Big(\sup_{1\le j\le n} X_j \ge t_1\Big)\,\mathrm{d}t_1 \le$$

$$\le \frac{k}{n} + \int_{\frac{k}{n}}^1 \frac{1}{t_1}\mathbb{E}(X_n t)\,\mathrm{d}t_1 + 0 = \frac{k}{n} - \frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right),$$

mert $\mathbb{P}\big(\sup_{1\le j\le n} X_j \ge t_1\big) = 1$, ha $t_1 \le \frac{k}{n}$, és $\mathbb{P}\big(\sup_{1\le j\le n} X_j \ge t_1\big) = 0$, ha $t_1 > 1$.

Teljesen hasonlóan

$$(10)\qquad \mathbb{E}\Big(\sup_{1\le j\le n}(1-X_j)\Big)\le \int_0^{1-\frac{k}{n}} 1\,\mathrm{d}t_2+\int_{1-\frac{k}{n}}^{1}\frac{1}{t_2}\mathbb{E}(1-X_nt)\,\mathrm{d}t_2+0=$$

$$=1-\frac{k}{n}-\left(1-\frac{k}{n}\right)\ln\left(1-\frac{k}{n}\right).$$

Vagyis (5), (9) és (10) alapján, feltéve, hogy $X_1=\frac{k}{n}$,

$$(11)\qquad \mathbb{E}(Tt)=\mathbb{E}\Big(\sup_{1\le j\le n}X_j\Big)+\mathbb{E}\Big(\sup_{1\le j\le n}(1-X_j)\Big)-1\le$$

$$\le\frac{k}{n}-\frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)+1-\frac{k}{n}-\left(1-\frac{k}{n}\right)\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)-1=H\left(\frac{k}{n}\right),$$

ezzel a bizonyítás kész.

Virosztek Dániel megoldása kiemelkedő, nagyon szépen kidolgozott. Mészáros András megoldása helyes, jól követhető. Bodor Bertalan megoldása helyes, de az egyes lépések jóval bővebb magyarázatot igényelnének, a megoldásában nem használ martingálokat, elemi eszközökkel bizonyít.

TARTALOMJEGYZÉK

BIGFIVE90 1
Szabó Csaba: Bevezetés a homogén struktúrákról szóló cikksorozathoz 3
Pongrácz András: Omega-kategorikus struktúrák és algebrai invariánsaik 5
Társulati élet – 2013 38
Jelentés a 2013. évi Schweitzer Miklós-emlékversenyről 49

CONTENTS

BIGFIVE90 1
Csaba Szabó: Introduction to the articles on homogeneous structures 3
András Pongrácz: Omega-categorical structures and their algebraic invariants 5
Society news – 2013 38
Schweitzer Contest in Higher Mathematics 2013 49