315.784

7/1971

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA

KÖZLEMÉNYEK

7.

1971 DECEMBER

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA

KÖZLEMÉNYEK
7.

Budapest, 1971. december

Szerkesztőbizottság:

ARATÓ MÁTYÁS (felelős szerkesztő)
FISCHER JÁNOS, GEHÉR ISTVÁN, GERGELY JÓZSEF,
GERTLER JÁNOS, MOLNÁR IMRE, PRÉKOPA ANDRÁS,
SRAJBER BENEDEK, TANKÓ JÓZSEF

Felelős kiadó:

Dr. VÁMOS TIBOR
igazgató

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

Technikai szerkesztő:
MESZLÉNYI MÁRIA

MTA Számítástechnikai Központja
Budapest, I. Uri u. 49.

EGYSZERŰ ALGORITMUS VÉGES ÁLLAPOTÚ MARKOV-LÁNC ERGODIKUS OSZTÁLYAINAK MEGHATÁROZÁSÁRA

Irta: Tankó József

Az alábbiakban ismertetünk egy egyszerű algoritmust véges állapotú homogén Markov-lánc ergodikus osztályainak meghatározására és igazoljuk az algoritmus helyességét. Az algoritmus kevés állapot esetén egyszerű grafikus formában is végrehajtható. Nagyobb állapotszám esetén a megadott ALGOL vagy FORTRAN program lehetővé teszi az algoritmus számológéppel történő végrehajtását.

Az algoritmus eredményét egy jelölő vektorral ábrázolhatjuk, amelyből kiolvasható, hogy mely állapotok tartoznak ugyanabba az ergodikus osztályba és mely állapotok lényegtelenek. Ennek alapján a Markov-lánc állapotai könnyen átszámozhatók úgy is, hogy az ergodikus osztályok tagjai egymásutáni sorszámokat kapjanak és a legnagyobb sorszámúak legyenek a lényegtelen állapotok. Ilymódon elérhető a Markov-lánc egylépéses átmenetmátrixának szokásos kvázi-diagonális szupermátrixszá való átrendezése.

Az algoritmus alkalmas irányított gráf erősen összefüggő* zárt (amelyből nem vezet ki nyíl) komponenseinek megkeresésére is, ha a csúcsoknak a Markov-lánc állapotait, irányított éleinek pedig az átmenetmátrix pozitív elemeit (a hiányzó éleknek 0 elemeket) feleltetünk meg.

1. AZ ALGORITMUS ÉS IGAZOLÁSA

Ebben a részben ismertetjük és igazoljuk a grafikus algoritmust, majd egy példán illusztráljuk azt. Előzőleg azonban néhány definíciót adunk.

1.1. DEFINICIÓK ÉS ELŐKÉSZITÉS

Legyen $\{X_t\}$ egy n állapotú *homogén Markov-lánc* $P=\{p_{ij},\ i,j=1,2,\dots,n\}$ egylépéses átmenetvalószínűségekkel. Az állapotok számozási sorrendje tetszőleges és a P mátrix $p_{ij} \geqslant 0$ eleme annak valószínűségét adja meg, hogy $X_{t+1} = j$ legyen, feltéve, hogy $X_t = i$ volt. P egy u.n. sztochasztikus mátrix, ahol $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, $i = 1,2,\dots,n$ (bár az algoritmusban ez nincs kihasználva!). A szemléltetés céljából a Markov-láncot ábrázolhatjuk egy irányított gráf formájában is, amelynél a csúcsok a Markov-lánc állapotainak felelnek meg, a szereplő nyilak pedig a $p_{ij} > 0$ pozitív egylépéses átmenetvalószínűségeket reprezentálják.

* Az erősen összefüggő (és zárt) komponensek meghatározására ismeretesek egyéb algoritmusok is, de az itt ismertetett algoritmus számológépi végrehajtása jóval egyszerűbb. (1. pl. B. Roy: Algèbre moderne et théorie des graphes, Dunod, Paris, Paris, 1969.)

Egy véges állapotú Markov-lánc *lényeges állapotainak* nevezzük azokat az állapotokat, amelyekbe a lánc végtelen sok lépésszám esetén pozitív valószínűséggel visszatér. A többi állapotokat *lényegtelen* vagy *átmeneti állapotoknak* nevezzük.

A lényeges állapotok azon osztályát, amelynek tagjai egymásból véges lépésben pozitív valószínűséggel elérhetők, a Markov-lánc egy *ergodikus osztályának* nevezzük.

Vagyis i és j állapot ugyanabba az ergodikus osztályba tartozik, ha van véges n_1, n_2, n_3 és n_4 egész szám, hogy $p_{ii}^{(n_1)} > 0$, $p_{jj}^{(n_2)} > 0$, $p_{ij}^{(n_3)} > 0$ és $p_{ji}^{(n_4)} > 0$, ahol $p_{ij}^{(n)}$ annak valószínűsége, hogy a Markov-lánc n lépésben i állapotból j állapotba jusson.

Az algoritmus egyszerűbb leírása és igazolása céljából vezessünk be néhány fogalmat.

Két állapot ill. a gráf két csúcsa közül *nagyobb*nak nevezzük azt, amelynek a sorszáma nagyobb.

Egy ergodikus osztály jelölőjének nevezzük a hozzá tartozó legnagyobb állapot sorszámát.

Két ergodikus osztály közül *nagyobb*nak nevezzük azt, amelynek a jelölője nagyobb.

Az irányított gráfban egy csúcshoz tartozó "bokor" *ág*ainak nevezzük azokat a csúcsokat, amelyekbe a szóbanforgó csúcsból vezetnek nyilak, *gyöker*ének azokat a csúcsokat, amelyekből a szóbanforgó csúcsba vezetnek nyilak.

Nevezzük szimbolikus *átmenetmátrixnak* azt az n x n -es mátrixot, amelyben valamilyen jellel (pl. x-szel) meg vannak jelölve azok az (i,j) mezők, amelyekhez $p_{ij} > 0$ átmenetvalószínűség tartozik.

1. Megjegyzés: A szimbólikus átmenetmátrix (i,i) mezőjének a gráf i csúcsa felel meg. Az (i,j) mező megjelölésének az i-ből a j csúcsba vezető nyíl felel meg. A mátrix i sorában álló jelek a gráf i csúcsához tartozó bokor ágainak, az i oszlopában álló jelek pedig a gráf i csúcsához tartozó bokor gyökerének felelnek meg.

1.2. AZ ALGORITMUS

Az algoritmus abból áll, hogy a szimbolikus átmenetmátrix főátlómezőin növekvő sorrendben végighaladva elvégezzük az alább következő Eljárást, majd az 1.3. pontban ismertetésre kerülő Tétel szerint meghatározzuk az ergodikus osztályokat.

Eljárás: A szimbolikus átmenetmátrixban a főátló-mező sorában lévő megjelölt mezőknek (ha van ilyen) megfelelő oszlopokban megjelöljük azokat a mezőket (ha még nem voltak megjelölve), amelyek a főátló-mezőnek megfelelő oszlop főátló alatti részén megjelölt mezők sorában vannak. Az utólagos rekonstruálhatóság céljából esetleg más, pl. +, jelet alkalmazhatunk vagy beírjuk azt a számot, amelyik lépésnél a megjelölés történik; l. 1.4. pont).

Ez az eljárás a gráfban ábrázolva azt jelenti, hogy a gráf-csúcshoz tartozó bokor gyökerének nagyobb csúcsait összekötjük a bokor ágaival az utóbbiak felé mutató nyilakkal. (Az utólagos rekonstruálhatóság céljából a nyilakat esetleg másképp, pl. vékonyabb vonallal jelölhetjük, sőt kótázhatjuk azzal a számmal, ahányadik lépésnél keletkeztek; l. 1.4. pont).

Definició: A fenti módon nyert mátrixot *teljes* mátrixnak, a nyert gráfot teljes gráfnak nevezzük. A Markov-lánc egy i állapotából a j állapotot *megjelölten elérhető*nek nevezzük, ha (i,j) mátrix-mező a teljes mátrixba megjelölt, ill. i csúcsból j-be a teljes gráfban vezet nyíl.

2. **Megjegyzések:** A teljes mátrix megjelölt mezői és a teljes gráf nyilai kölcsönösen megfelelnek egymásnak.

Az Eljárásból következik, hogy minden megjelölt átmenet lehetséges átmenet a Markov-láncban.

A teljes mátrixban, ill. gráfban nem jelenik meg minden lehetséges átmenet megjelölt átmenetként. Hogy melyek jelennek meg, az függ az állapotok számozási sorrendjétől.

Definició: Azokat az állapotokat, amelyeknek megfelelő sorok a teljes mátrixban a főátlótól jobbra üresek, ill. a megfelelő gráf-csúcsból a teljes gráfban nem vezet nyíl nagyobb csúcsba, *vizsgálandó állapotok*nak nevezzük. A Markov-lánc legnagyobb állapota mindig vizsgálandó állapot.

Definició: Nevezzük a Markov-lánc *jelölővektorának* azt az n-komponensű vektort, amelynek k-adik komponense 0, ha a lánc k állapota átmeneti állapot, ill. azon ergodikus osztály jelölője, amelybe a k állapot tartozik.

1.2. TÉTEL

Tétel: A./ Egy vizsgálandó állapotra a következő két állítás valamelyike igaz:

1./ A vizsgálandó állapot sorszáma egy ergodikus osztály jelölője és az ergodikus osztályt a belőle megjelölten elérhető állapotok alkotják akkor, ha a belőle megjelölten elérhető állapotok egyike sem tartozik kisebb ergodikus osztályhoz.

2./ A vizsgálandó állapot átmeneti (lényegtelen) akkor, ha a belőle megjelölten elérhető állapotok valamelyike kisebb ergodikus osztályhoz tartozik.

B./ Minden ergodikus osztály jelölője vizsgálandó állapot.

Bizonyítás: Először az A állítást bizonyítjuk be.

A 2. Megjegyzésekből és az ergodikus osztály jelölőjének definiciójából következik, hogy a tételben szereplő 2. esetben, amikor létezik megjelölt átmenet egy kisebb ergodikus osztályba, a vizsgálandó állapot csak átmeneti állapot lehet.

A továbbiakban ezért alkalmazzuk a következő

Feltevést: a vizsgálandó állapotból megjelölten elérhető állapotok egyike sem tartozik kisebb ergodikus osztályhoz.

A tétel bizonyításához tételezzük még fel, hogy a vizsgálandó állapotokon gondolatban növekvő sorrendben megyünk végig és úgy bizonyítunk. Ekkor az első vizsgálandó állapotra a Feltevés biztosan teljesül.

Előrebocsájtjuk még az ismétlések elkerülése végett a következő megjegyzést:

3. Megjegyzés: Az Eljárásból következik, hogy annak k-adik lépésétől kezdve már nem kerülhet megjelölés a k-adik és az azt megelőző mátrix-sorokba. Ha egy (ν_1, ν_2) mező az Eljárás ν-edik lépésében került megjelölésre, akkor a ν-edik lépést megelőzően mind (ν_1, ν) mind (ν, ν_2) mezőknek megjelölteknek kellett lenniök és $\nu_2 > \nu$ lehet csak. Ezekután két lemmát kell bizonyítani:

1. Lemma: A vizsgálandó állapotból elérhető összes állapot megjelölten elérhető.

2. Lemma: Ha a Feltevés igaz, akkor a vizsgálandó állapot elérhető mindazon állapotokból, amelyek belőle megjelölten elérhetők.

Az 1. és 2. lemmákból következik, hogy a Feltevés mellett a vizsgálandó állapot és a neki megfelelő mátrix-sorban megjelölt mezőkhöz tartozó állapotok egy olyan osztályt alkotnak, amelyből nem lehet kijutni, de az osztályon belül minden állapot minden másikból elérhető. Ez éppen egy ergodikus osztály definiciójával ekvivalens. Nyilvánvaló, hogy a vizsgálandó állapot éppen ennek az ergodikus osztálynak a jelölője lesz.

1. Lemma bizonyítása: Legyen m a vizsgálandó állapot és m′ egy belőle elérhető állapot. Be kell bizonyítani, hogy a teljes mátrixban (m, m′) mező megjelölt mező. Ha a teljes mátrix m sorában (m,m) az egyetlen megjelölt mező, akkor a szimbólikus átmenetmátrixban is ez volt az egyetlen megjelölt mező, tehát m-ből csak önmaga érhető el. Igy m a Markov-lánc elnyelő állapota és nincs mit bizonyítani. Hogy legyen olyan m-től különböző m′ állapot, amely m-ből elérhető, legalább egy (m,m)-től különböző (m,m_1) megjelölt mezőnek kell lennie a szimbólikus átmenetmátrix, és így a teljes mátrix, m sorában. A továbbiakban zárjuk ki azt az esetet, amikor m elnyelő állapot.

Mivel m′ állapot az m-ből elérhető, van olyan $k \geqslant 1$ és

(⋆) $$m_0, m_1, \dots, m_{k-1}, m_k$$

különböző állapotokból álló állapot-sorozat a Markov-láncban, ahol $m_0 = m$, $m_k = m'$, és a sorozat minden tagja megjelölten elérhető az előzőből, vagyis (m_{i-1}, m_i), $i = 1, \ldots, k$, mezők megjelöltek. Nyilván $m_1 < m$ lehet csak, mivel m vizsgálandó állapot. Ha a (★) sorozat olyan, hogy $k = 1$, akkor nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy $k > 1$. Ha a (★) sorozat minden m_i, $i > 0$, tagja megjelölten elérhető m-ből, akkor szintén nincs mit bizonyítani.

Tegyük fel most, hogy a (★) sorozatban van olyan m_i, $i > 1$, állapot, amely m-ből nem megjelölten elérhető, de $m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}$ mindegyike megjelölten elérhető m-ből. E feltevés ellentmondásra fog vezetni, ami kizárja, hogy m_k az m-ből nem megjelölten elérhető.

Tekintsük az

$$m, m_{i-1}, m_i$$

állapot-sorozatot, ahol (m, m_{i-1}) és (m_{i-1}, m_i) megjelölt mezők (m, m_i) azonban nem. Mivel m vizsgálandó állapot, $m_{i-1} < m$ lehet csak. Tekintsük most az Eljárás m_{i-1}(-edik) lépését.

Ha (m, m_{i-1}) mező az m_{i-1} lépést megelőzően már megjelölt lett volna, akkor az m_{i-1} lépésben (m, m_i) is megjelölésre került volna, ami ellentmond m_i-re vonatkozó feltevésünknek. Az m_{i-1} lépésig bezárólag tehát (m, m_{i-1}) mező még nem lett megjelölve. Ekkor kellett lennie egy ν_1, $m_{i-1} < \nu_1 < m$, lépésnek az Eljárásban, amikor (m, m_{i-1}) megjelölésre került. A 3. Megjegyzés szerint ekkor az Eljárás ν_1 lépését megelőzően (ν_1, m_{i-1}) mezőnek már megjelöltnek kellett lennie.

Ha (ν_1, m_{i-1}) mező az m_{i-1} lépést megelőzően már megjelölt lett volna, akkor megjelölésre került volna (ν_1, m_i) mező is majd azt követően a ν_1 lépésben (m, m_i) mező is, ami ellentmond m_i-re vonatkozó feltevésünknek. Ezért kellett lennie egy ν_2, $m_{i-1} < \nu_2 < \nu_1$, lépésnek az Eljárásban, amikor (ν_1, m_{i-1}) megjelölésre került. A 3. Megjegyzés szerint ekkor az Eljárás ν_2 lépést megelőzően (ν_2, m_{i-1}) mezőnek már megjelöltnek kellett lennie.

A gondolatmenetet folytatva véges lépésben eljutunk egy olyan $m > \nu_1 > \nu_2 > \ldots \ldots > \nu_k > m_{i-1}$ sorozathoz, ahol ν_k már olyan közel van m_{i-1}-hez $(\nu_k = m_{i-1} + 1)$, hogy nem lehet olyan ν_{k+1} lépés, amelyben (ν_k, m_{i-1}) megjelölésre kerülne és $m_{i-1} < \nu_{k+1} < \nu_k$ lenne.

Ellentmondásra jutottunk tehát m_i-re vonatkozó feltevésünkkel. Ebből következik, hogy m' az m-ből valóban megjelölten elérhető.

Ezzel az 1. Lemma bizonyítva van.

2. Lemma bizonyítása: Legyen m' állapot az m vizsgálandó állapotból megjelölten elérhető (legalább egy ilyen m' állapot okvetlen létezik), azaz (m,m') megjelölt mező. Ekkor nyilván $m' \leqslant m$. Ha $m' = m$, akkor nincs mit bizonyítani. Legyen tehát $m' < m$ (ha ilyen m' létezik).

Tegyük fel először, hogy nincs olyan m'', $m'' > m'$, állapot, amely m'-ből megjelölten elérhető. Ekkor m' is vizsgálandó állapot. Ha m' egy ergodikus osztály jelölője lenne, akkor ellentmondásra jutnánk a Feltevéssel. Tehát m' legfeljebb még átmeneti állapot lehet. Ekkor van olyan m^*, amelybe m'-ből el lehet jutni és m^* egy kisebb ergodikus osztály tagja. Az 1. lemma szerint ekkor azonban (m, m^*) is megjelölt mező, ami ismét ellentmond a Feltevésnek.

Tehát biztosan kell lennie m'-hez egy olyan m'', $m'' > m'$, állapotnak, amely m'-ből megjelölten elérhető. Igy méginkább van olyan m^*, $m^* > m'$, állapot, amely m'-ből elérhető. Legyen m_1 a legnagyobb ilyen állapot. Ekkor nyilván m_1 vizsgálandó állapot lesz, mert ellenkező esetben m_1-en keresztül m'-ből m_1-nél nagyobb állapotba lehetne jutni. Másrészt az 1. Lemma szerint (m, m_1) mező is megjelölt, hiszen m-ből m_1-be az m'-en keresztül el lehet jutni. Ekkor azonban $m_1 \leqslant m$. $m_1 < m$ lehetetlen, mert, ha m_1 akár egy kisebb ergodikus osztály jelölője lenne, akár átmeneti állapot, ellentmondásra jutnánk a Feltevéssel. Igy tehát csak $m_1 = m$ eset lehetséges. Ezzel a 2. Lemma bizonyítása kész.

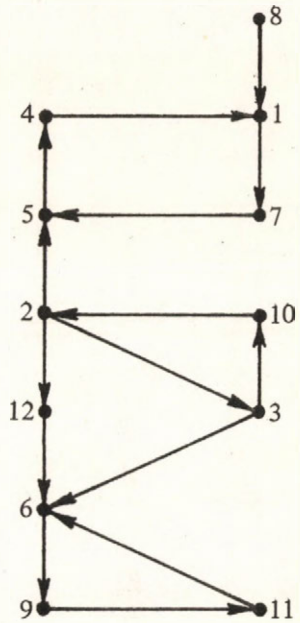
B. állítás bizonyítása: Ha egy ergodikus osztály jelölőjének megfelelő állapot nem lenne vizsgálandó állapot, az azt jelentené, hogy a jelölőből nagyobb állapotba is el lehetne jutni megjelölten, tehát vagy e nagyobb állapot is az ergodikus osztályhoz tartozna, ami ellentmond a jelölő definíciójának, vagy a jelölő átmeneti állapotnak felelne meg, ami lehetetlen.

A tétel szerint ergodikus osztályba nem tartozó állapotok (akár vizsgálandók, akár nem) így nyilvánvalóan csak átmeneti állapotok lehetnek, hiszen a tétel biztosítja az összes ergodikus osztály kiválasztását és a Markov-lánc véges állapotú.

1.4. ILLUSZTRATIV PÉLDA

Legyen adva egy n = 12 állapotú Markov-lánc, amelyhez az 1. ábrán látható szimbolikus átmenetmátrix és irányított gráf tartozik.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1							X					
2			X		X							X
3						X				X		
4	X											
5				X								
6									X			
7					X							
8	X											
9											X	
10		X										
11						X						
12						X						

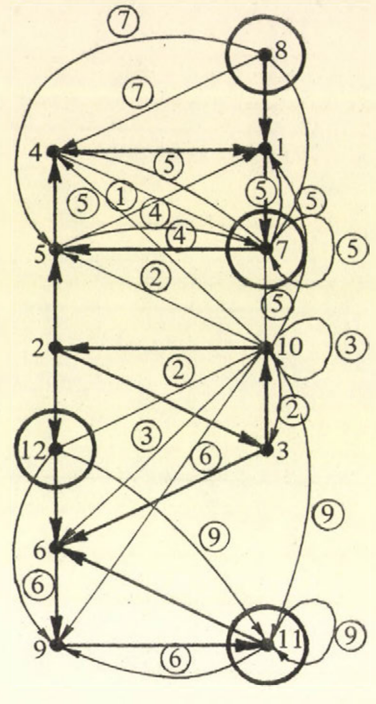


1. ábra

Az Eljárás végrehajtása után a 2. ábrán bemutatott teljes mátrixot és gráfot nyerjük. A mátrixban az újonnan megjelölt mezőket azzal a sorszámmal jelöltük meg, amelyik lépésben a megjelölés megtörtént. A gráf új nyilait ugyanazekkel a sorszámokkal kótáztuk. A vizsgálandó állapotoknak megfelelő mátrix-sorok főátlótól jobbra eső részeit sraffozással jeleztük, a gráfnál pedig bekarikáztuk a vizsgálandó állapotoknak megfelelő csúcsokat. A teljes mátrixba berajzolt vonalak az eljárás kézi végrehajtása közben alkalmazhatók a tévedési lehetőség csökkentése céljából.

A vizsgálandó állapotok ezek szerint a 7, 8, 11 és 12. Az első vizsgálandó állapot a 7, ez biztosan egy ergodikus osztály jelölője, mégpedig a tétel szerint az első ergodikus osztály állapotai (1, 4, 5, 7). A következő vizsgálandó állapot a 8, amelyből megjelölt átmenetek vannak az előző, kisebb ergodikus osztályba, ezért a 8 állapot átmeneti. A 11 vizsgálandó állapotból megjelölt átmenet lehetséges a (6, 9, 11) állapotokba, amelyek egyike sem eleme az (1, 4, 5, 7) ergodikus osztálynak, ezért a (6, 9, 11) ismét egy ergodikus osztályt alkot, amelynek je-

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1							X						7
2			X		X							X	0
3						X				X			0
4	X						1						7
5	4			X			4						7
6									X				11
7	5			5	X		5						7
8	X			7	7		1						0
9											X		11
10	5	X	2	5	2	3	5		6	3	9	2	0
11						X			6		9		11
12						X			6		9		0



2. ábra

lölője 11. Az utolsó állapot mindig vizsgálandó. Jelen esetben 12-ből megjelölt átmenetek vannak a (6, 9, 11) ergodikus osztályba, így 12 állapot átmeneti. Az eddig nem szereplő összes többi állapot is átmeneti, így az átmeneti állapotok osztálya a (2, 3, 8, 10, 12) állapotokból áll.

A teljes mátrix mellett a fenti ábrán minden sorban feltüntettük annak az ergodikus osztálynak a jelölőjét, amelybe az állapot tartozik, ill. 0-át írtunk az átmeneti állapotoknál. Ez alkotja a Markov-lánc jelölővektorát, amely tehát:

(7, 0, 0, 7, 7, 11, 7, 0, 11, 0, 11, 0)

2. A GÉPI ELJÁRÁS ÉS PROGRAMJA

A gépi eljárásnál a tényleges egylépéses átmenetmátrixból indulunk ki. Az algoritmus csupán annyiban tér el az előző részben leírt "kézi" algoritmustól, hogy mátrix-mezők megjelölése helyett a mező-tartalmak hozzáadását végezzük. A megjelölt mező most olyan mezőt fog jelenteni, amelyben pozitív mennyiség áll, a nem megjelölt mező pedig olyat, amelyben zérus áll.

2.1. A GÉPI ALGORITMUS

A gépi algoritmus abból áll, hogy az állapotokon végighaladva meghatározzuk a teljes mátrixot az alábbi Eljárással, majd meghatározzuk a jelölővektort.

Eljárás: Az állapotnak megfelelő mátrix-sor pozitív elemeinek megfelelő oszlopok sor alatti részeihez hozzáadjuk az állapotnak megfelelő oszlop sor alatti részét.

A *jelölővektort* az előző részben szereplő tétel alapján határozzuk meg azzal a megjegyzéssel, hogy vizsgálandó állapot alatt most olyan állapotot értünk, amelynek megfelelő mátrix-sor főátlótól jobbra eső része csupa zérus.

A jelölővektor meghatározásának menete a következő: Először a vektor minden komponensét 0-vá tesszük. Utána az állapotokon növekvő sorrendben haladunk végig. Ha egy állapot vizsgálandó, az állapot sorszámát adjuk értékként mindazon komponenseknek, amelyeknek megfelelő állapotokba van megjelölt átmenet a vizsgálandó állapotból, mindaddig, amíg – esetleg – olyan komponenshez nem érkezünk, amelynek értéke már nem volt 0. Az utóbbi esetben visszaváltoztatjuk 0-vá az összes olyan komponenst, amelynek értéke a vizsgálandó állapot sorszámával egyenlő.

Az algoritmus eredményét egyértelműen jellemzi a jelölővektor.

Jelölje a programokban N a Markov-lánc állapotainak számát, P az egylépéses átmenetmátrixot és M a jelölővektort. Ezek lesznek az eljárás ill. szubrutin paraméterei.

2.2. AZ ALGOL-PROGRAM

A programot eljárás formában írjuk le:

```
procedure ERGOD (P,M,N,);
  value N; integer N; integer array M; real array P;
  comment THIS IS AN ALGORITHM TO PROVIDE THE ERGODIC CLASSES OF A
          HOMOGENEOUS FINITE-STATE MARKOV-CHAIN CHARACTERISED BY
          THE TRANSITION MATRIX P[N,N];
  begin integer I,J,K;
          for I:=1 step 1 until N do M[I]:=0;
          for I:=1 step 1 until N do
          for J:=1 step 1 until N do
          if P[I,J] > 0 then for K:=I+1 step 1 until N do
          P[K,J]:=P[K,J]+P[K,I];
          for I:=1 step 1 until N do begin
```

```
        for J:=I+1 step 1 until N do
        if P[I,J] > 0 then go to LINE;
        for J:=1 step 1 until I do
        if P[I,J] > 0 ∧ M[J] > 0 then begin
        for K:=1 step 1 until J do
        if M[K]=I then M[K]:=0;
        go to LINE end else
        if P[I,J] > 0 then M[J]:= I;
LINE:   end I; end ERGOD
```

2.3 A FORTRAN-PROGRAM

A programot szubrutin formában írjuk le:

```
      SUBRUTINE ERGOD (P,M,N)
      INTEGER N,M(N)
      REAL P(N,N)
C     THIS IS AN ALGORITHM TO PROVIDE THE ERGODIC CLASSES OF A
C     HOMOGENEOUS FINITE-STATE MARKOV-CHAIN CHARACTERISED BY
C     THE TRANSITION MATRIX P(N,N)
      DO 20 I=1,N
   20 M(I)=0
      N1=N-1
      DO 21 I=1,N1
      I1=I+1
      DO 22 J=1,N
      IF (P(I,J).EQ.O.) GO TO 22
      DO 23 K=I1,N
   23 P(K,J)=P(K,J)+P(K,I)
   22 CONTINUE
   21 CONTINUE
      DO 24 I=1,N
      J1=I+1
      DO 25 J=J1,N
      IF(P(I,J).GT.O.) GO TO 24
   25 CONTINUE
      DO 26 J=1,I
      IF(PI.J).EQ.O.) GO TO 26
      IF(M(J).NE.O) GO TO 27
      M(J)=I
```

```
      GO TO 26
27    DO 28 K=1,J
28    IF(M(K).EQ.I) M(K)=0
      GO TO 24
26    CONTINUE
24    CONTINUE
      RETURN
      END
```

A programokat az MTA Számítástechnikai Központjának CDC 3300-as számológépén próbáltuk ki.

Summary

A simple algorithm to define the ergodic classes of a finite state Markov chain

We describe a simple algorithm to define the ergodic classes of a finite state homogeneous Markov chain given with its transition matrix. We outline the alorithm in a manually executable form and prove the same, thereafter follow the ALGOL and FORTRAN programs of the algorithm. The programs were tried on the CDC 3300 computer of the Computing Centre of the Hungarian Academy of Sciences.

Резюме

Простой алгоритм для определения эргодических классов цепи Маркова конечного состояния

Статья знакомит с простым алгоритмом для определения эргодических классов однородной цепи Маркова конечного состояния, заданной переходной матрицей.

Алгоритм задан в форме, дающей возможность обработки его вручную, с доказательством. Даются программы алгоритма в АЛГОЛе и ФОРТРАНе. Программы были проверены на машине CDC–3300 в Вычислительном центре ВАН.

ALGOL ÉS FORTRAN PROGRAMOK ÖSSZEKAPCSOLÁSA A CDC 3300 GÉPEN

Knuth Előd

Az operációs rendszerbe újonnan beillesztett ALFN task lehetővé teszi mind az Oszlói Programkönyvtár szubrutinjainak, mind egyéb tetszőleges FORTRAN szubprogramoknak ALGOL programokból való hívását.

1. §. AZ ALFN TASK HASZNÁLATA.

1.1 AZ ÖSSZEKAPCSOLÁS ELVE.

Minden behívandó FORTRAN szubprogramhoz hozzárendelünk egy COMPASS segédszubprogramot. Ezek a COMPASS programok az ALFN task futásának eredményeképpen keletkeznek, és külső felépítésükben az ALGOL code procedure-knek felelnek meg. Céljuk az, hogy az ALGOL főprogramból átvegyék a paramétereket, behívják a FORTRAN szubprogramot, adják annak – most már FORTRAN implementáció szerint – az ALGOL paramétereit, továbbá a FORTRAN szubprogramból való visszatérés után az eredményül adódott paramétereket megfelelő módon juttassák is vissza az ALGOL főprogramba. Amennyiben függvényről van szó, ehhez természetesen a függvényérték átjuttatása is hozzátartozik.

1.2. AZ ÖSSZEKAPCSOLÁS FÁZISAI.

Az összekapcsolni kívánt programrendszer futtatása előtt az ALFN taskot kell behívni. Az ALFN task az összekapcsolást nem végzi el, azonban az általa generált szubrutinok olyanok, hogy lehetővé teszik az egész programrendszer BIN és AUX vezérkártyákkal való összekapcsolását.

A JOB alapsémája a következő:

(1)	munkafile-ok allokálása, megnyitása	Előkészítő fázis
(2)	$ALFN az összekapcsolások jellemzőinek leírása	
(3)	segédfeladatok: átblokkolás, COMPASS fordítás	
(4)	Főprogram és a szubprogramok fordítása	
(5)	FUTTATÁS (BIN és AUX vezérkártyák)	

1.3. AZ ÖSSZEKAPCSOLÁSI JELLEMZŐK MEGADÁSA.

Egy ALGOL program külső szubprogramhoz csak a procedure kódszámon keresztül férhet hozzá. Ezért minden FORTRAN szubprogram nevéhez hozzá kell rendelnünk azt a kódszámot, amellyel az ALGOL programból hívni kívánjuk. Ezt az ALFN vezérkártyákkal végezzük el. A következő formájúak lehetnek:

1	10	25	39 40
nev	SUBROUTINE*	CDPddddd	zd
nev	FUNCTION*	CDPddddd	zd
	END*		

Az END* kártya jelzi, hogy az ALFN task számára nincs több vezérlőkártya. "nev" a FORTRAN szubprogram neve (1-8 alfanumerikus karakter). "ddddd" az ALGOL procedure-kódszám. (Mind az 5 jegyet ki kell írni!)

"zd" a formális paraméterek száma.

Maximálisan 99 db. formális paraméter lehet.

Amennyiben a paraméterek száma egyjegyű, azt a 40. oszlopba kell írni.

1.4 AZ ALFN TASK

maga ALGOL forrásnyelvű. A User szempontjából ez csupán azt jelenti, hogy közvetlenül a $ALFN vezérlőkártya után csatornakártyáknak kell következni.

Az ALFN hívás eredményéül adódó COMPASS segédprogramok a 70-es csatornán kerülnek kiírásra.

1.5 A TELJES ELŐKÉSZÍTŐ FÁZIS SÉMÁJA.

Az előkészítéshez három munkafile-ra van szükség. Legyenek ezek:

dsi1 = az ALFN 70-es csatornája. Blokkmérete 80 ch.
dsi2 = az 1280-ra átblokkolt COMPASS programok tárolója.
dsi3 = a lefordított segédprogramok tárolója. (1280 ch/blk).

Amennyiben a három DSI már legális a JOB számára, az előkészítő fázis sémája az alábbi:

```
$ALFN
CHANNEL,70=DSIdsi1,P80
CHANNEL,END

        ALFN vezérkártyák

        END*
$XFER(dsi1,20,dsi2,320)
$REWIND(dsi2)
$CMP(I=dsi2,X=dsi3)
```

1.6 A programrendszer futtatása:

```
$X,dsi*
$BIN,dsi3
$ esetleges AUX vezérkártya FORTRAN szubprogramok elérésére
```

a/ A dsi* (általában az LGO) az a file, amely a lefordított ALGOL főprogramot tartalmazza.

b/ Amennyiben a FORTRAN szubprogramok fordítása a JOB-on belül történik, legegyszerűbb azt is a dsi3-ra fordítani.

2. §. PÉLDA JOB-OK

2.1 A JOB-BAN FORDITOTT ALGOL FŐPROGRAM KÉT FORTRAN FÜGGVÉNNYEL:

```
$JOB,...
$SCHED,...
$SOCR(A,CH70,80,50)
$SOCR(A,FORS,1280,10)
$SOCR(A,KESZ,1280,40)
$ALFN
CHANNEL,70=DSICH70,P80
CHANNEL,END
SINUS       FUNCTION*    CDP00001       1
COSINUS     FUNCTION*    CDP00002       1
            END*
$XFER(CH70,20,FORS,1280)
$REWIND(FORS)
$CMP(I=FORS,X=KESZ)
$FTNU(P=KESZ)
        FUNCTION SINUS(X)
        .
        .
        .
        .
        END
        FUNCTION COSINUS(X)
        .
        .
        .
        .
        END
            FINIS
$ALG(L,X)
     'BEGIN'
     'REAL' 'PROCEDURE' FORTRANSZINUSZ(X)., 'CODE' 1.,
     'REAL' 'PROCEDURE' FORTRANKOSZINUSZ(X)., 'CODE' 2.,
        .
        .
        .
        .  'EOP'
           FINIS
$X,LGO
$BIN,KESZ
CHANNEL,END
77
88
```

2.2 PÉLDA EGY SZUBRUTIN HIVÁSÁRA AZ OSZLÓI KÖNYVTÁRBÓL:

```
$JOB,...
$SCHED,...
$SOCR(A,DSI1,80,...)
$SOCR(A,DSI2,1280,...)
$SOCR(A,DSI3,1280,...)
$ALFN
CHANNEL,70=DSIDSI1,P80
CHANNEL,END
OSZLOI    SUBROUTINE*        CDP00812        11
          END*
$XFER(DSI1,20,DSI2,320)
$REWIND(DSI2)
$CMP(I=DSI2,X=DSI3)
$*DEF(O,,OSLO,...
$COSY
OSZLOI    DECK/        I=OSLO,H
          ENDCOSY/
$FTNU(I=SHO,P=DSI3)
$ALG(X)
  .
  .
  .
  .
$X,LGO
$BIN,DSI3
CHANNEL,END
77
88
```

2.3 PÉLDA BINÁRIS FORTRAN-KÖNYVTÁR HASZNÁLATÁRA:

```
$JOB,...
$SOCR(A,1,80,...)
$SOCR(A,2,1280,...)
$SOCR(A,3,1280,...)
$ALFN
.
.
.
.
$XFER(1,20,2,320)
$REWIND(2)
$CMP(I=2,X=3)
$ALG(X)
.
.
.
.
$*DEF(O,,FLIB,...
$*DEF(O,,FDIR,...
$X,LGO
$BIN,3
$AUX,FLIB,FDIR
CHANNEL,END
77
88
```

2.4 AZ ELŐKÉSZITÉS ELŐZETES LEFUTTATÁSA KÜLÖN JOB-BAN:

```
$JOB,
$ALFN
CHANNEL,70=DSIPUN,P80
CHANNEL,END
.
.
.
.
    END*
77
88
```

```
$JOB,
$SOCR(A,DSI,1280,...)
$ALG(X)
.
.
.
.
$FTNU(P=DSI)
.
.
.
.
$CMP(I=INP,X=DSI)
.
.
.      ALFN  eredménykártyái
.
.
$X,LGO
$BIN,DSI
CHANNEL,END
77
88
```

2.5 PÉLDA ÁLLANDÓ SZUBRUTINOK ÉS KÓDRENDSZER ESETÉN A TELJES SZUBPROGRAM-RENDSZER TÁROLÁSÁRA:

```
$JOB,...
$SOCR(A,1,80,...)
$SOCR(A,2,1280,...)
$*DEF(O,,SUBR,...
$ALFN
.
.
.
.
$XFER(1,20,2,320)
$REWIND(2)
$CMP(I=2,X=SUBR)
$FTNU(P=SUBR)
.
.
.
.
77
88
```

```
$JOB,...
$ALG(X)
.
.      aktuális főprogram
.
.
$*DEF(O,,SUBR,...
$X,LGO
$BIN,SUBR
CHANNEL,END
77
88
```

3. §. FIGYELMEZTETÉSEK, KORLÁTOZÁSOK

3.1 Korlátozás az átadott paraméter fajtájára nézve

nincsen. Bármely paraméter akármilyen típusú lehet a 3.2 szerint szóbajöhetőek közül. (A paraméterek specifikálása az ALGOL deklarációban nem szükséges.) Az ALGOL programban azonban az aktuális paraméterek típusa meg kell egyezzen a FORTRAN szubprogram paraméterspecifikációival! Ennek betartására ALGOL programozóknak külön ügyelni kell (a FORTRAN-nal történő paraméter csere ugyanis az ALGOL supervisor hatáskörén kívül történik, így nincsen automatikus konverzió).

3.2 A szóbajöhető paramétertípusok

nyilvánvalóan azok, amelyek mind az ALGOL-ban, mind a FORTRAN-ban előfordulhatnak. Ezek a következők:

integer
real
boolean
integer array
real array
boolean array

(Nem fordulhatnak tehát elő a következők: label, switch, procedure, type procedure, double precision, complex.)

3.3 Névszerinti paraméterátadás

természetesen nem lehetséges, miután ez a FORTRAN-ban nem megengedett. Akár van value specifikáció, akár nincs, a paraméter átadás mindig érték szerint történik.

3.4 Egyszavas integer a FORTRAN részben

nem használható, mivel az ALGOL implementációban csak kétszavas egészek fordulhatnak elő.

3.5 File kezelés.

Ügyelni kell arra, hogy ha az ALGOL főprogram, és egyidejűleg valamelyik FORTRAN szubprogram ugyanazt a DSI-t használja inputként vagy outputként, mindkét programszegmens külön buffer-területet készít magának ugyanahhoz a file-hoz!

Ez maga után vonja pl. azt, hogy ha az ALGOL programban nyomtatunk valamit az OUT-filera, majd később egy FORTRAN szubrutinban újra nyomtatunk, előfordulhat, hogy ez utóbbi nyomtatás a printerpapiron előbb jelenik meg! Ennek elkerülésére természetesen elegendő a FORTRAN programrész behívása előtt a printeren sort váltani.

3.6 Az ALFN task helyfoglalása 3 quarterpage.

S u m m a r y

Joining of ALGOL and FORTRAN programs on the CDC 3300 computer

The paper describes the use of the ALFN task prepared by the author

Р е з ю м е

Соединение программ, написанных в АЛГОЛе и в ФОРТРАНе, на машине CDC–3300

Статья знакомит с подпрограммой ALFN, написанной автором.

MÁSODFAJÚ, NEMLINEÁRIS, ELFAJULT MAGÚ INTEGRÁLEGYENLET MEGOLDÁSA

Abaffy József

Tekintsük a következő általános alakban megadott másodfajú nemlineáris integrálegyenletet:

$$(1)\qquad \varphi(x) - \int_a^b K(x,s,\varphi(s))\,ds = f(x),$$

ahol $f(x)$ adott, $\varphi(x)$ az ismeretlen függvény.

Az elfajult magfüggvény általános alakja:

$$(2)\qquad K(x,s,\varphi(s)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\cdot d_i(s,\varphi(s)),$$

és tegyük fel, hogy a magfüggvény az első két változójában folytonos és a d_i függvényre teljesül a Lipschitz feltétel, azaz

$$|d_i(s,\varphi_1) - d_i(s,\varphi_2)| < C|\varphi_1 - \varphi_2|$$

tetszőleges $a \leqslant x,s \leqslant b$ esetén.

Fejezzük ki (1)-ből a baloldal első tagját:

$$(3)\qquad \varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,s,\varphi(s))ds.$$

Az $a_i(x)$ függvények lineárisan függetlenek, különben az összeadandók száma csökkenthető lenne.
Hasonló mondható a d_i-kre.

Helyettesítsük be (2)-t (3)-ba

$$(4)\qquad \varphi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\int_a^b d_i(s,\varphi(s))ds.$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$c_i \equiv \int_a^b d_i(s,\varphi(s))ds.$$

Ezt helyettesítve (4)-be $\varphi(x)$-re a következő kifejezést kapjuk:

$$(5)\qquad \varphi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\cdot c_i.$$

Amennyiben a c_i konstansokat ismernénk, úgy (5) alapján megkapnánk a (4) integrálegyenlet megoldását. Helyettesítsük (5)-öt (4)-be:

$$f(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\, c_j = f(x) + \Sigma\, a_j(x) \int_a^b d_j(s, f(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i(s) c_i) ds . \tag{6}$$

Ezt rendezve kapjuk:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\, (c_j - \int_a^b d_j(x, f(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i(s) c_i) ds) = 0 . \tag{7}$$

Minthogy az $a_i(x)$ függvények lineárisan függetlenek, következik:

$$c_j - \int_a^b d_j(s, f(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i(s) c_i) ds = 0 \qquad j = 1, \dots, n . \tag{8}$$

Ennek az n ismeretlenes és n egyenletből álló rendszernek a megoldását iterációval kaphatjuk meg, lásd [2].

Megjegyzés: Amennyiben a $d_i(s,\varphi)$ függvény a következőképpen írható:

$$d_i(s, \varphi(s)) = b_i(s) \cdot \varphi(s) ,$$

akkor ezt (8)-ba helyettesítve speciális esetként kapjuk a lineáris elfajult típusú integrálegyenlet lineáris egyenletrendszerre való visszavezetését.

Irodalom

[1] Sz. G. Mihlin: Integrálegyenletek és alkalmazásuk a mechanika, a matematikai fizika és a technika egyes problémáira, 1953 Akadémiai Kiadó

[2] Lothar Collatz: Functional analysis and numerical mathematics.

Summary

Solution of a second order, nonlinear integral equation with degenerated core

We reduce in the paper the solution of a nonlinear, second kind integral equation with a degenerated nucleus to an equation system with n unknown consisting of n equations which can be solved by an iteration method.

Резюме

Решение нелинейного интегрального уравнения второго рода с вырожденным ядром

В статье решение нелинейного интегрального уравнения второго рода с вырожденным ядром сводится к системе n уравнений с n неизвестными, решаемой итерационным методом.

NEMLINEÁRIS ELSŐRENDŰ PARCIÁLIS DIFFERENCIÁL EGYENLETEK. NUMERIKUS MEGOLDÁSOK

Kersner Róbert

A nemlineáris elsőrendű parciális differenciál egyenletek általános alakja a

$F_1(t, x, u, u_t, u_x) = 0,$ ahol $x = (x_1, \dots, x_n),\ u = u(t, x),$

$$u_x = \mathrm{grad}_x u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

A t változó különválasztásának az az oka, hogy a továbbiakban fel fogjuk tételezni, hogy a fenti egyenletből $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ kifejezhető és $t \geqslant 0$ (idő).

Tekintsük tehát a következő Cauchy-feladatot

$$u_t + F(t, x, u, u_x) = 0 \tag{1}$$

$$u(0, x) = u_0(x)\,. \tag{2}$$

Az (1) egyenletet általában Hamilton-egyenletnek nevezik, ugyanis (1) ekvivalens (meghatározott értelemben) a Newton-egyenlet Hamilton-féle szimmetrikus alakjával (u-hatásfüggvény) A differenciál-játékok elméletének alapegyenlete, a Bellman-egyenlet, sok esetben szintén (1) alakú.

Legyen $\frac{\partial u}{\partial x_k} = p^k$, $u_x = p$, k-index. Differenciáljuk (1)-et x_i szerint (feltételezzük természetesen, hogy a számításban előforduló függvények rendelkeznek a szükséges simasággal).

$$\frac{\partial p^i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} F_{p^k}(t, x, u, p)\frac{\partial p^i}{\partial x_k} + F_u(t, x, u, p)p^i + F_{x_i}(t, x, u, p) = 0. \tag{3}$$

Látható, hogy (3) első két tagja nem más, mint egy valamilyen irány szerint vett derivált. Megkeressük ezt az irányt. Tekintsük a

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = F_{p^k}(t, x, u, p) \quad \text{görbét} \quad (k = 1, \dots, n). \tag{4}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy e görbe mentén

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^i}{\partial t} &= -F_u(t, x, u, p)p^i - F_{x_i}(t, x, u, p) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -F(t, x, u, p) + \sum_i^n p^k F_{p^k}(t, x, u, p)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

A (4)-(5) egyenletrendszert az (1) egyenlet karakterisztikus rendszerének nevezik. Megjegyezzük, hogy (4)-(5) zárt rendszer: $2n+1$ egyenletet és ugyanannyi ismeretlent tartalmaz. A $(0, x_0)$ pontban adott $u_0(x_0)$ és $u_{0x}(x_0) = p_0$. Ezek alapján a (4)-(5) rendszer megoldásait egyértelműen meghatározhatjuk. Az így kapott megoldásokat karakterisztikáknak nevezzük. Ha az (1) egyenlet lineáris, akkor (1) megoldása teljesen "lefedhető" ezekkel a karakterisztikákkal. (Ezt könnyű belátni, de erre a tényre a továbbiakban nem lesz szükség.) Vagyis ha (1) lineáris, akkor (1) megoldása ekvivalens a (4)-(5) rendszer megoldásával. Ez a rendszer elsőrendű közönséges differenciál egyenletekből áll és több módszer ismert a megoldásukra.

Nemlineáris F esetén a helyzet lényegesen bonyolultabb.

Példa: $n = 1$, $F = F(u_x)$:

$$\begin{aligned} &u_t + F(u_x) = 0 \\ &u(o, x) = u_0(x)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

A megfelelő karakterisztikus rendszer

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F'(p) \\ \frac{dp}{dt} &= 0 \\ \frac{du}{dt} &= pF'(p) - F(p). \end{aligned} \tag{7}$$

$u_0(x_0)$ és $u_0'(x_0)$ ismert. (7)-ből látszik, hogy a karakterisztikák egyenesek és a $p = {=}u_0'(x_0)$. Ezen egyenesek mentén

$$u = u_0(x_0) + t[u_0'(x_0)F'(u_0'(x_0)) - F(u_0'(x_0))] \quad \text{és} \tag{8}$$

$$x = x_0 + tF'(u_0'(x_0)) \equiv \Phi(x_0, t)\,. \tag{9}$$

Hogy a teljes megoldást megkapjuk, ki kell fejezni x_0 -t (9)-ből, és behelyettesíteni (8)-ba. Az implicit függvényről szóló tétel szerint ez csak akkor lehetséges, ha $\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} \neq 0$. A mi esetünkben akkor, ha $t < \frac{1}{M \cdot N}$, ahol $N = \max\limits_x |u''(x))|$, $M = \max\limits_{|p|<K} |F''(p)|$, $K = \sup\limits_x |u_0'(x)|$. Ha tehát ennél az értéknél feljebb megyünk a t-tengelyen, a karakterisztikák szükségszerűen metszeni fogják egymást, ami azt jelenti, hogy ezekben az esetekben a metszéspontokban u_x nem létezik, tehát u -ról mint a (6) feladat klasszikus értelemben vett megoldásáról nem beszélhetünk.

Látható, hogy itt egészen más a helyzet, mint a lineáris differenciál egyenletek esetén; ott ugyanis a megoldás (ha van) olyan sima, amennyire az egyenlet együtthatói és a kezdeti- ill. peremfeltételek simasága engedi. A mi esetünkben általában még akkor sem létezik C^1-beli (egyszer folytonosan differenciálható) megoldás, ha u_0 és F végtelenszer differenciálható.

Legyen $u(t, x)$ az (1)-(2) feladat megoldása. Legyen továbbá az $F = F(u_x)$ függvény kétszer folytonosan differenciálható, konvex függvény és $F(0) = F_{u_{x_i}}(0) = 0$ minden i-re. Az F függvény konvexitása, vagyis, hogy a $(F_{u_{x_i} u_{x_j}})$ mátrix pozitív definit, lényeges feltétel, a többi technikai jellegű.

Kiválasztjuk azt a függvényosztályt, amelyben (1)-(2) megoldásait keressük: $|u_x| \leqslant K$, $|u| \leqslant M$ és az unicitást biztosító $\dfrac{|\Delta^2 u|}{|\Delta x|^2} \leqslant \dfrac{c}{t}$ feltétel, ahol $\Delta^2 u = u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x)$, $x, \Delta x$ n dimenziós vektorok, K, M és c konstansok.

Az u_0 függvény elégítse ki a Lipschitz feltételt. Megemlítjük, hogy ha egy függvény kielégíti ezt a feltételt, akkor az majdnem mindenütt differenciálható: ilyen értelemben beszélünk u_x-ről is. Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor az

$$u(t, x) = \min_{|v| \leqslant K} [u_0(x - tF'(v)) + t((v, F'(v)) - F(v))] \equiv \min_{|v| \leqslant K} \Phi(t, x, v) \tag{10}$$

függvény medoldása az (1)-(2) feladatnak és

$$\lim_{t \to \infty} u(t, x) = \inf_{x} u_0(x). \tag{11}$$

(10) és (11)-nek a (nem triviális) bizonyítása megtalálható Sz.N. Kruzskov cikkében: Mat. szbornyik, 1967, t. 72. N. 1.

A (10) formula csak látszólag explicit – az $u(t, x)$ függvényt csak ritkán lehet automatikusan kifejezni belőle. (10) megértését segítheti a következő geometriai meggondolás: tekintsük a $\Phi(t, x, v)$ függvényt mint egy egyparaméteres (v-paraméter) (t, x) »síkon« adott felületsereget. Ezek a felületek simák, ha u_0 és F is azok. Két, különböző v-nek megfelelő felület azonban metszheti egymást, és ha ez a metszés transzverzális (nyilvánvaló értelemben), akkor $u(t, x)$, mint a két felület minimuma, már nem lesz differenciálható ezen a metszésvonalon. Mivel v -folytonos paraméter, az $u(t, x)$ függvény formája általában igen bonyolult.

Ugyanez a geometriai meggondolás adja azt az ötletet, hogy numerikus számításokban a nehezen kivitelezhető (és csak lokálisan alkalmazható) analítikus minimumkeresés helyett a következő módszert ajánljuk: a (t_0, x_0) pontban nézzük a Φ függvényt: $\Phi(t_0, x_0, v)$. Tudjuk, hogy a minimumkeresésben elég azokat a v-ket figyelembe venni, amelyekre $|v| \leqslant K$, ahol $K = \max_x |u_0'(x)|$. Osszuk fel a $[-K, K]$ szakaszt l hosszúságú részekre, legyen $v_i = -K + il$. A $\Phi(t_0, x_0, v_i)$ értékek közül kikeressük a legkisebbet. Ha több v_i -nek felel meg ugyanez, (vagy majdnem ugyanez) az érték, akkor azokkal is elvégezzük a következő eljárást: legyen

v_{i_0} pont, amelynek az említett minimum megfelel. Nézzük a $[v_{i_0-1}, v_{i_0-1}]$ szakaszt. Ezt is feldaraboljuk kis részekre, ezekben a pontokban keressük Φ minimumát, stb. A kívánt pontossággal így meghatározhatjuk azt a v-t, ami $u(t_0, x_0)$ kiszámításához kell. Általában ez a v megfelel a (t_0, x_0) pont valamely környezetében. Konkrét esetekben majdnem mindig meg lehet határozni ennek a környezetnek a méreteit. Nagy t-k esetében hasznos figyelembe venni a (11) formulát, hiszen $\min u_0(x)$ a gyakorlatban mindig meghatározható kellő pontossággal.

Ami az eljárás megalapozását illeti, megjegyezzük, hogy a $\Phi(t_0, x_0, v)$ függvény, mivel kielégíti a Lipschitz feltételt, nem oszcillálhat túl erősen, így l kellő (és $u_0'(x)$-től függő) megválasztásával helyes eredményt kapunk.

Néhány gondolat az általánosított értelemben vett megoldásokról. Mint láttuk, (10) nem megoldása (1)-(2)-nek klasszikus értelemben: az $u(t, x)$ függvény az (1)-(2) egyenletet csak majdnem mindenütt (vagyis egy nulla-mértékű halmaz kivételével mindenütt) elégíti ki.

A parciális differenciálegyenletek egyik alapvető problémája, hogy egy adott függvény milyen értelemben köteles kielégíteni egy adott differenciálegyenletet. A disztribucióelmélet vagy Szoboljev-féle általános megoldás ismeretében önkéntelenül felmerül a kérdés: nem lehetne-e ebben az esetben is valami hasonlóval próbálkozni? Ahhoz, hogy az (1) egyenletnek Szoboljev-féle értelemben vett megoldásáról beszéljünk, szükséges, hogy $F(u_x) = (\varphi(u))_x = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(u))_{x_i}$ legyen.

Tekintsük tehát a

$$
(12) \qquad \begin{aligned} & v_t + (\varphi(v))_x = 0 \\ & v(0, x) = v_0(x) \end{aligned} \qquad \text{feladatot.}
$$

A $v(t, x)$ függvényt a (12) feladat Szoboljev-féle értelemben vett általánosított megoldásának hívják, ha v korlátos, mérhető függvény és

$$
(13) \qquad \int [f_t \cdot v + f_x \varphi(v)]\,dx\,dt = 0,
$$

ahol $f(x, t)$ folytonosan differenciálható, tetszőleges függvény, amely azonosan egyenlő nullával egy bizonyos korlátos halmazon kívül és

$$
\int |v(t, x) - v_0(x)|\,dx \to 0 \quad \text{ha} \quad t \to 0
$$

Az integrálok aszerint a tartomány szerint veendők, ahol (12) adott. Tekintsük a szakaszosan sima függvényeket. Azokban a pontokban, ahol v differenciálható – v-klasszikus megoldás. A függvény szakadás-helyein teljesülnie kell bizonyos, a fizikából átvett feltételnek.

Példa:

$$
n = 1, \ \varphi(v) = \frac{1}{2} v^2, \ v_0(x) \equiv 0 .
$$

Osszuk fel a $t > 0$ félsíkot a $t = -\frac{1}{\alpha} x$, $x = 0$, $t = \frac{1}{\alpha} x$ félegyenesekkel négy részre. Legyen ezekben a tartományokban, az $x < 0$, $t < -\alpha x$ tartománnyal kezdve, rendre $0, -\alpha, \alpha, 0$. Nem nehéz belátni, hogy ez a függvény megoldása a (10) feladatnak (11) értelemben. A szakadás-helyeken teljesülnek a fizika által diktált feltételek. Ugyanakkor a megoldások száma végtelen, szöges ellentétben az egyenlet által leírt folyamat egyértelműségével. Ebben az esetben tehát a Szoboljev-féle megoldás-általánosítás segítségével nem kapunk korrekt módon kitűzött feladatot.

Irodalom

[1] I.G. Petrovszkij: Előadások a közönséges differenciál egyenletek elméletéből

Summary

Nonlinear first order partial differential equations. Numerical solutions.

The paper deals with the investigation of the solutions of nonlinear first-order partial differential equations as well as with their numerical solutions. It demonstrates the inapplicability of the classic methods and gives a method for machine calculation.

Резюме

Вычислительные методы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

В работе рассматриваются свойства решений нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. С помощью примеров показывается невозможность применения метода характеристик к численному интегрирования таких уравнений в общем случае. Дается метод для численного решения рассматриваемого уравнения.

SPECIÁLIS IDŐOPTIMUM FOLYAMAT SZINTÉZISTARTOMÁNYÁRA VONATKOZÓ BECSLÉS

Urbánszki Ferenc

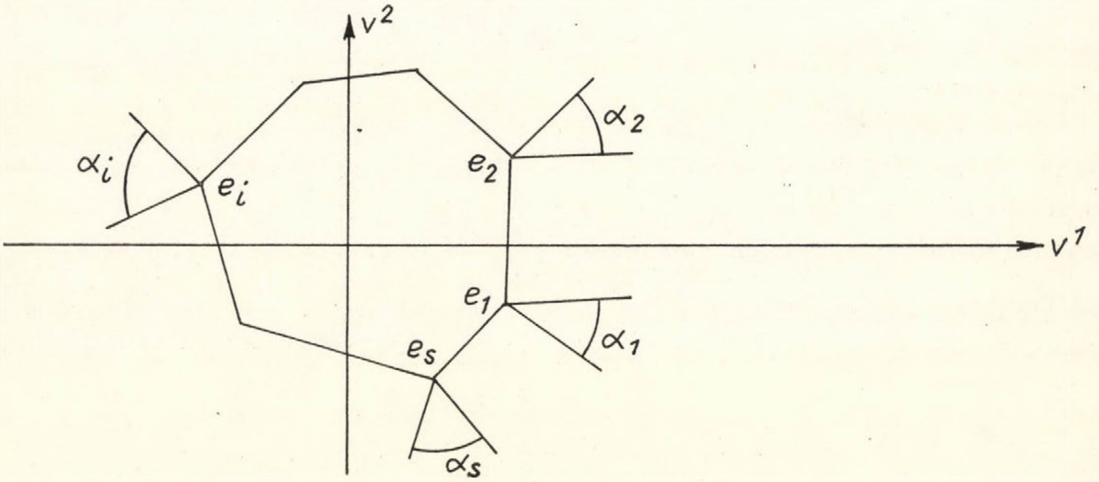
Legyen adott egy másodrendű lineáris időoptimum folyamat az

(1)
$$\dot{x}^1 = ax^1 - bx^2 + v^1$$
$$\dot{x}^2 = bx^2 + ax^2 + v^2$$

differenciálegyenletrendszerrel, ahol

$$(x^1, x^2) \in R^2,$$
$$(v^1, v^2) \in V\ ,$$
$$b > 0\ .$$

A V vezérlési tartomány egy konvex sokszög, amely tartalmazza – nem csúcspontként – az origót. Legyenek a V sokszög csúcsai $e_i = (e_i^1, e_i^2)$, $i = 1,2,\ldots,s$ és az e_i csúcsban az oldalak külső normálisainak szögét pedig jelöljük α_i-vel.



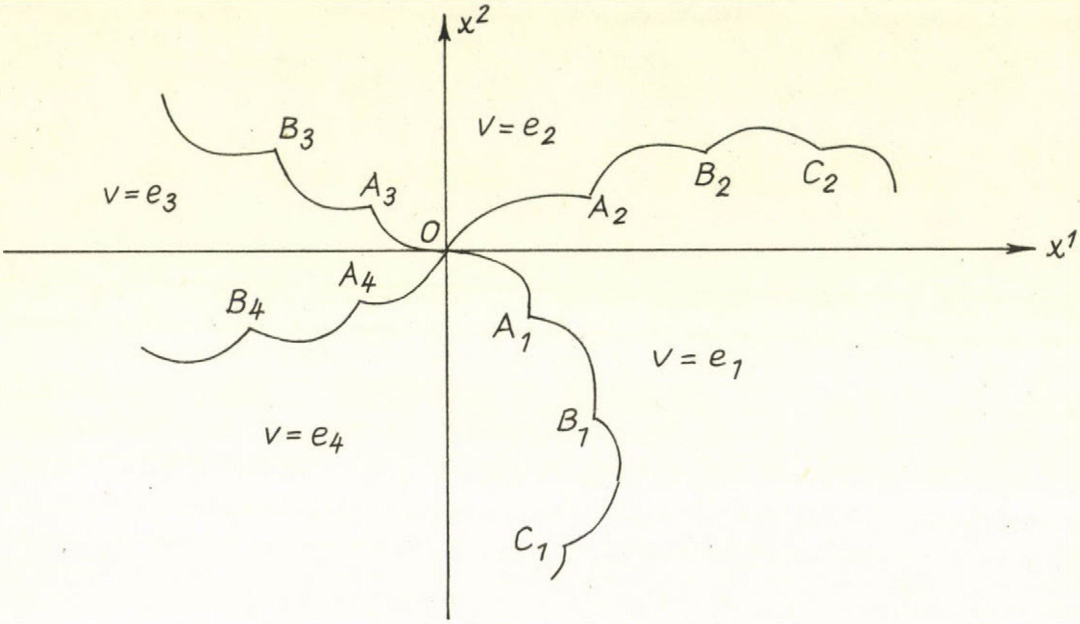
A Pontrjagin-féle maximum-elv és az ebből levezethető tételek alapján megvalósítható az optimális trajektóriák szintézise [1], azaz megadható egy olyan

$$(O, A_i, B_i, C_i, D_i, \ldots\ldots) \qquad i = 1,2,\ldots,s$$

átkapcsolási görbesereg az R^2 sikon, hogy az

$$(O,A_i,B_i,C_i,D_i,\ldots\ldots)$$
$$(O,A_{i+1},B_{i+1},C_{i+1},D_{i+1},\ldots\ldots) \quad i = 1,2,\ldots,s$$

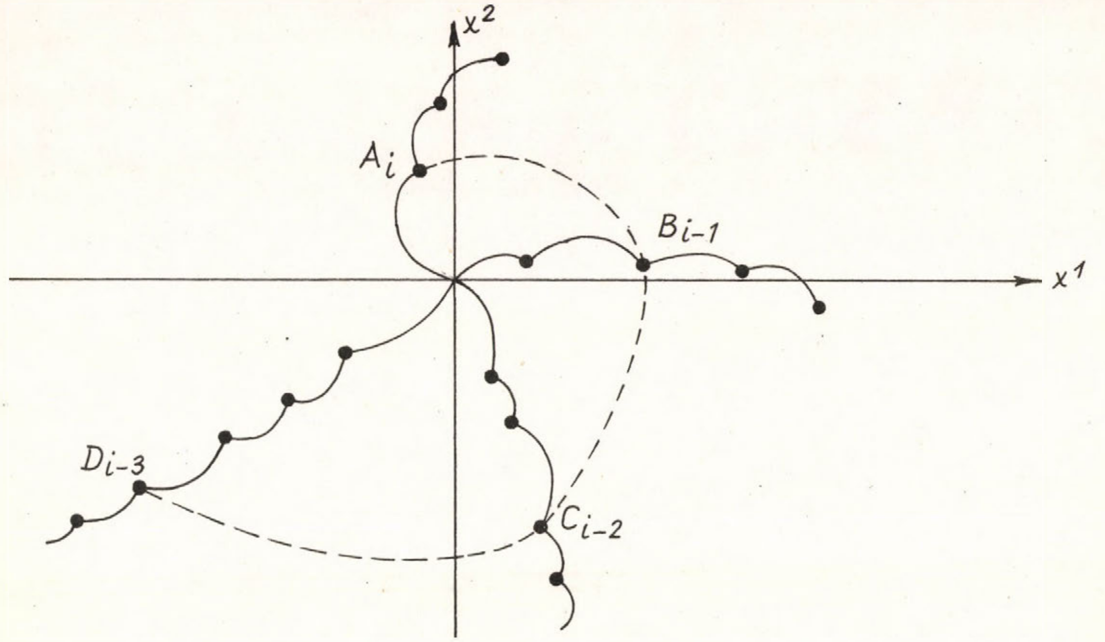
görbék által határolt síkrészen az optimális vezérlés a V tartomány e_i csúcsa lesz. (Az indexelés itt és a továbbiakban is mod s értendő).



Ha az (1) mozgásegyenletben $a \leqslant 0$, akkor az átkapcsolási görbék az egész síkot behálózzák. A szintézistartomány a sík lesz. Ha a mozgásegyenletben $a > 0$, akkor a görbék az origó környezetének korlátos tartományában maradnak [1]. Ekkor a szintézistartomány korlátos.

Ebben a cikkben feladatul tűzzük ki egy olyan kör meghatározását, amely tartalmazza az $a > 0$ esetben a szintézistartományt. Az alábbiakban $a > 0$, $b > 0$ speciális esetet tárgyaljuk.

Az A_i, B_{i-1}, C_{i-2}, $D_{i-3}, \ldots$ pontok sorozata rekurzív módon megadható.



Legyen $h_i = (h_i^1, h_i^2)$ az

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
ah_i^1 - bh_i^2 + e_i^1 &= 0\\
bh_i^1 + ah_i^2 + e_i^2 &= 0
\end{aligned}
$$

egyenletrendszer megoldása. Ekkor [1]

$$
(3_1)\qquad
\begin{cases}
A_i^1 - h_i^1 = C_{OA} e^{-\frac{a}{b}\alpha_i} \cos(-\alpha_i + \gamma_{OA})\\
A_i^2 - h_i^2 = C_{OA} e^{-\frac{a}{b}\alpha_i} \sin(-\alpha_i + \gamma_{OA})\\
(C_{OA})^2 = (h_i^1)^2 + (h_i^2)^2\\
\operatorname{tg} \gamma_{OA} = \dfrac{h_i^2}{h_i^1}
\end{cases}
$$

$$
(3_2)\qquad
\begin{cases}
B_{i-1}^1 - h_{i-1}^1 = C_{AB} e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}} \cos(-\alpha_{i-1} + \gamma_{AB})\\
B_{i-1}^2 - h_{i-1}^2 = C_{AB} e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}} \sin(-\alpha_{i-1} + \gamma_{AB})\\
(C_{AB})^2 = (A_i^1 - h_{i-1}^1)^2 + (A_i^2 - h_{i-1}^2)^2\\
\operatorname{tg} \gamma_{AB} = \dfrac{A_i^2 - h_{i-1}^2}{A_i^1 - h_{i-1}^1}
\end{cases}
$$

$$
(3_3)\quad \left\{
\begin{aligned}
C^1_{i-2} - h^1_{i-2} &= C_{BC}e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-2}} \cos(-\alpha_{i-2} + \gamma_{BC}) \\
C^2_{i-2} - h^2_{i-2} &= C_{BC}e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-2}} \sin(-\alpha_{i-2} + \gamma_{BC}) \\
(C_{BC})^2 &= (B^1_{i-1} - h^1_{i-1})^2 + (B^2_{i-1} - h^2_{i-2})^2 \\
\operatorname{tg}\gamma_{BC} &= \frac{B^2_{i-1} - h^2_{i-2}}{B^1_{i-1} + h^1_{i-2}}
\end{aligned}
\right.
$$

$$\vdots$$

Az

$$M^1_i = |h_i|e^{-\frac{a}{b}\alpha_i}$$

$$M^2_i = (M^1_i + |h_i - h_{i-1}|)e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}}$$

$$M^3_i = (M^2_i + |h_{i-1} - h_{i-2}|)e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-2}}$$

$$\vdots$$

sorozat felhasználásával az átkapcsolási görbék töréspontjainak az origótól való távolságára a következő egyenlőtlenségeket írhatjuk fel:

$$|A_i - h_i| = M^1_i$$

$$(4_1) \qquad |A_i| \leqslant M^1_i + |h_i|$$

$$
\begin{aligned}
|B_{i-1} - h_{i-1}| &= |A_i - h_{i-1}|e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}} \leqslant \\
&\leqslant (|A_i - h_i| + |h_i - h_{i-1}|)e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}} = \\
&= (M^1_i + |h_i - h_{i-1}|)e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}} = M^2_i
\end{aligned}
$$

$$(4_2) \qquad |B_{i-1}| \leqslant M^2_i + |h_{i-1}|$$

$$
\begin{aligned}
|C_{i-2} - h_{i-2}| &= |B_{i-1} - h_{i-2}|e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-2}} \leqslant \\
&\leqslant (|B_{i-1} - h_{i-1}| + |h_{i-1} - h_{i-2}|)e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-2}} \leqslant \\
&\leqslant (M^2_i + h_{i-1} - h_{i-2}|)e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-2}} = M^3_i
\end{aligned}
$$

(4_3) $\quad |C_{i-2}| \leq M_i^3 + |h_{i-2}|$

.

.

.

Az M_i^k sorozat vizsgálatához értelmezzük az

$$N_i^p = |h_i| e^{-\frac{a}{b} 2\pi p} + \frac{1 - e^{-\frac{a}{b}(p+1)2\pi}}{1 - e^{-\frac{a}{b} 2\pi}} \cdot \sum_i |h_i - h_{i-1}| e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}}$$

sorozatot, amelyre

$$M_i^k \leq N_i^p, \quad \text{ahol} \quad k = p \cdot s + q$$

$$s > q \geq 0.$$

Az N_i^p sorozat konvergens

$$\lim_{p \to \infty} N_i^p = \frac{\sum_i |h_i - h_{i-1}| e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}}}{1 - e^{-\frac{a}{b} 2\pi}}$$

(a határérték független az i indextől)

A (4_1), (4_2), (4_3)..... egyenlőtlenségek alapján a

$$\max_i \left(\lim_{k \to \infty} M_i^k + |h_i| \right) \leq \max_i \left(\lim_{p \to \infty} N_i^p + |h_i| \right) =$$

$$= \max_i |h_i| + \frac{\sum_i |h_i - h_{i-1}| e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}}}{1 - e^{-\frac{a}{b} 2\pi}} = R$$

sugarú kör tartalmazni fogja a feladatban megjelölt szintézistartományt.

A h_i és e_i vektorok közötti (2) összefüggés figyelembevételével igaz az alábbi

Tétel: Ha az (1) mozgásegyenletben $a > 0$, akkor az

$$R = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[\max_i |e_i| + \frac{\sum_i |e_i - e_{i-1}| e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}}}{1 - e^{-\frac{a}{b} 2\pi}} \right]$$

sugarú kör tartalmazza az időoptimum folyamat szintézistartományát.

1. Megjegyzés: Az $\alpha = \min_i \alpha_i$; KER = V sokszög kerülete jelöléssel bevezetve az

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[\max_i |e_i| + \frac{\text{KER}\, e^{-\frac{a}{b}\alpha}}{1 - e^{-\frac{a}{b}2\pi}} \right]$$

$$R_2 = \frac{\max_i |e_i|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[1 + \frac{2\pi e^{-\frac{a}{b}\alpha}}{1 - e^{-\frac{a}{b}2\pi}} \right]$$

$$R_3 = \frac{\max e_i}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[1 + \frac{2\pi}{1 - e^{-\frac{a}{b}2\pi}} \right]$$

mennyiségeket nyilvánvaló, hogy

$$R \leqslant R_1 < R_2 < R_3 .$$

2. Megjegyzés: Ha a V vezérlési tartomány egy origó középpontú r sugarú körbe írt szabályos s-szög, akkor a következő körsugarakat kapjuk:

$$R = \frac{r}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[1 + \frac{2 \cdot s \cdot \sin\frac{\pi}{s} \cdot e^{-\frac{a}{b}\frac{2\pi}{s}}}{1 - e^{-\frac{a}{b}2\pi}} \right]$$

$$R_1 = R$$

$$R_2 = \frac{r}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[1 + \frac{2\pi e^{-\frac{a}{b}\frac{2\pi}{s}}}{1 - e^{-\frac{a}{b}2\pi}} \right]$$

$$R_3 = \frac{r}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[1 + \frac{2\pi}{1 - e^{-\frac{a}{b}2\pi}} \right]$$

Az $|OA_i| + |A_iB_i| + |B_iC_i| + \ldots$ mennyiségekkel szintén megadhatunk egy körsugarat, amely megoldása lesz a feladatnak. Részletszámítások nélkül az eredmény:

$$\tilde{R} = \frac{\max\limits_i |e_i|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{1 + e^{-\frac{a}{b}\alpha}}{1 - e^{-\frac{a}{b}\alpha}} \frac{1 - e^{-\frac{a}{b}s\alpha}}{1 - e^{-\frac{a}{b}2\pi}} .$$

Ha a vezérlési tartomány a fentebbi szabályos sokszög, akkor az

$$\tilde{R} = \frac{r}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{a}{b}\frac{2\pi}{s}}}{1 - e^{-\frac{a}{b}\frac{2\pi}{s}}}$$

sugarat kapjuk.

Rögzített r mellett vegyük az R és $\tilde{R}$ határértékét.

$$\lim_{s\to\infty} R = R_3 .$$

$$\lim_{s\to\infty} \tilde{R} = \infty .$$

Az R tehát finomabb korlát, mint az $\tilde{R}$, ha a csúcsok száma megfelelően nagy.

Irodalom

[1] Boltjanszkij: Matematicseszkije metodü optimalnovo upravlenyija, Moszkva, 1967.

Summary

Estimation of the synthesis domain of a special time-optimum flow

The synthesis domain of a linear time optimum flow in a plain is limited if the roots of the homogeneous differential equation system are complex and the real part is positive. In the paper an upper limit is given for the synthesis domain of the flow.

Резюме

Оценка области достижимости специального оптимального быстродействия

Область достижимости линейного оптимального быстродействия на плоскости будет ограничена, если корни однородной системы дифференциальных уравнений комплексны и их действительные части положительны. В статье задается оценка сверху области достижимости такого процесса.

EXTREMÁLIS FELADATOK ABSZTRAKT TEREKBEN

Tóth Árpád

1. BEVEZETÉS

A vezérléselmélet és a variációszámítás sok feladata (pl. a Mayer feladat) fogalmazható meg absztrakt tereken megadott extremális problémaként. [1] A kérdés gyakorlati jelentőségére való tekintettel az [1] és [2]-ben elért eredmények általánosítását tűzzük ki célul. A feltételes szélsőértékfeladatnál megengedjük az egyenlőtlenségtípusú feltételeket is. (Az előbbiek csak egyenlőség-típusú feltételeket tárgyalnak.) A szükséges feltételeken túl egy elégséges feltételt is adunk.

2. NÉHÁNY FONTOS DEFINICIÓ

Az alábbi meghatározások [1]-ben találhatók. Ebben a szakaszban E, F normált, lineáris tereket jelentenek.

1. Definició: Egy $D \subset E$ részhalmazt az $x_0 \in D$ pontban *végesen nyíltnak* mondunk, ha minden $\{h_1, \ldots, h_n\} \in E$ véges halmazhoz van R^n-ben a 0-nak olyan $U(h_1, \ldots, h_n)$ környezete, hogy $x_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i h_i \in D$, ha csak $(t_1, \ldots, t_n) \in U(h_1, \ldots, h_n)$.

Legyen D_{x_0} az így előálló pontok halmaza, vagyis

$$D_{x_0} = \left\{ x_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i h_i : \ n \geqslant 1, h_i \in E, (t_1, \ldots, t_n) \in U(h_1, \ldots, h_n) \right\}.$$

Ezt a halmazt az x_0 egy csillagkörnyezetének nevezzük. D *végesen nyílt*, ha minden pontjánál végesen nyílt.

2. Definició: Legyen az $f\colon E \to F$ függvény egy $D \subset E$ végesen nyílt halmazon értelmezve, és D_{x_0} az $x_0 \in D$ pontnak csillagkörnyezete.

Az f *végesen folytonos* az $y \in D_{x_0}$ pontban, ha az

$$f(y + \sum_{1}^{n} t_i h_i)\colon R^n \to F$$

folytonos a $(t_1, \ldots, t_n)$ függvényeként a $0 \in R^n$ pontban, tetszőleges $h_1, \ldots, h_n$ és $n \geqslant 1$ megválasztása mellett. f végesen folytonos a D_{x_0} halmazon, ha minden $y \in D_{x_0}$ pontban végesen folytonos.

3. Definició: Legyen az $f\colon E \to F$ egy $D \subset E$ végesen nyílt halmazon értelmezve. Ha a

$$\lim_{t \to 0} \; [f(x_0 + th) - f(x_0)]/h = \delta f(x_0; h)$$

határérték létezik minden $h \in E$ esetén, akkor f *gyengén differenciálható* az x_0 pontban, $\delta f(x_0; h)$ pedig az f h irányába vett gyenge (vagy Gâteaux) deriváltja.

Könnyű belátni, hogy ha $f: E \to R$, $\delta f(x_0; h)$ pedig létezik minden $y \in Dx_0$ pontban és végesen folytonos az x_0 pontban, akkor a $\delta f(x_0; h)$ a h-nak lineáris, de nem feltétlenül folytonos funkcionálja.

4. Definíció: Legyen az $f: E \to F$ függvény az x_0 pont egy U környezetében értelmezve. Ha létezik egy olyan $Df(x_0): E \to F$ folytonos lineáris leképezés, hogy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Df(x_0)h + \epsilon(x_0; h),$$

ahol $\|\epsilon\| / \|h\| \to 0$, ha $\|h\| \to 0$; akkor $Df(x_0)$-át az f x_0 pontbeli erős (vagy Fréchet) deriváltjának mondjuk.

A továbbiakban az E lineáris normált térből az F lineáris normált térbe képző folytonos lineáris leképzések terét $L(E,F)$-el jelöljük. Speciálisan, ha $F = R$, $L(E,R) = E^*$, az E duálisa.

Ha az f az U halmaz minden pontjában F-differenciálható, a $Df(x)$ $(x \in U)$ függvény az U halmazt képezi le az $L(E,F)$-be. Ha ez a leképzés folytonos, akkor az f függvényt folytonosan F-differenciálhatónak mondjuk.

Ha E pre-Hilbert – vagyis lineáris, normált, és rendelkezik $\langle u,v \rangle : E \times E \to R$ belső szorzattal is – előfordulhat, hogy folytonos és lineáris funkcionálok kanonikusan azonosíthatók a pre-Hilbert tér elemeivel. Ez indokolja a következőt:

5. Definíció: Legyen $f: E \to R$ értelmezve a $D \subset E$ végesen nyílt halmazon (E pre--Hilbert tér), és tegyük fel, hogy f G-deriválható az x_0 pontban. Ha létezik egy olyan $\nabla f(x_0) \in E$ elem, hogy $\delta f(x_0;h) = \langle \nabla f(x_0), h \rangle$ minden $h \in E$ elemre, akkor a $f(x_0)$ elemet az f függvény x_0 pontbeli *(gyenge) gradiensének* nevezzük.

Megjegyzés: Ha az f-nek létezik x_0 pontban a gradiense, a $\delta f(x_0;h)$ nemcsak lineáris, hanem folytonos funkcionálja h-nak. Ugyanilyen módon lehetne az erős gradienst is definiálni, de erre a fogalomra nem lesz szükség, így a gradiens végig "gyenge gradienst" jelent.

3. EXTREMÁLIS FELADAT PRE-HILBERT TÉRBEN

Ebben a szakaszban E pre-Hilbert teret jelöl. Először fogalmazzuk meg a feladatot.

6. Definíció: Legyenek az $f, \psi_1, \ldots, \psi_p, \psi_{p+1}, \ldots, \psi_n$ funkcionálok a $D \subset E$ halmazon értelmezve. Legyen

(1) $$M = \{x \in E:\ \psi_i(x) = 0,\ 1 \leq i \leq p\},$$

(2) $$G = \{x \in E:\ \psi_i(x) \leq 0,\ p < i \leq n\}.$$

Az $x_0 \in M \cap G$ pont az f funkcionál *feltételes relatív minimumhelye,* ha van x_0-nak egy olyan U környezete, hogy $f(x_0) \leq f(y)$ minden $y \in U \cap M \cap G$ pontra.

7. Definició: Legyen $x_0 \in M$, és létezzenek a $\nabla\psi_1(x_0), \ldots, \nabla\psi_p(x_0)$ gradiensek. Ha $T_0 = \{h \in E: \langle \nabla\psi_i(x_0), h\rangle = 0,\ 1 \leq i \leq p\}$, akkor a $T_{x_0} = x_0 + T_0$ halmazt az M sokaság x_0 pontbeli *érintőterének* nevezzük.

A következőkben bizonyítás nélkül közöljük az [1] -ben levezetett szükséges feltételt az f funkcionál relatív minimumára egyenlőség típusú feltételek mellett. Ez a tétel viszonylag keveset követel meg a szereplő funkcionálok és deriváltjaik értelmezési tartományairól, ezért pl. az irányításelméletben jól használható.

1. Tétel: (i) Legyenek $f, \psi_i, \ldots, \psi_p: E \to R$ a $D \subset E$ végesen nyílt halmazon értelmezve. Legyen x_0 az f relatív minimumhelye az (1) feltétel mellett, $x_0 \in M$.

(ii) Tegyük fel, hogy a $\nabla\psi_1(y), \ldots, \nabla\psi_p(y)$ gradiensek léteznek és végesen folytonosak, ha y az x_0 egy D_{x_0} csillagkörnyezetében van. Ugyanitt legyen értelmezve $\nabla f(y)$, és legyen végesen folytonos az x_0 pontban.

(iii) A $\nabla\psi_1(x_0), \ldots, \nabla\psi_p(x_0)$ gradiensek alkossanak lineárisan független rendszert E-ben.

Ha $\nabla f(x_0) \neq 0$, van egyértelműen meghatározott olyan $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = 0$ vektor, hogy

(3) $$\nabla f(x_0) = \sum_1^p \lambda_j \nabla\psi_j(x_0).$$

Ez a tétel a Lagrange-féle multiplikátor szabály általánosítása absztrakt terekre. A következőkben ehhez hasonló tételt bizonyítunk be, most már (2) típusú feltételt is megengedve.

Az (1) és (2) feltételeket vizsgálva az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy

$$\psi_i(x_0) = 0, \qquad 1 \leq i \leq r,$$

$$\psi_i(x_0) \neq 0, \qquad r < i \leq n,$$

ahol $p \leq r \leq n$. Definiáljuk a következő sokaságot:

$$N_r = x \in E:\ \psi_i(x) = 0 \qquad 1 \leq i \leq r.$$

Jelöljük most T_{x_0}-lal az N_r x_0 pontbeli érintőterét, és legyen $T_0 = T_{x_0} - x_0$.

A tételt ezután a következő formában mondjuk ki:

2. Tétel: (i) Legyenek $f, \psi_1, \ldots, \psi_n$: $E \to R$ értelmezve az $U \subset E$ nyílt halmazon, $\psi_{p+1}, \ldots, \psi_n$ folytonosak az $x_0 \in U$ pontban. Legyen x_0 az f funkcionál relatív minimumhelye az (1) és (2) feltételek mellett.

(ii) Tegyük fel, hogy a $\nabla \psi_1(y), \ldots, \nabla \psi_r(y)$ gradiensek léteznek és végesen folytonosak az x_0 egy D_{x_0} csillagkörnyezetében ($D_{x_0} \subset U$). Ugyanitt legyen értelmezve a $\nabla f(y)$ gradiens is, amely az x_0 pontban végesen folytonos.

(iii) Alkossanak a $\nabla \psi_1(x_0), \ldots, \nabla \psi_r(x_0)$ gradiensek lineárisan független rendszert E-ben.

Ha $\nabla f(x_0) = 0$, akkor van olyan $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0 \in R^n$ vektor, hogy

$$\text{(4)}\qquad \begin{aligned} &\text{a)} && \nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla \psi_i(x_0) \\ &\text{b)} && \lambda_i \leqslant 0 \qquad (p+1 \leqslant i \leqslant n) \\ &\text{c)} && \lambda_i \psi_i(x_0) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \end{aligned}$$

Bizonyítás: Mivel $\psi_i(x_0) < 0$ $(r+1 \leqslant i \leqslant n)$, x_0-nak van olyan V környezete, hogy $\psi_i(x) < (r+1 \leqslant i \leqslant n$ és $x \in V$ esetén. Ezért x_0 relatív minimumhelye f-nek az (1) és a

$$\text{(2)}' \qquad G' = \{x \in E: \psi_i(x) \leqslant 0 \quad p+1 \leqslant i \leqslant r\}$$

feltétel mellett, tehát relatív minimum az N_r sokaságon is. Az 1. tétel szerint van olyan $\lambda' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \neq 0$ vektor, hogy

$$\text{(5)} \qquad \nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \nabla \psi_i(x_0).$$

A b) állítás bizonyításánál tegyük föl, hogy van egy $\lambda_0 > 0$ együttható $(p+1 \leqslant i_0 \leqslant r)$. Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy $i_0 = r$. Az (iii) feltétel miatt az

$$\text{(6)} \qquad < \nabla \psi_i(x_0), x > = a_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

egyenletrendszernek minden $a_i \in R$ mellett van megoldása. Legyen $a_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r-1)$ és $a_r = a_0 < 0$ jobboldal esetén a (6) megoldása a $h \in E$ elem. Legyen T'_{x_0} az $N_{r-1} = \{x \in E: \psi_i(x) = 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant R-1\}$ sokaság érintőtere az x_0 pontban. Nyilván $x_0 + h \in T'_{x_0}$. (5)-ből

$$< \nabla f(x_0), h > = \lambda_r \nabla \psi_r(x_0), h > .$$

Mivel:

(7) $$< \nabla \psi_r(r_0), h > = a_0 < 0, \quad a$$

$$< \nabla f(x_0), h > < 0.$$

Az $x_0 + h$ segítségével konstruálunk egy, az (1),(2) feltételnek eleget tevő pontot. $y_{st} \in E$ jelölje a következő pontot:

$$y_{st} = x_0 + sh + \sum_{i=1}^{r-1} t_i \nabla \psi_i(x_0)$$

ahol $s, t_i \in R$. Definiáljuk az $F_i(t,s)$: $R^r \to R$ függvényt a következő módon:

(8) $$F_i(t,s) = \psi_i(y_{st}) \qquad 1 \leq i \leq r-1.$$

Az F_i függvényeknek a következő tulajdonságai vannak:

1. $F_i(0,0) = \psi_i(x_0) = 0.$

2. Az $F_{ij} = \partial F_i / \partial t_j$ és $F_{is} = \partial F_i / \partial s$ parciális deriváltnak minden $1 \leq i, j \leq r-1$ indexre értelmezve vannak, és folytonosak a $0 \in R^r$ egy környezetében.

Ez az (ii) tulajdonság következménye, figyelembe véve, hogy

$$F_{ij}(t,s) = < \nabla \psi_i(y_{ts}), \nabla \psi_j(x_0) > \qquad (1 \leq i, j \leq r-1)$$

$$F_{is}(t,s) = < \nabla \psi_i(y_{ts}), h > .$$

3. $F_{is}(0,0) = 0$, az $F_{ij}(t,s)$ mátrix rangja $r-1$ a $0 \in R^r$ pont egy környezetében.

Az első tulajdonság annak a következménye, hogy

$$F_{is}(0,0) = < \nabla \psi_i(x_0), h > = 0 \qquad (1 \leq r \leq r-1).$$

A második pedig az (iii) és a parciális deriváltak folytonosságának következménye.

Az 1., 2., és 3. miatt alkalmazható a klasszikus implicit függvény tétel. Eszerint léteznek olyan $G_i(s)$: $R \to R$ függvények, $(1 \leq i \leq r-1)$, hogy $F_i(G_1(s), \ldots, G_{r-1}(s), s) = 0$ és folytonosan differenciálható az $s = 0$ pont egy környezetében minden $1 \leq i \leq r-1$-re. Minden ilyen függvényre teljesül továbbá, hogy

(9) $$G_i'(0) = \lim_{s \to 0} G_i(s)/s = 0,$$

mivel $G_i(s) = s\, G_i'(s\Theta)$ $(0 < \Theta < 1)$.

Tekinsük most az $y_s = x_0 + sh + \sum_{i=1}^{r-1} G_i(s) \nabla \psi_i(x_0)$ pontot. Ha s a $0 \in R$ elég kis környezetében van,

$$\psi_i(y_s) = F_i(G_1(s), \ldots, G_{r-1}(s), s) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant r-1),$$

vagyis $y_s \in N_{r-1}$.

Az f és ψ_r funkcionálok G-differenciálhatóságából és (9)-ből következik, hogy

$$\psi_r(y_s) = \psi_r(x_0 + sh + \sum_{i=1}^{r-1} G_i(s)\, \nabla\psi_i(x_0)) = \psi_r(x_0) +$$

$$+ s < \nabla\psi_r(x_0), h > + \sum_{i=1}^{r-1} G_i'(0) < \nabla\psi_r(x_0), \nabla\psi_i(x_0) > + \tag{10}$$

$$+ o(s) = \psi_r(x_0) + s < \nabla\psi_r(x_0), h > + o(s) .$$

Ugyanígy f-re

$$f(y_s) = f(x_0) + s < \nabla f(x_0), h > + o(s). \tag{11}$$

Mivel $\psi_r(x_0) = 0$ és $< \psi_r(x_0), h > < 0$, elég kis $s > 0$ mellett (10)-ből $\psi_r(y_s) < 0$ következik. Láttuk, hogy $y_s \in N_{r-1}$, ezért y_s eleget tesz az (1) és (2) feltételeknek. (7)-ből és (11)-ből viszont az következik, hogy elég kis $s > 0$ esetén $f(y_s) < f(s_0)$, ami ellentmond annak, hogy x_0 az f relatív minimumhelye az (1) és (2) feltételek mellett. Ezért $\lambda_r \leqslant 0$. Legyen $\lambda_{r+1} = \ldots, = \lambda_n = 0$, ekkor a b, és a c, feltétel is teljesül.

4. EXTREMÁLIS FELADAT BANACH-TÉRBEN

Az előző tétel bizonyításánál alkalmazott módszer kis módosításával egy, bizonyos szempontból általánosabb extremális feladatra is lehet szükséges feltételt adni. Ezt a feladatot – egyenlőség-típusú feltételek mellett – már Lusztemyik megoldotta [2]. Ugyanitt található az érintőtérre vonatkozó azon tétel, melyet az előbbi rész implicit függvény tétele helyett használunk fel.

Ebben a részben E, F Banach-teret jelentenek.

Legyen $\varphi: E \to F$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_p)$: $E \to R^p$. Definiáljuk a mellék feltételeket most a következő módon:

$$M = \{x \in: \varphi(x) = 0 \in F\}, \tag{13}$$

$$G = \{x \in: \psi_i(x) \leqslant 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant p\} . \tag{14}$$

Szükséges még néhány további meghatározás.

8. Definició: Legyen y: $E \to F$, M pedig a (13) sokaság. $x_0 \in M$ sokaság reguláris pontja, ha y folytonosan F-differenciálható x_0-ban és a $\nabla y (x_0$: $E \to F$ értékkészlete az F.

9. Definició: Tegyük fel, hogy $x_0 \in M$ reguláris pont. Legyen $T_0 = \{h \in E\colon D\varphi(x_0) = 0 \in F\}$ a $D\varphi(x_0)$ magja, ekkor a $T_{x_0} = \{x_0 + h\colon h \in T_0\}$ sokaságot az M x_0 pontbeli érintőterének nevezzük.

Most is feltehetjük, hogy

$$\psi_i(x_0) = 0 \qquad (1 \leq i \leq r),$$

$$\psi_i(x_0) < 0 \qquad (r \leq i \leq p),$$

megengedve az $r = 0$ értéket is. Legyen $N_r = \{x \in E\colon \varphi(x) = 0 \in F,\ \psi_i(x) = 0,\ 1 \leq i \leq r\}$. Nyilván $x_0 \in N_r$.

3. Tétel. (i) Legyenek $f\colon E \to R$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_p)\colon E \to R^p$ és $\varphi\colon E \to F$ értelmezve az $U \subset E$ nyílt halmazon. Legyen $x_0 \in U$ az f relatív minimumhelye a (13) és (14) feltételek mellett.

(ii) Tegyük fel, hogy az f, ψ_i $(1 \leq i \leq p)$ és a φ F-deriválhatók, az x_0 egy környezetében,

(iii) és x_0 reguláris pontja az N_r sokaságnak.

Ekkor van olyan $\lambda \in F^*$ funkcionál és $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p) \in R^p$ vektor, hogy

a) $Df(x_0) = {}^t[D\varphi(x_0)]\lambda + \sum_{i=1}^{p} \mu_i D\psi_i(x_0)$;

b) $\mu_i \leq 0$ $(1 \leq i \leq p)$;

c) $\mu_i \psi_i(x_0) = 0$ $(1 \leq i \leq p)$.

Megjegyzés: ha $g\colon E \to F$ tetszőleges leképezés, ${}^tg\colon F^* \to E^*$ jelöli a transzponált leképzést. $\lambda \in F^*$-ra

$$({}^tg \cdot \lambda)\, x = \lambda g(x) \quad \text{minden} \quad x \in E\text{-re}.$$

Bizonyítás: Mivel az F-deriválhatóságból következik a folytonosság, a 2. tételnél alkalmazott meggondolással arra jutunk, hogy x_0 az N_r sokaságon is relatív minimumhelye az f-nek. Ljuszternyik tétele szerint [2] van olyan $\lambda \in F^*$ funkcionál és $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) \in R^r$ vektor, hogy

$$Df(x_0) = {}^t[D\varphi(x_0)]\,\lambda + \sum_{i=1}^{r} \mu_i D\psi_i(x_0). \tag{15}$$

A b) állítás bizonyításánál feltesszük megint, hogy $\mu_r > 0$. A bizonyítás tovább teljesen hasonlóan megy.

Az x_0 pont regularitása miatt a

$$D\varphi(x_0)x = a,$$

$$D\psi_i(x_0)x = b_i \quad (1 \leq i \leq r)$$

rendszer minden $a \in F$ és $b_i \in R$ esetén megoldható. A $b_r = b_0 < 0$, $a = 0 \in F$ és $b_i = 0$ $(1 \leq i \leq r-1)$ jobboldalhoz tartozó megoldást h-val jelölve, újból fennáll, hogy

$$(16) \qquad Df(x_0)h < 0.$$

Nyilvánvaló, hogy x_0 az $N_{r-1} = \{x \in E\colon \varphi(x) = 0 \in F,\ \psi_i(x) = 0\ (1 \leq i \leq r-1)\}$ sokaságnak is reguláris pontja. Idézzük most az érintőtérről szóló tételt [2], mely az implicit függvény tétel egy általánosítása Banach-terekre. A tétel erre az esetre így szól:

Ha T'_{x_0} az N_{r-1} sokaság érintőtere az x_0 pontban, akkor minden $\bar{x} = x_0 + th \in T'_{x_0}$ ponthoz van olyan $x = x_0 + th + \epsilon(t) \in N_{r-1}$ pont, hogy $\|\epsilon(t)\| = 0(|t|)$.

(ii) miatt felírhatjuk:

$$(17) \qquad \psi_r(x_0 + th + \epsilon(t)) = \psi_r(x_0) + tD'\psi_r(x_0)h + \lambda(t),$$

$$(18) \qquad f(x_0 + th + \epsilon(t)) = f(x_0) + tDf(x_0)h + \eta(t),$$

ahol megint $\|\lambda(t)\|$ és $\|\eta(t)\| = 0(|t|)$.

(17)-ből következik, hogy $\bar{x}$ a (13) és (17) feltételeknek eleget tesz, (18) és (16)-ból pedig, hogy $f(\bar{x}) - f(x_0) < 0$. Az ellentmondás miatt $\mu_i \leq 0$, $1 \leq i \leq r$. Legyen $\mu_i = 0$ $r+1 \leq i \leq p$, ekkor

$$Df(x_0) = {}^t[D(x_0)]\lambda + \sum_{i=1}^{p} \mu_i D\psi_i(x_0)$$

és teljesül b) és c) is.

5. AZ EXTRÉMUM EGY ELÉGSÉGES FELTÉTELE

A szükséges feltétel élesítésével elégséges feltételt kaphatunk az f funkcionál szélsőértékének létezésére. Ehhez be kell vezetni a magasabbrendű deriváltakat is. E,F jelöljenek most is Banach-tereket.

10. Definició: Legyen az $U \subset E$ halmaz nyílt és $f\colon E \to F$ folytonosan differenciálható az U-n. Ekkor azt mondjuk F C^1 osztálybeli. Az $f\colon E \to F$ C^p osztálybeli leképezés $(p > 1)$ akkor, ha Df C^{p-1} osztálybeli és $D^p f = D(D^{p-1}f)$.

A $D^p f\colon E \to L(E, L(E, \ldots, L(E, F) \ldots))$ az U halmazon van értelmezve, és ismeretes [3], hogy $L(E, L(E, \ldots, L(E,F) \ldots))$ mindig azonosítható $E \times E \times \ldots E = E^p$ direkt szorzaton értelmezett F-be képező folytonos, lineáris leképezésekkel.

Fel fogjuk használni még a Taylor formula általánosítását, amely szintén [3]-ban található.

Taylor formula: Legyen $f: E \to F$ értelmezve az $U \subset E$ nyílt halmazon, $F \in C^p$. Legyenek x, $h \in U$ olyan pontok, hogy $x + th \in U$ $0 \leqslant t \leqslant 1$ esetén. Jelöljük h^p-vel a $(h, \ldots, h) \in E^p$ elemet. Ekkor a $D^p f(x + th)$ folytonos t-ben, és

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + \frac{Df(x)h}{1!} + \ldots + \frac{D^{p-1}f(x)h^{p-1}}{(p-1)!} + \\
&+ \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)} : D^p f(x+th)h^p \, dt.
\end{aligned} \tag{19}
$$

(Az integrál – értelmezése [3]-ban – az adott feltételek mellett létezik.)

4. Tétel: Legyenek $f: E \to R$, $\varphi: E \to F$ és $\psi_i: E \to R$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ az $U \subset E$ nyílt halmazon értelmezve, és a (13) és (17) feltételeknek eleget tevő x_0 pont egy alkalmas V környezetében kétszer folytonosan F-deriválhatók. Teljesüljenek még a következők:

(i) Van olyan $\lambda \in F^*$ funkcionál és $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p) \in R^p$ vektor, hogy

a) $Df(x_0) = {}^t[D\varphi(x_0)]\lambda + \sum_{i=1}^{p} \mu_i D\psi_i(x_0)$,

b) $\mu_i \leqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$,

c) $\mu_i \psi_i(x_0) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$,

(ii) $D\varphi(x_0): E \to F$ ráképezés.

(iii) Legyen $F = f - t\varphi \cdot \lambda - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \psi_i: E \to R$,

és legyen $D^2F(x_0)$-nak az $E \times E$ egységgömbjén egy $a > 0$ alsó korlátja, ekkor az x_0 az f relatív minimuma a (13) és (14) feltételek mellett.

Bizonyítás: Az x_0 nyilván reguláris pontja az M-nek, ezért van egy olyan V környezete, hogy minden $x \in V \cap M$ ponthoz létezik egy $\bar{x} \in T_{x_0}$, amelyre

$$\|x - \bar{x}\| \leqslant K \, \|\epsilon(x_0; x - x_0)\|,$$

ahol $\epsilon(x_0; x - x_0) = \varphi(x) - \varphi(x_0) - D\varphi(x_0)(x - x_0)$ (Ljuszternyik tétele az érintősokaságról).

Mivel $D^2\varphi(x_0)$ folytonos, (19) felhasználásával

$$\|x - \bar{x}\| \leqslant K_1 \, \|x - x_0\|^2 \tag{20}$$

minden $x \in V_1 \subset V$, $x \in M$ elemre. (A továbbiakban a V_i-k az x_0 megfelelően választott környezeteit jelölik.) Szükség lesz még két következő becslésre:

$$\|\bar{x} - x_0\| \leqslant \|\bar{x} - x\| + \|x - x_0\| \leqslant (K_1\|x - x_0\| + 1)\|x - x_0\|.$$

Minden $x \in V_1 \cap M$-re igaz tehát

(21) $$\|\bar{x} - x_0\| \leqslant K_2\|x - x_0\|.$$

Továbbá,

$$\|\bar{x} - x_0\|^2 \geqslant (\|\bar{x} - x\| - \|x - x_0\|)^2 \geqslant \|x - x_0\| (\|x - x_0\| -$$
$$- 2\|\bar{x} - x\|) \geqslant \|x - x_0\|^2 (1 - a K_1 \|x - x_1\|).$$

Megfelelő V_2 környezetben tehát

(22) $$\|\bar{x} - x_0\|^2 \geqslant \frac{\|x - x_0\|^2}{2}$$
$$x \in V_2 \cap M.$$

Vizsgáljuk most meg a következő különbséget:

(23) $$f(x) - f(x_0) = F(x) - F(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \psi_i (x_0) \geqslant F(x) -$$
$$- F(x_0) = F(\bar{x}) - F(x_0) + F(x) - F(\bar{x}).$$

(23)-nál felhasználtuk (i)-ből a b) és c)-t.

Becsüljük most meg a (23) jobboldalát! Az (i) feltételt használva

$$F(\bar{x}) - F(x_0) = (\int_0^1 (1 - t)D^2F(x_0 + t(\bar{x} - x_0)) (\bar{x} - x_0)^2 dt.$$

Mivel D^2F folytonos a V környezetében, a (21) egyenlőtlenséget is figyelembe véve található egy alkalmas $V_3 \subset V_1$ környezet, hogy minden $x \in V_3 \cap M$-re igaz:

(24) $$D^2F(x_0 + t(\bar{x} - x_0)) - D^2F(x_0) \leqslant \frac{a}{2K_2^2} .$$

(24) felhasználásával

$$F(\bar{x}) - F(x_0) = \frac{1}{2}D^2F(x_0) (\bar{x} - x_0)^2 + \int_0^1 (1 - t) [D^2F (x_0 +$$
$$+ t(\bar{x} - x_0) - D^2 F(x_0)] (\bar{x} - x_0)^2 dt \geqslant \frac{1}{2} \|D^2 F(x_0)\| \|x - x_0\|^2 -$$
$$- \int_0^1 (1 - t) \cdot \|D^2F(x_1 + t (\bar{x} - x_0)) - D^2 (x_0)\| \|\bar{x} - x_0 \|^2 dt.$$

Figyelembe véve (24)-et és (22)-t, kapjuk, hogy minden $x \in V_2 \cap V_3 \cap M$ esetén

(25) $$F(\bar{x}) - F (x_0) \geqslant \frac{a}{4}\|x - x_0\|^2 .$$

Becsüljük most meg a (23) jobboldalának másik két tagját.

$$F(x) - F(\bar{x}) = \int_0^1 D\,F(\bar{x} + t(x - \bar{x}))\,(x - \bar{x})\,dt =$$

$$= \int_0^1 [Df(\bar{x} + t(x - \bar{x})) - D\,F(x_0)]\,(x - \bar{x})\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \|D\,F(\bar{x} + t\,(x - \bar{x})) - D\,F\,(x_0)\|\;\|x - \bar{x}\|\,dt.$$

Mivel minden $x \in V_1 \cap M$ elemre fennáll $\|\bar{x} + t\,(x - \bar{x}) - x_0\| \leqslant \|\bar{x} - x_0\| + \|x - \bar{x}\| \leqslant$ $\leqslant (K_2 + K_1)\,\|x - x_0\|$, a $D\,F(x)$ folytonossága miatt olyan alkalmas $V_4 \subset V_1$ környezetet választhatunk, hogy minden $x \in V_4 \cap M$ esetén

$$\|DF(\bar{x} + t(x - \bar{x}) - DF(x_0)\| \leqslant \frac{a}{8\,K_1}\,. \tag{26}$$

A (20) és (26) felhasználásával $x \in V_4 \cap M$-re

$$F(x) - F(\bar{x}) \leqslant \frac{a}{8}\,\|x - x_0\|^2\,. \tag{27}$$

Legyen $W = V_2 \cap V_3 \cap V_4$, W az x_0 környezete, (25) és (27)-ből rögtön adódik, hogy minden $x \in W \cap M$ esetén

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \frac{a}{8}\,\|x - x_0\|^2 > 0.$$

Köszönetnyilvánítás: Itt szeretném Dr. Kósa Andrásnak köszönetemet kifejezni értékes tanácsaiért.

Irodalom

[1] E.K. Blum: The calculus of variations, functional analysis and optimal control problems, megjelent a Topics in Optimization, Academic Press, New York, 1967. c. gyűjteményben.

[2] L.A. Ljuszternik – V.I. Szobolev: Elementü funkcional'nogo analiza. Nauka, Moszkva, 1965.

[3] J. Dieudonné: Foundations of modern analysis. Academic Press, New York, 1960.

[4] H.H. Goldstine: Minimum problems in functional calculus, Bull. Am. Math. Soc., 46, (1940).

[5] H.H. Goldstine: A multiplier rule in abstract spaces, Bull. Am. Math. Soc., 44, (1938).

S u m m a r y

Boundary problems in abstract spaces

In the first part of this paper we generalize the results given by [1] and [2]. A necessary condition for the extremum of a functional with constraints in pre-Hilbert and Banach spaces is considered here. In the second part a sufficient condition is derived for the existence of the minimum of a functional in a Banach Space.

Р е з ю м е

Экстремальные задачи в абстрактных пространствах

Данная статья обобщает необходимые условия условного минимума функционала в предгильбертовом и банаховом пространстве, указанные в [1] и [2] Устанавливается и достаточное условие минимума в случае банахового пространства.

VESZTESÉGES HÁLÓZAT MAXIMÁLIS FOLYAM PROBLÉMÁJA

Bakó András

A hálózati feladatok nagy része a minimális (maximális) út és a maximális folyam feladattal oldhatók meg. A veszteséges hálózat minimális út problémáját Charnes és Raike [1] vetette fel és oldotta meg lineáris programozással. A feladat megoldására később a Ford és Fulkerson [3] módszert használó kombinatórikus algoritmust adtunk [10].

A maximális folyam feladatot Robacher [5] vetette fel és oldotta meg, majd Ford és Fulkerson [3] tisztán kombinatórikus algoritmust adott a maximális folyam–minimális vágás tétel bizonyításával.

Cikkünkben a veszteséges hálózat maximális folyam problémájának megfogalmazásával az alapfeladat egy más irányú általánosítását adjuk. A feladatot lineáris programozási feladatra fogalmazzuk át, és végül megemlítünk néhány fontos gyakorlati alkalmazást.

Az irodalomjegyzékben felsoroljuk a fenti alapfeladatok néhány további általánosítását: [2, 4, 6, 7, 8, 9].

Tekintsük az [N, E] digráfot. A digráf élein egy b nem negatív egészértékű függvényt értelmezünk, amelyet kapacitás-függvénynek nevezünk. Az [N, E, b] -t hálózatnak nevezzük. A hálózat minden egyes $(x, y) \in E$ éléhez hozzárendelünk egy $0 \leq k(x, y) \leq 1$ racionális számot.

Az [N, E, b, k] -t veszteséges hálózatnak, a $k(x, y)$ függvényt a hálózat veszteségfüggvényének nevezzük. A $k(x, y)$ függvény értelmezése a következő: ha egységnyi mennyiséget indítunk el az x pontból, az y pontba $k(x, y)$ mennyiség érkezik.

A folyamot veszteséges hálózat esetén a következőképp definiáljuk:

Jelölje x_s a hálózat forráspontját, x_t a nyelőpontját. Az [N, E, b, k] hálózaton az $f(x, y)$ függvényt az x_s pontból az x_t pontba folyó veszteséges folyamnak nevezzük, ha a következők teljesülnek:

$$(1) \quad \sum_{(x_i,x_j)\in E} f(x_i,x_j) - \sum_{(x_j,x_i)\in E} f(x_j,x_i)\, k(x_j,x_i) = 0 \qquad x_i \in N, \quad x_i \neq x_s, \quad x_i \neq x_t$$

$$(2) \quad \sum_{(x_s,x_j)\in E} f(x_s,x_j) - \sum_{(x_j,x_s)\in E} f(x_j,x_s)\, k(x_j,x_s) < 0$$

(3) $$\sum_{(x_t,x_j)\in E} f(x_t,x_j) - \sum_{(x_j,x_t)\in E} f(x_j,x_t)\, k(x_j,x_t) < 0$$

és

(4) $$0 \leqslant f(x_i,x_j) \leqslant b(x_i,x_j) \qquad (x_i,x_j) \in E.$$

Az (1) összefüggés azt fejezi ki, hogy minden a forrásponttól és a nyelőponttól különböző pontra a befolyó és a kifolyó folyammennyiség értéke 0. Ezeket a pontokat nevezzük közbülső pontoknak. A (2), (3) kifejezés mutatja, hogy a folyam az x_s pontból az x_t pontba folyik.

A veszteséges folyam feladat meghatározni az (1)-(4) feltételeket kielégítő f(x, y) függvényt, amelyre a (3) kifejezés értéke maximális.

Ahhoz, hogy ezen lineáris programozási feladat mátrixának, jobboldalának és célfüggvényének speciális struktúráját megmutassuk, a feladatot átfogalmazzuk.

Tegyük fel, hogy a hálózatban m pontja és n éle van. A lineáris programozási feladat megfogalmazásához vezessük be a következő jelöléseket:

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \qquad N = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}.$$

Jelöljük az $e_1, e_2, \dots, e_n$ éleken a folyamértékeket $f_1, f_2, \dots, f_n$ -nel, a kapacitás értékeket $b_1, b_2, \dots, b_n$ -nel, a folyamértéket a forrás, illetve nyelőpontban f_s, illetve f_t -vel, a veszteségfüggvény értékeit $k_1, k_2, \dots, k_n$ -nel.

Az (1) feltétel szerint a befolyó és kifolyó mennyiségek minden belső pontra egyenlőek. Jelöljük az x_i belső pontba befutó éleket $e_1, \dots, e_r$ -rel, a kifutó éleket pedig $e_{r+1}, e_{r+2}, \dots$ $\dots, e_v$ -vel.

Igy

(5) $$\sum_{i=r+1}^{v} f_i - \sum_{j=1}^{r} f_j k_j = 0.$$

Az (5) m lineáris egyenletet ad.

A (4) szerint az $f_1, f_2, \dots, f_n$ értékekre felső korlát megkötés van:

$$0 \leqslant f_i \leqslant b_i,$$

ami n további feltételt ad az $f_1, f_2, \dots, f_n$ értékekre.

A feladat mátrixához a forrás és nyelőpontoknak megfelelően két további oszlopot veszünk hozzá. Az f_s változóhoz tartozó oszlopban minden elem 0, kivéve az s ponthoz tartozó sort, ahol - 1 van. A f_t változóhoz tartozó oszlop egyetlen nullától különböző eleme a t ponthoz tartozó sorban van, értéke 1.

A feladat jobboldala: $b = (0, 0, \ldots, 0, k_1, k_2, \ldots, k_n)'$, ahol a nullák száma megegyezik a digráf pontjainak a számával. A célfüggvény első $n+1$ együtthatója nulla, az utolsó pedig 1, azaz $c = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.

A feladat meghatározni azt az $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n, f_s, f_t)'$ vektort, amely kielégíti az (5), (6) feltételt (ami (m+n) feltételt ad a változókra), és a

$$c \cdot b = (0, 0, \ldots, 0, 1) \cdot (f_1, f_2, \ldots, f_n, f_s, f_t)' = f_t$$

maximális.

Megjegyezzük, hogy a feladat mátrixa egyedi korlátoktól eltekintve a szállítási feladat mátrixához hasonlít. Minden oszlopában két nullától különböző elem van, egyik értéke 1, a másik $-k_{ij}$.

Mivel az egyedi felső korlátok száma általában igen nagy, így célszerű egyedi felsőkorlát technikával dolgozó programmal megoldani a fenti feladatot.

Végül megemlítjük a feladat néhány fontos gyakorlati alkalmazását:

A veszteséges maximális folyam feladattal megoldható az eddig heurisztikus úton számolt országos nagyfeszültségű hálózat tervezése, illetve az egyes pontokban hirtelen megnövő igény kielégítésének kérdése. Hasonló problémák lépnek fel gázhálózatban, távfűtési hálózatokban, általában minden energiatovábbító hálózatban, valamint csatornahálózatban, öntözéses-, talajvízlecsapoló rendszereknél.

Irodalom

[1] A. Charnes and W.M. Raike: One-pass Algorithms for some Generalized Network Problems, Opns. Res. 14., 914-924 (1966).

[2] Ju.M. Ermoljev – I.M. Melnyik: Eksztremálnüje Zadacsi na Grafax, Naukova Dumka, Kiev, 1968.

[3] L.R. Ford and D.R. Fulkerson: Maximal flow trough a Network, Canad. J. Math. 8, 399-404 (1956).

[4] D.R. Fulkerson: Flow Networks and Combinatorial Operations Research, The Amer. Math. Mont. 13, 115-137 (1966).

[5] J.T. Robacker: On Network Theory, The RAND Corp. Res. Memor. RM-1498, May 26, 1955.

[6] R.E. Gomory and T.C. Hu: Multi-terminal Network flows, J. Soc. Indust. Appl. Math. 9., 551-571 (1961).

[7] T.C. Hu: The Development of Network Flow and Releted Areas in Programming, The 7th Int. Math. Programming Symp. at the Hague, on Sept. 16. 1970. MRC. Tech. Summ. Rep. 1096, Aug. 1970.

[8] Klafszky E.: Legrövidebb út meghatározása időtől függő élhosszakkal bíró hálózatban, MTA SzK Közlemények 3., 29-35 (1967).

[9] Komáromi É. és Arany I.; Hálózati feladatok, Szemináriumi Füzetek 3., 1971.

[10] Bakó A.: A legrövidebb út meghatározása veszteséges hálózatban, MTA SzK Közlemények 5., 33-43 (1969).

Summary

The problem of maximum flow of a network with losses

The majority of the network problems can be solved by the minimal (maximal) path and the max maximal flow algorithm. The problem of the minimal path in a network having gains was solved for the first time by Charnes and Raike [1] through the technique of linear programming. We gave a combinatorial algorithm using the Ford-Fulkerson method.

The maximal flow problem was first put forward by Robacker [5], and Ford and Fulkerson [3] gave a purely combinatorial algorithm by proving the maximal flow-minimal cut theorem.

In our paper a generalization of another direction of the basic problem is expounded by the formulation of the maximal flow of a network having gains. The problem is transposed to a linear programming problem and some important practical applications are mentioned in the end.

In the literature we enumerate several further generalizations of the above basic problems: [2, 4, 6, 7, 8, 9].

Резюме

Проблема максимального потока сети с потерями

Большая часть сетевых задач разрешается с помощью поиска минимального /максимального/ пути и максимального потока.. Проблему минимального пути сети с потерями поставили Чарнес и Райке [1] и разрешили методами линейного программирования.

Для разрешения этой проблемы дается комбинаторический алгоритм [10], использующий метод Форда и Фулмерсона [3].

Проблему максимального потока поставил и разрешил Робашер [5], позднее Форд и Фулмерсон разработали чисто комбинаторический алгоритм с доказательством теоремы максимального потока минимального разреза.

В этой статье дается другое обобщение максимального потока сети с потерями. Проблема решается с помощью линейного программирования и упоминается о нескольких важных практических применениях.

В списке литературы перечисляются некоторые обобщения вышеупомянутых основных проблем.

EGY MÓDSZER A HUROKKÉPZÉSRE ÉS ANNAK ALKALMAZÁSA A SZÁLLÍTÁSI FELADATNÁL

Gergely János
Gépipari Technológiai Intézet

Az I. pont algoritmust ad egy fát tartalmazó m x n-es táblában egy olyan hurok meghatározására, amely egy, a fától különböző cellát tartalmaz. Az algoritmus könnyen modellizálható.

A II. pont alkalmazási lehetőséget ad a szállítási feladat megoldására.

I. MÓDSZER A HUROK MEHGATÁROZÁSÁRA EGY m x n-ES TÁBLÁBAN

Legyen az m x n-es A táblában B egy összefüggő és hurokmentes cellák halmaza. B tehát fa és elemeinek száma $m + n - 1$.

Legyen A1 olyan halmaz, hogy tartalmazza B összes elemét és még egy B-hez nem tartozó tetszőleges cellát, legyen az $(i, j) \in A$. Az (i, j)-hez tartozó hurok meghatározása a következő:

1. lépés

Menjünk végig az A táblán és amelyik sorban csak egy A1-beli cella van, azt hagyjuk ki az A1-ből.

2. lépés

Ismételjük meg az 1. lépést, de oszlopokra.

Ismételjük meg az 1. és 2. lépést addig, amíg egyáltalán találunk egy sort vagy oszlopot, amely csak egy A1-beli cellát tartalmaz.

Az eljárás véges, hiszen véges sok eleme van A-nak.

Állítás: az utolsó lépés után kapott A1 halmaz az (i, j) cellához tartozó hurok összes elemét tartalmazza és csak azokat.

Bizonyítás: először bebizonyítjuk, hogy A minden olyan sora vagy oszlopa, amely tartalmaz A1-beli cellát, az pontosan kettőt tartalmaz.

Tegyük fel, hogy van olyan sor, (vagy oszlop, de akkor a gondolatmenet ugyanaz) amelyben kettőnél több A1-beli cella van. Legyen ezek közül az egyik (k1, k21). Ekkor a k21. oszlopban még van a (k1, k21) cellán kívül is A1-beli, nert ha nem, akkor a 2. lépésben kiesett volna a (k1, k21). Legyen ez a másik cella (k3, k21); $k3 \neq k1$. A (k1, k21) sorában is van azon kívül egy másik A1-beli, jelöljük azt (k3, k4)-gyel.

Ekkor két eset lehet:

a/ Van a k4. oszlop k1. sorában egy A1-beli cella, és a (k1, k21), (k3, k21), (k3, k4), (k1, k22) cellák egy hurkot alkotnak. Ezek között szerepelni kell az i, j cellának is, különben B nem lenne hurokmentes.

b/ Nincs a k4. oszlop k1. sorában A1-beli cella, de van egy másikban, legyen ez (k5, k4); $k5 \neq k1$, $k5 \neq k3$. Ekkor a k5. sorban szintén kell lenni A1-belinek, legyen ez (k5, k6), a k6. oszlop A1-beli cellája pedig legyen (k7, k6).

Ha $k7 = k1$, akkor az a/ esetnél, különben pedig a b/ esetnél kell folytatni.

A bizonyítás során minden esetben kell olyan A1-beli cellához jutnunk, amely már szerepelt a felsorolásban, tehát hurkot kapunk.

Ebben a hurokban két k1. sorbeli A1 cella szerepel, a többiekből kiindulva szintén hurkot kapnánk, tehát vagy azt kapjuk, hogy a bázis-cella rendszer tartalmaz hurkot, vagy, hogy az (i, j)-hez tartozó hurok nem egyértelmű. De ezek ellentmondanak a feltevéseinknek, így állításunk igaz.

Ha A1 az előbbieknek eleget tesz, akkor az egyértelműen megadja a hurkot. El kell indulni az (i, j) cellától és A1 minden elemén végighaladva az (i, j) cellához jutunk vissza.

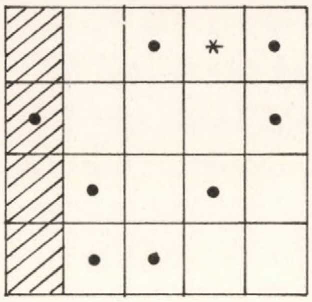
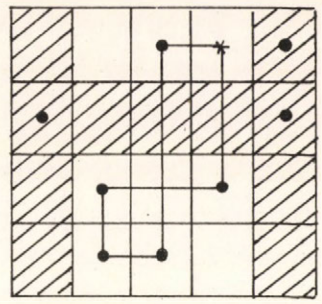
Az így alkotott hurok A1 minden elemét pontosan egyszer tartalmazza.

Példa:

Tekintsük a következő 4 x 5-ös táblát:

		•	*	•
•				•
	•		•	
	•	•		

A pontokkal jelölt cellák egy fát alkotnak. Meghatározzuk az x-szel jelölt cellához tartozó hurkot. Az 1. és 2. lépések eredményeként kapott táblák a következők lesznek:

A harmadik tábla a kapott hurkot is mutatja.

II. EGY BÁZISHOZ TARTOZÓ DUÁL VÁLTOZÓK MEGHATÁROZÁSA A HUROK MÓDSZERREL

Legyen a szállítási tábla az $m \times n$-es $C = (C_{ij})$; $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ mátrix. Legyen B a bázis-cella rendszerből alkotott halmaz. Ekkor a $Z_{ij} - C_{ij}$ különbségeket

(1) $$Z_{ij} - C_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}$$

alakban határozzuk meg, ahol az U_i, V_j elemekre teljesül a következő:

(2) $$U_i + V_j = C_{ij} \qquad (i, j) \in B .$$

A (2) egyenletrendszer $m + n - 1$ egyenletet tartalmaz $m + n$ ismeretlennel, mert B elemeinek száma $m + n - 1$. Így a megoldások száma végtelen, de egyet tetszőlegesen választva egyértelmű megoldást kapunk a (2) egyenletrendszerre, ami az (1) összefüggések vizsgálatához elégséges.

MÓDSZER A (2) EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSÁRA HUROKKÉPZÉSSEL

Vegyünk egy C_{ij} elemet, amely nem tartozik B-hez, legyen ez $e = C_{k1,\,k2}$. Legyen $A1$ olyan halmaz, amelynek elemeit e és az e-hez tartozó B-beli hurok elemek adják. Ekkor

Állítás: Ha azok közül az $U_1, \ldots, U_m$, $V_1, \ldots, V_n$ változók közül, amelyek $A1$ soraihoz, ill. oszlopaihoz tartoznak legalább egy ismert, akkor a többi $A1$-hez tartozó változók meghatározhatók a következő módon:

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy V_{k2} ismert (vagy önkényesen megadjuk) és legyen a k2 oszlop $A1 \cap B$-beli eleme $C_{k3,\,k2}$, ekkor $U_{k3} = C_{k3,\,k2} - V_{k2}$.

A k3. sor $A1 \cap B$-beli másik eleme legyen $C_{k3,\,k4}$, ekkor $V_{k4} = C_{k3,\,k4} - U_{k3}$. Igy folytatva tovább az eljárást, a hurok mentén végül eljutunk a kiinduló cellához.

A fentiek eredménye, hogy legalább két-két $U_1, \ldots, U_m$, $V_1, \ldots, V_n$ meghatározott.

A MEGOLDÁS-MÓDSZER EZEK UTÁN A KÖVETKEZŐ:

1. lépés: Határozzuk meg az A1 halmazt, utána pedig a fenti állítás alapján legalább két $V_1, \dots, V_n$ változót.

2, lépés: Olyan cellát válasszunk ki, amely nem tartozik B-hez, de az oszlopához tartozó V_i már ismert, de a sorához tartozó U_i még nincsen meghatározva. Ilyen cella mindig létezik, ellenkező esetben nem lenne hurokmentes a bázis-cella rendszer. Igy legalább egy új U_i változót meghatározhatunk.
A második lépés véges számú ismétlése után minden változó meghatározott lesz.

Megjegyzés: Ha $m < n$, akkor célszerű a V_j-k közül egyet tetszőlegesen választani, és mindig olyan 2. lépésnek megfelelő cellát keresni, amelynek a sorához tartozó U_i ismeretlen.

Példa:

Legyen adott a következő szállítási tábla:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
U_1	3	7	4	1	6
U_2	2	10	3	4	3
U_3	1	5	5	6	8
U_4	2	2	4	3	1

A bekeretezett cellák alkotják a bázis-cella rendszert.

Meghatározzuk az (1, 2) cellához tartozó hurkot.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
U_1	3	$\boxed{7}$	4	1	6
U_2	2	10	3	4	3
U_3	1	5	5	6	8
U_4	2	2	4	3	1

A bekeretezett változók értékei a következők lesznek. Legyen

$V_2 = 0$

$U_2 = C_{22} - V_2 = 10 - 0 = 10$

$V_5 = C_{25} - U_2 = 3 - 10 = -7$

$U_4 = C_{45} - V_5 = 1 + 7 = 8$

$V_1 = C_{41} - U_4 = 2 - 8 = -6$

$U_1 = C_{11} - V_1 = 3 + 6 = 9$

A (3, 1) cellához tartozó hurok alapján:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
U_1	3	7	4	1	6
U_2	2	10	3	4	3
U_3	$\boxed{1}$	5	5	6	8
U_4	2	2	4	3	1

$$V_3 = C_{13} - U_1 = 4 - 9 = -5$$
$$U_3 = C_{33} - V_3 = 5 + 5 = 10 \quad \text{és}$$
$$V_4 = C_{24} - U_2 = 4 - 10 = -6$$

A megoldás tehát:

$U_1 = 9$ $\quad V_1 = -6$
$U_2 = 10$ $\quad V_2 = 0$
$U_3 = 10$ $\quad V_3 = -5$
$U_4 = 8$ $\quad V_4 = -6$
$V_5 = -7$

Irodalom

[1] G. Hadley: Linear Programming, Reading, 1962. Addison-Wesley.
[2] Prékopa A.: Lineáris programozás I., Bolyai János Matematikai Társulat, 1968.

Summary

Method for making a circle and its application for the transport problem

An m x n table is given. A1 should contain a tree plus an "e" cell furthermore. Let us leave out that row or column which has only one element out of A1. Let us continue this procedure as long as we find at least one of such. Set A1 obtained in this way gives eventually a circle belonging to the above e.

By this kind of making a circle the transportation problem can be solved also in case of dual-variables.

The way of solving this problem can be well illustrated.

Резюме

Метод выбора контуров и его применение для транспортных задач

Пусть массив A1 m*n-ного размера содержит дерево, и, кроме него, ячейку "е".

Отбросим строку и столбец массива A1, содержащие лишь один элемент. Этот процесс продолжается до тех пор, пока найдется строка или столбец, содержащие только один элемент.

После окончания процесса в массиве A1 остается контур, принадлежащий ячейке "е".

Такой метод выбора контуров применяется при решении транспортной задачи в случае дуальных переменных.

Метод решения хорошо иллюстрируется.

2521 72

TARTALOMJEGYZÉK

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA