

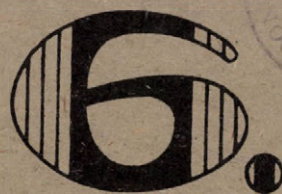
55807

2289

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA

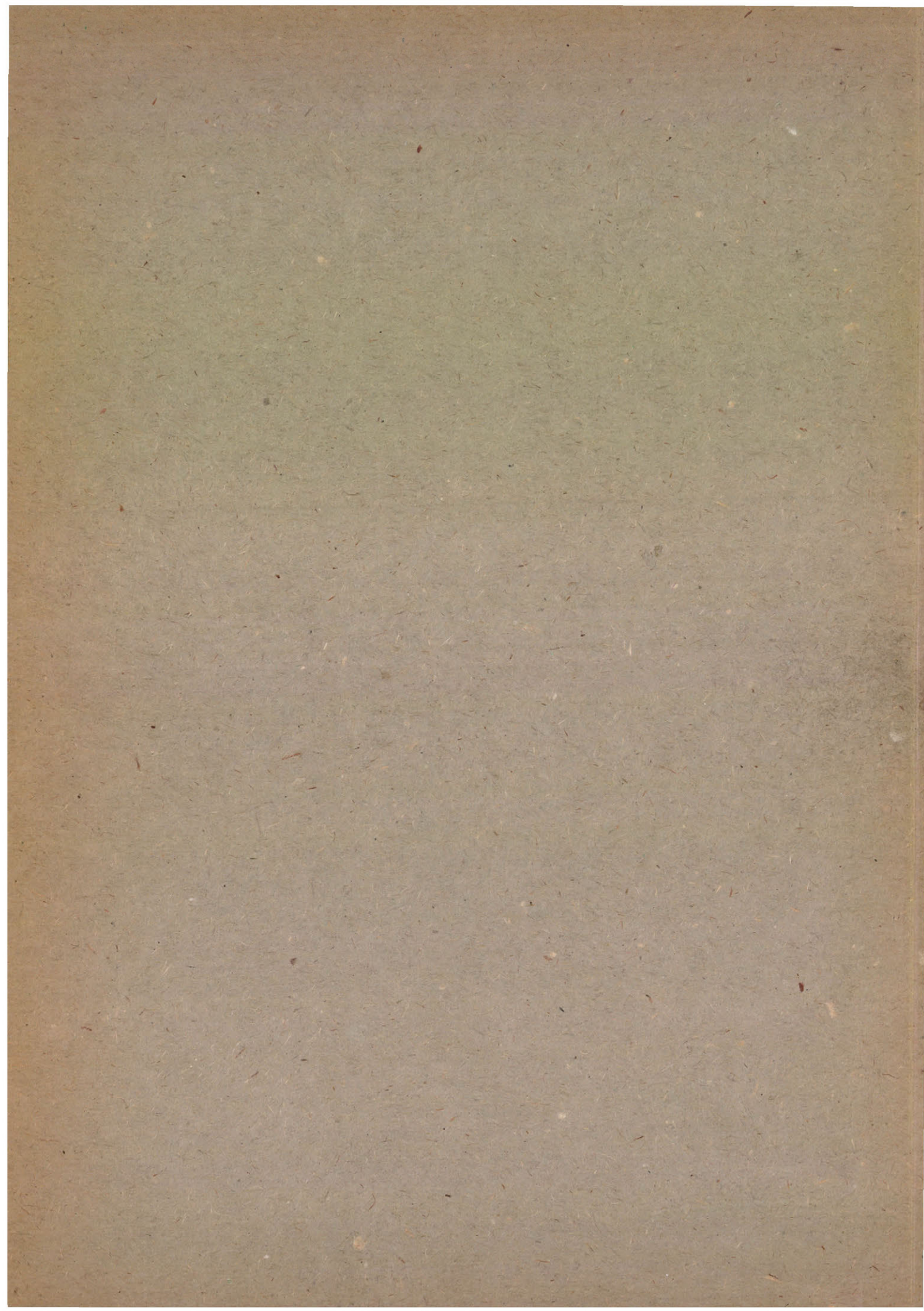
# KÖZLEMÉNYEK

1971 AUG 18



1971 MÁRCIUS





MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA

# KÖZLEMÉNYEK

## 6.

Budapest, 1971. március



Szerkesztőbizottság:

ARATÓ MÁTYÁS (felelős szerkesztő)  
FISCHER JÁNOS, GEHÉR ISTVÁN, GERGELY JÓZSEF,  
GERTLER JÁNOS, MOLNÁR IMRE, PRÉKOPA ANDRÁS,  
SRAJBER BENEDEK, TANKÓ JÓZSEF

Felelős kiadó:

**Dr. VÁMOS TIBOR**  
igazgató

Technikai szerkesztő:  
MESZLÉNYI MÁRIA

MTA Számítástechnikai Központja  
Budapest, I. Uri u. 49.



Stacionárius Gauss Markov folyamat csillapodási paraméterének  
konfidencia határai

Benczur András

Tekintsük a  $\xi(t)$  stacionárius Gauss Markov folyamatot, amely a

$$(1) \quad d\xi(t) = -\lambda \xi(t) dt + d\zeta(t)$$

sztochasztikus differenciálegyenletnek tesz eleget, ahol  $\zeta(t)$  Wiener-folyamat,

$$M d\zeta(t) = 0 \quad \text{és} \quad M(d\zeta)^2 = \sigma_\zeta^2 dt.$$

A  $\xi(t)$  folyamat korrelációs függvénye

$$(2) \quad R(t) = \sigma_\xi^2 e^{-\lambda|t|}$$

alakú lesz, ahol  $M(d\xi(t))^2 = \sigma_\xi^2 dt$  (lásd Arató [1]). A  $\sigma_\zeta$  és  $\sigma_\xi$  együttthatók között a  $\sigma_\zeta^2 = 2\lambda\sigma_\xi^2$  összefüggés áll fenn.

A  $\sigma_\xi$  illetve  $\sigma_\zeta$  paraméterek már egy realizáció ismeretében meghatározhatók, mert BAXTER tétele alapján

$$\lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \sum [\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})]^2 = \sigma_\zeta^2 T \quad (1 \text{ valószínűséggel})$$

ahol  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  egy felosztása a  $[0, T]$  intervallumnak. Ily módon a  $\xi(t)$  folyamat ismeretlen paramétereinek száma egyre csökkenthető, hiszen  $M\xi(t) = 0$  következik az  $Md\zeta(t) = 0$  feltevésből. A továbbiakban tehát a  $\lambda$ , úgynevezett csillapodási paraméter becslésével foglalkozunk.

Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy  $\sigma_\zeta = 1$ .

Jelölje  $L$  a közönséges Lebesgue mértéket a  $\xi(0)$  számegegyenesen és  $W$  a  $\xi(t) - \xi(0)$  növekmények terén a  $[0, T]$  intervallumban a Wiener-mértéket. Legyen  $V = L \times W$  ezen két mérték szorzata. Ha  $P$  jelöli a fenti  $\xi(t)$  folyamat által generált mértéket a  $[0, T]$  intervallumban, akkor a  $P$  mérték abszolút folytonos  $V$ -re nézve és a  $V$  szerinti Radon-Nikodym deriváltja (lásd Ch. Striebel [5])

$$(3) \quad \frac{dP}{dV} = \frac{\lambda}{\pi} \exp \left\{ -\lambda \left[ s_1^2 - \frac{1}{2} T + \frac{1}{2} \kappa s_2^2 \right] \right\}$$

lesz, ahol  $\kappa = \lambda T$ ,

$$s_1^2 = \frac{1}{2} [\xi(0)^2 + \xi(T)^2], \quad s_2^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt.$$

Ebből látható, hogy  $\lambda$  (vagy  $\kappa$ ) elégséges statisztika rendszerét az  $s_1^2, s_2^2$  statisztikák adják. Irjuk fel a  $\lambda$  paraméterre vonatkozó maximum likelihood egyenletet. (3)-ból

$$\log \frac{dP}{dV} = c + \frac{1}{2} \log \lambda - \lambda [s_1^2 - \frac{1}{2} T + \frac{1}{2} \lambda T s_2^2]$$

alapján  $\lambda$  maximum likelihood becslése a

$$\frac{1}{2\lambda} - [s_1^2 - \frac{1}{2} T] - \lambda T s_2^2 = 0$$

egyenlet, azaz a

$$(4) \quad \lambda^2 T s_2^2 + \lambda [s_1^2 - \frac{1}{2} T] - \frac{1}{2} = 0$$

egyenlet megoldása lesz.

Látható, hogy (4) egyetlen pozitív megoldása

$$\hat{\lambda} = \frac{-[s_1^2 - \frac{1}{2} T] + \sqrt{[s_1^2 - \frac{1}{2} T]^2 + 2 T s_2^2}}{2 T s_2^2}$$

Ebből következik, hogy a  $\hat{\lambda} > z$  esemény akkor és csak akkor következik be, ha a (4) egyenlet baloldalán álló másodfokú kifejezés a  $\lambda = z$  helyen negatív. Tehát

$$P_\lambda \{ \hat{\lambda} > z \} = P_\lambda \{ z^2 T s_2^2 + z s_1^2 - \frac{1}{2} T z - \frac{1}{2} < 0 \}.$$

Bevezetve a  $z = \lambda x$  és  $\eta_\lambda(x) = \lambda^2 x^2 T s_2^2 + \lambda x s_1^2$  jelölést,

$$(5) \quad P_\lambda \{ \hat{\lambda} > \lambda x \} = P_\lambda \{ \eta_\lambda < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} T \lambda x \}.$$

Ahhoz tehát, hogy a  $\hat{\lambda}$  becslés eloszlását meghatározhassuk, az  $s_1^2$  és  $s_2^2$  statisztikák együttes eloszlására lenne szükségünk, amit azonban ezideig nem sikerült meghatározni. Meg tudjuk viszont határozni karakterisztikus függvényüket. A  $\xi(0) = x$  feltétel mellett differenciálegyenletet írunk fel a feltételes karakterisztikus függvényre. Legyen ugyanis

$$(6) \quad u(T, x) = M \{ e^{i(\alpha_1 s_1^2 + \alpha_2 T s_2^2)} \mid \xi(0) = x \}.$$



A folyamat tulajdonságaiból következik, hogy az  $u(T, x)$  függvény az  $x$  változó szerint tetszőleges sokszor differenciálható (lásd pl. Gihman-Szkorohod [4]). Ezt felhasználva a következő módon állíthatjuk elő az  $u$  függvényt a  $T+\Delta T$  helyen:

$$\begin{aligned}
 u(T+\Delta T) &= \int_{-\infty}^{\infty} M\{M\{e^{i(\alpha_1 s_1^2 + \alpha_2(T+\Delta T)s_2^2)} \mid \xi(0)=x\} \mid \xi(\Delta T)=x_1\} p(\xi(\Delta T)=x_1 \mid \xi(0)=x) dx_1 = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} M\{M\{e^{i\alpha_1 \frac{\xi^2(0) - \xi^2(\Delta T)}{2} + i\alpha_2 \int_0^{\Delta T} \xi^2(t) dt} \mid \xi(0)=x, \xi(\Delta T)=x_1\} u(T, x_1) p dx_1 = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta T}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-x+\lambda x\Delta T)^2}{2\Delta T}} \left[ u(T, x) + \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x} (x_1-x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=x} \frac{(x_1-x)^2}{2} + \dots \right] \\
 &\cdot \left\{ 1 - \frac{i\alpha_1}{2} ((x_1-x)^2 + 2x(x_1-x)) - \frac{\alpha_1^2}{8} (4x^2(x_1-x)^2 + \dots) + \dots \right\} \cdot \\
 &\cdot (1 + i\alpha_2 x^2 \Delta T) dx_1.
 \end{aligned}$$

Ebből  $\Delta T \rightarrow 0$  esetén a következő parciális differenciálegyenletet kapjuk  $u(T, x)$ -re, ha figyelembe vesszük, hogy

$$(7) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta T}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-x+\lambda x\Delta T)^2}{2\Delta T}} (x_1-x) dx_1 = -\lambda x \Delta T$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta T}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-x+\lambda x\Delta T)^2}{2\Delta T}} (x_1-x)^2 dx_1 = \Delta T + \lambda^2 x^2 (\Delta T)^2,$$

s a magasabb rendű momentumok  $o(\Delta T)$  nagyságrendűek:

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} [-x(\lambda + i\alpha_1)] + u \left[ x^2 [\lambda i\alpha_1 + i\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{2}] - \frac{i\alpha_1}{2} \right].$$

A (8) egyenlet megoldásaként az  $u(0, x) = e^{i\alpha_1 x^2}$  kezdeti feltétel mellett az  $s_1^2, s_2^2$  statisztikák közös karakterisztikus függvénye a következő alakban adódik (lásd Arató [1])

$$(9) \quad \varphi_{s_1^2, s_2^2}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{2\sqrt{k} e^{\frac{k}{2}} (k^2 - 2T i\alpha_2)^{\frac{1}{4}}}{\left[ (k - T i\alpha_1 + \sqrt{k^2 - 2T i\alpha_2})^2 e^{\sqrt{k^2 - 2T i\alpha_2}} - (k - T i\alpha_1 - \sqrt{k^2 - 2T i\alpha_2})^2 e^{-\sqrt{k^2 - 2T i\alpha_2}} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Az egyszerűsítés kedvéért a továbbiakban legyen  $T = 1$ . Ez nem jelenti az általánosság megszorítását, mert a  $t' = \frac{t}{T}$  és  $x' = x \sqrt{\frac{T}{\sigma_y^2}}$  transzformációval  $T = 1$  és  $\sigma_y^2 = 1$  elérhető. Az  $\eta_\lambda(x)$  valószínűségi változó karakterisztikus függvénye (9) alapján

$$(10) \quad \varphi_{\eta_\lambda(x)}(\alpha) = \frac{2 e^{\frac{\lambda}{2}} (1 - 2i\alpha x^2)^{\frac{1}{4}}}{\left[ (1 - i\alpha x + \sqrt{1 - 2i\alpha x^2})^2 e^{\lambda \sqrt{1 - 2i\alpha x^2}} - (1 - i\alpha x - \sqrt{1 - 2i\alpha x^2})^2 e^{-\lambda \sqrt{1 - 2i\alpha x^2}} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Mivel  $s_1^2$  és  $s_2^2$  pozitív valószínűségi változók, (10)-ből  $-i\alpha = p$  helyettesítéssel és  $\frac{1}{p}$ -vel való szorzással megkapjuk az  $\eta_\lambda(x)$  valószínűségi változó  $F_\eta(z)$  eloszlásfüggvényének Laplace transzformáltját:

$$F_\eta^*(p) = \frac{2 e^{\frac{\lambda}{2}} (1 + 2px^2)^{\frac{1}{4}}}{p \left[ (1 + px + \sqrt{1 + 2px^2})^2 e^{\lambda \sqrt{1 + 2px^2}} - (1 + px - \sqrt{1 + 2px^2})^2 e^{-\lambda \sqrt{1 + 2px^2}} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Az  $F$  és  $F^*$  közötti ismert összefüggés szerint

$$(11) \quad F_\eta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pz} F^*(p) dp.$$

Ennek alapján az eloszlásfüggvény meghatározása numerikus integrálással elvégezhető. A (11) alatti integrál a  $p = \sigma + iS$  jelöléssel



$$F_{\eta}(z) =$$

$$= \frac{e^{\sigma z}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isz} (1+2x^2\sigma + i2x^2s)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\lambda}{2}(1-\sqrt{1+2x^2\sigma+i2x^2s})} ds}{\sigma + is \left[ (1+\sigma x + ix s + \sqrt{1+2x^2\sigma+i2x^2s})^2 - (1+\sigma x + ix s - \sqrt{1+2x^2\sigma+i2x^2s})^2 e^{-2\lambda\sqrt{1+2x^2\sigma+i2x^2s}} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Mivel a jobboldalon szereplő integrálnak csak a valós részére van szükségünk, az

$$r = \left( (1+2x^2\sigma)^2 + (2x^2s)^2 \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x^2s}{1+2x^2\sigma}$$

jelöléssel

$$F_{\eta}(z) = \frac{e^{\sigma z}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(sz + \frac{\varphi}{2} - \frac{\lambda}{2} r \sin \varphi)} \sqrt{r} e^{\frac{\lambda}{2}(1-r \cos \varphi)} ds}{(\sigma + is) \left[ [A_1 + iA_2]^2 - [B_1 + iB_2]^2 (\cos 2\lambda r \sin \varphi - i \sin 2\lambda r \sin \varphi) e^{-2\lambda r \cos \varphi} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

ahol

$$A_1 = A_1(s) = 1 + \sigma x + r \cos \varphi \quad A_2 = A_2(s) = xs + r \sin \varphi$$

$$B_1 = B_1(s) = 1 + \sigma x - r \cos \varphi \quad B_2 = B_2(s) = xs - r \sin \varphi$$

Legyen most

$$\alpha_1 = A_1^2 - A_2^2 - \left\{ (B_1^2 - B_2^2) \cos 2\lambda r \sin \varphi + 2B_1 B_2 \sin 2\lambda r \sin \varphi \right\} e^{-2\lambda r \cos \varphi}$$

$$\beta_1 = 2A_1 A_2 + \left\{ (B_1^2 - B_2^2) \sin 2\lambda r \sin \varphi - 2B_1 B_2 \cos 2\lambda r \sin \varphi \right\} e^{-2\lambda r \cos \varphi}$$

$$r_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\beta_1}{\alpha_1}$$

$$r_2 = s^2 + \sigma^2$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{s}{\sigma}$$

Akkor - csak a valós részt véve figyelembe

$$F(z) = \frac{e^{\sigma z}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(s z + \frac{\varphi}{2} - \frac{\lambda}{2} r \sin \varphi - \varphi_1 - \varphi_2\right) \sqrt{\frac{r}{r_1 r_2}} e^{\frac{\lambda}{2}(1-r \cos \varphi)} ds.$$

A számolás során legalkalmasabbnak a  $\sigma = \frac{1}{2}$  választás adódott. Könnyen ellenőrizhető, hogy az integrandus páros függvény. Ezek után az integrálás határát úgy választottuk  $[0, A]$ -nak, hogy az  $[A, 2A]$  intervallumon az integrál értéke a kívánt pontosságnál,  $10^{-4}$ -nél kisebb legyen. Legtöbb esetben az

$A = \frac{100}{\lambda x}$  választás megfelelt. előfordult azonban, hogy ennél két-, sőt 4-szer nagyobb értéket kellett választani. Egy integrál kiszámítása az URAL-2 gépen 1,5-25 percet vett igénybe. A táblázatban zárójelben található értékek az

$$(12) \quad F\left(\frac{\lambda x}{2} + \frac{1}{2}\right) = p$$

egyenlet megoldásai, ahol  $p$  és  $\lambda$  előre adott értékek. Az egyenlet megoldásához  $x$ -ben iterációt kell végrehajtani. Abból a célból, hogy kevesebb integrál kiszámítását kelljen elvégezni, az iteráció kiinduló értékeit már más  $\lambda$ -ra kiszámított értékek figyelembevételével választottuk és az iterációt a közeli értékekből kézi úton végzett interpolációval hajtottuk végre.

A táblázatban a  $\lambda < 1$  értékekre  $p \geq 0,9$  mellett nem számítottuk ki az  $x$  értékeket, mert itt az integrálok kiszámítása igen hosszadalmas, másrészt pedig az  $x = x(\lambda, p)$  függvény az  $[0, 1]$  intervallumon  $\lambda$ -ban jó közelítéssel lineárisnak tekinthető.

A  $\lambda = 0$  esetben szereplő  $x$  értéket  $\chi^2$  táblázatból nyertük. Ugyanis (10) alapján könnyű belátni, hogy

$$\varphi_{\eta}(\alpha) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - i\alpha x}}, \text{ ha } \lambda \rightarrow 0, \text{ tehát a } \frac{2\eta}{x}$$

valószínűségi változó egy szabadságtokú  $\chi^2$  eloszlású, azaz

$$P\left\{\frac{2\eta_0}{x} < z^2\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z e^{-u^2/2} du.$$

Ebben az esetben a  $\chi^2$  eloszlás  $z_p$  kvantilisével a

$$P_0\left\{\eta_0(x) < \frac{1}{2}\right\} = p$$



egyenlet  $x$  megoldása  $x = \frac{1}{z_p}$  összefüggésben van.

A  $\lambda \rightarrow \infty$  esetben igaz a normális eloszlással való közelítés:

$$P\{\hat{\lambda} < \lambda_x\} = P\{\hat{\lambda} < \lambda + z\sqrt{\lambda}\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du.$$

A kis és nagy  $\lambda$  értékekre (0,01, 0,05 ill. 500, 1000, 10000) a számításokat a közelítő képletek és határeloszlások alkalmazhatóságának vizsgálatára végeztük el. Ennek eredményét egy későbbi cikkben közöljük.

A táblázat segítségével  $\hat{\lambda}$ -ra könnyen megszerkeszthetjük a konfidencia intervallumokat. Az (5) összefüggés alapján ugyanis a (12) egyenlet megoldása ekvivalens az

$$P_{\lambda}(\hat{\lambda} > \lambda_x) = P_{\lambda}\{\hat{\lambda} > z\} = F(z, \lambda) = p$$

egyenlet megoldásával. Ismerjük tehát a  $\hat{\lambda}$  becslés eloszlásának  $z_p(\lambda)$  kvantiliseit. A táblázat alapján a  $z_0(\lambda)$  függvény  $\lambda$ -ban monotonnak tekinthető. Ezek után  $\lambda$ -ra  $p$  megbízhatóságú felső (alsó) konfidenciahatárt a következő eljárással nyerhetünk: az

$$F(\hat{\lambda}, \lambda) = p \quad (0 < p < 1)$$

egyenlet  $\lambda_p(\hat{\lambda})$  megoldása ( $\lambda$ -ban), mely a  $z_p(\lambda)$  inverz függvénye, adja az alsó konfidencia határt  $1-p$  megbízhatósággal. A  $\lambda_p(\hat{\lambda})$  konfidencia határ meghatározásához tehát a  $\hat{\lambda} = z_p(\lambda)$  egyenletet kell megoldani a mellékelt táblázat inverz interpolációjával.

Szerkesztéssel: megrajzolva a  $z_p(\lambda)$  függvényt a  $\hat{\lambda} = z_p(\lambda)$  összefüggésnek eleget tevő  $\lambda$  érték adja a konfidencia határt.

A valószínűségi változó kvantiliseinek táblázata

A táblázatban a  $P_{\lambda}\{\hat{\lambda} > z\} = p$  összefüggést kielégítő  $z$  és - zárójelben - az  $x = \frac{z}{\lambda}$  értékek adottak.

$\lambda \backslash p$	0.001	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
0	0 (637000)	0 (6370)	0 (1020)	0 (255.0)	0 (63.60)	0 (0.369)	0 (0.260)	0 (0.199)	0 (0.151)	0 (0.092)
0.01	10.60 (1060)	4.232 (423.2)	2.274 (227.4)	1.170 (117.0)	0.4734 (47.34)					
0.05	11.195 (263.9)	6.330 (126.6)	4.0065 (80.13)	2.5130 (50.26)	1.3375 (26.75)					
0.1	14.38 (143.8)	7.344 (73.44)	4.879 (48.79)	3.268 (32.68)	1.908 (19.08)					
0.2	15.664 (78.32)	8.468 (42.34)	5.902 (29.51)	4.154 (20.77)	2.624 (13.12)					
0.3	16.488 (54.96)	9.207 (30.69)	6.561 (21.87)	4.746 (15.82)	3.120 (10.40)					
0.4	17.080 (42.70)	9.756 (24.39)	6.080 (17.70)	5.208 (13.02)	3.517 (8.793)					
0.5	17.670 (35.34)	10.230 (20.46)	7.515 (15.03)	5.605 (11.21)	3.8610 (7.722)	0.2085 (0.417)	0.1510 (0.302)			
0.6	18.108 (30.18)	10.638 (17.73)	7.896 (13.16)	5.9532 (9.922)	4.1676 (6.946)					
0.7	18.522 (26.46)	11.011 (15.73)	8.239 (11.77)	6.2713 (8.959)	4.4471 (6.353)					
0.8	18.896 (23.62)	11.360 (14.20)	8.560 (10.70)	6.5648 (8.206)	4.7103 (5.887)					



$\lambda \backslash p$	0.001	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
0.9	19.260 (21.40)	11.682 (12.98)	8.8587 (9.843)	6.8409 (7.601)	4.9446 (5.494)					
1	19.60 (19.60)	11.98 (11.98)	9.140 (9.140)	7.103 (7.103)	5.188 (5.188)	0.445 (0.445)	0.332 (0.332)	0.269 (0.269)	0.205 (0.205)	0.130 (0.130)
1.5	21.060 (14.04)	13.3080 (8.872)	10.3845 (6.923)	8.2590 (5.506)	6.2325 (4.155)	0.7005 (0.467)	0.5325 (0.355)	0.4275 (0.285)	0.3360 (0.224)	0.2145 (0.143)
2	22.32 (11.16)	14.462 (7.231)	11.426 (5.713)	9.272 (4.636)	7.156 (3.578)	0.972 (0.486)	0.750 (0.375)	0.606 (0.303)	0.480 (0.240)	0.310 (0.155)
2.5	23.4750 (9.390)	15.515 (6.206)	12.4575 (4.983)	10.2050 (4.082)	8.0100 (3.204)	1.2575 (0.503)	0.9850 (0.394)	0.8000 (0.320)	0.6500 (0.256)	0.4125 (0.165)
3	24.342 (8.114)	16.506 (5.502)	13.389 (4.463)	11.082 (3.694)	8.811 (2.937)	1.557 (0.519)	1.233 (0.411)	1.111 (0.337)	0.807 (0.269)	0.525 (0.175)
3.5	25.5850 (7.310)	17.4440 (4.984)	14.2800 (4.080)	11.9105 (3.403)	9.5970 (2.742)	1.8655 (0.533)	1.4910 (0.426)	1.2355 (0.353)	0.9975 (0.285)	0.6405 (0.183)
4	26.576 (6.644)	18.352 (4.588)	15.136 (3.784)	12.732 (3.183)	10.352 (2.588)	2.180 (0.545)	1.760 (0.440)	1.468 (0.367)	1.192 (0.298)	0.776 (0.194)
4.5	27.5355 (6.119)	19.2285 (4.273)	15.9705 (3.549)	13.5225 (3.005)	11.0835 (2.463)	2.5020 (0.556)	2.0430 (0.454)	1.7100 (0.380)	1.3905 (0.309)	0.9135 (0.203)
5	28.470 (5.694)	20.090 (4.018)	16.795 (3.359)	14.395 (2.879)	12.755 (2.351)	2.835 (0.567)	2.325 (0.465)	1.965 (0.393)	1.615 (0.323)	1.070 (0.214)
5.5	29.3865 (5.343)	20.9275 (3.805)	17.5835 (3.197)	15.0535 (2.737)	12.5125 (2.275)	3.1680 (0.576)	2.6235 (0.477)	2.4640 (0.448)	1.8315 (0.333)	1.2265 (0.223)
6	30.318 (5.053)	21.750 (3.625)	18.366 (3.061)	15.792 (2.632)	13.282 (2.212)	3.510 (0.585)	2.922 (0.487)	2.490 (0.415)	2.061 (0.347)	1.392 (0.232)
6.5	31.1610 (4.794)	22.5615 (3.471)	19.1295 (2.943)	16.5295 (2.543)	13.8905 (2.137)	3.8545 (0.593)	3.2305 (0.497)	2.7690 (0.426)	2.3140 (0.356)	1.5730 (0.242)

$\lambda \backslash \rho$	0.001	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
7	32.025 (4.575)	23.359 (3.337)	19.894 (2.842)	17.248 (2.464)	14.574 (2.082)	4.207 (0.601)	3.542 (0.506)	3.052 (0.436)	2.555 (0.365)	1.764 (0.252)
7.5	32.8882 (4.385)	24.1500 (3.220)	20.6475 (2.753)	17.9550 (2.394)	15.2475 (2.033)	4.5600 (0.608)	3.8550 (0.514)	3.3375 (0.445)	2.8200 (0.376)	1.9575 (0.261)
8	33.728 (4.216)	24.920 (3.115)	21.384 (2.673)	18.672 (2.334)	15.912 (1.989)	4.920 (0.615)	4.176 (0.522)	3.632 (0.454)	3.088 (0.386)	2.168 (0.271)
8.5	34.5610 (4.066)	25.6870 (3.022)	22.1170 (2.602)	19.3715 (2.279)	16.5750 (2.950)	5.2700 (0.620)	4.5050 (0.530)	3.9270 (0.462)	3.3490 (0.394)	2.3630 (0.278)
9	35.388 (3.932)	26.451 (2.939)	22.689 (2.521)	20.070 (2.230)	17.226 (1.914)	5.643 (0.627)	4.842 (0.538)	4.230 (0.470)	3.618 (0.402)	2.592 (0.288)
9.5	36.1855 (3.809)	27.1700 (2.860)	23.5790 (2.482)	20.7480 (2.184)	17.8790 (1.882)	6.0135 (0.633)	5.1870 (0.546)	4.5315 (0.477)	3.8950 (0.410)	2.812 (0.296)
10	37.04 (3.704)	27.55 (2.755)	24.28 (2.428)	21.47 (2.147)	18.53 (1.853)	6.38 (0.638)	5.50 (0.550)	4.84 (0.484)	4.20 (0.420)	3.04 (0.304)
20	52.200 (2.610)	42.040 (2.102)	37.800 (1.890)	34.4360 (1.7218)	30.8960 (1.5448)	14.1780 (0.7089)	12.7140 (0.6357)	11.580 (0.579)	10.380 (0.519)	8.320 (0.416)
30	66.270 (2.209)	55.230 (1.841)	50.520 (1.684)	46.7370 (1.5579)	42.7080 (1.4236)	22.4310 (0.7477)	20.4960 (0.6832)	18.960 (0.632)	17.340 (0.578)	14.400 (0.480)
40	79.800 (1.995)	67.920 (1.698)	62.800 (1.570)	58.6800 (1.4670)	54.2320 (1.3558)	30.9400 (0.7735)	28.5920 (0.7148)	26.720 (0.668)	24.680 (0.617)	21.000 (0.525)
50	92.900 (1.858)	80.3200 (1.6064)	74.8400 (1.4968)	70.3950 (1.4079)	65.5800 (1.3116)	39.6150 (0.7923)	36.9000 (0.7380)	34.7100 (0.6942)	32.350 (0.647)	27.950 (0.559)
60	105.780 (1.763)	92.520 (1.542)	86.6820 (1.4447)	81.9540 (1.3659)	76.7940 (1.2799)	52.0140 (0.8669)	45.3660 (0.7561)	42.8880 (0.7148)	40.200 (0.670)	30.300 (0.585)
70	118.370 (1.691)	104.510 (1.493)	98.3770 (1.4054)	93.3800 (1.3340)	87.9130 (1.2559)	57.3020 (0.8186)	53.9560 (0.7708)	51.2120 (0.7316)	48.2300 (0.689)	42.490 (0.607)



$\lambda \backslash p$	0.001	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
80	130.800 (1.635)	116.40 (1.455)	109.960 (1.3745)	104.7120 (1.3089)	98.9600 (1.2370)	66.2722 (0.8284)	62.6240 (0.7828)	59.6320 (0.7454)	56.400 (0.0705)	50.080 (0.626)
90	143.100 (1.590)	128.160 (1.424)	121.4550 (1.3495)	115.9650 (1.2885)	109.9350 (1.2215)	75.2940 (0.8366)	71.3880 (0.7932)	68.1570 (0.7573)	64.620 (0.718)	57.870 (0.643)
100	155.32 (1.5332)	139.79 (1.3979)	132.86 (1.3286)	127.15 (1.2715)	120.86 (1.2086)	84.37 (0.8437)	80.21 (0.8021)	76.8 (0.768)	73.0 (0.730)	65.7 (0.657)
500	609.000 (1.218)	580.000 (1.160)	567.0500 (1.1341)	555.800 (1.1116)	543.15 (1.0863)	462.05 (0.9241)	451.4500 (0.9029)	442.600 (0.8852)	432.600 (0.8652)	412.00 (0.824)
1000	1149 (1.149)	1110.6 (1.1106)	1092.6 (1.0926)	1077.3 (1.0773)	1060.00 (1.0600)	945.3 (0.9453)	929.9 (0.9299)	917.00 (0.9170)	902.3 (0.9023)	872.00 (0.872)
10000	10447 (1.0447)	10336 (1.03360)	10282.1 (1.02821)	10236.3 (1.02363)	10183.9 (1.01839)	9821.4 (0.98214)	9771.1 (0.97711)	9727.6 (0.97276)	9677.5 (0.96775)	9574 (0.9574)

I r o d a l o m

- [1] Arató Mátyás, Folytonos állapotú Markov folyamatok statisztikai vizsgálatáról I. MTA III. Oszt. Közleményei 14. 13-34 (1964).
- [2] Arató Mátyás, Оценка параметров стационарного гауссовского марковского процесса  
Д. А. Н. 145, 13-16 (1962).
- [3] Arató Mátyás, Вычисление доверительных границ для параметра "затухания" комплексного стационарного гауссовского марковского процесса.  
Теория вероятностей и ее применения 13, № 2, 326-333.
- [4] И.И. Гихман-А.В. Скороход: Стохастические дифференциальные уравнения, Киев, Наукова Думка.
- [5] Ch. Striebel, Densities for Stochastic Processes  
Annals of Math. Stat. 30, 559-567 (1959).

S u m m a r y

Confidence limits for the damping parameter of a stationary Gaussian Markovian process.

The one dimensional stationary Gaussian Markovian process  $\xi(t)$  ( $M\xi(t) = 0$ ) is given by the covariance function  $M\xi(t+s)\xi(s) = \sigma^2 e^{-\lambda|t|}$  where  $2\lambda\sigma^2 = \sigma_{\xi}^2$  and  $\sigma_{\xi}^2$  are given. The probability distribution of maximum likelihood estimator of the unknown parameter  $\lambda$  is given by the help of the characteristic function of sufficient statistics. The table gives results of numerical integration on computer at the levels  $p = 0.001, 0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.9, 0.95, 0.975, 0.99, 0.999$  ( $0 < \lambda < 10000$ ).

Р е з ю м е

Доверительные границы для параметра "затухания" стационарного гауссовского процесса

Рассматривается стационарный гауссовский марковский процесс  $\xi(t)$  с мат. ожиданием  $M\xi(t) = 0$  и функций ковариации  $M\xi(t+s)\xi(s) = \sigma^2 e^{-\lambda|t|}$ , где  $2\lambda\sigma^2 = \sigma_{\xi}^2$  и  $\sigma_{\xi}^2$  известны. С помощью характеристической функции достаточных статистик вычислена функция распределения оценки наибольшего правдоподобия неизвестного параметра  $\lambda$ . В таблице можно найти  $p$  квантили распределений, вычисленные методом численного интегрирования на Э.В.М. Урал-2, при  $p = 0.001, 0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.9, 0.95, 0.975, 0.99, 0.999$  ( $0 < \lambda < 10000$ ).



### A homogén Gauss-Markov folyamatokról

Krámli András

Ebben a dolgozatban beh bizonyítjuk a következő tételt:

TÉTEL:

Az 1 valószínűséggel folytonos Gauss-Markov folyamatok osztályában a  $d\xi(t) = -A\xi(t)dt - Mdt + B d\omega(t)$  ( $\omega(t)$  a standard Wiener-folyamat) sztochasztikus differenciálegyenletnek elegettevő folyamat átmenetvalószínűsége az egyedüli, amely homogén is.

Annak ellenére, hogy a bizonyítás egyszerű számításokon alapszik, az ismertebb irodalomban ez a tény nincs megemlítve.

A probléma Ju. A. Rozanov egy kérdésével kapcsolatban merült fel.

BIZONYÍTÁS:

Ismeretes, hogy a Gauss-Markov folyamat átmenetvalószínűség sűrűségfüggvénye a következő alakú:

$$p(y, t | x, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma(t)^2} \exp \left[ - \frac{\left( y - m(t) - \rho \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma(s)} \right) (x - m(s)) \right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma(t)^2} \right]$$

Itt feltesszük, hogy  $t \geq s$ ;  $m(s)$  és  $\sigma(s)$  - a várhatóérték és szórás - az időnek tetszőleges folytonos függvényei, a  $\rho(s, t)$  korrelációs együttható pedig  $\rho(s, t) = e^{F(s) - F(t)}$  alakú ( $F(t)$  nem-csökkenő függvény).

Mint hogy  $p(y, t | x, s)$  úgy tekinthető, mint egy  $M_1(t, s)x + M_2(t, s) = \rho \frac{\sigma(t)}{\sigma(s)} x + m(t) - \rho m(s) \frac{\sigma(t)}{\sigma(s)}$  várhatóértékű és  $\sqrt{\Sigma(t, s)} = \sqrt{(1-\rho^2)\sigma^2(t)}$  szórású normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, a homogenitás szükséges és elégséges feltétele, hogy  $M_1(t, s)$ ,  $M_2(t, s)$  és  $\Sigma(t, s)$  függvények csak  $(t-s)$ -től függjenek.

Vegyük sorra a fenti függvényeket:

$$M_1(t-s) = e^{F(s) - F(t)} \frac{\sigma(t)}{\sigma(s)} = \frac{e^{-F(t)} \sigma(t)}{e^{-F(s)} \sigma(s)}$$

A fenti függvényegyenletnek, a folytonos függvények körében csak az  $e^{-F(t)} \sigma(t) = C e^{-At}$  alakú függvény tesz eleget ( $A$  és  $C$  konstansok). Tehát  $M_1(t, s) = e^{-A(t-s)}$ . Az így nyert korlátozó feltételt figyelembevéve fejezzük ki  $\Sigma(t-s)$ -t:

$$\sum (t-s) = \sigma^2(t) - e^{-2A(t-s)} \sigma^2(s).$$

A jobboldalt átalakítva:

$$\sum (t-s) = e^{-2At} (\sigma^2(t) e^{2At} - \sigma^2(s) e^{2As}).$$

Jelöljük  $\sigma^2(t) e^{2At}$ -t  $G(t)$ -vel.

Megmutatjuk, hogy a  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sum(\tau)}{\tau}$  határérték létezik, tehát  $G(t)$  differenciálható, és

$G'(t) = e^{2At} \left( \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sum(\tau)}{\tau} \right)$ . Kiválasztható olyan nullához tartó  $\{\tau^n\}$  sorozat, hogy  $\frac{\sum(\tau^n)}{\tau^n} \rightarrow B$  és a határérték véges. (Az ellenkező eset ellentmondáshoz vezetne.) Ha  $\tau^n$  elég

kicsi az  $e^{-2At}$  függvény folytonosságából következik

$$\begin{aligned} \sum(\tau^n) &= e^{-2At} [G(s+\tau) - G(s)] \leq (1 + \frac{\varepsilon}{4}) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2A(s + \frac{k+1}{N} \tau^n)} (G(s + \frac{k+1}{N} \tau^n) - \\ &- G(s + \frac{k}{N} \tau^n)) \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2}) N \frac{\sum(\frac{\tau^n}{N})}{\tau^n} \end{aligned}$$

Hasonlóképpen nyerjük a

$$\sum(\tau^n) \geq (1 - \frac{\varepsilon}{2}) \frac{N \sum(\frac{\tau^n}{N})}{\tau^n}$$

egyenlőtlenséget. A  $\sum(\tau)$  függvény folytonossága miatt elég kis  $\delta$ -ra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$(1-\varepsilon) \frac{\sum(\tau)}{\tau} \leq \frac{\sum(\tau^n)}{\tau^n} \leq (1+\varepsilon) \frac{\sum(\tau)}{\tau} \quad (\text{ha } \tau < \delta).$$

Mint hogy  $\varepsilon$  tetszőleges volt és  $\frac{\sum(\tau^n)}{\tau^n} \rightarrow B$ ,  $\frac{\sum(\tau)}{\tau} \rightarrow B$ .

Egyszerű számolás igazolja, hogy

$$G(t) = \begin{cases} b e^{2At} + c & \text{ha } A \neq 0 \\ Bt + c & \text{ha } A = 0 \end{cases}$$



(ahol  $b = -\frac{B}{2A}$ ) és

$$\sum (t-s) = \frac{b - be^{-2A(t-s)}}{2A}$$

Hasonló megfontolások érvényesek  $M_2(t,s)$  függvényre is:

$$M_2(t-s) = \begin{cases} m - me^{-A(t-s)} & \text{ha } A \neq 0 \\ M(t-s) & \text{ha } A = 0 \end{cases} \quad \left(m = -\frac{M}{A}\right)$$

A fentieket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy az  $A > 0$ ,  $A = 0$  illetve  $A < 0$  esetnek a stacionárius-, Wiener- illetve az exploziós-folyamat felel meg; sőt az itt szereplő  $A$ ,  $B$  és  $M$  paraméterek egybeesnek az eredeti sztohasztikus differenciálegyenlet paramétereivel.

### I r o d a l o m

J.L. Doob, Stochastic Processes (J. Wiley, 1953).

### S u m m a r y

#### On homogeneous Gauss-Markov processes.

In this note it is proved that among the continuous Gaussian Markovian processes only the transition density of the solutions of the stochastic differential equation  $d\xi(t) = -A\xi(t)dt + Mdt + dW(t)$  is the homogeneous one. ( $W(t)$  is the standard Wiener-process.)

### Р е з ю м е

#### Об однородных гауссово-марковских процессах

В настоящей заметке доказывается, что кроме переходной плотности описывающей решение стохастического дифференциального уравнения  $d\xi(t) = -A\xi(t)dt + Mdt + dW(t)$  нет однородной переходной плотности, принадлежащей к гауссовскому марковскому процессу траектории которого непрерывны с вероятностью 1. /  $W(t)$  - стандартный винеровский процесс. /

A Lamm-féle parciális differenciálegyenlet megoldása

Szepesvári István

Koncentráció vizsgálatnál lép fel a következő ún. Lamm-féle differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial c(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rD \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} - S\omega^2 r^2 c(r,t) \right]$$

a

$$c = c_0 \quad (r_1 \leq r \leq r_2, \quad t = 0)$$

kezdeti feltétel, és a

$$D \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} = S\omega^2 r_1 c(r,t) \quad (r = r_1, t > 0)$$

$$D \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} = S\omega^2 r_2 c(r,t) \quad (r = r_2, t > 0)$$

határfeltételek mellett. A képletekben  $c(r,t)$  a koncentrációfüggvény,  $r$  a forgási centrumtól mért távolság,  $t$  az idő,  $D = D_0(1+kc)$  ill.  $S = \frac{S_0}{1+k_1c}$  a diffúziós ill. a szedimentációs együttható, mindkettő függhet a koncentrációtól.  $c_0$  a kezdeti koncentráció,  $D_0$  a diffúziós,  $S_0$  a szedimentációs együttható,  $\omega$  a szögsebesség,  $k, k_1, r_1$  és  $r_2$  konstansok.

Vezessük be a következő dimenzió nélküli paramétereket:

$$\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 = x; \quad \tau = 2\omega^2 S_0 t; \quad \Theta(x,\tau) = \frac{c(r,t)}{c_0};$$
$$\varepsilon = \frac{2D_0}{S_0\omega^2 r_1^2}; \quad kc_0 = \beta; \quad k_1c_0 = \alpha$$

A Lamm-egyenlet ezekkel a jelölésekkel:

$$(1) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x \left[ \varepsilon (1 + \beta \Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\Theta}{1 + \alpha \Theta} \right] \right\}$$

kezdeti feltétel:



$$\Theta(x, 0) = 1 \quad \left(1 \leq x \leq \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right)$$

határfeltételek:

$$(2) \quad \varepsilon(1 + \beta\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\Theta}{1 + \alpha\Theta} \quad (x = 1, \tau > 0)$$

$$(3) \quad \varepsilon(1 + \beta\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\Theta}{1 + \alpha\Theta} \quad \left(x = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2, \tau > 0\right)$$

$\Theta(x, \tau)$  valamely  $\Gamma$  határu  $G$  tartományon van értelmezve, ahol  $1 + \alpha\Theta \neq 0$ . Feltesszük, hogy (1)-nek (adott  $\alpha, \beta, \varepsilon$  esetén) létezik egyetlen – a kémiai jelenségnek megfelelő – legalább a negyedik rendig folytonos parciális deriváltakkal rendelkező megoldása. A fenti egyenlet csak közelítőleg oldható meg: esetünkben célszerű volt a véges differenciák módszerének alkalmazása.

A számításhoz tekintsük az alábbi két – koordináta tengelyekkel párhuzamos – egyenessereget:

$$x = x_0 + ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\tau = \tau_0 + j\ell \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Ezen egyenesek metszéspontjait rácspontoknak nevezzük. Két rácspont szomszédos, ha távolságuk  $x$  illetve  $\tau$  irányban  $h$  illetve  $\ell$ . Csak azokat a rácspontokat tekintjük, amelyek hozzátartoznak a  $G + \Gamma$  halmazhoz, és a keresett  $\Theta(x, \tau)$  függvénynek ezekben a rácspontokban adjuk meg értékeit. A rácspontok közül azokat, amelyeknek mind a négy szomszédos rácspontja benne fekszik ebben a halmazban, belső rácspontnak nevezzük. A belső rácspontok halmaza a hálótartomány, és  $G^*$ -gal jelöljük. Azokat a rácspontokat, amelyeknek legalább egy szomszédos rácspontja nem tartozik a  $G$  halmazához, határrácspontoknak nevezzük, és  $\Gamma^*$ -gal jelöljük. Minden  $(x_0 + ih, \tau_0 + j\ell)$  rácspontban a differenciálhányadost differenciahányadossal közelítjük. A belső pontokban a következőképp:

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i-1,j}}{2h}; \quad \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \tau}\right)_{i,j} \approx \frac{\Theta_{i,j+1} - \Theta_{i,j}}{\ell}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\Theta_{i+1,j} - 2\Theta_{i,j} + \Theta_{i-1,j}}{h^2}$$

A határpontokban pedig így:

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \tau}\right)_{i,j} \approx \frac{\Theta_{i,j+1} - \Theta_{i,j}}{\ell} \quad (i=0 \text{ vagy } n); \quad \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i,j}}{h}$$

( $i=0$  vagy  $n-1$ )

Ezekkel a helyettesítésekkel (a differenciálások elvégzése után) a következőképp alakul az (1) egyenlet:

$$\begin{aligned} \Theta_{i,j+1} = & \Theta_{i,j} + \ell \left\{ \varepsilon(1 + \beta \Theta_{i,j}) x_i \frac{\Theta_{i+1,j} - 2\Theta_{i,j} + \Theta_{i-1,j}}{h^2} + \right. \\ (1^*) \quad & \left. + \left[ \varepsilon(1 + \beta \Theta_{i,j}) - \frac{x_i}{(1 + \alpha \Theta_{i,j})^2} \right] \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i-1,j}}{2h} - \right. \\ & \left. - \frac{\Theta_{i,j}}{1 + \alpha \Theta_{i,j}} + \varepsilon \beta x_i \left( \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i-1,j}}{2h} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

A peremfeltételek így változnak:

$$(2^*) \quad \varepsilon(1 + \beta \Theta_{0,j}) \frac{\Theta_{1,j} - \Theta_{0,j}}{h} = \frac{\Theta_{0,j}}{1 + \alpha \Theta_{0,j}}$$

$$(3^*) \quad \varepsilon(1 + \beta \Theta_{n,j}) \frac{\Theta_{n,j} - \Theta_{n-1,j}}{h} = \frac{\Theta_{n,j}}{1 + \alpha \Theta_{n,j}}$$

Ismerve a  $\Theta_{i,j}$  ( $j$  rögzített,  $i=0,1,\dots,n$ ) értékeket (tehát esetünkben kiindulva a  $\Theta(ih,0)=1$  értékekből) az (1\*) egyenlet segítségével meghatározhatók a  $\Theta_{i,j+1}$  ( $i=1,2,\dots,n-1$ ) értékek, a (2\*) és (3\*) egyenletből pedig a  $\Theta_{0,j+1}$  és  $\Theta_{n,j+1}$  értékek. Ha  $\beta \neq 0$ ,  $\alpha \neq 0$ ; akkor a (2\*) és (3\*) egyenlet harmadfokú, amely például Newton módszerrel megoldható.

A kémiai kísérleteknek megfelelően nálunk a  $G + \Gamma$  halmaz téglalap ( $1 \leq x \leq 1,4$ ;  $0 \leq \tau \leq L$ ). Különösen fontos a különböző  $\varepsilon, \alpha, \beta$  értékekre számolt  $\Theta(x, \tau)$  függvény viselkedése az  $x=1$  határvonal közelében, ezért a lépésköz az  $1 \leq x \leq 1,05$  intervallumban  $h_1 = 0,005$ ,  $\ell_1 = \frac{1}{2} h_1^2$ ; az  $1,05 \leq x \leq 1,4$  szakaszon  $h_2 = 0,025$ ,  $\ell_2 = 0,02 \cdot h_2^2 = \ell_1$ .

A számításokhoz az MTA Számítástechnikai Központjában készült program EFT autókódban, amely az URAL-2 számológépen futott le.



A továbbiakban az alkalmazott numerikus eljárás hibájának becslését adjuk meg. A véges differenciák módszere esetén a differenciálegyenletet differenciaegyenlettel közelítettük. Attól függően, hogy milyen különbségi formulákat használunk különböző pontosságú közelítéseket kapunk.

Keressük az

$$(4) \quad Lu = f$$

differenciálegyenlet  $G$  tartománybeli megoldását a következő peremfeltételekkel:

$$(5) \quad \ell_i(u) = \varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

ahol  $f$  a  $G$ -n,  $\varphi_i$  a  $\Gamma_i$  határon adott függvény,  $L$  és  $\ell_i$  differenciáloperátorok. Az  $L$  operátort a  $G^*$  hálótartományon értelmezett  $u_h$  függvényekre ható  $R_h$  differenciaoperátorral helyettesítjük:

$$(6) \quad R_h u_h = f_h,$$

ahol  $R_h$  valamely  $G_0^* \subset G^*$  halmazon van értelmezve,  $f_h$  a  $G_0^*$ -on van adva, és  $G_0^*$  pontjaiban megegyezik  $f$ -el. A megfelelő különbségi határfeltételek:

$$(7) \quad r_{ih}(u_h) = \varphi_{ih} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

ahol  $r_{ih}$  a  $\Gamma_i^*$ -on adott  $u_h$  függvényekre hat, és valamely  $\Gamma_{i0}^* \subset \Gamma_i^*$  halmazon van értelmezve, a  $\varphi_{ih}$  függvények pedig a  $\varphi_i$  függvényeknek valamilyen módon megfeleltetett  $\Gamma_{i0}^*$ -on értelmezett függvények. A megfeleltetés módja attól függ, hogyan vittük át a határfeltételeket  $\Gamma_i$ -ről  $\Gamma_i^*$ -ra.

Legyen  $U$  és  $F$  a  $G$ -n,  $\phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) pedig a  $\Gamma_i$ -n értelmezett olyan függvényosztály, hogy  $u \in U$  esetén értelmezve legyen  $L(u)$  és  $\ell_i(u)$ , ekkor  $L(u) \in F$  és  $\ell_i(u) \in \phi_i$ . Feltesszük, hogy minden egyes függvényosztályban létezik a szokásos tulajdonságokkal rendelkező norma.

Jelöljük ezeket így:  $\|u\|_U$ ,  $\|f\|_F$ ,  $\|\varphi_i\|_{\phi_i}$ . Legyen a  $G^*$ -on adott  $u_h$  függvényekre értelmezve az  $\|u_h\|_{U_h}$ , a  $G_0^*$ -on adott  $f_h$  függvényekre az  $\|f_h\|_{F_h}$ , és a  $\Gamma_{i0}^*$ -on adott  $\varphi_{ih}$  függvényekre a  $\|\varphi_{ih}\|_{\phi_{ih}}$  norma. A  $G$ -n értelmezett  $u \in U$ ,  $f \in F$  függvények  $G^*$ -on is értelmezve vannak, így értelmesek az  $\|u\|_{U_h}$ ,  $\|f\|_{F_h}$  normák, az  $R_h$  alkalmazható az  $U$  elemeire stb. Feltesszük, hogy az  $\|u\|_{U_h}$ ,  $\|f\|_{F_h}$ ,  $\|\varphi_{ih}\|_{\phi_{ih}}$  normák olyanok, hogy bármely  $u \in U$ ,  $f \in F$  és  $\varphi_i \in \phi_i$  esetén léteznek az alábbi határátmenetek:  $\|u\|_{U_h} \rightarrow \|u\|_U$ ;  $\|f\|_{F_h} \rightarrow \|f\|_F$ ;  $\|\varphi_{ih}\|_{\phi_{ih}} \rightarrow \|\varphi_i\|_{\phi_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )  $h \rightarrow 0$  esetén. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a megfelelő normák összeegyeztethetők.

Azt mondjuk, hogy a (6) különbségi egyenlet a (7) határfeltételekkel approximálja a (4) differenciál-  
egyenletet az (5) peremfeltételekkel az  $\mathcal{U}$  függvényosztályon, ha bármely  $u \in \mathcal{U}$  függvényre  $h \rightarrow 0$

$$\text{esetén } \|Lu - R_h u\|_{F_h} \rightarrow 0$$

$$\|[\ell_i(u)]_{i,h} - r_{i,h}(u)\|_{\Phi_{i,h}} \rightarrow 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

ahol  $[\ell_i(u)]_{i,h}$ -val jelöljük azt az operátort, amelyet akkor kapunk, ha a határfeltételeket  $\Gamma_i$ -ről  $\Gamma_i^*$ -ra átvisszük.

Továbbá: a különbségi approximáció rendje  $k$ , ha bármely  $u \in \mathcal{U}$  függvényre, és  $0 < h < h_0$  esetén teljesül

$$\|Lu - R_h u\|_{F_h} \leq h^k M$$

$$\|[\ell_i(u)]_{i,h} - r_{i,h}(u)\|_{\Phi_{i,h}} \leq h^k M_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

ahol  $M$  és  $M_i$  nem függ  $h$ -től.

Használjuk a következő egyenlőségeket:

$$\frac{\Theta(x_i + h, \tau_k) - \Theta(x_i - h, \tau_k)}{2h} = \Theta'_x(x_i, \tau_k) + \frac{h^2}{6} \Theta'''_{x^3}(y_1, \tau_k),$$

ahol  $(x_i - h < y_1 < x_i + h)$ ,

$$\frac{\Theta(x_i + h, \tau_k) - 2\Theta(x_i, \tau_k) + \Theta(x_i - h, \tau_k)}{h^2} = \Theta''_{x^2}(x_i, \tau_k) + \frac{h^2}{12} \Theta''''_{x^4}(y_2, \tau_k)$$

$(x_i - h < y_2 < x_i + h)$ ,

$$\frac{\Theta(x_i + h, \tau_k) - \Theta(x_i, \tau_k)}{h} = \Theta'_x(x_i, \tau_k) + \frac{h}{2} \Theta''_{x^2}(y_3, \tau_k)$$

$(x_i < y_3 < x_i + h)$ ,



$$\frac{\Theta(x_i, \tau_k) - \Theta(x_i - h, \tau_k)}{h} = \Theta'_x(x_i, \tau_k) - \frac{h}{2} \Theta''_{x^2}(y_+, \tau_k)$$

$$(x_i - h < y_+ < x_i)$$

$$\frac{\Theta(x_i, \tau_k + l) - \Theta(x_i, \tau_k)}{l} = \Theta'_\tau(x_i, \tau_k) + l \Theta''_{\tau^2}(x_i, z_1)$$

$$(\tau_k < z_1 < \tau_k + l)$$

amelyeket könnyen megkaphatunk, ha a bal oldalakat Taylor sorba fejtjük. Ezeket használva az (1\*), (2\*) és (3\*) egyenlet esetében (a továbbiakban csak a  $\beta = 0$  esetre számolunk, de ugyanígy kapnánk hasonló becsléseket  $\beta \neq 0$ -ra):

$$R_h \Theta_{ik} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \Theta(x_i, \tau_k) - l \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Theta(x_i, z_1) + \varepsilon x_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Theta(x_i, \tau_k) +$$

$$+ \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \Theta(y_2, \tau_k) + \left( \varepsilon - \frac{x_i}{(1 + \alpha \Theta_{ik})^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \Theta(x_i, \tau_k) +$$

$$+ \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \Theta(y_1, \tau_k) - \frac{\Theta_{ik}}{1 + \alpha \Theta_{ik}} = [L\Theta]_{i,k} + D_{ik},$$

$$\text{és } |D_{ik}| \leq h^2 \left( \alpha M_2 + \frac{\varepsilon}{12} \cdot a \cdot M_4 + \frac{1}{6} \cdot b \cdot M_3 \right),$$

$$\text{ahol } \alpha = \frac{l}{h^2}, \quad M_2 = \max_{\bar{G}} \left| \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right| \quad (\bar{G} \text{ a } G \text{ lezártja})$$

$$M_3 = \max_{\bar{G}} \left| \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x^3} \right|; \quad M_4 = \max_{\bar{G}} \left| \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x^4} \right|; \quad a = \max_{\bar{G}} |x|$$

$$b = \max_{\bar{G}} \left| \varepsilon - \frac{x}{(1 + \alpha \Theta)^2} \right|.$$

$$\varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial x} \Theta(x_i, \tau_k) \pm \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Theta(y_3, \tau_k) \right] - \frac{\Theta_{ik}}{1 + \alpha \Theta_{ik}} = 0$$

$$r_{ih} = [\ell_i \Theta]_{i,k} \pm d_1,$$

ahol  $|d_1| \leq h \frac{\varepsilon}{2} M_2.$

Igy, mivel esetünkben  $\| \|_{F_h} = \max_{G^*} |R_h \Theta|$ ,  $\| \|_{\Phi_{ih}} = \max_{r^*} |r_{ih} \Theta|$ , ezért a közelítés rendje a  $G^*$  tartományban másodrendű, a határon pedig elsőrendű.

Az előbbiekből alapján a megoldás hibáját is becsülni tudjuk. Legyen ugyanis  $\Theta$  a pontos,  $\Theta_h$  a közelítő megoldás:  $\Theta_h = \Theta + \varepsilon_h$ .  $\varepsilon_h$  közelíthető így:  $\varepsilon_h \approx k(x, \tau) h^n$ , ahol  $n$  az approximáció rendje,  $k(x, \tau)$  nem függ  $h$ -től, és feltesszük, hogy  $k(x, \tau)$  legalább másodrendben differenciálható. Ekkor, mivel  $R_h \Theta_h = L \Theta = 0$

$$\| L \Theta - R_h \Theta \|_{F_h} = \| R_h \Theta_h - R_h \Theta \|_{F_h} = \| P_h(\Theta) \|_{F_h} h^n \leq M h^2, \text{ ahol } M$$

konstans, és

$$P_h(\Theta) = \frac{k_{i,j+1} - k_{i,j}}{\ell} + x_i \frac{k_{i+1,j} - 2k_{i,j} + k_{i-1,j}}{h^2} +$$

$$+ \varepsilon \frac{k_{i+1,j} - k_{i-1,j}}{2h} - \frac{k_{i+1,j} - k_{i-1,j}}{2h} \cdot \frac{x_i}{[1 + \alpha(\Theta_{i,j} + k_{i,j} h^n)]^2} +$$

$$+ x_i \frac{2\alpha k_{i,j}(1 + \alpha \Theta_{i,j}) + \alpha^2 k_{i,j}^2 h^n}{[[1 + \alpha(\Theta_{i,j} + k_{i,j} h^n)](1 + \alpha \Theta_{i,j})]^2} - \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i-1,j}}{2h}$$



$$-\frac{k_{i,j}}{1 + \alpha(\Theta_{i,j} + k_{i,j} h^n)} + \frac{\alpha k_{i,j} \Theta_{i,j}}{(1 + \alpha \Theta_{i,j}) [1 + \alpha(\Theta_{i,j} + k_{i,j} h^n)]}$$

Ha  $h$  (és  $l$ )  $\rightarrow 0$ , akkor  $P_h(\Theta) \rightarrow K$ , ahol  $K$  konstans, vagyis  $\|P_h(\Theta)\|_{F_h}$  korlátos. Ezért, minthogy  $|h| < 1$ , csakis  $n \geq 2$  lehet. Így tehát a hiba rendjére a  $G^*$ -on:  $n \geq 2$ . Ugyanilyen módon:

$$\| [L_i \Theta]_{i,h} - r_{i,h} \Theta_{i,h} \|_{\Phi_{i,h}} = \| r_{i,h} \Theta_h - r_{i,h} \Theta_{i,h} \|_{\Phi_{i,h}} = \| P_h(\Theta) \|_{\Phi_{i,h}} h^n \leq h M_1$$

és kapjuk, hogy  $n \geq 1$  a  $\Gamma^*$ -on.

A továbbiakban a Runge-elvet alkalmazzuk. Legyen  $\Theta_h(x, \tau)$  illetve  $\Theta_{2h}(x, \tau)$   $h$  illetve  $2h$  lépésközzel kapott közelítő megoldás. Ekkor, ha  $\Theta(x, \tau)$  a pontos megoldás, akkor

$$\Theta_h(x, \tau) = \Theta(x, \tau) + \varepsilon_h(x, \tau), \quad \Theta_{2h}(x, \tau) = \Theta(x, \tau) + \varepsilon_{2h}(x, \tau)$$

$$\text{vagy } \Theta_h - \Theta_{2h} = \varepsilon_h - \varepsilon_{2h}.$$

Mivel  $\varepsilon_h(x, \tau) \approx k(x, \tau) h^n$ , azért  $\varepsilon_{2h} \approx k(x, \tau) 2^n h^n \approx 2^n \varepsilon_h(x, \tau)$ .

Igy  $\Theta_h - \Theta_{2h} \approx [2^n - 1] \varepsilon_h(x, \tau)$ , ahonnan

$$\varepsilon_h(x, \tau) = \frac{\Theta_h - \Theta_{2h}}{2^n - 1}.$$

Feladatunkban a legnagyobb hiba általában  $\varepsilon \approx 0,01$  a  $G^*$ -on,  $\varepsilon \approx 0,03$  a  $\Gamma^*$ -on.

#### Irodalom

Березин-Жидков: Методы вычислений II.

S u m m a r y

Solution of Lamm's partial differential equation.

The paper deals with the solution of the Lamm-type nonlinear parabolic differential equation by the method of the finite differences. The error of this approximative method is also estimated.

Р е з ю м е

Решение уравнения Ламма в частных производных

Статья занимается решением нелинейного параболического дифференциального уравнения типа Ламм методом сеток. Рассматривается оценка погрешности этого приближенного метода.

Magnetotellurikus éléleti szondázási görbék  
anizotróp ellenállású rétegek felett

dr. Verő József – Varga Gyula

Néhány évvel ezelőtt a Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai Központjában program készült a magnetotellurikus mélyszondázások eredményeinek feldolgozásához (1. [3]). Ez a program lehetővé tette, hogy adott ellenállású és vastagságú, de különben homogén (azaz vízszintes síkokkal határolt, és minden irányban azonos ellenállású) rétegek felett meghatározhassuk különböző periódusú elektromágneses variációk (másképp a hullámok különböző behatolási mélysége) esetére a látszólagos fajlagos ellenállást. Tekintettel arra, hogy ez utóbbi a természetes elektromágneses variációk elektromos és mágneses komponenseinek arányából gyakorlatilag is meghatározható (magnetotellurikus módszer), lehetőség nyílik arra, hogy a megfigyelés helye alatt az egyes különböző mélységben elterülő rétegek elektromos ellenállását meghatározzuk (1. [2]).

A Magyar Tudományos Akadémia Geofizikai Kutatólaboratóriuma már körülbelül öt éve végez a gyakorlatban magnetotellurikus mélyszondázásokat. Tekintettel arra, hogy a méréseknek elég nagy periódus-tartományt (10 sec-1 nap) kell telőlelnie, a mérések elég hosszadalmasak. Ennek ellenére sikerült az ország területén kb. 20 pontban a mélyszondázási görbéket meghatározni. Kiderült, hogy a vízszintes homogenitás feltételezését a mérések értelmezésében nem lehet fenntartani. Ugyanis két egymásra merőleges irányban végezve el a szondázást, a kapott görbék nem egyeznek meg, hanem közöttük lényeges különbségek vannak. Ennek magyarázatára tehát vízszintes irányban is inhomogenitást kell feltételeznünk. Tekintettel arra, hogy a görbék egyes sajátosságai az egész medence területén hasonlóak (pl. kis periódus ( $T < 60 \text{ sec}$ ) esetén az ellenállás K-Ny, nagyobb periódusok esetén É-D-i irányban nagyobb), valószínűbb, hogy ez az inhomogenitás az üledékes kőzetek alatt fekvő kristályos alaphegység közettömegéből ered, oly módon, hogy ennek ellenállása É-D-i irányban nagyobb, mint K-Ny-i irányban. Hasonló jellegű inhomogenitás más rétegekben, így esetleg az üledékekben is lehetséges. (Az anizotrópiának egyébként számos más forrása is lehet, így pl. szerkezeti hatás, árnyékoló réteg stb., a jelen esetben elsősorban a nagy térbeli kiterjedés miatt számítunk az alaphegység irányfüggő ellenállására.)

A magnetotellurikus szondázási görbék értelmezése anizotróp rétegeket is tartalmazó rétegsor felett lényegesen bonyolultabb feladat, mert míg anizotrópia nélkül egy réteget két adat (ellenállás és vastagság) jellemez, ehhez most még két adat (egy másik irányú ellenállás, és a maximális ellenállás iránya) is járul. Tovább bonyolítja a helyzetet, hogy több anizotróp réteg esetében nem mellékes a primér hullám polarizációja sem.

Anizotróp rétegsor felett észlelhető magnetotellurikus görbéket elméleti úton többek között O'Brien és Morrison határozott meg. Véletlen egybeesés folytán az általuk meghatározott görbesereg nem esik túlságosan messze azoktól a görbékétől, amelyek a Magyar Medencére jellemzőek. Ezért célszerűnek látszott, hogy a program O'Brien és Morrison módszere alapján készüljön el az anizotróp rétegek ese-



tére. Sajnálatos módon a cikkben sok sajtóhiba és félreérthető magyarázat van, így a levezetések jó részét meg kellett ismételni a hibák felismerése és kiküszöbölése céljából.

Az elkészült program lehetővé teszi, hogy alaposabb ismereteket kaphassunk az eddigi mérési anyag alapján is a Magyar Medence mélyszerkezetére azáltal, hogy az egyes paraméterek változtatásával a lehetséges modellek számát jelentősen csökkenteni tudjuk, ha a görbék különbözőségének okát egy bizonyos rétegben, vagy esetleg több rétegben meghatározzuk. Ez komoly hozzájárulást jelentene nemcsak a Magyar Medence mélyszerkezetének ismeretéhez, hanem történetének feltárásához is. Mivel a Magyar Medence magnetotellurikus felmérése az elsők között van a világon, ezek az eredmények világviszonylatban is sok újat tudnának mondani, nem is beszélve arról, hogy anizotróp modellekkel való értelmezésnek eddig csak nagyon szórványos kísérletei ismeretesek.

Az említett módszer, melynek leírása [1]-ben található meg, a magnetotellurikus görbék elméleti számítását anizotróp rétegeket is tartalmazó rétegsor felett határozza meg különböző vízszintes irányokban. A rétegsort egy  $xyz$  koordináta-rendszerben véve fel, amelyben a  $z$  tengely pozitív iránya lefelé mutat, a különböző vízszintes irányokat az  $xy$  síkban az  $x$  tengely pozitív irányával bezárt  $\phi$  szöggel realizálja. A számítás a Maxwell-egyenletek alapján az egyes rétegek közti folytonossági határfeltételek figyelembevételével rétegenként felfelé haladva a legalsó ( $\infty$  vastagságúnak feltételezett) réteg és a közbenső rétegek elektromágneses paraméterei és a felszínen észlelhető elektromágneses paraméterek között határoz meg számszerű kapcsolatot az adott elektromágneses variációra vonatkozólag. Ez a kapcsolat egy  $4 \times 4$ -es, ált. komplex elemű mátrixszal adható meg, amelynek segítségével, a mátrix elemei közti kapcsolatok alapján, a felszíni elektromos és mágneses komponensek aránya meghatározható, melyekből az illető variációra vonatkozó fajlagos ellenállást megkaphatjuk a  $\phi$  szöggel megadott irányban.

A feladat megoldására szolgáló algoritmust az alábbi módon adhatjuk meg:

1./ Meghatározandó a

$B = \Omega \cdot T_n \cdot A_{n-1} \dots A_1 A_0$   $4 \times 4$ -es komplex elemű mátrix, ahol

$$\Omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega\mu_0} & & & 0 \\ & \frac{1}{\omega\mu_0} & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{diagonális mátrix,}$$

$$A_i = \bar{T}_{i+1}^{-1} \cdot T_i,$$



$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  állandó,  $T$  periódusidő sec-ban,

$$k_1^{(i)} = s_1^{(i)} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad k_2^{(i)} = s_2^{(i)} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}},$$

$z_i$  az  $i$ -edik réteg felső határoló síkjának az applikátája a felvett koordináta rendszerben,  $\phi_i$  az  $i$ -edik rétegben lévő anizotrópia felderítéséhez szükséges változó szög, amely  $0^\circ$  és  $180^\circ$  között bármely értéket felvehet.

2./ Legyen a legelső réteg paramétereiből, mint komponensekből álló vektor  $U$ , a felszínen észlelt paraméterek vektora pedig  $V$ ,

$$V = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ E_x \\ E_y \end{bmatrix}$$

A  $V = BU$  egyenlőségből közvetlen kapcsolat létesíthető a  $H_x$ ,  $H_y$  és  $E_x$ ,  $E_y$  mennyiségek közt:

$$E_x = aH_x + bH_y$$

$$E_y = cH_x + dH_y$$

Ha  $a$  és  $d$ ,  $b$  és  $c$ -hez viszonyítva elhanyagolhatóan kicsinyek ( $a \approx d \ll b, c$ ), akkor ezek az összefüggések lehetőséget nyújtanak az  $x$  és  $y$  irányú látszólagos fajlagos ellenállások meghatározására a

$$\rho_x = \frac{1}{\omega \mu_0} \left| \frac{E_x}{H_y} \right|^2 \quad \text{és} \quad \rho_y = \frac{1}{\omega \mu_0} \left| \frac{E_y}{H_x} \right|^2$$

képletek alapján.

3./  $\phi_i$  különböző értékei mellett a különböző  $T$  értékekhez tartozó  $\rho_x$  és  $\rho_y$  értékek meghatározzák a kívánt magnetotellurikus görbesereget.

A leírt algoritmus programja Ural 2 gépre készült EFT autokódban. Kisebb  $T$  értékekre a gép szám-ábrázolási korlátai miatt a program nem volt alkalmazható. Ezt a hiányosságot a későbbiekben pótolta a leírt algoritmus CDC 3300-as gépre készült USASI-FORTRAN programja.



I r o d a l o m

- [1] Douglas P. O'Brien - H.F. Morrison : Electromagnetic fields in an n-layer anisotropic half-space. Geophysics, XXXII. No. 4. 1967. aug.
- [2] М.Н. Бердичевский : Электрическая разведка методом теллурических токов (ГОСТОПТЕХ-ИЗДАТ, Москва 1960)
- [3] Varga Gyula : A Föld belső szerkezetének vizsgálata magnetotellurikus módszerekkel. (MTA SzK Közlemények 1967. ápr.)

S u m m a r y

Magnetotelluric theoretical sounding curves over anisotropic resistance layers

The paper deals with the mathematical processing of the results of magnetotelluric deep-soundings performed over anisotropic layer-series. Based on the method O'Brien - Morrison, by application of Maxwell equations it establishes numerical relationships between the electromagnetic parameters of undermost and medium layers, as well as those to be sensed on the surface. By their aid it finds in a given horizontal direction, for a given electromagnetic variation the apparent specific resistance.

Р е з ю м е

Магнитно-теллурические теоретические кривые зондирования над  
слоями анизотропического сопротивления

В статье рассматривается математическая обработка результатов магнитно-теллурического глубинного зондирования над анизотропическими толщами. Устанавливаются численные связи между электромагнитными параметрами нижних и средних слоев и электромагнитными параметрами, наблюдаемыми на поверхности по методу О'Брайена и Моррисона с применением уравнений Максвелла. На этой основе определяется кажущееся удельное сопротивление в данном горизонтальном направлении по отношению к данной электромагнитной вариации.

### Bizonyos típusú függvénymátrix számolása

Koszó Gábor – Gergely József

Az [1] cikkben felvetett és megoldott feladat kapcsán jutottunk az alább ismertetett problémához, ami a legkisebb négyzetek módszere alkalmazásánál részproblémaként merült fel. Az [1] cikk utal a problémára, de megoldásával nem foglalkozik.

Legyen adott a (3 dimenziós) térben  $n$  pont. A pontokat összekötő távolságok nem függetlenek egymástól, lesznek olyan távolságok, melyek a többi távolság függvényeként kifejezhetők. Az [1] cikkben leírt feladat megoldása közben a következő problémák merültek fel:

- 1./ meghatározandó az  $r_i$  független távolságok száma és ezen független távolságok kiválasztásának szabálya
- 2./ hogyan lehet a független távolságok segítségével kifejezni a függő távolságokat ( $d$ -ket)
- 3./ a legkisebb négyzetek módszerével megoldandó feladathoz elkészíteni a derivált mátrixot, melynek elemei:

$$[a_{ij}] = \left[ \frac{\partial d_j}{\partial r_i} \right] \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, 3(n-2) \\ j = 1, \dots, \frac{n^2 - 7n - 12}{2} \end{array}$$

I. A problémát először 4 és 5 pont esetében vizsgáljuk. Mivel 3 pont legfeljebb síkot (2 dim. teret) feszíthet ki, legalább 4 pont szükséges a 3 dim. tér "kifeszítéséhez". 4 pontnak egymáshoz viszonyított helyzetét pl. úgy fixálhatjuk, ha  $\binom{4}{2} = 6$  távolságát megadjuk.

Itt minden távolság független, ha a 4 pont nincs egy síkban.

5 pont esetén a távolságok száma  $\binom{5}{2} = 10$ , azaz 4-el több mint 4 pont esetén, de ha a térbeli 4 ponthoz hozzávesszük az 5.-et (mivel 3 dimenziós térről van szó) ennek az 5 pontnak a helyzetét a többihez viszonyítva már 3 távolság meghatározza. A 4. távolság már nem rögzíthető tetszőlegesen, hanem ha ezt  $d$ -vel jelöljük, akkor

$$d = f(r_1, r_2, \dots, r_9).$$

Ezt a függvényt könnyen meghatározhatjuk felhasználva a geometria következő tételét: A (három dimenziós) térben adott 4 pont akkor és csak akkor van egy (eggyel alacsonyabb dimenziós térben) síkban, ha a következő determináns értéke 0:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & d^2 & e^2 \\ 1 & b^2 & d^2 & 0 & f^2 \\ 1 & c^2 & e^2 & f^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ahol  $a, b, \dots, f$  a pontoknak egymástól való távolsága. Ha tehát a távolságokból 5-öt ismerünk, a hatodik meghatározható a fenti egyenlethől (feltéve, hogy egy síkban vannak).

Megjegyzés:  $d$ -re két értéket kapunk. A kettő közül azt fogadjuk el jónak, amelyik a kísérleti adatoknak jobban megfelel.

A fentiek analógiájára a "4 dimenziós térben" adott 5 pont akkor és csak akkor van "egy 3 dimenziós térben" ha a fentihez hasonló determináns

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ 1 & r_1^2 & 0 & r_5^2 & r_6^2 & r_7^2 \\ 1 & r_2^2 & r_5^2 & 0 & r_8^2 & r_9^2 \\ 1 & r_3^2 & r_6^2 & r_8^2 & 0 & r_{10}^2 \\ 1 & r_4^2 & r_7^2 & r_9^2 & r_{10}^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= F(r_1, r_2, \dots, r_{10}) = 0.$$

Ebből a 9 távolság ismeretében a tizedik távolság meghatározható:

$$d = f(r_1, r_2, \dots, r_9).$$



Az implicit függvény deriválási szabályát alkalmazva megkaphatjuk a keresett mátrixot is.

$$\frac{\partial r_i}{\partial r_j} (r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_{10}) = - \frac{F'_{r_i} (r_1, \dots, r_{10})}{F'_{r_j} (r_1, \dots, r_{10})}$$

$$i = 1, 2, \dots, 10.$$

II. A pontok számát  $n$ -re növelve a független távolságok száma az előző  $(n-1)$  ponthoz tartozó független távolságok számához képest mindig 3-mal lesz több. Azaz pl.  $N$  pont esetén

az összes távolság	$\binom{N}{2}$
a független távolságok száma	$3(N-2)$
a függő távolságok száma	$\binom{N}{2} - 3(N-2) = \frac{N^2 - 7N - 12}{2}$

Az 5-nél több pont esetében úgy alkalmazzuk az előbbi eljárást, hogy mindig kiválasztunk 5 olyan pontot, amelyek 10 távolsága közül 9-et már ismerünk. A már kiszámított távolságokat ismertnek tekintve a tizedik távolság kiszámítható.

Az általunk vizsgált molekuláknál a megfelelő 5 pont kiválasztását mindig könnyen el lehetett érni.

III. A gyakorlatban problémák léptek fel a  $d$  (függő távolságok) számolásával kapcsolatban. A  $d$  értékét másodfokú egyenletről kapjuk. Geometriailag vizsgálva az egyenlet két megoldása nem más, mint két kör metszéspontjának a meghatározása.

1./ A számolás pontatlanságából fellépő hibák miatt a diszkrimináns értéke negatív is lehet, vagy túl kicsi pozitív. Ebben az esetben tehát, ha  $| \text{diszkrimináns} | < \epsilon$ , két kör érintkezéséről van szó és a diszkr. értékét  $0$ -nak vettük. Ezáltal egyértelművé tettük a megoldást.

2./ Ha a kapott 2 db  $d$  értékre a következő teljesül:

$$\begin{aligned} |d_1 - \text{a kísérletileg mért } d| &= \\ |d_2 - \text{ " " " }| &= \end{aligned}$$

akkor ennek a  $d$ -nek a meghatározására egy másik 5 pontból álló pontrendszer távolságait választjuk.

I r o d a l o m

- [1] Gergely József, Elektron-diffrakciós mérési adatok kiértékelése legkisebb négyzetek módszerével. Közlemények 4(1968) 46-53.

S u m m a r y

Calculation of certain type function matrices.

The paper discusses a numerical solution of a geometric problem which came up from computation in [1].

Р е з ю м е

Вычисление определенных функциональных матриц

В статье исследуется вычислительное решение одной геометрической проблемы, которая возникла из вычислений в статье [1].

Szalagmátrixú lineáris egyenletrendszerek  
egy megoldási módszere

Gergely József

A parciális differenciálegyenletek, a közönséges differenciálegyenletek peremérték feladatainak numerikus megoldásai gyakran vezetnek olyan lineáris egyenletrendszerekre, amelyekben csak a főgyűthetők és az ahhoz közeli egyűthetők különböznek 0-tól. Az ilyen egyenletrendszerek megoldására a szokásos eliminációs módszerek alkalmazása nem célszerű. Legtöbbször iterációs eljárásokat alkalmaznak. Azonban az iterációs eljárások nem mindig, vagy csak lassan konvergálnak. Az alábbiakban egy kevés számolást igénylő véges módszert ismertetünk.

Legyen az  $A\underline{x} = \underline{b}$  egyenletrendszerünk  $A = \{a_{ij}\}$   $n \times n$ -es mátrixa nem szinguláris és

$$(1) \quad a_{ij} = 0, \quad \text{ha} \quad j - i > k, \quad a_{i, i+k} \neq 0,$$

ahol  $0 < k < n$  adott egész szám.

Legyenek az egyenletrendszer egyenletei  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , a meghatározandó  $\underline{x}$  vektor komponensei  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Az  $x_1, x_2, \dots, x_k$  valamilyen értékeiből kiindulva az  $e_1$ -ből kiszámolható  $x_{k+1}$ ,  $e_2$ -ből  $x_{k+2}, \dots$ , az  $e_{n-k}$ -ből  $x_n$ .

Helyettesítsünk be az  $e_{n-k+1}, e_{n-k+2}, \dots, e_n$  egyenletekbe. Minthogy minden  $x_j$ ,  $j = k+1, k+2, \dots, n$  lineáris kifejezése az  $x_1, x_2, \dots, x_k$  komponenseknek, ezért írható

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i = \sum_{\ell=1}^k c_{i\ell} x_\ell + c_{i, k+1}; \quad i = n-k+1, n-k+2, \dots, n.$$

Rögzítsük az  $i$  indexet és induljunk ki az  $x_1, x_2, \dots, x_k$  komponensek  $k+1$  értékrendszeréből. Legyenek ezek  $x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{km}$ ,  $m = 1, 2, \dots, k+1$ . A (2) helyettesítéseket elvégezve kapjuk

$$(3) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{jm} - b_i = d_{im} = \sum_{\ell=1}^k c_{i\ell} x_{\ell m} + c_{i, k+1}.$$

(3)  $k+1$  lineáris egyenletet jelent a  $c_{i\ell}$  egyűthetők meghatározására. A (3) egyenletrendszer egyűthetőinek mátrixa:

$$x = \left\{ \begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} & 1 \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1, k+1} & x_{2, k+1} & \dots & x_{k, k+1} & 1 \end{array} \right\}$$



Változtassuk most  $i$  értékét  $n-k+1$ -től  $n$ -ig.

A (3)-ból kapott  $d_{im}$  helyettesítési értékeket írjuk a

$$D = \left\{ \begin{array}{cccc} d_{n-k+1\ 1} & d_{n-k+2\ 1} & \cdots & d_{n\ 1} \\ d_{n-k+1\ 2} & d_{n-k+2\ 2} & \cdots & d_{n\ 2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n-k+1\ k+1} & d_{n-k+2\ k+1} & \cdots & d_{n\ k+1} \end{array} \right\}$$

$(k+1) \times k$  méretű mátrixba. (3) alapján az

$$XC = D$$

mátrixegyenletből kapjuk a (2)-ben szereplő együtthatók  $C$  mátrixát

$$(4) \quad C = X^{-1}D$$

Tetszőleges  $x_1, x_2, \dots, x_k$  kiindulás esetén teljesülnek az  $e_1, e_2, \dots, e_{n-k}$  egyenletek, hiszen ezek alapján számoltuk ki az  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ -et. Ahhoz, hogy az  $e_{n-k+1}, e_{n-k+2}, \dots, e_n$  egyenletek is teljesüljenek, kell hogy (2) alapján

$$(5) \quad \sum_{\ell=1}^k c_{i\ell} x_\ell + c_{i\ k+1} = 0$$

legyen  $i = n-k+1, n-k+2, \dots, n$ .

Az (5) egyenletrendszerből az  $A\underline{x} = \underline{b}$  egyenletrendszer megoldásának első  $k$  komponensét kapjuk, majd az  $e_1, e_2, \dots, e_{n-k}$  egyenletekből rendre a teljes megoldásvektort.

Az  $X$  mátrixot önkényesen választhatjuk úgy, hogy ne legyen szinguláris. Adott  $k$  esetén  $X$ -szel együtt  $X^{-1}$  is fix mátrix és ezeket, mint konstans mátrixokat kezelhetjük. (Lehetnek célszerűen választott egyszerű mátrixok)

A módszer idő és hely-szükséglete.

A módszert akkor célszerű használni, ha az (1) feltételek helyett az

$$(6) \quad a_{ij} = 0, \quad |j-i| > k, \quad a_{i\ i+k} \neq 0$$

feltételek teljesülnek. Ebben az esetben  $A$  úgynevezett szalagmátrix. Vizsgáljuk a számoláshoz szükséges szorzások és osztások számát. Egy  $x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{km}$  értékrendszerből kiindulva a hozzátartozó  $d_{n-k+1\ m}, d_{n-k+2\ m}, \dots, d_{nm}$  mennyiségek kiszámolásához

$n(2k+1) - k^2$  szorzás illetve osztás kell. Ezeket a számolásokat  $k+2$ -szer kell elvégezni ( $k+1$ -szer ahhoz, hogy a mátrixot megkapjuk és a végén egy visszahelyettesítést kell végezni). A  $C$  mátrixot a (4)-ből  $k(k+1)^2$  művelettel kapjuk, majd az (5) egyenletrendszer megoldásához  $\frac{k}{3}(k^2+3k-1)$  számú művelet kell. Összesen  $n(2k^2+5k+2) + \frac{k}{3}(k^2+3k+2)$ .

Hasonlítsuk össze az így kapott műveleti igényt a Gauss eliminációs eljárásból  $n \times n$ -es egyenletrendszerre adódó  $\frac{n}{3}(n^2+3n-1)$ -es műveletigénnyel. Az összehasonlítást az alábbi táblázat mutatja:

n	10		100					1000				
Gauss elimináció műveletigénye	430		$3,4 \cdot 10^5$					$3,3 \cdot 10^8$				
k	1	2	1	2	5	10	1	2	5	10	100	
Az ismertett módszer műveletigénye	92	206	$9 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^3$	$7,8 \cdot 10^3$	$2,6 \cdot 10^4$	$9 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$	$7,7 \cdot 10^4$	$2,5 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^7$	

A táblázatból látható, hogy a módszer használata akkor célszerű, amikor  $n$  nagy és a  $k$   $n$ -hez viszonyítva kicsi.

A módszer alkalmazásához az egyenletrendszer mátrixát célszerű  $n \times (2k+1)$ -szeres két dimenziós tömbben tárolni. Ezenkívül célszerű a két dimenziós  $X$  és  $X^{-1}$  konstans mátrixokat előre elhelyezni. Szükség van még a  $C$  illetve  $D(k+1) \times k$  méretű kétdimenziós tömbökre.

Mint ahogy a módszer használata közben az  $A$  mátrix nem változik, a számológép memóriájában csak egyszer kell a mátrixot felépíteni, a számoláshoz pedig csak olvasni kell a mátrix elemeit. Ezt célszerűen ki lehet használni abban az esetben, ha az egyenletrendszer  $n \times (2k+1)$  méretű mátrixa nem fér el a számológép operatív memóriájában.

#### Szám példa:

A módszer használatát a következő egyszerű szám példán mutatjuk be: legyen a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0,64 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3,48 \\ 4x_2 - x_3 &= -1,96 \end{aligned}$$

Az  $x_{11} = 0$  értékből indulva  $x_{21} = 0.32$ ,  $x_{31} = 3.80$ ,  $d_{31} = -0.56$ , az  $x_{12} = 1$ -ből pedig  $x_{22} = -0.18$ ,  $x_{32} = 1.30$ ,  $d_{32} = -0.06$  értékek adódnak. A  $(0, -0.56)$  és  $(1, -0.06)$  pontokon átmenő egyenes az  $x = 1.12$  pontban metszi az  $x$  tengelyt. Az egyenletrendszer megoldása további helyettesítésekkel  $x_1 = 1.12$ ,  $x_2 = -0.24$ ,  $x_3 = 1.00$ . (Számpéldánk esetén  $n = 3$ ,  $k = 1$ ,  $X = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$ ,  $X^{-1} = \begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$ ,  $D = \begin{Bmatrix} -0.56 \\ -0.06 \end{Bmatrix}$ ).

### Summary

#### A solution of linear equations with band matrix.

The paper discusses a quick, direct method for solution of linear equations in which the coefficient matrix is band matrix with property (6).

### Резюме

#### Решение систем линейных уравнений лентными матрицами

В статье написан скорый прямой метод для решения систем линейных уравнений, в которых матрицы коэффициентов лентные матрицы по (6).



Komplex mátrixok sajátértékeinek meghatározása a  
"hasonlósági elimináció" módszerével

Varga Gyula

A jelen cikk folytatását és általánosítását tartalmazza egy, az MTA Számítástechnikai Központja Közleményeiben megjelent hasonló témájú cikknek [3], amely mátrixok valós sajátértékeinek meghatározásával foglalkozik az ún. "hasonlósági elimináció" módszerével. [1] Ennek alap gondolata az, hogy az adott mátrixot hasonlósági transzformációk egymásutánjával háromszögalakúvá változtatja, melynek főátlójában az eredeti mátrix sajátértékei helyezkednek el. Másszóval, valamely  $m \times m$ -es  $A$  mátrix összes sajátértékének meghatározásához az  $A^{(1)} = A$ ,  $A^{(p+1)} = C_p^{-1} \cdot A^{(p)} \cdot C_p$ ,  $A^{(p)} = \{a_{i,k}^{(p)}\}$ ,  $(p=1, \dots, n-1)$  transzformációk sorozatát kell végrehajtani, hogy a mátrix  $p$ -edik oszlopának főátló alatti elemeit rendre eliminálhassuk. A transzformációk végrehajtásához szükséges  $C_p$  mátrixokat az alábbi módon adhatjuk meg:

$$(1) \quad C_p = E - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{m-p} \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix} \cdot [0, \dots, 0, \overset{p}{1}, 0, \dots, 0]$$

A  $C_p$ -ben szereplő  $m-p$  db ismeretlen értéket az elimináció feltételének megfelelően egy  $m-p$  ismeretlenes másodfokú egyenletrendszer megoldásaként kaphatjuk meg; eszerint

$$(2) \quad a_{j+p,p}^{(p+1)}(x_1, \dots, x_{m-p}) = 0 \quad (j = 1, \dots, m-p).$$

Az említett cikk azt az esetet tárgyalja, amikor a szükséges transzformációk csupa valós  $x$  értékek segítségével végrehajthatók, másszóval az eredeti mátrix elemei valósak, és a mátrix csupa valós sajátértékekkel rendelkezik. A módszer azonban, bizonyos változtatásokkal, komplex elemű mátrixok sajátértékeinek, ill. valós elemű mátrixok komplex sajátértékeinek kiszámítására is alkalmas.

Ha a valós  $x_1, \dots, x_{m-p}$  értékek helyett megengedjük a komplex  $z_1, \dots, z_{m-p}$  mennyiségeket, akkor az

$$(3) \quad f_j(z) = a_{j+p,p}^{(p+1)}(z_1, \dots, z_{m-p}) = 0 \quad (j = 1, \dots, m-p)$$

$m-p$  egyenletről álló  $m-p$  ismeretlenes komplex egyenletrendszer a  $z_j = x_{2j-1} + x_{2j} \sqrt{-1}$  egyenlőségéből adódó valós  $x_{2j-1}, x_{2j}$  mennyiségek meghatározására szétesik egy

$$(4) \quad \begin{aligned} \bar{f}_{2j-1}(x_1, \dots, x_{2(m-p)}) &= 0 \\ f_{2j}(x_1, \dots, x_{2(m-p)}) &= 0 \end{aligned} \quad (j = 1, \dots, m-p)$$

vagy egyszerűbben írva egy

$$(5) \quad \hat{f}_i(x_1, \dots, x_{2(m-p)}) = 0 \quad [i = 1, \dots, 2(m-p)]$$

$2(m-p)$  egyenletről álló  $2(m-p)$  ismeretlenes valós egyenletrendszerre. Mivel ugyanilyen egyenletrendszerhez jutunk akkor is, ha az eredeti mátrix elemei komplex számok, azért ez a módszer valós elemű mátrixok komplex sajátértékeinek meghatározásán kívül komplex elemű mátrixok sajátértékeinek meghatározására is felhasználható.

Az (5) egyenletrendszert a Newton-Raphson-módszer [2] segítségével akarjuk megoldani. Az

$$(6) \quad \underline{x}^{[k+1]} = \underline{x}^{[k]} - \mathcal{J}^{-1} \cdot \hat{F}(\underline{x}) \Big|_{\underline{x}=\underline{x}^{[k]}}; \quad \left( \hat{F}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \hat{f}_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ \hat{f}_{2(m-p)}(\underline{x}) \end{bmatrix} \right)$$

iteráció végrehajtásához szükséges  $\mathcal{J}$  Jacobi-féle mátrix elemeit a cikkben látottakhoz hasonlóan (komplex változókra áttérve) a következőképpen kaphatjuk meg ( $n = m-p$  jelöléssel,  $j = 1, \dots, n$ ;  $h = 1, \dots, n$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_{2j-1}}{\partial x_{2h-1}} &= \delta_{n-j+1, h} \left[ a_{p,p} - \sum_{\ell=1}^n (a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell-1} - b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell}) \right] - \\ &- a_{j+p, m+1-h} - a_{p, m+1-h} \cdot x_{2(n-j+1)-1} + b_{p, m+1-h} \cdot x_{2(n-j+1)}; \end{aligned}$$

$$- \frac{\partial \hat{f}_{2j}}{\partial x_{2h}} = \frac{\partial \hat{f}_{2j-1}}{\partial x_{2h-1}}$$

$$\frac{\partial \hat{f}_{2j}}{\partial x_{2h-1}} = \delta_{n-j+1, h} \left[ b_{p,p} - \sum_{\ell=1}^n (a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell} + b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell-1}) \right] -$$

$$- b_{j+p,m+1-h} - a_{p,m+1-h} \cdot x_{2(n-j+1)} - b_{p,m+1-h} \cdot x_{2(n-j+1)-1};$$

$$\frac{\partial \hat{f}_{2j-1}}{\partial x_{2h}} = - \frac{\partial \hat{f}_{2j}}{\partial x_{2h-1}} .$$

A Newton-Raphson-módszer alkalmazásához szükséges lineáris egyenletrendszer jobboldalán álló vektor  $(-\hat{F})$  elemei  $(j = 1, \dots, n)$  :

$$-\hat{f}_{2j-1} = -a_{j+p,p} - a_{p,p} \cdot x_{2(n-j+1)-1} + b_{p,p} \cdot x_{2(n-j+1)} +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^n [x_{2\ell-1} \cdot (a_{j+p,m+1-\ell} + a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)-1} -$$

$$- b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)}) - x_{2\ell} \cdot (b_{j+p,m+1-\ell} +$$

$$+ a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)} + b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)-1})];$$

(8)

$$-\hat{f}_{2j} = -b_{j+p,p} - a_{p,p} \cdot x_{2(n-j+1)} - b_{p,p} \cdot x_{2(n-j+1)-1} +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^n [x_{2\ell-1} \cdot (b_{j+p,m+1-\ell} + a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)} +$$

$$+ b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)-1}) + x_{2\ell} \cdot (a_{j+p,m+1-\ell} +$$

$$+ a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)-1} - b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)})];$$



Az iteráció végrehajtásához kezdő közelítésként valós mátrix esetén az  $x_{2j-1} = 0$ ,  $x_{2j} = 1$  ( $j = 1, \dots, n$ ) értékeket, komplex mátrix esetén  $\underline{\lambda} = \underline{0}$ -t célszerű venni. Az egyenletrendszernek több gyökrendszere is lehet, ezek közül bármelyik felhasználható a mátrix sajátértékeinek meghatározására. A különböző gyökrendszerek csak a mátrix sajátértékeinek sorrendjét befolyásolják. A transzformációra tett megfontolásaink alapján, az egyenletrendszer megoldása után az  $x_1, \dots, x_{2n}$  mennyiségekből  $\lambda_p$  valós és képzetes részét az alábbiak szerint kapjuk meg:

$$(9) \quad \lambda_{p_v} = a_{p,p} - \sum_{\ell=1}^n (a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell-1} - b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell});$$

$$\lambda_{p_k} = b_{p,p} - \sum_{\ell=1}^n (a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell} + b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell-1});$$

Az eljárás folytatásához a mátrix elemeinek transzformációját csak az

$$i = p+1, \dots, m$$

$$\ell = p+1, \dots, m$$

indexű elemekre kell felírnunk:

$$(10) \quad a_{i,\ell}^* = a_{i,\ell} + a_{p,\ell} \cdot x_{2(m-i)+1} - b_{p,\ell} \cdot x_{2(m-i)+2};$$

$$b_{i,\ell}^* = b_{i,\ell} + a_{p,\ell} \cdot x_{2(m-i)+2} + b_{p,\ell} \cdot x_{2(m-i)+1}.$$

Az eredeti mátrix háromszög mátrixszá való átalakítása  $m-1$  lépésben történt. Mindegyik lépés után egy-egy komplex (esetleg valós) sajátértéket kaphatunk meg. Az utolsó sajátértéket az  $m-1$ -edik transzformáció után a mátrix jobb alsó sarokeleme adja meg.

Az eljárás leírásából látható, hogy valamely  $m \times m$ -es mátrix összes sajátértékének meghatározása

egy  $2m-2$  ismeretlenes,

egy  $2m-4$  - " -

sit.

s végül egy  $2$  - " - másodfokú egyenletrendszer megoldását kívánja meg.

Az eredmények pontosságát valós mátrix esetén a számítás folyamán kapott konjugált komplex sajátértékpárok összehasonlításával becsülhetjük. Mivel az itt leírt módszer az említett cikk eljárásának általánosítása, valós sajátértékek meghatározására is alkalmas. A módszerrel továbbá többszörös sajátértékek is megbízhatóan számolhatók. A leírt módszer programja az Ural 2 gépre készült EFT autokódban, továbbá a Gier-gépre ALGOL-ban, ezenkívül elkészült és lefutott a CDC 3300-as gépen az eljárás ALGOL-ban és FORTRAN-ban írt programja.

I r o d a l o m

- [1] Wilkinson: The algebraic eigenvalue problem (Clarendon Press Oxford 1965)
- [2] Березин-Жидков: Методы вычислений (Физматгиз Москва, 1962)
- [3] Varga Gyula: Mátrixok sajátértékeinek meghatározása a hasonlósági elimináció módszerével (MTA SzK Közlemények 1969. 5.sz.)

S u m m a r y

Determination of the eigenvalues of complex matrices by the method of similarity elimination.

The paper deals with the determination of the eigenvalues of complex matrices. The method consists in the transformation of the given matrix with the aid of similarity transformations to a triangular matrix in whose diagonal the eigenvalues of the given matrix sought for can be found.

Р е з ю м е

Об определении собственных значений комплексных матриц  
методом исключения подобия

Статья занимается определением собственных значений комплексных матриц с помощью метода исключения подобия. Метод исключения подобия состоит в превращении данной матрицы преобразованиями подобия в треугольную, в главной диагонали которой находятся собственные значения данной матрицы.

Néhány tapasztalat a nagyméretű lineáris programozási feladatok megoldásával kapcsolatban

Srajber Benedek

1. Általános megjegyzések

Napjainkban a népgazdaság legkülönbözőbb területein merülnek fel lineáris feltételrendszerrel megfogalmazható optimalizálási feladatok. Ezek megoldására a leggyakrabban használható és jól bevált algoritmusok az egyszerű és módosított szimplex módszer. Ezeket használják fel a speciális nagyméretű Dantzig-Wolfe féle -- lépcsős -- és láncolt szerkezetű feladatok megoldására szolgáló eljárások is. Az alábbiakban a nagyméretű feladatok szemszögéből nézve vizsgáljuk az említett módszerek hatékonyságát.

Legyen a megoldandó feladat

$$Ax = b$$

(1)

$$c \cdot x \rightarrow \max,$$

ahol  $A$   $m$  sorból (feltételből) és  $n$  oszlopból (változóból) álló mátrix,  $x$  a változók,  $b$  a szokásos jobboldal,  $c$  pedig a célfüggvény koefficienseinek vektora. Tekintetbe kell vennünk a következő korlátozó tényezőket:

- a./ a rendelkezésünkre álló gép központi memóriájának kapacitása,
- b./ a gép műveleti sebessége,
- c./ a külső perifériák viszonylag hosszú elérési ideje,
- d./ stabilitási kérdések.

2. Az alapmátrix zéro elemeinek kihasználása

Az a./ nehézségen érdemlegesen akkor segíthetünk, ha az (1) feladat  $A$  mátrixában sok a nulla elem, ami egyébként gyakori eset. A táblázat zéro elemeinek kihasználását a nem nulla elemek koordinátás tárolásával oldottuk meg. Egy módosított szimplex változatban az  $A$  mátrix tárolását egy  $n$ -dimenziós és két  $k$ -dimenziós ( $k$  az  $A$  nem nulla elemeinek száma) vektor bevezetésével helyettesítettük. Az így megoldható feladatok méreteire vonatkozóan  $k$  függvényében, (az ICT-1900-as gépet alapul véve és az inverzet mágnesszalagon tárolva), a következő becslések adódnak:

\* A szerző 1966-68 évi, GIER és ICT. 1900 számítógépeken szerzett tapasztalatai, amikor még Orchard-Hays "Advanced Linear-Programming Computing Techniques" és E.M.L. Beale "Topics in Operational Research Series" könyve nem állt rendelkezésre.



Helyfoglalás a memóriában:  $3k + 13m + 3n +$  program. Célravezető a koordinátás tárolás, ha

$$(2) \quad k < \frac{n \cdot m - n}{2},$$

ami gyakorlatilag azt jelenti, hogy  $A$  elemeinek legalább a fele nulla. Néhány szóbajöhető alkalmazást tüntet fel a következő táblázat, amelynek első sorában összehasonlítás végett a teljes mátrix tárolásának esetét tüntettük fel:

	k	m	n
1.	Teljes táblázat	100	150
2.	6750	100	150
3.	6160	200	300
4.	5000	300	1000
5.	5000	400	600

### 3. A Dantzig-Wolfe féle dekompozíciós algoritmus programozási tapasztalatairól

A megoldandó feladat:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_k x_k = b_0$$

$$B_1 x_1 = b_1$$

$$B_2 x_2 = b_2$$

$$B_k x_k = b_k$$

$$c \cdot x \rightarrow \max$$

ahol a  $B_i$  mátrixok szektorokat, az  $A_i$ -k pedig a központ szektoroknak megfelelően particionált mátrixai. Az  $x_i$ -k a változók particionált vektorai, így az összes változót tartalmazó vektor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ;  $c$  a célfüggvény együtthatók vektora.

A megoldásra szolgáló algoritmus, amelynek lényege, hogy a teljes megoldást a szektorok megoldásainak konvex kombinációjaként állítja elő, két részre bontható: szektorszintű és központi feladatra. A számításokat ennek megfelelően végeztük el a GIER számológépen.

Ismeretes, hogy a feladat megoldására a módosított szimplex módszer használata a kézenfekvő. Minthogy azonban korábbi tapasztalataink (az ELLIOTT-803 gépen) a módszer konvergenciájának rendkívüli lassúságát igazolták, valamelyest azzal is gyorsítani kívántunk, hogy a szektorszintű számításokat egyszerű szimplex módszerrel végeztük. (Az egyszerű szimplex módszer jelentősen gyorsabb a módosított szimplexnél). Egy viszonylag kisméretű ( $m = 50, n = 80$ ) háromszektoros fel-

adatot ALGOL programmal futtattunk le és az több órát vett igénybe. Ugyanaz a feladat az egyszerű szimplexszel 25, a módosított szimplexszel 40 percig tartott. Nyilvánvaló, hogy a tetemes időigény miatt ezres méret körüli feladatok szóba sem jöhettek. A módszer eredményessége csak rendkívül gyors, nagy memóriájú és jó perifériákkal rendelkező géppel biztosítható. A gyors központi memóriával és lemeztárolókkal rendelkező CDC 3300 bizonyára alkalmas lesz a módszer eredményessé tételére.

#### 4. Egy lehetőség nagyméretű feladatok megoldására szimplex módszerrel

Tapasztalatunk azt mutatja, hogy a szimplex algoritmus alkalmazása körülbelül 200 x 200-as méretig a legtöbb esetben pontos eredményt szolgáltat. E fölött azonban egyre inkább jelentkezik az l.d./ probléma. A táblázat stabilitásának megőrzésére több lehetőség van. Például változtatható szóhosszakkal operálni, vagy a módosított szimplex esetén a szorzatalakban tárolt inverz időnkénti újraképzésével. Az alábbi, egyszerű szimplex módszer esetén alkalmazott fogás bizonyos esetekben ugyancsak célravezetőnek bizonyul.

Abból a megállapításból indulunk ki, hogy a legdurvább hibák a szimplex táblázat transzformációjánál akkor lépnek fel, midőn egy bevonásra kerülő (pivot) oszlop generáló eleme zérushoz nagyon közel eső érték (pl.  $< 10^{-6}$  -nál). Egy-két ilyen oszlop bevonása teljesen lehetetlenné teheti az iteráció folytatását. Hasonlóan bajt okozhat, ha a pivot elem túlságosan nagy. Jelentős hiábát okozhat olyan pivot elem is, amely nagyságrendileg erősen különbözik a táblázat elemeitől. Ezeket a nagy hibaforrásokat úgy csökkenthetjük jelentősen, ha az ilyen jellegű pivot elemeket elkerüljük (ha lehetséges!). Ezért minden egyes iterációnál a legjobban javító oszlopok közül, több oszlopot (számuk megadható) veszünk figyelembe. Összehasonlítjuk a szóbajöhethető generáló elemeket és azon oszlopot vonjuk be a bázisba, amelyre a karakterisztikus hányados 1-től való eltérése a legkisebb.

Pontosabban:

Legyenek  $P_1, P_2, \dots, P_k$  a bevonható oszlopvektorok, koordinátáik  $p_{ij}$ -k és  $x$  a pillanatnyi bázismegoldás. (Valamennyi vektor mérete  $m$ .)

Bevonásra kerül az a  $P_{j_0}$  oszlop, amelyre a

$$\min_{(j)} \left| 1 - \min_{\substack{(i) \\ p_{ij} > 0}} \frac{x_i}{p_{ij}} \right| \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

teljesül. Nyilvánvaló, hogy ez a legkedvezőbb választás a következő iterációs lépésre nézve.

Igaz, a válogatás idővesztéssel jár és tény az is, hogy így nem a maximális javítás irányában közeledünk az optimumhoz, de ezt ellensúlyozhatjuk azzal, hogy azon  $k$  darab vektort, amelyek közül előzőleg választottunk, megjegyezzük és a következő iterációnál azok közül vonjuk be a legkedvezőbbet. Így egy-egy válogatást követően több iteráción keresztül is elkerülhetjük az összes oszlop vizsgálatát, ami bőven pótolja az okozott idővesztést.



I r o d a l o m

- [1] Walter W. Garvin, Introduction to Linear Programming Mc Graw-Hill Book Company, 26-37  
191-203, 1960.
- [2] Dantzig, Linear Programming and Extensions Princeton, 1963.
- [3] Dantzig - Wolfe, Decomposition Principle for Linear Programs. Operations Research 8:  
101-111 (1960).
- [4] G. Hadley, Linear Programming. Addison-Wesley Publishing Company, 1962.  
Addison-Wesley Publishing Company, 1962.

S u m m a r y

Some experiences in connection with solving linear programming problems of large size.

The paper deals with the utilization of the zero places of a large matrix, while the non-zero elements of the matrix are stored in co-ordinata form in the memory.

The third point involves some practical experiences about the algorithm of Dantzig-Wolfe. The last part gives a possibility for solving problems of large size with the simplex method. This possibility includes the selection of the pivot element maintaining the stability of the problem and simultaneously entering the basis with more than one variable.

Р е з ю м е

Несколько опытов, связанных с решением задач линейного программирования большого размера.

Статья занимается вопросом оптимального использования наличия в матрицах большого порядка большого числа нулевых элементов; ненулевые элементы матрицы содержатся в памяти машины в координатном виде.

В третьем пункте находится описание нескольких практических опытов, связанных с алгоритмом Данцига-Волфа.

Последняя часть показывает одну возможность для решения задач большого размера с помощью симплексного метода. Эта возможность содержит в себе выбор такого пивот-элемента, который сохраняет устойчивость задачи и вступление в базис больше одного переменного при одной итерации.



Multiterminális minimális út feladat megoldási  
módszerei és alkalmazásai

Bakó András

Két pont közötti legrövidebb út probléma számítástechnikailag leggyorsabb és legkönnyebben programozható megoldását Ford [4] és Dijkstra [7] adta. További speciális minimális út feladat megoldása található az irodalomjegyzékben [10], [11], [15]. A gyakorlati szempontból igen fontos multiterminális minimális út probléma megoldásával igen sok szerző foglalkozott. A dolgozatban összefoglaljuk és számítástechnikai szempontból értékeljük a megoldási módszereket. Végül néhány, gyakorlati szempontból fontos problémát sorolunk fel, amelyek a leírt módszerek valamelyikével megoldhatók.

1. Jelölések, definíciók

Legyen  $N = (x, y, \dots)$  véges sok pontból álló halmaz és  $E$  az  $N$  halmaz bizonyos pontjait összekötő irányított élek halmaza. Jelöljük az  $x$  pontból az  $y$  pontba vezető élt  $(x, y)$ -nal. Az  $(N, E)$ -t irányított gráfnak vagy digráfnak nevezzük. Tekintsük az  $E$  halmazon értelmezett  $t(x, y) \geq 0$  egészértékű függvényt. A  $t(x, y)$  függvényt szokás az  $y$  pont  $x$  ponttól való távolságának nevezni. A  $t(x, y)$  függvényről nem tesszük fel, hogy szimmetrikus. Az  $(N, E, t)$ -t hálózatnak nevezzük.

A multiterminális minimális út feladat: meghatározni az összes pontpárt összekötő minimális távolságú utakat.

Ha a gráf nem volt teljes, teljessé tesszük a  $t$  függvény kiterjesztésével:  $t(x, x) = 0$  és  $t(x, y) = \infty$ , ha  $(x, y) \notin E$ . A fenti feladat megoldását mátrix műveletek, speciális mátrix szorzások egy sorozataként kapjuk.

2. A feladat megoldási algoritmusai

Az első megoldási algoritmust Bellman [1] és Simbell [16] adta. A módszer alapötlete dinamikus programozási elven nyugszik: egy út akkor és csakis akkor minimális, ha mindenegyik részútja is az a megfelelő pontok között.

Az  $x$  pontból az  $y$  pontba menő legfeljebb  $r$  élből álló minimális távolságú utat  $r$ -optimálisnak nevezzük. Az optimális, a fenti definíciónak megfelelően  $(n-1)$ -optimális utakat  $n-1$  lépésben kapjuk meg, ahol  $n$  az  $N$  halmaz pontjainak a száma. A számolásnál kiindulunk a  $t(x, y)$  függvényértékekből alkotott  $L_{n \times n}^{(1)}$  mátrixból. Ebből meghatározzuk az  $L_{n \times n}^{(2)} = (l_{ij}^{(2)})$  2-optimális utakat. Az  $L^{(1)}$  és  $L^{(2)}$  mátrixból a 3-optimális utakat. A fenti lépéseket egészen addig ismételjük, ameddig az  $L^{(n-1)}$  mátrixot megkapjuk. Az algoritmust a következő mátrix művelettel adjuk meg:

$$(1) \quad L_{n \times n}^{(k)} = L_{n \times n}^{(k-1)} \otimes L_{n \times n}^{(1)}$$

ahol

$$L^{(1)} = (\ell_{ij}^{(1)}) = (t(p_i, p_j)) \quad p_i, p_j \in N$$

és a  $\otimes$  művelet

$$\ell_{ij}^{(k)} = \min_r (\ell_{ir}^{(1)} + \ell_{rj}^{(k-1)})$$

Az  $L^{(r)}$  mátrixot kiszámoljuk  $r = 2, 3, \dots, n-1$  értékre az 1-gyel megadott mátrixművelettel. Ez a módszer módosítható úgy, hogy az út hosszán kívül még az útvonalat is megkapjuk.

A feladat megoldására Warschall [17] 1962-ben közölte le módszerét. A módszer ALGOL programját Floyd [6] írta le. Lényegében ugyanezt az eljárást írja le Murchland [13] és ezt használja fel dolgozatában Hu [8].

Warschall az  $L^{(0)} = (\ell_{ij}^{(0)}) = (t(p_i, p_j))$  mátrixból az optimális  $L^{(n)}$  mátrixot  $n$  egymásutáni mátrix transzformációval kapja.

Az  $L^{(k)}$  mátrixot az  $L^{(k-1)}$  mátrixból határozzuk meg a következőképp:

$$L^{(k)} = L^{(k-1)} \otimes L^{(k-1)},$$

ahol a  $\otimes$  művelet

$$\ell_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \ell_{ij}^{(k-1)} & i = k \text{ vagy } j = k \text{ esetén} \\ \min (\ell_{ij}^{(k-1)}, \ell_{ik}^{(k-1)} + \ell_{kj}^{(k-1)}) & \end{cases}$$

A Bellman – Simbell módszert Narahary [14] 1961-ben majd Hu [9] 1967-ben továbbfejleszti. Az általuk leírt módszer matematikailag elegáns, könnyen programozható, azonban az eredeti módszerrel szemben csak az útvonal hosszát adja meg, magát az útvonalat nem.

A dinamikus programozási módszer egy más irányú módosítását közli Dantzig [3] 1966-ban. Eljárásában a  $k$ . lépésben egy  $k \times k$  méretű mátrixot határoz meg, amely a  $p_1, p_2, \dots, p_k$  pontokon átmenő minimális hosszúságú utat adja meg a  $p_i$  pontból a  $p_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, k$ ) pontba.

A  $k+1$ -edik mátrix együtthatóját a  $k$ . mátrixból a következőképp határozza meg:

a./ kiszámolja az  $\ell_{i,k+1}^{(k+1)}$  és az  $\ell_{k+1,i}^{(k+1)}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) elemeket:

$$\ell_{i,k+1}^{(k+1)} = \min_{1 \leq j \leq k} (\ell_{ij}^{(k)} + \ell_{j,k+1}),$$



$$l_{k+1,i}^{(k+1)} = \min_{1 \leq j \leq k} (l_{ij}^{(k)} + l_{k+1,j})$$

b./ a kiszámolt  $k+1$ -edik sor és oszloppal transzformálja az  $l_{ij}^{(k)}$  ( $i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, k$ ) elemeket:

$$l_{ij}^{(k+1)} = \min (l_{ij}^{(k)}, l_{i,k+1}^{(k+1)} + l_{k+1,j}^{(k+1)})$$

Módszerével az optimális úthosszakat tartalmazó mátrixot  $n-1$  lépés után kapjuk meg.

### 3. Számítástechnikai megjegyzések

A Bellmann-Simbell módszernél  $(n-1)^4$  összeadást, illetve összehasonlítást kell végezni. Eredményképp az útvonalak hosszát kapjuk. Magát az útvonalat az algoritmus némi módosításával meg tudjuk határozni.

Az eljárást egy kis módosítással gyorsíthatjuk. E célból a  $\otimes$  műveletet a következőképp definiáljuk:

$$L^{(m+n)} = L^{(m)} \otimes L^{(n)},$$

azaz

$$l_{ij}^{(m+n)} = \min_k (l_{ik}^{(m)} + l_{kj}^{(n)})$$

A fenti képlet az optimalizációs elv miatt igaz. A legcélszerűbb 2 hatványai szerint haladni, azaz az  $L^{(1)}, L^{(2)}, L^{(4)}, L^{(8)}, \dots$  mátrixokat meghatározni az  $L^{(2k)} = L^{(k)} \otimes L^{(k)}$  képletből. Az optimális utak hosszát akkor kapjuk meg, ha valamely  $k$ -ra  $L^{(2k)} = L^{(k)}$ . A módosítás után az összehasonlítások, illetve összeadások száma  $k(n-1)^2$ , ahol  $k = \lceil \log_2(n-1) \rceil + 1$ .

Ez a módszer viszont nem módosítható úgy, hogy az útvonalat is meg tudjuk határozni.

Elektronikus számológéppel való számoláshoz tárolni kell az  $L^{(k)}$  és  $L^{(2k)}$  mátrixokat – azaz  $2n^2$  tárolóhelyre van szükség. FORTRAN nyelven írt program esetén – kihasználva a CDC gépen megengedett 24 bites opciót – elegendő  $2n^2$  rövid szó tárolóhely. Számítástechnikai trükkkel ez a szám  $n^2$ -re csökkenthető. Tudniillik lehet a két matrixot ugyanazon a helyen tárolni. Ehhez viszont a mátrix elemei egyik lépésben sem lehetnek 999-nél nagyobbak.

A Hu [9] algoritmushoz  $2n(n-1)$ , a Dantzig módszerhez  $n(n-1)(n-2)$  összehasonlítása, illetve összeadásra van szükség.

A Warschall eljárásnál az összeadások, illetve az összehasonlítások száma  $n(n-1)(n-2)$ . Ez több, mint a dinamikus programozási módszer számítási igénye. Viszont ezzel a módszerrel az



útvonalat is könnyen meg tudjuk határozni. Ekkor egy további  $M_{n \times n}$  mátrixra van szükség. A mátrix a minimális utaknál szokásos címkéket tartalmazza. Kiinduláskor  $M^{(0)} = (m_{ij}^{(0)}) = j$ .

A  $k$ -adik lépésben a mátrix elemeit a következőképp módosítjuk:

$$m_{ij}^{(k)} = \begin{cases} m_{ij}^{(k-1)}, & \text{ha } l_{ij}^{(k-1)} < (l_{ik}^{(k-1)} + l_{kj}^{(k-1)}) \\ m_{ik}^{(k-1)} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az  $M^{(k)}$  mátrix transzformálásával a számolási idő az eredeti számolási időhöz képest kis mértékben emelkedik. A fent említett módszereket és megjegyzéseket összegezve a következőre jutunk:

- Ha az útvonalak hosszára van szükség, a leggyorsabb eljárás a Hu eljárás, majd ezután a négyzetes hatványokkal számoló Bellman-Simbel eljárás.
- Ha az útvonalakat is meg akarjuk határozni, legcélszerűbb a Warschall módszert használni.
- Ha a megoldandó feladat mérete meghaladja a számológép belső memóriájának kapacitását, akkor a fenti módszerek nem alkalmazhatók. Ha a feladat mérete nem sokkal nagyobb a memóriaméretnél (kb. 50 %-kal nagyobb), akkor Dijkstra [7] módszerét minden pontpárra alkalmazva meg tudjuk határozni a multiterminális utat.

Ha a feladat mérete a fenti korlátnál is nagyobb, akkor a Warschall eljárást használjuk dekompozícióval. Az első dekompozíciós módszert Mills [12] közölte. Számítástechnikai szempontból sokkal célszerűbb és matematikailag is elegánsabb Hu [8] által közölt eljárás. Ezzel az eljárással többszörös dekompozícióval elméletileg tetszés-szerinti nagyságú feladatot meg tudunk oldani. Gyakorlatilag természetesen határt szab a számolási és input-output idő.

- Eddig feltettük, hogy  $t(x, y) \geq 0$ . Ezt a feltételt elhagyva a feladatot megoldhatjuk a Warschall eljárással. Ha negatív ciklus van a hálózatban, akkor a minimális út feladat nincs egyértelműen megfogalmazva. Ciklus keresésére felhasználhatjuk az  $L^{(k)}$  mátrix fődiagonalizálását. Ekkor azonban  $l_{ii}^{(0)} = \infty$  az eredeti  $l_{ii}^{(0)} = 0$  definíció helyett. Ha az  $l_{ii}^{(k)}$  értéke negatívvá válik, akkor a hálózatban negatív ciklus van.

#### 4. Megoldható gyakorlati problémák

Mint azt a bevezetésben is említettük, a multiterminális utat meghatározó algoritmusokat más feladatok részfeladatainak megoldására is felhasználhatjuk. Alább felsorolunk néhány ilyen jellegű feladatot. További hasonló típusú alkalmazási lehetőségekkel foglalkozik a [2], [4], [5], [8].

- Tekintsük a következő valószínűségszámításban előforduló problémát. A feladatban az  $(x, y) \in E$  élen nem a távolságfüggvény van megadva, hanem annak a valószínűsége, hogy az  $x$  pont az  $y$  ponttal össze van kötve. A feladat: meghatározni az összes pontpár között azt az utat, amely összekötésének a valószínűsége maximális. A  $P = (p_0, p_1, \dots, p_k)$

út létezésének valószínűségét az élek létezési valószínűségeinek szorzataként definiáljuk, azaz

$$v(P) = \prod_{i=0}^{k-1} t(p_i, p_{i+1}),$$

ahol  $t(p_i, p_{i+1})$  a  $p_i$  és  $p_{i+1}$  él létezésének valószínűsége. A feladat megoldható a Warschal eljárással. A  $\otimes$  műveletet a következőképp kell átfogalmazni:

$$l_{ij}^{(k)} = \max_j (l_{ij}^{(k-1)}, l_{ik}^{(k-1)} \cdot l_{kj}^{(k-1)})$$

Megjegyezzük, hogy a feladat megoldható a dinamikus programozási elven alapuló Bellman – Simbell módszerrel is, és ha az útvonal meghatározása érdektelen, a feladat megoldása sokkal gyorsabb.

- b./ Egy ciklus-nélküli hálózatban sokszor előfordul, hogy meg akarjuk határozni a leghosszabb utat. Például CPM vagy PERT esetén nem akarjuk megoldani a teljes feladatot, csak a minimális elvégzési időt akarjuk meghatározni.

Az  $L^{(0)} = (l_{ij}^{(0)})$  mátrixot definiáljuk a következőképp:

$$l_{ij}^{(0)} = t(p_i, p_j), \quad \text{ha } (p_i, p_j) \in E \quad i \neq j$$

$$l_{ii}^{(0)} = 0$$

$$l_{ij}^{(0)} = -M \quad (p_i, p_j) \in E$$

esetén, ahol  $M \geq 0$  a leghosszabb út egy felső korlátja. A feladat a  $\otimes$  műveletet megfelelően definiálva szintén megoldható az 1. alatt elmondott módszerek bármelyikével.

- c./ Városi vagy országúti útvonalak, új utak beállításánál, a forgalom hálózatra való ráterhelésnél és egész sor egyéb, ezen témakörhöz kapcsolódó feladatnál részfeladatok megoldására használjuk a multiterminális út probléma valamelyik megoldási algoritmusát.



I r o d a l o m

- [1] R. Bellman, "On a Routing Problem", Quart. Appl. Math. 1, 16-20 (1958).
- [2] C. Berge, Theory of Graphs, Methuen, London 1962, p. 138.
- [3] G.B. Dantzig, All Shortest Routes in a Graph, Operations Research House, Stanford University, Technical Report 66-3, November 1966.
- [4] L.R. Ford Jr., Network Flow Theory, The Rand Corporation, P-923, Augus 1956.
- [5] B.A. Farbey, – A.H. Land – J.D. Murchland, The cascade Algorithm for finding the minimum distance, Report LSE – TVT – 19, London School of Economics, 1965.
- [6] R.W. Floyd, "Algorithm 97, Shortest Path", COM. ACM 5, 345 (1962).
- [7] E.W. Dijkstra, "A Note on Two Problems in Connection with Graphs", Numerische Math. 1. 269-271 (1959).
- [8] T.C. Hu, "A Decomposition Algorithm for Shortest Path in a Network", Opns. Res. 16, 91-102 (1968).
- [9] T.C. Hu, "Revised Matrix Algorithm for Shortest Path", SIAM J. 15, 207-218 (1967).
- [10] Klafszki E., "Legrövidebb út meghatározása időtől függő élhosszakkal bíró hálózatban", MTA SzK Közlemények 3, 29-35 (1968).
- [11] Komáromi É., "Hálózati feladatok, MTA SzK Szemináriumi füzetek (sajtó alatt).
- [12] G. Mills, "A Decomposition Algorithm for the Shortest-Route Problem", Opns. Res. 14, 279-291 (1966).
- [13] J.D. Murchland, A new Method for Finding All Elementary Path in a Complete Directed Graph, Transport Network Theory Unit, London School of Economics Report LSE TNT 22 October 1965.
- [14] S.N. Narahary Pandit, "The shortest route Problem – an addendum", Opns. Res. 9, 129-132 (1961).
- [15] J.P. Saksena and Kumar, "The Routing Problem with "K" Specified Nodes", Opns. Res. 14, 909-913 (1966).
- [16] A. Simbell, "Structure in Communication Nets", Proceedings of the Simposium on Information Networks, Brooklyn Polytechnic Institute, New York (1965).
- [17] S. Warsall, "A Theorem on Boolean Matrices", J. ACM 9, 1-12 (1962).



### Summary

#### The solution methods and applications of the multiterminal minimal path problem.

Ford [4] and Dijkstra [7] have given the fastest and most easily programmable solution of the minimal path problem between two points as regards the computational technique. Further solutions of special minimal path problems can be found in the list of literature [10], [11], [15]. Many authors dealt with the solution of the minimal path problem, so important from a practical point of view. The solution methods summarized and assessed from the angle of computational technique, liable to be solved by one of the described methods, are enumerated.

### Резюме

#### Методы решения и приложения задач мультитерминального пути.

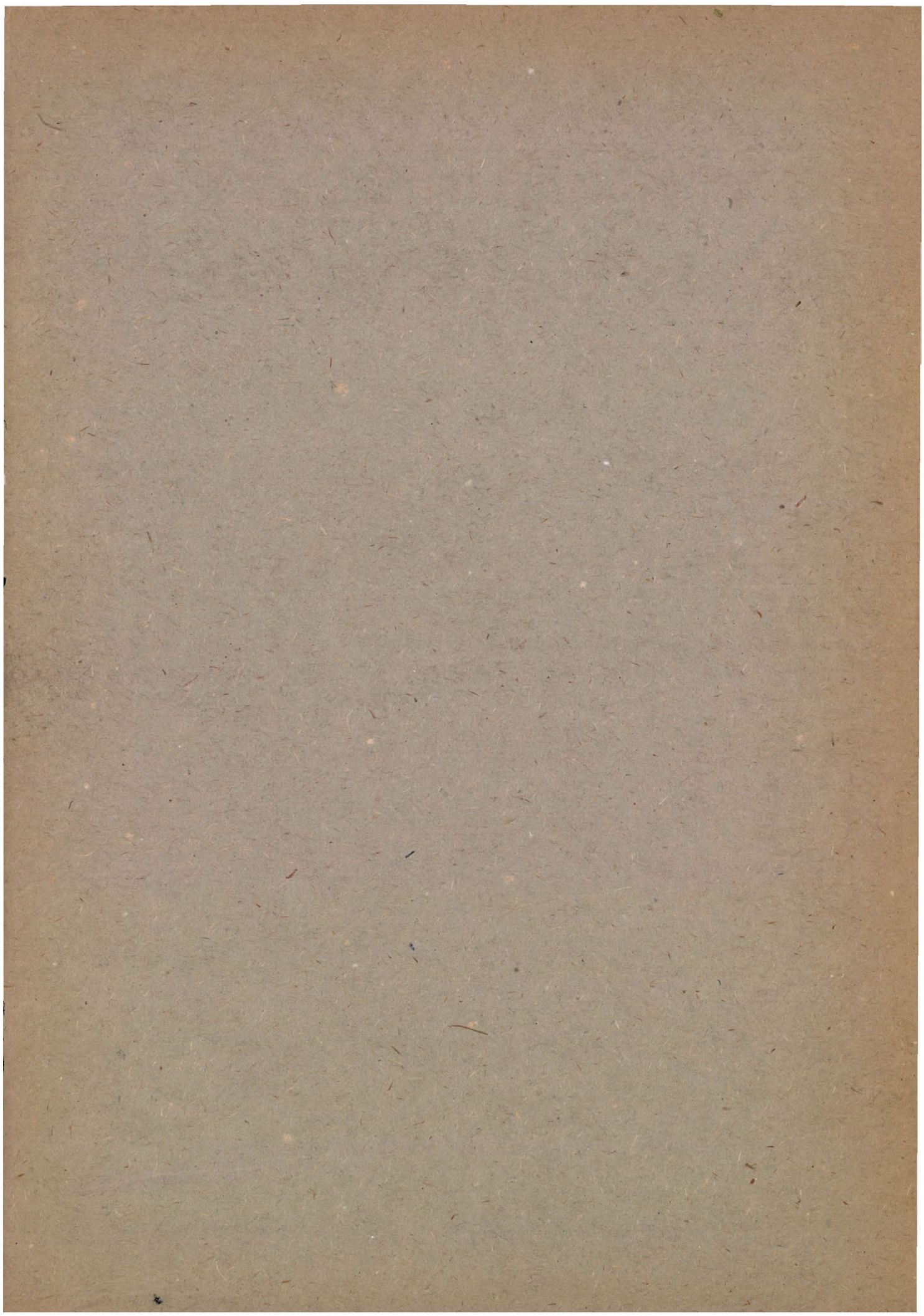
Наибыстрейшее с точки зрения вычислительной техники и легко программируемое решение проблемы кратчайшего пути между двумя точками даны Фордом [4] и Дейкстра [7]. Дальнейшие решения специальных задач минимальных путей даны в списке литературы [10], [11], [15]. Проблема мультитерминального минимального пути с точки зрения практики очень важна и много авторов занимались ей.

В настоящей работе суммируем и с точки зрения вычислительной техники оцениваем методы решений. Наконец перечисляем несколько практически важных проблем, которые решаются одним из вышеупомянутых методов.

## TARTALOMJEGYZÉK

Benczur András:	
Stacionárius Gauss-Markov folyamat csillapodási paraméterének konfidencia határai . . . . .	3
Krámli András:	
A homogén Gauss-Markov folyamatokról . . . . .	15
Szepesvári István:	
A Lamm-féle parciális differenciálegyenlet megoldása . . . . .	18
dr. Verő József – Varga Gyula:	
Magnetotellurikus elméleti szondázási görbék anizotróp ellenállású rétegek felett . . . . .	27
Koszó Gábor – Gergely József:	
Bizonyos típusú függvénymátrix számolása . . . . .	32
Gergely József:	
Szalagmátrixú lineáris egyenletrendszerek egy megoldási módszere . . . . .	36
Varga Gyula:	
Komplex mátrixok sajátértékeinek meghatározása a "hasonlósági elimináció" módszerével	40
Srajber Benedek:	
Néhány tapasztalat a nagyméretű lineáris programozási feladatok megoldásával kapcsolatban . . . . .	45
Bakó András:	
Multiterminális minimális út feladat megoldási módszerei és alkalmazásai . . . . .	49







4247