MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA

KÖZLEMÉNYEK

3.

1967. november

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
Számitástechnikai Központja

K Ö Z L E M É N Y E K
3.

Budapest, 1967.
november

Felelős szerkesztő:

Szelezsán János

Szerkesztőbizottság:

Arató Mátyás
Dancs István
Frey Tamás
Gergely József
Kovács Győző

A cikkek lektorai:

Bakos Tamás
Braun Péter
Czách László
Dömölki Bálint
Gergely Ervin
Nemetz Tibor
Pásztor Endréné
Peller József
Varga Gyula
Vágó István

Felelős kiadó:

Frey Tamás igazgató

Technikai szerkesztő:

Hartmann Katalin

MTA Számitástechnikai Központ

Budapest, I. Uri u. 49.

A szovjet matematika 50 évéről

Arató Mátyás

Sokan szeretnének választ kapni olyan kérdésekre, hogy miért ad különös jelentőséget egy nemzetközi konferencián a szovjet matematikusok jelenléte, azok előadásai és a velük történő beszélgetések; miért várják szerte a világon türelmetlenül a szovjet matematikai folyóiratokat, az uj könyveket, és ennek érdekében még az orosz nyelv tanulásától sem rettennek vissza. Ugyancsak sokan várnak választ arra a kérdésre is, mi adja a szovjet matematikai kutatásoknak azt a nagy varázst, azt a teljességet, minden uj iránti érzékenységet, nagy áttekintést, s azt a nagy meggondoltságot és alaposságot az uj irányok kialakításában. A szovjet matematikai kutatások olyan elődökre alapoztak, akik az egész világon ismertek, ez azt jelenti, hogy a szovjet matematikát nem a semmiből kellett megteremteni és nehéz is különválasztani az orosz és szovjet periódust. Lobacsevszkij, Csebisev, Bunyakovszkij, Ljapunov, Markov neve a mult század orosz matematikai kutatásainak nevét fémjelzik. A szovjet matematikusok az ő munkájukat folytatták, sőt sokan vannak olyanok, akik mindkét korszakban dolgoztak, gondoljunk csak Jegorovra, Bernsteinre, Luzinra, vagy azokra, akik ugyan munkásságukat a cári időszakban kezdték, de életmüvük a szovjet korszakban teljesedett ki, mint pl. Vinogradov, Hincsin vagy Alekszandrov esetében. Az elődök egyes kivételes tehetségét a szovjet rendszerben a tehetségek módszeres felkutatása es támogatasa váltotta fel. A szovjet matematika mai nagy öregjei, Szoboljev, Petrovszkij, Kolmogorov, Pontrjagin és a többiek - anélkül, hogy felsorolásukban teljességre törekednénk -, egyetemi tanulmányaikat már a szovjet rendszerben végezték és a szovjet matematikai iskola megteremtése valójában az ő nevükhöz füződik. Mindegyikük egy-egy uj matematikai ág megteremtését, vagy egy uj matematikai ág megalapozását, vagy egy teljesen uj kutatási irány kialakitását tüzte ki célul és ennek érdekében uj eszközök, uj módszerek használatát dolgozta ki. Munkásságukat a 20-as években kezdték, a 30-as évek során érték el leghiresebb, legérdekesebb eredményeiket, melyeket azóta is kiindulópontul tekintenek parciális differenciálegyenletek, vagy a valószinüségelmélet és matematikai statisztika vagy topológia és differenciálegyenletek, vagy számelmélet területén és ezt a sort még folytathatnánk. De a század elején született nagy matematikusok mellett a 30-as években megjelennek a ma már ugyancsak világhires, idősebb nemzedékhez tartozó matematikusok, mint pl. Linnyik, Gnegyenkó, Kantorovics, Keldis, Gelfand és a többiek, akik tanulmányaikat az aspiranturáig bezárólag szovjet iskolákban kezdték és végezték. Az ő nevük is a matematika egy-egy ágának kutatásait fémjelzik, melyeket elsősorban a Szovjetunióban végeztek. Ma már nem ismeretlenek, sőt nemzetközileg jól ismertek a 20-as évek még fiatalnak tekinthető matematikusai, mint Rohlin, Mergeljan, Ladizsenszkaja, Prohorov, Dünkin és a többiek. A fiatal korosztály képviselői - a 30-as évek szülöttei -, akik végigjárták a szovjet matematikai iskolát, annak minden fegyverzetét megismerték, módszereit elsajátitották, szintén nemzetközi hirnévre tettek szert, szovjet folyóiratok cikkeinek nagyrészét ők szerzik, nemzetközi konferenciák várt előadói, csak a legjelentősebbeket emlitve, Arnold, Kirillov, Sirjajev, Szinaj vagy Ibrahimov, mind-mind egy-egy ágában a matematikának rendkivül érdekességgel biró témákat dolgoztak fel. A legfiatalabbak közül a Lenin-dijas Novikov, vagy Mányint emlitve láthatjuk, hogy a szovjet matematika kimerithetetlen uj erőkkel rendelkezik.

Az orosz matematikai kutatások központja Pétervár volt. A szovjet matematikai kutatások központja Moszkvába került át, még a 20-as évek elején és ez a folyamat természetesnek mondható. A moszkvai matematikai iskola kialakitásában fontos szerepet töltött be Jegorov és Luzin. Elsősorban Luzin volt az, aki maga köré gyüjtötte a fiatal matematikusokat, az un. luzitániusokat, akik nemcsak mint matematikusok, hanem mint emberek is igyekeztek kitünni. Az akkori matematikusnak, matematikus hallgatónak nem álltak még rendelkezésére modern diákszállók, fenntartásukat alkalmi munkákkal, tanitással vagy akár mint villamoskalauzok biztositották. A moszkvai matematikai társulat ülésén való részvétel, az ülések utáni hosszas, néha éjszakákba nyuló viták hozták meg azt az alapot, amely a moszkvai matematikai élet életrevalóságát, a moszkvai matematikai élet kialakitását biztositották. Moszkvában kezdett kirajzolódni annak képe is, hogy hogyan kell a matematika egyes ágaival a jövőben foglalkozni. Milyen formában kell biztositani az egyetemi oktatás mellett uj tudósok nevelését, uj témák kialakitását és igy tovább.

A moszkvai matematikai életről tudunk talán legtöbbet, de jóval kevesebbet tudunk a Szovjetunió egyes köztársaságainak fővárosaiban kialakult matematikai iskolákról, mint pl. Taskenti, Tbiliszi az Alma-atai, Minszki vagy a Kisinyovi matematikai életről. Pedig ezek az iskolák, az itt kialakult élet, az általuk kibocsátott folyóiratok nem kevésbé érdekesek, nem képviselnek alacsonyabb szinvonalat, mint bármelyik más ország, Szovjetunión kivüli, matematikai kutatásai, matematikai irodalma. Ezeknek a matematikai központoknak a kialakitása a 30-as, 40-es, vagy az 50-es évek elejére esik. Mellettük nagy sulyt helyeztek arra is, hogy a régi központok, mint pl. Kazán, Odessza, Harkov, Lvov, Gorkij vagy Szamarkand matematikai élete is virágzó legyen. Uj jelenség azonban az 50-es évek végén megindult mozgalom, amikor egy teljesen uj kutatóközpont létrehozását tüzték ki célul, ennek az uj központnak - Novoszibirszknek - a szibériai matematikai kutatások, matematikai oktatás irányitása lesz a célja. Az odakerült hires matematikusok ma aratják be első termésüket: az elmult években végeztek az első novoszibirszki egyetemi hallgatók, akik nagyrésze kutatóintézetekbe kerül, vagy a novoszibirszki egyetemen marad. A novoszibirszki központ megteremtése nem jelentette azt, hogy a város felépitése után foglalták el a kutatók a helyüket, hiszen Szoboljev, Lavrentyev az első faházak megépitésében is részt vettek már és az egész épitési folyamat során részt vettek magának a városnak a létrehozásában is. Az élet minden munkájában való részvétel az egyik olyan tulajdonsága a szovjet matematikusoknak, amely nagyon tanulságos lehet minden külföldi kutató számára is.

Ezek után beszéljünk néhány szót arról is, hogy milyen módszerekkel érték el Szovjetunióban ezen rövid 50 év alatt azt, hogy a néhány tizes, esetleg százas létszámu kutatógárdát felemeljék többezres, tizezres létszámuvá. Hogyan érték el a Szovjetunióban azt, hogy a matematika minden ágában kimagaslót tudtak elérni, nem beszélve arról, hogy a matematika legtöbb részében a szovjet matematikai kutatások nemzetközi kutatás élvonalát jelentik. Hiszen nem véletlen az, hogy a mult évi matematikus kongresszuson Moszkvában a résztvevők több mint fele, több mint 2.500 matematikus szovjet volt, és az előadások nagyrészét is szovjet matematikusok tartották, annak ellenére, hogy az előadások kiválogatása nem a jelentkezések egyszerü elfogadásában állt. A szovjet matematikusok a matematikai kutatás első megszervezésétől kezdve elsőrendü feladatuknak tekintették a matematika minden ágában való foglalkozás szükségességét Szovjetunió-beli szinten. Elképzelhetetlennek tartották ugyanis, hogy a matematika megfelelő módon fejlődjön, ha az egyes ágak nem segitik egymást, nem látják el megfelelő fegyverzettel a rokon kutatási területeket. A szovjet matematikai kutatásokat, matematikusokat az első évektől kezdve jellemzik a minden uj iránti fogékonyság. Ez nemcsak az uj kutatási irány észrevételében áll, mint pl. a 40-es évek végén Shannon által kidolgozott, vagy felfedezett információelmélet kutatásainak Szovjetunióban történő megszervezésében, hanem olyan uj szervezési formák kipróbálásában is, mint pl. parciális differenciálegyenletek kollokvium szervezése az amerikai kutatókkal Novoszibirszkben. Ennek a kollokviumnak a hatása pár évre meghatározta a kutatási irányokat. Jóval kevesebbet tudunk már azokról a próbálgatásokról, amelyek jelenleg un. nyári iskolák cimen folynak a Szovjetunióban. Ilyen iskolát szerveztek már topológiából, valószinüségelméletből, differenciálegyenletekből stb. Ezeknek az iskoláknak elsősorban az a feladata, hogy megjelöljék a kutatási irányokat, felhivják szóban azokra a nehézségekre a figyelmet, melyet ha folyóiratcikkekből akarnánk megismerni, nagy késéssel szereznénk csak róluk tudomást. A legutóbbi Uszpéhi Matematicseszkih Nauk számban megismerhetnek az olvasók egy ilyen nyári iskolát az Ergod-elmélet területéről.

A szovjet matematika egyik nagy erénye a céltudatosság. Már a 30-as évek elején látni ennek a körvonalait. Első feladatának tekintette a szovjet matematikai kutatásokban az alkalmazott irányok megszervezését. Ezzel kapcsolatban nem érdektelen megjegyeznünk azt, hogy szovjet matematikusok nagyrésze természettudós is, a szó igazi értelmében. Természettudós olyan értelemben, hogy a matematikán belül is objektiv törvényszerüségek kutatását tartja szükségszerünek, de természettudós abban az értelemben is, hogy a matematika mellett érdekli a természettudományok egy-egy ága, vagy több ága is. Ha Keldis, Lavrentyev, Obuhov, Millionsikov nevét emlitjük, akkor a matematika mellett megemlitjük a mechanikában, a fizikában elért eredményeket is, de még az olyan, talán tiszta matematikusnak nevezhető kutató is, mint Kolmogorov a turbulencia elméletében ért el olyan felfedezést, mely mint fizikai felfedezés is az élvonalba tartozik. Az alkalmazott kutatások megszervezése, a Szovjetunió fizikai, mechanikai intézeteinek matematikus ellátottsága irigylésreméltó, hiszen ezeket a kutatásokat olyan emberek irányitják és vesznek részt benne teljes lelkesedéssel, akik mint tiszta matematikusok is megállnák, sőt meg is állták helyüket. A 30-as évek másik nagy feladata volt, a tudósképzés szervezett alapjainak megteremtése. Itt elsősorban az aspirantura azóta is virágzó intézményére gondolok. De feladata volt a 30-as évek óta a szovjet matematikai kutatásoknak az egyetemi oktatás megszervezése is, hisz az egyetemi oktatás anyagának állandó megfelelő szinvonalon való tartása nem egyszerü feladat. A középiskolákkal való foglalkozás az utóbbi években került a központi feladatok sorába. Erről meggyőződhettünk pl. a bolgár matematikus kongreszszuson is, ahol két előadást is hallhattunk erről a témáról. A legilletékesebbektől Markusevics ésGnegyenkó akadémikusoktól. Az 50-es és 60-as évek egyik központi feladata az alkalmazott matematikai irányok kiterjesztése a Szovjetunióban. Ez nemcsak uj intézmények, uj folyóiratok megjelenésében tükröződik, bár ez sem lebecsülendő. Hiszen a Moszkvában nemrég megalakult alkalmazott matematikai intézet, vagy az informacióátadási intézet több százas létszámmal dolgozik. A régen ismert szovjet Dokladü, Uszpéhi, Izvesztija és Szbornyik mellett az uj folyóiratok tömegei jelennek meg az információelmélet, valószinüségelmélet és funkcionál analizistől egészen a differenciálegyenletek elméletéig, vagy kibernetikai folyóiratokig. Az alkalmazott kutatások megbecsülését, az alkalmazott kutatások központi szerepét bizonyitja, hogy a Szovjetunióban az utóbbi években elsősorban olyan munkák részesültek Lenin-dijban, melyek a modern kutatások egyik központi témájának az un. optimális folyamatok vizsgálatának eredményeit jutalmazzák. Ilyen irányu kutatásaiért részesült elismerésben Pontrjagin és kutatócsoportja, Gluskov, Tyihonov és mások is. Sokakat érdekel, hogy milyen a viszony a Szovjetunióban a fiatal és idős matematikusok között. Ez a viszony nagymértékben meghatározhatja egy országon belül a kutatások menetét. Ugy gondolom ezen a téren a szovjet matematikusok megtalálták azt a hangot, azt a módszert, mely nagy eredmények elérését teszi lehetővé. Arról van ugyanis szó, hogy megfelelő vezetés esetén 20-25 éves matematikusok képesek kimagasló eredmények elérésére. Ezt próbálják és próbálták kihasználni a szovjet matematikusok. Megfelelő képzéssel, megfelelő oktatással, megfelelő irányitással a szükséges ismeretek megszerzése néhány év feladata. A kijelölt problémával való foglalkozás viszont legtöbbször nem jelent mást, mint uj ötletek, friss elképzelések bevezetését és ha ezt teljes odaadással végzik, az eredmények nem maradhatnak el. Erre néhány Hilbert feladat megoldása kapcsán szemléletes bizonyitást is kaphatunk. Ezért van az, hogy a Lenin-dijak odaitélésében fiatal matematikusok nagy felfedezésekért részesülnek ebben a jutalomban. A fiatalok, idősebbek viszonyát alapvetően meghatározza, hogy egy uj eredmény elérése esetén nem lehet lemérni fiatal matematikusról, vagy idősebb matematikusról van szó. Azt tartják, hogy kutatásban mindenki egyenrangu. Az idősebb matematikusok munkája - nagy áttekintő képességük miatt is - nemcsak az irányitásban, hanem a kutatások megszervezésében is elsőrendü fontosságu. Ezt a munkát kell ésszerüen a megfelelő arány betartásával megoldani. Az emberi kapcsolatok ezerféleségére is választ kaphatunk a Szovjetunió matematikus életének vizsgálatában, a Szovjetunió matematikai életében való részvétel során. Ezekre a kapcsolatokra elsősorban a nyiltság es minden hátsó gondolatnélküliség a jellemző; enélkül egészséges, fejlődő, életképes matematikai élet elképzelhetetlen lenne. A szovjet vezető matematikusok nagyrésze foglalkozik azzal is, hogy a széles néptömegeket tájékoztassa a matematikai kutatások helyzetéről, matematikai kutatások, vagy oktatás problematikájáról is. Ezt nálunk ugy nevezzük, hogy népszerüsitjük a matematikát. Elsősorban

a hozzáértők és nem ujságirók feladata a matematika megfelelő formában történő népszerüsitése, a nagy tömegek tájékoztatása. És ettől a munkától sem riadnak vissza a vezető szovjet matematikusok. Megemliteném azt az egyik legfontosabb jellemvonását a szovjet matematikának, amelyik nagymértékben meghatározza az egyes kutatási irányok arányát. Ez a tulajdonság a matematikai kutatások irányitása. Nem arról van szó, hogy egyes felfedezések milyen gyorsan történjenek meg, hanem arról, hogy mivel érdemes foglalkozni, melyek azok az ágak, amelyek uj kutatási erőket igényelnek és melyek azok, amelyekben a már meglévő kutatók tudják biztositani a szükséges eredményeket. Nemcsak egyes kutatók témáinak irányitásáról, esetleg megváltozásáról van szó, hanem arról, hogy pl. hány aspiránst vegyenek fel ilyen vagy olyan területen. Ugy szokták ezt kifejezni, hogy pl. Markov-folyamatok elméletében lehet-e ma kandidátusi, vagy doktori disszertációt megvédeni? Az 50-es évek végén, vagy a 60-as évek elején ezen a területen egy csomó aspiránst vettek fel, mivel a sztohasztikus folyamatok általános elmélete igényelte a nagyszámu kutató megjelenését. Ma már azonban nem az uj elméletek kidolgozása, hanem konkrét gyakorlati feladatok megoldása jelenti az elsőrendü problémát, ennek megfelelően alakul az aspiráns felvétel is. De az irányitás más területeken is megfigyelhető, hiszen a szovjet számitástechnika, számológép kihasználás vagy épités területén, egészen más területekről kellett biztositani a kutatói létszámot.
A szovjet matematika erejét mutatja, hogy azokon a területeken, melyeken elmaradás mutatkozik,a hibák, hiányosságok feltárása, nem azok elkenése a jellemző. Az ilyen területek - annak ellenére, hogy alkalmazások bizonyos területei nagyon kimunkáltak - az alkalmazások területén találhatók, pl. a statisztikai kutatások, a közgazdasági matematikai módszerek elterjedése területén, gépi módszerek alkalmazása területén és ezt a sort még lehetne folytatni.

Nincs rá lehetőség, hogy részletesen ismertessük egyes kimagaslóan jelentős kutatási irányok fejlődését, mint pl. a számelmélet, parciális differenciálegyenletek, topológia vagy valószinüségelmélet terén hogyan jutottak el a szovjet matematikusok a megalapozástól, alapvető elméleti problémák megfogalmazásától és megoldásától a mai problémakörökig. Ehelyett arról szeretnék néhány szót ejteni még az eddig mondottak mellett, hogy mi az, amit egy kivülálló megláthat, megtanulhat, mi az a "titok", amelyet immár több éve kutatnak nyugaton, hogy megállapitsák, hogyan fejlődött ilyen nagy erővé a szovjet matematikai kutatás, hogyan fejlödött néhány tizes létszámból erővé, mely a más kutatásokat is segiti, de önállóan is alkalmas megfelelő eredmények elérésére, akár népgazdasági szinten is. Az egyik legfontosabb jellemző a tisztelet és megbecsülés mások eredményei iránt, legyen az országon belül, vagy az ország határain tul. A megbecsülés az eredmények megismerése mellett, azok elismerését is jelentik. Szovjet matematikusok soha nem gondoltak arra, hogy minden matematikai kutatást egymaguk végezzenek. Mindig számitottak arra és várták is, hogy mások eredményei segitik őket saját kutatásaikban és viszont. A kutatások egyik alapvető vonásának tartják az egyes országok kutatásainak egymásra hatását is. A legfontosabb feladat azonban, hogy a kutatási eredményeket elsősorban saját erőkre támaszkodva az országban szervezetten kell biztositani. Ha szükséges, fel kell fedni a hibákat, az elmaradásokat és az egyes tulzásokat is. Ezen a téren nem ismernek bocsánatot és nem gondolnak arra, hogy a hibák kijavitásával sokáig lehet várni. A matematikai alkotómunka egyik legfontosabb ágának, a matematikai kutatások irányainak kijelölését tekintik. Az irányok kijelölése mellett a munka megszervezése, fiatalok problémákkal való ellátása, a megfelelő lelkesedés biztositása szintén központi feladat. A modern irányzatok megbecsülése, nem is tul és nem is lebecsülése azt bizonyitja, hogy a szovjet matematikusok igyekeznek kihasználni az un. divatos témákat is, ez azonban nem jelenti azt, hogy nem a maguk kijelölte uton kivánnak a továbbiakban is haladni.

A magyar matematikusok már a felszabadulás előtt is ismerték a szovjet matematikai kutatásokat és nagyrabecsülték azokat. A szovjet matematika felszabadulás utáni hatása a magyar matematikai életre szinte felbecsülhetetlen. Itt nemcsak a közvetlen hatásokról van szó, melyeket aspiránsaink - akik már több mint 10-en végeztek Szovjetunióban - szereztek, vagy a tanulmányutakon, konferenciákon, kongresszusokon szereztek kint járt matematikusaink. Hanem arról a közvetett hatásról is szó van, melyet folyóiratok, könyvek formájában a szovjet matematika a magyar matematikai életre gyakorol. Egy-egy szovjet kutató magyarországi látogatása, előadásai mindig élményszámba mennek és nagy hatással vannak a fiatal magyar kutatókra.

Ma, amikor a szovjet matematika elmult 50 évéről emlékezünk meg, arról a hatalmas utról, melyet 17-től a mai napig megtettek, nem szabad elfelednünk, hogy milyen nehéz is volt ez az ut. Nem szabad elfelednünk, hogy mily kicsiny magból indult a szovjet matematika a 20-as évek elején. Meg kell emlékeznünk arról a segitségről, melyet a szovjet matematikai kutatások kaptak az uj rendszertől, az uj államtól, mely kezdettől fogva féltő figyelemmel gondoskodott a megfelelő kutatási feltételek kialakitásáról a matematikai életben. A szovjet tudományban a matematika az elmult 50 esztendőben megbecsült helyet vivott ki magának. Az országon belül és határain tul is kezdettől fogva mindig első helyen értékelték a matematika területén elért eredményeket és azok hatását.

A magyar matematikusok ujabb sikereket és a matematika eredményekben gazdag művelését kivánják szovjet kollegáiknak, abban a tudatban, hogy közös ügyünk, az emberi tudomány felemelkedését szolgálja.

Torzitatlan becslések és közelitések komplex stacionárius Gauss-Markov folyamat egy paraméterére

Arató Mátyás

A $\xi(t)$ komplex stacionárius Gauss-Markov folyamat (továbbiakban mindig feltesszük, hogy $M\xi(t) = 0$, $M\xi(t+s)\overline{\xi(t)} = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda|s| - i\omega s}$, ω ismert) λ "csillapodási" paraméterének becslésével részletesen foglalkoznak az [1]-[3] cikkek. Az alábbiakban elsősorban az $s_1^2 = \frac{1}{2}[|\xi(o)|^2 + |\xi(T)|^2$ és $s_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |\xi(t)|^2 dt$ statisztikák által külön-külön nyerhető becslésekkel történő közelitésekkel kivánok foglalkozni. Ezenkivül a maximum likelihood becslés karakterisztikus függvényének közelitéséből nyerhető egyszerüsitéssel (λ nagy értékeire), valamint a maximum likelihood becslésnek a normális eloszlással való közelitésével fogok foglalkozni jelen cikk keretein belül. A fenti feladattal foglalkozott Rochlitz Szilveszter szakdolgozatában, a szükséges számitások elvégzéséhez azonban nem volt elegendő ideje.

Meg kell jegyezni, hogy sem s_1^2 sem s_2^2 nem megengedhető becslései az ismeretlen $1/\lambda$ paraméter polinomjainak (v.ö. [4]). Az x megfigyelés g(x) becslését az $f(\lambda)$ paraméter megengedhető becslésének nevezzük az Λ_0 kompakt halmazon, ha nincs olyan χ becslése a 0-nak $M_\lambda \chi = 0$, hogy $M_\lambda g(x) = f(\lambda)$ és $D_\lambda^2(g(x)+\chi) \leqq D_\lambda^2 g(x)$ minden $\lambda \in \Lambda_0$ -ra és legalább egy λ értékre szigoru egyenlőtlenség teljesül.
Kiindulásként a [2]-ben levezetett s_1^2 és s_2^2 közös karakterisztikus függvényét választjuk

$$/1/ \qquad \varphi_{s_1^2, s_2^2}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{4\lambda(\lambda^2 - 2i\alpha_2)^{\frac{1}{2}} e^{\lambda T - T\sqrt{\lambda^2 - 2i\alpha_2}}}{(\lambda - i\alpha_1 + \sqrt{\lambda^2 - 2i\alpha_2})^2 - (\lambda - i\alpha_1 - \sqrt{\lambda^2 - 2i\alpha_2})^2 e^{-2T\sqrt{\lambda^2 - 2i\alpha_2}}}$$

A továbbiakban feltesszük, hogy $T = 1$.

1. Az s_1^2 becslés, λ kis értékeire. Mivel a kovariancia függvényre tett megkötések szerint $M\, s_1^2 = \frac{1}{\lambda}$ az s_1^2 statisztika használható $1/\lambda$ becslésére. Az /1/ összefüggés alapján λs_1^2 karakterisztikus függvénye

$$f_{\lambda s_1^2}(\alpha) = \frac{4}{(2 - i\alpha)^2 + \alpha^2 e^{-2\lambda}} = \frac{1}{1 - i\alpha - \alpha^2 \frac{1 - e^{-2\lambda}}{4}} ;$$

ahonnan egyszerü számolással adódik, hogy

$$P_\lambda \left\{ \frac{1}{s_1^2} < \lambda \cdot y \right\} = P\left\{ \lambda s_1^2 > \frac{1}{y} \right\} =$$

$$= \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2(1 - e^{-\lambda})} e^{-2\frac{1 - e^{-\lambda}}{1 - e^{-2\lambda}} \cdot \frac{1}{y}} - \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2(1 + e^{-\lambda})} e^{-2\frac{1 + e^{-\lambda}}{1 - e^{-2\lambda}} \frac{1}{y}} .$$

Mivel az s_1^2 statisztika könnyen számitható λ kis értékeire, fontos megállapitani annak a λ tartománynak a határát, ahol s_1^2 jó közelitésként használható. Az alábbi kis táblázat különböző $p = P\{\text{"becslés"} \geq \lambda \cdot y\}$ értékekre adja meg y értékeit az s_1^2 becslést, valamint a maximum likelihood becslést használva $\lambda = 0;\ 0.1,\ 0.5$ értékekre. Látható, hogy $\lambda < 0.1$ esetén az s_1^2 becslés jó közelitése a maximum likelihood becslésnek, és λ = 0-ra a két becslés megegyezik. (Az 1. táblázathoz szükséges számitásokat Vizi Imréné végezte, munkájáért ezuton is köszönetemet fejezem ki.)

	λ \ p	0.1	0.05	0.025	0.01	0.001	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
	0	9,51	19.52	39.60	99.9	1000	0.4352	0.3351	0.2620	0.2165	0.1460
m.*l*.		6.79	10.92	16.20	25.0	53.3	0.443	0.343	0.271	0.225	0.154
s_1^2	0.1	6.82	11.15	17.30	29.5	101.4	0.446	0.345	0.281	0.225	0.151
m.*l*.		4.08	5.59	7.24	9.58	16.36	0.477	0.378	0.308	0.257	0.185
s_1^2	0.5	4.52	6.86	10.17	16.72	55.2	0.482	0.380	0.314	0.254	0.173

1. táblázat

2. Az s_2^2 becslés, λ nagy értékeire

Feltevéseink szerint az s_2^2 statisztika várható értékére $M\, s_2^2 = \frac{1}{\lambda}$ adódik, igy s_2^2 az $1/\lambda$ paraméter becsléseként használható. Annak ellenére, hogy s_2^2 nem megengedhető becslés λ nagy értékeire az s_2^2 becslés egyszerübben kezelhető mint a maximum likelihood becslés. /1/-ből látható, hogy s_2^2 karakterisztikus függvénye

$$f_{s_2^2}(x) = \frac{4\lambda(\lambda^2-2i\alpha)^{\frac{1}{2}}\, e^{\lambda-\sqrt{\lambda^2-2i\alpha}}}{(\lambda+\sqrt{\lambda^2-2i\alpha})^2-(\lambda-\sqrt{\lambda^2-2i\alpha})^2 e^{-2\sqrt{\lambda^2-2i\alpha}}}$$

alaku. A $P\left\{ \lambda^2 s_2^2 < \lambda \cdot y \right\} = p$ (ahol p adott) valószinüségekhez tartozó y-értékek meghatározása egy

$$\frac{2e^{\psi}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{r}\, e^{\lambda-\lambda\sqrt{r}\cos\psi/2}\left\{\alpha_1[\sigma\cos\gamma+s\sin\gamma]+\alpha_2[\sigma\sin\gamma-s\cos\gamma]\right\}}{(\sigma^2+s^2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}\, ds$$

2

alaku integrál kiszámolásával történhet meg, y-ban történő iteráció segitségével. Egzakt alakban az eloszlásfüggvényt nem sikerült megkapni táblázatok segitségével. A fenti integrálban szereplő mennyiségek jelentése:

$$\alpha_1 = A_1^2 - A_2^2 + \{[A_2^2 - B_1^2] \cos (2\lambda\sqrt{r} \sin \varphi/2) +$$

$$+ 2B_1A_2 \sin (2\lambda\sqrt{r} \sin \varphi/2)\} e^{-2\lambda\sqrt{r}\cos\varphi/2},$$

$$\alpha_2 = 2A_1A_2 + \{2B_1A_2 \cos (2\lambda\sqrt{r} \sin \varphi/2) +$$

$$+ (B_1^2 - A_2^2) \sin (2\lambda\sqrt{r} \sin \varphi/2)\} e^{-2\lambda\sqrt{r}\cos\varphi/2},$$

$$\gamma = \lambda y s + \varphi/2 - \lambda\sqrt{r} \sin \varphi/2, \quad A_1 = 1 + \sqrt{r} \cos \varphi/2,$$

$$A_2 = \sqrt{r} \sin \varphi/2,$$

$$B_1 = (1 - \sqrt{r} \cdot \cos \varphi/2),$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2s}{1+2r}, \quad r^2 = 4s^2 + (1+2\sigma)^2, \quad \sigma = 1/\lambda .$$

A fenti integrál kiszámitása egyetlen y érték esetén az URAL-2 gépen $\lambda = 10$ körüli értékekre 10-15 percet vesz igénybe, $\lambda = 100$ körüli értékekre kb. 5-percet. Ellentétben a maximum likelihood becslés esetén kiszámitandó integrállal, a fenti integrál kiszámitása 10-nél kisebb λ értékekre nehezen végezhető el.

Az alábbi táblázatban megadjuk y értékeit különböző λ ,p értékekre, az s_2^2 becslés, a maximum likelihood becslés, valamint a normális eloszlással való közelités alapján.

λ \ p		0.1	0.05	0.025	0.01	0.90	0.95	0.975	0.99
100	Normális közelités	1.1281	1.1645	1.1960	1.2326	0.8719	0.8355	0.8040	0.7674
	Max. Lik.	1.1413	1.1832	1.2205	1.2654	0.8847	0.8533	0.8269	0.7972
	s_2^2	1.1305	1.1720	1.2096	1.253	0.8760	0.8449	0.8188	0.7895
10	Normális közelités	1.403	1.516	1.620	1.734	0.597	0.484	0.380	0.266
	Max. Lik	1.530	1.701	1.867	2.073	0.714	0.641	0.588	0.527
	s_2^2	1.414	1.558	1.713	2.03	0.648	0.581	0.534	0.49
5	Normális közelités	-	-	-	-	-	-	-	-
	Max. Lik.	1.809	2.090	2.354	2.710	0.647	0.562	0.497	0.432
	s_2^2					0.535	0.47		

2. táblázat

A fenti táblázat eredményei alapján megállapitható, hogy λ nagy értékeire az s_2^2 becslés jóval "szimmetrikusabban" viselkedik mint a maximum likelihood becslés, sőt még λ -nak 10 körüli értékei esetén is az s_2^2 becslésből adódó konfidencia intervallumok "rövidebbek" mint a maximum likelihood becslésből adódó konfidencia intervallumok.

3. A maximum likelihood becslés, közelités nagy λ értékekre.

a./A

$$\hat{\lambda} = \frac{-(s_1^2 - T) + \sqrt{(s_1^2 - T)^2 + 4Ts_2^2}}{2Ts_2^2}$$

maximum likelihood becslés eloszlásának meghatározásához szükség van a $\xi_y = \lambda y s_1^2 + \lambda^2 y^2 s_2^2$ statisztika eloszlására. A ξ_y változó eloszlásfüggvényének Laplace transzformáltja /1/ alapján

$$F^{*}(p) = \frac{4(1+2y^2p)^{\frac{1}{2}} e^{\lambda - \lambda\sqrt{1+2y^2p}}}{p\left\{[1+yp+\sqrt{1+2y^2p}]^2 - [1+yp-\sqrt{1+2y^2p}]^2 e^{-2\lambda\sqrt{1+2y^2p}}\right\}}$$

alaku. Felvetődik a kérdés, hogy λ nagy értékeire elhanyagolható-e a nevező második tagja? Ez a kérdés annál is inkább indokolt, mivel az elhanyagolás után $F^{*}(p)$ inverze egzakt formában megadható (bár nem kezelhető, v.ö. [5]). Az

$$\widetilde{F}(p) = \frac{4(1+2y^2p)^{1/2} e^{\lambda - \lambda\sqrt{1+2y^2p}}}{p\,[1+yp+\sqrt{1+2y^2p}\,]^2}$$

Laplace-transzformált visszatranszformáltja alapján adódó közelitő eloszlásfüggvény kiszámitását a

$$\frac{2e^{\sigma(\lambda y+1)}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{r}\, e^{\lambda(1-\sqrt{r}\cos\varphi/2)}\{[\sigma\cos\gamma + s\sin\gamma](A_1^2 - A_2^2) + 2A_1A_2[\sigma\sin\gamma - s\cos\gamma]\}}{(\sigma^2+s^2)\,[A_1^2+A_2^2]^2}\,ds$$

integrál kiszámitására vezetjük vissza, ahol

$$A_1 = (1+y\sigma + \sqrt{r}\cos \varphi/2),\quad A_2 = (ys+\sqrt{r}\sin \varphi/2),$$

$$r^2 = (1+2y^2\sigma)^2 + (2y^2 s)^2,$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{2y^2 s}{1+2y^2\sigma},\quad \gamma = \{(\lambda y+1)s + \varphi/2 - \lambda\sqrt{r}\sin \varphi/2,\quad \sigma = 1/\lambda .$$

Ezen integrál kiszámitása is λ -nak 10-nél kisebb értékeire már nagyobb nehézségbe ütközik, mint a pontos képletekből adódó integrálokė.

λ \ p	0.1	0.05	0.025	0.01	0.001	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
Valódi 100-	1.1413	1.1832	1.2205	1.2654	1.3641	0.8847	0.8533	0.8269	0.7972	0.732
közelítés	1.1413	1.1834	1.2211	1.2654	1.362	0.8853	0.8535	0.8273	0.797	0.732
Valódi 10-	1.527	1.701	1.867	2.073	2.575	0.714	0.641	0.588	0.527	0.422
közelítés	1.527	1.700	1.867	2.073	2.579	0.714	0.641	0.590	0.527	0.422
Valódi 5	1.809	2.090	2.354	2.710	3.583	0.647	0.562	0.497	0.432	0.319
közelítés	1.81	2.1	2.4	2.	3.	0.648	0.561	0.49		
Valódi 3	2.107	2.510	2.911	3.443	4.752	0.600	0.506	0.439	0.373	0.268
közelítés	2.17					0.59	0.504			

3. táblázat

A 3. táblázat eredményei alapján látható, hogy - elsősorban y-nak 1-nél kisebb értékeire - a fenti közelités még $\lambda = 3$ esetén is jól müködik. Ebben az esetben tehát használható aszimptotikus formula keresése nagyon is kivánatos lenne (éppen a fenti közelitő formula alapján).

b./ A maximum likelihood becslésnek - nagy λ értékekre - a λ várható értékü és $\sqrt{\lambda}$ szórásu normális eloszlással való közelitésére a becslés nem "szimmetrikus" volta miatt a következő gyakorlati szempontból hasznos képletet adhatjuk meg.

Aszimptotikusan igaz a

$$P\{\hat{\lambda} < y.\lambda\} = P\{\hat{\lambda} < \lambda + z\sqrt{\lambda}\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

összefüggés, ahol adott p szint esetén y a normális eloszlás z_p kvantilisével a következő kapcsolatban áll:

$$y_p = 1 + \frac{z_p}{\sqrt{\lambda}}$$

(Ezen összefüggés alapján számitottuk a 2. táblázat normális közelitéseit.) Mivel ez a közelités λ-nak még 100 körüli értékeire sem ad megfelelő pontosságot a [3] cikkben megadott táblázat alapján y_p-re a következő közelités adható

$$y_p = 1 + \frac{z_p}{\sqrt{\lambda}} + \frac{c_p}{\lambda}$$

Az alábbi táblázat különböző p értékekre a z_p és c_p értékeket adja meg:

p	0.1	0.05	0.025	0.01	0.001	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
z_p	-1.2815	-1.6449	-1.9600	-2.3264	-3.0900	1.2815	1.6449	1.9600	2.3264	3.0900
c_p	+1.30	1.78	2.29	2.98	4.13	1.31	1.87	2.46	3.29	5.51

4. táblázat

A normális eloszlással való közelités hibatagjának $\frac{c_p}{\sqrt{\lambda}}$ alakban történő választását indokolja, hogy λ -50-nél nagyobb értékeire a fenti közelités jó stabilitást mutat.

Irodalom

1 Arató M.-A.N.Kolmogorov-J.B.Szinaj: D.A.H. 146 /1962/ 747-750

2 Arató M.: MTA III. Oszt. Közleményei 14 /1964/, 317-330.

3 Arató M.: Теория вероятностей (sajtó alatt).

5. Arató M.: Számitástechnikai Központ Közleményei 1967. I. szám.

Summary

On unbiased estimates of the parameter λ of the complex stationary Gaussian Markovian process

We are considering the estimates s_1^2 and s_2^2 for $1/\lambda$. There are given confidence limits for λ by the help of these estimates. The estimator s_1^2 is good when λ is small and s_2^2 is good for $\lambda > 5$. By the method of numerical integration we computed the approaching distribution of the maximum likelihood estimation. The results are the same as for the exact distribution, when $\lambda > 5$.

Az információátalakitási "képességek" megmaradásának törvényéről x/

Gyuris László

I. Alábbiakban a kibernetika egyik - talán alapvetően lényeges - törvényszerüségét próbáljuk vázolni. Az nyilvánvaló, hogy az információátalakitási "képességek" megmaradásáról szóló törvény a természettudományok más területei bizonyos törvényszerüségeinek analógiájaként is felfogható.

A II.1.b.-ben felsorolt rendszerek elméleteiben természetesen speciális vizsgálatokat igényel e törvényszerüség konkrét megfogalmazása; itt figyelmünket az egészen általános megfogalmazásra forditjuk; ez bizonyos pontatlanságot, esetleg félreérthetőséget is eredményezhet, de reméljük, hogy a lényeget sikerül eléggé megközelitenünk.

A II.-ben szereplő "zárt", "diszkrét" stb. fogalmakat az [5], [8],[2],[4] -ből vettük.

II. A "megmaradási" törvény

1.a/ Bármely zárt, diszkrét, determinisztikus rendszerben az információátalakitási "képességek" összege konstans.

---

x/ A szerző ezuton mond hálás köszönetet Kalmár László akadémikusnak, Frey Tamás és Dömölki Bálint kandidátusoknak, akiktől komoly elvi segitséget kapott.

b/ Ilyen rendszerre példák lehetnek:

α. Aktiv rendszerek x/:

univerzális elektronikus számológépek,

diszkrét determinisztikus automaták,

Turing-gépek stb.

β. Passziv rendszerek x/ /potenciálisan információátalakitó objektumok/:

számológépi programok,

Turing-gépek szalagjai,

formális /matematikai/ rendszerek,

/formális/ nyelvek szintaxisa stb.

2. Az ember - mint információátalakitó objektum - nyilvánvalóan nem teljesiti az 1.a/ feltételeit.

Az információátalakitási "képesség" az 1.b/ rendszerek bármelyikére viszonylag könnyen megfogalmazható. Tekintsünk egy példát az automaták köréből.

Legyen adva egy véges Moore-automatánk: $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(A,X,Y,\delta,\mu)$; ahol A a belső állapotok halmaza, X a bemenőjelek halmaza, Y a kimenőjelek halmaza, δ az automata átmenetfüggvénye és μ a /retardált/ kimenetfüggvény. Tekintsük az A valamely M részhalmazát. Ezen $\mathfrak{U}$ automata információátalakitási "képességét" jellemezhetjük (l. [7]) az $\mathfrak{U}$ állapotai M halmaza /amelyet most speciálisan A-nak választunk/ által előállitott (l. [4]) S reguláris eseménnyel.

---

x/ Az aktiv-passziv megkülönböztetést illetően l.Burks [3].

Tehát az $\mathfrak{A}$ "képességét" meghatározza az az S reguláris esemény, amely az $\mathfrak{A}$ -ban ezen M által előállitható. A törvény evidens tényt fejez ki e speciális esetben.

III. Mivel a kibernetika jelentős részét átfogó ([1],[2],[6]) törvényszerüségről van szó, remélhető, hogy a II.1.b/ rendszereinek elméleteiben a speciális alkalmazásokkal kapcsolatos vizsgálatok érdekes eredményeket hoznak.

Irodalom

[1] Wiener N.; Cybernetics, John Wiley Sons, New York, 1948.

[2] Ashby W.R.: An Introduction to Cybernetics, Wiley, New York, 1958.

[3] Burks A.W.: Programming and the theory of automata, "Computer Programming and Formal Systems" /Ed.by P.Braffort and D.Hirschberg/, North-Holland Publ.Co., Amsterdam, 1963.

[4] Gluskov V.M.: Szintyez cifrovüh avtomatov, Moszkva, 1962.

[5] Gluskov V.M.: Vvegyenyie v kibernetiku, Kiev, 1964.

[6] Ljapunov A.A.: O nyekotorüh obsih voproszah kibernetiki, "Problemü kibernetiki" 1,1958.

[7] Kleene S.C.: Representation of evemts in nerve nets and finite automata, "Automata Studies", Princeton, 1956.

[8] Shannon C.E.-Weaver W.: The Mathematical Theory of Communication, Univ.Illionis Press, Urbana, III., 1948.

Summary

On the law of the conservation of the "capabilities" of the transformation of information

The paper deals in general formulation with the law of preservation of the "capabilities" of the transformation of information:

1. The sum of the "capabilities" of the transformation of information is constant in any closed, discrete, deterministic system /active systems: universal electronic computers, discrete deterministric automata, Turing-machines etc., passive systems/ potentially objects transforming information: computer programs, tapes of Turing-machines, formal /mathematical/ systems, syntax of /formal/ languages etc./.

2. The man - as an object of the information transformation - obviously does not fulfil the conditions of 1.

Legrövidebb ut meghatározása időtől függő élhosszakkal biró hálózatban

Klafszky Emil

A legrövidebb ut probléma megoldása időtől nem függő élhosszak esetén Ford és Fulkersontól [1,2] származik. Bellman [3] dinamikus programozási módszert követve eljárást adott a legrövidebb ut hosszának meghatározására. Ezen elvet követve Cooke és Halsey [4] eljárást adtak, időtől függő élhosszak esetén a legrövidebb ut hosszának a meghatározására. Ez az eljárás azonban csak az ut hosszát, de magát az utat nem adja meg. Ebben a dolgozatban azt mutatjuk meg, hogy a Ford-Fulkerson féle folyam módszer szintén alkalmas a feladat megoldására, sőt a legrövidebb utat is megadja.

Legyen az $N = \{x, y, \dots\}$ egy véges sok pontból álló halmaz. Legyen továbbá $\tau \in [0, 1, 2, \dots\}$. A $\gamma(x, y, \tau)$ nem-negativ egész szám jelentse azt az időt, amely x-ből y-ba való eljutáshoz szükséges, amennyiben x-ből a τ időpontban indulunk el. Ha x-ből y-ba a τ időpontban nem lehet menni, akkor ugy vesszük, hogy $\gamma(x, y, \tau) = \infty$. Legyenek s és t az N halmaz rögzitett pontjai, az s pontot forrásnak, a t pontot nyelőnek nevezzük.

Legyen $P = (s = x_0, x_1, \dots, x_n = t)$ egy s-ből t-be vezető ut. Rendeljünk minden $x \in N$ ponthoz $\delta(x)$ nem-negativ egész számot, melyet az x pontbeli tartózkodási időnek nevezünk. Ezen $\delta(x)$ számok rendezett halmazát jelöljük

$\mathcal{D}$ -vel. Haladjunk a P uton a $\mathcal{D}$ tartózkodási és a γ utazási idővel s-ből t-be. Jelöljük $\lambda(x_i)$-vel az x_i pontba való érkezési időt. A $\lambda(x_i)$ számokra az alábbiak teljesülnek:

$$\lambda(x_o) = 0$$

/1/ $$\lambda(x_i) = \lambda(x_{i-1}) + \delta(x_{i-1}) + \gamma\left[x_{i-1}, x_i, \lambda(x_{i-1}) + \delta(x_{i-1})\right]$$

$$(i=1,\dots, n)$$

Feladatunk az, hogy olyan P utat és $\mathcal{D}$ tartózkodási idő értékeket adjunk meg, hogy

/1*/ $\lambda(t)$ minimális legyen.

A feladathoz egy duál feladatot rendelünk. Meghatározandók a hálózat csucsain olyan $\mu(x)$ $(x \in N)$ nem-negativ egész számok, melyekre fennáll:

$$\mu(s) = 0$$

/2/

$$\mu(y) - \mu(x) \leqq \gamma(x,y, \mu(x) + \vartheta) + \vartheta \,,$$

ahol $x,y \in N$ és ϑ tetszőleges nem-negativ egész szám. Ezenkivül

/2*/ $\mu(t)$ maximális legyen.

A duál feladatnak van lehetséges megoldása, például az azonosan nulla μ értékek kielégitik /2/ egyenlőtlenséget.

Az alábbi lemma a primál és duál feladat lehetséges megoldásai közötti kapcsolatot mutatja.

Lemma: Tetszőleges P ut és $\mathcal{D}$ tartózkodási idő, valamint tetszőleges /2/-nek eleget tevő μ számok esetén

/3/ $$\lambda(t) \geqq \mu(t)$$

B i z o n y i t á s :

A bizonyitásnál a /2/ egyenlőtlenséget más formában használjuk, ezért azt átirjuk.

Legyen $\omega = \mu(x) + \vartheta$ természetesen akkor $\omega \geqq \mu(x)$-nek fenn kell állni. Ezt a /2/ egyenlőtlenségbe irva kapjuk

/4/ $$\mu(y) - \omega \leqq \gamma(x,y,\omega),$$

minden olyan nem-negativ egész ω-ra, melyre $\omega \geqq \mu(x)$
Azt mutatjuk meg teljes indukcióval, hogy a P ut minden x_i pontjára

/5/ $$\lambda(x_i) \geqq \mu(x_i)$$

Nyilván x_0 esetén $\lambda(s) = \mu(s)$ teljesül. Tegyük fel, hogy /5/ egyenlőtlenség x_{i-1}-re fennáll, akkor /1/ és /4/ felhasználásával kapjuk:

$$\lambda(x_i) = \lambda(x_{i-1}) + \delta(x_{i-1}) + \gamma[x_{i-1}, x_i, \lambda(x_{i-1}) + \delta(x_{i-1})] \geqq$$

$$\geqq \lambda(x_{i-1}) + \delta(x_{i-1}) + \mu(x_i) - \lambda(x_{i-1}) - \delta(x_{i-1}) = \mu(x_i)$$

Azaz /5/ teljesül x_i-re.

Az egész értéküség és a /3/ egyenlőtlenség biztositja, hogy léteznek olyan μ értékek, melyekre $\mu(t)$ maximális. Megmutatjuk, hogy léteznek olyan P ut $\mathcal{D}$ tartózkodási idő és /2/-nek eleget tevő μ értékek, hogy /3/-ban egyenlőség áll fenn, azaz fennáll az alábbi dualitási tétel.

T é t e l:

Amennyiben a λ és μ értékek /1/ illetve /2/-nek eleget tesznek, akkor

$$\min \lambda(t) = \max \mu(t)$$

B i z o n y i t á s :

A bizonyitás konstruktiv lesz. Egyben eljárást is ad a P ut, a $\mathcal{D}$ tartózkodási idő értékek és a μ duálváltozók meghatározására.

Tegyük fel, hogy μ értékek olyanok, hogy $\mu(t)$ maximális. Legyen SCN a következőképp konstruálva:

a./ $s \in S$

b./ y legyen eleme S-nek, ha valamely $x \in S$ és valamely ϑ-ra /2/ egyenlőséggel teljesül.

Jelöljük $T = N - S$

Amennyiben $t \in S$ akkor van olyan $P = (s = x_0, x_1, \dots, x_n = t)$ ut s-ből t-be, hogy

$$\mu(x_i) - \mu(x_{i-1}) = \gamma(x_{i-1}, x_i, \mu(x_{i-1}) + \vartheta) + \vartheta$$

valamilyen ϑ-ra. Ezen ϑ legyen $\delta(x_{i-1})$ értéke. Ekkor a lemma bizonyitását figyelembe véve a tételt bizonyitottuk.

Ha $t \notin S$, akkor

$$\mu(y) - \mu(x) < \gamma(x, y, \mu(x) + \vartheta) + \vartheta$$

minden $x \in S$, $y \in T$ és minden nem-negativ egész ϑ-ra. Jelöljük:

$$\varepsilon = \min \gamma[x, y, \mu(x) + \vartheta] + \vartheta ,$$

ahol $x \in S$, $y \in T$ és ϑ nem-negativ egész. Nyilván $\varepsilon > 0$. Legyen

3

$$\bar{\mu}(x) = \mu(x) \qquad \text{ha } x \in S,$$

$$\bar{\mu}(x) = \mu(x) + \varepsilon \qquad \text{ha } x \in T.$$

Ezen $\bar{\mu}$ értékek a duál feladat lehetséges megoldásai, ugyanis S és ε definiciója miatt /2/ feltételt kielégitik. Azonban $\varepsilon > 0$ miatt $\bar{\mu}(t) > \mu(t)$ ellentétbe azzal a feltevésünkkel, hogy $\mu(t)$ maximális.
Ezzel a tételt bizonyitottuk.

Számitástechnikai szempontból megjegyezzük, hogy amennyiben valamely P ut és $\mathcal{D}$ tartózkodási idő esetén $\bar{\lambda}(t) = m$, akkor természetesen elég csak a $\tau \in (0,1,\dots,m)$ értékekre szoritkozni.

<u>Irodalom</u>

[1] L.R.Ford, Jr.and D.R.Fulkerson, "Maximal Flow Through a Network", Canadian J.Math. 8, 399–404 /1956/.

[2] L.R.Ford, Jr. "Network flow theory" RAND Paper P-923 Santa Monica Calif. /1956/.

[3] R.Bellman, "On a Routing Problem", Quart, Appl. Math. XVI. No. 1 /1958/.

[4] K.L. Cooke and E.Halsey "The Shortest Route Through a Network with Time-Dependent Internodal Transit Times", - J.Math. Anal. Appl. 14, 493–498 /1966/.

Summary

Using a dynamic programming method, Cooke-Halsey [4] gave a procedure for the definition of the length of the shortest path in a net with time-dependent edge length.

It is demonstrated in this paper that the Ford-Fulkerson method, too, is applicable to the solution of this problem. The constructive proof of the duality thesis between the problem and its dual affords at the same time an algorithm for the definition of the shortest path.

Véges sorkapacitásu egykiszolgálós várakozási-idő problémáról

Tomkó József

Tekintsünk egy MI/G/1 kiszolgáló rendszert azon feltevés mellett, hogy csak véges számu igény várakozhat a sorban. Részletesebben, a következő egykiszolgálós várakozási problémáról lesz szó: egyetlen kiszolgáló készülékhez $\lambda > o$ paraméterü Poisson folyamat szerint érkeznek az igények. A kiszolgálási időtartam minden egyes igényre nézve egy s ugyanazon konstans érték. Az egyszerüség kedvéért válasszuk ezt a konstans értéket "1"-nek. Ha egy igény beérkezési pillanatában a kiszolgáló készülék foglalt, akkor ez az igény csatlakozik a már esetleg várakozók csoportjához az esetben, ha az adott pillanatban a várakozók száma nem ért el bizonyos "n" számot. Ha viszont a várakozók száma már "n", akkor a beérkezett igény elvész.

Tegyük fel, hogy a rendszer üres a $t = o$ időpillanatban, s legyen az első igény beérkezési időpillanata $\mathcal{E}_o$. Az $\mathcal{E}_o$ pillanatban elkezdődik az első igény kiszolgálása. Ha a következő igény beérkezési ideje az egységet meghaladja, akkor ennek az igénynek ismét várakozás nélkül kezdődhet el a kiszolgálása s a készüléknek az első igény kiszolgálásával kezdődő foglaltsági periódusa csak egységnyi ideig tart. Ha viszont a második igény beérkezik,

mielőtt az első igény kiszolgálása befejeződött volna, akkor a készüléknek az első igény kiszolgálása kezdetétől számitott foglaltsági periódusa az egységnél hosszabb lesz. Az igények egymásutáni beérkezésétől függően a készülék foglaltsági periódusa véletlen hosszuságu.
Jelöljük a készülék első foglaltsági periódusának hosszát $\delta_1^{(n)}$-gyel (a felső zárójeles index arra utal, hogy maximálisan "n" igény várakozhat a rendszerben). Az $\varepsilon_o + \delta_1^{(n)}$ pillanatban a készülék ujból szabaddá válik bizonyos ε_1 időtartamra. Majd ismét elkezdődik egy foglaltsági periódusa és igy tovább; az idő folyamán a $\delta_i^{(n)}$ foglaltsági és az ε_i szabad periódusok váltogatják egymást. Feltevéseinkből következik, hogy az ε_i-k független, közös $\lambda > o$ paraméterü exponenciális eloszlásu valószinüségi változók és hogy a $\delta_i^{(n)}$ foglaltsági periódushosszak is függetlenek s azonos eloszlásuak. Ezen utóbbi közös eloszlásfüggvényt $G_n(x)$-szel fogjuk jelölni:

$$/1/ \qquad G_n(x) = P\{ \delta_i^{(n)} \leq x \}$$

Esetünkben a készülék foglaltsági periódushossza csak pozitiv egész értékeket vehet fel. Ezért az /1/ eloszlás diszkrét eloszlás.

A kiszolgáló rendszerünknek az alkalmazások szempontjából igen fontos karakterisztikája a várakozási idő eloszlása. Jelölje

/2/ $\qquad \eta^{(n)}(t), \quad 0 \leq t < \infty$

a t pillanatban esetleg beérkező igény várakozási idejét, feltéve, hogy e pillanatban beérkező igény nem vész el. Szokás az $\eta^{(n)}(t)$-t virtuális várakozási időnek nevezni. Eltérően az $n = \infty$ esettől, általában a /2/ folyamat nem Markov tipusu. Ez azt jelenti, hogy csupán az $\eta^{(n)}(t)$ érték ismerete alapján semmit sem mondhatunk az $\eta^{(n)}(t+h)$ várakozási idő lehetséges értékei felől. Csak az $\eta^{(n)}(t)$ értéket ismerve, még azt sem mondhatjuk meg, milyen valószinüséggel lesz értelmezett az $\eta^{(n)}(t+h)$ virtuális várakozási idő. Erre való tekintettel eléggé bonyolultnak látszik a /2/ folyamat /virtuális várakozási idő/

/3/ $\qquad W_n(x) = \lim\limits_{t \to \infty} P\left\{ \eta^{(n)}(t) \leq x \right\}$ *

---

* /3/ jobboldalán álló $\{ \eta^{(n)}(t) \leq x \}$ eseményről nyilván csak akkor beszélhetünk, ha az $\eta^{(n)}(t)$ mennyiség értelmezett, azaz, ha a t pillanatban várakozó igények száma "n"-nél kisebb. A rövidebb irásmód kedvéért szándékosan a megfelelő valószinüség bevezetésénél erről nem tettünk emlitést, s a továbbiakban megállapodunk abban, hogy az $\{ a < \eta^{(n)}(t) \leq b \}$ tipusu esemény valószinüségén mindig az $\{ \eta^{(n)}(t)$ értelmezett és a $0 < \eta^{(n)}(t) \leq b \}$ esemény valószinüségét értjük.

ergodikus eloszlásának meghatározása.

Más igen fontos karakterisztikája az adott kiszolgáló rendszernek a vesztési valószinüség. Ezt a valószinüséget meghatározzák a rendszer ugynevezett állapotvalószinüségei

/4/ $P_k^{(n)}(t) = P\left\{ \xi^{(n)}(t) = k \right\}$, $o \leq k \leq n+1$.

Itt $\xi^{(n)}(t)$-vel jelöltük a rendszerben tartózkodó igények t pillanatbeli számát. Az állapotvalószinüségekkel kapcsolatosan is a fő figyelem az ergodikus eset vizsgálatára irányul, azaz a

/5/ $P_k^{(n)} = \lim\limits_{t \to o} P_k^{(n)}(t)$, $o \leq k \leq n+1$

határvalószinüségek meghatározására.

Fő problémaként a /3/ ill. az /5/ ergodikus valószinüségek meghatározását emlitettük, figyelmen kivül hagyva azt a kérdést, vajon léteznek-e egyáltalán ezek a határeloszlások. A tekintendő kiszolgáló rendszerünkre bármilyen véges n és $\lambda > o$ mellett a /3/ és az /5/ ergodikus valószinüségek létezése csaknem magától értetődő. Meg kivánjuk jegyezni, hogy $n = \infty$ esetén ezeknek a határvalószinüségeknek a létezése már nem ennyire világos, s e kérdésre pozitiv válasz csak $o < \lambda < 1$ esetén adható, $\lambda > 1$ esetén pedig mind a /3/, mind az /5/ mennyiségek azonosan zérusak.

Erdekes viszont megjegyezni, hogy mig $n = \infty$ és $o < \lambda < 1$ esetén a /3/ ill. az /5/ ergodikus eloszlásokra a Laplace-Stieltjes transzformáltak; illetve a generátorfüggvények terminológiájában igen egyszerü formulák adhatók meg /általános eloszlásu véletlen kiszolgálási időtartamok esetén is/, addig véges n-re az /5/ valószinüségek igen bonyolult formulával adhatók csak meg, a /3/ ergodikus eloszlással kapcsolatosan pedig még nem is ismeretesek általános érvényü formulák.

Az irodalomban főként az ergodikus állapotvalószinüségek, többek között a vesztési valószinüség meghatározásának problematikája tisztázott a legnagyobb mértékben (lásd pl. [1]). A foglaltsági periódushossz eloszlásának vizsgálatával a jelen dolgozat szerzője foglalkozott. Többek között [2] -ben igazolta, hogy tetszőleges n és $\lambda > o$ mellett $G_n(\infty) = 1$ és hogy a

$$\mu_n = M\,\delta^{(n)}$$

várható értékek végesek, s meghatározta a $\mu(z) = \sum_{1}^{\infty} \mu_n z^k$ generátorfüggvényt is. Ebben a dolgozatában a szerző igazolta az alábbi határeloszlás tételt is;

1. Tétel. Tetszőleges $n \geq 1$-re

$$\lim_{\lambda \to \infty} P\left\{ \frac{\delta^{(n)}}{\mu_n} < t \right\} = 1 - e^{-t}$$

Észrevette a szerző azt is, hogy ha a χ_i beszélgetési időtartamok független, azonos eloszlásu, véges $M\chi_i = 1$ várható értékü és véges $\mathcal{D}^2(\chi_i) = \sigma^2 > 0$ szórásnégyzetü valószinüségi változók, akkor az $\eta^{(n)}(t)$ várakozási idővel kapcsolatosan a stacionárius esetben érvényes az alábbi

2. Tétel. $\lambda > 1$ esetén

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{ \frac{\eta^{(n)}(t) - n}{\sigma \sqrt{n}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

E tétel bizonyitásával a szerző egy későbbi dolgozatban szándékozik foglalkozni.

Forditsuk most figyelmünket a kiindulási feltételeink esetére, azaz azon esetre, amikor a beszélgetési időtartamok nem véletlenek, hanem konstans egységnyi értéküek. Erre az esetre a 2. tétel nem érvényes. Viszont az, hogy a beszélgetési időtartamok konstansak, bizonyos mértékig egyszerüsiti a helyzetet s lehetőség nyilik a $W_n(x)$ eloszlásfüggvényre elég egyszerü formulát adni. Dolgozatunk célja éppen ennek a bemutatása. Rámutatunk majd arra is, milyen problémák merülnek fel a közölt eljárásnak az általános esetre történő alkalmazásánál. Mielőtt rátérnénk e feladatunk végrehajtására, közlünk néhány - a továbbiak során felhasználásra kerülő - eredményt az un. felújítási elméletből.

Legyenek $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ független, nem negativ, esetleg a γ_1-től eltekintve azonos eloszlásu valószinüségi változók. Tegyük fel, hogy ez a közös eloszlás nem rácsos, azaz nincs olyan d, amelyre a $P\{\gamma_i = l \cdot d\}$ ($l=0,1,2,\dots$) valószinüségek összege 1-et adna. Értelmezzük az N_t ($0 \leq t < \infty$) folyamatot a következőképpen:

$$N_t = \max_{\sum_1^n \gamma_i \leq t} n$$

Részletesebben

$$N_t = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \gamma_1 > t, \\ n, & \text{ha} \quad \sum_1^n \gamma_i \leq t < \sum_1^{n+1} \gamma_i \end{cases}$$

Az N_t ($0 \leq t < \infty$) folyamatot szokás a $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ valószinüségi változó sorozat által meghatározott (generált) felújítási folyamatnak nevezni. Szemléletesen N_t

jelenti a $(0,t]$ időközben végrehajtott felújítások számát, ha a γ_i-ket valamely objektum élettartamaként interpretáljuk, s feltesszük, hogy az objektumokat az élettartamuk lejártával (elromlásuk pillanataiban) ujakkal helyettesitjük. Egyik legfontosabb jellemző mennyisége a felújitási folyamatnak a

$$H(t) = M\{N_t\}$$

várható érték, melyet felújítási függvénynek szokás nevezni. A legegyszerübb ugynevezett "elemi felújítási tétel" azt állitja, hogy $M\gamma_i = \mu < \infty$ esetén

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

Számunkra az ennél jóval nehezebben igazolható un. Blackwell-tétel játszik majd fontos szerepet. E tétel szerint $M\gamma_i = \mu < \infty$ esetén tetszőleges $h > 0$ mellett

$$\lim_{t\to\infty} H(t+h)-H(t) = \frac{h}{\mu}.$$

E tételek bizonyitását az olvasó megtalálhatja több dolgozatban, könyvben (pl. [3] -ban).

Térjünk most át ezek után a kitüzött feladatunk végrehajtására. Vezessük be először a következő valószinüségeket:

$$\pi_{k,l} = P\left\{\begin{array}{l}\text{a foglaltsági periódus alatt k-nál több kiszolgálás} \\ \text{megy végbe s eközben a k-adik kiszolgálás befejező-} \\ \text{dését követő pillanatban } l \text{ igény marad a várakozók} \\ \text{sorában}\end{array}\right\}$$

Tekintsük a $\xi^{(n)}(t)$ (a rendszerben tartózkodó igények t pillanatbeli számát jelentő) folyamattal kapcsolatos ugynevezett beágyazott Markov-láncot, a

/6/ $\xi_r^{(n)} = \xi^{(n)}(\sigma_r + 0)\ , \quad (r = 1, 2, \ldots)$

sorozatot. Itt σ_r az egymásutáni kiszolgálások befejeződési pillanatait jelölik, $\xi^{(n)}(\sigma_r + 0)$ pedig a rendszerben tartózkodó igények számát közvetlenül egy ilyen pillanat után. A bevezetett $\pi_{k,l}$ valószinüségek nem mások, mint a /6/ Markov-lánc k-lépéses átmenet valószinüségei, ahol 1 a kezdő állapot, s feltételezett még, hogy a k-adik lépésig a lánc egyetlen egyszer sem jut a o-állapotba. Ezek szerint

$$\pi_{k,l} = P\left\{\xi_k^{(n)} = l+1 \quad \xi_i^{(n)} \neq 0,\ 1 \leq i \leq k-1 \mid \xi_0^{(n)} = 1\right\}$$

A jelölésekkel kapcsolatosan még hozzátesszük, hogy a foglaltsági periódust a t=o pillanatban kezdődőnek tételezzük fel, s $\xi_0^{(n)}$ az e pillanatban beérkezett s azon nyomban kiszolgálás alá kerülő egyetlen igényt (azaz ennek számát) jelenti. Egyszerü meggondolásokkal beláthatók a következő rekurziv összefüggések:

$$/7/ \qquad \pi_{1,l} = \begin{cases} p_{l+1}\,, & \text{ha } 0 \le l < n-1 \\ r_n\,, & \text{ha } l = n-1 \end{cases}$$

$$/8/ \qquad \pi_{k,l} = \begin{cases} \sum_{s=0}^{l+1} \pi_{k-1,s}\, p_{l-s+1}\,, & \text{ha } 0 \le l < n-1 \\ \sum_{s=0}^{n-1} \pi_{k-1,s}\, r_{n-s}\,, & \text{ha } l = n-1 \end{cases}$$

Itt p_l, r_l ; (l=o,1,...) mennyiségek a következőket jelentik;

p_l = P { egy kiszolgálás alatt l igény érkezik be }

r_l = P { egy kiszolgálás alatt legalább l igény beérkezik }

Feltevéseinkből kifolyólag

$$p_l = \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda}$$

továbbá, világos, hogy

$$r_l = \sum_{s=l}^{\infty} p_s$$

Képezzük most a $\pi_r(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k,r} z^k$, $(0 \le r \le n-1)$ generátorfüggvényeket. Rögzitsük r értékét, majd ennek megfelelően /7/ ill. /8/ mindkét oldalát szorozzuk meg z ill. z^k-val. Összegezzük az igy kapott egyenlőségeket $k \ge 1$ értékekre, majd felcserélve a $k \ge 2$ értékek mellett a jobboldalon előforduló kettős összeg összegzési sorrendjét, az alábbi egyenletekhez jutunk:

$$
/9/ \quad \begin{cases} 0 \leq r < n-1 \text{ -re} \\ \Pi_r(z) = z p_{r+1} + z \sum_{s=0}^{r+1} p_{r-s+1} \Pi_s(z) \\ r = n-1 \text{ -re} \\ \Pi_{n-1}(z) = z r_n + z \sum_{s=0}^{n-1} r_{n-s} \Pi_s(z) \end{cases}
$$

Ezek az összefüggések a $\Pi_0(z), \Pi_1(z), \dots \dots \Pi_{n-1}(z)$ generátorfüggvényekre egy lineáris inhomogén egyenlet-rendszert szolgáltatnak, amelyből ezek a függvények egyértelműen meghatározhatók.

Értelmezzük most a készülék ε_i szabad és a $\delta_i^{(n)}$ foglaltsági periódushosszaival a

$$\gamma_1 = \varepsilon_0$$

$$\gamma_i = \delta_i^{(n)} + \varepsilon_i \quad , \quad i \geq 1$$

valószinüségi változók sorozatát és tekintsük e sorozat által meghatározott N_t felújítási folyamatot. A továbbiakban $H(t)$ e folyamat felújítási függvényét fogja jelölni. Az említett Blackwell tételben előforduló μ szerepét most az

$$M\{\delta_i^{(n)} + \varepsilon_i\} = \mu_n + \frac{1}{\lambda}$$

várható érték veszi át.

Legyen ezekután $t > 0$ és tekintsük az esetleg e pillanatban érkező és el nem vesző igény várakozási idejét, $\eta^{(n)}(t)$-t. Az $\eta^{(n)}(t) = 0$ esemény ekvivalens azzal, hogy a t pillanatban a rendszer üres. Tehát

$$P\{\eta^{(n)}(t) = 0\} = P_0^{(n)}(t)$$

Minthogy mind $M\delta_1^{(n)}$, mind $M\varepsilon_i$ véges, elég egyszerü meggondolásokkal kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} P\{\eta^{(n)}(t)=0\} = \frac{M\varepsilon_i}{M\varepsilon_i + M\delta_i^{(n)}} = \frac{\lambda}{1+\lambda\mu_n}$$

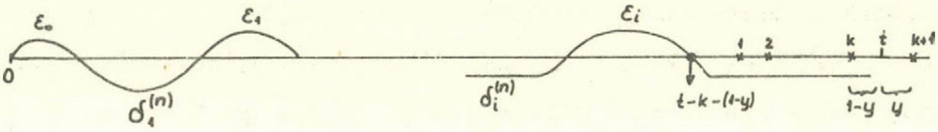
Általában $0 \leq \eta^{(n)}(t) \leq n$. Ha $\eta^{(n)}(t) > 0$, akkor a t pillanatban egy foglaltsági periódus folyik, továbbá, ha e pillanatban l igény várakozik a rendszerben, akkor $\eta^{(n)}(t)$ értéke l és $l+1$ közé esik. Feladatunk megoldottnak tekinthető, ha meg tudjuk adni minden $0 \leq l < n$, $0 \leq y < 1$ -re a

/10/ $$P\{ l + y < \eta^{(n)}(t) \leq l + y + dy\}$$

valószinüség határértékét $t \to \infty$ mellett. E célból az előző zárójelben álló eseménynek bizonyos más eseménnyel vett együttes bekövetkezési valószinüségét határozzuk meg előbb. Az $l + y < \eta^{(n)}(t) \leq l + y + dy$ esemény maga után vonja, hogy a t pillanatban egy foglaltsági periódus folyik. Lehetséges, hogy e periódusban már történt néhány kiszolgálás. A könnyebb kifejezésmód kedvéért vezessünk be egy $\nu(t)$ két-dimenziós vektort, melynek első komponense jelölje az előbb emlitett kiszolgálások számát (azaz a t pillanatban folyó foglaltsági periódus alatt e t pillanatig befejeződött kiszolgálások számát), a második komponense pedig azon igények számát, amelyek ezen kiszolgálások közül a legutolsó befejeződését követő pillanatban a várakozók sorában maradtak. Előfordulhat, hogy a $\nu(t)$ vektor első komponense 0. Ekkor a második komponensét definiciószerüen zérusnak értelmezzük. Meg fogjuk keresni a

$$P\{\, l + y < \eta^{(n)}(t) \leq l + y + dy,\ \nu(t) = (k,r)\}$$

valószinüség főrészét, ahol $o \leq k \leq [t-(1-y)]$, $o \leq r \leq l$.
Hasznos lesz számunkra az alábbi ábra:



Ebből az ábrából leolvashatjuk, hogy ha t elég nagy, akkor kezdetben néhány foglaltsági periódus befejeződik, majd a $t-k-(1-y)$ pillanatban elkezdődik egy ujabb foglaltsági periodus, mely a t pillanatban még tart s közben már k-kiszolgálás lefolyt.

A mondottakból látható; ahhoz, hogy az

$$\{\, l+y < \eta^{(n)}(t) \leq l+y+dy\ ,\ \nu(t) = (k,r)\,\} \qquad /11/$$

esemény bekövetkezzen, kell, hogy a $t-k-(1-y)$ és a $t-k-(1-y)+dy$ pillanatok között elkezdődjön egy foglaltsági periódus, melyben folyamatosan k-nál több kiszolgálás történik és hogy a k-adik kiszolgálás befejeződése után r igény maradjon a várakozók sorában. Ezen események bekövetkezési valószinüségének főrésze

$$[H(t-k-(1-y)+dy) - H(t-k-(1-y))]\,\Pi_{k,r}$$

ahol $k=o$ esetén $\pi_{oo} = 1$. Továbbá kell, hogy a folyamatban levő foglaltsági periódus utolsó (k-adik) kiszolgálásának befejeződése után a sorban maradó r igényhez az $(l-y)$ idő alatt még további $l-r$ igény csatlakozzék. Ezek figyelembevételével kapjuk, hogy

$$P\{ l + y < \eta^{(n)}(t) \leq l + y + dy,\ \nu(t) = (k,r)\} =$$

$$= [H(t-k-(l-y)+dy) - H(t-k-(l-y))]\ e^{-\lambda(l-y)} \frac{[\lambda(l-y)]^{l-r}}{(l-r)!} \pi_{k,r} + o(dy)$$

Ha most t igen nagy, akkor a Blackwell-tétel értelmében $H(t-k-(l-y)+dy) - H(t-k-(l-y))$ közel $dy/(1/\lambda + \mu_n)$, ezért

$$/12/ \quad \begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} P\{ l+y < \eta^{(n)}(t) \leq l+y+dy,\ \nu(t) = (k,r)\} = \\ = \dfrac{dy}{\frac{1}{\lambda} + \mu_n}\, e^{-\lambda(l-y)} \cdot \dfrac{[\lambda(l-y)]^{l-r}}{(l-r)!} \pi_{k,r} + o(dy) \end{cases}$$

Világos, hogy

$$P\{ l + y < \eta^{(n)}(t) \leq l + y + dy\} =$$

$$= \sum_{k=o}^{[t-(l-y)]} \sum_{r=o}^{l} P\{ l + y < \eta^{(n)}(t) \leq l + y + dy,\ \nu(t) = (k,r)\}$$

Mielőtt most itt áttérnénk a $t \to \infty$ határesetre, vegyük észre, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k,r} = \pi_r(1)$, $(o \leq r \leq n-1)$ sorok véges összegűek és hogy a $H(\tau + dy) - H(\tau)$ különbség minden $\tau \geq o$ mellett egy s ugyanazon korlát alatt marad. Ezek és /12/ felhasználásával most már könnyen megmutatható, hogy

$$\lim_{t\to\infty} P\{ l + y < \eta^{(n)}(t) \leq l + y + dy \} =$$

$$= \frac{dy\, e^{-\lambda(1-y)}}{\frac{1}{\lambda} + \mu_n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{l} \frac{[\lambda(1-y)]^{l-r}}{(l-r)!} \Pi_{k,r} + o(dy)$$

Eredményünket a következőképpen foglalhatjuk össze:

3.Tétel. Tetszőleges $n \geq 1$, $\lambda > o$ mellett a (virtuális) várakozási idő /3/ ergodikus eloszlásának

$$w_n(y) = \frac{d\, W_n(y)}{dy} , \quad y > o$$

sürüségfüggvényét az $l + y \leq (l+1)$, $l = o,1,\dots,n-1$, $y > o$ pontokban a

$$/13/ \qquad w_n(l+y) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \mu_n} e^{-\lambda(1-y)} \sum_{r=0}^{l} \frac{[\lambda(1-y)]^{l-r}}{(l-r)!} \Pi_r^*$$

formula szolgáltatja, ahol $\Pi_r^* = \delta_{o,r} + \Pi_r(1)$, $\Pi_r(1)$ $(r = 0,1,\dots,n-1)$ pedig a /9/ egyenletrendszer $z=1$ esetére vonatkozó megoldása. Továbbá, a $W_n(y)$ függvény, értelmezéséből kifolyólag $y < o$ -ra zérus, az $y = o$ helyen szakadással rendelkezik s ugrása

$$\lim_{h \to +o} W_n(h) = \frac{1}{1/\lambda + \mu_n} .$$

Eredményünket felhasználhatjuk a

$$\lim_{t\to\infty} M\,\eta^{(n)}(t) = \omega$$

várható érték meghatározásához. Kapjuk, hogy

/14/ $$\omega = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{l} \Pi_r^* (I_{l-r} + l) ,$$

ahol

/15/ $$I_s = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \mu_n} \int_0^1 y e^{-\lambda(1-y)} \frac{[\lambda(1-y)]^s}{s!} dy , \quad (0 \le s \le n-1)$$

Eredményünk illusztrálására tekintsünk ezek után két példát. Legyen először n=1. Ekkor /9/-nek csak egy egyenlete van. Ebből

$$\Pi_0(z) = zr_1 + zr_1 \Pi_0(z)$$

azaz

$$\Pi_0(z) = \frac{zr_1}{1 - zr_1} = zr_1 \sum_{k=0}^{\infty} (zr_1)^k$$

Innen

$$\Pi_{k,0} = r_1^k , \qquad (k \ge 1) .$$

Egy igény most csak akkor maradhat a rendszerben, ha a beérkezéskor nincs más várakozó igény a sorban. A várakozási idő most a (o,1) szakaszon oszlik el, sürüségfüggvénye /13/ alapján

$$w_1(y) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \mu_1} e^{-\lambda(1-y)} \left(\frac{r_1}{1-r_1} + 1\right), \qquad (0 < y \leq 1)$$

Számitsuk ki most μ_1-gyet. Megjegyezzük előbb, hogy a félreértések elkerülése végett a $\pi_{k,r}$ valószinüségeket is célszerü $\pi^{(n)}_{k,r}$-nel jelölni, utalva a felső zárójeles indexszel arra, hogy ezek a mennyiségek olyan rendszerre vonatkoznak, amelyben a sorkapacitás "n". Bármely "n" mellett a $\delta^{(n)}_i$ foglaltsági periódus hosszának eloszlása a $\pi^{(n)}_{k,o}$ valószinüségekkel a következő kapcsolatban áll:

$$P\{\delta_i^{(n)} = k+1\} = \pi^{(n)}_{k,0}\, p_0, \qquad (k \geq 0)$$

E megjegyzésünkből világos, hogy a /9/ egyenletrendszer megoldásával egyuttal meghatároztuk a foglaltsági periódus hosszának eloszlását is.

A tekintendő n=1 esetben

$$P\{\delta_i^{(1)} = k+1\} = \pi^{(1)}_{k,0}\, p_0 = r_1^k p_0 = (1-p_0)^k p_0$$

azaz $\delta_i^{(1)}$ eloszlása p_0-paraméterü geometriai eloszlás. Mivel $p_0 = e^{-\lambda}$, kapjuk, hogy

$$\mu_1 = M\delta_i^{(1)} = e^{\lambda}$$

A /3/ ergodikus eloszlásfüggvény ennek megfelelően,

$$W_1(y)=\frac{\lambda}{1+\lambda e^{\lambda}}+\frac{\lambda e^{\lambda}}{1+\lambda e^{\lambda}}\int_0^y e^{-\lambda(1-t)}dt=\frac{\lambda-1}{1+\lambda e^{\lambda}}+\frac{e^{\lambda y}}{1+\lambda e^{\lambda}}$$

Első pillanatra ellentmondásnak látszik, hogy $W_1(1)<1$. Ennek azonban az az oka, hogy az $\{\eta^{(n)}(t)\leq x\}$ esemény csak az esetben értelmezhető, ha a t pillanatban beérkező igény nem vész el. Ha a /3/ alatt értelmezett $W_n(x)$ függvényt elosztjuk annak a valószinüségével, hogy egy beérkező igény nem vész el, akkor már valódi eloszlásfüggvényhez jutunk. E megjegyzés alapján láthatjuk, hogy eredményünk felhasználható a vesztési valószinüség meghatározására is. Nyilvánvaló, hogy a vesztési valószinüséget az /5/ alatt levezetett $P_{n+1}^{(n)}$ mennyiség adja, melyet most már felirhatunk

$$P_{n+1}^{(n)}=1-W_n(n)$$

alakban is. Sőt a $P_k^{(n)}$, $(o\leq k\leq n)$ valószinüségeket is megadhatjuk a $W_n(x)$ függvény segitségével. Ugyanis az $\{l<\eta^{(n)}(t)\leq l+1\}$ esemény ekvivalens a $\{\xi^{(n)}(t)=l\}$ eseménnyel s ebből kifolyólag

$$P_l^{(n)}=W_n(l+1)-W_n(l),\quad (l=o,\dots,n-1).$$

A tekintett $n=1$ esetben

$$P_2^{(1)}=1-W_1(1)=1-\frac{e^{\lambda}+\lambda-1}{1+\lambda e^{\lambda}}.$$

Innen leolvasható, hogy nagy λ -kra a vesztési valószinüség igen jól becsülhető $1 - \frac{1}{\lambda}$ -val. Megjegyezzük, hogy ez az aszimptotika bármilyen "n" sorkapacitás és tetszőleges eloszlásu véletlen időtartamu kiszolgálások esetén is érvényes (ld. [1] (6.8) formuláját).

Térjünk most át az n=2 eset vizsgálatára. Határozzuk meg először a $\Pi_0(z)$ és a $\Pi_1(z)$ generátorfüggvényeket. A /9/ egyenletrendszer alapján

$$(1-p_1 z)\Pi_0(z) - z p_0 \Pi_1(z) = z p_1$$

$$-r_2 z \Pi_0(z) + (1 - z r_1)\Pi_1(z) = z r_2$$

Innen

$$\Pi_0(z) = \frac{\begin{vmatrix} zp_1 & -zp_0 \\ zr_2 & 1-zr_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-p_1 z & -zp_0 \\ -r_2 z & 1-zr_1 \end{vmatrix}} = \frac{zp_1(1-zp_1) + z^2 p_0 r_2}{(1-p_1 z)(1-r_1 z) - z^2 p_0 r_2}$$

$$\Pi_1(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1-p_1 z & zp_1 \\ -r_2 z & zr_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-p_1 z & -zp_0 \\ -r_2 z & 1-zr_1 \end{vmatrix}} = \frac{(1-p_1 z) r_2 z + z^2 p_1 r_2}{(1-p_1 z)(1-r_1 z) - z^2 p_0 r_2} .$$

Számunkra elegendő csupán a $\Pi_r^* = \delta_{or} + \Pi_r(1)$ mennyiségek ismerete. Esetünkben

$$\pi_0^* = 1 + \frac{p_1(1-p_1) + p_0 r_2}{(1-p_1)(1-r_1) - p_0 r_2}$$

$$\pi_1^* = \frac{(1-p_1)r_2 + p_1 r_2}{(1-p_1)(1-r_1) - p_0 r_2}$$

Ezek felhasználásával a $w_2(x)$ sürüségfüggvény /13/ alapján könnyen felirható. /14/-ből a várakozási idő átlagértéke

/16/ $$\omega = \pi_0^* I_0 + \pi_0^*(1+I_1) + \pi_1^*(1+I_0)$$

ahol I_0, I_1 a /15/ szerint értelmezett mennyiségek. Szemléletesen világos, hogy ha λ igen nagy, akkor ω értékének közel 2-nek kell lennie. Ugyanis ez esetben, ha egy beszélgetés befejeződik, akkor a megüresedett várakozási helyre nagy valószinüséggel nyomban beérkezik egy igény s ez közelitőleg 2 egységnyi időt kénytelen várakozni. E tény /16/-ból könnyen be is látható, csupán azt kell észrevennünk, hogy

$$\lim_{\lambda\to\infty} (\pi_0^* - 1) = \lim_{\lambda\to\infty} \pi_0(1) = 0$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \pi_1^* = 1$$

és hogy

$$\lim_{\lambda \to \infty} I_j = 0 \,, \qquad (j=0,1)$$

Végül rá szeretnénk mutatni azokra a problémákra, amelyek a vázolt eljárásunknak tetszőleges eloszlásu véletlen időtartamu kiszolgálások esetére történő alkalmazásával kapcsolatosak. Döntő szerepet játszik az a tény, hogy mig konstans idejü kiszolgálások esetén, ha ismeretes, hogy már k kiszolgálás történt egy folyamatban lévő foglaltsági periódus során, akkor egyuttal ismeretes ezen k számu kiszolgálás összideje is, addig véletlen időtartamu kiszolgálások esetén ez már nincs igy. Kézenfekvőnek látszik ezért a $\pi_{k,l}$ valószinüségekhez hasonló jelentésü $\pi_{k,l}(u)du$ valószinüségek bevezetése, megkövetelve, hogy a lefolyt k-számu kiszolgálás összideje u és $u+du$ közé essen. Ha a kiszolgálási időtartam eloszlása sima s f(t) jelöli a sürüségfüggvényét, akkor a $\pi_{k,l}(u)$ függvényekre levezethetők az alábbi relációk:

$$\pi_{1,l}(u) = \begin{cases} p_{l+1}(u)\, f(u)\,, & \text{ha} \quad 0 \leq l < n-1 \\ r_n(u)\, f(u)\,, & \text{ha} \quad l = n-1 \end{cases}$$

$$\pi_{k,l}(u) = \begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{l+1} \int\limits_0^u \pi_{k-1,s}(u-t)\, p_{l-s+1}(t)\, f(t)\, dt\,, & \text{ha} \quad 0 \leq l < n-1 \\ \sum\limits_{s=0}^{n-1} \int\limits_0^u \pi_{k-1,s}(u-t)\, r_{n-s}(t)\, f(t)\, dt & \text{ha} \quad l = n-1 \end{cases}$$

ahol

$$p_l(u) = e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^l}{l!}, \qquad (l \geq 0)$$

$$r_k(u) = \sum_{l=k}^{\infty} p_l(u) \qquad (k \geq 0)$$

Egyenleteink áttekinthetőbbé válnak a

$$\bar{\Pi}_{k,l}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\Pi_{k,l}(t)\,dt, \qquad \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

Laplace-transzformáltak terminológiájában. (Megjegyezzük, hogy a $p_l(t)f(t)$ és az $r_k(t)f(t)$ függvények Laplace-transzformáltjai kifejezhetők az $\bar{f}(s)$ deriváltjai segitségével). Most a

$$\bar{\Pi}_l(s,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\Pi}_{k,l}(s) z^k, \qquad (0 \leq l \leq n-1)$$

generátorfüggvényekre kapunk /9/-hez hasonló egyenletrendszert. További meggondolások arra engednek következtetni, hogy a közölt eljárás lépéseinek alkalmas módositásai segitségével levezethető egy formula a /3/ ergodikus eloszlás sürüségfüggvényére, amely tartalmazni fogja most a $\Pi_{k,l}(u)$ függvényeken kivül az $f(t)$ függvény $f(t)^{*(k)} = f(t)*\ldots*f(t)$, $(k > 0)$ iteráltjait is. A formula nagyon bonyolult, s alkalmazási lehetősége a gyakorlatban igen csekély. Ezért is látszik a 2. tétel, mely a /3/ függvény közelitésével kapcsolatos, igen hasznosnak.

Megemlitjük még, hogy véletlen időtartamu kiszolgálások esetén a foglaltsági periódus hosszának eloszlása $G_n(x)$ folytonos eloszlás s a $\Pi_{k,l}(u)$ függvényekkel a következő kapcsolatban áll:

$$P\{\delta_i^{(n)} < t\} = \iint\limits_{\substack{0\le u+v<t \\ 0\le u \\ 0\le v}} \Pi_{k,0}(u)\, p_0(v)\, du\, dv$$

Tehát a $\Pi_{k,l}(u)$ függvények meghatározásával a $G_n(t)$ eloszlásfüggvény is ismertté válik. Azonban a $G_n(t)$ függvény ezen uton történő tanulmányozása igen körülményesnek látszik s véleményünk szerint előnyösebb e célból a [2] dolgozat módszereit követni. Emellett szól még az is, hogy e módszerek alkalmazhatók nem sima eloszlásu kiszolgálási időtartamok esetén is.

Irodalom:

[1] Keilson F.: The ergodic queue length distribution for queneing systems with finite capacity. Journal of the Royal Statist. Society ser B, vol.28., No. 1. /1966/ pp. 190-201.

[2] Tomkó J.: Odna predelnaja teorema v zadacse obszluzsivanyija pri nyeogranyicsno vozrosztajusej intenszivnosztyi vhodjaseho patoka. Studia Scientiarum Math. Hung., Tomus II., 3-4. /1967/.

[3] Smith W.L.: Renewal theory and its ramifications. Journal of the Royal Statist. Society ser. B., vol. 20. No.2. /1958/.

Summary

An MI/G/1 service system is considered under the assumption that the capacity of queue is finite. More detailedly this assumption means that a customer will get lost if in the instant of its arrival the queue size is equal to "n" (here n denotes the capacity of queue).

Let us denote by $\delta^{(n)}$ the length of the busy period, $\eta^{(n)}(t)$ the virtual waiting time at the instant t. It is proved by the author in an another paper that for every $n \geq 1$

$$\lim_{\lambda \to \infty} P\left\{ \frac{\delta^{(n)}}{\mu_n} < t \right\} = 1 - e^{-t}$$

where $\mu_n = E(\delta^{(n)})$, λ is the parameter of arrival process. It is derived by the author also that for any $\lambda > 1$, in the stationary case

$$(*) \qquad \lim_{n \to \infty} P\left\{ \frac{\eta^{(n)}(t) - n}{\sigma \sqrt{n}} \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

povided that the variance of the service time is equal to σ ($0 < \sigma < \infty$). The average service time is supposed to be finite and is taken for 1.

This paper deals with investigation of the ergodic distribution of the virtual time

$$W_n(x) = \lim_{t \to \infty} P\left\{ \eta^{(n)}(t) \leq x \right\}$$

in the case of the constant (=1) service time (when the statement (*) is not trne). The author points out that the ergodic distribution of the queue size can be determined by the last distribution.

A gluskovi mikroprogram-rendszer módositásáról

Gyuris László

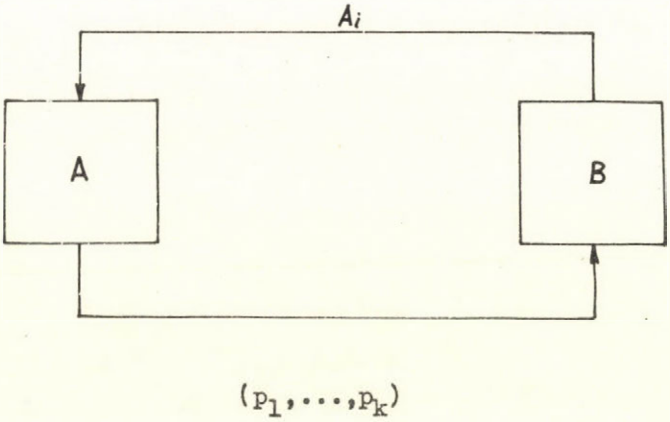
V.M.Gluskov - az automaták blokkszintézise elméletével [4] foglalkozó ismert munkáiban (pl. [1], [2])-ben egy elektronikus számológépet két automata kompoziciójával állit elő.

Alábbiakban az igy felépülő rendszer olyan módositásának lehetőségét vázoljuk, amely bizonyos értelemben lehetővé teszi, hogy ebben az elméletben mélyebben analizáljuk a számológépek logikai vezérlésével kapcsolatos problémákat.

A gluskovi rendszer alábbi módositása felhasználható a mikroprogram-algebrák [1] és az algoritmusok logikai sémái [3] (továbbiakban ALS-ok) között bizonyos kapcsolatok (pl. [2],[5]) értelmezésére, valamint ujabb ilyen kapcsolatok kimutatására is.

§ 1.

Egy számológépet - [1] értelmében - a következő automatakompozicióval állitjuk elő. Legyen A (véges vagy végtelen) Moore-automata és B véges iniciális Mealy-automata; az A-t operációs; a B-t vezérlő automatának nevezzük. Legyen (A,B) e két automatának az 1. ábrán látható kompoziciója:



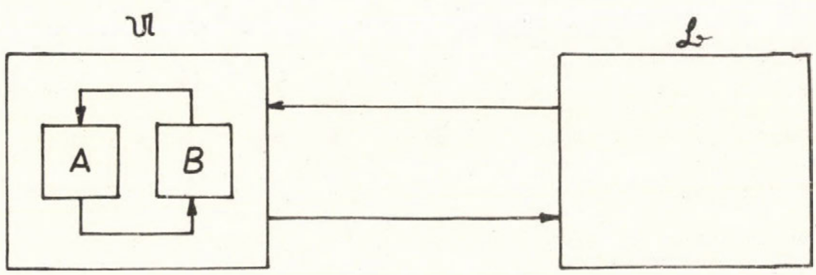
1. ábra

Az A bemenőábécéje egybeesik a B kimenőábécéjével ($A_1,\dots,A_n$ mikroutasitások), az A kimenőábécéje pedig a B bemenőábécéjével ($p_1,\dots,p_k$ logikai feltételek értékei). Az A_i ($i=1,\dots,n$) mikroutasitások az A automata M állapothalmazának önmagába való leképezését jelentik, a p_j ($j=1,\dots,k$) logikai feltételek ezen M halmazon vannak értelmezve.

Az (A,B)-n kivülről jövő információ a B-t beállitja valamely b_o iniciális állapotba, ez meghatározza azt a mikroutasitássorozatot (mikroprogramot), amelyet B az A-nak ad. Az egyes mikrooperációk elvégzésének eredményeként az A egy 0-kból és 1-esekből álló sorozatot (a logikai feltételek aktuális értékeit) bocsát ki a B automata részére. E sorozat adja meg az adott mikroprogram következő végrehajtandó mikroutasitását (azaz a mikroprogramon belüli átmeneteket). A - végrehajtás sorrendjében - legutolsó mikrooperáció elvégzése után a B "beáll" valamely terminális állapotba, ezzel a ciklus befejeződik.

A fenti (A,B) kibővitését az teszi szükségessé, hogy ez a rendszer ebben a formában eltekint a számológép vezérlésének lényeges részétől. (Hiszen feltételezzük, hogy automatikusan <u>kivülről</u> érkezik a B-t a kellő pillanatban b_o-ba "beállitó" információ). Ezért célszerünek látszik a számológépet olyan automatakompozició alakjában előállitani, ahol a B automata ezen "beállitásához" szükséges információ a <u>rendszeren belül</u> keletkezik a memóriában elhelyezett program felhasználásával.

Továbbiakban a fenti (A,B)-t egyetlen automatának tekintjük, és $\mathfrak{A}$ -val jelöljük. Bemenőjelei $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_m$ operátorok, kimenőjelei $P_1,\ldots,P_\ell$ logikai feltételek értékei. Az $\mathfrak{A}_i$ $(i=1,\ldots,m)$ operátorok végrehajtása az $\mathfrak{A}$ automata $(M \subset)\mathfrak{M}$ állapothalmazának önmagába való leképezését jelenti, a P_j $(j=1,\ldots,\ell)$ logikai feltételek az $\mathfrak{M}$ -en vannak értelmezve. Legyen $\mathfrak{B}$ véges iniciális Mealy-v. Moore-automata, amelynek bemenőjelei a $P_1,\ldots,P_\ell$ logikai feltételek értékei, kimenőjelei az $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_m$ operátorok. Tekintsük a következő automatakompoziciót (2. ábra):



2. ábra

Természetesen az ($\mathfrak{A},\mathfrak{B}$)-rendszernek még vannak másféle kapcsolatai a "külvilággal" is.

Mint fentebb leirtuk, az (A,B)-rendszer kibővitését az indokolja, hogy eredeti alakjában csak mikroprogramok végrehajtását értelmezi. Ha viszont változtatás nélkül alkalmazzuk programok végrehajtásának értelmezésére (azaz A bemenőjelei operátorok v. utasitások és nem mikroutasitások), akkor a mikroprogramvezérlésnek a rendszerben való leirásából kellene eltekintenünk, A számológépeknek az ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$)-kompozició alakjában való ilyen előállitását a két probléma együttes tárgyalása indokolja.

Algoritmusok logikai sémáin (ALS-ok) - [3] alapján - olyan véges sorozatokat értünk, amelyek operátorokból ($\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$), logikai feltételekből ($P_1 \llcorner_{i_1}, \ldots, P_s \llcorner_{i_s}$) és jobb-félzárójelekből ($\lrcorner_{i_1}, \ldots \ldots, \lrcorner_{i_s}$) állnak olymódon, hogy a logikai feltételek és a jobb-félzárójelek között egy-egyértelmü megfeleltetés áll fenn. Továbbiakban a számológépi programokat ALS-ok alakjában adottaknak tekintjük.

Tegyük fel, hogy valamely ALS-ot az ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$)-rendszernek végre kell hajtania.1/ - A [3] ALS "végrehajtási" eljárásától2/ eltérően a végrehajtásba beleértjük az azon "végrehajtási" eljárás eredményeként kapott operátorsorozatnak (mint utasitássorozatnak) a konkrét végrehajtását is. - Ekkor $\mathfrak{B}$ - a [3] értelmében - "végrehajtja" az ALS-t, ennek eredményeként kapott operátorsorozat elemeit kiadja az $\mathfrak{A}$ -nak. Minden operátor "beállitja" a B automatát a megfelelő b_0 iniciális állapotba, és igy az (A,B)-rendszer végrehajtja az ennek megfelelő mikroprogramot [1]. E ciklus végén (amikor B terminális állapotba kerül) az $\mathfrak{A}$ kimenőjeleként a $P_1, \ldots, P_s$ logikai feltételek megfe-

---

1/ Természetesen feltételezzük, hogy az ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$), operátorai között az ALS operátorai, az ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$) logikai feltételei között az ALS logikai feltételeinek baloldalán szereplő logikai függvények előfordulnak.

2/ Ebben az esetben a "végrehajtás" szót idézőjelbe tesszük.

lelő értékét kapja a $\mathcal{L}$, amelyet az ALS "végrehajtásában" a következő operátor kiválasztásához (és $\mathfrak{U}$ -ba való átadásához) használ fel. Az ALS "végrehajtásának" utolsó lépésében (ha van ilyen) kapott operátor $\mathfrak{U}$ -ban történő tényleges végrehajtásával a "program futása" befejeződik.

§ 2.

Az [1] formális matematikai apparátusa közvetlenül alkalmazható az ($\mathfrak{U}, \mathcal{L}$)-rendszer esetében. Bázishalmaznak az $\mathfrak{M}$ halmazt tekintjük, az operátorok és a logikai feltételek halmazán a szorzás, konjunkció, diszjunkció, negáció, operátor és logikai feltétel szorzása, α - diszjunkció és α -iteráció megfelelő értelmezésével felépülő algebrákat programalgebráknak és feltételek algebráinak nevezzük.

<u>Reguláris programokon</u> értjük az operátorokból (utasításokból) a szorzás, α - diszjunkció és α - iteráció véges számu alkalmazásával kapott kifejezéseket. Érvényes az [1] tételének megfelelő állítása: bármely program reguláris alakra hozható.

Az [1], [2] eredmények ilyen interpretációja a számológépi programok egy uj nyelvét eredményezi, a reguláris programok nyelvét. A reguláris programok nyelve ill. a reguláris programok elmélete az automaták elméletével (pl. a reguláris kifejezések nyelvével, stb.) és a programozás elméletével (pl. az ALS-ok elméletével [2], [5]) való különleges kapcsolata miatt alapvető szerepet játszhat ezen elméletek szintézisében is.

Irodalom:

[1] V.M.Gluskov: Tyeorija avtomatov i formalnüje preobrazovanyija mikroprogramm, zsurn. "Kibernetika", N.5,K., 1965. 1-9.

[2] V.M.Gluskov; K voproszu o minimizácii mikroprogramm i szhem algoritmov, zsurn. "Kibernetika", N.5,K., 1966. 1-3.

[3] Ju.I.Janov: O logicseszkih szhemah algoritmov, szb. "Problemü kibernetiki", N.1,M., 1958. 75-127.

[4] V.M.Gluskov: Szintyez cifrovüh avtomatov, M., Fizmatgiz, 1962.

[5] L.Gyuris: On the connection of Glushkovian microprogram-algebras and logical schemes of the algorithms, Proceedings of the "International Colloquium on Recursive Functions and Their Applications. Tihany, 1967" (Megjelenés alatt).

S u m m a r y

On the modification of the Glushkovian microprogram-system

L.Gyuris

V.M.Glushkov constructs in his works dealing with the theory of the block synthesis of automata [1,2] an electronic computer as a composition of two automata.

In the present paper such possibility of an extension of a so constructed system is described which enables us to analyze the problems connected with the presentation of the logical control of - more deeply from the given point of view in this theory - and to introduce the language of the regular programs. This extension of the Glushkovian system can be used to the interpretation of certain connections [2,5] between the microprogram-algebras and logical schemes of algorithms, and to the demonstration of newer such connestions too.

Fél-Markov folyamatok vezérlése

Gergely József

Az alábbi cikk a Markov láncok általánositásaként felfogható fél-Markov folyamatok vezérlésének egyes kérdéseivel foglalkozik. Az általánositás abban nyilvánul meg, hogy mig a Markov lánc átmenetei közt eltelt időt egységnyinek tekinthettük, addig a fél-Markov folyamatoknál ez valószinüségi változó lesz.

A fél-Markov folyamatok vezérlésével több cikk foglalkozik, amelyek közül itt csak a [2],[4] és [5]-öt emlitjük meg. Ezek többnyire a Howard [1]-ben tárgyalt módszereit alkalmazva általánositják az [1] eredményeit fél-Markov folyamatokra.

Jelen cikkben nem törekszünk a felvetett probléma átfogó vizsgálatára. A fél-Markov folyamat és az optimális vezérlés értelmezése után feltételezzük a stacionáris optimális vezérlés létezését, majd a Howard módszerétől független eljárást adunk az optimális stratégia megkeresésére. Azonban az iterációs eljárásunk konvergenciájával nem foglalkozunk. A VII. pontban vázlatosan ismertetjük azokat a meggondolásokat, melyek kiindulásul szolgálnak más optimalizáló algoritmusoknak.

Az itt felvetett problémák további vizsgálatára későbbi cikkeinkben visszatérünk.

I. Fél-Markov folyamat

A sztochasztikus folyamatok segitségével leirható feladatok gyakran vezetnek fél-Markov folyamatok vizsgálatához. A [2], [3], [6] és [7]-ben tárgyaltaknak megfelelően egy rendszerben lejátszódó fél-Markov folyamatot a következőképpen értelmezzük.

Tegyük fel, hogy a rendszer egymás utáni állapotai Markov láncot alkotnak és jelöljük ezeket rendre $e^{*}(1)$, $e^{*}(2), \ldots$ -vel. $e^{*}(m) \in E$, $m \geq 1$, ahol E az állapottér. Menjen át a rendszer valamelyik $e^{*}(m)=i$ állapotából a következő $e^{*}(m+1)=j$ állapotába p_{ij} valószinüséggel és legyen $P = \{p_{ij}\}$ az átmenetvalószinüség mátrixa, azaz teljesüljön

$$0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad \sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \ . \qquad /1.1/$$

Legyen az $i \rightarrow j$ egy lépéses átmenet ideje τ_{ij} valószinüségi változó, melyet az

$$F_{ij}(x) = P\,(\tau_{ij} \leq x), \qquad x \geq o;\ i,j \in E \qquad /1.2/$$

eloszlásfüggvény határoz meg. Jelölje a rendszer állapotát tetszőlegesen t időben $e(t)$, $e(t) \in E$. $e(t)$ fél-Markov folyamat.

A rendszerben lejátszódó $e(t)$ sztochasztikus folyamat általában nem lesz Markov folyamat, csak abban a speciális esetben, amikor a τ_{ij} átmeneti idők exponenciális eloszlásuak. Ekkor ugyanis tetszőleges $t^{(1)}$ időpillanatban ismerve a rendszer $e(t^{(1)}) = i$ állapotát, az ezen állapotban már eltöltött időtől függetlenül megadható tetszőleges $t^{(2)} > t^{(1)}$ időpontban az $e(t^{(2)}) = j$ esemény valószinüsége.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy az $e^{*}(1)$, $e^{*}(2)$,... Markov lánc nem periódikus, ergódikus, $e(t)$ stacionáris fél-Markov folyamat és léteznek az

$$a_{ij} = M\left[\tau_{ij} \right] = \int_{0}^{\infty} x \, d\, F_{ij}(x) \qquad /1.3/$$

várható értékek, melyekre $0 < a_{ij} < \infty$.

II. Optimális vezérlés

A továbbiakban sztochasztikus folyamatot megvalósító olyan rendszerekkel foglalkozunk, melyek müködése ugy módositható, azaz bizonyos paraméterei időben ugy változtathatók, hogy ez befolyásolja a rendszer munkáját és igy a rendszerben lejátszódó sztochasztikus folyamatot is. Nevezzük a rendszeren ily módon végrehajtott változtatásokat a rendszer vezérlésének.

Az egyszerüség kedvéért feltesszük, hogy csak olyan időpillanatokban vezéreljük a rendszert, amikor az egyik állapotából egy másik állapotába megy át. Pontosabban az állapotok befejeződési pillanatában döntünk a rendszer jellemzőinek valamilyen megváltoztatásáról.

Legyenek a rendszer i állapotában a rendszer lehetséges vezérlései K_i, $K_i \subset K$. Minden $k \in K_i$ vezérléshez tartozzon egy $P^{(k)} = \{p_{ij}^{(k)}\}$ átmenet mátrix (minden k mellett teljesül /1.1/) és (/1.2/-nek megfelelő) $F_{ij}^{(k)}(x)$ eloszlásfüggvény rendszer.

Bevezetjük még a rendszer munkájának jellemzésére a veszteség mátrixot. Feltesszük, hogy a rendszer munkájával kapcsolatos költségek, veszteségek az átmenetekre vonatkozóan adhatók meg a következőképpen. Tartozzon az $i \to j$ átmenethez a k vezérlés esetén $c_{ij}^{(k)}$ költség. Legyen $c_{ij}^{(k)}$ valószinüségi változó és várható értéke $v_{ij}^{(k)} = M[c_{ij}^{(k)}]$.

Vizsgáljuk meg ezek után a rendszerünk müködését. Kiindulva egy t_o átmeneti időpontból legyen $e(t_o) = i_o$; a rendszer vezérlése pedig $k_o = k(i_o)$. A $p_{i_o i_1}$ valószinüség szerint kiválasztódik a következő i_1 állapot és az $i_o \to i_1$ átmenet az $F_{i_o i_1}^{(k_o)}(x)$ eloszlásfüggvénynek megfelelően a t_1 időpillanatban végrehajtódik. Jelöljük a következő, i_1-től függő vezérlést $k_1 = k(i_1)$-el. Ekkor az előbbiekhez hasonlóan végbemegy az $i_1 \to i_2$ átmenet és igy tovább. Az n-edik lépés után kapjuk a $k_o, k_1, \ldots, k_n$ vezérlések mellett kialakuló állapotok $i_o, i_1, \ldots, i_n$ sorrendjét. A vezérlések $k_o, k_1, \ldots, k_n$ sorrendjét stratégiának nevezzük és $d(o,n) = (k_o, k_1, \ldots, k_n)$-el, az n lépéses megengedett stratégiák összességét pedig $D(o,n)$-el jelöljük. Tegyük fel, hogy tetszőleges $d \in D(o,n)$ stratégia esetén minden $m > n$-re létezik olyan $d^* \in D(o,m)$ stratégia, hogy d megegyezik d^* első n komponensével. Az átmenetek fenti n lépése $T_n = t_n - t_o = \tau_{i_o i_1} + \tau_{i_1 i_2} + \dots + \tau_{i_{n-1} i_n}$ idő alatt zajlott le és ez idő alatt a rendszer munkája $C_n = c_{i_o i_1} + c_{i_1 i_2} + \dots \dots + c_{i_{n-1} i_n}$ veszteséggel járt. A rendszer T_n-re eső munkáját jellemezzük a

$$\varrho[d(o,n)] = \frac{M[C_n]}{M[T_n]} \qquad /2.1/$$

hányadossal, ami az időegységre jutó veszteséget fejezi ki. A rendszer munkája annál hatékonyabb, minél kisebb a $\lim_{n\to\infty} \inf_{d(o,n)\in D(o,n)} \varrho[d(o,n)]$ határérték. Tekintsük az összes megengedett $d(o,n) \in D(o,n)$ stratégiát. Ezek után az optimális vezérlés azon d stratégia megkeresését jelenti, amely mellett a $\varrho[d(o,n)]$ határértéke a lehető legkisebb lesz. Ha létezik optimális $\bar{d}$ stratégia, akkor erre teljesül:

$$\varrho[\bar{d}] \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{d(o,n)\in D(o,n)} \varrho[d(o,n)]$$

A továbbiakban az optimális vezérlés létezésének bizonyitásával nem foglalkozunk. Ez bizonyos feltevések mellett megtalálható a [2], [4] és [5] cikkekben.

A [4] cikkben az optimális vezérlés létezésének bizonyitása mellett annak stacionaritása is igazolva van. Mi is feltesszük a továbbiakban, hogy létezik stacionáris optimális vezérlés és annak meghatározásával foglalkozunk. A továbbiakban csak olyan stratégiákat engedünk meg, amelyekben a vezérlések csak a rendszer pillanatnyi állapotától függnek. Vizsgálatainkban feltesszük, hogy az E állapottér és a D vezérlések tere véges.

III. Ciklusok vizsgálata

Rögzitsünk egy megengedett $d_o \in D$ stratégiát és vizsgáljuk valamilyen alkalmasan választott átmeneti t_o időponttól a rendszerünkben lejátszódó sztochasztikus folyamatot.

Jegyezzük fel az $e(t_o) = i_o$ állapotot. Figyeljük meg azt a t_m időpillanatot, amikor először ujra megjelenik az i_o állapot. A sztochasztikus folyamat $t_m - t_o$ időszakaszra eső részét ciklusnak nevezzük. A ciklus hossza $t_m - t_o = T_m$; a ciklus átmeneteinek száma m és a rendszer ciklusra eső vesztesége C_m. Kiindulási i_o állapotnak folyamatunk egy lényeges állapotát válasszuk, vagyis melyre

$$M[m] < \infty \;, \quad M[T_m] < \infty \;.$$

Ezen egyenlőtlenségek és a rendszert jellemző Markov láncra tett ergódicitási feltételek mellett a rendszerben lejátszódó sztochasztikus folyamat valamely állapotból kiinduló ciklusok ismétléséből áll. Ezért az előző pontban az $n \to \infty$ esetén vett határértékek helyettesithetők a ciklusok számának növekedésére vonatkozó megfelelő határértékekkel.

Jelöljük $r_{ij}^{(n)}$ -nel annak valószinüségét, hogy az i állapotból kiindulva az n-ik lépésben j-be jutunk ugy, hogy közben egyszer sem érintjük az i állapotot. Akkor $r_{ii}^{(n)}$ lesz annak valószinüsége, hogy az i állapot először az n-ik lépésben ismétlődik, vagyis, hogy a ciklus lépéseinek a száma n. Jelöljék továbbá a $P = \{p_{ij}\}$ és $\{r_{ij}^{(n)}\}$ mátrixok i-ik sorvektorait $\underline{p}_i$ és $\underline{r}_i^{(n)}$. Legyen Q_i olyan mátrix, amelynek sorai megegyeznek P soraival, kivéve az i-ediket, mely minden eleme o. Fennáll a következő összefüggés

$$\underline{r}_i^{(1)} = \underline{p}_i$$

$$\underline{r}_i^{(n+1)} = \underline{r}_i^{(n)} P - r_{ii}^{(n)} \underline{p}_i = \underline{r}_i^{(n)} Q_i \quad , \quad n \geq 1 \qquad (3.1)$$

vagyis /3.1/ felhasználásával irható:

$$\underline{r}_i^{(n+1)} = \underline{p}_i Q_i^n \qquad /3.2/$$

A továbbiakban szükségünk lesz az

$$\underline{r}_i^{(1)} + \underline{r}_i^{(2)} + \ldots + \underline{r}_i^{(n+1)} = \underline{p}_i [I + Q_i + Q_i^2 + \ldots + Q_i^n] \qquad /3.3/$$

összegre és annak $n \to \infty$ esetén vett határértékére. Ezért bebizonyitjuk a /3.3/ jobboldalán a határmenetnél fellépő mátrixsor konvergenciáját.

A bizonyitásban, majd azt követően többször használjuk valamely mátrix vagy sorvektor sorösszegét. Jelöljük $\underline{e}$-vel azt az oszlopvektort, melynek minden eleme 1, ekkor valamely A mátrix sorösszegeiből alkotott oszlopvektor $A\,\underline{e}$ lesz, mig az $\underline{a}$ sorvektor sorösszege $\underline{a}\underline{e}$.

Tétel. Az

$$I + Q_i + Q_i^2 + \dots \qquad /3.4/$$

mátrixsor konvergens és

$$I + Q_i + Q_i^2 + \dots = (I-Q_i)^{-1} \qquad /3.5/$$

Bizonyitás. Minthogy a Q_i i-edik sorának elemei o-ak, tetszőleges $n \geq 1$-re a Q_i^n hatvány mátrixok i-edik sora is o elemekből áll. Ezért a hatványozásnál az i-edik sor alakulásával nem törődünk. Legyen

$$R_i = P - Q_i$$

Képezzük a Q_i mátrix hatványait:

$$Q_i^2 = (P-R_i)(P-R_i) = P^2 - PR_i - S_i^{(2)} \qquad /3.6/$$

ahol $S_i^{(2)} = R_i\,(P-R_i)$ mátrixnak csak az i-edik sora különbözik o-tól. /3.6/ segitségével

$$Q_i^3 = (P-R_i)(P^2-PR_i-S_i^{(2)}) = P^3 - P^2R_i - PS_i^{(2)} - S_i^{(3)} \qquad /3.7/$$

Hasonló módon az n-ik lépés után

$$\begin{aligned} Q_i^n &= (P-R_i)(P^{n-1} - P^{n-2}R_i - \dots - PS_i^{(n-2)} - S_i^{(n-1)}) = \\ &= P^n - P^{n-1}R_i - P^{n-2}S_i^{(2)} - \dots - PS_i^{(n-1)} - S_i^{(n)} \end{aligned} \qquad /3.8/$$

ahol

$$S_i^{(n)} = R_i(P^{n-1} - P^{n-2}R_i - \dots - S_i^{(n-1)}) = R_iQ_i^{n-1}$$

mátrix elemei az i-edik sor kivételével o-ak, az i-edik sor elemei pedig nem negativak, tekintve, hogy R_i és Q_i^{n-1} elemei is ilyenek.

Feltevésünk szerint P egy ergódikus Markov lánc átmenet mátrixa, sztochasztikus mátrix, sorösszegei 1-et adnak, és ezért ilyen tulajdonságu a P^n is. Másrészt $n \to \infty$ esetén $P^n \to \Pi$, ahol Π a stacionáris valószinüségek mátrixa. Π minden eleme pozitiv, ezért elég nagy n_0 mellett a P^{n_0-1} hatvány minden egyes eleme is pozitiv lesz. Rögzitsük ezen feltételnek eleget tevő n_0-at és /3.8/-at rendezzük a következőképpen:

$$P^{n_0} - Q^{n_0} = P^{n_0-1} R_i + T_i \qquad /3.9/$$

ahol

$$T_i = P^{n_0-2} S_i^{(2)} + \dots + S_i^{(n)}$$

mátrix minden eleme nem negativ. Minthogy P^{n_0-1} elemei pozitivak és R_i i-edik sora tartalmaz pozitiv elemeket /tekintve, hogy összegük 1/, következik, hogy $(P^{n_0-1} R_i)\ \underline{e}$ minden eleme pozitiv. /3.9/ felhasználásával adódik, hogy

$$Q_i^{n_0}\ \underline{e} \text{ minden eleme } < 1 \qquad /3.10/$$

Jelöljük λ -val a Q_i legnagyobb abszolut értékü sajátértékét. A $Q_i^{n_0}$ mátrix legnagyobb abszolut értékü λ^{n_0} sajátértékére a mátrixszámolás ismert összefüggései alapján /3.10/ miatt fennáll:

$$|\lambda^{n_0}| < 1 \text{, azaz } |\lambda| < 1$$

vagyis a Q_i összes sajátértéke az egységsugaru kör belsejébe esik. Ez elégséges feltétele a /3.4/ sor konvergenciájának. /3.4/ konvergenciája esetén pedig teljesül /3.5/.

IV. Ciklus idő és az arra jutó veszteség meghatározása

Az /1.3/-al definiált a_{ij} várható értékek és az átmenet valószinüségek segitségével határozzuk meg a b_{ij} mennyiségeket a $b_{ij} = p_{ij}\, a_{ij}$ szorzattal. Az ezekből felépülő mátrix legyen $B = \{b_{ij}\}$. A B i-edik sorát $\underline{b}_i$-vel jelöljük. Jelentse B_i azt a mátrixot, amelynek i-edik sora o-okból áll, a többi eleme pedig megegyezik B elemeivel.

Tekintsünk egy i állapotból kiinduló ciklust. Annak valószinüsége, hogy legfeljebb n lépés után ismétlődik az i állapot

$$\sum_{k=1}^{n} r_{ii}^{(k)}, \qquad \Big(\sum_{k=1}^{\infty} r_{ii}^{(k)} = 1 \Big)$$

Jelöljük az n lépésre jutó átmenetek átlagos hosszát $\beta_i^{(n)}$-el, akkor a fenti jelölésekkel

$$\beta_i^{(1)} = r_{ii}^{(1)} a_{ii} = p_{ii}\, a_{ii} = b_{ii} \qquad /4.1/$$

$$\beta_i^{(2)} = \beta_i^{(1)} + \sum_{k \neq i} b_{ik} + \sum_{j \neq i} r_{ij}^{(1)} b_{ji} \qquad /4.2/$$

majd $n \geq 2$-re

$$\beta_i^{(n+1)} = \beta_i^{(n)} + \sum_{j \neq i} r_{ij}^{(n-1)} \sum_{k \neq i} b_{jk} + \sum_{j \neq i} r_{ij}^{(n)} b_{ji} \qquad /4.3/$$

A /4.1/, /4.2/ és /4.3/ rekurziós összefüggés felhasználásával

$$\beta_i^{(n+1)} = b_{ii} + \sum_{k\neq i} b_{jk} + \sum_{j\neq i} r_{ij}^{(1)} (b_{ji} + \sum_{k\neq i} b_{jk}) + \dots \quad \dots +$$

$$+ \sum_{j\neq i} r_{ij}^{(n-1)} (b_{ji} + \sum_{k\neq i} b_{jk}) + \sum_{j\neq i} r_{ij}^{(n)} b_{ji} =$$

$$= \sum_k b_{ik} + \sum_{j\neq i} (r_{ij}^{(1)} + r_{ij}^{(2)} + \dots + r_{ij}^{(n-1)})(\sum_k b_{jk}) + \sum_{j\neq i} r_{ij} b_{ji} \quad .$$

Vektor és mátrix jelölésekre áttérve majd /3.3/ felhasználásával

$$\beta_i^{(n+1)} = \underline{b}_i \underline{e} + (\underline{r}_i^{(1)} + \underline{r}_i^{(2)} + \dots + \underline{r}_i^{(n-1)})(B_i \underline{e}) + \sum_{j\neq i} r_{ij}^{(n)} b_{ji} =$$

$$= \underline{b}_i \underline{e} + \underline{p}_i (I + Q_i + \dots + Q_i^{n-2})(B_i \underline{e}) + \sum_{j\neq i} r_{ij}^{(n)} b_{ji} \qquad /4.4/$$

$n \to \infty$ esetén $r_{ij}^{(n)} \to$ o minden i és j-re és igy /4.4/ utolsó tagja

$$\sum_{j\neq i} r_{ij}^{(n)} b_{ji} \to 0 \, , \qquad ha \quad n \to \infty \qquad /4.5/$$

/4.5/ és /3.5/ felhasználásával kapjuk, hogy létezik a

$$\beta_i = \lim_{n\to\infty} \beta_i^{(n)} = \underline{b}_i \underline{e} + \underline{p}_i (I - Q_i)^{-1} (B_i \underline{e}) \qquad /4.6/$$

határérték, ami a ciklus hosszának várható értékét adja.

Teljesen hasonló meggondolásokkal kaphatjuk a ciklus időre jutó teljes veszteség várható értékét

$$\mu_i = \underline{u}_i \underline{e} + \underline{p}_i (I - Q_i)^{-1} (U_i \underline{e}) \ , \qquad /4.7/$$

ahol $u_{ij} = p_{ij} v_{ij}$, v_{ij} pedig az $i \rightarrow j$ átmenetre jutó veszteség várható értéke; $\underline{u}_i$ az $U = \{u_{ij}\}$ mátrix i-edik sora, mig U_i mátrix annyiban különbözik az U mátrixtól, hogy az i-edik sorába o-ák kerülnek.

A /2.1/ képletben szereplő mennyiségeknek itt a $\beta_i = M[T_n]$ és a $\mu_i = M[C_n]$ azonositások felelnek meg. Igy a rendszer hatékonyságát a /2.1/-nek megfelelő

$$\varrho_i [d_o] = \frac{\mu_i}{\beta_i} \qquad /4.8/$$

hányados jellemzi.

V. Az optimális stratégia megközelitése

A III. és IV. pontban kapott eredményeink egy, a III. pont elején rögzitett $d_o \in D$ stratégiára vonatkoztak. A d_o rögzitése azt jelenti, hogy a j állapotba jutva mindig ugyanazt a $k_j^{(o)} \in K_j$ vezérlést alkalmazzuk. A $k_j^{(o)}$ meghatározza a /4.6/ és /4.7/ képletekben szereplő $\underline{p}_j^{(k_j^{(o)})}$; $\underline{b}_j^{(k_j^{(o)})}$; $\underline{u}_j^{(k_j^{(o)})}$ sorvektorokat és a Q_i, B_i, U_i mátrixok j-edik sorait. Egy kiválasztott d_o vezérléshez /4.6/ és /4.7/ alapján meghatározott $\beta_i[d_o]$ és $\mu_i[d_o]$, majd /4.8/ alkalmazásával $\varrho_i[d_o]$ érték tartozik.

Az optimális vezérlést a következő iterációs eljárással közelitjük meg. Az i_o, i_1, i_2, ... állapotokhoz válasszuk ki a $k_o^{(o)}$, $k_1^{(o)}$, $k_2^{(o)}$, ... vezérléseket, amelyek a $d_o^{(o)}$ stratégiát alkotják. Fixálunk egy s_1 indexet és az i_{s_1} állapothoz tartozó minden lehetséges $k_{s_1} \in K_{s_1}$ vezérléshez kiszámitjuk a /4.6/, /4.7/ és /4.8/ alapján a $g_{s_1}[k_j = k_j^{(o)},\ j \neq s_1\ ;\ k_{s_1}]$ veszteségeket. Meghatározzuk közülük a legkisebbet. Legyen az ehhez tartozó k_{s_1} vezérlés $k_{s_1}^{(1)}$. Irjuk $k_{s_1}^{(1)}$-et $k_{s_1}^{(o)}$ helyébe, akkor az ily módon megváltoztatott $d_o^{(o)}$ -ból kapjuk $d_o^{(1)}$-et.

Kiválasztva most egy $s_2 \neq s_1$ indexet a $d_o^{(1)}$ stratégiában csak a $k_{s_2} \in K_{s_2}$ vezérlést változtatva minimalizáljuk a $g_{s_2}[k_j = k_j^{(o)};\ j \neq s_1, s_2\ ;\ k_{s_1}^{(1)}, k_{s_2}]$ veszteséget. A minimumhely meghatározza a $k_{s_2}^{(1)}$ vezérlést, majd ezzel helyettesitve a $k_{s_2}^{(o)}$ -at $d_o^{(1)}$-ből kapjuk a $d_o^{(2)}$ stratégiát.

Ezeket a lépéseket az összes s_1, s_2, s_3, ... indexválasztás mellett végrehajtva eljutunk a $d_1^{(o)}$ stratégiához. Ezután a $d_o^{(o)}$-at helyettesitve $d_1^{(o)}$-al, majd rendre $d_2^{(o)}$, $d_3^{(o)}$, ...-al az iterációs eljárást elölről ismételjük mindaddig, amig az egymás után kapott stratégiák meg nem egyeznek, vagy elég közel nem kerülnek.

A /4.6/ és /4.7/ képletek számolásánál lényeges, hogy rögzitett i állapotra vonatkozó ciklusban a Q_i, B_i és U_i mátrixok nem függnek az i állapothoz tartozó k_i vezérlésektől, ezért az

$$(I - Q_i)^{-1}(B_i \underline{e}) \quad \text{és} \quad (I - Q_i)^{-1}(U_i \underline{e}) \qquad /5.1/$$

szorzatokat, ami a számolás jelentős részét teszi ki, minden egyes ciklusra vonatkozóan csak egyszer kell számolni. A $k_i \in K_i$ változtatásánál csak a $\underline{b}_i^{(k_i)}$ és $\underline{u}_i^{(k_i)}$ sorösszegeit kell ujra számolni, illetve a $\underline{p}_i^{(k_i)}$ -vel szorozni a már kiszámolt /5.1/ vektorokat.

A számolás folyamán az $(I-Q_i)^{-1}$ inverz mátrixra valójában nincs szükség, csak annak /5.1/ szerinti $(B_i\ \underline{e})$ és $(U_i\ \underline{e})$ vektorokkal való szorzatára. Ezért az $(I-Q_i)^{-1}$ inverz kiszámolása helyett célszerübb az

$$(I-Q_i)\ \underline{x} = (B_i\ \underline{e}),\ (I-Q_i)\ \underline{y} = (U_i\ \underline{e}) \qquad /5.2/$$

egyenleteket megoldani. Ugyanis az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ megoldások éppen az /5.1/ oszlopvektorokat adják.

VI. A rendszer optimalizálása az ergódikus eloszlás ismeretében

Feltevéseink szerint $P = \{p_{ij}\}$ egy ergódikus Markov lánc átmenet mátrixa. Teljesül tehát a

$$P^n \to \Pi\ ,\ \text{ha}\ \ n \to \infty \qquad /6.1/$$

határátmenet, ahol Π mátrix $\underline{\Pi}$ sorai megegyeznek és a stacionáris eloszlást adják. Ha minden d stratégiánál ismerjük a $\underline{\Pi}(d)$ valószinüségi vektort a ciklus vizsgálat nélkül is eljuthatunk a rendszer hatékonyságát jellemző /2.1/ hányadoshoz. Az előző pontok jelöléseit használva a /2.1/-ben szereplő n lépéshez tartozó átmeneti idők $M[T_n]$ várható értékét az i állapotból kiindulva a következőképpen irhatjuk fel:

$$M[T_n] = \{B\underline{e} + P(B\underline{e}) + P^2(B\underline{e}) + \ldots + P^{n-1}(B\underline{e})\}_i$$

ahol $\{\ \}_i$-vel jelöltük a $\{\ \}$ zárójelben levő oszlopvektor i-edik komponensét. Az egy lépésre jutó átlagos átmeneti idő

$$\frac{1}{n} M[T_n] = \frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n} P^{k-1}(B\underline{e})\right\}_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \{\underline{\Pi}(B\underline{e})\}_i \qquad /6.2/$$

A /6.2/ jobboldalán álló oszlopvektor minden komponense egyenlő éspedig $\underline{\Pi}[d](B\underline{e})$, a d vezérlés esetén egy lépésre jutó átmeneti idő várható értéke.

Teljesen hasonló meggondolásokból a d vezérlés melletti egy átmenetre jutó átlagos veszteséget az

$$\frac{1}{n} M[C_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{\Pi}[d](U\underline{e}) \qquad /6.3/$$

határértékkel kapjuk. A rendszer hatékonyságát az időegységre jutó átlagos veszteséggel jellemezve /2.1/-ből adódik

$$\varrho[d] = \frac{\underline{\Pi}[d](U\underline{e})}{\underline{\Pi}[d](B\underline{e})} \qquad /6.4/$$

A /6.4/-ben explicite szerepel a $\underline{\Pi}$ stacionáris valószinüségi vektor, ami sokszor nehezen határozható meg. Azonban ismeretesek eljárások /6.4/ minimalizálására, amelyek nem használják a $\underline{\Pi}$ vektort. Ezekkel az eljárásokkal itt nem foglalkozunk.

Irodalom:

[1] Howard R.A.: Dynamic Programming and Markov Processes, New York, 1960.

[2] Jewell W.S.: Markov-Renewal Programming I., II. Operations Research, 11, No. 6. /1963/ 938-971. (Orosz fordításban: Kiberneticseszkij Szbornyik 4. 1967.)

[3] Pyke R.: Markov Renewal Processes I., II. Ann.Math.Stat. 32 /1961/ 1231-1259.

[4] Derman C.: Markovian Sequential Coutral Processes-Denumerable State Space, Journal of Math. Anal. and. Appl. 10. /1965/ 295-302.

[5] Cani J.S.: A Dynamic Programming Algorithm for Embedded Markov Chains when the Planning Horizon is at Infinity, Management Science vol 10. No.4. /1964/ 716-733.

[6] Gnyegyenko B.W. - Kovalenko J.N.: Vigyenyie v teoriju masszovava abszluzsivanija, Moszkva, 1966.

[7] Smith W.L.: Renewal Theory and Its Ramifications, J. Roy. Statist. Soc. Ser.B., v. 20. No.2. 243-302 /1958/. (Orosz fordításban: Matematika 5:3, 95-150, 1961.)

Summary

The paper discusses the problem of the control of semi-Markovian processes. We assume that the control takes place at the times of the changes of states of the system and that there exists an optimal stationary strategy. An iteration procedure is given in order to find out the optimal control. Our procedure is based upon the examination of cycles which repeat themselves in the semi-Markovian process.

Egy kiszolgáló rendszerrel kapcsolatos optimalizálási problémáról

Gergely József

I. Bevezetés

Az [1] és [2] cikkekben a következő sorbanállási modellt vizsgáltuk: egy kiszolgáló berendezéshez a_1 ill. a_2 paraméterü Poisson folyamat szerint A ill. B tipusu egységek érkeznek. A készülék egyszerre csak egy egységet szolgálhat ki. A kiszolgált egységek azonnal elhagyják a rendszert. Ha a készülék egy A tipusu után B tipusut szolgál ki, vagy forditva, szüksége van egy T_{12} ill. T_{21} átkapcsolási időre. A kiszolgálási idők T_1 és T_2, valamint az átkapcsolási idők T_{12} és T_{21} független valószinüségi változók, függetlenek a bemeneti áramtól és külön-külön azonos eloszlásuak, eloszlásfüggvényeik: $B_1(t)$, $B_2(t)$, $C_{12}(t)$ és $C_{21}(t)$, várható értékeik: β_1, β_2, γ_{12} és γ_{21}.

Ha egy A ill. B tipusu egység érkezésénél a készülék szabad és az utoljára kiszolgált egység is A ill. B tipusu volt, akkor azonnal megkezdődik a kiszolgálása, különben várakozik az A ill. B tipusu sorban a kiszolgálása megkezdéséig. Ha egy A ill. B tipusu egység kiszolgálása után maradt a rendszerben A ill. B tipusu várakozó, akkor azonnal megkezdődik az érkezési sorrendben következő A ill. B tipusu egység kiszolgálása, ha viszont A ill. B tipusu sorbanálló nincs, akkor csak abban az esetben kapcsol át B-re (ill. A-ra), ha a B (ill. A) sorban legalább n_2 (ill. n_1) várakozó van ($n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$).

Jellemezze a kiszolgáló rendszer egy kiszolgálás befejezése utáni állapotát az (i, k_1, k_2) szám hármas, ahol $i=1$ (ill. $i=2$), ha az utolsó befejezett kiszolgálás egy A (ill. B) tipusu egység kiszolgálása volt és a kiszolgálás befejezése után k_1 A és k_2 B tipusu egység maradt a rendszerben. Jelölje p_{i,k_1,k_2} annak valószinüségét, hogy az N-ik kiszolgálás befejezése után a rendszer állapota (i, k_1, k_2) volt.

Az [1] és [2] cikkekben bebizonyitottuk az $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 < 1$ feltétel mellett a Markov láncot alkotó (i, k_1, k_2) állapotok ergodicitását és összefüggéseket vezettünk le a $p_{i,k_1,k_2} = \lim_{N\to\infty} p_{i,k_1,k_2,N}$ valószinüségek $P_i(z_1,z_2)$ generátorfüggvényeire. Az [1] cikkben $n_1 = n_2 = 1$, a [2]-ben pedig $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$ esetekre adtunk eljárást a p_{i,k_1,k_2} valószinüségek meghatározására.

Jelen cikkben foglalkozunk az [1]-ben felvetett optimalizálási problémával, vagyis, hogy adott $a_1, a_2, B_1(t)$, $B_2(t)$, $C_{12}(t)$ és $C_{21}(t)$ mellett hogyan kell n_1 és n_2-t megválasztani ahhoz, hogy a rendszerünk leghatékonyabb legyen. A rendszer hatékonyságát a rendszerbe érkező egységeknek időegységre eső sulyozott várakozási idejével jellemezzük. Keresendő tehát az az n_1 és n_2, amely mellett az időegységre jutó sulyozott várakozási idő a legkisebb. Az optimális megoldást a [3]-ban ismertetett módszer segitségével keressük meg.

Az optimalizálási feladat meghatározásához szükségünk lesz az átmenetvalószinüségek, az átmenetek átlagos idejének és egy átmeneti időre jutó átlagos várakozási időrek a meghatározására. Exponenciális $B_1(t)$, $B_2(t)$, $C_{12}(t)$ és $C_{21}(t)$ esetekben explicit képleteket adunk ezek kiszámolására, valamint eljárást a stacionáris állapotvalószinüségek meghatározására. Végül ismertetünk néhány számpéldát.

II. A rendszert jellemző fél-Markov folyamat

Vizsgáljuk az [1] és [2] cikkekben és a bevezetésben leirt kiszolgáló rendszerben lejátszódó sztochasztikus folyamatot. Legyenek a kiszolgálások befejezési időpontjai rendre $t_1, t_2, \ldots$ Jellemezzük a rendszer állapotát tetszőleges t időpillanatban a

$$\xi(t) = (i, k_1, k_2) \qquad /2.1/$$

vektorral, ahol $i=1$ ill. $i=2$, ha $t_m \leq t < t_{m+1}$ és a t_m-ben A ill. B tipusu egység kiszolgálása fejeződött be, k_1 ill. k_2-vel pedig a t_m időpillanat után a rendszerben maradó A ill. B tipusu egységek számát jelöltük.

Az [1] és [2] cikkekben bebizonyitottuk, hogy a

$$\xi^{(m)} = \xi(t_m) = (i, k_1, k_2) \qquad /2.2/$$

állapotok ergodikus Markov láncot alkotnak. Az átmenetek közti $z_m = t_{m+1} - t_m$ átmeneti idők a kiszolgálási, átkapcsolási, valamint az egységekre való várakozási időkből tevődnek össze, amelyek teljesen függetlenek és adott eloszlásuak. Igy ismertnek tekinthetők a

$$T_m(x) = P\ (z_m \leq x),\ m \geq 1 \qquad /2.3/$$

eloszlásfüggvények. A fentiek alapján a kiszolgáló rendszerben lejátszódó $\xi(t)$ sztochasztikus folyamat fél-Markov folyamat. (A fél-Markov folyamatokról lásd [3]-at és [3] irodalmi utalásait.)

Ha t_1-ben ismerjük a rendszer $\xi^{(1)}$ állapotát, akkor $T_1(x)$ eloszlásnak megfelelő z_1 ideig marad ez az állapot, majd /2.2/ Markov lánc átmenetvalószinüségeinek megfelelően átmegy a $\xi^{(2)}$ állapotba. Hasonló módon $\xi^{(2)}$-ből megkapjuk $\xi^{(3)}$-at és igy tovább. Vagyis $\xi^{(1)}$ ismeretében a /2.2/ Markov-lánc átmenet valószinüségei és az átmeneti idők /2.3/ eloszlásai meghatározzák a $\xi(t)$ folyamatot.

A /2.1/ és /2.2/-ben $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$, mig k_1 és k_2 elvileg akármilyen nagy lehet. Azonban azok az állapotok, amelyekben k_1 vagy k_2 nagy, kis valószinüséggel fordulnak elő. A további vizsgálatainkban megadunk s_1 és s_2 számokat és azokat az állapotokat, amelyekben $k_1 \geq s_1$ vagy $k_2 \geq s_2$ összevonjuk egy-egy állapottá, és ezekben $k_1 = s_1$ ill. $k_2 = s_2$ jelölést használjuk. Ezáltal a /2.2/ véges állapotu Markov lánc lesz, a /2.3/ pedig a véges állapotok közötti valamelyik átmenet idejének eloszlása.

III. Az átmenetvalószinüségek mátrixának meghatározása.

Rendezzük az

$$(i,k_1,k_2),\ i=1,2;\ k_1=0,1,\dots,s_1;\ k_2=0,1,\dots,s_2 \qquad /3.1/$$

állapotokat k_1 és k_2 növekedésének megfelelően a következő csoportositás és azon belüli sorrend szerint:

1.cs.: $(1,0,0), (1,0,1), (1,0,2),\dots,(1,0,s_2)$
2.cs.: $(2,0,0), (2,1,0), (2,2,0),\dots,(2,s_1,0)$
3.cs.: $(1,1,0), (1,1,1), (1,1,2),\dots,(1,1,s_2), (1,2,0), (1,2,1),\dots$
$(1,2,s_2), (1,3,0), (1,3,1),\dots,(1,s_1,0), (1,s_1,1),\dots,$
$(1,s_1,s_2)$
4.cs.: $(2,0,1), (2,1,1), (2,2,1),\dots,(2,s_1,1), (2,0,2), (2,1,2),\dots$
$(2,s_1,2), (2,0,3), (2,1,3),\dots, (2,0,s_2), (2,1,s_2),\dots,$
$(2,s_1,s_2)$

Az átmenetvalószinüségek P mátrixának meghatározásához tekintsük az

$$(i,k_1,k_2) \longrightarrow (j,l_1,l_2) \qquad /3.2/$$

átmeneteket. A fenti csoportositásnak megfelelően legyen a P mátrix felbontása

$$P = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \qquad /3.3/$$

ahol R_{uv} jelenti az u-adik csoportból a v-edikbe való átmenetek valószinüségeinek mátrixát. A /3.3/-ban szereplő mátrixoknál az 1-es indexhez s_1+1, a 2-hez s_2+1, a 3-ashoz $s_1(s_2+1)$, míg a 4-hez $s_2(s_1+1)$ sor ill. oszlop tartozik.

A kiszolgálási szabály figyelembevételével azonnal megállapitható, hogy

$$R_{32} = 0,\ R_{34} = 0,\ R_{41} = 0,\ R_{43} = 0\ ,$$

valamint $n_1 > 1$ ill. $n_2 > 1$ esetén az $R_{12} = 0$ ill. $R_{21} = 0$ is teljesül, minthogy ezen mátrixoknak megfelelő átmenetek nem lehetségesek. Hasonlóképpen belátható, hogy a többi R_{uv} mátrix is sok 0-t tartalmaz. Igy például az R_{11} és R_{13} ill. R_{22} és R_{24} mátrixok $k_2 \geq n_2$ ill. $k_1 \geq n_1$-nek megfelelő sorai 0-ákból állnak. A P mátrix azon elemei, amelyekre a továbbiakban nem adunk összefüggést, 0-ok lesznek. Képleteinket az $(1,k_1,k_2) \longrightarrow (j,l_1,l_2)$ tipusu átmenetekre irjuk fel, mig a $(2,k_1,k_2) \longrightarrow (j,l_1,l_2)$ átmenetekre hasonló módon, a megfelelő indexek felcserélésével kaphatjuk meg az eredményeket. Mindezek figyelembevételével P elemeinek meghatározásához négy esetet kell megkülönböztetnünk.

Ha $k_2 < n_2$, akkor az $(1,0,k_2)$ állapot után következhet $(1,l_1,l_2)$ $l_1 \geq 0$, $l_2 \geq k_2$; vagy $(2,l_1,l_2)$, $l_1 \geq 0$, $l_2 \geq n_2-1$ állapot, aszerint, hogy egy A tipusu vagy n_2-k_2 B tipusu egység érkezik előbb az $(1,0,k_2)$ állapot kialakulása után. Felhasználva, hogy az érkezés homogén Poisson folyamat szerint történik, tetszőleges időpillanatban annak valószinüsége, hogy A ill. B tipusu lesz a következő érkező, $\frac{a_1}{a_1+a_2}$ ill. $\frac{a_2}{a_1+a_2}$. Igy annak valószinüségét, hogy egy A tipusu egység előbb érkezik, mint n_2-k_2 B tipusu, az

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}\sum_{m=0}^{n_2-k_2-1}\left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^m \qquad /3.4/$$

kifejezés adja.

A /3.2/-vel jelölt átmenet ideje alatt $j=1$ esetben az A tipusu egységekből l_2-k_2+1 érkezett, egy pedig kiszolgálódott, a B tipusuakból l_2-k_2 érkezett. A $j=2$ esetben l_1-k_1 A és l_2-k_2+1 B tipusu érkezése és egy B tipusu kiszolgálás történt. Közben átkapcsolásra is szükség volt, ha $i\neq j$.

Feltevéseink szerint az A és B tipusu érkezések egymástól független Poisson folyamatot alkotnak. Ezért annak valószinüsége, hogy valahogyan kiválasztott t idő alatt m_1 A és m_2 B tipusu érkezés történik

$$\frac{(a_1t)^{m_1}}{m_1!}\,\frac{(a_2t)^{m_2}}{m_2!}\,e^{-(a_1+a_2)t} \qquad /3.5/$$

1. A $k_2<n_2$ esetben az $(1,0,k_2)\longrightarrow(2,l_1,l_2)$, $l_1\geq 0$, $l_2\geq n_2-1$ átmenet valószinüsége /3.4/ és /3.5/ segitségével a következőképpen irható fel:

$$\left[1-\frac{a_1}{a_1+a_2}\sum_{m=0}^{n_2-k_2-1}\left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^m\right]\cdot$$

$$\frac{a_1^{l_1}}{l_1!}\,\frac{a_2^{l_2-n_2+1}}{(l_2-n_2+1)!}\int_0^\infty x^{l_1+l_2-n_2+1}\cdot e^{-(a_1+a_2)x}\,dT(x) \qquad /3.6/$$

ahol

$$T(x)=\int_0^x C_{12}(x-t)\,dB_2(t) \qquad /3.7/$$

a $T_2 + T_{12}$ kiszolgálási és átkapcsolási idők összegének eloszlásfüggvénye.

2. A $k_2 < n_2$ esetben az $(1,0,k_2) \longrightarrow (1,l_1,l_2)$, $l_1 \geq 0$, $l_2 \geq k_2$ átmenetnél figyelemmel kell lennünk arra is, hogy a kiszolgálandó A tipusu egység hányadik B tipusu után érkezik. Ennek megfelelően ezen átmenetek valószinüsége:

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}\sum_{m=0}^{\min(l_2,n_2-k_2-1)}\left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^m\cdot \qquad /3.8/$$

$$\frac{a_1^{l_1}}{l_1!}\,\frac{a_2^{l_2-k_2-m}}{(l_2-k_2-m)!}\int_0^\infty x^{l_1+l_2-k_2-m}\,e^{-(a_1+a_2)x}\,dB_1(x)$$

3. A $k_2 \geq n_2$ esetben a lehetséges $(1,0,k_2) \longrightarrow (2,l_1,l_2)$, $l_1 \geq 0$, $l_2 \geq k_2-1$ átmenetek valószinüsége /3.7/ segitségével:

$$\frac{a_1^{l_1}}{l_1!}\frac{a_2^{l_2-k_2+1}}{(l_2-k_2+1)!}\int_0^\infty x^{l_1+l_2-k_2+1} e^{-(a_1+a_2)x} dT(x) . \qquad /3.9/$$

4. $k \geq 1$ esetben csak $(1,k_1,k_2) \longrightarrow (1,l_1,l_2)$, $l_1 \geq k_1$, $l_2 \geq k_2$ tipusu átmenetek lehetségesek, amiknek a valószinüsége:

$$\frac{a_1^{l_1-k_1+1}}{(l_1-k_1+1)!}\frac{a_2^{l_2-k_2}}{(l_2-k_2)!}$$

$$\int_0^\infty x^{l_1+l_2-k_1-k_2+1} \cdot e^{-(a_1+a_2)x} dB_1(x) . \qquad /3.10/$$

A /3.6/, /3.8/, /3.9/ és /3.10/ képletek felirásánál figyelmen kivül hagytuk a /2.2/ Markov lánc /3.1/ szerinti véges állapottérre való leszükitését. A P mátrix azon elemeit, amelyekhez tartozó /3.2/ tipusu átmenetekben a $k_1 = s_1$, $k_2=s_2$, $l_1=s_1$ vagy $l_2=s_2$ szerepel a /3.6/, /3.8/, /3.9/ és /3.10/ kifejezések valamilyen $k_1 \geq s_1$, $k_2 \geq s_2$, $l_1 \geq s_1$ vagy $l_2 \geq s_2$ -re vett összegeként kapjuk meg. Igy például az 1. esetben a $k_2 < n_2$, $(1,0,k_2) \longrightarrow (1,l_1,s_2)$, $0 \leq l_1 < s_1$ átmenethez tartozó valószinüségeket a /3.6/-ban szereplő valószinüségek $l_2 \geq s_2$-re vett összege adja meg.

IV. Átmeneti idők

Feltevéseink szerint a kiszolgáló rendszerbe az egységek a_1 és a_2 intenzitásu Poisson folyamat szerint érkeznek. Ismeretes, hogy ebben az esetben az érkezések közötti idő exponenciális eloszlásu

$$a_1 e^{-a_1 x} \quad \text{és} \quad a_2 e^{-a_2 x} \qquad /4.1/$$

sürüségfüggvényekkel, várható értékeik pedig

$$\frac{1}{a_1} \quad \text{és} \quad \frac{1}{a_2} \qquad /4.2/$$

A kiszolgálások befejezése között eltelt idők, azaz a /2.3/-ban szereplő $z_m = t_{m+1} - t_m$ átmeneti idők kiszolgálási, átkapcsolási időkből, valamint az érkező egységekre való várakozásokból tevődnek össze. Ezért a z_m várható értéke $M[z_m]$ kifejezhető a felsorolt egymástól független véletlen idők

$$\beta_i = \int_0^\infty x\, d\beta_i(x) \qquad \gamma_{ij} = \int_0^\infty x\, dC_{ij}(x)\,; \qquad i,j = 1,2 \quad i \neq j\,, \qquad /4.3/$$

valamint a két Poisson folyamat $\frac{1}{a_1}$ és $\frac{1}{a_2}$ várható értékeivel.

Jelöljük az átmenetek közti idők várható értékeinek mátrixát A-val. A azon elemei, amelyekhez nem tartozik lehetséges átmenet, legyenek 0-ok. Ezek helyei megegyeznek a P átmenetmátrix 0 elemeinek helyeivel.

A /4.2/ és /4.3/ segitségével az A mátrix 0-tól különböző elemei, a III-ban vizsgált négy esetnek megfelelően, a következőképpen adhatók meg:

1. A $k_2 < n_2$ esetben az $(1,0,k_2) \longrightarrow (2,l_1,l_2)$ átmenetek közti idő várható hossza:

$$\frac{n_2-k_2}{a_2} + \gamma_{12} + \beta_2 .$$

2. A $k_2 < n_2$, $(1,0,k_2) \longrightarrow (1,l_1,l_2)$ esetben

$$\frac{1}{a_1} + \beta_1 .$$

3. A $k_2 \geq n_2$, $(1,0,k_2) \longrightarrow (2,l_1,l_2)$ átmeneteknél

$$\gamma_{12} + \beta_2 ,$$

mig a 4. $k \geq 1$ esetben az $(1,k_1,k_2) \longrightarrow (1,l_1,l_2)$ átmenetekre vonatkozóan β_1 lesz.

A $/2,k_1,k_2/ \longrightarrow /j,l_1,l_2/$ tipusu átmenetek közti idők várható értékei a kapott eredményekből a megfelelő indexek felcserélésével adódnak.

V. Várakozási idők

A kiszolgáló rendszerbe érkező egységek a rendszer állapotától függően vagy azonnal a kiszolgáló berendezéshez kerülnek, vagy az A ill. B tipusu sorban várakoznak a kiszolgálásuk megkezdéséig. Az érkezéstől a kiszolgálás megkezdéséig eltelt idő az illető egység várakozási ideje. A továbbiakban kiszámitjuk egy átmenet ideje alatt a rendszerben levő egységek várakozási ideje növekedésének várható értékét. Ehhez bevezetjük a virtuális várakozási idő fogalmát. Jelölje $\eta_1(t)$ ill. $\eta_2(t)$ azt az időt, amit az A ill. B tipusu egységnek várnia kellene a kiszolgálása megkezdéséig, ha a t időpontban érkezne. $\eta_j(t)$, $j=1,2$ szakaszonként konstans vagy -1 meredekséggel csökkenő lineáris függvény. Legyenek az A ill. B tipusu egységek érkezési pontjai rendre $t_1^{(1)}, t_1^{(2)},\ldots, t_2^{(1)}, t_2^{(2)},\ldots$, akkor az $\eta_j(t)$, $j=1,2$ függvények szakadási pontjai a $t_1^{(l)}$, $t_2^{(l)}$ és a kiszolgálások befejeződési t_m időpillanatai.

Jelöljük δ_{jn}-el a $t_n^{(l)}$ $n=1,2$ időpillanatban az $\eta_j(t)$, $j=1,2$ függvény véletlen növekedésének megfelelő valószinüségi változót és legyenek δ_{jn}-nek $t_n^{(l)}$ -ben felvett értékei $\delta_{jn}^{(l)}$. Tekintsünk egy átmenet (t_m, t_{m+1}) időintervallumát. Könnyen belátható, hogy létezik olyan $T^{(j)}$ pont, amelyre teljesül, hogy $\eta_j(t)$, $j=1,2$ konstans a $t_m < t < T^{(j)}$ szakaszon, mig $T^{(j)} < t < t_{m+1}$-ben szakaszonként lineárisan csökkenő. $T^{(j)}$ megegyezik $\eta_j(t)$ valamelyik szakadási pontjával.

Tetszőleges t időpillanatban, melyre $t_m \le t < t_{m+1}$ az $\eta_j(t)$ a következőképpen irható:

$$\eta_j(t) = \eta_j(t_m+0) + \sum_{\substack{t_m < t_n^{(l)} < t \\ n=1,2}} \delta_{jn}^{(l)} + (t - T^{(j)})\, \sigma(t) \qquad /5.1/$$

ahol

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t_m < t < T^{(j)} \\ 1, & \text{ha } T^{(j)} < t < t_{m+1} \end{cases}.$$

A $t_j^{(l)}$ időpillanatban érkező egység várakozási ideje $\eta_j(t_j^{(l)})$, mig a $z_m = t_{m+1} - t_m$ időközben érkező A (ill. B) tipusuak várakozási idejének növekedése $j=1$ (ill. $j=2$) mellett

$$V_j(z_m) = \sum_{t_m < t_j^{(l)} < t_{m+1}} \eta_j(t_j^{(l)}) \qquad /5.2/$$

A továbbiakban megkülönböztetett jelentőséget tulajdonithatunk az A (ill. B) tipusu egységeknek olymódon, hogy a várakozási idejüket sulyozottan vesszük figyelembe. Legyen $0 \leq \alpha_1 \leq 1$, $0 \leq \alpha_2 \leq 1$ és tekintsük az α_1, α_2-vel sulyozott teljes várakozási időnek a z_m időre eső növekedését:

$$V(z_m) = \alpha_1 V_1(z_m) + \alpha_2 V_2(z_m) \qquad /5.3/$$

/5.2/ az /5.1/ felhasználásával a következőképpen irható át:

$$V_j(z_m) = \eta_j(t_m+0) \sum_{t_m < t_j^{(l)} < t_{m+1}} 1 - \sum_{t_m < t_j^{(l)} < t_{m+1}} (t_j^{(l)} - T^{(j)})\,\sigma(t) + \sum_{t_m < t_j^{(l)} < t_{m+1}} \Big[\sum_{\substack{t_m < t_r^{(s)} < t_j^{(l)} \\ r=1,2}} \delta_{jr}(s) \Big] \qquad /5.4/$$

Az átmenetekre a /3.2/ jelöléseket használva legyen

$$R = r_1 + r_2,\ r_n = \begin{cases} l_n - k_n + 1 & \text{ha } n=j \\ l_n - k_n & \text{ha } n \neq j \end{cases}, \quad (n,j=1,2)$$

Jelöljük /5.4/ első, második és harmadik tagjának várható értékét $M_{jm}^{(1)}$, $M_{jm}^{(2)}$ és $M_{jm}^{(3)}$ -al, akkor $v_j(z_m)$ várható értéke

$$M[v_j(z_m)] = M_{jm}^{(1)} - M_{jm}^{(2)} + M_{jm}^{(3)} . \qquad /5.5/$$

/5.3/-ból pedig

$$M[v(z_m)] = \alpha_1 M[v_1(z_m)] + \alpha_2 M[v_2(z_m)] \qquad /5.6/$$

Egyszerüen adódik, hogy

$$M_{jm}^{(1)} = r_j M[\eta_j(t_m+0)] . \qquad /5.7/$$

/5.4/ második tagja $r_j = 0$ esetén 0. $r_j \geq 1$-re az $M_{jm}^{(2)}$ kiszámolásához felhasználjuk a Poisson folyamat következő sajátosságát. Érkezzenek egységek egymástól függetlenül, Poisson folyamat szerint. Annak valószinüsége, hogy egy érkezés, amely a (0,T) intervallumba esik, annak $(0,\tau)$ részében következik be τ/T-vel egyenlő és független attól, hogy a többi érkezési pont hogyan oszlik el a (0,T)-ben. Igy minden egyes (0,T)-ben bekövetkezett érkezésre vonatkozólag T/2 az érkezési pontig eltelt idő várható értéke. Az $M_{jm}^{(2)}$ kiszámolásához a T szerepét a $t_{m+1} - T^{(j)}$ veszi át és minthogy ez idő alatt éppen r_j darab a_j intenzitású Poisson folyamat szerint érkező egység érkezését kell figyelembevennünk, ezért

$$M_{jm}^{(2)} = r_j \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x \, d_x P(t_{m+1} - T^{(j)} \leq x) = \frac{r_j}{2} M_{jm}^{(4)} \,, \qquad /5.8/$$

ahol $M_{jm}^{(4)}$ a $t_{m+1} - T^{(j)}$ idő várható értéke.

A z_m idő alatt R egység érkezett a rendszerbe. Az $M_{jm}^{(3)}$ meghatározásához tekintettel kell lenni arra is, hogy milyen sorrendben érkezett az r_1 A és r_2 B tipusu egység. Ugyanis minden egyes érkezésnél az azt megelőző érkezőknél fellépő várakozási idő növekedését figyelembe kell venni. Igy az l-edszerre érkező hatása $R-l$-szer szerepel az összegben.

Legyen $h_1, h_2, \ldots, h_R$ egy érkezési sorrend. Könnyü bebizonyitani, hogy az érkezés Poisson jellege miatt minden egyes sorrend fellépése egyenlően valószinü. Minthogy a lehetséges különböző sorrendek száma $\frac{R!}{r_1! \, r_2!}$, ezért tetszőleges sorrend fellépésének valószinüsége $r_1! r_2!/R!$. Az /5.4/ harmadik tagjának várható értéke ezekután

$$M_{jm}^{(3)} = \frac{r_1! r_2!}{R!} \sum_{(h_1, h_2, \ldots, h_R)} \sum_{l=1}^{R} (R-l) M[\delta_{jh_l}] \,. \qquad /5.9/$$

Az első $\sum$ az összes R elemü $h_1, h_2, \ldots, h_R$ ismétléses permutációra vonatkozik.

Az /5.7/ és /5.9/-ben szereplő $M[\eta_j(t_m+0)]$ és $M[\delta_{jh_l}]$ várható értékeket, valamint az /5.8/-ban a $P(t_{m+1} - T^{(j)} \leq x)$

eloszlásfüggvényt az átmenet kezdeti (i,k_1,k_2) és (j,l_1,l_2) végállapota határozza meg. Ezek felírását az $(1,k_1,k_2) \longrightarrow (j,l_1,l_2)$ tipusu átmenetekre végezzük el, a $(2,k_1,k_2) \longrightarrow (j,l_1,l_2)$ tipusuakra pedig a megfelelő indexek felcserélésével kapjuk az eredményeket.

A $k_1 = 0$, $k_2 < n_2$ és az összes $k_1 > 0$ esetben egyszerüen adódik

$$M[\eta_1(t_m+0)] = k_1\beta_1 . \qquad /5.10/$$

Azonban a t_m pillanatban a rendszerben tartózkodó B tipusuaknak nemcsak a már a rendszerben levő A tipusuak távozását kell megvárni, hanem mindazon A tipusuakét is, akik közben érkeznek. De ezután is csak akkor kezdődhet meg a B tipusuak kiszolgálása, ha már telitődött a B tipusuak sora. Ezért az $M[\eta_2(t_m+0)]$ függ az n_2-k_2 különbségtől is. Ennek megfelelően a $k_1 > 0$, $n_2 - k_2 \leq 1$ és $k_1 = 0$ $n_2 - k_2 = 1$ esetekben

$$M[\eta_2(t_m+0)] = \gamma_{12} + k_2\beta_2 + k_1\beta_1 + k_1\beta_1(a_1\beta_1) + k_1\beta_1(a_1\beta_1)^2 + \dots =$$

$$= \gamma_{12} + k_2\beta_2 + k_1\beta_1 \frac{1}{1-a_1\beta_1} \qquad /5.11/$$

Az $n_2 - k_2 \geq 2$ esetekben a t_m-ben esetleg érkező B tipusu egységnek még $n_2 - k_2 - 1$ B tipusu egységet be kell várnia, ahhoz, hogy a kiszolgálása megkezdődhessen. Ehhez átlagosan $\frac{n_2-k_2-1}{a_2}$ idő kell. Ha

$$\frac{k_1\beta_1}{1-a_1\beta_1} > \frac{n_2-k_2-1}{a_2} \qquad /5.12/$$

teljesül, akkor ebben az esetben is /5.11/ érvényes. Ha viszont /5.12/ nem teljesül, akkor a készülék átkapcsolásáig átlagosan $\frac{n_2-k_2-1}{a_2}$ ideig kellene várni, ha az $\frac{n_2-k_2-1}{a_2} - \frac{k_1\beta_1}{1-a_1\beta_1}$ idő alatt érkező A tipusuak ebben az időszakban el is hagyják a rendszert. Viszont amennyivel később hagyják el, annyival később kezdődhet meg az átkapcsolás, vagyis annyival nagyobb a B tipusuak várakozási ideje. Itt ennek az időnek a pontos meghatározásával nem foglalkozunk és az /5.12/ nem teljesülése esetén a jó közelitést adó

$$M[\eta_2(t_m+0)] = \gamma_{12} + k_2\beta_2 + \frac{n_2-k_2-1}{a_2} \qquad /5.13/$$

képletet használjuk.

A $k_1 = 0$, $k_2 \geq n_2$ esetben a t_m időpillanatban megindul a készülék átkapcsolása A-ról a B tipusuak kiszolgálására. Igy a közvetlen t_m időpillanat után érkező B tipusuaknak az átkapcsolás után csak a B tipusu sorbanállók kiszolgálását kell megvárni, azaz érvényes $k_1 = 0$ mellett /5.11/. A közvetlen t_m után érkező A tipusu egységre vonatkozó átlagos várakozási idő a fenti meggondolásokhoz hasonlóan a $k_1 = 0$, $k_2 \geq n_2$ esetben

$$M[\eta_1(t_m+0)] = \gamma_{12} + \gamma_{21} + \max\left(\frac{k_2\beta_2}{1-a_2\beta_2}, \frac{n_1-1}{a_1} - \gamma_{12}\right) . \qquad /5.14/$$

Az /5.8/-ban szereplő $M_{jm}^{(4)} = M[t_{m+1} - T^{(j)}]$ várható értéket a $T^{(j)}$ pont helyzete határozza meg. Az $(1,k_1,k_2) \longrightarrow (j,l_1,l_2)$ tipusu átmenetekre vonatkozóan a következő eseteket különböztetjük meg:

1. $k_1 \geq 1$ esetben $T^{(j)} = t_m$, $M_{jm}^{(4)} = \beta_1$, $j=1,2$

2. $k_1 = 0$, $k_2 \geq n_2$ esetben $T^{(j)} = t_m$, $M_{jm}^{(4)} = \gamma_{12} + \beta_2$, $j=1,2$

3. $k_1 = 0$, $k_2 < n_2$ " több lehetőség van.

a./ $(1,0,k_2) \longrightarrow (1,l_1,l_2)$ átmenetnél $T^{(1)}$ = az első A tipusu egység érkezési pontja és igy $M_{jm}^{(4)} = \beta_1$, mig $T^{(2)} = t_m$, kivéve az $n_2 = 1$, $k_2 = 0$ esetet, amikor $T^{(2)}$ is az első A tipusu érkezési pontja. A két lehetőségnek megfelelően $M_{2m}^{(4)} = \frac{1}{a_1} + \beta_1$ vagy β_1.

b./ Az $(1,0,k_2) \longrightarrow (2,l_1,l_2)$, $k_2 < n_2$ átmeneteknél $T^{(1)}$ valamint $n_2 = 1$, $k_2 = 0$ esetben $T^{(2)}$ is az n_2-k_2-edik B tipusu érkezési pontja és igy $M_{1m}^{(4)} = M_{2m}^{(4)} = \beta_2 + \gamma_{12}$, különben pedig $T^{(2)} = t_m$, $M_{2m}^{(4)} = \frac{n_2-k_2}{a_2} + \gamma_{12} + \beta_2$.

Az /5.9/-ben szereplő $M[\delta_{jh_l}]$ mennyiség definició szerint a t_m-től számitott l-edik érkezési pontban az $\eta_j(t)$ függvény ugrásának várható értéke. Ezt az ugrást $h_l=1$ esetben A, $h_l=2$ esetben B tipusu egység érkezése idézi elő. Az $M[\delta_{jh_l}]$ mennyiségeket is az $(1,k_1,k_2) \longrightarrow (j,l_1,l_2)$ tipusu átmenetekre vizsgáljuk.

1. $k_1 \geq 1$ esetben és az $(1,0,k_2) \longrightarrow (1,l_1,l_2)$ átmeneteknél

$$M[\delta_{11}] = M[\delta_{21}] = \beta_1, \quad M[\delta_{12}] = 0, \quad M[\delta_{22}] = \beta_2 \qquad /5.15/$$

2. Ha $k_1 = 0$, $k_2 \geq n_2$, akkor

$$M[\delta_{11}] = \beta_1, \quad M[\delta_{21}] = 0, \quad M[\delta_{12}] = M[\delta_{22}] = \beta_2 \qquad /5.16/$$

3. A $k_1 = 0$, $k_2 < n_2$ esetben l -től is függ az $M[\delta_{jh_l}]$. Az $(1,0,k_2) \longrightarrow (2,l_1,l_2)$, $k_2 < n_2$ átmenetnél $h_l = 2$, $1 \leq l \leq n_2-k_2$. Ezek közül $1 \leq l \leq n_2-k_2-1$-re /5.15/ áll fenn, míg $l = n_2-k_2$-re

$$M[\delta_{12}] = \gamma_{12} + \gamma_{21} + \max\left(\frac{n_2\beta_2}{1-a_2\beta_2},\ \frac{n_1-1}{a_1} - \gamma_{12}\right),\ M[\delta_{22}] = \beta_2 \qquad /5.17/$$

A további $l > n_2 - k_2$-re pedig /5.16/ érvényes.

VI. A rendszer optimalizálása exponenciális eloszlások esetén

A III., IV. és V. pontok képletei lehetőséget adnak a rendszerben lejátszódó fél-Markov-folyamat átmenet valószinüségek $P = \{p_{ij}\}$ mátrixának, az átmeneti idők $A = \{a_{ij}\}$ és a sulyozott várakozási idők $V = \{v_{ij}\}$ mátrixainak a felírására, ha megadjuk a $B_1(x)$, $B_2(x)$, $C_{12}(x)$ és $C_{21}(x)$ eloszlásfüggvényeket. A P, A és V mátrixok függnek az n_1 és n_2 paraméterektől. Rögzitve valamilyen n_1 és n_2 értékeket a $P = \{p_{ij}\}$, $A = \{a_{ij}\}$ és a $V = \{v_{ij}\}$ mátrixok segitségével a [3]-ban leirtaknak megfelelően meghatározzuk a $B = \{b_{ij}\}$, $U = \{u_{ij}\}$, majd a Q_i, B_i és U_i mátrixokat ugy, hogy legyen

$$b_{ij} = p_{ij}\, a_{ij};\ u_{ij} = p_{ij}\, v_{ij},$$

a Q_i, B_i és U_i mátrixokat pedig ugy kapjuk a P, B és U mátrixokból, hogy azok i-edik sorába 0-okat irunk. Jelölje $\underline{p}_i$, $\underline{b}_i$ és $\underline{u}_i$ a P, B, és U mátrixok i-edik sorvektorát.

A kiszolgáló rendszerünk müködését az időegységre eső sulyozott várakozási idővel jellemeztük, amit az i-edik állapotból kiinduló ciklusokra vonatkozóan számolva [3] alapján a

$$\varrho_i(n_1,n_2) = \frac{\mu_i(n_1,n_2)}{\beta_i(n_1,n_2)} \qquad /6.1/$$

hányados ad meg, ahol

$$\mu_i(n_1,n_2) = \underline{u}_i\,\underline{e} + \underline{p}_i\,(I-Q_i)^{-1}\,(U_i\,\underline{e}) \qquad /6.2/$$

$$\beta_i(n_1,n_2) = \underline{b}_i\,\underline{e} + \underline{p}_i\,(I-Q_i)^{-1}\,(B_i\underline{e}) \qquad /6.3/$$

A rendszer optimalizálása az a_1, a_2 bemeneti paraméterek, $B_1(x)$, $B_2(x)$, $C_{12}(x)$ és $C_{21}(x)$ eloszlásfüggvények és /5.3/-ban szereplő α_1, α_2 sulyok megadása mellett azon n_1 és n_2 paraméterek megkeresését jelenti, amelyekkel /6.1/ minimális lesz. Az optimum meghatározását exponenciális eloszlásfüggvényekre végeztük el. Legyen a továbbiakban

$$B_i(x) = 1 - e^{-\lambda_i x}, \quad C_{ij}(x) = 1 - e^{-\nu_i x} \qquad i,j = 1,2, \quad i \neq j \qquad /6.4/$$

várható értékeik pedig

$$\beta_i = \frac{1}{\lambda_i}, \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{\nu_i} \qquad i,j = 1,2 \quad i \neq j \qquad /6.5/$$

/6.4/ függvényeket helyettesitve a /3.8/, /3.10/, majd /3.7/ felhasználásával a /3.6/ és /3.9/ képletekbe a kijelölt integrálások könnyen elvégezhetők. A /3.6/, /3.8/, /3.9/ és /3.10/

képletekből a P mátrix elemeinek kiszámolására rendre kapjuk a következő kifejezéseket:

$$\lambda_2 \nu_1 [(l_1+l_2-n_2+1)!] \left[1-\frac{a_1}{a_1+a_2} \sum_{i=0}^{n_2-k_2-1} \left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^i\right] \frac{a_1^{l_1}}{l_1!} \frac{a_2^{l_2-n_2+1}}{(l_2-n_2+1)!} \cdot \qquad /6.6/$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{l_1+l_2-n_2+1} \frac{1}{(a_1+a_2+\lambda_2)^{1+i}} \cdot \frac{1}{(a_1+a_2+\nu_1)^{l_1+l_2-n_2+2-i}}$$

$$\frac{1}{l_1!} \frac{\lambda_1}{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{a_1+a_2+\lambda_1}\right)^{l_1+1} \sum_{i=0}^{\min(l_2-k_2,\, n_2-k_2-1)} \left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^i \frac{(l_1+l_2-k_2-i)!}{(l_2-k_2-i)!} \left(\frac{a_2}{a_1+a_2+\lambda_1}\right)^{l_2-k_2-i} \qquad /6.7/$$

$$\frac{a_1^{l_1}}{l_1!} \frac{a_2^{l_2-k_2+1}}{(l_2-k_2+1)!} \lambda_2 \nu_1 [(l_1+l_2-k_2+1)!] \cdot \qquad /6.8/$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{l_1+l_2-k_2+1} \frac{1}{(a_1+a_2+\lambda_2)^{1+i}} \cdot \frac{1}{(a_1+a_2+\nu_1)^{l_1+l_2-k_2+2-i}}$$

$$\frac{(l_1+l_2-k_1-k_2+1)!}{(l_1-k_1+1)!\,(l_2-k_2)!} \left(\frac{a_1}{a_1+a_2+\lambda_1}\right)^{l_1-k_1+1} \left(\frac{a_2}{a_1+a_2+\lambda_1}\right)^{l_2-k_2} \frac{\lambda_1}{a_1+a_2+\lambda_1} \qquad /6.9/$$

Az átlagos átmeneti idők A mátrixának meghatározásához a IV-ben szereplő képletekbe, valamint /5.8/ meghatározásához felirt összefüggésekbe a /6.5/ szerinti helyettesitést kell elvégezni.

Hasonlóan /6.5/-öt helyettesitve /5.10/, /5.11/, /5.13/, /5.14/, /5.15/, /5.16/ és /5.17/-be ezek segitségével kapjuk meg az /5.7/ és /5.9/ mennyiségeket. Az /5.7/, /5.8/ és /5.9/ mennyiségeket

/5.5/-be, majd azt /5.6/-ba helyettesitjük. Egy-egy átmenetre számolt /5.6/ adja a V mátrix megfelelő v_{ij} elemét.

Numerikus számolásokat a következő adatok mellett végeztünk:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = 1 \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = 1 \\ a_1 &= a_2 = 0{,}1 \\ \nu_1 &= \nu_2 = 1,\ 0{,}2,\ 0{,}1 \end{aligned} \qquad /6.10/$$

A /3.1/-ben szereplő s_1 és s_2 korlátokat 5-nek választottuk.

A /6.10/ adatokkal $n_1 = n_2 = 1$, 2 és 3-ra számoltuk ki a /6.1/ hányadost. A kapott eredményeket az 1. táblázat 4., 5. és 6. oszlopában foglaltuk össze. A táblázat 3. oszlopában feltüntettük azt az állapotot, amelyből kiindul a számolás alapjául szolgáló ciklus.

Az 1. táblázatból megállapitható, hogy $\nu_1 = \nu_2 = 1$ esetén $n_1 = n_2 = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = .2$ és $\nu_1 = \nu_2 = .1$-re $n_1 = n_2 = 2$ szolgáltatta az optimális megoldást.

Azonos bemeneti adatok esetén különböző állapotokra vonatkozó ciklussal számolva a ciklus átlagos hossza β és az erre jutó átlagos várakozás μ természetesen más lesz, de a ϱ értékei keveset különböznek. $\nu_1 = \nu_2$ csökkenésével azonban egyre nagyobb eltérések lépnek fel.

A /6.2/ és /6.3/-ban szereplő $\underline{p}_i\,(I-Q_i)^{-1}$ vektort az iterációval számolható

$$\underline{p}_i + \underline{p}_i\,Q_i + (\underline{p}_i\,Q_i)\,Q_i + \dots \qquad /6.11/$$

sorral állitottuk elő. Majd az előre számolt $B_i\underline{e}$ és $U_i\underline{e}$ oszlopvektorokkal szorozva $\underline{b}_i\underline{e}$ és $\underline{u}_i\underline{e}$ hozzáadásával kapjuk $/u_i$ és β_i értékeit.

A számolást a [3]-ban közölt második módszerrel is elvégeztük. Ehhez meghatároztuk a /2.2/ Markov lánc ergódikus eloszlását, a $\underline{\pi}$ valószinüségi vektort. Ennek segitségével a rendszerünk hatékonyságát a

$$\varrho = \frac{\underline{\pi}\,(U\underline{e})}{\underline{\pi}\,(B\underline{e})} \qquad /6.12/$$

kifejezés szolgáltatja. Eredményeinket az 1. táblázat 7., 8. és 9. oszlopa tartalmazza. Az 1. táblázatból látható, hogy a rendszer hatékonyságát kifejező /6.1/ és /6.12/ jó közelitésben ugyanazt az eredményt adja, de $\nu_1 = \nu_2$ csökkenésével ez az egyezés egyre romlik.

A $\underline{\pi}$ vektort a

$$\underline{p}_i\,P^n = (\underline{p}_i\,P^{n-1})\,P \qquad /6.13/$$

vektor mátrix szorzatok sorozatával közelitettük meg, ahol $\underline{p}_i$ a P i-edik sora. Az i indexet az 1. táblázat 3. oszlopában feltüntetett állapotnak megfelelően választottuk meg.

$\nu_1=\nu_2$	$n_1=n_2$	Kezdő állapot	/6.1/ eredményei			/6.12/ eredményei		
			β	μ	ϱ	neve-ző	számlá-ló	ϱ
1	1	(1,0,0)	24.20	4.81	0.1988	8.53	1,69	0.1988
	2	"	48.31	17.93	0.3712	7.93	2.94	0.3712
		(1,0,1)	61.39	22.79	0.3712	7.93	2.94	0.3712
		(1.1,0)	69.17	25.67	0.3712	7.93	2.94	0.3712
		(1,1,1)	240.99	89.44	0.3711	7.93	2.94	0.3712
	3	(1,0,0)	68.18	60.71	0.8905	8.71	7.76	0.8905
.2	1	"	34.49	26.95	0.7816	7.12	5.56	0.7819
	2	"	65.25	41.21	0.6315	7.33	4.63	0.6318
	3	"	92.83	101.81	1.0968	8.33	9.14	1.0968
.1	1	"	52.76	83.06	1.5742	6.96	11.01	1.5806
		(1,1,0)	144.78	226.68	1.5656	6.76	10.73	1.5869
	2	(1,0,0)	87.17	95.67	1.0975	7.17	7.93	1.0611
	3	"	89.42	120.78	1.3507	4.47	6.06	1.3542
		(1,0,1)	76.72	103.10	1.3438	4.47	6.06	1.3542

1. táblázat

A $\underline{\Pi}$ stacionáris valószinüség vektort az [1] és [2] alapján közvetlen is kiszámolhatjuk. Néhány esetre el is végeztük ezeket a számolásokat, amellyel kontroláltuk a /6.13/-al számolt vektor néhány elemét. A következő pontban a stacionáris eloszlás közvetlen meghatározásával foglalkozunk.

VII. Stacionárius valószinüségek meghatározása

Az [1] és [2]-ben bebizonyitottuk, hogy a rendszer állapotára jellemző /2.2/ ergódikus Markov lánc, p_{i,k_1,k_2} -vel jelöltük annak valószinüségét, hogy stacionáris esetben egy kiszolgálás befejezési időpillanatában az (i,k_1,k_2) állapotban marad a rendszer, mig $P_i(z_1,z_2)$-vel p_{i,k_1,k_2} valószinüségek generátorfüggvényét $(i=1,2)$. Összefüggéseket irtunk fel $P_1(z_1z_2)$ és $P_2(z_1z_2)$ függvényekre, a [2]-ben pedig eljárást adtunk a p_{i,k_1,k_2} valószinüségek meghatározására.

Ebben a pontban a /6.4/ feltevés mellett a $p_{1,m} = p_{1,0,m}$, $p_{2,m} = p_{2,m,0}$ valószinüségek kiszámolására adjuk meg az algoritmust és a szükséges képleteket. Meggondolásaink és a képletek az [1] és [2] cikkből nyerhetők.

Jelöljük a $P_1(z_1z_2)$ ill. $P_2(z_1,z_2)$ függvények n-edik differenciálhányadosának $z_1 = 0, z_2 = 1$ ill. $z_1=1$, $z_2=0$ helyen vett helyettesitési értékeit $P_1^{(n)}$ [1] ill. $P_2^{(n)}$ [1]-el. [1]

és [2] alapján bevezetjük a következő függvényeket és jelöléseket (i,j=1,2 i≠j):

$$f_i(z) = -\frac{\lambda_i}{a_j}\frac{1}{z} - \frac{a_i}{a_j} z + \frac{a_1+a_2+\lambda_i}{a_j} \qquad /7.1/$$

$$g_i^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{ha } n=0 \\ \frac{\lambda_i}{\nu_j}\left(\frac{\lambda_i}{\nu_j}-1\right)^{n-1} & \text{ha } n>0 \end{cases} \qquad /7.2/$$

$$S_i = \sum_{m=0}^{n_j-1} p_{i,m}\left[1-\left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^{n_j-m}\right] \qquad /7.3/$$

$$D(l,k) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k>1 \\ \frac{l!}{(l-k)!} & \text{ha } k\leq 1 \end{cases} \qquad /7.4/$$

Felhasználva /7.1/, /7.2/, /7.3/ és /7.4/-et, fennállnak a következő lineáris egyenletek:

$$P_1^{(0)}[1] - P_2^{(0)}[1] = S_1 - S_2 , \qquad /7.5/$$

$$\frac{1}{\nu_1}P_1^{(0)}[1] + \frac{1}{\nu_2}P_2^{(0)}[1] = \frac{1-\frac{a_1}{\lambda_1}-\frac{a_2}{\lambda_2}}{a_1+a_2} -$$

$$-\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{\nu_1}\right)S_1 - \left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{\nu_2}\right)S_2 , \qquad /7.6/$$

valamint

$n>1$, $i,j = 1,2$ $i\neq j$-re

$$\left(\frac{\lambda_i - a_i}{a_j}\right)^n P_i^{(n)}[1] - P_j^{(n)}[1] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} P_j^{(k)}[1]\, g_i^{(n-k)} +$$

$$+ \frac{a_i}{a_1+a_2} \sum_{m=0}^{n_j-1} p_{i,m} \sum_{l=0}^{n_j-m-1} \left\{ \left[f_i(z)^{l+m}\right]_{z=1}^{(n)} + m\left[f_i(z)^{l+m}\right]_{z=1}^{n-1} \right\} \qquad /7.7/$$

$$- \sum_{k=0}^{\max(n,n_i)} \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{n_i-1} p_{j,l}\left[D(l,k) - \left(\frac{a_i}{a_1+a_2}\right)^{n_i-l} D(n_i,k)\right] g_i^{(n-k)} - Q_{in} \,,$$

ahol

$$Q_{1n} = \left\{P_1(z, f_1(z))\right\}_{z=1}^{(n)} - P_1^{(n)}[1]\left\{f_1'(1)\right\}^n \qquad /7.8/$$

és hasonlóan fejezhető ki $Q_{2,n}$ is. A /7.8/-ban, valamint /7.7/-ben szereplő $\left\{f_1(z)^n\right\}_{z=1}^{(m)}$ deriváltak /7.1/ felhasználásával könnyen kiszámolhatók.

Legyenek a $p_{1,m}$ $m = 0,1,\ldots,n_2-1$; $p_{2,m}$, $m = 0,1,\ldots,n_1-1$ valószínüségek közelitő értékei $q_{1,m}^{(s)}$ és $q_{2,m}^{(s)}$. Ezeket /7.3/-ba helyettesitve /7.5/ és /7.6/-ból kiszámithatjuk $P_1^{(o)}[1]$ és $P_2^{(o)}[1]$-et. Ezután n=1-el indulva n növelésével lépésről-lépésre /7.7/-ből kapjuk a $P_i^{(n)}[1]$ értékeit. A $P_i^{(n)}[1]$ segitségével kiszámitjuk még az

$$R_{i,l}(q_{i,m}^{(s)}) = \sum_{m=0}^{m_0} \frac{(-1)^m P_i^{(m+l)}[1]}{m!} \qquad /7.9/$$

$$i = 1,2\,, \quad l = 0,1,\ldots,n_j \qquad j = 1,2, \qquad i \neq j$$

mennyiségeket, ahol m_0 a kivánt pontosságot biztositó index korlát.

A /7.3/, /7.5/, /7.6/ és /7.7/-ből látható, hogy a $P_i^{(n)}$ [1] és igy az $R_{i,l}$ mennyiségek a $p_{1,m}$ és $p_{2,m}$ valószinüségek lineáris függvényei. A lineáris függvényben szereplő $a_{i,m}^{(l)}$, $b_{i,m}^{(l)}$ együtthatókat és a $c_i^{(l)}$ konstans tagot a következő lineáris egyenlet-rendszerekből határozhatjuk meg:

$$\sum_{m=0}^{n_2-1} a_{i,m}^{(l)} q_{1,m}^{(s)} + \sum_{m=0}^{n_1-1} b_{i,m}^{(l)} q_{2,m}^{(s)} + c_i^{(l)} = R_{i,l}(q_{i,m}^{(s)}) , \qquad /7.10/$$

ami rögzitett l mellett $s = 0,1,\dots,n_1+n_2$-re felirva szolgáltat egy egyenletrendszert. A /7.10/-et felirva az $l=0,1,\dots,n_j$; $i,j=1,2$, $j\neq i$ imdexértékek mellett n_1+n_2 egyenletrendszert kapunk.

Másrészt /7.9/ jobboldala [1] és [2]-ben tárgyaltak szerint a $p_{i,l}$ valószinüség numerikus sorának egy részletösszegét adja és igy a /7.10/-ből kapott n_1+n_2 darab együtthatórendszer segitségével felirt

$$\sum_{m=0}^{n_2-1} a_{i,m}^{(l)} p_{1,m} + \sum_{m=0}^{n_1-1} b_{i,m}^{(l)} p_{2,m} + c_i^{(l)} = p_{i,l}$$

egyenletrendszer szolgáltatja a keresett $p_{1,m}$ $m=0,1,\dots,n_2$; $p_{2,m}$, $m = 0,1,\dots,n_1$ valószinüségek numerikus értékeit. A további $p_{1,m}$, $n_2 \leq m \leq m_0$; $p_{2,m}$, $n_1 \leq m < m_0$ valószinüség értékeket pedig a /7.9/ jobboldalából a megfelelő $l \geq n_i$ indexek mellett kapjuk.

A /7.10/ egyenletrendszer mátrixa minden l-re ugyanaz, éspedig az s-edik sorában rendre a $q_{1,m}^{(s)}$, $m = 0,1,\dots,n_2-1$; $q_{2,m}^{(s)}$, $m = 0,1,\dots,n_1-1$

számok állnak, a sor utolsó eleme pedig 1. A $q_{i,m}^{(s)}$ kiindulási adatok megválasztásánál ügyelni kell arra, hogy a /7.10/ rendszer mátrixa ne legyen szinguláris, másrészt hogy $\sum_{i,m} q_{i,m}^{(s)} \leq 1$ teljesüljön.

Numerikus számolásokat rögzitett $a_1=a_2=.1$, $\lambda_1=\lambda_2=1$ és változtatott $\nu_1=\nu_2$ mellett végeztünk $n_1=1,2,3$, $n_2=1,2,3$ paraméterértékekkel. Néhány eredményt közlünk az alábbi 2. táblázatban (számolásainkban a /7.9/-ben szereplő m_o-at 6-nak választottuk).

$n_1=n_2=1$

$\nu_1=\nu_2$	.5	.8	1	2	5	10
$p_{1,0}=p_{2,0}$	.3067	.3405	.3521	.3758	.3903	.3951
$p_{1,1}=p_{2,1}$	.0675	.0576	.0542	.0466	.0419	.0406
$p_{1,2}=p_{2,2}$	.0191	.0174	.0157	.0134	.0119	.0107
			$n_1=n_2=2$			
$p_{1,0}=p_{2,0}$	.1425	.1591	.1642	.1743	.1800	.1816
$p_{1,1}=p_{2,1}$	.1374	.1304	.1290	.1261	.1251	.1252
$p_{1,2}=p_{2,2}$	.0193	.0321	.0313	.0306	.299	.0289

2. táblázat

Megjegyzések

A stacionárius állapot valószinüségeket a VI. pontban az átmenet-valószinüség mátrixból iterációval, a VII. pontban pedig generátor-függvények segitségével határoztuk meg. A kétféleképpen számolt eredmények $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $n_1 = n_2 = 1, 2$-re a negyedik tizedes jegyig megegyeznek.

A VII. pontban ismertetett módszer használhatósága a ν_1 és ν_2 csökkenésével romlik, ezért $\nu_1 < 0.5$ $\nu_2 < 0.5$ esetekre kapott számolások eredményei pontatlanok. Viszont ν_1 és ν_2 növelésével a rendszer közeledik az átkapcsolás nélkül müködő kiszolgáló rendszerhez. A $\nu_1 \to \infty$, $\nu_2 \to \infty$ -re kapott határértékek megegyeznek az Erlang modellel számolható megfelelő valószinüségekkel.

Az 1. táblázatból láthatóan a $\nu_1 = \nu_2$ csökkenésével a különböző állapotból kiinduló számolások, továbbá a két módszer eredményei egyre nagyobb eltérést mutatnak. Ennek oka az, hogy a véges állapottérre való redukálásnál egyre nagyobb hibát követünk el.

A cikkhez kapcsolódó numerikus számolások az Ural-2 tipusu elektronikus számológéppel történtek. A számolások jelentős részét Koszó Gábor végezte.

Irodalom:

[1] Gergely József: Egy sorbanállási feladat megoldása, MTA Számitástechnikai Központ Közlemények 2. /1967/ 3-25.

[2] - : Szisztema abszluzsivanyija sz perekljucsenyiem, Megjelenik a "Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica" folyóiratban.

[3] - : Fél-Markov folyamatok vezérlése, MTA Számitástechnikai Központ Közlemények 3. /1967/ 68-84

Summary

The paper discusses the optimization of the queuing model dealt with in [1] and [2].

Two sorts of customers arrive to the serving system according the Poisson process. The device must switch over if it serves after a unit of one type a unit of another type. The times of service and switching are independent. Switching tekes only place if units of one type in the system have been fully served and there is of the other type queuing surpassing a certain threshold value. Let these threshold values be n_1 and n_2. The effectiveness of the system is characterized by the waiting time for the time unit. The optimal n_1 and n_2 with the minimum waiting time is to be found.

A semi-Markovian process takes place in the system. The probabilities of transition, the times of transition and waiting are computed. The computation of stationary probabilities are discussed. The optimum is defined by a method described in [3]. Some numerical results are given is case of exponential distributions.

Szelezsán János:

Egy disztribuciós paraméteres optimalizálási feladat megoldása

Tegyük fel, hogy a rendszer viselkedését olyan kétváltozós $u(x,t)$ függvény irja le, amelyet Volterra tipusu operátorral

$$u(x,t) = Kf = \int_0^t K(x,t,s)\, f(s)ds \qquad /1/$$

alakban állithatunk elő. Vegyük ugy, hogy $f(s)$ a vezérlőfüggvény; e függvény hatására a rendszer a K operátor által meghatározott állapotba jut.

Ismeretes, hogy 1/ alaku például az

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$u(x,o) = 0$$

$$u(o,t) = f(t) \qquad 0 \leq t \leq T,$$

hővezetés differenciálegyenletének megoldása t.i. itt

$$u(x,t) = \int_0^t K(x,t-s)\, f(s)ds$$

$$K(x,t-s) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-s)}} (t-s)^{-3/2}$$

Ebben az esetben azt mondhatjuk, hogy a folyamatot a tartomány határán vezéreljük.

Legyen $g(t)>0$ egy adott $g \in L_2$ függvény. Legyen $x_0 > 0$ adott pont.

Tekintsük a

$$J(f) = \int_0^T \left[g+u\,(x_0,t)\right]^2 dt \qquad 2/$$

funkcionált, ahol T adott szám.

Jelöljük $u(x_0,t)$-t Af-vel. Ekkor a 2/ funkcionál alakja

$$J(f) = (Af+g,\ Af+g)$$

ahol $(\ ,)$ a skalárszorzat jele.

Legyen F a következő függvényhalmaz:

$$F = \Big\{ f(t): \quad \begin{array}{l} 1/\ f(t) \text{ szakaszonként folytonos } [0,T] \text{-ben} \\[2ex] 2/\ \int_0^T f(t)r(t)dt = q \\[2ex] 3/\ 0 \le a(t) \le f(t) \le b(t) \end{array}$$

ahol $a(t) < b(t)$ $t \in [0,T]$ tetszőleges integrálható függvények, $r(t) > 0$ szigoruan monoton növekvő, absz.f., q pedig adott konstans, melyre

$$\int_0^T a(t)r(t)dt < q < \int_0^T b(t)r(t)dt \ . \Big\}$$

Feladat: Keressük meg az F halmaznak azt az f^* elemét, amelyre a $J(f)$ funkcionál minimumot vesz fel.

Tétel: Tegyük fel, hogy $K(x_0,s,t) \ge 0$, és t-ben monoton csökken.

Akkor a feladat egyetlen megoldása

$$f^{(\xi)}(t) = \begin{cases} a(t) & \text{ha } 0 \le t \le \xi \\ b(t) & \text{ha } \xi < t \le T \end{cases}$$

ahol ξ az

$$\int_0^T f^{(\xi)}(t)r(t)dt = q$$

egyenlet gyöke.

Bizonyitás:

Először megmutatjuk, hogy az

$$F(\xi) = \int_0^T f^{(\xi)}(t)r(t)dt = q$$

egyenletnek egyetlen valós gyöke van.

Ugyanis majdnem mindenütt

$$\frac{dF}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\left(\int_0^T r(t)f^{(\xi)}(t)dt = \frac{d}{d\xi}\left[\int_0^\xi b(t)r(t)dt + \right.\right.$$

$$+ \left.\int_\xi^T a(t)r(t)dt\right] = r(\xi)\left[b(\xi) - a(\xi)\right] > 0$$

$$0 \leq \xi < T$$

vagyis $F(\xi)$ szig. monoton növekvő. Világos, hogy $F(\xi)$ folytonos is. Mivel ezenkivül

$$F(0) = \int_0^T a(t)r(t)dt < q < \int_0^T b(t)r(t)dt = F(T)$$

ezért egyetlen ξ valós gyöke van a $(0,T)$ intervallumban az $F(\xi) = q$ egyenletnek.

Most megmutatjuk, hogy $f^{(\xi)}(t)$ optimális megoldás.

Mindenekelőtt világos, hogy $f^{(\xi)}(t)$ megengedett megoldás, azaz $f^{(\xi)}(t) \in F$.

Ugyanis $a(t) \leq f^{(\xi)}(t) \leq b(t)$, és $\int_0^T f^{(\xi)}(t) r(t) dt = q$.

Most megmutatjuk, hogy $f^{(\xi)}(t)$ minimalizálja a /3/ funkcionált. Funkcionálunkat a következőképpen alakithatjuk át:

$$J(f) = (Af, Af) - 2(Af, g) + (g, g) =$$

$$= (A^* Af, f) - 2(f, A^* g) + (g, g)$$

(itt A^* az A operátor adjungáltját jelenti.)

Az $A^* A = B$, $-2A^* g = h$ jelöléssel

$$J(f) = (Bf, f) + (h, f) + (g, g).$$

A $(g.g)$ szorzat elhagyható, igy a továbbiakban elegendő a

$$J^{(1)}(f) = (Bf, f) + (h, f)$$

funkcionált vizsgálni.

A "duális" funkcionál

Az eredeti feladatot ugy oldjuk meg, hogy megszerkesztünk egy "duális" lineáris funkcionált.

Tétel:

Az $f^* \in F$ elem akkor és csak akkor minimalizálja $J^{(1)}(f)$ funkcionált, ha minimalizálja (az F halmazon) a

$$J^{(2)}(f) = (2Bf^{*} + h, f)$$

"lineáris" funkcionált.

Bizonyitás:

A bizonyitásban ugyanazt a módszert alkalmazzuk, amit [3]-ben alkalmaztunk.

Tegyük fel, hogy f^{*} minimalizálja a $J^{(1)}(f)$ funkcionált az F halmazon. Legyen $f \in F$ egy f^{*}-tól különböző elem. Vegyük az

$$f_\lambda = (1-\lambda)f^{*} + \lambda f \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

függvényt.

Az F halmaz konvex. Ugyanis, ha $f_1 \in F$ és $f_2 \in F$, akkor

1. $\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2$ szintén szakaszonként folytonos

2. $$\int_\alpha^\beta [(\lambda f_1(t) + (1-\lambda) f_2(t)) r(t)] dt$$

$$= \lambda \int_\alpha^\beta r(t) f_1(t)\, dt + (1-\lambda) \int_\alpha^\beta r(t) f_2(t)\, dt =$$

$$= \lambda q + (1-\lambda) q = q$$

3. $$a(t) = \lambda a(t) + (1-\lambda) a(t) \leq$$

$$\leq \lambda f_1(t) + (1-\lambda) f_2(t) \leq \lambda b(t) + (1-\lambda) b(t) = b(t).$$

Ez viszont azt jelenti, hogy $f_\lambda(t) \in F$.

Tekintsük a

$$\varphi(\lambda) = J^{(1)}(f_\lambda) = (B[(1-\lambda)f^* + \lambda f)], (1-\lambda)f^* + \lambda f) + \\ + (h, (1-\lambda)f^* + \lambda f)$$

funkcionált mint a λ változó függvényét. A szorzásokat elvégezve $\varphi(\lambda)$ a következő alakban is felirható:

$$\varphi(\lambda) = J^{(1)}(f^*) + (2Bf^* + h, f - f^*)\lambda + \\ + (B(f-f^*), f-f^*)\lambda^2$$

A $\varphi(\lambda)$ függvény a $0 \leq \lambda \leq 1$ intervallumban a feltétel szerint $\lambda = o$ mellett vesz fel minimumot, mert a feltevés szerint $f^* \in F$ optimális megoldás.

Ezért

$$0 \leq \varphi'(0) = (2Bf^* + h, f - f^*) \qquad /4/$$

De mivel $(Bf,f) = (A^* Af,f) = (Af,Af) > 0$, ezért

$$J(f^*) = \varphi(o) < \varphi(1) = J(f).$$

Ez viszont /4/ alapján azt jelenti, hogy f^* az egyetlen olyan F-beli elem, amelyre

$$(2Bf^* + h, f^*) \leq (2Bf^* + h, f).$$

De ez éppen azt jelenti, hogy f^* minimalizálja a $(2Bf^* + h, f)$ lineáris funkcionált.

Most az elegendőséget bizonyitjuk.

Tegyük fel tehát, hogy $f^* \in F$ minimalizálja a $(2Bf^* + h, f)$ funkcionált, azaz

$(2Bf^* + h, f-f^*) \geq 0$, ahol $f \in F$ tetszőleges megengedett függvény.

A $J^{(1)}(\varphi)$ funkcionálra felirhatjuk a következőket:

$$J^{(1)}(f^*+z) = (B(f^*+z), f^*+z) + (f^*+z, h) =$$
$$= J^{(1)}(f^*) + (2Bf^*+h, z) + (Bz, z)$$

Legyen $z = f-f^*$.

Ekkor:

$$J^{(1)}(f) = J^{(1)}(f^*) + (2Bf^*+h,\ f-f^*) + (B(f^*-f),\ f^*-f).$$

Viszont a feltevés szerint $(2Bf^* + h,\ f-f^*) \geq 0$ és $(B(f-f^*),\ f-f^*) > 0$, ezért fennáll az

$$J^{(1)}(f) - J^{(1)}(f^*) > 0$$

azaz

$$J^{(1)}(f) > J^{(1)}(f^*)$$

egyenlőtlenség.

Ezzel tételünket bizonyitottuk.

Az 1. tételt a fenti tétel felhasználásával bizonyitjuk.

Vezessük be a

$$\mathcal{H}(t) = 2Bf^* + h$$

jelölést.

Irjuk ki $\mathcal{H}(t)$ jelentését.

$$\mathcal{H}(t) = 2A^{*}Af^{*} + 2A^{*}g = 2A^{*}(Af^{*} + g) =$$

$$= 2 \int_{t}^{T} K(x_0,s,t) \left[\int_{0}^{s} K(x_0,s,\tau)\, f^{*}(\tau)\, d\tau + g(s) \right] ds$$

Mivel a feltevés szerint $K(x_0,s,t) \geq o$, $g(s) \geq o$ $f^{*}(\tau) \geq o$; $(o \leq s \leq T,\ o \leq t \leq T,\ o \leq \tau \leq T)$, ezért $\mathcal{H}(t) > o$; $(o \leq t < T)$ és $\mathcal{H}(t)$ monoton csökken.

Most megmutatjuk, hogy $f^{(\xi)}(t)$ optimális megoldás.

Az előbbi tétel értelmében a $J^{(1)}(f)$ funkcionál helyett elegendő az

$$\mathcal{L}(f) = (2Bf^{*} + h, f) = (\mathcal{H}, f)$$

lineáris funkcionált minimalizálni az F halmazon, ahol $f^{*} = f^{(\xi)}$ az eredeti feladat optimális megoldása.

Tegyük fel, hogy létezik olyan $f^{o}(t) \in F$ függvény, melyre

$$\mathcal{L}(f^{o}) \leq \mathcal{L}(f^{(\xi)})$$

azaz

$$(\mathcal{H}, f^{o}) \leq (\mathcal{H}, f^{(\xi)})$$

vagyis, kiirva a skalárszorzat jelentését és rendezve

$$o \leq \int_{0}^{T} \mathcal{H}(t) \left[f^{(\xi)}(t) - f^{o}(t) \right] dt \qquad 4/$$

Megmutatjuk, hogy $f^{o}(t) = f^{(\xi)}(t)$.

A 4/ egyenlőtlenséget

$$o \leq \int_0^{\xi} \mathcal{H}(t)\left[a(t) - f^o(t)\right] dt + \int_{\xi}^{T} \mathcal{H}(t)\left[b(t) - f^{(o)}(t)\right] dt$$

azaz

$$\int_0^{\xi} \mathcal{H}(t)\left[f^o(t) - a(t)\right] dt \leq \int_{\xi}^{T} \mathcal{H}(t)\left[b(t) - f^o(t)\right] dt$$

alakban is felirhatjuk.

Alkalmazzuk a fenti egyenlőtlenség mindkét oldalára a középértéktételt, azt kapjuk, hogy bizonyos $o \leq \xi_1 \leq \xi$, $o \leq \xi_2 \leq T$ mellett

$$\mathcal{H}(o)\int_0^{\xi_1} (f^o(t) - a(t))dt + \mathcal{H}(\xi)\int_{\xi_1}^{\xi} (f^o(t) - a(t))dt \leq$$

$$\leq \mathcal{H}(\xi)\int_{\xi}^{\xi_2}\left[b(t) - f^o(t)\right] dt + \mathcal{H}(T)\int_{\xi_2}^{T}\left[b(t) - f^o(t)\right] dt$$

Mivel $\mathcal{H}(t) \geq o$ monoton csökken és $f^o(t) - a(t) \geq o$ $b(t) - f^o(t) \geq 0$ ezért

$$\mathcal{H}(\xi)\int_0^{\xi}\left[f^o(t) - a(t)\right] dt \leq \mathcal{H}(\xi)\int_{\xi}^{T}\left[b(t) - f^o(t)\right] dt$$

azaz

$$\int_0^{\xi}\left[f^o(t) - a(t)\right] dt \le \int_{\xi}^{T}\left[b(t) - f^o(t)\right] dt$$

vagyis

$$o \le \int_0^{\xi}\left[a(t) - f^o(t)\right] dt + \int_{\xi}^{T}\left[b(t) - f^o(t)\right] dt =$$

$$= \int_0^{T}\left[f^{(\xi)}(t) - f^o(t)\right] dt \qquad 5/$$

Mivel $a(t) - f^o(t) \le o$, azaz $\int_0^{\xi}\left[a(t) - f^o(t)\right] dt \le o$

és $b(t) - f^o(t) \ge o$ azaz $\int_{\xi}^{T}\left[b(t) - f^o(t)\right] dt \ge o$

ezért

$$\int_t^{T}\left[f^{(\xi)}(\tau) - f^o(\tau)\right] d\tau \ge o \qquad 6/$$

Ebből azonban következik, hogy

$$f^{(\xi)}(t) \equiv f^o(t).$$

Ugyanis $f^{(\xi)}(t)$ és $f^o(t)$ is megengedett megoldás, ezért

$$\int_0^{T}\left[(f\ \ (t) - f^o(t)\right] r(t)dt = o$$

Integráljunk a fenti integrálban parciálisan, azt kapjuk, hogy

$$r(o)\int_{o}^{T}\left[f^{(\xi)}(t)-f^{o}(t)\right]dt+\int_{o}^{T}\left[\frac{dr}{dt}\left(\int_{t}^{T}\left[f^{(\xi)}(s)-f^{o}(s)\right]ds\right]dt=o \qquad 7/$$

Mivel a feltétel szerint $r(o)>o$ és $\frac{dr}{dt}>o$ ezért felhasználva az 5/ és 6/ egyenlőséget azt kapjuk, hogy 7/ csak ugy teljesülhet, ha $f^{(\xi)}(t)\equiv f^{o}(t)$.

Ezzel állitásunkat bebizonyitottuk.

Irodalom:

[1] . R.E.Bellman, I.Glicksberg, O.A.Gross: Some aspects of the mathematival theory of control processes (Rand Corporation Santa Monica, 1958).

[2] A.G.Butkovszkij: Torija optimalnovo upravlenija szisztemami sz raszpregelitelnimi parametrami (Moszkva, 1965)

[3] Szelezsán János: Optimális vezérlés parabolikus differenciálegyenlet peremfeltételeivel. (MTA Számitástechnikai Központja Tájékoztató 10. 96. old.)

Summary

Solution of an Optimal Control Problem in a Distributed-Parameter System

Szelezsán János

Let us assume that the behaviour of the system is described by a state function $u(x,t)$ wich can be expressed as

$$u(x,t) = Kf = \int_0^t K(x,t,s)\, f(s)\, ds, \text{ where } K(x,t,s) \geq 0$$

$$\frac{\partial K(x,t,s)}{\partial s} < 0$$

Let us assume that $f(s)$ is the control function.

Let $g(t) > 0$ be given function.

Let us consider the functional:

$$J(f) = \int_0^T \left[g(t) + u(x_0,t)\right]^2 dt$$

Let F be the following control function set.

$$F = \Big\{ f(t) : \quad 1. \quad \text{pice-wise continuous}$$

$$2. \int_0^T f(t)\, r(t)\, dt = q$$

where $r(t) > o$ is monotonously increasing, q a given constant

3. $o \leq a(t) \leq f(t) \leq b(t)$; $a(t) < b(t)$

<u>Problem:</u> It is required to minimize $J(f)$ subject to the constraint $f \in F$

<u>Theorem:</u> The solution of the problem is

$$f^{(\xi)}(t) = \begin{cases} a(t) & \text{if } \alpha \leq t \leq \xi \\ b(t) & \text{if } \xi < t \leq \beta \end{cases}$$

where ξ is the root of the equation

$$\int_o^T f^{(\xi)}(t)\, r(t)\, dt = q$$

Elektrosztatikus és stacionárius elektromágneses tér alapegyenleteinek megoldása elektronikus számológéppel

Renner Gábor

Bevezetés

A villamosságtan stacionárius téregyenleteinek megoldása zárt alakban többnyire csak egyszerübb elrendezések és határfeltételek esetén sikerül. Ezért konkrét problémák megoldására már régebben kidolgoztak olyan matematikai módszereket (analitikus és numerikus közelitő módszerek), amelyek jóval általánosabb feltételek mellett lehetővé teszik a téregyenletek megoldását, a térjellemzők meghatározását. Ezek a módszerek sok esetben igen nagy mennyiségü számolási munkát követelnek, ezért kiterjedt alkalmazásuk a nagysebességü elektronikus számológépek megjelenésével vált időszerüvé.

Az MTA Számitástechnikai Központjában 1967. nyarán elkészült diplomaterv foglalkozik a számológépi térszámitásra leginkább szóbajövő matematikai módszerekkel. Tárgyalja a potenciálfüggvény sorfejtését, mint analitikus eljárást, valamint a differenciálegyenletek módszerét; ezen belül az egyenletrendszer két megoldási lehetőségét. (Iteráció és Monte-Carló módszer.) A diplomatervben megtalálható ezen módszerek alkalmazása, konkrét probléma megoldására.

1. A térszámitás alapjai

Stacionárius és sztatikus villamosterek potenciál-elosztásának meghatározására a Maxwell egyenletekből adódó

$$\Delta U = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \qquad /1/$$

Laplace-Poisson egyenlet szolgál. Ha a potenciáleloszlás a tér olyan részében keresendő, ahol a töltéssürüség: $\varrho(x,y,z) = 0$ akkor a Laplace-Poisson egyenlet az egyszerübb

$$\Delta U = 0 \qquad /2/$$

Laplace-egyenletre egyszerüsödik. Fenti egyenletek hely szerint nem változó dielektromos állandóra (ε) érvényesek.

Az /1/, /2/ parciális differenciálegyenletek megoldásához a töltéssürüségen kivül a peremfeltételeket is meg kell adni. Ezek matematikai szempontból a következők lehetnek.

1./ Zárt tartomány határán a potenciálnak előirt értékét kell felvenni. (Dirichlet probléma.) Ez az eset áll elő, ha meghatározott potenciálra kötött elektródák terét kell meghatározni.

2./ A szóbanforgó tartomány határán a térerősség normális irányu komponense, azaz $E_n = -\frac{\partial U}{\partial n}$ adott, például töréstörvényekből adódó határfeltételek esetén. (Neumann probléma.)

3./ Előfordulhat természetesen, hogy mind 1./, mind 2./ tipusu határfeltételek szerepelnek a peremfeltételek között.

A fenti differenciálegyenleteket kielégitő függvények közül sokat ismerünk, azonban az előirt peremfeltételek érvényesitése általában nehéz feladat. A peremfeltételeknél is többnyire nem U, vagy $\frac{\partial U}{\partial n}$ tetszőleges változása, hanem a perem szabálytalan alakja okoz nehézséget. Ezért számológépi alkalmazás szempontjából is elsősorban azok a módszerek jöhetnek számitásba, amelyek a tartomány alakjára vonatkozóan tág lehetőségeket biztositanak.

Áramok mágneses terét általában nem jellemezhetjük skalár potenciállal, mert a $\bar{H}$ mágneses térerősség rotációja nem azonosan zérus. De megadhatunk egy $\bar{A}$ vektorpotenciált, melynek rotációja a mágneses indukcióvektort adja: $\bar{B} = \mathrm{rot}\bar{A}$. Ezen vektorpotenciál kiszámitására a Maxwell egyenletek alapján $\mathrm{div}\,\bar{A} = 0$ választással a $\Delta\bar{A} = -\mu\bar{J}$ egyenletet kapjuk. Descartes koordinátákra kiirva: $\Delta A_x = -\mu J_x$, $\Delta A_y = -\mu J_y$ $\Delta A_z = -\mu J_z$ vagyis az $\bar{A}$ vektorpotenciál mindhárom komponense Laplace-Poisson egyenleteket elégit ki.

Ha a térszerkezet a térnek csak áramvezetőktől mentes részében érdekes, a mágneses térerősség egy egyszeresen összefüggő térrészben levezethető az U_m ciklikus mágneses potenciálból: $\bar{A} = -\mathrm{grad}\,U_m$. Ezen mágneses potenciál meghatározására a $\Delta U_m = 0$ Laplace egyenlet adódik.

Mindezek az egyenletek csak térben állandó és az indukciótól független mágneses permeabilitás (μ) feltételezésével igazak, igy a gyakorlatban előforduló inhomogén és ferromágneses anyagokat tartalmazó terekben átalakitásra szorulnak. A diplomaterv tárgyalja a potenciálegyenletek alakját hely függvényében változó permeabilitás esetén $/\mu=\mu(\bar{r})/$ és számitási módszert ad az indukciótól függő permeabilitás figyelembevételére is.

2. Megoldás sorbafejtés segitségével

A térszámitási problémák nagy csoportja megoldható, ha sikerül a határgörbe menti potenciálváltozást olyan függvények szerint haladó sorba fejteni, melyek

1. ortogonális függvényrendszert alkotnak
2. megoldásai a Laplace egyenletnek.

Nevezetesen szeparációval a Laplace egyenlet következő általános megoldásaihoz juthatunk ([1]).

Descartes koordináták esetén:

$$U(xyz)=\sum_k \prod_{i=1}^{3}\left(A_{ki}\,e^{\sqrt{k_i}\,x}+B_{ki}\,e^{-\sqrt{k_i}\,x}\right) \qquad /3/$$

$$k_1+k_2+k_3=0$$

A k szeparációs állandók előjelétől függően az exponenciális függvények átmennek hiperbólikus, illetve trigonometrikus függvényekbe.

Hengerkoordináták esetén:

$$U(r\varphi z)=\sum_k \sum_m \left[A_{km}J_m+B_{km}N_m\right]\left[A_m\sin m\varphi+B_m\cos m\varphi\right]\cdot \qquad /4/$$

$$\cdot\left[A_k e^{kz}+B_k e^{-kz}\right]$$

ahol $J_m(kr)$ és $N_m(kr)$ az m-edrendü Bessel illetve Neumann függvények. Itt k valós vagy képzetes voltától függ, hogy az exponenciális függvények milyen függvényekbe mennek át. Gömbkoordináták esetén:

$$U(r\varphi\vartheta) = \sum_k \sum_m [A_k r^k + \frac{B_k}{r^{k+1}}][A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi]\, P_k^m(\cos\vartheta) \qquad /5/$$

Itt $P_k^m(\cos\vartheta)$ a k-adrendü kapcsolt Legendre függvény. Sok esetben k és m értékei folytonosan oszlanak el, és ekkor a szummákat mindenütt integrálok helyettesitik.

A módszer használata akkor előnyös, ha koordinátafelületek határolják a vizsgált térrészt, és - a határfeltételt jelentő - potenciálváltozás ezek mentén adott. Ekkor a peremfelület paraméterét a /3/, /4/ és /5/ egyenletekbe helyettesitve, a potenciálváltozást a megmaradó változókhoz tartozó függvények szerint kapjuk sorbafejtve (Trigonometrikus sor, Bessel függvények, felületi gömbfüggvények szerinti sor). Ha az előirt potenciálváltozást is sikerül e függvények szerint sorbafejtett alakban előállitani, akkor együttható összehasonlitással a /3/, /4/ és /5/ egyenletek eddig ismeretlen A_k, B_k együtthatói meghatározhatók.

Számológépre alkalmazva ezt a módszert mindenekelőtt szükség van olyan szubrutinra, amely az itt szereplő függvények értékeit bármely helyen kiszámitja. Trigonometrikus függvényeket számoló szubrutinok rendszerint minden számológépnél megtalálhatók, a Bessel és gömbfüggvényekre pedig el kell késziteni ezeket, ha nem szerepelnek a számológép szubrutin könyvtárában. A diplomaterv speciális részében hengerszimmetrikus térszámitási probléma kidolgozása szerepel; igy itt a Bessel függvény helyettesitési értékeit kiszámitó szubrutin is megtalálható. A függvényértékeket konvergens hatványsor segitségével, nagy változók esetén a Poincaré féle semikonvergens sorral lehet kiszámitani, előre megadható maximális hibával.

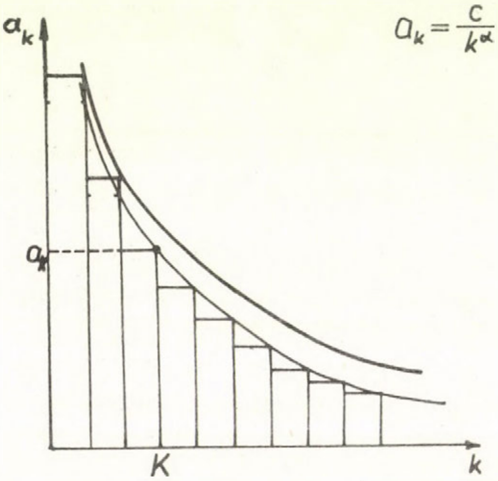
Előzőek szerint a számológéppel végrehajtandó müveletek a következők:

a./ A határon adott potenciálváltozást leiró függvény sorbafejtése a fenti függvények szerint. Digitális számológépek esetében az is megfelelő, ha diszkrét adatok állnak rendelkezésre, például mérési eredmények formájában. Maga a sorfejtés integrálok kiszámitását kivánja meg, ami valamilyen numerikus (trapéz, Simpson, Monte-Carló stb.) módszer segitségével történhet.

b./ A_k, B_k együtthatók kiszámitása együtthatóösszehasonlitással, ami egyszerü aritmetikai müveletek elvégzését teszi szükségessé.

c./ A kapott eredmény kiértékelése. Mivel a végeredmény is végtelen sor alakjában adódik, numerikus eredményt ugy kaphatunk, hogy e sor egy részletösszegét tekintjük.

Az összegezést célszerüen egy ciklikus program fogja végezni. A ciklus lehet kötött hosszu; ez esetben előre ki kell számitani maradékbecslő formulák segitségével, hogy az adott pontosság eléréséhez hány tagot kell figyelembe venni. De a ciklus hosszát a ciklusban szereplő eredmény (részletösszeg, maradék) értékétől is függővé tehetjük. Adott pontosság eléréséhez szükséges összeadandó tagok száma megállapitható, ha tudjuk, hogy a sor tagjai legalább milyen rendben csökkennek, azaz mennyi az $\alpha > 1$ kitevő maximális értéke, hogy



$$a_k = \frac{C}{k^{\alpha}} \quad ; \quad \text{ha} \quad k \geq K \qquad /6/$$

A C állandót ugy kell megválasztani, hogy $k = K$ esetén a lépcsős, és a folytonos görbe egybeessen, vagyis /6/ szerint:

$$a_K = \frac{C}{K^{\alpha}}$$

$$C = a_K K^{\alpha}$$

Az első K tag összeadása után a hiba (ε) az elhagyott tagok összege, ami a lépcsős függvény görbe alatti területével egyezik meg. Ez biztosan kisebb, mint a folytonos görbe alatti terület:

$$\varepsilon < \int_K^{\infty} \frac{C}{x^{\alpha}} dx = \int_K^{\infty} \frac{a_K K^{\alpha}}{x^{\alpha}} dx = \frac{a_K K^{\alpha}}{-\alpha+1} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_K^{\infty}$$

$$\varepsilon < \frac{a_K K^{\alpha}}{(\alpha-1) K^{(\alpha-1)}} \qquad /7/$$

Jelen esetben tehát a lépcsős és a folytonos függvényt a még éppen összeadott tagnál illesztettük. Ez a hibára a valóságoshoz közelebb eső értéket ad, mintha az illesztés egy rögzitett helyen (pl. az első tagnál) történne. (Lásd az ábrát.)

Az eljárás jól használható pozitiv tagu sorok esetén. Váltakozó előjelü soroknál - mivel a lépcsős görbe területei előjelesem adódnak össze, - a /7/ kifejezés rossz becslést ad.

3. Differenciálegyenletek módszere

Az előző módszer alkalmazásakor komoly megkötést jelent, hogy többnyire csak akkor kivitelezhető a számitás, ha a peremfelületek a megfelelően választott koordinátarendszer koordinátafelületeivel esnek egybe. Jóval nagyobb szabadsággal rendelkezünk a peremek alakjára vonatkozóan a véges differencia egyenletek használatakor. Mivel a határmenti potenciáleloszlást csak diszkrét pontokban kell ismerni, az ezt leiró függvény igen általános lehet. Ugyanez vonatkozik a Poisson egyenletben a töltéselosztást leiró függvényre is.

a./ A differencia egyenletek felirása.

A differencia egyenletek felirására először elkészitjük a vizsgált tartomány koordinátavonalakból, illetve koordinátafelületekből álló beosztását. (A probléma természetéhez igazodó koordinátarendszer használata jelen esetben is előnyös.) Igy a tartomány belsejében és határán metszéspontokat kapunk. A differenciálegyenletet ezen pontokban felirt differencia egyenletekkel helyettesitjük.

A különböző koordinátarendszerekben felirt Laplace kifejezés a potenciálfüggvény első és második deriváltjait, valamint a változók különböző függvényeit tartalmazza. A differenciáloperációkat helyettesitjük olyan differenciakifejezésekkel, amelyek a függvény értékeit tartalmazzák a környező pontok valamelyikében (lásd 3). Igy Δu-ra a következő kifejezéseket kapjuk:

Descartes koordináták esetén:

$$\begin{aligned} \Delta u \cong & \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[u(x+\Delta x, y, z) - 2u(x,y,z) + u(x-\Delta x, y, z)\right] + \\ & + \frac{1}{(\Delta y)^2}\left[u(x, y+\Delta y, z) - 2u(xyz) + u(x, y-\Delta y, z)\right] + \\ & + \frac{1}{(\Delta z)^2}\left[u(x, y, z+\Delta z) - 2u(xyz) + u(x, y, z-\Delta z)\right] \end{aligned} \qquad /8/$$

Hengerkoordináták esetén:

$$\begin{aligned} \Delta u \cong & \frac{1}{(\Delta r)^2}\left[u(r+\Delta r, \varphi, z) + u(r-\Delta r, \varphi, z) - 2u(r, \varphi, z)\right] + \\ & + \frac{1}{2r\cdot(\Delta r)}\left[u(r+\Delta r, \varphi, z) - u(r-\Delta r, \varphi, z)\right] + \\ & + \frac{1}{r^2(\Delta\varphi)^2}\left[u(r, \varphi+\Delta\varphi, z) - 2u(r,\varphi,z) + u(r, \varphi-\Delta\varphi, z)\right] + \\ & + \frac{1}{(\Delta z)^2}\left[u(r, \varphi, z+\Delta z) - 2u(r,\varphi,z) + u(r, \varphi, z-\Delta z)\right] \end{aligned} \qquad /9/$$

Mivel azonban $\Delta u = o$ illetve Poisson egyenletnél $\Delta u = f$; a /8/ és /9/ egyenlet alapján összefüggést kapunk u rácspontbeli, és az ezt körülvevő pontokban felvett értékei között. A /8/ és /9/ kifejezésben Δu-t a potenciálfüggvény rácspontban és az azt körülvevő pontokban felvett értékeivel fejeztük ki. A diplomaterv tárgyalja Δu pontosabb felirásait is, távolabbi pontok potenciáljainak figyelembevételével.

Javithatjuk a pontosságot ugy is, hogy a /8/ és /9/ egyenletek jobboldalán álló - u értékeit diszkrét pontokban tartalmazó - kifejezést (u_p^*) a vizsgált P pontbeli Laplace-operált egy függvényének tekintjük:

$$u_p^* = F(\Delta u_p) \qquad /10/$$

(/8/ és /9/ esetén $u_p^* = \Delta u_p$)

Mivel a Laplace egyenlet szerint $\Delta u_p = 0$; következik, hogy

$$u_p^* = F(0) \qquad /11/$$

illetve Poisson egyenletnél $\Delta u_p = f_p$; igy

$$u_p^* = F(f_p) \qquad /12/$$

Az F függvény konkrét alakja, és igy /11/ és /12/ részletes felirása a diplomatervben szerepel.

Végeredményben az eddigi egyenleteket minden csomópontra felirva lineáris egyenletrendszert kapunk, melyben a csomóponti potenciálértékek az ismeretlenek.

b./ Határfeltételek érvényesitése

Legegyszerübb a peremfeltételeket kielégiteni, ha ugy sikerül felvenni a hálót, hogy a peremgörbe rácspontokon halad keresztül. Ez esetben a peremhez tartozó csomópontok potenciáljai az egyenletekben mint ismert mennyiségek szerepelnek. (Dirichlet probléma.)

Át kell alakitani azonban a /8/, /9/ kifejezéseket, ha a határgörbe metszi a látó vonalait, és ha $\frac{\partial u}{\partial n}$ kerületmenti értékei adottak (ld. a dolgozatot).

c./ Egyenletrendszer megoldása

Igen általános feltételek mellett bebizonyitható (lásd [3]), hogy az emlitett módon felirt egyenletrendszernek létezik egyetlen megoldása. Ennek megtalálása azonban számitástechnikailag nehézséget jelent. Ugyanis a pontosság fokozása érdekében a rácstávolságot célszerü minél kisebbre választani (az elkövetett hiba h magasabb hatványaival - 2,4,6, - arányos), ami a rácspontok növekedését jelenti. De ezt követeli a határgörbe jó megközelitése is. Igy végeredményben az ismeretlenek száma nagyon megszaporodik, nemritkán eléri az ezres nagyságrendet.

Ha a tartomány nagyon egyszerü (négyzet, téglalap) az egyenletrendszer együtthatómátrixa szimmetrikus és ez lehetővé teheti - a specialitást kihasználva - nagy ismeretlen-szám esetén is a szimultán egyenletmegoldást. Igy viszont éppen a módszer legnagyobb előnyét - hogy a határgörbe alakja tetszőleges lehet - nem tudjuk kihasználni.

Ezért szinte valamennyi gyakorlatilag szóbajövő esetben az egyenletrendszer megoldására iterációs módszereket célszerü használni. Ehhez először az ismeretlen potenciálokra kiinduló értékeket veszünk fel. Bebizonyitható, hogy ez tetszés szerint történhet, de a módszer sokkal gyorsabban konvergál, ha a megoldáshoz közeleső értékeket sikerül felvenni. Ezért célszerü először egy nagy rácstávolságu háló pontjaiban szimultán egyenletmegoldással meghatározni a potenciálértékeket (kevés ismeretlen). Ezután pl. a rácstávolságok felezésével áttérünk egy finomabb hálóra, amelynek pontjaiban iterációval folytatjuk az egyenletrendszer megoldását. Az áttéréskor szükséges ujabb kiinduló értékeket a már meglevőkből interpolációval határozhatjuk meg.

Az egyszerü iterációs módszerek (Gauss-, Jacobi-módszer) a jelen problémára alkalmazva általában kis konvergenciasebességet adnak. Ugyanis a konvergencia gyorsaságára jellemző az egymásutáni iterációk különbségének hányadosa:

$$\lambda = \frac{d^{(k)}}{d^{(k-1)}} = \frac{u^{(k)} - u^{(k-1)}}{u^{(k-1)} - u^{(k-2)}}$$

amely azt mutatja, hogy milyen gyorsan csökkennek a hibák ($u^{(k)}$, u értéke a k-adik iterációban). λ határértéke, a határarány, Laplace egyenlet és téglalap tartomány esetében ([5] szerint):

$$\lambda_h = \left[\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{R} + \cos \frac{\pi}{S} \right) \right]^2 \qquad /13/$$

Itt ha a és b a téglalap oldalai, $R = \frac{a}{\Delta x}$ $S = \frac{b}{\Delta y}$.
Nem téglalap tartomány esetén λ_h -t olyan téglalapra számithatjuk, amely magában foglalja az illető tartományt - igy a határarányra valamivel kedvezőtlenebb értéket kapunk.

R és S növelésével (a csomópontok számának növelésével) λ_h igen erősen tart az egységhez, igy a hibák lassan csökkennek.

A konvergenciasebesség hatékonyan növelhető a szukcesszív hiperrelaxáció módszerével (lásd [5]). E módszer alkalmazásakor - ugy mint a Gauss-módszernél - először meghatározzuk $u^{(k)}$ értékét, de a további számitás számára nem ezt tartjuk meg, hanem u-nak egy relaxált értékét:

$$u_{\text{relaxált}} = \omega\, u^{(k)} - (\omega - 1)\, u^{(k-1)} \qquad /14/$$

Itt az ω relaxációs tényező értékére: $1 \leq \omega \leq 2$. ($\omega = 1$ esete a Gauss-módszert adja). Young dolgozata [5] alapján a relaxációs tényező optimális értékét a következő kifejezés adja:

$$\omega_{opt} = 1 + \frac{\lambda_h}{\left(1 + \sqrt{1 - \lambda_h}\right)^2} \qquad /15/$$

ahol a λ_h határarány /13/-ból számitható. Young kimutatja azt is, hogy ω felülbecsülése - ami λ_h pontatlan számitásából adódhat, nem téglalap tartomány esetén - lényegesen nem csökkenti a konvergenciasebességet.

d./ Hibabecslés

A módszer alkalmazásakor hibát három ok miatt követhetünk el:

1. a differenciálegyenletet differenciaegyenlettel helyettesitettük. Globálisan az egész tartományra vonatkozóan megbecsülhetjük azt a hibát, amelynél mindegyik csomóponti potenciálérték hibája kisebb lesz (lásd [3]). E célból a tartományt befoglaló ellipszis tengelyeit (t,s) kell ismerni. Ezekkel a hiba a kétdimenziós esetre:

$$r \leq \frac{M_4\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)s^2 t^2}{24\,(s^2+t^2)}$$

Itt M_4 az u(xy) függvény negyedik deriváltjai abszolut értékének maximuma a vizsgált tartományban. Mint ilyen, előre nem ismeretes, de u kiszámitott csomópontbeli értékei alapján meghatározható [2]:

pl.
$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{1}{(\Delta x)^4}\left[u(x+2\Delta x, y, z) - 4u(x+\Delta x, y, z) + \right.$$

$$\left. + 6u(x, y, z) - 4u(x-\Delta x, y, z) + u(x-2\Delta x, y, z)\right]$$

Számológépeknél igen egyszerüen felhasználható hibabecslésre és korrekcióra Richardson módszere [4]. Megoldjuk a differenció egyenleteket 2h rácstávolsággal, (U_{2h}) és h rácstávolsággal (U_h). Ha feltehetjük, hogy a hiba h valamilyen hatványával (n) arányos, az említett módszer szerint a hiba nagyságára

$$\varepsilon_h = \frac{U_h - U_{2h}}{2^n - 1}$$

adódik és mivel ez előjeles mennyiség, vele a korrekció is elvégezhető (pl. n = 2 esetben):

$$U_{korr} = \frac{4}{3} U_h - \frac{1}{3} U_{2h}$$

2. Hiba származik abból, hogy a görbevonalu határt szögletes határral helyettesitjük, illetve a valóságos határpontpotenciálokat a csomópontokra interpoláljuk. Ennek az interpolációnak a hibaokozó hatását igen nehéz becsülni, és lényegében csak az a kézenfekvő megállapitás tehető, hogy a rács finomitása (a határgörbe jobb megközelitése miatt) erősen csökkenti az igy adódó hibát.

3. Ha az egyenleteket nem szimultán módon oldjuk meg, az iteráció ujabb hibát hoz be. A hiba nagysága pontosan nehezen becsülhető, ezért azt az utat követhetjük, hogy a

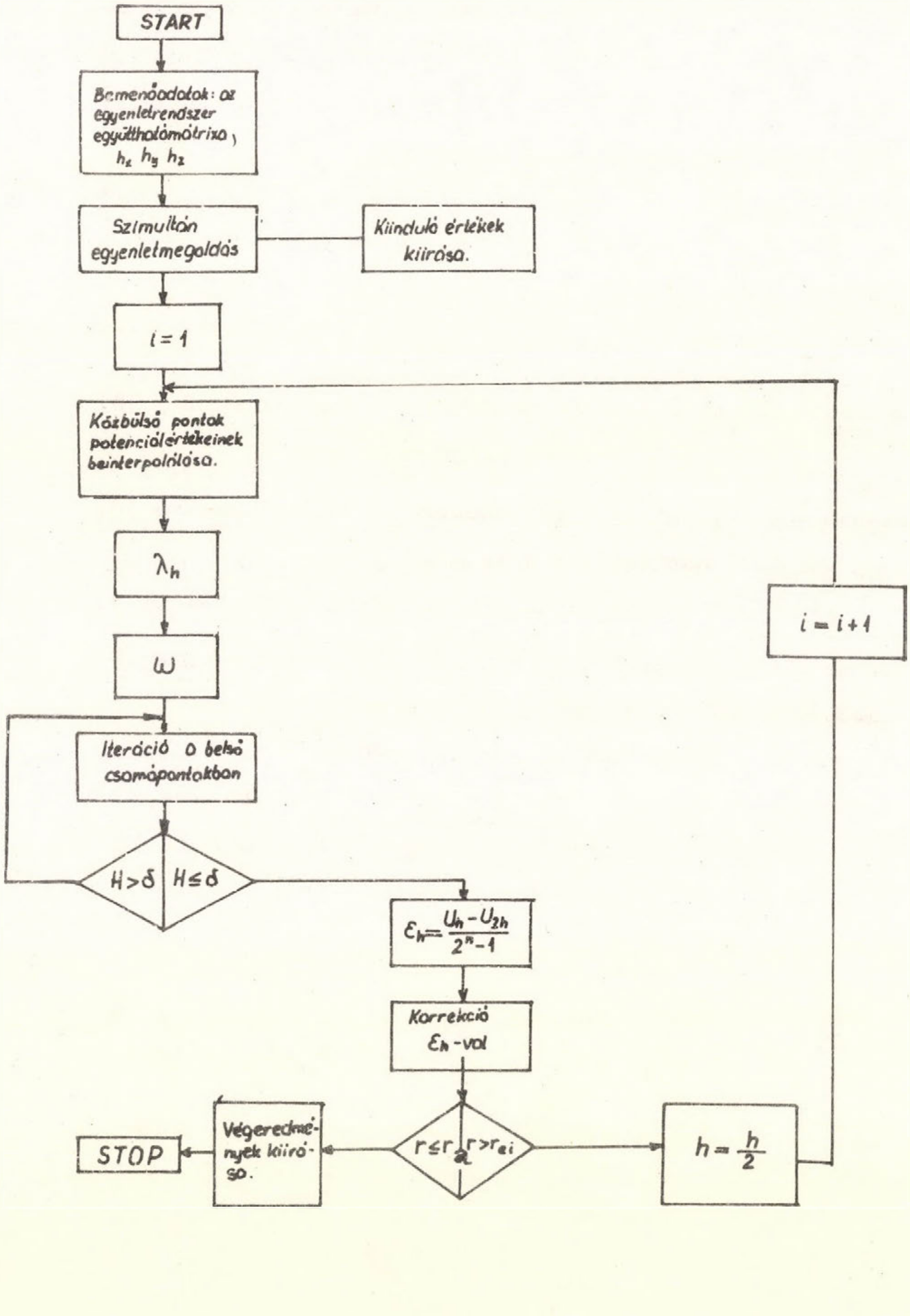
$$\max_i | u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)} | = H$$

vagy

$$\sqrt{\sum_i [u_i^{(k)}]^2 - [u_i^{(k-1)}]^2} = H$$

és $H \leq \delta$ feltételek teljesülése esetén fejeződik be az iteráció (δ előre megadott hibahatár).

Fentiek alapján a számítást a számológép a következő séma szerint végzi:



4. Monte-Carló módszer.

Ismeretes, hogy lineáris differenciálegyenletek peremértékfeladatainak numerikus megoldására előnyösen alkalmazható a probléma valószinüségszámitási modellje, illetve annak kisérleti vizsgálata.

Tekintsük a vizsgált tartomány koordinátavonalakból álló hálózatát. Tetszőleges csomópontban megkaphatjuk a potenciál értékét (Dirichlet probléma esetén) a következőképpen. A vizsgált belső pontból (P) bolyongásokat inditunk, amelyek valamely Q_i határpontban végződnek. A bolyongásokat ugy végezzük, hogy minden pontból a szomszédos pontok mindegyikébe egyenlő valószinüséggel jussunk el. Annak a valószinüsége, hogy P-ből éppen a határon levő Q_i-be jutottunk, legyen $p_i(PQ_i)$. A kérdéses potenciál akkor az u_i határpontpotenciálok p_i valószinüségekkel sulyozott közepe:

$$U(P) = \sum_{i=1}^{n} p_i(PQ_i)U_i \qquad /16/$$

A számológéppel a bolyongásokat szimuláljuk és a $p_i(PQ_i)$ valószinüségeket a P-ből induló és Q_i-ben végződő bolyongások relativ gyakoriságával helyettesitjük. Ha N bolyongás közül N_i végződik Q_i-ben, akkor nagy N-ekre:

$$p_i(PQ_i) \longrightarrow \frac{N_i}{N}$$

A szükséges bolyongások számát (N) nyilván a relativ pontosság (δ) befolyásolja (lásd [6]):

$$N \geq \frac{9 U_{i\,max}^2}{\delta^2}$$

ahol $U_{i\,max}$ a határpontok potenciáljának maximális értéke.

A gyakorlatilag szükséges pontosságok eléréséhez is már elég sok bolyongást kell szimulálni, igy a módszer akkor alkalmazható előnyösen, ha kitüntetett pontokban kell a potenciál értékét meghatározni.

A $p_i(PQ_i)$ valószinüségek nyilván nem függnek U_i-től, igy adott tartomány esetén előre kiszámithatók. Ezek ismeretében bármilyen peremponti potenciálelosztásra u(P) értéke könnyen meghatározható, mert csak a /16/ alatti összegezést kell elvégezni. (Ezzel tulajdonképpen a tartomány alakjára és az $U_i(Q_i)$ függvényre vonatkozó peremfeltételt egymástól függetlenül lehet érvényesiteni.)

Elkészithető egy olyan program, amelynek segitségével bármilyen Dirichlet tipusu probléma tárgyalható. A véletlenszerü továbbhaladáshoz a számgenerátor a $0 \leq X \leq 1$ számközben egyenletes eloszlásu véletlen számokat produkál. Ha minden hatod-intervallumhoz egy továbbhaladási irányt rendelünk, véletlenszerüen jutunk tovább minden csomópontból.

A véletlen számot generáló program szerkesztésekor ügyelni kell arra, hogy a véletlen szám ismétlődési periódusa lényegesen nagyobb legyen, mint az egyes bolyongások alatt megtett lépések maximális száma.

Egy bolyongást ezek után ugy szimulálunk, hogy a tartomány csomópontjait valahogy megszámozzuk (pl. sorfolytonosan) és a vizsgált belső pont (P) sorszámából kiindulva a véletlen szám éppen aktuális értéke szerint lépünk a szomszédos pontok valamelyikébe.

A kiindulási pont sorszámán és a relativ pontosságon (δ) kivül a bemenőadatok a pontokhoz tartozó potenciálértékek:

- a határpontokhoz az adottak: U_i
- az összes többihez pedig egy olyan (tetszőleges) érték, amely nem szerepel U_i-k között (V).

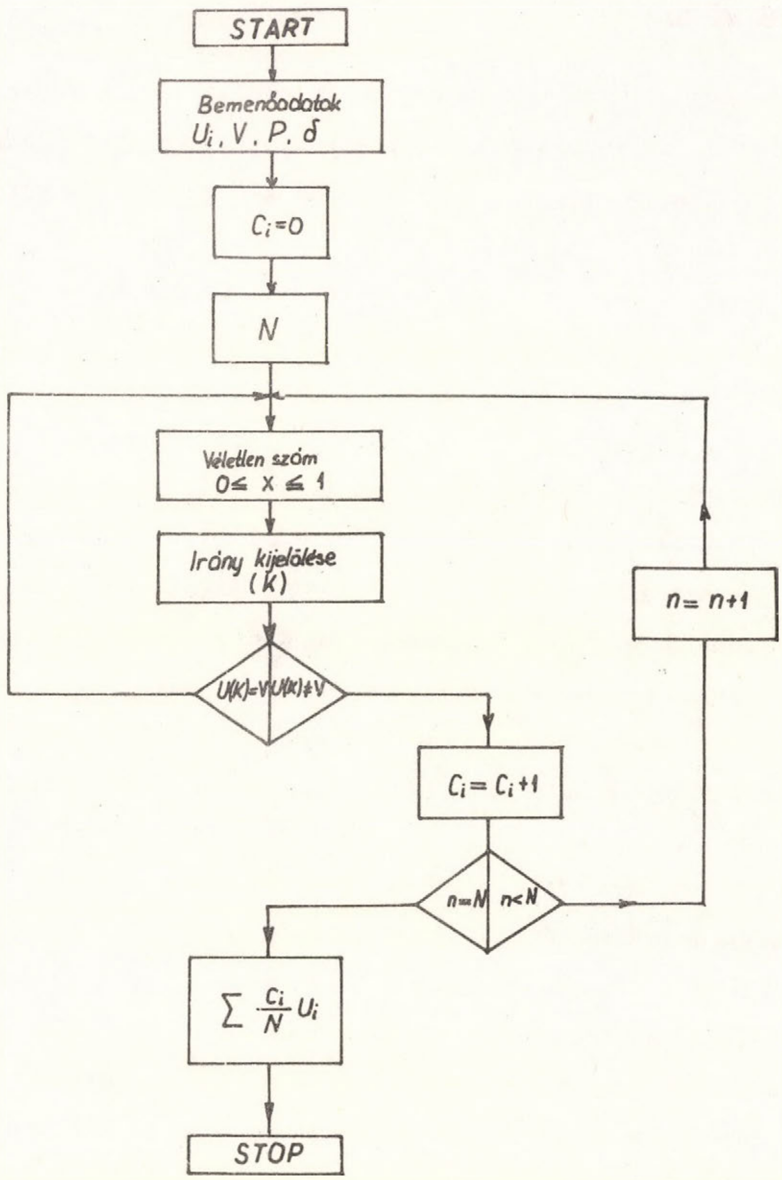
A program vázlatában szereplő egyéb jelölések:

P = a vizsgált pont sorszáma

K = a pontok sorszáma

C_i = U_i-be végződő bolyongások száma

n = megtett bolyongások száma.


START
Bemenőadatok
Uᵢ, V, P, δ
Cᵢ=0
N
Véletlen szám
0≤ X ≤ 1
Irány kijelölése
(k)
U(k)=V
U(k)≠V
Cᵢ= Cᵢ+1
n=N
n<N
n= n+1
∑ Cᵢ/N Uᵢ
STOP

Összefoglalás.

A számológéppel történő térszámitások szempontjából szóbajövő eljárások tehát alapvetően kétfélék: analitikus és véges differencia módszerek. Az előbbiek esetében a megoldást jelentő függvényt analitikus függvényekkel kifejezve kapjuk meg, mig a másodiknál véges differenciaegyenletek segitségével, amelyek a megoldást a tér kijelölt pontjaiban numerikus eredmény formájában szolgáltatják. Ebből következik, hogy ez utóbbi esetben bár a numerikus eredményt megkapjuk, általánosabb következtetések levonása többnyire nem lehetséges. Analitikus tárgyalásnál általában áttekinthető a paraméterek változásának hatása, az eredmények pedig felhasználhatók hasonló feladatok tárgyalására, egyszerüsitési lehetőségekre utalhatnak. Mindezek következtében a problémakör mélyebb ismeretére vezetnek; mig a véges differencia módszerek általában csak a konkrét problémát oldják meg. Ehhez járul még, hogy az utóbbi módszerek esetében a hibabecslés, a konvergencia és a megoldás stabilitásának kérdései még elég kidolgozatlanok, analitikus módszereknél pedig a megoldás pontossága általában tetszőleges és előre megadható.

Mindezek mellett van egy szempont, amely a differenciaegyenletek módszerét előtérbe helyezi. Nevezetesen az, hogy mig az analitikus módszerek speciális feladattipusokra adhatók, a véges differenciaegyenletek módszerével csaknem valamennyi probléma tárgyalható, illetve csak technikai feltételek (idő, memóriakapacitás) korlátozzák a megoldható feladatok körét.

Irodalom:

[1] Simonyi: Elméleti Villamosságtan, Tankönyvkiadó, 1960.

[2] Boast: Vector Field, Harper and Row Publishers.

[3] Kantorovics Krülov: A felsőbb analizis közelitő módszerei. Akadémiai Kiadó, 1953.

[4] Berezin Zsitkov: Metodü vücsiszlenyij 2. rész. Moszkva, 1961

[5] Young: Iterative Methods for Solving Partial Difference Equation of Elliptic Type. Trans. Amer. Math.Soc. 1954.

[6] Buszlenkó: Monte-Carló módszerek. Müszaki Könyvkiadó, 1965.

S u m m a r y

The paper describes on basis of the thesis prepared with the Computing Centre numerical methods which can be used to the best advantage to the solution on computers of problems of calculation of electric and magnetic fields. Various forms of basic space equations describing the fields, as well as three available methods of solution are outlined; serial development, difference equations and Monte Carlo methods. Beside the expounding of mathematical procedures special computer application problems are dealt with and programs for computation are given.

Sztochasztikus folyamatok regularitása

Arató Mátyás

1. Az f-regularitás fogalma

A sztochasztikus folyamatok elméletében az utóbbi tiz évben fontos szerepet játszanak az un. regularitási fogalmak, melyek arról adnak felvilágositást, hogy az adott folyamat mennyire tekinthető függetlennek, ill. milyen "távol" vannak a függetlenségtől a mult és jövő eredményei. A legegyszerübb regularitási fogalom a 0-1 törvény segitségével adható meg. A $\xi_n, \{n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ folyamat $\xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_m$ változói által generált legkisebb σ-algebrát $\mathfrak{M}_n^m$ -el jelölve (ahol n és m a $\pm\infty$ értékeket is felvehetik) a folyamatot regulárisnak nevezzük, ha

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}_{-\infty}^{n} = \mathfrak{N} \qquad /1/$$

ahol $\mathfrak{N} = \{\emptyset, \Omega\}$ az un. triviális σ-algebra, azaz a ξ_n folyamatra fennáll a 0-1 törvény. Független sorozatok egyben regulárisak is Kolmogorov tétele szerint.

Stacionárius folyamatok (tágabb értelemben) esetén szokás lineáris regularitásról beszélni, melyen a következőt értjük. Jelölje a $H_{-\infty}^{n}$ a $\xi(k), k \leq n$, változók által generált Hilbert-teret $(M\xi(k) = 0,\ D^2\xi(k) = \sigma^2 < \infty)$. A $\xi(k)$ folyamat lineárisan reguláris, ha

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} H_{-\infty}^{n} = 0 \qquad /2/$$

Stacionárius sorozatokra az /1/ regularitásból következik a /2/ regularitás. (Lásd pl. Rozanov [1] 245-248.) Gauss-folyamatok esetén a két regularitás ekvivalens. Könnyü megmutatni, hogy stacionárius sorozatokra /1/ a következő feltétellel helyettesithető (Vinokurov tétele):

$$\sup_{B \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{n}} |P(AB) - P(A)P(B)| \to 0 \quad \text{ha } n \to -\infty \qquad /3/$$

(lásd pl. Rozanov [1] 247.o.)

A /3/ alakban megadott regularitási feltétel alapján érthető, hogy felvetődik a

$$\sup_{\substack{A \in \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty} \\ B \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{0}}} |P(AB) - P(A)P(B)| = \alpha(\tau) \to 0, \text{ha } \tau \to \infty \qquad /4/$$

alaku regularitás az un. teljes regularitás fogalmának bevezetése. A /4/ alaku feltételt M.Rosenblatt vezette be 1956-ban [1] s erős keverési feltételnek nevezte. Ennek a fogalomnak a tanulmányozása és hasznosságának vizsgálata szerepel Volkonszkij és Rozanov, valamint Kolmogorov-Rozanov cikkeiben. Többek között bebizonyitották, hogy ha $\varrho(\mathfrak{M}_{-\infty}^{0}, \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}) = \varrho(\tau)$ jelöli a zárójelben lévő σ -algebrák maximál korrelációját, akkor Gauss folyamatokra

$$\alpha(\tau) \leq \varrho(\tau) \leq 2\pi\,\alpha(\tau) \qquad /5/$$

Az egyenletes teljes regularitás

$$\sup_{\substack{A \in \mathfrak{M}_\tau^\infty \\ B \in \mathfrak{M}_{-\infty}^0}} \frac{|P(AB) - P(A)P(B)|}{P(A)} = \gamma(\tau) \to \infty, \text{ ha } \tau \to \infty \qquad /6/$$

fogalma igen erős feltételt jelent, mivel Gauss folyamatok esetén m-függetlenséget jelent (lásd pl. Ibrahimov-Linnik könyvét 396.old.). /4/-nél erősebb regularitás a Kolmogorov által javasolt erős regularitás, melynek definiciója:

$$(7)\ \underset{C \in \mathfrak{M}_{-\infty}^0 \times \mathfrak{M}_\tau^\infty}{\mathrm{Var}} \left[P(C) - P_{[-\infty,0]} \times P_{[\tau,\infty]}(C)\right] = M \underset{A \in \mathfrak{M}_\tau^\infty}{\mathrm{Var}} \left[P(A|\mathfrak{M}_{-\infty}^0) - P(A)\right] = \beta(\tau) \to 0 \quad \text{ha } \tau \to \infty \qquad /7/$$

Ahol P jelöli az eredeti mértéket $P_{[-\infty,0]} \times P_{[\tau,\infty)}$, pedig az $\mathfrak{M}_{-\infty}^0$ ill. $\mathfrak{M}_\tau^\infty$ σ-algebrákon értelmezett P mértékek (marginális eloszlások) direkt szorzatát. Nyilvánvaló, hogy $\alpha(\tau) \leq \beta(\tau)$.

A /7/ variációs távolsággal értelmezett erős regularitás, valamint az

$$(8)\ I(\mathfrak{M}_{-\infty}^0, \mathfrak{M}_\tau^\infty) = M_p \log p = I(\tau) \to 0, \quad \text{ha } \tau \to \infty \qquad /8/$$

információs regularitás is speciális esetei a Csiszár Imre által bevezetett f-eltéréseken alapuló regularitásnak (lásd Csiszár [1]), melyet alább definiálunk.

Legyen μ_1 és μ_2 két valószinüségi mérték az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető téren, melyek abszolut folytonosak a λ mértékre nézve. A μ_1, μ_2 -mértékek f-eltérésének (ahol f(x) egy tetszőleges konvex függvény) az

$$\mathfrak{I}_f(\mu_1,\mu_2)=\int p_2(x)\, f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right) \lambda(dx) \qquad /9/$$

mennyiséget nevezzük, ahol

$$p_i(x)=\frac{\mu_i(dx)}{\lambda(dx)}, \quad (i=1,2)$$

a μ_i -mértékek λ (σ-véges) mértékre vonatkozó Radon-Nikodym deriváltjai.

Definició. Legyen $\mu_1=P$ és $\mu_2=P_{(-\infty,0]} \times P_{[\tau,\infty)}$ a két mérték az $\mathfrak{M}_{-\infty}^{0} \times \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}$ σ -algebrán. A ξ_n folyamatot f-regulárisnak mondjuk, ha

$$\mathfrak{I}_f(\mu_1,\mu_2,\tau) \to f(1), \quad ha \ \tau \to \infty \qquad /10/$$

Könnyü belátni, hogy $f(x) = |x-1|$ esetén

$$\mathfrak{I}_f(\mu_1,\mu_2,\tau)=\int p_2(x)\left|\frac{p_1(x)}{p_2(x)}-1\right|\lambda(dx)=|\mu_1-\mu_2|= Var\left[P-P_{(-\infty,0]}\times P_{(\tau,\infty)}\right]$$

tehát a Kolmogorov féle erős regularitás adódik.

Az információs regularitás az f-regularitás speciális esete, ha $f(x) = x \log x$

$$J_{x\log x}(\mu_1,\mu_2,\tau) = J_{-\log u}(\mu_2,\mu_1,\tau) = \int \log \frac{\mu_1(dx)}{\mu_2(dx)}\, \mu_1(dx)$$

ha $\mu_1 \ll \mu_2$, egyébként $I(\tau) = +\infty$

A Rényi által bevezetett α -adrendü I-divergencia alapján beszélhetünk α-adrendü regularitásról, ha ezalatt azt ért- jük, hogy

$$\frac{1}{\alpha-1} \log |J_{-u^\alpha}(\mu_1,\mu_2,\tau)| \to 0\,, \ (\alpha<1), \quad ha \ \tau \to \infty \qquad /11a/$$

$$\frac{1}{\alpha-1} \log J_{u^\alpha}(\mu_1,\mu_2,\tau) \to 0 \ (\alpha>1), \quad ha \ \tau \to \infty \qquad /11b/$$

Lényeges megjegyezni, hogy α -regularitásról $\alpha<1$ esetén mindig beszélhetünk, kivéve, ha $\mu_1 \perp \mu_2$ (azaz a két mérték szinguláris).

χ^2 -regularitásról beszélünk $f(x) = (x-1)^2$ vagy $f(x) = x^2-1$ esetén.

2. Az f-regularitások viszonyának vizsgálata

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy szigoruan konvex (az x = 1 pontban) f(x) függvény esetén az f-regularitás maga után vonja az erős regularitást. Az f(x) függvény az x_0 pontban szigoruan konvex, ha az x_0 pont egyetlen környezetében sem lineáris.

2.1.Tétel. Ha az f(x) konvex függvény x=1 -ben szigoruan konvex, akkor az f-regularitásból következik az erős regularitás. Pontosabban, megadható olyan $\varphi_f(v)$ függvény, hogy $v \downarrow 0$ esetén $\varphi_f(v) \downarrow 0$ és

$$\beta(\tau) \leq \varphi_f(J_f(\mu_1,\mu_2,\tau) - f(1)) \qquad /12/$$

Ha $f''(1) > a > 0$, akkor elég kis δ -ra $\varphi_f(\delta) - c\sqrt{\delta}$. Ha $f''(u) \geq a > 0$, ha $|u-1| < r_0$, akkor $\delta \leq \frac{a}{2} r_0^2$ esetén igaz, hogy

$$\beta(\tau) \leq C\sqrt{\delta}, \quad ha \quad J_f(\mu_1,\mu_2,\tau) - f(1) \leq \delta \leq \frac{a}{2} r_0^2 \qquad /13/$$

A tétel bizonyitása közvetlenül következik Csiszár dolgozatának 2.1.tételéből μ_1 és μ_2 megfelelő helyettesitésével.

Megjegyzés. A becslésben szereplő C konstans vehető $\sqrt{\frac{8}{a}}$ -nak de minimális értéke adott f(x) esetén meghatározható. Pl.: f(x)=x log x esetén $C_{min} = \sqrt{2}$ (v.ö. Volkonszkij és Rozanov eredményével).

2.2.Tétel. Ha a $\lim_{x \to 0} f(x)$ és $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ határértékek végesek és f(x) szigoruan konvex az 1. pontban, akkor az erős regularitásból következik az f-regularitás. Pontosabban

$$J_f(\mu_1,\mu_2,\tau) \leq f(1) + C_1\sqrt{\beta(\tau)} \qquad /14/$$

ahol C_1 csak az f-függvénytől függ.

A tétel bizonyitása következik Csiszár 2.2. tételéből.

Megjegyzés. Az információs regularitásból, az α -adrendü regularitásból (ha $\alpha>1$), valamint a χ^2 regularitásból következik az erős regularitás, azonban az állitás megforditása nem igaz.

Jelölje $\mu_{1\tau}(\tau)$ abszolut folytonos ill. szinguláris részét a $\mu_{2\tau}$ mértékre nézve $\mu_{1\tau}^{c}(\tau)$ ill. $\mu_{2\tau}^{'}(\tau)$. A $\mu_{2\tau}(\tau)$ abszolut folytonos, illetve szinguláris részét $\mu_{1\tau}(\tau)$ -ra nézve jelölje $\mu_{2\tau}^{c}(\tau)$ ill. $\mu_{2\tau}^{'}(\tau)$.

Ha

$$p_{\tau}(x)=\frac{\mu_{1\tau}(dx)}{\mu_{2\tau}(dx)}\;, \qquad \bar{p}_{\tau}(x)=\frac{\mu_{2\tau}(dx)}{\mu_{1\tau}(dx)}$$

akkor

$$\beta(\tau)=\operatorname{Var}(\mu_{1\tau}-\mu_{2\tau})=\mu_{2\tau}^{'}(\Omega)+M|1-p_{\tau}(x)|= \qquad /15/$$

$$=\mu_{1\tau}^{'}(\Omega)+M|1-p_{\tau}(x)|\,.$$

2.3.Tétel. (Volkonszkij-Rozanov). Az erős regularitás szükséges és elégséges feltétele az

a/ $\lim\limits_{\tau\to\infty}\mu_{2\tau}^{'}(\Omega)=0$ vagy b/ $\lim\limits_{\tau\to\infty}\mu_{1\tau}^{'}(\Omega)=0$

feltételek egyikének a teljesülése és a folyamat regularitása. Ugyancsak hasznos a következő állítás.

<u>2.4.Tétel.</u> (Volkonszkij-Rozanov). Az erős regularitás szükséges és elégséges feltétele az

a/ $p_\tau(x) \to 1$, ha $\tau \to \infty$ (μ_{20} szerint) b/ $\bar{p}_\tau(x) \to 1$, ha $\tau \to \infty$ (μ_{10} szerint)

sztochasztikus konvergenciák egyikének a fennállása.

A 2.3.tétel közvetlen következménye, hogy reguláris folyamat esetén a folyamat egyben erősen reguláris, ha valamilyen τ -ra $\mu_{1\tau}$ és $\mu_{2\tau}$ egyike abszolut folytonos a másikra nézve. Ez teljesül pl. ha az

$$I(\tau) < \infty$$

feltétel fenn áll.

Ugyancsak a 2.1. és 2.2. tételekből, valamint a 2.3.-ból következik, hogy az α -adrendü ($\alpha = 1$) információ létezéséből valamilyen τ -ra következik az α (<1)-regularitás.

A χ^2 eltérés létezéséből valamilyen τ -ra következik az erős regularitás és az α -regularitás ($\alpha < 1$ esetén).

Az egyenletes teljes regularitást

$$\sup_{\substack{C = AB \\ A \in \mathfrak{M}_\tau^\infty \\ B \in \mathfrak{M}_{-\infty}^0}} \frac{\mu_{1\tau}(C) - \mu_{2\tau}(C)}{\mu_{1\tau}(C) + \mu_{2\tau}(C)} \to 0 \qquad /16/$$

alakba irva látható, hogy az ekvivalens a $p_\tau(x)$ vagy $\bar{p}_\tau(x)$ egyenletes konvergenciájával 1-hez, ha $\tau\to\infty$ (a μ_{10} ill. μ_{20} mérték szerint). A /16/ feltételből már bármilyen f-regularitás következik, mivel

$$\text{vrai sup}\,|p_\tau(x)-1|<\delta$$

esetén

$$J_f(\mu_{1\tau},\mu_{2\tau})=\int f(p_n(x))\mu_{10}(dx)\leq f(1)+\varepsilon,$$

ahol $\varepsilon = \max|f(z)-f(1)| \to 0$ ha $\delta\to 0$.

3. Gauss folyamatok.

Az $\mathfrak{M}_{-\infty}^{0}$ és $\mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}$ σ-algebrákon választható olyan $u_1, u_2, \ldots$ ill. $v_1, v_2, \ldots$ ortogonális bázis, hogy $Mu_i v_k=\delta_{ik}\varrho_k$, és ekkor

$$I(\tau)=-\frac{1}{2}\sum_1^\infty \log(1-\varrho_k^2),$$

$$\alpha(\tau)=\sup_k \varrho_k,$$

$$J_{\chi^2-1}(\mu_{1\tau},\mu_{2\tau})=\prod_{k=1}^\infty(1-\varrho_k^2).$$

Az α és erős regularitás Gauss folyamatok esetén nem ad ujat az információs regularitással szemben.

Irodalom:

[1] Csiszár I.: Eloszlások eltérésének információ-tipusu mértékszámai. MTA III. Oszt.Közleményei 17 /1967/ 123-149.

[1] Ibrahimov - Linnik Ju.V.: Nyezaviszimüje i sztacionarno szvjazannüje velicsimü, Nauka, 1965.

[3] Kolmogorov A.N. - Rozanov Ju.A.: Ob uszloviah szilnovo peremesivanyija gausszovszkovo sztacionarnovo processza. Teorija verojatnosztyej 5 /1960/ 222-227.

[4] Rozanov Ju.A.: Sztacionarnüje szlucsajnüje processzü. Fizmatgiz, 1963.

[5] Rozanov Ju.A. - Volkonszkij V.A.: Nekotorüje pregyelnüje teoremü dlja szlucsajnüh funkcij. Teorija verojatnosztyej 6 /1961/.

[6] Rosenblatt M.: A central limit theorem and a strong mixing condition. Proc. Nat.Acad.Sci. USA 42, Nol. /1956/ 43-47.

Summary.

Regularity of stochastic processes

There is given a systematical survey of regularity properties of stochastic processes. We say, that the process (stationary) has the property of f-regularity (in the mean of Csiszár) if

$$\mathfrak{J}_f(\mu_1,\mu_2,\tau) \to f(1)$$

where f(x) is a convex function and μ_1= P (the probability distribution on $\mathfrak{M}_{-\infty}^{0} \times \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}$), $\mu_2 = P_{(-\infty,0)} \times P_{(\tau,\infty)}$

$$\mathfrak{J}_f(\mu_1,\mu_2,\tau) = \int p_2(\omega)\, f\left(\frac{p_1(\omega)}{p_2(\omega)}\right) \lambda\, d\omega\,, \quad p_i(\omega) = \frac{\mu_i(d\omega)}{\lambda(d\omega)}$$

We show that the f-regularity does not give anything new for Gaussion processes, in this case if is equivalent of the informational regularity, when f is convex in the strict sense.

A sürüségfüggvény becsléséről

Dávid Gábor

I. Legyen a ξ valószinüségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, sürüségfüggvénye $f(x)$. Ebben a cikkben X a valós számegyenes, $\mathfrak{U}$ a Borelmérhető halmazok σ-algebrája, P a $\mathfrak{U}$-n az $F(x)$ által generált mérték, λ a Lebesgue-mérték.

A feladat: a ξ-re végzett megfigyelések segitségével becslést adni az $f(x)$ függvényre.

Jelöljük a továbbiakban $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ -el a ξ-re végzett n megfigyelt értéket, amelyek tehát függetlenek, azonos $F(x)$ eloszlásuak. ξ^* jelölje a megfigyelés sorrendjében vett mintaelemeket

$$\xi^* = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$$

A ξ^* eloszlását és az általa generált mértéket a $(\overset{\infty}{\underset{1}{X}} X, \overset{\infty}{\underset{1}{X}} \mathfrak{U})$ mérhető téren ugyancsak $F(x)$-el és P-vel fogjuk jelölni.
n -elemü mintára definiálhatjuk $\mathfrak{U}$-n a tapasztalati mértéket: tetszőleges $A \in \mathfrak{U}$ Borel-halmazra legyen

$$P_n(A) = \frac{k_A}{n}$$

ahol k_A = (az A-ba eső mintapontok száma). Ekkor a tapasztalati eloszlásfüggvény:

$$F_n(x) = P_n((-\infty, x])$$

A sürüségfüggvény becslésével kapcsolatban M.Rosenblatt és E.Parzen értek el eredményeket. Közlöm Parzen eredményét: Legyen K(x) egy egységnormáju, tetszőleges $L_1(X, \lambda)$-beli függvény, amely korlátos és $k(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ ha $x \to \infty$ tetszőleges h(n) sorozatra, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} nh^2 = \infty$, ekkor definiáljuk a tapasztalati sürüségfüggvényt a következőképpen:

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n(n)} K\left(\frac{y-x}{n(n)}\right) dF_n(y) = \frac{1}{nh(n)} \sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x-\xi_j}{n(n)}\right) \qquad /1/$$

Ha f(x) egyenletesen folytonos valamely [a,b] intervallumban, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P[\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon] = 1 \qquad /2/$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra.

Parzen eredményét Crasswel arra az esetre bizonyitotta, amikor X topologikus csoport, λ a Haár-mérték; D.O.Loftsgaarden és C.P.Quesenberry a többváltozós esetben bizonyitották. Nadarya a sokkal erősebb

$$P[\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0] = 1 \qquad /3/$$

állitást igazolta.

Ebben a cikkben a tapasztalati sürüségfüggvényt az /1/-től eltérő módon definiálom, amiről először kimutatom, hogy 1 valószinüséggel egyenletesen konvergál (1.Tétel), a konvergencia gyorsaságára bizonyitok egy tételt (2.Tétel). A III-ban egy egyszerübben számolható függvényt fogok definiálni, amelynek a sztochasztikus konvergenciáját bizonyitom be (3.Tétel).

A következőkben gyakran fogom alkalmazni a matematikai statisztika alaptételét, a Glivenko-Cantelli-tételt, amit itt idézek:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} |F_n(x)-F(x)| = 0$$

1 valószinüséggel.

II. Jelölje ξ_k^* a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ nagyság szerint k-adik elemét: $\xi_k^* \leq \xi_{k+1}^*$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Legyen tetszőleges n és m-re $(n < m)$

$$f_n^m(x) = \begin{cases} \dfrac{P_m(I_{(x)}^n)}{\lambda(I_{(x)}^n)}, & \text{ha } x\in[\xi_1^*, \xi_n^*] \\ 0, & \text{ha } x\in[a,b]\setminus[\xi_1^*, \xi_n^*] \end{cases} \qquad /4/$$

ahol $I_{(x)}^n$ jelöli a $(\xi_k^*, \xi_{k+1}^*]$ $k=1,\dots,n-1$ intervallumok közül azt, amelyik x-et tartalmazza.

1.Tétel. Legyen $[a,b]$ olyan intervallum, amelyben $f(x)$ folytonos és az $[F(a),F(b)]$ intervallumban $F^{-1}(x)$ folytonos. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n^m(x) - f(x)| = 0$$

1 valószinüséggel.

Bizonyitás: Jelölje $A(n,\varepsilon)$ azt az eseményt, hogy

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sup_{x\in[a,b]} |f_n^m(x) - f(x)| > 2\varepsilon$$

A Borel-Cantelli-lemma értelmében tételünket igazoltuk, ha belátjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$ -ra a $\sum_{n=1}^{\infty} P(A(n,\varepsilon))$ sor konvergens. Jelölje

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{P(I^n(x))}{\lambda(I^n(x))} & \text{ha } x\in[a,b]\cap[\xi_1^*,\xi_n^*] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

az elméleti sürüségfüggvény módositását. Minthogy

$$\begin{aligned}[\overline{\lim_m} \sup_x |f_n^m(x) - f(x)| > 2\varepsilon] \leq [\overline{\lim_m} \sup_x |f_n^m(x) - f_n(x)| > \varepsilon] \cup \\ \cup [\overline{\lim_m} \sup |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon]\end{aligned} \qquad /5/$$

- ahol a jobboldal második tagja a $\sup_x |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$ esemény - igy elegendő a $\sum_{n=1}^{\infty} P(A(n,\varepsilon))$ sor konvergenciájához belátni a következő két állitást:

1/ $\sum_{n=1}^{\infty} P(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon) < +\infty$ minden $\varepsilon>0$ -ra

2/ $\sum_{n=1}^{\infty} P(\overline{\lim_m} \sup_{x\in[a,b]} |f_n^m(x)-f(x)|>\varepsilon) < +\infty$ minden $\varepsilon>0$ -ra.

A 2/ állitás igazolása: Legyen $\delta_n = \inf_{x\in[a,b]} \lambda(I^n(x))$. $F(x)$ folytonossága miatt 1 valószinüséggel $\delta_n>0$. Igy

$$P(\overline{\lim_m} \sup_{x\in[a,b]} |f_n^m(x)-f_n(x)|>\varepsilon)=$$

$$= P(\overline{\lim_m} \sup_x \left|\frac{P_m(I^n(x))}{\lambda(I^n(x))} - \frac{P(I^n(x))}{\lambda(I^n(x))}\right| > \varepsilon)$$

$$\leq P(\overline{\lim_m} \sup_x |P_m(I^n(x)) - P(I^n(x))| > \varepsilon\delta_n)$$

$$\leq P(\overline{\lim_m} \sup_{x\in[a,b]} |P_m(I^n(x)) - P(I^n(x))| > 0)$$

Az utóbbi a Glivenko-Cantelli-alaptétel miatt 0. Kaptuk, hogy a 2/-beli sor nemcsak konvergens, hanem az összege 0 is.

Az 1/ állitás igazolása: Vizsgáljuk rögzitett $I^n=(\xi_k^*, \xi_{k+1}^*]$ intervallumra a

$$[\sup_{x\in I^n} |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon] = [\sup_{x\in I^n} \frac{1}{\lambda(I^n)} |\int_{I^n} (f(t)-f(x))\,dt| > \varepsilon]$$

eseményt. Tetszőleges $\varepsilon'>\varepsilon$ -hoz válasszuk meg $\delta=\delta(\varepsilon')$ -t, majd $\delta(\varepsilon'')$ -höz ε' -t ugy, hogyha $x,y\in[a,b]$, akkor a/ ha $|x-y|<\delta$, akkor $|f(x)-f(y)|<\varepsilon''$ és

b/ ha $|F(x)-F(y)|<\varepsilon'$ akkor $|x-y|<\delta$ legyen.

A tétel feltevései miatt - a/-ban az $f(x)$ folytonosságát, b/-ben az $F^{-1}(x)$ folytonosságát felhasználva a zárt $[a,b]$ illetőleg a zárt $[F(a),F(b)]$ intervallumban - ε'', δ és ε' megválaszthatók így.

Ezekkel a jelölésekkel:

$$P\Big[\sup_{x\in I_n}\frac{1}{\lambda(I^n)}\Big|\int_{I^n} f(x)-f(t)\,dt\Big|>\varepsilon\Big]\leq P\big[\sup_{x,y\in I^n}|f(x)-f(y)|>\varepsilon''\big]$$

$$\leq 1-P\big[\sup_{x,y\in I^n}|f(x)-f(y)|<\varepsilon''\big]=$$

$$= 1-P\big[\sup_{x,y\in I^n}|f(x)-f(y)|<\varepsilon''\,\big|\,\lambda(I^n)<\delta\big]\,P\big[\lambda(I^n)<\delta\big] \qquad /6/$$

$$-P\big[\sup_{x,y\in I^n}|f(x)-f(y)|<\varepsilon''\,\big|\,\lambda(I^n)\geq\delta\big]\,P\big[\lambda(I^n)\geq\delta\big]$$

A második tag első tényezője 1, hiszen a feltétel bekövetkezése a/ miatt maga után vonja, hogy

$$\sup_{x,y\in I^n}|f(x)-f(y)|<\varepsilon''$$

A b/ miatt és mert

$$I^n=(\xi_k^*,\xi_{k+1}^*)$$

$$P(F(\xi_{k+1}^*)-F(\xi_k^*)<\varepsilon')\leq P(\xi_{k+1}^*-\xi_k<\delta)$$

Az $\eta=F(\xi)$ transzformációval kapott, a $[0,1]$-ben egyenletes eloszlásu η valószinüségi változó $\eta_k^*=F(\xi_k^*)$ rendezett mintáira ismert:

$$P(\eta_{k+i}^*-\eta_k<\alpha)=B_{i,n}(\alpha)$$

-ahol $B_{i,n}(\alpha)$ az (i,n) -paraméterü béta-eloszlás, igy

$$P(\xi^*_{k+1} - \xi_k < \delta) = B_{1,n}(\varepsilon') = \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1)\Gamma(n)} \int_0^{\varepsilon'} (1-t)^{n-1} dt = 1-(1-\varepsilon')^n$$

A /6/ harmadik tagját 0-val becsüljük alulról. Összegezve

$$P\left(\sup_{x\in I^n} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\right) \le (1-\varepsilon')^n \qquad /7/$$

ahol ε' független n-től, az egész [a,b] -re univerzális állandó, igy

$$P[\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon] \le n(1-\varepsilon')^n$$

amiből

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon] \le \sum_{i=1}^{\infty} n(1-\varepsilon')^n < +\infty$$

azaz 1/ valóban fennáll, és ezzel a tétel állitását igazoltuk.

Nyilvánvaló az $\tilde{F}_{n,m}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(x)dx$ tapasztalati eloszlásfüggvényre a Glivenkó-Cantelli-tétel.

Következmény

$$P[\lim_n \lim_m \sup_{x\in[-\infty,+\infty]} |\tilde{F}_{n,m}(x) - F(x)| = 0] = 1$$

A következő tétel az $f_n^m(x)$ konvergenciájának gyorsaságára vonatkozik és egyben rávilágit n és m viszonyára is.

Legyen f differenciálható, pozitiv és az $x \in [a,b]$ pontban

$$f(x) > c > 0\ ;\ |f'(x)| < C_1,\quad f'(x) \neq 0$$

alkalmas C és C_1 konstansokkal.
Legyen tetszőleges $\alpha > 0$ -ra

$$\omega_1(n,\alpha,x) = \frac{c}{4C_1}\left(1 - e^{-\frac{1}{n}(1+\alpha)\log n}\right)^{-1}$$

$$\omega_2(n,m,x) = \lambda\,(I^n(x))\left[\frac{2}{m} P(I^n(x))(1 - P(I^n(x))\log\log m\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\omega(n,m,\alpha,x) = \frac{1}{2}\min(\omega_1(n,\alpha),\ \omega_2(n,m,x)) \qquad /8./$$

A definició szerint tehát $\omega(n,m,\alpha,x)$ függ a véletlentől az $I^n(x)$ -en keresztül! Bebizonyitjuk a következő tételt:

<u>2.Tétel. Ha x-nek van olyan [a,b] környezete, amelyre teljesülnek az 1.Tétel feltételei, valamint f(x) pozitiv, az x pontban differenciálható, deriváltjára: f'(x)≠0, akkor a /8/-ban definiált $\omega(n,m,\alpha,x)$ függvényre</u>

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \omega(n,m,\alpha,x)\,|f_n^m(x) - f(x)| \leq 1$$

<u>1 valószinüséggel.</u>

Bizonyitás.

Hasonlóan az előző tétel bizonyitásához, elegendő belátni, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\overline{\lim_{m\to\infty}}\, \omega(n,m,\alpha,x) \mid f_n^m(x) - f(x) \mid > 1+\varepsilon\right)$$

sor konvergens minden $\varepsilon > 0$ -ra. Ugyanazzal az átalakitással, mint /5/-ben

$$\begin{aligned} &[\overline{\lim_{m\to\infty}}\, \omega(n,m,\alpha,x) |f_n^m(x) - f(x)| > 1+\varepsilon] \\ &\subseteq [\overline{\lim_{m}}\, \omega(n,m,\alpha,x) |f_n^m(x) - f_n(x)| > \tfrac{1+\varepsilon}{2}] \cup \\ &\cup [\overline{\lim_{m}}\, \omega(n,m,\alpha,x) |f_n(x) - f(x)| > \tfrac{1+\varepsilon}{2}] \end{aligned} \qquad /9/$$

Most

$$\begin{aligned} &[\overline{\lim_{m}}\, \omega(n,m,\alpha,x) |f_n(x) - f(x)| > \tfrac{1+\varepsilon}{2}] \subseteq \\ &\subseteq [\overline{\lim_{m}}\, \omega_1(n,\alpha) |f_n(x) - f(x)| > 1+\varepsilon] = \\ &= [\omega_1(n,\alpha) |f_n(x) - f(x)| > 1+\varepsilon] \end{aligned}$$

Az utóbbi esemény valószinüségének becsléséhez:

$$\frac{|F(x)-F(y)|}{|f(x)-f(y)|} = \frac{|F(x)-F(y)|}{|x-y|} \cdot \frac{|x-y|}{|f(x)-f(y)|} = \frac{f(x)+O(x-y)}{|f'(x)+O(x-y)|} \geq \frac{f(x)+O(x-y)}{2C_1} \qquad /10a/$$

(ahol az utóbbi becslés egy null-mértékü halmaz kivételével érvényes).

Másrészt

$$\left\{ |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{\omega_1(n,\alpha,x)} \right\} \subseteq \left\{ \sup_{x,y\in I^n} |f(x) - f(y)| > \frac{1}{\omega_1(n,\alpha,x)} \right\}$$

és ez atóbbi maga után vonja, hogy van olyan $x_0, y_0 \in [\xi^*_{k-1}, \xi^*_k]$ hogy $|f(x_0) - f(y_0)| > \frac{1}{\omega_1(n,\alpha,x)}$, amiből - a /10a/ becslést alkalmazva -

$$|F(\xi^*_{k-1}) - F(\xi^*_k)| > |F(x_0) - F(y_0)| > \frac{f(x)+o(x-y)}{2c_1} \cdot \frac{1}{\omega_1(n,\alpha,x)}$$

következik. Összegezve

$$P\left(|f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{\omega_1(n,\alpha,x)}\right) \leq P\left(F(\xi^*_k) - F(\xi^*_{k-1})\right) > \frac{f(x)+o(x-y)}{2c_1} \cdot \frac{1}{\omega_1(n,\alpha,x)} =$$

$$= P\left(F(\xi^*_k) - F(\xi^*_{k-1})\right) > \frac{f(x)+o(x-y)}{2c_1} \frac{4c_1}{c}\left(1 - e^{-\frac{1}{n}(1+\alpha)\log n}\right) \qquad /10b/$$

Itt $[f(x) + o(x-y)]2/c > 1$ egy valószinüséggel, hiszen $(x-y) \leq |\xi^*_k - \xi^*_{k+1}|$ és $|\xi^*_{k+1} - \xi^*_k| \to 0$ egy valószinüséggel, ha $n \to \infty$, igy - folytatva a /10b/-nél abbahagyott becslést -

$$\leq P\left(F(\xi^*_k) - F(\xi^*_{k-1})\right) > \left(1 - e^{-\frac{1}{n}(1+\alpha)\log n}\right) =$$

$$= \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{n}(1+\alpha)\log n}\right)\right]^n = \frac{1}{n^{1+\alpha}}$$

tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|f_n(x) - f(x)|\, \omega_1(n,\alpha,x) > 1+\varepsilon\right) < +\infty \qquad /10/$$

minden $\varepsilon > 0$ -ra.

A /9/ jobboldalán álló első eseményre

$$P[\overline{\lim_m}\, \omega(n,m,\alpha,x)\, |f_n^m(x)-f_n(x)| > \tfrac{1+\varepsilon}{2}] \leq$$

$$\leq P[\overline{\lim_m}\, \omega_2(n,m,x)\, |f_n^m(x)-f_n(x)| > 1+\varepsilon] \qquad /11/$$

$$= P[\overline{\lim_m} \frac{\lambda(I^n(x))}{\sqrt{\frac{2}{m} P(I^n)(1-P(I^n)) \log\log m}} \left| \frac{P_m(I^n(x))}{\lambda(I^n(x))} - \frac{P(I^n(x))}{\lambda(I^n(x))} \right| > 1+\varepsilon]$$

A $\lambda(I^n(x))$-el egyszerüsitve, az iterált-logaritmus tétele miatt tetszőleges $\varepsilon>0$ -ra az utóbbi valószinüség 0, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[\overline{\lim_m}\, \omega(n,m,\alpha)\, |f_n^m(x)-f_n(x)| > 1+\varepsilon] = 0 \qquad /12/$$

A /10/ és /12/ bizonyitja a tételt.

<u>Megjegyzés.</u> Kézenfekvő lett volna a tapasztalati sürüségfüggvényt a

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{P_n(I^n(x))}{\lambda(I^n(x))} & \text{ha } x \in [\xi_1^n, \xi_n^n] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

definicióval megadni. A $g_n(x)$ azonban nem konvergens:

A $g_n(x)$ pozitiv valószinüséggel nem konvergál egyenletesen 0-hoz.

Tegyük ugyanis ennek ellenkezőjét fel valamely $\xi_1, \xi_2, \dots \dots, \xi_n, \dots$ mintaelem-sorozatra. Létezik olyan n_i, $i = 1, 2, \dots$ indexsorozat, hogy

$$\sup_{x \in (-\infty, +\infty)} |g_{n_i}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^i}$$

Jelölje ϑ a ξ_{n_i+1}, az η és ζ a ξ_k^* illetve a ξ_{k+1}^* mintaelemeket, ha a $\xi_{n_i+1} = \vartheta$ a (ξ_k^*, ξ_{k+1}^*) intervallumba esik. (Hogy $\vartheta \in (\xi_1^*, \xi_{n_i}^*)$ annak valószinüsége, $n \to \infty$ esetén 1-hez tart).

Ekkor

$$B = \sup_x |g_{n_i+1}(x) - f(x)| =$$

$$= \max\left\{ |g_{n_i+1}(x) - f(x)|,\ x \notin (\eta, \zeta),\ \left|\frac{1}{(n_i+1)(\vartheta-\eta)} - f(x)\right|,\ x \in (\eta, \vartheta)\right.$$

$$\left. \left|\frac{1}{(n_i+1)(\zeta-\vartheta)} - f(x)\right|;\ x \in (\vartheta, \zeta] \right\}$$

Az

$$A = \max\left(\left|\frac{1}{(n_i+1)(\vartheta-\eta)} - \frac{1}{n_i(\zeta-\eta)}\right|, \left|\frac{1}{(n_i+1)(\zeta-\vartheta)} - \frac{1}{n_i(\zeta-\eta)}\right| \right)$$

akkor minimális, ha $(\vartheta-\eta)=(\zeta-\vartheta)=\frac{\zeta-\eta}{2}$

és

$$A \geqq \left(\frac{2}{(n_i+1)(\zeta-\eta)}-\frac{1}{n_i(\zeta-\eta}\right)$$

Igy elég nagy i-re

$$B \geqq \max\left\{\frac{1}{2^i},\ |A-g_{n_i}(x)-f(x)|\right\} \geqq \frac{1}{2}f(x)$$

ha $f(x)>0$

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\ \sup_x |g_{n_i+1}(x)-f(x)|>0$$

azaz valóban divergens.

III. A /4/-ben definiált tapasztalati sürüségfüggvény nagy minta-elemszám esetén nehezen számitható. Egy olyan módositását adom ebben a részben, amit Révész Pál vetett fel.

A gyakorlatban jó lenne, ha a tapasztalati sürüségfüggvényt - mondjuk - csak minden $\sqrt{n}$ -edik rendezett minta által meghatározott intervallumokban adnánk meg n-elemü minta esetén, és egy-egy ilyen intervallumban ugy definiáljuk, hogy legyen ezen intervallumban a tapasztalati mérték - azaz $\frac{\sqrt{n}}{n}$ - és az intervallum hosszának hányadosa. Itt /13/-ban a most heurisztikusan elmondott definiciót precizirozom és a /13/-ban adott tapasztalati sürüségfüggvény sztochasztikus konvergenciáját vizsgálom.

A továbbiakban [y] az y egész részét jelöli. Tetszőleges $\varepsilon_n > 0$ -ra az $I_k = (\xi^*_{k[\varepsilon_n n]}, \xi_{k+1[\varepsilon_n n]}]$ jelöléssel legyen rögzitett n-re

$$f_n^{\varepsilon_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{P_n(I_k)}{\lambda(I_k)} & \text{ha } x \in I_k \quad k = 1, 2, \dots [\frac{1}{\varepsilon_n}] - 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \qquad /13/$$

<u>3.Tétel. Legyen a $\xi(\omega)$ valószinüségi változó F(x) eloszlásfüggvénye szigoruan monoton, sürüségfüggvénye: f(x) egyenletesen folytonos, korlátos és pozitiv: $0 < f < C$ és a /13/-ban szereplő $\{\varepsilon_n\}$ sorozatra legyen</u>

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n^{1-\alpha}}}\right)$$

<u>ahol α tetszőleges kis pozitiv szám. Ekkor</u>

$$\lim_{n\to\infty} P\{|f_n^{\varepsilon_n}(x) - f(x)| > \delta\} = 0$$

tetszőleges $\delta > 0$ -ra

Bizonyitás: Legyen

$$f^{\varepsilon_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda(I_k)} \int_{I_k} f(t)\,dt & \text{ha } x \in I_k,\ k = 1,2,\ldots,[\frac{1}{\varepsilon_n}]-1, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Vizsgáljuk az $|f_n^{\varepsilon_n}(x) - f^{\varepsilon_n}(x)|$ valószinüségi változó várható értékét.

Felhasználva a Schwartz-egyenlőtlenséget

$$M(|f_n^{\varepsilon_n}(x) - f^{\varepsilon_n}(x)|) \leq M^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\lambda(I_k)^2}\right) M^{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{[\varepsilon_n \cdot n]}{n} - P(I_k)\right)^2\right) = \qquad /14/$$

Felhasználva a könnyen igazolható

$$M(|P_n(-\infty, \xi_k^*) - P(-\infty, \xi_k^*)|^2\} = O\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

becslést, folytatva /14/-et

$$= M^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\lambda(I_k)^2}\right) \; O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Igy tetszőleges $\delta > 0$ mellett a Markov-egyenlőtlenséget felhasználva

$$P\{|f_n^{\varepsilon_n}(x) - f^{\varepsilon_n}(x)| > \delta\} \leq M^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\lambda(I_k)^2}\right) O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad /15/$$

Itt

$$M\left(\frac{1}{\lambda(I_k)^2}\right)=M\left(\frac{P_n^2(I_k)}{\lambda(I_k)^2}\frac{1}{P_n^2(I_k)}\right)=O\left(\frac{1}{\varepsilon_n^2}\right)M^{\frac{1}{2}}\left(\frac{P_n^4(J_k)}{\lambda(I_k)^4}\right)$$

A Glivenko-Cantelli tétel miatt 1 valószinüséggel

$$P_n(I_k)\approx\int_{I_k}f(t)\,dt\leq C\lambda(I_k)$$

azaz

$$M\left(\frac{1}{\lambda(J_k)^2}\right)=O\left(\frac{1}{\varepsilon_n^2}\right)$$

Behelyettesitve /15/-be

$$P\{|f_n^{\varepsilon_n}(x)-f(x)|\geq\delta\}=O\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad /16/$$

Válasszuk δ és δ' -t ugy, hogyha $|x-t|<\delta$, akkor $|f(x)-f(t)|<\delta$ legyen. Mivel

$$P\{\xi^*_{(k+1)[\varepsilon_n n]}-\xi^*_{k[\varepsilon_n n]}\geq\delta'\}\leq O\left(\frac{[\varepsilon_n n]}{n+1}\right)=O(\varepsilon_n)$$

következik - a /6/-nál használt átalakitás megismétlésével és egyszerü becslésekkel

$$P\{|f^{\varepsilon_n}(x)-f(x)>\delta\}=O(\varepsilon_n) \qquad /17/$$

Mostmár /17/ és /16/-ból a tett feltevések miatt következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\{|f_n^{\varepsilon_n}(x)-f(x)|>\delta\}=0$$

Mivel $f(x)>0$, igy $\xi_1^*\to-\infty$ és $\xi_n^*\to+\infty$ 1 valószinüséggel, ha $n\to\infty$, igy a tétel bármely x-re igaz.

Befejezésül köszönetet szeretnék mondani Csáki Péternek, aki a dolgozat lektorálása során sok hasznos megjegyzést tett.

Irodalom:

Rosenblatt, M./1956/: Remarks on some nonparametric estimates of density function. Ann.Math.Stat. Vol.27. /832-835/

Parzen, E./1962/: On estimates of a probability density and mode. Ann.Math.Stat.Vol 33 (1065-1076)

Loftsgaarden,D.O. and Quesenberry, C.P. /1965/. A nonparametric estimate of a multivariate density function. Ann.Math.Stat. Vol 36. (1049-1051).

Craswel /1965/. Density estimation in a topological group. Ann.Math.Stat. Vol. 36 (1047-1048).

Nadarya /1965/. On nonparametric estimates of density functions and regression curve. Theory of Probability and its Applications 10. (186-190) (In Russian).

Summary

The author in (4) gives a new definition of empirical density function for which he proves the following theorems:

Theorem 1. Let [a,b] be such an interval, in which f(x) and the inverse of F(x) in [F(a), F(b)] is continuousthen

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n^m(x) - f(x)| = 0$$

whith probability one.

If the function $\omega(n, m, \alpha, x)$ is defined in (8), then

Theorem 2. Under conditions of Theorem 1, if $x \in [a,b]$ and if $f(x) > c > 0$, and $f(x)$ has first derivate $f'(x)$, for which $|f'(x)| < c$, and non-zero, then

$$\overline{\lim_{n}}\ \overline{\lim_{m}}\ \omega(n,m,\alpha,x)|f_n^m(x) - f(x)| \leq 1$$

whith probability one.

For brevity of computation the author gives an other definition of empirical density function in (13), for which the following theorem holds.

Theorem 3. If the density function $f(x)$ is uniformly continuous, bounded and positiv: $0 < f(x) < c$ and for all ε_n (in (13))

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n^{1-\alpha}}}\right)$$

(where α is an arbitrary small positive number) holds then

$$\lim_{n \to \infty} P[f_n^{\varepsilon_n}(x) - f(x) > \delta] = 0$$

for arbitrary $\delta > 0$.

Rövid közlemények elkészült programokról

Horváth Gaudi István:

Egyszerü sztochasztikus folyamatok paramétereinek becslése és átmetszési feladata

Ebben a dolgozatban két, időben diszkrét sztochasztikus folyamatra vonatkozó feladat eredményeinek ismertetésére kerül sor.

Az első egy kétdimenziós stacionárius, Gauss-Markov-folyamat paramétereinek becslésével foglalkozik, pontosan a becslések konvergenciájának gyorsaságával. Az eredmények függnek a becslésektől, egyszerübb paramétermátrix esetén a konvergencia gyorsabb, mint általános esetben.

A második egy egydimenziós, ugyancsak Gauss-Markov tipusu folyamat átmetszési problémája. Az átmetszések száma jó közelitésben (a nem szinguláris eset közelében) normális eloszlással közelithető.

1. Paraméter becslések. Adott egy kétdimenziós, diszkrét, stacionárius, Gauss-Markov tipusu folyamat

$$\xi_1(t) = \alpha_{11}\,\xi_1(t-1) + \alpha_{12}\,\xi_2(t-1) + \varepsilon_1(t)$$

$$\xi_2(t) = \alpha_{21}\,\xi_1(t-1) + \alpha_{22}\,\xi_2(t-1) + \varepsilon_2(t)$$

ahol $\varepsilon_1(t)$ és $\varepsilon_2(t)$ független Gauss sorozatok 0 várható értékkel és 1 szórással. A kezdeti feltétel:

$$\xi_1(0) = 0 \qquad \xi_2(0) = 0$$

A $\xi(t)$ folyamat $t=1,2,\dots,N$ időpontokban való megfigyelései alapján meghatározandók az $\underline{\underline{A}} = (\alpha_{ij})$ $(i,j=1,2)$ mátrix elemeinek maximum likelihood becslései, valamint az az N érték, amelynél a becslésekre fennáll

$$|\alpha_{ij} - \hat{\alpha}_{ij}| < \varepsilon \qquad (i,j = 1,2)$$

ahol $\hat{\alpha}_{ij}$ a megfelelő paraméter maximum likelihood becslése, ε pedig tetszőleges konstans (0,1; 0,05; 0,01; 0,001)

Adottak az $\underline{\underline{A}}$ mátrix elemei:

$$\alpha_{11} = \alpha_2 = e^{-\lambda}\cos\omega\,, \qquad \alpha_{12} = -\alpha_{21} = e^{-\lambda}\sin\omega$$

ahol $\lambda = 0,06$ és $\omega = 5,274$.

Az adott sztochasztikus differenciál egyenletrendszernek eleget tevő $\xi(t)$ kétdimenziós folyamat egy véges realizációjának sürüségfüggvénye:

$$f_{\xi(1),\xi(2),\dots,\xi(N)}(x_{11},x_{12},\dots,x_{1N};\ x_{21},x_{22},\dots x_{2N}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\xi_i}} e^{-\frac{x_{i1}^2}{2\sigma_{\xi_i}^2}} \prod_{j=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\varepsilon_i}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{\varepsilon_i}^2}(x_{ij}-\alpha_{i1}x_{1j-1}-\alpha_{i2}x_{2j-1})^2}$$

Ennek ismeretében az $\underline{\underline{A}}$ mátrix elemei maximum likelihood becsléseinek meghatározása elvben könnyen elvégezhető. Kiszámolása azonban hosszadalmas, mert a kérdéses paraméterek a $\sigma_{\xi_i}^2$ szórásnégyzetekben is szerepelnek, emiatt az ebből származó maximum likelihood egyenletek igen bonyolultak lesznek. A $\sigma_{\xi_i}^2$ $(i=1,2,)$ szórásnégyzeteket ugyanis a

$$\sigma_{\xi_1}^2\left[1+\alpha_{11}^2-(4\alpha_{11}\alpha_{12}-2\alpha_{11}\alpha_{22})\frac{\alpha_{11}\alpha_{21}}{1-\alpha_{11}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{22}}\right]+$$

$$+\sigma_{\xi_2}^2\left[\alpha_{12}^2-2\alpha_{12}^2-(4\alpha_{11}\alpha_{12}-2\alpha_{11}\alpha_{22})\frac{\alpha_{12}\alpha_{22}}{1-\alpha_{11}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{22}}\right]=\sigma_{\varepsilon_1}^2$$

$$\sigma_{\xi_1}^2\left[\alpha_{21}^2-2\alpha_{21}^2-4(\alpha_{21}\alpha_{22}-2\alpha_{11}\alpha_{22})\frac{\alpha_{11}\alpha_{21}}{1-\alpha_{11}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{22}}\right]+$$

$$+\sigma_{\xi_2}^2\left[1+\alpha_{22}^2-(4\alpha_{21}\alpha_{22}-2\alpha_{11}\alpha_{22})\frac{\alpha_{12}\alpha_{22}}{1-\alpha_{11}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{22}}\right]=\sigma_{\varepsilon_2}^2$$

egyenletrendszer megoldásaként kapjuk.

Az egyszerüség kedvéért tekintsük a könnyebben kezelető feltételes sürüségfüggvényt és az ebből adódó feltételes maximum likelihood becsléseket. A $\xi(2), \xi(3), \ldots$ $\ldots, \xi(N)$ valószinüségi változók feltételes sürüségfüggvénye a $\xi(1) = x(1)$ feltétel mellett

$$f_{\xi(2),\xi(3),\ldots,\xi(N)}(x_{21},\ldots,x_{2N} \mid \xi(1) = x(1)) =$$

$$= (2\pi)^{-(N-1)} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{N-1}(x_{ij+1} - \alpha_{i1}x_{1j} - \alpha_{i2}x_{2j})^2\right\}$$

A maximum likelihood egyenletek:

$$\frac{\partial \log f}{\partial \alpha_{ik}} = \sum_{j=1}^{N-1}(x_{ij+1} - \alpha_{i1}x_{1j} - \alpha_{i2}x_{2j})\, x_{kj} = 0 \qquad (i,k = 1,2)$$

Az egyenletrendszer megoldásai lesznek az $\underline{\underline{A}}$ mátrix elemeinek becslőfüggvényei, jelöljük ezeket $\hat{\alpha}_{ik}$ -val:

$$\hat{\alpha}_{ik} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N-1} x_{ij+1}x_{lj}\sum\limits_{j=1}^{N-1} x_{2j}x_{1j} - \sum\limits_{j=1}^{N-1} x_{ij+1}x_{kj}\sum\limits_{j=1}^{N-1} x_{lj}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{N-1} x_{2j}x_{1j}\right)^2 - \sum\limits_{j=1}^{N-1} x_{2j}^2\sum\limits_{j=1}^{N-1} x_{1j}^2}$$

ahol i,k=1,2 és l=1, ha k=2 ill. l=2, ha k=1.

Ezután térjünk át a feladat gépi vonatkozásaira. A program URAL-2 gépi kódban készült. Az ε (t) független, normális eloszlásu sorozatok véletlen-szám generátor segitségével, egyenletes eloszlásu számok összegének standardizáltjaként állithatók elő. A folyamat gépi realizációja függ a kezdeti véletlen-számtól. Ezért 20 különböző véletlen-számból kiindulva került sor a feladat lefuttatására és a kapott N értékek átlagát tekintjük a feladat megoldásának.

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix elemei a következők:

$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0{,}5036695562$; $\alpha_{12} = -\alpha_{21} = -0{,}79581525$

$\varepsilon = 0{,}1$ pontosság mellett a kezdeti véletlen-számtól függően kapott 20 darab N érték számtani közepe: $\bar{N} = 42$, ami azt jelenti, hogy 42 megfigyelés alapján a paramétereket $\varepsilon = 0{,}1$ pontossággal tudjuk becsülni.

$\varepsilon = 0{,}05$ pontosság esetén $\bar{N} = 73$ megfigyelés alapján becsülhetünk.

$\varepsilon = 0{,}01$ mellett $\bar{N} = 1594$

$\varepsilon = 0{,}001$ pontosság eléréséhez 7677 megfigyelés kellett.

A feladat megoldásánál nem vettük figyelembe az $\underline{\underline{A}}$ mátrix speciális alakját, a becslőfüggvények meghatározásánál egy általános $A = (\alpha_{ij})$ $(i,j = 1,2)$ mátrixot tekintettünk. Egyszerübbek lesznek a maximum likelihood becslőfüggvények, ha felhasználjuk, hogy

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} \quad \text{és} \quad \alpha_{12} = -\alpha_{21}$$

és jelöljük ezeket α-ill. β -val.

Igy a maximum likelihood egyenletek:

$$\frac{\partial \log f}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^{N-1} (x_{1j+1} - \alpha x_{1j} - \beta x_{2j}) x_{1j} + \sum_{j=1}^{N-1} (x_{2j+1} + \beta x_{1j} - \alpha x_{2j}) x_{2j} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial \beta} = \sum_{j=1}^{N-1} (x_{1j+1} - \alpha x_{1j} - \beta x_{2j}) x_{2j} + \sum (x_{2j+1} + \beta x_{1j} - \alpha x_{2j}) x_{1j} = 0$$

Az egyenletrendszer megoldása α és β becslőfüggvénye lesz, jelöljük ezeket $\hat{\alpha}$ és $\hat{\beta}$ -vel:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{j=1}^{N-1} x_{1j+1} x_{1j} + \sum_{j=1}^{N-1} x_{2j+1} x_{2j}}{\sum_{j=1}^{N-1} x_{1j}^2 + \sum_{j=1}^{N-1} x_{2j}^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^{N-1} x_{1j+1} x_{2j} - \sum_{j=1}^{N-1} x_{2j+1} x_{1j}}{\sum_{j=1}^{N-1} x_{1j}^2 + \sum_{j=1}^{N-1} x_{2j}^2}$$

A program felépitése hasonló az általános esethez.

$\varepsilon = 0,1$ pontossággal a két paramétert már $\bar{N} = 12$ megfigyelés alapján becsülni tudjuk.

$\varepsilon = 0,05$ pontosságu becsléshez $\bar{N} = 29$ megfigyelés szükséges.

$\varepsilon = 0{,}01$ mellett $\bar{N} = 232$

$\varepsilon = 0{,}001$ pontossággal $\bar{N} = 856$ megfigyelés alapján becsülhetjük a paramétereket.

2. <u>Átmetszési feladat.</u> Adott egy $\xi(t)$ folyamat, amely Gauss-Markov tipusu, igy kielégiti a következő sztochasztikus differenciálegyenletet:

$$d\xi(t) = -\lambda\,\xi(t)\,dt + d\varepsilon(t)$$

A $\xi(k)$ $(k=0,1,2,\dots)$ folyamat diszkrét stacionárius és igy kielégiti a

$$\xi(k+1) = \varrho\,\xi(k) + \varepsilon(k+1) \qquad \varrho = e^{-\lambda}$$

egyenletet, ahol $\varepsilon(k)$ egy független Gauss sorozat.

Megvizsgálandó a ϱ paraméter függvényeként az $\underline{a}$ szint felett eltöltött idő (ill. a $-\underline{a}$ alatti).

$|\varrho| < 1$, de csak a $0 < \varrho < 1$ értékeket tekintjük, mert $-1 < \varrho < 0$-ra hasonló a folyamat. A T intervallumot 1000 diszkrét értéknek vettük.

Az $\varepsilon(k)$ független Gauss sorozat és a $\xi(k)$ értékek generálása hasonló az előző feladatéval. A kezdeti véletlen-számtól való függés kiküszöbölésére a folyamat realizációját 10 különböző véletlen-számból kiindulva állitjuk elő és ezek közepének viselkedését vizsgáljuk.

A ϱ értékeinek 0,2; 0,6; 0,9; 0,99; 0,9995-öt választottuk. A jelölések a következők:

$\underline{a}$: az a szint, amely felett (ill. -a alatt) vizsgáljuk a folyamat tartózkodási idejét,

N_{1i}: az $\underline{a}$ fölötti értékek száma az i-edik realizációnál (i=1,2,...,10),

N_{2i}: a $-\underline{a}$ alatti értékek száma az i-edik realizációnál (i=1,2,...,10),

$\bar{N}_1$ és $\bar{N}_2$: az N_{1i} és N_{2i} értékek számtani közepe,

$D_1 = \max_i N_{1i} - \min_i N_{1i}$,

$D_2 = \max_i N_{2i} - \min_i N_{2i}$.

$\varrho = 0,2$	$\bar{N}_1$	D_1	$\bar{N}_2$	D_2
a = 0	492	38	509	38
a = 1	165	55	169	36
a = 2	28	16	25	14
a = 3	1	3	1	4

a = 4 fölé (ill. -4 alá) a folyamat nem megy.

A tartózkodási idő átlagának függését az a-tól mutatja az 1. ábra. Leolvasható, hogy a $\xi(1), \xi(2), \dots, \xi(N)$

valószinüségi változók közötti kicsiny korrelációs kapcsolat miatt közel ugy viselkedik, mint egy független sorozat.

ϱ = 0,6	$\bar{N}_1$	D_1	$\bar{N}_2$	D_2
a=0	496	38	505	38
a=1	211	50	221	64
a=2	57	29	59	35
a=3	9	11	9	11
a=4	1	2	1	2

a=5 fölé (ill. a =-5 alá) a folyamat nem ment. A tartózkodási idők a-tól függését mutatja a 2. ábra. Látható, hogy alig különbözik a ϱ =0,2 esettől.

ϱ = 0,9	$\bar{N}_1$	D_1	$\bar{N}_2$	D_2
a=0	482	107	519	107
a=1	320	104	346	133
a=2	187	108	199	146
a=3	95	93	105	107
a=4	47	61	61	67
a=5	15	34	19	49
a=6	6	20	7	29
a=7	1	2	1	6

a=8 fölé ill. a=-8 alá a folyamat nem ment.

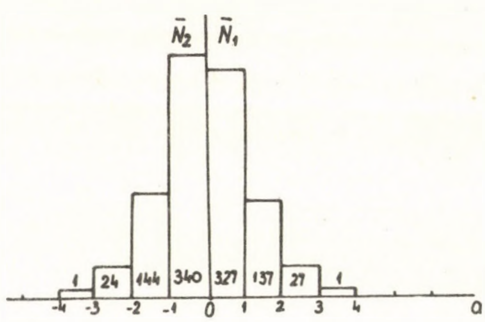
A tartózkodási idő függését az a-tól a 3. ábra mutatja. Fontos észrevenni a D_i értékek növekedését.

$\varrho = 0{,}99$	$\bar{N}_1$	D_1	$\bar{N}_2$	D_2
a=0	434	408	567	408
a=2	324	345	441	474
a=4	241	338	304	380
a=6	163	298	201	427
a=8	110	275	135	316
a=10	63	195	88	235
a=12	38	113	50	116
a=14	22	74	29	77
a=16	12	46	10	37
a=18	4	20	4	19

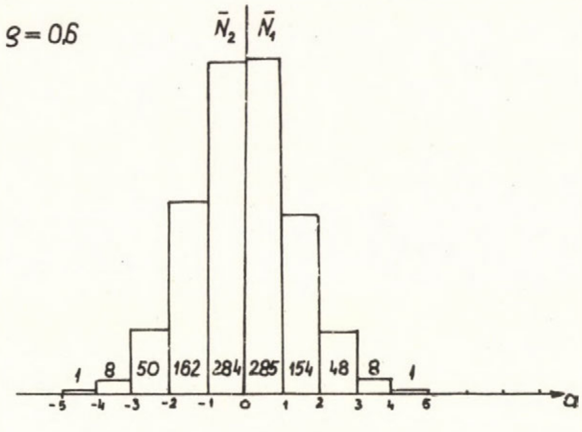
a=20 fölé ill. a=-20 alá a folyamat átlagban egyszer sem ment. Eloszlását a 4. ábra mutatja. A D_i értékek nagyságrendje eléri az $\bar{N}_i$ értékekét.

ϱ = 0,9995	$\bar{N}_1$	D_1	$\bar{N}_2$	D_2
a=0	469	992	532	992
a=2	418	973	469	975
a=4	361	886	404	945
a=6	307	812	345	867
a=8	261	657	324	842
a=10	228	656	291	831
a=12	195	607		
a=14	156	573		
a=16	143	563		
a=18	114	528		
a=20	104	490	159	588
a=40	4	27	60	272

A tartózkodási idő függését a-tól az 5. ábra mutatja.

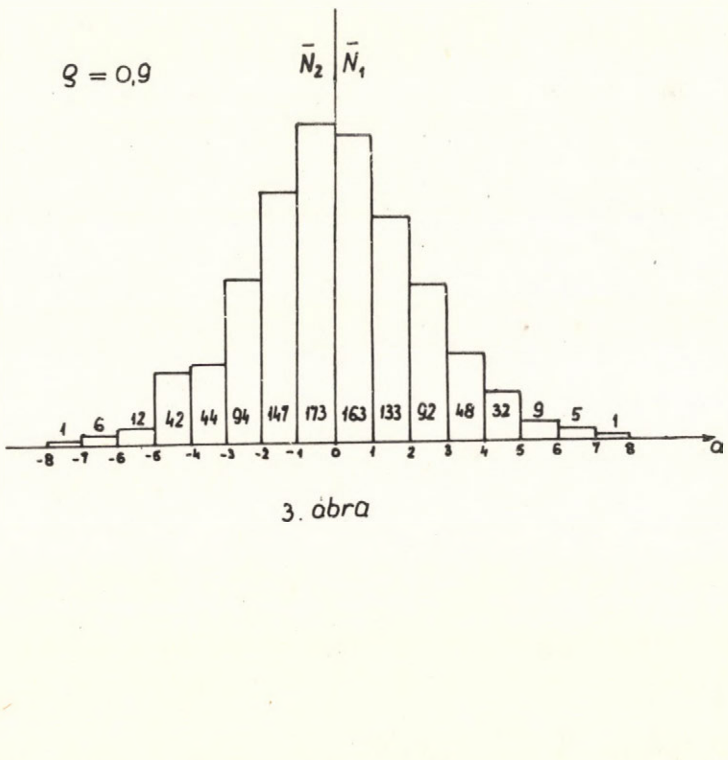


1. ábra



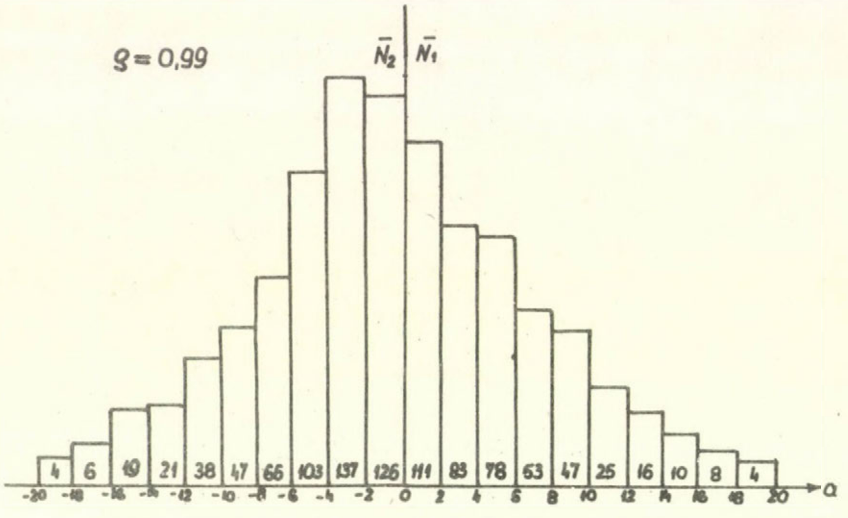
ρ = 0,6
$\bar{N}_2$
$\bar{N}_1$
1 8 50 162 284 285 154 48 8 1
a

2. ábra



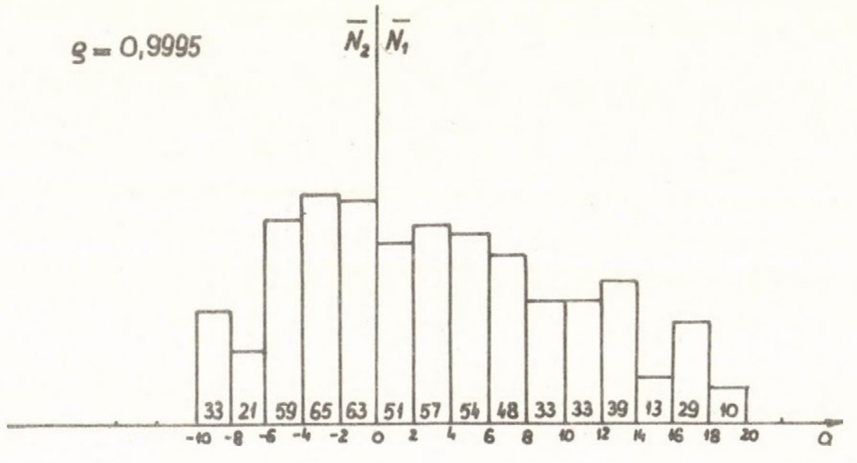
ρ = 0,9
$\bar{N}_2$
$\bar{N}_1$
1 6 12 42 44 94 147 173 163 133 92 48 32 9 5 1
-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8
a

3. ábra



ϱ = 0,99
$\bar{N}_2$
$\bar{N}_1$
4 6 19 21 38 47 66 103 137 126 111 83 78 63 47 25 16 10 8 4
-20 -18 -16 -14 -12 -10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
a

4. ábra



ϱ = 0,9995
$\bar{N}_2$
$\bar{N}_1$
33 21 59 65 63 51 57 54 48 33 33 39 13 29 10
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
a

5. ábra

Varga Gyula:

Polinomok felbontása hurwitz-antihurwitz tényezőpár szorzatára a Newton-Raphson-féle módszer segitségével

A szürők tervezésénél szükséges a $P(z^2)=H(z).H(-z)$ polinomfelbontást elvégezni, ahol P csupa komplex gyökökkel rendelkező valós együtthatós polinomot, H pedig P képzetes tengelytől balra eső gyökeihez tartozó gyöktényezőinek szorzatát jelenti. Ezt nagy pontosságra eddig biztonságosan ugy végeztük el, hogy meghatároztuk P valamelyik komplex siknegyedbe eső összes gyökét, s azok segitségével képeztük a megfelelő gyöktényezők szorzataként előálló H polinomot. Az összes gyök kiszámitása nagyon hosszadalmas munkát igényelt.

Ha P nem rendelkezik kétszeres gyökökkel, ill. a képzetes tengelytől balra és jobbra eső gyökei nincsenek egymáshoz tul közel, akkor a keresett polinomfelbontást a Newton-Raphson-módszer segitségével közvetlenül is megkaphatjuk. Itt csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor a P polinom

$$H_0(z)\cdot H_0(-z) \pm \varepsilon F(z^2) \qquad \text{alaku.} \qquad (0<\varepsilon\ll 1)$$

Tegyük fel, hogy ismerjük $H(z)$-nek valamely elegendően pontos $H_1(z)$ közelitését. Keressük $H(z)$-t

$H_i(z) + \Delta(z)$ alakban. Akkor

$$[H_i(z) + \Delta(z)][H_i(-z) + \Delta(-z)] = P(z^2)$$

Az összeszorzásokat elvégezve és a $\Delta(z) \cdot \Delta(-z)$ polinomot elhanyagolva $\Delta(z)$-re a

$$H_i(z)\,\Delta(-z) + H_i(-z)\,\Delta z = P(z^2) - H_i(z)\,H_i(-z)$$

egyenletet kapjuk. Az egyenlet két oldalán z megfelelő hatványainak együtthatóit összehasonlítva $\Delta(z)$ együtthatóira egy (n+1)-ismeretlenes lineáris egyenletrendszert kapunk. Amennyiben ez megoldható, gyökei $\Delta_i(z)$ együtthatóit adják meg. $H_i(z)$-hez $\Delta_i(z)$-t hozzáadva H(z)-re jobb közelitést nyerünk: $H_{i+1}(z) = H_i(z) + \Delta_i(z)$

A konvergencia elég lassu, de még igy is sokszorta rövidebb idő alatt eljutunk a keresett polinomfelbontáshoz, mint a polinom gyökeinek segitségével. Kezdő közelitésként $H_0(z)$-t választhatjuk.

Az ismertetett módszer programja az Ural-2 gépre EFT autókódban készült. A program használatához bemenő adatokként a szürő rendszámát, a P polinom együtthatóit, majd a kezdő közelitésként választott H_0 polinom együtthatóit (csökkenő fokszám szerint rendezve) kell megadnunk. Eredményül H(z)-t kapjuk, ugyancsak csökkenő fokszám szerint rendezve.

"Valószinüségelméleti és Statisztikai" Osztály 1967. első félévében tartott szemináriumai:

I. Statisztikai szeminárium. Minden szerdán (február-május) d.e. 9^h-tól 11^h-ig. Tu.V.Linnik "Statisticseszkije Zadacsi sz mésajuscsimi parametrami" és E.L.Lehman "Testing Statistical Hypotheses" c. könyvek ismertetése.

Linnik könyv

VIII, IX, X, XI. fejezeteinek előadója

Tomkó József

Lehman könyv

V. fejezet: Csáki Péter

VI. " : 1./, 2./, 3./ pontok: Tomkó József

II. Sztochasztikus folyamatok szeminárium. Minden szerdán (február-junius) d.e. 11^h-tól 13^h-ig a sztochasztikus folyamatok elmélete tárgykörből. Ismertetésre került Doob:"Stochastic processes" és Gihman-Szkorohod: "Vedenije v teoriju szlucsajnük processzov" c. könyvek egyes fejezetei. Előadók voltak: Knuth Előd, Krámli András.

TARTALOMJEGYZÉK

Ny. 220/1968.