MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA

KÖZLEMÉNYEK

5.

1969. június

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA

KÖZLEMÉNYEK
5.

Budapest, 1969. június

Felelős szerkesztő:

SZELEZSÁN JÁNOS

Szerkesztőbizottság:

ARATÓ MÁTYÁS, BALÁZS JÁNOS, GERGELY JÓZSEF,
MOLNÁR IMRE

Felelős kiadó:

BALÁZS JÁNOS
igazgató

Technikai szerkesztő:

HARTMANN KATALIN

MTA Számítástechnikai Központ
Budapest. I, Úri u. 49.

A cikkek lektorai:

Gellai Borbála, dr. Jándy Géza, Klafszky Emil,
dr. Mogyoródi József, Tankó József, Varga Gyula

Varga Gyula I.:

Polinomfaktorizálás másodfoku tényezőkre

Valós együtthatós polinomok másodfoku tényezőkre való felbontását elvégezhetjük a Bairstow-féle eljárás segitségével, amely alkalmas közelitő értékekből kiindulva a Newton-Raphson-féle módszer alkalmazásával megadja az adott $f(x)$ polinom valamely $x^2 + px + q$ tényezőjének együtthatóit, valamint az

$$f(x) = (x^2 + px + q) \cdot g(x) \quad \text{azonosságnak}$$

eleget tevő 2-vel alacsonyabb fokszámu $g(x)$ polinom együtthatóit. Ha az $f(x)$ polinom összes másodfoku tényezőjét meg akarjuk határozni, ezt az eljárást folytathatjuk tovább. Hiányossága ennek a módszernek az, hogy a további tényezők a hibák összegeződése miatt egyre pontatlanabbak lesznek.

Az itt ismertetésre kerülő módszer valamely $f(x)$ párosfokszámu, többszörös gyökökkel nem rendelkező valósegyütthatós polinom összes másodfoku tényezőinek meghatározását egyszerre végzi el, ugyancsak a Newton-Raphson-féle módszer alkalmazásával.

Ha az $f(x) = x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_o$

polinomot $\prod_{i=1}^{n} (x^2 + p_i x + q_i)$ alakban akarjuk felbontani az alább ismertetésre kerülő módszer segitségével, meg kell oldanunk az

$$a_i = a_i (p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \qquad (i=0,\dots,2n-1), \qquad /1/$$

vagy rövidebben az $A = A(R)$ $2n$ ismeretlenes egyenletrendszert. Tegyük fel, hogy már ismerünk valamely $p_1^{(m)}, q_1^{(m)}, \dots, p_n^{(m)}, q_n^{(m)}$ közelitő megoldásvektort. Jelöljük ezt R_m -mel, a pontos megoldások vektorát R^*-gal, az $a_o, \dots, a_{2n-1}$ vektort A-val, az $a_i(p_1^{(m)}, \dots)$ $(i=0,\dots,2n-1)$ együtthatókból álló vektort pedig $A(R_m)$-mel.

Irjuk a megoldandó egyenletrendszert

$$Y = Y(R) = A(R) - A = 0 \quad \text{alakban.}$$

A Newton-Raphson-módszert alkalmazva az

$$Y - Y(R_m) = \left(\frac{\partial Y}{\partial R}\right)_{R=R_m} \cdot (R - R_m)$$

egyenletből

$$R - R_m = \left(\frac{\partial Y}{\partial R}\right)^{-1}_{R=R_m} \cdot (Y - Y(R_m));$$

mivel ez nem a pontos egyenletrendszer, $Y = 0$-t helyettesitve nem R^*-ot, hanem valamely R_{m+1} közelitő értéket kapunk R^*-ra:

$$R_{m+1} = R_m + \left(\frac{\partial A(R)}{\partial R}\right)^{-1}_{R=R_m} \cdot (A - A(R_m)) \quad \left(\text{u.i. } \frac{\partial Y}{\partial R} = \frac{\partial A(R)}{\partial R}\right) \qquad /2/$$

Az /1/ egyenletrendszert ezzel az iterációval akarjuk megoldani.

A $\left(\frac{\partial A(R)}{\partial R}\right)_{R=R_m}$ Jacobi-féle mátrix felirásához szükséges deriváltakat a következőképpen kapjuk:

A $\sum\limits_{i=0}^{2n} a_i x^i = \prod\limits_{k=1}^{n} (x^2 + p_k x + q_k)$-ből $\qquad (a_{2n} = 1)$

p_k ill. q_k szerint deriválva a

$$\sum_{i=0}^{2n-1} \frac{\partial a_i}{\partial p_k} x^i = x \cdot \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} (x^2 + p_j x + q_j) \quad \text{ill.}$$

$$/3/$$

$$\sum_{i=0}^{2n-1} \frac{\partial a_i}{\partial q_k} x^i = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} (x^2 + p_j x + q_j) \qquad (R = R_m)$$

egyenlőségeket kapjuk, amelyekből látható, hogy a p_k szerinti deriváltak egy 2n-1 -ed foku, a q_k szerintiek pedig egy 2n-2 -ed foku polinom együtthatóiként nyerhetők.

Az ezekhez szükséges 2n-2 -ed foku, továbbá az $A(R_m)$ előállitásához szükséges 2n -ed foku polinomokat a $b_o^{(o)} = 1$

$$b_k^{(i)} = b_{k-2}^{(i-1)} + b_{k-1}^{(i-1)} \cdot p_i^{(m)} + b_{k-2}^{(i-1)} \cdot q_i^{(m)}$$

$$(b_{2i-1}^{(i-1)} = b_{2i-2}^{(i-1)} = b_{-1}^{(i-1)} = b_{-2}^{(i-1)} = 0) \qquad (i=1,\dots,n \text{ ill. } i=1,\dots,n-1) \quad (k=0,\dots,2i)$$

alaku rekurzió segitségével kaphatjuk meg a

$$p_1^{(m)},\ q_1^{(m)},\dots,\ p_n^{(m)},\ q_n^{(m)} \quad \text{mennyiségekből.}$$

Az eljárás konvergenciáját a Newton-Raphson-tétel alapján vizsgálhatjuk meg. Legyen

$$\left(\frac{\partial A(R)}{\partial R}\right)^{-1} = H_{ij}(R) \qquad \text{továbbá}$$

$$\phi(R) = R + H_{ij}(R)\cdot(A - A(R)) \ .$$

Mivel $\phi(R^*) = R^*$ továbbá $\phi(R)$ valamennyi parciális deriváltja az $R = R^*$ helyen 0, ezért az $R_m \longrightarrow R^*$ konvergencia másodrendü. U.i.

$$\frac{\partial \phi_i(R)}{r_k} = \delta_{ik} - \frac{\partial \phi_i(R)}{\partial r_k} \cdot (A - A(R)) -$$

$$- H_{ij}(r) \cdot \left(\frac{\partial A(R)}{\partial R}\right)_{jk} = 0 \qquad (R = R^*)$$

r_k páratlan k-ra valamelyik p-vel,

páros k-ra pedig valamelyik q-val egyezik meg; δ_{ik} a Kronecker-szimbolum.

Az itt ismertetett módszer a Kerner-féle eljárás általánositása másodfoku tényezőkre.

Az eljárás programja az Ural-2 gépre készült EFT autókodban.

Irodalom:

J.F.Traub: Iterative methods for the solution of equations. /1964. Prentice-Hall inc./

I.O.Kerner: Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen (Numer.Math.8. 1966. 290-294.)

S u m m a r y

The paper deals with breaking down to quadratic factors of polynoms of even-numbered power with real coefficients, not having multiple roots. The described process renders the determination at the same time of all quadratic factors of the polynom possible. The convergence of the process is of second order.

Р е з ю м е

Статья обсуждает разложение на множители второй степени полиномов счётного порядка с действительными коэффициентами неимеющих многократных корней с помощью итерации. Ознакомленный метод даёт возможность одновременно определить все множители второй степени полинома.
Сходимость метода второго порядка.

Katona Gyula - Nemetz Tibor:

Néhány megjegyzés a shift-regiszter generátorokról

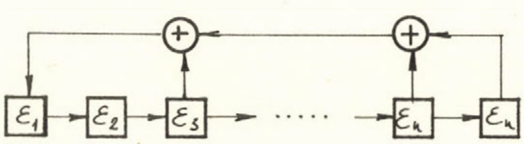
1. Bevezetés.

Jelen dolgozat F.H.Young, a shift-regiszter generátorokkal foglalkozó dolgozatához kapcsolódik. Young az általa tekintett kérdésre vonatkozóan ismertet egy algebrai segédeszközt, mellyel konkrét esetekben sikeresen lehet számolni, azonban általános válasz megadása ezideig más szerzőknek sem sikerült. Utalunk Peterson [2] könyvére, mely e témáról alapos ismertetést ad, s bővebb irodalomjegyzéket tartalmaz.

Dolgozatunkban a Young által bevezetett függvényleirás mellett megadjuk a probléma mátrixleirását, rámutatva arra, hogy ez a lényegében ekvivalens leirás az összefüggések kimutatásánál milyen előnyökkel járhat. Az [1] dolgozat eredményein kivül ezen az uton általánosabb eredményeket is bizonyitunk. Vizsgáljuk továbbá a gépi uton nyerhető eredmények egyszerü, de hatásos ellenőrzési lehetőségeit.

2. Definiciók, fogalmak

Egy shift-regiszter (a továbbiakban S-R) müködését a következőképpen irhatjuk le (lásd 1. ábra). Az S-R tartalmát egy n-dimenziós $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ vektorral szemléltethetjük, ahol ε_i értéke a 0 vagy 1 szám lehet.



$\oplus$ moduló 2 vett összeadó

$\square$ információ-tároló

1.sz. ábra

Egy adott pillanatban az i-edik tároló tartalma átvivődik az $(i+1)$-edik tárolóba, $i=1,2,\dots,n-1$ ill. az n-edik tároló tartalma az első tárolóba. Mig az előző átvitelek változtatás nélkül történnek, addig az utolsó információ-bit az átvitel során oly módon transzformálódik, hogy az $i_1,i_2,\dots,i_r$ tárolókon levő bitek moduló 2 hozzáadódnak. Hangsulyozni kell, hogy a fenti átvitelek a matematikai modell számára egyidejüleg következnek be. Az átvitel hatására a S-R tartalma megváltozik, uj tartalmát az $\underline{\varepsilon}' = T\underline{\varepsilon}$

$$\varepsilon_i' = \begin{cases} \varepsilon_{i-1}, & \text{ha } i=2,3,\dots,n \\ \varepsilon_n \oplus \varepsilon_{i_1} \oplus \dots \oplus \varepsilon_{i_r}, & \text{ha } i=1 \end{cases} \qquad /2.1/$$

vektor irja le, ahol $\oplus$ a moduló 2 vett összeadást jelöli.

Az $\varepsilon^{(2)}$ vektort az $\varepsilon^{(1)}$ vektorból elérhetőnek nevezzük, ha létezik olyan m szám, melyre $\varepsilon^{(2)} = T^m\,\varepsilon^{(1)}$, azaz ha az $\varepsilon^{(1)}$ tartalmu SR-t lépésenként müködtetve elérhetjük, hogy tartalma $\varepsilon^{(2)}$ legyen. Látni fogjuk, hogy az elérhetőség ekvivalencia reláció. A keletkező ekvivalencia-osztályokat ciklusoknak, elemszámukat ciklushossznak (jele c_ε), mig a legnagyobb ciklushosszat periodusnak (jele p) nevezzük. A legkisebb c_ε érték nyilvánvalóan egy, ami az $\underline{\varepsilon} \equiv \underline{0}$ zérusvektornak felel meg. (Ezenkivül $c_\varepsilon = 1$ akkor és csak akkor, ha r páros és $\varepsilon_i \equiv 1$, $i=1,\dots,n$). Ennek megfelelően $p = \max c_\varepsilon \leq 2^n-1$

Young azt a speciális esetet tekintette, amikor $r=1$, azaz ha

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_n \oplus \varepsilon_k, \qquad 1 \leq k \leq n-1$$

Feladat a ciklushosszak $\{c_\varepsilon(k,n)\}$ halmazának meghatározása, de érdekes lenne már a $p=p(k,n)$ periódus explicit megadása k és n függvényeként. Bár e feladatot megoldani nem sikerült, de részeredmények elérésére, illetve konkrét esetekben hasznos a probléma következő két átfogalmazása véges testek feletti függvények, illetve mátrixok terminológiájában.

3. Függvényleirás

Először speciálisan $r=1$, $i=i_1$ esetén tekintsük moduló $x^n + x^i + 1$ az x változó polinomjait a mod2 vett egészek teste felett.

Definiáljuk az $\underline{\varepsilon}$ vektor segitségével a következő függvényt:

$$/3.1/ \quad F(x) = \varepsilon_n x^{i-1} + \varepsilon_{n-1} x^{i-2} + \dots + \varepsilon_{n-i+1} +$$

$$+ \varepsilon_{n-i} x^{n-1} + \dots + \varepsilon_1 x^i$$

Felhasználva, hogy

$$x^n \equiv x^i + 1 \ (\mathrm{mod}\ x^n + x^i + 2),$$

nyerjük:

$$x F(x) = \varepsilon_{n-1} x^{i-1} + \varepsilon_{n-2} x^{i-2} + \dots + \varepsilon_{n-i} + \varepsilon_{n-i-1} x^{n-1} +$$

$$+ \dots + (\varepsilon_n \oplus \varepsilon_{n-i}) x^i$$

Ha tehát a SR tartalma rendre megegyezik a fenti módon rendezett $F_\varepsilon(x)$ együtthatóival, akkor egy átvitel-lépés után a SR tartalma az $x.F_\varepsilon(x)$ polinom együtthatóival egyezik meg. A 2. pontban bevezetett definició értelmében c_ε az a legkisebb pozitiv egész szám, melyre

$$x^{c_\varepsilon} F_\varepsilon(x) \equiv F_\varepsilon(x) \quad (\mathrm{mod}\ x^n + x^i + 1)$$

azaz /3.2/

$$(x^{c_\varepsilon} + 1) F_\varepsilon(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ x^n + x^i + 1)$$

Speciálisan, ha $F_\varepsilon(x) \equiv 1$, akkor $c_1 = c_\varepsilon$ az a legkisebb szám, melyre $x^{c_1} + 1$ osztható az $x^n + x^i + 1$ polinommal. Nyilvánvaló, hogy tetszőleges ε mellett fennáll ekkor az

$$(x^{c_1} + 1)\, F_{\varepsilon}(x) \equiv 0 \quad (\bmod\ x^n + x^i + 1)$$

reláció, tehát egyrészt $c_1 = p$, másrészt p osztható c_{ε} -nal ε minden értékére. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges ε esetén p lépés után a SR. tartalma ismét az eredeti lesz, tehát ebben az értelemben jogos volt p-t periódusnak nevezni.

Speciálisan, ha $x^n + x^i + 1$ irreducibilis polinom, akkor tetszőleges legfeljebb n-1-edfoku $F_{\varepsilon}(x) \not\equiv 0$ mellett a /3.2/ összefüggés akkor és csak akkor teljesül, ha a

/3.3/ $$x^{c_1} + 1 \equiv 0 \quad (\bmod\ x^n + x^i + 1)$$

összefüggés is teljesül. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben c_{ε} nem függ ε-tól, ha $\varepsilon \not\equiv 0$, azaz minden egynél nagyobb ciklushossz egyenlő. Másrészt könnyü látni, hogy ez csak akkor van igy, ha $x^n + x^i + 1$ irreducubilis polinom.

Az általános eset tárgyalása az un. lineáris rekurziók keretén belül végezhető el legcélszerübben.

Legyenek adottak a $h_o = 1, h_1, \ldots, h_{n-1}, h_n = 1$ számok, ahol a h_i, $1 \leq i \leq n-1$ számok mindegyike 0 vagy 1, továbbá egy $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ vektor, melynek koordinátái szintén csak a 0 és 1 számok lehetnek. Ezek segitségével definiáljuk az ε_{n+1}, majd rekurzive az $\varepsilon_{n+2}, \ldots$ számokat az

$$\varepsilon_{n+1} = \sum_{j=o}^{n-1} h_j\, \varepsilon_{1+j}$$

illetve általában az

/3.4/ $$\varepsilon_{n+i} = \sum_{j=o}^{n-1} h_j\, \varepsilon_{i+j}$$

rekurzió segitségével, ahol a $\sum$ jel mod 2 vett összeadást jelöl. Az ily módon nyerhető számsor periódusára vonatkozik a következő tétel, melyet a fentiek jól szemléltetnek:

1. Tétel: Tekintsük a $h(x) = \sum_{j=0}^{n} h_j x^j$ polinomot, s legyen p az a legkisebb pozitiv egész szám, melyre $x^p + 1$ osztható $h(x)$-szel. Akkor az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots,$ sorozat periódikus p szerint.

A tétel bizonyitására nem térünk ki, csak utalunk arra, hogy ez megtalálható Peterson [2] könyvében (118. old.).

Megjegyezzük, hogy az idézett gondolatmenetből következik az

1. Lemma: Minden részperiódus osztója p-nek.

Térjünk vissza ezután egy kis időre a /3.2/ összefüggéshez. Nyilván létezik olyan $(c_\varepsilon -1)$-ed foku $g(x)$ polinpm, melyre

$$(x^{c_\varepsilon} + 1)\, F_\varepsilon (x) = (x^n + x^i + 1)\, g(x)$$

x helyébe $\frac{1}{x}$-t irva és x^{c_ε}-nal végigszorozva nyerjük:

$$(x^{c_\varepsilon} + 1)\, F_{\varepsilon^*} (x) = (x^n + x^{n-i} + 1)\, g^* (x) \qquad /3.5/$$

ahol

$$g^*(x) = x^{c_\varepsilon - 1} g\left(\frac{1}{x}\right),$$

és /3.1/ alapján könnyen látható, hogy

$$\varepsilon^* = (\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \ldots, \varepsilon_1),$$

azaz

$$\varepsilon_i^* = \varepsilon_{n-i}$$

Ez azt jelenti, hogy az r=1 esetben az $i_1 = i$ és az $i_1 = n-i$ visszacsatolások mellett létezik egyértelmü megfeleltetés az ekvivalencia osztályok között, tehát speciálisan a ciklushosszak és igy a periodusok is egyenlőek. Eredményünket tétel formájában is megfogalmazhatjuk:

2. Tétel: Ha $\{c_\varepsilon(i,n)\}$ jelöli $r=1$, $i_1 = i$ esetben a ciklushosszak halmazát, akkor a $\{c_\varepsilon(i,n)\}$ és a $\{c_\varepsilon(n-i,\ n)\}$ halmazok permutáció tól eltekintve megegyeznek.

Megjegyezzük, hogy ez a tétel Young [1] dolgozatában más bizonyitással szerepel, azonban a mi bizonyitásunk az általános esetre is minden nehézség nélkül átvihető.

Vizsgáljuk meg most, milyen esetben lesz a periódus maximális, tehát 2^n-1 hosszuságu. Mivel tetszőleges $\varepsilon \neq 0$ esetén $c_\varepsilon = 2^n-1$ ekkor, s igy a ciklushossz nem függ ε-tól, tehát a megelőzőek szerint ebben az esetben szükséges, hogy az $x^n + x^i + 1$ polinom (vagy általános esetben a $h(x)$) irreducibilis legyen. Ez a feltétel azonban nem elégséges, mint azt $n=6$ esetén az irreducibilis $x^6 + x^3 + 1$ polinom mellett láthatjuk.

Érvényes ugyanis az

$$x^9 + 1 = (x^6 + x^3 + 1)(x^3 + 1)$$

reláció, másrészt 9 az a legkisebb p pozitiv egész, melyre

$$x^p + 1 = 0 \pmod{x^6 + x^3 + 1}$$

tehát a periódus $p=9 \neq 2^6-1 = 63$. Ez azt jelenti, hogy ekkor 7 különböző 9 hosszuságu ciklus létezik, amiről direkt számolás segitségével is könnyen meg lehet győződni.

Abban az esetben, ha a legkisebb olyan p egész, melyre az irreducibilis $h(x)$ n-edfoku polinom esetén

$$/3.6/ \qquad x^p + 1 = 0 \pmod{h(x)}$$

teljesül, $p = 2^n-1$, akkor az irreducibilis $h(x)$ polinomot <u>primitiv</u>

polinomnak nevezzük. Megjegyezzük, hogy ez a definició eltér a fogalomnak a matematikai irodalomban szokásos bevezetésétől, azonban azzal ekvivalens. Az irreducibilis és primitiv polinomokról n nem tul nagy értéke mellett több részleges vagy teljes táblázat létezik, pl. Marsh [3], Peterson [2]. Ezek a táblázatok jól felhasználhatók arra, hogy maximális periódusu SR-t készitsünk, de nyilván nem adnak választ arra, hogy milyen ciklushosszuságok lépnek fel adott, nem primitiv polinomok esetén. Megjegyezzük még, hogy tetszőleges n mellett létezik n-edfoku primitiv polinom, azonban, ha csak olyan $h(x)$ polinomokra szoritkozunk, melyeknél $h_i = 1$ csak egyetlen $1 \leq i \leq n-1$ esetén teljesül, ez már nem lesz igaz. A legkisebb n érték, melyre ezt láthatjuk, $n = 8$ (lásd 1. táblázat).

4. Mátrixleirás

A /2.1/ összefüggéssel definiált T transzformációt mátrixszorzás segitségével is leirhatjuk. Tekintsük az

$$A = (a_{jik})\begin{matrix} k = \overline{1,n} \\ j = \overline{1,n} \end{matrix}$$

mátrixot, ahol

$$a_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = 1,\ k = i_u,\ u=1,2,\dots,r, \text{ vagy } k = n \\ 1, & \text{ha } j = k+1,\ k = 1,2,\dots,n-1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \qquad /4.1/$$

Igy pl. a 3. pontban leirt $x^6 + x^3 + 1$ függvény esetén

$$A_{6,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Az $\underline{\varepsilon}$ vektort oszlopvektorként felfogva a /2.1/ összefüggés az

/4.2/ $$\underline{\varepsilon}' = \underline{\underline{A}}\ \underline{\varepsilon}$$

alakot ölti, ahol az összeadások modulo kettő történnek. Továbbá, ha $\underline{\varepsilon}^{(n)}$ jelöli az $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^{(o)}$ vektorból a T transzformáció ismételt alkalmazásával nyert n-edik vektort, akkor

$$\underline{\varepsilon}^{(n)} = A^n \cdot \underline{\varepsilon}^{(o)}$$

ahol A^n jelöli az A mátrix mod 2 vett n-edik hatványát.

Legyen $\underline{\varepsilon}^{(o)} = (1,0,0,\dots,0)$, azaz legyen

$$\varepsilon_i^{(o)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = 1 \\ 0, & \text{ha } 1 < i \leq n \end{cases}$$

Ekkor a

$$B = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}^{(o)} \\ \underline{\varepsilon}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

mátrixról könnyü látni, hogy un. háromszögmátrix, s igy a determinánsa det(B) = 1. Ez azt jelenti, hogy az egy ciklusba tartozó vektorok lineárisan függetlenek. Ezért ezen ciklus hossza megegyezik a p periodussal, hiszen bármely $\underline{\varepsilon}$ vektor előállitható a fentiek lineáris kombinációjaként.

Jelöljük az összes n-edrendü, egy determinánsu 0 és 1 elemü A mátrixok halmazát $\mathcal{A}$ -val. Nyilván $\mathcal{A}$ csoportot alkot a modulo 2 vett szorzásra nézve. Ebből következik, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén létezik olyan e érték, melyre $A^e = E$, ahol E az egységmátrixot jelöli. Mivel a /4.1/ alatt leirt A mátrixok beletartozmak $\mathcal{A}$ -ba, igy a c_ε

számok feltétlen léteznek, továbbá a 2. pontban definiált elérhetőség valóban ekvivalencia reláció.

Határozzuk meg $\mathcal{A}$ elemszámát, azaz a csoport rendjét. E célból nézzük meg, hogy az A mátrix egyes sorait rendre hányféleképpen lehet kitölteni oly módon, hogy az egyes sorok mint n dimenziós vektorok lineárisan függetlenek legyenek, továbbá az azonosan 0 vektort egyik sornak se válaszszuk. Nyilvánvalóan az első sort $2^n -1$, a második sort pedig $2^n -2$ féleképpen lehet megválasztani. Tegyük föl, hogy az első s sort kitöltöttük a kivánt módon. Ekkor az s lineárisan függetlenül kitöltött sor által meghatározott altérbe 2^s vektor tartozik, igy ezek egyikét sem választhatjuk (s+1)-edik sorként, viszont bármelyik más vektort igen. Ez azt jelenti, hogy az (s+1)-edik sort $2^n - 2^s$ különböző módon választhatjuk meg. Az $\mathcal{A}$ csoport rendjét nyilván az egyes sorok kitöltési lehetőségeinek a szorzata adja meg, vagyis a

$$/4.3/ \qquad \prod_{s=0}^{n-1} (2^n - 2^s) = 2^{\binom{n}{2}} \prod_{s=1}^{n} (2^s -1)$$

szám.

Figyelembe véve, hogy véges csoportok esetén az elem rendje osztója a csoport rendjének, nyerjük a következő tételt:

<u>3. Tétel.</u> Tetszőleges shift-regiszter esetén a p periódus osztója a

$$2^{\binom{n}{2}} \cdot \prod_{s=1}^{n} (2^s-1)$$

szorzatnak.

Megjegyezzük, hogy a /4.3/ számnak viszonylag kevés primfaktora van. Igy pl. n = 34 esetén a páratlan primosztók száma 38. A 2^s-1 számok törzstényezős alakját s 34 -ig a 2. sz. táblázat tartalmazza.

5. A p(k.n)-re vonatkozó tételek

A következő 4. és 5. tétel Youngtól származik:

4. Tétel:

/4.4/ $$p(1,2^s) = 2^{2s} - 1$$

Bizonyitás: Mivel

$$x^{2^s} = x + 1 \pmod{x^{2^s} + x + 1},$$

igy

$$x^{2^{2s}} = (x + 1)^{2^s} = x^{2^s} + 1 = x$$

és

$$x^{2^{2s} - 1} + 1 = 0 \pmod{x^{2^s} + x + 1}$$

másrészt könnyü látni, hogy a /4.4/ a lehető legkisebb ilyen szám.

5. Tétel:

/4.5/ $$p(1,2^s+1) = 2^{2s} + 2^s + 1$$

Bizonyitás: Mivel

$$x^{2^s} + 1 = x + 1 \pmod{x^{2^s+1} + x + 1},$$

igy

$$x^{2^{2s+2^s+1}} = x\,(x + 1)^{2^s} = x^{2^s} + x = 1 \pmod{x^{2^s+1} + x + 1}$$

tehát a /3.6/ reláció érvényes a fenti p mellett. Könnyü látni, hogy ez a p érték a lehető legkisebb, igy a tételt bizonyitottuk.

Legyen az n és k számok legnagyobb közös osztója $[n,k] = d$. Ekkor érvényes a következő:

6. Tétel:

$$p(k,n) = d.p\left(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}\right)$$

Bizonyitás: Könnyen látható, hogy a transzformáció /4.1/ mátrixának hatványozásakor a sorok d diszjunkt osztályba sorolhatók oly módon, hogy az A^s mátrix első sora s minden értéke mellett az A mátrix moduló d kongruens soraival végzett különböző müveletekkel keletkezik, s kialakitásában más sorok nem vesznek részt. Tekintsük az A mátrix azon részmátrixát, mely az (ud, vd) indexü elemeiből áll, s jelöljük ezt D-vel. Ugyancsak egyszerüen igazolható, hogy az

$$A^e = E$$

feltétel teljesüléséhez szükséges az

$$D^{\left[\frac{e}{d}\right]} = E$$

feltétel teljesülése. Mivel D megegyezik az $r = 1$, $i = \frac{k}{d}$, $n^* = \frac{n}{d}$ értékekhez tartozó SR mátrixával, igy nyertük a következő szükséges feltételt:

/4.6/ $$\left[\frac{p(k,n)}{d}\right] = p\left(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}\right)$$

(az $[\alpha]$ jel az α szám egész értékét jelöli).

A /4.6/ relációt átirva kapjuk, hogy

$$p(k,n) \geq d.p\left(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}\right)$$

Az ellenkező irányu egyenlőtlenség is egyszerüen adódik mátrixterminológiában is, de még egyszerübben látható, ha az

$$x^{p\left(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}\right)} = 1 \pmod{x^{\frac{n}{d}} + x^{\frac{K}{d}} + 1}$$

összefüggésben x helyébe x^d -t helyettesitünk.

Megjegyezzük, hogy a 6. tétel alkalmazásával speciális eredményként adódnak Young 3.2, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7. tételei. Valóban, pl. a 3.7 tétel állitása a jelen dolgozat terminológiájában

/4.7/ $$p\,(j, j\,(2^k + 1)) = j\cdot(2^{2k}+2^k+1),$$

s mivel a 6. tétel szerint

$$p(j, j\cdot(2^k + 1)) = j\cdot p(1, 2^k + 1)$$

és a /4.5/ alatti $p(1, 2^k+1)$ értéket ide behelyettesitve valóban /4.7/ adódik.

6. A ciklushosszak gépi meghatározásáról

Gyakorlati szempontokból elsőrendü feladat lehet a SR. periódusának meghatározása. Mint láttuk, az $\underline{\varepsilon}^{(o)} = (1,0,\ldots,0)$ vektorhoz tartozó ciklushossz megegyezik a SR periódusával, igy kézenfekvő az a gondolat, hogy a SR müködésének szimulálásával az $\underline{\varepsilon}^{(o)}$ kezdővektorból kiindulva határozzuk meg a periódust oly módon, hogy figyeljük, melyik az a legkisebb p érték, melyre $\underline{\varepsilon}^{(o)} = \underline{\varepsilon}^{(p)}$. Egy ilyen szimulációs program már a kisteljesitményü számológépeken is igen egyszerü és gyors, igy célszerünek látszik ezt az utat követni. Azonban a gépi uton nyert periódust a végzendő müveletek nagy száma miatt valamilyen módon ellenőrizni szükséges.

Egy egyszerü, de hatékony ellenőrzési lehetőséget kinál a 3. tétel. Valóban, elkészitve a gépi uton nyert periódus primtényezős felbontását, a fellépő primosztók csak a /4.3/ szám primosztói közül kerülhetnek ki. Előnye ennek az eljárásnak, hogy rendkivül gyorsan végrehajtható, mig hátránya, hogy sok esetben jónak fogadunk el hibás eredményt is. Ilyen hibás döntések valószinüségének meghatározása rendkivül bonyolult, igy arra jelen dolgozat keretei között nem térhetünk ki.

Gyakorlatilag teljesen biztonságos ellenőrzés hajtható végre a /3.3/ összefüggés alapján. Az alkalmazások során célszerü használni a következő egyszerü tényt:

7. Tétel: Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_r$ tetszőleges számok, p tetszőleges primszám. Akkor érvényes az

/6.1/ $(a_1+a_2+\ldots+a_r)^{p^k} \equiv a_1^{p^k} + a_2^{p^k} + \ldots + a_r^{p^k} \pmod p$

összefüggés.

<u>Bizonyitás:</u> $k = 1$, $r = 2$ esetén

$$(a_1+a_2)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} a_1^i \cdot a_2^{p-i} = a_1^p + a_2^p + b \cdot p$$

tehát az állitás igaz. Ezután $k = 1$ esetén r-re vonatkozó teljes indukcióval adódik

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^p \equiv a_1^p + a_2^p + \ldots + a_r^p$$

s ennek felhasználásával k-ra vonatkozó teljes indukcióval nyerjük a tétel állitását.

A tétel egy fontos speciális esetét külön is megfogalmazzuk, melyet fel fogunk használni:

<u>2. Lemma:</u>

/6.2/ $(a + 1)^{2^k} \equiv a^{2^k} + 1 \pmod 2$

A lemma alkalmazásával a következőképpen járhatunk el: Legyen $m > n$, s jelölje $\sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_\ell \cdot 2^\ell$ az $\left[\frac{m}{n}\right]$ szám diadikus felbontását.
Ekkor

$$x^m = x^{m-\left[\frac{m}{n}\right]} \prod_{\ell=0}^{\infty} (x^n)^{\delta_\ell \cdot 2^\ell}$$

s mivel

$$x^n \equiv x^i + 1 \pmod{x^n + x^i + 1}$$

igy

$$x^m = x^{m-[\frac{m}{n}]} \cdot \prod_{\ell:\delta_\ell=1} (x^i+1)^{2^\ell} \equiv x^{m-[\frac{m}{n}]} \prod_{\ell:\delta_\ell=1} (x^{i\cdot 2^\ell}+1)$$

Mivel $p(i,n) = p\,(n-i,n)$, igy az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $i \leq \frac{n}{2}$. Ez azt jelenti, hogy x^m helyett x olyan hatványait kell tovább vizsgálnunk, melyeknek kitevője $\frac{m}{2}$-nél nem nagyobb. A gépi uton nyert p periódusnak megfelelő x^p hatványra a fentieket alkalmazva viszonylag gyorsan megállapithatjuk azt a legfeljebb $n-1$-edfoku $g(x)$ polinomot, melyre

$$x^p \equiv g(x) \pmod{x^n + x^i + 1}$$

/3.3/ szerint p csak akkor lehet periódus, ha $g(x) \equiv 1$. Megforditva, ha $g(x) \equiv 1$, akkor p a valódi periódus többszöröse lehet csak, s igy gyakorlatilag teljes biztonsággal végezhető az ellenőrzés.

Nézzünk két példát erre a második ellenőrzési eljárásra!

<u>1. Példa:</u> $p(1,10) = 889$

$$x^{889} = x^9\,(x^{10})^{64}\,(x^{10})^{16}\,(x^{10})^8 =$$

$$= x^9\,(x^{64}+1)\,(x^{16}+1)\,(x^8+1) \qquad (\mathrm{mod}\ x^{10}+x+1)$$

$$x^{64} = x^4\,(x^4+1)\,(x^2+1)$$

$$x^9\,(x^{64}+1) = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$$

$$(x^{16}+1)\,(x^8+1) = x^8 + x^7 + x^4 + 1$$

igy

$$x^{889} = x^{16} + x^{12} + x^{11} + x^7 + x^6 + x^3 + x + 1 = 1$$

azaz a $p = 889$ értéket elfogadhatjuk periódusnak.

2. Példa: $p(1,12) = 3255$

$$x^{3264} = (x^{12})^{256} (x^{12})^{16} = (x^{256} + 1)(x^{16} + 1) =$$

$$= x^{272} + x^{256} + x^{16} + 1$$

Továbbá

$$x^{272} = x^{8} (x^{16} + 1)(x^{4} + 1)(x^{2} + 1) = x^{10} + x^{3} + x^{2} + x$$

$$x^{256} = x^{4} (x^{16} + 1)(x^{4} + 1)(x + 1) =$$

$$= x^{10} + x^{9} + x^{5} + x^{4} + x^{3} + x^{2} + x + 1$$

$$x^{16} = x^{5} + x^{4}$$

Igy

$$x^{3264} = x^{9} \pmod{x^{12} + x + 1}$$

tehát

$$x^{3255} = 1 \pmod{x^{12} + x + 1}$$

azaz a $p(1,12) = 3255$ értéket elfogadhatjuk.

A ciklushosszak megállapitására Young a következő triviális módszert ajánlja: Induljunk ki tetszőleges $\underline{\varepsilon}^{(o)}$ kezdővektorból, s állapitsuk meg a $c_{\varepsilon}(o)$ -t. Jelöljön ε^{1} olyan vektort, mely nem szerepelt az előző ciklusban, s ehhez is állapitsuk meg a $c_{\varepsilon 1}$ -t, majd folytassuk ezt az eljárást, amig nem teljesül a $\sum_{i} c_{\varepsilon i} = 2^{n}$ összefüggés. Ez az eljárás meglehetősen hosszadalmas, sőt $n > 20$ esetén a gépi végrehajtása is jelentős bonyodalmakat okoz. E helyett célszerü gyakran a következő eljárást követni: Határozzuk meg az $\varepsilon^{\circ} = (1,0,0,\dots,0)$ kezdővektorból kiindulva a p periódust, s jelölje $p_1, p_2, \dots, p_s$ ennek primosztóit. (Nyilván a p_i szám osztója (4.3)-nak, $i = 1,2,\dots,s$). Nyilvánvaló, hogy a $\{c_{\varepsilon}\}$ halmaz elemeinek osztói csak azon p_i számok lehetnek, melyekre a

/6.3/ $$2^{n} - p - 1 = \sum_{i=1}^{s} p_i x_i , \qquad x_i \geq 0$$

diofantikus egyenlet megoldásában $x_i > 0$.

Megjegyezzük, hogy abban az esetben, ha a /6.3/ egyenletnek nincs megoldása, akkor a számolt p érték nyilvánvalóan helytelen, így a /6.3/ egyenlet megoldása egy harmadik ellenőrzési lehetőséget jelent.

Nézzünk egy példát a ciklushosszak meghatározására:

3. Példa: A fenti módon számolt $p(1,13) = 8001$.
A kivánt törzstényezős felbontás:

$$8001 = 3^2.7.127$$

lássuk be, hogy $c_\varepsilon \neq 3$ semmilyen ε-ra. Könnyebb a számolást végrehajtani, ha $i = 1$ helyett $i = 12$ -vel számolunk. Tegyük föl, hogy ilyen ε létezik. Akkor érvényes a

$$/6.4/ \quad \begin{cases} \varepsilon_{10} \oplus \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 = \varepsilon_4 = \varepsilon_7 = \varepsilon_{10} = \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{11} \oplus \varepsilon_{12} = \varepsilon_2 = \varepsilon_5 = \varepsilon_8 = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \oplus \varepsilon_{13} = \varepsilon_3 = \varepsilon_6 = \varepsilon_9 = \varepsilon_{12} \end{cases}$$

egyenletrendszer. Könnyen látható, hogy ennek egyetlen megoldása $\varepsilon_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,13$, s ez ellentmond feltevésünknek.

Hasonlóan ellentmondásra jutunk a $c_\varepsilon = 7$ feltételből. Ekkor a

$$/6.5/ \quad \begin{cases} \varepsilon_6 \oplus \varepsilon_7 = \varepsilon_1 = \varepsilon_8 \\ \varepsilon_7 \oplus \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_9 \\ \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_2 \oplus \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_3 \oplus \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_4 \oplus \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_5 \oplus \varepsilon_6 = \varepsilon_7 \end{cases}$$

Könnyen nyerhető az egymásutáni egyenletpárok összeadásával, hogy $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_7$ továbbá az összes egyenlet összeadásával $\sum \varepsilon_i = 7 \cdot \varepsilon_1 = 0$, ami ellentmondást jelent. Ezután az

$$2^{13} - 8001 - 1 = 9x + 127y \,, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

egyenletet oldjuk meg.

Az általános megoldás:

$$x = 7 + 127t$$
$$y = 1 - 9t$$

Ha $t < 0$, akkor $x < 0$, mig ha $t > 0$, akkor $y < 0$, tehát az egyetlen megoldás: $x = 7$ és $y = 1$.

Ez azt jelenti, hogy egy 127 hosszuságu ciklus van, továbbá vagy 7 db 9 hosszuságu, vagy egy darab 63 hosszuságu. A fentiekhez teljesen hasonlóan ellentmondásra jutunk akkor is, ha feltesszük, hogy létezik olyan $\underline{\varepsilon}$, melyre $c_{\varepsilon} = 9$. Ez azt jelenti, hogy a különböző ciklusokhoz tartozó ciklushosszak halmaza a következő:

$$\{1, 8001, 127, 63\}$$

1. sz. táblázat: p(k,n)

•	•	•	•	•	•	•	•	•
2		3						
3		7	7					
4		15	6	15				
5		21	31	31	21			
6		63	14	9	14	63		
7		127	93	127	127	93	127	
8		63	30	217	12	217	30	63
9		73	465	21			21	465
10		889	42	1023	62	15	62	1023
11			2047					
12		3255	126	45	28		18	
13		8001						
14			254	186		254	21	254
15		32767	4599	63	32767	35	93	32767
16		255	126	57337	60	16383	434	63457
17		273	114681	131071	1023	131071	131071	4599
18		253921	146	189	930	32767	42	262143
19		413385	129921	491505	91749			
20		767163	1778	1048575	84	75	2046	779907
21		5461	2097151	381	406317	5461	279	49
22		4194303	3066	3670009	4094	2752491	3906	4063201
23		2088705	7864305	32767	2088705	8388607	458645	2094081
24		2097151	6510	189	252	16766977	90	1048575
25		10961685	25165821	33554431	2158065	105		
26		298935	15810	2094081	3570	67074050	16002	13797
27		125829105	458745	219	5592405	8877935	1395	44564396
28				268435455	508			105
29			536870911					
30			65534	2667	9198	315	186	
31				2147483647				

2. sz. táblázat: $2^n - 1$ primfelbontása

3	7
4	3x5
5	31
6	3x3x7
7	127
8	3x5x17
9	7x73
10	3x11x31
11	23x89
12	3x3x5x7x13
13	8191
14	3x43x127
15	7x31x151
16	3x5x17x257
17	131071
18	3^3x7x19x73
19	524287
20	3x5^2x11x31x41
21	7^2x127x337
22	3x23x89x683
23	47x178481
24	3^2x5x7x13x17x241
25	31x601x1801
26	3x2731x8191
27	7x73262657
28	3x5x29x43x113x127
29	233x1103x2089
30	3^2x7x11x31x151x331
31	2147483647
32	3x5x17x257x65537
33	7x23x89x599479
34	3x43691x131071

Irodalom:

[1] Young, F.H. Analysis of Shift Register Counters, Journ. A.C.M. 5, (1958) 385-388 old.

[2] Peterson, W.W. Error Correcting Codes, Wiley, New-York, 1962.

[3] Marsh, R.W. Table of Irreducible Polynomials Over GF/2/, Through Degree 19, NSA, Washington, D.C. (1957)

Summary

Notes on the shift-register generators

This paper is connected with the results of F.H.Young [1] , concerning to the cycles and periods of the shiftregister generators. The paper contains well known theorems, and obtains new results too. The authors show that these theoretical results are practically not or only hardly applicable. So they deal with the determination of the cycles and periods of given shift-registers on the electronic computers, and the problems regarding this matter.

Р е з ю м е

Статья занимается достижениями Ф.Х. Юнга [I] , относяшимися к циклам и периодам генераторов двиговых регистров. Стаья содержит хорошо известные теоремы и достигает новых результатов. Авторы показывают, что эти теоретические результаты в практике совсем неприменимы или почти неприменимы. И так они тактуют определение циклов и периодов данного двигающего регистра в электронных вычислительных машинах, и проблем, связанных с этой темой.

Varga Gyula I.:

Mátrixok sajátértékeinek meghatározása a "hasonlósági elimináció" módszerével

Jelen dolgozatban egy eljárást adunk meg csupa valós sajátértékekkel rendelkező mátrixok összes sajátértékeinek meghatározására. Ismeretes, hogy az un. hasonlósági transzformációk nem változtatják meg a mátrixok sajátértékeit, tehát pl. az A $m \times m$ -es mátrix és a CAC^{-1} (C $m \times m$ -es nem szinguláris mátrix) transzformált mátrix valamennyi sajátértékei rendre megegyeznek.

Ismeretes továbbá, hogy trianguláris mátrix sajátértékei megegyeznek a mátrix főátlójában lévő elemekkel.

Eljárásunk abban áll, hogy az adott A mátrixot hasonlósági transzformációk segitségével triangulárissá változtatjuk, hogy igy a sajátértékekhez hozzájuthassunk. Ezt $m-1$ lépésben fogjuk végrehajtani. Az 1. lépésben ugy akarjuk a C_1 mátrixot megválasztani, hogy a $C_1AC_1^{-1}$ mátrix első oszlopában az első elem kivételével csupa 0 álljon, s.i.t. A p-ik lépésben ugy akarjuk megválasztani a C_p transzformáló mátrixot, hogy a $C_pC_{p-1}\ldots C_1AC_1^{-1}\ldots C_{p-1}^{-1}C_p^{-1}$ mátrix p-ik oszlopában lévő főátló alatti elemek valamennyien 0-sá váljanak. Természetesen a már eliminált főátló alatti elemeknek nem szabad változniok. Ez az eljárás az $m-1$-ik lépésben egy trianguláris mátrixhoz vezet, melynek főátlójában az eredeti mátrix valamennyi sajátértékét megtalálhatjuk.

Feladatunk tehát abban áll, hogy alkalmas C_p $(p=1,\ldots,m-1)$ mátrixokat találjunk, melyekkel a szükséges transzformációk végrehajthatók.

Keressük C_p-t a

$$C_p = \begin{array}{c} \quad (p) \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ 0 & X_{m-p} & & \\ & \vdots & 0 & \\ & X_1 & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

alakban, ahol $x_1, \dots, x_{m-p}$ a továbbiakban meghatározandó mennyiségek.

C_p inverze igen egyszerüen megadható a következő alakban:

$$C_p^{-1} = \begin{array}{c} \quad (p) \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ 0 & -X_{m-p} & & \\ & \vdots & & \\ & -X_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

az $x_1, \dots, x_{m-p}$ mennyiségeket ugy kell megválasztanunk, hogy a transzformáció elvégzése után nyert $A^{(p+1)}$ mátrix p-ik oszlopában a főátló alatti elemek valamennyien 0-sal legyenek egyenlők, vagyis meg kell oldanunk az

$$f_j(\underline{x}) = a^{(p+1)}_{p+j,p} = a^{(p)}_{j+p,p} + a^{(p)}_{p,p} \cdot X_{m-p-j+1} -$$

$$- \sum_{\ell=1}^{m-p} X_\ell \, (a^{(p)}_{j+p,m+1-\ell} + a^{(p)}_{p,m+1-\ell} \cdot X_{m-p-j+1}) = 0$$

$$(j=1, \dots, m-p)$$

m-p ismeretlenes másodfoku egyenletrendszert. Ezt a Newton-Raphson-módszer segitségével tehetjük meg. Az egyenletrendszer megoldására szolgáló

$$\underline{x}^{[k+1]} = \underline{x}^{[k]} - J^{-1}_{j,h} \cdot \underline{F}\,(\underline{x}^{[k]})$$

$$(\underline{F}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_{m-p}(\underline{x}) \end{pmatrix})$$ iteráció végrehajtásához

szükséges $J_{j,h}$ Jacobi-féle mátrix elemeit a

$$J_{j,h} = \frac{\partial f_j}{\partial x_h} = \delta_{m-p-j+1,h} \cdot (a^{(p)}_{p,p} - \sum_{\ell=1}^{m-p} a^{(p)}_{p,m+1-\ell} \cdot x_\ell) -$$

$$- a^{(p)}_{j+p,m+1-h} - a^{(p)}_{p,m+1-h} \cdot x_{m-p-j+1}$$

$(j=1,\dots,m-p)$

$(h=1,\dots,m-p)$ képlet segitségével adhatjuk meg (δ a Kronecker-féle szimbolum).

Az iteráció végrehajtásához kezdő közelitésként az $x^{(o)}_1 = \dots = x^{(o)}_{m-p} = 0$ értékeket vehetjük.

Eddigi meggondolásaink alapján

$$a^{(p+1)}_{p,p} = a^{(p)}_{p,p} - \sum_{\ell=1}^{m-p} a^{(p)}_{p,m+1-\ell} \cdot x_\ell$$

Éppen az eredeti mátrixnak egyik sajátértéke.

Az $A^{(p+1)} = C_p A^{(p)} C_p^{-1}$ mátrix többi elemeit az alábbi transzformációs képletekből nyerjük:

$$a^{(p+1)}_{p,\ell} = a^{(p)}_{p,\ell} \qquad (\ell = p+1,\dots,m)$$

$$a^{(p+1)}_{i,\ell} = a^{(p)}_{i,\ell} + a^{(p)}_{p,\ell}\, x_{m-i+1} \qquad (i=p+1,\dots,m) \quad (\ell=p+1,\dots,m)$$

$p > 1$ esetén

$$a_{i,\ell}^{(p+1)} = a_{i,\ell}^{(p)} \qquad \begin{matrix}(i=1,\dots,m)\\(\ell < p)\end{matrix}$$

$$a_{\ell,i}^{(p+1)} = a_{\ell,i}^{(p)}$$

Az A m x m -es mátrix összes sajátértékének meghatározása tehát egy m-1 ismeretlenes, egy m-2 ismeretlenes, s.i.t. egy 2 ismeretlenes másodfoku egyenletrendszer, s végül egy másodfoku egyenlet megoldását kivánja meg. Komplex aritmetika nélkül ezeknek csak valós megoldásait kaphatjuk meg (ha ilyenek léteznek) a Newton-Raphson-módszer segitségével.

Az eljárás programja az Ural-2 elektronikus számológépre készült EFT autókódban.

S u m m a r y

The paper deals with the determination of the eigenvalues of matrices. The method consists in the transformation of the given matrix with the aid of similarity transformations to a triangular matrix in whose diagonal the eigenvalues sought for can be found. The solutions of the quadratic equation systems required for the determination of the matrices of the transformations can be obtained by the Newton-Raphson method.

Резюме

Статья занимается вычислением собственных значений матриц. Существо метода состоит в превращении данной матрицы преобразованием подобия в треугольную, в диагонале которой находятся искомые собственные значения. Решения систём квадратных уравнений, необходимых для определения матриц преобразований, получаются методом Нютона-Рафсона.

Bakó András:

A legrövidebb ut meghatározása veszteséges hálózatban

A legrövidebb ut problémát Ford és Fulkerson [1] hálóelméleti módszerrel oldja meg. A feladat egy általánositására - időtől függő elhosszakkal biró hálózatra - Cooke és Holsey [2] ad algoritmust dinamikus programozási módszert követve. Klafszky Emil [3] a Ford-Fulkerson féle folyammódszer segitségével egy rövidebb eljárást ir le, amely az ut hosszán kivül a legrövidebb utvonalat is megadja. A legrövidebb ut egy másik - a dolgozat - ban szereplő - általánositását Charnes és Raike [4] lineáris programozási módszerrel oldja meg. Ez a probléma megoldható a Ford-Fulkerson féle eljárással a Klafszky Emil által leirt gondolatmenethez hasonlóan.

A dolgozatban a problémát ugy oldjuk meg, hogy a feladathoz egy duális feladatot rendelünk. Az eredeti és a duális feladat megoldásai közötti kapcsolatot egy Dualitási tételben fogalmazzuk meg. A tétel bizonyitása egyuttal algoritmust is ad mind a primál, mind a duál feladat megoldására.

1. Legyen N véges sok pontból álló halmaz. Jelöljük N pontjait latin kisbetükkel. Nevezzük $x,y \in N$ $x \neq y$ pontokat összekötő szakaszt a hálózat élének és jelöljük az x pontból az y pontba futó élet (x,y)-nal.

Legyen $s \in N$ és $s' \in N$ két rögzitett pontja a hálózatnak, az s N pontot forrásnak, az $s' \in N$ pontot nyelőnek nevezzük. Jelölje $\gamma(x,y)$ $x,y \in N$ az egységnyi áru szállitási költségét az x pontból az y pontba. A szállitás közben az (x,y) élen az áru veszit a sulyából. Ha az x pontból egységnyi árut szállitunk, ugy az y pontba $K(x,y)$ mennyiség érkezik. Igy az egységnyi áru sulycsökkenése az x pontból az

y pontba való szállitás közben $1-K(x,y)$.

A $\gamma(x,y)$ és $K(x,y)$ függvényekre a következő relációk teljesülését követeljük meg.

$$\text{/1.1/} \qquad \begin{array}{ll} \gamma(x,y) \geq 0 & \text{mind } x,y \in N \\ \gamma(x,y) = \infty & \text{ha az } (x,y) \text{ élen nem lehet szállitani} \\ 0 \leq K(x,y) \leq 1 & \text{mind } x,y \in N \end{array}$$

A felhasználónak az s pontban korlátlan mennyiségü áru áll rendelkezésére, és az a célja, hogy az s' pontban beérkező egységnyi árut minimális költséggel szállitsa, figyelembe véve az éleken a sulycsökkenést.

Legyen $P = (s = x_0, x_1, \ldots, x_k = s')$ egy az s pontból az s' pontba vezető ut. Jelöljük $\lambda(x_i)$-vel az s-ből induló egységnyi áru szállitási költségét a P ut minden az x_i pontig, $\nu(x_i)$-vel az s-ből induló egységnyi áru mennyiségét a P ut mentén az x_i pontban. Ezen függvényeket nyilvánvalóan a következő rekurziókkal adhatjuk meg:

$$\text{/1.2/} \qquad \begin{array}{ll} \lambda(x_0) = 0 & \\ \lambda(x_i) = \lambda(x_{i-1}) + \nu(x_{i-1}) \cdot \gamma(x_{i-1}, x_i) & i = 1,2,\ldots, n \\ \nu(x_0) = 1 & \\ \nu(x_i) = \nu(x_{i-1}) \cdot K(x_{i-1}, x_i) & i = 1,2,\ldots, n \end{array}$$

A feladat meghatározni azt a P utat, amelyre

$$\text{/1.3/} \qquad \frac{\lambda(s')}{\nu(s')} \text{ minimális}$$

azaz, amely mentén szállitva az s' pontba érkező egységnyi mennyiségre eső szállitási költség minimális.

Ahhoz, hogy a feladatot megoldjuk, az előbbi un. primál feladathoz egy duál feladatot rendelünk.

A feladat dualisához a következő gazdasági szemlélettel jutunk: A szállitást egy szállitó is végezheti, aki a hálózat mindenegyes $x \in N$ pontjában megadja azt a $\mu(x)$ árat, amennyiért az x pontban egységnyi árut ad a felhasználónak. Ahhoz, hogy a felhasználó vegyen árut az y pontban, a $\mu(y)$ árunak olcsóbbnak kell lenni, mintha maga szállitaná egy másik, x pontból. Ez az (x,y) élet figyelembe véve azt jelenti, hogy

$$\mu(y) \leq \frac{\mu(x) + \gamma(x,y)}{K(x,y)}$$

A szállitónak az a célja, hogy a hasznát, azaz a $\mu(s')$ értéket maximalizálja.

A duális feladat az előbbiek alapján a következőképp fogalmazható meg:

Határozzuk meg azokat a $\mu(x) \geq 0$ $x \in N$ árakat, amelyek eleget tesznek a

$$\mu(s) = 0$$

/1.4/ $$K(x,y) \cdot \mu(y) - \mu(x) \leq \gamma(x,y) \qquad x,y \in N$$

feltételeknek és a

/1.5/ $$\mu(s') \text{ maximális}$$

A duál feladat lehetséges megoldásának nevezzük azon $\mu(x)$ $x \in N$ értékeket, amelyek eleget tesznek /1.4/ feltételeknek.

A duális feladatnak van lehetséges megoldása, például $\mu(x) = 0$ $x \in N$, mert kielégiti az /1.4/ feltételeket.

Az alábbi tétel bizonyitása konstruktiv, igy egyben algoritmust is szolgáltat az /1.3/ feladat megoldására.

Tétel:

Legyen λ, ν , az /1.2/ relációval megadott függvény.
Ekkor

$$\min_{P} \frac{\lambda(s')}{\nu(s')} = \max \mu(s')$$

ahol a minimum az s-ből az s'-be vezető utakra, a maximum az /1.4/-nek elegettevő $\mu(x_i)$ árakra értendő.

2. A tétel bizonyitásánál felhasználjuk az alábbi lemmát, amely a primál és a duál feladat lehetséges megoldásai közötti kapcsolatot mutatja.

Lemma:

Tetszőleges P ut és $\mu(x)$ $x \in N$ lehetséges megoldás esetén

$$\frac{\lambda(s')}{\nu(s')} \geq \mu(s')$$

Bizonyitás:

i-re vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy egy P ut minden x_i pontjára teljesül a

$$\frac{\lambda(x_i)}{\nu(x_i)} \geq \mu(x_i) \qquad /2.1/$$

egyenlőtlenség.

i=0 esetben $x_0 = s$, igy a λ, ν, μ definiciójából kapjuk

$$\frac{\lambda(s)}{\nu(s)} = \mu(s)$$

Tegyük fel, hogy i-1 -re fennáll a /2.1/ egyenlőtlenség, azaz

$$\frac{\lambda(x_{i-1})}{\nu(x_{i-1})} \geq \mu(x_{i-1})$$

az /1.4/ feltételt felhasználva

$$\frac{\lambda(x_{i-1})}{\nu(x_{i-1})} \geq K(x_{i-1},x_i)\cdot\mu(x_i) - \gamma(x_{i-1},x_i)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, átrendezve /1.2/ miatt

$$\lambda(x_i) \geq \nu(x_i)\cdot\mu(x_i)$$

alakhoz jutunk, amellyel a lemmát bebizonyitottuk.

A lemma miatt, ha találunk oly P utat, és oly /1.4/-et kielégitő $\mu(x)$ árukat, amely mentén a /2.1/ egyenlőséggel áll fenn minden $x_i \in P$ esetén, akkor a szükségképpen a primál feladat minimumát ill. a duál feladat maximumát kapjuk.

A tétel bizonyitása:

Tegyük fel, hogy a $\mu(x_i)$ függvény olyan, hogy $\mu(s')$ maximális. Soroljuk az N pontjait két halmazba: S-be és S'-be.
Legyen

a./ $s \in S$

b./ $x \in S$, ha van olyan $y \in S$, hogy (x_i,y)-ra /1.4/ egyenlőséggel teljesül.

Jelöljük: $S' = N - S$.

Ha $s' \in S$, akkor meghatároztuk azt a P utat, amely mentén /2.1/ egyenlőséggel teljesül.

Ha $s' \notin S'$, ugy

$$K(x,y)\cdot\mu(y) - \mu(x) < \gamma(x,y)$$

minden $x \in S$, $y \in S'$ esetén.

Jelöljük:

$$\mathcal{E} = \min_{\substack{x \in S \\ y \in S'}} \left(\frac{\gamma(x,y) + \mu(x)}{K(x,y)} - \mu(y) \right) > 0$$

A $\mu(x)$ függvényből az $\mathcal{E}$ segitségével konstruálunk egy uj "ár" függvényt a következőképp:

$$\bar{\mu}(x) = \begin{cases} \mu(x) & x \in S \\ \mu(x) + \varepsilon & x \in S' \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy az igy konstruált $\bar{\mu}(x)$ függvény kielégiti az /1.4/ feltételeket:

$$\bar{\mu}(s) = \mu(s) = 0$$

A $K(x,y)\ \mu(y) - \mu(x) \leq \gamma(x,y)$ feltétel teljesülését az alábbi 4 esetben kell megmutatni:

a./ $x \in S$, $y \in S$ esetben $\bar{\mu}(x) = \mu(x)$, igy az /1.4/ feltétel teljesül.

b./ $x \in S$, $y \in S'$ esetben

$$K(x,y) \cdot \bar{\mu}(y) - \bar{\mu}(x) = K(x,y)[\mu(y) + \mathcal{E}] - \mu(x) \leq$$

$$\leq K(x,y)\left[\mu(y) + \frac{\gamma(x,y) + \mu(x)}{K(x,y)} - \mu(y)\right] - \mu(x) = \gamma(x,y)$$

c./ $x \in S'$, $y \in S$ esetben

$$K(x,y) \cdot \bar{\mu}(y) - \bar{\mu}(x) = K(x,y) \cdot \mu(y) - \mu(x) - \mathcal{E} \leq$$

$$\leq K(x,y) \cdot \mu(y) - \mu(x) \leq \gamma(x,y)$$

d./ $x \in S'$, $y \in S'$ esetében

$$K(x,y)\cdot\bar{\mu}(y) - \bar{\mu}(x) = K(x,y)\left[\mu(y) + \mathcal{E}\right] - \mu(x) - \mathcal{E} =$$

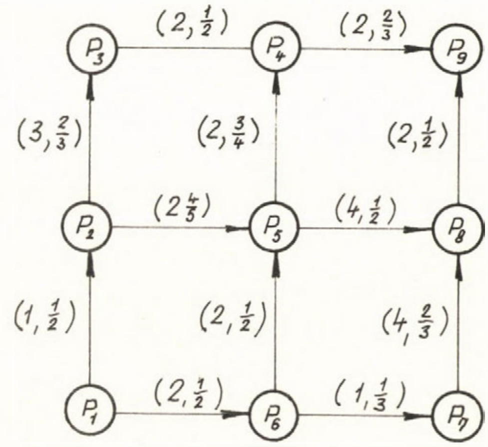
$$= K(x,y)\cdot\mu(y) - \mu(x) - \mathcal{E}\left[1 - K(x,y)\right] \leq K(x,y)\cdot\mu(y) - \mu(x) \leq \gamma(\ ,\ )$$

$\varepsilon >$, ε , $\bar{\mu}(\ ) > \mu(\ )$,

$\mu(\ )$

3. A fentieket egy numerikus példán illusztráljuk.

Tekintsük a következő hálózatot:



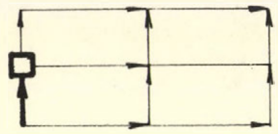
ahol az élre irt első szám a szállitási egységköltséget (a γ értéket), a második szám az élveszteséget (a k értéket) jelenti. Határozzuk meg a/1.3/ feltételeknek elegettevő utat a P_1 pontból a P_9 pontba.

<u>I. lépés</u> $S = \{P_1\}$

$$\mathcal{E} = \begin{cases} P_1 \rightarrow P_2 & \text{esetén} \quad \dfrac{1+0}{1/2} - 0 = \underline{\underline{2}} \longrightarrow \text{min!} \\ P_1 \rightarrow P_6 & \qquad\qquad \dfrac{2+0}{1/2} = 0 = 4 \end{cases}$$

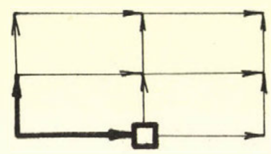
Az uj potenciál az S -beli pontoknál 2.

A lépéseknél felrajzoljuk a hálózatot bekeretezéssel megjelölve az S-be bejelölt pontot:



II. lépés $S = \{P_1, P_2\}$

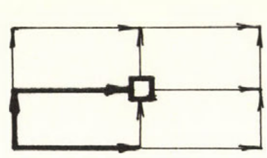
$$\mathcal{E} = \begin{cases} P_1 \to P_6 \\ P_2 \to P_3 \\ P_6 \to P_5 \end{cases} \quad \text{esetén} \quad \begin{array}{l} \frac{2+0}{1/2} - 2 = \underline{\underline{2}} \longrightarrow \text{min!} \\ \frac{3+2}{2/7} - 2 = 15\frac{1}{2} \\ \frac{2+2}{4/5} - 2 = 3 \end{array}$$



Uj potenciál az S -beli pontoknál 4.

III. lépés $S = \{P_1\ P_2\ P_6\}$

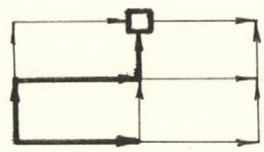
$$\mathcal{E} = \begin{cases} P_2 \to P_3 \\ P_2 \to P_5 \\ P_6 \to P_5 \\ P_6 \to P_7 \end{cases} \quad \text{esetén} \quad \begin{array}{l} \frac{3+2}{2/7} - 4 = 13\frac{1}{2} \\ \frac{2+2}{4/5} - 4 = \underline{\underline{1}} \longrightarrow \text{min!} \\ \frac{2+4}{1/2} - 4 = 8 \\ \frac{1+4}{1/3} - 4 = 11 \end{array}$$



Uj potenciál az S -beli pontoknál 5.

IV. lépés $S = \{P_1\ P_2\ P_5\ P_6\}$

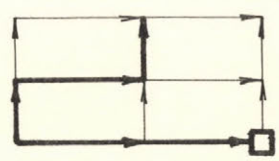
$$\mathcal{E} = \begin{cases} P_2 \to P_3 \\ P_5 \to P_4 \\ P_5 \to P_8 \\ P_6 \to P_7 \end{cases} \quad \text{esetén} \quad \begin{aligned} &\frac{3+2}{2/7} - 5 = 12\frac{1}{2} \\ &\frac{2+5}{3/4} - 5 = \underline{\underline{4\frac{1}{3}}} \longrightarrow \text{min!} \\ &\frac{4+5}{1/2} - 5 = 13 \\ &\frac{1+4}{1/3} - 5 = 10 \end{aligned}$$



Uj potenciál az S -beli pontoknál $9\frac{1}{3}$.

<u>V. lépés</u> $S = \{P_1\ P_2\ P_4\ P_5\ P_6\}$

$$\mathcal{E} = \begin{cases} P_2 \to P_3 \\ P_5 \to P_8 \\ P_6 \to P_7 \\ P_4 \to P_9 \end{cases} \quad \text{esetén} \quad \begin{aligned} &\frac{3+2}{1/7} - 9\frac{1}{3} = 8\frac{1}{6} \\ &\frac{4+5}{1/2} - 9\frac{1}{3} = 8\frac{2}{3} \\ &\frac{1+4}{1/3} - 9\frac{1}{3} = \underline{\underline{5\frac{2}{3}}} \longrightarrow \text{min!} \\ &\frac{2+9\frac{1}{3}}{3/4} - 9\frac{1}{3} = 5\frac{7}{9} \end{aligned}$$



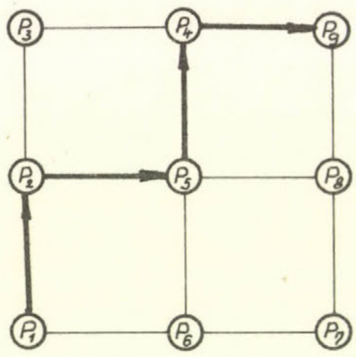
Uj potenciál az S -beli pontokon 15.

<u>VI. lépés</u> $S = \{P_1\ P_2\ P_4\ P_5\ P_6\ P_7\}$

$$\mathcal{E} = \begin{cases} P_2 - P_3 \\ P_5 - P_8 \\ P_7 - P_8 \\ P_4 - P_9 \end{cases} \quad \text{esetén} \quad \begin{aligned} &\frac{3+2}{2/7} - 15 = 2\frac{1}{2} \\ &\frac{4+5}{1/2} - 15 = 3 \\ &\frac{4+15}{2/3} - 15 = 13\frac{1}{2} \\ &\frac{2+9\frac{1}{3}}{3/4} - 15 = \underline{\underline{\frac{1}{9}}} \longrightarrow \text{min} \end{aligned}$$

Potenciálérték a P_9 pontban $15\frac{1}{9}$.

Egységnyi áru szállitási költsége a $\overrightarrow{P_1P_2P_5P_4P_2}$ utvonalon minimális:



- . -

Irodalom

1./ L.R.Ford and D.R.Fulkerson, "Maximal Flow Trought a Network" Canadian J. Math. 8. 339-404 /1956/

2./ K.L.Cooke and E.Halsey: The Shortest Route Trought a Network with Time Dependent Internodal Transit Times J.Math.Anal.Appl. 14, 493-498 /1966/

3./ Klafszky E.: Legrövidebb ut meghatározása időtől függő élhosszakkal biró hálózatban. MTA SzK Közlemények 3, 29-35 /1968/

4./ A.Charnes and W.M.Raike: One-pass Algorithms for some Generalized Network Problems. Operations Research 14, 914-924 /1966/.

Summary

The shortest path problem is solved by Ford and Fulkerson [1] by means of the network method. For the generalization of the problem - in the case of network having edge lengths depending on the time - Cooke and Holsey [2] render algorithm while following the method of dinamic programming. E.Klafszky [3] applying the flow method of Ford and Fulkerson gives a shorter procedure delivering the shortest path in addition to the length of the path. Another generalisation described in this paper is

performed by Charnes and Raike [4] by means of linear programming. That generalization can be solved by means of the Ford and Fulkerson's procedure similar to the way described by Klafszky.

The problem in this paper is solved by assining a dual problem to the original one. We describe the relation beetween the original and the dual problem in a duality theorem. The proof of the theorem gives an algorithm for solving of both the primal an dual problem as well.

Р е з ю м е

Проблему наикратчайшего пути Форд и Фулькерсон [1] решают методом теории сеток.
Обобщение задачи- для сетки имеющей рёбра зависящиеся от времени - Сееке и Хольсей [2] решают алгорифмом использующим метод динамического программирования. Клафски Эмил [3] описывает более короткий процесс используя метод потоков Форда-Фулькерсона, который задаёт не только длину пути, а наикратчайший путь.
Другое обобщение наикратчайщего пути - которое находится в настоящей статье - Чарнес и Рейльс [4] решают методом линейного программирования. Эту проблему можно решать с процессом Форда-Фулькерсона ходом мыслей, похожим на описанный Клафски Эмилом.
В настоящей статье мы решаем эту проблему с двойственной задачей. Связь между прямой и двойственной задачами сформулируем в одной теореме двойственности. Доказательство теоремы одновременно задаёт и алгорифм для решения и прямой и двойственной задачи.

Sonnevend György:

Megjegyzések a differenciál játékok egyszerü tipusairól.

Ezen jegyzetben a differenciáljátékok néhány speciális problémájával foglalkozunk.

Először vizsgáljuk a következő üldözési feladatot.
Egy K körlapon mozoghat az üldöző, a H határoló körvonalon az üldözött, mindkettőjük abszolut értékben maximális sebessége 1.

A feladat,meghatározni mindkét részről az optimális viselkedésmódot. Alább egy ilyet adunk meg (tökéletesen jó eredményt adva [6]-ban).

Ilyen tipusu feladatokkal többen foglalkoztak.
A legáltalánosabb módszert differenciáljátékokra (üldözés esetében) Pontrjagin [1] ill. lineáris játékokkal [2-4] cikkében adott. Bátran állithatjuk, hogy módszere és e cikk két alaptétele a differenciál játékok elméletének fontos elemeit alkotják.

Mégis a fenti egyszerü feladat elemzése során megmutatjuk, hogy az [1] cikk alapfeltevései esetében nem teljesülnek és igy további kutatásra van szükség és lehetőség e feladattipus vizsgálatánál.

Először is jegyezzük meg, hogy a fenti feladat állapottere nem egy teljes enklidesi tér, hanem egy határral rendelkező differenciálható sokaság: a körlap és a körvonal direkt szorzata (Henger, melynek alap és fedőlapjai "azonositva" van (összeragasztva az egy magasságvonalon fekvő pontpárok). Habár az [1] ill. [4] cikkben állapottérként a teljes enklidesi tér szerepel, könnyen ellenőrizhetjük, hogy az ott megadott módszer átvihető tetszőleges differenciálható sokaságon vett differenciáljáték esetére, hiszen a meggondolások "lokális" jellegüek.

Bevezetve a $K \times L = R$ sokaságon egy természetes koordináta rendszert a játék egyenletei

$$\dot{x} = u \qquad |u| \leq 1 \qquad \begin{cases} K = x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ L = 0 \leq z < 1 \\ M : \text{,,}x = z\text{''} \end{cases}$$

$$\dot{z} = v \qquad |v| \leq 1$$

A terminális halmaz M a hengerpalást egy csavarvonala. Mivel M nem konvex a [4] cikk módszere közvetlenül nem alkalmazható. (Elképzelhető, hogy e módszert lehet ugy általánositani - az alternáló összeg müvelet nem konvex halmazokra való általánositásával - hogy általa feladatunk kezelhető lesz, most ezzel nem foglalkozunk.) Vizsgáljuk most az [1] cikk módszerének alkalmazhatóságát.

A ψ vektorfüggvényre vonatkozó differenciálegyenlet jelen esetben (a differenciálegyenlet helytől független) $\dot{\psi} = 0$, ezért az optimális mozgásoknak egyenesvonaluaknak kellene lenni. u(t)-t ill. v(t)-t az határozza meg, hogy

$$u(t)\,\psi_{12} \qquad \text{maximális} \qquad (\psi_{1,2} = \psi_1, \psi_2)$$

illetve

$$v(t)\,\psi_3 \qquad \text{minimális} \qquad \psi_3 = \psi_3$$

abban az esetben, ha pl. $\psi_3 = 0$ a v(t) meghatározatlan.

A ψ-k az M-re merőleges vektorok. Egy ábra felrajzolásával könnyen látható, hogy $\psi_3 = 0$ olyan kiindulási helyzethez tartozók, melynél az üldöző és üldözött összekötő egyenese átmegy a körközépponton. A v(t) ilyen határozatlansága miatt az S sokaság nem szerkeszthető meg. A módszert lehetne menteni azáltal, hogy az S sokaság megszerkesztéséhez nem az összes lehetséges ψ-t használjuk. Az 5 és 6 feltételek biztositásához pl. $|\psi_3| < |\psi_{12}|$ kellene megkövetelni. Azonban mindenképpen baj van a $\psi_3 = 0$ esettel: ahhoz, hogy az S-ről való w leképezés kiadja az egész R-t, szükséges, hogy bevonjuk ezt az esetet is, márpedig fennállásakor v(t) nem lehet ugy definiálni, hogy az alapvető 1 feltétel fennálljon.

Az alábbiakban megadunk egy stratégiát, mely véges idő alatt befejezi a játékot. Más módszer kell tehát!

Ez az eredmény érdekes; ugyanis abban az esetben, ha az üldözött is az egész K körön belül mozoghat ismert (Besicovitz egy eredménye), hogy az üldözött végtelen hosszu ideig kitérhet az elkapás elől (ld. Littlewood : Mathematical Miscellany az ő stratégiájának lényege, hogy pályája összegükben végtelen hosszu egyenes szakaszokból áll, melyeket ugy választ meg diszkrét időpillanatokban, hogy irányuk merőleges legyen ő és üldözője összekötő egyenesére és ha ez az egyenes nem megy át a körközépponton, akkor a körközéppontot tartalmazó oldalára mutasson).

Ha tehát az üldözött számára van egy kör, amelyen belül mozoghat, akkor üldözője (ugyanakkora maximális sebességgel) nem tudja megfogni, igy pl. akármilyen kis körgyürü elég a megmeneküléshez.

Adjuk most meg az elfogás stratégiáját. Először is menjen az üldöző a kör középpontjába, ezután mozogjon ugy, hogy összekötő egyenesük állandóan átmenjen a kör középpontján. Ha emellett az üldözött maximális sebességgel egyirányban halad, akkor az üldöző pályája egy $\frac{1}{2}$ sugaru félkör, mely a kiinduláshoz tartozó összekötő egyenest a középpontban érinti (a középponti és kerületi szögek tétele).

Ha az üldözött egyirányban maximális sebességgel fut, akkor az elfogása $\pi/2$ idő után következik be. Ha közben irányt változtat (maximális sebességét tartva), akkor szimmetria okokból (összekötő egyenes mindig átmegy a kör középpontján) az elfogás ugyanannyi idő alatt bekövetkezik. Ha kisebb sebességgel halad, akkor az üldözőnek módjában van (a szimmetrikus helyzetet állandóan fenntartva) ugyanazon idő alatt még előnyösebb (közelebbi) poziciót elfoglalni. Valószinünek látszik, hogy ez az üldöző részéről is optimális stratégia (azaz nyeregpont) azonban nem szimmetrikus esetben elég bonyolultnak látszik az optimális üzés (világos, hogy bizonyos esetekben gyorsabban is sikerül szimmetrikus helyzetet elérni, mint a középpontba futás révén). Vegyük észre, hogy ez a stratégia ismertnek tételezte fel az üldözött irányitását az adott pillanatban (nem ugy mint a fent emlitett "kitérési" stratégia). Érdemes megjegyezni, hogy konstrukciónkban éppen az a kivételes helyzet, szingularitás képezte a lényeges pontot, amely miatt a Pontrjagin féle módszer nem alkalmazható.

Jegyezzük meg, hogy a fenti módszer átvihető arra az üldözési feladatra, melyben K ill. H szerepét az n dimenziós gömb ill. gömbfelület veszi át.

Általánosabban sejthető, hogy a fenti üldözési feladat(tetszőleges konvex test és annak felületén) véges idő alatt befejezhető, ha a test korlátos, (és felülete minden pontban pozitiv görbületü?)

Térjünk most át egy másik problémára, Pontrjagin [4] cikkében a lineáris differenciálegyenletek esetére egy általános módszert irt le

$z = Cz + U - \mathcal{V}$, $z \in R$ $u \in U$, $v \in V$

Az ő módszere alkalmazható tetszőleges (végtelendimenziós) lineáris térben értelmezett differenciál játék esetében is, ha a konstrukcióban szereplő integrálok léteznek. Ez az eset áll fenn akkor, ha az irányitási paramétertartományok U és V kompakt halmazok.

Minthogy az irányitási paramétertartomány az irányitó objektum technikai kapacitását adja meg matematikailag, természetes, hogy az u ill. v-re vonatkozó kikötések

$$(E_1 u_1 u) \leq m_1 \qquad (E_2 v, v) \leq m_2$$

ahol (Hilbert teret vizsgálva állapottérként) E_1 és E_2 pozitiv önadjungált "energia" operátorok, melyek az esetek nagy részében nem korlátos (ált.: differenciál) operátorok.

Speciális példaként tekinthetjük egy rugalmas testre ható ellentétes erők játékát (hur, membrán), vagy R-t mint zajfüggvények halmazát tekintve, u zajkeltő v zajcsillapitó hatásu, vagy $L_2(o,1)$-t mint keritésalakzatok halmazát, ahol u falépitő v falromboló hatásu.

Az itt fellépő esetek nagy részében az U ill. V halmazok kompaktak, pl. ha λ_n az E operátor sajátértékeinek rendszere, mely egy teljes sajátvektorrendszerhez tartozik, akkor $u = \sum u_n$ $m \geq (E,u,u) \geq (E\, u_n, u_n) = \lambda_n \|u_n\|^2$ -ből

$$\|u_n\|^2 < \frac{m}{\lambda_n}$$

Tehát $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n} < \infty$ esetén a megfelelő u vektorok benne vannak a

$$|U_n| < \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{\lambda_n}} \qquad n=1,2,\ldots$$

Hilbert téglában, mely kompakt halmaz. A fenti egyenlőtlenség ($\sum_1^\infty \lambda_n^{-1} < \infty$) számos energiaoperátorra teljesül.
A következőkben vizsgáljuk az egyszerü

$$\dot{x} = u \qquad x-y=z \qquad M: x=y \quad z = 0$$

$$\dot{y} = v \qquad \dot{z}=u-v \qquad U:(E_1u,u) \leq m_1 ; \; V: (E_2v,v) \leq m_2$$

általánositott ellipszoidok.

differenciáljátékot egy Hilbert térben.

Legyen $T = U \stackrel{*}{-} V$, vagyis azon x pontok halmaza, melyekre

$$x + V < U$$

(Feltehető, hogy $T < U$). A T konstrukciójából világos, hogy z_o pontból a játék nem fejezhető be, ha az $M + sT$ (két konvex test komplexus összege) semmilyen s-re sem tartalmazza z_o-t. Másrészt egyszerü belátni, hogy ha valamilyen s-re a tartalmazás fennáll, akkor a játék z_o-ból kiindulva s idő alatt befejezhető. (ld. Pontrjagin emlitett cikkét[4] a fellépő integrálokat célszerü általánosa, a Bochner integrál keretében nézni feltéve, hogy $\|u(t)\|$ korlátos és Lebesque-mérhető, tehát az U kompaktsága sem szükséges, ha Bochner integrálok exisztenciáját figyelembe vesszük. Az $\|u(t)\|$ korlátos, ha E spektruma nem terjed egy pozitiv δ-nál lejjebb.

Ha U kompakt, akkor érdekesen jelentkezik a tér végtelen dimenziós voltából a következő tény: Létezik olyan Z_o pont, ahonnan kiindulva a játék nem fejezhető be, annak ellenére, hogy T nem üres (ami szemléletesen azt jelenti, hogy az üldöző (u) nagyobb lehetőségekkel rendelkezik, mint az üldözött). Ez azért van, mert $T \subset U$ miatt T is kompakt és végtelen dimenziós Hilbert térben kompakt halmaz nem lehet elnyelő, ugyanis ő seholsem sürü, hiszen zárt és gömböt nem tartalmaz, igy a Baire tétel miatt nem lehet $\bigcup_{1}^{\infty} nT = H$.

Nem paradox a fenti állitás akkor, ha Z_o olyan vektor, melyre $(E Z_o, Z_o) = \infty$. Ha tehát a rendszer természetes energia operátora E, akkor minden véges energiáju állapot leépithető (azaz 0-ba vihető a fenti játék esetében, akkor és csak akkor, ha $s.T \supset \{(E,z,z) = \text{const}\}$ valamely s-re.

Abban a speciális esetben, ha $E_1 = E_2 = E$, $m_2 < m_1$ ez teljesül, hiszen ekkor $T = U \overset{*}{-} V \supset (m_1-m_2)(D_1)$ $U = D_{m_1}$, $V = D_{m_2}$, $D_s = (E\,u,u) \leq s$ jelölésekkel. Az E_s ellipszoid konvex voltából

$$E_{m_2} + (m_1-m_2)\, E_1 \subset E_{m_1}$$

(ez tetszőleges konvex testre érvényes összefüggés könnyen bizonyitható megfelelő hasonlósági háromszögek bevonásával).

- . -

Irodalom:

Pontrjagin [1] Uszpehi Mat.Nauk. 1966. 21.4.219-274.

[2] Dokladi Akad.Nauk 174.No.I. 27-29.

[3] " 174.No.6. 1278-1280

[4] " 175.No.4. 764-766

[5] Littewood: Mathematical Miscellany

[6] Megjelenőben magyar ismertetés a fenti cikkekről a jelen jegyzet szerzőjétől.

Summary

Note on differential games

In this note we investigate the following pursuit problem. The pursuer moves on the circle $|z| \leq 1$, the pursued on the circumference $|z| = 1$, both have can have velocities with absulut values smaller then 1.

We show that the two fundametal methods in [1] and [4] are not applicable, and find a strategy wich ends the game in finite time. This strategy reqiures that the two objects lie on a line, wich passes through the centre of the circle- and it is interesting that this is the configuration wich represents the singularity on wick fails the applicability of the method [1]. Howerer we did not proove that our strategy is the best possible. Tho final solution is given in [6].

Attempting investigate the pursuit problem in a Hilbert-space with the method of [4] we made same remarks wich show that in matural cases the control regions conesponding to finit energy capacity:
$(E\,u,u) < \text{const}$ - E is the energy operator - is compact. From this follows that the question of ending the game is not so trivial as in the finit

Резюме

В настоящей статье исследуется проблема гоньбы: гонящий движется в круге $|z| \leq 1$, гонянный на окружности $|z| = 1$, и оба имеют скорость меньше единицы по абсолютной величине.
Мы покажем, что основные методы работ [1] и [4] неприменимы и найдем стратегию окончающую игру в течении конечного времени.

Tomkó József:

Várakozási-idővel kapcsolatos határeloszlás-tételekről.

1. Bevezetés

Korábbi [1], [2] dolgozataimban olyan egykiszolgálós várakozási problémával foglalkoztam, amelynél a várakozásra alkalmas helyek száma véges. Ha egy igény olyan pillanatban érkezik a rendszerbe, amelynél a várakozási sor hossza n (ezt a számot a továbbiakban - sorkapacitás-nak fogjuk nevezni), akkor ez az igény elvész. Mindkét dolgozatban az érkezési folyamatot homogén Poisson tipusunak tételeztem fel. [1]-ben tetszőleges eloszlásu kiszolgálási idő esetére a kiszolgáló foglaltsági periódusának vizsgálatával foglalkoztam. Intuitive világos, hogy ha az érkezési folyamat intenzitása λ minden határon tul nő, akkor a kiszolgáló foglaltsági periodusának hossza sztochasztikusan végtelenhez tart. Bebizonyitottam, hogy ha a foglaltsági periódus hosszát megfelelően normalizáljuk és a kiszolgálási idő várható értékét 1-nek választjuk, akkor a foglaltsági periodus hosszára határeloszlásként $\lambda \to \infty$ esetén az $1-e^{-x}$ eloszlást kapjuk. [2]-ben a várakozási idő ergodikus eloszlásának vizsgálatával foglalkoztam konstans, 1-ségnyi kiszolgálási idők esetén. Pozitiv szórással rendelkező kiszolgálási idők esetére vonatkozóan megemlitettem, hogy ha a forgalmi intenzitás (amely egységnyi várható értékü kiszolgálási idő esetén λ) nagyobb mint 1, akkor a várakozási idő a sorkapacitás ∞ -hez való tartása mellett normális aszimptotikus eloszlással bir.

E dolgozatban ezen utóbbi határátmenet tanulmányozásával szándékozom foglalkozni. Véges sorkapacitásu $M/M/m$ rendszerre sikerül a határátmenet konvergencia sebességét is megbecsülni. A dolgozat 2. pontjában ismertetem az n-sorkapacitásu $M/M/m$ rendszerre vonatkozó legfontosabb eredményeket, majd foglalkozom azzal a kérdéssel, hogy ha a forgalmi intenzitás $\lambda/m < 1$, akkor a várakozási-idő eloszlása $n \to \infty$ esetén milyen gyorsan tart a végtelen sorkapacitásu rendszer várakozási-idő eloszlásához. A 3. pontban, feltételezve, hogy $\lambda/m > 1$ a várakozási-idő $n \to \infty$ esetére vonatkozó határeloszlásával és a határátmenet konvergencia sebességének becslésével foglalkozom. Az MI(G)1 tipusu rendszerre vonatkozó megfelelő határeloszlástétel bizonyitását a 4. pont tartalmazza.

Megállapodunk most a dolgozatban használatos néhány feltevésben és jelölésben. Az érkezések folyamatát homogén $\lambda > o$ paraméterü Poisson tipusunak fogjuk feltételezni. Az egymásután beérkező igények kiszolgálási időtartamait ξ_i, $(i \geq 1)$-kel jelöljük. Feltételezzük, hogy ξ_i-k kölcsönösen független valószinüségi változók, azonos $P\{\xi_i \leq x\} = F(x)$ eloszlásuak s várható értékük $M\xi_i = 1$. A kiszolgálók számát m-mel, a sorkapacitást n-nel fogjuk jelölni. A kiszolgálási sorrendre vonatkozóan az "-előbb érkezett előbb rendel"-elvet fogadjuk el. A dolgozat főtémáját a sorkapacitási n érték minden határon tul való növekedésének megfelelö határátmenetek alkotják. Ezért a rendszerrel kapcsolatos mennyiségeket n-szerint is parametrizáljuk. Igy a t pillanatban érkező igény várakozási-idejét $\eta^{(n)}(t)$-vel, az e pillanatban a rendszerben jelenlevő igények számát $\nu^{(n)}(t)$-vel fogjuk jelölni.

2. n-sorkapacitásu M/M/m rendszer néhány karakterisztikája

Mindenekelőtt utalunk arra, hogy az M/M/m jelölés tömören azt jelenti, hogy a rendszerben m kiszolgáló (készülék) áll készenlétben valamely homogén Poisson folyamat szerint érkező igények kielégitésére és hogy a kiszolgálási idő exponenciális eloszlásu. Ilyképpen $F(x) = 1-e^{-x}$.

Tekintsük most a $\nu^{(n)}(t)$ folyamatot. Az exponenciális eloszlás un. örökifju tulajdonsága következtében $\nu^{(n)}(t)$ homogén Markov-folyamatot alkot, amelynek fázisterét a $0,1,2,\dots,m, m+1,\dots,m+n$ egész számok alkotják. Ennek alapján könnyü felirni egy differenciál-egyenletrendszert a

$$/1/ \quad P_k(t) = P\{\nu^{(n)}(t) = k\}, \qquad (o \leq k \leq m+n)$$

valószinüségekre. Talán célszerü megemliteni, hogy $\nu^{(n)}(t)$ egyuttal születési és kihalási tipusu folyamat, s az /1/ valószinüségekre vonatkozóan, meghatározva a szomszédos állapotokba való átmeneti intenzitásokat egyszerü behelyettesitésekkel nyerhetjük az egyenletrendszert (a születési és kihalási folyamatok fogalmával és az itt felhasználandó velük kapcsolatos eredményekkel megismerkedhet az olvasó pl. a [3] jegyzetben). A szóbanforgó egyenletrendszer a következő alakkal bir:

$$
/2/ \quad \begin{cases}
P_o'(t) = -\lambda P_o(t) + P_1(t), \\
P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k)P_k(t) + (k+1)P_{k+1}(t), & \text{ha } o < k < m, \\
P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + m)P_k(t) + m\, P_{k+1}(t), & \text{ha} \leq m \ \ k < m+n, \\
P_{m+n}'(t) = \lambda P_{m+n-1}(t) - mP_{m+n}(t) .
\end{cases}
$$

Ahhoz, hogy megoldjuk ezt az egyenletrendszert, ismernünk kell a $\nu^{(n)}(t)$ folyamat kezdeti (t=o pillanatbeli) eloszlását. Bennünket azonban e dolgozatban csak a stacionárius eloszlás fog érdekelni, ezért most csak ezen utóbbi meghatározásával foglalkozunk. Minthogy az állapotok száma véges, ezért szinte triviális, hogy a stacionárius eloszlás létezik és egyértelmüen meghatározott bármilyen legyen is a λ érték. A stacionárius eloszlásra az egyenleteket ugy nyerhetjük, hogy /2/ egyenleteinek baloldalait zérussal helyettesitjük, és az igy adódó egyenleteket a t-től független P_k $(o \leq k \leq m+n)$ mennyiségekre vonatkoztatjuk. Egyszerü számolással meggyőződhetünk, hogy az igy nyert egyenletrendszer megoldása;

$$
/3/ \quad \begin{cases}
P_k = \dfrac{\lambda^k}{k!} P_o & , \text{ ha } 1 \leq k \leq m, \\
P_k = \dfrac{\lambda^k}{m!\, m^{k-m}} P_o & , \text{ ha } m < k \leq m+n,
\end{cases}
$$

ahol

$$P_o = \left[\sum_{o}^{m} \lambda^k/_{k!} + \frac{\lambda^m}{m!} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^s \right]^{-1} =$$

$$= \left[\sum_{o}^{m} \lambda^k/_{k!} + \frac{\lambda^m}{m!} \frac{\frac{\lambda}{m} - \left(\frac{\lambda}{m}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\lambda}{m}} \right]^{-1}$$

A továbbiakban meghatározzuk az $\eta^{(n)}(t)$ folyamat stacionárius eloszlását. Minthogy az idő most nem játszik szerepet, ezért a várakozási-idő jelöléséből el is hagyjuk. Vegyük észre azonban most, hogy az $\eta^{(n)} > x$ eseményről egymagában nem beszélhetünk. Ugyanis $\eta^{(n)}$ nincs minden esetben értelmezve, hanem csak akkor, ha a beérkező igény a rendszerben maradhat, azaz, ha nem vész el. Ezért az $\eta^{(n)} > x$ eseményt mindig a $\nu^{(n)} < m+n$ eseménnyel együtt fogjuk tekinteni. Egy igény csak akkor kénytelen várakozni, ha beérkezésekor legalább m számu igény tartózkodik a rendszerben. A teljes valószinüség tételét alkalmazva nyerjük, hogy

$$P\left\{\eta^{(n)} > x,\ \nu^{(n)} < m+n\right\} = \sum_{k=m}^{n+m-1} P_k\, P\left\{\eta^{(n)} > x \mid \nu^{(n)} = k\right\}.$$

Az itt előforduló feltételes valószinüségeket az alábbi okoskodás alapján határozhatjuk meg: Ha egy igény beérkezési pillanatában $k-m$ igény várakozik a rendszerben, akkor ennek az igénynek mindaddig várakoznia kell, amig csak $k-m+1$ igény kiszolgálása be nem fejeződött. Tekintsük most a kiszolgálásuk befejeztével a rendszerből távozó igények áramlatát olyan időszakasz folyamán, amikor van legalább egy várakozó igény a rendszerben. Feltevéseink értelmében ekkor ez az áramlat m paraméterü Poisson folyamatot alkot. Jelölje $q_s(x)$ annak a valószinüségét, hogy az utóbbi áramlatban x-idő alatt s számu esemény következik be, azaz, hogy x idő alatt pontosan s igény kiszolgálása fejeződött be, hacsak ismeretes, hogy a kiszolgálások befejeződési pillanataiban mindig volt legalább egy várakozó igény a rendszerben. A mondottakból világos, hogy

$$P\left\{\eta^{(n)} > x \mid \nu^{(n)} = k\right\} = \sum_{0}^{k-m} q_s(x)$$

és hogy

$$q_s(x) = \frac{(mx)^s}{s!} e^{-mx} .$$

Végeredményben a

$$W_n(x) = P\left\{\eta^{(n)} > x \mid \nu^{(n)} \quad m+n\right\}$$

feltételes valószinüségre az alábbi formulát nyerjük:

$$W_n(x) = (1-P_{m+n})^{-1} \sum_{k=m}^{m+n-1} P_k \sum_{0}^{k-m} q_s(x) =$$

$$= \frac{P_m}{1-P_{m+n}} \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^r \sum_{s=0}^{r} \frac{(mx)^s}{s!} e^{-mx} =$$

$$= \frac{P_m e^{-mx}}{1-P_{m+n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(mx)^\ell}{\ell !} \left[\left(\frac{\lambda}{m}\right)^n - \left(\frac{\lambda}{m}\right)^\ell \right] \frac{1}{\frac{\lambda}{m} - 1}$$

Ez a formula elég bonyolult, a gyakorlatban számolásra nem igen kényelmes a használata. Ezért felmerül a kérdés, hogyan közelithetjük a /4/-es formula jobb oldalát egyszerü kifejezéssel s emellett nyilvánvalóan szeretnénk a közelités pontosságáról is felvilágositást nyerni. A kérdés megválaszolásánál két esetet kell megkülönböztetnünk, amelyeket a $\lambda/m<1$ ill. a $\lambda/m>1$ feltételek teljesülése választ el egymástól. E pontban a $\lambda/m<1$ esetet fogjuk vizsgálni. Megemlitjük, hogy a $\lambda/m = 1$ esetre a dolgozatban ismertetésre kerülő közelitő eljárások egyike sem használható. Azonban nem látszik tulságosan problematikusnak a közelités az utóbbi esetben ($\lambda/m = 1$), sem, minthogy az irodalomban igen jól tisztázott a kérdés $n = \infty$ esetére (lásd pl. [4], [5]).

Tekintsük most tehát a $\lambda/m < 1$ esetet. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ekkor

$$/5/ \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{P_m}{1-P_{m+n}} = \frac{\lambda^m}{m!} P_o^*$$

ahol $P_o^* \left[\sum_{o}^{m} \lambda^k/_{k!} + \frac{\lambda^m}{m!} \frac{\alpha}{1-\alpha} \right]^{-1}$, $\alpha = \frac{\lambda}{m}$; továbbá

hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=o}^{n-1} \frac{(mx)^\ell}{\ell!} \left[\left(\frac{\lambda}{m}\right)^n - \left(\frac{\lambda}{m}\right)^\ell \right] = -e^{\lambda x}.$$

Ezek szerint:

$$/6/ \qquad \lim_{n\to\infty} W_n(x) = \frac{\lambda^m P_o^*}{m!(1-\alpha)} e^{-(m-\lambda)x}$$

Ilymódon $W_n(x)$ közelitéseként tekinthetjük a /6/ jobboldalán előforduló függvényt, mely nem más, mint a várakozási-idő $n = \infty$ esetnek megfelelő stacionárius eloszlása. A közelités pontosságát illetően bebizonyitjuk az alábbi tételt:

<u>1.Tétel.</u> $\alpha = \frac{\lambda}{m} < 1$ esetén létezik olyan $C(\lambda, m)$ konstans, hogy minden $n \geq 1$ és tetszőleges $x \geq o$-ra

$$/7/ \qquad \left| W_n(x) - \frac{\lambda^m}{m!} \frac{P_o^*}{1-\alpha} e^{-(m-\lambda)x} \right| \leq C(\lambda, m)\, \alpha^n.$$

Bizonyitás. Az igazolandó egyenlőtlenség baloldalát, elhagyva az abszolut értékképzést, az alábbi módon is felirhatjuk:

$$- \frac{P_m}{1-P_{m+n}} \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(mx)^\ell}{\ell!} e^{-mx} + \frac{\lambda^m e^{-(m-\lambda)x}}{m!(1-\alpha)} \left(\frac{P_0 \sum_0^{n-1} \frac{(\lambda x)^\ell}{\ell!} e^{-\lambda x}}{1-P_{m+n}} - P_0^* \right).$$

Vegyük észre, hogy P_0 $n \to \infty$ esetén monoton csökkenve tart P_0^* -hoz, ennek megfelelően minden n-re

$$\frac{P_0}{1-P_{m+n}} \geq P_0^* .$$

Következésképpen /7/ baloldalának abszolut értéke nem nagyobb mint

$$\frac{P_m \alpha^n}{(1-P_{m+n})(1-\alpha)} + \frac{\lambda^m}{m!(1-\alpha)} \left(\frac{P_0}{1-P_{m+n}} - P_0^* \right) + \frac{\lambda^m e^{-(m-\lambda)x}}{m!(1-\alpha)} \cdot \frac{P_0 \sum_n^\infty \frac{(\lambda x)^\ell}{\ell!} e^{-\lambda x}}{1-P_{m+n}}$$

Belátjuk most, hogy mind $\frac{P_0}{1-P_{n+n}} - P_0^*$ mind $e^{-(m-\lambda)x} \sum_n^\infty \frac{(\lambda x)^\ell}{\ell!} e^{-\lambda x}$ zérushoz tart α^n rendben, midőn n értékét minden határon tul növeljük. Az első mennyiségre vonatkozóan ez az alábbi egyenlőségekből következik:

$$\frac{P_0}{1-P_{m+n}} - P_0^* = \frac{P_0}{1-\frac{\lambda^m}{m!}\alpha^n P_0} - P_0^* = \frac{P_0 - P_0^* + \frac{\lambda^m}{m!} \alpha^n P_0 P_0^*}{1-\frac{\lambda^m}{m!} \alpha^n P_0},$$

$$P_0 - P_0^* = P_0 P_0^* \left(\frac{1}{P_0^*} - \frac{1}{P_0} \right) = P_0 P_0^* \frac{\lambda^m}{m!} \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha},$$

$$\frac{P_0}{1-P_{m+n}} - P_0^* = \frac{P_0 P_0^* \frac{\lambda^m}{m!} \frac{\alpha^n}{1-\alpha}}{1-\frac{\lambda^m}{m!} \alpha^n P_0}.$$

A második mennyiségünket a következőképpen becsülhetjük:

$$e^{-(m-\lambda)x}\sum_{n}^{\infty}\frac{(\lambda x)^{\ell}}{\ell!}e^{-\lambda x}=\sum_{k=o}^{\infty}\frac{(\lambda x)^{n+k}e^{-mx}}{(n+k)!}\leq$$

$$\leq\sum_{k=o}^{\infty}\frac{\max\limits_{o\leq x<\infty}(\lambda x)^{n+k}e^{-mx}}{(n+k)!}=\alpha^{n}\sum_{k=o}^{\infty}\alpha^{k}\frac{(n+k)^{n+k}e^{-(n+k)}}{(n+k)!}.$$

A Stirling formulára való tekintettel az utóbbi sor konvergens, pl. létezik olyan C_o konstans, hogy

$$\alpha^{n}\sum_{k=o}^{\infty}\alpha^{k}\frac{(n+k)^{n+k}e^{-(n+k)}}{(n+k)!}\leq\alpha^{n}C_o\sum_{k=o}\frac{\alpha^{k}}{\sqrt{n+k}}$$

A bizonyitás menete alapján könnyen konstruálható /7/-tet kielégitő konstans.

3. A várakozási idő határeloszlása $\lambda/m>1$ esetén.

Jól ismeretes, hogy ha a várakozási sorban tetszőleges számu igény felhalmozódhat, azaz, ha a sorkapacitás végtelen, akkor 1-nél nagyobb forgalmi intenzitás mellett a rendszer nem ergodikus. Pontosabban az igaz, hogy ekkor minden véges szóbajöhető k és x-re

$$\lim_{t\to\infty}\underline{P}\left\{\nu^{(\infty)}(t)=k\right\}=0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\underline{P}\left\{\eta^{(\infty)}(t)\leq x\right\}=0.$$

Ha azonban a sorkapacitást végesnek vesszük, akkor a fenti határértékek pozitivak, a rendszer ergodikus. Forditsuk figyelmünket most is a várakozási idő eloszlásának vizsgálatára. Az előző pontban szereplő /4/-es formula

$\lambda/m>1$ esetben is érvényes. $W_n(x)$ közelitésének kérdésével kapcsolatosan először néhány intuitive világos tényre hivjuk fel a figyelmet. Minthogy a forgalmi intenzitás 1-nél nagyobb, ezért általában sok igény várakozik a rendszerben, hacsak elég nagy a sorkapacitás. Számszerü tájékozottság céljából kiszámithatjuk a rendszerben várakozó igények átlagértékét, melyre stacionárius esetben az alábbi formulát nyerjük:

$$W_{m,n} = \sum_{k=1}^{n} k\, P_{m+k} = \frac{\lambda^m}{m!} P_o \sum_{k=1}^{n} k\alpha^k =$$

$$= \frac{\dfrac{\lambda^m}{m!}\,\dfrac{n\alpha^{n+2}-(n+1)\alpha^{n+1}+\alpha}{(\alpha-1)^2}}{\sum_{0}^{m} \lambda^k/k! + \dfrac{\lambda^m}{m!}\,\dfrac{\alpha^{n+1}-\alpha}{\alpha-1}}$$

Innen láthatjuk, hogy $n \to \infty$ esetén

$$W_{m,n} \sim n .$$

Vegyük ezután észre, hogy egy igény várakozási ideje nem más, mint azon időtartam, amelynek folyamán az igény beérkezési pillanatában a rendszerben várakozó igények s ezenkivül plusz még egy igény kiszolgálásuk befejeztével elhagyják a rendszert. Amint már erre az előző pontban rámutattunk, feltevéseink értelmében ez az időtartam az emlitett számu független azonos m-paraméterü exponenciális eloszlásu időszakasz összegeként interpretálható. Másszóval azt mondhatjuk, hogy ha n elég nagy, akkor a várakozási időt nagyszámu független valószinüségi változók összege alkotja. Ilyformán szinte triviális, hogy $W_n(x)$ $n \to \infty$ esetén normális aszimptotikával rendelkezik.

E tényt egzaktan többféle módon igazolhatjuk. Könnyü volna alkalmazni a karakterisztikus függvények módszerét vagy felhasználni a véletlen tagszámu független valószinüségi változók összegének határeloszlására vonatkozó eredményeket. Mi azonban szeretnénk a határátmenet konvergencia sebességét is megbecsülni, s e célból a legegyszerübbnek látszik a konkrét /4/-es formula használata. Megfogalmazzuk, most e pont állitását:

2. Tétel. $\lambda/m > 1$ esetén található olyan $C(\lambda, m)$ konstans, hogy minden $n \geq 1$ és $-\infty < x < \infty$ -re

$$/8/ \quad \left| P\left\{ \frac{\eta^{(n)} - \frac{n}{m}}{\frac{1}{m}\sqrt{n}} \leq x \;\middle|\; \nu^{(n)} < m+n \right\} - \phi(x) \right| < C(\lambda, m) \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ahol

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Bizonyitás. Két esetet fogunk megkülönböztetni annak megfelelően, hogy az $x \geq \sqrt{n}$ és az $x < -\sqrt{n}$ egyenlőtlenségek közül melyik teljesül. Tekintsük előbb az első esetet. A /8/ alatt szereplő abszolut érték ugyanaz mint a

$$P\left\{ \eta^{(n)} > \frac{x}{m}\sqrt{n} + \frac{n}{m} \;\middle|\; \nu^{(n)} < m+n \right\} - (1 - \phi(x))$$

különbség abszolut értéke. Felhasználva a /4/ formulát, e különbséget az alábbi három kifejezés összegeként irhatjuk át;

$$I_1 = \frac{P_m \alpha^n}{(1-P_{n+n})(\alpha-1)} \left[\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(x\sqrt{n}+n)^e}{\ell!} \bar{e}^{(x\sqrt{n}+n)} - (1 - \phi(x)) \right],$$

$$I_2 = \left(\frac{P_m \alpha^n}{(1-P_{m+n})(\alpha-1)} - 1 \right) (1 - \phi(x)),$$

$$I_3 = - \frac{P_m \bar{e}^{(x\sqrt{n}+n)}}{(1-P_{m+n})(\alpha-1)} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{[\alpha(x\sqrt{n}+n)]^{\ell}}{\ell!}$$

Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy

$$/9/ \quad \Lambda_n = \frac{P_m \alpha^n}{(1-P_{m+n})(\alpha-1)} = 1 + O(\alpha^{-n}) .$$

Ugyanis

$$\Lambda_n = \frac{\frac{\lambda^m}{m!}\alpha^n P_o}{(1-\frac{\lambda^m}{m!}\alpha^n P_o)(\alpha-1)} = \frac{\frac{\lambda^m}{m!}\alpha^n}{(1/P_o - \frac{\lambda^m}{m!}\alpha^n)(\alpha-1)} ,$$

$$1/P_o = \sum_{o}^{m} \lambda^k/_{k!} - \frac{\lambda^m}{m!}\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{\lambda^m}{m!}\frac{\alpha}{\alpha-1}\alpha^n = C_1(\lambda,m) + \frac{\lambda^m}{m!}\frac{\alpha}{\alpha-1}\alpha^n ,$$

és igy

$$\Lambda_n = \frac{\frac{\lambda^m}{m!}\alpha^n}{(\alpha-1)C_1(\lambda,m)+\frac{\lambda^m}{m!}\alpha_n} = \frac{1}{1+C_2(\lambda,m)\alpha^{-n}} = 1 + O(\alpha^{-n}).$$

Mielőtt a további becslésekre rátérnénk, megemlitjük a Poisson eloszlás és az

$$I(z,n) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_o^z e^{-t} t^{n-1} dt$$

nem teljes Gamma függvény közti kapcsolatot. Parciális integrálásokkal könnyen ellenőrizhető, hogy ha tekintünk egy z-paraméterü Poisson eloszlást, akkor

$$/10/ \quad \sum_{k=o}^{n-1} \frac{z^k}{k!} e^{-z} = 1 - I(z,n).$$

E reláció hasznossága abban rejlik, hogy segitségével a

$$\sum_{\ell=o}^{n-1} \frac{(x\sqrt{n}+n)^\ell}{\ell!} e^{-(x\sqrt{n}+n)}$$

összeget

$$1 - I\,(x\sqrt{n}+n,\ n)$$

alakban irhatjuk fel, melyre $n \to \infty$ esetén igen jól müködő aszimptotikus formulák érvényesek.

Többek között

$$/11/ \qquad I\,(x\sqrt{n}+n,\ n) = \Phi(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

melyet könnyen meg is magyarázhatunk. A /10/ formulára való tekintettel $I(z,n)$-et n-számu független $\mu=1$ paraméterü exponenciális eloszlásu valószinüségi változó összegének eloszlásaként interpretálhatunk. Ennélfogva $I(x\sqrt{n}+n,\ n)$ nem más mint az emlitett összeg standardizáltjának az eloszlásfüggvénye, s innen /11/ a centrális határeloszlásból és annak maradék tagjára vonatkozó becslésből következik.

Mármost /9/, /10/ és /11/-ből kifolyólag

$$I_1 + I_2 = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

I_3-becslése céljából tekintsük a következő átalakitást:

$$|I_3| = \frac{P_m\, e^{(\alpha-1)(x\sqrt{n}+n)}}{(1-P_{m+n})\ (\alpha-1)} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{[\alpha(x\sqrt{n}+n)]^{\ell}}{\ell!}\, e^{-\alpha(x\sqrt{n}+n)}$$

Bevezetve az $y = x + \sqrt{n}$ helyettesitést és alkalmazva a /10/ összefüggést nyerjük, hogy

$$|I_3| = \frac{P_m\, e^{(\alpha-1)\, y\sqrt{n}}}{(1-P_{m+n})\ (\alpha-1)}\ \frac{1}{(n-1)!} \int_{\alpha\sqrt{n}y}^{\infty} e^{-t}\, t^{n-1}\, dt.$$

Az y értéke tekintettel az $x \geq \sqrt{n}$ egyenlőtlenségre 0 és ∞ között váltakozhat. Elvégezve az integrálban a $t - y\sqrt{n} = u$ helyettesitést kapjuk, hogy

$$|I_3| = \frac{P_m}{(1-P_{m+n})(\alpha-1)} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-u} e^{-y\sqrt{n}} (\alpha y \sqrt{n}+u)^{n-1} du.$$

Tekintsük most az integrandusban előforduló

$$f(y,u) = e^{-y\sqrt{n}} (\alpha y \sqrt{n}+u)^{n-1}$$

függvényt. Az integrálunkat ugy fogjuk becsülni, hogy $f(y, u)$ helyett a

$$\max_{0 \le y < \infty} f(y,u) = \tilde{f}(u)$$

függvényt szerepeltetjük. Sőt, minthogy $f(y,u)$ pozitiv a $\left(-\frac{u}{\alpha\sqrt{n}}, \infty\right)$ szakaszon, ezért méginkább növeljük az integrált, ha $f(y,u)$ helyett a tágabb szakaszra vonatkozó

$$\tilde{f}_1(u) = \max_{-\frac{u}{\alpha\sqrt{n}} \le y < \infty} f(y,u)$$

maximumot vesszük. Egyszerü diszkusszió után nyerjük, hogy

$$\tilde{f}_1(u) = [\alpha(n-1)]^{n-1} e^{-(n-1)+\frac{u}{\alpha}}.$$

Igy tehát

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-u} e^{-y\sqrt{n}} (\alpha y \sqrt{n}+u)^{n-1} du \le \frac{\alpha^{n-1}(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(n-1)} \int_0^{\infty} e^{-(1-\frac{1}{\alpha})u} du =$$

$$= \alpha^n \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(n-1)} \frac{1}{\alpha-1}.$$

Mármost /9/ és a Stirling formulából kifolyólag

$$|I_3| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

s ezzel /8/-at $x \geq \sqrt{n}$ -re bebizonyitottuk.

Legyen most $x < -\sqrt{n}$. Ekkor

$$P\left\{\frac{\eta^{(n)} - \frac{n}{m}}{\frac{1}{m}\sqrt{n}} \leq x \,\middle|\, \nu^{(n)} < m+n\right\} = 0,$$

s csak azt kell belátnunk, hogy ilyen x-ekre $\phi(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Ez viszont teljesül, hiszen $x < -\sqrt{n}$ esetén

$$\phi(x) \leq \phi(-\sqrt{n}) = \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2-n}{2}}\, dt \leq \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

Ezzel a bizonyitásunkat befejeztük.

4. Egy kiszolgáló és általános F(x) esete.

Természetesen felvetődik az előző pontok eredményeinek általánositása sokkal tágabb feltevések esetére. A már korábban is alkalmazott szemléletes meggondolások általánosabb esetekben is arra engednek következtetni, hogy pl. 1-nél nagyobb forgalmi intenzitás mellett a várakozási-idő eloszlása a normális eloszlással közelithető, hacsak a sorkapacitást minden határon tul növeljük. Nagymértékben bonyolódik a problémánk már akkor is, ha a kiszolgálási idő eloszlását, F(x)-et az exponenciálistól különbözőnek választjuk, azaz, ha az M/M/m rendszer helyett M/G/m tipusu rendszert tekintünk. Nehézségeink fő oka abban rejlik, hogy még az egykiszolgálós (M/G/1) rendszer várakozási-idő eloszlására sem ismeretes valamilyen könnyen kezelhető algoritmus véges sorkapacitás esetén. Ezért az emlitett általánositás keresztülviteléhez uj módszerekhez kell folyamodnunk. E pontban a karakterisztikus-függvény módszerével bebizonyitjuk a 2. tétel bizonyos általánositásaként a következő állitást:

3. Tétel. Jelölje a stacionárius esetben $\eta^{(n)}$ az n-sorkapacitásu $M(G)1$ rendszernek megfelelő várakozási időt. λ legyen most is a beérkezési folyamat paramétere, a kiszolgálási időtartamot illetően pedig tegyük fel, hogy az $M\xi_i = 1$ várható értéken kivül létezik a $\sigma^2 = \mathcal{D}^2(\xi_i)$ szórásnégyzet is, és $0 < \sigma < \infty$. Ekkor $\lambda > 1$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta^{(n)}-n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \,\Big|\, A_n\right\} = \Phi(x) .$$

Itt A_n azt az eseményt jelöli, hogy egy beérkező igény nem vész el, a rendszerben marad.

Bizonyitás. Először rámutatunk az n-sorkapacitásu $M(G)1$ rendszerben való várakozási idő strukturájára. Jelölje stacionárius esetben $\xi^{(n)}$ valamely adott pillanatban folyamatban lévő kiszolgálási idő fennmaradó részét. $\xi^{(n)}$-t zérusnak értelmezzük, ha az adott pillanatban nincs kiszolgálás. Ha egy igény beérkezési pillanatában a várakozási sor üres, akkor ezen igény várakozási ideje $\xi^{(n)}$. Világos továbbá, hogy a várakozási-idő az alábbi véletlen tagszámu összegként interpretálható: ha teljesül az A_n esemény, akkor

$$\eta^{(n)} = \xi^{(n)} + \sum_{1}^{\gamma_n} \hat{\xi}_i$$

ahol $\gamma_n = \gamma^{(n)} - 1$ (a rendszerben várakozók száma, melyet $\nu^{(n)} = 0$ esetén nem értelmezünk), $\hat{\xi}$-k pedig a várakozó igények kiszolgálási időtartamai. Egyszerü meggondolásokkal belátható, hogy a $\hat{\xi}_i$ mennyiségek is kölcsönösen függetlenek és azonos $F(x)$ eloszlásuak. Ahhoz, hogy kiszámithassuk $\eta^{(n)}$ karakterisztikus függvényét, ismernünk kell γ_n eloszlását. Keilson (lásd 6 -ot) integró-differenciálegyenletek felállitásával és bizonyos tipusu véletlen bolyongás Green függvényének az alkalmazásával megmutatta, hogy stacionárius esetben a várakozási sor hosszának, γ_n-nek az eloszlását az alábbiak szerint irhatjuk le:

Legyenek

$$E_n = P\{\text{ a rendszer üres }\},$$

$$P_k^{(n)} = P\{\gamma_n = k\},\ (o \leq k \leq n),$$

$$M\, e^{-s\xi_i} = \psi(s),\ (\mathrm{Re}\, s \geq o);\ \mathcal{E}(w) = \frac{1}{w}\psi(\lambda(1-w)),\ (o < w < 1).$$

Ekkor

$$E_n = 1/\lambda\, \zeta_n\, \pi_n(o)\, \psi(\lambda),$$

$$P_o^{(n)} = 1/\lambda\, \zeta_n\, \pi_n(o)\, (1-\psi(\lambda)),$$

$$P_k^{(n)} = 1/\lambda\, \zeta_n\, \pi_n(k)\ ,\ (1 \leq k \leq n-1),$$

$$P_n^{(n)} = 1/\lambda^2\, \zeta_n\, \pi_n(o)\, \psi(\lambda) + 1 - \frac{1}{\lambda}\ ,$$

ahol

$$\zeta_n = (1 + 1/\lambda\, \pi_n(o)\, \psi(\lambda))^{-1},$$

$$\pi_n(k) = \frac{g_k - g_{k-1} + |\mu_\Theta|^{-1}(1-\Theta)\,\Theta^{-k-1}}{|\mu_\Theta|^{-1}\,\Theta^{-n} - g_n}\ ,\ (o \leq k \leq n-1),$$

$\{g_k\}$ bizonyos sorozat, melyre $\lambda > 1$ esetén

$$\lim_{k \to \infty} g_k = \frac{1}{\lambda - 1}\ ,$$

s végül Θ a $(0,1)$ intervallumban $\lambda > 1$ esetén egyértelmüen meghatározott pont, melyre $\mathcal{E}(\Theta) = 1$, mig

$$\mu_\Theta = \Theta\, \mathcal{E}'(\Theta) < 0.$$

A felsoroltakból egyszerü átalakitások után beláthatjuk az alábbi $n \to \infty$ esetére vonatkozó aszimptotikus relációkat:

$$\xi_n = 1+0\,(\Theta^n),$$

$$\pi_n(k) = (1-\Theta)\Theta^{n-k-1} + 0(\Theta^n), \quad (0 \leq k \leq n-1),$$

s következésképpen:

$$/12/ \quad \begin{cases} P_k^{(n)} = 1/\lambda\,(1-\Theta)\Theta^{n-k-1} + 0\,(\Theta^n), & (0 \leq k \leq n-1), \\ P_n^{(n)} = 1 - \frac{1}{\lambda} + 0\,(\Theta^n). \end{cases}$$

Keilson ezen eredménye alapján $\eta^{(n)}$ feltételes karakterisztikus függvénye a következőképpen határozható meg. A $\xi^{(n)}$, $\hat{\xi}_i$, γ_n mennyiségek függetlenségéből kifolyólag:

$$M\left\{e^{it\eta^{(n)}} \mid A_n\right\} = \Psi_n(t) \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t)^k \frac{P_k^{(n)}}{1-P_n^{(n)}},$$

ahol $\Psi_n(t) = M\left\{e^{it\xi^{(n)}} \mid A_n\right\}$, $\varphi(t) = M\,e^{it\hat{\xi}_1}$.

A /12/ relációkra való tekintettel

$$M\left\{e^{it\eta^{(n)}} \mid A_n\right\} = \Psi_n(t)\,\frac{1}{\lambda}\,(1-\Theta)\Theta^{n-1}\,\frac{1}{1-P_n^{(n)}} \sum_{0}^{n-1} (\varphi(t)\Theta^{-1})^k + o(1) =$$

$$= \Psi_n(t)\,\frac{1}{\lambda}\,(1-\Theta)\,\frac{1}{1/\lambda + o(1)} \cdot \frac{\varphi(t)^n - \Theta^n}{\varphi(t) - \Theta} + o(1).$$

Ennek alapján az $\frac{\eta^{(n)} - n}{\sigma\sqrt{n}}$ normalizált mennyiség feltételes karakterisztikus függvénye:

$$M\left\{e^{it\frac{\eta^{(n)}-n}{\sigma\sqrt{n}}}\Big| A_n\right\} = e^{-it\frac{\sqrt{n}}{\sigma}}\Psi_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\frac{1-\Theta}{1+o(1)}\frac{\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n-\Theta^n}{\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\Theta}+o(1).$$

Kikötöttük, hogy $M\xi_i = 1$ és hogy létezik a $\sigma^2 = \mathcal{D}^2(\xi_i)$ szórásnégyzet, ezért $t \to o$ esetén

$$\ln\varphi(t) = it - \frac{t^2}{2}\sigma^2 + O(t^2),$$

azaz tetszőleges rögzitett t-re n esetén

$$\ln\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Igy tehát

$$\lim_{n\to\infty} M\left\{e^{it\frac{\eta^{(n)}-n}{\sigma\sqrt{n}}}\Big| A_n\right\} = \lim_{n\to\infty}\Psi_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{t^2}{2}},$$

s tételünk bizonyitásához most már csak azt kell belátnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1.$$

Ehhez elegendő megmutatni, hogy a $\xi^{(n)}/\sigma\sqrt{n}$ sorozat sztochasztikusan zérushoz konvergál $n\to\infty$ esetén. E szemléletesen elég világos tényt precizen a következőképpen láthatjuk be. Tegyük fel, hogy épp a kezdő $(t=o)$ pillanatban kezdődik el a kiszolgáló első foglaltsági periódusa. Legyen $A(t)$ az az esemény, hogy a t pillanatban a kiszolgáló foglalt, $\beta(t)$ -vel pedig jelöljük azt az összidő-tartamot, amelynek folyamán a $(0,t)$ időszakasz alatt a kiszolgáló szabad volt. Minthogy most nem a stacionárius esetből indulunk ki, ezért a $\xi^{(n)}$ mennyiséget t- szerint is parametrizálnunk kell, igy a továbbiakban $\xi_t^{(n)}$-nel fogjuk jelölni. Tekintsük végül az egymásután kiszolgálásra kerülő igények $\hat{\xi}_i$ $(i\geq 1)$ kiszolgálási idejei alkotta felujitási-folyamatot, s legyen $\hat{\xi}_t$ a

$$t + \hat{\xi}_t = \sum_{1}^{N_t+1} \hat{\xi}_i$$

egyenlet által értelmezett mennyiség, ahol N_t jelenti a $(0,t)$ időköz alatti felujitások számát.

Ekkor, ha az $A(t)$ esemény teljesül:

$$\xi_t^{(n)} = \hat{\xi}_{t-\beta(t)}.$$

Bevezetve az $\Omega(t,y) = P\{\beta(t) \leq y | A(t)\}$ feltételes eloszlás-függvényt, felirhatjuk, hogy

$$P\left\{\xi_t^{(n)} > x\right\} = P\,(A(t)) \int_0^t P\left\{\hat{\xi}_{t-y} > x\right\} d_y\Omega\,(t,y).$$

Integrálva mindkét oldalt a $(0 \leq x < \infty)$ tartományon nyerjük, hogy

$$M\xi_t^{(n)} = P(A(t)) \int_0^t M\left\{\hat{\xi}_{t-y}\right\} d_y\Omega(t,y).$$

Feltevéseinkből kifolyólag az $M\hat{\xi}_t = m(t)$ függvényre

$$\lim_{t \to \infty} m(t) = \frac{\sigma^2+1}{2}$$

(lásd [3], 124. old), ezért létezik olyan k konstans, amelyre $m(t) \leq k$. Innen minden $t \geq 0$-ra $M\xi_t^{(n)} \leq k$ s igy a stacionárius esetben is

/13/ $\quad M\xi^{(n)} \leq k.$

Minthogy $\xi^{(n)}/\sigma\sqrt{n} \geq 0$, s/13/ miatt $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{M\xi^{(n)}}{\sigma\sqrt{n}} = 0$, ezért $\frac{\xi^{(n)}}{\sigma\sqrt{n}}$ valóban sztochasztikusan zérus sorozat. Ezzel a 3. tétel bizonyitást nyert.

Irodalom:

1. Tomkó József: Odna predelnaja teorema v zadacse obszluzsivanija pri neogranicsno vozrasztajusej intenzivnoszti potoka: Studia Scient. Mathemat. Hungarica. Tom II. /1967/.

2. - , - Véges sorkapacitású egykiszolgálós várakozási-idő problémáról: MTA Számitástechnikai Központja Közlemények, 3, /1967/.

3. - , - A Markov folyamatok elemei és néhány operációkutatási vonatkozása. Jegyzet, a Bolyai János Matematikai Társulat kiadványa, Bp. /1968/.

4. Yu.V.Prohorov: Perehodnüe ivlenija v processzah masszovovo obszluzsivania; Litov. matem. szbornik, III. Nol, /1963/.

5. Szamandarov E.: O predelnom povedenii raszpredelenija vremeni ozsidanija: Dokl. A.N.Tadzs. Sz.Sz.R. 9, Nol, /1966/.

6. Keilson F.: The ergodic queue length distribution for queneing systems with finite capacity. Journal of the Royal Statist. Society ser. B, vol. 28., Nol, /1966/.

S u m m a r y

On some limit laws for waiting time

The paper deals with some limit phenomenons for queneing systems when the queue-capacity tends to infinity. In the sections 2./ and 3./ it is studied how to approximate the waiting time distribution function for the system M/M/m with finite ("n") queue-capacity and the rapidity of approximation is estimated. In section 4./ it is shown that the waiting time for the system M/G/1 has asymptotically normal distribution, provided that the input intensity $\lambda > 1$ and the average service time is taken for 1.

Р Е З Ю М Е

Работа занимается предельными явлениями в задачах о времени ожидания, когда число мест ожидания неогранично возрастает. В пунктах 2./ и 3./ изучается вопрос приближения функции распределения времени ожидания в системе $M/M/m$ с конечным числом мест ожидания и оценивается скорость приближения. В пункте 4./ доказано, что длительность ожидания начала обслуживания в системе $M/G/1$ также асимптотически нормально распределена если интенсивность входящего потока $\lambda > 1$ и среднее время равно 1 .

Rövid közlemények az elkészült programokról

Varga Gyula I.:

Euklidesi algoritmus polinomok többszörös gyökeinek felismerésére.

Polinomok gyökeinek a Newton-Raphson-féle módszerrel történő meghatározása nehézségekbe ütközik, ha a polinom többszörös gyökökkel rendelkezik.

Ismeretes, hogy többszörös gyökök esetén az $f(x)$ polinomnak és deriváltjának legnagyobb közös osztója nem konstans. Ezt a legnagyobb közös osztót az $f(x)$ és $f'(x)$ között végrehajtott euklidesi algoritmus segitségével tudjuk meghatározni. Ha az $f(x)$ polinomot a kapott legnagyobb közös osztóval leosztjuk, a hányados polinom gyökei (egyszeres multiplicitással) megegyeznek az eredeti polinom gyökeivel, eltekintve az algoritmus végrehajtása révén keletkezett pontatlanságoktól. Ezeket a hányados-polinom gyökeinek az eredeti polinomba való visszahelyettesitésével korrigálni kell.

Az algoritmus programja az Ural-2 számológépre készült EFT autókódban.

Varga Gyula I.:

Szimmetrikus mátrixu lineáris egyenletrendszer megoldása a négyzetgyökös módszerrel.

Ismeretes, hogy szimmetrikus mátrix mindig felbontható egy trianguláris mátrixnak és a transzponáltjának szorzatára. Ez a felbontás pozitiv definit mátrix esetén valós uton történhetik, egyébként nem, mert a felbontás algoritmusában négyzetgyökvonások szerepelnek, s a gyök alatt negativ szám is előfordulhat. Komplex aritmetika alkalmazása helyett ilyenkor célszerübb az A szimmetrikus mátrixot az

$A = TE^{*}T'$ alakban felbontani, ahol T alsó trianguláris mátrix, T' a transzponáltja, E^{*} pedig diagonális mátrix, melynek főátlójában a +1-es ill. -1-es számok fordulnak elő.

Az $A\underline{x}=\underline{b}$ egyenletrendszert (A nem szinguláris), tehát ugy fogjuk megoldani, hogy mátrixát az emlitett szorzatra bontjuk, s az igy felirt egyenletrendszert két részletben oldjuk meg az alábbi módon:

$TE^{*}T'\underline{x} = \underline{b}$

1./ $T\underline{y} = \underline{b}$ -ből $\underline{y}$

2./ $E^{*}T'\,\underline{x} = \underline{y}$ -ből $\underline{x}$.

Az 1./ és 2./ egyenletrendszer megoldása nem okoz problémát, mivel ezek mátrixa trianguláris. Ha az eredeti A mátrix pozitiv definit, E^{*} megegyezik az egységmátrixszal.

Az emlitett mátrixfelbontás algoritmusa megtalálható pl. Berezin és Zsidkov: Metodü vücsiszlényij c. könyvének 2. kötetében a 23. lapon.

Az eljárás programja az Ural-2 számológépre készült EFT autókódban.

Varga Gyula I.:

Nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek megoldása az öngyorsitó módszer segitségével.

A nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek megoldására szolgáló Newton-féle eljárás minden egyes iterációs lépésben a függvényérték ill. a függvényértékek kiszámitása mellett a függvény deriváltjának ill. a függvények összes parciális deriváltjának meghatározását követeli meg.

Előfordulhat, hogy ez csak nehezen hajtható végre. Ilyen esetekben szokás az un. öngyorsitó módszert alkalmazni, amely deriváltak helyett differenciahányadosokat használ fel az egyes iterációs lépéseknél.

Egyismeretlenes egyenlet esetén az

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) \,/\, f'(x^{(k)})$ helyett az

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f\,(x^{(k)}) \,/\, \Gamma^{(k)}$ iterációs képletet alkalmazhatjuk,

ahol

$$\Gamma^{(k)} = \frac{f\,[x^{(k)}+\beta_k\, f(x^{(k)})] - f(x^{(k)})}{\beta_k \cdot f(x^{(k)})}$$

$$\beta_k = -\frac{1}{\Gamma(k-1)} \quad \text{(ha } k \neq 0)$$

$$\beta_0 = -\frac{1}{f(x^{(0)})} \quad \text{valamely közelitő értéke.}$$

Mivel konvergencia esetén a $\beta_k \cdot f(x^{(k)})$ növekmény 0-hoz tart, $\Gamma^{(k)}$ tart a függvény zérushelyén vett deriváltjához. A konvergencia rendszáma $1+\sqrt{2}$. Iterációs lépésenkint 2 függvényérték meghatározását kivánja meg.

Többismeretlenes egyenletrendszer esetén az

$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} - J^{(k)^{-1}} \cdot \underline{F}\,(\underline{x}^{(k)})$ iterációs eljárás öngyorsitó változatát a következőképen adhatjuk meg:

$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} - \hat{J}^{(k)^{-1}} \cdot F(\underline{x}^{(k)})$, ahol $\hat{J}$ a Jacobi-féle deriváltmátrix közelitése differenciahányadosokkal.

Legyen

$$h_j^{(k)} = (0,\dots,0, \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} \beta_{j\ell}\; f\;(\underline{x}^{(k)})}_{j}, 0,\dots,0)$$

Akkor

$$\hat{J}_{i,j} = \frac{f_j\left[\underline{x}^{(k)} + \underline{h}_j^{(k)}\right] - f_i\left[\underline{x}^{(k)}\right]}{\sum_{\ell=1}^{n} \beta_{j,\ell}^{(k)} f_\ell\left[\underline{x}^{(k)}\right]}$$

ahol $\beta_{j,\ell}^{(k)} = -\hat{J}^{(k-1)^{-1}}$ (ha $k \neq 0$)

$\beta^{(o)}$ -t $-\hat{J}^{(o)^{-1}}$ valamely közelitéseként kell megadni. (Ha ilyen nem áll rendelkezésre, sok esetben megfelel az E egységmátrix is). Az eljárás számitási igénye iterációs lépésenkint $n^2 + n$ db függvényérték meghatározása és 2 db n ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása.

Az itt ismertetett módszer részletes leirása megtalálható pl. J.F.Traub Iterative methods for the solution of equations c. könyvében.
Az eljárás programja (1 és több ismeretlenes esetre) az Ural-2 számológépre készült EFT autókódban.

Ferenczy László:

Baktériumok hasonlósági vizsgálata

Baktériumok vagy más szervezetek rendszertani kategóriáinak létrehozására szokásos egy numerikus eljárás, a cluster analysis alkalmazása. Az eljárás számológépen történő kivitelére a Békés Megyei Tanács Kórháza, valamint a MTA Talajtani és Agrokémiai Kutató Intézet felkérésére 1966-ban Ural-2 gépre program készült. Itt e program 1968-ban készült módositott és bővitett változatának algoritmusát és kapacitását ismertetjük.

Az eljárás algoritmusa

1./ A numerikus feldolgozás céljára a szervezetek, egyedek hasonlóságát egy számérték fejezi ki. A szereplő $b_1,\dots,b_N$ egyedek mindegyikét meghatározott, egyenértékűnek tekintett, $t_1,\ldots,t_M$ tulajdonságokra nézve vizsgálják.

Egy gyakori eljárás a következő esetek kódolása: (1) a vizsgált egyed rendelkezik valamely tulajdonsággal, (2) nem rendelkezik vele és (3) az adott tulajdonság vizsgálata nem értelmezhető. Jelölésük a fenti sorrendben 1, 0 és NC. Két egyed hasonlóságának méréséhez megegyező, illetve különböző tulajdonságaik számát kell vizsgálni azzal a megszorítással, hogy a hasonlóságukra nézve értékes információt nem tartalmazó NC kóddal való megegyezést vagy különbözést nem kell számolni.
Két egyed b_i és b_j S_{ij} hasonlósága:

$$S_{ij} = \frac{n_c}{n_c + n_d}$$

ahol n_c a megegyező (de nem NC-NC), n_d a különböző (de nem 0-NC vagy 1-NC) tulajdonságok száma.

Egy másik kódolási mód (két-jel kódolás), amelynél minden tulajdonságot egy a számára meghatározott jelentéssel biró négy kód-jel valamelyikével kell ellátni. A hasonlóság meghatározása az előbbi módon történik, és itt nyilván $n_c + n_d = M$.

2./ Az egyedek sorbarendezéséhez szükséges egy tetszőlegesen megadható (célszerüen a legnagyobb hasonlóságot mutató) kiinduló pár, legyenek b_{i_1}, és b_{i_2}, hasonlóságukat jelöljük: $S_{i_1 i_2} = A_1$.

A rendezés pontos algoritmusa a következő.

Tegyük fel, hogy n egyedet már sorbarendeztünk, legyenek ezek $b_{i_1},\ldots,b_{i_n}$, a többi $b_{j1},\ldots,b_{jm}$ $(n+m=N)$. Határozzuk meg minden sorba nem rendezett b_{jk} egyednek az összes rendezetthez való hasonlósága átlagát, vagyis az

$$s_k = \frac{S_{j_k i_1}+\ldots+S_{j_k i_n}}{n}$$

értéket (átlagos hasonlóság). A sorbarendezettek következő $b_{i_{n+1}}$ tagjának kiválasztása céljából a fenti s_k értékek és a következő A_{n-1}, átlagos hasonlósági szint, közelségét vizsgáljuk

$$A_{n-1} = \frac{A_1+\ldots+A_{n-2} + \hat{s}}{n-1}$$

ahol $\hat{s}$ az előzőleg kiválasztott egyed (b_{i_n}) átlagos hasonlósága. Igy $b_{i_{n+1}}$-nek azon b_{jk*} egyedet választjuk, amely S_{k*} átlagos hasonlóságára az

$$|A_{n-1} - S_{k*}| = \min_{1 \leq k \leq m} |A_{n-1} - S_k|$$

teljesül. (A következő $b_{i_{n+2}}$ egyed kiválasztása az

$$A_n = \frac{A_1+\ldots+A_{n-1} + S_{k*}}{n}$$

szinthez való közelség alapján fog történni.)

A program ismertetése

A program az 1./-ben leirt két kódolási módot ismeri, 0-1-NC kódolás esetén a megfelelő jelek 0,1 és N, két-jel kódolás esetén 00, 01, 10, 11.

Az adatok alapján meghatározza az összes (N(N-1)/2 darab) S_{ij} értéket; ezeket, valamint a megegyező, különböző tulajdonságok számát és a $-{}^2\log S$ értékek közül a kivántakat kinyomtatja.

Végrehajtja a sorbarendezést nyomtatva az egyedek sorrendjét és mindegyikhez azt az átlagos hasonlósági szintet, amelyhez az ő kiválasztása történt.

8	
9	
12	90721649/+02
3	89974752/+02
14	88620052/+02
1	87416938/+02
13	85289746/+02
7	82223887/+02
2	79854510/+02
5	78068178/+02
11	76699264/+02
10	75701334/+02
6	74948538/+02
4	74360364/+02

Kinyomtatja háromszög-táblázatban az uj sorrend szerint az értékeket egészre kerekitve.

8													
9	91												
12	89	90											
3	85	88	86										
14	86	85	82	83									
1	75	79	83	76	71								
13	67	68	70	66	71	59							
7	62	63	67	67	64	68	68						
2	57	60	60	70	63	69	65	80					
5	57	58	62	60	63	65	67	82	78				
11	56	57	59	63	60	70	64	77	85	77			
10	55	58	58	62	61	65	69	76	80	76	83		
6	59	56	58	60	59	61	71	78	81	77	78	75	
4	56	53	57	57	58	62	70	73	82	72	77	85	77
	8	9	12	3	14	1	13	7	2	5	11	10	64

Egy tetszőlegesen megadható felosztáshoz meghatározza és nyomtatja minden csoport egyedei egymáshoz való hasonlóságainak átlagát (a csoport átlagos hasonlóságát) minden csoport a többihez való átlagos hasonlóságát és (a legelső oszlopban) a csoport egyedei minden hasonlóságának átlagát.

001	14
002	7
003	4

86.213970	001	86.213970		
69.152231	002	69.992987	64.948454	
67.000481	003	58.951890	70.452579	78.795147

A program 100 körüli tulajdonság esetén kb. 150 egyed feldolgozására alkalmas. Az ehhez szükséges futásidő kb. 4-5 óra.

TARTALOMJEGYZÉK