

55807

1765

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA

KÖZLEMÉNYEK



1972 DECEMBER

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA

KÖZLEMÉNYEK

9.

Budapest, 1972. december

Szerkesztőbizottság:

ARATÓ MÁTYÁS (felelős szerkesztő)
DÁVID GÁBOR, FISCHER JÁNOS, GEHÉR ISTVÁN,
GERGELY JÓZSEF, GERTLER JÁNOS, MOLNÁR IMRE,
PRÉKOPA ANDRÁS, TANKÓ JÓZSEF

Felelős kiadó:

Dr. VAMOS TIBOR

igazgató

Technikai szerkesztő:

MESZLÉNYI MÁRIA

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete

A "MEGENGEDETT IRÁNYOK" ELNEVEZÉSŰ NEMLINEÁRIS PROGRAMOZÁSI MÓDSZER KITERJESZTÉSE KVÁZIKONKÁV FELTÉTELI FÜGGVÉNYEK ESETÉRE

Prékopa András

1. BEVEZETÉS

Ebben a dolgozatban a Zoutendijk-féle ún. megengedett irányok módszerét (1. [4], 74. old, P2 eljárás) terjesztjük ki arra az esetre, amikor a feltételi függvények nem feltétlenül konkávak, csupán kvázikonkávak. Kiterjesztésen elsősorban azt értjük, hogy az eredeti eljárás konvergenciáját az általánosabb, kvázikonkáv feltételi függvények esetére bizonyítjuk. Egyéb, főleg analitikus jellegű feltételeink is eltérnek az eredietektől és a feltételi függvények kvázikonkávitásával együtt azoknál általánosabb esetet jelentenek.

A dolgozatban foglalt eredményeket korábban már közöltük [2], de rövidebb változatban és egy speciális sztohasztikus programozási feladattal ötvöztten.

Nem törekszünk arra, hogy gondosan összehasonlítsuk a dolgozatunkban említett lemmákat, segédteteleket és gondolatokat azok előzményeihez, részben azért, mert a felhasznált gondolatok jelentős részének folklór jellege miatt teljesen reális kép nem adható. Megjegyezzük azonban, hogy sokat merítettünk Z o u t e n d i j k [4] munkájából.

A következő nem-lineáris programozási feladat megoldásával foglalkozunk:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} G_i(\underline{x}) &\geq p_i, & i = 1, \dots, m, \\ \underline{a}'_i \underline{x} &\geq b_i, & i = 1, \dots, M, \\ \min f(\underline{x}). \end{aligned}$$

Amennyiben az \underline{x} vektorra vonatkozólag nem-negativitási kikötés van, ezt beépítve képzeljük a lineáris egyenlőtlenségek közé. Az (1.1) feladattal kapcsolatban a következő feltételeket vezetjük be:

F1. A $G_1(\underline{x}), \dots, G_m(\underline{x})$ függvények egy K nyílt konvex halmaz \bar{K} lezártján vannak értelmezve, ahol mindegyik $G_i(\underline{x})$ minden változója folytonosan deriválható.

F2. Ha $\underline{x} \in \bar{K}$ és az \underline{x} vektorra teljesülnek az (1.1) feladat (összesen $m + M$ számú) feltételei, akkor \underline{x} a \bar{K} halmaz belső pontja, vagyis $\underline{x} \in K$. Az (1.1) feladat feltételei által meghatározott halmazt jelölje D . Nyilvánvaló, hogy D zárt halmaz. A 3. szakasztól kezdve azt is feltételezzük, hogy az (1.1) második sorában álló lineáris feltételek által meghatározott konvex poliéder korlátos.

F3. Az $f(\underline{x})$ függvény legyen értelmezve egy olyan H nyílt konvex halmazon, mely tartalmazza a D halmazt és feltesszük, hogy $f(\underline{x})$ valamennyi változója szerinti parciális derivált létezik és folytonos H -ban.

F4. Minden $\underline{x} \in D$ esetén, melyre

$$(1.2) \quad G_i(\underline{x}) = p_i, \quad i \in I_0 \subset \{1, \dots, m\},$$

található olyan $\underline{y} \in D$, hogy (a gradiens mindig sorvektort fog jelenteni):

$$(1.3) \quad \nabla G_i(\underline{x})(\underline{y} - \underline{x}) > 0, \quad i \in I_0.$$

Ez a feltétel a konvex programozásban használatos Slater-féle feltételhez analóg.

F5. A $G_1(\underline{x}), \dots, G_m(\underline{x})$ függvények kvázikonkávak \bar{K} -ban, $f(\underline{x})$ pedig konvex a saját értelmezési tartományában, H -ban.

Az F1. feltétellel kapcsolatban felmerülhet a kérdés, hogy miért értelmezzük a $G_1(\underline{x}), \dots, G_m(\underline{x})$ függvényeket egy nyílt halmaz lezártján. A nyíltságra a deriválhatóság értelmezhetősége érdekében van szükség, ennek lezárására pedig azért, mert különben nem vagyunk benne biztosak, hogy az (1.1) feladat feltételei *egyedül* meghatározzák-e a D halmazt és nem csupán oly módon történik ez, hogy részben az $m + M$ számú feltétel, részben pedig az $\underline{x} \in K$ feltétel együtt határolják körül a megengedett megoldások halmazát. Így ez nem fordulhat elő. A baj abból származhatnék, hogy a D halmaz zártága kérdéses volna, márpedig ez a további megfontolások szempontjából elengedhetetlen.

Az F4. feltétellel kapcsolatban megjegyezzük, hogy mivel minden \underline{y} megengedett megoldásra

$$(1.4) \quad G_i(\underline{y}) \geq p_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

ezért, ha \underline{x} teljesíti az (1.2) feltételt, akkor a $0 < t \leq 1$ esetben

$$(1.5) \quad G_i(\underline{y}) = G_i(\underline{x}) + \nabla G_i(\underline{x} + \vartheta t(\underline{y} - \underline{x}))t(\underline{y} - \underline{x}) \geq p_i, \quad i \in I_0, \quad 0 > \vartheta > 1,$$

ahonnan azt kapjuk, hogy

$$(1.6) \quad \nabla G_i(\underline{x} + \vartheta t(\underline{y} - \underline{x}))(\underline{y} - \underline{x}) \geq 0, \quad i \in I_0.$$

Elvégezve a $t \rightarrow 0$ határátmenetet, a

$$(1.7) \quad \nabla G_i(\underline{x})(\underline{y} - \underline{x}) \geq 0, \quad i \in I_0$$

relációkhoz jutunk. Itt felhasználtuk azt, hogy az \underline{x} és \underline{y} pontokat összekötő szakasz is D -hez tartozik, ám ezt biztosítja az F5. feltétel. Az (1.7) egyenlőtlenség tehát minden $\underline{y} \in D$ -re teljesül, ennek egy élesebb változatát kívánja meg az F4. feltétel.

Az F1.-F5. feltételeket az egész dolgozatban további külön említés nélkül érvényeseknek tekintjük.

2. ELŐZETES LEMMÁK

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}
 I_C &= \{1, \dots, m\} \\
 I_C(\underline{x}) &= \{i: i \in I_C, G_i(\underline{x}) = p_i\}, \quad \underline{x} \in D, \\
 I_L &= \{1, \dots, M\} \\
 I_L(\underline{x}) &= \{i: i \in I_L, \underline{a}'_i \underline{x} = b_i\}, \quad \underline{x} \in D.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

1. lemma. Legyen $\underline{x} \in D$ és legyenek $v_i, i \in I_C(\underline{x}), u_i, i \in I_L(\underline{x})$ olyan nem-negatív számok, melyekre teljesül az alábbi egyenlőség:

$$\sum_{i \in I_C(\underline{x})} v_i \nabla G_i(\underline{x}) + \sum_{i \in I_L(\underline{x})} u_i \underline{a}'_i = \underline{0}' .
 \tag{2.2}$$

Ekkor $v_i = 0, i \in I_C(\underline{x})$.

Bizonyítás. Legyen $\underline{y} \in D$ olyan vektor, mely az adott \underline{x} esetén eleget tesz az F4. feltételnek. Szorozzuk meg (2.2) mindkét oldalát az $\underline{y} - \underline{x}$ vektorral skalárisan. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i \in I_C(\underline{x})} v_i \nabla G_i(\underline{x})(\underline{y} - \underline{x}) + \sum_{i \in I_L(\underline{x})} u_i \underline{a}'_i(\underline{y} - \underline{x}) \geq \\
 &\geq \sum_{i \in I_C(\underline{x})} v_i \nabla G_i(\underline{x})(\underline{y} - \underline{x}) \geq 0 .
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Mint hogy itt az alsó sorban az összeg nem-negatív összeadandókat tartalmaz, azt kapjuk, hogy

$$v_i \nabla G_i(\underline{x})(\underline{y} - \underline{x}) = 0, \quad i \in I_C(\underline{x}) .
 \tag{2.4}$$

Az (1.3) egyenlőtlenségre való tekintettel innen azonnal adódik a lemma állítása.

A Kuhn-Tucker tételnél használt regularitási feltétel (constraint qualification) abban áll, hogy adott $\underline{x} \in D$ és minden az alábbi egyenlőtlenségeknek eleget tevő \underline{h} vektor esetén:

$$\begin{aligned}
 \nabla G_i(\underline{x}) \underline{h} &\geq 0, \quad i \in I_C(\underline{x}), \\
 \underline{a}'_i \underline{h} &\geq 0, \quad i \in I_L(\underline{x}),
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

található olyan $\psi(t), 0 \leq t \leq T, T > 0$ differenciálható görbeív, mely teljes egészében D -ben van, tehát

$$(2.5) \quad \begin{aligned} G_i(\underline{\psi}(t)) &\geq p_i, & i \in I_C, \\ a'_i \underline{\psi}(t) &\geq b_i, & i \in I_L, \end{aligned}$$

továbbá $t = 0$ pontbeli érintőjének iránya megegyezik \underline{h} -val, vagyis

$$(2.6) \quad \left. \frac{d}{dt} \underline{\psi}(t) \right|_{t=0} = \underline{h}.$$

Itt az $I_C(\underline{x})$, $I_L(\underline{x})$ indexhalmazok közül az egyik, vagy akár mind a kettő is lehet üres. Ha \underline{x} D -nek belső pontja, akkor elég kis t értékekre

$$(2.7) \quad \underline{\psi}(t) = \underline{x} + t\underline{h}$$

benne van D -ben. Ez a $\underline{\psi}(t)$ triviálisan teljesíti a (2.6) feltételt.

2. lemma. Minden $\underline{x} \in D$ esetén teljesül a Kuhn-Tucker-féle regularitási feltétel.

Bizonyítás. Elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, amikor $I_C(\underline{x})$ és $I_L(\underline{x})$ közül legalább az egyik nem üres. Legyen \underline{h} a (2.4) feltételeknek eleget tevő vektor és tekintsük az alábbi differenciálható görbét

$$(2.8) \quad \underline{\psi}(t) = \underline{x} + t[\underline{h} + t(\underline{y} - \underline{x})], \quad t \geq 0,$$

ahol $\underline{y} \in D$ eleget tesz az F4. feltétel kívánalmainak az $I_0 = I_C(\underline{x})$ esetben, $I_C(\underline{x})$ -ről pedig tegyük fel, hogy nem üres. Legyen $i \in I_C(\underline{x})$. A (2.4) egyenlőtlenségek közül a felsők, továbbá az (1.3) egyenlőtlenségek maguk után vonják $t > 0$ esetén a

$$(2.9) \quad \nabla G_i(\underline{x})t[\underline{h} + t(\underline{y} - \underline{x})] > 0$$

egyenlőtlenség fennállását. Ekkor azonban elég kis t értékekre

$$(2.10) \quad G_i(\underline{x} + t[\underline{h} + t(\underline{y} - \underline{x})]) - G(\underline{x}) = \nabla G_i(\underline{x} + \vartheta t[\underline{h} + t(\underline{y} - \underline{x})])t[\underline{h} + t(\underline{y} - \underline{x})] > 0,$$

ahol $0 < \vartheta < 1$. Van tehát olyan pozitív T , hogy

$$(2.11) \quad G_i(\underline{\psi}(t)) \geq p_i, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i \in I_C(\underline{x}).$$

Ami a lineáris feltételeket illeti, ezek a következő módon intézhetők el. Ha $i \in I_L(\underline{x})$, melyről most feltesszük, hogy nem üres, akkor minden $t \geq 0$ esetén

$$(2.12) \quad a'_i \underline{\psi}(t) = a'_i \underline{x} + t a'_i \underline{h} + t^2 a'_i (\underline{y} - \underline{x}) \geq a'_i \underline{x} = b_i.$$

Esszerint elég kis t értékek esetén $\underline{\psi}(t) \in D$ (a határozott egyenlőtlenséggel teljesülő feltételeket szintén nem zavarja meg a $\underline{\psi}(t)$ elég kis t esetén). Végül megjegyezzük, hogy mostani $\underline{\psi}(t)$ függvényünk triviálisan teljesíti a (2.6) feltételt, ezzel tehát a lemmát bebizonyítottuk.

Egy $\underline{x}^* \in D$ és minden $\underline{x} \in D$ esetén

$$f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}^*) .$$

A *Kuhn-Tucker tétel* szükséges feltételt ad arra vonatkozólag, hogy egy nem-lineáris programozási problémának optimális megoldása legyen egy adott \underline{x}^* vektor. Az 1. szakaszban felsorolt feltételek és az ebben a szakaszban bizonyított (az 1. szakasz feltételeiből következtetett) 2. lemmára támaszkodva kimondhatjuk, hogy (a bizonyítást illetően 1. a [3] könyvet) ha \underline{x}^* optimális megoldása az (1.1) feladatnak, akkor található olyan

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \lambda_1^* \geq 0, \dots, \lambda_m^* \geq 0, \\ \mu_1^* \geq 0, \dots, \mu_M^* \geq 0 \end{aligned}$$

számok, hogy

$$\begin{aligned} -\nabla f(\underline{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla G_i(\underline{x}^*) + \sum_{i=1}^M \mu_i^* \underline{a}'_i &= \underline{0}' , \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i^* [G_i(\underline{x}^*) - p_i] + \sum_{i=1}^M \mu_i^* [\underline{a}'_i \underline{x}^* - b_i] &= 0 . \end{aligned}$$

A (2.14) egyenlőségekkel kifejezett Kuhn-Tucker tétel akkor is érvényes, ha az F5. feltételtől eltekintünk, de megkívánjuk az ebben a szakaszban említett regularitási feltétel (constraint qualification) teljesülését. Mi a regularitási feltétel teljesülésének bizonyításához felhasználtuk D konvexitását, ami viszont az F5. feltétel következménye.

Következő lemmánk bizonyos Arrow és Enthoven-féle eredmények [1] adaptációját tartalmazza a mi esetünkre.

3. lemma. *Ha az $\underline{x}^* \in D$ pontban teljesülnek a (2.14) feltételek, ahol a λ_i^* , μ_i^* számok eleget tesznek a (2.13) követelményeknek, akkor \underline{x}^* optimális megoldása az (1.1) feladatnak.*

Bizonyítás. Legyen $\underline{x} \in D$ tetszőleges és szorozzuk meg skalárisan (2.14) felső sorát az $\underline{x} - \underline{x}^*$ vektorral. Azt kapjuk, hogy

$$(2.15) \quad \begin{aligned} 0 &= -\nabla f(\underline{x}^*)[\underline{x} - \underline{x}^*] + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla G_i(\underline{x}^*)[\underline{x} - \underline{x}^*] + \sum_{i=1}^M \mu_i^* \underline{a}'_i[\underline{x} - \underline{x}^*] = \\ &= -\nabla f(\underline{x}^*)[\underline{x} - \underline{x}^*] + \sum_{i \in I_C(\underline{x}^*)} \lambda_i^* \nabla G_i(\underline{x}^*)[\underline{x} - \underline{x}^*] + \\ &+ \sum_{i \in I_L(\underline{x}^*)} \mu_i^* \underline{a}'_i[\underline{x} - \underline{x}^*] \geq -\nabla f(\underline{x}^*)[\underline{x} - \underline{x}^*] . \end{aligned}$$

Mínthogy $f(\underline{x})$ konvex a $H \supset D$ halmazon, következik, hogy

$$(2.16) \quad f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*) \geq \nabla f(\underline{x}^*)[\underline{x} - \underline{x}^*] .$$

Ám a (2.15) relációkból azt kaptuk, hogy

$$(2.17) \quad \nabla f(\underline{x}^*)[\underline{x} - \underline{x}^*] \geq 0.$$

Ezt figyelembe véve, (2.16)-ból azonnal adódik az $\underline{x}^* \in D$ vektor optimalitását jelentő

$$(2.18) \quad f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}^*), \quad \underline{x} \in D$$

egyenlőtlenség. Ezzel a 3. lemmát bebizonyítottuk.

3. ALGORITMUS AZ (1.1) FELADAT MEGOLDÁSÁRA.

A feladat megoldására vonatkozó algoritmusunk formálisan megegyezik a Zoutendijk által bevezetett algoritmussal (mint említettük, a P2 algoritmusról van szó [4] 74. oldalán), azonban mi ezt általánosabb függvénykategóriára alkalmazzuk, mégpedig a kvázikonkáv feltételi függvények esetére konkáv függvények helyett. Másrészt a függvényekkel kapcsolatos regularitási feltételeink is sajátosak, eltérnek a korábban használtaktól, azoknál gyengébbek.

Az eljárás egy végtelen algoritmus, mely minden egyes lépésben egy lineáris programozási feladat megoldását kívánja meg és az optimumértékek így kapott sorozata konvergál az (1.1) feladat optimum-értékéhez. Az optimális megoldásoktól nem kívánunk meg konvergenciát.

Kiindulunk egy tetszőleges $\underline{x}_i \in D$ vektorból. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk az $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ vektorokat, melyek a D halmaz elemei. Megadjuk \underline{x}_{k+1} konstruálásának a módját. Tekintjük a következő lineáris programozási feladatot:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} G_i(\underline{x}_k) + \nabla G_i(\underline{x}_k)[\underline{x} - \underline{x}_k] + \vartheta_i y &\geq p_i, & i \in I_C, \\ a'_i \underline{x} &\geq b_i, & i \in I_L; \\ \nabla f(\underline{x}_k)[\underline{x} - \underline{x}_k] &\geq y, \\ \min y, \end{aligned}$$

ahol a ϑ_i -k a későbbiekben is előjövő, de az egész eljárás alatt rögzített, viszont tetszőleges pozitív számok. A (3.1) feladatban a változó vektor $n + 1$ -dimenziós, ha \underline{x} n -dimenziós, ugyanis egy új változó, az y került be a feladatba. Minthogy feltétel szerint az (1.1) feladat lineáris feltételei korlátos konvex poliédert (konvex poliópot) határoznak meg, ezért tetszőlegesen rögzített y esetén a (3.1) feladat feltételeinek eleget tevő \underline{x} -halmaz korlátos. Emiatt y , a célfüggvény alulról korlátos és így a feladatnak van véges optimuma és optimális megoldása. Megjegyezzük, hogy a (3.1) feladat feltételeinek eleget tevő \underline{x}, y halmaz nem üres, mert pl. tartalmazza az $\underline{x} = \underline{x}_k, y = 0$ vektort.

A (3.1) lineáris programozási feladatot megoldjuk. A megoldás után megállapítható, hogy $\underline{x}_k, y = 0$ optimális megoldása-e (3.1)-nek, vagy nem. Az előbbi esetben az (1.1) feladat meg-

oldására irányuló egész eljárás véget ér, később megmondjuk, miért. Ha $\underline{x}_k, y = 0$ nem optimális megoldása a (3.1) feladatnak, akkor tekintjük az alábbi félegyenest

$$(3.2) \quad \underline{x}_k + \lambda(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k), \quad \lambda \geq 0,$$

ahol \underline{x}_k^* optimális megoldása a (3.1) feladatnak és minimalizáljuk az $f(\underline{x})$ függvényt ennek a félegyenestnek és az (1.1) feladat megengedett megoldásai D halmazának a közös részén, mely egy véges zárt intervallum. Másszóval, ha μ_k az a legnagyobb λ , melyre

$$(3.3) \quad \begin{aligned} G(\underline{x}_k + \lambda(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)) &\geq p_i, & i \in I_C, \\ \underline{a}'_i(\underline{x}_k + \lambda(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)) &\geq b_i, & i \in I_L, \end{aligned}$$

akkor meghatározzuk azt a λ_k számot, melyre

$$(3.4) \quad f(\underline{x}_k + \lambda(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)) \geq f(\underline{x}_k + \lambda_k(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)), \quad \text{ha } 0 \leq \lambda \leq \mu_k$$

és ezek után az \underline{x}_{k+1} vektort az alábbi egyenlőséggel értelmezzük

$$(3.5) \quad \underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \lambda_k(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k).$$

Ha $\underline{x} = \underline{x}_k, y = 0$ optimális megoldása (3.1)-nek, akkor \underline{x}_k optimális megoldása az (1.1) feladatnak, ezt mindjárt bebizonyítjuk. Ha viszont ez egyetlen k esetén sem következik be, akkor az eljárás végtelen és az 5. szakaszban bebizonyítjuk majd, hogy

$$(3.6) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(\underline{x}_k) = \min_{\underline{x} \in D} f(\underline{x}).$$

1. Tétel. A (3.1) feladat optimuma (y_{opt}) egyenlő 0-val akkor és csak akkor, ha \underline{x}_k optimális megoldása az (1.1) feladatnak.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $y_{\text{opt}} = 0$. Ekkor minden, a (3.1) feladat feltételeinek eleget tevő \underline{x}, y vektor esetén $y \geq 0$. Tekintsük azokat a $G_i(\underline{x}) \geq p_i$ feltételeket, melyekre egyenlőség teljesül $\underline{x} = \underline{x}_k$ esetén. Ezek indexei alkotják az $I_C(\underline{x}_k)$ indexhalmazt. Az összesen $n + 1$ -változós alábbi homogén lineáris egyenlőtlenségrendszer:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \nabla G_i(\underline{x}_k) \underline{z} + \vartheta_i y &\geq 0, & i \in I_C(\underline{x}_k) \\ \underline{a}'_i \underline{z} &\geq 0, & i \in I_L(\underline{x}_k) \\ -\nabla f(\underline{x}_k) \underline{z} + y &\geq 0 \end{aligned}$$

maga után vonja a következő lineáris egyenlőtlenséget:

$$(3.8) \quad y \geq 0.$$

Ha ugyanis volna olyan \underline{z}, y melyre (3.7) teljesül és $y < 0$, akkor a (3.7) rendszer homogenitása miatt ilyen a $t\underline{z}, ty$ vektor is minden pozitív t esetén. Legyen t olyan kis pozitív

szám, hogy a (3.1) feladatban az $\underline{x} = \underline{x}_k$, $y = 0$ esetben inaktív feltételek (az $i \notin I_C(\underline{x}_k)$, $i \notin I_L(\underline{x}_k)$ indexű feltételek, vagyis amelyek határozott egyenlőtlenséggel teljesülnek) teljesült feltételek maradjanak az

$$(3.9) \quad \begin{pmatrix} \underline{x}_k \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \underline{z} \\ y \end{pmatrix}$$

vektor esetén is. Mivel a (3.9) vektor elég kis $t > 0$ esetén kielégíti mindegyik feltételt (3.1)-ben és utolsó komponense negatív, nem lehet $y_{\text{opt}} = 0$. Vagyis (3.8) valóban következménye a (3.7) lineáris egyenlőtlenségrendszernek. Farkas tétele szerint (3.8) bal oldalának gradiense nem negatív súlyokkal vett lineáris kombinációja (3.7) bal oldalai gradienseinek. Találhatók tehát olyan

$$(3.10) \quad \begin{aligned} v_i &\geq 0, & i \in I_C(\underline{x}_k) \\ u_i &\geq 0, & i \in I_L(\underline{x}_k) \\ w &\geq 0 \end{aligned}$$

számok, hogy

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \sum_{i \in I_C(\underline{x}_k)} v_i \nabla G_i(\underline{x}_k) + \sum_{i \in I_C(\underline{x}_k)} u_i \underline{a}'_i - w \nabla f(\underline{x}_k) &= \underline{0}', \\ \sum_{i \in I_C(\underline{x}_k)} v_i \vartheta_i + w &= 1. \end{aligned}$$

Itt $w = 0$ nem lehetséges, mert akkor a 2. szakasz 1. lemmájából az következne, hogy

$$v_i = 0, \quad i \in I_C(\underline{x}_k),$$

ami ellentmond (3.11) második sorának. A (3.11) alatti első egyenlőséget elosztva a $w > 0$ számmal, azt kapjuk, hogy teljesülnek a (2.14), úgynevezett Kuhn-Tucker-feltételek az $\underline{x}^* = \underline{x}_k$ vektorral és az alábbi számokkal

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \lambda_i^* &= \frac{v_i}{w}, & i \in I_C(\underline{x}_k), \\ \lambda_i^* &= 0, & i \in I_C - I_C(\underline{x}_k), \\ \mu_i^* &= \frac{u_i}{w}, & i \in I_L(\underline{x}_k), \\ \mu_i^* &= 0, & i \in I_L - I_L(\underline{x}_k). \end{aligned}$$

Ilyenformán, az előző szakasz 3. lemmája szerint \underline{x}_k optimális megoldása az (1.1) feladatnak.

Tegyük most fel, hogy \underline{x}_k optimális megoldása az (1.1) feladatnak. Ekkor teljesülnek a (2.14), Kuhn-Tucker-feltételek az \underline{x}_k vektorral. Ebből következik, hogy fennállnak a (3.11) egyenlőségek nem-negatív u_i, v_i, w számokkal. Itt $v_i = 0$, ha $G_i(\underline{x}_k) > p_i$ és $u_i = 0$, ha $a'_i \underline{x}_k > b_i$. Eszerint a (3.8) lineáris egyenlőtlenség következménye a (3.7) lineáris egyenlőtlenségeknek. Ebből viszont az következik, hogy $y_{\text{opt}} \geq 0$ a (3.1) lineáris programozási feladatban. Minthogy azonban $\underline{x} = \underline{x}_k, y = 0$ megengedett megoldása a (3.1) feladatnak, azért $y_{\text{opt}} = 0$. Ezzel a tételt teljesen bebizonyítottuk.

4. SEGÉDTÉTELEK AZ ELJÁRÁS KONVERGENCIÁJÁNAK BIZONYÍTÁSÁHOZ

Ebben a szakaszban két segédtételt bizonyítunk be. Jelöléseink függetlenek a többi szakaszban alkalmazott jelölésektől. Legyen K korlátos zárt halmaz R^n -ben, $F(\underline{x})$ pedig legyen értelmezve egy a K halmazt tartalmazó nyílt halmazon. Feltesszük, hogy $F(\underline{x})$ folytonos gradienssel bír az értelmezési tartományában.

1. segédtétel. Legyen $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots$ egy K -beli vektorokból alkotott sorozat és $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots$ egy korlátos vektorsorozat. Legyen továbbá $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ egy pozitív számokból alkotott sorozat és tegyük fel, hogy

$$(4.1) \quad \underline{y}_k + \gamma \underline{t}_k \in K, \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots;$$

és létezik olyan $\epsilon > 0$, hogy

$$(4.2) \quad \nabla F(\underline{y}_k) \underline{t}_k \geq \epsilon, \quad k = 1, 2, \dots$$

Legyen $0 < \epsilon_1 < \epsilon$, továbbá tegyük még fel, hogy

$$(4.3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0.$$

Azt állítjuk, hogy legfeljebb véges sok k index kivételével fennáll a

$$(4.4) \quad \nabla F(\underline{y}_k + \gamma \underline{t}_k) \underline{t}_k \geq \epsilon_1, \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_k$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Ellentétben a (4.4) relációval, tételezzük fel, hogy végtelen sok k index esetén

$$(4.5) \quad \nabla F(\underline{y}_k + \gamma'_k \underline{t}_k) \underline{t}_k < \epsilon_1,$$

alkalmas $0 < \gamma'_k \leq \gamma_k$ számok esetén. (4.2) és (4.5) kombinációjából azt kapjuk, hogy végtelen sok k index esetén

$$(4.6) \quad [\nabla F(\underline{y}_k) - \nabla F(\underline{y}_k + \gamma'_k \underline{t}_k)] \underline{t}_k \geq \epsilon - \epsilon_1 > 0.$$

Ez azonban ellentmondás, mert a \underline{t}_k sorozat korlátos, $\gamma'_k \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$, tehát $\nabla F(x)$ egyenletes folytonossága miatt (4.6) bal oldalának 0-hoz kell tartania, ha $k \rightarrow \infty$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

2. segéd-tétel. Legyen $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ egy K -beli elemekből alkotott sorozat, $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots$ egy korlátos vektorsorozat, $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ egy pozitív számokból alkotott sorozat, ahol

$$(4.7) \quad \underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \lambda_k \underline{s}_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Tegyük fel, hogy $\underline{x}_k + \lambda \underline{s}_k \in K$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$, továbbá

$$(4.8) \quad F(\underline{x}_{k+1}) = F(\underline{x}_k + \lambda_k \underline{s}_k) \geq F(\underline{x}_k + \lambda \underline{s}_k), \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Legyenek $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots$; $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots$; $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ az előbbi sorozatok azonos indexű elemeinek kiválogatása révén nyert részsorozatai. Legyen $\epsilon > 0$ és tegyük fel, hogy

$$(4.9) \quad \nabla F(\underline{y}_i) \underline{t}_i \geq \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots$$

Azt állítjuk, hogy

$$(4.10) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i < \infty.$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy rögzített i indexet és legyen k az az index, melyre $\underline{x}_k = \underline{y}_i$. A (4.8) egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$(4.11) \quad \begin{aligned} F(\underline{x}_{k+1}) - F(\underline{x}_1) &= \sum_{j=1}^k [F(\underline{x}_{j+1}) - F(\underline{x}_j)] = \sum_{j=1}^k [F(\underline{x}_j + \lambda_j \underline{s}_j) - F(\underline{x}_j)] \geq \\ &\geq \sum_{r=1}^i [F(\underline{y}_r + \gamma_r \underline{t}_r) - F(\underline{y}_r)] \geq \sum_{r=1}^i [F(\underline{y}_r + \gamma'_r \underline{t}_r) - F(\underline{y}_r)], \end{aligned}$$

ahol γ'_r a legnagyobb olyan γ , amely eleget tesz az alábbi feltételeknek

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \gamma &\leq \gamma_r \\ \nabla F(\underline{y}_r + \gamma \underline{t}_r) \underline{t}_r &\geq \epsilon_1 \end{aligned}$$

és $0 < \epsilon_1 < \epsilon$. Folytatva a (4.11) relációkat azt kapjuk, hogy

$$(4.13) \quad \sum_{r=1}^i [F(\underline{y}_r + \gamma'_r \underline{t}_r) - F(\underline{y}_r)] = \sum_{r=1}^i \nabla F(\underline{y}_r + h_r \gamma'_r \underline{t}_r) \gamma'_r \underline{t}_r \geq \epsilon_1 \sum_{r=1}^i \gamma'_r,$$

ahol $0 < h_r < 1$. Ebből következik, hogy

$$(4.14) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \gamma'_r < \infty.$$

Bebizonyítjuk, hogy legfeljebb véges sok index kivételével fennáll a $\gamma_r = \gamma'_r$ egyenlőség. Valóban, ha egy r indexre $\gamma'_r < \gamma_r$, akkor

$$(4.15) \quad \nabla F(\underline{y}_r + \gamma'_r \underline{t}_r) = \epsilon_1$$

és ezt (4.9)-cel kombinálva a

$$(4.16) \quad [\nabla F(\underline{y}_r) - \nabla F(\underline{y}_r + \gamma'_r \underline{t}_r)] \underline{t}_r \geq \epsilon - \epsilon_1 > 0$$

relációt kapjuk. Ez végtelen sok r esetén nem állhat fenn, mert $\nabla F(\underline{x})$ egyenletesen folytonos a K halmazon. Ezzel a 2. segédtevével is bebizonyítottuk.

5. AZ ELJÁRÁS KONVERGENCIÁJÁNAK BIZONYÍTÁSA

Tekintjük az az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ sorozatot, melyet a 3. szakaszban ismertetett eljárás során nyerünk. Ha ez a sorozat véges, akkor az 1. tétel szerint eljutottunk az (1.1) feladat egy optimális megoldásához. Tehát csak a végtelen sorozat esetével kell foglalkoznunk. Bizonyítandó a (3.6) reláció, míg maguknak az \underline{x}_k vektoroknak a konvergenciájával nem törődünk.

Minthogy az (1.1) feladat megengedett megoldásainak a halmaza korlátos, ezért korlátos az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ sorozat is. Kiválasztható tehát ebből egy konvergens részsorozat, melynek elemeit $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots$ jelölik. Legyen

$$(5.1) \quad \underline{y}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{y}_k.$$

Tekintsük az alábbi, \underline{x}_k helyett az \underline{y}^* vektorra felírt (3.1) típusú feladatot:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} G_i(\underline{y}^*) + \nabla G_i(\underline{y}^*)[\underline{x} - \underline{y}^*] + \vartheta_i \underline{y} &\geq p_i, & i \in I_C, \\ \underline{a}'_i \underline{x} &\geq b_i, & i \in I_L, \\ \nabla f(\underline{y}^*)[\underline{x} - \underline{y}^*] &\leq \underline{y}, \\ \min \underline{y}. \end{aligned}$$

Ha itt $y_{\text{opt}} = 0$, akkor \underline{y}^* optimális megoldása az (1.1) feladatnak. Indirekt bizonyítással élve, tegyük fel, hogy $y_{\text{opt}} = -\delta < 0$. Ez a (3.6) reláció ellenkezője, hogy ti. van ilyen $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots$ részsorozat.

Az (5.2) feladat felső sorában álló feltételek bal oldalán a gradiensek nem zéró vektorok, mert $\vartheta_i > 0$ minden $i \in I_C$ esetén. Ebből következik, hogy az \underline{y}^* vektornak van olyan $N(\underline{y}^*)$ környezete, hogy minden $\underline{z} \in N(\underline{y}^*) \cap D$ esetén a megfelelő $y_{\text{opt}} \leq -\delta/2$.

Legyen $\underline{s}_k = \underline{x}_k^* - \underline{x}_k$ (l. az eljárás leírását a 3. szakaszban) és legyenek $\underline{t}_k, \gamma_k$ az $\underline{s}_k, \lambda_k$ sorozatok részsorozatai, melyek ugyanolyan indexekhez tartoznak, mint \underline{y}_k elemei az

\underline{x}_k sorozatban. Ha k elég nagy, akkor $\underline{y}_k \in N(\underline{y}^*)$, ezért (5.2) utolsó feltételének a figyelembe vételével (\underline{y}^* helyett \underline{y}_k írandó) azt kapjuk, hogy

$$(5.3) \quad -\nabla f(\underline{y}_k) \underline{t}_k \geq \frac{\delta}{2}.$$

Az előző szakaszban bizonyított 2. segédteétel szerint ebből az adódik, hogy

$$(5.4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k < \infty,$$

és ez maga után vonja a

$$(5.5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0$$

relációt. Legyen $0 < \delta_1 < \frac{\delta}{2}$. Az előző szakasz 1. segédteétéle szerint legfeljebb véges sok k kivételével fennáll a

$$(5.6) \quad -\nabla f(\underline{y}_k + \gamma \underline{t}_k) \geq \delta_1, \quad \text{ha } 0 \leq \gamma \leq \gamma_k$$

egyenlőtlenség. Eszerint az f függvény az \underline{y}_k pontból a \underline{t}_k irányba haladva csökken az

$$(5.7) \quad \underline{y}_k + \gamma \underline{t}_k, \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_k$$

szakasz minden pontjában, még a $\gamma = \gamma_k$ esetnek megfelelő végpontban is. Ilyenformán, akkor, amikor az \underline{y}_k pontból elindulva, az f függvényt minimalizáljuk a \underline{t}_k irányba eső félegyenesnek D -vel vett közös részén, akkor előbb állítja meg D a \underline{t}_k irányban való előrehaladást, mintsem elérnének f egy minimumhelyéhez. Tekintsük az (1.1) feladat feltételeit az

$$(5.8) \quad \underline{y}_k + \lambda \underline{t}_k, \quad \lambda \geq 0$$

félegyenes mentén. Az (5.8) vektor addig van benne a D halmazban, amíg

$$(5.9) \quad \begin{aligned} G_i(\underline{y}_k + \lambda \underline{t}_k) &\geq p_i, & i \in I_C, \\ a'_i(\underline{y}_k + \lambda \underline{t}_k) &\geq b_i, & i \in I_L, \end{aligned}$$

A második sorban álló feltételek mind megengedik a $\lambda = 1$ értéket is, mert ekkor

$$(5.10) \quad \underline{y}_k + \underline{t}_k = \underline{y}_k^*,$$

ha \underline{y}_k^* jelöli az \underline{x}_k^* megfelelő részsorozatát, tehát (5.9) első sorában áll az a feltétel, ill. állnak azok a feltételek, amelyek a \underline{t}_k irányban való előrehaladását megakasztják. Minthogy ez végtelen sok k esetén van így és csak véges sok a feltételeink száma, van olyan $j \in I_C$, melyre ez végtelen sokszor teljesül. Feltehetjük, hogy az \underline{y}_k sorozat már olyan, hogy ez legfeljebb véges sok k kivételével teljesül. Ilyenformán azt kapjuk, hogy

$$(5.11) \quad G_j(\underline{y}_k + \gamma_k \underline{t}_k) = p_j, \quad k \geq k_0.$$

Mint hogy $\underline{y}_k \in D$, fennáll a

$$(5.12) \quad G_j(\underline{y}_k) \geq p_j$$

egyenlőtlenség is. Az (5.11) egyenlőségből azonnal adódik, hogy

$$(5.13) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} G_j(\underline{y}_k) = p_j.$$

Esszerint elég nagy k esetén fennáll a

$$(5.14) \quad P_j - G_j(\underline{y}_k) \geq -\epsilon,$$

egyenlőtlenség, ahol ϵ előre megadott pozitív szám. Ha k olyan nagy, hogy $\underline{y}_k \in N(\underline{y}^*)$, akkor az is igaz, hogy \underline{y}_k vektorra felírt (3.1) feladat esetén

$$(5.15) \quad -y_{\text{opt}} \geq \frac{\delta}{2}.$$

Az (5.14), (5.15) egyenlőtlenségek, továbbá az \underline{y}_k vektorral felírt (3.1) feladatból nyert

$$(5.16) \quad G_j(\underline{y}_k) + \nabla G_j(\underline{y}_k)[\underline{y}_k^* - \underline{y}_k] + \vartheta_j y_{\text{opt}} \geq p_j$$

egyenlőtlenség együtt maguk után vonják az alábbi:

$$(5.17) \quad \nabla G_j(\underline{y}_k) \underline{t}_k \geq \vartheta_j \frac{\delta}{2} - \epsilon = \epsilon_1.$$

Az $\epsilon > 0$ számot megválaszthatjuk olyan kicsinek, hogy $\epsilon_1 > 0$. Mivel a γ_k sorozat 0-hoz tart, az előző szakasz 1. segédtetele szerint minden $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$ esetén

$$(5.18) \quad \nabla G_j(\underline{y}_k + \gamma \underline{t}_k) \underline{t}_k \geq \epsilon_2, \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_k.$$

Ez ellentmond az (5.11), (5.12) relációknak, mert azokból következik, hogy az \underline{y}_k és $\underline{y}_k + \gamma_k \underline{t}_k$ közötti szakasz belsejében valahol (5.18) bal oldala 0-val egyenlő. Ezzel tehát bebizonyítottuk, hogy fennáll a

2. Tétel. Ha a 3. szakaszban konstruált \underline{x}_k sorozat véges, utolsó eleme \underline{x}_N , akkor

$$(5.19) \quad f(\underline{x}_N) = \min_{\underline{x} \in D} f(\underline{x}).$$

Ha az \underline{x}_k sorozat végtelen, akkor

$$(5.20) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(\underline{x}_k) = \min_{\underline{x} \in D} f(\underline{x}).$$

I r o d a l o m

- [1] K.J. Arrow and A.C. Enthoven, Quasi-concave programming, *Econometrica* 29 (1961), 779-800.
- [2] A. Prékopa, On probabilistic constrained programming, *Proc. Princeton Symp. on Math. Prog.*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970, 113-138.
- [3] Prékopa András, *Lineáris Programozás I, Az Operációkutatás Matematikai Módszerei* (szerkesztő Prékopa A.), Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968.
- [4] G. Zoutendijk, *Methods of Feasible Directions*, Elsevier, Amsterdam, 1960.

Beérkezett: 1972 május 15.

S u m m a r y

Extension of the Method of Feasible Directions to the Case of Quasi-concave Constraint Functions

The convergence of the method of feasible directions is proved for the case of quasi-concave constraint functions. The results are already published in English [2] but in a specialized form, amalgamated with a special stochastic programming problem, while the present paper considers the problem more generally.

Р е з ю м е

Распространение метода нелинейного программирования под названием "допустимые направления" на случай квазивогнутых ограничений

В этой работе доказывается сходимость метода допустимых направлений в случае, когда ограничения являются квазивогнутыми функциями. Наши результаты были опубликованы на английском языке в статье [2], правда, в тесной связи с одной специфической задачей стохастического программирования, тогда как настоящая работа рассматривает проблему в общем случае.

NEM TELJESEN MEGHATÁROZOTT BOOLE-FÜGGVÉNYEK SZINTÉZISE $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\text{NAND}\}$ ILL. $\{\text{NOR}\}$ BÁZISBAN

Pásztorné Varga Katalin

KIFEJEZÉSEK ÉS JELÖLÉSEK

A Φ -Boole-függvény nem teljesen meghatározott Boole-függvény [3]. $f = f_1 \vee \gamma g$ a Φ -Boole-függvény szokásos felírása. f_1, g, f_0, γ teljesen meghatározott Boole-függvények:

$f_1 = 1$, ha $f = 1$; $g = 1$, ha f nem meghatározott; $f_0 = 1$, ha $f = 0$; γ tetszőleges Boole-függvény; $f = f_1$ az f felső határa; $f = f_1 \vee g$ az f felső határa; f^* az f duálisa. Az általános Boole-függvény M db (teljesen meghatározott vagy Φ -) Boole-függvény egy

(f_1, f_2, \dots, f_M) sorozata. $\prod_{i=1}^k f_i = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_k$; $\bigvee_{i=1}^k f_i = f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_k$.

A DNF diszjunktív normálforma, az RDNF redukált diszjunktív normálforma, az IDNF irredundáns diszjunktív normálforma, a KNF konjunktív normálforma és az IKNF irredundáns normálforma.

EGY SZINTÉZIS MÓDSZER

Az $\{\wedge, \vee, \neg\}$ bázisbeli zárójeles formulát eredményező szintézisre Akers az [1]-ben érdekes módszert ad. Ez a módszer közvetlenül az un. logikailag passzív (monoton növekvő) Φ -Boole-függvények $\{\wedge, \vee, \neg\}$ bázisbeli szintézisére alkalmas. Természetesen tetszőleges Φ -Boole-függvény átalakítható logikailag passzív Φ -Boole-függvénné, ha a függvény DNF-jában szereplő negált változók helyett új változókat vezetünk be.

Akers az így átalakított – megnövelt váltószámú – Φ -Boole-függvényekre dolgozta ki az algoritmust, amely feltételezi, hogy az ilyen f függvény az f_1 és f_0 függvények igazságtáblájával adott.

Az algoritmus első részében az igazságtáblák méreteinek csökkentése érdekében olyan új f_1 és f_0 -t alakít ki, amelyek az eredeti f Φ -Boole-függvénnyel kompatibilis Φ -Boole-függvényt határoznak meg.

Az algoritmus második részében ezen új igazságtáblák alapján összeállít egy olyan A táblázatot, amelynek sorait ill. oszlopait szegélyezi az f_1 ill. f_0 igazságtáblájából bizonyos szabályok alapján kiolvasható konjunkciókkal; soraiban és oszlopaiban pedig a megfelelő konjunkciókkal kapcsolatos információ helyezkedik el.

Az A táblázat A_{ij} eleme azon változók halmaza, amelyek közősek az i . sornak és a j . oszlopnak megfelelő elemi konjunkciókban. Cikkében Akers megjegyzi, hogy a függvény logikailag passzív volta miatt az A táblázat egyetlen eleme sem üres. Megállapítja, hogy a sorok

elemeiből képzett konjunkciók diszjunkciójával DNF-ban adódó teljesen meghatározott f_A függvény kompatibilis az f Φ -Boole-függvénnyel – az f_A függvényt a továbbiakban az A táblázat által generált függvénynek nevezzük. Az f_A függvény KNF-ban is előállítható – az oszlopok elemeiből képzett diszjunkciók konjunkciójaként. A szerző felsorol továbbá olyan szabályokat, amelyeknek az A táblázatra való alkalmazásával előálló A' táblázat által generált $f_{A'}$ függvény szintén kompatibilis lesz a kiindulási f függvénnyel. E szabályok a következők:

1. a sorok (oszlopok) felcserélhetősége
2. a "lefedő" sorok ill. oszlopok elhagyása
3. egy változó egy sorból ill. oszlopból való törlése
4. a táblázat elemeiből egy kivételével az összes változó törlése.

Ha az A táblázatra a fenti szabályok mindegyikét mindaddig alkalmazzuk, ameddig lehetséges, akkor az előállt táblázat által generált függvény IDNF-ban ill. IKNF-ban adódik. A minimalizálás érdekében célszerű a szabályokat úgy alkalmazni, hogy minél nagyobb méretű, egyetlen változót tartalmazó résztáblázatok álljanak elő.

Akers a cikkében kimutatja az összefüggést a táblázat által generált és az e táblázat szétvágásával keletkező résztáblázatok által generált függvények között. Nevezetesen, ha A_1 és A_2 az A táblázat sorok szerinti szétvágásával keletkezik, akkor $f_A = f_{A_1} \vee f_{A_2}$, ha pedig oszlop szerinti szétvágásával, akkor $f_A = f_{A_1} \wedge f_{A_2}$.

Az A_1 és A_2 táblázat összeillesztésével keletkező A táblázat által generált függvény és a résztáblázatok által generált függvények között azonos összefüggések mutathatók ki. Pl. az 1. ábrán szemléltetett A táblázat esetén:

$$f_A (f_{A_1} \vee f_{A_2}) \wedge (f_{A_3} \vee (f_{A_4} \wedge f_{A_5}))$$

A_1	A_3	
A_2	A_4	A_5

1. ábra

A szerző megmutatja azt is, hogy hogyan adható meg az A táblázat alkalmas szétvágásával az f_A függvény valamely dekompozíciója. Ha az A táblázat szétvágása olyan, hogy az A_i résztáblázatok által generált függvényekre $f_{A_i} = x_k$, akkor végeredményben az f_A függvény egy, általában többmélységű, $\{\wedge, \vee, \neg\}$ bázisban felírt zárójeles formula alakjában áll elő.

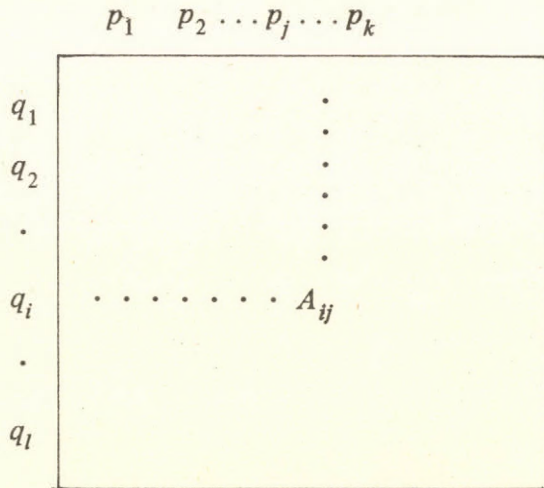
Az A táblázat részletes vizsgálatának eredményeként lehetőség nyílt a módszer továbbfejlesztésére. A cikkben ismertetjük e módszer alkalmassá tételét tetszőleges Φ -Boole-függvények szintézisére, majd általánosítjuk a kapott módszert $\{\text{NAND}\}$ ill. $\{\text{NOR}\}$ bázisbeli szintézisre is, valamint általános Boole-függvények szintézisére az említett bázisokban.

A T TÁBLÁZAT

Elemelve az Akers-féle A táblázat esetében a kiindulási Φ -Boole-függvény és az algoritmus első részének eredményeként kapott igazságtábla alapján megkonstruált A táblázat szegélyezése közötti közvetlen kapcsolatot megállapítottuk, hogy az A táblázat szegélyezésében szereplő konjunkciók az eredeti Φ -Boole-függvénnyel kompatibilis f Φ -Boole-függvény \hat{f} ill. \hat{f}^* RDNF-ját állítják elő.

A továbbiakban összeállítunk az eredeti Φ -Boole-függvény tetszőleges DNF-ja alapján az Akers-féle A táblázattal analóg T táblázatot és belátjuk, hogy az A táblázatra vonatkozó tulajdonságok érvényben maradnak a T táblázatra is.

Legyenek adva q_1, q_2, \dots, q_l , valamint p_1, p_2, \dots, p_k elemi konjunkciók. A továbbiakban az ezek által meghatározott T táblázat alatt egy olyan $l \times k$ -s táblázatot értünk, amelynek A_{ij} eleme a q_i és p_j konjunkciók mindegyikében azonos kitevővel szereplő közös változók halmaza. Szükség esetén a T táblázat sorait a q_1, q_2, \dots, q_l , oszlopait pedig a p_1, p_2, \dots, p_k elemi konjunkciókkal szegélyezzük (2. ábra).



2. ábra

Legyenek az f Φ -Boole-függvényre $\hat{f}^* = \bigvee_{i=1}^l q_i$ és $\hat{f} = \bigwedge_{i=1}^k p_i$; az f Φ -Boole függvényhez tartozó táblázatnak nevezzük a q_1, q_2, \dots, q_l és a p_1, p_2, \dots, p_k által meghatározott T

táblázatot.

Illusztrációként megadjuk az $f = ab \vee ac\bar{d} \vee bc \vee \gamma\bar{b}d$ függvény által generált T táblázatot (3. ábra).

$$\hat{f} = ab \vee ac\bar{d} \vee bc, \quad \hat{f}^* = \bar{a}\bar{b}c \vee acd \vee bcd \vee abd$$

$\hat{f}^* \backslash \hat{f}$	ab	$ac\bar{d}$	bc
$\bar{a}\bar{b}c$	a	a, c	c
acd	a	a, c	c
bcd	b	c	b, c
abd	a, b	a	b

3. ábra

Könnyű belátni, hogy $f^* = \hat{f}^* \vee \gamma\hat{f}^*$ miatt az f^* Φ -Boole-függvényhez tartozó T^* táblázat az f -hez tartozó T táblázatnak transzponáltja (amely a T táblázatból sorainak oszlopaival történő felcserélésével áll elő).

Ugyanígy látható, hogy az $\bar{f} = \bar{\hat{f}} \vee \gamma\bar{\hat{f}}$ függvényhez tartozó T táblázat az f -hez tartozó T táblázat transzponáltjából a táblázatban szereplő változók kitevőinek megváltoztatásával áll elő.

Logikailag passzív függvények A táblázatára Akers megállapítja, mi pedig tetszőleges Φ -Boole-függvény T táblázatára bebizonyítjuk az alábbi tételt.

1. Tétel. Az f Φ -Boole-függvényhez tartozó T táblázatban egyetlen A_{ij} sem üres.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a T táblázatnak van üres eleme, legyen ez az A_{ij} . Legyen az i -edik sort szegélyező elemi konjunkció ν , a j -edik oszlopot szegélyező elemi konjunkció μ . Ez azt jelenti, hogy a ν implikánsa \hat{f}^* -nak, a μ implikánsa az \hat{f} -nek. Egy függvény duálisának és negáltjának implikánsai közötti kapcsolat alapján ν' implikánsa $\bar{\hat{f}}$ -nak. Ha A_{ij} üres, akkor $\mu\nu' \neq 0$, tehát f_0 és f_1 -nek van közös implikánsa, ami lehetetlen.

Valamely f Φ -Boole-függvény \hat{f} és \hat{f}^* adott DNF-i alapján az f -hez tartozó T táblázat egyértelműen meghatározott, azonban különböző DNF-ák különböző T táblázatokat állíthatnak elő. Nyilvánvaló, hogy egy adott T táblázat több Φ -Boole-függvényhez is tartozhat.

Egy adott T táblázat által generált függvénynek nevezzük a $g = \bigvee_{j=1}^k \prod_{i=1}^l a_{ij}$, $h = \bigvee_{i=1}^l \prod_{j=1}^k a_{ij}$

függvények által meghatározott $f_T = g \vee \gamma h^*$ függvényt, ahol a_{ij} az A_{ij} -ben szereplő változók konjunkciója és γ tetszőleges teljesen meghatározott Boole-függvény. Az f_T függvényre érvényes az alábbi tétel.

2. Tétel. *A T által generált f_T függvény*

a/ Φ -Boole-függvény

b/ *kompatibilis bármely olyan f Φ -Boole-függvénnyel, amelyhez a T táblázat tartozik, vagyis $f \leq f_T \leq \hat{f}$.*

Bizonyítás: a/ Elegendő belátni, hogy $g \leq h^*$. A duális képzési szabálya alapján $h^* = \bigvee_{j=1}^k \prod_{i=1}^l a_{ij}^*$. Mivel egy σ elemi konjunkció mindig implikálja a duálisát, σ^* -ot, ezért minden i, j -re $a_{ij}^* \geq a_{ij}$, tehát $h^* = \bigvee_{j=1}^k \prod_{i=1}^l a_{ij}^* \geq \bigvee_{j=1}^k \prod_{i=1}^l a_{ij} = g$.

b/ Az a/ alapján elegendő megmutatni, hogy $f \leq g$ és $h^* \leq \hat{f}$. A T táblázatot szegélyező q_1, q_2, \dots, q_l és p_1, p_2, \dots, p_k elemi konjunkciókra teljesül, hogy $q_i \leq \prod_{j=1}^k a_{ij}$ $i = 1, 2, \dots, l$ és $p_j \leq \prod_{i=1}^l a_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, k$, mivel az a_{ij} legfeljebb a q_i és p_j -ben szereplő változókat tartalmazza. Ebből következik, hogy a definícióban szereplő g és h függvényekre $f = \bigvee_{j=1}^k p_j \leq g$ és $h \geq f^*$. Az utóbbiból a dualitás miatt $h^* \leq f$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A bebizonyított tétel a/ pontja alapján bevezethetjük a $g = f_T$ és a $h^* = \hat{f}_T$ jelölést.

Megmutatunk még néhány, a T táblázatra, valamint a táblázat és a résztáblázatok által generált függvényekre vonatkozó tulajdonságot és összefüggést.

Egyik érdekes kérdés, hogy milyen esetekben lesz biztosan különböző az eredeti f és a generált f_T .

3. Tétel. *Az $f \neq f_T$ egyenlőtlenség szükséges és elégséges feltétele az, hogy a/ létezzen legalább olyan x_i változó, amelyre f nem monoton x_i -ben, de \hat{f} monoton x_i -ben, vagy b/ f függ x_i -től, de \hat{f} független x_i -től. Felcserélve f és \hat{f} -et e feltételekben, az $\hat{f} \neq f_T$ szükséges és elégséges feltételeit kapjuk.*

Bizonyítás. Bármelyik feltétel elégséges. Ha a/ teljesül, akkor f RDNF-jában van \bar{x}_i -at tartalmazó primimplikáns, de \hat{f} -ében nincs. Ezért \bar{x}_i nem szerepelhet a táblázatban és következésképpen f_T -ben sem. Tehát $f \neq f_T$.

Ha b/ teljesül, hasonló megfontolással következik, hogy x_i nem szerepel f_T -ben, míg

f -ben igen. Így $f \neq \hat{f}_T$. Bármelyik feltétel szükséges, ha $f \neq f_T$ akkor a 2. tétel értelmében $f \leq \hat{f}_T$. Tehát f -nek van legalább egy p_i implikánsa, amelyre $p_i \leq \prod_{j=1}^l a_{ij}$, ami azt jelenti, hogy a p_i -ben szereplő bizonyos változók vagy egyáltalán nem (b) vagy csak negálva (a) szerepelnek \hat{f}_T -ben. Ami éppen a két feltétel valamelyikének teljesülését jelenti. A tétel második állítása hasonlóan bizonyítható. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A továbbiakban a T táblázat T_i résztáblázatai által generált f_{T_i} függvények és az f_T közötti összefüggéseket vizsgáljuk. Jelölje I a T táblázat sorai, J oszlopoi sorszámainak halmazát. Legyen $N \subseteq I$ és $M \subseteq J$. A T_{MN} táblázat a T táblázat azon résztáblázatát jelöli, amelynek elemei az $i \in M, j \in N$ indexű A_{ij} -k. A T_{MN} táblázat által generált függvény:

$$f_{T_{MN}} = \bigvee_{j \in N} \prod_{i \in M} a_{ij} \vee \gamma \left[\bigvee_{i \in M} \prod_{j \in N} a_{ij} \right]^* .$$

A T táblázat résztáblázatai által generált függvényekre érvényes az alábbi tétel.

4. Tétel.

a/ $f_T = f_{T_{I,J_1}} \vee f_{T_{I,J_2}}$ tetszőleges $J_1 \cup J_2 = J$ mellett

b/ $f_T = f_{T_{I_1,J}} \wedge f_{T_{I_2,J}}$ tetszőleges $I_1 \cup I_2 = I$ esetén.

Bizonyítás. a/ $\hat{f}_T = f_T \vee \gamma \hat{f}_T$

$$\begin{aligned} f_{T_{I,J_1}} \vee f_{T_{I,J_2}} &= \left(\bigvee_{j \in J_1} \prod_{i \in I} a_{ij} \right) \vee \left(\bigvee_{j \in J_2} \prod_{i \in I} a_{ij} \right) \vee \\ &\vee \gamma \left[\left(\bigvee_{i \in I} \prod_{j \in J_1} a_{ij} \right)^* \vee \left(\bigvee_{i \in I} \prod_{j \in J_2} a_{ij} \right)^* \right] = \\ &= \bigvee_{j \in J_1 \cup J_2} \prod_{i \in I} a_{ij} \vee \gamma \left[\bigvee_{j \in J_1 \cup J_2} \prod_{i \in I} a_{ij}^* \right] = \hat{f}_T \vee \gamma \hat{f}_T . \end{aligned}$$

b/ A tétel a/ pontja és az $f_T^* = f_T^*$ egyenlőség felhasználásával:

$$\begin{aligned} f_{T_{I_1,J}} \wedge f_{T_{I_2,J}} &= \left[\left(f_{T_{I_1,J}} \wedge f_{T_{I_2,J}} \right)^* \right]^* = \left(f_{T_{I_1,J}}^* \vee f_{T_{I_2,J}}^* \right)^* = \\ &= (f_T^*)^* = (f_T^*)^* = f_T . \end{aligned}$$

A T táblázattal kompatibilisnek nevezünk egy F_T teljesen meghatározott Boole-függvényt, ha kompatibilis az f_T -vel. Nyilvánvaló, hogy ha a T táblázatot egy teljesen meghatározott f Boole-függvény alapján írjuk fel, akkor $f = f_T = F_T$.

Világos, hogy az előző tétel érvényes akkor is, ha az egyes résztáblázatok által generált függvények helyett a résztáblázatokkal kompatibilis valamely teljesen meghatározott függvényeket tekintünk.

5. Tétel. Ha egy T táblázatban szereplő A_{ij} -kre $\bigcap_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq k}} A_{ij} = \{x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_r}\} (\neq 0)$,

akkor bármely $x_{m_n} \ n = 1, 2, \dots, r$ a T -vel kompatibilis függvény.

Bizonyítás: Legyen $x_{m_n} \in \bigcap_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq k}} A_{ij}$. Ekkor x_{m_n} szerepel f_T és \hat{f}_T^* minden diszjunkciós tagjában, ezért $x_{m_n} \geq f_T$ és $x_{m_n} \geq \hat{f}_T^*$. A duálisra vonatkozó szabály miatt $x_{m_n} = x_{m_n}^* \leq \hat{f}_T$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

SZINTÉZIS $\{\wedge, \vee, \neg\}$ BÁZISBAN A T TÁBLÁZAT FELHASZNÁLÁSÁVAL

Az 5. tételből tetszőleges Boole-függvény közvetlen szintézisére a következő egyszerű eljárás adódik. A kiindulási T táblázatot olyan T_{MN} résztáblázatokra bontjuk, amelyekre $\bigcap_{\substack{i \in M \\ j \in N}} A_{ij} = \{x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_r}\} (\neq 0)$. E résztáblázatok mindegyike kompatibilis egy-egy $F_{T_{MN}} = x_{m_n} \in \bigcap_{\substack{i \in M \\ j \in N}} A_{ij}$ függvénnyel; F_T a résztáblázatok által generált függvényekre vonatkozó tételek alapján $\{\wedge, \vee, \neg\}$ bázisbeli zárójeles formulával áll elő.

SZINTÉZIS $\{\text{NAND}\}$ VAGY $\{\text{NOR}\}$ BÁZISBAN A T TÁBLÁZAT FELHASZNÁLÁSÁVAL

A NAND művelet és az \wedge, \vee, \neg műveletek közötti $\text{NAND}(f_1, f_2, \dots, f_k) = \overline{f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_k} = \bar{f}_{1k} \vee \bar{f}_2 \vee \dots \vee \bar{f}_k$ összefüggés alapján világos, hogy ha $\bar{f} = \prod_{i=1}^k f_i$, akkor $\text{NAND}(f_1, f_2, \dots, f_k) = f$. Ennek alapján egy lehetséges $\{\text{NAND}\}$ bázisbeli szintézis eljárás a következő.

1. \bar{f} előállítása $\bar{f} = \prod_{i=1}^k f_i$ alakban.
2. Ha minden i -re f_i kompatibilis egy változóval, akkor az eljárás befejeződik. Egyébként az eljárás a változókkal nem kompatibilis f_i függvényekre az 1. lépéssel folytatódik.

Ez a szintézis eljárás egyszerűen megvalósítható pl. a most ismertett táblázat módszerrel. Ugyanis az \bar{f} -hoz tartozó táblázat (amely az f -hez tartozó T táblázat negáltja $\neg T$) sorirányú felbontásával kapott T_1, T_2, \dots, T_k résztáblázatokkal kompatibilis $f_{T_1}, f_{T_2}, \dots, f_{T_k}$ függvényekre $f = \text{NAND}(f_{T_1}, f_{T_2}, \dots, f_{T_k})$. Így az eljárás a következő lehet:

1. Képezzük $\neg T$ -t.
2. Bontsuk fel $\neg T$ -t T_1, T_2, \dots, T_k sorirányú résztáblázatokra.

3. Azon T_i résztáblázatok, amelyekhez van velük kompatibilis változó, tovább nem bontandók. Egyébként a T_j -kre megismételjük az eljárást az 1. lépéstől mindaddig, amíg minden résztáblázathoz nem találunk vele kompatibilis változót.
4. A résztáblázatokkal kompatibilis változók segítségével az F_T felírása.

A módszert egy egyszerű példán illusztráljuk:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a, b & b & a \\ \hline a & c & a, c \\ \hline \end{array}$$

1. lépés

$$\neg T = \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{a} & \bar{a}, \bar{b} \\ \hline \bar{c} & \bar{b} \\ \hline \bar{a}, \bar{c} & \bar{a} \\ \hline \end{array}$$

2. lépés. A sorirányú felbontás eredménye:

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{a} & \bar{a}, \bar{b} \\ \hline \bar{a}, \bar{c} & \bar{a} \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{c} & \bar{b} \\ \hline \end{array}$$

3. lépés. $F_{T_1} = \bar{a}$, tehát nem foglalkozunk vele. T_2 -re megismételjük az eljárást, tehát:

1. lépés.

$$\neg T_2 = \begin{array}{|c|} \hline c \\ \hline b \\ \hline \end{array}$$

2. lépés. A sorirányú felbontás eredménye:

$$T_3 = \boxed{c} \quad \text{és} \quad T_4 = \boxed{b}$$

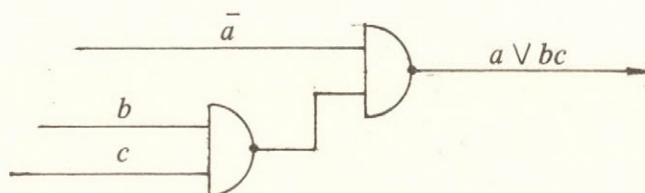
3. lépés. $F_{T_3} = c$, $F_{T_4} = b$. Nincs további felbontásra szükség.

4. lépés

$$F_{T_1} = \text{NAND}(F_{T_1}, F_{T_2}), \quad F_{T_2} = \text{NAND}(F_{T_3}, F_{T_4}) \quad \text{így}$$

$$F_T = \text{NAND}(F_{T_1}, \text{NAND}(F_{T_3}, F_{T_4})) = \text{NAND}(\bar{a}, \text{NAND}(c, b)).$$

A függvényt realizáló hálózat:



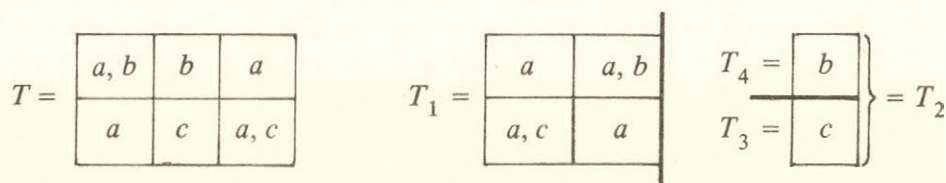
4. ábra

Megjegyzés. Az algoritmus $\{\text{NOR}\}$ bázisbeli szintézist ad, ha a $\neg T$ oszlopírányú felbontásait tekintjük.

A T és $\neg T$ táblázatok közötti kapcsolatot korábban elemeztük. Ennek alapján megvizsgálva az algoritmus lépéseit, világos, hogy a $\neg T$ táblázat előállítására elkerülhető a következő szabályok alkalmazásával:

1. A T táblázatot először oszlopírányú résztáblázatokra bontjuk. (A résztáblázatok további felbontása tetszés szerint történhet – ugyanúgy mint az előzőekben.)
2. Ha egy változó egy sorírányú felbontással kapott résztáblázattal kompatibilis, akkor ő maga, egyébként a negáltja szerepel a bázisfüggvény argumentumaként.

Az előző példabeli függvény szintézise ennek megfelelően egyszerűsödik (5. ábra).



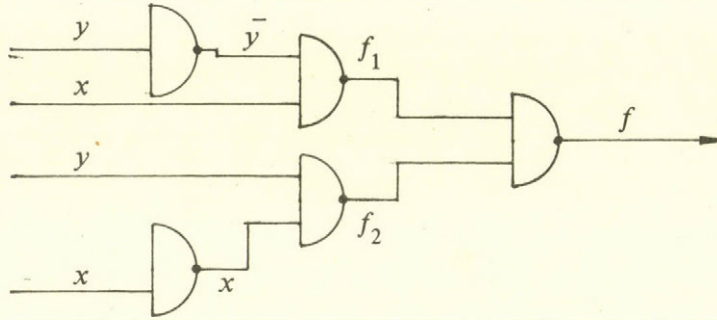
5. ábra

$$F_{T_1} = \bar{a}, \quad F_{T_3} = c, \quad F_{T_4} = b.$$

A HATÁROK ÖSSZEHASONLÍTÁSÁNAK MÓDSZERE ÁLTALÁNOS BOOLE-FÜGGVÉNYEK SZINTÉZISE

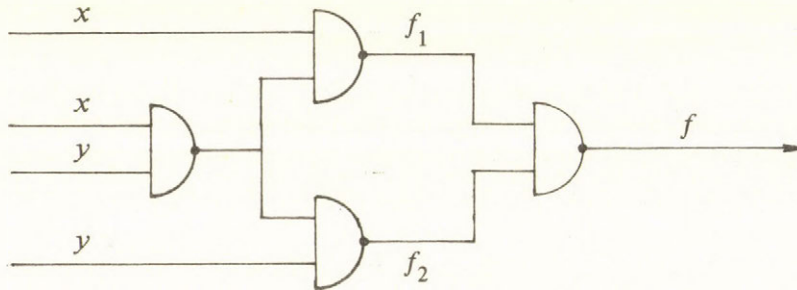
Az általános Boole-függvények szintézise legegyszerűbben a komponens függvények szintézisével oldható meg. Célszerű azonban a szintézis során a közös részfüggvények kikeresése [4]. Az előző két szintézis eljárás vizsgálatával megállapítható, hogy egy Boole-függvény szintézisét felfoghatjuk a résztáblázatokhoz tartozó részfüggvényekből, mint komponens függvényekből álló álta-

lános Boole-függvény szintézisének is. Az $f = x \oplus y$ függvény $\{\text{NAND}\}$ bázisbeli szintézise az előző pontban leírt módszerrel pl. az $\{f_1 = \bar{x} \vee y, f_2 = x \vee \bar{y}\}$ általános Boole-függvény szintézisét jelenti. A szintézis eredménye alapján kapjuk az alábbi hálózatot.



6. ábra

A hálózatot megvizsgálva látjuk, hogy a funkcionális elemek száma eggyel csökkenthető, mivel f_1 -et ill. az f_2 -t realizáló funkcionális elemek \bar{x} ill. \bar{y} bemenetei helyettesíthetők $\text{NAND}(x, y)$ -nal. Így az f -et realizáló előző hálózat az alábbira egyszerűsödik (7. ábra).



7. ábra

A függvényt realizáló konkrét hálózat ismerete nélkül az ilyen egyszerűsítési lehetőségeket nehéz észrevenni. Mint látni fogjuk, az alábbiakban kidolgozott módszerrel az ilyen jellegű egyszerűsítések felismerhetők.

A T táblázat vizsgálata során kapott eredményeinkből világos, hogy a résztáblázatokra bontásnak $f_{\hat{T}}$ és $f_{\hat{T}}^*$ valamely felbontása felel meg. Ennek megfelelően az előző két szintézis eljárást úgy alakítjuk át, hogy a T táblázat résztáblázatokra bontását az $f_{\hat{T}}$ és $f_{\hat{T}}^*$ megfelelő felbontásával helyettesítjük. Ennek egyik következménye, hogy a szintézis eljárás számítógépes realizációjánál a memóriaigény nagymértékben csökken. A másik – lényeges – következmény, hogy a szintézis eljárás során kapott, a résztáblázatoknak megfelelő Φ -Boole-függvények alsó és felső határukkal adottak, ezért a közös részfüggvények megtalálására nagyobb lehetőség nyílik, ha nem a szintézis eljárás végén kapott teljesen meghatározott függvények között keressük azokat, hanem a szintézis eljárás közben. Ezért az eljárás során a részfüggvényekként kapott

Φ -Boole-függvényeket megvizsgáljuk abból a szempontból, hogy van-e olyan teljesen meghatározott, vagy Φ -Boole-függvény, amelyik kompatibilis két- vagy több részfüggvénnyel; ha igen, akkor azokat a részfüggvényeket helyettesítjük az így megtalált függvénnyel. A szintézis következő lépésében az eredeti részfüggvények helyett ezt a helyettesítő függvényt dolgozzuk fel. A közös részfüggvények megkeresését az egyes részfüggvények határainak összehasonlításával oldjuk meg (ezért hívjuk a módszert határok összehasonlítása módszerének). Hogy a határok összehasonlításával valóban megtalálhatók közös részfüggvények, az $f = x \oplus y$ függvény példáján szemléltetjük.

$$f = x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$$

$$\bar{f} = f_1 f_2$$

$$f_1 = \bar{x}\bar{y} \vee xy \vee \gamma(\bar{x} \vee y)$$

$$f_2 = \bar{x}\bar{y} \vee xy \vee \gamma(x \vee \bar{y})$$

$$\bar{f}_1 = f_3 f_4$$

$$f_3 = x\bar{y} \vee \gamma(\bar{x} \vee \bar{y})$$

$$f_4 = x\bar{y} \vee \gamma(x \vee y)$$

$$\bar{f}_2 = f_5 f_6$$

$$f_5 = \bar{x}y \vee \gamma(\bar{x} \vee \bar{y})$$

$$f_6 = \bar{x}y \vee \gamma(x \vee y).$$

f_4 ill. f_6 kompatibilis x ill. y -nal, tehát további szintézisre nincs szükség. f_3 ill. f_5 kompatibilis \bar{y} ill. \bar{x} -tal, tehát a szintézisük nem fejeződött be. f_3 ill. f_5 alsó határa $x\bar{y}$ ill. $\bar{x}y$, felső határuk azonban $\bar{x} \vee \bar{y}$. A felső határ realizálható egyetlen NAND funkcionális elemmel, ezért $f_3 = f_5 = \text{NAND}(x, y)$.

Igy $f = \text{NAND}(f_1, f_2) = \text{NAND}(\text{NAND}(f_3, f_4), \text{NAND}(f_5, f_6)) =$
 $= \text{NAND}(\text{NAND}(\text{NAND}(x, y), x), \text{NAND}(\text{NAND}(x, y), y))$, amely a 7. ábrán lévő hálózattal realizálható.

A $\{\text{NAND}\}$ bázisbeli szintézis algoritmusnál felvetődik az algoritmus konvergenciájának problémája. Világos, hogy ha a függvények felbontása valódi, azaz a felbontásban szereplő f_i -k egyike sem azonos f -fel, akkor a módszer konvergál.

Abban az esetben azonban, ha az f -et vagy az \hat{f}^* -ot leíró RDNF redundáns, akkor a formula valódi felbontása nem biztosítja az előző feltétel teljesülését. Ugyanis előfordulhat, hogy a felbontásnál kapott valamelyik részfüggvény formailag ugyan nem azonos az eredetivel, de ekvivalens vele. A szintézis következő lépésében e függvények negáltjaival dolgozunk és mivel

a negálásnál minden primimplikánst megkapunk (Nelson tétel [2]). abban az esetben, ha a negált függvény nem csupa lényeges primimplikánsból áll, lehet rá olyan felbontást találni, hogy az újabb negáció visszavezet az eredeti függvény eredeti formájához.

Pl., ha $\varphi = xy \vee \bar{x}z \vee yz$ az egyik felbontandó függvény, az alábbi felbontás nem vezet eredményre.

$$\bar{\varphi} = x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}z$$

$$\varphi_1 = x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}; \quad \varphi_2 = \bar{y}z$$

$$\bar{\varphi}_1 = xy \vee \bar{x}z \vee yz = \varphi$$

$$\varphi_3 = xy \vee \bar{x}z; \quad \varphi_4 = yz$$

$$\bar{\varphi}_3 = x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}z = \bar{\varphi}$$

..... és így tovább

A továbbiakban ismertetünk két algoritmust, amelyek a táblázat résztáblázatokra való szétvágását a függvény határainak felbontásával helyettesítik és amelyek a részfüggvények határainak összehasonlításával keresik a közös részfüggvényeket.

Az algoritmusokban használt jelölések a következők:

Az $f_{T_1}, \hat{f}_{T_i}^*$ függvénypárt H_i -vel jelöljük. A H_i -hez rendeljük az l, t, k számokat – $H_i(l, t, k)$ – ahol i azt mutatja, hogy H_i -t H -ból i db váltakozó irányú felbontással kaptuk, l azt, hogy H_i oszlop ($l = 1$) vagy sorirányú ($l = 2$) szétvágásának megfelelő felbontással állt elő, t azt, hogy a H_i -nek megfelelő Φ -Boole-függvény szintézise megtörtént-e már, k pedig azt, hogy H_i hányszor szerepel közös függvényként, mz a megengedett zárójelmélységet, $m(1), m(2)$ ill. m a \vee, \wedge ill. NAND függvény változóinak maximális számát, $w(1), w(2)$ ill. w pedig a \vee, \wedge ill. NAND függvény közös függvényként való felhasználhatósága számát jelöli.

1. ALGORITMUS $\{\wedge, \vee, \neg\}$ BAZISBELI SZINTÉZISRE A HATÁROK ÖSSZEHASONLÍTÁSÁNAK MÓDSZERÉVEL

1. $i \leftarrow 1; l \leftarrow 2.$
2. Minden $H_i(l, 0, k)$ felbontása $2 \leq K \leq m(3 - l)$ részre $3 - l$ által meghatározott irányban; $i \leftarrow i + 1; l \leftarrow 3 - l; t \leftarrow 0; v \leftarrow 0.$
3. $v \leftarrow v + 1; \text{Ha } H_i \text{ kompatibilis egyetlen változóval, akkor } H_i \text{ szintézise befejeződött és a 10. lépés következik.}$

4. Ha van $H_i(l, 0, s)$ -sel kompatibilis $H_j(l, t, k)$, $1 \leq j \leq i$, akkor a 8. lépés következik.
5. Ha nincs $H_i(l, 0, s)$ -hez $H_j(l, 0, k)$, $1 \leq j \leq i$, hogy $f_{\hat{T}_i} \leq f_{\hat{T}_j}$ és $\hat{f}_{T_i} \geq \hat{f}_{T_j}$, vagy $f_{\hat{T}_i} \leq f_{\hat{T}_j}$ és $\hat{f}_{T_i} \leq \hat{f}_{T_j}$, akkor a 13. lépés következik.
6. Ha $k + s \geq w(l)$, akkor a 10. lépés következik.
7. A kompatibilis H_n megtartása; $k \leftarrow k + s$; a 10. lépés következik.
8. Ha $k + s \geq w(l)$, akkor $H_i \leftarrow H_j(l, t, k)$ és a 10. lépés következik.
9. H_i azonos $H_j(l, t, k + s)$ -sel.
10. Ha $\nu < K$, akkor a 3. lépés következik.
11. Ha van még felbontandó $H_i(l, 0, k)$, akkor a 2. lépés következik.
12. Az eljárás befejeződik.
13. Ha az i -hez van olyan j ($1 \leq j \leq i$), hogy $H_i(l, 0, s)$ és $H_j(l, 0, k)$ -ban $\hat{f}_{T_i} = \hat{f}_{T_j}$ vagy $f_{\hat{T}_i} = f_{\hat{T}_j}$ és $k + s \leq w(l)$, akkor $H_i = H_j = \hat{f}_{T_i}, \hat{f}_{T_i}^*$ vagy $f_{\hat{T}_i}, f_{\hat{T}_i}^*$
14. 10. lépés következik.

A $\{\text{NAND}\}$ bázisbeli szintézis sajátosságaiból következik, hogy a közös részfüggvények keresésénél csak az azonos irányú felbontásokhoz tartozó H_i -ket kell vizsgálni. Egyébként a $\{\text{NAND}\}$ bázisbeli algoritmus lényegében nem tér el az előzőtől.

2. ALGORITMUS $\{\text{NAND}\}$ BAZISBELI SZINTÉZISRE A HATÁROK ÖSSZEHASONLÍTÁSÁNAK MÓDSZERÉVEL

1. $i \leftarrow 1$; $l \leftarrow 2$.
2. Minden $H_i(l, 0, k)$ felbontása $2 \leq K \leq m$ részére $3 - l$ által meghatározott irányban $i \leftarrow i + 1$; $l = 3 - l$; $t \leftarrow 0$; $\nu \leftarrow 0$.
3. $\nu \leftarrow \nu + 1$; ha H_i kompatibilis egyetlen változóval, akkor H_i szintézise befejeződött és a 10. lépés következik.
4. Ha van $H_i(l, 0, s)$ -sel kompatibilis $H_j(l, t, k)$, $1 \leq j \leq i$, ahol l azonos, akkor a 8. lépés lépés következik.
5. Ha nincs $H_i(l, 0, s)$ -hez $H_j(l, 0, k)$, $1 \leq j \leq i$, hogy $f_{\hat{T}_i} \leq f_{\hat{T}_j}$ és $\hat{f}_{T_i} \geq \hat{f}_{T_j}$, vagy $f_{\hat{T}_i} \geq f_{\hat{T}_j}$ és $\hat{f}_{T_i} \leq \hat{f}_{T_j}$, valamint l azonos, akkor a 13. lépés következik.
6. Ha $k + s \geq w$, akkor a 10. lépés következik.

7. A kompatibilis H_n megtartása; $k \leftarrow k + s$; a 10. lépés következik.
8. Ha $k + s \geq w$, akkor $H_i \leftarrow H_j(l, t, k)$ és a 10. lépés következik.
9. H_i azonos $H_j(l, t, k + s)$ -sel.
10. Ha $v < K$, akkor a 3. lépés következik.
11. Ha van még felbontandó $H_i(l, 0, k)$, akkor a 2. lépés következik.
12. Az eljárás befejeződik.
13. Ha van olyan $H_i(l, 0, s)$ és $H_j(l, 0, k)$ $1 \leq j \leq i$ és l azonos, hogy $\hat{f}_{T_i} = \hat{f}_{T_j}$, vagy $\hat{f}_{T_i} = \hat{f}_{T_j}$ és $k + s < w$, akkor $H_i = H_j = \hat{f}_{T_i}, \hat{f}_{T_i}^*$ vagy $\hat{f}_{T_i}, \hat{f}_{T_i}^*$.
14. 10. lépés következik.

E két algoritmus alkalmas általános Boole-függvények szintézisére is. Ezen algoritmusok azonban általános Boole-függvények esetén is mindig keresik a közös részfüggvényeket függetlenül attól, hogy egyes komponens függvények ezt a keresést feleslegessé teszik. Ezért az algoritmusok további, ilyen irányú tökéletesítése kutatás tárgyát képezi.

I r o d a l o m

- [1] S.B. Akers, A diagrammatic Approach to Multilevel Logic Synthesis. IEEE Transactions on EC. Vol. Ec-14. No. 4. Apr. 1965. 171-181.
- [2] A. Ádám, Truth Functions and the problem of their realization by two terminal graphs. Akadémiai Kiadó, Budapest 1968.
- [3] J. Kuntzmann, Algèbre de Boole. Dunod, Paris, 1968.
- [4] E.J. McCluskey, Jr. and H. Shorr, Essential Multiple-Output Prime Implicants. Microwave Res. Inst. Symp. ser. 12, 1962. 437-457.

Beérkezett: 1972. július 5.

S u m m a r y

Synthesis of not completely determined Boole functions in bases $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\text{NAND}\}$ resp. $\{\text{NOR}\}$.

The "bound comparison" method discussed in this paper is based on the comparison of the upper- and the lower bounds of Boolean functions. The synthesis gives formulae with brackets for a single Φ -Boolean function or general Boolean function in bases $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\text{NAND}\}$ resp. $\{\text{NOR}\}$. These formulae satisfy certain constraints.

Р е з ю м е

Синтез частично-определённых булевых функций в базисах $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\text{NAND}\}$ или $\{\text{NOR}\}$.

Метод "сравнения границ" описанный в работе основывается на сравнении нижних и верхних пределов булевых функций. Синтез дает формулы со скобками для единственной Φ -булевой функции или для общей булевой функции в базисах $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\text{NAND}\}$ или $\{\text{NOR}\}$. Эти формулы удовлетворяют некоторым ограничениям.

EGY SZTOHASZTIKUS PROGRAMOZÁSI MODELL SZÁMITÓGÉPES KIÉRTÉKELÉSE*

Deák István

A cikkben egy Prékopa András által megfogalmazott és megoldott sztohasztikus programozási probléma számítógépes, numerikus kiértékelését adjuk. Valamely matematikai feladatot megoldó algoritmus praktikussága felől az algoritmus számítógépes reprezentációja és megfelelő számú kísérleti feladat megoldása után mondhatunk csak véleményt. Különösen igaz ez a sztohasztikus programozási modelleket megoldó algoritmusok esetében. Az elméleti algoritmusok ismeretében sem a konvergenciasebességről, sem a kiszámításhoz szükséges időről nem tudunk konkrétumot mondani, továbbá egy elméleti algoritmus még egyáltalán nem számol a konkrét helyzet számítástechnikai apparátusával. Ezért szükséges, hogy a programozási modellek számítógépes programját is elkészítsük, ezzel a gyakorlatban oldjuk meg a felmerülő számítástechnikai problémákat. Több konkrét feladat lefuttatásával a feladat kiszámításához szükséges időről is jó becsléseket kaphatunk.

A jelen dolgozat részben a szerző egyetemi doktori disszertációjában foglaltakat, részben azok továbbfejlesztését tartalmazza. Az első részben a sztohasztikus programozási modellt és az optimális megoldást kiszámító algoritmust írjuk le, a második részben a felmerült számítástechnikai nehézségeket és megoldásukat, a harmadik részben pedig konkrét példák futtatásával kapcsolatos tapasztalatokat közlünk.

A gépi programot először ALGOL nyelven az Egyetemi Számítóközpont Razdan 3 gépére, majd szintén ALGOL nyelven az Akadémia Számítástechnikai Központjának CDC 3300-as gépére készítettem el. A legújabb változat pedig FORTRAN nyelven a CDC 3300-as gépen működik.

1. A SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁSI MODELL ÉS AZ OPTIMÁLIS MEGOLDÁST KISZÁMITÓ ALGORITMUS

Tekinsük a következő determinisztikus modellt:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} g_i(\underline{x}) &\geq \beta_i, & i = 1, \dots, n, \\ \underline{a}'_i \underline{x} &\geq b_i, & i = 1, \dots, M, \\ \min f(\underline{x}). \end{aligned}$$

A $g_i(\underline{x})$ függvények konkávak, az $f(\underline{x})$ függvény konvex, a β_i, b_i -k valós számok, \underline{a}_i -k pedig oszlopvektorok. Tegyük most fel, hogy β_i -k valószínűségi változók, akkor az eredeti (1.1)

*Ez a munka az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézetének támogatásával készült.

probléma értelmét veszi, fogalmazzuk meg a következő sztohasztikus programozási feladatot:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} &P\{g_i(\underline{x}) \geq \beta_i, \quad i = 1, \dots, n\} \geq p, \quad 0 < p < 1, \\ &\underline{a}'_i \underline{x} \geq b_i, \quad i = 1, \dots, M, \\ &\min f(\underline{x}). \end{aligned}$$

Ezt a modellt Prékopa András [4] állította fel, és ő is adta meg bizonyos, itt nem részletezendő feltételek mellett az optimális megoldáshoz vezető algoritmust. Maga az algoritmus ismert volt (Zou t e n d i j k [5]), de Prékopa bizonyította be, hogy ebben az esetben is konvergál.

Vezessük be a következő jelöléseket. Tegyük fel, hogy a β_i -k együttes eloszlása normális, várható értékük zérus, szórásuk egy, – ellenkező esetben a várható értékeket levonva és a szórással végigosztva a megfelelő feltételi egyenlőtlenséget kaphatjuk ezt az alakot – korrelációs mátrixuk R . Tehát a β_i -k együttes eloszlásfüggvénye:

$$\Phi(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{|R|}} \int_{-\infty}^{y_n} \dots \int_{-\infty}^{y_1} \exp\left\{-\frac{1}{2} \underline{x} R^{-1} \underline{x}\right\} d\underline{x}.$$

Ha a β_i -edik együttes eloszlása normális, akkor teljesülnek az algoritmus konvergenciájához szükséges feltételek. Jelöljük:

$$G(\underline{x}) = \Phi(g_1(\underline{x}), \dots, g_n(\underline{x})) = P\{g_1(\underline{x}) \geq \beta_1, \dots, g_n(\underline{x}) \geq \beta_n\}.$$

Ezekkel a jelölésekkel az (1.2) probléma a következőképpen írható fel:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} &G(\underline{x}) \geq p, \quad 0 < p < 1, \\ &\underline{a}'_i \underline{x} \geq b_i, \quad i = 1, \dots, M, \\ &\min f(\underline{x}). \end{aligned}$$

Szükségünk van egy \underline{x}_1 -re, amely megengedett megoldása (1.3)-nak. Ebből kiindulva további $\underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k, \dots$, megengedett megoldásokat készítünk az alábbi módon.

Két eset lehetséges, vagy ez a sorozat véges, ebben az esetben valamely k -ra \underline{x}_k optimális megoldása lesz (1.3)-nak, vagy a megengedett megoldások így képzett sorozata végtelen és ekkor konvergál az (1.3) optimális megoldásához.

Tegyük fel, hogy már van egy \underline{x}_k vektorunk, amely megengedett megoldása (1.3)-nak, ekkor \underline{x}_{k+1} -et a következőképpen kaphatjuk. Linearizáljuk az (1.3) első feltételét az \underline{x}_k pontban vett Taylor sorával, vegyünk hozzá még egy sort, amely a célfüggvényt veszi figyelembe, így felírhatjuk a következő lineáris feladatot:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} G(\underline{x}) + \nabla G(\underline{x}_k)(\underline{x} - \underline{x}_k) + \vartheta y &\geq p, & 0 < p < 1, \\ a'_i \underline{x} &\geq b_i, & i = 1, \dots, M, \\ \nabla f(\underline{x}_k)(\underline{x} - \underline{x}_k) &\leq y, \\ \min y &. \end{aligned}$$

Itt $\vartheta > 0$ rögzített szám az egész eljárás folyamán, egyébként tetszőleges. Bizonyos, elég enyhe feltételek mellett ennek a feladatnak létezik optimális megoldása [4], legyen ez (x_k^*, y_{opt}) . Látható, hogy $(\underline{x}_k, 0)$ megengedett megoldása (1.4)-nek. Ha ez optimális megoldása is (1.4)-nek, vagyis $\underline{x}_k^* = \underline{x}_k$, $y_{\text{opt}} = 0$, akkor ez optimális megoldása (1.3)-nak is. A fentebb tárgyalt két eset közül az elsővel állunk ilyenkor szemben, \underline{x}_k optimális megoldása az eredeti sztochasztikus problémának, végetér az algoritmus. Ha viszont $y_{\text{opt}} \neq 0$, akkor új megengedett megoldását készítjük el (1.3)-nak.

Tekintsük a következő félegyenest:

$$(1.5) \quad \underline{x}_k + \lambda(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k), \quad \lambda > 0.$$

Minimalizáljuk $f(\underline{x})$ -t ezen félegyenest az (1.3) megengedett megoldásainak halmazába eső részén.

Vagyis legyen μ_k az a legnagyobb λ , amelyre még igaz

$$\begin{aligned} G(\underline{x}_k + \lambda(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)) &\geq p, & 0 < p < 1, \\ a'_i(\underline{x}_k + \lambda(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)) &\geq b_i, & i = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

és legyen λ_k egy olyan λ , amelyre

$$f(\underline{x}_k + \lambda(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)) \geq f(\underline{x}_k + \lambda_k(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)), \quad 0 \leq \lambda < \mu_k.$$

Ekkor definiáljuk \underline{x}_{k+1} -et a következőképpen:

$$(1.6) \quad \underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \lambda_k(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k).$$

A fentiek szerint ez megengedett megoldása (1.3)-nak. Ezzel készítsük el az új (1.4) lineáris problémát és ismételjük meg az egész eljárást. Így kapjuk az $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k, \dots$ megengedett megoldások véges vagy végtelen sorozatát, amelynek utolsó tagja az (1.3) optimális megoldása lesz, illetőleg a sorozat konvergál az optimális megoldáshoz.

2. SZÁMITÁSTECHNIKAI PROBLÉMÁK ÉS MEGOLDÁSUK

A gyakorlatban előforduló problémáknál $n = 10 - 15$, $M = 100 - 200$ szokott lenni. Ezért a programba beépített számítástechnikai eljárásokat igyekeztem úgy megválasztani, hogy azok ne csak alacsony ($n = 2, 3$) dimenziószám esetén működjenek jól, hanem magasabb

dimenzióban is egy reális gépi idő alatt lefussanak. A készített program elvileg akármilyen nagy feladatot tud kezelni, gyakorlatilag a következő méretű feladat futtatható le: $n = 5$, $M = 30$, \underline{x} vektor 30 dimenziós.

Az elkészített program és a lefuttatott feladatok arra az esetre vonatkoznak, ha a $g_i(\underline{x})$ és $f(\underline{x})$ függvények lineárisak, a β_i -k együttes eloszlása normális, a feladat méretei $n = 2$, $M = 2$ és az \underline{x} vektor is két dimenziós.

A legnagyobb problémát a többdimenziós normális eloszlásfüggvény adott pontban felvett értékének gyors és lehetőleg pontos kiszámítása jelentette. Ez azért is fontos volt, mert a modell első gépi programjában a futási idő 90 %-ában a gép a normális eloszlásfüggvény egyes értékeit számította. Problémák léptek fel az (1.5) félegyenesen való haladás közben, annak megállapításával kapcsolatban, hogy mikor érjük el a megengedett megoldások tartományának határát.

Nehézséget okozott még a közelítés jóságának megállapítása, vagyis az iterálás befejezésének feltétele. Végül legjobbnak az kínálkozott, ha több kritérium együttes teljesülése esetén állítjuk le az iterálást.

A továbbiakban ezt a három problémakört fogjuk külön-külön megvizsgálni.

a/ A többdimenziós normális eloszlásfüggvény adott pontban felvett értékének kiszámítása.

Táblázatok vagy közelítő képletek csak igen speciális korrelációs mátrixok esetén és csak alacsony dimenzióban ($n = 2, 3, 4$) léteznek [3]. A felhasznált számítástechnikai eljárást viszont úgy kellett kiválasztani, hogy $n = 10 - 15$ dimenzióban is hatékony legyen. Ez a szempont eleve kizárt minden hagyományos megközelítést (táblázatok, közelítő képletek, stb.). Egyetlen járható útnak a Monte Carlo módszerek mutatkoztak. Ezek között lényegében két eljárás kínálkozott a többdimenziós normális eloszlásfüggvény adott pontbeli értékének kiszámítására. Tegyük fel, hogy a

$$p = \Phi(h_1, \dots, h_n)$$

értéket akarjuk kiszámítani. Legyen D a következő:

$$D = \{ \underline{y} : \underline{y} \leq \underline{h} \}.$$

Ekkor nyilván

$$(2.1) \quad P = P\{\chi \in D\},$$

ahol χ egy normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó. A gyakorlati kiszámítás során D helyett a

$$D^* = \{ \underline{y} : -\underline{a} \leq \underline{y} \leq \underline{h} \}$$

tartományt használjuk, ahová az $\underline{a} = \underline{4}, \underline{5}$ vektort helyettesítjük. A tartomány ilyen csonkolása által elkövetett hiba elhanyagolhatóan kicsi a Monte Carlo módszerek hibáihoz képest, ha a szórása minden komponensnek 1, viszont ez a csonkolás a számításokat egyszerűbbé teszi. A (2.1) szerint tehát ha N db R korrelációs mátrixú normális eloszlású pszeudóvéletlen vektorváltozót generálunk és ha N_1 esik ezek közül a D tartományba, akkor az $\frac{N_1}{N}$ relatív gyakoriság értéke a p érték egy becslése lesz. A másik módszer a p érték meghatározására az

$$(2.2) \quad p = \int \dots \int_D \varphi(\underline{y}) d\underline{y}$$

integrál közelítő kiszámítása valamely Monte Carlo módszerrel, ahol $\varphi(\underline{y})$ a többdimenziós normális eloszlású sűrűségfüggvénye.

1. A relatív gyakoriság kiszámítása.

A feladat N darab $\underline{x}^{(i)}$ pszeudóvéletlen R korrelációmátrixú normális eloszlású vektorváltozó generálása. Képezzük először a

$$(2.3) \quad \xi = \sqrt{\frac{12}{k}} \left[(\xi_1 + \dots + \xi_k) - \frac{k}{2} \right]$$

összeget, ahol ξ_i a $(0, 1]$ -ben egyenletes eloszlású pszeudóvéletlen szám [1]. Az összeg eloszlása Ljapunov tétele szerint $k \rightarrow \infty$ esetén az $N(0, 1)$ standard normális eloszláshoz konvergál. Rögtön látható, hogy $M(\xi) = 0$ és $D(\xi) = 1$. Ha az így kapott ξ -ket egy $\underline{\eta}$ n dimenziós vektor egyes komponenseinek helyébe vesszük, akkor $\underline{\eta}$ már egy n dimenziós pszeudóvéletlen normális eloszlású vektorváltozó, amelynek komponensei függetlenek. Ezt az $\underline{\eta}$ vektort egy \underline{x} n dimenziós C korrelációs mátrixú normális eloszlású vektorváltozóvá legcélszerűbben egy A háromszögmátrixszal lehet transzformálni.

Vagyis legyen

$$(2.4) \quad \begin{aligned} x_1 &= a_{11} \cdot \eta_1, \\ x_2 &= a_{21} \cdot \eta_1 + a_{22} \eta_2, \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1} \cdot \eta_1 + a_{n2} \cdot \eta_2 + \dots + a_{nn} \cdot \eta_n. \end{aligned}$$

Az A mátrix a_{ij} elemét úgy határozzuk meg, hogy $M(x_k x_l) = r_{kl}$ legyen, ahol r_{kl} az R korrelációs mátrix eleme. Az A mátrix elemeinek kiszámítása után könnyen származtathatjuk a keresett $\underline{x}^{(1)}, \dots, \underline{x}^{(N)}$ vektorokat:

$$(2.5) \quad \underline{x}^{(i)} = A \cdot \underline{\eta}^{(i)}.$$

Megjegyezzük még, hogy a (2.3) összeg konvergenciáját speciális transzformációkkal gyorsítani lehet [2]. Vegyük a

$$\xi' = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^k \zeta_i$$

összeg segítségével képzett

$$\xi = \xi' - \frac{1}{20k} (3\xi' - \xi'^3)$$

valószínűségi változót a (2.3) összeg helyett, ahol ζ_i (0, 1]-ben egyenletes eloszlású szám. Az így képzett ξ pseudovéletlen szám empirikus eloszlása jobban megközelíti (adott k esetén) a normális eloszlást, mint a (2.3) alatti összegé.

II. A normális integrál kiszámítása.

Feladatunk az

$$I = \int \dots \int_D \varphi(\underline{x}) d\underline{x}$$

integrál kiszámítása. Az I becslésére használjuk a

$$(2.6) \quad \Theta_1 = \frac{1}{N} \prod_{j=1}^n (h_j + a) \sum_{i=1}^N \varphi(\underline{v}^{(i)})$$

valószínűségi változót, ahol $\underline{v}^{(i)}$ -k valószínűségi vektorváltozók, melyek komponensei függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $(-a, h_j)$, $j = 1, \dots, n$ intervallumban, valamint maguk a $\underline{v}^{(i)}$ -k is függetlenek egymástól. A (2.6) képlet lényegében az integrálandó tartomány "alapterületét" szorozza a sűrűségfüggvénynek az integrálandó tartományban felvett átlagértékével. Ezt a becslést integrálközépnek is nevezik.

Vizsgáljuk meg a (2.6) képletben alapuló eljárás hibáját. Θ_1 a

$$\xi_i = \prod_{j=1}^n (h_j + a) \cdot \varphi(\underline{v}^{(i)})$$

alakú valószínűségi változók számtani közepe:

$$\Theta_1 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \xi_i$$

Erre pedig ismert [1], hogy

$$M(\Theta_1) = I, \quad D^2(\Theta_1) = \frac{D^2(\xi)}{N},$$

$$P\{|\Theta_1 - M(\Theta_1)| \leq x_p D(\Theta_1)\} = p$$

valamilyen p valószínűségi szinttel (pl. $p = 0,997$ -hez $x_p = 3$ tartozik). Így valamilyen, p -hez közeli valószínűséggel igaz lesz a hibára:

$$(2.7) \quad |\Theta_1 - I| \leq x_p \frac{D(\xi)}{\sqrt{N}}.$$

Tehát a módszer hibája a $\varphi(\underline{\nu}^{(i)})$ valószínűségi változók szórásától függ nagy mértékben és fordítottan arányos a mintapontok számának négyzetgyökével. Az eloszlást kiszámító szubrutin pontosságának növelése szempontjából éppen a $\varphi(\underline{\nu}^{(i)})$ szórásának csökkentése látszott tanácsosnak. A gépi program elkészítése során több, az irodalomban javasolt szórás csökkentő eljárást kipróbáltam, de egyik sem bizonyult elég hatékonynak [2]; a mintapontok számának csökkenése ellenére a kiszámítás bonyolultsága miatt megnőtt a gépiidő azonos hiba mellett. Ezért lényegében az eredeti (2.6) képlet szerinti eljárást programoztam be, csak két további módosítást hajtottam végre az eljárásán.

Legyen K a következő n dimenziós kocka:

$$K = \{ \underline{x} : -a \leq \underline{x} \leq a \}.$$

Tekintettel arra, hogy $a = 4, 5$ érték esetén elhanyagolható kis δ hibával igaz, hogy

$$\int_{R^n} \dots \int \varphi(\underline{x}) d\underline{x} = 1 = \int_K \dots \int \varphi(\underline{x}) d\underline{x} + \delta,$$

ezért írhatjuk:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} I &= \int_{D^*} \dots \int \varphi(\underline{x}) d\underline{x} = 1 - \int_{R^n} \dots \int \varphi(\underline{x}) d\underline{x} + \int_{D^*} \dots \int \varphi(\underline{x}) d\underline{x} = \\ &= 1 - \left[\int_{R^n} \dots \int \varphi(\underline{x}) d\underline{x} - \int_{D^*} \dots \int \varphi(\underline{x}) d\underline{x} \right] = 1 - \int_{K-D^*} \dots \int \varphi(\underline{x}) d\underline{x} - \delta = \\ &= 1 - I_1 - \delta \approx 1 - I_1. \end{aligned}$$

A \approx jel azt jelenti, hogy az elkövetett hiba a kívánt pontossághoz és a kiszámításhoz felhasznált módszer egyéb hibáihoz képest nem jön számításba. I_1 -et a következő valószínűségi változóval becsülhetjük:

$$(2.9) \quad \Theta_2 = \frac{1}{N} \left[(2a)^n - \prod_{j=1}^n (h_j + a) \right] \cdot \sum_{i=1}^N \varphi(\underline{\nu}^{(i)}),$$

ahol $\underline{\nu}^{(i)}$ a $K - D^*$ tartományban egyenletes eloszlású véletlen pont. Vegyük még figyelembe, hogy a modell (1.2) felírásában szereplő p valószínűség értéke a gyakorlati alkalmazásokban 0.8 – 0.95 szokott lenni, így a modell optimumát kiszámító algoritmus folyamán a kiszámítandó normális integrálok értéke ennél nagyobb, tehát a megfelelő I_1 érték 0.05 – 0.2 között változik.

Azért jobb I helyett I_1 -et, vagyis a (2.6) összeg helyett a (2.9)-et kiszámítani, mert a $\varphi(\underline{\nu}^{(i)})$ valószínűségi változónak a $K - D^*$ tartományban sokkal kisebb szórása van, mint a

D^* tartományban.

Ez azt jelenti, hogy azonos hiba mellett kevesebb véletlen pont felvételével kaphatjuk meg I értékét, ha I közvetlen kiszámítása helyett (2.9) segítségével megbecsüljük I_1 -et és (2.8)-ból I_1 ismeretében meghatározzuk I értékét, vagyis a normális integrál kiszámításának hatékonysága nő. Szemléletesen a szórásnövekedés azt tükrözi, hogy kihagytuk az átlagolandó összegből a sűrűségfüggvény által az origó közelében felvett csúcst és a nagyobb értékeket.

Még egy módosítást hajtottam végre a normális integrál kiszámításában. A (2.9) átlag meghatározása a következő lépésekből tevődik össze a gépi programban.

1/ A program generál egy egyenletes eloszlású pszeudovéletlen pontot K -ban és megvizsgálja, hogy $K - D^*$ -ba esik-e (ha nem, akkor új véletlen pontot számít ki, ellenkező esetben a 2/ lépés következik).

2/ Kiszámítja a sűrűségfüggvényben szereplő kitevőt, az $S = \sum_k \sum_j R_{kj} v_k^{(i)} v_j^{(i)}$ kvadratikus alakot.

3/ Elvégzi az $\exp \left\{ -\frac{1}{2|R|} \cdot S \right\}$ érték meghatározását és hozzáadja Θ_2 eddig kiszámított részéhez.

Ha már N darab $\underline{v}^{(i)}$ vektor belesett $K - D^*$ -ba, akkor a Θ_2 -ben gyűjtött összeget beszorozza a még hiányzó állandókkal.

Ez a három lépés körülbelül egyenlő hosszú idő alatt játszódik le. Előfordulhat és ez az eredeti szubrutin második módosítása, hogy bizonyos esetekben a harmadik lépést kihagyjuk, anélkül, hogy ezzel számottevő hibát okoznánk. Ugyanis a (2.9) összegben bizonyos i indexekre a $\varphi(\underline{v}^{(i)})$ olyan kicsi lehet, hogy még a

$$(2.10) \quad \frac{1}{N} \cdot \left[(2a)^n - \prod_{j=1}^n (h_j + a) \right] \cdot \varphi(\underline{v}^{(i)}) = \frac{1}{N} \cdot T \cdot \varphi(\underline{v}^{(i)})$$

érték is kisebb mint pl. $\frac{I_1}{N \cdot 1000}$. (Lényeges, hogy a $\varphi(\underline{v}^{(i)})$ nagyságának megállapítása még a 3/ lépés, az e hatvány kiszámítása előtt megtörténhet az $S \geq -2|C| \cdot \ln \left(\frac{I_1 \cdot (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot |R|}{T \cdot 1000} \right)$ feltétel vizsgálatával.) Tehát ha ezeket elhagyjuk a (2.9) összegből – nem végezzük el a 3/ lépést – legfeljebb $\frac{I_1}{1000}$ hibát követünk el.

Ez a módosítás különösen akkor jelent nagy időnyereséget, ha az R korrelációs mátrixban nagy együtthatók vannak (0,7 – 0,9), akkor ugyanis a sűrűségfüggvény értékei a tengelyekre koncentrálnak, ott nagyobb értékeket vesz fel, míg a tengelyektől távolabb nagyon kicsi lesz, így sok olyan $\underline{v}^{(i)}$ pont lesz, amelyre a $\varphi(\underline{v}^{(i)})$ értékeket nem számítjuk ki kicsinysége miatt.

b/ Az (1.5) félegyenesen való haladás.

Tekintsük a

$$(2.11) \quad \underline{x}_k + \lambda(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k), \quad \lambda \geq 0$$

félegyeneset és határozzuk meg ennek a félegyenesnek a

$$(2.12) \quad \begin{aligned} G(\underline{x}) &\geq p, \\ \underline{a}'_i \underline{x} &\geq b_i, \quad i = 1, \dots, M \end{aligned}$$

feltételek által határolt tartományba eső részét és ezen a részen keressük meg az $f(\underline{x})$ célfüggvény minimumhelyét. A gépi kipróbálásban $f(\underline{x})$ egy lineáris függvény volt, így a fenti feladat a (2.11) félegyenesnek a (2.12) feltételek által határolt tartomány határával való P_h metszéspontjának meghatározására redukálódik.

Két eset lehetséges: P_h egy $\underline{a}'_i \underline{x} = b_i$ feltétel által meghatározott hipersíkon fekszik, vagy P_h a $G(\underline{x}) = p$ feltétel által adott felületen található. Az első esetben könnyen meghatározható a P_h pont, ha tudjuk, hogy melyik hipersíkon van, mert a

$$P_h = \underline{x}_k + \lambda_h (\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)$$

pontot helyettesítve a hipersík egyenletébe, a kapott

$$\underline{a}'_i (\underline{x}_k + \lambda_h (\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)) = b_i$$

egyenletből λ_h meghatározható. A második eset sokkal nehezebb, t.i. nem lehet elemi úton a $G(\underline{x})$ függvény (a normális eloszlásfüggvény) inverzét kiszámítani és így λ_h -t közvetlenül megkapni, ezért ebben az esetben másképp kell eljárni. Előbb azonban vizsgáljuk meg, hogyan lehet eldönteni, hogy az első vagy a második esettel állunk szemben egy adott (2.11) félegyenes esetén.

Tekintsük az

$$\underline{a}'_i (\underline{x}_k + \lambda_i (\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)) = b_i, \quad i = 1, \dots, M$$

egyenleteket a λ_i ismeretlenekkel, innen azt kapjuk, hogy

$$\lambda_i = \frac{b_i - \underline{a}'_i \underline{x}_k}{\underline{a}'_i (\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)}, \quad i = 1, \dots, M.$$

Válasszuk ki ezek közül a legkisebb pozitívat, a

$$\lambda_{\min} = \min_{i: \lambda_i > 0} \lambda_i$$

értéket (a negatív λ_i értékek a félegyenesnek a másik irányban lévő hipersíkokkal való metszéspontjai; nyilván a legkisebb pozitív λ_i adja az \underline{x}_k -hoz legközelebbi hipersíkot, az elsőt,

amelyet a félegyenes metsz), és tekintsük a következő pontot:

$$(2.13) \quad P_m = \underline{x}_k + \lambda_{\min}(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k).$$

Ha $G(P_m) \geq p$, akkor nyilván az első esettel állunk szemben és ekkor $P_m = P_h$, egyébként a második esettel van dolgunk. Tekintettel arra, hogy $G(P_m)$ kiszámítása pontatlan, itt egyrészt az átlagosnál nagyobb pontosságú számítást kell megkövetelni, másrészt, ha tudjuk hogy $G(P_m)$ kiszámítása ϵ hibával történik, akkor csak a

$$G(P_m) \geq p + \epsilon$$

egyenlőtlenség teljesülése esetén döntünk úgy, hogy az első esettel állunk szemben.

Térjünk vissza arra, hogyan találjuk meg a P_h pontot, ha az a (2.11) félegyenesnek a $G(x) = p$ egyenlet által megadott felülettel való metszéspontja. Az \underline{x}_k pontból kiindulva a (2.11) félegyenesen haladva veszünk több, egymásutáni P_i pontot és vizsgáljuk, hogy mikor hagyja el a (2.12) feltételek által adott tartományt, helyesebben mikor lesz

$$G(P_i) < p.$$

$G(x)$ kiszámításának lassúsága miatt törekednünk kell arra, hogy a lehető legkevesebb P_i pontot válasszuk ki, mert mindegyiken ki kell számítani a $G(P_i)$ értéket. A legcélszerűbbnek a következő eljárás tűnt. Kiindulunk az \underline{x}_k pontból, legyen például $\epsilon = 8$. Növeljük meg $\delta = \epsilon$ -nal a $\lambda_0 = 0$ értéket egészen addig, amíg a keletkezett új pont:

$$P_j = \underline{x}_k + j \cdot \delta \cdot (\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)$$

nem esik a $G(x) \geq p$ térrészen kívül, vagyis legyen P_j az első olyan pont a P_i , $i = 1, \dots, \dots, n, \dots$ pontok közül, amelyre

$$G(P_j) < p.$$

Ekkor vegyük az előző pontot, P_{j-1} -et kiindulópontnak, (ekkor $\lambda_1 = (j-1)\epsilon$) megfelezzük a lépésközt, vagyis $\delta = \epsilon/2$ -t veszünk és tovább lépünk: λ_1 -hez $\delta = \epsilon/2$ -t adunk, amíg a keletkezett

$$P_i = \underline{x}_k + (\lambda_1 + i \cdot \epsilon/2)(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)$$

pont nem hagyja el a (2.12) tartományt, vagyis amíg

$$G(P_i) < p$$

nem lesz. Ekkor $\lambda_2 = \lambda_1 + (i-1) \cdot \epsilon/2$, ezt az újból felezett lépésközzel $\delta = \epsilon/4$ -gyel növeljük, kiindulópontként P_{i-1} -et használva, stb. Természetesen, ha $i = 0$ adódna, akkor P_{i-1} helyett a P_{j-1} pontot vesszük kiindulópontnak. Ezt az eljárást ismétljük egészen $\delta = \epsilon/2^6$ -ig. (Egy adott tartomány és félegyenes esetén ez a legkisebb lépésszámú megközelítés, abban az

értelemben, hogy ha nem feleznénk a lépésközt, hanem harmadolnánk, akkor több lépést kellené tennünk.)

Ha egy adott k iterációs szám esetén $\lambda_6 < 0,5$ adódik, akkor $\epsilon = 0,2$ -t veszünk és az egész eljárást megismételjük. Erre azért van szükség, hogy finomabb lépéseket téve közelebb kerüljünk a határhoz, pontosabb eredményt kapjunk P_h -ra. Ha $\underline{x}_k^* - \underline{x}_k$ kicsi, akkor egy nagyobb ϵ is megfelel; a konvergencia miatt $\underline{x}_k^* - \underline{x}_k$ állandóan csökken k növekedésével, így a fentebbi lépegető eljárásban egyre kisebb lépéseket teszünk, így önmagától növekszik a határ megközelítésének pontossága. A gyakorlatban viszont kiderült, hogy az $\underline{x}_k^* - \underline{x}_k$ egy bizonyos határon túl nem csökken k növekedésével, így célszerűnek mutatkozott egy kisebb ϵ bevezetése.

A fentebb leírt lépegető eljárás egész jól működne, ha $G(\underline{x})$ értékét pontosan ki lehetne számítani. Egy reális gépi idő alatt (a CDC 3300-as gépen 0,8 sec alatt 1000 mintapontot véve) a $G(\underline{x})$ értékét a kétdimenziós esetben 5 %-os hibával lehet csak kiszámítani. Így előfordulhat, hogy a félegyenesen lépegetve már elhagytuk a $G(\underline{x}) \geq p$ egyenlőtlenséggel megadott térrészt, csak a hiba miatt még mindig a $G(P_i) > p$ teljesül, illetőleg megeshet, – ami kisebb baj – hogy jóval a $G(P_i) = p$ felület előtt megállunk, de ilyenkor a kisebb δ -k még csökkenthetik ezt a távolságot. Arra az esetre, ha már kiléptünk a megengedett megoldások tartományából, a következő két ellenintézkedést programoztam be.

Ha azt tapasztaljuk, hogy egy adott $\delta = \epsilon/2^i$ esetén P_j az első pont, amely már a határon kívül esik, vagyis $G(P_j) < p$, akkor nem a P_{j-1} -et, az előző pontot vesszük újabb kiindulópontnak, hanem a még eggyel előbbit, vagyis P_{j-2} -t, ilyenkor $\lambda_i = \lambda_{i-1} + (j-2)\delta$ lesz. Ennek az az előnye, hogy ha már a P_{j-1} pont is kívülesett, csak éppen a szubrutin hibás eredményt adott, akkor nagyon valószínű hogy a P_{j-2} pont esetében nem, vagy az ellenkező irányban hibázott a szubrutin, vagyis a P_{j-2} még bent van a tartományban.

Nyilván a fentebbi eljárás beprogramozása még nem nyújt biztosítékot arra nézve, hogy nem kerülünk ki a (2.12) feltételek által határolt tartományból.

Ha kikerültünk, ezt két jeltől lehet észrevenni: a kapott $\underline{x}_{k+1} = P_h$ pontot véve új megengedett megoldásnak, amire valójában $G(\underline{x}_{k+1}) < p$, az ebből képzett új lineáris feladat optimális megoldásában $y > 0$, valamint azt tapasztaljuk, hogy az ebből képzett (2.11) félegyenesen haladva a minimum értéke nem csökken, hanem növekszik.

Ekkor csináljuk a következőt: tekintjük az \underline{x}_k és az \underline{x}_{k+1} pontokat összekötő szakaszt és ezen a szakaszon visszalépünk a következő szabály szerint; ha a szakasz hossza kisebb 0,2-nél, akkor $q_{\min} = 0,2$ -t veszünk, ellenkező esetben $q_{\min} = 0,05$ -öt véve új megengedett \underline{x}_{k+2} megoldást veszünk a rossznak bizonyult \underline{x}_{k+1} helyett:

$$\underline{x}_{k+2} = q_{\min} \underline{x}_k + (1 - q_{\min}) \underline{x}_{k+1} ,$$

vagyis visszalépünk az $\underline{x}_k - \underline{x}_{k+1}$ szakaszon \underline{x}_{k+1} -ből \underline{x}_k felé a szakasz hosszának ötödreszével vagy huszadrészével.

Ezzel az \underline{x}_{k+2} új megengedett megoldással újra készítünk egy lineáris problémát. Ha még mindig $y > 0$, vagy a minimum növekedne az

$$\underline{x}_{k+2} + \lambda(\underline{x}_{k+2}^* - \underline{x}_{k+2}), \quad \lambda > 0$$

félegyenes mentén, akkor \underline{x}_{k+2} helyett az

$$\underline{x}_{k+3} = 2q_{\min}\underline{x}_k + (1 - 2q_{\min})\underline{x}_{k+1}$$

értéket tekintjük új megengedett megoldásnak, stb. Ez a két vészkijárat elegendőnek mutatkozott a gyakorlatban arra, hogy a program normálisan lefusson.

A fenti módosított lépegető algoritmusnak, nevezetesen a két ponttal való visszalépésnek egy nagy előnye, hogy ilyen módon automatikusan pontosabban számol a program, mert a $G(\underline{x}) = p$ felület közelében sokkal többször számítja ki az eloszlásfüggvény értékét, így végső soron a mintaszám növekszik.

Nyilvánvaló, hogy az egész eljárás hatékonysága attól függ, hogy a $G(P_i)$ értékeket milyen pontosan számítom ki. A gépidő csökkentése szempontjából pedig ajánlatos lenne minél kisebb pontossággal (minél kevesebb véletlen pontot felvéve) meghatározni a normális eloszlásfüggvény értékét a P_i pontokban. Mivel a lépegető eljárás folyamán csak a $G(P_i) > p$ feltétel teljesülésének eldöntéséről van szó, a valószínűséget "szekvenciálisan" fogom meghatározni. Ez azt jelenti, hogy először kiszámítom a $p_1 = G(P_i)$ értéket 10 %-os hibával, amihez kevés véletlen pont és gépidő szükséges. Ha $|p_1 - p| > 0,15$ (a biztonság kedvéért 0,1 helyett 0,15-öt írunk, mivel a normális eloszlás konkrét értékét kiszámító rutinról csak azt mondhatom, hogy elég nagy valószínűséggel lesz legfeljebb 10 %-os a hiba), akkor döntök a $p_1 = G(P_i) > p$ egyenlőtlenség teljesülése felől. Ha p_1 és p eltérése kisebb mint 0,15, akkor kiszámítom a $p_2 = G(P_i)$ értéket 5 %-os hibával és vizsgálom a $|p_2 - p| > 0,08$ egyenlőtlenséget; a teljesülés esetén döntök $p_2 > p$ felől. Ellenkező esetben megint fokozom a pontosságot, 2,5 %-os hibával számítom ki a normális eloszlásfüggvény értékét és ekkor mindenképpen döntök, hogy a $G(P_i) > p$ feltétel teljesül-e.

Figyelembe kell még venni, hogy amíg messze vagyunk az eredeti (1.3) probléma optimális megoldásától, nem érdemes nagyon pontosan meghatározni a (2.11) félegyenesnek a (2.12) feltételek által határolt tartomány határával való P_h metszéspontját. Ezért a programot három fázisban futtatjuk le. Az első fázisban a lépegető eljárás folyamán csak 10 %-os hibával határozzuk meg a $G(P_i)$ értékeket. A második fázisban 10 %-os vagy 5 %-os pontossággal, attól függően, hogy a szekvenciális valószínűségvizsgálat szükségessé teszi-e. A harmadik fázisban pedig 10 %-os, 5 %-os, 2,5 %-os pontossággal határozzuk meg a szükségleteknek megfelelően a $G(P_i)$ függvényértékeket. Az egyes fázisok befejezésének feltételeit a következő alpontban fogjuk megvizsgálni.

c/ Az iterálás befejezésének feltétele.

Azt kell megvizsgálni, hogy mikor jutunk már elég közel az optimális megoldáshoz, milyen kritérium alapján állítsuk meg az iterálást. Az első kézenfekvő kritérium, ha két egymásutáni megengedett megoldáson a célfüggvény értéke kicsivel, pl. a célfüggvény értékének 1 %-ával változna csak, akkor megállhatunk. De ez önmagában nem elég, mert az általunk betáplált első megoldás és a gép által kiszámított első megengedett megoldás ennek a feltételnek mindig eleget tesz.

Ezért célszerűnek mutatkozott a következő kritériumot másodikként bevenni, nevezetesen azt, hogy az utolsó két megengedett megoldás egyes koordinátáinak eltérése kisebb legyen mint a megengedett megoldásvektor nagyságának pl. 1 %-a. Ezzel viszont az volt a probléma, hogy ha a félegyenes a valóságban egy $a'_i x = b_i$ hipersíkot metszett, az eloszlást kiszámító szubrutin hibázott és azt mutatta, mintha ez a metszéspont már a megengedett megoldások halmazán kívül lenne, akkor a lépegető eljárásra kerül sor és könnyen elképzelhető, hogy valamivel a hipersík előtt meg fog állni. A következő iterációs lépésben majdnem ugyanazt az irányt fogjuk a (2.11) félegyenesnek kapni és így a következő megengedett megoldás valamivel még közelebb kerül a hipersíkhhoz. A másodikként említett kritérium alapján ezt a két egymásutáni megoldást már optimálisnak venné a program.

Nagyon könnyen előfordulhat az is, főleg az optimális megoldáshoz közel, hogy $\lambda_6 = 0$ adódik, vagyis már nem tud továbblépni az eljárás, a fenti kritérium ekkor is megállítaná a programot. Ezen esetek kiküszöbölése végett csak három egymásutáni megengedett megoldás fentiekben megfogalmazott "közelsége" esetén fogjuk megállítani az iteráló eljárást.

A b/ pontban említett fázisok végét úgy állapítjuk meg, hogy a fenti kritériumokat alkalmazzuk a következő módon. Az első fázis akkor ér véget, ha a célfüggvény értéke az utolsó két megengedett megoldáson legfeljebb 2 %-kal változik és a három legutolsó megengedett megoldás fentiekben leírt eltérése szintén csak 2 %-os. A második fázisban már 1 %-ot követelünk meg, a harmadikban pedig 0,5 %-ot.

3. A MODELL KIÉRTÉKELÉSE, SZÁMITÁSI EREDMÉNYEK

A modell kiértékelése több adatcsoport segítségével történt. Minden adatcsoportban azonban a $g_i(x)$ függvények és az $f(x)$ célfüggvény az egyszerűség kedvéért lineáris volt, két sztochasztikus és két lineáris determinisztikus feltételt vettem, az x pedig két dimenziós vektor volt.

A próbák megmutatták, hogy ha a $G(x) = p$ által generált felület a lineáris feltételek által generált térrészen kívül esik (vagyis a $G(x) \geq p$ térrész tartalmazza az $a'_i x \geq b_i$ feltételek által adott poliédert; legalábbis a miáltalunk vizsgált részen), akkor a módszer szimplex algoritmussá zsugorodik, a poliéder csúcspontjain mozogva éri el az optimumot. Ellenkező esetben

is, amíg a normális eloszlásfüggvény nivófelületébe nem ütközik, csúcspontokon haladva működik az algoritmus.

A módszer jobb bemutatása érdekében egy olyan példát vettem illusztrálásként, amelyen a $G(\underline{x}) \geq p$ feltétel által meghatározott térrész benne van a lineáris feltételek által adott poliéderben, vagyis a valószínűségi feltétel "megtartja" az egymásutáni megengedett megoldásokat. Az algoritmus gyorsasága, helyesebben az iterálások száma függ attól, hogy milyen "merek" a $G(\underline{x}) = p$ felület; gyakorlatilag ez azzal mérhető le, hogy a $g_i(\underline{x}) \geq \beta_i$ feltételek (itt β_i valós) által adott hipersíkok milyen szögben metszik egymást.

A bemutatott eredmények a következő modellre vonatkoznak:

$$p \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 6 \geq \beta_1 \\ x_1 + 8x_2 - 8 \geq \beta_2 \end{array} \right\} \geq p,$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 4,$$

$$3x_1 + x_2 \geq 3,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$$\min(x_1 + x_2).$$

Itt β_1 és β_2 együttes eloszlása normális, nulla a várható értékük, 1 a szórásuk és r a korrelációs együtthatójuk. Ha a kiindulásul vett determinisztikus problémát vizsgáljuk, vagyis a

$$3x_1 + x_2 \geq 6,$$

$$x_1 + 8x_2 \geq 8,$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 4,$$

$$3x_1 + x_2 \geq 3,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$$\min(x_1 + x_2)$$

feladatot, az optimális megoldásra és a minimalizálandó célfüggvény értékére azt kapjuk, hogy

$$\underline{x}_{\text{opt}} = \left(\frac{40}{23}, \frac{18}{23} \right) \sim (1,739, 0,782), \quad f(\underline{x}_{\text{opt}}) \sim 2,521,$$

ami lényegesen különbözik a sztohasztizált modell eredményeitől, akármilyen korrelációs együtthatót véve.

A következő értékeket kaptuk a próbafuttatások alkalmával az $\underline{x}_{\text{opt}}$ optimális vektorra és az $f(\underline{x}_{\text{opt}})$ célfüggvény értékre $p = 0,8$ valószínűség mellett, változó r korrelációs együtthatóra:

r	\underline{x}_{opt}		$f(\underline{x}_{opt})$
- 0,9	1,878	1,015	2,893
- 0,2	1,942	1,001	2,943
+ 0,2	1,984	0,964	2,948
+ 0,5	2,006	0,944	2,950
+ 0,9	2,065	0,888	2,953

Látható, hogy a korrelációs együttható növelésével nő az optimum értéke, ami összhangban van azzal a valószínűségszámítási eredménnyel, hogy a korrelációs együttható növelésével csökken egy adott pontban az eloszlásfüggvény értéke (hasonló tétel többdimenzióban is igaz.)

A $p = 0,95$ esetre is kipróbáltam a programot, ez az eset azért fontos, mert a modell egyik alkalmazási területe a megbízhatóságelmélet lenne. A kapott eredmények:

r	\underline{x}_{opt}		$f(\underline{x}_{opt})$
+ 0,2	2,161	0,961	3,1227
+ 0,9	2,279	0,931	3,2108

A fentebbi két táblázatot a program ALGOL nyelvű változatának lefuttatásával kaptam, ebben a normális eloszlás konkrét értékeit a (2.6) képlet segítségével számítottam. Egy-egy adatscsoport lefuttatásához átlag 20 percre volt szükség a CDC 3300-as gépen. Különösen sokáig tartott a $p = 0,95$, valamint a nagy korrelációjú esetek lefuttatása (30-35 perc), ez annak tulajdonítható, hogy ezekben az esetekben a normális eloszlást számító rutin a legkevésbé hatékony.

A program FORTRAN nyelvbe való átírása, valamint a normális eloszlásfüggvények a (2.9) képlet alapján történő kiszámítása kb. 5 percre csökkentette a fentebbi konkrét példa futási idejét. Az eloszlásfüggvény konkrét értékét kiszámító módosított szubrutin különösen azokban az esetekben számol gyorsan és viszonylag pontosabban, amelyekben az előző (2.6) alapján működő rutin nehézkesen és sokáig számolt (nagy valószínűség, nagy korreláció) [2]. Ez a (2.9) képlet alapján történő számításnak és a 2b/-ben leírt két másik módosításnak köszönhető.

Néhány adatot közlünk még a normális eloszlásfüggvénynek adott pontban felvett értékét kiszámító szubrutin működési gyorsaságáról. Az eredeti, ALGOL nyelven a (2.6) képlet alapján működő szubrutin 3 sec alatt számított ki 1000 mintapont segítségével egy eloszlásértéket a kétdimenziós esetben a CDC 3300 gépen, ennek hibája a $p = 0,8$ érték közelében 6 %- 14 % volt a korreláció nagyságától függően. Teljesen ugyanezt a szubrutint megírva FORTRAN nyelven a futási idő 1 sec-ra csökkent. A legújabb szubrutin, amely a (2.9) képlet alapján dolgozik és minden 2b/-ben megemlített módosítást tartalmaz, 0,1 sec alatt számít ki egy kétdimenziós eloszlásfüggvényértéket 5 %-os hibával. Ez a hiba független a korrelációtól, de a valószínűség értéktől nem; nagyobb valószínűsége hatékonyabban számol. Ezt a szubrutint már magasabb dimenzióban is kipróbáltam: az ötdimenziós esetben $p = 0,9$ valószínűség esetén 5 %-os hibával 0,6 sec alatt számított ki egy értéket.

Megjegyezzük még, hogy a program további gyorsítására egy speciális szimplex írása lenne. Ugyanis az egymásutáni iterációs lépésekben megoldandó lineáris programozási feladatok egymástól csak két sorban különböznek, ami valószínűsíti, hogy optimális megoldásaik sem különböznek nagyon és ezt fel is lehet használni.

I r o d a l o m

- [1] N.P. Buszlenko – D.I. Golenko – Ju.A. Szejgyer – I.M. Szobol – V.G. Szragovics, Monte Carlo módszerek. Műszaki Könyvkiadó 1965.
- [2] Deák István, Egy sztohasztikus programozási modell számítógépes kiértékelése. (Egyetemi doktori disszertáció ELTE TTK 1971.)
- [3] S.S. Gupta, Probability integrals of Multivariate Normal and t distribution, Ann. Math. Stat. 34 (1963) N. 3 pp. 792-829.
- [4] Prékopa A., Sztohasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról. (Doktori értekezés, TMB. 1970)
- [5] G. Zoutendijk, Methods of feasible directions. Elsevir publishing company, Amsterdam–London–New York–Princeton (1960).

Beérkezett: 1972 március 15.

S u m m a r y

Computer evaluation of a stochastic programming model

The paper discusses a stochastic programming model, developed by A. Prékopa and tested on a computer. Chief results of the article are the elimination of the difficulties of computer application and the description of an efficient algorithm for the computation of the concrete values of the multidimensional normal distribution function.

Р е з ю м е

Оценка одной проблемы стохастического программирования

В статье даётся оценка одной проблемы стохастического программирования, разработанной А. Прекопа, с помощью ЦВМ. Преодоление трудностей при применении ЦВМ и описание эффективного алгоритма для получения конкретных значений многомерной функции нормального распределения являются главными результатами работы.

MARGINÁLIS ÉRTÉKEK A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁSBAN

Klafszy Emil

BEVEZETÉS

A dolgozatban megmutatjuk, hogy azok a perturbációs vizsgálatok, melyeket Mills [4] és Williams [6] a lineáris programozásra végeztek, átültethetők a geometriai programozásra is, és a geometriai programozásnál kapott eredmények teljesen megegyeznek a lineáris programozásnál kapottakkal. A geometriai programozásban perturbációs vizsgálatokat már Duffin – Peterson – Zener az [1] könyvükben végeztek (Appendix B, pp. 247-254), azonban az itt tárgyalásra kerülő probléma ettől eltérő természetű. A geometriai programozást illetően a szerző [3] dolgozatára fogunk hivatkozni.

A tárgyalásra kerülő probléma a következő: Adott egy geometriai programozási feladat és a duálja. Jelölje az $A = (a_i) = (a^{(j)}) = (\alpha_{ij})$ $m \times n$ -es mátrix, a $b = (\beta_j)$ n dimenziós vektor és a $c = (\gamma_i)$ m dimenziós vektor a geometriai programozás együtthatóit. Legyen az $I = \{1, 2, \dots, m\}$ index halmaz az I_1, I_2, \dots, I_p diszjunkt index halmazokra particionálva. Jelölje $x = (\xi_i)$ m dimenziós és $y = (\eta_j)$ n dimenziós vektor a geometriai programozás változóit. A jelöléseket az alábbi sémán szemléltetjük:

	$a^{(1)} a^{(2)}$	$a^{(n)}$	c	x																														
$I \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array} \right\}$	a_1 a_2 \vdots \vdots a_m	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">a_{11}</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">a_{12}</td><td style="padding: 2px 10px;">\dots</td><td style="padding: 2px 10px;">a_{1n}</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">a_{21}</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">a_{22}</td><td style="padding: 2px 10px;">\dots</td><td style="padding: 2px 10px;">a_{2n}</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">\vdots</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">\vdots</td><td style="padding: 2px 10px;">\dots</td><td style="padding: 2px 10px;">\vdots</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">\vdots</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">\vdots</td><td style="padding: 2px 10px;">\dots</td><td style="padding: 2px 10px;">\vdots</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">a_{m1}</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">a_{m2}</td><td style="padding: 2px 10px;">\dots</td><td style="padding: 2px 10px;">a_{mn}</td></tr> </table>	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">γ_1</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">γ_2</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">\vdots</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">\vdots</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">γ_m</td></tr> </table>	γ_1	γ_2	\vdots	\vdots	γ_m	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">ξ_1</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">ξ_2</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">\vdots</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">\vdots</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">ξ_m</td></tr> </table>	ξ_1	ξ_2	\vdots	\vdots	ξ_m
a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}																															
a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}																															
\vdots	\vdots	\dots	\vdots																															
\vdots	\vdots	\dots	\vdots																															
a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}																															
γ_1																																		
γ_2																																		
\vdots																																		
\vdots																																		
γ_m																																		
ξ_1																																		
ξ_2																																		
\vdots																																		
\vdots																																		
ξ_m																																		
b	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">β_1</td><td style="padding: 2px 10px;">β_2</td><td style="padding: 2px 10px;">\dots</td><td style="padding: 2px 10px;">β_n</td></tr> </table>				β_1	β_2	\dots	β_n																										
β_1	β_2	\dots	β_n																															
y	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">η_1</td><td style="padding: 2px 10px;">η_2</td><td style="padding: 2px 10px;">\dots</td><td style="padding: 2px 10px;">η_n</td></tr> </table>				η_1	η_2	\dots	η_n																										
η_1	η_2	\dots	η_n																															

Primál feladat. Meghatározandó

sup by,

feltéve, hogy

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leq 1, \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Duál feladat. Meghatározandó

$$\inf \left(xc + \sum_{k=1}^p \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}} \right),$$

feltéve, hogy

$$xA = b,$$

$$x \geq 0,$$

A geometriai programozás dualitás tétele szerint, ha mindkét feladat konzisztens, akkor a szupremum megegyezik az infimummal. Ezt a közös értéket nevezzük a *geometriai programozás értékének*. A továbbiakban rögzítsük a particionálást, és a geometriai programozási feladatot $[A, b, c]$ együtthatójú feladatnak nevezzük. Legyenek $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ az A, b, c mátrix, illetve vektorokkal megegyező dimenziójúak. A probléma: *mit mondhatunk az $[(A + \tau \hat{A}), (b + \tau \hat{b}), (c + \tau \hat{c})]$ együtthatójú feladat értékéről zérushoz közeli τ esetében.*

A probléma megoldása során szükségünk lesz a geometriai programozás optimális megoldása és a *Lagrange függvény* kapcsolatára, valamint a lineáris programozásbani analóg *regularitás* fogalmára. Ezeket külön (1. §, 2. §) tárgyaljuk, majd ezek felhasználásával a 3. §-ban adjuk a probléma megoldását.

1. § A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁS LAGRANGE-FÜGGVÉNYE

Ebben a fejezetben egy összefüggést adunk a geometriai programozás optimális megoldásai és a programozási feladathoz tartozó Lagrange függvény nyeregpontja között.

Az egyszerűsítés kedvéért az alábbi jelölést vezetjük be:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^p \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{x_i}}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} x_i}} .$$

Definíció. Az $[A, b, c]$ együtthatójú, és adott particiójú geometriai programozás Lagrange-függvényének nevezzük a

$$\Phi(x, y) = xc + by - xAy + \psi(x), \quad x \geq 0$$

függvényt. Az x^*, y^* pontot a Lagrange-függvény nyeregpontjának mondjuk, ha tetszőleges y és $x \geq 0$ vektorokra:

$$\Phi(x^*, y) \leq \Phi(x^*, y^*) \leq \Phi(x, y^*) .$$

Látható, hogy az első három tag csak az A, b, c együtthatóktól, az utolsó csak a particionálástól függ.

Tétel. Az x^*, y^* vektorpár akkor és csak akkor optimális megoldása a geometriai programozásnak, ha a Lagrange függvénynek nyeregpontja.

Bizonyítás. a/ Legyenek x^*, y^* optimális megoldások. Ekkor a geometriai programozás dualitási tétele szerint

$$x^*c + \psi(x^*) = by^* .$$

A nyeregpont egyenlőtlenség baloldala

$$\Phi(x^*, y) \leq \Phi(x^*, y^*) ,$$

azaz

$$x^*c + by - x^*Ay + \psi(x^*) \leq x^*c + by^* - x^*Ay^* + \psi(x^*)$$

egyenlőséggel teljesül.

A nyeregpont egyenlőtlenség jobb oldalának

$$\Phi(x^*, y^*) \leq \Phi(x, y^*)$$

teljesüléséhez csak azt kell belátni, hogy az

$$xAy^* \leq xc + \psi(x)$$

egyenlőtlenség teljesül az $x \geq 0$ esetben. Ezt a geometriai egyenlőtlenség felhasználásával egyszerű számolással beláthatjuk. Mivel y^* a primál feladat megoldása, így:

$$1 \geq \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i}, \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Erre a geometriai egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} 1 &\geq \left(\sum_{i \in I_k} e^{a_i y^* - \gamma_i} \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i} \geq \prod_{i \in I_k} \left(\frac{e^{a_i y^* - \gamma_i}}{\xi_i} \right)^{\xi_i} \cdot \left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i} = \\ &= \frac{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} e^{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i a_i y^* - \sum_{i \in I_k} \xi_i \gamma_i \right)}. \end{aligned}$$

Ezt minden k -ra összeszorozva:

$$1 \geq \prod_{k=1}^p \frac{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} e^{\sum_{i \in I} \xi_i a_i y^* - \sum_{i \in I} \xi_i \gamma_i} \geq \prod_{k=1}^p \frac{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} e^{x A y^* - x c}.$$

Logaritmizálva kapjuk, hogy

$$0 \geq \ln \prod_{k=1}^p \frac{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} + x A y^* - x c,$$

azaz

$$x c + \psi(x) \geq x A y^*.$$

Ezzel a tétel egyik irányát beláttuk.

b/ Tegyük fel, hogy x^*, y^* nyeregpontja a Lagrange függvénynek. A nyeregpont egyenlőtlenség baloldalából, a $\Phi(x^*, y) \leq \Phi(x^*, y^*)$ egyenlőtlenségből kiindulva kapjuk, hogy

$$(b - x^* A) y \leq (b - x^* A) y^*$$

egyenlőtlenség minden y vektorra fennáll. De ez csak úgy lehet, hogy ha $b - x^* A = 0$, mert különben y alkalmas választásával ez nem teljesülne. Így x^* a duál feladat lehetséges megoldása. A nyeregpont egyenlőtlenség jobboldalából, a $\Phi(x^*, y^*) \leq \Phi(x, y^*)$ egyenlőtlenségből kiindulva kapjuk, hogy az

$$(1) \quad x^* c - x^* A y^* + \psi(x^*) \leq x c - x A y^* + \psi(x)$$

egyenlőtlenség fennáll minden $x \geq 0$ vektorra.

Mint előbb láttuk, az x^* a duál feladat lehetséges megoldása, azaz $x^* A = b$, s ezt (1)-be

helyettesítve kapjuk, hogy

$$(2) \quad x^*c - by^* + \psi(x^*) \leq xc - xAy^* + \psi(x),$$

minden $x \geq 0$ -ra.

De ekkor az x helyébe az $x + x^*$ vektort téve:

$$x^*c - by^* + \psi(x^*) \leq xc + x^*c - xAy^* - x^*Ay^* + \psi(x + x^*),$$

azaz:

$$\psi(x^*) \leq xc - xAy^* + \psi(x + x^*).$$

A ψ függvény konvexitása miatt azonban a

$$\psi(x^*) \leq xc - xAy^* + \psi(x) + \psi(x^*)$$

egyenlőtlenség is fennáll, s így az

$$(3) \quad xAy^* \leq xc + \psi(x)$$

egyenlőtlenség teljesül minden $x \geq 0$ esetben.

Rögzítsünk egy tetszőleges k_0 indexet, és legyen

$$\xi_i = \begin{cases} e^{a_i y^* - \gamma_i}, & \text{ha } i \in I_{k_0} \\ 0, & \text{ha } i \notin I_{k_0}. \end{cases}$$

Helyettesítsük ezt (3)-ba, először csak az $i \notin I_{k_0}$ esetre:

$$\sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i (a_i y^* - \gamma_i) \leq \sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i \ln \xi_i - \ln \left(\sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i}.$$

Ezután ξ_i értékét az $i \in I_{k_0}$ esetben is behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i} (a_i y^* - \gamma_i) &\leq \sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i} (a_i y^* - \gamma_i) - \\ &\quad - \ln \left(\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i} \right)^{\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i}}. \end{aligned}$$

Rendezve:

$$\ln \left(\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i} \right) \sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i} \leq 0,$$

azaz

$$\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i} \leq 1.$$

Ez, minthogy minden k_0 indexre fennáll, azt adja, hogy y^* lehetséges megoldása a primál feladatnak.

A (2) egyenlőtlenséget $x = 0$ pontra alkalmazva kapjuk, hogy

$$(4) \quad x^* c + \psi(x^*) \leq b y^*.$$

A (3) egyenlőtlenséget $x = x^*$ pontra alkalmazva kapjuk, hogy

$$(5) \quad b y^* \leq x^* c + \psi(x^*).$$

A (4) és (5) egybevetéséből adódik, hogy

$$x^* c + \psi(x^*) = b y^*,$$

azaz x^*, y^* megoldások optimálisak is. ■

Megjegyezzük, hogy a tétel első része – "az optimális megoldások nyeregpontjai a Lagrange függvénynek" – egy általános dualitási tétel következményeként található Rockafellar [5] könyvében (pp. 326).

2.§. REGULÁRIS GEOMETRIAI PROGRAMOZÁS

A perturbációs vizsgálatoknál fontos szerepet játszik a regularitás.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a geometriai programozási primál feladat reguláris, ha teljesül az alábbi *primál regularitási feltétel*; Az

$$Ay \leq 0,$$

$$by \geq 0,$$

$$y \neq 0$$

egyenlőtlenségrendszernek *nincs* megoldása.

Azt mondjuk, hogy a geometriai programozási duál feladat reguláris, ha teljesül az alábbi *duál regularitási feltétel*: Az

$$\begin{aligned} xA &= 0, \\ x &\geq 0, \\ xc + \psi(x) &\leq 0, \\ x &\neq 0 \end{aligned}$$

egyenlőtlenségrendszernek *nincs* megoldása.

A geometriai programozást regulárisnak nevezzük, ha az primál reguláris is és duál reguláris is.

Az alábbi tétel a regularitási feltételek és feltételi halmazok konzisztenciája között ad kapcsolatot. (Mielőtt a tételt kimondanánk, emlékeztetünk két definícióra: *Kanonikusnak* nevezzük a duál feladatot, ha az $xA = b$, $x > 0$ egyenlőtlenség megoldható. *Szuperkonzisztensnek* nevezzük a primál feladatot; ha a $\sum_{i \in I_k} e^{a_i y} - \gamma_i < 1$, ($k = 1, 2, \dots, p$) egyenlőtlenség rendszer megoldható.)

1. Tétel. a/ *Ha a primál regularitás teljesül, akkor a duál feladat kanonikus.*

b/ *A duál regularitás akkor és csak akkor teljesül, ha a primál feladat szuperkonzisztens.*

Bizonyítás. a/ Az $Ay \leq 0$, $by \geq 0$, $y \neq 0$ egyenlőtlenségrendszer nemmegoldhatósága azt jelenti, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_m, -b$ vektorok által generált kúp duálisa csak a zérus elemet tartalmazza. De ekkor ez a kúp kell, hogy az egész teret kiadja, azaz előállítható a következő vektor

$$b - (a_1 + a_2 + \dots + a_m) = \sum_{i=1}^m \xi_i a_i + \vartheta(-b)$$

úgy, hogy $\xi_i \geq 0$, $\vartheta \geq 0$.

Ebből:

$$b = \sum_{i=1}^m \left(\frac{1 + \xi_i}{1 + \vartheta} \right) a_i$$

legyen $\bar{\xi}_i = \frac{1 + \xi_i}{1 + \vartheta}$ és így $b = \bar{x}A$, $\bar{x} > 0$.

Ezzel a tétel a/ részét igazoltuk.

b/ A duál regularitás azt jelenti, hogy az

$$\begin{aligned} xA &= 0, \\ x &\geq 0, \\ \sum_{i=1}^m \xi_i &= 1 \end{aligned}$$

feltételű és

$$\min(xc + \psi(x))$$

célfüggvényű geometriai programozási feladat vagy nem konzisztens vagy a célfüggvény minimuma pozitív.

Az ennek megfelelő primál párja:

$$\sum_{i \in I_k} e^{(a_i, 1)(y, \eta) - \gamma_i} \leq 1, \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

$$\sup \{ (0, 1) \cdot (y, \eta) \}.$$

Azaz:

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leq e^{-\eta}, \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

$$\sup \eta.$$

Ezen primál feladat mindig konzisztens. Ha a duál nem konzisztens, akkor $\eta \rightarrow \infty$, azaz

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \rightarrow 0.$$

Ha a duál konzisztens, akkor a dualitási tétel szerint van olyan primál megoldás, melyre $\eta > 0$, tehát szuperkonzisztens a feladat.

Fordítva, ha a primál szuperkonzisztens, akkor a geometriai programozás fő lemmája alapján az $xA = 0$, $x \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \xi_i = 1$ egyenlőtlenség minden megoldására $xc + \psi(x) > 0$. De így a duál regularitás sem teljesülhet. ■

A következő tétel a regularitási feltételek és az optimális megoldáshalmazok közötti kapcsolatot mutatja. Jelölje \mathcal{P} a primál feladat feltételi halmazát, \mathcal{P}^* a primál feladat optimális megoldásainak halmazát, és hasonló jelöl a \mathcal{D} , \mathcal{D}^* a duál feladatra.

2. Tétel: a/ *A nem üres \mathcal{P}^* akkor és csak akkor korlátos, ha teljesül a primál regularitási feltétel.*

b/ *Ha \mathcal{P} nem üres és a primál regularitási feltétel teljesül, akkor \mathcal{P}^* sem üres.*

c/ *A nem üres \mathcal{D}^* akkor és csak akkor korlátos, ha teljesül a duál regularitási feltétel.*

d/ *Ha \mathcal{D} nem üres és a duál regularitási feltétel teljesül, akkor \mathcal{D}^* sem üres.*

Bizonyítás. a/ A [3] dolgozat 3.§. 2 következménye szerint a nem üres \mathcal{P}_ω felső nívó-halmaz korlátosságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy az A mátrix sorvektorai és a $-b$ vektor által generált kúp kiadja az egész $R^{(n)}$ teret. Ez azonban a Farkas lemma szerint

equivalens a primál regularitási feltétellel.

b/ A primál regularitás biztosítja, hogy tetszőleges felső nívóhalmaz korlátos, így azon a célfüggvény felveszi szuprémumát.

c/ Először azt látjuk be, hogy ha \mathcal{L}^* nem korlátos, akkor nem teljesül a duál regularitás. Ugyanis ekkor van olyan $x_1, x_2, \dots, x_q, \dots \in \mathcal{L}^*$ sorozat, hogy $\|x\| \rightarrow \infty \cdot \left(\|x\| = \sum_{i=1}^m \xi_i \right)$.

Legyen $\tilde{x}_q = \frac{x_q}{\|x_q\|}$.

Az \tilde{x}_q sorozatból kiválasztható egy konvergens részsorozat, (tegyük fel, hogy maga az \tilde{x}_q sorozat az), amelynek határpontját jelölje \tilde{x} . Az x_q kielégíti a feltételi egyenletet, azaz $x_q A = b$.

Ebből $\|x_q\|$ normával való osztással

$$\tilde{x}_q A = \frac{1}{\|x_q\|} b.$$

Igy az \tilde{x} torlódási pontra kapjuk, hogy

$$\tilde{x}A = 0, \quad \|\tilde{x}\| = 1, \quad \tilde{x} \geq 0.$$

A célfüggvényben pedig az

$$\omega = x_q c + \psi(x_q) = \|x_q\| (\tilde{x}_q c + \psi(\tilde{x}_q)),$$

azaz az

$$\frac{\omega}{\|x_q\|} = \tilde{x}_q c + \psi(\tilde{x}_q)$$

egyenlőségből határértékben kapjuk, hogy

$$0 = \tilde{x}c + \psi(\tilde{x}).$$

Vagyis a duál regularitás nem teljesül.

Fordítva, ha a duál regularitás nem teljesül, akkor van olyan $\tilde{x} \geq 0$ vektor, hogy

$$\|\tilde{x}\| = 1, \quad \tilde{x}A = 0, \quad \text{és} \quad \tilde{x}c + \psi(\tilde{x}) \leq 0.$$

De akkor tetszőleges $x^* \in \mathcal{L}^*$ optimális megoldásra és tetszőleges nagy $\vartheta \geq 0$ számra fennáll, hogy

$$\omega \leq c(x^* + \vartheta \tilde{x}) + \psi(x^* + \vartheta \tilde{x}) \leq cx^* + \psi(x^*) + \vartheta(c\tilde{x} + \psi(\tilde{x})) \leq cx^* + \psi(x^*) = \omega.$$

Igy

$$c(x^* + \vartheta \tilde{x}) + \psi(x^* + \vartheta \tilde{x}) = \omega, \quad \text{azaz} \quad \mathcal{L}^* \text{ nem korlátos.}$$

d/ Az 1. tétel b/ értelmében, ha a duál regularitás teljesül, akkor a primál feladat szuperkonzisztens, ekkor nyilván konzisztens is és így a geometriai programozás fő lemmája (ld. pl. [3]) szerint a duál feladatnak véges ω infimuma van. Ha a duál nem veszi fel infimumát, akkor van olyan $x_1, x_2, \dots, x_q, \dots$ sorozat, hogy

$$\|x_q\| \rightarrow \infty, \quad \text{és} \quad cx_q + \psi(x_q) \rightarrow \omega.$$

Azonban

$$cx_q + \psi(x_q) = \|x_q\|(c\tilde{x}_q + \psi(\tilde{x}_q)), \quad \text{ahol} \quad \tilde{x}_q = \frac{x_q}{\|x_q\|}.$$

Igy x_q , illetve \tilde{x}_q vektorokra fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{x}_q A &= \frac{1}{\|x_q\|} b, \\ c\tilde{x}_q + \psi(\tilde{x}_q) &= \frac{1}{\|x_q\|} (x_q c + \psi(x_q)). \end{aligned}$$

De ekkor az \tilde{x} torlódási pontra kapjuk, hogy

$$\tilde{x}A = 0, \quad \|\tilde{x}\| = 1, \quad \tilde{x} \geq 0, \quad c\tilde{x} + \psi(\tilde{x}) = 0,$$

ellentétben a duál regularitással ■

A következőkben a regularitásnak egy fontos tulajdonságát vizsgáljuk. Legyenek adva az A, \hat{A} $m \times n$ méretű mátrixok, a b és \hat{b} n dimenziós, a c és \hat{c} pedig m dimenziós vektorok, valamint a τ tetszőleges szám. Legyen rögzítve az I indexhalmaz valamely particionálása. A regularitás az alábbi "nyílt" tulajdonsággal rendelkezik.

3. Tétel. Az $A + \tau\hat{A}$, $b + \tau\hat{b}$, $c + \tau\hat{c}$ együtthatójú geometriai programozási feladatnál azon τ számok halmaza, ahol a primál regularitás teljesül, nyílt halmaz. Hasonlóan, ahol a duál regularitás teljesül, szintén nyílt halmaz.

Bizonyítás. A bizonyítást a primál regularításra végezzük el; duál regularitáson teljesen analóg az eljárás.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\tau = 0$ helyen teljesül a regularitás. Ha nem lenne olyan $\tau_0 > 0$, hogy a $[0, \tau_0)$ intervallumban teljesül a regularitás, akkor lenne olyan $\tau_1, \tau_2, \dots, \dots, \tau_q, \dots$ zérushoz tartó pozitív számsorozat, hogy

$$(6) \quad \begin{cases} (A + \tau_q \hat{A})y_q \leq 0, \\ (b + \tau_q \hat{b})y_q \geq 0, \\ y_q \neq 0. \end{cases}$$

Legyen: $\tilde{y}_q = \frac{y_q}{\|y_q\|}$.

A (6) egyenlőtlenségrendszerből az $\|y_q\|$ normával való osztással kapjuk, hogy

$$(7) \quad \begin{cases} (A + \tau_q \hat{A})\tilde{y}_q \leq 0, \\ (b + \tau_q \hat{b})\tilde{y}_q \geq 0, \\ \|\tilde{y}_q\| = 1. \end{cases}$$

A (7) egyenlőtlenségrendszert kielégítő \tilde{y}_q vektorokból kiválasztható konvergens részsorozat, mondjuk maga \tilde{y}_q ilyen, melynek limeszpontja legyen \tilde{y} . Nyilván (7) a torlódási pontra is fennáll, azaz:

$$\begin{aligned} A\tilde{y} &\leq 0, \\ b\tilde{y} &\geq 0, \\ \|\tilde{y}\| &= 1. \end{aligned}$$

Ez ellentétes azon feltevésünkkel, hogy a $\tau = 0$ helyen a primál regularitás teljesül. ■

3. §. A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁS ÉRTÉKÉNEK VÁLTOZÁSA

Legyen adott az $[A, b, c]$ együtthatójú és adott particiójú geometriai programozási feladat. Az $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ az A, b, c -vel azonos méretű mátrix, illetve vektorok. A következő tételben feltételt adunk a perturbált feladat konzisztenciájára és egy formulát a perturbált feladat változásainak értékére.

Tétel. (I) *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $[(A + \tau\hat{A}), (b + \tau\hat{b}), (c + \tau\hat{c})]$ együtthatójú perturbált feladat konzisztens legyen valamely $[0, \tau_0)$ intervallumon tetszőleges, de fix $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ perturbációs együtthatóknál az, hogy az $[A, b, c]$ együtthatójú feladatra a regularitási feltételek teljesüljenek.*

(II) *Ha az $[A, b, c]$ feladatra a regularitási feltételek teljesülnek, akkor tetszőleges $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ perturbációs együtthatókhöz van olyan $[0, \tau_0)$ intervallum, hogy a perturbált primál feladatnak is és a duáljának is van optimális megoldása minden $\tau \in [0, \tau_0)$ esetén és amennyiben $\omega(\tau)$ -val jelöljük a program értékét, akkor*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} = \max_{y \in \mathcal{P}^*} \min_{x \in \mathcal{D}^*} (x\hat{c} + \hat{b}y - x\hat{A}y).$$

Ezt a derivált értéket Mills terminológiáját követve "a geometriai programozás marginális értékének" nevezzük.

Bizonyítás. A tétel bizonyítását, hogy áttekinthetőbbé tegyük, több lépésben végezzük el.

a/ Először azt mutatjuk meg, hogy a *feltételek szükségesek*. Az, hogy a duál konzisztens equivalens azzal, hogy a primál célfüggvény korlátos, ez viszont equivalens azzal, hogy nincs olyan primál megoldás, melyre

$$(8) \quad \begin{cases} (A + \tau \hat{A})y \leq 0, \\ (b + \tau \hat{b})y > 0. \end{cases}$$

Azonban, ha van olyan y , melyre:

$$(9) \quad \begin{cases} Ay \leq 0, \\ by \geq 0, \\ y \neq 0, \end{cases}$$

teljesül, akkor $\hat{A} = 0$ és \hat{b} olyan megválasztásával, hogy $\hat{b}y > 0$ legyen, semmilyen kicsi $\tau > 0$ számra nem lehet elérni, hogy (8) ne teljesüljön. Vagyis szükséges, hogy (9) ne teljesüljön, azaz a primál regularitás fennálljon.

A primál konzisztencia azt jelenti, hogy

$$\sum_{i \in I_k} e^{(a_i + \tau \hat{a}_i)y - (\gamma_i + \tau \hat{\gamma}_i)} \leq 0, \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

egyenlőtlenség fennálljon.

Ebből az $\hat{A} = 0$, $\gamma_i = -1$, $(i = 1, 2, \dots, m)$ megválasztással a

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leq e^{-\tau}, \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

egyenlőtlenségeknek kell teljesülniök. Ennek valamely $\tau > 0$ számra való teljesülése azzal equivalens, hogy a primál feladat szuperkonzisztens, de a 2. §. 1b/ tétel szerint csak akkor szuperkonzisztens, ha a duál regularitás teljesül.

b/ A 2. §. fejezet 3. tétele biztosítja, hogy van olyan $[0, \hat{\tau})$ intervallum, ahol mind a primál, mind a duál regularitás teljesül az $A + \tau \hat{A}$, $b + \tau \hat{b}$, $c + \tau \hat{c}$ együtthatójú feladatra $\tau \in [0, \hat{\tau})$ esetekben. A 2. §. fejezet 1. és 2. tételei szerint minden $\tau \in [0, \hat{\tau})$ értékre a megfelelő \mathcal{P}^* és \mathcal{Q}^* optimális halmazok korlátosak.

Megmutatjuk, hogy \mathcal{P}_τ^* és \mathcal{Q}_τ^* *egyenletesen is korlátosak* valamely $[0, \tau_0)$, $\tau_0 \leq \hat{\tau}$ intervallumon.

Indirekte, tegyük fel, hogy nincs olyan $[0, \tau_0)$ intervallum, ahol \mathcal{P}_τ^* és \mathcal{Q}_τ^* egyenletesen korlátosak lennének. Ekkor létezik olyan $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q, \dots$ zérushoz tartó pozitív számsorozat, amelyekhez tartozó valamely x_q^*, y_q^* optimális megoldáspárra az alábbi három eset valamelyike áll fenn:

1/ $\|x_q^*\| \rightarrow \infty$ és $\|y_q^*\|$ korlátos,

2/ $\|x_q^*\|$ korlátos és $\|y_q^*\| \rightarrow \infty$,

3/ $\|x_q^*\| \rightarrow \infty$ és $\|y_q^*\| \rightarrow \infty$.

Jelöljük: $\tilde{x}_q^* = \frac{x_q^*}{\|x_q^*\|}$, és $\tilde{y}_q^* = \frac{y_q^*}{\|y_q^*\|}$.

Az \tilde{x}_q^* korlátos ponthalmazából kiválasztható konvergens részsorozat. Az egyszerűbb indexezés kedvéért feltehető, hogy ez már az, és legyen $\tilde{x}_q^* \rightarrow \tilde{x}^*$. Hasonlóan $\tilde{y}_q^* \rightarrow \tilde{y}^*$. Irjuk fel, hogy mit jelent az, hogy ezek optimális megoldások.

A duál feltételt kielégítik:

$$(10) \quad x_q^*(A + \tau_q \hat{A}) = b + \tau_q \hat{b}, \quad x_q \geq 0.$$

A primál feltételt kielégítik:

$$\sum_{i \in I_k} e^{(a_i + \tau_q \hat{a}_i) y_q^* - (\gamma_i + \tau_q \hat{\gamma}_i)} \leq 1, \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

de ekkor fennáll, hogy

$$(11) \quad (A + \tau_q \hat{A}) y_q^* \leq c + \tau_q \hat{c}.$$

A két célfüggvény értéke megegyezik:

$$(12) \quad \omega_q = (b + \tau_q \hat{b}) y_q^* = x_q^*(c + \tau_q \hat{c}) + \psi(x_q^*).$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy mindegyik esetben ellentétbe kerülünk a regularitási feltételek teljesülésével.

1. eset. A (10) és (12) összefüggésekből, $\|x_q^*\|$ normával való osztás után kapjuk, hogy

$$(13) \quad \begin{cases} \tilde{x}_q^*(A + \tau_q \hat{A}) = \frac{1}{\|x_q^*\|} (b + \tau_q \hat{b}), \\ \tilde{x}_q^*(c + \tau_q \hat{c}) + \psi(\tilde{x}_q^*) = \frac{1}{\|x_q^*\|} (b + \tau_q \hat{b}) y_q^*. \end{cases}$$

Mivel $\|y_q^*\|$ korlátos, a (13)-ból az x^* torlódási pontra nyerjük, hogy:

$$\tilde{x}^* A = 0, \quad \|\tilde{x}^*\| = 1, \quad \tilde{x}^* \geq 1, \quad \text{és} \quad \tilde{x}^* c + \psi(\tilde{x}^*) = 0,$$

ami ellentmond a duál regularitásnak.

2. eset. A (11) és (12) összefüggésekből $\|y_q^*\|$ normával való osztás után kapjuk, hogy

$$(14) \quad \begin{cases} (A + \tau_q \hat{A})\tilde{y}_q^* \leq \frac{1}{\|y_q^*\|} (c + \tau_q \hat{c}), \\ (b + \tau_q \hat{b})\tilde{y}_q^* = \frac{1}{\|y_q^*\|} [x_q^*(c + \tau_q \hat{c}) + \psi(x_q^*)]. \end{cases}$$

Mivel $\|x_q^*\|$ korlátos, a (14)-ből az \tilde{y}^* torlódási pontra nyerjük, hogy

$$A\tilde{y}^* \leq 0, \quad b\tilde{y}^* = 0 \quad \text{és} \quad \|\tilde{y}^*\| = 1,$$

amely ellentmond a primál regularitási feltételnek.

3. eset. A (10), (11) és (12) összefüggésekből $\|\tilde{x}_q^*\|$ illetve $\|y_q^*\|$ normával való osztás után nyerjük, hogy

$$(15) \quad \tilde{x}_q^*(A + \tau_q \hat{A}) = \frac{1}{\|x_q^*\|} (b + \tau_q \hat{b}),$$

$$(16) \quad (A + \tau_q \hat{A})\tilde{y}_q^* \leq \frac{1}{\|y_q^*\|} (c + \tau_q \hat{c}),$$

$$(17) \quad \|y_q^*\| (b + \tau_q \hat{b})\tilde{y}_q^* = \|x_q^*\| [\tilde{x}_q^*(c + \tau_q \hat{c}) + \psi(\tilde{x}_q^*)].$$

A (15) és (16)-ból a torlódási pontokra kapjuk, hogy

$$(18) \quad \begin{cases} \tilde{x}^* A = 0, & \|\tilde{x}^*\| = 1, & \tilde{x}^* \geq 0, \quad \text{és} \\ A\tilde{y}^* \leq 0, & \|\tilde{y}^*\| = 1. \end{cases}$$

Azonban a regularitási feltételek teljesülése miatt a torlódási pontokra, melyekre (18) fennáll, kell, hogy az

$$(19) \quad \begin{cases} \tilde{x}^* c + \psi(\tilde{x}^*) > 0 \quad \text{és} \\ b\tilde{y}^* < 0 \end{cases}$$

egyenlőtlenségek teljesüljenek.

De (17)-ből adódik, hogy

$$(b + \tau_q \hat{b})\tilde{y}_q^* \rightarrow b\tilde{y}^*$$

és

$$\tilde{x}_q^*(c + \tau_q \hat{c}) + \psi(\tilde{x}_q^*) \rightarrow \tilde{x}^* c + \psi(\tilde{x}^*),$$

ezért kell, hogy legyen olyan τ_{q_0} , melyre

$$(b + \tau_{q_0} \hat{b})\tilde{y}_{q_0}^* < 0 \quad \text{és} \quad \tilde{x}_{q_0}^*(c + \tau_{q_0} \hat{c}) + \psi(\tilde{x}_{q_0}^*) > 0,$$

Ami ellentmond a (17) egyenlőségnek.

Ezzel az egyenletes korlátosságot igazoltuk.

c/ Legyenek a $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q, \dots, \rightarrow 0$ zérushoz tartó sorozat valamely megfelelő optimális megoldásai az $x_1^*, x_2^*, \dots, x_q^*, \dots$ illetve az $y_1^*, y_2^*, \dots, y_q^*, \dots$ vektor sorozatok. *Megmutatjuk, hogy az x_q^* sorozat bármely torlódási pontja \mathcal{D}^* halmazhoz, és hasonlóan y_q^* sorozat torlódási pontjai \mathcal{P}^* halmazhoz tartoznak.*

Az egyszerűség kedvéért feltehető, hogy az indexezés már olyan, hogy $x_q^* \rightarrow x^*$ és $y_q^* \rightarrow y^*$.

Mivel x_q^*, y_q^* optimális megoldásai a τ_q paraméterű perturbált feladatnak, ezért fennáll, hogy

$$(20) \quad \begin{aligned} x_q^*(A + \tau_q \hat{A}) &= b + \tau_q \hat{b}, & x_q^* &\geq 0, \\ \sum_{i \in I_k} e^{(a_i + \tau_q \hat{a}_i)y_q^* - (\gamma_i + \tau_q \hat{\gamma}_i)} &\leq 1, & (k &= 1, 2, \dots, p) \\ (b + \tau_q \hat{b})y_q^* &= x_q^*(c + \tau_q \hat{c}) + \psi(x_q^*). \end{aligned}$$

Határértékben (20)-ból kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x^*A &= b \\ x^* &\geq 0, \\ \sum_{i \in I_k} e^{a_i y^* - \gamma_i} &\leq 1, & (k &= 1, 2, \dots, p), \\ by^* &= x^*c + \psi(x^*), \end{aligned}$$

azaz $x^* \in \mathcal{D}^*$ és $y^* \in \mathcal{P}^*$.

d/ A következőkben meghatározzuk a program marginális értékét, felhasználva a geometriai programozás Lagrange függvényének nyeregpont egyenlőtlenségét. A továbbiakban a Lagrange függvényben a programegyütthatókat is feltüntetjük.

Tetszőleges $\tau \in (0, \tau_0)$ paraméterre a Lagrange függvény nyeregpont egyenlőtlenségét az $x = x_0^*, y = y_0^*$ helyen felírva kapjuk, hogy

$$(21) \quad \Phi(A + \tau \hat{A}, b + \tau \hat{b}, c + \tau \hat{c}, x_\tau^*, y_0^*) \leq \omega(\tau) \leq \Phi(A + \tau \hat{A}, b + \tau \hat{b}, c + \tau \hat{c}, x_0^*, y_\tau^*).$$

A $\tau = 0$ paraméternél az $x = x_\tau^*$, és $y = y_\tau^*$ helyen a nyeregpont egyenlőtlenségből -1 -gyel való szorzás útján a

$$(22) \quad -\Phi(A, b, c, x_\tau^*, y_0^*) \leq -\omega(0) \leq -\Phi(A, b, c, x_0^*, y_\tau^*)$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

A (21) és (22) egyenlőtlenségeket összeadva és τ számmal osztva nyerjük, hogy

$$(x_\tau^* \hat{c} + \hat{b}y_0^* - x_\tau^* \hat{A}y_0^*) \leq \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} \leq (x_0^* \hat{c} + \hat{b}y_\tau^* - x_0^* \hat{A}y_\tau^*)$$

egyenlőtlenség fennáll minden $x_0^* \in \mathcal{P}^*$ és $y_0^* \in \mathcal{D}^*$ esetén.

De akkor fennáll a

$$(23) \quad \max_{y \in \mathcal{P}^*} (x_\tau^* \hat{c} + \hat{b}y - x_\tau^* \hat{A}y) \leq \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} \leq \min_{x \in \mathcal{D}^*} (x\hat{c} + \hat{b}y_\tau^* - x\hat{A}y_\tau^*)$$

egyenlőtlenség is.

Minthogy bizonyításunk c/ részében megmutattuk, hogy y_τ^* torlódási pontjai \mathcal{P}^* elemei, így tetszőleges $\epsilon > 0$ -ra, ha τ elég kicsi, fennáll, hogy

$$(24) \quad \min_{x \in \mathcal{D}^*} (x\hat{c} + \hat{b}y_\tau^* - x\hat{A}y_\tau^*) \leq \max_{y \in \mathcal{P}^*} \min_{x \in \mathcal{D}^*} (x\hat{c} + \hat{b}y - x\hat{A}y) + \epsilon.$$

Hasonlóan, mivel x_τ^* torlódási pontjai egyúttal \mathcal{D}^* pontjai is:

$$(25) \quad \max_{y \in \mathcal{P}^*} (x_\tau^* \hat{c} + \hat{b}y - x_\tau^* \hat{A}y) \geq \min_{x \in \mathcal{D}^*} \max_{y \in \mathcal{P}^*} (x\hat{c} + \hat{b}y - x\hat{A}y) - \epsilon.$$

A (23), (24) és (25) egybevetésével adódik, hogy

$$-\epsilon \leq \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} - \max_{y \in \mathcal{P}^*} \min_{x \in \mathcal{D}^*} (x\hat{c} + \hat{b}y - x\hat{A}y) \leq +\epsilon$$

egyenlőtlenség teljesül tetszőleges $\epsilon > 0$ számra, ha τ elég kicsi, ami a tétel formulájával ekvivalens. ■

Megjegyezzük, hogy a tétel bizonyításának c/ része önmagában is egy érdekes összefüggést ad a \mathcal{P}_τ^* és a \mathcal{D}_τ^* , $\tau \in [0, \tau_0)$ paraméterű geometriai programozási feladat optimális megoldáshalmaz rendszereiről. Ez az összefüggés Dantzig-Folkman-Shapiro [1] egy általános halmazkonvergencia tételéből is kikövetkeztethető.

Irodalom

- [1] G.B. Dantzig, J. Folkman and N. Shapiro, *On the continuity of the minimum set of a continuous function*, J. Math. Anal. Appl., 17 (1967), 519-548.
- [2] R.J. Duffin, E.L. Peterson and C. Zener, *Geometric Programming*, John Wiley, New York, 1966.
- [3] Klafszky E., *Geometriai programozás*, MTA Számítástechnikai Központ Közlemények 8 (1972), 41-65.
- [4] Harlan D. Mills, *Marginal values of matrix games and linear programs*, Linear Inequalities and Related Systems, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1956). 183-193.

- [5] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton, New Jersey, University Press, 1970.
[6] A.C. Williams, *Marginal values in linear programming*, J. Soc. Indust. Appl. Math. Vol. 11, 1 (March, 1963), 82-94.

Beérkezett: 1972 augusztus 6.

S u m m a r y

Marginal Values in Geometric Programming

The present paper describes, how perturbational examinations carried out by Mills [1] and Williams [2] on linear programming can be adapted for the purpose of geometric programming too and how totally the results obtained with geometric programming conform to those obtained with linear programming.

The result of the paper is summarized in the theorem of Chapter 3, i.e.: Let us consider the pair of geometric programming problems (primal and dual) given, having a given partition and the coefficients being A, b, c ; and let us further assume the perturbational coefficients to be $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ and the perturbational parameter should be the scalar $\tau \geq 0$.

Theorem. (I) The necessary and satisfactory condition for the perturbed problem with the coefficients $A + \tau\hat{A}, b + \tau\hat{b}, c + \tau\hat{c}$ to be consistent in some interval $[0, \tau_0)$, applying free chosen, but fixed perturbational coefficients, is a regular geometric programming. (Geometric programming is called regular if its lots of optimal solutions are not empty, limited ones.)

(II) If the problem is regular, there must exist an interval $[0, \tau_0)$ for the perturbational coefficients $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ which gives optimal solutions for the pair of perturbed problems and for every scalar $\tau \in [0, \tau_0)$ and if the value of the programme is nominated $\omega(\tau)$, the formula

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} = \max_{y \in \mathcal{D}^*} \min_{x \in \mathcal{D}^*} (x\hat{c} + \hat{b}y - x\hat{A}y).$$

may be regarded as valid for the marginal value of the programme.

For the proof of the above mentioned theorem it is found desirable to demonstrate first the interconnection between the Lagrange-function and the lots of optimal solutions (Chapter 1) and that of the regularity conditions and the lots of optimal solutions (Chapter 2) as well.

Резюме

Маргинальные значения в геометрическом программировании

В этой работе мы покажем, что исследования возмущений, которые Миллс [1] и Вильямс [2] проводили в линейном программировании могут быть перенесены в геометрическое программирование и результаты полученные в геометрическом программировании, полностью совпадают с полученными в линейном программировании. Результаты работы подитожены в теореме 3-его параграфа. Пусть дана пара задач геометрического программирования с коэффициентами A, b, c и с известным разбиением. Пусть $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ - коэффициенты возмущения и скаляр $\tau \geq 0$ -параметр возмущения.

Теорема: (I) Для того, чтобы возмущённая задача с коэффициентами $A + \tau\hat{A}, b + \tau\hat{b}, c + \tau\hat{c}$ была совместима на интервале $[0, \tau_0)$ при любых фиксированных коэффициентах возмущения, необходимо и достаточно, чтобы геометрическое программирование было регулярным /геометрическое программирование регулярно, если области его оптимальных решений не пусты и ограничены/. (II) Если задача регулярна, то для коэффициентов возмущения $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ существует интервал $[0, \tau_0)$, такой, что и возмущённая пара задач имеет оптимальное решение для каждого скаляра $\tau \in [0, \tau_0)$ и если значение программы обозначим через $\omega(\tau)$, то для маргинального значения программы выполняется

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} = \max_{y \in * } \min_{x \in * } (x\hat{c} + \hat{b}y - x\hat{A}y).$$

Для доказательства теоремы необходимо показать связь между функцией Лагранжа и оптимальными решениями в геометрическом программировании (§1.) а также связь между условиями регулярности и областями оптимальных решений (§2.).

OPERÁTOR-FÉLCSOPORTOK ÉS PARABOLIKUS PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Kersner Róbert

Az alábbiakban parabolikus típusú differenciálegyenletekkel foglalkozunk. Vizsgálataink során alapvető szerepet játszik a megoldások egy bizonyos tulajdonsága, az un. félcsoport-tulajdonság. Ezen tulajdonság illusztrációjaként vizsgáljuk meg a következő példákat:

0.1. Példa. Legyen $x(t)$ egy, a valós tengelyen értelmezett differenciálható függvény, a konstans. A

$$\frac{dx(t)}{dt} = a \cdot x(t) \quad x(0) = x_0$$

feladatnak egyértelműen meghatározott megoldása az

$$x(t) = e^{at} \cdot x_0 \equiv T_t x_0$$

függvény. Nyilvánvaló, hogy $T_{t_1+t_2} x_0 = T_{t_1} \cdot T_{t_2} x_0$ és $T_0 = E$ "identikus operátor".

0.2. Példa. $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, A $n \times n$ -es skalármátrix. A

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) \quad x(0) = x_0$$

feladat egyetlen megoldása az $x(t) = e^{tA} x_0 \equiv T_t x_0$ vektor függvény, ahol

$$e^B = E + B + \frac{1}{2!} B^2 + \dots + \frac{1}{n!} B^n + \dots$$

Könnyen belátható, hogy

$$T_{t_1+t_2} x_0 = T_{t_1+t_2} x_0 \quad \text{és} \quad T_0 = E.$$

0.3. Példa. Ismeretes (ld. pl. [4]), hogy a

$$\frac{\partial u(tx)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(tx)}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0$$

$$u(0, x) = u_0(x)$$

Cauchy-feladatnak a megfelelő függvényosztályban egyetlen megoldása az

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2t}} \cdot u_0(\xi) d\xi \equiv T_t u_0(x)$$

függvény.

A $T_{t_1+t_2} u_0 = T_{t_1} \cdot T_{t_2} u_0$ formula a Gauss-féle sztohasztikus folyamatok elméletében közismert azonosság, $T_0 u_0 = u_0$.

0.4. Példa. Az előbbi példa feladatának diszkrétizációjával foglalkozunk (véges differenciák módszere). A módszer lényege az, hogy a differenciálegyenletet egy differencia-egyenlettel helyettesítjük, amelynek teljesülését véges sok pontban követeljük meg. A legegyszerűbb ilyen séma a következő: osszuk fel a $t \geq 0$ félsíkot a tengelyekkel párhuzamos, egymástól h , illetve τ távolságra lévő egyenesekkel. (Legyen a "függőleges" tengely a t tengely.) Az i -edik vízszintes és a j -edik függőleges egyenes metszéspontja legyen $(j\tau, ih)$.

A harmadik feladat egyik lehetséges diszkrétizációja:

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\tau} = \frac{u^n(x+h) - 2u^n(x) + u^n(x-h)}{h^2}$$

$$u(0, ih) = u_0(ih).$$

Ebből a felírásból azonnal észrevehető (fejezzük ki $u^{n+1}(x)$ -et), hogy a megoldás folyamata a következő: a nulladik szinten ($t=0$) adott értékekből kiszámítjuk az első szinten ($t=\tau$) lévő értékeket, ezek ismeretében a $t=2\tau$ -nak megfelelő értékeket, és így tovább. Az előző példákban kiemelt törvényszerűségek itt is megfigyelhetők: a $t_1 + t_2$ szintnek megfelelő értékeket úgy kaphatjuk meg, hogy először eljutunk a t_1 -nek megfelelő szintre, majd a t_2 -nek megfelelő lépésszámmal a $t_1 + t_2$ szintre.

0.5. A $T_{t_1+t_2} = T_{t_1} \cdot T_{t_2}$, $T_0 = E$ tulajdonságok több más helyzetben is megfigyelhetők. Ebből a szempontból fogjuk vizsgálni a továbbiakban a parabolikus típusú parciális differenciálegyenleteket. E cikk struktúrája a következő: bizonyos funkcionál-analízisbeli tények ismertetése után bebizonyítunk egy egzisztencia és egy unicitás tételt, majd az adott egyenlet numerikus megoldásával foglalkozunk.

0.6. Az első pont megtalálható [1]-ben (IX. fejezet). Néhány tény vázlatos bizonyítását azonban leírjuk itt is, azokét, amelyekben előfordulnak bizonyos explicit formulák, amelyek világossá teszik az előforduló operátorok felépítését. A második pont tartalmilag megtalálható a [2], [3] cikkekben. Az itt adott bizonyítás egyszerűbbnek tűnik az ottaninál.

A parabolikus parciális differenciálegyenletek más szempontból vizsgált elméletét ld. pl. [6]-ban.

1. A HILLE – YOSIDA TÉTEL

Ebben a pontban a számunkra szükséges funkcionál-analízisbeli tényekkel foglalkozunk. A nem definiált fogalmakat ismerteknek tételezzük fel.

1.1. Legyen X Banach tér, $T_t: X \rightarrow X$ lineáris operátor, t nem negatív valós szám ($t \in R^+$).

Definíció. A $\{T_t\}$ operátorok C^0 félcsoporthat alkotnak, ha

- 1/ T_1 korlátos $\forall t \in R^+$
- 2/ $T_{t+s}x = T_t T_s x \quad \forall x \in X; \quad t, s \in R^+$
- 3/ $T_0 = E$ identikus operátor
- 4/ $\lim_{t_n \rightarrow t_0} T_{t_n} x = T_{t_0} x \quad \forall x \in X$ norma szerint, vagyis

$$\lim_{t_n \rightarrow t_0} \|T_{t_n} x - T_{t_0} x\| = 0, \quad \text{ahol } \|\dots\| \text{ norma } X\text{-ben.}$$

1.2. Lemma. Legyen $\{T_t\}$ egy C^0 -félcsoporthat. Akkor léteznek olyan t -től független M és m pozitív konstansok, hogy

$$\|T_t\| \leq M \cdot e^{mt}.$$

1.3. Megjegyzés. Ha $\{T_t\}$ C^0 félcsoporthat, akkor $\{e^{-mt}T_t\}$ szintén az.

1.4. Legyen X az $[a, b]$ szakaszon értelmezett Banach-tér értékű függvények tere. $x(t) \in X$ egyszerű függvény, ha véges sok mérhető halmazon állandó, ezeken kívül nulla.

Az egyszerű függvények integrálja (ha $x = x_i$ az a_i halmazon):

$$\int_a^b x(t) dt = \sum_{i=1}^n x_i \text{ mes } a_i.$$

$x(t)$ mérhető $\iff \exists x_n(t)$ egyszerű függvények sorozata, olyan, hogy

$$\|x(t) - x_n(t)\| \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Az $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$ függvény Bochner-integrálja:

$$\int_a^b x(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x_n(t) dt,$$

ahol a limesz norma szerint értendő.

Megjegyzés. Ha $x \in X$, akkor $\int_a^b x(t) dt \in X$, vagyis a Bochner-féle integrál nem funkcionál, hanem operátor X -en.

1.5. Lemma (Bochner). $x(t)$ integrálható Bochner szerint \iff az $\|x(t)\|$ skalár függvény integrálható.

Megjegyzés. Ez az egyszerű kritérium biztosítja a továbbiakban előforduló integrálok létezését, így az adott esetekben az integrál létezésére vonatkozó szokásos megjegyzéseket el fogjuk hagyni (az első részben).

1.6. Legyen X Banach-tér, $\{T_t\}$ C^0 félcsoport.

Definíció. A infinitezimális operátora a $\{T_t\}$ félcsoportnak, ha $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_h x - x}{h} = Ax$ (limesz: norma szerinti).

Az X tér azon elemeinek összességét, amelyekre a fenti határérték létezik, az A operátor értelmezési tartományának nevezzük és D_A -val jelöljük.

1.7. **Lemma.** D_A sűrű X -ben.

Vázlatos bizonyítás. Legyen $x \in X$ tetszőleges. Hogy az állítást bebizonyítsuk, elegendő megadni egy olyan x_n sorozatot, amely tart x -hez és $x_n \in D_A \quad \forall n$.

Legyen $x_n = F_n(x) = \int_0^\infty n e^{-nt} T_t(x) dt$ (az integrál Bochner-féle). Belátható, hogy $Ax_n = nx_n - nx$, vagyis azon kívül, hogy beláttuk Ax_n létezését, azt is tudjuk, mivel egyenlő.

A $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ egyenlőség könnyen bizonyítható.

1.8. **Definíció.** $D_t(T_t x) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{t+h} x - T_t x}{h}$ (mindenütt, ahol a jobb oldalon lévő limesz létezik; limesz: norma szerinti.)

Lemma. A fenti limesz létezik minden D_A -beli x -re. Azonkívül $D_t(T_t x) = AT_t x = T_t Ax \quad \forall x \in D_A$.

Megjegyzés. Ez az egyenlőség alapvetően fontos: lehetőséget ad a $D_t u = Au$ egyenlet megoldására. A megoldás: $u = T_t x$.

1.9. **Lemma.** Ha $\lambda > 0$ és A infinitezimális operátora a $\{T_t\}$ C^0 félcsoportnak, akkor $(\lambda E - A)^{-1} x \equiv R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t x dt$ és $R(\lambda, A)$ folytonos.

Megjegyzés. Az 1.7. lemmában előfordul az $F_n(x)$ sorozat. Látható, hogy $F_\lambda(x) = \lambda R(\lambda, A)$.

1.10. **Tétel.** (Hille – Yosida). Legyen X Banach-tér, A lineáris operátor, D_A sűrű X -ben. Tegyük fel, hogy $R(\lambda, A) = (\lambda E - A)^{-1}$ létezik és korlátos. Ha van olyan m -től és λ -tól független M konstans, hogy $\|(\lambda R(\lambda, A))^m\| \leq M$, m és λ pozitív egészek, akkor létezik olyan egyértelműen meghatározott egyenletesen korlátos C^0 félcsoport, amelynek A az infinitezimális operátora.

Vázlatos bizonyítás. (Az elhagyott részeket – jobbára egyszerű – feladatnak lehet tekinteni)

a) Legyen $I_n = nR(n, A)$, akkor $\lim I_n x = x, \quad \forall x \in X$, és

$$AI_n x = I_n Ax = n(I_n - E)x \quad \forall x \in D_A.$$

Az utóbbi állítás következik az $(E - \frac{1}{n}A)I_n = E$ és az $I_n(E - \frac{1}{n}A) = E$ egyenlőségekből.

b) Legyen

$$T_t^n = e^{tAI_n} = e^{-nt} e^{ntI_n}.$$

Ez korrekt módon meghatározott operátor, mivel a feltétel szerint $\|I_n^m\| \leq M$ minden m -re.

c) A $\{T_t^n x\}$ sorozat fundamentális X -ben minden x -re, $t \geq 0$.

Ez következik abból, hogy

$$T_t^n x - T_t^m x = \int_0^t D_s(T_{t-s}^m T_s^n x) ds = \int_0^t [T_{t-s}^m A I_n T_s^n - T_{t-s}^m A I_m T_s^n] ds$$

és

$$I_n T_t^m = T_t^m I_n, \quad A T_t^m = T_t^m A.$$

Ezért létezik $\lim_{n \rightarrow \infty} T_t^n x \equiv T_t x$, hiszen X Banach-tér.

d) T_t C^0 félcsoport. Valóban $\forall \epsilon > 0 \exists n_0: \forall n \geq n_0$ -ra

$$\begin{aligned} \|T_{t+s} x - T_t T_s x\| &\leq \|T_{t+s} x - T_{t+s}^n x\| + \|T_{t+s}^n x - T_t^n T_s^n x\| + \\ &\quad + \|T_t^n T_s^n x - T_t T_s x\| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

A többi tulajdonság nyilvánvaló.

e) A kapott C^0 félcsoportnak A az infinitezimális operátora:

$$T_t x - x = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_t^n x - x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t D_t T_t^n x dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t T_s^n A I_n x ds = \int_0^t T_s A x ds,$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t x - x}{t} = Ax.$$

Természetesen meg kell győződni arról, hogy a limesz és az integrál felcserélhető.

f) Unicitás: minden C^0 félcsoport, melynek A az infinitezimális operátora, megegyezik T_t -vel. Valóban, ha T_t' ilyen félcsoport, akkor

$$\begin{aligned} \|T_t' x - T_t^n x\| &= \left\| \int_0^t D_s (T_{t-s}^n T_s' x) ds \right\| = \left\| \int_0^t (-T_{t-s}^n A I_n T_s' x + T_{t-s}^n A T_s' x) ds \right\| \leq \\ &\leq T \cdot \text{const.} \cdot \|Ax - I_n Ax\|, \end{aligned}$$

és az állítás következik a)-ból, mivel $I_n T_s' = T_s' I_n$.

1.11. Megjegyzés. A Hille – Yosida tétel eredményei között szerepelt a $\|T_t\| \leq M_1$ feltétel. Tudjuk azonban (ld. 1.2), hogy tetszőleges T'_t C^0 félcsoportra

$$\|T'_t\| \leq M_2 e^{mt}.$$

Legyen $T_t = e^{-\beta t} T'_t$ (ld. 1.3). Nyilván $\|T_t\| \leq M_3$, $\beta \geq m$. Ha tudjuk, hogy a T'_t félcsoportnak A' az infinitezimális operátora, akkor a T_t félcsoportnak $A = A' - \beta E$ lesz az infinitezimális operátora. Valóban:

$$\frac{1}{h} (e^{-\beta h} T'_h - E) = \frac{1}{h} [e^{-\beta h} (T'_h - E) + (e^{-\beta h} - E)] \quad \text{és} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\beta h} - 1}{h} = -\beta.$$

Az 1.10. tétel alapfeltétele ennek alapján az

$$\|(E - \frac{1}{n} (A' - \beta E))^{-m}\| \leq M$$

alakba írható.

2. PARABOLIKUS PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

2.1. Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ korlátos tartomány, $\partial\Omega = \bar{\Omega} - \Omega$, $0 \leq t \leq T$, $G = \Omega \times [0, T]$, $S = \partial\Omega \times (0, T)$.

Feladat (P). Keresendő olyan $u(t, x)$ függvény, amely kielégíti az

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = Au \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

egyenletet és a

$$(2) \quad \begin{cases} u|_{t=0} = u_0(x) \\ u|_S = 0 \end{cases} \quad (t, x) \in G$$

feltételeket.

Feltesszük, hogy az (1) egyenlet egyenletesen parabolikus, vagyis hogy létezik olyan pozitív konstans ν , hogy minden 0-tól különböző \mathbf{R}^n -beli $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ vektorra és Ω -beli x -re

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

2.2. Az a célunk, hogy bebizonyítsuk, hogy az (1), (2) feladatoknak van egyértelműen meghatározott megoldása, amelyet egy operátor-félcsoport állít elő.

Azonban még nem tisztáztuk, milyen függvénytérben keressük u -t, s azt sem, hogy milyen feltételeket szabjunk az A operátor együtthatóira.

Tudjuk, hogy ha van olyan függvénytér (Banach-tér), amelyben A , illetve $R(\lambda, A)$ kielégíti az 1.10. tétel feltételeit, akkor figyelembe véve az 1.8 formulát és megjegyzést, meg tudjuk oldani feladatunkat.

Meg kell adnunk tehát a kívánt Banach-teret, és ebben a térben meg kell vizsgálnunk a $\lambda R(\lambda, A) = \lambda(E - \lambda A)^{-1}$ operátort.

2.3. $\varphi(x)$ tesztfüggvény, ha $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ és $\text{supp } \varphi \subset \Omega$, ahol $\text{supp } \varphi$ annak a halmaznak a lezárása, ahol $\varphi \neq 0$. $\dot{W}_2(\Omega)$ az Ω -n adott tesztfüggvények halmazának lezárása a

$$\|\varphi\| = \left(\int_{\Omega} \varphi^2 dx \right)^{1/2}$$

norma szerint.

$\dot{W}_2^1(\Omega)$ ugyanazon halmaz lezárása a

$$\|\varphi\|_1 = \left(\int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}$$

norma szerint.

Megjegyzések (a \dot{W}_2 és a \dot{W}_2^1 terek leírása).

- a) $\dot{W}_2 = L_2$ (a kis \circ felül mindig a peremen való eltűnést jelenti.)
- b) \dot{W}_2 és \dot{W}_2^1 Hilbert-terek
- c) \dot{W}_2^1 sűrű \dot{W}_2 -ben.

2.4. Legyen H Hilbert-tér, $\|\dots\|_1$ norma. Legyen F bilineáris funkcionál H -n, amely kielégíti a következő feltételeket:

$$|F(h_1, h_2)| \leq C_1 \|h_1\|_1 \cdot \|h_2\|_1, \quad F(h_1, h_1) \geq C_2 \|h_1\|_1^2 \quad \forall h_1, h_2 \in H,$$

C_1 és C_2 pozitív konstansok.

Akkor tetszőleges H -n értelmezett lineáris folytonos funkcionál $f(u) = F(u, v)$, $v \in H$ adott. (Lax - Milgram tétel, ld. [1].)

2.5. **Tétel.** Tekintsük a

$$(3) \quad -Au + \lambda u = f$$

egyenletet. Tegyük fel, hogy az A operátor együtthatói mérhető korlátos függvények, $\lambda \geq \lambda_0$. Akkor $\forall f \in \dot{W}_2(\Omega)$ létezik egy darab $u \in \dot{W}_2^1$, olyan, hogy

$$(4) \quad F(u, \varphi) = (f, \varphi)$$

minden φ -tesztfüggvényre, ahol

$$F(u, \varphi) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \varphi - c(x)u\varphi + \lambda u\varphi \Big] dx$$

és

$$(f, \varphi) = \int_{\Omega} f\varphi dx.$$

Megjegyzés. (3)-ból következik (4): valóban, szorozzuk meg (3)-at φ -vel, integráljuk Ω szerint és vegyük figyelembe a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \cdot \varphi dx = - \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx$$

formulát és a

$$\varphi|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{feltételt.}$$

Ha az A operátor együtthatói elég simák, akkor (3) és (4) ekvivalensek.

Általában (4) megoldását a (3) egyenlet gyenge megoldásának nevezik.

A tétel bizonyítása. Az $F(u, \varphi)$ funkcionál nyilván bilineáris. Azonkívül

$$\begin{aligned} |F(u, \varphi)| &\leq \lambda \|u\| \cdot \|\varphi\| + a \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\| + b \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\| \cdot \|\varphi\| + \\ &+ c \|u\| \cdot \|\varphi\| \leq C \|u\|_1 \cdot \|\varphi\|_1. \end{aligned}$$

($F(u, \varphi)$ minden tagjára alkalmazzuk a Cauchy egyenlőtlenséget,

$$a = \max_{i,j,x} |a_{ij}(x)|, \quad b = \max_{i,x} |b_i(x)|, \quad c = \max_x |c(x)|$$

és figyelembe vettük a $\|u\| \leq \|u\|_1$ és $\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\| \leq \|u\|_1$

nyilvánvaló egyenlőtlenségeket.)

$$\begin{aligned} F(u, u) &= \int_{\Omega} \left(\lambda u^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} u - c(x)u^2 \right) dx \geq \\ &\geq \lambda \|u\|^2 + \nu \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 - c_1 \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 - c_2 \|u\|^2 \geq \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 + \\ &+ (\lambda - c_3) \|u\|^2 \geq \frac{\nu}{2} \|u\|_1^2, \quad \text{ha} \quad \lambda \geq c_3 + \frac{\nu}{2}. \end{aligned}$$

Itt figyelembe vettük az

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| |u| dx \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\| \cdot \|u\| \leq \epsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \|u\|^2, \quad \epsilon > 0,$$

egyenlőtlenségét és ϵ -t célszerűen választottuk ki.

A $\Phi(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi dx$ funkcionál lineáris és folytonos \dot{W}_2^1 -on. Így 2.4-ből következik, hogy \dot{W}_2^1 -ben van olyan u elem, hogy $\Phi(\varphi) = F(u, \varphi)$ minden φ -re. Ezzel bebizonyítottuk, hogy (4)-nek van megoldása.

Unicitás. Legyen u_1 és u_2 két megoldás, $(f, \varphi) = F(u_i, \varphi)$, $i = 1, 2$. Kivonva az első egyenlőségből a másodikat: $F(u_1 - u_2) = 0 \quad \forall \varphi \in \dot{W}_2^1$. Mivel $u_1 - u_2 \in \dot{W}_2^1$, legyen $\varphi \equiv u_1 - u_2$: $0 = F(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq \frac{\nu}{2} \|u_1 - u_2\|_1^2$. Tehát $u_1 = u_2$.

Ezzel bebizonyítottuk a 2.5 tételt.

Tételünk azt mondta ki, hogy minden \dot{W}_2^1 -beli f -hez lehet találni egyetlen u -t \dot{W}_2^1 -ből, ami azt jelenti, hogy \dot{W}_2^1 -en az A operátornak van értelme. (\dot{W}_2^1 -ban létezik az $(\lambda E - A)^{-1}$ operátor).

2.6. Tétel. *A P feladatnak (ld. 2.1) létezik egyértelműen meghatározott gyenge megoldása, amely rendelkezik a kívánt félcsoport tulajdonsággal.*

Bizonyítás. 2.5-ben láttuk, hogy $F(u, u) \geq (\lambda - c_3) \|u\|^2$. Legyen $\lambda - c_3 = n$, $c_3 = \beta$, $n = \lambda - \beta$. Világos, hogy $\|(\lambda E - A)^{-1} f\| = \|u\|$ és $F(u, u) = \left| \int_{\Omega} f u dx \right| \leq \|f\| \cdot \|u\|$, tehát

$$\|(\lambda E - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{vagyis} \quad \|(nE - (A - \beta E))^{-1}\| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{vagy ami ugyanaz}$$

$$\|(E - \frac{1}{n}(A - \beta E))^{-1}\| \leq 1, \quad \text{következésképpen}$$

$$\|(E - \frac{1}{n}(A - \beta E))^{-m}\| \leq 1.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenségből a Hille - Yosida tétel szerint következik, hogy létezik egy $\{T_t\}$ C^0 félcsoport, amelynek A az infinitezimális operátora.

Tudjuk (ld. 1.8), hogy

$$D_t(T_t w) = A T_t w \quad \forall w \in \dot{W}_2^1.$$

Ebből következik, hogy az $u(t, x) = T_t u_0(x)$ függvény $\dot{W}_2^1(\Omega)$ -beli megoldása a P feladatnak. Ha ehhez hozzávesszük az 1.10 f)-beli unicitástételt, akkor látjuk, hogy bebizonyítottuk a 2.6 tételt.

2.7. Megjegyzés. Ha az A operátor együtthatói elég simák, akkor az általunk konstruált megoldás megegyezik a klasszikus megoldással. (Ez következik abból, hogy ebben az esetben (3) és (4) ekvivalensek.)

2.8. Megjegyzés. Nem volt célunk, hogy minden állítást a maximális általánosságban mondjunk ki, ez csak elhomályosította volna a dolgok lényegét. Megengedhettük volna, hogy az A operátor $2m$ -ed rendű legyen. A megfelelő állítások bizonyítása semmiben sem különbözött volna a fentiekétől.

3. NUMERIKUS MEGOLDÁSOK

3.1. Tekintsük a következő Cauchy-feladatot (feltétel: A elliptikus):

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = Au \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

$$(6) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T < \infty.$$

Ha a kezdeti feltételen kívül peremfeltételek is adva vannak, hasonlóképpen kell eljárni.

Az előző részben bebizonyítottuk, hogy van olyan C^0 félcsoport $\{T_t\}$, hogy $u(t, x) = T_t u_0(x)$ megoldása az (5) és (6) feladatnak.

Figyelembe véve az 1.2 lemmát, értelmet nyer a következő

Definíció. (ld. [5]). Az $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$ egyenletet egyenletesen korrektnek nevezik, ha $\|T_t\| \leq e^{at}$.

Láttuk, hogy esetünkben ez a feltétel teljesül.

3.2. Bevezetünk néhány jelölést:

$$u^n(x) = u(\tau n, x) = u^n$$

$$S_i u(t, x) = u(t, x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_n),$$

$$S_{-i} u(t, x) = u(t, x_1, \dots, x_i - h_i, \dots, x_n)$$

$$h_i \geq 0, \quad h = \max h_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Legyen az (5) egyenletnek valamely diszkrétizációja:

$$(7) \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = L_1 u^{n+1} + L_0 u^n$$

”kétrétegű differencia séma”, ahol $L_j = L_j(t, \tau, h, S_i, S_{-i})$, $j = 0, 1$, differencia operátorok, melyeknek konkrét formája itt nem lényeges, (konkrét approximációt illetőleg ld. 0.4), fontos

az, hogy approximálják az A operátort, ld. (9). A kezdeti feltétel:

$$(8) \quad u_0^0(x) = u_0(x).$$

Legyen $u^n(x)$ a (7) és (8) feladat megoldása.

Definíció. $C(\tau, h, t)$ léptető operátor, ha

$$u^n(x) = C(\tau, h, n\tau)u^0(x).$$

Megjegyzés. Látható, hogy a $C(\tau, h, t)$ operátor rendelkezik az un. félcsoport tulajdonsággal, és nem más, mint az előző pontban előforduló T_t operátor diszkrét analogonja.

Definíció. A (7) séma egyenletesen korrekt, ha

$$\|C(\tau, h, t)\| \leq e^{\omega t}, \quad \omega \text{ konstans.}$$

Definíció. Legyen $u^n(x)$ a (7), (8), $u(t, x)$ az (5) és (6) feladat megoldása.

$u^n(x)$ konvergál $u(t, x)$ -hez, ha

$$\|u^n(x) - u(n\tau, x)\| = \|C(\tau, h, n\tau)u^0 - T_{n\tau}u_0\| \rightarrow 0, \quad \text{ha } \tau \rightarrow 0,$$

t szerint egyenletesen a $[0, T]$ intervallumban. Természetesen mindig fel kell tüntetni, hogy ha $\tau \rightarrow 0$, akkor h hogyan tart a nullához.

3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy mind a diszkrétizált, mind a differenciál feladat egyenletesen korrekt, az L_1, L_2 operátorok approximálják az A operátort és*

$$\|(E - \tau L_1)^{-1}\| \leq N(T).$$

Ebben az esetben a diszkrétizált feladat megoldása konvergál az eredeti feladat megoldásához. Elég bebizonyítani, hogy $\|v^n(x)\| = \|u^n(x) - u(n\tau, x)\| \rightarrow 0$, ha $\tau \rightarrow 0$, egyenletesen $[0, T]$ -ben. A $v^n(x)$ függvény megoldása az

$$(9) \quad \frac{1}{\tau} (v^{n+1} - v^n) = L_1 v^{n+1} + L_0 v^n + R_{n+1}$$

egyenletnek. R_{n+1} normája a feltétel szerint tart nullához, ugyanakkor könnyű meggyőződni a

$$\|v^n\| \leq t \cdot e^{\omega t} \cdot N \cdot \max_k \|R_k\|$$

becslés helyességéről.

Megjegyzés. Az A operátor konkrét approximációtól függően ki lehet mondani egy sor konvergenciát bizonyító tételt. A 3. ponttal főleg az volt a célunk, hogy a parciális differenciál-egyenleteket numerikusan megoldók számára világosabb legyen a megfelelő definíciók értelme és elméletileg könnyebben meg tudják alapozni gyakorlati számításukat.

Irodalom

- [1] K. Yosida, Functional analysis, Springer Verlag, 1965.
- [2] K. Yosida, An operator-theoretical integration of the wave equation, J. Math. Soc., Japan, (1956).
- [3] K. Yosida, An abstract analyticity , Proc. Japan Acad. (1959).
- [4] A.N. Tyihonov – A.A. Szamarszkij, A matematikai fizika egyenletei.
- [5] N.N. Janyenko, Metod drobnüh sagov resényija mnogoméfnüh zadács matyematyicseszkoj fiziki, Novoszibirszk, 1967.
- [6] A. Friedman, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, INC., 1964.

Beérkezett: 1972 április 15.

S u m m a r y

Operator-semigroups and parabolic partial differential equations

After some examples of illustration and exposition in the field of functional analysis necessary for the solution of the task in view, the paper proves a theorem of existence and uniqueness for a differential equation of parabolic type. The solution has the so-called semigroup property. The paper deals with the numerical solution of the task.

Р е з ю м е

Параболические уравнения и теория полугрупп

В работе, после некоторых примеров и рассмотрения нескольких фактов функционального анализа доказывается теорема существования и единственности для краевой задачи уравнения параболического типа. Решение задачи обладает полугрупповым свойством. Рассматривается численное решение задачи.

A YOULE – WALKER EGYENLETEK MEGOLDÁSÁRÓL

Gyurácz Németh Teréz

A $\xi(t)$ stacionárius folyamatot (p, q) -rendű autoregresszív – mozgóátlag típusúnak nevezzük, ha kielégíti a (az egyszerűség kedvéért legyen $M\xi(t) = 0$)

$$(1) \quad \xi(t) = a_1 \xi(t-1) + \dots + a_p \xi(t-p) + \epsilon_t - b_1 \epsilon_{t-1} - \dots - b_q \epsilon_{t-q}$$

$$t = 0, \pm 1, \dots$$

differencia egyenletet, ahol az $\epsilon(t)$ egy korrelálatlan sorozat.

Amennyiben p és q ismeretlenek, az a_i és b_j együtthatók meghatározására, illetve a $p = P$ és $q = Q$ hipotézis vizsgálatára a következő eljárást szokás használni az irodalomban (lásd pl. Box – Jenkins [1] 201-204, Hannan [2] 388-395):

Első lépésben az a_i együtthatók becsléseinek meghatározása történik a Youle – Walker egyenletekből. Jelölje c_i a $\xi(t)$ folyamat i -edik empirikus momentumát, továbbá

$$\underline{c}^*(p, q) = (c_{q+1}, c_{q+2}, \dots, c_{q+p})$$

$$\underline{a}^* = (a_1, a_2, \dots, a_p)$$

$$C = (c_{ij})_{i=1, p}^{j=1, q}, \quad \text{ahol} \quad c_{ij} = c_{|q+i-j|}$$

(* jelöli a transzponálást)

akkor az \hat{a}_i becslések a

$$(2) \quad \underline{c}(p, q) = C \underline{a}$$

egyenlet megoldásai lesznek. A (2) egyenletrendszert nevezzük Youle – Walker egyenleteknek.

A (2) egyenletrendszer (1)-ből $\xi(t-k)$ -val szorzással és várható érték képzéssel adódik:

$$(3) \quad r_{q+k} = \sum_{i=1}^p a_i r_{|k-i|} \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

továbbá az r_{\cdot} kovarianciákat a c_{\cdot} empirikus értékekkel helyettesítjük.

A második lépésben rögzített p, q esetén az a_i paraméternek \hat{a}_i becsléseinek meghatározása után behelyettesítve (1)-be az \hat{a}_i becsléseket ($i = 1, 2, \dots, p$), a b_j ($j = 1, 2, \dots, q$) együtthatókra, valamint a fehér zaj σ^2 szórására a momentum módszerrel történik az egyenletrendszer felírása s az újabb becslések meghatározása.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy p és q együttes meghatározására a fenti eljárás való-

jában nem használható, és nem használható az eljárás a p, q -ra vonatkozó hipotézis vizsgálatában sem.

Jelölje

$$\underline{r}^*(P, Q) = (r_Q, r_{Q+1}, \dots, r_{Q+P})$$

$$R(P, Q) = (r_{ij})_{i=1, P}^{j=1, P}, \text{ ahol } r_{ij} = r_{|Q+i-j|}$$

vektort, illetve mátrixot, melyek a \underline{c}^* vektor ill. C mátrix várható értékeit adják.

Érvényes a következő

Tétel. Ha $P > p$ és $Q > q$, az

$$\underline{r}(P, Q) = R(P, Q)\underline{a}', \quad \underline{a}'^* = (a_1, a_2, \dots, a_p)$$

egyenletben szereplő $R(P, Q)$ mátrix szinguláris.

Bizonyítás. Mivel $Q + l - 1 \geq q + 1$ minden $l = 1, 2, \dots, P$ értékre, (3) alapján az $R(P, Q)$ mátrix első oszlopvektora lineáris kombinációja a következő p oszlopvektornak. Ezzel a bizonyítás kész.

Megjegyzés. Az $R(P, Q)$ mátrix $P \leq p$ vagy $Q \leq q$ esetén nem szinguláris (lásd. T. W. Anderson [3], 240. o.).

A fenti tételre szimulációs eljárás megvalósítása során jöttünk rá, amikor is P, Q növelésével, valamint a megfigyelésszám növelésével a becslések igen "rendszeretlenül" viselkedtek, igen nagy szóródásokat mutattak, aminek oka nyilvánvalóan az $R(P, Q)$ mátrix szingularitása.

Hannan [2] könyvében szerepel egy megjegyzés (393 o. 5. megjegyzés) p és q meghatározására vonatkozóan. Az ott szereplő megjegyzésből nem világos, hogy P és Q növelése esetén R szingularitása miatt az együtthatók szignifikánsan el kell, hogy térjenek 0-tól, sőt igen nagy értékeket vehetnek fel. Anderson [3] könyvében ugyancsak nem említi a fenti nehézséget. (237-242. old.)

Példák. Hannan [2] könyvében szerepel példa az a_i ill. b_j együtthatók meghatározására (349-395 o.). Megmutatjuk, hogy szimulációs eredményeink mennyire vannak összhangban a fenti tétellel.

1) A

$$\xi(t) = a_1 \xi(t-1) + a_2 \xi(t-2) + \epsilon_t - b_1 \epsilon(t-1)$$

(2,1)-rendű autoregresszív-mozgóátlag folyamat $\{(a_1 = 1,3, a_2 = -0,4, b_1 = 0,6, \sigma = 1, a_i, b_j (i = 1, \dots, P), (j = 1, \dots, Q)$ becsléseire $0 \leq P \leq 5, 0 \leq Q \leq 5$ esetén a következő eredményeket kaptuk.

(P, Q)	Autoregresszív paraméterek					Mozgóátlag			$\hat{\sigma}^2$
	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{a}_4	\hat{a}_5	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3	
(1,0)	0.64								1.02
(2,0)	0.66	-0.021							1.02
(3,0)	0.66	-0.011	-0.014						1.02
(4,0)	0.66	-0.011	-0.019	0.008					1.02
(5,0)	0.66	-0.011	-0.019	0.010	-0.004				1.02
(1,1)						-0.032			1.02
(2,1)	1.33	-0.460				0.680			1.02
(3,1)	0.11	0.349	-0.025			-0.546			1.02
(4,1)	0.18	0.310	-0.025	0.001		-0.479			1.02
(5,1)	9.73	-6.000	0.083	0.184	-0.070	0.110			84.20
(1,2)	0.60					-0.050	-0.020		1.02
(2,2)	0.17	0.280				-0.470	-0.030		1.02
(3,2)	0.14	0.310	-0.010			-0.520	-0.020		1.02
(4,2)	-68.96	8.200	24.100	-1.750		-0.560	-0.010		4880.00
(5,2)	0.97	-4.400	2.760	-0.030	-0.060	-0.070	-0.024		18.00
(0,3)						-0.730	-0.440	-0.490	0.89
(1,3)	0.62					-0.040	-0.010	0.010	1.02
(2,3)	0.10	0.320				-0.560	-0.040	-0.002	1.02
(3,3)	79.50	-13.140				-0.480	-0.030	-0.001	6429.00
(4,3)	1.00	-1.850	2.450	-0.930		-0.530	-0.370	0.390	3.70
(5,3)	1.02	-0.570	2.300	-1.380	0.030	0.150	-0.170	0.470	4.50

2) A

$$\xi(t) = a_1 \xi(t-1) + \epsilon_1$$

(1,0)-rendű folyamat ($a_1 = 0.8$, $\sigma^2 = 1$) esetén pedig a következő becsléseket kapjuk:

(P, Q)	Autoregresszív paraméterek				Mozgóátlag			Fehérzaj szórás σ^2
	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	
(1,0)	0.8073							1.019
(2,0)	0.8150	-0.009						1.019
(3,0)	0.8150	-0.007	-0.003					1.019
(4,0)	0.8150	-0.006	-0.010	0.01				1.019
(1,1)	0.8030				-0.010			1.019
(2,1)	1.1800	-0.300			0.360			1.019
(3,1)	-2.3000	2.500	-0.030		-0.300			9.800
(4,1)	0.6300	0.150	-0.010	0.01	-0.190			1.019
(1,2)	0.8000				-0.010	-0.004		1.019
(2,2)	-2.2000	2.400			-0.300	-0.004		9.100
(3,2)	0.3000	-0.560	0.760		-0.500	-0.950		1.020
(4,2)	-0.2000	-2.100	-0.020		-0.400	-0.400		6.700
(1,3)	0.8000				-0.006	0.001	0.010	1.020
(2,3)	0.6000	0.140			-0.180	-0.001	0.010	1.019
(3,3)	-0.2000	-1.700	2.100		-0.400	-0.400	-0.003	6.700

Irodalom

- [1] G.P. Box – G.M. Jenkins, Time Series Analysis forecasting and control, (1970).
- [2] E.J. Hannan, Multiple Time Series, (1970).
- [3] T.W. Anderson, The Statistical Analysis of Time Series, (1970).

Beérkezett: 1972 szeptember 25.

S u m m a r y

On the solution of Joule-Walker equations

Remark about the estimation of the parameters of autoregressive and moving average process by the Joule-Walker method (momentum method). It is proved that the recommended methods (sec literature) give singular linear equations.

Р е з ю м е

О решении уравнений Юл-Валкера

Замечание к оценке параметров процесса авторегрессивного типа со скользящим суммированием проводимой по методу Юл-Валкера. Доказывается, что предлагаемый метод учебников для определения порядков авторегрессии и скользящего суммирования приводит к сингулярному уравнению.

AZ S SZINTRE VALÓ FELRENDELÉS ELNEVEZÉSŰ KÉSZLETMODELLEK KÖLTSÉGFÜGGVÉNYEINEK ÖSSZEHASONLÍTÁSA

Gerencsér László

BEVEZETÉS

A dolgozat első részében az S -szintre felrendelés elnevezésű készletmodellt és annak Prékopa András által bevezetett általánosítását mutatjuk be. (ld. [1]) Az általánosított modell megengedi a szállítmány több részletben történő ún. intervallumszerű érkezését. A második részben a minimális költségre egyszerű kifejezést vezetünk le. A harmadik részben két általános készletgazdálkodási folyamatot hasonlítunk össze, amelyekben a felhasználási és az érkezési folyamat is különböző lehet. Feltételt adunk arra, hogy a második folyamat minimális költsége kisebb legyen mint az elsőé, bárhogyan is állapítjuk meg a készletezési, illetve hiányköltségeket. A negyedik részben rövid áttekintést adunk az említett feltételek teljesüléséről normális eloszlással való közelítése esetén. Az ötödik részben a felhasználási illetve érkezési folyamatokban bekövetkező változásoknak a költségekre gyakorolt hatását vizsgáljuk.

1. AZ S SZINTRE FELRENDELÉS ELNEVEZÉSŰ KÉSZLETMODELL ÉS ANNAK KITERJESZTÉSE (ld. [1]).

A bemutatandó modell egy igen általános készletgazdálkodási folyamatot ír le. A modell és annak vizsgálata Prékopa idézett dolgozatának gondolatmenetét követi. Bemutatjuk az irodalomban elterjedt S szintre felrendelés elnevezésű készletmodellt és annak Prékopa által tárgyalt kiterjesztését.

Az általános modellben az igényfolyamatot egy $\alpha(0, s)$ független növekményű sztohasztikus folyamat írja le; $\alpha(0, s)$ a $(0, s)$ időintervallumban jelentkező igény. A (t_1, t_2) időintervallumban jelentkező igényt $\alpha(t_1, t_2)$ -vel jelöljük, és feltesszük, hogy ennek eloszlása csak $t_2 - t_1$ -től függ. $\alpha(0, s)$ eloszlásának sűrűségfüggvényét $f(x, s)$ jelöli. A várható értékre és a szórásra az

$$(1.1) \quad M(\alpha(0, s)) = m \cdot s \quad \text{és} \quad D^2(\alpha(0, s)) = \sigma^2 \cdot s$$

jelöléseket vezetjük be.

A készleteket T időközönként felülvizsgáljuk és az utolsó periódus fogyasztását figyelembevéve rendelünk. A 0 időpontban feladott rendelés a $(\tau, \tau + T)$ időintervallumban érkezhet meg egy vagy több részletben. Az érkezési folyamatot egy $\eta(s)$ $\tau \leq s \leq \tau + T$ sztohasztikus

folyamat írja le, ahol $\eta(s)$ az s időpontig leszállított árumennyiség és

$$(1.2) \quad \eta(\tau - 0) = 0 \quad \text{és} \quad \eta(\tau + T) = x.$$

Az x a rendelt mennyiséget jelenti.

Az $\eta(s)$ sztohasztikus folyamat csak az előző periódus fogyasztásától függ, ezért feltesz-
szük, hogy ez az $\alpha(0, s)$ sztohasztikus folyamattól független a $(\tau, \tau + T)$ intervallumban. Az
érkezési folyamat x -től való függése lineáris, tehát pl. kétszeres nagyságú rendelés esetén az ér-
kezési folyamatot a $2 \cdot \eta(s)$ sztohasztikus folyamat írja le. Végül feltesszük, hogy bármely
más $n \cdot T$ időpontban feladott rendelést követő szállítás azonos statisztikai jelleggel bír, vagy-
is az η sztohasztikus folyamatok a $\tau < s < \tau + T$ és a $\tau + nT < s < \tau + (n + 1)T$ intervallu-
mokon tekintve azonos eloszlásfüggvényekkel írhatók le.

Most bevezetünk még két elnevezést. Egy s időpillanatban rendelés alatt lévő, de még meg
nem érkezett árut könyvekben lévő készletnek nevezzük. Ha $\tau < s < T + \tau$, akkor ennek érté-
ke nyilván $\eta(\tau + T) - \eta(s)$. A másik fogalom a készletállapot, melyet egy adott pillanatban a
következőképpen számolunk ki:

$$\text{készletállapot} = \text{fizikai készlet} + \text{könyvekben lévő készlet} - \text{hiány}.$$

Hiányon az s időpontig jelentkező, de ki nem elégített igények mennyiségét értjük.

A készletgazdálkodási folyamatot mármost a $0, T, 2T$ időpontokban feladott rendelé-
sekkel úgy szabályozzuk, hogy a rendelés után a készletállapot szintje egy előre rögzített S
szint legyen.

Mielőtt tovább mennénk, bemutatunk két speciális modellt.

1. Modell. Az irodalomból jól ismert S szintre felrendelés elnevezésű modell (ld. [1],
[2]) az itt bemutatott általános modell speciális esete, amikor is

$$\eta(t) \equiv x \quad \tau \leq t \leq \tau + T.$$

Ez azt jelenti, hogy a rendelés a τ időpillanatban teljes egészében megérkezik.

2. Modell. Az újabbleletű Prékopa-féle modellben az $\eta(t)$ érkezési folyamatot a követ-
kező módon képzelhetjük el: a szállítások száma n , ez rögzített. x nagyságú rendelés esetén
a minimális szállított mennyiség

$$(1.3) \quad c = \lambda \cdot \frac{x}{n},$$

ahol λ fix, egynél kisebb pozitív szám.

Az egyes szállítások alkalmával $c + \gamma_i$ mennyiség érkezik. Itt a γ_i számokat úgy kapjuk,
hogy a fix λx nagyságú szállítmányon túl fennmaradó $(1 - \lambda)x$ nagyságú szállítást felosztjuk.

mint egy $(1 - \lambda)x$ hosszúságú intervallumot $n - 1$ db független egyenletes eloszlású ponttal. Végül a szállítások időpontjait a $(\tau, \tau + T)$ időintervallumban n db. független egyenletes eloszlású pont rögzíti.

Ezt az $\eta(t)$ folyamatot a következő két összefüggés jellemzi:

$$(1.4) \quad M(\eta(s)) = x \cdot \frac{s - \tau}{T}.$$

$$(1.5) \quad M(\eta(s) \cdot \eta(t)) - M(\eta(s)) \cdot M(\eta(t)) = \frac{\delta^2 x^2}{T^2} (s - \tau)(\tau + T - s) \quad s \leq t$$

Itt még a δ^2 számot kell megadni:

$$(1.6) \quad \delta^2 = \frac{1}{n} \left[1 + \left(\frac{n-1}{n+1} \right) (1 - \lambda)^2 \right].$$

Most rátérünk a költségek számbavételére.

A készletgazdálkodási folyamatnak az u.n. változó költségével foglalkozunk. Egységnyi áru egységnyi időre eső készletezési költsége IC . A hiányköltség számításakor időarányos költséget tételezünk fel. Egységnyi árunak egységnyi ideig fennálló hiánya \hat{p} költséggel jár. Itt hallgatólagosan feltételeztük, hogy a ki nem elégített igénylő várakozik, tehát az igény nem vész el.

Ha az időegységre vett átlagkészlet nagyságát D -vel, az átlaghiány nagyságát pedig B -vel jelöljük, akkor az átlagos költség függvény

$$(1.7) \quad \kappa = IC \cdot D + \hat{p} \cdot B.$$

A költségfüggvényt hosszú idő átlagában akarjuk minimalizálni. Belátható, hogy elegendő egy T hosszú intervallumra vett átlagot minimalizálni, pl. a $(\tau, \tau + T)$ intervallumra vonatkozóan.

A $(\tau, \tau + T)$ időintervallumból ragadjunk ki egy s pillanatot. A fizikai készlet nagyságát jelölje ξ_s , a hiány nagyságát pedig χ_s . (Nyilván $\xi_s \cdot \chi_s = 0$). Számítsuk most ki ξ_s -t. Az s időpontig $\alpha(0, s)$ nagyságú igény jelentkezik. A rendelkezésünkre álló készlet, amiből az igényeket kell fedeznünk a $\tau + T$ időpontban S , az s időpontban ennél kevesebb:

$$(1.8) \quad S - (\eta(\tau + T) - \eta(s)).$$

Tehát

$$(1.9) \quad \xi_s = S - (\eta(\tau + T) - \eta(s)) - \alpha(0, s),$$

ha ez pozitív. Vezessük be a

$$(1.10) \quad \zeta_s = \eta(\tau + T) - \eta(s) + \alpha(0, s)$$

valószínűségi változót. Ez S -től nem függ, ti. $\eta(\tau + T)$ az előző periódus fogyasztásával egyenlő, ami S -től független. Most már (1.9) helyett ezt írhatjuk:

$$(1.11) \quad \xi_s = S - \zeta_s \quad \text{ha} \quad S - \zeta_s > 0$$

és hasonlóan

$$(1.12) \quad \chi_s = \zeta_s - S \quad \text{ha} \quad \zeta_s - S > 0.$$

A várható értékre pedig az

$$(1.13) \quad M(\xi_s) = \int_0^s (S - x) dH_s(x)$$

és az

$$(1.14) \quad M(\chi_s) = \int_s^\infty (x - S) dH_s(x)$$

kifejezéseket kapjuk, ahol $H_s(x)$ a ζ_s valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. A $(\tau, \tau + T)$ intervallumra vett átlagkészletre az

$$(1.15) \quad \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} M(\xi_s) ds = \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} \int_0^s (S - x) dH_s(x) ds = \int_0^S (S - x) dH(x)$$

kifejezést kapjuk, ahol a $H(x)$ eloszlásfüggvény a $H_s(x)$ eloszlásfüggvények egy keveréke:

$$(1.16) \quad H(x) = \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} H_s(x) ds.$$

Végül is az átlagkészletre, illetve az átlaghiányra a következő kifejezéseket kapjuk:

$$(1.17) \quad D = \int_0^S (S - x) dH(x)$$

$$(1.18) \quad B = \int_S^\infty (x - S) dH(x).$$

2. A KÖLTSEGFÜGGVÉNY MINIMALIZÁLÁSA

Mielőtt a minimális költség meghatározására rátérnénk, egy fontos összefüggést vezetünk le. Az átlaghiányt megadó kifejezést alakítsuk át a következőképpen:

$$(2.1) \quad B = \int_S^\infty (x - S) dH(x) = \int_S^\infty x dH(x) - S(1 - H(S)).$$

Hasonlóan

$$(2.2) \quad D = \int_0^S (S - x) dH(x) = SH(S) - \int_0^S x dH(x).$$

A jobboldalon hozzuk be B -t:

$$(2.3) \quad D = B + S - \int_0^\infty x dH(x).$$

$$(2.4) \quad \text{Az } \int_0^{\infty} x dH(x) = M$$

jelölést bevezetve kapjuk, hogy

$$(2.5) \quad D = B + S - M$$

Ezt az összefüggést használjuk fel most a költségfüggvény kifejezésében:

$$(2.6) \quad \kappa = IC \cdot D + \hat{p}B = IC(B + S - M) + \hat{p}B = IC(S - M) + (IC + \hat{p}) \cdot B.$$

A minimumhely meghatározásához S szerint deriváljuk κ -t:

$$(2.7) \quad \frac{\partial \kappa}{\partial S} = (IC + \hat{p}) \frac{dB}{dS} + IC.$$

Az optimális S eleget tesz a $\frac{\partial \kappa}{\partial S} = 0$ egyenletnek. A most felírt kifejezés alapján tehát a

$$(2.8) \quad \frac{dB}{dS} = - \frac{IC}{IC + \hat{p}}$$

egyenletet kell megoldanunk.

Mármost a

$$B = \int_S^{\infty} (x - S) dH(x)$$

kifejezést S szerint deriválva kapjuk, hogy

$$(2.9) \quad \frac{dB}{dS} = H(S) - 1.$$

A (2.8) egyenlőségbe ezt beírva az optimális S szintre a következő egyenletet kapjuk:

$$(2.10) \quad H(S) = \frac{\hat{p}}{IC + \hat{p}}.$$

Mielőtt ezt az alapvető egyenlőséget tanulmányoznánk, vegyük észre, hogy maga a κ függvény konvex függvény, ugyanis

$$(2.11) \quad \frac{d\kappa}{dS} = (IC + \hat{p})(H(S) - 1) + IC$$

növekvő függvény. A költségfüggvény általában egyetlen S helyen veszi fel minimumát, ez a hely (2.10) szerint a $H(x)$ eloszlásfüggvény egy $\hat{p}/(\hat{p} + IC)$ kvantilise. Ezt az értéket S_0 -al jelöljük.

Folytatjuk a minimális költség kiszámítására vonatkozó levezetéseket. A

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \kappa &= IC(S - M) + (IC + \hat{p})B = IC(S - M) + \\ &+ (IC + \hat{p}) \int_S^{\infty} x dH(x) - (IC + \hat{p})S(1 - H(S)) \end{aligned}$$

formulában használjuk fel az $1 - H(S_0) = IC/(IC + \hat{p})$ összefüggést:

$$(2.13) \quad \kappa_0 = IC(S_0 - M) + (IC + \hat{p}) \int_{S_0}^{\infty} x dH(x) - S_0 \cdot IC.$$

vagyis

$$(2.14) \quad \kappa^0 = (IC + \hat{p}) \int_{S_0}^{\infty} x dH(x) - IC \cdot M,$$

ahol κ^0 a κ minimumát jelöli. Ez az összefüggés lesz további vizsgálatunk alapja.

3. KÉT ÁLTALÁNOS MODELL ÖSSZEHASONLÍTÁSA

Tekintsünk két fenti típusú készletgazdálkodási modellt, amelyeket az a_1, a_2 illetve η_1, η_2 igény, illetve érkezési folyamatok jellemeznek. A készletezési illetve hiányköltség mindkét modellre IC illetve \hat{p} . A κ_1, κ_2 költségfüggvényeket változó készletezési és hiányköltségek mellett akarjuk összehasonlítani. Bevezetőben megmutatjuk, hogy általában adott költségek mellett az egyik modell nem lehet minden S -re jobb mint a másik modell. Írjuk fel ugyanis az általános

$$(3.1) \quad \kappa(S) = IC(S - M) + (IC + \hat{p})B$$

formulát. A két költségfüggvény eltérésére mármost ezt írhatjuk:

$$(3.2) \quad \kappa_1(S) - \kappa_2(S) = -IC(M_1 - M_2) + (IC + \hat{p})(B_1 - B_2).$$

Tegyük fel most, hogy pl.

$$(3.3) \quad M_1 < M_2.$$

Az $S = 0$ helyen

$$(3.4) \quad B(0) = \int_0^{\infty} x dH(x) = M,$$

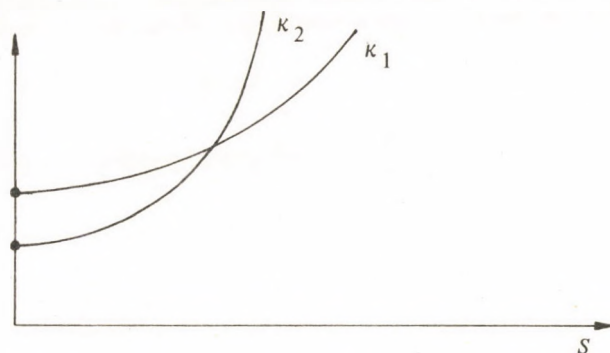
tehát

$$(3.5) \quad \kappa_1(0) - \kappa_2(0) = \hat{p}(M_1 - M_2) < 0.$$

Ha viszont $S \rightarrow \infty$, akkor $B(S) \rightarrow 0$, s ezért

$$(3.6) \quad \kappa_1(S) - \kappa_2(S) \rightarrow -IC(M_1 - M_2) > 0.$$

A két költségfüggvény tehát metszi egymást, ha $M_1 \neq M_2$ (ld. az ábrát), ezért szükséges az összehasonlítást a minimális költségekre végezni változó készletezési és hiányköltségek mellett.



Vezessük be a

$$(3.7) \quad \beta = \frac{\hat{p}}{IC + \hat{p}}$$

jelölést, a költségfüggvények minimumát pedig jelölje κ_1^0 és κ_2^0 . Vezessük be végül az optimális S szintre az $S_1(\beta)$ ill. $S_2(\beta)$ jelöléseket. Ezeket a

$$(3.8) \quad \begin{aligned} H_1(S_1(\beta)) &= \beta && \text{illetve a} \\ H_2(S_2(\beta)) &= \beta \end{aligned}$$

egyenletek alapján kapjuk. (H_1 és H_2 az 1. szakaszban bevezetett H függvénynek felelnek meg.)

A (2.14) eredmény alapján általában

$$(3.9) \quad \kappa^0(\beta) = (IC + \hat{p}) \int_{S(\beta)}^{\infty} x dH(x) - ICM.$$

Mi most azt vizsgáljuk, hogy mikor lesz

$$\kappa_2^0(\beta) \leq \kappa_1^0(\beta)$$

tetszőleges IC és \hat{p} értékekre. Az idézett formula alapján ez az egyenlőtlenség $(IC + \hat{p})$ -vel való osztás és némi átrendezés után egyenértékű az

$$(3.10) \quad \int_{S_2(\beta)}^{\infty} x dH_2(x) - \int_{S_1(\beta)}^{\infty} x dH_1(x) \leq (1 - \beta)(M_2 - M_1)$$

egyenlőtlenséggel, ahol felhasználtuk azt is, hogy $IC/(IC + \hat{p}) = 1 - \beta$.

Az egyenlőtlenség két oldalát vizsgáljuk most mint β függvényét. A jobboldal β -nak lineáris függvénye, amely értelmezve van a $0 \leq \beta \leq 1$ értékekre.

A baloldalon vezessük be az

$$(3.11) \quad L_i(\beta) = \int_{S_i(\beta)}^{\infty} x dH_i(x) \quad i = 1, 2$$

jelöléseket. Számítsuk ki az $L(\beta) = L_2(\beta) - L_1(\beta)$ függvény értékét először a $\beta = 0$ és $\beta = 1$ helyeken.

Nyilván

$$(3.12) \quad \begin{aligned} L_1(0) &= \int_0^{\infty} x dH_1(x) = M_1 \quad \text{és} \\ L_2(0) &= \int_0^{\infty} x dH_2(x) = M_2, \end{aligned}$$

tehát

$$(3.13) \quad L(0) = M_2 - M_1,$$

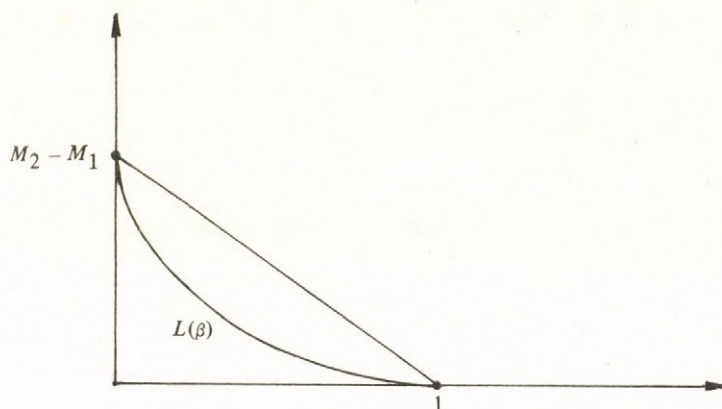
ami egyben a jobboldal értéke is a $\beta = 0$ helyen. $\beta = 1$ esetén pedig nyilván

$$(3.14) \quad L_1(1) = L_2(1) = L(1) = 0,$$

ami ismét egyezik a jobboldallal. Az

$$(3.15) \quad L(\beta) \leq (1 - \beta)(M_2 - M_1)$$

egyenlőtlenség teljesüléséhez elég tehát, ha $L(\beta)$ konvex (ld. az ábrát).



$L(\beta)$ konvexitásának vizsgálatakor kiszámítjuk a második deriváltat. Ezt megelőzően azonban meghatározzuk $S(\beta)$ deriváltját. A

$$H(S(\beta)) = \beta$$

összefüggést β szerint deriválva kapjuk:

$$(3.16) \quad h(S(\beta)) \frac{dS}{d\beta} = 1,$$

vagyis

$$(3.17) \quad \frac{dS}{d\beta} = \frac{1}{h(S(\beta))},$$

ahol $h(x)$ a $H(x)$ eloszlás sűrűségfüggvénye, amelynek létezését a továbbiakban feltesszük. Már most az

$$L_1(\beta) = \int_{S_1(\beta)}^{\infty} x h_1(x) dx$$

függvény deriváltja:

$$(3.18) \quad \frac{dL_1}{d\beta} = -S_1(\beta) h_1(S_1(\beta)) \cdot \frac{1}{h_1(S_1(\beta))} = -S_1(\beta)$$

második deriváltja pedig

$$(3.19) \quad \frac{d^2 L_1}{d\beta^2} = -\frac{dS_1}{d\beta} = -\frac{1}{h_1(S_1(\beta))}.$$

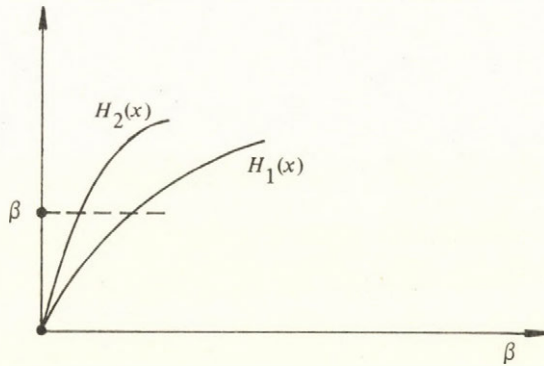
Az $L = L_2 - L_1$ függvényre tehát

$$(3.20) \quad \frac{d^2 L}{d\beta^2} = \frac{1}{h_1(S_1(\beta))} - \frac{1}{h_2(S_2(\beta))}.$$

Ez pozitív akkor és csak akkor, ha

$$(3.21) \quad h_1(S_1(\beta)) \leq h_2(S_2(\beta))$$

Ezt az alapvető összefüggést úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a második modell jobb mint az első, ha a H_1 eloszlásfüggvény sűrűsége kisebb mint a H_2 eloszlásfüggvény sűrűsége bármely β kvantilis $0 < \beta < 1$ mentén összehasonlítva (ld. az ábrát).



E feltétel egy következménye, hogy

$$(3.22) \quad H_2(x) > H_1(x).$$

Ugyanis a $H_i(x)$ függvény értéke x negatív értékére 0, és általában bármely pozitív x -re $H(x) > 0$. A $H_i^{-1}(y)$ inverz függvények tehát az $y = 0$ pontban egyenlők zérussal, ugyanakkor $H_2^{-1}(y)$ deriváltja kisebb mint $H_1^{-1}(y)$ deriváltja.

Ezért

$$(3.23) \quad H_2^{-1}(y) < H_1^{-1}(y),$$

ami az állítással egyenértékű.

Az imént kapott eredményeket úgy is megkaphatjuk, hogy közvetlenül az átlagkészlet és az átlaghiány optimális értékeit vizsgáljuk. Jelöljük ezeket $D^0(\beta)$ -val ill. $B^0(\beta)$ -val. Könnyű megmutatni az előzőek alapján, hogy

$$(3.24) \quad \frac{dD^0(\beta)}{d\beta} = \frac{\beta}{h(S^0(\beta))}$$

és

$$(3.25) \quad \frac{dB^0(\beta)}{d\beta} = \frac{\beta - 1}{h(S^0(\beta))}.$$

Két modell esetére a

$$(3.26) \quad D_1^0(\beta) \geq D_2^0(\beta)$$

és a

$$(3.27) \quad B_1^0(\beta) \geq B_2^0(\beta)$$

feltételek együttes teljesülését kívánhatjuk meg. Ezek a feltételek pedig teljesülnek, ha (3.21) teljesül. A (3.26) egyenlőtlenség a $\beta = 0$ helyen ugyanis érvényes. Másrészt a baloldal deriváltja nagyobb, mint a jobboldal deriváltja minden β -ra (3.24), és (3.21) alapján, ezért az egyenlőtlenség helyes. Hasonlóan bizonyítható (3.27) is.

Ebben a formában eredményünk azt jelenti, hogy a második modell átlagkészlete csökkenthető az átlaghiány egyidejű csökkentésével.

A következő szakaszban a (3.21) feltétellel kapcsolatban végzünk speciális vizsgálatokat.

4. EGY SPECIÁLIS ÖSSZEHASONLÍTÁSI MÓDSZER

Először az 1. szakaszban bevezetett 1. és 2. modell viszonyát vizsgáljuk, majd bemutatunk egy normális eloszlással való közelítési módszert és azt a két említett modellre alkalmazzuk.

A két modell költségfüggvényeinek összehasonlításakor számítsuk ki a $H_1(x)$ és $H_2(x)$ keverék eloszlásokat. Valójában megelégszünk a várható értékek kiszámításával. Az

$$(4.1) \quad M(S_s^{(1)}) = M(\alpha(0, s)) = m \cdot s \quad \text{és a}$$

$$(4.2) \quad M(S_s^{(2)}) = M(\alpha(0, s) + \eta(\tau + T) - \eta(s)) = m(\tau + T)$$

összefüggésekből indulunk ki. A második összefüggés (1.4)-ből adódik, ha először az x feltétel mellett számítjuk a várható értékeket, s aztán figyelembe vesszük, hogy az $x = a(-T, 0)$

valószínűségi változó várható értéke $m \cdot T$.

A (4.1) illetve (4.2) egyenlőségek τ és $(\tau + T)$ határok közötti integrálközepe adja az M_1 illetve M_2 értékeket:

$$(4.3) \quad M_1 = m\left(\tau + \frac{T}{2}\right)$$

$$(4.4) \quad M_2 = m(\tau + T).$$

Mivel $M_1 < M_2$ a 3. szakasz bevezetése szerint

$$(4.5) \quad \kappa_1(0) \leq \kappa_2(0).$$

Ebből nyilván következik, hogy ha β elegendő kicsiny vagyis \hat{p} kicsiny, akkor $S_1(\beta)$ és $S_2(\beta)$ is kicsi lévén, érvényes lesz a

$$(4.6) \quad \kappa_1^0(\beta) < \kappa_2^0(\beta)$$

egyenlőtlenség is. A klasszikus modell szerint történő gazdálkodás tehát alacsony hiányköltség esetén biztosan kedvezőbb.

Hogy a klasszikus modell totálisan is jobb (tehát β akármilyen értékére) azt egzakt módon nem tudjuk megvizsgálni, tekintve, hogy az intervallumszerű érkezés modelljében a keverékeloszlás explicit formában nem ismert. Mégis adunk némi támpontot, amelynek alapján a két modell költségfüggvényei összehasonlíthatók. A modellek kiszámításának elterjedt módszere, hogy pl. az igényfolyamatot Wiener-folyamattal közelítik. Prékopa idézett dolgozatában a ζ_s változó normális közelítése szerepel. Ezek a közelítések nehezen számítható integrálokra vezetnek, ezért most magát a ζ változó $H(x)$ eloszlását közelítjük normális eloszlással. Az ilyenfajta közelítések gyakorlati értékére később visszatérünk, most tisztán matematikai szempontból vizsgáljuk meg a kérdést.

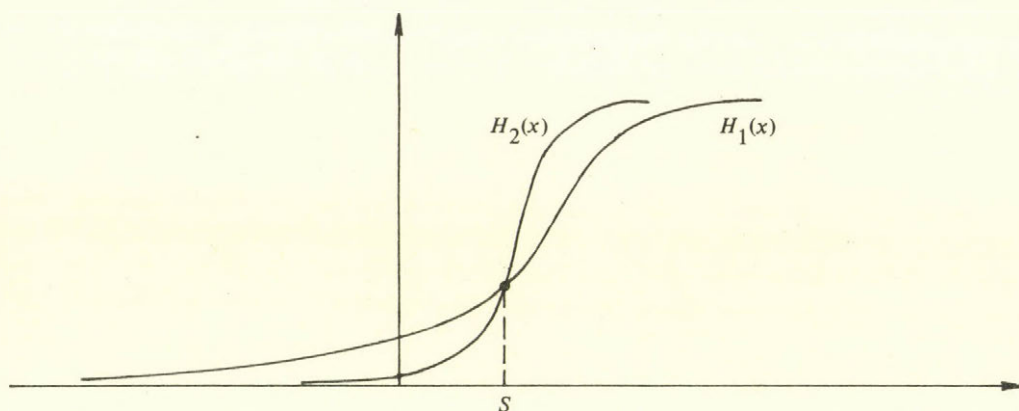
Legyenek tehát $H_1(x)$ és $H_2(x)$ normális eloszlásfüggvények m_1, σ_1 és m_2, σ_2 paraméterekkel. Ha $\sigma_1 = \sigma_2$, akkor a vizsgálandó (3.21) formulában nyilván egyenlőség szerepel. Tegyük fel tehát, hogy pl. $\sigma_2 < \sigma_1$.

Állítjuk, hogy ha $\sigma_2 < \sigma_1$, akkor a (3.21) feltétel teljesül, azaz:

$$(4.7) \quad h_1(S_1(\beta)) < h_2(S_2(\beta)).$$

A bizonyítás vázlata a következő: tetszőleges m -re bizonyítjuk, hogy a $H_1(x)$ és a $H_2(x - m)$ függvények görbéi egyetlen pontban metszik egymást (ld. az ábrát). (Ez annak következménye, hogy a $h_1(x)$ és $h_2(x - m)$ függvénygörbék pontosan két pontban metszik egymást). Mármost könnyű belátni, hogy

$$(4.8) \quad \begin{aligned} H_1(x) &> H_2(x) && \text{ha } x \rightarrow -\infty \quad \text{és} \\ H_1(x) &< H_2(x) && \text{ha } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$



az átmetszés módja tehát az ábrán korrekt módon van feltüntetve, az S metszéspontban

$$(4.9) \quad h_1(S) < h_2(S).$$

A $H_2(x)$ függvény mozgatásával azonban az S metszéspont az egész számegyenest bejárhatja, s ez állításunkat bizonyítja.

A most ismertetett eredmény alapján hasonlítsuk össze a szakasz elején vizsgált 1. és 2. készletmodellt. A ξ_s változók $H_s(x)$ eloszlásfüggvényeinek $H(x)$ keverékét azonos várható értékű és azonos szórású normális eloszlással közelítjük. Számításaink alapján a szórásnégyzetekre a

$$(4.10) \quad \Sigma_1^2 = \sigma^2\left(\tau + \frac{T}{2}\right) + \frac{m^2}{12} \cdot T^2.$$

és a

$$(4.11) \quad \Sigma_2^2 = \sigma^2\left(\tau + \frac{5}{6}T + \frac{\delta^2}{6}T\right) + \frac{\delta^2}{6}m^2T^2$$

eredményeket kaptuk az 1. illetve 2. modellre. A $\kappa_1^0(0) < \kappa_2^0(0)$ egyenlőtlenségtől indítva azt vizsgáljuk meg, mikor lesz

$$(4.12) \quad \Sigma_1^2 < \Sigma_2^2.$$

A Σ_2^2 érték csökken, ha $\delta = 0$ -t helyettesítünk be, elégséges feltétel ezért a

$$(4.13) \quad \delta^2\left(\tau + \frac{T}{2}\right) + \frac{m^2}{12}T^2 < \delta^2\left(\tau + \frac{5}{6}T\right)$$

egyenlőtlenség. Némi átrendezés után az

$$(4.14) \quad \frac{m}{\sigma} < \frac{2}{\sqrt{T}}$$

feltételt kapjuk. A gyakorlat számára a (4.14) összefüggés teljesülése azt jelenti, hogy ha lehetséges a rendelések egy tételben és a megadott határidőre történő szállítását kell előnyben részesíteni.

5. ÉRZÉKENYSÉGI VIZSGÁLATOK

Ebben a szakaszban megvizsgáljuk, hogyan változik a költségfüggvény a felhasználási és az érkezési folyamat függvényében.

Az igény folyamat variációját az 1. modellen vizsgáljuk meg, de eredményeink nehézség nélkül átvihetők a 2. modellre is. A felhasználási folyamat legyen Wiener-folyamat. Ez egy már jól ellenőrzött közelítési módszer. A variáció abban áll, hogy e folyamat szórását csökkentjük.

Számítsuk ki először egy adott s időpillanatban fellépő hiány változását. Feladatunk az $\alpha(0, s) - S$ valószínűségi változó integráljának meghatározása a pozitív féltengelyen. Legyen e változó várható értéke m , szórása σ . A keresett kifejezés:

$$(5.1) \quad R(m, \sigma) = \int_0^{\infty} x \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) dx.$$

Az integrálás elvégezhető és kapjuk, hogy

$$(5.2) \quad R(m, \sigma) = \sigma \varphi\left(\frac{-m}{\sigma}\right) + m \left[1 - \Phi\left(\frac{-m}{\sigma}\right)\right].$$

Ebből pedig a $\varphi\left(\frac{-m}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{m}{\sigma}\right)$ összefüggést figyelembevéve:

$$(5.3) \quad \frac{\partial R(m, \sigma)}{\partial \sigma} = \varphi\left(\frac{m}{\sigma}\right).$$

A derivált pozitív, a hiány tehát σ növelésével együtt nő. Ez minden s időpillanatban így van, tehát a B átlagértékről is elmondhatjuk, hogy az σ -nak monoton függvénye.

A derivált numerikus értékét is megbecsüljük. Az (5.3) összefüggést az s időpillanatban jelentkező B_s hiányra alkalmazva a

$$(5.4) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} B_s(\sigma) = \varphi\left(\frac{S-ms}{\sigma\sqrt{s}}\right) \cdot \sqrt{s} > \varphi\left(\frac{S-ms}{\sigma\sqrt{s}}\right) \cdot \sqrt{\tau}$$

eredményt kapjuk. Nem nehéz belátni, hogy ha s végigfut a $(\tau, \tau + T)$ intervallumon, akkor a jobb oldal minimuma valamelyik végpontban valósul meg, tehát

$$(5.5) \quad \varphi\left(\frac{S-ms}{\sigma\sqrt{s}}\right) \geq \min\left\{\varphi\left(\frac{S-m\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \varphi\left(\frac{S-m(\tau+T)}{\sigma\sqrt{\tau+T}}\right)\right\}.$$

Figyelembevéve most még a

$$(5.6) \quad B = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} B_s ds$$

összefüggést kapjuk, hogy

$$(5.7) \quad \frac{\partial B}{\partial \sigma} \geq \sqrt{\tau} \cdot \min\left\{\varphi\left(\frac{S-m\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \varphi\left(\frac{S-m(\tau+T)}{\sigma\sqrt{\tau+T}}\right)\right\}.$$

Az átlagkészletre vonatkozóan nem kell újabb számítást végezni, ugyanis (2.5) alapján $D - B$ konstans, tehát

$$(5.8) \quad \frac{\partial D}{\partial \sigma} = \frac{\partial B}{\partial \sigma}$$

bármely S -re. A $\kappa = IC \cdot D + \hat{p}B$ összefüggés és (5.7) és (5.8) alapján végül

$$(5.9) \quad \frac{\partial \kappa}{\partial \sigma} \geq (IC + \hat{p}) \cdot \sqrt{\tau} \cdot \min \left\{ \varphi \left(\frac{S - m\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right), \varphi \left(\frac{S - m(\tau + T)}{\sigma\sqrt{\tau + T}} \right) \right\}.$$

A $\sigma = 0$ határesetben az ismert Prékopa – Ziermann-féle modell egy minimumköltséges változatát kapjuk.

Az érkezési folyamatban változást a szállítások n számának növelésével tudunk eszközölni. Most a $\kappa^0(\beta)$ függvény változását vizsgáljuk meg, s ehhez az általunk bevezetett normális közelítést használjuk.

Az (1.6) formula alapján n növekedésével δ^2 csökken. Ebből pedig (4.11) alapján \sum_2^2 csökkenése is következik, s ezáltal $\kappa^0(\beta)$ is kisebb lesz. Elmondhatjuk tehát, hogy ha már egyszer intervallumszerű az érkezés, akkor célszerű minél több részletben szállítani.

I r o d a l o m

- [1] Prékopa András, Az S szintre való felrendelés elnevezésű készletmodell és annak kiterjesztése intervallumszerű érkezések esetén, Számológép, 1971.
- [2] G. Hadley – T.M. Whitin, Analysis of Inventory Systems Prentice Hall, 1963.

Beérkezett: 1972 június 10.

S u m m a r y

Comparison of cost functions of inventory models called raising to S level

In given T intervals we re-examine the stock in store of a commodity and raise it by order to S level. In the general model the demand process has an independent growth, the arrival is an arbitrary stochastic process. A simple expression is given to that S_0 level for which the costs of storage and of articles missing are minimal. We compare two processes of general inventory control in which use and transportation can also be different. For arbitrary costs of storage and of articles missing we give a condition in order to make smaller the minimal cost of the second process than that of the first and to decrease the average stock simultaneously with the decrease of the average deficiency.

We apply the result to two special models. In the first model all commodities ordered arrive at the same time, while in the second, so-called Prékopa model, the order is shipped in instalments at random times in even distributions of fixed number. A part of the incoming quantity is constant; while the part left behind from the order is distributed at random, according to an even distribution with the particular shipments. In case of low cost of articles missing the first model is more advantageous. If the demand process is approximated by a Wiener process, then the minimal cost of the process with smaller dispersion is smaller.

Р е з ю м е

Сравнение функций расходов в случае моделей запасов повышения до уровня s путём заказа.

Через данные интервалы времени T контролируем запас некоторого товара на складе и путём заказа повышаем уровень запаса до s . В общей модели процесс требований имеет независимое приращение, поставка товара – какой угодно стохастических процесс. Мы дадим простое выражение для такого уровня s_0 , при котором затраты на хранение и потери от дефицита минимальны. Приведено сравнение двух общих процессов управления запасами, в которых как поставка товара, так и спрос могут быть различными. При любых расходах на хранение и потерях от дефицита дадим условие одновременного сокращения среднего запаса и среднего дефицита и того, чтобы минимальные расходы второго процесса были меньше расходов первого. Полученный результат применяется в двух специальных моделях. В первой из них всё заказанное количество товара поступает сразу, во второй, так называемой модели Прекопы, заказ поступает по частям в данное число случайных моментов времени равномерного распределения. Часть поступающего количества постоянна, в то время, как оставшаяся часть заказа разделяется между отдельными транспортировками случайно по закону равномерного распределения. При низких потерях от дефицита первая модель выгоднее. Если процесс требований аппроксимируется с помощью процесса Винера, то ниже оказываются минимальные расходы процесса с меньшей дисперсией.

ÖRÖKNAPTÁR

Varga Gyula

Az öröknaptár probléma gyakran felmerül az elektronikus számítógépek bevezetése folyamán a gyakorlati élet különböző területein. Gyakori tény pl., hogy a számítógép által használt dátum (monitor-date, vagy today's-date) 5 karakteres alakú, míg a gép által készített kiírási termékeken, bizonylatokon (pl. bérjegyzéken, számlákon, zárlati naplókön stb.) 6 karakteres alakra van szükség, s ennek automatikus előállítása nem lényegtelen a feldolgozás flexibilitásánál. A pénzügyi tevékenységben jelentős feladat a "lejárati dátumok" ellenőrzése, mind az esedékeség, mind a kamatok tekintetében. Vagy gondoljunk csak arra, hogy a számítógépek lehetővé teszik a termelés-programozás során a megrendelések magas színvonalon intézett, automatikus visszaigazolását. A kieső vasárnapok összeszámolásában az öröknaptár-elv segíthet. A történészek, régészek munkájában sok segítséget adhat egy összeállított öröknaptár. Nem véletlen, hogy az irodalomban is találkozunk öröknaptár programokról szóló beszámolókkal. De publikáció nélkül is számtalan helyen készült demonstrációs célokra öröknaptár program.

A megoldás alapját szolgáló naptárelv az elmúlt évszázadokban neves matematikusokat és csillagászokat foglalkoztatott. A naptár: kísérlet a trópusi évről* közép-napokban** való kifejezhetőségére. Elsősorban a csillagászati ismeretek bővülésével ez a kísérlet egyre eredményesebb lett. A két legismertebb naptár, a Julianus és Gergely féle. A Julianus naptár, amelyet Julius Caesar vezetett be Sosigenes, alexandriai csillagász tanácsára i.e. 45-ben, i.u. 325-ben 3 napos módosítással 1582. október 15-ig volt érvényben. A Julianus naptár szerint egy év 365 nappól áll, kivéve minden negyediket, mely 366 napos. A Gergely naptár – melyet elsősorban Lilius és Clavius alkotott meg – ezt úgy javította, hogy figyelembe véve a felgyülemlett eltéréseket, 10 napot átugrott és az évszázadok közül csak a 4-el oszthatók maradtak szökőévek.

A továbbiakban ismertetünk egy olyan öröknaptár programot, mely időszámításunk kezdetétől határozza meg egy dátumhoz a napot.

*Trópusi év = az az időköz, mely az évi látszó mozgást végző Napnak a közepes tavaszponton való két egymásutáni átmenete között telik el.

Közép-napban való értéke = 365 nap, 5 óra, 48 p., 46 mp.

**Közép-nap = a Nap két egymást követő alsó delelése közt eltelt idő a Nap – nap. Ez nem egyenletes, a Nap változó sebességű mozgása miatt. A Nap nem egyenletes mozgásának kiküszöbölésére alkották meg az elméleti közép-Napot, melynek két egymásutáni delelése között eltelt időköze a közép-nap, értéke 24 óra.

A program alapja a naptárelv algoritmizálása. Rendeljük hozzá minden naphoz egy 0-6 közötti értéket*, s jelöljük i -vel.

Amennyiben egy bizonyos dátumról tudjuk, hogy a dátumhoz rendelt jelölő szám i , akkor bármely más dátum jelölő száma:

$$j \equiv K + i \pmod{7},$$

ahol a K a két dátum között eltelt napok száma, mely a következő képlettel számítható:

$$K = 365 \cdot e + \sum_{k=1}^h N_k + n + k$$

ahol e = a két dátum közötti évek száma

h = az években ki nem fejezhető maradék hónapok száma

n = az években és hónapokban ki nem fejezhető maradék napok száma

N_k = a k -ik ($1 \leq k \leq h$) hónapban lévő napok száma

k = egy korrekciós faktor

Igy a fenti kifejezés a következőre módosul:

$$j \equiv e + \sum_{k=1}^h N_k + n + k \pmod{7}.$$

A k korrekciós faktor a szökőévek beszámítására szolgál.

A további feladat tehát annak az algoritmusnak előállítását, mely a különböző tagok (mod 7) vett maradékait szolgáltatja.

Az alábbi algol program ismerteti ezt az eljárást.

A melléklet alapján az algoritmus helyessége könnyen ellenőrizhető is.

```

procedure      ÖRÖKNAPTÁR      (A, B, C, D, E);
      value      A, B, C, D;      integer A, B, C, D, E;
comment:      A az évszázad, B az évszám második két karaktere, C a hónap sorszáma, D a
      nap száma, E tartalmazza a jelölő számot;
begin integer  A1, M, X, C1, C2, C3, P, Z, H, Y, W;
comment:      évszázad maradéka;

      W: = 7;
      A1 := A - /A ÷ 4 / * 4;
      if A1 = 0 then W := 0 else W := W - A1;
    
```

*A kialakított programban a hozzárendelés a következő:

Szombat	= 0	Szerda	= 4
Vasárnap	= 1	Csütörtök	= 5
Hétfő	= 2	Péntek	= 6
Kedd	= 3		

comment: év maradéka;

A1: = B - /B ÷ 28/ * 28;

M: = A1 ÷ 4;

M: = M + A1;

M: = M - /M ÷ 7/ * 7;

comment: nap maradéka;

X: = D - /D ÷ 7/ * 7;

comment: hónap maradéka;

if C ≤ 2 then C1: = C + 12 else C1: = C;

C1: = C1 - 3;

C2: = C1 ÷ 2;

C3: = C1 - C2 * 2;

if C3 = 0 then P: = 0 else begin

if C1 ≤ 6 then P: = 3 else begin

if C = 2 then P: = 3 else P: = 2 end, end;

if C ≤ 9 then P: = P + 1;

A1: = C2 * 5;

A1: = A1 + 3;

A1: = A1 + P;

If C ≤ 2 and E - /B ÷ 4/ * 4 = 0 then

begin A1: = A1 - 1; if B = 0 and A - /A ÷ 4/ * 4 ≠ 0

then A1: = A1 + 1; end;

Z: = A1 - /A1 ÷ 7/ * 7;

H = W + M + X + Z + 14;

Y = A * 10⁶ + B * 10⁴ + C * 10² + D;

if Y ≤ 15821005 and Y ≥ 03250325 then H: = H + 2;

if Y ≤ 03250321 and Y ≥ 00000001 then H: = H + 4;

if A < 15 then begin A1: = 15 - A; H: = H - A1;

A1: = A1 ÷ 4; H: = H + A1 end;

E: = H - /H ÷ 7/ * 7;

end;

MELLÉKLET

Január 1. napja időszámításunk kezdetétől napjainkig

Vasárnap	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Szombat
0001	0030	0020	0060	0010	0050	0040
0080		0070				0090
0130	0120		0110	0100	0140	
	0170	0160		0150	0190	0180
0220		0210	0200	0240		0230
0270	0260		0250	0290	0280	
	0310	0300	0330			0320
0350	0340	0380		0370	0360	
	0390					
0440		0430	0420		0410	0400
0490	0480		0470	0460		0450
	0530	0520		0510	0500	0540
0580		0570	0560		0550	0590
0630	0620		0610	0600	0640	
	0670	0660		0650	0690	0680
0720		0710	0700	0740		0730
0770	0760		0750	0790	0780	
	0810	0800	0840		0830	0820
0860		0850	0890	0880		0870
0910	0900	0940		0930	0920	
	0950	0990	0980		0970	0960
1000	1040		1030	1020		1010
1050	1090	1080		1070	1060	
1140		1130	1120		1110	1100
1190	1180		1170	1160		1150
	1230	1220		1210	1200	1240
1280		1270	1260		1250	1290
1330	1320		1310	1300	1340	
	1370	1360		1350	1390	1380
1420		1410	1400	1440		1430
1470	1460		1450	1490	1480	
	1510	1500	1540		1530	1520
1560	1590	1550		1580		1570

Vasárnap	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Szombat
1640		1630	1620		1610	1600
1690	1680		1670	1660		1650
1730	1720		1710		1700	
	1770	1760		1750	1740	1780
					1790	
	1810		1800			
1860		1850	1840		1830	1820
			1890	1880		1870
	1900	1930	1920			1910
1950	1940	1980		1970	1960	
	1990					
			2020		2010	2000

Beérkezett: 1972 június 25.

S u m m a r y

Perpetual calendar

In everyday life we often meet tasks connected with the perpetual calendar principle. For the calendar principle appearing in the form of a calendar an algorithm can easily be constructed so that it can be computerized. The paper presents an ALGOL program for this.

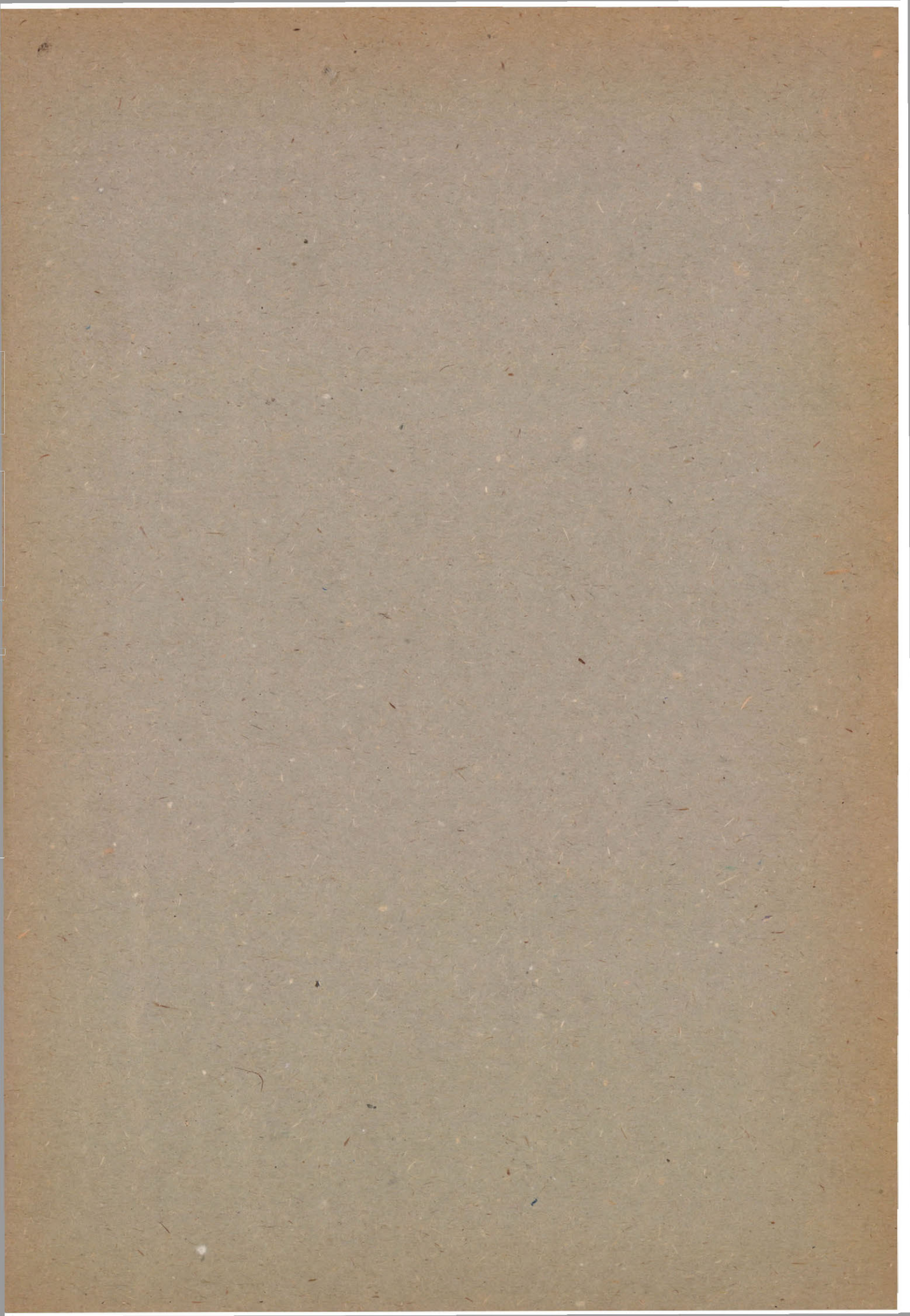
Р е з ю м е

Вечный календарь

В практической жизни встречаются такие задачи, которые могут быть приведены к принципу вечного календаря. Принцип календаря появляющийся в форме календаря можно легко алгоритмировать и в следствие этого решать на ЦВМ. В качестве примера приведена программа решения задачи на языке АЛГОЛ.

TARTALOMJEGYZÉK

Prékopa András:	
A "megengedett irányok" elnevezésű nemlineáris programozási módszer kiterjesztése kvázikonkáv feltételi függvények esetére	3
Pásztorné Varga Katalin:	
Nem teljesen meghatározott Boole-függvények szintézise $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\text{NAND}\}$, ill. $\{\text{NOR}\}$ bázisban	17
Deák István:	
Egy sztohasztikus programozási modell számítógépes kiértékelése	33
Klafszky Emil:	
Marginális értékek a geometriai programozásban	51
Kersner Róbert:	
Operátor-félcsoportok és parabolikus parciális differenciálegyenletek	69
Gyurácz Németh Teréz:	
A Youle – Walker egyenletek megoldásáról	81
Gerencsér László:	
Az S szintre való felrendelés elnevezésű készletmodellek költségfüggvényeinek összehasonlítása	87
Varga Gyula:	
Öröknaptár	103



2091