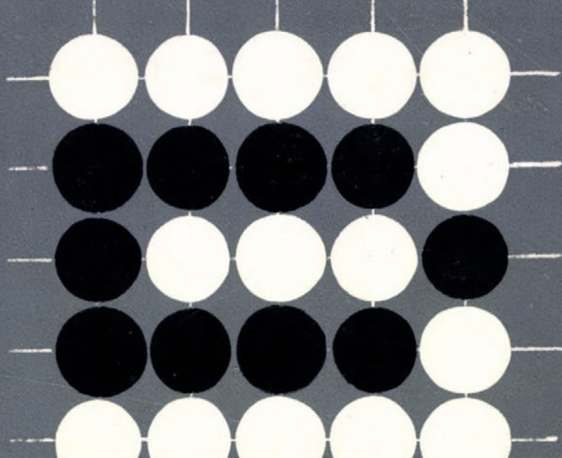
közlemények 14/1975

TA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET

közlemények

1975. április

Felelős kiadó:

Dr. Vámos Tibor
igazgató

Technikai szerkesztő:
Villányi Péterné
MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete

MTA KESZ Sokszorosító. F.v.: Szabó Gyula

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Proceedings of the Computer and Automation Institute
Hungarian Academy of Sciences

Vol. 14.

СОДЕРЖАНИЕ

Труды Исследовательского Института Вычислительной Техники и Автоматизации Венгерской Академии Наук

Выпуск 14.

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 14/1975

ВЕНГЕРСКО-СОВЕТСКИЕ ОТНОШЕНИЯ В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Матияш Арато

Во второй половине XIX века и в начале нашего века русские математики играли исключительную роль в исследованиях по теории вероятностей и математической статистике. П. Чебышев, А.Марков, А.Ляпунов и С.Бернштейн стали основателями и создателями таких важных разделов , как закон больших чисел, центральная теорема, метод характеристической функции, цепи Маркова и теория случайных процессов. Многие замечательные результаты носят с тех пор их имена. Своими работами они воодушевили исследователей во всем мире, что привело к бурному расцвету теории вероятностей и математической статистики. В Англии, Франции, США и многих других странах были созданы исследовательские центры, появилось немало выдающихся специалистов в этой области. Достаточно вспоминать имена Р. Фишера, П. Леви, Г. Крамера и Д. Дуба. Советская теория вероятностей занимает, если и не столь исключительное место, какое пришлось на долю классических русских работ, но все же очень значительное место В большинстве стран теория вероятностей и математическая статистика стали не только темой исследований, но вошли в обязательную программу университетов. Несмотря на это, советская математика осталась верна старым традициям и влияет на дальнейшее развитие теории, продолжая занимать ведущее место в этой области науки. Работы С. Бернштейна, А. Хинчина, В Романовского относятся главным образом к советскому периоду. Расцвет деятельности таких математиков, как А. Колмогоров, Н. Смирнов, Ю. Линник, и. Б. Гнеденко происходил уже при советской власти. Их работы и результаты уже могут быть названы

Beérkezett: 1974. október 10.

классическими. Исследования, проводимые в Венгрии основываются на аксиоматике Колмогорова и тесно связаны с основными направлениями дальнейших исследований в этой области математики, проводимыми в Советском Союзе. В Советском Союзе существуют замечательные школы и немало талантливых специалистов в области теории вероятностей и математической статистики. Можно привести целый ряд имен молодых математиков, уже имеющих за своими плечами немалый опыт и достигших классических результатов, математиков, которые своей деятельностью в большей или меньшей степени оказали влияние на исследования, проводимые в Венгрии и во всем мире. Достаточно упонянуть имя Ю. Прохорова, который достиг результатов общего характера в усиленном законе больших чисел, в связи с принципом инвариантности и в теории слабой сходимости мер, определенных в абстрактных пространствах. Значение его теории не только в том, что она обобщает отдельные результаты, которые были известны ранее, а и в том, что открывает новые направления для исследований и решает важный для практики вопрос о "близности" случайных процессов с дискретным и непрерывным временем. Следует упомянуть также имена А. Скорохода и И. Гихмана, работы которых в теории дифференциальных уравнений случайных процессов и в общец теории случайных процессов занимают видное место и также широко известны в нашей стране. Советские математики продолжают играть ведущую роль и в исследованиях, связанных с законами больших чисел и предельными теоремами. Достаточно упомянуть имена И.Ибрагимова, В. Петрова и В. Золотарева.

Из современных направлений советские математики занимают руководящее место в областях теории массового обслуживания (Б. Гнеденко, В. Королюк, Ю. Беляев) и теории информации (А. Колмогоров, А. Хинчин, Р. Добрушин, М. Пинскер, Р. Хасьминский) Мы могли бы продолжать перечень имен и оценивать советские результаты и их влияние на исследовательское общественное мнение не только нашей родины, а всего мира. В течении последних двадцати лет кроме уже известных ранее московского, ленинградского, киевского научных центров были созданы новые центры в больших университетах, промышленных городах и столицах советских республик. На первом месте мы должны упомянуть ташкентский, вильнюсский и новосибирский центры. Узбеским центром руководят Т. Сарымсаков и С. Сираждинов. Вместе с своими учениками они обогатили советскую науку в областях теории массового обслуживания, предельных теорем и математической статистики, продолжив исследования, которые были начаты в этой республике ещё В. Романовским. В литовской математической жизни руководящую роль играют П. Кибилюс и В. Статулявичус. Число их учеников уже превосходит сто. Их результаты, относящиеся к применениям теоретико-числовых методов в теории вероятностей и к предельным распределениям зависимых случайных величин, известны во всем мире. Широкую известность получили результаты в области случайных процессов и предельных теорем, полученные в новосибирском исследовательском центре, руководимом А. Боровковым. Исследования советских математиков в математической статистике в первую очередь устанавливают связь между результатами теории вероятностей и их применениями. Выдающимися специалистами в области математической статистики были В. Романовской, Е. Слуцкий и Н. Смирнов. Их большая заслуга в том, что, кроме классических направлений, они уже в тридцатые годы занимались последовательностями зависимых случайных величин и статистическими задачами случайных процессов. Наверно менее известно, что впервые скрытые периоды исследовал Е. Слуцкий. Он же ввёл схему авторегрессии, и начал заниматься связанными с ней статистическими задачами. Более известен метод Слуцкого -Колмогорова, который трактируется, например, в книге Крамера -Лидбеттера. По этому методу при введении вероятностных мер для функциональных пространств понятие сепарабельности заменяется на более наглядное понятие непрерывности.

Классические исследования Колмогорова и Смирнова в области порядковых статистик начались почти исключительно по инициативе советских математиков. Начиная с первых результатов, они были тесно связаны с теорией случайных процессов. Этот факт мы подчеркиваем потому, что они требуют определения передельных распределений функционалов от случайных процессов. Для того, чтобы ответить на вопрос, в чем заключается секрет успехов исследований, проводимых в СССР по теории вероятностей и математической статистике, мы должны в первую очередь сослаться на слова Яноша фон Неймана: "Явление, что математическая дисциплина слишком удаляется от эмпирических истоков, или что второе или третье поколения не используют непосредственно идей, взятых из реальности, скрывает в себе большую опасность". Исследования в СССР всегда предупреждают об этих опасностях, как только они возникают. Тесная связь с опытом является основой той свежести, которая наблюдается в этих исследованиях. Мы спокойно можем сказать, что исследования по теории вероятностей в СССР не подвергается той опасности, от которой фон Нейман предостерегает математиков словами: "математическая дисциплина, оторванная от эмпирических истоков или испытывающая влияние многих 'абстрактных' идей, подвергается опасности вырождения".

Значение этих слов подчеркивается советом фон Неймана "Для меня кажется единственным решением обновляющее возвращение к истокам, к переосмыслению эмпирических идей, полученных более или менее непосредственным путем". Многие из нас могли лично наблюдать, что в исследованиях советских математиков эти указания осуществляются, что высказывания, принципы, подобные к неймановским, находят свое отражение уже в университетских лекциях.

Достаточно сослаться на деятельность неоднократно посещавшего нашу страну Колмогорова, для которого характерна постоянная связь с физикой и другими областями естественных наук. То же самое относится и к новому поколению советских ученых. Мы имеем в виду исследования связанные с геологией, с промышленными применениями и с управлением.

II.

В нашей стране университетские лекции по теории вероятностей и математической статистике стали проводиться регулярно только после освобождения. В начале эти лекции касались лишь элементарных задач. Исключением были книга и деятельность Кароя Йордана в экономическом институте.

Теория вероятностей, основанная на совершенной аксиоматике нашла плодотворную почву в развитых венгерских теоретических исследованиях. Венгерская школа теории вероятностей оказала неоценимое влияние на всю венгерскую математику.Благодаря связи теории вероятностей с классическими направлениями новый размах получили теоретические исследования; тесная связь с применениями обогатила наше математическое мышление. Направление созданное Кароем Йорданом, и признание Альфредом Реньи значения теории вероятностей во время его аспирантуры в Ленинграде привело к новому осмыслению призвания математиков. Будучи большим математиком, Альфред Реньи знал, что создание базы для развития теории вероятностей и математической статистики в нашей стране невозможно без серьёзной организационной работы. Его заслугой является и то, что будучи директором Института Прикладной Математики, он организовал отдел теории вероятностей и статистики. В своей деятельности он стремился следовать традициям советской математической школы. Со своей неутомимой энергией он одновременно приступил к интенсивному и гармоничному развитию теории и практики, а также обучению и популяризации науки. Для всех, кто занимается в нашей стране теорией вероятностей и статистикой с начала 50-х годов, останутся незабываемыми семинары Института, на которых мы сначала изучали классические результаты советских математиков, а затем перешли к новейшим результатам. В то время наиболее интересным представлялось изучение связи теории вероятностей с теорией мер. Благодаря работе над переводом книги Колмогорова и Гнеденко, мы быстро вошли в классическую проблематику теории вероятностей, в круг задач связанных с предельными теоремами. Влияние работ советских математиков в этой области на наших математиков до сих пор остается неизмеримым. В качестве примера достаточно упомянуть на результаты, достигнутые в этом направлении Реньи, Такачем, Прекопа, а также работы Ревеса, Модёроди и Комлоша, на которые часто ссылаются в международной литературе. Особенно значительны венгерские результаты в исследовании рядов функций.

По примеру советских математиков Реньи установил тесную связь с областями применения математики. Сотрудники Института Прикладной Математики, используя методы теории вероятностей и математической статистики, занимались решением практических задач химии, биологии, теории связей, контроля качества. Особо следует отметить применения теории вероятностей в физических исследованиях, где выделяется деятельность Л. Яноши, Л. Пал и А. Бекеши. Среди теоретических результатов особое значение имеют работы Реньи в теории упорядоченных выборок, которые могут рассматриваться как дальнейшее развитие работ Колмогорова и Смирнова. С тех пор исследования в этой области находится в центре внимания и снискали нашим математикам мировую известность.

Упомянием лишь И. Винце, К. Шаркади, Б. Диреш и их учеников, которые стали видными специалистами в этой области.

Достойное место на мировой арене занимают и исследования точечных процессов, проводимые в нашей стране.

Эти исследования с одной стороны имели отечественную базу, с другой стороны, явились продолжением работ А. Хинчина и Б. Гнеденко.

Тесная связь теории вероятностей с практикой сделала необходимой разработку таких областей, как теория информации, теория массового обслуживания, теория ветвящихся процессов и т.п. Под влиянием результатов советских математиков исследования в этих областях начались и в нашей стране. Буквально со дня на день возникали новые направления, работа в которых с тех пор тесно связана с исследованиями советских математиков.

Не столь сильное влияние имели в нашей стране работы советских математиков в классических исследованиях, относящихся к случайным процессам, как например спектральная теория стационарных процессов, теория диффузионных процессов, и разработка общего принципа слабой сходимости для абстрактных функциональных пространств. Это влияние стало заметным только в конце 60-х годов.

Отчасти это объясняется тем, что, за исключением аспирантуры Реньи, в течение 10 лет единственным каналом связи с советской математикой были журнальные статьи. В последние 15 лет мы стали участниками благоприятных перемен. 8 аспирантов защитили диссертации по теории вероятностей и математической статистике под руководством таких выдных советских ученых, как Б. Гнеденко, А. Колмогоров, Ю. Линник, Я. Синай, А. Скороход и другие, влияние которых непосредственно ощутимо в возниконовении новых направлений. Все больше советских математиков посещают Венгрию, встречи с ними превратились в регулярную рабочную связь. Мы можем встречаться с советскими математиками не только на конференциях, они участвуют в работе наших университетов и институтов.

Статьи венгерских учених часто публикуются в советских журналах. Достаточно упомянуть только журнал "Теория Вероятностей и ее применения", где до сих пор вышли на свет работы А. Реньи, Л. Такача, А. Прекопа, М. Арато и Д. Сас. Аналогичная связь установлена и с другими советскими журналами (УМН, ДАН, Литовский Математический Сборник). И наоборот: в венгерских изданиях публикуются статьи советских математиков, влияние которых весомо. В первую очередь я хочу привлечь внимание на работы Линника, Ширяева и их школ.

В наши дни считается естественным, что венгерские специалисты на русском языке читают советсвую литературу по теории вероятностей и математической статистике.

В начале 50-х годов это было далеко не так, но любовь к специальности и жажда познавания новых результатов необходимо привели к наблюдению за русской литературой. Не только журналы, но и книги по теории и практике очень популярны среди венгерских специалистов. Наши студенты и молодые научные сотрудники знакомятся с классическими и современными результатами по книгам И. Гихмана, А. Скорохода, Ю. Линника, Ю. Прохорова, Ю. Разанова, В. Петрова, А. Колмогорова, А. Ширяева и других. Книги известных и молодых советских математиков в течение нескольких дней исчезают из книжных лавок. Книги более старого издания постоянно являются дефицитными.

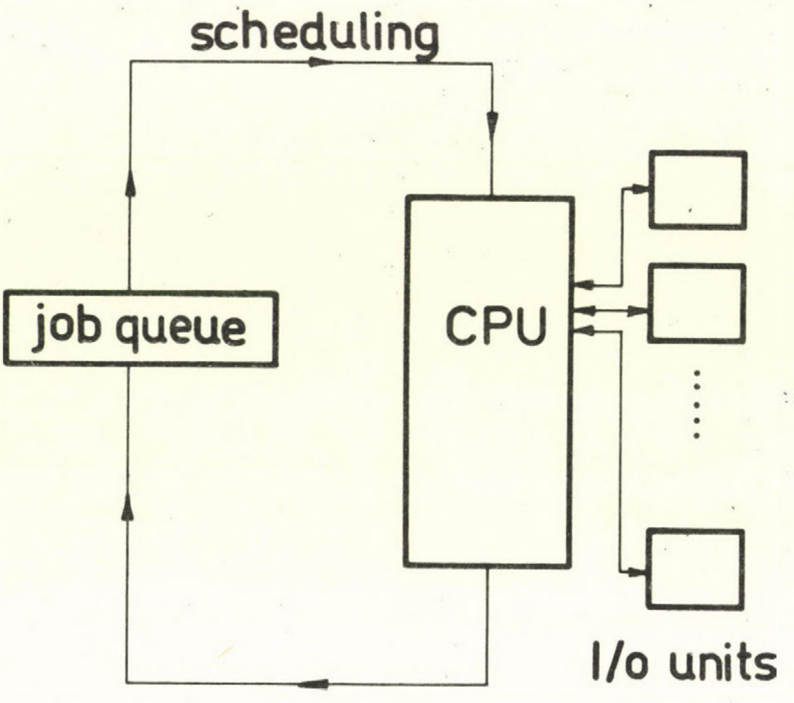
С конца 50-х и с середины 60-х годов советские исследования по теории вероятностей и математической статистике в более широком спектре оказали влияние на венгерскую науку.

Помимо классических областей, все большее внимание уделяется исследованию современных направлений. В работах по теории диффузионных процессов ощущается непосредственное влияние советской школы. В первую очередь я хочу указать на результаты М. Арато, А. Крамли, Й. Пергел и Ш. Чёргё. Результаты советских математиков дали толчок и исследованиям Й. Гергея, Т. Гергея, Д. Саса, Й. Томко и других теории массового обслуживания. В теории информации и ее применениях на научное развитие И. Чисара и Ш. Чиби, кроме отечественных работ, большое влияние оказали результаты советских математиков. Теория сумм со случайным числом слагаемых и редеющих точечных процессов может считаться совместной советско-венгерской темой. В этой области результаты Реньи, Такача, Бартфаи, Модёроди, Саса и Томко тесно связаны с исследовательской работой Гнеденко, Золотарева, Беляева и их учеников. Тесную связь между советскими и венгерскими исследованиями в теории вероятностей и математической статистике показал проект наших Академий об издании совместного журнала по теории вероятностей и математической статистике. Осуществлению этого проекта воспрепятствовали преждевременные кончины А. Реньи и Ю. Линника.

III.

В дальнейшем - не претендуя на полноту изложения - я хочу на одном конкретном примере пояснить связь советских и венгерских исследований и значение большого объема советских исследований.

Большая часть проблем, связанных со временем пребывания, сводится к следующей задаче, которая была описана в терминах случайных процессов ещё в 50-х годах. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ принимает два значения $\xi(t) = \begin{cases} a \\ b \end{cases}$, где времена пребывания в состояниях a и в являются последовательностями независимых случайных величин. Обозначим через $\xi_i \geqslant 0$ и $\eta_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ продолжительность пребывания в состоянии a и в и через $\beta(t)$ (соотв. $t - \beta(t)$) пребывание до фиксированного момента времени t. Эти случайные величины являются суммами независимых случайных величин, но число слагаемых тоже случайно. Распределение и асимптотическое поведение случайной величины были изучены Реньи и Такачом. В простейшем случае они свели решение к результату, полученному ранее Добрушиным. Наглядная интерпретация этой задачи (см. рис. I.2.) показывает ее связь с практикой, с проблемами теории массового обслуживания.



The scheme of the system

Рис. 1.

The priority (absolute)

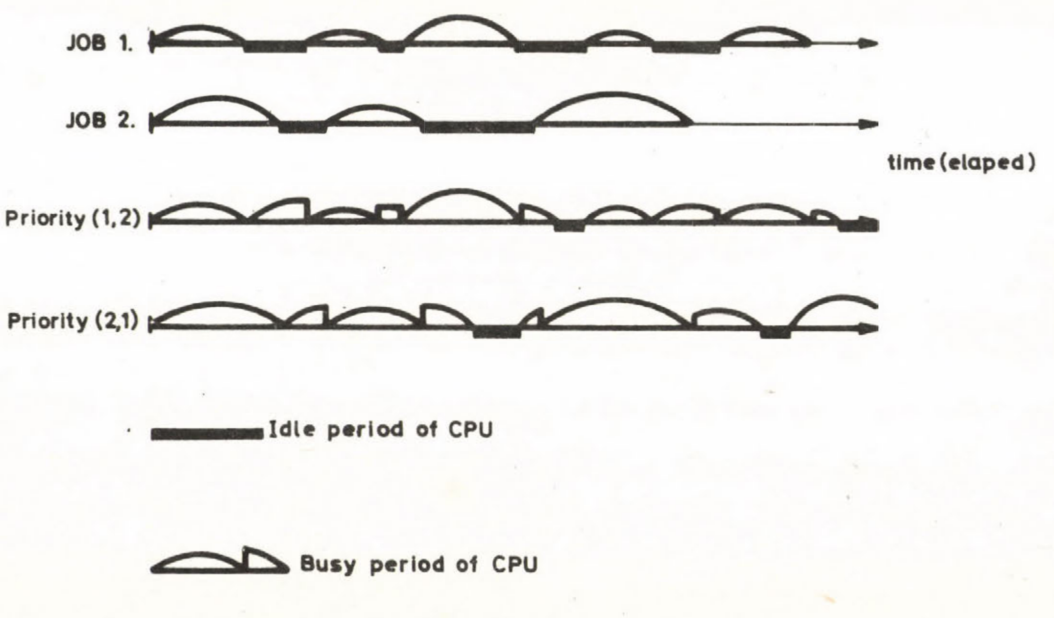


Рис. 2.

В связи с решением этой задачи (см. рис.3.) исследования стали проводиться в разных направлениях, и именно в этом состоит значение точной постановки задачи при решении практической проблемы.

CPU SCHEDULING SIMULATION BASED ON AUTOREGRESSIVE PROCESSES

$$\rho = K\frac{\mu}{\lambda}$$

K – no. of jobs

$1/\lambda$ – expected length of CPU periods

$1/\mu$ – expected length of I/O periods

Realization of I/O periods: exponential with parameter μ

Realization of CPU periods: exponential with parameter $\lambda(t)$, where

$$\lambda(t) = \lambda'_n + \lambda,\ n\cdot T \le t < (n+1)\cdot T$$

and λ'_n= satisfies the equation

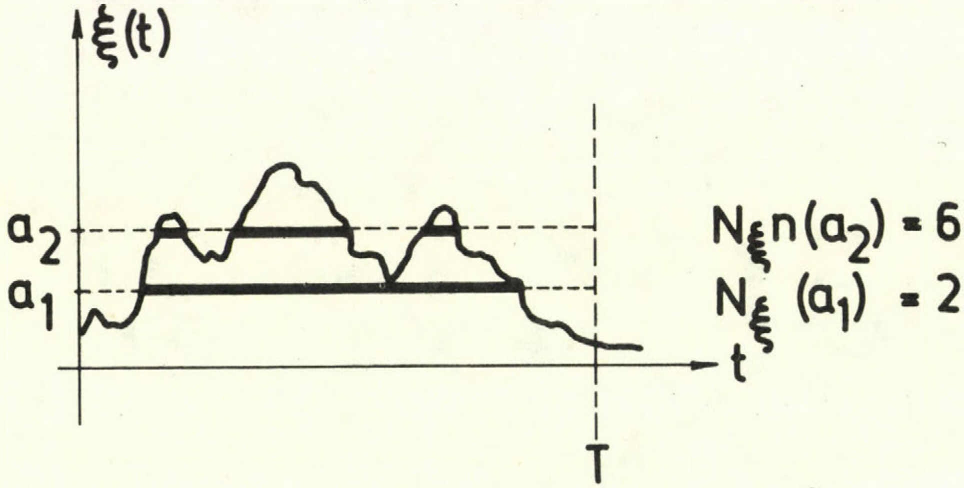
$$\lambda'_n = \lambda'_{n-1} a_1 + \lambda'_{n-2} a_2 + \varepsilon_n$$

where the parameters in simulated jobs are counted

Рис. 3.

Эти направления следующие:

1. Исследования предельных теорем для сумм случайного числа слагаемых, об этом уже говорилось в настоящем докладе.
2. Исследования пребываний случайных процессов над некоторым уровнем, задачи пересечений. Эти проблемы сводятся к изучению подобных проблем для стационарных и диффузионных процессов путем соответствующего выбора временного масштаба.



$$M\,N_\xi(a) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{B''(o)}{B(o)}\right)^{1/2} e^{-\frac{a^2}{2B(o)}}\cdot T$$

$$\text{if } \int_0^\infty \lambda^2\left[\ln(1+\lambda)\right]^{1+\alpha} dF(\lambda) < \infty, \text{ then } \alpha > \text{o-ra}$$

Рис. 4.

В этой области В. Волконский и Ю. Розанов получили тот классический результат, согласно которому над достаточно высоким уровнем число пересечений имеет пуассоновский закон распределения. Эти результаты были существенно обобщены Ю. Беляевым. Прохоров и его ученики доказали эвристические результаты, относящиеся к точному распределению и математическому ожиданию числа пересечений. Е. Сулинская методом Прохорова дала точное доказательство формулы для математического ожидания числа пересечений.

$$P\left\{\beta(t)<x\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\left[G_n(t-x)-G_{n+1}(t-x)\right]$$

$$\zeta_{1n}=\xi_1+\ldots\ldots+\xi_n \quad H_n=P\left\{\zeta_{1n}<x\right\}$$

$$\zeta_{2n}=\eta_1+\ldots\ldots+\eta_n \quad G_n=P\left\{\zeta_{2n}<x\right\}$$

$$\nu(T) \quad n, \text{ if } \xi_1+\eta_1+\cdots+\xi_n<T\leq\xi_1+\eta_1+\cdots+\xi_n+\eta_n$$

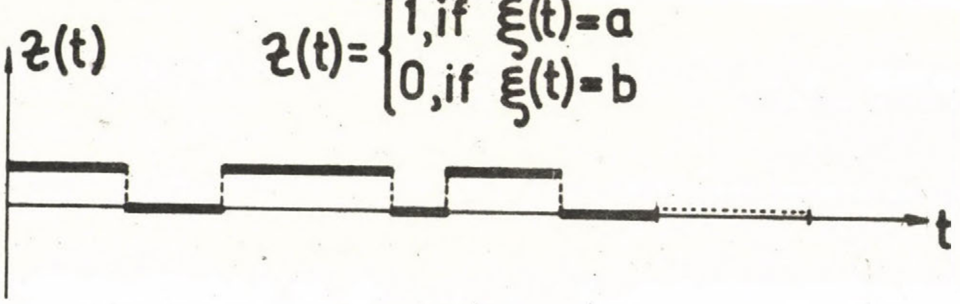
Рис. 5.

3. Естественно возникает вопрос об управлении и статистическом исследовании таких процессов. Если мы рассматриваем – как приближение – диффузионный процесс, то тгда хорошо применимы результаты И. Гихмана, Ю. Прохорова, А. Скорохода и А. Ширяева. Решение проблемы нелинейной фильтрации является статической задачей и тесно связано с теорией стохастических дифференциальных уравнений. Оно является обощением линейной теории прогноза, которая была разработана Колмогоровым. В связи с одной специальной проблемой, поставленной Колмогоровым, автор этих строк начал свои исследования в области статистики случайных процессов. Результаты, полученные сотрудниками Института вычислительной техники и автоматизации

(Дьюрац, Бенцур, Крамли, Пергел, Тушнади), и тот факт, что массовая обработка данных на ЭВМ требует этих результатов, показывает развитие отечественных исследований.

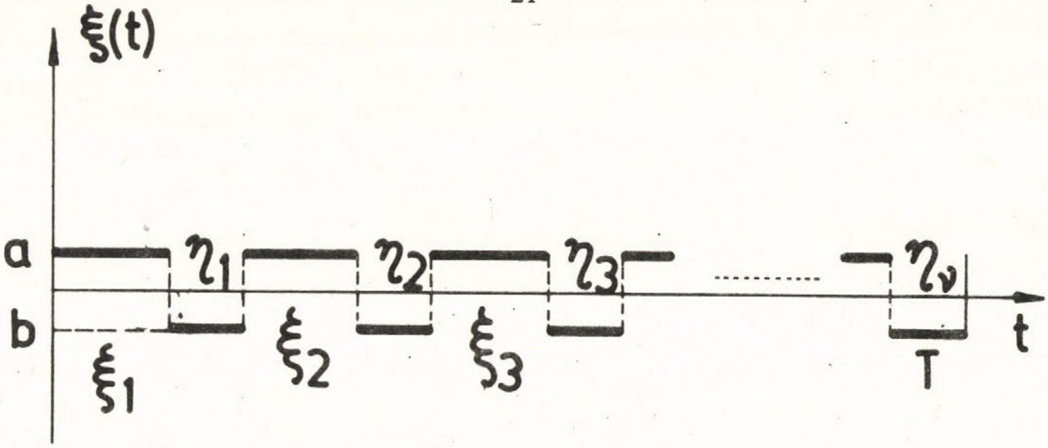
4. Решения, указанные в пункте 3. дают хорошие приближения для решений проблем, связанных с внутренней организацией работы современной ЭВМ. Задача оптимизации эксплуатации рессурсов ЭВМ (центральное устройство, каналы) сводится к проблеме нелинейного управления случайных процессов, но решения – в большинстве случаев – получаются только методом Монте-Карло. Конкретные результаты в этом направлении находятся в новейших работах (Арато, Кнут, Тёке и Томко) (см. рис.6–9).

$$z(t)=\begin{cases}1, \text{if } \xi(t)=a\\ 0, \text{if } \xi(t)=b\end{cases}$$



$$\beta(t)=\int_0^t z(u)\,du,$$

Рис. 6.



$$P(\xi_i < X) = G(X)$$
$$P(\eta_i < X) = H(X)$$
$$\xi(t) = \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

Рис. 7.

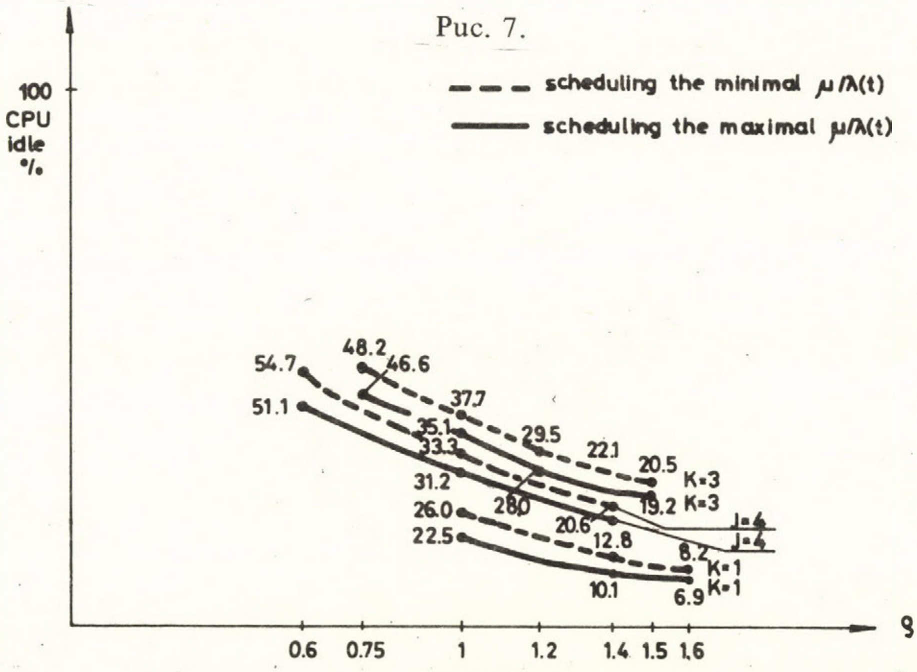


Рис. 8.

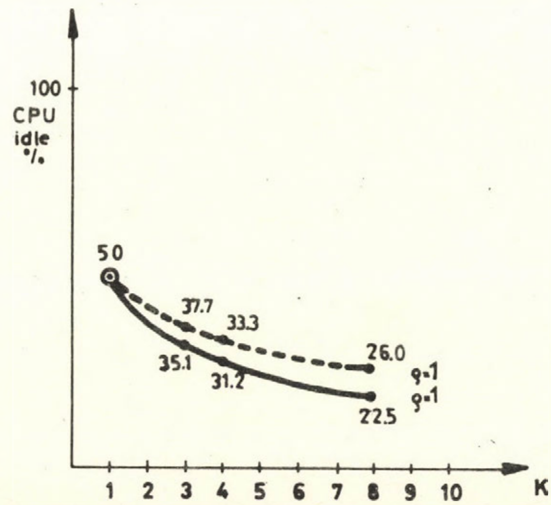


Рис. 9.

В связи с этой проблематикой я хотел бы только указать пример на совместное воздействие разных направлений исследования и влияние советских результатов в Венгрии. Конечно этот, перечень не является полным, но я надеюсь, что он дает возможность понять смысл, полезность и значение венгерско-советскох связей в области теор.вер.

В связи с венгерско-советским сотрудничеством по теории вероятностей мы должны были бы перечислить почти всех математиков, работающих в этой области, так как все они в той или иной форме имеют связь с советскими исследователями или с их результатами. Однако имеются вторичные влияния, собственные темы, и связи с исследователями других стран.

Мы имеем в виду такие работы, как основные исследования П. Меддеши в области разложения распределений, результаты П. Бартфаи в теории больших уклонений, результаты И. Беркеша, Й. Комлоша, Г. Тушнади, П. Майора, П. Ревеса и других в проблематике теоремы повторного логарифма. А. Прекопа представляет существенно новое направление в исследовании операций. Прошу прощение за то, что я не могу подробнее осветить круг этих проблем,тем более, что даже перечень их и далеко не полон.

Отдельного доклада требует изложение влияний венгерских исследований. Хорошо известно, что аналитические результаты Ф. Рисса, М. Рисса и Г. Сегё были основными для построения колмогоровской теории линейного прогноза.

Теоретикочисловые методы П. Турана П. Эрдёша и А. Реньи нашли большой отклик в СССР. П Эрдёш является и одним из основоположников теории инвариантности. Аналогично положение и в теории случайных графов, и в теории розыска, основы которых были заложены А.Реньи и П. Эрдёшем. Этот перечень мог бы продолжаться ещё долго. Однако в своем докладе я хотел лишь проиллюстрировать влияния исследований советских ученых.

Мы рады отметить, что наши молодые исследователи охотно ехали, и едут в СССР учиться и занкомиться с новыми направлениями, так как они знают, что встретят там искреннюю поддержку и дружескую помощь.

Развитие и – спокойно можем сказать – расцвет теорий вероятностей и математической статистики в Венгрии является наглядным примером того, как правильное правильное направление, выбранное с дружеской помощью, влияет на всю математику и на развитие ее применений!

Summary

In the paper the author gives a detailed survey about the influence of the soviet probability theoretical researches on the hungarian works after 1945.

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 14/1975

MEGJEGYZÉS A LOGARITMIKUSAN KONKÁV FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉHEZ

Rapcsák Tamás

Ebben a dolgozatban bebizonyítjuk a folytonos, logaritmikusan konkáv függvények és a folytonos, másodrendű Pólya függvények osztályának azonosságát. Ez a tétel megtalálható I. J. Schoenberg [1] cikkében. Itt a tétel egy más bizonyítását adjuk.

Először definiáljuk a logaritmikusan konkáv függvény és a másodrendű Pólya függvény fogalmát, utána kimondjuk és bebizonyítjuk a tételt.

Definíció. Egy minden valós x-re értelmezett, nemnegatív $g(x)$ függvényt logaritmikusan konkávnak nevezünk, ha tetszőleges x_1, x_2 számpár és $0 < \lambda < 1$ esetén fennáll a

$$(1) \qquad g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq [g(x_1)]^{\lambda} \cdot [g(x_2)]^{1-\lambda}$$

egyenlőtlenség.

Definíció. Egy minden valós x-re értelmezett, mérhető, nemnegatív $g(x)$ függvényt másodrendű Pólya függvénynek nevezünk, ha az alábbi reláció

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} g(x_1 - y_1) & g(x_1 - y_2) \\ g(x_2 - y_1) & g(x_2 - y_2) \end{vmatrix} \geq 0$$

teljesül akármilyen $x_1 < x_2$ és $y_1 < y_2$ értékekre és $g(x) \neq 0$ legalább két különböző x értékre.

Tétel. *A folytonos, másodrendű Pólya függvények osztálya megegyezik a folytonos, logaritmikusan konkáv függvények osztályával.*

Bizonyítás. A bizonyítás első részében megmutatjuk, hogy egy folytonos, másodrendű Pólya függvény logaritmikusan konkáv.
Tekintsük ugyanis csak azokat az $x_2 > x_1$ és $y_2 > y_1$ értékeket, amelyre $x_2 - y_2 = x_1 - y_1$. E megkötés mellett az $x_1 - y_2, x_2 - y_1$ pár bármely x értéket felvehet. Vezessük be a $z_1 = x_2 - y_1$, $z_2 = x_1 - y_2$ jelöléseket. Igy az alábbi egyenlőségeket kell teljesíteni.

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_2 - y_2 &= x_1 - y_1, \\ z_1 &= x_2 - y_1, \\ z_2 &= x_1 - y_2. \end{aligned}$$

Beérkezett: 1974. október 21.

Mivel $z_1 > z_2$, a (3) egyenlőségek teljesülése ekvivalens a (4) egyenlőséggel

(4) $\qquad z_1 - z_2 = 2(y_2 - y_1).$

Igy a z_1, z_2 pár bármely x értéket felvehet. Ekkor az alábbi relációk igazak.

(5) $$\frac{x_2 - y_1 + x_1 - y_2}{2} = x_1 - y_1,$$

(6) $$\frac{x_2 - y_1 + x_1 - y_2}{2} = x_2 - y_2.$$

A determináns feltételt kifejtve az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk.

(7) $\qquad g(x_1 - y_1)g(x_2 - y_2) \geqslant g(x_2 - y_1)g(x_1 - y_2).$

A korábban bevezetett jelölést alkalmazva, (5) és (6) miatt

$$x_1 - y_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad \text{és} \quad x_2 - y_2 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Igy a determináns feltétel az alábbi alakba írható

(8) $$g\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) g\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \geqslant \sqrt{g(z_1)g(z_2)}\ \sqrt{g(z_1)g(z_2)}.$$

Ebből a függvény nemnegativitása miatt kapjuk, hogy

(9) $$g\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \geqslant \sqrt{g(z_1)}\ \sqrt{g(z_2)}.$$

ami éppen az állítás.

A bizonyítás második részében megmutatjuk, hogy egy logaritmikusan konkáv függvény másodrendű Pólya függvény. Mivel $x_2 - y_1 > x_2 - y_2 > x_1 - y_2$, ezért található $0 < \lambda < 1$ oly módon, hogy az alábbi egyenlőség teljesül

(10) $\qquad \lambda(x_2 - y_1) + (1 - \lambda)(x_1 - y_2) = x_2 - y_2.$

Ekkor a (11) reláció is igaz.

(11) $\qquad \lambda(x_1 - y_2) + (1 - \lambda)(x_2 - y_1) = x_1 - y_1.$

(Ha a (10) egyenletből kifejezzük a $\lambda(x_1 - y_2)$-t, a kapott kifejezést a (11) egyenletbe behelyettesítjük, akkor azonosságot kapunk.) Mivel a $g(x)$ függvény logaritmikusan konkáv, így az alábbi relációk igazak

(12) $$g(x_2 - y_2) = g[\lambda(x_2 - y_1) + (1 - \lambda)(x_1 - y_2)] \geqslant g(x_2 - y_1)^{\lambda} \cdot g(x_1 - y_2)^{1-\lambda} \geqslant 0,$$

(13) $$g(x_1 - y_1) = g[\lambda(x_1 - y_2) + (1 - \lambda)(x_2 - y_1)] \geqslant g(x_1 - y_2)^{\lambda} \cdot g(x_2 - y_1)^{1-\lambda} \geqslant 0.$$

A (12) és (13) egyenlőtlenségeket összeszorozva az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk

(14) $\quad g(x_2 - y_2)g(x_1 - y_1) \geqslant g(x_1 - y_2)g(x_2 - y_1),$

s ez éppen a kívánt determináns feltétel.

Megjegyezzük, hogy a bizonyítás második részében nem használtuk ki azt, hogy a függvények folytonosak.

Irodalom

[1] I. J. Schoenberg, "On Polya Frequency Functions" J. D' Analyse Mathematique 1 (1951) 331–374.

Summary

I. J. Schoenberg proved (1) that the class of continuous, logarithmically concave functions is identical to the class of continuous, second order Polya functions. In this paper we present a simpler proof for the above theorem.

Резюме

И. Й. Шхоенберг показал, что класс непрерывных логарифмически выпуклах функций совпадает с классом функций Поля второго порядка. В этой статье мы дадим более простое докозательство этово утверждения.

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 14/1975

ÁLTALÁNOS RELÁCIÓKON ÉRTELMEZETT KAPCSOLÓDÁSI MŰVELETEKRŐL

Farkas Zoltán

0. Bevezetés

Jelen dolgozat szerzője az összetett rendszerek modellezéséhez – napjaink egyik fontos kutatási feladatához – kapcsolódó matematikai vizsgálatai egyes olyan eredményeit foglalja össze, amelyek rendszerek részrendszerekre való felbontásának és különböző rendszerek egy rendszerré való összekapcsolásának modellezésére vonatkoznak.

A szerző ezirányú vizsgálatai kiindulási pontjául bizonyos összett vegyipari rendszerek modellezésének – dr. Almásy Gedeon, Dr. Pallai Iván és Veress Gábor által felvetett és vizsgált – gyakorlati problémái szolgáltak, amelyek egy kezdeti szakaszban lévő közös tárgyalása és elméleti módszerekkel való megoldási kísérlete [1]-ben található.

A további vizsgálatok során kapott eredmények jelenlegi formájukban való megfogalmazását – több másirányú próbálkozás után – a reláció fogalmának általánosítása, valamint az általánosított relációkon bizonyos műveletek értelmezése és megfelelő módszerekkel való vizsgálata tette lehetővé. Mindezen önálló fogalomalkotásokkal illetve általánosítással a dolgozat szerzője az irodalomból ismert reláció–fogalmaknak azt a hiányosságát igyekszik kiküszöbölni, hogy általuk az említett reláció–műveletek definiálása technikai nehézségekbe ütközik. Érvényes ez pl. mind a Descartes–féle szorzat, mind a rendezett n-es fogalmát felhasználó reláció–definíciókra (ld. pl. Mesarovic [7] és Maurer, Virág [6], illetve Salovaara [9] munkáit). Ezen kívül még azzal a tulajdonsággal is rendelkezik az itt bevezetendő reláció–fogalom, hogy definíciója az előbb említettnél általánosabb fogalmon, a leképezés fogalmán, alapszik. Ezáltal lehetővé válik tetszőleges számosságú objektumhalmaz elemei közötti relációk konstruktív műveletek definiálására alkalmas értelmezése, és általa a felvetett problémakör hatékony vizsgálata.

1. Alapfogalmak

A tárgyalásmód egységességének kedvéért megemlítjük, hogy a *szuperjektív leképezés*, *leképezések megszorításá*nak fogalmát a [3] irodalomban található értelemben használjuk.

*Paraméterező leképezés*ről beszélünk akkor, ha definíció szerint előírjuk, hogy egy szuperjektív leképezés tárgyhalmazbeli különböző elemekhez hozzárendelt képhalmazbeli elemeket megkülönböztetjük. Valamely $f : X \to Y$ leképezés tehát definíció szerint akkor paraméterező leképezés, ha $\forall x_1, x_2 \in X[x_1 \neq x_2 \overset{\text{def}}{\Rightarrow} f(x_1) \neq f(x_2)]$. Egymással *kompatibilis leképezések*nek nevezzük mindazon leképezéseket, amelyek közös tárgyelemhez közös képelemet rendelnek. Legyen továbbá kompatibilis leképezések kompatibilis, illetve diszjunkt kompatibilis *kiterjesztése* a legszűkebb közös kiterjesztésük, illetve az egyes leképezéseknek a többi leképzés tárgyhalmazaiban nem szereplő tárgyelemei halmazára való megszorításainak kompatibilis kiterjesztése. Definíciója következtében mindkét kiterjesztési művelet asszociatív, tehát kettőnél több leképezésre is értelmezhető.

2. Az általános reláció fogalma

2.1. **Definíció.** Legyen adott a $p_\gamma : S \to A_\gamma$ paraméterező leképzéseknek a G generátorhalmaz által definiált

$$P_G \overset{\text{def}}{=} \{ p_\gamma : S \to A_\gamma \mid \gamma \in G \}$$

paraméterező leképzésrendszere, és a $p_\gamma \in P_G$ leképzések által S-paraméterezett

$$A_S(p_\gamma) \overset{\text{def}}{=} \{ p_\gamma(s) \mid s \in S \quad \text{és} \quad s_1, s_2 \in S[s_1 \neq s_2 \overset{\text{def}}{\Rightarrow} p_\gamma(s_1) \neq p_\gamma(s_2)] \} \neq \phi$$

halmazoknak a G generátorhalmaz által generált

$$\boldsymbol{A}_S(P_G) \overset{\text{def}}{=} \{ A_S(p_\gamma) \mid p_\gamma \in P_G \}$$

halmazrendszere. Az $\boldsymbol{A}_S(P_G)$ halmazrendszert S tartójú, P_G által generált R *általános relációnak* nevezzük. $G = \phi$ *esetén üres*, véges G halmaz *esetén véges*, $S = \{ i_1, \ldots, i_n \}$ esetén $R[n]n$ *tagú* vagy *n-áris relációról* beszélünk, ha $i_1 < \ldots < i_n$. Az n tagú relációkat $R[n] = \{ (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \}$ formában is felírhatjuk, ahol $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ rendezett n-es.

2.2. **Definíció.** Legyen R egy S-tartójú általános reláció, és legyen az $A_S(p)$ S-paraméterezett halmaz az R relációt definiáló halmazrendszer egy tagja, továbbá tetszőleges adott $s \in S$ esetén $a_s \overset{\text{def}}{=} A_s(p)$ az $A_S(p)$ paraméterezett halmaz s paraméterű eleme. Az a_s elemeket az R általános reláció s *paraméterű tagjainak*, ezek

$$dom_s(R) \overset{\text{def}}{=} \{ a_s \overset{\text{def}}{=} A_s(p) \mid A_s(p) \in A_S(p)[A_S(p) \in R] \}$$

halmazát az R általános reláció s paraméterhez tartozó *értelmezési tartományának* nevezzük.

2.3. **Definíció.** Legyen adott egy S tartójú R általános reláció, és egy $\widetilde{S} \subseteq S$ halmaz. Ha R az $A_S(p_\gamma)$ S-paraméterezett halmazok $\boldsymbol{A}_S(P_G)[\gamma \in G]$ rendszere, akkor a $p_\gamma : S \to A_\gamma$ leképezések $p_\gamma \mid \widetilde{S} = \widetilde{p}_\gamma$ megszorításai által definiált $\boldsymbol{A}_{\widetilde{S}}(\widetilde{P}_G)$ paraméteres halmazrendszerként értelmezett $\widetilde{R}$ általános relációt az R *általános reláció* $\widetilde{S} \subseteq S$ tartóhalmazra való *megszorításának* nevezzük, és így jelöljük: $\widetilde{R} = R/\widetilde{S}$. Megfordítva, az R relációt az $\widetilde{R}$ reláció S tartóhalmazra való egy *kiterjesztésének* nevezzük.

3. Általános relációk szuperpozíciója és kompozíciója

3.1. **Definíció.** Legyenek adottak valamely olyan $S^{(i)}$ tartójú $R^{(i)}$ általános relációk, amelyeket a

$$P^{(i)}_{G^{(i)}} \overset{\text{def}}{=} \{ p^{(i)}_{\gamma^{(i)}} : S^{(i)} \to A^{(i)}_{\gamma^{(i)}} \mid \gamma^{(i)} \in G^{(i)} \quad \text{és} \quad \gamma^{(i)}_1, \gamma^{(i)}_2 \in G^{(i)}$$

$$[\gamma^{(i)}_1 \neq \gamma^{(i)}_2 \overset{\text{def}}{\Rightarrow} p^{(i)}_{\gamma^{(i)}_1} \neq p^{(i)}_{\gamma^{(i)}_2}] \}$$

leképezésrendszerek által $S^{(i)}$-paraméterezett $\mathbf{A}^{(i)}_{G^{(i)}}$ halmazrendszerként definiálunk, adott $G^{(i)}$ és $i = 1, 2$ esetén.

Azt a $P^{(12)}_{G^{(1)}, G^{(2)}}$ illetve $P^{(12)\,\Delta}_{G^{(1)}, G^{(2)}}$ leképezésrendszert, amelyet az összes lehetséges módon megválasztott

$$p^{(1)}_{\gamma^{(1)}}, p^{(2)}_{\gamma^{(2)}}\ [p^{(1)}_{\gamma^{(1)}} \in P^{(1)}_{G^{(1)}}, p^{(2)}_{\gamma^{(2)}} \in P^{(2)}_{G^{(2)}}]$$

kompatibilis leképezéspárok kompatibilis, illetve diszjunkt kompatibilis kiterjesztése definiál, az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ általános *relációk szuperpoziciójá*nak, illetve *kompozició*jának nevezzük, és $R^{(1)} * R^{(2)}$-vel, illetve $R^{(1)} \circ R^{(2)}$-vel jelöljük. A szuperpozició és kompozició műveletét *kapcsolódási művelet*nek nevezzük. Ha $R^{(1)} \circ R^{(2)} = R^{(1)}$ vagy $R^{(1)} \circ R^{(2)} = R^{(2)}$, illetve $R^{(1)} * R^{(2)} = R^{(1)}$ vagy $R^{(1)} * R^{(2)} = R^{(2)}$, akkor *identikus kompozició*ról, illetve *szuperpozició*ról beszélünk.

Ha $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ diszjunkt tartójú általános relációk, akkor *diszjunkt szuperpozició*ról, illetve *diszjunkt kompozició*ról beszélünk, és $R^{(1)} \overset{\Delta}{*} R^{(2)}$-vel, illetve $R^{(1)} \overset{\Delta}{\circ} R^{(2)}$-vel jelöljük.

Megjegyzések. 1. Definíciónkból következik, hogy $R^{(1)} \overset{\Delta}{*} R^{(2)} = R^{(1)} \overset{\Delta}{\circ} R^{(2)}$, és ezért vezessük be az $R^{(1)} \overset{\Delta}{*} R^{(2)} \overset{\text{def}}{=} R^{(1)} \times R^{(2)} \overset{\text{def}}{=} R^{(1)} \overset{\Delta}{\circ} R^{(2)}$ jelölést, és nevezzük e műveletet az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ *direkt szorzatá*nak.

2. Leképezésrendszerek kiterjesztésének asszociativitásából következően általános relációk kompozíciója és szuperpoziciója kiterjeszthető kettőnél több reláció esetére is:

$$R^{(1)} \circ \ldots \circ R^{(i)} \circ \ldots \circ R^{(n)} = R_{\circ}\,,$$

$$R^{(1)} * \ldots * R^{(i)} * \ldots * R^{(n)} = R_{*}$$

3. Legyen adott az $I = \{1, \ldots, m\}$ és $J = \{l + 1, \ldots, l + n\}$ halmaz, és az I tartójú m tagú $R^{(1)}[m]$, valamint a J tartójú n tagú $R^{(2)}[n]$ általános reláció, és $l < m$. Ekkor

$$\begin{aligned} R^{(1)}[m] \circ R^{(2)}[n] = \{ (x_1, \ldots, x_l, y_{m+1}, \ldots, y_{l+n}) \mid \forall k = l + 1, \ldots, m \\ \exists z_k \in dom_k (R^{(1)}[m]) \cap dom_k (R^{(2)}[n]) \\ [(x_1, \ldots, x_l, z_{l+1}, \ldots, z_m) \in R^{(1)}[m] \text{ és } \\ (z_{l+1}, \ldots, z_m, y_{m+1}, \ldots, y_{l+n}) \in R^{(2)}[n]] \}\,, \end{aligned}$$

amely egy $n - m + 2l$ tagú általános reláció. Példánk alapján könnyen belátható, hogy relációk kompozíciójának művelete többváltozós függvények behelyettesítési szabályának általános relációkra való kiterjesztése. Ugyancsak definíciónkból következően

$$\begin{aligned} R^{(1)}[m] * R^{(2)}[n] = \{(x_1, \ldots, x_l, z_{l+1}, \ldots, z_m, y_{m+1}, \ldots, y_{l+n}) \mid \\ (x_1, \ldots, x_l, z_{l+1}, \ldots, z_m) \in R^{(1)}[m] \text{ és} \\ (z_{l+1}, \ldots, z_m, y_{m+1}, \ldots, y_{l+n}) \in R^{(2)}[n] \\ [(x_1, \ldots, x_l, y_{m+1}, \ldots, y_{l+n}) \in R^{(1)}[m] \circ R^{(2)}[n]]\}, \end{aligned}$$

amely egy $l + n$ tagú általános reláció. Szintén könnyen belátható, hogy relációk szuperpozíciójának művelete többváltozós függvényekből képezett többváltozós függvény képzési szabályának általános relációkra való kiterjesztése.

4. Általános relációk deszuperponálhatósága és dekomponálhatósága

4.1. **Definíció.** Az olyan R általános relációt, amelyhez létezik valamely olyan R' és R'', illetve $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ általános reláció, amelyekre

$$R = R' \circ R'' ,$$

illetve

$$R = R^{(1)} * R^{(2)} ,$$

az R' és R'' relációkra *dekomponálható*, illetve az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ relációkra *deszuperponálható relációnak* nevezzük.

Az iménti feltételeknek eleget tevő R' és R'' illetve $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ relációk megadása esetén az R reláció *dekompozíciójáról*, illetve *deszuperpozíciójáról* beszélünk, amelyeket az R reláció *komponenseinek*, illetve *szuperponenseinek* nevezzük. Ha $R' \circ R''$ az R' és R'' identikus kompozíciója, illetve $R^{(1)} * R^{(2)}$ az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ identikus szuperpozíciója, akkor *triviális dekompozícióról*, illetve *deszuperpozícióról* beszélünk.

Megjegyzés. A kompozíció és szuperpozíció műveletének asszociatívitása miatt beszélhetünk adott általános reláció kettőnél több általános relációra való dekomponálásáról, illetve deszuperponálásáról.

5. Általános relációk dekompozíciója és deszuperpozíciójára vonatkozó tételek

5.1. **Tétel.** *Legyen adott az $S^{(1)}$ tartójú $R^{(1)}$ és az $S^{(2)}$ tartójú $R^{(2)}$ általános reláció, valamint legyen $\widetilde{R}^{(1)}$ illetve $\widetilde{R}^{(2)}$ az $R^{(1)}$ relációnak az $S^{(1)} - S^{(2)}$ tartóhalmazra, illetve az $R^{(2)}$ relációnak az $S^{(2)} - S^{(1)}$ tartóhalmazra való megszorítása. Ekkor:*

a) $R^{(1)} \circ R^{(2)}$ az $S^{(1)} \cup S^{(2)}$ tartójú $R^{(1)} * R^{(2)}$ általános relációnak az $S^{(1)} \cup S^{(2)} - S^{(1)} \cap S^{(2)}$ tartóhalmazra való megszorítása;

b) az $R^{(1)} * R^{(2)} = (R^{(1)} \times \widetilde{R}^{(2)}) \cap (\widetilde{R}^{(1)} \times R^{(2)})$ *összefüggés teljesül tetszőleges* $R^{(1)}, R^{(2)}$ *általános relációk esetén.*

Bizonyítás. a) Az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ relációkból kiválasztható kompatibilis elempárok – mint rendre $S^{(1)}$-en és $S^{(2)}$-n értelmezett kompatibilis leképezések – diszjunkt kompatibilis kiterjesztése a kompatibilis kiterjesztésüknek az $S^{(1)} \cup S^{(2)} - S^{(1)} \cap S^{(2)}$ halmazra való megszorítása, minden lehetséges kompatibilis elempár esetén.

b) $R^{(1)} * R^{(2)}$ tetszőleges eleme $R^{(1)} \times \widetilde{R}^{(2)}$-nek és $\widetilde{R}^{(1)} \times R^{(2)}$-nek is eleme, mivel az $R^{(1)} \times \widetilde{R}^{(2)}$ általános reláció az $R^{(1)}$-nek és $\widetilde{R}^{(2)}$-nek, illetve az $\widetilde{R}^{(1)}$-nek és $R^{(2)}$-nek az $S^{(1)} \cup S^{(2)}$ tartóhalmazra való közös kiterjesztése. Emiatt $R^{(1)} * R^{(2)}$ tetszőleges eleme az

$$R^{(12)} \stackrel{\text{def}}{=} (R^{(1)} \times \widetilde{R}^{(2)}) \cap (\widetilde{R}^{(1)} \times R^{(2)})$$

relációnak is eleme.

Másrészt viszont az $R^{(12)}$ általános reláció az $S^{(1)} \cup S^{(2)}$ tartóhalmazú $R^{(1)} \times \widetilde{R}^{(2)}$ és $\widetilde{R}^{(1)} \times R^{(2)}$ általános relációnak olyan közös része, amely egyúttal az $\widetilde{R}^{(1)}$ és $\widetilde{R}^{(2)}$ általános relációnak is kiterjesztése. Definíciónk következtében az $R^{(12)}$ reláció tetszőleges elemét olyan paraméterező leképezés definiálja, amely az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ relációk valamely elemeit definiáló kompatibilis leképezéspár kompatibilis kiterjesztése, tehát az $R^{(12)}$ tetszőleges eleme az $R^{(1)} * R^{(2)}$-nek is eleme. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Következmény. A b) pontbeli állításból következik, hogy egy S tartójú R általános reláció akkor és csak akkor deszuperponálható nem triviális módon, ha létezik olyan $S^{(1)}$ tartójú $R^{(1)}$ és $S^{(2)}$ tartójú $R^{(2)}$ általános reláció, hogy $S^{(1)} \cup S^{(2)} = S$, $R^{(1)} \neq R$ vagy $R^{(2)} \neq R$, és ha $\widetilde{R}^{(1)}$, illetve $\widetilde{R}^{(2)}$ az $R^{(1)}$ relációnak az $S^{(1)} - S^{(2)}$ illetve $\widetilde{R}^{(2)}$ az $R^{(2)}$ relációnak az $S^{(2)} - S^{(1)}$ tartóhalmazra való megszorítása, akkor

$$R = (R^{(1)} \times \widetilde{R}^{(2)}) \cap (\widetilde{R}^{(1)} \times R^{(2)})$$

Példa. Csak triviálisan deszuperponálható reláció

$$R = \{(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}),\ (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)})\}, \quad \text{ahol}$$
$$a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = a, \quad \text{de} \quad a_2^{(1)} \neq a_2^{(2)} \quad \text{és} \quad a_3^{(1)} \neq a_3^{(2)}$$

5.2. **Tétel.** *Legyen adott egy* S *és valamely olyan* $S^{(1)} \neq \phi$, $S^{(2)} \neq \phi$ *halmaz, amelyekre* $S^{(1)} \cup S^{(2)} - S^{(1)} \cap S^{(2)} = S$. *Tetszőleges* S *tartójú* R *általános reláció dekomponálható valamely* $S^{(1)}$ *tartójú* $R^{(1)}$ *és* $S^{(2)}$ *tartójú* $R^{(2)}$ *általános relációra.*

Bizonyítás. A tétel bizonyításához az R relációt definiáló $p_\gamma : S \to A[\gamma \in G]S$-paraméterező (szuperjektív) leképezésekhez elegendő megadni olyan $p_\gamma^{(i)} : S^{(i)} \to A^{(i)}[i = 1, 2]\,S^{(i)}$-paraméterező leképezéseket, hogy p_γ a $p_\gamma^{(1)}$ és $p_\gamma^{(2)}[\gamma \in G]$ leképezések nem triviális diszjunkt kompatibilis kiterjesztése legyen. Ekkor ugyanis a

$$P_G^{(i)} \overset{\text{def}}{=} \{ p^{(i)}_{\gamma^{(i)}} : S^{(i)} \to A^{(i)}_{\gamma^{(i)}} \mid \gamma^{(i)} \in G^{(i)} \text{ és } \gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)} \in G^{(i)}$$
$$[\gamma_1^{(i)} \neq \gamma_2^{(i)} \overset{\text{def}}{\Rightarrow} p^{(i)}_{\gamma_1^{(i)}} \neq p^{(i)}_{\gamma_2^{(i)}}]\} \qquad [i = 1, 2]$$

leképezésrendszer által $S^{(1)}, S^{(2)}$-paraméterezett $\boldsymbol{A}^{(1)}_{S^{(1)}}(P^{(1)}_{G^{(1)}})$ és $\boldsymbol{A}^{(2)}_{S^{(2)}}(P^{(2)}_{G^{(2)}})$ halmazrendszerek által definiált $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ relációkra a kompozíció definíciója szerint $R^{(1)} \circ R^{(2)} = R$.

A keresett $p_\gamma^{(1)} : S^{(1)} \to A_\gamma^{(1)}$, $p_\gamma^{(2)} : S^{(2)} \to A_\gamma^{(2)}$ leképezésekhez legyen:

$$S^{(1)} = S' \cup H, \; S^{(2)} = (S - S') \cup H,$$
$$A_\gamma^{(1)} = A'_\gamma \cup C_\gamma, \; A_\gamma^{(2)} = (A_\gamma - A'_\gamma) \cup C_\gamma,$$

ahol

$$S', A'_\gamma, H[\phi = S' \subset S, \phi \neq A'_\gamma \subset A_\gamma, H \neq \phi, C_\gamma \neq \phi, S \cap H = \phi]$$

minden $\gamma \in G$ esetén adott halmazok.

Az ilymódon megválasztott halmazokra teljesülnek az

$$S^{(1)} \cup S^{(2)} - S^{(1)} \cap S^{(2)} = S,$$
$$A_\gamma^{(1)} \cup A_\gamma^{(2)} - A_\gamma^{(1)} \cap A_\gamma^{(2)} = A_\gamma, [\gamma \in G]$$

azonosságok. Tekintsük a p_γ leképezéseknek az S', illetve $S - S'$ halmazra való $p_\gamma \mid S'$, illetve $p_\gamma \mid (S - S')$ megszorítását, majd az így kapott leképezéseknek az $S' \cup H$, illetve $(S - S') \cup H$ halmazokra való olyan $p_\gamma^{(1)}$ illetve $p_\gamma^{(2)}$ egymással kompatibilis kiterjesztését, amelyekre tehát definíció szerint

$$p_\gamma^{(1)} : S' \cup H \to A_\gamma \cup C_\gamma, \; [\gamma \in G]$$

illetve

$$p_\gamma^{(2)} : (S - S') \cup H \to (A_\gamma - A'_\gamma) \cup C_\gamma, \; [\gamma \in G]$$

és tetszőleges $h \in H$ elemre $p_\gamma^{(1)}(h) = p_\gamma^{(2)}(h) \in C_\gamma$ $[\gamma \in G]$. A $p_\gamma : S \to A_\gamma$ leképezés az így definiált $p_\gamma^{(1)}$ és $p_\gamma^{(2)}$ leképezések diszjunkt kompatibilis kiterjesztése minden $\gamma \in G$ esetén, amivel a tétel állítását igazoltuk.

Következmény. Tetszőleges $n \geqslant 2$ tagú $R[n]$ reláció bármely adott $k[2 \leqslant k \leqslant n]$ természetes szám esetén dekomponálható valamely k tagú $R^{(1)}[k]$ és $n - k + 2$ tagú $R^{(2)}[n - k + 2]$ relációra. (Ez közvetlenül következik a tétel állításából, ha a H halmazt egyeleműnek választjuk.)

5.3. **Tétel.** *Bármely* $n \geqslant 2$ *tagú* $R[n]$ *reláció dekomponálható valamely olyan* $R^{(1)}[n_1], \ldots, R^{(r)}[n_r]$ *– rendre* $n_1, \ldots, n_r$ *tagú – relációkra, amelyekre* $2 \leqslant n_i \leqslant n$, *minden* $i = 1, \ldots, r$ *esetén, és*

$$\sum_{j=1}^{r} n_j = n + 2(r-1).$$

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el. $r=1$ esetén triviális az állítás, $r=2$ esetére pedig az 5.2. tétel következménye igazolja. Tegyük fel, hogy $r=r_0$-ra is igaz a tétel, vagyis léteznek olyan $R^{(1)}[n_1],\ldots,R^{(i)}[n_i],\ldots,R^{(r_0)}[r_0]$-rendre $n_1,\ldots,n_i,\ldots,n_{r_0}$ tagú – relációk, amelyekre

$$R[n] = R^{(1)}[n_1] \circ \ldots \circ R^{(i)}[n_i] \circ \ldots \circ R^{(r_0)}[n_{r_0}],$$

és teljesülnek a tétel feltételei, vagyis $2 \leqslant n_i \leqslant n$ minden $i=1,\ldots,r_0$ esetén, és

$$\sum_{j=1}^{r_0} n_j = n + 2(r_0-1).$$

Tetszőleges $R^{(i)}[n_i]$ komponenst kiválasztva, feltevésünk értelmében létezik olyan $R^{(i_1)}[n_{i_1}]$ és $R^{(i_2)}[n_{i_2}]$ reláció, hogy $R^{(i)}[n_i] = R^{(i_1)}[n_{i_1}] \circ R^{(i_2)}[n_{i_2}]$, ahol

$$2 \leqslant n_{i_1}, n_{i_2} \leqslant n_i \leqslant n \quad \text{és} \quad n_{i_1} + n_{i_2} = n_i + 2.$$

Eszerint az $R[n] = R^{(1)}[n_1] \circ \ldots \circ (R^{(i_1)}[n_{i_1}] \circ R^{(i_2)}[n_{i_2}]) \circ \ldots \circ R^{(r_0)}[n_{r_0}]$ dekompozícióra is teljesülnek a tétel feltételei, mert

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r_0} n_j + (n_{i_1} + n_{i_2}) = [n + 2(r_0-1) - n_i] + (n_i + 2) =$$

$$= n + 2[(r_0+1)-1] = \sum_{j=1}^{r_0+1} n_j.$$

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

6. **Következmények**

A bizonyított tételekből következik, hogy minden általános reláció, illetve minden deszuperponálható általános reláció az eredetinél nem nagyobb tagszámosságú általános relációkra dekomponálható, illetve deszuperponálható. Véges relációk esetén mind a dekompozíció, mind a deszuperpozíció határozottan csökkenti a tagszámot, az utóbbi fokozottabb mértékben. Ezen legutóbbi dolog természetesen szoros kapcsolatban van azzal, hogy a dekompozíció mindig, a deszuperpozíció pedig csak bizonyos feltételek teljesülésekor végezhető el. Mindezeknek a tényeknek komoly jelentőségük van rendszereknek általános relációkkal való, és rendszerek felbontásának – összekapcsolásának az általunk bevezetett kapcsolódási műveletek segítségével való modellezése szempontjából.

Mint másik fontos tényt megemlítjük, hogy a dolgozatban tárgyalt fogalmak és közölt eredmények a számítástechnika, illetve számítógéptudomány szempontjából jól használható formába fogalmazhatók át n tagú véges relációk esetén, ezeknek Boole–mátrixokkal való reprezentációja révén. Ez esetben a dekompozíció és deszuperpozíció ugyanis visszavezethető Boole–mátrixok alkalmas fraktorizációjára, amely jól algoritmizálható és programozható, illetve elektronikus úton jól megvalósítható. A terjedelem korlátai miatt cikkünkben elsősorban az elvi problémák felvetésére és tárgyalására koncentráltunk, és nem tértünk ki ezen utóbbi inkább "technikai" jellegű kérdésekre. Ezek részletes vizsgálata és leírása kimeríti egy újabb cikk cikk kereteit.

Végezetül a szerző köszönetét szeretné kifejezni Nagypál Botondnak egyes matematikai problémák felvetésében és megfogalmazásában nyújtott segítségéért, valamint Veress Gábornak a kézirat áttanulmányozásáért és ennek kapcsán adott hasznos tanácsaiért és kritikai megjegyzéseiért.

Jelölésjegyzék:

S :	tartóhalmaz (support)
p_γ :	paraméterező leképezés ($\gamma \in G$)
G:	halmazrendszert generáló halmaz
P_G :	a G halmaz által generált leképezésrendszer
$A_S(p_\gamma)$:	a p_γ leképezés által S-paraméterezett halmaz
$\boldsymbol{A}_S(P_G)$:	az $A_S(p_\gamma)$ S-paraméterezett halmazoknak a G halmaz által generált halmazrendszere
R	általános reláció
$R[n]$	n tagú (általános) reláció
$dom_s(R)$	az R általános reláció s paraméterhez tartozó értelmezési tartománya
$R/\widetilde{S}$	az S tartójú R általános relációnak az $\widetilde{S}'$ halmazra való megszorítása
$R^{(1)} \circ R^{(2)}$	az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ kompoziciója
$R^{(1)} * R^{(2)}$	az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ szuperpoziciója
$R^{(1)} \times R^{(2)}$	az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ direkt szorzata
$\overset{\text{def}}{=}$ ill. $\overset{\text{def}}{\Rightarrow}$	definíció szerint egyenlő, illetve "következik"
$\{x \mid F(x)[T(F)]\}$	a T tulajdonsággal rendelkező F feltételt kielégítő x objektumok halmaza

Irodalom

[1] Almásy, G., Veress, G., Farkas, Z. and Pallai, I., Strategies of Optimizing Complex Steady–state Decision Systems
IFAC Symposium on Digital Simulation of Continuous Process. Győr – Hungary, September 6–10, 1971. Preprints IA2 1–10.

[2] Ashby, W. R., "Constraint Analysis of many–dimensional Relations" General Systems 2 (1964) 99–105.

[3] Császár Á., Bevezetés az általános topológiába (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.)

[4] Fraissé, R., "A Hypothesis Concerning the Extension of Finite Relations and its Verification for Certain Special Cases"
(Symposium on the Theory of Models North–Holland Publ. Co., Amsterdam, 1965. 96–106.)

[5] Kuratowski, K. and Wostowski, A., Set Theory (Amsterdam–Warsawa, 1970).

[6] Maurer I. G. és Virág I., A relációelmélet elemei (Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1972).

[7] Mesarovič, M. D., Views on General Systems Theory (J. Wiley and Sonc, Inc., New–York, London, Sidney, 1964).

[8] Riguet, J., Relations binaires, fermentures, correspondances de Galois. Bulletin de la Société Mathematique de France 76 (1948) 1–4, 114–115.

[9] Salovaara, S., "On Set Theoretical Foundations of System Theory. A Study of the State Concept." Acta Polytechnica Scand. Mathematics and Computing Machinery Series 15, Helsinki, 1967.

[10] Wiener, N., "A simplification of the Logic of Relations" Proceeding of the Cambridge Phil. Soc. 17 (1914) 387–390.

Summary

Some of the author's mathematical results connected with modelling large–scale systems by means of generalized relations are summarized briefly. A generalization of the relation is given without using notions of the ordered n-tuple and Cartesian product, using only the notion of mapping. On the basis of these generalized relations a connectivity operation is defined and some of its algebraic properties are examined. This approach offers some advantages in handling and computation large–scale systems.

Резюме

В настоящей статье сжато изложены некоторые результаты автора, связанные с моделированием сложных систем с помощью понятием обощённых отношениях. Даётся обобщение понятия упорядоченной n-ки и декартового произведения, с применением только понятие отображения. Потом на базе этого понятия введутся операции связи, определённых на отнашениях, и исследуются их алгебратические свойства. Изложенный новый подход открывает новые перспективы в исследовании описанного выше круга вопросов, и реализации полученных результатов на ЦВМ.

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 14/1975

A SHEFFER FÜGGVÉNYEK FŐÁTLÓJÁRÓL

Demetrovics János

0. Bevezetés

A k-értékű logikák Sheffer függvényeivel kapcsolatban több jelentős dolgozat jelent meg [1, 3 – 11]. Ezekben a dolgozatokban a szerzők többek között a shefferség kritériumával, illetve a sheffer függvények számosságával foglalkoznak. Az [1, 5] dolgozatokban a szerzők "sok" Sheffer függvény "általános alakját" adják meg olyan kritérium segítségével, amelyet "nagyon egyszerűen" lehet ellenőrízni.

Ez a dolgozat a Sheffer függvények főátlóját tanulmányozza. Szükséges és elégséges feltételt ad a főátlóra vonatkozóan abból a szempontból, hogy egy adott függvény értéktáblázatát miként lehet kitölteni – adott főátló mellett – úgy, hogy Sheffer függvényt kapjunk. Továbbá, a Sheffer függvények számosságára is tesz néhány megállapítást.

1. A Sheffer függvények főátlója

Legyen $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $k \geq 2$. Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényt k-értékű függvénynek nevezzük, ha az $\underbrace{E_k \times E_k \times \ldots \times E_k}_{n\text{-szer}}$ halmazon van értelmezve és az értékeit is az E_k halmazon veszi fel. A k-értékű függvények halmazát k-értékű logikának nevezzük és P_k-val jelöljük.

Ismert módon határozzuk meg a szuperpoziciót a k-értékű logikán P_k [4, 10].

Sheffer függvénynek nevezzük azt a $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_k$ $(n \geq 2)$ függvényt, amely a szuperpozició segítségével generálja a P_k-t. A továbbiakban, az egyszerűség kedvéért csak a 2 változós Sheffer függvényeket fogjuk vizsgálni.

Azt mondjuk, hogy az $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in P_k$ függvény lényegesen függ az x_i változótól, ha létezik olyan $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, illetve $\tilde{\alpha}' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i', \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ érték kombináció pár, hogy $\alpha_i \neq \alpha_i'$ és $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\alpha}')$.

A szemléletesség kedvéért az $f(x, y) \in P_k$ függvényeket értéktáblázattal adjuk meg. Lásd 1., illetve 2. ábra.

Beérkezett: 1974. december 6.

$y \backslash x$	0	1	2	3	4
0	1		$+_3$	$+_4$	$\ast_5$ $+_5$
1	$+_1$	2	$\ast_3$		
2		$+_2$	0	$\ast_4$	
3	$\ast_1$			0	
4		$\ast_2$			0

1. ábra

x	0	1	2	3	4
$g'(x)$	1	2	0	0	0
$\sigma'(x)$	2	0	4	1	3
$\tau'(x)$	0	1	2	4	3

$\varphi'_{g'}(x, g'(x)) = \sigma'(x)$

$\varphi'_{g'}(x, \sigma'^3(x)) = \tau'(x)$

$y \backslash x$	0	1	2	3	4
0	1		4	1	3
1	2	2	2		
2		0	0		
3	0			0	
4		1		4	0

$\varphi'_{g'}(x, y)$

2. ábra

1.1. **Lemma.** *Ha az* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *függvény generálja az* A_k *alternáló csoportot, akkor az* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *Sheffer függvény* $(k \geqslant 4)$, [5].

1.2. **Lemma.** *Legyen* $\sigma(x)$ *egy teljes ciklus, azaz*

$$\begin{array}{c|ccccc} x & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} \\ \hline \sigma(x) & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{k-1} & \alpha_0 \end{array},$$

továbbá

$$\begin{array}{c|cccccc} x & \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-3} \\ \hline \tau_1(x) & \alpha_{i+1} & \alpha_i & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-3} \end{array},$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & \alpha_i & \alpha_j & \alpha_{j+1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-4} \\ \hline \tau_2(x) & \alpha_j & \alpha_{j+1} & \alpha_i & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-4} \end{array},$$

akkor a $\{\sigma(x),\ \tau_j(x)\}$ *függvényhalmazok generálják az* A_k*-t* $(1 \leqslant j \leqslant 2)$ [2].

Itt és a továbbiakban mindig, különböző indexű α-ák, különböző E_k-beli elemeket jelölnek. Vagyis, a $\tau_j(x)$, $\tau(x)$ és $\sigma(x)$ esetében a függvények minden E_k beli értéket egyszer vesznek fel.

1.1. **Tétel.** *Minden olyan* $g(x) \in P_k$ *függvényhez, amelyre* $g(\alpha) \neq \alpha$ $(\alpha \in E_k)$, *létezik olyan* $\varphi_g(x,y)$ *Sheffer függvény, amelyre igaz, hogy* $\varphi_g(x,x) = g(x)$.

Bizonyítás. Könnyű belátni, hogyha az $f(x,y)$ függvény megőríz legalább egy értéket – – $f(\alpha,\alpha) = \alpha$, $\alpha \in E_k$ – akkor az $f(x,y)$ nem lehet Sheffer függvény [1, 10].

Bizonyítsuk be, hogyha $g(x)$ nem őríz meg egyetlenegy értéket sem, akkor a 2-változós $\varphi_g(x,y)$ függvény értéktáblázatát ki lehet úgy tölteni, hogy a $\varphi_g(x,y)$ Sheffer függvény legyen. Vagyis meghatározzuk a $\varphi_g(x,y)$ függvény értéktáblázatát úgy, hogy csak a $(0,0),(1,1),\ldots(k-1,k-1)$ koordinátákat vesszük ismertnek, ahol a $g(x)$ függvény van meghatározva. A többi (i,j) koordinátát csak ezután fogjuk megadni a $g(x)$ függvény segítségével, ahol $i \neq j, 0 \leqslant i,j \leqslant k-1$.

Vegyük a $\varphi_g(x,g(x))$ ill. $\varphi_g(g(x),x)$ szuperpoziciót. Világos, hogy a $\varphi_g(x,g(x))$ függvény által kiválasztott k koordináta közül $\{(0,g(0)),(1,g(1)),\ldots,(k-1,g(k-1))\}$ egy sem esik egybe az (i,i), $0 \leqslant i \leqslant k-1$ helyek egyikével sem, mivel a $g(x)$ függvény egyetlenegy értéket sem őríz meg. Ezért ezeken a helyeken elő tudunk állítani tetszőleges $\sigma(x)$ függvényt úgy, hogy $\varphi_g(x,g(x)) = \sigma(x)$, ahol

$$\begin{array}{c|cccccc} x & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} \\ \hline \sigma(x) & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{k-1} & \alpha_0 \end{array}.$$

Példánkban a $\varphi'_{g'}(x,g'(x))$ függvény a $+_i$-vel jelölt helyeket határozza meg növekvő sorrendben, ahová a $\sigma'(x)$ függvényt építjük be, (Lásd 2. ábra.), ahol

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \sigma'(x) & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{array}.$$

$\sigma^j(x)$-el jelöljük a $\underbrace{\sigma(\sigma\ldots(\sigma(x))\ldots)}_{j\text{-szer}}$-et.

Vizsgáljuk meg a $\varphi_g(x, \sigma^j(x))$ szuperpoziciók által kiválasztott koordinátákat $(1 \leqslant j \leqslant k-1)$. Könnyű belátni, hogy létezik legalább egy olyan j, hogy a $\{(0, \sigma^j(0)), (1, \sigma^j(1)), \ldots, (k-1, \sigma^j(k-1))\}$ helyek közül legfeljebb csak egy hely van lerögzítve a $\varphi_g(x, y)$ függvény értéktáblázatában $(k \geqslant 3)$. Példánkban, pl. a $\varphi'_{g'}(x, \sigma'^3(x))$ függvény kiválasztja a $*_i$-vel jelölt koordinátákat. (Lásd 1. ábra.)

Ha minden hely üres, akkor ide építsük be a $\tau(x)$ függvényt, azaz $g(x, \sigma^j(x)) = \tau(x)$, ahol $\tau(x)$ tetszőleges olyan függvény, amely a $\sigma(x)$-el együtt generálja az A_k alternáló csoportot.

Ha csak 1 hely van lerögzítve, akkor is be tudjuk ide építeni a $\tau(x)$ függvényt, pl. a következőképpen.

Legyen $\varphi_g(i, \sigma^j(i)) = \alpha$. Különböztessünk meg 3 esetet:

a) $\alpha = i$. Ebben az esetben $\tau(x)$ pl. legyen a következő függvény:

x	i	$i+1$	$i+2$	α_0	α_1	$\ldots \alpha_{k-4}$
$\tau(x)$	i	$i+2$	$i+1$	α_0	α_1	$\ldots \alpha_{k-4}$

b) $|\alpha - i| = 1$. Ebben az esetben $\tau(x)$ pl. legyen a következő függvény:

x	i	α	α_0	α_1	$\ldots \alpha_{k-3}$
$\tau(x)$	α	i	α_0	α_1	$\ldots \alpha_{k-3}$

c) $\alpha \neq i$ és $|\alpha - i| \neq 1$. Ebben az esetben $\tau(x)$ pl. legyen a következő függvény:

x	i	α	$\alpha+1$	α_0	α_1	$\ldots \alpha_{k-4}$
$\tau(x)$	α	$\alpha+1$	i	α_0	α_1	$\ldots \alpha_{k-4}$

Az 1.2. Lemma biztosítja, hogy ezekben az esetekben is a $\sigma(x)$ és a $\tau(x)$ generálja az A_k-t. Igy tehát a tételt bebizonyítottuk, ha $k \geqslant 4$.

Példánkban $\varphi'_{g'}(4, \sigma'^3(4)) = \varphi'_{g'}(4, 0) = 3 = \tau(4)$. Ebben az esetben a b) eset igaz, vagyis

x	0	1	2	3	4
$\tau(x)$	0	1	2	4	3

Lásd 2. ábra.

$k = 2$ esetén a tétel igaz, mivel mindkét $\varphi_g(x, y)$ Sheffer függvény esetén, $\varphi_g(x, x) = \overline{x}$. Az $\overline{x}$ generálja az S_2-t. A $\varphi_g(x, \overline{x}) = f(x)$, ahol $f(x)$ konstans kell, hogy legyen.

$k = 3$ esetén különböztessünk meg 2 esetet.

a) Ha $g(x)$ felveszi mind a 3 értéket, akkor $g(x) = \sigma(x)$ teljes ciklus. A $\varphi_g(x, g(x)) = \tau(x)$, ahol $\sigma(x)$ és $\tau(x)$ generálja az S_3 szimmetrikus csoportot. Az 1.2. Lemmából következik az ilyen tulajdonságú $\tau(x)$ létezése. Legyen $\varphi_g(x, g^2(x)) = \mu(x)$, ahol

x	0	1	2
$\mu(x)$	1	1	2

.

Ismert tény [10], hogy a $\sigma(x)$, $\tau(x)$ és $\mu(x)$ generálják az összes egyváltozós 3 értékű függvényt, G_3-t amely a $\varphi_g(x, y)$-al együtt generálja a P_3-t [12].

b) Ha $g(x)$ csak 2 értéket vesz fel, akkor vagy a $g(x)$ vagy pedig a $g^2(x)$ függvény $\mu(x)$ tipusú. A $\varphi_g(x, y)$ táblázat többi helyeit pedig úgy töltsük ki, hogy $\varphi_g(x, g(x)) = \sigma(x)$, vagy a $\varphi(x, \sigma(x))$, vagy pedig a $\varphi(x, \sigma^2(x))$ legyen egyenlő $\tau(x)$-el, ahol a $\sigma(x)$ és a $\tau(x)$ generálják az S_3 szimmetrikus csoportot. Az $S_3, g(x), \varphi_g(x, y)$ függvényhalmaz pedig generálja a P_3-t [12].

c) Ha $g(x)$ – konstans, akkor a tétel triviális, mert létezik olyan $\alpha \in E_3$, hogy $g(\alpha) = \alpha$.

A tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A $\varphi_g(i, \sigma^j(i)) = \alpha$ esetén másképpen is el lehet járni. Az 1.2. lemmából következik, hogy a $\tau(x)$ minden értéket felvesz, ahol a $\tau(x)$ és a $\sigma(x)$ generálja az A_k-t. Legyen $\tau(t) = \alpha$, $0 \leqslant t \leqslant k-1$. Világos, hogy ilyen tulajdonságú $\tau(x)$-et is be tudunk építeni a $\varphi_g(x, y)$ értéktáblázatába, a $\{(0, \sigma^j(0)), (1, \sigma^j(1)), \dots, (k-1, \sigma^j(k-1))\}$ helyekre egészen más megoldás alapján. Vegyük a $\sigma^l(t) = i$ és $\sigma^m(t) = \sigma^j(i)$ függvényeket, $1 \leqslant l, m, j \leqslant k$. Könnyű belátni, hogy a $\varphi_g(\sigma^l(x), \sigma^m(x)) = \tau(x)$, ahol $\{(0, \sigma^j(0)), (1, \sigma^j(1)), \dots\dots, \dots (k-1, \sigma^j(k-1))\} = \{(\sigma^l(0), \sigma^m(0)), (\sigma^l(1), \sigma^m(1)), \dots, (\sigma^l(k-1), \sigma^m(k-1))\}$.

2. A Sheffer függvények számosságáról

Legyen $\sigma(x)$ teljes ciklus és a $\tau(x)$-el együtt generálják az A_k-t. Az 1.1. Tételből következik, hogyha létezik olyan i illetve j, $1 \leqslant i, j \leqslant k$, hogy $\varphi_\sigma(x, \sigma^i(x)) = \tau(x)$ illetve $\varphi_\sigma(\sigma^j(x), x) = \tau(x)$, akkor $\varphi_\sigma(x, y)$ Sheffer függvény.

2.1. **Lemma.** *Ha*

x	α_0	$\alpha_1 \dots \alpha_{k-2}$	α_{k-1}
$\sigma(x)$	α_1	$\alpha_2 \dots \alpha_{k-1}$	α_0

és

x	α_i	α_{i+1}	α_0	$\alpha_1 \dots \alpha_{k-4}$	α_{k-3}
$\tau(x)$	α_{i+1}	α_i	α_1	$\alpha_2 \dots \alpha_{k-3}$	α_0

, $k = 2m + 1$ *esetén, ill.*

x	α_i	α_{i+1}	α_0	α_1	$\alpha_2 \dots \alpha_{k-4}$	α_{k-3}
$\tau(x)$	α_{i+1}	α_i	α_0	α_2	$\alpha_3 \dots \alpha_{k-3}$	α_1

, $k = 2m$ *esetén,*

akkor a $\sigma(x)$, $\tau(x)$ *generálja az* A_k*-t.*

Bizonyítás. Könnyű belátni, hogy a

$$\tau''(x) = \sigma^{k-2}(x) \quad (k = 2m+1) \quad \text{ill.} \quad \tau''(x) = \sigma^{k-3}(x) \quad (k = 2m)$$

esetén a következőképpen néz ki:

$$\begin{array}{c|cccccccc} x & \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-4} & \alpha_{k-3} \\ \hline \tau''(x) & \alpha_{i+1} & \alpha_i & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-4} & \alpha_{k-3} \end{array}.$$

Az 1.2. Lemma szerint $\sigma(x)$ és $\tau''(x)$ generálja az A_k-t.
A Lemmát bebizonyítottuk.

Könnyű belátni, hogy egy $\sigma(x)$-hez $k(k-3)!$ különböző $\tau(x)$ felel meg, amely a 2.1. Lemmában lévő tulajdonsággal rendelkezik.

2.2. **Lemma.** *Ha*

$$\begin{array}{c|cccc} x & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-1} \\ \hline \sigma(x) & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_0 \end{array} \quad \text{és } (k-3, 3) = 1 \text{ esetén}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & \alpha & \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-4} \\ \hline \tau(x) & \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_0 \end{array}, \quad \text{ill. } (k-3, 3) = 3 \text{ esetén}$$

$$\begin{array}{c|cccccccccc} x & \alpha & \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{k-5} & \alpha_{k-4} \\ \hline \tau(x) & \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha & \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{k-4} & \alpha_1 \end{array},$$

akkor a $\sigma(x)$, $\tau(x)$, *generálja az* A_k*-t.*

Bizonyítás. A Lemma bizonyítása azonos a 2.1. Lemma bizonyításával.

Könnyű belátni, hogy egy $\sigma(x)$-hez $k(k-1)(k-4)!$ különböző $\tau(x)$ felel meg, amely a 2.2. Lemmában lévő tulajdonsággal rendelkezik.
A Lemmát bebizonyítottuk.

2.1. **Tétel.** *Legyen* $\sigma(x)$ *teljes ciklus és* $k \geqslant 5$. *Akkor a különböző* $\varphi_\sigma(x, y)$ *Sheffer függvények száma* $> (k-1)!\, k(2k-4)(k-4)!\, k^{k^2-2k+1}$.

Bizonyítás. A 2.1. Tétel bizonyítása közvetlenül adódik a 2.1. és a 2.2. Lemmából, valamint az 1.1. Tételhez fűzött megjegyzésből.

2.2. **Tétel.** *Minden* $g(x)$ *függvényhez* ($g(x) \in P_k$, $\forall\alpha, \alpha \in E_k : g(\alpha) \neq \alpha$) *létezik legalább* $k(k-4)!(2k-4)k^{k^2-3k+1}$ *különböző* $\varphi_g(x, y)$ *Sheffer függvény.*

Bizonyítás. A 2.2. Tétel bizonyítása közvetlenül adódik az 1.1. és 2.1. Tételből.

Megjegyzés. Legyen m az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geq 2)$ függvény ismert értékeinek a száma. Salomaa az [5] munkájában felvetette a következő kérdést: mi az a minimális m szám, amely mellett meg tudjuk állapítani, hogy az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Sheffer függvény, függetlenül attól, hogy milyen a többi $k^n - m$ hely. Salomaa [5] bebizonyította, hogy $m \geq k + 2$ és ha k primszám, akkor $m = k + 2$. Itt szeretném megjegyezni, hogy nem minden Sheffer függvény ilyen tulajdonságú, hanem csak léteznek ilyen tulajdonságú Sheffer függvények. Az 1.1. és 1.2. Tételekből következik, hogy minden k-ra $(k \geq 2)$ léteznek olyan Sheffer függvények, amelyekre $m \leq 2k$.

Irodalom

[1] R. L. Graham, On n-valued functionally complete truth functions, The Journal of Symbolic Logic, 32 (1967), 190–195.

[2] S. Piccard, Sur les bases du groupe symetrique, Paris, 1946.

[3] I. Rosenberg, La structure des functions de plusiers variables sur un ensemble fini, Comptes rendus Acad. Sci. 260 (1965).

[4] A. Salomaa, A theorem concerning the composition of functions of several variables ranging over a finite domain, The Journal of Symbolic Logic, 25 (1960).

[5] A. Salomaa, Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain I, II, Annales Universitates Turkuensis, 53 (1962), 1–9 and 63 (1963), 1–19.

[6] R. F. Wheeler, Complete connectives for the 3-valued propositional calculs. Preceendings of the London Mathematical Society, 16 (1966), 167–191.

[7] Р. А. Байрамов, Выведение критериев фундаменталности групп подстановок и полугрупп отоброжений из теоремы Розенберга, Кибернетика, vol. 3 (1972), pp. 71–76.

[8] Р. А. Байрамов, К вопросу о функциональной полноте в многозначной логике, Дискретный анализ, vol. 11 (1967), pp. 3–20.

[9] Е. Ю. Захарова, Критерий полноты систем функций из P_k, Проблемы кибернетики, vol. 18 (1967), pp. 5–10.

[10] В. Б. Кудрявцев, О покрытиях предполных классов к-значной логики, Дискретный анализ, vol. 17 (1970), pp. 32–44.

[11] А. И. Мальцев, Об одном усилении теорем Слупецкого и Яблонского, Алгебра и логика, vol. 6 (1967), 3.

[12] С. В. Яблонский, Функциональные построения в к-значной логике, Труды Математического института им.-на В. А. Стеклова, vol. 51 (1958), pp. 5–142.

Summary

The present paper studies the main diagonal of Sheffer functions $(\varphi(x, x, \ldots, x))$. It gives a necessary and sufficient condition for the main diagonal of a matrix to be extendible to a matrix a Sheffer function i.e. for all functions $g(x) \in P_k$ which has no fixed point i.e. $\forall \alpha, \alpha \in E_k : g(\alpha) \neq \alpha$ there exists a Sheffer–functions $\varphi_g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 2)$ such that $\varphi_g(x, x, \ldots, x) = g(x)$. As a conclusion some estimates are given for the number of Sheffer functions.

Р е з ю м е

В настоящей работе исследуется главная диагональ Шеффер функций и дается некоторая оценка для чисел Шеффер функций. Более того доказывается, что каждую функцию $g(x)$, несохраняющую никакое значение – т.е. $\forall \alpha \in E_k : g(\alpha) \neq \alpha$ – можно растпространять до $\varphi_g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 2)$ Шеффер функции, где $\varphi_g(x, x, \ldots, x) = g(x)$. Для этой цели, достаточно зафиксировать не больше чем $3k$ значений функций $\varphi_g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ т.е. $\varphi_g(\widetilde{\alpha}_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 3k$.

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 14/1975

AN ESTIMATION PROBLEM IN THE PROCESS OF SERVECING MACHINES

by Jacob Eshak Samaan

Introduction

Consider the repairman problem described in [3], pp. 462, in which a set of m machines are attended by one repairman. If a machine breaks down, it is served immediately, unless the repairman, is already at work on other machine, in which case it joins a waiting line. We say that the system in state i at time t if i machines are not working. Thus the state space $X = \{0, 1, \dots, m\}$ contains $m + 1$ elements. Let us assume that the intervals between the breakdown of machines are independent identically distributed random variables with exponential distribution with parameter λ, and the service time of a machine is exponentially distributed random variable with parameter μ.

Thus, the number of machines failed is a birth–and–death process with transition intensities:

$$\lambda_i = (m - i)\lambda \qquad 0 \leqslant i < m,$$

$$\mu_i = \mu \qquad 0 < i \leqslant m,$$

the other transition intensities being zero.

Billingsley [2], had investigated the estimation of the parameters λ and μ assuming that m is known.

In this paper we assume that λ and μ are known, and find estimators for the discrete parameter m. We discuss two methods for estimating m. The first method, we call it, the direct method, and the second is the Maximum Likelihood method, Numerical results based on simulation are also given to illustrate and Compare the two methods.

The direct method for estimating m:

Assuming that we observe the system for a period of time of length T, let:

$\nu(t)$ = denotes the number of failed machines at time t,

τ_i = denotes the first passage time to the state i,

$p_i(t)$ = denotes the probability that the system is in the state i at time t, assuming that the state m is an absorbing state.

Since, the number of failed machines is always less than or equal m, then we may consider the statistic.

$$\hat{m}_T = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \nu(t)$$

Beérkezett: 1974. december 10.

as an estimator of the true number m of machines.

To investigate the properties of this estimate, we first calculate the probability:

$$Q_m(t) = p(\hat{m}_t = m)$$

For this purpose we have by [6], that:

$$Q_m(t) = p(\hat{m}_t = m) = p(\tau_m \leqslant t) = p_m(t),$$

and it may be found by solving the sequence of forward equations assuming that m is an absorbing state.

This sequence of forward equations is:

$$(1) \quad \begin{cases} p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p_i'(t) = -(\lambda_i + \mu)p_i(t) + \lambda_{i-1}p_{i-1}(t) + \mu p_{i+1}(t), & 1 \leqslant i \leqslant m-2 \\ p_{m-1}'(t) = -(\lambda_{m-1} + \mu)p_{m-1}(t) \\ p_m'(t) = \lambda_{m-1}p_{m-1}(t) \end{cases}$$

which may be written in the form:

$$\frac{d}{dt} P(t) = AP(t),$$

where

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \mu & & & & & & \\ \lambda_0 & -(\lambda_1 + \mu) & \mu & & & & & \\ & \lambda_1 & -(\lambda_2 + \mu) & \mu & & & & \\ & & \cdots\cdots\cdots & & & & & \\ & & & \cdots\cdots\cdots & & & & \\ & & & & \lambda_{m-3} & -(\lambda_{m-2} + \mu) & \mu & \\ & & & & & \lambda_{m-2} & -(\lambda_{m-1} + \mu) & 0 \\ & & & & & & \lambda_{m-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (m+1) \text{ x} \\ \text{x } (m+1) \end{matrix}$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_m(t) \end{bmatrix}, \qquad (m+1) \text{ x } 1.$$

From (1), we get the general solution:

(2) $$p_m(t) = \sum_{i=1}^{m+1} C_i \alpha_{m+1}^{(i)} e^{w_i t}$$

where C_i, $i = 1, 2, \ldots, m+1$ are arbitrary constants, and the w_i 's are the eigenvalues of the matrix A, that is, the solution of the characteristic equation:

(3) $$|A - wI| = 0,$$

and $\alpha_j^{(i)}$ is the j th component of the eigenvector corresponding to the i th eigenvalue w_i.

Since we assume that all the machines are in working state at time $t = 0$, then:

$$P(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (m+1) \times 1.$$

Thus the arbitrary constants C_i's are determined by:

$$\sum_{i=1}^{m+1} C_i \alpha_1^{(i)} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} C_i \alpha_2^{(i)} = 0,$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} C_i \alpha_{m+1}^{(i)} = 0.$$

By a similar way as in [1] we can prove that, one of the roots of the characteristic equation (3) is $w_1 = 0$ and the other roots $w_2, w_3, \ldots, w_{m+1}$ are all negative and distinct.

Thus (2) may be written as:

(2') $$p_m(t) = C_1 \alpha_{m+1}^{(1)} + \sum_{i=2}^{m+1} C_i \alpha_{m+1}^{(i)} e^{w_i t}$$

where, the second term on the right hand side tends to zero as t tends to ∞.

It is well known that $p_m(t)$ is a proper distribution, since it represents the distribution of the first passage time to the state m of a finite Markov chain, which is irreducible and recurrent. Thus

(4) $\qquad p_m(\infty) = 1$

(See [3], pp. 392.) We can prove (4) also by simple calculations using the laplace transform of the system (1).

Note that, this fact is true for any $p_k(t)$, $k \leqslant m$, if we assume that k is an absorbing state.

Relation (4) means that $\hat{m}_t$ is a consistent estimator for m.

Now, from (2') and (4) we have

$$C_1 \alpha^{(1)}_{m+1} = 1,$$

i.e.

(5) $$Q_m(t) = p_m(t) = 1 + \sum_{i=2}^{m+1} C_i \alpha^{(i)}_{m+1} e^{w_i t}$$
$$= 1 + A(t)$$

where the constants C_i's are determined from the relations:

$$\sum_{i=1}^{m+1} C_i \alpha^{(i)}_1 = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} C_i \alpha^{(i)}_j = 0, \qquad\qquad 2 \leqslant j \leqslant m,$$

$$\sum_{i=2}^{m+1} C_i \alpha^{(i)}_{m+1} = -1.$$

Since $p_m(t)$ is the distribution function of the first passage time to the state m, then it is an increasing function in t, this fact is clear also from table (4) of the last section. This means that:

$$A(t) = \sum_{i=2}^{m+1} C_i \alpha^{(i)}_{m+1} e^{w_i t}$$

is an increasing function. In fact we have:

$$A(0) = -1, \qquad \text{and} \qquad A(\infty) = 0.$$

Thus, for given λ, μ, m and a small positive value ϵ, we can find a value $\hat{t}$ for which

$$p_m(\hat{t}) \geqslant 1 - \epsilon.$$

This means that, if we observe the system for a time interval of length $\hat{t}$, then the probability that we get the true value of the number of machines is, at least, equal to $(1 - \epsilon)$.

To determine $\hat{t}$, we have to find the minimum value of t for which

$$-\epsilon \leqslant A(t) \leqslant 0.$$

The distribution of $\hat{m}_t$:

To investigate the distribution of $\hat{m}_t$ we note that the event $\hat{m}_t \geqslant k$ occurs if and only if, the event $\tau_k \leqslant t$ also occurs, $k = 1, 2, \ldots, m$.

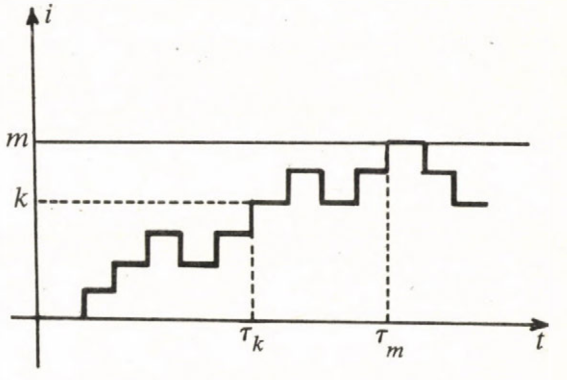


Figure 1.

Then:

$$p_k(t) = P(\tau_k \leqslant t) = P(\hat{m}_t \geqslant k),$$
$$p_{k+1}(t) = P(\tau_{k+1} \leqslant t) = P(\hat{m}_t \geqslant k+1).$$

So:

$$Q_k(t) = P(\hat{m}_t = k) = p_k(t) - p_{k+1}(t), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m-1$$

while:

$$Q_m(t) = p_m(t) = p(\hat{m}_t = m)$$

as discussed before.

The quantities $p_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$ are again obtained by solving the system (1), assuming that k is an absorbing state. Thus:

$$p_k(t) = \sum_{i=1}^{k+1} C_i \alpha_{k+1}^{(i)} e^{w_i t}.$$

By the same argument as for $p_m(t)$, we have:

$$p_k(t) = 1 + \sum_{i=2}^{k+1} C_i \alpha_{k+1}^{(i)} e^{w_i t}$$

when $t \to \infty$, each $Q_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$ tends to zero, while:

$$Q_m(t) \to 1.$$

Also, we have:

$$\alpha_m(t) = E(\hat{m}_t) = \sum_{i=1}^{m} p_i(t)$$

and when $t \to \infty$, each $p_i(t) \to 1$, i.e.

(6) $\lim_{t \to \infty} E(m_t) = m.$

So, $\hat{m}_t$ is an asymptotically unbiased estimate for m.

For the variance of $\hat{m}_t$ we have:

$$\operatorname{Var}(\hat{m}_t) = E(\hat{m}_t - \alpha_m(t))^2 = \sum_{i=0}^{m-1} (i - \alpha_m(t))^2 [p_i(t) - p_{i+1}(t)] + (m - \alpha_m(t))^2 p_m(t)$$

i.e.

(7) $\operatorname{Var}(\hat{m}_t) \to 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty.$

From (6) and (7), it follows again that the estimator m_t is consistent estimator for m (cf. [5], pp. 281).

Maximum likelihood estimate for m:

Assuming that we observe the breakdown times and repairtimes of the machines in a time interval of length T, let:

a_i = denotes the total number of transitions from the state i to the state $i + 1$,

b_i = denotes the total number of transitions from the state $i + 1$ to the state i,

γ_i = denotes the total time spent in the state i during the time of observation.

The log– likelihood function of this sample, by [2] pp. 50, is

(8) $$L_T(m) = \sum_{i=0}^{\hat{m}_T - 1} [a_i \ln((m - i)\lambda) - \gamma_i (m - i)\lambda] + \sum_{i=0}^{\hat{m}_T - 1} (b_i \ln \mu - \gamma_{i+1}\mu).$$

The maximum likelihood estimate for m is that value $\bar{m}$ which maximizes the function $L_T(m)$.

Thus we try to find an integer $\bar{m} > 0$ such that:

$$\Delta L_T(\bar{m}) < 0 < \Delta L_T(\bar{m} - 1)$$

where $\Delta L_T(m)$ is the first difference of the function $L_T(m)$ given by:

(9) $$\Delta L_T(m) = L_T(m + 1) - L_T(m) = \sum_{i=0}^{\hat{m}_T - 1} [a_i \ln \frac{m + 1 - i}{m - i} - \gamma_i \lambda].$$

In other words, the maximum likelihood estimator for m is the first value $\bar{m}$ which satisfies:

$$\Delta L_T(\bar{m}) < 0,$$

i.e.

$$\sum_{i=0}^{\hat{m}_T - 1} [a_i \ln \frac{\bar{m} + 1 - i}{\bar{m} - i} - \gamma_i \lambda] < 0.$$

Since

$$\frac{a_i}{\gamma_i} \to \lambda_i = (m - i)\lambda \quad \text{as} \quad T \to \infty,$$

then, for large values of T we have:

$$\Delta L_T(k) \simeq \sum_{i=0}^{\hat{m}_T - 1} \gamma_i \lambda [(m - i) \ln \frac{k + 1 - i}{k - i} - 1], \tag{9'}$$

Now, it is quite easy to see that the right hand side takes its maximum at $k = m$ which is the true value of the number of machines, and that this maximum is unique.

To see this, one can show by elementary calculations that, for any $0 \leqslant i \leqslant k$,

$$(m - i) \ln \frac{k - i + 1}{k - i} - 1 \begin{cases} > 0 & \text{for} \quad k < m \\ < 0 & \text{for} \quad k \geqslant m. \end{cases}$$

From (9) and (9') we see that for $k \geqslant \hat{m}_T$ we have:

$$\begin{aligned} D_T^k &= \frac{1}{T} \Delta L_T(k) - \sum_{i=1}^{\hat{m}_T - 1} \frac{\lambda \gamma_i}{T} [(m - i) \ln \frac{k + 1 - i}{k - i} - 1] \\ &= \sum_{i=0}^{\hat{m}_T - 1} \frac{\gamma_i}{T} \left(\frac{a_i}{\gamma_i} - (m - i)\lambda \right) \ln \frac{k + 1 - i}{k - i} \\ &\to 0, \quad \text{as} \quad T \to \infty, \end{aligned}$$

because $\frac{a_i}{\gamma_i} \to (m - i)\lambda$ and $\frac{\gamma_i}{T} \to p_i^*$ as $T \to \infty$ where p_i^*'s are the stationary probabilities of finding the system in the state i.

This proves the consistency of the maximum likelihood estimation.

Numerical examples and illustrations:

With some modifications of the algorithm given in [4] to simulate the system M/M/m, we can get a simulating algorithm for our present case. Hundred samples are simulated and estimates for the number m of machines are founded. The following tables summarize some of these results for different values of the parameters.

Let $\hat{N}^*$ denotes the number of times we get the true value of the number of machines out from the 100 samples using the direct method, and $\bar{N}^*$ represents the same but using the maximum likelihood method of estimation.

In the tables we present both the values $\hat{N}^*$ and $\bar{N}^*$ in addition to the probability $Q_m(t)$ calculated from formula (5).

Table (1) gives the results for fixed λ, μ and m and different values of t.

T	$\bar{N}^*$	$\hat{N}^*$	$Q_m(t)$
20	47	38	0.41
50	77	76	0.77
100	91	94	0.95
200	98	100	0.99
500	100	100	1.00

$\lambda = 0.3, \ \mu = 1.0, \ m = 5$

Table 1.

Table 2. shows the effect of increasing the value of $\rho = \lambda/\mu$ on the results.

λ	μ	ρ	$\bar{N}^*$	$\hat{N}^*$	$Q_m(t)$
0.1	1.0	0.1	54	5	0.05
0.2	1.0	0.2	78	56	0.57
0.3	1.0	0.3	93	97	0.95
0.5	1.0	0.5	98	100	0.99
0.7	1.0	0.7	97	100	1.00
0.1	1.0	0.1	54	5	0.05
0.1	0.7	1/7	70	12	0.15
0.1	0.5	0.2	67	29	0.33
0.1	0.3	1/3	70	66	0.68
0.1	0.1	1.0	52	99	0.98

$T = 100,\ M = 5$

Table 2.

From this table, we see that, by increasing ρ we get better results. But, in fact, the accuracy of the estimators does not effect noticeably by increasing the value of m. To show this, we present in table 3., the values of $\bar{N}^*$, $\hat{N}^*$ and $Q_m(t)$ for the same values of λ, μ and T, but for $m = 8$, and also we give in table 4. the values of $\bar{N}^*$ and $\hat{N}^*$ for fixed λ, μ and T and increasing m.

λ	μ	ρ	$\bar{N}^*$	$\hat{N}^*$	$Q_m(t)$
0.1	1.0	0.1	42	0	0.01
0.2	1.0	0.2	77	38	0.40
0.3	1.0	0.3	86	97	0.92
0.5	1.0	0.5	95	100	0.99
0.7	1.0	0.7	99	100	1.00
0.1	1.0	0.1	42	0	0.01
0.1	0.7	1/7	50	8	0.06
0.1	0.5	0.2	57	24	0.21
0.1	0.3	1/3	71	56	0.61
0.1	0.1	1.0	59	100	0.97

$T = 100,\ M = 8$

Table 3.

m	$\bar{N}^*$	$\hat{N}^*$
3	96	100
5	90	92
7	91	98
10	81	89
15	90	89

$\lambda = 0.3,\ \mu = 1.0,\ T = 100$

Table 4.

From tables 2. and 3. we note that, although, the accuracy of the maximum likelihood estimator increases with increasing ρ, but when λ and μ have small values, ($\lambda = 0.1$, $\mu = 0.1$), the accuracy of the method is not so good as in the preceding cases with smaller values of ρ. This may be because of the decreasing of the number of transition for such small values of the parameters, which effect the accuracy of the method.

Table 5 shows that, when we increase λ and μ by the same ratio keeping ρ fixed, both the maximum likelihood method and the direct method give better results.

λ	μ	$\bar{N}*$	$\hat{N}*$	$Q_m(t)$
0.1	1.0	54	5	0.05
0.2	2.0	68	14	0.11
0.3	3.0	78	15	0.16
0.5	5.0	94	19	0.25
0.7	7.0	97	29	0.34
1.0	10.0	100	49	0.45
2.0	20.0	100	74	0.70
3.0	30.0	100	81	0.83
5.0	50.0	100	97	0.95
10.0	100.0	100	100	0.99

$\rho = 0.1$, $M = 5$, $T = 100$

Table 5.

To explain the effect of increasing λ and μ, by the same ratio keeping ρ fixed, on the accuracy of the direct method, we replace λ and μ by $R\lambda$ and $R\mu$ respectively. Thus we can easily prove that the eigenvalues are replaced by $Rw_1, Rw_2, \ldots, Rw_{m+1}$ while the components of the corresponding eigenvectors and also the values of the constants $C_1, C_2, \ldots, C_{m+1}$ do not effect. (See the proof in the appendix.)

This means that the probability $Q_m(t)$, in this case, takes the form

(10) $$Q_m(t) = 1 + \sum_{i=2}^{m+1} C_i \alpha_{m+1}^{(i)} e^{Rw_i t}$$

and we have

$$Q_m(t) \to 1 \quad \text{as} \quad R \to \infty .$$

In fact, formula (10) shows that, increasing λ and μ by a ratio R is equivalent to increasing T by the same ratio R. We can insure this fact numerically, by comparing tables 1. and 6.

λ	μ	$\overline{N}*$	$\hat{N}*$	$Q_m(t)$
0.06	0.2	47	38	0.41
0.15	0.5	77	76	0.77
0.3	1.0	91	94	0.95
0.6	2.0	98	100	0.99
1.5	5.0	100	100	1.00

$\rho = 0.3, \ M = 5, \ T = 100$

Table 6.

Acknowledgements

I would like to thank prof. Dr. J. Tomkó for the choice of the problem and for his helpful criticism and suggestions during the preperation of this paper.

Appendix

In this appendix we prove that if we increase the arrival rate λ and the service rate μ by the same ratio R, keeping ρ fixed, then the eigenvalues of the matrix A increases by the same ratio R while the components of the corresponding eigenvectors and the constants $C_1, \ldots, C_{m+1}$ do not change.

To see this, let us write the characteristic equation in the form:

$$|A - wI| = wf_m(w) = 0$$

where generally:

$$f_i(w) = \begin{bmatrix} \lambda_0 + w & -\mu & & & & \\ -\lambda_0 & \lambda_1 + \mu + w & -\mu & & & \\ & -\lambda_1 & \lambda_2 + \mu + w & -\mu & & \\ & & \cdots\cdots\cdots & & & \\ & & & \cdots\cdots\cdots & & \\ & & & -\lambda_{i-3} & \lambda_{i-2} + \mu + w & -\mu \\ & & & & -\lambda_{i-2} & \lambda_{i-1} + \mu + w \end{bmatrix}.$$

Then it is easily seen that, the sequence $f_0(w), \ldots, f_m(w)$ of functions satisfies the recurrence relation:

$$(11) \qquad f_i(w) = (\lambda_{i-1} + \mu + w)f_{i-1}(w) - \lambda_{i-2}\mu f_{i-2}(w), \qquad 2 \leqslant i \leqslant m$$

with

$$f_0(w) = 1,$$
$$f_1(w) = w + \lambda_0, \quad \text{and}$$
$$f_{m+1}(w) = wf_m(w).$$

We know that one of the eigenvalues of the matrix A is equal to zero and the other m eigenvalues are the solution of the equation:

$$f_m(w) = 0.$$

Let us write

$$(12) \qquad f_i(w) = a_i w^i + a_{i-1} w^{i-1} + \ldots + a_1 w + a_0 = 0$$

where the coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_i$ are functions of λ and μ.

Now we prove the following:

Lemma. *The coefficient* a_j *of* w^j *in* $f_i(w)$ *is a homogeneous function of order* $(i-j)$ *in* λ *and* μ.

$$j = 0, 1, \ldots, i, \qquad i = 0, i, 2, \ldots, m.$$

Proof. It is clear that the lemma is true for:

$$f_1(w) = w + \lambda_0, \quad \text{and}$$
$$f_2(w) = w^2 + (\lambda_0 + \lambda_1 + \mu)w + \lambda_0\lambda_1.$$

Let: $a_j^{(i)}$ denote the coefficient of w^j in $f_i(w)$. Thus using the recurrence relation (11) we have:

$$(13) \quad \begin{cases} a_j^{(i)} = (\lambda_{i-1} + \mu)a_j^{(i-1)} + a_{j-1}^{(i-1)} - \lambda_{i-2}\,\mu a_j^{(i-2)}, & 1 \leqslant j \leqslant i \quad \text{and} \\ a_0^{(i)} = f_i(0) = \lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}. \end{cases}$$

Thus by mathematical induction and using (13) it is possible to see that the lemma is true.

Now, replacing λ and μ by $R\lambda$ and $R\mu$ respectively, equation (12) for $i = m$ takes the form

$$(14) \qquad a_m w^m + a_{m-1}Rw^{m-1} + a_{m-2}R^2w^{m-2} + \ldots + a_1R^{m-1}w + a_0R^m = 0.$$

Thus, if the roots of (12) are $w_1, w_2, \ldots, w_m$ then the roots of (14) are Rw_1 $Rw_1, Rw_2, \ldots, Rw_m$ as required.

Also, since the components of the eigenvector corresponding to any eigenvalue w^* are determined by:

$$\alpha_1^* = 1$$
$$\alpha_2^* = \frac{\lambda_0 + w^*}{\mu}\alpha_1^*,$$
$$\alpha_k^* = \frac{\lambda_{k-2} + \mu + w^*}{\mu}\alpha_{k-1}^* - \frac{\lambda_{k-3}}{\mu}\alpha_{k-2}^*, \qquad 3 \leqslant k \leqslant m,$$
$$\alpha_{m+1}^* = \frac{\lambda_{m-1}}{w^*}\alpha_m^*.$$

Then, it is clear that the values of these components and consequentely the values of the constants $C_1, C_2, \ldots, C_{m+1}$. are not effected by the replacement of λ and μ by $R\lambda$ and $R\mu$.

References

[1] Ahmed F. Mashour, "A first passage problem for the M/M/m queueing system" MTA Számítástechnikai Kutató Intézete, Közlemények 12 (1974), 53–68.

[2] Billingsiey, P., "A statistical inference for Markov processes" university of Chicago press, Chicago (1961).

[3] Feller W., "An introduction to probability theory and its applications" 3rd Ed. Wiley, (New York, 1968).

[4] Jacob E. Samaan, "On the maximum likelihood estimation of the number of servers for the M/M/m queueing system" MTA Számítástechnikai Kutató Intézete, Közlemények 12 (1974), 29–53.

[5] Rao C. R., "Linear statistical inference and its application" (Wiley, New York, 1965).

[6] Saaty T. L., "Some stochastic processes with absorbing barriers" J. R. statist. soc., ser. B 23 (1961), 319–334.

Р е з ю м е

Рассматриваются два метода оценивания числа машин выстанавливаемых одним рабочим. Длительность работы и время ремонта предполагаются иметь экспоненциальное распределение с параметрами λ и μ соответственно.

Определяется распределение максимума в интервале $(0, \tau)$ числа ломанных машин.

Приведены численные примеры полученные стохастическим моделированием для сравнения рассматриваемых двух методов.