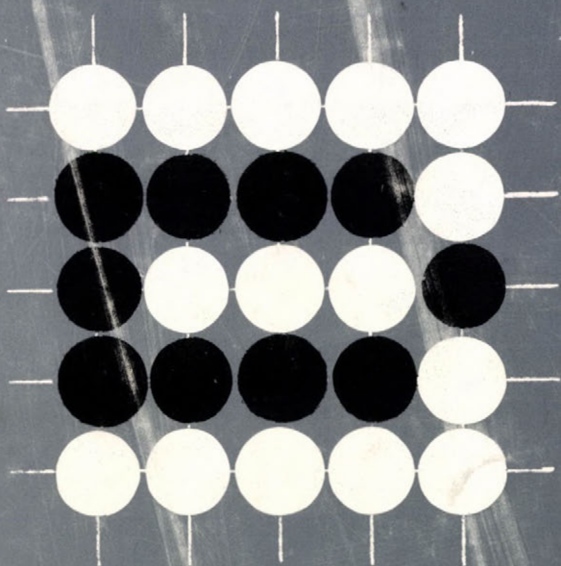
közlemények 17/1976

TA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

KÖZLEMÉNYEK

ISBN 963 311 029 7

1976. augusztus

Felelős kiadó:

Dr. Vámos Tibor
igazgató

Technikai szerkesztő:
Solt Jánosné

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete

768215 MTA KESZ Sokszorosító. F. v.: Szabó Gyula

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Proceedings of the Computer and Automation Institute
Hungarian Academy of Sciences

Vol. 17.

СОДЕРЖАНИЕ

Труды Исследовательского Института
Вычислительной Техники и Автоматизации
Венгерской Академии Наук
Выпуск I7.

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 17/1976.

ON THE ESTIMATION OF A PARAMETER OF A CONVOLUTION WITH AN APPLICATION TO QUEUEING THEORY

by Jacob Eshak Samaan

INTRODUCTION

Suppose that the observed random variable X is the sum of two independent random variables Y and Z, where Y is uniformly distributed in the interval $(0, 1)$ and Z is exponentially distributed with unknown parameter λ. We consider here the problem of estimating λ from a sample $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Such a problem may arise, if we consider, for example, the single server queueing system for which the arrival process is Poisson with unknown parameter λ, while the service time is uniformly distributed in the interval $(0, 1)$. The customer which arrives when the server is busy is rejected. Let us observe the departure times $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ of the served customers. Let:

$$X_0 = 0,$$

$$X_i = \tau_{i+1} - \tau_i \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Then each X_i is the sum of a service time and an interarrival time (or a part of interarrival time which is again exponentially distributed), and our purpose is to estimate the arrival rate λ from the sample $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Conditional sufficient statistic:

If we have n independent observations $y_1, y_2, \dots, y_n$ from a population with density function $p_\Theta(y)$, where Θ is an unknown parameter, then a necessary and sufficient condition for a statistic $T(Y) = T(y_1, \dots, y_n)$, to be sufficient for Θ is that, the joint density function:

$$L_n(Y, \Theta) = L_n(y_1, \dots, y_n; \Theta) = p_\Theta(y_1), \dots, p_\Theta(y_n)$$

is factorizable in the form:

$$(1) \qquad L_n(Y; \Theta) = g_\Theta[T(Y)].\ K(Y)$$

where the first factor may depend on Θ but depends on Y only through $T(Y)$, whereas the second factor is independent of Θ.

It may happen that the joint density function of the observations is factorizable only on a subset of the whole sample space.

This means that, sufficient statistics does not exist on the whole space, but there is a sufficient statistic on a subset of the whol space, such sufficient statistic may be called "conditional sufficient statistic" for Θ.

Such situation occurs in the problem of estimating λ.

Conditional sufficient statistic for λ:

The density function of X is given by:

$$h(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & 0 \leqslant x < 1 \\ (e^{\lambda} - 1)e^{-\lambda x} & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Since any sample $x_1, x_2, \ldots, x_n$ may contain observations which have values less than one, so it is clear that the joint density function is, generally, not factorizable in the whole sample space.

However in the subset $X \geqslant 1$, it is factorizable and has the form:

$$L_n(X;\lambda) = (e^{\lambda} - 1)^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

This means that the statistic:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

is a sufficient statistic for λ on the subset $X_i \geqslant 1$.

Conditional likelihood estimator for λ :

Suppose that we continue sampling until we get n observations all of which have value greater than one.
Let:

$A \equiv$ denotes the event that $X_i \geqslant 1$ for all $i = 1, 2, \ldots, n$.

Then

$$P(A) = [P(x \geqslant 1)]^n = [\int_1^{\infty} (e^{\lambda} - 1)e^{-\lambda x} dx]^n = (\frac{1}{\lambda^n})e^{-\lambda n}(e^{\lambda} - 1)^n$$

Thus, the conditional likelihood function of the sample $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ is:

$$L_n(X;\lambda \mid A) = \frac{L_n(X;\lambda)}{P(A)} = \lambda^n e^{n\lambda} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i},$$

i.e. the conditional likelihood equation is:

$$\frac{n}{\lambda} + n - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

The solution of this equation is:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i - n},$$

which we refer to it as the conditional likelihood estimator for λ.

If: $A_i \equiv$ denotes the event that $x_i \geqslant 1$, then:

$$P(X_i \mid A_i) = p\{x_i \leqslant x \mid x_i \geqslant 1\} = 1 - e^{-\lambda(x-1)}$$

which shows that under the condition A_i, the random variable $(X_i - 1)$ has an exponential distribution with parameter λ. This means that under the condition A, the random variable:

$$W = \sum_{i=1}^{n} X_i - n$$

has a gamma distribution with parameters (n, λ). So

$$E(\hat{\lambda}) = \frac{n}{n-1}\lambda$$

and consequentely the estimator $\hat{\lambda}$ is a biased estimator for λ.
To correct this biasedness we can consider the estimator

$$\hat{\lambda} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i - n}.$$

Now, let us have a sample of fixed size n, which contains observations greater than one and others less than one, and we want to find an estimator for λ which bases only on the observations greater than one in this sample. Let X_i^* denotes the observations greater than one, and n^* denotes the number of such observations in a general sample with fixed size n.

Then n^* is a random variable with binomial distribution:

$$P(n^* = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad \text{where}$$

$$P = \int_1^{\infty} (e^{\lambda} - 1)e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda}), \qquad q = 1 - p.$$

Thus, we may introduce the estimator

$$\lambda^* = \frac{n^* - 1}{\sum_{i=1}^{n^*} x_i^* - n^*}, \qquad n^* > 0,$$

as an estimator for λ, which depands only on the observations X_i^* in the sample. Since

$$p\left\{(x_i^* - 1) \leqslant x\right\} = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \geqslant 0.$$

Then, we have:

$$p\left\{Y^* \leqslant x \mid n^* = k\right\} = \int_0^x \lambda \frac{(\lambda y)^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda y} dy,$$

where

$$Y^* = \sum_{i=1}^{n^*} X_i^* - n^*.$$

i.e.

$$\frac{p\left\{Y^* \leqslant x, n^* = k\right\}}{p\left\{n^* = k\right\}} = \int_0^x \lambda \frac{(\lambda y)^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda y} dy.$$

Thus, the joint density function of Y^* and n^* is given by:

$$f(x, k) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{1}{\Gamma(k)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} (\lambda x)^{k-1}, \qquad x \geqslant 0.$$

Since

$$P\left\{n^* > 0\right\} = 1 - q^n$$

then:

$$E\left\{\lambda^* \mid n^* > 0\right\} = \lambda.$$

So, λ^* may be called conditionally unbiased estimator for λ.

Direct estimator for λ :

Assume that we have a general sample of size n, which contains observations greater than one and others less than one. Then:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}$$

is an unbiased estimator of $\frac{1}{\lambda}$.

Thus, we may introduce the statistic:

$$\overline{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{2}}.$$

as an estimator for λ, and call it a direct estimator. A disadvantage of this estimator is that, there is a positive probability that it have negative values.

Let $\overline{n}$ denotes the number of times we get negative estimator for λ out from one hundred samples with size n. The following tables show the values of $\overline{n}$ corresponding to different values of λ for: $n = 1000$, $n = 100$.

λ	$\overline{n}$
100	9
70	7
50	2
30	–
15	–

$n = 1000$

Table 1.

λ	$\overline{n}$
25	7
20	5
15	2
10	–
5	–

$n = 100$

Table 2.

All the estimators $\hat{\lambda}$, λ^* and $\overline{\lambda}$ are consistent estimators for λ. But because of the difficulties in calculating the variances of λ^* and $\overline{\lambda}$ we can not compare their variances.

But to see the advantages and disadvantages of using estimates based on conditional sufficient statistics, we consider $\frac{1}{\hat{\lambda}}$ and $\frac{1}{\overline{\lambda}}$ as estimators for $\frac{1}{\lambda}$ and compare their variances.

Since:

$$p\{(X_i^* - 1) \leqslant x\} = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \geqslant 0,$$

then we have:

$$E(\frac{1}{\hat{\lambda}}) = E(x^* - 1) = E((x_i - 1) \mid A_i) = \frac{1}{\lambda},$$

$$E(\frac{1}{\overline{\lambda}}) = E(x_i - \frac{1}{2}) = \frac{1}{\lambda}.$$

And

$$\mathrm{Var}\,(\frac{1}{\hat{\lambda}}) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Var}\,(X_i^*) = \frac{1}{n\lambda^2},$$

$$\mathrm{Var}\,(\frac{1}{\overline{\lambda}}) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Var}\,(X_i) = \frac{1}{n}\,(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{12}).$$

Thus from the point of view of minimum variance estimators, we see that the estimators which based on conditional sufficient statistics are better than the direct estimator for $\frac{1}{\lambda}$. But, on the other hand, in order to continue the observations upto obtaining n values all of which greater or equal one, we need to have a random number ν_n of observations. The random variable ν_n has the so–called negative binomial distribution given by:

$$P\{\nu_n = N\} = \begin{cases} \binom{N-1}{N-n} \; p^n q^{N-n} & \text{if} \quad N \geqslant n \\ \\ 0 & \text{if} \quad N < n \end{cases}$$

Thus

$$E(\nu_n) = \frac{n}{P}, \qquad P = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda}),$$

which is more greater than n for the large values of λ.

To avoid the needness of such a large number of observations in such cases, we introduce the statistic

$$\frac{1}{\lambda^*} = \frac{1}{n^* + 1} [\sum_{i=1}^{n^*} (X_i^* - 1)],$$

which depends on the observations X_i^* contained in a sample of fixed size n, as an estimator for $\frac{1}{\lambda}$ and compare the variances of $\frac{1}{\bar{\lambda}}$ and $\frac{1}{\lambda^*}$.

For $\frac{1}{\lambda^*}$ we have:

$$E(\frac{1}{\lambda^*}) = \sum_{k=0}^{n} \int_0^\infty \frac{x}{k+1} \cdot \frac{1}{\Gamma(k)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{k-1} dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Noting that:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = q^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} (\frac{p}{q})^k$$

$$= \frac{q^{n+1}}{p} \cdot \frac{(1 + \frac{p}{q})^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{(n+1)p}$$

$$= \frac{1 + q + \ldots + q^n}{n+1}.$$

Then:

$$E(\frac{1}{\lambda^*}) = \frac{1}{\lambda}[1 - \frac{1 + q + \ldots + q^n}{n+1}].$$

Also:

$$E(\frac{1}{\lambda^{*2}}) = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1}\binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Thus:

$$\mathrm{Var}\,(\frac{1}{\lambda^*}) = E(\frac{1}{\lambda^{*2}}) - E^2(\frac{1}{\lambda^*})$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}(1 - \frac{1 + q + \ldots + q^n}{n+1})(\frac{1 + q + \ldots + q^n}{n+1}).$$

Now, for the variance of $\frac{1}{\lambda^*}$, to be less than that of the statistic $\frac{1}{\bar{\lambda}}$ we must have:

$$\frac{1}{(n+1)\lambda^2}(1 - \frac{1 + q + \ldots + q^n}{n+1})(1 + q + \ldots + q^n) < \frac{1}{n\lambda^2}(1 + \frac{\lambda^2}{12})$$

i.e.

(2) $$\frac{n}{n+1}(1 - \frac{1 + q + \ldots + q^n}{n+1})(1 + q + \ldots + q^n) < 1 + \frac{\lambda^2}{12}.$$

Since:

$$1 - \frac{1 + q + \ldots + q^n}{n+1} < \frac{n}{n+1}.$$

Then (2) will be true if:

(3) $$(\frac{n}{n+1})^2 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{p} < 1 + \frac{\lambda^2}{12}.$$

Thus for any value of n, we can say that the variance of $\frac{1}{\lambda^*}$ is less than the variance of $\frac{1}{\bar{\lambda}}$ if:

$$\frac{1}{\lambda}(\frac{\lambda^2 + 12}{12})(1 - e^{-\lambda}) > 1.$$

This is true for the large values of λ (nearly $\lambda \geqslant 11$).

This fact may be shown also as follows:
For the large values of λ we have

$$P = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda}) \simeq \frac{1}{\lambda}.$$

Thus (3) may be written in the form:

$$\frac{1}{\lambda}(1 + \frac{\lambda^2}{12}) > (\frac{n}{n+1})^2[1 - (1 - \frac{1}{\lambda})^{n+1}].$$

This relation is also true if:

$$\frac{1}{\lambda}(1 + \frac{\lambda^2}{12}) \geqslant 1$$

i.e. for large values of λ (nearly $\lambda \geqslant 11$).

This means that for such large values of λ and for any n, we have:

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{Var}(\frac{1}{\lambda^*}) < \mathrm{Var}(\frac{1}{\bar{\lambda}}).$$

In fact, the condition $(\lambda \geqslant 11)$ deduced above is more than needed, because for some smaller values of λ, we can determine a value of n such that (4) is true.

For values $\lambda \geqslant 4$ we can carry out the approximation.

$$p = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda}) \simeq \frac{1}{\lambda}.$$

The error caused by using this approximation is equal to $\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}$ which is less than 0.005 for $\lambda = 4$, and decreases when λ increases.

Thus for any given $\lambda \geqslant 4$, the value of n is determined from (3) after substituting $p = \frac{1}{\lambda}$ and $q = 1 - \frac{1}{\lambda}$, i.e. from the relation

$$\text{(5)} \qquad (\frac{n}{n+1})^2 [1 - (1 - \frac{1}{\lambda})^{n+1}] < \frac{1}{\lambda}(1 + \frac{\lambda^2}{12}).$$

For $\lambda = 4$, the maximum value of n satisfying (5) is $n = 5$, and for $\lambda = 7$ we have $n = 11$.
Also for $\lambda = 10$, relation (5) gives $n = 28$, while (5) is true for any n when $\lambda \geqslant 11$.

From the preceeding discussion, it is clear that the estimators which have smaller variances need a greater number of observations than the number needed for the other estimators with larger variances. Thus the costs of the observations must be taken into consideration when we compare the estimators. This leads us to consider the sum of the costs of the observations needed for each estimator and its variance, as an objective function and compare these objective functions. So the objective functions corresponding to the estimators $\frac{1}{\hat{\lambda}}, \frac{1}{\bar{\lambda}}, \frac{1}{\lambda^*}$ are:

$$\hat{f}_n = cE_n + \mathrm{Var}(\frac{1}{\hat{\lambda}}) = \frac{cn}{p} + \mathrm{Var}(\frac{1}{\hat{\lambda}}),$$

$$\overline{f}_n = cn + \mathrm{Var}(\frac{1}{\overline{\lambda}}),$$

$$f_n^* = cn + \mathrm{Var}(\frac{1}{\lambda^*}),$$

where c is the cost of each observation.

Now the values of n for which:

(6) $$\hat{f}_n < \overline{f}_n$$

will be determined.

It is to be observed that comparing the functions $\overline{f}_n$ and f_n^* is exactly the same as comparing the variances of the estimators $\frac{1}{\overline{\lambda}}, \frac{1}{\lambda^*}$.

So it is required to determine the values of n which satisfies the relation:

$$\frac{cn}{p} + \frac{1}{n\lambda^2} \leqslant cn + \frac{1}{n}(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{12})$$

i.e.

$$n^2 \leqslant \frac{p}{12qc}.$$

This relation has meaning only when:

$$p > 12qc.$$

Acknowledgement

I would like to thank my supervisor Dr. J. Tomkó for suggesting the problem and the help he has given by way of many discussions.

Összefoglaló

Egy konvolució paraméterének becsléséről és annak alkalmazása
a sorban-állási problémák körében

Jacob Eshak Samman

A konvolució paraméterének becslését az ugynevezett "feltételes elegendő statisztika" felhasználásával végezzük. Az érkezési paraméter becslését egy veszteséges sorban-állási rendszerben a feltételes elegendő statisztikára alapozzuk, amelyet itt bemutatunk és összehasonlitunk a direkt becslésekkel.

Резюме

Оценка параметра конволюции, и
применение его в решении проблемы очередей

Йасоб Ешхак Шамаан

Для оценки параметра конволюции применяется так называемая "условно достаточная статистика". Оценка параметров прибытия проведется в одной системе обслуживания с потерями на основе условно достаточной статистики, которое показывается и сравнивается другими непосредственными методами оценки.

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 17/1976.

OPTIMIZATION PROBLEMS IN A SIMPLE MARKOV SERVICE SYSTEM

by Ahmed F. Mashhour

ABSTRACT

A service system $M(M)1$, $(n + 1)$ which operates for a finite period of time, is considered. The system is associated with a simple cost structure. The paper deals first with the problem of finding the optimal service rate which minimizes the expected total costs. Then the optimal arrival rate under the same criterion is investigated. Numerical results for both cases are given. The optimal service rate for queuenig systems with infinite operation time is discussed.

INTRODUCTION

This paper is motivated by [1] in which the input of a similar service system is controlled by using a rejection time policy. The present paper deals with the problem of controlling the system by two different approaches. First controlling the system through the service facility by choosing the optimal service rate. Then the system is controlled through the input by choosing the arrival rate optimally.

Consider an $M/M/1$, $(n + 1)$ queueing system which operates for a finite period of time $(0,T)$. The system starts at time $t = 0$ with no customers. Customers arrive according to a Poisson stream with mean arrival rate λ. An arriving customer enters the system only when the number of the present customers at his arrival is less than $n + 1$. The service times are independent exponentially distributed random variables with mean $1/\mu$. After the closing time T, no new arrivals are accepted and the present customers in the system, if there are any, are to be served in an overtime. The system is associated with the following costs:

i- The cost (loss) per unit time when the server is idle during the period $(0,T)$, is C_I.

ii- The runing cost per unit time when the server is busy during the period $(0,T)$, iis C_B.

iii- The overtime runing cost per unit time (occurs after the closing time T), is C_0.

To avoide trivial cases, we consider only the cases when

$$C_I > C_0 > C_B, \quad \text{or} \quad C_0 > C_1 > C_B.$$

In both cases $C_I > C_B$, since a busy server procedure revenue (the system operates economically), while a free server representes loss for the system.

THE EXPECTED TOTAL IDLE PERIOD DURING $(0, t)$

Let $B_k(t)$ denotes the expected total time the system spends, with no customers during the interval $(0,t)$, given that the system has started at the opening time with k customers,

$k = 0,1,\ldots, n+1$.

If the system starts with k customers at the opening time $t = 0$, then it may happen that the first transition in the Markovian queue size process:

i- is due to an arrival during $(x,x+dx)$ which accurs with probability

$\lambda e^{-(\lambda+\mu)x}\ dx, \quad \text{if} \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$

ii- is due to a departure during $(x,x+dx)$ which occurs with probability

$\mu e^{-\mu x}\ dx \quad \text{if} \quad k = n+1$ and with probability

$\mu e^{-(\lambda+\mu)x}\ dx \quad \text{if} \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$

Integrating over all values of $0 \leqslant x \leqslant t$, it follows taht $\underset{k}{B}(t)$, $k = 0,1,\ldots, n+1$ satisfies the system of integral equations

$$(1) \qquad \begin{cases} B_0(t) = \lambda \int\limits_0^t [x + \underset{1}{B}(t-x)]e^{-\lambda x}\ dx, \\ B_k(t) = \lambda \int\limits_0^t e^{-(\lambda+\mu)x}\ B_{k+1}(t-x)dx + \mu \int\limits_0^t e^{-(\lambda+\mu)x} B_{k-1}(t-x)dx, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \\ B_{n+1}(t) = \mu \int\limits_0^t e^{-\mu x} B_{n+1}(t-x)dx. \end{cases}$$

If $B_k^*(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\ \underset{k}{B}(t)dt$, $\quad k = 0,1,\ldots, n+1$ denote the Laplace transform of $B_k(t)$,

then the system (1) can be written in the form

$$(2) \qquad \begin{cases} (\lambda+s)B_0^*(s) - \lambda B_1^*(s) = \lambda/s(\lambda+s), \\ (\mu+s)\ B_{n+1}^*(s) - \mu B_n^*(s) = 0, \\ (\lambda+\mu+s)B_k^*(s) - \lambda B_{k+1}^*(s) - \mu B_{k-1}^*(s) = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \end{cases}$$

The determinánt of the coefficients of the system (2) has the form

$$\Delta_{n+2}(s) = \left|\begin{array}{cccccc} \lambda+s & -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\mu & \lambda+\mu+s & -\lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & \vdots \\ \cdot & & & & & \vdots \\ \cdot & & & & & \vdots \\ \cdot & & & & & 0 \\ & & & -\mu & \lambda+\mu+s & -\lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\mu & \mu+s \end{array}\right|$$

Denoting the right lower subdeterminant of order k in $\Delta_{n+2}(s)$ by $\Delta_k(s)$, then it can be easily shown that

$$B_0^*(s) = \frac{\lambda\Delta_{n+1}(s)}{s(\lambda+s)\Delta_{n+2}(s)} \tag{3}$$

In order to decompose $B_0^*(s)$ by partial fractions, we examine the roots its denumerator

$$p_{n+4}(s) = s(\lambda+s)\,\Delta_{n+2}(s).$$

It can be shown, as in [2], that $P_{n+4}(s) = 0$ has

a) one repeated root $s_0 = 0$,
b) one root $s = -\lambda$,
c) $n+1$ distinicit negative roots $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$.

It is easy to show that the necessary and sufficient condition that one of the roots $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$ coincides with the single root $s = -\lambda$ is

$$\Delta_n(-\lambda) = 0.$$

By the virtue of the above discussion, if $\Delta_n(-\lambda) \neq 0$, then

$$p_{n+4}(s) = (s-s_0)^2(s+\lambda)\prod_{i=1}^{n+1}(s-s_i),$$

and

$$B_0^*(s) = \frac{b_0}{s^2} + \frac{a_0}{s} + \frac{c}{s+\lambda} + \sum_{j=1}^{n+1}\frac{b_j}{s-s_j}, \tag{4}$$

where the coefficients are given by

$$
(5)\quad \begin{cases}
b_0 = \dfrac{\mu^{n+1}}{\left|\prod\limits_{i=1}^{n+1} s_i\right|} \qquad c = \dfrac{\Delta_{n+1}(-\lambda)}{\lambda \prod\limits_{i=1}^{n+1} (-\lambda - s_i)}, \\
b_j = \dfrac{\lambda \Delta_{n+1}(s_j)}{s_j^2 (s_j + \lambda) \prod\limits_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{n+1} (s_i - s_j)}, \qquad j = 1,2,\ldots,n+1, \\
\text{and} \\
a_0 = -\left(c + \sum\limits_{j=1}^{n+1} b_j\right).
\end{cases}
$$

On inversion, we get

$$
(6)\qquad B_0(t) = b_0 t + a_0 + c e^{-\lambda t} + \sum_{j=1}^{n+1} b_j e^{s_j t}.
$$

By the same way, a similar expression can be obtained for $B_0(t)$ when $\Delta_n(-\lambda) = 0$.

Now the expected total idle and busy period during the time of operation $(0,T)$, is $B_0(T)$ and $T - B_0(T)$ respectively.

THE EXPECTED TOTAL COSTS

It remains now to find the expected overtime caused by the customers present at the closing time T. Let $p_k(t)$, $0 \leqslant k \leqslant n+1$ be the probability that there are k customers at time t, in the system. They satisfy a finite system of linear differential equations. The eigenvalues of that system are the roots of $\Delta_{n+2}(s) = 0$, discussed in section 2. The corresponding eigenvectors can be determined, as in Lemma 2 in [2], to get $p_k(t)$ finally in the form

$$
(7)\qquad p_k(t) = \sum_{i=0}^{n+1} d_i \alpha_{k+1}^{(i)} e^{s_i t}, \qquad k = 0,1,\ldots,n+1,
$$

where $\alpha_{k+1}^{(i)}$ is the $(k+1)^{\underline{th}}$ componant of the eigenvector corresponding to the eigevalue s_i, and $d_i s$ are arbitrary constants to be determined from the initial condition of the system (the number of customers in the system at $t = 0$).

Now the objective function, given that the system has started with no customers, is given by

$$
(8)\qquad C_T(\mu) = C_I B_0(T) + C_B(T - B_0(T)) + C_0 \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{\mu} p_i(T)
$$

The numerical results concerning the optimal service rate μ^* for fixed values of λ in the case of finite waiting room with capacity n, can be summerized as follows:

a.) $C_I = 4$, $C_0 = 2$, $C_B = 1$, $n = 5$ and $T = 10$,

λ	0.5	1.0	1.5	2.0
μ^*	0.84	1.20	1.50	1.90

b.) $C_I = 2$, $C_0 = 3$, $C_B = 1$, $n = 5$ and $T = 10$,

λ	0.5	1.0	1.5	2.0
μ^*	1.70	2.13	2.60	3.0

Concerning the optimal arrival rate λ^* for fixed values of μ in case of finite waiting room with capacity n, we get

c.) $C_I = 2$, $C_0 = 3$, $C_B = 1$, $n = 5$ and $T = 10$,

μ	2.5	3.0	3.5	4.0
λ^*	2.11	3.05	4.16	5.13

d.) $C_I = 4$, $C_0 = 2$, $C_B = 1$, $n = 5$ and $T = 10$,

μ	0.84	1.20	1.50	1.90
λ	1.08	5.60	7.51	10.0

Tables 1 and 4 shows that for a queueing system $M/M/1$, $(n + 1)$ with fixed values of C_I, C_0, C_B, n and T, the optimal arrival rate λ^* corresponding to a fixed value μ, does not imply that μ is the optimal service rate for the same system with $\lambda = \lambda^*$.
This is due to the fact that the dependence of the objective function (8) on λ and μ is not only throuhg the ratio λ/μ.

OPTIMAL SERVICE RATE FOR QUEUEING SYSTEM WITH $T = \infty$

Consider the system $M/M/1$, $(n + 1)$ which operates for infinite period of time ($T = \infty$). The arrival and service rates are λ and μ respectively. The system is associated with the following costs:

i- r_1 is the revenue provided by a served customer.

ii- r_2 is the loss of the system caused by a lost customer (because of the fullness of the waiting room).

iii- C_I is the cost (loss) per unit time when the server is idle.

Denote by $\nu_A(T)$ the number of the admitted (joining) customers during a time interval $(0,T)$, and by $\nu_L(T)$ the number of lost customers (beceaose of the fullness of the waiting room) during $(0,T)$.

The purpose of this section is to find the optimal service rate μ^* that maximizies the average expected net revenue given by

$$(9) \qquad C_1(\mu) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}[r_1 E\nu_A(T) - C_I B_0(T)],$$

where $B_0(T)$ is the expected total idle period during $(0,T)$ given by equation (6). Putting $\rho = \lambda/\mu$, then the stationary probabilities p_k^* that there are k customers in the system are given, see [3], by

$$(10) \qquad p_k^* = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}}\,\rho^k = \frac{\rho^k}{1+\rho+\ldots+\rho^{n+1}}, \qquad k = 0,1,\ldots,n+1.$$

Now we have that

$$\lim_{T \to \infty} \frac{E\nu_A(T)}{\lambda T} = 1 - p_{n+1}^*,$$

and

$$(11) \qquad \lim_{T \to \infty} \frac{B_0(T)}{T} = p_0.$$

From equations (10) and (11), the objective function given by (9) can be written in the form

$$(12) \qquad C_1(\mu) = \lambda r_1 \frac{1+\rho+\ldots+\rho^n}{1+\rho+\ldots+\rho^{n+1}} - C_I \frac{1}{1+\rho+\ldots\rho^{n+1}} =$$

$$= \lambda r_1 - \frac{\lambda r_1 \rho^{n+1} + C_I}{1+\rho+\ldots+\rho^{n+1}} \quad .$$

Taking the first derivative of (12) with respect to μ and equating to zero, we get

$$(13) \qquad \lambda r_1 [\rho^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\rho^k - (n+1)\rho^n \sum_{k=0}^{n} \rho^k] + C_I \sum_{k=0}^{n} (k+1)\rho^k = 0.$$

The left hand side of the later equation is a polynomil of degree $2n$ in ρ, it can be written in the form

$$(14) \qquad f_{2n}(\rho) = \sum_{i=0}^{2n} a_i \rho^i,$$

where

$$\begin{aligned} a_i &= (i+1)C_I, & & 0 \leqslant i \leqslant n-1, \\ &= (n+1)(C_I - \lambda r_1), & & i = n, \\ &= -(2n+1-i)\lambda r_I, & & n+1 \leqslant i \leqslant 2n. \end{aligned}$$

It is easly seen that the equation $f_{2n}(\rho) = 0$ has only one positive root $\overline{\rho}$ as follows: Since $f_{2n}(0) = a_0 > 0$ and $f_{2n}(\infty) < 0$, then $f_{2n}(\rho) = 0$ has at least one positive root. Applying Descartes'rule of sings, see [4], (which states that number of positive roots of a polynomial is equal to the number of variations in sign in the sequence of coefficients of this polynomial or is less by an even number), it follows that $f_{2n}(\rho) = 0$ has only one positive root $\overline{\rho}$. It is clear that the number of variations in sign of the coefficients $a_i s$ given by (14), does not change whatever the relation betwe en λr_1 and C_I.

Taking the second derivative of the objective function given by (12) with respect to μ, we get

$$\frac{d^2}{d\mu^2} C_1(\mu) \Big|_{\rho=\overline{\rho}} < 0.$$

By virtue of the above discussion we conclude that the optimal service rate μ^* at which the objective function $C_1(\mu)$ attains its maximum is unique and equal to $\lambda/\overline{\rho}$ where $\overline{\rho}$ is the unique positive root of (13).
However the upper bound of the positive root of (13) which is given in [4] by

$$(15) \qquad 1 + \sqrt[(n+1)]{nC_I/\lambda r_1}$$

may give a rough description of the behavior of the unique root $\overline{\rho}$ and concequently the optimal value μ^* of the service rate, when the values of λ, r_1 and C_I changes. We discuss in the following example the behavior of the optimal service rate μ^* for the simple case $n = 1$, where an explicit formula for the unique positive root $\overline{\rho}$ exists.

Example: For waiting room capacity $n = 1$, we get

$$C_1(\mu) = \frac{\lambda r_1(1+\rho) - C_I}{1+\rho+\rho^2}$$

and equation (13) gives

$$\lambda r_1 \rho^2 + 2(\lambda r_1 - C_I)\rho + C_I = 0.$$

The positive root $\overline{\rho}$ of the later equation is given by

$$(16) \qquad \bar{\rho} = \frac{-(\lambda r_1 - C_I) + \sqrt{(\lambda r_1 - C_I)^2 - \lambda r_I C_I}}{\lambda r_1} \qquad \text{if } \lambda r_1 \neq C_I$$

$$\bar{\rho} = 1 \qquad \text{if } \lambda r_1 = C_I.$$

From (16) it can be aesily shown that μ^* has the properities

a.) $\frac{d}{dC_I} \mu^* \leqslant 0,$

i.e. the optimal mean service time $1/\mu^*$ increases as C_I increases.

b.) $\frac{d}{dr_I} \mu^* > 0,$

i.e. the optimal mean service time $1/\mu^*$ decreases as r_1 increases.

c.) $\frac{d}{d\lambda} \mu^* > 0,$

i.e. the optimal mean service time $1/\mu^*$ decreases as λ increases.

It is clear that the properties of the optimal mean service time $1/\mu^*$ agrees with the properties of the upper bound of $\bar{\rho}$ given by (15) when $n = 1$.

The numerical results obtained for the optimal service rate μ^* in the case of infinite operation time $(T = \infty)$ can be summerized as follows:

1.) For fixed $C_I = 3$, $r_1 = 2$ and $n = 4$

λ	1	2	3	4
μ^*	0.80	2.04	3.51	5.15

2. For fixed $\lambda = 2$ and $n = 5$, the values of μ are given in the following table

r_1 \ C_1	1	2	3	4
1	2.28	1.88	1.68	1.55
2	2.75	2.28	2.04	1.88
3	3.05	2.55	2.28	2.11
4	3.28	2.75	2.47	2.28

It is clear from tables 1 and 2 that the properties a,b and c for the case $n = 1$, are still the same for larger values of the waiting room capacity ($n = 4$ and $n = 5$). In table 2, μ on the diagonal assume a fixed value ($\mu^* = 2.28$) this is due to the fact that, when

$r_1 = C_I$ then the optimal service rate μ^* depends only on λ and n (see equation 13).

Remark: Let us consider the objective function

$$(17) \qquad C_2(\mu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} [C_I B_0(T) + r_2 E\nu_L(T)],$$

which represents the average expected cost rate. Now our purpose is to choose the optimal service μ which minimizes $C_2(\mu)$.
It can be seen that

$$(17') \qquad C_2(\mu) = \frac{C_I + \lambda r_2 p^{n+1}}{1 + \rho + \ldots + \rho^{n+1}}$$

since

$$\lim_{T\to\infty} \frac{E\nu_L(T)}{\lambda T} = p^*_{n+1}.$$

Comparing $C_1(\mu)$ and $C_2(\mu)$, (given by equations 12 and 17), we can see that, if $r_2 = r_1$, then the optimal service rate μ^* that maximizes $C_1(\mu)$ as the same that minimizes $C_2(\mu)$. On the other hand if $r_2 \neq r_1$, then the optimal setvice rate μ^* that minimizes $C_2(\mu)$ is unique and has the same properities a,b and c (replacing r_1 by r_2) described in the given example.

ACKNOWLEGEMENT

I would like to express my deep thanks to my supervisor Dr J. Tomkó for his helpful criticism and suggestions.

References

[1] A.Mashhour – J.Tomkó: Controlling the input for Markovian service systems. Reprents of the Stochastic Control Conference, Budapest, (1974).

[2] A.Mashhour: A first passage problem for an M/M/1 queue. MTA SzTAKI, Közlemények 12. (1974).

[3] L.Takács: Introduction to the Theory of Oueues. Oxford University press. New York. (1962).

[4] A.Kurosh: Higher Algebra. MIR Pubilishers. Moscow, (1972). pp. 247.

Összefoglaló

Optimalizálási feladatok Markov tipusú kiszolgálási rendszerekben

Ahmed F. Mashhour

Markov tipusú M/M/1 kiszolgáló rendszer érkezési intenzitásának optimális megválasztását vizsgálja a jelen dolgozat. Feltételezzük, hogy az üzemeltetési költség (időegységenként) C_B ha foglalt a kiszolgáló, C_I ha szabad, s ha véges a müködési idő és túlóra is fellép, akkor a túlórázás időegységenkénti dija C_0. Az alábbi esetek lehetnek érdekesek:

$$C_I > C_0 > C_B \quad \text{és} \quad C_0 > C_I > C_B.$$

Véges és végtelen müködési időre kiszámitjuk a minimális (végtelen idő esetén az egységnyi időre eső) üzemeltetési költséget biztositó érkezés intenzitást. Az eredményeket számitástechnikai szempontból is analizáljuk s szemléltető numerikus eredményeket közlünk.

Р е з ю м е

Задачи оптимизации в простейщих системах обслуживания

Ахмед Ф. Машхоур

В работе исследуется оптимальное определение интенсивности входящего потока простейщих системы (M/M/I) обслуживания. Пусть стоимость работы системы /в единицу времени/ C_B если обслуживающих прибор занят , C_I если свободен. Если время функционирования системы конечно и возникает сверхурочная работа, тогда стоимость сверхурочной работы за единицы времени C_O. Интересны следующие случаи:

$$C_I > C_O > C_B \text{ и } C_O > C_I > C_B$$

Приведены иллюстративные нумерические экземпляры.

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 17/1976.

К расчёту ядерных моделей методом гиперсферических функций

К.Балла

В ядерной физике при изучении ядерных и квазиядерных систем, состоящих из нуклонов и антинуклонов, применяется известный метод гиперсферических функций [I, 2], сводящий многомерное уравнение Шредингера к бесконечной системе линейных обыкновенных уравнений на полуоси с особенностями в граничных точках. Для задачи трёх тел (ядер трития и He^3) такие уравнения получены в [3].

Настоящая работа посвящена численному решению задачи о связанных состояниях системы из трёх частиц (ядро модельного трития) методом гиперсферических функций в приближении одного и трёх уравнений. Модель ядра выбирается такой же, как в [4], §3, с потенциалом взаимодействия в виде прямоугольной ямы и параметрами ямы, несколько отличными от выбранных в [4]. В [4] энергия связи основного состояния ядра (E_0=20.5$\pm$0.I Mev) найдена путём численного решения системы одномерных интегральных уравнений, полученных из многомерных интегральных уравнений Фаддеева.

Настоящая работа позволяет сравнить результаты решения небольшого числа уравнений, полученных в методе гиперсферических функций, с решением интегральных уравнений в [4], более трудоёмких с вычислительной точки зрения.

Быстрая сходимость метода гиперсферических функций, установленная в [3] для некоторых ядерных моделей, и результаты вычислений в данной работе в приближениях одного и трёх уравнений позволяют надеяться, что полученное уже для одного уравнения собственное значение $E_{I,0} = 21.074 \pm 1.5 \cdot 10^{-3}$ близко к истинному значению энергии связи основного состояния модели.

Некоторое расхождение со значением E_0 в [4] объясняется, с одной стороны, небольшим варьированием потенциала взаимодействия, а, с другой стороны, приближённостью вычислений в [4] (последующие поправки могут только увеличить E_0).

I. В первом приближении метода гиперсферических функций задача об определении энергии основного состояния ядра модельного трития сводится к нахождению максимального собственного значения E_I задачи:

$$\varkappa'' + \frac{1}{\rho}\varkappa' + \left[-bE_1 + 3b\mathcal{F}_0(\rho) - \frac{4}{\rho^2}\right]\varkappa = 0, \qquad 0 < \rho < \infty \tag{I.1}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \varkappa(\rho) = 0, \tag{I.2}$$

$$\lim_{\rho \to \infty} \varkappa(\rho) = 0, \tag{I.3}$$

где $\mathcal{F}_0(\rho) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, V(\rho\sqrt{1+x})\,dx$,

$$V(t) = \begin{cases} C_1 = \dfrac{1{,}441 \cdot 102{,}276}{2{,}043} & \text{при } t \le a = 2{,}043, \\ 0 & \text{при } t > a, \end{cases}$$

$b = 4{,}8229 \cdot 10^{-2}$.

Заменой $\varkappa(\rho) = z(\rho)\rho^{-1/2}$, $\lambda = bE_1$ получим задачу в виде:

$$z'' + \left[-\lambda + q(\rho)\right]z = 0, \qquad 0 < \rho < \infty \tag{I.4}$$

$$\lim_{\rho \to 0} z(\rho) = 0, \tag{I.5}$$

$$\lim_{\rho \to \infty} z(\rho) = 0, \tag{I.6}$$

где $q(\rho) = -\frac{15}{4\rho^2} + 3b\mathcal{F}_0(\rho)$ и, в силу поведения $\mathcal{F}_0(\rho)$,

$$q(\rho) = -\frac{15}{4\rho^2} + 3bC_1 \qquad \text{при } \rho \le \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$q(\varrho) = -\frac{15}{4\varrho^2} + O\left(\frac{1}{\varrho^3}\right)$$ для достаточно больших ϱ.

Для переноса граничных условий (I.5) и (I.6) из особых точек используем результаты работ, указанных в [5].

Условие (I.5) для решений уравнения (I.4) для достаточно маленьких ϱ эквивалентно условию

$$\varrho z'(\varrho) = w(\varrho) z(\varrho), \qquad (I.7)$$

где $w(\varrho)$ есть решение задачи

$$\varrho w' + w^2 - w + \varrho^2 \left[-\lambda + q(\varrho)\right] = 0, \quad 0 < \varrho \le \varrho_0, \qquad (I.8)$$

$$\lim_{\varrho \to 0} w(\varrho) = w_0 = \frac{5}{2},$$

причём

$$w(\varrho) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \varrho^{2i}, \qquad (I.9)$$

где ряд сходится для достаточно малых ϱ и все коэффициенты получаются формальной подстановкой ряда (I.9) в уравнение (I.8).

Условие (I.6) для решений уравнения (I.4) для достаточно больших ϱ эквивалентно условию

$$z'(\varrho) = v(\varrho) z(\varrho), \qquad (I.10)$$

где $v(\varrho)$ есть решение задачи

$$v' + v^2 - \lambda + q(\varrho) = 0, \qquad \varrho_\infty \le \varrho < \infty, \qquad (I.11)$$

$$\lim_{\varrho \to \infty} v(\varrho) = -\sqrt{\lambda},$$

причём при $\varrho \to \infty$

$$v(\varrho) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v_i}{\varrho^i}, \qquad (I.12)$$

и все коэффициенты этого асимптотического ряда получаются формальной его подстановкой в уравнение (I.11).

Взяв первые два члена в разложениях (I.9) и (I.I2), получим в точках ρ_0 и ρ_∞ приближённые граничные условия в виде

$$\rho_0 z'(\rho_0) = \hat{w}(\rho_0)\, z(\rho_0), \qquad (I.7')$$

$$z'(\rho_\infty) = \hat{v}(\rho_\infty)\, z(\rho_\infty), \qquad (I.I0')$$

где $\hat{w}(\rho) = \frac{5}{2} + \frac{\lambda - 3bc_1}{6}\rho^2$,

$\hat{v}(\rho) = -\sqrt{\lambda}\left(1 + \frac{15}{8\lambda\rho^2}\right)$.

О выборе точек ρ_0 и ρ_∞ для достижения нужной точности скажем ниже.

На конечном интервале $[\rho_0, \rho_\infty]$ задачу (I.4), (I.7'), (I.I0') решаем методом устойчивой прогонки А.А.Абрамова. А именно, полагая $ctg\,\theta = \frac{z'}{z}$, приходим к задаче для $\theta(\rho)$:

$$\theta' = 1 - [1 + \lambda - q(\rho)]\sin^2\theta, \quad \rho_0 \le \rho \le \rho_\infty, \qquad (I.I3)$$

$$\theta(\rho_0) = arctg\,\frac{\rho_0}{\hat{w}(\rho_0)}, \qquad (I.I4)$$

$$\theta(\rho_\infty) = arctg\left[-\hat{v}(\rho_\infty)\right] + \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, 1, \ldots \qquad (I.I5)$$

где n – номер собственного числа. Для нахождения максимального собственного числа надо положить в (I.I5) $n = 0$.

В результате задача сводится к решению уравнения (I.I3) слева направо до точки ρ_c с граничным условием (I.I4) и справа налево до точки ρ_c с граничным условием (I.I5) и стрельбе по λ. Так как задача (I.I3) – (I.I5) обладает свойством монотонности, то сходится следующий итерационный процесс ($\theta^\wedge(\rho,\lambda)$ обозначает решение (I.I3), удовлетворяющее (I.I4), а $\theta^n(\rho,\lambda)$ – решение (I.I3), удовлетворяющее (I.I5)): задаём λ_0 ; если на каком-то шаге $\theta^\wedge(\rho_c,\lambda_k) > \theta^n(\rho_c,\lambda_k)$, то берётся $\lambda_{k+1} > \lambda_k$, если же $\theta^\wedge(\rho_c,\lambda_k) < \theta^n(\rho_c,\lambda_k)$, то $\lambda_{k+1} < \lambda_k$. В качестве точки ρ_c удобнее всего брать $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Чтобы выбрать начальное приближение λ_0 для максимального собственного числа, умножим уравнение (I.4) на z и проинтегрируем его от 0 до ∞. Получим

$$\int_0^\infty [\lambda - q(\rho)]\, z^2\, d\rho < 0,$$

откуда

$$\lambda < \sup_{0<\rho<\infty} q(\rho) \ll 3bC_1$$

Исходя из $\lambda_0 = 3bC_1$, находим описанным методом максимальное собственное число λ и соответствующее значение $E_{I,0}$ для задачи (I.I) - (I.3): $E_{I,0} = 2I.074 \pm I.5 \cdot I0^{-3}$.

2. Во втором приближении метода Симонова при исследовании описанной ядерной модели вместо уравнения (I.I) возникает система двух связанных уравнений и одно независимое уравнение. В результате задача сводится к исследованию уравнения (3.I) (см. п.3.) и нахождению максимального собственного значения E_2 задачи:

$$x_0'' + \frac{1}{\rho} x_0' + \left[-bE_2 + 3b\mathcal{F}_0(\rho) - \frac{4}{\rho^2}\right] x_0 = \frac{b}{\sqrt{3}} \mathcal{F}_4(\rho) x_4, \tag{2.I}$$

$$x_4'' + \frac{1}{\rho} x_4' + \left[-bE_2 + 3b\mathcal{F}_0(\rho) + \frac{6}{5} b\mathcal{F}_4(\rho) - \frac{36}{\rho^2}\right] x_4 = \frac{b}{\sqrt{3}} \mathcal{F}_4(\rho) x_0, \quad 0<\rho<\infty,$$

$$\lim_{\rho\to 0} x_0(\rho) = \mathrm{const}, \quad \lim_{\rho\to 0} x_4(\rho) = 0, \tag{2.2}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} x_0(\rho) = \lim_{\rho\to\infty} x_4(\rho) = 0, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{F}_4(\rho) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,(16x^4 - 12x^2 + 1)\, V(\rho\sqrt{1+x})\, dx,$

а $V(t), \mathcal{F}_0(\rho), b$ те же, что в п.I.

Заменой $x_0(\rho) = z_1(\rho)\rho^{-1/2}, x_4(\rho) = z_2(\rho)\rho^{-1/2}, \lambda = bE_2$ получим для $Z = (z_1, z_2)^T$ задачу в виде:

$$Z'' + [-\lambda I_2 + Q(\rho)] Z = 0, \quad 0<\rho<\infty, \tag{2.4}$$

$$\lim_{\rho \to 0} Z(\rho) = 0, \tag{2.5}$$

$$\lim_{\rho \to \infty} Z(\rho) = 0, \tag{2.6}$$

где I_2 – единичная матрица второго порядка,

$$Q(\rho) = \begin{pmatrix} -\frac{15}{4\rho^2} + 3b\mathcal{F}_0(\rho) & -\frac{b}{\sqrt{3}}\mathcal{F}_4(\rho) \\ -\frac{b}{\sqrt{3}}\mathcal{F}_4(\rho) & -\frac{143}{4\rho^2} + 3b\mathcal{F}_0(\rho) + \frac{6}{5}b\mathcal{F}_4(\rho) \end{pmatrix},$$

и в силу поведения $\mathcal{F}_0(\rho)$ и $\mathcal{F}_4(\rho)$

$$Q(\rho) = \frac{1}{\rho^2} Q_0^0 + 3bC_1 I_2 \qquad \text{при } \rho \leq \frac{a}{\sqrt{2}}, \text{ где}$$

Q_0^0 – диагональная матрица, $\mathrm{diag}\, Q_0^0 = (-\frac{15}{4}, -\frac{143}{4})$,

и для достаточно больших ρ

$$Q(\rho) = \frac{1}{\rho^2} Q_2^\infty + O\left(\frac{1}{\rho^3}\right), \quad Q_2^\infty = Q_0^0$$

Используя результаты работ, указанных в [5], получаем, что условие (2.5) для решений системы (2.4) для достаточно маленьких ρ эквивалентно условию

$$\rho Z'(\rho) = W(\rho) Z(\rho), \tag{2.7}$$

где $W(\rho)$ есть матрица-решение задачи

$$\begin{gathered} \rho W' + W^2 - W + \rho^2 \left[-\lambda I_2 + Q(\rho)\right] = 0, \qquad 0 < \rho \leq \rho_0, \\ \lim_{\rho \to 0} W(\rho) = W_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{2.8}$$

причём

$$W(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} W_i \rho^{2i}, \tag{2.9}$$

где матричный ряд сходится для достаточно малых ϱ и все коэффициенты получаются формальной подстановкой ряда в уравнение (2.8).

Аналогично, условие (2.6) для решений системы (2.4) для достаточно больших ϱ эквивалентно условию

$$Z'(\varrho)=V(\varrho)Z(\varrho), \tag{2.10}$$

где $V(\varrho)$ есть матрица-решение задачи

$$\begin{aligned} &V'+V^2+[-\lambda I_2+Q(\varrho)]=0, \qquad \varrho_\infty' \le \varrho < \infty, \\ &\lim_{\varrho\to\infty} V(\varrho)=-\sqrt{\lambda}\, I_2, \end{aligned} \tag{2.11}$$

причём

$$V(\varrho)\sim\sum_{i=0}^{\infty} V_i\varrho^{-i}, \tag{2.12}$$

и все матрицы-коэффициенты этого асимптотического ряда получаются формальной его подстановкой в (2.11).

Взяв первые два члена в разложениях (2.9) и (2.12), получим в точках ϱ_0 и ϱ_∞ граничные условия

$$\varrho_0 Z'(\varrho_0)=\hat{W}(\varrho_0)Z(\varrho_0), \tag{2.7'}$$

$$Z'(\varrho_\infty)=\hat{V}(\varrho_\infty)Z(\varrho_\infty), \tag{2.10'}$$

где $\hat{W}(\varrho)$ и $\hat{V}(\varrho)$ диагональные матрицы,

$$\operatorname{diag}\hat{W}(\varrho)=\left(\frac{5}{2}+\frac{\lambda-3bC_1}{6}\varrho^2,\ \frac{13}{2}+\frac{\lambda-3bC_1}{14}\varrho^2\right)$$, а

$$\operatorname{diag}\hat{V}(\varrho)=\left(-\sqrt{\lambda}\left(1+\frac{15}{8\lambda\varrho^2}\right),\ -\sqrt{\lambda}\left(1+\frac{143}{8\lambda\varrho^2}\right)\right).$$

О выборе точек ϱ_0 и ϱ_∞ для достижения заданной точности см. п.4.

К решению задачи (2.4), (2.7′), (2.10′) на конечном интервале $[\varrho_0, \varrho_\infty]$ применяем матричный вариант устойчивой прогонки А.А.Абрамова в следующем виде.

Вводя четырёхмерную вектор-функцию $S=\binom{Z}{Z'}$ из (2.4), (2.7′), (2.I0′) получим для S уравнение

$$S' + P(\lambda,\rho)S = 0, \qquad \rho_0 \le \rho \le \rho_\infty, \tag{2.I3}$$

где

$$P(\lambda,\rho) = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ -\lambda I_2 + Q(\rho) & 0 \end{pmatrix},$$

и граничные условия

$$U_0^{\wedge *} S(\rho_0) = 0, \tag{2.I4}$$

$$U_\infty^{\sqcap *} S(\rho_\infty) = 0, \tag{2.I5}$$

где $U_0^\wedge$ и $U_\infty^\sqcap$ для удобства нормированы так, чтобы

$$U_0^{\wedge *} U_0^\wedge = I_2 \qquad \text{и} \qquad U_\infty^{\sqcap *} U_\infty^\sqcap = I_2 .$$

Многообразие решений системы (2.I3), удовлетворяющих (2.I4) /соответственно (2.I5)/, определяется соотношением

$$U^{\wedge *}(\rho) S(\rho) = 0, \quad \rho_0 \le \rho \le \rho_\infty,$$

(соответственно $U^{\sqcap *}(\rho) S(\rho) = 0$),

где $U^\wedge(\rho)$ является матрицей-решением задачи Коши

$$U^{\wedge\prime} - P^* U^\wedge + U^\wedge (U^{\wedge *} U^\wedge)^{-1} U^{\wedge *} P^* U^\wedge = 0, \quad \rho_0 \le \rho \le \rho_\infty, \qquad U^\wedge(\rho_0) = U_0^\wedge \tag{2.I6}$$

/соответственно в (2.I6) верхний индекс заменяется на $\sqcap$, а начальное условие – на условие на правом конце $U^\sqcap(\rho_\infty) = U_\infty^\sqcap$ /.

Собственное значение λ находится из условия

$$\det \begin{vmatrix} U^{\wedge *}(\rho_c) \\ U^{\sqcap *}(\rho_c) \end{vmatrix} = 0, \tag{2.I7}$$

где ρ_c – произвольная точка отрезка $[\rho_0, \rho_\infty]$ (удобнее всего выбрать $\rho_c = \frac{a}{\sqrt{2}}$). Условие (2.I7) есть нелинейное уравнение относительно λ , его решение отыскивается итерационным методом.

Верхнюю оценку для собственного числа λ можно получить умножением первого уравнения (2.4) на z_1 и второго уравнения на z_2 , сложением их и последующим интегрированием от 0 до ∞ . Получаем, что

$$\int_0^\infty \left[\lambda - 3b\mathcal{F}_0(\rho) - \frac{b}{\sqrt{3}}\mathcal{F}_4(\rho) + \frac{15}{4\rho^2}\right] z_1^2\, d\rho + \int_0^\infty \left[\lambda - 3b\mathcal{F}_0(\rho) - \left(\frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{6b}{5}\right)\mathcal{F}_4(\rho) + \frac{143}{\rho^2}\right] z_2^2\, d\rho \equiv$$

$$\equiv \int_0^\infty [\lambda - q_1(\rho)] z_1^2\, d\rho + \int_0^\infty [\lambda - q_2(\rho)] z_2^2\, d\rho < 0,$$

и поэтому по меньшей мере на каком-то отрезке

$$\lambda < \max(q_1(\rho), q_2(\rho)),$$

откуда $\lambda < NbC_1$, $N \ll 40$.

Исходя из $\lambda_0 = 40\, bC_1$, находится максимальное собственное число λ и соответствующее $E_{2,0} = 21.083$ с относительной погрешностью $0.1‰$.

3. Во втором приближении возникает ещё независимое уравнение, отделившееся от системы (2.I). Покажем, что при любом положительном E задача

$$x_2'' + \frac{1}{\rho} x_2' + \left[-bE + \frac{3}{2} b\mathcal{F}_0(\rho) + \frac{3}{2} b\mathcal{F}_2(\rho) - \frac{16}{\rho^2}\right] x_2 = 0, \quad 0 < \rho < \infty, \qquad (3.\mathrm{I})$$

$$\lim_{\rho \to 0} x_2(\rho) = \lim_{\rho \to \infty} x_2(\rho) = 0$$

имеет только тривиальное решение.

Здесь $\mathcal{F}_2(\rho) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,(4x^2-1)\, V(\rho\sqrt{1+x})\, dx,$

а $V(t)$, $\mathcal{F}_0(\rho)$, b те же, что в п.I.

Заменой $\varkappa_2(\rho)=z(\rho)\rho^{-1/2}$ получим задачу в виде

$$z''+[-bE+q(\rho)]z=0, \qquad 0<\rho<\infty, \tag{3.2}$$

$$\lim_{\rho\to 0} z(\rho)=\lim_{\rho\to\infty} z(\rho)=0,$$

где $q(\rho)=-\frac{63}{4\rho^2}+\frac{3}{2}b\mathcal{F}_0(\rho)+\frac{3}{2}b\mathcal{F}_2(\rho)$.

В силу поведения $\mathcal{F}_0(\rho)$ и $\mathcal{F}_2(\rho)$ функция $q(\rho)$ остаётся всюду отрицательной, поскольку при $\rho\leq\frac{a}{\sqrt{2}}$

$q(\rho)=-\frac{63}{4\rho^3}+3bC_1<0$ а для достаточно больших ρ $q(\rho)=-\frac{63}{4\rho^2}+O(\frac{1}{\rho^3})$.

Если бы на каком-то отрезке было $q(\rho)>0$, то нашлась бы точка, в которой $q'(\rho)=0$. Это условие эквивалентно выполнению равенства

$$u(t)\equiv(2t^2-1)^2t(1-t^2)^{1/2}=\frac{21\pi}{32a^2bC_1}$$

при некотором $t\in(0,1)$. Однако $\max\limits_{t\in[0,1]} u(t)<\frac{21\pi}{32a^2bC_1}$.

Предположим, что при некотором $E>0$ существует нетривиальное решение задачи (3.I) и потому и задачи (3.2). Умножим уравнение (3.2) на него и проинтегрируем от 0 до ∞. Получим, что

$$\int_0^\infty[-bE+q(\rho)]z^2d\rho>0,$$

что противоречит предположению.

В результате для энергии основного состояния описанной ядерной модели мы получим в первом приближении метода гиперсферических функций значение $E_{I,0}$=2I.074 MeV, а во втором приближении значение $E_{2,0}$=2I.083 MeV. Эти значения удовлетворяют вариационному принципу метода гиперсферических функций (см. [I-4]):

$$E_{1,0}<E_{2,0}.$$

Отметим также, что полученная малая поправка к $E_{I,0}$ во втором приближении (порядка 0.5 %) и факт быстрой сходимости метода Симонова для данной ядерной модели позволяют надеяться, что энергия связи основного состояния этой модели близка к 2I.I MeV.

4. Осталось указать оценки для выбора точек ρ_0 и ρ_∞ в граничных условиях (I.7′), (I.I0′), (2.7′) и (2.I0′).

Оценим погрешность замены точного граничного условия (I.7) приближенным. Обозначим погрешность замены через

$$\delta(\rho) \equiv \rho^3 \beta(\rho = w(\rho) - \hat{w}(\rho)$$

и невязку при подстановке $\hat{w}(\rho)$ вместо $w(\rho)$ в уравнение (I.8) через $\tau(\rho)$. При этом $\lim\limits_{\rho \to 0} \beta(\rho) = 0$ и $\tau(\rho) = w_2^2 \rho^4$, где $w_2 = \frac{\lambda - 3bC_1}{6}$. Для $\beta(\rho)$ получаем уравнение

$$\rho\beta' + (2 + 2w_0)\beta + 2w_2\rho^2\beta + \rho^3\beta^2 + \rho w_2^2 = 0.$$

Такое уравнение имеет единственное решение, стремящееся к нулю при ρ, стремящемся к нулю. Оно разлагается в степенной ряд по ρ. Определим функцию $z(\rho)$ соотношениями

$$z = \frac{1}{12}(2|w_2|\rho^2 z + \rho^3 z^2) + \frac{w_2^2}{8}\rho + \frac{|w_2|^3}{40}\rho^3, \qquad (4.I)$$
$$z(0) = 0.$$

По теореме о неявной функции $z(\rho)$ определена для малых ρ и представима в виде степенного ряда. Нетрудно проверить, что коэффициенты разложения $z(\rho)$ положительны и мажорируют коэффициенты разложения $\beta(\rho)$ по модулю и потому $|\beta(\rho)| \le z(\rho)$. Разрешая уравнение (4.I) относительно z, легко получить оценку $z(\rho) < \frac{3\rho}{10} w_2^2$. Поэтому при допустимой прогрешности $|\delta(\rho)| \le \delta_0$ достаточно брать

$$\rho_0 \le \frac{1}{\sqrt{|w_2|}} \sqrt[4]{\frac{10}{3}\delta_0}.$$

В случае граничного условия (2.7′) поступаем аналогично. Пусть погрешность замены точного граничного условия приближённым есть

$$Д(\rho) \equiv \rho^3 \mathcal{B}(\rho) = W(\rho) - \hat{W}(\rho),$$

а невязка при подстановке $\hat{W}(\rho)$ вместо $W(\rho)$ в уравнение (2.8) есть $T(\rho) = W_2^2\rho^4$, где W_2 – диагональная матрица,

$$\operatorname{diag} W_2 = \left(\frac{\lambda - 3bC_1}{6}, \frac{\lambda - 3bC_1}{14}\right).$$

Для матричной функции $\mathcal{B}(\rho)$ получаем уравнение

$$\rho \mathcal{B}' + (I_2 + W_0)\mathcal{B} + \mathcal{B}(I_2 + W_0) + \rho^2(\mathcal{B}W_2 + W_2\mathcal{B}) + \rho^3 \mathcal{B}^2 + W_2^2 \rho = 0.$$

Такое уравнение также имеет единственное решение, стремящееся к нулю при ρ, стремящемся к нулю. Оно разлагается в матричный степенной ряд по ρ. Определим функцию $z(\rho)$ соотношениями

$$z = c\,[v\rho^2 z + 8\rho^3 z^2] + b_1\rho + b_3\rho^3, \qquad (4.2)$$
$$z(0) = 0,$$

где

$$c = \|(5I_4 + U)^{-1}\|, \quad v = \|V\|,$$
$$b_1 = \|(I_4 + U)^{-1}H\|, \quad b_3 = \|(3I_4 + U)^{-1}V(I_4 + U)^{-1}H\|, \text{ а}$$
$$U = I_2 \times W_0 + W_0^T \times I_2, \quad V = I_2 \times W_2 + W_2^T \times I_2,$$
$$H = \left(\frac{(\lambda - 3bC_1)^2}{36}, 0, 0, \frac{(\lambda - 3bC_1)^2}{196}\right)^T.$$

По теореме о неявной функции $z(\rho)$ определена для малых ρ и разлагается в степенной ряд по ρ. При этом легко проверяется, что коэффициенты разложения $z(\rho)$ положительны и мажорируют матрицы-коэффициенты разложения $\mathcal{B}(\rho)$ по норме и потому $\|\mathcal{B}(\rho)\| \le z(\rho)$. Разрешая (4.2) относительно z, получим оценку

$$z(\rho) < 8b_1\rho \qquad \text{при } \rho \le \rho^1 = \min\left(\frac{1}{\sqrt{2cv}}, \sqrt[3]{\frac{b_1}{b_3}}, \frac{1}{2\sqrt[4]{8b_1c}}\right),$$

итак при допустимой погрешности $\|Д(\rho)\| < \delta_0$ достаточно брать

$$\rho_0 \le \min\left(\rho^1, \sqrt[4]{\frac{\delta_0}{8b_1}}\right).$$

Для оценки погрешности условий (I.I0′) и (2.I0′) непосредственно воспользуемся оценками из [5]. Обозначив через

$$d(\rho)=v(\rho)-\hat{v}(\rho) \qquad \text{и}$$

$$\mathcal{D}(\rho)=V(\rho)-\hat{V}(\rho)$$

получаем оценки $|d(\rho)|\leq\frac{1}{\lambda^{3/2}\rho^3}k_1$ и

$$\|\mathcal{D}(\rho)\|\leq\frac{1}{\lambda^{3/2}\rho^3}k_2,$$

где $k_1\sim 160$, а $k_2\sim 800$, поэтому для достижения заданной точности δ_∞ в случае (I.I0´) следует брать

$$\rho_\infty\geqslant\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt[3]{\frac{k_1}{\delta_\infty}},$$

а в случае (2.I0´)

$$\rho_\infty\geqslant\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt[3]{\frac{k_2}{\delta_\infty}}.$$

Автор выбражает благодарность Н.Б.Конюховой (ВЦ АН СССР) за оказанную помощь в решении задачи и А.М.Бадалян (ИЯФ АН СССР) за обсуждение результатов.

Литература

[I] Ю.А. Симонов. ЯФ 3,630(I966)
[2] Ю.А. Симонов. ЯФ 7,I2I0(I968)
[3] А.М. Бадалян, Ю.А.Симонов. ЯФ 3,I032(I966)
[4] А.Г. Ситенко, В.Ф.Харченко УФН I03,469(I97I)
[5] Е.С. Биргер. ЖВМ и МФ т8 №3, 674(I968)
[6] Е.С. Биргер. Алгоритмы и алгоритмические языки, вып.6, 3(I973) и цитированная в [5] и [6] литература.

Summary

On the Evaluation of Nuclear Models by the Method of Hyperspherical Functions

K. Balla

The paper is devoted to the numerical solution of the bound states problem for the three particle system (nucleus of tritium model) by the method of hyperspherical functions. One and three equations are used for the approximation, (1.1) and (2.1), (3.1) respectively. For the solution of the problem the methods of effective reduction of the boundary value problems on semi-axis with singularities in boundary points to the problems on the finite intervals without singularities and variants of the stable factorization are used. For the substitution of exact boundary conditions by approximative ones near the regular singularity error estimates are obtained in the case of approximation by means of convergent series.

Összefoglaló

Atommag modellek számitásai giperszferikus függvények módszereivel

Balla Katalin

A dolgozat egy három részecskéből álló rendszer (a tritium magjának modellje) kötött állapotai problémájának van szentelve. A feladatot numerikusan a hiperszférikus függvények módszerével oldja meg, egy (1.1) és három (2.1) és (3.1) egyenlettel való közelités segitségével.

A feladat megoldására felhasználja azokat a módszereket, amelyek féltengelyen lévő határpontokban szinguláris peremérték problémákat véges intervallumon szingularitással nem rendelkező feladatokra effektiven visszavezetnek; valamint a véges intervallumon értelmezett stabil faktorizációs módszereket. A pontos peremfeltételeket a reguláris kritikus pont környezetében konvergens sorral helyettesitő közelités hibabecsléseit is megadja.

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 17/1976.

К определению операций: отношение эквивалентности, отношение частичной упорядоченности, отношение упорядоченности группа метрика

Э. Стошек- Х. Винтер [*]

О. Введение

В рамках разрабатываемой в настоящее время общей теории автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУТП) /I/ описываются реальные и абстрактные объекты (операторы, операнды, операции, инструкции и цели операций) в базисных и информационных системах, а именно с помощью классификационных (номинальных), сравнительных (ординальных) и количественных (метрических) признаков, а также соотношений между последними. При этом оказывается, что эти признаки следует считать вполне одностепенными. Описание с помощью

классификационного
сравнительного — признака основывается на существо-
количественного

вании

отношения эквивалентности
отношения частичной или полной упорядоченности
в метрике

во множестве величин признаков. Из этого вытекает, что и от-

[*] Дрезденский технический университет, секция обработки информации

ношение эквивалентности, отношения частичной или полной упорядоченности и метрику следует считать одностепенными понятиями, что следует смотреть на них с единых точек зрения. Настоящая работа хочет создать для этого математическую основу.

Предложая работу /2/, приводим более широкую унификацию определений названных понятий, включая группу, коммутативную группу, квазиметрику, линейную метрику. Сформулированные затем матричные критерии для существования отношений эквивалентности, частичной или полной упорядоченности, для существования группы, коммутативной группы, квазиметрики, метрики и линейной метрики показывают формально одинаковую структуру. Это значит – названные понятия есть одностепенные двухразрядные "связи" элементов множества М, описанные однозначным изображением $\varphi : M \times M \to N$.

I. Определения

I.I. Отношение эквивалентности

Двоичное отношение R во множестве М[I/] называется отношением эквивалентности в М, если для двухразрядной функции

$$\varphi : M \times M \to \{0, I\} \tag{I.I}$$

соотнесенной с помощью

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{для } (x,y) \notin R \\ 1 & (x,y) \in R \end{cases} \tag{I.2}$$

действительно следующее:

а/ $\underset{x \in M}{(\forall x)} \varphi(x,x) = 1$ (2.I)

б/ $\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)} \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ (2.2)

I/ Пусть будет М здесь и в следующем конечным множеством, а в/ $(\forall x)(\forall y) \bigwedge\limits_{\substack{x,y \in M \\ z \in M}} (\varphi(x,z) \leftrightarrow \varphi(y,z)) = \varphi(x,y)$ 2/ (2.3.I)

или, что является равнозначным:

$$(\forall x)(\forall y) \bigvee\limits_{\substack{x,y \in M \\ z \in M}} (\varphi(x,z) \wedge \varphi(y,z)) = \varphi(x,y) \qquad (2.3.2)$$

I.2. <u>Отношение частичной упорядоченности</u>

Двоичное отношение R во множестве M называется

нерефлексивным / рефлексивным отношением частичной упорядоченности в M,

если для двухразрядной функции

$$\varphi : M \times M \rightarrow \{0, I\} \qquad (3.I)$$

соотнесенной с помощью

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{для } (x,y) \notin R \\ 1 & \text{для } (x,y) \in R \end{cases} \qquad (3.2)$$

действительно следующее:

а/ $(\forall x)_{x \in M}\ \varphi(x,x) = \begin{cases} 0 & \text{(нерефлекс.)} \\ 1 & \text{(рефлекс.)} \end{cases}$ (4.I)

б/ $(\forall x)(\forall y)_{\substack{x\,y \in M \\ x \neq y}}\ \varphi(x,y) \bigwedge \varphi(y,x) = 0$ (4.2)

2/ Если представить (x, y) в виде матрицы то в/ равнозначно со следующим: Для всех x, y M некоторая строка (столбец) x от , насчет существования в ней единиц, или идентична с некоторой строкой (столбцом) y, или же отличается от последней. То есть, отношение эквивалентности в M определяет классификацию в M таким образом, что всегда существует соотношение между всеми элементами данного класса, но не между двумя элементами различных классов.

в/ $\underset{x,y\in M}{(\forall x)(\forall y)} \underset{z\in M}{\bigwedge} (\varphi'(x,z) \leftarrow \varphi'(y,z)) = \varphi'(x,y)$ 3/ (4.3.I)

или, что является равнозначным:

$$\underset{x,y\in M}{(\forall x)(\forall y)} \underset{z\in M}{\bigvee} (\varphi'(x,z) \wedge \varphi'(z,y)) = \varphi'(x,y) \tag{4.3.2}$$

где

$$\varphi'(x,y) = \begin{cases} \begin{cases} \varphi(x,y) & \text{для } x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases} & \text{(нерефлекс.)} \\ \varphi(x,y) & \text{(рефлекс.)} \end{cases} \tag{4.3.3}$$

I.3. <u>Отношение упорядоченности</u>

Нерефлексивное / рефлексивное отношение частичной упорядоченности R в М называется нерефлексивным / рефлексивным отношением упорядоченности в М, если действительно следующее:

$$\underset{x,y\in M}{(\forall x)(\forall y)} \varphi(x,y) \leftrightarrow (y,x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases} \tag{5}$$

3/ в/ равнозначно со следующим: Для всех x, y $\in$ M некоторая строка (столбец) x от $\underline{\varphi}'' = (\varphi''(x,y))$, насчет существования в ней единиц, или входит в некоторую строку (столбец) y, или же отличается от последней.

$$\varphi''(x,y) = \begin{cases} \varphi(x,y) & \text{(нерефлекс.)} \\ \begin{cases} \varphi(x,y) & \text{для } x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases} & \text{(рефлекс.)} \end{cases}$$

I.4. Группа

Двухразрядная алгебраическая операция x o y и одноразрядная алгебраическая операция x^{-I} (инверсия) во множестве M пусть будут определены следующим образом:

$$\underset{x \in M}{(\forall x)}\; x o x^{-1} = x^{-1} o x = e \tag{6}$$

Тогда x o y называется группой в M, если для двухразрядной функции

$$\varphi : M \times M \to M, \tag{7.I}$$

соотносенной с помощью

$$\varphi(x\, y) = x o y \tag{7.2}$$

действительно следующее:

$$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)}\; \underset{z \in M}{id}\, (\varphi(x,z) o \varphi(z^{-1},y)) = \varphi(x,y) \tag{8.I}$$

где

$$id(x_1, x_2, \ldots x_n) = \begin{cases} x_1 & \text{для } x_1 = x_2 = \ldots = x_n \\ y \in \{x, x, \ldots x_n\} & \text{иначе} \end{cases} \tag{8.2}$$

I.5. Коммутативная группа

Группа x o y в M называется коммутативной группой в M, если действительно следующее:

$$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)}\; \varphi(x,y) = \varphi(y,x)\ . \tag{9.I}$$

С учётом (9.I) вытекает из (8.I)

(9.2)

I.6. Квазиметрика

Двухразрядная функция

$$\varphi : M \times M \to \mathbb{R} \quad ^{4/} \tag{I0}$$

называется квазиметрикой на M, если действительно:

а/ $$\underset{x \in M}{(\forall x)}\ \varphi(x,x) = 0 \tag{II.I}$$

б/ $$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)}\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x) \tag{II.2}$$

в/ $$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)}\ \min_{z \in M}(\varphi(x,z) + \varphi(y,z)) = \varphi(x,y) \tag{II.3}$$

I.7. Метрика

Двухразрядная функция

$$\varphi : M \times M \to \mathbb{R}_0 \quad ^{5/} \tag{I2}$$

называется метрикой (расстоянием) на M, если действительно:

а/ $$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)}\ \varphi(x,y) \begin{cases} = 0 & \text{для } x = y \\ > 0 & \text{для } x \neq y \end{cases} \tag{I3.I}$$

б/ $$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)}\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x) \tag{I3.2}$$

в/ $$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)}\ \min_{z \in M}(\varphi(x,z) + \varphi(y,z)) = \varphi(x,y) \tag{I3.3.I}$$

или, что является равнозначным

$$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)}\ \max_{z \in M}|\varphi(x,z) - \varphi(z,y)| = \varphi(x,y) \tag{I3.3.2}$$

4/ $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел

5/ $\mathbb{R}_0$ – множество неотрицательных вещественных чисел

I.8 Линейная метрика [6/]

Двухразрядная функция

$$\varphi : M \times M \to \mathbb{R}_0 \qquad \text{(I4)}$$

называется линейной метрикой на М, если действительно:

а/ $$\underset{x,y\in M}{(\forall x)(\forall y)}\,\varphi(x,y)\begin{cases} =0 & \text{для } x = y \\ >0 & \phantom{\text{для }} x \neq y \end{cases} \qquad \text{(I5.I)}$$

б/ $$\underset{x,y\in M}{(\forall x)(\forall y)}\,\varphi(x,y) = \varphi(y,x) \qquad \text{(I5.2)}$$

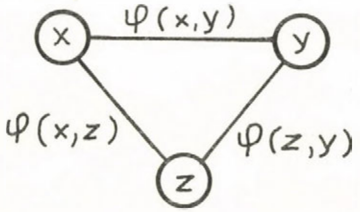
в/ $$\underset{x,y\in M}{(\forall x)(\forall y)}\ \underset{z\in M}{id}\left((\varphi(x,z)+\varphi(y,z))\ vel\ |\varphi(x,z)-\varphi(y,z)|\right) = \varphi(x,y) \qquad \text{(I5.3)}$$

6/ Уравнение в/ вытекает из уравнений а/, б/ и из неравенства треугольника

$$\underset{x,y,z\in M}{(\forall x)(\forall y)(\forall z)}\,(\varphi(x,z)+\varphi(z,y)) \geq \varphi(x,y) \ .$$

Пусть усилится неравенство треугольника следующим образом:

Для всех троек $(x,\ y,z) \in M^3$ всегда есть два расстояния, сумма которых равна третьему расстоянию (сравни изображенный рядом граф, причем узлы – элементы М, ребраб расстояние, существующее всегда между двумя элементами М). Иначе говоря – для всех $(x,\ y,z) \in M^3$ площадь треугольника со сторонами $\varphi(x,y), \varphi(x,z), \varphi(y,z)$ равна нулю.



Таким образом получаем специальную метрику, которую в следующем хотим обозначить как "линейную метрику".
Учитывая изображение детерминатов площади треугольника при заданных длинах сторон (ср.

для линейной метрики действительно следующее:

$$\underset{x,y,z\in M}{(\forall x)(\forall y)(\forall z)} \begin{vmatrix} 0 & \varphi(x,y) & \varphi(x,z) & \varphi(y,z) \\ \varphi(x,y) & 0 & \varphi(y,z) & \varphi(x,z) \\ \varphi(x,z) & \varphi(y,z) & 0 & \varphi(x,y) \\ \varphi(y,z) & \varphi(x,z) & \varphi(x,y) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi(x,y) & (\varphi(x,z)+\varphi(y,z)) \\ (\varphi(x,z)+\varphi(y,z)) & \varphi(x,y) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi(x,y) & |\varphi(x,z)-\varphi(y,z)| \\ |\varphi(x,z)-\varphi(y,z)| & \varphi(x,y) \end{vmatrix}$$

$= 0$

или после преобразования

$$\underset{x,y,z\in M}{(\forall x)(\forall y)(\forall z)} \text{"}\varphi(x,y)=(\varphi(x,z)+\varphi(y,z))\text{"} \vee \text{"}\varphi(x,y)=|\varphi(x,z)-\varphi(y,z)|\text{"}$$

из которого наконец вытекает, учитывая ур. (8.2):

$$\underset{x,y\in M}{(\forall x)(\forall y)} \underset{z\in M}{id}((\varphi(x,z)+\varphi(y,z)) \; vel \; |\varphi(x,z)-\varphi(y,z)|) = \varphi(x,y)$$

где

$$x_1 \; vel \; x_2 = \begin{cases} \text{или } x_1 \text{ или } x_2 & \text{для } x_1 \neq x_2 \\ x_1 & x_1 = x_2 \end{cases} .$$

Усиленное неравенство треугольника:

Для всех $(x, y, z) \in M^3$ всегда есть два расстояния, сумма из которых равна третьему.

можно истолковать и следующим образом:

Для всех $(x, y, z) \in M^3$ действительно следующее:

Откладывая на прямой друг за другом оба более кратких расстояния, можно получить на ней третье (самое большое) расстояние – как сумму первого и второго. Это значит, что в общем каждое расстояние между двумя элементами M или является "элементарным расстоянием" или позволяет изображение на прямой, путем отложения там друг за другом элементарных расстояний. Это отвечает основному принципу измерения с помощью прямой (линейной) линейки.

2. Матричное представление данных в первой главе определений

Если вводится card(M)-card(M)- матрица функции $\varphi(x,y)$

$$\underline{\varphi} = \left(\varphi(x,y) \right) \tag{I6}$$

и используется обобщенное матричное произведение

$$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi} \quad 7/ \tag{I7}$$

то можно написать в матричном виде условия существования отношения эквивалентности, отношений частичной и полной упорядоченности, группы и коммутативной группы, квазиметрики, метрики или линейной метрики. Эти матричные критерии систематически составлены в таблице I.

Из таблицы I. вытекает следующее:

I/ Матричные критерии существования отношения эквивалентности, отношений частичной и полной упорядоченности, существования группы и коммутативной группы, квазиметрики, метрики или линейной метрики имеют формально одинаковую структуру (ср. работу /2/). То есть, отношение эквивалентности, группу и метрику следует считать одностепенными двухразрядными "связами" элементов некоторого множества M, описанными однозначным изображением

$$\varphi : M \times M \rightarrow N \tag{I8}$$

7/ Ср. Берж, К.: Теория графов и ее применения Москва, I962 г., стр. I50-I52.

$a + b$ – обобщенное сложение

$a \bullet b$ – обобщенное умножение

В случае $N = \begin{cases} \{0,1\} \\ M \\ \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{R}_o \end{cases}$ эта связь относится к $\begin{cases} \text{типу отношения} \\ \text{типу операции (группы)} \\ \text{метрическому типу.} \end{cases}$

2/

Если $\underline{\varphi}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ является матрицей функции $\varphi_\nu : M_\nu \times M_\nu \rightarrow N$, соотносенной с_.__.__ в (на)множестве M,	то обобщенное тензорное матричное произведение $\underline{\varphi} = \underline{\varphi}_1 \otimes \underline{\varphi}_2 \otimes \ldots \otimes \underline{\varphi}_n$ с $a \cdot b$ = _.__.__.__.__.__	является матрицей функции $\varphi : M \times M \rightarrow N$, соотнесенной с _.__.__.__.__ в (на) множестве $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$
отношение эквивалентности	$a \wedge b$	отношение эквивалентности
рефлексивное отношение частичной упорядоченности	$a \wedge b$	рефлексивное отношение частичной упорядоченности
квазиметрика	$a + b$	квазиметрика
метрика	$a + b$	матрика

		$\varphi: M\times M \rightarrow (0,1)$		
$(\forall x)\varphi(x,x)=1$ $x\in M$	$(\forall x)\varphi(x,x)=0$ $x\in M$	$(\forall x)\varphi(x,x)=1$ $x\in M$	$(\forall x)\varphi(x,x)=0$ $x\in M$	$(\forall x)\varphi(x,x)=1$ $x\in M$
$\underline{\varphi}=\underline{\varphi}^T$	$\underline{\varphi}\wedge\underline{\varphi}^T=\underline{0}$	$\underline{\varphi}\wedge\underline{\varphi}^T=\underline{e}$	$\underline{\varphi}\wedge\underline{\varphi}^T=\underline{0}$	$\underline{\varphi}\wedge\underline{\varphi}^T=\underline{e}$
			$\underline{\varphi}\longleftrightarrow\underline{\varphi}^T=\underline{e}$	
$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}^T=\underline{\varphi}$	$\underline{\varphi}'\underline{\varphi}'^T=\underline{\varphi}$ $\underline{\varphi}'=\underline{\varphi}\vee\underline{e}$	$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}^T=\underline{\varphi}$	$\underline{\varphi}'\underline{\varphi}^T=\underline{\varphi}$ $\underline{\varphi}'=\underline{\varphi}\vee\underline{e}$	
$a+b=a\wedge b$ $a\cdot b=a\leftrightarrow b$		$a+b=a\wedge b$ $a\bullet b=a\leftarrow b$		
$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}=\underline{\varphi}$	$\underline{\varphi}'\underline{\varphi}'=\underline{\varphi}'$ $\underline{\varphi}'=\underline{\varphi}\vee e$	$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}=\underline{\varphi}$	$\underline{\varphi}'\underline{\varphi}'=\underline{\varphi}'$ $\underline{\varphi}'=\underline{\varphi}\vee e$	$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}=\underline{\varphi}$
		$a+b=a\vee b$ $d\bullet b=a\wedge b$		

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varphi : M \times M \rightarrow M$</td><td>$\varphi : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$</td><td colspan="2">$\varphi : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\underset{x \in M}{(\forall x)}\ \varphi(x,x) = 0$</td><td colspan="2">$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)}\ \varphi(x,y) \begin{cases} = 0 & x = y \\ > 0 & x \neq y \end{cases}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\underline{\varphi} = \underline{\varphi}^T$</td><td colspan="3">$\underline{\varphi} = \underline{\varphi}^T$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}^{**T} = \underline{\varphi}$
$\underline{\varphi}^{**} = (\varphi(x, y^{-1}))$
$a + b = id\,(a,b)$
$a \cdot b = a \circ b$</td><td colspan="2">$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}^T = \underline{\varphi}$
$a + b = \min(a,b)$
$a \cdot b = a + b$</td><td>$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}^T = \underline{\varphi}$
$a + b = id\,(a,b)$
$a \cdot b = (a+b)$ vel $|a-b|$</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}^{*} = \underline{\varphi}$
$\varphi^{*} = (\varphi(x^{-1}, y))$
$a + b = id\,(a,b)$
$a \cdot b = a \circ b$</td><td></td><td>$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi} = \underline{\varphi}$
$a + b = \max(a,b)$
$a \cdot b = |a-b|$</td><td></td></tr>
</table>

3/ Пусть будет $\underline{a} = (a_{ij})$, $a_{ij} \in M$, m-m- матрицей и $b = (b_{ij})$, $b_{ij} \in M$, n-n- матрицей. Тогда $(m \cdot n)$-$(m \cdot n)$- матрица

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \qquad \begin{matrix} a_{11}\underline{b} & a_{12}\underline{b} & \cdot\cdot & a_{1m}\underline{b} \\ a_{21}\underline{b} & a_{22}\underline{b} & \cdot\cdot & a_{2m}\underline{b} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\underline{b} & a_{m2}\underline{b} & \cdot\cdot & a_{mm}\underline{b} \end{matrix}$$

называется обобщенным тензорным произведением матриц $\underline{a}$ и , по отношению к (обобщенному) умножению

Над алгебраической структурой

$a + b = b + a$, $a \bullet b = b \bullet a$

$(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$

$(a + b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c)$

действительно следующее:

$(\underline{a} \otimes \underline{b}) \otimes \underline{c} = \underline{a} \otimes (\underline{b} \otimes \underline{c})$

$(\underline{a} \otimes \underline{b})^T = \underline{a}^T \otimes \underline{b}^T$

$(\underline{a}_1 \otimes \underline{a}_2 \otimes .. \otimes \underline{a}_k)(\underline{b}_1 \otimes \underline{b}_2 \otimes . \otimes \underline{b}_k) = (a_1 b_1) \otimes (\underline{a}_2 \underline{b}_2) \otimes .. \otimes (\underline{a}_k \underline{b}_k)$

Из последнего сразу следует: Если над для всех

$\underline{\varphi}_\nu \underline{\varphi}_\nu = \underline{\varphi}_\nu$,

то действительно и для $\underline{\varphi} = \underline{\varphi}_1 \otimes \underline{\varphi}_2 \otimes \quad \otimes \underline{\varphi}_n$

$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi} = \underline{\varphi}$.

Литература

1 Stahn, H., Stand und Entwicklung automatisierter Systeme technologischer Prozesse (ASUTP). die Technik 30 (1975) 10, S. 620-628.

2 Stoschek, E., Stahn, H., Zur Definition der Begriffe Aquvalenzrelation, Halbordnungsrelation und Metrik EIK (in Vorbereitung)

(готовится к изданию).

Összefoglaló

A müveletek definiciójáról; equivalenciareláció, részleges rendezés, teljes rendezés, csoport, távolság

Sztosek E. – Winter H.

A véges M halmazon definiált bináris relációkat/ mint equivalencia reláció, algebrai müvelet távolság, stb. mátrix alakban felirva, és a kapott 1 mátrixra érvényes $\varphi\varphi = \varphi$ azonosság felhasználásával az adott relációra existencia kritériumokat vezetünk le.

Summary

On the definition of operations; equivalence relation, partial ordering, complete ordering, group, distance

E. Sztosek – H. Winter

Writing a binary relation, such as equivalence relation, ordering, algebraic operation, distance etc., on a finite set M in matrix form of and using the identity $\varphi\varphi = \varphi$ existence criteria are obtained for the given relation.

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 17/1976.

RELAXÁCIÓS MÓDSZER ÁLTALÁNOSITOTT MÁTRIXINVERZ KISZÁMITÁSÁRA

Galántai Aurél – Varga Gyula

A Southwelltől származó relaxációs elv sok esetben igen hasznosnak bizonyult (lásd pl. [4]). Ezt az elvet fogjuk most kiterjeszteni általánositott mátrixinverzek számitásának esetére.

Legyen A (mxn)-es mátrix és W az (nxm)-es komplex elemü mátrixok Banach tere az euklidesi normával. Jelölje továbbá $P_{R(A)}$ a C^m ortogonális projekcióját $R(A)$-ra, és $P_{R(A^*)}$ a C^n ortogonális projekcióját $R(A^*)$-ra.

Tétel. *Legyen* $B_n \epsilon W$ *olyan mátrix, amelynek oszlopai az* A^* *oszlopai által kifeszitett lineáris vektortérben vannak.*
Ha teljesülnek a $\|B_n\| \leqslant K_1$,

(1) $$\|P_{R(A)} - AB_n\| \leqslant K < 1$$

és a

(2) $$\|P_{R(A^*)} - B_nA\| \leqslant K < 1$$

feltételek $(n = 0,1,2,...)$, akkor az

(3) $$X_n = B_n + X_{n-1}(P_{R(A)} - AB_n) \quad (n = 1,2,...)$$

sorozat $(X_0 = B_0)$ konvergál az A^+ általánositott inverzhez, és alkalmas $0 < c \epsilon R^1$ konstanssal

(4) $$\|X_n - A^+\| \leqslant c\, K^n.$$

Bizonyitás. A tétel bizonyitásához azt a tényt fogjuk felhasználni, hogy az egyidejüleg fennálló

(5) $$XAX = X$$

és

(6) $$AX = P_{R(A)}, \quad XA = P_{R(A^*)}$$

egyenlőségek már egyértelmüen meghatározzák az A mátrix A^+ általánositott inverzét [2].

a.) Először a $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_{R(A)} - AX_n\| = 0$ relációt igazoljuk. A (3) rekurzió és

(7) $$P_{R(A)}A = AA^+A = A = AP_{R(A^*)}$$

alapján

$$P_{R(A)} - AX_n = (P_{R(A)} - AX_{n-1})(P_{R(A)} - AB_n) = \prod_{i=0}^{n} (P_{R(A)} - AB_i).$$

Minthogy

$$\|P_{R(A)} - AX_n\| \leq \prod_{i=0}^{n} \|P_{R(A)} - AB_i\| \leq K^{n+1},$$

azért

(8) $$\lim_{n\to\infty} \|P_{R(A)} - AX_n\| = 0.$$

b.) Hasonlóan belátható, hogy

(9) $$P_{R(A^*)} - X_nA = (P_{R(A^*)} - X_{n-1}A)(P_{R(A^*)} - B_nA) = \prod_{i=0}^{n} (P_{R(A^*)} - B_iA)$$

és

(10) $$\lim_{n\to\infty} \|P_{R(A^*)} - X_nA\| = 0.$$

c.) Belátjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \|X_nAX_n - X_n\| = 0.$

Legyen

$$C_n = P_{R(A)} - AB_n$$

és

$$D_n = P_{R(A^*)} - B_nA.$$

Ekkor

$$X_n = B_n + X_{n-1}C_n,$$

illetve zárt alakban

(11) $$X_n = B_n + \sum_{i=1}^{n-1} B_i \prod_{j=i+1}^{n} C_j + B_0 \prod_{i=1}^{n} C_i \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

A zárt alakból könnyen látható, hogy

$$P_{R(A^*)}X_n = X_n$$

és

$$\|X_n\| < \frac{K_1}{1-K} \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

A (9) relációból kapjuk, hogy

$$X_n A = P_{R(A^*)} - \prod_{i=0}^{n} D_i,$$

ahonnan

$$X_n A X_n - X_n = P_{R(A^*)}X_n - (\prod_{i=0}^{n} D_i)X_n - X_n = -(\prod_{i=0}^{n} D_i)X_n\,.$$

Ezért

$$\|X_n A X_n - X_n\| \leqslant \frac{K_1}{1-K} K^{n+1},$$

amelyből, $K < 1$ miatt,

(12) $$\lim_{n\to\infty} \|X_n A X_n - X_n\| = 0.$$

d,) Végül belátjuk, hogy $X_n \to A^+$ lineárisan.

Tekintsük a

$$\lim_{n\to\infty} AX_n = P_{R(A)}$$

$$\lim_{n\to\infty} AA^+ = P_{R(A)}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} X_n A = P_{R(A^*)}$$

$$\lim_{n\to\infty} A^+ A = P_{R(A^*)}$$

valamint

$$\lim_{n\to\infty} (X_n A X_n - X_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (A^+ A A^+ - A^+) = 0$$

relációkat, amelyekben a konvergencia sebessége legalább lineáris. Világos, hogy egyrészt

$$X_n A - A^+ A = \Delta_n \to 0, \qquad AX_n - AA^+ = \Gamma_n \to 0$$

lineérisan, másrészt

$$q_n = \| X_n A X_n - X_n - [A^+ A A^+ - A^+] \| \to 0$$

szintén lineáris sebességgel. Minthogy

$$a_n = \| X_n A X_n - (X_n A - \Delta_n) A^+ + A^+ - X_n \| < c_1 K^n ,$$

azért az $\|A_1\| - \|A_2\| \leqslant \|A_1 - A_2\|$ relációt használva

$$\big| \| A^+ - X_n \| - \| X_n (AX_n - AA^+) + \Delta_n A^+ \| \big| < c_1 K^n .$$

Innen egyszerü átalakitással

$$\| A^+ - X_n \| < c_2 K^n$$

következik, ami állitásunkat igazolja.

A javasolt módszer az [1] – [2] általánositása.

Numerikus példa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = AA^* = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

T legnagyobb sajátértéke $\lambda_{\max} = 12 + \sqrt{13}.$
Az A mátrix általánositott inverze

$$A^+ = \frac{1}{131} \cdot \begin{bmatrix} -22 & -64 & 45 \\ 13 & 14 & 27 \\ -70 & -25 & 36 \\ -39 & -42 & 50 \end{bmatrix}$$

A $B_1 = \alpha_i A^*$, $P_{R(A)} = I_n$ speciális választást és az α_i $(i = 1,2,3,4)$ értékeket alternative alkalmazva $\epsilon = 10^{-3}$ pontossággal kapjuk, hogy

$$A^+ = \begin{bmatrix} -0.1679 & -0.4885 & 0.3435 \\ 0.0992 & 0.1069 & 0.2061 \\ -0.5349 & -0.1908 & 0.2748 \\ -0.2977 & -0.3206 & 0.3817 \end{bmatrix}$$

$(\alpha_1 = 0.05,\ \alpha_2 = 0.07,\ \alpha_3 = 0.09,\ \alpha_4 = 0.11)$.

Végül köszönetünket fejezzük ki Lee Annának értékes segitségéért és tanácsaiért.

Irodalom

[1] A.Ben – Israel: An iterative method for computing the generalized inverse of an arbitrary matrix, Math.Comp. 19 (1965) 452-455.

[2] V.N.Joshi: Remarks on iterative methods for computing the generalised inverse, Studia Sci. Math. Hung. 8 (1973) 457-461.

[3] Rao, C.R. – Mitra, S.K.: Generalised Inverse of Matrices and its Applications. John Wiley and Sons, New York, 1971.

[4] Szidarovszky F.: Bevezetés a numerikus módszerekbe, Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1974.

Summary

A relaxation method for computation of generalized inverse of matrices

A. Galantai – Gy. Varga

The paper extends the relaxation principle to the computation of the Moore-Penrose inverse of matrices by an iteration. The rate of convergence of the proposed method is linear.

Р е з ю м е

О релаксационном методе вычисления обобщенной обратной матрицы

А. Галантаи - Дь. Варга

В статье идея релаксации распространяется на вычисление обратной матрицы типа Мура-Пенроза итерационном методом. Сходимость предлагаемого процесса линейная.

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 17/1976.

LOCAL ERROR ESTIMATE OF ONE–STEP METHODS

Aurél Galántai

An explicit one-step method for the numerical solution of the problem

$$y' = f(x,y)$$

(1) $$(f \epsilon IxR^m \to R^m, \qquad I = [a,b] \subset R)$$

$$y(x_0) = y_0$$

can be written in the form

(2) $$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(x_n, y_n, h_n) \qquad (n = 0,1,2,\ldots),$$

where $\phi \epsilon IxR^m xR \to R^m$ is a given function and $\phi(x,y,0) = f(x,y)$. Here, y_n is a numerical approximation to the solution y at the point $x_n \epsilon I$ and $x_{n+1} - x_n = h_n > 0$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ About the continuous functions f and ϕ we assume that there exist constans $K,L \geqslant 0$ such that the inequalities

(3) $$\| f(x,y) - f(x,y^*) \| \leqslant L \, \| y - y^* \|$$

and

(4) $$\| \phi(x,y,h) - \phi(x,y^*,h) \| \leqslant K \, \| y - y^* \|$$

hold for every (x,y), $(x,y^*) \epsilon \mathscr{D}(f)$ and (x,y,h), $(x,y,^* h) \epsilon \mathscr{D}(\phi)$. Concerning the promlem (1) the local error of the method (2) at the point x is defined by

(5) $$T(x,h) = y(x) + h\phi(x,y(x),h) - y(x+h),$$

the global error is defined by

(6) $$e_n = y_n - y(x_n) \qquad (x_n \epsilon I).$$

Denote $T_n(x,h)$ the local error of the method (2) concerning the problem

$$y' = f(x,y)$$

(7)

$$y(x_n) = y_n \qquad (x_n \epsilon I).$$

Finally we suppose that there exists a constant $1 \geqslant \gamma > 0$ such that

(8) $$\gamma h \leqslant h_n \leqslant h \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

and $h = \dfrac{b-a}{N}$.

In general we estimate the global error of the method (2) under the following hypothesis.

HYPOTHESIS: If the local error of the method (2) holds the inequality

(9) $\| T_n(x_n, h_n) \| \leqslant \mathcal{E} \qquad (n = 0,1,2, \ldots ; x_n \epsilon I),$

then there exists a consant $c = c(f,h) \geqslant 1$ such that

(10) $\| e_n \| \leqslant c\mathcal{E} \qquad (x_n \epsilon I)$

and $c\mathcal{E} \to 0$ if $\mathcal{E} = 0(h^s)$, $s \geqslant 2$ and $h \to 0$.

Since a weaker form of this hypothesis with the condition

(11) $\| T(x,h) \| \leqslant \mathcal{E} \quad (x \epsilon I)$

is proved ([1]) in special literature, we will prove this hypothesis, which can be considered as the real situation in numerical solution of problem (1).

THEOREM: Let's suppose that there exists a constant $c_1 \geqslant 0$ such that

(12) $\| T(x,h) \| \leqslant c_1 h^{p+1} \qquad (x \epsilon I, \; p \geqslant 1),$

then there is a constant $c_2 > 0$ with the property

(13) $\| T_n(x_n, h) \| \leqslant c_2 h^{p+1} \qquad (x_n \epsilon I)$

and applying the hypothesis with $\mathcal{E} = c_2 h^{p+1}$ there exists a number $c_3 > 0$ such that

(14) $\| e_n \| \leqslant c_3 h^p \qquad (x_n \epsilon I).$

Proof: It's known [1], that from the condition (12)

(15) $\| e_n \| \leqslant c_1 E_L \left(\dfrac{b-a}{\gamma} \right) h^p \qquad (x_n \epsilon I)$

follows, where

$$E_L(x) = \frac{e^{Lx} - 1}{L} \qquad (L > 0).$$

With the aid of (15) we first prove that

(16) $T_n(x_n, h) - T(x_n, h) = 0(h^{p+1}) \qquad (x_n \epsilon I).$

By the definitions

$$T_n(x_n,h) - T(x_n,h) = y_n - y(x_n) + h[\phi(x_n,y_n,h) - \phi(x_n,y(x_n),h)] -$$
$$- [\widetilde{y}_n(x_n + h) - y(x_n + h)],$$

where $\widetilde{y}_n : I \to R^m$ denotes the theoretical solution of the problem (7).
Applying the condition (4) we have

$$(17) \qquad \| T_n(x_n,h) - T(x_n,h) \| \leqslant hK \|e_n\| + \|[y_n - y(x_n)] - [\widetilde{y}_n(x_n + h) - y(x_n + h)]\|.$$

Since

$$[\widetilde{y}(x_n + h) - y(x_n + h)] - [y_n - y(x_n)] = \int_{x_n}^{x_n+h} [f(x,y_n(x)) - f(x,y(x))]dx$$

using the inequality of Peano ([3]) and the relations (3) and (15) we have

$$\|[y_n(x_n + h) - y(x_n + h)] - e_n\| \leqslant L \int_{x_n}^{x_n+h} \|\widetilde{y}(x) - y(x)\| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant L \int_{x_n}^{x_n+h} \|e_n\| e^{L|x-x_n|} dx \leqslant Le^{Lh} \int_{x_n}^{x_n+h} \|e_n\| dx \leqslant c_2 h^{p+1}.$$

From this fact and inequalities (15) and (17) the relations (16) and (13) are proved.

If we use the hypothesis with $\mathscr{E} = c_2 h^{p+1}$ then

$$e_{n+1} = y_n + h_n \phi(x_n,y_n, h_n) - \widetilde{y}_n(x_{n+1}) + [\widetilde{y}_n(x_{n+1}) - y(x_{n+1})] =$$

$$= T_n(x_n,h_n) + [\widetilde{y}_n(x_{n+1}) - y(x_{n+1})].$$

Using the relation (13) and the inequality of Peano we have

$$\|e_{n+1}\| \leqslant \| T_n(x_n,h_n)\| + \|e_n\| e^{Lh} \leqslant \mathscr{E} + e^{Lh} \|e_n\| \qquad (n = 0,1,2, \dots).$$

It is easy to verify by induction that

$$\|e_n\| \leqslant \frac{e^{Lnh} - 1}{e^{Lh} - 1} \leqslant \frac{e^{\frac{L(b-a)}{\gamma}} - 1}{e^{Lh} - 1} \mathscr{E} \qquad (e_0 = 0).$$

In the special case $L = 0$ we can chose a small positive L. The choice of $\mathscr{E}$ guarantees the existence of $h^* > 0$, $c_3 > 0$ such that

$$\|e_n\| \leqslant c_3 h^p \qquad (x_n \epsilon I, \ h \leqslant h^*).$$

Thus our theorem and hypothesis are proved.

References

[1] P. Henrici: Discrete variable methods in ordinary differential equations. John Wiley and Sons, Inc., New York, (1962).

[2] A.Ralston: Bevezetés a numerikus analizisbe. Müszaki Könyvkiadó, Budapest (1969).

[3] Kósa,A., Schipp,F., Szabó,D.,: Közönséges differenciálegyenletek I. Kézirat, Budapest (1970).

[4] J.D. Lambert: Computational methods in ordinary differential equations. John Wiley and Sons, Inc., London (1973).

[5] Н.С.Бахвалов: Численные методы. Издательство Наука, Москва, 1973.

Összefoglaló

Egylépéses módszerek lokális hibabecslései

Galántai Aurél

A dolgozatban megfogalmazzuk és bebizonyitjuk az explicit egylépéses módszerek lokális hibabecslési elvét amely figyelembe veszi az előző lépésekben elkövetett perturbációkat is.

Резюме

Принцип оценки локальной погрешности одношаговых методов

Аурел Галантаи

В статье рассматривается и доказывается принцип оценки локальной погрешности /при условии (9), (10)/ одношаговых методов для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Как мне известно в специальной литературе доказываются только более слабые формы этой гипотезы при выполненый условии (11), однако действительная ситуация при приближенном решении проблемы (1) отражается нашей гипотезой.